Campos Vectoriales - 2° Parte

Campos Vectoriales

U. T. N°11. Campos Vectoriales – Segunda parte:

- Campos vectoriales conservativos.
- Independencia de la trayectoria.
- Teorema de Green
- Corolario del Teorema de Green (cálculo de áreas)
- Forma vectorial del Teorema de Green

Campos Vectoriales

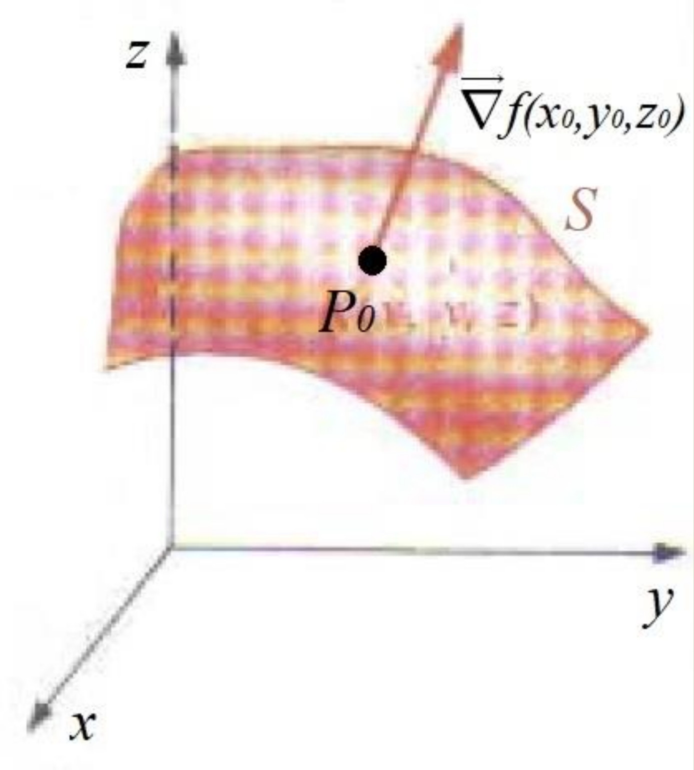
Campos vectoriales conservativos

Estudiaremos una clase particular de campos vectoriales, que tiene importancia en aplicaciones físicas: los llamados ***campos vectoriales conservativos***.

Si $w = f(x, y, z)$ es una función escalar dada en $D \subset R^3$ que admite derivadas parciales primeras, se define el vector gradiente en cada punto $(x, y, z) \in R^3$ como

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Además, recordamos que $\vec{\nabla} w = \vec{\nabla} f(x, y, z)$ resulta perpendicular a la superficie de nivel en P_0.



Campos Vectoriales

Definición

Un campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ se dice conservativo en $D \subset R^3$ si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función $f(x,y,z)$ tal que

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z)$$

para todo punto de D. En tal caso, f se llama ***función potencial*** de $\vec{F}$.

$$M(x,y,z)\hat{\imath} + N(x,y,z)\hat{\jmath} + P(x,y,z)\hat{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

De la igualdad anterior, queda planteado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} M(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ N(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ P(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

Campos Vectoriales

<u>Ejemplo 1.</u> Demostrar que el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^x cosy + yz)\breve{\imath} + \ (xz - e^x seny)\breve{\jmath} + \ (xy + z)\breve{k}$$

es conservativo en su dominio y determinar una función potencial para campo vectorial dado.

$$M(x,y,z) = e^x cosy + yz \qquad N(x,y,z) = xz - e^x seny \qquad P(x,y,z) = xy + z$$

Calculando:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z} \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x seny = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Las derivadas parciales son continuas, de manera que estas igualdades nos dicen que $\vec{F}$ es conservativo, por lo que existe una función $f(x,y,z)$ con $\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z)$.
Se encuentra f integrando las ecuaciones:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = M(x,y,z) \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = N(x,y,z) \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = P(x,y,z)$$

Integrando la primer ecuación con respecto a x, dejando a y y z constantes, para obtener:

$$f(x,y,z) = \int (e^x cosy + yz\,)dx + \ \emptyset(y,z)$$

$$f(x,y,z) = e^x cosy + xyz + \ \emptyset(y,z)$$

Campos Vectoriales

Escribiendo la constante de integración como función de y y z, pues su valor depende de y y z, aunque no de x. Después, calculando $\frac{\partial f}{\partial y}$ a partir de esta ecuación e igualando con $N(x,y,z)$, resulta:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -e^x seny + xz + \frac{\partial \emptyset(y,z)}{\partial y} = N(x,y,z)$$

$$-e^x seny + xz + \frac{\partial \emptyset(y,z)}{\partial y} = xz - e^x seny$$

La derivada parcial $\frac{\partial \emptyset}{\partial y} = 0$, expresa que la función $\emptyset(y,z)$ no varía con y, entonces:

$$\frac{\partial \emptyset(y,z)}{\partial y} = 0$$

$$\emptyset(y,z) \equiv \psi(z)$$

Reemplazando en la exp. de f $\quad f(x,y,z) = e^x cosy + xyz + \emptyset(y,z)$

$$f(x,y,z) = e^x cosy + xyz + \psi(z)$$

De la última exp. de f se determina $\frac{\partial f}{\partial z}$ y al igualar el resultado con la función $P(x,y,z)$ se obtiene:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = xy + \psi'(z)$$

Campos Vectoriales

$$xy + \psi'(z) = xy + z$$

$$\psi'(z) = z$$

Integrando $\psi'(z)$ respecto a z: $\psi(z) = \dfrac{z^2}{2} + C$

Entonces reemplazando en: $f(x, y, z) = e^x cosy + xyz + \psi(z)$

$$f(x, y, z) = e^x cosy + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

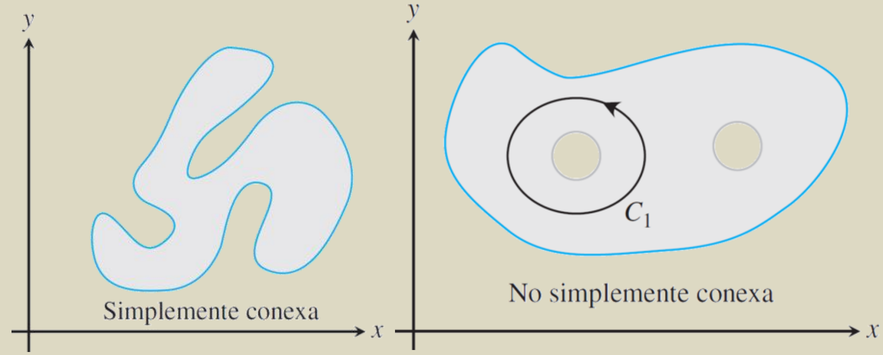
Por lo tanto, se tendrá una cantidad infinita de funciones potenciales de $\vec{F}$, una para cada valor de C.

Campos Vectoriales

Independencia de la trayectoria.

Se supone que todas las regiones del plano son conexas, es decir, que dos puntos cualesquiera pertenecientes a la región se pueden unir mediante una curva plana, regular parte por parte, completamente contenida en la región.

Además, se supone que todas las regiones son abiertas, es decir , que para todo punto perteneciente a la región existe un círculo con centro en el punto completamente contenido dentro de la región.



Teorema

Si $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\hat{\imath} + N(x,y)\hat{\jmath}$ es un *campo vectorial continuo* en una región D abierta y conexa, entonces la integral curvilínea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria si y sólo si $\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y)$ para alguna función escalar diferenciable $f(x,y)$

Campos Vectoriales

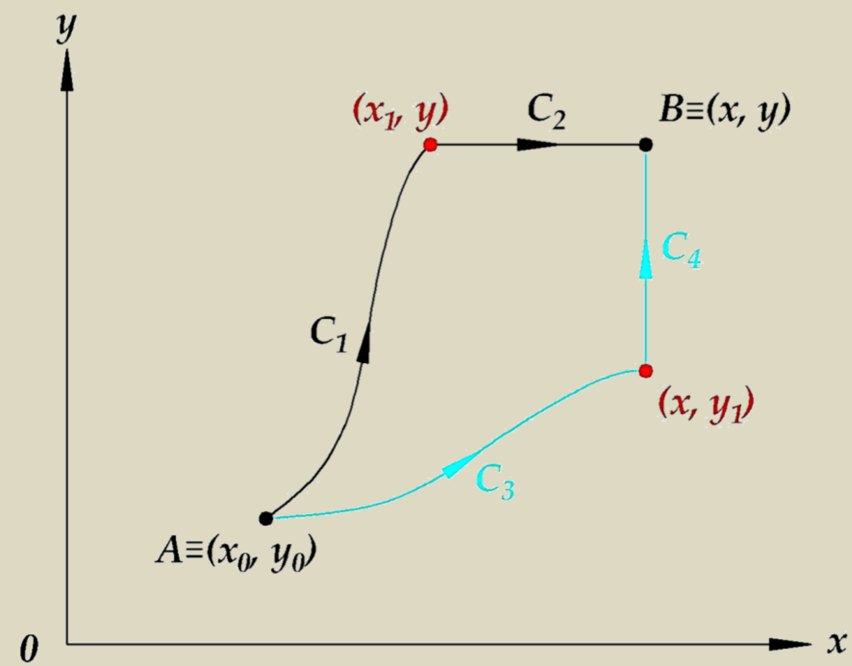
Demostración. Se supone que la integral es indep. de la trayectoria en D. Si el punto (x_0, y_0) es un punto fijo perteneciente a la región D, que es abierta y conexa, entonces

$$f(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \forall (x,y) \in D$$

$$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\hat{\imath} + N(x,y)\hat{\jmath}$$

C_1: es cualquier curva que va de (x_0, y_0) a (x_1, y).

C_2: es cualquier curva que va de (x_1, y) a (x, y).



$x_1 \neq x_0 \qquad x_1 \neq x$

Como la integral es indep. de la trayectoria, f depende sólo de x e y, y no de la curva C de (x_0, y_0) a (x, y).

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{(x_1,y)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Campos Vectoriales

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{(x_1,y)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}\right]$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 + \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{(x_1,y)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}\right]$$

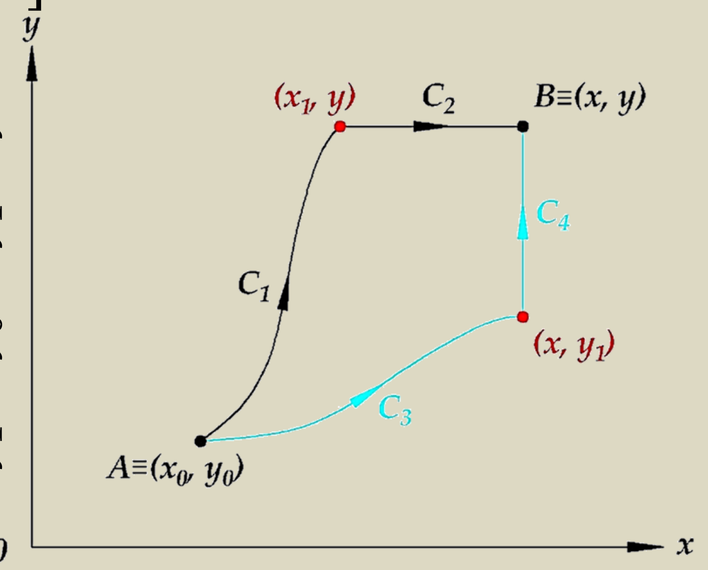
Se puede escribir $\vec{F}\cdot d\vec{r} = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. Además, en $C_2 \Rightarrow dy = 0$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{(x_1,y)}^{(x,y)} M(x,y)dx\right] = M(x,y) \quad (1)$$

Análogamente, si elegimos a las curvas

C_3: es cualquier curva que va de (x_0, y_0) a (x, y_1).

C_4: es cualquier curva que va de (x, y_1) a (x, y).



$y_1 \neq y_0 \quad y_1 \neq y$

Campos Vectoriales

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{(x,y_1)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{(x,y_1)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}\right]$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{(x,y_1)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}\right]$$

Se puede escribir $\vec{F}\cdot d\vec{r} = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. Además, en $C_4 \Rightarrow dx = 0$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{(x,y_1)}^{(x,y)} N(x,y)dy\right] = N(x,y) \quad (2)$$

Resumiendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) & (2) \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{F}(x,y) = M(x,y)\hat{\imath} + N(x,y)\hat{\jmath} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} = \vec{\nabla} f(x,y)$$

$$\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y), se\ cumple\ \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Campos Vectoriales

Demostración del retorno

Suponemos a $f(x,y)$ tal que $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{F}(x,y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad ; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ están unidos por una curva plana C, regular parte por parte, completamente contenida en una región D conexa y abierta, entonces

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_C f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

Donde

$$C: \begin{cases} x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt \\ y = h(t) \Rightarrow dy = h'(t)dt \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \{ f_x[g(t), h(t)] \cdot g'(t) + f_y[g(t), h(t)] \cdot h'(t) \} \, dt$$

Campos Vectoriales

Aplicando la Regla de la Cadena y el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[r, dash] & t \\ f(x,y) \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ & y \arrow[r, dash] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = f_x[g(t), h(t)] \cdot g'(t) + f_y[g(t), h(t)] \cdot h'(t)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\{f[g(t), h(t)]\}dt = f[g(t), h(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= f[g(t_2), h(t_2)] - f[g(t_1), h(t_1)]$$

$$= f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f(B) - f(A)$$

Como caso particular si la curva C, es plana, regular parte por parte, cerrada y simple, las coordenadas de A y las de B coinciden, entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Campos Vectoriales

Ejercicio 4c. *Determinar si la integral de línea* $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *es independiente de la trayectoria. En caso afirmativo encontrar la Función Potencial.*

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} \underbrace{(2x + y^3)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{3xy^2}_{N(x,y)}dy$$

Debemos verificar que: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \therefore \quad \boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ es independiente de la trayectoria}}$$

Entonces existe una Función Potencial tal que $u(x,y) = K$. *Para encontrar la función potencial debemos partir de:*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad o \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Campos Vectoriales

Eligiendo la expresión de $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$*, operando algebraicamente y luego integrando parcialmente el segundo miembro respecto de* x *:*

$$u(x,y) = \int (2x + y^3)dx + \emptyset\,(y)$$

$$u(x,y) = x^2 + xy^3 + \emptyset\,(y)$$

Notar que la constante de integración es constante con respecto a x, es decir es una función de y, que llamamos $\emptyset\,(y)$. *A continuación, derivamos esta expresión con respecto a y (para comparar con la expresión que ya tenemos de* $\mathrm{N}(x,y)$*):*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 3xy^2 + \emptyset'(y) = N(x,y)$$

$$3xy^2 + \emptyset'(y) = 3xy^2$$

Despejamos $\emptyset'(y)$:

$$\emptyset'(y) = 3xy^2 - 3xy^2$$

$\emptyset'(y) = 0$ *Integrando ambos miembros obtenemos* $\emptyset(y) = C$

Campos Vectoriales

Reemplazamos en $u(x,y)$*:* $$u(x,y) = x^2 + xy^3 + \emptyset\,(y) = K$$

$$u(x,y) = x^2 + xy^3 + C = K$$

$$u(x,y) = x^2 + xy^3 = K_1 \quad \textit{Función Potencial}$$

Entonces la función potencial evaluada en los puntos (2,3) y (0,1) :

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (2x + y^3)dx + 3xy^2 dy = \left. x^2 + xy^3 \right|_{(0,1)}^{(2,3)} = 2^2 + 2 * 3^3 - [0^2 + 0 * 1^3]$$

$$= 58$$

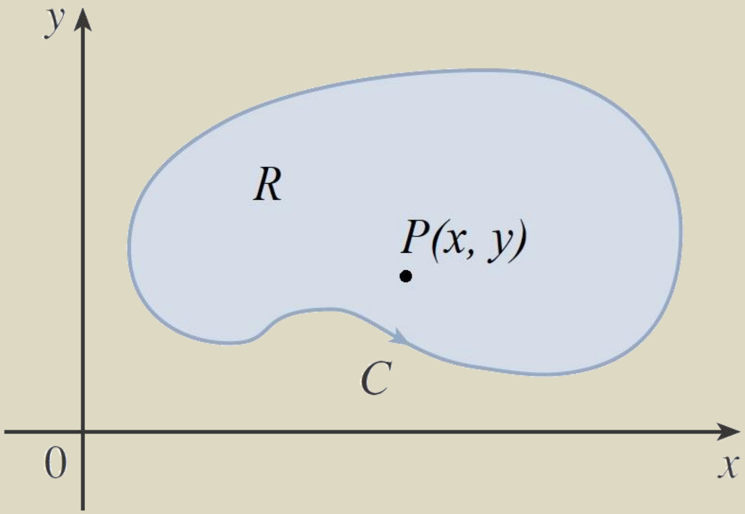
Campos Vectoriales

Teorema de Green

Sea C, una curva plana, regular parte por parte, cerrada y simple (no se corta a si misma) y sea R una región, en el plano xy, que consta de la curva C y de todos los puntos interiores a ella. Sea además $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\hat{\imath} + N(x,y)\hat{\jmath}$ un campo vectorial, si M y N son funciones continuas que tienen derivadas parciales primeras continuas en una región de abierta D que contiene a R, entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \qquad (1)$$

El sentido de recorrido positivo de la curva C, es aquel que corresponde al movimiento de un punto sobre la curva para el cual los puntos de R interiores a C están siempre a la izquierda del móvil (que recorre C).



Campos Vectoriales

Demostración

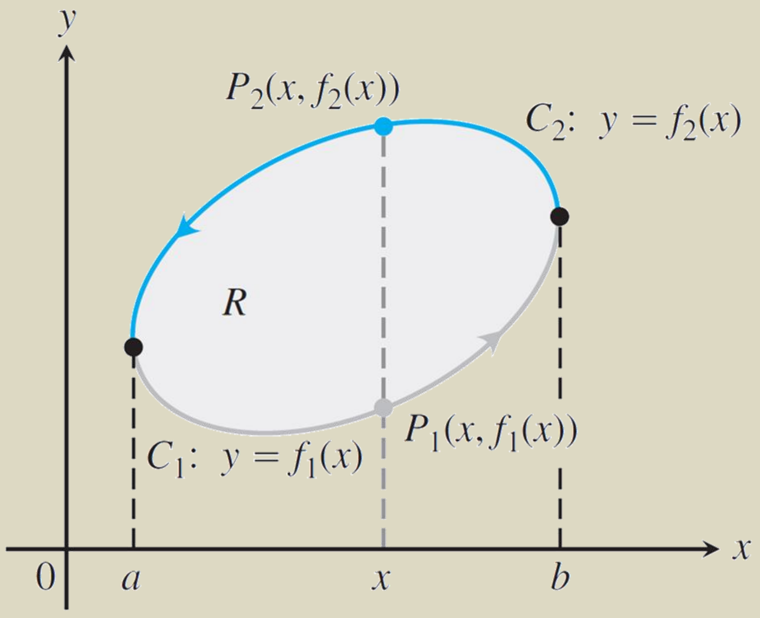
Se demostrará el teorema para una región R que es tanto de Tipo I como del Tipo II. Entonces puede escribirse

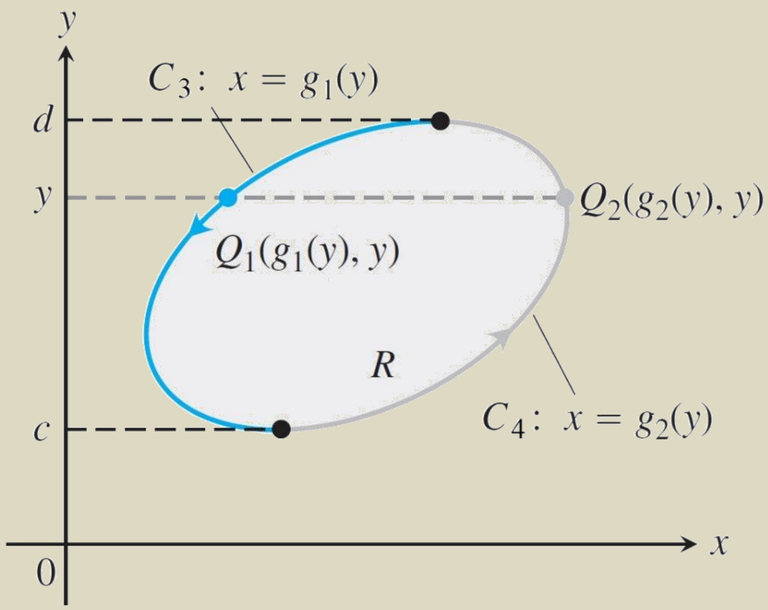
$R_I : \{(x, y) / a \leq x \leq b \,;\, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$

tal que $f_1(x) \leq f_2(x)\ \forall x \in [a, b]$

$R_{II} : \{(x, y) / \ g_1(y) \leq x \leq g_2(y); c \leq y \leq d\}$

tal que $g_1(y) \leq g_2(y)\ \forall y \in [c, d]$





Campos Vectoriales

$$\oint_C M(x,y)dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA \quad (2)$$

$$\oint_C N(x,y)dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA \quad (3)$$

Para demostrar (2), consideramos a R_I limitada por C: $C_1 \cup C_2$ con $\begin{cases} C_1 \equiv y = f_1(x) \\ C_2 \equiv y = f_2(x) \end{cases}$

$$\oint_C M(x,y)dx = \int_{C_1} M(x,y)dx + \int_{C_2} M(x,y)dx = \int_a^b M[x,f_1(x)]\,dx + \int_b^a M[x,f_2(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b M[x,f_1(x)]\,dx - \int_a^b M[x,f_2(x)]\,dx \quad (4)$$

$$-\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA = -\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy\,dx = -\int_a^b M(x,y)\Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$

$$= -\int_a^b \{M[x,f_2(x)] - M[x,f_1(x)]\}\,dx = \int_a^b \{M[x,f_1(x)] - M[x,f_2(x)]\}\,dx \ (5)$$

La expresión (5) coincide con (4), entonces queda demostrada (2)

Campos Vectoriales

$$\oint_C N(x,y)dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA \qquad (3)$$

Para demostrar (3), consideramos a R_{II} limitada por C: $C_3 \cup C_4$ con $\begin{cases} C_3 \equiv x = g_1(y) \\ C_4 \equiv x = g_2(y) \end{cases}$

$$\oint_C N(x,y)dy = \int_{C_3} N(x,y)dy + \int_{C_4} N(x,y)dy = \int_d^c N[g_1(y),y]\,dy + \int_c^d N[g_2(y),y]\,dy$$

$$= \int_c^d N[g_2(y),y]\,dy - \int_c^d N[g_1(y),y]\,dy \qquad (6)$$

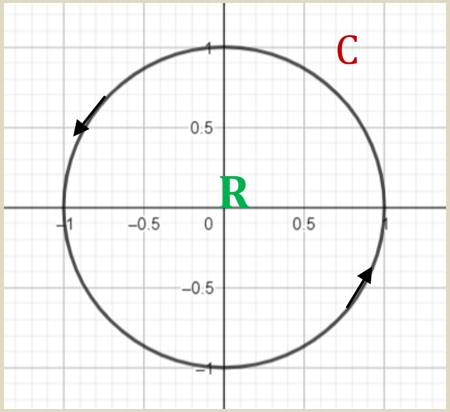
$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx\,dy = \int_c^d N(x,y)\Big|_{g_1(y)}^{g_2(y)} dy$$

$$= \int_c^d \{N[g_2(y),y] - N[g_1(y),y]\}\,dy \qquad (7)$$

La expresión (7) coincide con (6), entonces queda demostrada (3)

Campos Vectoriales

Ejemplo 3 Verificar el Teorema de Green para el campo vectorial dado $\vec{F}(x,y) = (x-y)\breve{\imath} + x\breve{\jmath}$ y la región R acotada por la circunferencia $C: \vec{r}(t) = \cos t\, \breve{\imath} + sen\, t\, \breve{\jmath},\ 0 \le t \le 2\pi$



$$C: \begin{cases} x = cost & dx = -sent\, dt \\ y = sent & dy = cost\, dt \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$R_P: \{(r;\theta) \in R^2 / 0 \le r \le 1; 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$Teorema\ de\ Green: \oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

El campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x-y)\breve{\imath} + x\breve{\jmath}$ cuyas funciones escalares:

$$M(x,y) = x - y \qquad N(x,y) = x$$

$$M(x,y) = cost - sent \qquad N(x,y) = cost$$

Campos Vectoriales

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_0^{2\pi} -(cost\ - sent) * sent\, dt + cost * cost\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t\, sent + sen^2 t + cos^2 t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t\, sent + 1)dt =$$

Aplic. el método de sustitución directa, para resolver la integral definida

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \cos t \\ du &= -sen\ t\ dt \end{aligned}}$$

$$\int_0^{2\pi} (-\cos t\, sent + 1)dt = \int_0^{2\pi} u\, du + \int_0^{2\pi} 1\, dt = \left[\frac{(cost)^2}{2} + t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\frac{cos^2 t}{2} + t\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{cos^2 2\pi}{2} + 2\pi\right] - \left[\frac{cos^2 0}{2} + 0\right] = 2\pi$$

Campos Vectoriales

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1$$

$$\iint_R \overbrace{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)} dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 [1-(-1)]\, r\, drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\, r\, drd\theta = \int_0^{2\pi} 2\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi$$

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = 2\pi$$

Por lo tanto, se verifica el cumplimiento del Teorema de Green.

Campos Vectoriales

Corolario del Teorema de Green

Si la frontera de una región R en el plano xy es una curva C plana, regular parte por parte, cerrada y simple, entonces el área A de R es

$$A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

Partiendo de la expresión del Teorema de Green

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \qquad (1)$$

1. $\begin{cases} N(x,y) = x \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 \\ M(x,y) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow$

Reemplazando en (1)

$$\oint_C xdy = \int\int_R 1dA = A \qquad (\acute{A}rea\ de\ R)$$

Campos Vectoriales

2. $\begin{cases} N(x,y) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 \\ M(x,y) = -y \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Reemplazando en (1) $-\oint_C y\,dx = \int\int_R 1dA = A \quad (\acute{A}rea\ de\ R)$

3. $\begin{cases} N(x,y) = x \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 \\ M(x,y) = -y \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Reemplazando en (1) $\dfrac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy = \int\int_R 1dA = A \quad (\acute{A}rea\ de\ R)$

<u>Forma vectorial del Teorema de Green</u>

$$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\hat{\imath} + N(x,y)\hat{\jmath} \qquad rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\begin{cases} d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} \\ \hat{T} = \dfrac{dx}{ds}\hat{\imath} + \dfrac{dy}{ds}\hat{\jmath} \end{cases} \Rightarrow d\vec{r} = \hat{T} \cdot ds \qquad (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}\right] \cdot \hat{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Donde $\hat{T}$ es el ***vector tangente unit***. Reemplazando cada término en la ec (1) queda

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot \hat{T} \cdot ds = \iint_R (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{k} \cdot dA$$

Campos Vectoriales

<u>Ejemplo 4.</u>Calcular el área de la siguiente región utilizando el Corolario del Teorema de Green. La curva C es la circunferencia de radio $r = a$, cuya función vectorial es

$$\vec{r}(t) = a\,cost\,\breve{\imath} + a\,sent\,\breve{\jmath}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

$$C: \begin{cases} x = a\,cost & dx = -a\,sent\,dt \\ y = a\,sent & dy = a\,cost\,dt \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$A = \oint_C xdy = \int_0^{2\pi} (a\,cost\ * a\cos t\,dt) = \int_0^{2\pi} a^2(cos^2 t)dt = a^2\int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos 2t)}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(t + \frac{sen2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}a^2\left[\left(2\pi + \frac{sen4\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{sen0}{2}\right)\right] = \pi a^2$$

Campos Vectoriales

$$A = -\oint_C y\,dx = -\int_0^{2\pi} (a\,sen\,t\; * -a\,sen\,t\,dt) = \int_0^{2\pi} a^2 (sen^2 t) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \frac{(1 - sen\,2t)}{2} dt = \frac{1}{2}\,a^2 \int_0^{2\pi} 1 - sen2t\,dt\; = \frac{1}{2}\,a^2 \left(t + \frac{cos2t}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\,a^2 \left[\left(2\pi + \frac{cos4\pi}{2} \right) - \left(0 + \frac{cos0}{2} \right) \right] = \frac{1}{2}\,a^2 \left[\left(2\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] = \pi a^2$$

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x\,dy\; - y\,dx\; = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\,cost\; * a\cos t\,dt\; - a\,sent\; * (-a\,sent\,dt)) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (cos^2 t + sen^2 t) dt\; = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} dt = \; \frac{1}{2}\,a^2\,2\pi = \; \pi a^2$$

Bibliografía

- Cálculo con Geometría Analítica. Autor. E. Swokowski.
- Cálculo de Varias Variables. Autor. J. Stewart.

¡Muchas gracias!

¿Consultas?