Càlcul Vectorial en $\mathbf{R}^3$

Josep Mollera Barriga

Versió 13 (14 d'abril de 2023)

1 Introducció

Aquest escrit és una breu introducció al càlcul vectorial en $\mathbf{R}^3$, és a dir, en tres dimensions. Es presenten de forma directa —sense demostracions— operadors, relacions i teoremes vectorials.

S'utilitzen els tres tipus de coordenades més usuals: cartesianes, cilíndriques i esfèriques.

Totes les versions d'aquest text, així com els programes de la calculadora HP Prime inclosos, poden trobar-se a GitHub: https://github.com/jmollera/Calcul-Vectorial-GitHub.

2 Definicions

Es dona, en primer lloc, la definició de les variables i funcions que s'utilitzen en aquest document.

V	Volum d'integració.
S	Superfície d'integració.
C	Corba d'integració.
$d\tau$	Diferencial de volum del volum V.
$\mathbf{da}$	Vector diferencial de superfície de la superfície S. $\mathbf{da}$ és perpendicular a S.
$\mathbf{dl}$	Vector diferencial de longitud de la corba C. $\mathbf{dl}$ és tangent a C.
x, y, z	Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cartesianes.
ρ, φ, z	Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cilíndriques.
r, θ, φ	Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades esfèriques.
u, v, w	Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades qualssevol.
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	Vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes.

e_ρ, e_φ, e_z Vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques.

e_r, e_θ, e_φ Vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques.

e_u, e_v, e_w Vectors directors d'un sistema de coordenades qualssevol.

P, Q Punts en $\mathbf{R}^3$.

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ Vectors en $\mathbf{R}^3$.

α Angle entre dos vectors en $\mathbf{R}^3$.

f, g Funcions escalars.
$f, g \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

$\mathbf{F}, \mathbf{G}$ Funcions vectorials.
$\mathbf{F}, \mathbf{G} \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

∇f Gradient de la funció escalar f.
$\nabla f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$

$\nabla \cdot \mathbf{F}$ Divergència de la funció vectorial $\mathbf{F}$.
$\nabla \cdot \mathbf{F} \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

$\nabla \times \mathbf{F}$ Rotacional de la funció vectorial $\mathbf{F}$.
$\nabla \times \mathbf{F} \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$\nabla^2 f$ Laplacià de la funció escalar f.
$\nabla^2 f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$\nabla^2 \mathbf{F}$ Laplacià de la funció vectorial $\mathbf{F}$.
$\nabla^2 \mathbf{F} \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

3 Sistemes de Coordenades

Es representen en la Figura 1 a la pàgina següent tres dels sistemes de coordenades més utilitzats: el cartesià, el cilíndric i l'esfèric. L'orientació dels eixos i els orígens dels angles corresponen a un sistema de coordenades destre, tal com es defineix en la norma ISO 80000-2 *Quantities and units — Part 2: Mathematics*.

En el sistema de coordenades cartesianes els vectors directors tenen una orientació fixa, mentre que en els sistemes de coordenades cilíndriques i esfèriques, els vectors directors tenen una orientació variable que depèn del punt P al qual ens estiguem referint.

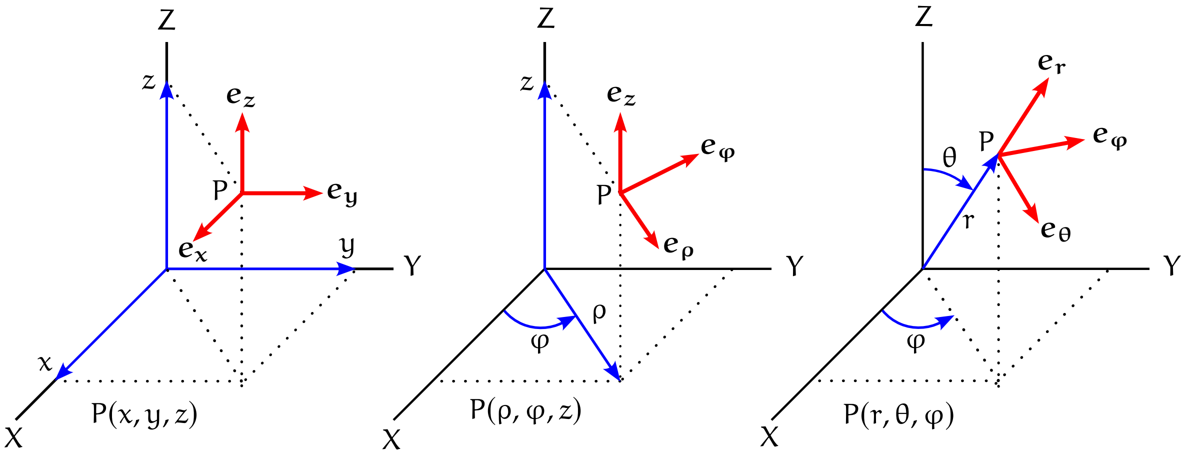

Figura 1 Coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques

En la Taula 1 es donen els rangs de les coordenades de cadascun d'aquests tres sistemes.

Taula 1 Rangs de les Coordenades

Cartesianes	Cilíndriques	Esfèriques
$x \in (-\infty, \infty)$	$\rho \in [0, \infty)$	$r \in [0, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$	$\varphi \in [0, 2\pi)$	$\theta \in [0, \pi]$
$z \in (-\infty, \infty)$	$z \in (-\infty, \infty)$	$\varphi \in [0, 2\pi)$

3.1 Relacions entre les coordenades cartesianes i cilíndriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = \rho \cos \varphi \tag{1a}$$
$$y = \rho \sin \varphi \tag{1b}$$
$$z = z \tag{1c}$$

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \varphi, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2a}$$
$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \tag{2b}$$
$$z = z \tag{2c}$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$, en un punt $P(\rho, \varphi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, és:

$$\boldsymbol{e}_\rho = \cos \varphi \, \boldsymbol{e}_x + \sin \varphi \, \boldsymbol{e}_y \tag{3a}$$
$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin \varphi \, \boldsymbol{e}_x + \cos \varphi \, \boldsymbol{e}_y \tag{3b}$$
$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z \tag{3c}$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes $\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$, $\boldsymbol{e_z}$, en un punt $P(\rho, \varphi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, és:

$$\boldsymbol{e_x} = \cos\varphi\, \boldsymbol{e_\rho} - \sin\varphi\, \boldsymbol{e_\varphi} \tag{4a}$$
$$\boldsymbol{e_y} = \sin\varphi\, \boldsymbol{e_\rho} + \cos\varphi\, \boldsymbol{e_\varphi} \tag{4b}$$
$$\boldsymbol{e_z} = \boldsymbol{e_z} \tag{4c}$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z), en un punt $P(\rho, \varphi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_\rho \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi \tag{5a}$$
$$A_y = A_\rho \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi \tag{5b}$$
$$A_z = A_z \tag{5c}$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z), en un punt $P(\rho, \varphi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi \tag{6a}$$
$$A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi \tag{6b}$$
$$A_z = A_z \tag{6c}$$

3.2 Relacions entre les coordenades cartesianes i esfèriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \tag{7a}$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi \tag{7b}$$
$$z = r \cos\theta \tag{7c}$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \varphi)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{8a}$$
$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{8b}$$
$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \tag{8c}$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques $\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\varphi}$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\boldsymbol{e_r} = \sin\theta \cos\varphi\, \boldsymbol{e_x} + \sin\theta \sin\varphi\, \boldsymbol{e_y} + \cos\theta\, \boldsymbol{e_z} \tag{9a}$$
$$\boldsymbol{e_\theta} = \cos\theta \cos\varphi\, \boldsymbol{e_x} + \cos\theta \sin\varphi\, \boldsymbol{e_y} - \sin\theta\, \boldsymbol{e_z} \tag{9b}$$
$$\boldsymbol{e_\varphi} = -\sin\varphi\, \boldsymbol{e_x} + \cos\varphi\, \boldsymbol{e_y} \tag{9c}$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes $\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$, $\boldsymbol{e_z}$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\boldsymbol{e_x} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e_r} + \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e_\theta} - \sin\varphi\,\boldsymbol{e_\varphi} \tag{10a}$$
$$\boldsymbol{e_y} = \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e_r} + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e_\theta} + \cos\varphi\,\boldsymbol{e_\varphi} \tag{10b}$$
$$\boldsymbol{e_z} = \cos\theta\,\boldsymbol{e_r} - \sin\theta\,\boldsymbol{e_\theta} \tag{10c}$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_r\sin\theta\cos\varphi + A_\theta\cos\theta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi \tag{11a}$$
$$A_y = A_r\sin\theta\sin\varphi + A_\theta\cos\theta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi \tag{11b}$$
$$A_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \tag{11c}$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z), en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_x\sin\theta\cos\varphi + A_y\sin\theta\sin\varphi + A_z\cos\theta \tag{12a}$$
$$A_\theta = A_x\cos\theta\cos\varphi + A_y\cos\theta\sin\varphi - A_z\sin\theta \tag{12b}$$
$$A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi \tag{12c}$$

3.3 Relacions entre les coordenades cilíndriques i esfèriques

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \varphi, z)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = r\sin\theta \tag{13a}$$
$$\varphi = \varphi \tag{13b}$$
$$z = r\cos\theta \tag{13c}$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \varphi)$ s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \tag{14a}$$
$$\theta = \arctan\frac{\rho}{z} \tag{14b}$$
$$\varphi = \varphi \tag{14c}$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques $\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\varphi}$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\boldsymbol{e_r} = \sin\theta\,\boldsymbol{e_\rho} + \cos\theta\,\boldsymbol{e_z} \tag{15a}$$
$$\boldsymbol{e_\theta} = \cos\theta\,\boldsymbol{e_\rho} - \sin\theta\,\boldsymbol{e_z} \tag{15b}$$
$$\boldsymbol{e_\varphi} = \boldsymbol{e_\varphi} \tag{15c}$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\theta$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\boldsymbol{e}_\rho = \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\mathbf{r} + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta \tag{16a}$$
$$\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\varphi \tag{16b}$$
$$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\mathbf{r} - \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta \tag{16c}$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z) s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_r \sin\theta + A_\theta \cos\theta \tag{17a}$$
$$A_\varphi = A_\varphi \tag{17b}$$
$$A_z = A_r \cos\theta - A_\theta \sin\theta \tag{17c}$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$ s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z), en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_\rho \sin\theta + A_z \cos\theta \tag{18a}$$
$$A_\theta = A_\rho \cos\theta - A_z \sin\theta \tag{18b}$$
$$A_\varphi = A_\varphi \tag{18c}$$

4 Operacions Bàsiques

A partir de les components (A_u, A_v, A_w) i (B_u, B_v, B_w) de dos vectors $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ en un sistema de coordenades qualssevol, tenim:

4.1 Mòdul

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_u^2 + A_v^2 + A_w^2} \tag{19}$$

4.2 Addició i subtracció

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_u + B_u)\, \boldsymbol{e}_\mathbf{u} + (A_v + B_v)\, \boldsymbol{e}_\mathbf{v} + (A_w + B_w)\, \boldsymbol{e}_\mathbf{w} \tag{20a}$$
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_u - B_u)\, \boldsymbol{e}_\mathbf{u} + (A_v - B_v)\, \boldsymbol{e}_\mathbf{v} + (A_w - B_w)\, \boldsymbol{e}_\mathbf{w} \tag{20b}$$

4.3 Producte escalar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_u B_u + A_v B_v + A_w B_w \tag{21}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\, |\mathbf{B}| \cos\alpha \tag{22}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{23}$$
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \tag{24}$$

El producte escalar de dos vectors perpendiculars és nul.

4.4 Producte vectorial

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_v B_w - A_w B_v)\, \boldsymbol{e_u} + (A_w B_u - A_u B_w)\, \boldsymbol{e_v} + (A_u B_v - A_v B_u)\, \boldsymbol{e_w} && (25)\\
|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| &= |\mathbf{A}|\, |\mathbf{B}| \sin \alpha && (26)\\
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) && (27)\\
\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} && (28)
\end{aligned}
$$

El producte vectorial de dos vectors paral·lels és nul.

El producte vectorial de dos vectors és un altre vector, el sentit del qual és definit per la regla del caragol: és el sentit d'avanç que té un caragol, amb el seu eix perpendicular al pla format pels vectors $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, quan gira en el sentit que portaria el primer vector $\mathbf{A}$ a trobar el segon vector $\mathbf{B}$, utilitzant el menor angle possible.

4.5 Derivada temporal

$$
\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_u}{dt}\, \boldsymbol{e_u} + \frac{dA_v}{dt}\, \boldsymbol{e_v} + \frac{dA_w}{dt}\, \boldsymbol{e_w} \qquad (29)
$$

5 Càlcul Diferencial

5.1 Coordenades cartesianes

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$ i $\boldsymbol{e_z}$, respecte x, y i z:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\, \boldsymbol{e_x}}{\partial x} = 0 \qquad && \frac{\partial\, \boldsymbol{e_x}}{\partial y} = 0 \qquad && \frac{\partial\, \boldsymbol{e_x}}{\partial z} = 0 \qquad && (30a)\\
&\frac{\partial\, \boldsymbol{e_y}}{\partial x} = 0 && \frac{\partial\, \boldsymbol{e_y}}{\partial y} = 0 && \frac{\partial\, \boldsymbol{e_y}}{\partial z} = 0 && (30b)\\
&\frac{\partial\, \boldsymbol{e_z}}{\partial x} = 0 && \frac{\partial\, \boldsymbol{e_z}}{\partial y} = 0 && \frac{\partial\, \boldsymbol{e_z}}{\partial z} = 0 && (30c)
\end{aligned}
$$

En les equacions següents, (F_x, F_y, F_z) són les components de la funció vectorial $\mathbf{F}$ en un sistema de coordenades cartesianes. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{dl} = dx\,\boldsymbol{e}_x + dy\,\boldsymbol{e}_y + dz\,\boldsymbol{e}_z \tag{31}$$

$$\mathbf{da} = dx\,dy\,\boldsymbol{e}_z \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'X-Y)} \tag{32}$$

$$\mathbf{da} = dx\,dz\,\boldsymbol{e}_y \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'X-Z)} \tag{33}$$

$$\mathbf{da} = dy\,dz\,\boldsymbol{e}_x \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'Y-Z)} \tag{34}$$

$$d\tau = dx\,dy\,dz \tag{35}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z \tag{36}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{37}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right] \boldsymbol{e}_x + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right] \boldsymbol{e}_y + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right] \boldsymbol{e}_z \tag{38}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{39}$$

5.2 Coordenades cilíndriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ i $\boldsymbol{e}_z$, respecte ρ, φ i z:

$$\frac{\partial\,\boldsymbol{e}_\rho}{\partial \rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e}_\rho}{\partial \varphi} = \boldsymbol{e}_\varphi \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e}_\rho}{\partial z} = 0 \tag{40a}$$

$$\frac{\partial\,\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\,\boldsymbol{e}_\rho \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial z} = 0 \tag{40b}$$

$$\frac{\partial\,\boldsymbol{e}_z}{\partial \rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e}_z}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial\,\boldsymbol{e}_z}{\partial z} = 0 \tag{40c}$$

En les equacions següents, (F_ρ, F_φ, F_z) són les components de la funció vectorial $\mathbf{F}$ en un sistema de coordenades cilíndriques. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{dl} = d\rho\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\,d\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi + dz\,\boldsymbol{e}_z \tag{41}$$

$$\mathbf{da} = \rho\,d\varphi\,dz\,\boldsymbol{e}_\rho \qquad \text{(en una superfície cilíndrica)} \tag{42}$$

$$d\tau = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \tag{43}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z \tag{44}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{45}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right] \boldsymbol{e}_\rho + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right] \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right] \boldsymbol{e}_z \tag{46}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{47}$$

5.3 Coordenades esfèriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\boldsymbol{e_r}$, $\boldsymbol{e_\theta}$ i $\boldsymbol{e_\varphi}$, respecte r, θ i φ:

$$\frac{\partial\, \boldsymbol{e_r}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\, \boldsymbol{e_r}}{\partial \theta} = \boldsymbol{e_\theta} \qquad \frac{\partial\, \boldsymbol{e_r}}{\partial \varphi} = \sin\theta\, \boldsymbol{e_\varphi} \tag{48a}$$

$$\frac{\partial\, \boldsymbol{e_\theta}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\, \boldsymbol{e_\theta}}{\partial \theta} = -\,\boldsymbol{e_r} \qquad \frac{\partial\, \boldsymbol{e_\theta}}{\partial \varphi} = \cos\theta\, \boldsymbol{e_\varphi} \tag{48b}$$

$$\frac{\partial\, \boldsymbol{e_\varphi}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\, \boldsymbol{e_\varphi}}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial\, \boldsymbol{e_\varphi}}{\partial \varphi} = -\sin\theta\, \boldsymbol{e_r} - \cos\theta\, \boldsymbol{e_\theta} \tag{48c}$$

En les equacions següents, $(F_r, F_\theta, F_\varphi)$ són les components de la funció vectorial $\mathbf{F}$ en un sistema de coordenades esfèriques. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{dl} = dr\, \boldsymbol{e_r} + r\, d\theta\, \boldsymbol{e_\theta} + r \sin\theta\, d\varphi\, \boldsymbol{e_\varphi} \tag{49}$$

$$\mathbf{da} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \boldsymbol{e_r} \qquad \text{(en una superfície esfèrica)} \tag{50}$$

$$d\tau = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \tag{51}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\, \boldsymbol{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\, \boldsymbol{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\, \boldsymbol{e_\varphi} \tag{52}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \tag{53}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right] \boldsymbol{e_r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right] \boldsymbol{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right] \boldsymbol{e_\varphi} \tag{54}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{55}$$

6 Relacions

6.1 Operadors

Els operadors $\boldsymbol{\nabla}$ i $\boldsymbol{\nabla^2}$ es defineixen en coordenades cartesianes, segons les relacions següents:

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e_z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{56}$$

$$\boldsymbol{\nabla^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{57}$$

6.2 Identitats

Es compleixen les identitats següents:

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) \tag{58}$$
$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla\times(\nabla \times \mathbf{F}) \tag{59}$$
$$\nabla\times(\nabla f) = 0 \tag{60}$$
$$\nabla\cdot(\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \tag{61}$$

6.3 Gradient

El gradient compleix les relacions següents:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \tag{62}$$
$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{63}$$
$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F}\times(\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} \tag{64}$$

6.4 Divergència

La divergència compleix les relacions següents:

$$\nabla\cdot(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \tag{65}$$
$$\nabla\cdot(f\mathbf{F}) = (\nabla f)\cdot\mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F}) \tag{66}$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot(\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot(\nabla \times \mathbf{G}) \tag{67}$$

6.5 Rotacional

El rotacional compleix les relacions següents:

$$\nabla\times(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \tag{68}$$
$$\nabla\times(f\mathbf{F}) = (\nabla f)\times\mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F}) \tag{69}$$
$$\nabla\times(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) \tag{70}$$

7 Teoremes Vectorials

La funció escalar f i la funció vectorial $\mathbf{F}$ que apareixen en els teoremes següents han de ser contínues, diferenciables i les seves derivades primeres han de ser funcions contínues.

7.1 Teorema fonamental del gradient

Estableix que la integral sobre una corba C de la funció ∇f només depèn dels punts inicial i final sobre la corba, P i Q, i no del camí seguit per anar de l'un a l'altre.

$$\int_{C_{P\to Q}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(Q) - f(P) \tag{71}$$

Evidentment, la integral anterior és nul·la quan la corba d'integració és tancada ($P \equiv Q$).

$$\oint_C (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{72}$$

7.2 Teorema fonamental de la divergència (també anomenat de Gauss o de Green)

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\nabla \cdot \mathbf{F}$ i la integral sobre una superfície S de la funció $\mathbf{F}$, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, d\tau = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \tag{73}$$

El vector $d\mathbf{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

7.3 Teorema fonamental del rotacional (també anomenat de Stokes)

Estableix la relació entre la integral sobre una superfície S de la funció $\nabla \times \mathbf{F}$ i la integral sobre una corba C de la funció $\mathbf{F}$, on C és la corba tancada que limita S.

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \tag{74}$$

D'aquesta relació es desprèn que la integral de $\nabla \times \mathbf{F}$ sobre qualsevol superfície S limitada per la mateixa corba C, té el mateix valor.

Evidentment, la integral anterior és nul·la quan la superfície d'integració és tancada.

$$\oiint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = 0 \tag{75}$$

En la Figura 2 s'il·lustra el conveni de signes dels vectors $d\mathbf{l}$ i $d\mathbf{a}$.

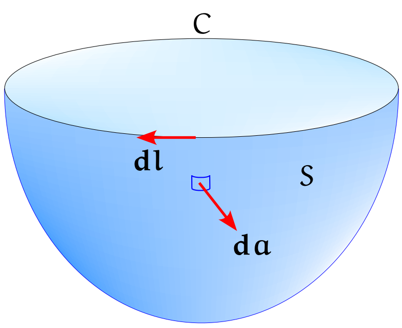

Figura 2 Conveni de signes del teorema de Stokes

7.4 Teorema del gradient

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció ∇f i la integral sobre una superfície S de la funció f, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\nabla f)\, d\tau = \oiint_S f\,\mathbf{da} \tag{76}$$

El vector $\mathbf{da}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

7.5 Teorema del rotacional

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\nabla \times \mathbf{F}$ i la integral sobre una superfície S de la funció $\mathbf{F}$, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{F})\, d\tau = -\oiint_S \mathbf{F} \times \mathbf{da} \tag{77}$$

El vector $\mathbf{da}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

8 Conversió de coordenades amb la calculadora HP Prime

Es donen a continuació una sèrie de programes per a la calculadora HP Prime, destinats a realitzar conversions entre els sistemes de coordenades rectangulars, cilíndriques i esfèriques.

Utilitzarem les funcions de la calculadora **`rectangular_coordinates`** i **`polar_coordinates`**, pensades per fer conversions entre coordenades cartesianes i polars, en dues dimensions.

La funció **`Rec_a_Cil`** pren com a paràmetre les coordenades cartesianes d'un punt en la forma $[x, y, z]$, i torna les coordenades cilíndriques corresponents en la forma $[\rho, \varphi, z]$.

Llistat 1 Funció Rec_a_Cil

```
EXPORT Rec_a_Cil(rec)
BEGIN
LOCAL cil:=polar_coordinates(rec(1),rec(2));
  RETURN [cil(1),cil(2),rec(3)];
END;
```

La funció **`Cil_a_Rec`** pren com a paràmetre les coordenades cilíndriques d'un punt en la forma $[\rho, \varphi, z]$, i torna les coordenades cartesianes corresponents en la forma $[x, y, z]$.

Llistat 2 Funció Cil_a_Rec

```
EXPORT Cil_a_Rec(cil)
BEGIN
LOCAL rec:=rectangular_coordinates(cil(1),cil(2));
  RETURN [rec(1),rec(2),cil(3)];
END;
```

La funció **`Esf_a_Cil`** pren com a paràmetre les coordenades esfèriques d'un punt en la forma $[r, \theta, \varphi]$, i torna les coordenades cilíndriques corresponents en la forma $[\rho, \varphi, z]$.

Llistat 3 Funció Esf_a_Cil

```
EXPORT Esf_a_Cil(esf)
BEGIN
LOCAL cil:=rectangular_coordinates(esf(1),esf(2));
  RETURN [cil(2),esf(3),cil(1)];
END;
```

La funció **`Cil_a_Esf`** pren com a paràmetre les coordenades cilíndriques d'un punt en la forma $[\rho, \varphi, z]$, i torna les coordenades esfèriques corresponents en la forma $[r, \theta, \varphi]$.

Llistat 4 Funció Cil_a_Esf

```
EXPORT Cil_a_Esf(cil)
BEGIN
LOCAL esf:=polar_coordinates(cil(3),cil(1));
  RETURN [esf(1),esf(2),cil(2)];
END;
```

La funció **`Rec_a_Esf`** pren com a paràmetre les coordenades rectangulars d'un punt en la forma $[x, y, z]$, i torna les coordenades esfèriques corresponents en la forma $[r, \theta, \varphi]$.

Llistat 5 Funció Rec_a_Esf

```
EXPORT Rec_a_Esf(rec)
BEGIN
 RETURN Cil_a_Esf(Rec_a_Cil(rec));
END;
```

La funció **`Esf_a_Rec`** pren com a paràmetre les coordenades esfèriques d'un punt en la forma $[r, \theta, \varphi]$, i torna les coordenades rectangulars corresponents en la forma $[x, y, z]$.

Llistat 6 Funció Esf_a_Rec

```
EXPORT Esf_a_Rec(esf)
BEGIN
  RETURN Cil_a_Rec(Esf_a_Cil(esf));
END;
```

Totes aquestes funcions treballen en el mode angular que estigui actiu en la calculadora en el moment de ser executades.

9 Bibliografia

H. M. Schey. *Div, grad curl and all that, an informal text on vector calculus*. W. W. Norton and Company, 3rd edition, 1997.

Paul Lorrain, Dale R. Corson. *Electromagnetic fields and waves*. W. H. Freeman and Company, 1972.

David J. Griffiths, Reed College. *Introduction to electrodynamics*. Prentice-Hall, 3rd edition, 1999.

Daniel Fleisch. *A student's guide to Maxwell's equations*. Cambridge University Press, 2008.