

Càlcul Vectorial en \mathbb{R}^3

Josep Mollera Barriga

Versió 4 (23 de desembre de 2009)

1 Definicions

Es dona en primer lloc la definició de les variables que apareixen en les seccions següents.

V : Volum d'integració.

S : Superfície d'integració.

C : Corba d'integració.

$d\tau$: Diferencial de volum, del volum V .

$d\mathbf{a}$: Vector diferencial de superfície, de la superfície S ; $d\mathbf{a}$ és perpendicular a S .

$d\mathbf{l}$: Vector diferencial de longitud, de la corba C ; $d\mathbf{l}$ és tangent a C .

(x, y, z) : Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cartesianes.

(ρ, φ, z) : Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cilíndriques.

(r, θ, φ) : Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades esfèriques.

(u, v, w) : Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades qualsevol.

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes.

$\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques.

$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques.

$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades qualsevol.

P, P_1, P_2 : Punts en \mathbb{R}^3 .

A, B, C : Vectors en \mathbb{R}^3 .

α : Angle entre dos vectors en \mathbb{R}^3 .

f, g : Funcions escalars; $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

F, G : Funcions vectorials; $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

∇f : Gradient de la funció escalar f ; $\nabla f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\nabla \cdot F$: Divergència de la funció vectorial F ; $\nabla \cdot F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

$\nabla \times F$: Rotacional de la funció vectorial F ; $\nabla \times F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$\nabla^2 f$: Laplaciana de la funció escalar f ; $\nabla^2 f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$\nabla^2 F$: Laplaciana de la funció vectorial F ; $\nabla^2 F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

2 Sistemes de Coordenades

Es representen en la Figura 1, tres dels sistemes de coordenades més utilitzats: el cartesià, el cilíndric i l'esfèric.

En el sistema de coordenades cartesianes, els vectors directores tenen una orientació fixa, mentre que en els sistemes de coordenades cilíndriques i esfèriques, els vectors directores tenen una orientació variable, que depèn del punt P al qual ens estiguem referint.

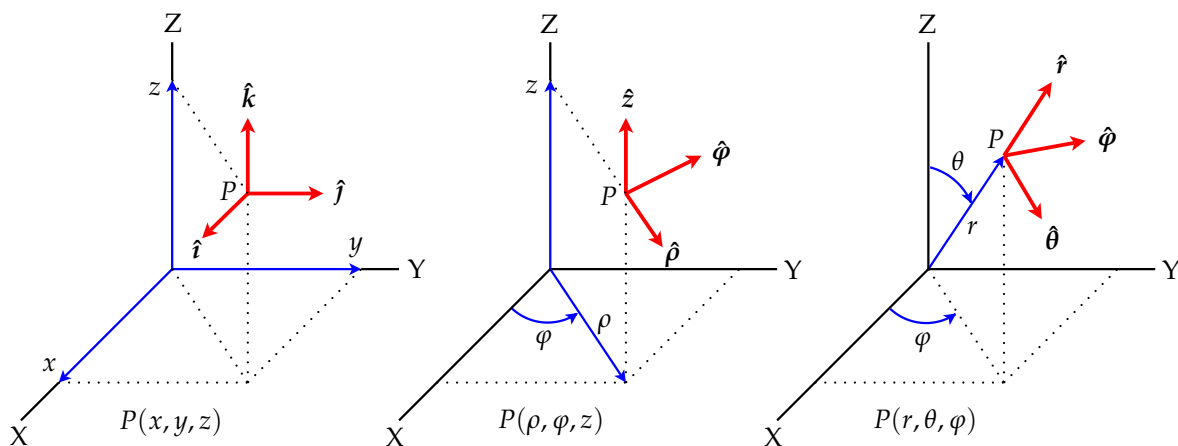


Figura 1: Coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques

En la Taula 1 es donen els rangs de les coordenades de cadascun d'aquests tres sistemes.

Taula 1: Rangs de les coordenades de cada sistema

Cartesià	Cilíndric	Esfèric
$x \in (-\infty, \infty)$	$\rho \in [0, \infty)$	$r \in [0, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$	$\varphi \in [0, 2\pi)$	$\theta \in [0, \pi]$
$z \in (-\infty, \infty)$	$z \in (-\infty, \infty)$	$\varphi \in [0, 2\pi)$

2.1 Relacions entre les coordenades cartesianes i cilíndriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = \rho \cos \varphi \quad (1a)$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (1b)$$

$$z = z \quad (1c)$$

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \varphi, z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2a)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2b)$$

$$z = z \quad (2c)$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directores d'un sistema de coordenades cilíndriques $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ és:

$$\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \quad (3a)$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \quad (3b)$$

$$\hat{z} = \hat{k} \quad (3c)$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directores d'un sistema de coordenades cartesianes $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ és:

$$\hat{i} = \cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi} \quad (4a)$$

$$\hat{j} = \sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\varphi} \quad (4b)$$

$$\hat{k} = \hat{z} \quad (4c)$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) , s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z) , en un punt $P(\rho, \varphi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_\rho \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \quad (5a)$$

$$A_y = A_\rho \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi \quad (5b)$$

$$A_z = A_z \quad (5c)$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z) , s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) , en un punt $P(\rho, \varphi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \quad (6a)$$

$$A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \quad (6b)$$

$$A_z = A_z \quad (6c)$$

2.2 Relacions entre les coordenades cartesianes i esfèriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (7a)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (7b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (7c)$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \varphi)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8a)$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8b)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (8c)$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directores d'un sistema de coordenades esfèriques $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ és:

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad (9a)$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \quad (9b)$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \quad (9c)$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directores d'un sistema de coordenades cartesianes $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ és:

$$\hat{i} = \sin \theta \cos \varphi \hat{r} + \cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} - \sin \varphi \hat{\varphi} \quad (10a)$$

$$\hat{j} = \sin \theta \sin \varphi \hat{r} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\varphi} \quad (10b)$$

$$\hat{k} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \quad (10c)$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) , s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_r \sin \theta \cos \varphi + A_\theta \cos \theta \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \quad (11a)$$

$$A_y = A_r \sin \theta \sin \varphi + A_\theta \cos \theta \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi \quad (11b)$$

$$A_z = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta \quad (11c)$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$, s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) , en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta \quad (12a)$$

$$A_\theta = A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta \quad (12b)$$

$$A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \quad (12c)$$

2.3 Relacions entre les coordenades cilíndriques i esfèriques

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \varphi, z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \varphi)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = r \sin \theta \quad (13a)$$

$$\varphi = \varphi \quad (13b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (13c)$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \varphi)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \varphi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (14a)$$

$$\theta = \arctan \frac{\rho}{z} \quad (14b)$$

$$\varphi = \varphi \quad (14c)$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ és:

$$\hat{r} = \sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z} \quad (15a)$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{z} \quad (15b)$$

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi} \quad (15c)$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ és:

$$\hat{\rho} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} \quad (16a)$$

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi} \quad (16b)$$

$$\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \quad (16c)$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z) , s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$, en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta \quad (17a)$$

$$A_\varphi = A_\varphi \quad (17b)$$

$$A_z = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta \quad (17c)$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques $(A_r, A_\theta, A_\varphi)$, s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_φ, A_z) , en un punt $P(r, \theta, \varphi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_\rho \sin \theta + A_z \cos \theta \quad (18a)$$

$$A_\theta = A_\rho \cos \theta - A_z \sin \theta \quad (18b)$$

$$A_\varphi = A_\varphi \quad (18c)$$

3 Operacions Bàsiques

A partir de les components (A_u, A_v, A_w) i (B_u, B_v, B_w) dels vectors A i B , tenim:

3.1 Mòdul

$$|A| = \sqrt{A_u^2 + A_v^2 + A_w^2} \quad (19)$$

3.2 Addició i substracció

$$A + B = (A_u + B_u) \hat{u} + (A_v + B_v) \hat{v} + (A_w + B_w) \hat{w} \quad (20a)$$

$$A - B = (A_u - B_u) \hat{u} + (A_v - B_v) \hat{v} + (A_w - B_w) \hat{w} \quad (20b)$$

3.3 Producte escalar

$$A \cdot B = A_u B_u + A_v B_v + A_w B_w \quad (21)$$

$$A \cdot B = |A||B| \cos \alpha \quad (22)$$

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (23)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (24)$$

El producte escalar de dos vectors perpendiculars és nul.

3.4 Producte vectorial

$$A \times B = (A_v B_w - A_w B_v) \hat{u} + (A_w B_u - A_u B_w) \hat{v} + (A_u B_v - A_v B_u) \hat{w} \quad (25)$$

$$|A \times B| = |A||B| \sin \alpha \quad (26)$$

$$A \times B = -(B \times A) \quad (27)$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (28)$$

El producte vectorial de dos vectors paral·lels és nul.

El producte vectorial de dos vectors, és un altre vector, el sentit del qual ve donat per la regla del cargol: és el sentit d'avanç que té un cargol, amb el seu eix perpendicular al pla format pels vectors A i B , quan gira en el sentit que portaria el primer vector A a trobar el segon vector B , utilitzant el menor angle possible.

3.5 Derivada temporal

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA_u}{dt} \hat{u} + \frac{dA_v}{dt} \hat{v} + \frac{dA_w}{dt} \hat{w} \quad (29)$$

4 Càlcul Diferencial

4.1 Coordenades cartesianes

En les equacions següents, (F_x, F_y, F_z) són les components de la funció F , en un sistema de coordenades cartesianes. En aquestes coordenades tenim:

$$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}} \quad (30)$$

$$d\mathbf{a} = dx dy \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{en un pla paral·lel a l'X-Y}) \quad (31)$$

$$d\mathbf{a} = dx dz \hat{\mathbf{j}} \quad (\text{en un pla paral·lel a l'X-Z}) \quad (32)$$

$$d\mathbf{a} = dy dz \hat{\mathbf{i}} \quad (\text{en un pla paral·lel a l'Y-Z}) \quad (33)$$

$$d\tau = dx dy dz \quad (34)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (36)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] \hat{\mathbf{j}} + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{k}} \quad (37)$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (38)$$

4.2 Coordenades cilíndriques

En les equacions següents, (F_ρ, F_φ, F_z) són les components de la funció F , en un sistema de coordenades cilíndriques. En aquestes coordenades tenim:

$$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}} \quad (39)$$

$$d\mathbf{a} = \rho d\varphi dz \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (40)$$

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz \quad (41)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (43)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (44)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (45)$$

4.3 Coordenades esfèriques

En les equacions següents, $(F_r, F_\theta, F_\varphi)$ són les components de la funció F , en un sistema de coordenades esfèriques. En aquestes coordenades tenim:

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (46)$$

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{\mathbf{r}} \quad (47)$$

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (48)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (F_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (52)$$

5 Relacions

5.1 Operadors

Els operadors ∇ i ∇^2 es defineixen en coordenades cartesianes, segons les relacions següents :

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \quad (53)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (54)$$

5.2 Identitats

Es compleixen les identitats següents:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \quad (55)$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (56)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (57)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (58)$$

5.3 Gradient

El gradient compleix les relacions següents:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (59)$$

$$\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f) \quad (60)$$

$$\nabla(F \cdot G) = F \times (\nabla \times G) + G \times (\nabla \times F) + (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F \quad (61)$$

5.4 Divergència

La divergència compleix les relacions següents:

$$\nabla \cdot (A + B) = (\nabla \cdot A) + (\nabla \cdot B) \quad (62)$$

$$\nabla \cdot (fF) = (\nabla f) \cdot F + f(\nabla \cdot F) \quad (63)$$

$$\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G) \quad (64)$$

5.5 Rotacional

El rotacional compleix les relacions següents:

$$\nabla \times (A + B) = (\nabla \times A) + (\nabla \times B) \quad (65)$$

$$\nabla \times (fF) = (\nabla f) \times F + f(\nabla \times F) \quad (66)$$

$$\nabla \times (F \times G) = (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G + F(\nabla \cdot G) - G(\nabla \cdot F) \quad (67)$$

6 Teoremes

Les funcions f i F que apareixen en els teoremes següents, han de ser contínues, diferenciables i les seves derivades primeres han de ser funcions contínues.

6.1 Teorema fonamental del gradient

Estableix que la integral sobre una corba C de la funció ∇f només depèn dels punts inicial P_1 i final P_2 , i no del camí seguit per anar de l'un a l'altre.

$$\int_{C_{P_1 \rightarrow P_2}} (\nabla f) \cdot dl = f(P_2) - f(P_1) \quad (68)$$

Evidentment, la integral anterior es nul·la quan la corba d'integració és tancada ($P_1 = P_2$).

$$\oint_C (\nabla f) \cdot dl = 0 \quad (69)$$

6.2 Teorema fonamental de la divergència (també anomenat de Gauss o de Green)

Estableix la relació entre la integral sobre el volum V de la funció $\nabla \cdot F$ i la integral sobre la superfície S de la funció F , on S és la superfície tancada que limita V .

$$\iiint_V (\nabla \cdot F) d\tau = \oint_S F \cdot da \quad (70)$$

El vector da apunta sempre cap a fora del volum V .

6.3 Teorema fonamental del rotacional (també anomenat d'Stokes)

Estableix la relació entre la integral sobre la superfície S de la funció $\nabla \times F$ i la integral sobre la corba C de la funció F , on C és la corba tancada que limita S .

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot da = \oint_C F \cdot dl \quad (71)$$

D'aquesta relació es desprèn que la integral de $\nabla \times F$ sobre qualsevol superfície S limitada per la mateixa corba C , té el mateix valor.

Evidentment, la integral anterior es nul·la quan la superfície d'integració és tancada.

$$\oint_S (\nabla \times F) \cdot da = 0 \quad (72)$$

En la Figura 2 s'illustra el conveni de signes dels vectors dl i da .

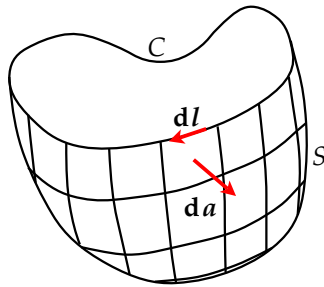


Figura 2: Conveni de signes del teorema d'Stokes

6.4 Teorema del gradient

Estableix la relació entre la integral sobre el volum V de la funció ∇f i la integral sobre la superfície S de la funció f , on S és la superfície tancada que limita V .

$$\iiint_V (\nabla f) d\tau = \oint_S f da \quad (73)$$

El vector da apunta sempre cap a fora del volum V .

6.5 Teorema del rotacional

Estableix la relació entre la integral sobre el volum V de la funció $\nabla \times F$ i la integral sobre la superfície S de la funció F , on S és la superfície tancada que limita V .

$$\iiint_V (\nabla \times F) \, d\tau = - \oint_S F \times d\mathbf{a} \quad (74)$$

El vector $d\mathbf{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V .

7 Bibliografia

H. M. SCHEY. *Div, grad curl and all that, an informal text on vector calculus*. W. W. Norton and Company, 3rd edition, 1997.

PAUL LORRAIN, DALE R. CORSON. *Electromagnetic fields and waves*. W. H. Freeman and Company, 1972.

DAVID J. GRIFFITHS, REED COLLEGE. *Introduction to electrodynamics*. Prentice-Hall, 3rd edition, 1999.

DANIEL FLEISCH. *A student's guide to Maxwell's equations*. Cambridge University Press, 2008.