Càlcul Vectorial en $\mathbb{R}^3$

Josep Mollera Barriga

Versió 12 (2 de gener de 2023)

1 Introducció

Aquest escrit és una breu introducció al càlcul vectorial en $\mathbb{R}^3$, és a dir en tres dimensions. Es presenten de forma directa — sense demostracions — operadors, relacions i teoremes vectorials.

S'utilitzen els tres tipus de coordenades més usuals: cartesianes, cilíndriques i esfèriques.

Totes les versions d'aquest text, així com els programes de la calculadora HP Prime inclosos, poden trobar-se a GitHub: https://github.com/jmollera/Calcul-Vectorial-GitHub.

2 Definicions

Es dona, en primer lloc, la definició de les variables i funcions que s'utilitzen en aquest document.

V	Volum d'integració.
S	Superfície d'integració.
C	Corba d'integració.
$\mathrm{d}\tau$	Diferencial de volum del volum V.
$\mathbf{d}\boldsymbol{a}$	Vector diferencial de superfície de la superfície S. $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ és perpendicular a S.
$\mathbf{d}\boldsymbol{l}$	Vector diferencial de longitud de la corba C. $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ és tangent a C.
x, y, z	Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cartesianes.
ρ, φ, z	Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cilíndriques.
r, θ, φ	Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades esfèriques.
u, v, w	Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades qualssevol.
$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$	Vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes.

$\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$	Vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques.
$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$	Vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques.
$\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v, \boldsymbol{e}_w$	Vectors directors d'un sistema de coordenades qualssevol.
P, Q	Punts en $\mathbb{R}^3$.
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$	Vectors en $\mathbb{R}^3$.
α	Angle entre dos vectors en $\mathbb{R}^3$.
f, g	Funcions escalars. $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$	Funcions vectorials. $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
∇f	Gradient de la funció escalar f. $\nabla f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$	Divergència de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$. $\nabla \cdot \boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\nabla \times \boldsymbol{F}$	Rotacional de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$. $\nabla \times \boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$\nabla^2 f$	Laplacià de la funció escalar f. $\nabla^2 f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\nabla^2 \boldsymbol{F}$	Laplacià de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$. $\nabla^2 \boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

3 Sistemes de Coordenades

Es representen en la Figura 1 a la pàgina següent tres dels sistemes de coordenades més utilitzats: el cartesià, el cilíndric i l'esfèric. L'orientació dels eixos i els orígens dels angles corresponen a un sistema de coordenades destre, tal com es defineix en la norma ISO 80000-2 *Quantities and units — Part 2: Mathematics*.

En el sistema de coordenades cartesianes els vectors directors tenen una orientació fixa, mentre que en els sistemes de coordenades cilíndriques i esfèriques, els vectors directors tenen una orientació variable que depèn del punt P al qual ens estiguem referint.

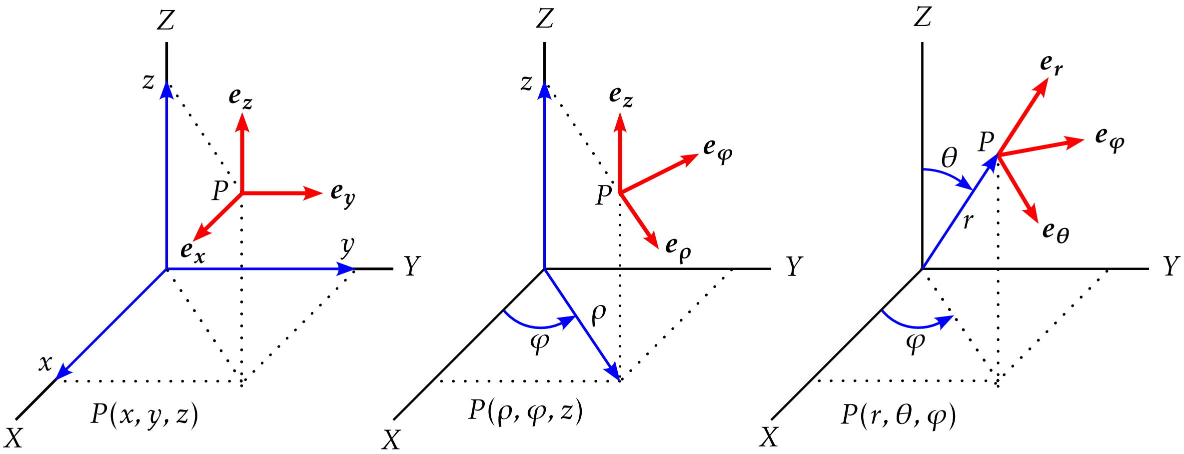

Figura 1 Coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques

En la Taula 1 es donen els rangs de les coordenades de cadascun d'aquests tres sistemes.

Taula 1 Rangs de les Coordenades

Cartesianes	Cilíndriques	Esfèriques
$x \in (-\infty, \infty)$	$\rho \in [0, \infty)$	$r \in [0, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$	$\varphi \in [0, 2\pi)$	$\theta \in [0, \pi]$
$z \in (-\infty, \infty)$	$z \in (-\infty, \infty)$	$\varphi \in [0, 2\pi)$

3.1 Relacions entre les coordenades cartesianes i cilíndriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = \rho \cos \varphi \tag{1a}$$
$$y = \rho \sin \varphi \tag{1b}$$
$$z = z \tag{1c}$$

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \varphi, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2a}$$
$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \tag{2b}$$
$$z = z \tag{2c}$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$, en un punt $P(\rho, \varphi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, és:

$$\boldsymbol{e}_\rho = \cos \varphi \, \boldsymbol{e}_x + \sin \varphi \, \boldsymbol{e}_y \tag{3a}$$
$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin \varphi \, \boldsymbol{e}_x + \cos \varphi \, \boldsymbol{e}_y \tag{3b}$$
$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z \tag{3c}$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes $\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$, $\boldsymbol{e_z}$, en un punt $P(\rho, \varphi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, és:

$$\boldsymbol{e_x} = \cos\varphi\, \boldsymbol{e_\rho} - \sin\varphi\, \boldsymbol{e_\varphi} \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{e_y} = \sin\varphi\, \boldsymbol{e_\rho} + \cos\varphi\, \boldsymbol{e_\varphi} \tag{4b}$$

$$\boldsymbol{e_z} = \boldsymbol{e_z} \tag{4c}$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z), en un punt $P(\rho, \varphi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_\rho \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi \tag{5a}$$

$$A_y = A_\rho \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi \tag{5b}$$

$$A_z = A_z \tag{5c}$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z), en un punt $P(\rho, \varphi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi \tag{6a}$$

$$A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi \tag{6b}$$

$$A_z = A_z \tag{6c}$$

3.2 Relacions entre les coordenades cartesianes i esfèriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \tag{7a}$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi \tag{7b}$$

$$z = r \cos\theta \tag{7c}$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \varphi)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{8a}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{8b}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \tag{8c}$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques $\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\varphi}$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\boldsymbol{e_r} = \sin\theta \cos\varphi\, \boldsymbol{e_x} + \sin\theta \sin\varphi\, \boldsymbol{e_y} + \cos\theta\, \boldsymbol{e_z} \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{e_\theta} = \cos\theta \cos\varphi\, \boldsymbol{e_x} + \cos\theta \sin\varphi\, \boldsymbol{e_y} - \sin\theta\, \boldsymbol{e_z} \tag{9b}$$

$$\boldsymbol{e_\varphi} = -\sin\varphi\, \boldsymbol{e_x} + \cos\varphi\, \boldsymbol{e_y} \tag{9c}$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes $\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$, $\boldsymbol{e_z}$, en un punt $P(r,\theta,\varphi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\boldsymbol{e_x} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e_r} + \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e_\theta} - \sin\varphi\,\boldsymbol{e_\varphi} \tag{10a}$$
$$\boldsymbol{e_y} = \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e_r} + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e_\theta} + \cos\varphi\,\boldsymbol{e_\varphi} \tag{10b}$$
$$\boldsymbol{e_z} = \cos\theta\,\boldsymbol{e_r} - \sin\theta\,\boldsymbol{e_\theta} \tag{10c}$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$, en un punt $P(r,\theta,\varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_r\sin\theta\cos\varphi + A_\theta\cos\theta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi \tag{11a}$$
$$A_y = A_r\sin\theta\sin\varphi + A_\theta\cos\theta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi \tag{11b}$$
$$A_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \tag{11c}$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z), en un punt $P(r,\theta,\varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_x\sin\theta\cos\varphi + A_y\sin\theta\sin\varphi + A_z\cos\theta \tag{12a}$$
$$A_\theta = A_x\cos\theta\cos\varphi + A_y\cos\theta\sin\varphi - A_z\sin\theta \tag{12b}$$
$$A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi \tag{12c}$$

3.3 Relacions entre les coordenades cilíndriques i esfèriques

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho,\varphi,z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r,\theta,\varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = r\sin\theta \tag{13a}$$
$$\varphi = \varphi \tag{13b}$$
$$z = r\cos\theta \tag{13c}$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r,\theta,\varphi)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho,\varphi,z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \tag{14a}$$
$$\theta = \arctan\frac{\rho}{z} \tag{14b}$$
$$\varphi = \varphi \tag{14c}$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques $\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\varphi}$, en un punt $P(r,\theta,\varphi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\boldsymbol{e_r} = \sin\theta\,\boldsymbol{e_\rho} + \cos\theta\,\boldsymbol{e_z} \tag{15a}$$
$$\boldsymbol{e_\theta} = \cos\theta\,\boldsymbol{e_\rho} - \sin\theta\,\boldsymbol{e_z} \tag{15b}$$
$$\boldsymbol{e_\varphi} = \boldsymbol{e_\varphi} \tag{15c}$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\theta$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\boldsymbol{e}_\rho = \sin\theta\, \boldsymbol{e}_r + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta \tag{16a}$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\varphi \tag{16b}$$

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_r - \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta \tag{16c}$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_r \sin\theta + A_\theta \cos\theta \tag{17a}$$

$$A_\varphi = A_\varphi \tag{17b}$$

$$A_z = A_r \cos\theta - A_\theta \sin\theta \tag{17c}$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z), en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_\rho \sin\theta + A_z \cos\theta \tag{18a}$$

$$A_\theta = A_\rho \cos\theta - A_z \sin\theta \tag{18b}$$

$$A_\varphi = A_\varphi \tag{18c}$$

4 Operacions Bàsiques

A partir de les components (A_u, A_v, A_w) i (B_u, B_v, B_w) de dos vectors $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ en un sistema de coordenades qualssevol, tenim:

4.1 Mòdul

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_u^2 + A_v^2 + A_w^2} \tag{19}$$

4.2 Addició i subtracció

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_u + B_u)\, \boldsymbol{e}_u + (A_v + B_v)\, \boldsymbol{e}_v + (A_w + B_w)\, \boldsymbol{e}_w \tag{20a}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_u - B_u)\, \boldsymbol{e}_u + (A_v - B_v)\, \boldsymbol{e}_v + (A_w - B_w)\, \boldsymbol{e}_w \tag{20b}$$

4.3 Producte escalar

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_u B_u + A_v B_v + A_w B_w \tag{21}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| \cos\alpha \tag{22}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{24}$$

El producte escalar de dos vectors perpendiculars és nul.

4.4 Producte vectorial

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_v B_w - A_w B_v)\,\boldsymbol{e_u} + (A_w B_u - A_u B_w)\,\boldsymbol{e_v} + (A_u B_v - A_v B_u)\,\boldsymbol{e_w} && (25)\\
|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\sin\alpha && (26)\\
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) && (27)\\
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} && (28)
\end{aligned}$$

El producte vectorial de dos vectors paral·lels és nul.

El producte vectorial de dos vectors és un altre vector, el sentit del qual és definit per la regla del caragol: és el sentit d'avanç que té un caragol, amb el seu eix perpendicular al pla format pels vectors $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, quan gira en el sentit que portaria el primer vector $\boldsymbol{A}$ a trobar el segon vector $\boldsymbol{B}$, utilitzant el menor angle possible.

4.5 Derivada temporal

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_u}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e_u} + \frac{\mathrm{d}A_v}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e_v} + \frac{\mathrm{d}A_w}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e_w} \tag{29}$$

5 Càlcul Diferencial

5.1 Coordenades cartesianes

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$ i $\boldsymbol{e_z}$, respecte x, y i z:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\,\boldsymbol{e_x}}{\partial x}=0 &&\frac{\partial\,\boldsymbol{e_x}}{\partial y}=0 &&\frac{\partial\,\boldsymbol{e_x}}{\partial z}=0 &&(30a)\\
&\frac{\partial\,\boldsymbol{e_y}}{\partial x}=0 &&\frac{\partial\,\boldsymbol{e_y}}{\partial y}=0 &&\frac{\partial\,\boldsymbol{e_y}}{\partial z}=0 &&(30b)\\
&\frac{\partial\,\boldsymbol{e_z}}{\partial x}=0 &&\frac{\partial\,\boldsymbol{e_z}}{\partial y}=0 &&\frac{\partial\,\boldsymbol{e_z}}{\partial z}=0 &&(30c)
\end{aligned}$$

En les equacions següents, (F_x, F_y, F_z) són les components de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$ en un sistema de coordenades cartesianes. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{e_x} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e_y} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e_z} \tag{31}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\boldsymbol{e_z} \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'X-Y)} \tag{32}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e_y} \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'X-Z)} \tag{33}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e_x} \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'Y-Z)} \tag{34}$$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{e_z} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{37}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right]\boldsymbol{e_x} + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right]\boldsymbol{e_y} + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]\boldsymbol{e_z} \tag{38}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{39}$$

5.2 Coordenades cilíndriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\boldsymbol{e_\rho}$, $\boldsymbol{e_\varphi}$ i $\boldsymbol{e_z}$, respecte ρ, φ i z:

$$\frac{\partial\,\boldsymbol{e_\rho}}{\partial\rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_\rho}}{\partial\varphi} = \boldsymbol{e_\varphi} \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_\rho}}{\partial z} = 0 \tag{40a}$$

$$\frac{\partial\,\boldsymbol{e_\varphi}}{\partial\rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_\varphi}}{\partial\varphi} = -\,\boldsymbol{e_\rho} \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_\varphi}}{\partial z} = 0 \tag{40b}$$

$$\frac{\partial\,\boldsymbol{e_z}}{\partial\rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_z}}{\partial\varphi} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_z}}{\partial z} = 0 \tag{40c}$$

En les equacions següents, (F_ρ, F_φ, F_z) són les components de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$ en un sistema de coordenades cilíndriques. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}\rho\,\boldsymbol{e_\rho} + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e_\varphi} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e_z} \tag{41}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e_\rho} \qquad \text{(en una superfície cilíndrica)} \tag{42}$$

$$\mathrm{d}\tau = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \tag{43}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\,\boldsymbol{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,\boldsymbol{e_\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{e_z} \tag{44}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right]\boldsymbol{e_\rho} + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right]\boldsymbol{e_\varphi} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e_z} \tag{46}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{47}$$

5.3 Coordenades esfèriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\boldsymbol{e_r}$, $\boldsymbol{e_\theta}$ i $\boldsymbol{e_\varphi}$, respecte r, θ i φ:

$$\frac{\partial\,\boldsymbol{e_r}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_r}}{\partial\theta} = \boldsymbol{e_\theta} \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_r}}{\partial\varphi} = \sin\theta\,\boldsymbol{e_\varphi} \tag{48a}$$

$$\frac{\partial\,\boldsymbol{e_\theta}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_\theta}}{\partial\theta} = -\,\boldsymbol{e_r} \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_\theta}}{\partial\varphi} = \cos\theta\,\boldsymbol{e_\varphi} \tag{48b}$$

$$\frac{\partial\,\boldsymbol{e_\varphi}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_\varphi}}{\partial\theta} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e_\varphi}}{\partial\varphi} = -\sin\theta\,\boldsymbol{e_r} - \cos\theta\,\boldsymbol{e_\theta} \tag{48c}$$

En les equacions següents, $(F_r, F_\theta, F_\varphi)$ són les components de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$ en un sistema de coordenades esfèriques. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e_\varphi} \tag{49}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e_r} \qquad \text{(en una superfície esfèrica)} \tag{50}$$

$$\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{51}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\boldsymbol{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\boldsymbol{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,\boldsymbol{e_\varphi} \tag{52}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} \tag{53}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e_r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\boldsymbol{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e_\varphi} \tag{54}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \tag{55}$$

6 Relacions

6.1 Operadors

Els operadors ∇ i ∇^2 es defineixen en coordenades cartesianes, segons les relacions següents:

$$\nabla \equiv \boldsymbol{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e_z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{56}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{57}$$

6.2 Identitats

Es compleixen les identitats següents:

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) \tag{58}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) \tag{59}$$

$$\nabla\times(\nabla f) = 0 \tag{60}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = 0 \tag{61}$$

6.3 Gradient

El gradient compleix les relacions següents:

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \tag{62}$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{63}$$

$$\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F}\times(\nabla\times\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G}\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} \tag{64}$$

6.4 Divergència

La divergència compleix les relacions següents:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\nabla\cdot\boldsymbol{B}) \tag{65}$$

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{F}) = (\nabla f)\cdot\boldsymbol{F} + f(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) \tag{66}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G}) \tag{67}$$

6.5 Rotacional

El rotacional compleix les relacions següents:

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{68}$$

$$\nabla\times(f\boldsymbol{F}) = (\nabla f)\times\boldsymbol{F} + f(\nabla\times\boldsymbol{F}) \tag{69}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) \tag{70}$$

7 Teoremes Vectorials

La funció escalar f i la funció vectorial $\boldsymbol{F}$ que apareixen en els teoremes següents han de ser contínues, diferenciables i les seves derivades primeres han de ser funcions contínues.

7.1 Teorema fonamental del gradient

Estableix que la integral sobre una corba C de la funció ∇f només depèn dels punts inicial i final sobre la corba, P i Q, i no del camí seguit per anar de l'un a l'altre.

$$\int_{C_{P\to Q}} (\nabla f)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = f(Q) - f(P) \tag{71}$$

Evidentment, la integral anterior és nul·la quan la corba d'integració és tancada ($P \equiv Q$).

$$\oint_C (\nabla f) \cdot \mathrm{d}l = 0 \tag{72}$$

7.2 Teorema fonamental de la divergència (també anomenat de Gauss o de Green)

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ i la integral sobre una superfície S de la funció $\boldsymbol{F}$, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\, \mathrm{d}\tau = \oiint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{73}$$

El vector $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

7.3 Teorema fonamental del rotacional (també anomenat de Stokes)

Estableix la relació entre la integral sobre una superfície S de la funció $\nabla \times \boldsymbol{F}$ i la integral sobre una corba C de la funció $\boldsymbol{F}$, on C és la corba tancada que limita S.

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{a} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l} \tag{74}$$

D'aquesta relació es desprèn que la integral de $\nabla \times \boldsymbol{F}$ sobre qualsevol superfície S limitada per la mateixa corba C, té el mateix valor.

Evidentment, la integral anterior és nul·la quan la superfície d'integració és tancada.

$$\oiint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{a} = 0 \tag{75}$$

En la Figura 2 s'il·lustra el conveni de signes dels vectors $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ i $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$.

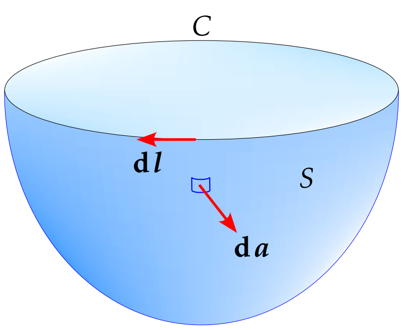

Figura 2 Conveni de signes del teorema de Stokes

7.4 Teorema del gradient

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció ∇f i la integral sobre una superfície S de la funció f, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\nabla f)\,\mathrm{d}\tau = \oiint_S f\,\mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{76}$$

El vector $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

7.5 Teorema del rotacional

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\nabla \times \boldsymbol{F}$ i la integral sobre una superfície S de la funció $\boldsymbol{F}$, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\nabla \times \boldsymbol{F})\,\mathrm{d}\tau = -\oiint_S \boldsymbol{F} \times \mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{77}$$

El vector $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

8 Conversió de coordenades amb la calculadora HP Prime

Es donen a continuació una sèrie de programes per a la calculadora HP Prime, destinats a realitzar conversions entre els sistemes de coordenades rectangulars, cilíndriques i esfèriques.

Utilitzarem les funcions de la calculadora `rectangular_coordinates` i `polar_coordinates`, pensades per fer conversions entre coordenades cartesianes i polars, en dues dimensions.

La funció `Rec_a_Cil` pren com a paràmetre les coordenades cartesianes d'un punt en la forma $[x, y, z]$, i torna les coordenades cilíndriques corresponents en la forma $[\rho, \varphi, z]$.

Llistat 1 Funció Rec_a_Cil

```
EXPORT Rec_a_Cil(rec)
BEGIN
LOCAL cil:=polar_coordinates(rec(1),rec(2));
  RETURN [cil(1),cil(2),rec(3)];
END;
```

La funció `Cil_a_Rec` pren com a paràmetre les coordenades cilíndriques d'un punt en la forma $[\rho, \varphi, z]$, i torna les coordenades cartesianes corresponents en la forma $[x, y, z]$.

Llistat 2 Funció Cil_a_Rec

```
EXPORT Cil_a_Rec(cil)
BEGIN
LOCAL rec:=rectangular_coordinates(cil(1),cil(2));
  RETURN [rec(1),rec(2),cil(3)];
END;
```

La funció `Esf_a_Cil` pren com a paràmetre les coordenades esfèriques d'un punt en la forma $[r, \theta, \varphi]$, i torna les coordenades cilíndriques corresponents en la forma $[\rho, \varphi, z]$.

Llistat 3 Funció Esf_a_Cil

```
EXPORT Esf_a_Cil(esf)
BEGIN
LOCAL cil:=rectangular_coordinates(esf(1),esf(2));
  RETURN [cil(2),esf(3),cil(1)];
END;
```

La funció `Cil_a_Esf` pren com a paràmetre les coordenades cilíndriques d'un punt en la forma $[\rho, \varphi, z]$, i torna les coordenades esfèriques corresponents en la forma $[r, \theta, \varphi]$.

Llistat 4 Funció Cil_a_Esf

```
EXPORT Cil_a_Esf(cil)
BEGIN
LOCAL esf:=polar_coordinates(cil(3),cil(1));
  RETURN [esf(1),esf(2),cil(2)];
END;
```

La funció `Rec_a_Esf` pren com a paràmetre les coordenades rectangulars d'un punt en la forma $[x, y, z]$, i torna les coordenades esfèriques corresponents en la forma $[r, \theta, \varphi]$.

Llistat 5 Funció Rec_a_Esf

```
EXPORT Rec_a_Esf(rec)
BEGIN
 RETURN Cil_a_Esf(Rec_a_Cil(rec));
END;
```

La funció `Esf_a_Rec` pren com a paràmetre les coordenades esfèriques d'un punt en la forma $[r, \theta, \varphi]$, i torna les coordenades rectangulars corresponents en la forma $[x, y, z]$.

Llistat 6 Funció Esf_a_Rec

```
EXPORT Esf_a_Rec(esf)
BEGIN
  RETURN Cil_a_Rec(Esf_a_Cil(esf));
END;
```

Totes aquestes funcions treballen en el mode angular que estigui actiu en la calculadora en el moment de ser executades.

9 Bibliografia

H. M. Schey. *Div, grad curl and all that, an informal text on vector calculus.* W. W. Norton and Company, 3rd edition, 1997.

Paul Lorrain, Dale R. Corson. *Electromagnetic fields and waves.* W. H. Freeman and Company, 1972.

David J. Griffiths, Reed College. *Introduction to electrodynamics.* Prentice-Hall, 3rd edition, 1999.

Daniel Fleisch. *A student's guide to Maxwell's equations.* Cambridge University Press, 2008.