Parcial 2

1.

Para el sistema mecánico

$$F_S(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_E(t)$$

Donde

$$F_S(t) = Ky(t) \quad , F_F(t) = C\frac{dy(t)}{dt} \quad , F_I(t) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$my''(t) + Cy'(t) + Ky(t) = F_E(t)$$

Con condiciones iniciales $y(0) = 0 = y'(0)$

Aplicando Laplace a ambos lados

$$m(s^2 \cdot Y(s) - \cancel{s\, y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{0}) + C(s \cdot Y(s) - \cancel{y(0)}^{0}) + KY(s) = F_E(s)$$

$$ms^2Y(s) + CsY(s) + KY(s) = F_E(s)$$

$$Y(s)(ms^2 + Cs + K) = F_E(s)$$

$$\frac{Y(s)}{F_E(s)} = H(s) = \frac{1}{ms^2 + Cs + K} = \frac{1/K}{m/K \cdot s^2 + C/K \cdot s + 1}$$ → Forma normalizada

En el sistema eléctrico

$$V_i(t) = L\frac{di_1(t)}{dt} + V_C(t) \qquad \because V_C(t) = V_R(t) = V_0(t) = Ri_2(t)$$

$$i_C(t) = i_1(t) - i_2(t) = C V_C'(t) = C V_0'(t)$$

$$i_1(t) = i_2(t) + CV_0'(t) \quad , \quad i_2(t) = \frac{V_0(t)}{R}$$

$$i_1(t) = \frac{V_0(t)}{R} + CV_0'(t)$$

Reemplazando en la primer ecuación

$$V_i(t) = L\frac{d\left(\frac{V_0(t)}{R} + CV_0'(t)\right)}{dt} + V_0(t)$$

$$V_i(t) = \frac{L}{R} V_o'(t) + LC\,V_o''(t) + V_o(t)$$

$$V_i(t) = LC\,V_o''(t) + \frac{L}{R} V_o'(t) + V_o(t)$$

Con $V_o(0) = 0 = V_o'(0)$

Aplicando Laplace en ambos lados

$$V_i(s) = LC\left(s^2 \cdot V_o(s) - s \cdot \cancel{V_o(0)}^{\to 0} - \cancel{V_o'(0)}^{\to 0}\right) + \frac{L}{R}\left(s \cdot V_o(s) - \cancel{V_o(0)}^{\to 0}\right) + V_o(s)$$

$$V_i(s) = LC s^2\, V_o(s) + \frac{L}{R} \cdot s \cdot V_o(s) + V_o(s)$$

$$V_i(s) = V_o(s)\left(LC s^2 + \frac{L}{R} s + 1\right)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{1}{LC s^2 + L/R \cdot s + 1}$$ → Forma normalizada

Realizando la analogía entre ambos sistemas

$$LC = \frac{m}{K} \quad , \quad \frac{L}{R} = \frac{c}{K}$$

Calculando los parámetros ω_n y ξ

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{Km}} = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$ → De estas dos expresiones se calculan todos los parámetros (R, L, c, K). Se deben dejar algunos valores fijos (C, m)

Para sistemas de lazo cerrado

$$H(s)_{LC} = \frac{H(s)}{H(s)+1} \quad , \text{ suponiendo } \quad H(s) = \frac{num}{den}$$

$$H(s)_{LC} = \frac{\frac{num}{den}}{\frac{num}{den}+1} = \frac{\frac{num}{\cancel{den}}}{\frac{num+den}{\cancel{den}}} = \frac{num}{num+den}$$ → Esta ecuación se usa en el código

2

La modulación de Amplitud en Banda lateral Única (SSB - AM) es una técnica eficiente que transmite solo una de las dos bandas laterales (superior o inferior) de una señal AM convencional, reduciendo a la mitad el ancho de banda requerido y ahorrando potencia

1. Modulación SSB en el dominio del tiempo

El método más común para generar una señal SSB es el método del fasor o de la transformada de Hilbert. Este método se basa en la siguiente expresión

$$S_{SSB}(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) \mp \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)$$

- $m(t)$ es la señal mensaje o moduladora
- $\hat{m}(t)$ es la transformada de Hilbert de $m(t)$. La transformada de Hilbert es un sistema lineal e invariante en el tiempo que produce un desfase de $-90°$ en todas las componentes de frecuencia de la señal de entrada
- f_c es la frecuencia de la portadora
- El signo $-$ se utiliza para generar la banda lateral superior (USB - Upper sideband)
- El signo $+$ se utiliza para generar la banda lateral inferior (LSB - Lower sideband)

2. Modulación SSB en el dominio de la frecuencia

Para entender el proceso en el dominio de la frecuencia, aplicamos la transformada de Fourier. Sea $M(f)$ el espectro de la señal mensaje $m(t)$.

El espectro de la transformada de Hilbert, $\hat{M}(f)$, se relaciona con $M(f)$ de la siguiente manera

$$\hat{M}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f) \cdot M(f)$$

donde $\text{sgn}(f)$ es la función signo

$$\text{sgn}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f>0 \\ 0 & \text{si } f=0 \\ -1 & \text{si } f<0 \end{cases}$$

Al aplicar la transformada de Fourier a la ecuación de $S_{SSB}(t)$, y utilizando las propiedades de la modulación, el espectro de la señal SSB (para el caso USB) resulta en:

$$S_{USB}(f) = \frac{1}{2}[M(f-f_c) + M(f+f_c)] + \frac{1}{2}[\hat{M}(f-f_c) - \hat{M}(f+f_c)]$$

Sustituyendo la relación de $\hat{M}(f)$, se puede demostrar que esta operación cancela una de las bandas laterales, dejando únicamente la otra. Por ejemplo, para la USB, el espectro resultante es cero para $|f| < f_c$ y retiene solamente la banda lateral superior de la señal AM original.

3. Demodulación SSB

La demodulación de una señal SSB requiere detección coherente o síncrona, lo que significa que el receptor debe generar una portadora local que sea exacta en frecuencia y fase a la portadora original utilizada en el transmisor.

El proceso consiste en dos pasos:

a. Multiplicación: La señal SSB recibida, $S_{SSB}(t)$, se multiplica por la portadora local, $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$

$$v(t) = S_{SSB}(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Tomando el caso de USB

$$v(t) = [m(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)]\cos(2\pi f_c t)$$

Usando identidades trigonométricas

$$v(t) = \frac{1}{2}m(t) + \frac{1}{2}m(t)\cos(4\pi f_c t) - \frac{1}{2}\hat{m}(t)\sin(4\pi f_c t)$$

b. Filtrado pasa-bajos: La señal resultante $v(t)$ contiene dos componentes principales: la señal original a la mitad de su amplitud y términos de alta frecuencia centrados en $2f_c$.
Para recuperar la información, se utiliza un filtro pasa-bajas (LPF) que elimina las componentes de alta frecuencia

La salida de LPF es, idealmente, la señal mensaje original escalada:

$$m_{recuperado}(t) \approx \frac{1}{2}m(t)$$

El filtro debe tener una frecuencia de corte mayor que el ancho de banda del mensaje, pero significativamente menor que $2f_c$ para ser efectivo.