Càlcul Vectorial en $\mathbb{R}^3$

Josep Mollera Barriga

19 de novembre de 2022

1 Introducció

Aquest escrit és una breu introducció al càlcul vectorial en $\mathbb{R}^3$, és a dir en tres dimensions. Es presenten de forma directa — sense demostracions — operadors, relacions i teoremes vectorials.

S'utilitzen els tres tipus de coordenades més usuals: cartesianes, cilíndriques i esfèriques.

Totes les versions d'aquest llibre, així com els programes de la calculadora HP Prime inclosos, poden trobar-se a GitHub: https://github.com/jmollera/Calcul-Vectorial-GitHub.

2 Definicions

Es dona en primer lloc la definició de les variables i funcions que s'utilitzen en aquest document.

V: Volum d'integració.

S: Superfície d'integració.

C: Corba d'integració.

$\mathrm{d}\tau$: Diferencial de volum del volum V.

$\mathbf{d}\boldsymbol{a}$: Vector diferencial de superfície de la superfície S.
$\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ és perpendicular a S.

$\mathbf{d}\boldsymbol{l}$: Vector diferencial de longitud de la corba C.
$\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ és tangent a C.

x, y, z: Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cartesianes.

ρ, ϕ, z: Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cilíndriques.

r, θ, ϕ: Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades esfèriques.

u, v, w: Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades qualssevol.

$\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes.

$\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{z}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques.

$\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques.

$\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades qualssevol.

P, Q: Punts en $\mathbb{R}^3$.

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$: Vectors en $\mathbb{R}^3$.

α: Angle entre dos vectors en $\mathbb{R}^3$.

f, g: Funcions escalars.

$f, g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$: Funcions vectorials.

$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{\nabla} f$: Gradient de la funció escalar f.

$\boldsymbol{\nabla} f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$: Divergència de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$.

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$: Rotacional de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$.

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{\nabla}^2 f$: Laplacià de la funció escalar f.

$\boldsymbol{\nabla}^2 f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{F}$: Laplacià de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$.

$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

3 Sistemes de Coordenades

Es representen en la Figura 1 a la pàgina següent tres dels sistemes de coordenades més utilitzats: el cartesià, el cilíndric i l'esfèric.

En el sistema de coordenades cartesianes els vectors directors tenen una orientació fixa, mentre que en els sistemes de coordenades cilíndriques i esfèriques, els vectors directors tenen una orientació variable que depèn del punt P al qual ens estiguem referint.

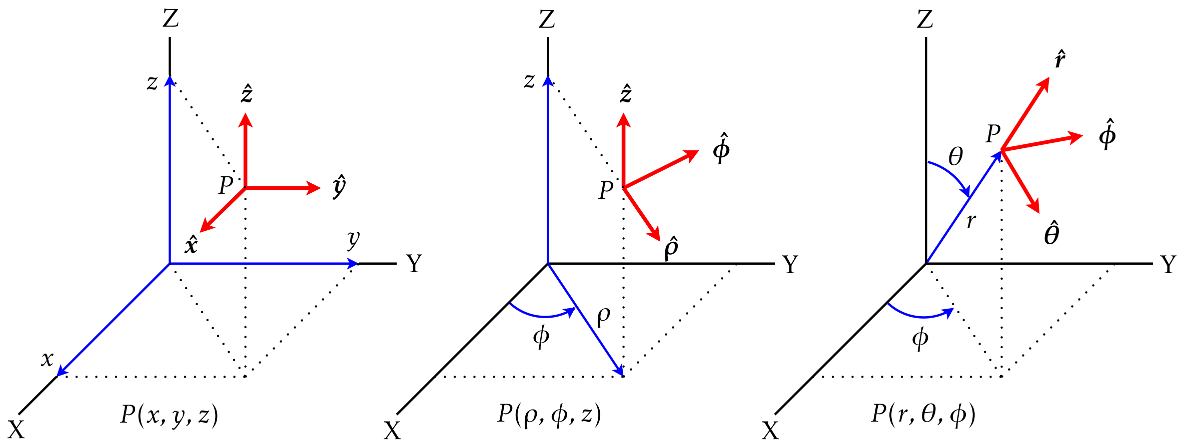

Figura 1: Coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques

En la Taula 1 es donen els rangs de les coordenades de cadascun d'aquests tres sistemes.

Taula 1: Rangs de les Coordenades

Cartesianes	Cilíndriques	Esfèriques
$x \in (-\infty, \infty)$	$\rho \in [0, \infty)$	$r \in [0, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$	$\phi \in [0, 2\pi)$	$\theta \in [0, \pi]$
$z \in (-\infty, \infty)$	$z \in (-\infty, \infty)$	$\phi \in [0, 2\pi)$

3.1 Relacions entre les coordenades cartesianes i cilíndriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \phi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = \rho \cos \phi \tag{1a}$$
$$y = \rho \sin \phi \tag{1b}$$
$$z = z \tag{1c}$$

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \phi, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2a}$$
$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \tag{2b}$$
$$z = z \tag{2c}$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{z}}$, en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{3a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{3b}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \tag{3c}$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$, en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{4a}$$
$$\hat{\boldsymbol{y}} = \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{4b}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \tag{4c}$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z), en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_\rho \cos\phi - A_\phi \sin\phi \tag{5a}$$
$$A_y = A_\rho \sin\phi + A_\phi \cos\phi \tag{5b}$$
$$A_z = A_z \tag{5c}$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z), en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_x \cos\phi + A_y \sin\phi \tag{6a}$$
$$A_\phi = -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi \tag{6b}$$
$$A_z = A_z \tag{6c}$$

3.2 Relacions entre les coordenades cartesianes i esfèriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \phi)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{7a}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{7b}$$
$$z = r\cos\theta \tag{7c}$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \phi)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{8a}$$
$$\theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{8b}$$
$$\phi = \arctan\frac{y}{x} \tag{8c}$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{y}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9b}$$
$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{9c}$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$, en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{10a}$$
$$\hat{\boldsymbol{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{10b}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{10c}$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ), en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_r\sin\theta\cos\phi + A_\theta\cos\theta\cos\phi - A_\phi\sin\phi \tag{11a}$$
$$A_y = A_r\sin\theta\sin\phi + A_\theta\cos\theta\sin\phi + A_\phi\cos\phi \tag{11b}$$
$$A_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \tag{11c}$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z), en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta \tag{12a}$$
$$A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta \tag{12b}$$
$$A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \tag{12c}$$

3.3 Relacions entre les coordenades cilíndriques i esfèriques

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \phi, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \phi)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = r\sin\theta \tag{13a}$$
$$\phi = \phi \tag{13b}$$
$$z = r\cos\theta \tag{13c}$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \phi)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \phi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \tag{14a}$$
$$\theta = \arctan\frac{\rho}{z} \tag{14b}$$
$$\phi = \phi \tag{14c}$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$, en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{15a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{15b}$$
$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{15c}$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$, en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{16a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{16b}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{16c}$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ), en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_r \sin\theta + A_\theta \cos\theta \tag{17a}$$
$$A_\phi = A_\phi \tag{17b}$$
$$A_z = A_r \cos\theta - A_\theta \sin\theta \tag{17c}$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z), en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_\rho \sin\theta + A_z \cos\theta \tag{18a}$$
$$A_\theta = A_\rho \cos\theta - A_z \sin\theta \tag{18b}$$
$$A_\phi = A_\phi \tag{18c}$$

4 Operacions Bàsiques

A partir de les components (A_u, A_v, A_w) i (B_u, B_v, B_w) de dos vectors $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ en un sistema de coordenades qualssevol, tenim:

4.1 Mòdul

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_u^2 + A_v^2 + A_w^2} \tag{19}$$

4.2 Addició i subtracció

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_u + B_u)\,\hat{\boldsymbol{u}} + (A_v + B_v)\,\hat{\boldsymbol{v}} + (A_w + B_w)\,\hat{\boldsymbol{w}} \tag{20a}$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_u - B_u)\,\hat{\boldsymbol{u}} + (A_v - B_v)\,\hat{\boldsymbol{v}} + (A_w - B_w)\,\hat{\boldsymbol{w}} \tag{20b}$$

4.3 Producte escalar

$$
\begin{align}
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= A_u B_u + A_v B_v + A_w B_w \tag{21} \\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| \cos\alpha \tag{22} \\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \tag{23} \\
\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{24}
\end{align}
$$

El producte escalar de dos vectors perpendiculars és nul.

4.4 Producte vectorial

$$
\begin{align}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_v B_w - A_w B_v)\,\hat{\boldsymbol{u}} + (A_w B_u - A_u B_w)\,\hat{\boldsymbol{v}} + (A_u B_v - A_v B_u)\,\hat{\boldsymbol{w}} \tag{25} \\
|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| \sin\alpha \tag{26} \\
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \tag{27} \\
\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \tag{28}
\end{align}
$$

El producte vectorial de dos vectors paral·lels és nul.

El producte vectorial de dos vectors és un altre vector, el sentit del qual és definit per la regla del caragol: és el sentit d'avanç que té un caragol, amb el seu eix perpendicular al pla format pels vectors $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, quan gira en el sentit que portaria el primer vector $\boldsymbol{A}$ a trobar el segon vector $\boldsymbol{B}$, utilitzant el menor angle possible.

4.5 Derivada temporal

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_u}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{u}} + \frac{\mathrm{d}A_v}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{v}} + \frac{\mathrm{d}A_w}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{w}} \tag{29}
$$

5 Càlcul Diferencial

5.1 Coordenades cartesianes

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ i $\hat{\boldsymbol{z}}$, respecte x, y i z:

$$
\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{x}}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{x}}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{x}}}{\partial z} = 0 \tag{30a}
$$

$$
\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\partial z} = 0 \tag{30b}
$$

$$
\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial z} = 0 \tag{30c}
$$

En les equacions següents, (F_x, F_y, F_z) són les components de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$ en un sistema de coordenades cartesianes. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{31}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'X-Y)} \tag{32}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'X-Z)} \tag{33}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'Y-Z)} \tag{34}$$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{37}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{x}} + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right]\hat{\boldsymbol{y}} + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]\hat{\boldsymbol{z}} \tag{38}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{39}$$

5.2 Coordenades cilíndriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ i $\hat{\boldsymbol{z}}$, respecte ρ, ϕ i z:

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\phi} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial z} = 0 \tag{40a}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\phi} = -\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial z} = 0 \tag{40b}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial\rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial\phi} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial z} = 0 \tag{40c}$$

En les equacions següents, (F_ρ, F_ϕ, F_z) són les components de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$ en un sistema de coordenades cilíndriques. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{41}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{(en una superfície cilíndrica)} \tag{42}$$

$$\mathrm{d}\tau = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \tag{43}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{44}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\phi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}\right]\hat{\boldsymbol{z}} \tag{46}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{47}$$

5.3 Coordenades esfèriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ i $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, respecte r, θ i ϕ:

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \phi} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{48a}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} = -\,\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \phi} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{48b}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \phi} = -\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{48c}$$

En les equacions següents, (F_r, F_θ, F_ϕ) són les components de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$ en un sistema de coordenades esfèriques. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}r\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{49}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \text{(en una superfície esfèrica)} \tag{50}$$

$$\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{51}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{52}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \tag{53}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\phi\sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{54}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{55}$$

6 Relacions

6.1 Operadors

Els operadors ∇ i ∇^2 es defineixen en coordenades cartesianes, segons les relacions següents:

$$\nabla \equiv \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{56}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{57}$$

6.2 Identitats

Es compleixen les identitats següents:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \nabla\cdot(\nabla f) && (58)\\
\nabla^2 \boldsymbol{F} &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) && (59)\\
\nabla\times(\nabla f) &= 0 && (60)\\
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) &= 0 && (61)
\end{aligned}
$$

6.3 Gradient

El gradient compleix les relacions següents:

$$
\begin{aligned}
\nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g && (62)\\
\nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f && (63)\\
\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F}\times(\nabla\times\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G}\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} && (64)
\end{aligned}
$$

6.4 Divergència

La divergència compleix les relacions següents:

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= (\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\nabla\cdot\boldsymbol{B}) && (65)\\
\nabla\cdot(f\boldsymbol{F}) &= (\nabla f)\cdot\boldsymbol{F} + f(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) && (66)\\
\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G}) && (67)
\end{aligned}
$$

6.5 Rotacional

El rotacional compleix les relacions següents:

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= (\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\nabla\times\boldsymbol{B}) && (68)\\
\nabla\times(f\boldsymbol{F}) &= (\nabla f)\times\boldsymbol{F} + f(\nabla\times\boldsymbol{F}) && (69)\\
\nabla\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) &= (\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) && (70)
\end{aligned}
$$

7 Teoremes Vectorials

La funció escalar f i la funció vectorial $\boldsymbol{F}$ que apareixen en els teoremes següents han de ser contínues, diferenciables i les seves derivades primeres han de ser funcions contínues.

7.1 Teorema fonamental del gradient

Estableix que la integral sobre una corba C de la funció ∇f només depèn dels punts inicial i final sobre la corba, P i Q, i no del camí seguit per anar de l'un a l'altre.

$$\int_{C_{P\to Q}} (\nabla f)\cdot \mathrm{d}l = f(Q) - f(P) \tag{71}$$

Evidentment, la integral anterior és nul·la quan la corba d'integració és tancada ($P \equiv Q$).

$$\oint_C (\nabla f) \cdot \mathrm{d}l = 0 \tag{72}$$

7.2 Teorema fonamental de la divergència (també anomenat de Gauss o de Green)

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$ i la integral sobre una superfície S de la funció $\boldsymbol{F}$, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F})\, \mathrm{d}\tau = \oiint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{73}$$

El vector $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

7.3 Teorema fonamental del rotacional (també anomenat de Stokes)

Estableix la relació entre la integral sobre una superfície S de la funció $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ i la integral sobre una corba C de la funció $\boldsymbol{F}$, on C és la corba tancada que limita S.

$$\iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{a} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l} \tag{74}$$

D'aquesta relació es desprèn que la integral de $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ sobre qualsevol superfície S limitada per la mateixa corba C, té el mateix valor.

Evidentment, la integral anterior és nul·la quan la superfície d'integració és tancada.

$$\oiint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{a} = 0 \tag{75}$$

En la Figura 2 s'il·lustra el conveni de signes dels vectors $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ i $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$.

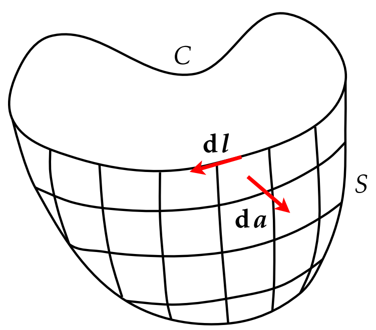

Figura 2: Conveni de signes del teorema de Stokes

7.4 Teorema del gradient

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\boldsymbol{\nabla} f$ i la integral sobre una superfície S de la funció f, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\boldsymbol{\nabla} f)\,\mathrm{d}\tau = \oiint_S f\,\mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{76}$$

El vector $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

7.5 Teorema del rotacional

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ i la integral sobre una superfície S de la funció $\boldsymbol{F}$, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})\,\mathrm{d}\tau = -\oiint_S \boldsymbol{F} \times \mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{77}$$

El vector $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

8 Conversió de coordenades amb la calculadora HP Prime

Es donen a continuació una sèrie de programes per a la calculadora HP Prime, destinats a realitzar conversions entre els sistemes de coordenades rectangulars, cilíndriques i esfèriques.

Utilitzarem les funcions de la calculadora `rectangular_coordinates` i `polar_coordinates`, pensades per fer conversions entre coordenades cartesianes i polars, en dues dimensions.

La funció `Rec_a_Cil` pren com a paràmetre les coordenades cartesianes d'un punt en la forma $[x, y, z]$, i torna les coordenades cilíndriques corresponents en la forma $[\rho, \phi, z]$.

Llistat 1: Funció Rec_a_Cil

```
EXPORT Rec_a_Cil(rec)
BEGIN
LOCAL cil:=polar_coordinates(rec(1),rec(2));
  RETURN [cil(1),cil(2),rec(3)];
END;
```

La funció `Cil_a_Rec` pren com a paràmetre les coordenades cilíndriques d'un punt en la forma $[\rho, \phi, z]$, i torna les coordenades cartesianes corresponents en la forma $[x, y, z]$.

Llistat 2: Funció Cil_a_Rec

```
EXPORT Cil_a_Rec(cil)
BEGIN
LOCAL rec:=rectangular_coordinates(cil(1),cil(2));
  RETURN [rec(1),rec(2),cil(3)];
END;
```

La funció `Esf_a_Cil` pren com a paràmetre les coordenades esfèriques d'un punt en la forma $[r, \theta, \phi]$, i torna les coordenades cilíndriques corresponents en la forma $[\rho, \phi, z]$.

Llistat 3: Funció Esf_a_Cil

```
EXPORT Esf_a_Cil(esf)
BEGIN
LOCAL cil:=rectangular_coordinates(esf(1),esf(2));
  RETURN [cil(2),esf(3), cil (1) ];
END;
```

La funció `Cil_a_Esf` pren com a paràmetre les coordenades cilíndriques d'un punt en la forma $[\rho, \phi, z]$, i torna les coordenades esfèriques corresponents en la forma $[r, \theta, \phi]$.

Llistat 4: Funció Cil_a_Esf

```
EXPORT Cil_a_Esf(cil)
BEGIN
LOCAL esf:=polar_coordinates(cil(3),cil(1));
  RETURN [esf(1),esf(2),cil(2) ];
END;
```

La funció `Rec_a_Esf` pren com a paràmetre les coordenades rectangulars d'un punt en la forma $[x, y, z]$, i torna les coordenades esfèriques corresponents en la forma $[r, \theta, \phi]$.

Llistat 5: Funció Rec_a_Esf

```
EXPORT Rec_a_Esf(rec)
BEGIN
 RETURN Cil_a_Esf(Rec_a_Cil(rec));
END;
```

La funció `Esf_a_Rec` pren com a paràmetre les coordenades esfèriques d'un punt en la forma $[r, \theta, \phi]$, i torna les coordenades rectangulars corresponents en la forma $[x, y, z]$.

Llistat 6: Funció Esf_a_Rec

```
EXPORT Esf_a_Rec(esf)
BEGIN
  RETURN Cil_a_Rec(Esf_a_Cil(esf));
END;
```

Totes aquestes funcions treballen en el mode angular que estigui actiu en la calculadora en el moment de ser executades.

9 Bibliografia

H. M. Schey. *Div, grad curl and all that, an informal text on vector calculus.* W. W. Norton and Company, 3rd edition, 1997.

Paul Lorrain, Dale R. Corson. *Electromagnetic fields and waves.* W. H. Freeman and Company, 1972.

David J. Griffiths, Reed College. *Introduction to electrodynamics.* Prentice-Hall, 3rd edition, 1999.

Daniel Fleisch. *A student's guide to Maxwell's equations.* Cambridge University Press, 2008.