Àlgebra Vectorial v1.0

Josep Mollera Barriga

9 de gener de 2006

Índex

1 Definicions

Es dóna en primer lloc la definició de les magnituds que apareixen en les seccions següents.

V: Volum d'integració.

S: Superfície d'integració. S és la superfície que limita el volum V.

C: Corba d'integració. C és la corba tancada que limita la superfície S.

$\mathrm{d}\tau$: Diferencial de volum, del volum V.

$\mathbf{d}\boldsymbol{a}$: Vector diferencial de superfície, de la superfície S. $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$ és perpendicular a S.

$\mathbf{d}\boldsymbol{l}$: Vector diferencial de longitud, de la corba C. $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ és tangent a C.

(x, y, z): Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cartesianes.

(ρ, φ, z): Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cilíndriques.

(r, θ, φ): Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades esfèriques.

$\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes.

$\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\boldsymbol{z}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques.

$\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques.

P: Punt en $\mathbb{R}^3$.

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$: Vectors en $\mathbb{R}^3$.

α: Angle entre dos vectors en $\mathbb{R}^3$.

f, g: Funcions escalars; $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$: Funcions vectorials; $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$\boldsymbol{\nabla} f$: Gradient de la funció escalar f; $\boldsymbol{\nabla} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$: Divergència de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$; $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$: Rotacional de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$; $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$\boldsymbol{\nabla}^2 f$: Laplacià de la funció escalar f; $\boldsymbol{\nabla}^2 f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{F}$: Laplacià de la funció vectorial $\boldsymbol{F}$; $\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

2 Sistemes de coordenades

Es representen en la Figura 1, tres dels sistemes de coordenades més utilitzats: el cartesià, el cilíndric i l'esfèric.

En el sistema de coordenades cartesianes, els vectors directors tenen una orientació fixa, mentre que en els sistemes de coordenades cilíndriques i esfèriques, els vectors directors tenen una orientació variable, que depèn del punt P al qual ens estiguem referint.

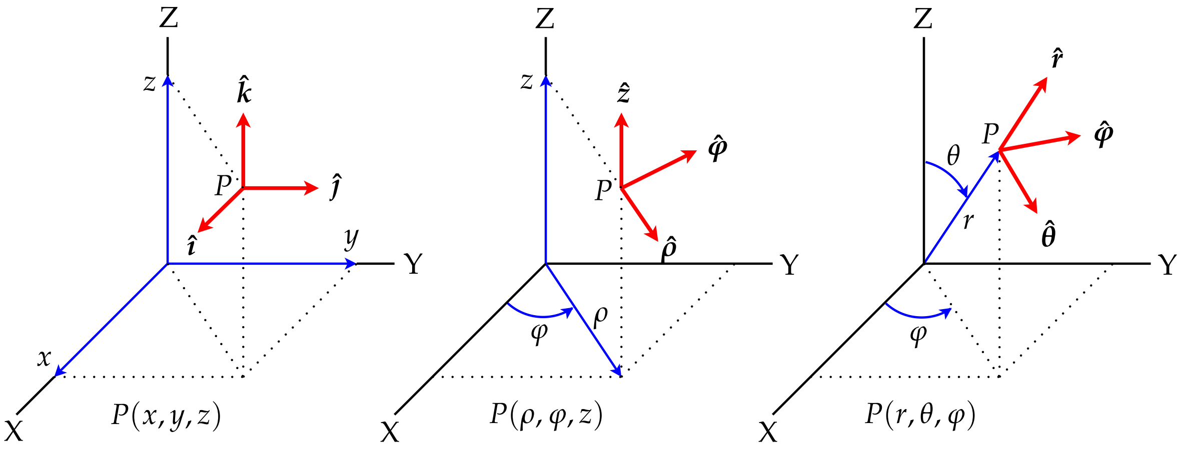

Figura 1: Coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques

Els rangs de les coordenades de cadascun del tres sistemes són:

$$\text{Cartesianes:} \quad x \in (-\infty, \infty) \quad y \in (-\infty, \infty) \quad z \in (-\infty, \infty) \tag{1}$$

$$\text{Cilíndriques:} \quad \rho \in [0, \infty) \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad z \in (-\infty, \infty) \tag{2}$$

$$\text{Esfèriques:} \quad r \in [0, \infty) \quad \theta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{3}$$

2.1 Relacions entre les coordenades cartesianes i cilíndriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$, s'obtenen partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = \rho \cos\varphi \tag{4a}$$
$$y = \rho \sin\varphi \tag{4b}$$
$$z = z \tag{4c}$$

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \varphi, z)$, s'obtenen partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5a}$$
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \tag{5b}$$
$$z = z \tag{5c}$$

El canvi de sistema de coordenades, de cilíndriques a cartesianes, s'obté mitjançant les relacions següents:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{6a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{6b}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{k}} \tag{6c}$$

El canvi de sistema de coordenades, de cartesianes a cilíndriques, s'obté mitjançant les relacions següents:

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} = \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{7a}$$
$$\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{7b}$$
$$\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{z}} \tag{7c}$$

2.2 Relacions entre les coordenades cartesianes i esfèriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$, s'obtenen partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \tag{8a}$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi \tag{8b}$$
$$z = r \cos\theta \tag{8c}$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \varphi)$, s'obtenen partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{9a}$$
$$\theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{9b}$$
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \tag{9c}$$

El canvi de sistema de coordenades, d'esfèriques a cartesianes, s'obté mitjançant les relacions següents:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{10a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{10b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{10c}$$

El canvi de sistema de coordenades, de cartesianes a esfèriques, s'obté mitjançant les relacions següents:

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{11a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{11b}$$

$$\hat{\boldsymbol{k}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{11c}$$

2.3 Relacions entre les coordenades cilíndriques i esfèriques

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \varphi, z)$, s'obtenen partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = r\sin\theta \tag{12a}$$

$$\varphi = \varphi \tag{12b}$$

$$z = r\cos\theta \tag{12c}$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \varphi)$, s'obtenen partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \tag{13a}$$

$$\theta = \arctan\frac{\rho}{z} \tag{13b}$$

$$\varphi = \varphi \tag{13c}$$

El canvi de sistema de coordenades, d'esfèriques a cilíndriques, s'obté mitjançant les relacions següents:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{14a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{14b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{14c}$$

El canvi de sistema de coordenades, de cilíndriques a esfèriques, s'obté mitjançant les relacions següents:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{15a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{15b}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{15c}$$

3 Operacions bàsiques

En les equacions següents, (A_x, A_y, A_z) i (B_x, B_y, B_z) són les components dels vectors $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ respectivament, en un sistema de coordenades cartesianes.

Mòdul:

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{16}$$

Addició:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (A_y + B_y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (A_z + B_z)\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{17}$$

Substracció:

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_x - B_x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (A_y - B_y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (A_z - B_z)\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{18}$$

Producte escalar:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{19}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\alpha \tag{20}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{22}$$

El producte escalar de dos vectors perpendiculars és nul.

Producte vectorial:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{23}$$

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\alpha \tag{24}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}) \tag{25}$$

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \tag{26}$$

El producte vectorial de dos vectors paral·lels és nul.

El producte vectorial de dos vectors, és un altre vector, el sentit del qual ve donat per la regla del cargol: és el sentit d'avanç que té un cargol, amb el seu eix perpendicular al pla format pels vectors $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, quan gira en el sentit que portaria el primer vector $\boldsymbol{A}$ a trobar el segon vector $\boldsymbol{B}$, utilitzant el menor angle possible.

Derivada temporal:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{27}$$

4 Operadors diferencials

4.1 Coordenades cartesianes

En les equacions següents, (F_x, F_y, F_z) són les components de la funció $\boldsymbol{F}$, en un sistema de coordenades cartesianes. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{28}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{k}} \qquad \text{(en un pla paral·lel al X-Y)} \tag{29}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad \text{(en un pla paral·lel al X-Z)} \tag{30}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \qquad \text{(en un pla paral·lel al Y-Z)} \tag{31}$$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{33}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{\imath}} + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right]\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]\hat{\boldsymbol{k}} \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}^2 F_x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{\nabla}^2 F_y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{\nabla}^2 F_z\,\hat{\boldsymbol{k}} \tag{37}$$

4.2 Coordenades cilíndriques

En les equacions següents, (F_ρ, F_φ, F_z) són les components de la funció $\boldsymbol{F}$, en un sistema de coordenades cilíndriques. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{38}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{(en sentit longitudinal)} \tag{39}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{(en sentit transversal)} \tag{40}$$

$$\mathrm{d}\tau = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \tag{41}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{42}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{43}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right] \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right] \hat{\boldsymbol{z}} \tag{44}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \tag{46}$$

4.3 Coordenades esfèriques

En les equacions següents, $(F_r, F_\theta, F_\varphi)$ són les components de la funció $\boldsymbol{F}$, en un sistema de coordenades esfèriques. En aquestes coordenades tenim:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}r\, \hat{\boldsymbol{r}} + r\, \mathrm{d}\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{47}$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{a} = r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \hat{\boldsymbol{r}} \tag{48}$$

$$\mathrm{d}\tau = r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi \tag{49}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\, \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\, \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = {} & \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right] \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r F_\varphi)\right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{53}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \tag{54}$$

5 Identitats

Tenim les següents identitats:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f) \tag{55}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(fg) = f\boldsymbol{\nabla} g + g\boldsymbol{\nabla} f \tag{56}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{\nabla} f)\cdot\boldsymbol{F} + f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}) \tag{57}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{G}) \tag{58}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{\nabla} f)\times\boldsymbol{F} + f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}) \tag{59}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{F} \tag{60}$$

6 Teoremes

Teorema de la divergència:

$$\iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\tau = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{61}$$

Teorema del gradient:

$$\iiint_V \boldsymbol{\nabla} f\,\mathrm{d}\tau = \iint_S f\,\mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{62}$$

Teorema del rotacional:

$$\iiint_V (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}\tau = -\iint_S \boldsymbol{F}\times\mathbf{d}\boldsymbol{a} \tag{63}$$

Teorema d'Stokes:

$$\iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{a} = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{l} \tag{64}$$

En la Figura 2 s'il·lustra el conveni de signes dels vectors $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ i $\mathbf{d}\boldsymbol{a}$.

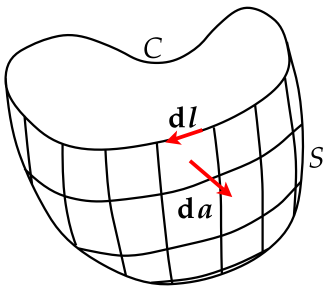

Figura 2: Conveni de signes del teorema d'Stokes