Independencia de la trayectoria (cont.)

EJERCICIO 1C (TP N°16)

Determinar en el siguiente caso si la $\int_C F * dr$ es independiente de la trayectoria. En caso afirmativo encontrar la Función Potencial.

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} \underbrace{(2x + y^3)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{3xy^2}_{N(x,y)}dy$$

Debemos verificar que: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Es independiente de la trayectoria

Entonces existe una Función Potencial: $U(x,y) = K$. Para encontrar la función potencial debemos partir de:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Entonces, integrando ambos miembros de la primera de las expresiones respecto de x:

$$U\,(x, y) = \int (2x + y^3)dx$$

$$U\,(x, y) = x^2 + xy^3 + \emptyset\,(y)$$

Notar que la constante de integración es constante con respecto a x, es decir es una función de y, que llamamos $\emptyset\,(y)$. A continuación, derivamos esta expresión con respecto a y (para comparar con la expresión que ya tenemos de $\mathrm{N}(x, y)$):

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 3xy^2 + \emptyset'(y) \quad = N(x, y)$$

$$3xy^2 + \emptyset'(y) = 3xy^2$$

Despejamos $\emptyset'(y)$:

$$\emptyset'(y) = 3xy^2 - 3xy^2$$

$$\emptyset'(y) = 0$$

Integramos ambos miembros: $\emptyset(y) = C$

Reemplazamos en $U(x, y)$: $$U\,(x, y) = x^2 + xy^3 + \emptyset\,(y) = K$$

$$U\,(x, y) = x^2 + xy^3 + C = K$$

$$U\,(x, y) = x^2 + xy^3 = K_1$$ FUNCIÓN POTENCIAL

Entonces la función potencial evaluada en los puntos $(2{,}3)$ y $(0{,}1)$:

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (2x + y^3)dx + 3xy^2dy = \left. x^2 + xy^3 \right|_{(0,1)}^{(2,3)} = 2^2 + 2 * 3^3 - [0^2 + 0 * 1^3] = 58$$

EJERCICIO 1 e) Determinar si el siguiente campo vectorial es independiente de la trayectoria. En caso afirmativo hallar la Función Potencial:

$$\int_{\left(0,1,\frac{1}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},3,2\right)} y^2 \cos x \; dx + \; (2y \,\mathrm{sen}\, x \; + e^{2z})\, dy + 2ye^{2z} \, dz$$

Si $rot\ F = 0$, el campo vectorial es independiente de la trayectoria:

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \longrightarrow \boxed{rot\ F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\breve{\imath} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\breve{\jmath} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \breve{k}}$$

Entonces si :

$$\int_{\left(0,1,\frac{1}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},3,2\right)} \underbrace{y^2 \cos x \; dx}_{M(x,y,z)} + \; \underbrace{(2y \, sen \, x \; + e^{2z})}_{N(x,y,z)}\, dy + \underbrace{2ye^{2z}}_{P(x,y,z)} \, dz$$

$$rot\ F = (2e^{2z} - 2e^{2z})\breve{\imath} \; + (0-0)\breve{\jmath} \; + (2y\cos x \; - 2y \cos x \,)\; \breve{k}$$

$rot\ F = 0$ $\quad\quad$ $\vec{F}(x,y,z)$ es conservativo por lo tanto es independiente de la trayectoria

Entonces existe una Función Potencial: $f(x,y,z)$ tal que $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)$. Para encontrar la función potencial debemos partir de:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = M(x,y,z) \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = N(x,y,z) \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = P(x,y,z)$$

$$M(x,y,z) = y^2 \cos x \qquad N(x,y,z) = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z} \qquad P(x,y,z) = 2ye^{2z}$$

Función Potencial:

$$f(x,y,z) = \int y^2 \cos x \; dx + \emptyset(y,z)$$

$$f(x,y,z) = y^2 \operatorname{sen} x + \emptyset(y,z)$$

Derivamos respecto a y:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} x + \frac{\partial \emptyset(y,z)}{\partial y}$$

Igualamos a $N(x,y,z)$:

$$2y \operatorname{sen} x + \frac{\partial \emptyset(y,z)}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z}$$

$$\frac{\partial \emptyset(y,z)}{\partial y} = \cancel{2y \operatorname{sen}} x + e^{2z} - \cancel{2y \operatorname{sen}} x \longrightarrow \frac{\partial \emptyset(y,z)}{\partial y} = e^{2z}$$

Integramos respecto a y: $\emptyset(y,z) = ye^{2z} + \varphi(z)$

Entonces reemplazando en: $f(x,y,z) = y^2\, sen\, x + \emptyset(y,z)$

$$f(x,y,z) = y^2\, sen\, x + ye^{2z} + \varphi(z)$$

Para hallar la función $\varphi(z)$, debemos derivar respecto a z: $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2ye^{2z} + \varphi'(\mathrm{z})$

Igualamos a $\mathrm{P}(x,y,z)$: $2ye^{2z} + \varphi'(\mathrm{z}) = 2ye^{2z}$

$$\varphi'(\mathrm{z}) = 0$$

Integramos respecto a z: $\varphi(\mathrm{z}) = K$

Entonces reemplazando en: $f(x,y,z) = y^2\, sen\, x + ye^{2z} + \varphi(z)$

$$f(x,y,z) = y^2\, sen\, x + ye^{2z} + K = y^2\, sen\, x + ye^{2z} = K$$

Entonces:

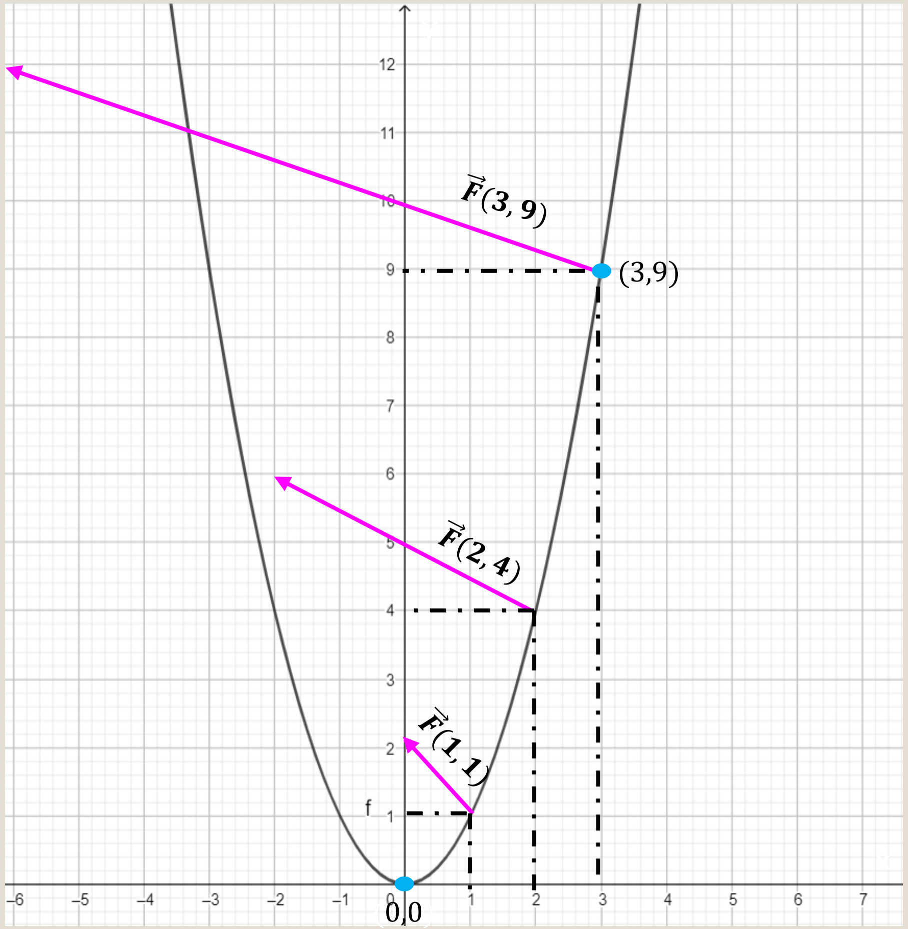
$$\int_{\left(0,1,\frac{1}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},3,2\right)} y^2 \cos x\, dx + (2y \operatorname{sen} x + e^{2z})\, dy + 2ye^{2z}\, dz = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} \Big|_{\left(0,1,\frac{1}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},3,2\right)} = 9 + 3e^4 - e$$

EJERCICIO 3 a)
(TP nº 15)

TRABAJO

Sea C la parte de la parábola $y = x^2$ que se encuentra entre (0,0) y (3,9) y sea $\vec{F}(x,y) = -y\check{\imath} + x\check{\jmath}$.
Calcule el trabajo realizado por el campo vectorial a lo largo de la curva C.

$$\left.\begin{array}{l} W = \int_C \vec{F}\, dr \\ d\vec{r} = dx\ \check{\imath} + dy\check{\jmath} \end{array}\right\} \quad W = \int_C \vec{F}\, dr = \int -y\, dx + x\, dy$$



Parametrizamos la curva:

$$C \begin{cases} x = t & dx = dt \\ y = t^2 & dy = 2tdt \end{cases} \qquad 0 \le t \le 3$$

Reemplazamos en la ecuación de trabajo con los correspondientes límites:

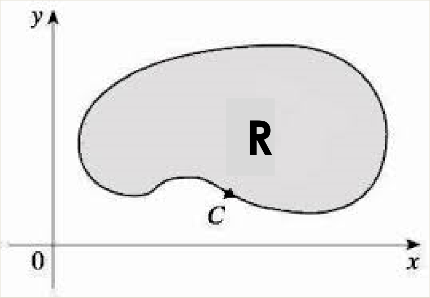
$$W = \int_0^3 -t^2\, dt + t * 2t\, dt = \int_0^3 (-t^2 + 2t^2)dt =$$

$$W = \int_0^3 t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^3 = \frac{3^3}{3} = 9$$

TEOREMA DE GREEN

Sea C una curva plana, regular por partes, cerrada y simple; y sea R la región que consta de C y su interior. Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones con derivadas parciales continuas en una región abierta D que contiene a R, entonces:

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$



Sentido de circulación de C : antihorario

El teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva plana con una integral doble sobre el recinto que encierra la curva. Este tipo de teoremas resulta muy útil porque, dados un campo vectorial y una curva cerrada simple sobre la cual hay que integrarlo, podemos elegir la posibilidad más simple entre integrar el campo directamente sobre la curva o bien integrar la diferencia de sus derivadas parciales cruzadas sobre el recinto que delimita la curva.

Corolario

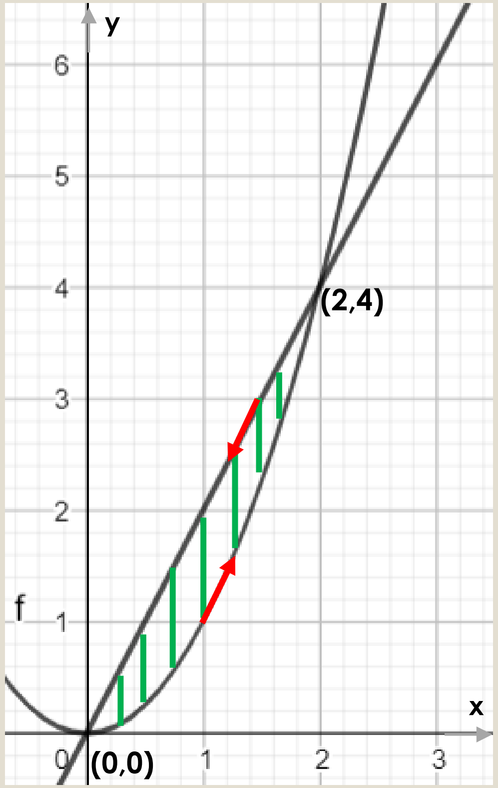
Si la frontera de una región R en el plano (x,y) es una curva plana, regular parte por parte, cerrada y simple C, entonces el área de R es:

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

EJERCICIO 2 Calcular la siguiente integral de línea aplicando el Teorema de Green.

a) $\oint 5xy\,dx + x^3\,dy$, donde C es la trayectoria que consta de las curvas $y = x^2, y = 2x$ entre los puntos (0,0) y (2,4)

$$\oint \underbrace{5xy}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{x^3}_{N(x,y)}\,dy \qquad C \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \qquad (0,0) \longrightarrow (2,4)$$



$$R_{TI} = \{(x;y) \in R^2 / 0 \le x \le 2;\ x^2 \le y \le 2x\}$$

Teorema de Green:

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 5x$$

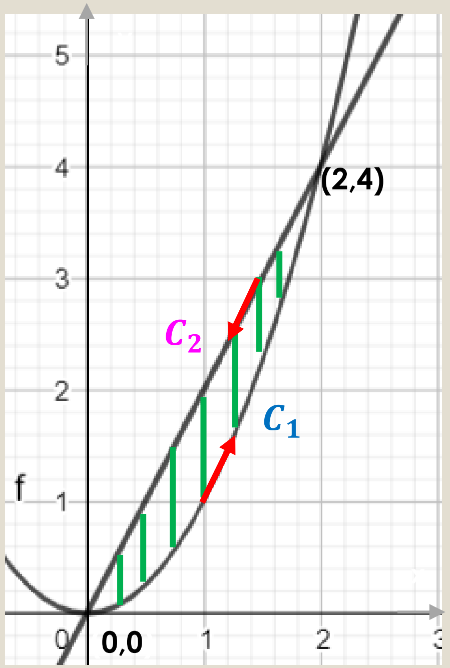
Entonces:

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x)\,dy\,dx = \int_0^2 3x^2y - 5xy \Big|_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 (6x^3 - 10x^2) - (3x^4 - 5x^3)\,dx$$

$$= \int_0^2 (11x^3 - 10x^2 - 3x^4)\,dx = \frac{11x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} - \frac{3x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{11 * 2^4}{4} - \frac{10 * 2^3}{3} - \frac{3 * 2^5}{5} = -\frac{28}{15}$$

Verificar el cumplimiento del Teorema de Green. Lo vamos a hacer con el ejercicio anterior.

Teorema de Green: $$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$



Resolvimos la integral doble, $\iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$ quedando :

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x)\, dy\, dx = -\frac{28}{15}$$

Nos queda verificar la igualdad con $\oint M(x,y)dx + N(x,y)dy$

Para esto debemos parametrizar las curvas. Arrancamos por C_1: la parábola.

$$C_1 \begin{cases} x = t & dx = dt \\ y = t^2 & dy = 2tdt \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2$$

Luego:

$$\int_{C_1} 5xy\, dx + x^3\, dy = \int_0^2 5t * t^2\, dt + t^3\, 2tdt = \int_0^2 (5t^3 + 2t^4) dt = 5\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^5}{5}\Bigg|_0^2 = 5\frac{2^4}{4} + 2\frac{2^5}{5} = \frac{164}{5}$$

C_2: la recta

$$C_2 \begin{cases} x = t & dx = dt \\ y = 2t & dy = 2dt \end{cases} \qquad 2 \leq t \leq 0$$

Luego:

$$\int_{C_2} 5xy\,dx + x^3\,dy = \int_2^0 5t * 2t\,dt + t^3\,2dt = \int_2^0 (10t^2 + 2t^3)dt = 10\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^4}{4}\Bigg|_2^0 = -10\frac{2^3}{3} - 2\frac{2^4}{4} = -\frac{104}{3}$$

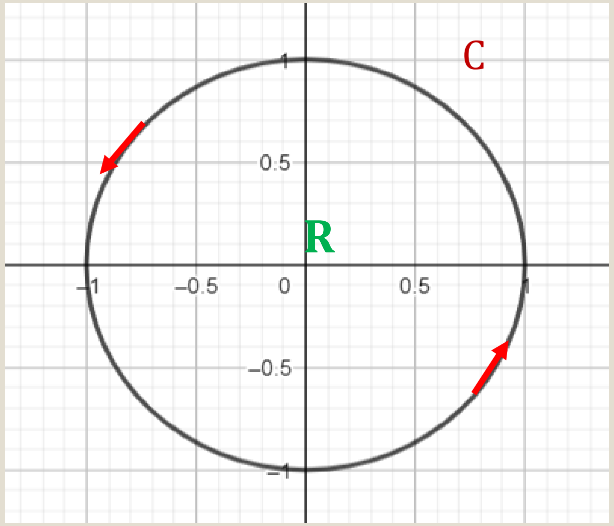
Entonces:

$$\oint_{\mathsf{C}} 5xy\,dx + x^3\,dy = \int_{C_1} 5xy\,dx + x^3\,dy + \int_{C_2} 5xy\,dx + x^3\,dy = \frac{164}{5} - \frac{104}{3} = -\frac{28}{15}$$

$$\oint_{\mathsf{C}} 5xy\,dx + x^3\,dy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x)\,dy\,dx$$

SE VERIFICA EL CUMPLIMIENTO DEL TEOREMA DE GREEN.

EJEMPLO Verifique las dos formas del teorema de Green para el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x-y)\breve{\imath} + x\breve{\jmath}$ y la región R acotada por la circunferencia C: $r(t) = \cos t\,\breve{\imath} + sen\ t\,\breve{\jmath},\ 0 \leq t \leq 2\pi$



$$C: \begin{cases} x = cost & dx = -sent\ dt \\ y = sent & dy = cost\ dt \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$R_P = \{(r;\theta) \in R^2 / 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Teorema de Green: $\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$

El campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x-y)\breve{\imath} + x\breve{\jmath}$ donde:

$$M(x,y) = x - y \qquad N(x,y) = x$$

$$M(x,y) = cost - sent \qquad N(x,y) = cost$$

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_0^{2\pi} -(cost\ - sent) * sent\ dt + cost * cost\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t\, sent + sen^2 t + cos^2 t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t\, sent + 1)dt =$$

Integramos por sustitución $\boxed{\begin{array}{c} u = \cos t \\ du = -sen\ t\ dt \end{array}}$

$$\int_0^{2\pi} (-\cos t\, sent + 1)dt = \int_0^{2\pi} u\, du + \int_0^{2\pi} 1\, dt = \left[\frac{u^2}{2} + t\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{cos^2 t}{2} + t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\frac{cos^2 2\pi}{2} + 2\pi\right] - \left[\frac{cos^2 0}{2} + 0\right] = 2\pi$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \qquad M(x,y) = x - y \qquad N(x,y) = x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-(-1))\, r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\, r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} 2\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 \, d\theta = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi$$

$$\boxed{\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = 2\pi}$$

SE VERIFICA EL CUMPLIMIENTO DEL TEOREMA DE GREEN.

EJEMPLO Calcular el área de la siguiente región utilizando el Corolario del Teorema de Green.

La circunferencia: $r(t) = a\,cost\,\breve{\imath} + a\,sent\,\breve{\jmath},\ 0 \leq t \leq 2\pi$

Corolario del Teorema de Green $A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$

Parametrizamos la curva:

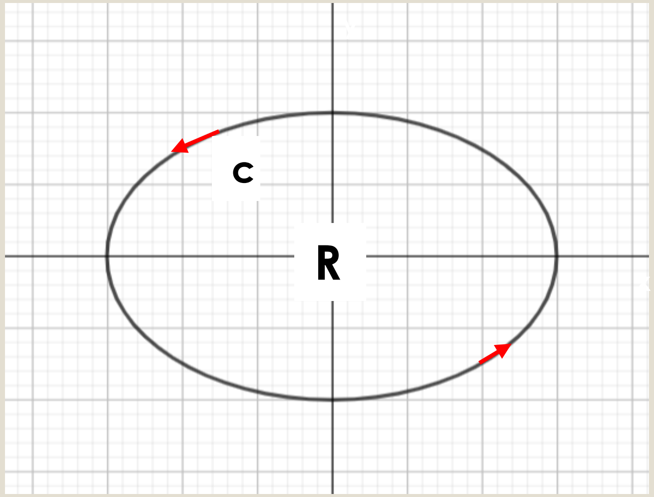
$$C: \begin{cases} x = a\,cost & dx = -a\,sent\,dt \\ y = a\,sent & dy = a\,cost\,dt \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$A = \oint_C xdy = \int_0^{2\pi} (a\,cost\ * a\cos t\,dt) = \int_0^{2\pi} a^2(cos^2 t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos 2t)}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,a^2 \left(t + \frac{sen2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\,a^2 \left[\left(2\pi + \frac{sen4\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{sen0}{2}\right)\right] = a^2\pi$$

EJERCICIO 3 (TPn°16) Calcular el área de la región indicada utilizando una integral de línea (corolario del Teorema de Green).

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Parametrizamos la curva:

$$C \begin{cases} x = a\,cost & dx = -a\,sent\,dt \\ y = b\,sent & dy = b\,cost\,dt \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Corolario del Teorema de Green $\quad A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$

$$A = \oint_C x\,dy = \int_0^{2\pi} (a\,cost \ * b\cos t\,dt) = \int_0^{2\pi} ab(cos^2 t)dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos 2t)}{2}dt = \frac{1}{2}\,ab\int_0^{2\pi} 1 + cos2t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,ab\left(t + \frac{sen2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\,ab\left[\left(2\pi + \frac{sen4\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{sen0}{2}\right)\right] = ab\pi$$

$$A = -\oint_C y\,dx = -\int_0^{2\pi} (b\,sen\,t\ * -a\,sen\,t\,dt) = \int_0^{2\pi} ab(sen^2 t)dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{(1-cos2t)}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,ab\int_0^{2\pi} 1 - cos2t\,dt\ = \frac{1}{2}\,ab\left(t - \frac{sen2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\,ab\left[\left(2\pi - \frac{sen4\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{sen0}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,ab\,[(2\pi)] = ab\pi$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx\ = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\,cost\ * b\cos t\,dt\ - b\,sent\ * (-a\,sent\,dt)) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(cos^2 t + sen^2 t)dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}\,ab\,2\pi = ab\pi$$