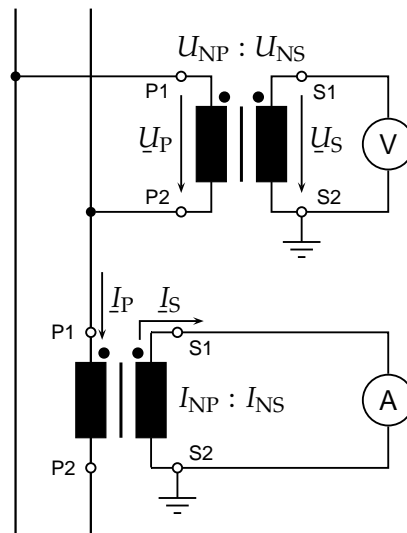


Qüestions Diverses d'Electrotècnia

Versió 1.0



Josep Mollera Barriga

Índex

Prefaci	xi
Notació	xiii
I Electrotècnia	1
1 Fonaments	3
1.1 Teoremes d'electrotècnia	3
1.1.1 Teorema de Thévenin–Norton	3
1.1.2 Teorema de Millman	4
1.2 Components elementals d'un circuit elèctric	6
1.2.1 Resistència	6
1.2.2 Capacitat	6
1.2.3 Inductància	7
1.2.4 Acoblament magnètic	7
1.2.5 Transformador ideal	8
1.3 Potència complexa	9
1.3.1 Potència monofàsica	9
1.3.2 Potència trifàsica	10
2 Components Simètriques	13
2.1 L'operador complex «a»	13
2.2 Teorema de Fortescue–Stokvis	13
2.3 Corrent de neutre	14
2.4 Propietats de les tensions fase–fase i fase–neutre	15
2.5 Potència	16

3	Càlculs Bàsics	19
3.1	Transformació estrella \leftrightarrow triangle d'impedàncies	19
3.2	Càlculs en p.u.	20
3.2.1	Mètode de càlcul	20
3.2.2	Canvi de base	21
3.3	Resolució de circuits coneixent la potència absorbida per la càrrega	22
3.3.1	Circuits de corrent continu	23
3.3.2	Circuits de corrent altern	23
3.4	Corrent de curt circuit en el secundari d'un transformador	25
II	Components Elèctrics	27
4	Cables	29
4.1	Resistència	29
4.1.1	Resistència d'un conductor	29
4.1.2	Resistència d'un cable	30
4.2	Caiguda de tensió	31
4.2.1	Caiguda de tensió en corrent continu	31
4.2.2	Caiguda de tensió en corrent altern	31
4.3	Capacitat tèrmica en curt circuit	33
4.4	Conversió entre unitats americanes i unitats SI	33
4.4.1	«Mils» (mil), «circular mils» (CM) i «thousand circular mils» (MCM)	33
4.4.2	«American Wire Gauge» (AWG)	35
5	Transformadors de Mesura i Protecció	39
5.1	Introducció	39
5.2	Error de mesura dels transformadors reals	40
5.2.1	Error de relació	40
5.2.2	Error de fase	40
5.2.3	Error compost	41
5.2.4	Classe, càrrega i potència de precisió	41
5.3	Característiques i valors normalitzats dels transformadors de tensió	42
5.3.1	Característiques comunes dels TT de mesura i de protecció	42

5.3.2	Característiques particulars dels TT de mesura	43
5.3.3	Característiques particulars dels TT de protecció	43
5.4	Característiques i valors normalitzats dels transformadors d'intensitat	44
5.4.1	Característiques comunes dels TI de mesura i de protecció	44
5.4.2	Característiques particulars dels TI de mesura	45
5.4.3	Característiques particulars dels TI de protecció	47
5.5	Comparació entre les normes CEI i ANSI	49
5.5.1	Normes CEI	49
5.5.2	Normes ANSI	49
III	Sistemes Elèctrics de Potència	51
6	Resolució de Xarxes Elèctriques	53
6.1	Introducció	53
6.2	Mètode general de resolució	55
6.3	Mètode particular de resolució sense acoblaments magnètics	60
6.4	Mètode particular de resolució amb acoblaments magnètics	61
6.5	Circuits equivalents Thévenin i Norton	62
7	Flux de Càrregues	65
7.1	Introducció	65
7.2	Models matemàtics	65
7.2.1	Càrregues	66
7.2.2	Línies elèctriques	66
7.2.3	Transformadors amb regulació variable i decalatge	67
7.2.4	Transformadors amb regulació variable sense decalatge	68
7.3	Tipus de nodes	69
7.4	Formulació del problema	71
7.5	Control del flux de potència	76
IV	Apèndixs	77
A	Escales Logarítmiques	79

vi	Índex
B Resistències	81
B.1 Codificació en colors	81
B.2 Valors estàndard	82
C Grau de Protecció IP	85
C.1 Codificació	85
C.2 Altres normes	86
D Numeració ANSI de Dispositius Elèctrics	87
E Classes NEMA d'Aïllaments Tèrmics en Motors	95
Índex alfabètic	97

Índex de taules

4.1	Paràmetres elèctrics del coure i l'alumini	29
4.2	Valors de k pel càlcul de la resistència efectiva	30
4.3	Valors de C pel càlcul de curt circuits en cables	33
4.4	Dimensions de cables definits en MCM	34
4.5	Dimensions de cables AWG	36
5.1	Classes de precisió per a TT de mesura i protecció	43
5.2	Classes de precisió addicionals per a TT de protecció	44
5.3	Classes de precisió 0,1, 0,2, 0,5 i 1 per a TI de mesura	46
5.4	Classes de precisió 3 i 5 per a TI de mesura	46
5.5	Classes de precisió per a TI de protecció	48
7.1	Tipus de nodes en un sistema elèctric de potència	70
B.1	Codificació en colors de les resistències	81
B.2	Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 20\%$	82
B.3	Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 10\%$	82
B.4	Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 5\%$	82
B.5	Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 2\%$	83
B.6	Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 1\%$	83
B.7	Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\leq \pm 0,5\%$	83
E.1	Classes NEMA d'aïllaments tèrmics en motors	95

Índex de figures

1.1	Teorema de Thévenin	3
1.2	Teorema de Norton	4
1.3	Teorema de Millman	4
1.4	Resistència	6
1.5	Capacitat	6
1.6	Inductància	7
1.7	Acoblament magnètic	8
1.8	Transformador ideal	8
1.9	Potència complexa monofàsica	9
1.10	Potència complexa trifàsica. Sistemes de 4 fils i 3 fils respectivament.	10
2.1	Components simètriques. Teorema de Fortescue–Stokvis	14
2.2	Components simètriques. Tensions fase–fase i fase–neutre	15
3.1	Transformació estrella \leftrightarrow triangle d’impedàncies	19
3.2	Resolució de circuits coneixent la potència absorbida per la càrrega	23
3.3	Corrent de curt circuit en el secundari d’un transformador	25
4.1	Caiguda de tensió en corrent altern	31
5.1	Transformadors de tensió i d’intensitat	39
6.1	Substitució de branques d’impedància nul·la	54
6.2	Resolució de xarxes elèctriques pel mètode dels nodes	54
6.3	Circuit equivalent de dues branques acoblades magnèticament	62

7.1	Circuit equivalent d'una línia elèctrica	66
7.2	Circuit equivalent d'un transformador amb regulació variable i decalatge	67
7.3	Circuit equivalent d'un transformació amb regulació variable sense decalatge	69
A.1	Escala logarítmica	79

Prefaci

Voldria dir en primer lloc que no he intentat escriure un tractat complet d'electrotècnia, d'electrònica o de sistemes elèctrics de potència, si no que més aviat he volgut fer una recopilació de qüestions teòriques i pràctiques relacionades amb els camps mencionats anteriorment.

Les fonts d'informació utilitzades en la realització d'aquest llibre són molt diverses, i inclouen llibres sobre les diferents matèries, articles de revistes o d'Internet, apunts de classe d'assignatures impartides a l'ETSEIB, i d'altres.

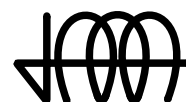
Pel que fa al llibre en si mateix, s'ha escrit utilitzant el sistema de composició de textos \LaTeX , el qual permet integrar molt fàcilment text, fórmules i gràfics, obtenint uns resultats de gran qualitat. S'han utilitzat diversos paquets d'ampliació, com ara l' \LaTeX , per tal de millorar la presentació de certes parts del llibre, com per exemple les taules, les capçaleres, les fórmules matemàtiques, etc.

Aquest llibre, està pensat per ser utilitzat tant de forma directa en la pantalla d'un ordinador, com en paper després d'haver-lo imprès; per tal d'estalviar paper, el text té un format pensat per ser imprès en paper DIN-A4, a dues cares.

El contingut del llibre és força divers, i va des de temes força teòrics, fins a d'altres bastant més pràctics. He procurat donar exemples de tots els conceptes que s'hi expliquen, excepció feta dels molt elementals, perquè crec que és important no quedar-se només amb la teoria de la resolució d'un problema determinat, si no que és molt útil veure exemples resolts pas a pas.

Encara que he fet tots els esforços possibles per eliminar qualsevol mena d'error en aquest text, és gairebé inevitable que n'hagi quedat algun, per tant, si algú troba un error, farà bé d'avisar-me!

Només em resta dir, que espero que els que llegeixin aquest llibre el trobin útil i interessant.



Josep Mollera Barriga

Badalona, 8 de gener de 2005

(✉ jmollerab@ati.es)

Notació

Es presenta a continuació la notació seguida en aquest llibre.

Cal fer notar que les variables vectorials o matricials s'escriuen en lletra negreta inclinada, mentre que les variables escalars s'escriuen en lletra normal inclinada.

V	Una variable real.
\underline{V}	Una variable complexa.
\underline{V}^*	Conjugat d'una variable complexa. Es compleixen les igualtats: $(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \cdots + \underline{V}_n)^* = \underline{V}_1^* + \underline{V}_2^* + \cdots + \underline{V}_n^*$ $(\underline{V}_1 \underline{V}_2 \cdots \underline{V}_n)^* = \underline{V}_1^* \underline{V}_2^* \cdots \underline{V}_n^*$
$ \underline{V} $	Mòdul d'una variable complexa. Es compleix la igualtat: $\underline{V} \underline{V}^* = \underline{V} ^2$
$\arg(\underline{V})$	Argument (angle) d'una variable complexa.
$\text{Re}(\underline{V})$	Part real d'una variable complexa.
$\text{Im}(\underline{V})$	Part imaginària d'una variable complexa.
j	La unitat imaginària, definida com: $j \equiv \sqrt{-1}$
$A + jB$	Expressió cartesiana (part real i part imaginària) d'una variable complexa.
$Z \angle \delta$	Expressió polar (mòdul i argument) d'una variable complexa. Les relacions entre A, B, Z i δ són: $Z = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \delta = \arctan \frac{B}{A}, \quad A = Z \cos \delta, \quad B = Z \sin \delta$
$Z e^{j\delta}$	Expressió d'Euler d'una variable complexa, definida com: $Z e^{j\delta} \equiv Z(\cos \delta + j \sin \delta)$
\mathbf{V}	Una matriu real o un vector real.
\mathbf{V}^{-1}	Matriu inversa d'una matriu real.
\mathbf{V}^T	Matriu transposada d'una matriu real o vector transposat d'un vector real.
$\mathbf{V}(n)$	Element n -èsim d'un vector real.

$V(m, n)$	Element de la fila m i columna n d'una matriu real.
\underline{V}	Una matriu complexa o un vector complex.
\underline{V}^{-1}	Matriu inversa d'una matriu complexa.
\underline{V}^T	Matriu transposada d'una matriu complexa o vector transposat d'un vector complex.
$\underline{V}(n)$	Element n -èsim d'un vector complex.
$\underline{V}(m, n)$	Element de la fila m i columna n d'una matriu complexa.

Part I

Electrotècnia

Es tracten en aquest capítol qüestions bàsiques d'electrotècnia, com ara teoremes, definicions i relacions.

1.1 Teoremes d'electrotècnia

1.1.1 Teorema de Thévenin–Norton

El teorema de Thévenin ens permet substituir una xarxa complexa per un circuit equivalent, format per una font de tensió \underline{E}_{Th} en sèrie amb una impedància \underline{Z}_{Th} .

Atenent a la Figura 1.1, si coneixem la tensió en buit \underline{U}_o entre dos nodes α i β d'una xarxa, i la impedància $\underline{Z}_{\alpha\beta}$ d'aquesta xarxa vista des d'aquests dos nodes, podem obtenir els valors del circuit Thévenin equivalent entre aquests dos nodes, a partir de les relacions següents:

$$\underline{E}_{Th} = \underline{U}_o \quad \underline{Z}_{Th} = \underline{Z}_{\alpha\beta} \quad (1.1)$$

D'aquesta manera, la connexió d'aquesta xarxa a través dels nodes α i β a una càrrega qualsevol \underline{Z}_Q , és equivalent pel que fa a aquesta càrrega, a connectar el circuit equivalent Thévenin a la càrrega.

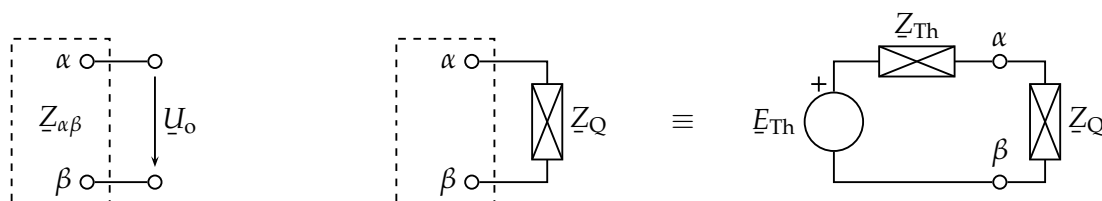


Figura 1.1: Teorema de Thévenin

El teorema de Norton ens permet substituir una xarxa complexa per un circuit equivalent, format per una font de corrent \underline{I}_{Th} en paral·lel amb una admitància \underline{Y}_{Th} .

Atenent a la Figura 1.2, si coneixem el corrent de curt circuit I_{cc} entre dos nodes α i β d'una xarxa, i l'admitància $Y_{\alpha\beta}$ d'aquesta xarxa vista des d'aquests dos nodes, podem obtenir els valors del circuit Norton equivalent entre aquests dos nodes, a partir de les relacions següents:

$$\underline{I}_{Th} = \underline{I}_{cc} \quad \underline{Y}_{Th} = Y_{\alpha\beta} \quad (1.2)$$

D'aquesta manera, la connexió d'aquesta xarxa a través dels nodes α i β a una càrrega qualsevol Z_Q , és equivalent pel que fa a aquesta càrrega, a connectar el circuit equivalent Norton a la càrrega.

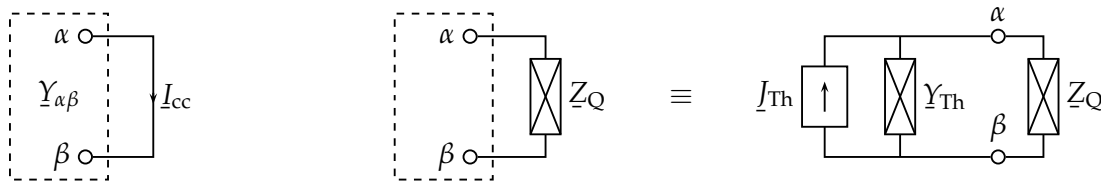


Figura 1.2: Teorema de Norton

Els circuits Thévenin i Norton d'una xarxa són equivalents entre si. Els paràmetres que defineixen aquests circuits guarden les relacions següents:

$$\underline{E}_{Th} = Z_{Th} \underline{I}_{Th} \quad Z_{Th} = \frac{1}{Y_{Th}} \quad (1.3)$$

Els valors Z_{Th} o Y_{Th} es poden obtenir substituint totes les font de tensió per curts circuits, i totes les font de corrent per circuits oberts, i calculant aleshores la impedància o admitància equivalent.

1.1.2 Teorema de Millman

Atenent a la Figura 1.3, el teorema de Millman ens permet obtenir la tensió de l'extrem comú v de diverses impedàncies, respecte d'un punt qualsevol α , a partir de les tensions dels altres extrems de les impedàncies respecte del mateix punt α .

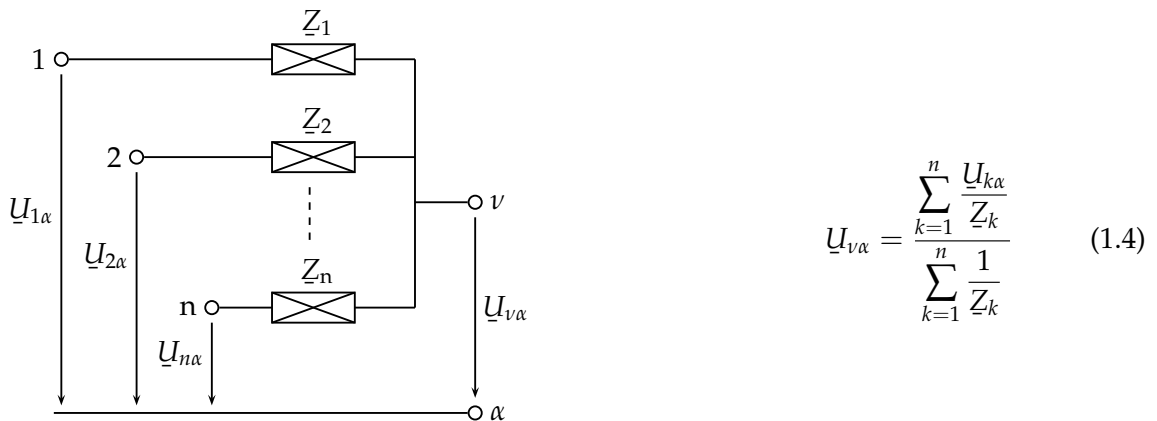
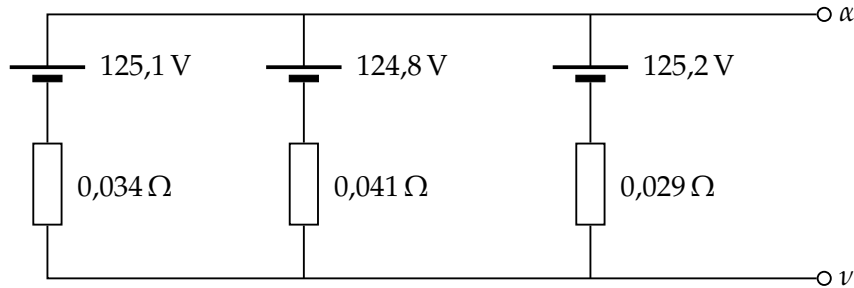


Figura 1.3: Teorema de Millman

Exemple 1.1 A partir de la figura següent, es tracta de determinar els circuits Thévenin i Norton equivalents del circuit format per les tres bateries i les seves resistències, i calcular la tensió i la intensitat que existirien en una resistència de càrrega $R_Q = 50 \Omega$, que es connectés entre els punts α i v .



La impedància Thévenin equivalent es calcula, tal com s'ha dit en la Secció 1.1.1, substituint en el circuit totes les fonts de tensió per curts circuits, així doncs, ens queden tres resistències en paral·lel entre α i v :

$$Z_{Th} = R_{\alpha v} = \frac{1}{\frac{1}{0,034 \Omega} + \frac{1}{0,041 \Omega} + \frac{1}{0,029 \Omega}} = 0,01133 \Omega$$

Per calcular la font de tensió Thévenin equivalent, utilitzarem el teorema de Millman. Si es compara aquest circuit amb el de la Figura 1.3 a la pàgina anterior, veurem que els punts α i v dels dos circuits són equivalents, és a dir, v és el punt comú de les impedàncies, i α és el punt de referència dels altres extrems de les impedàncies, respecte del qual les tensions són conegudes (tensions de les bateries). Així doncs tenim:

$$U_{v\alpha} = \frac{\frac{-125,1 \text{ V}}{0,034 \Omega} + \frac{-124,8 \text{ V}}{0,041 \Omega} + \frac{-125,2 \text{ V}}{0,029 \Omega}}{\frac{1}{0,034 \Omega} + \frac{1}{0,041 \Omega} + \frac{1}{0,029 \Omega}} = -125,0562 \text{ V}$$

La font de tensió Thévenin equivalent és per tant:

$$E_{Th} = U_{\alpha v} = 125,0562 \text{ V}$$

Calculem a continuació l'admitància i la font de corrent Norton equivalents, utilitzant l'equació (1.3):

$$Y_{Th} = \frac{1}{Z_{Th}} = \frac{1}{0,01133 \Omega} = 82,2613 \text{ S}$$

$$J_{Th} = \frac{E_{Th}}{Z_{Th}} = \frac{125,0562 \text{ V}}{0,01133 \Omega} = 11037,6150 \text{ A}$$

Tal com s'ha dit en la Secció 1.1.1, J_{Th} és igual a la intensitat de curtcircuit entre els punts α i v .

Finalment, ja podem calcular el corrent I_Q i la tensió U_Q en la resistència de càrrega, utilitzant el circuit Thévenin equivalent calculat anteriorment:

$$I_Q = \frac{E_{Th}}{Z_{Th} + R_Q} = \frac{125,0562 \text{ V}}{0,01133 \Omega + 50 \Omega} = 2,5001 \text{ A}$$

$$U_Q = R_Q I_Q = 50 \Omega \cdot 2,5001 \text{ A} = 125,0050 \text{ V}$$

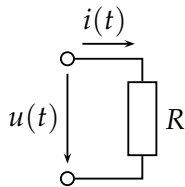
1.2 Components elementals d'un circuit elèctric

Es presenten a continuació les lleis temporals que lliguen tensions, corrents i potències, per a diversos components elementals d'un circuit elèctric. Es donen també les relacions entre tensions i corrents en el domini freqüencial (corrent altern sinusoïdal, amb $\omega = 2\pi f$) i en el domini operacional (transformada de Laplace).

Cal tenir en compte que les relacions que es donen, són vàlides només quan es tenen en consideració els sentits assignats als corrents i a les tensions en les figures corresponents.

1.2.1 Resistència

Per a una resistència R (Figura 1.4), la llei temporal entre la tensió $u(t)$ i el corrent $i(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:



$$u(t) = Ri(t) \quad (1.5)$$

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R} \quad (1.6)$$

Figura 1.4: Resistència

En el domini freqüencial, la relació entre la tensió \underline{U} i el corrent \underline{I} , i la relació entre els arguments de la tensió φ_U i del corrent φ_I són:

$$\underline{U} = R\underline{I} \quad (1.7)$$

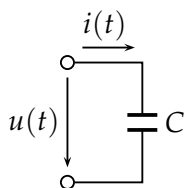
$$\varphi_U = \varphi_I \quad (1.8)$$

En el domini operacional, la relació entre la tensió $U(s)$ i el corrent $I(s)$ és:

$$U(s) = RI(s) \quad (1.9)$$

1.2.2 Capacitat

Per a una capacitat C (Figura 1.5), les lleis temporals entre la tensió $u(t)$ i el corrent $i(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:



$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt \quad (1.10)$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (1.11)$$

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} \quad (1.12)$$

Figura 1.5: Capacitat

En el domini freqüencial, la relació entre la tensió \underline{U} i el corrent \underline{I} , i la relació entre els arguments de la tensió φ_U i del corrent φ_I són:

$$\underline{U} = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I} \quad (1.13)$$

$$\varphi_U = \varphi_I - \frac{\pi}{2} \quad (1.14)$$

En el domini operacional, la relació entre la tensió $U(s)$ i el corrent $I(s)$ és:

$$U(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u(t_0)}{s} \quad (1.15)$$

1.2.3 Inductància

Per a una inductància L (Figura 1.6), les lleis temporals entre la tensió $u(t)$ i el corrent $i(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:

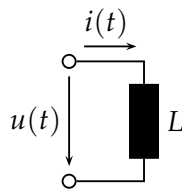


Figura 1.6: Inductància

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(t) dt \quad (1.16)$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.17)$$

$$p(t) = u(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (1.18)$$

En el domini freqüencial, la relació entre la tensió \underline{U} i el corrent \underline{I} , i la relació entre els arguments de la tensió φ_U i del corrent φ_I són:

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I} \quad (1.19)$$

$$\varphi_U = \varphi_I + \frac{\pi}{2} \quad (1.20)$$

En el domini operacional, la relació entre la tensió $U(s)$ i el corrent $I(s)$ és:

$$U(s) = sLI(s) - Li(t_0) \quad (1.21)$$

1.2.4 Acoblament magnètic

Per a un acoblament magnètic M entre dues inductàncies L_1 i L_2 (Figura 1.7 a la pàgina següent), les lleis temporals entre les tensions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ i els corrents $i_1(t)$ i $i_2(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:

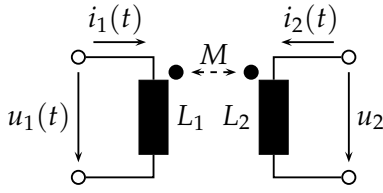


Figura 1.7: Acoblament magnètic

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (1.22)$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \quad (1.23)$$

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \right] \quad (1.24)$$

En el domini freqüencial, les relacions entre les tensions \underline{U}_1 i \underline{U}_2 i els corrents \underline{I}_1 i \underline{I}_2 són:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \quad (1.25)$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 \quad (1.26)$$

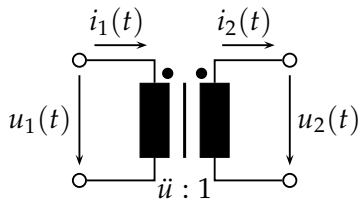
En el domini operacional, les relacions entre les tensions $U_1(s)$ i $U_2(s)$ i els corrents $I_1(s)$ i $I_2(s)$ són:

$$U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(t_0) + sM I_2(s) - M i_2(t_0) \quad (1.27)$$

$$U_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(t_0) + sM I_1(s) - M i_1(t_0) \quad (1.28)$$

1.2.5 Transformador ideal

Per a un transformador ideal de relació $\ddot{u} : 1$ (Figura 1.8), la llei temporal entre les tensions de primari $u_1(t)$ i de secundari $u_2(t)$, la llei temporal entre els corrents de primari $i_1(t)$ i de secundari $i_2(t)$, i la llei temporal de la potència $p(t)$ són:



$$u_1(t) = \ddot{u} u_2(t) \quad (1.29)$$

$$i_1(t) = \frac{i_2(t)}{\ddot{u}} \quad (1.30)$$

$$p(t) = u_1(t) i_1(t) - u_2(t) i_2(t) = 0 \quad (1.31)$$

Figura 1.8: Transformador ideal

En el domini freqüencial, la relació entre les tensions de primari \underline{U}_1 i de secundari \underline{U}_2 , la relació entre els corrents de primari \underline{I}_1 i de secundari \underline{I}_2 , la relació entre els arguments de les tensions de primari $\varphi_{\underline{U}_1}$ i de secundari $\varphi_{\underline{U}_2}$, i la relació entre els arguments dels corrents de primari $\varphi_{\underline{I}_1}$ i de secundari $\varphi_{\underline{I}_2}$ són:

$$\underline{U}_1 = \ddot{u} \underline{U}_2 \quad (1.32)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{I}_2}{\ddot{u}} \quad (1.33)$$

$$\varphi_{\underline{U}_1} = \varphi_{\underline{U}_2} \quad (1.34)$$

$$\varphi_{\underline{I}_1} = \varphi_{\underline{I}_2} \quad (1.35)$$

En el domini operacional, la relació entre les tensions de primari $U_1(s)$ i de secundari $U_2(s)$, i la relació entre els corrents de primari $I_1(s)$ i de secundari $I_2(s)$ són:

$$U_1(s) = \dot{u}U_2(s) \quad (1.36)$$

$$I_1(s) = \frac{I_2(s)}{\dot{u}} \quad (1.37)$$

1.3 Potència complexa

1.3.1 Potència monofàsica

En la Figura 1.9 es representa una càrrega $Z = R + jX$, la qual absorbeix una potència complexa $\underline{S} = P + jQ$.

R i X són respectivament la part resistiva i la part reactiva (inductiva o capacitiva) de la càrrega, i P i Q són respectivament la potència activa i la potència reactiva (inductiva o capacitiva) absorbida per la càrrega.

La potència activa absorbida per una càrrega sempre és positiva, en canvi, la potència reactiva absorbida per una càrrega pot ser positiva o negativa, segons que predomini més la part inductiva o la part capacitiva de la càrrega, respectivament.

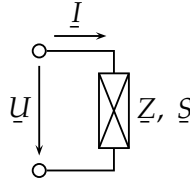


Figura 1.9: Potència complexa monofàsica

L'angle φ entre els vectors \underline{U} i \underline{I} compleix la següent relació:

$$\tan \varphi = \frac{X}{R} = \frac{Q}{P} \quad (1.38)$$

A partir d'aquest angle φ , es defineix el factor de potència de la càrrega:

$$\text{Factor de potència} \equiv \cos \varphi \quad (1.39)$$

Donat que per a un angle qualsevol α , es compleix la igualtat trigonomètrica: $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$, quan es dona el factor de potència d'una càrrega, cal especificar si és inductiu ($Q > 0, \tan \varphi > 0$) o capacitiu ($Q < 0, \tan \varphi < 0$); això es fa, afegint «(i)» o «(c)», respectivament, al valor numèric del factor de potència, per exemple: $\cos \varphi = 0,8(i)$, $\cos \varphi = 0,9(c)$.

Les relacions que lliguen la potència complexa amb la tensió i el corrent són:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ \quad (1.40)$$

$$|\underline{S}| = |\underline{U}| |\underline{I}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (1.41)$$

$$P = \text{Re}(\underline{U} \underline{I}^*) = |\underline{S}| \cos \varphi = |\underline{U}| |\underline{I}| \cos \varphi \quad (1.42)$$

$$Q = \text{Im}(\underline{U} \underline{I}^*) = |\underline{S}| \sin \varphi = |\underline{U}| |\underline{I}| \sin \varphi \quad (1.43)$$

1.3.2 Potència trifàsica

En la Figura 1.10 es representen dos sistemes d'alimentació a càrregues trifàsiques; el de l'esquerra és un sistema de 4 fils (3 fases + neutre) i el de la dreta és un sistema de 3 fils (3 fases). En ambdós casos, es consideren tres càrregues $\underline{Z}_\alpha = R_\alpha + jX_\alpha$, $\underline{Z}_\beta = R_\beta + jX_\beta$ i $\underline{Z}_\gamma = R_\gamma + jX_\gamma$ connectades en estrella, les quals absorbeixen respectivament unes potències complexes $\underline{S}_\alpha = P_\alpha + jQ_\alpha$, $\underline{S}_\beta = P_\beta + jQ_\beta$ i $\underline{S}_\gamma = P_\gamma + jQ_\gamma$.

R_α , R_β i R_γ , i X_α , X_β i X_γ són respectivament les parts resistives i les parts reactives (inductives o capacitives) de les càrregues, i P_α , P_β i P_γ , i Q_α , Q_β i Q_γ són respectivament les potències actives i les potències reactives (inductives o capacitives) absorbides per les càrregues.

El sistema d'alimentació de 3 fils, admet també càrregues trifàsiques connectades en triangle; en aquest cas només cal dur a terme la transformació a una connexió en estrella (vegeu la Secció 3.1), i per tant, la descripció que segueix es pot considerar del tot general.

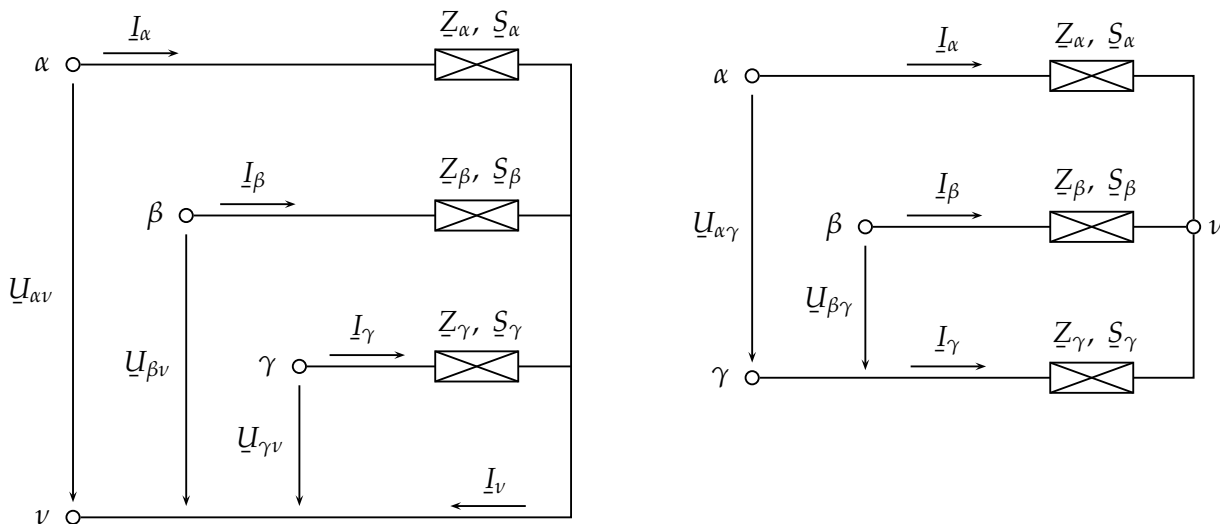


Figura 1.10: Potència complexa trifàsica. Sistemes de 4 fils i 3 fils respectivament.

En el cas més general, on la càrrega trifàsica és desequilibrada, cada impedància té el seu propi factor de potència $\cos \varphi_\alpha$, $\cos \varphi_\beta$ i $\cos \varphi_\gamma$, complint-se:

$$\tan \varphi_\alpha = \frac{X_\alpha}{R_\alpha} = \frac{Q_\alpha}{P_\alpha} \quad \tan \varphi_\beta = \frac{X_\beta}{R_\beta} = \frac{Q_\beta}{P_\beta} \quad \tan \varphi_\gamma = \frac{X_\gamma}{R_\gamma} = \frac{Q_\gamma}{P_\gamma} \quad (1.44)$$

Sistema equilibrat o desequilibrat (de 3 fils o de 4 fils)

Aquest és el cas més general, ja que les tensions, la càrrega o ambdues a l'hora poden ser desequilibrades, i el sistema d'alimentació pot ser de 3 fils o de 4 fils.

En el cas del sistema d'alimentació de 4 fils tenim: $\underline{I}_\alpha + \underline{I}_\beta + \underline{I}_\gamma = \underline{I}_\nu$, i en el cas del sistema d'alimentació de 3 fils tenim: $\underline{I}_\alpha + \underline{I}_\beta + \underline{I}_\gamma = 0$. No obstant, si prenem en ambdós casos el punt ν com a referència de les tensions, el corrent \underline{I}_ν no intervindrà en el càlcul de la potència. Així doncs,

les relacions que lliguen la potència complexa trifàsica $\underline{S}_{3F} = P_{3F} + jQ_{3F}$ amb les tensions i corrents són:

$$\underline{S}_{3F} = \underline{S}_\alpha + \underline{S}_\beta + \underline{S}_\gamma = \underline{U}_{\alpha\nu} I_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\nu} I_\beta^* + \underline{U}_{\gamma\nu} I_\gamma^* = (P_\alpha + P_\beta + P_\gamma) + j(Q_\alpha + Q_\beta + Q_\gamma) \quad (1.45)$$

$$|\underline{S}_{3F}| = |\underline{S}_\alpha + \underline{S}_\beta + \underline{S}_\gamma| = |\underline{U}_{\alpha\nu} I_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\nu} I_\beta^* + \underline{U}_{\gamma\nu} I_\gamma^*| = \sqrt{(P_\alpha + P_\beta + P_\gamma)^2 + (Q_\alpha + Q_\beta + Q_\gamma)^2} \quad (1.46)$$

$$P_{3F} = \text{Re}(\underline{U}_{\alpha\nu} I_\alpha^*) + \text{Re}(\underline{U}_{\beta\nu} I_\beta^*) + \text{Re}(\underline{U}_{\gamma\nu} I_\gamma^*) = |\underline{S}_\alpha| \cos \varphi_\alpha + |\underline{S}_\beta| \cos \varphi_\beta + |\underline{S}_\gamma| \cos \varphi_\gamma \quad (1.47)$$

$$Q_{3F} = \text{Im}(\underline{U}_{\alpha\nu} I_\alpha^*) + \text{Im}(\underline{U}_{\beta\nu} I_\beta^*) + \text{Im}(\underline{U}_{\gamma\nu} I_\gamma^*) = |\underline{S}_\alpha| \sin \varphi_\alpha + |\underline{S}_\beta| \sin \varphi_\beta + |\underline{S}_\gamma| \sin \varphi_\gamma \quad (1.48)$$

Cal anar amb compte amb l'equació (1.46), i utilitzar-la al peu de la lletra, ja que en general tenim: $|\underline{S}_\alpha + \underline{S}_\beta + \underline{S}_\gamma| \neq |\underline{S}_\alpha| + |\underline{S}_\beta| + |\underline{S}_\gamma|$.

Sistema equilibrat (de 3 fils o de 4 fils)

Aquest és un cas particular de l'anterior, que es presenta quan tenim un sistema de tensions equilibrat que alimenta a tres impedàncies idèntiques; en aquest cas es compleix sempre: $\underline{I}_\nu = 0$, i com a conseqüència, tenim que els sistemes de 3 fils i de 4 fils són equivalents.

Les equacions de l'apartat anterior es simplifiquen, i en aquest cas, les relacions que lliguen la potència complexa trifàsica equilibrada $\underline{S}_{3F}^{\text{EQ}} = P_{3F}^{\text{EQ}} + jQ_{3F}^{\text{EQ}}$ amb les tensions i corrents són:

$$\underline{S}_{3F}^{\text{EQ}} = 3\underline{S}_\alpha = 3\underline{U}_{\alpha\nu} I_\alpha^* = 3(P_\alpha + jQ_\alpha) = P_{3F}^{\text{EQ}} + jQ_{3F}^{\text{EQ}} \quad (1.49)$$

$$|\underline{S}_{3F}^{\text{EQ}}| = 3|\underline{S}_\alpha| = 3|\underline{U}_{\alpha\nu}| |I_\alpha| = \sqrt{3} |\underline{U}_{\alpha\gamma}| |I_\alpha| = 3 \sqrt{P_\alpha^2 + Q_\alpha^2} = \sqrt{(P_{3F}^{\text{EQ}})^2 + (Q_{3F}^{\text{EQ}})^2} \quad (1.50)$$

$$P_{3F}^{\text{EQ}} = 3 \text{Re}(\underline{U}_{\alpha\nu} I_\alpha^*) = |\underline{S}_{3F}^{\text{EQ}}| \cos \varphi_\alpha = 3 |\underline{U}_{\alpha\nu}| |I_\alpha| \cos \varphi_\alpha = \sqrt{3} |\underline{U}_{\alpha\gamma}| |I_\alpha| \cos \varphi_\alpha \quad (1.51)$$

$$Q_{3F}^{\text{EQ}} = 3 \text{Im}(\underline{U}_{\alpha\nu} I_\alpha^*) = |\underline{S}_{3F}^{\text{EQ}}| \sin \varphi_\alpha = 3 |\underline{U}_{\alpha\nu}| |I_\alpha| \sin \varphi_\alpha = \sqrt{3} |\underline{U}_{\alpha\gamma}| |I_\alpha| \sin \varphi_\alpha \quad (1.52)$$

En les equacions anteriors s'ha utilitzat la fase α , però es podria haver escollit també qualsevol de les altres dues. Cal tenir en compte a més, que l'angle φ_α és sempre el format pels vectors $\underline{U}_{\alpha\nu}$ i \underline{I}_α , i no pas l'angle format pels vectors $\underline{U}_{\alpha\gamma}$ i \underline{I}_α .

Sistema equilibrat o desequilibrat de 3 fils

Aquest és un cas general, on les tensions, la càrrega o ambdues a l'hora poden ser desequilibrades, però amb l'única restricció que el sistema d'alimentació sigui de 3 fils.

Només en aquest cas (sistema de 3 fils) podem prescindir del punt ν , a l'hora de calcular la potència, i utilitzar només les tensions entre fases.

En aquest cas, les relacions que lliguen la potència complexa trifàsica $\underline{S}_{3F} = P_{3F} + jQ_{3F}$ amb les tensions i corrents són:

$$\underline{S}_{3F} = \underline{U}_{\alpha\gamma} I_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\gamma} I_\beta^* \quad (1.53)$$

$$|\underline{S}_{3F}| = |\underline{U}_{\alpha\gamma} I_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\gamma} I_\beta^*| \quad (1.54)$$

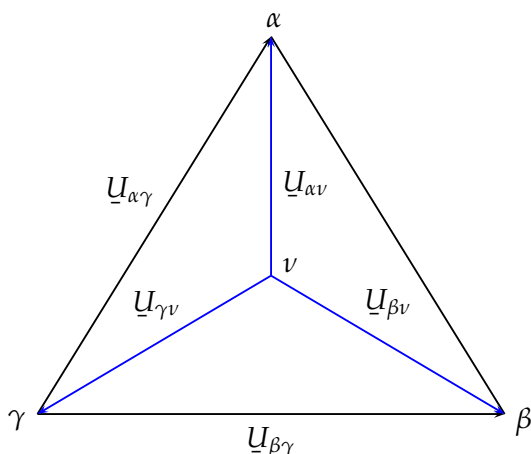
$$P_{3F} = \text{Re}(\underline{U}_{\alpha\gamma} I_\alpha^*) + \text{Re}(\underline{U}_{\beta\gamma} I_\beta^*) \quad (1.55)$$

$$Q_{3F} = \text{Im}(\underline{U}_{\alpha\gamma} I_\alpha^*) + \text{Im}(\underline{U}_{\beta\gamma} I_\beta^*) \quad (1.56)$$

En les equacions anteriors s'ha utilitzat la fase γ com a fase de referència, però es podria haver escollit també qualsevol de les altres dues.

Exemple 1.2 Es tracta de trobar la potència \underline{S} consumida per una càrrega trifàsica equilibrada, connectada en estrella a un sistema de tensions d'alimentació de 3 fils, també equilibrat; la tensió fase-neutre té un valor de 220 V i cadascuna de les tres impedàncies que formen l'estrella té un valor de $\underline{Z} = 22\angle 45^\circ \Omega$. S'utilitzaran totes les equacions que siguin possibles, d'entre les vistes en aquest darrer apartat.

Prenent com referència d'angles la tensió $\underline{U}_{\beta\gamma}$, obtenim en primer lloc els valors de les diferents tensions necessàries per resoldre el nostre problema:



$$\underline{U}_{\alpha v} = 220\angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{\beta v} = 220\angle -30^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{\gamma v} = 220\angle 210^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{\alpha\gamma} = \sqrt{3} \cdot 220\angle 60^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{\beta\gamma} = \sqrt{3} \cdot 220\angle 0^\circ \text{ V}$$

Els corrents \underline{I}_α , \underline{I}_β i \underline{I}_γ que circulen per les tres fases són:

$$\underline{I}_\alpha = \frac{\underline{U}_{\alpha v}}{\underline{Z}} = 10\angle 45^\circ \text{ A} \quad \underline{I}_\beta = \frac{\underline{U}_{\beta v}}{\underline{Z}} = 10\angle -75^\circ \text{ A} \quad \underline{I}_\gamma = \frac{\underline{U}_{\gamma v}}{\underline{Z}} = 10\angle 165^\circ \text{ A}$$

Per començar, utilitzarem l'equació (1.49), ja que tenim un sistema equilibrat tant pel què fa a les tensions com pel què fa a la càrrega:

$$\underline{S} = 3 \underline{U}_{\alpha v} \underline{I}_\alpha^* = 3 \cdot 220\angle 90^\circ \text{ V} \cdot 10\angle -45^\circ \text{ A} = 6600\angle 45^\circ \text{ VA}$$

A continuació, utilitzarem l'equació (1.53), ja que tenim un sistema d'alimentació de 3 fils:

$$\underline{S} = \underline{U}_{\alpha\gamma} \underline{I}_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\gamma} \underline{I}_\beta^* = \sqrt{3} \cdot 220\angle 60^\circ \text{ V} \cdot 10\angle -45^\circ \text{ A} + \sqrt{3} \cdot 220\angle 0^\circ \text{ V} \cdot 10\angle 75^\circ \text{ A} = 6600\angle 45^\circ \text{ VA}$$

Finalment, utilitzarem l'equació (1.45), ja que sempre és aplicable:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_{\alpha v} \underline{I}_\alpha^* + \underline{U}_{\beta v} \underline{I}_\beta^* + \underline{U}_{\gamma v} \underline{I}_\gamma^* = \\ &= 220\angle 90^\circ \text{ V} \cdot 10\angle -45^\circ \text{ A} + 220\angle -30^\circ \text{ V} \cdot 10\angle 75^\circ \text{ A} + 220\angle 210^\circ \text{ V} \cdot 10\angle -165^\circ \text{ A} = 6600\angle 45^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$

Com era d'esperar, el resultat obtingut amb les tres equacions emprades es idèntic, ja que en aquest cas, totes tres són aplicables a la resolució d'aquest problema.

Components Simètriques

La teoria de les components simètriques és útil en l'estudi de tensions i corrents trifàsics desequilibrats, com ara els que es produeixen en un curt circuit on no intervenen les tres fases a l'hora (curt circuit fase-terra, fase-fase, etc.).

2.1 L'operador complex «a»

Definim en primer lloc l'operador complex «a», el qual té un mòdul igual a la unitat i un argument igual a 120° :

$$a = 1_{\angle 120^\circ} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.1)$$

A l'hora d'operar amb aquest valor, resulten útils les relacions següents:

$$a^2 = 1_{\angle 240^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad a^3 = 1_{\angle 0^\circ} \quad 1 + a + a^2 = 0 \quad (2.2)$$

2.2 Teorema de Fortescue–Stokvis

Tal com es veu en la Figura 2.1 a la pàgina següent, aquest teorema estableix que qualsevol sistema trifàsic asimètric (també anomenat desequilibrat), es pot descompondre en la suma de tres sistemes simètrics: un sistema directe o de seqüència positiva, un sistema invers o de seqüència negativa, i un sistema homopolar o de seqüència zero. Els vectors $\underline{\chi}_\alpha$, $\underline{\chi}_\beta$ i $\underline{\chi}_\gamma$, poden representar tant tensions com corrents.

El sistema directe està format per tres vectors que tenen la mateixa seqüència de fases que els vectors originals, per exemple: α - β - γ ; els vectors s'identifiquen mitjançant els superíndexs «(1)» o «(d)». El sistema invers està format per tres vectors que tenen la seqüència contrària de fases que els vectors originals, per exemple: α - γ - β ; els vectors s'identifiquen mitjançant els superíndexs «(2)» o «(i)». Finalment el sistema homopolar està format per tres vectors que estan en fase entre si; els vectors s'identifiquen mitjançant el superíndex «(0)».

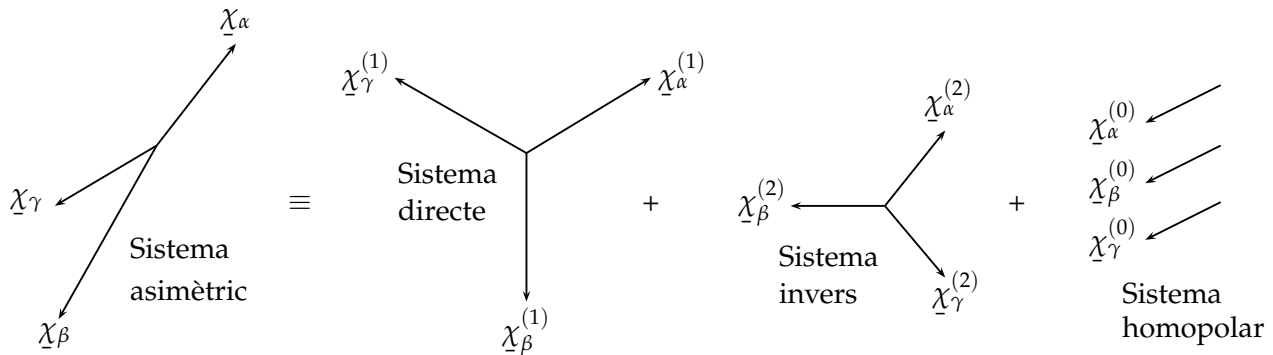


Figura 2.1: Components simètriques. Teorema de Fortescue–Stokvis

Per tant, expressant els vectors del sistema asimètric en funció dels vectors dels tres sistemes simètrics, tenim:

$$\underline{X}_\alpha = \underline{X}_\alpha^{(0)} + \underline{X}_\alpha^{(1)} + \underline{X}_\alpha^{(2)} \quad (2.3a)$$

$$\underline{X}_\beta = \underline{X}_\beta^{(0)} + \underline{X}_\beta^{(1)} + \underline{X}_\beta^{(2)} = \underline{X}_\alpha^{(0)} + a^2 \underline{X}_\alpha^{(1)} + a \underline{X}_\alpha^{(2)} \quad (2.3b)$$

$$\underline{X}_\gamma = \underline{X}_\gamma^{(0)} + \underline{X}_\gamma^{(1)} + \underline{X}_\gamma^{(2)} = \underline{X}_\alpha^{(0)} + a \underline{X}_\alpha^{(1)} + a^2 \underline{X}_\alpha^{(2)} \quad (2.3c)$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \underline{X}_\alpha \\ \underline{X}_\beta \\ \underline{X}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{X}_\alpha^{(0)} \\ \underline{X}_\alpha^{(1)} \\ \underline{X}_\alpha^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

A partir del sistema d'equacions anterior, podem trobar els vectors dels tres sistemes simètrics en funció dels vectors del sistema asimètric:

$$\underline{X}_\alpha^{(0)} = \frac{1}{3}(\underline{X}_\alpha + \underline{X}_\beta + \underline{X}_\gamma) \quad \underline{X}_\beta^{(0)} = \underline{X}_\alpha^{(0)} \quad \underline{X}_\gamma^{(0)} = \underline{X}_\alpha^{(0)} \quad (2.5a)$$

$$\underline{X}_\alpha^{(1)} = \frac{1}{3}(\underline{X}_\alpha + a \underline{X}_\beta + a^2 \underline{X}_\gamma) \quad \underline{X}_\beta^{(1)} = a^2 \underline{X}_\alpha^{(1)} \quad \underline{X}_\gamma^{(1)} = a \underline{X}_\alpha^{(1)} \quad (2.5b)$$

$$\underline{X}_\alpha^{(2)} = \frac{1}{3}(\underline{X}_\alpha + a^2 \underline{X}_\beta + a \underline{X}_\gamma) \quad \underline{X}_\beta^{(2)} = a \underline{X}_\alpha^{(2)} \quad \underline{X}_\gamma^{(2)} = a^2 \underline{X}_\alpha^{(2)} \quad (2.5c)$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \underline{X}_\alpha^{(0)} \\ \underline{X}_\alpha^{(1)} \\ \underline{X}_\alpha^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{X}_\alpha \\ \underline{X}_\beta \\ \underline{X}_\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{X}_\alpha \\ \underline{X}_\beta \\ \underline{X}_\gamma \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

2.3 Corrent de neutre

Suposem un sistema trifàsic amb neutre de retorn, que pot ser el terra, on qualsevol de les seves parts (generador, línia o consum) poden ser desequilibrades; el corrent que circula pel neutre és

sempre la suma dels tres corrents de fase: $\underline{I}_\alpha + \underline{I}_\beta + \underline{I}_\gamma$. A partir d'aquest valor i observant l'equació (2.5a), es veu que el corrent de retorn pel neutre, és igual a tres vegades la component homopolar del sistema de corrents de fase:

$$\underline{I}_\alpha + \underline{I}_\beta + \underline{I}_\gamma = 3\underline{I}_\alpha^{(0)} \quad (2.7)$$

D'altra banda, quan un sistema trifàsic no té neutre, tenim $\underline{I}_\alpha + \underline{I}_\beta + \underline{I}_\gamma = 0$, i per tant, observant la mateixa equació (2.5a), es veu que el sistema format pels corrents de fase no té sistema homopolar.

Finalment, també podem dir que el corrent total a terra, en cas de defecte a terra, és igual a tres vegades la component homopolar.

2.4 Propietats de les tensions fase–fase i fase–neutre

En la Figura 2.2 s'ha representat un sistema de tensions fase–fase: $\underline{U}_{\alpha\beta}$, $\underline{U}_{\beta\gamma}$, $\underline{U}_{\gamma\alpha}$, i dos sistemes de tensions fase–neutre, dels infinits que poden existir depenent de la posició del punt neutre: $\underline{U}_{\alpha\nu}$, $\underline{U}_{\beta\nu}$, $\underline{U}_{\gamma\nu}$ i $\underline{U}_{\alpha\kappa}$, $\underline{U}_{\beta\kappa}$, $\underline{U}_{\gamma\kappa}$. El punt neutre ν del primer sistema coincideix amb el baricentre (intersecció de les mitjanes) del triangle format per les tres tensions fase–fase, mentre que el punt neutre κ del segon sistema està desplaçat respecte d'aquest baricentre.

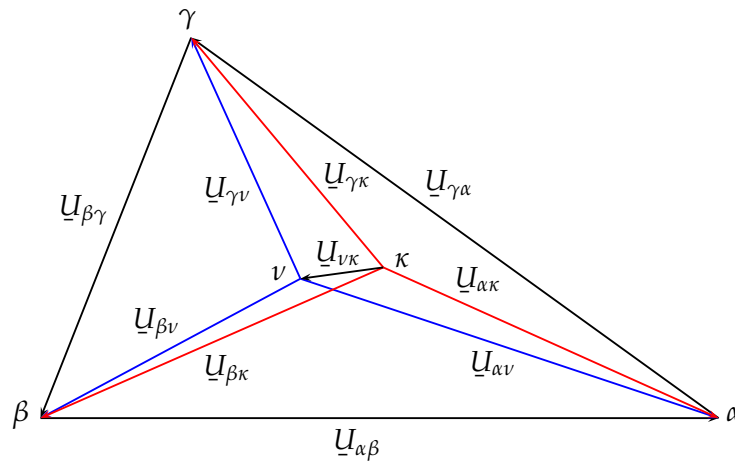


Figura 2.2: Components simètriques. Tensions fase–fase i fase–neutre

Atenent a l'equació (2.5a), es veu que el sistema format per les tensions fase–fase no té component homopolar, ja que la seva suma és sempre igual a zero: $\underline{U}_{\alpha\beta} + \underline{U}_{\beta\gamma} + \underline{U}_{\gamma\alpha} = 0$. Si a més d'aquesta consideració, tenim en compte el que s'ha dit en l'apartat anterior, resulta que un sistema trifàsic desequilibrat sense neutre, es pot estudiar tenint en compte només un sistema directe i un sistema invers, ja que tant les tensions fase–fase com els corrents de fase, no tenen component homopolar.

Pel que fa a les components directa i inversa del sistema format per les tensions fase–fase, es compleix el següent: les components directa i inversa del sistema de tensions fase–fase, són respectivament, els vectors fase–fase de les components directa i inversa del sistema de tensions fase–neutre.

Expressant-ho en forma matemàtica tenim:

$$\underline{U}_{\alpha\beta}^{(0)} = 0 \quad \underline{U}_{\beta\gamma}^{(0)} = 0 \quad \underline{U}_{\gamma\alpha}^{(0)} = 0 \quad (2.8a)$$

$$\underline{U}_{\alpha\beta}^{(1)} = (1 - a^2)\underline{U}_{\alpha\nu}^{(1)} = \underline{U}_{\alpha\nu}^{(1)}\sqrt{3}\angle 30^\circ \quad \underline{U}_{\beta\gamma}^{(1)} = a^2\underline{U}_{\alpha\beta}^{(1)} \quad \underline{U}_{\gamma\alpha}^{(1)} = a\underline{U}_{\alpha\beta}^{(1)} \quad (2.8b)$$

$$\underline{U}_{\alpha\beta}^{(2)} = (1 - a)\underline{U}_{\alpha\nu}^{(2)} = \underline{U}_{\alpha\nu}^{(2)}\sqrt{3}\angle -30^\circ \quad \underline{U}_{\beta\gamma}^{(2)} = a\underline{U}_{\alpha\beta}^{(2)} \quad \underline{U}_{\gamma\alpha}^{(2)} = a^2\underline{U}_{\alpha\beta}^{(2)} \quad (2.8c)$$

En aquestes equacions s'han utilitzat les components directa i inversa del sistema de tensions $\underline{U}_{\alpha\nu}, \underline{U}_{\beta\nu}, \underline{U}_{\gamma\nu}$, però també es podrien haver utilitzat les components directa i inversa del sistema de tensions $\underline{U}_{\alpha\kappa}, \underline{U}_{\beta\kappa}, \underline{U}_{\gamma\kappa}$, ja que es compleix el següent: tots el sistemes de tensió fase-neutre que tinguin els mateixos extrems α, β, γ , tenen les mateixes components directa i inversa; en termes més electrotècnics, es pot dir que qualsevol joc d'impedàncies en estrella connectat a les mateixes fases α, β, γ , origina unes tensions fase-neutre, les components directa i inversa de les quals, són independents de les característiques de les impedàncies.

El sistema de tensions fase-neutre $\underline{U}_{\alpha\nu}, \underline{U}_{\beta\nu}, \underline{U}_{\gamma\nu}$, el punt neutre ν del qual coincideix amb el baricentre del triangle α, β, γ , és l'únic que té un sistema homopolar nul; la resta de sistemes de tensions fase-neutre, com ara el $\underline{U}_{\alpha\kappa}, \underline{U}_{\beta\kappa}, \underline{U}_{\gamma\kappa}$, el punt neutre κ del qual està desplaçat respecte del punt ν , tenen un sistema homopolar de valor:

$$\underline{U}_{\alpha\kappa}^{(0)} = \underline{U}_{\beta\kappa}^{(0)} = \underline{U}_{\gamma\kappa}^{(0)} = \underline{U}_{\nu\kappa} \quad (2.9)$$

Amb relació al paràgraf anterior, també es pot dir el següent: si a un sistema trifàsic de tensions se li connecten tres impedàncies idèntiques en estrella, la tensió del punt neutre creat, correspondrà al baricentre format pel triangle de tensions fase-fase, i per tant les tensions fase-neutre no tindran component homopolar.

2.5 Potència

Tal com es veu en l'equació (1.45), la qual fa referència a la Figura 1.10 a la pàgina 10, la potència complexa trifàsica en un sistema desequilibrat \underline{S}_{3F} , es calcula a partir de les tres tensions fase-neutre $\underline{U}_{\alpha\nu}, \underline{U}_{\beta\nu}$ i $\underline{U}_{\gamma\nu}$, i dels tres corrents de fase $\underline{I}_\alpha, \underline{I}_\beta$ i \underline{I}_γ .

No obstant, si calculem els sistemes directe, invers i homopolar, corresponents a les tensions i corrents anteriors, $\underline{U}_{\alpha\nu}^{(1)}, \underline{U}_{\alpha\nu}^{(2)}$ i $\underline{U}_{\alpha\nu}^{(0)}$, i $\underline{I}_\alpha^{(1)}, \underline{I}_\alpha^{(2)}$ i $\underline{I}_\alpha^{(0)}$, podem expressar la potència complexa trifàsica a partir d'aquests nous valors, utilitzant les equacions (2.3a), (2.3b) i (2.3c):

$$\begin{aligned} \underline{S}_{3F} &= \underline{U}_{\alpha\nu}\underline{I}_\alpha^* + \underline{U}_{\beta\nu}\underline{I}_\beta^* + \underline{U}_{\gamma\nu}\underline{I}_\gamma^* = \\ &= (\underline{U}_{\alpha\nu}^{(0)} + \underline{U}_{\alpha\nu}^{(1)} + \underline{U}_{\alpha\nu}^{(2)})(\underline{I}_\alpha^{(0)} + \underline{I}_\alpha^{(1)} + \underline{I}_\alpha^{(2)})^* + \\ &+ (\underline{U}_{\alpha\nu}^{(0)} + a^2\underline{U}_{\alpha\nu}^{(1)} + a\underline{U}_{\alpha\nu}^{(2)})(\underline{I}_\alpha^{(0)} + a^2\underline{I}_\alpha^{(1)} + a\underline{I}_\alpha^{(2)})^* + \\ &+ (\underline{U}_{\alpha\nu}^{(0)} + a\underline{U}_{\alpha\nu}^{(1)} + a^2\underline{U}_{\alpha\nu}^{(2)})(\underline{I}_\alpha^{(0)} + a\underline{I}_\alpha^{(1)} + a^2\underline{I}_\alpha^{(2)})^* = \\ &= 3\underline{U}_{\alpha\nu}^{(1)}\underline{I}_\alpha^{(1)*} + 3\underline{U}_{\alpha\nu}^{(2)}\underline{I}_\alpha^{(2)*} + 3\underline{U}_{\alpha\nu}^{(0)}\underline{I}_\alpha^{(0)*} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Exemple 2.1 Es tracta de trobar la potència consumida per una càrrega trifàsica formada per tres resistències idèntiques de $10,58 \Omega$, connectades en estrella a un sistema trifàsic sense neutre, i la tensió a què està sotmesa cada resistència; els valors de les tensions del sistema trifàsic són: $|\underline{U}_{\alpha\beta}| = 1840 \text{ V}$, $|\underline{U}_{\beta\gamma}| = 2760 \text{ V}$, $|\underline{U}_{\gamma\alpha}| = 2300 \text{ V}$.

Assignem de forma arbitrària, tal com s'ha fet en la Figura 2.2 a la pàgina 15, un angle de fase igual a zero, a la tensió $\underline{U}_{\alpha\beta}$.

A continuació trobem els angles φ_α i φ_β , corresponents als vèrtexs α i β del triangle de tensions, utilitzant la llei dels cosinus:

$$\varphi_\alpha = \arccos \frac{|\underline{U}_{\alpha\beta}|^2 + |\underline{U}_{\gamma\alpha}|^2 - |\underline{U}_{\beta\gamma}|^2}{2|\underline{U}_{\alpha\beta}||\underline{U}_{\gamma\alpha}|} = \arccos \frac{(1840 \text{ V})^2 + (2300 \text{ V})^2 - (2760 \text{ V})^2}{2 \cdot 1840 \text{ V} \cdot 2300 \text{ V}} = 82,82^\circ$$

$$\varphi_\beta = \arccos \frac{|\underline{U}_{\beta\gamma}|^2 + |\underline{U}_{\alpha\beta}|^2 - |\underline{U}_{\gamma\alpha}|^2}{2|\underline{U}_{\beta\gamma}||\underline{U}_{\alpha\beta}|} = \arccos \frac{(2760 \text{ V})^2 + (1840 \text{ V})^2 - (2300 \text{ V})^2}{2 \cdot 2760 \text{ V} \cdot 1840 \text{ V}} = 55,77^\circ$$

Les tres tensions en forma complexa són doncs:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{\alpha\beta} &= 1840 \angle 0^\circ \text{ V} \\ \underline{U}_{\beta\gamma} &= 2760 \angle 180^\circ + 55,77^\circ \text{ V} = 2760 \angle 235,77^\circ \text{ V} \\ \underline{U}_{\gamma\alpha} &= 2300 \angle 180^\circ - 82,82^\circ \text{ V} = 2300 \angle 97,18^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Tal com s'ha dit anteriorment, el sistema de tensions fase-fase no té component homopolar; a més, el sistema de tensions fase-neutre tampoc no en tindrà, ja que la càrrega trifàsica és equilibrada (tres resistències idèntiques).

Troblem a continuació les components directa i inversa de les tensions $\underline{U}_{\alpha\beta}$, $\underline{U}_{\beta\gamma}$, $\underline{U}_{\gamma\alpha}$, utilitzant les equacions (2.5b) i (2.5c):

$$\underline{U}_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{3} (1840 \angle 0^\circ \text{ V} + 1 \angle 120^\circ \cdot 2760 \angle 235,77^\circ \text{ V} + 1 \angle 240^\circ \cdot 2300 \angle 97,18^\circ \text{ V}) = 2267,09 \angle -9,27^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{3} (1840 \angle 0^\circ \text{ V} + 1 \angle 240^\circ \cdot 2760 \angle 235,77^\circ \text{ V} + 1 \angle 120^\circ \cdot 2300 \angle 97,18^\circ \text{ V}) = 539,77 \angle 137,42^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{\alpha\beta}^{(0)} = 0 \text{ V}$$

El següent pas consisteix en trobar les components directa i inversa de les tensions fase-neutre, utilitzant les equacions (2.8b) i (2.8c):

$$\underline{U}_{\alpha v}^{(1)} = \frac{\underline{U}_{\alpha\beta}^{(1)}}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = \frac{2267,09 \angle -9,27^\circ \text{ V}}{\sqrt{3} \angle 30^\circ} = 1308,91 \angle -39,27^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{\alpha v}^{(2)} = \frac{\underline{U}_{\alpha\beta}^{(2)}}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} = \frac{539,77 \angle 137,42^\circ \text{ V}}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} = 311,64 \angle 167,42^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{\alpha v}^{(0)} = 0 \text{ V}$$

A partir d'aquests valors, podem calcular ara les components directa, inversa i homopolar del corrent que circula per les resistències, aplicant les lleis de Kirchhoff; les components directa, inversa i homopolar de les resistències $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ i $R^{(0)}$ són iguals als seus valors nominals.

$$I_{\alpha}^{(1)} = \frac{U_{\alpha\nu}^{(1)}}{R^{(1)}} = \frac{1308,91 \angle -39,27^{\circ} \text{ V}}{10,58 \angle 0^{\circ} \Omega} = 123,72 \angle -39,27^{\circ} \text{ A}$$

$$I_{\alpha}^{(2)} = \frac{U_{\alpha\nu}^{(2)}}{R^{(2)}} = \frac{311,64 \angle 167,42^{\circ} \text{ V}}{10,58 \angle 0^{\circ} \Omega} = 29,46 \angle 167,42^{\circ} \text{ A}$$

$$I_{\alpha}^{(0)} = \frac{U_{\alpha\nu}^{(0)}}{R^{(0)}} = \frac{0 \text{ V}}{10,58 \angle 0^{\circ} \Omega} = 0 \text{ A}$$

Podem ara ja calcular la potència consumida per la càrrega trifàsica, utilitzant l'equació (2.10):

$$\begin{aligned} S_{3F} &= 3 U_{\alpha\nu}^{(1)} I_{\alpha}^{(1)*} + 3 U_{\alpha\nu}^{(2)} I_{\alpha}^{(2)*} + 3 U_{\alpha\nu}^{(0)} I_{\alpha}^{(0)*} = \\ &= 3 \cdot 1308,91 \angle -39,27^{\circ} \text{ V} \cdot 123,72 \angle 39,27^{\circ} \text{ A} + 3 \cdot 311,64 \angle 167,42^{\circ} \text{ V} \cdot 29,46 \angle -167,42^{\circ} \text{ A} + 0 = \\ &= 513,33 \text{ kW} \end{aligned}$$

Finalment, utilitzarem les equacions (2.3a), (2.3b) i (2.3c) per trobar la tensió a què estan sotmeses les tres resistències:

$$U_{\alpha\nu} = 0 + 1308,91 \angle -39,27^{\circ} \text{ V} + 311,64 \angle 167,42^{\circ} \text{ V} = 1039,94 \angle -47,01^{\circ} \text{ V}$$

$$U_{\beta\nu} = 0 + 1 \angle 240^{\circ} \cdot 1308,91 \angle -39,27^{\circ} \text{ V} + 1 \angle 120^{\circ} \cdot 311,64 \angle 167,42^{\circ} \text{ V} = 1362,89 \angle -146,07^{\circ} \text{ V}$$

$$U_{\gamma\nu} = 0 + 1 \angle 120^{\circ} \cdot 1308,91 \angle -39,27^{\circ} \text{ V} + 1 \angle 240^{\circ} \cdot 311,64 \angle 167,42^{\circ} \text{ V} = 1578,66 \angle 74,51^{\circ} \text{ V}$$

Es tracten en aquest capítol càlculs bàsics, que poden servir en la resolució de diversos problemes electrotècnics.

3.1 Transformació estrella ↔ triangle d'impedàncies

En un sistema trifàsic, pot interessar transformar tres impedàncies connectades en estrella, en tres impedàncies equivalents connectades en triangle ($Y \rightarrow \Delta$), o a l'inrevés, transformar tres impedàncies connectades en triangle, en tres impedàncies equivalents connectades en estrella ($\Delta \rightarrow Y$). Atenent a la Figura 3.1, tenim les següents transformacions:

$$Y \rightarrow \Delta \begin{cases} Z_{\alpha\beta} = Z_{\alpha} + Z_{\beta} + \frac{Z_{\alpha} Z_{\beta}}{Z_{\gamma}} \\ Z_{\beta\gamma} = Z_{\beta} + Z_{\gamma} + \frac{Z_{\beta} Z_{\gamma}}{Z_{\alpha}} \\ Z_{\gamma\alpha} = Z_{\gamma} + Z_{\alpha} + \frac{Z_{\gamma} Z_{\alpha}}{Z_{\beta}} \end{cases} \quad \Delta \rightarrow Y \begin{cases} Z_{\alpha} = \frac{Z_{\alpha\beta} Z_{\gamma\alpha}}{Z_{\alpha\beta} + Z_{\beta\gamma} + Z_{\gamma\alpha}} \\ Z_{\beta} = \frac{Z_{\beta\gamma} Z_{\alpha\beta}}{Z_{\alpha\beta} + Z_{\beta\gamma} + Z_{\gamma\alpha}} \\ Z_{\gamma} = \frac{Z_{\gamma\alpha} Z_{\beta\gamma}}{Z_{\alpha\beta} + Z_{\beta\gamma} + Z_{\gamma\alpha}} \end{cases} \quad (3.1)$$

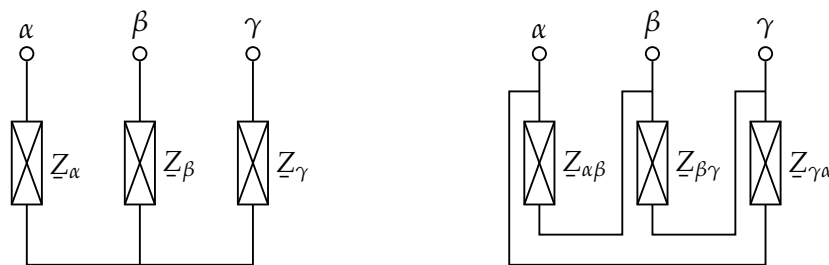


Figura 3.1: Transformació estrella ↔ triangle d'impedàncies

Exemple 3.1 Es vol transformar tres impedàncies connectades en triangle, de valors $Z_{\alpha\beta} = 10 \Omega$, $Z_{\beta\gamma} = -j10 \Omega$ i $Z_{\gamma\alpha} = -j10 \Omega$, en tres impedàncies equivalents connectades en estrella.

A partir de les equacions (3.1) tenim:

$$Z_{\alpha} = \frac{10 \Omega \cdot (-j10 \Omega)}{10 \Omega - j10 \Omega - j10 \Omega} = 4 - j2 \Omega$$

$$Z_{\beta} = \frac{-j10 \Omega \cdot 10 \Omega}{10 \Omega - j10 \Omega - j10 \Omega} = 4 - j2 \Omega$$

$$Z_{\gamma} = \frac{-j10 \Omega \cdot (-j10 \Omega)}{10 \Omega - j10 \Omega - j10 \Omega} = -2 - j4 \Omega$$

És possible, com en aquest cas pel que fa a Z_{γ} , obtenir un valor amb una part real negativa (resistència negativa); no obstant, encara que no existeixi físicament aquesta resistència, el seu valor és matemàticament correcte i es pot utilitzar en càlculs subsegüents.

3.2 Càlculs en p.u.

Les magnituds expressades en p.u. (per unitat) són útils quan es treballa amb xarxes de corrent altern on hi ha transformadors, i per tant més d'un nivell de tensió.

3.2.1 Mètode de càlcul

El primer pas consisteix en escollir unes magnituds base. Les magnituds base fonamentals són la potència i la tensió; s'escull una potència base S_B per a tota la xarxa, i tantes tensions base com nivells de tensió diferents tingui la xarxa $U_{B_1}, U_{B_2}, \dots, U_{B_n}$:

$$\text{Magnituds base fonamentals} \left\{ \begin{array}{l} S_B \\ U_{B_1}, U_{B_2}, \dots, U_{B_n} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Normalment s'escull com a tensions base, les tensions nominals dels transformadors de la xarxa, i com a potència base, la potència nominal d'un dels transformadors o generadors de la xarxa.

A partir de la potència base i de les tensions base, es defineixen els corrents base I_{B_i} , les impedàncies base Z_{B_i} i les admitàncies base Y_{B_i} . Segons que el corrent sigui monofàsic o trifàsic, tenim:

$$\begin{array}{l} \text{Corrent monofàsic} \\ (i = 1, \dots, n) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} I_{B_i} = \frac{S_B}{U_{B_i}} \\ Z_{B_i} = \frac{U_{B_i}^2}{S_B} \\ Y_{B_i} = \frac{S_B}{U_{B_i}^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Corrent trifàsic} \\ (i = 1, \dots, n) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} I_{B_i} = \frac{S_B}{\sqrt{3}U_{B_i}} \\ Z_{B_i} = \frac{U_{B_i}^2}{S_B} \\ Y_{B_i} = \frac{S_B}{U_{B_i}^2} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Les magnituds expressades en p.u. (escrites usualment en minúscules) s'obtenen dividint les magnituds reals (escrites usualment en majúscules) pels valors base corresponents:

$$\underline{s} = \frac{S}{S_B} \quad \underline{u} = \frac{U}{U_B} \quad \underline{i} = \frac{I}{I_B} \quad \underline{z} = \frac{Z}{Z_B} \quad \underline{y} = \frac{Y}{Y_B} \quad (3.4)$$

Quan es tracta de corrent trifàsic, \underline{S} és la potència trifàsica, \underline{U} és la tensió fase-fase, \underline{I} és el corrent de fase, i \underline{Z} i \underline{Y} són respectivament les impedàncies i admitàncies de fase.

El pas següent consisteix en representar el circuit equivalent en p.u., i resoldre'l com si es tractés d'un circuit monofàsic; així doncs, el factor $\sqrt{3}$ no intervé en els càlculs a l'hora de resoldre un circuit en p.u. procedent d'un circuit trifàsic.

Un cop resolt el circuit, es multipliquen les magnituds obtingudes en p.u. pels seus valors base respectius, per tal d'obtenir les magnituds reals:

$$\underline{S} = s S_B \quad \underline{U} = u U_B \quad \underline{I} = i I_B \quad \underline{Z} = z Z_B \quad \underline{Y} = y Y_B \quad (3.5)$$

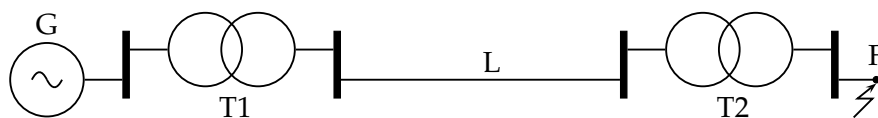
3.2.2 Canvi de base

Normalment les impedàncies de transformadors (impedància de curt circuit) o de generadors (impedància sincrònica, transitòria, etc.) estan referides a les magnituds nominals de la màquina en qüestió. Si les magnituds base escollides coincideixen amb les nominals de la màquina, la impedància de la màquina en qüestió estarà expressada ja directament en p.u.; en canvi si les magnituds base són diferents de les nominals de la màquina, caldrà fer un canvi de base per tal de referir la impedància de la màquina a les magnituds base escollides.

De forma genèrica, si z és una impedància referida a la base U_B i S_B , podem obtenir la impedància z' referida a la base $U_{B'}$ i $S_{B'}$, mitjançant el canvi:

$$z' = z \frac{Z_B}{Z'_B} = z \frac{U_B^2}{S_B} \frac{S_{B'}}{U_{B'}^2} \quad (3.6)$$

Exemple 3.2 Es tracte de calcular el corrent de curt circuit trifàsic en el punt F de la xarxa següent, suposant que el sistema està treballant en buit.



Les dades del generador G, del transformador T1, de la línia L i del transformador T2 són:

$S_G = 60 \text{ MVA}$	$S_{T1} = 40 \text{ MVA}$	$l_L = 22 \text{ km}$	$S_{T2} = 12 \text{ MVA}$
$U_G = 10,5 \text{ kV}$	$\ddot{U}_{T1} = 10,5 : 63 \text{ kV}$	$U_L = 60 \text{ kV}$	$\ddot{U}_{T2} = 60 : 10,5 \text{ kV}$
$X_G'' = 12 \%$	$X_{T1} = 10 \%$	$X_L = 0,4 \Omega/\text{km}$	$X_{T2} = 8 \%$

Escollim en primer lloc les següents magnituds base: $S_B = 60 \text{ MVA}$ i $U_B = 10,5 \text{ kV} / 63 \text{ kV} / 10,5 \text{ kV}$.

Calculem a continuació els valors en p.u. dels diferents elements de la xarxa:

Generador. En coincidir les magnituds base amb les nominals del generador tenim directament:

$$x_G'' = 0,12 \text{ p.u.}$$

Transformador 1. La relació de transformació i la reactància són respectivament:

$$\dot{u}_{T1} = \frac{10,5 \text{ kV}}{10,5 \text{ kV}} : \frac{63 \text{ kV}}{63 \text{ kV}} = 1 : 1 \quad x_{T1} = 0,10 \cdot \frac{(63 \text{ kV})^2}{40 \text{ MVA}} \cdot \frac{60 \text{ MVA}}{(63 \text{ kV})^2} = 0,15 \text{ p.u.}$$

Línia. La reactància és:

$$x_L = \frac{0,4 \Omega/\text{km} \cdot 22 \text{ km}}{(63 \text{ kV})^2 / 60 \text{ MVA}} = 0,1330 \text{ p.u.}$$

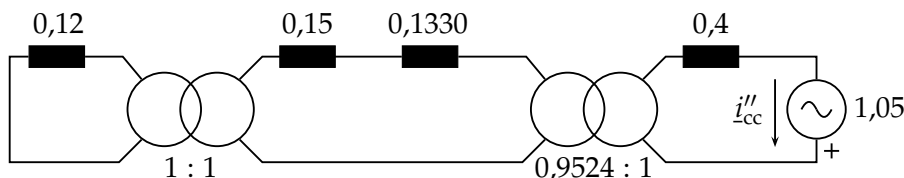
Transformador 2. La relació de transformació i la reactància són respectivament:

$$\dot{u}_{T2} = \frac{60 \text{ kV}}{63 \text{ kV}} : \frac{10,5 \text{ kV}}{10,5 \text{ kV}} = 0,9524 : 1 \quad x_{T2} = 0,08 \cdot \frac{(10,5 \text{ kV})^2}{12 \text{ MVA}} \cdot \frac{60 \text{ MVA}}{(10,5 \text{ kV})^2} = 0,4 \text{ p.u.}$$

Tensió en el punt F. La tensió abans del curt circuit és la mateixa que la del generador G, elevada pel transformador T1 i reduïda després pel transformador T2:

$$\underline{u}_F = \frac{10,5 \text{ kV} \cdot \frac{63 \text{ kV}}{10,5 \text{ kV}} \cdot \frac{10,5 \text{ kV}}{60 \text{ kV}}}{10,5 \text{ kV}} = 1,05 \text{ p.u.}$$

A partir d'aquests valors calculats, tenim el següent circuit equivalent en p.u. durant el curt circuit en el punt F:



El corrent de curt circuit buscat val:

$$|i''_{cc}| = \left| \frac{1,05}{j \left(0,4 + \frac{0,15+0,1330}{0,9524^2} + \frac{0,12}{0,9524^2 \cdot 1^2} \right)} \right| = 1,2436 \text{ p.u.} \quad |I''_{cc}| = 1,2436 \cdot \frac{60 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \cdot 10,5 \text{ kV}} = 4,1 \text{ kA}$$

3.3 Resolució de circuits coneixent la potència absorbida per la càrrega

Es tracta en aquest apartat la resolució de circuits simples, formats per una font de tensió en sèrie amb una impedància, la qual alimenta a una càrrega; aquesta càrrega no està definida per la seva impedància o admitància, si no per la potència que absorbeix.

En la Figura 3.2 a la pàgina següent es representen els circuits que es vol resoldre, tant per a corrent continu com per a corrent altern. E , R i P (o \underline{E} , \underline{Z} i \underline{S}) són els valors coneguts, i U i I (o \underline{U} i \underline{I}) són els valors que es vol trobar.



Figura 3.2: Resolució de circuits coneixent la potència absorbida per la càrrega

3.3.1 Circuits de corrent continu

A partir del circuit de l'esquerra de la Figura 3.2 tenim les dues equacions següents:

$$E = RI + U \quad (3.7)$$

$$P = UI \quad (3.8)$$

Multiplicant l'equació (3.7) per U i substituint l'equació (3.8) en aquest resultat, tenim:

$$EU = RIU + U^2 = RP + U^2 \rightarrow U^2 - EU + RP = 0 \quad (3.9)$$

A partir de les equacions descrites anteriorment, el circuit es resol seguint els següents passos:

- ❶ Obtenim U , resolent l'equació de 2n grau (3.9).
- ❷ Dels dos valors reals que obtenim, ens quedem amb el més elevat. Si en lloc de dos valors reals, obtinguéssim un parell de valors conjugats complexos, això ens indicaria que el circuit no té una solució físicament possible, i per tant no seria resoluble.
- ❸ Finalment, calculem I substituint el valor trobat d' U en l'equació (3.8).

3.3.2 Circuits de corrent altern

A partir del circuit de la dreta de la Figura 3.2 tenim les dues equacions següents:

$$\underline{E} = \underline{Z} \underline{I} + \underline{U} \quad (3.10)$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* \quad (3.11)$$

Conjugant l'equació (3.10), multiplicant-la per \underline{U} i substituint l'equació (3.11) en aquest resultat, tenim:

$$\underline{E}^* \underline{U} = \underline{Z}^* \underline{I}^* \underline{U} + \underline{U}^* \underline{U} = \underline{Z}^* \underline{S} + |\underline{U}|^2 \rightarrow |\underline{U}|^2 - \underline{E}^* \underline{U} + \underline{Z}^* \underline{S} = 0 \quad (3.12)$$

Fem a continuació una rotació dels vectors \underline{E} i \underline{U} , de valor $e^{-j\delta}$, on δ és l'argument del vector \underline{E} ; d'aquesta manera, el nou vector \underline{E}' només tindrà part real, i el nou vector \underline{U}' estarà rotat respecte del vector \underline{U} .

$$\delta = \arg(\underline{E}) \quad (3.13)$$

$$\underline{E}' = \underline{E} e^{-j\delta} = |\underline{E}| \quad (3.14)$$

$$\underline{U}' = \underline{U} e^{-j\delta} \quad (3.15)$$

Expressem a continuació l'equació (3.12) utilitzant aquestes dos nous vectors:

$$|\underline{U}'|^2 - E' \underline{U}' + \underline{Z}^* \underline{S} = 0 \quad (3.16)$$

Finalment, separem l'equació (3.16) en dues, una per a la part real i una altra per a la part imaginària. Cal tenir en compte que $|\underline{U}'|^2$ només té part real, de valor $\text{Re}^2(\underline{U}') + \text{Im}^2(\underline{U}')$.

$$\text{Re}^2(\underline{U}') + \text{Im}^2(\underline{U}') - E' \text{Re}(\underline{U}') + \text{Re}(\underline{Z}^* \underline{S}) = 0 \quad (3.17)$$

$$-E' \text{Im}(\underline{U}') + \text{Im}(\underline{Z}^* \underline{S}) = 0 \quad (3.18)$$

A partir de les equacions descrites anteriorment, el circuit es resol seguint els següents passos:

- ❶ Calculem E' a partir de l'equació (3.14)
- ❷ Obtenim $\text{Im}(\underline{U}')$, resolent l'equació (3.18).
- ❸ Substituïm el valor obtingut per a $\text{Im}(\underline{U}')$ en l'equació (3.17), i obtenim $\text{Re}(\underline{U}')$ resolent aquesta equació de 2n grau.
- ❹ Dels dos valors reals que obtenim, ens quedem amb el més elevat. Si en lloc de dos valors reals, obtinguéssim un parell de valors conjugats complexos, això ens indicaria que el circuit no té una solució físicament possible, i per tant no seria resoluble.
- ❺ A partir del valor obtingut per a \underline{U}' en els passos anteriors, i del valor de δ obtingut a partir de l'equació (3.13), calculem el valor buscat d' \underline{U} , utilitzant l'equació (3.15)
- ❻ Finalment, calculem \underline{I} substituint el valor trobat d' \underline{U} en l'equació (3.11)

Exemple 3.3 Resoldre el circuit de la dreta de la Figura 3.2 a la pàgina anterior, donats els següents valors en p.u.:

$$\underline{E} = 0,4 + j0,3 \quad \underline{Z} = j0,1 \quad \underline{S} = 0,6 + j0,45$$

Calculem primer δ i E' , segons les equacions (3.13) i (3.14), i $\underline{Z}^* \underline{S}$:

$$\delta = \arg(0,4 + j0,3) = 0,6435 \text{ rad}$$

$$E' = |0,4 + j0,3| = 0,5$$

$$\underline{Z}^* \underline{S} = -j0,1 \cdot (0,6 + j0,45) = 0,045 - j0,06$$

Calculem a continuació $\text{Im}(\underline{U}')$, segons l'equació (3.18):

$$\text{Im}(\underline{U}') = \frac{\text{Im}(\underline{Z}^* \underline{S})}{E'} = \frac{-0,06}{0,5} = -0,12$$

Formem a continuació el polinomi de 2n grau en $\text{Re}(\underline{U}')$ i el resollem, segons l'equació (3.17):

$$\text{Re}^2(\underline{U}') + (-0,12)^2 - 0,5 \cdot \text{Re}(\underline{U}') + 0,045 = 0$$

$$\text{Re}^2(\underline{U}') - 0,5 \cdot \text{Re}(\underline{U}') + 0,0594 = 0 \rightarrow \text{Re}(\underline{U}') = \begin{cases} 0,1943 \\ 0,3057 \end{cases}$$

Prenent el valor més elevat de $\text{Re}(\underline{U}')$ calculem finalment \underline{U} , segons l'equació (3.15):

$$\underline{U} = \underline{U}' e^{j\delta} = (0,3057 - j0,12) \cdot e^{j0,6435} = 0,3165 + j0,0874$$

Per acabar, obtenim \underline{I} , segons l'equació (3.11):

$$\underline{I} = \frac{\underline{S}^*}{\underline{U}^*} = \frac{0,6 - j0,45}{0,3165 - j0,0874} = 2,1262 - j0,8347$$

3.4 Corrent de curt circuit en el secundari d'un transformador

Es tracta en aquest apartat, el càlcul del corrent de curt circuit trifàsic en el secundari d'un transformador, que té el primari connectat a una xarxa de potència.

A partir de la Figura 3.3, es tracta de trobar el valor del corrent de curt circuit I_F en el punt F, essent la resta de paràmetres valors coneguts.

U_N , U_{TN1} i U_{TN2} estan donats en V, S_{cc} i S_{TN} en VA, i x_{cc} en p.u. respecte dels valors nominals del transformador.

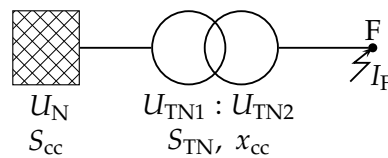


Figura 3.3: Corrent de curt circuit en el secundari d'un transformador

Per tal de simplificar el problema, suposarem que tant la impedància de curt circuit del transformador, com la impedància equivalent de la xarxa de potència són totalment inductives; d'aquesta manera, podrem treballar amb les diverses variables implicades, com si fossin nombres reals. Suposarem a més, que no hi ha circulació de corrent abans del curt circuit.

Pel què fa a la xarxa de potència, si en lloc de la potència de curt circuit S_{cc} , el que coneixem és el corrent de curt circuit disponible I_{cc} , podem obtenir el valor de la potència de curt circuit a partir de l'expressió:

$$S_{cc} = \sqrt{3} U_N I_{cc} \quad (3.19)$$

Si prenem com a valors base els paràmetres del transformador (U_{TN1} , U_{TN2} i S_{TN}), la relació de transformació i la impedància de curt circuit del transformador, expressats en p.u., seran 1:1 i x_{cc} respectivament. Anàlogament, la tensió i la impedància equivalents de la xarxa de potència, expressats en p.u., seran $\frac{U_N}{U_{TN1}}$ i $\frac{U_N^2}{S_{cc}} \frac{S_{TN}}{U_{TN1}^2}$ respectivament.

Amb aquests valors, el corrent de curt circuit i_F , expressat en p.u., val:

$$i_F = \frac{\frac{U_N}{U_{TN1}}}{\frac{U_N^2}{S_{cc}} \frac{S_{TN}}{U_{TN1}^2} + x_{cc}} \quad (3.20)$$

I per tant, aquest corrent I_F , expressat en A, val:

$$I_F = i_F \frac{S_{TN}}{\sqrt{3}U_{TN2}} = \frac{S_{TN}U_N}{\sqrt{3}U_{TN1}U_{TN2} \left(\frac{U_N^2}{S_{cc}} \frac{S_{TN}}{U_{TN1}^2} + x_{cc} \right)} \quad (3.21)$$

Si la xarxa de potència es considera de potència infinita, tenim:

$$I_F = \frac{S_{TN}U_N}{\sqrt{3}U_{TN1}U_{TN2}x_{cc}} \quad (\text{amb } S_{cc} = \infty) \quad (3.22)$$

Si a més, la tensió de la xarxa coincideix amb la tensió primària del transformador, tenim respectivament:

$$I_F = \frac{S_{TN}}{\sqrt{3}U_{TN2} \left(\frac{S_{TN}}{S_{cc}} + x_{cc} \right)} \quad (\text{amb } U_N = U_{TN1}) \quad (3.23)$$

$$I_F = \frac{S_{TN}}{\sqrt{3}U_{TN2}x_{cc}} \quad (\text{amb } U_N = U_{TN1} \text{ i } S_{cc} = \infty) \quad (3.24)$$

Exemple 3.4 A partir de la Figura 3.3 a la pàgina anterior, es tracta de trobar I_F , amb els següents valors: $U_N = 6900 \text{ V}$, $S_{cc} = 200 \text{ MVA}$, $U_{TN1} = 6900 \text{ V}$, $U_{TN2} = 400 \text{ V}$, $S_{TN} = 850 \text{ kVA}$ i $x_{cc} = 5\%$.

El valor buscat és:

$$I_F = \frac{850 \text{ kVA}}{\sqrt{3} \cdot 400 \text{ V} \cdot \left(\frac{850 \text{ kVA}}{200 \text{ MVA}} + 0,05 \right)} = 22,6 \text{ kA} \quad (3.25)$$

Exemple 3.5 Es tracta de resoldre el mateix problema, suposant que la xarxa és de potència infinita.

El valor buscat és:

$$I_F = \frac{850 \text{ kVA}}{\sqrt{3} \cdot 400 \text{ V} \cdot 0,05} = 24,5 \text{ kA} \quad (3.26)$$

Part II

Components Elèctrics

Capítol 4

Cables

Es tracten en aquest capítol qüestions relatives als cables elèctrics.

4.1 Resistència

4.1.1 Resistència d'un conductor

La resistència R d'un conductor depèn de la resistivitat ρ del material, de la llargada l del conductor i de la seva secció S .

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (4.1)$$

La resistivitat no és un valor constant, sinó que depèn de la temperatura; a major temperatura, major resistivitat. Coneixent la resistivitat a una temperatura T_0 , es pot calcular la resistivitat a una altra temperatura T_1 , a partir del coeficient de variació de la resistivitat amb la temperatura (donat a la temperatura T_0) α_{T_0} .

$$\rho_{T_1} = \rho_{T_0} [1 + \alpha_{T_0} (T_1 - T_0)] \quad (4.2)$$

En la Taula 4.1 es donen valors de la resistivitat i del coeficient de variació de la resistivitat amb la temperatura, a 20 °C, del coure (Cu) i l'alumini (Al), així com valors de les seves densitats.

Taula 4.1: Paràmetres elèctrics del coure i l'alumini

Material	$\rho_{20^\circ\text{C}}$ [$\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$]	$\alpha_{20^\circ\text{C}}$ [$1/^\circ\text{C}$]	Densitat [g/cm^3]
Cu	0,01724	0,00393	8,990
Al	0,02826	0,00403	2,703

La resistència així calculada és vàlida quan el corrent que circula pel cable és corrent continu.

Quan el corrent que circula pel cable és corrent altern, cal tenir en compte l'efecte pel·licular, el qual consisteix en un augment de la resistència degut a que el corrent tendeix a circular més per la

zona perifèrica del conductor que per la zona central; l'efecte és important per a valors elevats de la secció del conductor o de la freqüència del corrent.

La resistència efectiva es troba a partir de la resistència calculada anteriorment per a corrent continu, i d'un factor k que té en compte l'efecte pel·licular.

$$R_{\text{efectiva}} = kR \quad (4.3)$$

En la Taula 4.2 es donen valors¹ de k per a conductors de coure i d'alumini, per a diversos valors del producte de la secció del conductor per la freqüència del corrent.

Taula 4.2: Valors de k pel càlcul de la resistència efectiva

Secció × Freqüència [mm ² Hz]	k, segons el material del conductor	
	Cu	Al
5000	1,000	1,000
10000	1,008	1,000
15000	1,025	1,006
20000	1,045	1,015
25000	1,070	1,026
30000	1,096	1,040
35000	1,126	1,053
40000	1,158	1,069
45000	1,195	1,085
50000	1,230	1,104
75000	1,433	1,206
100000	1,622	1,330

4.1.2 Resistència d'un cable

La resistència d'un cable R_{Cable} depèn del nombre de conductors per fase n (o per pol, en corrent continu), de la resistència de cada conductor $R_{\text{Conductor}}$ i del tipus de tensió elèctrica a la qual estigui sotmès el cable (monofàsica, trifàsica, contínua, etc.), segons es detalla a continuació:

□ Corrent continu o altern monofàsic

$$R_{\text{Cable}} = 2 \frac{R_{\text{Conductor}}}{n} \quad (4.4)$$

El valor multiplicatiu 2, s'explica perquè cal tenir en compte tant el conductor d'anada com el de tornada.

¹Valors obtinguts del llibre «Teoría de Circuitos. Fundamentos, 3ªedición», Enrique Ras, Marcombo Boixareu Editores (pàg. 114).

□ Corrent altern trifàsic equilibrat

$$R_{\text{Cable}} = \frac{R_{\text{Conductor fase}}}{n} \quad (4.5)$$

Donat que no circula corrent pel neutre, la seva resistència no té cap influència.

□ Corrent altern trifàsic desequilibrat

$$R_{\text{Cable fase}} = \frac{R_{\text{Conductor fase}}}{n_{\text{fase}}} \quad R_{\text{Cable neutre}} = \frac{R_{\text{Conductor neutre}}}{n_{\text{neutre}}} \quad (4.6)$$

En aquest cas cal tenir en compte que els corrents que circulen per les fase i pel neutre són diferents.

4.2 Caiguda de tensió

La caiguda de tensió ΔU en un cable es defineix com la diferència entre els mòduls de les tensions a l'origen $|\underline{U}_O|$ i al final $|\underline{U}_F|$ del cable.

$$\Delta U \equiv |\underline{U}_O| - |\underline{U}_F| \quad (4.7)$$

4.2.1 Caiguda de tensió en corrent continu

En corrent continu la caiguda de tensió depèn del corrent I que circula pel cable i de la resistència del propi cable, calculada segons l'equació (4.4).

$$\Delta U = IR_{\text{Cable}} \quad (4.8)$$

4.2.2 Caiguda de tensió en corrent altern

En corrent altern la caiguda de tensió depèn del corrent \underline{I} que circula pel cable, de la resistència i la reactància del propi cable, i del factor de potència $\cos \varphi$. El diagrama vectorial d'aquestes magnituds es pot veure en la Figura 4.1.

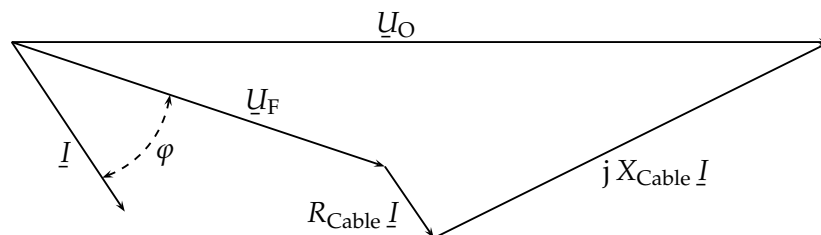


Figura 4.1: Caiguda de tensió en corrent altern

Quan es tracta de corrent monofàsic, la resistència del cable es calcula segons l'equació (4.4); la reactància del cable X_{Cable} es calcula de forma anàloga amb la mateixa equació, a partir de la reactància dels conductors $X_{\text{Conductor}}$.

Pel que fa al corrent trifàsic es suposa equilibrat, i per tant s'utilitza l'equació (4.5) per calcular la resistència del cable R_{Cable} (i de forma anàloga la reactància X_{Cable}). Addicionalment, els corrents fan referència als corrents de fase, i les tensions a les tensions fase-neutre; l'angle φ és per tant l'angle entre la tensió final fase-neutre i el corrent de fase.

Disposem en aquest cas de dues equacions, una d'exacta i una altre d'aproximada (per a valors elevats de $\cos \varphi$).

$$\Delta U = |I|(R_{\text{Cable}} \cos \varphi + X_{\text{Cable}} \sin \varphi) + |U_O| - \sqrt{|U_O|^2 - |I|^2 (X_{\text{Cable}} \cos \varphi + R_{\text{Cable}} \sin \varphi)^2} \quad (4.9a)$$

$$\Delta U \approx |I|(R_{\text{Cable}} \cos \varphi + X_{\text{Cable}} \sin \varphi) \quad \text{si } \cos \varphi \gtrsim 0,8 \quad (4.9b)$$

Exemple 4.1 Es tracta de calcular la caiguda de tensió d'un cable, en un sistema trifàsic on $|U_O| = 380 \text{ V}$ (fase-fase), $|I| = 630 \text{ A}$ i $\cos \varphi = 0,87(i)$; cada fase està formada per tres conductors unipolars de 240 mm^2 de secció i 400 m de llargada, amb uns valors de resistència i inductància de $0,095 \Omega/\text{km}$ i $0,102 \Omega/\text{km}$ respectivament.

A partir de l'equació (4.5) calculem els valors d' R_{Cable} i d' X_{Cable} .

$$R_{\text{Cable}} = \frac{0,095 \Omega/\text{km} \cdot 0,4 \text{ km}}{3} = 0,0127 \Omega$$

$$X_{\text{Cable}} = \frac{0,102 \Omega/\text{km} \cdot 0,4 \text{ km}}{3} = 0,0136 \Omega$$

Obtenim a continuació el valor de $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - 0,87^2} = 0,49$$

Calculem en primer lloc la caiguda de tensió de forma aproximada utilitzant l'equació (4.9b).

$$\Delta U \approx 630 \text{ A} \cdot (0,0127 \Omega \cdot 0,87 + 0,0136 \Omega \cdot 0,49) = 11,16 \text{ V}$$

que en tant per cent respecte la tensió a l'origen representa: $\frac{11,16 \text{ V}}{380/\sqrt{3} \text{ V}} \cdot 100 = 5,1 \%$

Finalment, calculem la caiguda de tensió exacta utilitzant l'equació (4.9a).

$$\begin{aligned} \Delta U &= 630 \text{ A} \cdot (0,0127 \Omega \cdot 0,87 + 0,0136 \Omega \cdot 0,49) + \frac{380}{\sqrt{3}} \text{ V} - \\ &\quad - \sqrt{(380/\sqrt{3} \text{ V})^2 - (630 \text{ A})^2 \cdot (0,0136 \Omega \cdot 0,87 + 0,0127 \Omega \cdot 0,49)^2} = 11,46 \text{ V} \end{aligned}$$

que en tant per cent respecte la tensió a l'origen representa: $\frac{11,46 \text{ V}}{380/\sqrt{3} \text{ V}} \cdot 100 = 5,2 \%$

4.3 Capacitat tèrmica en curt circuit

Quan hi ha un curt circuit en un cable, tot el calor generat no es transmet a l'exterior, si no que s'acumula en la massa del conductor, incrementant la seva temperatura (procés adiabàtic). En aquestes condicions es pot aplicar l'equació:

$$I_{cc} = S \frac{C}{\sqrt{t}} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{cc} : \text{expressat en A} \\ S : \text{expressat en mm}^2 \\ t : \text{expressat en s} \\ C : \text{paràmetre depenent del tipus de cable} \end{array} \right. \quad (4.10)$$

I_{cc} és la intensitat de curt circuit que circula pel conductor, S és la secció del conductor, t és el temps màxim que pot durar el curt circuit sense que es malmeti el cable, i C és un paràmetre que depèn del material del conductor i del seu aïllament. En la Taula 4.3 es donen valors² de C per a diferents materials del conductor i de l'aïllament.

Taula 4.3: Valors de C pel càlcul de curt circuits en cables

Material del Conductor	C, segons el material de l'aïllament	
	PVC	EPR i XLPE
Cu	115	142
Al	75	93

Exemple 4.2 Es tracta de calcular el temps màxim durant el qual un cable de coure de 50 mm² amb aïllament d'EPR, pot suportar un corrent de curt circuit de 15 kA.

A partir de l'equació (4.10) calculem el temps màxim demanat:

$$t = \left(\frac{S C}{I_{cc}} \right)^2 = \left(\frac{50 \text{ mm}^2 \cdot 142}{15000 \text{ A}} \right)^2 = 0,224 \text{ s}$$

4.4 Conversió entre unitats americanes i unitats SI

4.4.1 «Mils» (mil), «circular mils» (CM) i «thousand circular mils» (MCM)

Les definicions d'aquestes tres unitats utilitzades en la mesura de diàmetres i seccions de cables son:

$$1 \text{ mil} \equiv \text{Una mil·lèsima de polsada} \quad (4.11)$$

$$1 \text{ CM} \equiv \text{Àrea d'un cercle de diàmetre igual a 1 mil} \quad (4.12)$$

$$1 \text{ MCM} \equiv 1000 \text{ CM} \quad (4.13)$$

²Valors obtinguts del catàleg del fabricant «General Cable».

Es donen a continuació algunes conversions d'aquestes unitats:

$$1 \text{ mil} = 10^{-3} \text{ in} \quad (4.14)$$

$$1 \text{ mil} = 10^{-3} \text{ in} \cdot \frac{25,4 \text{ mm}}{1 \text{ in}} = 25,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (4.15)$$

$$1 \text{ CM} = \frac{\pi}{4} \text{ mil}^2 = 0,785398 \text{ mil}^2 \quad (4.16)$$

$$1 \text{ CM} = \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-6} \text{ in}^2 = 0,785398 \cdot 10^{-6} \text{ in}^2 \quad (4.17)$$

$$1 \text{ CM} = \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-6} \text{ in}^2 \cdot \frac{645,16 \text{ mm}^2}{1 \text{ in}^2} = 506,7075 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2 \quad (4.18)$$

$$1 \text{ MCM} = 785,398 \text{ mil}^2 = 0,785398 \cdot 10^{-3} \text{ in}^2 = 0,5067075 \text{ mm}^2 \quad (4.19)$$

Una relació útil entre diàmetres expressats en «mils» i seccions expressades en «circular mils», és la següent: la secció S d'un cercle expressada en «circular mils», es igual al quadrat del diàmetre d del cercle expressat en «mils».

$$S = d^2 \quad \begin{cases} S & : \text{ expressat en CM} \\ d & : \text{ expressat en mil} \end{cases} \quad (4.20)$$

En la Taula 4.4 es relacionen els diàmetres i seccions en diverses unitats, dels conductors usualment disponibles compresos entre 2000 MCM i 250 MCM.

Taula 4.4: Dimensions de cables definits en MCM

[MCM]	Secció		Diàmetre		
	[in ²]	[mm ²]	[mil]	[in]	[mm]
2000	1,570796	1013,4150	1414,21356	1,4142136	35,92102
1750	1,374447	886,7381	1322,87566	1,3228757	33,60104
1600	1,256637	810,7320	1264,91106	1,2649111	32,12874
1500	1,178097	760,0612	1224,74487	1,2247449	31,10852
1250	0,981748	633,3843	1118,03399	1,1180340	28,39806
1000	0,785398	506,7075	1000,00000	1,0000000	25,40000
800	0,628319	405,3660	894,42719	0,8944272	22,71845
750	0,589049	380,0306	866,02540	0,8660254	21,99705
700	0,549779	354,6952	836,66003	0,8366600	21,25116
600	0,471239	304,0245	774,59667	0,7745967	19,67476
500	0,392699	253,3537	707,10678	0,7071068	17,96051
450	0,353429	228,0184	670,82039	0,6708204	17,03884
400	0,314159	202,6830	632,45553	0,6324555	16,06437
350	0,274889	177,3476	591,60798	0,5916080	15,02684
300	0,235619	152,0122	547,72256	0,5477226	13,91215
250	0,196350	126,6769	500,00000	0,5000000	12,70000

D'aquesta taula es pot veure que: $\text{Secció en mm}^2 \approx \frac{\text{Secció en MCM}}{2}$.

4.4.2 «American Wire Gauge» (AWG)

L'«American Wire Gauge» és un sistema de numeració de conductors de coure segons el seu diàmetre, anomenat també «Brown and Sharp» (B & S). A cada número AWG li correspon un diàmetre determinat; els successius diàmetres formen una progressió geomètrica descendent (en augmentar el número AWG, disminueix el diàmetre).

La raó d'aquesta progressió geomètrica s'obté de la següent consideració: hi ha dos valors de referència, AWG 36, al qual se li assigna un diàmetre de 5 mil, i AWG 4/0 (també anomenat AWG 0000), al qual se li assigna un diàmetre de 460 mil. Entre aquest dos valors de referència hi ha una diferència de 39 unitats (veure la Taula 4.5 a la pàgina següent), i per tant, sent r_d la raó de diàmetres buscada, tenim:

$$5 \text{ mil} = 460 \text{ mil} \cdot r_d^{39} \rightarrow r_d = \left(\frac{5 \text{ mil}}{460 \text{ mil}} \right)^{1/39} = \left(\frac{1}{92} \right)^{1/39} = 92^{-1/39} \quad (4.21)$$

Al ser la secció d'un conductor proporcional al quadrat del seu diàmetre, les seccions dels successius números AWG formen una progressió geomètrica descendent de raó r_S igual a:

$$r_S = r_d^2 = 92^{-2/39} \quad (4.22)$$

Finalment, al ser la resistència d'un conductor inversament proporcional a la seva secció, les resistències dels successius números AWG formen una progressió geomètrica ascendent de raó r_R igual a:

$$r_R = \frac{1}{r_S} = 92^{2/39} \quad (4.23)$$

A partir d'aquestes raons, i coneixent el diàmetre d , la secció S i la resistència R d'un número AWG n , podem calcular aquests paràmetres per a un altre número AWG, k unitats posterior o k unitats anterior:

AWG:	n	$n + k$	$n - k$	
Diàmetre:	d	$d \cdot 92^{-k/39}$	$d \cdot 92^{k/39}$	
Secció:	S	$S \cdot 92^{-2k/39}$	$S \cdot 92^{2k/39}$	
Resistència:	R	$R \cdot 92^{2k/39}$	$R \cdot 92^{-2k/39}$	(4.24)

Per a alguns valors particulars de k , es compleixen de forma aproximada les següents relacions:

- $k = 6$ En augmentar en 6 unitats el número AWG, el diàmetre es divideix per 2 ($92^{-6/39} \approx 0,5$).
- $k = -6$ En disminuir en 6 unitats el número AWG, el diàmetre es multiplica per 2 ($92^{6/39} \approx 2$).
- $k = 20$ En augmentar en 20 unitats el número AWG, el diàmetre es divideix per 10 ($92^{-20/39} \approx 0,1$).
- $k = -20$ En disminuir en 20 unitats el número AWG, el diàmetre es multiplica per 10 ($92^{20/39} \approx 10$).
- $k = 3$ En augmentar en 3 unitats el número AWG, la secció es divideix per 2 ($92^{-2 \cdot 3/39} \approx 0,5$) i la resistència es multiplica per 2 ($92^{2 \cdot 3/39} \approx 2$).

- $k = -3$

En disminuir en 3 unitats el número AWG, la secció es multiplica per 2 ($92^{2\cdot3/39} \approx 2$) i la resistència es divideix per 2 ($92^{-2\cdot3/39} \approx 0,5$).
- $k = 10$

En augmentar en 10 unitats el número AWG, la secció es divideix per 10 ($92^{-2\cdot10/39} \approx 0,1$) i la resistència es multiplica per 10 ($92^{2\cdot10/39} \approx 10$).
- $k = -10$

En disminuir en 10 unitats el número AWG, la secció es multiplica per 10 ($92^{2\cdot10/39} \approx 10$) i la resistència es divideix per 10 ($92^{-2\cdot10/39} \approx 0,1$).

En la Taula 4.5 es relacionen els diàmetres i seccions en diverses unitats dels conductors compresos entre AWG 4/0 i AWG 50.

Taula 4.5: Dimensions de cables AWG

Cable [AWG]	Diàmetre			Secció		
	[mil]	[in]	[mm]	[CM]	[in²]	[mm²]
4/0	460,000	0,460000	11,6840	211600,000	$1,662\cdot10^{-1}$	107,219303
3/0	409,642	0,409642	10,4049	167806,429	$1,318\cdot10^{-1}$	85,028773
2/0	364,797	0,364797	9,2658	133076,548	$1,045\cdot10^{-1}$	67,430882
1/0	324,861	0,324861	8,2515	105534,501	$8,289\cdot10^{-2}$	53,475121
1	289,297	0,289297	7,3481	83692,664	$6,573\cdot10^{-2}$	42,407699
2	257,626	0,257626	6,5437	66371,300	$5,213\cdot10^{-2}$	33,630834
3	229,423	0,229423	5,8273	52634,834	$4,134\cdot10^{-2}$	26,670464
4	204,307	0,204307	5,1894	41741,321	$3,278\cdot10^{-2}$	21,150639
5	181,941	0,181941	4,6213	33102,372	$2,600\cdot10^{-2}$	16,773220
6	162,023	0,162023	4,1154	26251,375	$2,062\cdot10^{-2}$	13,301768
7	144,285	0,144285	3,6649	20818,287	$1,635\cdot10^{-2}$	10,548782
8	128,490	0,128490	3,2636	16509,652	$1,297\cdot10^{-2}$	8,365564
9	114,424	0,114424	2,9064	13092,749	$1,028\cdot10^{-2}$	6,634194
10	101,897	0,101897	2,5882	10383,022	$8,155\cdot10^{-3}$	5,261155
11	90,742	0,090742	2,3048	8234,111	$6,467\cdot10^{-3}$	4,172286
12	80,808	0,080808	2,0525	6529,947	$5,129\cdot10^{-3}$	3,308773
13	71,962	0,071962	1,8278	5178,483	$4,067\cdot10^{-3}$	2,623976
14	64,084	0,064084	1,6277	4106,724	$3,225\cdot10^{-3}$	2,080908
15	57,068	0,057068	1,4495	3256,780	$2,558\cdot10^{-3}$	1,650235
16	50,821	0,050821	1,2908	2582,744	$2,028\cdot10^{-3}$	1,308696
17	45,257	0,045257	1,1495	2048,209	$1,609\cdot10^{-3}$	1,037843
18	40,303	0,040303	1,0237	1624,304	$1,276\cdot10^{-3}$	0,823047
19	35,891	0,035891	0,9116	1288,131	$1,012\cdot10^{-3}$	0,652706
20	31,961	0,031961	0,8118	1021,535	$8,023\cdot10^{-4}$	0,517619
21	28,462	0,028462	0,7229	810,114	$6,363\cdot10^{-4}$	0,410491
22	25,347	0,025347	0,6438	642,449	$5,046\cdot10^{-4}$	0,325534
23	22,572	0,022572	0,5733	509,486	$4,001\cdot10^{-4}$	0,258160
24	20,101	0,020101	0,5106	404,040	$3,173\cdot10^{-4}$	0,204730
25	17,900	0,017900	0,4547	320,419	$2,517\cdot10^{-4}$	0,162359
26	15,941	0,015941	0,4049	254,104	$1,996\cdot10^{-4}$	0,128756
27	14,196	0,014196	0,3606	201,513	$1,583\cdot10^{-4}$	0,102108

(continua a la pàgina següent)

Taula 4.5: (ve de la pàgina anterior)

Cable [AWG]	Diàmetre			Secció		
	[mil]	[in]	[mm]	[CM]	[in ²]	[mm ²]
28	12,641	0,012641	0,3211	159,807	$1,255 \cdot 10^{-4}$	0,080976
29	11,258	0,011258	0,2859	126,733	$9,954 \cdot 10^{-5}$	0,064217
30	10,025	0,010025	0,2546	100,504	$7,894 \cdot 10^{-5}$	0,050926
31	8,928	0,008928	0,2268	79,703	$6,260 \cdot 10^{-5}$	0,040386
32	7,950	0,007950	0,2019	63,207	$4,964 \cdot 10^{-5}$	0,032028
33	7,080	0,007080	0,1798	50,126	$3,937 \cdot 10^{-5}$	0,025399
34	6,305	0,006305	0,1601	39,752	$3,122 \cdot 10^{-5}$	0,020142
35	5,615	0,005615	0,1426	31,524	$2,476 \cdot 10^{-5}$	0,015974
36	5,000	0,005000	0,1270	25,000	$1,963 \cdot 10^{-5}$	0,012668
37	4,453	0,004453	0,1131	19,826	$1,557 \cdot 10^{-5}$	0,010046
38	3,965	0,003965	0,1007	15,723	$1,235 \cdot 10^{-5}$	0,007967
39	3,531	0,003531	0,0897	12,469	$9,793 \cdot 10^{-6}$	0,006318
40	3,145	0,003145	0,0799	9,888	$7,766 \cdot 10^{-6}$	0,005010
41	2,800	0,002800	0,0711	7,842	$6,159 \cdot 10^{-6}$	0,003973
42	2,494	0,002494	0,0633	6,219	$4,884 \cdot 10^{-6}$	0,003151
43	2,221	0,002221	0,0564	4,932	$3,873 \cdot 10^{-6}$	0,002499
44	1,978	0,001978	0,0502	3,911	$3,072 \cdot 10^{-6}$	0,001982
45	1,761	0,001761	0,0447	3,102	$2,436 \cdot 10^{-6}$	0,001572
46	1,568	0,001568	0,0398	2,460	$1,932 \cdot 10^{-6}$	0,001246
47	1,397	0,001397	0,0355	1,951	$1,532 \cdot 10^{-6}$	0,000988
48	1,244	0,001244	0,0316	1,547	$1,215 \cdot 10^{-6}$	0,000784
49	1,108	0,001108	0,0281	1,227	$9,635 \cdot 10^{-7}$	0,000622
50	0,986	0,000986	0,0251	0,973	$7,641 \cdot 10^{-7}$	0,000493

Es dona finalment, la fórmula per passar directament d'un número AWG n , a la seva secció S equivalent expressada en mm^2 .

$$S = \frac{25,4^2 \cdot 460^2 \cdot \pi}{4 \cdot 10^6 \cdot 92^{2 \cdot \frac{n+3}{39}}} = 53,4751207 \cdot 92^{-n/19,5} \quad \begin{cases} S & : \text{ expressat en } \text{mm}^2 \\ n & : \text{ número AWG} \end{cases} \quad (4.25)$$

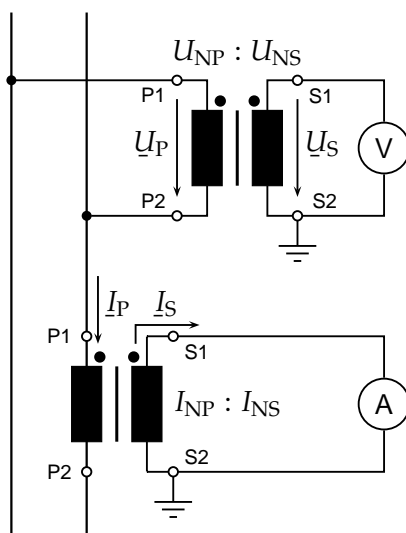
En aquesta fórmula, cal utilitzar els valors $n = 0, -1, -2, -3$, pels números AWG 1/0, 2/0, 3/0, 4/0 respectivament.

Transformadors de Mesura i Protecció

Es tracten en aquest capítol temes referents als transformadors de mesura i de protecció, tant de tensió com d'intensitat. Aquest tractament es fa des del punt de vista de les normes CEI. En l'apartat final, es descriuen les normes ANSI, i la seva correspondència amb les CEI.

5.1 Introducció

En la Figura 5.1 es representen uns connexionats habituals d'un transformador de tensió (anomenats usualment TT), a la part superior, i d'un transformador d'intensitat (anomenats usualment TI o TC), a la part inferior. Els sentits de les tensions i corrents s'han representat tenint en compte els terminals equivalents (marcats amb un punt) dels primaris i secundaris.



$$\underline{U}_S = \underline{U}_P \frac{U_{NS}}{U_{NP}} \quad (5.1)$$

$$\underline{I}_S = \underline{I}_P \frac{I_{NS}}{I_{NP}} \quad (5.2)$$

Figura 5.1: Transformadors de tensió i d'intensitat

Les relacions de transformació nominals d'aquests transformadors de tensió i d'intensitat, són $U_{NP} : U_{NS}$ i $I_{NP} : I_{NS}$ respectivament. Al costat de la Figura 5.1 es poden veure les relacions que lliguen les tensions i corrents de primari amb les de secundari, suposant que els transformadors són ideals.

Els terminals del primari es designen P1 i P2, i els del secundari S1 i S2; P1 i S1 són sempre terminals equivalents.

Els transformadors de tensió es connecten a la línia principal, en derivació; el primari està sotmès, per tant, a la tensió de la línia. Els TT per a connexió entre fases tenen els dos borns primaris aïllats, mentre que els que estan previstos per ser connectats entre fase y terra, només en tenen un d'aïllat, ja que l'altre es connecta directament a terra. Els transformadors de corrent, en canvi, es connecten amb el primari intercalat en la línia principal; pel primari circula, per tant, la intensitat de la línia.

Com a mesura de protecció per a les persones, és usual connectar a terra un dels dos terminals del secundari dels transformadors. Cal recordar a més, en el cas dels transformadors de corrent, que el secundari no ha de quedar mai en circuit obert, ja que es produirien sobretensions que podrien malmetre el transformador.

5.2 Errors de mesura dels transformadors reals

Donat que en realitat, els transformadors que es construeixen no són ideals, tots tenen un error en la transformació de la magnitud primària en la secundària, tant pel què fa al mòdul, com pel què fa a l'angle.

5.2.1 Error de relació

Aquest és l'error de mòdul existent entre les magnituds primària i secundària; es denomina més específicament, error d'intensitat en el cas dels TI, i error de tensió en el cas dels TT.

En el cas dels TI, si I_P i I_S són els corrents que realment circulen pel primari i pel secundari respectivament, l'error d'intensitat ϵ_I val:

$$\epsilon_I = \frac{\frac{I_{NP}}{I_{NS}} I_S - I_P}{I_P} \quad (5.3)$$

En el cas dels TT, si U_P i U_S són les tensions que realment existeixen en el primari i en el secundari respectivament, l'error de tensió ϵ_T val:

$$\epsilon_T = \frac{\frac{U_{NP}}{U_{NS}} U_S - U_P}{U_P} \quad (5.4)$$

Els errors de relació (de tensió o d'intensitat) s'expressen normalment en tant per cent.

5.2.2 Error de fase

Aquest és l'error d'angle existent entre les magnituds primària i secundària; aquesta definició és rigorosa només en el cas de tensions o corrents sinusoidals, on aquests valors es poden representar mitjançant vectors giratoris.

Cal fer notar que mentre que l'error de relació vist anteriorment, afecta a qualsevol tipus d'aparell que es connecti en el secundari, l'error de fase no afecta a aparells que només mesuren el mòdul de la tensió o del corrent (amperímetre, voltímetre, etc.), i sí afecta, en canvi a aparells que mesuren simultàniament diverses tensions o corrents (wattímetre, comptador d'energia, sincronitzador, etc.)

Els errors de fase s'expressen en el valor de l'angle, mesurat en minuts d'arc o en centi-radians (crad).

5.2.3 Error compost

Per a magnituds sinusoidals, l'error compost es defineix com:

$$\text{Error compost} = \sqrt{(\text{Error de relació})^2 + (\text{Error de fase})^2} \quad (5.5)$$

L'error compost i el de relació han d'expressar-se en %, i l'error de fase en crad.

5.2.4 Classe, càrrega i potència de precisió

Les normes defineixen les anomenades «classes de precisió», cadascuna de les quals té assignats uns límits admissibles dels errors de relació i de fase. Així doncs, a cada transformador se li assigna una determinada classe de precisió, en funció dels errors de relació i de fase que presenta.

Els errors de relació i de fase que presenta un transformador no són constants, sinó que depenen de les següents condicions:

- ☐ La tensió present en el secundari, en el cas dels TT, i el corrent que circula pel secundari, en el cas dels TI.
- ☐ La càrrega connectada en el secundari (en sèrie en el cas dels TI, i en paral·lel en el cas dels TT), definida pel nombre i tipus d'aparells connectats.
- ☐ La freqüència de funcionament.

Per tant, la classe de precisió assignada a un TI o a un TT, ha d'estar referida a un determinat valor de la càrrega a què està sotmès el transformador. Es defineix, en conseqüència, el terme «càrrega de precisió» com el valor de la càrrega en el secundari (expressada en Ω), a la que està referida la classe de precisió assignada; és més usual, no obstant, utilitzar el terme «potència de precisió», que es el valor de la càrrega (expressada com potència aparent en VA), a la que està referida la classe de precisió.

La relació entre la càrrega de precisió Z_{NS} i la potència de precisió S_N en el cas dels TT és:

$$S_N = \frac{U_{NS}^2}{Z_{NS}} \quad (5.6)$$

i en el cas del TI:

$$S_N = I_{NS}^2 Z_{NS} \quad (5.7)$$

5.3 Característiques i valors normalitzats dels transformadors de tensió

5.3.1 Característiques comunes dels TT de mesura i de protecció

Segons quina sigui la seva funció, els TT es classifiquen en:

- **Transformadors de mesura:** són els utilitzats per alimentar instruments de mesura (voltímetres, wattímetres, etc.), comptadors d'energia i altres aparells que requereixin senyal de tensió.
- **Transformadors de protecció:** són els utilitzats per alimentar relès de protecció.

Es presenten a continuació les característiques comunes als TT de mesura i de protecció.

Tensió nominal primària

És la tensió assignada al primari del transformador, a partir de la qual, es determinen les seves característiques de funcionament i d'aïllament (U_{NP}). En mitja tensió, els valors normalitzats són: 2,2, 3,3, 5,5, 6,6, 11, 13,2, 16,5, 22, 27,5, 33, 44, 55 i 66 kV.

Tensió nominal secundària

És la tensió assignada al secundari del transformador (U_{NS}). Els valors normalitzats són:

- 100 i 110 V, en el cas de transformadors connectats entre dues fases.
- $\frac{100}{\sqrt{3}}$ i $\frac{110}{\sqrt{3}}$ V, en el cas de transformadors connectats entre fase i terra.
- 100, 110, $\frac{100}{\sqrt{3}}$, $\frac{110}{\sqrt{3}}$, $\frac{100}{3}$ i $\frac{110}{3}$ V, en el cas de transformadors connectats en triangle obert.

Relació de transformació nominal

Relació dels dos paràmetres anteriors ($U_{NP} : U_{NS}$).

Freqüència nominal

És la freqüència d'operació per a la qual està dissenyat el transformador.

Potència de precisió

Els valors normalitzats de la potència de precisió (S_N), per a un factor de potència 0,8 inductiu són: 10, 15, 25, 30, 50, 75, 100, 150, 200, 300, 400 i 500 VA.

Factor de tensió nominal

És el factor pel qual ha de multiplicar-se la tensió nominal primària, per tal de determinar la tensió màxima que el TT pot suportar durant un temps determinat, sense sobrepassar ni l'escalfament admissible, ni els límits d'error corresponents a la seva classe de precisió. Les sobreensions poden presentar-se en el transformador, per la fluctuació pròpia de la xarxa on estiguin connectats, o per l'efecte de curt circuits.

Tots els TT han de suportar en permanència una tensió aplicada en el primari de fins a 1,2 vegades la tensió nominal. A més, els TT connectats entre fase i terra, en xarxes amb el neutre aïllat, o connectat a terra a través d'una impedància elevada, han de suportar una tensió de fins 1,9 vegades la tensió nominal, durant 8 hores (per fer front a curt circuits fase-terra).

5.3.2 Característiques particulars dels TT de mesura

Es presenten a continuació les característiques particulars dels TT de mesura.

Classe de precisió

Els valors normalitzats són 0,1, 0,2, 0,5, 1 i 3. En la Taula 5.1 s'indiquen els límits dels errors de tensió i de fase, per a tensions compreses entre $80 \div 120 \% U_{NS}$, i per a càrregues compreses entre $25 \div 100 \% S_N$, amb un factor de potència 0,8 inductiu.

Aquests valors de classe de precisió, també són aplicables als transformadors de protecció.

Taula 5.1: Classes de precisió per a TT de mesura i protecció

Classe de precisió	Error de tensió [$\pm \% U_{NS}$]	Error de fase	
		[\pm minuts d'arc]	[\pm crad]
0,1	0,1	5	0,15
0,2	0,2	10	0,3
0,5	0,5	20	0,6
1	1,0	40	1,2
3	3,0	—	—

5.3.3 Característiques particulars dels TT de protecció

Es presenten a continuació les característiques particulars dels TT de protecció.

Classe de precisió

Els TT de protecció tenen les mateixes classes de precisió que els TT de mesura, i per tant també els és aplicable la Taula 5.1.

Adicionalment, els TT de protecció, pels marges de tensió compresos entre $5 \div 80 \% U_{NS}$ i entre $1,2U_{NS}$ i el valor U_{NS} multiplicat pel factor de tensió nominal (per exemple $1,9U_{NS}$), tenen assignada una altra classe de precisió; els valors normalitzats són 3P i 6P. Així, per exemple, un TT amb factor de tensió nominal 1,9 i classe de precisió 0,5 3P, té la classe de precisió 0,5 entre $0,8 \div 1,2 U_{NS}$, i la classe de precisió 3P entre $0,05 \div 0,8 U_{NS}$ i entre $1,2 \div 1,9 U_{NS}$.

En la Taula 5.2 s'indiquen els límits dels errors de tensió i de fase, per a càrregues compreses entre $25 \div 100 \% S_N$, amb un factor de potència 0,8 inductiu, dins dels dos marges de tensions indicats anteriorment. Per a tensions de l'ordre del $2 \% U_{NS}$, els errors tenen un valor doble dels indicats en aquesta taula.

Taula 5.2: Classes de precisió addicionals per a TT de protecció

Classe de precisió	Error de tensió [$\pm \% U_{NS}$]	Error de fase	
		[\pm minuts d'arc]	[\pm crad]
3P	3	120	3,5
6P	6	240	7,0

5.4 Característiques i valors normalitzats dels transformadors d'intensitat

5.4.1 Característiques comunes dels TI de mesura i de protecció

Segons quina sigui la seva funció, els TI es classifiquen, de forma anàloga als TT, en:

- ☐ **Transformadors de mesura:** són els utilitzats per alimentar instruments de mesura (amperímetres, wattímetres, etc.), comptadors d'energia i altres aparells que requereixin senyal d'intensitat.
- ☐ **Transformadors de protecció:** són els utilitzats per alimentar relès de protecció.

Es presenten a continuació les característiques comunes als TI de mesura i de protecció.

Intensitat nominal primària

És la intensitat assignada al primari del transformador (I_{NP}). Els valors normalitzats són: 10, 12,5, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60 i 75 A, i els seus múltiples i submúltiples decimals.

Intensitat nominal secundària

És la intensitat assignada al secundari del transformador (I_{NS}). Els valors normalitzats són: 1, 2 i 5 A, essent aquest darrer valor el preferent i el més freqüent.

Relació de transformació nominal

Relació dels dos paràmetres anteriors ($I_{NP} : I_{NS}$).

Freqüència nominal

És la freqüència d'operació per a la qual està dissenyat el transformador.

Potència de precisió

Els valors normalitzats de la potència de precisió (S_N), són: 2,5, 5, 10, 15, i 30 VA.

Sobreintensitats assignades

Els TI tenen el primari connectat en sèrie amb una línia de potència, i per tant han d'estar preparats per suportar curts circuits, fins que algun interruptor desconnecti la línia on hi ha la falta; aquest corrent es transforma en el secundari en un corrent de valor també elevat, havent de suportar el transformador els efectes tèrmics i dinàmics que això comporta.

Es defineix la «intensitat tèrmica nominal de curt circuit» (I_{th}), com el valor eficaç del corrent primari que el transformador pot suportar durant 1 s, amb el debanat secundari en curt circuit, sense patir efectes perjudicials; es considera que aquest temps és suficient perquè les proteccions pertinents actuïn, eliminant el curt circuit. En qualsevol cas, si I_{cc} és la intensitat de curt circuit i t és la seva durada, ha de complir-se: $I_{th} \geq I_{cc}\sqrt{t}$. El valor d'aquesta intensitat tèrmica, s'acostuma a expressar com a un valor múltiple de la intensitat nominal (per exemple: $I_{th} = 150 I_{NP}$).

Es defineix la «intensitat dinàmica nominal» (I_{din}), com el valor de cresta de la intensitat tèrmica nominal de curt circuit. Normalment es pren el valor: $I_{din} = 1,8\sqrt{2}I_{th} \approx 2,5I_{th}$. El transformador ha de suportar les forces electrodinàmiques produïdes per aquest corrent.

Es defineix finalment la «intensitat tèrmica permanent nominal», com el valor de la màxima intensitat que pot circular pel primari del transformador de forma permanent, amb el secundari connectat a la càrrega de precisió, sense que l'escalfament del transformador surti dels límits previstos. El valor usual d'aquesta intensitat és 1,2 vegades la intensitat nominal del transformador; amb aquest corrent ($1,2I_{NP}$) el transformador ha de mantenir-se dins de la seva classe de precisió.

5.4.2 Característiques particulars dels TI de mesura

Els circuits magnètics d'aquest transformadors, es dissenyen de manera que es saturin ràpidament, de manera que fortes sobreintensitats en el primari, no repercutixin en el secundari, ja que els aparells que normalment s'hi connecten (amperímetres, comptadors d'energia, etc.), no estan preparats per suportar grans sobreintensitats.

Es presenten a continuació les característiques particulars dels TI de mesura.

Intensitat límit primària assignada

La intensitat límit primària (I_{LP}), és la intensitat primària, a partir de la qual l'error compost és igual o superior al 10 %, amb una càrrega igual a la càrrega de precisió del transformador.

Factor de seguretat

El factor de seguretat (F_S) es defineix com la relació entre la intensitat límit primària i la intensitat primària nominal: $F_S = I_{LP} / I_{NP}$.

En el cas d'un curt circuit en la línia on està intercalat el transformador, la seguretat dels aparells connectats en el secundari del TI és tant més gran, com més petit és F_S . Valors usals són: $2,5 < F_S < 10$, i per alimentar comptadors: $3 < F_S < 5$.

Classe de precisió

Els valors normalitzats són 0,1, 0,2, 0,5, 1, 3 i 5. En la Taula 5.3 s'indiquen els límits, per a diversos corrents de secundari I_S , dels errors d'intensitat i de fase de les classes de precisió 0,1, 0,2, 0,5 i 1, per a càrregues compreses entre $25 \div 100 \% S_N$, amb un factor de potencia 1 si $S_N < 5 \text{ VA}$, i 0,8 inductiu si $S_N \geq 5 \text{ VA}$. En la Taula 5.4 s'indiquen els límits, per a diversos corrents de secundari I_S , dels errors d'intensitat de les classes de precisió 3 i 5, per a càrregues compreses entre $50 \div 100 \% S_N$, amb un factor de potencia 1 si $S_N < 5 \text{ VA}$, i 0,8 inductiu si $S_N \geq 5 \text{ VA}$; l'error de fase no s'especifica per a aquestes dues classes.

Taula 5.3: Classes de precisió 0,1, 0,2, 0,5 i 1 per a TI de mesura

Classe de precisió	Error d'intensitat [$\pm \% I_{NS}$]				Error de fase							
					[\pm minuts d'arc]				[\pm crad]			
0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	15	8	5	5	0,45	0,24	0,15	0,15
0,2	0,75	0,35	0,2	0,2	30	15	10	10	0,9	0,45	0,3	0,3
0,5	1,5	0,75	0,5	0,5	90	45	30	30	2,7	1,35	0,9	0,9
1	3,0	1,5	1,0	1,0	180	90	60	60	5,4	2,7	1,8	1,8
$I_S [\% I_{NS}]$:	5	20	100	120	5	20	100	120	5	20	100	120

Taula 5.4: Classes de precisió 3 i 5 per a TI de mesura

Classe de precisió	Error d'intensitat [$\pm \% I_{NS}$]	
3	3	3
5	5	5
$I_S [\% I_{NS}]$:	50	120

5.4.3 Característiques particulars dels TI de protecció

Contràriament als transformadors de mesura, els transformadors de protecció es dissenyen de manera que no es saturin fins a valors elevats de sobreintensitats primàries, ja que interessa que el secundari segueixi reflectint el que passa en el primari, per a fortes sobreintensitats (encara que sigui amb errors majors), per tal que els relès de protecció connectats al transformador, actuïn als valors de sobreintensitats a què estan ajustats.

Es presenten a continuació les característiques particulars dels TI de protecció.

Intensitat límit de precisió assignada

La intensitat límit de precisió (I_{LP}), és la intensitat primària màxima, per a la qual el transformador manté el límit de l'error compost que té assignat.

Factor límit de precisió

El factor límit de precisió (F_{LP}) es defineix com la relació entre la intensitat límit de precisió i la intensitat primària nominal: $F_{LP} = I_{LP}/I_{NP}$. Els valors normalitzats són: 5, 10, 15, 20 i 30.

Mentre es compleixi $I_P < F_{LP}I_{NP}$, queda garantit que el transformador no es saturarà, i per tant la intensitat secundària seguirà reflectint amb suficient precisió el valor de la intensitat primària.

Cal tenir en compte que el valor de F_{LP} està lligat constructivament al valor de S_N , i que només és vàlid quan tenim aquest consum de potència en el secundari; per a un valor de potència S diferent de S_N , tindrem un valor $F_{LP}^{(S)}$ també diferent de F_{LP} . La relació que lliga aquests valors, tenint en compte la resistència del debanat secundari del transformador R_S és:

$$F_{LP}(S_N + R_S I_{NS}^2) = F_{LP}^{(S)}(S + R_S I_{NS}^2) \quad (5.8)$$

Valors típics per a la resistència del debanat secundari són:

- Secundaris de 5 A: $R_S = 0,2 \div 0,4 \Omega$
- Secundaris d'1 A: $R_S = 1,5 \div 3,5 \Omega$

Classe de precisió

Els valors normalitzats són 5P i 10P. En la Taula 5.5 a la pàgina següent s'indiquen els límits dels errors d'intensitat i de fase, per a la intensitat nominal I_{NS} i la càrrega de precisió nominal S_N , amb un factor de potència 0,8 inductiu; s'indica, a més, l'error compost, per a la intensitat I_{LP} .

La classe de precisió i el factor límit de precisió s'expressen sempre de forma conjunta, per exemple 5P15 s'interpreta com: classe de precisió 5P i $F_{LP} = 15$.

Taula 5.5: Classes de precisió per a TI de protecció

Classe de precisió	Error d'intensitat [\pm % I_{NS}]	Error de fase		Error compost [\pm % I_{NS}]
		[\pm minuts d'arc]	[\pm crad]	
5P	1	60	1,8	5
10P	3	—	—	10

Exemple 5.1 Es tracta de determinar els valors de S_N i F_{LP} , per a un TI destinat a alimentar un relè de protecció i un convertidor d'intensitat de $4 \div 20$ mA. Les característiques dels diferents components són:

- TI: Classe de precisió 5P, $I_{NS} = 5$ A, $R_S = 0,3 \Omega$
- Relè: $S_{N,relè} = 0,25$ VA, $I_{N,relè} = 5$ A, $I_{màx,relè} = 80I_{N,relè}$
- Convertidor: $S_{N,conv.} = 1$ VA, $I_{N,conv.} = 5$ A
- Cables de connexió: Càrrega = 1,6 VA

La potència total que estarà connectada al secundari del transformador és:

$$S = 0,25 \text{ VA} + 1 \text{ VA} + 1,6 \text{ VA} = 2,85 \text{ VA}$$

Prenem com a factor límit de precisió, a aquesta potencia, el factor limitant del corrent màxim que pot suportar el relè de protecció, així doncs tenim:

$$F_{LP}^{(S)} = \frac{80I_{N,relè}}{I_{NS}} = \frac{80 \cdot 5 \text{ A}}{5 \text{ A}} = 80$$

Si apliquem ara l'equació (5.8), tenim:

$$\begin{aligned} F_{LP} \cdot (S_N + 0,3 \Omega \cdot (5 \text{ A})^2) &= 80 \cdot (2,85 \text{ VA} + 0,3 \Omega \cdot (5 \text{ A})^2) \\ F_{LP} \cdot (S_N + 7,5 \text{ VA}) &= 828 \text{ VA} \end{aligned}$$

Escollim a continuació el valor normalitzat $S_N = 15$ VA, i calculem F_{LP} :

$$F_{LP} = \frac{828 \text{ VA}}{15 \text{ VA} + 7,5 \text{ VA}} = 36,8$$

Finalment, escollim el valor normalitzat immediatament inferior al valor de càlcul obtingut: $F_{LP} = 30$, i recalculuem el valor $F_{LP}^{(S)}$ que tindrem realment:

$$F_{LP}^{(S)} = \frac{30 \cdot (15 \text{ VA} + 7,5 \text{ VA})}{2,85 \text{ VA} + 7,5 \text{ VA}} = 65 < 80$$

El valor resultant és per tant acceptable. Així doncs les característiques buscades del transformador són: 15 VA 5P30.

5.5 Comparació entre les normes CEI i ANSI

5.5.1 Normes CEI

La norma CEI aplicable als transformadors de tensió és la CEI 186, i l'aplicable als transformadors d'intensitat és la CEI 185.

Seguint aquestes normes, les característiques dels transformadors de mesura i protecció, s'expressen de la forma següent (la paraula «classe» s'abrevia a «cl.»):

- ❑ **TT de mesura:** Potència i classe de precisió, per exemple 30 VA cl. 0,5.
- ❑ **TT de protecció:** Potència i classes de precisió, per exemple 30 VA cl. 0,5 3P.
- ❑ **TI de mesura:** Potència i classe de precisió, i factor de seguretat, per exemple 10 VA cl. 0,5 $F_5 < 10$
- ❑ **TI de protecció:** Potència, classe i factor límit de precisió (els dos últims paràmetres s'expressen de forma conjunta, i s'omet l'abreviatura «cl.»), per exemple 10 VA 5P15.

En tots els casos ha d'afegir-se també la relació de transformació.

5.5.2 Normes ANSI

La norma ANSI aplicable als transformadors de tensió i d'intensitat, és la ANSI C.57.13.

Les formes de designar els TI de mesura i de protecció de les normes ANSI i CEI, són força diferents entre si. En les normes ANSI, els TI de mesura i de protecció es designen a partir dels tres elements indicats a continuació.

TI de mesura

- ❶ **Classe de precisió:** Aquest concepte és equivalent a l'utilitzat en les normes CEI. Els valors normalitzats són: cl. 0,3, 0,6, 1,2 i 2,4.
- ❷ **La lletra «B»:** És la inicial de la paraula «burden» (càrrega).
- ❸ **Càrrega de precisió:** Aquest concepte és equivalent a l'utilitzat en les normes CEI. Els valors normalitzats són: $Z_{NS} = 0,1, 0,2, 0,5, 0,9$ i $1,8 \Omega$.
La potència de precisió es pot calcular, a partir de la intensitat nominal secundària I_{NS} , utilitzant l'equació (5.7).

Aquests tres elements s'expressen de forma conjunta, per exemple: 0,3B0,2.

TI de protecció

- ❶ **El valor 10:** Indica que l'error compost màxim és $\pm 10\% I_{NS}$, quan la intensitat que circula pel transformador és 20 vegades la intensitat nominal. El valor equivalent, segons les normes CEI, és 10P20 (classe 10P i $F_{LP} = 20$).
- ❷ **Les lletres «C» o «T»:** La lletra «C» és la inicial de la paraula «calculated» (calculada); antigament, enlloc de la lletra «C» s'utilitzava la lletra «L», inicial de «low leakage» (baixa dispersió). Aquesta designació s'usa típicament per als transformador tiroïdals.
La lletra «T» és la inicial de la paraula «tested» (mesurada); antigament, enlloc de la lletra «T» s'utilitzava la lletra «H», inicial de «high leakage» (alta dispersió). Aquesta designació s'usa típicament per als transformador de primari passant.
- ❸ **Tensió màxima de secundari:** És la tensió màxima que hi pot haver en el secundari, per tal de no sobrepassar l'error fixat del $\pm 10\% I_{NS}$, quan la intensitat que circula pel transformador és 20 vegades la intensitat nominal. Els valors normalitzats són: 10, 50, 100, 200, 400 i 800 V.
La càrrega de precisió en el secundari Z_{NS} i la potència de precisió S_N , s'obtenen a partir d'aquesta tensió màxima de secundari $U_{m\grave{a}x,S}$ i del corrent nominal de secundari I_{NS} , segons les equacions següents:

$$Z_{NS} = \frac{U_{m\grave{a}x,S}}{20I_{NS}} \quad (5.9)$$

$$S_N = Z_{NS} I_{NS}^2 = \frac{U_{m\grave{a}x,S} I_{NS}}{20} \quad (5.10)$$

Aquests tres elements s'expressen de forma conjunta, per exemple: 10C50.

Exemple 5.2 Es tracte de trobar els transformadors equivalents, segons les normes CEI, als dos transformadors següents, donats segons les nomenes ANSI: 0,3B0,2 i 10C50; el corrent nominal de secundari és: $I_{NS} = 5$ A.

En el primer cas, tenim de forma directa: cl. 0,3; la potència de precisió la trobem aplicant l'equació (5.7): $S_N = (5 \text{ A})^2 \cdot 0,2 \Omega = 5 \text{ VA}$. Donat que 0,3 no és una classe de precisió CEI normalitzada, escolliríem un transformador de característiques: 5 VA cl. 0,2; caldria a més, definir el factor de seguretat apropiat per a la nostra aplicació.

En el segon cas, tenim de forma directa la classe i el factor límit de precisió: 10P20; la potència de precisió la trobem aplicant l'equació (5.10): $S_N = 50 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} / 20 = 12,5 \text{ VA}$. Donat que 12,5 VA no és una potència de precisió CEI normalitzada, escolliríem un transformador de característiques: 15 VA 10P20; caldria a més, comprovar el factor límit de precisió real que tindrem en la nostra aplicació, utilitzant l'equació (5.8).

Part III

Sistemes Elèctrics de Potència

Resolució de Xarxes Elèctriques

S'explica en aquest capítol el mètode dels nodes, per a la resolució de xarxes elèctriques.

6.1 Introducció

Quan tenim una xarxa elèctrica amb pocs components, sempre la podem resoldre fàcilment utilitzant les lleis de Kirchhoff. No obstant, quan la xarxa té molts components, quan està molt mallada o quan hi ha acoblaments magnètics entre diverses branques de la xarxa, és millor emprar un mètode sistemàtic per tal de resoldre-la, com ara el mètode del nodes.

El mètode dels nodes serveix per resoldre xarxes, tant de corrent continu com de corrent altern, on les càrregues estan definides pels seus valors d'impedància o d'admitància; no és útil per tant, per resoldre problemes de flux de càrregues, on el que es coneix és la potencia absorbida per les càrregues.

Per utilitzar aquest mètode, les branques de la xarxa han d'estar formades per un dels següents components:

- ☐ Font de tensió en sèrie amb una impedància.
- ☐ Font de corrent en paral·lel amb una admitància (l'admitància pot ser nul·la).
- ☐ Impedància.
- ☐ Admitància.
- ☐ Acoblament magnètic entre branques.
- ☐ Transformador¹

No és possible tenir branques d'impedància nul·la (curt circuits) o branques amb fonts de tensió ideals (sense impedància sèrie). Aquesta limitació es pot superar, no obstant, substituint la impedància nul·la, per dues impedàncies en sèrie i de valor contrari, i introduint un node fictici addicional en el punt d'unió d'aquestes dues noves impedàncies. En la Figura 6.1 a la pàgina següent es representa gràficament aquesta substitució.

¹Cal substituir el transformador pel seu circuit equivalent, format per impedàncies i admitàncies. Vegeu la Secció 7.2.4.

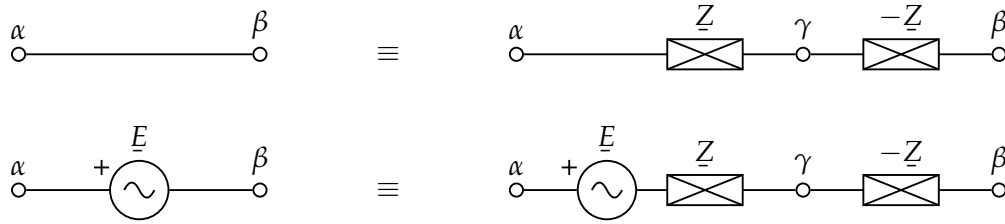


Figura 6.1: Substitució de branques d'impedància nul·la

Per ajudar-nos en l'explicació d'aquest mètode de resolució de xarxes, farem ús de l'exemple de la Figura 6.2. Els valors dels components d'aquest circuit són:

$$\begin{array}{lllll} \underline{E}_1 = 200 \angle 0^\circ \text{ V} & R_1 = 10 \Omega & \underline{E}_2 = 50 \angle 0^\circ \text{ V} & \underline{X}_2 = j20 \Omega & \underline{X}_3 = j5 \Omega \\ R_4 = 20 \Omega & \underline{I}_5 = 4 \angle 0^\circ \text{ A} & R_5 = 10 \Omega & \underline{X}_M = j5 \Omega & \end{array}$$

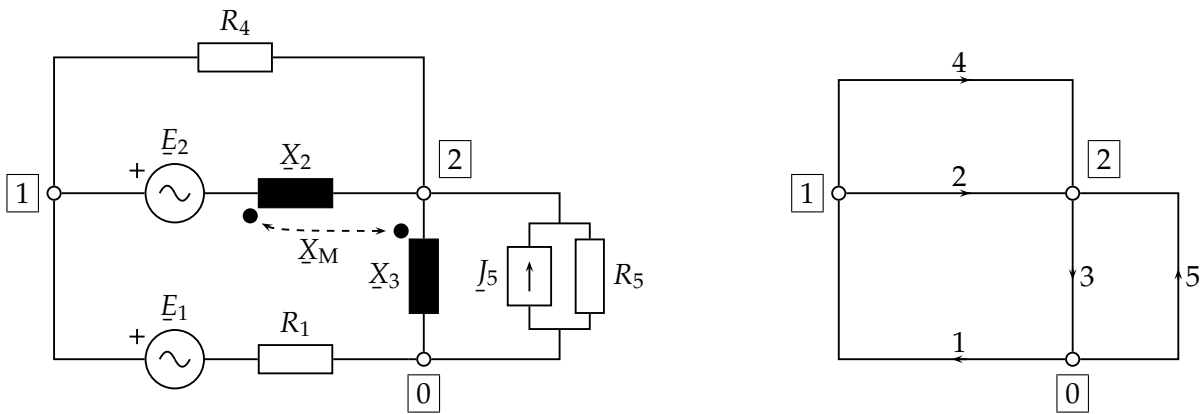


Figura 6.2: Resolució de xarxes elèctriques pel mètode dels nodes

En primer lloc, a partir de la xarxa elèctrica cal representar el seu graf orientat, seguint els passos següents (Figura 6.2):

- ❶ Es representen les connexions de les branques mitjançant línies, sense dibuixar-hi cap component elèctric.
- ❷ Es dóna un sentit a aquestes branques, dibuixant-hi fletxes. Aquestes fletxes representen els sentits assignats als corrents i a les diferències de potencial entre nodes.
- ❸ Es numeren tots els nodes de forma consecutiva, començant pel número 0; el node 0 s'anomena node de potencial zero, o de referència.
- ❹ Es numeren totes les branques de forma consecutiva, començant pel número 1.

Es defineixen a continuació els dos paràmetres bàsics d'aquest mètode, n i b ; aquests dos valors defineixen les dimensions dels vectors i matrius que es veuran més endavant:

n : Nombre de nodes de la xarxa, sense comptar el node de referència.

En el nostre exemple tenim:

$$n = 2$$

b : Nombre de branques de la xarxa.

En el nostre exemple tenim:

$$b = 5$$

6.2 Mètode general de resolució

Quan hi ha acoblaments magnètics entre branques de la xarxa hem d'utilitzar el mètode general de resolució, descrit a continuació.

En primer lloc, a partir dels valors dels components de la xarxa, formem les matrius i vectors següents (es donen les seves dimensions entre claus):

$A\{n \times b\}$: Matriu d'incidència de nodes. Cada columna representa una branca, en ordre creixent d'esquerra a dreta, i cada fila representa un node (sense comptar el de referència) en ordre creixent, de dalt a baix. Cada branca del graf orientat omple la columna corresponent de la matriu A amb els valors 0, 1 ó -1 segons el criteri següent:

1: si la branca surt del node.

-1: si la branca va a para al node.

0: si la branca ni surt ni va a parar al node.

Els termes «sur» i «va a parar» s'han d'entendre segons les fletxes dibuixades en les branques del graf orientat. Les connexions al node de referència, no apareixen en la matriu A .

En el nostre exemple tenim:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$Z_B\{b \times b\}$: Matriu d'impedàncies de branca. Els elements de la diagonal estan formats per les impedàncies de les respectives branques, i els elements de fora de la diagonal estan formats per les impedàncies dels acoblaments magnètics entre cada parell de branques.

Els acoblaments magnètics poden ser positius o negatius, depenent de la posició dels punts homòlegs de les inductàncies i del sentit de les branques del graf orientat. L'acoblament és positiu quan les fletxes de les dues branques acoblades es dirigeixen cap els seus punts homòlegs respectius, o quan les dues fletxes se n'allunyen; en canvi, l'acoblament és negatiu quan una de les fletxes de les dues branques acoblades es dirigeix cap el seu punt homòleg i l'altra se n'allunya.

En el nostre exemple tenim:

$$Z_B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j20 & j5 & 0 & 0 \\ 0 & j5 & j5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \Omega$$

$\underline{E}'_B\{b\}$: Vector columna de forces electromotrius de branca. Els elements d'aquest vector estan formats per les forces electromotrius de les fonts de tensió de les respectives branques.

El signe de cada força electromotriu és positiu, si el seu sentit coincideix amb el sentit de la fletxa de la branca corresponent del graf orientat, i negatiu en cas contrari.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{E}'_B = \begin{pmatrix} 200 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ V}$$

$\underline{I}'_B\{b\}$: Vector columna d'intensivitats de branca. Els elements d'aquest vector estan formats per les intensivitats de les fonts de corrent de les respectives branques.

El signe de cada intensivitat és positiu, si el seu sentit coincideix amb el sentit de la fletxa de la branca corresponent del graf orientat, i negatiu en cas contrari.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{I}'_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ A}$$

A partir de les dades anteriors, formem ara les diverses matrius i vectors que ens permetran resoldre la xarxa, això és, trobar les tensions de les branques i els corrents que hi circulen. Aquestes matrius i vectors són (es donen les seves dimensions entre claus):

$\underline{Y}_B\{b \times b\}$: Matriu d'admitàncies de branca. Està definida per la relació següent:

$$\underline{Y}_B = \underline{Z}_B^{-1} \quad (6.1)$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{Y}_B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j20 & j5 & 0 & 0 \\ 0 & j5 & j5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j\frac{1}{15} & j\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & j\frac{1}{15} & -j\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \text{ S}$$

$\underline{I}_B\{b\}$: Vector columna d'intensivitats equivalents de branca. Està definit per la relació següent:

$$\underline{I}_B = \underline{I}'_B + \underline{Y}_B \underline{E}'_B \quad (6.2)$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{I}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j\frac{1}{15} & j\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & j\frac{1}{15} & -j\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ j\frac{10}{3} \\ -j\frac{10}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ A}$$

$\underline{Y}_N\{n \times n\}$: Matriu d'admitàncies de node. Està definida per la relació següent:

$$\underline{Y}_N = A \underline{Y}_B A^T \quad (6.3)$$

En el nostre exemple tenim:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_N &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j\frac{1}{15} & j\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & j\frac{1}{15} & -j\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 9 - j4 & -3 + j8 \\ 3 + j8 & 9 - j28 \end{pmatrix} \text{ S} \end{aligned}$$

$\underline{I}_N\{n\}$: Vector columna d'intensitats de node. Està definit per la relació següent:

$$\underline{I}_N = -A \underline{I}_B \quad (6.4)$$

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{I}_N = - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ j\frac{10}{3} \\ -j\frac{10}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 60 - j10 \\ 12 + j20 \end{pmatrix} \text{ A}$$

$\underline{V}_N\{n\}$: Vector columna de potencials de node. Està definit per la relació següent:

$$\underline{Y}_N \underline{V}_N = \underline{I}_N \rightarrow \underline{V}_N = \underline{Y}_N^{-1} \underline{I}_N \quad (6.5)$$

Els elements d'aquest vector són els potencials de cada node de la xarxa respecte del node de referència.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{V}_N = 60 \cdot \begin{pmatrix} 9 - j4 & -3 + j8 \\ 3 + j8 & 9 - j28 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 60 - j10 \\ 12 + j20 \end{pmatrix} = \frac{1}{101} \cdot \begin{pmatrix} 15430 + j2295 \\ 3390 + j2085 \end{pmatrix} \text{ V}$$

$\underline{U}_B\{b\}$: Vector columna de tensions de branca. Està definit per la relació següent:

$$\underline{U}_B = A^T \underline{V}_N \quad (6.6)$$

Aquesta és la solució buscada pel que fa a les tensions de les branques de la xarxa.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{U}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{101} \cdot \begin{pmatrix} 15430 + j2295 \\ 3390 + j2085 \end{pmatrix} = \frac{1}{101} \cdot \begin{pmatrix} -15430 - j2295 \\ 12040 + j210 \\ 3390 + j2085 \\ 12040 + j210 \\ -3390 - j2085 \end{pmatrix} \text{ V}$$

$\underline{I}_B\{b\}$: Vector columna de corrents de branca. Està definit per la relació següent:

$$\underline{I}_B = \underline{Y}_B \underline{U}_B + \underline{J}_B \quad (6.7)$$

Aquesta és la solució buscada pel que fa als corrents de les branques de la xarxa.

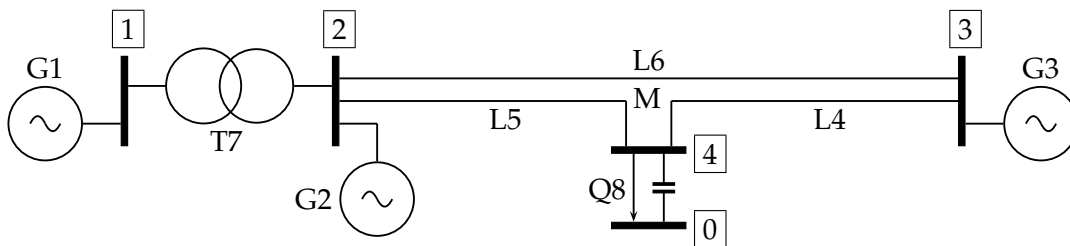
En el nostre exemple tenim:

$$\underline{I}_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j\frac{1}{15} & j\frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & j\frac{1}{15} & -j\frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{101} \cdot \begin{pmatrix} -15430 - j2295 \\ 12040 + j210 \\ 3390 + j2085 \\ 12040 + j210 \\ -3390 - j2085 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ j\frac{10}{3} \\ -j\frac{10}{3} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{202} \cdot \begin{pmatrix} 954 - j459 \\ -250 - j480 \\ 1084 - j876 \\ 1204 + j21 \\ 130 - j417 \end{pmatrix} \text{ A}$$

Es resumeixen finalment, els passos a seguir per tal de resoldre una xarxa elèctrica, mitjançant el mètode dels nodes:

- ❶ Es representa el graf orientat associat a la xarxa, i es numeren tots els seus nodes i totes les seves branques.
- ❷ A partir del graf orientat i dels elements de la xarxa, es formen les matrius \underline{A} i \underline{Z}_B , i els vectors \underline{E}'_B i \underline{J}'_B .
- ❸ Es calculen les matrius \underline{Y}_B i \underline{Y}_N , i els vectors \underline{I}_B i \underline{I}_N .
- ❹ Finalment, es calculen els vectors \underline{V}_N , \underline{U}_B i \underline{I}_B .

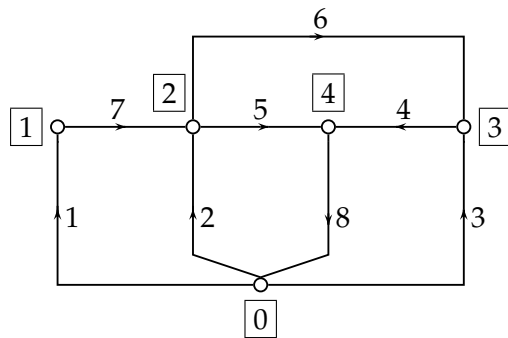
Exemple 6.1 Es tracte de resoldre la xarxa següent pel mètode dels nodes; cal tenir en compte, que a més de la càrrega Q8, els generadors G1, G2 i G3, també estan units a terra (node 0 de referència), i que hi ha un acoblament magnètic M entre les línies L5 i L6. Es calcularà també la potència cedida pels tres generadors G1, G2 i G3, la potència absorbida per la càrrega Q8 i la potència perduda en la resta de components de la xarxa.



Els valors dels components d'aquesta xarxa, expressats en p.u. són:

$$\begin{array}{llll} G1 : \underline{e}_1 = 1,1 & \underline{z}_1 = j0,25 & L4 : \underline{z}_4 = j0,10 & T7 : \underline{z}_7 = j0,16 \quad \dot{u}_7 = 1 : 1 \\ G2 : \underline{e}_2 = 1,05 + j0,10 & \underline{z}_2 = j0,20 & L5 : \underline{z}_5 = j0,405 & Q8 : \underline{j}_8 = 2 - j0,9 \quad \underline{z}_8 = -j25 \\ G3 : \underline{e}_3 = 1,08 + j0,12 & \underline{z}_3 = j0,25 & L6 : \underline{z}_6 = j0,50 & M : \underline{x}_M = j0,05 \text{ (entre L5 i L6)} \end{array}$$

Començarem dibuixant el graf orientat associat a la xarxa, i formant la matriu \underline{A} .



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formem a continuació la matriu \underline{Z}_B i els vectors \underline{J}'_B i \underline{E}'_B (tots els valors en p.u.):

$$\underline{Z}_B = j \cdot \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,405 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \quad \underline{J}'_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 - j0,9 \end{pmatrix} \quad \underline{E}'_B = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1,05 + j0,10 \\ 1,08 + j0,12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculem ara la matriu $\underline{Y}_B = \underline{Z}_B^{-1}$ i el vector $\underline{I}_B = \underline{J}'_B + \underline{Y}_B \underline{E}'_B$ (tots els valors en p.u.):

$$\underline{Y}_B = j \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2,5 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & -2,025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,04 \end{pmatrix} \quad \underline{I}_B = \begin{pmatrix} -j4,4 \\ 0,5 - j5,25 \\ 0,48 - j4,32 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 - j0,9 \end{pmatrix}$$

Continuem amb el càlcul de la matriu $\underline{Y}_N = A \underline{Y}_B A^T$ i dels vectors $\underline{I}_N = -A \underline{I}_B$ i $\underline{V}_N = \underline{Y}_N^{-1} \underline{I}_N$ (tots els valors en p.u.):

$$\underline{Y}_N = j \cdot \begin{pmatrix} -10,25 & 6,25 & 0 & 0 \\ 6,25 & -15,275 & 1,775 & 2,25 \\ 0 & 1,775 & -16,025 & 10,25 \\ 0 & 2,25 & 10,25 & -12,46 \end{pmatrix} \quad \underline{I}_N = \begin{pmatrix} -j4,4 \\ 0,5 - j5,25 \\ 0,48 - j4,32 \\ -2 + j0,9 \end{pmatrix} \quad \underline{V}_N = \begin{pmatrix} 1,0494 \angle -1,4909^\circ \\ 1,0175 \angle -2,5224^\circ \\ 0,9727 \angle -10,3558^\circ \\ 0,9512 \angle -19,1752^\circ \end{pmatrix}$$

Finalment, calculem les tensions i els corrents de les branques, mitjançant els vectors $\underline{U}_B = A^T \underline{V}_N$ i

$\underline{I}_B = \underline{Y}_B \underline{U}_B + \underline{I}_B$ (tots els valors en p.u.):

$$\underline{U}_B = \begin{pmatrix} 1,0494 \angle 178,5091^\circ \\ 1,0175 \angle 177,4776^\circ \\ 0,9727 \angle 169,6442^\circ \\ 0,1495 \angle 67,0039^\circ \\ 0,2925 \angle 66,2049^\circ \\ 0,1431 \angle 65,3702^\circ \\ 0,0370 \angle 28,1937^\circ \\ 0,9512 \angle -19,1752^\circ \end{pmatrix} \quad \underline{I}_B = \begin{pmatrix} 0,2312 \angle -61,8063^\circ \\ 0,7431 \angle -13,0406^\circ \\ 1,2782 \angle -22,6715^\circ \\ 1,4946 \angle -22,9961^\circ \\ 0,6955 \angle -23,7522^\circ \\ 0,2166 \angle -24,9115^\circ \\ 0,2312 \angle -61,8063^\circ \\ 2,1901 \angle -23,2362^\circ \end{pmatrix}$$

Calcularem ara la potència cedida pels tres generadors G1, G2 i G3, i la potència absorbida per la càrrega Q8. Cal tenir en compte que per calcular les potències cedides per generadors, els vectors que representen la força electromotriu del generador i el corrent que travessa el generador han de tenir el mateix sentit de referència; així mateix, per calcular les potències absorbides per càrregues, els vectors que representen la caiguda de tensió a la càrrega i el corrent que travessa la càrrega han de tenir el mateix sentit de referència. Amb aquestes consideracions, tenim:

$$\begin{aligned} \underline{s}_{G1} &= \underline{e}_1 \underline{I}_B^*(1) = 1,1 \cdot 0,2312 \angle 61,8063^\circ = 0,1201 + j0,2241 \text{ p.u.} \\ \underline{s}_{G2} &= \underline{e}_2 \underline{I}_B^*(2) = (1,05 + j0,10) \cdot 0,7431 \angle 13,0406^\circ = 0,7433 + j0,2484 \text{ p.u.} \\ \underline{s}_{G3} &= \underline{e}_3 \underline{I}_B^*(3) = (1,08 + j0,12) \cdot 1,2782 \angle 22,6715^\circ = 1,2146 + j0,6736 \text{ p.u.} \\ \underline{s}_{Q8} &= \underline{U}_B(8) \underline{I}_B^*(8) = 0,9512 \angle -19,1752^\circ \cdot 2,1901 \angle 23,2362^\circ = 2,0780 + j0,1475 \text{ p.u.} \end{aligned}$$

La diferència entre les potències generades i la potència absorbida, és la potència perduda en la resta de components de la xarxa:

$$\underline{s} = \underline{s}_{G1} + \underline{s}_{G2} + \underline{s}_{G3} - \underline{s}_{Q8} = j0,9986 \text{ p.u.}$$

6.3 Mètode particular de resolució sense acoblaments magnètics

Quan no hi ha acoblaments magnètics entre branques de la xarxa, la matriu $\underline{Y}_N\{n \times n\}$ i el vector $\underline{I}_N\{n\}$ es poden formar de manera directa, a partir dels components de la xarxa i del seu graf orientat associat.

Per ajudar-nos en l'explicació d'aquest mètode simplificat, farem ús del mateix exemple de la Figura 6.2 a la pàgina 54, però suposant que no hi ha acoblament magnètic entre les branques 2 i 3 ($\underline{X}_M = 0$).

La matriu $\underline{Y}_N\{n \times n\}$ i el vector $\underline{I}_N\{n\}$ es formen tal com es descriu a continuació:

$\underline{Y}_N\{n \times n\}$: Matriu d'admitàncies de node. Els elements de la diagonal estan formats per la suma de les admitàncies de les branques que incideixen en cada node. Els elements de fora de la diagonal estan formats per la suma, canviada de signe, de les admitàncies de les branques que estan connectades entre cada parella de nodes.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} + \frac{1}{j20} + \frac{1}{10} & -\left[\frac{1}{20} + \frac{1}{j20}\right] \\ -\left[\frac{1}{20} + \frac{1}{j20}\right] & \frac{1}{20} + \frac{1}{j20} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 3-j & -1+j \\ -1+j & 3-j5 \end{pmatrix} \text{ S}$$

$\underline{I}_N\{n\}$: Vector d'intensivitats de node. Cada element d'aquest vector està format per la suma de les intensivitats, degudes a les fonts de corrent i a les fonts de tensió, de les branques que incideixen en cada node; el signe de cada intensivitat és positiu si el corrent va cap al node, i negatiu si se n'allunya. Les fonts de tensió han de transformar-se en fonts de corrent, utilitzant l'equació (1.3) de la pàgina 4.

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{I}_N = \begin{pmatrix} \frac{50}{j20} + \frac{200}{10} \\ -\frac{50}{j20} + 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 40 - j5 \\ 8 + j5 \end{pmatrix} \text{ A}$$

Finalment, trobem el vector de potencials de node $\underline{V}_N\{n\}$, tal com hem fet en l'apartat anterior, aplicant l'equació (6.5)

En el nostre exemple tenim:

$$\underline{V}_N = 20 \cdot \begin{pmatrix} 3 - j & -1 + j \\ -1 + j & 3 - j5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 40 - j5 \\ 8 + j5 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2450 + j535 \\ 540 + j545 \end{pmatrix} \text{ V}$$

Si volem trobar ara de forma sistemàtica, totes les tensions i tots els corrents i de les branques de la xarxa, haurem d'utilitzar l'equació (6.6) de la pàgina 57 i l'equació (6.7) de la pàgina 58; això vol dir que haurem de formar les matrius \underline{A} i \underline{Y}_B i el vector \underline{I}_B . No obstant, si només estem interessats en algun corrent o en alguna tensió de branca, podem resoldre el problema aplicant les lleis de Kirchhoff a les branques que ens interessin.

Exemple 6.2 A partir del circuit de la Figura 6.2 a la pàgina 54, amb $\underline{X}_M = 0$, es tracta de trobar els corrents que circulen per les branques 2 i 5.

Partint dels potencials dels nodes 1 i 2 calculats anteriorment, i aplicant les lleis de Kirchhoff a les branques 2 i 5 tenim:

$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{E}_2 + [\underline{V}_N(1) - \underline{V}_N(2)]}{\underline{X}_2} = \frac{-50 + \left[\frac{2450 + j535 - 540 - j545}{17} \right]}{j20} = \frac{-1 - j106}{34} \text{ A}$$

$$\underline{I}_5 = \frac{-\underline{V}_N(2)}{R_5} + \underline{I}_5 = \frac{\frac{-540 - j545}{17}}{10} + 4 = \frac{28 - j109}{34} \text{ A}$$

6.4 Mètode particular de resolució amb acoblaments magnètics

Quan hi ha acoblaments magnètics entre branques de la xarxa que no tenen cap font de tensió o de corrent, també es pot aplicar el mètode de resolució descrit en l'apartat anterior, substituint prèviament les dues branques acoblades per un circuit equivalent d'admitàncies, segons es veurà a continuació.

Un cop obtingut el circuit equivalent de les dues branques acoblades magnèticament, ja es pot formar la matriu $\underline{Y}_N\{n \times n\}$ i el vector $\underline{I}_N\{n\}$, i resoldre la xarxa, tal com s'ha fet en l'apartat anterior.

En la Figura 6.3 a la pàgina següent es pot veure aquest circuit equivalent.

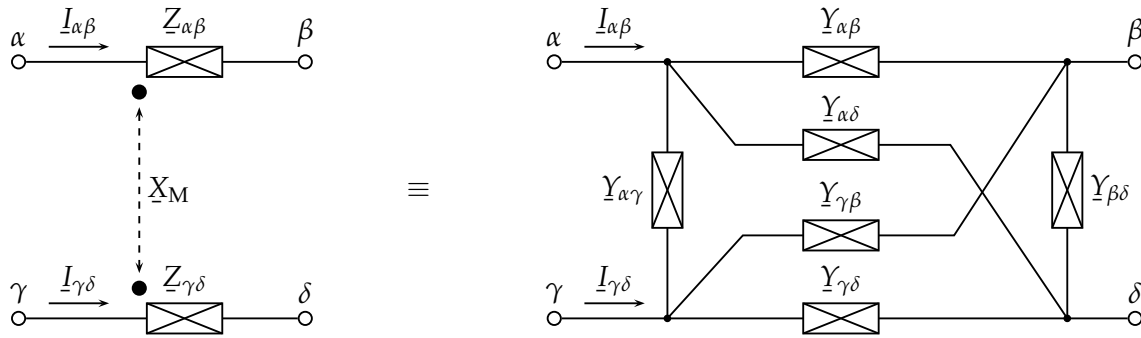


Figura 6.3: Circuit equivalent de dues branques acoblades magnèticament

Els valors de les admitàncies d'aquest circuit equivalent són:

$$\begin{aligned}
 Y_{\alpha\beta} &= \frac{Z_{\gamma\delta}}{Z_{\alpha\beta} Z_{\gamma\delta} - X_M^2} & Y_{\alpha\gamma} &= Y_{\beta\delta} = \frac{X_M}{Z_{\alpha\beta} Z_{\gamma\delta} - X_M^2} \\
 Y_{\gamma\delta} &= \frac{Z_{\alpha\beta}}{Z_{\alpha\beta} Z_{\gamma\delta} - X_M^2} & Y_{\alpha\delta} &= Y_{\gamma\beta} = \frac{-X_M}{Z_{\alpha\beta} Z_{\gamma\delta} - X_M^2}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Un cop hem resolt la xarxa i hem trobat els potencials dels quatre nodes $\underline{V}_N(\alpha)$, $\underline{V}_N(\beta)$, $\underline{V}_N(\gamma)$ i $\underline{V}_N(\delta)$, podem trobar els dos corrents $I_{\alpha\beta}$ i $I_{\gamma\delta}$, a partir de les expressions següents:

$$I_{\alpha\beta} = \frac{[\underline{V}_N(\alpha) - \underline{V}_N(\beta)] Z_{\gamma\delta} - [\underline{V}_N(\gamma) - \underline{V}_N(\delta)] X_M}{Z_{\alpha\beta} Z_{\gamma\delta} - X_M^2} \tag{6.9a}$$

$$I_{\gamma\delta} = \frac{[\underline{V}_N(\gamma) - \underline{V}_N(\delta)] Z_{\alpha\beta} - [\underline{V}_N(\alpha) - \underline{V}_N(\beta)] X_M}{Z_{\alpha\beta} Z_{\gamma\delta} - X_M^2} \tag{6.9b}$$

El cas que hem vist fins ara, és el més general de tots els possibles, ja que suposa que els quatre nodes α , β , γ i δ són diferents entre si. Es pot presentar el cas, no obstant, on dos nodes siguin en realitat el mateix, en tenir les dues branques acoblades magnèticament, un extrem connectat al mateix node; en aquest cas el circuit equivalent resultant es pot derivar del corresponent al cas general de forma senzilla.

Si suposem, per exemple, que les dues branques de la Figura 6.3 estiguessin unides pels extrems de la dreta, és a dir $\beta \equiv \delta$, en aquest cas l'admitància entre α i γ seria $Y_{\alpha\gamma}$, l'admitància entre β i δ desapareixeria, l'admitància entre α i β seria $Y_{\alpha\beta} + Y_{\alpha\delta}$, i finalment, l'admitància entre γ i β seria $Y_{\gamma\beta} + Y_{\gamma\delta}$. Els corrents $I_{\alpha\beta}$ i $I_{\gamma\delta}$, es calcularien també amb les equacions (6.9a) i (6.9b), tenint en compte que $\underline{V}_N(\beta) \equiv \underline{V}_N(\delta)$.

6.5 Circuits equivalents Thévenin i Norton

Per trobar el circuit equivalent Thévenin o Norton entre dos nodes qualsevol d'una xarxa, ens cal el vector de potencials de node $\underline{V}_N\{n\}$, obtingut segons s'ha descrit en els apartats anteriors, i

la matriu d'impedàncies de node $\underline{Z}_N \{n \times n\}$; aquesta matriu està definida per la relació següent:

$$\underline{Z}_N = \underline{Y}_N^{-1} \quad (6.10)$$

A partir del vector \underline{V}_N i de la matriu \underline{Z}_N , podem trobar la font de tensió i la impedància Thévenin equivalent entre dos nodes qualsevol, segons les equacions següents:

□ **Tensió i impedància Thévenin entre un node qualsevol α i el node de referència 0**

$$\underline{E}_{Th}^{(\alpha,0)} = \underline{V}_N(\alpha) \quad (6.11)$$

$$\underline{Z}_{Th}^{(\alpha,0)} = \underline{Z}_N(\alpha, \alpha) \quad (6.12)$$

□ **Tensió i impedància Thévenin entre dos nodes qualsevol α i β**

$$\underline{E}_{Th}^{(\alpha,\beta)} = \underline{V}_N(\alpha) - \underline{V}_N(\beta) \quad (6.13)$$

$$\underline{Z}_{Th}^{(\alpha,\beta)} = \underline{Z}_N(\alpha, \alpha) + \underline{Z}_N(\beta, \beta) - \underline{Z}_N(\alpha, \beta) - \underline{Z}_N(\beta, \alpha) \quad (6.14)$$

A partir d'aquests valors podem calcular els valors del circuit Norton equivalent, utilitzant l'equació (1.3) de la pàgina 4.

Exemple 6.3 Continuant amb el circuit de la Figura 6.2 a la pàgina 54, es tracta de trobar els circuits Thévenin i Norton equivalents de la xarxa, entre els nodes 1 i 2.

El vector \underline{V}_N és el calculat a la pàgina 57.

Trobem a continuació la matriu \underline{Z}_N , a partir de la matriu \underline{Y}_N calculada a la pàgina 57:

$$\underline{Z}_N = 60 \cdot \begin{pmatrix} 9 - j4 & -3 + j8 \\ 3 + j8 & 9 - j28 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{202} \cdot \begin{pmatrix} 1445 + j310 & 415 + j110 \\ 415 + j110 & 245 + j430 \end{pmatrix} \Omega$$

Els valors del circuit Thévenin equivalent que busquem són:

$$\underline{E}_{Th}^{(1,2)} = \frac{15430 + j2295}{101} - \frac{3390 + j2085}{101} = \frac{12040 + j210}{101} \text{ V}$$

$$\underline{Z}_{Th}^{(1,2)} = \frac{1445 + j310}{202} + \frac{245 + j430}{202} - 2 \cdot \frac{415 + j110}{202} = \frac{430 + j260}{101} \Omega$$

Els valors del circuit Norton equivalent que busquem són:

$$\underline{I}_{Th}^{(1,2)} = \frac{\underline{E}_{Th}^{(1,2)}}{\underline{Z}_{Th}^{(1,2)}} = \frac{\frac{12040 + j210}{101} \text{ V}}{\frac{430 + j260}{101} \Omega} = \frac{518 - j301}{25} \text{ A}$$

$$\underline{Y}_{Th}^{(1,2)} = \frac{1}{\underline{Z}_{Th}^{(1,2)}} = \frac{1}{\frac{430 + j260}{101} \Omega} = \frac{43 - j26}{250} \text{ S}$$

Flux de Càrregues

Es tracta en aquest capítol el mètode de resolució del problema del flux de càrregues en sistemes elèctrics de potència.

7.1 Introducció

Quan les dades que es coneixen de les càrregues d'una xarxa no són les seves impedàncies o admitàncies, si no les potències que absorbeixen, no podem emprar el mètode dels nodes, descrit en el Capítol 6, per tal de resoldre la xarxa.

En aquest cas, el mètode de resolució es basa en escriure per a cada node les equacions pertinents del balanç de potència activa i reactiva, i resoldre-les. La solució del sistema d'equacions resultant, ens proporcionarà les tensions de tots els nodes de la xarxa, i el flux de potència activa i reactiva entre els seus nodes.

El sistema d'equacions que cal resoldre és no lineal, i per tant, cal emprar algun mètode numèric per a la seva resolució, com ara el de Newton-Raphson; aquí, no obstant, no s'explicarà cap mètode numèric de resolució de sistemes d'equacions no lineals, ja que això cau fora de l'abast d'aquest llibre. Això però, no hauria de suposar cap problema, ja que avui en dia aquests sistemes d'equacions es poden resoldre fàcilment amb programes d'ordinador de càlcul matemàtic, com ara el programa *Mathematica*[®], o amb calculadores científiques, com ara la calculadora HP-49G.

7.2 Models matemàtics

En els estudis de flux de càrregues, els elements que es consideren són:

- ☐ Càrregues
- ☐ Línies elèctriques
- ☐ Transformadors amb regulació variable (amb decalatge o sense)

7.2.1 Càrregues

Les càrregues vénen sempre definides per la potència que absorbeixen, és a dir, es consideren fonts de potència constant.

7.2.2 Línies elèctriques

Les línies elèctriques es modelen mitjançant un circuit equivalent per fase en « π », format per una impedància longitudinal i dues admitàncies transversals, tal com es pot veure en la Figura 7.1. En aquesta figura s'ha suposat que la línia està connectada entre els nodes 1 i 2; les admitàncies transversals, tenen sempre un extrem connectat a terra (node 0 de referència).

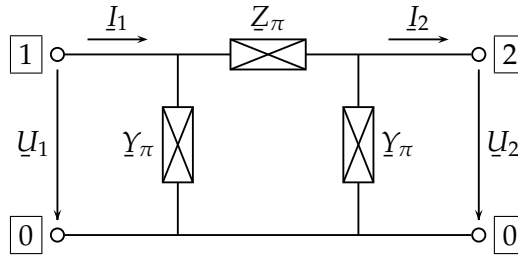


Figura 7.1: Circuit equivalent d'una línia elèctrica

A partir dels paràmetres propis d'una línia: la seva impedància longitudinal total per fase Z_t i la seva admitància transversal total per fase Y_t , definim la impedància característica Z_c i l'angle característic θ_c de la línia:

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_t}{Y_t}} \quad \theta_c = \sqrt{Z_t Y_t} \quad (7.1)$$

Amb aquest dos paràmetres, les equacions hiperbòliques de transmissió d'una línia són:

$$U_1 = U_2 \cosh \theta_c + I_2 Z_c \sinh \theta_c \quad I_1 = U_2 \frac{\sinh \theta_c}{Z_c} + I_2 \cosh \theta_c \quad (7.2)$$

D'altra banda, en el circuit de la Figura 7.1 es compleix:

$$I_2 = \frac{U_1 - U_2}{Z_\pi} - Y_\pi U_2 \quad U_1 = (1 + Z_\pi Y_\pi) U_2 + Z_\pi I_2 \quad (7.3)$$

Identificant entre si els termes de les equacions (7.2) i (7.3), obtenim els paràmetres del circuit equivalent de la línia.

$$Z_\pi = Z_c \sinh \theta_c = Z_t \frac{\sinh \theta_c}{\theta_c} \quad (7.4)$$

$$Y_\pi = \frac{\tanh(\theta_c/2)}{Z_c} = \frac{Y_t}{2} \frac{\tanh(\theta_c/2)}{\theta_c/2} \quad (7.5)$$

Ara bé, en la majoria dels casos es compleix: $|\theta_c| \ll 1$, i utilitzant els desenvolupaments en sèrie de les funcions sinh i tanh, al voltant de 0, tenim:

$$\underline{Z}_\pi = \underline{Z}_t \left[1 + \frac{\theta_c^2}{3!} + \frac{\theta_c^4}{5!} + \dots \right] \approx \underline{Z}_t \quad (7.6)$$

$$\underline{Y}_\pi = \frac{\underline{Y}_t}{2} \left[1 - \frac{(\theta_c/2)^2}{3} + \frac{2(\theta_c/2)^4}{15} - \dots \right] \approx \frac{\underline{Y}_t}{2} \quad (7.7)$$

Utilitzant aquests valors, la contribució d'una línia elèctrica, a la matriu d'admitàncies de node \underline{Y}_N de la xarxa a la qual pertany, és:

$$\underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \frac{\underline{Y}_t}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_t} & -\frac{1}{\underline{Z}_t} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_t} & \frac{\underline{Y}_t}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_t} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Els fluxos de potència a través de la línia, \underline{S}_{12} (del node 1 al 2), i \underline{S}_{21} (del node 2 a l'1), vénen donats per les expressions:

$$\underline{S}_{12} = \underline{U}_1 \left[\left(\frac{\underline{Y}_t}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_t} \right) \underline{U}_1 - \frac{1}{\underline{Z}_t} \underline{U}_2 \right]^* = \underline{U}_1 \left[\frac{\underline{Y}_t}{2} \underline{U}_1 + \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_t} \right]^* \quad (7.9)$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{U}_2 \left[\left(\frac{\underline{Y}_t}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_t} \right) \underline{U}_2 - \frac{1}{\underline{Z}_t} \underline{U}_1 \right]^* = \underline{U}_2 \left[\frac{\underline{Y}_t}{2} \underline{U}_2 + \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_1}{\underline{Z}_t} \right]^* \quad (7.10)$$

Finalment, les pèrdues de transmissió en la línia $\Delta \underline{S}$, vénen donades per l'expressió:

$$\Delta \underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \left[\frac{\underline{Y}_t}{2} + \frac{1}{\underline{Z}_t} \right]^* \left[|\underline{U}_1|^2 + |\underline{U}_2|^2 \right] - 2 \frac{\text{Re}(\underline{U}_1^* \underline{U}_2)}{\underline{Z}_t^*} \quad (7.11)$$

7.2.3 Transformadors amb regulació variable i decalatge

Els transformadors amb regulació variable i decalatge es modelen mitjançant un transformador ideal en sèrie amb una impedància, tal com es pot veure en la Figura 7.2. En aquesta figura s'ha suposat que el transformador està connectat entre els nodes 1 i 2; el punt de referència del transformador és sempre el terra (node 0 de referència).

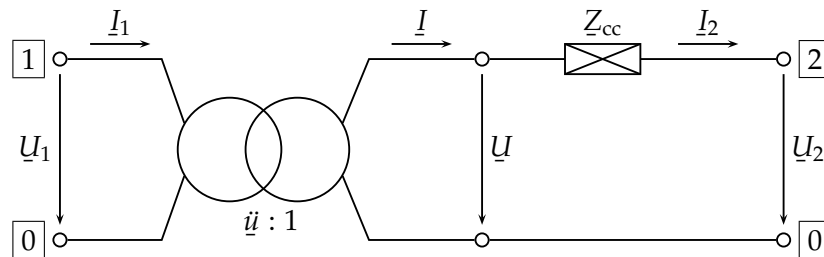


Figura 7.2: Circuit equivalent d'un transformador amb regulació variable i decalatge

En l'esquema anterior, Z_{cc} és la impedància de curt circuit per fase del transformador, i $\underline{u} : 1$ és la seva relació de transformació. El paràmetre \underline{u} és un valor complex, ja que el transformador a més de variar el mòdul de la tensió, també varia el seu argument; les tensions primària i secundària tenen, per tant, diferent mòdul i un decalatge entre els seus arguments.

Si la impedància es volgués representar en el primari del transformador, el seu valor seria $|\underline{u}|^2 Z_{cc}$.

En el circuit de la Figura 7.2 a la pàgina anterior es compleix:

$$\underline{U}_1 = \underline{u} \underline{U} = \underline{u} [\underline{U}_2 + Z_{cc} \underline{I}_2] \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{I}}{\underline{u}^*} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{u}^*} \quad \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{U} \underline{I}^* \quad (7.12)$$

Utilitzant aquestes tres equacions, podem escriure:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{|\underline{u}|^2 Z_{cc}} - \frac{\underline{U}_2}{\underline{u}^* Z_{cc}} \quad -\underline{I}_2 = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{u} Z_{cc}} + \frac{\underline{U}_2}{Z_{cc}} \quad (7.13)$$

Aquestes equacions ens permeten escriure, directament, la contribució d'un transformador amb regulació variable i decalatge, a la matriu d'admitàncies de node \underline{Y}_N de la xarxa a la qual pertany:

$$\underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\underline{u}|^2 Z_{cc}} & -\frac{1}{\underline{u}^* Z_{cc}} \\ -\frac{1}{\underline{u} Z_{cc}} & \frac{1}{Z_{cc}} \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Com es pot veure, $\underline{Y}_N(1,2) \neq \underline{Y}_N(2,1)$; això ens indica que no existeix un esquema equivalent en « π » del transformador, format només per elements passius.

Els fluxos de potència a través del transformador, \underline{S}_{12} (del node 1 al 2), i \underline{S}_{21} (del node 2 a l'1), vénen donats per les expressions:

$$\underline{S}_{12} = \underline{U}_1 \left[\frac{\underline{U}_1}{|\underline{u}|^2 Z_{cc}} - \frac{\underline{U}_2}{\underline{u}^* Z_{cc}} \right]^* = \frac{\underline{U}_1}{\underline{u} Z_{cc}^*} \left[\frac{\underline{U}_1}{\underline{u}} - \underline{U}_2 \right]^* \quad (7.15)$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{U}_2 \left[-\frac{\underline{U}_1}{\underline{u} Z_{cc}} + \frac{\underline{U}_2}{Z_{cc}} \right]^* = \frac{\underline{U}_2}{Z_{cc}^*} \left[\underline{U}_2 - \frac{\underline{U}_1}{\underline{u}} \right]^* \quad (7.16)$$

Finalment, les pèrdues de transmissió del transformador $\Delta \underline{S}$, vénen donades per l'expressió:

$$\Delta \underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \frac{1}{Z_{cc}^*} \left| \frac{\underline{U}_1}{\underline{u}} - \underline{U}_2 \right|^2 \quad (7.17)$$

7.2.4 Transformadors amb regulació variable sense decalatge

Aquest és un cas particular de l'anterior, on el transformador no origina decalatge de fase entre les tensions primària i secundària. En aquest cas, la relació de transformació $\underline{u} : 1$ és un valor real.

A partir de l'equació (7.14), substituint $\underline{\ddot{u}}$ per $\underline{\ddot{u}}$, obtenim la contribució d'un transformador amb regulació variable sense decalatge, a la matriu d'admitàncies de node \underline{Y}_N de la xarxa a la qual pertany:

$$\underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{\ddot{u}}^2 \underline{Z}_{cc}} & -\frac{1}{\underline{\ddot{u}} \underline{Z}_{cc}} \\ -\frac{1}{\underline{\ddot{u}} \underline{Z}_{cc}} & \frac{1}{\underline{Z}_{cc}} \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

Anàlogament, podem obtenir els fluxos de potència a través del transformador, \underline{S}_{12} (del node 1 al 2), i \underline{S}_{21} (del node 2 a l'1), i les seves pèrdues de transmissió $\Delta \underline{S}$, a partir de les equacions (7.15), (7.16) i (7.17):

$$\underline{S}_{12} = \underline{U}_1 \left[\frac{\underline{U}_1}{\underline{\ddot{u}}^2 \underline{Z}_{cc}} - \frac{\underline{U}_2}{\underline{\ddot{u}} \underline{Z}_{cc}} \right]^* = \frac{\underline{U}_1}{\underline{\ddot{u}} \underline{Z}_{cc}^*} \left[\frac{\underline{U}_1}{\underline{\ddot{u}}} - \underline{U}_2 \right]^* \quad (7.19)$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{U}_2 \left[-\frac{\underline{U}_1}{\underline{\ddot{u}} \underline{Z}_{cc}} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{cc}} \right]^* = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{cc}^*} \left[\underline{U}_2 - \frac{\underline{U}_1}{\underline{\ddot{u}}} \right]^* \quad (7.20)$$

$$\Delta \underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_{cc}^*} \left| \frac{\underline{U}_1}{\underline{\ddot{u}}} - \underline{U}_2 \right|^2 \quad (7.21)$$

El circuit equivalent d'aquest tipus de transformador, també és el de la Figura 7.2 a la pàgina 67, substituint $\underline{\ddot{u}} : 1$ per $\underline{\ddot{u}} : 1$; no obstant, donat que en aquest cas es compleix $\underline{Y}_N(1,2) = \underline{Y}_N(2,1)$, també existeix un circuit equivalent en « π », format per una impedància longitudinal i dues admitàncies transversals, tal com es pot veure en la Figura 7.3.

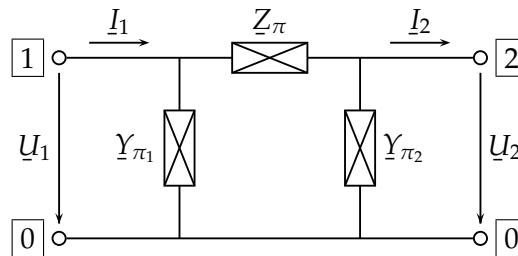


Figura 7.3: Circuit equivalent d'un transformació amb regulació variable sense decalatge

Els valors dels paràmetres d'aquest circuit equivalent són:

$$\underline{Z}_{\pi} = \underline{\ddot{u}} \underline{Z}_{cc} \quad (7.22)$$

$$\underline{Y}_{\pi_1} = \frac{1 - \underline{\ddot{u}}}{\underline{\ddot{u}}^2 \underline{Z}_{cc}} \quad (7.23)$$

$$\underline{Y}_{\pi_2} = \frac{\underline{\ddot{u}} - 1}{\underline{\ddot{u}} \underline{Z}_{cc}} \quad (7.24)$$

7.3 Tipus de nodes

Cadascun dels nodes d'un sistema elèctric de potència, té quatre magnituds associades: les potències activa i reactiva injectades des de l'exterior de la xarxa, i el mòdul i l'argument de la

tensió.

Usualment, en cada node del sistema es coneixen dues de les quatre magnituds anteriors; segons quines siguin aquestes magnituds, es poden distingir els següents tipus de nodes:

- ❑ **Node de potencial zero.** El terra és sempre el node de referència, o de potencial zero, de la xarxa, i per tant, totes les tensions de la xarxa hi estan referides. Al terra se li assigna el número de node 0, i per tant no forma part de la matriu d'admitàncies de node de la xarxa.
- ❑ **Node flotant.** És un node on es manté constant la tensió en mòdul i argument, essent incògnites les potències activa i reactiva injectades a la xarxa des de l'exterior. Generalment, acostuma a ser el node que més s'aproxima a un node de potència infinita. Des del punt de vista de la xarxa, correspon clarament a un generador ideal de tensió.

Només hi pot haver un node d'aquest tipus en tota la xarxa.

- ❑ **Node de tensió controlada.** En aquest node es coneix el mòdul de la tensió i la potència activa injectada a la xarxa des de l'exterior, essent incògnites l'argument de la tensió i la potència reactiva injectada des de l'exterior. En aquests nodes, sovint s'imposen límits a la potència reactiva.
- ❑ **Node de càrrega.** En aquest node es coneixen les potències activa i reactiva injectades a la xarxa des de l'exterior, i són incògnites el mòdul i l'argument de la tensió. Aquests nodes poden ser tant de consum com de generació.

En els nodes on incideix un transformador amb relació de transformació variable sense decalatge, hi pot haver tres magnituds conegudes: les potències activa i reactiva injectades i el mòdul de la tensió, el qual es vol mantenir constant mitjançant l'ajust de la relació de transformació; les incògnites són per tant, l'argument de la tensió i la citada relació de transformació del transformador.

En la Taula 7.1 es resumeix el que s'ha exposat sobre els diferents tipus de nodes en un sistema elèctric de potència.

Taula 7.1: Tipus de nodes en un sistema elèctric de potència

Tipus de node	Tensió		Potència injectada		Relació de transformació
	Mòdul	Argument	Activa	Reactiva	
Flotant	✓	✓	✗	✗	—
De tensió controlada	✓	✗	✓	✗	—
De càrrega sense trafo	✗	✗	✓	✓	—
De càrrega amb trafo	✓	✗	✓	✓	✗
✓ valor conegut		✗ valor incògnita		— no aplicable	

7.4 Formulació del problema

Comencem per considerar una xarxa elèctrica amb els nodes numerats $1, \dots, n$, i essent el terra el node 0 de referència; una de les maneres de descriure aquesta xarxa és utilitzant el mètode dels nodes, descrit en el Capítol 6:

$$\underline{Y}_N \underline{V}_N = \underline{I}_N \quad (7.25)$$

Tenint en compte que els elements de \underline{I}_N , \underline{V}_N i \underline{Y}_N són \underline{j}_i , \underline{v}_i i \underline{y}_{ik} ($i, k = 1, \dots, n$) respectivament, i que aquests valors, suposem que estan expressats en p.u. (veure la Secció 3.2), l'equació anterior queda expressada de la següent manera:

$$\sum_{k=1}^n \underline{y}_{ik} \underline{v}_k = \underline{j}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (7.26)$$

En cadascun dels nodes de la xarxa es compleix la següent relació per a la potència complexa $\underline{s}_i = p_i + jq_i$, injectada al node des de l'exterior:

$$\underline{s}_i^* = p_i - jq_i = \underline{v}_i^* \underline{j}_i = \underline{v}_i^* \sum_{k=1}^n \underline{y}_{ik} \underline{v}_k \quad i = 1, \dots, n \quad (7.27)$$

Ara bé, si expressem els potencials \underline{v}_i a partir dels seus mòduls $|\underline{v}_i|$ i arguments δ_i , i les admittàncies \underline{y}_{ik} a partir de les seves parts reals g_{ik} i imaginàries b_{ik} , tenim:

$$\underline{v}_i = |\underline{v}_i| e^{j\delta_i} = |\underline{v}_i| (\cos \delta_i + j \sin \delta_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (7.28)$$

$$\underline{y}_{ik} = g_{ik} + jb_{ik} \quad i, k = 1, \dots, n \quad (7.29)$$

$$p_i - jq_i = |\underline{v}_i| (\cos \delta_i - j \sin \delta_i) \sum_{k=1}^n (g_{ik} + jb_{ik}) |\underline{v}_k| (\cos \delta_k + j \sin \delta_k) \quad i = 1, \dots, n \quad (7.30)$$

Finalment, si separem la darrera equació en dues, una per a la part real i una altra per a la part imaginària, tenim:

$$p_i - |\underline{v}_i| \sum_{k=1}^n |\underline{v}_k| [g_{ik} \cos(\delta_k - \delta_i) - b_{ik} \sin(\delta_k - \delta_i)] = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (7.31)$$

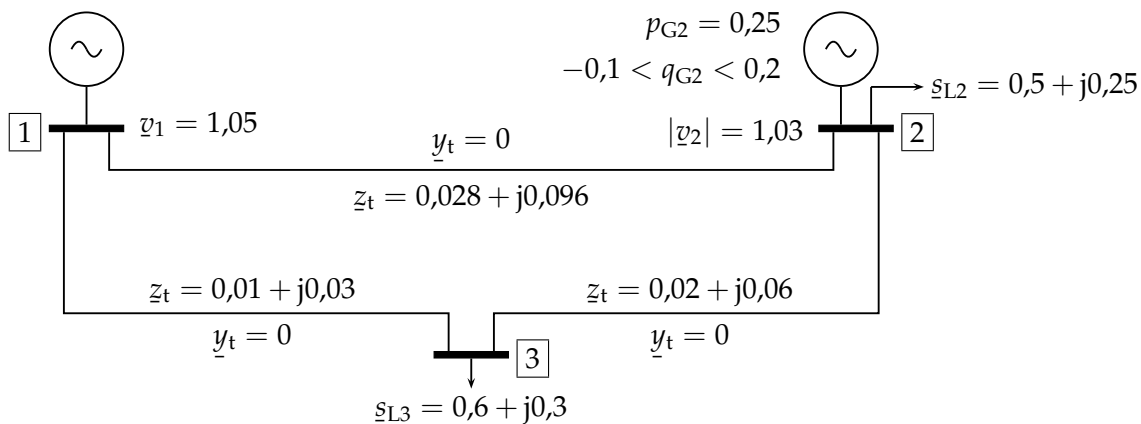
$$q_i + |\underline{v}_i| \sum_{k=1}^n |\underline{v}_k| [g_{ik} \sin(\delta_k - \delta_i) + b_{ik} \cos(\delta_k - \delta_i)] = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (7.32)$$

Resolent de forma simultània les equacions (7.31) i (7.32), trobaríem els potencials dels nodes de la xarxa respecte al terra, i posteriorment, utilitzant l'equació (7.27), obtindríem la potència injectada en cada node des de l'exterior. Ara bé, és clar que no es poden plantejar les equacions (7.31) i (7.32) en tots els nodes de la xarxa, ja que en alguns d'ells els valors p_i o q_i són desconeguts (veure Taula 7.1 a la pàgina anterior). Per tant, per tal de resoldre el problema del flux de càrregues en un sistema elèctric de potència, cal seguir els passos següents:

- ❶ Es numeren tots els nodes de la xarxa, començant pel número 1. El terra és sempre el node 0 de referència.

- ② Es forma la matriu d'admitàncies de nodes \underline{Y}_N , tal com s'ha explicat en el Capítol 6.
- ③ Es forma l'equació (7.31) per a tots els nodes de tensió controlada i per a tots els nodes de càrrega. Cal tenir en compte que la potència activa injectada p_i es considera positiva quan entra des de l'exterior a la xarxa, i negativa en cas contrari.
- ④ Es forma l'equació (7.32) per a tots els nodes de càrrega. Cal tenir en compte que la potència reactiva injectada q_i es considera positiva quan entra des de l'exterior a la xarxa, i negativa en cas contrari.
- ⑤ Es resol de forma numèrica el sistema d'equacions no lineals, format en els dos passos anteriors; com a valors inicials de les incògnites, es poden prendre els valors següents:
 - ☐ Mòduls dels potencials: mòdul del potencial del node flotant
 - ☐ Arguments dels potencials: argument del potencial del node flotant
 - ☐ Relacions de transformació: 1
- ⑥ Si és necessari, es pot calcular la potència injectada en els nodes de la xarxa des de l'exterior, en aquells nodes on no es coneix aquest valor, utilitzant l'equació (7.27).

Exemple 7.1 Es tracta de trobar en la xarxa següent, els potencials dels nodes 2 i 3, i les potències subministrades pels generadors dels nodes 1 i 2; tots els valors estan donats en p.u.



Comencem formant la matriu d'admitàncies de node:

$$\begin{aligned}
 \underline{Y}_N &= \begin{pmatrix} \frac{1}{0,028+j0,096} + \frac{1}{0,01+j0,03} & -\frac{1}{0,028+j0,096} & -\frac{1}{0,01+j0,03} \\ -\frac{1}{0,028+j0,096} & \frac{1}{0,028+j0,096} + \frac{1}{0,02+j0,06} & -\frac{1}{0,02+j0,06} \\ -\frac{1}{0,01+j0,03} & -\frac{1}{0,02+j0,06} & \frac{1}{0,01+j0,03} + \frac{1}{0,02+j0,06} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 12,8 - j39,6 & -2,8 + j9,6 & -10,0 + j30,0 \\ -2,8 + j9,6 & 7,8 - j24,6 & -5,0 + j15,0 \\ -10,0 + j30,0 & -5,0 + j15,0 & 15,0 - j45,0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

El node 1 és el node flotant, el node 2 en un node de tensió controlada i el node 3 és un node de càrrega; formarem, per tant, l'equació (7.31) pels nodes 2 i 3, i l'equació (7.32) pel node 3:

$$\begin{aligned} 0,25 - 0,5 - 1,03 \cdot (1,05 \cdot [-2,8 \cdot \cos(-\delta_2) - 9,6 \cdot \sin(-\delta_2)] + 1,03 \cdot 7,8 + \\ + |\underline{v}_3| \cdot [-5,0 \cdot \cos(\delta_3 - \delta_2) - 15,0 \cdot \sin(\delta_3 - \delta_2)]) = 0 \\ -0,6 - |\underline{v}_3| \cdot (1,05 \cdot [-10,0 \cdot \cos(-\delta_3) - 30,0 \cdot \sin(-\delta_3)] + \\ + 1,03 \cdot [-5,0 \cdot \cos(\delta_2 - \delta_3) - 15,0 \cdot \sin(\delta_2 - \delta_3)] + |\underline{v}_3| \cdot 15,0) = 0 \\ -0,3 + |\underline{v}_3| \cdot (1,05 \cdot [-10,0 \cdot \sin(-\delta_3) + 30,0 \cdot \cos(-\delta_3)] + \\ + 1,03 \cdot [-5,0 \cdot \sin(\delta_2 - \delta_3) + 15,0 \cdot \cos(\delta_2 - \delta_3)] + |\underline{v}_3| \cdot (-45,0)) = 0 \end{aligned}$$

Resolent aquest sistema d'equacions no lineals, amb els valors inicials $|\underline{v}_3| = 1,05$ i $\delta_2 = \delta_3 = 0$, obtenim:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= -0,015277 \\ |\underline{v}_3| &= 1,033587 \quad \delta_3 = -0,014301 \end{aligned}$$

Calcularem a continuació, les potències injectades en els nodes 1 i 2, utilitzant l'equació (7.27):

$$\begin{aligned} \underline{s}_1^* &= 1,05 \cdot [(12,8 - j39,6) \cdot 1,05 + (-2,8 + j9,6) \cdot 1,03 \cdot e^{-j0,015277} + \\ &+ (-10,0 + j30,0) \cdot 1,033587 \cdot e^{-j0,014301}] = 0,85680 - j0,52169 \\ \underline{s}_1 &= 0,85680 + j0,52169 \\ \underline{s}_2^* &= 1,03 \cdot e^{j0,015277} \cdot [(-2,8 + j9,6) \cdot 1,05 + (7,8 - j24,6) \cdot 1,03 \cdot e^{-j0,015277} + \\ &+ (-5,0 + j15,0) \cdot 1,033587 \cdot e^{-j0,014301}] = -0,25000 + j0,20050 \\ \underline{s}_2 &= -0,25000 - j0,20050 \end{aligned}$$

Per tant, les potències subministrades a la xarxa pels generadors dels nodes 1 i 2, són:

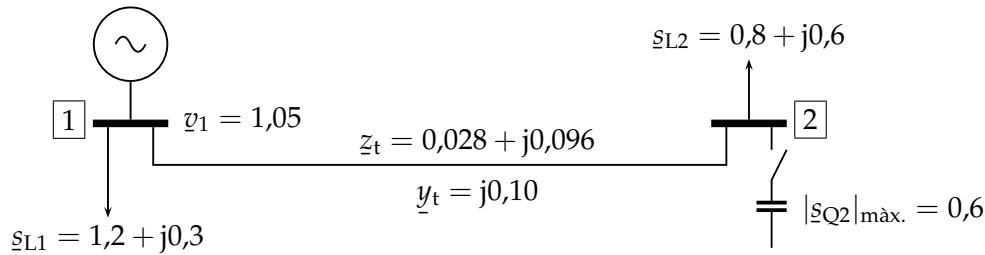
$$\begin{aligned} \underline{s}_{G1} &= \underline{s}_1 = 0,85680 + j0,52169 \\ \underline{s}_{G2} &= \underline{s}_{L2} + \underline{s}_2 = 0,5 + j0,25 - 0,25000 - j0,20050 = 0,25000 + j0,04950 \end{aligned}$$

El valor calculat de la potència activa subministrada pel generador del node 2, es correspon, evidentment, amb el valor que s'ha utilitzat com a dada per resoldre la xarxa ($p_{G2} = 0,25$).

Pel que fa a la potència reactiva subministrada pel generador del node 2, s'observa que es troba dins dels marges especificats ($-0,1 < q_{G2} < 0,2$).

Exemple 7.2 Es tracta de trobar en la xarxa següent, el potencial del node 2 i la potència subministrada pel generador del node 1; tots els valors estan donats en p.u. Es consideren dos casos:

- La bateria de condensadors del node 2 està desconnectada.
- Es connecta la bateria de condensadors del node 2, per tal de mantenir el mòdul de la tensió d'aquest node al valor $|\underline{v}_2| = 1,03$.



Comencem formant la matriu d'admitàncies de node:

$$\underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \frac{j0,10}{2} + \frac{1}{0,028+j0,096} & -\frac{1}{0,028+j0,096} \\ -\frac{1}{0,028+j0,096} & \frac{j0,10}{2} + \frac{1}{0,028+j0,096} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,80 - j9,55 & -2,80 + j9,60 \\ -2,80 + j9,60 & 2,80 - j9,55 \end{pmatrix}$$

a) En aquest cas, el node 1 és el node flotant, i el node 2 en un node de càrrega.

Formem a continuació les equacions (7.31) i (7.32) pel node 2:

$$\begin{aligned} -0,8 - |v_2| \cdot (1,05 \cdot [-2,80 \cdot \cos(-\delta_2) - 9,60 \cdot \sin(-\delta_2)] + |v_2| \cdot 2,80) &= 0 \\ -0,6 + |v_2| \cdot (1,05 \cdot [-2,80 \cdot \sin(-\delta_2) + 9,60 \cdot \cos(-\delta_2)] + |v_2| \cdot (-9,55)) &= 0 \end{aligned}$$

Resolent aquest sistema d'equacions no lineals, amb els valors inicials $|v_2| = 1,05$ i $\delta_2 = 0$, obtenim:

$$|v_2| = 0,970306 \quad \delta_2 = -0,060222$$

Calculem a continuació la potència que circula des del node 1 cap al node 2, utilitzant l'equació (7.9):

$$s_{12} = 1,05 \cdot \left[\frac{j0,10}{2} \cdot 1,05 + \frac{1,05 - 0,970306 \cdot e^{-j0,060222}}{0,028 + j0,096} \right]^* = 0,82813 + j0,59423$$

Per tant, la potència subministrada a la xarxa pel generador del node 1, és:

$$s_{G1} = s_{L1} + s_{12} = 1,2 + j0,3 + 0,82813 + j0,59423 = 2,02813 + j0,89423$$

b) En aquest cas, el node 1 és el node flotant, i el node 2 en un node de tensió controlada.

Formem a continuació l'equació (7.31) pel node 2:

$$-0,8 - 1,03 \cdot (1,05 \cdot [-2,80 \cdot \cos(-\delta_2) - 9,60 \cdot \sin(-\delta_2)] + 1,03 \cdot 2,80) = 0$$

Resolent aquesta equació no lineal, amb el valor inicial $\delta_2 = 0$, obtenim:

$$\delta_2 = -0,072323$$

Calculem a continuació la potència que circula entre els nodes 1 i 2, utilitzant les equacions (7.9) i (7.10):

$$s_{12} = 1,05 \cdot \left[\frac{j0,10}{2} \cdot 1,05 + \frac{1,05 - 1,03 \cdot e^{-j0,072323}}{0,028 + j0,096} \right]^* = 0,81695 - j0,04520$$

$$s_{21} = 1,03 \cdot e^{-j0,072323} \cdot \left[\frac{j0,10}{2} \cdot 1,03 \cdot e^{-j0,072323} + \frac{1,03 \cdot e^{-j0,072323} - 1,05}{0,028 + j0,096} \right]^* = -0,80000 - j0,00484$$

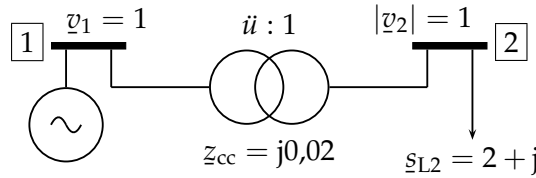
Per tant, les potències subministrades a la xarxa pel generador del node 1 i pel condensador del node 2, són:

$$\underline{s}_{G1} = \underline{s}_{L1} + \underline{s}_{12} = 1,2 + j0,3 + 0,81695 - j0,04520 = 2,01695 + j0,25480$$

$$\underline{s}_{Q2} = \underline{s}_{L2} + \underline{s}_{21} = 0,8 + j0,6 - 0,80000 - j0,00484 = j0,59516$$

S'ha calculat el valor de \underline{s}_{Q2} , per tal de comprovar que està dins dels marges especificats ($|\underline{s}_{Q2}|_{\max.} = 0,6$); si això no fos així, caldria fixar \underline{s}_{Q2} al seu valor màxim i tornar a recalculer la xarxa, passant el node 2 a ser un node de càrrega, i essent, per tant, desconeguda la seva tensió.

Exemple 7.3 En el sistema de la figura següent, es vol mantenir el mòdul del potencial del node 2 regulat al valor indicat, mitjançant l'ajust adequat de la relació de transformació del transformador connectat entre els nodes 1 i 2. Es tracta per tant de trobar aquest valor, així com el potencial del node 2; tots els valors estan donats en p.u.



Comencem formant la matriu d'admitàncies de node:

$$\underline{Y}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{j0,02 \ddot{u}^2} & -\frac{1}{j0,02 \ddot{u}} \\ -\frac{1}{j0,02 \ddot{u}} & \frac{1}{j0,02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j\frac{50}{\ddot{u}^2} & j\frac{50}{\ddot{u}} \\ j\frac{50}{\ddot{u}} & -j50 \end{pmatrix}$$

El node 1 és el node flotant i el node 2 en un node de càrrega; formarem, per tant, les equacions (7.31) i (7.32) pel node 2:

$$\begin{aligned} -2 - 1 \cdot \left(1 \cdot \left[0 - \frac{50}{\ddot{u}} \cdot \sin(-\delta_2) \right] + 0 \right) &= 0 \\ -1 + 1 \cdot \left(1 \cdot \left[0 + \frac{50}{\ddot{u}} \cdot \cos(-\delta_2) \right] + 1 \cdot (-50) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Resolent aquest sistema d'equacions no lineals, amb els valors inicials $\delta_2 = 0$ i $\ddot{u} = 1$, obtenim:

$$\delta_2 = -0,039196$$

$$\ddot{u} = 0,979639$$

En un cas real, el paràmetre \ddot{u} del transformador només podria prendre uns quants valors discrets; caldria doncs assignar a \ddot{u} el valor més pròxim al calculat, escollint entre els diversos valors possibles, i tornar a recalculer la xarxa, passant la tensió del node 2 a ser un valor desconegut.

7.5 Control del flux de potència

Veurem breument a continuació, les diverses formes que existeixen per controlar el flux de potència activa i reactiva en les branques d'una xarxa, així com els mètodes que existeixen per mantenir la tensió regulada en determinats nodes.

En concret, es disposa dels següents mètodes:

- ❑ **Control de l'excitació i del parell motriu dels generador.** És prou conegut, que variant l'excitació d'un generador, podem modificar la seva tensió de sortida, així com la potència reactiva que subministra al sistema; d'altra banda, variant el parell motriu, podem modificar la potència activa que subministra al sistema.
- ❑ **Variació de les característiques de condensadors i reactàncies, sèrie i paral·lel.** Aquest mètode s'utilitza per mantenir regulada la tensió en determinats nodes del sistema, dins d'uns certs marges prefixats, mitjançant la injecció de potència reactiva, aportada per condensadors i reactàncies.
- ❑ **Ajust adequat dels transformadors de relació de transformació variable amb decalatge.** La funció usual dels transformadors en els sistemes elèctrics de potència, és passar la tensió d'un nivell determinat a un altre, per exemple, de la tensió de generació a la de la línia de transmissió. No obstant, en els sistemes de potència, també existeixen transformadors dedicats al control del flux de potència activa i reactiva en determinades branques; això s'aconsegueix amb petites variacions de la relació de transformació i del decalatge del transformador. La variació del decalatge, té un gran efecte sobre el flux de potència activa, a l'hora que pràcticament no afecta al flux de potència reactiva ni al mòdul de la tensió; en canvi, la variació de la relació de transformació té un gran efecte sobre el flux de potència reactiva i sobre al mòdul de la tensió.

Part IV

Apèndixs

Escales Logarítmiques

En diferents camps de l'electrotècnia, és usual trobar-se gràfics amb escales logarítmiques.

Un exemple clar, són els gràfics d'actuació dels interruptors magnetotèrmics o dels fusibles, on les seves corbes característiques intensitat–temps estan representades en una escala logarítmica–logarítmica o lineal–logarítmica.

En aquests casos, es presenta freqüentment la necessitat de determinar amb exactitud un punt de la corba, que no coincideix amb cap de les línies divisòries del gràfic. Atenent a la Figura A.1, es tractaria de determinar el valor x dins de la dècada 10^N a 10^{N+1} .

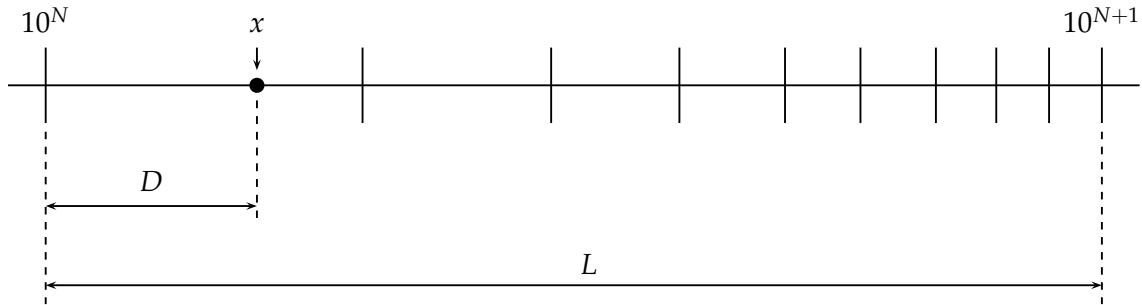


Figura A.1: Escala logarítmica

Si mesurem amb un regle la distància D des de l'inici de la dècada fins al punt x , i la longitud total L de la dècada, el valor x buscat ve donat per l'expressió:

$$x = 10^{\left(N + \frac{D}{L}\right)} \quad (\text{A.1})$$

Si estem interessats en el problema invers, és a dir, en trobar la distància D corresponent a un valor conegut x dins de la dècada 10^N a 10^{N+1} , podem emprar l'expressió:

$$D = L(\log x - N) = L \log \frac{x}{10^N} \quad (\text{A.2})$$

Exemple A.1 Es tracta de trobar el valor x dins de la dècada 100 a 1000, corresponent a una distància $D = 11$ mm; la longitud total de la dècada és $L = 56$ mm.

En aquest cas tenim $N = 2$, i per tant:

$$x = 10^{(2 + \frac{11 \text{ mm}}{56 \text{ mm}})} = 157,19$$

Exemple A.2 Es tracta de trobar la distància D a la qual hem de dibuixar el valor $x = 5$, dins de la dècada 1 a 10; la longitud total de la dècada és $L = 56 \text{ mm}$.

En aquest cas tenim $N = 0$, i per tant:

$$D = 56 \text{ mm} \cdot \log \frac{5}{1} = 39,1 \text{ mm}$$

Apèndix B

Resistències













B.1 Codificació en colors

La codificació en colors del valor òhmic de les resistències consisteix en tres o quatre bandes de color, més una banda de color addicional, una mica separada, per codificar la tolerància.

En el cas de tres bandes, les dues primeres defineixen els dos dígits que formen el valor base, i la tercera el valor multiplicatiu; en el cas de quatre bandes, les tres primeres defineixen els tres dígits que formen el valor base, i la quarta el valor multiplicatiu.

En la taula següent es presenta la codificació en colors de les resistències.

Taula B.1: Codificació en colors de les resistències


Color	1r dígit	2n dígit	3r dígit	Multiplicador	Tolerància [\pm %]
—	—	—	—	—	20
 Plata	—	—	—	10^{-2}	10
 Or	—	—	—	10^{-1}	5
 Negre	—	0	0	1	—
 Marró	1	1	1	10	1
 Vermell	2	2	2	10^2	2
 Taronja	3	3	3	10^3	—
 Groc	4	4	4	10^4	—
 Verd	5	5	5	10^5	0,5
 Blau	6	6	6	10^6	0,25
 Violeta	7	7	7	10^7	0,1
 Gris	8	8	8	—	0,05
 Blanc	9	9	9	—	—

Fa temps existien també resistències de tolerància $\pm 50\%$, però avui en dia ja no se'n fabriquen.

Les resistències de tolerància $\pm 20\%$ s'utilitzen molt poc, i alguns fabricants ni tan sols les subministren.

Exemple B.1 Es tracta d'obtenir els valors òhmics i les toleràncies de les dues resistències següents, definides pels colors:

a) —  — (Blau-Gris-Groc Or)

b) —  — (Taronja-Vermell-Groc-Negre Marró)

En el primer cas tenim:

$$\text{Blau-Gris-Groc Or} \rightarrow \begin{cases} \text{Resistència} & : 68 \cdot 10^4 \Omega = 680 \text{ k}\Omega \\ \text{Tolerància} & : \pm 5 \% \end{cases}$$

i en el segon:

$$\text{Taronja-Vermell-Groc-Negre Marró} \rightarrow \begin{cases} \text{Resistència} & : 324 \cdot 1 \Omega = 324 \Omega \\ \text{Tolerància} & : \pm 1 \% \end{cases}$$

B.2 Valors estàndard

Els valors de les resistències que es fabriquen estan estandarditzats, i depenent del valor de la tolerància, el ventall de valors possibles és més o menys ample.

En les taules següents es llisten els valors estàndard de les resistències, segons la seva tolerància.

Els valors que es donen estan normalitzats per a la dècada compresa entre 100Ω i 1000Ω . Els valors d'altres dècades s'obtenen simplement, multiplicant o dividint els valors de les taules per les corresponents potències de 10.

Taula B.2: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 20 \%$

100	150	220	330	470	680
-----	-----	-----	-----	-----	-----

Taula B.3: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 10 \%$

100	120	150	180	220	270	330	390	470	560	680	820
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Taula B.4: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 5 \%$

100	110	120	130	150	160	180	200	220	240	270	300
330	360	390	430	470	510	560	620	680	750	820	910

Taula B.5: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 2\%$

100	105	110	115	121	127	133	140	147	154	162	169
178	187	196	205	215	226	237	249	261	274	287	301
316	332	348	365	383	402	422	442	464	487	511	536
562	590	619	649	681	715	750	787	825	866	909	953

Taula B.6: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\pm 1\%$

100	102	105	107	110	113	115	118	121	124	127	130
133	137	140	143	147	150	154	158	162	165	169	174
178	182	187	191	196	200	205	210	215	221	226	232
237	243	249	255	261	267	274	280	287	294	301	309
316	324	332	340	348	357	365	374	383	392	402	412
422	432	442	453	464	475	487	499	511	523	536	549
562	576	590	604	619	634	649	665	681	698	715	732
750	768	787	806	825	845	866	887	909	931	953	976

Taula B.7: Valors òhmics estàndard de les resistències de tolerància $\leq \pm 0,5\%$

100	101	102	104	105	106	107	109	110	111	113	114
115	117	118	120	121	123	124	126	127	129	130	132
133	135	137	138	140	142	143	145	147	149	150	152
154	156	158	160	162	164	165	167	169	172	174	176
178	180	182	184	187	189	191	193	196	198	200	203
205	208	210	213	215	218	221	223	226	229	232	234
237	240	243	246	249	252	255	258	261	264	267	271
274	277	280	284	287	291	294	298	301	305	309	312
316	320	324	328	332	336	340	344	348	352	357	361
365	370	374	379	383	388	392	397	402	407	412	417
422	427	432	437	442	448	453	459	464	470	475	481
487	493	499	505	511	517	523	530	536	542	549	556
562	569	576	583	590	597	604	612	619	626	634	642
649	657	665	673	681	690	698	706	715	723	732	741
750	759	768	777	787	796	806	816	825	835	845	856
866	876	887	898	909	920	931	942	953	965	976	988

Grau de Protecció IP

La codificació «International Protection» (IP), segons la norma CEI 60 529, s'utilitza per descriure el grau de protecció proporcionat per les envolvents d'equips elèctrics, contra la penetració de cossos sòlids estranys i contra els efectes nocius de l'aigua.

C.1 Codificació

La codificació consisteix en les sigles **IP** seguides per dues xifres, més una lletra addicional (opcional) i una lletra suplementària (opcional); quan el grau de protecció corresponent a una de les dues xifres no s'utilitzi, perquè no sigui necessari o perquè no sigui conegut, es reemplaçarà la xifra en qüestió per una **X**. Es defineix a continuació el significat de les xifres i lletres que formen el codi IP:

1a xifra. Indica el grau de protecció de les persones contra els contactes amb parts en tensió, o amb peces en moviment, i el grau de protecció dels equips contra la penetració de cossos sòlids i pols. Els valors possibles són els següents:

- | | |
|--|--|
| 0 Sense protecció. | 3 Protegit contra l'entrada de cossos superiors a 2,5 mm, com per exemple, eines o cables. |
| 1 Protegit contra l'entrada de cossos sòlids superiors a 50 mm, com per exemple, contactes involuntaris de la mà. | 4 Protegit contra l'entrada de cossos superiors a 1 mm. |
| 2 Protegit contra l'entrada de cossos superiors a 12,5 mm, com per exemple, contactes involuntaris dels dits de la mà. | 5 Protegit contra la pols. Es permet la seva entrada allà on no sigui perjudicial. |
| | 6 Protegit totalment contra la pols. |

2a xifra. Indica el grau de protecció dels equips contra l'entrada d'aigua. Els valors possibles són els següents:

- | | |
|---|---|
| 0 Sense protecció. | direccions. |
| 1 Protegit contra la caiguda vertical d'aigua. | 5 Protegit contra aigua llançada per mànegues. |
| 2 Protegit contra la caiguda d'aigua, fins a 15 ° de la vertical. | 6 Protegit contra aigua llançada per cops de mar. |
| 3 Protegit contra la caiguda d'aigua, fins a 60 ° de la vertical. | 7 Protegit contra la immersió temporal. |
| 4 Protegit contra la caiguda d'aigua, en totes les | 8 Protegit contra la immersió prolongada, o a gran pressió. |

Lletra adicional (opcional). En alguns casos la protecció proporcionada per les evolvents contra l'accés a les parts perilloses és millor que la indicada per la primera xifra del codi; en aquests casos, es pot caracteritzar aquesta protecció amb una lletra adicional, afegida després de les dues xifres; això permet tenir obertures adequades per a la ventilació, guardant a l'hora el grau requerit de protecció de les persones. Els valors possibles són els següents:

- | | |
|--|--|
| A Els cossos estranys de diàmetre superior a 50 mm, poden penetrar en l'evolvent, però només d'una forma voluntària i deliberada. | 2,5 mm poden penetrar en l'evolvent, però un filferro d'acer d'aquest diàmetre i 100 mm de longitud, ha de quedar a una distància suficient de les parts perilloses. |
| B Els cossos estranys de diàmetre superior a 12,5 mm poden penetrar en l'evolvent, però un dit de la mà no ha de poder entrar més de 80 mm, i ha de quedar per tant, a una distància suficient de les parts perilloses. | D Els cossos estranys de diàmetre superior a 1 mm poden penetrar en l'evolvent, però un filferro d'acer d'aquest diàmetre i 100 mm de longitud, ha de quedar a una distància suficient de les parts perilloses. |
| C Els cossos estranys de diàmetre superior a | |

Lletra suplementària (opcional). El codi IP accepta també algunes lletres suplementàries al final, per tal d'afegir una informació concreta. Els valors possibles són els següents:

- | | |
|---|--|
| H Material d'alta tensió. | S En màquines rotatives, indica que els assajos s'han realitzat amb el rotor parat. |
| M En màquines rotatives, indica que els assajos s'han realitzat amb el rotor girant. | W Protecció contra la intempèrie. |

C.2 Altres normes

Les normes d'alguns països, com ara Bèlgica, Espanya, França i Portugal, referents a la codificació IP, permetien afegir una tercera xifra, després de les dues primeres, per tal de codificar també la protecció proporcionada per les evolvents contra els impactes mecànics. No obstant, des de l'adopció de la norma CEI 60 529, cap país europeu no pot tenir un codi IP diferent. Havent rebutjat fins ara la CEI afegir aquesta tercera xifra al codi IP, l'única solució possible per tal de mantenir una classificació d'aquest concepte, era la creació d'un codi diferent. Aquest es l'objectiu de la norma europea EN 50102: el codi **IK**; els valor d'aquest codi són: **IK00**, **IK01**, ..., **IK09**, **IK10**, i representen valors creixents d'energia d'impacte que pot suportar l'evolvent.

Numeració ANSI de Dispositius Elèctrics

Es dona a continuació una llista de la numeració de dispositius elèctrics, segons la norma ANSI C.37.2, amb una breu explicació de la seva funció.

- 1 Element principal.** És un dispositiu iniciador, com ara un commutador de control, un relè de tensió, un interruptor de nivell, etc., que serveix per posar en marxa o fora de servei un aparell, ja sigui directament, o bé mitjançant altres dispositius, com ara relès de protecció, o relès temporitzats.
- 2 Relè de tancament o arrencada, amb retard de temps.** És el que proporciona un retard de temps entre les operacions d'una seqüència automàtica, o d'un sistema de protecció, excepte quan aquest retard és proporcionat específicament pels dispositius 48, 62 o 79, descrits més endavant. S'utilitza principalment com a protecció de la discrepància de pols d'un interruptor.
- 3 Relè de comprovació o de bloqueig.** És el que actua en resposta a la posició d'una sèrie d'altres dispositius (o d'una sèrie de condicions predeterminades) en un equip, per tal de permetre que una seqüència d'operació continuï, o per tal de parar-la, o per proporcionar una prova de la posició d'aquests dispositius o d'aquestes condicions.
- 4 Contactor principal.** És un dispositiu, generalment governat pel dispositiu número 1 i pels dispositius de permís i protecció que calgui, que serveix per obrir i tancar els circuits de control necessaris per tal de posar un equip en marxa, o per parar-lo.
- 5 Dispositiu de parada.** És el que té com a funció principal, deixar fora de servei un equip i mantenir-lo en aquest estat; la seva actuació pot ser manual o elèctrica. Queda exclosa la funció de bloqueig elèctric en situacions anormals (veure la funció 86).
- 6 Interruptor d'arrencada.** És el que té com a funció principal connectar una màquina a la seva font de tensió d'arrencada.
- 7 Interruptor d'ànode.** És el que s'utilitza en els circuits dels ànodes d'un rectificador de potència, principalment per interrompre el circuit del rectificador en cas de produir-s'hi un arc elèctric.
- 8 Dispositiu de desconexió de l'energia de control.** És un element de desconexió (commutador de ganiveta, interruptor de bloc o fusibles connectables) que s'utilitza per connectar i desconectar la font d'energia de control, a la barra de tensió de control o a l'equip als quals doni servei. Es considera que l'energia de control inclou a l'energia auxiliar que alimenta a aparells, com ara motors petits o calefactores.
- 9 Dispositiu d'inversió.** És el que s'utilitza per invertir les connexions del camp d'una

- màquina, o per realitzar qualsevol altra funció d'inversió.
- 10 Commutador de seqüència.** És un dispositiu que s'utilitza per canviar la seqüència de connexió o desconexió d'unitats, en un equip de múltiples unitats.
- 11 Reservat per a futures aplicacions.** L'USBR¹ li assigna la funció: transformador de potència de control.
- 12 Dispositiu d'excés de velocitat.** És normalment un interruptor de velocitat, de connexió directa, que actua quan la màquina s'em-bala.
- 13 Dispositiu de velocitat sincrònica.** És un element, com ara un interruptor de velocitat centrífuga, un relè de freqüència de lliscament, un relè de tensió, o qualsevol altre aparell que actua a, aproximadament, la velocitat sincrònica d'una màquina.
- 14 Dispositiu de manca de velocitat.** És el que actua quan la velocitat d'una màquina baixa per sota d'un valor determinat.
- 15 Dispositiu igualador de velocitat o freqüència.** És el que actua per tal d'igualar i mantenir la velocitat o la freqüència d'una màquina o d'un sistema a un cert valor, aproximadament igual al d'una altra màquina o sistema.
- 16 Reservat per a futures aplicacions** L'USBR¹ li assigna la funció: carregador de bateries.
- 17 Commutador de «shunt» o de descàrrega.** És el que serveix per obrir i tancar un circuit «shunt» entre els extrems de qualsevol aparell (excepte una resistència), com ara el camp d'una màquina, un condensador o una reactància. Queden exclosos els elements que realitzen les funcions de «shunt» necessàries per arrancar una màquina, mitjançant els dispositius 6, 42, o equivalents; també queda exclosa la funció del dispositiu 73, el qual serveix per a l'operació de resistències.
- 18 Dispositiu d'acceleració o desacceleració.** És el que s'utilitza per tancar o per causar el tancament dels circuits que serveixen per augmentar o disminuir la velocitat d'una màquina.
- 19 Contactor de transició d'arrencada a marxa normal.** La seva funció és fer la transferència de les connexions de l'alimentació d'arrencada, a la de marxa normal d'una màquina.
- 20 Vàlvula.** S'assigna aquest número a una vàlvula utilitzada en un circuit de buit, d'aire, de gas, d'oli, d'aigua, etc., quan s'acciona elèctricament o quan té accessoris elèctrics, com ara commutadors auxiliars.
- 21 Relè de distància.** És el que actua quan l'admitància, la impedància o la reactància d'un circuit surt fora d'un cert límit.
- 22 Interruptor igualador.** És el que serveix per connectar i desconectar les connexions igualadores o d'equilibri d'intensitat del camp d'una màquina, o per regular equips en una instal·lació de múltiples unitats.
- 23 Dispositiu controlador de temperatura.** És el que actua per tal de fer pujar la temperatura d'un lloc o d'un aparell, quan aquesta temperatura baixa per sota d'un cert límit, o a l'inrevés, el que actua per tal de fer baixar la temperatura d'un lloc o d'un aparell, quan aquesta temperatura puja per sobre d'un cert límit. Un exemple seria un termòstat; en canvi, un dispositiu per regular la temperatura dins d'un marge estret, es designaria amb el número 90.
- 24 Reservat per a futures aplicacions** L'USBR¹ li assigna la funció: interruptor o contactor d'unió de barres.
- 25 Dispositiu de sincronització o de comprovació de sincronisme.** És el que actua quan dos circuits de corrent altern estan dins dels límits desitjats de tensió, freqüència i angle de fase, per permetre la connexió en paral·lel d'aquests dos circuits.

¹«United States Bureau of Reclamation»

- 26 Dispositiu tèrmic.** És el que actua quan la temperatura del camp «shunt» o del bobinat esmorteïdor d'una màquina, la temperatura d'una resistència de limitació de càrrega, o la temperatura d'un líquid, etc., supera un valor determinat. També actua si la temperatura de l'aparell protegit cau per sota d'un valor determinat.
- 27 Relè de mínima tensió.** És el que actua quan la tensió baixa per sota d'un límit determinat.
- 28 Detector de flama.** La seva funció és detectar l'existència de flama en el pilot o cremador principal de, per exemple, una caldera o una turbina de gas.
- 29 Contactor d'aïllament.** És el que s'utilitza amb l'únic propòsit de desconnectar un circuit d'un altre, degut a maniobres d'emergència, de manteniment o de prova.
- 30 Relè anunciador.** És un dispositiu de reposició no automàtica, que dóna una sèrie d'indicacions visuals individuals, de les funcions d'aparells de protecció, i que es pot disposar també per efectuar una funció de bloqueig.
- 31 Dispositiu d'excitació separada.** És el que connecta un circuit, com ara el camp «shunt» d'una commutatriu, a una font d'excitació separada, durant el procés d'arrencada. També s'utilitza per energitzar el circuit d'encesa d'un rectificador de potència.
- 32 Relè direccional de potència.** És el que actua quan es supera un valor determinat del flux de potència en un sentit donat. També actua per causa d'una inversió de potència, originada per un arc elèctric en el circuit anòdic o catòdic d'un rectificador de potència.
- 33 Commutador de posició.** És el que obre o tanca un contacte, quan un dispositiu principal o una part d'un aparell que no tingui un número funcional de dispositiu, arriba a una posició determinada.
- 34 Dispositiu principal de seqüència.** És un element, com ara un selector de contactes múltiples, o com ara un dispositiu programable, que fixa la seqüència d'operació de dispositius principals, durant l'arrencada i la parada, o durant altres operacions que requereixin una seqüència.
- 35 Dispositiu per operar escombretes o per posar en curt circuit anells de freq.** És el que serveix per elevar, baixar o desviar les escombretes d'una màquina, o per posar en curt circuit els seus anells de freq. També serveix per fer o desfer els contactes d'un rectificador mecànic.
- 36 Dispositiu de polaritat o de tensió de polarització.** És el que acciona o permet l'accionament d'altres dispositius, només amb una polaritat donada, o el que verifica la presència d'una tensió de polarització en un equip.
- 37 Relè de baixa intensitat o baixa potència.** És el que actua quan la intensitat o la potència cauen per sota d'un valor determinat.
- 38 Dispositiu protector de coixinets.** És el que actua amb una temperatura excessiva dels coixinets, o amb condicions mecàniques anòmales que poden derivar en una temperatura excessiva dels coixinets.
- 39 Detector de condicions mecàniques.** És el que actua davant de situacions mecàniques anormals (excepte les que tenen lloc en els coixinets d'una màquina, funció 38), com ara vibració excessiva, excentricitat, etc.
- 40 Relè de camp.** És el que actua quan es dóna un valor massa baix de la intensitat de camp d'una màquina, o quan es dóna un valor massa gran de la component reactiva del corrent d'armadura en una màquina de corrent altern, la qual cosa indica una excitació de camp massa baixa.
- 41 Interruptor de camp.** És un dispositiu que actua per tal de connectar o desconnectar l'excitació de camp d'una màquina.
- 42 Interruptor de marxa.** És un dispositiu que té per funció principal connectar una màquina a la seva font de tensió de funcionament.

- 43 Dispositiu de transferència.** És un element, accionat manualment, que efectua la transferència dels circuits de control, per tal de modificar el procés d'operació de l'equip de connexió dels circuits o d'algun dels dispositius.
- 44 Relè de seqüència d'arrencada de grup.** És el que actua per arrancar la següent unitat disponible, en un equip de múltiples unitats, quan falla o quan no està disponible la unitat que normalment la precedeix.
- 45 Detector de condicions atmosfèriques.** És el que actua davant de condicions atmosfèriques anormals, com ara fums perillosos, gasos explosius, foc, etc.
- 46 Relè de seqüència negativa d'intensitat.** És un relè que actua quan les intensitats polifàsiques estan en seqüència inversa o desequilibrades, o quan contenen una component de seqüència negativa superior a un cert límit.
- 47 Relè de seqüència de fase de tensió.** És el que actua amb un valor donat de tensió, quan es dona la seqüència de fases desitjada.
- 48 Relè de seqüència incompleta.** És el que torna un equip a la seva posició normal i l'enclava, si la seqüència normal d'arrencada, de funcionament o de parada no s'ha completat degudament en un interval de temps determinat.
- 49 Relè tèrmic d'una màquina o d'un transformador.** És el que actua quan la temperatura d'un element d'una màquina o d'un transformador, per on circula el corrent, supera un valor determinat.
- 50 Relè instantani de sobreintensitat o de velocitat d'augment d'intensitat.** És el que actua instantàniament quan es dona un valor excessiu de la intensitat o de la velocitat d'augment de la intensitat.
- 51 Relè temporitzat de sobreintensitat de corrent altern.** És un relè amb una característica de temps inversa o definida, que actua amb una certa temporització, quan es dona un valor excessiu de la intensitat.
- 52 Interruptor de corrent altern.** És el que s'utilitza per tancar i obrir un circuit de potència de corrent altern sota condicions normals, de falta o d'emergència.
- 53 Relè d'excitatriu o de generador de corrent continu.** És el que força la creació del camp d'una màquina de corrent continu durant l'arrencada, o el que actua quan la tensió d'una màquina ha arribat a un valor determinat.
- 54 Interruptor d'alta velocitat, de corrent continu.** És el que actua per tal de reduir el corrent d'un circuit principal, en un temps inferior a 0,01 s després d'haver-se produït un corrent massa elevat, o una velocitat de creixement d'aquest corrent massa elevada.
- 55 Relè de factor de potència.** És el que actua quan el factor de potència en un circuit de corrent altern no arriba o sobrepassa un valor determinat.
- 56 Relè d'aplicació del camp.** És el que s'utilitza per controlar automàticament l'aplicació de l'excitació de camp d'un motor de corrent altern, en un punt predeterminat en el cicle de lliscament.
- 57 Dispositiu de curt circuit o de posta a terra.** És el que opera en un circuit principal per tal de curt circuitar-lo o posar-lo a terra, en resposta a ordres automàtiques o manuals.
- 58 Relè de fallada de rectificador de potència.** És el que actua degut a la fallada d'un o més ànodes d'un rectificador de potència, o degut a la fallada d'un díode a conduir o bloquejar pròpiament.
- 59 Relè de sobretensió.** És el que actua quan la tensió supera un valor determinat.
- 60 Relè d'equilibri de tensió o corrent.** És el que actua amb una diferència de tensió o corrent entre dos circuits.
- 61 Reservat per a futures aplicacions.**

- 62 Relè de parada o obertura, amb retard de temps.** És el que s'utilitza conjuntament amb el dispositiu que inicia la parada total o la indicació de parada o obertura, en una seqüència automàtica.
- 63 Relè de pressió de gas, líquid o buit.** És el que actua a un valor determinat de pressió de líquid o gas, per a una determinada velocitat de variació de la pressió.
- 64 Relè de protecció de terra.** És el que actua davant d'un defecte a terra de l'aïllament d'una màquina. Aquesta funció s'aplica només a un relè que detecti el pas del corrent des de la carcassa d'una màquina a terra, o a un relè que detecti un terra en un circuit normalment no connectat a terra; no s'aplica a un dispositiu connectat en el circuit secundari d'un transformador d'intensitat, que estigui connectat en el circuit de potència d'un sistema posat normalment a terra.
- 65 Regulador.** És un equip format per elements elèctrics, mecànics o fluídics, que controla el flux d'aigua, vapor, etc., a una màquina motriu, per tal d'arrancar-la, mantenir la seva velocitat o parar-la.
- 66 Relè de passos.** És el que actua per tal de permetre un número especificat d'operacions d'un dispositiu donat, o bé, un número especificat d'operacions successives amb un interval donat de temps entre cadascuna. També pot actuar per permetre l'energització periòdica d'un circuit, o per accelerar una màquina a baixa velocitat.
- 67 Relè direccional de sobreintensitat de corrent altern.** És el que actua a partir d'un valor determinat de circulació d'intensitat de corrent altern, en un sentit donat.
- 68 Relè de bloqueig.** És el que inicia un senyal pilot per bloquejar o disparar, quan hi ha faltes externes en una línia de transmissió, o en altres aparells, sota certes condicions; pot cooperar també amb altres dispositius, per tal de bloquejar el dispar o per bloquejar el reenganxament en una condició de pèrdua de sincronisme.
- 69 Dispositiu controlador de permissiu.** És generalment, un interruptor auxiliar de dues posicions, accionat manualment, el qual permet en una posició, el tancament d'un interruptor o la posta en servei d'un equip, i en l'altra posició, impedeix l'accionament de l'interruptor o de l'equip.
- 70 Reòstat.** És un dispositiu utilitzat per variar la resistència d'un circuit, en resposta a algun mètode de control.
- 71 Relè de nivell de líquid o gas.** És el que actua a partir d'un valor determinat del nivell d'un líquid o d'un gas, o a partir de determinades velocitats de variació d'aquests nivells.
- 72 Interruptor de corrent continu.** És el que s'utilitza per tancar i obrir un circuit de potència de corrent continu sota condicions normals, de falta o d'emergència.
- 73 Contactor de resistència de càrrega.** És el que s'utilitza per posar en curtcircuit o per commutar un graó de càrrega, destinat a limitar o a desviar la càrrega, en un circuit de potència.
- 74 Relè d'alarma.** És qualsevol altre relè, diferent al dispositiu 30, que s'utilitza per actuar una alarma visible o audible.
- 75 Mecanisme de canvi de posició.** És el que s'utilitza per moure un dispositiu d'un equip des d'una posició a una altra; un exemple, seria el mecanisme utilitzat per canviar un interruptor entre les posicions de connectat, desconnectat i prova.
- 76 Relè de sobreintensitat de corrent continu.** És el que actua quan la intensitat en un circuit de corrent continu, sobrepassa un valor determinat.
- 77 Transmissor d'impulsos.** És un dispositiu que s'utilitza per generar o transmetre impulsos, a través d'un circuit de telemetria o fil pilot, a un dispositiu d'indicació o recepció remot.

- 78 Relè de mesura de l'angle de fase o de protecció de desfase.** És el que actua a partir d'un valor determinat de l'angle de fase entre dues tensions o dues intensitats, o entre una tensió i una intensitat.
- 79 Relè de reenganxament de corrent altern.** És el que controla el reenganxament i enclavament d'un interruptor de corrent altern.
- 80 Relè de flux de líquids o gasos.** És el que actua a partir d'un valor determinat del flux d'un líquid o d'un gas, o de la velocitat de variació d'aquest flux.
- 81 Relè de freqüència.** És el que actua davant una variació de la freqüència o de la seva velocitat de variació.
- 82 Relè de reenganxament de corrent continu.** És el que controla el tancament i el reenganxament d'un interruptor de corrent continu, generalment responent a les condicions de càrrega del circuit.
- 83 Relè de selecció o transferència del control automàtic.** És el que actua per tal d'escollir automàticament entre certes fonts d'alimentació o condicions d'un equip; també és el que efectua automàticament una operació de transferència.
- 84 Mecanisme d'accionament.** És un mecanisme o un servo-mecanisme elèctric complet, d'un canviador de preses, d'un regulador d'inducció o de qualsevol altre aparell similar, que no tingui número de funció propi.
- 85 Relè receptor d'ones portadores o fil pilot.** És un relè actuat per un senyal d'una ona portadora o fil pilot de corrent continu, provocat per una protecció direccional.
- 86 Relè d'enclavament.** És un relè accionat elèctricament, amb reposició manual o elèctrica, que actua per parar i mantenir un equip fora de servei, quan hi ha condicions anormals.
- 87 Relè de protecció diferencial.** És el que actua a partir d'una diferència quantitativa de dues intensitats o d'algunes altres magnituds elèctriques.
- 88 Motor o grup moto-generador auxiliar.** És un dispositiu que s'utilitza per accionar equips auxiliars.
- 89 Desconnectador de línia.** És un dispositiu que s'utilitza com a desconnectador o aïllador en un circuit de potència de corrent continu o altern, sempre que aquest dispositiu sigui operat elèctricament o tingui accessoris elèctrics.
- 90 Dispositiu de regulació.** És el que actua per tal de regular una magnitud, com ara la tensió, la intensitat, la potència, la velocitat, la freqüència, etc., a un valor determinat.
- 91 Relè direccional de tensió.** És el que actua quan la tensió entre els extrems oberts d'un interruptor o contactor, sobrepassa un valor determinat, en un sentit donat.
- 92 Relè direccional de tensió i potència.** És el que permet o ocasiona la connexió de dos circuits, quan la diferència de tensió entre ambdós supera un valor determinat, en un cert sentit, i ocasiona la desconexió dels dos circuits, quan la potència circulant supera un valor determinat, en el sentit contrari.
- 93 Contactor de canvi de camp.** És el que actua per tal de augmentar o disminuir el valor de l'excitació d'una màquina.
- 94 Relè de dispar o dispar lliure.** És el que actua per tal de disparar o permetre disparar un interruptor, un contactor, etc., o per evitar un reenganxament immediat d'un interruptor, en el cas que hagi d'obrir i l'ordre de tancament sigui mantinguda.
- 95 Específic.²** L'USBR¹ li assigna la funció: relè o contactor de tancament.
- 96 Específic.²**

²Utilitzat en instal·lacions individuals per a aplicacions concretes, quan cap de les funcions 1 a 94 és apropiada.

97 **Específic.**²

98 **Específic.**² L'USBR¹ li assigna la funció: relè de pèrdua d'excitació.

99 **Específic.**² L'USBR¹ li assigna la funció: detector d'arc elèctric.

Classes NEMA d'Aïllaments Tèrmics en Motors

Quan es posa en marxa un motor, la seva temperatura comença a pujar per sobre de la temperatura ambient, degut al corrent que circula pels seus debanats.

La «National Electrical Manufacturers Association» (NEMA), defineix diverses classes d'aïllament tèrmic, depenent de l'increment global de temperatura permès respecte de la temperatura ambient, que fixa en 40 °C; per a cada classe, es permet un increment addicional de temperatura en el punt més calent, situat en el centre dels debanats del motor.

En la Taula E.1 es donen els valors dels increments de temperatura permesos per a cadascuna de les diferents classes d'aïllament, partint d'una temperatura ambient de 40 °C.

Taula E.1: Classes NEMA d'aïllaments tèrmics en motors

Classe NEMA	Increment global de temperatura sobre la temperatura ambient	Increment addicional de temperatura en el punt més calent
A	60 °C	5 °C
B	80 °C	10 °C
F	105 °C	10 °C
H	125 °C	15 °C

Índex alfabètic

A

a.....	13
acoblament magnètic.....	7, 55
circuit equivalent.....	62
domini freqüencial.....	8
domini operacional.....	8
lleï temporal.....	7
$\mathcal{A}_{\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$	xi
ANSI	
C.37.2.....	87
C.57.13.....	49
AWG («American Wire Gauge»).....	35
conversió a mm ²	37
definició.....	35
equivalències.....	36

B

B.....	49
«burden».....	49

C

C.....	50
cables.....	29
caiguda de tensió.....	31
en corrent altern.....	31
en corrent continu.....	31
capacitat tèrmica en curt circuit.....	33
resistència.....	29
«calculated».....	50
capacitat.....	6
domini freqüencial.....	7
domini operacional.....	7
lleï temporal.....	6
CEI	
60 529.....	85, 86

185.....	49
186.....	49
classes NEMA d'aïllaments tèrmics.....	95
CM («Circular mils»).....	33
definició.....	33
equivalències.....	34
commutador	
de «shunt» o de descàrrega.....	88
de posició.....	89
de seqüència.....	88
components simètriques.....	13
contactor	
d'aïllament.....	89
de canvi de camp.....	92
de resistència de càrrega.....	91
de transició d'arrencada a marxa normal.....	88
principal.....	87
corrent de curt circuit	
en el secundari d'un transformador.....	25
corrent de neutre.....	14

D

desconnectador de línia.....	92
detector	
de condiciones atmosfèriques.....	90
de condicions mecàniques.....	89
de flama.....	89
DIN-A4.....	xi
dispositiu	
controlador de permissiu.....	91
controlador de temperatura.....	88
d'acceleració o desacceleració.....	88
d'excés de velocitat.....	88
d'excitació separada.....	89
d'inversió.....	87
de comprovació de sincronisme.....	88
de curt circuit o de posta a terra.....	90

de desconexió de l'energia de control...	87
de manca de velocitat.....	88
de parada	87
de polaritat.....	89
de regulació	92
de sincronització	88
de tensió de polarització.....	89
de transferència	90
de velocitat sincrònica	88
igualador de velocitat o freqüència	88
per operar escombretes	89
per posar en curt circuit anells de freq ..	89
principal de seqüència.....	89
protector de coixinets.....	89
tèrmic	89

E

efecte pel·licular.....	29
element principal.....	87
EN	
50102.....	86
escales logarítmiques	79
ETSEIB.....	xi
Euler	xiii

F

factor de potència	9, 31
flux de càrregues	65
flux de càrregues en Sistemes Elèctrics de Potència	
control del flux de potència.....	76
formulació del problema	71
models matemàtics	65
tipus de nodes.....	69

G

graf orientat	54
grau de protecció	85

H

H.....	50
«high leakage».....	50

I

IK.....	86
inductància	7
domini freqüencial.....	7
domini operacional	7
lleï temporal	7
interruptor	
d'ànode	87
d'alta velocitat, de corrent continu	90
d'arrencada.....	87
de camp	89
de corrent altern.....	90
de corrent continu.....	91
de marxa	89
igualador	88
IP.....	85

J

j	xiii
---------	------

L

L	50
línies elèctriques	66
angle característic.....	66
circuit equivalent	66
circuit equivalent en « π »	66
equacions hiperbòliques de transmissió..	66
fluxos de potència	67
impedància característica	66
matriu d'admitàncies de node Y_N	67
pèrdues de transmissió	67
L ^A T _E X.....	xi
lleï dels cosinus.....	17
«low leakage»	50

M

mètode dels nodes.....	53
branques d'impedància nul·la.....	53
cas general	55
cas particular	
amb acoblaments magnètics	61
sense acoblaments magnètics	60
circuit equivalents Thévenin i Norton...	62

nombre de branques.....	54
nombre de nusos.....	54
<i>Mathematica</i> ®.....	65
matriu	
d'admitàncies de branca \underline{Y}_B	56
d'admitàncies de node \underline{Y}_N	57, 60, 67–69
d'impedàncies de branca \underline{Z}_B	55
d'impedàncies de node \underline{Z}_N	62
d'incidència de nodes A	55
MCM («Thousand circular mils»).....	33
definició.....	33
equivalències.....	34
mecanisme	
d'accionament.....	92
de canvi de posició.....	91
mil («Mils»).....	33
definició.....	33
equivalències.....	34
motor o grup moto-generador auxiliar.....	92

N

NEMA.....	95
Newton-Raphson.....	65
node	
de càrrega.....	70
de potencial zero.....	54, 70
de referència.....	54, 70
de tensió controlada.....	70
flotant.....	70
numeració ANSI de dispositius elèctrics.....	87

P

p.u.....	20
canvi de base.....	21
mètode de càlcul.....	20
magnituds base.....	20
magnituds base fonamentals.....	20
P1.....	40
P2.....	40
potència complexa.....	9
monofàsica.....	9
trifàsica.....	10, 16
potència de curt circuit.....	25

R

reòstat.....	91
regulador.....	91
relè	
anunciador.....	89
d'alarma.....	91
d'aplicació del camp.....	90
d'enclavament.....	92
d'equilibri de tensió o corrent.....	90
d'excitatriu o de generador de corrent continu.....	90
de mesura de l'angle de fase o de protecció de desfase.....	92
de baixa intensitat o baixa potència.....	89
de bloqueig.....	91
de camp.....	89
de comprovació o de bloqueig.....	87
de dispar o dispar lliure.....	92
de distància.....	88
de factor de potència.....	90
de fallada de rectificador de potència.....	90
de flux de líquids o gasos.....	92
de freqüència.....	92
de mínima tensió.....	89
de nivell de líquid o gas.....	91
de parada o obertura, amb retard.....	91
de passos.....	91
de pressió de gas, líquid o buit.....	91
de protecció de terra.....	91
de protecció diferencial.....	92
de reenganxament de corrent altern.....	92
de reenganxament de corrent continu.....	92
de selecció o transferència del control automàtic.....	92
de seqüència d'arrencada de grup.....	90
de seqüència de fase de tensió.....	90
de seqüència incompleta.....	90
de seqüència negativa d'intensitat.....	90
de sobreintensitat de corrent continu.....	91
de sobretensió.....	90
de tancament o arrencada, amb retard.....	87
direccional de potència.....	89
direccional de sobreintensitat de corrent altern.....	91
direccional de tensió.....	92
direccional de tensió i potència.....	92

instantani de sobreintensitat o de velocitat d'augment d'intensitat	90
receptor d'ones portadores o fil pilot	92
tèrmic d'una màquina o d'un transformador	90
temporitzat de sobreintensitat de corrent altern	90
resistència	6
domini freqüencial	6
domini operacional	6
efectiva	30
lleï temporal	6
resistències	
codificació en colors	81
valors estàndard	82
resistivitat	
valors per a l'Al i el Cu	29
variació amb la temperatura	29

S

S1	40
S2	40
sistema	
directe	13
homopolar	13
invers	13

T

T	50
TC	39
temperatura	
ambient	95
en el punt més calent	95
tensió	
fase-fase	15
fase-neutre	15
teorema	
de Fortescue–Stokvis	13
de Millman	4
de Norton	3, 62
de Thévenin	3, 62
«tested»	50
TI	39
transformació estrella \leftrightarrow triangle	19
transformador ideal	8
domini freqüencial	8

domini operacional	8
lleï temporal	8
transformadors amb regulació variable i decalatge	67
circuit equivalent	67
equacions de funcionament	68
fluxos de potència	68
matriu d'admitàncies de node \underline{Y}_N	68
pèrdues de transmissió	68
transformadors amb regulació variable sense decalatge	68
circuit equivalent en « π »	69
fluxos de potència	69
matriu d'admitàncies de node \underline{Y}_N	69
pèrdues de transmissió	69
transformadors de mesura i protecció	39
càrrega de precisió (Z_{NS})	41
classe de precisió	41
connexionat	39
error compost	41
error de fase	40
error de relació	40
potència de precisió (S_N)	41
terminals equivalents	40
transformadors de mesura i protecció (TI) ...	44
classe de precisió	46, 47
factor de seguretat (F_S)	46
factor límit de precisió (F_{LP})	47
freqüència nominal	45
intensitat límit de precisió assignada (I_{LP}) ..	47
intensitat límit primària assignada (I_{LP}) ..	46
intensitat nominal primària (I_{NP})	44
intensitat nominal secundària (I_{NS})	44
potència de precisió (S_N)	45
relació de transformació nominal	45
sobreintensitats assignades (I_{th} , I_{din})	45
transformadors de mesura i protecció (TT) ...	42
classe de precisió	43
factor de tensió nominal	43
freqüència nominal	42
potència de precisió (S_N)	42
relació de transformació nominal	42
tensió nominal primària (U_{NP})	42
tensió nominal secundària (U_{NS})	42
transmissor d'impulsos	91
TT	39

V

vàlvula	88
vector	
d'intensivitats de branca \underline{J}'_B	56
d'intensivitats de node \underline{J}_N	57, 61
d'intensivitats equivalents de branca \underline{J}_B ..	56
de corrents de branca \underline{I}_B	58
de forces electromotrius \underline{E}'_B	56
de potencials de node \underline{V}_N	57, 61
de tensions de branca \underline{U}_B	57