

Càlcul Vectorial en \mathbb{R}^3

Josep Mollera Barriga

1 d'octubre de 2016

1 Definicions

Es dona en primer lloc la definició de les variables i funcions que s'utilitzen en aquest document.

V : Volum d'integració.

S : Superfície d'integració.

C : Corba d'integració.

$d\tau$: Diferencial de volum, del volum V .

$d\mathbf{a}$: Vector diferencial de superfície, de la superfície S .

$d\mathbf{a}$ és perpendicular a S .

$d\mathbf{l}$: Vector diferencial de longitud, de la corba C .

$d\mathbf{l}$ és tangent a C .

x, y, z : Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cartesianes.

ρ, ϕ, z : Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades cilíndriques.

r, θ, ϕ : Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades esfèriques.

u, v, w : Coordenades d'un punt en un sistema de coordenades qualssevol.

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades cartesianes.

$\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques.

$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques.

$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$: Vectors directors d'un sistema de coordenades qualssevol.

P, Q : Punts en \mathbb{R}^3 .

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$: Vectors en \mathbb{R}^3 .

α : Angle entre dos vectors en \mathbb{R}^3 .

f, g : Funcions escalars.

$$f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

F, G : Funcions vectorials.

$$F, G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

∇f : Gradient de la funció escalar f .

$$\nabla f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$\nabla \cdot F$: Divergència de la funció vectorial F .

$$\nabla \cdot F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$\nabla \times F$: Rotacional de la funció vectorial F .

$$\nabla \times F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$\nabla^2 f$: Laplaciana de la funció escalar f .

$$\nabla^2 f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$\nabla^2 F$: Laplaciana de la funció vectorial F .

$$\nabla^2 F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

2 Sistemes de Coordenades

Es representen en la Figura 1, tres dels sistemes de coordenades més utilitzats: el cartesià, el cilíndric i l'esfèric.

En el sistema de coordenades cartesianes, els vectors directores tenen una orientació fixa, mentre que en els sistemes de coordenades cilíndriques i esfèriques, els vectors directores tenen una orientació variable, que depèn del punt P al qual ens estiguem referint.

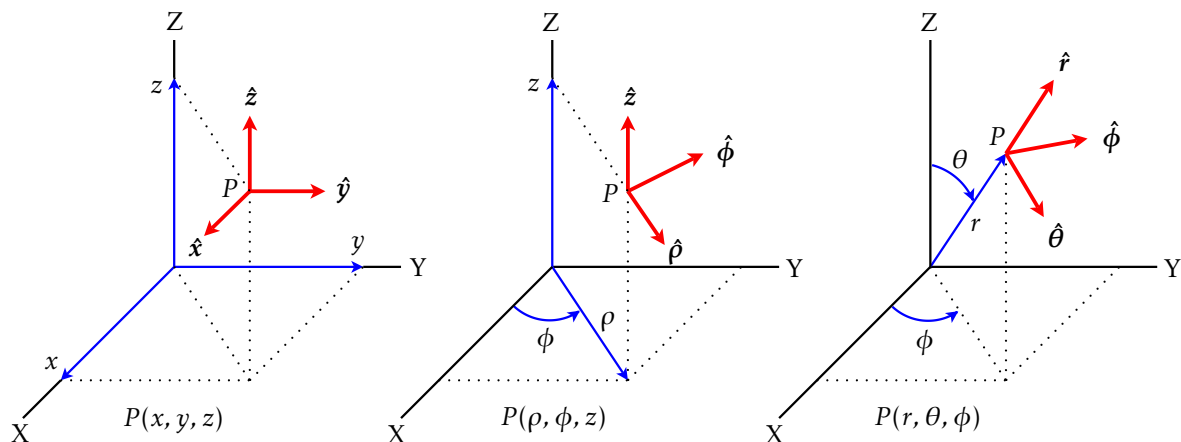


Figura 1: Coordenades cartesianes, cilíndriques i esfèriques

En la Taula 1 es donen els rangs de les coordenades de cadascun d'aquests tres sistemes.

Taula 1: Rangs de les Coordenades

Cartesianes	Cilíndriques	Esfèriques
$x \in (-\infty, \infty)$	$\rho \in [0, \infty)$	$r \in [0, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$	$\phi \in [0, 2\pi)$	$\theta \in [0, \pi]$
$z \in (-\infty, \infty)$	$z \in (-\infty, \infty)$	$\phi \in [0, 2\pi)$

2.1 Relacions entre les coordenades cartesianes i cilíndriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \phi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = \rho \cos \phi \quad (1a)$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (1b)$$

$$z = z \quad (1c)$$

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \phi, z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2a)$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2b)$$

$$z = z \quad (2c)$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directores d'un sistema de coordenades cilíndriques $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$, en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, és:

$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \quad (3a)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \quad (3b)$$

$$\hat{z} = \hat{z} \quad (3c)$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directores d'un sistema de coordenades cartesianes $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, és:

$$\hat{x} = \cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi} \quad (4a)$$

$$\hat{y} = \sin \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi} \quad (4b)$$

$$\hat{z} = \hat{z} \quad (4c)$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) , s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z) , en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades

cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_\rho \cos \phi - A_\phi \sin \phi \quad (5a)$$

$$A_y = A_\rho \sin \phi + A_\phi \cos \phi \quad (5b)$$

$$A_z = A_z \quad (5c)$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z) , s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) , en un punt $P(\rho, \phi, z)$ donat en coordenades cilíndriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi \quad (6a)$$

$$A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \quad (6b)$$

$$A_z = A_z \quad (6c)$$

2.2 Relacions entre les coordenades cartesianes i esfèriques

Les coordenades cartesianes d'un punt $P(x, y, z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \phi)$, mitjançant les relacions següents:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (7a)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (7b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (7c)$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \phi)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cartesianes $P(x, y, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8a)$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8b)$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (8c)$$

L'expressió en coordenades cartesianes dels vectors directores d'un sistema de coordenades esfèriques $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$, en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \quad (9a)$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \quad (9b)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \quad (9c)$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directores d'un sistema de coordenades cartesianes $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{x} = \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi} \quad (10a)$$

$$\hat{y} = \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \quad (10b)$$

$$\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \quad (10c)$$

Les components d'un vector en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) , s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ) , en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_x = A_r \sin \theta \cos \phi + A_\theta \cos \theta \cos \phi - A_\phi \sin \phi \quad (11a)$$

$$A_y = A_r \sin \theta \sin \phi + A_\theta \cos \theta \sin \phi + A_\phi \cos \phi \quad (11b)$$

$$A_z = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta \quad (11c)$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ) , s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cartesianes (A_x, A_y, A_z) , en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta \quad (12a)$$

$$A_\theta = A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta \quad (12b)$$

$$A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \quad (12c)$$

2.3 Relacions entre les coordenades cilíndriques i esfèriques

Les coordenades cilíndriques d'un punt $P(\rho, \phi, z)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades esfèriques $P(r, \theta, \phi)$, mitjançant les relacions següents:

$$\rho = r \sin \theta \quad (13a)$$

$$\phi = \phi \quad (13b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (13c)$$

Les coordenades esfèriques d'un punt $P(r, \theta, \phi)$, s'obtenen a partir de les seves coordenades cilíndriques $P(\rho, \phi, z)$, mitjançant les relacions següents:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (14a)$$

$$\theta = \arctan \frac{\rho}{z} \quad (14b)$$

$$\phi = \phi \quad (14c)$$

L'expressió en coordenades cilíndriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades esfèriques $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$, en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{r} = \sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z} \quad (15a)$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{z} \quad (15b)$$

$$\hat{\phi} = \hat{\phi} \quad (15c)$$

L'expressió en coordenades esfèriques dels vectors directors d'un sistema de coordenades cilíndriques $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$, en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, és:

$$\hat{\rho} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} \quad (16a)$$

$$\hat{\phi} = \hat{\phi} \quad (16b)$$

$$\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \quad (16c)$$

Les components d'un vector en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z) , s'obtenen a partir de les seves components en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ) , en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_\rho = A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta \quad (17a)$$

$$A_\phi = A_\phi \quad (17b)$$

$$A_z = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta \quad (17c)$$

Les components d'un vector en coordenades esfèriques (A_r, A_θ, A_ϕ) , s'obtenen a partir de les seves components en coordenades cilíndriques (A_ρ, A_ϕ, A_z) , en un punt $P(r, \theta, \phi)$ donat en coordenades esfèriques, mitjançant les relacions següents:

$$A_r = A_\rho \sin \theta + A_z \cos \theta \quad (18a)$$

$$A_\theta = A_\rho \cos \theta - A_z \sin \theta \quad (18b)$$

$$A_\phi = A_\phi \quad (18c)$$

3 Operacions Bàsiques

A partir de les components (A_u, A_v, A_w) i (B_u, B_v, B_w) de dos vectors \mathbf{A} i \mathbf{B} en un sistema de coordenades qualsevol, tenim:

3.1 Mòdul

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_u^2 + A_v^2 + A_w^2} \quad (19)$$

3.2 Addició i substracció

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_u + B_u) \hat{\mathbf{u}} + (A_v + B_v) \hat{\mathbf{v}} + (A_w + B_w) \hat{\mathbf{w}} \quad (20a)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_u - B_u) \hat{\mathbf{u}} + (A_v - B_v) \hat{\mathbf{v}} + (A_w - B_w) \hat{\mathbf{w}} \quad (20b)$$

3.3 Producte escalar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_u B_u + A_v B_v + A_w B_w \quad (21)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \alpha \quad (22)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (23)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (24)$$

El producte escalar de dos vectors perpendiculars és nul.

3.4 Producte vectorial

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_v B_w - A_w B_v) \hat{\mathbf{u}} + (A_w B_u - A_u B_w) \hat{\mathbf{v}} + (A_u B_v - A_v B_u) \hat{\mathbf{w}} \quad (25)$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \alpha \quad (26)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (27)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (28)$$

El producte vectorial de dos vectors paral·lels és nul.

El producte vectorial de dos vectors és un altre vector, el sentit del qual ve donat per la regla del cargol: és el sentit d'avanç que té un cargol, amb el seu eix perpendicular al pla format pels vectors \mathbf{A} i \mathbf{B} , quan gira en el sentit que portaria el primer vector \mathbf{A} a trobar el segon vector \mathbf{B} , utilitzant el menor angle possible.

3.5 Derivada temporal

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_u}{dt} \hat{\mathbf{u}} + \frac{dA_v}{dt} \hat{\mathbf{v}} + \frac{dA_w}{dt} \hat{\mathbf{w}} \quad (29)$$

4 Càlcul Diferencial

4.1 Coordenades cartesianes

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directores $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ i $\hat{\mathbf{z}}$, respecte x , y i z :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial z} = 0 \quad (30a)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial z} = 0 \quad (30b)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}}{\partial z} = 0 \quad (30c)$$

En les equacions següents, (F_x, F_y, F_z) són les components de la funció vectorial \mathbf{F} en un sistema de

coordenades cartesianes. En aquestes coordenades tenim:

$$d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} \quad (31)$$

$$d\mathbf{a} = dx dy \hat{z} \quad (\text{en un pla paral·lel a l'X-Y}) \quad (32)$$

$$d\mathbf{a} = dx dz \hat{y} \quad (\text{en un pla paral·lel a l'X-Z}) \quad (33)$$

$$d\mathbf{a} = dy dz \hat{x} \quad (\text{en un pla paral·lel a l'Y-Z}) \quad (34)$$

$$d\tau = dx dy dz \quad (35)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (37)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \hat{x} + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] \hat{y} + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \hat{z} \quad (38)$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (39)$$

4.2 Coordenades cilíndriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directors $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ i \hat{z} , respecte ρ , ϕ i z :

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} = \hat{\phi} \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} = 0 \quad (40a)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\hat{\rho} \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} = 0 \quad (40b)$$

$$\frac{\partial \hat{z}}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial \hat{z}}{\partial \phi} = 0 \quad \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} = 0 \quad (40c)$$

En les equacions següents, (F_ρ, F_ϕ, F_z) són les components de la funció vectorial \mathbf{F} en un sistema de coordenades cilíndriques. En aquestes coordenades tenim:

$$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z} \quad (41)$$

$$d\mathbf{a} = \rho d\phi dz \hat{\rho} \quad (\text{en una superfície cilíndrica}) \quad (42)$$

$$d\tau = \rho d\rho d\phi dz \quad (43)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (44)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (45)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\phi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{z} \quad (46)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (47)$$

4.3 Coordenades esfèriques

Es donen a continuació les derivades parcials dels vectors directores \hat{r} , $\hat{\theta}$ i $\hat{\phi}$, respecte r , θ i ϕ :

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta} \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \sin \theta \hat{\phi} \quad (48a)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r} \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} = \cos \theta \hat{\phi} \quad (48b)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\sin \theta \hat{r} - \cos \theta \hat{\theta} \quad (48c)$$

En les equacions següents, (F_r, F_θ, F_ϕ) són les components de la funció vectorial F en un sistema de coordenades esfèriques. En aquestes coordenades tenim:

$$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} \quad (49)$$

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} \quad (\text{en una superfície esfèrica}) \quad (50)$$

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (51)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (52)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (53)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (F_\phi \sin \theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \quad (54)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (55)$$

5 Relacions

5.1 Operadors

Els operadors ∇ i ∇^2 es defineixen en coordenades cartesianes, segons les relacions següents:

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (56)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (57)$$

5.2 Identitats

Es compleixen les identitats següents:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \quad (58)$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (59)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (60)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (61)$$

5.3 Gradient

El gradient compleix les relacions següents:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (62)$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (63)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} \quad (64)$$

5.4 Divergència

La divergència compleix les relacions següents:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (65)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (66)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \quad (67)$$

5.5 Rotacional

El rotacional compleix les relacions següents:

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (68)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F}) \quad (69)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (70)$$

6 Teoremes Vectorials

La funció escalar f i la funció vectorial \mathbf{F} que apareixen en els teoremes següents han de ser contínues, diferenciables i les seves derivades primeres han de ser funcions contínues.

6.1 Teorema fonamental del gradient

Estableix que la integral sobre una corba C de la funció ∇f només depèn dels punts inicial i final sobre la corba, P i Q , i no del camí seguit per anar de l'un a l'altre.

$$\int_{C_{P \rightarrow Q}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(Q) - f(P) \quad (71)$$

Evidentment, la integral anterior és nul·la quan la corba d'integració és tancada ($P \equiv Q$).

$$\oint_C (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (72)$$

6.2 Teorema fonamental de la divergència (també anomenat de Gauss o de Green)

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\nabla \cdot \mathbf{F}$ i la integral sobre una superfície S de la funció \mathbf{F} , on S és la superfície tancada que limita V .

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, d\tau = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (73)$$

El vector $d\mathbf{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V .

6.3 Teorema fonamental del rotacional (també anomenat d'Stokes)

Estableix la relació entre la integral sobre una superfície S de la funció $\nabla \times \mathbf{F}$ i la integral sobre una corba C de la funció \mathbf{F} , on C és la corba tancada que limita S .

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (74)$$

D'aquesta relació es desprèn que la integral de $\nabla \times \mathbf{F}$ sobre qualsevol superfície S limitada per la mateixa corba C , té el mateix valor.

Evidentment, la integral anterior és nul·la quan la superfície d'integració és tancada.

$$\oiint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (75)$$

En la Figura 2 s'il·lustra el conveni de signes dels vectors $d\mathbf{l}$ i $d\mathbf{a}$.

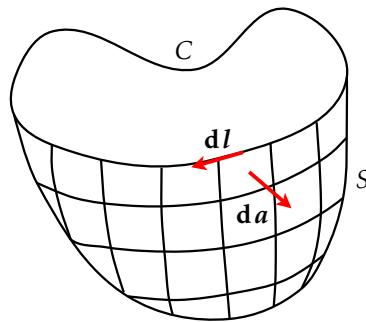


Figura 2: Conveni de signes del teorema d'Stokes

6.4 Teorema del gradient

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció ∇f i la integral sobre una superfície S de la funció f , on S és la superfície tancada que limita V .

$$\iiint_V (\nabla f) d\tau = \oint_S f d\mathbf{a} \quad (76)$$

El vector $d\mathbf{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V .

6.5 Teorema del rotacional

Estableix la relació entre la integral sobre un volum V de la funció $\nabla \times \mathbf{F}$ i la integral sobre una superfície S de la funció \mathbf{F} , on S és la superfície tancada que limita V .

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{F}) d\tau = - \oint_S \mathbf{F} \times d\mathbf{a} \quad (77)$$

El vector $d\mathbf{a}$ apunta sempre cap a fora del volum V .

7 Conversió de coordenades amb la calculadora HP Prime

Es donen a continuació una sèrie de programes per a la calculadora HP Prime, destinats a realitzar conversions entre els sistemes de coordenades rectangulars, cilíndriques i esfèriques.

Utilitzarem les funcions de la calculadora `rectangular_coordinates` i `polar_coordinates`, pensades per fer conversions entre coordenades cartesianes i polars, en dues dimensions.

La funció `Rec→Cil` pren com a paràmetre les coordenades cartesianes d'un punt en la forma $[x, y, z]$, i torna les coordenades cilíndriques corresponents en la forma $[\rho, \phi, z]$.

```
EXPORT Rec→Cil(rec)
BEGIN
  LOCAL cil:=polar_coordinates(rec(1),rec(2));
  [cil(1),cil(2),rec(3)];
END;
```

La funció `Cil→Rec` pren com a paràmetre les coordenades cilíndriques d'un punt en la forma $[\rho, \phi, z]$, i torna les coordenades cartesianes corresponents en la forma $[x, y, z]$.

```
EXPORT Cil→Rec(cil)
BEGIN
  LOCAL rec:=rectangular_coordinates(cil(1),cil(2));
  [rec(1),rec(2),cil(3)];
END;
```

La funció `Esf→Cil` pren com a paràmetre les coordenades esfèriques d'un punt en la forma $[r, \theta, \phi]$, i torna les coordenades cilíndriques corresponents en la forma $[\rho, \phi, z]$.

```

EXPORT Esf→Cil(esf)
BEGIN
  LOCAL cil:=rectangular_coordinates(esf(1),esf(2));
  [cil(2),esf(3),cil(1)];
END;

```

La funció $\text{Cil} \rightarrow \text{Esf}$ pren com a paràmetre les coordenades cilíndriques d'un punt en la forma $[\rho, \phi, z]$, i torna les coordenades esfèriques corresponents en la forma $[r, \theta, \phi]$.

```

EXPORT Cil→Esf(cil)
BEGIN
  LOCAL esf:=polar_coordinates(cil(3),cil(1));
  [esf(1),esf(2),cil(2)];
END;

```

La funció $\text{Rec} \rightarrow \text{Esf}$ pren com a paràmetre les coordenades rectangulars d'un punt en la forma $[x, y, z]$, i torna les coordenades esfèriques corresponents en la forma $[r, \theta, \phi]$.

```

EXPORT Rec→Esf(rec)
BEGIN
  Cil→Esf(Rec→Cil(rec));
END;

```

La funció $\text{Esf} \rightarrow \text{Rec}$ pren com a paràmetre les coordenades esfèriques d'un punt en la forma $[r, \theta, \phi]$, i torna les coordenades rectangulars corresponents en la forma $[x, y, z]$.

```

EXPORT Esf→Rec(esf)
BEGIN
  Cil→Rec(Esf→Cil(esf));
END;

```

Totes aquestes funcions treballen en el mode angular que estigui actiu en la calculadora, en el moment de ser executades.

8 Bibliografia

H. M. SCHEY. *Div, grad curl and all that, an informal text on vector calculus*. W. W. Norton and Company, 3rd edition, 1997.

PAUL LORRAIN, DALE R. CORSON. *Electromagnetic fields and waves*. W. H. Freeman and Company, 1972.

DAVID J. GRIFFITHS, REED COLLEGE. *Introduction to electrodynamics*. Prentice-Hall, 3rd edition, 1999.

DANIEL FLEISCH. *A student's guide to Maxwell's equations*. Cambridge University Press, 2008.