

Càlcul Vectorial en \mathbb{R}^3

JOSEP MOLLERA BARRIGA

Versió 15 (14 de maig de 2023)

1 Introducció

Aquest escrit és una breu introducció al càlcul vectorial en \mathbb{R}^3 , és a dir, en tres dimensions. Es presenten de forma directa —sense demostracions— operadors, relacions i teoremes vectorials.

S'utilitzen els tres tipus de coordenades més usuals: cartesianes, cilíndriques i esfèriques.

Totes les versions d'aquest text, així com els programes de la calculadora HP Prime inclosos, poden trobar-se a GitHub: <https://github.com/jmollera/Calcul-Vectorial-GitHub>.

2 Definicions

Es dona, en primer lloc, la definició de les variables i funcions que s'utilitzen en aquest document.

\mathcal{V} Volum d'integració.

\mathcal{S} Superfície d'integració.

\mathcal{C} Corba d'integració.

$d\tau$ Diferencial de volum del volum \mathcal{V} .

$d\mathbf{a}$ Vector diferencial de superfície de la superfície \mathcal{S} .

$d\mathbf{a}$ és perpendicular a \mathcal{S} .

$d\mathbf{l}$ Vector diferencial de longitud de la corba \mathcal{C} .

$d\mathbf{l}$ és tangent a \mathcal{C} .

x, y, z Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cartesianes.

ρ, φ, z Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cilíndriques.

r, θ, φ Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades esfèriques.

u, v, w Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades qualssevol.

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ Vectors directores d'un sistema de coordenades cartesianes.

$\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ Vectors directores d'un sistema de coordenades cilíndriques.

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ Vectors directores d'un sistema de coordenades esfèriques.

$\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ Vectors directores d'un sistema de coordenades qualssevol.

$\mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ Punts en \mathbb{R}^3 .

\mathcal{O} és l'origen de coordenades.

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ Vectors en \mathbb{R}^3 .

α Angle entre dos vectors en \mathbb{R}^3 .

f, g Funcions escalars.

$f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

\mathbf{F}, \mathbf{G} Funcions vectorials.

$\mathbf{F}, \mathbf{G}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

∇f Gradient de la funció escalar f .

$\nabla f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\nabla \cdot \mathbf{F}$ Divergència de la funció vectorial \mathbf{F} .

$\nabla \cdot \mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$\nabla \times \mathbf{F}$ Rotacional de la funció vectorial \mathbf{F} .

$\nabla \times \mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\nabla^2 f$ Laplaciana de la funció escalar f .

$\nabla^2 f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$\nabla^2 \mathbf{F}$ Laplaciana de la funció vectorial \mathbf{F} .

$\nabla^2 \mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

3 Sistemes de Coordenades

Es representen en la figura 1 a la pàgina següent tres dels sistemes de coordenades més utilitzats: el cartesià, el cilíndric i l'esfèric. L'orientació dels eixos i els orígens dels angles corresponen a un sistema de coordenades destre, tal com es defineix en la norma ISO 80000-2 *Quantities and units — Part 2: Mathematics*.

En el sistema de coordenades cartesianes els vectors directores tenen una orientació fixa, mentre que en els sistemes de coordenades cilíndriques i esfèriques, els vectors directores tenen una orientació variable que depèn del punt \mathcal{P} al qual ens referim.

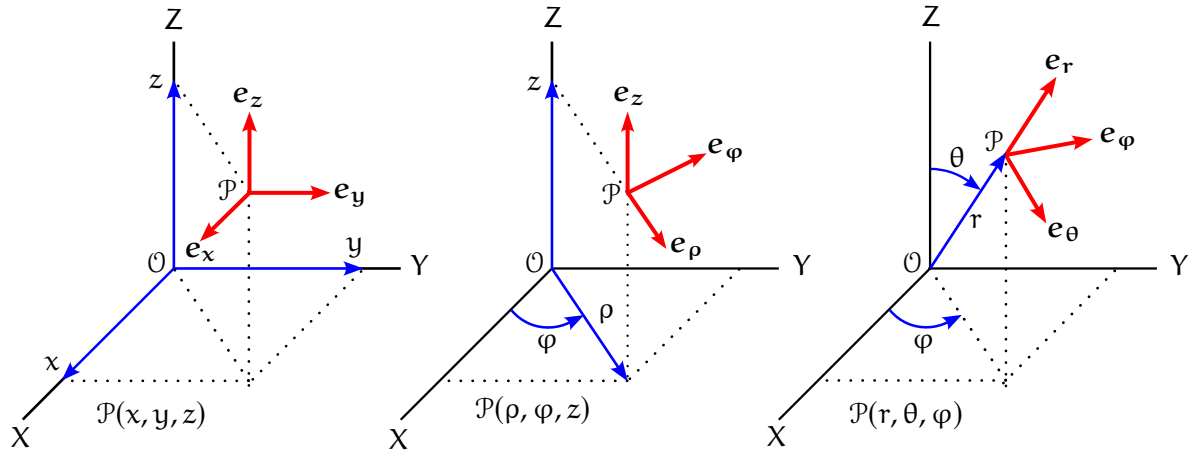


Figura 1 Coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques

En la taula 1 es donen els rangs de les coordenades de cadascun d'aquests tres sistemes.

Taula 1 Rangs de les Coordenades

Cartesianes	Cilíndriques	Esfèriques
$x \in (-\infty, \infty)$	$\rho \in [0, \infty)$	$r \in [0, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$	$\varphi \in [0, 2\pi)$	$\theta \in [0, \pi]$
$z \in (-\infty, \infty)$	$z \in (-\infty, \infty)$	$\varphi \in [0, 2\pi)$

3.1 Relacions entre les coordenades cartesianes i cilíndriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $\mathcal{P}(x, y, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $\mathcal{P}(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = \rho \cos \varphi \quad (1a)$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (1b)$$

$$z = z \quad (1c)$$

Les coordenades cilíndriques d'un punt $\mathcal{P}(\rho, \varphi, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $\mathcal{P}(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2a)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2b)$$

$$z = z \quad (2c)$$

Els vectors directores de les coordenades cartesianes \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y i \mathbf{e}_z en un punt $\mathcal{P}(\rho, \varphi, z)$, s'obtenen a partir dels vectors directores de les coordenades cilíndriques \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ i \mathbf{e}_z en el mateix punt $\mathcal{P}(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions:

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_\rho - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (3a)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_\rho + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (3b)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \quad (3c)$$

Els vectors directores de les coordenades cilíndriques \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ i \mathbf{e}_z en un punt $\mathcal{P}(\rho, \varphi, z)$, s'obtenen a partir dels vectors directores de les coordenades cartesianes \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y i \mathbf{e}_z en el mateix punt $\mathcal{P}(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \quad (4a)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \quad (4b)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \quad (4c)$$

Un vector \mathbf{A} en el punt $\mathcal{P}(\rho, \varphi, z)$ pot expressar-se utilitzant els vectors directores cartesianes o els cilíndrics, segons:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \quad (5a)$$

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z \quad (5b)$$

Les components (A_x, A_y, A_z) s'obtenen a partir de les components (A_ρ, A_φ, A_z) , mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_\rho \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \quad (6a)$$

$$A_y = A_\rho \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi \quad (6b)$$

$$A_z = A_z \quad (6c)$$

Les components (A_ρ, A_φ, A_z) s'obtenen a partir de les components (A_x, A_y, A_z) , mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \quad (7a)$$

$$A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \quad (7b)$$

$$A_z = A_z \quad (7c)$$

3.2 Relacions entre les coordenades cartesianes i esfèriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $\mathcal{P}(x, y, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (8a)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (8b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (8c)$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $\mathcal{P}(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (9a)$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (9b)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (9c)$$

Els vectors directors de les coordenades cartesianes \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y i \mathbf{e}_z en un punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$, s'obtenen a partir dels vectors directors de les coordenades esfèriques \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ i \mathbf{e}_φ en el mateix punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions:

$$\mathbf{e}_x = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (10a)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (10b)$$

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (10c)$$

Els vectors directors de les coordenades esfèriques \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ i \mathbf{e}_φ en un punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$, s'obtenen a partir dels vectors directors de les coordenades cartesianes \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y i \mathbf{e}_z en el mateix punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions:

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (11a)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \quad (11b)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \quad (11c)$$

Un vector \mathbf{A} en el punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$ pot expressar-se utilitzant els vectors directors cartesianes o els esfèrics, segons:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \quad (12a)$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (12b)$$

Les components (A_x, A_y, A_z) s'obtenen a partir de les components $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_r \sin \theta \cos \varphi + A_\theta \cos \theta \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \quad (13a)$$

$$A_y = A_r \sin \theta \sin \varphi + A_\theta \cos \theta \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi \quad (13b)$$

$$A_z = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta \quad (13c)$$

Les components $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ s'obtenen a partir de les components (A_x, A_y, A_z) , mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta \quad (14a)$$

$$A_\theta = A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta \quad (14b)$$

$$A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \quad (14c)$$

3.3 Relacions entre les coordenades cilíndriques i esfèriques

Les coordenades cilíndriques d'un punt $\mathcal{P}(\rho, \varphi, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = r \sin \theta \quad (15a)$$

$$\varphi = \varphi \quad (15b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (15c)$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $\mathcal{P}(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (16a)$$

$$\theta = \arctan \frac{\rho}{z} \quad (16b)$$

$$\varphi = \varphi \quad (16c)$$

Els vectors directores de les coordenades cilíndriques $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ en un punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$, s'obtenen a partir dels vectors directores de les coordenades esfèriques $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ i \mathbf{e}_φ en el mateix punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions:

$$\mathbf{e}_\rho = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta \quad (17a)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \quad (17b)$$

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (17c)$$

Els vectors directores de les coordenades esfèriques $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ i \mathbf{e}_φ en un punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$, s'obtenen a partir dels vectors directores de les coordenades cilíndriques $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ en el mateix punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions:

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \mathbf{e}_\rho + \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (18a)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \mathbf{e}_\rho - \sin \theta \mathbf{e}_z \quad (18b)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \quad (18c)$$

Un vector \mathbf{A} en el punt $\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$ pot expressar-se utilitzant els vectors directores cilíndrics o els esfèrics, segons:

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z \quad (19a)$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (19b)$$

Les components (A_ρ, A_φ, A_z) s'obtenen a partir de les components $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta \quad (20a)$$

$$A_\varphi = A_\varphi \quad (20b)$$

$$A_z = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta \quad (20c)$$

Les components $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ s'obtenen a partir de les components (A_ρ, A_φ, A_z) , mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_\rho \sin \theta + A_z \cos \theta \quad (21a)$$

$$A_\theta = A_\rho \cos \theta - A_z \sin \theta \quad (21b)$$

$$A_\varphi = A_\varphi \quad (21c)$$

4 Operacions Bàsiques

A partir dels vectors $\mathbf{A}(A_u, A_v, A_w)$, $\mathbf{B}(B_u, B_v, B_w)$ i $\mathbf{C}(C_u, C_v, C_w)$, expressats en un sistema de coordenades qualssevol, tenim:

4.1 Mòdul

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_u^2 + A_v^2 + A_w^2} \quad (22)$$

4.2 Addició i subtracció

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_u + B_u) \mathbf{e}_u + (A_v + B_v) \mathbf{e}_v + (A_w + B_w) \mathbf{e}_w \quad (23a)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_u - B_u) \mathbf{e}_u + (A_v - B_v) \mathbf{e}_v + (A_w - B_w) \mathbf{e}_w \quad (23b)$$

4.3 Producte escalar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_u B_u + A_v B_v + A_w B_w \quad (24)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \alpha \quad (25)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (26)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (27)$$

El producte escalar de dos vectors perpendiculars és nul.

4.4 Producte vectorial

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_v B_w - A_w B_v) \mathbf{e}_u + (A_w B_u - A_u B_w) \mathbf{e}_v + (A_u B_v - A_v B_u) \mathbf{e}_w \quad (28)$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \alpha \quad (29)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (30)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (31)$$

El producte vectorial de dos vectors paral·lels és nul.

El producte vectorial de dos vectors és un altre vector, el sentit del qual és definit per la regla del caragol: és el sentit d'avanç que té un caragol, amb el seu eix perpendicular al pla format pels vectors \mathbf{A} i \mathbf{B} , quan gira en el sentit que portaria el primer vector \mathbf{A} a trobar el segon vector \mathbf{B} , utilitzant el menor angle possible.

4.5 Derivada temporal

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_u}{dt} \mathbf{e}_u + \frac{dA_v}{dt} \mathbf{e}_v + \frac{dA_w}{dt} \mathbf{e}_w \quad (32)$$

5 Càlcul Diferencial

5.1 Coordenades cartesianes

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directores \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y i \mathbf{e}_z , respecte x , y i z :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial z} = 0 \quad (33a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial z} = 0 \quad (33b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0 \quad (33c)$$

En les equacions següents, (F_x, F_y, F_z) són les components de la funció vectorial \mathbf{F} en un sistema de coordenades cartesianes. En aquestes coordenades tenim:

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z \quad (34)$$

$$d\mathbf{a} = dx dy \mathbf{e}_z \quad (\text{en un pla paral·lel al X-Y}) \quad (35)$$

$$d\mathbf{a} = dx dz \mathbf{e}_y \quad (\text{en un pla paral·lel al X-Z}) \quad (36)$$

$$d\mathbf{a} = dy dz \mathbf{e}_x \quad (\text{en un pla paral·lel al Y-Z}) \quad (37)$$

$$d\tau = dx dy dz \quad (38)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (40)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \mathbf{e}_x + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] \mathbf{e}_y + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \mathbf{e}_z \quad (41)$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (42)$$

5.2 Coordenades cilíndriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directores \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ i \mathbf{e}_z , respecte ρ , φ i z :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial z} = 0 \quad (43a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_\rho \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} = 0 \quad (43b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0 \quad (43c)$$

En les equacions següents, (F_ρ, F_φ, F_z) són les components de la funció vectorial \mathbf{F} en un sistema de coordenades cilíndriques. En aquestes coordenades tenim:

$$d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z \quad (44)$$

$$d\mathbf{a} = \rho d\varphi dz \mathbf{e}_\rho \quad (\text{en una superfície cilíndrica}) \quad (45)$$

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz \quad (46)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (48)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right] \mathbf{e}_\rho + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_z \quad (49)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (50)$$

5.3 Coordenades esfèriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directores \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ i \mathbf{e}_φ , respecte r , θ i φ :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \quad (51a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos \theta \mathbf{e}_\varphi \quad (51b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta \quad (51c)$$

En les equacions següents, $(F_r, F_\theta, F_\varphi)$ són les components de la funció vectorial \mathbf{F} en un sistema de coordenades esfèriques. En aquestes coordenades tenim:

$$d\mathbf{l} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (52)$$

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r \quad (\text{en una superfície esfèrica}) \quad (53)$$

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (54)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \quad (56)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r F_\varphi) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi \quad (57)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (58)$$

6 Relacions

6.1 Operadors

Els operadors ∇ i ∇^2 es defineixen en coordenades cartesianes, segons les relacions següents:

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (59)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (60)$$

6.2 Identitats

Es compleixen les identitats següents:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \quad (61)$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (62)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (63)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (64)$$

6.3 Gradient

El gradient compleix les relacions següents:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (65)$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (66)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} \quad (67)$$

6.4 Divergència

La divergència compleix les relacions següents:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (68)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (69)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \quad (70)$$

6.5 Rotacional

El rotacional compleix les relacions següents:

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (71)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F}) \quad (72)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (73)$$

7 Teoremes Vectorials

La funció escalar f i la funció vectorial \mathbf{F} que apareixen en els teoremes següents han de ser contínues, diferenciables i les seves derivades primeres han de ser funcions contínues.

7.1 Teorema fonamental del gradient

Estableix que la integral sobre una corba \mathcal{C} de la funció ∇f només depèn dels punts inicial i final sobre la corba, \mathcal{P} i \mathcal{Q} , i no de la forma que tingui la corba.

$$\int_{\mathcal{C}_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}}} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = f(\mathcal{Q}) - f(\mathcal{P}) \quad (74)$$

Evidentment, la integral anterior és nul·la quan la corba d'integració és tancada ($\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$).

$$\oint_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (75)$$

7.2 Teorema fonamental de la divergència (també anomenat de Gauss o de Green)

Estableix la relació entre la integral sobre un volum \mathcal{V} de la funció $\nabla \cdot \mathbf{F}$ i la integral sobre una superfície \mathcal{S} de la funció \mathbf{F} , on \mathcal{S} és la superfície tancada que limita \mathcal{V} .

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, d\tau = \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (76)$$

El vector $d\mathbf{a}$ apunta sempre cap a fora del volum \mathcal{V} .

7.3 Teorema fonamental del rotacional (també anomenat de Stokes)

Estableix la relació entre la integral sobre una superfície \mathcal{S} de la funció $\nabla \times \mathbf{F}$ i la integral sobre una corba \mathcal{C} de la funció \mathbf{F} , on \mathcal{C} és la corba tancada que limita \mathcal{S} .

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (77)$$

D'aquesta relació es desprèn que la integral de $\nabla \times \mathbf{F}$ sobre qualsevol superfície \mathcal{S} limitada per la mateixa corba \mathcal{C} , té el mateix valor.

Evidentment, la integral anterior és nul·la quan la superfície d'integració és tancada.

$$\oiint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (78)$$

En la figura 2 a la pàgina següent s'il·lustra el conveni de signes dels vectors $d\mathbf{l}$ i $d\mathbf{a}$.

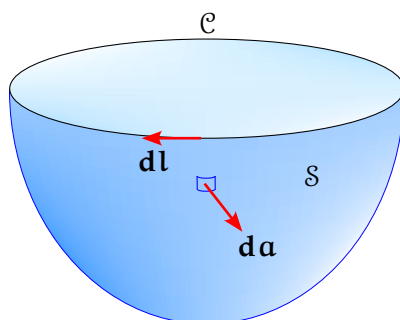


Figura 2 Conveni de signes del teorema de Stokes

7.4 Teorema del gradient

Estableix la relació entre la integral sobre un volum \mathcal{V} de la funció ∇f i la integral sobre una superfície \mathcal{S} de la funció f , on \mathcal{S} és la superfície tancada que limita \mathcal{V} .

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla f \, d\tau = \oint_{\mathcal{S}} f \, d\mathbf{a} \quad (79)$$

El vector $d\mathbf{a}$ apunta sempre cap a fora del volum \mathcal{V} .

7.5 Teorema del rotacional

Estableix la relació entre la integral sobre un volum \mathcal{V} de la funció $\nabla \times \mathbf{F}$ i la integral sobre una superfície \mathcal{S} de la funció \mathbf{F} , on \mathcal{S} és la superfície tancada que limita \mathcal{V} .

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \times \mathbf{F}) \, d\tau = - \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \times d\mathbf{a} \quad (80)$$

El vector $d\mathbf{a}$ apunta sempre cap a fora del volum \mathcal{V} .

8 Conversió de coordenades amb la calculadora HP Prime

Es donen a continuació una sèrie de programes per a la calculadora HP Prime, destinats a realitzar conversions entre els sistemes de coordenades rectangulars, cilíndriques i esfèriques.

Utilitzarem les funcions de la calculadora `rectangular_coordinates` i `polar_coordinates`, pensades per fer conversions entre coordenades cartesianes i polars en dues dimensions.

La funció `Rec_a_Cil` pren com a paràmetre les coordenades cartesianes d'un punt en la forma $[x, y, z]$, i torna les coordenades cilíndriques corresponents en la forma $[\rho, \varphi, z]$.

Llistat 1 Funció `Rec_a_Cil`

```

1 EXPORT Rec_a_Cil(rec)
2 BEGIN
3   LOCAL cil:=polar_coordinates(rec(1),rec(2));
4   RETURN [cil(1),cil(2),rec(3)];
5 END;
```

La funció Cil_a_Rec pren com a paràmetre les coordenades cilíndriques d'un punt en la forma $[\rho, \varphi, z]$, i torna les coordenades cartesianes corresponents en la forma $[x, y, z]$.

Llistat 2 Funció Cil_a_Rec

```

1 EXPORT Cil_a_Rec(cil)
2 BEGIN
3 LOCAL rec:=rectangular_coordinates(cil(1),cil(2));
4 RETURN [rec(1),rec(2),cil(3)];
5 END;

```

La funció Esf_a_Cil pren com a paràmetre les coordenades esfèriques d'un punt en la forma $[r, \theta, \varphi]$, i torna les coordenades cilíndriques corresponents en la forma $[\rho, \varphi, z]$.

Llistat 3 Funció Esf_a_Cil

```

1 EXPORT Esf_a_Cil(esf)
2 BEGIN
3 LOCAL cil:=rectangular_coordinates(esf(1),esf(2));
4 RETURN [cil(2),esf(3),cil(1)];
5 END;

```

La funció Cil_a_Esf pren com a paràmetre les coordenades cilíndriques d'un punt en la forma $[\rho, \varphi, z]$, i torna les coordenades esfèriques corresponents en la forma $[r, \theta, \varphi]$.

Llistat 4 Funció Cil_a_Esf

```

1 EXPORT Cil_a_Esf(cil)
2 BEGIN
3 LOCAL esf:=polar_coordinates(cil(3),cil(1));
4 RETURN [esf(1),esf(2),cil(2)];
5 END;

```

La funció Rec_a_Esf pren com a paràmetre les coordenades rectangulars d'un punt en la forma $[x, y, z]$, i torna les coordenades esfèriques corresponents en la forma $[r, \theta, \varphi]$.

Llistat 5 Funció Rec_a_Esf

```

1 EXPORT Rec_a_Esf(rec)
2 BEGIN
3 RETURN Cil_a_Esf(Rec_a_Cil(rec));
4 END;

```

La funció Esf_a_Rec pren com a paràmetre les coordenades esfèriques d'un punt en la forma $[r, \theta, \varphi]$, i torna les coordenades rectangulars corresponents en la forma $[x, y, z]$.

Llistat 6 Funció Esf_a_Rec

```

1 EXPORT Esf_a_Rec(esf)
2 BEGIN
3 RETURN Cil_a_Rec(Esf_a_Cil(esf));
4 END;

```

Totes aquestes funcions treballen en el mode angular que estigui actiu en la calculadora en el moment de ser executades.

9 Bibliografia

H. M. SCHEY. *Div, grad curl and all that, an informal text on vector calculus*. W. W. Norton and Company, 3rd edition, 1997.

PAUL LORRAIN, DALE R. CORSON. *Electromagnetic fields and waves*. W. H. Freeman and Company, 1972.

DAVID J. GRIFFITHS, REED COLLEGE. *Introduction to electrodynamics*. Prentice-Hall, 3rd edition, 1999.

DANIEL FLEISCH. *A student's guide to Maxwell's equations*. Cambridge University Press, 2008.