Càlcul Vectorial en $\mathbb{R}^3$

Josep Mollera Barriga

4 de gener de 2010

1 Definicions

Es dóna en primer lloc la definició de les variables que s'utilitzen en aquest document.

V: Volum d'integració.

S: Superfície d'integració.

C: Corba d'integració.

$\mathrm{d}\tau$: Diferencial de volum, del volum V.

$\mathbf{d}\boldsymbol{a}$: Vector diferencial de superfície, de la superfície S; $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ és perpendicular a S.

$\mathbf{d}\boldsymbol{l}$: Vector diferencial de longitud, de la corba C; $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ és tangent a C.

(x, y, z): Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cartesianes.

(ρ, ϕ, z): Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cilíndriques.

(r, θ, ϕ): Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades esfèriques.

(u, v, w): Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades qualsevol.

$\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes.

$\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{z}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques.

$\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques.

$\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades qualsevol.

P, Q: Punts en $\mathbb{R}^3$.

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$: Vectors en $\mathbb{R}^3$.

α: Angle entre dos vectors en $\mathbb{R}^3$.

f, g: Funcions escalars; $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$: Funcions vectorials; $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

∇f: Gradient de la funció escalar f; $\nabla f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$: Divergència de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$; $\nabla \cdot \boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$\nabla \times \boldsymbol{F}$: Rotacional de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$; $\nabla \times \boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$\nabla^2 f$: Laplacià de la funció escalar f; $\nabla^2 f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\nabla^2 \boldsymbol{F}$: Laplacià de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$; $\nabla^2 \boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

2 Sistemes de Coordenades

Es representen en la Figura 1, tres dels sistemes de coordenades més utilitzats: el cartesià, el cilíndric i l'esfèric.

En el sistema de coordenades cartesianes, els vectors directors tenen una orientació fixa, mentre que en els sistemes de coordenades cilíndriques i esfèriques, els vectors directors tenen una orientació variable, que depèn del punt P al qual ens estiguem referint.

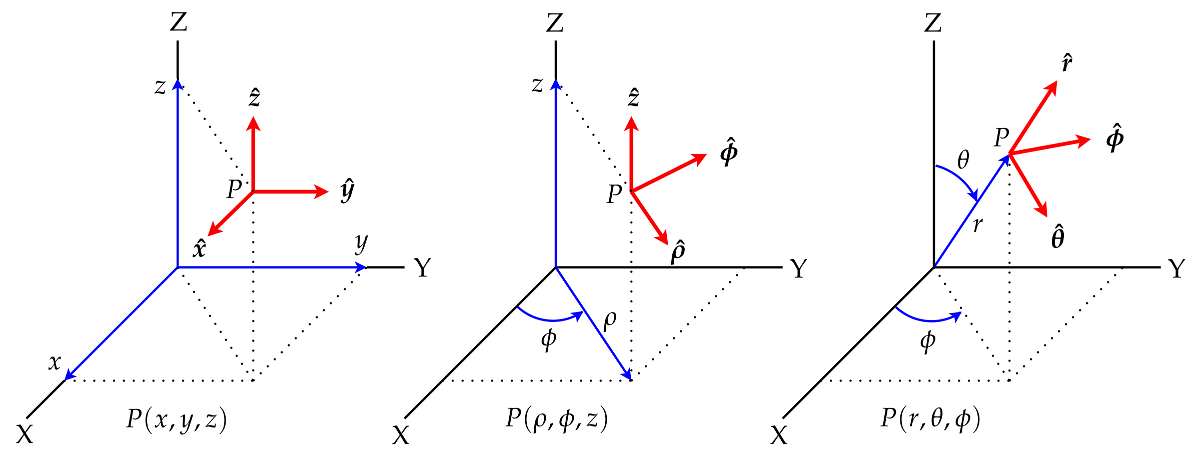

Figura 1: Coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques

En la Taula 1 es donen els rangs de les coordenades de cadascun d'aquests tres sistemes.

Taula 1: Rangs de les Coordenades

Cartesianes	Cilíndriques	Esfèriques
$x \in (-\infty, \infty)$	$\rho \in [0, \infty)$	$r \in [0, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$	$\phi \in [0, 2\pi)$	$\theta \in [0, \pi]$
$z \in (-\infty, \infty)$	$z \in (-\infty, \infty)$	$\phi \in [0, 2\pi)$

2.1 Relacions entre les coordenades cartesianes i cilíndriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \phi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = \rho \cos \phi \tag{1a}$$
$$y = \rho \sin \phi \tag{1b}$$
$$z = z \tag{1c}$$

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \phi, z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2a}$$
$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \tag{2b}$$
$$z = z \tag{2c}$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{z}}$, en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos \phi \, \hat{\boldsymbol{x}} + \sin \phi \, \hat{\boldsymbol{y}} \tag{3a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \, \hat{\boldsymbol{x}} + \cos \phi \, \hat{\boldsymbol{y}} \tag{3b}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \tag{3c}$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$, en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \cos \phi \, \hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin \phi \, \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{4a}$$
$$\hat{\boldsymbol{y}} = \sin \phi \, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos \phi \, \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{4b}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \tag{4c}$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z), s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z), en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_\rho \cos \phi - A_\phi \sin \phi \tag{5a}$$
$$A_y = A_\rho \sin \phi + A_\phi \cos \phi \tag{5b}$$
$$A_z = A_z \tag{5c}$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z), s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z), en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi \tag{6a}$$
$$A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \tag{6b}$$
$$A_z = A_z \tag{6c}$$

2.2 Relacions entre les coordenades cartesianes i esfèriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x,y,z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r,\theta,\phi)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{7a}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{7b}$$
$$z = r\cos\theta \tag{7c}$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r,\theta,\phi)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x,y,z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{8a}$$
$$\theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{8b}$$
$$\phi = \arctan\frac{y}{x} \tag{8c}$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$, en un punt $P(r,\theta,\phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{y}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9b}$$
$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{9c}$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$, en un punt $P(r,\theta,\phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{10a}$$
$$\hat{\boldsymbol{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{10b}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{10c}$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z), s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ), en un punt $P(r,\theta,\phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_r\sin\theta\cos\phi + A_\theta\cos\theta\cos\phi - A_\phi\sin\phi \tag{11a}$$
$$A_y = A_r\sin\theta\sin\phi + A_\theta\cos\theta\sin\phi + A_\phi\cos\phi \tag{11b}$$
$$A_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \tag{11c}$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ), s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z), en un punt $P(r,\theta,\phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta \tag{12a}$$
$$A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta \tag{12b}$$
$$A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \tag{12c}$$

2.3 Relacions entre les coordenades cilíndriques i esfèriques

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho,\phi,z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r,\theta,\phi)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = r\sin\theta \tag{13a}$$
$$\phi = \phi \tag{13b}$$
$$z = r\cos\theta \tag{13c}$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r,\theta,\phi)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho,\phi,z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \tag{14a}$$
$$\theta = \arctan\frac{\rho}{z} \tag{14b}$$
$$\phi = \phi \tag{14c}$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$, en un punt $P(r,\theta,\phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{15a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{15b}$$
$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{15c}$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$, en un punt $P(r,\theta,\phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{16a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{16b}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{16c}$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z), s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ), en un punt $P(r,\theta,\phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_r\sin\theta + A_\theta\cos\theta \tag{17a}$$
$$A_\phi = A_\phi \tag{17b}$$
$$A_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \tag{17c}$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ), s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z), en un punt $P(r,\theta,\phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_\rho\sin\theta + A_z\cos\theta \tag{18a}$$
$$A_\theta = A_\rho\cos\theta - A_z\sin\theta \tag{18b}$$
$$A_\phi = A_\phi \tag{18c}$$

3 Operacions Bàsiques

A partir de les components (A_u, A_v, A_w) i (B_u, B_v, B_w) de dos vectors $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, tenim:

3.1 Mòdul

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_u^2 + A_v^2 + A_w^2} \tag{19}$$

3.2 Addició i substracció

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_u + B_u)\,\hat{\boldsymbol{u}} + (A_v + B_v)\,\hat{\boldsymbol{v}} + (A_w + B_w)\,\hat{\boldsymbol{w}} \tag{20a}$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_u - B_u)\,\hat{\boldsymbol{u}} + (A_v - B_v)\,\hat{\boldsymbol{v}} + (A_w - B_w)\,\hat{\boldsymbol{w}} \tag{20b}$$

3.3 Producte escalar

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_u B_u + A_v B_v + A_w B_w \tag{21}$$
$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\alpha \tag{22}$$
$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \tag{23}$$
$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{24}$$

El producte escalar de dos vectors perpendiculars és nul.

3.4 Producte vectorial

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_v B_w - A_w B_v)\,\hat{\boldsymbol{u}} + (A_w B_u - A_u B_w)\,\hat{\boldsymbol{v}} + (A_u B_v - A_v B_u)\,\hat{\boldsymbol{w}} \tag{25}$$
$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\alpha \tag{26}$$
$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \tag{27}$$
$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \tag{28}$$

El producte vectorial de dos vectors paral·lels és nul.

El producte vectorial de dos vectors, és un altre vector, el sentit del qual ve donat per la regla del cargol: és el sentit d'avanç que té un cargol, amb el seu eix perpendicular al pla format pels vectors $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, quan gira en el sentit que portaria el primer vector $\boldsymbol{A}$ a trobar el segon vector $\boldsymbol{B}$, utilitzant el menor angle possible.

3.5 Derivada temporal

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_u}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{u}} + \frac{\mathrm{d}A_v}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{v}} + \frac{\mathrm{d}A_w}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{w}} \tag{29}$$

4 Càlcul Diferencial

4.1 Coordenades cartesianes

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ i $\hat{\boldsymbol{z}}$, respecte x, y i z:

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{x}}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{x}}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{x}}}{\partial z} = 0 \tag{30a}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\partial z} = 0 \tag{30b}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial z} = 0 \tag{30c}$$

En les equacions següents, (F_x, F_y, F_z) són les components de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$, en un sistema de coordenades cartesianes. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{31}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'X-Y)} \tag{32}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'X-Z)} \tag{33}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{(en un pla paral·lel a l'Y-Z)} \tag{34}$$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{35}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{36}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{37}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{x}} + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right]\hat{\boldsymbol{y}} + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]\hat{\boldsymbol{z}} \tag{38}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{39}$$

4.2 Coordenades cilíndriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ i $\hat{\boldsymbol{z}}$, respecte ρ, ϕ i z:

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \phi} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial z} = 0 \tag{40a}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \phi} = -\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial z} = 0 \tag{40b}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial \rho} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial \phi} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\partial z} = 0 \tag{40c}$$

En les equacions següents, (F_ρ, F_ϕ, F_z) són les components de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$, en un sistema de coordenades cilíndriques. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{41}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{(en una superfície cilíndrica)} \tag{42}$$

$$\mathrm{d}\tau = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \tag{43}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{44}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{45}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\phi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{z}} \tag{46}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{47}$$

4.3 Coordenades esfèriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ i $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, respecte r, θ i ϕ:

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \phi} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{48a}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} = -\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \phi} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{48b}$$

$$\frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \phi} = -\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{48c}$$

En les equacions següents, (F_r, F_θ, F_ϕ) són les components de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$, en un sistema de coordenades esfèriques. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}r\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{49}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \text{(en una superfície esfèrica)} \tag{50}$$

$$\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{51}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{52}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \tag{53}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\phi\sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{54}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{55}$$

5 Relacions

5.1 Operadors

Els operadors ∇ i ∇^2 es defineixen en coordenades cartesianes, segons les relacions següents :

$$\nabla \equiv \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{56}$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{57}$$

5.2 Identitats

Es compleixen les identitats següents:

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) \tag{58}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) \tag{59}$$

$$\nabla\times(\nabla f) = 0 \tag{60}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = 0 \tag{61}$$

5.3 Gradient

El gradient compleix les relacions següents:

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \tag{62}$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{63}$$

$$\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F}\times(\nabla\times\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G}\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} \tag{64}$$

5.4 Divergència

La divergència compleix les relacions següents:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\nabla\cdot\boldsymbol{B}) \tag{65}$$

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{F}) = (\nabla f)\cdot\boldsymbol{F} + f(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) \tag{66}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G}) \tag{67}$$

5.5 Rotacional

El rotacional compleix les relacions següents:

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{68}$$

$$\nabla\times(f\boldsymbol{F}) = (\nabla f)\times\boldsymbol{F} + f(\nabla\times\boldsymbol{F}) \tag{69}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) \tag{70}$$

6 Teoremes Vectorials

La funció escalar f i la funció vectorial $\boldsymbol{F}$ que apareixen en els teoremes següents han de ser contínues, diferenciables i les seves derivades primeres han de ser funcions contínues.

6.1 Teorema fonamental del gradient

Estableix que la integral sobre una corba C de la funció ∇f només depèn dels punts inicial P i final Q, i no del camí seguit per anar de l'un a l'altre.

$$\int_{C_{P\to Q}} (\nabla f) \cdot \mathrm{d}l = f(Q) - f(P) \tag{71}$$

Evidentment, la integral anterior es nul·la quan la corba d'integració és tancada ($P = Q$).

$$\oint_C (\nabla f) \cdot \mathrm{d}l = 0 \tag{72}$$

6.2 Teorema fonamental de la divergència (també anomenat de Gauss o de Green)

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ i la integral sobre una superfície S de la funció $\boldsymbol{F}$, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\ \mathrm{d}\tau = \oiint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{73}$$

El vector $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

6.3 Teorema fonamental del rotacional (també anomenat d'Stokes)

Estableix la relació entre la integral sobre una superfície S de la funció $\nabla \times \boldsymbol{F}$ i la integral sobre una corba C de la funció $\boldsymbol{F}$, on C és la corba tancada que limita S.

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{a} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l} \tag{74}$$

D'aquesta relació es desprèn que la integral de $\nabla \times \boldsymbol{F}$ sobre qualsevol superfície S limitada per la mateixa corba C, té el mateix valor.

Evidentment, la integral anterior es nul·la quan la superfície d'integració és tancada.

$$\oiint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{a} = 0 \tag{75}$$

En la Figura 2 a la pàgina següent s'il·lustra el conveni de signes dels vectors $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ i $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$.

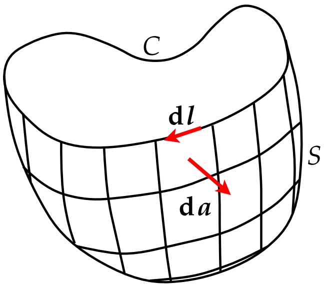

Figura 2: Conveni de signes del teorema d'Stokes

6.4 Teorema del gradient

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció ∇f i la integral sobre una superfície S de la funció f, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\nabla f)\, \mathrm{d}\tau = \oiint_S f\, \mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{76}$$

El vector $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

6.5 Teorema del rotacional

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\nabla \times \boldsymbol{F}$ i la integral sobre una superfície S de la funció $\boldsymbol{F}$, on S és la superfície tancada que limita V.

$$\iiint_V (\nabla \times \boldsymbol{F})\, \mathrm{d}\tau = -\oiint_S \boldsymbol{F} \times \mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{77}$$

El vector $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V.

7 Bibliografia

H. M. SCHEY. *Div, grad curl and all that, an informal text on vector calculus*. W. W. Norton and Company, 3rd edition, 1997.

PAUL LORRAIN, DALE R. CORSON. *Electromagnetic fields and waves*. W. H. Freeman and Company, 1972.

DAVID J. GRIFFITHS, REED COLLEGE. *Introduction to electrodynamics*. Prentice-Hall, 3rd edition, 1999.

DANIEL FLEISCH. *A student's guide to Maxwell's equations*. Cambridge University Press, 2008.