Unidad 3: Límites y continuidad

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Comprender la formalización de la noción de límite de una función de varias variables.
2. Conocer las diferentes herramientas para el análisis de la existencia de límites de función de varias variables.
3. Relacionar la existencia del límite doble de una función en un punto con el comportamiento de los gráficos de las superficies correspondientes.
4. Comprender el concepto de continuidad de función de varias variables y conocer sus propiedades.

Introducción

Figura 3.1: Karl Weierstrass.

Casi toda la terminología técnica relacionada con los límites fue promovida por el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897). Él trató rigurosamente la formalización matemática del concepto del límite, junto con otros temas del cálculo. Por ello ha adquirido una gran reputación en el desarrollo de esta disciplina, considerándoselo *el padre del análisis moderno*.

Límites de campos escalares:

El estudio de los límites de funciones de varias variables es más complejo que el de funciones reales de una variable real pues, como recordarán, en una dimensión únicamente existen dos formas de aproximarse a un punto (siempre que el dominio de la función lo permita): por valores mayores (por la derecha) o bien, por valores menores (por la izquierda) que el valor de la variable hacia el cual se desea acceder.

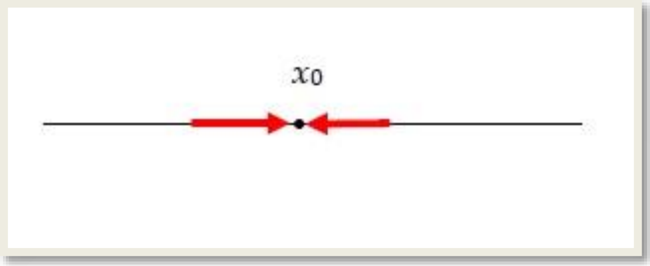


Figura 3.2: Formas de acceder a un punto en la recta real.

En el caso de varias variables existe una infinidad de caminos para aproximarse a un punto.

Por ejemplo si el dominio de la función es un conjunto incluido en el plano y el punto es (x_0, y_0) podríamos acercarnos de infinitas maneras.

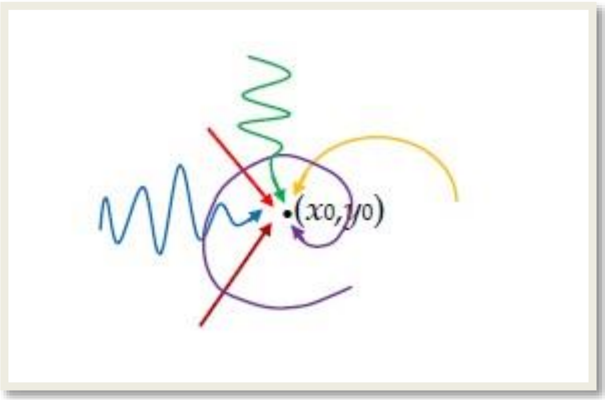


Figura 3.3: Distintas formas de acceder a un punto en el plano.

La definición de límite de un campo escalar de *n* variables es la misma que para funciones de una variable, sólo que teniendo en cuenta este hecho de que podemos aproximarnos de infinitos modos, como se mostró en la imagen anterior:

Definición 3.1: Dado un campo escalar $f: A \subset R^n \rightarrow R$ y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación del dominio de f, diremos que $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tal que, si se mantiene $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$, con $\vec{x} \in A$, entonces $|f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$

Si n =2 el límite L se denomina doble
Si n =3 el límite L se denomina triple

Observen que el hecho de que se indique $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ es equivalente a que se pida que $\vec{x} \in B^*(\vec{x}_0, \delta)$, lo cual asegura que $f(\vec{x})$ está muy cerca del valor L para $\vec{x}$ acercándose a $\vec{x}_0$ por cualquier camino posible.

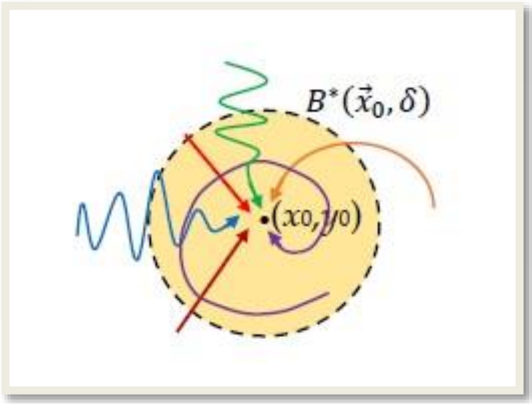


Figura 3.4: Distintas formas de acceder a un punto en el plano, dentro de un entorno de ese punto.

Veamos algunos ejemplos de límites que podemos calcular, aunque aún conozcamos muy poco al respecto…

Ejemplo 3.1: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,2)} z^3 \cos(x^2 - xy - 1) = 8$

Este límite lo hemos calculado usando intuitivamente el concepto de *continuidad*, a pesar de que aún no lo hemos definido para funciones de varias variables: la sustitución directa nos da el valor del límite.

Ejemplo 3.2: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy^3 - x^3y}{x^4 - y^4} = -\frac{1}{2}$

En este caso una sustitución directa nos conduce a una indeterminación de la forma "$\frac{0}{0}$".que se puede salvar operando previamente:

$$\frac{xy^3 - x^3y}{x^4y^4} = \frac{xy(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)} = \frac{-xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)} = \frac{-xy}{x^2 + y^2}$$

cuyo límite es $-\frac{1}{2}$ cuando $(x, y) \to (1,1)$.

Ejemplo 3.3: $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,2)} xy \frac{sen(x^2 - 2y)}{x^2 - 2y} = -4$

También en este caso una sustitución directa nos conduce a una indeterminación de la forma "$\frac{0}{0}$", pero lo hemos calculado reemplazando $x^2 - 2y$ por *u* y recordando el límite unidimensional $\lim\limits_{u\to 0} \frac{sen(u)}{u} = 1$.

Ejemplo 3.4: $\lim_{(x,y,z,w)\to(0,0,0,0)} \frac{e^{x^2+y^2+z^2+w^2}-1}{x^2+y^2+z^2+w^2} = 1$

Este límite lo hemos calculado reemplazando $x^2+y^2+z^2+w^2$ por u y evaluando luego el límite unidimensional $\lim_{u\to 0^+} \frac{e^u-1}{u} = 1$

Ejemplo 3.5: $\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\to(0,0,0,0,0)} cos(\frac{1}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5})$ no existe.

En efecto: el valor funcional oscila indefinidamente entre 1 y -1 a medida que las variables se aproximan al origen de coordenadas.

Ejemplo 3.6: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^3 \cos(\frac{1}{x+y^2}) = 0$

Esto es así porque el valor del coseno permanece acotado mientras que xy^3 se aproxima a 0 (cerca del origen el campo resulta ser el producto entre un infinitésimo y una función acotada.

Ejemplo 3.7: $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy^6}{(x-1)^2+(y+1)^2} = +\infty$

Como el numerador se aproxima a 1 mientras que el denominador se aproxima a 0 por los valores positivos, el cociente crece indefinidamente.

Ejemplo 3.8: $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{2xyz}{-(x-1)^2-(y-1)^2} = -\infty$

Como el numerador se aproxima a 2 mientras que el denominador se aproxima a 0 por los valores negativos, el cociente decrece indefinidamente.

Ejemplo 3.9: $\lim_{\|(x,y,z)\|\to+\infty} \frac{1}{\ln(x^2+y^2+z^2)} = 0$

El denominador crece indefinidamente cuando el módulo del vector (x, y, z) crece.

En los ejemplos anteriores pudimos ver que, para calcular ***algunos*** *límites múltiples* de campos escalares, alcanzan analogías, cambios de variables, operaciones algebraicas y nuestros conocimientos de límites de una variable. Pero esto no siempre es posible.

Precisemos las definiciones correspondientes a los últimos ejemplos:

Definiciones 3.2: Dado un campo escalar $f: A \subset R^n \rightarrow R$ y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación del dominio de f

- $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = +\infty$ si y sólo si $\forall M > 0, \exists \delta = \delta(M)$ de modo que, si se mantiene $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$, con $\vec{x} \in A$, entonces $f(\vec{x}) > M$
- $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = -\infty$ si y sólo si $\forall M > 0, \exists \delta = \delta(M)$ de modo que, si se mantiene $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$, con $\vec{x} \in A$, entonces $f(\vec{x}) < -M$
- $\lim_{\|\vec{x}\| \to \infty} f(\vec{x}) = L$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon)$ de modo que, si se mantiene $\|\vec{x}\| > M$, con $\vec{x} \in A$, entonces $|f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$

Actividad para resolver y discutir en el Foro

Actividad 3.1: Les proponemos que escriban las definiciones correspondientes a los "límites infinitos en el infinito"

$$\lim_{\|\vec{x}\| \to \infty} f(\vec{x}) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\|\vec{x}\| \to \infty} f(\vec{x}) = -\infty$$

y encuentren ejemplos de campos escalares que tengan ese comportamiento.

Propiedades de los límites de campos escalares

Los límites de campos escalares verifican algunas propiedades que son similares a las de los límites de funciones de una variable, y se demuestran de forma análoga:

Teorema 3.1: Dados campos escalares $f, g: A \subset R^n \rightarrow R$ y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación del dominio A:

- Si existe $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x})$, este límite es único.
- Si existen $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L_1$ y $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} g(\vec{x}) = L_2$ y se tienen números $\alpha, \beta \epsilon R$ entonces se verifica que $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} (\alpha f + \beta g)(\vec{x}) = \alpha L_1 + \beta L_2$, $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}).g(\vec{x}) = L_1.L_2$ y si además g no se anula en todo un entorno reducido de $\vec{x}_0$ y $L_2 \neq 0$, entonces $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{L_1}{L_2}$

- Si $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$ en todo un entorno reducido de $\vec{x}_0$ y existen $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L_1$ y $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = L_2$ entonces $L_1 \leq L_2$
- Si $f(\vec{x}) \geq 0$ en todo un entorno reducido de $\vec{x}_0$ y existe $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$ y entonces $L \geq 0$
- Dados campos escalares $f, g, h: A \subset R^n \to R$ y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación de A:

  Si $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x}) \leq h(\vec{x})$ en una bola reducida de $\vec{x}_0$ y existen $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h(\vec{x}) = L$ entonces $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = L$ (*lema de intercalación o del "sándwich"*).

A propósito del resultado anterior, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.10: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \frac{|x-1|^2}{|x-1|+|y-3|^2} = 0$

En efecto: $0 \leq \frac{|x-1|^2}{|x-1|+|y-3|^2} = |x-1| \frac{|x-1|}{|x-1|+|y-3|^2} \leq |x-1|$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} |x-1| = 0$

Pero ¿qué ocurre si queremos calcular los siguientes límites?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^4+(y-2)^2} \qquad \lim_{(x,y,z)\to(1,-1,1)} \frac{(x-1)(y+1)(z-1)}{(x-1)^3+(y+1)^3+(z-1)^3}$$

Observemos que en ninguno de estos casos podemos recurrir a las herramientas utilizadas hasta ahora. Se trata, por otra parte, de indeterminaciones de la forma "$\frac{0}{0}$". *Señalemos que para calcular límites indeterminados de funciones escalares de varias variables independientes, no puede emplearse el teorema de Bernoulli – L'Hospital ya que este sólo es válido para límites unidimensionales.*
Necesitamos, pues, más recursos…

Límites según subconjuntos

Durante el curso de análisis de funciones de una variable se analizó la relación entre el límite de una función en un punto y los límites laterales. Éstos se corresponden con las dos únicas formas de acceso al punto, ya que el mismo se encuentra en la recta real, que es unidimensional.
Para las funciones escalares de n variables independientes, el punto en el que se quiere determinar si existe el límite se encuentra ubicado en el espacio n-dimensional, por lo cual existen infinitas formas de acceso a él.
Para n =2, por ejemplo, podríamos acceder a un punto (x_0, y_0) siguiendo cualquier curva que pase por ese punto. Si existiera $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, por todos esos caminos posibles deberíamos observar que las imágenes de f se aproximan a un mismo valor. Por el contrario, bastará, con que por alguno de esos caminos las imágenes

se acerquen a un valor diferente de aquél al que se acercan por otros caminos, para poder asegurar que el límite no existe.
Trabajaremos ahora sobre esta idea.

Una generalización del concepto de límite lateral dado para las funciones reales de variable real es la siguiente:

Definición 3.3: Dados un campo escalar $f: A \subset R^n \to R$, un subconjunto *S* del dominio y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación de *S*, se dice que un número real L_S es *el límite restringido a S de la función* $f(\vec{x})$ *cuando* $\vec{x}$ *tiende a* $\vec{x}_0$, lo cual se indica

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\epsilon S}} f(\vec{x}) = L_S$$

si L_S es el límite de $f|_S$, la restricción a *S* de la función *f*, es decir, si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) \text{ tal que si } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \text{con } \vec{x} \in S, \text{ entonces } |f(\vec{x}) - L_S| < \varepsilon$$

Una consecuencia de esta definición, de gran utilidad para probar que una función *no tiene límite en un punto*, es la siguiente:

Teorema 3.2: Dado un campo escalar $f: A \subset R^n \to R$, y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación de *A*, si $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$ entonces $\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\epsilon S}} f(\vec{x}) = L$ ***cualquiera sea*** el subconjunto *S* de *A* del cual $\vec{x}_0$ sea punto de acumulación.

Este resultado nos proporciona un criterio para situaciones en las que es posible asegurar que *el límite no existe, empleando el teorema contrarrecíproco*:

Corolario del Teorema 3.2: Dado un campo escalar $f: A \subset R^n \to R$, y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación de *A*, cuando el límite restringido a un subconjunto del dominio *A* no existe o bien cuando los límites restringidos a dos subconjuntos diferentes existen pero tiene valor distinto, el límite múltiple no existe.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.11: Consideremos $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Su dominio es $R^2 - \{(0,0)\}$. El origen es punto de acumulación del dominio por lo que tiene sentido preguntarse si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Consideremos límites sobre rectas que pasan por el origen. Los límites sobre rectas suelen denominarse *límites direccionales*:

para $S_1 = \{(x, y) \in R^2 / y = x\} - \{(0,0)\}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Observar que, al restringir *f* al conjunto S_1, como la variable *y* es función de *x*, el límite resulta unidimensional y basta con hacer tender $x \to 0$ .para que resulte $(x, y) \to (0,0)$

para $S_2 = \{(x, y) \in R^2 / y = 2x\} - \{(0,0)\}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x.2x}{x^2 + (2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

En general, para $S_m = \{(x, y) \in R^2 / y = mx\} - \{(0,0)\}$, es decir, sobre una recta cualquiera que pase por el origen:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_m}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2m}{1 + m^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

Como el límite es diferente sobre cada recta que conduce al origen, *el límite doble no existe*.

En la figura 3.5 se observa la gráfica de la función del ejemplo 3.11, donde podemos ver una profunda “grieta” en proximidades del origen.

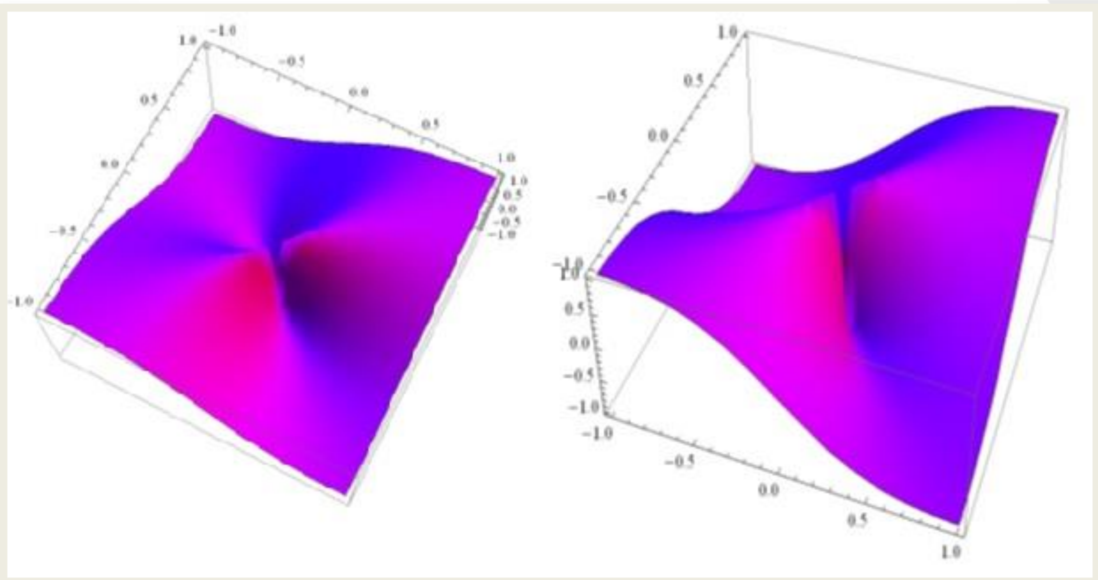


Figura 3.5: Gráfica de la función del ejemplo 3.11, cerca del origen.

De todos modos, les recomendamos hacer siempre el estudio analítico, pues los graficadores tienen sus limitaciones y a veces puede "engañarnos" el aspecto de una gráfica.

Ejemplo 3.12: Consideremos $f(x,y)=\frac{(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^4+(y-2)^2}$. Su dominio es $R^2-\{(1,2)\}$. Observemos que el punto (1,2) es punto de acumulación del dominio por lo que tiene sentido preguntarse si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$

Para $S_m=\{(x,y)\in R^2/y=m(x-1)+2\}-\{(1,2)\}$, vale decir sobre una recta cualquiera que pase por (1,2), el correspondiente límite direccional es

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,2)\\(x,y)\in S_m}} f(x,y)=\lim_{x\to1}\frac{m(x-1)^3}{(x-1)^4+m^2(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{m(x-1)}{(x-1)^2+m^2}=$$

$$=\begin{cases}\text{si } m=0: & \lim\limits_{x\to1}0=0\\ \text{si } m\neq0: & \dfrac{\to0}{\to m^2}\ \therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{m(x-1)}{(x-1)^2+m^2}=0\end{cases}$$

Sin embargo, para $S_k=\{(x,y)\in R^2/y=k(x-1)^2+2 \text{ con } k\neq0\}-\{(1,2)\}$, vale decir sobre una parábola cualquiera de eje vertical que pase por el punto (1,2):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_k}} f(x,y)=\lim_{x\to1}\frac{k(x-1)^4}{(x-1)^4+k^2(x-1)^4}=\lim_{x\to1}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

Como el límite restringido a cada uno de estos conjuntos es diferente, *el límite doble no existe*.

Ejemplo 3.13: Consideremos $f(x,y,z)=\frac{(x-1)(y+1)(z-1)}{(x-1)^3+(y+1)^3+(z-1)^3}$. Su dominio es el conjunto del espacio $R^3-\{(x,y,z)/(x-1)^3+(y+1)^3+(z-1)^3=0\}$. El punto (1,-1,1) es punto de acumulación del dominio por lo que tiene sentido preguntarse si existe $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,1)} f(x,y,z)$.

Para $S_{(a,b,c)}=\{(x,y,z)\in R^3/(x,y,z)=(1,-1,1)+t(a,b,c)\quad t\in R\}\cap Dom(f)$, vale decir, sobre una recta cualquiera del espacio que pase por el punto (1,-1,1), teniendo la precaución de que el director (a,b,c) verifique que $a^3+b^3+c^3\neq0$, resulta

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(1,-1,1)\\(x,y,z)\in S_{(a,b,c)}}}\frac{(x-1)(y+1)(z-1)}{(x-1)^3+(y+1)^3+(z-1)^3}=\lim_{t\to0}\frac{ta.tb.tc}{(ta)^3+(tb)^3+(tc)^3}=\lim_{t\to0}\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}=\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}$$

Como escogiendo distintos directores (es decir, distintas rectas) el límite cambia, podemos asegurar que *el límite triple no existe*.

Como se ha estudiado en Análisis Matemático I, para el caso de una función real de una variable real, cuando existen los dos límites laterales y son iguales, entonces existe el límite y es el valor común. La generalización de esta propiedad para funciones de varias variables es la siguiente:

Teorema 3.3: Sea un campo escalar $f: A \subset R^n \rightarrow R$, S_1 y S_2 subconjuntos del dominio tales que $S_1 \cup S_2 = A$ y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación, tanto de S_1 como de S_2.
Si existen los límites restringidos a S_1 y S_2 y son iguales, es decir, si se verifica que $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\epsilon S_1}} f(\vec{x}) = \lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\epsilon S_2}} f(\vec{x}) = L$, entonces existe el límite múltiple y es $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$.

Presten atención al hecho de que S_1 y S_2 son subconjuntos del dominio tales que $S_1 \cup S_2 = A$.
Debemos señalar que este teorema también es válido para un número finito cualquiera de subconjuntos S_1, $S_2, \dots, S_k$ tales que $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k = A$, **pero no vale** para un número infinito de subconjuntos.

Esto explica por qué, en el ejemplo 3.12**,** vimos que los límites direccionales $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,2) \\ (x,y)\in S_m}} \frac{(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^4+(y-2)^2}$, donde S_m es cualquier recta por el punto (1,2), son todos iguales a 0 y sin embargo el límite doble no existe (pues acercándonos por parábolas el límite no es 0): ocurre que para cubrir todo el dominio son necesarias *infinitas rectas* S_m y por ello no podemos apelar al resultado del teorema anterior.

Límites iterados o sucesivos

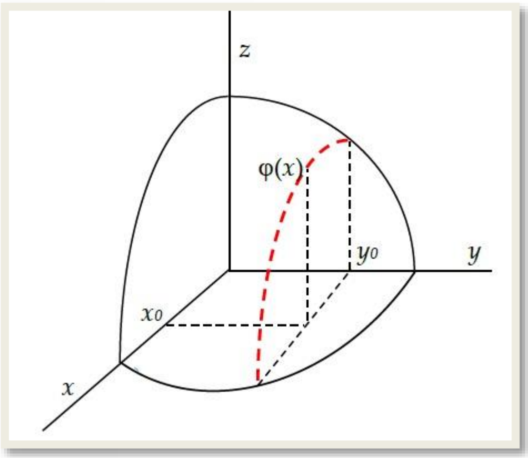
Definición 3.4: Dado un campo escalar $f: A \subset R^2 \rightarrow R$ y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación del dominio A, se llaman *límites iterados* o *sucesivos* de *f* en el punto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ a los siguientes límites:

$$L_1 = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \qquad \text{y} \qquad L_2 = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

El límite iterado $L_1 = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$ corresponde a, en primer lugar, fijar la variable x (con valores próximos a x_0 pero distintos a x_0) y hacer tender a la variable y hacia el punto y_0. Si este límite existe para todo valor de x posible (resultando, en general, una función $\varphi(x)$), a la expresión resultante, que depende de x, debe ahora calculársele el límite cuando x tiende hacia x_0.

El límite iterado $L_2 = \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right)$ corresponde a fijar la variable y en valores próximos a y_0 pero distintos de y_0 y hacer tender x hacia el punto x_0. Si este límite existe para todo valor de y, resultando, en general, una función $\psi(y)$, entonces a la expresión dependiente de y resultante debe ahora calculársele el límite cuando y tiende hacia y_0.

En los siguientes gráficos se observa el significado geométrico de los límites iterados:



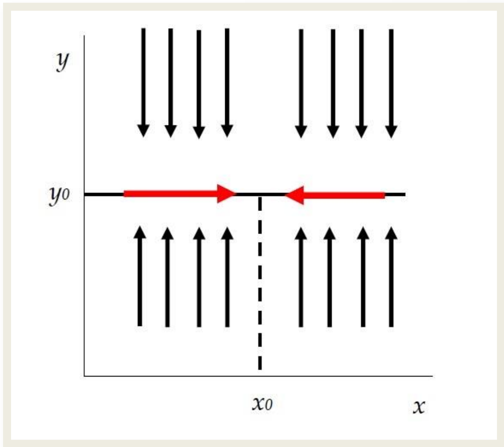
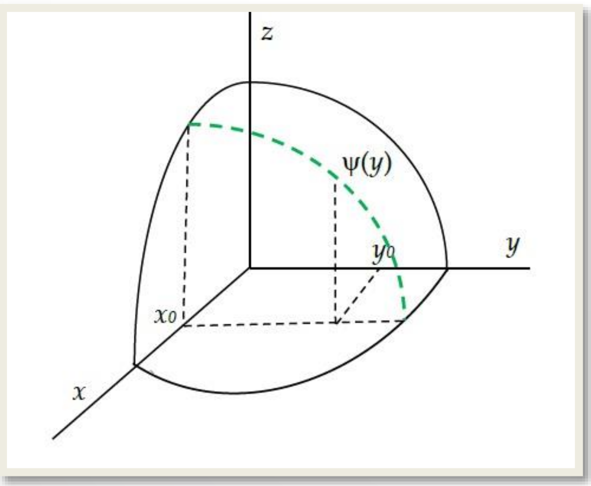


Figura 3.6: Modo de acercamiento para el límite iterado L_1.

El conjunto de los límites obtenidos para los distintos valores de x, definirá, en general, como dijimos, una función $\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x,y)$; si para esta función existe el límite cuando x tiende hacia x_0, quedará definido el límite iterado $\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right) = L_1$



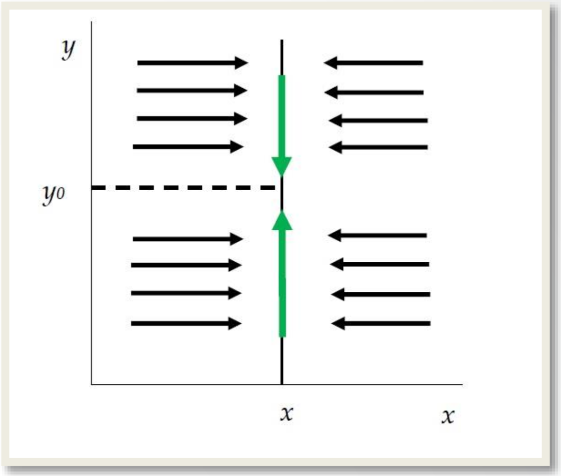


Figura 3.7: Modo de acercamiento para el límite iterado L_2.

El conjunto de los límites obtenidos para los distintos valores de y, definirá, en general, una función $\psi(y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y)$; si para esta función existe el límite cuando y tiende hacia y_0, quedará definido el límite iterado $\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = L_2$

Los límites iterados no tienen por qué existir. Hay funciones para las cuales no existe ninguno o existe sólo uno de los iterados. Incluso, aunque existan ambos, no tienen por qué coincidir.
La existencia de los límites iterados tampoco está determinada completamente por la existencia del límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ni recíprocamente.

Concretamente, la relación entre el límite doble y los iterados la expresan los siguientes resultados:

Teorema 3.4: Si existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ y existen $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ y $\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$, entonces existen $\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = L$.

Observen que para la existencia e igualdad de los límites iterados no es suficiente la existencia del límite de la función, sino que es preciso también la existencia de los límites unidimensionales $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ y $\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$.
Además la afirmación recíproca es falsa: <u>la existencia e igualdad de los límites iterados **no** garantiza la existencia del límite doble</u>.
Lo que sí puede asegurarse es que…

Teorema 3.5: Si existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ y existe alguno de los iterados, $\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$ o $\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$, entonces coincide con el límite L.

A partir de aquí tenemos los siguientes resultados útiles:

Corolarios del Teoremas 3.5:

- Si los límites iterados existen y son distintos, entonces el límite doble no existe.
- Si alguno de los límites iterados existe y es diferente de algún límite restringido, calculado sobre un subconjunto del dominio de la función, entonces el límite doble no existe.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.14: Consideremos $f(x,y)=\frac{2x+y}{x-y}$. Su dominio es $A=\{(x,y)\in R^2/x\neq y\}$. El origen es un punto de acumulación de este conjunto, por lo que tiene sentido preguntarse si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x+y}{x-y}$.
Ambos límites iterados existen y son:

$$L_1=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x+y}{x-y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}\overset{(*)}{\cong}\lim_{x\to 0}2=2$$

$$L_2=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x+y}{x-y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-y}\overset{(*)}{\cong}\lim_{y\to 0}(-1)=-1$$

Como son diferentes, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.
Observar que en el cálculo de ambos límites iterados, en (*), se evalúa el valor de las funciones $\varphi(x)$ o $\psi(y)$, según corresponda (en este caso resultan funciones constantes) antes de tomar el límite externo, por lo que no se trata de indeterminaciones de la forma "$\frac{0}{0}$".

Ejemplo 3.15: Para $f(x,y)=(y-2)cos\left(\frac{y+1}{x-1}\right)$, el dominio es $A=\{(x,y)\in R^2/x\neq 1\}$.
El punto (2,1) es un punto de acumulación de este conjunto, por lo que tiene sentido preguntarse si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(y-2)cos\left(\frac{y+1}{x-1}\right)$.
El límite iterado

$$L_1=\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2}\left[(y-2)cos\left(\frac{y+1}{x-1}\right)\right]\right)=0$$

ya que $\lim\limits_{y\to 2}(y-2)=0$ y $\lim\limits_{y\to 2}cos\left(\frac{y+1}{x-1}\right)=cos\left(\frac{3}{x-1}\right)$ que es una función acotada en el entorno reducido de $x=1$

Pero el otro límite iterado,

$$L_2 = \lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 1}\left[(y-2)cos\left(\frac{y+1}{x-1}\right)\right]\right)$$

no está definido ya que $\lim_{x\to 1} cos\left(\frac{y+1}{x-1}\right)$ no existe y por lo tanto no es una función de y.

La información que obtenemos a partir de L_1 sólo nos permite afirmar que si existiera $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(y-2)cos\left(\frac{y+1}{x-1}\right)$, debería valer 0, pero no nos permite asegurarlo.

Sin embargo, observando que $cos\left(\frac{y+1}{x-1}\right)$ permanece acotado entre -1 y 1 mientras $(x,y)\to(1,2)$ y $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(y-2) = 0$, podemos asegurar que $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(y-2)cos\left(\frac{y+1}{x-1}\right) = 0$ ya que puede probarse por definición:

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \varepsilon$ tal que, si se mantiene $0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta,$ con $(x,y)\in A,$ entonces:

$$\left|(y-2)cos\left(\frac{y+1}{x-1}\right)\right| < |y-2|.1 < \sqrt{(y-2)^2} < \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta = \varepsilon$$

Bastara considerar $\delta \leq \varepsilon$ para probar por definición.

⚠ En general, cuando un campo escalar $f(\vec{x})$, en las proximidades de un punto de acumulación de su dominio, $\overrightarrow{x_0}$, pueda escribirse como el producto de un infinitésimo (es decir, una función que tienda a 0 para $\vec{x}\to\vec{x}_0$) por una cantidad que permanece acotada cuando $\vec{x}\to\vec{x}_0$, podrá asegurarse que $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = 0$, ya que se podrá realizar una demostración completamente análoga a la anterior.

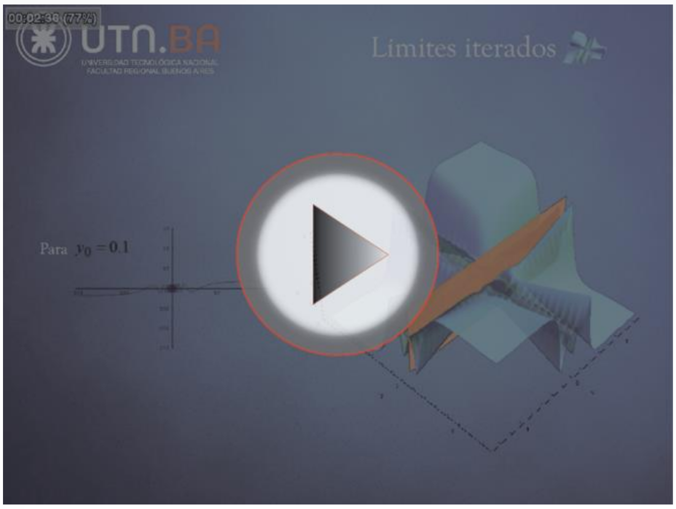
En la práctica, bastará con que indiquemos cuál es la cantidad acotada y cuál el infinitésimo, para dar por probado que dicho límite es nulo.

Ejemplo 3.16: Para el campo escalar $f(x,y) = x.sen\left(\frac{1}{y}\right) + y.sen\left(\frac{1}{x}\right)$, el dominio es el conjunto $A = \{(x,y)\in R^2 / x\neq 0, y\neq 0\}$.

Como el origen es un punto de acumulación de dicho dominio, tiene sentido analizar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Si intentamos calcular los límites iterados veremos que ninguno de ellos existe.

En la siguiente presentación se analiza este ejemplo con detalle:



Ejemplo 3.17: Consideremos nuevamente $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ y veamos qué nos dicen los límites iterados acerca de la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$L_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Se observa que los límites iterados existen y son iguales, pero ya se habían analizado los límites restringidos a rectas que pasan por el origen y éstos existen pero son todos diferentes, en consecuencia no existe el límite doble $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Este es un ejemplo de que a partir de la igualdad de los límites iterados nada podemos concluir acerca de la existencia del límite doble.

Actividad para resolver y discutir en el Foro:

Actividad 3.2: Piensen cuántos límites iterados son posibles para una función escalar de tres variables independientes $f(x,y,z)$Extiendan el resultado a un campo escalar de n variables independientes.

Coordenadas polares

Otro recurso útil para calcular límites de campos de dos variables es recurrir a un cambio de coordenadas. Sabemos que existen formas de representación que en ocasiones pueden resultar más útiles que otras. Por ejemplo, el sistema de representación cartesiana es útil para representar la superficie de la tierra en un plano, pero en navegación se suele emplear un sistema de radar bidimensional que sitúa los puntos del plano en circunferencias concéntricas, mientras que en los aviones, naves espaciales y submarinos utilizan un sistema de radar tridimensional. Estas formas de representación se basan en los sistemas de coordenadas llamadas *polares*, *cilíndricas y esféricas.* Comenzaremos definiendo las primeras; los otros sistemas se analizarán posteriormente.

El plano cartesiano es un sistema rectangular, debido a que las coordenadas de un punto describen geométricamente un rectángulo. De esta forma, cada punto del plano resulta unívocamente determinado por sus dos coordenadas $P = (x, y)$.
Si consideramos ese punto como el extremo de un vector cuyo origen es el origen de coordenadas, y que forma cierto ángulo con el semieje positivo de las *x*, podremos definir la posición del punto de otra manera:

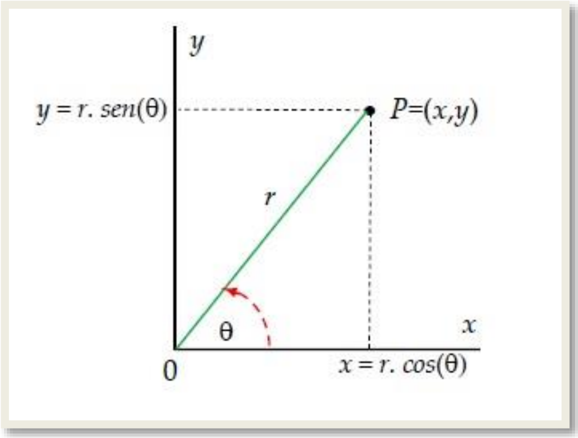


Figura 3.8: Coordenadas polares.

El punto *P* puede identificarse mediante las coordenadas r (la distancia al origen, o *módulo del radio vector*) y θ (llamado *argumento*): $P = (r, \theta)$.
Sin embargo, esta relación no es unívoca porque a un punto *P* le corresponden infinitos pares de coordenadas polares, ya que es posible elegir el argumento como θ o cualquier otro de la forma $\theta` = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathrm{Z}$
Para lograr unicidad en la representación se eligen argumentos en un intervalo determinado de amplitud 2π, que habitualmente será el intervalo $[0,2\pi)$.
De esta forma, a cada punto *P* del plano distinto del origen (0,0), le corresponde un único par (r, θ), con $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Para establecer la relación entre coordenadas cartesianas y las coordenadas polares basta con proyectar *r* sobre los ejes *x* e *y*:

$$\begin{cases} x = r.cos(\theta) \\ y = r.sen(\theta) \end{cases}$$

Estas ecuaciones permiten expresar las coordenadas cartesianas en términos de las polares.
Recíprocamente, las coordenadas polares pueden expresarse en términos de las cartesianas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

¿Cómo es posible emplear las coordenadas polares en el análisis de la existencia del límite de una función escalar de dos variables?

Suele ser útil su empleo cuando aparecen en el límite expresiones de la forma $x^2 + y^2$ y se quiere conocer el comportamiento de la función cuando $(x, y) \to (0,0)$.

En efecto: como resulta $x^2 + y^2 = (rcos(\theta))^2 + (rsen(\theta))^2 = r^2(cos^2(\theta) + sen^2(\theta)) = r^2$, la tendencia de (x, y) a (0,0) se puede analizar estudiando la tendencia de r a cero, teniendo ciertas precauciones:

Teorema 3.6: Dado el campo escalar $f: A \subset R^2 \to \mathrm{R}$, $\vec{0}$ punto de acumulación del dominio A, se verifica que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L$ si y sólo si $\lim_{r\to 0} f(r.cos(\theta), r.sen(\theta)) = L$ ***uniformemente*** para $\theta\epsilon[0,2\pi)$, esto es si y sólo si se cumple que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $0 < r < \delta$, entonces $|f(r.\cos(\theta), r.sen(\theta)) - L| < \varepsilon, \forall\theta\epsilon[0,2\pi)$.

Corolario del Teorema 3.6: Si $|f(r.\cos(\theta), r.sen(\theta)) - L| \leq g(r).h(\theta)$ donde $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$ y $h(\theta)$ permanece acotada **para todo** $\theta\epsilon[0,2\pi)$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.18: Para analizar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ expresemos la función en coordenadas polares:

$$\frac{x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{r^3cos^2(\theta)sen(\theta)}{r^2} = rcos^2(\theta)sen(\theta)$$

Como $|cos^2(\theta)sen(\theta)| \leq 1$ cualquiera sea $\theta\epsilon[0,2\pi)$, se puede asegurar que $\lim_{r\to 0} r.(cos^2(\theta)sen(\theta)) = 0$, por lo que l límite doble $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ existe y es 0.

Ejemplo 3.19: Para analizar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ expresemos la función en coordenadas polares:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3(cos^3(\theta) - sen^3(\theta))}{r^2} = r(cos^3(\theta) - sen^3(\theta))$$

Como $|cos^3(\theta) - sen^3(\theta)| \leq |cos^3(\theta)| + |sen^3(\theta)| \leq 2$ cualquiera sea $\theta \epsilon [0,2\pi)$, resulta $\lim_{r\to 0} r(cos^3(\theta) - sen^3(\theta))$ por lo que se puede asegurar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ existe y es 0.

Ejemplo 3.20: Para $f(x,y) = \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es $f(r.cos(\theta), r.sen(\theta)) = |cos\theta| + |sen\theta| = h(\theta)$.
Como no aparece explícitamente r, es $\lim_{r\to 0}(|\cos(\theta)| + |sen(\theta)|) = |\cos(\theta)| + |sen(\theta)|$, que depende claramente del ángulo, por lo tanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

Ejemplo 3.21: Para $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$ es $f(r.\cos(\theta), r.sen(\theta)) = \frac{r^2\cos(\theta)sen(\theta)}{r.cos(\theta)-r.sen(\theta)} = r\frac{\cos(\theta)sen(\theta)}{\cos(\theta)-sen(\theta)} = g(r).h(\theta)$.
La función $g(r)$ verifica que $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$ pero… *¡cuidado!*: la función $h(\theta) = \frac{\cos(\theta)sen(\theta)}{\cos(\theta)-sen(\theta)}$ no permanece acotada: basta considerar un ángulo cercano a $\frac{\pi}{4}$. Entonces *no puede usarse el resultado anterior*: tendremos que analizar la existencia del límite recurriendo a otra herramienta.

Ejemplo 3.22: El límite en el origen de $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ (que ya abordamos por límites restringidos e, infructuosamente, buscando los límites iterados) también podría haberse analizado mediante coordenadas polares:

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2r^2(\cos(\theta) + sen(\theta))}{r^2} = 2\,[\cos(\theta) + sen(\theta)]$$

Como $\lim_{r\to 0}(\cos(\theta) + sen(\theta)) = \cos(\theta) + sen(\theta)$ que, claramente, depende del ángulo, el límite doble no existe.

Cuando se calculen límites de la forma $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, donde el punto (x_0,y_0) no es el (0,0), podrían también emplearse coordenadas polares con origen en (x_0,y_0):

$$\begin{cases} x = x_0 + r.cos(\theta) \\ y = y_0 + r.sen(\theta) \end{cases}$$

Así, para analizar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ se estudia $\lim_{r\to 0^+} f(x_0 + r.cos(\theta), y_0 + r.sen(\theta))$, lo cual equivale a analizar los límites restringidos a los rayos

$$S_\theta = \{(x,y)\epsilon R^2 / x = x_0 + r.cos(\theta), y = y_0 + r.sen(\theta) \ \text{ con } r > 0\}$$

Una vez más, si existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, entonces existe $\lim_{r\to 0^+} f(x_0 + r.cos(\theta), y_0 + r.sen(\theta))$ cualquiera sea el ángulo, y coincide con el límite doble, pero la afirmación recíproca sólo es cierta si se asegura ese comportamiento $\forall\theta\epsilon[0,2\pi)$, vale decir:

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{r\to 0} f\big(x_0 + r.cos(\theta), y_0 + r.sen(\theta)\big) = L$ ***uniformemente*** para $\theta \epsilon [0,2\pi)$, esto es si y sólo si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ /\ 0 < r < \delta,$ entonces $\big|f\big(x_0 + r.cos(\theta), y_0 + r.sen(\theta)\big) - L\big| < \varepsilon, \forall \theta \epsilon [0,2\pi).$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.23: Para analizar la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-y)^2}$ escribamos la función en coordenadas polares centradas en $(1,1)$:

$$\frac{(x-1)(y-1)}{(x-y)^2} = \frac{(1+r.cos(\theta)-1)(1+r.sen(\theta))}{(1+r.cos(\theta)-1-r.sen(\theta))^2} = \frac{(r.cos(\theta))(r.sen(\theta))}{(r.cos(\theta)-r.sen(\theta))^2} = \frac{r^2 sen(\theta)cos(\theta)}{r^2(cos(\theta)-sen(\theta))} = \frac{sen(\theta)cos(\theta)}{cos(\theta)-sen(\theta)}$$

Como no aparece explícitamente *r*, es $\lim\limits_{r\to 0} \frac{sen(\theta)cos(\theta)}{cos(\theta)-sen(\theta)} = \frac{sen(\theta)cos(\theta)}{cos(\theta)-sen(\theta)}$, que depende claramente del ángulo, por lo tanto $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ no existe.

Ejemplo 3.24: Para analizar la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2+y^2}$ escribamos la función en coordenadas polares centradas en $(-1,0)$:

$$\frac{(x+1)^3}{(x+1)^2+y^2} = \frac{(-1+r.cos(\theta)+1)^3)}{(-1+r.cos(\theta)+1)^2+(r.sen(\theta))^2} = \frac{r^3.cos^3(\theta)}{r^2(cos^2(\theta)+sen^2(\theta))} = r.cos^3(\theta)$$

Como $\lim\limits_{r\to 0}[r.cos^3(\theta)] = 0$ de manera uniforme, ya que $cos^3(\theta)$ se mantiene acotado cualquiera sea el ángulo, resulta $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y) = 0$

Analicemos algunos ejemplos más, utilizando herramientas variadas seleccionadas de entre las que hemos expuesto:

Ejemplo 3.25: Estudiemos la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2}$

Al acercarnos con (x,y) al origen, tanto numerador como denominador se aproximan a 0, por lo que el cociente presenta una indeterminación de la forma $"\frac{0}{0}"$.
Si calculamos los límites iterados resultan:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$L_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Como coinciden, aún no es posible asegurar la existencia del límite doble; sólo es posible afirmar que si éste existiera debería ser nulo.
Consideremos ahora límites restringidos.
Los direccionales, es decir, el acercamiento al punto que se realiza por un haz de rectas que pasa por él, $S_m = \{(x,y) \in R^2 / y = mx\} - \{(0,0)\}$, conduce a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_m}} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3m^2x^3}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3m^2x}{1+m^2} = 0$$

Como los límites direccionales existen y son iguales a cero, aún no podemos asegurar la existencia del límite doble, sólo reafirmar que, si existiera, debería ser nulo.
Usando coordenadas polares, resulta:

$$\frac{3xy^2}{x^2+y^2} = \frac{3r^3.\cos(\theta).sen^2(\theta)}{r^2\left(cos^2(\theta)+sen^2(\theta)\right)} = 3r.\cos(\theta).sen^2(\theta)$$

que tiende uniformemente a 0 cuando $r \to 0^+$ ya que $|\cos(\theta).sen^2(\theta)| \leq 1$ cualquiera sea el ángulo.
También podríamos confirmar que el límite es nulo al advertir que, escrita en su forma cartesiana, la función puede escribirse como el siguiente producto:

$$\frac{3xy^2}{x^2+y^2} = \underbrace{3x}_{\substack{\text{tiende}\\ \text{a 0 cuando}\\ (x,y)\to(0,0)}} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\substack{\text{cantidad}\\ \text{acotada}\\ \text{cerca de } (0,0)}} \qquad 0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1 \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

es decir, que la función dada resulta ser el producto entre un infinitésimo y una cantidad acotada cerca del origen, por lo que el límite doble existe y es nulo.

Ejemplo 3.26: Analicemos la existencia de $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(y^2+1)sen(x-1)}{x^2y-y}$

Al acercarnos con (x,y) al punto $(1,2)$, tanto numerador como denominador se aproximan a 0, por lo que el cociente presenta una indeterminación de la forma "$\frac{0}{0}$".
Si calculamos un límite iterado resulta:

$$L_1 = \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2} \frac{(y^2+1)sen(x-1)}{x^2y-y}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{5sen(x-1)}{2x^2-2} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{5sen(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{5}{2(x+1)} \frac{sen(x-1)}{(x-1)} = \frac{5}{4}$$

pero el otro límite iterado no existe.
No podemos afirmar nada aún acerca del límite doble.
Sin embargo, factorizando la función original se tiene

$$\frac{(y^2+1)sen(x-1)}{x^2y-y}=\frac{(y^2+1)sen(x-1)}{y(x^2-1)}=\underbrace{\frac{y^2+1}{y}}_{\substack{\text{tiende}\\ \text{a } \frac{5}{2} \text{ si}\\ y \text{ tiende a } 2}}\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\substack{\text{tiende}\\ \text{a } \frac{1}{2} \text{ si}\\ x \text{ tiende a } 1}}\underbrace{\frac{sen(x-1)}{x-1}}_{\substack{\text{tiende}\\ \text{a } 1 \text{ si}\\ x \text{ tiende a } 1}}$$

por lo que, por la propiedad del álgebra de límites, la función dada tiene límite y vale $\frac{5}{4}$, como anticipamos por el iterado.

Ejemplo 3.27: Los límites iterados correspondientes a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ son ambos nulos, así como son nulos los límites restringidos a rectas por el origen.
Mediante coordenadas polares se observa que efectivamente la función tiende a cero con r independientemente del ángulo.
Un modo de probarlo es observar que

$$0\leq(|x|-|y|)^2=x^2-2|xy|+y^2$$

por lo tanto

$$2|xy|\leq x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

y entonces

$$0\leq\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=0$, por "lema de intercalación" resulta $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, por lo que, el límite que nos interesa también es nulo.
También sería posible escribir la función como el producto de un infinitésimo por una cantidad acotada cerca del origen: ¿pueden hacerlo?

Ejemplo 3.28: Analicemos la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y}$
Su dominio es el conjunto de todos los puntos del plano que no pertenecen a la parábola de ecuación $y=-x^2$.
En el punto $(0,0)$ la función no está definida pero es un punto de acumulación del dominio.
Es sencillo comprobar que los límites iterados resultan nulos, así como los límites restringidos a rectas que pasan por el origen y a parábolas que pasan por el origen, tanto parábolas de eje vertical de la forma $y=kx^2$ (excluyendo $k=-1$) como parábolas de eje horizontal, de la forma $x=ky^2$.
Nos preguntamos si el límite será *efectivamente* 0, pues todas estas exploraciones sólo nos dicen que "si el límite existiera, debería valer 0" pero no nos permiten asegurar su existencia.
Escribiendo la función en coordenadas polares resulta:

$$\frac{xy}{x^2+y}=\frac{r^2\cos(\theta)sen(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+rsen(\theta)}=\frac{r.\cos(\theta)sen(\theta)}{r.\cos^2(\theta)+sen(\theta)}$$

que no es evidente que pueda escribirse de la forma $g(r).h(\theta)$ con $g(r)$ tendiendo a cero uniformemente, para poder usar el resultado del teorema 3.6.
Si intentamos en su forma cartesiana, $\frac{xy}{x^2+y}$, escribir la función como el producto de una cantidad acotada por un infinitésimo nos encontramos con que siempre es $y \leq y + x^2$ pero de aquí no podemos deducir que sea $\frac{y}{x^2+y} \leq 1$ pues la cantidad $x^2 + y$ podría ser negativa…
Nos preguntamos entonces si podremos encontrar alguna curva sobre la cual el límite tome un valor diferente a 0 para demostrar que éste no existe.
Recordemos la definición de curva de nivel: una *curva de nivel k* es una curva, contenida en el dominio de la función, sobre todos cuyos puntos la función toma el valor *k*.
En el caso de la función $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y}$, una curva de nivel *k* tendría ecuación

$$C_k: \frac{xy}{x^2+y} = k \qquad \text{o bien} \qquad C_K: xy = k(x^2+y)$$

Escrita la ecuación de esta última manera se observa que el punto $(0,0)$ la verifica. Eso significa que podríamos acercarnos a $(0,0)$ tanto como quisiéramos, moviéndonos sobre una curva de nivel *k* sobre la cual la función vale *k*.
Para fijar ideas elijamos un valor de *k*, por ejemplo 5: la curva de ecuación $xy = 5(x^2+y)$ o bien, poniéndola explícitamente, de ecuación $y = \frac{5x^2}{x-5}$, nos permitiría acercarnos tanto como quisiéramos al punto $(0,0)$ mientras el valor de la función se mantendría siempre en 5.
Es decir: encontramos un camino por el cual nos podemos aproximar al origen tanto como queramos mientras que el valor funcional no se acerca a 0 como en todos los otros caminos que exploramos.
La curva que elegimos, de ecuación $y = \frac{5x^2}{x-5}$ está bien definida cerca de $(0,0)$ porque el único problema de definición se encuentra en $x = 5$ que se halla "lejos" del origen.
Observemos que en lugar de la curva de nivel 5 podríamos haber tomado cualquier otra, excepto la de nivel 0 pues nos conduciría al mismo valor que todos los otros caminos.

Entonces podemos asegurar que el límite doble buscado no existe: los límites iterados, por rectas y por parábolas resultaron nulos mientras que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{sobre } y=\frac{5x^2}{x-5}}} \frac{xy}{x^2+y} = 5.$

⚠ Esta misma técnica puede aplicarse cuando todo un conjunto de límites restringidos nos conduzcan a un mismo valor, pero sospechemos que el límite no existe. El cuidado que debemos tener es justificar adecuadamente la existencia de la curva de nivel, como en este caso en que pudimos escribir $y = h(x)$, con $h(x)$ una función bien definida y cuya gráfica pasa por el punto que nos interesa.

Ejemplo 3.29: Consideremos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ para la función definida del siguiente modo: $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ o } y \geq x^2 \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \end{cases}$

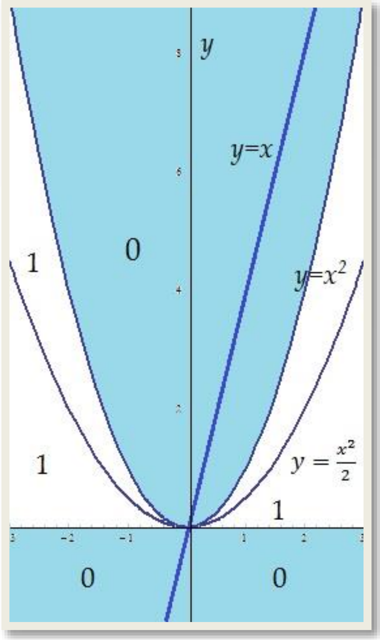


Figura 3.9: Distintos modos de acercarse al origen en el ejemplo 3.29.

Graficando el dominio de la función, es sencillo comprobar que, si $S_1 = \{(x,y) \in R^2 / y = x\}$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_1}} f(x,y) = 0$ mientras que, para $S_2 = \left\{(x,y) \in R^2 / y = \frac{x^2}{2}\right\}$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_2}} f(x,y) = 1$ por lo que el límite doble no existe, ya que hallamos dos límites restringidos distintos.

Actividad para resolver y discutir en el Foro:

Actividad 3.3: Señalemos que $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ es una cantidad acotada cerca del origen pues $0 \le y^2 \le x^2 + y^2$ por lo que $0 \le \frac{y^2}{x^2+y^2} \le 1 \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$

Analicen, de entre las siguientes expresiones, cuáles resultan acotadas cerca del origen y cuáles no lo son:

$$\frac{y^2}{x^2+y^4} \qquad \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{y^2}{x^2+y^4} \qquad \frac{x^2}{x^2+y^5} \qquad \frac{y^4}{x^2+y^6} \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}$$

Para las que lo sean, demuéstrenlo de modo similar a como lo hicimos con $\frac{y^2}{x^2+y^2}$.

Actividad 3.4: Analicen la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{x-y}$ para: a) $(x_0,y_0) = (0,0)$, b) $(x_0,y_0) = (a,0)$ con $a \neq 0$, c) $(x_0,y_0) = (a,a)$ con $a \neq 0$.

Actividad 3.5: Analicen la existencia de $\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \frac{xyz-6}{x+y-z}$. Escriban en primer lugar el dominio del campo y constaten que el punto $(1,2,3)$ es punto de acumulación del dominio.

Límite de funciones vectoriales

La definición de límite dada para funciones escalares de n variables independientes puede ser extendida a funciones vectoriales de n variables independientes: $\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$.
Para ello es suficiente con sustituir el número real L en la definición, por el vector $\vec{L} \in R^m$, ya que los valores de la función se acercarán a un vector, en caso de existir el límite. También será necesario reemplazar las barras de valor absoluto por la norma vectorial.

> **Definición 3.5:** Dado un campo vectorial $\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$ y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación del dominio de $\vec{f}$, diremos que $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}$ si y sólo si $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que, si se mantiene $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$, con $\vec{x} \in A$, entonces $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}\| < \varepsilon$

Observar que la distancia $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ se mide en R^n mientras que la distancia $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}\|$ se mide en R^m.

Actividad para resolver y discutir en el Foro:

Actividad 3.6: Escriban la definición anterior empleando bolas abiertas en los espacios en que corresponda.

A partir de la definición se puede demostrar en forma sencilla el siguiente Teorema que nos será de mucha utilidad:

Teorema 3.7: Dado un campo vectorial $\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$ y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación del dominio de $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, son equivalentes:

a) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}$

b) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = L_i$ para cada $i = 1,2, \dots, m$

En ese caso resulta $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = (\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_1(\vec{x}), \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_2(\vec{x}), \dots, \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_m(\vec{x}))$

Observen que cada una de las componentes del vector límite es el límite de un campo escalar, cuya existencia se analiza mediante las técnicas y herramientas ya vistas.

Propiedades de los límites de funciones vectoriales

Se verifican propiedades similares a las vistas para campos escalares:

Teorema 3.8: Dados campos vectoriales $\vec{f},\vec{g}: A \subset R^n \to R^m$ y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación del dominio A:

- Si existe $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$, este límite es único.
- Si existen $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \overrightarrow{L_1}$ y $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \overrightarrow{L_2}$ y se tienen números $\alpha, \beta \epsilon R$ entonces se verifica que

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}\right)(\vec{x}) = \alpha\overrightarrow{L_1} + \beta\overrightarrow{L_2}$ y $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}).\vec{g}(\vec{x}) = \overrightarrow{L_1}.\overrightarrow{L_2}$ donde el punto indica producto escalar.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.30: Para $\vec{f}: R^3 \to R^2$ definida por $\vec{f}(x,y,z) = \left(x - y + z - 20, z.\tan\left(\frac{\pi}{4}e^{yz}\right)\right)$ es $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \vec{f}(x,y,z) = \left(\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} (x - y + z - 20), \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} z.\tan\left(\frac{\pi}{4}e^{yz}\right)\right)$ que es el vector $(-20,1)$.

Ejemplo 3.31: Para $\vec{f}: R \to R^3$ definida por $\vec{f}(t) = \left(t^2 - 2t + 1, (1 + 2t)^{\frac{1}{t}}, \frac{1-\cos(t)}{t^2}\right)$ es $\lim\limits_{t\to 0} \vec{f}(t) = \left(\lim\limits_{t\to 0}(t^2 - 2t + 1), \lim\limits_{t\to 0}(1 + 2t)^{\frac{1}{t}}, \lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right) = (1, e^2, \frac{1}{2})$, como se comprueba hallando los límites unidimensionales correspondientes.

Continuidad de funciones escalares

En esta sección se tratará el concepto de continuidad, una de las ideas más fascinantes de las matemáticas. Se propondrá la definición de función continua y su relación con el concepto de límite funcional. También se enunciarán algunas de las propiedades que hacen que las funciones continuas sean tan interesantes. Así mismo, se podrá observar que las funciones elementales son funciones continuas en sus dominios naturales.

Definición 3.6: Dado un campo escalar $f: A \subset R^n \to R$, diremos que f es continuo en un punto $\vec{x}_0$ de su dominio si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ / \ \text{si } \vec{x} \in A \text{ y } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \ \text{ entonces } \ |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon$$

Observen que si $\vec{x}_0$ es un punto de acumulación del dominio del campo, de la definición anterior se deduce que existe $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ y es $f(\vec{x}_0)$.

Actividad para resolver y discutir en el Foro:

Actividad 3.7: Escriban la definición de continuidad de un campo $f: A \subset R^n \to R$ en un punto $\vec{x}_0$ de su dominio empleando bolas abiertas.

Actividad 3.8: Comprueben que si $\vec{x}_0$ es un punto aislado del dominio del campo $f: A \subset R^n \to R$ entonces se verifica automáticamente la definición y el campo resulta así continuo en todo punto aislado de su dominio.

Sólo será de nuestro interés estudiar la continuidad de campos en los puntos de acumulación de su dominio.

Podría ocurrir que:
exista $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ pero el campo no esté definido en ese punto, o bien
exista $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$ pero sea $f(\vec{x}_0) \neq L$
En ambos casos se dice que la continuidad es *evitable* y puede redefinirse la función de modo que resulte continua en el punto.
La discontinuidad es *esencial* o *no evitable* si no existe $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$.

Ejemplo 3.32: La función $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, con dominio en $R^2 - \{(0,0)\}$, puede redefinirse con continuidad a todo el plano como

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

puesto que es $\lim\limits_{(x,y)\to)0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$, como se comprueba, por ejemplo, recurriendo a coordenadas polares.

Continuidad de funciones vectoriales

Actividad para resolver y discutir en el Foro:

Actividad 3.9: Partiendo de la **Definición 3.5** definan qué se entiende por campo vectorial continuo en un punto $\vec{x}_0$ de su dominio y, a partir del **Teorema 3.7** deduzcan la relación que existe entre la continuidad de un campo vectorial en un punto y la continuidad en ese punto de los campos escalares que son sus componentes (observen que este último resultado simplifica mucho el estudio de continuidad de los campos vectoriales).

Es posible enunciar propiedades similares a las vistas en Análisis I para los campos continuos:

Dados campos escalares $f, g: A \subset R^n \to R$, continuos en un punto $\vec{x}_0$, resultan continuos en ese punto $f + g, kf$ cualquiera sea $k \in R$, $f.g$ y, si además es $g(\vec{x}_0) \neq 0$, resulta continuo en ese punto $\frac{f}{g}$.

A partir de esta propiedad resultan continuos los polinomios y las funciones racionales en todos y cada uno de los puntos de su dominio.
También se puede demostrar que resultan continuos en todos los puntos de sus respectivos dominios las exponenciales, los logaritmos, las raíces, las funciones trigonométricas, etc., y por consiguiente las sumas, productos y cocientes de ellas (en los puntos donde no se anule el denominador).
También

Dados campos vectoriales $\vec{f}, \vec{g}: A \subset R^n \to R^m$ continuos en un punto $\vec{x}_0$, resultan continuos en ese punto $\vec{f} + \vec{g}, k\vec{f}$ y $\vec{f}.\vec{g}$ (producto escalar).

Dados campos vectoriales $\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$ y $\vec{g}: B \subset R^m \to R^p$, si $\vec{f}$ es continuo en $\vec{x}_0$ y $\vec{g}$ lo es en $\vec{f}(\vec{x}_0)$ entonces $\vec{g} \circ \vec{f}$ es continuo en $\vec{x}_0$.

Consecuentemente la composición de campos elementales como los listados anteriormente es continua.

Hasta ahora hemos definido la continuidad como una propiedad en un punto.

Definición 3.8: Una función $\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$ es continua en un conjunto $B \subseteq A$ si es continua en cada punto del conjunto B.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.33: La función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x^2-y^2} & \text{si } x^2+y^2 \neq 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ es continua en todo el plano R^2 excepto en los puntos que pertenecen al conjunto $T = \{(x,y)/\, x^2+y^2 = 1\}$, ya que se trata del cociente entre la función constante y una función polinómica, ambas continuas. Claramente, la función es discontinua no evitable en los puntos que pertenecen al conjunto T, ya que no existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ cualquiera sea el punto $(x_0, y_0) \in T$.

Ejemplo 3.34: La función $f(x,y) = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ tiene como dominio $A = R^2 - \{(x,y)/\, y = x \text{ ó } y = -x\}$, donde resulta continua por ser cociente de polinomios cuyo denominador no se anula.

Haciendo algunos cálculos es $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} \underbrace{=}_{\text{si } y\neq -x} \frac{x+y}{x-y}$

Es sencillo ver que en el origen los límites iterados resultan distintos, por lo que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Sobre los puntos de la recta $y = x$, distintos del origen, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)$ pues allí podemos utilizar la expresión equivalente $\frac{x+y}{x-y}$ que no tiene límite para $(x,y) \to (a,a)$. En cambio, sobre los puntos de la recta $y = -x$, distintos del origen, es $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y) = 0$ y esos puntos son, entonces, puntos de discontinuidad evitable.

Se puede redefinir, entonces, la función de manera continua, extendiendo su dominio:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} & \text{si } y \neq x \text{ ó } y \neq -x \\ 0 & \text{si } y = -x \end{cases}$$

Actividad para resolver y discutir en el Foro:

Actividad 3.10: Analicen si es posible extender con continuidad la función $f(x,y,z) = \frac{e^{z-x^2+y^2}}{2(z-x^2+y^2)}$ a todo el espacio (observen que el dominio original es todo el espacio excepto los puntos del paraboloide hiperbólico de ecuación $z = x^2 - y^2$).

Finalmente, recordemos que un conjunto $A \subseteq R^n$ se dice compacto si es *cerrado y acotado*, y enunciemos ahora el siguiente resultado, que ya fue estudiado para una variable y se debe al matemático a que nos referimos al comenzar el capítulo:

Teorema 3.9: (de Weierstrass) Sea $f: A \subset R^n \to R$. Si f es continuo A y este conjunto es compacto, entonces f alcanza en A máximo y mínimos absolutos, esto es, existen $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A / f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_2)$ para todo $\vec{x} \in A$.

Este teorema garantiza la existencia de los valores máximo y mínimos globales del campo escalar sobre el conjunto A, pero no informa cómo determinarlos. Posteriormente se estudiarán métodos que permiten obtenerlos, métodos basados en el concepto de *diferenciabilidad* de funciones escalares de varias variables independientes.