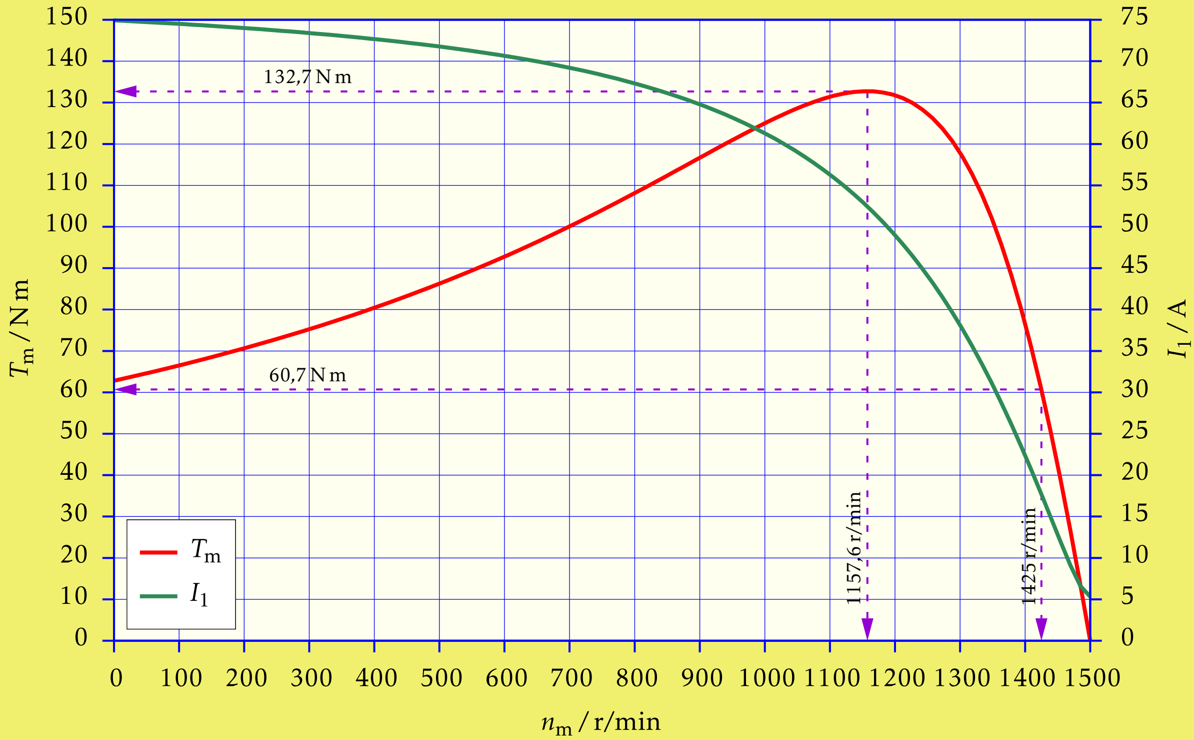
Qüestions Electrotècniques Diverses

Josep Mollera Barriga



Qüestions Electrotècniques Diverses

2005-2019 (versió 11.4)

Josep Mollera Barriga

Enginyer Industrial per l’ETSEIB (UPC)

If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants.

Isaac Newton

I never am really satisfied that I understand anything; because, understand it well as I may, my comprehension can only be an infinitesimal fraction of all I want to understand about the many connections and relations which occur to me.

Ada Lovelace

Dans la vie, rien n'est à craindre, tout est à comprendre.

Marie Curie

The first principle is that you must not fool yourself – and you are the easiest person to fool.

Richard Feynman

I hope you will disdain mediocrity and aim to excel in whatever you do. I hope you will fight injustice and discrimination in all of its guises.

Vera Rubin

I would like people to appreciate science in the same way they appreciate the arts.

Richard Dawkins

Índex General

Índex de Taules

Índex de Figures

Índex d'Exemples

Prefaci

Voldria dir en primer lloc que no he intentat escriure un tractat complet d'electrotècnia, d'electrònica o de sistemes elèctrics de potència, sinó que més aviat he volgut fer una recopilació de qüestions teòriques i pràctiques relacionades amb els camps mencionats anteriorment.

Les fonts d'informació utilitzades en la realització d'aquest llibre són molt diverses, i inclouen llibres sobre les diferents matèries, articles de revistes o d'Internet, apunts de classe d'assignatures impartides a l'ETSEIB, i d'altres.

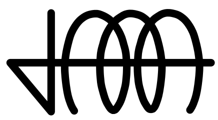
Pel que fa al llibre en si mateix, ha estat escrit utilitzant el sistema de composició de textos LaTeX, el qual permet integrar molt fàcilment text, fórmules i gràfics, obtenint un resultat de gran qualitat. S'han utilitzat diversos paquets d'ampliació, com ara l'AMS-LaTeX, per tal de millorar la presentació de certes parts del llibre, com per exemple les taules, les capçaleres o les fórmules matemàtiques. S'ha utilitzat la distribució MiKTeX, que ofereix una implementació lliure de LaTeX, accessible a l'adreça: www.miktex.org.

Aquest llibre està pensat per ser utilitzat tant de forma directa en la pantalla d'un ordinador com en paper després d'haver-lo imprès; per tal d'estalviar paper, el text té un format pensat per ser imprès en paper DIN-A4, a dues cares.

El contingut del llibre és molt divers, i va des de temes força teòrics fins a d'altres bastant més pràctics. He procurat donar exemples de tots els conceptes que s'hi expliquen, excepció feta dels molt elementals, perquè crec que és important no quedar-se només amb la teoria de la resolució d'un problema determinat, sinó que és molt útil veure exemples resolts pas a pas. En alguns exemples s'utilitzen programes de càlcul matemàtic o la calculadora *HP Prime* (vegeu l'apèndix F) per tal de resoldre'ls més fàcilment.

Encara que he fet tots els esforços possibles per eliminar qualsevol mena d'error en aquest text, és gairebé inevitable que n'hagi quedat algun, per tant, si algú troba algun error farà bé d'avisar-me!

Únicament em resta dir que espero que els lectors d'aquest llibre el trobin útil i interessant.



Josep Mollera Barriga

6 d'octubre de 2019

josep.mollerab@outlook.com

Historial

Es presenta a continuació l'evolució que ha tingut aquest llibre en les successives versions que han aparegut.

Versió 1.0 (8 de gener de 2005)

Després de molts esforços, surt a la llum la primera versió d'aquest llibre, format pels capítols 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7, i els apèndixs A, B, C, D i E.

Versió 1.1 (8 de febrer de 2005)

S'afegeix al llibre aquest apartat «Historial».

En l'apartat Notació, s'especifica que el mòdul d'un nombre complex és igual a l'arrel quadrada *positiva* de la suma dels quadrats de les seves parts real i imaginària.

Es modifiquen les equacions (1.51) i (1.52).

S'amplia la secció 5.5, la qual explica les diferències entre les normatives CEI i IEEE que fan referència als transformadors de mesura i protecció.

Es revisa tot el text fent-hi algunes petites modificacions i correccions.

Versió 1.2 (16 d'abril de 2005)

En l'apartat Notació, s'afegeix l'explicació de la convenció seguida a l'hora de dibuixar les fletxes que representen les tensions i els corrents.

S'afegeix l'apèndix F, on s'explica la designació de les classes de refrigeració en els transformadors de potència.

Versió 1.3 (24 d'octubre de 2005)

Els apèndixs A a F de la versió 1.2 es desplacen tres lletres cap avall i passen a ser els apèndixs D a I respectivament.

S'afegeix un nou apèndix A dedicat a l'alfabet grec.

S'afegeix un nou apèndix B dedicat al sistema internacional d'unitats (SI).

S'afegeix un nou apèndix C dedicat a les constants físiques.

En l'apartat Notació, s'amplien les definicions corresponents al conjugat i al mòdul d'un nombre complex, i s'inclouen les definicions de $\underline{\boldsymbol{V}}^*$ i $\underline{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{H}}$.

S'ha ampliat la secció 1.3, corresponent a la potència complexa.

S'ha ampliat l'exemple de la secció 3.2.

En la secció 3.3, s'ha afegit el càlcul de R_{P} i $\underline{Z}_{\mathrm{S}}$.

A l'hora de referir-se a la relació de transformació d'un transformador, se substitueix el símbol «$\ddot{u}$» emprat en les versions anteriors, pel símbol «m».

Versió 1.4 (2 de desembre de 2005)

Es representa correctament la Figura 1.7, ja que estava tallada per la dreta.

Es corregeix l'equació (4.9a) i l'exemple que hi ha a continuació, el qual en fa ús.

Es revisa tot el text fent-hi algunes correccions.

Versió 2.0 (3 d'agost de 2006)

S'ha modificat el criteri de colors utilitzat, a l'hora de ressaltar els enllaços interns del document (equacions, pàgines, etc.) i els enllaços externs; ara els enllaços interns són de color vermell i els enllaços externs són de color magenta. A més, tots els encapçalaments de capítols, seccions, subseccions, taules i figures, són ara de color blau.

S'han afegit nous capítols i s'ha fet una reordenació que afecta a diversos capítols i apèndixs, segons es detalla a continuació:

- Els capítols 1 i 2 de la versió 1.4 mantenen la seva posició.
- S'afegeix un nou capítol 3 dedicat a les sèries de Fourier.
- S'afegeix un nou capítol 4 dedicat a la transformada de Laplace.
- El capítol 3 de la versió 1.4 es desplaça dos números cap avall i passa a ser el capítol 5.
- L'apèndix E de la versió 1.4 es converteix en el capítol 6.
- Els capítols 4, 5, 6 i 7 de la versió 1.4 es desplacen tres números cap avall i passen a ser els capítols 7, 8, 9 i 10 respectivament.

- L'apèndix G de la versió 1.4 es converteix en el capítol 11.
- Els apèndixs A, B, C i D de la versió 1.4 mantenen la seva posició.
- S'afegeix un nou apèndix E dedicat a les relacions trigonomètriques.
- L'apèndix F de la versió 1.4 manté la seva posició.
- Els apèndixs H i I de la versió 1.4 es desplacen una lletra cap amunt i passen a ser els apèndixs G i H respectivament.

A l'hora de referir-se a la font de corrent i a l'admitància d'un circuit equivalent Norton, se substitueix el subíndex «Th» emprat en les versions anteriors, pel subíndex «No».

En l'apartat Notació s'afegeixen els símbols: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ i $\mathbb{C}$.

S'ha afegit el teorema de la superposició en la secció 1.1.

S'ha afegit la bateria en la secció 1.2, com a un dels components elementals d'un circuit elèctric.

S'ha afegit la secció 1.4, on es defineixen els valors mitjà i eficaç, i els factors d'amplitud, de forma i d'arrissada.

S'ha afegit la secció 1.5 dedicada als circuits divisors de tensió i divisors de corrent.

S'ha modificat l'equació (7.2), i les taules 7.1 i 7.5.

S'ha afegit la secció 8.6, on s'explica com connectar correctament transformadors de corrent i de tensió, a aparells de mesura i de protecció.

S'ha millorat l'explicació de la secció 10.5.

S'ha reestructurat la taula B.2.

Versió 2.1 (2 de gener de 2007)

S'adopta la compaginació moderna dels paràgrafs en tot el llibre, consistent en separar-los per una línia en blanc i en no entrar la primera línia de text.

S'unifica la representació de les fonts de corrent: un cercle amb una fletxa a dins.

S'afegeix una nota a peu de pàgina en la secció 1.1.1 que relaciona aquesta secció amb la secció 9.5.

Es millora l'explicació de la secció 1.6, alhora que es trasllada de lloc (en les versions anteriors formava part del capítol 5).

Es millora l'explicació de la secció 2.4.

S'afegeix una nota a peu de pàgina en la secció 5.2 que relaciona aquesta secció amb el capítol 10.

S'amplia la descripció de l'equació (7.25).

S'afegeix la secció 10.6, on s'explica com resoldre sistemes d'equacions no lineals amb els programes *Mathematica*® i *MATLAB*®.

Es millora l'explicació de la secció E.2, modificant la figura E.1 i numerant l'equació de la llei dels sinus.

Versió 2.2 (10 de març de 2008)

Es canvia el color dels enllaços interns i passen a ser de color negre com el text.

S'afegeixen les unitats que mancaven en alguns exemples.

En la secció 7.4.1, s'introdueixen les unitats cmil i kcmil, equivalents a les unitats CM i MCM respectivament; avui en dia és més freqüent veure escrit cmil i kcmil que no pas CM i MCM.

Es revisa l'apèndix B utilitzant les publicacions de l'any 2006 del «Bureau International des Poids et Mesures» (BIPM).

Es revisa l'apèndix C utilitzant les publicacions de l'any 2006 del «Committee on Data for Science and Technology» (CODATA).

Versió 3.0 (1 d'octubre de 2008)

Els capítols 9, 10 i 11 de la versió 2.2 es desplacen un número cap avall i passen a ser els capítols 10, 11 i 12 respectivament.

Es crea un nou capítol 9 dedicat als transformadors de potència; l'apèndix H de la versió 2.2 desapareix com a tal i queda integrat dins d'aquest nou capítol.

Versió 3.1 (5 de desembre de 2009)

En l'apèndix B s'afegeixen els prefixes de potències binàries Ki, Mi, Gi, Ti, Pi i Ei.

Es revisa tot el text fent-hi algunes petites modificacions i correccions.

Versió 3.2 (5 de gener de 2010)

S'afegeix l'apartat Bibliografia després del apèndixs.

Versió 4.0 (15 de febrer de 2010)

A partir d'aquesta versió s'utilitza la font *Kp-Fonts* en la composició de tot el text. Fins ara, les fonts utilitzades eren les *Pazo Math*, *Helvetica* i *Courier*.

Versió 4.1 (27 de febrer de 2010)

En el capítol dedicat a la transformada de Laplace, es modifiquen segons [12] algunes definicions i s'amplien les taules de transformades de Laplace segons [12] i [21].

Versió 4.2 (12 de març de 2010)

En el capítol dedicat a les sèries de Fourier, es completa l'equació (3.7c) i s'afegeix una taula amb les sèries de Fourier de formes d'ona usuals.

En l'apèndix dedicat a les funcions trigonomètriques, se simplifiquen les equacions (E.18) i (E.19).

Versió 4.3 (27 de novembre de 2010)

Els apèndixs de la versió 4.2 dedicats al grau de protecció IP i a les classes NEMA d'aïllaments tèrmics en motors, passen a formar part del capítol 12; aquest capítol canvia de nom i passa a dir-se «Normatives Diverses».

L'apèndix de la versió 4.2 dedicat a les escales logarítmiques, passa a formar part del capítol 5 dedicat a càlculs bàsics.

Es modifica l'adreça de correu electrònic de contacte amb l'autor.

Versió 4.4 (31 de març de 2011)

En el capítol 12, s'amplia la descripció dels codis IP i IK, i s'hi afegeix el codi NEMA dedicat al grau de protecció d'equips.

Es modifica l'adreça de correu electrònic de contacte amb l'autor.

Versió 4.5 (2 de novembre de 2011)

En l'apartat Notació, s'afegeixen diverses relacions referents a $|\underline{V}|$, arg $\underline{V}$, Re $\underline{V}$ i Im $\underline{V}$.

Es modifiquen les equacions (3.7c), (D.18a) i (D.18b).

En el capítol 3, es millora l'explicació de les propietats de les sèries de Fourier.

En el capítol 12, s'afegeixen dues seccions dedicades a l'àmbit d'aplicació de diverses normes CEI i IEEE.

En l'apartat Bibliografia, s'afegeix la referència [13]

Versió 4.6 (21 de novembre de 2011)

En l'apèndix dedicat a l'alfabet grec, s'utilitza el DIEC2 «Diccionari de la llengua catalana, 2a edició (2007)», com la referència per escriure els noms de les lletres gregues en català. S'afegeix també el nom de les lletres gregues en francès.

Versió 5.0 (30 de gener de 2012)

Es modifica lleugerament el nom del llibre, passant a dir-se «Qüestions Electrotècniques Diverses» en lloc de «Qüestions Diverses d'Electrotècnia», i per tant a parir d'ara es podrà denominar de forma abreviada «QED» (*Quod Erat Demonstrandum*).

Es canvia la tipografia dels exemples utilitzada en les versions anteriors, passant ara a ser escrits en lletra recta en lloc de en lletra inclinada.

El símbol $\measuredangle$ utilitzat per indicar l'argument d'un valor complex en les versions anteriors, es canvia pel símbol $\angle$ d'acord amb la norma internacional ISO/IEC 80000 «Quantities and units», la qual substitueix a l'antiga ISO 31.

Es canvia en tot el text el terme «vector» pel terme «fasor» quan es fa referència a magnituds sinusoidals.

S'indica en el prefaci que s'ha utilitzat la distribució MiKTEX, la qual ofereix una implementació lliure de LATEX.

S'afegeix en l'apartat Notació la definició d'un fasor.

Es modifica l'equació (7.25).

S'amplia la secció 9.7.2.

S'afegeixen algunes normes en les seccions (12.6) i (12.7).

S'inclou en la taula A.1 i en l'explicació posterior, la representació gràfica $\varkappa$ de la lletra minúscula kappa.

Es modifica en la taula B.6 el valor en unitats SI de la unitat de massa atòmica unificada.

En l'apartat Bibliografia, s'afegeixen les referències [2], [30], [35] i [36].

Es revisa tot el text fent-hi algunes correccions.

Versió 5.1 (15 de febrer de 2012)

Es millora en l'apartat Notació, la definició de l'angle α d'un fasor.

S'amplia la secció 1.6 dedicada als càlculs en per unitat.

Versió 5.2 (4 de maig de 2012)

Es completa l'equació (1.75).

En el capítol 12, s'afegeix una secció dedicada als interruptors automàtics de baixa tensió segons les normes CEI.

S'afegeixen algunes normes en la secció 12.8.

Versió 5.3 (14 de juliol de 2012)

S'amplia la secció D.2, afegint-hi la llei de les cotangents i la fórmula de Mollweide, i modificant la figura D.1.

S'afegeixen algunes normes en la secció 12.8.

Versió 5.4 (2 de novembre de 2012)

Es canvia de forma general el símbol «·» pel símbol «×», quan es tracta d'expressar la multiplicació de dos valors numèrics.

Es revisa l'apèndix B, sobretot en l'apartat referent a les normes d'escriptura.

Es revisa l'apèndix C utilitzant les publicacions de l'any 2010 del «Committee on Data for Science and Technology» (CODATA).

Versió 5.5 (1 de desembre de 2012)

En la secció 8.5 es referencia la norma IEEE C57.13, en lloc de la més antiga ANSI C57.13.

En la secció 9.10 es referencia la norma IEEE C57.12.00, en lloc de la més antiga ANSI C57.12.

Es posa al dia la secció 12.1 segons la norma IEEE C37.2, en lloc de la més antiga ANSI C37.2.

S'afegeixen algunes normes en les seccions 12.7 i 12.8.

Es modifica la figura D.1.

Versió 6.0 (2 de gener de 2013)

Es realitza una revisió general del text i de les figures d'aquest llibre, utilitzant la simbologia de les normes CEI 60027 «Letter symbols to be used in electrical technology» i CEI 60617 «Graphical Symbols for Diagrams».

S'amplia la secció 1.4 utilitzant les definicions de la norma CEI 60050.

Es completen les equacions (1.72) i (1.74).

Es modifica l'equació (1.79).

S'amplia la secció 3.4 utilitzant les definicions de la norma CEI 60050.

Es realitzen les modificacions següents en l'apèndix B:

- S'inclou la referència al Reial Decret 2032/2009, de 30 de desembre.
- S'indica que les variants ortogràfiques «kilogram» i «quilogram», «kilo» i «quilo», «radian» i «radiant», i «estereoradian» i «estereoradiant», són equivalents segons el DIEC2 «Diccionari de la llengua catalana, 2a edició (2007)»

- S'escriu correctament el nom de la unitat «electró-volt». El nom utilitzat en edicions anteriors, «electronvolt», no apareix en el DIEC2 «Diccionari de la llengua catalana, 2a edició (2007)».
- S'inclou l'adreça d'Internet de l'«International Earth rotation and Reference systems Service».
- Es refà l'apartat dedicat a les normes d'escriptura.

Es refà la taula de l'apèndix C agrupant els valors numèrics i les seves unitats, i s'explica a continuació com obtenir els errors absoluts i relatius dels valors que hi apareixen.

Versió 6.1 (1 de febrer de 2013)

S'afegeix un segon exemple en la secció 1.1.2, dedicat al teorema de Millman.

Versió 6.2 (11 de setembre de 2013)

Es revisa el capítol 8 utilitzant la norma CEI 60044 en lloc de les normes CEI 60185 i CEI 60186, les quals ja no estan en vigor.

Es crea la secció 9.11 per explicar com es formen els circuits homopolars dels transformadors de potència de dos i tres debanats.

En la secció 12.7 s'eliminen les normes CEI 60185 i CEI 60186, les quals ja no estan en vigor.

S'afegeixen el prefixes «zebi» i «yobi» a la Taula B.9.

En l'apartat Bibliografia, s'afegeix la referència [22].

Versió 6.3 (24 de març de 2014)

S'inclou el període T en el gràfic de l'apartat Notació.

S'amplia la secció 7.4 dedicada a la capacitat tèrmica dels cables en curtcircuit.

S'amplia el capítol 8 dedicat als transformadors de mesura i protecció.

S'afegeixen algunes normes en les seccions 12.7 i 12.8.

En l'apartat Bibliografia, s'afegeixen les referències [37] i [40].

Es revisa tot el text fent-hi algunes correccions. A més, es modifica la presentació de tots els exemples, emmarcant-los dins d'un rectangle.

Versió 7.0 (24 de juliol de 2014)

En l'apartat Notació, s'afegeixen dues relacions referents a la representació de nombres complexes en format exponencial.

Es creen i reordenen diversos capítols i seccions, segons es detalla a continuació:

- El capítol 1 es queda amb les primeres cinc seccions reordenades, de les set que tenia la versió 6.3. S'afegeix a aquest capítol una sisena secció nova, dedicada als circuits R-L-C.
- El capítol 5 de la versió 6.3 passa a ser el capítol 2, reordenant-ne les seccions i incorporant les dues últimes seccions del capítol 1 de la versió 6.3.
- Els capítols 2, 3 i 4 de la versió 6.3 es desplacen un número cap avall.
- Es crea un nou apèndix, dedicat al càlcul numèric.

S'amplia la secció 7.5.2.

S'amplia el capítol 8 dedicat als transformadors de mesura i protecció.

S'afegeixen algunes normes en la secció 12.8.

En l'apartat Bibliografia, s'afegeixen les referències [3], [6], [14], [15], [32], [41] i [47].

Es modifica l'adreça de correu electrònic de contacte amb l'autor.

Versió 7.1 (23 d'octubre de 2014)

S'afegeixen algunes normes en la secció 12.8.

Versió 8.0 (9 de novembre de 2014)

Es refan tots els dibuixos del llibre utilitzant el programa *Inkscape*; aquest programa de dibuix vectorial és de distribució lliure, i pot obtenir-se a l'adreça: www.inkscape.org. En totes les versions anteriors del llibre s'havia utilitzat el programa jPicEdt, el qual també és de distribució lliure i pot obtenir-se a l'adreça: www.jpicedt.org.

Es canvien en l'apartat Notació, els noms de les variables utilitzades en la definició d'un fasor.

En la secció 1.4.2, dedicada a la potència trifàsica, se substitueixen els subíndexs «α», «β», «γ» i «ν», pels subíndexs «A», «B», «C» i «N», a l'hora d'identificar les tres fases i el neutre d'un sistema trifàsic.

En la secció 2.3.1, dedicada als circuits divisors de tensió, es canvien els noms de les variables utilitzades.

En la secció 2.3.2, dedicada als circuits divisors de corrent, es canvien els noms de les variables utilitzades.

En la secció 2.4, dedicada a la transformació estrella $\leftrightarrow$ triangle d'impedàncies, se substitueixen els subíndexs «α», «β» i «γ», pels subíndexs «A», «B» i «C», a l'hora d'identificar les tres fases d'un sistema trifàsic.

En el capítol 3, dedicat a les components simètriques, se substitueixen els superíndexs «(1)», «(2)» i «(0)», pels subíndexs «1», «2» i «0», a l'hora d'identificar les components directa, inversa i homopolar. A més, també se substitueixen els subíndexs «α», «β», «γ» i «ν» , pels subíndexs «A», «B», «C» i «N», a l'hora d'identificar les tres fases i el neutre d'un sistema trifàsic.

S'afegeix l'equació (9.51) per tal d'explicar millor la compatibilitat entre els índexs horaris de dos transformadors.

Versió 8.1 (16 de novembre de 2014)

Es modifica el gruix i l'estil de línia d'alguns dibuixos del llibre, per tal de fer-los més uniformes.

Es numeren les figures de les seccions 9.12.1 i 9.12.2.

Versió 8.2 (23 de novembre de 2014)

S'afegeix la secció E.3, dedicada a la solució de funcions no lineals.

Versió 8.3 (11 de desembre de 2014)

Es millora en l'apartat Notació, l'explicació de la definició d'un fasor.

Versió 8.4 (3 de gener de 2015)

Es millora l'explicació de la secció 1.6.5.

S'amplia la secció 2.3, afegint-hi el cas particular de dues impedàncies.

Es crea la secció 6.3 dedicada a les potències normalitzades de les resistències.

S'expressen correctament les equacions (E.1) i (E.2).

En l'apartat Bibliografia, s'afegeixen les referències [16], [38] i [39].

Versió 9.0 (29 d'agost de 2016)

Es modifiquen els estils dels textos de les capçaleres de les taules i dels peus de les figures, per tal que siguin iguals que els estils dels títols dels capítols, seccions i subseccions.

Es modifica en tot el llibre la manera de representar una variable acompanyada de les seves unitats. Les variables se separaran de les seves unitats mitjançant el símbol de divisió «/», en lloc de tancar les unitats entre «[» i «]»; per exemple, en lloc de $S\,[\mathrm{mm}^2]$, a partir d'ara escriurem S/mm^2.

Es modifica en tot el llibre la posició de les notes que fan referència a elements d'una taula, col·locant-les immediatament a sota de la pròpia taula en lloc de fer-ho al peu de pàgina.

Es refan totes les gràfiques de funcions del llibre utilitzant el programa *gnuplot*; aquest programa de dibuix de gràfiques de funcions és de distribució lliure, i pot obtenir-se a l'adreça: www.gnuplot.info. En totes les versions anteriors del llibre s'havia utilitzat el paquet d'ampliació PSTricks.

S'amplien algunes seccions i exemples del llibre, afegint-hi una resolució numèrica mitjançant la calculadora *HP Prime*; aquesta calculadora disposa d'un emulador per a PC que pot descarregar-se de la pàgina de Hewlett-Packard: www.hpprime.de/en/category/6-downloads. Les seccions i els exemples afectats són els següents:

- L’exemple 1.8 (Corrent de pic de curtcircuit).
- L’exemple 1.9 (Resolució de xarxes amb el mètode de les malles).
- L’exemple 2.3 (Resolució de circuits coneixent la potència absorbida).
- La secció 3.7 (Components simètriques)
- L’exemple 4.3 (Sèries de Fourier).
- L’exemple 5.4 (Transformada de Laplace).
- L’exemple 10.1 (Resolució de xarxes utilitzant el mètode dels nusos).
- La secció 11.6 (Flux de càrregues).

S’amplia la secció 1.2.2 dedicada al teorema de Millman, afegint-hi un exemple més al final.

Es millora l’explicació de la secció 1.6.5.

Es crea la secció 1.7 dedicada a la resolució de xarxes elèctriques, utilitzant el mètode de les malles.

S’amplia la secció 2.7 dedicada a les escales logarítmiques, afegint-hi al final un nou apartat, dedicat a la determinació dels paràmetres de funcions que prenen la forma d’una recta en gràfiques d’escala logarítmica–logarítmica.

Es millora l’explicació de l’exemple 3.1.

Es crea la secció 3.7 on es descriuen diversos programes de la calculadora *HP Prime* relacionats amb les components simètriques.

S’amplia l’exemple 4.3, afegint-hi al final una nova gràfica.

S’amplia el capítol 6, afegint-hi la codificació del coeficient de variació amb la temperatura de les resistències, i la norma CEI que defineix les sèries de resistències estàndard.

Es modifiquen les capçaleres de totes les taules del capítol 8, ja que els percentatges d’error de tensions i corrents que s’hi indicaven, estaven referits incorrectament als valors nominals dels transformadors.

Es modifiquen les equacions que fan referència a les figures 9.1 i 9.11, perquè es vegi millor la seva correspondència.

S’afegeixen algunes normes en la secció 12.7.

En l’apèndix A dedicat a l’alfabet grec, s’utilitza el D.R.A.E. «Diccionario de la Lengua Española, 23ª edición (2014)», com la referència per escriure els noms de les lletres gregues en castellà.

S’amplia l’apèndix B, afegint-hi al final una secció dedicada al factors de conversió d’unitats.

Es revisa la taula B.6 i l’apèndix C, utilitzant les publicacions de l’any 2014 del «Committee on Data for Science and Technology» (CODATA).

S’amplia la secció D.2, afegint-hi les equacions de les coordenades del baricentre d’un triangle, i es modifica de manera corresponent la figura D.1.

Es modifiquen les figures E.1 i E.2.

En l’apartat Bibliografia, s’afegeixen les referències [5], [17] i [24].

Versió 9.1 (27 de novembre de 2016)

Es revisa tot el text fent-hi algunes modificacions i correccions.

Es crea la Figura 1.4, on s'hi representen els paràmetres d'una funció periòdica qualsevol.

Es modifica en la secció 3.7 la funció `Triangle→Fasors`, fent-la més simple.

Es milloren les equacions (7.27) i (7.28).

Es creen les equacions (7.29) i (7.30), i un exemple de com utilitzar-les.

Es dona color a la Taula D.1, per tal de distingir millor els valors positius dels negatius.

Versió 10.0 (6 de gener de 2017)

Es modifica en tot el llibre la manera de representar el producte de dues unitats; en les versions anteriors s'havia utilitzat un punt volat, i a partir d'ara es farà servir un espai en blanc. Ambdues formes són correctes, però l'espai en blanc és la forma utilitzada preferentment en les publicacions del BIPM «Bureau International des Poids et Mesures». Els apèndixs B i C són els més afectats per aquest canvi.

Es modifica en tot el llibre el símbol de la unitat utilitzada per a la potència reactiva; en les versions anteriors s'havia emprat el símbol «VAr», i a partir d'ara es farà servir el símbol «var», ja que és el que adopta la norma CEI 60027-1.

Es modifica en tot el llibre la manera d'escriure les funcions Re, Im i arg, quan van seguides d'una única variable; en les versions anteriors s'havien emprat, per exemple, les formes $\mathrm{Re}(\underline{S})$, $\mathrm{Im}(\underline{S})$ i $\arg(\underline{S})$, i a partir d'ara es faran servir les formes $\mathrm{Re}\,\underline{S}$, $\mathrm{Im}\,\underline{S}$ i $\arg\underline{S}$ respectivament.

Es millora en l'apartat Notació, la definició de l'angle α d'un fasor.

Es completa l'exemple 1.6, calculant-hi al final les potències activa i reactiva.

Es completa la secció 1.6.1, afegint-hi les equacions corresponents a tenir el condensador carregat en l'instant inicial, a una tensió no nul·la.

Es completa la secció 1.6.3, afegint-hi les equacions corresponents a tenir circulant per la inductància en l'instant inicial, un corrent no nul.

Es crea l'exemple 1.7, en el qual es calcula el corrent i la tensió de càrrega i descàrrega d'un circuit R-L.

Es completa l'exemple 1.9, calculant-hi per separat els valors de κ i $\hat{I}_{\text{asim}}$.

Es completa l'exemple 4.3, afegint-hi al final el càlcul del corrent $i(t)$ utilitzant les equacions de la secció 1.6.3.

Es completa l'exemple 10.1, afegint-hi al final la resolució del sistema d'equacions lineals amb la funció `simult`.

En l'apèndix A, es donen les adreces d'Internet dels diccionaris utilitzats per escriure els noms de les lletres gregues en anglès i francès. Addicionalment, es corregeix el nom en francès de la lletra ϖ; el nom correcte és «pi dorien».

En l'apèndix B, es té en compte el suplement de l'any 2014 publicat pel BIPM «Bureau International des Poids et Mesures», el qual posa al dia la 8a edició de les seves publicacions de l'any 2006. Els canvis introduïts que afecten a aquest llibre, són els següents:

- Es modifica l'ordre de les unitats base, en l'expressió de les unitats derivades. Això afecta a les Taules B.3 i B.4.
- La unitat astronòmica de longitud va ser redefinida l'any 2012 en la 28a Assemblea General de la Unió Astronòmica Internacional, passant a ser un valor exacte. Això ocasiona que aquesta unitat passi de la Taula B.6 a la Taula B.5.

Es crea la Taula B.8 per recollir les unitats fora de l'SI acceptades addicionalment pel NIST «National Institute of Standards and Technology».

Es crea la secció B.7 per recollir unitats definides per la norma CEI 60027, addicionals a les de l'SI. Algunes d'aquestes unitats estaven incloses anteriorment en la secció B.6.

En la secció B.8, s'utilitza el símbol ? per indicar escriptures correctes però no recomanades.

Versió 10.1 (8 de març de 2017)

S'afegeix una figura al final de la secció 12.1, per il·lustar la diferència entre les funcions de protecció 50, 50TD i 51, i l'equació de les corbes característiques de la funció de protecció 51, amb els valors dels paràmetres utilitzats per les normes CEI i IEEE.

Versió 10.2 (7 de maig de 2017)

S'afegeix al final de la secció 3.5, el càlcul del sistema de tensions fase–neutre $\underline{U}_{\mathrm{AG}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BG}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CG}}$, a partir del sistema de tensions fase–fase $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BC}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CA}}$, i s'utilitzen les equacions obtingudes, al final de l'exemple 3.1.

Es crea el nou exemple 3.2, on es calculen les components simètriques d'un sistema de tensions desequilibrat que alimenta a una càrrega desequilibrada.

Versió 10.3 (3 de juny de 2017)

Es millora l'explicació de l'apartat 11.5.

Versió 10.4 (28 d'agost de 2017)

Es crea el nou apèndix F, dedicat a programes per a la calculadora *HP Prime* de Hewlett-Packard. S'eliminen els programes que en les versions anteriors estaven llistats en l'exemple 2.3 i en la secció 3.7, incorporant-se en aquest nou apèndix.

S'afegeix un nou exemple al final de la secció E.1, dedicat a la interpolació en dues dimensions.

Versió 10.5 (11 de setembre de 2017)

S'utilitza la font «true type» *HPPrime.ttf*, per representar les tecles de la calculadora *HP Prime* en els diversos exemples d'ús d'aquesta calculadora que hi ha en el llibre.

S'inclou en l'apèndix F una imatge de la calculadora *HP Prime*.

Versió 10.6 (1 d'octubre de 2017)

Es canvia el nom de la part II del llibre, passant a anomenar-se «Equips i Components Elèctrics».

Es modifica l'estil del text de les parts del llibre, unificant-lo amb l'estil del text dels capítols.

En l'apartat Notació, s'inclou una nota per indicar que el valor de l'angle ψ ha d'expressar-se sempre en radiant, per tal que el valor de $e^{j\psi}$ sigui correcte.

S'afegeix una nota a la taula 6.1, per indicar l'equivalència entre les unitats ppm/°C i $\mu\Omega/(\Omega\,K)$.

Es millora el dibuix de l'exemple 11.2.

S'afegeixen algunes normes en la secció 12.7.

En l'apartat Bibliografia, s'afegeix la referència [11].

Es revisa tot el text fent-hi algunes correccions.

Versió 10.7 (18 de febrer de 2018)

Es corregeix la posició del títol de la figura 1.3, i dels títols de les taules 8.7, 12.5, 12.6 i 12.7. i 13.6.

Es millora la representació dels valors de la taula B.5.

Versió 10.8 (23 de maig de 2018)

Es fan algunes correccions en el text.

Versió 11.0 (26 de juny de 2019)

Després de la portada, s'afegeix una pàgina amb el copyright i una altra amb diverses citacions.

En el Prefaci, s'indica que s'utilitzen programes de càlcul matemàtic i la calculadora *HP Prime* per resoldre alguns exemples del llibre.

Es millora en l'apartat Notació la definició de fasor, modificant-ne també el dibuix associat.

S'afegeix la Taula 1.1, on es donen els valors mitjans i eficaços d'usa sèrie de formes d'ona usuals.

Es crea la secció 1.4 dedicada a l'explicació de les potències instantània, activa i reactiva.

Les seccions 1.4, 1.5, 1.6 i 1.7 de la versió 10.8 es desplacen un número cap avall i passen a ser les seccions 1.5, 1.6, 1.7 i 1.8 respectivament.

En la secció 1.5, es millora l'explicació del factor de potència.

En les seccions 1.7.1, 1.7.2, 1.7.3 i 1.7.4, s'afegeixen gràfiques que acompanyen a les equacions de les tensions i corrents dels circuit R-C i R-L que hi apareixen.

Es millora l'explicació de la secció 2.7.2, dedicada a la determinació dels paràmetres de funcions que prenen la forma d'una recta en gràfiques d'escala logarítmica–logarítmica.

S'amplia la secció 9.8 incorporant-hi la subsecció dedicada als circuits homopolar, i afegint-hi una subsecció dedicada a les tensions i corrents de seqüència directa, inversa i homopolar.

Es crea un nou capítol 10 dedicat als motors d'inducció trifàsics.

Els capítols 10, 11 i 12 de la versió 10.8 es desplacen un número cap avall i passen a ser els capítols 11, 12 i 13 respectivament.

S'elimina del capítol 13 la secció dedicada a les classes NEMA d'aïllaments tèrmics en motors; aquesta secció s'incorpora dins del nou capítol 10 dedicat als motors d'inducció trifàsics.

En la secció B.9, s'afegeix la referència al document «The International System of Units (SI) – Conversion Factors for General Use».

En l'apèndix F s'afegeix l'adreça de la pàgina de Hewlett-Packard des d'on pot descarregar-se un emulador per a PC de la calculadora *HP Prime*; s'afegeix a més la funció **Regla_dels_Trapezis**.

En l'apartat Bibliografia, s'afegeixen les referències [27] i [31].

Es revisa tot el text fent-hi algunes correccions, i incorporant-hi els canvis introduïts per l'Institut d'Estudis Catalans en la *Gramàtica de la llengua catalana* (2016) i en *l'Ortografia catalana* (2017).

Versió 11.1 (7 de juliol de 2019)

S'actualitza l'apèndix B degut a l'entrada en vigor el 20 de maig de 2019 de la nova definició de les unitats fonamentals del Sistema Internacional d'Unitats (SI).

S'actualitza l'apèndix C amb els nous valors de les constants físiques recomanats l'any 2018 pel «Committee on Data for Science and Technology» (CODATA). Aquests canvis de valors estan relacionat amb la nova definició de les unitats fonamentals de l'SI, indicada en el paràgraf anterior.

Versió 11.2 (25 d'agost de 2019)

Es milloren les figures de l'exemple de la secció 8.8.

Es corregeixen referències creuades errònies en la secció B.8.

Versió 11.3 (5 de setembre de 2019)

Es millora la presentació dels índexs general, de taules i de figures.

Es crea un nou índex d'exemples, a continuació de l'índex de figures.

Versió 11.4 (6 d'octubre de 2019)

Es modifica l'aparença de totes les gràfiques de funcions, creades amb el programa *gnuplot*.

Notació

Es presenta a continuació la notació seguida en aquest llibre.

Cal fer notar que les variables escalars s'escriuen en lletra inclinada, i que les variables vectorials i matricials s'escriuen en lletra negreta inclinada.

j	La unitat imaginària, definida com: $\mathrm{j} \equiv \sqrt{-1}$
V	Una variable real.
$\underline{V}$	Una variable complexa.
$\underline{V}^*$	Conjugat d'una variable complexa. Es compleixen les relacions: $(\underline{V}_1 \pm \underline{V}_2 \pm \cdots \pm \underline{V}_n)^* = \underline{V}_1^* \pm \underline{V}_2^* \pm \cdots \pm \underline{V}_n^*$ $(\underline{V}_1 \underline{V}_2 \cdots \underline{V}_n)^* = \underline{V}_1^* \underline{V}_2^* \cdots \underline{V}_n^*$ $(\underline{V}_1 / \underline{V}_2)^* = \underline{V}_1^* / \underline{V}_2^*$
$\lvert\underline{V}\rvert$	Mòdul d'una variable complexa. Es compleixen les relacions: $\underline{V}\,\underline{V}^* = \lvert\underline{V}\rvert^2$ $1/\underline{V} = \underline{V}^* / \lvert\underline{V}\rvert^2$ $\lvert\underline{V}_1 \underline{V}_2 \cdots \underline{V}_n\rvert = \lvert\underline{V}_1\rvert \lvert\underline{V}_2\rvert \cdots \lvert\underline{V}_n\rvert$ $\lvert\underline{V}_1 / \underline{V}_2\rvert = \lvert\underline{V}_1\rvert / \lvert\underline{V}_2\rvert$ $\lvert\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \cdots + \underline{V}_n\rvert \leq \lvert\underline{V}_1\rvert + \lvert\underline{V}_2\rvert + \cdots + \lvert\underline{V}_n\rvert$
$\arg \underline{V}$	Argument (angle) d'una variable complexa. Es compleixen les relacions: $\arg \underline{V}^* = -\arg \underline{V}$ $\arg(-\underline{V}) = \arg \underline{V} + \pi$ $\arg(\underline{V}_1 \underline{V}_2 \cdots \underline{V}_n) = \arg \underline{V}_1 + \arg \underline{V}_2 + \cdots + \arg \underline{V}_n$ $\arg(\underline{V}_1 / \underline{V}_2) = \arg \underline{V}_1 - \arg \underline{V}_2$
$\operatorname{Re} \underline{V}$	Part real d'una variable complexa. Es compleix: $\operatorname{Re} \underline{V} = \dfrac{\underline{V} + \underline{V}^*}{2}$
$\operatorname{Im} \underline{V}$	Part imaginària d'una variable complexa. Es compleix: $\operatorname{Im} \underline{V} = \dfrac{\underline{V} - \underline{V}^*}{2\mathrm{j}}$

$A + \mathrm{j}B$	Expressió cartesiana (part real i part imaginària) d'una variable complexa.
$Z_{\angle\psi}$	Expressió polar (mòdul i argument) d'una variable complexa. Les relacions entre A, B, Z i ψ són:[1] $Z = +\sqrt{A^2 + B^2} \qquad \psi = \arctan\dfrac{B}{A} \qquad A = Z\cos\psi \qquad B = Z\sin\psi$
$Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$	Expressió d'Euler d'una variable complexa, definida com:[2] $Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \equiv Z(\cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi)$. Es compleixen les relacions: $Z_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_1}\,Z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_2} = Z_1 Z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_1+\psi_2)}$ $\dfrac{Z_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_1}}{Z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_2}} = \dfrac{Z_1}{Z_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_1-\psi_2)}$
$\boldsymbol{V}$	Una matriu real o un vector real.
$\boldsymbol{V}^{-1}$	Matriu inversa d'una matriu real.
$\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}$	Matriu transposada d'una matriu real, o vector transposat d'un vector real.
$\boldsymbol{V}(n)$	Element n-èsim d'un vector real.
$\boldsymbol{V}(m,n)$	Element de la fila m i columna n d'una matriu real.
$\underline{\boldsymbol{V}}$	Una matriu complexa o un vector complex.
$\underline{\boldsymbol{V}}^{-1}$	Matriu inversa d'una matriu complexa.
$\underline{\boldsymbol{V}}^{\mathsf{T}}$	Matriu transposada d'una matriu complexa, o vector transposat d'un vector complex.
$\underline{\boldsymbol{V}}^{*}$	Matriu conjugada d'una matriu complexa o, vector conjugat d'un vector complex.
$\underline{\boldsymbol{V}}^{\mathsf{H}}$	Matriu conjugada transposada d'una matriu complexa, o vector conjugat transposat d'un vector complex, definit com: $\underline{\boldsymbol{V}}^{\mathsf{H}} \equiv (\underline{\boldsymbol{V}}^{*})^{\mathsf{T}}$.
$\underline{\boldsymbol{V}}(n)$	Element n-èsim d'un vector complex.
$\underline{\boldsymbol{V}}(m,n)$	Element de la fila m i columna n d'una matriu complexa.

Pel que fa als sentits assignats a les fletxes que representen les tensions i els corrents en els diversos circuits elèctrics que apareixen en aquest llibre, s'utilitza la convenció següent:

$\xrightarrow{U}$	Tensió contínua: la fletxa indica el sentit de la caiguda de tensió, és a dir, va del nus positiu al nus negatiu.
$\xrightarrow{I}$	Corrent continu: la fletxa indica el sentit assignat com a positiu al corrent.
$\xrightarrow{\underline{U}}$	Tensió alterna: la fletxa indica el sentit assignat com a positiu a la caiguda de tensió, quan el nus d'origen de la fletxa té un potencial més positiu que el nus de destinació.
$\xrightarrow{\underline{I}}$	Corrent altern: la fletxa indica el sentit assignat com a positiu al corrent.

[1] Cal tenir en compte que la funció arctan disponible en moltes calculadores i llenguatges de programació, torna de forma estandarditzada valors compresos entre $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$. En aquest cas cal sumar el valor π, quan A és negatiu, a l'angle obtingut amb la funció arctan per tal d'obtenir l'angle en el quadrant correcte.

[2] El valor de ψ ha d'expressar-se sempre en radiant, per tal que el valor de $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$ sigui correcte.

En aquest llibre les variable complexes s'utilitzen per representar fasors. Un fasor $A_{\angle\alpha}$ és equivalent a una funció sinusoidal variable en el temps, la qual pot expressar-se utilitzant la funció cosinus:

$$y(t) = \sqrt{2}\,A\cos(\omega t + \alpha)$$

O utilitzant la funció sinus:

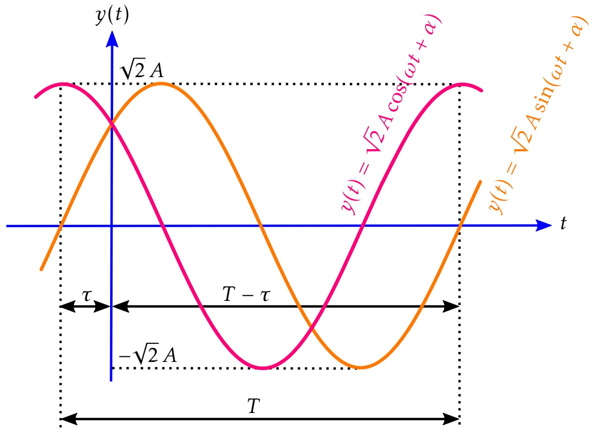
$$y(t) = \sqrt{2}\,A\sin(\omega t + \alpha)$$

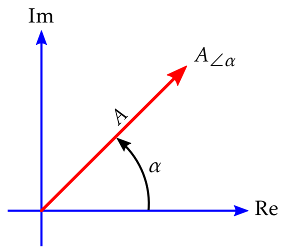
Quan hi ha diverses funcions sinusoidals relacionades entre si, cal utilitzar de manera uniforme la funció cosinus o la funció sinus per a totes les funcions. Les variables i paràmetres implicats són:

- $\boldsymbol{y(t)}$ Funció sinusoidal; representa normalment una tensió o un corrent.
- $\boldsymbol{t}$ Temps.
- $\boldsymbol{f}$ Freqüència de la funció sinusoidal.
- $\boldsymbol{T}$ Període de la funció sinusoidal.
- $\boldsymbol{\omega}$ Velocitat angular de la funció sinusoidal. Es compleix: $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.
- $\boldsymbol{A}$ Valor eficaç de la funció sinusoidal (vegeu la secció 1.3 a la pàgina 9); els valors de pic de la funció sinusoidal són: $\pm\sqrt{2}\,A$.
- $\boldsymbol{\alpha}$ Angle inicial de la funció sinusoidal, on $\alpha = \omega\tau$, o $\alpha = -\omega(T-\tau)$; el significat del temps τ es pot veure en el gràfic que hi ha més avall.

  Quan es fa servir la funció cosinus, α és positiu quan s'utilitza τ, és a dir, el temps mesurat des de l'origen ($t = 0$) cap a l'esquerra, fins a trobar el primer valor màxim de la funció, i α és negatiu quan s'utilitza $T-\tau$, és a dir, el temps mesurat des de l'origen cap a la dreta, fins a trobar també el primer valor màxim de la funció.

  Quan es fa servir la funció sinus, α és positiu quan s'utilitza τ, és a dir, el temps mesurat des de l'origen ($t = 0$) cap a l'esquerra, fins a trobar el primer punt on la funció es fa zero (passant de valors negatius a positius), i α és negatiu quan s'utilitza $T-\tau$, és a dir, el temps mesurat des de l'origen cap a la dreta, fins a trobar també el primer punt on la funció es fa zero (passant de valors negatius a positius).





Els símbols que representen els diferents conjunts de nombres són:

$\mathbb{Z}$	Nombres enters: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}^+$	Nombres enters positius (naturals): $1, 2, 3, 4, \ldots$
$\mathbb{Z}^*$	Nombres enters no negatius: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
$\mathbb{Z}^-$	Nombres enters negatius: $-1, -2, -3, -4, \ldots$
$\mathbb{Q}$	Nombres racionals.
$\mathbb{R}$	Nombres reals.
$\mathbb{R}^+$	Nombres reals positius.
$\mathbb{R}^-$	Nombres reals negatius.
$\mathbb{C}$	Nombres complexos.

Part I

Electrotècnia

Capítol 1

Fonaments

1.1 Introducció

Es tracten en aquest capítol qüestions bàsiques d'electrotècnia, com ara teoremes, definicions i relacions, components elementals, i circuits bàsics.

1.2 Teoremes d'electrotècnia

1.2.1 Teorema de Thévenin–Norton

El teorema de Thévenin ens permet substituir una xarxa complexa formada per elements lineals, per un circuit equivalent format per una font de tensió $\underline{E}_{\mathrm{Th}}$ en sèrie amb una impedància $\underline{Z}_{\mathrm{Th}}$.

Atenent a la Figura 1.1, si coneixem la tensió en buit $\underline{U}_{\mathrm{o}}$ entre dos nusos α i β d'una xarxa, i la impedància $\underline{Z}_{\alpha\beta}$ d'aquesta xarxa vista des d'aquests dos nusos, podem obtenir-ne els valors del circuit Thévenin equivalent entre aquests dos nusos a partir de les relacions següents:

$$\underline{E}_{\mathrm{Th}} = \underline{U}_{\mathrm{o}} \qquad \underline{Z}_{\mathrm{Th}} = \underline{Z}_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

D'aquesta manera, la connexió d'aquesta xarxa a través dels nusos α i β a una càrrega qualsevol $\underline{Z}_{\mathrm{Q}}$, és equivalent pel que fa a aquesta càrrega, a connectar-la al circuit equivalent Thévenin.

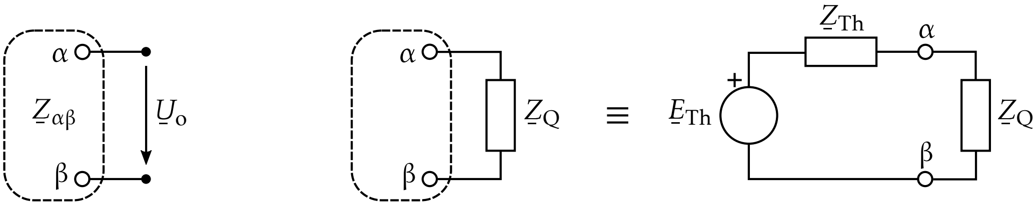


Figura 1.1 Teorema de Thévenin

El teorema de Norton ens permet substituir una xarxa complexa formada per elements lineals, per un circuit equivalent format per una font de corrent $\underline{J}_{\mathrm{No}}$ en paral·lel amb una admitància $\underline{Y}_{\mathrm{No}}$.

Atenent a la Figura 1.2, si coneixem el corrent de curtcircuit $\underline{I}_{cc}$ entre dos nusos α i β d'una xarxa, i l'admitància $\underline{Y}_{\alpha\beta}$ d'aquesta xarxa vista des d'aquests dos nusos, podem obtenir-ne els valors del circuit Norton equivalent entre aquests dos nusos a partir de les relacions següents:

$$\underline{J}_{\mathrm{No}} = \underline{I}_{\mathrm{cc}} \qquad \underline{Y}_{\mathrm{No}} = \underline{Y}_{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

D'aquesta manera, la connexió d'aquesta xarxa a través dels nusos α i β a una càrrega qualsevol $\underline{Z}_{\mathrm{Q}}$, és equivalent pel que fa a aquesta càrrega, a connectar-la al circuit equivalent Norton.

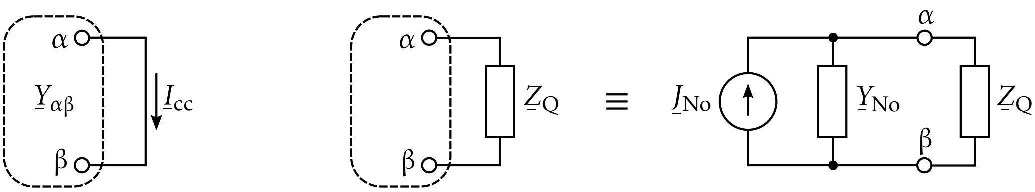


Figura 1.2 Teorema de Norton

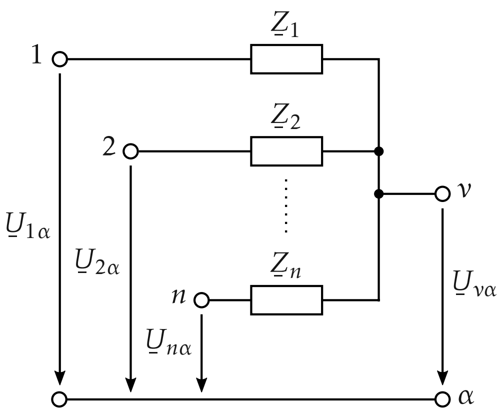
Els circuits Thévenin i Norton d'una xarxa són equivalents entre si. Els paràmetres que defineixen aquests dos circuits compleixen les relacions següents:

$$\underline{E}_{\mathrm{Th}} = \frac{\underline{J}_{\mathrm{No}}}{\underline{Y}_{\mathrm{No}}} \qquad \underline{J}_{\mathrm{No}} = \frac{\underline{E}_{\mathrm{Th}}}{\underline{Z}_{\mathrm{Th}}} \qquad \underline{Z}_{\mathrm{Th}} = \frac{1}{\underline{Y}_{\mathrm{No}}} \tag{1.3}$$

Els valors $\underline{Z}_{\mathrm{Th}}$ i $\underline{Y}_{\mathrm{No}}$ es poden obtenir substituint en la xarxa les fonts de tensió per curtcircuits, i les fonts de corrent per circuits oberts, i calculant aleshores la impedància o admitància equivalent.[1]

1.2.2 Teorema de Millman

Atenent a la Figura 1.3, el teorema de Millman ens permet obtenir la tensió de l'extrem comú ν de diverses impedàncies respecte d'un punt qualsevol α, a partir de les tensions dels altres extrems de les impedàncies respecte del mateix punt α.



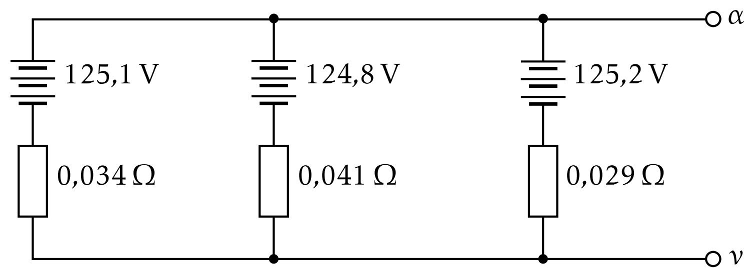
$$\underline{U}_{\nu\alpha} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\underline{U}_{k\alpha}}{\underline{Z}_k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_k}} \tag{1.4}$$

Figura 1.3 Teorema de Millman

[1] El càlcul sistemàtic de $\underline{Z}_{\mathrm{Th}}$ i $\underline{Y}_{\mathrm{No}}$ en una xarxa qualsevol, s'explica en la secció 11.5

Exemple 1.1 Teorema de Millman – Bateries en paral·lel

A partir de la figura següent, es tracta de determinar els circuits Thévenin i Norton equivalents del circuit format per les tres bateries i les seves resistències, i calcular la tensió i el corrent que existirien en una resistència de càrrega $R_Q = 50\,\Omega$ connectada entre els punts α i ν.



La impedància Thévenin equivalent es calcula, tal com s'ha dit en la secció 1.2.1, substituint en el circuit totes les fonts de tensió per curtcircuits; així doncs, ens queden tres resistències en paral·lel entre α i ν:

$$Z_{\mathrm{Th}} = \frac{1}{\dfrac{1}{0{,}034\,\Omega} + \dfrac{1}{0{,}041\,\Omega} + \dfrac{1}{0{,}029\,\Omega}} = 0{,}011\,33\,\Omega$$

Per calcular la font de tensió Thévenin equivalent, utilitzarem el teorema de Millman. Si es compara aquest circuit amb el de la Figura 1.3 a la pàgina anterior, veiem que els punts α i ν dels dos circuits són equivalents, és a dir, ν és el punt comú de les impedàncies, i α és el punt de referència respecte del qual les tensions dels altres extrems de les impedàncies són conegudes (tensions de les bateries). Així doncs tenim:

$$U_{\nu\alpha} = \frac{\dfrac{-125{,}1\,\mathrm{V}}{0{,}034\,\Omega} + \dfrac{-124{,}8\,\mathrm{V}}{0{,}041\,\Omega} + \dfrac{-125{,}2\,\mathrm{V}}{0{,}029\,\Omega}}{\dfrac{1}{0{,}034\,\Omega} + \dfrac{1}{0{,}041\,\Omega} + \dfrac{1}{0{,}029\,\Omega}} = -125{,}0562\,\mathrm{V}$$

La font de tensió Thévenin equivalent entre α i ν és doncs:

$$E_{\mathrm{Th}} = U_{\alpha\nu} = 125{,}0562\,\mathrm{V}$$

Calculem a continuació l'admitància i la font de corrent Norton equivalents, utilitzant les equacions (1.3):

$$Y_{\mathrm{No}} = \frac{1}{Z_{\mathrm{Th}}} = \frac{1}{0{,}011\,33\,\Omega} = 82{,}2613\,\mathrm{S}$$

$$J_{\mathrm{No}} = \frac{E_{\mathrm{Th}}}{Z_{\mathrm{Th}}} = \frac{125{,}0562\,\mathrm{V}}{0{,}011\,33\,\Omega} = 11\,037{,}6150\,\mathrm{A}$$

Tal com s'ha dit en la secció 1.2.1, J_{No} és igual al corrent de curtcircuit entre els punts α i ν.

Finalment, ja podem calcular el corrent I_Q i la tensió U_Q en la resistència de càrrega, utilitzant el circuit Thévenin equivalent calculat anteriorment:

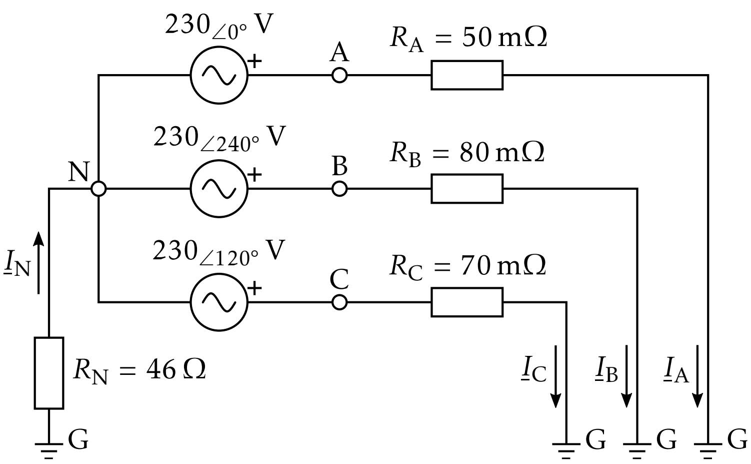
$$I_Q = \frac{E_{Th}}{Z_{Th} + R_Q} = \frac{125{,}0562\,\text{V}}{0{,}011\,33\,\Omega + 50\,\Omega} = 2{,}5001\text{ A}$$

$$U_Q = R_Q\,I_Q = 50\,\Omega \times 2{,}5001\text{ A} = 125{,}0050\,\text{V}$$

Exemple 1.2 Teorema de Millman – Càrregues trifàsiques amb corrent de neutre

Tenim un generador trifàsic connectat en estrella, amb una tensió fase–neutre de 230 V; el punt neutre de l'estrella està connectat a terra a traves d'una resistència de 46 Ω. El generador alimenta tres càrregues resistives connectades entre cadascuna de les fases i terra, de valors 50 mΩ, 80 mΩ i 70 mΩ respectivament. Es tracta de trobar el corrent que circula per la resistència de connexió a terra del generador, i els corrents que circulen per cadascuna de les tres càrregues; és clar que ha de complir-se: $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_N$.

En el dibuix següent es pot veure el circuit elèctric que es vol resoldre.



La tensió $\underline{U}_{GN}$ es pot calcular directament aplicant el teorema de Millman. Per fer-ho, només cal tenir en compte que les quatre resistències del circuit tenen un punt comú que és «G», i que les tensions dels altres extrems de les resistències respecte del punt «N» són conegudes: $\underline{U}_{AN} = 230_{\angle 0°}$ V, $\underline{U}_{BN} = 230_{\angle 240°}$ V, $\underline{U}_{CN} = 230_{\angle 120°}$ V i $\underline{U}_{NN} = 0$ V.

Així doncs tenim:

$$\underline{U}_{GN} = \frac{\frac{\underline{U}_{AN}}{R_A} + \frac{\underline{U}_{BN}}{R_B} + \frac{\underline{U}_{CN}}{R_C} + \frac{\underline{U}_{NN}}{R_N}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_N}} = \frac{\frac{230_{\angle 0°}\,\text{V}}{50\,\text{m}\Omega} + \frac{230_{\angle 240°}\,\text{V}}{80\,\text{m}\Omega} + \frac{230_{\angle 120°}\,\text{V}}{70\,\text{m}\Omega}}{\frac{1}{50\,\text{m}\Omega} + \frac{1}{80\,\text{m}\Omega} + \frac{1}{70\,\text{m}\Omega} + \frac{1}{46\,\Omega}} = 33{,}3433_{\angle 13{,}1736°}\,\text{V}$$

El corrent que circula per la resistència de connexió a terra del generador val:

$$\underline{I}_{\mathrm{N}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{GN}}}{R_{\mathrm{N}}} = \frac{33{,}3433_{\angle 13{,}1736^\circ}\,\mathrm{V}}{46\,\Omega} = 0{,}7249_{\angle 13{,}1736^\circ}\,\mathrm{A}$$

Finalment, els corrents que circulen per cadascuna de les tres càrregues val:

$$\underline{I}_{\mathrm{A}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{AG}}}{R_{\mathrm{A}}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{AN}} - \underline{U}_{\mathrm{GN}}}{R_{\mathrm{A}}} = \frac{230_{\angle 0^\circ}\,\mathrm{V} - 33{,}3433_{\angle 13{,}1736^\circ}\,\mathrm{V}}{50\,\mathrm{m}\Omega} = 3953{,}6056_{\angle -2{,}2030^\circ}\,\mathrm{A}$$

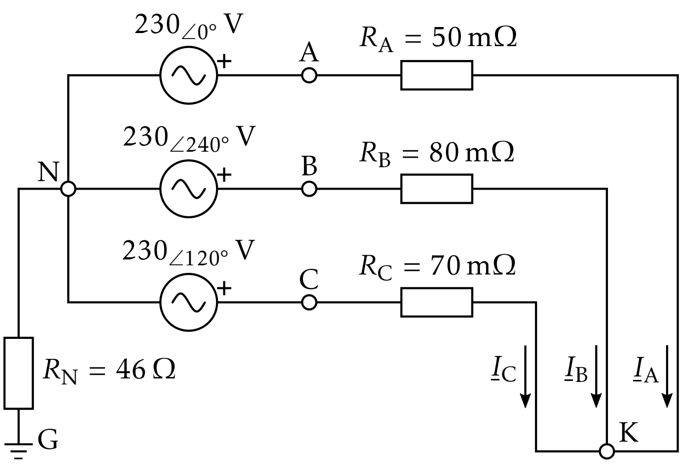
$$\underline{I}_{\mathrm{B}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{BG}}}{R_{\mathrm{B}}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{BN}} - \underline{U}_{\mathrm{GN}}}{R_{\mathrm{B}}} = \frac{230_{\angle 240^\circ}\,\mathrm{V} - 33{,}3433_{\angle 13{,}1736^\circ}\,\mathrm{V}}{80\,\mathrm{m}\Omega} = 3174{,}7573_{\angle -125{,}4941^\circ}\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{C}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{CG}}}{R_{\mathrm{C}}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{CN}} - \underline{U}_{\mathrm{GN}}}{R_{\mathrm{C}}} = \frac{230_{\angle 120^\circ}\,\mathrm{V} - 33{,}3433_{\angle 13{,}1736^\circ}\,\mathrm{V}}{70\,\mathrm{m}\Omega} = 3453{,}8265_{\angle 127{,}5857^\circ}\,\mathrm{A}$$

Exemple 1.3 Teorema de Millman – Càrregues trifàsiques sense corrent de neutre

Tenim en aquest cas un circuit com el de l'exemple anterior, però aquí les càrregues no estan connectades a terra (punt G). En aquest cas no hi pot haver circulació de corrent per la resistència de connexió a terra del generador, ja que aquest corrent no tindria cap camí per tancar-se; ha de complir-se doncs: $\underline{I}_{\mathrm{A}} + \underline{I}_{\mathrm{B}} + \underline{I}_{\mathrm{C}} = 0$. Es tracta de trobar en aquest cas els corrents que circulen per cadascuna de les tres càrregues.

En el dibuix següent es pot veure el circuit elèctric que es vol resoldre.



La tensió $\underline{U}_{\mathrm{KN}}$ es pot calcular directament aplicant el teorema de Millman. Per fer-ho, només cal tenir en compte que les tres resistències de càrrega del circuit tenen un punt comú que és «K», i que les tensions dels altres extrems de les resistències respecte del punt «N» són conegudes: $\underline{U}_{\mathrm{AN}} = 230_{\angle 0^\circ}\,\mathrm{V}$, $\underline{U}_{\mathrm{BN}} = 230_{\angle 240^\circ}\,\mathrm{V}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CN}} = 230_{\angle 120^\circ}\,\mathrm{V}$.

Així doncs tenim:

$$\underline{U}_{\mathrm{KN}} = \frac{\dfrac{\underline{U}_{\mathrm{AN}}}{R_{\mathrm{A}}} + \dfrac{\underline{U}_{\mathrm{BN}}}{R_{\mathrm{B}}} + \dfrac{\underline{U}_{\mathrm{CN}}}{R_{\mathrm{C}}}}{\dfrac{1}{R_{\mathrm{A}}} + \dfrac{1}{R_{\mathrm{B}}} + \dfrac{1}{R_{\mathrm{C}}}} = \frac{\dfrac{230_{\angle 0^\circ}\,\mathrm{V}}{50\,\mathrm{m}\Omega} + \dfrac{230_{\angle 240^\circ}\,\mathrm{V}}{80\,\mathrm{m}\Omega} + \dfrac{230_{\angle 120^\circ}\,\mathrm{V}}{70\,\mathrm{m}\Omega}}{\dfrac{1}{50\,\mathrm{m}\Omega} + \dfrac{1}{80\,\mathrm{m}\Omega} + \dfrac{1}{70\,\mathrm{m}\Omega}} = 33{,}3588_{\angle 13{,}1736^\circ}\,\mathrm{V}$$

Els corrents que circulen per cadascuna de les tres càrregues val:

$$\underline{I}_{\mathrm{A}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{AK}}}{R_{\mathrm{A}}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{AN}} - \underline{U}_{\mathrm{KN}}}{R_{\mathrm{A}}} = \frac{230_{\angle 0^\circ}\,\mathrm{V} - 33{,}3588_{\angle 13{,}1736^\circ}\,\mathrm{V}}{50\,\mathrm{m}\Omega} = 3953{,}3068_{\angle -2{,}2042^\circ}\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{B}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{BK}}}{R_{\mathrm{B}}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{BN}} - \underline{U}_{\mathrm{KN}}}{R_{\mathrm{B}}} = \frac{230_{\angle 240^\circ}\,\mathrm{V} - 33{,}3588_{\angle 13{,}1736^\circ}\,\mathrm{V}}{80\,\mathrm{m}\Omega} = 3174{,}9027_{\angle -125{,}4964^\circ}\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{C}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{CK}}}{R_{\mathrm{C}}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{CN}} - \underline{U}_{\mathrm{KN}}}{R_{\mathrm{C}}} = \frac{230_{\angle 120^\circ}\,\mathrm{V} - 33{,}3588_{\angle 13{,}1736^\circ}\,\mathrm{V}}{70\,\mathrm{m}\Omega} = 3453{,}9180_{\angle 127{,}5891^\circ}\,\mathrm{A}$$

1.2.3 Teorema de la superposició

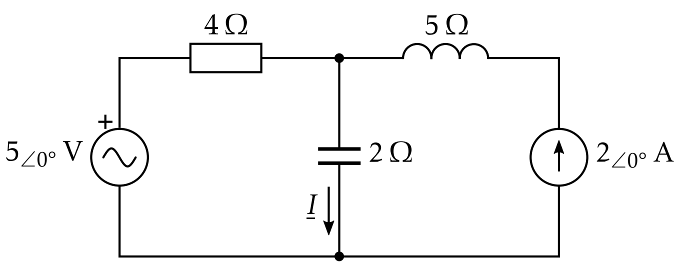
Si tenim un circuit lineal on hi ha diverses fonts de tensió i de corrent, les quals originen corrents i caigudes de tensió en els components del circuit, el teorema de la superposició ens diu que podem calcular aquests corrents i caigudes de tensió, resolent els circuits que resulten de tenir en compte només una font de tensió o de corrent alhora, i sumant al final els valors parcials obtinguts.

En cada pas on considerem només una font de tensió o de corrent, hem d'eliminar la resta de fonts del circuit; per tal de fer-ho hem de substituir la resta de fonts de tensió per un curtcircuit, i la resta de fonts de corrent per un circuit obert.

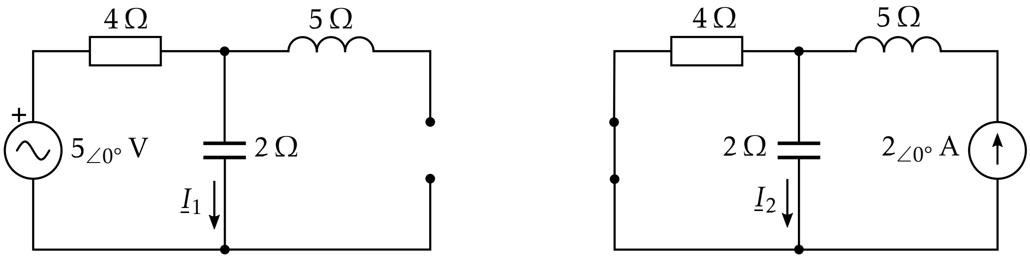
Aquest teorema també és aplicable en el cas que tinguem només una font de tensió o de corrent que operi a més d'una freqüència alhora. En aquest cas es pot estudiar el circuit de forma independent per a cadascuna de les freqüències presents, i sumar al final els valors parcials obtinguts.

Exemple 1.4 Aplicació del teorema de la superposició

Es tracta de trobar en el circuit següent el corrent $\underline{I}$ que circula pel condensador, utilitzant el teorema de la superposició.



Utilitzant el teorema de la superposició, representem els dos circuits següents a partir del circuit original. El circuit de l'esquerra només té la font de tensió, amb la font de corrent substituïda per un circuit obert, i el circuit de la dreta només té la font de corrent, amb la font de tensió substituïda per un curtcircuit.



Els corrents $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ que circulen pel condensador valen:

$$\underline{I}_1 = \frac{5_{\angle 0°}\ \mathrm{V}}{(4-\mathrm{j}2)\ \Omega} = 1{,}118_{\angle 26{,}57°}\ \mathrm{A} \qquad \underline{I}_2 = \frac{4\ \Omega}{(4-\mathrm{j}2)\ \Omega}\, 2_{\angle 0°}\ \mathrm{A} = 1{,}789_{\angle 26{,}57°}\ \mathrm{A}$$

El corrent total $\underline{I}$ que circula pel condensador val:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1{,}118_{\angle 26{,}57°}\ \mathrm{A} + 1{,}789_{\angle 26{,}57°}\ \mathrm{A} = 2{,}907_{\angle 26{,}57°}\ \mathrm{A}$$

1.3 Valors mitjà i eficaç, i factors de cresta, de forma i d'arrissada

S'explica a continuació com obtenir diversos paràmetres característics de funcions periòdiques en el temps $v(t)$, de freqüència f, període T i velocitat angular ω; les relacions que compleixen aquests tres paràmetres són: $f = 1/T$, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

En la Figura 1.4 es representa una funció periòdica qualsevol $v(t)$, indicant-hi el període T, els valors mitjà $\bar{V}$, de cresta $\hat{V}$ i de vall $\check{V}$, i la màxima amplitud $\hat{V} - \check{V}$.

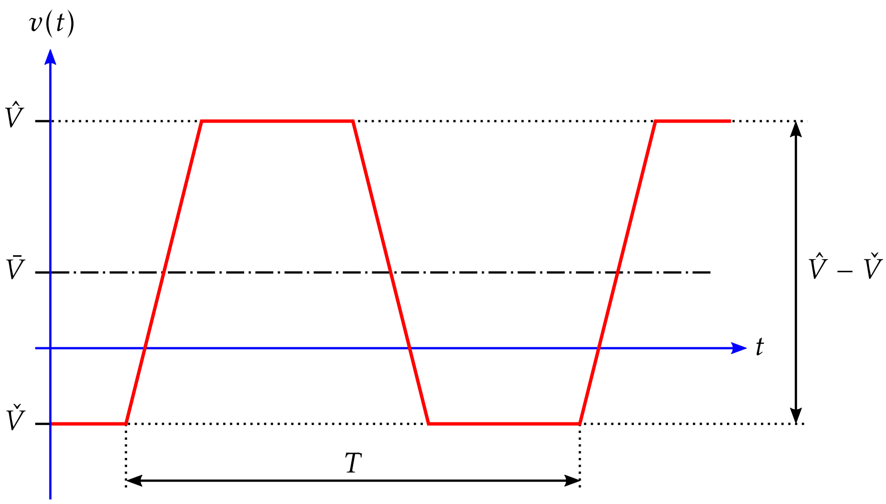


Figura 1.4 Paràmetres d'una funció periòdica

Les funcions periòdiques poden definir-se en funció de l'angle α, en lloc del temps t; es compleixen les relacions: $\alpha = \omega t$, $\mathrm{d}\alpha = \omega\, \mathrm{d}t$.

1.3.1 Valor mitjà

El valor mitjà $\bar{V}$ d'una funció periòdica en el temps $v(t)$ es defineix com:[2]

$$\bar{V} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

Si la funció periòdica $v(\alpha)$ està definida en funció de l'angle α, en lloc del temps t, tenim:

$$\bar{V} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} v(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \tag{1.6}$$

1.3.2 Valor eficaç

El valor eficaç V (també anomenat valor rms, de l'anglès «root mean square») d'una funció periòdica en el temps $v(t)$ es defineix com:[3]

$$V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} [v(t)]^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} [v(t)]^2\,\mathrm{d}t} \tag{1.7}$$

Si la funció periòdica $v(\alpha)$ està definida en funció de l'angle α, en lloc del temps t, tenim:

$$V = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} [v(\alpha)]^2\,\mathrm{d}\alpha} \tag{1.8}$$

1.3.3 Factor de cresta

El factor de cresta relaciona els valors de cresta $\hat{V}$ i eficaç V d'una funció periòdica. La norma CEI 60050 l'anomena «peak factor» i el defineix com:

$$\frac{\hat{V}}{V} \tag{1.9}$$

1.3.4 Factor de forma

El factor de forma relaciona els valors eficaç V i mitjà $\bar{V}$ d'una funció periòdica. La norma CEI 60050 l'anomena «form factor», li assigna el símbol F i el defineix com:

$$F = \frac{V}{|\bar{V}|} \tag{1.10}$$

[2] En la secció 4.4.1 es defineix el valor mitjà d'una funció periòdica expressada en sèrie de Fourier.
[3] En la secció 4.4.2 es defineix el valor eficaç d'una funció periòdica expressada en sèrie de Fourier.

1.3.5 Factor d'arrissada eficaç

El factor d'arrissada eficaç relaciona els valors mitjà $\bar{V}$ i eficaç V d'una funció periòdica. La norma CEI 60050 l'anomena «rms-ripple factor» o «relative ripple content», li assigna el símbol r i el defineix com:[4]

$$r = \sqrt{\frac{V^2}{\bar{V}^2} - 1} = \sqrt{F^2 - 1} \tag{1.11}$$

Aquest factor s'utilitza usualment per definir la qualitat d'una tensió contínua, obtinguda a partir d'una tensió alterna rectificada; com més plana sigui aquesta tensió contínua més baix serà el seu factor d'arrissada eficaç.

1.3.6 Factor d'arrissada de cresta

El factor d'arrissada de cresta relaciona els valors de cresta $\hat{V}$, de vall $\check{V}$ i mitjà $\bar{V}$ d'una funció periòdica. La norma CEI 60050 l'anomena «peak-ripple factor» o «peak distortion», li assigna el símbol q i el defineix com:

$$q = \frac{\hat{V} - \check{V}}{|\bar{V}|} \tag{1.12}$$

Exemple 1.5 Càlcul de factors de cresta, de forma i d'arrissada

Es tracta de calcular els factors de cresta, de forma, i d'arrissada eficaç i de cresta, de la tensió que s'obté a partir d'una tensió sinusoidal $u(t) = \hat{U} \sin \omega t$, amb un rectificador de mitja ona i amb un rectificador d'ona completa.

En el cas del rectificador de mitja ona, la tensió que s'obté ve definida per:

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U} \sin \omega t, & 0 < \omega t < \pi \\ 0, & \pi \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases}$$

Calculem en primer lloc el valor mitjà:

$$\bar{U} = \frac{\omega}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U} \sin \omega t \,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} 0 \,\mathrm{d}t\right) = -\left.\frac{\hat{U} \cos \omega t}{2\pi}\right|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{\hat{U}}{\pi}$$

Calculem a continuació el valor eficaç:

$$U = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U}^2 \sin^2 \omega t \,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} 0 \,\mathrm{d}t\right)} = \sqrt{\frac{\omega \hat{U}^2}{2\pi}\left.\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{\omega}}} = \frac{\hat{U}}{2}$$

[4] En la secció 4.4.7 es defineix el factor d'arrissada eficaç d'una funció periòdica expressada en sèries de Fourier.

Els factors de cresta, de forma, i d'arrissada eficaç i de cresta, són:

$$\text{factor de cresta} = \frac{\hat{U}}{\hat{U}/2} = 2$$

$$F = \frac{\hat{U}/2}{\hat{U}/\pi} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\hat{U}/2}{\hat{U}/\pi}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \approx 1{,}21$$

$$q = \frac{\hat{U} - 0}{\hat{U}/\pi} = \pi \approx 3{,}14$$

En el cas del rectificador d'ona completa, la tensió que s'obté ve definida per:

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U}\sin\omega t, & 0 < \omega t < \pi \\ -\hat{U}\sin\omega t, & \pi \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases}$$

En aquest cas, l'ona de tensió entre π i 2π és una repetició exacta de l'ona de tensió entre 0 i π, per tant, únicament caldrà considerar-ne la primera meitat (entre 0 i π), tenint en compte que el període serà π/ω.

Calculem en primer lloc el valor mitjà:

$$\bar{U} = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U}\sin\omega t\,\mathrm{d}t = -\left.\frac{\hat{U}\cos\omega t}{\pi}\right|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2\hat{U}}{\pi}$$

Calculem a continuació el valor eficaç:

$$U = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U}^2\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{\omega\hat{U}^2}{\pi}\left.\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{\omega}}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Els factors de cresta, de forma, i d'arrissada eficaç i de cresta, són:

$$\text{factor de cresta} = \frac{\hat{U}}{\hat{U}/\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

$$F = \frac{\hat{U}/\sqrt{2}}{2\hat{U}/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11$$

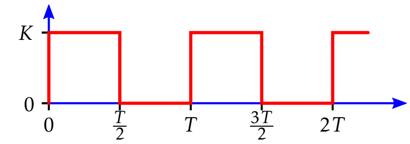
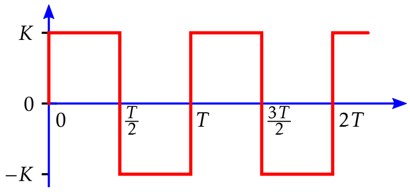
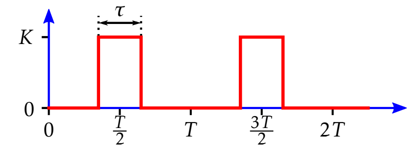
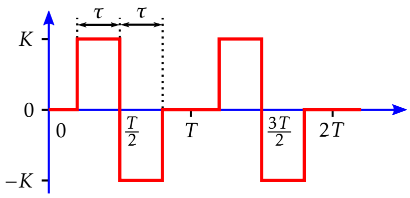
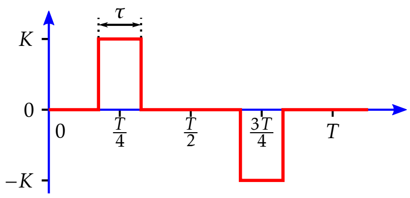
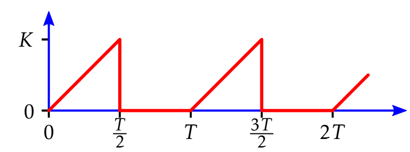
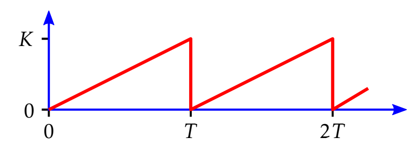
$$r = \sqrt{\left(\frac{\hat{U}/\sqrt{2}}{2\hat{U}/\pi}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \approx 0{,}48$$

$$q = \frac{\hat{U} - 0}{2\hat{U}/\pi} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$$

1.3.7 Taula de valors mitjans i eficaços

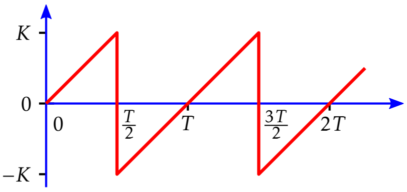
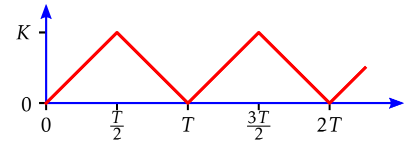
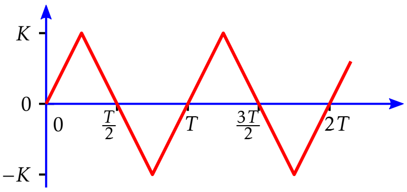
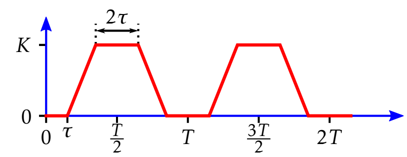
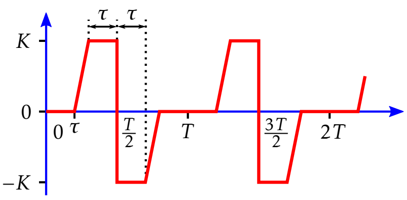
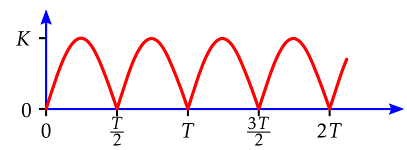
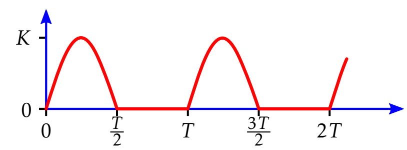
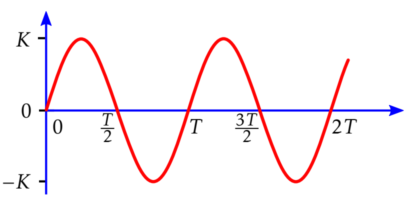
En la Taula 1.1 es donen els valors mitjans $\bar{V}$ i eficaços V d'una sèrie de formes d'ona usuals $v(t)$, per tal d'estalviar-se la resolució de les integrals indicades en les subseccions anteriors.

Taula 1.1 Valors mitjans i eficaços de formes d'ona

<table>
<tr><th>$v(t)$</th><th>$\bar{V}$</th><th>V</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{K}{2}$</td><td>$\frac{K}{\sqrt{2}}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>0</td><td>K</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$K\frac{\tau}{T}$</td><td>$K\sqrt{\frac{\tau}{T}}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>0</td><td>$K\sqrt{\frac{2\tau}{T}}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>0</td><td>$K\sqrt{\frac{2\tau}{T}}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{K}{4}$</td><td>$\frac{K}{\sqrt{6}}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{K}{2}$</td><td>$\frac{K}{\sqrt{3}}$</td></tr>
</table>

(*continua a la pàgina següent*)

Taula 1.1 Valors mitjans i eficaços de formes d'ona (*ve de la pàgina anterior*)

$v(t)$	$\bar{V}$	V
	0	$\frac{K}{\sqrt{3}}$
	$\frac{K}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{3}}$
	0	$\frac{K}{\sqrt{3}}$
	$\frac{K}{2}$	$K\sqrt{\frac{T+2\tau}{3T}}$
	0	$K\sqrt{\frac{T+2\tau}{3T}}$
	$\frac{2K}{\pi}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}$
	$\frac{K}{\pi}$	$\frac{K}{2}$
	0	$\frac{K}{\sqrt{2}}$

1.4 Potències instantània, activa i reactiva

La potència instantània $p(t)$ que absorbeix una càrrega ve determinada per la tensió $u(t)$ a la qual està sotmesa i pel corrent $i(t)$ que hi circula, tenint en compte els sentits de $u(t)$ i $i(t)$ indicats en les figures de la secció 1.6 a la pàgina 22:

$$p(t) = u(t)i(t) \tag{1.13}$$

Quan les tensions i corrents són funcions sinusoidals i les expressem usant la funció cosinus, tal com s'ha descrit en l'apartat Notació, tenim:

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \alpha) \tag{1.14}$$
$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta) \tag{1.15}$$

On U i I són respectivament els valors eficaços de $u(t)$ i $i(t)$. Utilitzant aquestes expressions tenim:

$$p(t) = 2UI\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta) \tag{1.16}$$

En general α i β són diferents, i per tant les funcions $u(t)$ i $i(t)$ estan desfasades entre si un angle φ igual a:

$$\varphi = \alpha - \beta \tag{1.17}$$

Utilitzant aquest angle φ i les igualtats trigonomètriques (D.13b) i (D.15b), podem transformar l'equació de la potència instantània en:

$$p(t) = UI\cos\varphi\,(1 + \cos[2(\omega t + \alpha)]) + UI\sin\varphi\sin[2(\omega t + \alpha)] \tag{1.18}$$

El primer terme de la dreta s'anomena potència activa instantània $p_R(t)$, i correspon a la potència absorbida per la part resistiva de la càrrega. El segon terme s'anomena potència reactiva instantània $p_X(t)$, i correspon a la potència absorbida per la part reactiva (inductiva o capacitiva) de la càrrega. Així doncs tenim:

$$p(t) = p_R(t) + p_X(t) \tag{1.19}$$
$$p_R(t) = UI\cos\varphi + UI\cos\varphi\cos[2(\omega t + \alpha)] \tag{1.20}$$
$$p_X(t) = UI\sin\varphi\sin[2(\omega t + \alpha)] \tag{1.21}$$

La potència $p_R(t)$ varia entre el valor mínim 0 i el valor màxim $2UI\cos\varphi$, i té un valor mitjà igual a $UI\cos\varphi$; això ens indica que aquesta potència va sempre de la font d'energia cap a la càrrega. La potència $p_X(t)$ varia entre el valor mínim $-UI\sin\varphi$ i el valor màxim $UI\sin\varphi$, i té un valor mitjà igual a 0; això ens indica que aquesta potència és oscil·lant entre la font d'energia i la càrrega, amb un balanç total nul. El valor mitjà de $p_R(t)$ s'anomena potència activa P, i el valor màxim de $p_X(t)$ s'anomena potència reactiva Q; així doncs tenim:

$$P = UI\cos\varphi \tag{1.22}$$
$$Q = UI\sin\varphi \tag{1.23}$$

1.5 Potències complexa

1.5.1 Potència monofàsica

En la Figura 1.5 es representa una càrrega $\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$, la qual absorbeix una potència complexa $\underline{S} = P + \mathrm{j}Q$. El concepte de P i Q és el mateix que s'ha explicat en la secció 1.4.

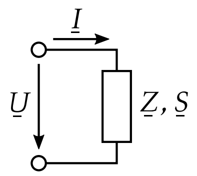


Figura 1.5 Potència complexa monofàsica

R i X són respectivament la part resistiva i la part reactiva (inductiva o capacitiva) de la càrrega, i P i Q són respectivament la potència activa i la potència reactiva (inductiva o capacitiva) absorbida per la càrrega.

La potència activa absorbida per una càrrega sempre és positiva, en canvi, la potència reactiva absorbida per una càrrega pot ser positiva o negativa, segons que predomini més la part inductiva o la part capacitiva de la càrrega respectivament.

L'angle $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ entre els fasors $\underline{U}$ i $\underline{I}$ compleix la següent relació:

$$\tan\varphi = \frac{X}{R} = \frac{Q}{P} \tag{1.24}$$

El concepte de l'angle φ és el mateix que s'ha explicat en la secció 1.4; a partir d'aquest angle es defineix el factor de potència de la càrrega:

$$\text{Factor de potència} \equiv \cos\varphi = \frac{R}{|\underline{Z}|} = \frac{P}{|\underline{S}|} \tag{1.25}$$

Atès que per a un angle qualsevol α es compleix la igualtat trigonomètrica: $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, quan es dona el factor de potència d'una càrrega, cal especificar si és inductiu ($Q > 0$, $\tan\varphi > 0$, el fasor $\underline{U}$ avança al fasor $\underline{I}$) o capacitiu ($Q < 0$, $\tan\varphi < 0$, el fasor $\underline{I}$ avança al fasor $\underline{U}$); això es fa afegint «(i)» o «(c)» respectivament al valor numèric del factor de potència, com per exemple: $\cos\varphi = 0{,}8(\mathrm{i})$, $\cos\varphi = 0{,}9(\mathrm{c})$.

Les relacions que lliguen la potència complexa amb la tensió i el corrent són:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = |\underline{I}|^2\,\underline{Z} = \frac{|\underline{U}|^2}{\underline{Z}^*} = P + \mathrm{j}Q \tag{1.26}$$

$$|\underline{S}| = |\underline{U}|\,|\underline{I}| = |\underline{I}|^2\,|\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|^2}{|\underline{Z}|} = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{1.27}$$

$$P = \operatorname{Re}\underline{S} = \operatorname{Re}(\underline{U}\,\underline{I}^*) = |\underline{S}|\cos\varphi = |\underline{U}|\,|\underline{I}|\cos\varphi = |\underline{I}|^2 R = \frac{|\underline{U}|^2}{|\underline{Z}|^2}R \tag{1.28}$$

$$Q = \operatorname{Im}\underline{S} = \operatorname{Im}(\underline{U}\,\underline{I}^*) = |\underline{S}|\sin\varphi = |\underline{U}|\,|\underline{I}|\sin\varphi = |\underline{I}|^2 X = \frac{|\underline{U}|^2}{|\underline{Z}|^2}X \tag{1.29}$$

1.5.2 Potència trifàsica

En la Figura 1.6 es representen dos sistemes d'alimentació a càrregues trifàsiques; el de l'esquerra és un sistema de 4 fils (3 fases + neutre) i el de la dreta és un sistema de 3 fils (3 fases). En ambdós casos es consideren tres càrregues $\underline{Z}_\mathrm{A} = R_\mathrm{A} + \mathrm{j}X_\mathrm{A}$, $\underline{Z}_\mathrm{B} = R_\mathrm{B} + \mathrm{j}X_\mathrm{B}$ i $\underline{Z}_\mathrm{C} = R_\mathrm{C} + \mathrm{j}X_\mathrm{C}$ connectades en estrella, les quals absorbeixen respectivament unes potències complexes $\underline{S}_\mathrm{A} = P_\mathrm{A} + \mathrm{j}Q_\mathrm{A}$, $\underline{S}_\mathrm{B} = P_\mathrm{B} + \mathrm{j}Q_\mathrm{B}$ i $\underline{S}_\mathrm{C} = P_\mathrm{C} + \mathrm{j}Q_\mathrm{C}$.

R_A, R_B i R_C, i X_A, X_B i X_C són respectivament les parts resistives i les parts reactives (inductives o capacitives) de les càrregues, i P_A, P_B i P_C, i Q_A, Q_B i Q_C són respectivament les potències actives i les potències reactives (inductives o capacitives) absorbides per les càrregues.

El sistema d'alimentació de 3 fils admet també càrregues trifàsiques connectades en triangle; en aquest cas només cal dur a terme la transformació a una connexió en estrella (vegeu la secció 2.4), i per tant, la descripció que segueix es pot considerar del tot general.

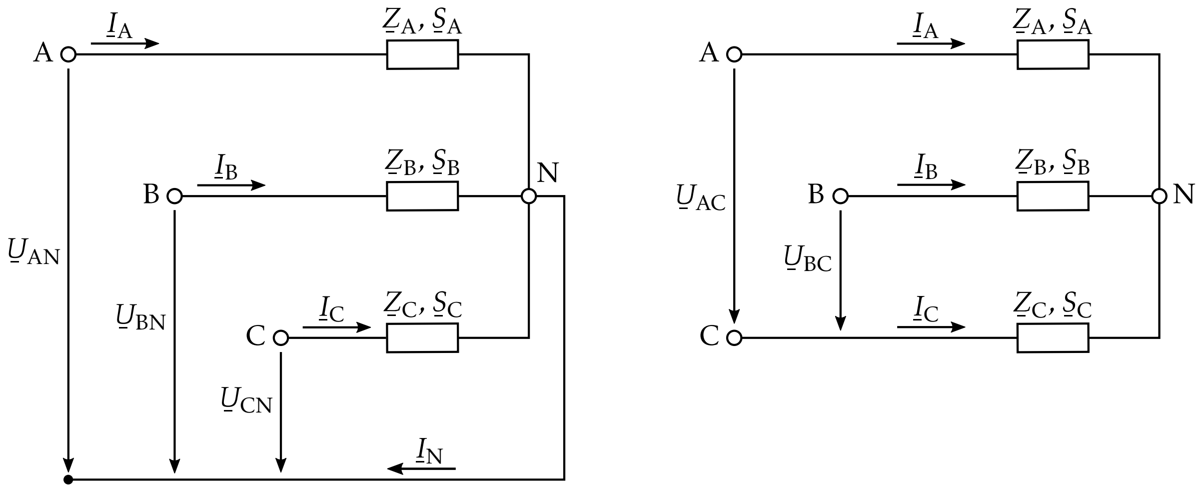


Figura 1.6 Potència complexa trifàsica – Sistemes de 4 fils i 3 fils

En el cas més general, on la càrrega trifàsica és desequilibrada, cada impedància té el seu propi factor de potència; els angles $\varphi_\mathrm{A} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ entre els fasors $\underline{U}_\mathrm{AN}$ i $\underline{I}_\mathrm{A}$, $\varphi_\mathrm{B} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ entre els fasors $\underline{U}_\mathrm{BN}$ i $\underline{I}_\mathrm{B}$, i $\varphi_\mathrm{C} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ entre els fasors $\underline{U}_\mathrm{CN}$ i $\underline{I}_\mathrm{C}$, compleixen:

$$\tan\varphi_\mathrm{A} = \frac{X_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A}} = \frac{Q_\mathrm{A}}{P_\mathrm{A}} \qquad \tan\varphi_\mathrm{B} = \frac{X_\mathrm{B}}{R_\mathrm{B}} = \frac{Q_\mathrm{B}}{P_\mathrm{B}} \qquad \tan\varphi_\mathrm{C} = \frac{X_\mathrm{C}}{R_\mathrm{C}} = \frac{Q_\mathrm{C}}{P_\mathrm{C}} \tag{1.30a}$$

$$\cos\varphi_\mathrm{A} = \frac{R_\mathrm{A}}{|\underline{Z}_\mathrm{A}|} = \frac{P_\mathrm{A}}{|\underline{S}_\mathrm{A}|} \qquad \cos\varphi_\mathrm{B} = \frac{R_\mathrm{B}}{|\underline{Z}_\mathrm{B}|} = \frac{P_\mathrm{B}}{|\underline{S}_\mathrm{B}|} \qquad \cos\varphi_\mathrm{C} = \frac{R_\mathrm{C}}{|\underline{Z}_\mathrm{C}|} = \frac{P_\mathrm{C}}{|\underline{S}_\mathrm{C}|} \tag{1.30b}$$

Sistema equilibrat o desequilibrat de 3 fils o de 4 fils

Aquest és el cas més general, ja que les tensions, la càrrega o ambdues alhora poden ser desequilibrades, i el sistema d'alimentació pot ser de 3 fils o de 4 fils.

En el cas del sistema d'alimentació de 4 fils tenim: $\underline{I}_\mathrm{A} + \underline{I}_\mathrm{B} + \underline{I}_\mathrm{C} = \underline{I}_\mathrm{N}$, i en el cas del sistema d'alimentació de 3 fils tenim: $\underline{I}_\mathrm{A} + \underline{I}_\mathrm{B} + \underline{I}_\mathrm{C} = 0$. No obstant, si prenem en ambdós casos el punt N com a referència de les tensions, el corrent $\underline{I}_\mathrm{N}$ no intervindrà en el càlcul de la potència. Així doncs, les relacions que lliguen la potència complexa trifàsica $\underline{S}_\mathrm{3F} = P_\mathrm{3F} + \mathrm{j}Q_\mathrm{3F}$ amb les tensions i corrents són:

$$\underline{S}_\mathrm{3F} = \underline{S}_\mathrm{A} + \underline{S}_\mathrm{B} + \underline{S}_\mathrm{C} = \underline{U}_\mathrm{AN}\,\underline{I}_\mathrm{A}^* + \underline{U}_\mathrm{BN}\,\underline{I}_\mathrm{B}^* + \underline{U}_\mathrm{CN}\,\underline{I}_\mathrm{C}^* = (P_\mathrm{A} + P_\mathrm{B} + P_\mathrm{C}) + \mathrm{j}(Q_\mathrm{A} + Q_\mathrm{B} + Q_\mathrm{C}) \tag{1.31}$$

$$|\underline{S}_\mathrm{3F}| = |\underline{S}_\mathrm{A} + \underline{S}_\mathrm{B} + \underline{S}_\mathrm{C}| = |\underline{U}_\mathrm{AN}\,\underline{I}_\mathrm{A}^* + \underline{U}_\mathrm{BN}\,\underline{I}_\mathrm{B}^* + \underline{U}_\mathrm{CN}\,\underline{I}_\mathrm{C}^*| = \sqrt{(P_\mathrm{A} + P_\mathrm{B} + P_\mathrm{C})^2 + (Q_\mathrm{A} + Q_\mathrm{B} + Q_\mathrm{C})^2} \tag{1.32}$$

$$P_\mathrm{3F} = \mathrm{Re}\,\underline{S}_\mathrm{3F} = \mathrm{Re}(\underline{U}_\mathrm{AN}\,\underline{I}_\mathrm{A}^*) + \mathrm{Re}(\underline{U}_\mathrm{BN}\,\underline{I}_\mathrm{B}^*) + \mathrm{Re}(\underline{U}_\mathrm{CN}\,\underline{I}_\mathrm{C}^*) = |\underline{S}_\mathrm{A}|\cos\varphi_\mathrm{A} + |\underline{S}_\mathrm{B}|\cos\varphi_\mathrm{B} + |\underline{S}_\mathrm{C}|\cos\varphi_\mathrm{C} \tag{1.33}$$

$$Q_\mathrm{3F} = \mathrm{Im}\,\underline{S}_\mathrm{3F} = \mathrm{Im}(\underline{U}_\mathrm{AN}\,\underline{I}_\mathrm{A}^*) + \mathrm{Im}(\underline{U}_\mathrm{BN}\,\underline{I}_\mathrm{B}^*) + \mathrm{Im}(\underline{U}_\mathrm{CN}\,\underline{I}_\mathrm{C}^*) = |\underline{S}_\mathrm{A}|\sin\varphi_\mathrm{A} + |\underline{S}_\mathrm{B}|\sin\varphi_\mathrm{B} + |\underline{S}_\mathrm{C}|\sin\varphi_\mathrm{C} \tag{1.34}$$

Cal anar amb compte amb l'equació (1.32), i utilitzar-la al peu de la lletra, ja que en general tenim: $|\underline{S}_\mathrm{A} + \underline{S}_\mathrm{B} + \underline{S}_\mathrm{C}| \neq |\underline{S}_\mathrm{A}| + |\underline{S}_\mathrm{B}| + |\underline{S}_\mathrm{C}|$.

Cal tenir en compte a més en els sistemes de 3 fils, que el punt N no coincidirà en general amb el neutre del sistema d'alimentació trifàsic.

Sistema equilibrat de 3 fils o de 4 fils

Aquest és un cas particular de l'anterior, el qual es presenta quan tenim un sistema de tensions equilibrat que alimenta a tres impedàncies idèntiques; en aquest cas es compleix sempre: $\underline{I}_\mathrm{N} = 0$, i com a conseqüència tenim que els sistemes de 3 fils i de 4 fils són equivalents.

Les equacions de l'apartat anterior se simplifiquen, i en aquest cas les relacions que lliguen la potència complexa trifàsica equilibrada $\underline{S}_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ} = P_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ} + \mathrm{j}Q_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ}$ amb les tensions i corrents són:

$$\underline{S}_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ} = 3\underline{S}_\mathrm{A} = 3\underline{U}_\mathrm{AN}\,\underline{I}_\mathrm{A}^* = 3(P_\mathrm{A} + \mathrm{j}Q_\mathrm{A}) = P_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ} + \mathrm{j}Q_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ} \tag{1.35}$$

$$\left|\underline{S}_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ}\right| = 3|\underline{S}_\mathrm{A}| = 3|\underline{U}_\mathrm{AN}|\,|\underline{I}_\mathrm{A}| = \sqrt{3}|\underline{U}_\mathrm{AC}|\,|\underline{I}_\mathrm{A}| = 3\sqrt{P_\mathrm{A}^2 + Q_\mathrm{A}^2} = \sqrt{\left(P_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ}\right)^2 + \left(Q_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ}\right)^2} \tag{1.36}$$

$$P_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ} = \mathrm{Re}\,\underline{S}_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ} = 3\,\mathrm{Re}(\underline{U}_\mathrm{AN}\,\underline{I}_\mathrm{A}^*) = 3\left|\underline{S}_\mathrm{A}\right|\cos\varphi_\mathrm{A} = 3|\underline{U}_\mathrm{AN}|\,|\underline{I}_\mathrm{A}|\cos\varphi_\mathrm{A} = \sqrt{3}|\underline{U}_\mathrm{AC}|\,|\underline{I}_\mathrm{A}|\cos\varphi_\mathrm{A} \tag{1.37}$$

$$Q_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ} = \mathrm{Im}\,\underline{S}_\mathrm{3F}^\mathrm{EQ} = 3\,\mathrm{Im}(\underline{U}_\mathrm{AN}\,\underline{I}_\mathrm{A}^*) = 3\left|\underline{S}_\mathrm{A}\right|\sin\varphi_\mathrm{A} = 3|\underline{U}_\mathrm{AN}|\,|\underline{I}_\mathrm{A}|\sin\varphi_\mathrm{A} = \sqrt{3}|\underline{U}_\mathrm{AC}|\,|\underline{I}_\mathrm{A}|\sin\varphi_\mathrm{A} \tag{1.38}$$

En les equacions anteriors s'ha utilitzat la fase A, però es podria haver escollit també qualsevol de les altres dues. Cal tenir en compte a més, que l'angle φ_A és sempre el format pels fasors $\underline{U}_\mathrm{AN}$ i $\underline{I}_\mathrm{A}$, i no pas l'angle format pels fasors $\underline{U}_\mathrm{AC}$ i $\underline{I}_\mathrm{A}$.

En aquest cas, pel que fa als sistemes de 3 fils, el punt N sí que coincideix amb el neutre del sistema d'alimentació trifàsic.

Sistema equilibrat o desequilibrat de 3 fils

Aquest és un cas general, on les tensions, la càrrega o ambdues alhora poden ser desequilibrades, però amb l'única restricció que el sistema d'alimentació sigui de 3 fils.

Únicament en aquest cas (sistema de 3 fils) podem prescindir del punt N, a l'hora de calcular la potència, i utilitzar només les tensions entre fases.

En aquest cas, les relacions que lliguen la potència complexa trifàsica $\underline{S}_{3F} = P_{3F} + jQ_{3F}$ amb les tensions i corrents són:

$$\underline{S}_{3F} = \underline{U}_{AC}\,\underline{I}_A^* + \underline{U}_{BC}\,\underline{I}_B^* \tag{1.39}$$

$$|\underline{S}_{3F}| = |\underline{U}_{AC}\,\underline{I}_A^* + \underline{U}_{BC}\,\underline{I}_B^*| \tag{1.40}$$

$$P_{3F} = \mathrm{Re}\,\underline{S}_{3F} = \mathrm{Re}(\underline{U}_{AC}\,\underline{I}_A^*) + \mathrm{Re}(\underline{U}_{BC}\,\underline{I}_B^*) \tag{1.41}$$

$$Q_{3F} = \mathrm{Im}\,\underline{S}_{3F} = \mathrm{Im}(\underline{U}_{AC}\,\underline{I}_A^*) + \mathrm{Im}(\underline{U}_{BC}\,\underline{I}_B^*) \tag{1.42}$$

En les equacions anteriors s'ha utilitzat la fase C com a fase de referència, però es podria haver escollit també qualsevol de les altres dues.

En aquest cas, el punt N tampoc no coincidirà en general amb el neutre del sistema d'alimentació trifàsic.

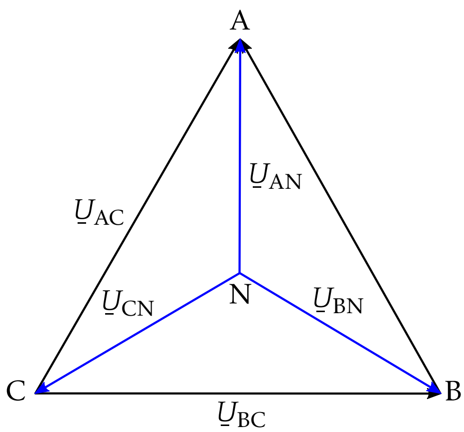
Exemple 1.6 Càlcul de la potència en un sistema de 3 fils

Es tracta de trobar la potència $\underline{S}$ consumida per una càrrega trifàsica equilibrada, connectada en estrella a un sistema de tensions d'alimentació de 3 fils, també equilibrat.

La tensió fase–neutre té un valor de 220 V i cadascuna de les tres impedàncies que formen l'estrella té un valor de $\underline{Z} = 22_{\angle 45^\circ}\,\Omega$. S'utilitzaran totes les equacions que siguin possibles, d'entre les vistes en aquest darrer apartat.

El circuit elèctric descrit en aquest exemple correspon a l'esquema de la dreta de la figura 1.6 a la pàgina 17. En aquest cas en particular, en ser equilibrada la càrrega i el sistema de tensions d'alimentació, el punt N d'unió de les tres impedàncies coincideix amb el punt neutre del sistema de tensions.

Prenent com a referència d'angles la tensió $\underline{U}_{BC}$, obtenim en primer lloc els fasors de les diferents tensions necessàries per resoldre el nostre problema:



$$\underline{U}_{AN} = 220_{\angle 90^\circ}\text{ V}$$
$$\underline{U}_{BN} = 220_{\angle -30^\circ}\text{ V}$$
$$\underline{U}_{CN} = 220_{\angle 210^\circ}\text{ V}$$
$$\underline{U}_{AC} = \sqrt{3}\times 220_{\angle 60^\circ}\text{ V}$$
$$\underline{U}_{BC} = \sqrt{3}\times 220_{\angle 0^\circ}\text{ V}$$

Els corrents $\underline{I}_{\mathrm{A}}$, $\underline{I}_{\mathrm{B}}$ i $\underline{I}_{\mathrm{C}}$ que circulen per les tres fases són:

$$\underline{I}_{\mathrm{A}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{AN}}}{\underline{Z}} = \frac{220_{\angle 90^\circ}\,\mathrm{V}}{22_{\angle 45^\circ}\,\Omega} = 10_{\angle 45^\circ}\,\mathrm{A}$$
$$\underline{I}_{\mathrm{B}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{BN}}}{\underline{Z}} = \frac{220_{\angle -30^\circ}\,\mathrm{V}}{22_{\angle 45^\circ}\,\Omega} = 10_{\angle -75^\circ}\,\mathrm{A}$$
$$\underline{I}_{\mathrm{C}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{CN}}}{\underline{Z}} = \frac{220_{\angle 210^\circ}\,\mathrm{V}}{22_{\angle 45^\circ}\,\Omega} = 10_{\angle 165^\circ}\,\mathrm{A}$$

Per començar utilitzarem l'equació (1.35), ja que tenim un sistema equilibrat tant pel que fa a les tensions com pel que fa a la càrrega:

$$\underline{S} = 3\,\underline{U}_{\mathrm{AN}}\,\underline{I}_{\mathrm{A}}^* = 3 \times 220_{\angle 90^\circ}\,\mathrm{V} \times 10_{\angle -45^\circ}\,\mathrm{A} = 6600_{\angle 45^\circ}\,\mathrm{VA}$$

A continuació utilitzarem l'equació (1.39), ja que tenim un sistema d'alimentació de 3 fils:

$$\underline{S} = \underline{U}_{\mathrm{AC}}\,\underline{I}_{\mathrm{A}}^* + \underline{U}_{\mathrm{BC}}\,\underline{I}_{\mathrm{B}}^* = \sqrt{3} \times 220_{\angle 60^\circ}\,\mathrm{V} \times 10_{\angle -45^\circ}\,\mathrm{A} + \sqrt{3} \times 220_{\angle 0^\circ}\,\mathrm{V} \times 10_{\angle 75^\circ}\,\mathrm{A} = 6600_{\angle 45^\circ}\,\mathrm{VA}$$

Finalment utilitzarem l'equació (1.31), ja que sempre és aplicable:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U}_{\mathrm{AN}}\,\underline{I}_{\mathrm{A}}^* + \underline{U}_{\mathrm{BN}}\,\underline{I}_{\mathrm{B}}^* + \underline{U}_{\mathrm{CN}}\,\underline{I}_{\mathrm{C}}^* = \\ &= 220_{\angle 90^\circ}\,\mathrm{V} \times 10_{\angle -45^\circ}\,\mathrm{A} + 220_{\angle -30^\circ}\,\mathrm{V} \times 10_{\angle 75^\circ}\,\mathrm{A} + 220_{\angle 210^\circ}\,\mathrm{V} \times 10_{\angle -165^\circ}\,\mathrm{A} = 6600_{\angle 45^\circ}\,\mathrm{VA}\end{aligned}$$

Per acabar, veurem que també es pot resoldre aquest exemple sense calcular els corrents; si utilitzem alhora les equacions (1.35) i (1.26), tenim:

$$\underline{S} = 3\,\underline{U}_{\mathrm{AN}}\,\underline{I}_{\mathrm{A}}^* = 3\,\underline{U}_{\mathrm{AN}}\frac{\underline{U}_{\mathrm{AN}}^*}{\underline{Z}^*} = 3\,\frac{|\underline{U}_{\mathrm{AN}}|^2}{\underline{Z}^*} = 3\,\frac{(220\,\mathrm{V})^2}{22_{\angle -45^\circ}\,\Omega} = 6600_{\angle 45^\circ}\,\mathrm{VA}$$

Com era d'esperar, el resultat obtingut en tots els casos és idèntic.

A partir del valor de la potència aparent $\underline{S}$, calculem per acabar les potències activa i reactiva:

$$P = \mathrm{Re}\,\underline{S} = \mathrm{Re}(6600_{\angle 45^\circ}\,\mathrm{VA}) = 4666{,}90\,\mathrm{W}$$
$$Q = \mathrm{Im}\,\underline{S} = \mathrm{Im}(6600_{\angle 45^\circ}\,\mathrm{VA}) = 4666{,}90\,\mathrm{var}$$

1.5.3 Mesura de la potència

La potència activa es mesura amb uns aparells anomenats wattímetres, i la potència reactiva amb uns aparelles anomenats varímetres.

Aquests aparells tenen dues bobines de mesura, una de voltimètrica, la qual es connecta tal com es faria amb un voltímetre, i una altra d'amperimètrica, la qual es connecta tal com es faria amb un amperímetre; així doncs, els wattímetres i els varímetres tenen quatre terminals de connexió.

La connexió d'aquests aparells a un circuit, per tal de mesurar-ne correctament la potència, ve determinada pels dos terminals anomenats homòlegs; un d'aquests terminals pertany a la bobina voltimètrica i l'altre a l'amperimètrica. En els esquemes elèctrics, aquests dos terminals s'identifiquen mitjançant un punt. La connexió ha de fer-se de tal manera que el corrent que va des de l'alimentació cap a la càrrega entri al wattímetre pel terminal de la bobina amperimètrica marcat amb el punt, i la tensió corresponent a aquest corrent, vagi del terminal de la bobina voltimètrica marcat amb el punt, a l'altre terminal; el mateix és aplicable al varímetre.

En la Figura 1.7 es pot veure la connexió d'un wattímetre i d'un varímetre en un circuit monofàsic.

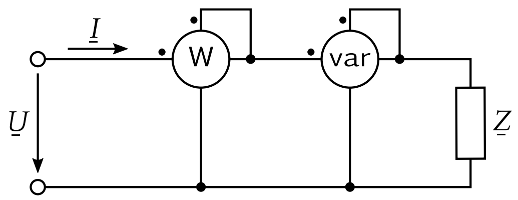


Figura 1.7 Mesura de la potència en un circuit monofàsic

Les potències activa i reactiva s'obtenen de les mesures dels dos aparells:

$$P = \mathsf{W} \qquad Q = \mathsf{var} \tag{1.43}$$

En la Figura 1.8 es pot veure la connexió d'uns wattímetres i d'uns varímetres en un circuit trifàsic de 4 fils, equilibrat o desequilibrat.

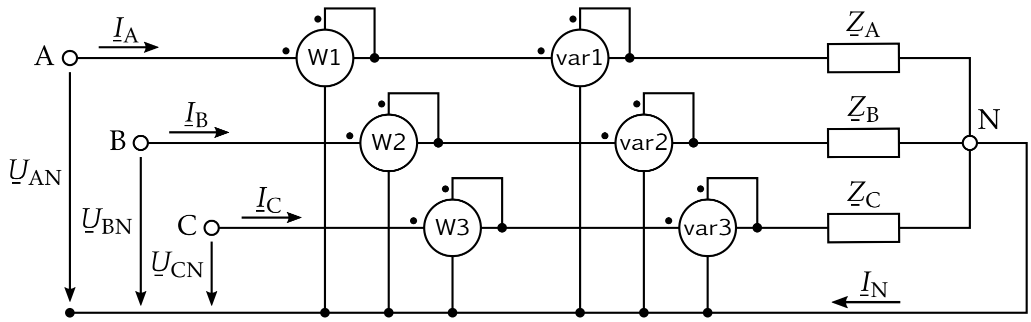


Figura 1.8 Mesura de la potència en un circuit trifàsic de 4 fils

Les potències activa i reactiva trifàsiques s'obtenen de les mesures dels sis aparells:

$$P_{3F} = \mathsf{W1} + \mathsf{W2} + \mathsf{W3} \qquad Q_{3F} = \mathsf{var1} + \mathsf{var2} + \mathsf{var3} \tag{1.44}$$

En la Figura 1.9 es pot veure la connexió d'uns wattímetres i d'uns varímetres en un circuit trifàsic de 3 fils, equilibrat o desequilibrat.

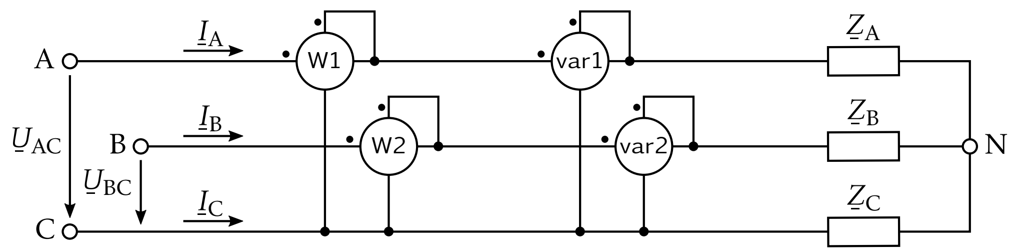


Figura 1.9 Mesura de la potència en un circuit trifàsic de 3 fils

Les potències activa i reactiva trifàsiques s'obtenen de les mesures dels quatre aparells:

$$P_{3F} = \mathsf{W1} + \mathsf{W2} \qquad Q_{3F} = \mathsf{var1} + \mathsf{var2} \tag{1.45}$$

1.6 Components elementals d'un circuit elèctric

Es presenten a continuació les lleis temporals que lliguen tensions, corrents i potències, per a diversos components elementals d'un circuit elèctric. Es donen també les relacions entre tensions i corrents en el domini freqüencial (corrent altern sinusoidal, amb $\omega = 2\pi f$) i en el domini operacional (transformada de Laplace).

Cal tenir en compte que les relacions que es donen, només són vàlides quan es tenen en consideració els sentits assignats als corrents i a les tensions en les figures corresponents.

1.6.1 Resistència

Per a una resistència R (Figura 1.10), la llei temporal entre la tensió $u(t)$ i el corrent $i(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:

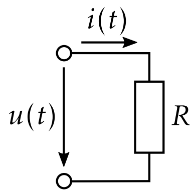


Figura 1.10 Resistència

$$u(t) = Ri(t) \tag{1.46}$$

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R} \tag{1.47}$$

En el domini freqüencial, la relació entre la tensió $\underline{U}$ i el corrent $\underline{I}$, i la relació entre els arguments de la tensió $\varphi_{\underline{U}}$ i del corrent $\varphi_{\underline{I}}$ són:

$$\underline{U} = R\underline{I} \tag{1.48}$$

$$\varphi_{\underline{U}} = \varphi_{\underline{I}} \tag{1.49}$$

En el domini operacional, la relació entre la tensió $U(s)$ i el corrent $I(s)$ és:

$$U(s) = RI(s) \tag{1.50}$$

1.6.2 Capacitat

Per a una capacitat C (Figura 1.11), les lleis temporals entre la tensió $u(t)$ i el corrent $i(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són, a partir d'un instant inicial t_0:

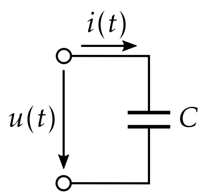


Figura 1.11 Capacitat

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.51}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.52}$$

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.53}$$

En el domini freqüencial, la relació entre la tensió $\underline{U}$ i el corrent $\underline{I}$, i la relació entre els arguments de la tensió $\varphi_{\underline{U}}$ i del corrent $\varphi_{\underline{I}}$ són:

$$\underline{U} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\underline{I} \tag{1.54}$$

$$\varphi_{\underline{U}} = \varphi_{\underline{I}} - \frac{\pi}{2} \tag{1.55}$$

En el domini operacional, la relació entre la tensió $U(s)$ i el corrent $I(s)$ és, a partir d'un instant inicial t_0:

$$U(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u(t_0)}{s} \tag{1.56}$$

1.6.3 Inductància

Per a una inductància L (Figura 1.12), les lleis temporals entre la tensió $u(t)$ i el corrent $i(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són, a partir d'un instant inicial t_0:

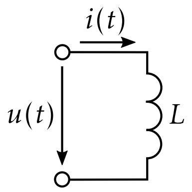


Figura 1.12 Inductància

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.57}$$

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.58}$$

$$p(t) = u(t)i(t) = Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.59}$$

En el domini freqüencial, la relació entre la tensió $\underline{U}$ i el corrent $\underline{I}$, i la relació entre els arguments de la tensió $\varphi_{\underline{U}}$ i del corrent $\varphi_{\underline{I}}$ són:

$$\underline{U} = \mathrm{j}\omega L\underline{I} \tag{1.60}$$

$$\varphi_{\underline{U}} = \varphi_{\underline{I}} + \frac{\pi}{2} \tag{1.61}$$

En el domini operacional, la relació entre la tensió $U(s)$ i el corrent $I(s)$ és, a partir d'un instant inicial t_0:

$$U(s) = sLI(s) - Li(t_0) \tag{1.62}$$

1.6.4 Acoblament magnètic

Per a un acoblament magnètic M entre dues inductàncies L_1 i L_2 (Figura 1.13), les lleis temporals entre les tensions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ i els corrents $i_1(t)$ i $i_2(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:

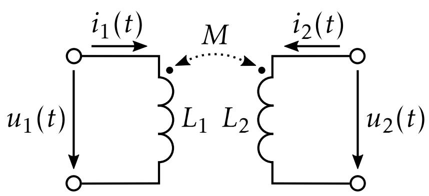


Figura 1.13 Acoblament magnètic

$$u_1(t) = L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.63}$$

$$u_2(t) = L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.64}$$

$$p(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + Mi_1(t)i_2(t)\right] \tag{1.65}$$

En el domini freqüencial, les relacions entre les tensions $\underline{U}_1$ i $\underline{U}_2$ i els corrents $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ són:

$$\underline{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \underline{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \underline{I}_2 \tag{1.66}$$
$$\underline{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \underline{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \underline{I}_1 \tag{1.67}$$

En el domini operacional, les relacions entre les tensions $U_1(s)$ i $U_2(s)$ i els corrents $I_1(s)$ i $I_2(s)$ són, a partir d'un instant inicial t_0:

$$U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(t_0) + sMI_2(s) - Mi_2(t_0) \tag{1.68}$$
$$U_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(t_0) + sMI_1(s) - Mi_1(t_0) \tag{1.69}$$

1.6.5 Transformador ideal

Per a un transformador ideal de relació $m:1$ (Figura 1.14), la llei temporal entre les tensions de primari $u_1(t)$ i de secundari $u_2(t)$, la llei temporal entre els corrents de primari $i_1(t)$ i de secundari $i_2(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:

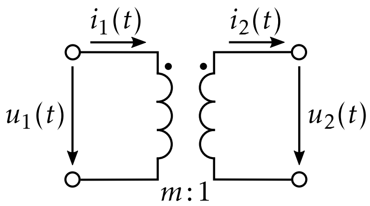


Figura 1.14 Transformador ideal

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = m \tag{1.70}$$
$$\frac{i_2(t)}{i_1(t)} = m \tag{1.71}$$
$$p(t) = u_1(t)i_1(t) - u_2(t)i_2(t) = 0 \tag{1.72}$$

En el domini freqüencial, la relació entre les tensions de primari $\underline{U}_1$ i de secundari $\underline{U}_2$, la relació entre els corrents de primari $\underline{I}_1$ i de secundari $\underline{I}_2$, la relació entre els arguments de les tensions de primari $\varphi_{\underline{U}_1}$ i de secundari $\varphi_{\underline{U}_2}$, i la relació entre els arguments dels corrents de primari $\varphi_{\underline{I}_1}$ i de secundari $\varphi_{\underline{I}_2}$ són:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = m \tag{1.73}$$
$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = m \tag{1.74}$$
$$\varphi_{\underline{U}_1} = \varphi_{\underline{U}_2} \tag{1.75}$$
$$\varphi_{\underline{I}_1} = \varphi_{\underline{I}_2} \tag{1.76}$$

En el domini operacional, la relació entre les tensions de primari $U_1(s)$ i de secundari $U_2(s)$, i la relació entre els corrents de primari $I_1(s)$ i de secundari $I_2(s)$ són:

$$\frac{U_1(s)}{U_2(s)} = m \tag{1.77}$$
$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)} = m \tag{1.78}$$

1.6.6 Bateria

Per a una bateria U_{bat} (Figura 1.15), la llei temporal de la tensió $u(t)$ i de la potència $p(t)$ que subministra és:

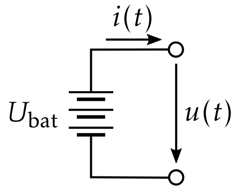


Figura 1.15 Bateria

$$u(t) = U_{\mathrm{bat}} \tag{1.79}$$

$$p(t) = U_{\mathrm{bat}}\, i(t) \tag{1.80}$$

El corrent $i(t)$ que circularà per la bateria, vindrà determinat pels elements que es connectin a aquesta bateria.

En el domini operacional, la tensió $U(s)$ és:

$$U(s) = \frac{U_{\mathrm{bat}}}{s} \tag{1.81}$$

1.7 Circuits R-L-C

Es presenten en aquesta secció diversos circuits R-C i R-L, indicant les expressions temporals de les tensions i corrents que hi apareixen.

1.7.1 Circuit R-C – Càrrega en corrent continu

En la figura 1.16 es representa un circuit R-C sèrie que comença a carregar-se a l'instant $t = 0$, amb la condició inicial: $u_{\mathrm{C}}(0) = 0$, i la constant de temps: $\tau = RC$.

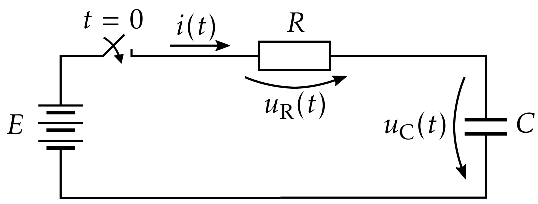
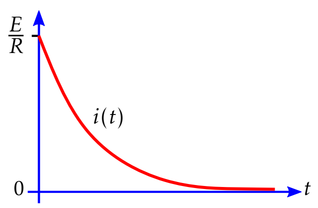
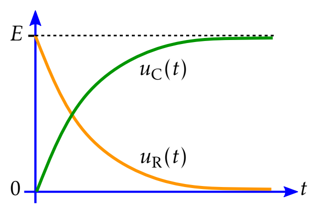


Figura 1.16 Circuit R-C – Càrrega en corrent continu

Les tensions i corrents d'aquest circuit són:



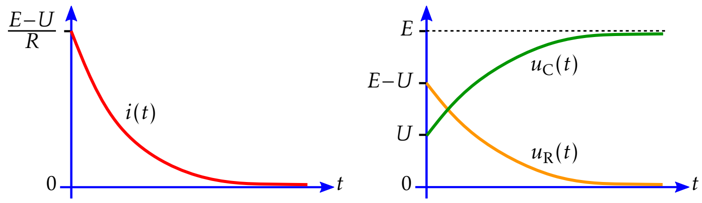


$$i(t) = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.82}$$

$$u_{\mathrm{C}}(t) = E - E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.83}$$

$$u_{\mathrm{R}}(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.84}$$

En el cas que a l'instant $t = 0$, el condensador estigui carregat a una tensió inicial: $u_C(0) = U$, les tensions i corrents d'aquest circuit són:



$$i(t) = \frac{E-U}{R}\, e^{-t/\tau} \tag{1.85}$$

$$u_C(t) = E - (E-U)\, e^{-t/\tau} \tag{1.86}$$

$$u_R(t) = (E-U)\, e^{-t/\tau} \tag{1.87}$$

1.7.2 Circuit R-C – Descàrrega en corrent continu

En la figura 1.17 es representa un circuit R-C sèrie que comença a descarregar-se a l'instant $t = 0$, amb la condició inicial: $u_C(0) = U$, i la constant de temps: $\tau = RC$.

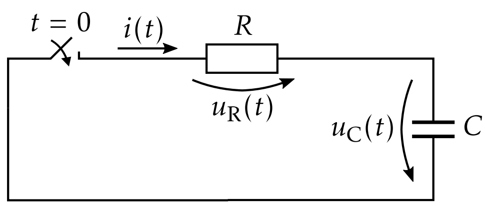
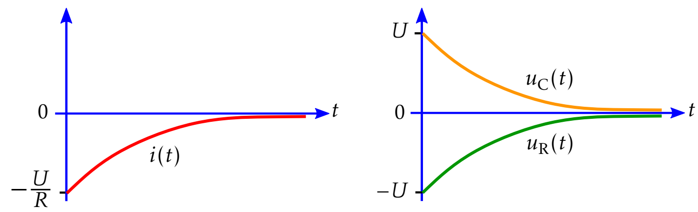


Figura 1.17 Circuit R-C – Descàrrega en corrent continu

Les tensions i corrents d'aquest circuit són iguals a les tres últimes de l'apartat anterior, amb $E = 0$:



$$i(t) = -\frac{U}{R}\, e^{-t/\tau} \tag{1.88}$$

$$u_C(t) = U\, e^{-t/\tau} \tag{1.89}$$

$$u_R(t) = -U\, e^{-t/\tau} \tag{1.90}$$

1.7.3 Circuit R-L – Càrrega en corrent continu

En la figura 1.18 es representa un circuit R-L sèrie que comença a carregar-se a l'instant $t = 0$, amb la condició inicial: $i(0) = 0$, i la constant de temps: $\tau = L/R$.

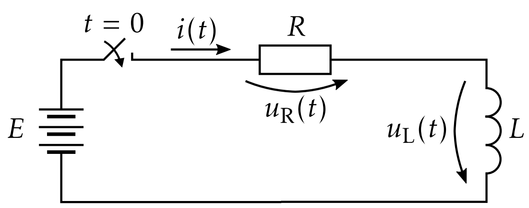
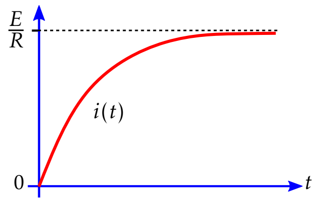
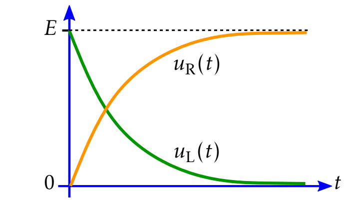


Figura 1.18 Circuit R-L – Càrrega en corrent continu

Les tensions i corrents d'aquest circuit són:



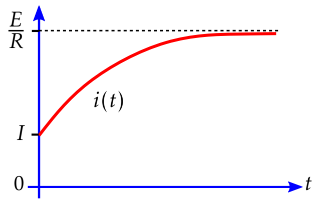


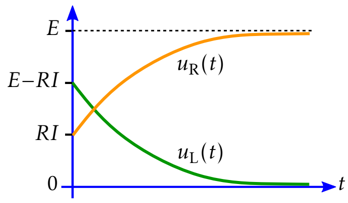
$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.91}$$

$$u_{\mathrm{L}}(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.92}$$

$$u_{\mathrm{R}}(t) = E - E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.93}$$

En el cas que a l'instant $t = 0$, circuli per la inductància un corrent inicial: $i(0) = I$, les tensions i corrents d'aquest circuit són:





$$i(t) = \frac{E}{R} - \left(\frac{E}{R} - I\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.94}$$

$$u_{\mathrm{L}}(t) = (E - RI)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.95}$$

$$u_{\mathrm{R}}(t) = E - (E - RI)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.96}$$

1.7.4 Circuit R-L – Descàrrega en corrent continu

En la figura 1.19 es representa un circuit R-L sèrie que comença a descarregar-se a l'instant $t = 0$, amb la condició inicial: $i(0) = I$, i la constant de temps: $\tau = L/R$.

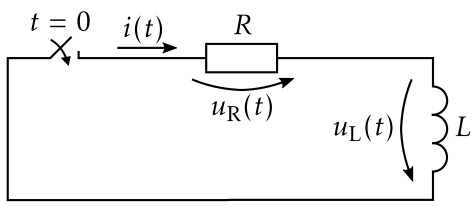
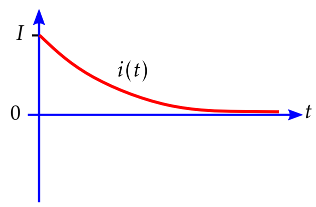
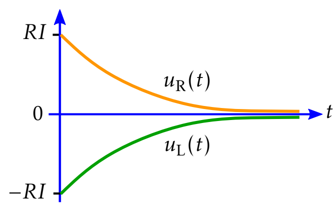


Figura 1.19 Circuit R-L – Descàrrega en corrent continu

Les tensions i corrents d'aquest circuit són iguals a les tres últimes de l'apartat anterior, amb $E = 0$:





$$i(t) = I\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.97}$$

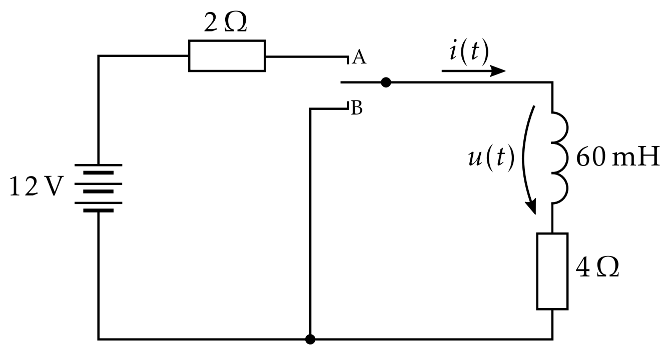
$$u_{\mathrm{L}}(t) = -RI\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.98}$$

$$u_{\mathrm{R}}(t) = RI\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.99}$$

Exemple 1.7 Càrrega i descàrrega d'un circuit R-L

El circuit següent té un commutador que en l'instant $t = 0$ bascula cap a la posició A, començant a carregar la inductància; a continuació, en l'instant $t = 20\,\text{ms}$ el commutador bascula cap a la posició B, iniciant-se la descàrrega de la inductància; finalment, en l'instant $t = 40\,\text{ms}$ el commutador torna a bascular cap a la posició A, carregant un altre cop la inductància.

Es tracta de trobar les equacions del corrent $i(t)$ i la tensió $u(t)$ en la inductància.



En l'instant $t = 0$, amb el commutador en la posició A, tenim un circuit R-L amb una constant de temps τ_1 de valor:

$$\tau_1 = \frac{60\,\text{mH}}{2\,\Omega + 4\,\Omega} = 10\,\text{ms}$$

El corrent $i_1(t)$ i la tensió $u_1(t)$ en la inductància es calculen aplicant les equacions (1.91) i (1.92):

$$i_1(t) = \frac{12}{6} - \frac{12}{6}\,\mathrm{e}^{-t/0{,}01} \qquad u_1(t) = 12\,\mathrm{e}^{-t/0{,}01}$$

En l'instant $t = 20\,\text{ms}$, el corrent I_1 que circula pel circuit val:

$$I_1 = i_1(0{,}02) = \frac{12}{6} - \frac{12}{6}\,\mathrm{e}^{-0{,}02/0{,}01} = 1{,}7293\,\text{A}$$

En aquest mateix instant el commutador passa a la posició B, formant-se un circuit R-L amb una constant de temps τ_2 de valor:

$$\tau_2 = \frac{60\,\text{mH}}{4\,\Omega} = 15\,\text{ms}$$

El corrent $i_2(t)$ i la tensió $u_2(t)$ en la inductància es calculen ara aplicant les equacions (1.97) i (1.98), substituint «t» per «$t - 0{,}02$» en les funcions exponencials:

$$i_2(t) = 1{,}7293\,\mathrm{e}^{-(t-0{,}02)/0{,}015} \qquad u_2(t) = -4 \times 1{,}7293\,\mathrm{e}^{-(t-0{,}02)/0{,}015}$$

En l'instant $t = 40\,\text{ms}$, el corrent I_2 que circula pel circuit val:

$$I_2 = i_2(0{,}04) = 1{,}7293\,\mathrm{e}^{-(0{,}04-0{,}02)/0{,}015} = 0{,}4558\,\text{A}$$

En aquest mateix instant el commutador torna a la posició A, formant-se de nou el circuit R-L original amb una constant de temps τ_3 de valor: $\tau_3 = \tau_1 = 10\,\text{ms}$.

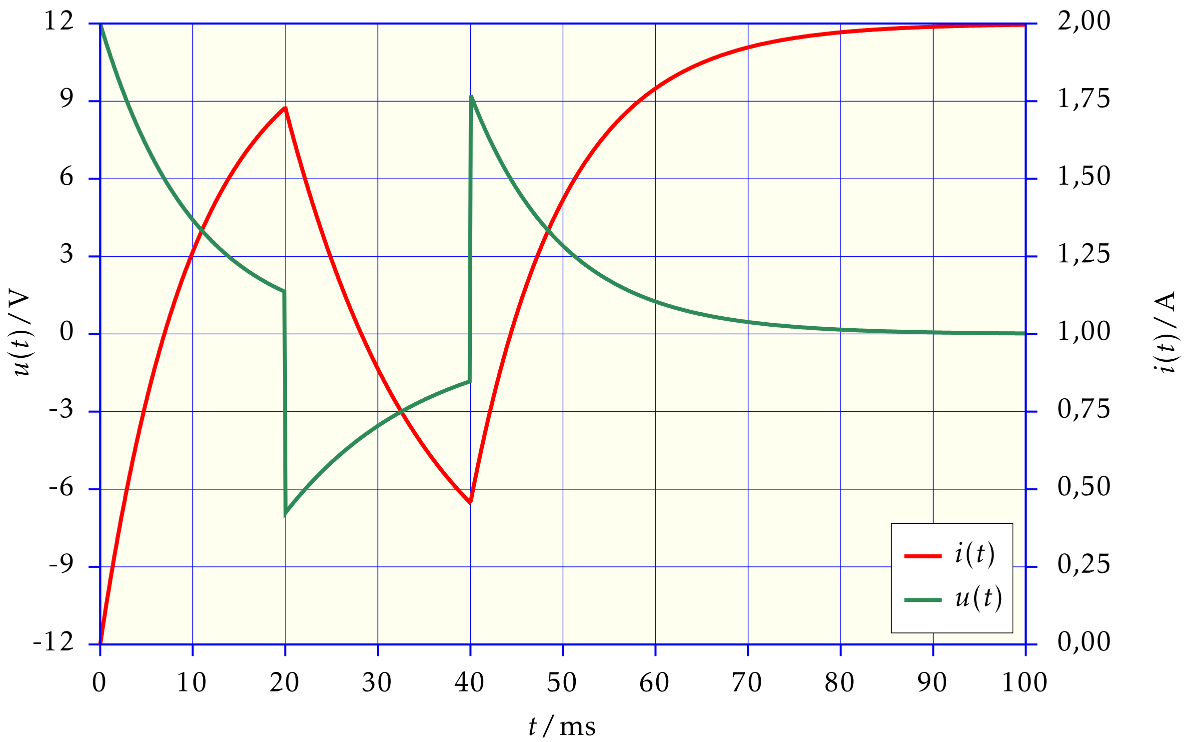
El corrent $i_3(t)$ i la tensió $u_3(t)$ en la inductància es calculen ara aplicant les equacions (1.94) i (1.95), substituint «t» per «$t - 0{,}04$» en les funcions exponencials:

$$i_3(t) = \frac{12}{6} - \left(\frac{12}{6} - 0{,}4558\right) \mathrm{e}^{-(t-0{,}04)/0{,}01} \qquad u_3(t) = (12 - 6 \times 0{,}4558)\,\mathrm{e}^{-(t-0{,}04)/0{,}01}$$

Finalment, expressem el corrent $i(t)$ i la tensió $u(t)$ com:

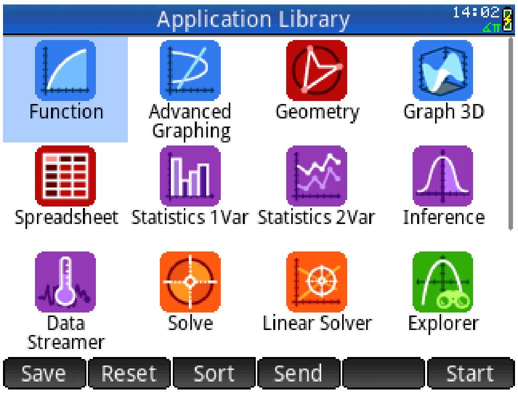
$$i(t) = \begin{cases} i_1(t), & 0\,\text{ms} \le t < 20\,\text{ms} \\ i_2(t), & 20\,\text{ms} \le t < 40\,\text{ms} \\ i_3(t), & t \ge 40\,\text{ms} \end{cases} \qquad u(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0\,\text{ms} \le t < 20\,\text{ms} \\ u_2(t), & 20\,\text{ms} \le t < 40\,\text{ms} \\ u_3(t), & t \ge 40\,\text{ms} \end{cases}$$

Dibuixem ara aquestes dues funcions $i(t)$ i $u(t)$.



Per acabar, dibuixarem la mateixa funció $i(t)$ utilitzant la calculadora *HP Prime*. Els passos a seguir són els següents:

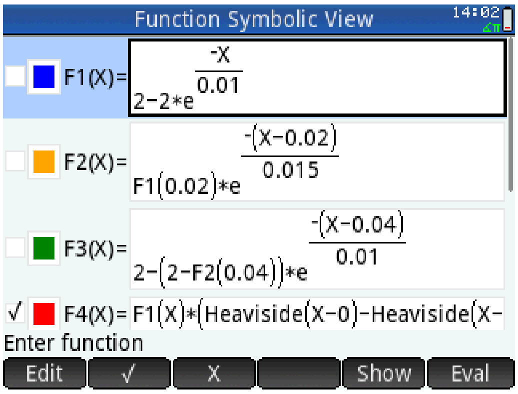
❶ En primer lloc premem la tecla Apps Info i seleccionem l'aplicació **Function**.



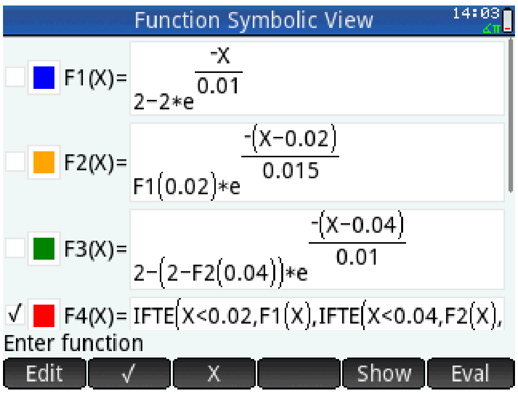
❷ Tot seguit entrem en els camps F1(X), F2(X) i F3(X) les equacions de $i_1(t)$, $i_2(t)$ i $i_3(t)$; en lloc dels valors 1,7293 i 0,4558, utilitzarem F1(0.02) i F2(0.04) respectivament, per tal que la calculadora els calculi automàticament. Com a variable utilitzarem X en lloc de t.

En el camp F4(X) entrem la funció $i(t)$, amb l'ajut de la funció **Heaviside(X)**. Escriurem: F1(X) * (**Heaviside**(X-0)-**Heaviside**(X-0.02)) + F2(X) * (**Heaviside**(X-0.02)-**Heaviside**(X-0.04)) + F3(X) * **Heaviside**(X-0.04).

Finalment, deixem marcat el camp F4(X) i desmarquem els camps F1(X), F2(X) i F3(X).

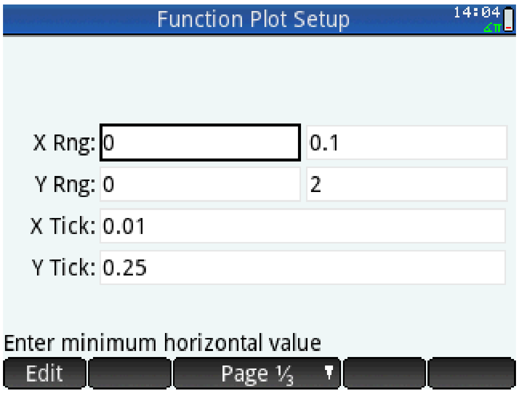


Una altra manera de crear el camp F4(X), és usant la funció **IFTE(Cond,ST,SF)**; aquesta funció avalua l'expressió **Cond**, si el resultat és cert executa **ST** i si és fals executa **SF**. Podem escriure per tant: **IFTE**(X<0.02,F1(X),**IFTE**(X<0.04,F2(X),F3(X))).

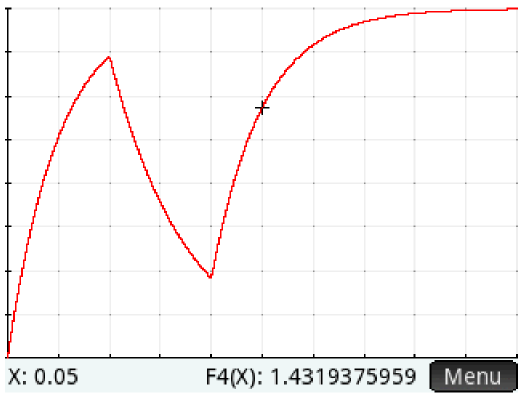


❸ Ara ja podem dibuixar la funció $i(t)$.

Comencem ajustant els paràmetres de la gràfica, prement les tecles Shift Plot Setup; fixem els dos valors de **X Rng** a **0** i **0.1** respectivament, els dos valors de **Y Rng** a **0** i **2** respectivament, el valor de **X Tick** a **0.01**, i el valor de **Y Tick** a **0.25**.



❹ A continuació premem la tecla Plot Setup i la calculadora dibuixa la gràfica.



1.7.5 Circuit R-L – Curtcircuit en corrent altern

Comencem resolent analíticament el circuit R-L de la figura 1.20, el qual quedarà sotmès a un curtcircuit en tancar l'interruptor a l'instant $t = 0$, amb la condició inicial: $i(0) = 0$; $u(t)$ és una tensió sinusoidal, on U n'és el valor eficaç, ϕ n'és l'angle inicial, i $\omega = 2\pi f$.

Aquest circuit pot representar directament un circuit monofàsic on s'hi produeix un curtcircuit, però també pot representar en el cas d'un curtcircuit trifàsic, el circuit equivalent per fase d'una xarxa trifàsica, on R i L és la impedància equivalent de la xarxa, vista des del punt del curtcircuit, i $u(t)$ és la tensió en el punt del curtcircuit en l'instant previ a l'inici del curtcircuit; $u(t)$, R i L representen en aquest cas, el circuit equivalent Thévenin de la xarxa en el punt del curtcircuit.

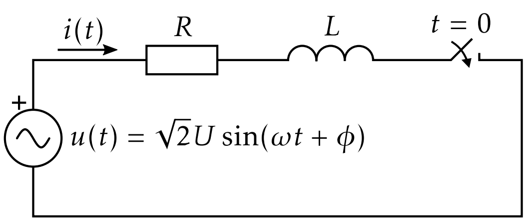


Figura 1.20 Circuit R-L – Curtcircuit en corrent altern

L'equació diferencial que lliga les variables d'aquest circuit és:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.100}$$

Resolent aquesta equació diferencial amb el valor inicial $i(0) = 0$, trobem que el corrent de curtcircuit $i(t)$ que es produeix és:

$$i(t) = i_{\mathrm{ac}}(t) + i_{\mathrm{dc}}(t) \tag{1.101}$$

Amb:

$$i_{\mathrm{ac}}(t) = \sqrt{2}I\sin\left(\omega t + \phi - \arctan\frac{\omega L}{R}\right) \tag{1.102a}$$

$$i_{\mathrm{dc}}(t) = -\sqrt{2}I\sin\left(\phi - \arctan\frac{\omega L}{R}\right)\mathrm{e}^{-tR/L} \tag{1.102b}$$

On I és el valor eficaç de $i_{\mathrm{ac}}(t)$; aquest valor també s'anomena valor eficaç simètric I_{sim}, i val:

$$I = I_{\mathrm{sim}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \tag{1.103}$$

La component $i_{\mathrm{dc}}(t)$ decreix amb el pas del temps fins a fer-se zero, i finalment només queda la component $i_{\mathrm{ac}}(t)$. El valor màxim de $i(t)$, anomenat valor de pic asimètric $\hat{I}_{\mathrm{asim}}$, es dona a prop de l'inici ($t \approx 0$), i depèn del valor que pren $i_{\mathrm{dc}}(0)$, i per tant depèn del valor de $\sin\left(\phi - \arctan\frac{\omega L}{R}\right)$, que apareix en l'equació (1.102b). En circuits força inductius ($\omega L \gg R$), $\hat{I}_{\mathrm{asim}}$ és màxim per a $\phi \approx 0$, i pren el valor teòric:

$$\hat{I}_{\mathrm{asim}} = i_{\mathrm{dc}}(0) + \sqrt{2}I_{\mathrm{sim}} \approx \sqrt{2}I_{\mathrm{sim}} + \sqrt{2}I_{\mathrm{sim}} = 2\sqrt{2}I_{\mathrm{sim}} \tag{1.104}$$

En aquest mateix cas, també és màxim el valor eficaç inicial de $i(t)$, anomenat valor eficaç asimètric I_{asim}, i pren el valor teòric:

$$I_{\mathrm{asim}} = \sqrt{i_{\mathrm{dc}}^2(0) + I_{\mathrm{sim}}^2} \approx \sqrt{\left(\sqrt{2}I_{\mathrm{sim}}\right)^2 + I_{\mathrm{sim}}^2} = \sqrt{3}I_{\mathrm{sim}} \tag{1.105}$$

Finalment, en aquest mateix cas la relació entre $\hat{I}_{\mathrm{asim}}$ i I_{asim}, pren el valor teòric:

$$\hat{I}_{\mathrm{asim}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}I_{\mathrm{asim}} \approx 1{,}633I_{\mathrm{asim}} \tag{1.106}$$

Pel mateix raonament anterior, el valor mínim de $i(t)$ en circuits força inductius, s'aconsegueix quan $\phi \approx \pm\frac{\pi}{2}$. En Aquest cas $i_{\mathrm{dc}}(t)$ es fa zero des de l'inici, i només queda la component alterna $i_{\mathrm{ac}}(t)$.

Exemple 1.8 Curtcircuit en un circuit R-L

Es tracta de calcular el corrent de curtcircuit que circula pel circuit de la Figura 1.20 a la pàgina anterior, amb els valors següents: $U = 400\,\mathrm{V}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$, $\phi = 0\,\mathrm{rad}$, $R = 9\times10^{-4}\,\Omega$, $L = 5\times10^{-5}\,\mathrm{H}$.

Primer calculem els valors:

$$\omega = 2\pi f = 2\times\pi\times 50\,\mathrm{Hz} = 314{,}1593\,\mathrm{rad/s}$$

$$\arctan\frac{\omega L}{R} = \arctan\frac{314{,}1593\,\text{rad/s}\times 5\times 10^{-5}\,\text{H}}{9\times 10^{-4}\,\Omega} = 1{,}5136\,\text{rad}$$

$$\sin\left(\phi - \arctan\frac{\omega L}{R}\right) = \sin(0\,\text{rad} - 1{,}5136\,\text{rad}) = -0{,}9984$$

A continuació, utilitzant l'equació (1.103), tenim:

$$I = I_{\text{sim}} = \frac{400\,\text{V}}{\sqrt{\left(9\times 10^{-4}\,\Omega\right)^2 + \left(314{,}1593\,\text{rad/s}\times 5\times 10^{-5}\,\text{H}\right)^2}} = 25\,423{,}0955\,\text{A}$$

A partir d'aquests valors i de les equacions (1.101), (1.102a) i (1.102b), tenim:

$$i_{\text{ac}}(t) = 35\,953{,}6865\sin(314{,}1593\,t - 1{,}5136)$$

$$i_{\text{dc}}(t) = 35\,894{,}8169\,\text{e}^{-18t}$$

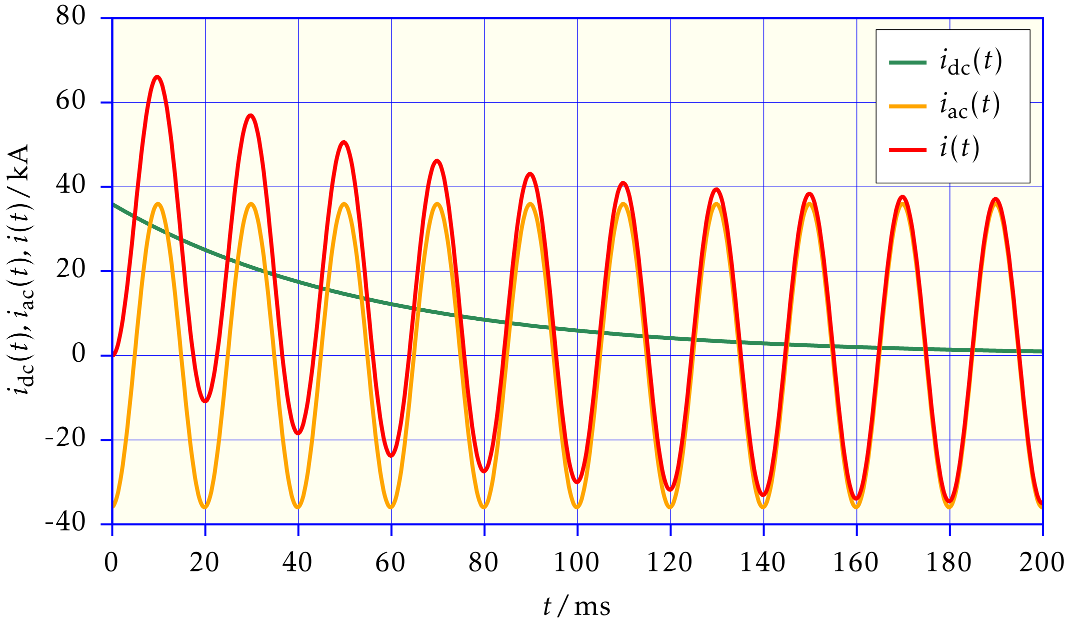
$$i(t) = 35\,953{,}6865\sin(314{,}1593\,t - 1{,}5136) + 35\,894{,}8169\,\text{e}^{-18t}$$

Finalment, donat que es compleix $\phi = 0$ i $\omega L\,(157{,}2\times 10^{-4}\,\Omega) \gg R\,(9\times 10^{-4}\,\Omega)$, podem utilitzar les equacions (1.104) i (1.105):

$$\hat{I}_{\text{asim}} = 2\sqrt{2}I_{\text{sim}} = 2\times\sqrt{2}\times 25\,423{,}0955\,\text{A} = 71{,}9\,\text{kA}$$

$$I_{\text{asim}} = \sqrt{3}I_{\text{sim}} = \sqrt{3}\times 25\,423{,}0955\,\text{A} = 44{,}0\,\text{kA}$$

Per acabar, representem les funcions $i_{\text{dc}}(t)$, $i_{\text{ac}}(t)$ i $i(t)$:



Tal com s'ha dit anteriorment, el valor de $\hat{I}_{\text{asim}}$ donat per l'equació (1.104), en el cas de $\phi \approx 0$ i $\omega L \gg R$, és teòric. La norma CEI 60909-1 dona valors més exactes per a $\hat{I}_{\text{asim}}$, en el cas de $\phi \approx 0$, segons l'expressió següent:

$$\hat{I}_{\text{asim}} = \kappa\sqrt{2}I_{\text{sim}} \tag{1.107}$$

On el factor κ ve donat per l'expressió:

$$\kappa = 1{,}02 + 0{,}98\,\mathrm{e}^{-3\frac{R}{\omega L}} \tag{1.108}$$

Quan es compleix $\omega L \gg R$, tenim $\kappa \approx 2$, i l'equació (1.107) dona el mateix valor que l'equació (1.104).

En el cas de la xarxa de l'apartat anterior, la relació $\frac{R}{\omega L}$ és fàcil de calcular, no obstant, en xarxes grans on hi ha moltes branques, els valors de $\frac{R}{\omega L}$ de cadascuna de les branques no coincideix en general amb el valor calculat en el punt del curtcircuit, utilitzant els valors R i ωL de la xarxa equivalent en aquest punt. La mateixa norma CEI 60909-1 explica com cal procedir en aquests casos.

Exemple 1.9 Corrent de pic asimètric

Es tracta de calcular el corrent de pic asimètric del corrent de curtcircuit de l'exemple 1.8 segons la norma CEI 60909-1.

El valor de curtcircuit eficaç simètric calculat a l'exemple 1.8 a la pàgina 32 és: $I_{\text{sim}} = 25{,}4\,\text{kA}$.

Primer calculem κ utilitzant l'equació (1.108):

$$\kappa = 1{,}02 + 0{,}98\,\mathrm{e}^{-3\frac{9\times10^{-4}\,\Omega}{314{,}1593\,\text{rad/s}\times5\times10^{-5}\,\text{H}}} = 1{,}8452$$

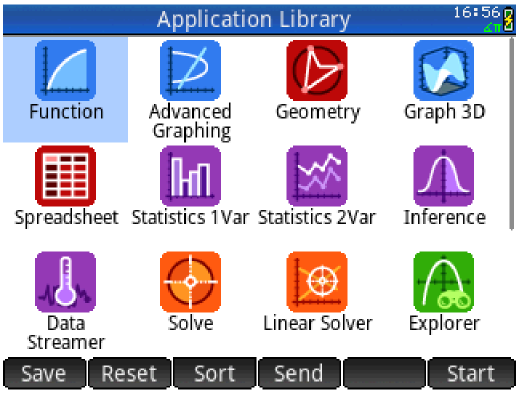
I a continuació calculem $\hat{I}_{\text{asim}}$ utilitzant l'equació (1.107):

$$\hat{I}_{\text{asim}} = 1{,}8452 \times \sqrt{2} \times 25{,}4\,\text{kA} = 66{,}3\,\text{kA}$$

Aquest valor és més a prop del real, tal com es pot veure en la gràfica de l'exemple 1.8, que el valor de 71,9 kA obtingut en aquell exemple.

Trobarem a continuació el valor exacte del corrent de pic utilitzant la calculadora *HP Prime*. Els passos a seguir són els següents:

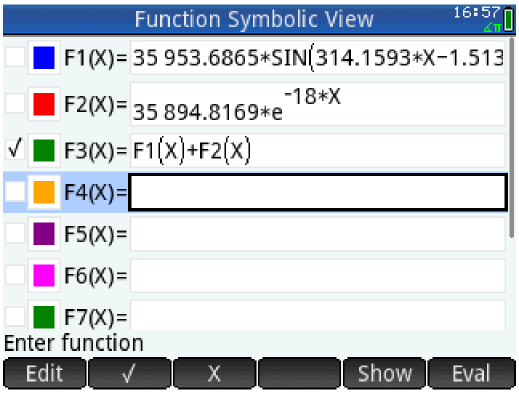
❶ En primer lloc premem la tecla Apps Info i seleccionem l'aplicació **Function**.



❷ Tot seguit entrem en els camps F1(X) i F2(X) les equacions de $i_{ac}(t)$ i $i_{dc}(t)$ que hem calculat en l'exemple 1.8 a la pàgina 32; com a variable utilitzarem X en lloc de t.

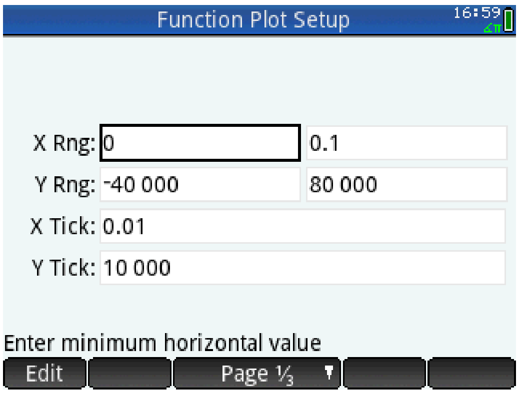
En el camp F3(X) entrem F1(X)+F2(X).

Finalment, deixem marcat el camp F3(X) i desmarquem els camps F1(X) i F2(X). D'aquesta manera la calculadora només dibuixarà la funció total $i(t)$, i no les parcials $i_{ac}(t)$ i $i_{dc}(t)$.

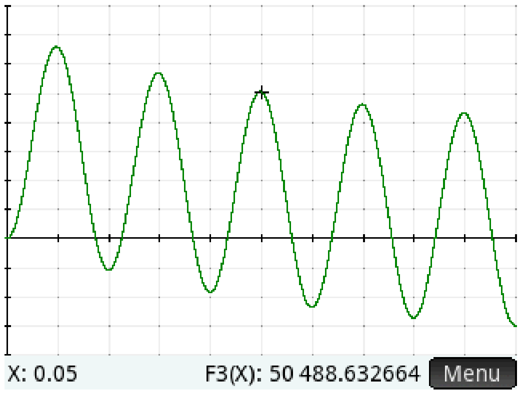


❸ Ara ja podem dibuixar la funció del corrent total de curtcircuit.

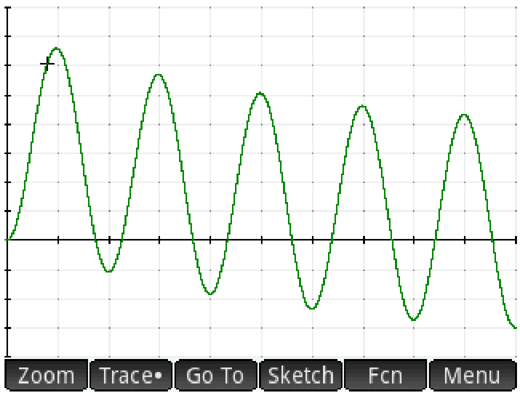
Comencem ajustant els paràmetres de la gràfica, prement les tecles Shift Plot Setup; fixem els dos valors de X Rng a 0 i 0.1 respectivament, els dos valors de Y Rng a -40000 i 80000 respectivament, el valor de X Tick a 0.01, i el valor de Y Tick a 10000.



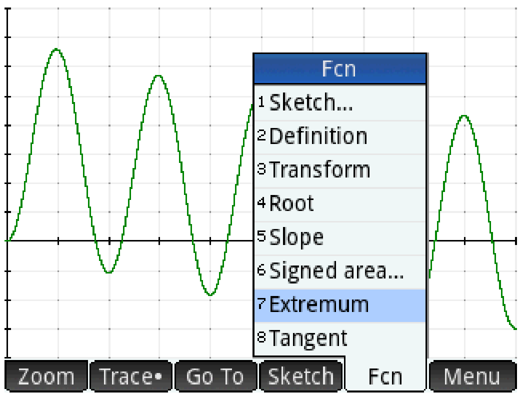
❹ A continuació premem la tecla Plot Setup i la calculadora dibuixa la gràfica; cal verificar prèviament que la calculadora estigui en el mode angular radiants, ja que en cas contrari el dibuix que obtindríem no seria correcte. El cursor queda situat automàticament al centre de la pantalla.



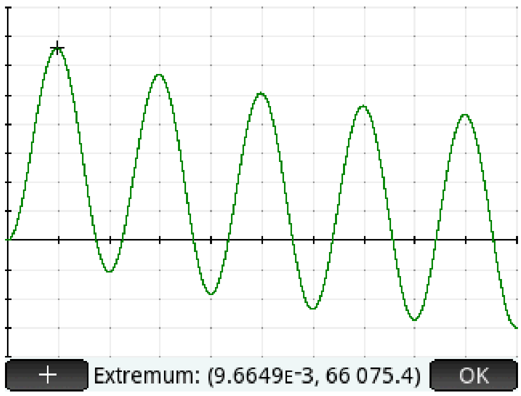
❺ Premem ara el botó Menu, i a continuació situem el cursor amb el dit a prop del primer màxim de la funció.



❻ Premem a continuació el botó Fcn i seleccionem la funció **Extremum** del menú que apareix.



❼ La calculadora ens dona immediatament el valor del punt màxim de la funció, a la part inferior de la pantalla.



El pic es troba doncs a: $t = 9{,}6649\,\text{ms}$, i té el valor: $\hat{I}_{\text{asim}} = 66\,075{,}4\,\text{A}$.

1.8 Resolució de xarxes mitjançant el mètode de les malles

En el capítol 11 es presenta un mètode general per resoldre xarxes elèctriques, que tot i que es pot fer servir per a xarxes de qualsevol dimensió, és més normal utilitzar-lo en xarxes on el nombre de nusos és elevat.

Es presenta a continuació el mètode de les malles, que és l'utilitzat més usualment a l'hora de resoldre xarxes de pocs nusos; té l'avantatge respecte d'altres mètodes de reduir el nombre d'equacions a resoldre. Utilitzarem com a exemple la xarxa de la figura 1.21:

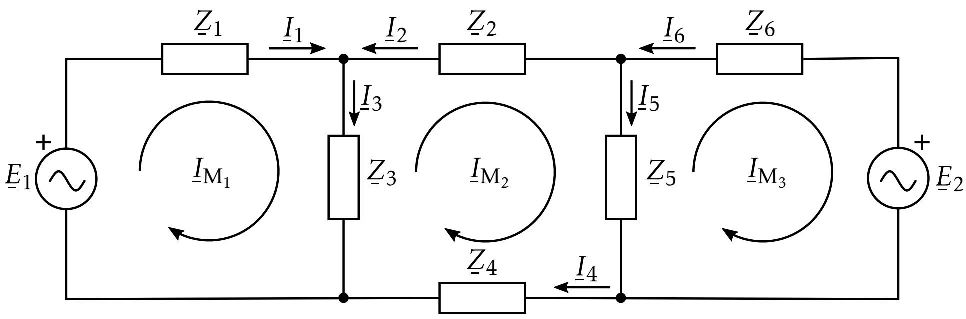


Figura 1.21 Mètode de les malles

En aquesta xarxa, les dues fonts de tensió $\underline{E}_1$ i $\underline{E}_2$ i les sis impedàncies $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$, $\underline{Z}_4$, $\underline{Z}_5$ i $\underline{Z}_6$ són valors coneguts, i les incògnites són els sis corrents $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$, $\underline{I}_4$, $\underline{I}_5$ i $\underline{I}_6$.

El mètode tradicional utilitzat per resoldre aquesta xarxa, consisteix en crear un sistema de sis equacions lineals amb sis incògnites (les intensitats), utilitzant la 1a i 2a lleis de Kirchhoff, i resoldre'l.

El mètode de les malles utilitza els corrents ficticis de malla $\underline{I}_{\text{M}_1}$, $\underline{I}_{\text{M}_2}$ i $\underline{I}_{\text{M}_3}$, els quals ens permeten reduir el nombre d'equacions lineals del sistema que haurem de resoldre.

En primer lloc cal definir què entenem per una malla: una malla és un camí tancat que no conté dins seu cap altre camí tancat. En aquest sentit tenim en la xarxa de la figura 1.21 tres malles: $\underline{Z}_1$–$\underline{Z}_3$–$\underline{E}_1$, $\underline{Z}_2$–$\underline{Z}_5$–$\underline{Z}_4$–$\underline{Z}_3$ i $\underline{Z}_5$–$\underline{Z}_6$–$\underline{E}_2$.

Les relacions entre els corrents de cadascuna de les branques de la xarxa i els corrents de malla són:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{\mathrm{M}_1} \tag{1.109a}$$
$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_{\mathrm{M}_2} \tag{1.109b}$$
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{\mathrm{M}_1} - \underline{I}_{\mathrm{M}_2} \tag{1.109c}$$
$$\underline{I}_4 = \underline{I}_{\mathrm{M}_2} \tag{1.109d}$$
$$\underline{I}_5 = \underline{I}_{\mathrm{M}_2} - \underline{I}_{\mathrm{M}_3} \tag{1.109e}$$
$$\underline{I}_6 = -\underline{I}_{\mathrm{M}_3} \tag{1.109f}$$

Per resoldre la xarxa de la figura 1.21 a la pàgina anterior, hem de plantejar la 2a llei de Kirchhoff per a cadascuna de les tres malles; això ens proporcionarà el següent sistema d'equacions lineals de tres equacions amb tres incògnites ($\underline{I}_{\mathrm{M}_1}$, $\underline{I}_{\mathrm{M}_2}$ i $\underline{I}_{\mathrm{M}_3}$):

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_{\mathrm{M}_1} + \underline{Z}_3(\underline{I}_{\mathrm{M}_1} - \underline{I}_{\mathrm{M}_2}) \tag{1.110a}$$
$$0 = \underline{Z}_2\underline{I}_{\mathrm{M}_2} + \underline{Z}_5(\underline{I}_{\mathrm{M}_2} - \underline{I}_{\mathrm{M}_3}) + \underline{Z}_4\underline{I}_{\mathrm{M}_2} + \underline{Z}_3(\underline{I}_{\mathrm{M}_2} - \underline{I}_{\mathrm{M}_1}) \tag{1.110b}$$
$$-\underline{E}_2 = \underline{Z}_5(\underline{I}_{\mathrm{M}_3} - \underline{I}_{\mathrm{M}_2}) + \underline{Z}_6\underline{I}_{\mathrm{M}_3} \tag{1.110c}$$

Agrupant termes tenim:

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)\underline{I}_{\mathrm{M}_1} - \underline{Z}_3\underline{I}_{\mathrm{M}_2} = \underline{E}_1 \tag{1.111a}$$
$$-\underline{Z}_3\underline{I}_{\mathrm{M}_1} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)\underline{I}_{\mathrm{M}_2} - \underline{Z}_5\underline{I}_{\mathrm{M}_3} = 0 \tag{1.111b}$$
$$-\underline{Z}_5\underline{I}_{\mathrm{M}_2} + (\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6)\underline{I}_{\mathrm{M}_3} = -\underline{E}_2 \tag{1.111c}$$

O en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_3 & 0 \\ -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_5 \\ 0 & -\underline{Z}_5 & \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_{\mathrm{M}_1} \\ \underline{I}_{\mathrm{M}_2} \\ \underline{I}_{\mathrm{M}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_1 \\ 0 \\ -\underline{E}_2 \end{pmatrix} \tag{1.112}$$

El que queda ara per fer és resoldre aquest sistema d'equacions lineals per tal de trobar $\underline{I}_{\mathrm{M}_1}$, $\underline{I}_{\mathrm{M}_2}$ i $\underline{I}_{\mathrm{M}_3}$, i a continuació utilitzar les equacions (1.109a) a (1.109f) per trobar les intensitats de cadascuna de les branques.

L'equació (1.112) pot escriure's de forma general com:

$$\underline{\boldsymbol{Z}}\,\underline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{M}} = \underline{\boldsymbol{E}} \tag{1.113}$$

On $\underline{\boldsymbol{Z}}$ és la matriu d'impedàncies, $\underline{\boldsymbol{E}}$ és el vector de fonts de tensió, i $\underline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{M}}$ és el vector de les intensitats de malla. Quan no hi ha acoblaments magnètics entre branques, la matriu d'impedàncies $\underline{\boldsymbol{Z}}$ i el vector de fonts de tensió $\underline{\boldsymbol{E}}$ poden formar-se de manera directa seguint els passos següents:

1. S'assigna a cada malla un número començant per l'1.

   En el nostre exemple les malles s'han numerat 1, 2 i 3, d'esquerra a dreta.

2. Es dibuixa per a cada malla el seu corrent de malla, tenint en compte que tots tinguin el mateix sentit de gir.

   En el nostre exemple tots els corrents giren en sentit horari.

3. Cada element de la diagonal de la matriu d'impedàncies és igual a la suma de les impedàncies que formen cada malla.

   En el nostre exemple tenim: $\underline{\boldsymbol{Z}}(1,1) = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3$, $\underline{\boldsymbol{Z}}(2,2) = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5$, i $\underline{\boldsymbol{Z}}(3,3) = \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6$.

4. Cada element de fora de la diagonal de la matriu d'impedàncies és igual a la suma canviada de signe de les impedàncies en comú a les dues malles corresponents.

   En el nostre exemple les malles 1 i 2 tenen $\underline{Z}_3$ com a impedància en comú, i per tant tenim: $\underline{\boldsymbol{Z}}(1,2) = \underline{\boldsymbol{Z}}(2,1) = -\underline{Z}_3$, les malles 2 i 3 tenen $\underline{Z}_5$ com a impedància en comú, i per tant tenim: $\underline{\boldsymbol{Z}}(2,3) = \underline{\boldsymbol{Z}}(3,2) = -\underline{Z}_5$, i les malles 1 i 3 no tenen cap impedància en comú, i per tant tenim: $\underline{\boldsymbol{Z}}(1,3) = \underline{\boldsymbol{Z}}(3,1) = 0$.

5. Cada element del vector de fonts de tensió és igual a la suma de les fonts de tensió que formen part de cada malla; la contribució a la suma de cada font de tensió serà positiva o negativa, segons que la seva força electromotriu tingui el mateix sentit que el corrent de malla, o que tingui el sentit contrari.

   En el nostre exemple $\underline{E}_1$ i $\underline{I}_{\mathrm{M1}}$ tenen el mateix sentit, i per tant tenim: $\underline{\boldsymbol{E}}(1) = \underline{E}_1$, en canvi $\underline{E}_2$ i $\underline{I}_{\mathrm{M3}}$ tenen sentits contraris, i per tant tenim: $\underline{\boldsymbol{E}}(3) = -\underline{E}_2$, i donat que la malla 2 no té cap font de tensió tenim: $\underline{\boldsymbol{E}}(2) = 0$.

Exemple 1.10 Aplicació del mètode de les malles

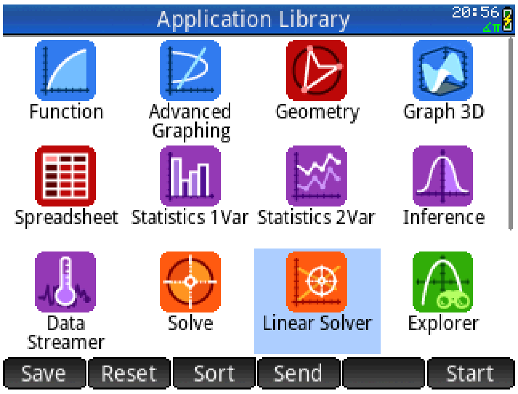
Es tracta de trobar els sis corrents de la xarxa de la figura 1.21 a la pàgina 37, amb els valors numèrics: $\underline{E}_1 = 5\,\mathrm{V}$, $\underline{E}_2 = 2\,\mathrm{V}$, $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = \underline{Z}_5 = \underline{Z}_6 = 1\,\Omega$.

Donat que tots els valor són reals, prescindirem de la notació complexa. Posant valors numèrics a l'equació (1.112), tenim:

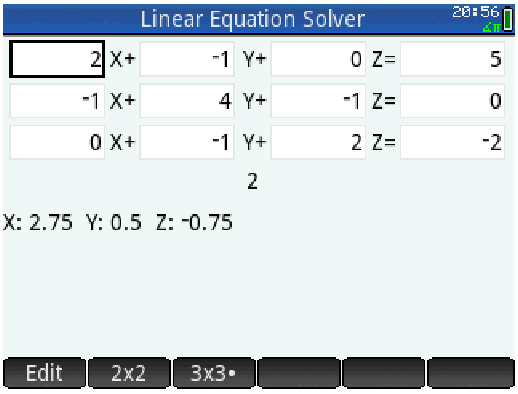
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{\mathrm{M}_1} \\ I_{\mathrm{M}_2} \\ I_{\mathrm{M}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Resoldrem aquest sistema d'equacions lineals utilitzant la calculadora *HP Prime*. Els passos a seguir són els següents:

1. En primer lloc premem la tecla Apps Info i seleccionem l'aplicació Linear Solver.



❷ A continuació només cal entrar els valors del sistema a resoldre, i la calculadora ens mostra directament la solució.



Així doncs, la solució és:

$$
\begin{aligned}
I_{M_1} &= 2{,}75\ \mathrm{A}\\
I_{M_2} &= 0{,}5\ \mathrm{A}\\
I_{M_3} &= -0{,}75\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Finalment, utilitzant les equacions (1.109a) a (1.109f) tenim:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2{,}75\ \mathrm{A}\\
I_2 &= -0{,}5\ \mathrm{A}\\
I_3 &= 2{,}25\ \mathrm{A}\\
I_4 &= 0{,}5\ \mathrm{A}\\
I_5 &= 1{,}25\ \mathrm{A}\\
I_6 &= 0{,}75\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Capítol 2

Càlculs Bàsics

2.1 Introducció

Es tracten en aquest capítol càlculs bàsics que poden utilitzar-se en la resolució de diversos problemes electrotècnics.

2.2 Càlculs en per unitat

Les magnituds expressades en «pu» (per unitat) són útils quan es treballa amb xarxes de corrent altern on hi ha transformadors, i per tant més d'un nivell de tensió.

2.2.1 Mètode de càlcul

El primer pas consisteix en escollir unes magnituds base. Les magnituds base fonamentals són la potència i la tensió; s'escull una potència base S_B per a tota la xarxa, i tantes tensions base $U_{\mathrm{B}_1}, U_{\mathrm{B}_2}, \ldots, U_{\mathrm{B}_n}$ com nivells de tensió diferents tingui la xarxa:

$$\text{Magnituds base fonamentals:} \left\{ \begin{array}{l} S_\mathrm{B} \\ U_{\mathrm{B}_1}, U_{\mathrm{B}_2}, \ldots, U_{\mathrm{B}_n} \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Normalment s'escull com a tensions base les tensions nominals dels transformadors de la xarxa, i com a potència base la potència nominal d'un del transformadors o generadors de la xarxa; també és usual utilitzar com a potència base el valor 100 MVA.

En el cas de circuits monofàsics, les tensions base són les tensions monofàsiques, o fase–neutre U_FN, i la potència base és la potència monofàsica S_1F. En el cas de circuits trifàsics, podem escollir com a tensions base les tensions fase–neutre U_FN i com a potència base la potència monofàsica S_1F, o bé podem escollir com a tensions base les tensions fase–fase U_FF i com a potència base la potència trifàsica S_3F.

A partir de la potència base i de les tensions base es defineixen els corrents base I_{B_i}, les impedàncies base Z_{B_i} i les admitàncies base Y_{B_i}. Segons que s'utilitzin les tensions i potències monofàsiques o trifàsiques com a magnituds base, tenim:

$$\begin{matrix} S_\mathrm{B} = S_\mathrm{1F} \\ U_{\mathrm{B}_i} = U_{\mathrm{FN}_i} \\ (i = 1, \ldots, n) \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} I_{\mathrm{B}_i} &= \frac{S_\mathrm{B}}{U_{\mathrm{B}_i}} \\ Z_{\mathrm{B}_i} &= \frac{U_{\mathrm{B}_i}^2}{S_\mathrm{B}} = \frac{U_{\mathrm{B}_i}}{I_{\mathrm{B}_i}} \\ Y_{\mathrm{B}_i} &= \frac{S_\mathrm{B}}{U_{\mathrm{B}_i}^2} = \frac{I_{\mathrm{B}_i}}{U_{\mathrm{B}_i}} \end{aligned} \right. \qquad \begin{matrix} S_\mathrm{B} = S_\mathrm{3F} \\ U_{\mathrm{B}_i} = U_{\mathrm{FF}_i} \\ (i = 1, \ldots, n) \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} I_{\mathrm{B}_i} &= \frac{S_\mathrm{B}}{\sqrt{3}U_{\mathrm{B}_i}} \\ Z_{\mathrm{B}_i} &= \frac{U_{\mathrm{B}_i}^2}{S_\mathrm{B}} = \frac{U_{\mathrm{B}_i}}{\sqrt{3}I_{\mathrm{B}_i}} \\ Y_{\mathrm{B}_i} &= \frac{S_\mathrm{B}}{U_{\mathrm{B}_i}^2} = \frac{\sqrt{3}I_{\mathrm{B}_i}}{U_{\mathrm{B}_i}} \end{aligned} \right. \tag{2.2}$$

Les magnituds expressades en per unitat (escrites usualment en minúscules) s'obtenen dividint les magnituds reals (escrites usualment en majúscules) pels valors base corresponents:

$$\underline{s} = \frac{\underline{S}}{S_\mathrm{B}} \qquad \underline{u} = \frac{\underline{U}}{U_\mathrm{B}} \qquad \underline{i} = \frac{\underline{I}}{I_\mathrm{B}} \qquad \underline{z} = \frac{\underline{Z}}{Z_\mathrm{B}} \qquad \underline{y} = \frac{\underline{Y}}{Y_\mathrm{B}} \tag{2.3}$$

Quan es tracta de resoldre circuits trifàsics equilibrats fem servir sempre els circuits equivalents per fase, i podem escollir aleshores com a valors base per a la potència i la tensió, la potència monofàsica S_1F i la tensió fase–neutre U_FN respectivament, o la potència trifàsica S_3F i la tensió fase–fase U_FF respectivament.

Quan fem la reducció de valors reals a valors en per unitat, hem de ser conseqüents i utilitzar sempre les potències monofàsiques i les tensions fase–neutre en el primer cas, i les potències trifàsiques i les tensions fase–fase en el segon cas.

Donat que es verifica $S_\mathrm{3F} = 3S_\mathrm{1F}$ i $U_\mathrm{FF} = \sqrt{3}U_\mathrm{FN}$, els valors del corrent base I_B, de la impedància base Z_B i de l'admitància base Y_B són els mateixos, tant si utilitzem $S_\mathrm{B} = S_\mathrm{1F}$ i $U_\mathrm{B} = U_\mathrm{FN}$, com si utilitzem $S_\mathrm{B} = S_\mathrm{3F}$ i $U_\mathrm{B} = U_\mathrm{FF}$.

En ambdós casos I_B i $\underline{I}$ són corrents fase–neutre, Z_B i $\underline{Z}$ són impedàncies fase–neutre i Y_B i $\underline{Y}$ són admitàncies fase–neutre; si tenim càrregues connectades en triangle caldrà transformar-les en càrregues equivalents connectades en estrella per tal de poder aplicar aquest mètode (vegeu la secció 2.4).

El pas següent consisteix en representar el circuit equivalent en per unitat i resoldre'l; en el cas de circuits trifàsics, i com a conseqüència del procés utilitzat, el circuit equivalent en per unitat és un circuit monofàsic i com a tal l'hem de resoldre, és a dir, sense la intervenció del factor $\sqrt{3}$.

Un cop resolt el circuit, es multipliquen les magnituds obtingudes en per unitat pels seus valors base respectius, per tal d'obtenir les magnituds reals:

$$\underline{S} = \underline{s}S_\mathrm{B} \qquad \underline{U} = \underline{u}U_\mathrm{B} \qquad \underline{I} = \underline{i}I_\mathrm{B} \qquad \underline{Z} = \underline{z}Z_\mathrm{B} \qquad \underline{Y} = \underline{y}Y_\mathrm{B} \tag{2.4}$$

2.2.2 Canvi de base

Normalment les impedàncies de transformadors (impedància de curtcircuit) o de generadors (impedància sincrònica, transitòria, etc.) estan referides a les magnituds nominals de la màquina en qüestió.

Si les magnituds base escollides coincideixen amb les nominals de la màquina, la impedància de la màquina en qüestió estarà expressada ja directament en per unitat, respecte aquesta base.

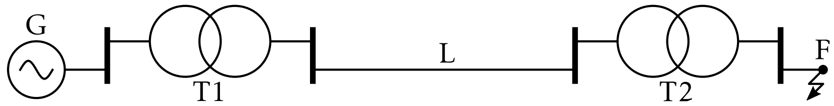
En canvi si les magnituds base són diferents de les nominals de la màquina, caldrà fer un canvi de base per tal de referir la impedància de la màquina a les magnituds base escollides.

De forma genèrica, si $\underline{z}$ és una impedància referida a la base U_B i S_B, podem obtenir la impedància $\underline{z}'$ referida a la base $U_{B'}$ i $S_{B'}$, mitjançant el canvi:

$$\underline{z}' = \underline{z}\,\frac{Z_B}{Z'_B} = \underline{z}\,\frac{U_B^2}{U_{B'}^2}\,\frac{S_{B'}}{S_B} \tag{2.5}$$

Exemple 2.1 Aplicació del mètode de càlcul en per unitat

Es tracte de calcular el corrent de curtcircuit trifàsic en el punt F de la xarxa següent, suposant que el sistema està treballant en buit.



Les dades del generador G, del transformador T1, de la línia L i del transformador T2 són:

$S_G = 60\,\text{MVA}$	$S_{T1} = 40\,\text{MVA}$	$l_L = 22\,\text{km}$	$S_{T2} = 12\,\text{MVA}$
$U_G = 10{,}5\,\text{kV}$	$m_{T1} = 10{,}5\,\text{kV} : 63\,\text{kV}$	$U_L = 60\,\text{kV}$	$m_{T2} = 60\,\text{kV} : 10{,}5\,\text{kV}$
$X''_G = 12\,\%$	$X_{T1} = 10\,\%$	$X_L = 0{,}4\,\Omega/\text{km}$	$X_{T2} = 8\,\%$

Escollim en primer lloc les següents magnituds base: $S_B = 60\,\text{MVA}$ i $U_B = 10{,}5\,\text{kV}/63\,\text{kV}/10{,}5\,\text{kV}$.

Calculem a continuació els valors en per unitat dels diferents elements de la xarxa:

Generador. En coincidir les magnituds base amb les nominals del generador tenim directament:

$$x''_G = 0{,}12\,\text{pu}$$

Transformador 1. La relació de transformació i la reactància són respectivament:

$$m_{T1} = \frac{10{,}5\,\text{kV}}{10{,}5\,\text{kV}} : \frac{63\,\text{kV}}{63\,\text{kV}} = 1:1$$

$$x_{T1} = 0{,}10 \times \frac{(63\,\text{kV})^2}{(63\,\text{kV})^2} \times \frac{60\,\text{MVA}}{40\,\text{MVA}} = 0{,}15\,\text{pu}$$

Línia. La reactància és:

$$x_L = \frac{0{,}4\,\Omega/\text{km} \times 22\,\text{km}}{\dfrac{(63\,\text{kV})^2}{60\,\text{MVA}}} = 0{,}1330\,\text{pu}$$

Transformador 2. La relació de transformació i la reactància són respectivament:

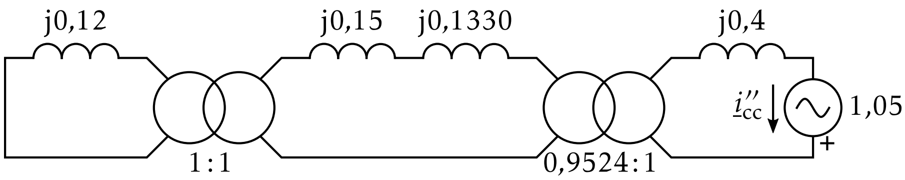
$$m_{T2} = \frac{60\,\text{kV}}{63\,\text{kV}} : \frac{10{,}5\,\text{kV}}{10{,}5\,\text{kV}} = 0{,}9524 : 1$$

$$x_{T2} = 0{,}08 \times \frac{(10{,}5\,\text{kV})^2}{(10{,}5\,\text{kV})^2} \times \frac{60\,\text{MVA}}{12\,\text{MVA}} = 0{,}4\,\text{pu}$$

Tensió en el punt F. La tensió abans del curtcircuit és la mateixa que la del generador G, elevada pel transformador T1 i reduïda després pel transformador T2:

$$\underline{u}_F = \frac{10{,}5\,\text{kV} \times \dfrac{63\,\text{kV}}{10{,}5\,\text{kV}} \times \dfrac{10{,}5\,\text{kV}}{60\,\text{kV}}}{10{,}5\,\text{kV}} = 1{,}05\,\text{pu}$$

A partir d'aquests valors calculats, tenim el següent circuit equivalent en per unitat, durant el curtcircuit en el punt F:



El corrent de curtcircuit buscat val:

$$|\underline{i}''_{cc}| = \left| \frac{1{,}05}{\mathrm{j}\left(0{,}4 + \frac{0{,}15+0{,}1330}{0{,}9524^2} + \frac{0{,}12}{0{,}9524^2 \times 1^2}\right)} \right| = 1{,}2436\,\text{pu}$$

$$|\underline{I}''_{cc}| = 1{,}2436\,\text{pu} \times \frac{60\,\text{MVA}}{\sqrt{3} \times 10{,}5\,\text{kV}} = 4{,}1\,\text{kA}$$

A l'hora de calcular el corrent de curtcircuit utilitzant el circuit equivalent en per unitat, s'observa que el transformador T1 és com si hagués desaparegut; això és així ja que la seva relació de transformació ha esdevingut 1 : 1, en coincidir les tensions base amb les seves tensions nominals.

No passa el mateix amb el transformador T2, ja que no es compleix la coincidència entre les seves tensions nominals i les tensions base.

No obstant, atès que l'elecció de les tensions base és arbitrària, si en lloc de 10,5 kV com a tercera tensió base, escollim $\frac{63\,\text{kV}}{60\,\text{kV}/10{,}5\,\text{kV}} = 11{,}025\,\text{kV}$, tindrem:

$$m_{T2} = \frac{60\,\text{kV}}{63\,\text{kV}} : \frac{10{,}5\,\text{kV}}{11{,}025\,\text{kV}} = 0{,}9524 : 0{,}9524 = 1 : 1$$

$$x_{\mathrm{T2}} = 0{,}08 \times \frac{(10{,}5\,\mathrm{kV})^2}{(11{,}025\,\mathrm{kV})^2} \times \frac{60\,\mathrm{MVA}}{12\,\mathrm{MVA}} = 0{,}3628\,\mathrm{pu}$$

$$\underline{u}_{\mathrm{F}} = \frac{10{,}5\,\mathrm{kV} \times \dfrac{63\,\mathrm{kV}}{10{,}5\,\mathrm{kV}} \times \dfrac{10{,}5\,\mathrm{kV}}{60\,\mathrm{kV}}}{11{,}025\,\mathrm{kV}} = 1\,\mathrm{pu}$$

Utilitzant aquests nous valors, podem prescindir totalment dels dos transformadors, i calcular el corrent de curtcircuit utilitzant l'expressió següent:

$$|\underline{i}''_{\mathrm{cc}}| = \left|\frac{1}{\mathrm{j}(0{,}3628 + 0{,}15 + 0{,}1330 + 0{,}12)}\right| = 1{,}3058\,\mathrm{pu}$$

$$|\underline{I}''_{\mathrm{cc}}| = 1{,}3058\,\mathrm{pu} \times \frac{60\,\mathrm{MVA}}{\sqrt{3} \times 11{,}025\,\mathrm{kV}} = 4{,}1\,\mathrm{kA}$$

Evidentment, el valor final és el mateix independentment de quines siguin les tensions base escollides.

2.2.3 Valors base per a branques que treballen a diferent tensió, amb acoblament magnètic

En la figura 2.1 hi ha representades dues branques acoblades magnèticament; es fa el supòsit addicional que les tensions de treball de les dues branques són diferents.

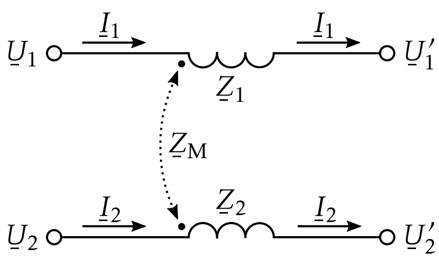


Figura 2.1 Valors base en un acoblament magnètic

Les equacions que relacionen els corrents i les tensions d'aquest circuit són:

$$\underline{U}_1 - \underline{U}'_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_{\mathrm{M}}\underline{I}_2 \tag{2.6a}$$

$$\underline{U}_2 - \underline{U}'_2 = \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{Z}_{\mathrm{M}}\underline{I}_1 \tag{2.6b}$$

Si volem convertir aquestes magnituds a valors en per unitat, hem d'escollir una potència base S_{B} i dues tensions base, una per a cada branca, U_{B_1} i U_{B_2}, i a partir de les equacions (2.2) obtenir els corrents, impedàncies i admitàncies base per a cada branca.

De la mateixa manera que s'ha dit en els apartats anteriors, en el cas de circuits trifàsics podem escollir com a tensions base les tensions fase–neutre U_{FN} i com a potència base la potència monofàsica S_{1F}, o bé podem escollir com a tensions base les tensions fase–fase U_{FF} i com a potència base la potència trifàsica S_{3F}.

Per tal de calcular la impedància base Z_{B_M} per convertir $\underline{Z}_M$ en un valor en per unitat, no podem utilitzar les equacions (2.2), ja que cadascuna de les dues branques de l'acoblament magnètic està a una tensió diferent; en aquest cas cal utilitzar l'equació que podem trobar a [36]:

$$Z_{B_M} = \frac{U_{B_1} U_{B_2}}{S_B} \tag{2.7}$$

El valor en per unitat $\underline{z}_M$ corresponent a $\underline{Z}_M$ s'obté de la manera usual:

$$\underline{z}_M = \frac{\underline{Z}_M}{Z_{B_M}} \tag{2.8}$$

2.2.4 Valors base per a branques que treballen a diferent tensió, amb acoblament capacitiu

En la figura 2.2 hi ha representades dues branques acoblades capacitivament; es fa el supòsit addicional que les tensions de treball de les dues branques són diferents.

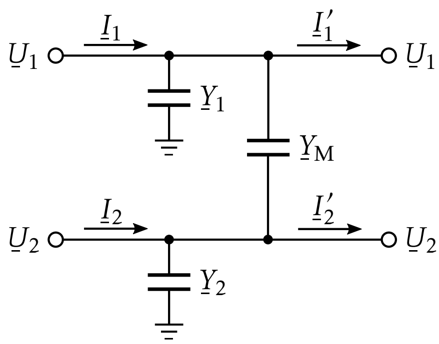


Figura 2.2 Valors base en un acoblament capacitiu

Les equacions que relacionen els corrents i les tensions d'aquest circuit són:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_M(\underline{U}_1 - \underline{U}_2) + \underline{I}_1' \tag{2.9a}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U}_2 + \underline{Y}_M(\underline{U}_2 - \underline{U}_1) + \underline{I}_2' \tag{2.9b}$$

Si volem convertir aquestes magnituds a valors en per unitat, hem d'escollir una potència base S_B i dues tensions base, una per a cada branca, U_{B_1} i U_{B_2}, i a partir de les equacions (2.2) obtenir els corrents, impedàncies i admitàncies base per a cada branca.

De la mateixa manera que s'ha dit en els apartats anteriors, en el cas de circuits trifàsics podem escollir com a tensions base les tensions fase–neutre U_{FN} i com a potència base la potència monofàsica S_{1F}, o bé podem escollir com a tensions base les tensions fase–fase U_{FF} i com a potència base la potència trifàsica S_{3F}.

Per tal de calcular l'admitància base Y_{B_M} per convertir $\underline{Y}_M$ en un valor en per unitat, no podem utilitzar les equacions (2.2), ja que cadascuna de les dues branques de l'acoblament capacitiu està a una tensió diferent; en aquest cas cal utilitzar l'equació que podem trobar a [36]:

$$Y_{B_M} = \frac{S_B}{U_{B_1} U_{B_2}} \tag{2.10}$$

El valor en per unitat $\underline{y}_{\mathrm{M}}$ corresponent a $\underline{Y}_{\mathrm{M}}$ s'obté de la manera usual:

$$\underline{y}_{\mathrm{M}} = \frac{\underline{Y}_{\mathrm{M}}}{Y_{\mathrm{B_M}}} \tag{2.11}$$

2.3 Circuits divisors de tensió i divisors de corrent

Un circuit divisor de tensió és format per un conjunt d'impedàncies en sèrie, i el que es vol saber és la tensió a què està sotmesa cada impedància en funció de la tensió total.

Un circuit divisor de corrent, en canvi, és format per un conjunt d'impedàncies en paral·lel, i el que es vol saber és el corrent que circula per cada impedància en funció del corrent total.

2.3.1 Circuits divisors de tensió

En la Figura 2.3 es pot veure un circuit divisor de tensió, pel qual es vol calcular la caiguda de tensió $\underline{U}_i$ en la impedància $\underline{Z}_i$ a partir de la tensió total $\underline{U}$.

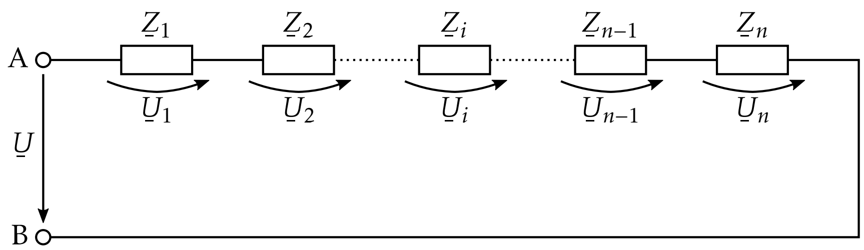


Figura 2.3 Circuit divisor de tensió

La impedància total $\underline{Z}$ entre els punts A i B del circuit val:

$$\underline{Z} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i \tag{2.12}$$

Utilitzant aquest valor, la tensió $\underline{U}_i$ val:

$$\underline{U}_i = \frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}}\,\underline{U} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.13}$$

En el cas particular de dues impedàncies $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ connectades en sèrie, tenim:

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\,\underline{U} \tag{2.14a}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\,\underline{U} \tag{2.14b}$$

2.3.2 Circuits divisors de corrent

En la Figura 2.4 es pot veure un circuit divisor de corrent, pel qual es vol calcular el corrent $\underline{I}_i$ que circula per la impedància $\underline{Z}_i$ a partir del corrent total $\underline{I}$.

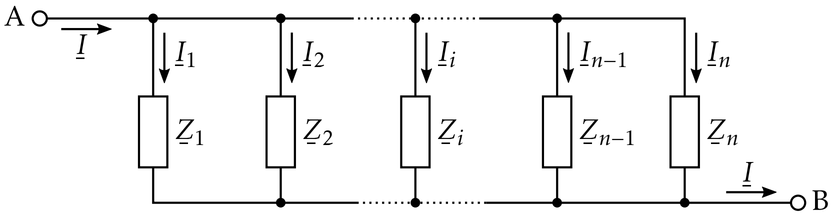


Figura 2.4 Circuit divisor de corrent

La impedància total $\underline{Z}$ entre els punts A i B del circuit val:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_i}} \tag{2.15}$$

Utilitzant aquest valor, el corrent $\underline{I}_i$ val:

$$\underline{I}_i = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_i}\,\underline{I} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.16}$$

En el cas particular de dues impedàncies $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ connectades en paral·lel, tenim:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I} \tag{2.17a}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I} \tag{2.17b}$$

2.4 Transformació d'impedàncies estrella ↔ triangle

En un sistema trifàsic, pot interessar transformar tres impedàncies connectades en estrella en tres impedàncies equivalents connectades en triangle (Y → Δ), o a l'inrevés, transformar tres impedàncies connectades en triangle en tres impedàncies equivalents connectades en estrella (Δ → Y). Atenent a la Figura 2.5 a la pàgina següent, tenim les següents transformacions:

$$\mathrm{Y} \to \Delta \left\{ \begin{aligned} \underline{Z}_{\mathrm{AB}} &= \underline{Z}_{\mathrm{A}} + \underline{Z}_{\mathrm{B}} + \frac{\underline{Z}_{\mathrm{A}}\,\underline{Z}_{\mathrm{B}}}{\underline{Z}_{\mathrm{C}}} \\ \underline{Z}_{\mathrm{BC}} &= \underline{Z}_{\mathrm{B}} + \underline{Z}_{\mathrm{C}} + \frac{\underline{Z}_{\mathrm{B}}\,\underline{Z}_{\mathrm{C}}}{\underline{Z}_{\mathrm{A}}} \\ \underline{Z}_{\mathrm{CA}} &= \underline{Z}_{\mathrm{C}} + \underline{Z}_{\mathrm{A}} + \frac{\underline{Z}_{\mathrm{C}}\,\underline{Z}_{\mathrm{A}}}{\underline{Z}_{\mathrm{B}}} \end{aligned} \right. \qquad \Delta \to \mathrm{Y} \left\{ \begin{aligned} \underline{Z}_{\mathrm{A}} &= \frac{\underline{Z}_{\mathrm{AB}}\,\underline{Z}_{\mathrm{CA}}}{\underline{Z}_{\mathrm{AB}} + \underline{Z}_{\mathrm{BC}} + \underline{Z}_{\mathrm{CA}}} \\ \underline{Z}_{\mathrm{B}} &= \frac{\underline{Z}_{\mathrm{BC}}\,\underline{Z}_{\mathrm{AB}}}{\underline{Z}_{\mathrm{AB}} + \underline{Z}_{\mathrm{BC}} + \underline{Z}_{\mathrm{CA}}} \\ \underline{Z}_{\mathrm{C}} &= \frac{\underline{Z}_{\mathrm{CA}}\,\underline{Z}_{\mathrm{BC}}}{\underline{Z}_{\mathrm{AB}} + \underline{Z}_{\mathrm{BC}} + \underline{Z}_{\mathrm{CA}}} \end{aligned} \right. \tag{2.18}$$

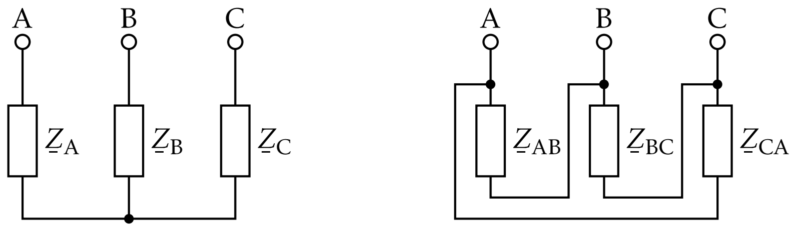


Figura 2.5 Transformació d'impedàncies estrella ↔ triangle

Exemple 2.2 Transformació triangle → estrella

Es vol transformar tres impedàncies connectades en triangle, de valors $\underline{Z}_{AB} = 10\,\Omega$, $\underline{Z}_{BC} = -j10\,\Omega$ i $\underline{Z}_{CA} = -j10\,\Omega$, en tres impedàncies equivalents connectades en estrella.

A partir de les equacions (2.18) tenim:

$$\underline{Z}_{A} = \frac{10\,\Omega \times (-j10\,\Omega)}{10\,\Omega - j10\,\Omega - j10\,\Omega} = (4 - j2)\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{B} = \frac{-j10\,\Omega \times 10\,\Omega}{10\,\Omega - j10\,\Omega - j10\,\Omega} = (4 - j2)\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{C} = \frac{-j10\,\Omega \times (-j10\,\Omega)}{10\,\Omega - j10\,\Omega - j10\,\Omega} = (-2 - j4)\,\Omega$$

És possible, com en aquest cas pel que fa a $\underline{Z}_{C}$, obtenir un valor amb una part real negativa (resistència negativa); no obstant, encara que no existeixi físicament aquesta resistència, el seu valor és matemàticament correcte i pot utilitzar-se en càlculs subsegüents.

2.5 Resolució de circuits coneixent la potència absorbida per la càrrega

Es tracta en aquest apartat la resolució de circuits simples, formats per una font de tensió en sèrie amb una impedància, la qual alimenta a una càrrega; aquesta càrrega no està definida per la seva impedància o admitància, sinó per la potència que absorbeix.[1]

En la Figura 2.6 a la pàgina següent es representen els circuits que es volen resoldre, tant per a corrent continu com per a corrent altern. E, R i P (o $\underline{E}$, $\underline{Z}$ i $\underline{S}$) són els valors coneguts, i U i I (o $\underline{U}$ i $\underline{I}$) són els valors que es vol trobar.

[1] Aquest és un cas particular del problema del flux de càrregues en sistemes elèctrics de potència, el qual es tracta en el capítol 12

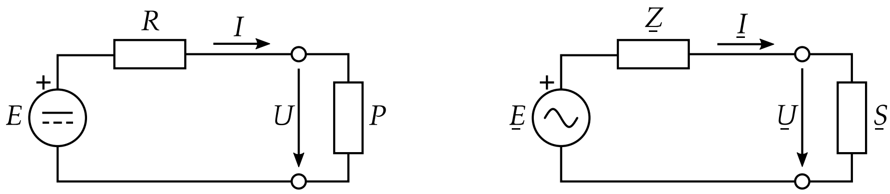


Figura 2.6 Resolució de circuits coneixent la potència absorbida per la càrrega

2.5.1 Circuits de corrent continu

A partir del circuit de l'esquerra de la Figura 2.6 tenim les dues equacions següents:

$$E = RI + U \tag{2.19}$$
$$P = UI \tag{2.20}$$

Multiplicant l'equació (2.19) per U i substituint l'equació (2.20) en aquest resultat, tenim:

$$EU = RIU + U^2 = RP + U^2 \quad \rightarrow \quad U^2 - EU + RP = 0 \tag{2.21}$$

A partir de les equacions descrites anteriorment, el circuit es resol seguint els següents passos:

❶ Obtenim U resolent l'equació de 2n grau (2.21).

❷ Dels dos valors reals que obtenim, ens quedem amb el més elevat. Si en lloc de dos valors reals obtinguéssim un parell de valors conjugats complexos, això ens indicaria que el circuit no té una solució físicament possible, i per tant no seria resoluble.

❸ Finalment calculem I substituint el valor trobat de U en l'equació (2.20).

Un cop trobats U i I, podem calcular el valor de la resistència R_P de la càrrega, la qual absorbeix la potència P, a partir de l'equació (2.20) i de la relació $U = R_P I$:

$$R_P = \frac{U}{I} = \frac{P}{I^2} = \frac{U^2}{P} \tag{2.22}$$

2.5.2 Circuits de corrent altern

A partir del circuit de la dreta de la Figura 2.6 tenim les dues equacions següents:

$$\underline{E} = \underline{Z}\,\underline{I} + \underline{U} \tag{2.23}$$
$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* \tag{2.24}$$

Conjugant l'equació (2.23), multiplicant-la per $\underline{U}$ i substituint l'equació (2.24) en aquest resultat, tenim:

$$\underline{E}^*\,\underline{U} = \underline{Z}^*\underline{I}^*\,\underline{U} + \underline{U}^*\,\underline{U} = \underline{Z}^*\,\underline{S} + |\underline{U}|^2 \quad\rightarrow\quad |\underline{U}|^2 - \underline{E}^*\,\underline{U} + \underline{Z}^*\,\underline{S} = 0 \tag{2.25}$$

Fem a continuació una rotació dels fasors $\underline{E}$ i $\underline{U}$ de valor $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi}$, on ψ és l'argument del fasor $\underline{E}$; d'aquesta manera, el nou fasor E' només tindrà part real, i el nou fasor $\underline{U}'$ estarà rotat respecte del fasor $\underline{U}$.

$$\psi = \arg \underline{E} \tag{2.26}$$

$$E' = \underline{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi} = |\underline{E}| \tag{2.27}$$

$$\underline{U}' = \underline{U}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi} \tag{2.28}$$

Expressem a continuació l'equació (2.25) utilitzant aquests dos nous fasors:

$$|\underline{U}'|^2 - E'\,\underline{U}' + \underline{Z}^*\,\underline{S} = 0 \tag{2.29}$$

Finalment separem l'equació (2.29) en dues, una per a la part real i una altra per a la part imaginària. Cal tenir en compte que $|\underline{U}'|^2$ només té part real, de valor $\mathrm{Re}^2\,\underline{U}' + \mathrm{Im}^2\,\underline{U}'$.

$$\mathrm{Re}^2\,\underline{U}' + \mathrm{Im}^2\,\underline{U}' - E'\,\mathrm{Re}\,\underline{U}' + \mathrm{Re}(\underline{Z}^*\,\underline{S}) = 0 \tag{2.30}$$

$$-E'\,\mathrm{Im}\,\underline{U}' + \mathrm{Im}(\underline{Z}^*\,\underline{S}) = 0 \tag{2.31}$$

A partir de les equacions descrites anteriorment, el circuit es resol seguint els següents passos:

❶ Calculem E' a partir de l'equació (2.27)

❷ Obtenim $\mathrm{Im}\,\underline{U}'$ resolent l'equació (2.31).

❸ Substituïm el valor obtingut per a $\mathrm{Im}\,\underline{U}'$ en l'equació (2.30), i obtenim $\mathrm{Re}\,\underline{U}'$ resolent aquesta equació de 2n grau.

❹ Dels dos valors reals que obtenim, ens quedem amb el més elevat. Si en lloc de dos valors reals, obtinguéssim un parell de valors conjugats complexos, això ens indicaria que el circuit no té una solució físicament possible, i per tant no seria resoluble.

❺ A partir del valor obtingut per a $\underline{U}'$ en el passos anteriors, i del valor de ψ obtingut a partir de l'equació (2.26), calculem el valor buscat de $\underline{U}$ utilitzant l'equació (2.28)

❻ Finalment calculem $\underline{I}$ substituint el valor trobat de $\underline{U}$ en l'equació (2.24)

Un cop trobats $\underline{U}$ i $\underline{I}$, podem calcular el valor de la impedància $\underline{Z}_\mathrm{S}$ de la càrrega, la qual absorbeix la potència $\underline{S}$, a partir de l'equació (2.24) i de la relació $\underline{U} = \underline{Z}_\mathrm{S}\,\underline{I}$:

$$\underline{Z}_\mathrm{S} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{S}}{|\underline{I}|^2} = \frac{|\underline{U}|^2}{\underline{S}^*} \tag{2.32}$$

Exemple 2.3 Resolució d'un circuit coneixent la potència que absorbeix

Es tracte de resoldre el circuit de la dreta de la Figura 2.6 a la pàgina 50, donats el següents valors en per unitat:

$$\underline{E} = 0{,}4 + \mathrm{j}0{,}3 \qquad \underline{Z} = \mathrm{j}0{,}1 \qquad \underline{S} = 0{,}6 + \mathrm{j}0{,}45$$

Calculem primer ψ i E', segons les equacions (2.26) i (2.27), i $\underline{Z}^*\underline{S}$:

$$\begin{aligned} \psi &= \arg(0{,}4 + \mathrm{j}0{,}3) = 0{,}6435\,\mathrm{rad} \\ E' &= |0{,}4 + \mathrm{j}0{,}3| = 0{,}5 \\ \underline{Z}^*\underline{S} &= -\mathrm{j}0{,}1 \times (0{,}6 + \mathrm{j}0{,}45) = 0{,}045 - \mathrm{j}0{,}06 \end{aligned}$$

Calculem a continuació $\operatorname{Im} \underline{U}'$, segons l'equació (2.31):

$$\operatorname{Im} \underline{U}' = \frac{\operatorname{Im}(\underline{Z}^*\underline{S})}{E'} = \frac{-0{,}06}{0{,}5} = -0{,}12$$

Formem a continuació el polinomi de 2n grau en $\operatorname{Re} \underline{U}'$ i el resolem, segons l'equació (2.30):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}^2 \underline{U}' + (-0{,}12)^2 - 0{,}5 \times \operatorname{Re} \underline{U}' + 0{,}045 = 0 \\ \operatorname{Re}^2 \underline{U}' - 0{,}5 \times \operatorname{Re} \underline{U}' + 0{,}0594 = 0 \;\longrightarrow\; \operatorname{Re} \underline{U}' = \begin{cases} 0{,}1943 \\ \boxed{0{,}3057} \end{cases} \end{aligned}$$

Prenent el valor més elevat de $\operatorname{Re} \underline{U}'$ calculem finalment $\underline{U}$, segons l'equació (2.28):

$$\underline{U} = \underline{U}'\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = (0{,}3057 - \mathrm{j}0{,}12) \times \mathrm{e}^{\mathrm{j}0{,}6435} = 0{,}3165 + \mathrm{j}0{,}0874$$

Obtenim ara $\underline{I}$, segons l'equació (2.24):

$$\underline{I} = \frac{\underline{S}^*}{\underline{U}^*} = \frac{0{,}6 - \mathrm{j}0{,}45}{0{,}3165 - \mathrm{j}0{,}0874} = 2{,}1262 - \mathrm{j}0{,}8347$$

Per acabar calculem $\underline{Z}_\mathrm{S}$, segons l'equació (2.32):

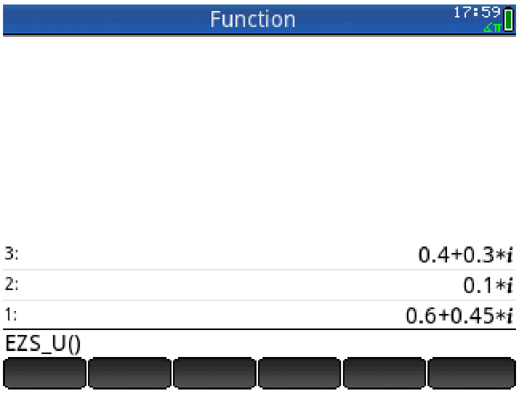
$$\underline{Z}_\mathrm{S} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{0{,}3165 + \mathrm{j}0{,}0874}{2{,}1262 - \mathrm{j}0{,}8347} = 0{,}1150 + \mathrm{j}0{,}0863$$

Resoldrem a continuació aquest exemple amb la calculadora *HP Prime*, seguint els passos següents:

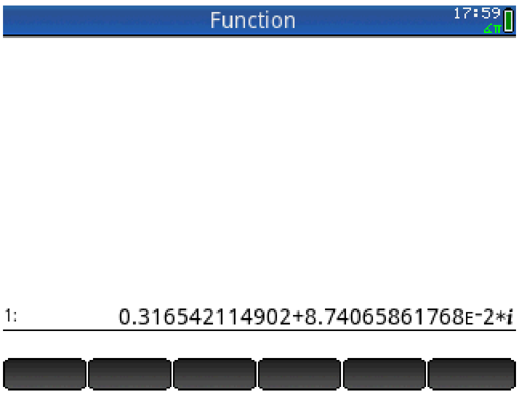
❶ Començarem escrivint un programa, que anomenarem EZS_U, el qual servirà per resoldre tant el cas de corrent continu com el de corrent altern; es pot veure el seu llistat en la secció F.1 a la pàgina 306.

El programa pren com a dades els valors E, R i P, o els valors $\underline{E}$, $\underline{Z}$ i $\underline{S}$, i calcula el valor U, o el valor $\underline{U}$.

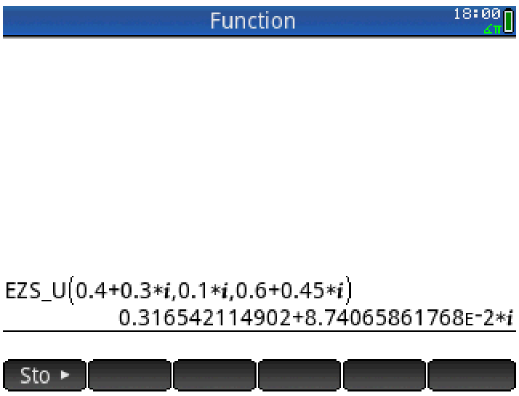
❷ A continuació, suposant que la calculadora és en el mode **RPN**, entrem els valors de $\underline{E}$, $\underline{Z}$ i $\underline{S}$: (0.4,0.3) [Enter] (0,0.1) [Enter] (0.6,0.45) [Enter], i escrivim després el nom del programa: EZS_U().



❸ Premem a continuació la tecla [Enter] i la calculadora ens dona el valor de la tensió $\underline{U}$.



❹ Si la calculadora estigués en el mode **Algebraic** o en el mode **Textbook**, escriuríem directament: EZS_U(0.4+0.3*i,0.1*i,0.6+0.45*i), i després de prémer la tecla [Enter] la calculadora ens donaria el valor de la tensió $\underline{U}$.



2.6 Corrent de curtcircuit en el secundari d'un transformador

Es tracta en aquest apartat el càlcul del corrent de curtcircuit trifàsic en el secundari d'un transformador que té el primari connectat a una xarxa de potència.

A partir de la Figura 2.7, es tracta de trobar el valor del corrent de curtcircuit trifàsic I_F en el punt F, essent la resta de paràmetres valors coneguts.

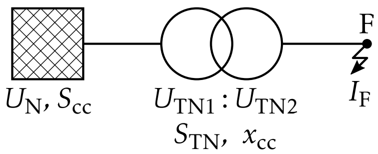


Figura 2.7 Corrent de curtcircuit en el secundari d'un transformador

U_N, U_{TN1} i U_{TN2} estan donats en volt, S_{cc} i S_{TN} en voltampere, i x_{cc} en per unitat respecte dels valors nominals del transformador.

Per tal de simplificar el problema, suposarem que tant la impedància de curtcircuit del transformador com la impedància equivalent de la xarxa de potència són totalment inductives; d'aquesta manera podrem treballar amb les diverses variables implicades com si fossin nombres reals. Suposarem a més que no hi ha circulació de corrent abans del curtcircuit.

Pel que fa a la xarxa de potència, si en lloc de la potència de curtcircuit S_{cc}, el que coneixem és el corrent de curtcircuit disponible I_{cc}, podem obtenir el valor de la potència de curtcircuit a partir de l'expressió:

$$S_{cc} = \sqrt{3}U_N I_{cc} \tag{2.33}$$

Si prenem com a valors base els paràmetres del transformador (U_{TN1}, U_{TN2} i S_{TN}), la relació de transformació i la impedància de curtcircuit del transformador, expressats en per unitat, seran 1:1 i x_{cc} respectivament. Anàlogament, la tensió i la impedància equivalents de la xarxa de potència, expressats en per unitat, seran $\frac{U_N}{U_{TN1}}$ i $\frac{U_N^2}{S_{cc}}\frac{S_{TN}}{U_{TN1}^2}$ respectivament.

Amb aquests valors, el corrent de curtcircuit i_F, expressat en per unitat, val:

$$i_F = \frac{\dfrac{U_N}{U_{TN1}}}{\dfrac{U_N^2}{S_{cc}}\dfrac{S_{TN}}{U_{TN1}^2} + x_{cc}} \tag{2.34}$$

I per tant, aquest corrent I_F expressat en ampere, val:

$$I_F = i_F \frac{S_{TN}}{\sqrt{3}U_{TN2}} = \frac{S_{TN}U_N}{\sqrt{3}U_{TN1}U_{TN2}\left(\dfrac{U_N^2}{S_{cc}}\dfrac{S_{TN}}{U_{TN1}^2} + x_{cc}\right)} \tag{2.35}$$

Si la xarxa de potència es considera de potència infinita, tenim:

$$I_F = \frac{S_{TN} U_N}{\sqrt{3} U_{TN1} U_{TN2} x_{cc}} \qquad (\text{amb } S_{cc} = \infty) \tag{2.36}$$

Si a més, la tensió de la xarxa coincideix amb la tensió primària del transformador, tenim respectivament:

$$I_F = \frac{S_{TN}}{\sqrt{3} U_{TN2} \left(\dfrac{S_{TN}}{S_{cc}} + x_{cc} \right)} \qquad (\text{amb } U_N = U_{TN1}) \tag{2.37}$$

$$I_F = \frac{S_{TN}}{\sqrt{3} U_{TN2} x_{cc}} \qquad (\text{amb } U_N = U_{TN1} \text{ i } S_{cc} = \infty) \tag{2.38}$$

Exemple 2.4 Corrent de curtcircuit en el secundari d'un transformador

A partir de la Figura 2.7 a la pàgina anterior, amb els valors $U_N = 6900\,\text{V}$, $U_{TN1} = 6900\,\text{V}$, $U_{TN2} = 400\,\text{V}$, $S_{TN} = 850\,\text{kVA}$ i $x_{cc} = 5\,\%$, es tracta de trobar I_F en el cas que: a) $S_{cc} = 200\,\text{MVA}$ i b) $S_{cc} = \infty$.

El valors demanats són:

$$a)\ I_F = \frac{850\,\text{kVA}}{\sqrt{3} \times 400\,\text{V} \times \left(\dfrac{850\,\text{kVA}}{200\,\text{MVA}} + 0{,}05 \right)} = 22{,}6\,\text{kA}$$

$$b)\ I_F = \frac{850\,\text{kVA}}{\sqrt{3} \times 400\,\text{V} \times 0{,}05} = 24{,}5\,\text{kA}$$

2.7 Escales logarítmiques

2.7.1 Determinació de punts d'una corba

En diferents camps de l'electrotècnia és usual trobar gràfics amb escales logarítmiques.

Un exemple clar són els gràfics d'actuació dels interruptors magnetotèrmics o dels fusibles, on les seves corbes característiques corrent–temps estan representades en una escala logarítmica–logarítmica o lineal–logarítmica.

En aquests casos es presenta freqüentment la necessitat de determinar amb exactitud un punt de la corba que no coincideix amb cap de les línies divisòries del gràfic. Atenent a la Figura 2.8 a la pàgina següent, es tractaria de determinar el valor x dins de la dècada 10^N a 10^{N+1}.

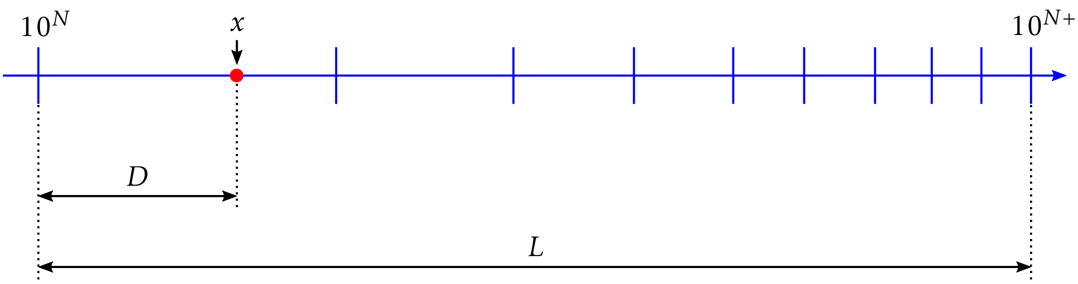


Figura 2.8 Escala logarítmica

Si mesurem amb un regle la distància D des de l'inici de la dècada fins al punt x, i la longitud total L de la dècada, el valor x buscat ve donat per l'expressió:

$$x = 10^{\left(N+\frac{D}{L}\right)} \tag{2.39}$$

Si estem interessats en el problema invers, és a dir, en trobar la distància D corresponent a un valor conegut x dins de la dècada 10^N a 10^{N+1}, podem emprar l'expressió:

$$D = L(\log x - N) = L \log \frac{x}{10^N} \tag{2.40}$$

Exemple 2.5 Càlcul de valors en una escala logarítmica

Es tracta de trobar en primer lloc el valor x dins de la dècada 100 a 1000, corresponent a una distància $D = 11\,\mathrm{mm}$, i en segon lloc la distància D a la qual hem de representar el valor $x = 5$, dins de la dècada 1 a 10. La longitud total d'una dècada és $L = 56\,\mathrm{mm}$.

En el primer cas tenim $N = 2$, i per tant:

$$x = 10^{\left(2+\frac{11\,\mathrm{mm}}{56\,\mathrm{mm}}\right)} = 157{,}19$$

En el segon cas tenim $N = 0$, i per tant:

$$D = 56\,\mathrm{mm} \times (\log 5 - 0) = 39{,}1\,\mathrm{mm}$$

2.7.2 Determinació dels paràmetres d'una funció representada com una recta

Quan la relació entre dues variables $y = f(x)$ compleix l'equació: $yx^n = k$, on n i k són constants reals, la gràfica d'aquesta funció pren la forma d'una línia recta quan es representa en una escala logarítmica–logarítmica. Partint de l'equació inicial $yx^n = k$, si passem la variable x a la dreta tenim:

$$y = kx^{-n} \tag{2.41}$$

Prenent logaritmes a banda i banda, tenim:

$$\log y = \log k - n \log x \tag{2.42}$$

Aquesta és l'equació d'una recta de pendent negatiu n, amb les variables $\log y$ i $\log x$.

A partir de la gràfica d'una recta en una escala logarítmica–logarítmica, podem determinar-ne les constants n i k seguint els passos següents:

❶ Per determinar el pendent n, només cal mesurar directament sobre la gràfica amb un regle, una distància horitzontal Δx i una de vertical Δy que partint d'un punt de la recta ens portin a un altre punt de la mateixa recta; a partir d'aquests dos valors, tenim:

$$n = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.43}$$

Aquesta equació suposa que la gràfica té una relació d'aspecte de 1:1, és a dir, que una dècada vertical i una d'horitzontal tenen la mateixa llargada. Si, per exemple, les dècades verticals tinguessin la meitat de la llargada que les dècades horitzontals, caldria multiplicar per 2 el valor mesurat de Δy.

❷ Un cop coneixem n, a partir d'un punt qualsevol (x_1, y_1) de la recta, podem calcular k utilitzant l'equació inicial $yx^n = k$:

$$k = y_1 x_1^n \tag{2.44}$$

En el cas particular de $x_1 = 1$, l'equació anterior se simplifica a:

$$k = y_1 \quad (\text{amb } x_1 = 1) \tag{2.45}$$

Aquest tipus de relació es compleix, per exemple en el cas dels cables elèctrics, entre el corrent de curtcircuit i el temps que el cable pot aguantar aquest corrent sense malmetre's. Vegeu la secció 7.4 a la pàgina 121.

Exemple 2.6 Càlcul de les constants n i k en una escala logarítmica–logarítmica

Es tracta de trobar les constants n i k de la funció que apareix dibuixada com una recta en la gràfica de la pàgina següent.

Donat que la gràfica té una relació d'aspecte 1:1, a partir dels valors mesurats Δy i Δx, tenim:

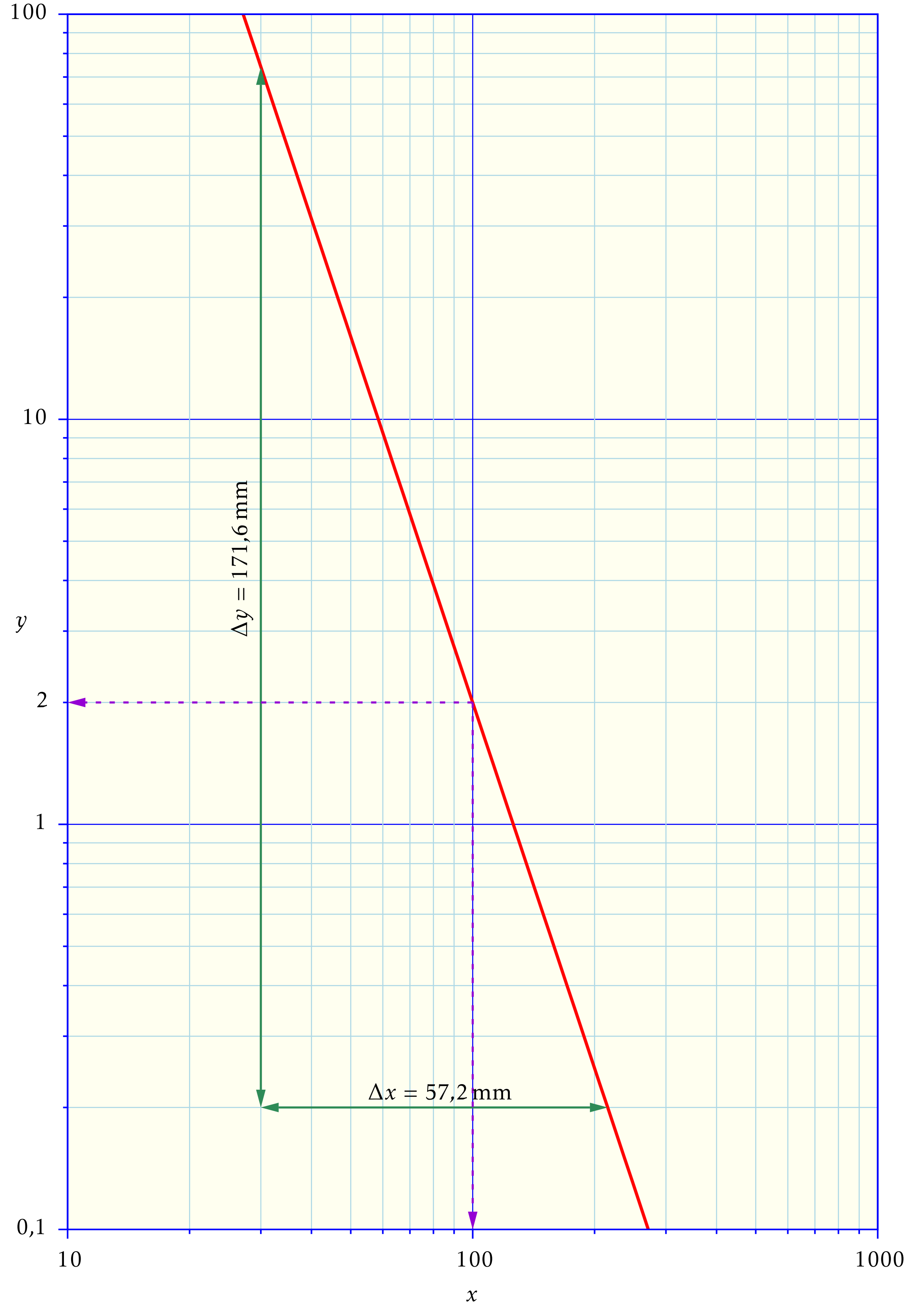
$$n = \frac{171{,}6\,\text{mm}}{57{,}2\,\text{mm}} = 3$$

Partint, per exemple, del valor d'abscisses: $x_1 = 100$, veiem que el valor corresponent d'ordenades és: $y_1 = 2$, i per tant tenim:

$$k = 2 \times 100^3 = 2\,000\,000$$

L'equació que segueix aquesta funció, és doncs:

$$yx^3 = 2\,000\,000$$


100
10
y
2
1
0,1
10
100
1000
x
Δy = 171,6 mm
Δx = 57,2 mm

Capítol 3

Components Simètriques

3.1 Introducció

La teoria de les components simètriques és útil en l'estudi de tensions i corrents trifàsics desequilibrats, com ara els que es produeixen en un curtcircuit on no intervenen les tres fases alhora (curtcircuit fase–terra, fase–fase, etc.).

3.2 L'operador complex «a»

Definim en primer lloc l'operador complex «a», el qual té un mòdul igual a la unitat i un argument igual a 120°:

$$a \equiv 1_{\angle 120^\circ} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3.1}$$

A l'hora d'operar amb aquest valor, resulten útils les relacions següents:

$$a^2 = 1_{\angle 240^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3.2a}$$

$$a^3 = 1_{\angle 0^\circ} = 1 \tag{3.2b}$$

$$0 = 1 + a + a^2 \tag{3.2c}$$

3.3 Teorema de Fortescue–Stokvis

Tal com es veu en la Figura 3.1 a la pàgina següent, aquest teorema estableix que qualsevol sistema trifàsic asimètric (també anomenat desequilibrat), es pot descompondre en la suma de tres sistemes simètrics: un sistema directe o de seqüència positiva, un sistema invers o de seqüència negativa, i un sistema homopolar o de seqüència zero. Els fasors $\underline{\Upsilon}_A$, $\underline{\Upsilon}_B$ i $\underline{\Upsilon}_C$ de la Figura 3.1 a la pàgina següent, poden representar tant tensions com corrents.

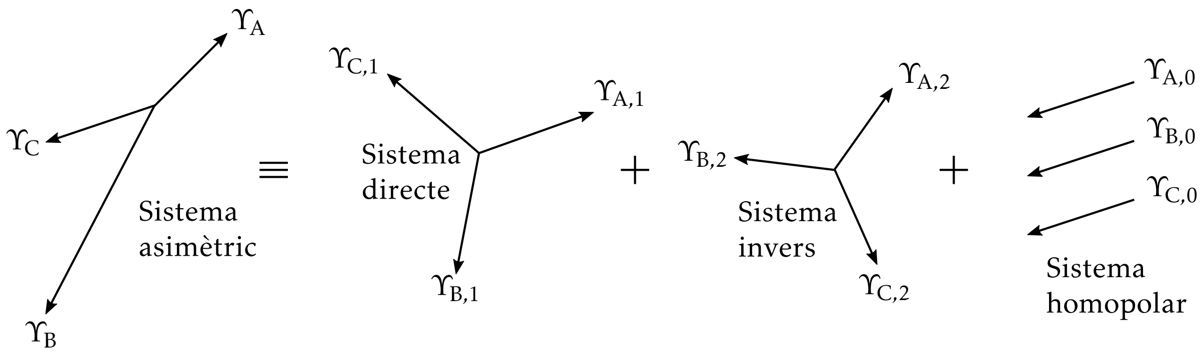


Figura 3.1 Components simètriques – Teorema de Fortescue–Stokvis

El sistema directe és format per tres fasors equilibrats que tenen la mateixa seqüència de fases que els fasors originals, per exemple: A–B–C; els fasors s'identifiquen mitjançant els subíndexs «1» o «d». El sistema invers és format per tres fasors equilibrats que tenen la seqüència de fases contrària dels fasors originals, per exemple: A–C–B; els fasors s'identifiquen mitjançant els subíndexs «2» o «i». Finalment, el sistema homopolar és format per tres fasors idèntics que estan en fase entre si; els fasors s'identifiquen mitjançant el subíndex «0» o «h».

Les equacions següents expressen els fasors del sistema asimètric de la Figura 3.1, en funció dels fasors dels tres sistemes simètrics de la mateixa figura:

$$\underline{\Upsilon}_A = \underline{\Upsilon}_{A,0} + \underline{\Upsilon}_{A,1} + \underline{\Upsilon}_{A,2} \tag{3.3a}$$

$$\underline{\Upsilon}_B = \underline{\Upsilon}_{B,0} + \underline{\Upsilon}_{B,1} + \underline{\Upsilon}_{B,2} = \underline{\Upsilon}_{A,0} + \mathrm{a}^2\underline{\Upsilon}_{A,1} + \mathrm{a}\underline{\Upsilon}_{A,2} \tag{3.3b}$$

$$\underline{\Upsilon}_C = \underline{\Upsilon}_{C,0} + \underline{\Upsilon}_{C,1} + \underline{\Upsilon}_{C,2} = \underline{\Upsilon}_{A,0} + \mathrm{a}\underline{\Upsilon}_{A,1} + \mathrm{a}^2\underline{\Upsilon}_{A,2} \tag{3.3c}$$

O en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \underline{\Upsilon}_A \\ \underline{\Upsilon}_B \\ \underline{\Upsilon}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{a}^2 & \mathrm{a} \\ 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\Upsilon}_{A,0} \\ \underline{\Upsilon}_{A,1} \\ \underline{\Upsilon}_{A,2} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

A partir del sistema d'equacions anterior, podem trobar els fasors dels tres sistemes simètrics en funció dels fasors del sistema asimètric:

$$\underline{\Upsilon}_{A,0} = \frac{1}{3}(\underline{\Upsilon}_A + \underline{\Upsilon}_B + \underline{\Upsilon}_C) \qquad \underline{\Upsilon}_{B,0} = \underline{\Upsilon}_{A,0} \qquad \underline{\Upsilon}_{C,0} = \underline{\Upsilon}_{A,0} \tag{3.5a}$$

$$\underline{\Upsilon}_{A,1} = \frac{1}{3}(\underline{\Upsilon}_A + \mathrm{a}\underline{\Upsilon}_B + \mathrm{a}^2\underline{\Upsilon}_C) \qquad \underline{\Upsilon}_{B,1} = \mathrm{a}^2\underline{\Upsilon}_{A,1} \qquad \underline{\Upsilon}_{C,1} = \mathrm{a}\underline{\Upsilon}_{A,1} \tag{3.5b}$$

$$\underline{\Upsilon}_{A,2} = \frac{1}{3}(\underline{\Upsilon}_A + \mathrm{a}^2\underline{\Upsilon}_B + \mathrm{a}\underline{\Upsilon}_C) \qquad \underline{\Upsilon}_{B,2} = \mathrm{a}\underline{\Upsilon}_{A,2} \qquad \underline{\Upsilon}_{C,2} = \mathrm{a}^2\underline{\Upsilon}_{A,2} \tag{3.5c}$$

O en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \underline{\Upsilon}_{A,0} \\ \underline{\Upsilon}_{A,1} \\ \underline{\Upsilon}_{A,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{a}^2 & \mathrm{a} \\ 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a}^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\Upsilon}_A \\ \underline{\Upsilon}_B \\ \underline{\Upsilon}_C \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a}^2 \\ 1 & \mathrm{a}^2 & \mathrm{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\Upsilon}_A \\ \underline{\Upsilon}_B \\ \underline{\Upsilon}_C \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

3.4 Corrent de neutre

Suposem un sistema trifàsic amb neutre de retorn, que pot ser el terra, on qualsevol de les seves parts (generador, línia o consum) poden ser desequilibrades; el corrent que circula pel neutre és sempre la suma dels tres corrents de fase: $\underline{I}_{\mathrm{A}} + \underline{I}_{\mathrm{B}} + \underline{I}_{\mathrm{C}}$. A partir d'aquest fet, i observant l'equació (3.5a), es veu que el corrent de retorn pel neutre és igual a tres vegades la component homopolar del sistema de corrents de fase:

$$\underline{I}_{\mathrm{A}} + \underline{I}_{\mathrm{B}} + \underline{I}_{\mathrm{C}} = 3\underline{I}_{\mathrm{A},0} \tag{3.7}$$

D'altra banda, quan un sistema trifàsic no té conductor neutre de retorn, tenim $\underline{I}_{\mathrm{A}} + \underline{I}_{\mathrm{B}} + \underline{I}_{\mathrm{C}} = 0$, i per tant, observant la mateixa equació (3.5a), es veu que el sistema format pels corrents de fase no té sistema homopolar, és a dir: $\underline{I}_{\mathrm{A},0} = \underline{I}_{\mathrm{B},0} = \underline{I}_{\mathrm{C},0} = 0$.

Finalment, també podem dir que el corrent total a terra en cas de curtcircuit a terra, és igual a tres vegades la component homopolar del corrent de curtcircuit.

3.5 Propietats de les tensions fase–fase i fase–neutre

En la Figura 3.2 s'ha representat un sistema de tensions fase–fase: $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BC}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CA}}$, i dos sistemes de tensions fase–neutre, dels infinits que poden existir depenent de la posició del punt neutre: $\underline{U}_{\mathrm{AG}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BG}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CG}}$, i $\underline{U}_{\mathrm{AN}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BN}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CN}}$. El punt neutre G del primer sistema coincideix amb el baricentre (intersecció de les mitjanes) del triangle format per les tres tensions fase–fase, mentre que el punt neutre N del segon sistema està desplaçat respecte d'aquest baricentre.

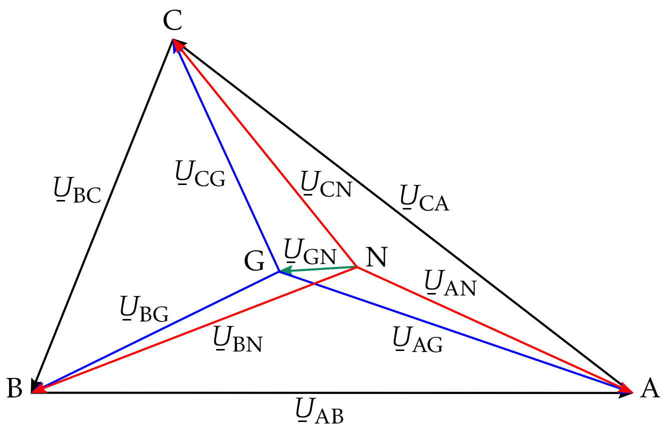


Figura 3.2 Components simètriques – Tensions fase–fase i fase–neutre

Atenent a l'equació (3.5a), es veu que el sistema format per les tensions fase–fase no té component homopolar, ja que la seva suma és sempre igual a zero: $\underline{U}_{\mathrm{AB}} + \underline{U}_{\mathrm{BC}} + \underline{U}_{\mathrm{CA}} = 0$. Si a més d'aquesta consideració, tenim en compte el que s'ha dit en l'apartat anterior, resulta que un sistema trifàsic desequilibrat sense conductor neutre de retorn, es pot estudiar tenint en compte únicament un sistema directe i un sistema invers, ja que en aquest cas tant les tensions fase–fase com els corrents de fase, no tenen component homopolar.

Pel que fa a les components directa i inversa del sistema format per les tensions fase–fase, es compleix el següent: les components directa i inversa del sistema de tensions fase–fase, són respectivament els fasors fase–fase de les components directa i inversa del sistema de tensions fase–neutre.

Expressant-ho en forma matemàtica tenim:

$$\underline{U}_{\mathrm{AB},0} = 0 \qquad \underline{U}_{\mathrm{BC},0} = 0 \qquad \underline{U}_{\mathrm{CA},0} = 0 \tag{3.8a}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{AB},1} = (1-\mathrm{a}^2)\underline{U}_{\mathrm{AN},1} = \underline{U}_{\mathrm{AN},1}\sqrt{3}_{\angle 30^\circ} \qquad \underline{U}_{\mathrm{BC},1} = \mathrm{a}^2\underline{U}_{\mathrm{AB},1} \qquad \underline{U}_{\mathrm{CA},1} = \mathrm{a}\underline{U}_{\mathrm{AB},1} \tag{3.8b}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{AB},2} = (1-\mathrm{a})\underline{U}_{\mathrm{AN},2} = \underline{U}_{\mathrm{AN},2}\sqrt{3}_{\angle -30^\circ} \qquad \underline{U}_{\mathrm{BC},2} = \mathrm{a}\underline{U}_{\mathrm{AB},2} \qquad \underline{U}_{\mathrm{CA},2} = \mathrm{a}^2\underline{U}_{\mathrm{AB},2} \tag{3.8c}$$

En aquestes equacions s'han utilitzat les components directa i inversa del sistema de tensions $\underline{U}_{\mathrm{AN}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BN}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CN}}$, però també es podrien haver utilitzat les components directa i inversa del sistema de tensions $\underline{U}_{\mathrm{AG}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BG}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CG}}$, ja que es compleix el següent: tots el sistemes de tensió fase–neutre que tinguin els mateixos extrems A, B, C, tenen les mateixes components directa i inversa; en termes més electrotècnics, es pot dir que qualsevol joc d'impedàncies en estrella connectat a les mateixes fases A, B, C, origina unes tensions fase–neutre, les components directa i inversa de les quals, són independents de les característiques de les impedàncies.

El sistema de tensions fase–neutre $\underline{U}_{\mathrm{AG}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BG}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CG}}$, el punt neutre G del qual coincideix amb el baricentre del triangle A, B, C, és l'únic que té un sistema homopolar nul; la resta de sistemes de tensions fase–neutre, com ara el format per les tensions $\underline{U}_{\mathrm{AN}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BN}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CN}}$, el punt neutre N del qual està desplaçat respecte del punt G, tenen un sistema homopolar de valor:

$$\underline{U}_{\mathrm{AN},0} = \underline{U}_{\mathrm{BN},0} = \underline{U}_{\mathrm{CN},0} = \underline{U}_{\mathrm{GN}} \tag{3.9}$$

Amb relació al paràgraf anterior, es pot afirmar que si es connecten tres impedàncies idèntiques en estrella a un sistema de tensions trifàsic, la tensió del punt neutre de l'estrella coincidirà amb el baricentre G del triangle format per les tensions fase–fase d'aquest sistema de tensions, i per tant les tensions fase–neutre no tindran component homopolar; de fet, G és el punt neutre de les tensions fase–fase del sistema de tensions trifàsic.

El sistema de tensions fase–neutre $\underline{U}_{\mathrm{AG}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BG}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CG}}$, es pot determinar directament a partir del sistema de tensions fase–fase $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BC}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CA}}$, utilitzant les equacions (D.24a) i (D.24b), les quals ens donen les coordenades del punt G:

$$\underline{U}_{\mathrm{AG}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{AB}} - \underline{U}_{\mathrm{CA}}}{3} \tag{3.10a}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{BG}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{BC}} - \underline{U}_{\mathrm{AB}}}{3} \tag{3.10b}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{CG}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{CA}} - \underline{U}_{\mathrm{BC}}}{3} \tag{3.10c}$$

3.6 Potència

Tal com es veu en l'equació (1.31), la qual fa referència a la Figura 1.6 a la pàgina 17, la potència complexa trifàsica en un sistema desequilibrat $\underline{S}_{3\mathrm{F}}$, es calcula a partir de les tres tensions fase–neutre $\underline{U}_{\mathrm{AN}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BN}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CN}}$, i dels tres corrents de fase $\underline{I}_{\mathrm{A}}$, $\underline{I}_{\mathrm{B}}$ i $\underline{I}_{\mathrm{C}}$.

No obstant, si calculem els sistemes directe, invers i homopolar, corresponents a les tensions i corrents anteriors, $\underline{U}_{\mathrm{AN},1}$, $\underline{U}_{\mathrm{AN},2}$ i $\underline{U}_{\mathrm{AN},0}$, i $\underline{I}_{\mathrm{A},1}$, $\underline{I}_{\mathrm{A},2}$ i $\underline{I}_{\mathrm{A},0}$, podem expressar la potència complexa trifàsica a partir d'aquests nous valors, utilitzant les equacions (3.3a), (3.3b) i (3.3c):

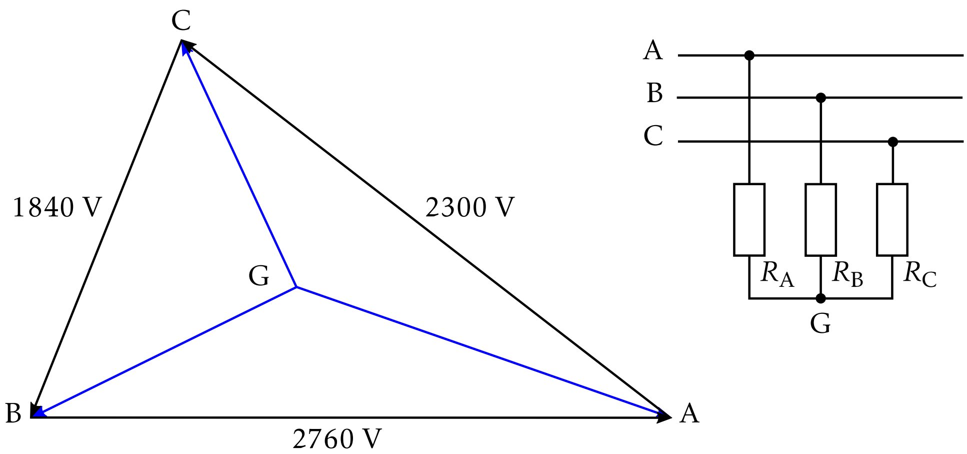
$$\begin{aligned}
\underline{S}_{3\mathrm{F}} &= \underline{U}_{\mathrm{AN}}\,\underline{I}_{\mathrm{A}}^{*} + \underline{U}_{\mathrm{BN}}\,\underline{I}_{\mathrm{B}}^{*} + \underline{U}_{\mathrm{CN}}\,\underline{I}_{\mathrm{C}}^{*} = \\
&= \left(\underline{U}_{\mathrm{AN},0} + \underline{U}_{\mathrm{AN},1} + \underline{U}_{\mathrm{AN},2}\right)\left(\underline{I}_{\mathrm{A},0} + \underline{I}_{\mathrm{A},1} + \underline{I}_{\mathrm{A},2}\right)^{*} + \\
&+ \left(\underline{U}_{\mathrm{AN},0} + \mathrm{a}^2\underline{U}_{\mathrm{AN},1} + \mathrm{a}\underline{U}_{\mathrm{AN},2}\right)\left(\underline{I}_{\mathrm{A},0} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{\mathrm{A},1} + \mathrm{a}\underline{I}_{\mathrm{A},2}\right)^{*} + \\
&+ \left(\underline{U}_{\mathrm{AN},0} + \mathrm{a}\underline{U}_{\mathrm{AN},1} + \mathrm{a}^2\underline{U}_{\mathrm{AN},2}\right)\left(\underline{I}_{\mathrm{A},0} + \mathrm{a}\underline{I}_{\mathrm{A},1} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{\mathrm{A},2}\right)^{*} = \\
&= 3\,\underline{U}_{\mathrm{AN},0}\,\underline{I}_{\mathrm{A},0}^{*} + 3\,\underline{U}_{\mathrm{AN},1}\,\underline{I}_{\mathrm{A},1}^{*} + 3\,\underline{U}_{\mathrm{AN},2}\,\underline{I}_{\mathrm{A},2}^{*}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Exemple 3.1 Aplicació de les components simètriques – Impedàncies equilibrades

Es tracta de trobar la potència consumida per una càrrega trifàsica formada per tres resistències idèntiques de valor: $R_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{B}} = R_{\mathrm{C}} = 10\,\Omega$, connectades en estrella a un sistema trifàsic sense neutre, i la tensió a què està sotmesa cada resistència; els valors de les tensions del sistema trifàsic són: $|\underline{U}_{\mathrm{AB}}| = 2760\,\mathrm{V}$, $|\underline{U}_{\mathrm{BC}}| = 1840\,\mathrm{V}$ i $|\underline{U}_{\mathrm{CA}}| = 2300\,\mathrm{V}$.

Tal com s'ha explicat en la secció 3.5 a la pàgina 61, en ser idèntiques les tres impedàncies, el punt neutre que es formarà coincidirà amb el baricentre del triangle de tensions A–B–C. Utilitzarem doncs la lletra «G» per designar aquest punt neutre, en lloc de la lletra «N».

Assignem de forma arbitrària, tal com s'ha fet en la Figura 3.2 a la pàgina 61, un angle de fase igual a zero a la tensió $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$.



A continuació trobem els angles φ_{A} i φ_{B}, corresponents als vèrtexs A i B del triangle de tensions, utilitzant la llei dels cosinus (vegeu la secció D.2 a la pàgina 290):

$$\varphi_{\mathrm{A}} = \arccos\frac{|\underline{U}_{\mathrm{AB}}|^2 + |\underline{U}_{\mathrm{CA}}|^2 - |\underline{U}_{\mathrm{BC}}|^2}{2|\underline{U}_{\mathrm{AB}}|\,|\underline{U}_{\mathrm{CA}}|} = \arccos\frac{(2760\,\mathrm{V})^2 + (2300\,\mathrm{V})^2 - (1840\,\mathrm{V})^2}{2\times 2760\,\mathrm{V}\times 2300\,\mathrm{V}} = 41{,}41^\circ$$

$$\varphi_{\text{B}} = \arccos \frac{|\underline{U}_{\text{BC}}|^2 + |\underline{U}_{\text{AB}}|^2 - |\underline{U}_{\text{CA}}|^2}{2|\underline{U}_{\text{BC}}||\underline{U}_{\text{AB}}|} = \arccos \frac{(1840\,\text{V})^2 + (2760\,\text{V})^2 - (2300\,\text{V})^2}{2 \times 1840\,\text{V} \times 2760\,\text{V}} = 55{,}77°$$

Els fasors corresponents a les tres tensions són doncs:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{\text{AB}} &= 2760_{\angle 0°}\,\text{V} \\
\underline{U}_{\text{BC}} &= 1840_{\angle 180°+55{,}77°}\,\text{V} = 1840_{\angle -124{,}23°}\,\text{V} \\
\underline{U}_{\text{CA}} &= 2300_{\angle 180°-41{,}41°}\,\text{V} = 2300_{\angle 138{,}59°}\,\text{V}
\end{aligned}$$

Tal com s'ha dit anteriorment, el sistema de tensions fase–fase té una component homopolar nul·la. Trobem a continuació les components directa, inversa i homopolar de les tensions $\underline{U}_{\text{AB}}$, $\underline{U}_{\text{BC}}$ i $\underline{U}_{\text{CA}}$, utilitzant les equacions (3.5a), (3.5b) i (3.5c):

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{\text{AB},1} &= \frac{1}{3}\Big(2760_{\angle 0°}\,\text{V} + 1_{\angle 120°} \times 1840_{\angle -124{,}23°}\,\text{V} + 1_{\angle 240°} \times 2300_{\angle 138{,}59°}\,\text{V}\Big) = 2267{,}09_{\angle 5{,}04°}\,\text{V} \\
\underline{U}_{\text{AB},2} &= \frac{1}{3}\Big(2760_{\angle 0°}\,\text{V} + 1_{\angle 240°} \times 1840_{\angle -124{,}23°}\,\text{V} + 1_{\angle 120°} \times 2300_{\angle 138{,}59°}\,\text{V}\Big) = 539{,}77_{\angle -21{,}66°}\,\text{V} \\
\underline{U}_{\text{AB},0} &= \frac{1}{3}\Big(2760_{\angle 0°}\,\text{V} + 1840_{\angle -124{,}23°}\,\text{V} + 2300_{\angle 138{,}59°}\,\text{V}\Big) = 0\,\text{V}
\end{aligned}$$

Trobem ara les components directa i inversa de les tensions fase–neutre, utilitzant les equacions (3.8b) i (3.8c); a més sabem que aquestes tensions fase–neutre no tenen component homopolar, ja que la càrrega trifàsica és equilibrada (tres resistències idèntiques):

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{\text{AG},1} &= \frac{\underline{U}_{\text{AB},1}}{\sqrt{3}_{\angle 30°}} = \frac{2267{,}09_{\angle 5{,}04°}\,\text{V}}{\sqrt{3}_{\angle 30°}} = 1308{,}91_{\angle -24{,}96°}\,\text{V} \\
\underline{U}_{\text{AG},2} &= \frac{\underline{U}_{\text{AB},2}}{\sqrt{3}_{\angle -30°}} = \frac{539{,}77_{\angle 137{,}42°}\,\text{V}}{\sqrt{3}_{\angle -30°}} = 311{,}64_{\angle 8{,}34°}\,\text{V} \\
\underline{U}_{\text{AG},0} &= 0\,\text{V}
\end{aligned}$$

A partir d'aquests valors, podem calcular ara les components directa, inversa i homopolar del corrent que circula per les resistències, aplicant les lleis de Kirchhoff; donat que les tres resistències són idèntiques, les seves components directa, inversa i homopolar R_1, R_2 i R_0 també ho són i tenen el mateix valor de $10\,\Omega$.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{\text{A},1} &= \frac{\underline{U}_{\text{AG},1}}{R_1} = \frac{1308{,}91_{\angle -24{,}96°}\,\text{V}}{10\,\Omega} = 130{,}89_{\angle -24{,}96°}\,\text{A} \\
\underline{I}_{\text{A},2} &= \frac{\underline{U}_{\text{AG},2}}{R_2} = \frac{311{,}64_{\angle 8{,}34°}\,\text{V}}{10\,\Omega} = 31{,}16_{\angle 8{,}34°}\,\text{A} \\
\underline{I}_{\text{A},0} &= \frac{\underline{U}_{\text{AG},0}}{R_0} = \frac{0\,\text{V}}{10\,\Omega} = 0\,\text{A}
\end{aligned}$$

Podem ara calcular ja la potència consumida per la càrrega trifàsica, utilitzant l'equació (3.11):

$$\begin{aligned} \underline{S}_{3F} &= 3\,\underline{U}_{AG,0}\,\underline{I}^*_{A,0} + 3\,\underline{U}_{AG,1}\,\underline{I}^*_{A,1} + 3\,\underline{U}_{AG,2}\,\underline{I}^*_{A,2} = \\ &= 0\,\mathrm{kW} + 3 \times 1308{,}91_{\angle -24{,}96°}\,\mathrm{V} \times 130{,}89_{\angle 24{,}96°}\,\mathrm{A} + 3 \times 311{,}64_{\angle 8{,}34°}\,\mathrm{V} \times 31{,}16_{\angle -8{,}34°}\,\mathrm{A} = \\ &= 543{,}11\,\mathrm{kW} \end{aligned}$$

Utilitzarem ara les equacions (3.3a), (3.3b) i (3.3c) per trobar les tensions $\underline{U}_{AG}$, $\underline{U}_{BG}$ i $\underline{U}_{CG}$, a què estan sotmeses les tres resistències, a partir de les tensions $\underline{U}_{AG,0}$, $\underline{U}_{AG,1}$ i $\underline{U}_{AG,2}$:

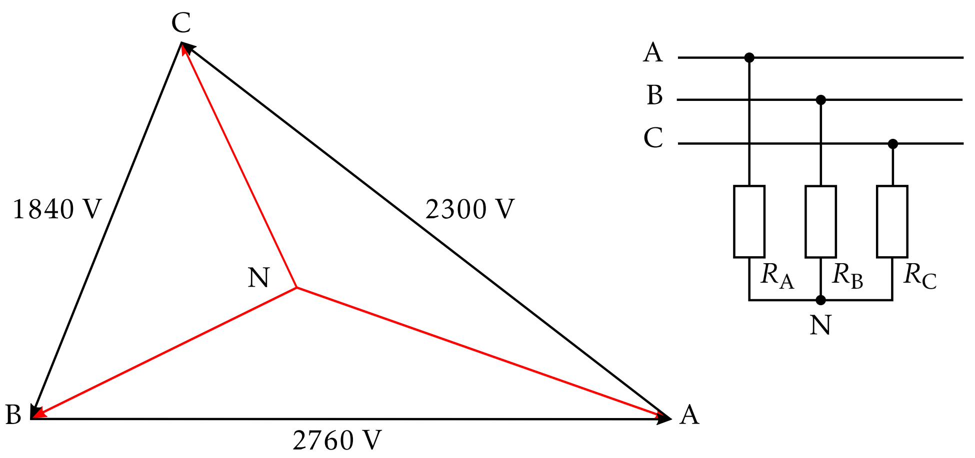
$$\begin{aligned} \underline{U}_{AG} &= 0\,\mathrm{V} + 1308{,}91_{\angle -24{,}96°}\,\mathrm{V} + 311{,}64_{\angle 8{,}34°}\,\mathrm{V} = 1578{,}66_{\angle -18{,}74°}\,\mathrm{V} \\ \underline{U}_{BG} &= 0\,\mathrm{V} + 1_{\angle 240°} \times 1308{,}91_{\angle -24{,}96°}\,\mathrm{V} + 1_{\angle 120°} \times 311{,}64_{\angle 8{,}34°}\,\mathrm{V} = 1362{,}86_{\angle -158{,}16°}\,\mathrm{V} \\ \underline{U}_{CG} &= 0\,\mathrm{V} + 1_{\angle 120°} \times 1308{,}91_{\angle -24{,}96°}\,\mathrm{V} + 1_{\angle 240°} \times 311{,}64_{\angle 8{,}34°}\,\mathrm{V} = 1039{,}96_{\angle 102{,}78°}\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Finalment, trobarem les mateixes tres tensions $\underline{U}_{AG}$, $\underline{U}_{BG}$ i $\underline{U}_{CG}$ a partir de les tensions $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$ i $\underline{U}_{CA}$, utilitzant les equacions (3.10a), (3.10b) i (3.10c):

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AG} &= \frac{2760_{\angle 0°}\,\mathrm{V} - 2300_{\angle 138{,}59°}\,\mathrm{V}}{3} = 1578{,}66_{\angle -18{,}74°}\,\mathrm{V} \\ \underline{U}_{BG} &= \frac{1840_{\angle -124{,}23°}\,\mathrm{V} - 2760_{\angle 0°}\,\mathrm{V}}{3} = 1362{,}86_{\angle -158{,}16°}\,\mathrm{V} \\ \underline{U}_{CG} &= \frac{2300_{\angle 138{,}59°}\,\mathrm{V} - 1840_{\angle -124{,}23°}\,\mathrm{V}}{3} = 1039{,}96_{\angle 102{,}78°}\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Exemple 3.2 Aplicació de les components simètriques – Impedàncies desequilibrades

Partim del mateix sistema de tensions trifàsic de l'exemple 3.1 a la pàgina 63, és a dir: $|\underline{U}_{AB}| = 2760\,\mathrm{V}$, $|\underline{U}_{BC}| = 1840\,\mathrm{V}$ i $|\underline{U}_{CA}| = 2300\,\mathrm{V}$, però considerem ara que les tres resistències connectades en estrella tenen valors diferents: $R_A = 5\,\Omega$, $R_B = 10\,\Omega$ i $R_C = 15\,\Omega$.



Es vol calcular en aquest cas les components directa, inversa i homopolar de les tensions a què estan sotmeses les resistències.

Els tres fasors $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$ i $\underline{U}_{CA}$ són els que s'han trobat en l'exemple 3.1:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{AB} &= 2760_{\angle 0^\circ}\ \mathrm{V}\\ \underline{U}_{BC} &= 1840_{\angle -124{,}23^\circ}\ \mathrm{V}\\ \underline{U}_{CA} &= 2300_{\angle 138{,}59^\circ}\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

En aquest cas, el punt neutre «N» que es formarà no coincidirà amb el baricentre del triangle de tensions A–B–C, donat que les tres resistències tenen valors diferents (càrrega desequilibrada). Les tensions $\underline{U}_{AN}$, $\underline{U}_{BN}$ i $\underline{U}_{CN}$ poden calcular-se fàcilment utilitzant el teorema de Millman (vegeu la secció 1.2.2 a la pàgina 4).

Si tenim en compte que el punt «N» és el punt neutre de les tres resistències connectades en estrella, podem calcular $\underline{U}_{NA}$, $\underline{U}_{NB}$ i $\underline{U}_{NC}$ a partir del teorema de Millman, prenent com a punt de referència respectivament, els punts «A», «B» i «C»:

$$\underline{U}_{NA} = \frac{\frac{\underline{U}_{AA}}{R_A} + \frac{\underline{U}_{BA}}{R_B} + \frac{\underline{U}_{CA}}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} = \frac{0 + \frac{-(2760_{\angle 0^\circ}\ \mathrm{V})}{10\ \Omega} + \frac{2300_{\angle 138{,}59^\circ}\ \mathrm{V}}{15\ \Omega}}{\frac{1}{5\ \Omega} + \frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{15\ \Omega}} = 1101{,}65_{\angle 165{,}46^\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\underline{U}_{NB} = \frac{\frac{\underline{U}_{AB}}{R_A} + \frac{\underline{U}_{BB}}{R_B} + \frac{\underline{U}_{CB}}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} = \frac{\frac{2760_{\angle 0^\circ}\ \mathrm{V}}{5\ \Omega} + 0 + \frac{-(1840_{\angle -124{,}23^\circ}\ \mathrm{V})}{15\ \Omega}}{\frac{1}{5\ \Omega} + \frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{15\ \Omega}} = 1716{,}07_{\angle 9{,}28^\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\underline{U}_{NC} = \frac{\frac{\underline{U}_{AC}}{R_A} + \frac{\underline{U}_{BC}}{R_B} + \frac{\underline{U}_{CC}}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} = \frac{\frac{-(2300_{\angle 138{,}59^\circ}\ \mathrm{V})}{5\ \Omega} + \frac{1840_{\angle -124{,}23^\circ}\ \mathrm{V}}{10\ \Omega} + 0}{\frac{1}{5\ \Omega} + \frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{15\ \Omega}} = 1408{,}22_{\angle -62{,}11^\circ}\ \mathrm{V}$$

Així doncs, tenim:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{AN} &= -\underline{U}_{NA} = 1101{,}65_{\angle -14{,}54^\circ}\ \mathrm{V}\\ \underline{U}_{BN} &= -\underline{U}_{NB} = 1716{,}07_{\angle -170{,}72^\circ}\ \mathrm{V}\\ \underline{U}_{CN} &= -\underline{U}_{NC} = 1408{,}22_{\angle 117{,}89^\circ}\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

Les components directa, inversa i homopolar $\underline{U}_{AN,1}$, $\underline{U}_{AN,2}$ i $\underline{U}_{AN,0}$, les obtenim utilitzant les equacions (3.5a), (3.5b) i (3.5c):

$$\begin{aligned}\underline{U}_{AN,1} &= \frac{1}{3}\Big(1101{,}65_{\angle -14{,}54^\circ}\ \mathrm{V} + 1_{\angle 120^\circ} \times 1716{,}07_{\angle -170{,}72^\circ}\ \mathrm{V} + 1_{\angle 240^\circ} \times 1408{,}22_{\angle 117{,}89^\circ}\ \mathrm{V}\Big) =\\ &= 1308{,}91_{\angle -24{,}96^\circ}\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

$$\underline{U}_{AN,2} = \frac{1}{3}\Big(1101{,}65_{\angle -14{,}54^\circ}\ \mathrm{V} + 1_{\angle 240^\circ} \times 1716{,}07_{\angle -170{,}72^\circ}\ \mathrm{V} + 1_{\angle 120^\circ} \times 1408{,}22_{\angle 117{,}89^\circ}\ \mathrm{V}\Big) =$$

$$= 311{,}64_{\angle 8{,}34^\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{AN},0} = \frac{1}{3}\Big(1101{,}65_{\angle -14{,}54^\circ}\ \mathrm{V} + 1716{,}07_{\angle -170{,}72^\circ}\ \mathrm{V} + 1408{,}22_{\angle 117{,}89^\circ}\ \mathrm{V}\Big) =$$

$$= 486{,}68_{\angle 151{,}73^\circ}\ \mathrm{V}$$

Com es pot veure, els valors de $\underline{U}_{\mathrm{AN},1}$ i $\underline{U}_{\mathrm{AN},2}$ són iguals respectivament als valors de $\underline{U}_{\mathrm{AG},1}$ i $\underline{U}_{\mathrm{AG},2}$, calculats en l'exemple 3.1. Això és així, ja que tal com s'ha dit en la secció 3.5 a la pàgina 61, tots el sistemes de tensió fase–neutre que tenen els mateixos extrems A, B, C, tenen les mateixes components directa i inversa.

Pel que fa a la tensió homopolar $\underline{U}_{\mathrm{AN},0}$, ha de complir-se l'equació (3.9), la qual ens diu que $\underline{U}_{\mathrm{AN},0}$ és igual a $\underline{U}_{\mathrm{GN}}$. Utilitzant el valor de $\underline{U}_{\mathrm{AG}}$ calculat en l'exemple 3.1, tenim:

$$\underline{U}_{\mathrm{GN}} = \underline{U}_{\mathrm{GA}} + \underline{U}_{\mathrm{AN}} = -(1578{,}66_{\angle -18{,}74^\circ}\ \mathrm{V}) + 1101{,}65_{\angle -14{,}54^\circ}\ \mathrm{V} = 486{,}68_{\angle 151{,}73^\circ}\ \mathrm{V}$$

3.7 Programes de càlcul de components simètriques

En la secció F.1 a la pàgina 306 es donen una sèrie de programes escrits per a la calculadora *HP Prime*, alguns dels quals faciliten la resolució numèrica de les equacions que han aparegut en aquest capítol. En concret tenim:

- **Triangle_a_Fasors**. A partir d'un triangle de tensions obté el fasors que el formen.
- **FN_a_FF**. Obté les tres tensions fase–fase corresponents a tres tensions fase–neutre.
- **FF_a_FN**. Obté les tres tensions fase–neutre corresponents a tres tensions fase–fase, per a tres impedàncies qualssevol connectades en estrella.
- **FF_a_FG**. Obté les tres tensions fase–G corresponents a tres tensions fase–fase, on G és el baricentre del triangle que formen les tres tensions fase–fase.
- **ABC_a_A012**. Obté els fasors de seqüència homopolar, directa i inversa, corresponents a tres fasors.
- **A012_a_ABC**. Obté els fasors corresponents a tres fasors de seqüència homopolar, directa i inversa.
- **AN12_a_AB12**. Obté els fasors de seqüència directa i inversa de les tensions fase–fase, a partir dels fasors de seqüència directa i inversa de les tensions fase–neutre.
- **AB12_a_AN12**. Obté els fasors de seqüència directa i inversa de les tensions fase–neutre, a partir dels fasors de seqüència directa i inversa de les tensions fase–fase.

Capítol 4

Sèries de Fourier

4.1 Definicions

Una funció periòdica en el temps $v(t)$, de freqüència f, període T i velocitat angular ω ($f = 1/T$, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$), es pot expressar com una suma infinita de funcions sinus i cosinus; és el que s'anomena expansió d'una funció periòdica en sèrie de Fourier:

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t) \tag{4.1}$$

Els coeficients A_0, A_n i B_n es calculen a partir de les expressions següents:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.2a}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} v(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{4.2b}$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} v(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{4.2c}$$

Podem tenir també una funció periòdica $v(\alpha)$ definida en funció de l'angle α, en lloc del temps t; es compleixen les relacions: $\alpha = \omega t$, $\mathrm{d}\alpha = \omega\,\mathrm{d}t$. Amb aquesta variable α tenim:

$$v(\alpha) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\alpha \tag{4.3}$$

En aquest cas, els coeficients A_0, A_n i B_n es calculen a partir de les expressions següents:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} v(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \tag{4.4a}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} v(\alpha)\cos n\alpha\,\mathrm{d}\alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{4.4b}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} v(\alpha) \sin n\alpha \, \mathrm{d}\alpha \qquad (n = 1, 2, \dots, \infty) \tag{4.4c}$$

Les equacions (4.1) i (4.3) es poden expressar d'una manera alternativa, utilitzant únicament funcions cosinus quan $v(t)$ o $v(\alpha)$ és una funció real, i per tant $A_n, B_n \in \mathbb{R}$:

$$v(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n) \tag{4.5}$$

$$v(\alpha) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\alpha + \phi_n) \tag{4.6}$$

Els coeficients C_0, C_n i ϕ_n, amb $A_n, B_n \in \mathbb{R}$, es calculen a partir de les expressions següents:[1]

$$C_0 = A_0 \tag{4.7a}$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \qquad (n = 1, 2, \dots, \infty) \tag{4.7b}$$

$$\phi_n = \begin{cases} -\arctan \dfrac{B_n}{A_n}, & A_n \neq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & A_n = 0 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \dots, \infty) \tag{4.7c}$$

Si comparem l'equació (4.2a) amb l'equació (1.5), o l'equació (4.4a) amb l'equació (1.6), veurem que són idèntiques, i per tant es pot afirmar que el coeficient A_0 (i per tant també C_0) és igual al valor mitjà de la funció periòdica.

Atenent a les equacions (4.5) o (4.6), el terme d'índex $n = 1$, $C_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ o $C_1 \cos(\alpha + \phi_1)$, s'anomena component fonamental, perquè té la mateixa freqüència que la funció original. La resta de termes, d'índex $n = 2, \dots, \infty$, s'anomenen components harmòniques.

4.2 Simplificacions

Quan les funcions $v(t)$ o $v(\alpha)$ presenten certes simetries, alguns dels coeficients A_n, B_n, C_n i ϕ_n s'anul·len o prenen valors particulars.

4.2.1 Funcions parells

Són funcions que compleixen: $v(t) = v(-t)$, o $v(\alpha) = v(-\alpha)$. En aquest cas tots els coeficients B_n s'anul·len; en concret tenim:

$$B_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \dots, \infty) \tag{4.8a}$$

$$C_0 = A_0 \tag{4.8b}$$

$$C_n = A_n \qquad (n = 1, 2, \dots, \infty) \tag{4.8c}$$

$$\phi_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \dots, \infty) \tag{4.8d}$$

[1] Cal tenir en compte que la funció arctan disponible en moltes calculadores i llenguatges de programació, torna de forma estandarditzada valors compresos entre $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$. En aquest cas cal sumar el valor π, quan A_n és negatiu, a l'angle obtingut amb la funció arctan per tal d'obtenir l'angle en el quadrant correcte.

4.2.2 Funcions senars

Són funcions que compleixen: $v(t) = -v(-t)$, o $v(\alpha) = -v(-\alpha)$. En aquest cas tots els coeficients A_n s'anul·len; en concret tenim:

$$A_0 = 0 \tag{4.9a}$$
$$A_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{4.9b}$$
$$C_0 = 0 \tag{4.9c}$$
$$C_n = B_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{4.9d}$$
$$\phi_n = -\frac{\pi}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{4.9e}$$

4.2.3 Funcions amb simetria de semiona

Són funcions que compleixen: $v(t) = -v(t + \frac{T}{2})$, o $v(\alpha) = -v(\alpha + \pi)$. En aquest cas tots els coeficients A_n i B_n d'índex parell s'anul·len; en concret tenim:

$$A_0 = 0 \tag{4.10a}$$
$$A_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots, \infty) \tag{4.10b}$$
$$B_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots, \infty) \tag{4.10c}$$
$$C_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots, \infty) \tag{4.10d}$$
$$\phi_n = 0 \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots, \infty) \tag{4.10e}$$

4.3 Condició de Dirichlet

Quan una funció periòdica $v(t)$ és contínua en tot el seu període T, la seva expansió en sèrie de Fourier convergeix al mateix valor que la funció original per a qualsevol valor de t.

En el cas que la funció $v(t)$ estigui definida a trossos, com per exemple una ona quadrada, la condició de Dirichlet ens assegura que la seva expansió en sèrie de Fourier convergeix al mateix valor que la funció original, per a tots els valors de t on la funció es contínua, i que en els punts de discontinuïtat de la funció, la seva expansió en sèrie de Fourier convergeix al valor mitjà dels límits per la dreta i per l'esquerra de la funció en aquests punts. Per tal que això es compleixi, la funció $v(t)$ ha de satisfer les condicions següents:

- Ha de tenir un nombre finit de discontinuïtats finites.
- Ha de tenir un nombre finit d'extrems (màxims o mínims).

Tot el que s'ha dit és igualment vàlid per a una funció periòdica $v(\alpha)$ definida en funció de l'angle α.

4.4 Valors mitjà i eficaç, taxes, factors i distorsió harmònica total

4.4.1 Valor mitjà

Com ja s'ha dir anteriorment, el valor mitjà $\bar{V}$ d'una funció periòdica $v(t)$ o $v(\alpha)$ és:

$$\bar{V} = A_0 = C_0 \tag{4.11}$$

4.4.2 Valor eficaç

Atenent a les equacions (4.5) o (4.6), els valors de cresta $\hat{V}_n$ i eficaç V_n de cadascun dels termes de la sèrie de Fourier, són respectivament:

$$\hat{V}_n = C_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{4.12}$$

$$V_n = \frac{C_n}{\sqrt{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{4.13}$$

El valor eficaç total V de la funció periòdica $v(t)$ o $v(\alpha)$ és:

$$V = \sqrt{\bar{V}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2} = \sqrt{C_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2} \tag{4.14}$$

4.4.3 Taxa de fonamental

La taxa de fonamental relaciona el valor eficaç de la component fonamental V_1, amb el valor eficaç total V. La norma CEI 60050 l'anomena «fundamental factor» o «relative fundamental content», li assigna el símbol g i la defineix com:

$$g = \frac{V_1}{V} \tag{4.15}$$

Un valor proper a 1 indica que les components harmòniques tenen poca importància:

4.4.4 Taxa de l'harmònica d'ordre n

La taxa de l'harmònica d'ordre n relaciona el valor eficaç d'aquesta harmònica V_n, amb el valor eficaç de la component fonamental V_1. La norma CEI 60050 l'anomena «nth harmonic ratio» i la defineix com:

$$\frac{V_n}{V_1} \tag{4.16}$$

4.4.5 Taxa d'harmòniques

La taxa d'harmòniques relaciona el valor eficaç que s'obtindria sense tenir en compte la component fonamental V_1, amb el valor eficaç total V. La norma CEI 60050 l'anomena «total harmonic factor», li assigna el símbol d i la defineix com:

$$d = \frac{\sqrt{\bar{V}^2 + \sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V} \tag{4.17}$$

Quan el valor mitjà $\bar{V}$ és nul, es verifica:

$$\bar{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad g^2 = 1 - d^2 \tag{4.18}$$

Un valor proper a 0 indica un baix contingut de components harmòniques.

4.4.6 Distorsió harmònica total

La distorsió harmònica total relaciona el valor eficaç que s'obtindria sense tenir en compte la component fonamental V_1, amb el valor eficaç d'aquesta component fonamental. La norma CEI 60050 l'anomena «total harmonic distortion (THD)» i la defineix com:

$$\mathrm{THD} = \frac{\sqrt{\bar{V}^2 + \sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V_1} \tag{4.19}$$

Quan el valor mitjà $\bar{V}$ és nul, es verifica:

$$\bar{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad g^2 = \frac{1}{1 + \mathrm{THD}^2} \tag{4.20}$$

Un valor proper a 0 indica un baix contingut de components harmòniques.

4.4.7 Factor d'arrissada eficaç

El factor d'arrissada eficaç relaciona el valor eficaç que s'obtindria sense tenir en compte el valor mitjà $\bar{V}$, amb aquest valor mitjà. La norma CEI 60050 l'anomena «rms-ripple factor» o «relative ripple content», li assigna el símbol r i el defineix com:

$$r = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2}}{|\bar{V}|} \tag{4.21}$$

Aquesta relació és la mateixa que es pot veure en l'equació (1.11); només cal substituir-hi el valor eficaç V pel valor donat en l'equació (4.14).

4.4.8 Factor d'arrissada

El factor d'arrissada relaciona el valor eficaç que s'obtindria sense tenir en compte el valor mitjà $\bar{V}$, amb el valor eficaç total V. La norma CEI 60050 l'anomena «pulsating factor», li assigna el símbol s i el defineix com:

$$s = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2}}{V} \tag{4.22}$$

Exemple 4.1 Càlcul de valors mitjà i eficaç, i de taxa de fonamental

Es tracta de calcular els valors mitjà i eficaç i la taxa de fonamental, de la tensió que s'obté a partir d'una tensió sinusoidal $u(t) = \hat{U} \sin \omega t$ amb un rectificador d'ona completa, utilitzant-ne l'expansió en sèrie de Fourier.

La tensió que s'obté del rectificador d'ona completa ve definida per:

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U} \sin \omega t, & 0 < \omega t < \pi \\ -\hat{U} \sin \omega t, & \pi \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases}$$

En aquest cas, l'ona de tensió entre π i 2π és una repetició exacta de l'ona de tensió entre 0 i π, i per tant únicament caldrà considerar-ne la primera meitat (entre 0 i π), tenint en compte que el període serà π/ω. A més, aquesta funció és parell $u(t) = u(-t)$, i per tant, tots els termes B_n $(n = 1, \ldots, \infty)$ seran nuls.

El terme A_0 val:

$$A_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U} \sin \omega t \, \mathrm{d}t = -\frac{\hat{U} \cos \omega t}{\pi} \bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2\hat{U}}{\pi}$$

Els temes A_n valen:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \hat{U} \sin \omega t \cos(n\omega t) \, \mathrm{d}t = \frac{2\hat{U}[\cos \omega t \cos(n\omega t) + n \sin \omega t \sin(n\omega t)]}{\pi(n^2 - 1)} \bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \\ &= -\frac{2\hat{U}(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty) \end{aligned}$$

Per tant, la funció periòdica $u(t)$ es pot expressar com:

$$u(t) = \frac{2\hat{U}}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{U}(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)} \cos(n\omega t)$$

Ara bé, si ens fixem en els termes $1 + \cos n\pi$, veiem que valen 0 per a $n = 1, 3, 5, \ldots$, i 2 per a $n = 2, 4, 6, \ldots$, i per tant dins del sumatori únicament ens quedaran termes d'índex parell. Si a continuació fem el canvi de variable $n = 2k$, tenim:

$$u(t) = \frac{2\hat{U}}{\pi} - \frac{4\hat{U}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\omega t)}{4k^2 - 1}$$

Aquesta simplificació es deguda al fet que s'ha utilitzat com a període de la funció $u(t)$ la meitat (π/ω) del valor total $(2\pi/\omega)$, i per tant és com si n'haguéssim doblat la freqüència i la velocitat angular; així doncs, la velocitat angular de la component fonamental és 2ω, i la velocitat angular de les components harmòniques és $2\omega k$ $(k = 2, 3, 4, 5, \ldots, \infty)$.

El valor mitjà $\bar{U}$ de $u(t)$ és directament:

$$\bar{U} = \frac{2\hat{U}}{\pi}$$

El valor eficaç de cadascun dels termes del sumatori és:

$$U_k = \frac{4\hat{U}}{\sqrt{2}\pi(4k^2 - 1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty)$$

El valor eficaç total és, per tant:

$$U = \sqrt{\left(\frac{2\hat{U}}{\pi}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4\hat{U}}{\sqrt{2}\pi(4k^2 - 1)}\right)^2} = \sqrt{\frac{4\hat{U}^2}{\pi^2} + \frac{(\pi^2 - 8)\hat{U}^2}{2\pi^2}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Com es pot veure, aquests valors mitjà i eficaç obtinguts aquí, són idèntics als obtinguts en l'exemple de la secció 1.3.

El valor eficaç U_1 de la component fonamental val:

$$U_1 = \frac{4\hat{U}}{\sqrt{2}\pi(4 \times 1^2 - 1)} = \frac{4\hat{U}}{3\sqrt{2}\pi}$$

La taxa de fonamental val, per tant:

$$g = \frac{\dfrac{4\hat{U}}{3\sqrt{2}\pi}}{\dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}}} = \frac{4}{3\pi} = 0,42$$

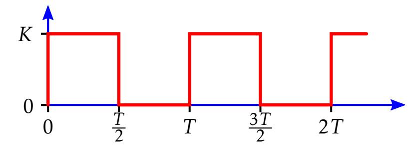
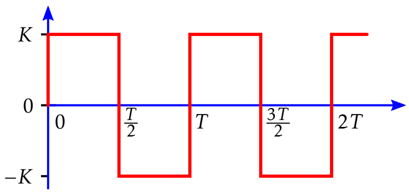
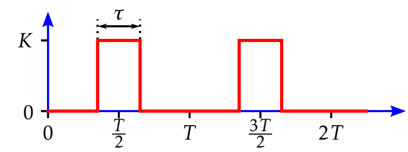
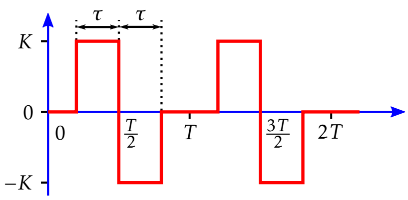
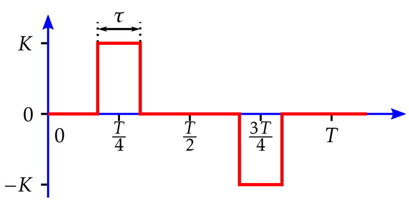
Com es pot veure, aquest valor no es gaire alt; això ens indica que el contingut de components harmòniques de la tensió $u(t)$ és elevat.

4.5 Taula de sèries de Fourier

Encara que els coeficients de la sèrie de Fourier d'una funció qualsevol es poden obtenir resolent les integrals referides en les seccions anteriors, els càlculs involucrats poden ser força complicats; per aquest motiu és usual disposar de taules que recullen les sèries de Fourier d'un gran nombre de funcions.

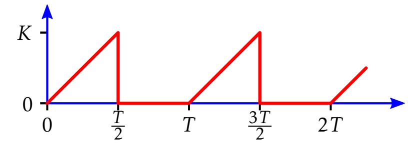
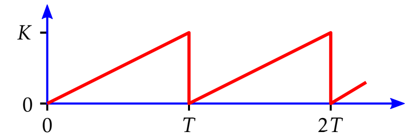
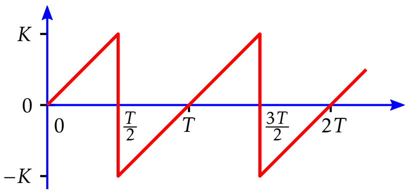
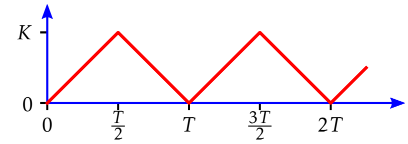
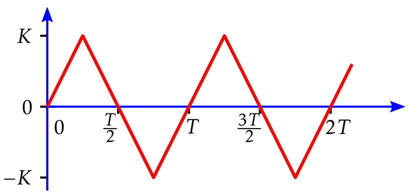
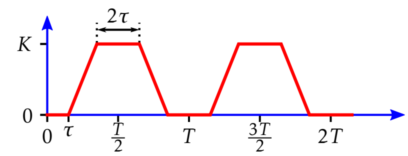
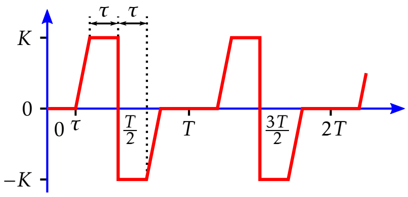
En la Taula 4.1 es pot veure una relació de sèries de Fourier de diverses formes d'ona usuals. Com és habitual tenim: $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

Taula 4.1 Sèries de Fourier de formes d'ona

$f(t)$	Sèrie de Fourier de $f(t)$
	$\dfrac{K}{2} + \dfrac{2K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\big((2n-1)\omega t\big)}{2n-1}$
	$\dfrac{4K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\big((2n-1)\omega t\big)}{2n-1}$
	$\dfrac{K\tau}{T} + \dfrac{2K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\left(\dfrac{n\omega\tau}{2}\right)\cos(n\omega t)}{n}$
	$\dfrac{2K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(\cos(n\omega\tau)-1)\sin(n\omega t)}{n}$
	$\dfrac{4K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{(2n-1)\omega\tau}{2}\right)\sin\big((2n-1)\omega t\big)}{2n-1}$

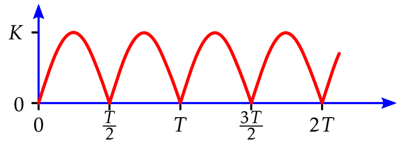
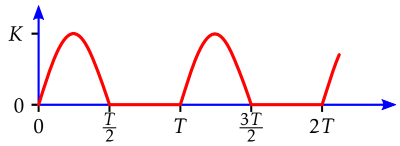
(continua a la pàgina següent)

Taula 4.1 Sèries de Fourier de formes d'ona (*ve de la pàgina anterior*)

$f(t)$	Sèrie de Fourier de $f(t)$
	$\frac{K}{4}-\frac{2K}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\big((2n-1)\omega t\big)}{(2n-1)^2}+ \frac{K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(n\omega t)}{n}$
	$\frac{K}{2}-\frac{K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega t)}{n}$
	$\frac{2K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(n\omega t)}{n}$
	$\frac{K}{2}-\frac{4K}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\big((2n-1)\omega t\big)}{(2n-1)^2}$
	$\frac{8K}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin\big((2n-1)\omega t\big)}{(2n-1)^2}$
	$\frac{K}{2}-\frac{4K}{\pi^2-2\pi\omega\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\big((2n-1)\omega\tau\big)\cos\big((2n-1)\omega t\big)}{(2n-1)^2}$
	$\frac{2K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\big(1+(-1)^n\big)\sin(n\omega\tau)}{n(\pi-2\omega\tau)}\right)\frac{(-1)^{n+1}\sin(n\omega t)}{n}$

(*continua a la pàgina següent*)

Taula 4.1 Sèries de Fourier de formes d'ona (*ve de la pàgina anterior*)

$f(t)$	Sèrie de Fourier de $f(t)$
	$\dfrac{2K}{\pi} - \dfrac{4K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n\omega t)}{4n^2-1}$
	$\dfrac{K}{\pi} + \dfrac{K}{2}\sin(\omega t) - \dfrac{2K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n\omega t)}{4n^2-1}$

4.6 Propietats de les sèries de Fourier

A partir de la taula 4.1 a la pàgina 76 es poden obtenir fàcilment sèries de Fourier d'ones que no hi figuren.

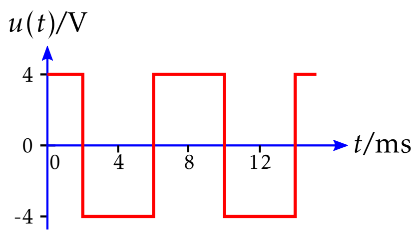
El principi de linealitat és aplicable a les sèries de Fourier, i per tant si tenim una ona que sigui la suma de dues ones que figuren en aquesta taula, només cal sumar les sèries de Fourier de les dues ones de la taula per obtenir la sèrie de Fourier de l'ona original.

Un cas particular de l'anterior es presenta quan tenim una ona idèntica a una de la taula 4.1, però desplaçada un cert valor amunt o avall; en aquest cas només caldrà que calculem el terme A_0, o sigui el valor mitjà de l'ona, ja que la resta de termes que depenen de ω seran iguals.

El principi de desplaçament en el temps també és aplicable a les sèries de Fourier, i per tant si tenim una ona idèntica a una de la taula 4.1, però desfasada una cert temps τ (equivalent a un angle $\phi = \omega\tau$), podem utilitzar la sèrie de Fourier d'aquesta ona de la taula, substituint el valor t per $t+\tau$ o per $t-\tau$, segons que la nostra ona estigui avançada o retardada respectivament, respecte de l'ona de la taula; si en lloc del temps τ utilitzen l'angle ϕ, haurem de substituir ωt per $\omega t + \phi$ o per $\omega t - \phi$ respectivament.

Exemple 4.2 Càlcul d'una sèrie de Fourier utilitzant la taula de formes d'ona

Es tracta de trobar la sèrie de Fourier de l'ona de la figura següent:



El període d'aquesta ona és $T = 8\,\text{ms}$ i la seva velocitat angular és $\omega = \dfrac{2\pi}{8\,\text{ms}} = 250\pi\,\text{rad/s}$.

Aquesta ona és igual a la segona ona de la taula 4.1 a la pàgina 76 amb $K = 4\,\text{V}$, però avançada un temps $\tau = 2\,\text{ms}$; aquest valor correspon a un angle ϕ d'avanç de:

$$\phi = \omega\tau = 250\pi\,\text{rad/s} \times 2\,\text{ms} = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

La sèrie de Fourier d'aquesta ona és doncs:

$$u(t) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2n-1)(250\pi t + \frac{\pi}{2})\right)}{2n-1}$$

4.7 Potència

Comencem expressant una tensió $u(t)$ i un corrent $i(t)$ segons l'equació (4.5), tot substituint els coeficients C_0 i C_n ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) pels valors mitjà i eficaç donats en les equacions (4.11) i (4.13):

$$u(t) = \bar{U} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}U_n\cos(n\omega t + \xi_n) \tag{4.23}$$

$$i(t) = \bar{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}I_n\cos(n\omega t + \psi_n) \tag{4.24}$$

Si $u(t)$ és la tensió que s'aplica a una càrrega i $i(t)$ és el corrent que aquesta càrrega absorbeix, essent els sentits de $u(t)$ i de $i(t)$ els mateixos que es poden veure en les Figures 1.10, 1.11 i 1.12, la potència activa P consumida per la càrrega és:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[\bar{U} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}U_n\cos(n\omega t + \xi_n)\right]\left[\bar{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}I_n\cos(n\omega t + \psi_n)\right]\mathrm{d}t = \\
&= \bar{U}\bar{I} + \sum_{n=1}^{\infty}U_nI_n\cos(\xi_n - \psi_n) = \bar{U}\bar{I} + \sum_{n=1}^{\infty}U_nI_n\cos\varphi_n
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Els termes $\cos\varphi_n = \cos(\xi_n - \psi_n)$ són els factors de potència de cadascuna de les components fonamental i harmòniques. No existeix un factor de potència global.

Com es pot observar, només contribueixen a la potència total els termes de la tensió i del corrent que tenen el mateix índex. Per tant, si el corrent té termes d'uns índexs que no són presents en la tensió, aquests termes no contribuiran a la transmissió de potència; en canvi si observem l'equació (4.14) veiem que tots els termes contribueixen al valor eficaç total, i per tant aquestes components harmòniques sí que contribuiran a elevar el valor eficaç del corrent, augmentant les pèrdues resistives en les línies de transmissió.

La potència aparent S es defineix de la manera usual, com el producte dels valors eficaços totals de la tensió i del corrent:

$$S = UI = \sqrt{\left(\bar{U}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2\right)\left(\bar{I}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2\right)} \tag{4.26}$$

Pel que fa a la potència reactiva Q, s'acostuma a definir d'una forma similar a la potència activa:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin(\xi_n - \psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \tag{4.27}$$

Amb aquesta definició de potència reactiva, tenim: $P^2 + Q^2 < S^2$; el valor que falta per fer quadrar aquesta desigualtat, es l'anomenada potència distorsionant D:

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2 \tag{4.28}$$

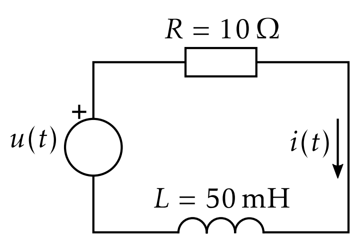
4.8 Anàlisi de circuits elèctrics

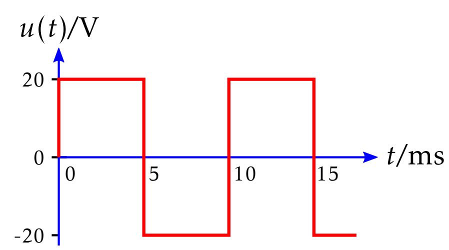
Les sèries de Fourier s'utilitzen per calcular les tensions i corrents que s'estableixen en un circuit elèctric, quan les fonts de tensió presents són ones periòdiques no sinusoidals (ones quadrades, triangulars, trapezoidals, etc.). En aquest cas, cal descompondre la tensió no sinusoidal en una sèrie de Fourier, i calcular les tensions i corrents que s'originen en el circuit, de forma independent per a cadascuna de les freqüències presents en la sèrie de Fourier; el valor total d'aquests corrents i tensions s'obté sumant els termes parcials corresponents a cada freqüència.

En aquests càlculs cal tenir en compte que la impedància que presentarà una inductància L i una capacitat C al terme n-èsim de la tensió serà $\mathrm{j}n\omega L$ i $-\mathrm{j}/(n\omega C)$ respectivament, essent ω la velocitat angular de la component fonamental de la tensió.

Exemple 4.3 Resolució d'un circuit elèctric utilitzant les sèries de Fourier

Es tracta de trobar la potència dissipada en la resistència del circuit següent; la tensió $u(t)$ aplicada al circuit, es mostra en la gràfica adjunta.





El període de la tensió $u(t)$ és: $T = 10\,\mathrm{ms}$, i la seva velocitat angular: $\omega = 2\pi/T = 200\pi\,\mathrm{rad/s}$; matemàticament, $u(t)$ s'expressa com:

$$u(t) = \begin{cases} 20\,\mathrm{V}, & 0\,\mathrm{ms} < t < 5\,\mathrm{ms} \\ -20\,\mathrm{V}, & 5\,\mathrm{ms} \le t \le 10\,\mathrm{ms} \end{cases}$$

Comencem calculant l'expansió en sèrie de Fourier de la tensió $u(t)$. Aquesta funció es senar i té simetria de semiona, i per tant compleix: $u(t) = -u(-t)$ i $u(t) = -u(t + \frac{T}{2})$; com a conseqüència d'això, únicament seran diferents de zero el coeficients B_n d'índex senar ($B_1, B_3, B_5, \ldots$). Donat que $u(t)$ està definida en dos trossos, calcularem els coeficients B_n segons:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} u(t)\sin(n\omega t) + \int_{T/2}^{T} u(t)\sin(n\omega t)\right) = \\ &= 200\left(\int_0^{5\times10^{-3}} 20\sin(200n\pi t) + \int_{5\times10^{-3}}^{10^{-2}} -20\sin(200n\pi t)\right) = \\ &= 200\left(-\frac{\cos(200n\pi t)}{10n\pi}\bigg|_0^{5\times10^{-3}} + \frac{\cos(200n\pi t)}{10n\pi}\bigg|_{5\times10^{-3}}^{10^{-2}}\right) = \\ &= 200\left(\frac{1}{10n\pi} - \frac{\cos n\pi}{5n\pi} + \frac{\cos(2n\pi)}{10n\pi}\right) \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots, \infty) \end{aligned}$$

Si tenim en compte que per a valors senars de l'índex n, es compleix: $\cos n\pi = -1$ i $\cos(2n\pi) = 1$, tenim:

$$B_n = 200\left(\frac{1}{10n\pi} - \frac{-1}{5n\pi} + \frac{1}{10n\pi}\right) = \frac{80}{n\pi} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots, \infty)$$

Així doncs, l'expansió en sèrie de Fourier de la tensió $u(t)$ és:

$$u(t) = \frac{80}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \frac{\sin(7\omega t)}{7} + \frac{\sin(9\omega t)}{9} + \frac{\sin(11\omega t)}{11} + \cdots\right)$$

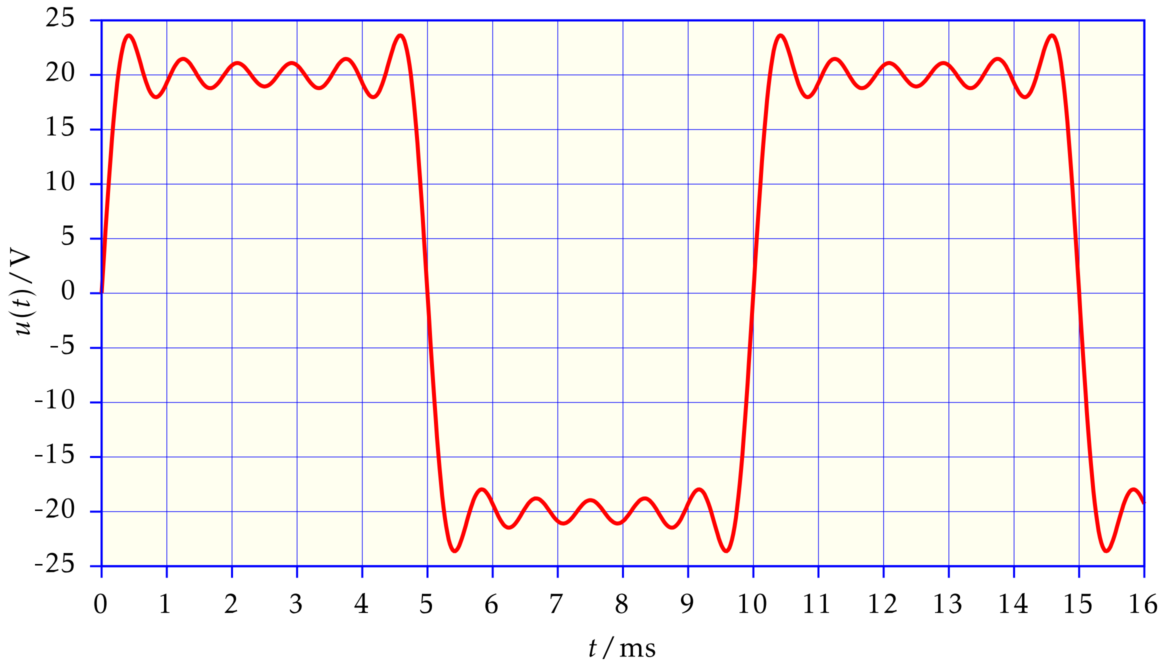
Aquesta sèrie també es pot obtenir directament de la taula 4.1 a la pàgina 76, amb $K = 20\,\mathrm{V}$.

En el punt de discontinuïtat $t = 5\,\mathrm{ms}$, tenim:

$$u(5\times10^{-3}\,\mathrm{s}) = \frac{80}{\pi}\left(\sin\pi + \frac{\sin 3\pi}{3} + \frac{\sin 5\pi}{5} + \frac{\sin 7\pi}{7} + \frac{\sin 9\pi}{9} + \frac{\sin 11\pi}{11} + \cdots\right) = 0\,\mathrm{V}$$

Es comprova que en complir-se la condició de Dirichlet, aquest valor correspon al valor mitjà dels límits esquerra (20 V) i dret (−20 V) de la funció en aquest punt.

A continuació es pot veure la gràfica de la tensió $u(t)$ que s'obté utilitzant els sis primers termes de la seva expansió en sèrie de Fourier (component fonamental més components harmòniques 3, 5, 7, 9 i 11):



La impedància de la càrrega formada per la resistència R i la inductància L, tindrà un valor $\underline{Z}_n$ diferent per a cadascuna de les tensions fonamental i harmòniques presents en la tensió $u(t)$; els valors de $\underline{Z}_n$ dels sis primers índexs són:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= R + \mathrm{j}\,\omega L &&= 10\,\Omega + \mathrm{j}\,(200 \times \pi \times 50 \times 10^{-3})\,\Omega &&= 32{,}9691_{\angle 1{,}2626\,\mathrm{rad}}\,\Omega \\
\underline{Z}_3 &= R + \mathrm{j}\,3\omega L &&= 10\,\Omega + \mathrm{j}\,(3 \times 200 \times \pi \times 50 \times 10^{-3})\,\Omega &&= 94{,}7768_{\angle 1{,}4651\,\mathrm{rad}}\,\Omega \\
\underline{Z}_5 &= R + \mathrm{j}\,5\omega L &&= 10\,\Omega + \mathrm{j}\,(5 \times 200 \times \pi \times 50 \times 10^{-3})\,\Omega &&= 157{,}3976_{\angle 1{,}5072\,\mathrm{rad}}\,\Omega \\
\underline{Z}_7 &= R + \mathrm{j}\,7\omega L &&= 10\,\Omega + \mathrm{j}\,(7 \times 200 \times \pi \times 50 \times 10^{-3})\,\Omega &&= 220{,}1387_{\angle 1{,}5254\,\mathrm{rad}}\,\Omega \\
\underline{Z}_9 &= R + \mathrm{j}\,9\omega L &&= 10\,\Omega + \mathrm{j}\,(9 \times 200 \times \pi \times 50 \times 10^{-3})\,\Omega &&= 282{,}9201_{\angle 1{,}5354\,\mathrm{rad}}\,\Omega \\
\underline{Z}_{11} &= R + \mathrm{j}\,11\omega L &&= 10\,\Omega + \mathrm{j}\,(11 \times 200 \times \pi \times 50 \times 10^{-3})\,\Omega &&= 345{,}7198_{\angle 1{,}5419\,\mathrm{rad}}\,\Omega
\end{aligned}$$

L'expansió en sèrie de Fourier del corrent $i(t)$ serà anàloga a la de la tensió $u(t)$, és a dir, només tindrà funcions sinus d'índex senar.

Donat que la càrrega és inductiva, cadascun dels termes del corrent estarà endarrerit respecte del terme corresponent de la tensió, en un valor indicat per l'argument de cada impedància. El valor de pic de cada terme del corrent $\hat{I}_n$ s'obté dividint el valor de pic de cada terme de la tensió $\hat{U}_n$ pel mòdul de la impedància corresponent; els valors de $\hat{I}_n$ dels sis primers índexs són:

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{|\underline{Z}_1|} = \frac{80/\pi\,\mathrm{V}}{32{,}9691\,\Omega} = 0{,}7724\,\mathrm{A} \qquad \hat{I}_3 = \frac{\hat{U}_3}{|\underline{Z}_3|} = \frac{80/(3\pi)\,\mathrm{V}}{94{,}7768\,\Omega} = 0{,}0896\,\mathrm{A}$$

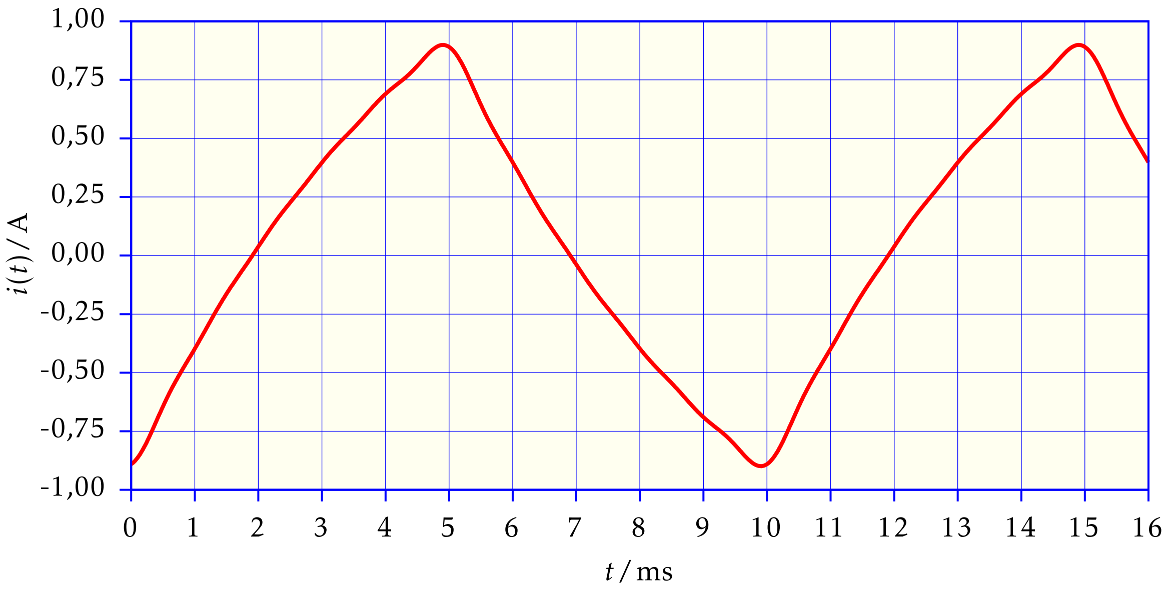
$$\hat{I}_5 = \frac{\hat{U}_5}{|\underline{Z}_5|} = \frac{80/(5\pi)\,\mathrm{V}}{157{,}3976\,\Omega} = 0{,}0324\,\mathrm{A} \qquad \hat{I}_7 = \frac{\hat{U}_7}{|\underline{Z}_7|} = \frac{80/(7\pi)\,\mathrm{V}}{220{,}1387\,\Omega} = 0{,}0165\,\mathrm{A}$$

$$\hat{I}_9 = \frac{\hat{U}_9}{|\underline{Z}_9|} = \frac{80/(9\pi)\,\mathrm{V}}{282{,}9201\,\Omega} = 0{,}0100\,\mathrm{A} \qquad \hat{I}_{11} = \frac{\hat{U}_{11}}{|\underline{Z}_{11}|} = \frac{80/(11\pi)\,\mathrm{V}}{345{,}7198\,\Omega} = 0{,}0067\,\mathrm{A}$$

Amb aquests valor calculats, l'expansió en sèrie de Fourier del corrent $i(t)$ és:

$$\begin{aligned} i(t) &= 0{,}7724\sin(\omega t - 1{,}2626) + 0{,}0896\sin(3\omega t - 1{,}4651) + 0{,}0324\sin(5\omega t - 1{,}5072) + \\ &+ 0{,}0165\sin(7\omega t - 1{,}5254) + 0{,}0100\sin(9\omega t - 1{,}5354) + 0{,}0067\sin(11\omega t - 1{,}5419) + \cdots \end{aligned}$$

A continuació es pot veure la gràfica del corrent $i(t)$ que s'obté utilitzant els sis primers termes de la seva expansió en sèrie de Fourier (component fonamental més components harmòniques 3, 5, 7, 9 i 11):



Calculem a continuació el valor eficaç I del corrent:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\left(\frac{0{,}7724}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0896}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0324}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0165}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0100}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A}\right)^2 + \left(\frac{0{,}0067}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A}\right)^2 + \cdots} \approx \\ &\approx 0{,}5505\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Finalment, la potència P dissipada en la resistència serà:

$$P = RI^2 \approx 10\,\Omega \times (0{,}5505\,\mathrm{A})^2 = 3{,}03\,\mathrm{W}$$

Aquest valor també es pot calcular a partir de l'equació (4.25); la potència així calculada correspon a la potència activa cedida per la font de tensió, i donat que la resistència R és l'únic component del circuit que en consumeix, aquest mètode ens proporcionarà el mateix resultat. Utilitzant els sis primers termes de les expansions en sèrie de Fourier de la tensió $u(t)$ i del corrent $i(t)$, calculats anteriorment, tenim:

$$
\begin{aligned}
P &\approx U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_3 I_3 \cos\varphi_3 + U_5 I_5 \cos\varphi_5 + U_7 I_7 \cos\varphi_7 + U_9 I_9 \cos\varphi_9 + U_{11} I_{11} \cos\varphi_{11} = \\
&= \frac{80}{\pi \times \sqrt{2}}\,\mathrm{V} \times \frac{0{,}7724}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A} \times \cos 1{,}2626 + \frac{80}{3 \times \pi \times \sqrt{2}}\,\mathrm{V} \times \frac{0{,}0896}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A} \times \cos 1{,}4651 + \\
&+ \frac{80}{5 \times \pi \times \sqrt{2}}\,\mathrm{V} \times \frac{0{,}0324}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A} \times \cos 1{,}5072 + \frac{80}{7 \times \pi \times \sqrt{2}}\,\mathrm{V} \times \frac{0{,}0165}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A} \times \cos 1{,}5254 + \\
&+ \frac{80}{9 \times \pi \times \sqrt{2}}\,\mathrm{V} \times \frac{0{,}0100}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A} \times \cos 1{,}5354 + \frac{80}{11 \times \pi \times \sqrt{2}}\,\mathrm{V} \times \frac{0{,}0067}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A} \times \cos 1{,}5419 = \\
&= 3{,}03\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

En la resolució d'aquest exemple hem emprat únicament els sis primers termes de les sèries de Fourier de la tensió i del corrent, no obstant, el valor obtingut de la potència ha de ser prou precís, ja que els valors de pic dels termes de la sèrie del corrent disminueixen de valor ràpidament.

Refarem a continuació els càlculs utilitzant més termes, amb l'ajut del programa *Mathematica*®.

Definim en primer lloc el valor de pic de cada terme de la tensió i el valor del mòdul de la impedància corresponent, calculem a continuació els cent primers termes del corrent de pic (component fonamental més components harmòniques 3, 5, ..., 197 i 199), i per acabar calculem el valor eficaç del corrent i la potència:

In[1]:= Upic[n_] = 80 / (π (2 n - 1));

In[2]:= Z[n_] = Abs[10 + i (2 n - 1) 200 π 50 10^{-3}];

In[3]:= Ipic = Table[Upic[n] / Z[n], {n, 1, 100}];

In[4]:= Irms = $\sqrt{\text{Apply[Plus, (Ipic/}\sqrt{2})^2]}$ // N

Out[4]:= 0.550511

In[5]:= P = 10 Irms^2

Out[5]:= 3.03063

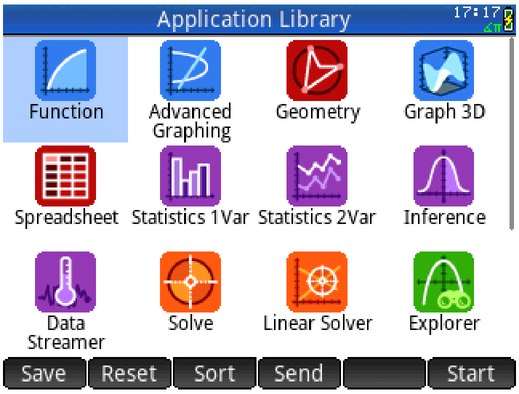
També podem fer aquests càlculs amb el programa *MATLAB*®, tal com es veu a continuació:

```
> > Upic = 80 ./ (pi*(2*[1:1:100]-1));

> > Z = abs(10 + i*(2*[1:1:100]-1)*200*pi*50*1e-3);

> > Ipic = Upic ./ Z;

> > Irms = sqrt(sum((Ipic ./ sqrt(2)).^2))

Irms =

        0.5505

> > P = 10*Irms^2

P =
```

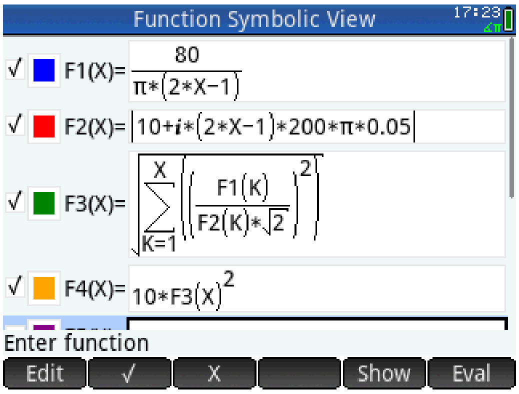
3.0306

Per acabar farem aquests càlculs amb la calculadora *HP Prime*. Els passos a seguir són els següents:

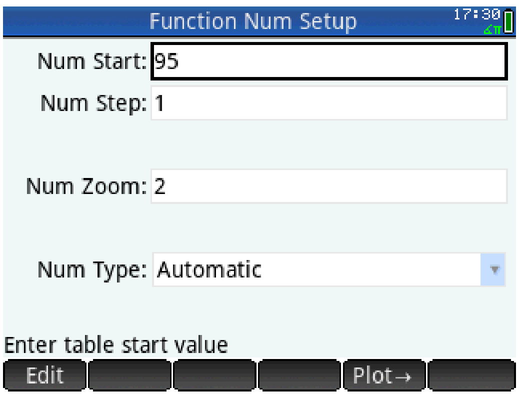
❶ En primer lloc, premem la tecla **Apps Info** i seleccionem l'aplicació **Function**.



❷ Tot seguit entrem en els camps **F1(X)**, **F2(X)**, **F3(X)** i **F4(X)**, les funcions que defineixen el valor de pic de cada terme de la tensió, el valor del mòdul de cada terme de la impedància, la intensitat eficaç i la potència respectivament.



❸ A continuació premem les tecles **Shift** **Num Setup**, i ajustem els paràmetres de la visualització numèrica **Num Start** i **Num Step**, a **95** i **1** respectivament.



❹ Per acabar premem la tecla Num Setup; podem veure en la columna **F4** i la fila corresponent a **X=100**, el valor calculat de la potència.

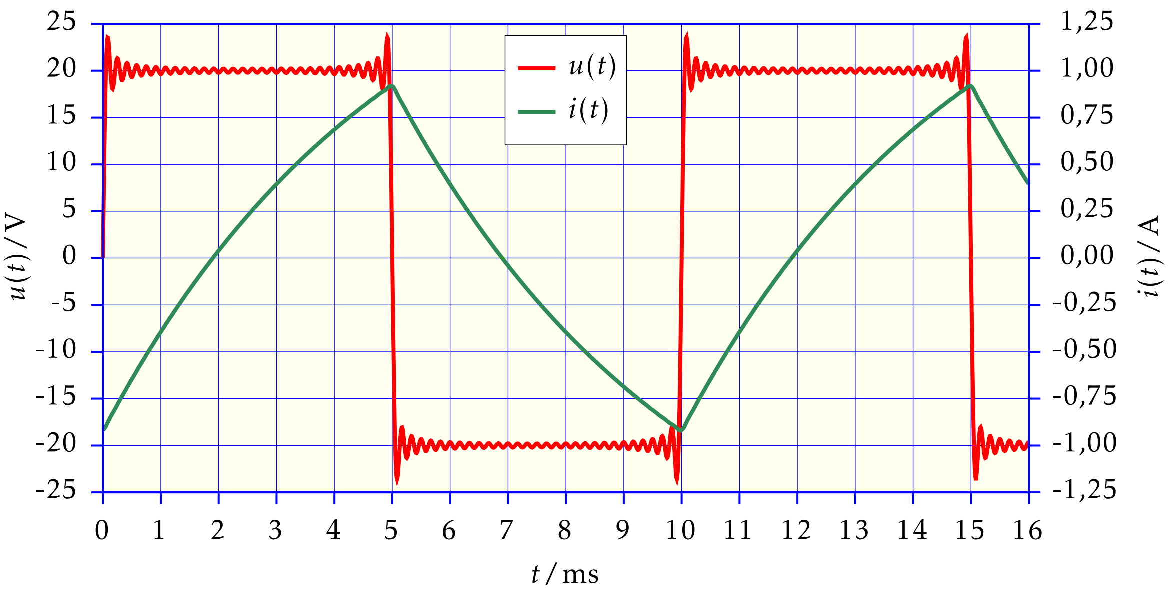
Function Numeric View 17:40

X	F1	F2	F3	F4
95	0.134734	5 937.62	0.550511	3.030627
96	0.133324	6 000.45	0.550511	3.030627
97	0.131942	6 063.28	0.550511	3.030627
98	0.130589	6 126.11	0.550511	3.030627
99	0.129263	6 188.95	0.550511	3.030627
100	0.127964	6 251.78	0.550511	3.030627
101	0.126691	6 314.61	0.550511	3.030627
102	0.125442	6 377.44	0.550511	3.030627
103	0.124218	6 440.27	0.550511	3.030627
104	0.123018	6 503.1	0.550511	3.030627

3.03062735076

Zoom | More | Go To | | Defn |

Finalment, aprofitant la potència de càlcul d'aquests programes, tornem a dibuixar les gràfiques de la tensió $u(t)$ i del corrent $i(t)$ utilitzant els trenta primers termes de les seves expansions en sèrie de Fourier (components fonamentals més components harmòniques 3, 5, ..., 57 i 59):



Per acabar, trobarem el corrent $i(t)$ utilitzant les equacions del corrent que circula en un circuit R-L, desenvolupades en la secció 1.7.3 a la pàgina 26. Cal tenir en compte que aquest mètode ens dona una evolució temporal precisa, la qual comença amb el règim transitori i va evolucionant cap al règim permanent; el mètode del desenvolupament en sèrie de Fourier, en canvi, ens proporciona només el règim permanent.

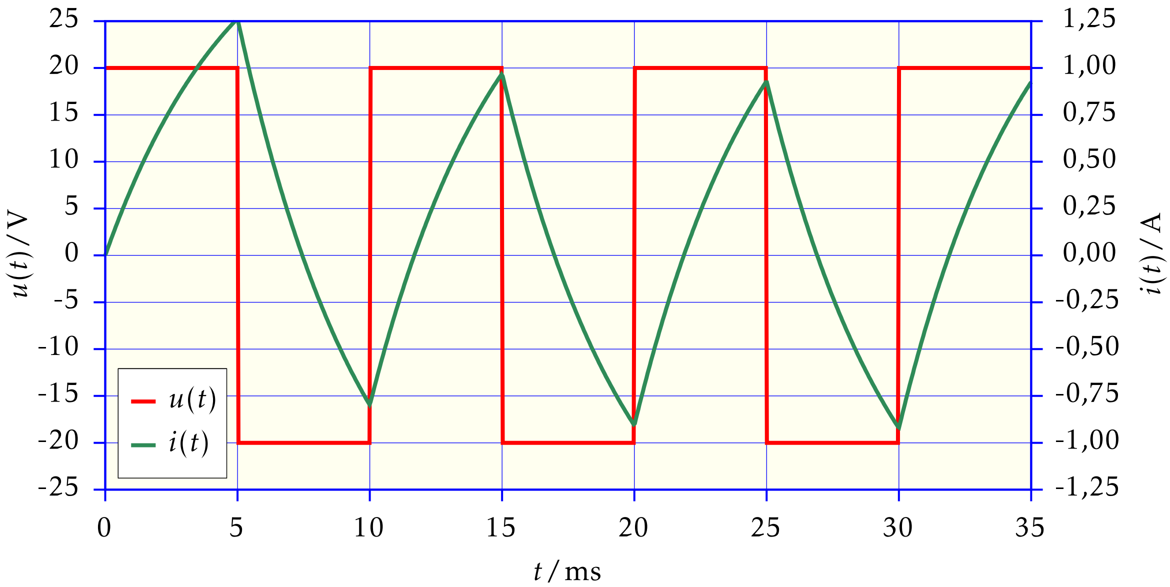
Per poder comparar els dos mètodes haurem de veure ara com evoluciona el corrent $i(t)$ en un període més llarg de temps, per tal d'arribar al règim permanent; suposarem que el corrent inicial és nul, i per tant usarem l'equació (1.91) per a $0\,\text{ms} \leq t < 5\,\text{ms}$, i l'equació (1.94) per a $t \geq 5\,\text{ms}$.

La constant de temps d'aquest circuit és: $\tau = \dfrac{50\,\text{mH}}{10\,\Omega} = 5\,\text{ms}$.

Es donen a continuació, les equacions dels corrents que existeixen en cadascun dels intervals de 5 ms, compresos entre 0 ms i 35 ms. La formació d'aquestes equacions es pot veure de forma més detallada en l'exemple 1.7 a la pàgina 28:

$$
\begin{aligned}
0\,\text{ms} \le t < \ \ 5\,\text{ms} \quad &\longrightarrow \quad i_1(t) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-t/0{,}005} \\
5\,\text{ms} \le t < 10\,\text{ms} \quad &\longrightarrow \quad i_2(t) = -2 - \Big[-2 - i_1(0,005)\Big]\,\mathrm{e}^{-(t-0{,}005)/0{,}005} \\
10\,\text{ms} \le t < 15\,\text{ms} \quad &\longrightarrow \quad i_3(t) = 2 - \Big[2 - i_2(0,010)\Big]\,\mathrm{e}^{-(t-0{,}010)/0{,}005} \\
15\,\text{ms} \le t < 20\,\text{ms} \quad &\longrightarrow \quad i_4(t) = -2 - \Big[-2 - i_3(0,015)\Big]\,\mathrm{e}^{-(t-0{,}015)/0{,}005} \\
20\,\text{ms} \le t < 25\,\text{ms} \quad &\longrightarrow \quad i_5(t) = 2 - \Big[2 - i_4(0,020)\Big]\,\mathrm{e}^{-(t-0{,}020)/0{,}005} \\
25\,\text{ms} \le t < 30\,\text{ms} \quad &\longrightarrow \quad i_6(t) = -2 - \Big[-2 - i_5(0,025)\Big]\,\mathrm{e}^{-(t-0{,}025)/0{,}005} \\
30\,\text{ms} \le t < 35\,\text{ms} \quad &\longrightarrow \quad i_7(t) = 2 - \Big[2 - i_6(0,030)\Big]\,\mathrm{e}^{-(t-0{,}030)/0{,}005}
\end{aligned}
$$

Es representa a continuació la gràfica del corrent $i(t)$, format pels corrents $i_1(t)$ a $i_7(t)$, conjuntament amb la gràfica de la tensió $u(t)$:



El règim transitori inicial del corrent $i(t)$ va desapareixent progressivament, i a partir de $t = 20\,\text{ms}$ aproximadament, ja ens trobem en el règim permanent. A partir d'aquest instant, la forma i els valors positius i negatius màxims de $i(t)$, i la diferència temporal relativa entre $i(t)$ i $u(t)$, són equivalents als obtinguts mitjançant el mètode inicial del desenvolupament en sèrie de Fourier.

El fet que les gràfiques de les funcions periòdiques $u(t)$ i $i(t)$, obtingudes utilitzant el mètode del desenvolupament en sèrie de Fourier, s'hagin dibuixat començant a $t = 0$ és irrellevant, ja que tal com s'ha dit, aquest mètode ens proporciona només el règim permanent, i per tant es pot fixar a qualsevol valor l'instant del temps d'inici d'aquestes gràfiques.

Capítol 5

Transformada de Laplace

5.1 Introducció

La transformada de Laplace és part de l'anomenat càlcul operacional, i s'utilitza per convertir equacions diferencials ordinàries en equacions lineals; un cop resoltes aquestes equacions lineals, la transformada inversa de Laplace ens proporciona la solució de l'equació diferencial original.

5.2 Definicions

5.2.1 Transformada de Laplace

La transformada de Laplace $\mathcal{L}$ converteix una funció del temps $f(t)$, definida per a $t \geq 0$, en una funció $F(s)$, on s és una variable complexa:

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) \equiv F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

El teorema de l'existència de la transformada de Laplace estableix que si $f(t)$ és una funció contínua a trossos en qualsevol interval finit contingut en $[0,\infty)$, i satisfà: $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$ per a qualsevol $t \in [0,\infty)$, llavors la funció $\mathcal{L}\big(f(t)\big)$ existeix i és única per a qualsevol $s > \alpha$.

5.2.2 Transformada inversa de Laplace

La transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ s'utilitza per obtenir la funció original $f(t)$ a partir de la funció transformada $F(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) \equiv f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\gamma-\mathrm{j}\infty}^{\gamma+\mathrm{j}\infty} F(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \qquad (t \geq 0) \tag{5.2}$$

On γ és un camí vertical en el pla complex, escollit de tal manera que totes les singularitats de la funció $F(s)$ quedin a la seva esquerra.

5.2.3 Funció graó unitari i funció impuls

Aquestes dues funcions són de gran importància en el càlcul operacional. La funció graó unitari, o funció de Heaviside $\varepsilon_\tau(t)$ o $\varepsilon(t-\tau)$ en l'instant de temps $t=\tau$ es defineix com:

$$\varepsilon_\tau(t) \equiv \varepsilon(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases} \tag{5.3}$$

La funció impuls, o funció delta de Dirac $\delta_\tau(t)$ o $\delta(t-\tau)$ en l'instant de temps $t=\tau$, es pot definir mitjançant l'ús de límits o d'integrals de variable complexa, però resulta més intuïtiu definir-la a partir de les seves propietats: la funció és nul·la a tot arreu excepte a $t=\tau$, i és d'àrea unitària:

$$\delta_\tau(t) \equiv \delta(t-\tau) = 0 \quad \forall t \neq \tau \tag{5.4a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{5.4b}$$

Algunes propietats i relacions de les funcions $\varepsilon_\tau(t)$ i $\delta_\tau(t)$, on $f(t)$ és una funció qualsevol, són:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_\tau(t) = \delta_\tau(t) \tag{5.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_\tau(t)\,\mathrm{d}t = f(\tau) \tag{5.6}$$

$$\int_a^b \varepsilon_\tau(t) f(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon_\tau(t)\int_\tau^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (a \leq \tau \leq b) \tag{5.7}$$

5.3 Propietats

La transformada de Laplace i la seva inversa compleixen les propietats següents:

5.3.1 Linealitat

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f_1(t)\big) = F_1(s)$ i $\mathcal{L}\big(f_2(t)\big) = F_2(s)$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\big) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{R}) \tag{5.8a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)\big) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{R}) \tag{5.8b}$$

5.3.2 Canvi d'escala

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(f(at)\big) = \frac{F(s/a)}{a} \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{5.9a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(as)\big) = \frac{f(t/a)}{a} \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{5.9b}$$

5.3.3 Translació

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(f(t-\tau)\big) = \mathcal{L}\big(f(t-\tau)\varepsilon_\tau(t)\big) = \mathrm{e}^{-s\tau}F(s) \qquad (\tau \in \mathbb{R}^+) \tag{5.10a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)\big) = f(t-\tau)\varepsilon_\tau(t) \qquad (\tau \in \mathbb{R}^+) \tag{5.10b}$$

5.3.4 Esmorteïment

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{at}f(t)\big) = F(s-a) \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{5.11a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s-a)\big) = \mathrm{e}^{at}f(t) \qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{5.11b}$$

5.3.5 Diferenciació

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, on $f(t)$ és diferenciable $n-1$ vegades en l'interval $[0,\infty)$, i compleix $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$ per a qualsevol $t \in [0,\infty)$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = sF(s) - f(0) \tag{5.12a}$$

$$\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{5.12b}$$

$$\mathcal{L}\big(f^{(n)}(t)\big) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{5.12c}$$

5.3.6 Integració

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, on $f(t)$ és una funció contínua a trossos, i compleix $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$, llavors:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{F(s)}{s} \tag{5.13}$$

5.3.7 Producte de convolució

El producte de convolució de dues funcions $f_1(t)$ i $f_2(t)$ es defineix com:

$$f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.14}$$

Si tenim: $\mathcal{L}\big(f_1(t)\big) = F_1(s)$ i $\mathcal{L}\big(f_2(t)\big) = F_2(s)$, on $f_1(t)$ i $f_2(t)$ són funcions contínues a trossos, i compleixen $|f_1(t)| \leq M_1\mathrm{e}^{\alpha_1 t}$ i $|f_2(t)| \leq M_2\mathrm{e}^{\alpha_2 t}$, llavors:

$$\mathcal{L}\big(f_1(t) * f_2(t)\big) = F_1(s)F_2(s) \tag{5.15}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F_1(s)F_2(s)\big) = f_1(t) * f_2(t) \tag{5.16}$$

5.3.8 Funció periòdica

Sigui $f(t)$ una funció definida en l'interval $[0, T]$ i nul·la fora d'aquest interval, i sigui $f_{\mathrm{P}}(t)$ la funció periòdica de període T que s'origina per repetició de la funció $f(t)$; si tenim: $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$, llavors:

$$F_{\mathrm{P}}(s) = \frac{F(s)}{1 - \mathrm{e}^{-sT}} \tag{5.17}$$

5.4 Taules de transformades de Laplace

Encara que les transformades directa i inversa de Laplace es poden obtenir amb les equacions (5.1) i (5.2) respectivament, els càlculs involucrats poden ser força complicats; per aquest motiu és usual disposar de taules que recullen les transformades de Laplace d'un gran nombre de funcions.

En la Taula 5.1 es pot veure una relació de transformades de Laplace de les funcions més usuals. Totes les constants que hi apareixen són valors reals, que tant poden ser positius com negatius llevat que s'indiqui el contrari; la variable ω que apareix en les funcions trigonomètriques representa la velocitat angular, amb: $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

Taula 5.1 Transformades de Laplace de funcions

	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$
$\varepsilon_\tau(t)$	$(\tau \in \mathbb{R}^+)$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\tau s}}{s}$
$\delta_\tau(t)$	$(\tau \in \mathbb{R}^+)$	$\mathrm{e}^{-\tau s}$
	1	$\dfrac{1}{s}$
	t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n	$(n \in \mathbb{Z}^+)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$(n \in \mathbb{Z}^+)$	$\dfrac{1}{s^n}$
	t^a	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
	$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}$
	$\dfrac{\mathrm{e}^{-at}}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s+a}}$
	e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$

(continua a la pàgina següent)

Taula 5.1 Transformades de Laplace de funcions (*ve de la pàgina anterior*)

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$
$a^{-bt} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{s + b\ln a}$
$1 - \mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$
$t\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$(1 - at)\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$
$t^2\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{2}{(s+a)^3}$
$\dfrac{t^{n-1}\mathrm{e}^{-at}}{(n-1)!} \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$	$\dfrac{1}{(s+a)^n}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{b - a}$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-t/a} - \mathrm{e}^{-t/b}}{a - b}$	$\dfrac{1}{(as+1)(bs+1)}$
$\dfrac{a\mathrm{e}^{-at} - b\mathrm{e}^{-bt}}{a - b}$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\dfrac{a\mathrm{e}^{-t/b} - b\mathrm{e}^{-t/a}}{ab(a-b)}$	$\dfrac{s}{(as+1)(bs+1)}$
$\dfrac{\mathrm{e}^t}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^n e^{-t}) \quad (n \in \mathbb{Z}^*)$	$\dfrac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\dfrac{\omega \cos\varphi + s \sin\varphi}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\dfrac{s \cos\varphi - \omega \sin\varphi}{s^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\dfrac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\mathrm{e}^{-at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\mathrm{e}^{-at} \cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

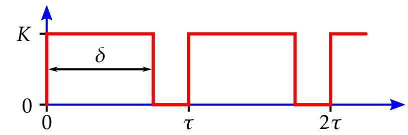
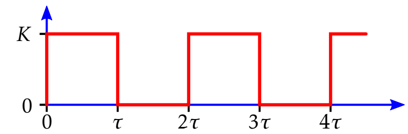
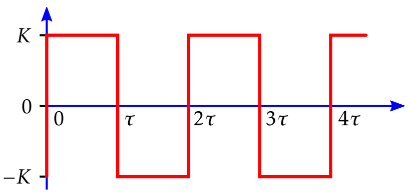
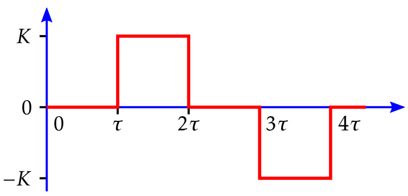
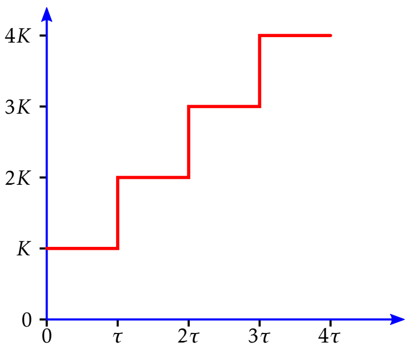
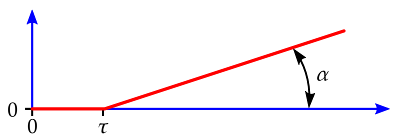
(*continua a la pàgina següent*)

Taula 5.1 Transformades de Laplace de funcions (*ve de la pàgina anterior*)

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$
$\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t + \varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi + (s+a)\sin\varphi}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$	$\dfrac{(s+a)\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\sin^2 \omega t$	$\dfrac{2\omega^2}{s^3+4s\omega^2}$
$\cos^2 \omega t$	$\dfrac{s^2+2\omega^2}{s^3+4s\omega^2}$
$\dfrac{\sin(2\sqrt{\omega t})}{\sqrt{\omega}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega/s}}{s\sqrt{s}}$
$\dfrac{\cos(2\sqrt{\omega t})}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega/s}}{\sqrt{s}}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh^2 at$	$\dfrac{2a^2}{s^3-4sa^2}$
$\cosh^2 at$	$\dfrac{s^2-2a^2}{s^3-4sa^2}$
$t\sinh at$	$\dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
$t\cosh at$	$\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
$\mathrm{e}^{-bt}\sinh at$	$\dfrac{a}{(s+b)^2-a^2}$
$\mathrm{e}^{-bt}\cosh at$	$\dfrac{s+b}{(s+b)^2-a^2}$
$J_\nu(at) \quad (\nu > -1)$	$\dfrac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^\nu}{a^\nu\sqrt{s^2+a^2}}$
$I_\nu(at) \quad (\nu > -1)$	$\dfrac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^\nu}{a^\nu\sqrt{s^2-a^2}}$
$\dfrac{J_\nu(at)}{t} \quad (\nu > 0)$	$\dfrac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^\nu}{\nu a^\nu}$
$\dfrac{I_\nu(at)}{t} \quad (\nu > 0)$	$\dfrac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^\nu}{\nu a^\nu}$

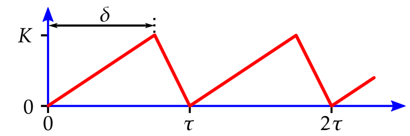
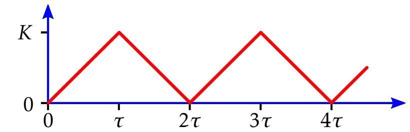
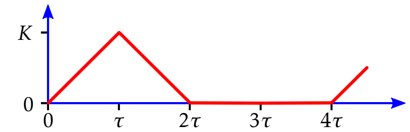
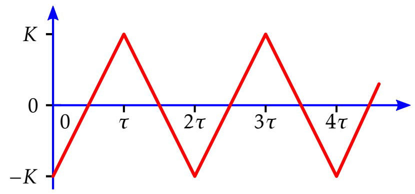
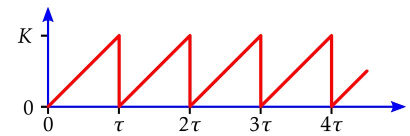
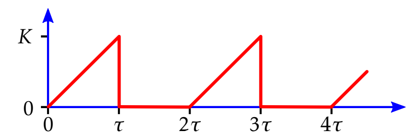
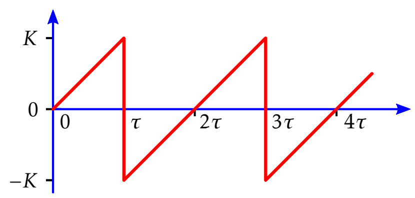
En la Taula 5.2 es pot veure una relació de transformades de Laplace de diverses formes d'ona usuals.

Taula 5.2 Transformades de Laplace de formes d'ona

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$
	$K\dfrac{1-\mathrm{e}^{\delta s}}{s(1-\mathrm{e}^{-\tau s})}$
	$\dfrac{K}{s(1+\mathrm{e}^{-\tau s})}$
	$K\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\tau s}}{s(1+\mathrm{e}^{-\tau s})} = \dfrac{K}{s}\tanh\dfrac{\tau s}{2}$
	$K\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\tau s}}{s(\mathrm{e}^{\tau s}+\mathrm{e}^{-\tau s})}$
	$\dfrac{K}{s(1-\mathrm{e}^{-\tau s})} = K\dfrac{1+\coth(\frac{\tau s}{2})}{2s}$
	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\tau s}}{s^2}\tan\alpha$

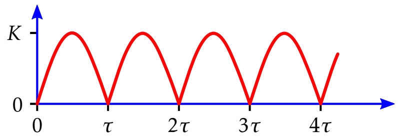
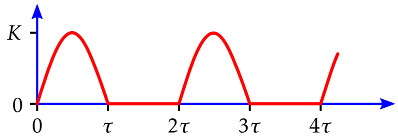
(continua a la pàgina següent)

Taula 5.2 Transformades de Laplace de formes d'ona (*ve de la pàgina anterior*)

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}\big(f(t)\big)$
	$K\dfrac{-1+\mathrm{e}^{-\tau s}+\dfrac{\tau}{\delta}(1-\mathrm{e}^{-\delta s})}{(\tau-\delta)s^2(1-\mathrm{e}^{-\tau s})}$
	$K\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\tau s}}{\tau s^2(1+\mathrm{e}^{-\tau s})}=\dfrac{K}{\tau s^2}\tanh\dfrac{\tau s}{2}$
	$K\dfrac{\mathrm{e}^{-2\tau s}-2\mathrm{e}^{-\tau s}+1}{\tau s^2(1-\mathrm{e}^{-4\tau s})}$
	$2K\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\tau s}}{\tau s^2(1+\mathrm{e}^{-\tau s})}-\dfrac{K}{s}$
	$\dfrac{K}{\tau s^2}-\dfrac{K\mathrm{e}^{-\tau s}}{s(1-\mathrm{e}^{\tau s})}$
	$K\dfrac{1-(1+\tau s)\mathrm{e}^{-\tau s}}{\tau s^2(1-\mathrm{e}^{-2\tau s})}$
	$\dfrac{K}{\tau s^2}-2K\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-\tau s}-1}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\tau s}-1}\right)$

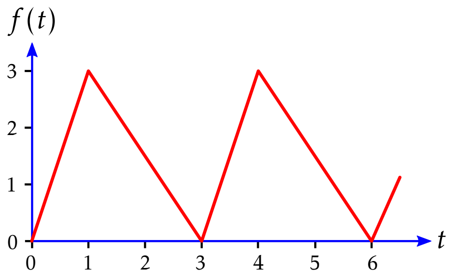
(*continua a la pàgina següent*)

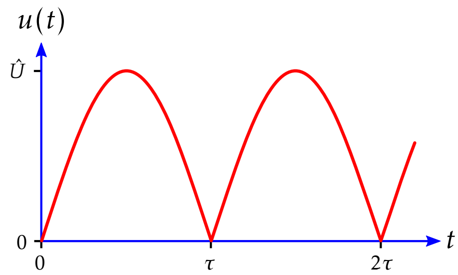
Taula 5.2 Transformades de Laplace de formes d'ona (*ve de la pàgina anterior*)

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}\big(f(t)\big)$
	$K\dfrac{\dfrac{\pi}{\tau}}{s^2+\dfrac{\pi^2}{\tau^2}}\dfrac{(1+e^{-\tau s})}{(1-e^{-\tau s})}$
	$K\dfrac{\dfrac{\pi}{\tau}}{s^2+\dfrac{\pi^2}{\tau^2}}\dfrac{1}{(1-e^{-\tau s})}$

Exemple 5.1 Càlcul de transformades de Laplace

Es tracta de calcular la transformada de Laplace dels dos senyals periòdics que es mostren a continuació; el primer és una ona triangular i el segon és la tensió sinusoidal que s'obté amb un rectificador d'ona completa.





Comencem amb l'ona triangular estudiant la funció $f_1(t)$ definida entre $t=0$ i $t=3$, i que per repetició genera la funció $f(t)$; la seva expressió matemàtica és:

$$f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 3t, & 0<t<1\\ -\dfrac{3}{2}t+\dfrac{9}{2}, & 1<t<3\\ 0, & t>3\end{cases}$$

Amb l'ajut de les funcions graó unitari en $t=0$, $t=1$ i $t=3$, podem definir $f_1(t)$ com:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 3t\Big(\varepsilon_0(t) - \varepsilon_1(t)\Big) + \left(-\frac{3}{2}t + \frac{9}{2}\right)\Big(\varepsilon_1(t) - \varepsilon_3(t)\Big) = \\ &= 3t\varepsilon_0(t) - 3t\varepsilon_1(t) - \frac{3}{2}t\varepsilon_1(t) + \frac{3}{2}t\varepsilon_3(t) + \frac{9}{2}\varepsilon_1(t) - \frac{9}{2}\varepsilon_3(t) = \\ &= 3t\varepsilon_0(t) - \frac{9}{2}(t-1)\varepsilon_1(t) + \frac{3}{2}(t-3)\varepsilon_3(t) \end{aligned}$$

Si ens fixem en el 1r terme, veiem en la Taula 5.1 a la pàgina 92 que la transformada de t és $1/s^2$. Els termes 2n i 3r també contenen la funció t, però traslladada en el temps un valor d'1 i 3 respectivament; per tant, si ens fixem en la propietat de la translació, veiem que les seves transformades seran també $1/s^2$ multiplicades per e^{-s} i e^{-3s} respectivament. Així doncs amb aquestes consideracions i fent servir la propietat de la linealitat tenim:

$$F_1(s) = \frac{3}{s^2} - \frac{9\mathrm{e}^{-s}}{2s^2} + \frac{3\mathrm{e}^{-3s}}{2s^2} = \frac{6 - 9\mathrm{e}^{-s} + 3\mathrm{e}^{-3s}}{2s^2}$$

Finalment, calculem la transformada de la funció $f(t)$ original a partir de la transformada de la funció $f_1(t)$, utilitzant la propietat de les funcions periòdiques, amb un període $T = 3$:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - \mathrm{e}^{-3s}} = \frac{6 - 9\mathrm{e}^{-s} + 3\mathrm{e}^{-3s}}{2s^2(1 - \mathrm{e}^{-3s})}$$

Es pot comprovar que aquest resultat és el mateix que s'obté directament de la taula 5.2 a la pàgina 95, amb els valors $K = 3$, $\delta = 1$ i $\tau = 3$.

Continuem ara amb l'ona sinusoidal estudiant la funció $u_1(t)$ definida entre $t = 0$ i $t = \tau$, i que per repetició genera la funció $u(t)$; la seva expressió matemàtica és (amb període $T = 2\tau$ i velocitat angular $\omega = 2\pi/T = \pi/\tau$):

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \hat{U}\sin\omega t = \hat{U}\sin\dfrac{\pi}{\tau}t, & 0 < t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

Amb l'ajut de les funcions graó unitari en $t = 0$ i $t = \tau$, podem definir $u_1(t)$ com:

$$u_1(t) = \left(\hat{U}\sin\frac{\pi}{\tau}t\right)\Big(\varepsilon_0(t) - \varepsilon_\tau(t)\Big) = \left(\hat{U}\sin\frac{\pi}{\tau}t\right)\varepsilon_0(t) - \left(\hat{U}\sin\frac{\pi}{\tau}t\right)\varepsilon_\tau(t)$$

Pel que fa al 2n terme, si tenim en compte la igualtat trigonomètrica: $-\sin\alpha = \sin(\alpha - \frac{T}{2})$, on T és el període, tenim:

$$u_1(t) = \left(\hat{U}\sin\frac{\pi}{\tau}t\right)\varepsilon_0(t) + \left(\hat{U}\sin\left(\frac{\pi}{\tau}t - \tau\right)\right)\varepsilon_\tau(t)$$

El 2n terme s'ha convertit en una funció sinus, com el 1r terme, però traslladada en el temps un valor τ; per tant utilitzant la transformada de la funció sinus que apareix en la Taula 5.1 a la pàgina 92, i fent ús de la propietat de la translació, tenim:

$$F_1(s) = \frac{\hat{U}(\pi/\tau)}{s^2 + (\pi/\tau)^2} + \frac{\hat{U}(\pi/\tau)}{s^2 + (\pi/\tau)^2}\mathrm{e}^{-\tau s} = \frac{\hat{U}(\pi/\tau)}{s^2 + (\pi/\tau)^2}\left(1 + \mathrm{e}^{-\tau s}\right)$$

Per acabar, calculem la transformada de la funció $u(t)$ original a partir de la transformada de la funció $u_1(t)$, utilitzant la propietat de les funcions periòdiques, amb un període $T = \tau$:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - \mathrm{e}^{-\tau s}} = \frac{\hat{U}(\pi/\tau)}{s^2 + (\pi/\tau)^2}\,\frac{1 + \mathrm{e}^{-\tau s}}{1 - \mathrm{e}^{-\tau s}}$$

Es pot comprovar que aquest resultat és el mateix que s'obté directament de la taula 5.2 a la pàgina 95, amb el valor $K = \hat{U}$.

5.5 Anàlisi de circuits elèctrics

La transformada de Laplace és útil en la resolució de circuits elèctrics, quan a més del règim permanent es vol conèixer l'evolució transitòria prèvia de les tensions i dels corrents.

Mitjançant la transformada de Laplace, les equacions diferencials que relacionen tensions i corrents es converteixen en equacions lineals de més fàcil resolució. Un cop calculats els valors de tensions i corrents en el domini operacional, utilitzem la transformada inversa de Laplace per obtenir els valors d'aquestes tensions i corrents en el domini temporal.

Per resoldre aquests tipus de circuits cal conèixer-ne les condicions inicials, és a dir, els corrents de les inductàncies i les tensions dels condensadors. Un circuit elèctric es diu que està relaxat, quan en l'instant inicial tots els condensadors estan descarregats i no circula corrent per cap inductància.

A tall d'exemple tenim el circuit de la Figura 5.1, on en l'instant inicial $t = 0$ circula un corrent i_0 i el condensador C està carregat a una tensió u_0.

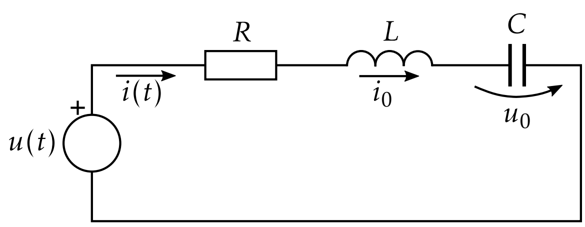


Figura 5.1 Anàlisi de circuits mitjançant la transformada de Laplace

Escrivim en primer lloc la relació entre $u(t)$ i $i(t)$, a partir de les relacions individuals entre tensió i corrent per a cada component del circuit, les quals s'han exposat en la secció 1.6 a la pàgina 22:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + u_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.18}$$

Transformem a continuació aquesta equació en una altra en el domini operacional, essent $\mathcal{L}\big(u(t)\big) = U(s)$, $\mathcal{L}\big(i(t)\big) = I(s)$ i $\mathcal{L}\big(u_0\big) = u_0/s$, i aplicant les propietats de la diferenciació i de la integració a $i(t)$:

$$\begin{aligned} U(s) &= RI(s) + L(sI(s) - i_0) + \frac{u_0}{s} + \frac{I(s)}{sC} = \\ &= \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) I(s) + \frac{u_0}{s} - Li_0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

De fet, aquesta equació la podríem haver escrit directament a partir de les relacions entre les tensions i els corrents en el domini operacional per a cada component del circuit, les quals s'han exposat també en la secció 1.6 a la pàgina 22.

Per tant, essent $u(t)$ una funció determinada (sinusoidal, impuls, graó, etc...), podem obtenir $U(s)$ i calcular $I(s)$ mitjançant:

$$I(s) = \frac{U(s) - \frac{u_0}{s} + Li_0}{R + sL + \frac{1}{sC}} \tag{5.20}$$

Finalment, obtenim el corrent en el domini temporal: $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(I(s)\big)$.

Exemple 5.2 Resolució d'un circuit R-C

A partir del circuit de la Figura 5.1 a la pàgina anterior, amb $L = 0$, $i_0 = 0$ i $u_0 = 0$, es tracta de calcular el corrent $i(t)$, essent $u(t) = U$ (valor constant).

Comencem per escriure l'equació (5.20) en el nostre cas particular, tenint en compte que $\mathcal{L}(U) = U/s$

$$I(s) = \frac{U}{s\left(R + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{CU}{1 + sRC}$$

A continuació, dividim numerador i denominador per RC per tal d'obtenir una expressió que es trobi en la Taula 5.1 a la pàgina 92:

$$I(s) = \frac{\frac{U}{R}}{\frac{1}{RC} + s}$$

Utilitzant la Taula 5.1 a la pàgina 92, obtenim la transformada inversa de Laplace de $I(s)$:

$$i(t) = \frac{U}{R} \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$

Es pot veure que aquest resultat coincideix amb l'equació (1.82) de la secció 1.7.1 a la pàgina 25.

5.6 Fraccions parcials

En l'exemple anterior, la funció de variable s que hem hagut de buscar en la Taula 5.1 a la pàgina 92 era força simple, i per tant la seva transformada inversa s'ha obtingut de forma immediata. Més usual, no obstant, és tenir funcions racionals (quocient de dos polinomis) de grau elevat; en aquest cas cal descompondre aquesta funció racional en suma de funcions parcials de grau menor.

S'exposa a continuació la teoria de la descomposició en fraccions parcials:

Sigui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una funció racional, on el grau de $P(x)$ és menor que el de $Q(x)$ i el coeficient del terme de grau més elevat de $Q(x)$ val 1. Si $Q(x)$ té n arrels reals sense multiplicitat: $a_1, \ldots, a_n$, k arrels reals: $b_1, \ldots, b_k$ cadascuna amb la seva multiplicitat: $m_1, \ldots, m_k$, i l arrels complexes conjugades sense multiplicitat: $c_1 \pm \mathrm{j}\, d_1, \ldots, c_l \pm \mathrm{j}\, d_l$, aquest polinomi es pot escriure com el producte següent:

$$Q(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_n)(x - b_1)^{m_1}\cdots(x - b_k)^{m_k}\Big((x - c_1)^2 + d_1^2\Big)\cdots\Big((x - c_l)^2 + d_l^2\Big) \tag{5.21}$$

Les arrels a_i són, de fet, un cas particular de les arrels b_i, amb multiplicitat 1.

A parir de les arrels de $Q(x)$, la funció racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es pot expressar com:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n} + \\
& + \frac{B_{1,1}}{(x - b_1)^{m_1}} + \frac{B_{1,2}}{(x - b_1)^{m_1 - 1}} + \frac{B_{1,3}}{(x - b_1)^{m_1 - 2}} + \cdots + \frac{B_{1,m_1}}{x - b_1} + \\
& + \frac{B_{2,1}}{(x - b_2)^{m_2}} + \frac{B_{2,2}}{(x - b_2)^{m_2 - 1}} + \frac{B_{2,3}}{(x - b_2)^{m_2 - 2}} + \cdots + \frac{B_{2,m_2}}{x - b_2} + \\
& + \cdots + \\
& + \frac{B_{k,1}}{(x - b_k)^{m_k}} + \frac{B_{k,2}}{(x - b_k)^{m_k - 1}} + \frac{B_{k,3}}{(x - b_k)^{m_k - 2}} + \cdots + \frac{B_{k,m_k}}{x - b_k} + \\
& + \frac{C_1(x - c_1) + D_1 d_1}{(x - c_1)^2 + d_1^2} + \frac{C_2(x - c_2) + D_2 d_2}{(x - c_2)^2 + d_2^2} + \cdots + \frac{C_l(x - c_l) + D_l d_l}{(x - c_l)^2 + d_l^2}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Els coeficients A_i, $B_{i,j}$, C_i i D_i, es calculen a partir de les equacions següents:

$$A_i = (x - a_i)\frac{P(x)}{Q(x)}\bigg|_{x=a_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.23a}$$

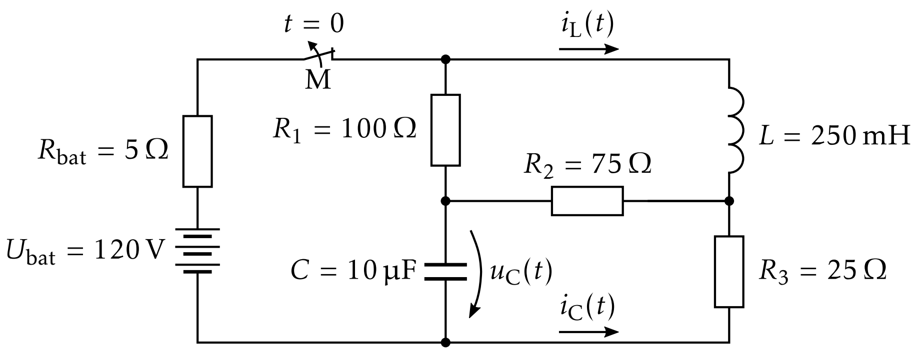
$$B_{i,j} = (x - b_i)^{m_i}\frac{P(x)}{Q(x)}\bigg|_{x=b_i} \qquad (i = 1, \ldots, k; \quad j = 1) \tag{5.23b}$$

$$B_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}x^{j-1}}\left[(x - b_i)^{m_i}\frac{P(x)}{Q(x)}\right]\bigg|_{x=b_i} \qquad (i = 1, \ldots, k; \quad j = 2, \ldots, m_i) \tag{5.23c}$$

$$D_i + \mathrm{j}\, C_i = \frac{1}{d_i}\Big((x - c_i)^2 + d_i^2\Big)\frac{P(x)}{Q(x)}\bigg|_{x=c_i + \mathrm{j}\, d_i} \qquad (i = 1, \ldots, l) \tag{5.23d}$$

Exemple 5.3 Resolució d'un circuit amb condicions inicial no nul·les

El circuit de la figura següent es troba en règim estacionari. En l'instant $t = 0$ obrim l'interruptor M; es tracta de trobar l'evolució del corrent $i_L(t)$, que circula per la inductància L, a partir d'aquest instant.



Donat que abans d'obrir l'interruptor M el circuit ha arribat al règim estacionari, el condensador C estarà totalment carregat i presentarà una impedància infinita al corrent continu originat per la bateria, i la inductància L hi presentarà una impedància nul·la; per tant, en l'instant $t = 0$ els valors inicials $i_L(0)$ i $u_C(0)$ són:

$$
\begin{aligned}
i_L(0) &= \frac{U_{bat}}{R_{bat} + R_3} = \frac{120\,\text{V}}{5\,\Omega + 25\,\Omega} = 4\,\text{A} \\
u_C(0) &= i_L(0)R_3 = 4\,\text{A} \times 25\,\Omega = 100\,\text{V}
\end{aligned}
$$

Un cop obrim l'interruptor M, la bateria i la seva resistència queden desconnectades de les dues malles de la part dreta del circuit; si apliquem la llei de les tensions de Kirchhoff a aquestes dues malles, utilitzant les variables $I_L(s)$, $U_C(s)$ i $I_C(s)$, tenim:

$$
\begin{aligned}
R_1 I_L(s) + sLI_L(s) - Li_L(0) + R_2\big(I_L(s) + I_C(s)\big) &= 0 \\
U_C(s) + R_3 I_C(s) + R_2\big(I_L(s) + I_C(s)\big) &= 0
\end{aligned}
$$

La relació entre $U_C(s)$ i $I_C(s)$ és:

$$
U_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{u_C(0)}{s} \quad \rightarrow \quad I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0)
$$

Si substituïm aquest valor de $I_C(s)$ en les dues equacions inicials i en reordenem els termes, obtenim les dues equacions següents:

$$R_1 I_L(s) + sLI_L(s) + R_2 I_L(s) + sCR_2 U_C(s) = Li_L(0) + CR_2 u_C(0)$$
$$U_C(s) + sCR_3 U_C(s) + R_2 I_L(s) + sCR_2 U_C(s) = CR_3 u_C(0) + CR_2 u_C(0)$$

Agrupem a continuació els termes comuns i substituïm $u_C(0)$ i $i_L(0)$ pels seus valor numèrics:

$$(R_1 + sL + R_2)I_L(s) + sCR_2 U_C(s) = 4L + 100CR_2$$
$$R_2 I_L(s) + (1 + sCR_3 + sCR_2)U_C(s) = 100CR_3 + 100CR_2$$

Aïllem ara $U_C(s)$ en la primera equació:

$$U_C(s) = \frac{4L + 100CR_2 - (R_1 + sL + R_2)I_L(s)}{sCR_2}$$

Substituïm tot seguit aquest valor en la segona equació i aïllem $I_L(s)$:

$$R_2 I_L(s) + (1 + sCR_3 + sCR_2)\frac{4L + 100CR_2 - (R_1 + sL + R_2)I_L(s)}{sCR_2} = 100CR_3 + 100CR_2$$

$$\left(R_2 - \frac{(1 + sCR_3 + sCR_2)(R_1 + sL + R_2)}{sCR_2}\right) I_L(s) =$$

$$= 100C(R_3 + R_2) - \frac{(1 + sCR_3 + sCR_2)(4L + 100CR_2)}{sCR_2}$$

$$I_L(s) = \frac{100sC^2 R_2(R_3 + R_2) - (1 + sCR_3 + sCR_2)(4L + 100CR_2)}{sCR_2^2 - (1 + sCR_3 + sCR_2)(R_1 + sL + R_2)}$$

Si donem valors numèrics a R_1, R_2, R_3, L i C, i realitzem tots els productes i les simplificacions oportunes, obtenim:

$$I_L(s) = \frac{4s + 4300}{s^2 + 1475s + 700000}$$

Hem de descompondre a continuació aquesta funció racional en funcions parcials; comencem doncs per calcular les arrels del polinomi del denominador:

$$s^2 + 1475s + 700000 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{1475}{2} \pm \mathrm{j}\,\frac{75\sqrt{111}}{2}$$

A partir d'aquests valors, la funció racional es pot escriure com:

$$I_{\mathrm{L}}(s) = \frac{4s + 4300}{s^2 + 1475s + 700000} = \frac{C\left(s + \dfrac{1475}{2}\right) + D\dfrac{75\sqrt{111}}{2}}{\left(s + \dfrac{1475}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{75\sqrt{111}}{2}\right)^2}$$

Les constants C i D valen:

$$D + \mathrm{j}\,C = \frac{2}{75\sqrt{111}}(4s + 4300)\bigg|_{s=-\frac{1475}{2}+\mathrm{j}\,\frac{75\sqrt{111}}{2}} = 12\sqrt{\frac{3}{37}} + \mathrm{j}\,4$$

Així doncs, amb $C = 4$ i $D = 12\sqrt{\frac{3}{37}}$, podem expressar el corrent $I_{\mathrm{L}}(s)$ com:

$$I_{\mathrm{L}}(s) = 4 \times \frac{s + \dfrac{1475}{2}}{\left(s + \dfrac{1475}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{75\sqrt{111}}{2}\right)^2} + 12\sqrt{\frac{3}{37}} \times \frac{\dfrac{75\sqrt{111}}{2}}{\left(s + \dfrac{1475}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{75\sqrt{111}}{2}\right)^2}$$

Si ens fixem ara en la Taula 5.1 a la pàgina 92, veiem que la transformada inversa de Laplace del primer terme de $I_{\mathrm{L}}(s)$, es pot identificar amb una funció del tipus $\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t$, i la del segon terme amb una funció del tipus $\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t$, amb $a = \frac{1475}{2}$ i $\omega = \frac{75\sqrt{111}}{2}$.

Per tant, l'expressió temporal del corrent $i_{\mathrm{L}}(t)$ és:

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{L}}(t) &= 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1475}{2}t}\cos\frac{75\sqrt{111}}{2}t + 12\sqrt{\frac{3}{37}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1475}{2}t}\sin\frac{75\sqrt{111}}{2}t = \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1475}{2}t}\left(4\cos\frac{75\sqrt{111}}{2}t + 12\sqrt{\frac{3}{37}}\sin\frac{75\sqrt{111}}{2}t\right) \end{aligned}$$

Finalment, si utilitzem la igualtat trigonomètrica (D.18a), tenim:

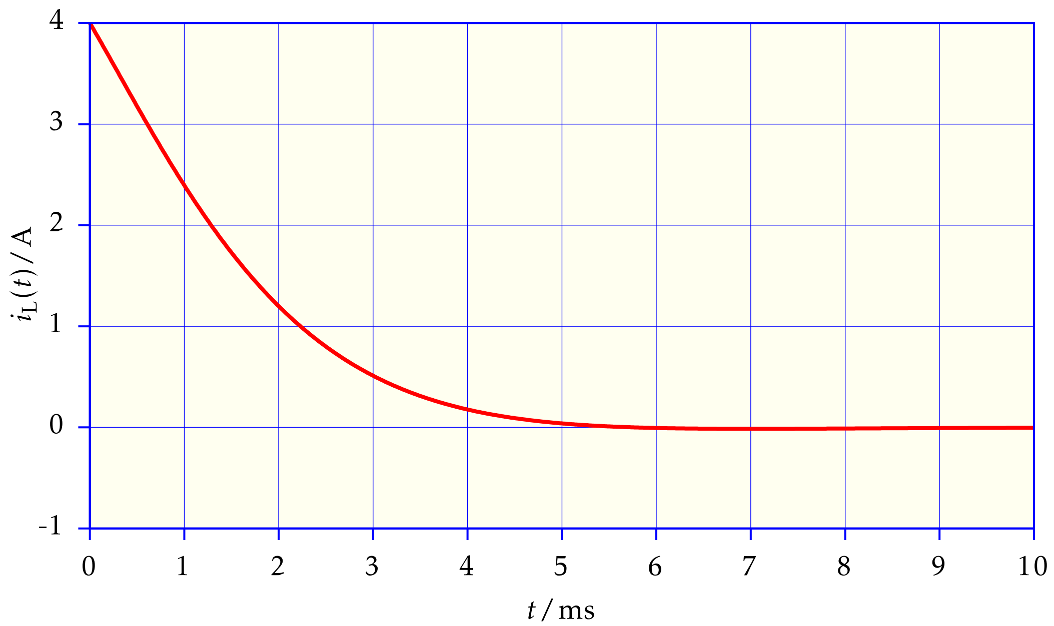
$$i_{\mathrm{L}}(t) = \frac{32}{\sqrt{37}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1475}{2}t}\cos\left(\frac{75\sqrt{111}}{2}t - \arctan\sqrt{\frac{27}{37}}\right)$$

Si en aquesta equació fem $t = 0$, tenim:

$$i_{\mathrm{L}}(0) = \frac{32}{\sqrt{37}}\cos\left(-\arctan\sqrt{\frac{27}{37}}\right) = 4\,\mathrm{A}$$

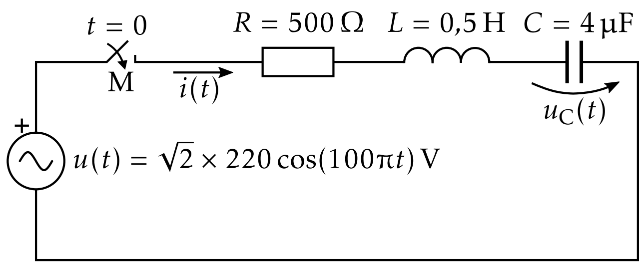
Es comprova que aquest valor compleix amb la condició inicial del corrent $i_{\mathrm{L}}(t)$ que hem calculat a l'inici d'aquest exemple.

Representem a continuació la gràfica d'aquesta funció:



Exemple 5.4 Resolució d'un circuit amb condicions inicial nul·les

El circuit de la figura següent està relaxat. En l'instant $t = 0$ tanquem l'interruptor M; es tracta de trobar l'evolució de la tensió $u_{\mathrm{C}}(t)$ a partir d'aquest instant.



La transformada de Laplace de la tensió $u(t)$ és:

$$U(s) = \sqrt{2} \times 220 \times \frac{s}{s^2 + (100\pi)^2}$$

Un cop tancat l'interruptor M, la relació entre $u_{\mathrm{c}}(t)$ i $u(t)$ en el domini operacional, tenint en compte que totes les condicions inicials són nul·les, és:

$$U_C(s) = \frac{\dfrac{1}{sC}}{R + sL + \dfrac{1}{sC}} U(s) = \frac{\dfrac{1}{CL}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{CL}} U(s)$$

Substituint $U(s)$ per la seva expressió i donant valors numèrics a R, L i C, tenim:

$$U_C(s) = \frac{\sqrt{2} \times 110 \times 10^6 s}{(s^2 + 1000s + 500000)(s^2 + (100\pi)^2)}$$

Calculem a continuació les arrels dels dos polinomis del denominador d'aquesta funció racional:

$$\begin{aligned} s^2 + 1000s + 500000 = 0 \quad &\rightarrow \quad s = -500 \pm \mathrm{j}\, 500 \\ s^2 + (100\pi)^2 = 0 \quad &\rightarrow \quad s = \pm \mathrm{j}\, 100\pi \end{aligned}$$

Així doncs, l'esmentada funció racional es pot escriure com:

$$\begin{aligned} U_C(s) &= \frac{\sqrt{2} \times 110 \times 10^6 s}{(s^2 + 1000s + 500000)(s^2 + (100\pi)^2)} = \\ &= \frac{C_1(s+500) + D_1 500}{(s+500)^2 + 500^2} + \frac{C_2 s + D_2 100\pi}{s^2 + (100\pi)^2} \end{aligned}$$

Les constants C_1, D_1, C_2 i D_2 valen:

$$D_1 + \mathrm{j}\, C_1 = \frac{1}{500} \times \left. \frac{\sqrt{2} \times 110 \times 10^6 s}{s^2 + (100\pi)^2} \right|_{s=-500+\mathrm{j}500} = -358{,}57 - \mathrm{j}240{,}35$$

$$D_2 + \mathrm{j}\, C_2 = \frac{1}{100\pi} \times \left. \frac{\sqrt{2} \times 110 \times 10^6 s}{s^2 + 1000s + 500000} \right|_{s=\mathrm{j}100\pi} = 188{,}16 + \mathrm{j}240{,}35$$

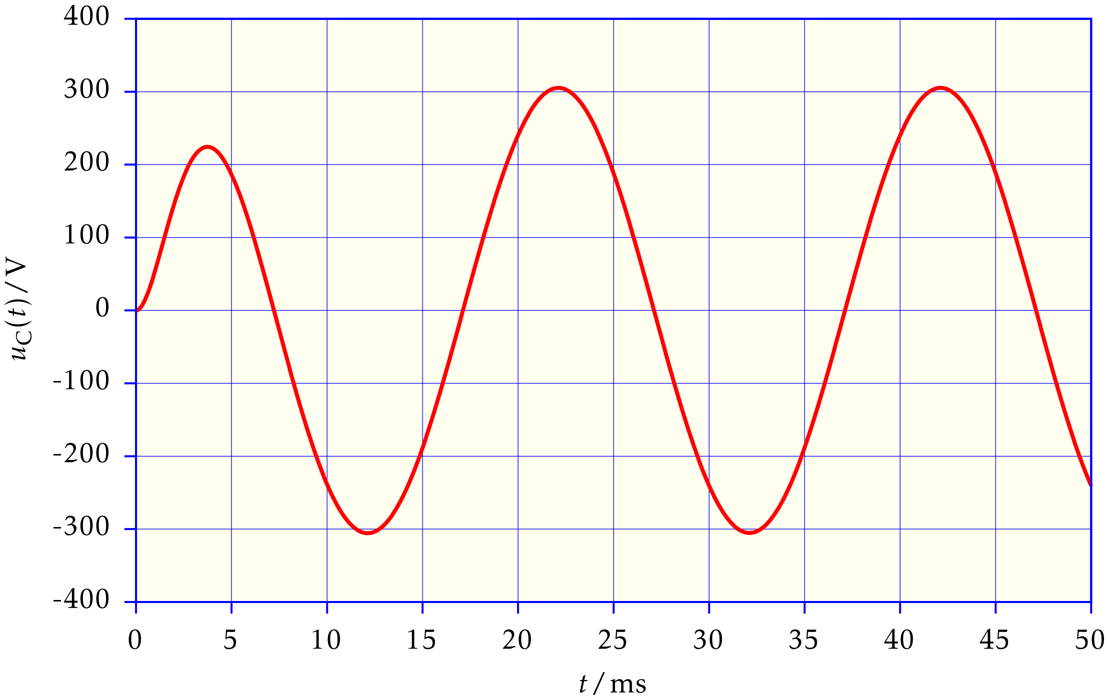
A partir d'aquests valors i utilitzant la Taula 5.1 a la pàgina 92, obtenim l'expressió temporal de la tensió en el condensador $u_C(t)$:

$$u_C(t) = \mathrm{e}^{-500t}(-240{,}35 \cos 500t - 358{,}57 \sin 500t) + 240{,}35 \cos(100\pi t) + 188{,}16 \sin(100\pi t)$$

Utilitzant la igualtat trigonomètrica (D.18a) obtenim finalment:

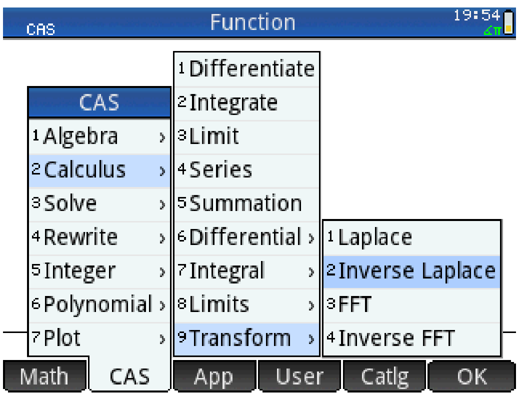
$$u_C(t) = 431{,}67e^{-500t}\cos(500t + 2{,}1613) + 305{,}24\cos(100\pi t - 0{,}6642)$$

Representem a continuació la gràfica d'aquesta funció:

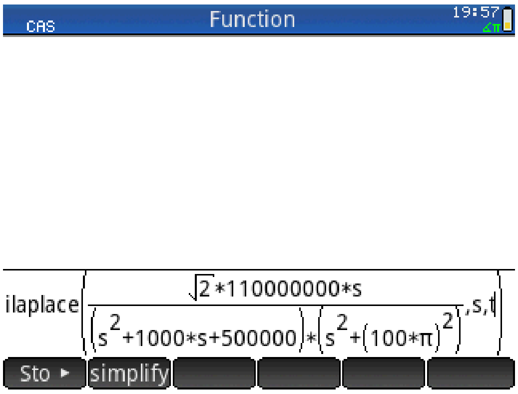


La part més feixuga de la resolució d'aquest exemple és l'obtenció de les fraccions parcials, i la posterior obtenció de l'equació temporal utilitzant la taula 5.1. Aquesta resolució resulta força més fàcil utilitzant la calculadora *HP Prime*; els passos a seguir són els següents:

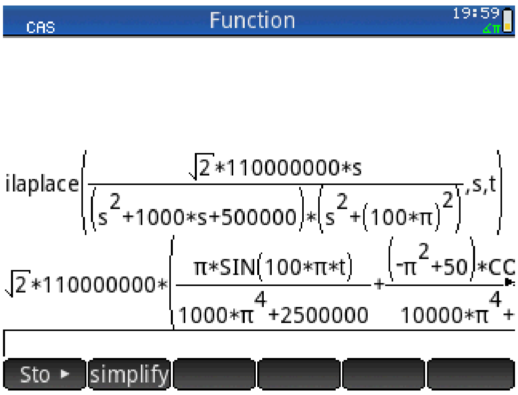
❶ Per començar premem la tecla «computer algebra system», per tal de posar la calculadora en el mode de resolució simbòlic; a continuació premem la tecla i escollim **Inverse Laplace** (funció **ilaplace**).



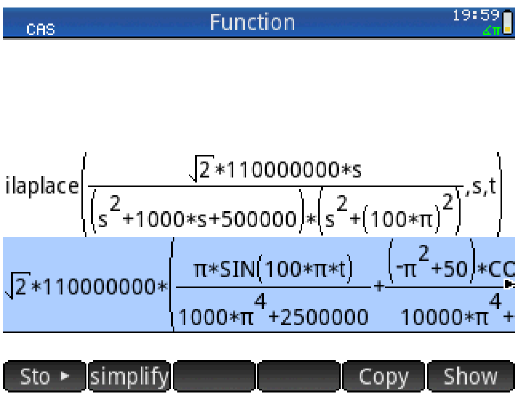
❷ Tot seguit entrem el tres paràmetres que requereix la funció **ilaplace**; el primer és la transformada de Laplace $U_C(s)$, el segon és la variable s utilitzada en aquesta expressió, i el tercer és la variable t que volem que aparegui en la transformada inversa de Laplace que ens donarà aquesta funció com a resultat. Quan la calculadora treballa en el mode de resolució simbòlic cal utilitzar lletres minúscules pels noms de les variables.



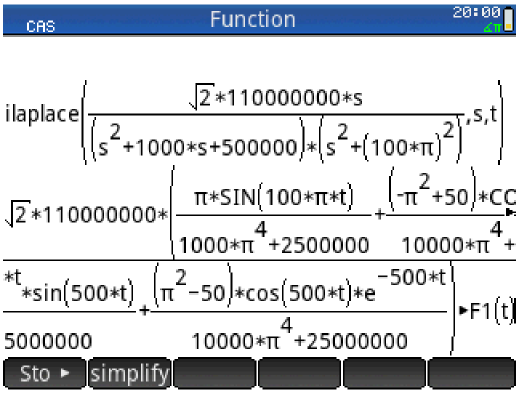
❸ Premem ara la tecla Enter i la calculadora ens dona la solució. L'expressió és força llarga, i per veure'n les parts ocultes només cal marcar-la amb el dit i desplaçar-la horitzontalment.



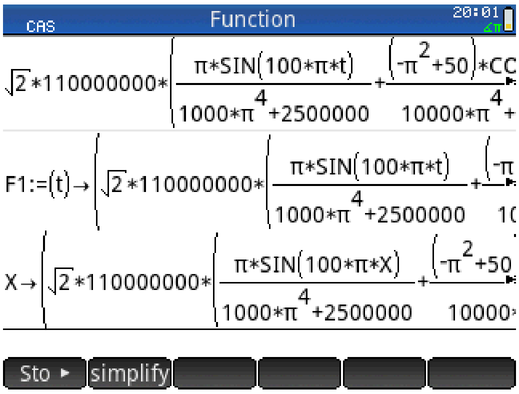
❹ Per poder representar la gràfica d'aquesta funció, hem d'assignar l'expressió trobada a la funció `F1`, alhora que canviem la variable **t** per la variable `X`. El primer pas consisteix en marcar amb el dit l'expressió obtinguda anteriorment.



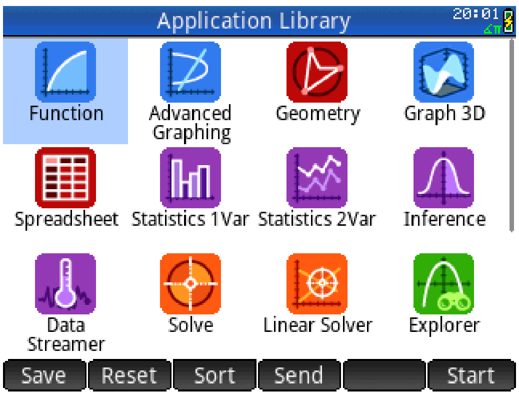
❺ A continuació premem el botó Copy, premem el botó Sto ▶ i escrivim **F1(t)**.



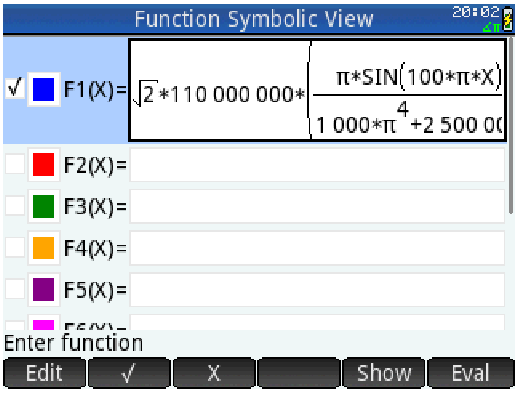
❻ Finalment premem la tecla Enter. La variable **t** queda substituïda per la variable **X** i es crea la funció **F1(X)**.



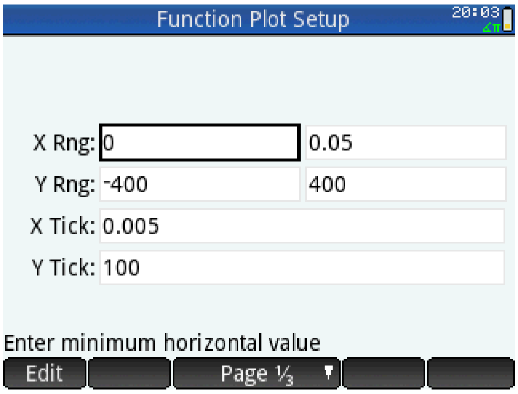
❼ A continuació premem la tecla Apps/Info i seleccionem l'aplicació **Function**.



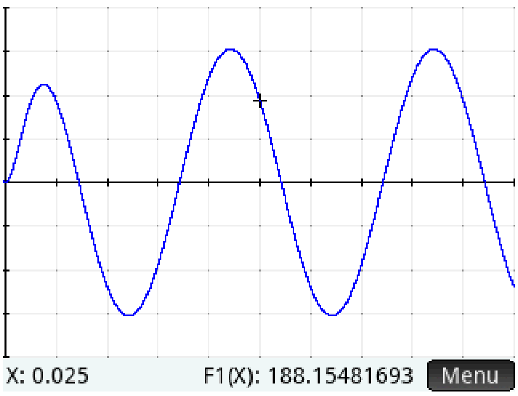
❽ El camp **F1(X)**, com es pot veure, ja conté l'expressió que volem representar amb **X** com a variable, gràcies a les operacions fetes en els passos 4 a 6. La **X** majúscula és l'únic nom de variable que accepta aquesta aplicació.



❾ Ara ja podem dibuixar aquesta funció. Comencem ajustant els paràmetres de la gràfica prement les tecles Shift Plot Setup; fixem els dos valors de **X Rng** a **0** i **0.05** respectivament, els dos valors de **Y Rng** a **-400** i **400** respectivament, el valor de **X Tick** a **0.005**, i el valor de **Y Tick** a **100**.



❿ Finalment premem la tecla Plot Setup i la calculadora ens mostra la gràfica de la funció. Cal verificar prèviament que la calculadora estigui en el mode angular radiants, ja que en cas contrari el dibuix que obtindríem no seria correcte.



Part II

Equips i Components Elèctrics

Capítol 6

Resistències

6.1 Codificació en colors

La codificació en colors de les resistències consisteix en tres o quatre bandes de color, que en determinen el valor òhmic, més una o dues bandes de color addicionals situades una mica separades, per determinar-ne la tolerància i el coeficient de temperatura.

Quan s'utilitzen tres bandes per codificar el valor òhmic, les dues primeres defineixen els dos dígits que formen el valor base i la tercera el factor multiplicador; en el cas d'utilitzar-ne quatre, les tres primeres defineixen els tres dígits que formen el valor base i la quarta el factor multiplicador. Quan hi ha una o dues bandes més a la dreta, i separades de les que defineixen el valor òhmic, la primera indica la tolerància de la resistència, i la segona, si existeix, indica el coeficient de variació de la resistència amb la temperatura.

En la taula següent es presenta la codificació en colors de les resistències.

Taula 6.1 Codificació en colors de les resistències

Color	1r dígit	2n i 3r dígits	Factor multiplicador	Tolerància %	Coeficient de temperatura[a] $\mu\Omega/(\Omega\,K)$
—	—	—	—	20	—
plata	—	—	10^{-2}	10	—
or	—	—	10^{-1}	5	—
negre	—	0	1	—	250
marró	1	1	10	1	100
vermell	2	2	10^{2}	2	50
carabassa	3	3	10^{3}	—	15
groc	4	4	10^{4}	—	25
verd	5	5	10^{5}	0,5	20
blau	6	6	10^{6}	0,25	10
violeta	7	7	10^{7}	0,1	5
gris	8	8	—	0,05	1
blanc	9	9	—	—	—

[a] És més freqüent veure aquest valor expressat en ppm/°C. Ambdues unitats són equivalents: 1 ppm/°C = 1 $\mu\Omega/(\Omega\,K)$.

Fa temps existien també resistències de tolerància 50 %, però avui dia ja no se'n fabriquen. Les resistències de tolerància 20 % s'utilitzen molt poc, i alguns fabricants no les subministren.

Exemple 6.1 Valors de resistències de tres i quatre bandes

Es tracta d'obtenir els valors òhmics i les toleràncies de les dues resistències següents, definides pels colors:

a)  (Blau-Gris-Groc Or)

b)  (Carabassa-Vermell-Groc-Negre Marró)

En el primer cas tenim:

$$\text{a) Blau-Gris-Groc Or} \rightarrow \begin{cases} \text{Resistència}: & 68 \times 10^4\,\Omega = 680\,\mathrm{k}\Omega \\ \text{Tolerància}: & 5\,\% \end{cases}$$

I en el segon cas tenim:

$$\text{b) Carabassa-Vermell-Groc-Negre Marró} \rightarrow \begin{cases} \text{Resistència}: & 324 \times 1\,\Omega = 324\,\Omega \\ \text{Tolerància}: & 1\,\% \end{cases}$$

6.2 Valors estàndard

Els valors de les resistències que es fabriquen estan estandarditzats, i depenent del valor de la tolerància el ventall de valors possibles és més o menys ampli.

En les taules següents es llisten els valors estàndard de les sèries de resistències que existeixen, segons la seva tolerància. Aquests valors estan definits en la norma CEI 60063.

Els valors que es donen estan normalitzats per a la dècada compresa entre 100 Ω i 1000 Ω. Els valors d'altres dècades s'obtenen simplement, multiplicant o dividint els valors de les taules per les corresponents potències de 10.

Taula 6.2 Sèrie E6 – Resistències de tolerància 20 %

100	150	220	330	470	680

Taula 6.3 Sèrie E12 – Resistències de tolerància 10 %

100	120	150	180	220	270	330	390	470	560	680	820

Taula 6.4 Sèrie E24 – Resistències de tolerància 5 %

100	110	120	130	150	160	180	200	220	240	270	300
330	360	390	430	470	510	560	620	680	750	820	910

Taula 6.5 Sèrie E48 – Resistències de tolerància 2 %

100	105	110	115	121	127	133	140	147	154	162	169
178	187	196	205	215	226	237	249	261	274	287	301
316	332	348	365	383	402	422	442	464	487	511	536
562	590	619	649	681	715	750	787	825	866	909	953

Taula 6.6 Sèrie E96 – Resistències de tolerància 1 %

100	102	105	107	110	113	115	118	121	124	127	130
133	137	140	143	147	150	154	158	162	165	169	174
178	182	187	191	196	200	205	210	215	221	226	232
237	243	249	255	261	267	274	280	287	294	301	309
316	324	332	340	348	357	365	374	383	392	402	412
422	432	442	453	464	475	487	499	511	523	536	549
562	576	590	604	619	634	649	665	681	698	715	732
750	768	787	806	825	845	866	887	909	931	953	976

Taula 6.7 Sèrie E192 – Resistències de toleràncies 0,5 %, 0,25 % i 0,1 %

100	101	102	104	105	106	107	109	110	111	113	114
115	117	118	120	121	123	124	126	127	129	130	132
133	135	137	138	140	142	143	145	147	149	150	152
154	156	158	160	162	164	165	167	169	172	174	176
178	180	182	184	187	189	191	193	196	198	200	203
205	208	210	213	215	218	221	223	226	229	232	234
237	240	243	246	249	252	255	258	261	264	267	271
274	277	280	284	287	291	294	298	301	305	309	312
316	320	324	328	332	336	340	344	348	352	357	361
365	370	374	379	383	388	392	397	402	407	412	417
422	427	432	437	442	448	453	459	464	470	475	481
487	493	499	505	511	517	523	530	536	542	549	556
562	569	576	583	590	597	604	612	619	626	634	642
649	657	665	673	681	690	698	706	715	723	732	741
750	759	768	777	787	796	806	816	825	835	845	856
866	876	887	898	909	920	931	942	953	965	976	988

6.3 Potència

Les resistències tenen a més del valor òhmic, un altre paràmetre assignat: la potència màxima P_R que poden dissipar.

Els valors usuals de potència són: 1/4 W, 1/2 W, 1 W, 2 W, 5 W i 25 W.

Per tal de no fer malbé una resistència, cal escollir un valor de potència superior al màxim que la resistència haurà de dissipar. Per tant, si el valor de la resistència és R i la tensió que haurà de suportar és U_R, caldrà escollir un valor de potència P_R que compleixi:

$$P_R > \frac{U_R^2}{R} \tag{6.1}$$

Capítol 7

Cables

7.1 Introducció

Es tracten en aquest capítol qüestions relatives als cables elèctrics.

7.2 Resistència

7.2.1 Resistència d'un conductor

La resistència R d'un conductor depèn de la resistivitat ρ del material, i de la llargada l i la secció S del conductor.

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{7.1}$$

La resistivitat no és un valor constant sinó que depèn de la temperatura, a major temperatura major resistivitat. Coneixent la resistivitat ρ_1 a una temperatura T_1 es pot calcular la resistivitat ρ_2 a una altra temperatura T_2, a partir del coeficient de variació de la resistivitat amb la temperatura α_1 donat a la temperatura T_1.

$$\rho_2 = \rho_1[1 + \alpha_1(T_2 - T_1)] \tag{7.2}$$

En la Taula 7.1 es donen valors de resistivitat i de coeficients de variació de la resistivitat amb la temperatura a 20 °C i a 0 °C, de diversos materials.

Taula 7.1 Paràmetres elèctrics d'alguns materials

Material	$\rho_{20\,°\mathrm{C}}/(\Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m})$	$\alpha_{20\,°\mathrm{C}}/°\mathrm{C}^{-1}$	$\alpha_{0\,°\mathrm{C}}/°\mathrm{C}^{-1}$
Alumini	0,028 25	0,003 91	0,004 24
Coure	0,017 23	0,003 93	0,004 27
Plata	0,016 45	0,003 80	0,004 12

La resistència així calculada és vàlida quan el corrent que circula pel cable és corrent continu.

Quan el corrent que circula pel cable és corrent altern cal tenir en compte l'efecte pel·licular, el qual provoca un augment de la resistència causat perquè el corrent tendeix a circular més per la zona perifèrica del conductor que no pas per la zona central; l'efecte és important per a valors elevats de la secció del conductor o de la freqüència del corrent.

La resistència efectiva es troba a partir de la resistència calculada anteriorment per a corrent continu, i d'un factor k que té en compte l'efecte pel·licular.

$$R_{\text{efectiva}} = kR \tag{7.3}$$

En la Taula 7.2 es donen valors de k per a conductors de coure i d'alumini, i per a diversos valors del producte de la secció del conductor per la freqüència del corrent. Aquests valors s'han obtingut de la referència [18], pàgina 114.

Taula 7.2 Valors de k pel càlcul de la resistència efectiva

Secció × Freqüència	k	
mm^2 Hz	Cu	Al
5000	1,000	1,000
10 000	1,008	1,000
15 000	1,025	1,006
20 000	1,045	1,015
25 000	1,070	1,026
30 000	1,096	1,040
35 000	1,126	1,053
40 000	1,158	1,069
45 000	1,195	1,085
50 000	1,230	1,104
75 000	1,433	1,206
100 000	1,622	1,330

7.2.2 Resistència d'un cable

La resistència d'un cable R_{Cable} depèn del nombre de conductors per fase n (o per pol, en corrent continu), de la resistència de cada conductor $R_{\text{Conductor}}$ i del tipus de tensió elèctrica a la qual estigui sotmès el cable (monofàsica, trifàsica, contínua, etc.).

Corrent continu o altern monofàsic

$$R_{\text{Cable}} = 2\,\frac{R_{\text{Conductor}}}{n} \tag{7.4}$$

El valor multiplicatiu 2, prové del fet que cal tenir en compte tant el conductor d'anada com el de tornada.

Corrent altern trifàsic equilibrat

$$R_{\text{Cable}} = \frac{R_{\text{Conductor fase}}}{n} \tag{7.5}$$

Atès que no circula corrent pel neutre, la seva resistència no té cap influència.

Corrent altern trifàsic desequilibrat

$$R_{\text{Cable fase}} = \frac{R_{\text{Conductor fase}}}{n_{\text{fase}}} \qquad R_{\text{Cable neutre}} = \frac{R_{\text{Conductor neutre}}}{n_{\text{neutre}}} \tag{7.6}$$

En aquest cas cal tenir en compte que els corrents que circulen per les fase i pel neutre són diferents.

7.3 Caiguda de tensió

La caiguda de tensió ΔU en un cable es defineix com la diferència entre els mòduls de les tensions a l'origen $|\underline{U}_{\mathrm{O}}|$ i al final $|\underline{U}_{\mathrm{F}}|$ del cable.

$$\Delta U \equiv |\underline{U}_{\mathrm{O}}| - |\underline{U}_{\mathrm{F}}| \tag{7.7}$$

7.3.1 Caiguda de tensió en corrent continu

En corrent continu la caiguda de tensió depèn del corrent I que circula pel cable i de la resistència del cable mateix, calculada segons l'equació (7.4).

$$\Delta U = I R_{\text{Cable}} \tag{7.8}$$

7.3.2 Caiguda de tensió en corrent altern

En corrent altern la caiguda de tensió depèn del corrent $\underline{I}$ que circula pel cable, de la resistència i la reactància del cable mateix, i del factor de potència $\cos\varphi$. El diagrama fasorial d'aquestes magnituds es pot veure en la Figura 7.1.

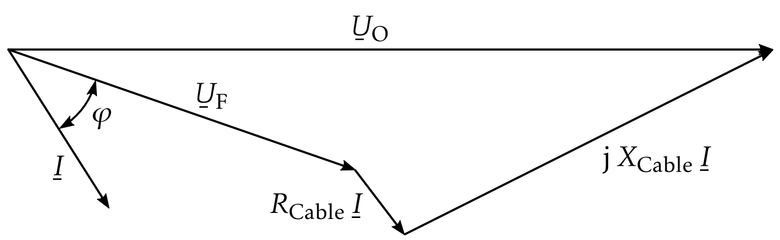


Figura 7.1 Caiguda de tensió en corrent altern

Quan es tracta de corrent monofàsic, la resistència del cable es calcula segons l'equació (7.4); la reactància del cable X_{Cable} es calcula de forma anàloga amb la mateixa equació, a partir de la reactància dels conductors $X_{\text{Conductor}}$.

Pel que fa al corrent trifàsic, se suposa equilibrat i per tant s'utilitza l'equació (7.5) per calcular la resistència del cable R_{Cable} (i de forma anàloga la reactància X_{Cable}). Addicionalment, els corrents fan referència als corrents de fase i les tensions a les tensions fase–neutre; l'angle φ és per tant l'angle entre la tensió final fase–neutre i el corrent de fase.

Disposem en aquest cas de dues equacions, una d'exacta i una altra d'aproximada (per a valors elevats de $\cos\varphi$).

$$\Delta U = |\underline{I}|\left(R_{\text{Cable}}\cos\varphi + X_{\text{Cable}}\sin\varphi\right) + |\underline{U}_{\text{O}}| - \sqrt{|\underline{U}_{\text{O}}|^2 - |\underline{I}|^2\left(X_{\text{Cable}}\cos\varphi - R_{\text{Cable}}\sin\varphi\right)^2} \tag{7.9a}$$

$$\Delta U \approx |\underline{I}|\left(R_{\text{Cable}}\cos\varphi + X_{\text{Cable}}\sin\varphi\right) \qquad \text{si } \cos\varphi \gtrapprox 0{,}8 \tag{7.9b}$$

Exemple 7.1 Càlcul de la caiguda de tensió en un sistema trifàsic

Es tracta de calcular la caiguda de tensió en un sistema trifàsic on $|\underline{U}_{\text{O}}| = 380\,\text{V}$ (fase–fase), $|\underline{I}| = 630\,\text{A}$ i $\cos\varphi = 0{,}87\text{(i)}$. La unió entre els extrems origen i final es fa amb tres cables unipolars en paral·lel de $240\,\text{mm}^2$ de secció cadascun i 400 m de llargada; els valors per fase de resistència i inductància són $0{,}095\,\Omega/\text{km}$ i $0{,}102\,\Omega/\text{km}$ respectivament.

A partir de l'equació (7.5) calculem els valors de R_{Cable} i de X_{Cable}:

$$R_{\text{Cable}} = \frac{0{,}095\,\Omega/\text{km} \times 0{,}4\,\text{km}}{3} = 0{,}0127\,\Omega$$

$$X_{\text{Cable}} = \frac{0{,}102\,\Omega/\text{km} \times 0{,}4\,\text{km}}{3} = 0{,}0136\,\Omega$$

Obtenim a continuació el valor de $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - 0{,}87^2} = 0{,}49$$

Calculem en primer lloc la caiguda de tensió de forma aproximada utilitzant l'equació (7.9b):

$$\Delta U \approx 630\,\text{A} \times (0{,}0127\,\Omega \times 0{,}87 + 0{,}0136\,\Omega \times 0{,}49) = 11{,}16\,\text{V}$$

Valor que en tant per cent respecte la tensió a l'origen representa:

$$\Delta u = \frac{11{,}16\,\text{V}}{\frac{380}{\sqrt{3}}\,\text{V}} \times 100 = 5{,}09\,\%$$

Finalment, calculem la caiguda de tensió exacta utilitzant l'equació (7.9a):

$$\Delta U = 630\,\mathrm{A} \times (0{,}0127\,\Omega \times 0{,}87 + 0{,}0136\,\Omega \times 0{,}49) + \frac{380}{\sqrt{3}}\,\mathrm{V} -$$

$$- \sqrt{\left(380/\sqrt{3}\,\mathrm{V}\right)^2 - (630\,\mathrm{A})^2 \times (0{,}0136\,\Omega \times 0{,}87 - 0{,}0127\,\Omega \times 0{,}49)^2} = 11{,}19\,\mathrm{V}$$

Valor que en tant per cent respecte la tensió a l'origen representa:

$$\Delta u = \frac{11{,}19\,\mathrm{V}}{\frac{380}{\sqrt{3}}\,\mathrm{V}} \times 100 = 5{,}10\,\%$$

7.4 Capacitat tèrmica en curtcircuit

Quan hi ha un curtcircuit en un cable, tot el calor generat no es transmet a l'exterior en els instants inicials sinó que s'acumula en la massa del conductor, incrementant-ne la temperatura (procés adiabàtic). En aquestes condicions, la norma CEI 60724 dona la següent equació per a cables de tensió assignada d'1 kV i 3 kV:

$$I_{cc}^2\, t_{cc} = K^2 S^2 \ln \frac{\beta + \theta_f}{\beta + \theta_i} \tag{7.10}$$

Amb:

- $\boldsymbol{I_{cc}}$ Corrent de curtcircuit
- $\boldsymbol{t_{cc}}$ Temps màxim que pot durar el curtcircuit sense que es malmeti el cable
- $\boldsymbol{K}$ Paràmetre que depèn del material del conductor
- $\boldsymbol{S}$ Secció del cable
- $\boldsymbol{\beta}$ Invers del coeficient de variació de la resistivitat amb la temperatura ($\beta = 1/\alpha$)
- $\boldsymbol{\theta_i}$ Temperatura inicial del curtcircuit (depèn del material de l'aïllament del conductor)
- $\boldsymbol{\theta_f}$ Temperatura final del curtcircuit (depèn del material de l'aïllament del conductor)

La mateixa norma CEI 60724 dona valors per a K, β, θ_i i θ_f per a diferents materials del conductor i de l'aïllament, arribant finalment a la fórmula següent, la qual utilitza el paràmetre C:

$$I_{cc}/\mathrm{A} = C\, \frac{S/\mathrm{mm}^2}{\sqrt{t_{cc}/\mathrm{s}}} \tag{7.11}$$

En la Taula 7.3 a la pàgina següent es donen valors de C per a diferents materials del conductor i de l'aïllament, segons la norma CEI 60724.

Taula 7.3 Valors de C pel càlcul de curtcircuits en cables

Material del conductor	C, segons el material de l'aïllament	
	PVC	EPR i XLPE
Cu	115	143
Al	76	94

Exemple 7.2 Càlcul de la capacitat tèrmica d'un cable

Es tracta de calcular el temps màxim que un cable de coure de 50 mm^2 amb aïllament d'EPR, pot suportar un corrent de curtcircuit de 15 kA.

A partir de la Taula 7.3 tenim: $C = 143$. Utilitzant l'equació (7.11) calculem el temps màxim demanat:

$$15\,000\,\mathrm{A} = 143 \times \frac{50\,\mathrm{mm}^2}{\sqrt{t_{cc}/\mathrm{s}}} \quad \rightarrow \quad t_{cc} = \left(143 \times \frac{50\,\mathrm{mm}^2}{15\,000\,\mathrm{A}}\right)^2 = 0{,}23\,\mathrm{s}$$

7.5 Conversió entre unitats americanes i unitats SI

7.5.1 «Mils» (mil), «circular mils» (cmil o CM) i «thousand circular mils» (kcmil o MCM)

Les definicions d'aquestes tres unitats utilitzades en la mesura de diàmetres i seccions de conductors són:[1]

$$1\ \mathrm{mil} \equiv \text{Una mil·lèsima de polsada} \tag{7.12}$$

$$1\ \mathrm{cmil} = 1\ \mathrm{CM} \equiv \text{Àrea d'un cercle de diàmetre igual a 1 mil} \tag{7.13}$$

$$1\ \mathrm{kcmil} = 1\ \mathrm{MCM} \equiv 1000\ \mathrm{cmil} = 1000\ \mathrm{CM} \tag{7.14}$$

Es donen a continuació algunes conversions d'aquestes unitats:

$$1\ \mathrm{mil} = 10^{-3}\ \mathrm{in} \tag{7.15}$$

$$1\ \mathrm{mil} = 10^{-3}\ \mathrm{in} \times \frac{25{,}4\ \mathrm{mm}}{1\ \mathrm{in}} = 25{,}4 \times 10^{-3}\ \mathrm{mm} \tag{7.16}$$

$$1\ \mathrm{cmil} = \frac{\pi}{4}\ \mathrm{mil}^2 \approx 0{,}785\,398\ \mathrm{mil}^2 \tag{7.17}$$

$$1\ \mathrm{cmil} = \frac{\pi}{4} \times 10^{-6}\ \mathrm{in}^2 \approx 0{,}785\,398 \times 10^{-6}\ \mathrm{in}^2 \tag{7.18}$$

$$1\ \mathrm{cmil} = \frac{\pi}{4} \times 10^{-6}\ \mathrm{in}^2 \times \frac{645{,}16\ \mathrm{mm}^2}{1\ \mathrm{in}^2} \approx 506{,}7075 \times 10^{-6}\ \mathrm{mm}^2 \tag{7.19}$$

$$1\ \mathrm{kcmil} = 785{,}398\ \mathrm{mil}^2 = 0{,}785\,398 \times 10^{-3}\ \mathrm{in}^2 \approx 0{,}506\,707\,5\ \mathrm{mm}^2 \tag{7.20}$$

[1] Actualment són molt més usats els símbols cmil i kcmil, que no pas els seus equivalents respectius CM i MCM.

Una relació útil entre diàmetres i seccions és la següent: la secció S d'un cercle expressada en cmil és igual al quadrat del diàmetre d del cercle expressat en mil.

$$S/\mathrm{cmil} = (d/\mathrm{mil})^2 \tag{7.21}$$

En la Taula 7.4 es relacionen els diàmetres i seccions en diverses unitats, dels conductors usualment disponibles compresos entre 2000 kcmil i 250 kcmil.

Taula 7.4 Dimensions de cables definits en kcmil

Secció			Diàmetre		
kcmil	in^2	mm^2	mil	in	mm
2000	1,570 796	1013,4150	1414,213 56	1,414 213 6	35,921 02
1750	1,374 447	886,7381	1322,875 66	1,322 875 7	33,601 04
1600	1,256 637	810,7320	1264,911 06	1,264 911 1	32,128 74
1500	1,178 097	760,0612	1224,744 87	1,224 744 9	31,108 52
1250	0,981 748	633,3843	1118,033 99	1,118 034 0	28,398 06
1000	0,785 398	506,7075	1000,000 00	1,000 000 0	25,400 00
800	0,628 319	405,3660	894,427 19	0,894 427 2	22,718 45
750	0,589 049	380,0306	866,025 40	0,866 025 4	21,997 05
700	0,549 779	354,6952	836,660 03	0,836 660 0	21,251 16
600	0,471 239	304,0245	774,596 67	0,774 596 7	19,674 76
500	0,392 699	253,3537	707,106 78	0,707 106 8	17,960 51
450	0,353 429	228,0184	670,820 39	0,670 820 4	17,038 84
400	0,314 159	202,6830	632,455 53	0,632 455 5	16,064 37
350	0,274 889	177,3476	591,607 98	0,591 608 0	15,026 84
300	0,235 619	152,0122	547,722 56	0,547 722 6	13,912 15
250	0,196 350	126,6769	500,000 00	0,500 000 0	12,700 00

D'aquesta taula es pot extreure la següent relació aproximada entre una secció S expressada en mm^2 i la mateixa secció S expressada en kcmil:

$$S/\mathrm{mm^2} \approx \frac{S/\mathrm{kcmil}}{2} \tag{7.22}$$

7.5.2 «American Wire Gauge» (AWG)

L'«American Wire Gauge», anomenat també «Brown & Sharp Gauge», és un sistema de numeració de conductors circulars segons el seu diàmetre. A cada número AWG li correspon un valor de diàmetre; els successius diàmetres formen una progressió geomètrica descendent (en augmentar el número AWG disminueix el diàmetre).

La raó d'aquesta progressió geomètrica s'obté de la següent consideració: hi ha dos valors de referència: 36 AWG, el qual té assignat un diàmetre de 5 mil, i 0000 AWG, el qual té assignat un diàmetre de 460 mil. Entre aquest dos valors de referència hi ha una diferencia de 39 unitats (vegeu la Taula 7.5 a la pàgina 125), i per tant, sent r_d la raó de diàmetres buscada, tenim:

$$460\,\text{mil} \times r_\text{d}^{39} = 5\,\text{mil} \quad \rightarrow \quad r_\text{d} = \left(\frac{5\,\text{mil}}{460\,\text{mil}}\right)^{1/39} = \left(\frac{1}{92}\right)^{1/39} = 92^{-1/39} \tag{7.23}$$

En ser la secció d'un conductor proporcional al quadrat del seu diàmetre, les seccions dels successius números AWG formen una progressió geomètrica descendent de raó r_S igual a:

$$r_\text{S} = r_\text{d}^2 = 92^{-2/39} \tag{7.24}$$

Finalment, en ser la resistència d'un conductor inversament proporcional a la seva secció, les resistències dels successius números AWG formen una progressió geomètrica ascendent de raó r_R igual a:

$$r_\text{R} = \frac{1}{r_\text{S}} = 92^{2/39} \tag{7.25}$$

A partir d'aquestes raons, i coneixent el diàmetre d, la secció S i la resistència R d'un número AWG n, podem calcular aquests tres paràmetres per a un altre número AWG, k unitats posterior o k unitats anterior:

$$\begin{array}{rlll} \text{AWG:} & n & n+k & n-k \\ \text{Diàmetre:} & d & d\,92^{-k/39} & d\,92^{k/39} \\ \text{Secció:} & S & S\,92^{-2k/39} & S\,92^{2k/39} \\ \text{Resistència:} & R & R\,92^{2k/39} & R\,92^{-2k/39} \end{array} \tag{7.26}$$

Per a alguns valors particulars de k es compleixen de forma aproximada les següents relacions:

$k = 6$ En augmentar en 6 unitats un número AWG, el diàmetre es divideix per 2 ($92^{-6/39} \approx 0{,}5$).

$k = -6$ En disminuir en 6 unitats un número AWG, el diàmetre es multiplica per 2 ($92^{6/39} \approx 2$).

$k = 20$ En augmentar en 20 unitats un número AWG, el diàmetre es divideix per 10 ($92^{-20/39} \approx 0{,}1$).

$k = -20$ En disminuir en 20 unitats un número AWG, el diàmetre es multiplica per 10 ($92^{20/39} \approx 10$).

$k = 3$ En augmentar en 3 unitats un número AWG, la secció es divideix per 2 ($92^{-2\times3/39} \approx 0{,}5$) i la resistència es multiplica per 2 ($92^{2\times3/39} \approx 2$).

$k = -3$ En disminuir en 3 unitats un número AWG, la secció es multiplica per 2 ($92^{2\times3/39} \approx 2$) i la resistència es divideix per 2 ($92^{-2\times3/39} \approx 0{,}5$).

$k = 10$ En augmentar en 10 unitats un número AWG, la secció es divideix per 10 ($92^{-2\times10/39} \approx 0{,}1$) i la resistència es multiplica per 10 ($92^{2\times10/39} \approx 10$).

$k = -10$ En disminuir en 10 unitats un número AWG, la secció es multiplica per 10 ($92^{2\times10/39} \approx 10$) i la resistència es divideix per 10 ($92^{-2\times10/39} \approx 0{,}1$).

En la Taula 7.5 a la pàgina següent es relacionen els diàmetres i seccions en diverses unitats dels conductors compresos entre 0000 AWG i 40 AWG.

Taula 7.5 Dimensions de cables AWG

Cable	Diàmetre			Secció		
AWG	mil	in	mm	cmil	in^2	mm^2
0000	460,000	0,460 000	11,6840	211 600,000	$1{,}662 \times 10^{-1}$	107,219 303
000	409,642	0,409 642	10,4049	167 806,429	$1{,}318 \times 10^{-1}$	85,028 773
00	364,797	0,364 797	9,2658	133 076,548	$1{,}045 \times 10^{-1}$	67,430 882
0	324,861	0,324 861	8,2515	105 534,501	$8{,}289 \times 10^{-2}$	53,475 121
1	289,297	0,289 297	7,3481	83 692,664	$6{,}573 \times 10^{-2}$	42,407 699
2	257,626	0,257 626	6,5437	66 371,300	$5{,}213 \times 10^{-2}$	33,630 834
3	229,423	0,229 423	5,8273	52 634,834	$4{,}134 \times 10^{-2}$	26,670 464
4	204,307	0,204 307	5,1894	41 741,321	$3{,}278 \times 10^{-2}$	21,150 639
5	181,941	0,181 941	4,6213	33 102,372	$2{,}600 \times 10^{-2}$	16,773 220
6	162,023	0,162 023	4,1154	26 251,375	$2{,}062 \times 10^{-2}$	13,301 768
7	144,285	0,144 285	3,6649	20 818,287	$1{,}635 \times 10^{-2}$	10,548 782
8	128,490	0,128 490	3,2636	16 509,652	$1{,}297 \times 10^{-2}$	8,365 564
9	114,424	0,114 424	2,9064	13 092,749	$1{,}028 \times 10^{-2}$	6,634 194
10	101,897	0,101 897	2,5882	10 383,022	$8{,}155 \times 10^{-3}$	5,261 155
11	90,742	0,090 742	2,3048	8234,111	$6{,}467 \times 10^{-3}$	4,172 286
12	80,808	0,080 808	2,0525	6529,947	$5{,}129 \times 10^{-3}$	3,308 773
13	71,962	0,071 962	1,8278	5178,483	$4{,}067 \times 10^{-3}$	2,623 976
14	64,084	0,064 084	1,6277	4106,724	$3{,}225 \times 10^{-3}$	2,080 908
15	57,068	0,057 068	1,4495	3256,780	$2{,}558 \times 10^{-3}$	1,650 235
16	50,821	0,050 821	1,2908	2582,744	$2{,}028 \times 10^{-3}$	1,308 696
17	45,257	0,045 257	1,1495	2048,209	$1{,}609 \times 10^{-3}$	1,037 843
18	40,303	0,040 303	1,0237	1624,304	$1{,}276 \times 10^{-3}$	0,823 047
19	35,891	0,035 891	0,9116	1288,131	$1{,}012 \times 10^{-3}$	0,652 706
20	31,961	0,031 961	0,8118	1021,535	$8{,}023 \times 10^{-4}$	0,517 619
21	28,462	0,028 462	0,7229	810,114	$6{,}363 \times 10^{-4}$	0,410 491
22	25,347	0,025 347	0,6438	642,449	$5{,}046 \times 10^{-4}$	0,325 534
23	22,572	0,022 572	0,5733	509,486	$4{,}001 \times 10^{-4}$	0,258 160
24	20,101	0,020 101	0,5106	404,040	$3{,}173 \times 10^{-4}$	0,204 730
25	17,900	0,017 900	0,4547	320,419	$2{,}517 \times 10^{-4}$	0,162 359
26	15,941	0,015 941	0,4049	254,104	$1{,}996 \times 10^{-4}$	0,128 756
27	14,196	0,014 196	0,3606	201,513	$1{,}583 \times 10^{-4}$	0,102 108
28	12,641	0,012 641	0,3211	159,807	$1{,}255 \times 10^{-4}$	0,080 976
29	11,258	0,011 258	0,2859	126,733	$9{,}954 \times 10^{-5}$	0,064 217
30	10,025	0,010 025	0,2546	100,504	$7{,}894 \times 10^{-5}$	0,050 926
31	8,928	0,008 928	0,2268	79,703	$6{,}260 \times 10^{-5}$	0,040 386
32	7,950	0,007 950	0,2019	63,207	$4{,}964 \times 10^{-5}$	0,032 028
33	7,080	0,007 080	0,1798	50,126	$3{,}937 \times 10^{-5}$	0,025 399
34	6,305	0,006 305	0,1601	39,752	$3{,}122 \times 10^{-5}$	0,020 142
35	5,615	0,005 615	0,1426	31,524	$2{,}476 \times 10^{-5}$	0,015 974
36	5,000	0,005 000	0,1270	25,000	$1{,}963 \times 10^{-5}$	0,012 668
37	4,453	0,004 453	0,1131	19,826	$1{,}557 \times 10^{-5}$	0,010 046
38	3,965	0,003 965	0,1007	15,723	$1{,}235 \times 10^{-5}$	0,007 967

(continua a la pàgina següent)

Taula 7.5 Dimensions de cables AWG (*ve de la pàgina anterior*)

Cable	Diàmetre			Secció		
AWG	mil	in	mm	cmil	in^2	mm^2
39	3,531	0,003 531	0,0897	12,469	$9{,}793 \times 10^{-6}$	0,006 318
40	3,145	0,003 145	0,0799	9,888	$7{,}766 \times 10^{-6}$	0,005 010

Es donen a continuació les equacions per passar directament d'un número AWG a la seva secció S equivalent expressada en mm^2, i al seu diàmetre d equivalent expressat en mm.

$$S/\mathrm{mm}^2 = \frac{\pi \times 25{,}4^2 \times 460^2}{4 \times 10^6 \times 92^{\frac{2(\mathrm{AWG}+3)}{39}}} = \frac{\pi \times 25{,}4^2 \times 460^2}{4 \times 10^6 \times 92^{6/39} \times 92^{\mathrm{AWG}/19{,}5}} \approx \frac{53{,}475\,120\,732\,1}{92^{\mathrm{AWG}/19{,}5}} \tag{7.27}$$

$$d/\mathrm{mm} = \sqrt{\frac{25{,}4^2 \times 460^2}{10^6 \times 92^{\frac{2(\mathrm{AWG}+3)}{39}}}} = \frac{25{,}4 \times 460}{10^3 \times 92^{3/39} \times 92^{\mathrm{AWG}/39}} \approx \frac{8{,}251\,462\,802\,17}{92^{\mathrm{AWG}/39}} \tag{7.28}$$

En aquestes dues equacions cal utilitzar els valors -1, -2 i -3 pels números 00 AWG, 000 AWG i 0000 AWG respectivament.

Exemple 7.3 Secció en mm^2 d'un conductor AWG

Es tracte de calcular la secció S en mm^2 d'un conductor 14 AWG.

Utilitzant l'equació (7.27) tenim:

$$S = \frac{53{,}475\,120\,732\,1}{92^{14/19{,}5}} = 2{,}1\ \mathrm{mm}^2$$

Es donen a continuació dues equacions que poden considerar-se les inverses de les equacions (7.27) i (7.28), ja que ens permeten trobar el número AWG aproximat, corresponent a una secció S donada en mm^2 o a un diàmetre d donat en mm:

$$\mathrm{AWG} = \frac{19{,}5}{\ln 92} \times \ln \frac{\pi \times 25{,}4^2 \times 460^2}{4 \times 10^6 \times 92^{6/39} \times S/\mathrm{mm}^2} \approx 4{,}312\,452\,842\,00 \times \ln \frac{53{,}475\,120\,732\,1}{S/\mathrm{mm}^2} \tag{7.29}$$

$$\mathrm{AWG} = \frac{39}{\ln 92} \times \ln \frac{25{,}4 \times 460}{10^3 \times 92^{3/39} \times d/\mathrm{mm}} \approx 8{,}624\,905\,683\,99 \times \ln \frac{8{,}251\,462\,802\,17}{d/\mathrm{mm}} \tag{7.30}$$

Aquestes dues equacions ens donaran en general un valor decimal que caldrà arrodonir al valor enter més proper.

Si obtenim com a resultat els números -1, -2 o -3, cal recordar que aquests valors equivalen als números 00 AWG, 000 AWG i 0000 AWG respectivament. Si s'obtenen números més negatius (-4, -5, -6, ...) això ens indica que no hi ha cap número AWG corresponent a la nostra secció o diàmetre, ja que el màxim valor possible és 0000 AWG.

Exemple 7.4 Número AWG corresponent a una secció en mm^2

Es tracte de calcular el número AWG aproximat, corresponent a un conductor de $S = 4\,\mathrm{mm}^2$.

Utilitzant l'equació (7.29) tenim:

$$\mathrm{AWG} = 4{,}312\,452\,842\,00 \times \ln \frac{53{,}475\,120\,732\,1}{4\,\mathrm{mm}^2} = 11{,}18 \rightarrow 11$$

A més de les sigles «AWG», hi ha altres formes alternatives d'escriptura. En el cas dels conductors compresos entre 1 AWG i 40 AWG, també es pot veure escrit (prenent com a exemple el conductor 4 AWG):

- #4 (on el símbol «#» s'utilitza com a substitut de «number»)
- No. 4 (on «No.» és l'abreviació de «number»)
- No. 4 AWG
- 4 ga. (on «ga.» és l'abreviació de «gauge»)

En el cas dels conductors 0 AWG, 00 AWG, 000 AWG i 0000 AWG també es pot veure escrit (prenent com a exemple el conductor 000 AWG):

- 3/0
- 3/0 AWG
- #000
- #3/0

En el cas de cables formats per més d'un conductor, el cable es denomina utilitzant la secció dels conductors, seguida del nombre de conductors que formen el cable. Per exemple: #14/2 o 14-2 identifica un cable format per dos conductors de 14 AWG.

En el cas d'un conductor format per múltiples fils, el cable es denomina utilitzant l'AWG total (suma de les seccions de cada fil), seguit del nombre de fils i de l'AWG de cada fil. Per exemple: 22 AWG 7/30 identifica un conductor de 22 AWG, format per 7 fils de 30 AWG.

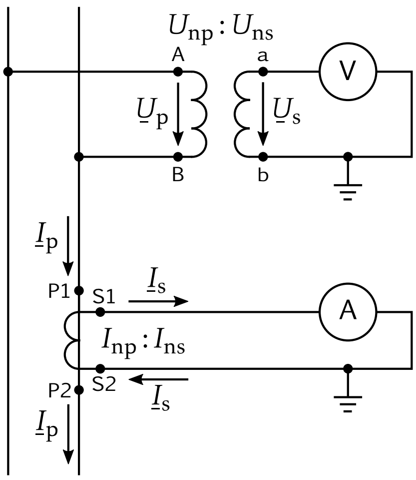
Capítol 8

Transformadors de Mesura i Protecció

8.1 Introducció

Es tracten en aquest capítol els transformadors de mesura i de protecció, tant de tensió com de corrent. Aquest tractament es fa més detalladament des del punt de vista de la norma CEI 60044, no obstant, es dedica també un apartat a descriure la norma IEEE C57.13, i la relació entre ambdues. La referència [47] es una bona guia de tot el que s'explica en aquest capítol.

En la Figura 8.1 es representen unes connexions habituals d'un transformador de tensió (anomenats usualment Tt), a la part superior, i d'un transformador de corrent (anomenats usualment Ti), a la part inferior. Els sentits de les tensions i corrents s'han representat tenint en compte els terminals equivalents dels primaris i secundaris (A–a i B–b, en el cas del Tt, i P1–S1 i P2–S2, en el cas del Ti).



$$\underline{U}_s = \underline{U}_p \frac{U_{ns}}{U_{np}} \tag{8.1}$$

$$\underline{I}_s = \underline{I}_p \frac{I_{ns}}{I_{np}} \tag{8.2}$$

Figura 8.1 Transformadors de tensió i de corrent

Les relacions de transformació nominals d'aquests transformadors de tensió i de corrent són respectivament $U_{np} : U_{ns}$ i $I_{np} : I_{ns}$.

Al costat de la Figura 8.1 es poden veure les relacions que lliguen les tensions i corrents de primari amb les de secundari, suposant que els transformadors són ideals.

Els transformadors de tensió es connecten a la línia principal en derivació; el primari està sotmès, per tant, a la tensió de la línia. Els Tt per a connexió entre fases tenen els dos borns primaris aïllats, mentre que els que estan previstos per ser connectats entre fase y terra només en tenen aïllat un, ja que l'altre es connecta directament a terra. Els transformadors de corrent, en canvi, es connecten amb el seu primari intercalat en la línia principal; pel primari del Ti circula, per tant, el corrent de la línia.

Com a mesura de protecció per a les persones, és usual connectar a terra un dels dos terminals del secundari dels transformadors. Cal recordar a més en el cas dels transformadors de corrent, que el secundari no ha de quedar mai en circuit obert, ja que es produirien sobretensions que podrien malmetre el transformador.

8.2 Errors de mesura dels transformadors reals

Atès que en realitat els transformadors que es construeixen no són ideals, tots tenen un error en la transformació de la magnitud primària en la secundària, tant pel que fa al mòdul com pel que fa a l'angle.

8.2.1 Error de relació

Aquest és l'error de mòdul que existeix entre les magnituds primària i secundaria; es denomina més específicament error de corrent en el cas dels Ti i error de tensió en el cas dels Tt.

En el cas dels Ti, si I_p i I_s són els corrents que realment circulen pel primari i pel secundari respectivament, l'error de relació ϵ_r val:

$$\epsilon_\mathrm{r} = \frac{\frac{I_\mathrm{np}}{I_\mathrm{ns}} I_\mathrm{s} - I_\mathrm{p}}{I_\mathrm{p}} \tag{8.3}$$

En el cas dels Tt, si U_p i U_s són les tensions que realment existeixen en el primari i en el secundari respectivament, l'error de relació ϵ_r val:

$$\epsilon_\mathrm{r} = \frac{\frac{U_\mathrm{np}}{U_\mathrm{ns}} U_\mathrm{s} - U_\mathrm{p}}{U_\mathrm{p}} \tag{8.4}$$

Els errors de relació de tensió i de corrent s'expressen normalment en tant per cent.

8.2.2 Error de fase

Aquest és l'error d'angle que existeix entre les magnituds primària i secundaria; aquesta definició és rigorosa únicament en el cas de tensions o corrents sinusoidals, on aquests valors es poden representar mitjançant fasors. L'error de fase ϵ_ϕ es considera positiu quan la magnitud secundària avança a la primària.

Cal fer notar que mentre que l'error de relació vist anteriorment afecta a qualsevol tipus d'aparell que es connecti en el secundari, l'error de fase no afecta a aparells que únicament mesuren el mòdul de la tensió o del corrent (amperímetre, voltímetre, etc.), i sí afecta en canvi a aparells que mesuren simultàniament diverses tensions o corrents (wattímetre, comptador d'energia, sincronitzador, etc.)

Els errors de fase s'expressen en el valor de l'angle, mesurat en minuts d'arc o en centiradiant (crad).

8.2.3 Classe, càrrega i potència de precisió

Les normes defineixen les anomenades «classes de precisió», cadascuna de les quals té assignades uns límits admissibles dels errors de relació i de fase. Així doncs, a cada transformador se li assigna una determinada classe de precisió en funció dels errors de relació i de fase que presenta.

Els errors de relació i de fase que presenta un transformador no són constants, sinó que depenen de les següents condicions:

- La tensió present en el secundari, en el cas dels Tt, i el corrent que circula pel secundari, en el cas dels Ti.
- La càrrega connectada en el secundari (en sèrie en el cas dels Ti, i en paral·lel en el cas dels Tt), definida pel nombre i tipus d'aparells connectats.
- La freqüència de funcionament.

Per tant, la classe de precisió assignada a un Ti o a un Tt ha de referir-se a un determinat valor de la càrrega, a la qual està connectat el transformador. Es defineix, en conseqüència, el terme «càrrega de precisió» com el valor de la càrrega en el secundari (expressada en ohm), a la qual està referida la classe de precisió assignada; és més usual, no obstant, utilitzar el terme «potència de precisió», que es el valor de la càrrega (expressada com potència aparent en voltampere), a la qual està referida la classe de precisió.

La relació entre la càrrega de precisió Z_{ns} i la potència de precisió S_{n} en el cas dels Tt és:

$$S_{\mathrm{n}} = \frac{U_{\mathrm{ns}}^2}{Z_{\mathrm{ns}}} \tag{8.5}$$

I en el cas dels Ti és:

$$S_{\mathrm{n}} = I_{\mathrm{ns}}^2 Z_{\mathrm{ns}} \tag{8.6}$$

8.3 Característiques dels transformadors de tensió segons la norma CEI 60044

8.3.1 Característiques comunes dels Tt de mesura i de protecció

Segons quina sigui la seva funció, els Tt es classifiquen en:

Transformadors de mesura: Són els utilitzats per alimentar instruments de mesura (voltímetres, wattímetres, etc.), comptadors d'energia i altres aparells que requereixin senyal de tensió.

Transformadors de protecció: Són els utilitzats per alimentar relés de protecció.

Es presenten a continuació les característiques comunes als Tt de mesura i de protecció.

Tensió primària nominal (U_{np})

És la tensió assignada al primari del transformador, a partir de la qual es determinen les seves característiques de funcionament i d'aïllament.

Els valors normalitzats per a transformadors connectats entres dues fases són els exposats en la norma CEI 60038.

En el cas de transformadors connectats entre fase i terra, o entre el punt neutre d'un sistema i terra, els valor normalitzats de la norma CEI 60038 es dividiran per $\sqrt{3}$.

Tensió secundària nominal (U_{ns})

És la tensió assignada al secundari del transformador. Els valors normalitzats són:

- 100 V i 110 V, en el cas de transformadors connectats entre dues fases.
- $\dfrac{100}{\sqrt{3}}$ V i $\dfrac{110}{\sqrt{3}}$ V, en el cas de transformadors connectats entre fase i terra.
- 100 V, 110 V, $\dfrac{100}{\sqrt{3}}$ V, $\dfrac{110}{\sqrt{3}}$ V, $\dfrac{100}{3}$ V i $\dfrac{110}{3}$ V, en el cas de transformadors connectats en triangle obert.

Relació de transformació nominal (K_{n})

Relació dels dos paràmetres anteriors: $K_{\mathrm{n}} = \dfrac{U_{\mathrm{np}}}{U_{\mathrm{ns}}}$.

Els valors usuals són: 10, 12, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60 i 80, i els seus múltiples decimals.

Freqüència nominal (f_{n})

És la freqüència d'operació per a la qual està dissenyat el transformador, usualment 50 Hz a Europa.

Potència de precisió nominal (S_{n})

Els valors normalitzats de la potència de precisió, per a un factor de potència 0,8 inductiu són: 10 VA, 15 VA, 25 VA, 30 VA, 50 VA, 75 VA, 100 VA, 150 VA, 200 VA, 300 VA, 400 VA i 500 VA.

Els valors preferits són: 10 VA, 25 VA, 50 VA, 100 VA, 200 VA i 500 VA.

En el cas de transformadors trifàsics, S_{n} és la potència per fase.

Factor de tensió nominal

És el factor pel qual ha de multiplicar-se la tensió nominal primària, per tal de determinar la tensió màxima que el Tt pot suportar durant un temps determinat, sense sobrepassar ni l'escalfament admissible ni els límits d'error corresponents a la seva classe de precisió. Les sobretensions poden presentar-se en el transformador per la fluctuació pròpia de la xarxa on estiguin connectats o per l'efecte de curtcircuits.

Tots els Tt han de tenir un factor de tensió nominal igual a 1,2 en permanència.

A més, per a certes connexions els Tt han de tenir addicionalment els següents factors de tensió nominals:

- 1,5 durant 30 s, per a transformadors connectats entre fase i terra, en sistemes que tenen el neutre connectat a terra de forma efectiva (aquells que en produir-se una falta fase–terra, la sobretensió que apareix en les fases sanes no supera 1,4 vegades la tensió nominal).
- 1,9 durant 30 s, per a transformadors connectats entre fase i terra, en sistemes que tenen el neutre connectat a terra de forma no efectiva (aquells que en produir-se una falta fase–terra, la sobretensió que apareix en les fases sanes supera 1,4 vegades la tensió nominal), i on es produeix una desconnexió automàtica en cas de faltes fase–terra.
- 1,9 durant 8 h, per a transformadors connectats entre fase i terra, en sistemes que tenen el neutre aïllat o el neutre connectat a terra mitjançant un circuit ressonant, i on no es produeix una desconnexió automàtica en cas de faltes fase–terra.

Identificació dels terminals

Les lletres «A», «B», «C» i «N» s'utilitzen per identificar els terminals primaris, i les lletres «a», «b», «c» i «n» s'utilitzen per identificar els terminals secundaris homòlegs.

Les lletres «A», «B» i «C» s'utilitzen pels terminals connectats a les fases i la «N» pel terminal connectat a terra.

En el cas de secundaris connectats en triangle obert, els dos terminals s'identifiquen amb les lletres «da» i «dn».

En el cas d'un Tt amb doble secundari, els terminals del primer secundari s'identifiquen amb les lletres «1a», «1b», «1c» i «1n», i els del segon amb les lletres «2a», «2b», «2c» i «2n».

En el cas d'un Tt amb un secundari amb preses múltiples, els terminals s'identifiquen amb les lletres «a1», «a2», «a3», ..., «b» (o «n»).

8.3.2 Característiques particulars dels Tt de mesura

Es presenten a continuació les característiques particulars dels Tt de mesura.

Classe de precisió

Els valors normalitzats són 0,1, 0,2, 0,5, 1 i 3.

En la Taula 8.1 s'indiquen els límits dels errors de tensió i de fase, per a tensions compreses entre 80 % U_{ns} i 120 % U_{ns}, i per a càrregues compreses entre 25 % S_n i 100 % S_n, amb un factor de potència 0,8 inductiu.

Taula 8.1 Classes de precisió per a Tt de mesura i protecció

Classe de precisió	Error de tensió %	Error de fase	
		minuts d'arc	crad
0,1	0,1	5	0,15
0,2	0,2	10	0,3
0,5	0,5	20	0,6
1	1,0	40	1,2
3	3,0	—	—

8.3.3 Característiques particulars dels Tt de protecció

Es presenten a continuació les característiques particulars dels Tt de protecció.

Classe de precisió

Els Tt de protecció, llevat dels destinats a ser connectats en triangle obert, tenen les mateixes classes de precisió que els Tt de mesura, i per tant també els és d'aplicació la Taula 8.1.

Addicionalment, els Tt de protecció pels marges de tensió compresos entre 5 % U_{ns} i 80 % U_{ns} i entre 120 % U_{ns} i el valor U_{ns} multiplicat pel factor de tensió nominal (per exemple 190 % U_{ns}), tenen assignada una altra classe de precisió; els valors normalitzats són 3P i 6P.

Així, per exemple, un Tt amb factor de tensió nominal 1,9 i classe de precisió 0,5 3P, té la classe de precisió 0,5 entre 80 % U_{ns} i 120 % U_{ns}, i la classe de precisió 3P entre 5 % U_{ns} i 80 % U_{ns} i entre 120 % U_{ns} i 190 % U_{ns}.

En la Taula 8.2 s'indiquen els límits dels errors de tensió i de fase, per a càrregues compreses entre 25 % S_n i 100 % S_n, amb un factor de potència 0,8 inductiu, dins dels dos marges de tensions indicats anteriorment. Per a tensions de l'ordre del 2 % U_{ns}, els errors tenen un valor doble dels indicats en aquesta taula.

Taula 8.2 Classes de precisió addicionals per a Tt de protecció

Classe de precisió	Error de tensió %	Error de fase	
		minuts d'arc	crad
3P	3	120	3,5
6P	6	240	7,0

La classe de precisió dels transformadors destinats a ser connectats en triangle obert serà 6P.

8.4 Característiques dels transformadors de corrent segons la norma CEI 60044

8.4.1 Característiques comunes dels Ti de mesura i de protecció

Segons quina sigui la seva funció, els Ti es classifiquen de forma anàloga als Tt en:

Transformadors de mesura: són els utilitzats per alimentar instruments de mesura (amperímetres, wattímetres, etc.), comptadors d'energia i altres aparells que requereixin senyal de corrent.

Transformadors de protecció: són els utilitzats per alimentar relés de protecció.

Es presenten a continuació les característiques comunes als Ti de mesura i de protecció.

Corrent primari nominal (I_{np})

És el corrent assignat al primari del transformador. Els valors normalitzats són: 10 A, 12,5 A, 15 A, 20 A, 25 A, 30 A, 40 A, 50 A, 60 A i 75 A, i els seus múltiples i submúltiples decimals.

Els valors preferits són: 10 A, 15 A, 20 A, 30 A, 50 A i 75 A, i els seus múltiples i submúltiples decimals.

Corrent secundari nominal (I_{ns})

És el corrent assignat al secundari del transformador. Els valors normalitzats són: 1 A, 2 A i 5 A, essent aquest darrer valor el preferit. En el cas de transformadors connectats en triangle, també són normalitzats els valors anteriors dividits per $\sqrt{3}$.

Relació de transformació nominal (K_{n})

Relació dels dos paràmetres anteriors: $K_{\mathrm{n}} = \dfrac{I_{\mathrm{np}}}{I_{\mathrm{ns}}}$.

Freqüència nominal (f_{n})

És la freqüència d'operació per a la qual està dissenyat el transformador, usualment 50 Hz a Europa.

Error compost (ϵ_{c})

Per a corrents de primari i secundari sinusoidals, l'error compost ϵ_{c} es defineix en funció dels errors de relació ϵ_{r} i de fase ϵ_{ϕ}, com:

$$\epsilon_{\mathrm{c}} = \sqrt{\epsilon_{\mathrm{r}}^2 + \epsilon_{\phi}^2} \tag{8.7}$$

En aquesta expressió, els errors ϵ_{c} i ϵ_{r} estan expressats en %, i l'error ϵ_{ϕ} està expressat en crad.

En el cas general de corrents primari $i_\mathrm{p}(t)$ i secundari $i_\mathrm{s}(t)$ no sinusoidals, però periòdics amb període T, l'error compost ϵ_c es defineix com:

$$\epsilon_\mathrm{c} = \frac{1}{I_\mathrm{p}}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(K_\mathrm{n} i_\mathrm{s}(t) - i_\mathrm{p}(t)\right)^2 \mathrm{d}t} \tag{8.8}$$

Potència de precisió (S_n)

Els valors normalitzats de la potència de precisió fins a 30 VA són: 2,5 VA, 5 VA, 10 VA, 15 VA i 30 VA.

Es poden escollir valors per sobre de 30 VA segons les necessitats de cada cas.

Sobrecorrents assignats (I_th, I_dyn, I_cth)

Els Ti tenen el primari connectat en sèrie amb una línia de potència, i per tant han d'estar preparats per suportar curtcircuits fins que algun interruptor desconnecti la línia on hi ha la falta; aquest corrent es transforma en el secundari en un corrent de valor també elevat, havent de suportar el transformador els efectes tèrmics i dinàmics que això comporta.

Es defineix el «corrent tèrmic nominal de curta durada» (I_th), com el valor eficaç del corrent primari que el transformador pot suportar durant 1 s, amb el debanat secundari en curtcircuit, sense patir efectes perjudicials; es considera que aquest temps és suficient perquè les proteccions pertinents actuïn, eliminant el curtcircuit. En qualsevol cas, si I_cc és el corrent de curtcircuit i t n'és la durada (expressada en s), ha de complir-se: $I_\mathrm{th} \geq I_\mathrm{cc}\sqrt{t}$. El valor d'aquest corrent tèrmic acostuma a expressar-se com un valor múltiple del corrent nominal (per exemple: $I_\mathrm{th} = 150\, I_\mathrm{np}$).

Es defineix el «corrent dinàmic nominal» (I_dyn), com el valor de cresta del corrent tèrmic nominal de curta durada (I_th). Normalment es pren el valor: $I_\mathrm{dyn} = 1{,}8\sqrt{2} I_\mathrm{th} \approx 2{,}5 I_\mathrm{th}$. El transformador ha de suportar les forces electrodinàmiques produïdes per aquest corrent.

Es defineix finalment el «corrent tèrmic nominal continu» (I_cth), com el valor del màxim corrent que pot circular pel primari del transformador de forma permanent, amb el secundari connectat a la càrrega de precisió, sense que l'escalfament del transformador surti dels límits previstos i mantenint-se dins de la seva classe de precisió. El valor usual és: $I_\mathrm{cth} = I_\mathrm{np}$. Quan es requereix un valor més elevat, els valors preferits són: $I_\mathrm{cth} = 1{,}2 I_\mathrm{np}$, $I_\mathrm{cth} = 1{,}5 I_\mathrm{np}$ i $I_\mathrm{cth} = 2 I_\mathrm{np}$.

8.4.2 Característiques particulars dels Ti de mesura

Els circuits magnètics d'aquests transformadors es dissenyen de manera que se saturin ràpidament, de manera que sobrecorrents elevats en el primari no repercuteixin en el secundari, ja que els aparells que normalment s'hi connecten (amperímetres, comptadors d'energia, etc.) no estan preparats per suportar sobrecorrents elevats.

Es presenten a continuació les característiques particulars dels Ti de mesura.

Corrent límit primari assignat (I_PL)

El corrent límit primari és el corrent primari, a partir del qual l'error compost supera el valor del 10 %, amb una càrrega igual a la càrrega de precisió del transformador.

Factor de seguretat (F_S)

El factor de seguretat es defineix com la relació entre el corrent límit primari i el corrent primari nominal: $F_S = I_{PL}/I_{np}$.

En el cas d'un curtcircuit en la línia on està intercalat el transformador, la seguretat dels aparells connectats en el secundari del Ti és tan més gran com més petit és F_S. Valors usuals per a la majoria d'aparells són: $2{,}5 < F_S < 10$, i en el cas de comptadors: $3 < F_S < 5$.

Cal tenir en compte que el valor de F_S està lligat al valor de S_n, i que només és vàlid quan tenim aquest consum de potència en el secundari; per a un valor de potència S' diferent de S_n, tindrem un valor F'_S també diferent de F_S. La relació que lliga aquests valors, tenint en compte la resistència del debanat secundari del transformador R_s és:

$$F_S(S_n + R_s I_{ns}^2) = F'_S(S' + R_s I_{ns}^2) \tag{8.9}$$

Classe de precisió

Els valors normalitzats són 0,1, 0,2, 0,5, 1, 3 i 5.

En la Taula 8.3 s'indiquen els límits, per a diversos percentatges de I_{ns}, dels errors de corrent i de fase de les classes de precisió 0,1, 0,2, 0,5 i 1, per a càrregues compreses entre 25 % S_n i 100 % S_n.

Taula 8.3 Classes de precisió 0,1, 0,2, 0,5 i 1 per a Ti de mesura

Classe de precisió	Error de corrent %				Error de fase minuts d'arc				Error de fase crad			
0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	15	8	5	5	0,45	0,24	0,15	0,15
0,2	0,75	0,35	0,2	0,2	30	15	10	10	0,9	0,45	0,3	0,3
0,5	1,5	0,75	0,5	0,5	90	45	30	30	2,7	1,35	0,9	0,9
1	3,0	1,5	1,0	1,0	180	90	60	60	5,4	2,7	1,8	1,8
$\%I_{ns}$	5	20	100	120	5	20	100	120	5	20	100	120

En la Taula 8.4 s'indiquen els límits, per a diversos percentatges de I_{ns}, dels errors de corrent de les classes de precisió 3 i 5, per a càrregues compreses entre 50 % S_n i 100 % S_n.

Taula 8.4 Classes de precisió 3 i 5 per a Ti de mesura

Classe de precisió	Error de corrent %	
3	3	3
5	5	5
$\%I_{ns}$	50	120

Existeixen també els valors normalitzats 0,2 S i 0,5 S, els quals mantenen la precisió per a valors baixos de corrent. En la Taula 8.5 a la pàgina següent s'indiquen els límits, per a diversos percentatges de I_{ns}, dels errors de corrent i de fase d'aquestes dues classes de precisió, per a càrregues compreses entre 25 % S_n i 100 % S_n.

Taula 8.5 Classes de precisió 0,2 S i 0,5 S per a Ti de mesura

Classe de precisió	Error de corrent %					Error de fase									
						minuts d'arc					crad				
0,2 S	0,75	0,35	0,2	0,2	0,2	30	15	10	10	10	0,9	0,45	0,3	0,3	0,3
0,5 S	1,5	0,75	0,5	0,5	0,5	90	45	30	30	30	2,7	1,35	0,9	0,9	0,9
$\%I_{ns}$	1	5	20	100	120	1	5	20	100	120	1	5	20	100	120

En les tres taules anteriors, es considera que el factor de potència és igual a 1 quan la potència subministrada pel secundari és inferior a 5 VA, i 0,8 inductiu per a valors de potència superiors. En qualsevol cas, la potència serà sempre superior a 1 VA.

8.4.3 Característiques particulars dels Ti de protecció

Contràriament als transformadors de mesura, els transformadors de protecció es dissenyen de manera que no se saturin fins a valors de sobrecorrents primaris elevats, ja que interessa que el secundari segueixi reflectint el corrent de primari per a sobrecorrents elevats (encara que sigui amb errors més grans), per tal que els relés de protecció connectats al transformador actuïn als valors de sobrecorrents a què estan ajustats.

Es presenten a continuació les característiques particulars dels Ti de protecció.

Corrent límit de precisió assignat (I_{LP})

El corrent límit de precisió és el corrent primari màxim per al qual el transformador manté el límit de l'error compost que té assignat.

Factor límit de precisió (F_{LP})

El factor límit de precisió es defineix com la relació entre el corrent límit de precisió i el corrent primari nominal: $F_{LP} = I_{LP}/I_{np}$. Els valors normalitzats són: 5, 10, 15, 20 i 30.

Mentre es compleixi $I_p < F_{LP} I_{np}$, queda garantit que el transformador no se saturarà, i per tant el corrent secundari seguirà reflectint amb suficient precisió el valor del corrent primari.

Cal tenir en compte que el valor de F_{LP} està lligat al valor de S_n, i que només és vàlid quan tenim aquest consum de potència en el secundari; per a un valor de potència S' diferent de S_n, tindrem un valor F'_{LP} també diferent de F_{LP}. La relació que lliga aquests valors, tenint en compte la resistència del debanat secundari del transformador R_s és:

$$F_{LP}(S_n + R_s I_{ns}^2) = F'_{LP}(S' + R_s I_{ns}^2) \tag{8.10}$$

Valors típics per a la resistència del debanat secundari són:

- Secundaris de 5 A: $R_s = 0{,}2\,\Omega$ a $0{,}4\,\Omega$
- Secundaris de 1 A: $R_s = 1{,}5\,\Omega$ a $3{,}5\,\Omega$

Classe de precisió

Els valors normalitzats són 5P i 10P.

En la Taula 8.6 s'indiquen els límits dels errors de corrent i de fase, per al corrent nominal I_{ns} i la càrrega de precisió nominal S_{n}, amb un factor de potència 0,8 inductiu. S'indica també l'error compost per al corrent I_{LP}.

Taula 8.6 Classes de precisió per a Ti de protecció

Classe de precisió	Error de corrent %	Error de fase		Error compost %
		minuts d'arc	crad	
5P	1	60	1,8	5
10P	3	—	—	10
I_{s}	I_{ns}	I_{ns}	I_{ns}	I_{LP}

La classe de precisió i el factor límit de precisió s'expressen sempre de forma conjunta, per exemple 5P15 s'interpreta com: classe de precisió 5P i $F_{\text{LP}} = 15$.

Exemple 8.1 Determinació de les característiques d'un transformador de corrent

Es tracta de determinar els valors de S_{n} i F_{LP}, per a un Ti destinant a alimentar un relé de protecció i un convertidor de corrent de 4 mA a 20 mA. Les característiques dels diferents components són:

Ti: Classe de precisió 5P, $I_{\text{ns}} = 5\,\text{A}$, $R_{\text{s}} = 0{,}3\,\Omega$

Relé: $S_{\text{n,relé}} = 0{,}25\,\text{VA}$, $I_{\text{n,relé}} = 5\,\text{A}$, $I_{\text{máx,relé}} = 100 I_{\text{n,relé}}$

Convertidor: $S_{\text{n,conv}} = 1\,\text{VA}$, $I_{\text{n,conv}} = 5\,\text{A}$, $I_{\text{màx,conv}} = 80 I_{\text{n,conv}}$

Cables de connexió: Càrrega = 1,6 VA

La potència total S' que està connectada al secundari del transformador és:

$$S' = 0{,}25\,\text{VA} + 1\,\text{VA} + 1{,}6\,\text{VA} = 2{,}85\,\text{VA}$$

Prenem per calcular el factor límit de precisió a aquesta potència F'_{LP}, el corrent màxim que pot suportar el convertidor, ja que és menor que el corrent màxim que pot suportar el relé; així doncs tenim:

$$F'_{\text{LP}} = \frac{80 I_{\text{n,conv}}}{I_{\text{ns}}} = \frac{80 \times 5\,\text{A}}{5\,\text{A}} = 80$$

Si apliquem ara l'equació (8.10), tenim:

$$\begin{aligned} F_{\text{LP}} \times (S_{\text{n}} + 0{,}3\,\Omega \times (5\,\text{A})^2) &= 80 \times (2{,}85\,\text{VA} + 0{,}3\,\Omega \times (5\,\text{A})^2) \\ F_{\text{LP}} \times (S_{\text{n}} + 7{,}5\,\text{VA}) &= 828\,\text{VA} \end{aligned}$$

Escollim a continuació el valor normalitzat $S_n = 15\,\text{VA}$, i calculem F_{LP}:

$$F_{LP} = \frac{828\,\text{VA}}{15\,\text{VA} + 7{,}5\,\text{VA}} = 36{,}8$$

Finalment, escollim el valor normalitzat immediatament inferior al valor de càlcul obtingut: $F_{LP} = 30$, i recalculem el valor F'_{LP} que tindrem realment:

$$F'_{LP} = \frac{30 \times (15\,\text{VA} + 7{,}5\,\text{VA})}{2{,}85\,\text{VA} + 7{,}5\,\text{VA}} = 65 < 80$$

El valor resultant és per tant acceptable. Així doncs les característiques buscades del transformador són: 15 VA 5P30.

8.5 Resum de característiques segons les normes CEI 60044

Es resumeix a continuació les característiques que apareixen en la placa de característiques dels transformador de mesura i protecció. La paraula «classe» s'abrevia a «cl.»:

- **Tt**: Tensions nominals primària (U_{np}) i secundària (U_{ns}), freqüència nominal (f_n), potència nominal (S_n), factor de tensió i designació dels terminals. Addicionalment tenim:
  - **Tt de mesura**: Classe de precisió, per exemple: cl. 0,5.
  - **Tt de protecció**: Classes de precisió, per exemple: cl. 0,5 3P.
- **Ti**: Corrents nominals primari (I_{np}) i secundari (I_{ns}), freqüència nominal (f_n), potència nominal (S_n), corrents tèrmic nominal de curta durada (I_{th}), dinàmic nominal (I_{dyn}) i tèrmic nominal continu (I_{cth}), i designació dels terminals. Addicionalment tenim:
  - **Ti de mesura**: Classe de precisió i factor de seguretat, per exemple: cl. 0,5 $F_S 10$
  - **Ti de protecció**: Classe i factor límit de precisió. Normalment s'expressen de forma conjunta, i s'omet l'abreviatura «cl.», per exemple: 5P15.

8.6 Característiques dels transformadors de tensió segons la norma IEEE C57.13

Tensió

El valor estàndard de la tensió de secundari és 120 V, amb un rang que pot anar de 108 V a 132 V. Aquests valors es divideixen per $\sqrt{3}$ en el cas de transformadors connectats entre fase i terra.

Classe i potència de precisió

Els Tt es designen a partir dels dos elements indicats a continuació.

❶ **Classe de precisió**: Aquest concepte és equivalent a l'utilitzat en les normes CEI. Els valors normalitzats són: cl. 0,3, 0,6, 1,2 i 2,4.

❷ **Potència de precisió**: Aquest concepte és equivalent a l'utilitzat en les normes CEI. Els valors normalitzats es designen mitjançant lletres, les quals es poden veure en la Taula 8.7.

Taula 8.7 Potències IEEE de precisió per a Tt

Lletra de designació	Potència de precisió /VA	$\cos\varphi$ (inductiu)
W	12,5	0,10
X	25	0,70
Y	75	0,85
Z	200	0,85
ZZ	400	0,85
M	35	0,20

Aquests dos elements s'expressen de forma conjunta, per exemple: 1,2Y.

Identificació dels terminals

Els terminal s'identifiquen amb lletres. S'utilitza la lletra H per designar els terminals del primari, i la lletra X per designar els terminals del secundari (i també la Y, Z, U, W, V, etc., en el cas de múltiples secundaris); cada terminal estarà numerat, per exemple: H_1, H_2, X_1, X_2. Els terminal homòlegs són H_1 i X_1 (i també Y_1, Z_1, U_1, W_1, V_1, etc., en el cas de múltiples secundaris).

En el cas de múltiples primaris, els terminals es designen amb la lletra H, numerant-los per parelles (H_1, H_2, H_3, H_4, etc.). Els terminals senars són terminals homòlegs.

Quan els secundaris tenen preses múltiples, el terminals s'identifiquen com X_1, X_2, X_3, etc., (o Y_1, Y_2, Y_3, etc., Z_1, Z_2, Z_3, etc.). Quan el terminal X_1 no s'utilitza, el terminal utilitzat amb el menor número és l'homòleg del terminal primari; per exemple, un transformador amb un primari H_1, H_2, i un secundari X_1, X_2, X_3, X_4 i X_5, on els terminals secundaris utilitzats són els X_2 i X_4, els terminals homòlegs són H_1 i X_2.

8.7 Característiques dels transformadors de corrent segons la norma IEEE C57.13

8.7.1 Ti de mesura

Els Ti de mesura es designen a partir dels tres elements indicats a continuació.

❶ **Classe de precisió**: Aquest concepte és equivalent a l'utilitzat en les normes CEI. Els valors normalitzats són: cl. 0,3, 0,6, 1,2 i 2,4.

❷ **La lletra «B»**: És la inicial de la paraula «burden» (càrrega).

❸ **Càrrega de precisió**: Aquest concepte és equivalent a l'utilitzat en les normes CEI. Els valors normalitzats són: $Z_{ns} = 0{,}1\,\Omega$, $0{,}2\,\Omega$, $0{,}5\,\Omega$, $0{,}9\,\Omega$ i $1{,}8\,\Omega$.

La potència de precisió es pot calcular a partir del corrent nominal secundari I_{ns}, utilitzant l'equació (8.6).

Aquests tres elements s'expressen de forma conjunta, per exemple: 0,3B0,2.

8.7.2 Ti de protecció

Els Ti de protecció es designen a partir dels tres elements indicats a continuació.

❶ **Error compost**: Indica l'error compost màxim (en tant per cent) del transformador, quan el corrent que circula pel transformador és 20 vegades el corrent nominal. Aquest concepte és equivalent a la classe de precisió de la norma CEI, amb $F_{LP} = 20$. Només s'utilitza amb els transformadors antics (tipus «L» o «H»); en el cas del transformadors actuals (tipus «C», «K» o «T»), l'error és sempre el 10 %, i no s'indica.

❷ **Les lletres «C», «K», «T», «L» o «H»**: La lletra «C» és la inicial de la paraula «calculated» (calculada). El flux de dispersió d'aquests transformadors és negligible, i el seu error es pot calcular.

La lletra «K» és equivalent a la «C», però la tensió del colze de la corba d'excitació ha de ser igual o superior al 70 % de la tensió nominal de secundari.

La lletra «T» és la inicial de la paraula «tested» (mesurada). El flux de dispersió d'aquests transformadors és apreciable, i el seu error només es pot obtenir mitjançant un assaig.

Les lletres «L» i «H» són denominacions antigues, no utilitzades actualment. La lletra «L» és la inicial de «low leakage» (baixa dispersió), i la lletra «H» és la inicial de «high leakage» (alta dispersió).

❸ **Tensió nominal de secundari**: És la tensió màxima que hi pot haver en el secundari, per tal de no sobrepassar l'error compost que té assignat el transformador, quan el corrent que hi circula és 20 vegades el corrent nominal. Els valors normalitzats són: $U_{\text{màx,s}} = 10\,\text{V}$, $50\,\text{V}$, $100\,\text{V}$, $200\,\text{V}$, $400\,\text{V}$ i $800\,\text{V}$.

La càrrega de precisió en el secundari Z_{ns} i la potència de precisió S_n, s'obtenen a partir d'aquesta tensió màxima de secundari $U_{\text{màx,s}}$ i del corrent nominal de secundari I_{ns}, segons les equacions següents:

$$Z_{ns} = \frac{U_{\text{màx,s}}}{20 I_{ns}} \tag{8.11}$$

$$S_n = Z_{ns}\, I_{ns}^2 = \frac{U_{\text{màx,s}} I_{ns}}{20} \tag{8.12}$$

Aquests dos o tres elements s'expressen de forma conjunta, per exemple: 10L200 o C400.

Exemple 8.2 Equivalència entre transformadors IEEE i CEI

Es tracta de trobar els transformadors equivalents, segons les normes CEI, als dos transformadors següents, donats segons les nomes IEEE: 0,3B0,2 i C50; el corrent nominal de secundari és: I_{ns} =

5 A.

En el primer cas, tenim de forma directa: cl. 0,3; la potència de precisió la trobem aplicant l'equació (8.6):

$$S_n = (5\,\text{A})^2 \times 0{,}2\,\Omega = 5\,\text{VA}$$

Atès que 0,3 no és una classe de precisió CEI normalitzada, escolliríem un transformador de característiques: 5 VA cl. 0,2; caldria a més, definir el factor de seguretat apropiat per a la nostra aplicació, amb l'ajut de l'equació (8.9).

En el segon cas, tenim de forma directa la classe i el factor límit de precisió: 10P20; la potència de precisió la trobem aplicant l'equació (8.12):

$$S_n = \frac{50\,\text{V} \times 5\,\text{A}}{20} = 12{,}5\,\text{VA}$$

Atès que 12,5 VA no és una potència de precisió CEI normalitzada, escolliríem un transformador de característiques: 15 VA 10P20; caldria a més, comprovar el factor límit de precisió real que tindrem en la nostra aplicació, utilitzant l'equació (8.10).

8.8 Connexió de Ti i Tt a aparells de mesura o de protecció

A vegades es presenta la necessitat de connectar un nou aparell de mesura o de protecció en una instal·lació existent, on els transformadors de tensió i corrent ja estan muntats i connectats a altres aparells. En aquest cas, cal parar atenció a la connexió que ens demana el nou aparell que volem instal·lar, per tal de no equivocar-nos.

La connexió dels Tt a un nou aparell sol ser simple, ja que només cal veure a quin terminal de l'aparell cal connectar cadascuna de les tensions (fases R, S i T), i reproduir aquesta connexió en la nostra instal·lació.

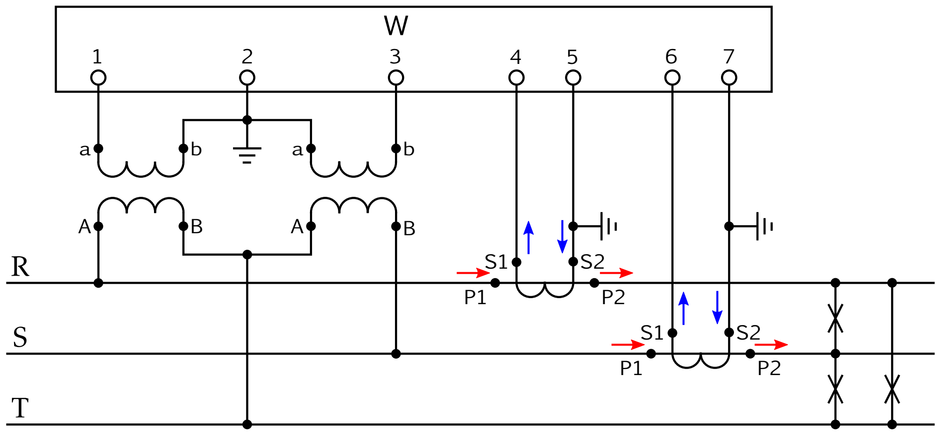
La connexió dels Ti a un nou aparell demana una mica més d'atenció, ja que a més de saber a quins terminals de l'aparell hem de connectar els corrents (de les fases R, S i T), hem de fixar-nos en els sentits de circulació d'aquests corrents que ens demana l'aparell, i mantenir-los quan incorporem l'aparell a la nostra instal·lació.

La manera de no equivocar-se, és suposar un sentit de circulació arbitrari del corrent pel primari del Ti (per exemple, de la font de tensió cap a la càrrega), i veure a continuació fent servir els terminals homòlegs P1-S1 i P2-S2, quin és el sentit de circulació del corrent en el secundari del Ti cap a l'aparell; aquest sentit és el que haurem de respectar en la nostra instal·lació quan hi afegim el nou aparell.

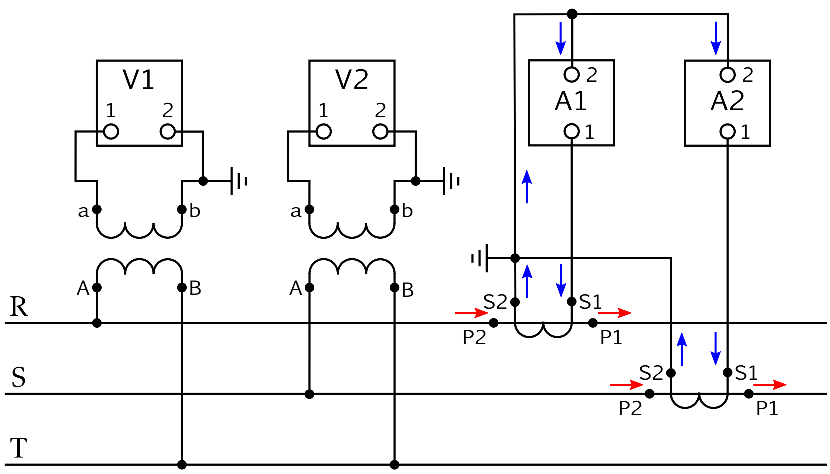
Exemple 8.3 Connexió d'un wattímetre a una instal·lació existent

En el tres dibuixos d'aquest exemple, es dibuixen de color vermell els corrents que circulen pels primaris dels Ti, i de color blau els corrents que circulen pels secundaris dels Ti.

Es representa en primer lloc la connexió d'un wattímetre, extreta d'un catàleg. El costat del circuit primari on es troben les càrregues, ve indicat per les tres línies amb una creu al mig.



A continuació es representa una instal·lació existent, amb dos Tt i dos Ti que alimenten a dos voltímetres i a dos amperímetres respectivament; les càrregues es troben a la dreta del circuit primari.



Es tracta d'afegir el nou wattímetre a aquesta instal·lació.

La connexió completa amb els dos voltímetres, els dos amperímetres i el wattímetre, es pot veure a continuació; la manera de fer-la es detalla ara pas a pas:

❶ Comencem fixant-nos en les tensions del wattímetre, i veiem que cal connectar-hi la tensió de la fase R al terminal 1, la tensió de la fase S al terminal 3, i la tensió de la fase T al terminal 2.

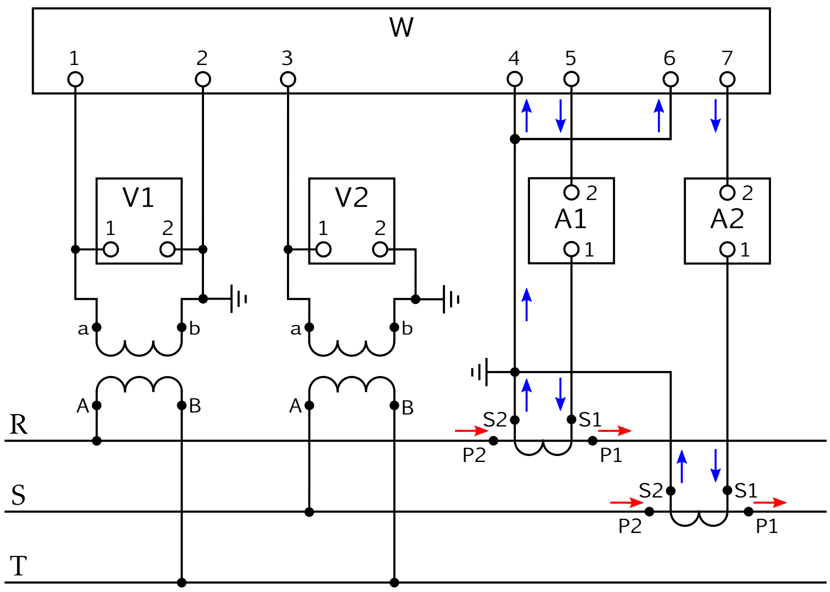
Per aconseguir-ho en la nostra instal·lació, sense tocar la connexió dels dos voltímetres existents, només cal connectar el terminal «a» del primer Tt al terminal 1 del wattímetre (tensió de la fase R), el terminal «a» del segon Tt al terminal 3 del wattímetre (tensió de la fase S), i el terminal «b» d'un dels dos Tt al terminal 2 del wattímetre (tensió de la fase T).

❷ Ens fixem a continuació en els corrents del wattímetre. Si suposem de forma arbitrària, uns corrents pels circuits primaris dels Ti que vagin d'esquerra a dreta (això és, cap a les càrregues), veiem que aquests corrents entren pels terminals «P1» dels primaris dels Ti, i per tant surten, transformats, pels terminals «S1» dels secundaris dels Ti. Així doncs, el corrent que circula pel secundari del primer Ti, entra al wattímetre pel terminal 4, i en surt pel terminal 5, i el corrent que circula pel secundari del segon Ti, entra al wattímetre pel terminal 6, i en surt pel terminal 7. Aquest sentit de circulació dels corrents és el que hem de mantenir quan connectem el wattímetre a la nostra instal·lació.

Per aconseguir-ho en la nostra instal·lació, sense tocar la connexió dels dos amperímetres existents, comencem per suposar un sentit dels corrents primaris idèntic al suposat anteriorment, és a dir cap a les càrregues (això és, d'esquerra a dreta). L'objectiu serà veure el sentit de circulació dels corrents de secundari respecte dels terminals «S1» dels dos Ti, ja que disposem d'un fil per a cadascun dels dos terminals de forma separada; no passa el mateix amb els dos terminals «S2», ja que únicament disposem d'un fil pel qual circula la suma dels dos corrents. Per tant, veiem que amb el sentit de circulació que hem adoptat, aquests corrents surten pels terminals «P1» dels primaris dels Ti, i per tant entren, transformats, pels terminals «S1» dels secundaris dels Ti.

Aquests corrents que entren pels terminals «S1», i que hem de dur al wattímetre, seran corrents que vistos des del wattímetre, en sortiran; si ens fixem en l'anàlisi que hem fet en el circuit inicial del wattímetre, veiem que els terminals per on surten els corrents són el 5 i el 7. Per tant ara queda clar que hem de connectar el terminal «S1» del primer Ti, després de passar per l'amperímetre A1, al terminal 5 del wattímetre, i el terminal «S1» del segon Ti, després de passar per l'amperímetre A2, al terminal 7 del wattímetre. Finalment, només ens cal tancar el circuit dels corrents secundaris, unint entre si els dos terminals d'entrada 4 i 6, i connectant-los amb el fil comú que uneix els dos terminals «S2» dels dos Ti.

Com es pot veure, no té cap incidència sobre la connexió quin és el terminal del secundari que està connectat a terra ni en el cas dels Tt ni en el cas dels Ti.



Capítol 9

Transformadors de Potència

9.1 Introducció

Es tracten en aquest capítol els transformadors de potència monofàsics i trifàsics des del punt de vista electrotècnic, utilitzant-ne els esquemes equivalents.

9.2 Esquema equivalent i placa de característiques

9.2.1 Esquema equivalent

Es presenta en primer lloc en la Figura 9.1 l'esquema elèctric equivalent d'un transformador. L'esquema és vàlid tant per a un transformador monofàsic com per a un de trifàsic. En el cas d'un transformador trifàsic, l'esquema representa el circuit equivalent per fase, és a dir l'esquema fase–neutre; els valors per fase són els mateixos, independentment que la connexió dels debanats primari i secundari siguin en estrella, en triangle o en zig-zag.

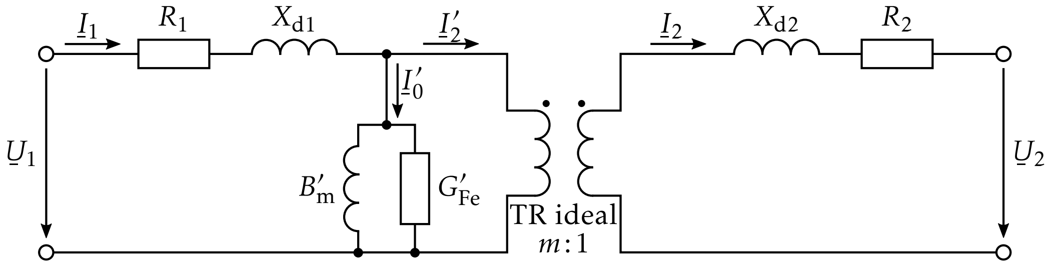


Figura 9.1 Esquema equivalent d'un transformador

En aquest esquema equivalent R_1 i X_{d1} representen la resistència i la reactància de dispersió respectivament del debanat primari, i de forma anàloga, R_2 i X_{d2} representen la resistència i la reactància de dispersió respectivament del debanat secundari; aquestes quatre magnituds es mesuren en ohm. Per la seva banda, G'_{Fe} i B'_m representen la conductància de pèrdues en el ferro i la susceptància de magnetització respectivament, vistes des del primari; aquestes dues magnituds es mesuren en siemen.

Contràriament al que passa amb les resistències i reactàncies de dispersió dels debanats, la conductància G'_{Fe} i la susceptància B'_{m} no pertanyen a cap debanat, sinó que són pròpies del transformador; és per això que es parla de valors vistos des del primari (com en la Figura 9.1 a la pàgina anterior) o vistos des del secundari, representant-los en el costat corresponent.

La tensió i corrent de primari són $\underline{U}_1$ i $\underline{I}_1$ respectivament, la tensió i corrent de secundari són $\underline{U}_2$ i $\underline{I}_2$ respectivament, el corrent de secundari vist des del primari és $\underline{I}'_2$, i el corrent de buit vist des del primari és $\underline{I}'_0$.

Entre el primari i el secundari es col·loca un transformador ideal (sense pèrdues) amb una relació de transformació m igual a la del transformador real.

Els paràmetres d'aquest esquema equivalent es poden agrupar en una impedància de primari $\underline{Z}_1$, una impedància de secundari $\underline{Z}_2$ i una admitància transversal vista des del primari: $\underline{Y}'_0$:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}X_{\mathrm{d}1} \tag{9.1}$$
$$\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}X_{\mathrm{d}2} \tag{9.2}$$
$$\underline{Y}'_0 = G'_{\mathrm{Fe}} - \mathrm{j}B'_{\mathrm{m}} \tag{9.3}$$

Si es vol, la impedància de secundari $\underline{Z}_2$ es pot passar al costat primari del transformador ideal, quedant així un valor $\underline{Z}'_2$ referit al primari, de valor:

$$\underline{Z}'_2 = m^2\underline{Z}_2 = m^2(R_2 + \mathrm{j}X_{\mathrm{d}2}) \tag{9.4}$$

Les equacions que lliguen les magnituds de la Figura 9.1 a la pàgina anterior són:

$$\underline{U}_1 - \underline{Z}_1\underline{I}_1 = m(\underline{U}_2 + \underline{Z}_2\underline{I}_2) \tag{9.5}$$
$$\underline{I}'_2 = \frac{\underline{I}_2}{m} \tag{9.6}$$
$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_2 + \underline{I}'_0 \tag{9.7}$$

9.2.2 Placa de característiques

La placa de característiques d'un transformador recull els valors nominals i els valors dels assajos en buit i en curtcircuit. El paràmetres inclosos normalment són:

- Tensions nominals de primari i secundari $U_{\mathrm{N}1}$ i $U_{\mathrm{N}2}$: Són les tensions que cal aplicar als debanats del transformador, per tal que funcioni correctament en règim permanent. Es poden admetre sobretensions del 5 % en condicions de funcionament no permanent; la tensió màxima de l'aïllament elèctric determina la tensió màxima que pot suportar el transformador.

- Corrents nominals de primari i secundari $I_{\mathrm{N}1}$ i $I_{\mathrm{N}2}$: Són els corrents màxims que poden circular pels debanats del transformador en règim permanent. En condicions de funcionament no permanent s'admeten sobrecàrregues.

- Potència nominal S_N: És la potència aparent que s'obté a partir de les tensions i corrents nominals de primari i secundari.

$$S_\mathrm{N} = \begin{cases} U_\mathrm{N1} I_\mathrm{N1} = U_\mathrm{N2} I_\mathrm{N2}, & \text{transformador monofàsic} \\ \sqrt{3} U_\mathrm{N1} I_\mathrm{N1} = \sqrt{3} U_\mathrm{N2} I_\mathrm{N2}, & \text{transformador trifàsic} \end{cases} \tag{9.8}$$

- Relació de transformació m: És la relació entre les tensions nominals de primari i secundari, i es calcula com la relació entre ambdues tensions, quan el primari està connectat a la tensió nominal i el secundari està en buit. La relació de transformació també es pot calcular a partir del nombre d'espires del debanat primari N_1 i del debanat secundari N_2.

$$m = \frac{U_\mathrm{N1}}{U_\mathrm{N2}} = \begin{cases} \dfrac{N_1}{N_2}, & \text{transformador monofàsic} \\ \dfrac{N_1}{N_2}, & \text{transformador trifàsic triangle–triangle} \\ \dfrac{\sqrt{3} N_1}{\sqrt{3} N_2} = \dfrac{N_1}{N_2}, & \text{transformador trifàsic estrella–estrella} \\ \dfrac{N_1}{\sqrt{3} N_2}, & \text{transformador trifàsic triangle–estrella} \\ \dfrac{\sqrt{3} N_1}{N_2}, & \text{transformador trifàsic estrella–triangle} \\ \dfrac{N_1}{\frac{3}{2} N_2} = \dfrac{2N_1}{3N_2}, & \text{transformador trifàsic triangle–zig-zag} \\ \dfrac{\sqrt{3} N_1}{\frac{3}{2} N_2} = \dfrac{2N_1}{\sqrt{3} N_2}, & \text{transformador trifàsic estrella–zig-zag} \end{cases} \tag{9.9}$$

- Freqüència nominal f_N: Freqüència a la qual corresponen la resta de valors nominals.

- Connexió trifàsica: En el cas de transformadors trifàsics, s'especifica la connexió (estrella, triangle o zig-zag) de cadascun dels dos debanats, així com el desfasament entre les tensions de primari i secundari (vegeu la secció9.8.2 a la pàgina 163).

- Dades de l'assaig en buit i_o i W_o i de l'assaig en curtcircuit ε_cc i W_cc: Els valors de les potències W_o i W_cc es donen usualment en watt, mentre que els valors dels paràmetres i_o i ε_cc es donen en per unitat o en tant per cent; a partir d'aquests valors es pot calcular els valors dels paràmetres de l'esquema equivalent del transformador (vegeu la secció 9.6 a la pàgina 154).

Un transformador pot funcionar en unes condicions diferents de les nominals, com per exemple:

- Pot treballar a tensions nominals però subministrant una potència inferior a la nominal; aquest és el cas de funcionament més comú.

- Pot treballar a tensions inferior a la nominal, però donat que el corrent no ha de superar el seu valor nominal, la potència subministrada haurà de ser menor que la nominal.

- Pot treballar a altres freqüències diferents de la nominal; per a freqüències superiors cal tenir en compte que les pèrdues seran també superiors, i per tant la potència subministrada haurà de ser menor que la nominal.

9.3 Esquemes equivalents reduïts

Quan volem fer càlculs en circuits elèctrics amb transformadors, l'esquema equivalent d'un transformador de la Figura 9.1 a la pàgina 147, presenta l'inconvenient d'incorporar un transformador ideal, i és per això que interessa més utilitzar esquemes reduïts on aquest transformador ideal desaparegui. El procés utilitzat és bàsicament el que ja s'ha descrit en la secció 2.2 a la pàgina 41. S'escull una potència base S_{B}, una tensió base pel primari U_{B1}, i una tensió base pel secundari U_{B2}; els valors base de primari i secundari dels corrents I_{B1} i I_{B2}, de les impedàncies Z_{B1} i Z_{B2} i de les admitàncies Y_{B1} i Y_{B2}, es calculen a partir de S_{B}, U_{B1} i U_{B2}.

La condició que han de satisfer U_{B1} i U_{B2} per tal que el transformador ideal desaparegui de l'esquema reduït, és que donin lloc a una relació de transformació m_{r} del transformador ideal reduït igual a 1:

$$m_{\mathrm{r}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_{\mathrm{B1}}}{U_{\mathrm{B2}}} = \frac{U_{\mathrm{N1}}}{U_{\mathrm{N2}}} = m \tag{9.10}$$

Amb aquesta condició, l'esquema de la Figura 9.1 a la pàgina 147 es converteix en l'esquema de la Figura 9.2, anomenat usualment esquema reduït en «T».

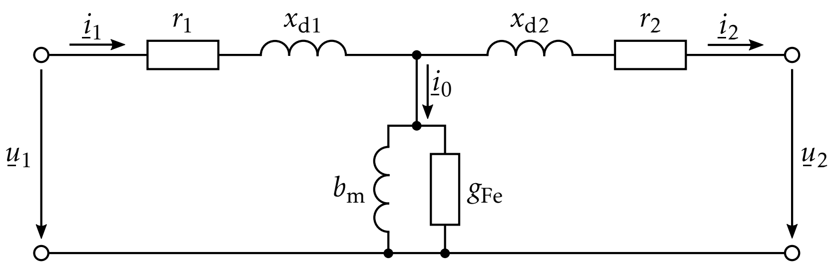


Figura 9.2 Esquema reduït en «T» d'un transformador

Els valors dels paràmetres de l'esquema equivalent reduït en «T», s'obtenen dividint els valors dels paràmetres reals pels valors base corresponents:

$$r_1 = \frac{R_1}{Z_{\mathrm{B1}}} \qquad x_{\mathrm{d1}} = \frac{X_{\mathrm{d1}}}{Z_{\mathrm{B1}}} \tag{9.11}$$

$$r_2 = \frac{R_2}{Z_{\mathrm{B2}}} \qquad x_{\mathrm{d2}} = \frac{X_{\mathrm{d2}}}{Z_{\mathrm{B2}}} \tag{9.12}$$

$$b_{\mathrm{m}} = \frac{B'_{\mathrm{m}}}{Y_{\mathrm{B1}}} \qquad g_{\mathrm{Fe}} = \frac{G'_{\mathrm{Fe}}}{Y_{\mathrm{B1}}} \tag{9.13}$$

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{U}_1}{U_{\mathrm{B1}}} \qquad \underline{i}_1 = \frac{\underline{I}_1}{I_{\mathrm{B1}}} \tag{9.14}$$

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{U}_2}{U_{\mathrm{B2}}} \qquad \underline{i}_2 = \frac{\underline{I}_2}{I_{\mathrm{B2}}} \tag{9.15}$$

$$\underline{i}_0 = \frac{\underline{I}'_0}{I_{\mathrm{B1}}} \qquad m_{\mathrm{r}} = 1 \tag{9.16}$$

Un cop es tenen els valor reduïts, es treballa amb aquest esquema con si es tractés d'un circuit monofàsic fase–neutre, independentment de si el transformador real original era monofàsic o trifàsic.

En la pràctica, degut al petit error comès i que no sempre es disposa per separat de les impedàncies primàries i secundàries, s'ajunten aquests valors en una resistència r i una impedància x úniques, formant l'anomenada impedància de curtcircuit $\underline{z}_{\mathrm{cc}}$.

$$r = r_1 + r_2 \qquad x = x_{\mathrm{d1}} + x_{\mathrm{d2}} \qquad \underline{z}_{\mathrm{cc}} = r + \mathrm{j}x \tag{9.17}$$

Per convenció $\underline{z}_{\mathrm{cc}}$ se situa en el costat d'alta tensió; per tant, depenent que el primari sigui el costat d'alta tensió (AT) i el secundari el de baixa tensió (BT), o a l'inrevés, tenim els esquemes reduïts de la Figura 9.3, anomenats usualment esquemes reduïts en «L».

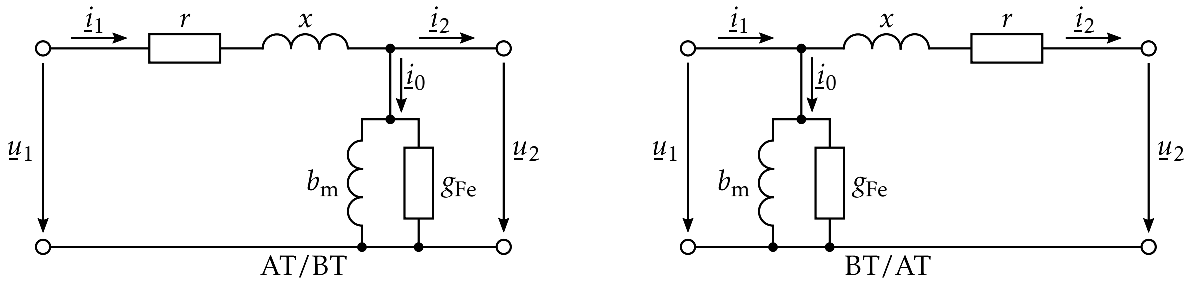


Figura 9.3 Esquemes reduïts en «L» d'un transformador

Finalment, quan el transformador treballa en càrrega, és a dir, és lluny de treballar en buit i per tant es compleix $|\underline{i}_2| \gg |\underline{i}_0|$, es pot eliminar l'admitància transversal en els esquemes equivalents reduïts en «T» o en «L», ja que l'error comès és molt petit.

En la Taula 9.1 es relacionen els valors base dels tres tipus d'esquemes equivalents reduïts més utilitzats: l'esquema en per unitat, l'esquema reduït al primari i l'esquema reduït al secundari.

Taula 9.1 Valors base per a diferents tipus d'esquemes reduïts

Valor Base	Transformador monofàsic			Transformador trifàsic[a]		
	en pu	reduït al 1ari	reduït al 2ari	en pu	reduït al 1ari	reduït al 2ari
$S_{\mathrm{B}}/\mathrm{VA}$	S_{N}	1	1	S_{N}	3	3
$U_{\mathrm{B1}}/\mathrm{V}$	U_{N1}	1	m	U_{N1}	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}m$
$U_{\mathrm{B2}}/\mathrm{V}$	U_{N2}	$\frac{1}{m}$	1	U_{N2}	$\frac{\sqrt{3}}{m}$	$\sqrt{3}$
$I_{\mathrm{B1}}/\mathrm{A}$	$\frac{S_{\mathrm{N}}}{U_{\mathrm{N1}}}$	1	$\frac{1}{m}$	$\frac{S_{\mathrm{N}}}{\sqrt{3}U_{\mathrm{N1}}}$	1	$\frac{1}{m}$
$I_{\mathrm{B2}}/\mathrm{A}$	$\frac{S_{\mathrm{N}}}{U_{\mathrm{N2}}}$	m	1	$\frac{S_{\mathrm{N}}}{\sqrt{3}U_{\mathrm{N2}}}$	m	1
Z_{B1}/Ω	$\frac{U_{\mathrm{N1}}^2}{S_{\mathrm{N}}}$	1	m^2	$\frac{U_{\mathrm{N1}}^2}{S_{\mathrm{N}}}$	1	m^2
Z_{B2}/Ω	$\frac{U_{\mathrm{N2}}^2}{S_{\mathrm{N}}}$	$\frac{1}{m^2}$	1	$\frac{U_{\mathrm{N2}}^2}{S_{\mathrm{N}}}$	$\frac{1}{m^2}$	1

(continua a la pàgina següent)

Taula 9.1 Valors base per a diferents tipus d'esquemes reduïts (*ve de la pàgina anterior*)

Valor Base	Transformador monofàsic			Transformador trifàsic[a]		
	en pu	reduït al 1ari	reduït al 2ari	en pu	reduït al 1ari	reduït al 2ari
Y_{B1}/S	$\dfrac{S_N}{U_{N1}^2}$	1	$\dfrac{1}{m^2}$	$\dfrac{S_N}{U_{N1}^2}$	1	$\dfrac{1}{m^2}$
Y_{B2}/S	$\dfrac{S_N}{U_{N2}^2}$	m^2	1	$\dfrac{S_N}{U_{N2}^2}$	m^2	1

[a] Com és usual en el cas de circuits trifàsics, les potències són potències trifàsiques, les tensions són tensions fase–fase i l'esquema equivalent reduït és un esquema equivalent fase–neutre.

Quan hi ha més d'un transformador en un circuit, s'utilitza normalment l'esquema reduït en per unitat, escollint una potència base única i tantes tensions base con nivells de tensió originin els transformadors; cadascuna de les parelles de tensions base consecutives han de complir la relació de l'equació (9.10). En la secció 2.2.2 a la pàgina 42 es pot veure un exemple amb dos transformadors.

9.4 Circuit equivalent Thévenin vist des del secundari

El que s'explica a continuació és vàlid per a transformadors monofàsics i trifàsics, ja que s'utilitzarà l'esquema equivalent del transformador en «T», expressant tots els seus valors en per unitat.

En la Figura 9.4 es representa a l'esquerra, un transformador alimentat des del primari per una font de tensió $\underline{u}_G$, la qual té una impedància sèrie $\underline{z}_G$, i a la dreta el seu circuit equivalent Thévenin.

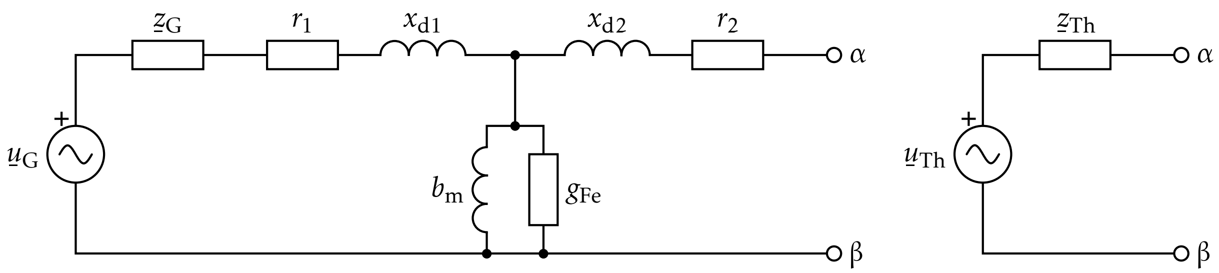


Figura 9.4 Circuit equivalen Thévenin d'un transformador vist des del secundari

La tensió i impedància Thévenin venen definides per les equacions següents:

$$\underline{u}_{Th} = \frac{\underline{u}_G}{\underline{z}_G + r_1 + \mathrm{j}x_{d1} + \dfrac{1}{g_{Fe} - \mathrm{j}b_m}} \frac{1}{g_{Fe} - \mathrm{j}b_m} \tag{9.18}$$

$$\underline{z}_{Th} = r_2 + \mathrm{j}x_{d2} + \frac{1}{\dfrac{1}{\underline{z}_G + r_1 + \mathrm{j}x_{d1}} + g_{Fe} - \mathrm{j}b_m} \tag{9.19}$$

Tal com s'ha explicat en l'apartat 1.2.1 a la pàgina 3, la tensió $\underline{u}_{Th}$ és igual a la tensió en buit entre α i β, i la impedància $\underline{z}_{Th}$ és igual la impedància que existeix entre α i β quan es curtcircuita la font de tensió $\underline{u}_G$.

Normalment no es coneixen r_1, r_2, x_{d1} i x_{d2} per separat, i en canvi sí que es coneixen $r = r_1 + r_2$ i $x = x_{d1} + x_{d2}$; en aquest cas s'obtenen dues equacions aproximades, a partir de les equacions anteriors, substituint r_1 i x_{d1} per r i x respectivament en les equacions de $\underline{u}_{\mathrm{Th}}$ i $\underline{z}_{\mathrm{Th}}$, i menyspreant addicionalment el terme $r_2 + \mathrm{j}x_{d2}$ en l'equació de $\underline{z}_{\mathrm{Th}}$. Amb aquestes consideracions tenim:

$$\underline{u}_{\mathrm{Th}} \approx \frac{\underline{u}_{\mathrm{G}}}{\underline{z}_{\mathrm{G}} + r + \mathrm{j}x + \dfrac{1}{g_{\mathrm{Fe}} - \mathrm{j}b_{\mathrm{m}}}} \, \frac{1}{g_{\mathrm{Fe}} - \mathrm{j}b_{\mathrm{m}}} \tag{9.20}$$

$$\underline{z}_{\mathrm{Th}} \approx \frac{1}{\dfrac{1}{\underline{z}_{\mathrm{G}} + r + \mathrm{j}x} + g_{\mathrm{Fe}} - \mathrm{j}b_{\mathrm{m}}} \tag{9.21}$$

A partir de les equacions (9.18) i (9.19), o de les equacions (9.20) i (9.21), si es vol treballar amb els valors reduïts al secundari $\underline{U}''_{\mathrm{Th}}$ i $\underline{Z}''_{\mathrm{Th}}$, només cal multiplicar els valors en per unitat que s'obtenen amb aquestes equacions, per les tensions i impedàncies base del secundari U_{B2} i Z_{B2} respectivament:

$$\underline{U}''_{\mathrm{Th}} = \underline{u}_{\mathrm{Th}} \, U_{\mathrm{B2}} \tag{9.22}$$

$$\underline{Z}''_{\mathrm{Th}} = \underline{z}_{\mathrm{Th}} \, Z_{\mathrm{B2}} \tag{9.23}$$

9.5 Rendiment, caiguda de tensió i regulació de voltatge

9.5.1 Rendiment

El rendiment η d'un transformador es calcula tenint en compte la potència activa subministrada en el secundari p_2 i les pèrdues de potència activa en el coure dels debanats p_{Cu} i en el ferro del circuit magnètic p_{Fe}:

$$\eta = \frac{p_2}{p_2 + p_{\mathrm{Cu}} + p_{\mathrm{Fe}}} \tag{9.24}$$

La potència p_2 ve determinada per la càrrega connectada en el secundari del transformador, i utilitzant els esquemes equivalents reduïts es pot calcular com:

$$p_2 = \mathrm{Re}(\underline{u}_2 \, \underline{i}_2^*) \tag{9.25}$$

Les pèrdues de potències en el coure i en el ferro es calculen, utilitzant els esquemes equivalents reduïts en «L», a partir de les expressions següents:

$$\begin{matrix}\text{Transformador} \\ \text{AT/BT}\end{matrix} \left\{ \begin{aligned} p_{\mathrm{Cu}} &= r\,|\underline{i}_1|^2 \\ p_{\mathrm{Fe}} &= g_{\mathrm{Fe}}|\underline{u}_2|^2 \end{aligned} \right. \qquad \begin{matrix}\text{Transformador} \\ \text{BT/AT}\end{matrix} \left\{ \begin{aligned} p_{\mathrm{Cu}} &= r\,|\underline{i}_2|^2 \\ p_{\mathrm{Fe}} &= g_{\mathrm{Fe}}|\underline{u}_1|^2 \end{aligned} \right. \tag{9.26}$$

9.5.2 Caiguda de tensió i regulació de voltatge

La caiguda de tensió Δu d'un transformador es defineix con la diferència entre la tensió secundària quan el transformador està en buit i aquesta mateixa tensió quan el transformador treballa en càrrega.

Observant els esquemes equivalents reduïts, es veu que quan el transformador treballa en buit tenim $\underline{i}_2 = 0$, i donat que la impedància transversal és molt més gran que la longitudinal, la tensió en buit del secundari és pràcticament igual a la primària. Per tant, la caiguda de tensió és:

$$\Delta u = |\underline{u}_1| - |\underline{u}_2| \tag{9.27}$$

Normalment aquest valor és positiu, però quan la carrega connectada al secundari es fortament capacitiva podem tenir $|\underline{u}_2| > |\underline{u}_1|$ i per tant tenim una caiguda de tensió negativa; això es coneix com l'efecte Ferranti.

La regulació de voltatge RV no és més que la relació entre la caiguda de tensió i la tensió de secundari:

$$\mathrm{RV} = \frac{|\underline{u}_1| - |\underline{u}_2|}{|\underline{u}_2|} \tag{9.28}$$

9.6 Determinació dels paràmetres elèctrics

Els transformadors se sotmeten bàsicament a dos assajos, l'assaig en buit i l'assaig en curtcircuit, per tal de determinar els paràmetres del seus circuits elèctrics equivalents.

Mitjançant l'assaig en buit es determinen els paràmetres transversals del circuit equivalent, i mitjançant l'assaig en curtcircuit es determinen els seus paràmetres longitudinals.

Per realitzar aquests assajos cal conèixer prèviament els paràmetres bàsics del transformador: les tensions nominals de primari i de secundari U_{N1} i U_{N2}, i la potència nominal S_{N}; com és habitual, en el cas dels transformadors trifàsics, les tensions nominals són les tensions fase–fase i la potència nominal és la potència trifàsica.

Els corrents nominals s'obtenen a partir de les tensions i potència nominals:

$$\begin{array}{c}\text{Transformador}\\ \text{monofàsic}\end{array} \begin{cases} I_{\mathrm{N1}} = \dfrac{S_{\mathrm{N}}}{U_{\mathrm{N1}}} \\[2ex] I_{\mathrm{N2}} = \dfrac{S_{\mathrm{N}}}{U_{\mathrm{N2}}} \end{cases} \qquad \begin{array}{c}\text{Transformador}\\ \text{trifàsic}\end{array} \begin{cases} I_{\mathrm{N1}} = \dfrac{S_{\mathrm{N}}}{\sqrt{3}U_{\mathrm{N1}}} \\[2ex] I_{\mathrm{N2}} = \dfrac{S_{\mathrm{N}}}{\sqrt{3}U_{\mathrm{N2}}} \end{cases} \tag{9.29}$$

En les explicacions que venen a continuació se suposa que el primari és el costat d'alta tensió i que el secundari és el costat de baixa tensió. Amb això no es perd la generalitat de l'explicació, ja que si la configuració real és la contrària de la adoptada aquí, únicament caldrà intercanviar els subíndexs 1 i 2 en les equacions que s'exposaran tot seguit.

9.6.1 Assaig en buit

La manera més usual de fer l'assaig en buit és alimentar el costat de baixa tensió del transformador a la seva tensió nominal, tot deixant el costat d'alta tensió en circuit obert. També és possible tanmateix, alimentar pel costat d'alta tensió i deixar en circuit obert el costat de baixa tensió; altrament, tampoc no és necessari alimentar a tensió nominal, només cal fer-ho a un valor proper.

En la Figura 9.5 a la pàgina següent es pot veure com ha de connectar-se un transformador monofàsic, per tal de realitzar-ne l'assaig en buit.

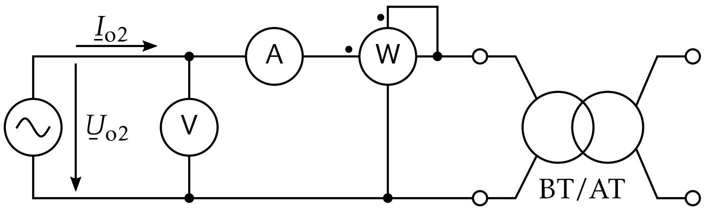


Figura 9.5 Assaig en buit d'un transformador monofàsic

A partir del diversos aparells de mesura, obtenim els valors de la tensió d'alimentació U_{o2}, del corrent que circula I_{o2} i de la potència consumida W_o, segons:

$$U_{o2} \equiv |\underline{U}_{o2}| = \mathrm{V} \qquad I_{o2} \equiv |\underline{I}_{o2}| = \mathrm{A} \qquad W_o = \mathrm{W} \tag{9.30}$$

En la Figura 9.6 es pot veure com ha de connectar-se un transformador trifàsic, per tal de realitzar-ne l'assaig en buit.

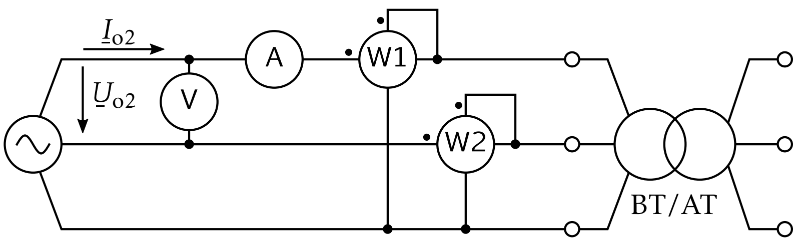


Figura 9.6 Assaig en buit d'un transformador trifàsic

A partir del diversos aparells de mesura, obtenim els valors de la tensió trifàsica d'alimentació U_{o2}, del corrent que circula I_{o2} i de la potència consumida W_o, segons:

$$U_{o2} \equiv |\underline{U}_{o2}| = \mathrm{V} \qquad I_{o2} \equiv |\underline{I}_{o2}| = \mathrm{A} \qquad W_o = \mathrm{W1} + \mathrm{W2} \tag{9.31}$$

9.6.2 Assaig en curtcircuit

La manera més usual de fer l'assaig en curtcircuit és curtcircuitar el costat de baixa tensió del transformador i alimentar el costat d'alta tensió a una tensió tal, que el corrent que circuli sigui igual al nominal. També és possible tanmateix, alimentar pel costat de baixa tensió i curtcircuitar el costat d'alta tensió; altrament, tampoc no és necessari que el corrent que circuli sigui el nominal, només cal que sigui un valor proper.

En la Figura 9.7 a la pàgina següent es pot veure com ha de connectar-se un transformador monofàsic, per tal de realitzar-ne l'assaig en curtcircuit.

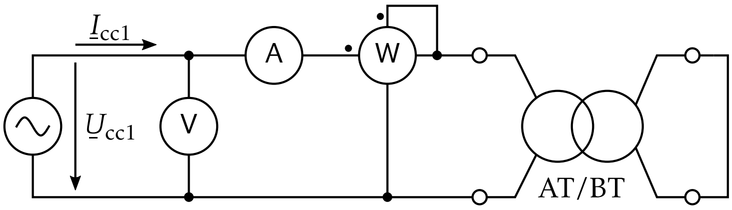


Figura 9.7 Assaig en curtcircuit d'un transformador monofàsic

A partir del diversos aparells de mesura, obtenim els valors de la tensió d'alimentació U_{cc1}, del corrent que circula I_{cc1} i de la potència consumida W_{cc}, segons:

$$U_{cc1} \equiv |\underline{U}_{cc1}| = \mathrm{V} \qquad I_{cc1} \equiv |\underline{I}_{cc1}| = \mathrm{A} \qquad W_{cc} = \mathrm{W} \tag{9.32}$$

En la Figura 9.8 es pot veure com ha de connectar-se un transformador trifàsic, per tal de realitzar-ne l'assaig en curtcircuit.

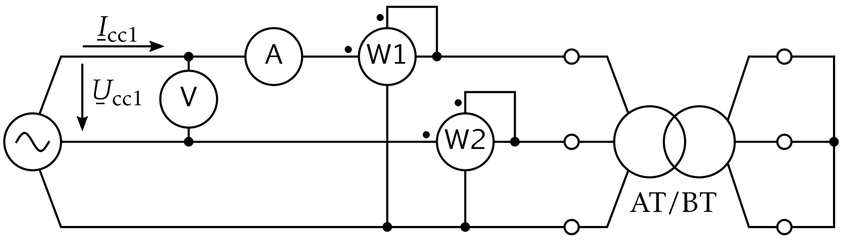


Figura 9.8 Assaig en curtcircuit d'un transformador trifàsic

A partir del diversos aparells de mesura, obtenim els valors de la tensió trifàsica d'alimentació U_{cc1}, del corrent que circula I_{cc1} i de la potència consumida W_{cc}, segons:

$$U_{cc1} \equiv |\underline{U}_{cc1}| = \mathrm{V} \qquad I_{cc1} \equiv |\underline{I}_{cc1}| = \mathrm{A} \qquad W_{cc} = \mathrm{W1} + \mathrm{W2} \tag{9.33}$$

9.6.3 Determinació dels paràmetres a partir dels assajos en buit i en curtcircuit

En la Figura 9.9 es representen els esquemes equivalents en «L» d'un transformador en l'assaig en buit i en l'assaig en curtcircuit, expressant tots els valor en per unitat. Aquest esquema, com ja s'ha vist anteriorment, és el mateix tant si el transformador és monofàsic com si és trifàsic, utilitzant en cada cal els valors nominals adequats; per tant, tot el que s'explica a continuació és aplicable a ambdós tipus de transformadors.

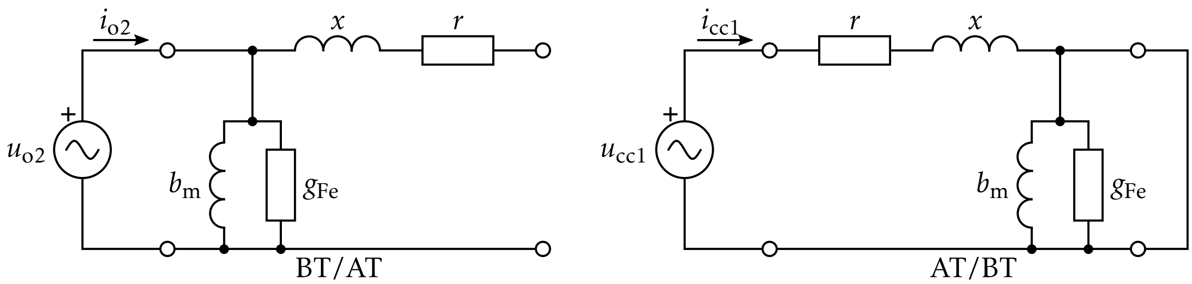


Figura 9.9 Esquemes equivalents d'un transformador en els assajos en buit i en curtcircuit

Les tensions, els corrents i les potències d'aquests dos assajos, expressats en per unitat són:

$$u_{o2} = \frac{U_{o2}}{U_{N2}} \qquad i_{o2} = \frac{I_{o2}}{I_{N2}} \qquad w_o = \frac{W_o}{S_N} \tag{9.34}$$

$$u_{cc1} = \frac{U_{cc1}}{U_{N1}} \qquad i_{cc1} = \frac{I_{cc1}}{I_{N1}} \qquad w_{cc} = \frac{W_{cc}}{S_N} \tag{9.35}$$

A partir d'aquests valors podem calcular la impedància longitudinal del transformador $\underline{z}_{cc} = r + jx$, i la seva admitància transversal $\underline{y}_o = g_{Fe} - jb_m$.

Admitància transversal

En l'assaig en buit el corrent i_{o2} circula únicament per l'admitància $\underline{y}_o$, i tota la potència w_o és consumida per g_{Fe}; amb aquestes consideracions tenim:

$$g_{Fe} = \frac{w_o}{u_{o2}^2} \qquad |\underline{y}_o| = \frac{i_{o2}}{u_{o2}} \qquad b_m = \sqrt{|\underline{y}_o|^2 - g_{Fe}^2} \tag{9.36}$$

Si aquest assaig es fes pel primari, ens quedaria la impedància $\underline{z}_{cc}$ en sèrie amb l'admitància $\underline{y}_o$, i per tant les fórmules anteriors no serien correctes, no obstant, tenint en compte que $|\underline{z}_{cc}| \ll |1/\underline{y}_o|$, es considera que el valor de $\underline{z}_{cc}$ és negligible, i que les fórmules deduïdes anteriorment són també aplicables en aquests cas, això sí, canviant tots els subíndexs «2» per «1».

En el cas que l'assaig en buit es faci a tensió nominal, tant si es fa pel secundari com si es fa pel primari, la tensió en buit serà igual a 1 pu, i per tant es pot ometre els subíndexs «1» o «2»: $u_{o2} = u_{o1} \equiv u_o = 1$; el mateix passa amb els subíndexs del corrent en buit: $i_{o2} = i_{o1} \equiv i_o$. Amb aquestes consideracions tenim:

$$u_o = 1 \qquad \Rightarrow \qquad g_{Fe} = w_o \qquad |\underline{y}_o| = i_o \qquad b_m = \sqrt{i_o^2 - w_o^2} \tag{9.37}$$

Impedància longitudinal

En l'assaig en curtcircuit el corrent i_{cc1} circula únicament per la impedància $\underline{z}_{cc}$, i tota la potència w_{cc} és consumida per r; amb aquestes consideracions tenim:

$$r = \frac{w_{cc}}{i_{cc1}^2} \qquad |\underline{z}_{cc}| = \frac{u_{cc1}}{i_{cc1}} \qquad x = \sqrt{|\underline{z}_{cc}|^2 - r^2} \tag{9.38}$$

Si aquest assaig es fes pel secundari, ens quedaria la impedància $\underline{z}_{cc}$ en paral·lel amb l'admitància $\underline{y}_o$, i per tant les fórmules anteriors no serien correctes, no obstant, tenint en compte que $|\underline{y}_o| \ll |1/\underline{z}_{cc}|$, es considera que el valor de $\underline{y}_o$ és negligible, i que les fórmules deduïdes anteriorment són també aplicables en aquests cas, això sí, canviant tots els subíndexs «1» per «2».

En el cas que l'assaig en curtcircuit es faci a corrent nominal, tant si es fa pel primari com si es fa pel secundari, el corrent de curtcircuit serà igual a 1 pu, i per tant es pot ometre els subíndexs «1» o «2»: $i_{cc1} = i_{cc2} \equiv i_{cc} = 1$; el mateix passa amb els subíndexs de la tensió de curtcircuit: $u_{cc1} = u_{cc2} \equiv u_{cc}$. En aquest cas, el valor de u_{cc} també es coneix amb la denominació de tensió relativa de curt circuit en tant per u, i s'utilitza el símbol ε_{cc}; per a r i x s'utilitzen també els símbols ε_{rcc} i ε_{xcc} respectivament. Amb aquestes consideracions tenim:

$$i_{cc} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad r \equiv \varepsilon_{rcc} = w_{cc} \qquad |\underline{z}_{cc}| \equiv \varepsilon_{cc} = u_{cc} \qquad x \equiv \varepsilon_{xcc} = \sqrt{u_{cc}^2 - w_{cc}^2} \tag{9.39}$$

Si es desitja utilitzar l'esquema equivalent reduït en «T» de la Figura 9.2 a la pàgina 150, es poden utilitzar amb prou aproximació les relacions següents:

$$r_1 = r_2 = \frac{r}{2} \qquad x_{d1} = x_{d1} = \frac{x}{2} \tag{9.40}$$

Exemple 9.1 Determinació dels paràmetres d'un transformador

Tenim un transformador monofàsic amb les següents característiques:

$$S_N = 400\,\text{kVA},\ U_{N1} = 25\,\text{kV},\ U_{N2} = 400\,\text{V},\ \varepsilon_{cc} = 0{,}04,\ W_{cc} = 4\,\text{kW},\ i_o = 0{,}02,\ W_o = 2\,\text{kW}$$

El transformador té connectada una càrrega en el secundari que consumeix 200 kW amb $\cos\varphi = 0{,}8$(i); en aquestes condicions la tensió secundària és de 380 V. Es tracta de trobar en primer lloc els paràmetres del transformador, i a continuació la tensió primària, la caiguda de tensió referida al secundari i el rendiment.

Començarem per trobar els paràmetres del transformador en per unitat, utilitzant els valors base propis del transformadors, als quals estan referits ε_{cc} i i_o, és a dir:

$$S_B = 400\,\text{kVA}, \quad U_{B1} = 25\,\text{kV}, \quad U_{B2} = 400\,\text{V}$$

Donat que no es diu el contrari suposarem que l'assaig en buit s'ha realitzat aplicant la tensió nominal al secundari (BT) i deixant obert el primari (AT), i que l'assaig en curtcircuit s'ha fet fent circular el corrent nominal pel primari (AT) tot curtcircuitant el secundar (BT). En aquestes condicions podem aplicar les equacions (9.37) i (9.39):

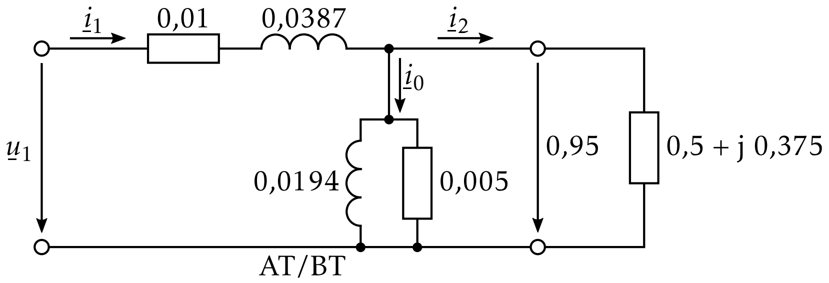
$$\begin{aligned}
g_{Fe} &= w_o = \frac{2\,\text{kW}}{400\,\text{kVA}} = 0{,}005 \\
|\underline{y}_o| &= i_o = 0{,}02 \\
b_m &= \sqrt{i_o^2 - w_o^2} = \sqrt{0{,}02^2 - 0{,}005^2} = 0{,}0194 \\
r &= w_{cc} = \frac{4\,\text{kW}}{400\,\text{kVA}} = 0{,}01 \\
|\underline{z}_{cc}| &= \varepsilon_{cc} = 0{,}04 \\
x &= \sqrt{\varepsilon_{cc}^2 - w_{cc}^2} = \sqrt{0{,}04^2 - 0{,}01^2} = 0{,}0387
\end{aligned}$$

A continuació, convertim la potència absorbida per la càrrega i la tensió secundària, la qual prendrem com a referència d'angles, a valors expressats en per unitat:

$$\underline{s}_2 = \frac{200\,\text{kW}}{400\,\text{kVA}} + \text{j}\frac{\left(200 \times \frac{\sqrt{1-0{,}8^2}}{0{,}8}\right)\text{kvar}}{400\,\text{kVA}} = 0{,}5 + \text{j}0{,}375$$

$$\underline{u}_2 = \frac{380\,\text{V}}{400\,\text{V}} = 0{,}95$$

Amb aquests valors ens queda l'esquema següent:



Calculem ara $\underline{i}_2$, $\underline{i}_0$, $\underline{i}_1$ i $\underline{u}_1$:

$$\underline{i}_2 = \frac{\underline{s}_2^*}{\underline{u}_2^*} = \frac{0{,}5 - \text{j}0{,}375}{0{,}95} = 0{,}6579_{\angle -36{,}87°}$$

$$\underline{i}_0 = \underline{u}_2(g_{\text{Fe}} - \text{j}b_{\text{m}}) = 0{,}95 \times (0{,}005 - \text{j}0{,}0194) = 0{,}0190_{\angle -75{,}55°}$$

$$\underline{i}_1 = \underline{i}_2 + \underline{i}_0 = 0{,}6579_{\angle -36{,}87°} + 0{,}0190_{\angle -75{,}55°} = 0{,}6728_{\angle -37{,}88°}$$

$$\underline{u}_1 = (r + \text{j}x)\underline{i}_1 + \underline{u}_2 = (0{,}01 + \text{j}0{,}0387) \times 0{,}6728_{\angle -37{,}88°} + 0{,}95 = 0{,}9715_{\angle 0{,}97°}$$

La tensió primària expressada en volt és:

$$\underline{U}_1 = 0{,}9715_{\angle 0{,}97°} \times 25\,\text{kV} = 24\,287{,}5_{\angle 0{,}97°}\,\text{V}$$

La caiguda de tensió és:

$$\Delta u = |\underline{u}_1| - |\underline{u}_2| = 0{,}9715 - 0{,}95 = 0{,}0215$$

Aquest valor referit al secundari val:

$$\Delta U_2 = 0{,}0215 \times 400\,\text{V} = 8{,}6\,\text{V}$$

Calculem finalment el rendiment el transformador, a partir de les pèrdues en el coure i en el ferro:

$$p_{\text{Cu}} = r|\underline{i}_1|^2 = 0{,}01 \times 0{,}6728^2 = 0{,}004\,527$$

$$p_{\text{Fe}} = g_{\text{Fe}}|\underline{u}_2|^2 = 0{,}005 \times 0{,}95^2 = 0{,}004\,513$$

$$\eta = \frac{p_2}{p_2 + p_{\text{Cu}} + p_{\text{Fe}}} = \frac{0{,}5}{0{,}5 + 0{,}004\,527 + 0{,}004\,513} = 0{,}98$$

9.7 Transformadors de tres debanats

Un transformador de tres debanats té un debanat primari i dos debanats secundaris; la potència del debanat primari es reparteix entre els dos secundaris, les tensions dels quals poden ser iguals o diferents.

Anomenant «P» al primari, «S» a un secundari, «T» (terciari) a l'altre secundari, l'esquema equivalent reduït d'un transformador de tres debanats, tenint en compte només les impedàncies longitudinals, és el representat en la Figura 9.10.

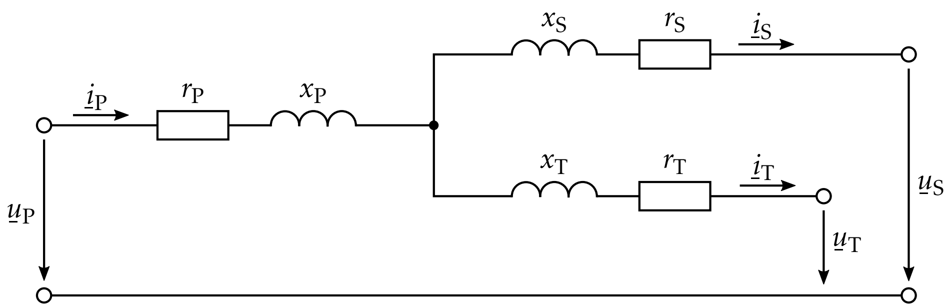


Figura 9.10 Esquema equivalent reduït d'un transformador de tres debanats

Com en el cas dels transformadors de dos debanats, cal d'escollir tensions base proporcionals a les tensions nominals dels tres debanats i una potència base única.

Les tres impedàncies d'aquest circuit $\underline{z}_P = r_P + jx_P$, $\underline{z}_S = r_S + jx_S$ i $\underline{z}_T = r_T + jx_T$ es calculen a partir de les impedàncies entre parells de debanats $\underline{z}_{PS}$, $\underline{z}_{PT}$ i $\underline{z}_{ST}$, que són les que s'obtenen dels assajos del transformador:

$$\underline{z}_P = \frac{\underline{z}_{PS} + \underline{z}_{PT} - \underline{z}_{ST}}{2} \tag{9.41a}$$

$$\underline{z}_S = \frac{\underline{z}_{PS} + \underline{z}_{ST} - \underline{z}_{PT}}{2} \tag{9.41b}$$

$$\underline{z}_T = \frac{\underline{z}_{PT} + \underline{z}_{ST} - \underline{z}_{PS}}{2} \tag{9.41c}$$

En aquestes equacions cal tenir en compte que les tres impedàncies $\underline{z}_{PS}$, $\underline{z}_{PT}$ i $\underline{z}_{ST}$ han d'estar donades en per unitat referides a un base comú, o han d'estar donades en ohm referides a un mateix debanat. Cal dir a més que el punt d'unió de les tres impedàncies $\underline{z}_P$, $\underline{z}_S$ i $\underline{z}_T$ no té res a veure amb el neutre del sistema, i que aquestes impedàncies calculades poden tenir parts reals amb valors negatius.

Exemple 9.2 Impedàncies del circuit equivalent d'un transformador de tres debanats

Tenim un transformador de tres debanats amb les següents característiques: primari de 15 MVA i 66 kV, secundari de 10 MVA i 13,2 kV i terciari de 5 MVA i 2,3 kV; les impedàncies entre debanats són: $\underline{z}_{PS}$ = j0,07 (referida a 15 MVA i 66 kV/13,2 kV), $\underline{z}_{PT}$ = j0,09 (referida a 15 MVA i 66 kV/2,3 kV) i $\underline{z}_{ST}$ = j0,08 (referida a 10 MVA i 13,2 kV/2,3 kV). Es tracta de calcular les impedàncies del circuit equivalent reduït expressades en ohm en el primari, i expressades en per unitat en una base de 30 MVA i 66 kV/13,2 kV/2,3 kV.

Comencem calculant les impedàncies en ohm referides al primari, convertint en primer lloc els tres valors $\underline{z}_{PS}$, $\underline{z}_{PT}$ i $\underline{z}_{ST}$ a valors òhmics $\underline{z}'_{PS}$, $\underline{z}'_{PT}$ i $\underline{z}'_{ST}$ referits a aquest debanat. Per obtenir $\underline{z}'_{PS}$ i $\underline{z}'_{PT}$ només cal multiplicar aquests valors per la impedància base del primari; en el cas de $\underline{z}'_{ST}$ són necessaris dos passos, primer multipliquem per la impedància base del secundari, amb la qual cosa tindrem una impedància $\underline{z}''_{ST}$ referida al secundari, i després multipliquem per la relació de transformació entre primari i secundari al quadrat, per tal de referir-la al primari:

$$
\begin{aligned}
\underline{z}'_{PS} &= \mathrm{j}0{,}07 \times \frac{(66\,\mathrm{kV})^2}{15\,\mathrm{MVA}} = \mathrm{j}20{,}328\,\Omega \\
\underline{z}'_{PT} &= \mathrm{j}0{,}09 \times \frac{(66\,\mathrm{kV})^2}{15\,\mathrm{MVA}} = \mathrm{j}26{,}136\,\Omega \\
\underline{z}''_{ST} &= \mathrm{j}0{,}08 \times \frac{(13{,}2\,\mathrm{kV})^2}{10\,\mathrm{MVA}} = \mathrm{j}1{,}393\,92\,\Omega \\
\underline{z}'_{ST} &= 1{,}393\,92\,\Omega \times \left(\frac{66\,\mathrm{kV}}{13{,}2\,\mathrm{kV}}\right)^2 = \mathrm{j}34{,}848\,\Omega
\end{aligned}
$$

Els valors buscats $\underline{z}'_P$, $\underline{z}'_S$ i $\underline{z}'_T$ són:

$$
\begin{aligned}
\underline{z}'_P &= \frac{\mathrm{j}20{,}328\,\Omega + \mathrm{j}26{,}136\,\Omega - \mathrm{j}34{,}848\,\Omega}{2} = \mathrm{j}5{,}808\,\Omega \\
\underline{z}'_S &= \frac{\mathrm{j}20{,}328\,\Omega + \mathrm{j}34{,}848\,\Omega - \mathrm{j}26{,}136\,\Omega}{2} = \mathrm{j}14{,}520\,\Omega \\
\underline{z}'_T &= \frac{\mathrm{j}26{,}136\,\Omega + \mathrm{j}34{,}848\,\Omega - \mathrm{j}20{,}328\,\Omega}{2} = \mathrm{j}20{,}328\,\Omega
\end{aligned}
$$

Calculem ara els valors de les impedàncies en per unitat en la base demanada, convertint en primer lloc els tres valors $\underline{z}_{PS}$, $\underline{z}_{PT}$ i $\underline{z}_{ST}$ a aquesta base; només caldrà fer una conversió de potències ja que les tensions base i nominals són les mateixes:

$$
\begin{aligned}
\underline{z}_{PS} &= \mathrm{j}0{,}07 \times \frac{30\,\mathrm{MVA}}{15\,\mathrm{MVA}} = \mathrm{j}0{,}14 \\
\underline{z}_{PT} &= \mathrm{j}0{,}09 \times \frac{30\,\mathrm{MVA}}{15\,\mathrm{MVA}} = \mathrm{j}0{,}18 \\
\underline{z}_{ST} &= \mathrm{j}0{,}08 \times \frac{30\,\mathrm{MVA}}{10\,\mathrm{MVA}} = \mathrm{j}0{,}24
\end{aligned}
$$

Els valors buscats $\underline{z}_P$, $\underline{z}_S$ i $\underline{z}_T$ són:

$$
\begin{aligned}
\underline{z}_P &= \frac{\mathrm{j}0{,}14 + \mathrm{j}0{,}18 - \mathrm{j}0{,}24}{2} = \mathrm{j}0{,}04 \\
\underline{z}_S &= \frac{\mathrm{j}0{,}14 + \mathrm{j}0{,}24 - \mathrm{j}0{,}18}{2} = \mathrm{j}0{,}10
\end{aligned}
$$

$$z_{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{j}0{,}18 + \mathrm{j}0{,}24 - \mathrm{j}0{,}14}{2} = \mathrm{j}0{,}14$$

Com és natural, si multipliquem aquests valors en per unitat z_{P}, z_{S} i z_{T} per la impedància base del primari: $\frac{(66\,\mathrm{kV})^2}{30\,\mathrm{MVA}} = 145{,}2\,\Omega$, obtindrem els valors òhmics z'_{P}, z'_{S} i z'_{T} que hem calculat anteriorment.

9.8 Característiques particulars dels transformadors trifàsics

9.8.1 Tipus de connexions

Connectant tres transformador monofàsics entre si podem crear-ne un de trifàsic (banc trifàsic). No obstant, és més comú construir els transformadors trifàsics d'una sola peça, ja sigui amb un nucli de tres columnes (transformador de columnes) o amb un nucli de cinc columnes (transformador cuirassat).[1]

Tant el primari com el secundari poden connectar-se de tres maneres diferents: en estrella (Y) en triangle (D) o en zig-zag (Z); les característiques principals de cadascuna d'aquestes connexions són:

- **Y**. La connexió en estrella permet tenir el neutre accessible. El corrent de línia és el que circula per cada debanat; cada debanat suporta la tensió fase–neutre. No té un bon comportament amb càrregues desequilibrades.
- **D**. La connexió en triangle no pot proporcionar un neutre. El corrent que circula per cada debanat és el de línia dividit per $\sqrt{3}$; cada debanat suporta la tensió fase–fase. Per a una mateixa tensió i potència, els debanats d'un transformador connectat en triangle han de tenir $\sqrt{3}$ vegades més espires que els d'un transformador connectat en estrella; la quantitat de coure, no obstant, pot ser la mateixa ja que la secció pot ser menor, donat que el corrent que circula pels debanats és $\sqrt{3}$ vegades menor. Té un bon comportament amb càrregues desequilibrades ja que redistribueix parcialment el desequilibri entre les fases.
- **Z**. La connexió en zig-zag permet tenir el neutre accessible, però requereix dues bobines iguals per fase. El corrent que circula per cada debanat és el de línia; cadascuna de les dues bobines d'un debanat suporta la tensió fase–fase dividida per 3; aquestes dues tensions no estan en fase i la seva suma és igual a la tensió fase–neutre. Per a una mateixa tensió i potència, els debanats d'un transformador connectat en zig-zag han de tenir $2/\sqrt{3}$ vegades més espires que els d'un transformador connectat en estrella; la quantitat de coure és més gran ja que la secció ha de mantenir-se igual, donat que el corrent que circula pels debanats és el mateix. Té un bon comportament amb càrregues desequilibrades.

Les combinacions possibles de connexions de primari i secundari són moltes. Les més usuals són les següents:

- **Estrella–Estrella**. És poc utilitzada ja que no es comporta bé amb càrregues desequilibrades, originant desplaçaments dels neutres o deformacions de les ones de tensió. Aquest comportament millora connectant el neutre del primari a terra.

[1] Per a una discussió més extensa, es pot veure la secció 2 de la norma CEI 60076-8 *Power transformers – Application guide*.

- **Triangle–Estrella**. Són molt utilitzats con a transformadors de distribució degut a la accessibilitat del neutre i perquè admeten tot tipus de càrregues desequilibrades. També són útils com a transformadors elevadors de principi de línia.
- **Estrella–Triangle**. Són útils com a transformadors reductors al final de línia.
- **Triangle–Triangle**. Es comportem bé amb càrregues desequilibrades, però l'absència de neutre pot ser un inconvenient si es volent utilitzar per a distribució.
- **Triangle–Zig-zag i Estrella–Zig-zag**. Són bastant utilitzats en distribució de baixa potència, degut al seu bon comportament amb càrregues desequilibrades. La connexió zig-zag es troba sempre en el costat de baixa tensió, per la possibilitat que té de crear un neutre artificial.
- **Estrella–Estrella–Triangle** Permet tenir accessible ambdós neutres i tolera bé les càrregues desequilibrades. El debanat en triangle (terciari) no acostuma a tenir càrrega i s'utilitza per donar un camí de circulació als corrents homopolars. S'utilitza per interconnectar sistemes d'alta tensió.

9.8.2 Índex horari i grup de connexió

En un transformador monofàsic el desfasament entre les tensions primària i secundària només pot ser 0° o 180°; el mateix passa amb els corrents. En canvi, en el cas de transformadors trifàsics hi ha més desfasaments possibles, depenent del tipus de connexió; el desfasament és sempre múltiple de 30° ($\frac{\pi}{6}$ rad).

L'índex horari és l'angle entre una magnitud primària (tensió o corrent) i la magnitud secundària corresponent, per exemple entre $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{ab}}$, o entre $\underline{U}_{\mathrm{AN}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{an}}$.

L'índex horari es refereix a un transformador alimentat pel costat de tensió més alta amb un sistema trifàsic simètric de seqüència directa. Donat que els desfasaments possibles són múltiples de 30°, hi ha dotze casos possibles i això ha fet que es creï l'analogia d'un rellotge: la busca dels minuts es col·loca a les dotze i representa una tensió del costat de tensió més alta, i la busca de les hores es col·loca amb l'angle de desfasament i representa la tensió corresponent del costat de tensió més baixa. Per exemple, si la tensió del costat de tensió més baixa queda a les cinc, això ens indica que aquesta tensió retarda $5 \times 30° = 150°$ a la tensió corresponent del costat de tensió més alta.

L'índex horari ens indica de fet, l'angle de retard de la tensió del costat de tensió més baixa respecte del costat de tensió més alta, quan el transformador es troba en buit.

Normalment no és necessari tenir en compte l'índex horari en els càlculs, ja que no cal conèixer el desfasament real entre magnituds primàries i secundàries; quan això sigui necessari es poden fer els càlculs de la manera usual sense tenir en compte l'índex horari, i afegir el desfasament posteriorment. Si h és l'índex horari (entre 0 i 11), la relació entre l'angle d'una magnitud del costat de tensió més alta φ_{AT} i l'angle de la magnitud corresponent del costat de tensió més baixa φ_{BT} és, expressat en radiant:

$$\varphi_{\mathrm{AT}} = \varphi_{\mathrm{BT}} + h\frac{\pi}{6} \tag{9.42}$$

A partit del tipus de connexió del primari i del secundari en estrella (Y), triangle (D) o zig-zag (Z), i de l'índex horari, queda definit el grup de connexió del transformador; normalment és format per dues lletres i un número:

❶ La primera lletra, escrita en majúscula, indica la connexió del debanat de tensió més alta, independentment de si és el primari o el secundari.

❷ La segona lletra, escrita en minúscula, indica la connexió del debanat de tensió més baixa.

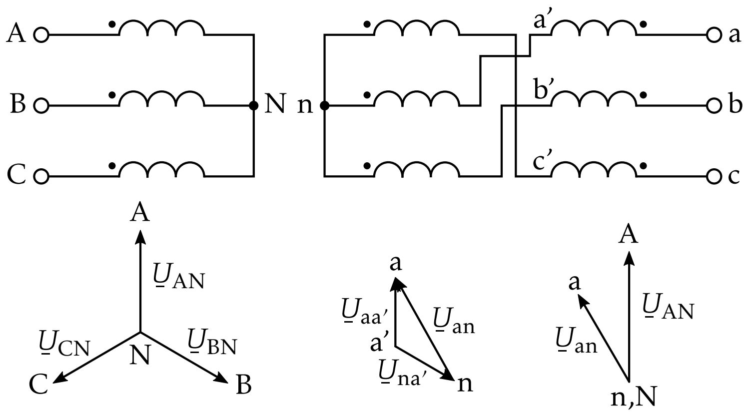
❸ Un número al final indica l'índex horari (entre 0 i 11).

Una nomenclatura més completa afegeix la lletra «N» o «n» després de la lletra del debanat corresponent, si el neutre és físicament accessible, per exemple Dyn11 o YNd6.

Exemple 9.3 Determinació de l'índex horari d'un transformador

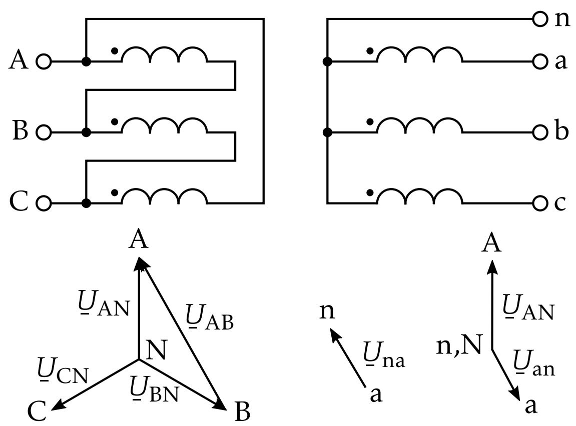
Es tracte de deduir l'índex horari de dos transformador a partir de les seves connexions.

El primer transformador és del tipus Yz:



Per tal de deduir-ne l'índex horari, compararem les tensions $\underline{U}_{AN}$ i $\underline{U}_{an}$. Comencem dibuixant les tres tensions fase–neutre $\underline{U}_{AN}$, $\underline{U}_{BN}$ i $\underline{U}_{CN}$. Donat que $\underline{U}_{an} = \underline{U}_{aa'} + \underline{U}_{a'n}$, dibuixem primer la tensió $\underline{U}_{aa'}$, que està en fase amb la tensió $\underline{U}_{AN}$, i a continuació la tensió $\underline{U}_{na'}$, que està en fase amb la tensió $\underline{U}_{BN}$; un cop tenim situats els punts a i n, ja podem dibuixar la tensió $\underline{U}_{an}$. Dibuixant ara juntes $\underline{U}_{AN}$ i $\underline{U}_{an}$ veiem que l'índex horari és 11.

El segon transformador és del tipus Dyn:



Per tal de deduir-ne l'índex horari, compararem com en el cas anterior, les tensions $\underline{U}_{\mathrm{AN}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{an}}$. Comencem dibuixant les tres tensions fase–neutre $\underline{U}_{\mathrm{AN}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BN}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CN}}$ i la tensió fase–fase $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$. A continuació dibuixem la tensió $\underline{U}_{\mathrm{na}}$, que està en fase amb la tensió $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$; Dibuixant ara juntes $\underline{U}_{\mathrm{AN}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{an}}$ (mateixa orientació que $\underline{U}_{\mathrm{na}}$ però sentit contrari), veiem que l'índex horari és 5.

El desfasament introduït per l'índex horari es pot modelar utilitzant un transformador ideal amb relació de transformació complexa. En el cas de l'esquema equivalent de la Figura 9.1 a la pàgina 147, el transformador allí dibuixat se substitueix per un de relació $\underline{m}:1$, tal con es veu en la figura 9.11.

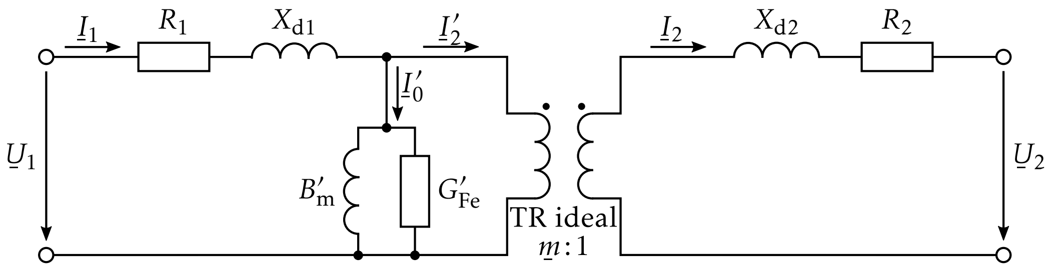


Figura 9.11 Esquema equivalent d'un transformador – Índex horari

Igualment en aquest cas, la impedància de secundari $\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}X_{\mathrm{d2}}$ es pot passar al costat primari del transformador ideal, quedant així un valor $\underline{Z}'_2$ referit al primari, de valor:

$$\underline{Z}'_2 = |\underline{m}|^2 \underline{Z}_2 = |\underline{m}|^2 (R_2 + \mathrm{j}X_{\mathrm{d2}}) \tag{9.43}$$

Les equacions que lliguen les magnituds de la Figura 9.11 són:

$$\underline{U}_1 - \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \underline{m}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2) \tag{9.44a}$$

$$\underline{I}'_2 = \frac{\underline{I}_2}{\underline{m}^*} \tag{9.44b}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_2 + \underline{I}'_0 \tag{9.44c}$$

A partir de l'índex horari h i depenent de si el primari és el costat de tensió més alta o el de tensió més baixa, tenim:

$$\underline{m} = \begin{cases} (U_{\mathrm{N1}}/U_{\mathrm{N2}})_{\angle h\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}}, & \text{transformador AT/BT} \\ (U_{\mathrm{N1}}/U_{\mathrm{N2}})_{\angle -h\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}}, & \text{transformador BT/AT} \end{cases} \tag{9.45}$$

En el cas de l'esquema equivalent reduït en «T» de la Figura 9.2 a la pàgina 150, cal afegir un transformador ideal de relació de transformació $\underline{m}_{\mathrm{r}}:1$. Aquest transformador pot afegir-se indistintament al principi o al final de l'esquema equivalent reduït, ja que es compleix $|\underline{m}_{\mathrm{r}}| = 1$; en la figura 9.12 a la pàgina següent s'ha afegit aquest transformador a l'inici.

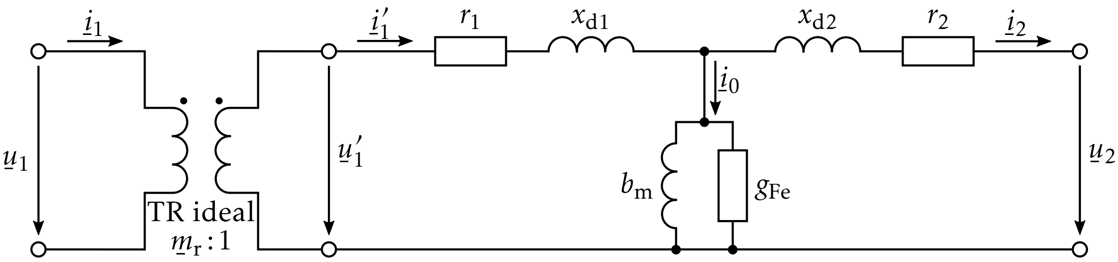


Figura 9.12 Esquema reduït en «T» d'un transformador – Índex horari

La mateixa operació ha de fer-se en el cas dels dos esquemes equivalents reduïts en «L» de la Figura 9.3 a la pàgina 151.

Les relacions entre magnituds de primari i secundari d'aquest transformador ideal reduït són:

$$\underline{u}_1 = \underline{m}_r \underline{u}'_1 \tag{9.46a}$$

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{i}'_1}{\underline{m}_r^*} \tag{9.46b}$$

A partir de l'índex horari h i depenent de si el primari és el costat de tensió més alta o el de tensió més baixa, tenim:

$$\underline{m}_r = \begin{cases} 1_{\angle h\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}}, & \text{transformador AT/BT} \\ 1_{\angle -h\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}}, & \text{transformador BT/AT} \end{cases} \tag{9.47}$$

9.8.3 Circuit homopolar

La connexió del circuit equivalent homopolar dels transformadors trifàsics de dos i tres debanat, depèn del tipus de connexió (estrella aïllada, estrella connectada a terra o triangle) que tinguin cadascun dels seus debanats.

Transformadors de dos debanats

Es presenten a continuació les diferents combinacions possibles de tipus de connexió de primari i secundari, amb el seu circuit homopolar equivalent.

Totes les impedàncies representades són valors en per unitat; $\underline{z}_0$ és la impedància homopolar del transformador, i $\underline{z}_{N1}$ i $\underline{z}_{N2}$ són les impedàncies de connexió a terra del debanats primari i secundari respectivament. En el cas d'estrelles connectades sòlidament a terra, tindrem $\underline{z}_{N1} = 0$ i $\underline{z}_{N2} = 0$.

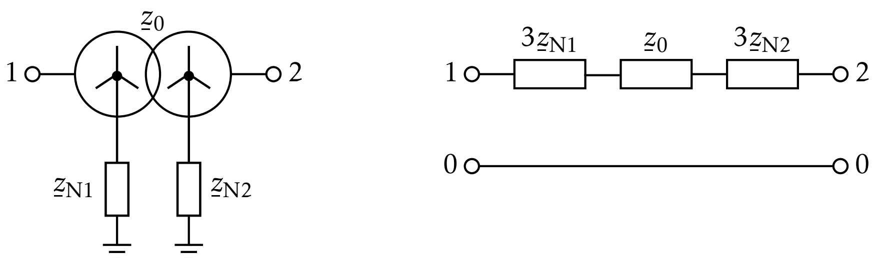


Figura 9.13 Esquema homopolar d'un transformador YNyn

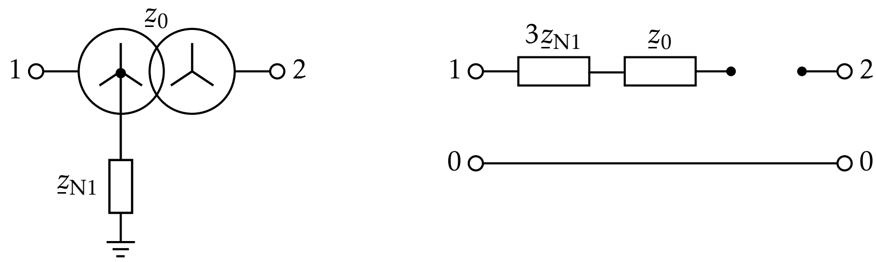


Figura 9.14 Esquema homopolar d'un transformador YNy

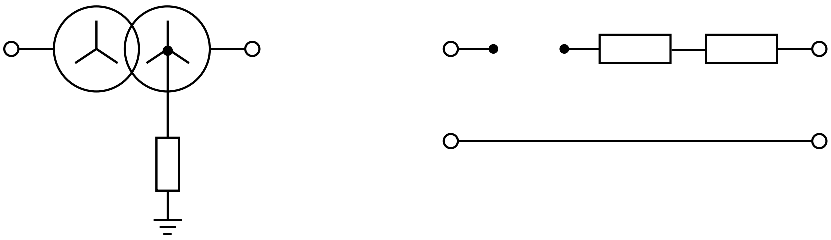


Figura 9.15 Esquema homopolar d'un transformador Yyn

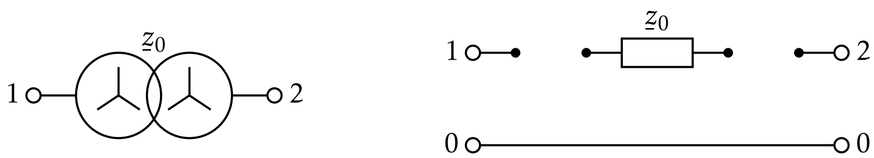


Figura 9.16 Esquema homopolar d'un transformador Yy

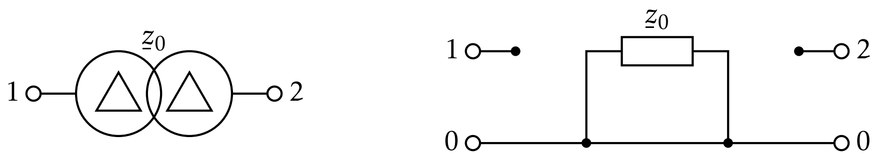


Figura 9.17 Esquema homopolar d'un transformador Dd

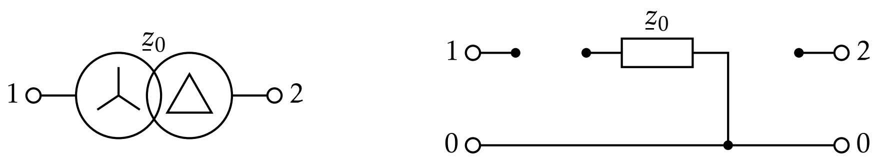


Figura 9.18 Esquema homopolar d'un transformador Yd

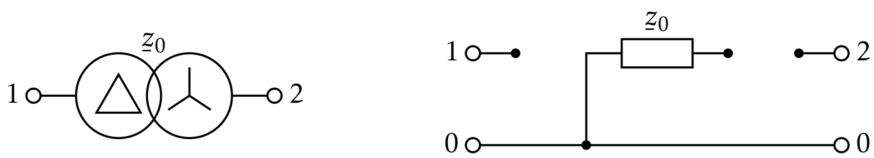


Figura 9.19 Esquema homopolar d'un transformador Dy

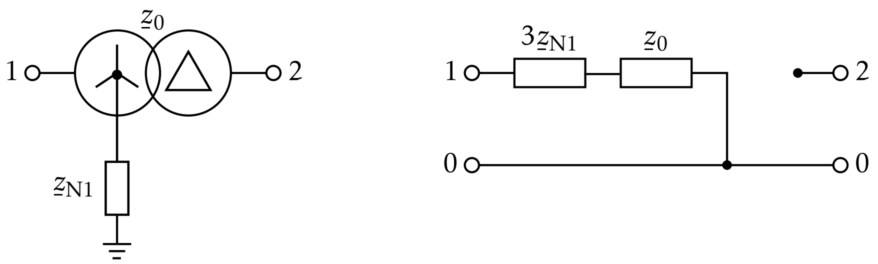


Figura 9.20 Esquema homopolar d'un transformador YNd

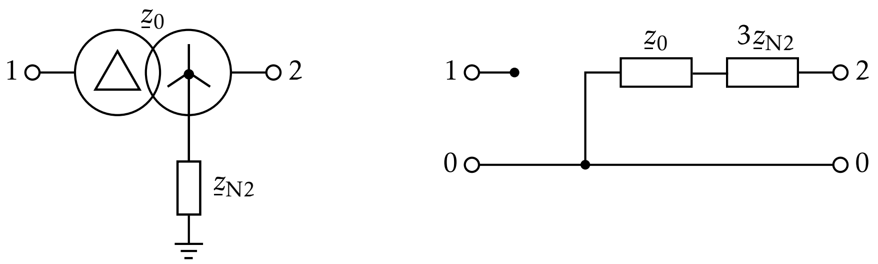


Figura 9.21 Esquema homopolar d'un transformador Dyn

Transformadors de tres debanats

Es presenta a continuació un transformador de tres debanats amb el seu circuit homopolar equivalent; cadascun dels tres debanats té una de les tres connexions possibles (estrella aïllada, estrella connectada a terra o triangle), amb la qual cosa queden coberts tots el casos possibles.

Les impedàncies del transformador representades són valors en per unitat; $\underline{z}_{P0}$, $\underline{z}_{S0}$ i $\underline{z}_{T0}$ són les tres impedàncies homopolars equivalents del transformador, obtingudes de la mateixa manera que s'ha exposat en la secció 9.7, i $\underline{z}_{NS}$ és la impedància de connexió a terra del debanat secundari. En el cas que l'estrella estigui connectada sòlidament a terra, tindrem $\underline{z}_{NS} = 0$.

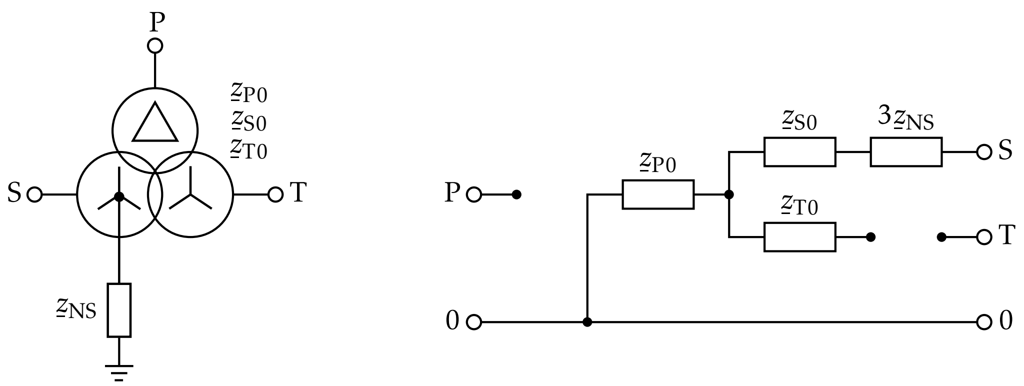


Figura 9.22 Esquema homopolar d'un transformador de tres debanats

9.8.4 Tensions i corrents de seqüència directa, inversa i homopolar

Totes les equacions de la secció 9.8.2 a la pàgina 163 són vàlides per a tensions i corrents de seqüència directa.

En el cas de tensions i corrents de seqüència inversa, els desfasaments que origina el transformador degut al seu índex horari, entre les magnituds del costat de tensió més alta AT i les magnituds corresponents del costat de tensió més baixa BT, són els contraris que en el cas de la seqüència directa. Per tant, l'equació (9.42) es converteix en:

$$\varphi_{\mathrm{AT}} = \varphi_{\mathrm{BT}} - h\frac{\pi}{6} \quad \text{(seqüència inversa)} \tag{9.48}$$

De la mateixa manera, l'equació (9.45) es converteix en:

$$\underline{m} = \begin{cases} (U_{\mathrm{N1}}/U_{\mathrm{N2}})_{\angle -h\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}}, & \text{transformador AT/BT} \\ (U_{\mathrm{N1}}/U_{\mathrm{N2}})_{\angle h\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}}, & \text{transformador BT/AT} \end{cases} \quad \text{(seqüència inversa)} \tag{9.49}$$

Les equacions (9.43), (9.44a), (9.44b) i (9.44c) segueixen sent vàlides, utilitzant el valor de $\underline{m}$ de seqüència inversa definit en l'equació (9.49).

Finalment, l'equació (9.47) es converteix en:

$$\underline{m}_{\mathrm{r}} = \begin{cases} 1_{\angle -h\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}}, & \text{transformador AT/BT} \\ 1_{\angle h\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}}, & \text{transformador BT/AT} \end{cases} \quad \text{(seqüència inversa)} \tag{9.50}$$

Les equacions (9.46a) i (9.46b) segueixen sent vàlides, utilitzant el valor de $\underline{m}_{\mathrm{r}}$ de seqüència inversa definit en l'equació (9.50).

En el cas de tensions i corrents de seqüència homopolar, el transformador no origina cap desfasament entre les magnituds del costat de tensió més alta AT i les magnituds del costat de tensió més baixa BT, independentment de quin sigui al seu índex horari. Les equacions (9.42), (9.45) i (9.47) es converteix en:

$$\varphi_{\mathrm{AT}} = \varphi_{\mathrm{BT}} \quad \text{(seqüència homopolar)} \tag{9.51}$$

$$m = U_{\mathrm{N1}}/U_{\mathrm{N2}} \quad \text{(seqüència homopolar)} \tag{9.52}$$

$$m_{\mathrm{r}} = 1 \quad \text{(seqüència homopolar)} \tag{9.53}$$

Cal tenir en compte que aquestes tres últimes equacions només són aplicables en el cas dels transformadors YNyn, ja que aquest tipus de connexió és l'única que té un circuit homopolar equivalent amb continuïtat entre el primari i el secundari, i per tant hi poden haver tensions i corrents homopolars tant en el primari com en el secundari.

En el cas dels transformadors YNd, només hi poden haver tensions i corrents homopolars en el primari, ja que tal com es pot veure en el seu circuit homopolar equivalent, el secundari té el circuit obert; les tensions i corrents homopolars en el secundari són per tant nul·les.

En el cas dels transformadors Dyn, només hi poden haver tensions i corrents homopolars en el secundari, ja que tal com es pot veure en el seu circuit homopolar equivalent, el primari té el circuit obert; les tensions i corrents homopolars en el primari són per tant nul·les.

En la resta de casos: transformadors YNy, Yyn, Yy, Dd, Yd i Dy, les tensions i corrents homopolars en el primari i en el secundari són nul·les, ja que tal com es pot veure en els seus circuits homopolars equivalents, tant el primari com el secundari tenen el circuit obert.

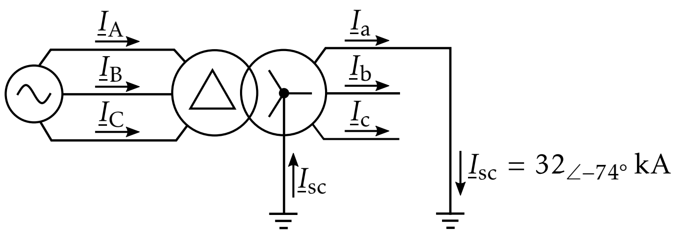
Exemple 9.4 Curtcircuits asimètrics en el secundari d'un transformador

En aquest exemple s'estudien els curtcircuits fase–terra i fase–fase en el secundari de dos transformadors alimentats des d'una font de tensió trifàsica, un amb la connexió Dyn11 i l'altre amb la connexió YNyn11. La relació de transformació és en ambdós casos: 6,25 kV : 400 V. El corrent de curtcircuit en el secundari és un valor conegut, i el que es vol trobar és el corrent que circula pel primari. Se suposa en tots dos casos que els transformadors són ideals, i per tant no es tenen en compte les impedàncies internes.

Donat que l'índex horari és 11 en els dos casos, utilitzant les equacions (9.45), (9.49) i (9.52), obtindrem els valors de $\underline{m}$ per a les seqüències directa, inversa i homopolar:

$$\begin{aligned}
\underline{m}_1 &= (6{,}25\,\text{kV}/400\,\text{V})_{\angle \frac{11\pi}{6}\,\text{rad}} = 15{,}625_{\angle \frac{-\pi}{6}\,\text{rad}} = 15{,}625_{\angle -30^\circ} \\
\underline{m}_2 &= (6{,}25\,\text{kV}/400\,\text{V})_{\angle \frac{-11\pi}{6}\,\text{rad}} = 15{,}625_{\angle \frac{\pi}{6}\,\text{rad}} = 15{,}625_{\angle 30^\circ} \\
m_0 &= 6{,}25\,\text{kV}/400\,\text{V} = 15{,}625
\end{aligned}$$

Transformador Dyn11. Curtcircuit fase–terra.



A partir del corrent de curtcircuit fase–terra, es veu directament que els corrents de les tres fases del secundari són:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_a &= \underline{I}_{sc} = 32_{\angle -74^\circ}\,\text{kA} \\
\underline{I}_b &= 0 \\
\underline{I}_c &= 0
\end{aligned}$$

A continuació obtenim les components simètriques d'aquests tres corrents de secundari, aplicant les equacions (3.5a), (3.5b) i (3.5c):

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{a,0} &= \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c) = 10{,}6667_{\angle -74^\circ}\,\text{kA} \\
\underline{I}_{a,1} &= \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \text{a}\underline{I}_b + \text{a}^2\underline{I}_c) = 10{,}6667_{\angle -74^\circ}\,\text{kA} \\
\underline{I}_{a,2} &= \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \text{a}^2\underline{I}_b + \text{a}\underline{I}_c) = 10{,}6667_{\angle -74^\circ}\,\text{kA}
\end{aligned}$$

Obtenim ara les components simètriques de primari, a partir de $\underline{m}_1$ i $\underline{m}_2$, utilitzant l'equació (9.44b); tal com s'ha dit anteriorment, el corrent homopolar de primari serà nul ja que els transformadors amb connexió DYn tenen un circuit homopolar equivalent amb el primari en circuit obert:

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_{\mathrm{A},0} &= 0 \\
\underline{I}_{\mathrm{A},1} &= \frac{\underline{I}_{\mathrm{a},1}}{\underline{m}_1^*} = \frac{10{,}6667_{\angle -74^\circ}\,\mathrm{kA}}{15{,}625_{\angle 30^\circ}} = 0{,}6827_{\angle -104^\circ}\,\mathrm{kA} \\
\underline{I}_{\mathrm{A},2} &= \frac{\underline{I}_{\mathrm{a},2}}{\underline{m}_2^*} = \frac{10{,}6667_{\angle -74^\circ}\,\mathrm{kA}}{15{,}625_{\angle -30^\circ}} = 0{,}6827_{\angle -44^\circ}\,\mathrm{kA}
\end{aligned}
$$

Finalment calculem el corrent de les tres fases del primari aplicant les equacions (3.3a), (3.3b) i (3.3c):

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_\mathrm{A} &= \underline{I}_{\mathrm{A},0} + \underline{I}_{\mathrm{A},1} + \underline{I}_{\mathrm{A},2} = 1{,}1824_{\angle -74^\circ}\,\mathrm{kA} \\
\underline{I}_\mathrm{B} &= \underline{I}_{\mathrm{A},0} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{\mathrm{A},1} + \mathrm{a}\underline{I}_{\mathrm{A},2} = 1{,}1824_{\angle 106^\circ}\,\mathrm{kA} \\
\underline{I}_\mathrm{C} &= \underline{I}_{\mathrm{A},0} + \mathrm{a}\underline{I}_{\mathrm{A},1} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{\mathrm{A},2} = 0
\end{aligned}
$$

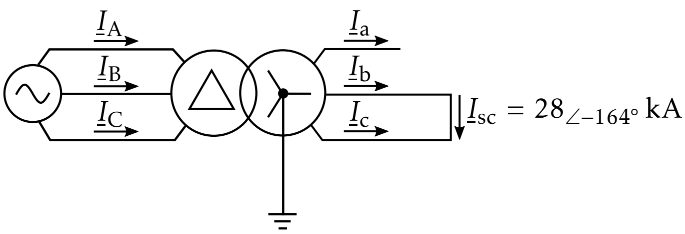
Es pot comprovar que es compleix: $\underline{I}_\mathrm{A} + \underline{I}_\mathrm{B} + \underline{I}_\mathrm{C} = 0$

La distribució de corrents entre les tres fases del primari és típica dels transformadors DYn amb un índex horari igual a ±30°; per una fase circula un corrent en fase amb el corrent de curtcircuit secundari, per una altra fase circula el mateix corrent però desfasat 180°, i per la tercera fase no hi circula corrent.

En aquests casos, els valors dels corrents de primari poden obtenir-se directament, a partir del corrent de curtcircuit secundari, de la relació de transformació i del factor $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$
|\underline{I}_\mathrm{A}| = |\underline{I}_\mathrm{B}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{32\,\mathrm{kA}}{15{,}625} = 1{,}1824\,\mathrm{kA}
$$

Transformador Dyn11. Curtcircuit fase–fase.



A partir del corrent de curtcircuit fase–fase, es veu directament que els corrents de les tres fases del secundari són:

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_\mathrm{a} &= 0 \\
\underline{I}_\mathrm{b} &= \underline{I}_\mathrm{sc} = 28_{\angle -164^\circ}\,\mathrm{kA}
\end{aligned}
$$

$$\underline{I}_{\mathrm{c}} = -\underline{I}_{\mathrm{sc}} = 28_{\angle 16^\circ}\,\mathrm{kA}$$

A continuació obtenim les components simètriques d'aquests tres corrents de secundari, aplicant les equacions (3.5a), (3.5b) i (3.5c):

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{\mathrm{a},0} &= \frac{1}{3}(\underline{I}_{\mathrm{a}} + \underline{I}_{\mathrm{b}} + \underline{I}_{\mathrm{c}}) = 0\\
\underline{I}_{\mathrm{a},1} &= \frac{1}{3}(\underline{I}_{\mathrm{a}} + \mathrm{a}\underline{I}_{\mathrm{b}} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{\mathrm{c}}) = 16{,}1658_{\angle -74^\circ}\,\mathrm{kA}\\
\underline{I}_{\mathrm{a},2} &= \frac{1}{3}(\underline{I}_{\mathrm{a}} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{\mathrm{b}} + \mathrm{a}\underline{I}_{\mathrm{c}}) = 16{,}1658_{\angle 106^\circ}\,\mathrm{kA}
\end{aligned}$$

Obtenim ara les components simètriques de primari, a partir de $\underline{m}_1$ i $\underline{m}_2$, utilitzant l'equació (9.44b); tal com s'ha dit anteriorment, el corrent homopolar de primari serà nul ja que els transformadors amb connexió DYn tenen un circuit homopolar equivalent amb el primari en circuit obert:

$$\begin{aligned}
&\underline{I}_{\mathrm{A},0} = 0\\
&\underline{I}_{\mathrm{A},1} = \frac{\underline{I}_{\mathrm{a},1}}{\underline{m}_1^*} = \frac{16{,}1658_{\angle -74^\circ}\,\mathrm{kA}}{15{,}625_{\angle 30^\circ}} = 1{,}0346_{\angle -104^\circ}\,\mathrm{kA}\\
&\underline{I}_{\mathrm{A},2} = \frac{\underline{I}_{\mathrm{a},2}}{\underline{m}_2^*} = \frac{16{,}1658_{\angle 106^\circ}\,\mathrm{kA}}{15{,}625_{\angle -30^\circ}} = 1{,}0346_{\angle 136^\circ}\,\mathrm{kA}
\end{aligned}$$

Finalment calculem el corrent de les tres fases del primari aplicant les equacions (3.3a), (3.3b) i (3.3c):

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{\mathrm{A}} &= \underline{I}_{\mathrm{A},0} + \underline{I}_{\mathrm{A},1} + \underline{I}_{\mathrm{A},2} = 1{,}0346_{\angle -164^\circ}\,\mathrm{kA}\\
\underline{I}_{\mathrm{B}} &= \underline{I}_{\mathrm{A},0} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{\mathrm{A},1} + \mathrm{a}\underline{I}_{\mathrm{A},2} = 1{,}0346_{\angle -164^\circ}\,\mathrm{kA}\\
\underline{I}_{\mathrm{C}} &= \underline{I}_{\mathrm{A},0} + \mathrm{a}\underline{I}_{\mathrm{A},1} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{\mathrm{A},2} = 2{,}0692_{\angle 16^\circ}\,\mathrm{kA}
\end{aligned}$$

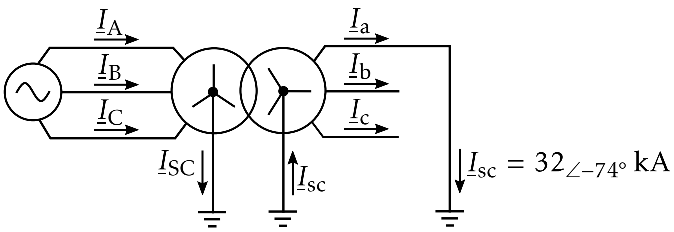
Es pot comprovar que es compleix: $\underline{I}_{\mathrm{A}} + \underline{I}_{\mathrm{B}} + \underline{I}_{\mathrm{C}} = 0$

La distribució de corrents entre les tres fases del primari és típica dels transformadors DYn amb un índex horari igual a ±30°; per dues de les fases circula un corrent del mateix valor i en fase amb el corrent de curtcircuit secundari, i per la tercera fase circula un corrent de valor doble i desfasat 180°.

En aquests casos, els valors dels corrents de primari poden obtenir-se directament, a partir del corrent de curtcircuit secundari, de la relació de transformació i dels factors $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\frac{2}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
|\underline{I}_{\mathrm{A}}| = |\underline{I}_{\mathrm{B}}| &= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{28\,\mathrm{kA}}{15{,}625} = 1{,}0346\,\mathrm{kA}\\
|\underline{I}_{\mathrm{C}}| &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{28\,\mathrm{kA}}{15{,}625} = 2{,}0692\,\mathrm{kA}
\end{aligned}$$

Transformador YNyn11. Curtcircuit fase–terra.



A partir del corrent de curtcircuit fase–terra, es veu directament que els corrents de les tres fases del secundari són:

$$\underline{I}_a = \underline{I}_{sc} = 32_{\angle -74°}\text{ kA}$$
$$\underline{I}_b = 0$$
$$\underline{I}_c = 0$$

A continuació obtenim les components simètriques d'aquests tres corrents de secundari, aplicant les equacions (3.5a), (3.5b) i (3.5c):

$$\underline{I}_{a,0} = \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c) = 10{,}6667_{\angle -74°}\text{ kA}$$
$$\underline{I}_{a,1} = \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \mathrm{a}\underline{I}_b + \mathrm{a}^2\underline{I}_c) = 10{,}6667_{\angle -74°}\text{ kA}$$
$$\underline{I}_{a,2} = \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \mathrm{a}^2\underline{I}_b + \mathrm{a}\underline{I}_c) = 10{,}6667_{\angle -74°}\text{ kA}$$

Obtenim ara les components simètriques de primari, a partir de m_0, $\underline{m}_1$ i $\underline{m}_2$, utilitzant l'equació (9.44b):

$$\underline{I}_{A,0} = \frac{\underline{I}_{a,0}}{m_0} = \frac{10{,}6667_{\angle -74°}\text{ kA}}{15{,}625} = 0{,}6827_{\angle -74°}\text{ kA}$$
$$\underline{I}_{A,1} = \frac{\underline{I}_{a,1}}{\underline{m}_1^*} = \frac{10{,}6667_{\angle -74°}\text{ kA}}{15{,}625_{\angle 30°}} = 0{,}6827_{\angle -104°}\text{ kA}$$
$$\underline{I}_{A,2} = \frac{\underline{I}_{a,2}}{\underline{m}_2^*} = \frac{10{,}6667_{\angle -74°}\text{ kA}}{15{,}625_{\angle -30°}} = 0{,}6827_{\angle -44°}\text{ kA}$$

Finalment calculem el corrent de les tres fases del primari aplicant les equacions (3.3a), (3.3b) i (3.3c):

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{A,0} + \underline{I}_{A,1} + \underline{I}_{A,2} = 1{,}8651_{\angle -74°}\text{ kA}$$
$$\underline{I}_B = \underline{I}_{A,0} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{A,1} + \mathrm{a}\underline{I}_{A,2} = 0{,}4997_{\angle 106°}\text{ kA}$$
$$\underline{I}_C = \underline{I}_{A,0} + \mathrm{a}\underline{I}_{A,1} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{A,2} = 0{,}6827_{\angle -74°}\text{ kA}$$

El corrent primari de curtcircuit a terra és:

$$\underline{I}_{\mathrm{SC}} = \underline{I}_{\mathrm{A}} + \underline{I}_{\mathrm{B}} + \underline{I}_{\mathrm{C}} = 2{,}0480_{\angle -74^\circ}\,\mathrm{kA}$$

Aquest valor també es pot trobar a partir de $\underline{I}_{\mathrm{A},0}$, tal con s'explica en la secció 3.4 a la pàgina 61:

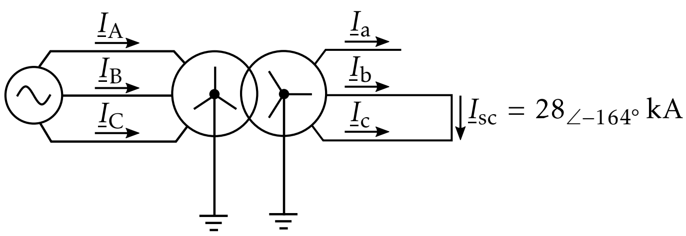
$$\underline{I}_{\mathrm{SC}} = 3\underline{I}_{\mathrm{A},0} = 3 \times 0{,}6827_{\angle -74^\circ}\,\mathrm{kA} = 2{,}0480_{\angle -74^\circ}\,\mathrm{kA}$$

La distribució de corrents entre les tres fases del primari és típica dels transformadors YNyn amb un índex horari igual a ±30°; els corrents que circulen per les tres fases tenen valors diferents entre si, dos estan en fase amb el corrent de curtcircuit secundari, i l'altre està desfasat 180°.

En aquests casos, els valors dels corrents de primari poden obtenir-se directament, a partir del corrent de curtcircuit secundari, de la relació de transformació i dels factors $\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{3}$ i $\frac{1}{3}$. El corrent de curtcircuit a terra primari està en fase amb el corrent de curtcircuit secundari, i pot obtenir-se directament a partir de la relació de transformació:

$$|\underline{I}_{\mathrm{A}}| = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \times \frac{32\,\mathrm{kA}}{15{,}625} = 1{,}8651\,\mathrm{kA}$$
$$|\underline{I}_{\mathrm{B}}| = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{32\,\mathrm{kA}}{15{,}625} = 0{,}4997\,\mathrm{kA}$$
$$|\underline{I}_{\mathrm{C}}| = \frac{1}{3} \times \frac{32\,\mathrm{kA}}{15{,}625} = 0{,}6827\,\mathrm{kA}$$
$$|\underline{I}_{\mathrm{SC}}| = \frac{32\,\mathrm{kA}}{15{,}625} = 2{,}048\,\mathrm{kA}$$

Transformador YNyn11. Curtcircuit fase–fase.



A partir del corrent de curtcircuit fase–fase, es veu directament que els corrents de les tres fases del secundari són:

$$\underline{I}_{\mathrm{a}} = 0$$
$$\underline{I}_{\mathrm{b}} = \underline{I}_{\mathrm{sc}} = 28_{\angle -164^\circ}\,\mathrm{kA}$$
$$\underline{I}_{\mathrm{c}} = -\underline{I}_{\mathrm{sc}} = 28_{\angle 16^\circ}\,\mathrm{kA}$$

A continuació obtenim les components simètriques d'aquests tres corrents de secundari, aplicant les equacions (3.5a), (3.5b) i (3.5c):

$$\begin{aligned} \underline{I}_{a,0} &= \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c) = 0 \\ \underline{I}_{a,1} &= \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \mathrm{a}\underline{I}_b + \mathrm{a}^2\underline{I}_c) = 16{,}1658_{\angle -74°}\,\mathrm{kA} \\ \underline{I}_{a,2} &= \frac{1}{3}(\underline{I}_a + \mathrm{a}^2\underline{I}_b + \mathrm{a}\underline{I}_c) = 16{,}1658_{\angle 106°}\,\mathrm{kA} \end{aligned}$$

Obtenim ara les components simètriques de primari, a partir de m_0, $\underline{m}_1$ i $\underline{m}_2$, utilitzant l'equació (9.44b):

$$\begin{aligned} \underline{I}_{A,0} &= \frac{\underline{I}_{a,0}}{m_0} = 0 \\ \underline{I}_{A,1} &= \frac{\underline{I}_{a,1}}{\underline{m}_1^*} = \frac{16{,}1658_{\angle -74°}\,\mathrm{kA}}{15{,}625_{\angle 30°}} = 1{,}0346_{\angle -104°}\,\mathrm{kA} \\ \underline{I}_{A,2} &= \frac{\underline{I}_{a,2}}{\underline{m}_2^*} = \frac{16{,}1658_{\angle 106°}\,\mathrm{kA}}{15{,}625_{\angle -30°}} = 1{,}0346_{\angle 136°}\,\mathrm{kA} \end{aligned}$$

Finalment calculem el corrent de les tres fases del primari aplicant les equacions (3.3a), (3.3b) i (3.3c):

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{A,0} + \underline{I}_{A,1} + \underline{I}_{A,2} = 1{,}0346_{\angle -164°}\,\mathrm{kA} \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_{A,0} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{A,1} + \mathrm{a}\underline{I}_{A,2} = 1{,}0346_{\angle -164°}\,\mathrm{kA} \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{A,0} + \mathrm{a}\underline{I}_{A,1} + \mathrm{a}^2\underline{I}_{A,2} = 2{,}0692_{\angle 16°}\,\mathrm{kA} \end{aligned}$$

Es pot comprovar que es compleix: $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$

La distribució de corrents entre les tres fases del primari és típica dels transformadors YNYn amb un índex horari igual a ±30°; per dues de les fases circula un corrent del mateix valor i en fase amb el corrent de curtcircuit secundari, i per la tercera fase circula un corrent de valor doble i desfasat 180°.

En aquests casos, els valors dels corrents de primari poden obtenir-se directament, a partir del corrent de curtcircuit secundari, de la relació de transformació i dels factors $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\frac{2}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned} |\underline{I}_A| = |\underline{I}_B| &= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{28\,\mathrm{kA}}{15{,}625} = 1{,}0346\,\mathrm{kA} \\ |\underline{I}_C| &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{28\,\mathrm{kA}}{15{,}625} = 2{,}0692\,\mathrm{kA} \end{aligned}$$

9.9 Connexió de transformadors en paral·lel

El que s'explica a continuació és vàlid per a transformadors monofàsics i trifàsics; com és habitual, en el cas dels transformadors trifàsics, les tensions nominals són les tensions fase–fase, i la potència nominal és la potència trifàsica.[2]

9.9.1 Condicions mínimes de connexió

Les condicions mínimes que han de complir dos transformadors A i B per poder ser connectats en paral·lel, és tenir la mateixa relació de transformació (no cal que les tensions nominals siguin iguals, encara que sí que han de ser properes), i en el cas de transformadors trifàsics, tenir a més el mateix índex horari:

$$m_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{B}} \tag{9.54}$$

$$h_{\mathrm{A}} = h_{\mathrm{B}} \tag{9.55}$$

La condició $m_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{B}}$ és necessària per evitar circulació de corrent entre els dos transformadors connectats en paral·lel. Si $m_{\mathrm{A}} \neq m_{\mathrm{B}}$, utilitzant el circuit equivalent Thévenin vist des del secundari d'ambdós transformadors, deduït en la secció 9.4 a la pàgina 152, podem obtenir el corrent $\underline{I}''_{\mathrm{circ}}$ que circula del transformador A cap al B, estant els secundaris en buit, a partir de les impedàncies i tensions Thévenin dels dos transformadors:

$$\underline{I}''_{\mathrm{circ}} = \frac{\underline{U}''_{\mathrm{Th,A}} - \underline{U}''_{\mathrm{Th,B}}}{\underline{Z}''_{\mathrm{Th,A}} + \underline{Z}''_{\mathrm{Th,B}}} \tag{9.56}$$

Pel que fa als índexs horaris, no cal de fet que siguin estrictament iguals, n'hi ha prou que els índexs siguin compatibles, és a dir que variant les connexions externes es puguin obtenir dos desfasaments iguals; això és possible quan els dos índexs difereixen en un angle múltiple de 60°. Per tant tenim:

$$h_{\mathrm{A}} \text{ i } h_{\mathrm{B}} \text{ són compatibles en qualsevol dels casos següents:} \begin{cases} |h_{\mathrm{A}} - h_{\mathrm{B}}| = 0 \\ |h_{\mathrm{A}} - h_{\mathrm{B}}| = 2 \\ |h_{\mathrm{A}} - h_{\mathrm{B}}| = 4 \\ |h_{\mathrm{A}} - h_{\mathrm{B}}| = 6 \\ |h_{\mathrm{A}} - h_{\mathrm{B}}| = 8 \\ |h_{\mathrm{A}} - h_{\mathrm{B}}| = 10 \end{cases} \tag{9.57}$$

Exemple 9.5 Connexió en paral·lel de transformadors amb diferent índex horari

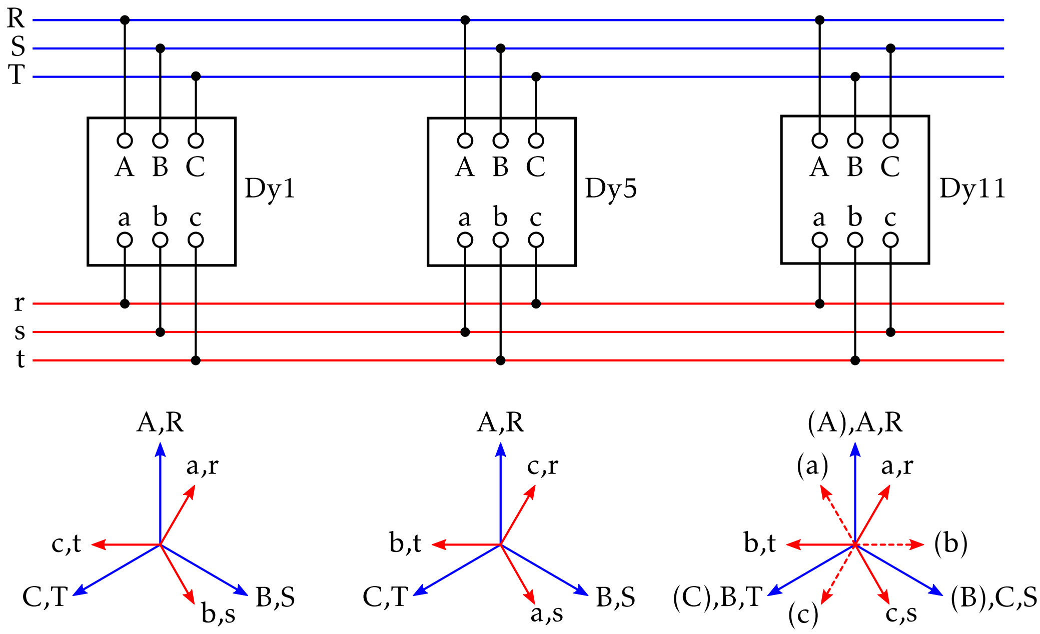
En la figura següent es pot veure com han de connectar-se en paral·lel tres transformador amb grups de connexió Dy1, Dy5 i Dy11.

La diferència entre els índexs horaris dels transformadors Dy1 i Dy5 és 4, entre els dels transformadors Dy1 i Dy11 és 10, i entre els dels transformadors Dy5 i Dy11 és 6; aquestes diferències compleixen amb l'equació (9.57), i per tant el índexs horaris del tres transformadors són compatibles entre si.

Comencem connectant el transformador Dy1 de manera natural, és a dir, els debanats primaris A,

[2] Per a una discussió més extensa, podeu veure la secció 6 de la norma CEI 60076-8 *Power transformers – Application guide*.

B i C amb les fases R, S i T respectivament, i els debanats secundaris a, b i c amb les fases r, s i t respectivament.



Si comparem ara el diagrama de fasors dels transformadors Dy1 i Dy5, veiem que les tensions secundàries del Dy5 són les mateixes que les del Dy1 girades 120°. Per tant només cal connectar els debanats primaris com en el cas anterior, i connectar els debanats secundaris c, a i b amb les fases r, s i t respectivament.

Ens ocupem finalment del transformador Dy11. Si connectéssim els debanats primaris com en els dos casos anteriors, tindríem el diagrama de fasors donat per les lletres entre parèntesis i les línies a traços; comparant-lo amb el diagrama de fasors del transformador Dy1, es veu que els fasors (a), (b) i (c) del Dy11 són simètrics respecte d'un eix vertical, amb els fasors a, c i b respectivament del Dy1. Per tant si connectem el primari del Dy11 seguint una seqüència de tensions inversa, és a dir connectem els debanats A, C i B amb les fases R, S i T respectivament, obtindrem un transformador Dy1, com es veu en el diagrama de fasors donat per les lletres sense parèntesis i les línies contínues; només cal ara connectar els debanats secundaris a, c i b amb les fases r, s i t respectivament.

9.9.2 Condicions per a una connexió correcta

Es diu que dos transformadors en paral·lel A i B tenen una connexió correcta, quan a més de complir les condicions mínimes de connexió, tenen unes tensions de curtcircuit iguals:

$$m_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{B}} \tag{9.58}$$

$$h_{\mathrm{A}} = h_{\mathrm{B}} \tag{9.59}$$

$$u_{\mathrm{cc,A}} = u_{\mathrm{cc,B}} \quad (U_{\mathrm{cc,A}} = U_{\mathrm{cc,B}}) \tag{9.60}$$

La condició addicional $u_{\mathrm{cc,A}} = u_{\mathrm{cc,B}}$ garanteix que no hi hagi sobrecàrregues en cap dels transformadors, ja que els corrents i les potències es reparteixen entre els dos transformadors de manera proporcional als seus corrents nominals; en el cas que les tensions nominals de A i B siguin a més iguals, es produeix un repartiment proporcional a les seves potències nominals.

Per tal que es compleixi $u_{cc,A} = u_{cc,B}$, la relació entre els valors de placa de característiques $\varepsilon_{cc,A}$ i $\varepsilon_{cc,B}$ ha de ser:

$$\frac{\varepsilon_{cc,B}}{\varepsilon_{cc,A}} = \frac{U_{N,A}}{U_{N,B}} \tag{9.61}$$

9.9.3 Condicions per a una connexió òptima

Es diu que dos transformadors en paral·lel A i B tenen una connexió òptima, quan a més de complir les condicions d'una connexió correcta, tenen unes tensions de curtcircuit iguals no només en mòdul sinó també en argument:

$$m_A = m_B \tag{9.62}$$
$$h_A = h_B \tag{9.63}$$
$$u_{cc,A} = u_{cc,B} \quad (U_{cc,A} = U_{cc,B}) \tag{9.64}$$
$$\varphi_{cc,A} = \varphi_{cc,B} \tag{9.65}$$

La condició addicional $\varphi_{cc,A} = \varphi_{cc,B}$ evita pèrdues innecessàries en el coure, les quals es produirien en cas contrari.

Per tal que es compleixi $u_{cc,A} = u_{cc,B}$ i $\varphi_{cc,A} = \varphi_{cc,B}$, la relació entre els valors de placa de característiques $\varepsilon_{cc,A}$, $\varepsilon_{cc,B}$, $W_{cc,A}$ i $W_{cc,B}$ ha de ser:

$$\frac{\varepsilon_{cc,B}}{\varepsilon_{cc,A}} = \frac{U_{N,A}}{U_{N,B}} \qquad \frac{W_{cc,B}}{W_{cc,A}} = \frac{S_{N,B}\,\varepsilon_{cc,B}}{S_{N,A}\,\varepsilon_{cc,A}} \tag{9.66}$$

9.10 Corrent d'irrupció («inrush current»)

El corrent d'irrupció s'origina quan es connecta un transformador a la línia de potència. Aquest corrent és de molt curta durada però d'un valor molt elevat; el valor depèn de l'instant de connexió (fase de la tensió) i del flux residual del transformador degut a una connexió prèvia.

El corrent d'irrupció, que només circula pel primari del transformador, pot arribar a valors de fins a $(25 \text{ a } 30)I_N$ els primers 10 ms, corrent que decreix a valors de fins a $(12 \text{ a } 15)I_N$ als 100 ms.

9.11 Designació de les classes de refrigeració

Les classes de refrigeració utilitzades en els transformadors de potència es designen mitjançant quatre lletres.

Actualment, la definició i l'ús d'aquestes lletres és coincident entre la norma europea (CEI 60076-2) i la norma americana (IEEE C57.12.00).

Es defineix a continuació el significat d'aquestes lletres:

1a lletra

Indica l'element refrigerant intern que està en contacte amb els debanats del transformador. Els valors possibles són els següents:

O L'element refrigerant és un oli mineral o un líquid sintètic aïllant, amb una temperatura d'ignició inferior o igual a 300 °C.

K L'element refrigerant és un líquid sintètic aïllant, amb una temperatura d'ignició superior a 300 °C.

L L'element refrigerant és un líquid sintètic aïllant, amb una temperatura d'ignició no mesurable.

2a lletra

Indica el mecanisme de circulació de l'element refrigerant intern. Els valors possibles són els següents:

N Circulació mitjançant convecció natural, a través de l'equip refrigerant i pels debanats del transformador.

F Circulació forçada a través de l'equip refrigerant (mitjançant bombes), i circulació mitjançant convecció natural pels debanats del transformador. Aquest tipus de circulació també s'anomena «de flux no dirigit».

D Circulació forçada a través de l'equip refrigerant (mitjançant bombes), i dirigida per aquest equip refrigerant cap als debanats del transformador i, de manera opcional, també cap a d'altres parts del transformador. Aquest tipus de circulació també s'anomena «de flux dirigit».

3a lletra

Indica l'element refrigerant extern. Els valors possibles són els següents:

A L'element refrigerant és l'aire.

W L'element refrigerant és l'aigua.

4a lletra

Indica el mecanisme de circulació de l'element refrigerant extern. Els valors possibles són els següents:

N Circulació mitjançant convecció natural.

F Circulació forçada, mitjançant ventiladors (en el cas de l'aire) o bombes (en el cas de l'aigua).

En la Taula 9.2 es presenta una comparativa entres diverses designacions antigues de classes de refrigeració (segons les normes americanes) i les designacions equivalents actuals.

Taula 9.2 Classes de refrigeració en els transformadors de potència

Designació antiga (normes IEEE)	Designació actual (normes CEI i IEEE)
OA	ONAN
FA	ONAF
FOA	OFAF
FOW	OFWF
FOA	ODAF
FOW	ODWF

En el cas d'un transformador on puguem seleccionar que la circulació sigui natural o forçada, les designacions són del tipus: ONAN/ONAF, ONAN/OFAF, etc.

En el cas dels transformadors secs l'element refrigerant sempre és l'aire, ja sigui en circulació natural o forçada, i per tant les designacions són simplement AN o AF.

Capítol 10

Motors d'Inducció Trifàsics

10.1 Introducció

Es tracten en aquest capítol els motors d'inducció trifàsics.

Es farà primer una petita introducció a les unitats de mesura anglesa relacionades amb els motors, ja que és molt freqüent trobar-se amb aquestes unitats en llibres, articles tècnics i catàlegs.

Quan es tracte amb motors elèctrics cal anar amb compte entre les magnituds elèctriques i les mecàniques; un motor, per exemple, absorbeix una potència elèctrica de la xarxa per funcionar, i proporciona una potència mecànica en el seu eix. Per tal de distingir aquests dos tipus de magnituds s'utilitzarà el subíndex «m» en les magnituds mecàniques.

10.2 Unitats de mesura angleses

10.2.1 Unitats base

En la taula 10.1 es poden veure les unitats base angleses que són d'aplicació en l'àmbit dels motors elèctrics:

Taula 10.1 Unitats base

Magnitud	Unitat	Símbol
longitud	peu	ft
massa	«slug»	slug
temps	segon	s
força	lliura-força	lbf

La relació entre aquestes quatre unitats base és la següent:

$$1\,\mathrm{lbf} \equiv 1\,\mathrm{slug\,ft\,s^{-2}} \tag{10.1}$$

10.2.2 Altres unitats

En la taula 10.2 es poden veure altres unitats que també són d'aplicació en l'àmbit dels motors elèctrics; totes pertanyen al sistema d'unitats angleses, tret del cavall vapor:

Taula 10.2 Altres unitats

Magnitud	Unitat	Símbol
longitud	polsada	in
massa	lliura «avoirdupois»	lb
potència	«horsepower»	HP
potència	«horsepower» mètric	HPm
potència	«horsepower» elèctric	HPe
potència	cavall vapor	CV

10.2.3 Factors de conversió

Es donen en aquesta secció factors de conversió entre unitats angleses i les seves unitats equivalents del sistema internacional d'unitats (SI).[1]

Els factors de conversió que es poden veure a continuació, són els recomanats pel NIST «National Institute of Standards and Technology».[2]

- **Longitud**. Els factors de conversió del peu i de la polsada, són:

$$1\ \text{ft} = 0{,}3048\ \text{m} \quad \text{(valor exacte)} \tag{10.2a}$$
$$1\ \text{in} = 2{,}54\ \text{cm} \quad \text{(valor exacte)} \tag{10.2b}$$

El peu és un múltiple de la polsada:

$$1\ \text{ft} = 12\ \text{in} \quad \text{(valor exacte)} \tag{10.3}$$

- **Massa**. Els factors de conversió de l'«slug» i de la lliura «avoirdupois», són:

$$1\ \text{slug} = 14{,}593\,90\ \text{kg} \tag{10.4a}$$
$$1\ \text{lb} = 0{,}453\,592\,37\ \text{kg} \quad \text{(valor exacte)} \tag{10.4b}$$

La relació entre l'«slug» i la lliura «avoirdupois» és un valor adimensional:

$$\frac{1\ \text{slug}}{1\ \text{lb}} = 32{,}174\,04 \tag{10.5}$$

Aquest valor és igual al valor de l'acceleració de la gravetat estàndard, quan s'expressa en ft/s^2.

[1] Aneu a l'apèndix B per veure una explicació completa del sistema internacional d'unitats (SI).
[2] Aneu a l'apèndix B i vegeu la secció B.9 per a més informació.

- **Força**. El factor de conversió de la lliura-força, és:

$$1\,\mathrm{lbf} = 4{,}448\,222\,\mathrm{N} \tag{10.6}$$

- **Parell**. Els factors de conversió de la lliura-força peu i de la lliura-força polsada, són:

$$1\,\mathrm{lbf\,ft} = 1{,}355\,818\,\mathrm{N\,m} \tag{10.7a}$$
$$1\,\mathrm{lbf\,in} = 0{,}112\,984\,8\,\mathrm{N\,m} \tag{10.7b}$$

- **Moment d'inèrcia**. Els factors de conversió de l'«slug» peu quadrat, de la lliura «avoirdupois» peu quadrat i de la lliura «avoirdupois» polsada quadrada, són:

$$1\,\mathrm{slug\,ft}^2 = 1{,}355\,818\,\mathrm{kg\,m}^2 \tag{10.8a}$$
$$1\,\mathrm{lb\,ft}^2 = 4{,}214\,011 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m}^2 \tag{10.8b}$$
$$1\,\mathrm{lb\,in}^2 = 2{,}926\,397 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m}^2 \tag{10.8c}$$

- **Potència mecànica**. Els factors de conversió de la lliura-força peu per segon, del «horsepower», del «horsepower» mètric i del cavall vapor, són:

$$1\,\mathrm{lbf\,ft/s} = 1{,}355\,818\,\mathrm{W} \tag{10.9a}$$
$$1\,\mathrm{HP} = 745{,}6999\,\mathrm{W} \tag{10.9b}$$
$$1\,\mathrm{HPm} = 735{,}4988\,\mathrm{W} \tag{10.9c}$$
$$1\,\mathrm{CV} = 735{,}4988\,\mathrm{W} \tag{10.9d}$$

  El «horsepower» és un múltiple de la lliura-força peu per segon. El «horsepower» mètric i el cavall vapor són unitats equivalents:

$$1\,\mathrm{HP} = 550\,\mathrm{lbf\,ft/s} \quad \text{(valor exacte)} \tag{10.10a}$$
$$1\,\mathrm{CV} = 1\,\mathrm{HPm} \quad \text{(valor exacte)} \tag{10.10b}$$

- **Potència elèctrica**. El factor de conversió del «horsepower» elèctric, és:

$$1\,\mathrm{HPe} = 746\,\mathrm{W} \quad \text{(valor exacte)} \tag{10.11}$$

10.3 Equacions bàsiques

Es relaciona a continuació una sèrie de variables elèctriques i mecàniques utilitzades normalment per descriure el comportament dels motors elèctrics:

θ_m Angle de rotació mecànic, expressat en rad.

ω_m Velocitat de rotació mecànica, expressada en rad/s.

n_m Velocitat de rotació mecànica, expressada en r/min.[3]

[3] r és el símbol de «revolució»; aneu a l'apèndix B i vegeu la secció B.7.3 per a més informació.

θ Angle de rotació elèctric, expressat en rad.

ω Velocitat de rotació elèctrica, expressada en rad/s.

n Velocitat de rotació elèctrica, expressada en r/min.

f Freqüència elèctrica de l'estator, expressada en Hz. Els valors usuals són 50 Hz i 60 Hz.

p Nombre de pols del motor.[4]

s Lliscament, adimensional.

T_m Parell mecànic proporcionat per l'eix del motor, expressat en N m (altres unitats equivalents: lbf ft, lbf in).

T_{load} Parell mecànic resistent que ofereix una càrrega (ventilador, bomba, etc.) en ser arrossegada per un motor, expressat en N m (altres unitats equivalents: lbf ft, lbf in).

J Moment d'inèrcia, expressat en kg m^2 (altres unitats equivalents: slug ft^2, lb ft^2, in ft^2).

H Constant d'inèrcia, expressada en s (o de forma més explícita: s rad^2 W/VA $\equiv$ rad^2 J/VA).

P_m Potència mecànica, expressada en W (altres unitats equivalents: lbf ft/s, HP, HPm, CV).

P Potència elèctrica activa, expressada en W (altres unitats equivalents: HPe).

S Potència elèctrica aparent, expressada en VA.

η Rendiment, adimensional.

U Tensió fase–fase aplicada al motor, expressada en V.

I Corrent de fase absorbit pel motor, expressat en A.

$\cos\varphi$ Factor de potència, on φ és l'angle entre el fasor de la tensió fase–neutre aplicada al motor i el fasor del corrent de fase absorbit pel motor.

La relació entre les variables mecàniques i les elèctriques ve donada pel nombre de pols p del motor:

$$\theta_m = \frac{2\theta}{p} \qquad \omega_m = \frac{2\omega}{p} \qquad n_m = \frac{2n}{p} \tag{10.12}$$

Per convertir una velocitat de rotació expressada en rad/s en una velocitat de rotació expressada en r/min, cal fer la conversió:

$$1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \times \frac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}} \times \frac{1\,\text{r}}{2\pi\,\text{rad}} = \frac{30}{\pi}\,\frac{\text{r}}{\text{min}} \tag{10.13}$$

Per tant, per passar de ω a n, o de ω_m a n_m, podem usar les equacions següents:

$$n = \frac{30}{\pi}\,\omega \tag{10.14a}$$

[4]El nombre de pols p és sempre un nombre parell (2, 4, 6, ...), això fa que en alguns llibres i articles tècnics es defineixi p com el nombre de parells de pols del motor (1, 2, 3, ...).

$$n_{\mathrm{m}} = \frac{30}{\pi}\,\omega_{\mathrm{m}} \tag{10.14b}$$

La velocitat nominal d'un motor d'inducció és sempre propera a l'anomenada velocitat síncrona, però sense arribar-hi, ja que en aquest cas el parell mecànic que subministraria el motor seria nul.

La velocitat síncrona elèctrica depèn de la freqüència elèctrica de la tensió que l'alimenta; la velocitat síncrona mecànica s'obté a partir de la velocitat síncrona elèctrica i de les equacions (10.12):

$$\omega_{\mathrm{sinc}} = 2\pi f \qquad n_{\mathrm{sinc}} = 60 f \tag{10.15a}$$

$$\omega_{\mathrm{m,sinc}} = \frac{4\pi f}{p} \qquad n_{\mathrm{m,sinc}} = \frac{120 f}{p} \tag{10.15b}$$

El lliscament s es defineix com el quocient de la diferència entre la velocitat síncrona d'un motor i la velocitat real, i la velocitat síncrona:

$$s = \frac{n_{\mathrm{m,sinc}} - n_{\mathrm{m}}}{n_{\mathrm{m,sinc}}} = \frac{n_{\mathrm{sinc}} - n}{n_{\mathrm{sinc}}} = \frac{\omega_{\mathrm{m,sinc}} - \omega_{\mathrm{m}}}{\omega_{\mathrm{m,sinc}}} = \frac{\omega_{\mathrm{sinc}} - \omega}{\omega_{\mathrm{sinc}}} \tag{10.16}$$

D'aquestes relacions es dedueix que quan el motor està parat (velocitat nul·la) el lliscament és: $s = 1$, i que si el motor arribés a la velocitat síncrona el lliscament seria: $s = 0$. A partir de les equacions anterior podem escriure la relació entre la velocitat de rotació i la velocitat síncrona:

$$\omega_{\mathrm{m}} = (1 - s)\,\omega_{\mathrm{m,sinc}} \qquad n_{\mathrm{m}} = (1 - s)\,n_{\mathrm{m,sinc}} \tag{10.17}$$

Exemple 10.1 Nombre de pols i lliscament d'un motor

Sabent que la velocitat nominal d'un motor és: $n_{\mathrm{m,N}} = 1440\,\mathrm{r/min}$, quan es connecta a una xarxa elèctrica de: $f = 50\,\mathrm{Hz}$, es tracta de trobar el nombre de pols i el lliscament nominal del motor.

A partir de l'equació (10.15b) donem diversos valors a p i troben les velocitats $n_{\mathrm{m,sinc}}$ corresponents:

$$p = 2 \quad \Rightarrow \quad n_{\mathrm{m,sinc}} = \frac{120 \times 50\,\mathrm{Hz}}{2} = 3000\,\mathrm{r/min}$$

$$p = 4 \quad \Rightarrow \quad n_{\mathrm{m,sinc}} = \frac{120 \times 50\,\mathrm{Hz}}{4} = 1500\,\mathrm{r/min}$$

$$p = 6 \quad \Rightarrow \quad n_{\mathrm{m,sinc}} = \frac{120 \times 50\,\mathrm{Hz}}{6} = 1000\,\mathrm{r/min}$$

Donat que sabem que la velocitat nominal d'un motor és propera a la velocitat síncrona, deduïm que aquest motor té 4 pols, i que la velocitat síncrona corresponent és 1500 r/min.

El lliscament nominal s'obté a partir de l'equació (10.16):

$$s_{\mathrm{N}} = \frac{1500\,\mathrm{r/min} - 1440\,\mathrm{r/min}}{1500\,\mathrm{r/min}} = 0{,}04$$

El rendiment d'un motor ve donat pel quocient entre la potència mecànica subministrada i la potència activa elèctrica absorbida:

$$\eta = \frac{P_\mathrm{m}}{P} \tag{10.18}$$

A partir de la relació elèctrica: $P = S\cos\varphi$, tenim la següent relació entre la potència mecànica subministrada per un motor i la potència aparent elèctrica absorbida:

$$S = \sqrt{3}UI = \frac{P_\mathrm{m}}{\eta\cos\varphi} \tag{10.19}$$

Per convertir una potència mecànica expressada en HP o en CV en una potència mecànica expressada en kW, cal fer les conversions:

$$1\,\mathrm{HP} \times \frac{745{,}6999\,\mathrm{W}}{1\,\mathrm{HP}} \times \frac{1\,\mathrm{kW}}{1000\,\mathrm{W}} = 0{,}745\,699\,9\,\mathrm{kW} \tag{10.20a}$$

$$1\,\mathrm{CV} \times \frac{735{,}4988\,\mathrm{W}}{1\,\mathrm{CV}} \times \frac{1\,\mathrm{kW}}{1000\,\mathrm{W}} = 0{,}735\,498\,8\,\mathrm{kW} \tag{10.20b}$$

A més, tenint en compte que quan dividim una potència activa elèctrica per $\cos\varphi$, obtenim una potència a parent elèctrica, tenim les expressions següents entre P_m, expressada en HP o en CV, i S expressada en kVA:

$$S/\mathrm{kVA} = \frac{0{,}745\,699\,9}{\eta\cos\varphi}\,P_\mathrm{m}/\mathrm{HP} \tag{10.21}$$

$$S/\mathrm{kVA} = \frac{0{,}735\,498\,8}{\eta\cos\varphi}\,P_\mathrm{m}/\mathrm{CV} \tag{10.22}$$

En el punt nominal de funcionament d'un motor, els valors del rendiment solen ser en general de l'ordre de 0,9 o superiors ($\eta_\mathrm{N} \approx 0{,}9$) i els valors del factor de potència solen ser de l'ordre de 0,85 o superiors ($\cos\varphi_\mathrm{N} \approx 0{,}85$), això fa que els quocients $0{,}745\,699\,9/(0{,}9 \times 0{,}85)$ o $0{,}735\,498\,8/(0{,}9 \times 0{,}85)$ tinguin un valor aproximat a 1. Per tant, de forma aproximada es compleix que el valor de la potència nominal aparent absorbida pel motor, expressada en kVA, és igual al valor de la potència mecànica nominal subministrada pel motor, expressada en HP o en CV:

$$S_\mathrm{N}/\mathrm{kVA} \quad \approx \quad P_\mathrm{m,N}/\mathrm{HP} \quad \approx \quad P_\mathrm{m,N}/\mathrm{CV} \tag{10.23}$$

El parell mecànic subministrat per un motor ve donat pel quocient entre la potència mecànica subministrada i la velocitat mecànica de rotació:

$$T_\mathrm{m} = \frac{P_\mathrm{m}}{\omega_\mathrm{m}} \tag{10.24}$$

Per obtenir un parell mecànic expressat en N m, a partir d'una potència mecànica expressada en kW, en HP o en CV, i d'una velocitat de rotació expressada en r/min, cal fer les conversions:

$$\frac{1\,\mathrm{kW} \times \frac{1000\,\mathrm{W}}{1\,\mathrm{kW}}}{1\,\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{min}} \times \frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} \times \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{r}}} = 9549{,}2966\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{rad/s}} = 9549{,}2966\,\mathrm{N\,m} \tag{10.25a}$$

$$\frac{1\ \mathrm{HP} \times \frac{745{,}6999\ \mathrm{W}}{1\ \mathrm{HP}}}{1\ \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{min}} \times \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}} \times \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{1\ \mathrm{r}}} = 7120{,}9095\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{rad/s}} = 7120{,}9095\ \mathrm{N\,m} \tag{10.25b}$$

$$\frac{1\ \mathrm{CV} \times \frac{735{,}4988\ \mathrm{W}}{1\ \mathrm{CV}}}{1\ \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{min}} \times \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}} \times \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{1\ \mathrm{r}}} = 7023{,}4962\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{rad/s}} = 7023{,}4962\ \mathrm{N\,m} \tag{10.25c}$$

Addicionalment, per convertir aquests parells mecànics expressats en N m, en parells mecànics expressats en lbf ft, cal fer les conversions:

$$9549{,}2966\ \mathrm{N\,m} \times \frac{1\ \mathrm{lbf}}{1{,}355\,818\ \mathrm{N\,m}} = 7043{,}1994\ \mathrm{lbf\,ft} \tag{10.26a}$$

$$7120{,}9095\ \mathrm{N\,m} \times \frac{1\ \mathrm{lbf}}{1{,}355\,818\ \mathrm{N\,m}} = 5252{,}1131\ \mathrm{lbf\,ft} \tag{10.26b}$$

$$7023{,}4962\ \mathrm{N\,m} \times \frac{1\ \mathrm{lbf}}{1{,}355\,818\ \mathrm{N\,m}} = 5180{,}2647\ \mathrm{lbf\,ft} \tag{10.26c}$$

Per tant, per obtenir T_m expressat en N m o en lbf ft, a partir de P_m expressada en kW, en HP o en CV, i ω_m expressada en r/min (o sigui n_m), podem usar les equacions següents:

$$T_\mathrm{m}/\mathrm{N\,m} = 9549{,}30\ \frac{P_\mathrm{m}/\mathrm{kW}}{n_\mathrm{m}} \tag{10.27a}$$

$$T_\mathrm{m}/\mathrm{N\,m} = 7120{,}91\ \frac{P_\mathrm{m}/\mathrm{HP}}{n_\mathrm{m}} \tag{10.27b}$$

$$T_\mathrm{m}/\mathrm{N\,m} = 7023{,}50\ \frac{P_\mathrm{m}/\mathrm{CV}}{n_\mathrm{m}} \tag{10.27c}$$

$$T_\mathrm{m}/\mathrm{lbf\,ft} = 7043{,}20\ \frac{P_\mathrm{m}/\mathrm{kW}}{n_\mathrm{m}} \tag{10.27d}$$

$$T_\mathrm{m}/\mathrm{lbf\,ft} = 5252{,}11\ \frac{P_\mathrm{m}/\mathrm{HP}}{n_\mathrm{m}} \tag{10.27e}$$

$$T_\mathrm{m}/\mathrm{lbf\,ft} = 5180{,}26\ \frac{P_\mathrm{m}/\mathrm{CV}}{n_\mathrm{m}} \tag{10.27f}$$

Exemple 10.2 Parell nominal d'un motor

Sabent que la velocitat nominal d'un motor és: $n_\mathrm{m,N} = 1440\ \mathrm{r/min}$, i que la seva potència nominal és: $P_\mathrm{m,N} = 7{,}5\ \mathrm{HP}$, es tracta de trobar el parell nominal del motor $T_\mathrm{m,N}$ expressat en N m i en lbf ft.

A partir de les equacions (10.27b) i (10.27e) tenim:

$$T_\mathrm{m,N} = 7120{,}91 \times \frac{7{,}5\ \mathrm{HP}}{1440\ \mathrm{r/min}} = 37{,}09\ \mathrm{N\,m}$$

$$T_\mathrm{m,N} = 5252{,}11 \times \frac{7{,}5\ \mathrm{HP}}{1440\ \mathrm{r/min}} = 27{,}35\ \mathrm{lbf\,ft}$$

El moment d'inèrcia total J vist per un motor, és en general la suma del moment d'inèrcia del motor mateix J_{motor} més el moment d'inèrcia de la càrrega arrossegada pel motor J_{load}. En el cas que entre el motor i la càrrega hi hagi un sistema d'engranatges que faci que la càrrega giri a una velocitat diferent de la velocitat del motor, el moment d'inèrcia total vist pel motor serà:

$$J = J_{\mathrm{motor}} + J_{\mathrm{load}} \left(\frac{n_{\mathrm{m,load}}}{n_{\mathrm{m,motor}}} \right)^2 \tag{10.28}$$

En alguns llibres, articles i catàlegs, sobretot en anglès, en lloc d'utilitzar el símbol J per designar el moment d'inèrcia, s'utilitza el símbol equivalent WR^2. El sentit de WR^2 és clar si pensem que un moment d'inèrcia és el producte d'una massa o «pes» («weight» en anglès) per un radi de gir al quadrat.

La constant d'inèrcia H es defineix com la relació entre l'energia cinètica de rotació del motor a la velocitat nominal: $\frac{1}{2} J \omega_{\mathrm{m,N}}^2$, i la potència elèctrica aparent nominal S_{N}:

$$H = \frac{J \omega_{\mathrm{m,N}}^2}{2 S_{\mathrm{N}}} \tag{10.29}$$

Per obtenir una constant d'inèrcia expressada en s (o de forma més explícita en $\mathrm{s\,rad^2\,W/VA}$), a partir d'un moment d'inèrcia expressat en $\mathrm{kg\,m^2}$ o en $\mathrm{lb\,ft^2}$, d'una velocitat de rotació expressada en r/min, i d'una potència aparent elèctrica expressada en kVA, cal fer les conversions:

$$\frac{1\,\mathrm{kg\,m^2} \times \left(1\,\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{min}} \times \frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} \times \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{r}} \right)^2}{2 \times 1\,\mathrm{kVA} \times \frac{1000\,\mathrm{VA}}{1\,\mathrm{kVA}}} = 5{,}4831 \times 10^{-6}\,\mathrm{s\,rad^2\,W/VA} \tag{10.30a}$$

$$\frac{1\,\mathrm{lb\,ft^2} \times \frac{4{,}214\,011 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2}}{1\,\mathrm{lb\,ft^2}} \times \left(1\,\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{min}} \times \frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} \times \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{r}} \right)^2}{2 \times 1\,\mathrm{kVA} \times \frac{1000\,\mathrm{VA}}{1\,\mathrm{kVA}}} = 2{,}3106 \times 10^{-7}\,\mathrm{s\,rad^2\,W/VA} \tag{10.30b}$$

Per tant, per obtenir H expressada en s, a partir de J expressat en $\mathrm{kg\,m^2}$ o en $\mathrm{lb\,ft^2}$, de $\omega_{\mathrm{m,N}}$ expressada en r/min (o sigui $n_{\mathrm{m,N}}$), i de S_{N} expressada en kVA, podem usar les equacions següents:

$$H/\mathrm{s} = 5{,}4831 \times 10^{-6}\,\frac{n_{\mathrm{m,N}}^2}{S_{\mathrm{N}}/\mathrm{kVA}}\,J/\mathrm{kg\,m^2} \tag{10.31a}$$

$$H/\mathrm{s} = 2{,}3106 \times 10^{-7}\,\frac{n_{\mathrm{m,N}}^2}{S_{\mathrm{N}}/\mathrm{kVA}}\,J/\mathrm{lb\,ft^2} \tag{10.31b}$$

La relació inversa entre H i J és:

$$J = \frac{2 S_{\mathrm{N}} H}{\omega_{\mathrm{m,N}}^2} \tag{10.32}$$

Per obtenir un moment d'inèrcia expressat en $\mathrm{kg\,m^2}$ o en $\mathrm{lb\,ft^2}$, a partir d'una constant d'inèrcia expressada en s (o de forma més explícita en $\mathrm{s\,rad^2\,W/VA}$), d'una velocitat de rotació expressada en r/min, i d'una potència aparent elèctrica expressada en kVA, cal fer les conversions:

$$\frac{2 \times 1\,\mathrm{kVA} \times \frac{1000\,\mathrm{VA}}{1\,\mathrm{kVA}} \times 1\,\frac{\mathrm{s\,rad^2\,W}}{\mathrm{VA}}}{\left(1\,\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{min}} \times \frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} \times \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{r}} \right)^2} = 1{,}8238 \times 10^{5}\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{10.33a}$$

$$\frac{2 \times 1\,\mathrm{kVA} \times \frac{1000\,\mathrm{VA}}{1\,\mathrm{kVA}} \times 1\,\frac{\mathrm{s\,rad^2\,W}}{\mathrm{VA}}}{\left(1\,\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{min}} \times \frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} \times \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{r}}\right)^2} \times \frac{1\,\mathrm{lb\,ft^2}}{4{,}214\,011 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2}} = 4{,}3279 \times 10^6\,\mathrm{lb\,ft^2} \tag{10.33b}$$

Per tant, per obtenir J expressat en $\mathrm{kg\,m^2}$ o en $\mathrm{lb\,ft^2}$, a partir de H expressada en s, de $\omega_{\mathrm{m,N}}$ expressada en r/min (o sigui $n_{\mathrm{m,N}}$), i de S_{N} expressada en kVA, podem usar les equacions següents:

$$J/\mathrm{kg\,m^2} = 1{,}8238 \times 10^5\,\frac{S_{\mathrm{N}}/\mathrm{kVA}}{n_{\mathrm{m,N}}^2}\,H/\mathrm{s} \tag{10.34a}$$

$$J/\mathrm{lb\,ft^2} = 4{,}3279 \times 10^6\,\frac{S_{\mathrm{N}}/\mathrm{kVA}}{n_{\mathrm{m,N}}^2}\,H/\mathrm{s} \tag{10.34b}$$

El moment d'inèrcia total J intervé en l'equació que determina la dinàmica d'un motor que arrossega una càrrega:

$$T_{\mathrm{m}} - T_{\mathrm{load}} = J\,\frac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \tag{10.35}$$

El parell T_{m} que subministra el motor, i el parell resistent de la càrrega T_{load} varien en funció de ω_{m}.

A partir de l'equació (10.17) tenim: $\mathrm{d}\omega_{\mathrm{m}} = -s\,\omega_{\mathrm{m,sinc}}\,\mathrm{d}s$, i l'equació dinàmica anterior es converteix en:

$$T_{\mathrm{m}} - T_{\mathrm{load}} = -J\,\omega_{\mathrm{m,sinc}}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{10.36}$$

En aquesta equació T_{m} i T_{load} varien en funció de s.

En la Figura 10.1 es pot veure unes corbes típiques parell–velocitat d'un motor (T_{m}) i d'una càrrega (T_{load}). L'eix abscises té dues escales, la superior representa la velocitat mecànica ω_{m}, i va des de 0 fins a $\omega_{\mathrm{m,sinc}}$, i la inferior representa el lliscament, i va des d'1 fins a 0. El punt on s'igualen T_{m} i T_{load} és el punt nominal de funcionament.

En l'exemple d'aquesta figura es veu que el motor proporciona un parell inicial $T_{\mathrm{m,arr}}$, i que en ser T_{m} superior a T_{load} per a qualsevol velocitat, el motor serà capaç d'accelerar la càrrega que arrossega des de la velocitat inicial nul·la fins a la velocitat nominal $\omega_{\mathrm{m,N}}$ (o un lliscament nominal s_{N}.

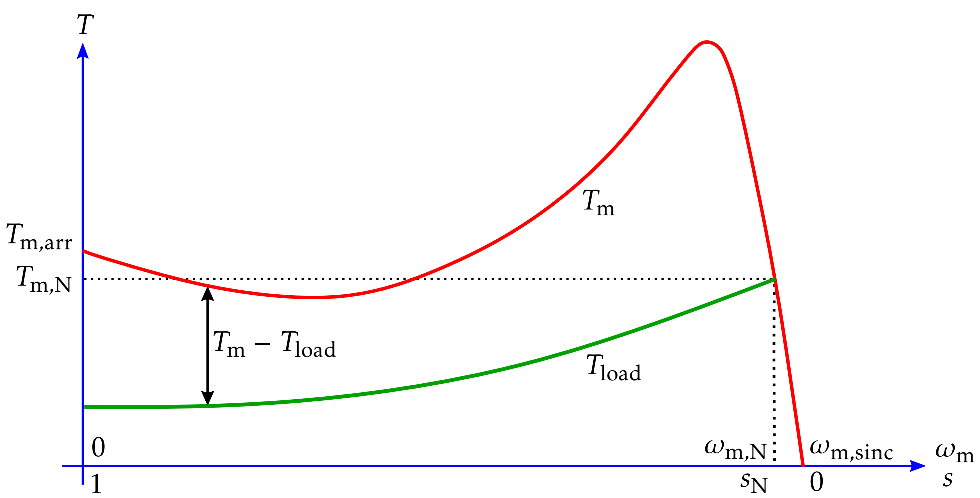


Figura 10.1 Corba típica parell–velocitat d'un motor i d'una càrrega

A partir de les equacions (10.35) i (10.36) podem aïllar el valor $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}t = \frac{J}{T_\mathrm{m} - T_\mathrm{load}}\,\mathrm{d}\omega_\mathrm{m} \tag{10.37a}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{-J\,\omega_\mathrm{m,sinc}}{T_\mathrm{m} - T_\mathrm{load}}\,\mathrm{d}s \tag{10.37b}$$

Els parells T_m i T_load varien en funció de ω_m en la primera equació, i en funció de s en la segona.

A partir d'aquestes equacions diferencials podem trobar el temps que triga el motor en arrencar t_arr, integrant des de $\omega_\mathrm{m} = 0$ fins a $\omega_\mathrm{m} = \omega_\mathrm{m,N}$ en la primera equació, o des de $s = 1$ fins a $s = s_\mathrm{N}$ en la segona:

$$t_\mathrm{arr} = J\int_0^{\omega_\mathrm{m,N}} \frac{\mathrm{d}\omega_\mathrm{m}}{T_\mathrm{m} - T_\mathrm{load}} \tag{10.38a}$$

$$t_\mathrm{arr} = -J\,\omega_\mathrm{m,sinc}\int_1^{s_\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}s}{T_\mathrm{m} - T_\mathrm{load}} \tag{10.38b}$$

Igual que en les equacions anteriors, els parells T_m i T_load varien en funció de ω_m en la primera equació, i en funció de s en la segona. Donat que T_m i T_load són funcions no lineals, aquestes integrals no poden resoldre's de forma analítica, si no que han de resoldre's de forma aproximada utilitzant mètodes numèrics.[5]

Exemple 10.3 Temps d'arrancada d'un motor

Tenim un motor que arrossega una càrrega; el moment d'inèrcia del conjunt és: $J = 507\,\mathrm{lb\,ft^2}$. Es coneixen les corbes parell–velocitat del motor i de la càrrega, a partir d'una sèrie de punts d'aquestes corbes que es poden veure en la taula següent:

n_m/r/min	T_m/lbf ft	T_load/lbf ft
0	266	0,0
90	248	0,4
180	234	1,7
270	225	3,8
360	221	6,8
450	225	10,6
540	234	15,2
630	246	20,7
720	258	27,0
810	273	34,2
900	289	42,2
990	304	51,1
1080	322	60,8
1170	338	71,4
1260	356	82,8

[5] Vegeu la secció E.2

n_m/r/min	T_m/lbf ft	T_{load}/lbf ft
1350	373	95,0
1440	338	108,1
1530	396	122,0
1620	395	136,8
1656	388	143,0
1692	370	149,2
1728	336	155,7
1764	248	162,2
1780	177	165,2

Es tracte de calcular el temps que triga el motor en arrencar.

Convertim primer el moment d'inèrcia a unitats SI:

$$J = 4{,}214\,011 \times 10^{-2} \times 507\,\mathrm{lb\,ft}^2 = 21{,}37\,\mathrm{kg\,m}^2$$

Creem a continuació una nova taula de valors en unitats SI a partir de la taula dels valors donats. Multipliquem la primera columna per π/30 per obtenir la velocitat ω_m en rad/s, i les dues columnes següents les multipliquem per 1,355 818 per obtenir els parells T_m i T_{load} en N m. Addicionalment, si ens fixem en l'equació (10.38a), veurem que la funció que hem d'integrar per tal d'obtenir el temps d'arrancada és $1/(T_m - T_{load})$; creem per tant en la nova taula una quarta columna amb aquests valors.

ω_m/rad/s	T_m/N m	T_{load}/N m	$\frac{1}{T_m - T_{load}}$ /N^{-1} m^{-1}
0,000	360,648	0,000	0,002 773
9,425	336,243	0,542	0,002 979
18,850	317,261	2,305	0,003 175
28,274	305,059	5,152	0,003 334
37,699	299,636	9,220	0,003 443
47,124	305,059	14,372	0,003 440
56,549	317,261	20,608	0,003 371
65,973	333,531	28,065	0,003 274
75,398	349,801	36,607	0,003 193
84,823	370,138	46,369	0,003 089
94,248	391,831	57,216	0,002 989
103,673	412,169	69,282	0,002 916
113,097	436,573	82,434	0,002 824
122,522	458,266	96,805	0,002 767
131,947	482,671	112,262	0,002 700
141,372	505,720	128,803	0,002 653
150,796	526,057	146,564	0,002 635
160,221	536,904	165,410	0,002 692
169,646	535,548	185,476	0,002 857
173,416	526,057	193,882	0,003 010

$\omega_\mathrm{m}/\mathrm{rad/s}$	$T_\mathrm{m}/\mathrm{N\,m}$	$T_\mathrm{load}/\mathrm{N\,m}$	$\frac{1}{T_\mathrm{m}-T_\mathrm{load}}/\mathrm{N^{-1}\,m^{-1}}$
177,186	501,653	202,288	0,003 340
180,956	455,555	211,101	0,004 091
184,726	336,243	219,914	0,008 596
186,401	239,980	223,981	0,062 505

Finalment, obtenim el temps que triga el motor en arrancar t_arr utilitzant l'equació (10.38a); la integral la calculem de forma aproximada utilitzant el mètode dels trapezis, segons l'equació (E.7):

$$\begin{aligned} t_\mathrm{arr} = 21{,}37\,\mathrm{kg\,m^2} \times \Bigg(& \frac{(0{,}002\,979 + 0{,}002\,773)\,\mathrm{N^{-1}\,m^{-1}}}{2} \times (9{,}425 - 0{,}000)\,\mathrm{rad/s} + \\ & + \frac{(0{,}003\,175 + 0{,}002\,979)\,\mathrm{N^{-1}\,m^{-1}}}{2} \times (18{,}850 - 9{,}425)\,\mathrm{rad/s} + \\ & + \cdots + \\ & + \frac{(0{,}008\,596 + 0{,}004\,091)\,\mathrm{N^{-1}\,m^{-1}}}{2} \times (184{,}726 - 180{,}956)\,\mathrm{rad/s} + \\ & + \frac{(0{,}062\,505 + 0{,}008\,596)\,\mathrm{N^{-1}\,m^{-1}}}{2} \times (186{,}401 - 184{,}726)\,\mathrm{rad/s} \Bigg) = 13{,}5\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

10.4 Esquema elèctric equivalent

El circuit elèctric equivalent d'un motor d'inducció és similar al d'un transformador, on l'estator i el rotor del motor fan el paper del primari i secundari del transformador respectivament. En el cas del motor, no obstant, cal tenir en compte que la freqüència elèctrica de l'estator f és fixa i de valor 50 Hz o 60 Hz usualment, mentre que la del rotor f_rotor és variable en funció del lliscament s, segons l'equació:

$$f_\mathrm{rotor} = s f \tag{10.39}$$

En els llibres de màquines elèctriques, com ara els de les referències [25], [26] i [27], es pot veure el raonament que se segueix per arribar al circuit elèctric equivalent per fase d'un motor d'inducció, on tots els valors estan referits a la freqüència elèctrica de l'estator f. En la Figura 10.2 es representa aquest circuit equivalent:

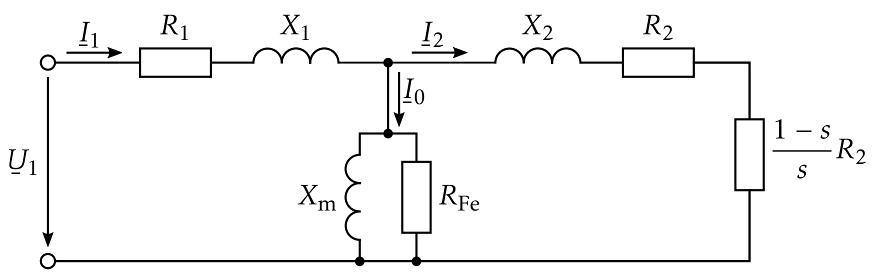


Figura 10.2 Esquema elèctric equivalent per fase del motor d'inducció

A continuació es dona el significat dels diversos paràmetres d'aquest circuit. Per tal de no fer l'escriptura tant farragosa, a partir d'ara es representara el mòdul d'una variable complexa directament com una variable real, és a dir en lloc de, per exemple, escriure $|\underline{U}_1|$ escriurem U_1:

$\underline{U}_1$ Tensió fase–neutre aplicada a l'estator. Tenim: $U_1 = \dfrac{U}{\sqrt{3}}$.

$\underline{I}_1$ Corrent de fase de l'estator; varia en funció del lliscament s.

R_1 Resistència per fase de l'estator.

X_1 Reactància de dispersió per fase de l'estator.

$\underline{I}_0$ Corrent d'excitació; varia en funció del lliscament s.

R_{Fe} Resistència de pèrdues de l'estator.

X_{m} Reactància de magnetització de l'estator.

$\underline{I}_2$ Corrent de fase del rotor, vista per l'estator; varia en funció del lliscament s.

R_2 Resistència per fase del rotor. La resistència vista per l'estator és $\dfrac{R_2}{s}$; aquesta resistència vista per l'estator se separa normalment en dues parts: R_2 i $\dfrac{1-s}{s}R_2$.

X_2 Reactància de dispersió per fase del rotor, vista per l'estator.

Aquests valors es determinen a partir dels assaigs a què se sotmeten els motor (assaig en buit i assaig de rotor bloquejat), de forma similar a com es fa amb els transformadors de potència.

En molts llibres de màquines elèctriques és usual simplificar el circuit de la Figura 10.2 a la pàgina anterior per tal de fer més fàcils les equacions que s'en deriven; en general, se suprimeix la branca transversal, o com a mínim la resistència R_{Fe}, o es trasllada al principi de l'esquema la branca transversal, ja sigui sencera o eliminat-ne R_{Fe}. No obstant, donat que avui en dia hi ha programes matemàtics prou potents per poder fer els càlculs necessaris, en les equacions que s'exposaran a continuació s'utilitzarà el circuit elèctric equivalent sense fer cap simplificació.

10.4.1 Tensions, corrents i impedàncies

La impedància equivalent $\underline{Z}_0$ de la branca transversal val:

$$\underline{Z}_0 = \frac{R_{\mathrm{Fe}}\,\mathrm{j}X_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{Fe}} + \mathrm{j}X_{\mathrm{m}}} \tag{10.40}$$

A partir de $\underline{Z}_0$ i de la resta de paràmetres de l'estator i del rotor, la impedància total del motor $\underline{Z}_{\mathrm{mot}}$ val, en funció de s:

$$\underline{Z}_{\mathrm{mot}}(s) = R_1 + \mathrm{j}X_1 + \frac{\underline{Z}_0\left(\dfrac{R_2}{s} + \mathrm{j}X_2\right)}{\underline{Z}_0 + \dfrac{R_2}{s} + \mathrm{j}X_2} \tag{10.41}$$

En l'instant que el motor arranca, el lliscament és igual a 1, i la impedància en aquest moment $\underline{Z}_{\mathrm{mot,arr}}$ val:

$$\underline{Z}_{\mathrm{mot,arr}} = R_1 + \mathrm{j}X_1 + \frac{\underline{Z}_0(R_2 + \mathrm{j}X_2)}{\underline{Z}_0 + R_2 + \mathrm{j}X_2} \tag{10.42}$$

A partir de les dues equacions anteriors, podem trobar el corrent de l'estator $\underline{I}_1$ en funció de s, i aquest mateix corrent en l'instant que el motor arranca $\underline{I}_{\mathrm{arr}}$:

$$\underline{I}_1(s) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\mathrm{mot}}(s)} \tag{10.43a}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{arr}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\mathrm{mot,arr}}} \tag{10.43b}$$

Els mòduls dels corrents anteriors són:

$$I_1(s) = \frac{U_1}{Z_{\mathrm{mot}}(s)} \tag{10.44a}$$

$$I_{\mathrm{arr}} = \frac{U_1}{Z_{\mathrm{mot,arr}}} \tag{10.44b}$$

Com es pot veure, el corrent I_{arr} és directament proporcional a la tensió U_1, i per tant si la tensió es redueix, per exemple, al 80 % del seu valor nominal, el corrent d'arrancada també es reduirà al 80 % (com es veurà més endavant, en aquest cas el motor trigarà més temps en arrancar).

Com la resta de corrents, aquest valor correspon al valor eficaç simètric del corrent. Quan un motor es connecta a la tensió d'alimentació, es produeix un corrent transitori que té una evolució com la que s'ha descrit en la secció 1.7.5 a la pàgina 31; per tant, en els primers instants de l'arrancada es produeix un corrent asimètric de pic $\hat{I}_{\mathrm{arr,asim}}$, que segueix les equacions (1.107) i (1.108). Utilitzant aquestes equacions amb les variables del circuit equivalent del motor, tenim:

$$\hat{I}_{\mathrm{arr,asim}} = \kappa\sqrt{2}I_{\mathrm{arr}} \tag{10.45a}$$

$$\kappa = 1{,}02 + 0{,}98\,\mathrm{e}^{-3\frac{R_{\mathrm{mot,arr}}}{X_{\mathrm{mot,arr}}}} \tag{10.45b}$$

On $R_{\mathrm{mot,arr}}$ i $X_{\mathrm{mot,arr}}$ són la part real i imaginària respectivament de $\underline{Z}_{\mathrm{mot,arr}}$. Cal tenir en compte el valor $\hat{I}_{\mathrm{arr,asim}}$ quan es protegeix un motor amb un dispositiu magnètic, de manera que aquest valor de pic sigui inferior a l'ajust de la protecció.

Per calcular el corrent $\underline{I}_2$ comencem per trobar el circuit equivalent Thévenin de la part esquerra del circuit equivalent del motor, és a dir de la impedància de l'estator i la branca transversal, alimentats per la tensió $\underline{U}_1$. Aquestes impedància i tensió Thévenin són:

$$\underline{Z}_{\mathrm{Th}} = \frac{(R_1 + \mathrm{j}X_1)\underline{Z}_0}{R_1 + \mathrm{j}X_1 + \underline{Z}_0} \tag{10.46a}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{Th}} = \frac{\underline{Z}_0}{R_1 + \mathrm{j}X_1 + \underline{Z}_0}\underline{U}_1 \tag{10.46b}$$

A partir d'aquests dos valors trobem el valor de $\underline{I}_2$ en funció de s:

$$\underline{I}_2(s) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{Th}}}{\underline{Z}_{\mathrm{Th}} + \dfrac{R_2}{s} + \mathrm{j}X_2} \tag{10.47}$$

El mòdul del corrent anterior és:

$$I_2(s) = \frac{U_{\mathrm{Th}}}{\left|\underline{Z}_{\mathrm{Th}} + \dfrac{R_2}{s} + \mathrm{j}X_2\right|} \tag{10.48}$$

Si substituïm ara $\underline{Z}_{\mathrm{Th}}$ pel seu valor, tindrem $\underline{I}_2(s)$ en funció de la tensió d'alimentació $\underline{U}_1$:

$$\underline{I}_2(s) = \frac{\underline{Z}_0}{(R_1 + \mathrm{j}X_1 + \underline{Z}_0)\left(\underline{Z}_{\mathrm{Th}} + \dfrac{R_2}{s} + \mathrm{j}X_2\right)}\underline{U}_1 \tag{10.49}$$

En l'equació anterior, el quocient que multiplica a $\underline{U}_1$ té dimensió d'admitància. Denominem a continuació $Y_{\mathrm{eq}}(s)$ al mòdul d'aquest quocient i expressem el mòdul de $\underline{I}_2(s)$ utilitzant aquest valor:

$$Y_{\mathrm{eq}}(s) \equiv \frac{Z_0}{|R_1 + \mathrm{j}X_1 + \underline{Z}_0|\left|\underline{Z}_{\mathrm{Th}} + \dfrac{R_2}{s} + \mathrm{j}X_2\right|} \tag{10.50a}$$

$$I_2(s) = Y_{\mathrm{eq}}(s)U_1 \tag{10.50b}$$

Podem trobar ara el corrent $\underline{I}_0$ en funció de s, simplement com la diferència entre $\underline{I}_1(s)$ i $\underline{I}_2(s)$:

$$\underline{I}_0(s) = \underline{I}_1(s) - \underline{I}_2(s) \tag{10.51}$$

Finalment, trobem els corrents $\underline{I}_{R_{\mathrm{Fe}}}$ i $\underline{I}_{X_{\mathrm{m}}}$ que circulen per cadascun dels dos components de la branca transversal, en funció de s:

$$\underline{I}_{R_{\mathrm{Fe}}}(s) = \frac{\underline{Z}_0}{R_{\mathrm{Fe}}}\underline{I}_0(s) = \frac{\mathrm{j}X_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{Fe}} + \mathrm{j}X_{\mathrm{m}}}\underline{I}_0(s) \tag{10.52a}$$

$$\underline{I}_{X_{\mathrm{m}}}(s) = \frac{\underline{Z}_0}{\mathrm{j}X_{\mathrm{m}}}\underline{I}_0(s) = \frac{R_{\mathrm{Fe}}}{R_{\mathrm{Fe}} + \mathrm{j}X_{\mathrm{m}}}\underline{I}_0(s) \tag{10.52b}$$

Els mòduls dels corrents anteriors són:

$$I_{R_{\mathrm{Fe}}}(s) = \frac{X_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R_{\mathrm{Fe}}^2 + X_{\mathrm{m}}^2}}I_0(s) \tag{10.53a}$$

$$I_{X_{\mathrm{m}}}(s) = \frac{R_{\mathrm{Fe}}}{\sqrt{R_{\mathrm{Fe}}^2 + X_{\mathrm{m}}^2}}I_0(s) \tag{10.53b}$$

10.4.2 Potències i parells

La potència P entregada al motor pel sistema elèctric que l'alimenta val, en funció de s:

$$P(s) = 3\,\mathrm{Re}(\underline{U}_1\underline{I}_1^*(s)) = 3U_1I_1(s)\cos\varphi \tag{10.54}$$

La potència perduda en l'estator P_1 val, en funció de s:

$$P_1(s) = 3R_1I_1^2(s) + 3R_{\mathrm{Fe}}I_{R_{\mathrm{Fe}}}^2(s) \tag{10.55}$$

La potència entregada al rotor P_{rot} val, en funció de s:

$$P_{\mathrm{rot}}(s) = P(s) - P_1(s) = 3\,\frac{R_2}{s}\,I_2^2(s) = 3\,\frac{R_2}{s}\,Y_{\mathrm{eq}}^2(s)U_1^2 \tag{10.56}$$

La potència perduda en el rotor P_2 val, en funció de s:

$$P_2(s) = 3R_2I_2^2(s) = 3R_2\,Y_{\mathrm{eq}}^2(s)U_1^2 \tag{10.57}$$

Finalment, la potència mecànica P_{m} que subministra el motor en el seu eix val, en funció de s:

$$P_{\mathrm{m}}(s) = P_{\mathrm{rot}}(s) - P_2(s) = 3\,\frac{1-s}{s}\,R_2I_2^2(s) = 3\,\frac{1-s}{s}\,R_2\,Y_{\mathrm{eq}}^2(s)U_1^2 \tag{10.58}$$

A partir de les dues últimes equacions, es pot veure el sentit que té separar la resistència del rotor en dues: la primera, R_2, intervé en l'equació de la potència perduda en el rotor, i la segona, $\frac{1-s}{s}R_2$, intervé en l'equació de la potència mecànica del motor.

La potència P_{m} és teòrica, ja que en la realitat cal descomptar a aquesta potència les pèrdues ocasionades per la fricció del motor, que en general poden variar amb el lliscament.

Les relacions entre les potències P_{m}, P_2 i P_{rot} són:

$$P_{\mathrm{m}}(s) = (1-s)P_{\mathrm{rot}}(s) \tag{10.59a}$$

$$P_2(s) = sP_{\mathrm{rot}}(s) \tag{10.59b}$$

Partint de les equacions (10.24) i (10.58), podem expressar T_{m} en funció de s i de I_2 o de U_1:

$$T_{\mathrm{m}}(s) = \frac{P_{\mathrm{m}}(s)}{\omega_{\mathrm{m}}(s)} = \frac{3(1-s)R_2}{s\,\omega_{\mathrm{m}}(s)}\,I_2^2(s) = \frac{3(1-s)R_2}{s\,\omega_{\mathrm{m}}(s)}\,Y_{\mathrm{eq}}^2(s)U_1^2 \tag{10.60}$$

Si substituïm P_{m} per l'expressió de l'equació (10.59a), i ω_{m} per l'expressió de l'equació (10.17), tenim:

$$T_{\mathrm{m}}(s) = \frac{P_{\mathrm{rot}}(s)}{\omega_{\mathrm{m,sinc}}} = \frac{3R_2}{s\,\omega_{\mathrm{m,sinc}}}\,I_2^2(s) = \frac{3R_2}{s\,\omega_{\mathrm{m,sinc}}}\,Y_{\mathrm{eq}}^2(s)U_1^2 \tag{10.61}$$

En qualsevol de les dues equacions anteriors es pot veure que el parell mecànic T_{m} és directament proporcional al quadrat de la tensió U_1, i per tant si la tensió es redueix, per exemple, al 80 % del seu valor nominal, el parell mecànic per a qualsevol valor del lliscament s, es reduirà al 64 %.

Els valors màxims de T_{m} i P_{m} no es donen a la mateixa velocitat ω_{m} ja que aquesta velocitat varia amb el lliscament s. En canvi, sí que coincideixen en una mateixa velocitat els valors màxims de T_{m} i P_{rot}, ja que ambdues variables estan relacionades per una constant: $\omega_{\mathrm{m,sinc}}$. P_{rot} és la potencia activa transferida al rotor, i és un concepte conegut que la potència activa més gran que es pot transferir entre un emissor i un receptor, es dona quan la impedància d'ambdós sistemes és igual; en el nostre cas la impedància de l'emissor seria $|Z_{\mathrm{Th}} + \mathrm{j}X_2|$, i la del receptor R_2/s. Igualant aquestes dues impedàncies obtindrem el valor del lliscament $s_{T_{\mathrm{m,màx}}}$ que es dona quan T_{m} és màxim:

$$s_{T_{\mathrm{m,màx}}} = \frac{R_2}{|Z_{\mathrm{Th}} + \mathrm{j}X_2|} \tag{10.62}$$

Per trobar el valor $T_{\mathrm{m,màx}}$ només cal substituir el valor de $s_{T_{\mathrm{m,màx}}}$ en l'equació (10.61):

$$T_{\mathrm{m,màx}} = T_{\mathrm{m}}(s_{T_{\mathrm{m,màx}}}) = \frac{3|Z_{\mathrm{Th}} + \mathrm{j}X_2|}{\omega_{\mathrm{m,sinc}}}\,I_2^2(s_{T_{\mathrm{m,màx}}}) = \frac{3|Z_{\mathrm{Th}} + \mathrm{j}X_2|}{\omega_{\mathrm{m,sinc}}}\,Y_{\mathrm{eq}}^2(s_{T_{\mathrm{m,màx}}})U_1^2 \tag{10.63}$$

Exemple 10.4 Característiques de funcionament d'un motor

Tenim un motor de quatre pols ($p = 4$) connectat a una xarxa trifàsica de: $U = 380\,\mathrm{V}$ i $f = 50\,\mathrm{Hz}$, amb un lliscament nominal: $s_\mathrm{N} = 5\,\%$. Els paràmetres per fase del circuit equivalent son: $R_1 = 0{,}5\,\Omega$, $X_1 = 1{,}5\,\Omega$, $R_2 = 0{,}625\,\Omega$, $X_2 = 1{,}25\,\Omega$, $R_\mathrm{Fe} = 360\,\Omega$, $X_\mathrm{m} = 40\,\Omega$. Es tracta d'aplicar les equacions d'aquesta secció per trobar les característiques de funcionament del motor.

Comencem calculant la tensió fase–neutre $\underline{U}_1$, la qual utilitzarem com a fasor de referència:

$$\underline{U}_1 = \frac{380\,\mathrm{V}}{\sqrt{3}} = 219{,}393\,\mathrm{V}$$

Calculem a continuació les velocitats síncrones $n_\mathrm{m,sinc}$ i $\omega_\mathrm{m,sinc}$, i les velocitats nominals $n_\mathrm{m,N}$ i $\omega_\mathrm{m,N}$, utilitzant les equacions (10.15b) i (10.17):

$$n_\mathrm{m,sinc} = \frac{120 \times 50\,\mathrm{Hz}}{4} = 1500\,\mathrm{r/min}$$

$$\omega_\mathrm{m,sinc} = \frac{4 \times \pi \times 50\,\mathrm{Hz}}{4} = 157{,}080\,\mathrm{rad/s}$$

$$n_\mathrm{m,N} = (1 - 0{,}05) \times 1500\,\mathrm{r/min} = 1425\,\mathrm{r/min}$$

$$\omega_\mathrm{m,N} = (1 - 0{,}05) \times 157{,}080\,\mathrm{rad/s} = 149{,}226\,\mathrm{rad/s}$$

Calculem ara la impedància $\underline{Z}_0$ utilitzant l'equació (10.40), i la impedància $\underline{Z}_\mathrm{Th}$ i tensió $\underline{U}_\mathrm{Th}$ Thévenin equivalents utilitzant les equacions (10.46a) i (10.46b):

$$\underline{Z}_0 = \frac{360\,\Omega \times \mathrm{j}40\,\Omega}{360\,\Omega + \mathrm{j}40\,\Omega} = (4{,}390 + \mathrm{j}39{,}512)\,\Omega$$

$$\underline{Z}_\mathrm{Th} = \frac{(0{,}5 + \mathrm{j}1{,}5)\,\Omega \times (4{,}390 + \mathrm{j}39{,}512)\,\Omega}{(0{,}5 + \mathrm{j}1{,}5)\,\Omega + (4{,}390 + \mathrm{j}39{,}512)\,\Omega} = (0{,}470 + \mathrm{j}1{,}448)\,\Omega$$

$$\underline{U}_\mathrm{Th} = \frac{(4{,}390 + \mathrm{j}39{,}512)\,\Omega}{(0{,}5 + \mathrm{j}1{,}5)\,\Omega + (4{,}390 + \mathrm{j}39{,}512)\,\Omega} \times 219{,}393\,\mathrm{V} = 211{,}174_{\angle 0{,}4596^\circ}\,\mathrm{V}$$

Combinant les equacions (10.42) i (10.44a), l'expressió de I_1 en funció de s és:

$$I_1(s) = \frac{219{,}393\,\mathrm{V}}{\left|(0{,}5 + \mathrm{j}1{,}5)\,\Omega + \dfrac{(4{,}390 + \mathrm{j}39{,}512)\,\Omega \times \left(\frac{0{,}625\,\Omega}{s} + \mathrm{j}1{,}25\,\Omega\right)}{(4{,}390 + \mathrm{j}39{,}512)\,\Omega + \frac{0{,}625\,\Omega}{s} + \mathrm{j}1{,}25\,\Omega}\right|}$$

Substituint s per 0,05 i 1 en l'equació anterior, trobarem respectivament el valor del corrent nominal I_N i del corrent d'arrancada I_arr:

$$I_\mathrm{N} = 17{,}7\,\mathrm{A}$$

$$I_\mathrm{arr} = 74{,}9\,\mathrm{A}$$

Calculem a continuació l'expressió de I_2 en funció de s, utilitzant l'equació (10.48):

$$I_2(s) = \frac{211{,}174\,\mathrm{V}}{\left|(0{,}470 + \mathrm{j}1{,}448)\,\Omega + \frac{0{,}625\,\Omega}{s} + \mathrm{j}1{,}25\,\Omega\right|}$$

Utilitzant aquesta expressió de $I_2(s)$ calculem a continuació les expressions de P_m i T_m en funció de s, utilitzant les equacions (10.58) i (10.61):

$$P_\mathrm{m}(s) = \frac{3 \times (1-s) \times 0{,}625\,\Omega}{s} \times I_2^2(s) \qquad T_\mathrm{m}(s) = \frac{3 \times 0{,}625\,\Omega}{s \times 157{,}080\,\mathrm{rad/s}} \times I_2^2(s)$$

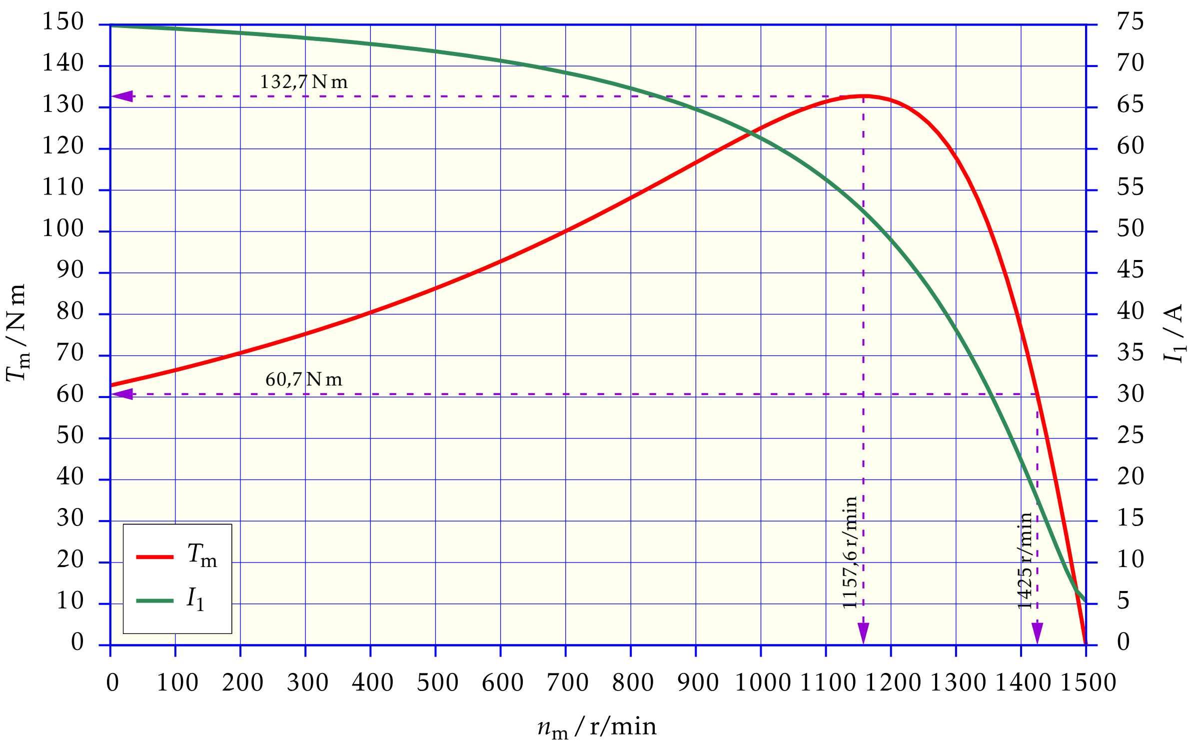
Substituint s per 0,05 en les equacions anteriors, trobarem el valor de la potència mecànica nominal $P_\mathrm{m,N}$ i del parell mecànic nominal $T_\mathrm{m,N}$, i substituint s per 1 en l'equació del parell, trobarem el valor del parell mecànic d'arrancada $T_\mathrm{m,arr}$:

$$P_\mathrm{m,N} = 9052{,}8\,\mathrm{W} \qquad T_\mathrm{m,N} = 60{,}7\,\mathrm{N\,m} \qquad T_\mathrm{m,arr} = 62{,}8\,\mathrm{N\,m}$$

Calculem ara el lliscament en el punt de parell màxim, segons l'equació (10.62), i aquest parell:

$$s_{T_\mathrm{m,màx}} = \frac{0{,}625\,\Omega}{|(0{,}470 + \mathrm{j}1{,}448)\,\Omega + \mathrm{j}1{,}25\,\Omega|} = 0{,}228\ (1157{,}6\,\mathrm{r/min}) \qquad T_\mathrm{m,màx} = 132{,}7\,\mathrm{N\,m}$$

Per acabar, representem en una gràfica l'evolució del parell T_m i del corrent I_1 amb la velocitat n_m, indicant-hi els parells nominal i d'arrencada, i les velocitats a les quals es produeixen:



10.5 Norma NEMA MG-1

La «National Electrical Manufacturers Association» (NEMA), tracta en la norma MG-1 «Motors and Generators» una gran quantitat de qüestions de tota mena relatives a motors i generadors, tant trifàsics com monofàsics, de corrent continu i de corrent altern.

S'expliquen a continuació algunes de les qüestions d'aquesta norma que són d'aplicació als motors d'inducció trifàsics.

10.5.1 Punts característics de la corba parell–velocitat

En la Figura 10.3 es representa una corba típica parell–velocitat d'un motor, assenyalant-hi quatre punts als quals la norma NEMA MG-1 els dona uns noms característics. En l'eix d'abscisses s'hi pot representar indistintament les velocitats de rotació ω_{m} o n_{m}, o el lliscament s (amb valors que van des d'1, arrencada, fins a 0, velocitat síncrona $\omega_{\mathrm{m,sinc}}$).

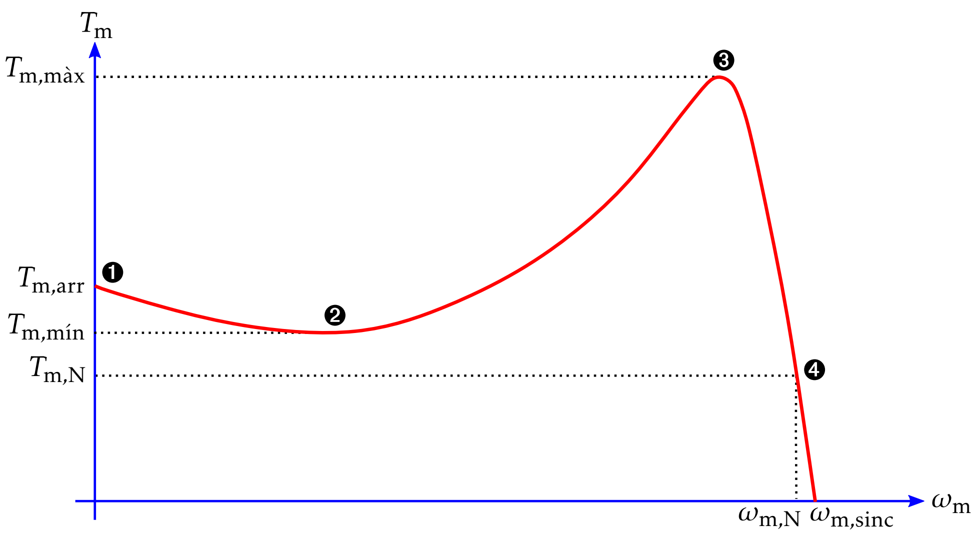


Figura 10.3 Punts característics d'una corba parell–velocitat

Es dona a continuació la definició dels quatre punts de la Figura 10.3.

❶ «Locked-rotor torque» (parell d'arrencada). També s'anomena «starting torque», «stall torque» o «breakaway torque». És el mínim parell $T_{\mathrm{m,arr}}$ que es produeix amb el motor aturat, per a qualsevol posició angular del rotor, quan s'aplica al motor la tensió nominal a la freqüència nominal.

❷ «Pull-up torque» (parell mínim). És el mínim parell $T_{\mathrm{m,mín}}$ que es produeix durant el període d'acceleració del motor, entre l'arrancada i el parell màxim $T_{\mathrm{m,màx}}$. En el cas dels motors que no tenen un parell màxim definit, el «pull-up torque» és el mínim parell que es produeix fins arribar a la velocitat nominal $\omega_{\mathrm{m,N}}$.

❸ «Breakdown torque» (parell màxim). També s'anomena «pull-out torque». És el màxim parell $T_{\mathrm{m,màx}}$ que produeix el motor, quan se li aplica la tensió nominal a la freqüència nominal, sense cap variació abrupta de la velocitat.

❹ «Full load torque» (parell nominal). És el parell necessari $T_{\mathrm{m,N}}$ per produir la potència mecànica nominal del motor a la velocitat nominal $\omega_{\mathrm{m,N}}$.

10.5.2 Codi de lletres de corrent d'arrencada

El corrent d'arrencada d'un motor pot indicar-se directament en ampere, o com un múltiple del corrent nominal (per exemple: $I_{\mathrm{arr}} = 6I_{\mathrm{N}}$). No obstant, els motors que segueixen la NEMA MG-1, també poden indicar aquest corrent mitjançant d'una lletra, anomenada «code letter for locked-rotor kVA». A cada lletra li correspon un valor (de fet un rang de valors possibles) que dona la relació entre la potencia elèctrica aparent absorbida pel motor en el moment d'arrencar, expressada en kVA, i la potència mecànica nominal del motor, expressada en HP, quan el motor s'alimenta a la tensió nominal; si anomenem κ a aquesta relació, tenim:

$$\kappa = \frac{S_{\mathrm{arr}}/\mathrm{kVA}}{P_{\mathrm{m,N}}/\mathrm{HP}} \tag{10.64}$$

Expressem a continuació la potencia elèctrica aparent, en kVA, absorbida pel motor en el moment d'arrencar, a partir de la tensió nominal d'alimentació i del corrent d'arrencada:

$$S_{\mathrm{arr}}/\mathrm{kVA} = \frac{\sqrt{3}\, U_{\mathrm{N}}/\mathrm{V}\, I_{\mathrm{arr}}/\mathrm{A}}{1000} \tag{10.65}$$

A partir de les dues equacions anteriors, podem obtenir el valor del corrent d'arrencada:

$$I_{\mathrm{arr}}/\mathrm{A} = \frac{1000\,\kappa}{\sqrt{3}}\,\frac{P_{\mathrm{m,N}}/\mathrm{HP}}{U_{\mathrm{N}}/\mathrm{V}} = 577{,}35\,\kappa\,\frac{P_{\mathrm{m,N}}/\mathrm{HP}}{U_{\mathrm{N}}/\mathrm{V}} \tag{10.66}$$

En la Taula 10.3 es dona el rang de valors que pren κ per a cadascuna de les lletres d'aquest codi. El valor superior de cada rang en queda exclòs.

Taula 10.3 «Code letters for locked-rotor kVA»

Lletra NEMA	Rang de valors de κ
A	0,00 a 3,15
B	3,15 a 3,55
C	3,55 a 4,0
D	4,0 a 4,5
E	4,5 a 5,0
F	5,0 a 5,6
G	5,6 a 6,3
H	6,3 a 7,1
J	7,1 a 8,0
K	8,0 a 9,0
L	9,0 a 10,0
M	10,0 a 11,2
N	11,2 a 12,5

(continua a la pàgina següent)

Taula 10.3 «Code letters for locked-rotor kVA» (*ve de la pàgina anterior*)

Lletra NEMA	Rang de valors de κ
P	12,5 a 14,0
R	14,0 a 16,0
S	16,0 a 18,0
T	18,0 a 20,0
U	20,0 a 22,4
V	22,4 i superior

Exemple 10.5 Corrent d'arrenca d'un motor segons NEMA MG-1

Sabent que la potència nominal d'un motor és: $P_{\mathrm{m,N}} = 7{,}5\,\mathrm{HP}$, que la seva tensió nominal és: $U_{\mathrm{N}} = 400\,\mathrm{V}$, i que la lletra NEMA és: H, es tracta de trobar el corrent d'arrencada del motor i el seu valor en relació al corrent nominal.

Si prenem per a la lletra H el valor mitjà del seu rang: $\kappa = \frac{6{,}3+7{,}1}{2} = 6{,}7$, a partir de l'equació (10.66) tenim:

$$I_{\mathrm{arr}} = 577{,}35 \times 6{,}7 \times \frac{7{,}5\,\mathrm{HP}}{400\,\mathrm{V}} = 72{,}5\,\mathrm{A}$$

Donat que no tenim cap dada sobre el corrent nominal, calcularem primer la potència aparent nominal de forma aproximada utilitzant l'equació (10.23):

$$S_{\mathrm{N}} \approx 7{,}5\,\mathrm{kVA}$$

Calculem ara el corrent nominal:

$$I_{\mathrm{N}} = \frac{S_{\mathrm{N}}}{\sqrt{3}U_{\mathrm{N}}} = \frac{7500\,\mathrm{VA}}{\sqrt{3} \times 400\,\mathrm{V}} = 10{,}8\,\mathrm{A}$$

La relació entre el corrent d'arrencada i el corrent nominal és doncs:

$$\frac{I_{\mathrm{arr}}}{I_{\mathrm{N}}} = \frac{72{,}5\,\mathrm{A}}{10{,}8\,\mathrm{A}} = 6{,}7$$

Com es pot veure, el valor de κ de la taula 10.3 a la pàgina anterior és aproximadament igual al valor de $I_{\mathrm{arr}}/I_{\mathrm{N}}$.

Aquesta igualtat entre $I_{\mathrm{arr}}/I_{\mathrm{N}}$ i κ només es dona quan l'equació (10.23) és vàlida, és a dir quan es compleix $S_{\mathrm{N}}/\mathrm{kVA} \approx P_{\mathrm{m,N}}/\mathrm{HP}$.

En canvi, en el cas, per exemple, d'un motor amb les característiques: $P_{\mathrm{m,N}} = 0{,}54\,\mathrm{HP}$, $U_{\mathrm{N}} = 380\,\mathrm{V}$, $I_{\mathrm{N}} = 1{,}4\,\mathrm{A}$, $I_{\mathrm{arr}} = 8{,}2\,\mathrm{A}$ i lletra NEMA L, veiem que el valor de 8,2 A és el que correspon a prendre el valor màxim $\kappa = 10$ de la lletra L:

$$I_{\mathrm{arr}} = 577{,}35 \times 10 \times \frac{0{,}54\,\mathrm{HP}}{380\,\mathrm{V}} = 8{,}2\,\mathrm{A}$$

Però la relació entre el corrent d'arrencada i el corrent nominal és:

$$\frac{I_{\text{arr}}}{I_{\text{N}}} = \frac{8{,}2\ \text{A}}{1{,}4\ \text{A}} = 5{,}9$$

I per tant en aquest cas tenim $\kappa \neq I_{\text{arr}}/I_{\text{N}}$, la qual cosa ens indica que l'equació (10.23) no és aplicable en aquest cas.

10.5.3 Tensions desequilibrades

Un motor consumeix el corrent nominal quan subministra la potència mecànica nominal girant a la velocitat nominal, i està alimentat a la tensió nominal. Per tal que això sigui cert, la tensió d'alimentació trifàsica ha de ser equilibrada.

Quan la tensió trifàsica d'alimentació és desequilibrada, el corrent necessari per subministrar la potència mecànica nominal, és més gran que el corrent nominal. A més, un desequilibri de tensions relativament petit, produeix un increment del corrent proporcionalment molt gran, generant un calor addicional que el motor haurà d'evacuar, i una possible actuació de les proteccions elèctriques del motor.

En aquestes condicions de tensió desequilibrada, cal reduir el valor de la potència mecànica nominal del motor per tal que el corrent baixi al seu valor nominal.

La norma NEMA MG-1 proporciona una gràfica que dona un factor reductor de la potència mecànica nominal, que anomenarem κ_{P}, en funció de desequilibris de tensions de fins el 5 %. El desequilibri de tensions Δu el defineix com:

$$\Delta u = \frac{\text{màxima desviació de la tensió respecte del valor mitja}}{\text{valor mitjà de la tensió}}$$

En la Figura 10.4 a la pàgina següent es representa aquest factor reductor κ_{P} en funció de Δu.

Si tenim en compte que κ_{P} és el valor pel qual cal multiplicar la potència mecànica nominal per fer baixar el corrent fins el seu valor nominal, i que la potència és proporcional al corrent, podem deduir que si es volgués mantenir la potència nominal mecànica, el corrent augmentaria en un factor, que anomenarem κ_{I}, que variaria de forma inversa a κ_{P}: $\kappa_{\text{I}} = \frac{1}{\kappa_{\text{P}}}$. En la Figura 10.4 a la pàgina següent es representa també aquest factor κ_{I} en funció de la mateixa Δu.

Com es pot veure, si el desequilibri de tensions arribés al 5 %, caldria reduir la potència nominal mecànica del motor, multiplicant-la pel factor $\kappa_{\text{P}} = 0{,}755$, ja que si no es fes el corrent augmentaria en un factor $\kappa_{\text{I}} = 1{,}325$.

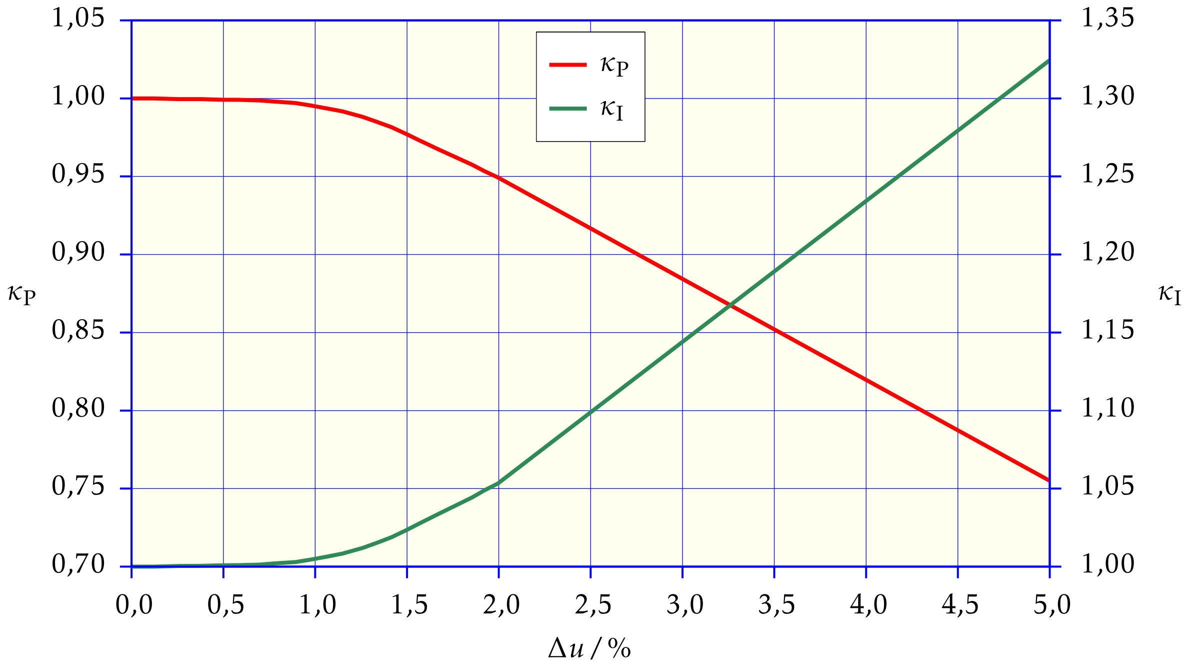


Figura 10.4 Tensió d'alimentació desequilibrada en motors

Exemple 10.6 Tensió d'alimentació desequilibrada en un motor

Sabent que la potència nominal d'un motor és: $P_{m,N} = 7{,}5\,\mathrm{HP}$, i que les tres tensions desequilibrades de fase tenen els valors: 460 V, 467 V i 450 V, es tracta de trobar els factor κ_P i κ_I, i el valor de la potència nominal corregida.

Calculem primer el valor mitjà de la tensió:

$$\bar{U} = \frac{460\,\mathrm{V} + 467\,\mathrm{V} + 450\,\mathrm{V}}{3} = 459\,\mathrm{V}$$

La màxima desviació de les tres tensions respecte d'aquest valor és: $459\,\mathrm{V} - 450\,\mathrm{V} = 9\,\mathrm{V}$. Per tant tenim:

$$\Delta u = \frac{9\,\mathrm{V}}{459\,\mathrm{V}} = 1{,}96 \times 10^{-2} = 1{,}96\,\%$$

A partir d'aquest valor, trobem a la Figura 10.4 els valors: $\kappa_P = 0{,}95$ i $\kappa_I = 1{,}05$.

Per tant, per tal que el corrent no augmenti en un factor de 1,05, haurem de reduir la potència nominal a:

$$P'_{m,N} = 0{,}95 \times P_{m,N} = 0{,}95 \times 7{,}5\,\mathrm{HP} = 7{,}1\,\mathrm{HP}$$

10.5.4 Classes d'aïllaments tèrmics en motors

Quan es posa en marxa un motor, la seva temperatura comença a pujar per sobre de la temperatura ambient a causa del corrent que circula pels seus debanats.

La norma NEMA MG-1 defineix diverses classes d'aïllament tèrmic, depenent de l'increment global de temperatura permès respecte de la temperatura ambient, que fixa en 40 °C; per a cada classe es permet un increment addicional de temperatura en el punt més calent, situat en el centre dels debanats del motor.

En la Taula 10.4 es donen els valors dels increments de temperatura permesos per a cadascuna de les diferents classes d'aïllament, partint d'una temperatura ambient de 40 °C.

Taula 10.4 Classes NEMA d'aïllaments tèrmics en motors

Classe NEMA	Increment global de temperatura sobre la temperatura ambient	Increment addicional de temperatura en el punt més calent
A	60 °C	5 °C
B	80 °C	10 °C
F	105 °C	10 °C
H	125 °C	15 °C

Part III

Sistemes Elèctrics de Potència

Capítol 11

Resolució de Xarxes Elèctriques

11.1 Introducció

S'explica en aquest capítol el mètode dels nusos, per a la resolució de xarxes elèctriques.

Quan tenim una xarxa elèctrica amb pocs components, sempre la podem resoldre fàcilment utilitzant el mètode de les malles descrit en la secció 1.8 a la pàgina 37. No obstant, quan la xarxa té molts components, quan està molt mallada o quan hi ha acoblaments magnètics entre diverses branques de la xarxa, és millor emprar un mètode sistemàtic per tal de resoldre-la, com ara el mètode del nusos.

El mètode dels nusos serveix per resoldre xarxes, tant de corrent continu com de corrent altern, on les càrregues estan definides pels seus valors d'impedància o d'admitància; no és útil per tant, per resoldre problemes de flux de càrregues, on el que es coneix és la potència absorbida per les càrregues.

Per tal d'utilitzar aquest mètode, les branques de la xarxa han d'estar formades per algun dels següents components:

- Font de tensió en sèrie amb una impedància.
- Font de corrent en paral·lel amb una admitància (l'admitància pot ser nul·la).
- Impedància.
- Admitància.
- Acoblament magnètic entre branques.
- Transformador.[1]

No és possible tenir branques d'impedància nul·la (curtcircuits) o branques amb fonts de tensió ideals (sense impedància sèrie). Aquesta limitació es pot superar, no obstant, substituint la impedància nul·la per dues impedàncies en sèrie de valor contrari, i introduint un nus fictici addicional en el punt d'unió d'aquestes dues noves impedàncies. En la Figura 11.1 a la pàgina següent es representa gràficament aquesta substitució.

[1] Cal substituir el transformador pel seu circuit equivalent format per impedàncies i admitàncies. Vegeu la secció 12.2.4.

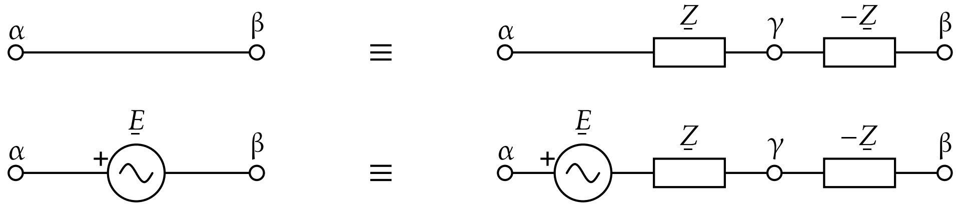


Figura 11.1 Substitució de branques d'impedància nul·la

Per ajudar-nos en l'explicació d'aquest mètode de resolució de xarxes, farem ús de l'exemple de la Figura 11.2. Els valors dels components d'aquest circuit són:

$\underline{E}_1 = 200_{\angle 0°}$ V $\quad R_1 = 10\,\Omega \quad \underline{E}_2 = 50_{\angle 0°}$ V $\quad \underline{X}_2 = \mathrm{j}20\,\Omega \quad \underline{X}_3 = \mathrm{j}5\,\Omega$

$R_4 = 20\,\Omega \quad \underline{J}_5 = 4_{\angle 0°}$ A $\quad R_5 = 10\,\Omega \quad \underline{X}_\mathrm{M} = \mathrm{j}5\,\Omega$

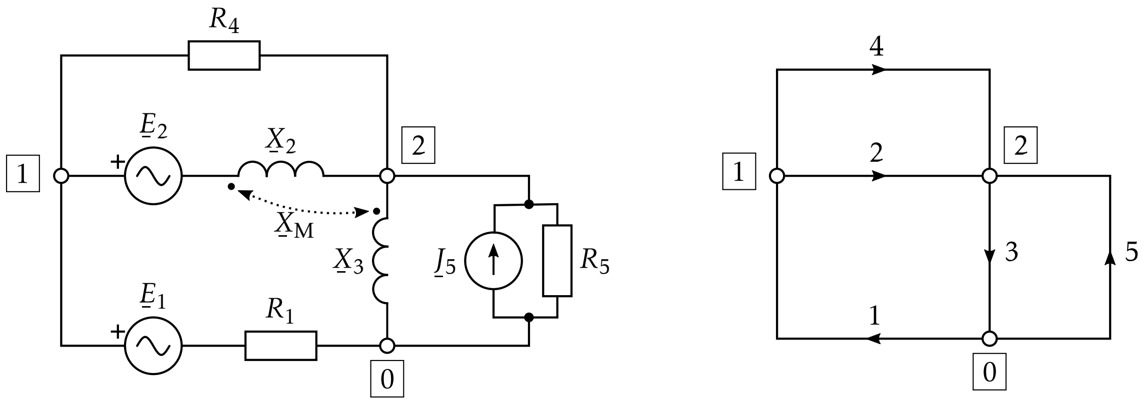


Figura 11.2 Resolució de xarxes elèctriques pel mètode dels nusos

En primer lloc, a partir de la xarxa elèctrica cal representar-ne el graf orientat seguint els passos següents (Figura 11.2, dreta):

❶ Es representen les connexions de les branques mitjançant línies, sense dibuixar-hi cap component elèctric.

❷ Es dona un sentit a aquestes branques, dibuixant-hi fletxes. Aquestes fletxes representen els sentits assignats als corrents i a les diferències de potencial entre nusos.

❸ Es numeren tots els nusos de forma consecutiva, començant pel número 0; el nus 0 s'anomena nus de potencial zero o de referència.

❹ Es numeren totes les branques de forma consecutiva, començant pel número 1.

Es defineixen a continuació els dos paràmetres bàsics d'aquest mètode, n i b; aquests dos valors defineixen les dimensions dels vectors i matrius que es veuran més endavant:

n Nombre de nusos de la xarxa, sense comptar el nus de referència.

En el nostre exemple tenim:

$$n = 2$$

b Nombre de branques de la xarxa.

En el nostre exemple tenim:

$$b = 5$$

11.2 Mètode general de resolució

Quan hi ha acoblaments magnètics entre branques de la xarxa hem d'utilitzar el mètode general de resolució, descrit a continuació.

En primer lloc, a partir dels valors dels components de la xarxa formem les matrius i vectors següents (s'n donen les dimensions entre claus):

$\boldsymbol{A}\{n \times b\}$ Matriu d'incidència de nusos. Cada columna representa una branca en ordre creixent d'esquerra a dreta, i cada fila representa un nus (sense comptar el de referència) en ordre creixent de dalt a baix. Cada branca del graf orientat omple la columna corresponent de la matriu $\boldsymbol{A}$ amb els valors 0, 1 ó -1 segons el criteri següent:

- 1: si la branca surt del nus.
- -1: si la branca va a parar al nus.
- 0: si la branca ni surt ni va a parar al nus.

Els termes «surt» i «va a parar» s'han d'entendre segons les fletxes dibuixades en les branques del graf orientat. Les connexions al nus de referència no apareixen en la matriu $\boldsymbol{A}$.

En el nostre exemple tenim:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\mathrm{B}}\{b \times b\}$ Matriu d'impedàncies de branca. Els elements de la diagonal estan formats per les impedàncies de les respectives branques, i els elements de fora de la diagonal estan formats per les impedàncies dels acoblaments magnètics entre cada parell de branques.

Els acoblaments magnètics poden ser positius o negatius, depenent de la posició dels punts homòlegs de les inductàncies i del sentit de les branques del graf orientat. L'acoblament és positiu quan les fletxes de les dues branques acoblades es dirigeixen cap els seus punts homòlegs respectius, o quan les dues fletxes se n'allunyen; en canvi, l'acoblament és negatiu quan una de les fletxes de les dues branques acoblades es dirigeix cap el seu punt homòleg i l'altra se n'allunya.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}20 & \mathrm{j}5 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}5 & \mathrm{j}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \Omega$$

$\underline{\boldsymbol{E}}'_{\mathrm{B}}\{b\}$ Vector columna de forces electromotrius de branca. Els elements d'aquest vector estan formats per les forces electromotrius de les fonts de tensió de les respectives branques.

El signe de cada força electromotriu és positiu si el seu sentit coincideix amb el sentit de la fletxa de la branca corresponent del graf orientat, i negatiu en cas contrari.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{E}}'_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 200 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

$\underline{\boldsymbol{J}}'_{\mathrm{B}}\{b\}$ Vector columna d'intensivitats de branca. Els elements d'aquest vector estan formats per les intensivitats de les fonts de corrent de les respectives branques.

El signe de cada intensivitat és positiu si el seu sentit coincideix amb el sentit de la fletxa de la branca corresponent del graf orientat, i negatiu en cas contrari.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{J}}'_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

A partir de les dades anteriors formem ara les diverses matrius i vectors que ens permetran resoldre la xarxa, això és, trobar les tensions de les branques i els corrents que hi circulen. Aquestes matrius i vectors són (s'en donen les dimensions entre claus):

$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{B}}\{b \times b\}$ Matriu d'admitàncies de branca. És definida per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{B}} = \underline{\boldsymbol{Z}}_{\mathrm{B}}^{-1} \tag{11.1}$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}20 & \mathrm{j}5 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}5 & \mathrm{j}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}\frac{1}{15} & \mathrm{j}\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\frac{1}{15} & -\mathrm{j}\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \mathrm{S}$$

$\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}}\{b\}$ Vector columna d'intensivitats equivalents de branca. És definit per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}} = \underline{\boldsymbol{J}}'_{\mathrm{B}} + \underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{B}}\,\underline{\boldsymbol{E}}'_{\mathrm{B}} \tag{11.2}$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}\frac{1}{15} & \mathrm{j}\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\frac{1}{15} & -\mathrm{j}\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ \mathrm{j}\frac{10}{3} \\ -\mathrm{j}\frac{10}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

$\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}\{n \times n\}$ Matriu d'admitàncies de nus. És definida per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N} = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{B}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} \tag{11.3}$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}\frac{1}{15} & \mathrm{j}\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\frac{1}{15} & -\mathrm{j}\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9-\mathrm{j}4}{60} & \frac{-3+\mathrm{j}8}{60} \\ \frac{-3+\mathrm{j}8}{60} & \frac{9-\mathrm{j}28}{60} \end{pmatrix} \mathrm{S}$$

$\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N}\{n\}$ Vector columna d'intensivitats de nus. És definit per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N} = -\boldsymbol{A}\,\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{B} \tag{11.4}$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ \mathrm{j}\frac{10}{3} \\ -\mathrm{j}\frac{10}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 - \mathrm{j}\frac{10}{3} \\ 4 + \mathrm{j}\frac{20}{3} \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

$\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N}\{n\}$ Vector columna de potencials de nus. És definit per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N} = \underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N} \quad \rightarrow \quad \underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N} = \underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}^{-1}\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N} \tag{11.5}$$

Els elements d'aquest vector són els potencials de cada nus de la xarxa respecte del nus de referència.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \frac{9-\mathrm{j}4}{60} & \frac{-3+\mathrm{j}8}{60} \\ \frac{-3+\mathrm{j}8}{60} & \frac{9-\mathrm{j}28}{60} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 20 - \mathrm{j}\frac{10}{3} \\ 4 + \mathrm{j}\frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15\,430+\mathrm{j}2295}{101} \\ \frac{3390+\mathrm{j}2085}{101} \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

$\underline{\boldsymbol{U}}_\mathrm{B}\{b\}$ Vector columna de tensions de branca. És definit per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_\mathrm{B} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N} \tag{11.6}$$

Aquesta és la solució buscada pel que fa a les tensions de les branques de la xarxa.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{15\,430+\mathrm{j}2295}{101} \\ \frac{3390+\mathrm{j}2085}{101} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-15\,430-\mathrm{j}2295}{101} \\ \frac{12\,040+\mathrm{j}210}{101} \\ \frac{3390+\mathrm{j}2085}{101} \\ \frac{12\,040+\mathrm{j}210}{101} \\ \frac{-3390-\mathrm{j}2085}{101} \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

$\underline{\boldsymbol{I}}_\mathrm{B}\{b\}$ Vector columna de corrents de branca. És definit per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{I}}_\mathrm{B} = \underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{B}\,\underline{\boldsymbol{U}}_\mathrm{B} + \underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{B} \tag{11.7}$$

Aquesta és la solució buscada pel que fa als corrents de les branques de la xarxa. En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{I}}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{j}\frac{1}{15} & \mathrm{j}\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\frac{1}{15} & -\mathrm{j}\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-15\,430-\mathrm{j}2295}{101} \\ \frac{12\,040+\mathrm{j}210}{101} \\ \frac{3390+\mathrm{j}2085}{101} \\ \frac{12\,040+\mathrm{j}210}{101} \\ \frac{-3390-\mathrm{j}2085}{101} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ \mathrm{j}\frac{10}{3} \\ -\mathrm{j}\frac{10}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{954-\mathrm{j}459}{202} \\ \frac{-250-\mathrm{j}480}{202} \\ \frac{1084-\mathrm{j}876}{202} \\ \frac{1204+\mathrm{j}21}{202} \\ \frac{130-\mathrm{j}417}{202} \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Es fa un resum, per acabar, dels passos a seguir per tal de resoldre una xarxa elèctrica mitjançant el mètode dels nusos:

❶ Es representa el graf orientat associat a la xarxa, i es numeren tots els seus nusos i totes les seves branques.

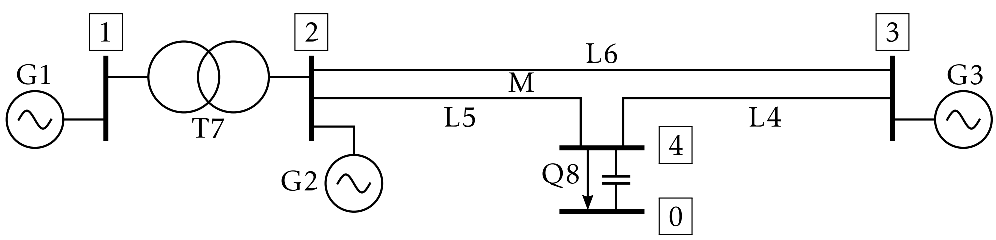
❷ A partir del graf orientat i dels elements de la xarxa, es formen les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\underline{\boldsymbol{Z}}_\mathrm{B}$, i els vectors $\underline{\boldsymbol{E}}'_\mathrm{B}$ i $\underline{\boldsymbol{J}}'_\mathrm{B}$.

❸ Es calculen les matrius $\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{B}$ i $\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}$, i els vectors $\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{B}$ i $\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N}$.

❹ Finalment es calculen els vectors $\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N}$, $\underline{\boldsymbol{U}}_\mathrm{B}$ i $\underline{\boldsymbol{I}}_\mathrm{B}$.

Exemple 11.1 Aplicació del mètode dels nusos – Xarxa amb acoblaments magnètics

Es tracte de resoldre la xarxa següent pel mètode dels nusos; cal tenir en compte que a més de la càrrega Q8, els generadors G1, G2 i G3 també estan units a terra (nus 0 de referència), i que hi ha un acoblament magnètic M entre les línies L5 i L6. Es calcularà també la potència cedida pels tres generadors G1, G2 i G3, la potència absorbida per la càrrega Q8 i la potència perduda en la resta de components de la xarxa.

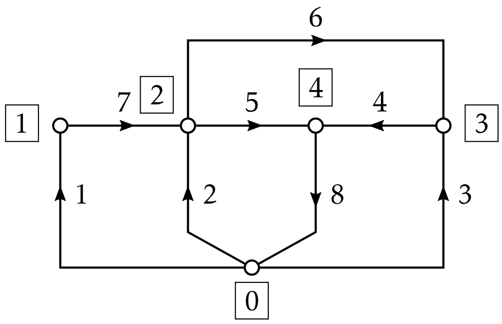


Els valors dels components d'aquesta xarxa, expressats en per unitat són:

G1 : $\underline{e}_1 = 1{,}1$	$\underline{z}_1 = \mathrm{j}0{,}25$	$L4$: $\underline{z}_4 = \mathrm{j}0{,}10$	$T7$: $\underline{z}_7 = \mathrm{j}0{,}16$	$m_7 = 1:1$
G2 : $\underline{e}_2 = 1{,}05 + \mathrm{j}0{,}10$	$\underline{z}_2 = \mathrm{j}0{,}20$	$L5$: $\underline{z}_5 = \mathrm{j}0{,}405$	$Q8$: $\underline{j}_8 = 2 - \mathrm{j}0{,}9$	$\underline{z}_8 = -\mathrm{j}25$

$G3:\ \underline{e}_3 = 1{,}08 + \text{j}0{,}12 \quad \underline{z}_3 = \text{j}0{,}25 \qquad L6:\ \underline{z}_6 = \text{j}0{,}50 \qquad M:\ \underline{x}_M = \text{j}0{,}05$ (entre L5 i L6)

Començarem dibuixant el graf orientat associat a la xarxa, i formant la matriu $\boldsymbol{A}$.



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formem a continuació la matriu $\underline{\boldsymbol{Z}}_\text{B}$ i els vectors $\underline{\boldsymbol{J}}'_\text{B}$ i $\underline{\boldsymbol{E}}'_\text{B}$ (tots els valors en per unitat):

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_\text{B} = \begin{pmatrix} \text{j}0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{j}0{,}20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{j}0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{j}0{,}10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{j}0{,}405 & \text{j}0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{j}0{,}05 & \text{j}0{,}50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{j}0{,}16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{j}25 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{J}}'_\text{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 - \text{j}0{,}9 \end{pmatrix} \qquad \underline{\boldsymbol{E}}'_\text{B} = \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 1{,}05 + \text{j}0{,}10 \\ 1{,}08 + \text{j}0{,}12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculem ara la matriu $\underline{\boldsymbol{Y}}_\text{B} = \underline{\boldsymbol{Z}}_\text{B}^{-1}$ i el vector $\underline{\boldsymbol{J}}_\text{B} = \underline{\boldsymbol{J}}'_\text{B} + \underline{\boldsymbol{Y}}_\text{B}\, \underline{\boldsymbol{E}}'_\text{B}$ (tots els valors en per unitat):

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}-\mathrm{j}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{j}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\mathrm{j}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{j}10 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{j}2{,}5 & \mathrm{j}0{,}25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{j}0{,}25 & -\mathrm{j}2{,}025 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{j}6{,}25 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{j}0{,}04\end{pmatrix}\qquad \underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}-\mathrm{j}4{,}4\\ 0{,}5-\mathrm{j}5{,}25\\ 0{,}48-\mathrm{j}4{,}32\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 2-\mathrm{j}0{,}9\end{pmatrix}$$

Continuem amb el càlcul de la matriu $\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ i dels vectors $\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}}=-\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}}$ i $\underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}}=\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}}^{-1}\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}}$ (tots els valors en per unitat):

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}}=\begin{pmatrix}-\mathrm{j}10{,}25 & \mathrm{j}6{,}25 & 0 & 0\\ \mathrm{j}6{,}25 & -\mathrm{j}15{,}275 & \mathrm{j}1{,}775 & \mathrm{j}2{,}25\\ 0 & \mathrm{j}1{,}775 & -\mathrm{j}16{,}025 & \mathrm{j}10{,}25\\ 0 & \mathrm{j}2{,}25 & \mathrm{j}10{,}25 & -\mathrm{j}12{,}46\end{pmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}}=\begin{pmatrix}-\mathrm{j}4{,}4\\ 0{,}5-\mathrm{j}5{,}25\\ 0{,}48-\mathrm{j}4{,}32\\ -2+\mathrm{j}0{,}9\end{pmatrix}\qquad \underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}}=\begin{pmatrix}1{,}0494_{\angle -1{,}4909^\circ}\\ 1{,}0175_{\angle -2{,}5224^\circ}\\ 0{,}9727_{\angle -10{,}3558^\circ}\\ 0{,}9512_{\angle -19{,}1752^\circ}\end{pmatrix}$$

Finalment calculem les tensions i els corrents de les branques, mitjançant els vectors $\underline{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}}$ i $\underline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{B}}=\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{B}}\,\underline{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{B}}+\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}}$ (tots els valors en per unitat):

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}1{,}0494_{\angle 178{,}5091^\circ}\\ 1{,}0175_{\angle 177{,}4776^\circ}\\ 0{,}9727_{\angle 169{,}6442^\circ}\\ 0{,}1495_{\angle 67{,}0039^\circ}\\ 0{,}2925_{\angle 66{,}2049^\circ}\\ 0{,}1431_{\angle 65{,}3702^\circ}\\ 0{,}0370_{\angle 28{,}1937^\circ}\\ 0{,}9512_{\angle -19{,}1752^\circ}\end{pmatrix}\qquad \underline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}0{,}2312_{\angle -61{,}8063^\circ}\\ 0{,}7431_{\angle -13{,}0406^\circ}\\ 1{,}2782_{\angle -22{,}6715^\circ}\\ 1{,}4946_{\angle -22{,}9961^\circ}\\ 0{,}6955_{\angle -23{,}7522^\circ}\\ 0{,}2166_{\angle -24{,}9115^\circ}\\ 0{,}2312_{\angle -61{,}8063^\circ}\\ 2{,}1901_{\angle -23{,}2362^\circ}\end{pmatrix}$$

Calcularem ara la potència cedida pels tres generadors G1, G2 i G3, i la potència absorbida per la càrrega Q8. Cal tenir en compte que per calcular les potències cedides per generadors, els vectors que representen la força electromotriu del generador i el corrent que travessa el generador han de tenir el mateix sentit de referència; tanmateix, per calcular les potències absorbides per càrregues, els vectors que representen la caiguda de tensió a la càrrega i el corrent que travessa la càrrega han de tenir el mateix sentit de referència. Amb aquestes consideracions, tenim:

$$\begin{aligned}\underline{s}_{\mathrm{G1}}&=\underline{e}_1\,\underline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{B}}^*(1) &&=(1{,}1\times 0{,}2312_{\angle 61{,}8063^\circ})\,\mathrm{pu} &&=(0{,}1201+\mathrm{j}0{,}2241)\,\mathrm{pu}\\ \underline{s}_{\mathrm{G2}}&=\underline{e}_2\,\underline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{B}}^*(2) &&=((1{,}05+\mathrm{j}0{,}10)\times 0{,}7431_{\angle 13{,}0406^\circ})\,\mathrm{pu} &&=(0{,}7433+\mathrm{j}0{,}2484)\,\mathrm{pu}\\ \underline{s}_{\mathrm{G3}}&=\underline{e}_3\,\underline{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{B}}^*(3) &&=((1{,}08+\mathrm{j}0{,}12)\times 1{,}2782_{\angle 22{,}6715^\circ})\,\mathrm{pu} &&=(1{,}2146+\mathrm{j}0{,}6736)\,\mathrm{pu}\end{aligned}$$

$$\underline{s}_{Q8} = \underline{U}_{B}(8)\,\underline{I}_{B}^{*}(8) = (0{,}9512_{\angle -19{,}1752°} \times 2{,}1901_{\angle 23{,}2362°})\,\text{pu} = (2{,}0780 + \text{j}0{,}1475)\,\text{pu}$$

La diferència entre les potències generades i la potència absorbida, és la potència perduda en la resta de components de la xarxa:

$$\underline{s}_{G1} + \underline{s}_{G2} + \underline{s}_{G3} - \underline{s}_{Q8} = \text{j}0{,}9986\,\text{pu}$$

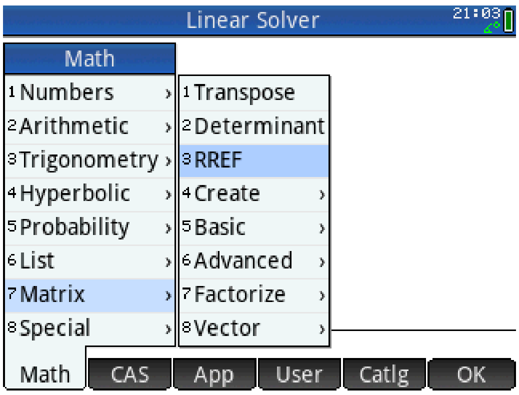
La part més laboriosa d'aquest exemple és l'obtenció del vector $\underline{V}_{N}$, ja sigui a partir de la inversió de la matriu $\underline{Y}_{N}$: $\underline{V}_{N} = \underline{Y}_{N}^{-1}\underline{J}_{N}$, o ja sigui resolent el sistema d'equacions lineals: $\underline{Y}_{N}\underline{V}_{N} = \underline{J}_{N}$.

Resoldrem a continuació el sistema d'equacions lineals $\underline{Y}_{N}\underline{V}_{N} = \underline{J}_{N}$ amb la calculadora *HP Prime*.

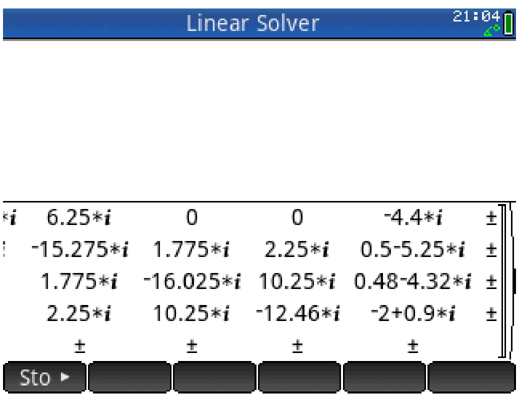
En l'exemple 1.10 a la pàgina 39 hem utilitzat l'aplicació **Linear Solver** per resoldre el sistema d'equacions lineals que s'hi plantejava; aquesta aplicació només pot resoldre sistemes de dues o tres equacions amb coeficients reals, i per tant no serveix en aquest cas on en tenim quatre amb coeficients complexes.

En aquest cas farem servir la funció **RREF** «Reduced-Row Echelon Form» per resoldre el nostre sistema de quatre equacions lineals amb coeficients complexes; els passos a seguir són els següents:

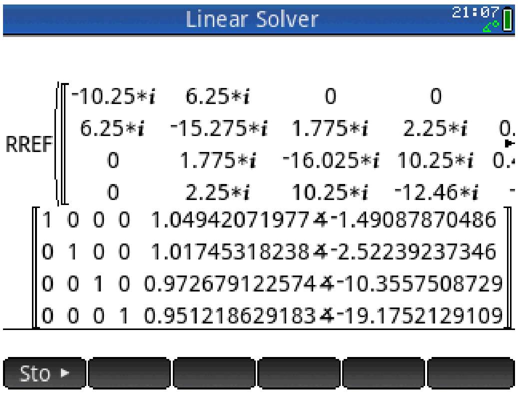
❶ Per començar premem la tecla i escollim la funció **RREF**.



❷ A continuació premem dos cops la combinació de tecles ; la calculadora crea un matriu buida, la qual omplirem amb la matriu $\underline{Y}_{N}$ seguida pel vector $\underline{J}_{N}$, creant una única matriu de quatre files i cinc columnes.

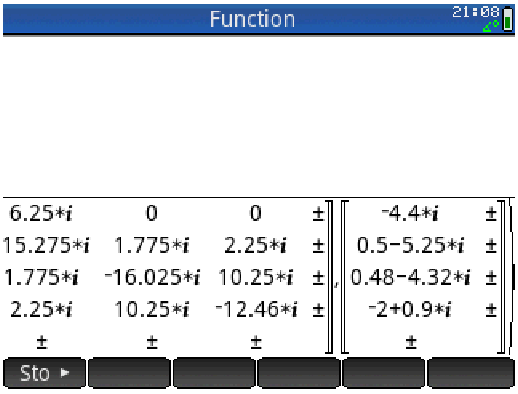


❸ Finalment, premem la tecla Enter i la calculadora ens dona una matriu que conté la solució; les quatre primeres columnes formen una matriu identitat, la qual cosa indica que el sistema té solució i que és única, i la cinquena columna és la solució buscada.

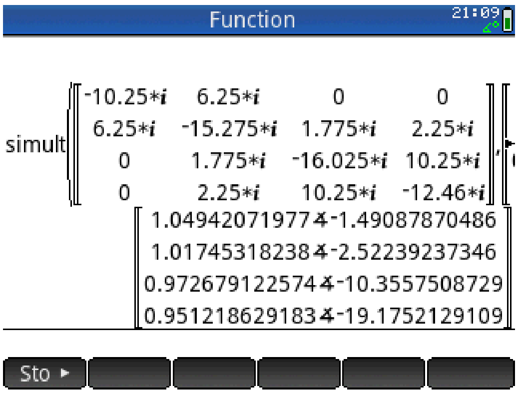


Resoldrem ara el mateix sistema utilitzant la funció **simult**; els passos a seguir són els següents:

❶ La funció **simult** requereix dos paràmetres, el primer és una matriu amb els coeficients del sistema, i el segon és una altra matriu amb els termes independents; d'aquesta manera, es pot resoldre alhora un mateix sistema d'equacions amb diversos conjunts de termes independents. En el nostre cas la primera matriu serà $\underline{Y}_\mathrm{N}$, i la segona, d'una columna, serà $\underline{J}_\mathrm{N}$.



❷ A continuació, premem la tecla Enter i la calculadora ens dona la solució buscada.



11.3 Mètode particular de resolució sense acoblaments magnètics

Quan no hi ha acoblaments magnètics entre branques de la xarxa, la matriu $\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}\{n \times n\}$ i el vector $\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N}\{n\}$ es poden formar de manera directa, a partir dels components de la xarxa i del seu graf orientat associat.

Per ajudar-nos en l'explicació d'aquest mètode simplificat, farem ús del mateix exemple de la Figura 11.2 a la pàgina 208, però suposant que no hi ha acoblament magnètic entre les branques 2 i 3 ($\underline{X}_\mathrm{M} = 0$).

La matriu $\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}\{n \times n\}$ i el vector $\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N}\{n\}$ es formen directament tal com es descriu a continuació:

$\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}\{n \times n\}$ Matriu d'admitàncies de nus. Els elements de la diagonal estan formats per la suma de les admitàncies de les branques que incideixen en cada nus. Els elements de fora de la diagonal estan formats per la suma, canviada de signe, de les admitàncies de les branques que estan connectades entre cada parella de nusos.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} + \frac{1}{\mathrm{j}20} + \frac{1}{10} & -\left[\frac{1}{20} + \frac{1}{\mathrm{j}20}\right] \\ -\left[\frac{1}{20} + \frac{1}{\mathrm{j}20}\right] & \frac{1}{20} + \frac{1}{\mathrm{j}20} + \frac{1}{\mathrm{j}5} + \frac{1}{10} \end{pmatrix} \mathrm{S} = \begin{pmatrix} \frac{3-\mathrm{j}}{20} & \frac{-1+\mathrm{j}}{20} \\ \frac{-1+\mathrm{j}}{20} & \frac{3-\mathrm{j}5}{20} \end{pmatrix} \mathrm{S}$$

$\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N}\{n\}$ Vector d'intensivitats de nus. Cada element d'aquest vector és format per la suma de les intensivitats, degudes a les fonts de corrent i a les fonts de tensió, de les branques que incideixen en cada nus; el signe de cada intensivitat és positiu si el corrent va cap al nus, i negatiu si se n'allunya. Les fonts de tensió han de transformar-se en fonts de corrent utilitzant l'equació (1.3) de la pàgina 4.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \frac{50}{\mathrm{j}20} + \frac{200}{10} \\ -\frac{50}{\mathrm{j}20} + 4 \end{pmatrix} \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 20 - \mathrm{j}\frac{5}{2} \\ 4 + \mathrm{j}\frac{5}{2} \end{pmatrix} \mathrm{A}$$

Finalment calculem el vector de potencials de nus $\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N}\{n\}$, tal com hem fet en l'apartat anterior, aplicant l'equació (11.5).

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N} = \underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}^{-1} \underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \frac{3-\mathrm{j}}{20} & \frac{-1+\mathrm{j}}{20} \\ \frac{-1+\mathrm{j}}{20} & \frac{3-\mathrm{j}5}{20} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 20 - \mathrm{j}\frac{5}{2} \\ 4 + \mathrm{j}\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2450+\mathrm{j}535}{17} \\ \frac{540+\mathrm{j}545}{17} \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

Si volem trobar ara de forma sistemàtica totes les tensions i tots els corrents de les branques de la xarxa, haurem d'utilitzar l'equació (11.6) de la pàgina 211 i l'equació (11.7) de la pàgina 212; això vol dir que haurem de formar les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{B}$ i el vector $\underline{\boldsymbol{J}}_\mathrm{B}$. No obstant, si únicament estem interessats en algun corrent o en alguna tensió de branca, podem resoldre el problema aplicant les lleis de Kirchhoff a les branques que ens interessin.

Exemple 11.2 Aplicació del mètode dels nusos – Xarxa sense acoblaments magnètics

A partir del circuit de la Figura 11.2 a la pàgina 208, amb $\underline{X}_{\mathrm{M}} = 0$, es tracta de trobar els corrents que circulen per les branques 2 i 5.

Partint dels potencials dels nusos 1 i 2 calculats anteriorment, i aplicant les lleis de Kirchhoff a les branques 2 i 5 tenim:

$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{E}_2 + [\underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}}(1) - \underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}}(2)]}{\underline{X}_2} = \frac{-50 + \frac{2450+\mathrm{j}535-540-\mathrm{j}545}{17}}{\mathrm{j}20} = \frac{-1-\mathrm{j}106}{34}\ \mathrm{A}$$

$$\underline{I}_5 = \frac{-\underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}}(2)}{R_5} + \underline{J}_5 = \frac{\frac{-540-\mathrm{j}545}{17}}{10} + 4 = \frac{28-\mathrm{j}109}{34}\ \mathrm{A}$$

11.4 Mètode particular de resolució amb acoblaments magnètics

Quan hi ha acoblaments magnètics entre branques de la xarxa que no tenen cap font de tensió o de corrent, també es pot aplicar el mètode de resolució descrit en l'apartat anterior, substituint prèviament les dues branques acoblades per un circuit equivalent d'admitàncies, segons es veurà a continuació.

Un cop obtingut el circuit equivalent de les dues branques acoblades magnèticament, ja es pot formar la matriu $\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}}\{n \times n\}$ i el vector $\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}}\{n\}$, i resoldre la xarxa tal com s'ha fet en l'apartat anterior.

En la Figura 11.3 es pot veure aquest circuit equivalent.

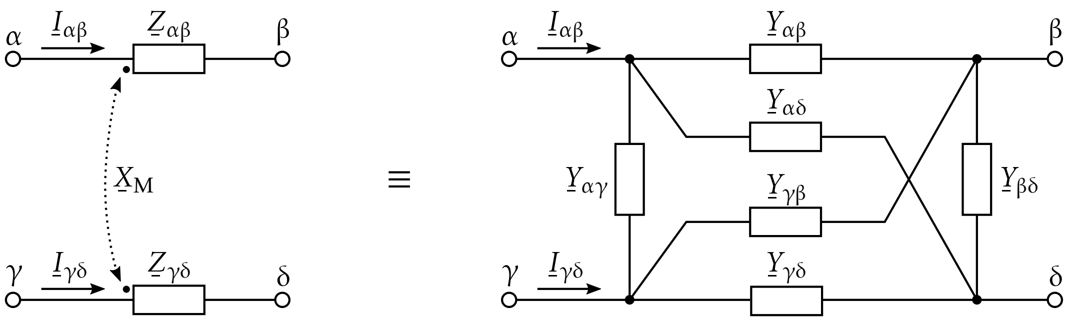


Figura 11.3 Circuit equivalent de dues branques acoblades magnèticament

Els valors de les admitàncies d'aquest circuit equivalent són:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{\alpha\beta} &= \frac{\underline{Z}_{\gamma\delta}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_{\mathrm{M}}^2} & \qquad \underline{Y}_{\alpha\gamma} = \underline{Y}_{\beta\delta} &= \frac{\underline{X}_{\mathrm{M}}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_{\mathrm{M}}^2} \\
\underline{Y}_{\gamma\delta} &= \frac{\underline{Z}_{\alpha\beta}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_{\mathrm{M}}^2} & \qquad \underline{Y}_{\alpha\delta} = \underline{Y}_{\gamma\beta} &= \frac{-\underline{X}_{\mathrm{M}}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_{\mathrm{M}}^2}
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Un cop hem resolt la xarxa i hem trobat els potencials dels quatre nusos $\underline{V}_\mathrm{N}(\alpha)$, $\underline{V}_\mathrm{N}(\beta)$, $\underline{V}_\mathrm{N}(\gamma)$ i $\underline{V}_\mathrm{N}(\delta)$, podem trobar els dos corrents $\underline{I}_{\alpha\beta}$ i $\underline{I}_{\gamma\delta}$, a partir de les expressions següents:

$$\underline{I}_{\alpha\beta} = \frac{[\underline{V}_\mathrm{N}(\alpha) - \underline{V}_\mathrm{N}(\beta)]\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - [\underline{V}_\mathrm{N}(\gamma) - \underline{V}_\mathrm{N}(\delta)]\,\underline{X}_\mathrm{M}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_\mathrm{M}^2} \tag{11.9a}$$

$$\underline{I}_{\gamma\delta} = \frac{[\underline{V}_\mathrm{N}(\gamma) - \underline{V}_\mathrm{N}(\delta)]\,\underline{Z}_{\alpha\beta} - [\underline{V}_\mathrm{N}(\alpha) - \underline{V}_\mathrm{N}(\beta)]\,\underline{X}_\mathrm{M}}{\underline{Z}_{\alpha\beta}\,\underline{Z}_{\gamma\delta} - \underline{X}_\mathrm{M}^2} \tag{11.9b}$$

El cas que hem vist és el més general de tots els possibles, ja que suposa que els quatre nusos α, β, γ i δ són diferents entre si. Es pot presentar el cas, no obstant, on dos nusos siguin en realitat el mateix, en tenir les dues branques acoblades magnèticament, un extrem connectat al mateix nus; en aquest cas el circuit equivalent resultant es pot derivar del corresponent al cas general de forma senzilla.

Si suposem per exemple que les dues branques de la Figura 11.3 a la pàgina anterior estan unides pels extrems de la dreta, és a dir $\beta \equiv \delta$, l'admitància entre α i γ seria $\underline{Y}_{\alpha\gamma}$, l'admitància entre β i δ desapareixeria, l'admitància entre α i β seria $\underline{Y}_{\alpha\beta} + \underline{Y}_{\alpha\delta}$, i finalment, l'admitància entre γ i β seria $\underline{Y}_{\gamma\beta} + \underline{Y}_{\gamma\delta}$; els corrents $\underline{I}_{\alpha\beta}$ i $\underline{I}_{\gamma\delta}$, es calcularien també amb les equacions (11.9a) i (11.9b), tenint en compte que $\underline{V}_\mathrm{N}(\beta) \equiv \underline{V}_\mathrm{N}(\delta)$.

11.5 Circuits equivalents Thévenin i Norton

Per trobar el circuit equivalent Thévenin o Norton entre dos nusos qualssevol d'una xarxa, ens cal el vector de potencials de nus $\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N}\{n\}$, obtingut segons s'ha descrit en els apartats anteriors, i la matriu d'impedàncies de nus $\underline{\boldsymbol{Z}}_\mathrm{N}\{n \times n\}$; aquesta matriu és definida per la relació següent:

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_\mathrm{N} = \underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}^{-1} \tag{11.10}$$

A partir del vector $\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N}$ i de la matriu $\underline{\boldsymbol{Z}}_\mathrm{N}$ podem trobar la font de tensió i la impedància Thévenin equivalents entre dos nusos qualssevol.

La tensió Thévenin $\underline{E}_\mathrm{Th}^{(\alpha,0)}$ i la impedància Thévenin $\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(\alpha,0)}$, entre un nus qualsevol α i el nus de referència 0, s'obtenen amb les equacions següents:

$$\underline{E}_\mathrm{Th}^{(\alpha,0)} = \underline{V}_\mathrm{N}(\alpha) \tag{11.11}$$

$$\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(\alpha,0)} = \underline{Z}_\mathrm{N}(\alpha,\alpha) \tag{11.12}$$

La tensió Thévenin $\underline{E}_\mathrm{Th}^{(\alpha,\beta)}$ i la impedància Thévenin $\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(\alpha,\beta)}$, entre dos nusos qualssevol α i β, s'obtenen amb les equacions següents:

$$\underline{E}_\mathrm{Th}^{(\alpha,\beta)} = \underline{V}_\mathrm{N}(\alpha) - \underline{V}_\mathrm{N}(\beta) \tag{11.13}$$

$$\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(\alpha,\beta)} = \underline{Z}_\mathrm{N}(\alpha,\alpha) + \underline{Z}_\mathrm{N}(\beta,\beta) - \underline{Z}_\mathrm{N}(\alpha,\beta) - \underline{Z}_\mathrm{N}(\beta,\alpha) \tag{11.14}$$

A partir d'aquests valors podem calcular els valors del circuit Norton equivalent, utilitzant l'equació (1.3) de la pàgina 4.

Exemple 11.3 Impedància Thévenin entre dos nusos d'una xarxa

Continuant amb el circuit de la Figura 11.2 a la pàgina 208, es tracta de trobar els circuits Thévenin i Norton equivalents de la xarxa, entre els nusos 1 i 2.

El vector $\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N}$ és el calculat a la pàgina 211:

$$\underline{\boldsymbol{V}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \frac{15\,430 + \mathrm{j}2295}{101} \\ \frac{3390 + \mathrm{j}2085}{101} \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

Trobem a continuació la matriu $\underline{\boldsymbol{Z}}_\mathrm{N}$, a partir de la matriu $\underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}$ calculada a la pàgina 211:

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_\mathrm{N} = \underline{\boldsymbol{Y}}_\mathrm{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9-\mathrm{j}4}{60} & \frac{-3+\mathrm{j}8}{60} \\ \frac{-3+\mathrm{j}8}{60} & \frac{9-\mathrm{j}28}{60} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1445+\mathrm{j}310}{202} & \frac{415+\mathrm{j}110}{202} \\ \frac{415+\mathrm{j}110}{202} & \frac{245+\mathrm{j}430}{202} \end{pmatrix} \Omega$$

Els valors del circuit Thévenin equivalent que busquem són:

$$\underline{E}_\mathrm{Th}^{(1,2)} = \frac{15430 + \mathrm{j}2295}{101} - \frac{3390 + \mathrm{j}2085}{101} = \frac{12040 + \mathrm{j}210}{101}\,\mathrm{V}$$

$$\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(1,2)} = \frac{1445 + \mathrm{j}310}{202} + \frac{245 + \mathrm{j}430}{202} - 2 \times \frac{415 + \mathrm{j}110}{202} = \frac{430 + \mathrm{j}260}{101}\,\Omega$$

Els valors del circuit Norton equivalent que busquem són:

$$\underline{J}_\mathrm{No}^{(1,2)} = \frac{\underline{E}_\mathrm{Th}^{(1,2)}}{\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(1,2)}} = \frac{\frac{12040+\mathrm{j}210}{101}\,\mathrm{V}}{\frac{430+\mathrm{j}260}{101}\,\Omega} = \frac{518 - \mathrm{j}301}{25}\,\mathrm{A}$$

$$\underline{Y}_\mathrm{No}^{(1,2)} = \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{Th}^{(1,2)}} = \frac{1}{\frac{430+\mathrm{j}260}{101}\,\Omega} = \frac{43 - \mathrm{j}26}{250}\,\mathrm{S}$$

Capítol 12

Flux de Càrregues

12.1 Introducció

Es tracta en aquest capítol el mètode de resolució del problema del flux de càrregues en sistemes elèctrics de potència.

Quan les dades que es coneixen de les càrregues d'una xarxa no són les seves impedàncies o admitàncies sinó les potències que absorbeixen, no podem emprar el mètode dels nusos descrit en el capítol 11 per tal de resoldre-la.

En aquest cas, el mètode de resolució es basa en escriure per a cada nus les equacions pertinents del balanç de potència activa i reactiva, i resoldre-les. La solució del sistema d'equacions resultant ens proporcionarà les tensions de tots els nusos de la xarxa i el flux de potència activa i reactiva entre els seus nusos.

El sistema d'equacions que cal resoldre és no lineal, i per tant cal emprar algun mètode numèric per obtenir-ne la solució, com ara el de Newton-Raphson. Aquí, no obstant, no s'explicarà cap mètode numèric de resolució de sistemes d'equacions no lineals, ja que això cau fora de l'abast d'aquest llibre; això però, no hauria de suposar cap problema, ja que actualment aquests sistemes d'equacions es poden resoldre fàcilment amb programes d'ordinador de càlcul matemàtic com ara els programes *Mathematica*® o *MATLAB*®, o amb calculadores científiques com ara les *Hewlett-Packard*.

12.2 Models matemàtics

En els estudis de flux de càrregues els elements que es consideren són:

- Càrregues
- Línies elèctriques
- Transformadors amb regulació variable (amb desfasament o sense)

12.2.1 Càrregues

Les càrregues venen sempre definides per la potència que absorbeixen, és a dir, es consideren fonts de potència constant.

12.2.2 Línies elèctriques

Les línies elèctriques es modelen mitjançant un circuit equivalent per fase en «π», format per una impedància longitudinal i dues admitàncies transversals, tal com es pot veure en la Figura 12.1. En aquesta figura s'ha suposat que la línia està connectada entre els nusos 1 i 2; les admitàncies transversals tenen sempre un extrem connectat a terra (nus 0 de referència).

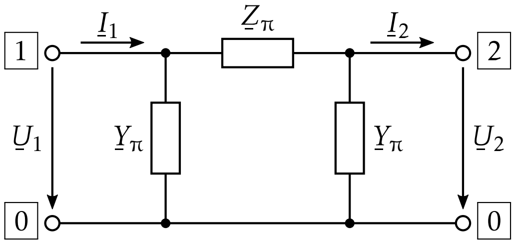


Figura 12.1 Circuit equivalent d'una línia elèctrica

A partir dels paràmetres propis d'una línia, la seva impedància longitudinal total per fase $\underline{Z}_t$ i la seva admitància transversal total per fase $\underline{Y}_t$, definim la impedància característica $\underline{Z}_c$ i l'angle característic $\underline{\theta}_c$ de la línia:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_t}{\underline{Y}_t}} \qquad \underline{\theta}_c = \sqrt{\underline{Z}_t\,\underline{Y}_t} \tag{12.1}$$

Amb aquests dos paràmetres, les equacions hiperbòliques de transmissió d'una línia són:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cosh\underline{\theta}_c + \underline{I}_2\,\underline{Z}_c \sinh\underline{\theta}_c \qquad \underline{I}_1 = \underline{U}_2 \frac{\sinh\underline{\theta}_c}{\underline{Z}_c} + \underline{I}_2 \cosh\underline{\theta}_c \tag{12.2}$$

D'altra banda, en el circuit de la Figura 12.1 es compleix:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_\pi} - \underline{Y}_\pi\,\underline{U}_2 \quad \rightarrow \quad \underline{U}_1 = (1 + \underline{Z}_\pi\,\underline{Y}_\pi)\underline{U}_2 + \underline{Z}_\pi\,\underline{I}_2 \tag{12.3}$$

Identificant entre si els termes de les equacions (12.2) i (12.3), obtenim els paràmetres del circuit equivalent de la línia.

$$\underline{Z}_\pi = \underline{Z}_c \sinh\underline{\theta}_c = \underline{Z}_t \frac{\sinh\underline{\theta}_c}{\underline{\theta}_c} \tag{12.4}$$

$$\underline{Y}_\pi = \frac{\tanh(\underline{\theta}_c/2)}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{Y}_t}{2}\frac{\tanh(\underline{\theta}_c/2)}{\underline{\theta}_c/2} \tag{12.5}$$

Ara bé, en la majoria dels casos es compleix: $|\underline{\theta}_c| \ll 1$, i utilitzant els desenvolupaments en sèrie de Taylor de les funcions sinh i tanh, al voltant de 0, tenim:

$$\underline{Z}_\pi = \underline{Z}_t \left[1 + \frac{\underline{\theta}_c^2}{3!} + \frac{\underline{\theta}_c^4}{5!} + \cdots\right] \approx \underline{Z}_t \tag{12.6}$$

$$\underline{Y}_\pi = \frac{\underline{Y}_t}{2}\left[1 - \frac{(\underline{\theta}_c/2)^2}{3} + \frac{2(\underline{\theta}_c/2)^4}{15} - \cdots\right] \approx \frac{\underline{Y}_t}{2} \tag{12.7}$$

Utilitzant aquests valors, la contribució d'una línia elèctrica a la matriu d'admitàncies de nus $\underline{\mathbf{Y}}_\mathrm{N}$ de la xarxa a la qual pertany, és:

$$\underline{\mathbf{Y}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \dfrac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} & -\dfrac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \\ -\dfrac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} & \dfrac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}} \end{pmatrix} \tag{12.8}$$

Els fluxos de potència a través de la línia, $\underline{S}_{12}$ (del nus 1 al 2), i $\underline{S}_{21}$ (del nus 2 a l'1), venen donats per les expressions:

$$\underline{S}_{12} = \underline{U}_1 \left[\left(\frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}}\right)\underline{U}_1 - \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}}\underline{U}_2\right]^* = \underline{U}_1 \left[\frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2}\underline{U}_1 + \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_\mathrm{t}}\right]^* \tag{12.9}$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{U}_2 \left[\left(\frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}}\right)\underline{U}_2 - \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}}\underline{U}_1\right]^* = \underline{U}_2 \left[\frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2}\underline{U}_2 + \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_1}{\underline{Z}_\mathrm{t}}\right]^* \tag{12.10}$$

Finalment, les pèrdues de transmissió $\Delta\underline{S}$ en la línia venen donades per l'expressió:

$$\Delta\underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \left[\frac{\underline{Y}_\mathrm{t}}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{t}}\right]^* \left[|\underline{U}_1|^2 + |\underline{U}_2|^2\right] - 2\,\frac{\mathrm{Re}(\underline{U}_1^*\underline{U}_2)}{\underline{Z}_\mathrm{t}^*} \tag{12.11}$$

12.2.3 Transformadors amb regulació variable i desfasament

Els transformadors amb regulació variable i desfasament es modelen mitjançant un transformador ideal en sèrie amb una impedància (vegeu també la secció 9.8.2), tal com es pot veure en la Figura 12.2. En aquesta figura s'ha suposat que el transformador està connectat entre els nusos 1 i 2; el punt de referència del transformador és sempre el terra (nus 0 de referència).

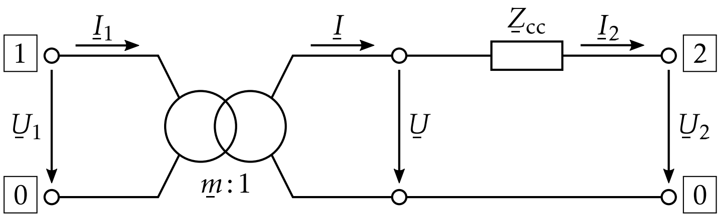


Figura 12.2 Circuit equivalent d'un transformador amb regulació variable i desfasament

En l'esquema anterior, $\underline{Z}_\mathrm{cc}$ és la impedància de curtcircuit per fase del transformador, i $\underline{m}:1$ n'és la relació de transformació. El paràmetre $\underline{m}$ és un valor complex ja que el transformador a més de variar el mòdul de la tensió, també en varia l'argument; les tensions primària i secundària tenen, per tant, diferent mòdul i un desfasament entre els seus arguments.

Si la impedància es volgués representar en el primari del transformador, el seu valor seria $|\underline{m}|^2\underline{Z}_\mathrm{cc}$.

En el circuit de la Figura 12.2 es compleix:

$$\underline{U}_1 = \underline{m}\,\underline{U} = \underline{m}\,[\underline{U}_2 + \underline{Z}_\mathrm{cc}\underline{I}_2] \qquad \underline{I}_1 = \frac{\underline{I}}{\underline{m}^*} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{m}^*} \qquad \underline{U}_1\underline{I}_1^* = \underline{U}\,\underline{I}^* \tag{12.12}$$

Utilitzant aquestes tres equacions podem escriure:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{|\underline{m}|^2 \underline{Z}_{\text{cc}}} - \frac{\underline{U}_2}{\underline{m}^* \underline{Z}_{\text{cc}}} \qquad\qquad -\underline{I}_2 = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{m}\, \underline{Z}_{\text{cc}}} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\text{cc}}} \tag{12.13}$$

Aquestes equacions ens permeten escriure directament la contribució d'un transformador amb regulació variable i desfasament, a la matriu d'admitàncies de nus $\underline{\mathbf{Y}}_{\text{N}}$ de la xarxa a la qual pertany:

$$\underline{\mathbf{Y}}_{\text{N}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{|\underline{m}|^2 \underline{Z}_{\text{cc}}} & -\dfrac{1}{\underline{m}^* \underline{Z}_{\text{cc}}} \\ -\dfrac{1}{\underline{m}\, \underline{Z}_{\text{cc}}} & \dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{cc}}} \end{pmatrix} \tag{12.14}$$

Com es pot veure, $\underline{\mathbf{Y}}_{\text{N}}(1,2) \neq \underline{\mathbf{Y}}_{\text{N}}(2,1)$; això ens indica que no existeix un esquema equivalent en «π» del transformador, format únicament per elements passius.

Els fluxos de potència a través del transformador, $\underline{S}_{12}$ (del nus 1 al 2), i $\underline{S}_{21}$ (del nus 2 a l'1), venen donats per les expressions:

$$\underline{S}_{12} = \underline{U}_1 \left[\frac{\underline{U}_1}{|\underline{m}|^2 \underline{Z}_{\text{cc}}} - \frac{\underline{U}_2}{\underline{m}^* \underline{Z}_{\text{cc}}} \right]^* = \frac{\underline{U}_1}{\underline{m}\, \underline{Z}^*_{\text{cc}}} \left[\frac{\underline{U}_1}{\underline{m}} - \underline{U}_2 \right]^* \tag{12.15}$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{U}_2 \left[-\frac{\underline{U}_1}{\underline{m}\, \underline{Z}_{\text{cc}}} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\text{cc}}} \right]^* = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}^*_{\text{cc}}} \left[\underline{U}_2 - \frac{\underline{U}_1}{\underline{m}} \right]^* \tag{12.16}$$

Finalment, les pèrdues de transmissió $\Delta \underline{S}$ del transformador venen donades per l'expressió:

$$\Delta \underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}^*_{\text{cc}}} \left| \frac{\underline{U}_1}{\underline{m}} - \underline{U}_2 \right|^2 \tag{12.17}$$

12.2.4 Transformadors amb regulació variable sense desfasament

Aquest és un cas particular de l'anterior, on el transformador no origina desfasament entre les tensions primària i secundària. En aquest cas, la relació de transformació m:1 és un valor real.

A partir de l'equació (12.14), substituint $\underline{m}$ per m, obtenim la contribució d'un transformador amb regulació variable sense desfasament, a la matriu d'admitàncies de nus $\underline{\mathbf{Y}}_{\text{N}}$ de la xarxa a la qual pertany:

$$\underline{\mathbf{Y}}_{\text{N}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m^2 \underline{Z}_{\text{cc}}} & -\dfrac{1}{m\, \underline{Z}_{\text{cc}}} \\ -\dfrac{1}{m\, \underline{Z}_{\text{cc}}} & \dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{cc}}} \end{pmatrix} \tag{12.18}$$

Anàlogament podem obtenir els fluxos de potència a través del transformador, $\underline{S}_{12}$ (del nus 1 al 2), i $\underline{S}_{21}$ (del nus 2 a l'1), i les seves pèrdues de transmissió $\Delta \underline{S}$, a partir de les equacions (12.15), (12.16) i (12.17):

$$\underline{S}_{12} = \underline{U}_1 \left[\frac{\underline{U}_1}{m^2 \underline{Z}_{\text{cc}}} - \frac{\underline{U}_2}{m \underline{Z}_{\text{cc}}} \right]^* = \frac{\underline{U}_1}{m\, \underline{Z}^*_{\text{cc}}} \left[\frac{\underline{U}_1}{m} - \underline{U}_2 \right]^* \tag{12.19}$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{U}_2 \left[-\frac{\underline{U}_1}{m\,\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} \right]^* = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}^*_{\mathrm{cc}}} \left[\underline{U}_2 - \frac{\underline{U}_1}{m} \right]^* \tag{12.20}$$

$$\Delta \underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}^*_{\mathrm{cc}}} \left| \frac{\underline{U}_1}{m} - \underline{U}_2 \right|^2 \tag{12.21}$$

El circuit equivalent d'aquest tipus de transformador també és el de la Figura 12.2 a la pàgina 223, substituint $\underline{m}:1$ per $m:1$; no obstant, atès que en aquest cas es compleix $\underline{\mathbf{Y}}_{\mathrm{N}}(1,2) = \underline{\mathbf{Y}}_{\mathrm{N}}(2,1)$, també existeix un circuit equivalent en «π» format per una impedància longitudinal i dues admitàncies transversals, tal com es pot veure en la Figura 12.3.

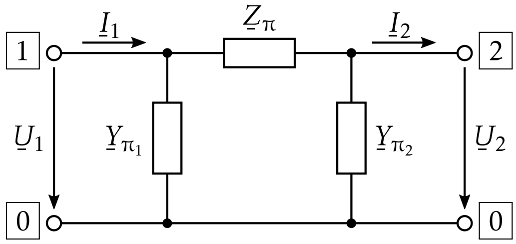


Figura 12.3 Circuit equivalent d'un transformador amb regulació variable sense desfasament

Els valors dels paràmetres d'aquest circuit equivalent són:

$$\underline{Z}_\pi = m\,\underline{Z}_{\mathrm{cc}} \tag{12.22}$$

$$\underline{Y}_{\pi_1} = \frac{1-m}{m^2\,\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} \tag{12.23}$$

$$\underline{Y}_{\pi_2} = \frac{m-1}{m\,\underline{Z}_{\mathrm{cc}}} \tag{12.24}$$

12.3 Tipus de nusos

Cadascun dels nusos d'un sistema elèctric de potència té quatre magnituds associades: les potències activa i reactiva injectades des de l'exterior de la xarxa, i el mòdul i l'argument de la seva tensió.

Usualment, en cada nus del sistema es coneixen dues de les quatre magnituds anteriors; segons quines siguin aquestes magnituds es poden distingir els següents tipus de nusos:

- **Nus de potencial zero**. El terra és sempre el nus de referència o de potencial zero de la xarxa, i per tant, totes les tensions de la xarxa hi són referides. Al terra se li assigna el número de nus 0, i per tant no forma part de la matriu d'admitàncies de nus de la xarxa.

- **Nus flotant**. És un nus on es manté constant la tensió en mòdul i argument, essent incògnites les potències activa i reactiva injectades a la xarxa des de l'exterior. Generalment, acostuma a ser el nus que més s'aproxima a un nus de potència infinita. Des del punt de vista de la xarxa, correspon clarament a un generador ideal de tensió.

  Només hi pot haver un nus d'aquest tipus en tota la xarxa.

- **Nus de tensió controlada**. En aquest nus es coneix el mòdul de la tensió i la potència activa injectada a la xarxa des de l'exterior, essent incògnites l'argument de la tensió i la potència reactiva injectada des de l'exterior. En aquests nusos sovint s'imposen límits a la potència reactiva.
- **Nus de càrrega**. En aquest nus es coneixen les potències activa i reactiva injectades a la xarxa des de l'exterior, essent incògnites el mòdul i l'argument de la tensió. Aquests nusos poden ser tant de consum com de generació.

  En els nusos on incideix un transformador amb relació de transformació variable sense desfasament, hi pot haver tres magnituds conegudes: les potències activa i reactiva injectades i el mòdul de la tensió, el qual es vol mantenir constant mitjançant l'ajust de la relació de transformació; les incògnites són, per tant, l'argument de la tensió i la citada relació de transformació del transformador.

En la Taula 12.1 es resumeix el que s'ha exposat sobre els diferents tipus de nusos en un sistema elèctric de potència.

Taula 12.1 Tipus de nusos en un sistema elèctric de potència

Tipus de nus	Tensió		Potència injectada		Relació de transformació
	mòdul	argument	activa	reactiva	
Flotant	✅	✅	❓	❓	❌
De tensió controlada	✅	❓	✅	❓	❌
De càrrega (sense trafo)	❓	❓	✅	✅	❌
De càrrega (amb trafo)	✅	❓	✅	✅	❓

✅ valor conegut ❓ valor incògnita ❌ no és d'aplicació

12.4 Formulació del problema

Comencem per considerar una xarxa elèctrica amb els nusos numerats $1, \ldots, n$, i essent el terra el nus 0 de referència; una de les maneres de descriure aquesta xarxa és utilitzant el mètode dels nusos, descrit en el capítol 11:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}} \underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}} = \underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}} \tag{12.25}$$

Tenint en compte que els elements de $\underline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{N}}$, $\underline{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{N}}$ i $\underline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{N}}$ són $\underline{j}_i$, $\underline{v}_i$ i $\underline{y}_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ respectivament, i que aquests valors suposem que estan expressats en per unitat (vegeu la secció 2.2), l'equació anterior queda expressada de la següent manera:

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{y}_{ik} \underline{v}_k = \underline{j}_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{12.26}$$

En cadascun dels nusos de la xarxa es compleix la següent relació per a la potència complexa $\underline{s}_i = p_i + \mathrm{j} q_i$, injectada al nus des de l'exterior:

$$\underline{s}_i^* = p_i - \mathrm{j} q_i = \underline{v}_i^* \underline{j}_i = \underline{v}_i^* \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_{ik} \underline{v}_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{12.27}$$

Ara bé, si expressem els potencials $\underline{v}_i$ a partir dels seus mòduls $|\underline{v}_i|$ i arguments δ_i, i les admitàncies $\underline{y}_{ik}$ a partir de les seves parts reals g_{ik} i imaginàries b_{ik}, tenim:

$$\underline{v}_i = |\underline{v}_i|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_i} = |\underline{v}_i|\,(\cos\delta_i + \mathrm{j}\sin\delta_i) \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{12.28}$$

$$\underline{y}_{ik} = g_{ik} + \mathrm{j}b_{ik} \qquad (i,k = 1,\ldots,n) \tag{12.29}$$

$$p_i - \mathrm{j}q_i = |\underline{v}_i|\,(\cos\delta_i - \mathrm{j}\sin\delta_i)\sum_{k=1}^{n}(g_{ik} + \mathrm{j}b_{ik})\,|\underline{v}_k|\,(\cos\delta_k + \mathrm{j}\sin\delta_k) \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{12.30}$$

Finalment, si separem la darrera equació en dues, una per a la part real i una altra per a la part imaginària, tenim:

$$p_i - |\underline{v}_i|\sum_{k=1}^{n}|\underline{v}_k|\Big[g_{ik}\cos(\delta_k - \delta_i) - b_{ik}\sin(\delta_k - \delta_i)\Big] = 0 \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{12.31}$$

$$q_i + |\underline{v}_i|\sum_{k=1}^{n}|\underline{v}_k|\Big[g_{ik}\sin(\delta_k - \delta_i) + b_{ik}\cos(\delta_k - \delta_i)\Big] = 0 \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{12.32}$$

Resolent de forma simultània les equacions (12.31) i (12.32) trobaríem els potencials dels nusos de la xarxa respecte al terra, i posteriorment utilitzant l'equació (12.27) obtindríem la potència injectada en cada nus des de l'exterior. Ara bé, és clar que no es poden plantejar les equacions (12.31) i (12.32) en tots els nusos de la xarxa, ja que en alguns d'ells els valors p_i o q_i són desconeguts (vegeu la Taula 12.1 a la pàgina anterior). Per tant, per tal de resoldre el problema del flux de càrregues en un sistema elèctric de potència cal seguir els passos següents:

❶ Es numeren tots els nusos de la xarxa, començant pel número 1. El terra és sempre el nus 0 de referència.

❷ Es forma la matriu d'admitàncies de nusos $\underline{\mathbf{Y}}_{\mathrm{N}}$, tal com s'ha explicat en el capítol 11.

❸ Es forma l'equació (12.31) per a tots els nusos de tensió controlada i per a tots els nusos de càrrega. Cal tenir en compte que la potència activa injectada p_i es considera positiva quan entra des de l'exterior a la xarxa i negativa en cas contrari.

❹ Es forma l'equació (12.32) per a tots els nusos de càrrega. Cal tenir en compte que la potència reactiva injectada q_i es considera positiva quan entra des de l'exterior a la xarxa i negativa en cas contrari.

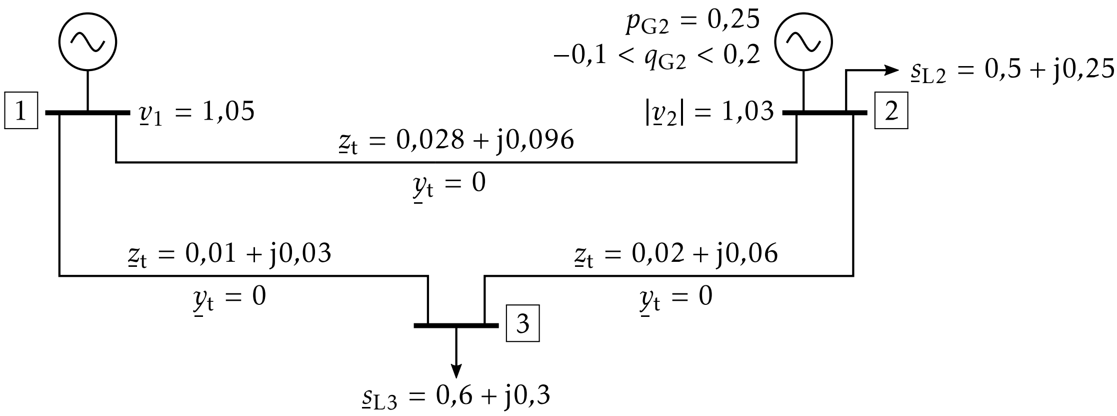
❺ Es resol de forma numèrica el sistema d'equacions no lineals, format en els dos passos anteriors; com a valors inicials de les incògnites es poden prendre els valors següents:

- Mòduls dels potencials: mòdul del potencial del nus flotant.
- Arguments dels potencials: argument del potencial del nus flotant.
- Relacions de transformació: 1.

❻ Si és necessari, es pot calcular la potència injectada en els nusos de la xarxa des de l'exterior en aquells nusos on no es coneix aquest valor, utilitzant l'equació (12.27).

Exemple 12.1 Flux de càrrega d'una xarxa

Es tracta de trobar en la xarxa següent, els potencials dels nusos 2 i 3 i les potències subministrades pels generadors dels nusos 1 i 2; tots els valors estan donats en per unitat.



Comencem formant la matriu d'admitàncies de nus:

$$\underline{\mathbf{Y}}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{0{,}028+j0{,}096} + \frac{1}{0{,}01+j0{,}03} & -\frac{1}{0{,}028+j0{,}096} & -\frac{1}{0{,}01+j0{,}03} \\ -\frac{1}{0{,}028+j0{,}096} & \frac{1}{0{,}028+j0{,}096} + \frac{1}{0{,}02+j0{,}06} & -\frac{1}{0{,}02+j0{,}06} \\ -\frac{1}{0{,}01+j0{,}03} & -\frac{1}{0{,}02+j0{,}06} & \frac{1}{0{,}01+j0{,}03} + \frac{1}{0{,}02+j0{,}06} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12{,}8 - j39{,}6 & -2{,}8 + j9{,}6 & -10{,}0 + j30{,}0 \\ -2{,}8 + j9{,}6 & 7{,}8 - j24{,}6 & -5{,}0 + j15{,}0 \\ -10{,}0 + j30{,}0 & -5{,}0 + j15{,}0 & 15{,}0 - j45{,}0 \end{pmatrix}$$

El nus 1 és el nus flotant, el nus 2 en un nus de tensió controlada i el nus 3 és un nus de càrrega; formarem, per tant, l'equació (12.31) pels nusos 2 i 3, i l'equació (12.32) pel nus 3:

$$\begin{aligned} 0{,}25 - 0{,}5 - 1{,}03 \times \Big(&1{,}05 \times [-2{,}8 \times \cos(-\delta_2) - 9{,}6 \times \sin(-\delta_2)] + 1{,}03 \times 7{,}8 + \\ &+ |\underline{v}_3| \times [-5{,}0 \times \cos(\delta_3 - \delta_2) - 15{,}0 \times \sin(\delta_3 - \delta_2)]\Big) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0{,}6 - |\underline{v}_3| \times \Big(&1{,}05 \times [-10{,}0 \times \cos(-\delta_3) - 30{,}0 \times \sin(-\delta_3)] + \\ &+ 1{,}03 \times [-5{,}0 \times \cos(\delta_2 - \delta_3) - 15{,}0 \times \sin(\delta_2 - \delta_3)] + |\underline{v}_3| \times 15{,}0\Big) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0{,}3 + |\underline{v}_3| \times \Big(&1{,}05 \times [-10{,}0 \times \sin(-\delta_3) + 30{,}0 \times \cos(-\delta_3)] + \\ &+ 1{,}03 \times [-5{,}0 \times \sin(\delta_2 - \delta_3) + 15{,}0 \times \cos(\delta_2 - \delta_3)] + |\underline{v}_3| \times (-45{,}0)\Big) = 0 \end{aligned}$$

Resolent aquest sistema d'equacions no lineals, amb els valors inicials $|\underline{v}_3| = 1{,}05$ i $\delta_2 = \delta_3 = 0$, obtenim:

$$\delta_2 = -0{,}015\,277 \text{ rad}$$

$$|\underline{v}_3| = 1{,}033\,587\ \text{pu} \qquad \delta_3 = -0{,}014\,301\ \text{rad}$$

Calcularem a continuació les potències injectades en els nusos 1 i 2, utilitzant l'equació (12.27):

$$\underline{s}_1^* = 1{,}05 \times \Big[(12{,}8 - \text{j}39{,}6) \times 1{,}05 + (-2{,}8 + \text{j}9{,}6) \times 1{,}03 \times \text{e}^{-\text{j}0{,}015\,277} +$$
$$+ (-10{,}0 + \text{j}30{,}0) \times 1{,}033\,587 \times \text{e}^{-\text{j}0{,}014\,301}\Big] = (0{,}856\,80 - \text{j}0{,}521\,69)\ \text{pu}$$

$$\underline{s}_1 = (0{,}856\,80 + \text{j}0{,}521\,69)\ \text{pu}$$

$$\underline{s}_2^* = 1{,}03 \times \text{e}^{\text{j}0{,}015\,277} \times \Big[(-2{,}8 + \text{j}9{,}6) \times 1{,}05 + (7{,}8 - \text{j}24{,}6) \times 1{,}03 \times \text{e}^{-\text{j}0{,}015\,277} +$$
$$+ (-5{,}0 + \text{j}15{,}0) \times 1{,}033\,587 \times \text{e}^{-\text{j}0{,}014\,301}\Big] = (-0{,}250\,00 + \text{j}0{,}200\,50)\ \text{pu}$$

$$\underline{s}_2 = (-0{,}250\,00 - \text{j}0{,}200\,50)\ \text{pu}$$

Per tant, les potències subministrades a la xarxa pels generadors dels nusos 1 i 2, són:

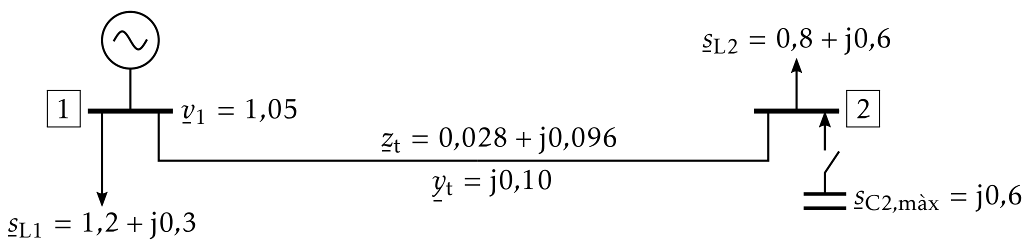
$$\underline{s}_{\text{G1}} = \underline{s}_1 = (0{,}856\,80 + \text{j}0{,}521\,69)\ \text{pu}$$
$$\underline{s}_{\text{G2}} = \underline{s}_{\text{L2}} + \underline{s}_2 = (0{,}5 + \text{j}0{,}25)\ \text{pu} + (-0{,}250\,00 - \text{j}0{,}200\,50)\ \text{pu} = (0{,}250\,00 + \text{j}0{,}049\,50)\ \text{pu}$$

El valor calculat de la potència activa subministrada pel generador del nus 2, es correspon evidentment amb el valor que s'ha utilitzat com a dada per resoldre la xarxa ($p_{\text{G2}} = 0{,}25$).

Pel que fa a la potència reactiva subministrada pel generador del nus 2, s'observa que es troba dins dels marges especificats ($-0{,}1 < q_{\text{G2}} = 0{,}049\,50 < 0{,}2$).

Exemple 12.2 Control de tensió d'un nus amb condensadors

Es tracta de trobar en la xarxa següent el potencial del nus 2 i la potència subministrada pel generador del nus 1; tots els valors estan donats en per unitat.



Es consideren dos casos:

a) La bateria de condensadors del nus 2 està desconnectada.

b) Es connecta la bateria de condensadors del nus 2, per tal de mantenir el mòdul de la tensió d'aquest nus al valor $|\underline{v}_2| = 1{,}03$.

Comencem formant la matriu d'admitàncies de nus:

$$\underline{\mathbf{Y}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{j}0{,}10}{2} + \frac{1}{0{,}028+\mathrm{j}0{,}096} & -\frac{1}{0{,}028+\mathrm{j}0{,}096} \\ -\frac{1}{0{,}028+\mathrm{j}0{,}096} & \frac{\mathrm{j}0{,}10}{2} + \frac{1}{0{,}028+\mathrm{j}0{,}096} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}80-\mathrm{j}9{,}55 & -2{,}80+\mathrm{j}9{,}60 \\ -2{,}80+\mathrm{j}9{,}60 & 2{,}80-\mathrm{j}9{,}55 \end{pmatrix}$$

Cas a)

En aquest cas, el nus 1 és el nus flotant i el nus 2 en un nus de càrrega.

Formem a continuació les equacions (12.31) i (12.32) pel nus 2:

$$-0{,}8 - |\underline{v}_2| \times \Big(1{,}05 \times [-2{,}80 \times \cos(-\delta_2) - 9{,}60 \times \sin(-\delta_2)] + |\underline{v}_2| \times 2{,}80\Big) = 0$$
$$-0{,}6 + |\underline{v}_2| \times \Big(1{,}05 \times [-2{,}80 \times \sin(-\delta_2) + 9{,}60 \times \cos(-\delta_2)] + |\underline{v}_2| \times (-9{,}55)\Big) = 0$$

Resolent aquest sistema d'equacions no lineals, amb els valors inicials $|\underline{v}_2| = 1{,}05$ i $\delta_2 = 0$, obtenim:

$$|\underline{v}_2| = 0{,}970\,306\,\mathrm{pu} \qquad \delta_2 = -0{,}060\,222\,\mathrm{rad}$$

Calculem a continuació la potència que circula des del nus 1 cap al nus 2, utilitzant l'equació (12.9):

$$\underline{s}_{12} = 1{,}05 \times \left[\frac{\mathrm{j}0{,}10}{2} \times 1{,}05 + \frac{1{,}05 - 0{,}970\,306 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}060\,222}}{0{,}028+\mathrm{j}0{,}096}\right]^* = (0{,}828\,13 + \mathrm{j}0{,}594\,23)\,\mathrm{pu}$$

Per tant, la potència subministrada a la xarxa pel generador del nus 1, és:

$$\underline{s}_{\mathrm{G}1} = \underline{s}_{\mathrm{L}1} + \underline{s}_{12} = (1{,}2+\mathrm{j}0{,}3)\,\mathrm{pu} + (0{,}828\,12+\mathrm{j}0{,}594\,23)\,\mathrm{pu} = (2{,}028\,13+\mathrm{j}0{,}894\,23)\,\mathrm{pu}$$

Cas b)

En aquest cas, el nus 1 és el nus flotant i el nus 2 en un nus de tensió controlada.

Formem a continuació l'equació (12.31) pel nus 2:

$$-0{,}8 - 1{,}03 \times \Big(1{,}05 \times [-2{,}80 \times \cos(-\delta_2) - 9{,}60 \times \sin(-\delta_2)] + 1{,}03 \times 2{,}80\Big) = 0$$

Resolent aquesta equació no lineal, amb el valor inicial $\delta_2 = 0$, obtenim:

$$\delta_2 = -0{,}072\,323\,\mathrm{rad}$$

Calculem a continuació la potència que circula entre els nusos 1 i 2, utilitzant les equacions (12.9) i (12.10):

$$\underline{s}_{12} = 1{,}05 \times \left[\frac{\mathrm{j}0{,}10}{2} \times 1{,}05 + \frac{1{,}05 - 1{,}03 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}072\,323}}{0{,}028 + \mathrm{j}0{,}096}\right]^* = (0{,}816\,95 - \mathrm{j}0{,}045\,20)\ \mathrm{pu}$$

$$\begin{aligned}\underline{s}_{21} &= 1{,}03 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}072\,323} \times \left[\frac{\mathrm{j}0{,}10}{2} \times 1{,}03 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}072\,323} + \frac{1{,}03 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}072\,323} - 1{,}05}{0{,}028 + \mathrm{j}0{,}096}\right]^* = \\ &= (-0{,}800\,00 - \mathrm{j}0{,}004\,84)\ \mathrm{pu}\end{aligned}$$

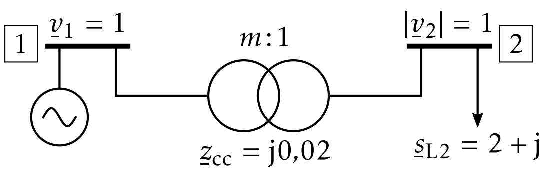
Per tant, les potències subministrades a la xarxa pel generador del nus 1 i per la bateria de condensadors del nus 2, són:

$$\begin{aligned}\underline{s}_{\mathrm{G1}} &= \underline{s}_{\mathrm{L1}} + \underline{s}_{12} = (1{,}2 + \mathrm{j}0{,}3)\ \mathrm{pu} + (0{,}816\,95 - \mathrm{j}0{,}045\,20)\ \mathrm{pu} = (2{,}016\,95 + \mathrm{j}0{,}254\,80)\ \mathrm{pu} \\ \underline{s}_{\mathrm{C2}} &= \underline{s}_{\mathrm{L2}} + \underline{s}_{21} = (0{,}8 + \mathrm{j}0{,}6)\ \mathrm{pu} + (-0{,}800\,00 - \mathrm{j}0{,}004\,84)\ \mathrm{pu} = \mathrm{j}0{,}595\,16\ \mathrm{pu}\end{aligned}$$

S'ha calculat el valor de $\underline{s}_{\mathrm{C2}}$, per tal de comprovar que és dins dels marges especificats ($\underline{s}_{\mathrm{C2,màx}} = \mathrm{j}0{,}6$); si això no fos així, caldria fixar $\underline{s}_{\mathrm{C2}}$ al valor màxim i tornar a calcular la xarxa, passant el nus 2 a ser un nus de càrrega amb un valor desconegut de tensió.

Exemple 12.3 Control de tensió d'un nus amb un transformador

En el sistema de la figura següent, es vol mantenir el mòdul del potencial del nus 2 fixat al valor indicat, mitjançant l'ajust adequat de la relació de transformació del transformador connectat entre els nusos 1 i 2. Es tracta per tant de trobar aquest valor, així com el potencial del nus 2; tots els valors estan donats en per unitat.



Comencem formant la matriu d'admitàncies de nus:

$$\underline{\mathbf{Y}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{j}0{,}02\,m^2} & -\dfrac{1}{\mathrm{j}0{,}02\,m} \\ -\dfrac{1}{\mathrm{j}0{,}02\,m} & \dfrac{1}{\mathrm{j}0{,}02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{j}\dfrac{50}{m^2} & \mathrm{j}\dfrac{50}{m} \\ \mathrm{j}\dfrac{50}{m} & -\mathrm{j}50 \end{pmatrix}$$

El nus 1 és el nus flotant i el nus 2 en un nus de càrrega; formarem, per tant, les equacions (12.31) i (12.32) pel nus 2:

$$-2 - 1 \times \left(1 \times \left[0 - \frac{50}{m} \times \sin(-\delta_2)\right] + 0\right) = 0$$

$$-1 + 1 \times \left(1 \times \left[0 + \frac{50}{m} \times \cos(-\delta_2)\right] + 1 \times (-50)\right) = 0$$

Resolent aquest sistema d'equacions no lineals, amb els valors inicials $\delta_2 = 0$ i $m = 1$, obtenim:

$$\delta_2 = -0{,}039\,196\ \text{rad}$$

$$m = 0{,}979\,639$$

En un cas real, el paràmetre m del transformador únicament podria prendre uns quants valors discrets; caldria doncs assignar a m el valor més pròxim al calculat, escollint entre els diversos valors possibles, i tornar a calcular la xarxa passant la tensió del nus 2 a ser un valor desconegut.

12.5 Control del flux de potència

Veurem breument a continuació les diverses formes que existeixen per controlar el flux de potència activa i reactiva en les branques d'una xarxa, així com els mètodes que existeixen per mantenir la tensió regulada en determinats nusos.

En concret, es disposa dels següents mètodes:

- **Control de l'excitació i del parell motriu dels generadors**. És prou conegut que variant l'excitació d'un generador podem regular-ne la tensió de sortida o la potència reactiva que subministra, i que d'altra banda, variant el parell motriu aplicat al generador podem regular-ne la freqüència de la tensió de sortida o la potència activa que subministra.

  En el cas d'un generador aïllat que alimenta a una càrrega donada, la qual fixa la potència activa i reactiva necessàries, variant l'excitació del generador modificarem el valor de la tensió de sortida, i variant el parell motriu aplicat al generador modificarem el valor de la freqüència de la tensió sortida.

  En el cas d'un generador acoblat a una xarxa de potència infinita, la qual fixa els valors de la tensió i de la freqüència, variant l'excitació del generador modificarem el valor de la potència reactiva subministrada a la xarxa, i variant el parell motriu aplicat al generador modificarem el valor de la potència activa subministrada a la xarxa.

- **Variació de les característiques de condensadors i reactàncies, sèrie i paral·lel**. Aquest mètode s'utilitza per mantenir regulada la tensió en determinats nusos del sistema dins d'uns certs marges prefixats, mitjançant la injecció de potència reactiva aportada per condensadors i reactàncies.

- **Ajust dels transformadors de relació de transformació variable amb desfasament**. La funció usual dels transformadors en els sistemes elèctrics de potència, és passar la tensió d'un nivell determinat a un altre, per exemple, de la tensió de generació a la tensió de la línia de transmissió. No obstant, en els sistemes de potència també existeixen transformadors dedicats al control del flux de potència activa i reactiva en determinades branques; això s'aconsegueix amb petites variacions de la relació de transformació i del desfasament del transformador. La variació del desfasament té un gran efecte sobre el flux de potència activa, alhora que pràcticament no afecta al flux de potència reactiva ni al mòdul de la tensió; en canvi, la variació de la relació de transformació té un gran efecte sobre el flux de potència reactiva i sobre al mòdul de la tensió.

12.6 Resolució de sistemes d'equacions no lineals amb els programes *Mathematica®* i *MATLAB®*, i amb la calculadora *HP Prime*

En aquest apartat es descriu breument com trobar la solució d'un sistema d'equacions no lineals, com els que sorgeixen a l'hora de resoldre problemes de flux de càrregues, amb els programes d'ordinador *Mathematica®* i *MATLAB®*, i amb la calculadora *HP Prime*.

S'utilitzarà en tots els casos el sistema d'equacions no lineals de l'exemple 12.2 a la pàgina 229, és a dir:

$$-0{,}8 - |\underline{v}_2| \times \left(1{,}05 \times [-2{,}80 \times \cos(-\delta_2) - 9{,}60 \times \sin(-\delta_2)] + |\underline{v}_2| \times 2{,}80\right) = 0$$
$$-0{,}6 + |\underline{v}_2| \times \left(1{,}05 \times [-2{,}80 \times \sin(-\delta_2) + 9{,}60 \times \cos(-\delta_2)] + |\underline{v}_2| \times (-9{,}55)\right) = 0$$

Els valors inicials assignats a les dues variables són: $|\underline{v}_2| = 1{,}05$ i $\delta_2 = 0$.

12.6.1 Resolució amb el programa *Mathematica®*

La resolució d'aquest sistema d'equacions no lineals amb el programa *Mathematica®* és molt senzilla, ja que la funció FindRoot ens proporciona directament la solució; utilitzant la variable v_2 per a $|\underline{v}_2|$ i la variable δ_2 per a δ_2, tenim:

```
In[1]:= FindRoot[{-0.8 - v2 (1.05 (-2.8 Cos[-δ2] - 9.6 Sin[-δ2]) + 2.8 v2) == 0,
        -0.6 + v2 (1.05 (-2.8 Sin[-δ2] + 9.6 Cos[-δ2]) - 9.55 v2) == 0}, {v2, 1.05}, {δ2, 0.0}]

Out[1]:= {v2 → 0.970306, δ2 → -0.0602217}
```

12.6.2 Resolució amb el programa *MATLAB®*

La resolució amb el programa *MATLAB®* no és tan senzilla, i s'obté a partir de la funció fsolve. Per poder utilitzar aquesta funció cal tenir instal·lada l'extensió del programa «Optimization toolbox».

En primer lloc, cal escriure una funció en un «fitxer M» que representi el sistema d'equacions no lineals que es vol resoldre; utilitzant la variable x(1) per a $|\underline{v}_2|$ i la variable x(2) per a δ_2, creem el fitxer «F.M» amb el contingut següent:

```
function y= F(x)

y(1) = -0.8 - x(1)*(1.05*(-2.8*cos(-x(2)) - 9.6*sin(-x(2))) + 2.8*x(1));

y(2) = -0.6 + x(1)*(1.05*(-2.8*sin(-x(2)) + 9.6*cos(-x(2))) - 9.55*x(1));
```

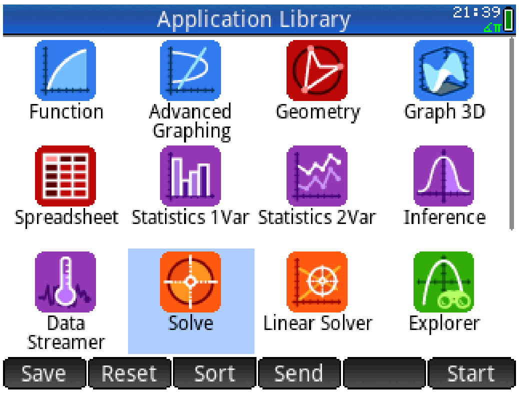
A continuació resolem el sistema d'equacions no lineal, utilitzant la funció fsolve:

```
> > fsolve(@F, [1.05; 0.0])

ans =

    0.9703

   -0.0602
```

12.6.3 Resolució amb la calculadora *HP Prime*

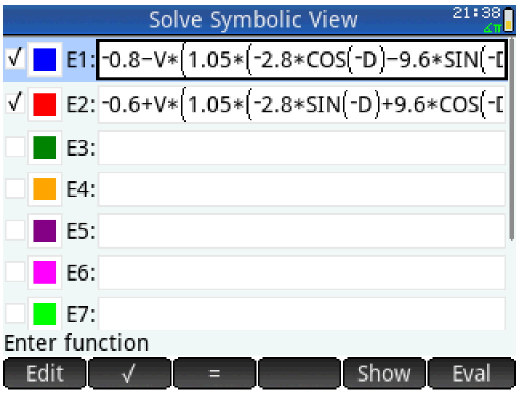
La resolució d'aquest sistema d'equacions no lineals amb la calculadora *HP Prime* és molt senzilla, ja que pot fer-se utilitzant l'aplicació integrada **Solve**. Els passos a seguir són els següents:

❶ En primer lloc premem la tecla Apps Info i seleccionem l'aplicació **Solve**.

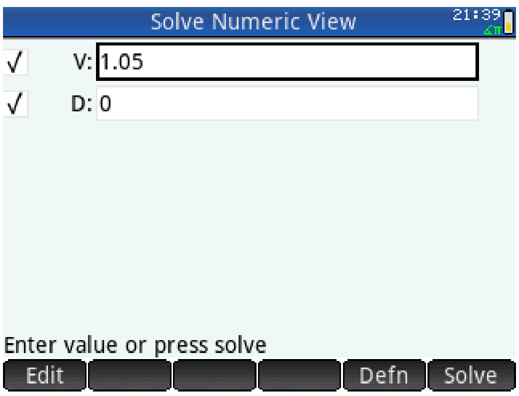


❷ A continuació entrem les dues equacions que volem resoldre, utilitzant la variable **V** per a $|v_2|$ i la variable **D** per a δ_2.

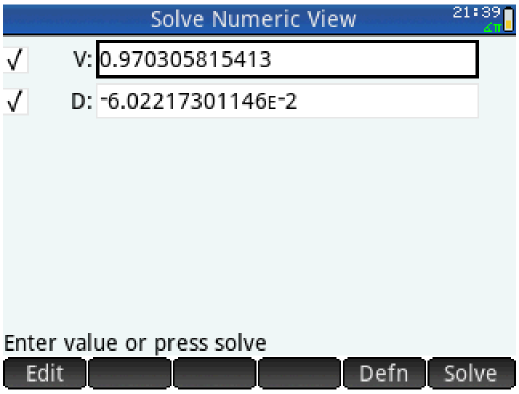
Al camp **E1** entrem l'equació: **-0.8-V*(1.05*(-2.8*COS(-D)-9.6*SIN(-D))+2.8*V)**, i al camp **E2** entrem l'equació: **-0.6+V*(1.05*(-2.8*SIN(-D)+9.6*COS(-D))-9.55*V)**.



❸ Tot seguit premem la tecla Num Setup i entrem els valors inicials de les variables. Al camp **V** entrem: **1.05**, i al camp **D** entrem: **0**.



❹ Finalment premem el botó **Solve** i la calculadora ens dona la solució.



Capítol 13

Normatives Diverses

13.1 Numeració de funcions de dispositius elèctrics segons la norma IEEE C37.2

Es dona a continuació una llista de la numeració de les diverses funcions assignades a dispositius elèctrics, segons la norma IEEE C37.2, amb una breu explicació de la seva funció.

1 **Element principal**. És un dispositiu, com ara un commutador de control, etc., que serveix per posar en marxa o fora de servei un aparell, ja sigui directament o bé mitjançant dispositius permissius, com ara relés de protecció o relés temporitzats. Aquest número s'utilitza normalment amb dispositius operats manualment, no obstant, també pot utilitzar-se amb dispositius mecànics o elèctrics, quan no hi hagi cap altre número apropiat.

2 **Relé de marxa o tancament, amb retard de temps**. És el que proporciona un retard de temps entre les operacions d'una seqüència automàtica o d'un sistema de protecció, excepte quan aquest retard és proporcionat específicament per dispositius de les funcions 48, 62, 79 o 82 descrits més endavant.

3 **Relé de comprovació o de bloqueig**. És el que actua en resposta a la posició d'una sèrie d'altres dispositius, o d'una sèrie de condicions predeterminades en un equip, per tal de permetre que una seqüència d'operació continuï, o per tal de parar-la, o per proporcionar una prova de la posició d'aquests dispositius o d'aquestes condicions.

4 **Contactor principal**. És un dispositiu, generalment controlat per un dispositiu de la funció 1 i pels dispositius de permís i protecció que calgui, que serveix per obrir i tancar els circuits de control necessaris per tal de posar un equip en marxa en condicions normal, o per parar-lo quan es donen condicions anormals.

5 **Dispositiu de parada**. És el que té com a funció principal, deixar fora de servei un equip i mantenir-lo en aquest estat; la seva actuació pot ser manual o elèctrica. Queda exclosa la funció de bloqueig elèctric en situacions anormals (vegeu la funció 86).

6 **Interruptor de marxa**. És el que té com a funció principal connectar una màquina a la seva font de tensió de marxa.

7 **Relé de velocitat de variació**. És el que actua quan la velocitat de variació de la magnitud que es mesura supera un llindar determinat, excepte en el cas definit en el dispositiu 63.

8 **Dispositiu de desconnexió de l'energia de control**. És un element de desconnexió (commutador de ganiveta, interruptor de bloc o

fusibles connectables) que s'utilitza per connectar i desconnectar la font d'energia de control, a la barra de tensió de control o a l'equip al qual doni servei. Es considera que l'energia de control inclou a l'energia auxiliar que alimenta a aparells, com ara motors petits o calefactors.

9 **Dispositiu d'inversió**. És el que s'utilitza per invertir les connexions del camp d'una màquina, o per realitzar qualsevol altra funció d'inversió.

10 **Commutador de seqüència**. És un dispositiu que s'utilitza pera canviar la seqüència de connexió o desconnexió d'unitats, en un equip de múltiples unitats.

11 **Dispositiu multifunció**. És un dispositiu que realitza tres o més funcions d'importància similar, que només podrien designar-se combinant els números de cada funció. El números de les funcions que realitza el dispositiu es defineixen en la llegenda d'un dibuix, en un llistat o en un registre d'ajustos; si el dispositiu només realitza dues funcions d'importància similar, és preferible utilitzar els dos números.

12 **Dispositiu d'excés de velocitat**. És normalment un interruptor de velocitat, de connexió directa, que actua quan la màquina s'embala.

13 **Dispositiu de velocitat sincrònica**. És un element, com ara un interruptor de velocitat centrífuga, un relé de freqüència de lliscament, un relé de tensió, o qualsevol altre aparell que actua a, aproximadament, la velocitat sincrònica d'una màquina.

14 **Dispositiu de baixa velocitat**. És el que actua quan la velocitat d'una màquina baixa per sota d'un valor determinat.

15 **Dispositiu igualador de velocitat o freqüència**. És el que actua per tal d'igualar i mantenir la velocitat o la freqüència d'una màquina o d'un sistema a un cert valor, aproximadament igual al d'una altra màquina o sistema.

16 **Dispositiu de comunicació de dades**. És un dispositiu encarregat de la comunicació sèrie o en xarxa que forma part del sistema de control i protecció d'una subestació. S'estableixen fins a dos sufixes: el primer pot ser una «S» (comunicació sèrie RS-232, 422 o 485) o una «E» (comunicació Ethernet), i el segon una «C» (funcions de procés de seguretat), una «F» (funcions de filtre de missatge o firewall), una «M» (funció de gestió de xarxa), una «R» (router), una «S» (switch) o una «T» (equip de telefonia).

17 **Commutador de «shunt» o de descàrrega**. És el que serveix per obrir i tancar un circuit «shunt» entre els extrems de qualsevol aparell (llevat d'una resistència), com ara el camp d'una màquina, un condensador o una reactància. Queden exclosos els elements que realitzen les funcions de «shunt» necessàries per arrencar una màquina, mitjançant els dispositius de les funcions 6, 42, o equivalents; també queda exclosa la funció del dispositiu 73, el qual serveix per a l'operació de resistències.

18 **Dispositiu d'acceleració o desacceleració**. És el que s'utilitza per tancar o per causar el tancament dels circuits que serveixen per augmentar o disminuir la velocitat d'una màquina.

19 **Contactor de transició d'arrencada a marxa normal**. La seva funció és fer la transferència de les connexions de l'alimentació d'arrencada, a la de marxa normal d'una màquina.

20 **Vàlvula actuada elèctricament**. S'assigna aquest número a una vàlvula utilitzada en un circuit de buit, d'aire, de gas, d'oli, d'aigua, etc., quan s'acciona elèctricament o quan té accessoris elèctrics, com ara commutadors auxiliars.

21 **Relé de distància**. És el que actua quan l'admitància, la impedància o la reactància d'un circuit surt fora d'un cert límit.

22 **Interruptor igualador**. És el que serveix per connectar i desconnectar les connexions

igualadores o d'equilibri del corrent de camp d'una màquina, o per regular equips en una instal·lació de múltiples unitats.

23 **Dispositiu controlador de temperatura**. És el que actua per tal d'apujar la temperatura d'un lloc o d'un aparell quan aquesta temperatura baixa per sota d'un cert límit, o a l'inrevés, per abaixar-la quan aquesta temperatura puja per sobre d'un cert límit. Un exemple seria un termòstat; en canvi, un dispositiu per regular automàticament la temperatura dins d'un marge estret es designaria amb la funció 90T.

24 **Relé volt/hertz**. És el que actua quan la relació entre voltatge i freqüència està per sobre o per sota d'un valor predeterminat. El relé pot tenir qualsevol combinació de característiques instantànies i temporitzades.

25 **Dispositiu de sincronització o de comprovació de sincronisme**. És el que actua quan dos circuits de corrent altern són dins dels límits desitjats de tensió, freqüència i angle de fase, per permetre la connexió en paral·lel d'aquests dos circuits.

26 **Dispositiu tèrmic**. És el que actua quan la temperatura de l'aparell que protegeix (excepte en el cas de debanats de màquines i transformadors, tal com es descriu en la funció 49), la d'un líquid o la d'un altre medi supera un valor determinat, o cau per sota d'un valor determinat.

27 **Relé de mínima tensió**. És el que actua quan la tensió baixa per sota d'un límit determinat.

28 **Detector de flama**. És un dispositiu que vigila la presència de la flama pilot o principal, en aparells tals com una turbina de gas o una caldera de vapor.

29 **Contactor d'aïllament**. És el que s'utilitza amb l'únic propòsit de desconnectar un circuit d'un altre, a causa de maniobres d'emergència, de manteniment o de prova.

30 **Relé anunciador**. És un dispositiu de reposició no automàtica, que dona una sèrie d'indicacions visuals individuals, de les funcions d'aparells de protecció, i que es pot disposar també per efectuar una funció de bloqueig.

31 **Dispositiu d'excitació separada**. És el que connecta un circuit, com ara el camp «shunt» d'un convertidor sincrònic, a una font d'excitació separada, durant el procés d'arrencada.

32 **Relé direccional de potència**. És el que actua quan se supera un valor determinat del flux de potència en un sentit donat, com ara la inversió de potència que resulta de la motorització d'un generador que ha perdut l'element primari que el fa girar.

33 **Commutador de posició**. És el que obre o tanca un contacte, quan un dispositiu principal o una part d'un aparell que no tingui un número funcional de dispositiu, arriba a una posició determinada.

34 **Dispositiu principal de seqüència**. És un element, com ara un selector de contactes múltiples, o com ara un dispositiu programable, que fixa la seqüència d'operació de dispositius principals, durant l'arrencada i la parada, o durant operacions seqüencials de commutació.

35 **Dispositiu per operar escombretes o per posar en curtcircuit anells de frec**. És el que serveix per elevar, baixar o desviar les escombretes d'una màquina, o per posar en curtcircuit els seus anells de frec. També serveix per fer o desfer els contactes d'un rectificador mecànic.

36 **Dispositiu de polaritat o de tensió de polarització**. És el que acciona o permet l'accionament d'altres dispositius, només amb una polaritat donada, o el que verifica la presència d'una tensió de polarització en un equip.

37 **Relé de baix corrent o baixa potència**. És el que actua quan el corrent o la potència cauen per sota d'un valor determinat.

38 **Dispositiu protector de coixinets**. És el que actua amb una temperatura excessiva dels coixinets, o amb condicions mecàniques anòmales que poden derivar en una temperatura excessiva dels coixinets.

39 **Detector de condicions mecàniques**. És el que actua davant de situacions mecàniques anormals (tret de les que tenen lloc en els coixinets d'una màquina, funció 38), com ara vibració excessiva, excentricitat, etc.

40 **Relé d'alta o baixa excitació de camp**. És el que actua quan es dona un valor massa alt o massa baix del corrent de camp d'una màquina, o quan es dona un valor massa gran de la component reactiva del corrent d'armadura en una màquina de corrent altern, la qual cosa indica una excitació de camp massa baixa o massa alta.

41 **Interruptor de camp**. És un dispositiu que actua per tal de connectar o desconnectar l'excitació del camp d'una màquina.

42 **Interruptor de marxa**. És un dispositiu que té per funció principal connectar una màquina a la seva font de tensió de funcionament.

43 **Dispositiu de transferència manual**. És un element, accionat manualment, que efectua la transferència dels circuits de control, per tal de modificar el procés d'operació d'equips de connexió o d'altres dispositius.

44 **Relé de seqüència d'arrencada de grup**. És el que actua per arrencar la següent unitat disponible, en un equip de múltiples unitats, quan falla o quan no està disponible la unitat que normalment hauria d'arrencar.

45 **Detector de condiciones atmosfèriques anormals**. És el que actua davant de condicions atmosfèriques anormals, com ara fums perillosos, gasos explosius, foc, etc.

46 **Relé de seqüència inversa de corrent**. És un relé que actua quan els corrents d'un sistema polifàsics són de seqüència inversa o estan desequilibrades, o quan contenen una component de seqüència inversa superior a un cert límit.

47 **Relé de seqüència inversa de tensió**. És un relé que actua quan les tensions d'un sistema polifàsics són de seqüència inversa o estan desequilibrades, o quan contenen una component de seqüència inversa superior a un cert límit.

48 **Relé de seqüència no completada**. És el que torna un equip a la seva posició normal i l'enclava, si la seqüència normal d'arrencada, de funcionament o de parada no s'ha completat degudament en un interval de temps determinat.

49 **Relé tèrmic d'una màquina o d'un transformador**. És el que actua quan la temperatura d'un element d'una màquina o d'un transformador (normalment un debanat), per on circula el corrent, supera un valor determinat.

50 **Relé instantani de sobrecorrent**. És el que actua sense cap retard de temps intencional, quan es dona un valor excessiu del corrent. Cal usar el sufix «TD» per descriure la funció de sobrecorrent de temps definint (50TD), i el sufix «BF» per descriure la funció de fallada d'interruptor supervisada per corrent (50BF). Vegeu la Figura 13.1 a la pàgina 243.

51 **Relé de temps invers de sobrecorrent de corrent altern**. És un relé que actua quan es dona un valor excessiu del corrent, i en el qual el corrent que circula i el temps d'actuació estan inversament relacionats, en una bona part del seu rang d'actuació. Vegeu la Figura 13.1 a la pàgina 243.

52 **Interruptor de corrent altern**. És el que s'utilitza per tancar i obrir un circuit de potència de corrent altern sota condicions normals, de falta o d'emergència.

53 **Relé d'excitació de camp**. És el que força la creació del camp d'una màquina de corrent continu durant l'arrencada, o el que actua quan la tensió d'una màquina ha arribat a un valor determinat.

54 **Dispositiu d'acoblament d'un engranatge giratori**. És un dispositiu operat elèctricament, controlat o supervisat, que fa que un

engranatge giratori s'acobli o es desacobli de l'eix d'una màquina.

55 **Relé de factor de potència**. És el que actua quan el factor de potència en un circuit de corrent altern no arriba o sobrepassa un valor determinat.

56 **Relé d'aplicació del camp**. És el que s'utilitza per controlar automàticament l'aplicació de l'excitació de camp d'un motor sincrònic de corrent altern, en un punt predeterminat en el cicle de lliscament.

57 **Dispositiu per posar en curtcircuit o de posada a terra**. És el que opera en un circuit per tal de curtcircuitar-lo o posar-lo a terra, en resposta a ordres automàtiques o manuals.

58 **Relé de fallada de rectificació**. És el que actua quan un rectificador de potència falla en la seva conducció o en el seu correcte bloqueig.

59 **Relé de sobretensió**. És el que actua quan la tensió supera un valor determinat.

60 **Relé de tensió o corrent equil·librat**. És el que actua amb una diferència de tensió o corrent entre dos circuits.

61 **Interruptor de densitat**. És un dispositiu que actua a partir d'un cert valor de densitat o de velocitat de canvi de la densitat.

62 **Relé de parada o obertura, amb retard de temps**. És un dispositiu que imposa un retard i que s'utilitza conjuntament amb un dispositiu que inicia la parada total, l'aturada o l'operació d'obertura en una seqüència automàtica. Per exemple, 62BF indica la funció de fallada d'interruptor (sense supervisió de corrent).

63 **Interruptor de pressió**. És un dispositiu que actua a partir d'un cert valor de pressió o de velocitat de canvi de la pressió.

64 **Relé detector de terra**. És el que actua davant d'un defecte a terra de l'aïllament d'una màquina. Aquesta funció s'aplica només a un relé que detecti el pas del corrent des de la carcassa d'una màquina a terra, o a un relé que detecti un terra en un circuit normalment no connectat a terra. No s'aplica a un dispositiu connectat en el circuit secundari d'un transformador de corrent, que estigui connectat en el circuit de potència d'un sistema posat normalment a terra; en aquest cas s'utilitzen altres funcions amb els sufixes «N» o «G», con per exemple 51N en el cas d'un relé de sobrecorrent.

65 **Regulador**. És un equip format per elements elèctrics, mecànics o fluídics, que controla el flux d'aigua, de vapor, etc., a una màquina motriu, per tal d'arrencar-la, mantenir la seva velocitat o parar-la.

66 **Relé de passos**. És el que actua per tal de permetre un nombre especificat d'operacions d'un dispositiu donat, o bé, un nombre especificat d'operacions successives amb un interval donat de temps entre cadascuna. També pot actuar per permetre l'energització periòdica d'un circuit, o per permetre acceleracions intermitents d'una màquina a baixa velocitat.

67 **Relé direccional de sobrecorrent de corrent altern**. És el que actua a partir d'un valor determinat de circulació d'intensitat de corrent altern, en un sentit donat.

68 **Relé de bloqueig**. És el que inicia un senyal pilot per bloquejar o disparar, quan hi ha faltes externes en una línia de transmissió, o en altres aparells, sota certes condicions; pot cooperar també amb altres dispositius, per tal de bloquejar l'actuació o el reenganxament en una condició d'oscil·lació de potència.

69 **Dispositiu controlador de permissiu**. És un dispositiu de dues posicions, el qual permet en una posició el tancament d'un interruptor o la posada en servei d'un equip, i en l'altra posició impedeix l'accionament de l'interruptor o de l'equip.

70 **Reòstat**. És un dispositiu utilitzat per variar la resistència d'un circuit, quan és operat

elèctricament o té altres accessoris elèctrics, com ara contactes auxiliars de posició o limitadors.

71 **Interruptor de nivell de líquid**. És un dispositiu que actua a partir d'un cert valor de nivell o de velocitat de canvi del nivell d'un líquid.

72 **Interruptor de corrent continu**. És el que s'utilitza per tancar i obrir un circuit de potència de corrent continu sota condicions normals, de falta o d'emergència.

73 **Contactor de resistència de càrrega**. És el que s'utilitza per posar en curtcircuit o per commutar un graó de càrrega, destinat a limitar o a desviar la càrrega, en un circuit de potència.

74 **Relé d'alarma**. És un dispositiu, diferent d'un anunciador (vegeu la funció 30), que s'utilitza per actuar una alarma visible o audible.

75 **Mecanisme de canvi de posició**. És el que s'utilitza per moure un dispositiu d'un equip des d'una posició a una altra; un exemple, seria el mecanisme utilitzat per canviar un interruptor entre les posicions de connectat, desconnectat i prova.

76 **Relé de sobrecorrent de corrent continu**. És el que actua quan el corrent en un circuit de corrent continu, sobrepassa un valor determinat.

77 **Dispositiu de telemetria**. És un dispositiu transmissor utilitzat per generar i transmetre a un lloc remot senyals elèctrics que representen la mesura d'una quantitat. També pot ser un dispositiu receptor utilitzat per rebre senyals elèctrics d'un transmissor remot, i convertir aquests senyals en les quantitats mesurades originalment.

78 **Relé de mesura de l'angle de fase**. És el que actua a partir d'un valor determinat de l'angle de fase entre dues tensions, entre dos corrents, o entre una tensió i un corrent.

79 **Relé de reenganxament de corrent altern**. És el que controla el reenganxament i enclavament automàtic d'un interruptor de corrent altern.

80 **Interruptor de flux**. És un dispositiu que actua a partir d'un cert valor de flux o de velocitat de canvi de flux.

81 **Relé de freqüència**. És el que actua quan la freqüència elèctrica o la seva velocitat de variació estan per sobre o per sota d'un valor determinat.

82 **Relé de reenganxament de corrent continu**. És el que controla el tancament i el reenganxament d'un interruptor de corrent continu, generalment responent a les condicions de càrrega del circuit.

83 **Relé automàtic de control selectiu o de transferència**. És el que actua per tal d'escollir automàticament entre certes fonts d'alimentació o entre certes condicions d'un equip; també és el que efectua automàticament una operació de transferència.

84 **Mecanisme d'accionament**. És un mecanisme o un servo-mecanisme elèctric complet, d'un canviador de preses, d'un regulador d'inducció o de qualsevol altre aparell similar, que no tingui número propi de funció assignat.

85 **Relé de comunicacions pilot, portador o de fil pilot**. És un relé actuat, condicionat o modificat en el seu comportament, mitjançant comunicació rebuda o enviada per qualsevol mitjà utilitzat amb relés.

86 **Relé d'enclavament**. És un dispositiu que atura i manté un equip fora de servei, fins que s'efectua una reposició manual ja sigui localment o remotament.

87 **Relé de protecció diferencial**. És el que actua a partir d'una diferència del percentatge, de l'angle de fase o d'una altra magnitud, de dos corrents o d'altres magnituds elèctriques.

88 Motor o grup moto-generador auxiliar. És un dispositiu que s'utilitza per accionar equips auxiliares.

89 Desconnectador de línia. És un dispositiu que s'utilitza com a desconnectador o aïllador en un circuit de potència de corrent continu o altern, sempre que aquest dispositiu sigui operat elèctricament o tingui accessoris elèctrics.

90 Dispositiu de regulació. És el que actua per tal de regular una magnitud, com ara la tensió, el corrent, la potència, la velocitat, la freqüència, etc., a un valor determinat.

91 Relé direccional de tensió. És el que actua quan la tensió entre els extrems oberts d'un interruptor o contactor, sobrepassa un valor determinat, en un sentit donat.

92 Relé direccional de tensió i potència. És el que permet o ocasiona la connexió de dos circuits, quan la diferència de tensió entre ambdós supera un valor determinat, en un cert sentit, i ocasiona la desconnexió dels dos circuits, quan la potència circulant supera un valor determinat, en el sentit contrari.

93 Contactor de canvi del camp. És el que actua per tal de augmentar o disminuir el valor de l'excitació d'una màquina.

94 Relé de dispar o dispar lliure. És el que actua per tal de disparar o permetre disparar un interruptor, un contactor, etc., o per evitar un reenganxament immediat d'un interruptor, en el cas que hagi d'obrir i l'ordre de tancament sigui mantinguda.

95 a 99. Aquests números s'utilitzen en instal·lacions individuals per a aplicacions concretes, quan cap de les funcions 1 a 94 no és apropiada.

En la figura 13.1 es representen tres gràfiques intensitat–temps, per il·lustar la diferència entre les funcions de protecció 50, 50TD i 51. Els paràmetres T_D «time delay» i I_P «pick-up current», són valors ajustables.

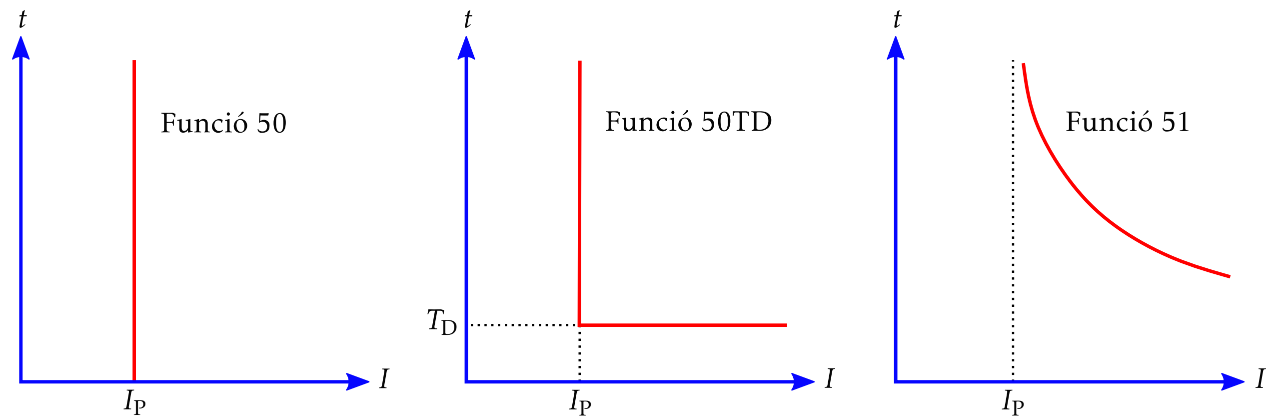


Figura 13.1 Funcions de protecció 50, 50TD i 51

La forma de la corba de la funció 51 també és ajustable, i en general segueix la següent equació:

$$t = T\left(\frac{k}{M^a - 1} + L\right) + C \tag{13.1}$$

Es defineixen a continuació les variables i paràmetres que apareixen en aquesta equació:

M Relació $\dfrac{I}{I_\mathrm{P}}$.

I Corrent que circula per la protecció 51.

I_P Paràmetre ajustable. Es el valor de corrent a partir del qual la protecció comença a actuar.

T Paràmetre multiplicatiu ajustable.

a Paràmetre ajustable que defineix la forma de la corba.

k Paràmetre ajustable que defineix la forma de la corba.

L Paràmetre ajustable que defineix la forma de la corba.

C Paràmetre additiu ajustable.

t Temps que triga la protecció 51 en actuar quan circula un corrent I.

La norma CEI 60255-3 «Electrical relays – Single input energizing quantity measuring relays with dependent Low-voltage fuses - General requirements», fixa una sèrie de valors pels paràmetres k i a; els paràmetres L i C són sempre nuls, i el paràmetre T és sempre igual a 1. En la Taula 13.1 es poden veure aquests valors i els noms que es donen a les corbes d'actuació.

Taula 13.1 Paràmetres de la funció 51 segons la norma CEI

Corba d'actuació	k	a
inversa estàndard	0,14	0,02
molt inversa	13,5	1
extremadament inversa	80	2

La norma IEEE C37.112 «Inverse-Time Characteristic Equations for Overcurrent Relays», fixa una sèrie de valors pels paràmetres k, a i L; el paràmetre C és sempre nul, i el paràmetre T és sempre igual a 1. En la Taula 13.2 es poden veure aquests valors i els noms que es donen a les corbes d'actuació.

Taula 13.2 Paràmetres de la funció 51 segons la norma IEEE

Corba d'actuació	k	a	L
moderadament inversa	0,0515	0,02	0,114
molt inversa	19,61	2	0,491
extremadament inversa	28,2	2	0,1217

13.2 Grau de protecció IP

La codificació IP «International Protection» segons la norma CEI 60529, s'utilitza per descriure el grau de protecció proporcionat pels elements envoltants d'equips elèctrics, contra l'entrada de cossos sòlids estranys i contra els efectes nocius de l'aigua.

La codificació consisteix en les lletres «IP» seguides per dues xifres, més una lletra addicional (opcional) i una lletra suplementària (opcional); quan el grau de protecció corresponent a una de les dues xifres no s'utilitzi, perquè no sigui necessari o perquè no sigui conegut, es reemplaçarà la xifra en qüestió per la lletra «X». Es defineix a continuació el significat de les xifres i lletres que formen el codi IP:

1a xifra. Indica el grau de protecció de les persones contra els contactes amb parts en tensió o amb peces en moviment, i el grau de protecció dels equips contra l'entrada de cossos sòlids i pols. Els valors possibles són els següents:

0 Sense cap protecció en particular.

1 Protecció contra l'entrada de cossos sòlids de diàmetre superior a 50 mm, com per exemple contactes involuntaris de la mà.

2 Protecció contra l'entrada de cossos de diàmetre superior a 12 mm, com per exemple contactes involuntaris dels dits de la mà.

3 Protecció contra l'entrada de cossos de diàmetre superior a 2,5 mm, com per exemple eines o cables.

4 Protecció contra l'entrada de cossos de diàmetre superior a 1 mm.

5 Protecció contra la pols; s'en permet l'entrada allà on no sigui perjudicial.

6 Protecció total contra la pols.

2a xifra. Indica el grau de protecció dels equips contra l'entrada d'aigua. Els valors possibles són els següents:

0 Sense cap protecció en particular.

1 Protecció contra la caiguda vertical de gotes d'aigua.

2 Protecció contra la caiguda de gotes d'aigua fins a 15° de la vertical.

3 Protecció contra la caiguda de pluja fina (polvoritzada) fins a 60° de la vertical.

4 Protecció contra la caiguda d'aigua en totes les direccions.

5 Protecció contra aigua llançada a raig amb mànegues.

6 Protecció contra aigua llançada a raigs forts o per cops de mar.

7 Protecció contra la immersió temporal.

8 Protecció contra la immersió prolongada o a gran pressió.

Lletra addicional (opcional). En alguns casos la protecció proporcionada pels elements envoltants contra l'accés a les parts perilloses és millor que la indicada per la primera xifra del codi. En aquests casos es pot caracteritzar aquesta protecció amb una lletra addicional, afegida després de les dues xifres; això permet tenir obertures adequades per a la ventilació, mantenint alhora el grau requerit de protecció de les persones. Els valors possibles són els següents:

A Els cossos estranys de diàmetre superior a 50 mm poden entrar en l'element envoltant, però només d'una forma voluntària i deliberada.

B Els cossos estranys de diàmetre superior a 12 mm poden entrar en l'element envoltant, però un dit de la mà no ha de poder entrar més de 80 mm, i ha de quedar doncs, a una distància suficient de les parts perilloses.

C Els cossos estranys de diàmetre superior a 2,5 mm poden entrar en l'element envoltant, però un filferro d'acer d'aquest diàmetre i 100 mm de longitud ha de quedar a una distància suficient de les parts perilloses.

D Els cossos estranys de diàmetre superior a 1 mm poden entrar en l'element envoltant, però un filferro d'acer d'aquest diàmetre i 100 mm de longitud, ha de quedar a una distància suficient de les parts perilloses.

Lletra suplementària (opcional). El codi IP accepta també algunes lletres suplementàries al final, per tal d'afegir una informació concreta. Els valors possibles són els següents:

H Material d'alta tensió.

M En màquines rotatives indica que els assajos s'han realitzat amb el rotor girant.

S En màquines rotatives indica que els assajos s'han realitzat amb el rotor parat.

W Protecció contra la intempèrie.

Algunes versions antigues del codi IP poden tenir una tercera xifra que indica la resistència a impactes mecànics, no obstant, avui en dia la norma CEI 60529 ja no recull aquesta tercera xifra, i la resistència a impactes mecànics ve indicada pel codi IK (vegeu l'apartat següent). Aquesta tercera xifra donava el grau de resistència de l'element envoltant a una certa energia d'impacte:

0 Cap resistència en particular a l'impacte.

1 Resisteix una energia d'impacte de 0,225 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 150 g deixada anar des d'una altura de 15 cm.

2 Resisteix una energia d'impacte de 0,375 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 250 g deixada anar des d'una altura de 15 cm.

3 Resisteix una energia d'impacte de 0,5 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 250 g deixada anar des d'una altura de 20 cm.

5 Resisteix una energia d'impacte de 2 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 500 g deixada anar des d'una altura de 40 cm.

7 Resisteix una energia d'impacte de 6 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 1,5 kg deixada anar des d'una altura de 40 cm.

9 Resisteix una energia d'impacte de 20 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 5 kg deixada anar des d'una altura de 40 cm.

13.3 Codi IK de resistència a impactes

Actualment, el codi IK definit en la norma EN 50102 és el que defineix la resistència d'un element envoltant als impactes mecànics. Aquest codi és format per les lletres «IK» seguides d'un número de dues xifres, el qual indica el grau de resistència de l'element envoltant a una certa energia d'impacte:

00 Cap resistència en particular a l'impacte.

01 Resisteix una energia d'impacte de 0,15 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 200 g deixada anar des d'una altura de 7,5 cm.

02 Resisteix una energia d'impacte de 0,2 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 200 g deixada anar des d'una altura de 10 cm.

03 Resisteix una energia d'impacte de 0,35 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 200 g deixada anar des d'una altura de 17,5 cm.

04 Resisteix una energia d'impacte de 0,5 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 200 g deixada anar des d'una altura de 25 cm.

05 Resisteix una energia d'impacte de 0,7 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 200 g deixada anar des d'una altura de 35 cm.

06 Resisteix una energia d'impacte de 1 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 500 g deixada anar des d'una altura de 20 cm.

07 Resisteix una energia d'impacte de 2 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 500 g deixada anar des d'una altura de 40 cm.

08 Resisteix una energia d'impacte de 5 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 1,7 kg deixada anar des d'una altura de 29,5 cm.

09 Resisteix una energia d'impacte de 10 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 5 kg deixada anar des d'una altura de 20 cm.

10 Resisteix una energia d'impacte de 20 J, equivalent a l'impacte d'una massa de 5 kg deixada anar des d'una altura de 40 cm.

13.4 Codi NEMA d'elements envoltants

La «National Electrical Manufacturers Association» (NEMA) codifica els elements envoltants en la norma NEMA 250, de manera similar al codi IP, segons el seu grau de protecció contra elements externs nocius. Podeu trobar més informació a l'adreça: www.nema.org/prod/be/enclosures/.

Aquesta norma defineix els següents valors:

1 Protecció contra la pols, però no de forma total, i contra les esquitxades suaus o indirectes; impedeix el contacte accidental amb els equips interns. S'utilitza en interiors, en condicions atmosfèriques normals.

2 Com el tipus 1, i a més ofereix protecció total contra el degoteig.

3 Protecció contra la pols, la pluja, l'aiguaneu i la neu; impedeix el contacte accidental amb els equips interns. S'utilitza en interiors o exteriors i pot suportar la formació de gel al seu damunt.

3R Com el tipus 3, però sense protecció contra la pols.

3S Com el tipus 3, i a més els mecanismes externs han de ser operables quan s'hi dipositi gel.

4 Protecció contra la pols, la pluja, l'aiguaneu, la neu, les esquitxades i els raigs d'aigua directes; impedeix el contacte accidental amb els equips interns. S'utilitza en interiors o exteriors i pot suportar la formació de gel al seu damunt.

4X Com el tipus 4, i a més ofereix protecció contra la corrosió.

5 Protecció contra la pols i contra les esquitxades suaus o indirectes; impedeix el contacte accidental amb els equips interns. S'utilitza en interiors.

6 Protecció contra els raigs d'aigua directes i contra l'entrada d'aigua en ser submergit un temps curt; impedeix el contacte accidental amb els equips interns. S'utilitza en interiors o exteriors i pot suportar la formació de gel al seu damunt.

6P Com el tipus 6, però protegit contra l'entrada d'aigua en ser submergit durant un temps més llarg.

7 S'utilitza en interiors, en ambients perillosos definits per la norma NEC com a classe I, grups A, B, C o D.

8 Com el tipus 7, però d'ús interior i exterior.

9 S'utilitza en interiors i exteriors, en ambients perillosos definits per la norma NEC com a classe II, grups E, F o G.

10 Compleix el requisits del «Mine Safety and Health Administration» 30 CFR part 18.

11 Protecció contra l'efecte corrosiu de líquids i gasos.

12 Protecció contra la pols en suspensió i contra les esquitxades suaus o indirectes; impedeix el contacte accidental amb els equips interns. S'utilitza en interiors.

12K Com el tipus 12, però l'element envoltant pot tenir obertures.

13 Protecció contra la pols en suspensió i contra les esquitxades o ruixats d'aigua, oli o líquids no corrosius; impedeix el contacte accidental amb els equips interns. S'utilitza en interiors.

La Taula 13.3 es pot utilitzar per trobar el codi IP equivalent a un codi NEMA donat; no ha d'utilitzar-se per a la conversió contrària.

Taula 13.3 Conversió de codis NEMA a codis IP

Codi NEMA	Codi IP equivalent
1	IP10
2	IP11
3	IP54
3R	IP14
3S	IP54
4 i 4X	IP56
5	IP52
6 i 6P	IP67
12 i 12K	IP52
13	IP54

13.5 Norma CEI 60947-2 d'interruptors automàtics de baixa tensió

Es donen a continuació algunes definicions incloses en la norma CEI 60947-2, referents als interruptors automàtics de baixa tensió, és a dir, tensions que no passin de 1000 V en corrent altern, o de 1500 V en corrent continu.

Aquesta norma defineix un interruptor automàtic de la manera següent: Aparell mecànic de connexió capaç d'establir, de suportar i d'interrompre el corrent en les condicions normals d'un circuit, així com d'establir, de suportar durant un temps especificat i d'interrompre el corrent en les condicions anormals especificades d'un circuit, com per exemple el que apareix durant un curtcircuit.

Un interruptor automàtic es diu que és limitador de corrent, quan el seu temps d'obertura és particularment breu, per tal d'evitar que el corrent que s'origina en un curtcircuit arribi al seu valor màxim.

Quan tenim dos dispositius de protecció (interruptors automàtics, fusibles, etc.) en sèrie, la selectivitat es diu que és total si per a qualsevol valor del corrent, el dispositiu situat aigües avall obre sempre abans que ho faci el dispositiu situat aigües amunt. La selectivitat es diu que és parcial, si l'obertura del dispositiu situat aigües avall, abans que ho faci el dispositiu situat aigües amunt, només està garantida fins a un cert valor del corrent I_s, anomenat corrent límit de selectivitat; I_s correspon al punt d'intersecció de les característiques corrent–temps dels dos dispositius de protecció. En el cas d'interruptors automàtics es defineixen dues categories d'ús:

A Interruptors automàtics que no estan específicament preparats per ser selectius en condicions de curtcircuit amb altres dispositius de protecció situats en sèrie aigües avall.

B Interruptors automàtics específicament concebuts per ser selectius en condicions de curtcircuit amb altres dispositius de protecció situats en sèrie aigües avall. Aquest interruptors han d'especificar el seu corrent admissible de curta durada I_{cw}.

Es relacionen a continuació les definicions de diversos paràmetres dels interruptors automàtics; es dona entre parèntesis el nom equivalent en anglès:

U_e Tensió nominal d'operació («rated operational voltage»).

U_i Tensió nominal d'aïllament («rated insulation voltage»). És el valor de tensió utilitzat en els assajos dielèctrics de l'interruptor; el valor més elevat de U_e no pot ser mai superior a U_i.

U_{imp} Tensió nominal d'impuls suportada («rated impulse withstand voltage»). És el valor de pic d'una tensió d'impuls, de forma i polaritat predeterminades, que l'interruptor pot suportar.

I_{th} Corrent tèrmic convencional a l'aire lliure («conventional free-air thermal current»). És la màxima intensitat de corrent a utilitzar en els assajos d'escalfament de l'interruptor sense cap element envoltant, a l'aire lliure.

I_{the} Corrent tèrmic convencional dins d'un element envoltant («conventional enclosed thermal current»). És la màxima intensitat de corrent a utilitzar en els assajos d'escalfament de l'interruptor, quan està situat dins d'un element envoltant especificat.

I_u Corrent nominal ininterromput («rated uninterrupted current»). És la intensitat de corrent, fixada pel fabricant, que l'interruptor pot suportar de manera ininterrompuda.

I_n Corrent nominal («rated current»). En els interruptors automàtics és equivalent a I_u i té el mateix valor que I_{th}.

I_{cu} Poder nominal de tall últim en curtcircuit («rated ultimate short-circuit breaking capacity»). És la capacitat que té l'interruptor d'obrir en curtcircuit a la tensió nominal d'operació, en un cicle d'assaig del tipus O–t–CO (obrir, tancar i obrir); s'expressa pel valor eficaç simètric del corrent esperat, en kA. Després de l'assaig no es requereix que l'interruptor pugui suportar en règim continu el seu corrent nominal.

I_{cs} Poder nominal de tall de servei en curtcircuit («rated service short-circuit breaking capacity»). És la capacitat que té l'interruptor d'obrir en curtcircuit a la tensió nominal d'operació, en un cicle d'assaig del tipus O–t–CO–t–CO (obrir, tancar i obrir, tancar i obrir); s'expressa pel valor del corrent esperat, en kA, corresponent a un dels percentatges de I_{cu} especificats en la Taula 13.4, arrodonit al valor enter més pròxim. Després de l'assaig l'interruptor cal que pugui suportar en règim continu el seu corrent nominal.

Taula 13.4 Valors de I_{cs} segons la categoria d'ús

Categoria d'ús	Valors possibles de I_{cs}
A	$(25, 50, 75 \text{ i } 100)\,\%I_{cu}$
B	$(50, 75 \text{ i } 100)\,\%I_{cu}$

I_{cm} Poder nominal de tancament en curtcircuit («rated short-circuit making capacity»). És la capacitat que té l'interruptor de tancar en curtcircuit a la tensió nominal d'operació, per a un factor de potència especificat en corrent altern, o per a una constant de temps especificada en corrent continu; s'expressa pel valor màxim de pic del corrent esperat. En el cas de corrent altern ha de complir-se: $I_{cm} \geq nI_{cu}$; els valor possibles del paràmetre n poden veure's en la Taula 13.5 a la pàgina següent.

Taula 13.5 Valors n que relacionen I_{cm} amb I_{cu}

I_{cu}	Factor de potència	n
$4{,}5\,\text{kA} \leq I_{cu} \leq 6\,\text{kA}$	0,7	1,5
$6\,\text{kA} < I_{cu} \leq 10\,\text{kA}$	0,5	1,7
$10\,\text{kA} < I_{cu} \leq 20\,\text{kA}$	0,30	2,0
$20\,\text{kA} < I_{cu} \leq 50\,\text{kA}$	0,25	2,1
$I_{cu} > 50\,\text{kA}$	0,2	2,2

$\boldsymbol{I_{cw}}$ Corrent nominal de curta durada admissible («rated short-time withstand current»). És el corrent que pot suportar un interruptor de categoria d'ús B durant un temps convencional, sense danyar-se i sense que se n'alterin les característiques, obtenint-se així la possibilitat de ser selectiu amb altres dispositius de protecció situats en sèrie aigües avall; s'expressa pel valor eficaç simètric del corrent esperat, en kA. El temps mínim que ha de suportar el corrent és 0,05 s, i els valors preferits són: 0,05 s, 0,1 s, 0,25 s, 0,5 s i 1 s. El valor mínim que ha de tenir I_{cw} pot veure's en la Taula 13.6.

Taula 13.6 Valors de I_{cw} en funció de I_n

I_n	Valor mínim de I_{cw}
$I_n \leq 2500\,\text{A}$	màxim entre $12 I_n$ i 15 kA
$I_n > 2500\,\text{A}$	30 kA

13.6 Àmbit d'aplicació de diverses Normes CEI

Es relacionen a continuació diverses normes CEI agrupades pel seu àmbit d'aplicació. Podeu trobar el llistat complet de les normes CEI a l'adreça: www.iec.ch/standardsdev/publications/.

Aparellatge de baixa tensió

CEI 60947-1. Low-voltage switchgear and controlgear – General rules.

CEI 60947-2. Low-voltage switchgear and controlgear – Circuit-breakers.

CEI 60947-3. Low-voltage switchgear and controlgear – Switches, disconnectors, switch-disconnectors and fuse-combination units.

CEI 60947-4-1. Low-voltage switchgear and controlgear – Contactors and Motor Starters – Electromechanical Contactors and Motor Starters.

CEI 60947-4-2. Low-voltage switchgear and controlgear – Contactors and Motor Starters – A.C. Semiconductor Motor Controllers and Starters.

CEI 60947-4-3. Low-voltage switchgear and controlgear – Contactors and Motor Starters – A.C. Semiconductor Controllers and Contactors for non-motor Loads.

Aparellatge d'alta tensió

CEI 62271-1. High-voltage switchgear and controlgear – Common specifications.

CEI 62271-100. High-voltage switchgear and controlgear – Alternating current circuit-breakers.

CEI 62271-102. High-voltage switchgear and controlgear – Alternating current disconnectors and earthing switches.

CEI 62271-103. High-voltage switchgear and controlgear – Switches for rated voltages above 1 kV up to and including 52 kV.

Coordinació d'aïllaments

CEI 60071-1. Insulation co-ordination – Definitions, principles and rules.

CEI 60071-2. Insulation co-ordination – Application guide.

CEI 60071-3. Insulation co-ordination – Phase to phase insulation coordination. Principles, rules and application guide.

CEI 60071-4. Insulation co-ordination – Computational guide to insulation co-ordination and modelling of electrical networks.

CEI 60071-5. Insulation co-ordination – Procedures for high-voltage direct current (HVDC) converter stations.

Curtcircuits

CEI 60909-0. Short-circuit currents in three-phase a.c. systems – Calculation of currents.

CEI 60909-1. Short-circuit currents in three-phase a.c. systems – Factors for the calculation of short-circuit currents according to IEC 60909-0.

CEI 60909-2. Short-circuit currents in three-phase a.c. systems – Data of electrical equipment for short-circuit current calculations.

CEI 60909-3. Short-circuit currents in three-phase a.c. systems – Currents during two separate simultaneous line-to-earth short circuits and partial short-circuit currents flowing through earth.

CEI 60909-4. Short-circuit currents in three-phase a.c. systems – Examples for the calculation of short-circuit currents.

Fusibles de baixa tensió

CEI 60269-1. Low-voltage fuses – General requirements.

CEI 60269-2. Low-voltage fuses – Supplementary requirements for fuses for use by authorized persons (fuses mainly for industrial application) – Examples of standardized systems of fuses A to J.

Motors

CEI 60034-1. Rotating electrical machines – Rating and performance.

CEI 60034-2. Rotating electrical machines – Methods for determining losses and efficiency of rotating electrical machinery from tests (excluding machines for traction vehicles).

CEI 60034-5. Rotating electrical machines – Degrees of protection provided by the integral design of rotating electrical machines (IP code) - Classification.

CEI 60034-6. Rotating electrical machines – Methods of cooling (IC code).

CEI 60034-7. Rotating electrical machines – Classification of types of construction, mounting arrangements and terminal box position (IM Code).

CEI 60034-8. Rotating electrical machines – Terminal markings and direction of rotation.

CEI 60034-12. Rotating electrical machines – Starting performance of single-speed three-phase cage induction motors.

CEI 60034-15. Rotating electrical machines – Impulse voltage withstand levels of rotating a.c. machines with form-wound stator coils.

CEI 60034-17. Rotating electrical machines – Cage induction motors when fed from converters - Application guide.

CEI 60034-18. Rotating electrical machines – Functional evaluation of insulating systems.

Proteccions elèctriques

CEI 60255-3. Electrical relays – Single input energizing quantity measuring relays with dependent Low-voltage fuses - General requirements.

CEI 60255-6. Electrical relays – Measuring relays with more than one input energizing quantity.

CEI 60255-8. Electrical relays – Thermal electrical relays.

CEI 60255-12. Electrical relays – Directional relays and power relays with two input energizing quantities.

CEI 60255-13. Electrical relays – Biased (percentage) differential relays.

CEI 60255-16. Electrical relays – Impedance measuring relays.

Quadres elèctrics de baixa tensió

CEI 61439-0 Low-voltage switchgear and controlgear assemblies – Guidance to specifying assemblies.

CEI 61439-1 Low-voltage switchgear and controlgear assemblies – General rules.

CEI 61439-2 Low-voltage switchgear and controlgear assemblies – Power switchgear and controlgear assemblies.

CEI 61439-3 Low-voltage switchgear and controlgear assemblies – Distribution boards intended to be operated by ordinary persons (DBO).

CEI 61439-4 Low-voltage switchgear and controlgear assemblies – Particular requirements for assemblies for construction sites (ACS).

CEI 61439-5 Low-voltage switchgear and controlgear assemblies – Assemblies for power distribution in public networks.

CEI 61439-6 Low-voltage switchgear and controlgear assemblies – Busbar trunking systems (busways).

CEI 61439-7 Low-voltage switchgear and controlgear assemblies – Assemblies for specific applications such as marinas, camping sites, market squares, electric vehicles charging stations.

Representació i simbologia

CEI 60027-1. Letter symbols to be used in electrical technology – General.

CEI 60027-2. Letter symbols to be used in electrical technology – Telecommunications and electronics.

CEI 60027-3. Letter symbols to be used in electrical technology – Logarithmic and related quantities, and their units.

CEI 60027-4. Letter symbols to be used in electrical technology – Symbols for quantities to be used for rotating electrical machines.

CEI 60027-6. Letter symbols to be used in electrical technology – Control technology.

CEI 60050. International Electrotechnical Vocabulary.

CEI 60617-1. Graphical Symbols for Diagrams – General Information, general index. Cross-reference tables.

CEI 60617-2. Graphical Symbols for Diagrams – Symbol elements, qualifying symbols and other symbols having general application.

CEI 60617-3. Graphical Symbols for Diagrams – Conductors and connecting devices.

CEI 60617-4. Graphical Symbols for Diagrams – Basic passive components.

CEI 60617-5. Graphical Symbols for Diagrams – Semiconductors and electron tubes.

CEI 60617-6. Graphical Symbols for Diagrams – Production and conversion of electrical energy.

CEI 60617-7. Graphical Symbols for Diagrams – Switchgear, controlgear and protective devices.

CEI 60617-8. Graphical Symbols for Diagrams – Measuring instruments, lamps and signalling devices.

CEI 60617-9. Graphical Symbols for Diagrams – Telecommunications: switching and peripheral equipment.

CEI 60617-10. Graphical Symbols for Diagrams – Telecommunications: transmission.

CEI 60617-11. Graphical Symbols for Diagrams – Architectural and topographical installation plans and diagrams.

CEI 60617-12. Graphical Symbols for Diagrams – Binary logic elements.

CEI 60617-13. Graphical Symbols for Diagrams – Analogue elements.

Termoparells

CEI 60584-1. Thermocouples – Reference tables.

CEI 60584-2. Thermocouples – Tolerances.

CEI 60584-3. Thermocouples – Extension and compensating cables - Tolerances and identification system.

Transformadors de mesura i protecció

CEI 60044-1. Instrument Transformers – Current transformers.

CEI 60044-2. Instrument Transformers – Inductive voltage transformers.

CEI 60044-3. Instrument Transformers – Combined transformers.

CEI 60044-4. Instrument Transformers – Measurement of partial discharges.

CEI 60044-5. Instrument Transformers – Capacitor voltage transformers.

Transformadors de potència

CEI 60076-1. Power transformers – General.

CEI 60076-2. Power transformers – Temperature rise.

CEI 60076-3. Power transformers – Insulation levels, dielectric tests and external clearances in air.

CEI 60076-4. Power transformers – Guide to the lightning impulse and switching impulse testing - Power transformers and reactors.

CEI 60076-5. Power transformers – Ability to withstand short circuit.

CEI 60076-6. Power transformers – Reactors.

CEI 60076-7. Power transformers – Loading guide for oil-immersed power transformers.

CEI 60076-8. Power transformers – Application guide.

CEI 60076-10. Power transformers – Determination of sound levels.

CEI 60076-11. Power transformers – Dry-type transformers.

13.7 Àmbit d'aplicació de diverses Normes IEEE

Es relacionen a continuació diverses normes IEEE agrupades pel seu àmbit d'aplicació. Podeu trobar el llistat complet de les normes IEEE a l'adreça: ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp.

Bateries i altres equips de corrent continu

IEEE 450. Recommended Practice for Maintenance, Testing and Replacement of Vented Lead-Acid Batteries for Stationary Applications.

IEEE 484. Recommended Practice for Installation Design and Installation of Large Lead Storage Batteries for Generating Stations and Substations.

IEEE 485. Recommended Practice for Sizing Lead-Acid Batteries for stationary Applications.

IEEE 946. Recommended Practice for the Design of Safety-Related DC Auxiliary Power Systems for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 1106. Recommended Practice for Installation, Maintenance, Testing and Replacement of Vented Nickel-Cadmium Batteries for Stationary Applications.

IEEE 1115. Recommended Practice for Sizing Nickel-Cadmium Batteries for Stationary Applications.

IEEE 1115a. Recommended Practice for Sizing Nickel-Cadmium Batteries for Stationary Applications, Amendment 1: Additional Discussion on Sizing Margins.

IEEE 1184. Guide for Batteries for Uninterruptible Power Supply Systems.

IEEE 1375. Guide for the Protection of Stationary Battery Systems.

IEEE 1491. Guide for Selection and Use of Battery Monitoring Equipment in Stationary Applications.

IEEE C37.14. Low-Voltage DC Power Circuit Breakers Used in Enclosures.

Cables

IEEE 525. Guide for the Design and Installation of Cable Systems in Substations.

Centrals elèctriques i subestacions

IEEE 141 (Red Book). Recommended Practice for Electric Power Distribution for Industrial Plants.

IEEE 339 (Brown Book). Recommended Practice for Industrial and Commercial Power Systems Analysis.

IEEE 446 (Orange Book). Recommended Practice for Emergency and Standby Power Systems for Industrial and Commercial Applications.

IEEE 493 (Gold Book). Recommended Practice for the Design of Reliable Industrial and Commercial Power Systems

IEEE 666. Design Guide for Electric Power Service Systems for Generating Stations.

Curtcircuits

IEEE 551 (Violet Book). Recommended Practice for Calculating Short-Circuit Currents in Industrial and Commercial Power Systems.

IEEE C37.010. Application Guide for AC High-Voltage Circuit Breakers Rated on a Symmetrical Current Basis.

Equips nuclears i classe 1E – Criteris

IEEE 279. Criteria for Protection Systems for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 308. Criteria for Class 1E Power Systems for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 379. Application of the Single-Failure Criterion to Nuclear Power Generating Station Safety Systems.

IEEE 384. Criteria for Independence of Class 1E Equipment and Circuits.

IEEE 603. Criteria for Safety Systems for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 741. Criteria for the Protection of Class 1E Power Systems.

Equips nuclears i classe 1E – Disseny, instal·lació i proves

IEEE 336. Installation, Inspection and Testing Requirements for Class 1E Instrumentation and Electric Equipment at Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 381. Criteria for Type Tests of Class 1E Modules Used in Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 383. Standard for Type Test of Class 1E Electric Cables, Field splices and Connections for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 577. Requirements for Reliability Analysis in Design and operation of Safety Systems for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 622. Recommended Practice for the Design and Installation of Electric Pipe Heating Systems for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 690. Standard for the Design and Installation of Cable Systems for Class 1E Circuits in Nuclear Power Generating Stations.

Equips nuclears i classe 1E – Qualificació

IEEE 323. Standard for Qualifying Class 1E Equipment for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 334. Standard for Qualifying Continuous Duty Class 1E Motors for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 344. Recommended Practices for Seismic Qualification of Class 1E Electric Equipment for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 535. Standard for Qualification of Class 1E Lead Storage Batteries for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE 638. Standard for Qualification of Class 1E Transformers for Nuclear Generating Stations.

IEEE 650. Standard for Qualification of Class 1E Static Battery Chargers and Inverters for Nuclear Power Generating Stations.

IEEE C37.105. Standard for Qualifying Class 1E Protective Relays and Auxiliaries for Nuclear Power Generating Stations.

Generadors diesel

IEEE 387. Criteria for Diesel-Generator Units Applied as Standby Power Supplies for Nuclear Power Generation Stations.

Generadors elèctrics

IEEE 421.1. Definitions for Excitation Systems for Synchronous Machines.

IEEE 421.2. Guide for Identification, Testing, and Evaluation of the Dynamic Performance of Excitation Control Systems.

IEEE 421.3. Standard for High-Potential Test Requirements for Excitation Systems for Synchronous Machines.

IEEE 421.4. Guide for the Preparation of Excitation System Specifications.

IEEE 421.5. Recommended Practice for Excitation System Models for Power System Stability Studies.

IEEE C37.101. Guide for Generator Ground Protection.

IEEE C37.102. Guide for AC Generator Protection.

IEEE C50.13. Standard for Large Turbine Generators.

Interruptors d'alta tensió

IEEE C37.010. Application Guide for AC High-Voltage Circuit Breakers Rated on a Symmetrical Current Basis.

IEEE C37.011. Application Guide for Transient Recovery Voltage for AC High-Voltage Circuit Breakers Rated on a Symmetrical Current Basis.

IEEE C37.012. Application Guide for Capacitance Current Switching for AC High-Voltage Circuit Breakers Rated on a Symmetrical Current Basis.

IEEE C37.013. AC High-Voltage Generator Circuit Breakers Rated on a Symmetrical Current Basis.

IEEE C37.04. Rating Structure for AC High-Voltage Circuit Breakers.

IEEE C37.06. AC High-Voltage Circuit Breakers Rated on a Symmetrical Current Basis – Preferred Ratings and Related Required Capabilities.

IEEE C37.09. Test Procedure for AC High-Voltage Circuit Breakers Rated on a Symmetrical Current Basis.

IEEE C37.10. Guide for Diagnostics and Failure Investigation of Power Circuit Breakers.

IEEE C37.11. Requirements for Electrical Control for AC High-Voltage Circuit Breakers Rated on a Symmetrical Current Basis.

IEEE C37.12. AC High-Voltage Circuit Breakers Rated on a Symmetrical Current Basis – Specifications Guide.

Interruptors de baixa tensió

IEEE 1015 (Blue Book). Recommended Practice for Applying Low-Voltage Circuit Breakers Used in Industrial and Commercial Power Systems

IEEE C37.13. Standard for Low-Voltage AC Power Circuit Breakers Used in Enclosures.

IEEE C37.20.1. Metal-Enclosed Low-Voltage Power Circuit Breaker Switchgear.

IEEE C37.50. Low-Voltage AC Power Circuit Breakers Used in Enclosures – Test Procedures.

IEEE C37.51. Metal-Enclosed Low-Voltage AC Power-Circuit-Breaker Switchgear Assemblies – Conformance Test Procedures.

Malles i connexions a terra

IEEE 80. Guide for Safety in AC Substation Grounding.

IEEE 142 (Green Book). Recommended Practice for Grounding of Industrial and Commercial Power Systems.

Motors elèctrics

IEEE 288. Guide for Induction Motor Protection.

IEEE C37.96. Guide for AC Motor Protection.

Penetracions elèctriques

IEEE 317. Standard for Electric Penetration Assemblies in Containment Structures for Nuclear Power Generating Stations.

Proteccions elèctriques

IEEE 242 (Buff Book). Recommended Practice for Protection and Coordination of Industrial and Commercial Power Systems.

IEEE C37.2. Electrical Power System Device Function Numbers and Contact Designations.

IEEE C37.16. Low-Voltage Power Circuit Breakers and AC Power Circuit Protectors.

IEEE C37.17. Trip Devices for AC and General Purpose DC Low Voltage Power Circuit Breakers.

IEEE C37.97. Guide for Protective Relay Applications to Power System Buses.

IEEE C37.99. Guide for the Protection of Shunt Capacitor Banks.

IEEE C37.106. Guide for Abnormal Frequency Protection for Power Generating Plants.

IEEE C37.112. Inverse-Time Characteristic Equations for Overcurrent Relays.

IEEE C37.113. Guide for Protective Relay Applications to Transmission Lines.

IEEE C37.119. Guide for Breaker Failure Protection of Power Circuit Breakers.

Quadres elèctrics de control

IEEE C37.21. Control Switchboards.

Relés

IEEE C37.90. Relays and Relay Systems Associated with Electric Power Apparatus.

Representació i simbologia

IEEE 91. Standard Graphic Symbols for Logic Functions.

IEEE 91A. Supplement to Standard Graphic Symbols for Logic Functions.

IEEE 260.1. Letter Symbols for Units of Measurement (SI Units, Customary Inch-Pound Units, and Certain Other Units).

IEEE 315. Graphic Symbols for Electrical and Electronics Diagrams.

IEEE 315A. Supplement to Graphic Symbols for Electrical and Electronics Diagrams.

IEEE 991. Standard for Logic Circuit Diagrams.

Sistemes digitals

IEEE 7-4.3.2. Criteria for Digital Computers in Safety Systems of Nuclear Power Generating Stations.

Soroll elèctric

IEEE 518. Guide for the Installation of Electrical Equipment to Minimize Electrical Noise Inputs to Controllers from External Sources.

Transformadors de mesura i protecció

IEEE C37.110. Guide for the Application of Current Transformers Used for Protective Relaying Purposes.

IEEE C57.13. Requirements for Instrument Transformers.

IEEE C57.13.1. Guide for Field Testing of Relaying Current Transformers.

IEEE C57.13.3. Guide for the Grounding of Instrument Transformer Secondary Circuits and Cases.

Transformadors de potència

IEEE C37.91. Guide for Protecting Power Transformers.

IEEE C57.12.00. General Requirements for Liquid-Immersed Distribution, Power, and Regulating Transformers.

IEEE C57.12.01. General Requirements for Dry-Type Distribution and Power Transformers, Including Those with Solid-Cast and/or Resin Encapsulated Windings.

Vàlvules motoritzades

IEEE 1290. Guide for Motor Operated Valve (MOV) Motor Application, Protection, Control, and Testing in Nuclear Power Generating Stations.

Part IV

Apèndixs

Apèndix A

Alfabet Grec

En la Taula A.1 es pot veure l'alfabet grec amb els noms de les seves lletres en diversos idiomes.

Taula A.1 Alfabet grec

Número d'ordre	Lletra		Nom			
	minúscula	majúscula	català	castellà	anglès	francès
1	α	A	alfa	alfa	alpha	alpha
2	β	B	beta	beta	beta	bêta
3	γ	Γ	gamma	gamma	gamma	gamma
4	δ	Δ	delta	delta	delta	delta
5	ϵ, ε	E	èpsilon	épsilon	epsilon	epsilon
6	ζ	Z	zeta	dseta	zeta	zêta
7	η	H	eta	eta	eta	êta
8	θ, ϑ	Θ	theta	zeta	theta	thêta
9	ι	I	iota	iota	iota	iota
10	κ, $\varkappa$	K	kappa	kappa	kappa	kappa
11	λ	Λ	lambda	lambda	lambda	lambda
12	μ	M	mi	mi	mu	mu
13	ν	N	ni	ni	nu	nu
14	ξ	Ξ	ksi	xi	xi	ksi, xi
15	o	O	òmicron	ómicron	omicron	omicron
16	π, ϖ	Π	pi	pi	pi	pi
17	ρ, ϱ	P	rho, ro	ro	rho	rhô
18	σ, ς	Σ	sigma	sigma	sigma	sigma
19	τ	T	tau	tau	tau	tau
20	υ	Υ	ípsilon	ípsilon	upsilon	upsilon
21	ϕ, φ	Φ	fi	fi	phi	phi
22	χ	X	khi	ji	chi	khi
23	ψ	Ψ	psi	psi	psi	psi
24	ω	Ω	omega	omega	omega	oméga

Les dues grafies de la lletra minúscula èpsilon (ϵ, ε) són totalment equivalents entre si; el mateix passa amb les dues grafies de les lletres minúscules theta (θ, ϑ), kappa ($\kappa, \varkappa$), rho (ρ, ϱ) i fi (ϕ, φ).

La lletra sigma minúscula té dues variants: ς, escrita en grec al final d'una paraula, i σ, escrita en grec a l'inici o en mig d'una paraula. En els textos tècnics i científics s'utilitza majoritàriament la variant σ.

La variant ϖ de la lletra pi es denomina «pi dòrica» en català, «pi dórica» en castellà, «dorian pi» en anglès i «pi dorien» en francès.

Pel que fa als noms de les lletres, alguns poden sorprendre; això no és estrany ja que algunes lletres han rebut històricament noms diversos, i fins i tot contradictoris respecte dels actuals.

Els noms anglesos de les lletres són els més uniformes, ja que no s'ha observat cap variació en les diverses fonts consultades, essencialment el diccionari nord-americà Merriam-Webster[1] i els diccionaris britànics Oxford[2] i Cambridge.[3]

Els noms catalans de les lletres són els que apareixen en el DIEC2 [4] «Diccionari de la llengua catalana, 2a edició (2007)». Altres noms utilitzats en les diverses fonts consultades són:

B, β : vita.	H, η : ita.	T, τ : taf.
Z, ζ : zita.	Θ, θ : thita.	ξ, Ξ: csi.[5]

Els noms castellans de les lletres són els que apareixen en el D.R.A.E.[6] «Diccionario de la Lengua Española, 23ª edición (2014)». Altres noms utilitzats en les diverses fonts consultades són:

Z, ζ : zeta,[7] dseda,[8] dzeta.	M, μ : my,[7] mu.	P, ρ : rho.
Θ, θ : theta,[7] thita.	N, ν : ny,[7] nu.	Υ, υ : úpsilon.
K, κ : cappa.	O, o : omicrón.	Φ, ϕ : phi.

Els noms francesos de les lletres són els que apareixen en el «Dictionnaire de l'Académie française, neuvième édition».[9]

[1] Aquest diccionari es pot consultar a l'adreça: www.merriam-webster.com.
[2] Aquest diccionari es pot consultar a l'adreça: www.oed.com.
[3] Aquest diccionari es pot consultar a l'adreça: dictionary.cambridge.org.
[4] Aquest diccionari es pot consultar a l'adreça: dlc.iec.cat.
[5] El nom «csi» apareix juntament amb «ksi» en el «Gran Diccionari de la Llengua Catalana» (1999). Aquest diccionari es pot consultar a l'adreça: www.enciclopedia.cat/obra/diccionaris/gran-diccionari-de-la-llengua-catalana.
[6] Aquest diccionari es pot consultar a l'adreça: www.rae.es.
[7] Els noms «zeta», «theta», «my» i «ny» eren els que apareixien en les edicions del D.R.A.E anteriors a la 21a (1992).
[8] El nom «dseda» era el que apareixia en l'edició 22a (2001) del D.R.A.E.
[9] Aquest diccionari es pot consultar a l'adreça: www.academie-francaise.fr/le-dictionnaire/la-9e-edition.

Apèndix B

Sistema Internacional d'Unitats (SI)

B.1 Introducció

S'expliquen a continuació qüestions relacionades amb el sistema internacional d'unitats (SI), el qual està definit pel BIPM «Bureau International des Poids et Mesures». S'ha utilitzat la publicació més recent d'aquest organisme, corresponent a la 9a edició de l'any 2019; podeu trobar més informació a les següents adreces del BIPM: www.bipm.org i www.bipm.org/en/si/si_brochure.

El NIST «National Institute of Standards and Technology» també té informació referent al sistema internacional d'unitats, a l'adreça: www.nist.gov/pml/div684/fcdc/si-units.cfm.

Dins de l'Estat Espanyol, el Sistema Internacional d'Unitats és d'ús oficial segons el Reial Decret 2032/2009 de 30 de desembre. Es poden descarregar versions en català, castellà i gallec, d'aquest decret a l'adreça: www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2010-927.

Els noms de totes les unitats s'escriuen tal com apareixen en el DIEC2 «Diccionari de la llengua catalana, 2a edició (2007)».

B.2 Unitats fonamentals de l'SI

En la Taula B.1 es poden veure les unitats fonamentals del sistema internacional d'unitats.

Taula B.1 Unitats fonamentals de l'SI

Magnitud	Unitat	Símbol
temps	segon	s
longitud	metre	m
massa	quilogram[a]	kg
intensitat de corrent elèctric	ampere	A
temperatura termodinàmica	kelvin	K
quantitat de matèria	mol	mol
intensitat lluminosa	candela	cd

[a] La variant «kilogram» també és correcta, segons el DIEC2.

La definició d'aquestes unitats fonamentals ha tingut un canvi molt important, a partir de l'entrada en vigor el 20 de maig de 2019 d'una nova definició basada en constants de la natura.

B.2.1 Definicions històriques

Es donen a continuació les definicions històriques de les unitats fonamentals (prèvies al 20 de maig de 2019), les quals es consideren obsoletes. Entre parèntesis s'indica l'any que la «Conférence Générale des Poids et Mesures» les va posar en vigor.

segon És la durada de 9 192 631 770 períodes de la radiació corresponent a la transició entre els dos nivells hiperfins de l'estat fonamental de l'àtom de cesi-133. (1967).

metre És la longitud de la trajectòria recorreguda per la llum en el buit, durant un temps de $\frac{1}{299\,792\,458}$ segon. (1983).

quilogram És la massa del prototip internacional del quilogram, fet d'un aliatge de platí-iridi i conservat al BIPM, a Sèvres, França. (1901).

ampere És la intensitat d'un corrent constant, que mantinguda en dos conductors paral·lels rectilinis de longitud infinita, de secció transversal negligible, i situats en el buit a una distància l'un de l'altre d'un metre, produeix entre aquests dos conductors una força igual a 2×10^{-7} newton per metre de longitud. (1948).

kelvin És la fracció $\frac{1}{273{,}16}$ de la temperatura termodinàmica corresponent al punt triple de l'aigua. (1967).

mol És la quantitat de matèria d'un sistema que conté tantes entitats elementals com àtoms hi ha en 0,012 kg de carboni-12. (1971).

candela És la intensitat lluminosa, en una direcció determinada, d'una font que emet radiació monocromàtica de freqüència 540×10^{12} hertz, i que té una intensitat radiant en aquesta direcció de $\frac{1}{683}$ watt per estereoradiant. (1979).

B.2.2 Definicions actuals

Les definicions actuals de les unitats fonamental de l'SI, que van entrar en vigor el 20 de maig de 2019, estan basades en set constants de la natura. En concret, l'SI es defineix con el sistema d'unitats en el qual:

- La freqüència de la transició hiperfina de l'estat fonamental de l'àtom de cesi-133 no pertorbat, $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$, és igual a 9 192 631 770 Hz.
- La velocitat de la llum en el buit, c, és igual a 299 792 458 m/s.
- La constant de Planck, h, és igual a $6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J s.
- La càrrega elemental, e, és igual a $1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C.
- La constant de Boltzmann, k, és igual a $1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ J/K.

- La constant d'Avogadro, N_A, és igual a $6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$.
- L'eficàcia lluminosa d'una radiació monocromàtica de freqüència 540×10^{12} Hz, K_{cd}, és igual a 683 lm/W.

Les unitats hertz, joule, coulomb, lumen i watt, amb els símbols respectius Hz, J, C, lm, i W, estan relacionades amb les unitats segon, metre, quilogram, ampere, kelvin, mol i candela, amb els símbols respectius s, m, kg, A, K, mol i cd, segons: $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$, $\mathrm{J} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$, $\mathrm{C} = \mathrm{A\,s}$, $\mathrm{lm} = \mathrm{cd\,m^2\,m^{-2}} = \mathrm{cd\,sr}$, i $\mathrm{W} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$.

El valor numeric de cadascuna d'aquestes set constants és exacte (vegeu l'apèndix C a la pàgina 283).

A partir d'aquestes constants, les definicions de les unitats fonamental de l'SI són les següents:

segon El segon, amb símbol s, es defineix a partir de la constant $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$ expressada en la unitat Hz, la qual és equivalent a s^{-1}:

$$1\ \mathrm{s} = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}$$

La conseqüència d'aquesta definició és que el segon és igual a la durada de 9 192 631 770 períodes de la radiació corresponent a la transició entre els dos nivells hiperfins de l'estat fonamental de l'àtom de cesi-133 no pertorbat.

metre El metre, amb símbol m, es defineix a partir de la constant c expressada en les unitats $\mathrm{m\,s^{-1}}$, on el segon està definit en funció de la constant $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\ \mathrm{m} = \left(\frac{c}{299\,792\,458}\right)\mathrm{s} = \frac{9\,192\,631\,770}{299\,792\,458}\frac{c}{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}$$

La conseqüència d'aquesta definició és que el metre és igual a la longitud de la trajectòria recorreguda per la llum en el buit, durant un temps de $\frac{1}{299\,792\,458}$ s.

quilogram El quilogram, amb símbol kg, es defineix a partir de la constant h expressada en les unitats J s, equivalents a $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$, on el metre i el segon estan definits en funció de les constant c i $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\ \mathrm{kg} = \left(\frac{h}{6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}}\right)\mathrm{m^{-2}\,s} = \frac{299\,792\,458^2}{6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34} \times 9\,192\,631\,770}\frac{h\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}}{c^2}$$

Aquesta definició permet definir la unitat $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ (unitat de les quantitats físiques acció i moment cinètic). Conjuntament amb les definicions del segon i del metre, això porta a definir la unitat de massa en termes de la constant de Planck.

ampere L'ampere, amb símbol A, es defineix a partir de la constant e expressada en la unitat C, equivalent a A s, on el segon està definit en funció de la constant $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\ \mathrm{A} = \left(\frac{e}{1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}}\right)\mathrm{s^{-1}} = \frac{1}{9\,192\,631\,770 \times 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}}\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}e$$

La conseqüència d'aquesta definició és que l'ampere és igual al corrent elèctric corresponent al flux de $\frac{1}{1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}}$ càrregues elementals per segon.

kelvin El kelvin, amb símbol K, es defineix a partir de la constant k expressada en les unitats $\mathrm{J\,K^{-1}}$, equivalents a $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,K^{-1}}$, on el quilogram, el metre i el segon estan definits en funció de les constant h, c i $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\,\mathrm{K} = \left(\frac{1{,}380\,649\times10^{-23}}{k}\right)\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} = \frac{1{,}380\,649\times10^{-23}}{6{,}626\,070\,15\times10^{-34}\times9\,192\,631\,770}\,\frac{\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}h}{k}$$

La conseqüència d'aquesta definició és que el kelvin és igual al canvi de la temperatura termodinàmica resultant d'un canvi d'energia tèrmica de $1{,}380\,649\times10^{-23}$ J.

mol El mol, amb símbol mol, es defineix a partir de la constant N_{A}, expressada en la unitat $\mathrm{mol^{-1}}$:

$$1\,\mathrm{mol} = \frac{6{,}022\,140\,76\times10^{23}}{N_{\mathrm{A}}}$$

La conseqüència d'aquesta definició és que el mol és igual a la quantitat de matèria d'un sistema que conté $6{,}022\,140\,76\times10^{23}$ unitats elementals.

candela La candela, amb símbol cd, es defineix a partir de la constant K_{cd} expressada en les unitats $\mathrm{lm\,W^{-1}}$, equivalents a $\mathrm{cd\,sr\,kg^{-1}\,m^{-2}\,s^{3}}$, on el quilogram, el metre i el segon estan definits en funció de les constant h, c i $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

$$1\,\mathrm{cd} = \left(\frac{K_{\mathrm{cd}}}{683}\right)\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}\,sr^{-1}} = \frac{1}{6{,}626\,070\,15\times10^{-34}\times9\,192\,631\,770^2\times683}\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}^2 hK_{\mathrm{cd}}$$

La conseqüència d'aquesta definició és que la candela és igual a la intensitat lluminosa, en una direcció determinada, d'una font que emet radiació monocromàtica de freqüència 540×10^{12} Hz, i que té una intensitat d'energia en aquesta direcció de $\frac{1}{683}$ W/sr.

B.3 Prefixes de l'SI

En la Taula B.2 es presenta una llista amb els prefixes que es poden anteposar a les unitats del sistema internacional d'unitats, per tal de formar-ne els múltiples i submúltiples.

Taula B.2 Prefixes de l'SI

Múltiples			Submúltiples		
factor	nom	símbol	factor	nom	símbol
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	µ
10^{3}	quilo[a]	k	10^{-3}	mil·li	m
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d

[a] La variant «kilo» també és correcta, segons el DIEC2.

B.4 Unitats derivades de l'SI amb noms i símbols propis

De forma convenient, s'ha donat noms i símbols propis a algunes unitats derivades de les fonamentals; en la Taula B.3 es mostren aquestes unitats derivades de l'SI.

Taula B.3 Unitats derivades de l'SI amb noms i símbols propis

Magnitud	Unitat	Símbol	Equivalència en unitats SI	
			fonamentals	altres
angle pla	radiant[a]	rad	m/m	1
angle sòlid	estereoradiant[b]	sr	m^2/m^2	1
freqüència	hertz	Hz	s^{-1}	—
força	newton	N	$kg\,m\,s^{-2}$	—
pressió	pascal	Pa	$kg\,m^{-1}\,s^{-2}$	N/m^2
energia, treball	joule	J	$kg\,m^2\,s^{-2}$	N m
potència	watt	W	$kg\,m^2\,s^{-3}$	J/s
càrrega elèctrica	coulomb	C	A s	—
potencial elèctric	volt	V	$kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-1}$	W/A
capacitat elèctrica	farad	F	$kg^{-1}\,m^{-2}\,s^4\,A^2$	C/V
resistència elèctrica	ohm	Ω	$kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-2}$	V/A
conductància elèctrica	siemens	S	$kg^{-1}\,m^{-2}\,s^3\,A^2$	A/V
flux magnètic	weber	Wb	$kg\,m^2\,s^{-2}\,A^{-1}$	V s
densitat de flux magnètic	tesla	T	$kg\,s^{-2}\,A^{-1}$	Wb/m^2
inductància	henry	H	$kg\,m^2\,s^{-2}\,A^{-2}$	Wb/A
temperatura Celsius	grau Celsius	°C	K	—
flux lluminós	lumen	lm	cd sr	—
il·luminació	lux	lx	$cd\,sr\,m^{-2}$	lm/m^2
activitat d'un radionúclid	becquerel	Bq	s^{-1}	—
dosi absorbida	gray	Gy	$m^2\,s^{-2}$	J/kg
dosi equivalent	sievert	Sv	$m^2\,s^{-2}$	J/kg
activitat catalítica	katal	kat	$mol\,s^{-1}$	—

[a] La variant «radian» també és correcta, segons el DIEC2.
[b] La variant «estereoradian» també és correcta, segons el DIEC2.

B.5 Altres unitats derivades de l'SI

Les unitats fonamentals (vegeu la Taula B.1 a la pàgina 267) i les unitats derivades amb noms i símbols propis (vegeu la Taula B.3) poden combinar-se entre si per tal d'expressar noves unitats derivades.

En la Taula B.4 a la pàgina següent es mostren alguns exemples d'aquestes combinacions.

Taula B.4 Exemples d'altres unitats derivades de l'SI

Magnitud	Unitats	Equivalència en unitats fonamentals SI
viscositat dinàmica	Pa s	$\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$
moment d'una força	N m	$\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-2}}$
tensió superficial	N/m	$\mathrm{kg\,s^{-2}}$
velocitat angular	rad/s	$\mathrm{m\,m^{-1}\,s^{-1} = s^{-1}}$
acceleració angular	$\mathrm{rad/s^2}$	$\mathrm{m\,m^{-1}\,s^{-2} = s^{-2}}$
densitat de flux de calor	$\mathrm{W/m^2}$	$\mathrm{kg\,s^{-3}}$
entropia	J/K	$\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-2}\,K^{-1}}$
entropia específica	J/(kg K)	$\mathrm{m^{2}\,s^{-2}\,K^{-1}}$
energia específica	J/kg	$\mathrm{m^{2}\,s^{-2}}$
conductivitat tèrmica	W/(m K)	$\mathrm{kg\,m\,s^{-3}\,K^{-1}}$
densitat d'energia	$\mathrm{J/m^3}$	$\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$
intensitat de camp elèctric	V/m	$\mathrm{kg\,m\,s^{-3}\,A^{-1}}$
densitat de càrrega elèctrica	$\mathrm{C/m^3}$	$\mathrm{A\,s\,m^{-3}}$
densitat de flux elèctric	$\mathrm{C/m^2}$	$\mathrm{A\,s\,m^{-2}}$
permitivitat	F/m	$\mathrm{kg^{-1}\,m^{-3}\,s^{4}\,A^{2}}$
permeabilitat	H/m	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,A^{-2}}$
energia molar	J/mol	$\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-2}\,mol^{-1}}$
entropia molar	J/(mol K)	$\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-2}\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
exposició (raigs x i γ)	C/kg	$\mathrm{A\,s\,kg^{-1}}$
tassa de dosi absorbida	Gy/s	$\mathrm{m^{2}\,s^{-3}}$
intensitat radiant	W/sr	$\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-3}\,sr^{-1}}$
radiància	$\mathrm{W/(sr\,m^2)}$	$\mathrm{kg\,s^{-3}\,sr^{-1}}$
concentració d'activitat catalítica	$\mathrm{kat/m^3}$	$\mathrm{mol\,s^{-1}\,m^{-3}}$

B.6 Unitats fora de l'SI

Hi ha una sèrie d'unitats que no formem part de l'SI però que són d'ús comú en el camp científic, tècnic o comercial, i que són usades freqüentment. En les taules següents es recullen algunes d'aquestes unitats.

En la Taula B.5 es mostren les unitats fora de l'SI, l'ús de les quals s'accepta en conjunció amb el Sistema Internacional d'Unitats, ja que són presents en la vida diària i es preveu que el seu ús continuï de forma indefinida. Cadascuna d'aquestes unitats té una definició exacte en termes d'unitats de l'SI.

Taula B.5 Unitats fora de l'SI acceptades per a ser usades amb l'SI

Magnitud	Unitat	Símbol	Valor en unitats SI
temps	minut	min	1 min = 60 s
temps	hora	h	1 h = 60 min = 3600 s
temps	dia	d	1 d = 24 h = 86 400 s
longitud	unitat astronòmica[a]	au	1 au = 149 597 870 700 m

(continua a la pàgina següent)

Taula B.5 Unitats fora de l'SI acceptades per ser usades amb l'SI (*ve de la pàgina anterior*)

Magnitud	Unitat	Símbol	Valor en unitats SI
angle pla	grau	$^\circ$	$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad
angle pla	minut	$'$	$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \frac{\pi}{10800}$ rad
angle pla	segon	$''$	$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \frac{\pi}{648000}$ rad
superfície	hectàrea[b]	ha	$1\ \mathrm{ha} = 1\ \mathrm{hm}^2 = 10^4\ \mathrm{m}^2$
volum	litre[c]	l, L	$1\ \mathrm{l} = 1\ \mathrm{L} = 1\ \mathrm{dm}^3 = 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$
massa	tona[d]	t	$1\ \mathrm{t} = 1000\ \mathrm{kg}$
massa	dalton[e]	Da	$1\ \mathrm{Da} = 1{,}660\,539\,066\,0(50) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
energia	electró-volt[f]	eV	$1\ \mathrm{eV} = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$
logaritme d'una relació	neper[g]	Np	—
logaritme d'una relació	bel[g]	B	—
logaritme d'una relació	decibel[g]	dB	—

[a] La «unitat astronòmica» va ser redefinida l'any 2012 en la 28a Assemblea General de la Unió Astronòmica Internacional (www.iau.org), passant a ser un valor exacte.
[b] L'«hectàrea» s'utilitza per expressar superfícies agràries.
[c] El símbol «L» es va adoptar posteriorment al símbol «l» per evitar la possible confusió entre la lletra ela minúscula i el número 1.
[d] En el països de parla anglesa aquesta unitat és coneguda com a «tona mètrica».
[e] El «dalton» i la «unitat de massa atòmica unificada», amb símbol u, són dos noms alternatius d'una mateixa unitat. El seu valor és el de la constant de massa atòmica m_u (vegeu la Taula C.1 a la pàgina 283).
[f] Un «electró-volt» és l'energia cinètica que adquireix un electró després de creuar una diferència de potencial d'un volt en el buit. El seu valor és exacte (vegeu la Taula C.1 a la pàgina 283).
[g] Aquestes unitats adimensionals s'utilitzen per expressar logaritmes de relacions entre quantitats. Per exemple, n Np fa referència a una relació del tipus $ln\frac{A_2}{A_1} = n$, i m dB $= \frac{m}{10}$ B fa referència a una relació del tipus $\log\frac{A_2}{A_1} = \frac{m}{10}$.

Encara que hi ha moltes més unitats que no formen part de l'SI, que o bé són d'interès històric, o bé continuen utilitzant-se en aplicacions específiques, s'en desaconsella totalment l'ús en textos científics i tècnics moderns. Es dona, no obstant, en la Taula B.6 quatre unitats fora de l'SI acceptades addicionalment pel NIST «National Institute of Standards and Technology», ja que s'han utilitzat tradicionalment en els Estats Units d'Amèrica; aquest organisme desaconsella però continuar usant aquestes unitats, i recomana en canvi l'ús de les unitats equivalents de l'SI.

Taula B.6 Altres unitats fora de l'SI acceptades pel NIST

Magnitud	Unitat	Símbol	Valor en unitats SI
activitat d'un radionúclid	curie	Ci	$1\ \mathrm{Ci} = 3{,}7 \times 10^{10}\ \mathrm{Bq}$
dosi absorbida	rad	rad[a]	$1\ \mathrm{rad} = 10^{-2}\ \mathrm{Gy}$
dosi equivalent	rem	rem	$1\ \mathrm{rem} = 10^{-2}\ \mathrm{Sv}$
exposició (raigs x i γ)	roentgen	R	$1\ \mathrm{R} = 2{,}58 \times 10^{-4}\ \mathrm{C/kg}$

[a] Quan hi hagi perill de confusió amb el símbol del radiant, es podrà utilitzar el símbol «rd» en lloc del símbol «rad».

B.7 Unitats definides en la norma CEI 60027

La norma CEI 60027 «Letter symbols to be used in electrical technology» adopta totes les unitats definides per l'SI, però en defineix algunes d'addicionals.

B.7.1 Unitats informàtiques i prefixes de potències binàries

La norma CEI 60027-2 «Letter symbols to be used in electrical technology – Part 2: Telecommunications and electronics», defineix símbols d'unitats informàtiques i prefixes de potències binàries que cal usar amb aquestes unitats.

En la Taula B.7 es mostren el símbols d'unitats informàtiques.

Taula B.7 Unitats informàtiques

Nom	Símbol
bit	bit
octet, byte	B

En la Taula B.8 es mostren els prefixes de potències binàries.

Taula B.8 Prefixes de potències binàries

Nom	Símbol	Factor
yobi	Yi	$2^{80} \approx 1{,}2089 \times 10^{24}$
zebi	Zi	$2^{70} \approx 1{,}1806 \times 10^{21}$
exbi	Ei	$2^{60} \approx 1{,}1529 \times 10^{18}$
pebi	Pi	$2^{50} \approx 1{,}1259 \times 10^{15}$
tebi	Ti	$2^{40} \approx 1{,}0995 \times 10^{12}$
gibi	Gi	$2^{30} \approx 1{,}0737 \times 10^{9}$
mebi	Mi	$2^{20} \approx 1{,}0486 \times 10^{6}$
kibi	Ki	$2^{10} = 1024$

Utilitzant aquests prefixes podem escriure per exemple:

$$1\,\mathrm{MiB} = 2^{20}\,\mathrm{B} = 1\,048\,576\,\mathrm{B}$$

El prefix «M» de l'SI indica, en canvi, un altre valor:

$$1\,\mathrm{MB} = 10^{6}\,\mathrm{B} = 1\,000\,000\,\mathrm{B}$$

B.7.2 Unitats de potència elèctrica

Tot i que la potència es mesura en watt, la norma CEI 60027-1 «Letter symbols to be used in electrical technology – Part 1: General», defineix noms i símbols d'unitats diferenciats per a les potències activa, reactiva i aparent.

En la Taula B.9 es mostren aquestes unitats de potència elèctrica.

Taula B.9 Unitats de potència elèctrica

Magnitud	Unitat	Símbol	Valor en unitats SI
potència activa	watt	W	1 W = 1 W
potència reactiva	var	var	1 var = 1 W
potència aparent	voltampere	VA	1 VA = 1 W

B.7.3 Unitats relatives a màquines elèctriques rotatòries

Hi ha dues magnituds que poden expressar el mateix fenomen físic de rotació d'un cos; una és la freqüència f, expressada en herz, la qual indica el nombre de cicles (voltes o revolucions senceres) per unitat de temps, i l'altra és la velocitat angular ω, expressada en radiant per segon, la qual indica l'angle girat per unitat de temps. La relació entre ambdues magnituds és:

$$\omega = 2\pi f \tag{B.1}$$

Quan es tracta de motors o d'altres màquines elèctriques rotatòries, la norma CEI 60027-1 «Letter symbols to be used in electrical technology – Part 1: General», estableix «r» com el símbol internacional de «revolució»; d'aquesta manera es fa innecessari utilitzar altres formes que varien segons l'idioma, com per exemple «rev/min» o «rpm» (revolucions per minut) en català, o «tr/min» (tours par minute) en francès.

En la Taula B.10 es poden veure aquestes unitats relatives a màquines elèctriques rotatòries.

Taula B.10 Unitats relatives a màquines elèctriques rotatòries

Magnitud	Unitat	Símbol	Valor en unitats SI
angle pla	revolució	r	$1\ \mathrm{r} = 2\pi\ \mathrm{rad}$
velocitat angular	revolució per segon	r/s	$1\ \mathrm{r/s} = 2\pi\ \mathrm{rad/s}$
velocitat angular	revolució per minut	r/min	$1\ \mathrm{r/min} = \frac{2\pi}{60}\ \mathrm{rad/s}$

B.8 Normes d'escriptura

Es presenten a continuació algunes normes aplicables a l'escriptura de les unitats del sistema internacional d'unitats.

Després de cadascuna de les explicacions es donen exemples d'escriptures correctes, precedides pel símbol ✅, exemples d'escriptures incorrectes, precedides pel símbol ❌, i exemples d'escriptures correctes però no recomanades, precedides pel símbol ❓.

- El prefix utilitzat per simbolitzar 1000 és la lletra «k» (minúscula). La lletra «K» (majúscula) és el símbol del kelvin; cal tenir en compte que «°K» no és correcte. En canvi, el símbol del grau Celsius és «°C», ja que la lletra «C» sola és el símbol del coulomb.

- ✅ 6,9 kV
- ❌ 6,9 KV
- ✅ 100 °C = 373,15 K
- ❌ 100 C = 373,15 °K

- Els símbols de les unitats no han d'anar seguits d'un punt, llevat que es trobin al final d'una oració, ja que no són pas abreviatures.
  - ✅ La tensió existent de 25 V és inferior a la necessària.
  - ❌ La tensió existent de 25 V. és inferior a la necessària.
  - ✅ Aquest interruptor és de 40 A i 2 pols.
  - ❌ Aquest interruptor és de 40 A. i 2 pols.

- Els símbols de les unitats no canvien de forma en el plural, no han d'utilitzar-se abreviatures ni han d'afegir-se o suprimir-se lletres.
  - ✅ 150 kg
  - ❌ 150 Kgs
  - ✅ 25 m
  - ❌ 25 mts
  - ✅ 33 cm^3
  - ❌ 33 cc
  - ✅ 20 s
  - ❌ 20 seg
  - ✅ 80 km/h
  - ❌ 80 kph
  - ✅ 1500 r/min
  - ❌ 1500 rpm

- No han de barrejar-se noms i símbols d'unitats.
  - ✅ 4 rad/s
  - ❌ 4 rad/segon
  - ✅ 4 radiant per segon
  - ❌ 4 radiant/s
  - ✅ 100 km/h
  - ❌ 100 km/hora
  - ✅ 100 quilòmetre per hora
  - ❌ 100 quilòmetre/h

- Els símbols de les unitats s'escriuen a la dreta dels valors numèrics, separats per un espai en blanc.

  ✅ 25 V

  ❌ 25V

  ✅ 40 °C

  ❌ 40°C

  ✅ 20 nF

  ❌ 20nF

  L'única excepció al punt anterior és la mesura d'angles en graus, minuts i segons; en aquest cas s'escriu el valor i la unitat tot junt.

  ✅ 45°

  ❌ 45 °

  ✅ 15° 32′ 8″

  ❌ 15 ° 32 ′ 8 ″

- En el cas de símbols d'unitats derivades formats pel producte d'altres unitats, el producte s'indicarà mitjançant un punt volat o un espai en blanc.

  ✅ 2000 kW·h

  ✅ 2000 kW h

  ❌ 2000 kW–h

  ❌ 2000 KWh

  Quan s'utilitza un espai en blanc cal tenir en compte l'ordre en què s'escriuen les unitats, ja que algunes combinacions poden crear confusió i és millor evitar-les, per exemple: 24 N m (24 newton metre) i 24 m N (24 metre newton) són expressions equivalents, però aquesta darrera forma d'escriptura pot ser confosa amb 24 mN (24 mil·linewton).

  ✅ 24 N m

  ❓ 24 m N

- En el cas de símbols d'unitats derivades formats per la divisió d'altres unitats, la divisió s'indicarà mitjançant una línia inclinada o horitzontal, o mitjançant potències negatives.

  ✅ 100 m/s

  ✅ $100\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

  ✅ $100\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

  ❌ 100 m ÷ s

  En el cas anterior, quan s'utilitza la línia inclinada i hi ha més d'una unitat en el denominador, aquestes unitats s'han d'escriure entre parèntesis.

  ✅ $5\ \mathrm{m\,kg/(s^3\,A)}$

  ❌ $5\ \mathrm{m\,kg/s^3\,A}$

  ❌ $5\ \mathrm{m\,kg/s^3/A}$

- No ha de deixar-se cap espai en blanc entre el símbol d’un prefix i el símbol d’una unitat.

  ✅ 12 mm

  ❌ 12 m m

  ✅ 3 GHz

  ❌ 3 G Hz

- El grup format pel símbol d’un prefix i el símbol d’una unitat esdevé un nou símbol inseparable (formant un múltiple o submúltiple de la unitat), i pot ser pujat a una potència positiva o negativa i combinat amb altres símbols.

  ✅ 20 km^2

  ❌ 20 (km)^2

  ✅ 12 kg /mm^2

  ❌ 12 kg /(mm)^2

- Només es permet un prefix davant d’una unitat.

  ✅ 8 nm

  ❌ 8 mµm

- No es permeten prefixes aïllats.

  ✅ El nombre de partícules es de 5×10^6/ m^3

  ❌ El nombre de partícules es de 5 M /m^3

- En el cas dels símbols d’unitats derivades formades per la divisió d’altres unitats, l’ús de prefixes en el numerador i denominador de forma simultània pot causar confusió, i és preferible per tant, utilitzar una alta combinació d’unitats on només el numerador o el denominador tinguin prefix.

  ✅ 10 MV/m

  ❓ 10 kV/mm

- De forma anàloga, el mateix és aplicable als símbols d’unitats derivades formades pel producte d’altres unitats.

  ✅ 10 kV s

  ❓ 10 MV ms

- Els noms de les unitats de l’SI s’escriuen en minúscula, excepte en el cas de «grau Celsius», i a l’inici d’una oració.

  ✅ 10 newton

  ❌ 10 Newton

  ✅ 100 watt

  ❌ 100 Watt

  ✅ 24 volt

  ❌ 24 Volt

  ✅ 20 grau Celsius

  ❌ 20 grau celsius

- Les unitats que tenen noms provinents de noms propis s'han d'escriure tal com apareixen en les taules B.1 a la pàgina 267, B.3 a la pàgina 271, B.5 a la pàgina 272, i B.6 a la pàgina 273, i no s'han de traduir.
  - ✅ 50 newton
  - ❎ 50 neuton
  - ✅ 300 joule
  - ❎ 300 juls
  - ✅ 10^{-6} farad
  - ❎ 10^{-6} faradis
- Quan el nom d'una unitat conté un prefix, ambdues parts s'han d'escriure juntes sense cap espai o element d'unió.
  - ✅ 1 mil·ligram
  - ❎ 1 mil·li gram
  - ❎ 1 mil·li-gram
  - ✅ 980 hectopascal
  - ❎ 980 hecto pascal
  - ❎ 980 hecto-pascal
- En el cas d'unitats derivades que s'expressen amb divisions o productes, s'utilitza la preposició «per» entre dos noms d'unitats per indicar-ne la divisió, i no s'utilitza cap paraula per indicar-ne el producte.
  - ✅ 1 m/s és 1 metre per segon
  - ❎ 1 m/s és 1 metre segon
  - ❎ 1 m/s és 1 metre dividit per segon
  - ✅ 20 Ω m són 20 ohm metre
  - ❎ 20 Ω m són 20 ohm per metre
  - ❎ 20 Ω m són 20 ohm multiplicat per metre
- El valor d'una quantitat ha d'expressar-se utilitzant únicament una unitat.
  - ✅ 10,234 m
  - ❎ 10 m 23 cm 4 mm
- Quan s'expressa el valor d'una quantitat, és incorrecte afegir lletres o altres símbols a la unitat; qualsevol informació addicional necessària ha d'afegir-se a la quantitat.
  - ✅ $U_{\mathrm{rms}} = 220\ \mathrm{V}$
  - ❎ $U = 220\ \mathrm{V}_{\mathrm{rms}}$
  - ✅ $I_{\max} = 36\ \mathrm{kA}$
  - ❎ $I = 36\ \mathrm{kA}_{\max}$

- El separador decimal entre la part entera i decimal d'un valor por ser el punt o la coma. L'ús de l'un o l'altre varia segons el país. Si el valor és comprès entre -1 i +1, és obligatori escriure un zero davant del separador decimal.

  ✅ 0,25 A

  ❌ ,25 A

  ✅ 0.25 A

  ❌ .25 A

- Quan un valor té moltes xifres, les xifres poden dividir-se en grups de tres mitjançant un espai curt per tal de millorar-ne la llegibilitat. No s'han d'utilitzar punts o comes per separar aquests grups de tres xifres.

  ✅ 43 279,168 29 kg

  ✅ 43279,16829 kg

  ❌ 43.279,168.29 kg

El document «Guide for the Use of the International System of Units (SI)», publicat pel NIST, fa a més les recomanacions següents:

- Quan s'indiquen valors de magnituds amb les seves desviacions, s'indiquen intervals o s'expressen diversos valors numèrics, les unitats han de ser presents en cadascun dels valors o s'han d'usar parèntesis si es vol posar les unitats només al final.

  ✅ 63,2 m ± 0,1 m

  ✅ (63,2 ± 0,1) m

  ❌ 63,2 ± 0,1 m

  ❌ 63,2 m ± 0,1

  ✅ 4 mA a 20 mA

  ✅ (4 a 20) mA

  ❌ 4 a 20 mA

  ✅ 800 mm × 600 mm × 300 mm

  ✅ (800 × 600 × 300) mm

  ❌ 800 × 600 × 300 mm

  ✅ 127 s + 3 s = 130 s

  ✅ (127 + 3) s = 130 s

  ❌ 127 + 3 s = 130 s

  ✅ 70 % ± 5 %

  ✅ (70 ± 5) %

  ❌ 70 ± 5 %

  ✅ 240 × (1 ± 10 %) V

  ❌ 240 V ± 10 %

- Cal evitar la utilització de «ppm» (parts per milió) i «ppb» (parts per bilió). El cas «ppb» és especialment problemàtic, ja que 1 bilió equival a 10^{12} a Europa continental i altres països, mentre que 1 bilió equival a 10^{9} a la Gran Bretanya, als Estats Units d'Amèrica i altres països.

  ✅ La concentració d'àcid en aigua és de 25 µL/L

  ❌ La concentració d'àcid en aigua és de 25 ppm

B.9 Factors de conversió d'unitats

Donat que la quantitat d'unitats existents és enorme, tenint en compte tant les que pertanyen a l'SI com les que no, es dona en aquest apartat l'adreça de la pàgina web del NIST «National Institute of Standards and Technology», on hi ha recollits un bon nombre de factors de conversió d'unitats que són rellevants en el món de la ciència i l'enginyeria.

La pàgina web en qüestió, www.nist.gov/pml/pubs/sp811/appenb.cfm, correspon a l'apèndix B de la publicació «Guide for the Use of the International System of Units (SI)». Dins d'aquesta pàgina web, l'enllaç B.8 ens porta a una llista de factors de conversió ordenada alfabèticament, i l'enllaç B.9 ens porta a la mateixa llista de factors de conversió, però ordenada per categories.

També es pot descarregar a l'enllaç: https://dx.doi.org/10.6028/NIST.SP.1038, de la pàgina web del NIST, el document «The International System of Units (SI) – Conversion Factors for General Use», publicat l'any 2006.

Apèndix C

Constants Físiques

C.1 Taula de valors

En la Taula C.1 es pot veure una recopilació de constants físiques; les xifres entre parèntesis que hi apareixen representen l'error absolut del valor.

Els valors de les constants d'aquesta taula són els recomanats l'any 2018 pel «Committee on Data for Science and Technology» (CODATA), un comitè científic de l'«International Council for Science».

Podeu trobar més informació a les adreces: www.codata.org i physics.nist.gov/cuu/Constants.

Taula C.1 Constants físiques

Magnitud	Símbol	Valor	Error relatiu
freqüència de la transició hiperfina del cesi-133	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9 192 631 770 Hz	exacte
velocitat de la llum en el buit	c	299 792 458 m/s	exacte
constant de Planck	h	$6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J s	exacte
càrrega elemental	e	$1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C	exacte
constant de Boltzmann	k	$1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ J/K	exacte
constant d'Avogadro	N_A [a]	$6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$	exacte
eficàcia lluminosa	K_{cd} [b]	683 lm/W	exacte
constant de Planck reduïda: $h/(2\pi)$	$\hbar$	$1{,}054\,571\,817 \ldots \times 10^{-34}$ J s	exacte
constant d'Stefan-Boltzmann: $\pi^2 k^4/(60\,\hbar^3 c^2)$	σ	$5{,}670\,374\,419 \ldots \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2\,K^4)}$	exacte
constant molar dels gasos: $N_A k$	R	8,314 462 618 153 24 J/(mol K)	exacte
constant de Faraday: $N_A e$	F	96 485,332 123 310 018 4 C/mol	exacte
electró-volt	eV [c]	$1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ J	exacte

(continua a la pàgina següent)

Taula C.1 Constants físiques (*ve de la pàgina anterior*)

Magnitud	Símbol	Valor	Error relatiu
atmosfera estàndard	–	101 325 Pa	exacte
acceleració de la gravetat estàndard	g_n	$9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$	exacte
massa atòmica relativa del carboni-12	$A_r(^{12}\mathrm{C})$ [d]	12	exacte
constant de massa atòmica: $\frac{1}{12}m(^{12}\mathrm{C})$	m_u [d]	$1{,}660\,539\,066\,0(50)\times10^{-27}$ kg	3×10^{-10}
constant de massa molar: $N_A m_u$	M_u [d]	$0{,}999\,999\,999\,65(30)\times10^{-3}$ kg/mol	3×10^{-10}
massa molar del carboni-12: $A_r(^{12}\mathrm{C})\,M_u$	$M(^{12}\mathrm{C})$ [d]	$11{,}999\,999\,995\,8(36)\times10^{-3}$ kg/mol	3×10^{-10}
constant gravitacional de Newton	G	$6{,}674\,30(15)\times10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$	$2{,}2\times10^{-5}$
constant de l'estructura fina: $e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$	α	$7{,}297\,352\,569\,3(11)\times10^{-3}$	$1{,}5\times10^{-10}$
permeabilitat magnètica en el buit: $4\pi\alpha\hbar/(e^2c)$	μ_0	$1{,}256\,637\,062\,12(19)\times10^{-6}\ \mathrm{N/A^2}$	$1{,}5\times10^{-10}$
permeabilitat elèctrica en el buit: $1/(\mu_0c^2)$	ϵ_0	$8{,}854\,187\,812\,8(13)\times10^{-12}$ F/m	$1{,}5\times10^{-10}$
impedància característica del buit: $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}=\mu_0c$	Z_0	$376{,}730\,313\,668(57)\ \Omega$	$1{,}5\times10^{-10}$
massa de l'electró	m_e	$9{,}109\,383\,701\,5(28)\times10^{-31}$ kg	$3{,}0\times10^{-10}$
massa del protó	m_p	$1{,}672\,621\,923\,69(51)\times10^{-27}$ kg	$3{,}1\times10^{-10}$
massa del neutró	m_n	$1{,}674\,927\,498\,04(95)\times10^{-27}$ kg	$5{,}7\times10^{-10}$
massa del deuteri	m_d	$3{,}343\,583\,772\,4(10)\times10^{-27}$ kg	$3{,}0\times10^{-10}$
massa del triti	m_t	$5{,}007\,356\,744\,6(15)\times10^{-27}$ kg	$3{,}0\times10^{-10}$
massa de la partícula α	m_α	$6{,}644\,657\,335\,7(20)\times10^{-27}$ kg	$3{,}0\times10^{-10}$
radi de Bohr: $\hbar/(\alpha m_e c)=4\pi\epsilon_0\hbar^2/(m_e e^2)$	a_0	$5{,}291\,772\,109\,03(80)\times10^{-11}$ m	$1{,}5\times10^{-10}$
longitud d'ona Compton: $h/(m_e c)$	λ_C	$2{,}426\,310\,238\,67(73)\times10^{-12}$ m	$3{,}0\times10^{-10}$

[a] El valor numèric en si, es l'anomenat número d'Avogadro.

[b] K_{cd} és l'eficàcia lluminosa d'una radiació monocromàtica de freqüència 540×10^{12} Hz.

[c] Un «electró-volt» és l'energia cinètica que adquireix un electró després de creuar una diferència de potencial d'un volt en el buit.

[d] Donada una partícula X, $m(\mathrm{X})$ és la massa atòmica de la partícula X, $M(\mathrm{X})$ és la massa molar de la partícula X, i $A_r(\mathrm{X})$ és la massa atòmica relativa de la partícula X. Es compleixen les relacions següents: $M(\mathrm{X})=m(\mathrm{X})\,N_A$ i $A_r(\mathrm{X})=\frac{m(\mathrm{X})}{m_u}=\frac{M(\mathrm{X})}{M_u}$.

C.2 Error absolut i relatiu

Tal com s'ha dit al principi, les xifres entre parèntesis indiquen l'error absolut del valor que les precedeix. El nombre de xifres entre parèntesis determina la posició decimal d'aquest error; per exemple, en el cas de la massa de l'electró tenim:

$$m_{\mathrm{e}} = 9{,}109\,383\,701\,5(28) \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

Les dues xifres entre parèntesis, 28, determinen que la posició decimal de l'error absolut ha de correspondre a la posició de les dues últimes xifres, 15, del valor; l'error absolut ϵ és doncs:

$$\epsilon = 0{,}000\,000\,002\,8 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

Per tant, el valor de la massa de l'electró també es pot escriure's així:

$$m_{\mathrm{e}} = (9{,}109\,383\,701\,5 \pm 0{,}000\,000\,002\,8) \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

Finalment, l'error relatiu ϵ_{r} es calcula dividint l'error absolut pel valor sense l'error:

$$\epsilon_{\mathrm{r}} = \frac{0{,}000\,000\,002\,8 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}{9{,}109\,383\,701\,5 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}} = 3{,}0 \times 10^{-10}$$

Apèndix D

Relacions Trigonomètriques

D.1 Funcions Trigonomètriques

En la Taula D.1 es pot veure el signe de les funcions trigonomètriques, segons en quin dels quatre quadrants es trobi l'angle α. **I**: $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, **II**: $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, **III**: $\alpha \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, **IV**: $\alpha \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

Taula D.1 Signes de les funcions trigonomètriques en el quatre quadrants

$\sin\alpha > 0$	$\cos\alpha < 0$	$\tan\alpha < 0$			$\sin\alpha > 0$	$\cos\alpha > 0$	$\tan\alpha > 0$
$\csc\alpha > 0$	$\sec\alpha < 0$	$\cot\alpha < 0$	**II**	**I**	$\csc\alpha > 0$	$\sec\alpha > 0$	$\cot\alpha > 0$
$\sin\alpha < 0$	$\cos\alpha < 0$	$\tan\alpha > 0$	**III**	**IV**	$\sin\alpha < 0$	$\cos\alpha > 0$	$\tan\alpha < 0$
$\csc\alpha < 0$	$\sec\alpha < 0$	$\cot\alpha > 0$			$\csc\alpha < 0$	$\sec\alpha > 0$	$\cot\alpha < 0$

En la Taula D.2 es pot veure el valor de les funcions trigonomètriques per a diversos angles usuals.

Taula D.2 Valors de les funcions trigonomètriques per a diversos angles

α		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\cot\alpha$
rad	°						
0	0	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	0
π	180	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$
$\frac{3\pi}{2}$	270	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	0

Es presenten a continuació les funcions trigonomètriques d'angles en qualsevol quadrant, en funció d'un angle en el primer quadrant, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \csc(-\alpha) = -\csc\alpha \tag{D.1a}$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha \qquad \sec(-\alpha) = +\sec\alpha \tag{D.1b}$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \tag{D.1c}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = +\cos\alpha \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = +\sec\alpha \tag{D.2a}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\csc\alpha \tag{D.2b}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\cot\alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\tan\alpha \tag{D.2c}$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha \qquad \csc(\pi \pm \alpha) = \mp\csc\alpha \tag{D.3a}$$
$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha \qquad \sec(\pi \pm \alpha) = -\sec\alpha \tag{D.3b}$$
$$\tan(\pi \pm \alpha) = \pm\tan\alpha \qquad \cot(\pi \pm \alpha) = \pm\cot\alpha \tag{D.3c}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos\alpha \qquad \csc\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\sec\alpha \tag{D.4a}$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\sin\alpha \qquad \sec\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\csc\alpha \tag{D.4b}$$
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\cot\alpha \qquad \cot\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\tan\alpha \tag{D.4c}$$

$$\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm\sin\alpha \qquad \csc(2\pi \pm \alpha) = \pm\csc\alpha \tag{D.5a}$$
$$\cos(2\pi \pm \alpha) = +\cos\alpha \qquad \sec(2\pi \pm \alpha) = +\sec\alpha \tag{D.5b}$$
$$\tan(2\pi \pm \alpha) = \pm\tan\alpha \qquad \cot(2\pi \pm \alpha) = \pm\cot\alpha \tag{D.5c}$$

Es dona a continuació cadascuna de les funcions trigonomètriques en funció de totes les altres. El signe $\pm$ que apareix en les equacions, ve determinat pel quadrant on es troba l'angle α (vegeu la Taula D.1 a la pàgina anterior).

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha} = \frac{1}{\csc\alpha} \tag{D.6a}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\pm\sqrt{\csc^2\alpha - 1}}{\csc\alpha} \tag{D.6b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha} = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = \frac{1}{\pm\sqrt{\csc^2\alpha - 1}} \tag{D.6c}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha} = \pm\sqrt{1+\cot^2\alpha} = \frac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}} \tag{D.6d}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha} = \frac{\csc\alpha}{\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}} \tag{D.6e}$$

$$\cot\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}} = \pm\sqrt{\csc^2\alpha-1} \tag{D.6f}$$

Identitats fonamentals de les funcions trigonomètriques:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{D.7}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \tag{D.8}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \tag{D.9}$$

$$\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} \tag{D.10}$$

Funcions trigonomètriques de l'angle doble, i generalització per a $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \sin n\alpha = 2\sin[(n-1)\alpha]\cos\alpha - \sin[(n-2)\alpha] \tag{D.11a}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos n\alpha = 2\cos[(n-1)\alpha]\cos\alpha - \cos[(n-2)\alpha] \tag{D.11b}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \tan n\alpha = \frac{\tan[(n-1)\alpha] + \tan\alpha}{1 - \tan[(n-1)\alpha]\tan\alpha} \tag{D.11c}$$

Funcions trigonomètriques de l'angle meitat. El signe ± que apareix en les equacions, ve determinat pel quadrant on es troba l'angle $\frac{\alpha}{2}$ (vegeu la Taula D.1 a la pàgina 287):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{D.12a}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{D.12b}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{D.12c}$$

Funcions trigonomètriques de la suma i diferència d'angles:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \tag{D.13a}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha \tag{D.13b}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \tag{D.13c}$$

Suma i diferència de funcions trigonomètriques:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{D.14a}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{D.14b}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{D.14c}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{D.14d}$$

Producte de funcions trigonomètriques:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2} \tag{D.15a}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2} \tag{D.15b}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \tag{D.15c}$$

Producte de funcions trigonomètriques de la suma i diferència d'angles:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha \tag{D.16a}$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha \tag{D.16b}$$

Potències de funcions trigonomètriques:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \tag{D.17a}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} \qquad \cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4} \tag{D.17b}$$

$$\sin^4\alpha = \frac{3-4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8} \qquad \cos^4\alpha = \frac{3+4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8} \tag{D.17c}$$

Conversió de la suma d'una funció cosinus i una funció sinus, en una única funció cosinus o sinus ($A, B \in \mathbb{R}$):[1]

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\,\cos\left(\alpha - \arctan\frac{B}{A}\right) \tag{D.18a}$$

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\,\sin\left(\alpha - \arctan\frac{B}{A} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{D.18b}$$

D.2 Lleis trigonomètriques dels triangles

A continuació es presenten diverses lleis trigonomètriques relacionades amb els triangles. Aquestes lleis relacionen les longituds dels tres costats a, b i c d'un triangle qualsevol, com el de la Figura D.1 a la pàgina següent, amb els seus tres angles interiors α, β i γ, i amb els radis r i R de les circumferències inscrita i circumscrita al triangle. A, B i C són els vèrtexs del triangle i G n'és el baricentre.

[1] Cal tenir en compte que la funció arctan disponible en moltes calculadores i llenguatges de programació, torna de forma estandarditzada valors compresos entre $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$. En aquest cas cal sumar el valor π, quan A és negatiu, a l'angle obtingut amb la funció arctan per tal d'obtenir l'angle en el quadrant correcte.

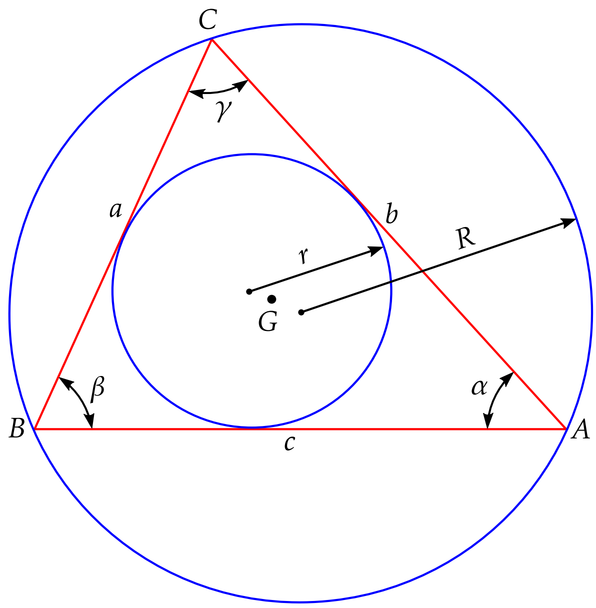


Figura D.1 Lleis trigonomètriques dels triangles

La llei dels sinus ens dona la relació següent:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \tag{D.19}$$

La llei dels cosinus ens dona les relacions següents:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{D.20a}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \tag{D.20b}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{D.20c}$$

La llei de les tangents ens dona les relacions següents:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}} \tag{D.21a}$$

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}} \tag{D.21b}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}} \tag{D.21c}$$

La llei de les cotangents ens dona la relació següent:

$$\frac{b+c-a}{\cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{a+c-b}{\cot\frac{\beta}{2}} = \frac{a+b-c}{\cot\frac{\gamma}{2}} = 2r \tag{D.22}$$

La fórmula de Mollweide, la qual lliga els tres costats amb els tres angles interiors d'un triangle, ens dona les relacions següents:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \tag{D.23a}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \tag{D.23b}$$

Tal com s'ha dit en la secció 3.5 a la pàgina 61, el baricentre del triangle format per tres tensions fase–fase és el punt neutre de l'únic sistema de tres tensions fase–neutre que no té components homopolars. El baricentre és de fet, el centre de masses del triangle (considerant-lo com una figura geomètrica massissa de densitat uniforme). Les coordenades del baricentre (G_x, G_y) es calculen a partir de les coordenades dels tres vèrtexs (A_x, A_y), (B_x, B_y) i (C_x, C_y) segons:

$$G_x = \frac{A_x + B_x + C_x}{3} \tag{D.24a}$$

$$G_y = \frac{A_y + B_y + C_y}{3} \tag{D.24b}$$

D.3 Funcions Hiperbòliques

Definició de les funcions hiperbòliques ($z \in \mathbb{C}$):

$$\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{csch} z \equiv \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} \tag{D.25a}$$

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{sech} z \equiv \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \tag{D.25b}$$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \qquad \coth z \equiv \frac{1}{\tanh z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} \tag{D.25c}$$

Identitats fonamentals de les funcions hiperbòliques ($z \in \mathbb{C}$):

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \tag{D.26}$$

$$\operatorname{sech}^2 z + \tanh^2 z = 1 \tag{D.27}$$

$$\operatorname{csch}^2 z - \coth^2 z = -1 \tag{D.28}$$

$$\cosh z + \sinh z = e^z \tag{D.29}$$

Les funcions hiperbòliques presenten les següents simetries ($z \in \mathbb{C}$):

$$\sinh(-z) = -\sinh z \tag{D.30a}$$

$$\cosh(-z) = \cosh z \tag{D.30b}$$

$$\tanh(-z) = -\tanh z \tag{D.30c}$$

Funcions hiperbòliques de la suma i diferència d'arguments ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1 \tag{D.31a}$$

$$\sinh(z_1 - z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_2 \cosh z_1 \tag{D.31b}$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \sinh z_1 \tag{D.31c}$$

$$\cosh(z_1 - z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 - \sinh z_2 \sinh z_1 \tag{D.31d}$$

$$\tanh(z_1 + z_2) = \frac{\tanh z_1 + \tanh z_2}{1 + \tanh z_1 \tanh z_2} \tag{D.31e}$$

$$\tanh(z_1 - z_2) = \frac{\tanh z_1 - \tanh z_2}{1 - \tanh z_1 \tanh z_2} \tag{D.31f}$$

Suma i diferència de funcions hiperbòliques ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

$$\sinh z_1 + \sinh z_2 = 2 \sinh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right) \tag{D.32a}$$

$$\sinh z_1 - \sinh z_2 = 2 \cosh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right) \tag{D.32b}$$

$$\cosh z_1 + \cosh z_2 = 2 \cosh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right) \tag{D.32c}$$

$$\cosh z_1 - \cosh z_2 = 2 \sinh\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right) \tag{D.32d}$$

Producte de funcions hiperbòliques ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

$$\sinh z_1 \cosh z_2 = \frac{\sinh(z_1 + z_2) + \sinh(z_1 - z_2)}{2} \tag{D.33a}$$

$$\cosh z_1 \cosh z_2 = \frac{\cosh(z_1 + z_2) + \cosh(z_1 - z_2)}{2} \tag{D.33b}$$

$$\sinh z_1 \sinh z_2 = \frac{\cosh(z_1 + z_2) - \cosh(z_1 - z_2)}{2} \tag{D.33c}$$

Apèndix E

Càlcul Numèric

E.1 Interpolació mitjançant polinomis de Lagrange

Es descriuen en aquesta secció els polinomis de Lagrange, i el seu ús en la interpolació de dades.

Un polinomi d'interpolació de Lagrange $P(x)$, és un polinomi de grau $n-1$ que passa exactament per n punts: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Aquest polinomi ve donat per l'expressió:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x) \tag{E.1}$$

On $L_i(x)$ són les anomenades funcions de Lagrange, calculades segons l'expressió:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \tag{E.2}$$

Es donen a continuació les fórmules explícites per a $n = 2$, $n = 3$ i $n = 4$:

- **Interpolació lineal ($n = 2$)**

$$P(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2 = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{E.3}$$

- **Interpolació quadràtica ($n = 3$)**

$$P(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 \tag{E.4}$$

- **Interpolació cúbica ($n = 4$)**

$$\begin{aligned} P(x) = {} & \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} y_2 + \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} y_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} y_4 \end{aligned} \tag{E.5}$$

L'error en la interpolació dependrà molt del tipus de dades que tinguem i del grau del polinomi que utilitzem. Si els punts que volem interpolar estan molt junts o si la seva gràfica és suau, n'hi haurà prou amb una interpolació lineal. D'altra banda, si els punts estan molt separats o si la seva gràfica dista molt de ser lineal, serà millor emprar polinomis de grau superior.

Exemple E.1 Interpolació lineal i cúbica

En la taula següent hi ha quatre punts de la funció $y = \sin x$, al voltant de $x = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$. Es tracta de trobar el valor de $\sin\frac{\pi}{2}$ mitjançant una interpolació lineal i una de cúbica.

Punt	x	y
1	1,2	0,9320
2	1,4	0,9854
3	1,6	0,9996
4	1,8	0,9738

Fem primer la interpolació lineal a $x = \frac{\pi}{2}$, utilitzant l'equació (E.3) amb els punts 2 i 3:

$$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}9854 + \left(\frac{\pi}{2} - 1{,}4\right) \times \frac{0{,}9996 - 0{,}9854}{1{,}6 - 1{,}4} = 0{,}9975$$

A continuació fem la interpolació cúbica a $x = \frac{\pi}{2}$, utilitzant l'equació (E.5) amb els punts 1, 2, 3 i 4:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{(\frac{\pi}{2} - 1{,}4)(\frac{\pi}{2} - 1{,}6)(\frac{\pi}{2} - 1{,}8)}{(1{,}2 - 1{,}4)(1{,}2 - 1{,}6)(1{,}2 - 1{,}8)}\, 0{,}9320 + \frac{(\frac{\pi}{2} - 1{,}2)(\frac{\pi}{2} - 1{,}6)(\frac{\pi}{2} - 1{,}8)}{(1{,}4 - 1{,}2)(1{,}4 - 1{,}6)(1{,}4 - 1{,}8)}\, 0{,}9854 + \\ &+ \frac{(\frac{\pi}{2} - 1{,}2)(\frac{\pi}{2} - 1{,}4)(\frac{\pi}{2} - 1{,}8)}{(1{,}6 - 1{,}2)(1{,}6 - 1{,}4)(1{,}6 - 1{,}8)}\, 0{,}9996 + \frac{(\frac{\pi}{2} - 1{,}2)(\frac{\pi}{2} - 1{,}4)(\frac{\pi}{2} - 1{,}6)}{(1{,}8 - 1{,}2)(1{,}8 - 1{,}4)(1{,}8 - 1{,}6)}\, 0{,}9738 = \\ &= 1{,}0000 \end{aligned}$$

Com era d'esperar, la interpolació cúbica dona un valor més exacte.

En el cas de tenir dades bidimensionals, és a dir, una matriu de valors que depenen de dues variables, també podem aplicar la interpolació mitjançant polinomis de Lagrange, interpolant primer respecte d'una variable i després respecte de l'altra. Amb l'exemple següent es pot veure com s'aplica aquest mètode.

Exemple E.2 Interpolació en dues dimensions

Utilitzarem un exemple de [15]. En la taula següent tenim uns valors que representen la viscositat dinàmica d'un líquid expressada en centipoise, segons dues variables: la concentració de glicol etilè expressada en tant per cent, i la temperatura expressada en graus Fahrenheit.

Viscositat dinàmica/cP

Temperatura	Concentració			
	40 %	50 %	60 %	70 %
60 °F	3,38	4,55	6,33	8,97
70 °F	2,87	3,81	5,17	7,22
80 °F	2,46	3,23	4,28	5,88
90 °F	2,13	2,76	3,58	4,85

Es tracta de trobar el valor de la viscositat dinàmica del líquid per a una concentració de glicol etilè del 56,3 % i una temperatura de 76 °F.

Donat que tenim dades suficients, podríem utilitzar una interpolació cúbica, no obstant farem servir una interpolació lineal, per tal de simplificar els càlculs, utilitzant les dades corresponents a les concentracions de glicol etilè del 50 % i 60 %, i a les temperatures de 70 °F i 80 °F.

Interpolem primer el valor de la viscositat dinàmica v_{70} corresponent a una concentració del 56,3 %, utilitzant els valors de la fila de temperatura igual a 70 °F:

$$v_{70} = 3{,}81\,\text{cP} + (56{,}3\,\% - 50\,\%) \times \frac{5{,}17\,\text{cP} - 3{,}81\,\text{cP}}{60\,\% - 50\,\%} = 4{,}6668\,\text{cP}$$

Interpolem a continuació el valor de la viscositat dinàmica v_{80} corresponent a una concentració del 56,3 %, utilitzant els valors de la fila de temperatura igual a 80 °F:

$$v_{80} = 3{,}23\,\text{cP} + (56{,}3\,\% - 50\,\%) \times \frac{4{,}28\,\text{cP} - 3{,}23\,\text{cP}}{60\,\% - 50\,\%} = 3{,}8915\,\text{cP}$$

Finalment, a partir d'aquests dos valors calculats, interpolem la viscositat dinàmica v corresponent a una temperatura de 76 °F.

$$v = 4{,}6668\,\text{cP} + (76\,°\text{F} - 70\,°\text{F}) \times \frac{3{,}8915\,\text{cP} - 4{,}6668\,\text{cP}}{80\,°\text{F} - 70\,°\text{F}} = 4{,}20\,\text{cP}$$

E.2 Integració

Es descriuen en aquesta secció diversos mètodes d'integració numèrica de funcions, ja sigui coneixent només una sèrie de punts de la funció: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, o ja sigui coneixent-ne l'expressió explícita: $y = f(x)$. La integració de la funció entre x_1 i x_n, ens donarà l'àrea A existent entre la funció i l'eix d'abscisses.

$$A = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{E.6}$$

E.2.1 Regla dels trapezis

Aquest mètode serveix per a qualsevol nombre de punts n de la funció que es vol integrar, amb $n \geq 2$.

L'àrea A entre el punt inicial (x_1, y_1) i el punt final (x_n, y_n), ve donada per l'equació:

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}(x_{i+1} - x_i) \tag{E.7}$$

En el cas que els n punts estiguin separats uniformement una distància $h = (x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = \cdots = (x_n - x_{n-1})$, la regla dels trapezis esdevé:

$$A = \frac{h}{2}\left(y_1 + y_n + 2\sum_{i=2}^{n-1} y_i\right) \tag{E.8}$$

Si coneixem l'expressió explícita $y = f(x)$ de la funció que volem integrar entre els punts $x = a$ i $x = b$, podem fixar el nombre de punts n que volem utilitzar, i llavors el valor h queda definit per l'equació:

$$h = \frac{b - a}{n - 1} \tag{E.9}$$

Tanmateix, les abscisses $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ que haurem d'utilitzar, són:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= a + h \\ x_3 &= a + 2h \\ x_4 &= a + 3h \\ &\vdots \\ x_n &= a + (n-1)h = b \end{aligned} \tag{E.10}$$

L'odre de l'error d'integració de la regla dels trapezis és: $0(h^2)$. És a dir, una divisió de h per 2, ocasiona una divisió per 4 de l'error.

E.2.2 Regla de Simpson 1/3

Aquest mètode serveix per a un nombre senar de punts n de la funció que es vol integrar, amb $n \geq 3$. A més, els punts han d'estar separats uniformement una distància $h = (x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = \cdots = (x_n - x_{n-1})$.

L'àrea A entre el punt inicial (x_1, y_1) i el punt final (x_n, y_n), ve donada per l'equació:

$$A = \frac{h}{3}\sum_{i=1,3,5\ldots}^{n-2}\left(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}\right) = \frac{h}{3}\left(y_1 + y_n + 4\sum_{i=2,4,6\ldots}^{n-1} y_i + 2\sum_{j=3,5,7\ldots}^{n-2} y_j\right) \tag{E.11}$$

Les equacions (E.9) i (E.10), descrites en la regla dels trapezis, també es poden utilitzar en aquest mètode quan coneixem l'expressió explícita $y = f(x)$ de la funció que volem integrar entre els punts $x = a$ i $x = b$, i volem fixar el nombre de punts n.

L'odre de l'error d'integració de la regla de Simpson 1/3 és: $0(h^4)$. És a dir, una divisió de h per 2, ocasiona una divisió per 16 de l'error.

E.2.3 Regla de Simpson 3/8

Aquest mètode serveix per a un nombre parell de punts n de la funció que es vol integrar, amb $n \geq 4$. A més, els punts han d'estar separats uniformement una distància $h = (x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = \cdots = (x_n - x_{n-1})$.

L'àrea A entre el punt inicial (x_1, y_1) i el punt final (x_n, y_n), ve donada per l'equació:

$$A = \frac{3h}{8} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3} \right) \tag{E.12}$$

Les equacions (E.9) i (E.10), descrites en la regla dels trapezis, també es poden utilitzar en aquest mètode quan coneixem l'expressió explícita $y = f(x)$ de la funció que volem integrar entre els punts $x = a$ i $x = b$, i volem fixar el nombre de punts n.

L'odre de l'error d'integració de la regla de Simpson 3/8 és: $0(h^4)$. En ser del mateix ordre que el de la regla de Simpson 1/3, la regla de Simpson 3/8 només s'usa quan n és parell per avaluar la integral per a x_1, x_2, x_3 i x_4, utilitzant la regla de Simpson 1/3 per avaluar la resta de la integral per a $x_4, x_5, \ldots, x_n$.

Exemple E.3 Integració numèrica d'una funció

Es tracta de calcular numèricament la integral $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, utilitzant les regles del trapezis i de Simpson.

Calculem primer el valor exacte d'aquesta integral, per tal de poder-lo comparar amb els que obtindrem numèricament:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_{x=1}^{x=2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0{,}6931$$

Si utilitzem sis punts ($n = 6$), tindrem a partir de l'equació (E.9) una distància h entre punts de:

$$h = \frac{2-1}{6-1} = 0{,}2$$

Els valors x_i i y_i que utilitzarem, són doncs:

i	x_i	$y_i = 1/x_i$
1	1,0	1,0000
2	1,2	0,8333
3	1,4	0,7143
4	1,6	0,6250
5	1,8	0,5556
6	2,0	0,5000

Utilitzant la regla dels trapezis, equació (E.8), tenim:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{0{,}2}{2}\Big(1{,}0000 + 0{,}5000 + 2\times(0{,}8333 + 0{,}7143 + 0{,}6250 + 0{,}5556)\Big) = 0{,}6956$$

Utilitzant la regla de Simpson 3/8 entre x_1 i x_4, equació (E.12), i la regla de Simpson 1/3 entre x_4 i x_6, equació (E.11), tenim:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{3\times 0{,}2}{8}\Big(1{,}0000 + 3\times 0{,}8333 + 3\times 0{,}7143 + 0{,}6250\Big) + \\ + \frac{0{,}2}{3}\Big(0{,}6250 + 4\times 0{,}5556 + 0{,}5000\Big) = 0{,}6932$$

Com era d'esperar, l'aplicació conjunta de les regles de Simpson 3/8 i 1/3 dona un resultat més precís que la regla dels trapezis.

E.3 Solució de funcions no lineals

Es descriuen en aquesta secció dos mètodes de resolució de funcions no lineals, és a dir, es vol resoldre l'equació:

$$f(x) = 0 \tag{E.13}$$

Els mètodes descrits són el de Newton i el de la recta secant. Ambdós mètodes són iteratius i tenen una convergència cap a la solució força ràpida. El mètode de Newton requereix un valor inicial aproximat de la solució, i el mètode de la recta secant en requereix dos.

El millor mètode per obtenir valors inicials aproximats de la solució és dibuixar la funció i localitzar-ne visualment el punt on talla l'eix d'abscisses. Si els valors inicials aproximats utilitzats per iniciar la iteració són massa lluny de la solució real, pot ser que el procés iteratiu no convergeixi.

E.3.1 Mètode de Newton

Aquest mètode, que requereix el càlcul de la funció derivada $f'(x)$, s'il·lustra en la Figura E.1 a la pàgina següent.

A partir d'un punt x_{i-1}, es calcula $f(x_{i-1})$ i es traça la recta tangent a la funció $f(x)$ en aquest punt, per a la qual cosa cal conèixer la funció derivada $f'(x)$. A continuació es calcula la intersecció d'aquesta recta amb l'eix abscisses, obtenint el nou punt x_i. El procés es repeteix calculant $f(x_i)$, traçant una nova recta tangent en aquest punt, i trobant la nova intersecció amb l'eix abscisses; seguint aquest procés ens apropare cada vegada més a la solució x_n, on es compleix $f(x_n) = 0$.

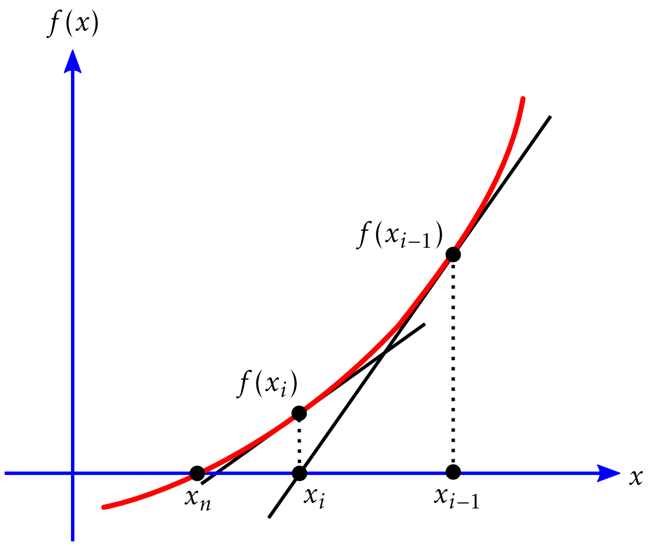


Figura E.1 Mètode de Newton

El procés iteratiu és el següent:

❶ Es parteix d'un valor aproximat de la solució: x_0.

❷ S'aplica de manera successiva l'equació:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \infty) \tag{E.14}$$

❸ El procés s'atura quan es compleix una de les condicions següents, o quan es compleixen ambdues condicions alhora:

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon_1 \tag{E.15a}$$
$$|f(x_i)| \leq \varepsilon_2 \tag{E.15b}$$

On ε_1 i ε_2 són dos valors positius petits, els quals es fixen en funció de la precisió que es vulgui assolir en la solució.

E.3.2 Mètode de la recta secant

Aquest mètode s'il·lustra en la Figura E.2 a la pàgina següent. S'utilitza en lloc del mètode de Newton quan el càlcul de la funció derivada $f'(x)$ és molt complex, o quan no és possible fer-ho analíticament; en contrapartida, la convergència cap a la solució real és una mica més lenta.

A partir de dos punts x_{i-2} i x_{i-1}, es calcula $f(x_{i-2})$ i $f(x_{i-1})$ i es traça la recta secant a la funció $f(x)$ que passa per aquests dos punts. A continuació es calcula la intersecció d'aquesta recta amb l'eix abscisses, obtenint el nou punt x_i. El procés es repeteix calculant $f(x_i)$, traçant una nova recta secant que passi per aquest punt i l'anterior, i trobant la nova intersecció amb l'eix abscisses; seguint aquest procés ens apropem cada vegada més a la solució x_n, on es compleix $f(x_n) = 0$.

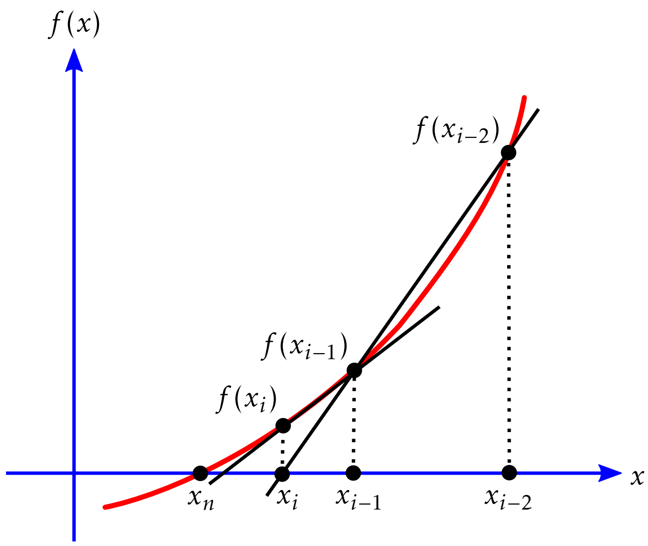


Figura E.2 Mètode de la recta secant

El procés iteratiu és el següent:

❶ Es parteix de dos valors aproximats de la solució: x_0 i x_1.

❷ S'aplica de manera successiva l'equació:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{g'(x_{i-1})} \qquad (i = 2, 3, 4, \ldots, \infty) \tag{E.16}$$

On:

$$g'(x_{i-1}) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{x_{i-1} - x_{i-2}} \qquad (i = 2, 3, 4, \ldots, \infty) \tag{E.17}$$

❸ El procés s'atura quan es compleix una de les condicions següents, o quan es compleixen ambdues condicions alhora:

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon_1 \tag{E.18a}$$
$$|f(x_i)| \leq \varepsilon_2 \tag{E.18b}$$

On ε_1 i ε_2 són dos valors positius petits, els quals es fixen en funció de la precisió que es vulgui assolir en la solució.

Exemple E.4 Solució d'una funció no lineal

Utilitzant la funció $i(t)$ obtinguda en exemple 1.8 a la pàgina 32, es tracte de calcular el punt proper a $t = 20\,\text{ms}$, on es compleix $i(t) = 0$. Per tal d'adoptar la nomenclatura d'aquesta secció, substituïm $i(t)$ i t, per $f(x)$ i x respectivament; l'equació que volem resoldre és doncs:

$$f(x) = 35\,953{,}6865\sin(314{,}1593\,x - 1{,}5136) + 35\,894{,}8169\,\mathrm{e}^{-18x} = 0$$

Per tal de poder utilitzar el mètode de Newton, comencem calculant la funció derivada:

$$f'(x) = 314{,}1593 \times 35\,953{,}6865 \cos(314{,}1593\,x - 1{,}5136) - 18 \times 35\,894{,}8169\,\mathrm{e}^{-18x} =$$
$$= 11\,295\,184{,}9833 \cos(314{,}1593\,x - 1{,}5136) - 646\,106{,}7042\,\mathrm{e}^{-18x}$$

Observant la gràfica de l'exemple 1.8 a la pàgina 32, prenem com a aproximació inicial de la solució el valor: $x_0 = 0{,}015$.

A continuació, utilitzant l'equació (E.14), creem la taula següent:

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	0,015 000 000		$2{,}534\,61 \times 10^{4}$	$-1{,}176\,99 \times 10^{7}$
1	0,017 153 456	$2{,}15 \times 10^{-3}$	$2{,}283\,49 \times 10^{3}$	$-8{,}863\,24 \times 10^{6}$
2	0,017 411 093	$2{,}58 \times 10^{-4}$	$8{,}146\,12 \times 10^{1}$	$-8{,}222\,05 \times 10^{6}$
3	0,017 421 000	$9{,}91 \times 10^{-6}$	$1{,}272\,43 \times 10^{-1}$	$-8{,}196\,35 \times 10^{6}$
4	0,017 421 016	$1{,}55 \times 10^{-8}$	$3{,}130\,04 \times 10^{-7}$	$-8{,}196\,31 \times 10^{6}$
5	0,017 421 016	0	0	$-8{,}196\,31 \times 10^{6}$

Després de cinc iteracions trobem la solució buscada: $x = 0{,}017\,421\,016$

Fem ara el mateix càlcul utilitzant el mètode de la recta secant. Prenem com a aproximacions inicials de la solució els valors: $x_0 = 0{,}015$ i $x_1 = 0{,}016$.

A continuació, utilitzant les equacions (E.16) i (E.17), creem la taula següent:

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$	$f(x_i)$	$g'(x_i)$
0	0,015 000 000		$2{,}534\,61 \times 10^{4}$	
1	0,016 000 000	$1{,}00 \times 10^{-3}$	$1{,}386\,57 \times 10^{4}$	$-1{,}148\,04 \times 10^{7}$
2	0,017 207 777	$1{,}21 \times 10^{-3}$	$1{,}805\,58 \times 10^{3}$	$-9{,}985\,39 \times 10^{6}$
3	0,017 388 599	$1{,}81 \times 10^{-4}$	$2{,}670\,62 \times 10^{2}$	$-8{,}508\,46 \times 10^{6}$
4	0,017 419 987	$3{,}14 \times 10^{-5}$	8,438 51	$-8{,}239\,61 \times 10^{6}$
5	0,017 421 011	$1{,}02 \times 10^{-6}$	$4{,}297\,11 \times 10^{-2}$	$-8{,}197\,65 \times 10^{6}$
6	0,017 421 016	$5{,}24 \times 10^{-9}$	$7{,}007\,43 \times 10^{-6}$	$-8{,}196\,32 \times 10^{6}$
7	0,017 421 016	0	0	$-8{,}196\,32 \times 10^{6}$

Després de set iteracions trobem la solució buscada: $x = 0{,}017\,421\,016$

Apèndix F

Programes per a la calculadora *HP Prime*

Es llisten en aquest apèndix una sèrie de programes per a la calculadora *HP Prime* de Hewlett-Packard, els quals són d'interès per resoldre problemes tractats en aquest llibre.

Aquesta calculadora disposa d'un emulador per a PC, que pot descarregar-se de la pàgina de Hewlett-Packard: www.hpprime.de/en/category/6-downloads.

F.1 Electrotècnia

El programa **Z_Sèrie** utilitza l'equació (2.12) per obtenir la impedància sèrie d'una llista d'impedàncies $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \ldots$; les impedàncies poden ser indistintament reals o complexes.

```
EXPORT Z_Sèrie(z)
// z:impedàncies {Z1, Z2, ...} → impedància sèrie
BEGIN
  RETURN ΣLIST(z);
END;
```

El programa **Z_Paral·lel** obté la impedància paral·lel d'una llista d'impedàncies $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \ldots$; les impedàncies poden ser indistintament reals o complexes. S'utilitza una variant de l'equació (2.15), la qual dona una millor precisió numèrica.

```
EXPORT Z_Paral·lel(z)
// z:impedàncies {Z1, Z2, ...} → impedància paral·lel
BEGIN
  RETURN ΠLIST(z)/ΣLIST(ΠLIST(z)/z);
END;
```

El programa **Millman** utilitza l'equació (1.4) per obtenir la tensió $\underline{U}_{\text{nx}}$ del punt neutre n d'una llista d'impedàncies connectades en estrella $\underline{Z}_{\text{an}}, \underline{Z}_{\text{bn}}, \underline{Z}_{\text{cn}}, \ldots$, respecte d'un punt qualsevol x, a partir de la llista de tensions $\underline{U}_{\text{ax}}, \underline{U}_{\text{bx}}, \underline{U}_{\text{cx}}, \ldots$ dels extrems d'aquestes impedàncies respecte del mateix punt x; les impedàncies i les tensions poden ser indistintament reals o complexes. És necessari el programa **Z_Paral·lel**, definit anteriorment.

```
EXPORT Millman(u,z)
// u:tensions {Uax,Ubx,Ucx,...}, z:impedàncies {Zan,Zbn,Zcn,...} → tensió Unx
// n és el punt neutre de les impedàncies, i x és un punt qualsevol
BEGIN
  RETURN ΣLIST(u ./ z) * Z_Paral·lel(z);
END;
```

El programa **Triangle_a_Estrella** utilitza l'equació (2.18) per transformar una llista de tres impedàncies connectades en triangle $\underline{Z}_{\text{ab}}$, $\underline{Z}_{\text{bc}}$ i $\underline{Z}_{\text{ca}}$, en una llista de tres impedàncies equivalents connectades en estrella $\underline{Z}_{\text{an}}$, $\underline{Z}_{\text{bn}}$ i $\underline{Z}_{\text{cn}}$; les impedàncies poden ser indistintament reals o complexes.

```
EXPORT Triangle_a_Estrella(zd)
// zd:impedàncies en triangle {Zab,Zbc,Zca} → impedàncies en
// estrella {Zan,Zbn,Zcn}
BEGIN
  LOCAL z:=ΠLIST(zd)/ΣLIST(zd);
  RETURN {z/zd(2),z/zd(3),z/zd(1)};
END;
```

El programa **Estrella_a_Triangle** utilitza l'equació (2.18) per transformar una llista de tres impedàncies connectades en estrella $\underline{Z}_{\text{an}}$, $\underline{Z}_{\text{bn}}$ i $\underline{Z}_{\text{cn}}$, en una llista de tres impedàncies equivalents connectades en triangle $\underline{Z}_{\text{ab}}$, $\underline{Z}_{\text{bc}}$ i $\underline{Z}_{\text{ca}}$; les impedàncies poden ser indistintament reals o complexes.

```
EXPORT Estrella_a_Triangle(zy)
// zy:impedàncies en estrella {Zan,Zbn,Zcn} → impedàncies en
// triangle {Zab,Zbc,Zca}
BEGIN
  LOCAL z:=zy(1)*(zy(2)+zy(3))+zy(2)*zy(3);
  RETURN {z/zy(3),z/zy(1),z/zy(2)};
END;
```

El programa **EZS_U** utilitza les equacions de la secció 2.5 a la pàgina 49 per obtenir la tensió $\underline{U}$ d'una carrega que absorbeix una potència $\underline{S}$, quan està connectada a una font de tensió $\underline{E}$ a través d'una impedància $\underline{Z}$; cadascun d'aquests valors pot ser indistintament real o complex.

```
EXPORT EZS_U(E,Z,S)
// E:font de tensió, Z:impedància, S:potència de la càrrega → tensió U
// de la càrrega
BEGIN
  LOCAL ZcS:=CONJ(Z)*S;
  LOCAL ImUe:=IM(ZcS)/ABS(E);
  LOCAL ReUe:=POLYROOT({1,-ABS(E),RE(ZcS)+ImUe^2});
  IF TYPE(ReUe(1))==3 THEN
    RETURN "No hi ha solució"; // Arrels complexes
  ELSE
    RETURN (MAX(ReUe),ImUe)*SIGN(E);
  END;
END;
```

El programa **kcmil_a_mm2** utilitza l'equació (7.20) per convertir la secció d'un conductor expressada en kcmil, en la seva secció equivalent expressada en mm^2.

```
EXPORT kcmil_a_mm2(kcmil)
// kcmil:secció en kcmil → secció en mm²
BEGIN
  RETURN kcmil*0.506707479098;
END;
```

El programa **mm2_a_kcmil** utilitza l'equació (7.20) per convertir la secció d'un conductor expressada en mm^2, en la seva secció equivalent expressada en kcmil.

```
EXPORT mm2_a_kcmil(mm2)
// mm2:secció en mm² → secció en kcmil
BEGIN
  RETURN mm2/0.506707479098;
END;
```

El programa **AWG_a_mm2** utilitza l'equació (7.27) per convertir la secció d'un conductor expressada segons el seu número AWG, en la seva secció equivalent expressada en mm^2.

```
EXPORT AWG_a_mm2(AWG)
// AWG:número AWG → secció en mm²
// cal entrar 0, -1, -2 i -3 en el cas dels números AWG 1/0, 2/0, 3/0 i 4/0
BEGIN
  RETURN 53.4751207321/(92^(AWG/19.5));
END;
```

El programa **mm2_a_AWG** utilitza l'equació (7.29) per convertir la secció d'un conductor expressada en mm^2, en la seva secció equivalent expressada segons el seu número AWG; la conversió és aproximada ja que els números AWG prenen valors discrets.

```
EXPORT mm2_a_AWG(mm2)
// mm2:secció en mm² → número AWG més proper
// els resultats 0, -1, -2 i -3 són equivalents als números
// AWG 1/0, 2/0, 3/0 i 4/0
BEGIN
  RETURN ROUND(4.31245284200*LN(53.4751207321/mm2),0);
END;
```

El programa **Triangle_a_Fasors** obté els tres fasors $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BC}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CA}}$ que formen un triangle de tensions fase–fase, a partir de les longituds dels tres costats d'aquest triangle $|\underline{U}_{\mathrm{AB}}|$, $|\underline{U}_{\mathrm{BC}}|$ i $|\underline{U}_{\mathrm{CA}}|$. Es pren $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$ com a fasor de referència.

```
EXPORT Triangle_a_Fasors(u)
// u:triangle de tensions {Uab,Ubc,Uca} → fasors de tensió {Uab,Ubc,Uca}
// la tensió Uab es pren el fasor de referència (angle igual a zero)
BEGIN
  LOCAL φ:=Triangle_Solver.SSS(u(1),u(3),u(2));
  RETURN {u(1),u(2)*(-1,0)*(1,∡φ(2)),u(3)*(-1,0)/(1,∡φ(3))};
END;
```

El programa **FN_a_FF** obté els fasors de les tres tensions fase–fase $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BC}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CA}}$, corresponents als fasors de les tres tensions fase–neutre $\underline{U}_{\mathrm{AN}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BN}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CN}}$.

```
EXPORT FN_a_FF(u)
// u:tensions fase-neutre {Uan,Ubn,Ucn} → tensions fase-fase {Uab,Ubc,Uca}
BEGIN
  RETURN {u(1)-u(2),u(2)-u(3),u(3)-u(1)};
END;
```

El programa **FF_a_FN** obté els fasors de les tres tensions fase–neutre $\underline{U}_{\mathrm{AN}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BN}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CN}}$, corresponents a tres impedàncies $\underline{Z}_{\mathrm{AN}}$, $\underline{Z}_{\mathrm{BN}}$ i $\underline{Z}_{\mathrm{CN}}$ connectades en estrella a les tres tensions fase–fase $\underline{U}_{\mathrm{AB}}$, $\underline{U}_{\mathrm{BC}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{CA}}$.

```
EXPORT FF_a_FN(u,z)
// u:tensions fase-fase {Uab,Ubc,Uca}, z:impedàncies {Zan,Zbn,Zcn} →
// tensions fase-neutre {Uan,Ubn,Ucn}
BEGIN
  RETURN {u(1)/z(2)-u(3)/z(3),u(2)/z(3)-u(1)/z(1),
          u(3)/z(1)-u(2)/z(2)}*Z_Paral·lel(z);
END;
```

El programa **FF_a_FG** obté els fasors de les tres tensions fase–neutre $\underline{U}_{\text{AG}}$, $\underline{U}_{\text{BG}}$ i $\underline{U}_{\text{CG}}$ que tenen el punt neutre G en el baricentre del triangle format pels fasors de les tres tensions fase–fase $\underline{U}_{\text{AB}}$, $\underline{U}_{\text{BC}}$ i $\underline{U}_{\text{CA}}$. És un cas particular del programa anterior, quan les tres impedàncies són idèntiques.

```
EXPORT FF_a_FG(u)
// u:tensions fase-fase {Uab,Ubc,Uca} → tensions fase-G {Uag,Ubg,Ucg}
// G is el baricentre del triangle de tensions fase-fase
BEGIN
  RETURN {u(1)-u(3),u(2)-u(1),u(3)-u(2)}/3;
END;
```

El programa **ABC_a_A012** utilitza l'equació (3.6) per obtenir els tres fasors de seqüència $\underline{A}_0$, $\underline{A}_1$ i $\underline{A}_2$ corresponents als tres fasors $\underline{A}$, $\underline{B}$ i $\underline{C}$.

```
EXPORT ABC_a_A012(x)
// x:fasors {A,B,C} → fasors de seqüència {A0,A1,A2}
BEGIN
  LOCAL A:=[[1,1,1],[1,(-1/2,√3/2),(-1/2,-√3/2)],
            [1,(-1/2,-√3/2),(-1/2,√3/2)]];
  RETURN mat2list(A*list2mat(x,1)/3);
END;
```

El programa **A012_a_ABC** fa la funció inversa del programa anterior, i utilitza l'equació (3.4) per obtenir els tres fasors $\underline{A}$, $\underline{B}$ i $\underline{C}$ corresponents als tres fasors de seqüència $\underline{A}_0$, $\underline{A}_1$ i $\underline{A}_2$.

```
EXPORT A012_a_ABC(x)
// x:fasors de seqüència {A0,A1,A2} → fasors {A,B,C}
BEGIN
  LOCAL A:=[[1,1,1],[1,(-1/2,-√3/2),(-1/2,√3/2)],
            [1,(-1/2,√3/2),(-1/2,-√3/2)]];
  RETURN mat2list(A*list2mat(x,1));
END;
```

El programa **AN12_a_AB12** utilitza les equacions (3.8b) i (3.8c) per obtenir els dos fasors de tensions de seqüència fase–fase $\underline{U}_{\text{AB},1}$ i $\underline{U}_{\text{AB},2}$ a partir dels dos fasors de tensions de seqüència fase–neutre $\underline{U}_{\text{AN},1}$ i $\underline{U}_{\text{AN},2}$.

```
EXPORT AN12_a_AB12(x)
// x:fasors de seqüència fase-neutre {AN1,AN2} → fasors de seqüència
// fase-fase {AB1,AB2}
BEGIN
  RETURN √3*{x(1)*exp(π*i/6),x(2)*exp(-π*i/6)};
END;
```

El programa **AB12_a_AN12** fa la funció inversa del programa anterior, i utilitza les mateixes equacions (3.8b) i (3.8c) per obtenir els dos fasors de tensions de seqüència fase–neutre $\underline{U}_{\mathrm{AN},1}$ i $\underline{U}_{\mathrm{AN},2}$ a partir dels dos fasors de tensions de seqüència fase–fase $\underline{U}_{\mathrm{AB},1}$ i $\underline{U}_{\mathrm{AB},2}$:

```
EXPORT AB12_a_AN12(x)
// x:fasors de seqüència fase-fase {AB1,AB2} → fasors de seqüència
// fase-neutre AN1,AN2
BEGIN
  RETURN {x(1)/exp(π*i/6),x(2)/exp(-π*i/6)}/√3;
END;
```

F.2 Matemàtiques

El programa **Interpolació_Polinòmica** obté la ordenada interpolada y corresponent a una abscissa x, a partir d'un conjunt de punts (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., $(x_\mathrm{n}, y_\mathrm{n})$. S'utilitza una interpolació polinòmica, obtenint-se el mateixos resultats que amb el mètode descrit en la secció E.1 a la pàgina 295; el grau del polinomi és igual a $n-1$.

```
EXPORT Interpolació_Polinòmica(dades,x)
// dades:[[x1,y1], x:abscissa → ordenada y interpolada
//        [x2,y2]
//        .......
//        [xn,yn]]
BEGIN
  RETURN POLYEVAL(polynomial_regression(dades,rowDim(dades)-1),x);
END;
```

El programa **Interpolació_Polinòmica_2dim** obté el valor interpolat z corresponent a un punt (x, y), a partir d'un conjunt de punts $(x_1, x_2, ...x_\mathrm{n})$, d'un conjunt de punts $(y_1, y_2, ...y_\mathrm{m})$, i d'una matriu de valors $(z_{11}, z_{12}, ..., z_{1\mathrm{n}})$, $(z_{21}, z_{22}, ..., z_{2\mathrm{n}})$, ..., $(z_{\mathrm{m}1}, z_{\mathrm{m}2}, ..., z_{\mathrm{mn}})$. S'utilitzen interpolacions polinòmiques, obtenint-se el mateixos resultats que amb el mètode descrit en la secció E.1 a la pàgina 295; el grau dels polinomis és igual a $n-1$ i $m-1$. És necessari el programa **Interpolació_Polinòmica**, definit anteriorment.

```
EXPORT Interpolació_Polinòmica_2dim(dades,x,y)
// dades:[[0,   x1,  x2, ...  xn], x, y → z interpolada
//        [y1, z11, z12, ... z1n]
```

```
//        [y2, z21, z22, ... z2n]
//        .......................
//        [ym, zm1, zm2, ... zmn]]
BEGIN
  LOCAL c:=colDim(dades);
  LOCAL r:=rowDim(dades);
  LOCAL d:=[[0,0],[0,0]];
  LOCAL z:=[[0,0],[0,0]];
  LOCAL k;
  d(-1):=dades({{1,2},{1,c}});
  FOR k FROM 2 TO r DO
    d(-2):=dades({{k,2},{k,c}});
    z(k-1,2):=Interpolació_Polinòmica(d,x);
  END;
  z(-1):=TRN(dades({{2,1},{r,1}}));
  RETURN Interpolació_Polinòmica(z,y);
END;
```

El programa **Regla_dels_Trapezis** utilitza l'equació (E.7) per obtenir la integral entre x_1 i x_n d'un conjunt de punts (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., $(x_\mathrm{n}, y_\mathrm{n})$, utilitzant la regla dels trapezis.

```
EXPORT Regla_dels_Trapezis(dades)
// dades:[[x1,y1] → Integral de x1 a xn
//        [x2,y2]
//        .......
//        [xn,yn]]
BEGIN
  LOCAL k;
  LOCAL a:=0;
  LOCAL n:=rowDim(dades)-1;
  FOR k FROM 1 TO n DO
    a:=a+(dades(k+1,2)+dades(k,2))*(dades(k+1,1)-dades(k,1));
  END;
  RETURN a/2;
END;
```

Part V

Bibliografia i Índex Alfabètic

Bibliografia

[1] Helmut Kopka, Patrick W. Daly. **A Guide To LaTeX**. Addison-Wesley, 4th edition, 2004.

[2] George Grätzer. **More Math Into LaTeX**. Springer, 4th edition, 2007.

[3] Michel Goossens, Frank Mittelbach. **The LaTeX Companion**. Addison-Wesley, 2nd edition, 2004.

[4] Michel Goossens, Frank Mittelbach, Sebstian Rahtz, Denis Roegel, Herbert Voß. **The LaTeX Graphics Companion**. Addison-Wesley, 2nd edition, 2008.

[5] Herbert Voß. **Typesetting tables with LaTeX**. UIT Cambrige Ltd., 2011.

[6] Scott Pakin. **The Comprehensive LaTeX Symbol List**. CTAN.ORG.

[7] Gabriel Valiente Feruglio. **Composició de textos científics amb LaTeX**. Edicions UPC, 1998.

[8] Gabriel Valiente Feruglio. **Modern Catalan Typographical Conventions**. TUGBoat, 16(3), 329-338, 1995.

[9] Claudio Beccari. **Typesetting mathematics for science and technology according to ISO 31/XL**. TUGBoat, 18(1), 39-48, 1997.

[10] J. William Howard, Jr. **Graecum est: el uso del griego en textos electrónicos de carácter científico-técnico**. Panace@, VI(19), 45-54, 2005.

[11] Richard Stevens Burington. **Handbook of Mathematical Tables and Formulas**. McGraw-Hill, 4th edition, 1965.

[12] Joel L. Schiff. **The Laplace Transform: Theory and Applications**. Springer, 1999.

[13] R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg, E. M. van de Vrie. **Fourier and Laplace Transforms**. Cambridge University Press, 2003.

[14] Joe D. Hoffman. **Numerical Methods for Engineers and Scientists**. Marcel Dekker, Inc., 2nd edition, 2001.

[15] E. Joseph Billo. **Excel® for Engineers and Scientists – Numerical Methods**. Wiley-INTERSCIENCE, 2007.

[16] Amos Gilat, Vish Subramaniam. **Numerical Methods for Engineers and Scientists – An Introduction with Applications using MATLAB®**. Wiley, 3rd edition, 2013.

[17] Walter Mora Flores. **Introducción a los Métodos Numéricos**. Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2016.

[18] Enrique Ras. **Teoría de circuitos. Fundamentos**. Marcombo Boixareu Editores, 3ª edición, 1977.

[19] Enrique Ras. **Transformadores. De potencia, medida y protección**. Marcombo Boixareu Editores, 6ª edición, 1985.

[20] Enrique Ras. **Teoría de líneas eléctricas (Volumen I)**. Marcombo Boixareu Editores, 2ª edición, 1986.

[21] Enrique Ras. **Redes eléctricas y multipolos**. Marcombo Boixareu Editores, 1980.

[22] Enrique Ras. **Análisis de Fourier y cálculo operacional aplicados a la electrotecnia**. Marcombo Boixareu Editores, 1979.

[23] Felipe Córcoles López, Joaquim Pedra Durán, Miquel Salichs Vivancos. **Transformadores**. Edicions UPC, 2004.

[24] Jesús Trashorras Montecelos. **Subestaciones eléctricas**. Paraninfo, 2015.

[25] Stephen J. Chapman. **Máquinas Eléctricas**. McGraw-Hill, 4ª edición, 2005.

[26] A. E. Fitzgerald, Charles Kingsley Jr., Stephen D. Umans. **Electric Machinery**. McGraw-Hill, 6th edition, 2003.

[27] Jesús Fraile Mora. **Máquinas Eléctricas**. McGraw-Hill, 5ª edición, 2003.

[28] John J. Grainger, William D. Stevenson Jr. **Análisis de Sistemas de Potencia**. McGraw-Hill, 1996.

[29] Hadi Saadat. **Power System Analysis**. McGraw-Hill, 2nd edition, 2004.

[30] J. Duncan Glover, Mulukutla S. Sarma, Thomas J. Overbye. **Power System Analysis & Design**. CENGAGE Learning, 5th edition (SI), 2011.

[31] Westinghouse Electric Corporation. **Electrical Transmission and Distribution Reference Book**. Westinghouse Electric Corporation, 4th edition, 1950.

[32] Paul M. Anderson. **Analysis of Faulted Power Systems**. Wiley-INTERSCIENCE, 1995.

[33] J. Lewis Blackburn. **Simmetrical Components for Power Systems Engineering**. Marcel Dekker, Inc, 1993.

[34] J. Lewis Blackburn, Thomas J. Domin. **Protective Relaying. Principles and Applications**. CRC Press, 3rd edition, 2007.

[35] Donald Reimert. **Protective Relaying for Power Generation Systems**. CRC Press, 2006.

[36] Nasser D. Tleis. **Power Systems Modelling and Fault Analysis – Theory and Practise**. ELSEVIER, 2008.

[37] Ismail Kasikci. **Short Circuits in Power Systems. A practical Guide to IEC 60909**. Wiley-VCH, 2002.

[38] Jürgen Schlabbach. **Short-Circuit Currents**. The Institution of Engineering and Technology, 2005.

[39] Richard Roeper. **Corrientes de cortocircuito en redes trifásicas**. Siemens Aktiengesellschaft & Marcombo Boixareu Editores, 1985.

[40] J. C. Das. **Power System Analysis – Short-Circuit, Load Flow and Harmonics**. Marcel Dekker, Inc., 2002.

[41] Mohamed A. Ibrahim. **Disturbance Analysis for Power Systems**. Wiley-IEEE Press, 2012.

[42] Robert Capella. **Protecciones eléctricas en MT**. Publicación Técnica de Schneider 071, mayo 2003.

[43] Manuel Llorente Antón. **Líneas y cables**. Publicación Técnica de Schneider 073, enero 2003.

[44] Jean Pasteau. **Envolventes y grados de protección**. Cuaderno Técnico de Schneider 166, febrero 2001.

[45] Paola Fonti. **Transformadores de intensidad: cómo determinar sus especificaciones**. Cuaderno Técnico de Schneider 194, agosto 2000.

[46] Paola Fonti. **Transformadores de intensidad: errores de especificación y soluciones**. Cuaderno Técnico de Schneider 195, diciembre 2001.

[47] Knut Sjövall. **Instrument Transformers Application Guide, Edition 3**. ABB, 2009.

Índex Alfabètic

Símbols

A

B

D

E

F

I

J

K

L

M

N

S

U

V

W

Y

Z