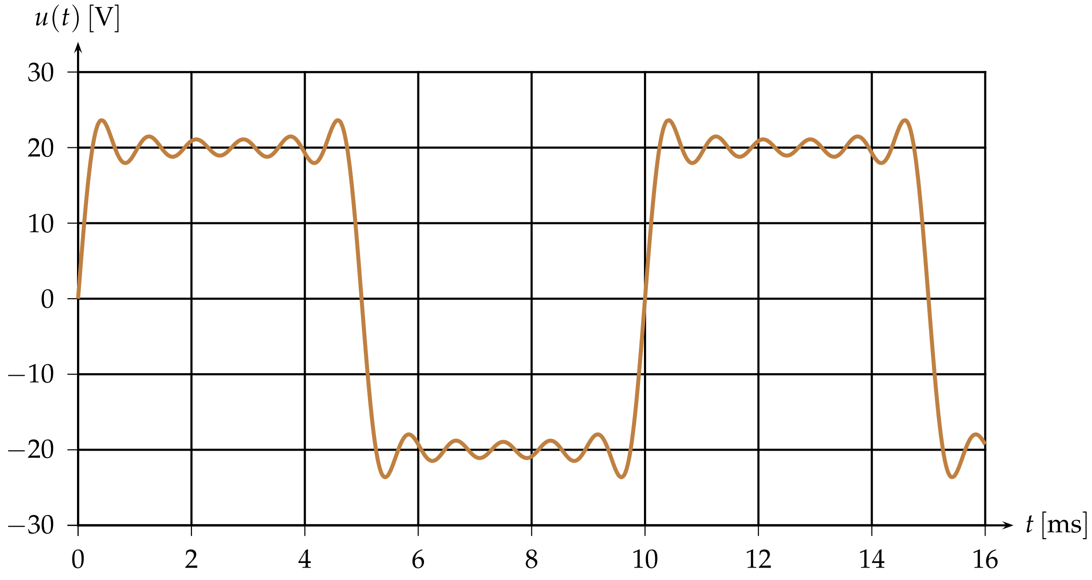
Qüestions Diverses d'Electrotècnia

Versió 2.1



Josep Mollera Barriga

Índex

Índex de taules

Índex de figures

Prefaci

Voldria dir en primer lloc que no he intentat escriure un tractat complet d'electrotècnia, d'electrònica o de sistemes elèctrics de potència, sinó que més aviat he volgut fer una recopilació de qüestions teòriques i pràctiques relacionades amb els camps mencionats anteriorment.

Les fonts d'informació utilitzades en la realització d'aquest llibre són molt diverses, i inclouen llibres sobre les diferents matèries, articles de revistes o d'Internet, apunts de classe d'assignatures impartides a l'ETSEIB, i d'altres.

Pel que fa al llibre en si mateix, s'ha escrit utilitzant el sistema de composició de textos LaTeX, el qual permet integrar molt fàcilment text, fórmules i gràfics, obtenint uns resultat de gran qualitat. S'han utilitzat diversos paquets d'ampliació, com ara l'AMS-LaTeX, per tal de millorar la presentació de certes parts del llibre, com per exemple les taules, les capçaleres, les fórmules matemàtiques, etc.

Aquest llibre, està pensat per ser utilitzat tant de forma directa en la pantalla d'un ordinador, com en paper després d'haver-lo imprès; per tal d'estalviar paper, el text té un format pensat per ser imprès en paper DIN-A4, a dues cares.

El contingut del llibre és molt divers, i va des de temes força teòrics, fins a d'altres bastant més pràctics. He procurat donar exemples de tots els conceptes que s'hi expliquen, excepció feta dels molt elementals, perquè crec que és important no quedar-se tan sols amb la teoria de la resolució d'un problema determinat, sinó que és molt útil veure exemples resolts pas a pas.

Encara que he fet tots els esforços possibles per eliminar qualsevol mena d'error en aquest text, és gairebé inevitable que n'hagi quedat algun, per tant, si algú troba algun error, farà bé d'avisar-me!

Únicament em resta dir, que espero que els que llegeixin aquest llibre el trobin útil i interessant.

Josep Mollera Barriga

Badalona, 2 de gener de 2007

(✉:jmollerab@ya.com)

Historial

Es presenta a continuació l'evolució que ha tingut aquest llibre, en les successives versions que han aparegut.

Versió 1.0 (8 de gener de 2005)

Després de molts esforços, surt a la llum la primera versió d'aquest llibre, format pels capítols 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7, i els apèndixs A, B, C, D i E.

Versió 1.1 (8 de febrer de 2005)

S'afegeix al llibre aquest apartat «Historial».

En l'apartat «Notació», s'especifica que el mòdul d'un nombre complex és igual a l'arrel quadrada *positiva* de la suma dels quadrats de les seves parts real i imaginària.

Es modifiquen les equacions (1.54) i (1.55).

S'amplia la secció corresponent a les diferències entre les normatives CEI i ANSI, que fan referència als transformadors de mesura i protecció (secció 8.5).

Es revisa tot el text, fent-hi algunes petites modificacions i correccions.

Versió 1.2 (16 d'abril de 2005)

En l'apartat «Notació», s'afegeix l'explicació de la convenció seguida a l'hora de dibuixar les fletxes que representen les tensions i els corrents.

S'afegeix l'apèndix F, on s'explica la designació de les classes de refrigeració en els transformadors de potència.

Versió 1.3 (24 d'octubre de 2005)

Els apèndixs A a F de la versió 1.2, es desplacen tres lletres cap avall, passant a ser els apèndixs D a I respectivament.

S'afegeix un nou apèndix A, dedicat a l'alfabet grec.

S'afegeix un nou apèndix B, dedicat al sistema internacional d'unitats (SI).

S'afegeix un nou apèndix C, dedicat a les constants físiques.

En l'apartat «Notació», s'amplien les definicions corresponents al conjugat i al mòdul d'un nombre complex, i s'inclouen les definicions de $\underline{\boldsymbol{V}}^*$ i $\underline{\boldsymbol{V}}^\mathrm{H}$.

S'ha ampliat la secció 1.3, corresponent a la potència complexa.

S'ha ampliat l'exemple de la secció 1.6.

En la secció 5.2, s'ha afegit el càlcul de R_P i $\underline{Z}_\mathrm{S}$.

A l'hora de referir-se a la relació de transformació d'un transformador, se substitueix el símbol «$\ddot{u}$» emprat en les versions anteriors, pel símbol «m».

Versió 1.4 (2 de desembre de 2005)

Es representa correctament la Figura 1.7, ja que estava tallada per la dreta.

Es corregeix l'equació (7.9a) i l'exemple que hi ha a continuació, el qual en fa ús.

Es revisa tot el text, fent-hi algunes correccions.

Versió 2.0 (3 d'agost de 2006)

S'ha modificat el criteri de colors utilitzat, a l'hora de ressaltar els enllaços interns del document (equacions, pàgines, etc.) i els enllaços externs; ara els enllaços interns són de color vermell, i els enllaços externs són de color magenta. A més totes els encapçalaments de capítols, seccions, subseccions, taules i figures, són ara de color blau.

S'han afegit nous capítol i s'ha fet una reordenació que afecta a diversos capítols i apèndixs, segons es detalla a continuació:

- Els capítols 1 i 2 de la versió 1.4 mantenen la seva posició.
- S'afegeix un nou capítol 3, on es tracten les sèries de Fourier.
- S'afegeix un nou capítol 4, on es tracta la transformada de Laplace.
- El capítol 3 de la versió 1.4 es desplaça dos números cap avall, passant a ser el capítol 5.
- L'apèndix E de la versió 1.4 es converteix en el capítol 6.

- Els capítols 4, 5, 6 i 7 de la versió 1.4 es desplacen tres números cap avall, passant a ser els capítols 7, 8, 9 i 10 respectivament.
- L'apèndix G de la versió 1.4 es converteix en el capítol 11.
- Els apèndixs A, B, C i D de la versió 1.4 mantenen la seva posició.
- S'afegeix un nou apèndix E, on es tracten relacions trigonomètriques.
- L'apèndix F de la versió 1.4 manté la seva posició.
- Els apèndixs H i I de la versió 1.4 es desplacen una lletra cap amunt, passant a ser els apèndixs G i H respectivament.

A l'hora de referir-se a la font de corrent i a l'admitància d'un circuit equivalent Norton, se substitueix el subíndex «Th» emprat en les versions anteriors, pel subíndex «No».

En l'apartat «Notació» s'afegeixen els símbols: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ i $\mathbb{C}$.

S'ha afegit el teorema de la superposició en la secció 1.1.

S'ha afegit la bateria en la secció 1.2, com a un dels components elementals d'un circuit elèctric.

S'ha afegit la secció 1.4, on es defineixen els valors mitjà i eficaç, i els factors d'amplitud, de forma i d'arrissada.

S'ha afegit la secció 1.5, on es tracten els circuits divisors de tensió i divisors de corrent.

S'ha modificat l'equació (7.2) i les taules 7.1 i 7.5.

S'ha afegit la secció 8.6, on s'explica com connectar correctament transformadors de corrent i de tensió, a aparells de mesura o de protecció.

S'ha millorat l'explicació de la secció 10.5.

S'ha reestructurat la taula B.2.

Versió 2.1 (2 de gener de 2007)

S'adopta la compaginació moderna dels paràgrafs en tot el llibre, consistent en separar-los per una línia en blanc i en no entrar la primera línia de text.

S'unifica la representació de les fonts de corrent: un cercle amb una fletxa a dins.

S'afegeix una nota a peu de pàgina en la secció 1.1.1, relacionant aquesta secció amb la secció 9.5.

Es millora l'explicació de la secció 1.6, a l'hora que es trasllada de lloc (en les versions anteriors formava part del capítol 5).

Es millora l'explicació de la secció 2.4.

S'afegeix una nota a peu de pàgina en la secció 5.2, relacionant aquesta secció amb el capítol 10.

S'amplia la descripció de l'equació (7.25).

S'afegeix la secció 10.6, on s'explica com resoldre sistemes d'equacions no lineals amb els programes *Mathematica*® i *MATLAB*®.

Es millora l'explicació de la secció E.2, modificant la figura E.1 i numerant l'equació de la llei dels sinus.

Notació

Es presenta a continuació la notació seguida en aquest llibre.

Cal fer notar que les variables vectorials o matricials s'escriuen en lletra negreta inclinada, mentre que les variables escalars s'escriuen en lletra normal inclinada.

V Una variable real.

$\underline{V}$ Una variable complexa.

$\underline{V}^*$ Conjugat d'una variable complexa. Es compleixen les relacions:

$(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \cdots + \underline{V}_n)^* = \underline{V}_1^* + \underline{V}_2^* + \cdots + \underline{V}_n^*$

$(\underline{V}_1 \underline{V}_2 \cdots \underline{V}_n)^* = \underline{V}_1^* \underline{V}_2^* \cdots \underline{V}_n^*$

$(\underline{V}_1 / \underline{V}_2)^* = \underline{V}_1^* / \underline{V}_2^*$

$|\underline{V}|$ Mòdul d'una variable complexa. Es compleixen les relacions:

$\underline{V}\,\underline{V}^* = |\underline{V}|^2$

$|\underline{V}_1 \underline{V}_2 \cdots \underline{V}_n| = |\underline{V}_1||\underline{V}_2| \cdots |\underline{V}_n|$

$|\underline{V}_1 / \underline{V}_2| = |\underline{V}_1| / |\underline{V}_2|$

$|\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \cdots + \underline{V}_n| \leq |\underline{V}_1| + |\underline{V}_2| + \cdots + |\underline{V}_n|$

$\arg(\underline{V})$ Argument (angle) d'una variable complexa.

$\mathrm{Re}(\underline{V})$ Part real d'una variable complexa.

$\mathrm{Im}(\underline{V})$ Part imaginària d'una variable complexa.

j La unitat imaginària, definida com: $\mathrm{j} \equiv \sqrt{-1}$

$A + \mathrm{j}B$ Expressió cartesiana (part real i part imaginària) d'una variable complexa.

$Z_{\measuredangle\delta}$ Expressió polar (mòdul i argument) d'una variable complexa. Les relacions entre A, B, Z i δ són:

$$Z = +\sqrt{A^2 + B^2}, \quad \delta = \arctan \frac{B}{A}, \quad A = Z \cos \delta, \quad B = Z \sin \delta$$

$Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta}$ Expressió d'Euler d'una variable complexa, definida com: $Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta} \equiv Z(\cos \delta + \mathrm{j} \sin \delta)$

$\boldsymbol{V}$	Una matriu real o un vector real.
$\boldsymbol{V}^{-1}$	Matriu inversa d'una matriu real.
$\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}$	Matriu transposada d'una matriu real o vector transposat d'un vector real.
$\boldsymbol{V}(n)$	Element n-èsim d'un vector real.
$\boldsymbol{V}(m,n)$	Element de la fila m i columna n d'una matriu real.
$\underline{\boldsymbol{V}}$	Una matriu complexa o un vector complex.
$\underline{\boldsymbol{V}}^{-1}$	Matriu inversa d'una matriu complexa.
$\underline{\boldsymbol{V}}^{\mathsf{T}}$	Matriu transposada d'una matriu complexa o vector transposat d'un vector complex.
$\underline{\boldsymbol{V}}^{*}$	Matriu conjugada d'una matriu complexa o vector conjugat d'un vector complex.
$\underline{\boldsymbol{V}}^{\mathsf{H}}$	Matriu conjugada transposada d'una matriu complexa o vector conjugat transposat d'un vector complex, definit com: $\underline{\boldsymbol{V}}^{\mathsf{H}} \equiv (\underline{\boldsymbol{V}}^{*})^{\mathsf{T}}$.
$\underline{\boldsymbol{V}}(n)$	Element n-èsim d'un vector complex.
$\underline{\boldsymbol{V}}(m,n)$	Element de la fila m i columna n d'una matriu complexa.

Pel que fa als sentits assignats a les fletxes que representen les tensions i els corrents, en els diversos circuits elèctrics que apareixen en aquest llibre, s'utilitza la convenció següent:

$\xrightarrow{U}$	Tensió contínua; la fletxa indica el sentit de la caiguda de tensió, és a dir, va del nus positiu al nus negatiu.
$\xrightarrow{I}$	Corrent continu; la fletxa indica el sentit assignat com a positiu a la intensitat.
$\xrightarrow{\underline{U}}$	Tensió alterna; la fletxa indica el sentit assignat com a positiu a la caiguda de tensió, quan el nus d'origen de la fletxa té un potencial més positiu que el nus de destinació.
$\xrightarrow{\underline{I}}$	Corrent altern; la fletxa indica el sentit assignat com a positiu a la intensitat.

Els símbols que representes els diferents conjunts de nombres són:

$\mathbb{Z}$	Nombres enters: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^{+}$	Nombres enters positius (naturals): $1, 2, 3, 4 \ldots$
$\mathbb{Z}^{*}$	Nombres enters no negatius: $0, 1, 2, 3, 4 \ldots$
$\mathbb{Z}^{-}$	Nombres enters negatius: $-1, -2, -3, -4 \ldots$
$\mathbb{Q}$	Nombres racionals.
$\mathbb{R}$	Nombres reals.
$\mathbb{R}^{+}$	Nombres reals positius.
$\mathbb{R}^{-}$	Nombres reals negatius.
$\mathbb{C}$	Nombres complexos.

Part I

Electrotècnia

Capítol 1

Fonaments

Es tracten en aquest capítol qüestions bàsiques d'electrotècnia, com ara teoremes, definicions i relacions.

1.1 Teoremes d'electrotècnia

1.1.1 Teorema de Thévenin–Norton

El teorema de Thévenin ens permet substituir una xarxa complexa formada per elements lineals, per un circuit equivalent format per una font de tensió $\underline{E}_{\mathrm{Th}}$ en sèrie amb una impedància $\underline{Z}_{\mathrm{Th}}$.

Atenent a la Figura 1.1, si coneixem la tensió en buit $\underline{U}_{\mathrm{o}}$ entre dos nusos α i β d'una xarxa, i la impedància $\underline{Z}_{\alpha\beta}$ d'aquesta xarxa vista des d'aquests dos nusos, podem obtenir els valors del circuit Thévenin equivalent entre aquests dos nusos, a partir de les relacions següents:

$$\underline{E}_{\mathrm{Th}} = \underline{U}_{\mathrm{o}} \qquad \underline{Z}_{\mathrm{Th}} = \underline{Z}_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

D'aquesta manera, la connexió d'aquesta xarxa a través dels nusos α i β a una càrrega qualsevol $\underline{Z}_{\mathrm{Q}}$, és equivalent pel que fa a aquesta càrrega, a connectar el circuit equivalent Thévenin a la càrrega.

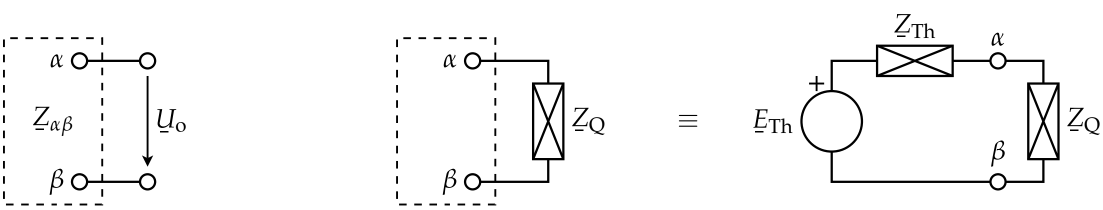


Figura 1.1: Teorema de Thévenin

El teorema de Norton ens permet substituir una xarxa complexa formada per elements lineals, per un circuit equivalent format per una font de corrent $\underline{J}_{\mathrm{No}}$ en paral·lel amb una admitància $\underline{Y}_{\mathrm{No}}$.

Atenent a la Figura 1.2 a la pàgina següent, si coneixem el corrent de curt circuit $\underline{I}_{\mathrm{cc}}$ entre dos nusos α i β d'una xarxa, i l'admitància $\underline{Y}_{\alpha\beta}$ d'aquesta xarxa vista des d'aquests dos nusos, podem obtenir els valors del circuit Norton equivalent entre aquests dos nusos, a partir de les relacions següents:

$$\underline{J}_{\mathrm{No}} = \underline{I}_{\mathrm{cc}} \qquad \underline{Y}_{\mathrm{No}} = \underline{Y}_{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

D'aquesta manera, la connexió d'aquesta xarxa a través dels nusos α i β a una càrrega qualsevol $\underline{Z}_{\mathrm{Q}}$, és equivalent pel que fa a aquesta càrrega, a connectar el circuit equivalent Norton a la càrrega.

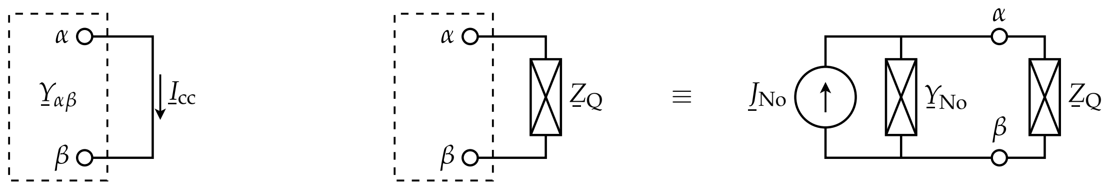


Figura 1.2: Teorema de Norton

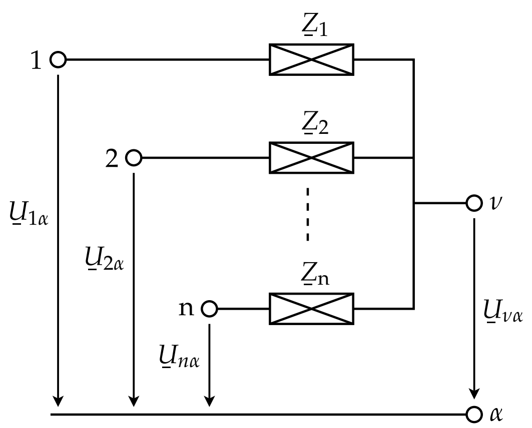
Els circuits Thévenin i Norton d'una xarxa són equivalents entre si. Els paràmetres que defineixen aquests circuits guarden les relacions següents:

$$\underline{E}_{\mathrm{Th}} = \frac{\underline{J}_{\mathrm{No}}}{\underline{Y}_{\mathrm{No}}} \qquad \underline{J}_{\mathrm{No}} = \frac{\underline{E}_{\mathrm{Th}}}{\underline{Z}_{\mathrm{Th}}} \qquad \underline{Z}_{\mathrm{Th}} = \frac{1}{\underline{Y}_{\mathrm{No}}} \tag{1.3}$$

Els valors $\underline{Z}_{\mathrm{Th}}$ o $\underline{Y}_{\mathrm{No}}$ es poden obtenir substituint en la xarxa les fonts de tensió per curt circuits, i les fonts de corrent per circuits oberts, i calculant aleshores la impedància o admitància equivalent[1].

1.1.2 Teorema de Millman

Atenent a la Figura 1.3, el teorema de Millman ens permet obtenir la tensió de l'extrem comú ν de diverses impedàncies, respecte d'un punt qualsevol α, a partir de les tensions dels altres extrems de les impedàncies respecte del mateix punt α.

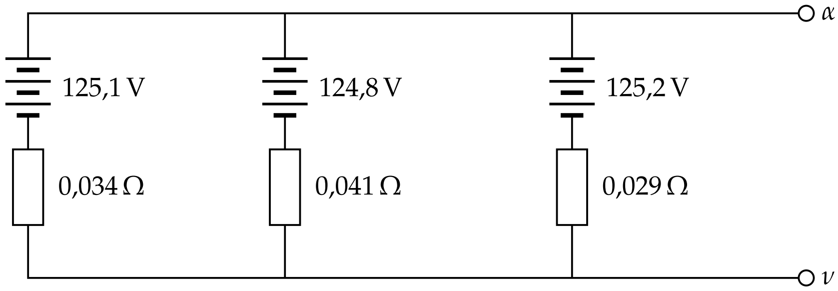


$$\underline{U}_{\nu\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{U}_{k\alpha}}{\underline{Z}_k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_k}} \tag{1.4}$$

Figura 1.3: Teorema de Millman

[1]El càlcul sistemàtic de $\underline{Z}_{\mathrm{Th}}$ i $\underline{Y}_{\mathrm{No}}$ en una xarxa qualsevol, s'exposa en la secció 9.5

Exemple 1.1 *A partir de la figura següent, es tracta de determinar els circuits Thévenin i Norton equivalents del circuit format per les tres bateries i les seves resistències, i calcular la tensió i la intensitat que existirien en una resistència de càrrega $R_Q = 50\,\Omega$, que es connectés entre els punts α i ν.*



La impedància Thévenin equivalent es calcula, tal com s'ha dit en la Secció 1.1.1, substituint en el circuit totes les fonts de tensió per curt circuits, així doncs, ens queden tres resistències en paral·lel entre α i ν:

$$Z_{\text{Th}} = R_{\alpha\nu} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}034\,\Omega} + \frac{1}{0{,}041\,\Omega} + \frac{1}{0{,}029\,\Omega}} = 0{,}01133\,\Omega$$

Per calcular la font de tensió Thévenin equivalent, utilitzarem el teorema de Millman. Si es compara aquest circuit amb el de la Figura 1.3 a la pàgina anterior, veiem que els punts α i ν dels dos circuits són equivalents, és a dir, ν és el punt comú de les impedàncies, i α és el punt de referència dels altres extrems de les impedàncies, respecte del qual les tensions són conegudes (tensions de les bateries). Així doncs tenim:

$$U_{\nu\alpha} = \frac{\frac{-125{,}1\,\text{V}}{0{,}034\,\Omega} + \frac{-124{,}8\,\text{V}}{0{,}041\,\Omega} + \frac{-125{,}2\,\text{V}}{0{,}029\,\Omega}}{\frac{1}{0{,}034\,\Omega} + \frac{1}{0{,}041\,\Omega} + \frac{1}{0{,}029\,\Omega}} = -125{,}0562\,\text{V}$$

La font de tensió Thévenin equivalent entre α i ν és per tant:

$$E_{\text{Th}} = U_{\alpha\nu} = 125{,}0562\,\text{V}$$

Calculem a continuació l'admitància i la font de corrent Norton equivalents, utilitzant l'equació (1.3):

$$Y_{\text{No}} = \frac{1}{Z_{\text{Th}}} = \frac{1}{0{,}01133\,\Omega} = 82{,}2613\,\text{S}$$

$$J_{\text{No}} = \frac{E_{\text{Th}}}{Z_{\text{Th}}} = \frac{125{,}0562\,\text{V}}{0{,}01133\,\Omega} = 11037{,}6150\,\text{A}$$

Tal com s'ha dit en la Secció 1.1.1, J_{No} és igual a la intensitat de curt circuit entre els punts α i ν.

Finalment, ja podem calcular el corrent I_Q i la tensió U_Q en la resistència de càrrega, utilitzant el circuit Thévenin equivalent calculat anteriorment:

$$I_Q = \frac{E_{\text{Th}}}{Z_{\text{Th}} + R_Q} = \frac{125{,}0562\,\text{V}}{0{,}01133\,\Omega + 50\,\Omega} = 2{,}5001\,\text{A}$$

$$U_Q = R_Q I_Q = 50\,\Omega \cdot 2{,}5001\,\text{A} = 125{,}0050\,\text{V}$$

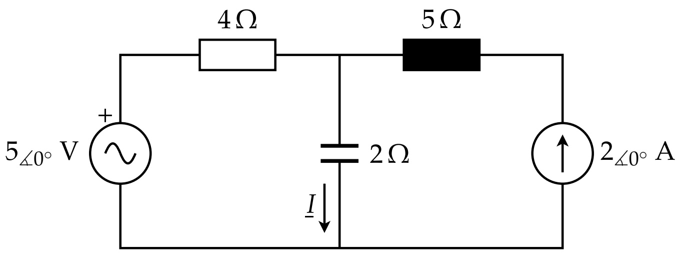
1.1.3 Teorema de la superposició

Si tenim un circuit lineal on hi ha diverses fonts de tensió i de corrent, les quals originen corrents i caigudes de tensió en els components del circuit, el teorema de la superposició ens diu que podem calcular aquests corrents i caigudes de tensió, resolent els circuits que resulten de tenir en compte només una font de tensió o de corrent a l'hora, i sumant al final els valors parcials obtinguts.

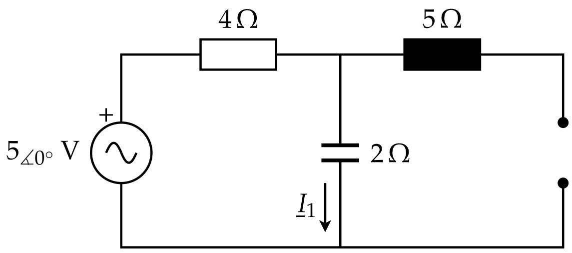
En cada pas on considerem només una font de tensió o de corrent, hem d'eliminar la resta de fonts del circuit; per tal de fer-ho hem de substituir la resta de fonts de tensió per un curt circuit, i la resta de fonts de corrent per un circuit obert.

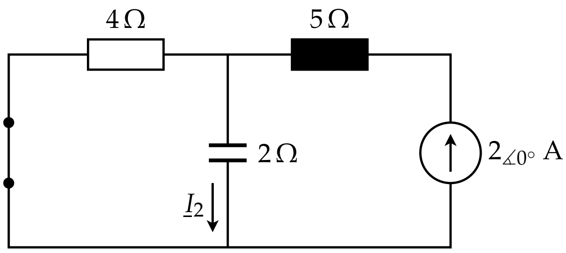
Aquest teorema també és aplicable en el cas que tinguem només una font de tensió o de corrent, que operi a més d'una freqüència a l'hora. En aquest cas es pot estudiar el circuit de forma independent per a cadascuna de les freqüències presents, i sumar al final els valors parcials obtinguts.

Exemple 1.2 *Es tracta de trobar en el circuit següent, el corrent $\underline{I}$ que circula pel condensador, utilitzant el teorema de la superposició.*



Utilitzant el teorema de la superposició, representem els dos circuits següents a partir del circuit original. El circuit de l'esquerra només té la font de tensió, i la font de corrent s'ha substituït per un circuit obert, i el circuit de la dreta només té la font de corrent, i la font de tensió s'ha substituït per un curt circuit.





Els corrents $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ que circulen pel condensador valen:

$$\underline{I}_1 = \frac{5_{\angle 0^\circ}\ \mathrm{V}}{(4-\mathrm{j}2)\ \Omega} = 1{,}118_{\angle 26{,}57^\circ}\ \mathrm{A} \qquad \underline{I}_2 = \frac{\frac{1}{\frac{1}{4\,\Omega}+\frac{1}{-\mathrm{j}2\,\Omega}}}{-\mathrm{j}2\,\Omega}\, 2_{\angle 0^\circ}\ \mathrm{A} = 1{,}789_{\angle 26{,}57^\circ}\ \mathrm{A}$$

El corrent total $\underline{I}$ que circula pel condensador val:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1{,}118_{\angle 26{,}57^\circ}\ \mathrm{A} + 1{,}789_{\angle 26{,}57^\circ}\ \mathrm{A} = 2{,}907_{\angle 26{,}57^\circ}\ \mathrm{A}$$

1.2 Components elementals d'un circuit elèctric

Es presenten a continuació les lleis temporals que lliguen tensions, corrents i potències, per a diversos components elementals d'un circuit elèctric. Es donen també les relacions entre tensions i corrents en el domini freqüencial (corrent altern sinusoïdal, amb $\omega = 2\pi f$) i en el domini operacional (transformada de Laplace).

Cal tenir en compte que les relacions que es donen, tan sols són vàlides quan es tenen en consideració els sentits assignats als corrents i a les tensions en les figures corresponents.

1.2.1 Resistència

Per a una resistència R (Figura 1.4), la llei temporal entre la tensió $u(t)$ i el corrent $i(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:

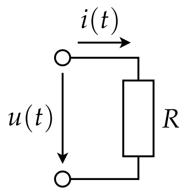


Figura 1.4: Resistència

$$u(t) = Ri(t) \tag{1.5}$$

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R} \tag{1.6}$$

En el domini freqüencial, la relació entre la tensió $\underline{U}$ i el corrent $\underline{I}$, i la relació entre els arguments de la tensió $\varphi_{\underline{U}}$ i del corrent $\varphi_{\underline{I}}$ són:

$$\underline{U} = R\underline{I} \tag{1.7}$$

$$\varphi_{\underline{U}} = \varphi_{\underline{I}} \tag{1.8}$$

En el domini operacional, la relació entre la tensió $U(s)$ i el corrent $I(s)$ és:

$$U(s) = RI(s) \tag{1.9}$$

1.2.2 Capacitat

Per a una capacitat C (Figura 1.5), les lleis temporals entre la tensió $u(t)$ i el corrent $i(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:

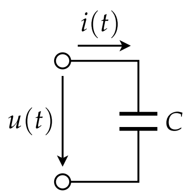


Figura 1.5: Capacitat

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.10}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.12}$$

En el domini freqüencial, la relació entre la tensió $\underline{U}$ i el corrent $\underline{I}$, i la relació entre els arguments de la tensió $\varphi_{\underline{U}}$ i del corrent $\varphi_{\underline{I}}$ són:

$$\underline{U} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\underline{I} \tag{1.13}$$

$$\varphi_{\underline{U}} = \varphi_{\underline{I}} - \frac{\pi}{2} \tag{1.14}$$

En el domini operacional, la relació entre la tensió $U(s)$ i el corrent $I(s)$ és:

$$U(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u(t_0)}{s} \tag{1.15}$$

1.2.3 Inductància

Per a una inductància L (Figura 1.6), les lleis temporals entre la tensió $u(t)$ i el corrent $i(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:

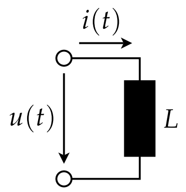


Figura 1.6: Inductància

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.16}$$

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.17}$$

$$p(t) = u(t)i(t) = Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.18}$$

En el domini freqüencial, la relació entre la tensió $\underline{U}$ i el corrent $\underline{I}$, i la relació entre els arguments de la tensió $\varphi_{\underline{U}}$ i del corrent $\varphi_{\underline{I}}$ són:

$$\underline{U} = \mathrm{j}\omega L\underline{I} \tag{1.19}$$

$$\varphi_{\underline{U}} = \varphi_{\underline{I}} + \frac{\pi}{2} \tag{1.20}$$

En el domini operacional, la relació entre la tensió $U(s)$ i el corrent $I(s)$ és:

$$U(s) = sLI(s) - Li(t_0) \tag{1.21}$$

1.2.4 Acoblament magnètic

Per a un acoblament magnètic M entre dues inductàncies L_1 i L_2 (Figura 1.7 a la pàgina següent), les lleis temporals entre les tensions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ i els corrents $i_1(t)$ i $i_2(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:

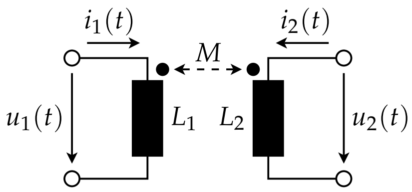


Figura 1.7: Acoblament magnètic

$$u_1(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.22}$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.23}$$

$$p(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)\right] \tag{1.24}$$

En el domini freqüencial, les relacions entre les tensions $\underline{U}_1$ i $\underline{U}_2$ i els corrents $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ són:

$$\underline{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \underline{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \underline{I}_2 \tag{1.25}$$

$$\underline{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \underline{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \underline{I}_1 \tag{1.26}$$

En el domini operacional, les relacions entre les tensions $U_1(s)$ i $U_2(s)$ i els corrents $I_1(s)$ i $I_2(s)$ són:

$$U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(t_0) + sMI_2(s) - Mi_2(t_0) \tag{1.27}$$

$$U_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(t_0) + sMI_1(s) - Mi_1(t_0) \tag{1.28}$$

1.2.5 Transformador ideal

Per a un transformador ideal de relació $m : 1$ (Figura 1.8), la llei temporal entre les tensions de primari $u_1(t)$ i de secundari $u_2(t)$, la llei temporal entre els corrents de primari $i_1(t)$ i de secundari $i_2(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:

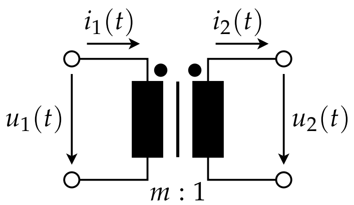


Figura 1.8: Transformador ideal

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = m \tag{1.29}$$

$$\frac{i_2(t)}{i_1(t)} = m \tag{1.30}$$

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) - u_2(t)i_2(t) = 0 \tag{1.31}$$

En el domini freqüencial, la relació entre les tensions de primari $\underline{U}_1$ i de secundari $\underline{U}_2$, la relació entre els corrents de primari $\underline{I}_1$ i de secundari $\underline{I}_2$, la relació entre els arguments de les tensions de primari $\varphi_{\underline{U}_1}$ i de secundari $\varphi_{\underline{U}_2}$, i la relació entre els arguments dels corrents de primari $\varphi_{\underline{I}_1}$ i de secundari $\varphi_{\underline{I}_2}$ són:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = m \tag{1.32}$$

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = m \tag{1.33}$$

$$\varphi_{\underline{U}_1} = \varphi_{\underline{U}_2} \tag{1.34}$$

$$\varphi_{\underline{I}_1} = \varphi_{\underline{I}_2} \tag{1.35}$$

En el domini operacional, la relació entre les tensions de primari $U_1(s)$ i de secundari $U_2(s)$, i la relació entre els corrents de primari $I_1(s)$ i de secundari $I_2(s)$ són:

$$\frac{U_1(s)}{U_2(s)} = m \tag{1.36}$$

$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)} = m \tag{1.37}$$

1.2.6 Bateria

Per a una bateria U_{bat} (Figura 1.9), la llei temporal de la tensió $u(t)$ i de la potència $p(t)$ que subministra és:

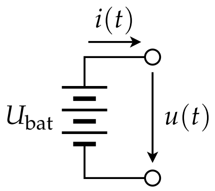


Figura 1.9: Bateria

$$u(t) = U_{\text{bat}} \tag{1.38}$$

$$p(t) = U_{\text{bat}} i(t) \tag{1.39}$$

El corrent $i(t)$ que circularà per la bateria, vindrà determinat pels elements que es connectin a aquesta bateria.

En el domini operacional, la tensió $U(s)$ és:

$$U(s) = \frac{U_{\text{bat}}}{s} \tag{1.40}$$

1.3 Potència complexa

1.3.1 Potència monofàsica

En la Figura 1.10 a la pàgina següent es representa una càrrega $\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$, la qual absorbeix una potència complexa $\underline{S} = P + \mathrm{j}Q$.

R i X són respectivament la part resistiva i la part reactiva (inductiva o capacitiva) de la càrrega, i P i Q són respectivament la potencia activa i la potencia reactiva (inductiva o capacitiva) absorbida per la càrrega.

La potència activa absorbida per una càrrega sempre és positiva, en canvi, la potència reactiva absorbida per una càrrega pot ser positiva o negativa, segons que predomini més la part inductiva o la part capacitiva de la càrrega, respectivament.

L'angle φ entre els vectors $\underline{U}$ i $\underline{I}$ compleix la següent relació:

$$\tan\varphi = \frac{X}{R} = \frac{Q}{P} \tag{1.41}$$

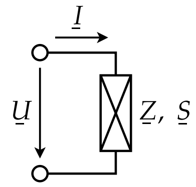


Figura 1.10: Potència complexa monofàsica

A partir d'aquest angle φ, es defineix el factor de potència de la càrrega:

$$\text{Factor de potència} \equiv \cos\varphi \tag{1.42}$$

Atès que per a un angle qualsevol α, es compleix la igualtat trigonomètrica: $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, quan es dóna el factor de potència d'una càrrega, cal especificar si és inductiu ($Q > 0, \tan\varphi > 0$) o capacitiu ($Q < 0, \tan\varphi < 0$); això es fa, afegint «(i)» o «(c)», respectivament, al valor numèric del factor de potència, per exemple: $\cos\varphi = 0,8$(i), $\cos\varphi = 0,9$(c).

Les relacions que lliguen la potència complexa amb la tensió i el corrent són:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = |\underline{I}|^2\,\underline{Z} = \frac{|\underline{U}|^2}{\underline{Z}^*} = P + \mathrm{j}Q \tag{1.43}$$

$$|\underline{S}| = |\underline{U}||\underline{I}| = |\underline{I}|^2\,|\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|^2}{|\underline{Z}|} = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{1.44}$$

$$P = \mathrm{Re}(\underline{U}\,\underline{I}^*) = |\underline{S}|\cos\varphi = |\underline{U}||\underline{I}|\cos\varphi = |\underline{I}|^2 R = \frac{|\underline{U}|^2}{|\underline{Z}|^2}R \tag{1.45}$$

$$Q = \mathrm{Im}(\underline{U}\,\underline{I}^*) = |\underline{S}|\sin\varphi = |\underline{U}||\underline{I}|\sin\varphi = |\underline{I}|^2 X = \frac{|\underline{U}|^2}{|\underline{Z}|^2}X \tag{1.46}$$

1.3.2 Potència trifàsica

En la Figura 1.11 a la pàgina següent es representen dos sistemes d'alimentació a càrregues trifàsiques; el de l'esquerra és un sistema de 4 fils (3 fases + neutre) i el de la dreta és un sistema de 3 fils (3 fases). En ambdós casos, es consideren tres càrregues $\underline{Z}_\alpha = R_\alpha + \mathrm{j}X_\alpha$, $\underline{Z}_\beta = R_\beta + \mathrm{j}X_\beta$ i $\underline{Z}_\gamma = R_\gamma + \mathrm{j}X_\gamma$ connectades en estrella, les quals absorbeixen respectivament unes potències complexes $\underline{S}_\alpha = P_\alpha + \mathrm{j}Q_\alpha$, $\underline{S}_\beta = P_\beta + \mathrm{j}Q_\beta$ i $\underline{S}_\gamma = P_\gamma + \mathrm{j}Q_\gamma$.

R_α, R_β i R_γ, i X_α, X_β i X_γ són respectivament les parts resistives i les parts reactives (inductives o capacitives) de les càrregues, i P_α, P_β i P_γ, i Q_α, Q_β i Q_γ són respectivament les potencies actives i les potencies reactives (inductives o capacitives) absorbides per les càrregues.

El sistema d'alimentació de 3 fils, admet també càrregues trifàsiques connectades en triangle; en aquest cas només cal dur a terme la transformació a una connexió en estrella (vegeu la Secció 5.1), i per tant, la descripció que segueix es pot considerar del tot general.

En el cas més general, on la càrrega trifàsica és desequilibrada, cada impedància té el seu propi factor de potència $\cos\varphi_\alpha$, $\cos\varphi_\beta$ i $\cos\varphi_\gamma$, complint-se:

$$\tan\varphi_\alpha = \frac{X_\alpha}{R_\alpha} = \frac{Q_\alpha}{P_\alpha} \qquad \tan\varphi_\beta = \frac{X_\beta}{R_\beta} = \frac{Q_\beta}{P_\beta} \qquad \tan\varphi_\gamma = \frac{X_\gamma}{R_\gamma} = \frac{Q_\gamma}{P_\gamma} \tag{1.47}$$

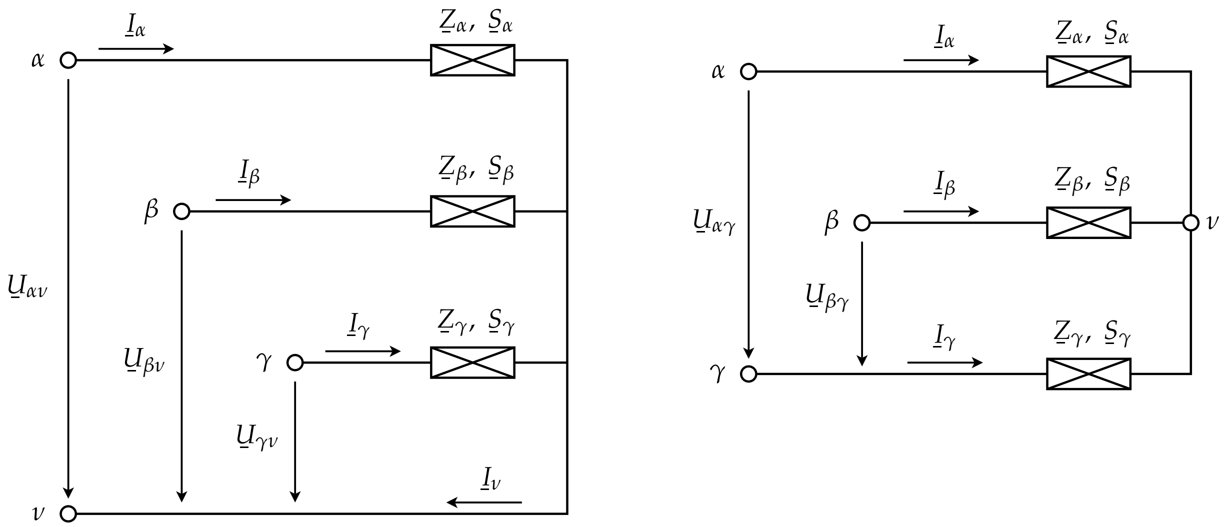


Figura 1.11: Potència complexa trifàsica. Sistemes de 4 fils i 3 fils respectivament.

Sistema equilibrat o desequilibrat (de 3 fils o de 4 fils)

Aquest és el cas més general, ja que les tensions, la càrrega o ambdues a l'hora poden ser desequilibrades, i el sistema d'alimentació pot ser de 3 fils o de 4 fils.

En el cas del sistema d'alimentació de 4 fils tenim: $\underline{I}_\alpha + \underline{I}_\beta + \underline{I}_\gamma = \underline{I}_\nu$, i en el cas del sistema d'alimentació de 3 fils tenim: $\underline{I}_\alpha + \underline{I}_\beta + \underline{I}_\gamma = 0$. No obstant, si prenem en ambdós casos el punt ν com a referència de les tensions, el corrent $\underline{I}_\nu$ no intervindrà en el càlcul de la potència. Així doncs, les relacions que lliguen la potència complexa trifàsica $\underline{S}_{3F} = P_{3F} + jQ_{3F}$ amb les tensions i corrents són:

$$\underline{S}_{3F} = \underline{S}_\alpha + \underline{S}_\beta + \underline{S}_\gamma = \underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\nu}\underline{I}_\beta^* + \underline{U}_{\gamma\nu}\underline{I}_\gamma^* = (P_\alpha + P_\beta + P_\gamma) + j(Q_\alpha + Q_\beta + Q_\gamma) \tag{1.48}$$

$$|\underline{S}_{3F}| = |\underline{S}_\alpha + \underline{S}_\beta + \underline{S}_\gamma| = |\underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\nu}\underline{I}_\beta^* + \underline{U}_{\gamma\nu}\underline{I}_\gamma^*| = \sqrt{(P_\alpha + P_\beta + P_\gamma)^2 + (Q_\alpha + Q_\beta + Q_\gamma)^2} \tag{1.49}$$

$$P_{3F} = \mathrm{Re}(\underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^*) + \mathrm{Re}(\underline{U}_{\beta\nu}\underline{I}_\beta^*) + \mathrm{Re}(\underline{U}_{\gamma\nu}\underline{I}_\gamma^*) = |\underline{S}_\alpha|\cos\varphi_\alpha + |\underline{S}_\beta|\cos\varphi_\beta + |\underline{S}_\gamma|\cos\varphi_\gamma \tag{1.50}$$

$$Q_{3F} = \mathrm{Im}(\underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^*) + \mathrm{Im}(\underline{U}_{\beta\nu}\underline{I}_\beta^*) + \mathrm{Im}(\underline{U}_{\gamma\nu}\underline{I}_\gamma^*) = |\underline{S}_\alpha|\sin\varphi_\alpha + |\underline{S}_\beta|\sin\varphi_\beta + |\underline{S}_\gamma|\sin\varphi_\gamma \tag{1.51}$$

Cal anar amb compte amb l'equació (1.49), i utilitzar-la al peu de la lletra, ja que en general tenim: $|\underline{S}_\alpha + \underline{S}_\beta + \underline{S}_\gamma| \neq |\underline{S}_\alpha| + |\underline{S}_\beta| + |\underline{S}_\gamma|$.

Cal tenir en compte a més en els sistemes de 3 fils, que el punt ν no coincidirà, en general, amb el neutre del sistema d'alimentació trifàsic.

Sistema equilibrat (de 3 fils o de 4 fils)

Aquest és un cas particular de l'anterior, que es presenta quan tenim un sistema de tensions equilibrat que alimenta a tres impedàncies idèntiques; en aquest cas es compleix sempre: $\underline{I}_\nu = 0$, i com a conseqüència, tenim que els sistemes de 3 fils i de 4 fils són equivalents.

Les equacions de l'apartat anterior se simplifiquen, i en aquest cas, les relacions que lliguen la potència complexa trifàsica equilibrada $\underline{S}_{3F}^{EQ} = P_{3F}^{EQ} + jQ_{3F}^{EQ}$ amb les tensions i corrents són:

$$\underline{S}_{3F}^{EQ} = 3\underline{S}_\alpha = 3\underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^* = 3(P_\alpha + jQ_\alpha) = P_{3F}^{EQ} + jQ_{3F}^{EQ} \tag{1.52}$$

$$|\underline{S}_{3F}^{EQ}| = 3|\underline{S}_\alpha| = 3|\underline{U}_{\alpha\nu}||\underline{I}_\alpha| = \sqrt{3}|\underline{U}_{\alpha\gamma}||\underline{I}_\alpha| = 3\sqrt{P_\alpha^2 + Q_\alpha^2} = \sqrt{(P_{3F}^{EQ})^2 + (Q_{3F}^{EQ})^2} \tag{1.53}$$

$$P_{3F}^{EQ} = 3\,\mathrm{Re}(\underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^*) = 3|\underline{S}_\alpha|\cos\varphi_\alpha = 3|\underline{U}_{\alpha\nu}||\underline{I}_\alpha|\cos\varphi_\alpha = \sqrt{3}|\underline{U}_{\alpha\gamma}||\underline{I}_\alpha|\cos\varphi_\alpha \tag{1.54}$$

$$Q_{3F}^{EQ} = 3\,\mathrm{Im}(\underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^*) = 3|\underline{S}_\alpha|\sin\varphi_\alpha = 3|\underline{U}_{\alpha\nu}||\underline{I}_\alpha|\sin\varphi_\alpha = \sqrt{3}|\underline{U}_{\alpha\gamma}||\underline{I}_\alpha|\sin\varphi_\alpha \tag{1.55}$$

En les equacions anteriors s'ha utilitzat la fase α, però es podria haver escollit també qualsevol de les altres dues. Cal tenir en compte a més, que l'angle φ_α és sempre el format pels vectors $\underline{U}_{\alpha\nu}$ i $\underline{I}_\alpha$, i no pas l'angle format pels vectors $\underline{U}_{\alpha\gamma}$ i $\underline{I}_\alpha$.

En aquest cas, pel que fa als sistemes de 3 fils, el punt ν sí que coincideix amb el neutre del sistema d'alimentació trifàsic.

Sistema equilibrat o desequilibrat de 3 fils

Aquest és un cas general, on les tensions, la càrrega o ambdues a l'hora poden ser desequilibrades, però amb l'única restricció que el sistema d'alimentació sigui de 3 fils.

Únicament en aquest cas (sistema de 3 fils) podem prescindir del punt ν, a l'hora de calcular la potència, i utilitzar tan sols les tensions entre fases.

En aquest cas, les relacions que lliguen la potència complexa trifàsica $\underline{S}_{3F} = P_{3F} + jQ_{3F}$ amb les tensions i corrents són:

$$\underline{S}_{3F} = \underline{U}_{\alpha\gamma}\underline{I}_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\gamma}\underline{I}_\beta^* \tag{1.56}$$

$$|\underline{S}_{3F}| = |\underline{U}_{\alpha\gamma}\underline{I}_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\gamma}\underline{I}_\beta^*| \tag{1.57}$$

$$P_{3F} = \mathrm{Re}(\underline{U}_{\alpha\gamma}\underline{I}_\alpha^*) + \mathrm{Re}(\underline{U}_{\beta\gamma}\underline{I}_\beta^*) \tag{1.58}$$

$$Q_{3F} = \mathrm{Im}(\underline{U}_{\alpha\gamma}\underline{I}_\alpha^*) + \mathrm{Im}(\underline{U}_{\beta\gamma}\underline{I}_\beta^*) \tag{1.59}$$

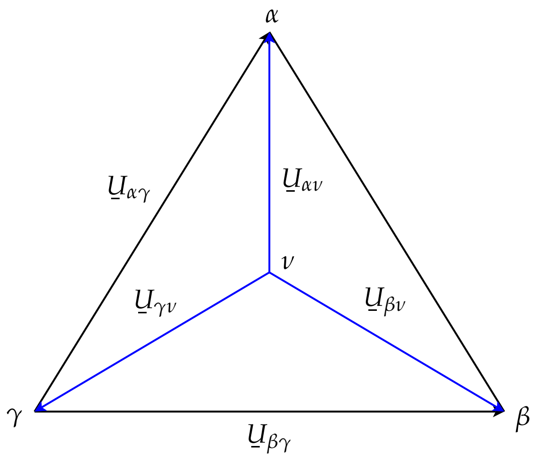
En les equacions anteriors s'ha utilitzat la fase γ com a fase de referència, però es podria haver escollit també qualsevol de les altres dues.

En aquest cas, el punt ν tampoc no coincidirà, en general, amb el neutre del sistema d'alimentació trifàsic.

Exemple 1.3 *Es tracta de trobar la potència $\underline{S}$ consumida per una càrrega trifàsica equilibrada, connectada en estrella a un sistema de tensions d'alimentació de 3 fils, també equilibrat; la tensió fase–neutre té un valor de 220 V i cadascuna de les tres impedàncies que formen l'estrella té un valor de $\underline{Z} = 22_{\measuredangle 45^\circ}\ \Omega$. S'utilitzaran totes les equacions que siguin possibles, d'entre les vistes en aquest darrer apartat.*

El circuit elèctric descrit en aquest exemple, es correspon amb l'esquema de la dreta de la figura 1.11 a la pàgina anterior. En aquest cas en particular, en ser equilibrada la càrrega i el sistema de tensions d'alimentació, el punt ν d'unió de les tres impedàncies, es correspon amb el punt neutre del sistema de tensions.

Prenent com referència d'angles la tensió $\underline{U}_{\beta\gamma}$, obtenim en primer lloc els valors de les diferents tensions necessàries per resoldre el nostre problema:



$$\underline{U}_{\alpha\nu} = 220_{\measuredangle 90^\circ}\ \mathrm{V}$$
$$\underline{U}_{\beta\nu} = 220_{\measuredangle -30^\circ}\ \mathrm{V}$$
$$\underline{U}_{\gamma\nu} = 220_{\measuredangle 210^\circ}\ \mathrm{V}$$
$$\underline{U}_{\alpha\gamma} = \sqrt{3}\cdot 220_{\measuredangle 60^\circ}\ \mathrm{V}$$
$$\underline{U}_{\beta\gamma} = \sqrt{3}\cdot 220_{\measuredangle 0^\circ}\ \mathrm{V}$$

Els corrents $\underline{I}_\alpha$, $\underline{I}_\beta$ i $\underline{I}_\gamma$ que circulen per les tres fases són:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_\alpha &= \frac{\underline{U}_{\alpha\nu}}{\underline{Z}} = \frac{220_{\measuredangle 90^\circ}\ \mathrm{V}}{22_{\measuredangle 45^\circ}\ \Omega} = 10_{\measuredangle 45^\circ}\ \mathrm{A}\\
\underline{I}_\beta &= \frac{\underline{U}_{\beta\nu}}{\underline{Z}} = \frac{220_{\measuredangle -30^\circ}\ \mathrm{V}}{22_{\measuredangle 45^\circ}\ \Omega} = 10_{\measuredangle -75^\circ}\ \mathrm{A}\\
\underline{I}_\gamma &= \frac{\underline{U}_{\gamma\nu}}{\underline{Z}} = \frac{220_{\measuredangle 210^\circ}\ \mathrm{V}}{22_{\measuredangle 45^\circ}\ \Omega} = 10_{\measuredangle 165^\circ}\ \mathrm{A}
\end{aligned}$$

Per començar, utilitzarem l'equació (1.52), ja que tenim un sistema equilibrat tant pel que fa a les tensions com pel que fa a la càrrega:

$$\underline{S} = 3\,\underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^* = 3\cdot 220_{\measuredangle 90^\circ}\ \mathrm{V}\cdot 10_{\measuredangle -45^\circ}\ \mathrm{A} = 6600_{\measuredangle 45^\circ}\ \mathrm{VA}$$

A continuació, utilitzarem l'equació (1.56), ja que tenim un sistema d'alimentació de 3 fils:

$$\underline{S} = \underline{U}_{\alpha\gamma}\underline{I}_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\gamma}\underline{I}_\beta^* = \sqrt{3}\cdot 220_{\measuredangle 60^\circ}\ \mathrm{V}\cdot 10_{\measuredangle -45^\circ}\ \mathrm{A} + \sqrt{3}\cdot 220_{\measuredangle 0^\circ}\ \mathrm{V}\cdot 10_{\measuredangle 75^\circ}\ \mathrm{A} = 6600_{\measuredangle 45^\circ}\ \mathrm{VA}$$

Finalment, utilitzarem l'equació (1.48), ja que sempre és aplicable:

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= \underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\nu}\underline{I}_\beta^* + \underline{U}_{\gamma\nu}\underline{I}_\gamma^* =\\
&= 220_{\measuredangle 90^\circ}\ \mathrm{V}\cdot 10_{\measuredangle -45^\circ}\ \mathrm{A} + 220_{\measuredangle -30^\circ}\ \mathrm{V}\cdot 10_{\measuredangle 75^\circ}\ \mathrm{A} + 220_{\measuredangle 210^\circ}\ \mathrm{V}\cdot 10_{\measuredangle -165^\circ}\ \mathrm{A} = 6600_{\measuredangle 45^\circ}\ \mathrm{VA}
\end{aligned}$$

Per acabar, veurem que també es pot resoldre aquest exemple sense calcular les intensitats; si utilitzem a l'hora les equacions (1.52) i (1.43), tenim:

$$\underline{S} = 3\,\underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^* = 3\,\frac{|\underline{U}_{\alpha\nu}|^2}{\underline{Z}^*} = 3\cdot\frac{(220\ \mathrm{V})^2}{22_{\measuredangle -45^\circ}\ \Omega} = 6600_{\measuredangle 45^\circ}\ \mathrm{VA}$$

Com era d'esperar, el resultat obtingut en tots els casos és idèntic.

1.3.3 Mesura de la potència

La potència activa es mesura amb uns aparells anomenats wattímetres, i la potència reactiva, amb uns aparelles anomenats varímetres.

Aquests aparells tenen dues bobines de mesura, una de voltimètrica, la qual es connecta tal com es faria amb un voltímetre, i una altra d'amperimètrica, la qual es connecta tal com es faria amb un amperímetre; així doncs, els wattímetres i els varímetres tenen quatre terminals de connexió.

La connexió d'aquests aparells en un circuit donat, per tal de mesurar correctament la potència, ve determinada pels dos terminals anomenats homòlegs, un d'aquests terminals pertany a la bobina voltimètrica i l'altre a l'amperimètrica; en els esquemes elèctrics, aquests dos terminals s'identifiquen mitjançant un punt. La connexió ha de fer-se de tal manera, que el corrent que va des de l'alimentació cap a la càrrega entri al wattímetre pel terminal de la bobina amperimètrica marcat amb el punt, i la tensió corresponent a aquest corrent, vagi del terminal de la bobina voltimètrica marcat amb el punt, a l'altre terminal; el mateix és aplicable al varímetre.

En la Figura 1.12 es pot veure la connexió d'un wattímetre i d'un varímetre en un circuit monofàsic.

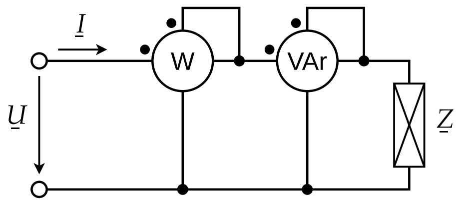


Figura 1.12: Mesura de la potència en un circuit monofàsic

Les potències activa i reactiva s'obtenen de les mesures dels dos aparells:

$$P = \text{W} \qquad\qquad Q = \text{VAr} \tag{1.60}$$

En la Figura 1.13 es pot veure la connexió d'uns wattímetres i d'uns varímetres en un circuit trifàsic de 4 fils, equilibrat o desequilibrat.

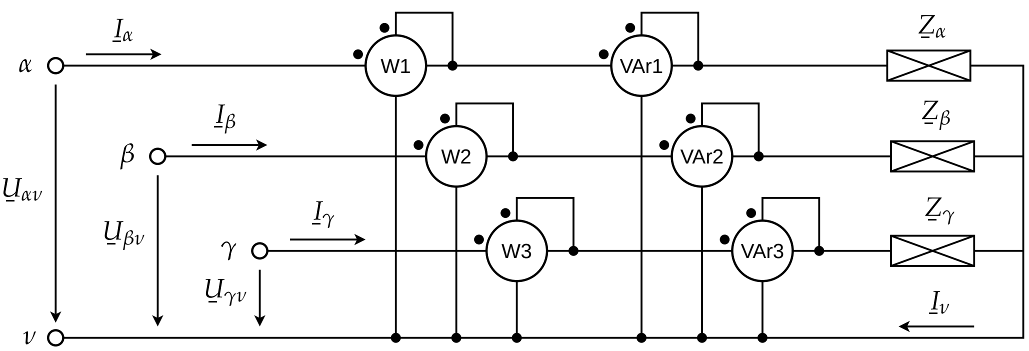


Figura 1.13: Mesura de la potència en un circuit trifàsic de 4 fils

Les potències activa i reactiva trifàsiques s'obtenen de les mesures dels sis aparells:

$$P_{3\text{F}} = \text{W1} + \text{W2} + \text{W3} \qquad\qquad Q_{3\text{F}} = \text{VAr1} + \text{VAr2} + \text{VAr3} \tag{1.61}$$

En la Figura 1.14 es pot veure la connexió d'uns wattímetres i d'uns varímetres en un circuit trifàsic de 3 fils, equilibrat o desequilibrat.

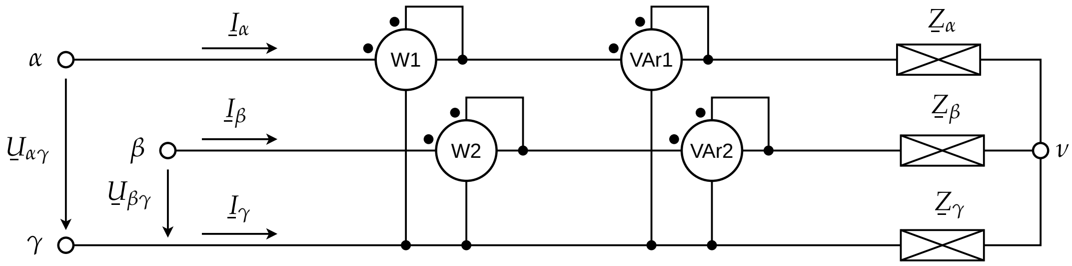


Figura 1.14: Mesura de la potència en un circuit trifàsic de 3 fils

Les potències activa i reactiva trifàsiques s'obtenen de les mesures dels quatre aparells:

$$P_{3F} = \text{W1} + \text{W2} \qquad Q_{3F} = \text{VAr1} + \text{VAr2} \tag{1.62}$$

1.4 Valors mitjà i eficaç, i factors d'amplitud, de forma i d'arrissada

1.4.1 Valor mitjà

El valor mitjà V_{av} (de l'anglès «average») d'una funció periòdica en el temps $v(t)$, de freqüència f, període T i velocitat angular ω ($f = 1/T$, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$), es defineix com:

$$V_{av} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\,dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} v(t)\,dt \tag{1.63}$$

Si la funció periòdica $v(\alpha)$ està definida en funció de l'angle α, enlloc del temps t, a partir de la relació $\alpha = \omega t$ ($d\alpha = \omega\,dt$), tenim:

$$V_{av} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} v(\alpha)\,d\alpha \tag{1.64}$$

1.4.2 Valor eficaç

El valor eficaç V (també anomenat valor rms, de l'anglès «root mean square») d'una funció periòdica en el temps $v(t)$, de freqüència f, període T i velocitat angular ω ($f = 1/T$, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$), es defineix com:

$$V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} [v(t)]^2\,dt} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} [v(t)]^2\,dt} \tag{1.65}$$

Si la funció periòdica $v(\alpha)$ està definida en funció de l'angle α, enlloc del temps t, a partir de la relació $\alpha = \omega t$ ($d\alpha = \omega\,dt$), tenim:

$$V = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} [v(\alpha)]^2\,d\alpha} \tag{1.66}$$

1.4.3 Factor d'amplitud o de cresta

El factor d'amplitud f_a relaciona el valor màxim o de cresta $\hat{V}$ d'una funció periòdica, amb el seu valor eficaç V:

$$f_\text{a} = \frac{\hat{V}}{V} \tag{1.67}$$

1.4.4 Factor de forma

El factor de forma f_f relaciona els valors mitjà V_av i eficaç V d'una funció periòdica:

$$f_\text{f} = \frac{V}{V_\text{av}} \tag{1.68}$$

1.4.5 Factor d'arrissada

El factor d'arrissada r (de l'anglès «ripple») relaciona els valors mitjà V_av i eficaç V d'una funció periòdica.

Aquest factor s'utilitza usualment per definir la qualitat d'una tensió continua, rectificada a partir d'una tensió alterna. Com més plana sigui aquesta tensió contínua, més baix serà el seu factor d'arrissada:

$$r = \sqrt{\left(\frac{V}{V_\text{av}}\right)^2 - 1} = \sqrt{f_\text{f}^2 - 1} \tag{1.69}$$

Exemple 1.4 *Es tracta de calcular els factors d'amplitud, de forma i d'arrissada de la tensió contínua que s'obté, a partir d'una tensió sinusoïdal $u(t) = \hat{U}\sin\omega t$, amb un rectificador de mitja ona i amb un rectificador d'ona completa.*

En el cas del rectificador de mitja ona, la tensió que s'obté ve definida per:

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U}\sin\omega t & 0 < \omega t < \pi \\ 0 & \pi \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases}$$

Calculem en primer lloc el valor mitjà:

$$U_\text{av} = \frac{\omega}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U}\sin\omega t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} 0\,\mathrm{d}t\right) = -\left.\frac{\hat{U}\cos\omega t}{2\pi}\right|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{\hat{U}}{\pi}$$

Calculem a continuació el valor eficaç:

$$U = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U}^2\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} 0\,\mathrm{d}t\right)} = \sqrt{\frac{\omega\hat{U}^2}{2\pi}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}}} = \frac{\hat{U}}{2}$$

Els factors d'amplitud, de forma i d'arrissada són:

$$f_a = \frac{\hat{U}}{\hat{U}/2} = 2$$

$$f_f = \frac{\hat{U}/2}{\hat{U}/\pi} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\hat{U}/2}{\hat{U}/\pi}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} = 1{,}21$$

En el cas del rectificador d'ona completa, la tensió que s'obté ve definida per:

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U}\sin\omega t & 0 < \omega t < \pi \\ -\hat{U}\sin\omega t & \pi \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases}$$

En aquest cas, l'ona de tensió entre π i 2π és una repetició exacta de l'ona de tensió entre 0 i π, per tant, únicament caldrà considerar-ne la primera meitat (entre 0 i π), tenint en compte que el període serà π/ω.

Calculem en primer lloc el valor mitjà:

$$U_{av} = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U}\sin\omega t\,\mathrm{d}t = -\left.\frac{\hat{U}\cos\omega t}{\pi}\right|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2\hat{U}}{\pi}$$

Calculem a continuació el valor eficaç:

$$U = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U}^2\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{\omega\hat{U}^2}{\pi}\left.\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{\omega}}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Els factors d'amplitud, de forma i d'arrissada són:

$$f_a = \frac{\hat{U}}{\hat{U}/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f_f = \frac{\hat{U}/\sqrt{2}}{2\hat{U}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\hat{U}/\sqrt{2}}{2\hat{U}/\pi}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} = 0{,}48$$

1.5 Circuits divisors de tensió i divisors de corrent

Un circuit divisor de tensió està format per un conjunt d'impedàncies en sèrie, i el que es pretén és calcular la caiguda de tensió en cada impedància, en funció de la caiguda de tensió total.

Un circuit divisor de corrent, en canvi, està format per un conjunt d'impedàncies en paral·lel, i el que es pretén és calcular el corrent que circula per cada impedància, en funció del corrent total.

1.5.1 Circuits divisors de tensió

En la Figura 1.15 es pot veure un circuit divisor de tensió, pel qual es vol calcular la caiguda de tensió $\underline{U}_i$ en la impedància $\underline{Z}_i$, a partir de la caiguda de tensió total $\underline{U}_{\text{total}}$.

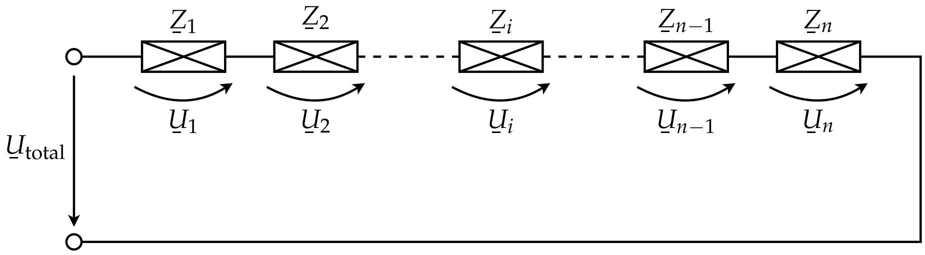


Figura 1.15: Circuit divisor de tensió

La impedància total $\underline{Z}_{\text{total}}$ del circuit val:

$$\underline{Z}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i \tag{1.70}$$

Utilitzant aquest valor, la tensió $\underline{U}_i$ val:

$$\underline{U}_i = \frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}_{\text{total}}} \underline{U}_{\text{total}} \tag{1.71}$$

1.5.2 Circuits divisors de corrent

En la Figura 1.16 es pot veure un circuit divisor de corrent, pel qual es vol calcular el corrent $\underline{I}_i$ que circula per la impedància $\underline{Z}_i$, a partir del corrent total $\underline{I}_{\text{total}}$.

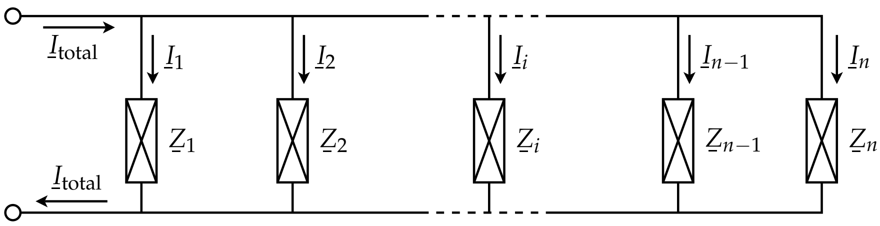


Figura 1.16: Circuit divisor de corrent

La impedància total $\underline{Z}_{\text{total}}$ del circuit val:

$$\underline{Z}_{\text{total}} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_i}} \tag{1.72}$$

Utilitzant aquest valor, el corrent $\underline{I}_i$ val:

$$\underline{I}_i = \frac{\underline{Z}_{\text{total}}}{\underline{Z}_i} \underline{I}_{\text{total}} \tag{1.73}$$

1.6 Càlculs en p.u.

Les magnituds expressades en p.u. (per unitat) són útils quan es treballa amb xarxes de corrent altern on hi ha transformadors, i per tant més d'un nivell de tensió.

1.6.1 Mètode de càlcul

El primer pas consisteix a escollir unes magnituds base. Les magnituds base fonamentals són la potència i la tensió; s'escull una potència base S_B per a tota la xarxa, i tantes tensions base com nivells de tensió diferents tingui la xarxa $U_{\mathrm{B}_1}, U_{\mathrm{B}_2}, \ldots, U_{\mathrm{B}_n}$:

$$\text{Magnituds base fonamentals} \begin{cases} S_\mathrm{B} \\ U_{\mathrm{B}_1}, U_{\mathrm{B}_2}, \ldots, U_{\mathrm{B}_n} \end{cases} \tag{1.74}$$

Normalment s'escull com a tensions base les tensions nominals dels transformadors de la xarxa, i com a potència base la potencia nominal d'un del transformadors o generadors de la xarxa.

A partir de la potència base i de les tensions base es defineixen els corrents base I_{B_i}, les impedàncies base Z_{B_i} i les admitàncies base Y_{B_i}. Segons que el circuit sigui monofàsic o trifàsic equilibrat, tenim:

$$\begin{array}{c}\text{Circuit monofàsic}\\(i=1,\ldots,n)\end{array} \left\{ \begin{array}{lcl} I_{\mathrm{B}_i} & = & \dfrac{S_\mathrm{B}}{U_{\mathrm{B}_i}} \\[2ex] Z_{\mathrm{B}_i} & = & \dfrac{U_{\mathrm{B}_i}^2}{S_\mathrm{B}} \\[2ex] Y_{\mathrm{B}_i} & = & \dfrac{S_\mathrm{B}}{U_{\mathrm{B}_i}^2} \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c}\text{Circuit trifàsic equilibrat}\\(i=1,\ldots,n)\end{array} \left\{ \begin{array}{lcl} I_{\mathrm{B}_i} & = & \dfrac{S_\mathrm{B}}{\sqrt{3}U_{\mathrm{B}_i}} \\[2ex] Z_{\mathrm{B}_i} & = & \dfrac{U_{\mathrm{B}_i}^2}{S_\mathrm{B}} \\[2ex] Y_{\mathrm{B}_i} & = & \dfrac{S_\mathrm{B}}{U_{\mathrm{B}_i}^2} \end{array} \right. \tag{1.75}$$

Les magnituds expressades en p.u. (escrites usualment en minúscules) s'obtenen dividint les magnituds reals (escrites usualment en majúscules) pels valors base corresponents:

$$\underline{s} = \frac{\underline{S}}{S_\mathrm{B}} \qquad \underline{u} = \frac{\underline{U}}{U_\mathrm{B}} \qquad \underline{i} = \frac{\underline{I}}{I_\mathrm{B}} \qquad \underline{z} = \frac{\underline{Z}}{Z_\mathrm{B}} \qquad \underline{y} = \frac{\underline{Y}}{Y_\mathrm{B}} \tag{1.76}$$

Quan es tracta de resoldre circuits trifàsics equilibrats fem servir sempre els circuits equivalents per fase, i podem escollir aleshores com a valors base per a la potència i la tensió, la potència monofàsica $S_{1\mathrm{F}}$ i la tensió fase-neutre U_FN respectivament, o la potència trifàsica $S_{3\mathrm{F}}$ i la tensió fase-fase U_FF respectivament; quan fem la reducció de valors reals a valors en p.u., hem de ser conseqüents i utilitzar sempre les potències monofàsiques i les tensions fase-neutre en el primer cas, i les potències trifàsiques i les tensions fase-fase en el segon cas. Donat que es verifica $S_{3\mathrm{F}} = 3S_{1\mathrm{F}}$ i $U_\mathrm{FF} = \sqrt{3}U_\mathrm{FN}$, els valors del corrent base I_B, de la impedància base Z_B i de l'admitància base Y_B són els mateixos, tan si utilitzem $S_\mathrm{B} = S_{1\mathrm{F}}$ i $U_\mathrm{B} = U_\mathrm{FN}$, con si utilitzem $S_\mathrm{B} = S_{3\mathrm{F}}$ i $U_\mathrm{B} = U_\mathrm{FF}$. En ambdós casos I_B i $\underline{I}$ són corrents fase-neutre, Z_B i $\underline{Z}$ són impedàncies fase-neutre i Y_B i $\underline{Y}$ són admitàncies fase-neutre; si tenim càrregues connectades en triangle, cal transformar-les en càrregues equivalents connectades en estrella per tal de poder aplicar aquest mètode (vegeu la secció 5.1).

El pas següent consisteix a representar el circuit equivalent en p.u. i resoldre'l; en el cas de circuits trifàsics, i com a conseqüència del procés utilitzat, el circuit equivalent en p.u. és un circuit monofàsic i com a tal l'hem de resoldre, és a dir, sense la intervenció del factor $\sqrt{3}$.

Un cop resolt el circuit, es multipliquen les magnituds obtingudes en p.u. pels seus valors base respectius, per tal d'obtenir les magnituds reals:

$$\underline{S} = \underline{s}S_\mathrm{B} \qquad \underline{U} = \underline{u}U_\mathrm{B} \qquad \underline{I} = \underline{i}I_\mathrm{B} \qquad \underline{Z} = \underline{z}Z_\mathrm{B} \qquad \underline{Y} = \underline{y}Y_\mathrm{B} \tag{1.77}$$

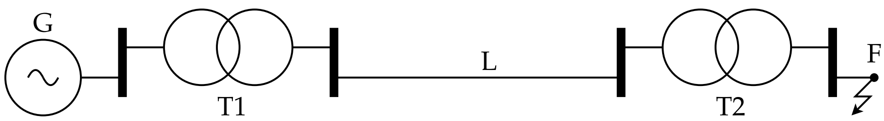
1.6.2 Canvi de base

Normalment les impedàncies de transformadors (impedància de curt circuit) o de generadors (impedància sincrònica, transitòria, etc.) estan referides a les magnituds nominals de la màquina en qüestió. Si les magnituds base escollides coincideixen amb les nominals de la màquina, la impedància de la màquina en qüestió estarà expressada ja directament en p.u.; en canvi si les magnituds base són diferents de les nominals de la màquina, caldrà fer un canvi de base per tal de referir la impedància de la màquina a les magnituds base escollides.

De forma genèrica, si $\underline{z}$ és una impedància referida a la base U_B i S_B, podem obtenir la impedància $\underline{z}'$ referida a la base $U_{\mathrm{B}'}$ i $S_{\mathrm{B}'}$, mitjançant el canvi:

$$\underline{z}' = \underline{z}\,\frac{Z_\mathrm{B}}{Z'_\mathrm{B}} = \underline{z}\,\frac{U_\mathrm{B}^2}{S_\mathrm{B}}\,\frac{S_{\mathrm{B}'}}{U_{\mathrm{B}'}^2} \tag{1.78}$$

Exemple 1.5 *Es tracte de calcular el corrent de curt circuit trifàsic en el punt F de la xarxa següent, suposant que el sistema està treballant en buit.*



Les dades del generador G, del transformador T1, de la línia L i del transformador T2 són:

$S_\mathrm{G} = 60\,\mathrm{MVA}$	$S_\mathrm{T1} = 40\,\mathrm{MVA}$	$l_\mathrm{L} = 22\,\mathrm{km}$	$S_\mathrm{T2} = 12\,\mathrm{MVA}$
$U_\mathrm{G} = 10{,}5\,\mathrm{kV}$	$m_\mathrm{T1} = 10{,}5 : 63\,\mathrm{kV}$	$U_\mathrm{L} = 60\,\mathrm{kV}$	$m_\mathrm{T2} = 60 : 10{,}5\,\mathrm{kV}$
$X''_\mathrm{G} = 12\,\%$	$X_\mathrm{T1} = 10\,\%$	$X_\mathrm{L} = 0{,}4\,\Omega/\mathrm{km}$	$X_\mathrm{T2} = 8\,\%$

Escollim en primer lloc les següents magnituds base: $S_\mathrm{B} = 60\,\mathrm{MVA}$ *i* $U_\mathrm{B} = 10{,}5\,\mathrm{kV}/63\,\mathrm{kV}/10{,}5\,\mathrm{kV}$.

Calculem a continuació els valors en p.u. dels diferents elements de la xarxa:

Generador*. En coincidir les magnituds base amb les nominals del generador tenim directament:*

$$x''_\mathrm{G} = 0{,}12\,\mathrm{p.u.}$$

Transformador 1*. La relació de transformació i la reactància són respectivament:*

$$m_\mathrm{T1} = \frac{10{,}5\,\mathrm{kV}}{10{,}5\,\mathrm{kV}} : \frac{63\,\mathrm{kV}}{63\,\mathrm{kV}} = 1 : 1 \qquad x_\mathrm{T1} = 0{,}10 \cdot \frac{(63\,\mathrm{kV})^2}{40\,\mathrm{MVA}} \cdot \frac{60\,\mathrm{MVA}}{(63\,\mathrm{kV})^2} = 0{,}15\,\mathrm{p.u.}$$

Línia*. La reactància és:*

$$x_\mathrm{L} = \frac{0{,}4\,\Omega/\mathrm{km} \cdot 22\,\mathrm{km}}{(63\,\mathrm{kV})^2/60\,\mathrm{MVA}} = 0{,}1330\,\mathrm{p.u.}$$

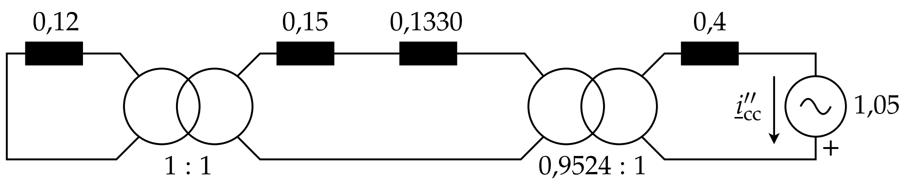
Transformador 2. *La relació de transformació i la reactància són respectivament:*

$$m_{\mathrm{T2}} = \frac{60\,\mathrm{kV}}{63\,\mathrm{kV}} : \frac{10{,}5\,\mathrm{kV}}{10{,}5\,\mathrm{kV}} = 0{,}9524 : 1 \qquad x_{\mathrm{T2}} = 0{,}08 \cdot \frac{(10{,}5\,\mathrm{kV})^2}{12\,\mathrm{MVA}} \cdot \frac{60\,\mathrm{MVA}}{(10{,}5\,\mathrm{kV})^2} = 0{,}4\,\mathrm{p.u.}$$

Tensió en el punt F. *La tensió abans del curt circuit és la mateixa que la del generador G, elevada pel transformador T1 i reduïda després pel transformador T2:*

$$\underline{u}_{\mathrm{F}} = \frac{10{,}5\,\mathrm{kV} \cdot \dfrac{63\,\mathrm{kV}}{10{,}5\,\mathrm{kV}} \cdot \dfrac{10{,}5\,\mathrm{kV}}{60\,\mathrm{kV}}}{10{,}5\,\mathrm{kV}} = 1{,}05\,\mathrm{p.u.}$$

A partir d'aquests valors calculats, tenim el següent circuit equivalent en p.u. durant el curt circuit en el punt F:



El corrent de curt circuit buscat val:

$$|\underline{i}''_{\mathrm{cc}}| = \left| \frac{1{,}05}{\mathrm{j}\left(0{,}4 + \frac{0{,}15+0{,}1330}{0{,}9524^2} + \frac{0{,}12}{0{,}9524^2 \cdot 1^2}\right)} \right| = 1{,}2436\,\mathrm{p.u.} \qquad |\underline{I}''_{\mathrm{cc}}| = 1{,}2436 \cdot \frac{60\,\mathrm{MVA}}{\sqrt{3} \cdot 10{,}5\,\mathrm{kV}} = 4{,}1\,\mathrm{kA}$$

A l'hora de calcular el corrent de curt circuit utilitzant el circuit equivalent en p.u., s'observa que el transformador T1 és com si hagués desaparegut, això és així, ja que la seva relació de transformació ha esdevingut 1 : 1, en coincidir les tensions base amb les seves tensions nominals; no passa el mateix amb el transformador T2, ja que no es compleix la coincidència entre les seves tensions nominals i les tensions base. No obstant, atès que l'elecció de les tensions base és arbitrària, si en lloc de 10,5 kV *com a 3a tensió base, escollim* $\frac{63\,\mathrm{kV}}{60\,\mathrm{kV}/10{,}5\,\mathrm{kV}} = 11{,}025\,\mathrm{kV}$, *tindrem:*

$$m_{\mathrm{T2}} = \frac{60\,\mathrm{kV}}{63\,\mathrm{kV}} : \frac{10{,}5\,\mathrm{kV}}{11{,}025\,\mathrm{kV}} = 0{,}9524 : 0{,}9524 = 1 : 1$$

$$x_{\mathrm{T2}} = 0{,}08 \cdot \frac{(10{,}5\,\mathrm{kV})^2}{12\,\mathrm{MVA}} \cdot \frac{60\,\mathrm{MVA}}{(11{,}025\,\mathrm{kV})^2} = 0{,}3628\,\mathrm{p.u.}$$

$$\underline{u}_{\mathrm{F}} = \frac{10{,}5\,\mathrm{kV} \cdot \dfrac{63\,\mathrm{kV}}{10{,}5\,\mathrm{kV}} \cdot \dfrac{10{,}5\,\mathrm{kV}}{60\,\mathrm{kV}}}{11{,}025\,\mathrm{kV}} = 1\,\mathrm{p.u.}$$

Utilitzant aquests nous valors, podem prescindir totalment dels dos transformadors, i calcular el corrent de curt circuit utilitzant l'expressió següent:

$$|\underline{i}''_{\mathrm{cc}}| = \left| \frac{1}{\mathrm{j}(0{,}3628 + 0{,}15 + 0{,}1330 + 0{,}12)} \right| = 1{,}3058\,\mathrm{p.u.} \qquad |\underline{I}''_{\mathrm{cc}}| = 1{,}3058 \cdot \frac{60\,\mathrm{MVA}}{\sqrt{3} \cdot 11{,}025\,\mathrm{kV}} = 4{,}1\,\mathrm{kA}$$

Evidentment, el valor final és el mateix independentment de quines siguin les tensions base escollides.

Capítol 2

Components Simètriques

La teoria de les components simètriques és útil en l'estudi de tensions i corrents trifàsics desequilibrats, com ara els que es produeixen en un curt circuit on no intervenen les tres fases a l'hora (curt circuit fase–terra, fase–fase, etc.).

2.1 L'operador complex «a»

Definim en primer lloc l'operador complex «a», el qual té un mòdul igual a la unitat i un argument igual a 120°:

$$a \equiv 1_{\measuredangle 120^\circ} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2.1}$$

A l'hora d'operar amb aquest valor, resulten útils les relacions següents:

$$a^2 = 1_{\measuredangle 240^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad a^3 = 1_{\measuredangle 0^\circ} \qquad 1 + a + a^2 = 0 \tag{2.2}$$

2.2 Teorema de Fortescue–Stokvis

Tal com es veu en la Figura 2.1 a la pàgina següent, aquest teorema estableix que qualsevol sistema trifàsic asimètric (també anomenat desequilibrat), es pot descompondre en la suma de tres sistemes simètrics: un sistema directe o de seqüència positiva, un sistema invers o de seqüència negativa, i un sistema homopolar o de seqüència zero. Els vectors $\underline{\chi}_\alpha$, $\underline{\chi}_\beta$ i $\underline{\chi}_\gamma$, poden representar tant tensions com corrents.

El sistema directe està format per tres vectors que tenen la mateixa seqüència de fases que els vectors originals, per exemple: α-β-γ; els vectors s'identifiquen mitjançant els superíndexs «(1)» o «(d)». El sistema invers està format per tres vectors que tenen la seqüència contrària de fases que els vectors originals, per exemple: α-γ-β; els vectors s'identifiquen mitjançant els superíndexs «(2)» o «(i)». Finalment, el sistema homopolar està format per tres vectors que estan en fase entre si; els vectors s'identifiquen mitjançant el superíndex «(0)».

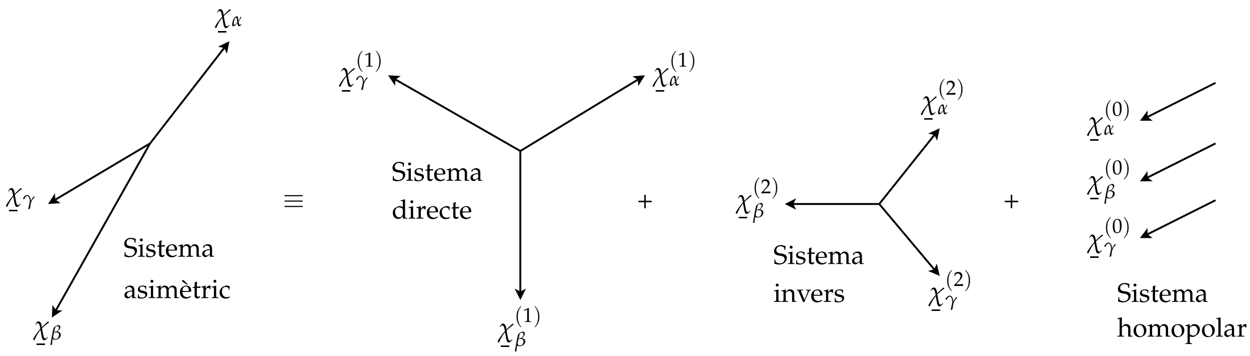


Figura 2.1: Components simètriques. Teorema de Fortescue–Stokvis

Per tant, expressant els vectors del sistema asimètric en funció dels vectors dels tres sistemes simètrics, tenim:

$$\underline{\chi}_\alpha = \underline{\chi}_\alpha^{(0)} + \underline{\chi}_\alpha^{(1)} + \underline{\chi}_\alpha^{(2)} \tag{2.3a}$$

$$\underline{\chi}_\beta = \underline{\chi}_\beta^{(0)} + \underline{\chi}_\beta^{(1)} + \underline{\chi}_\beta^{(2)} = \underline{\chi}_\alpha^{(0)} + \mathrm{a}^2\underline{\chi}_\alpha^{(1)} + \mathrm{a}\underline{\chi}_\alpha^{(2)} \tag{2.3b}$$

$$\underline{\chi}_\gamma = \underline{\chi}_\gamma^{(0)} + \underline{\chi}_\gamma^{(1)} + \underline{\chi}_\gamma^{(2)} = \underline{\chi}_\alpha^{(0)} + \mathrm{a}\underline{\chi}_\alpha^{(1)} + \mathrm{a}^2\underline{\chi}_\alpha^{(2)} \tag{2.3c}$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \underline{\chi}_\alpha \\ \underline{\chi}_\beta \\ \underline{\chi}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{a}^2 & \mathrm{a} \\ 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\chi}_\alpha^{(0)} \\ \underline{\chi}_\alpha^{(1)} \\ \underline{\chi}_\alpha^{(2)} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

A partir del sistema d'equacions anterior, podem trobar els vectors dels tres sistemes simètrics en funció dels vectors del sistema asimètric:

$$\underline{\chi}_\alpha^{(0)} = \frac{1}{3}(\underline{\chi}_\alpha + \underline{\chi}_\beta + \underline{\chi}_\gamma) \qquad \underline{\chi}_\beta^{(0)} = \underline{\chi}_\alpha^{(0)} \qquad \underline{\chi}_\gamma^{(0)} = \underline{\chi}_\alpha^{(0)} \tag{2.5a}$$

$$\underline{\chi}_\alpha^{(1)} = \frac{1}{3}(\underline{\chi}_\alpha + \mathrm{a}\underline{\chi}_\beta + \mathrm{a}^2\underline{\chi}_\gamma) \qquad \underline{\chi}_\beta^{(1)} = \mathrm{a}^2\underline{\chi}_\alpha^{(1)} \qquad \underline{\chi}_\gamma^{(1)} = \mathrm{a}\underline{\chi}_\alpha^{(1)} \tag{2.5b}$$

$$\underline{\chi}_\alpha^{(2)} = \frac{1}{3}(\underline{\chi}_\alpha + \mathrm{a}^2\underline{\chi}_\beta + \mathrm{a}\underline{\chi}_\gamma) \qquad \underline{\chi}_\beta^{(2)} = \mathrm{a}\underline{\chi}_\alpha^{(2)} \qquad \underline{\chi}_\gamma^{(2)} = \mathrm{a}^2\underline{\chi}_\alpha^{(2)} \tag{2.5c}$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \underline{\chi}_\alpha^{(0)} \\ \underline{\chi}_\alpha^{(1)} \\ \underline{\chi}_\alpha^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{a}^2 & \mathrm{a} \\ 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a}^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\chi}_\alpha \\ \underline{\chi}_\beta \\ \underline{\chi}_\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a}^2 \\ 1 & \mathrm{a}^2 & \mathrm{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\chi}_\alpha \\ \underline{\chi}_\beta \\ \underline{\chi}_\gamma \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

2.3 Corrent de neutre

Suposem un sistema trifàsic amb neutre de retorn, que pot ser el terra, on qualsevol de les seves parts (generador, línia o consum) poden ser desequilibrades; el corrent que circula pel neutre és sempre la suma dels tres corrents de fase: $\underline{I}_\alpha + \underline{I}_\beta + \underline{I}_\gamma$. A partir d'aquest fet, i observant l'equació (2.5a), es veu que el corrent de retorn pel neutre, és igual a tres vegades la component homopolar del sistema de corrents de fase:

$$\underline{I}_\alpha + \underline{I}_\beta + \underline{I}_\gamma = 3\underline{I}_\alpha^{(0)} \tag{2.7}$$

D'altra banda, quan un sistema trifàsic no té neutre, tenim $\underline{I}_\alpha + \underline{I}_\beta + \underline{I}_\gamma = 0$, i per tant, observant la mateixa equació (2.5a), es veu que el sistema format pels corrents de fase no té sistema homopolar.

Finalment, també podem dir que el corrent total a terra, en cas de defecte a terra, és igual a tres vegades la component homopolar del corrent de curt circuit.

2.4 Propietats de les tensions fase–fase i fase–neutre

En la Figura 2.2 s'ha representat un sistema de tensions fase–fase: $\underline{U}_{\alpha\beta}$, $\underline{U}_{\beta\gamma}$, $\underline{U}_{\gamma\alpha}$, i dos sistemes de tensions fase–neutre, dels infinits que poden existir depenent de la posició del punt neutre: $\underline{U}_{\alpha\nu}$, $\underline{U}_{\beta\nu}$, $\underline{U}_{\gamma\nu}$ i $\underline{U}_{\alpha\kappa}$,$\underline{U}_{\beta\kappa}$, $\underline{U}_{\gamma\kappa}$. El punt neutre ν del primer sistema coincideix amb el baricentre (intersecció de les mitjanes) del triangle format per les tres tensions fase–fase, mentre que el punt neutre κ del segon sistema està desplaçat respecte d'aquest baricentre.

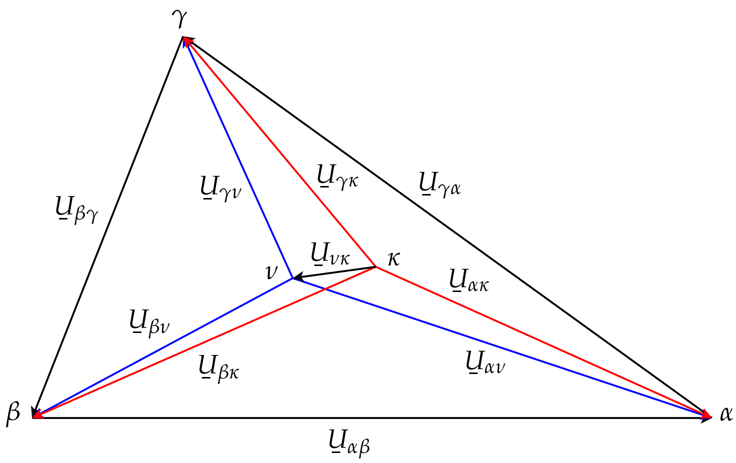


Figura 2.2: Components simètriques. Tensions fase–fase i fase–neutre

Atenent a l'equació (2.5a), es veu que el sistema format per les tensions fase–fase no té component homopolar, ja que la seva suma és sempre igual a zero: $\underline{U}_{\alpha\beta} + \underline{U}_{\beta\gamma} + \underline{U}_{\gamma\alpha} = 0$. Si a més d'aquesta consideració, tenim en compte el que s'ha dit en l'apartat anterior, resulta que un sistema trifàsic desequilibrat sense neutre, es pot estudiar tenint en compte tan sols un sistema directe i un sistema invers, ja que tant les tensions fase–fase com els corrents de fase, no tenen component homopolar.

Pel que fa a les components directa i inversa del sistema format per les tensions fase–fase, es compleix el següent: les components directa i inversa del sistema de tensions fase–fase, són respectivament, els vectors fase–fase de les components directa i inversa del sistema de tensions fase–neutre.

Expressant-ho en forma matemàtica tenim:

$$\underline{U}^{(0)}_{\alpha\beta} = 0 \qquad \underline{U}^{(0)}_{\beta\gamma} = 0 \qquad \underline{U}^{(0)}_{\gamma\alpha} = 0 \tag{2.8a}$$

$$\underline{U}^{(1)}_{\alpha\beta} = (1-\mathrm{a}^2)\underline{U}^{(1)}_{\alpha\nu} = \underline{U}^{(1)}_{\alpha\nu}\sqrt{3}_{\measuredangle 30^\circ} \qquad \underline{U}^{(1)}_{\beta\gamma} = \mathrm{a}^2\underline{U}^{(1)}_{\alpha\beta} \qquad \underline{U}^{(1)}_{\gamma\alpha} = \mathrm{a}\underline{U}^{(1)}_{\alpha\beta} \tag{2.8b}$$

$$\underline{U}^{(2)}_{\alpha\beta} = (1-\mathrm{a})\underline{U}^{(2)}_{\alpha\nu} = \underline{U}^{(2)}_{\alpha\nu}\sqrt{3}_{\measuredangle -30^\circ} \qquad \underline{U}^{(2)}_{\beta\gamma} = \mathrm{a}\underline{U}^{(2)}_{\alpha\beta} \qquad \underline{U}^{(2)}_{\gamma\alpha} = \mathrm{a}^2\underline{U}^{(2)}_{\alpha\beta} \tag{2.8c}$$

En aquestes equacions s'han utilitzat les components directa i inversa del sistema de tensions $\underline{U}_{\alpha\nu}, \underline{U}_{\beta\nu}, \underline{U}_{\gamma\nu}$, però també es podrien haver utilitzat les components directa i inversa del sistema de tensions $\underline{U}_{\alpha\kappa}, \underline{U}_{\beta\kappa}, \underline{U}_{\gamma\kappa}$, ja que es compleix el següent: tots el sistemes de tensió fase–neutre que tinguin els mateixos extrems α, β, γ, tenen les mateixes components directa i inversa; en termes més electrotècnics, es pot dir que qualsevol joc d'impedàncies en estrella connectat a les mateixes fases α, β, γ, origina unes tensions fase–neutre, les components directa i inversa de les quals, són independents de les característiques de les impedàncies.

El sistema de tensions fase–neutre $\underline{U}_{\alpha\nu}, \underline{U}_{\beta\nu}, \underline{U}_{\gamma\nu}$, el punt neutre ν del qual coincideix amb el baricentre del triangle α, β, γ, és l'únic que té un sistema homopolar nul; la resta de sistemes de tensions fase–neutre, com ara el $\underline{U}_{\alpha\kappa}, \underline{U}_{\beta\kappa}, \underline{U}_{\gamma\kappa}$, el punt neutre κ del qual està desplaçat respecte del punt ν, tenen un sistema homopolar de valor:

$$\underline{U}^{(0)}_{\alpha\kappa} = \underline{U}^{(0)}_{\beta\kappa} = \underline{U}^{(0)}_{\gamma\kappa} = \underline{U}_{\nu\kappa} \tag{2.9}$$

Amb relació al paràgraf anterior, es pot afirmar que si es connecten tres impedàncies idèntiques en estrella a un sistema de tensions trifàsic, la tensió del punt neutre de l'estrella coincidirà amb el baricentre ν del triangle format per les tensions fase–fase d'aquest sistema de tensions, i per tant les tensions fase–neutre no tindran component homopolar; de fet, ν és el punt neutre de les tensions fase–fase del sistema de tensions trifàsic.

2.5 Potència

Tal com es veu en l'equació (1.48), la qual fa referència a la Figura 1.11 a la pàgina 12, la potència complexa trifàsica en un sistema desequilibrat $\underline{S}_{3\mathrm{F}}$, es calcula a partir de les tres tensions fase–neutre $\underline{U}_{\alpha\nu}$, $\underline{U}_{\beta\nu}$ i $\underline{U}_{\gamma\nu}$, i dels tres corrents de fase $\underline{I}_\alpha$, $\underline{I}_\beta$ i $\underline{I}_\gamma$.

No obstant, si calculem els sistemes directe, invers i homopolar, corresponents a les tensions i corrents anteriors, $\underline{U}^{(1)}_{\alpha\nu}$, $\underline{U}^{(2)}_{\alpha\nu}$ i $\underline{U}^{(0)}_{\alpha\nu}$, i $\underline{I}^{(1)}_{\alpha}$, $\underline{I}^{(2)}_{\alpha}$ i $\underline{I}^{(0)}_{\alpha}$, podem expressar la potència complexa trifàsica a partir d'aquests nous valors, utilitzant les equacions (2.3a), (2.3b) i (2.3c):

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{3\mathrm{F}} &= \underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}^*_\alpha + \underline{U}_{\beta\nu}\underline{I}^*_\beta + \underline{U}_{\gamma\nu}\underline{I}^*_\gamma = \\
&= \left(\underline{U}^{(0)}_{\alpha\nu} + \underline{U}^{(1)}_{\alpha\nu} + \underline{U}^{(2)}_{\alpha\nu}\right)\left(\underline{I}^{(0)}_{\alpha} + \underline{I}^{(1)}_{\alpha} + \underline{I}^{(2)}_{\alpha}\right)^* + \\
&+ \left(\underline{U}^{(0)}_{\alpha\nu} + \mathrm{a}^2\underline{U}^{(1)}_{\alpha\nu} + \mathrm{a}\underline{U}^{(2)}_{\alpha\nu}\right)\left(\underline{I}^{(0)}_{\alpha} + \mathrm{a}^2\underline{I}^{(1)}_{\alpha} + \mathrm{a}\underline{I}^{(2)}_{\alpha}\right)^* + \\
&+ \left(\underline{U}^{(0)}_{\alpha\nu} + \mathrm{a}\underline{U}^{(1)}_{\alpha\nu} + \mathrm{a}^2\underline{U}^{(2)}_{\alpha\nu}\right)\left(\underline{I}^{(0)}_{\alpha} + \mathrm{a}\underline{I}^{(1)}_{\alpha} + \mathrm{a}^2\underline{I}^{(2)}_{\alpha}\right)^* = \\
&= 3\,\underline{U}^{(1)}_{\alpha\nu}\,\underline{I}^{(1)*}_{\alpha} + 3\,\underline{U}^{(2)}_{\alpha\nu}\,\underline{I}^{(2)*}_{\alpha} + 3\,\underline{U}^{(0)}_{\alpha\nu}\,\underline{I}^{(0)*}_{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Exemple 2.1 *Es tracta de trobar la potència consumida per una càrrega trifàsica formada per tres resistències idèntiques de* 10,58 Ω*, connectades en estrella a un sistema trifàsic sense neutre, i la tensió a què està sotmesa cada resistència; els valors de les tensions del sistema trifàsic són:* $|\underline{U}_{\alpha\beta}| = 1840\,\text{V}$, $|\underline{U}_{\beta\gamma}| = 2760\,\text{V}$, $|\underline{U}_{\gamma\alpha}| = 2300\,\text{V}$.

Assignem de forma arbitrària, tal com s'ha fet en la Figura 2.2 a la pàgina 25, un angle de fase igual a zero, a la tensió $\underline{U}_{\alpha\beta}$.

A continuació trobem els angles φ_α *i* φ_β*, corresponents als vèrtexs* α *i* β *del triangle de tensions, utilitzant la llei dels cosinus (vegeu la Secció E.2 a la pàgina 149):*

$$\varphi_\alpha = \arccos \frac{|\underline{U}_{\alpha\beta}|^2 + |\underline{U}_{\gamma\alpha}|^2 - |\underline{U}_{\beta\gamma}|^2}{2|\underline{U}_{\alpha\beta}||\underline{U}_{\gamma\alpha}|} = \arccos \frac{(1840\,\text{V})^2 + (2300\,\text{V})^2 - (2760\,\text{V})^2}{2 \cdot 1840\,\text{V} \cdot 2300\,\text{V}} = 82{,}82^\circ$$

$$\varphi_\beta = \arccos \frac{|\underline{U}_{\beta\gamma}|^2 + |\underline{U}_{\alpha\beta}|^2 - |\underline{U}_{\gamma\alpha}|^2}{2|\underline{U}_{\beta\gamma}||\underline{U}_{\alpha\beta}|} = \arccos \frac{(2760\,\text{V})^2 + (1840\,\text{V})^2 - (2300\,\text{V})^2}{2 \cdot 2760\,\text{V} \cdot 1840\,\text{V}} = 55{,}77^\circ$$

Les tres tensions en forma complexa són doncs:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{\alpha\beta} &= 1840_{\measuredangle 0^\circ}\,\text{V} \\
\underline{U}_{\beta\gamma} &= 2760_{\measuredangle 180^\circ + 55{,}77^\circ}\,\text{V} = 2760_{\measuredangle 235{,}77^\circ}\,\text{V} \\
\underline{U}_{\gamma\alpha} &= 2300_{\measuredangle 180^\circ - 82{,}82^\circ}\,\text{V} = 2300_{\measuredangle 97{,}18^\circ}\,\text{V}
\end{aligned}$$

Tal com s'ha dit anteriorment, el sistema de tensions fase–fase no té component homopolar; a més, el sistema de tensions fase–neutre tampoc no en tindrà, ja que la càrrega trifàsica és equilibrada (tres resistències idèntiques).

Trobem a continuació les components directa i inversa de les tensions $\underline{U}_{\alpha\beta}, \underline{U}_{\beta\gamma}, \underline{U}_{\gamma\alpha}$*, utilitzant les equacions* (2.5b) *i* (2.5c)*:*

$$\begin{aligned}
\underline{U}^{(1)}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3}\big(1840_{\measuredangle 0^\circ}\,\text{V} + 1_{\measuredangle 120^\circ} \cdot 2760_{\measuredangle 235{,}77^\circ}\,\text{V} + 1_{\measuredangle 240^\circ} \cdot 2300_{\measuredangle 97{,}18^\circ}\,\text{V}\big) = 2267{,}09_{\measuredangle -9{,}27^\circ}\,\text{V} \\
\underline{U}^{(2)}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3}\big(1840_{\measuredangle 0^\circ}\,\text{V} + 1_{\measuredangle 240^\circ} \cdot 2760_{\measuredangle 235{,}77^\circ}\,\text{V} + 1_{\measuredangle 120^\circ} \cdot 2300_{\measuredangle 97{,}18^\circ}\,\text{V}\big) = 539{,}77_{\measuredangle 137{,}42^\circ}\,\text{V} \\
\underline{U}^{(0)}_{\alpha\beta} &= 0\,\text{V}
\end{aligned}$$

El següent pas consisteix a trobar les components directa i inversa de les tensions fase–neutre, utilitzant les equacions (2.8b) *i* (2.8c)*:*

$$\begin{aligned}
\underline{U}^{(1)}_{\alpha\nu} &= \frac{\underline{U}^{(1)}_{\alpha\beta}}{\sqrt{3}_{\measuredangle 30^\circ}} = \frac{2267{,}09_{\measuredangle -9{,}27^\circ}\,\text{V}}{\sqrt{3}_{\measuredangle 30^\circ}} = 1308{,}91_{\measuredangle -39{,}27^\circ}\,\text{V} \\
\underline{U}^{(2)}_{\alpha\nu} &= \frac{\underline{U}^{(2)}_{\alpha\beta}}{\sqrt{3}_{\measuredangle -30^\circ}} = \frac{539{,}77_{\measuredangle 137{,}42^\circ}\,\text{V}}{\sqrt{3}_{\measuredangle -30^\circ}} = 311{,}64_{\measuredangle 167{,}42^\circ}\,\text{V} \\
\underline{U}^{(0)}_{\alpha\nu} &= 0\,\text{V}
\end{aligned}$$

A partir d'aquests valors, podem calcular ara les components directa, inversa i homopolar del corrent que circula per les resistències, aplicant les lleis de Kirchhoff; les components directa, inversa i homopolar de les *resistències $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ i $R^{(0)}$ són iguals als seus valors nominals.*

$$\underline{I}_{\alpha}^{(1)} = \frac{\underline{U}_{\alpha\nu}^{(1)}}{R^{(1)}} = \frac{1308{,}91_{\measuredangle -39{,}27^\circ}\,\mathrm{V}}{10{,}58_{\measuredangle 0^\circ}\,\Omega} = 123{,}72_{\measuredangle -39{,}27^\circ}\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_{\alpha}^{(2)} = \frac{\underline{U}_{\alpha\nu}^{(2)}}{R^{(2)}} = \frac{311{,}64_{\measuredangle 167{,}42^\circ}\,\mathrm{V}}{10{,}58_{\measuredangle 0^\circ}\,\Omega} = 29{,}46_{\measuredangle 167{,}42^\circ}\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_{\alpha}^{(0)} = \frac{\underline{U}_{\alpha\nu}^{(0)}}{R^{(0)}} = \frac{0\,\mathrm{V}}{10{,}58_{\measuredangle 0^\circ}\,\Omega} = 0\,\mathrm{A}$$

Podem ara ja calcular la potència consumida per la càrrega trifàsica, utilitzant l'equació (2.10):

$$\begin{aligned}\underline{S}_{3\mathrm{F}} &= 3\,\underline{U}_{\alpha\nu}^{(1)}\,\underline{I}_{\alpha}^{(1)*} + 3\,\underline{U}_{\alpha\nu}^{(2)}\,\underline{I}_{\alpha}^{(2)*} + 3\,\underline{U}_{\alpha\nu}^{(0)}\,\underline{I}_{\alpha}^{(0)*} = \\ &= 3\cdot 1308{,}91_{\measuredangle -39{,}27^\circ}\,\mathrm{V}\cdot 123{,}72_{\measuredangle 39{,}27^\circ}\,\mathrm{A} + 3\cdot 311{,}64_{\measuredangle 167{,}42^\circ}\,\mathrm{V}\cdot 29{,}46_{\measuredangle -167{,}42^\circ}\,\mathrm{A} + 0 = \\ &= 513{,}33\,\mathrm{kW}\end{aligned}$$

Finalment, utilitzarem les equacions (2.3a), (2.3b) i (2.3c) per trobar la tensió a què estan sotmeses les tres resistències:

$$\underline{U}_{\alpha\nu} = 0 + 1308{,}91_{\measuredangle -39{,}27^\circ}\,\mathrm{V} + 311{,}64_{\measuredangle 167{,}42^\circ}\,\mathrm{V} = 1039{,}94_{\measuredangle -47{,}01^\circ}\,\mathrm{V}$$

$$\underline{U}_{\beta\nu} = 0 + 1_{\measuredangle 240^\circ}\cdot 1308{,}91_{\measuredangle -39{,}27^\circ}\,\mathrm{V} + 1_{\measuredangle 120^\circ}\cdot 311{,}64_{\measuredangle 167{,}42^\circ}\,\mathrm{V} = 1362{,}89_{\measuredangle -146{,}07^\circ}\,\mathrm{V}$$

$$\underline{U}_{\gamma\nu} = 0 + 1_{\measuredangle 120^\circ}\cdot 1308{,}91_{\measuredangle -39{,}27^\circ}\,\mathrm{V} + 1_{\measuredangle 240^\circ}\cdot 311{,}64_{\measuredangle 167{,}42^\circ}\,\mathrm{V} = 1578{,}66_{\measuredangle 74{,}51^\circ}\,\mathrm{V}$$

Capítol 3

Sèries de Fourier

3.1 Definicions

Una funció periòdica en el temps $v(t)$, de freqüència f, període T i velocitat angular ω ($f = 1/T$, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$), es pot expressar com una suma infinita de funcions sinus i cosinus; és el que s'anomena expansió d'una funció periòdica en sèrie de Fourier:

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t) \tag{3.1}$$

Els coeficients A_0, A_n i B_n, es calculen a partir de les expressions següents:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.2a}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} v(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad (n = 1,\ldots\infty) \tag{3.2b}$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} v(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad (n = 1,\ldots\infty) \tag{3.2c}$$

Si la funció periòdica $v(\alpha)$ està definida en funció de l'angle α, enlloc del temps t, a partir de la relació $\alpha = \omega t$ ($\mathrm{d}\alpha = \omega\,\mathrm{d}t$), tenim:

$$v(\alpha) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\alpha \tag{3.3}$$

En aquest cas, els coeficients A_0, A_n i B_n, es calculen a partir de les expressions següents:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} v(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \tag{3.4a}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} v(\alpha)\cos n\alpha\,\mathrm{d}\alpha \qquad (n = 1,\ldots\infty) \tag{3.4b}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} v(\alpha)\sin n\alpha\,\mathrm{d}\alpha \qquad (n = 1,\ldots\infty) \tag{3.4c}$$

Les equacions (3.1) i (3.3), es poden expressar d'una manera alternativa, utilitzant únicament funcions cosinus:

$$v(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n) \tag{3.5}$$

$$v(\alpha) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\alpha + \phi_n) \tag{3.6}$$

Els coeficients C_0, C_n i ϕ_n, es calculen a partir de les expressions següents:

$$C_0 = A_0 \tag{3.7a}$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \qquad (n = 1, \ldots \infty) \tag{3.7b}$$

$$\phi_n = -\arctan \frac{B_n}{A_n} \qquad (n = 1, \ldots \infty) \tag{3.7c}$$

Si comparem l'equació (3.2a) amb l'equació (1.63) o l'equació (3.4a) amb l'equació (1.64), veurem que són idèntiques, per tant, es pot afirmar que el coeficient A_0 (i per tant C_0) és igual al valor mitjà de la funció periòdica.

Atenent a les equacions (3.5) o (3.6), el terme d'índex $n = 1$, $C_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ o $C_1 \cos(\alpha + \phi_1)$, s'anomena component fonamental, perquè té la mateixa freqüència que la funció original. La resta de termes, d'índex $n = 2, \ldots, \infty$, s'anomenen components harmòniques.

3.2 Simplificacions

Quan les funcions $v(t)$ o $v(\alpha)$ presenten certes simetries, alguns dels coeficients A_n, B_n, C_n i ϕ_n s'anul·len, o prenen valors determinats.

3.2.1 Funcions parells

Són funcions que compleixen: $v(t) = v(-t)$ o $v(\alpha) = v(-\alpha)$. En aquest cas, tots els coeficients B_n s'anul·len; en concret tenim:

$$B_n = 0 \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{3.8a}$$

$$C_0 = A_0 \tag{3.8b}$$

$$C_n = A_n \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{3.8c}$$

$$\phi_n = 0 \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{3.8d}$$

3.2.2 Funcions senars

Són funcions que compleixen: $v(t) = -v(-t)$ o $v(\alpha) = -v(-\alpha)$. En aquest cas, tots els coeficients A_n s'anul·len; en concret tenim:

$$A_0 = 0 \tag{3.9a}$$

$$A_n = 0 \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{3.9b}$$

$$C_0 = 0 \tag{3.9c}$$

$$C_n = B_n \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{3.9d}$$

$$\phi_n = -\frac{\pi}{2} \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{3.9e}$$

3.2.3 Funcions amb simetria de semiona

Són funcions que compleixen: $v(t) = -v(t + \frac{T}{2}) = -v(t + \frac{\pi}{\omega})$ o $v(\alpha) = -v(\alpha + \pi)$. En aquest cas, tots els coeficients A_n i B_n d'índex parell s'anul·len; en concret tenim:

$$A_0 = 0 \tag{3.10a}$$

$$A_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots, \infty) \tag{3.10b}$$

$$B_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots, \infty) \tag{3.10c}$$

$$C_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots, \infty) \tag{3.10d}$$

$$\phi_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots, \infty) \tag{3.10e}$$

3.3 Condició de Dirichlet

Quan una funció periòdica $v(t)$ és contínua en tot el seu període T, la seva expansió en sèrie de Fourier convergeix al mateix valor que la funció original, per a qualsevol valor de t.

En el cas que la funció $v(t)$ estigui definida a trossos, com per exemple una ona quadrada, la condició de Dirichlet ens assegura que la seva expansió en sèrie de Fourier convergeix al mateix valor que la funció original, per a tots els valors de t on la funció es contínua, i que en els punts de discontinuïtat de la funció, la seva expansió en sèrie de Fourier convergeix al valor mitjà dels límits per la dreta i per l'esquerra de la funció en aquests punts. Per tal que això es compleixi, la funció $v(t)$ ha de complir les condicions següents:

- Ha de tenir un nombre finit de discontinuïtats finites.
- Ha de tenir un nombre finit d'extrems (màxims o mínims).

Tot el que s'ha dit, és igualment vàlid per a una funció periòdica $v(\alpha)$ definida en funció de l'angle α.

3.4 Valors mitjà i eficaç, factors d'ona fonamental i d'harmòniques, i distorsió harmònica total

3.4.1 Valor mitjà

Com ja s'ha dir anteriorment, el valor mitjà V_{av} d'una funció periòdica $v(t)$ o $v(\alpha)$ és:

$$V_{\mathrm{av}} = A_0 = C_0 \tag{3.11}$$

3.4.2 Valor eficaç

Atenent a les equacions (3.5) o (3.6), els valors de cresta $\hat{V}_n$ i eficaç V_n de cadascun dels termes del sumatori, són respectivament

$$\hat{V}_n = C_n \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{3.12}$$

$$V_n = \frac{C_n}{\sqrt{2}} \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{3.13}$$

El valor eficaç total V de la funció periòdica $v(t)$ o $v(\alpha)$ és:

$$V = \sqrt{V_{\mathrm{av}}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2} \tag{3.14}$$

3.4.3 Factor d'ona fonamental o de distorsió

El factor d'ona fonamental o de distorsió F_{F}, relaciona el valor eficaç de la component fonamental V_1, amb el valor eficaç total V. Un valor proper a 1, indica que les components harmòniques tenen poca importància:

$$F_{\mathrm{F}} = \frac{V_1}{V} \tag{3.15}$$

3.4.4 Factor d'harmòniques

El factor d'harmòniques F_{H}, relaciona el valors eficaços de les components harmòniques V_n $(n = 2, \ldots, \infty)$, amb el valor eficaç total V. Un valor proper a 0, indica un baix contingut de components harmòniques:

$$F_{\mathrm{H}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V} \tag{3.16}$$

Quan el valor mitjà V_{av} és nul, es verifica:

$$F_{\mathrm{F}}{}^2 = 1 - F_{\mathrm{H}}{}^2 \qquad (\text{si } V_{\mathrm{av}} = 0) \tag{3.17}$$

3.4.5 Distorsió harmònica total

La distorsió harmònica total *THD* (de l'anglès «Total Harmonic Distortion»), relaciona el valor eficaç total que s'obtindria sense tenir en compte la component fonamental V_1, amb el valor eficaç d'aquesta component fonamental. Un valor proper a 0, indica un baix contingut de components harmòniques:

$$THD = \frac{\sqrt{V_{\text{av}}^2 + \sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V_1} \tag{3.18}$$

Quan el valor mitjà V_{av} és nul, es verifica:

$$F_{\text{F}}{}^2 = \frac{1}{1 + THD^2} \qquad (\text{si } V_{\text{av}} = 0) \tag{3.19}$$

Exemple 3.1 *Es tracta de calcular els valors mitjà i eficaç, i el factor d'ona fonamental, de la tensió contínua que s'obté a partir d'una tensió sinusoïdal $u(t) = \hat{U} \sin \omega t$, amb un rectificador d'ona completa, utilitzant la seva expansió en sèrie de Fourier.*

La tensió que s'obté del rectificador d'ona completa ve definida per:

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U} \sin \omega t & 0 < \omega t < \pi \\ -\hat{U} \sin \omega t & \pi \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases}$$

En aquest cas, l'ona de tensió entre π i 2π és una repetició exacta de l'ona de tensió entre 0 i π, per tant, únicament caldrà considerar-ne la primera meitat (entre 0 i π), tenint en compte que el període serà π/ω. A més, aquesta funció és parell $u(t) = u(-t)$, i per tant, tots els termes B_n $(n = 1, \ldots, \infty)$ seran nuls.

El terme A_0 val:

$$A_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U} \sin \omega t \, \mathrm{d}t = -\frac{\hat{U} \cos \omega t}{\pi} \bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2\hat{U}}{\pi}$$

Els temes A_n valen:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U} \sin \omega t \cos(n\omega t) \, \mathrm{d}t = \frac{2\hat{U} [\cos \omega t \cos(n\omega t) + n \sin \omega t \sin(n\omega t)]}{\pi(n^2 - 1)} \bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ &= -\frac{2\hat{U}(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)} \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \end{aligned}$$

Per tant, la funció periòdica $u(t)$ es pot expressar com:

$$u(t) = \frac{2\hat{U}}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2\hat{U}(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)} \cos(n\omega t)$$

Ara bé, si ens fixem en els termes $1 + \cos n\pi$, veiem que valen 0 per a $n = 1, 3, 5, \ldots$ i 2 per a $n = 2, 4, 6, \ldots$, i per tant, dins del sumatori únicament ens quedaran termes d'índex parell. Si a continuació, fem el canvi de variable $n = 2k$ $(n^2 = 4k^2)$, tenim:

$$u(t) = \frac{2\hat{U}}{\pi} - \frac{4\hat{U}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega t)}{4k^2 - 1}$$

Aquesta simplificació es deguda al fet que s'ha utilitzat com a període de la funció $u(t)$ la meitat (π/ω) del valor total $(2\pi/\omega)$, i per tant, és com si n'haguéssim doblat la freqüència i la velocitat angular; així doncs, la velocitat angular de la component fonamental és 2ω, i la velocitat angular de les components harmòniques és $2\omega k$ $(k = 2, 3, 4, 5\ldots)$.

El valor mitjà U_{av} de $u(t)$ és directament:

$$U_{\mathrm{av}} = \frac{2\hat{U}}{\pi}$$

El valor eficaç de cadascun dels termes del sumatori és:

$$U_k = \frac{4\hat{U}}{\sqrt{2}\pi(4k^2-1)} \qquad (k = 1, \ldots, \infty)$$

El valor eficaç total és, per tant:

$$U = \sqrt{\left(\frac{2\hat{U}}{\pi}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4\hat{U}}{\sqrt{2}\pi(4k^2-1)}\right)^2} = \sqrt{\frac{4\hat{U}^2}{\pi^2} + \frac{(\pi^2-8)\hat{U}^2}{2\pi^2}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Com es pot veure, aquests valors mitjà i eficaç obtinguts aquí, són idèntics als obtinguts en l'exemple de la Secció 1.4.

El valor eficaç U_1 de la component fonamental val:

$$U_1 = \frac{4\hat{U}}{\sqrt{2}\pi(4\cdot 1^2 - 1)} = \frac{4\hat{U}}{3\sqrt{2}\pi}$$

El factor d'ona fonamental val, per tant:

$$F_{\mathrm{F}} = \frac{\dfrac{4\hat{U}}{3\sqrt{2}\pi}}{\dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}}} = \frac{4}{3\pi} = 0,42$$

Com es pot veure, aquest valor no es gaire alt, això ens indica que el contingut de components harmòniques de la tensió $u(t)$ és elevat.

3.5 Potència

Comencem expressant una tensió $u(t)$ i un corrent $i(t)$ segons l'equació (3.5), tot substituint els coeficients C_0 i C_n $(n = 1, \ldots, \infty)$ pels valors mitjà i eficaç respectivament:

$$u(t) = U_{\mathrm{av}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}U_n\cos(n\omega t + \zeta_n) \tag{3.20}$$

$$i(t) = I_{\mathrm{av}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}I_n\cos(n\omega t + \psi_n) \tag{3.21}$$

Si $u(t)$ és la tensió que s'aplica a una càrrega i $i(t)$ és el corrent que aquesta càrrega absorbeix, essent els sentits de $u(t)$ i de $i(t)$ els mateixos que es poden veure en les Figures 1.4, 1.5 o 1.6, la potència activa P consumida per la càrrega és:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[U_{\mathrm{av}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}U_n\cos(n\omega t+\zeta_n)\right]\left[I_{\mathrm{av}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}I_n\cos(n\omega t+\psi_n)\right]\mathrm{d}t = \\ &= U_{\mathrm{av}}I_{\mathrm{av}} + \sum_{n=1}^{\infty}U_nI_n\cos(\zeta_n-\psi_n) = U_{\mathrm{av}}I_{\mathrm{av}} + \sum_{n=1}^{\infty}U_nI_n\cos\varphi_n \end{aligned} \tag{3.22}$$

Els termes $\cos\varphi_n = \cos(\zeta_n - \psi_n)$ són els factors de potència de cadascuna de les components fonamental i harmòniques. No existeix un factor de potència global.

Com es pot observar, només contribueixen a la potencia total, els termes de la tensió i del corrent que tenen el mateix índex. Per tant, si el corrent té termes d'uns índexs que no estan presents en la tensió, aquests termes no contribuiran a la transmissió de potència; en canvi si observem l'equació (3.14) veiem que tots els termes contribueixen al valor eficaç total, per tant, aquestes components harmòniques sí que contribuiran a elevar el valor eficaç del corrent, i per tant a elevar les pèrdues resistives en les línies de transmissió.

La potència aparent S es defineix de la manera usual, com el producte dels valors eficaços totals de la tensió i del corrent:

$$S = UI = \sqrt{\left(U_{\mathrm{av}}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}U_n^2\right)\left(I_{\mathrm{av}}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}I_n^2\right)} \tag{3.23}$$

Pel que fa a la potència reactiva Q, s'acostuma a definir d'una forma similar a la potència activa:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty}U_nI_n\sin(\zeta_n-\psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}U_nI_n\sin\varphi_n \tag{3.24}$$

Amb aquesta definició de potència reactiva, tenim: $P^2 + Q^2 < S^2$; el valor que falta per quadrar aquesta desigualtat, es l'anomenada potència distorsionant D:

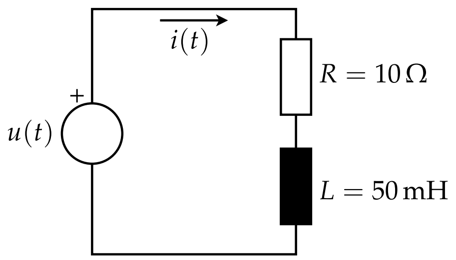
$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2 \tag{3.25}$$

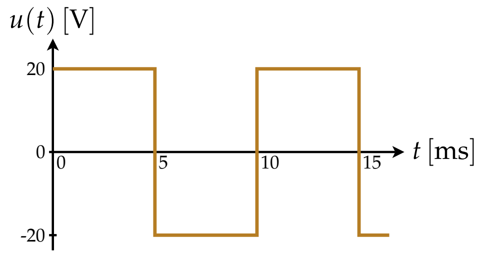
3.6 Anàlisi de circuits elèctrics

Les sèries de Fourier s'utilitzen per calcular les tensions i corrents que s'estableixen en un circuit elèctric, quan les fonts de tensió presents són ones periòdiques no sinusoïdals (ones quadrades, triangulars, trapezoïdals, etc.). En aquest cas, cal descompondre la tensió no sinusoïdal en una sèrie de Fourier, i calcular les tensions i corrents que s'originen en el circuit, de forma independent, per a cadascuna de les freqüències presents en la sèrie de Fourier; el valor total d'aquests corrents i tensions s'obté sumant els termes parcials corresponents a cada freqüència.

En aquests càlculs cal tenir en compte, que la impedància que presentarà una inductància L i una capacitat C, al terme n-èsim de la tensió serà $\mathrm{j}\,n\omega L$ i $-\mathrm{j}/(n\omega C)$ respectivament, essent ω la velocitat angular de la component fonamental de la tensió.

Exemple 3.2 *Es tracta de trobar la potència dissipada en la resistència del circuit següent; la tensió $u(t)$ aplicada al circuit, es mostra en la gràfica adjunta.*





El període de la tensió $u(t)$ és: $T = 10\,\text{ms}$, i la seva velocitat angular: $\omega = 2\pi/T = 200\pi\,\text{rad/s}$; matemàticament, $u(t)$ s'expressa com:

$$u(t) = \begin{cases} 20\,\text{V} & 0\,\text{ms} < t < 5\,\text{ms} \\ -20\,\text{V} & 5\,\text{ms} \leq t \leq 10\,\text{ms} \end{cases}$$

Comencem calculant l'expansió en sèrie de Fourier de la tensió $u(t)$. Aquesta funció es senar i té simetria de semiona, i per tant compleix: $u(t) = -u(-t)$ i $u(t) = -u(t + \frac{T}{2})$; com a conseqüència d'això, únicament seran diferents de zero el coeficients B_n d'índex senar $(B_1, B_3, B_5, \ldots)$. Donat que $u(t)$ està definida en dos trossos, calcularem els coeficients B_n segons:

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} u(t)\sin(n\omega t) + \int_{T/2}^{T} u(t)\sin(n\omega t)\right) = \\
&= 200\left(\int_0^{5\cdot 10^{-3}} 20\sin(200n\pi t) + \int_{5\cdot 10^{-3}}^{10^{-2}} -20\sin(200n\pi t)\right) = \\
&= 200\left(-\frac{\cos(200n\pi t)}{10n\pi}\bigg|_0^{5\cdot 10^{-3}} + \frac{\cos(200n\pi t)}{10n\pi}\bigg|_{5\cdot 10^{-3}}^{10^{-2}}\right) = \\
&= 200\left(\frac{1}{10n\pi} - \frac{\cos n\pi}{5n\pi} + \frac{\cos(2n\pi)}{10n\pi}\right) \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)
\end{aligned}$$

Si tenim en compte que per a valors senars de l'índex n, es compleix: $\cos n\pi = -1$ i $\cos(2n\pi) = 1$, tenim:

$$B_n = 200\left(\frac{1}{10n\pi} - \frac{-1}{5n\pi} + \frac{1}{10n\pi}\right) = \frac{80}{n\pi} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Així doncs, l'expansió en sèrie de Fourier de la tensió $u(t)$ és:

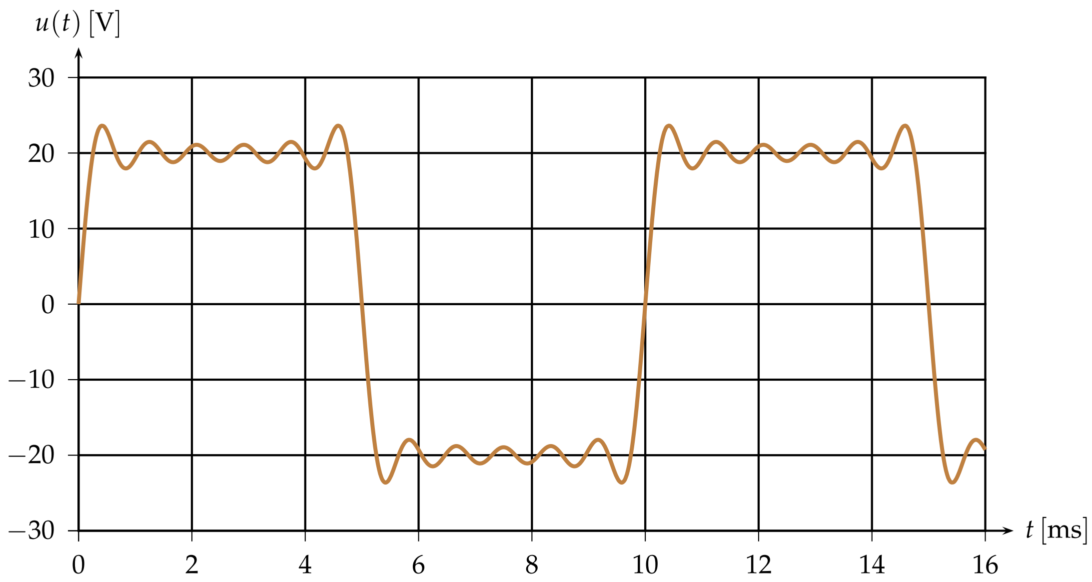
$$u(t) = \frac{80}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \frac{\sin(7\omega t)}{7} + \frac{\sin(9\omega t)}{9} + \frac{\sin(11\omega t)}{11} + \cdots\right)$$

En el punt de discontinuïtat $t = 5\,\text{ms}$, tenim:

$$u(5\cdot 10^{-3}\,\text{s}) = \frac{80}{\pi}\left(\sin\pi + \frac{\sin 3\pi}{3} + \frac{\sin 5\pi}{5} + \frac{\sin 7\pi}{7} + \frac{\sin 9\pi}{9} + \frac{\sin 11\pi}{11} + \cdots\right) = 0\,\text{V}$$

Es comprova que en complir-se la condició de Dirichlet, aquest valor correspon al valor mitjà dels límits esquerra (20) i dret (-20) de la funció en aquest punt.

A continuació es pot veure la gràfica de la tensió $u(t)$, que s'obté utilitzant la seva expansió en sèrie de Fourier, fins a la component harmònica d'índex 11:



La impedància de la càrrega formada per la resistència R i la inductància L, tindrà un valor $\underline{Z}_n$ diferent per a cadascuna de les tensions fonamental i harmòniques presents en la tensió $u(t)$; els valors de $\underline{Z}_n$ per als primes índex són:

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= R + \mathrm{j}\,\omega L &&= 10 + \mathrm{j}\cdot 200\cdot\pi\cdot 50\cdot 10^{-3} &&= 32{,}9691_{\measuredangle 1{,}2626\,\mathrm{rad}}\,\Omega\\
\underline{Z}_3 &= R + \mathrm{j}\,3\omega L &&= 10 + \mathrm{j}\cdot 3\cdot 200\cdot\pi\cdot 50\cdot 10^{-3} &&= 94{,}7768_{\measuredangle 1{,}4651\,\mathrm{rad}}\,\Omega\\
\underline{Z}_5 &= R + \mathrm{j}\,5\omega L &&= 10 + \mathrm{j}\cdot 5\cdot 200\cdot\pi\cdot 50\cdot 10^{-3} &&= 157{,}3976_{\measuredangle 1{,}5072\,\mathrm{rad}}\,\Omega\\
\underline{Z}_7 &= R + \mathrm{j}\,7\omega L &&= 10 + \mathrm{j}\cdot 7\cdot 200\cdot\pi\cdot 50\cdot 10^{-3} &&= 220{,}1387_{\measuredangle 1{,}5254\,\mathrm{rad}}\,\Omega\\
\underline{Z}_9 &= R + \mathrm{j}\,9\omega L &&= 10 + \mathrm{j}\cdot 9\cdot 200\cdot\pi\cdot 50\cdot 10^{-3} &&= 282{,}9201_{\measuredangle 1{,}5354\,\mathrm{rad}}\,\Omega\\
\underline{Z}_{11} &= R + \mathrm{j}\,11\omega L &&= 10 + \mathrm{j}\cdot 11\cdot 200\cdot\pi\cdot 50\cdot 10^{-3} &&= 345{,}7198_{\measuredangle 1{,}5419\,\mathrm{rad}}\,\Omega
\end{aligned}
$$

L'expansió en sèrie de Fourier del corrent $i(t)$ serà anàloga a la de la tensió $u(t)$, és a dir, tan sols tindrà funcions sinus d'índex senar. Donat que la càrrega és inductiva, cadascun dels termes del corrent estarà endarrerit respecte del terme corresponent de la tensió, en un valor indicat per l'argument de cada impedància. El valor de pic de cada terme del corrent $\hat{I}_n$, s'obté dividint el valor de pic de cada terme de la tensió $\hat{U}_n$ pel mòdul de la impedància corresponent; els valors de $\hat{I}_n$ per als primes índex són:

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{|\underline{Z}_1|} = \frac{80}{\pi\cdot 32{,}9691} = 0{,}7724\,\mathrm{A} \qquad \hat{I}_3 = \frac{\hat{U}_3}{|\underline{Z}_3|} = \frac{80}{3\cdot\pi\cdot 94{,}7768} = 0{,}0896\,\mathrm{A}$$

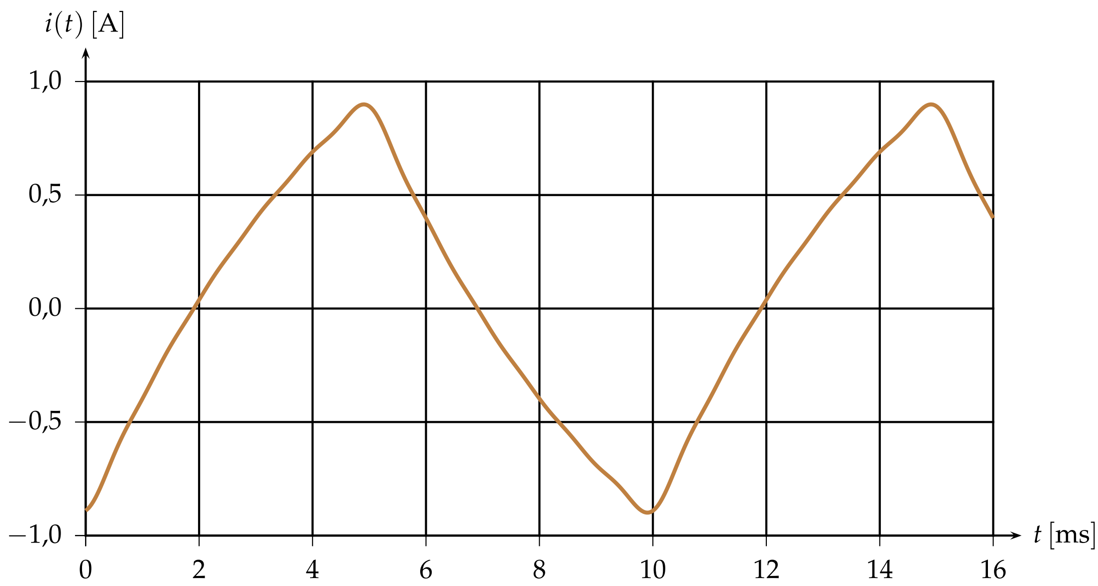
$$\hat{I}_5 = \frac{\hat{U}_5}{|\underline{Z}_5|} = \frac{80}{5\cdot\pi\cdot 157{,}3976} = 0{,}0324\,\mathrm{A} \qquad \hat{I}_7 = \frac{\hat{U}_7}{|\underline{Z}_7|} = \frac{80}{7\cdot\pi\cdot 220{,}1387} = 0{,}0165\,\mathrm{A}$$

$$\hat{I}_9 = \frac{\hat{U}_9}{|\underline{Z}_9|} = \frac{80}{9\cdot\pi\cdot 282{,}9201} = 0{,}0100\,\mathrm{A} \qquad \hat{I}_{11} = \frac{\hat{U}_{11}}{|\underline{Z}_{11}|} = \frac{80}{11\cdot\pi\cdot 345{,}7198} = 0{,}0067\,\mathrm{A}$$

Amb aquests valor calculats, l'expansió en sèrie de Fourier del corrent $i(t)$ és:

$$i(t) = 0{,}7724\sin(\omega t - 1{,}2626) + 0{,}0896\sin(3\omega t - 1{,}4651) + 0{,}0324\sin(5\omega t - 1{,}5072) + \\ + 0{,}0165\sin(7\omega t - 1{,}5254) + 0{,}0100\sin(9\omega t - 1{,}5354) + 0{,}0067\sin(11\omega t - 1{,}5419) + \cdots$$

A continuació es pot veure la gràfica del corrent $i(t)$, que s'obté utilitzant la seva expansió en sèrie de Fourier, fins a la component harmònica d'índex 11:



Calculem a continuació el valor eficaç I del corrent:

$$I = \sqrt{\left(\frac{0{,}7724}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0896}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0324}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0165}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0100}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0067}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdots} \approx \\ \approx 0{,}5505\,\mathrm{A}$$

Finalment, la potència P dissipada en la resistència serà:

$$P = RI^2 \approx 10\,\Omega \cdot (0{,}5505\,\mathrm{A})^2 = 3{,}03\,\mathrm{W}$$

Aquest valor també es pot calcular a partir de l'equació (3.22). La potència així calculada, correspon a la potència activa cedida per la font de tensió, i donat que la resistència R és l'únic component del circuit que en consumeix, aquest mètode ens proporcionarà el mateix resultat; utilitzant les expansions en sèrie de Fourier de la tensió $u(t)$ i del corrent $i(t)$, fins a la component harmònica d'índex 11, tenim:

$$P \approx U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_3 I_3 \cos\varphi_3 + U_5 I_5 \cos\varphi_5 + \\ + U_7 I_7 \cos\varphi_7 + U_9 I_9 \cos\varphi_9 + U_{11} I_{11} \cos\varphi_{11} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{80}{\pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}7724}{\sqrt{2}} \cdot \cos 1,2626 + \frac{80}{3 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}0896}{\sqrt{2}} \cdot \cos 1,4651 + \\
&+ \frac{80}{5 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}0324}{\sqrt{2}} \cdot \cos 1,5072 + \frac{80}{7 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}0165}{\sqrt{2}} \cdot \cos 1,5254 + \\
&+ \frac{80}{9 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}0100}{\sqrt{2}} \cdot \cos 1,5354 + \frac{80}{11 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}0067}{\sqrt{2}} \cdot \cos 1,5419 = \\
&= 3{,}03\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

En la resolució d'aquest exemple, hem emprat tan sols els sis primers termes de las sèries de Fourier de la tensió i del corrent; no obstant, el valor obtingut de la potència ha de ser prou precís, ja que els valors de pic dels termes de la sèrie del corrent, disminueixen de valor ràpidament.

Refarem a continuació els càlculs utilitzant més termes, amb l'ajut del programa Mathematica®. Definim en primer lloc el valor de pic de cada terme de la tensió i el valor del mòdul de la impedància corresponent, calculem a continuació els 100 primers termes del corrent de pic, i per acabar calculem el valor eficaç del corrent i la potència:

```
 In[1]:= u[n_] = 80 / (Pi (2n-1));

 In[2]:= z[n_] = Abs[10 + I (2n-1) 200 Pi 50 10^-3];

 In[3]:= i = Table[u[n], {n, 1, 100}] / Table[z[n], {n, 1, 100}];

 In[4]:= Irms = Sqrt[Apply[Plus, (i/Sqrt[2])^2]] // N

Out[4]:= 0.550511

 In[5]:= P = 10 Irms^2

Out[5]:= 3.03063
```

També podem fer aquests càlculs amb el programa MATLAB®, tal com es veu a continuació:

```
>> u = 80./(pi*(2*[1:1:100]-1));

>> z = abs(10 + i*(2*[1:1:100]-1)*200*pi*50*1e-3);

>> i = u./z;

>> Irms = sqrt(sum((i./sqrt(2)).^2))

Irms =

    0.5505

>> P = 10*Irms^2

P =

    3.0306
```

Com es pot observar, el valor de la potència obtingut amb qualsevol dels dos programes, coincideix d'una manera prou aproximada, amb el valor calculat a mà anteriorment.

Capítol 4

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace és part de l'anomenat càlcul operacional, i s'utilitza per convertir equacions diferencials ordinàries, en equacions lineals; un cop resoltes aquestes equacions lineals, la transformada inversa de Laplace ens proporciona la solució de l'equació diferencial original.

4.1 Definicions

4.1.1 Transformada de Laplace

La transformada de Laplace $\mathcal{L}$ converteix una funció del temps $f(t)$, definida per a $t \geq 0$, en una funció $F(s)$, on s és una variable complexa:

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) \equiv F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

El teorema de l'existència de la transformada de Laplace, estableix que si $f(t)$ és una funció contínua a trossos, en qualsevol interval finit contingut en $[0,\infty)$, i satisfà: $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$ per a qualsevol $t \in [0,\infty)$, llavors la funció $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$ existeix i és única, per a qualsevol $s > \alpha$.

4.1.2 Transformada inversa de Laplace

La transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ s'utilitza per obtenir la funció original $f(t)$, a partir de la funció transformada $F(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) \equiv f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\gamma-\mathrm{j}\infty}^{\gamma+\mathrm{j}\infty} F(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \tag{4.2}$$

On γ és un camí vertical en el pla complex, escollit de tal manera que totes les singularitats de la funció $F(s)$, quedin a la seva esquerra.

4.1.3 Funció graó unitari i funció impuls

Aquestes dues funcions són de gran importància en el càlcul operacional. La funció graó unitari, o funció de Heaviside, $\varepsilon_\tau(t)$ o $\varepsilon(t-\tau)$ en l'instant de temps $t=\tau$ es defineix com:

$$\varepsilon_\tau(t) = \begin{cases} 0 & t<\tau \\ \frac{1}{2} & t=\tau \\ 1 & t>\tau \end{cases} \tag{4.3}$$

La funció impuls, o funció delta de Dirac, $\delta_\tau(t)$ o $\delta(t-\tau)$ en l'instant de temps $t=\tau$, es pot definir mitjançant l'ús de límits o d'integrals de variable complexa, però resulta més intuïtiu definir-la a partir de les seves propietats: la funció és nul·la a tot arreu, excepte a $t=\tau$, i és d'àrea unitària:

$$\delta_\tau(t) = 0 \quad \text{per a tot } t \neq \tau \tag{4.4a}$$

$$\int_{\tau-\kappa}^{\tau+\kappa} \delta_\tau(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \text{per a tot } \kappa \in \mathbb{R}^+ \tag{4.4b}$$

Algunes propietats i relacions d'aquestes dues funcions són:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_\tau(t) = \delta_\tau(t) \tag{4.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_\tau(t)\,\mathrm{d}t = f(\tau) \tag{4.6}$$

$$\int_a^b \varepsilon_\tau(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon_\tau(t)\int_\tau^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (a \leq \tau \leq b) \tag{4.7}$$

On $f(t)$ és una funció qualsevol.

4.2 Propietats

La transformada de Laplace i la seva inversa, verifiquen les propietats següents:

4.2.1 Linealitat

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f_1(t)\big) = F_1(s)$ i $\mathcal{L}\big(f_2(t)\big) = F_2(s)$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(a_1f_1(t) + a_2f_2(t)\big) = a_1F_1(s) + a_2F_2(s) \qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.8a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(a_1F_1(s) + a_2F_2(s)\big) = a_1f_1(t) + a_2f_2(t) \qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{R}) \tag{4.8b}$$

4.2.2 Canvi d'escala

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(f(at)\big) = \frac{F(s/a)}{a} \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{4.9a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(as)\big) = \frac{f(t/a)}{a} \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{4.9b}$$

4.2.3 Translació

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(f(t-\tau)\big) = \mathcal{L}\big(f(t-\tau)\varepsilon_\tau(t)\big) = \mathrm{e}^{-s\tau}F(s) \qquad (\tau \in \mathbb{R}^+) \tag{4.10a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)\big) = f(t-\tau)\varepsilon_\tau(t) \qquad (\tau \in \mathbb{R}^+) \tag{4.10b}$$

4.2.4 Esmorteïment

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{at}f(t)\big) = F(s-a) \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{4.11a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s-a)\big) = \mathrm{e}^{at}f(t) \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{4.11b}$$

4.2.5 Diferenciació

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, on $f(t)$ és diferenciable $n-1$ vegades en l'interval $[0,\infty)$, i compleix $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$, per a qualsevol $t \in [0,\infty)$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = sF(s) - f(0) \tag{4.12a}$$

$$\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{4.12b}$$

$$\mathcal{L}\big(f^{(n)}(t)\big) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{4.12c}$$

4.2.6 Integració

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, on $f(t)$ és una funció contínua a trossos, i compleix $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$, llavors:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{F(s)}{s} \tag{4.13}$$

4.2.7 Producte de convolució

El producte de convolució de dues funcions $f_1(t)$ i $f_2(t)$ es defineix com:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4.14}$$

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f_1(t)\big) = F_1(s)$ i $\mathcal{L}\big(f_2(t)\big) = F_2(s)$, on $f_1(t)$ i $f_2(t)$ són funcions contínues a trossos, i compleixen $|f_1(t)| \leq M_1\mathrm{e}^{\alpha_1 t}$ i $|f_2(t)| \leq M_2\mathrm{e}^{\alpha_2 t}$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(f_1(t) * f_2(t)\big) = F_1(s)F_2(s) \tag{4.15}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F_1(s)F_2(s)\big) = f_1(t) * f_2(t) \tag{4.16}$$

4.2.8 Funció periòdica

Sigui $f(t)$ una funció definida en l'interval $[0, T]$, i nul·la fora d'aquest interval, i sigui $f_P(t)$ la funció periòdica de període T, que s'origina per repetició de la funció $f(t)$; si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, llavors:

$$F_P(s) = \frac{F(s)}{1 - e^{-sT}} \tag{4.17}$$

4.3 Taula de transformades de Laplace

Encara que les transformades directa i inversa de Laplace, es poden obtenir amb les equacions (4.1) i (4.2) respectivament, els càlculs involucrats poden ser força complicats; per aquest motiu, és usual disposar de taules que recullen les transformades de Laplace d'un gran nombre de funcions.

En la Taula 4.1, es pot veure una relació de transformades de Laplace de les funcions més usuals. Totes les constants que hi apareixen són valors reals, que tant poden ser positius com negatius, llevat que s'indiqui el contrari; la variable ω que apareix en les funcions trigonomètriques, representa la velocitat angular ($\omega = 2\pi f = 2\pi/T$).

Taula 4.1: Transformades de Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$
$\varepsilon_\tau(t) \quad (\tau \in \mathbb{R}^+)$	$\dfrac{e^{-\tau s}}{s}$
$\delta_\tau(t) \quad (\tau \in \mathbb{R}^+)$	$e^{-\tau s}$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
t^a	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}$
$\dfrac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s+a}}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$

(*continua a la pàgina següent*)

Taula 4.1: Transformades de Laplace (*ve de la pàgina anterior*)

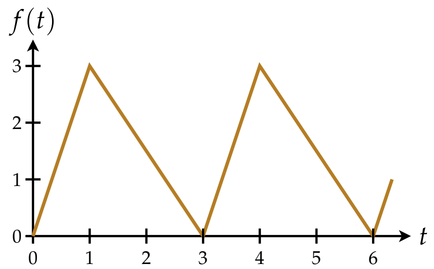
$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
$a^{-bt} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{s + b \ln a}$
$1 - \mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$
$t\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$(1 - at)\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$
$t^2\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{2}{(s+a)^3}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{b - a}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-t/a} - \mathrm{e}^{-t/b}}{a - b}$	$\dfrac{1}{(as+1)(bs+1)}$
$\dfrac{a\mathrm{e}^{-at} - b\mathrm{e}^{-bt}}{a - b}$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\dfrac{a\mathrm{e}^{-t/b} - b\mathrm{e}^{-t/a}}{ab(a - b)}$	$\dfrac{s}{(as+1)(bs+1)}$
$\dfrac{\mathrm{e}^t}{n!} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^n e^{-t}) \quad (n \in \mathbb{Z}^*)$	$\dfrac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\dfrac{\omega \cos \varphi + s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\dfrac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\dfrac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\mathrm{e}^{-at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\mathrm{e}^{-at} \cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\mathrm{e}^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$	$\dfrac{\omega \cos \varphi + (s+a) \sin \varphi}{(s+a)^2 + \omega^2}$

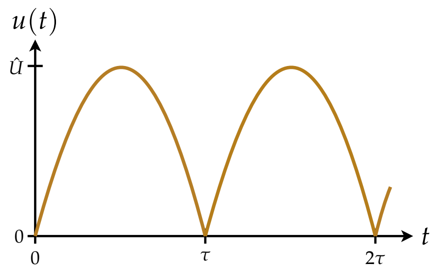
(*continua a la pàgina següent*)

Taula 4.1: Transformades de Laplace (*ve de la pàgina anterior*)

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
$e^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$	$\dfrac{(s+a)\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\sin^2\omega t$	$\dfrac{2\omega^2}{s^3+4s\omega^2}$
$\cos^2\omega t$	$\dfrac{s^2+2\omega^2}{s^3+4s\omega^2}$
$\dfrac{\sin(2\sqrt{\omega t})}{\sqrt{\omega}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}e^{-\omega/s}}{s\sqrt{s}}$
$\dfrac{\cos(2\sqrt{\omega t})}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}e^{-\omega/s}}{\sqrt{s}}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh^2 at$	$\dfrac{2a^2}{s^3-4sa^2}$
$\cosh^2 at$	$\dfrac{s^2-2a^2}{s^3-4sa^2}$
$t\sinh at$	$\dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
$t\cosh at$	$\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
$e^{-bt}\sinh at$	$\dfrac{a}{(s+b)^2-a^2}$
$e^{-bt}\cosh at$	$\dfrac{s+b}{(s+b)^2-a^2}$
$J_\nu(at) \quad (\nu > -1)$	$\dfrac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^\nu}{a^\nu\sqrt{s^2+a^2}}$
$I_\nu(at) \quad (\nu > -1)$	$\dfrac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^\nu}{a^\nu\sqrt{s^2-a^2}}$
$\dfrac{J_\nu(at)}{t} \quad (\nu > 0)$	$\dfrac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^\nu}{\nu a^\nu}$
$\dfrac{I_\nu(at)}{t} \quad (\nu > 0)$	$\dfrac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^\nu}{\nu a^\nu}$

Exemple 4.1 *Es tracta de calcular la transformada de Laplace dels dos senyals periòdics que es mostren a continuació; el primer és una ona triangular, i el segon es la tensió sinusoïdal que s'obté amb un rectificador d'ona completa.*





Comencem amb l'ona triangular, estudiant la funció $f_1(t)$ definida entre $t = 0$ i $t = 3$, i que per repetició genera la funció $f(t)$; la seva expressió matemàtica és:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 3t & 0 < t < 1 \\ -\dfrac{3}{2}t + \dfrac{9}{2} & 1 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$

Amb l'ajut de les funcions graó unitari en $t = 0$, $t = 1$ i $t = 3$, podem definir $f_1(t)$ com:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 3t\big(\varepsilon_0(t) - \varepsilon_1(t)\big) + \left(-\frac{3}{2}t + \frac{9}{2}\right)\big(\varepsilon_1(t) - \varepsilon_3(t)\big) = \\ &= 3t\varepsilon_0(t) - 3t\varepsilon_1(t) - \frac{3}{2}t\varepsilon_1(t) + \frac{3}{2}t\varepsilon_3(t) + \frac{9}{2}\varepsilon_1(t) - \frac{9}{2}\varepsilon_3(t) = \\ &= 3t\varepsilon_0(t) - \frac{9}{2}(t-1)\varepsilon_1(t) + \frac{3}{2}(t-3)\varepsilon_3(t) \end{aligned}$$

Si ens fixem en el 1er terme, veiem en la Taula 4.1 a la pàgina 44, que la transformada de t és $1/s^2$. Els termes 2n i 3er, també contenen la funció t, però traslladada en el temps un valor d'1 i 3 respectivament; per tant, si ens fixem en la propietat de la translació, veiem que les seves transformades seran també $1/s^2$, multiplicades per e^{-s} i e^{-3s} respectivament. Així doncs, amb aquestes consideracions, i fent servir la propietat de la linealitat, tenim:

$$F_1(s) = \frac{3}{s^2} - \frac{9\mathrm{e}^{-s}}{2s^2} + \frac{3\mathrm{e}^{-3s}}{2s^2} = \frac{6 - 9\mathrm{e}^{-s} + 3\mathrm{e}^{-3s}}{2s^2}$$

Finalment, calculem la transformada de la funció $f(t)$ original, a partir de la transformada de la funció $f_1(t)$, utilitzant la propietat de les funcions periòdiques, amb un període $T = 3$:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - \mathrm{e}^{-3s}} = \frac{6 - 9\mathrm{e}^{-s} + 3\mathrm{e}^{-3s}}{2s^2(1 - \mathrm{e}^{-3s})}$$

Continuem ara amb l'ona sinusoïdal, estudiant la funció $u_1(t)$ definida entre $t = 0$ i $t = \tau$, i que per repetició genera la funció $u(t)$; la seva expressió matemàtica és (amb període $T = 2\tau$ i velocitat angular $\omega = 2\pi/T = \pi/\tau$):

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \hat{U}\sin\omega t = \hat{U}\sin\dfrac{\pi}{\tau}t & 0 < t < \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

Amb l'ajut de les funcions graó unitari en $t = 0$ i $t = \tau$, podem definir $u_1(t)$ com:

$$u_1(t) = \left(\hat{U}\sin\frac{\pi}{\tau}t\right)\left(\varepsilon_0(t) - \varepsilon_\tau(t)\right) = \left(\hat{U}\sin\frac{\pi}{\tau}t\right)\varepsilon_0(t) - \left(\hat{U}\sin\frac{\pi}{\tau}t\right)\varepsilon_\tau(t)$$

Pel que fa al 2n terme, si tenim en compte la igualtat trigonomètrica: $-\sin\alpha = \sin(\alpha - \frac{T}{2})$, on T és el període, tenim:

$$u_1(t) = \left(\hat{U}\sin\frac{\pi}{\tau}t\right)\varepsilon_0(t) + \left(\hat{U}\sin\left(\frac{\pi}{\tau}t - \tau\right)\right)\varepsilon_\tau(t)$$

El 2n terme s'ha convertit en una funció sinus, com el 1er terme, però traslladada en el temps un valor τ; per tant utilitzant la transformada de la funció sinus que apareix en la Taula 4.1 a la pàgina 44, i fent ús de la propietat de la translació, tenim:

$$F_1(s) = \frac{\hat{U}(\pi/\tau)}{s^2 + (\pi/\tau)^2} + \frac{\hat{U}(\pi/\tau)}{s^2 + (\pi/\tau)^2}\mathrm{e}^{-\tau s} = \frac{\hat{U}(\pi/\tau)}{s^2 + (\pi/\tau)^2}(1 + \mathrm{e}^{-\tau s})$$

Per acabar, calculem la transformada de la funció $u(t)$ original, a partir de la transformada de la funció $u_1(t)$, utilitzant la propietat de les funcions periòdiques, amb un període $T = \tau$:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - \mathrm{e}^{-\tau s}} = \frac{\hat{U}(\pi/\tau)}{s^2 + (\pi/\tau)^2}\,\frac{1 + \mathrm{e}^{-\tau s}}{1 - \mathrm{e}^{-\tau s}}$$

4.4 Anàlisi de circuits elèctrics

La transformada de Laplace és útil en la resolució de circuits elèctrics, quan a més del règim permanent, es vol conèixer l'evolució transitòria prèvia que tenen les tensions i els corrents.

Mitjançant la transformada de Laplace, les equacions diferencials que relacionen tensions i corrents, es converteixen en equacions lineals, de més fàcil resolució. Un cop calculats els valors de tensions i corrents en el domini operacional, utilitzem la transformada inversa de Laplace per obtenir els valors d'aquestes tensions i corrents en el domini temporal.

Per resoldre aquests tipus de circuits, cal conèixer-ne les condicions inicials, és a dir, els corrents de les inductàncies, i les tensions dels condensadors. Un circuit elèctric es diu que està relaxat, quan en l'instant inicial tots els condensadors estan descarregats, i no circula corrent per cap inductància.

A tall d'exemple, tenim el circuit de la Figura 4.1, on en l'instant inicial $t = 0$ circula un corrent i_0 i el condensador C està carregat a una tensió u_0.

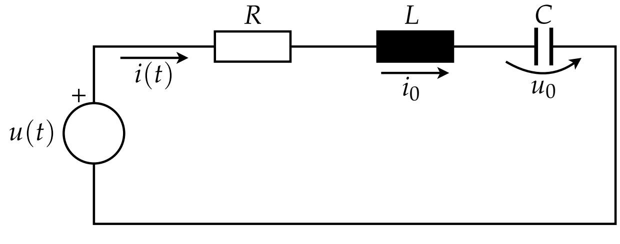


Figura 4.1: Anàlisi de circuits mitjançant la transformada de Laplace

Escrivim en primer lloc la relació entre $u(t)$ i $i(t)$, a partir de les relacions individuals entre tensió i corrent per a cada component del circuit, les quals s'han exposat en la Secció 1.2 a la pàgina 7:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + u_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.18}$$

Transformem a continuació aquesta equació, en una altra en el domini operacional, essent $\mathcal{L}\big(u(t)\big) = U(s)$, $\mathcal{L}\big(i(t)\big) = I(s)$ i $\mathcal{L}\big(u_0\big) = u_0/s$, i aplicant les propietats de la diferenciació i de la integració a $i(t)$:

$$\begin{aligned} U(s) &= RI(s) + L(sI(s) - i_0) + \frac{u_0}{s} + \frac{I(s)}{sC} = \\ &= \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) I(s) + \frac{u_0}{s} - Li_0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

De fet, aquesta equació la podríem haver escrit directament, a partir de les relacions entre les tensions i els corrents en el domini operacional per a cada component del circuit, les quals s'han exposat també en la Secció 1.2 a la pàgina 7.

Per tant, essent $u(t)$ una funció determinada (sinusoïdal, impuls, graó, etc...), podem obtenir $U(s)$ i calcular $I(s)$ mitjançant:

$$I(s) = \frac{U(s) - \dfrac{u_0}{s} + Li_0}{R + sL + \dfrac{1}{sC}} \tag{4.20}$$

Finalment, obtenim el corrent en el domini temporal: $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(I(s)\big)$.

Exemple 4.2 *A partir del circuit de la Figura 4.1 a la pàgina anterior, amb $L = 0$, $i_0 = 0$ i $u_0 = 0$, es tracta de calcular el corrent $i(t)$, essent $u(t) = U$ (valor constant).*

Comencem per escriure l'equació (4.20) en el nostre cas particular, tenint en compte que $\mathcal{L}(U) = U/s$

$$I(s) = \frac{U}{s\left(R + \dfrac{1}{sC}\right)} = \frac{CU}{1 + sRC}$$

A continuació, dividim numerador i denominador per RC per tal d'obtenir una expressió que es trobi en la Taula 4.1 a la pàgina 44:

$$I(s) = \frac{\dfrac{U}{R}}{\dfrac{1}{RC} + s}$$

La transformada inversa de Laplace de $I(s)$, ens dóna:

$$i(t) = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$

4.5 Fraccions parcials

En l'exemple anterior, la funció de variable s que hem hagut de buscar en la Taula 4.1 a la pàgina 44 era força simple, i per tant la seva transformada inversa s'ha obtingut de forma immediata. El més usual, no obstant, és tenir funcions racionals (quocient de dos polinomis) de grau elevat; en aquest cas, cal descompondre aquesta funció racional en suma de funcions parcials de grau menor.

S'exposa a continuació la teoria de la descomposició en fraccions parcials:

Sigui una funció racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, on el grau de $P(x)$ és menor que el de $Q(x)$, i el coeficient del terme de grau més elevat de $Q(x)$ val 1. Si $Q(x)$ té n arrels reals sense multiplicitat: $a_1, \ldots, a_n$, k arrels reals: $b_1, \ldots, b_k$ cadascuna amb la seva multiplicitat: $m_1, \ldots, m_k$, i l arrels complexes conjugades sense multiplicitat: $c_1 \pm \mathrm{j}\, d_1, \ldots, c_l \pm \mathrm{j}\, d_l$, aquest polinomi es pot escriure com el producte següent:

$$Q(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)(x-b_1)^{m_1}\cdots(x-b_k)^{m_k}\left((x-c_1)^2+d_1^2\right)\cdots\left((x-c_l)^2+d_l^2\right) \tag{4.21}$$

Les arrels a_i són, de fet, un cas particular de les arrels b_i, amb multiplicitat 1.

A parir de les arrels de $Q(x)$, la funció racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es pot expressar com:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n} + \\
& + \frac{B_{1,1}}{(x-b_1)^{m_1}} + \frac{B_{1,2}}{(x-b_1)^{m_1-1}} + \frac{B_{1,3}}{(x-b_1)^{m_1-2}} + \cdots + \frac{B_{1,m_1}}{x-b_1} + \\
& + \frac{B_{2,1}}{(x-b_2)^{m_2}} + \frac{B_{2,2}}{(x-b_2)^{m_2-1}} + \frac{B_{2,3}}{(x-b_2)^{m_2-2}} + \cdots + \frac{B_{2,m_2}}{x-b_2} + \\
& + \cdots + \\
& + \frac{B_{k,1}}{(x-b_k)^{m_k}} + \frac{B_{k,2}}{(x-b_k)^{m_k-1}} + \frac{B_{k,3}}{(x-b_k)^{m_k-2}} + \cdots + \frac{B_{k,m_k}}{x-b_k} + \\
& + \frac{C_1(x-c_1)+D_1 d_1}{(x-c_1)^2+d_1^2} + \frac{C_2(x-c_2)+D_2 d_2}{(x-c_2)^2+d_2^2} + \cdots + \frac{C_l(x-c_l)+D_l d_l}{(x-c_l)^2+d_l^2}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Els coeficients A_i, $B_{i,j}$, C_i i D_i, es calculen a partir de les equacions següents:

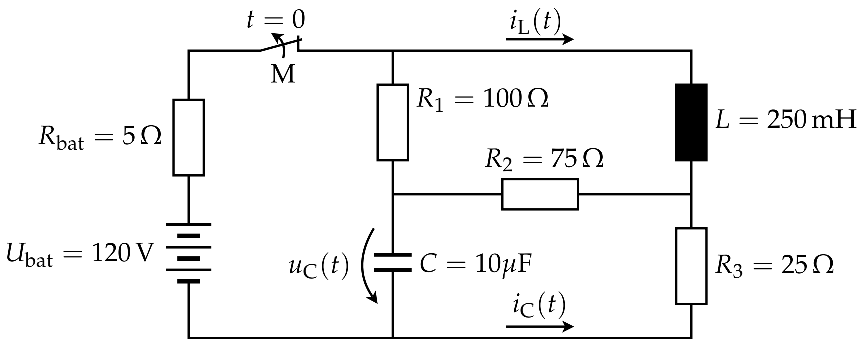
$$A_i = (x-a_i)\frac{P(x)}{Q(x)}\bigg|_{x=a_i} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4.23a}$$

$$B_{i,j} = (x-b_i)^{m_i}\frac{P(x)}{Q(x)}\bigg|_{x=b_i} \qquad i = 1, \ldots, k; \quad j = 1 \tag{4.23b}$$

$$B_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}x^{j-1}}\left[(x-b_i)^{m_i}\frac{P(x)}{Q(x)}\right]\Bigg|_{x=b_i} \qquad i = 1, \ldots, k; \quad j = 2, \ldots, m_i \tag{4.23c}$$

$$D_i + \mathrm{j}\,C_i = \frac{1}{d_i}\left((x-c_i)^2+d_i^2\right)\frac{P(x)}{Q(x)}\bigg|_{x=c_i+\mathrm{j}\,d_i} \qquad i = 1, \ldots, l \tag{4.23d}$$

Exemple 4.3 *El circuit de la figura següent, es troba en règim estacionari. En l'instant $t = 0$ s'obre l'interruptor M; es tracta de trobar l'evolució del corrent $i_\mathrm{L}(t)$, que circula per la inductància L, a partir d'aquest instant.*



Donat que abans d'obrir l'interruptor M, el circuit ha arribat al règim estacionari, el condensador C estarà totalment carregat i presentarà una impedància infinita al corrent continu originat per la bateria, i la inductància L hi presentarà una impedància nul·la; per tant, en l'instant $t = 0\,\mathrm{s}$, els valors inicials $i_\mathrm{L}(0)$ i $u_\mathrm{C}(0)$ són:

$$i_\mathrm{L}(0) = \frac{U_\mathrm{bat}}{R_\mathrm{bat} + R_3} = \frac{120\,\mathrm{V}}{5\,\Omega + 25\,\Omega} = 4\,\mathrm{A}$$
$$u_\mathrm{C}(0) = i_\mathrm{L}(0)R_3 = 4\,\mathrm{A} \cdot 25\,\Omega = 100\,\mathrm{V}$$

Un cop obrim l'interruptor M, la bateria i la seva resistència queden desconnectades de la part dreta del circuit, formada per dues malles; si apliquem la llei de les tensions de Kirchhoff a aquestes dues malles, utilitzant les variables $I_\mathrm{L}(s)$, $U_\mathrm{C}(s)$ i $I_\mathrm{C}(s)$, tenim:

$$R_1 I_\mathrm{L}(s) + sLI_\mathrm{L}(s) - Li_\mathrm{L}(0) + R_2\big(I_\mathrm{L}(s) + I_\mathrm{C}(s)\big) = 0$$
$$U_\mathrm{C}(s) + R_3 I_\mathrm{C}(s) + R_2\big(I_\mathrm{L}(s) + I_\mathrm{C}(s)\big) = 0$$

La relació entre $U_\mathrm{C}(s)$ i $I_\mathrm{C}(s)$ és:

$$U_\mathrm{C}(s) = \frac{I_\mathrm{C}(s)}{sC} + \frac{u_\mathrm{C}(0)}{s} \quad \rightarrow \quad I_\mathrm{C}(s) = sCU_\mathrm{C}(s) - Cu_\mathrm{C}(0)$$

Si substituïm aquest valor de $I_\mathrm{C}(s)$ en les dues equacions inicials, i reordenem els seus termes, tenim:

$$R_1 I_\mathrm{L}(s) + sLI_\mathrm{L}(s) + R_2 I_\mathrm{L}(s) + sCR_2 U_\mathrm{C}(s) = Li_\mathrm{L}(0) + CR_2 u_\mathrm{C}(0)$$
$$U_\mathrm{C}(s) + sCR_3 U_\mathrm{C}(s) + R_2 I_\mathrm{L}(s) + sCR_2 U_\mathrm{C}(s) = CR_3 u_\mathrm{C}(0) + CR_2 u_\mathrm{C}(0)$$

Agrupem a continuació els termes comuns i substituïm $u_\mathrm{C}(0)$ i $i_\mathrm{L}(0)$ pels seus valor numèrics:

$$(R_1 + sL + R_2)I_\mathrm{L}(s) + sCR_2 U_\mathrm{C}(s) = 4L + 100CR_2$$
$$R_2 I_\mathrm{L}(s) + (1 + sCR_3 + sCR_2)U_\mathrm{C}(s) = 100CR_3 + 100CR_2$$

Aïllem ara $U_\mathrm{C}(s)$ en la primera equació:

$$U_\mathrm{C}(s) = \frac{4L + 100CR_2 - (R_1 + sL + R_2)I_\mathrm{L}(s)}{sCR_2}$$

Substituïm tot seguit aquest valor en la segona equació, i aïllem $I_\mathrm{L}(s)$:

$$R_2 I_\mathrm{L}(s) + (1 + sCR_3 + sCR_2)\frac{4L + 100CR_2 - (R_1 + sL + R_2)I_\mathrm{L}(s)}{sCR_2} = 100CR_3 + 100CR_2$$

$$\left(R_2 - \frac{(1 + sCR_3 + sCR_2)(R_1 + sL + R_2)}{sCR_2}\right) I_\mathrm{L}(s) =$$

$$= 100C(R_3 + R_2) - \frac{(1 + sCR_3 + sCR_2)(4L + 100CR_2)}{sCR_2}$$

$$I_\mathrm{L}(s) = \frac{100sC^2R_2(R_3 + R_2) - (1 + sCR_3 + sCR_2)(4L + 100CR_2)}{sCR_2^2 - (1 + sCR_3 + sCR_2)(R_1 + sL + R_2)}$$

Si donem valors numèrics a R_1, R_2, R_3, L i C, i realitzem tots els productes i les simplificacions oportunes, tenim:

$$I_\mathrm{L}(s) = \frac{4s + 4300}{s^2 + 1475s + 700000}$$

Hem de descompondre a continuació aquesta funció racional en funcions parcials; comencem doncs per calcular les arrels del polinomi del denominador:

$$s^2 + 1475s + 700000 = 0 \quad \longrightarrow \quad s = -\frac{1475}{2} \pm \mathrm{j}\,\frac{75\sqrt{111}}{2}$$

A partir d'aquests valors, la funció racional es pot escriure com:

$$I_\mathrm{L}(s) = \frac{4s + 4300}{s^2 + 1475s + 700000} = \frac{C\left(s + \frac{1475}{2}\right) + D\frac{75\sqrt{111}}{2}}{\left(s + \frac{1475}{2}\right)^2 + \left(\frac{75\sqrt{111}}{2}\right)^2}$$

Les constants C i D valen:

$$D + \mathrm{j}\,C = \frac{2}{75\sqrt{111}}(4s + 4300)\bigg|_{s = -\frac{1475}{2} + \mathrm{j}\,\frac{75\sqrt{111}}{2}} = 12\sqrt{\frac{3}{37}} + \mathrm{j}\,4$$

Així doncs, amb $C = 4$ i $D = 12\sqrt{\frac{3}{37}}$, podem expressar el corrent $I_\mathrm{L}(s)$ com:

$$I_\mathrm{L}(s) = 4\frac{s + \frac{1475}{2}}{\left(s + \frac{1475}{2}\right)^2 + \left(\frac{75\sqrt{111}}{2}\right)^2} + 12\sqrt{\frac{3}{37}}\frac{\frac{75\sqrt{111}}{2}}{\left(s + \frac{1475}{2}\right)^2 + \left(\frac{75\sqrt{111}}{2}\right)^2}$$

Si ens fixem ara en la Taula 4.1 a la pàgina 44, veiem que la transformada inversa de Laplace del primer terme de $I_L(s)$*, es pot identificar amb una funció del tipus* $e^{-at}\cos\omega t$*, i la del segon amb una funció del tipus* $e^{-at}\sin\omega t$*, amb* $a = \frac{1475}{2}$ *i* $\omega = \frac{75\sqrt{111}}{2}$.

Per tant, l'expressió temporal del corrent $i_L(t)$ *és:*

$$i_L(t) = 4\,e^{-\frac{1475}{2}t}\cos\frac{75\sqrt{111}}{2}t + 12\sqrt{\frac{3}{37}}\,e^{-\frac{1475}{2}t}\sin\frac{75\sqrt{111}}{2}t =$$
$$= e^{-\frac{1475}{2}t}\left(4\cos\frac{75\sqrt{111}}{2}t + 12\sqrt{\frac{3}{37}}\sin\frac{75\sqrt{111}}{2}t\right)$$

Finalment, si utilitzem la igualtat trigonomètrica (E.19a), tenim:

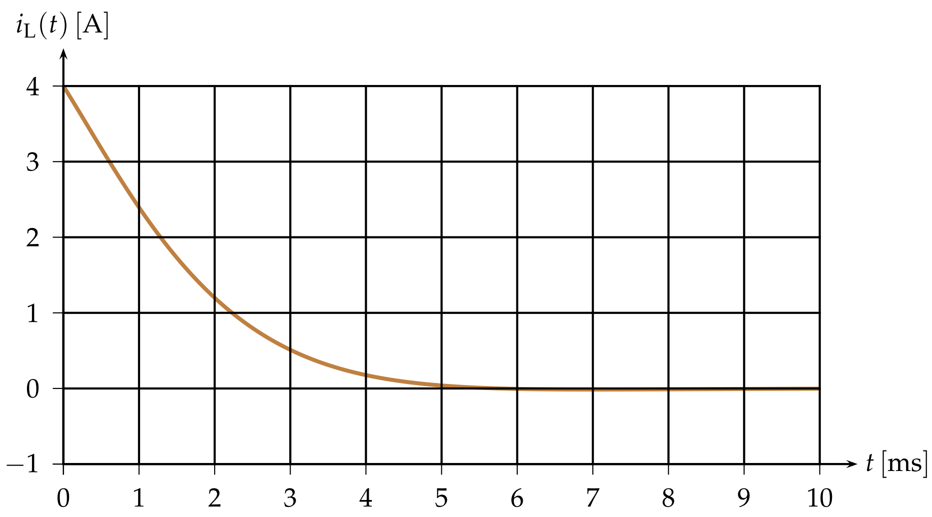
$$i_L(t) = \frac{32}{\sqrt{37}}\,e^{-\frac{1475}{2}t}\cos\left(\frac{75\sqrt{111}}{2}t - \arctan\sqrt{\frac{27}{37}}\right)$$

Si en aquesta equació, fem $t = 0\,\mathrm{s}$*, tenim:*

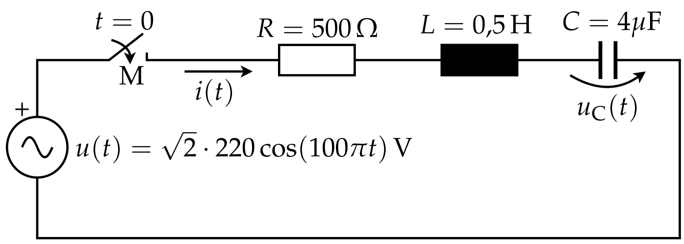
$$i_L(0) = \frac{32}{\sqrt{37}}\cos\left(-\arctan\sqrt{\frac{27}{37}}\right) = 4\,\mathrm{A}$$

Es comprova que aquest valor, compleix amb la condició inicial del corrent $i_L(t)$ *que hem calculat a l'inici d'aquest exemple.*

Representem a continuació la gràfica d'aquesta funció:



Exemple 4.4 *El circuit de la figura següent, està relaxat. En l'instant $t = 0$ es tanca l'interruptor M; es tracta de trobar l'evolució de la tensió $u_C(t)$, a partir d'aquest instant.*



La transformada de Laplace de la tensió $u(t)$ és:

$$U(s) = \sqrt{2}\cdot 220\frac{s}{s^2 + (100\pi)^2}$$

Un cop tancat l'interruptor M, la relació entre $u_c(t)$ i $u(t)$ en el domini operacional, tenint en compte que totes les condicions inicials són nul·les, és:

$$U_C(s) = \frac{\dfrac{1}{sC}}{R + sL + \dfrac{1}{sC}}U(s) = \frac{\dfrac{1}{CL}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{CL}}U(s)$$

Substituint $U(s)$ per la seva expressió, i donant valors numèrics a R, L i C, tenim:

$$U_C(s) = \frac{\sqrt{2}\cdot 110\cdot 10^6 s}{(s^2 + 1000s + 500000)(s^2 + (100\pi)^2)}$$

Calculem a continuació, les arrels dels dos polinomis del denominador d'aquesta funció racional:

$$\begin{aligned} s^2 + 1000s + 500000 = 0 \quad &\rightarrow \quad s = -500 \pm \mathrm{j}\,500 \\ s^2 + (100\pi)^2 = 0 \quad &\rightarrow \quad s = \pm\mathrm{j}\,100\pi \end{aligned}$$

Així doncs, l'esmentada funció racional es pot escriure com:

$$U_C(s) = \frac{\sqrt{2}\cdot 110\cdot 10^6 s}{(s^2 + 1000s + 500000)(s^2 + (100\pi)^2)} = \frac{C_1(s+500) + D_1 500}{(s+500)^2 + 500^2} + \frac{C_2 s + D_2 100\pi}{s^2 + (100\pi)^2}$$

Les constants C_1, D_1, C_2 i D_2 valen:

$$D_1 + \mathrm{j}\,C_1 = \frac{1}{500}\cdot\left.\frac{\sqrt{2}\cdot 110\cdot 10^6 s}{s^2 + (100\pi)^2}\right|_{s=-500+\mathrm{j}\,500} = -358{,}57 - \mathrm{j}\,240{,}35$$

$$D_2 + \mathrm{j}\,C_2 = \frac{1}{100\pi}\cdot\left.\frac{\sqrt{2}\cdot 110\cdot 10^6 s}{s^2 + 1000s + 500000}\right|_{s=\mathrm{j}\,100\pi} = 188{,}16 + \mathrm{j}\,240{,}35$$

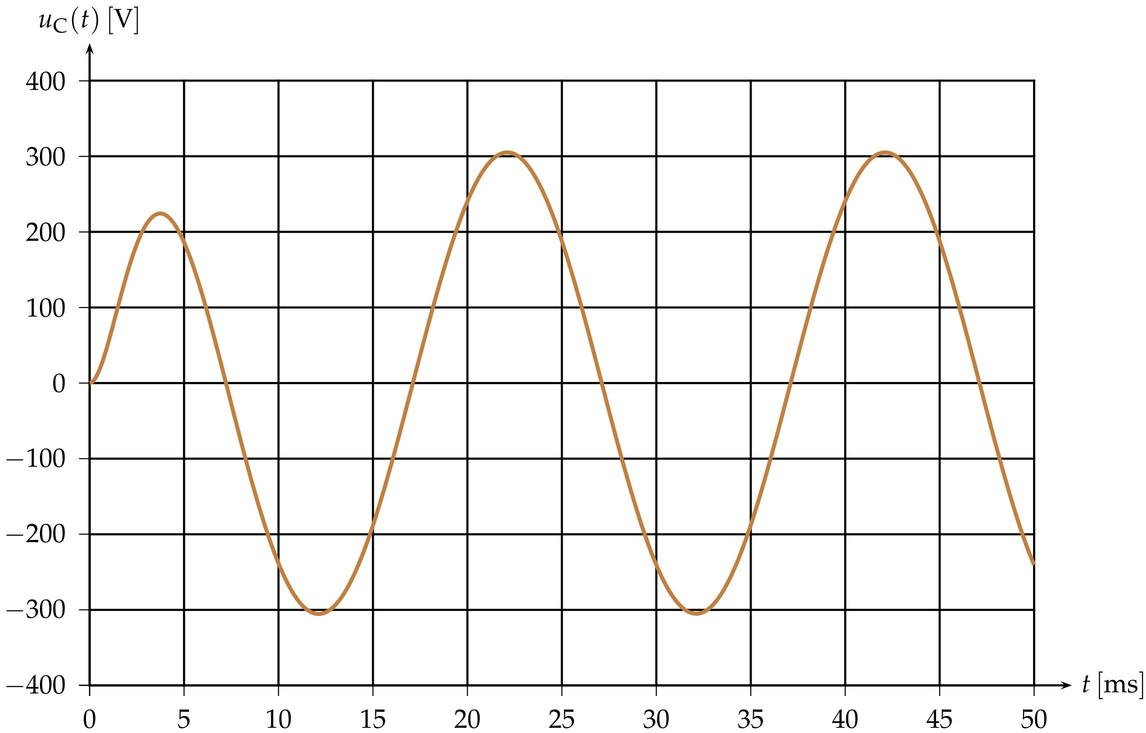
A partir d'aquests valors, i utilitzant la Taula 4.1 a la pàgina 44, obtenim l'expressió temporal de la tensió en el condensador $u_C(t)$:

$$u_C(t) = e^{-500t}(-240{,}35\cos 500t - 358{,}57\sin 500t) + 240{,}35\cos(100\pi t) + 188{,}16\sin(100\pi t)$$

Utilitzant les igualtats trigonomètriques (E.19a) i (E.19c), obtenim finalment:

$$u_C(t) = 431{,}67e^{-500t}\cos(500t + 2{,}1613) + 305{,}24\cos(100\pi t - 0{,}6642)$$

Representem a continuació la gràfica d'aquesta funció:



Capítol 5

Càlculs Bàsics

Es tracten en aquest capítol càlculs bàsics, que poden servir en la resolució de diversos problemes electrotècnics.

5.1 Transformació estrella $\leftrightarrow$ triangle d'impedàncies

En un sistema trifàsic, pot interessar transformar tres impedàncies connectades en estrella, en tres impedàncies equivalents connectades en triangle ($\mathrm{Y} \rightarrow \Delta$), o a l'inrevés, transformar tres impedàncies connectades en triangle, en tres impedàncies equivalents connectades en estrella ($\Delta \rightarrow \mathrm{Y}$). Atenent a la Figura 5.1, tenim les següents transformacions:

$$
\mathrm{Y} \rightarrow \Delta \left\{ \begin{array}{lcl} \underline{Z}_{\alpha\beta} & = & \underline{Z}_{\alpha} + \underline{Z}_{\beta} + \dfrac{\underline{Z}_{\alpha}\,\underline{Z}_{\beta}}{\underline{Z}_{\gamma}} \\ \underline{Z}_{\beta\gamma} & = & \underline{Z}_{\beta} + \underline{Z}_{\gamma} + \dfrac{\underline{Z}_{\beta}\,\underline{Z}_{\gamma}}{\underline{Z}_{\alpha}} \\ \underline{Z}_{\gamma\alpha} & = & \underline{Z}_{\gamma} + \underline{Z}_{\alpha} + \dfrac{\underline{Z}_{\gamma}\,\underline{Z}_{\alpha}}{\underline{Z}_{\beta}} \end{array} \right. \qquad \Delta \rightarrow \mathrm{Y} \left\{ \begin{array}{lcl} \underline{Z}_{\alpha} & = & \dfrac{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\alpha}}{\underline{Z}_{\alpha\beta} + \underline{Z}_{\beta\gamma} + \underline{Z}_{\gamma\alpha}} \\ \underline{Z}_{\beta} & = & \dfrac{\underline{Z}_{\beta\gamma}\,\underline{Z}_{\alpha\beta}}{\underline{Z}_{\alpha\beta} + \underline{Z}_{\beta\gamma} + \underline{Z}_{\gamma\alpha}} \\ \underline{Z}_{\gamma} & = & \dfrac{\underline{Z}_{\gamma\alpha}\,\underline{Z}_{\beta\gamma}}{\underline{Z}_{\alpha\beta} + \underline{Z}_{\beta\gamma} + \underline{Z}_{\gamma\alpha}} \end{array} \right. \tag{5.1}
$$

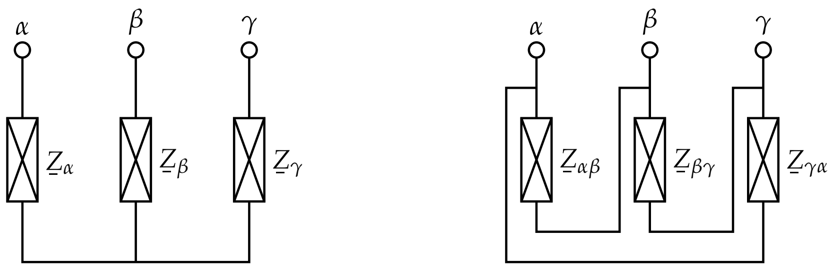


Figura 5.1: Transformació estrella $\leftrightarrow$ triangle d'impedàncies

Exemple 5.1 *Es vol transformar tres impedàncies connectades en triangle, de valors* $\underline{Z}_{\alpha\beta} = 10\,\Omega$, $\underline{Z}_{\beta\gamma} = -\mathrm{j}10\,\Omega$ *i* $\underline{Z}_{\gamma\alpha} = -\mathrm{j}10\,\Omega$, *en tres impedàncies equivalents connectades en estrella.*

A partir de les equacions (5.1) tenim:

$$\underline{Z}_\alpha = \frac{10\,\Omega \cdot (-\mathrm{j}10\,\Omega)}{10\,\Omega - \mathrm{j}10\,\Omega - \mathrm{j}10\,\Omega} = 4 - \mathrm{j}2\,\Omega$$

$$\underline{Z}_\beta = \frac{-\mathrm{j}10\,\Omega \cdot 10\,\Omega}{10\,\Omega - \mathrm{j}10\,\Omega - \mathrm{j}10\,\Omega} = 4 - \mathrm{j}2\,\Omega$$

$$\underline{Z}_\gamma = \frac{-\mathrm{j}10\,\Omega \cdot (-\mathrm{j}10\,\Omega)}{10\,\Omega - \mathrm{j}10\,\Omega - \mathrm{j}10\,\Omega} = -2 - \mathrm{j}4\,\Omega$$

És possible, com en aquest cas pel que fa a $\underline{Z}_\gamma$, obtenir un valor amb una part real negativa (resistència negativa); no obstant, encara que no existeixi físicament aquesta resistència, el seu valor és matemàticament correcte i es pot utilitzar en càlculs subsegüents.

5.2 Resolució de circuits coneixent la potència absorbida per la càrrega

Es tracta en aquest apartat la resolució de circuits simples, formats per una font de tensió en sèrie amb una impedància, la qual alimenta a una càrrega; aquesta càrrega no està definida per la seva impedància o admitància, sinó per la potència que absorbeix[1].

En la Figura 5.2 es representen els circuits que es volen resoldre, tant per a corrent continu com per a corrent altern. E, R i P (o $\underline{E}$, $\underline{Z}$ i $\underline{S}$) són els valors coneguts, i U i I (o $\underline{U}$ i $\underline{I}$) són els valors que es vol trobar.

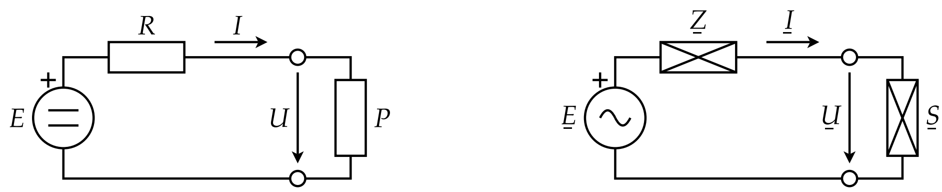


Figura 5.2: Resolució de circuits coneixent la potència absorbida per la càrrega

5.2.1 Circuits de corrent continu

A partir del circuit de l'esquerra de la Figura 5.2 tenim les dues equacions següents:

$$E = RI + U \tag{5.2}$$
$$P = UI \tag{5.3}$$

Multiplicant l'equació (5.2) per U i substituint l'equació (5.3) en aquest resultat, tenim:

$$EU = RIU + U^2 = RP + U^2 \quad \rightarrow \quad U^2 - EU + RP = 0 \tag{5.4}$$

A partir de les equacions descrites anteriorment, el circuit es resol seguint els següents passos:

[1] Aquest és un cas particular del problema del flux de càrregues en sistemes elèctrics de potència, el qual es tracta en el capítol 10

❶ Obtenim U, resolent l'equació de 2n grau (5.4).

❷ Dels dos valors reals que obtenim, ens quedem amb el més elevat. Si en lloc de dos valors reals, obtinguéssim un parell de valors conjugats complexos, això ens indicaria que el circuit no té una solució físicament possible, i per tant no seria resoluble.

❸ Finalment, calculem I substituint el valor trobat de U en l'equació (5.3).

Un cop trobats U i I, podem calcular el valor de la resistència R_P de la càrrega, la qual absorbeix la potència P, a partir de l'equació (5.3) i de la relació $U = R_\mathrm{P} I$:

$$R_\mathrm{P} = \frac{U}{I} = \frac{P}{I^2} = \frac{U^2}{P} \tag{5.5}$$

5.2.2 Circuits de corrent altern

A partir del circuit de la dreta de la Figura 5.2 a la pàgina anterior tenim les dues equacions següents:

$$\underline{E} = \underline{Z}\,\underline{I} + \underline{U} \tag{5.6}$$
$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* \tag{5.7}$$

Conjugant l'equació (5.6), multiplicant-la per $\underline{U}$ i substituint l'equació (5.7) en aquest resultat, tenim:

$$\underline{E}^*\,\underline{U} = \underline{Z}^*\underline{I}^*\,\underline{U} + \underline{U}^*\,\underline{U} = \underline{Z}^*\,\underline{S} + |\underline{U}|^2 \quad \rightarrow \quad |\underline{U}|^2 - \underline{E}^*\,\underline{U} + \underline{Z}^*\,\underline{S} = 0 \tag{5.8}$$

Fem a continuació una rotació dels vectors $\underline{E}$ i $\underline{U}$, de valor $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta}$, on δ és l'argument del vector $\underline{E}$; d'aquesta manera, el nou vector E' tan sols tindrà part real, i el nou vector $\underline{U}'$ estarà rotat respecte del vector $\underline{U}$.

$$\delta = \arg(\underline{E}) \tag{5.9}$$
$$E' = \underline{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta} = |\underline{E}| \tag{5.10}$$
$$\underline{U}' = \underline{U}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta} \tag{5.11}$$

Expressem a continuació l'equació (5.8) utilitzant aquests dos nous vectors:

$$|\underline{U}'|^2 - E'\,\underline{U}' + \underline{Z}^*\,\underline{S} = 0 \tag{5.12}$$

Finalment, separem l'equació (5.12) en dues, una per a la part real i una altra per a la part imaginària. Cal tenir en compte que $|\underline{U}'|^2$ només té part real, de valor $\mathrm{Re}^2(\underline{U}') + \mathrm{Im}^2(\underline{U}')$.

$$\mathrm{Re}^2(\underline{U}') + \mathrm{Im}^2(\underline{U}') - E'\ \mathrm{Re}(\underline{U}') + \mathrm{Re}(\underline{Z}^*\,\underline{S}) = 0 \tag{5.13}$$
$$-E'\ \mathrm{Im}(\underline{U}') + \mathrm{Im}(\underline{Z}^*\,\underline{S}) = 0 \tag{5.14}$$

A partir de les equacions descrites anteriorment, el circuit es resol seguint els següents passos:

❶ Calculem E' a partir de l'equació (5.10)

❷ Obtenim $\mathrm{Im}(\underline{U}')$, resolent l'equació (5.14).

❸ Substituïm el valor obtingut per a $\mathrm{Im}(\underline{U}')$ en l'equació (5.13), i obtenim $\mathrm{Re}(\underline{U}')$ resolent aquesta equació de 2n grau.

❹ Dels dos valors reals que obtenim, ens quedem amb el més elevat. Si en lloc de dos valors reals, obtinguéssim un parell de valors conjugats complexos, això ens indicaria que el circuit no té una solució físicament possible, i per tant no seria resoluble.

❺ A partir del valor obtingut per a $\underline{U}'$ en el passos anteriors, i del valor de δ obtingut a partir de l'equació (5.9), calculem el valor buscat de $\underline{U}$, utilitzant l'equació (5.11)

❻ Finalment, calculem $\underline{I}$ substituint el valor trobat de $\underline{U}$ en l'equació (5.7)

Un cop trobats $\underline{U}$ i $\underline{I}$, podem calcular el valor de la impedància $\underline{Z}_\mathrm{S}$ de la càrrega, la qual absorbeix la potència $\underline{S}$, a partir de l'equació (5.7) i de la relació $\underline{U} = \underline{Z}_\mathrm{S}\underline{I}$:

$$\underline{Z}_\mathrm{S} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{S}}{|\underline{I}|^2} = \frac{|\underline{U}|^2}{\underline{S}^*} \tag{5.15}$$

Exemple 5.2 *Resoldre el circuit de la dreta de la Figura 5.2 a la pàgina 58, donats el següents valors en p.u.:*

$$\underline{E} = 0{,}4 + \mathrm{j}0{,}3 \qquad \underline{Z} = \mathrm{j}0{,}1 \qquad \underline{S} = 0{,}6 + \mathrm{j}0{,}45$$

Calculem primer δ i E', segons les equacions (5.9) i (5.10), i $\underline{Z}^*\underline{S}$:

$$\begin{aligned} \delta &= \arg(0{,}4 + \mathrm{j}0{,}3) = 0{,}6435\,\mathrm{rad} \\ E' &= |0{,}4 + \mathrm{j}0{,}3| = 0{,}5 \\ \underline{Z}^*\underline{S} &= -\mathrm{j}0{,}1 \cdot (0{,}6 + \mathrm{j}0{,}45) = 0{,}045 - \mathrm{j}0{,}06 \end{aligned}$$

Calculem a continuació $\mathrm{Im}(\underline{U}')$, segons l'equació (5.14):

$$\mathrm{Im}(\underline{U}') = \frac{\mathrm{Im}(\underline{Z}^*\underline{S})}{E'} = \frac{-0{,}06}{0{,}5} = -0{,}12$$

Formem a continuació el polinomi de 2n grau en $\mathrm{Re}(\underline{U}')$ i el resolem, segons l'equació (5.13):

$$\mathrm{Re}^2(\underline{U}') + (-0{,}12)^2 - 0{,}5 \cdot \mathrm{Re}(\underline{U}') + 0{,}045 = 0$$

$$\mathrm{Re}^2(\underline{U}') - 0{,}5 \cdot \mathrm{Re}(\underline{U}') + 0{,}0594 = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{Re}(\underline{U}') = \begin{cases} 0{,}1943 \\ \boxed{0{,}3057} \end{cases}$$

Prenent el valor més elevat de $\mathrm{Re}(\underline{U}')$ calculem finalment $\underline{U}$, segons l'equació (5.11):

$$\underline{U} = \underline{U}'\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta} = (0{,}3057 - \mathrm{j}0{,}12) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0{,}6435} = 0{,}3165 + \mathrm{j}0{,}0874$$

Obtenim ara $\underline{I}$, segons l'equació (5.7):

$$\underline{I} = \frac{\underline{S}^*}{\underline{U}^*} = \frac{0{,}6 - \mathrm{j}0{,}45}{0{,}3165 - \mathrm{j}0{,}0874} = 2{,}1262 - \mathrm{j}0{,}8347$$

Per acabar, calculem $\underline{Z}_\mathrm{S}$, segons l'equació (5.15):

$$\underline{Z}_\mathrm{S} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{0{,}3165 + \mathrm{j}0{,}0874}{2{,}1262 - \mathrm{j}0{,}8347} = 0{,}1150 + \mathrm{j}0{,}0863$$

5.3 Corrent de curt circuit en el secundari d'un transformador

Es tracta en aquest apartat, el càlcul del corrent de curt circuit trifàsic en el secundari d'un transformador, que té el primari connectat a una xarxa de potència.

A partir de la Figura 5.3, es tracta de trobar el valor del corrent de curt circuit trifàsic I_F en el punt F, essent la resta de paràmetres valors coneguts.

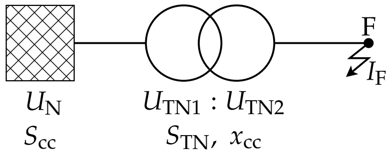


Figura 5.3: Corrent de curt circuit en el secundari d'un transformador

U_N, U_{TN1} i U_{TN2} estan donats en volt, S_{cc} i S_{TN} en volt ampere, i x_{cc} en p.u. respecte dels valors nominals del transformador.

Per tal de simplificar el problema, suposarem que tant la impedància de curt circuit del transformador, com la impedància equivalent de la xarxa de potència són totalment inductives; d'aquesta manera, podrem treballar amb les diverses variables implicades, com si fossin nombres reals. Suposarem a més, que no hi ha circulació de corrent abans del curt circuit.

Pel que fa a la xarxa de potència, si en lloc de la potència de curt circuit S_{cc}, el que coneixem és el corrent de curt circuit disponible I_{cc}, podem obtenir el valor de la potència de curt circuit a partir de l'expressió:

$$S_{cc} = \sqrt{3} U_N I_{cc} \tag{5.16}$$

Si prenem com a valors base els paràmetres del transformador (U_{TN1}, U_{TN2} i S_{TN}), la relació de transformació i la impedància de curt circuit del transformador, expressats en p.u., seran 1:1 i x_{cc} respectivament. Anàlogament, la tensió i la impedància equivalents de la xarxa de potència, expressats en p.u., seran $\frac{U_N}{U_{TN1}}$ i $\frac{U_N^2}{S_{cc}} \frac{S_{TN}}{U_{TN1}^2}$ respectivament.

Amb aquests valors, el corrent de curt circuit i_F, expressat en p.u., val:

$$i_F = \frac{\dfrac{U_N}{U_{TN1}}}{\dfrac{U_N^2}{S_{cc}} \dfrac{S_{TN}}{U_{TN1}^2} + x_{cc}} \tag{5.17}$$

I per tant, aquest corrent I_F, expressat en ampere, val:

$$I_F = i_F \frac{S_{TN}}{\sqrt{3} U_{TN2}} = \frac{S_{TN} U_N}{\sqrt{3} U_{TN1} U_{TN2} \left(\dfrac{U_N^2}{S_{cc}} \dfrac{S_{TN}}{U_{TN1}^2} + x_{cc} \right)} \tag{5.18}$$

Si la xarxa de potència es considera de potència infinita, tenim:

$$I_F = \frac{S_{TN} U_N}{\sqrt{3} U_{TN1} U_{TN2} x_{cc}} \qquad (\text{amb } S_{cc} = \infty) \tag{5.19}$$

Si a més, la tensió de la xarxa coincideix amb la tensió primària del transformador, tenim respectivament:

$$I_\mathrm{F} = \frac{S_\mathrm{TN}}{\sqrt{3}U_\mathrm{TN2}\left(\dfrac{S_\mathrm{TN}}{S_\mathrm{cc}} + x_\mathrm{cc}\right)} \qquad (\text{amb } U_\mathrm{N} = U_\mathrm{TN1}) \tag{5.20}$$

$$I_\mathrm{F} = \frac{S_\mathrm{TN}}{\sqrt{3}U_\mathrm{TN2}x_\mathrm{cc}} \qquad (\text{amb } U_\mathrm{N} = U_\mathrm{TN1} \text{ i } S_\mathrm{cc} = \infty) \tag{5.21}$$

Exemple 5.3 *A partir de la Figura 5.3 a la pàgina anterior, amb els valors $U_\mathrm{N} = 6900\,\mathrm{V}$, $U_\mathrm{TN1} = 6900\,\mathrm{V}$, $U_\mathrm{TN2} = 400\,\mathrm{V}$, $S_\mathrm{TN} = 850\,\mathrm{kVA}$ i $x_\mathrm{cc} = 5\,\%$, es tracta de trobar I_F en el cas que: a) $S_\mathrm{cc} = 200\,\mathrm{MVA}$ i b) $S_\mathrm{cc} = \infty$.*

El valors demanats són:

$$a)\ I_\mathrm{F} = \frac{850\,\mathrm{kVA}}{\sqrt{3}\cdot 400\,\mathrm{V}\cdot\left(\dfrac{850\,\mathrm{kVA}}{200\,\mathrm{MVA}} + 0{,}05\right)} = 22{,}6\,\mathrm{kA}$$

$$b)\ I_\mathrm{F} = \frac{850\,\mathrm{kVA}}{\sqrt{3}\cdot 400\,\mathrm{V}\cdot 0{,}05} = 24{,}5\,\mathrm{kA}$$

Part II

Components Elèctrics

Capítol 6

Resistències

6.1 Codificació en colors

La codificació en colors del valor òhmic de les resistències consisteix en tres o quatre bandes de colors, més una banda de color addicional, una mica separada, per codificar la tolerància.

En el cas de tres bandes, les dues primeres defineixen els dos dígits que formen el valor base, i la tercera el valor multiplicatiu; en el cas de quatre bandes, les tres primeres defineixen els tres dígits que formen el valor base, i la quarta el valor multiplicatiu.

En la taula següent es presenta la codificació en colors de les resistències.

Taula 6.1: Codificació en colors de les resistències

Color	1r dígit	2n dígit	3r dígit	Multiplicador	Tolerància [± %]
—	—	—	—	—	20
plata	—	—	—	10^{-2}	10
or	—	—	—	10^{-1}	5
negre	—	0	0	1	—
marró	1	1	1	10	1
vermell	2	2	2	10^2	2
taronja	3	3	3	10^3	—
groc	4	4	4	10^4	—
verd	5	5	5	10^5	0,5
blau	6	6	6	10^6	0,25
violeta	7	7	7	10^7	0,1
gris	8	8	8	—	0,05
blanc	9	9	9	—	—

Fa temps existien també resistències de tolerància ±50 %, però avui dia ja no se'n fabriquen.

Les resistències de tolerància ±20 % s'utilitzen molt poc, i alguns fabricants ni tan sols les subministren.

Exemple 6.1 *Es tracta d'obtenir els valors òhmics i les toleràncies de les dues resistències següents, definides pels colors:*

a)  *(Blau-Gris-Groc Or)*

b)  *(Taronja-Vermell-Groc-Negre Marró)*

En el primer cas tenim:

$$\textit{a) Blau-Gris-Groc Or} \longrightarrow \begin{cases} \textit{Resistència} & : \ 68 \cdot 10^4\,\Omega = 680\,\mathrm{k}\Omega \\ \textit{Tolerància} & : \ \pm 5\,\% \end{cases}$$

i en el segon:

$$\textit{b) Taronja-Vermell-Groc-Negre Marró} \longrightarrow \begin{cases} \textit{Resistència} & : \ 324 \cdot 1\,\Omega = 324\,\Omega \\ \textit{Tolerància} & : \ \pm 1\,\% \end{cases}$$

6.2 Valors estàndard

Els valors de les resistències que es fabriquen estan estandarditzats, i depenent del valor de la tolerància, el ventall de valors possibles és més o menys ample.

En les taules següents es llisten els valors estàndard de les resistències, segons la seva tolerància.

Els valors que es donen estan normalitzats per a la dècada compresa entre $100\,\Omega$ i $1000\,\Omega$. Els valors d'altres dècades s'obtenen simplement, multiplicant o dividint els valors de les taules per les corresponents potències de 10.

Taula 6.2: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 20\,\%$

100	150	220	330	470	680

Taula 6.3: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 10\,\%$

100	120	150	180	220	270	330	390	470	560	680	820

Taula 6.4: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 5\,\%$

100	110	120	130	150	160	180	200	220	240	270	300
330	360	390	430	470	510	560	620	680	750	820	910

Taula 6.5: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 2\,\%$

100	105	110	115	121	127	133	140	147	154	162	169
178	187	196	205	215	226	237	249	261	274	287	301
316	332	348	365	383	402	422	442	464	487	511	536
562	590	619	649	681	715	750	787	825	866	909	953

Taula 6.6: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 1\,\%$

100	102	105	107	110	113	115	118	121	124	127	130
133	137	140	143	147	150	154	158	162	165	169	174
178	182	187	191	196	200	205	210	215	221	226	232
237	243	249	255	261	267	274	280	287	294	301	309
316	324	332	340	348	357	365	374	383	392	402	412
422	432	442	453	464	475	487	499	511	523	536	549
562	576	590	604	619	634	649	665	681	698	715	732
750	768	787	806	825	845	866	887	909	931	953	976

Taula 6.7: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\leq \pm 0{,}5\,\%$

100	101	102	104	105	106	107	109	110	111	113	114
115	117	118	120	121	123	124	126	127	129	130	132
133	135	137	138	140	142	143	145	147	149	150	152
154	156	158	160	162	164	165	167	169	172	174	176
178	180	182	184	187	189	191	193	196	198	200	203
205	208	210	213	215	218	221	223	226	229	232	234
237	240	243	246	249	252	255	258	261	264	267	271
274	277	280	284	287	291	294	298	301	305	309	312
316	320	324	328	332	336	340	344	348	352	357	361
365	370	374	379	383	388	392	397	402	407	412	417
422	427	432	437	442	448	453	459	464	470	475	481
487	493	499	505	511	517	523	530	536	542	549	556
562	569	576	583	590	597	604	612	619	626	634	642
649	657	665	673	681	690	698	706	715	723	732	741
750	759	768	777	787	796	806	816	825	835	845	856
866	876	887	898	909	920	931	942	953	965	976	988

Capítol 7

Cables

Es tracten en aquest capítol qüestions relatives als cables elèctrics.

7.1 Resistència

7.1.1 Resistència d'un conductor

La resistència R d'un conductor depèn de la resistivitat ρ del material, de la llargada l del conductor i de la seva secció S.

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{7.1}$$

La resistivitat no és un valor constant, sinó que depèn de la temperatura; a major temperatura, major resistivitat. Coneixent la resistivitat ρ_1 a una temperatura T_1, es pot calcular la resistivitat ρ_2 a una altra temperatura T_2, a partir del coeficient de variació de la resistivitat amb la temperatura α_1, donat a la temperatura T_1.

$$\rho_2 = \rho_1[1 + \alpha_1(T_2 - T_1)] \tag{7.2}$$

En la Taula 7.1 es donen valors de la resistivitat i dels coeficients de variació de la resistivitat amb la temperatura, a 20 °C i a 0 °C, per a diversos materials.

Taula 7.1: Paràmetres elèctrics d'alguns materials

Material	$\rho_{20\,^\circ\mathrm{C}}$ [$\Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$]	$\alpha_{20\,^\circ\mathrm{C}}$ [$^\circ\mathrm{C}^{-1}$]	$\alpha_{0\,^\circ\mathrm{C}}$ [$^\circ\mathrm{C}^{-1}$]
Alumini	0,02825	0,00391	0,00424
Coure	0,01723	0,00393	0,00427
Plata	0,01645	0,00380	0,00412

La resistència així calculada és vàlida quan el corrent que circula pel cable és corrent continu.

Quan el corrent que circula pel cable és corrent altern, cal tenir en compte l'efecte pel·licular, el qual li provoca un augment de la resistència, causat perquè el corrent tendeix a circular més per la zona perifèrica del conductor que per la zona central; l'efecte és important per a valors elevats de la secció del conductor o de la freqüència del corrent.

La resistència efectiva es troba a partir de la resistència calculada anteriorment per a corrent continu, i d'un factor k que té en compte l'efecte pel·licular.

$$R_{\text{efectiva}} = \mathrm{k}R \tag{7.3}$$

En la Taula 7.2 es donen valors[1] de k per a conductors de coure i d'alumini, per a diversos valors del producte de la secció del conductor per la freqüència del corrent.

Taula 7.2: Valors de k pel càlcul de la resistència efectiva

Secció×Freqüència [mm^2 Hz]	k, segons el material del conductor	
	Cu	Al
5000	1,000	1,000
10000	1,008	1,000
15000	1,025	1,006
20000	1,045	1,015
25000	1,070	1,026
30000	1,096	1,040
35000	1,126	1,053
40000	1,158	1,069
45000	1,195	1,085
50000	1,230	1,104
75000	1,433	1,206
100000	1,622	1,330

7.1.2 Resistència d'un cable

La resistència d'un cable R_{Cable} depèn del nombre de conductors per fase n (o per pol, en corrent continu), de la resistència de cada conductor $R_{\text{Conductor}}$ i del tipus de tensió elèctrica a la qual estigui sotmès el cable (monofàsica, trifàsica, contínua, etc.).

Corrent continu o altern monofàsic

$$R_{\text{Cable}} = 2\,\frac{R_{\text{Conductor}}}{n} \tag{7.4}$$

El valor multiplicatiu 2, prové del fet que cal tenir en compte tant el conductor d'anada com el de tornada.

[1] Valors obtinguts del llibre «Teoría de Circuitos. Fundamentos, 3ª edición», Enrique Ras, Marcombo Boixareu Editores (pàg. 114).

Corrent altern trifàsic equilibrat

$$R_{\text{Cable}} = \frac{R_{\text{Conductor fase}}}{n} \tag{7.5}$$

Atès que no circula corrent pel neutre, la seva resistència no hi té cap influència.

Corrent altern trifàsic desequilibrat

$$R_{\text{Cable fase}} = \frac{R_{\text{Conductor fase}}}{n_{\text{fase}}} \qquad R_{\text{Cable neutre}} = \frac{R_{\text{Conductor neutre}}}{n_{\text{neutre}}} \tag{7.6}$$

En aquest cas cal tenir en compte que els corrents que circulen per les fase i pel neutre són diferents.

7.2 Caiguda de tensió

La caiguda de tensió ΔU en un cable es defineix com la diferència entre els mòduls de les tensions a l'origen $|\underline{U}_{\text{O}}|$ i al final $|\underline{U}_{\text{F}}|$ del cable.

$$\Delta U \equiv |\underline{U}_{\text{O}}| - |\underline{U}_{\text{F}}| \tag{7.7}$$

7.2.1 Caiguda de tensió en corrent continu

En corrent continu la caiguda de tensió depèn del corrent I que circula pel cable i de la resistència del propi cable, calculada segons l'equació (7.4).

$$\Delta U = I R_{\text{Cable}} \tag{7.8}$$

7.2.2 Caiguda de tensió en corrent altern

En corrent altern la caiguda de tensió depèn del corrent $\underline{I}$ que circula pel cable, de la resistència i la reactància del propi cable, i del factor de potència $\cos\varphi$. El diagrama vectorial d'aquestes magnituds es pot veure en la Figura 7.1.

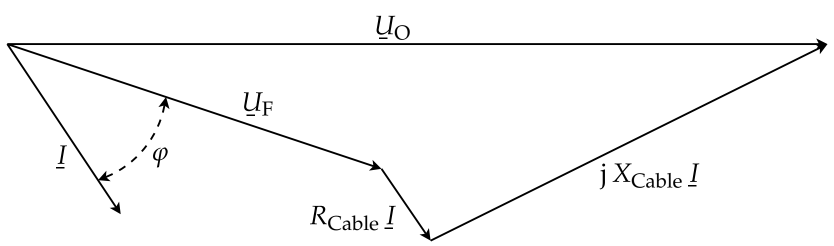


Figura 7.1: Caiguda de tensió en corrent altern

Quan es tracta de corrent monofàsic, la resistència del cable es calcula segons l'equació (7.4); la reactància del cable X_{Cable} es calcula de forma anàloga amb la mateixa equació, a partir de la reactància dels conductors $X_{\text{Conductor}}$.

Pel que fa al corrent trifàsic, se suposa equilibrat, i per tant s'utilitza l'equació (7.5) per calcular la resistència del cable R_{Cable} (i de forma anàloga la reactància X_{Cable}). Addicionalment, els corrents fan referència als corrents de fase, i les tensions a les tensions fase–neutre; l'angle φ és per tant l'angle entre la tensió final fase–neutre i el corrent de fase.

Disposem en aquest cas de dues equacions, una d'exacta i una altre d'aproximada (per a valors elevats de $\cos\varphi$) .

$$\Delta U = |\underline{I}|(R_{\text{Cable}}\cos\varphi + X_{\text{Cable}}\sin\varphi) + |\underline{U}_{\text{O}}| - \sqrt{|\underline{U}_{\text{O}}|^2 - |\underline{I}|^2(X_{\text{Cable}}\cos\varphi - R_{\text{Cable}}\sin\varphi)^2} \tag{7.9a}$$

$$\Delta U \approx |\underline{I}|(R_{\text{Cable}}\cos\varphi + X_{\text{Cable}}\sin\varphi) \qquad \text{si } \cos\varphi \gtrapprox 0{,}8 \tag{7.9b}$$

Exemple 7.1 *Es tracta de calcular la caiguda de tensió d'un cable, en un sistema trifàsic on* $|\underline{U}_{\text{O}}| = 380\,\text{V}$ *(fase–fase),* $|\underline{I}| = 630\,\text{A}$ *i* $\cos\varphi = 0{,}87(i)$*; cada fase està formada per tres conductors unipolars de* $240\,\text{mm}^2$ *de secció i* $400\,\text{m}$ *de llargada, amb uns valors de resistència i inductància de* $0{,}095\,\Omega/\text{km}$ *i* $0{,}102\,\Omega/\text{km}$ *respectivament.*

A partir de l'equació (7.5) calculem els valors de R_{Cable} *i de* X_{Cable}*.*

$$R_{\text{Cable}} = \frac{0{,}095\,\Omega/\text{km}\cdot 0{,}4\,\text{km}}{3} = 0{,}0127\,\Omega$$

$$X_{\text{Cable}} = \frac{0{,}102\,\Omega/\text{km}\cdot 0{,}4\,\text{km}}{3} = 0{,}0136\,\Omega$$

Obtenim a continuació el valor de $\sin\varphi$*:*

$$\sin\varphi = \sqrt{1-0{,}87^2} = 0,49$$

Calculem en primer lloc la caiguda de tensió de forma aproximada utilitzant l'equació (7.9b).

$$\Delta U \approx 630\,\text{A}\cdot(0{,}0127\,\Omega\cdot 0{,}87 + 0{,}0136\,\Omega\cdot 0{,}49) = 11{,}16\,\text{V}$$

que en tant per cent respecte la tensió a l'origen representa: $\frac{11{,}16\,\text{V}}{380/\sqrt{3}\,\text{V}}\cdot 100 = 5{,}09\,\%$

Finalment, calculem la caiguda de tensió exacta utilitzant l'equació (7.9a).

$$\Delta U = 630\,\text{A}\cdot(0{,}0127\,\Omega\cdot 0{,}87 + 0{,}0136\,\Omega\cdot 0{,}49) + \frac{380}{\sqrt{3}}\,\text{V} - \\ - \sqrt{(380/\sqrt{3}\,\text{V})^2 - (630\,\text{A})^2\cdot(0{,}0136\,\Omega\cdot 0{,}87 - 0{,}0127\,\Omega\cdot 0{,}49)^2} = 11{,}19\,\text{V}$$

que en tant per cent respecte la tensió a l'origen representa: $\frac{11{,}19\,\text{V}}{380/\sqrt{3}\,\text{V}}\cdot 100 = 5{,}10\,\%$

7.3 Capacitat tèrmica en curt circuit

Quan hi ha un curt circuit en un cable, tot el calor generat no es transmet a l'exterior, sinó que s'acumula en la massa del conductor, incrementant la seva temperatura (procés adiabàtic). En aquestes condicions es pot aplicar l'equació:

$$I_{cc} = S\,\frac{C}{\sqrt{t}} \quad \begin{cases} I_{cc} & : \text{ expressat en A} \\ S & : \text{ expressat en mm}^2 \\ t & : \text{ expressat en s} \\ C & : \text{ paràmetre dependent del tipus de cable} \end{cases} \tag{7.10}$$

I_{cc} és la intensitat de curt circuit que circula pel conductor, S és la secció del conductor, t és el temps màxim que pot durar el curt circuit sense que es malmeti el cable, i C és un paràmetre que depèn del material del conductor i del seu aïllament. En la Taula 7.3 es donen valors[2] de C per a diferents materials del conductor i de l'aïllament.

Taula 7.3: Valors de C pel càlcul de curt circuits en cables

Material del conductor	C, segons el material de l'aïllament	
	PVC	EPR i XLPE
Cu	115	142
Al	75	93

Exemple 7.2 *Es tracta de calcular el temps màxim durant el qual un cable de coure de* 50 mm² *amb aïllament d'EPR, pot suportar un corrent de curt circuit de* 15 kA.

A partir de l'equació (7.10) *calculem el temps màxim demanat:*

$$t = \left(\frac{S\,C}{I_{cc}}\right)^2 = \left(\frac{50\,\text{mm}^2 \cdot 142}{15000\,\text{A}}\right)^2 = 0{,}224\,\text{s}$$

7.4 Conversió entre unitats americanes i unitats SI

7.4.1 «Mils» (mil), «circular mils» (CM) i «thousand circular mils» (MCM)

Les definicions d'aquestes tres unitats utilitzades en la mesura de diàmetres i seccions de cables són:

$$1\,\text{mil} \equiv \text{Una mil·lèsima de polsada} \tag{7.11}$$

$$1\,\text{CM} \equiv \text{Àrea d'un cercle de diàmetre igual a 1 mil} \tag{7.12}$$

$$1\,\text{MCM} \equiv 1000\,\text{CM} \tag{7.13}$$

[2] Valors obtinguts del catàleg del fabricant «General Cable».

Es donen a continuació algunes conversions d'aquestes unitats:

$$1\,\text{mil} = 10^{-3}\,\text{in} \tag{7.14}$$

$$1\,\text{mil} = 10^{-3}\,\text{in}\cdot\frac{25{,}4\,\text{mm}}{1\,\text{in}} = 25{,}4\cdot 10^{-3}\,\text{mm} \tag{7.15}$$

$$1\,\text{CM} = \frac{\pi}{4}\,\text{mil}^2 = 0{,}785398\,\text{mil}^2 \tag{7.16}$$

$$1\,\text{CM} = \frac{\pi}{4}\cdot 10^{-6}\,\text{in}^2 = 0{,}785398\cdot 10^{-6}\,\text{in}^2 \tag{7.17}$$

$$1\,\text{CM} = \frac{\pi}{4}\cdot 10^{-6}\,\text{in}^2\cdot\frac{645{,}16\,\text{mm}^2}{1\,\text{in}^2} = 506{,}7075\cdot 10^{-6}\,\text{mm}^2 \tag{7.18}$$

$$1\,\text{MCM} = 785{,}398\,\text{mil}^2 = 0{,}785398\cdot 10^{-3}\,\text{in}^2 = 0{,}5067075\,\text{mm}^2 \tag{7.19}$$

Una relació útil entre diàmetres i seccions, és la següent: la secció S d'un cercle expressada en «circular mils», es igual al quadrat del diàmetre d del cercle expressat en «mils».

$$S = d^2 \quad \begin{cases} S & : \text{ expressat en CM} \\ d & : \text{ expressat en mil} \end{cases} \tag{7.20}$$

En la Taula 7.4 es relacionen els diàmetres i seccions en diverses unitats, dels conductors usualment disponibles compresos entre 2000 MCM i 250 MCM.

Taula 7.4: Dimensions de cables definits en MCM

Secció			Diàmetre		
[MCM]	[in^2]	[mm^2]	[mil]	[in]	[mm]
2000	1,570796	1013,4150	1414,21356	1,4142136	35,92102
1750	1,374447	886,7381	1322,87566	1,3228757	33,60104
1600	1,256637	810,7320	1264,91106	1,2649111	32,12874
1500	1,178097	760,0612	1224,74487	1,2247449	31,10852
1250	0,981748	633,3843	1118,03399	1,1180340	28,39806
1000	0,785398	506,7075	1000,00000	1,0000000	25,40000
800	0,628319	405,3660	894,42719	0,8944272	22,71845
750	0,589049	380,0306	866,02540	0,8660254	21,99705
700	0,549779	354,6952	836,66003	0,8366600	21,25116
600	0,471239	304,0245	774,59667	0,7745967	19,67476
500	0,392699	253,3537	707,10678	0,7071068	17,96051
450	0,353429	228,0184	670,82039	0,6708204	17,03884
400	0,314159	202,6830	632,45553	0,6324555	16,06437
350	0,274889	177,3476	591,60798	0,5916080	15,02684
300	0,235619	152,0122	547,72256	0,5477226	13,91215
250	0,196350	126,6769	500,00000	0,5000000	12,70000

D'aquesta taula es pot veure que: Secció en $\text{mm}^2 \approx \dfrac{\text{Secció en MCM}}{2}$.

7.4.2 «American Wire Gauge» (AWG)

L'«American Wire Gauge», anomenat també «Brown & Sharp Gauge», és un sistema de numeració de conductors de coure segons el seu diàmetre. A cada número AWG correspon un valor de diàmetre; els successius diàmetres formen una progressió geomètrica descendent (en augmentar el número AWG, disminueix el diàmetre).

La raó d'aquesta progressió geomètrica s'obté de la següent consideració: hi ha dos valors de referència, AWG 36, al qual s'assigna un diàmetre de 5 mil, i AWG 4/0 (també anomenat AWG 0000), al qual s'assigna un diàmetre de 460 mil. Entre aquest dos valors de referència hi ha una diferencia de 39 unitats (vegeu la Taula 7.5 a la pàgina següent), i per tant, sent r_d la raó de diàmetres buscada, tenim:

$$5\,\mathrm{mil} = 460\,\mathrm{mil}\cdot r_\mathrm{d}^{39} \quad\rightarrow\quad r_\mathrm{d} = \left(\frac{5\,\mathrm{mil}}{460\,\mathrm{mil}}\right)^{1/39} = \left(\frac{1}{92}\right)^{1/39} = 92^{-1/39} \tag{7.21}$$

En ser la secció d'un conductor proporcional al quadrat del seu diàmetre, les seccions dels successius números AWG formen una progressió geomètrica descendent de raó r_S igual a:

$$r_\mathrm{S} = r_\mathrm{d}^2 = 92^{-2/39} \tag{7.22}$$

Finalment, en ser la resistència d'un conductor inversament proporcional a la seva secció, les resistències dels successius números AWG formen una progressió geomètrica ascendent de raó r_R igual a:

$$r_\mathrm{R} = \frac{1}{r_\mathrm{S}} = 92^{2/39} \tag{7.23}$$

A partir d'aquestes raons, i coneixent el diàmetre d, la secció S i la resistència R d'un número AWG n, podem calcular aquests paràmetres per a un altre número AWG, k unitats posterior o k unitats anterior:

$$\begin{array}{rlll} \text{AWG:} & n & n+k & n-k \\ \text{Diàmetre:} & d & d\cdot 92^{-k/39} & d\cdot 92^{k/39} \\ \text{Secció:} & S & S\cdot 92^{-2k/39} & S\cdot 92^{2k/39} \\ \text{Resistència:} & R & R\cdot 92^{2k/39} & R\cdot 92^{-2k/39} \end{array} \tag{7.24}$$

Per a alguns valors particulars de k, es compleixen de forma aproximada les següents relacions:

$k = 6$ En augmentar en 6 unitats el número AWG, el diàmetre es divideix per 2 ($92^{-6/39} \approx 0{,}5$).

$k = -6$ En disminuir en 6 unitats el número AWG, el diàmetre es multiplica per 2 ($92^{6/39} \approx 2$).

$k = 20$ En augmentar en 20 unitats el número AWG, el diàmetre es divideix per 10 ($92^{-20/39} \approx 0{,}1$).

$k = -20$ En disminuir en 20 unitats el número AWG, el diàmetre es multiplica per 10 ($92^{20/39} \approx 10$).

$k = 3$ En augmentar en 3 unitats el número AWG, la secció es divideix per 2 ($92^{-2\cdot 3/39} \approx 0{,}5$) i la resistència es multiplica per 2 ($92^{2\cdot 3/39} \approx 2$).

$k = -3$ En disminuir en 3 unitats el número AWG, la secció es multiplica per 2 ($92^{2\cdot 3/39} \approx 2$) i la resistència es divideix per 2 ($92^{-2\cdot 3/39} \approx 0{,}5$).

$k = 10$ En augmentar en 10 unitats el número AWG, la secció es divideix per 10 ($92^{-2\cdot 10/39} \approx 0{,}1$) i la resistència es multiplica per 10 ($92^{2\cdot 10/39} \approx 10$).

$k = -10$ En disminuir en 10 unitats el número AWG, la secció es multiplica per 10 ($92^{2\cdot 10/39} \approx 10$) i la resistència es divideix per 10 ($92^{-2\cdot 10/39} \approx 0{,}1$).

En la Taula 7.5 es relacionen els diàmetres i seccions en diverses unitats dels conductors compresos entre AWG 4/0 i AWG 50.

Taula 7.5: Dimensions de cables AWG

Cable	Diàmetre			Secció		
[AWG]	[mil]	[in]	[mm]	[CM]	[in^2]	[mm^2]
4/0	460,000	0,460000	11,6840	211600,000	$1{,}662\cdot 10^{-1}$	107,219303
3/0	409,642	0,409642	10,4049	167806,429	$1{,}318\cdot 10^{-1}$	85,028773
2/0	364,797	0,364797	9,2658	133076,548	$1{,}045\cdot 10^{-1}$	67,430882
1/0	324,861	0,324861	8,2515	105534,501	$8{,}289\cdot 10^{-2}$	53,475121
1	289,297	0,289297	7,3481	83692,664	$6{,}573\cdot 10^{-2}$	42,407699
2	257,626	0,257626	6,5437	66371,300	$5{,}213\cdot 10^{-2}$	33,630834
3	229,423	0,229423	5,8273	52634,834	$4{,}134\cdot 10^{-2}$	26,670464
4	204,307	0,204307	5,1894	41741,321	$3{,}278\cdot 10^{-2}$	21,150639
5	181,941	0,181941	4,6213	33102,372	$2{,}600\cdot 10^{-2}$	16,773220
6	162,023	0,162023	4,1154	26251,375	$2{,}062\cdot 10^{-2}$	13,301768
7	144,285	0,144285	3,6649	20818,287	$1{,}635\cdot 10^{-2}$	10,548782
8	128,490	0,128490	3,2636	16509,652	$1{,}297\cdot 10^{-2}$	8,365564
9	114,424	0,114424	2,9064	13092,749	$1{,}028\cdot 10^{-2}$	6,634194
10	101,897	0,101897	2,5882	10383,022	$8{,}155\cdot 10^{-3}$	5,261155
11	90,742	0,090742	2,3048	8234,111	$6{,}467\cdot 10^{-3}$	4,172286
12	80,808	0,080808	2,0525	6529,947	$5{,}129\cdot 10^{-3}$	3,308773
13	71,962	0,071962	1,8278	5178,483	$4{,}067\cdot 10^{-3}$	2,623976
14	64,084	0,064084	1,6277	4106,724	$3{,}225\cdot 10^{-3}$	2,080908
15	57,068	0,057068	1,4495	3256,780	$2{,}558\cdot 10^{-3}$	1,650235
16	50,821	0,050821	1,2908	2582,744	$2{,}028\cdot 10^{-3}$	1,308696
17	45,257	0,045257	1,1495	2048,209	$1{,}609\cdot 10^{-3}$	1,037843
18	40,303	0,040303	1,0237	1624,304	$1{,}276\cdot 10^{-3}$	0,823047
19	35,891	0,035891	0,9116	1288,131	$1{,}012\cdot 10^{-3}$	0,652706
20	31,961	0,031961	0,8118	1021,535	$8{,}023\cdot 10^{-4}$	0,517619
21	28,462	0,028462	0,7229	810,114	$6{,}363\cdot 10^{-4}$	0,410491
22	25,347	0,025347	0,6438	642,449	$5{,}046\cdot 10^{-4}$	0,325534
23	22,572	0,022572	0,5733	509,486	$4{,}001\cdot 10^{-4}$	0,258160
24	20,101	0,020101	0,5106	404,040	$3{,}173\cdot 10^{-4}$	0,204730
25	17,900	0,017900	0,4547	320,419	$2{,}517\cdot 10^{-4}$	0,162359
26	15,941	0,015941	0,4049	254,104	$1{,}996\cdot 10^{-4}$	0,128756
27	14,196	0,014196	0,3606	201,513	$1{,}583\cdot 10^{-4}$	0,102108

(*continua a la pàgina següent*)

Taula 7.5: Dimensions de cables AWG (*ve de la pàgina anterior*)

Cable [AWG]	Diàmetre [mil]	Diàmetre [in]	Diàmetre [mm]	Secció [CM]	Secció [in^2]	Secció [mm^2]
28	12,641	0,012641	0,3211	159,807	$1{,}255{\cdot}10^{-4}$	0,080976
29	11,258	0,011258	0,2859	126,733	$9{,}954{\cdot}10^{-5}$	0,064217
30	10,025	0,010025	0,2546	100,504	$7{,}894{\cdot}10^{-5}$	0,050926
31	8,928	0,008928	0,2268	79,703	$6{,}260{\cdot}10^{-5}$	0,040386
32	7,950	0,007950	0,2019	63,207	$4{,}964{\cdot}10^{-5}$	0,032028
33	7,080	0,007080	0,1798	50,126	$3{,}937{\cdot}10^{-5}$	0,025399
34	6,305	0,006305	0,1601	39,752	$3{,}122{\cdot}10^{-5}$	0,020142
35	5,615	0,005615	0,1426	31,524	$2{,}476{\cdot}10^{-5}$	0,015974
36	5,000	0,005000	0,1270	25,000	$1{,}963{\cdot}10^{-5}$	0,012668
37	4,453	0,004453	0,1131	19,826	$1{,}557{\cdot}10^{-5}$	0,010046
38	3,965	0,003965	0,1007	15,723	$1{,}235{\cdot}10^{-5}$	0,007967
39	3,531	0,003531	0,0897	12,469	$9{,}793{\cdot}10^{-6}$	0,006318
40	3,145	0,003145	0,0799	9,888	$7{,}766{\cdot}10^{-6}$	0,005010
41	2,800	0,002800	0,0711	7,842	$6{,}159{\cdot}10^{-6}$	0,003973
42	2,494	0,002494	0,0633	6,219	$4{,}884{\cdot}10^{-6}$	0,003151
43	2,221	0,002221	0,0564	4,932	$3{,}873{\cdot}10^{-6}$	0,002499
44	1,978	0,001978	0,0502	3,911	$3{,}072{\cdot}10^{-6}$	0,001982
45	1,761	0,001761	0,0447	3,102	$2{,}436{\cdot}10^{-6}$	0,001572
46	1,568	0,001568	0,0398	2,460	$1{,}932{\cdot}10^{-6}$	0,001246
48	1,244	0,001244	0,0316	1,547	$1{,}215{\cdot}10^{-6}$	0,000784
50	0,986	0,000986	0,0251	0,973	$7{,}641{\cdot}10^{-7}$	0,000493
52	0,782	0,000782	0,0199	0,612	$4{,}805{\cdot}10^{-7}$	0,000310
54	0,620	0,000620	0,0158	0,385	$3{,}022{\cdot}10^{-7}$	0,000195
56	0,492	0,000492	0,0125	0,242	$1{,}901{\cdot}10^{-7}$	0,000123

Es dóna finalment, la fórmula per passar directament d'un número AWG n, a la seva secció S equivalent expressada en mm^2.

$$S = \frac{25{,}4^2 \cdot 460^2 \cdot \pi}{4 \cdot 10^6 \cdot 92^{2 \cdot \frac{n+3}{39}}} = 53{,}4751207 \cdot 92^{-\frac{n}{19{,}5}} = 53{,}4751207 \cdot \mathrm{e}^{-n \cdot \frac{\ln 92}{19{,}5}} \begin{cases} S & : \text{ expressada en mm}^2 \\ n & : \text{ número AWG} \end{cases} \tag{7.25}$$

En aquesta fórmula, cal utilitzar els valors $n = 0, -1, -2, -3$, pels números AWG 1/0, 2/0, 3/0, 4/0 respectivament.

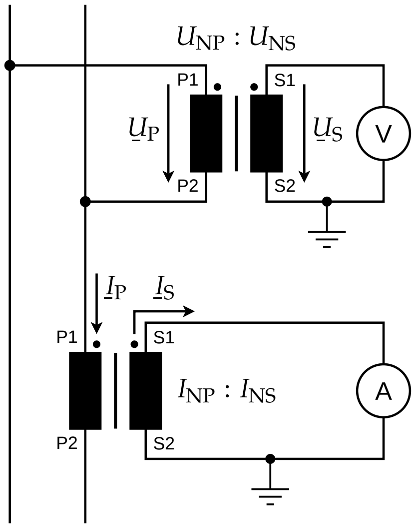
Capítol 8

Transformadors de Mesura i Protecció

Es tracten en aquest capítol temes referents als transformadors de mesura i de protecció, tant de tensió com d'intensitat. Aquest tractament es fa des del punt de vista de les normes CEI. En l'apartat final, es descriuen les normes ANSI, i la seva correspondència amb les CEI.

8.1 Introducció

En la Figura 8.1 es representen uns connexionats habituals d'un transformador de tensió (anomenats usualment TT) , a la part superior, i d'un transformador d'intensitat (anomenats usualment TI o TC) , a la part inferior. Els sentits de les tensions i corrents s'han representat tenint en compte els terminals equivalents (marcats amb un punt) dels primaris i secundaris.



$$\underline{U}_S = \underline{U}_P \frac{U_{NS}}{U_{NP}} \tag{8.1}$$

$$\underline{I}_S = \underline{I}_P \frac{I_{NS}}{I_{NP}} \tag{8.2}$$

Figura 8.1: Transformadors de tensió i d'intensitat

Les relacions de transformació nominals d'aquests transformadors de tensió i d'intensitat, són U_{NP} : U_{NS} i I_{NP} : I_{NS} respectivament. Al costat de la Figura 8.1 es poden veure les relacions que lliguen les tensions i corrents de primari amb les de secundari, suposant que els transformadors són ideals.

Els terminals del primari es designen P1 i P2, i els del secundari S1 i S2; P1 i S1 són sempre terminals equivalents.

Els transformadors de tensió es connecten a la línia principal, en derivació; el primari està sotmès, per tant, a la tensió de la línia. Els TT per a connexió entre fases tenen els dos borns primaris aïllats, mentre que els que estan previstos per ser connectats entre fase y terra, només en tenen un d'aïllat , ja que l'altre es connecta directament a terra. Els transformadors de corrent, en canvi, es connecten amb el primari intercalat en la línia principal; pel primari del TI circula, per tant, la intensitat de la línia.

Com a mesura de protecció per a les persones, és usual connectar a terra un dels dos terminals del secundari dels transformadors. Cal recordar a més, en el cas dels transformadors de corrent, que el secundari no ha de quedar mai en circuit obert, ja que es produirien sobretensions que podrien malmetre el transformador.

8.2 Errors de mesura dels transformadors reals

Atès que en realitat, els transformadors que es construeixen no són ideals, tots tenen un error en la transformació de la magnitud primària en la secundària, tant pel que fa al mòdul, com pel que fa a l'angle.

8.2.1 Error de relació

Aquest és l'error de mòdul existent entre les magnituds primària i secundaria; es denomina més específicament, error d'intensitat en el cas dels TI, i error de tensió en el cas dels TT.

En el cas dels TI, si I_P i I_S són els corrents que realment circulen pel primari i pel secundari respectivament, l'error d'intensitat ϵ_I val:

$$\epsilon_\mathrm{I} = \frac{\frac{I_\mathrm{NP}}{I_\mathrm{NS}} I_\mathrm{S} - I_\mathrm{P}}{I_\mathrm{P}} \tag{8.3}$$

En el cas dels TT, si U_P i U_S són les tensions que realment existeixen en el primari i en el secundari respectivament, l'error de tensió ϵ_T val:

$$\epsilon_\mathrm{T} = \frac{\frac{U_\mathrm{NP}}{U_\mathrm{NS}} U_\mathrm{S} - U_\mathrm{P}}{U_\mathrm{P}} \tag{8.4}$$

Els errors de relació (de tensió o d'intensitat) s'expressen normalment en tant per cent.

8.2.2 Error de fase

Aquest és l'error d'angle existent entre les magnituds primària i secundaria; aquesta definició és rigorosa únicament en el cas de tensions o corrents sinusoïdals, on aquests valors es poden representar mitjançant vectors giratoris.

Cal fer notar que mentre que l'error de relació vist anteriorment, afecta a qualsevol tipus d'aparell que es connecti en el secundari, l'error de fase no afecta a aparells que únicament mesuren el mòdul de la tensió o del corrent (amperímetre, voltímetre, etc.), i sí afecta, en canvi a aparells que mesuren simultàniament diverses tensions o corrents (wattímetre, comptador d'energia, sincronitzador, etc.)

Els errors de fase s'expressen en el valor de l'angle, mesurat en minuts d'arc o en centiradiant (crad).

8.2.3 Error compost

Per a magnituds sinusoïdals, l'error compost es defineix com:

$$\text{Error compost} = \sqrt{(\text{Error de relació})^2 + (\text{Error de fase})^2} \tag{8.5}$$

L'error compost i el de relació han d'expressar-se en %, i l'error de fase en crad.

8.2.4 Classe, càrrega i potència de precisió

Les normes defineixen les anomenades «classes de precisió», cadascuna de les quals té assignades uns límits admissibles dels errors de relació i de fase. Així doncs, a cada transformador s'assigna una determinada classe de precisió, en funció dels errors de relació i de fase que presenta.

Els errors de relació i de fase que presenta un transformador no són constants, sinó que depenen de les següents condicions:

- La tensió present en el secundari, en el cas dels TT, i el corrent que circula pel secundari, en el cas dels TI.
- La càrrega connectada en el secundari (en sèrie en el cas dels TI, i en paral·lel en el cas dels TT), definida pel nombre i tipus d'aparells connectats.
- La freqüència de funcionament.

Per tant, la classe de precisió assignada a un TI o a un TT, ha de referir-se a un determinat valor de la càrrega, a la qual està sotmès el transformador. Es defineix, en conseqüència, el terme «càrrega de precisió» com el valor de la càrrega en el secundari (expressada en Ω), a la que està referida la classe de precisió assignada; és més usual, no obstant, utilitzar el terme «potència de precisió», que es el valor de la càrrega (expressada com potència aparent en VA), a la que està referida la classe de precisió.

La relació entre la càrrega de precisió Z_{NS} i la potència de precisió S_{N} en el cas dels TT és:

$$S_{\mathrm{N}} = \frac{U_{\mathrm{NS}}^2}{Z_{\mathrm{NS}}} \tag{8.6}$$

i en el cas del TI:

$$S_{\mathrm{N}} = I_{\mathrm{NS}}^2 Z_{\mathrm{NS}} \tag{8.7}$$

8.3 Característiques i valors normalitzats dels transformadors de tensió

8.3.1 Característiques comunes dels TT de mesura i de protecció

Segons quina sigui la seva funció, els TT es classifiquen en:

- **Transformadors de mesura**: són els utilitzats per alimentar instruments de mesura (voltímetres, wattímetres, etc.), comptadors d'energia i altres aparells que requereixin senyal de tensió.
- **Transformadors de protecció**: són els utilitzats per alimentar relès de protecció.

Es presenten a continuació les característiques comunes als TT de mesura i de protecció.

Tensió nominal primària

És la tensió assignada al primari del transformador, a partir de la qual, es determinen les seves característiques de funcionament i d'aïllament (U_{NP}). En mitja tensió, els valors normalitzats són: 2,2 kV, 3,3 kV, 5,5 kV, 6,6 kV, 11 kV, 13,2 kV, 16,5 kV, 22 kV, 27,5 kV, 33 kV, 44 kV, 55 kV i 66 kV.

Tensió nominal secundària

És la tensió assignada al secundari del transformador (U_{NS}). Els valors normalitzats són:

- 100 V i 110 V, en el cas de transformadors connectats entre dues fases.
- $\frac{100}{\sqrt{3}}$ V i $\frac{110}{\sqrt{3}}$ V, en el cas de transformadors connectats entre fase i terra.
- 100 V, 110 V, $\frac{100}{\sqrt{3}}$ V, $\frac{110}{\sqrt{3}}$ V, $\frac{100}{3}$ V i $\frac{110}{3}$ V, en el cas de transformadors connectats en triangle obert.

Relació de transformació nominal

Relació dels dos paràmetres anteriors ($U_{\mathrm{NP}} : U_{\mathrm{NS}}$).

Freqüència nominal

És la freqüència d'operació per a la qual està dissenyat el transformador.

Potència de precisió

Els valors normalitzats de la potència de precisió (S_{N}), per a un factor de potència 0,8 inductiu són: 10 VA, 15 VA, 25 VA, 30 VA, 50 VA, 75 VA, 100 VA, 150 VA, 200 VA, 300 VA, 400 VA i 500 VA.

Factor de tensió nominal

És el factor pel qual ha de multiplicar-se la tensió nominal primària, per tal de determinar la tensió màxima que el TT pot suportar durant un temps determinat, sense sobrepassar ni l'escalfament admissible, ni els límits d'error corresponents a la seva classe de precisió. Les sobretensions poden presentar-se en el transformador, per la fluctuació pròpia de la xarxa on estiguin connectats, o per l'efecte de curt circuits.

Tots els TT han de suportar en permanència una tensió aplicada en el primari de fins a 1,2 vegades la tensió nominal. A més, els TT connectats entre fase i terra, en xarxes amb el neutre aïllat, o connectat a terra a través d'una impedància elevada, han de suportar una tensió de fins 1,9 vegades la tensió nominal, durant 8 hores (per fer front a curt circuits fase–terra).

8.3.2 Característiques particulars dels TT de mesura

Es presenten a continuació les característiques particulars dels TT de mesura.

Classe de precisió

Els valors normalitzats són 0,1, 0,2, 0,5, 1 i 3. En la Taula 8.1 s'indiquen els límits dels errors de tensió i de fase, per a tensions compreses entre 80 % U_{NS} i 120 % U_{NS}, i per a càrregues compreses entre 25 % S_N i 100 % S_N, amb un factor de potencia 0,8 inductiu.

Aquests valors de classe de precisió, també són aplicables als transformadors de protecció.

Taula 8.1: Classes de precisió per a TT de mesura i protecció

Classe de precisió	Error de tensió [± % U_{NS}]	Error de fase	
		[± minuts d'arc]	[± crad]
0,1	0,1	5	0,15
0,2	0,2	10	0,3
0,5	0,5	20	0,6
1	1,0	40	1,2
3	3,0	—	—

8.3.3 Característiques particulars dels TT de protecció

Es presenten a continuació les característiques particulars dels TT de protecció.

Classe de precisió

Els TT de protecció tenen les mateixes classes de precisió que els TT de mesura, i per tant també els és aplicable la Taula 8.1.

Addicionalment, els TT de protecció, pels marges de tensió compresos entre 5 % U_{NS} i 80 % U_{NS} i entre 120 % U_{NS} i el valor U_{NS} multiplicat pel factor de tensió nominal (per exemple 190 % U_{NS}), tenen assignada una altra classe de precisió; els valors normalitzats són 3P i 6P. Així, per exemple, un TT amb factor de tensió nominal 1,9 i classe de precisió 0,5 3P, té la classe de precisió 0,5 entre 80 % U_{NS} i 120 % U_{NS}, i la classe de precisió 3P entre 5 % U_{NS} i 80 % U_{NS} i entre 120 % U_{NS} i 190 % U_{NS}.

En la Taula 8.2 s'indiquen els límits dels errors de tensió i de fase, per a càrregues compreses entre 25 % S_N i 100 % S_N, amb un factor de potencia 0,8 inductiu, dins dels dos marges de tensions indicats anteriorment. Per a tensions de l'ordre del 2 % U_{NS}, els errors tenen un valor doble dels indicats en aquesta taula.

Taula 8.2: Classes de precisió addicionals per a TT de protecció

Classe de precisió	Error de tensió [± % U_{NS}]	Error de fase	
		[± minuts d'arc]	[± crad]
3P	3	120	3,5
6P	6	240	7,0

8.4 Característiques i valors normalitzats dels transformadors d'intensitat

8.4.1 Característiques comunes dels TI de mesura i de protecció

Segons quina sigui la seva funció, els TI es classifiquen, de forma anàloga als TT, en:

- **Transformadors de mesura**: són els utilitzats per alimentar instruments de mesura (amperímetres, wattímetres, etc.), comptadors d'energia i altres aparells que requereixin senyal d'intensitat.
- **Transformadors de protecció**: són els utilitzats per alimentar relès de protecció.

Es presenten a continuació les característiques comunes als TI de mesura i de protecció.

Intensitat nominal primària

És la intensitat assignada al primari del transformador (I_{NP}). Els valors normalitzats són: 10 A, 12,5 A, 15 A, 20 A, 25 A, 30 A, 40 A, 50 A, 60 A i 75 A, i els seus múltiples i submúltiples decimals.

Intensitat nominal secundària

És la intensitat assignada al secundari del transformador (I_{NS}). Els valors normalitzats són: 1 A, 2 A i 5 A, essent aquest darrer valor el preferent i el més freqüent.

Relació de transformació nominal

Relació dels dos paràmetres anteriors ($I_{\mathrm{NP}} : I_{\mathrm{NS}}$).

Freqüència nominal

És la freqüència d'operació per a la qual està dissenyat el transformador.

Potència de precisió

Els valors normalitzats de la potència de precisió (S_{N}), són: 2,5 VA, 5 VA, 10 VA, 15 VA, i 30 VA.

Sobreintensitats assignades

Els TI tenen el primari connectat en sèrie amb una línia de potència, i per tant han d'estar preparats per suportar curt circuits, fins que algun interruptor desconnecti la línia on hi ha la falta; aquest corrent es transforma en el secundari en un corrent de valor també elevat, havent de suportar el transformador els efectes tèrmics i dinàmics que això comporta.

Es defineix la «intensitat tèrmica nominal de curt circuit» (I_{th}), com el valor eficaç del corrent primari que el transformador pot suportar durant 1 s, amb el debanat secundari en curt circuit, sense patir efectes perjudicials; es considera que aquest temps és suficient perquè les proteccions pertinents actuïn, eliminant el curt circuit. En qualsevol cas, si I_{cc} és la intensitat de curt circuit i t és la seva durada (expressada en s), ha de complir-se: $I_{\mathrm{th}} \geq I_{\mathrm{cc}}\sqrt{t}$. El valor d'aquesta intensitat tèrmica, s'acostuma a expressar com a un valor múltiple de la intensitat nominal (per exemple: $I_{\mathrm{th}} = 150\,I_{\mathrm{NP}}$).

Es defineix la «intensitat dinàmica nominal» (I_{din}), com el valor de cresta de la intensitat tèrmica nominal de curt circuit. Normalment es pren el valor: $I_{\mathrm{din}} = 1{,}8\sqrt{2}I_{\mathrm{th}} \approx 2{,}5I_{\mathrm{th}}$. El transformador ha de suportar les forces electrodinàmiques produïdes per aquest corrent.

Es defineix finalment la «intensitat tèrmica permanent nominal», com el valor de la màxima intensitat que pot circular pel primari del transformador de forma permanent, amb el secundari connectat a la càrrega de precisió, sense que l'escalfament del transformador surti dels límits previstos. El valor usual d'aquesta intensitat és 1,2 vegades la intensitat nominal del transformador; amb aquest corrent ($1{,}2I_{\mathrm{NP}}$) el transformador ha de mantenir-se dins de la seva classe de precisió.

8.4.2 Característiques particulars dels TI de mesura

Els circuits magnètics d'aquests transformadors, es dissenyen de manera que se saturin ràpidament, de manera que fortes sobreintensitats en el primari, no repercuteixin en el secundari, ja que els aparells que normalment s'hi connecten (amperímetres, comptadors d'energia, etc.), no estan preparats per suportar grans sobreintensitats.

Es presenten a continuació les característiques particulars dels TI de mesura.

Intensitat límit primària assignada

La intensitat límit primària (I_{LP}), és la intensitat primària, a partir de la qual l'error compost és igual o superior al 10 %, amb una càrrega igual a la càrrega de precisió del transformador.

Factor de seguretat

El factor de seguretat (F_S) es defineix com la relació entre la intensitat límit primària i la intensitat primària nominal: $F_S = I_{LP} / I_{NP}$.

En el cas d'un curt circuit en la línia on està intercalat el transformador, la seguretat dels aparells connectats en el secundari del TI és tant més gran, com més petit és F_S. Valors usuals per a la majoria d'aparells són: $2{,}5 < F_S < 10$, i per alimentar a comptadors: $3 < F_S < 5$.

Classe de precisió

Els valors normalitzats són 0,1, 0,2, 0,5, 1, 3 i 5. En la Taula 8.3 s'indiquen els límits, per a diversos corrents de secundari I_S, dels errors d'intensitat i de fase de les classes de precisió 0,1, 0,2, 0,5 i 1, per a càrregues compreses entre 25 % S_N i 100 % S_N, amb un factor de potencia 1 si $S_N < 5$ VA, i 0,8 inductiu si $S_N \geq 5$ VA. En la Taula 8.4 s'indiquen els límits, per a diversos corrents de secundari I_S, dels errors d'intensitat de les classes de precisió 3 i 5, per a càrregues compreses entre 50 % S_N i 100 % S_N, amb un factor de potencia 1 si $S_N < 5$ VA, i 0,8 inductiu si $S_N \geq 5$ VA; l'error de fase no s'especifica per a aquestes dues classes.

Taula 8.3: Classes de precisió 0,1, 0,2, 0,5 i 1 per a TI de mesura

Classe de precisió	Error d'intensitat [± % I_{NS}]				Error de fase [± minuts d'arc]				Error de fase [± crad]			
0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	15	8	5	5	0,45	0,24	0,15	0,15
0,2	0,75	0,35	0,2	0,2	30	15	10	10	0,9	0,45	0,3	0,3
0,5	1,5	0,75	0,5	0,5	90	45	30	30	2,7	1,35	0,9	0,9
1	3,0	1,5	1,0	1,0	180	90	60	60	5,4	2,7	1,8	1,8
I_S [% I_{NS}]:	5	20	100	120	5	20	100	120	5	20	100	120

Taula 8.4: Classes de precisió 3 i 5 per a TI de mesura

Classe de precisió	Error d'intensitat [± % I_{NS}]	
3	3	3
5	5	5
I_S [% I_{NS}]:	50	120

8.4.3 Característiques particulars dels TI de protecció

Contràriament als transformadors de mesura, els transformadors de protecció es dissenyen de manera que no se saturin fins a valors elevats de sobreintensitats primàries, ja que interessa que el secundari segueixi reflectint el que passa en el primari, per a fortes sobreintensitats (encara que sigui amb errors més grans), per tal que els relès de protecció connectats al transformador, actuïn als valors de sobreintensitats a què estan ajustats.

Es presenten a continuació les característiques particulars dels TI de protecció.

Intensitat límit de precisió assignada

La intensitat límit de precisió (I_{LP}), és la intensitat primària màxima, per a la qual el transformador manté el límit de l'error compost que té assignat.

Factor límit de precisió

El factor límit de precisió (F_{LP}) es defineix com la relació entre la intensitat límit de precisió i la intensitat primària nominal: $F_{\mathrm{LP}} = I_{\mathrm{LP}} / I_{\mathrm{NP}}$. Els valors normalitzats són: 5, 10, 15, 20 i 30.

Mentre es compleixi $I_{\mathrm{P}} < F_{\mathrm{LP}} I_{\mathrm{NP}}$, queda garantit que el transformador no se saturarà, i per tant la intensitat secundària seguirà reflectint amb suficient precisió el valor de la intensitat primària.

Cal tenir en compte que el valor de F_{LP} està lligat constructivament al valor de S_{N}, i que tan sols és vàlid quan tenim aquest consum de potència en el secundari; per a un valor de potència S diferent de S_{N}, tindrem un valor $F_{\mathrm{LP}}^{(\mathrm{S})}$ també diferent de F_{LP}. La relació que lliga aquests valors, tenint en compte la resistència del debanat secundari del transformador R_{S} és:

$$F_{\mathrm{LP}}(S_{\mathrm{N}} + R_{\mathrm{S}} I_{\mathrm{NS}}^2) = F_{\mathrm{LP}}^{(\mathrm{S})}(S + R_{\mathrm{S}} I_{\mathrm{NS}}^2) \tag{8.8}$$

Valors típics per a la resistència del debanat secundari són:

- Secundaris de 5 A: $R_{\mathrm{S}} = 0{,}2\,\Omega \div 0{,}4\,\Omega$
- Secundaris d'1 A: $R_{\mathrm{S}} = 1{,}5\,\Omega \div 3{,}5\,\Omega$

Classe de precisió

Els valors normalitzats són 5P i 10P. En la Taula 8.5 a la pàgina següent s'indiquen els límits dels errors d'intensitat i de fase, per a la intensitat nominal I_{NS} i la càrrega de precisió nominal S_{N}, amb un factor de potencia 0,8 inductiu; s'indica, a més, l'error compost, per a la intensitat I_{LP}.

La classe de precisió i el factor límit de precisió s'expressen sempre de forma conjunta, per exemple 5P15 s'interpreta com: classe de precisió 5P i $F_{\mathrm{LP}} = 15$.

Taula 8.5: Classes de precisió per a TI de protecció

Classe de precisió	Error d'intensitat [± % I_{NS}]	Error de fase [± minuts d'arc]	[± crad]	Error compost [± % I_{NS}]
5P	1	60	1,8	5
10P	3	—	—	10

Exemple 8.1 *Es tracta de determinar els valors de S_N i F_{LP}, per a un TI destinant a alimentar un relè de protecció i un convertidor d'intensitat de $4\,\mathrm{mA} \div 20\,\mathrm{mA}$. Les característiques dels diferents components són:*

- *TI: Classe de precisió 5P, $I_{NS} = 5\,\mathrm{A}$, $R_S = 0{,}3\,\Omega$*
- *Relè: $S_{N,\text{relè}} = 0{,}25\,\mathrm{VA}$, $I_{N,\text{relè}} = 5\,\mathrm{A}$, $I_{\text{màx,relè}} = 80 I_{N,\text{relè}}$*
- *Convertidor: $S_{N,\text{conv.}} = 1\,\mathrm{VA}$, $I_{N,\text{conv.}} = 5\,\mathrm{A}$*
- *Cables de connexió: Càrrega = 1,6 VA*

La potència total que està connectada al secundari del transformador és:

$$S = 0{,}25\,\mathrm{VA} + 1\,\mathrm{VA} + 1{,}6\,\mathrm{VA} = 2{,}85\,\mathrm{VA}$$

Prenem com a factor límit de precisió, a aquesta potencia, el factor limitant del corrent màxim que pot suportar el relè de protecció, així doncs tenim:

$$F_{LP}^{(S)} = \frac{80 I_{N,\text{relè}}}{I_{NS}} = \frac{80 \cdot 5\,\mathrm{A}}{5\,\mathrm{A}} = 80$$

Si apliquem ara l'equació (8.8), tenim:

$$\begin{aligned} F_{LP} \cdot (S_N + 0{,}3\,\Omega \cdot (5\,\mathrm{A})^2) &= 80 \cdot (2{,}85\,\mathrm{VA} + 0{,}3\,\Omega \cdot (5\,\mathrm{A})^2) \\ F_{LP} \cdot (S_N + 7{,}5\,\mathrm{VA}) &= 828\,\mathrm{VA} \end{aligned}$$

Escollim a continuació el valor normalitzat $S_N = 15\,\mathrm{VA}$, i calculem F_{LP}:

$$F_{LP} = \frac{828\,\mathrm{VA}}{15\,\mathrm{VA} + 7{,}5\,\mathrm{VA}} = 36{,}8$$

Finalment, escollim el valor normalitzat immediatament inferior al valor de càlcul obtingut: $F_{LP} = 30$, i recalculem el valor $F_{LP}^{(S)}$ que tindrem realment:

$$F_{LP}^{(S)} = \frac{30 \cdot (15\,\mathrm{VA} + 7{,}5\,\mathrm{VA})}{2{,}85\,\mathrm{VA} + 7{,}5\,\mathrm{VA}} = 65 < 80$$

El valor resultant és per tant acceptable. Així doncs les característiques buscades del transformador són: 15 VA 5P30.

8.5 Comparació entre les normes CEI i ANSI

8.5.1 Normes CEI

La norma CEI aplicable als transformadors de tensió és la CEI 186, i l'aplicable als transformadors d'intensitat és la CEI 185.

Seguint aquestes normes, les característiques dels transformadors de mesura i de protecció, s'expressen de la forma següent (la paraula «classe» s'abrevia a «cl.»):

- **TT de mesura**: Potència i classe de precisió, per exemple 30 VA cl. 0,5.
- **TT de protecció**: Potència i classes de precisió, per exemple 30 VA cl. 0,5 3P.
- **TI de mesura**: Potència i classe de precisió, i factor de seguretat, per exemple 10 VA cl. 0,5 $F_S < 10$
- **TI de protecció**: Potència, classe i factor límit de precisió (els dos últims paràmetres s'expressen de forma conjunta, i s'omet l'abreviatura «cl.»), per exemple 10 VA 5P15.

En tots els casos ha d'afegir-se també la relació de transformació.

8.5.2 Normes ANSI

La norma ANSI aplicable als transformadors de tensió i d'intensitat, és la ANSI C57.13.

Les formes de designar els transformadors de mesura i de protecció de les normes ANSI i CEI, són força diferents entre si. Segons les normes ANSI, les formes de designar els transformadors són:

TI de mesura

En les normes ANSI, els TI de mesura es designen a partir dels tres elements indicats a continuació.

1. **Classe de precisió**: Aquest concepte és equivalent a l'utilitzat en les normes CEI. Els valors normalitzats són: cl. 0,3, 0,6, 1,2 i 2,4.
2. **La lletra «B»**: És la inicial de la paraula «burden» (càrrega).
3. **Càrrega de precisió**: Aquest concepte és equivalent a l'utilitzat en les normes CEI. Els valors normalitzats són: Z_{NS} = 0,1 Ω, 0,2 Ω, 0,5 Ω, 0,9 Ω i 1,8 Ω.

   La potència de precisió es pot calcular, a partir de la intensitat nominal secundària I_{NS}, utilitzant l'equació (8.7).

Aquests tres elements s'expressen de forma conjunta, per exemple: 0,3B0,2.

TI de protecció

En les normes ANSI, els TI de protecció es designen a partir dels tres elements indicats a continuació.

❶ **Error compost**: Indica l'error compost màxim del transformador, quan la intensitat que circula pel transformador és 20 vegades la intensitat nominal. Aquest concepte és equivalent a la classe de precisió de la norma CEI, essent sempre $F_{\mathrm{LP}} = 20$.

❷ **Les lletres «C» o «T»**: La lletra «C» és la inicial de la paraula «calculated» (calculada); antigament, enlloc de la lletra «C» s'utilitzava la lletra «L», inicial de «low leakage» (baixa dispersió). Aquesta designació s'usa típicament per als transformador tiroïdals.

La lletra «T» és la inicial de la paraula «tested» (mesurada); antigament, enlloc de la lletra «T» s'utilitzava la lletra «H», inicial de «high leakage» (alta dispersió). Aquesta designació s'usa típicament per als transformador de primari passant.

❸ **Tensió màxima de secundari**: És la tensió màxima que hi pot haver en el secundari, per tal de no sobrepassar l'error compost que té assignat el transformador, quan la intensitat que hi circula és 20 vegades la intensitat nominal. Els valors normalitzats són: 10 V, 50 V, 100 V, 200 V, 400 V i 800 V.

La càrrega de precisió en el secundari Z_{NS} i la potència de precisió S_{N}, s'obtenen a partir d'aquesta tensió màxima de secundari $U_{\mathrm{màx,S}}$ i del corrent nominal de secundari I_{NS}, segons les equacions següents:

$$Z_{\mathrm{NS}} = \frac{U_{\mathrm{màx,S}}}{20 I_{\mathrm{NS}}} \tag{8.9}$$

$$S_{\mathrm{N}} = Z_{\mathrm{NS}} I_{\mathrm{NS}}^2 = \frac{U_{\mathrm{màx,S}} I_{\mathrm{NS}}}{20} \tag{8.10}$$

Aquests tres elements s'expressen de forma conjunta, per exemple: 10C50.

TT de mesura i de protecció

En les normes ANSI, el valor estàndard de la tensió de secundari és 120 V. Els TT es designen a partir dels dos elements indicats a continuació.

❶ **Classe de precisió**: Aquest concepte és equivalent a l'utilitzat en les normes CEI. Els valors normalitzats són: cl. 0,3, 0,6, 1,2 i 2,4.

❷ **Potència de precisió**: Aquest concepte és equivalent a l'utilitzat en les normes CEI. Els valors normalitzats es designen mitjançant lletres, i es poden veure en la Taula 8.6 a la pàgina següent.

Aquests dos elements s'expressen de forma conjunta, per exemple: 1,2Y.

Taula 8.6: Potències ANSI de precisió per a TT

Lletra de designació	Potència de precisió [VA]	$\cos\varphi$ (inductiu)
W	12,5	0,10
X	25	0,70
Y	75	0,85
Z	200	0,85
ZZ	400	0,85
M	35	0,20

Exemple 8.2 *Es tracte de trobar els transformadors equivalents, segons les normes CEI, als dos transformadors següents, donats segons les nomes ANSI:* 0,3B0,2 *i* 10C50*; el corrent nominal de secundari és:* $I_{NS} = 5\,\mathrm{A}$.

En el primer cas, tenim de forma directa: cl. 0,3*; la potència de precisió la trobem aplicant l'equació* (8.7)*:* $S_N = (5\,\mathrm{A})^2 \cdot 0{,}2\,\Omega = 5\,\mathrm{VA}$*. Atès que* 0,3 *no és una classe de precisió CEI normalitzada, escolliríem un transformador de característiques:* 5 VA cl. 0,2*; caldria a més, definir el factor de seguretat apropiat per a la nostra aplicació.*

En el segon cas, tenim de forma directa la classe i el factor límit de precisió: 10P20*; la potència de precisió la trobem aplicant l'equació* (8.10)*:* $S_N = 50\,\mathrm{V} \cdot 5\,\mathrm{A}/20 = 12{,}5\,\mathrm{VA}$*. Atès que* $12{,}5\,\mathrm{VA}$ *no és una potència de precisió CEI normalitzada, escolliríem un transformador de característiques:* 15 VA 10P20*; caldria a més, comprovar el factor límit de precisió real que tindrem en la nostra aplicació, utilitzant l'equació* (8.8)*.*

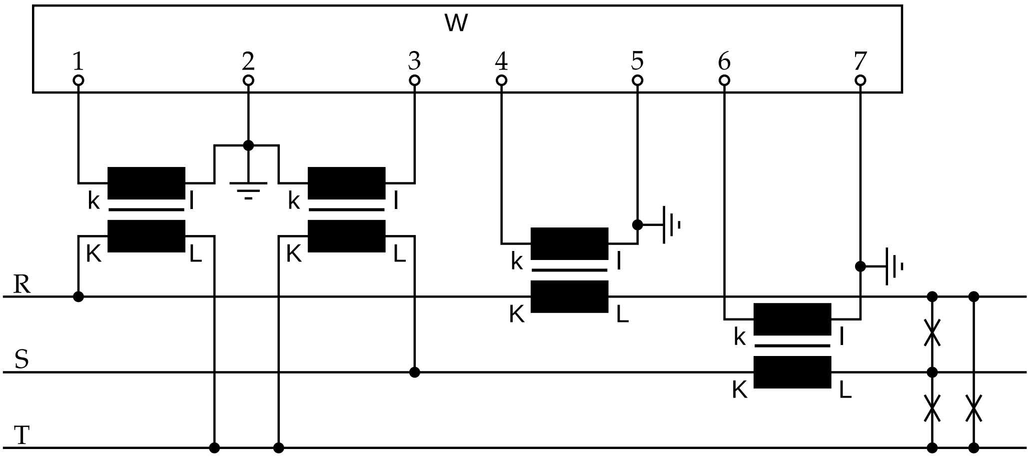
8.6 Connexionat de TI i TT a aparells de mesura o de protecció

A vegades es presenta la necessitat de connectar un nou aparell de mesura o de protecció, en una instal·lació existent, on els transformadors de tensió i corrent ja estan muntats i connectats a d'altres aparells. En aquest cas, cal parar atenció al connexionat que ens demana el nou aparell que volem instal·lar, per tal de no equivocar-nos.

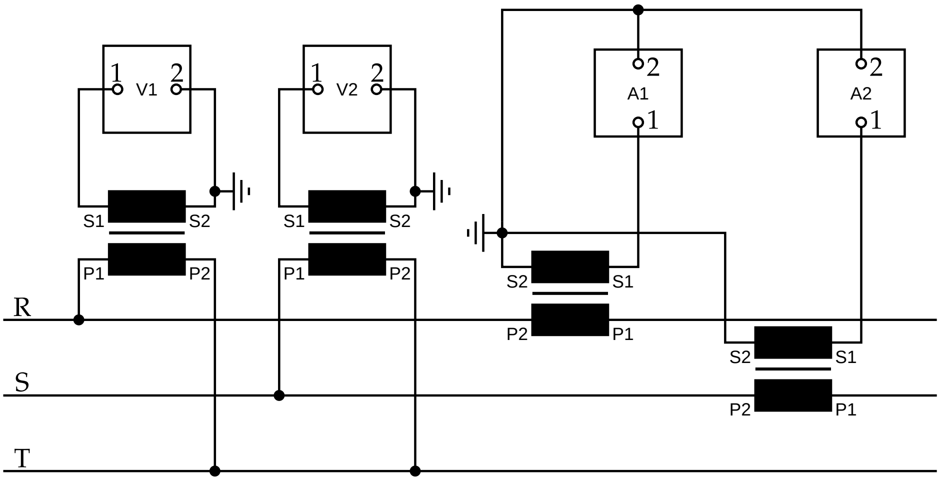
El connexionat dels TT a un nou aparell sol ser simple, ja que només cal veure a quin terminal de l'aparell cal connectar cadascuna de les tensions (fases R, S i T), i reproduir aquest connexionat en la nostra instal·lació.

El connexionat dels TI a un nou aparell demana una mica més d'atenció, ja que a més de saber a quins terminals de l'aparell hem de connectar els corrents (de les fases R, S i T), hem de fixar-nos en els sentits de circulació d'aquests corrents que ens demana l'aparell, i mantenir-los quan incorporem l'aparell a la nostra instal·lació. La manera de no equivocar-se, és suposar un sentit de circulació arbitrari del corrent pel primari del TI (per exemple, de la font de tensió cap a la càrrega), i veure a continuació, fent servir els terminals homòlegs P1-S1 i P2-S2, quin és el sentit de circulació del corrent en el secundari del TI cap a l'aparell; aquest sentit és el que haurem de respectar en la nostra instal·lació, quan hi afegim el nou aparell.

Exemple 8.3 *Es representa a continuació el connexionat d'un wattímetre, extret d'un catàleg. Els terminals homòlegs s'anomenen amb les lletres «K», «L», «k» i «l»; l'equivalència amb la nomenclatura que em emprat* *fins ara és: K≡P1, L≡P2, k≡S1 i l≡S2. El costat del circuit primari on es troben les càrregues, ve indicat per les línies, amb una creu al mig, que uneixen les tres fases.*



A continuació es representa una instal·lació existent, amb dos TT i dos TI, que alimenten a dos voltímetres i a dos amperímetres respectivament; les càrregues es troben a la dreta del circuit primari. Es tracta d'afegir el nou wattímetre a aquesta instal·lació.



Comencem fixant-nos en les tensions del wattímetre, i veiem que cal connectar-li la tensió de la fase R al terminal 1, la tensió de la fase S al terminal 3, i la tensió de la fase T al terminal 2.

Per aconseguir-ho en la nostra instal·lació, sense tocar el connexionat dels dos voltímetres existents, tan sols cal connectar el terminal S1 del primer TT al terminal 1 del wattímetre (tensió de la fase R), el terminal S1 del segon TT al terminal 3 del wattímetre (tensió de la fase S), i el terminal S2 d'un qualsevol dels dos TT al terminal 2 del wattímetre (tensió de la fase T).

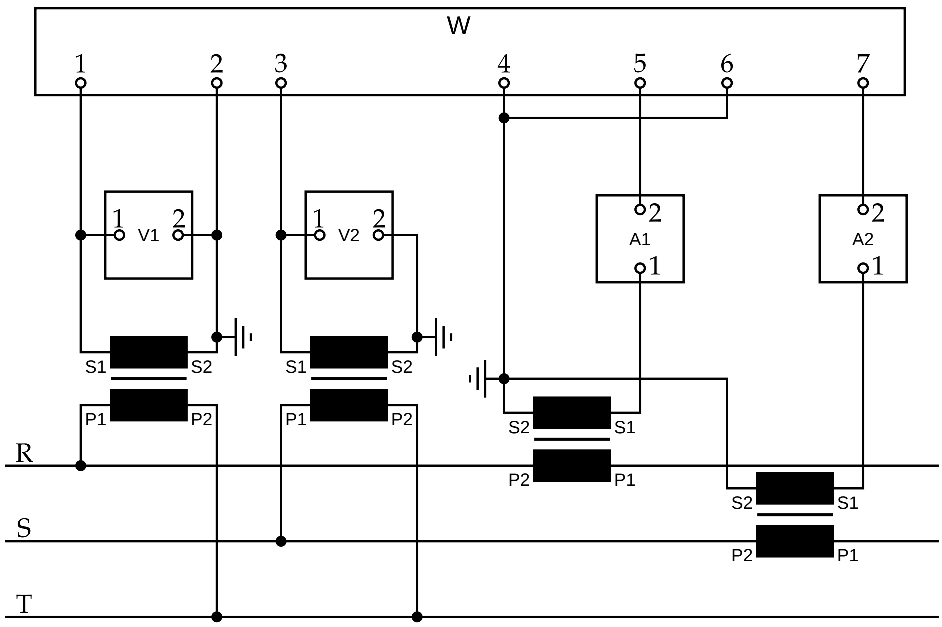
Ens fixem a continuació en els corrents del wattímetre. Si suposem de forma arbitrària, uns corrents pels circuits primaris dels TI, que vagin d'esquerra a dreta (això és, cap a les càrregues), veiem que aquests corrents entren pels terminals K dels primaris dels TI, i per tant surten, transformats, pels terminals k dels secundaris dels TI. Així doncs, el corrent que circula pel secundari del primer TI, entra al wattímetre pel terminal 4, i en surt pel terminal 5, i el corrent que circula pel secundari del segon TI, entra al wattímetre pel terminal 6, i en surt pel terminal 7. Aquest sentit de circulació dels corrents és el que hem de mantenir, quan connectem el wattímetre a la nostra instal·lació.

Per aconseguir-ho en la nostra instal·lació, sense tocar el connexionat dels dos amperímetres existents, comencem per suposar un sentit dels corrents primaris idèntic al suposat anteriorment, és a dir cap a les càrregues (això és, d'esquerra a dreta). L'objectiu serà veure el sentit de circulació dels corrents de secundari respecte dels terminals S1 dels dos TI, ja que disposem d'un fil per a cadascun dels dos terminals de forma separada; no passa el mateix amb els dos terminals S2, ja que únicament disposem d'un fil pel qual circula la suma dels dos corrents. Per tant, veiem que amb el sentit de circulació que hem adoptat, aquests corrents surten pels terminals P1 dels primaris dels TI, i per tant entren, transformats, pels terminals S1 dels secundaris dels TI.

Aquests corrents que entren pels terminals S1, i que hem de dur al wattímetre, seran corrents que vistos des del wattímetre, en sortiran; per tant si ens fixem en l'anàlisi que hem fet en el circuit inicial del wattímetre, veiem que els terminal per on surten els corrents són el 5 i el 7. Per tant ara queda clar que hem de connectar el terminal S1 del primer TI, després de passar per l'amperímetre A1, al terminal 5 del wattímetre, i el terminal S1 del segon TI, després de passar per l'amperímetre A2, al terminal 7 del wattímetre. Finalment, només ens cal tancar el circuit dels corrents secundaris, unint entre sí els dos terminals d'entrada 4 i 6, i connectant-los amb el fil comú que uneix els dos terminals S2 dels dos TI.

Com es pot veure, no té cap incidència sobre el connexionat, quin és el terminal del secundari que està connectat a terra, ni en el cas dels TT ni en el cas dels TI.

A continuació es pot veure el connexionat complet, amb els dos voltímetres, els dos amperímetres i el wattímetre.



Part III

Sistemes Elèctrics de Potència

Capítol 9

Resolució de Xarxes Elèctriques

S'explica en aquest capítol el mètode dels nusos, per a la resolució de xarxes elèctriques.

9.1 Introducció

Quan tenim una xarxa elèctrica amb pocs components, sempre la podem resoldre fàcilment utilitzant les lleis de Kirchhoff. No obstant, quan la xarxa té molts components, quan està molt mallada o quan hi ha acoblaments magnètics entre diverses branques de la xarxa, és millor emprar un mètode sistemàtic per tal de resoldre-la, com ara el mètode del nusos.

El mètode dels nusos serveix per resoldre xarxes, tant de corrent continu com de corrent altern, on les càrregues estan definides pels seus valors d'impedància o d'admitància; no és útil per tant, per resoldre problemes de flux de càrregues, on el que es coneix és la potencia absorbida per les càrregues.

Per utilitzar aquest mètode, les branques de la xarxa han d'estar formades per un dels següents components:

- Font de tensió en sèrie amb una impedància.
- Font de corrent en paral·lel amb una admitància (l'admitància pot ser nul·la).
- Impedància.
- Admitància.
- Acoblament magnètic entre branques.
- Transformador[1]

No és possible tenir branques d'impedància nul·la (curt circuits) o branques amb fonts de tensió ideals (sense impedància sèrie). Aquesta limitació es pot superar, no obstant, substituint la impedància nul·la, per dues impedàncies en sèrie i de valor contrari, i introduint un nus fictici addicional en el punt d'unió d'aquestes dues noves impedàncies. En la Figura 9.1 a la pàgina següent es representa gràficament aquesta substitució.

[1]Cal substituir el transformador pel seu circuit equivalent, format per impedàncies i admitàncies. Vegeu la Secció 10.2.4.

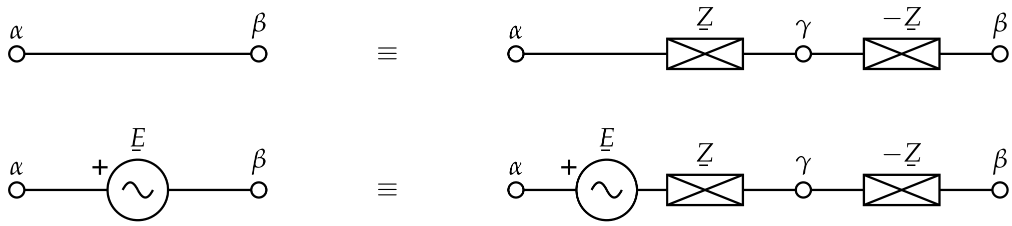


Figura 9.1: Substitució de branques d'impedància nul·la

Per ajudar-nos en l'explicació d'aquest mètode de resolució de xarxes, farem ús de l'exemple de la Figura 9.2. Els valors dels components d'aquest circuit són:

$\underline{E}_1 = 200_{\angle 0^\circ}$ V	$R_1 = 10\,\Omega$	$\underline{E}_2 = 50_{\angle 0^\circ}$ V	$\underline{X}_2 = \mathrm{j}20\,\Omega$	$\underline{X}_3 = \mathrm{j}5\,\Omega$
$R_4 = 20\,\Omega$	$\underline{J}_5 = 4_{\angle 0^\circ}$ A	$R_5 = 10\,\Omega$	$\underline{X}_\mathrm{M} = \mathrm{j}5\,\Omega$	

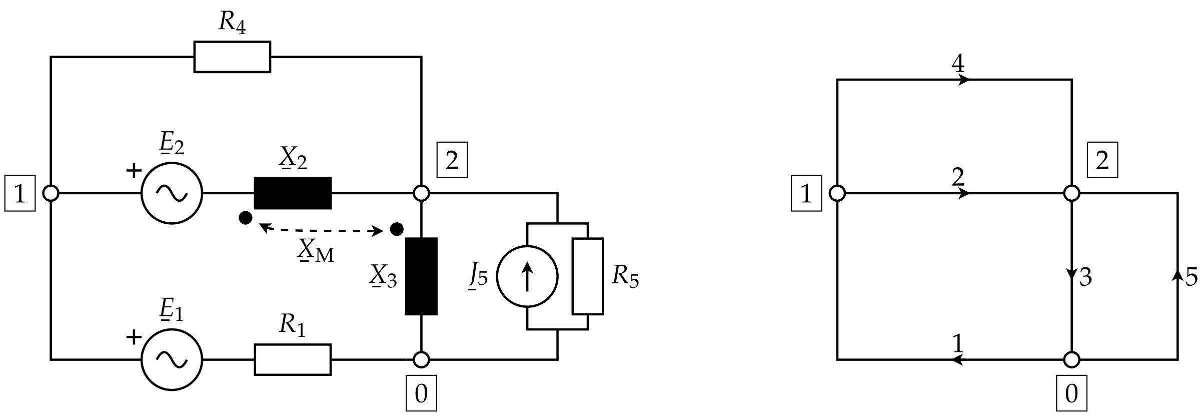


Figura 9.2: Resolució de xarxes elèctriques pel mètode dels nusos

En primer lloc, a partir de la xarxa elèctrica cal representar el seu graf orientat, seguint els passos següents (Figura 9.2):

❶ Es representen les connexions de les branques mitjançant línies, sense dibuixar-hi cap component elèctric.

❷ Es dóna un sentit a aquestes branques, dibuixant-hi fletxes. Aquestes fletxes representen els sentits assignats als corrents i a les diferències de potencial entre nusos.

❸ Es numeren tots els nusos de forma consecutiva, començant pel número 0; el nus 0 s'anomena nus de potencial zero, o de referència.

❹ Es numeren totes les branques de forma consecutiva, començant pel número 1.

Es defineixen a continuació els dos paràmetres bàsics d'aquest mètode, n i b; aquests dos valors defineixen les dimensions dels vectors i matrius que es veuran més endavant:

n: Nombre de nusos de la xarxa, sense comptar el nus de referència.

En el nostre exemple tenim:

$$n = 2$$

b: Nombre de branques de la xarxa.

En el nostre exemple tenim:

$$b = 5$$

9.2 Mètode general de resolució

Quan hi ha acoblaments magnètics entre branques de la xarxa hem d'utilitzar el mètode general de resolució, descrit a continuació.

En primer lloc, a partir dels valors dels components de la xarxa, formem les matrius i vectors següents (es donen les seves dimensions entre claus):

$\boldsymbol{A}\{n \times b\}$: Matriu d'incidència de nusos. Cada columna representa una branca, en ordre creixent d'esquerra a dreta, i cada fila representa un nus (sense comptar el de referència) en ordre creixent, de dalt a baix. Cada branca del graf orientat omple la columna corresponent de la matriu $\boldsymbol{A}$ amb els valors 0, 1 ó -1 segons el criteri següent:

1: si la branca surt del nus.

-1: si la branca va a para al nus.

0: si la branca ni surt ni va a parar al nus.

Els termes «surt» i «va a parar» s'han d'entendre segons les fletxes dibuixades en les branques del graf orientat. Les connexions al nus de referència, no apareixen en la matriu $\boldsymbol{A}$.

En el nostre exemple tenim:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\mathrm{B}}\{b \times b\}$: Matriu d'impedàncies de branca. Els elements de la diagonal estan formats per les impedàncies de les respectives branques, i els elements de fora de la diagonal estan formats per les impedàncies dels acoblaments magnètics entre cada parell de branques.

Els acoblaments magnètics poden ser positius o negatius, depenent de la posició dels punts homòlegs de les inductàncies i del sentit de les branques del graf orientat. L'acoblament és positiu quan les fletxes de les dues branques acoblades es dirigeixen cap els seus punts homòlegs respectius, o quan les dues fletxes se n'allunyen; en canvi, l'acoblament és negatiu quan una de les fletxes de les dues branques acoblades es dirigeix cap el seu punt homòleg i l'altra se n'allunya.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}20 & \mathrm{j}5 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}5 & \mathrm{j}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \Omega$$

$\underline{E}'_{\mathrm{B}}\{b\}$: Vector columna de forces electromotrius de branca. Els elements d'aquest vector estan formats per les forces electromotrius de les fonts de tensió de les respectives branques.

El signe de cada força electromotriu és positiu, si el seu sentit coincideix amb el sentit de la fletxa de la branca corresponent del graf orientat, i negatiu en cas contrari.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{E}'_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 200 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

$\underline{J}'_{\mathrm{B}}\{b\}$: Vector columna d'intensivitats de branca. Els elements d'aquest vector estan formats per les intensivitats de les fonts de corrent de les respectives branques.

El signe de cada intensivitat és positiu, si el seu sentit coincideix amb el sentit de la fletxa de la branca corresponent del graf orientat, i negatiu en cas contrari.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{J}'_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

A partir de les dades anteriors, formem ara les diverses matrius i vectors que ens permetran resoldre la xarxa, això és, trobar les tensions de les branques i els corrents que hi circulen. Aquestes matrius i vectors són (es donen les seves dimensions entre claus):

$\underline{Y}_{\mathrm{B}}\{b \times b\}$: Matriu d'admitàncies de branca. Està definida per la relació següent:

$$\underline{Y}_{\mathrm{B}} = \underline{Z}_{\mathrm{B}}^{-1} \tag{9.1}$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{Y}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}20 & \mathrm{j}5 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}5 & \mathrm{j}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}\frac{1}{15} & \mathrm{j}\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\frac{1}{15} & -\mathrm{j}\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \mathrm{S}$$

$\underline{J}_{\mathrm{B}}\{b\}$: Vector columna d'intensivitats equivalents de branca. Està definit per la relació següent:

$$\underline{J}_{\mathrm{B}} = \underline{J}'_{\mathrm{B}} + \underline{Y}_{\mathrm{B}}\underline{E}'_{\mathrm{B}} \tag{9.2}$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{J}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}\frac{1}{15} & \mathrm{j}\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\frac{1}{15} & -\mathrm{j}\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ \mathrm{j}\frac{10}{3} \\ -\mathrm{j}\frac{10}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

$\underline{Y}_{\mathrm{N}}\{n \times n\}$: Matriu d'admitàncies de nus. Està definida per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \tag{9.3}$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}\frac{1}{15} & \mathrm{j}\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\frac{1}{15} & -\mathrm{j}\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 9-\mathrm{j}4 & -3+\mathrm{j}8 \\ 3+\mathrm{j}8 & 9-\mathrm{j}28 \end{pmatrix} \mathrm{S}$$

$\underline{J}_{\mathrm{N}}\{n\}$: Vector columna d'intensivitats de nus. Està definit per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}} = -\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}} \tag{9.4}$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ \mathrm{j}\frac{10}{3} \\ -\mathrm{j}\frac{10}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 60-\mathrm{j}10 \\ 12+\mathrm{j}20 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

$\underline{V}_{\mathrm{N}}\{n\}$: Vector columna de potencials de nus. Està definit per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}}\underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}} = \underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}} \quad \rightarrow \quad \underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}} = \underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}}^{-1}\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}} \tag{9.5}$$

Els elements d'aquest vector són els potencials de cada nus de la xarxa respecte del nus de referència.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}} = 60 \cdot \begin{pmatrix} 9-\mathrm{j}4 & -3+\mathrm{j}8 \\ 3+\mathrm{j}8 & 9-\mathrm{j}28 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 60-\mathrm{j}10 \\ 12+\mathrm{j}20 \end{pmatrix} = \frac{1}{101} \cdot \begin{pmatrix} 15430+\mathrm{j}2295 \\ 3390+\mathrm{j}2085 \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

$\underline{U}_{\mathrm{B}}\{b\}$: Vector columna de tensions de branca. Està definit per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}} \tag{9.6}$$

Aquesta és la solució buscada pel que fa a les tensions de les branques de la xarxa.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{101} \cdot \begin{pmatrix} 15430+\mathrm{j}2295 \\ 3390+\mathrm{j}2085 \end{pmatrix} = \frac{1}{101} \cdot \begin{pmatrix} -15430-\mathrm{j}2295 \\ 12040+\mathrm{j}210 \\ 3390+\mathrm{j}2085 \\ 12040+\mathrm{j}210 \\ -3390-\mathrm{j}2085 \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

$\underline{I}_\mathrm{B}\{b\}$: Vector columna de corrents de branca. Està definit per la relació següent:

$$\underline{I}_\mathrm{B} = \underline{Y}_\mathrm{B}\underline{U}_\mathrm{B} + \underline{J}_\mathrm{B} \tag{9.7}$$

Aquesta és la solució buscada pel que fa als corrents de les branques de la xarxa.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{I}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}\frac{1}{15} & \mathrm{j}\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\frac{1}{15} & -\mathrm{j}\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{101} \cdot \begin{pmatrix} -15430 - \mathrm{j}2295 \\ 12040 + \mathrm{j}210 \\ 3390 + \mathrm{j}2085 \\ 12040 + \mathrm{j}210 \\ -3390 - \mathrm{j}2085 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ \mathrm{j}\frac{10}{3} \\ -\mathrm{j}\frac{10}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{202} \cdot \begin{pmatrix} 954 - \mathrm{j}459 \\ -250 - \mathrm{j}480 \\ 1084 - \mathrm{j}876 \\ 1204 + \mathrm{j}21 \\ 130 - \mathrm{j}417 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Es resumeixen finalment, els passos a seguir per tal de resoldre una xarxa elèctrica, mitjançant el mètode dels nusos:

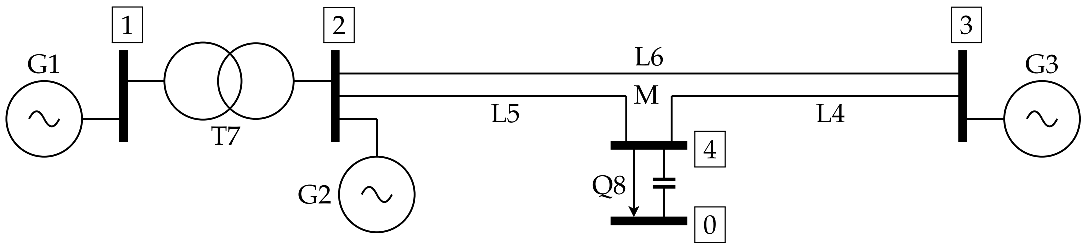
❶ Es representa el graf orientat associat a la xarxa, i es numeren tots els seus nusos i totes les seves branques.

❷ A partir del graf orientat i dels elements de la xarxa, es formen les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\underline{Z}_\mathrm{B}$, i els vectors $\underline{E}'_\mathrm{B}$ i $\underline{J}'_\mathrm{B}$.

❸ Es calculen les matrius $\underline{Y}_\mathrm{B}$ i $\underline{Y}_\mathrm{N}$, i els vectors $\underline{J}_\mathrm{B}$ i $\underline{J}_\mathrm{N}$.

❹ Finalment, es calculen els vectors $\underline{V}_\mathrm{N}$, $\underline{U}_\mathrm{B}$ i $\underline{I}_\mathrm{B}$.

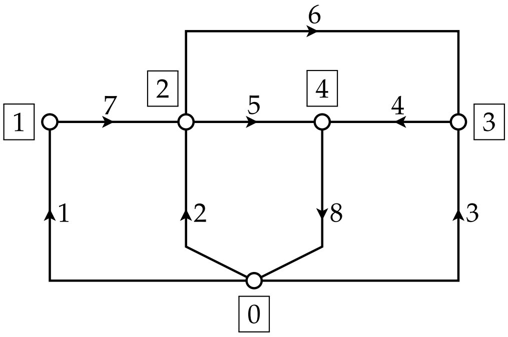
Exemple 9.1 *Es tracte de resoldre la xarxa següent pel mètode dels nusos; cal tenir en compte, que a més de la càrrega Q8, els generadors G1, G2 i G3, també estan units a terra (nus 0 de referència), i que hi ha un acoblament magnètic M entre les línies L5 i L6. Es calcularà també la potència cedida pels tres generadors G1, G2 i G3, la potència absorbida per la càrrega Q8 i la potència perduda en la resta de components de la xarxa.*



Els valors dels components d'aquesta xarxa, expressats en p.u. són:

$G1:\ \underline{e}_1 = 1{,}1$	$\underline{z}_1 = \mathrm{j}0{,}25$	$L4:\ \underline{z}_4 = \mathrm{j}0{,}10$	$T7:\ \underline{z}_7 = \mathrm{j}0{,}16$	$m_7 = 1:1$
$G2:\ \underline{e}_2 = 1{,}05 + \mathrm{j}0{,}10$	$\underline{z}_2 = \mathrm{j}0{,}20$	$L5:\ \underline{z}_5 = \mathrm{j}0{,}405$	$Q8:\ \underline{j}_8 = 2 - \mathrm{j}0{,}9$	$\underline{z}_8 = -\mathrm{j}25$
$G3:\ \underline{e}_3 = 1{,}08 + \mathrm{j}0{,}12$	$\underline{z}_3 = \mathrm{j}0{,}25$	$L6:\ \underline{z}_6 = \mathrm{j}0{,}50$	$M:\ \underline{x}_M = \mathrm{j}0{,}05$ *(entre L5 i L6)*	

Començarem dibuixant el graf orientat associat a la xarxa, i formant la matriu $\boldsymbol{A}$.



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formem a continuació la matriu $\underline{Z}_\mathrm{B}$ i els vectors $\underline{J}'_\mathrm{B}$ i $\underline{E}'_\mathrm{B}$ (tots els valors en p.u.):

$$\underline{Z}_\mathrm{B} = \mathrm{j} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}405 & 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \quad \underline{J}'_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2-\mathrm{j}0{,}9 \end{pmatrix} \quad \underline{E}'_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 1{,}05+\mathrm{j}0{,}10 \\ 1{,}08+\mathrm{j}0{,}12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculem ara la matriu $\underline{Y}_\mathrm{B} = \underline{Z}_\mathrm{B}^{-1}$ i el vector $\underline{J}_\mathrm{B} = \underline{J}'_\mathrm{B} + \underline{Y}_\mathrm{B}\underline{E}'_\mathrm{B}$ (tots els valors en p.u.):

$$\underline{Y}_\mathrm{B} = \mathrm{j} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2{,}5 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & -2{,}025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}04 \end{pmatrix} \qquad \underline{J}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -\mathrm{j}4{,}4 \\ 0{,}5-\mathrm{j}5{,}25 \\ 0{,}48-\mathrm{j}4{,}32 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2-\mathrm{j}0{,}9 \end{pmatrix}$$

Continuem amb el càlcul de la matriu $\underline{Y}_\mathrm{N} = \boldsymbol{A}\underline{Y}_\mathrm{B}\boldsymbol{A}^T$ i dels vectors $\underline{J}_\mathrm{N} = -\boldsymbol{A}\underline{J}_\mathrm{B}$ i $\underline{V}_\mathrm{N} = \underline{Y}_\mathrm{N}^{-1}\underline{J}_\mathrm{N}$ (tots els valors en p.u.):

$$\underline{Y}_\mathrm{N} = \mathrm{j} \cdot \begin{pmatrix} -10{,}25 & 6{,}25 & 0 & 0 \\ 6{,}25 & -15{,}275 & 1{,}775 & 2{,}25 \\ 0 & 1{,}775 & -16{,}025 & 10{,}25 \\ 0 & 2{,}25 & 10{,}25 & -12{,}46 \end{pmatrix} \quad \underline{J}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} -\mathrm{j}4{,}4 \\ 0{,}5-\mathrm{j}5{,}25 \\ 0{,}48-\mathrm{j}4{,}32 \\ -2+\mathrm{j}0{,}9 \end{pmatrix} \quad \underline{V}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1{,}0494_{\measuredangle -1{,}4909^\circ} \\ 1{,}0175_{\measuredangle -2{,}5224^\circ} \\ 0{,}9727_{\measuredangle -10{,}3558^\circ} \\ 0{,}9512_{\measuredangle -19{,}1752^\circ} \end{pmatrix}$$

Finalment, calculem les tensions i els corrents de les branques, mitjançant els vectors $\underline{U}_\mathrm{B} = \boldsymbol{A}^T\underline{V}_\mathrm{N}$ i $\underline{I}_\mathrm{B} =$

$\underline{Y}_B \underline{U}_B + \underline{J}_B$ *(tots els valors en p.u.):*

$$\underline{U}_B = \begin{pmatrix} 1{,}0494_{\measuredangle 178{,}5091^\circ} \\ 1{,}0175_{\measuredangle 177{,}4776^\circ} \\ 0{,}9727_{\measuredangle 169{,}6442^\circ} \\ 0{,}1495_{\measuredangle 67{,}0039^\circ} \\ 0{,}2925_{\measuredangle 66{,}2049^\circ} \\ 0{,}1431_{\measuredangle 65{,}3702^\circ} \\ 0{,}0370_{\measuredangle 28{,}1937^\circ} \\ 0{,}9512_{\measuredangle -19{,}1752^\circ} \end{pmatrix} \qquad \underline{I}_B = \begin{pmatrix} 0{,}2312_{\measuredangle -61{,}8063^\circ} \\ 0{,}7431_{\measuredangle -13{,}0406^\circ} \\ 1{,}2782_{\measuredangle -22{,}6715^\circ} \\ 1{,}4946_{\measuredangle -22{,}9961^\circ} \\ 0{,}6955_{\measuredangle -23{,}7522^\circ} \\ 0{,}2166_{\measuredangle -24{,}9115^\circ} \\ 0{,}2312_{\measuredangle -61{,}8063^\circ} \\ 2{,}1901_{\measuredangle -23{,}2362^\circ} \end{pmatrix}$$

Calcularem ara la potència cedida pels tres generadors G1, G2 i G3, i la potència absorbida per la càrrega Q8. Cal tenir en compte que per calcular les potències cedides per generadors, els vectors que representen la força electromotriu del generador i el corrent que travessa el generador han de tenir el mateix sentit de referència; així mateix, per calcular les potències absorbides per càrregues, els vectors que representen la caiguda de tensió a la càrrega i el corrent que travessa la càrrega han de tenir el mateix sentit de referència. Amb aquestes consideracions, tenim:

$$\begin{aligned} \underline{s}_{G1} &= \underline{e}_1\, \underline{I}_B(1)^* &&= 1{,}1 \cdot 0{,}2312_{\measuredangle 61{,}8063^\circ} &&= 0{,}1201 + \mathrm{j}0{,}2241\ \text{p.u.} \\ \underline{s}_{G2} &= \underline{e}_2\, \underline{I}_B(2)^* &&= (1{,}05 + \mathrm{j}0{,}10) \cdot 0{,}7431_{\measuredangle 13{,}0406^\circ} &&= 0{,}7433 + \mathrm{j}0{,}2484\ \text{p.u.} \\ \underline{s}_{G3} &= \underline{e}_3\, \underline{I}_B(3)^* &&= (1{,}08 + \mathrm{j}0{,}12) \cdot 1{,}2782_{\measuredangle 22{,}6715^\circ} &&= 1{,}2146 + \mathrm{j}0{,}6736\ \text{p.u.} \\ \underline{s}_{Q8} &= \underline{U}_B(8)\, \underline{I}_B(8)^* &&= 0{,}9512_{\measuredangle -19{,}1752^\circ} \cdot 2{,}1901_{\measuredangle 23{,}2362^\circ} &&= 2{,}0780 + \mathrm{j}0{,}1475\ \text{p.u.} \end{aligned}$$

La diferència entre les potències generades i la potència absorbida, és la potència perduda en la resta de components de la xarxa:

$$\underline{s}_{G1} + \underline{s}_{G2} + \underline{s}_{G3} - \underline{s}_{Q8} = \mathrm{j}0{,}9986\ \text{p.u.}$$

9.3 Mètode particular de resolució sense acoblaments magnètics

Quan no hi ha acoblaments magnètics entre branques de la xarxa, la matriu $\underline{Y}_N\{n \times n\}$ i el vector $\underline{J}_N\{n\}$ es poden formar de manera directa, a partir dels components de la xarxa i del seu graf orientat associat.

Per ajudar-nos en l'explicació d'aquest mètode simplificat, farem ús del mateix exemple de la Figura 9.2 a la pàgina 98, però suposant que no hi ha acoblament magnètic entre les branques 2 i 3 ($\underline{X}_M = 0$).

La matriu $\underline{Y}_N\{n \times n\}$ i el vector $\underline{J}_N\{n\}$ es formen tal com es descriu a continuació:

$\underline{Y}_N\{n \times n\}$: Matriu d'admitàncies de nus. Els elements de la diagonal estan formats per la suma de les admitàncies de les branques que incideixen en cada nus. Els elements de fora de la diagonal estan formats per la suma, canviada de signe, de les admitàncies de les branques que estan connectades entre cada parella de nusos.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} + \frac{1}{\mathrm{j}20} + \frac{1}{10} & -\left[\frac{1}{20} + \frac{1}{\mathrm{j}20}\right] \\ -\left[\frac{1}{20} + \frac{1}{\mathrm{j}20}\right] & \frac{1}{20} + \frac{1}{\mathrm{j}20} + \frac{1}{\mathrm{j}5} + \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 3 - \mathrm{j} & -1 + \mathrm{j} \\ -1 + \mathrm{j} & 3 - \mathrm{j}5 \end{pmatrix}\ \text{S}$$

$\underline{J}_\mathrm{N}\{n\}$: Vector d'intensivitats de nus. Cada element d'aquest vector està format per la suma de les intensivitats, degudes a les fonts de corrent i a les fonts de tensió, de les branques que incideixen en cada nus; el signe de cada intensivitat és positiu si el corrent va cap al nus, i negatiu si se n'allunya. Les fonts de tensió han de transformar-se en fonts de corrent, utilitzant l'equació (1.3) de la pàgina 4.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{J}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \frac{50}{\mathrm{j}20} + \frac{200}{10} \\ -\frac{50}{\mathrm{j}20} + 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 40 - \mathrm{j}5 \\ 8 + \mathrm{j}5 \end{pmatrix} \ \mathrm{A}$$

Finalment, trobem el vector de potencials de nus $\underline{V}_\mathrm{N}\{n\}$, tal com hem fet en l'apartat anterior, aplicant l'equació (9.5)

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{V}_\mathrm{N} = 20 \cdot \begin{pmatrix} 3-\mathrm{j} & -1+\mathrm{j} \\ -1+\mathrm{j} & 3-\mathrm{j}5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 40-\mathrm{j}5 \\ 8+\mathrm{j}5 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2450+\mathrm{j}535 \\ 540+\mathrm{j}545 \end{pmatrix} \ \mathrm{V}$$

Si volem trobar ara de forma sistemàtica, totes les tensions i tots els corrents i de les branques de la xarxa, haurem d'utilitzar l'equació (9.6) de la pàgina 101 i l'equació (9.7) de la pàgina 102; això vol dir que haurem de formar les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{B}$ i el vector $\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{B}$. No obstant, si únicament estem interessats en algun corrent o en alguna tensió de branca, podem resoldre el problema aplicant les lleis de Kirchhoff a les branques que ens interessin.

Exemple 9.2 *A partir del circuit de la Figura 9.2 a la pàgina 98, amb $\underline{X}_\mathrm{M} = 0$, es tracta de trobar els corrents que circulen per les branques 2 i 5.*

Partint dels potencials dels nusos 1 i 2 calculats anteriorment, i aplicant les lleis de Kirchhoff a les branques 2 i 5 tenim:

$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{E}_2 + [\underline{V}_\mathrm{N}(1) - \underline{V}_\mathrm{N}(2)]}{\underline{X}_2} = \frac{-50 + \frac{2450+\mathrm{j}535-540-\mathrm{j}545}{17}}{\mathrm{j}20} = \frac{-1-\mathrm{j}106}{34} \ \mathrm{A}$$

$$\underline{I}_5 = \frac{-\underline{V}_\mathrm{N}(2)}{R_5} + \underline{J}_5 = \frac{\frac{-540-\mathrm{j}545}{17}}{10} + 4 = \frac{28-\mathrm{j}109}{34} \ \mathrm{A}$$

9.4 Mètode particular de resolució amb acoblaments magnètics

Quan hi ha acoblaments magnètics entre branques de la xarxa que no tenen cap font de tensió o de corrent, també es pot aplicar el mètode de resolució descrit en l'apartat anterior, substituint prèviament les dues branques acoblades per un circuit equivalent d'admitàncies, segons es veurà a continuació.

Un cop obtingut el circuit equivalent de les dues branques acoblades magnèticament, ja es pot formar la matriu $\underline{Y}_\mathrm{N}\{n \times n\}$ i el vector $\underline{J}_\mathrm{N}\{n\}$, i resoldre la xarxa, tal com s'ha fet en l'apartat anterior.

En la Figura 9.3 a la pàgina següent es pot veure aquest circuit equivalent.

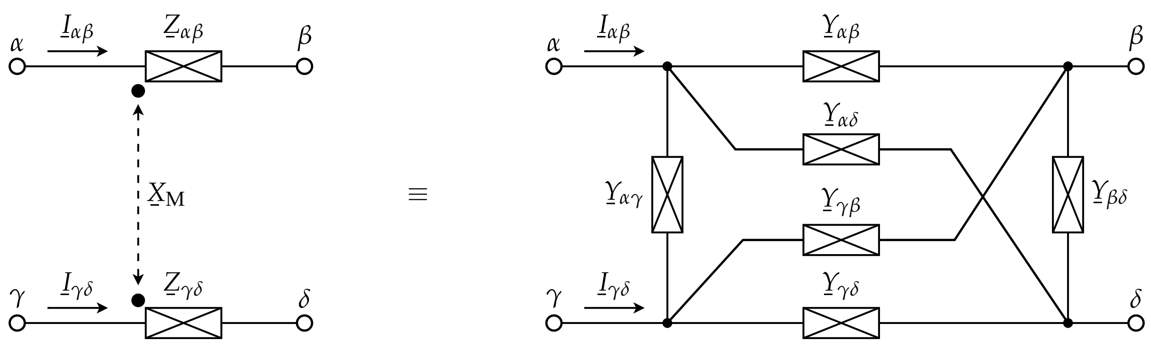


Figura 9.3: Circuit equivalent de dues branques acoblades magnèticament

Els valors de les admitàncies d'aquest circuit equivalent són:

$$
\begin{aligned}
\underline{Y}_{\alpha\beta} &= \frac{\underline{Z}_{\gamma\delta}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_{\mathrm{M}}^2} & \qquad \underline{Y}_{\alpha\gamma} = \underline{Y}_{\beta\delta} &= \frac{\underline{X}_{\mathrm{M}}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_{\mathrm{M}}^2} \\
\underline{Y}_{\gamma\delta} &= \frac{\underline{Z}_{\alpha\beta}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_{\mathrm{M}}^2} & \qquad \underline{Y}_{\alpha\delta} = \underline{Y}_{\gamma\beta} &= \frac{-\underline{X}_{\mathrm{M}}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_{\mathrm{M}}^2}
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

Un cop hem resolt la xarxa i hem trobat els potencials dels quatre nusos $\underline{V}_{\mathrm{N}}(\alpha)$, $\underline{V}_{\mathrm{N}}(\beta)$, $\underline{V}_{\mathrm{N}}(\gamma)$ i $\underline{V}_{\mathrm{N}}(\delta)$, podem trobar els dos corrents $\underline{I}_{\alpha\beta}$ i $\underline{I}_{\gamma\delta}$, a partir de les expressions següents:

$$
\underline{I}_{\alpha\beta} = \frac{[\underline{V}_{\mathrm{N}}(\alpha) - \underline{V}_{\mathrm{N}}(\beta)]\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - [\underline{V}_{\mathrm{N}}(\gamma) - \underline{V}_{\mathrm{N}}(\delta)]\,\underline{X}_{\mathrm{M}}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_{\mathrm{M}}^2} \tag{9.9a}
$$

$$
\underline{I}_{\gamma\delta} = \frac{[\underline{V}_{\mathrm{N}}(\gamma) - \underline{V}_{\mathrm{N}}(\delta)]\,\underline{Z}_{\alpha\beta} - [\underline{V}_{\mathrm{N}}(\alpha) - \underline{V}_{\mathrm{N}}(\beta)]\,\underline{X}_{\mathrm{M}}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_{\mathrm{M}}^2} \tag{9.9b}
$$

El cas que hem vist fins ara, és el més general de tots els possibles, ja que suposa que els quatre nusos α, β, γ i δ són diferents entre si. Es pot presentar el cas, no obstant, on dos nusos siguin en realitat el mateix, en tenir les dues branques acoblades magnèticament, un extrem connectat al mateix nus; en aquest cas el circuit equivalent resultant es pot derivar del corresponent al cas general de forma senzilla.

Si suposem, per exemple, que les dues branques de la Figura 9.3 estiguessin unides pels extrems de la dreta, és a dir $\beta \equiv \delta$, en aquest cas l'admitància entre α i γ seria $\underline{Y}_{\alpha\gamma}$, l'admitància entre β i δ desapareixeria, l'admitància entre α i β seria $\underline{Y}_{\alpha\beta} + \underline{Y}_{\alpha\delta}$, i finalment, l'admitància entre γ i β seria $\underline{Y}_{\gamma\beta} + \underline{Y}_{\gamma\delta}$. Els corrents $\underline{I}_{\alpha\beta}$ i $\underline{I}_{\gamma\delta}$, es calcularien també amb les equacions (9.9a) i (9.9b), tenint en compte que $\underline{V}_{\mathrm{N}}(\beta) \equiv \underline{V}_{\mathrm{N}}(\delta)$.

9.5 Circuits equivalents Thévenin i Norton

Per trobar el circuit equivalent Thévenin o Norton entre dos nusos qualssevol d'una xarxa, ens cal el vector de potencials de nus $\underline{V}_{\mathrm{N}}\{n\}$, obtingut segons s'ha descrit en els apartats anteriors, i la matriu d'impedàncies de nus $\underline{Z}_\mathrm{N}\{n \times n\}$; aquesta matriu està definida per la relació següent:

$$\underline{Z}_\mathrm{N} = \underline{Y}_\mathrm{N}^{-1} \tag{9.10}$$

A partir del vector $\underline{V}_\mathrm{N}$ i de la matriu $\underline{Z}_\mathrm{N}$, podem trobar la font de tensió i la impedància Thévenin equivalents entre dos nusos qualssevol.

La tensió Thévenin $\underline{E}_\mathrm{Th}^{(\alpha,0)}$ i la impedància Thévenin $\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(\alpha,0)}$, entre un nus qualsevol α i el nus de referència 0, s'obtenen amb les equacions següents:

$$\underline{E}_\mathrm{Th}^{(\alpha,0)} = \underline{V}_\mathrm{N}(\alpha) \tag{9.11}$$

$$\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(\alpha,0)} = \underline{Z}_\mathrm{N}(\alpha,\alpha) \tag{9.12}$$

La tensió Thévenin $\underline{E}_\mathrm{Th}^{(\alpha,\beta)}$ i la impedància Thévenin $\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(\alpha,\beta)}$, entre dos nusos qualssevol α i β, s'obtenen amb les equacions següents:

$$\underline{E}_\mathrm{Th}^{(\alpha,\beta)} = \underline{V}_\mathrm{N}(\alpha) - \underline{V}_\mathrm{N}(\beta) \tag{9.13}$$

$$\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(\alpha,\beta)} = \underline{Z}_\mathrm{N}(\alpha,\alpha) + \underline{Z}_\mathrm{N}(\beta,\beta) - \underline{Z}_\mathrm{N}(\alpha,\beta) - \underline{Z}_\mathrm{N}(\beta,\alpha) \tag{9.14}$$

A partir d'aquests valors podem calcular els valors del circuit Norton equivalent, utilitzant l'equació (1.3) de la pàgina 4.

Exemple 9.3 *Continuant amb el circuit de la Figura 9.2 a la pàgina 98, es tracta de trobar els circuits Thévenin i Norton equivalents de la xarxa, entre els nusos 1 i 2.*

El vector $\underline{V}_\mathrm{N}$ és el calculat a la pàgina 101.

Trobem a continuació la matriu $\underline{Z}_\mathrm{N}$, a partir de la matriu $\underline{Y}_\mathrm{N}$ calculada a la pàgina 101:

$$\underline{Z}_\mathrm{N} = 60 \cdot \begin{pmatrix} 9-\mathrm{j}4 & -3+\mathrm{j}8 \\ 3+\mathrm{j}8 & 9-\mathrm{j}28 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{202} \cdot \begin{pmatrix} 1445+\mathrm{j}310 & 415+\mathrm{j}110 \\ 415+\mathrm{j}110 & 245+\mathrm{j}430 \end{pmatrix}\ \Omega$$

Els valors del circuit Thévenin equivalent que busquem són:

$$\underline{E}_\mathrm{Th}^{(1,2)} = \frac{15430+\mathrm{j}2295}{101} - \frac{3390+\mathrm{j}2085}{101} = \frac{12040+\mathrm{j}210}{101}\ \mathrm{V}$$

$$\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(1,2)} = \frac{1445+\mathrm{j}310}{202} + \frac{245+\mathrm{j}430}{202} - 2\cdot\frac{415+\mathrm{j}110}{202} = \frac{430+\mathrm{j}260}{101}\ \Omega$$

Els valors del circuit Norton equivalent que busquem són:

$$\underline{I}_\mathrm{No}^{(1,2)} = \frac{\underline{E}_\mathrm{Th}^{(1,2)}}{\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(1,2)}} = \frac{\frac{12040+\mathrm{j}210}{101}\ \mathrm{V}}{\frac{430+\mathrm{j}260}{101}\ \Omega} = \frac{518-\mathrm{j}301}{25}\ \mathrm{A}$$

$$\underline{Y}_\mathrm{No}^{(1,2)} = \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(1,2)}} = \frac{1}{\frac{430+\mathrm{j}260}{101}\ \Omega} = \frac{43-\mathrm{j}26}{250}\ \mathrm{S}$$

Capítol 10

Flux de Càrregues

Es tracta en aquest capítol el mètode de resolució del problema del flux de càrregues en sistemes elèctrics de potència.

10.1 Introducció

Quan les dades que es coneixen de les càrregues d'una xarxa no són les seves impedàncies o admitàncies, sinó les potències que absorbeixen, no podem emprar el mètode dels nusos, descrit en el Capítol 9, per tal de resoldre la xarxa.

En aquest cas, el mètode de resolució es basa en escriure per a cada nus les equacions pertinents del balanç de potència activa i reactiva, i resoldre-les. La solució del sistema d'equacions resultant, ens proporcionarà les tensions de tots els nusos de la xarxa, i el flux de potència activa i reactiva entre els seus nusos.

El sistema d'equacions que cal resoldre és no lineal, i per tant, cal emprar algun mètode numèric per a la seva resolució, com ara el de Newton-Raphson; aquí, no obstant, no s'explicarà cap mètode numèric de resolució de sistemes d'equacions no lineals, ja que això cau fora de l'abast d'aquest llibre. Això però, no hauria de suposar cap problema, ja que avui dia aquests sistemes d'equacions es poden resoldre fàcilment amb programes d'ordinador de càlcul matemàtic, com ara els programes *Mathematica*® o *MATLAB*®, o amb calculadores científiques, com ara la calculadora HP-49G.

10.2 Models matemàtics

En els estudis de flux de càrregues, els elements que es consideren són:

- Càrregues
- Línies elèctriques
- Transformadors amb regulació variable (amb decalatge o sense)

10.2.1 Càrregues

Les càrregues vénen sempre definides per la potència que absorbeixen, és a dir, es consideren fonts de potència constant.

10.2.2 Línies elèctriques

Les línies elèctriques es modelen mitjançant un circuit equivalent per fase en «π», format per una impedància longitudinal i dues admitàncies transversals, tal com es pot veure en la Figura 10.1. En aquesta figura s'ha suposat que la línia està connectada entre els nusos 1 i 2; les admitàncies transversals, tenen sempre un extrem connectat a terra (nus 0 de referència).

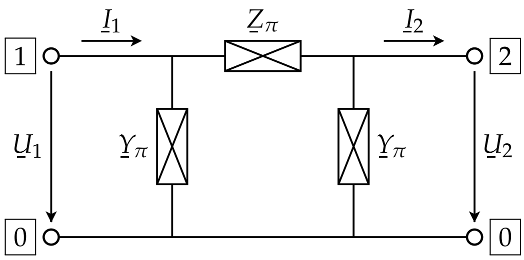


Figura 10.1: Circuit equivalent d'una línia elèctrica

A partir dels paràmetres propis d'una línia: la seva impedància longitudinal total per fase $\underline{Z}_\mathrm{t}$ i la seva admitància transversal total per fase $\underline{Y}_\mathrm{t}$, definim la impedància característica $\underline{Z}_\mathrm{c}$ i l'angle característic $\underline{\theta}_\mathrm{c}$ de la línia:

$$\underline{Z}_\mathrm{c} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_\mathrm{t}}{\underline{Y}_\mathrm{t}}} \qquad \underline{\theta}_\mathrm{c} = \sqrt{\underline{Z}_\mathrm{t}\,\underline{Y}_\mathrm{t}} \tag{10.1}$$

Amb aquest dos paràmetres, les equacions hiperbòliques de transmissió d'una línia són:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cosh\underline{\theta}_\mathrm{c} + \underline{I}_2\,\underline{Z}_\mathrm{c} \sinh\underline{\theta}_\mathrm{c} \qquad \underline{I}_1 = \underline{U}_2 \frac{\sinh\underline{\theta}_\mathrm{c}}{\underline{Z}_\mathrm{c}} + \underline{I}_2 \cosh\underline{\theta}_\mathrm{c} \tag{10.2}$$

D'altra banda, en el circuit de la Figura 10.1 es compleix:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_\pi} - \underline{Y}_\pi\,\underline{U}_2 \qquad \underline{U}_1 = (1 + \underline{Z}_\pi\,\underline{Y}_\pi)\underline{U}_2 + \underline{Z}_\pi\,\underline{I}_2 \tag{10.3}$$

Identificant entre si els termes de les equacions (10.2) i (10.3), obtenim els paràmetres del circuit equivalent de la línia.

$$\underline{Z}_\pi = \underline{Z}_\mathrm{c} \sinh\underline{\theta}_\mathrm{c} \quad = \underline{Z}_\mathrm{t} \frac{\sinh\underline{\theta}_\mathrm{c}}{\underline{\theta}_\mathrm{c}} \tag{10.4}$$

$$\underline{Y}_\pi = \frac{\tanh(\underline{\theta}_\mathrm{c}/2)}{\underline{Z}_\mathrm{c}} = \frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} \frac{\tanh(\underline{\theta}_\mathrm{c}/2)}{\underline{\theta}_\mathrm{c}/2} \tag{10.5}$$

Ara bé, en la majoria dels casos es compleix: $|\theta_\mathrm{c}| \ll 1$, i utilitzant els desenvolupaments en sèrie de les funcions sinh i tanh, al voltant de 0, tenim:

$$\underline{Z}_\pi = \underline{Z}_\mathrm{t} \left[1 + \frac{\theta_\mathrm{c}^2}{3!} + \frac{\theta_\mathrm{c}^4}{5!} + \cdots \right] \approx \underline{Z}_\mathrm{t} \tag{10.6}$$

$$\underline{Y}_\pi = \frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} \left[1 - \frac{(\theta_\mathrm{c}/2)^2}{3} + \frac{2(\theta_\mathrm{c}/2)^4}{15} - \cdots \right] \approx \frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} \tag{10.7}$$

Utilitzant aquests valors, la contribució d'una línia elèctrica, a la matriu d'admitàncies de nus $\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}$ de la xarxa a la qual pertany, és:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \dfrac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} & -\dfrac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \\ -\dfrac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} & \dfrac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \end{pmatrix} \tag{10.8}$$

Els fluxos de potència a través de la línia, $\underline{S}_{12}$ (del nus 1 al 2), i $\underline{S}_{21}$ (del nus 2 a l'1), vénen donats per les expressions:

$$\underline{S}_{12} = \underline{U}_1 \left[\left(\frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \right) \underline{U}_1 - \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \underline{U}_2 \right]^* = \underline{U}_1 \left[\frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} \underline{U}_1 + \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \right]^* \tag{10.9}$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{U}_2 \left[\left(\frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \right) \underline{U}_2 - \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \underline{U}_1 \right]^* = \underline{U}_2 \left[\frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} \underline{U}_2 + \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \right]^* \tag{10.10}$$

Finalment, les pèrdues de transmissió en la línia $\Delta \underline{S}$, vénen donades per l'expressió:

$$\Delta \underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \left[\frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \right]^* \left[|\underline{U}_1|^2 + |\underline{U}_2|^2 \right] - 2\, \frac{\mathrm{Re}(\underline{U}_1^* \underline{U}_2)}{\underline{Z}_\mathrm{t}^*} \tag{10.11}$$

10.2.3 Transformadors amb regulació variable i decalatge

Els transformadors amb regulació variable i decalatge es modelen mitjançant un transformador ideal en sèrie amb una impedància, tal com es pot veure en la Figura 10.2. En aquesta figura s'ha suposat que el transformador està connectat entre els nusos 1 i 2; el punt de referència del transformador és sempre el terra (nus 0 de referència).

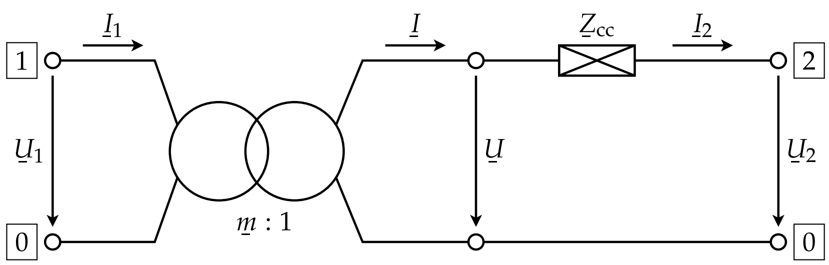


Figura 10.2: Circuit equivalent d'un transformador amb regulació variable i decalatge

En l'esquema anterior, $\underline{Z}_{\mathrm{cc}}$ és la impedància de curt circuit per fase del transformador, i $\underline{m} : 1$ és la seva relació de transformació. El paràmetre $\underline{m}$ és un valor complex, ja que el transformador a més de variar el mòdul de la tensió, també varia el seu argument; les tensions primària i secundària tenen, per tant, diferent mòdul i un decalatge entre els seus arguments.

Si la impedància es volgués representar en el primari del transformador, el seu valor seria $|\underline{m}|^2\underline{Z}_{\mathrm{cc}}$.

En el circuit de la Figura 10.2 a la pàgina anterior es compleix:

$$\underline{U}_1 = \underline{m}\,\underline{U} = \underline{m}\,[\underline{U}_2 + \underline{Z}_{\mathrm{cc}}\underline{I}_2] \qquad \underline{I}_1 = \frac{\underline{I}}{\underline{m}^*} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{m}^*} \qquad \underline{U}_1\underline{I}_1^* = \underline{U}\,\underline{I}^* \tag{10.12}$$

Utilitzant aquestes tres equacions, podem escriure:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{|\underline{m}|^2\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} - \frac{\underline{U}_2}{\underline{m}^*\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} \qquad -\underline{I}_2 = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{m}\,\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} \tag{10.13}$$

Aquestes equacions ens permeten escriure, directament, la contribució d'un transformador amb regulació variable i decalatge, a la matriu d'admitàncies de nus $\underline{\mathbf{Y}}_{\mathrm{N}}$ de la xarxa a la qual pertany:

$$\underline{\mathbf{Y}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{|\underline{m}|^2\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} & -\dfrac{1}{\underline{m}^*\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} \\ -\dfrac{1}{\underline{m}\,\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} & \dfrac{1}{\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} \end{pmatrix} \tag{10.14}$$

Com es pot veure, $\underline{\mathbf{Y}}_{\mathrm{N}}(1,2) \neq \underline{\mathbf{Y}}_{\mathrm{N}}(2,1)$; això ens indica que no existeix un esquema equivalent en «π» del transformador, format tan sols per elements passius.

Els fluxos de potència a través del transformador, $\underline{S}_{12}$ (del nus 1 al 2), i $\underline{S}_{21}$ (del nus 2 a l'1), vénen donats per les expressions:

$$\underline{S}_{12} = \underline{U}_1 \left[\frac{\underline{U}_1}{|\underline{m}|^2\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} - \frac{\underline{U}_2}{\underline{m}^*\underline{Z}_{\mathrm{cc}}}\right]^* = \frac{\underline{U}_1}{\underline{m}\,\underline{Z}_{\mathrm{cc}}^*}\left[\frac{\underline{U}_1}{\underline{m}} - \underline{U}_2\right]^* \tag{10.15}$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{U}_2 \left[-\frac{\underline{U}_1}{\underline{m}\,\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\mathrm{cc}}}\right]^* = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\mathrm{cc}}^*}\left[\underline{U}_2 - \frac{\underline{U}_1}{\underline{m}}\right]^* \tag{10.16}$$

Finalment, les pèrdues de transmissió del transformador $\Delta\underline{S}$, vénen donades per l'expressió:

$$\Delta\underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_{\mathrm{cc}}^*}\left|\frac{\underline{U}_1}{\underline{m}} - \underline{U}_2\right|^2 \tag{10.17}$$

10.2.4 Transformadors amb regulació variable sense decalatge

Aquest és un cas particular de l'anterior, on el transformador no origina decalatge de fase entre les tensions primària i secundària. En aquest cas, la relació de transformació $m : 1$ és un valor real.

A partir de l'equació (10.14), substituint $\underline{m}$ per m, obtenim la contribució d'un transformador amb regulació variable sense decalatge, a la matriu d'admitàncies de nus $\underline{\mathbf{Y}}_\mathrm{N}$ de la xarxa a la qual pertany:

$$\underline{\mathbf{Y}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m^2 \underline{Z}_\mathrm{cc}} & -\dfrac{1}{m\,\underline{Z}_\mathrm{cc}} \\ -\dfrac{1}{m\,\underline{Z}_\mathrm{cc}} & \dfrac{1}{\underline{Z}_\mathrm{cc}} \end{pmatrix} \tag{10.18}$$

Anàlogament, podem obtenir els fluxos de potència a través del transformador, $\underline{S}_{12}$ (del nus 1 al 2), i $\underline{S}_{21}$ (del nus 2 a l'1), i les seves pèrdues de transmissió $\Delta\underline{S}$, a partir de les equacions (10.15), (10.16) i (10.17):

$$\underline{S}_{12} = \underline{U}_1 \left[\frac{\underline{U}_1}{m^2 \underline{Z}_\mathrm{cc}} - \frac{\underline{U}_2}{m \underline{Z}_\mathrm{cc}} \right]^* = \frac{\underline{U}_1}{m\,\underline{Z}^*_\mathrm{cc}} \left[\frac{\underline{U}_1}{m} - \underline{U}_2 \right]^* \tag{10.19}$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{U}_2 \left[-\frac{\underline{U}_1}{m\,\underline{Z}_\mathrm{cc}} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_\mathrm{cc}} \right]^* = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}^*_\mathrm{cc}} \left[\underline{U}_2 - \frac{\underline{U}_1}{m} \right]^* \tag{10.20}$$

$$\Delta\underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}^*_\mathrm{cc}} \left| \frac{\underline{U}_1}{m} - \underline{U}_2 \right|^2 \tag{10.21}$$

El circuit equivalent d'aquest tipus de transformador, també és el de la Figura 10.2 a la pàgina 111, substituint $\underline{m} : 1$ per $m : 1$; no obstant, atès que en aquest cas es compleix $\underline{\mathbf{Y}}_\mathrm{N}(1,2) = \underline{\mathbf{Y}}_\mathrm{N}(2,1)$, també existeix un circuit equivalent en «π», format per una impedància longitudinal i dues admitàncies transversals, tal com es pot veure en la Figura 10.3.

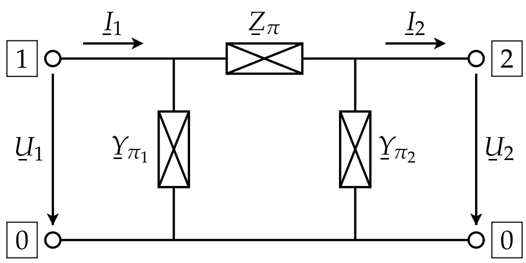


Figura 10.3: Circuit equivalent d'un transformació amb regulació variable sense decalatge

Els valors dels paràmetres d'aquest circuit equivalent són:

$$\underline{Z}_\pi = m\,\underline{Z}_\mathrm{cc} \tag{10.22}$$

$$\underline{Y}_{\pi_1} = \frac{1-m}{m^2\,\underline{Z}_\mathrm{cc}} \tag{10.23}$$

$$\underline{Y}_{\pi_2} = \frac{m-1}{m\,\underline{Z}_\mathrm{cc}} \tag{10.24}$$

10.3 Tipus de nusos

Cadascun dels nusos d'un sistema elèctric de potència, té quatre magnituds associades: les potencies activa i reactiva injectades des de l'exterior de la xarxa, i el mòdul i l'argument de la seva tensió.

Usualment, en cada nus del sistema es coneixen dues de les quatre magnituds anteriors; segons quines siguin aquestes magnituds, es poden distingir els següents tipus de nusos:

- **Nus de potencial zero**. El terra és sempre el nus de referència, o de potencial zero, de la xarxa, i per tant, totes les tensions de la xarxa hi són referides. Al terra s'assigna el número de nus 0, i per tant no forma part de la matriu d'admitàncies de nus de la xarxa.
- **Nus flotant**. És un nus on es manté constant la tensió en mòdul i argument, essent incògnites les potències activa i reactiva injectades a la xarxa des de l'exterior. Generalment, acostuma a ser el nus que més s'aproxima a un nus de potència infinita. Des del punt de vista de la xarxa, correspon clarament a un generador ideal de tensió.

  Tan sols hi pot haver un nus d'aquest tipus en tota la xarxa.
- **Nus de tensió controlada**. En aquest nus es coneix el mòdul de la tensió i la potència activa injectada a la xarxa des de l'exterior, essent incògnites l'argument de la tensió i la potència reactiva injectada des de l'exterior. En aquests nusos, sovint s'imposen límits a la potència reactiva.
- **Nus de càrrega**. En aquest nus es coneixen les potències activa i reactiva injectades a la xarxa des de l'exterior, i són incògnites el mòdul i l'argument de la tensió. Aquests nusos poden ser tant de consum com de generació.

  En els nusos on incideix un transformador amb relació de transformació variable sense decalatge, hi pot haver tres magnituds conegudes: les potències activa i reactiva injectades i el mòdul de la tensió, el qual es vol mantenir constant mitjançant l'ajust de la relació de transformació; les incògnites són per tant, l'argument de la tensió i la citada relació de transformació del transformador.

En la Taula 10.1 es resumeix el que s'ha exposat sobre els diferents tipus de nusos en un sistema elèctric de potència.

Taula 10.1: Tipus de nusos en un sistema elèctric de potència

Tipus de nus	Tensió		Potència injectada		Relació de transformació
	mòdul	argument	activa	reactiva	
Flotant	✓	✓	✗	✗	—
De tensió controlada	✓	✗	✓	✗	—
De càrrega (sense trafo)	✗	✗	✓	✓	—
De càrrega (amb trafo)	✓	✗	✓	✓	✗

✓ valor conegut ✗ valor incògnita — no aplicable

10.4 Formulació del problema

Comencem per considerar una xarxa elèctrica amb els nusos numerats $1, \dots, n$, i essent el terra el nus 0 de referència; una de les maneres de descriure aquesta xarxa és utilitzant el mètode dels nusos, descrit en el Capítol 9:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}} \underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}} = \underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}} \tag{10.25}$$

Tenint en compte que els elements de $\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}}$, $\underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}}$ i $\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}}$ són $\underline{j}_i$, $\underline{v}_i$ i $\underline{y}_{ik}$ $(i, k = 1, \dots, n)$ respectivament, i que aquests valors, suposem que estan expressats en p.u. (vegeu la Secció 1.6), l'equació anterior queda expressada de la següent manera:

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{y}_{ik} \underline{v}_k = \underline{j}_i \qquad i = 1, \dots, n \tag{10.26}$$

En cadascun dels nusos de la xarxa es compleix la següent relació per a la potència complexa $\underline{s}_i = p_i + \mathrm{j} q_i$, injectada al nus des de l'exterior:

$$\underline{s}_i^* = p_i - \mathrm{j} q_i = \underline{v}_i^* \underline{j}_i = \underline{v}_i^* \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_{ik} \underline{v}_k \qquad i = 1, \dots, n \tag{10.27}$$

Ara bé, si expressem els potencials $\underline{v}_i$ a partir dels seus mòduls $|\underline{v}_i|$ i arguments δ_i, i les admitàncies $\underline{y}_{ik}$ a partir de les seves parts reals g_{ik} i imaginàries b_{ik}, tenim:

$$\underline{v}_i = |\underline{v}_i| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_i} = |\underline{v}_i| (\cos \delta_i + \mathrm{j} \sin \delta_i) \qquad i = 1, \dots, n \tag{10.28}$$

$$\underline{y}_{ik} = g_{ik} + \mathrm{j} b_{ik} \qquad i, k = 1, \dots, n \tag{10.29}$$

$$p_i - \mathrm{j} q_i = |\underline{v}_i| (\cos \delta_i - \mathrm{j} \sin \delta_i) \sum_{k=1}^{n} (g_{ik} + \mathrm{j} b_{ik}) |\underline{v}_k| (\cos \delta_k + \mathrm{j} \sin \delta_k) \qquad i = 1, \dots, n \tag{10.30}$$

Finalment, si separem la darrera equació en dues, una per a la part real i una altra per a la part imaginària, tenim:

$$p_i - |\underline{v}_i| \sum_{k=1}^{n} |\underline{v}_k| \left[g_{ik} \cos(\delta_k - \delta_i) - b_{ik} \sin(\delta_k - \delta_i) \right] = 0 \qquad i = 1, \dots, n \tag{10.31}$$

$$q_i + |\underline{v}_i| \sum_{k=1}^{n} |\underline{v}_k| \left[g_{ik} \sin(\delta_k - \delta_i) + b_{ik} \cos(\delta_k - \delta_i) \right] = 0 \qquad i = 1, \dots, n \tag{10.32}$$

Resolent de forma simultània les equacions (10.31) i (10.32), trobaríem els potencials dels nusos de la xarxa respecte al terra, i posteriorment, utilitzant l'equació (10.27), obtindríem la potència injectada en cada nus des de l'exterior. Ara bé, és clar que no es poden plantejar les equacions (10.31) i (10.32) en tots els nusos de la xarxa, ja que en alguns d'ells els valors p_i o q_i són desconeguts (vegeu la Taula 10.1 a la pàgina anterior). Per tant, per tal de resoldre el problema del flux de càrregues en un sistema elèctric de potència, cal seguir els passos següents:

❶ Es numeren tots els nusos de la xarxa, començant pel número 1. El terra és sempre el nus 0 de referència.

❷ Es forma la matriu d'admitàncies de nusos $\underline{Y}_N$, tal com s'ha explicat en el Capítol 9.

❸ Es forma l'equació (10.31) per a tots els nusos de tensió controlada i per a tots els nusos de càrrega. Cal tenir en compte que la potència activa injectada p_i es considera positiva quan entra des de l'exterior a la xarxa, i negativa en cas contrari.

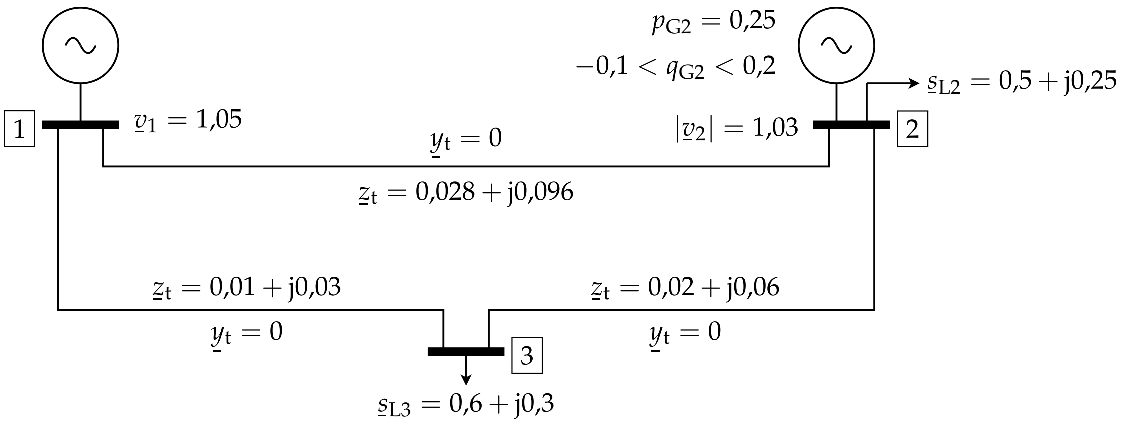
❹ Es forma l'equació (10.32) per a tots els nusos de càrrega. Cal tenir en compte que la potència reactiva injectada q_i es considera positiva quan entra des de l'exterior a la xarxa, i negativa en cas contrari.

❺ Es resol de forma numèrica el sistema d'equacions no lineals, format en els dos passos anteriors; com a valors inicials de les incògnites, es poden prendre els valors següents:

- Mòduls dels potencials: mòdul del potencial del nus flotant
- Arguments dels potencials: argument del potencial del nus flotant
- Relacions de transformació: 1

❻ Si és necessari, es pot calcular la potència injectada en els nusos de la xarxa des de l'exterior, en aquells nusos on no es coneix aquest valor, utilitzant l'equació (10.27).

Exemple 10.1 *Es tracta de trobar en la xarxa següent, els potencials dels nusos 2 i 3, i les potències subministrades pels generador dels nusos 1 i 2; tots els valors estan donats en p.u.*



Comencem formant la matriu d'admitàncies de nus:

$$\underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{0{,}028+j0{,}096} + \frac{1}{0{,}01+j0{,}03} & -\frac{1}{0{,}028+j0{,}096} & -\frac{1}{0{,}01+j0{,}03} \\ -\frac{1}{0{,}028+j0{,}096} & \frac{1}{0{,}028+j0{,}096} + \frac{1}{0{,}02+j0{,}06} & -\frac{1}{0{,}02+j0{,}06} \\ -\frac{1}{0{,}01+j0{,}03} & -\frac{1}{0{,}02+j0{,}06} & \frac{1}{0{,}01+j0{,}03} + \frac{1}{0{,}02+j0{,}06} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12{,}8 - j39{,}6 & -2{,}8 + j9{,}6 & -10{,}0 + j30{,}0 \\ -2{,}8 + j9{,}6 & 7{,}8 - j24{,}6 & -5{,}0 + j15{,}0 \\ -10{,}0 + j30{,}0 & -5{,}0 + j15{,}0 & 15{,}0 - j45{,}0 \end{pmatrix}$$

El nus 1 és el nus flotant, el nus 2 en un nus de tensió controlada i el nus 3 és un nus de càrrega; formarem, per tant, l'equació (10.31) pels nusos 2 i 3, i l'equació (10.32) pel nus 3:

$$0{,}25 - 0{,}5 - 1{,}03 \cdot \big(1{,}05 \cdot [-2{,}8 \cdot \cos(-\delta_2) - 9{,}6 \cdot \sin(-\delta_2)] + 1{,}03 \cdot 7{,}8 + \\ + |\underline{v}_3| \cdot [-5{,}0 \cdot \cos(\delta_3 - \delta_2) - 15{,}0 \cdot \sin(\delta_3 - \delta_2)]\big) = 0$$

$$-0{,}6 - |\underline{v}_3| \cdot \big(1{,}05 \cdot [-10{,}0 \cdot \cos(-\delta_3) - 30{,}0 \cdot \sin(-\delta_3)] + \\ + 1{,}03 \cdot [-5{,}0 \cdot \cos(\delta_2 - \delta_3) - 15{,}0 \cdot \sin(\delta_2 - \delta_3)] + |\underline{v}_3| \cdot 15{,}0\big) = 0$$

$$-0{,}3 + |\underline{v}_3| \cdot \big(1{,}05 \cdot [-10{,}0 \cdot \sin(-\delta_3) + 30{,}0 \cdot \cos(-\delta_3)] + \\ + 1{,}03 \cdot [-5{,}0 \cdot \sin(\delta_2 - \delta_3) + 15{,}0 \cdot \cos(\delta_2 - \delta_3)] + |\underline{v}_3| \cdot (-45{,}0)\big) = 0$$

Resolent aquest sistema d'equacions no lineals, amb els valors inicials $|\underline{v}_3| = 1{,}05$ i $\delta_2 = \delta_3 = 0$, obtenim:

$$\delta_2 = -0{,}015277\,\mathrm{rad}$$

$$|\underline{v}_3| = 1{,}033587 \qquad \delta_3 = -0{,}014301\,\mathrm{rad}$$

Calcularem a continuació, les potències injectades en els nusos 1 i 2, utilitzant l'equació (10.27):

$$\underline{s}_1^* = 1{,}05 \cdot \big[(12{,}8 - \mathrm{j}39{,}6) \cdot 1{,}05 + (-2{,}8 + \mathrm{j}9{,}6) \cdot 1{,}03 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}015277} + \\ + (-10{,}0 + \mathrm{j}30{,}0) \cdot 1{,}033587 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}014301}\big] = 0{,}85680 - \mathrm{j}0{,}52169$$

$$\underline{s}_1 = 0{,}85680 + \mathrm{j}0{,}52169$$

$$\underline{s}_2^* = 1{,}03 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0{,}015277} \cdot \big[(-2{,}8 + \mathrm{j}9{,}6) \cdot 1{,}05 + (7{,}8 - \mathrm{j}24{,}6) \cdot 1{,}03 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}015277} + \\ + (-5{,}0 + \mathrm{j}15{,}0) \cdot 1{,}033587 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}014301}\big] = -0{,}25000 + \mathrm{j}0{,}20050$$

$$\underline{s}_2 = -0{,}25000 - \mathrm{j}0{,}20050$$

Per tant, les potències subministrades a la xarxa pels generadors dels nusos 1 i 2, són:

$$\underline{s}_{\mathrm{G1}} = \underline{s}_1 = 0{,}85680 + \mathrm{j}0{,}52169$$

$$\underline{s}_{\mathrm{G2}} = \underline{s}_{\mathrm{L2}} + \underline{s}_2 = 0{,}5 + \mathrm{j}0{,}25 - 0{,}25000 - \mathrm{j}0{,}20050 = 0{,}25000 + \mathrm{j}0{,}04950$$

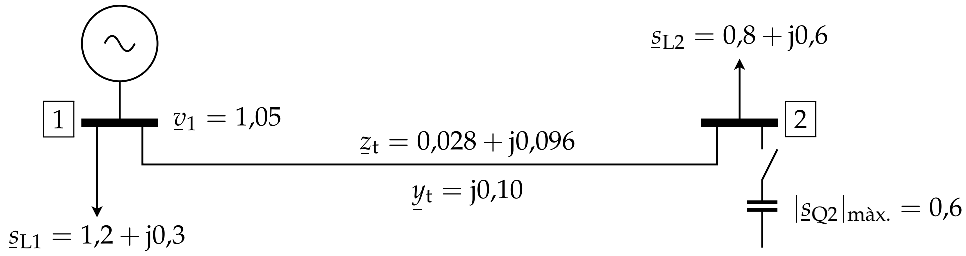
El valor calculat de la potència activa subministrada pel generador del nus 2, es correspon, evidentment, amb el valor que s'ha utilitzat com a dada per resoldre la xarxa ($p_{\mathrm{G2}} = 0{,}25$).

Pel que fa a la potencia reactiva subministrada pel generador del nus 2, s'observa que es troba dins dels marges especificats ($-0{,}1 < q_{\mathrm{G2}} < 0{,}2$).

Exemple 10.2 *Es tracta de trobar en la xarxa següent, el potencial del nus 2 i la potència subministrada pel generador del nus 1; tots els valors estan donats en p.u. Es consideren dos casos:*

a) La bateria de condensadors del nus 2 està desconnectada.

b) Es connecta la bateria de condensadors del nus 2, per tal de mantenir el mòdul de la tensió d'aquest nus al valor $|\underline{v}_2| = 1{,}03$.



Comencem formant la matriu d'admitàncies de nus:

$$\underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \frac{j0{,}10}{2} + \frac{1}{0{,}028+j0{,}096} & -\frac{1}{0{,}028+j0{,}096} \\ -\frac{1}{0{,}028+j0{,}096} & \frac{j0{,}10}{2} + \frac{1}{0{,}028+j0{,}096} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}80 - j9{,}55 & -2{,}80 + j9{,}60 \\ -2{,}80 + j9{,}60 & 2{,}80 - j9{,}55 \end{pmatrix}$$

a) En aquest cas, el nus 1 és el nus flotant, i el nus 2 en un nus de càrrega.

Formem a continuació les equacions (10.31) i (10.32) pel nus 2:

$$-0{,}8 - |\underline{v}_2| \cdot \big(1{,}05 \cdot [-2{,}80 \cdot \cos(-\delta_2) - 9{,}60 \cdot \sin(-\delta_2)] + |\underline{v}_2| \cdot 2{,}80\big) = 0$$
$$-0{,}6 + |\underline{v}_2| \cdot \big(1{,}05 \cdot [-2{,}80 \cdot \sin(-\delta_2) + 9{,}60 \cdot \cos(-\delta_2)] + |\underline{v}_2| \cdot (-9{,}55)\big) = 0$$

Resolent aquest sistema d'equacions no lineals, amb els valors inicials $|\underline{v}_2| = 1{,}05$ i $\delta_2 = 0$, obtenim:

$$|\underline{v}_2| = 0{,}970306 \qquad \delta_2 = -0{,}060222\,\text{rad}$$

Calculem a continuació la potència que circula des del nus 1 cap al nus 2, utilitzant l'equació (10.9):

$$\underline{s}_{12} = 1{,}05 \cdot \left[\frac{j0{,}10}{2} \cdot 1{,}05 + \frac{1{,}05 - 0{,}970306 \cdot e^{-j0{,}060222}}{0{,}028 + j0{,}096}\right]^* = 0{,}82813 + j0{,}59423$$

Per tant, la potència subministrada a la xarxa pel generador del nus 1, és:

$$\underline{s}_{G1} = \underline{s}_{L1} + \underline{s}_{12} = 1{,}2 + j0{,}3 + 0{,}82812 + j0{,}59423 = 2{,}02813 + j0{,}89423$$

b) En aquest cas, el nus 1 és el nus flotant, i el nus 2 en un nus de tensió controlada.

Formem a continuació l'equació (10.31) pel nus 2:

$$-0{,}8 - 1{,}03 \cdot \big(1{,}05 \cdot [-2{,}80 \cdot \cos(-\delta_2) - 9{,}60 \cdot \sin(-\delta_2)] + 1{,}03 \cdot 2{,}80\big) = 0$$

Resolent aquesta equació no lineal, amb el valor inicial $\delta_2 = 0$, obtenim:

$$\delta_2 = -0{,}072323\,\text{rad}$$

Calculem a continuació la potència que circula entre els nusos 1 i 2, utilitzant les equacions (10.9) i (10.10):

$$\underline{s}_{12} = 1{,}05 \cdot \left[\frac{j0{,}10}{2} \cdot 1{,}05 + \frac{1{,}05 - 1{,}03 \cdot e^{-j0{,}072323}}{0{,}028 + j0{,}096}\right]^* = 0{,}81695 - j0{,}04520$$

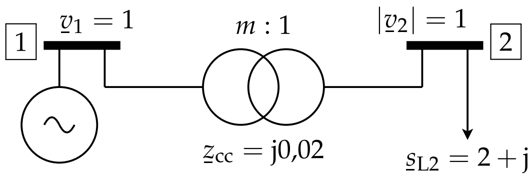
$$\underline{s}_{21} = 1{,}03 \cdot e^{-j0{,}072323} \cdot \left[\frac{j0{,}10}{2} \cdot 1{,}03 \cdot e^{-j0{,}072323} + \frac{1{,}03 \cdot e^{-j0{,}072323} - 1{,}05}{0{,}028 + j0{,}096}\right]^* = -0{,}80000 - j0{,}00484$$

Per tant, les potències subministrades a la xarxa pel generador del nus 1 i pel condensador del nus 2, són:

$$\underline{s}_{G1} = \underline{s}_{L1} + \underline{s}_{12} = 1{,}2 + j0{,}3 + 0{,}81695 - j0{,}04520 = 2{,}01695 + j0{,}25480$$
$$\underline{s}_{Q2} = \underline{s}_{L2} + \underline{s}_{21} = 0{,}8 + j0{,}6 - 0{,}80000 - j0{,}00484 = j0{,}59516$$

S'ha calculat el valor de $\underline{s}_{Q2}$, per tal de comprovar que està dins dels marges especificats ($|\underline{s}_{Q2}|_{màx.} = 0{,}6$); si això no fos així, caldria fixar $\underline{s}_{Q2}$ al seu valor màxim i tornar a recalcular la xarxa, passant el nus 2 a ser un nus de càrrega, i essent, per tant, desconeguda la seva tensió.

Exemple 10.3 *En el sistema de la figura següent, es vol mantenir el mòdul del potencial del nus 2 fixat al valor indicat, mitjançant l'ajust adequat de la relació de transformació del transformador connectat entre els nusos 1 i 2. Es tracta per tant de trobar aquest valor, així com el potencial del nus 2; tots els valors estan donats en p.u.*



Comencem formant la matriu d'admitàncies de nus:

$$\underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{j0{,}02\,m^2} & -\dfrac{1}{j0{,}02\,m} \\ -\dfrac{1}{j0{,}02\,m} & \dfrac{1}{j0{,}02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j\dfrac{50}{m^2} & j\dfrac{50}{m} \\ j\dfrac{50}{m} & -j50 \end{pmatrix}$$

El nus 1 és el nus flotant i el nus 2 en un nus de càrrega; formarem, per tant, les equacions (10.31) *i* (10.32) *pel nus 2:*

$$-2 - 1 \cdot \left(1 \cdot \left[0 - \frac{50}{m} \cdot \sin(-\delta_2)\right] + 0\right) = 0$$

$$-1 + 1 \cdot \left(1 \cdot \left[0 + \frac{50}{m} \cdot \cos(-\delta_2)\right] + 1 \cdot (-50)\right) = 0$$

Resolent aquest sistema d'equacions no lineals, amb els valors inicials $\delta_2 = 0$ i $m = 1$, obtenim:

$$\delta_2 = -0{,}039196\,\text{rad}$$
$$m = 0{,}979639$$

En un cas real, el paràmetre m del transformador únicament podria prendre uns quants valors discrets; caldria doncs assignar a m el valor més pròxim al calculat, escollint entre els diversos valors possibles, i tornar a recalcular la xarxa, passant la tensió del nus 2 a ser un valor desconegut.

10.5 Control del flux de potència

Veurem breument a continuació, les diverses formes que existeixen per controlar el flux de potència activa i reactiva en les branques d'una xarxa, així com els mètodes que existeixen per mantenir la tensió regulada en determinats nusos.

En concret, es disposa dels següents mètodes:

- **Control de l'excitació i del parell motriu dels generador**. És prou conegut, que variant l'excitació d'un generador, podem regular la seva tensió de sortida o la potència reactiva que subministra al sistema; d'altra banda, variant el parell motriu, podem regular la freqüència de la tensió de sortida o la potència activa que subministra al sistema.

  En el cas d'un generador aïllat que alimenta a una càrrega donada, la qual fixa la potència activa i reactiva necessàries, variant l'excitació o el parell motriu del generador podem regular respectivament, el valor de la tensió o de la freqüència de sortida. En el cas d'un generador acoblat a una xarxa de potència infinita, la qual fixa els valors de la tensió i de la freqüència, variant l'excitació o el parell motriu del generador podem regular respectivament, el valor de la potència reactiva o de la potència activa subministra al sistema.

- **Variació de les característiques de condensadors i reactàncies, sèrie i paral·lel**. Aquest mètode s'utilitza per mantenir regulada la tensió en determinats nusos del sistema, dins d'uns certs marges prefixats, mitjançant la injecció de potència reactiva, aportada per condensadors i reactàncies.

- **Ajust adequat dels transformadors de relació de transformació variable amb decalatge**. La funció usual dels transformadors en els sistemes elèctrics de potència, és passar la tensió d'un nivell determinat a un altre, per exemple, de la tensió de generació a la tensió de la línia de transmissió. No obstant, en els sistemes de potència, també existeixen transformadors dedicats al control del flux de potència activa i reactiva en determinades branques; això s'aconsegueix amb petites variacions de la relació de transformació i del decalatge del transformador. La variació del decalatge, té un gran efecte sobre el flux de potència activa, a l'hora que pràcticament no afecta al flux de potència reactiva ni al mòdul de la tensió; en canvi, la variació de la relació de transformació té un gran efecte sobre el flux de potència reactiva i sobre al mòdul de la tensió.

10.6 Resolució de sistemes d'equacions no lineals amb *Mathematica*® i *MATLAB*®

En aquest apartat, es descriu breument com trobar la solució d'un sistema d'equacions no lineals, com els que sorgeixen a l'hora de resoldre problemes de flux de càrregues, amb els programes *Mathematica*® i *MATLAB*®.

S'utilitzarà en ambdós casos els sistema d'equacions no lineals del segon exemple de la secció 10.4, és a dir:

$$-0{,}8 - |\underline{v}_2| \cdot \big(1{,}05 \cdot [-2{,}80 \cdot \cos(-\delta_2) - 9{,}60 \cdot \sin(-\delta_2)] + |\underline{v}_2| \cdot 2{,}80\big) = 0$$
$$-0{,}6 + |\underline{v}_2| \cdot \big(1{,}05 \cdot [-2{,}80 \cdot \sin(-\delta_2) + 9{,}60 \cdot \cos(-\delta_2)] + |\underline{v}_2| \cdot (-9{,}55)\big) = 0$$

Els valors inicials assignats a les dues variables són: $|\underline{v}_2| = 1{,}05$ i $\delta_2 = 0$.

La resolució d'aquest sistema d'equacions no lineals amb el programa *Mathematica*® és molt senzilla, ja que la funció `FindRoot` ens proporciona directament la solució; utilitzant la variable `v2` per a $|\underline{v}_2|$ i la variable `d2` per a δ_2, tenim:

```
 In[1]:= FindRoot[{-0.8 - v2 (1.05 (-2.8 Cos[-d2] - 9.6 Sin[-d2]) + 2.8 v2) == 0,
                  -0.6 + v2 (1.05 (-2.8 Sin[-d2] + 9.6 Cos[-d2]) - 9.55 v2) == 0},
                  {v2, 1.05}, {d2, 0.0}]

Out[1]:= {v2 -> 0.970306, d2 -> -0.0602217}
```

La resolució amb el programa *MATLAB*® no és tan senzilla, i s'obté a partir de la funció `fsolve`; per poder utilitzar aquesta funció, cal tenir instal·lada l'extensió del programa «Optimization toolbox».

En primer lloc, cal escriure una funció en un «fitxer M» que representi el sistema d'equacions no lineals que es vol resoldre; utilitzant la variable `x(1)` per a $|\underline{v}_2|$ i la variable `x(2)` per a δ_2, creem un fitxer amb el contingut següent:

```
function y= F(x)
y(1) = -0.8 - x(1)*(1.05*(-2.8*cos(-x(2)) - 9.6*sin(-x(2))) + 2.8*x(1));
y(2) = -0.6 + x(1)*(1.05*(-2.8*sin(-x(2)) + 9.6*cos(-x(2))) - 9.55*x(1));
```

A continuació resolem el sistema d'equacions no lineal, utilitzant la funció `fsolve`:

```
>> fsolve(@F, [1.05; 0.0])

ans =

    0.9703
   -0.0602
```

Capítol 11

Numeració ANSI de Dispositius Elèctrics

Es dóna a continuació una llista de la numeració de dispositius elèctrics, segons la norma ANSI C37.2, amb una breu explicació de la seva funció.

1 **Element principal**. És un dispositiu iniciador, com ara un commutador de control, un relè de tensió, un interruptor de nivell, etc., que serveix per posar en marxa o fora de servei un aparell, ja sigui directament, o bé mitjançant altres dispositius, com ara relès de protecció, o relès temporitzats.

2 **Relè de tancament o arrencada, amb retard de temps**. És el que proporciona un retard de temps entre les operacions d'una seqüència automàtica, o d'un sistema de protecció, excepte quan aquest retard és proporcionat específicament pels dispositius 48, 62 o 79, descrits més endavant. S'utilitza principalment com a protecció de la discrepància de pols d'un interruptor.

3 **Relè de comprovació o de bloqueig**. És el que actua en resposta a la posició d'una sèrie d'altres dispositius (o d'una sèrie de condicions predeterminades) en un equip, per tal de permetre que una seqüència d'operació continuï, o per tal de parar-la, o per proporcionar una prova de la posició d'aquests dispositius o d'aquestes condicions.

4 **Contactor principal**. És un dispositiu, generalment governat pel dispositiu número 1 i pels dispositius de permís i protecció que calgui, que serveix per obrir i tancar els circuits de control necessaris per tal de posar un equip en marxa, o per parar-lo.

5 **Dispositiu de parada**. És el que té com a funció principal, deixar fora de servei un equip i mantenir-lo en aquest estat; la seva actuació pot ser manual o elèctrica. Queda exclosa la funció de bloqueig elèctric en situacions anormals (vegeu la funció 86).

6 **Interruptor d'arrencada**. És el que té com a funció principal connectar una màquina a la seva font de tensió d'arrencada.

7 **Interruptor d'ànode**. És el que s'utilitza en els circuits dels ànodes d'un rectificador de potència, principalment per interrompre el circuit del rectificador en cas de produir-s'hi un arc elèctric.

8 **Dispositiu de desconnexió de l'energia de control**. És un element de desconnexió (commutador de ganiveta, interruptor de bloc o fusibles connectables) que s'utilitza per connectar i desconnectar la font d'energia de control, a la barra de tensió de control o a l'equip al qual doni servei. Es considera que l'energia de control inclou a l'energia auxiliar que alimenta a aparells, com ara motors petits o calefactors.

9 **Dispositiu d'inversió**. És el que s'utilitza per invertir les connexions del camp d'una

màquina, o per realitzar qualsevol altra funció d'inversió.

10 Commutador de seqüència. És un dispositiu que s'utilitza pera canviar la seqüència de connexió o desconnexió d'unitats, en un equip de múltiples unitats.

11 Reservat per a futures aplicacions. L'USBR[1] li assigna la funció: transformador de potència de control.

12 Dispositiu d'excés de velocitat. És normalment un interruptor de velocitat, de connexió directa, que actua quan la màquina s'embala.

13 Dispositiu de velocitat sincrònica. És un element, com ara un interruptor de velocitat centrífuga, un relè de freqüència de lliscament, un relè de tensió, o qualsevol altre aparell que actua a, aproximadament, la velocitat sincrònica d'una màquina.

14 Dispositiu de manca de velocitat. És el que actua quan la velocitat d'una màquina baixa per sota d'un valor determinat.

15 Dispositiu igualador de velocitat o freqüència. És el que actua per tal d'igualar i mantenir la velocitat o la freqüència d'una màquina o d'un sistema a un cert valor, aproximadament igual al d'una altra màquina o sistema.

16 Reservat per a futures aplicacions L'USBR[1] li assigna la funció: carregador de bateries.

17 Commutador de «shunt» o de descàrrega. És el que serveix per obrir i tancar un circuit «shunt» entre els extrems de qualsevol aparell (excepte una resistència), com ara el camp d'una màquina, un condensador o una reactància. Queden exclosos els elements que realitzen les funcions de «shunt» necessàries per arrancar una màquina, mitjançant els dispositius 6, 42, o equivalents; també queda exclosa la funció del dispositiu 73, el qual serveix per a l'operació de resistències.

18 Dispositiu d'acceleració o desacceleració. És el que s'utilitza per tancar o per causar el tancament dels circuits que serveixen per augmentar o disminuir la velocitat d'una màquina.

19 Contactor de transició d'arrencada a marxa normal. La seva funció és fer la transferència de les connexions de l'alimentació d'arrencada, a la de marxa normal d'una màquina.

20 Vàlvula. S'assigna aquest número a una vàlvula utilitzada en un circuit de buit, d'aire, de gas, d'oli, d'aigua, etc., quan s'acciona elèctricament o quan té accessoris elèctrics, com ara commutadors auxiliars.

21 Relè de distància. És el que actua quan l'admitància, la impedància o la reactància d'un circuit surt fora d'un cert límit.

22 Interruptor igualador. És el que serveix per connectar i desconnectar les connexions igualadores o d'equilibri d'intensitat del camp d'una màquina, o per regular equips en una instal·lació de múltiples unitats.

23 Dispositiu controlador de temperatura. És el que actua per tal de fer pujar la temperatura d'un lloc o d'un aparell, quan aquesta temperatura baixa per sota d'un cert límit, o a l'inrevés, el que actua per tal de fer baixar la temperatura d'un lloc o d'un aparell, quan aquesta temperatura puja per sobre d'un cert límit. Un exemple seria un termòstat; en canvi, un dispositiu per regular la temperatura dins d'un marge estret, es designaria amb el número 90.

24 Reservat per a futures aplicacions L'USBR[1] li assigna la funció: interruptor o contactor d'unió de barres.

25 Dispositiu de sincronització o de comprovació de sincronisme. És el que actua quan dos circuits de corrent altern són dins dels límits desitjats de tensió, freqüència i angle de fase, per permetre la connexió en paral·lel d'aquests dos circuits.

[1] «United States Bureau of Reclamation»

26 Dispositiu tèrmic. És el que actua quan la temperatura del camp «shunt» o del bobinat esmorteïdor d'una màquina, la temperatura d'una resistència de limitació de càrrega, o la temperatura d'un líquid, etc., supera un valor determinat. També actua si la temperatura de l'aparell protegit cau per sota d'un valor determinat.

27 Relè de mínima tensió. És el que actua quan la tensió baixa per sota d'un límit determinat.

28 Detector de flama. La seva funció és detectar l'existència de flama en el pilot o cremador principal de, per exemple, una caldera o una turbina de gas.

29 Contactor d'aïllament. És el que s'utilitza amb l'únic propòsit de desconnectar un circuit d'un altre, a causa de maniobres d'emergència, de manteniment o de prova.

30 Relè anunciador. És un dispositiu de reposició no automàtica, que dóna una sèrie d'indicacions visuals individuals, de les funcions d'aparells de protecció, i que es pot disposar també per efectuar una funció de bloqueig.

31 Dispositiu d'excitació separada. És el que connecta un circuit, com ara el camp «shunt» d'una commutatriu, a una font d'excitació separada, durant el procés d'arrencada. També s'utilitza per energitzar el circuit d'encesa d'un rectificador de potència.

32 Relè direccional de potència. És el que actua quan se supera un valor determinat del flux de potència en un sentit donat. També actua per causa d'una inversió de potència, originada per un arc elèctric en el circuit anòdic o catòdic d'un rectificador de potència.

33 Commutador de posició. És el que obre o tanca un contacte, quan un dispositiu principal o una part d'un aparell que no tingui un número funcional de dispositiu, arriba a una posició determinada.

34 Dispositiu principal de seqüència. És un element, com ara un selector de contactes múltiples, o com ara un dispositiu programable, que fixa la seqüència d'operació de dispositius principals, durant l'arrencada i la parada, o durant altres operacions que requereixin una seqüència.

35 Dispositiu per operar escombretes o per posar en curt circuit anells de frec. És el que serveix per elevar, baixar o desviar les escombretes d'una màquina, o per posar en curt circuit els seus anells de frec. També serveix per fer o desfer els contactes d'un rectificador mecànic.

36 Dispositiu de polaritat o de tensió de polarització. És el que acciona o permet l'accionament d'altres dispositius, tan sols amb una polaritat donada, o el que verifica la presència d'una tensió de polarització en un equip.

37 Relè de baixa intensitat o baixa potència. És el que actua quan la intensitat o la potència cauen per sota d'un valor determinat.

38 Dispositiu protector de coixinets. És el que actua amb una temperatura excessiva dels coixinets, o amb condicions mecàniques anòmales que poden derivar en una temperatura excessiva dels coixinets.

39 Detector de condicions mecàniques. És el que actua davant de situacions mecàniques anormals (excepte les que tenen lloc en els coixinets d'una màquina, funció 38), com ara vibració excessiva, excentricitat, etc.

40 Relè de camp. És el que actua quan es dóna un valor massa baix de la intensitat de camp d'una màquina, o quan es dóna un valor massa gran de la component reactiva del corrent d'armadura en una màquina de corrent altern, la qual cosa indica una excitació de camp massa baixa.

41 Interruptor de camp. És un dispositiu que actua per tal de connectar o desconnectar l'excitació del camp d'una màquina.

42 Interruptor de marxa. És un dispositiu que té per funció principal connectar una màquina a la seva font de tensió de funcionament.

43 Dispositiu de transferència. És un element, accionat manualment, que efectua la transferència dels circuits de control, per tal de modificar el procés d'operació d'equips de connexió o d'altres dispositius.

44 Relè de seqüència d'arrencada de grup. És el que actua per arrancar la següent unitat disponible, en un equip de múltiples unitats, quan falla o quan no està disponible la unitat que normalment hauria d'arrencar.

45 Detector de condiciones atmosfèriques. És el que actua davant de condicions atmosfèriques anormals, com ara fums perillosos, gasos explosius, foc, etc.

46 Relè de seqüència negativa d'intensitat. És un relè que actua quan les intensitats polifàsiques estan en seqüència inversa o desequilibrades, o quan contenen una component de seqüència negativa superior a un cert límit.

47 Relè de seqüència de fase de tensió. És el que actua amb un valor donat de tensió, quan es dóna la seqüència de fases desitjada.

48 Relè de seqüència incompleta. És el que torna un equip a la seva posició normal i l'enclava, si la seqüència normal d'arrencada, de funcionament o de parada no s'ha completat degudament en un interval de temps determinat.

49 Relè tèrmic d'una màquina o d'un transformador. És el que actua quan la temperatura d'un element d'una màquina o d'un transformador (normalment un debanat), per on circula el corrent, supera un valor determinat.

50 Relè instantani de sobreintensitat o de velocitat d'augment d'intensitat. És el que actua instantàniament quan es dóna un valor excessiu de la intensitat o de la velocitat d'augment de la intensitat.

51 Relè temporitzat de sobreintensitat de corrent altern. És un relè amb una característica de temps inversa o definida, que actua amb una certa temporització, quan es dóna un valor excessiu de la intensitat.

52 Interruptor de corrent altern. És el que s'utilitza per tancar i obrir un circuit de potència de corrent altern sota condicions normals, de falta o d'emergència.

53 Relè d'excitatriu o de generador de corrent continu. És el que força la creació del camp d'una màquina de corrent continu durant l'arrencada, o el que actua quan la tensió d'una màquina ha arribat a un valor determinat.

54 Interruptor d'alta velocitat, de corrent continu. És el que actua per tal de reduir el corrent d'un circuit principal, en un temps inferior a 0,01 s després d'haver-se produït un corrent massa elevat, o una velocitat de creixement d'aquest corrent massa elevada.

55 Relè de factor de potència. És el que actua quan el factor de potencia en un circuit de corrent altern no arriba o sobrepassa un valor determinat.

56 Relè d'aplicació del camp. És el que s'utilitza per controlar automàticament l'aplicació de l'excitació de camp d'un motor de corrent altern, en un punt predeterminat en el cicle de lliscament.

57 Dispositiu de curt circuit o de posada a terra. És el que opera en un circuit principal per tal de curt circuitar-lo o posar-lo a terra, en resposta a ordres automàtiques o manuals.

58 Relè de fallada de rectificador de potència. És el que actua a causa de la fallada d'un o més ànodes d'un rectificador de potència, o a causa de la fallada d'un díode a conduir o bloquejar pròpiament.

59 Relè de sobretensió. És el que actua quan la tensió supera un valor determinat.

60 Relè d'equilibri de tensió o corrent. És el que actua amb una diferència de tensió o corrent entre dos circuits.

61 Reservat per a futures aplicacions.

62 **Relè de parada o obertura, amb retard de temps**. És el que s'utilitza conjuntament amb el dispositiu que inicia la parada total o la indicació de parada o obertura, en una seqüència automàtica.

63 **Relè de pressió de gas, líquid o buit**. És el que actua a un valor determinat de pressió de líquid o gas, o per a una determinada velocitat de variació d'aquesta pressió.

64 **Relè de protecció de terra**. És el que actua davant d'un defecte a terra de l'aïllament d'una màquina. Aquesta funció s'aplica només a un relè que detecti el pas del corrent des de la carcassa d'una màquina a terra, o a un relè que detecti un terra en un circuit normalment no connectat a terra; no s'aplica a un dispositiu connectat en el circuit secundari d'un transformador d'intensitat, que estigui connectat en el circuit de potència d'un sistema posat normalment a terra.

65 **Regulador**. És un equip format per elements elèctrics, mecànics o fluídics, que controla el flux d'aigua, vapor, etc., a una màquina motriu, per tal d'arrancar-la, mantenir la seva velocitat o parar-la.

66 **Relè de passos**. És el que actua per tal de permetre un nombre especificat d'operacions d'un dispositiu donat, o bé, un nombre especificat d'operacions successives amb un interval donat de temps entre cadascuna. També pot actuar per permetre l'energització periòdica d'un circuit, o per accelerar una màquina a baixa velocitat.

67 **Relè direccional de sobreintensitat de corrent altern**. És el que actua a partir d'un valor determinat de circulació d'intensitat de corrent altern, en un sentit donat.

68 **Relè de bloqueig**. És el que inicia un senyal pilot per bloquejar o disparar, quan hi ha faltes externes en una línia de transmissió, o en altres aparells, sota certes condicions; pot cooperar també amb altres dispositius, per tal de bloquejar el dispar o per bloquejar el reenganxament en una condició de pèrdua de sincronisme.

69 **Dispositiu controlador de permissiu**. És generalment, un interruptor auxiliar de dues posicions, accionat manualment, el qual permet en una posició, el tancament d'un interruptor o la posada en servei d'un equip, i en l'altra posició, impedeix l'accionament de l'interruptor o de l'equip.

70 **Reòstat**. És un dispositiu utilitzat per variar la resistència d'un circuit, en resposta a algun mètode de control.

71 **Relè de nivell de líquid o gas**. És el que actua a partir d'un valor determinat del nivell d'un líquid o d'un gas, o a partir de determinades velocitats de variació d'aquests nivells.

72 **Interruptor de corrent continu**. És el que s'utilitza per tancar i obrir un circuit de potència de corrent continu sota condicions normals, de falta o d'emergència.

73 **Contactor de resistència de càrrega**. És el que s'utilitza per posar en curt circuit o per commutar un graó de càrrega, destinat a limitar o a desviar la càrrega, en un circuit de potència.

74 **Relè d'alarma**. És qualsevol altre relè, diferent al dispositiu 30, que s'utilitza per actuar una alarma visible o audible.

75 **Mecanisme de canvi de posició**. És el que s'utilitza per moure un dispositiu d'un equip des d'una posició a una altra; un exemple, seria el mecanisme utilitzat per canviar un interruptor entre les posicions de connectat, desconnectat i prova.

76 **Relè de sobreintensitat de corrent continu**. És el que actua quan la intensitat en un circuit de corrent continu, sobrepassa un valor determinat.

77 **Transmissor d'impulsos**. És un dispositiu que s'utilitza per generar o transmetre impulsos, a través d'un circuit de telemetria o fil pilot, a un dispositiu d'indicació o recepció remot.

78 **Relè de mesura de l'angle de fase o de protecció de desfase**. És el que actua a partir d'un valor determinat de l'angle de fase entre dues tensions o dues intensitats, o entre una tensió i una intensitat.

79 **Relè de reenganxament de corrent altern**. És el que controla el reenganxament i enclavament d'un interruptor de corrent altern.

80 **Relè de flux de líquids o gasos**. És el que actua a partir d'un valor determinat del flux d'un líquid o d'un gas, o de la velocitat de variació d'aquest flux.

81 **Relè de freqüència**. És el que actua davant una variació de la freqüència o de la seva velocitat de variació.

82 **Relè de reenganxament de corrent continu**. És el que controla el tancament i el reenganxament d'un interruptor de corrent continu, generalment responent a les condicions de càrrega del circuit.

83 **Relè de selecció o transferència del control automàtic**. És el que actua per tal d'escollir automàticament entre certes fonts d'alimentació o entre certes condicions d'un equip; també és el que efectua automàticament una operació de transferència.

84 **Mecanisme d'accionament**. És un mecanisme o un servo-mecanisme elèctric complet, d'un canviador de preses, d'un regulador d'inducció o de qualsevol altre aparell similar, que no tingui número de funció propi.

85 **Relè receptor d'ones portadores o fil pilot**. És un relè actuat per un senyal d'una ona portadora o fil pilot de corrent continu, provocat per una protecció direccional.

86 **Relè d'enclavament**. És un relè accionat elèctricament, amb reposició manual o elèctrica, que actua per parar i mantenir un equip fora de servei, quan hi ha condiciones anormals.

87 **Relè de protecció diferencial**. És el que actua a partir d'una diferència quantitativa de dues intensitats o d'algunes altres magnituds elèctriques.

88 **Motor o grup moto-generador auxiliar**. És un dispositiu que s'utilitza per accionar equips auxiliars.

89 **Desconnectador de línia**. És un dispositiu que s'utilitza com a desconnectador o aïllador en un circuit de potència de corrent continu o altern, sempre que aquest dispositiu sigui operat elèctricament o tingui accessoris elèctrics.

90 **Dispositiu de regulació**. És el que actua per tal de regular una magnitud, com ara la tensió, la intensitat, la potencia, la velocitat, la freqüència, etc., a un valor determinat.

91 **Relè direccional de tensió**. És el que actua quan la tensió entre els extrems oberts d'un interruptor o contactor, sobrepassa un valor determinat, en un sentit donat.

92 **Relè direccional de tensió i potència**. És el que permet o ocasiona la connexió de dos circuits, quan la diferència de tensió entre ambdós supera un valor determinat, en un cert sentit, i ocasiona la desconnexió dels dos circuits, quan la potència circulant supera un valor determinat, en el sentit contrari.

93 **Contactor de canvi del camp**. És el que actua per tal de augmentar o disminuir el valor de l'excitació d'una màquina.

94 **Relè de dispar o dispar lliure**. És el que actua per tal de disparar o permetre disparar un interruptor, un contactor, etc., o per evitar un reenganxament immediat d'un interruptor, en el cas que hagi d'obrir i l'ordre de tancament sigui mantinguda.

95 **Específic.**[2] L'USBR[1] li assigna la funció: relè o contactor de tancament.

96 **Específic.**[2]

[2]Utilitzat en instal·lacions individuals per a aplicacions concretes, quan cap de les funcions 1 a 94 no és apropiada.

97 **Específic**.[2]

98 **Específic**.[2] L'USBR[1] li assigna la funció: relè de pèrdua d'excitació.

99 **Específic**.[2] L'USBR[1] li assigna la funció: detector d'arc elèctric.

Part IV

Apèndixs

Apèndix A

Alfabet Grec

En la Taula A.1 es pot veure l'alfabet grec, amb els noms de les lletres en diversos idiomes.

Taula A.1: Alfabet grec

Número d'ordre	Lletra		Nom		
	minúscula	majúscula	català	castellà	anglès
1	α	A	alfa	alfa	alpha
2	β	B	beta	beta	beta
3	γ	Γ	gamma	gamma	gamma
4	δ	Δ	delta	delta	delta
5	ϵ, ε	E	èpsilon	épsilon	epsilon
6	ζ	Z	zeta	dseda	zeta
7	η	H	eta	eta	eta
8	θ, ϑ	Θ	theta	zeta	theta
9	ι	I	iota	iota	iota
10	κ	K	kappa	kappa	kappa
11	λ	Λ	lambda	lambda	lambda
12	μ	M	mi	mi	mu
13	ν	N	ni	ni	nu
14	ξ	Ξ	ksi, csi	xi	xi
15	o	O	òmicron	ómicron	omicron
16	π, ϖ	Π	pi	pi	pi
17	ρ, ϱ	P	rho, ro	ro	rho
18	σ, ς	Σ	sigma	sigma	sigma
19	τ	T	tau	tau	tau
20	υ	Υ	ípsilon	ípsilon	upsilon
21	ϕ, φ	Φ	fi	fi	phi
22	χ	X	khi	ji	chi
23	ψ	Ψ	psi	psi	psi
24	ω	Ω	omega	omega	omega

Les dues grafies de la lletra minúscula èpsilon (ϵ, ε) són totalment equivalents entre sí; el mateix passa amb les dues grafies de les lletres minúscules theta (θ, ϑ), rho (ρ, ϱ) i fi (ϕ, φ).

La lletra sigma minúscula té dues variants: ς, escrita en grec al final d'una paraula, i σ, escrita en grec a l'inici o en mig d'una paraula. En els textos tècnics i científics s'utilitza majoritàriament la variant σ.

La variant ϖ de la lletra pi, es denomina «pi dòrica» en català, «pi dórica» en castellà i «dorian pi» en anglès.

Pel que fa als noms de les lletres, alguns poden sorprendre; això no és estrany ja que algunes lletres han rebut històricament noms diversos, i fins i tot contradictoris respecte dels actuals.

Els noms anglesos de les lletres són els més uniformes, ja que no s'ha observat cap variació en les diverses fonts consultades.

Els noms catalans de les lletres són els que apareixen en el «Gran Diccionari de la Llengua Catalana, 1999». Altres noms utilitzats en les diverses fonts consultades són:

B, β: vita.	H, η: ita.	T, τ: taf.
Z, ζ: zita.	Θ, θ: thita.	

Els noms castellans de les lletres són els que apareixen en el «Diccionario de la Lengua Española (D.R.A.E.), 22ª edición (2001)». Altres noms utilitzats en les diverses fonts consultades són:

Z, ζ: zeta[1], dseta, dzeta.	M, μ: my[1], mu.	P, ρ: rho.
Θ, θ: theta[1], thita.	N, ν: ny[1], nu.	Y, υ: úpsilon.
K, κ: cappa.	O, o: omicrón.	Φ, ϕ: phi.

[1]Aquests noms eren els que apareixien en les edicions del D.R.A.E anteriors a la 21a (1992)

Apèndix B

Sistema Internacional d'Unitats (SI)

S'expliquen a continuació qüestions relacionades amb el sistema internacional d'unitats (SI), el qual està definit pel «Bureau International des Poids et Mesures» (BIPM). Podeu trobar més informació a l'adreça: www.bipm.fr.

B.1 Unitats fonamentals

En la Taula B.1 es poden veure les unitats fonamentals del sistema internacional d'unitats.

Taula B.1: Unitats fonamentals de l'SI

Magnitud	Unitat	Símbol
longitud	metre	m
massa	quilogram	kg
temps	segon	s
intensitat de corrent elèctric	ampere	A
temperatura termodinàmica	kelvin	K
quantitat de matèria	mol	mol
intensitat lluminosa	candela	cd

Es presenten a continuació, de forma breu, les definicions d'aquestes unitats fonamentals; entre parèntesis, s'indica l'any en què la «Conférence Générale des Poids et Mesures» les va posar en vigor.

metre: Longitud de la trajectòria recorreguda per la llum en el buit, durant un interval de temps igual a $1/299792458\,\mathrm{s}$ (1983).

quilogram: Massa del prototip internacional del quilogram, fet de platí-iridi i conservat al «Bureau International des Poids et Mesures» (1901).

segon: Durada de 9192631770 períodes de la radiació corresponent a la transició entre els dos nivells hiperfins, de l'estat fonamental de l'àtom de cesi-133 (1967).

ampere: Intensitat d'un corrent constant, que mantinguda en dos conductors paral·lels rectilinis de longitud infinita, de secció transversal negligible, i situats a una distància l'un de l'altre d'un metre, en el buit, produeix una força entre aquests dos conductors de $2 \cdot 10^{-7}$ N/m (1948).

kelvin: Fracció 1/273,16 de la temperatura termodinàmica corresponent al punt triple de l'aigua (1967).

mol: Quantitat de matèria que conté tantes entitats elementals, com àtoms hi ha en 0,012 kg de carboni-12 (1971).

candela: Intensitat lluminosa, en una direcció determinada, d'una font que emet radiació monocromàtica de freqüència $540 \cdot 10^{12}$ Hz, i que té una intensitat radiant en aquesta direcció de $\frac{1}{683}$ W/sr (1979).

B.2 Unitats derivades

En la Taula B.2 es presenta una llista no exhaustiva, d'unitats derivades del sistema internacional d'unitats.

Taula B.2: Algunes unitats derivades de l'SI

Magnitud	Unitat	Símbol	Equivalència en unitats SI	
			fonamentals	altres
angle pla	radiant	rad	$m \cdot m^{-1} = 1$	—
angle sòlid	estereoradiant	sr	$m^2 \cdot m^{-2} = 1$	—
freqüència	hertz	Hz	s^{-1}	—
força	newton	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$	—
pressió	pascal	Pa	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$	N/m^2
energia, treball	joule	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	$N \cdot m$
potència	watt	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	J/s
càrrega elèctrica	coulomb	C	$s \cdot A$	—
potencial elèctric	volt	V	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	W/A
capacitat elèctrica	farad	F	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$	C/V
resistència elèctrica	ohm	Ω	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	V/A
conductància elèctrica	siemens	S	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$	A/V
flux magnètic	weber	Wb	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	$V \cdot s$
densitat de flux magnètic	tesla	T	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	Wb/m^2
inductància	henry	H	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	Wb/A
temperatura Celsius	grau Celsius	°C	K	—
flux lluminós	lumen	lm	cd	$cd \cdot sr$
il·luminació	lux	lx	$m^{-2} \cdot cd$	lm/m^2
activitat d'un radionúclid	becquerel	Bq	s^{-1}	—
dosi absorbida	gray	Gy	$m^2 \cdot s^{-2}$	J/kg
dosi equivalent	sievert	Sv	$m^2 \cdot s^{-2}$	J/kg
viscositat dinàmica	pascal segon	$Pa \cdot s$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$	—

(*continua a la pàgina següent*)

Taula B.2: Algunes unitats derivades de l'SI (*ve de la pàgina anterior*)

Magnitud	Unitat	Símbol	Equivalència en unitats SI	
			fonamentals	altres
tensió superficial	newton per metre	N/m	$kg \cdot s^{-2}$	—
intensitat de camp elèctric	volt per metre	V/m	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	—
permitivitat	farad per metre	F/m	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^{4} \cdot A^{2}$	—
permeabilitat	henry per metre	H/m	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	—

B.3 Prefixes

En la Taula B.3 es presenta una llista, amb els prefixes que es poden anteposar a les unitats del sistema internacional d'unitats, per tal de formar els seus múltiples i submúltiples.

Taula B.3: Prefixes de l'SI

Múltiples			Submúltiples		
factor	nom	símbol	factor	nom	símbol
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	mil·li	m
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d

B.4 Normes d'escriptura

Es presenten a continuació, algunes normes aplicables a l'escriptura de les unitats del sistema internacional d'unitats.

Els símbols de les unitats no canvien de forma en el plural, no han d'utilitzar-se abreviatures, ni han d'afegir-se o suprimir-se lletres. Exemple: 150 kg, 25 m, 33 cm^3 (incorrecte: 150 Kgs, 25 mts, 33 cc).

Els símbols de les unitats no han d'anar seguits d'un punt (no són abreviatures), llevat que es trobin al final d'una oració.

Els símbols de les unitats s'escriuen a la dreta dels valors numèrics, separats per un espai en blanc. Exemple: 25 V, 40 °C (incorrecte: 25V, 40°C).

En el cas de símbols d'unitats derivades, formats pel producte d'altres unitats, el producte s'indicarà mitjançant un punt volat o un espai en blanc. Exemple: $24\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$, 24 N m. En aquest darrer cas, cal tenir en compte l'ordre en què s'escriuen les unitats, ja que algunes combinacions poden produir confusió, i és millor evitar-les. Exemple: 24 N m (24 newton metre) i 24 m N (24 metre newton) són expressions equivalents, però aquesta darrera pot ser confosa amb 24 mN (24 mil·linewton).

En el cas de símbols d'unitats derivades, formats per la divisió d'altres unitats, la divisió s'indicarà mitjançant una línia inclinada o horitzontal, o mitjançant potències negatives. Exemple: 100 m/s, $100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $100\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

En el cas anterior, quan s'utilitza la línia inclinada i hi ha més d'una unitat en el denominador, aquestes unitats s'han d'escriure entre parèntesis. Exemple: $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}/(\mathrm{s}^3\cdot\mathrm{A})$ (incorrecte: $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}/\mathrm{s}^3\cdot\mathrm{A}$, $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}/\mathrm{s}^3/\mathrm{A}$).

No ha de deixar-se cap espai en blanc entre el símbol d'un prefixe i el símbol d'una unitat. Exemple: 12 pF, 3 GHz (incorrecte: 12 p F, 3 G Hz).

El grup format pel símbol d'un prefixe i el símbol d'una unitat esdevé un nou símbol inseparable (formant un múltiple o submúltiple de la unitat), i pot ser pujat a una potència positiva o negativa, i combinat amb altres símbols. Exemple: $20\,\mathrm{km}^2$, 1 V/cm.

Tan sols es permet un prefixe davant d'una unitat. Exemple: 8 nm (incorrecte: 8 mμm).

En el cas dels símbols d'unitats derivades, formades per la divisió d'altres unitats, l'ús de prefixes en el numerador i denominador de forma simultània pot causar confusió, i és preferible, per tant, utilitzar una alta combinació d'unitats on només el numerador o el denominador tinguin prefix. Exemple: 10 kV/mm és acceptable, però és preferible utilitzar 10 MV/m.

De forma anàloga, el mateix és aplicable als símbols d'unitats derivades, formades pel producte d'altres unitats. Exemple: $10\,\mathrm{MV}\cdot\mathrm{ms}$ és acceptable, però és preferible utilitzar $10\,\mathrm{kV}\cdot\mathrm{s}$.

Els noms de les unitats de l'SI s'escriuen en minúscula, excepte en el cas de «grau Celsius», i a l'inici d'una oració.

Les unitats que tenen noms provinents de noms propis, s'han d'escriure tal com apareixen en les taules B.1 a la pàgina 135 i B.2 a la pàgina 136, i no s'han de traduir. Exemple: 50 newton, 300 joule (incorrecte: 50 neuton, 300 joul).

Quan el nom d'una unitat conté un prefixe, ambdues parts s'han d'escriure juntes. Exemple: 1 mil·ligram (incorrecte: 1 mil·li gram, 1 mil·li-gram).

En el cas d'unitats derivades que s'expressen amb divisions o productes, s'utilitza la preposició «per» entre dos noms d'unitats per indicar la divisió, i no s'utilitza cap paraula per indicar el producte. Exemple: 100 V/m és equivalent a 100 volt per metre (incorrecte: 100 volt/metre), 20 $\Omega\cdot\mathrm{m}$ és equivalent a 20 ohm metre (incorrecte: 20 ohm per metre).

El valor d'una quantitat ha d'expressar-se utilitzant únicament una unitat. Exemple: 10,234 m (incorrecte: 10 m 23 cm 4 mm).

Quan s'expressa el valor d'una quantitat, és incorrecte afegir lletres o altres símbols a la unitat; qualsevol informació addicional necessària, ha d'afegir-se a la quantitat; Exemple: $U_{pp} = 1000\,\mathrm{V}$ (incorrecte: $U = 1000\,\mathrm{V}_{pp}$).

Quan s'indiquen valors de magnituds amb les seves desviacions, s'indiquen intervals, o s'expressen diversos valors numèrics, les unitats han de ser presents en cadascun dels valors, o s'han d'usar parèntesis si es vol posar les unitats només al final. Exemple: $63{,}2\,\mathrm{m} \pm 0{,}1\,\mathrm{m}$, $(63{,}2 \pm 0{,}1)\,\mathrm{m}$ (incorrecte: $63{,}2 \pm 0{,}1\,\mathrm{m}$, $63{,}2\,\mathrm{m} \pm 0{,}1$), $0\,\mathrm{V}$ a $5\,\mathrm{V}$, (0 a 5) V (incorrecte: 0 a 5 V), $50\,\mathrm{m} \times 50\,\mathrm{m}$ (incorrecte: $50 \times 50\,\mathrm{m}$), 127 s + 3 s = 130 s, (127 + 3) s = 130 s (incorrecte: 127 + 3 s = 130 s).

Apèndix C

Constants Físiques

En la Taula C.1 es pot veure una recopilació de constants físiques.

Els valors de les constants d'aquesta taula, són els recomanats l'any 2002 pel «Committee on Data for Science and Technology» (CODATA), un comitè científic de l'«International Council for Science»; les xifres entre parèntesis representen la millor estimació coneguda de la constant en qüestió, en aquesta data. Podeu trobar més informació a l'adreça: www.codata.org.

Taula C.1: Constants físiques

Magnitud	Símbol	Valor	Unitats	Error relatiu
velocitat de la llum en el buit	c	299792458	$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	exacte
constant magnètica	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$\mathrm{N \cdot A^{-2}}$	exacte
constant elèctrica: $1/(\mu_0 c^2)$	ϵ_0	$8{,}854187817... \cdot 10^{-12}$	$\mathrm{F \cdot m^{-1}}$	exacte
impedància característica del buit: $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$	Z_0	376,730313461...	Ω	exacte
atmosfera estàndard	p_0	101325	Pa	exacte
acceleració de la gravetat estàndard	g_n	9,80665	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$	exacte
massa molar del carboni-12	$M(^{12}\mathrm{C})$	$12 \cdot 10^{-3}$	$\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$	exacte
constant gravitacional de Newton	G	$6{,}6742(10) \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$
constant de Planck	h	$6{,}6260693(11) \cdot 10^{-34}$	$\mathrm{J \cdot s}$	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
constant de Planck reduïda: $h/(2\pi)$	$\hbar$	$1{,}05457168(18) \cdot 10^{-34}$	$\mathrm{J \cdot s}$	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
càrrega elemental	e	$1{,}60217653(14) \cdot 10^{-19}$	C	$8{,}5 \cdot 10^{-8}$
massa de l'electró	m_e	$9{,}1093826(16) \cdot 10^{-31}$	kg	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$

(*continua a la pàgina següent*)

Taula C.1: Constants físiques (*ve de la pàgina anterior*)

Magnitud	Símbol	Valor	Unitats	Error relatiu
massa del protó	m_p	$1{,}67262171(29) \cdot 10^{-27}$	kg	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
massa del neutró	m_n	$1{,}67492728(29) \cdot 10^{-27}$	kg	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
massa del deuteri	m_d	$3{,}34358335(57) \cdot 10^{-27}$	kg	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
massa de la partícula α	m_α	$6{,}6446565(11) \cdot 10^{-27}$	kg	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
radi de Bohr: $4\pi\epsilon_0\hbar^2/(m_\mathrm{e}e^2)$	a_0	$0{,}5291772108(18) \cdot 10^{-10}$	m	$3{,}3 \cdot 10^{-9}$
número d'Avogadro	N_A	$6{,}0221415(10) \cdot 10^{23}$	mol^{-1}	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
constant molar dels gasos	R	$8{,}314472(15)$	$\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	$1{,}7 \cdot 10^{-6}$
constant de Faraday: eN_A	F	96485,3383(83)	$\mathrm{C \cdot mol^{-1}}$	$8{,}6 \cdot 10^{-8}$
constant de Boltzmann: R/N_A	k	$1{,}3806505(24) \cdot 10^{-23}$	$\mathrm{J \cdot K^{-1}}$	$1{,}8 \cdot 10^{-6}$
constant d'Stefan-Boltzmann: $\pi^2k^4/(60\,\hbar^3c^2)$	σ	$5{,}670400(40) \cdot 10^{-8}$	$\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$	$7{,}0 \cdot 10^{-6}$

Apèndix D

Escales Logarítmiques

En diferents camps de l'electrotècnia, és usual trobar-se gràfics amb escales logarítmiques.

Un exemple clar, són els gràfics d'actuació dels interruptors magnetotèrmics o dels fusibles, on les seves corbes característiques intensitat–temps estan representades en una escala logarítmica–logarítmica o lineal–logarítmica.

En aquests casos, es presenta freqüentment la necessitat de determinar amb exactitud un punt de la corba, que no coincideix amb cap de les línies divisòries del gràfic. Atenent a la Figura D.1, es tractaria de determinar el valor x dins de la dècada 10^N a 10^{N+1}.

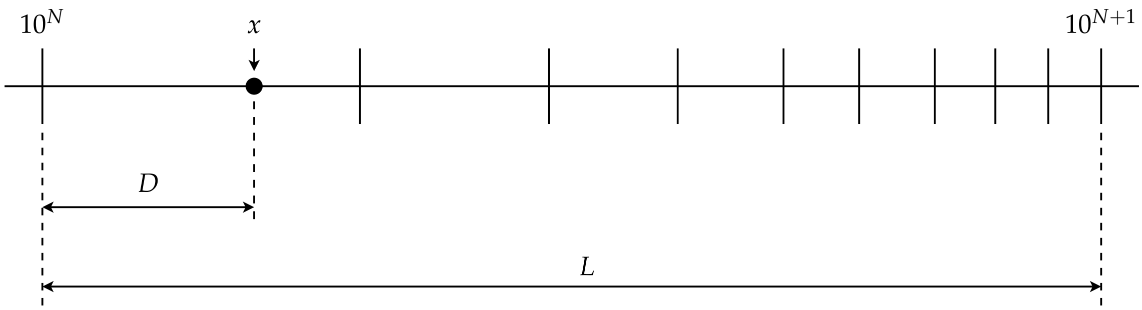


Figura D.1: Escala logarítmica

Si mesurem amb un regle la distància D des de l'inici de la dècada fins al punt x, i la longitud total L de la dècada, el valor x buscat ve donat per l'expressió:

$$x = 10^{\left(N+\frac{D}{L}\right)} \tag{D.1}$$

Si estem interessats en el problema invers, és a dir, en trobar la distància D corresponent a un valor conegut x dins de la dècada 10^N a 10^{N+1}, podem emprar l'expressió:

$$D = L(\log x - N) = L \log \frac{x}{10^N} \tag{D.2}$$

Exemple D.1 *Es tracta de trobar el valor x dins de la dècada 100 a 1000, corresponent a una distància $D = 11\,\text{mm}$; la longitud total de la dècada és $L = 56\,\text{mm}$.*

En aquest cas tenim $N = 2$*, i per tant:*

$$x = 10^{\left(2+\frac{11\,\mathrm{mm}}{56\,\mathrm{mm}}\right)} = 157{,}19$$

Exemple D.2 *Es tracta de trobar la distància* D *a la qual hem de dibuixar el valor* $x = 5$*, dins de la dècada 1 a 10; la longitud total de la dècada és* $L = 56\,\mathrm{mm}$.

En aquest cas tenim $N = 0$*, i per tant:*

$$D = 56\,\mathrm{mm} \cdot (\log 5 - 0) = 39{,}1\,\mathrm{mm}$$

Apèndix E

Relacions Trigonomètriques

E.1 Funcions Trigonomètriques

En la Taula E.1 es pot veure el signe de les funcions trigonomètriques, segons en quin dels quatre quadrants es trobi l'angle α. I: $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, II: $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, III: $\alpha \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, IV: $\alpha \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

Taula E.1: Signes de les funcions trigonomètriques ens el quatre quadrants

$\sin\alpha > 0$	$\cos\alpha < 0$	$\tan\alpha < 0$			$\sin\alpha > 0$	$\cos\alpha > 0$	$\tan\alpha > 0$
$\csc\alpha > 0$	$\sec\alpha < 0$	$\cot\alpha < 0$	**II**	**I**	$\csc\alpha > 0$	$\sec\alpha > 0$	$\cot\alpha > 0$
$\sin\alpha < 0$	$\cos\alpha < 0$	$\tan\alpha > 0$	**III**	**IV**	$\sin\alpha < 0$	$\cos\alpha > 0$	$\tan\alpha < 0$
$\csc\alpha < 0$	$\sec\alpha < 0$	$\cot\alpha > 0$			$\csc\alpha < 0$	$\sec\alpha > 0$	$\cot\alpha < 0$

Es presenten a continuació les funcions trigonomètriques d'angles en qualsevol quadrant, en funció d'un angle en el primer quadrant, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \csc(-\alpha) = -\csc\alpha \tag{E.1a}$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha \qquad \sec(-\alpha) = +\sec\alpha \tag{E.1b}$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \tag{E.1c}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = +\cos\alpha \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = +\sec\alpha \tag{E.2a}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\csc\alpha \tag{E.2b}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\cot\alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\tan\alpha \tag{E.2c}$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha \qquad \csc(\pi \pm \alpha) = \mp\csc\alpha \tag{E.3a}$$
$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha \qquad \sec(\pi \pm \alpha) = -\sec\alpha \tag{E.3b}$$
$$\tan(\pi \pm \alpha) = \pm\tan\alpha \qquad \cot(\pi \pm \alpha) = \pm\cot\alpha \tag{E.3c}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos\alpha \qquad \csc\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\sec\alpha \tag{E.4a}$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\sin\alpha \qquad \sec\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\csc\alpha \tag{E.4b}$$
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\cot\alpha \qquad \cot\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\tan\alpha \tag{E.4c}$$

$$\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm\sin\alpha \qquad \csc(2\pi \pm \alpha) = \pm\csc\alpha \tag{E.5a}$$
$$\cos(2\pi \pm \alpha) = +\cos\alpha \qquad \sec(2\pi \pm \alpha) = +\sec\alpha \tag{E.5b}$$
$$\tan(2\pi \pm \alpha) = \pm\tan\alpha \qquad \cot(2\pi \pm \alpha) = \pm\cot\alpha \tag{E.5c}$$

En la Taula E.2 es pot veure el valor de les funcions trigonomètriques per a diversos angles usuals.

Taula E.2: Valors de les funcions trigonomètriques per a diversos angles

α [rad]	α [°]	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\cot\alpha$
0	0	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	0
π	180	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$
$\frac{3\pi}{2}$	270	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	0

Es dóna a continuació cadascuna de les funcions trigonomètriques, en funció de totes les altres. Els signe $\pm$ que apareix en les equacions, ve determinat pel quadrant on es troba l'angle α (vegeu la Taula E.1 a la pàgina anterior).

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha} = \frac{1}{\csc\alpha} \tag{E.6a}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\pm\sqrt{\csc^2\alpha - 1}}{\csc\alpha} \tag{E.6b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha} = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = \frac{1}{\pm\sqrt{\csc^2\alpha - 1}} \tag{E.6c}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha} = \pm\sqrt{1+\cot^2\alpha} = \frac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}} \tag{E.6d}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha} = \frac{\csc\alpha}{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}} \tag{E.6e}$$

$$\cot\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}} = \pm\sqrt{\csc^2\alpha-1} \tag{E.6f}$$

Identitats fonamentals de les funcions trigonomètriques:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{E.7}$$

$$1+\tan^2\alpha = \sec^2\alpha \tag{E.8}$$

$$1+\cot^2\alpha = \csc^2\alpha \tag{E.9}$$

$$\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} \tag{E.10}$$

Funcions trigonomètriques de l'angle doble, i generalització per a $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \sin n\alpha = 2\sin[(n-1)\alpha]\cos\alpha - \sin[(n-2)\alpha] \tag{E.11a}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos n\alpha = 2\cos[(n-1)\alpha]\cos\alpha - \cos[(n-2)\alpha] \tag{E.11b}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \tan n\alpha = \frac{\tan[(n-1)\alpha]+\tan\alpha}{1-\tan[(n-1)\alpha]\tan\alpha} \tag{E.11c}$$

Funcions trigonomètriques de l'angle meitat. Els signe $\pm$ que apareix en les equacions, ve determinat pel quadrant on es troba l'angle $\frac{\alpha}{2}$ (vegeu la Taula E.1 a la pàgina 145):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{E.12a}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{E.12b}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{E.12c}$$

Funcions trigonomètriques de la suma i diferència d'angles:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \tag{E.13a}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha \tag{E.13b}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \tag{E.13c}$$

Suma i diferència de funcions trigonomètriques:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{E.14a}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{E.14b}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{E.14c}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{E.14d}$$

Producte de funcions trigonomètriques:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2} \tag{E.15a}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2} \tag{E.15b}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \tag{E.15c}$$

Producte de funcions trigonomètriques del la suma i diferència d'angles:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha \tag{E.16a}$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha \tag{E.16b}$$

Potències de funcions trigonomètriques:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \tag{E.17a}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} \qquad \cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4} \tag{E.17b}$$

$$\sin^4\alpha = \frac{3-4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8} \qquad \cos^4\alpha = \frac{3+4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8} \tag{E.17c}$$

Conversió de suma o diferència de funcions cosinus i sinus, en funcions cosinus ($A, B \in \mathbb{R}^+$):

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\alpha - \arctan\frac{B}{A}\right) \tag{E.18a}$$

$$-A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\alpha - \arctan\frac{A}{B} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{E.18b}$$

$$-A\cos\alpha - B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\alpha + \arctan\frac{A}{B} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{E.18c}$$

$$A\cos\alpha - B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\alpha + \arctan\frac{B}{A}\right) \tag{E.18d}$$

Conversió de suma o diferència de funcions cosinus i sinus, en funcions sinus ($A, B \in \mathbb{R}^+$):

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin\left(\alpha - \arctan\frac{B}{A} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{E.19a}$$

$$-A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin\left(\alpha - \arctan\frac{A}{B}\right) \tag{E.19b}$$

$$-A\cos\alpha - B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin\left(\alpha + \arctan\frac{A}{B} + \pi\right) \tag{E.19c}$$

$$A\cos\alpha - B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin\left(\alpha + \arctan\frac{B}{A} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{E.19d}$$

E.2 Lleis dels sinus, cosinus i tangents

Les lleis del sinus, cosinus i tangents, relacionen les longituds dels tres costats a, b i c d'un triangle qualsevol, com el de la Figura E.1, amb els seus tres angles interiors α β i γ, i amb el radi R de la circumferència circumscrita al triangle.

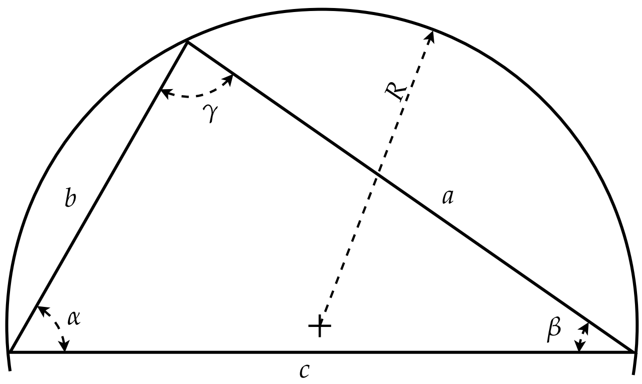


Figura E.1: Lleis dels sinus, cosinus i tangents

La llei dels sinus ens dóna la relació següent:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \tag{E.20}$$

La llei dels cosinus ens dóna les relacions següents:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{E.21a}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \tag{E.21b}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{E.21c}$$

La llei de les tangents ens dóna les relacions següents:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}} \tag{E.22a}$$

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}} \tag{E.22b}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}} \tag{E.22c}$$

E.3 Funcions Hiperbòliques

Definició de les funcions hiperbòliques ($z \in \mathbb{C}$):

$$\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{csch} z \equiv \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} \tag{E.23a}$$

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{sech} z \equiv \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \tag{E.23b}$$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \qquad \coth z \equiv \frac{1}{\tanh z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} \tag{E.23c}$$

Identitats fonamentals de les funcions hiperbòliques ($z \in \mathbb{C}$):

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \tag{E.24}$$

$$\operatorname{sech}^2 z + \tanh^2 z = 1 \tag{E.25}$$

$$\operatorname{csch}^2 z - \coth^2 z = -1 \tag{E.26}$$

$$\cosh z + \sinh z = e^z \tag{E.27}$$

Les funcions hiperbòliques presenten les següents simetries ($z \in \mathbb{C}$):

$$\sinh(-z) = -\sinh z \tag{E.28a}$$

$$\cosh(-z) = \cosh z \tag{E.28b}$$

$$\tanh(-z) = -\tanh z \tag{E.28c}$$

Funcions hiperbòliques de la suma i diferència d'arguments ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1 \tag{E.29a}$$

$$\sinh(z_1 - z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_2 \cosh z_1 \tag{E.29b}$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \sinh z_1 \tag{E.29c}$$

$$\cosh(z_1 - z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_2 \sinh z_1 \tag{E.29d}$$

$$\tanh(z_1 + z_2) = \frac{\tanh z_1 + \tanh z_2}{1 + \tanh z_1 \tanh z_2} \tag{E.29e}$$

$$\tanh(z_1 - z_2) = \frac{\tanh z_1 - \tanh z_2}{1 - \tanh z_1 \tanh z_2} \tag{E.29f}$$

Suma i diferència de funcions hiperbòliques ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

$$\sinh z_1 + \sinh z_2 = 2 \sinh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right) \tag{E.30a}$$

$$\sinh z_1 - \sinh z_2 = 2 \cosh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right) \tag{E.30b}$$

$$\cosh z_1 + \cosh z_2 = 2 \cosh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right) \tag{E.30c}$$

$$\cosh z_1 - \cosh z_2 = 2 \sinh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right) \tag{E.30d}$$

Producte de funcions hiperbòliques ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

$$\sinh z_1 \cosh z_2 = \frac{\sinh(z_1 + z_2) + \sinh(z_1 - z_2)}{2} \tag{E.31a}$$

$$\cosh z_1 \cosh z_2 = \frac{\cosh(z_1 + z_2) + \cosh(z_1 - z_2)}{2} \tag{E.31b}$$

$$\sinh z_1 \sinh z_2 = \frac{\cosh(z_1 + z_2) - \cosh(z_1 - z_2)}{2} \tag{E.31c}$$

Apèndix F

Grau de Protecció IP

La codificació «International Protection» (IP), segons la norma CEI 60529, s'utilitza per descriure el grau de protecció proporcionat per les evolvents d'equips elèctrics, contra la penetració de cossos sòlids estranys i contra els efectes nocius de l'aigua.

F.1 Codificació

La codificació consisteix en les sigles **IP** seguides per dues xifres, més una lletra addicional (opcional) i una lletra suplementària (opcional); quan el grau de protecció corresponent a una de les dues xifres no s'utilitzi, perquè no sigui necessari o perquè no sigui conegut, es reemplaçarà la xifra en qüestió per una **X**. Es defineix a continuació el significat de les xifres i lletres que formen el codi IP:

1a xifra. Indica el grau de protecció de les persones contra els contactes amb parts en tensió, o amb peces en moviment, i el grau de protecció dels equips contra la penetració de cossos sòlids i pols. Els valors possibles són els següents:

0 Sense protecció.

1 Protegit contra l'entrada de cossos sòlids superiors a 50 mm, com per exemple, contactes involuntaris de la mà.

2 Protegit contra l'entrada de cossos superiors a 12,5 mm, com per exemple, contactes involuntaris dels dits de la mà.

3 Protegit contra l'entrada de cossos superiors a 2,5 mm, com per exemple, eines o cables.

4 Protegit contra l'entrada de cossos superiors a 1 mm.

5 Protegit contra la pols. Es permet la seva entrada allà on no sigui perjudicial.

6 Protegit totalment contra la pols.

2a xifra. Indica el grau de protecció dels equips contra l'entrada d'aigua. Els valors possibles són els següents:

0 Sense protecció.

1 Protegit contra la caiguda vertical d'aigua.

2 Protegit contra la caiguda d'aigua, fins a 15 ° de la vertical.

3 Protegit contra la caiguda d'aigua, fins a 60 ° de la vertical.

4 Protegit contra la caiguda d'aigua, en totes les direccions.

5 Protegit contra aigua llançada per mànegues.

6 Protegit contra aigua llançada per cops de mar.

7 Protegit contra la immersió temporal.

8 Protegit contra la immersió prolongada, o a gran pressió.

Lletra addicional (opcional). En alguns casos la protecció proporcionada per les evolvents contra l'accés a les parts perilloses és millor que la indicada per la primera xifra del codi; en aquests casos, es pot caracteritzar aquesta protecció amb una lletra addicional, afegida després de les dues xifres; això permet tenir obertures adequades per a la ventilació, guardant a l'hora el grau requerit de protecció de les persones. Els valors possibles són els següents:

A Els cossos estranys de diàmetre superior a 50 mm, poden penetrar en l'evolvent, però tan sols d'una forma voluntària i deliberada.

B Els cossos estranys de diàmetre superior a 12,5 mm poden penetrar en l'evolvent, però un dit de la mà no ha de poder entrar més de 80 mm, i ha de quedar per tant, a una distància suficient de les parts perilloses.

C Els cossos estranys de diàmetre superior a 2,5 mm poden penetrar en l'evolvent, però un filferro d'acer d'aquest diàmetre i 100 mm de longitud, ha de quedar a una distància suficient de les parts perilloses.

D Els cossos estranys de diàmetre superior a 1 mm poden penetrar en l'evolvent, però un filferro d'acer d'aquest diàmetre i 100 mm de longitud, ha de quedar a una distància suficient de les parts perilloses.

Lletra suplementària (opcional). El codi IP accepta també algunes lletres suplementàries al final, per tal d'afegir una informació concreta. Els valors possibles són els següents:

H Material d'alta tensió.

M En màquines rotatives, indica que els assajos s'han realitzat amb el rotor girant.

S En màquines rotatives, indica que els assajos s'han realitzat amb el rotor parat.

W Protecció contra la intempèrie.

F.2 Altres normes

Les normes d'alguns països, com ara Bèlgica, Espanya, França i Portugal, referents a la codificació IP, permetien afegir una tercera xifra, després de les dues primeres, per tal de codificar també la protecció proporcionada per les evolvents contra els impactes mecànics. No obstant, des de l'adopció de la norma CEI 60529, cap país europeu no pot tenir un codi IP diferent. Havent rebutjat fins ara la CEI afegir aquesta tercera xifra al codi IP, l'única solució possible per tal de mantenir una classificació d'aquest concepte, era la creació d'un codi diferent. Aquest es l'objectiu de la norma europea EN 50102: el codi **IK**; els valor d'aquest codi són: **IK00**, **IK01**, ... , **IK09**, **IK10**, i representen valors creixents d'energia d'impacte que pot suportar l'evolvent.

Apèndix G

Classes NEMA d'Aïllaments Tèrmics en Motors

Quan es posa en marxa un motor, la seva temperatura comença a pujar per sobre de la temperatura ambient, a causa del corrent que circula pels seus debanats.

La «National Electrical Manufacturers Association» (NEMA), defineix diverses classes d'aïllament tèrmic, depenent de l'increment global de temperatura permès respecte de la temperatura ambient, que fixa en 40 °C; per a cada classe, es permet un increment addicional de temperatura en el punt més calent, situat en el centre dels debanats del motor.

En la Taula G.1 es donen els valors dels increments de temperatura permesos per a cadascuna de les diferents classes d'aïllament, partint d'una temperatura ambient de 40 °C.

Taula G.1: Classes NEMA d'aïllaments tèrmics en motors

Classe NEMA	Increment global de temperatura sobre la temperatura ambient	Increment addicional de temperatura en el punt més calent
A	60 °C	5 °C
B	80 °C	10 °C
F	105 °C	10 °C
H	125 °C	15 °C

Apèndix H

Designació de les Classes de Refrigeració en els Transformadors de Potència

Les classes de refrigeració utilitzades en els transformadors de potència, es designen mitjançant quatre lletres.

Actualment, la definició i l'ús d'aquestes lletres, és coincident entre la norma europea (CEI 60076-2) i la norma americana (ANSI C57.12).

Es defineix a continuació el significat d'aquestes lletres:

1a lletra. Indica l'element refrigerant intern, que està en contacte amb els debanats del transformador. Els valors possibles són els següents:

O L'element refrigerant és un oli mineral o un líquid sintètic aïllant, amb una temperatura d'ignició inferior o igual a 300 °C.

K L'element refrigerant és un líquid sintètic aïllant, amb una temperatura d'ignició superior a 300 °C.

L L'element refrigerant és un líquid sintètic aïllant, amb una temperatura d'ignició no mesurable.

2a lletra. Indica el mecanisme de circulació de l'element refrigerant intern. Els valors possibles són els següents:

N Circulació mitjançant convecció natural, a través de l'equip refrigerant i pels debanats del transformador.

F Circulació forçada a través de l'equip refrigerant (mitjançant bombes), i circulació mitjançant convecció natural pels debanats del transformador. Aquest tipus de circulació també s'anomena «de flux no dirigit».

D Circulació forçada a través de l'equip refrigerant (mitjançant bombes), i dirigida per aquest equip refrigerant cap als debanats del transformador i, de manera opcional, també cap a altres parts del transformador. Aquest tipus de circulació també s'anomena «de flux dirigit».

3a lletra. Indica l'element refrigerant extern. Els valors possibles són els següents:

A L'element refrigerant és l'aire.

W L'element refrigerant és l'aigua.

4a lletra. Indica el mecanisme de circulació de l'element refrigerant extern. Els valors possibles són els següents:

N Circulació mitjançant convecció natural.

F Circulació forçada, mitjançant ventiladors (en el cas de l'aire) o bombes (en el cas de l'aigua).

En la Taula H.1 es presenta una comparativa, entres diverses designacions antigues de classes de refrigeració (segons les normes americanes) i les designacions equivalents actuals:

Taula H.1: Classes de refrigeració en els transformadors de potència

Designació antiga (normes ANSI)	Designació actual (normes CEI i ANSI)
OA	ONAN
FA	ONAF
FOA	OFAF
FOW	OFWF
FOA	ODAF
FOW	ODWF

En el cas d'un transformador on puguem seleccionar que la circulació sigui natural o forçada (amb la potència corresponent en cada cas), les designacions són del tipus: ONAN/ONAF, ONAN/OFAF, etc.

En el cas dels transformadors secs, l'element refrigerant sempre és l'aire, ja sigui en circulació natural o forçada, i per tant les designacions són simplement AN o AF.

Índex alfabètic

Símbols

A

B

C

D

E

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

V

W

Y

Z