

Campos Vectoriales - 3° Parte

Campos Vectoriales

U. T. N°11B. Campos Vectoriales – Tercera parte:

- ❖ Superficies Paramétricas
- ❖ Integrales de Superficie-Integrales de Flujo
- ❖ Teorema de Gauss (o de la divergencia)
- ❖ Teorema de Stokes

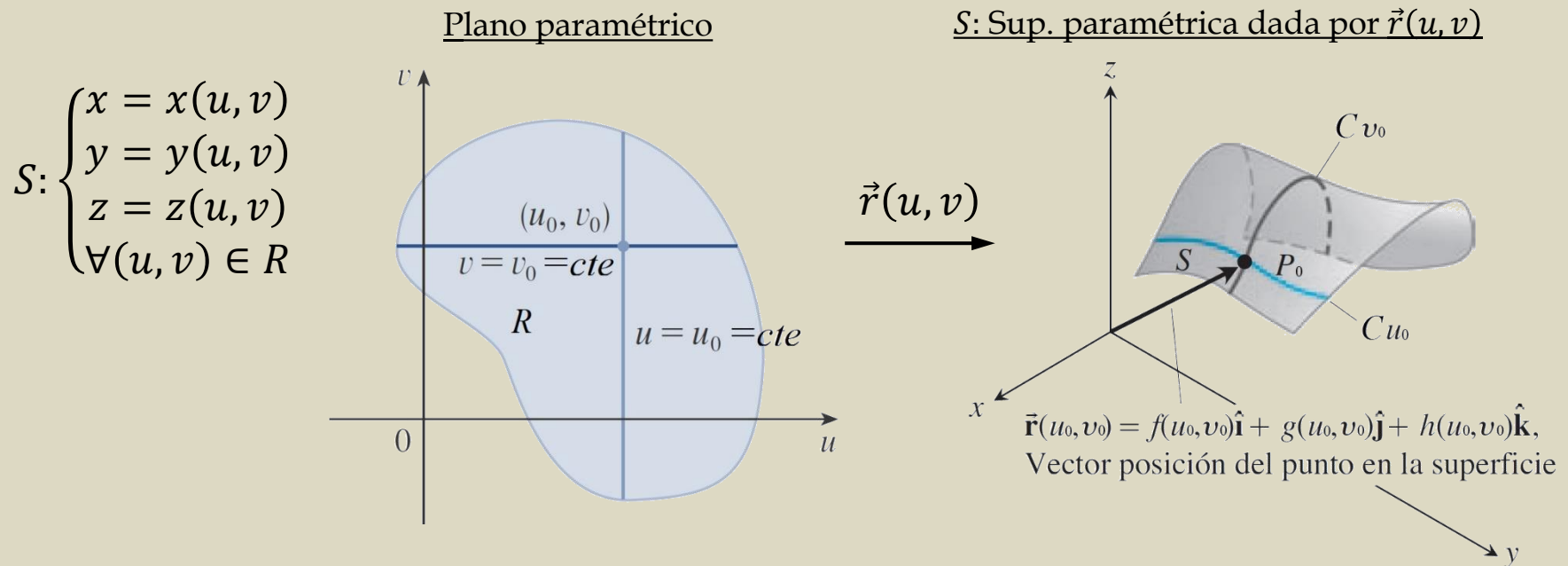
Campos Vectoriales

Parametrización de Superficies

Una superficie S en el espacio puede ser descripta mediante la función vectorial

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$$

donde $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son funciones continuas $\forall (u, v) \in R$, en el plano uv . Las variables u y v son los parámetros, y R es el dominio de los parámetros.



Campos Vectoriales

Se deben cumplir dos condiciones:

1. Si $\vec{r}(u_1, v_1) = \vec{r}(u_2, v_2) \Rightarrow P_1 \equiv P_2 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}$ para cada par ordenado (u, v) , tenemos un único valor sobre S .
2. Las derivadas parciales $\vec{r}_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v)$; $\vec{r}_v(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v)$ deben ser linealmente independientes $\forall (u, v) \in R$.

Si $u = u_0 = cte$.

$$\Rightarrow \vec{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\hat{i} + y(u_0, v)\hat{j} + z(u_0, v)\hat{k}$$

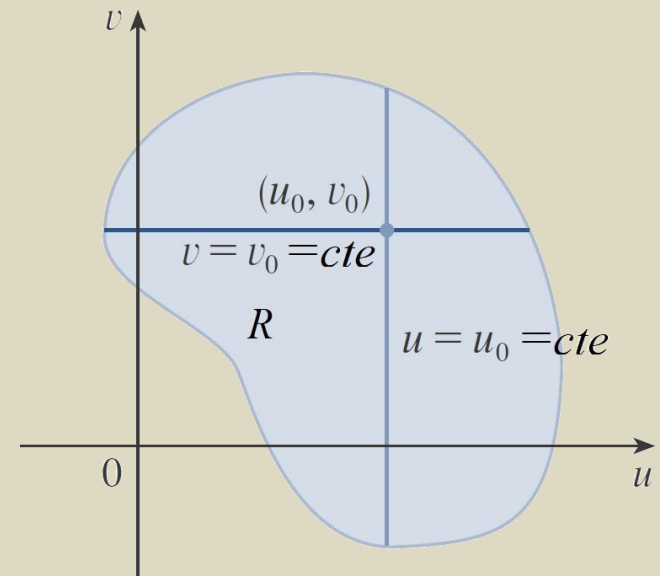
$\Rightarrow C_{u_0}$: es una curva en el espacio contenida en S

Si $v = v_0 = cte$.

$$\Rightarrow \vec{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\hat{i} + y(u, v_0)\hat{j} + z(u, v_0)\hat{k}$$

$\Rightarrow C_{v_0}$: es una curva en el espacio contenida en S

A las curvas halladas anteriormente C_{u_0} y C_{v_0} , se las denomina **curvas reticulares**.



Campos Vectoriales

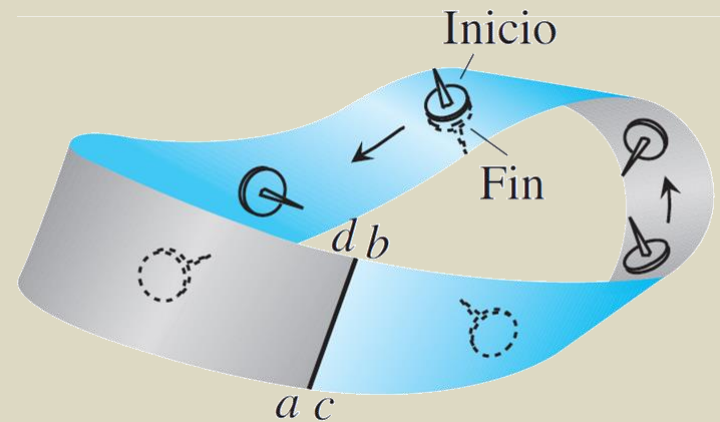
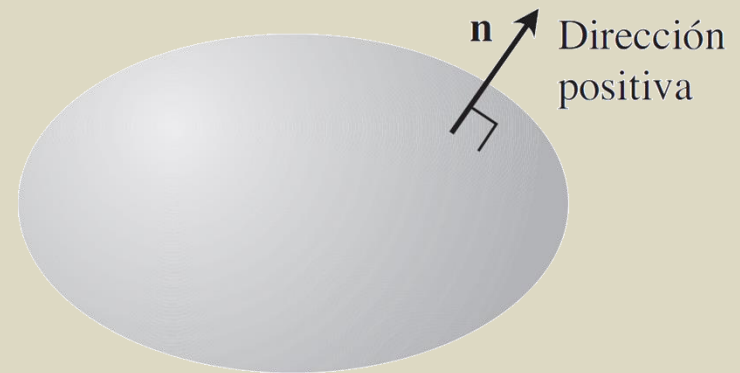
Superficie orientable (u orientada)

Una superficie S es **orientable**, o de dos lados, si es posible definir un campo \hat{n} de vectores normales unitarios a S que varíe continuamente con la posición. Cualquier porción de una superficie orientable también es orientable.

Las esferas y otras superficies cerradas suaves en el espacio (superficies suaves que encierran sólidos) son orientables. Por convención, sobre una superficie cerrada elegimos el vector normal unitario exterior \hat{n} apuntando *hacia afuera*, como la **dirección positiva** en cada punto.

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

Una superficie **no orientada** es la cinta de Möbius.



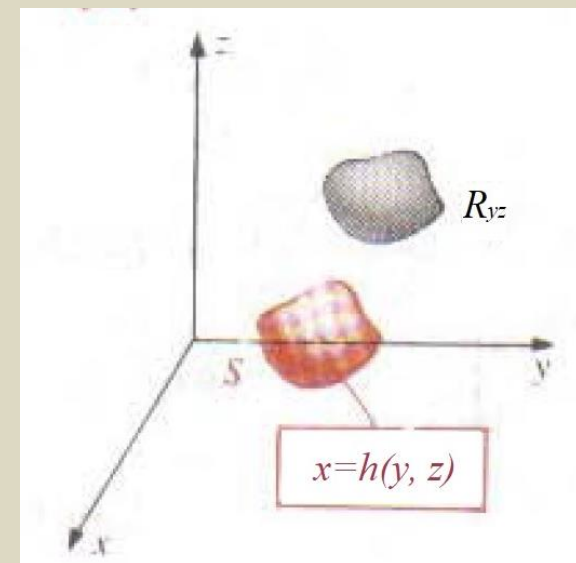
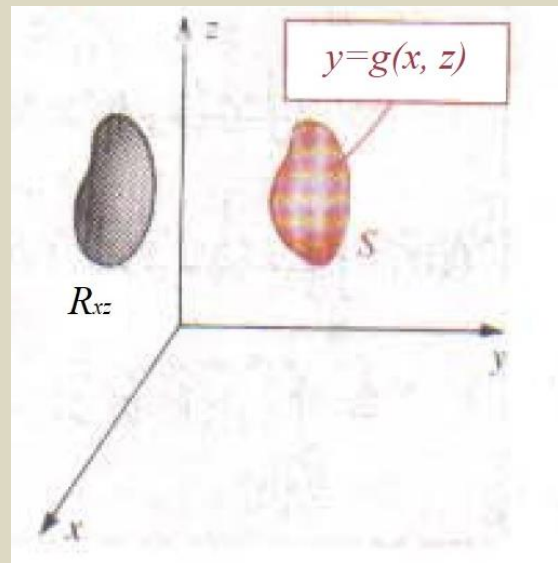
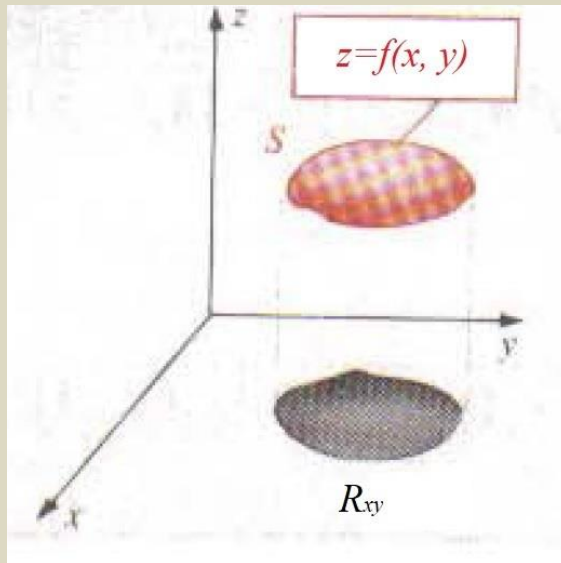
Campos Vectoriales

Superficies con proyección regular

Son aquellas superficies que están definidas como:

1. $z = f(x, y) \rightarrow$ Se proyecta a S sobre el plano coordenado $xy \rightarrow R_{xy}$
2. $y = g(x, z) \rightarrow$ Se proyecta a S sobre el plano coordenado $xz \rightarrow R_{xz}$
3. $x = h(y, z) \rightarrow$ Se proyecta a S sobre el plano coordenado $yz \rightarrow R_{yz}$

donde las funciones f , g y h tienen derivadas parciales continuas en las respectivas regiones.



Campos Vectoriales

1. $z = f(x, y) \rightarrow$ Se proyecta sobre el plano coordenado $xy \rightarrow Rxy$

$$\begin{cases} x \equiv x \\ y \equiv y \\ z = f(x, y) \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} + f(x, y)\hat{k}$$

2. $y = g(x, z) \rightarrow$ Se proyecta sobre el plano coordenado $xz \rightarrow Rxz$

$$\begin{cases} x \equiv x \\ y = g(x, z) \\ z \equiv z \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(x, z) = x\hat{i} + g(x, z)\hat{j} + z\hat{k}$$

3. $x = h(y, z) \rightarrow$ Se proyecta sobre el plano coordenado $yz \rightarrow Ryz$

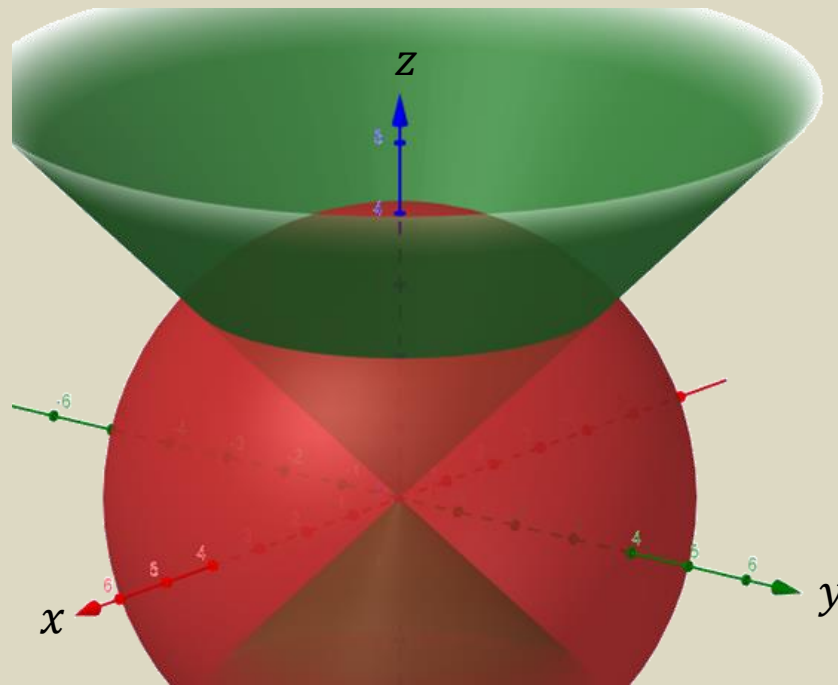
$$\begin{cases} x = h(y, z) \\ y \equiv y \\ z \equiv z \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(y, z) = h(y, z)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Campos Vectoriales

Ej 1. Parametrizar las siguientes superficies:

d) Porción de esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ en el interior del cono $x^2 + y^2 = z^2$

Se tiene una esfera centrada en el origen de radio $r = 4$ y un cono circular recto de eje z .



El enunciado del ejercicio indica parametrizar la porción del casquete esférico que se encuentra en el interior del cono.

Campos Vectoriales

Como se trata de una esfera, se podría utilizar las coordenadas esféricas para hacer el proceso de parametrización. Recordando que la esfera tiene un radio $r = 4$:

$$\begin{cases} x = 4\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = 4\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = 4\cos\varphi \end{cases}$$

Para completar la parametrización resta definir los intervalos de cada parámetro para que las ecuaciones representen solo la porción de superficie deseada.

θ : *Es el ángulo sobre el plano horizontal. Si se proyecta la porción de casquete sobre el plano xy , resultaría una circunferencia completa, es decir, que el ángulo θ recorrería una vuelta o un giro completo de 2π radianes.*

φ : *El ángulo de inclinación respecto del eje z . Como el eje pertenece a la porción de superficie, el ángulo iniciará en 0 y luego se inclinará hasta limitar con el cono. Como en el cono todas las variables tienen el mismo coef., sus trazas están inclinadas un áng. de 45° respecto del eje z .*

Con este análisis, se pueden definir los intervalos para completar la parametrización.

Campos Vectoriales

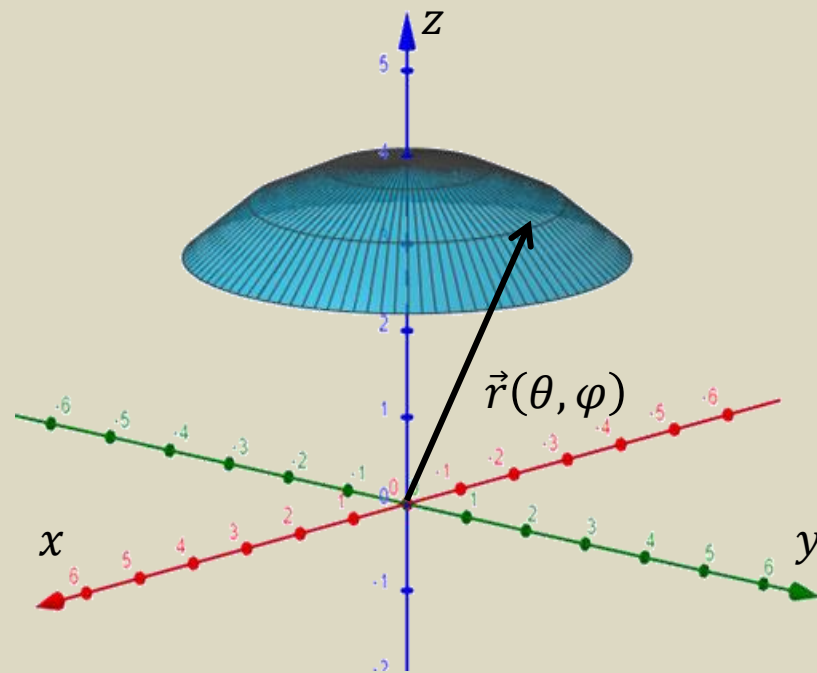
$$\begin{cases} x = 4\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = 4\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = 4\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 \leq \theta &\leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi &\leq \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

La función vectorial asociada:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = 4\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\vec{i} + 4\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\vec{j} + 4\cos\varphi\vec{k}$$

Utilizando Geogebra, para la representación de la superficie, eligiendo el comando «Superficie» e introduciendo las ecuaciones paramétricas recién definidas, el software graficará la superficie que el ejercicio nos indica.

La función vectorial \vec{r} , determinará cada uno de los puntos pertenecientes a la superficie, a medida que los parámetros θ y φ varíen.



Campos Vectoriales

Ej. 2. Identificar y graficar la superficie.

$$c) \vec{r}(u, v) = v \cos u \vec{i} + v \sin u \vec{j} + v^2 \vec{k} \quad \text{con} \quad \sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{6} ; 0 \leq u \leq 2\pi$$

Para identificar la expresión de una superficie, el proceso es similar al utilizado para hallar las exp. de las curvas, y se debe determinar las relaciones entre x, y, z , eliminando los parámetros.

Anotando las ecuaciones paramétricas de la función vectorial:

$$\begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = v^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Observando estas expresiones, son análogas a las coordenadas} \\ \text{polares, pero en lugar de } r \text{ y } \theta, \text{ tenemos los parámetros } u \text{ y } v. \end{array}$$

Elevando al cuadrado y sumando ambos miembros, queda:

$$x^2 + y^2 = v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u \longrightarrow x^2 + y^2 = v^2$$

Observando la última expresión para z :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = v^2 \\ z = v^2 \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = z$$

De esta forma queda determinada la relación entre las variables.

La expresión corresponde con la ecuación de un paraboloide circular de eje z , por lo tanto, esa es la superficie representada por la función vectorial \vec{r} .

Campos Vectoriales

Sin embargo, la porción de paraboloides a graficar dependerá de los intervalos definidos para cada uno de los parámetros.

***u:** Se encuentra dentro de identidades trigonométricas, se trata de un parámetro angular. Además, su intervalo $[0, 2\pi]$ deja claro que se trata de una vuelta o giro angular.*

***v:** Esta asociada con el radio de la base del paraboloides y la altura del mismo. Se puede utilizar su relación con z para definir la porción de superficie representada.*

Para $z = v^2$

$$\text{Si } \sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{6} \longrightarrow 2 \leq v^2 \leq 6 \longrightarrow 2 \leq z \leq 6$$

Porción de paraboloides entre las alturas $z = 2$ y $z = 6$.

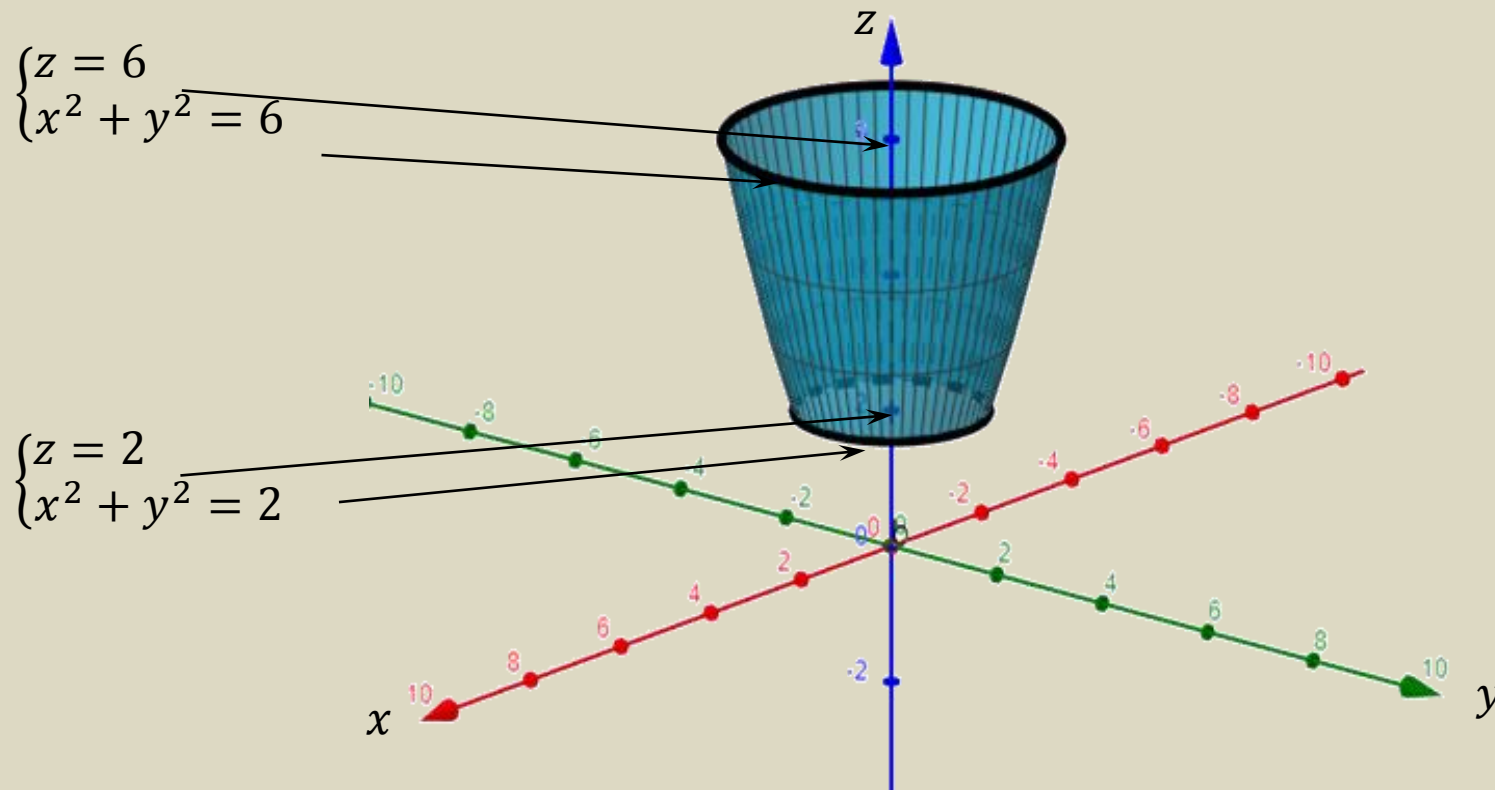
$$\text{Para } x^2 + y^2 = z$$

$$\text{Si } z = 2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$\text{Si } z = 6 \longrightarrow x^2 + y^2 = 6$$

Campos Vectoriales

Para la representación gráfica de S , se tiene una circunferencia de radio 1.41 para una altura $z = 2$ y una circunferencia de radio 2.45 en la altura $z = 6$.



Campos Vectoriales

Área de una superficie

$$\text{Área de } S: A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_k \Delta T_k = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_k |\bar{a} \wedge \bar{b}|$$

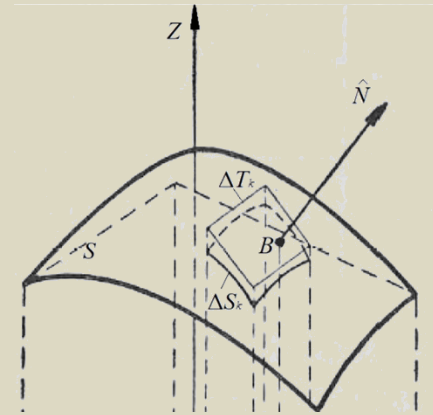
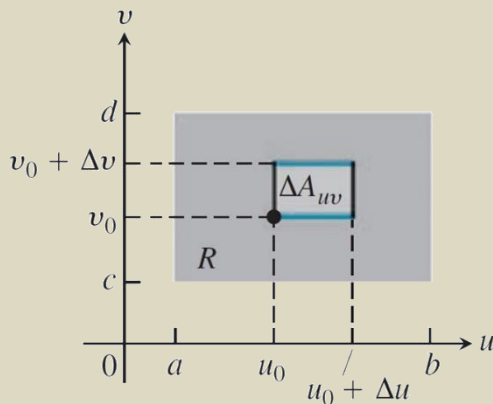
$$\Delta S_k \approx \Delta T_k = |\bar{a} \wedge \bar{b}|$$

$$\bar{a} = \Delta x_k \hat{i} + 0 \hat{j} + \Delta x_k \cdot f_x(x_k, y_k) \hat{k}$$

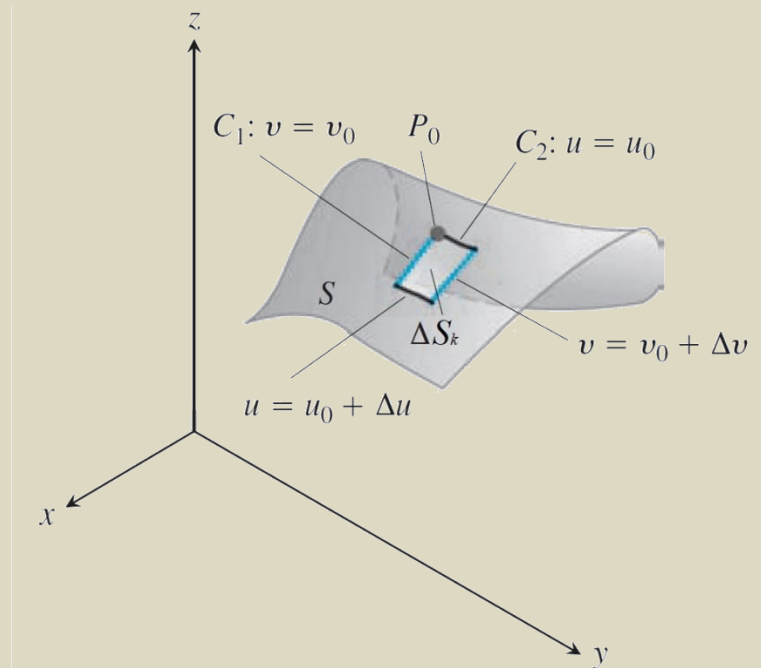
$$\bar{b} = 0 \hat{i} + \Delta y_k \hat{j} + \Delta y_k \cdot f_y(x_k, y_k) \hat{k}$$

Área de S para $z = f(x, y)$

$$A = \int \int_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} \cdot dA$$



$$S: \vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$$

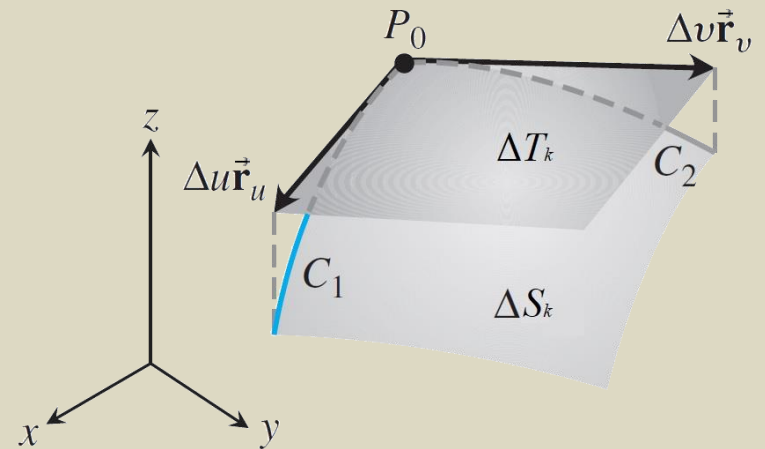
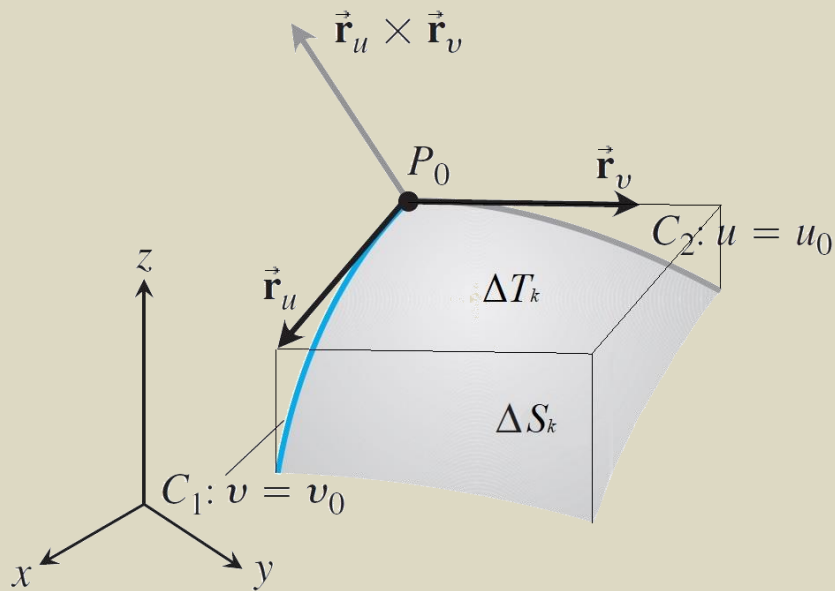
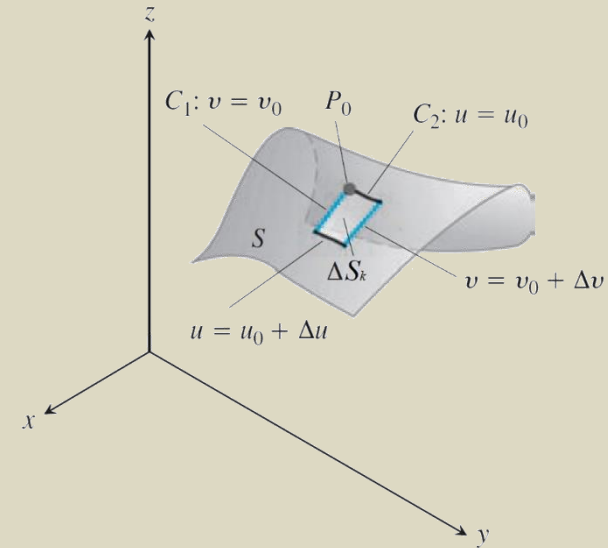


Campos Vectoriales

$$\Delta S_k \approx \Delta T_k = |\Delta u \cdot \vec{r}_u(u, v) \times \Delta v \cdot \vec{r}_v(u, v)|$$

$$\Delta T_k = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| \Delta u \cdot \Delta v$$

$$A = \int \int_S dS = \int \int_R |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| dA \quad \text{Área de } S$$



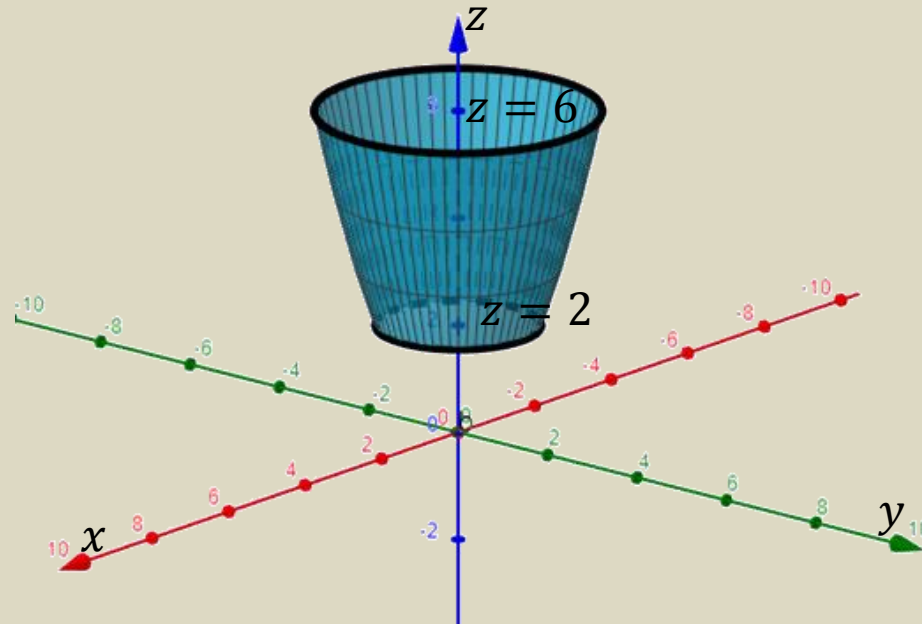
Campos Vectoriales

Ej. 3. Calcular el área de las siguientes superficies: b) Superficie del inciso «Ej.2.c)»

En el ejercicio anterior se identifica a la superficie dada por la siguiente función vectorial:

$$\vec{r}(u, v) = v \cos u \vec{i} + v \sin u \vec{j} + v^2 \vec{k} \quad \text{con } \sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{6} ; 0 \leq u \leq 2\pi$$

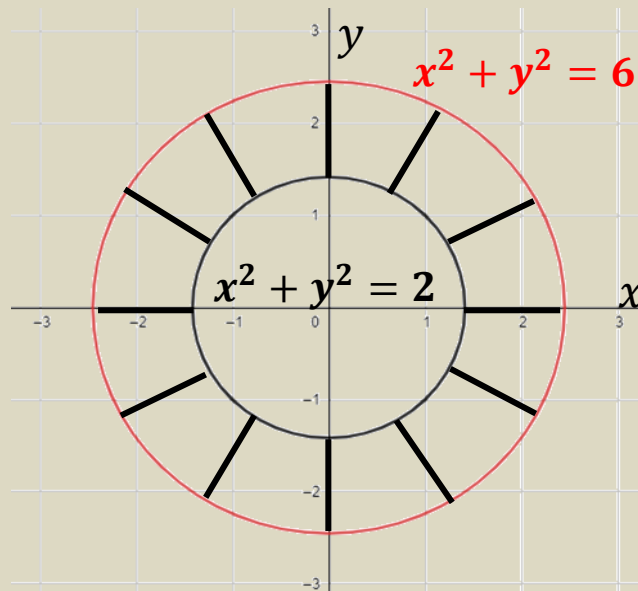
El resultado de la porción de paraboloides entre alturas $z = 2$ y $z = 6$, se lo puede visualizar en la figura:



Ahora calculando el área de la superficie como la proyección del paraboloides sobre el plano xy ,

Campos Vectoriales

resulta que la región R está limitada entre las curvas de nivel extremas $z = 2$ y $z = 6$, es decir, por las circunferencias cuyos radios son $r = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{6}$ respectivamente.



Como R es una región circular, es conveniente caracterizarla en coordenadas polares:

$$R: \{(r, \theta) \in R^2 / \sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{6}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Luego planteando la función para z y determinando sus derivadas parciales queda:

$$z = x^2 + y^2 \longrightarrow \begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = 2y \end{cases}$$

Campos Vectoriales

Por lo tanto, el área de la superficie estará dada por:

$$\int \int_R \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dA = \int \int_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA$$

Aplicando la transformación a coordenadas polares, queda:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta$$

Por sustitución:

$$u = 4r^2 + 1 \quad \int \sqrt{4r^2 + 1} r dr = \int \frac{\sqrt{u}}{8} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{12} = \frac{(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

$$du = 8r dr$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{12} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} d\theta$$

$$\frac{1}{12} \left\{ \left[4(\sqrt{6})^2 + 1 \right]^{\frac{3}{2}} - \left[4(\sqrt{2})^2 + 1 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{6} (25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}) \equiv A_S$$

Campos Vectoriales

El ejercicio se resolvió utilizando proyección regular y resultó un procedimiento similar al empleado en el práctico de integración múltiple. Otra manera de resolver el mismo ejemplo es usando la función vectorial \vec{r} que describe paramétricamente a la superficie:

$$\vec{r}(u, v) = v \cdot \cos u \vec{i} + v \cdot \sin u \vec{j} + v^2 \vec{k} \quad \text{Con } \sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{6} ; 0 \leq u \leq 2\pi$$

La integral a resolver será:

$$\iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dv du$$

Los intervalos de los parámetros coinciden con las coordenadas polares. Ahora, al calcular el módulo del producto vectorial queda:

$$\vec{r}_u = -v \sin u \vec{i} + v \cos u \vec{j} + 0 \vec{k} \quad \vec{r}_v = \cos u \vec{i} + \sin u \vec{j} + 2v \vec{k}$$

Campos Vectoriales

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -v \operatorname{senu} & v \operatorname{cosu} & 0 \\ \operatorname{cosu} & \operatorname{senu} & 2v \end{vmatrix} = 2v^2 \operatorname{cosu} \vec{i} + 2v^2 \operatorname{senu} \vec{j} - v \vec{k} \\ &= v(2v \operatorname{cosu} \vec{i} + 2v \operatorname{senu} \vec{j} - 1 \vec{k})\end{aligned}$$

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{v^2[4v^2 \cos^2 u + 4v^2 \operatorname{sen}^2 u + 1]} = v\sqrt{4v^2 + 1}$$

Entonces la integral resulta:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dv du = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4v^2 + 1} v dv du$$

Esta expresión final, coincide con el valor determinado para la integral resuelta anteriormente, pero en función de los parámetros.

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4v^2 + 1} v dv du = \frac{\pi}{6} (25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}) \equiv A_S$$

Campos Vectoriales

Diferencias entre ambas expresiones:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4v^2 + 1} v dv du$$

Al hacer coincidir los parámetros con las coordenadas polares, tanto los límites como la función a integrar coinciden.

Sin embargo, en la primer integral, está presente la raíz cuadrada de las derivadas parciales cuando tenemos proyección regular, utilizando coordenadas polares, el $dA = r dr d\theta$.

En cambio, en la segunda integral, utilizando la parametrización, resulta que $dA = du dv$. Visualizando la analogía entre v y r , en cada una de la integrales dobles, se resalta que v surge del cálculo del módulo del producto vectorial $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$ y no forma parte del diferencial de área.

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \underbrace{\sqrt{4r^2 + 1}}_{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \underbrace{r dr d\theta}_{dA}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \underbrace{\sqrt{4v^2 + 1}}_{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \underbrace{v dv du}_{dA}$$

Campos Vectoriales

Integrales de superficie

Sea S una superficie definida paramétricamente en una región R en el plano uv , por

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} \quad \forall (u, v) \in R$$

y sea $g(x, y, z)$ una función escalar continua, en una región del espacio que contiene a la superficie S , se define la *integral de superficie de g sobre la superficie de S* , si existe el sig. límite

$$\int \int_S g(x, y, z) dS = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_k g(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k$$

$$S: \vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$$

$$\Delta S_k \approx dS = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| dA$$

$$\text{Área de } S: A = \int \int_S dS = \int \int_R |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| dA$$

$$\int \int_S g(x, y, z) dS = \int \int_R g(x, y, z) |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| dA$$

$$\int \int_S g(x, y, z) dS = \int \int_R g(x, y, z) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

Campos Vectoriales

Ej. 4. Calcular $\iint_S g(x, y, z) dS$

b) $g(x, y, z) = z$ sobre el cilindro $y = z^2$; $0 \leq x \leq 3$; $0 \leq z \leq 4$

El procedimiento de resolución es análogo al realizado en el Ej. 3. para calcular área de superficie. En este caso, se debe añadir a la integral la función f dada y la integral sobre S se puede determinar empleando proyección regular o por parametrización.

Lo conveniente es utilizar proyección regular, para facilitar el proceso de parametrización, y de esta manera desarrollar el ejercicio utilizando la función vectorial y el módulo del producto vectorial $|\vec{r}_x \times \vec{r}_z|$.

Como la superficie es $y = f(x, z)$, las ecuaciones paramétricas y la función vectorial son:

$$\begin{cases} x \\ y = f(x, z) = z^2 \\ z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{matrix} \quad \vec{r}(x, z) = x\vec{i} + z^2\vec{j} + z\vec{k}$$

Haciendo coincidir los parámetros con las variables del plano de proyección (xz), los intervalos se pueden utilizar como límites de integración, tal cual los da el enunciado del ejercicio.

Campos Vectoriales

Se continúa desarrollando las derivadas parciales de la función vectorial:

$$\vec{r}(x, z) = x\vec{i} + z^2\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}_x = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_z = 0\vec{i} + 2z\vec{j} + 1\vec{k}$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 1\vec{j} + 2z\vec{k} \longrightarrow |\vec{r}_x \times \vec{r}_z| = \sqrt{1 + 4z^2}$$

Se coloca la función en términos de los parámetros:

$$g(x, y, z) = g(x, z^2, z) = z$$

La función coincide con uno de los parámetros.

Finalmente, la integral será:

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \int_0^4 \int_0^3 z \sqrt{1 + 4z^2} dx dz$$

$$\int_0^4 \int_0^3 z \sqrt{1 + 4z^2} dx dz = \int_0^4 x \Big|_0^3 z \sqrt{1 + 4z^2} dz = 3 \int_0^4 z \sqrt{1 + 4z^2} dz =$$

$$\begin{aligned} u &= 4z^2 + 1 \\ du &= 8z dz \end{aligned} \quad \int \sqrt{4z^2 + 1} z dz = \int \frac{\sqrt{u}}{8} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{12} = \frac{(4z^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

Campos Vectoriales

$$3 \int_0^4 z \sqrt{1 + 4z^2} dz = 3 \left[\frac{(4z^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{12} \right]_0^4 = \frac{1}{4} \left\{ [4(4)^2 + 1]^{\frac{3}{2}} - [4(0)^2 + 1]^{\frac{3}{2}} \right\} = \frac{1}{4} (65^{\frac{3}{2}} - 1)$$

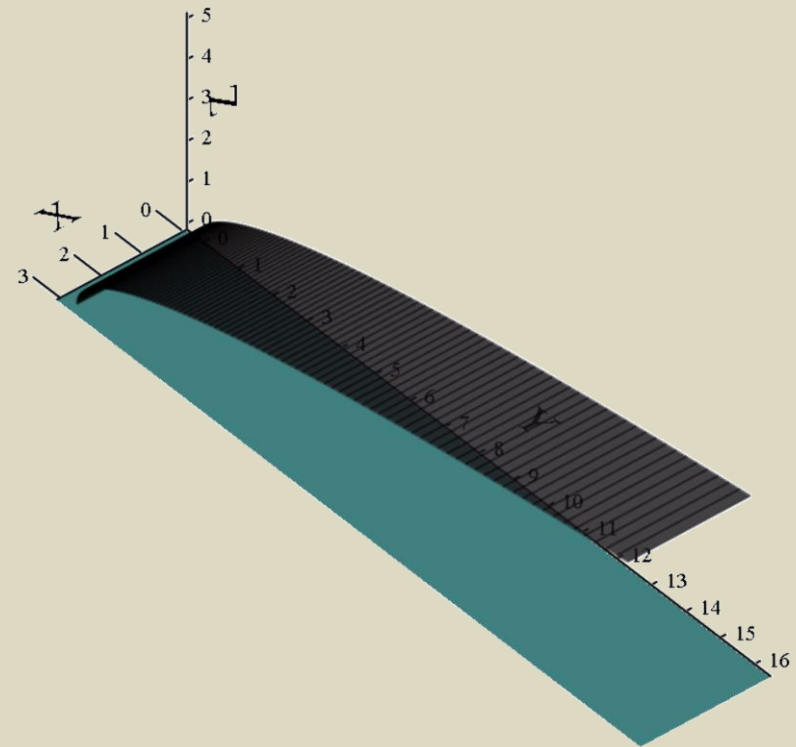
Se puede representar gráficamente, a modo de práctica, la superficie sobre la cual se integra:

$$y = z^2 ; 0 \leq x \leq 3 ; 0 \leq z \leq 4$$

S es un cilindro parabólico, que surge de proyectar la parábola, ubicada en el plano yz, a lo largo del eje x.

Observando el intervalo de x, el cilindro sólo se proyecta entre 0 y 3.

Como z tiene intervalo positivo, solo es una parte de la rama del cilindro parabólico.



Campos Vectoriales

Flujo de un campo vectorial

Sea $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial continuo definido sobre una superficie S (orientada) mediante el vector normal unitario \hat{n} , cuyas componentes son funciones continuas de las variables x, y y z .

El flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ a través de la superficie S está dado por

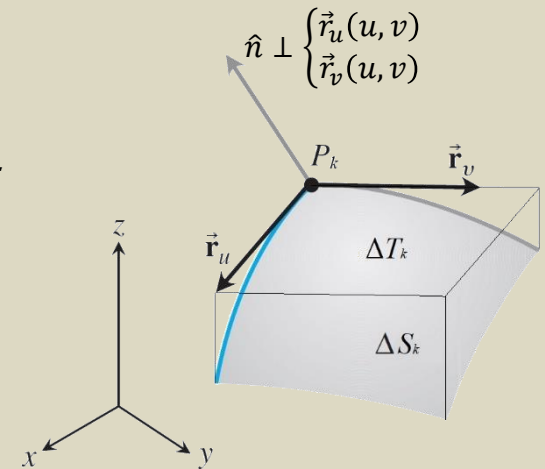
$$\text{Flujo de } \vec{F}: \int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

Si S es una superficie paramétrica dada por $\vec{r}(u, v)$ entonces \hat{n} , vector normal unitario a la sup. S en P_k , resulta

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)}{|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|}$$

y la integral de flujo se evalúa mediante

$$\begin{aligned} \int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= \int \int_R \left\{ \vec{F}[\vec{r}(u, v)] \cdot \frac{\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)}{|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|} \right\} |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| dA \\ &= \int \int_R \vec{F}[\vec{r}(u, v)] \cdot [\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)] dA \end{aligned}$$



Campos Vectoriales

Si S es la gráfica de $z = f(x, y)$, tiene una proyección regular sobre el plano xy , y se define $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ y el vector normal unitario \hat{n} resulta:

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}g(x, y, z)}{|\vec{\nabla}g(x, y, z)|} = \frac{-f_x(x, y)\hat{i} - f_y(x, y)\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}$$

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int_{R_{xy}} \{\vec{F}[x, y, f(x, y)]\} \cdot [-f_x(x, y)\hat{i} - f_y(x, y)\hat{j} + \hat{k}] dA$$

Siendo $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$ obtenemos

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int_{R_{xy}} \{-M[x, y, f(x, y)] \cdot f_x(x, y) - N[x, y, f(x, y)] \cdot f_y(x, y) + P[x, y, f(x, y)]\} dA$$

Expresiones análogas se obtienen para los casos en que la superficie esté dada por $y = g(x, z)$ o $x = h(y, z)$, en que tendrá una proyección regular sobre los planos coordenados xz e yz , respectivamente.

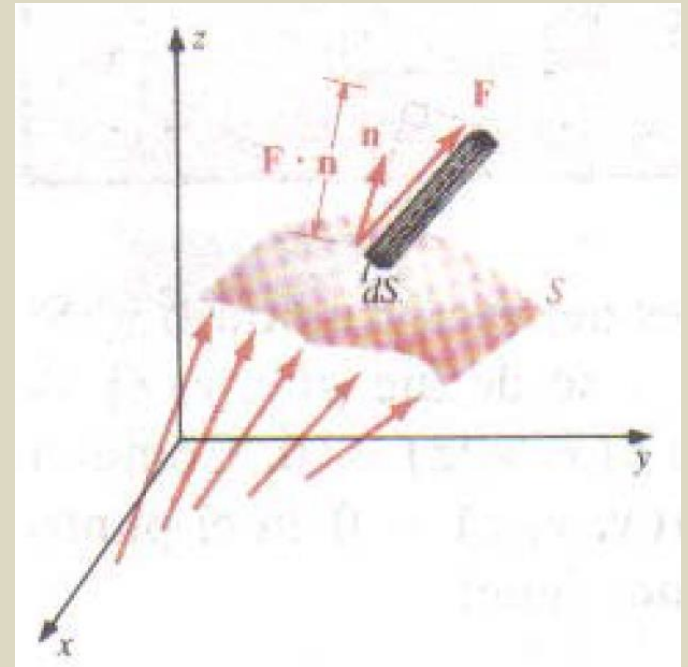
Campos Vectoriales

Interpretación de la integral de flujo

Si \vec{F} es un campo de velocidades de un fluido, y S una membrana delgada a través de la cual se filtra el fluido, *la integral de flujo determina el volumen de fluido que atraviesa a S por unidad de tiempo*, es decir el flujo de \vec{F} a través de S .

Si se trata de una superficie cerrada S , el flujo mide el desplazamiento neto hacia afuera por unidad de tiempo.

Si el resultado es *positivo* se dice que hay una *fuentes* de \vec{F} , y si es *negativo* se dice que hay un *sumidero*.



Campos Vectoriales

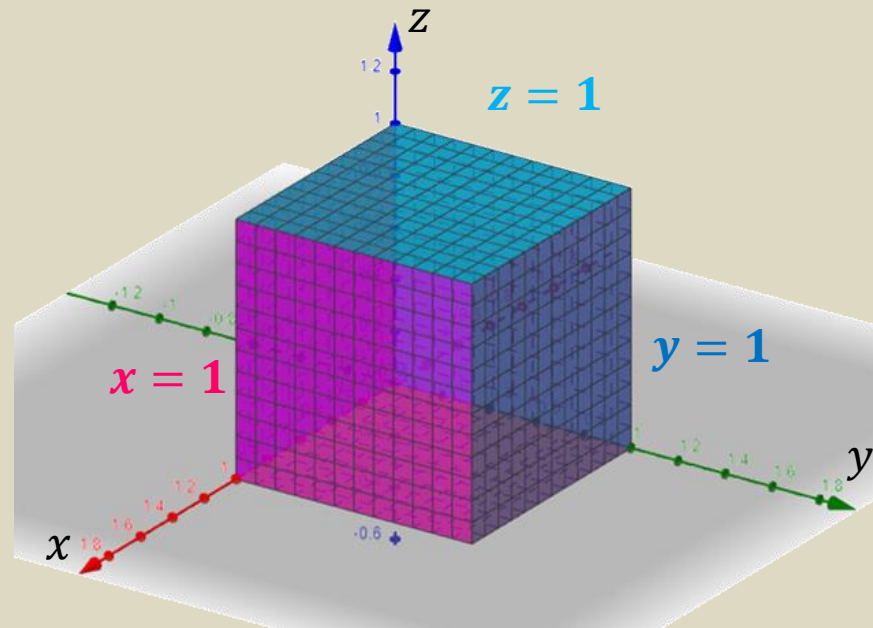
Ej. 5. Calcular la integral de flujo $\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S}$

c) $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2, z)$ Sobre las caras del cubo: $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$; $0 \leq z \leq 1$.

La superficie S es un cubo, y como tal, posee 6 caras, debiendo separar la integral de flujo en la suma de 6 integrales de flujo.

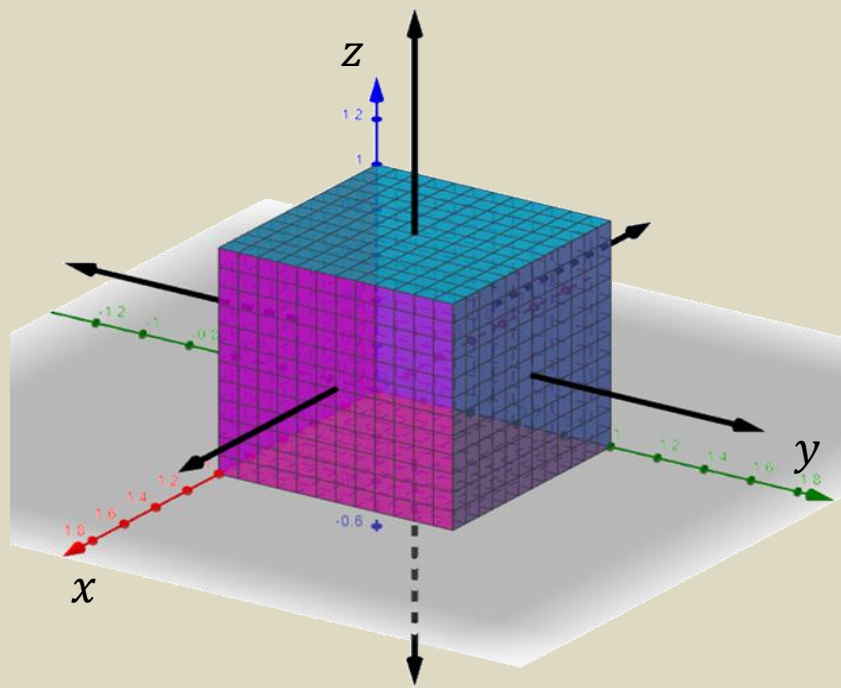
Cada una de las caras del cubo están asociadas a la ec. de un plano respectivamente, las cuales son:

$$x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$$



Campos Vectoriales

Se define el vector normal exterior a cada cara del cubo. Los planos de cada una de las caras del cubo resultan perpendiculares a cada uno de los ejes coordenados.



Para $x = 0$: $\vec{n}: (-1, 0, 0)$

Para $x = 1$: $\vec{n}: (1, 0, 0)$

Para $y = 0$: $\vec{n}: (0, -1, 0)$

Para $y = 1$: $\vec{n}: (0, 1, 0)$

Para $z = 0$: $\vec{n}: (0, 0, -1)$

Para $z = 1$: $\vec{n}: (0, 0, 1)$

Todos los vectores normales atraviesan la superficie apuntando hacia afuera, coincidiendo con los ejes coordenados x, y y z . Se aclara que no es necesario anotar cada vector normal, sin embargo, facilita la visualización y la comprensión del problema.

Campos Vectoriales

Se comienza a calcular cada una de las caras. Para ellos, se parametriza la superficie utilizando proyección regular y luego calculamos el vector normal por medio del producto vectorial de las derivadas parciales.

$$\text{Para } x = 0: \begin{cases} x = 0 & 0 \leq y \leq 1 \\ y = y & 0 \leq z \leq 1 \\ z = z \end{cases} \quad \vec{r}(y, z) = 0\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \begin{aligned} \vec{r}_y &= 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_z &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_y \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

El vector normal a la superficie en $x = 0$, apunta hacia adentro del cubo. Como se necesita el vector exterior, se cambian los signos de las componentes de \vec{n} .

$$\longrightarrow \vec{n} = -1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = (-1, 0, 0) \text{ Tal cual se definió anteriormente.}$$

Es importante primero graficar la superficie para identificar hacia que lado apunta \vec{n} .

Posteriormente se reemplaza $x = 0$, en el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2, z) \longrightarrow \vec{F}(0, y, z) = (0, y^2, z)$$

Campos Vectoriales

Luego se realiza el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\therefore \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S 0 dS = 0$$

Para $x = 1$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{matrix} \quad \vec{r}(y, z) = 1\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \begin{matrix} \vec{r}_y = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_z = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} \end{matrix}$

$$\vec{r}_y \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

El vector normal a la superficie en $x = 1$, en este caso apunta hacia afuera, por lo tanto, no se modifican los signos de las componentes de \vec{n} .

Posteriormente se reemplaza $x = 0$, en el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2, z) \longrightarrow \vec{F}(1, y, z) = (y, y^2, z)$$

A continuación, se realiza el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(1, y, z) \cdot \vec{n} = (1, y^2, z) \cdot (1, 0, 0) = y$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 y \, dy \, dz = \frac{1}{2}$$

Campos Vectoriales

Para $y = 0$:

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{matrix} \quad \vec{r}(x, z) = x\vec{i} + 0\vec{j} + z\vec{k} \quad \begin{matrix} \vec{r}_x = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_z = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 1\vec{j} + 0\vec{k}$$

El vector normal a la superficie en $y = 0$, en este caso apunta hacia afuera, por lo tanto, no se modifican los signos de las componentes de \vec{n} .

Posteriormente se reemplaza $y = 0$ en el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2, z) \longrightarrow \vec{F}(x, 0, z) = (0, 0, z)$$

Luego se realiza el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(x, 0, z) \cdot \vec{n} = (0, 0, z) \cdot (0, -1, 0) = 0$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Campos Vectoriales

Para $y = 1$:

$$\begin{cases} x = x \\ y = 1 \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{matrix} \quad \vec{r}(x, z) = x\vec{i} + 1\vec{j} + z\vec{k} \quad \begin{matrix} \vec{r}_x = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_z = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 1\vec{j} + 0\vec{k}$$

El vector normal a la superficie en $y = 1$, apunta hacia adentro del cubo. Como se necesita el vector exterior, se cambian los signos de las componentes de \vec{n} .

Posteriormente se reemplaza $y = 1$ en el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2, z) \longrightarrow \vec{F}(x, 1, z) = (x, 1, z)$$

Luego se realiza el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(x, 1, z) \cdot \vec{n} = (x, 1, z) \cdot (0, 1, 0) = 1$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 1 \, dx \, dz = 1$$

Campos Vectoriales

Para $z = 0$:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{matrix} \quad \vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k} \quad \begin{matrix} \vec{r}_x = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_y = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$$

El vector normal a la superficie en $z = 0$, apunta hacia adentro del cubo. Como se necesita el vector exterior, se cambian los signos de las componentes de \vec{n} .

Posteriormente se reemplaza $z = 0$ en el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2, z) \longrightarrow \vec{F}(x, y, 0) = (xy, y^2, 0)$$

Luego se realiza el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(x, y, 0) \cdot \vec{n} = (xy, y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Campos Vectoriales

$$\text{Para } \mathbf{z} = 1: \begin{cases} x = x & 0 \leq x \leq 1 \\ y = y & 0 \leq y \leq 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + 1\vec{k} \quad \begin{aligned} \vec{r}_x &= 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_y &= 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$$

El vector normal a la superficie en $z = 1$, en este caso apunta hacia afuera, por lo tanto, no se modifican los signos de las componentes de \vec{n} .

Posteriormente se reemplaza $z = 1$ en el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2, z) \longrightarrow \vec{F}(x, y, 1) = (xy, y^2, 1)$$

Luego se realiza el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(x, y, 1) \cdot \vec{n} = (xy, y^2, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 1 \, dx \, dy = 1$$

Sumando todos los resultados, de las integrales de flujo, de cada una de las superficies, queda:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0 + \frac{1}{2} + 0 + 1 + 0 + 1 = \frac{5}{2}$$

Campos Vectoriales

Teorema de Gauss o de la divergencia

Sea Q una región en el espacio acotada por una superficie cerrada S , y sea \hat{n} un vector normal unitario exterior a S en el punto $P(x, y, z) \in S$. Si $\vec{F}(x, y, z)$ es una función vectorial con derivadas parciales continuas en todo punto perteneciente a Q , entonces

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_Q \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \int \int \int_Q \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

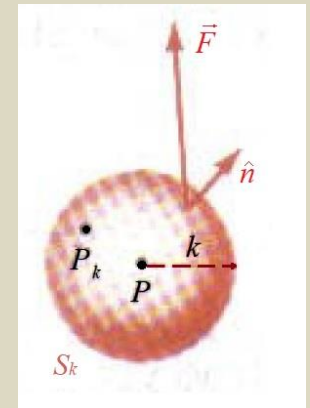
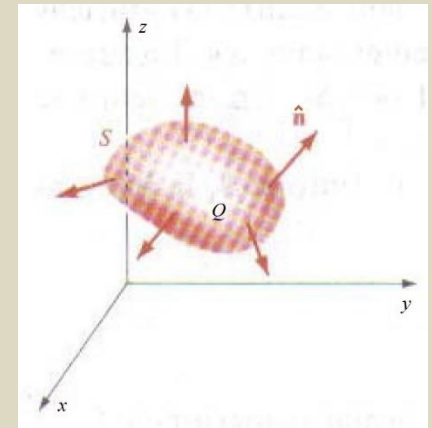
el flujo de $\vec{F}(x, y, z)$ a través de la superficie S , en la dirección de \hat{n} , es igual a la integral triple de la $\operatorname{div} \vec{F}$ sobre Q .

Interpretación de la divergencia

Sea P un punto arbitrario y $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial continuo en una región que contiene a P en su interior. Sea S_k la frontera de una esfera de radio k con centro en P .

La divergencia de \vec{F} en P es el límite del flujo por unidad de volumen a través de la esfera, cuando el radio de la esfera $k \rightarrow 0$.

$$\operatorname{div}(\vec{F})|_P = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{V_k} \int \int_{S_k} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$



Campos Vectoriales

Ejemplo 1. Aplicar el Teorema de Gauss, para calcular el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z^3\hat{k}$$

Siendo S , la frontera de una región en el espacio Q , acotada por:

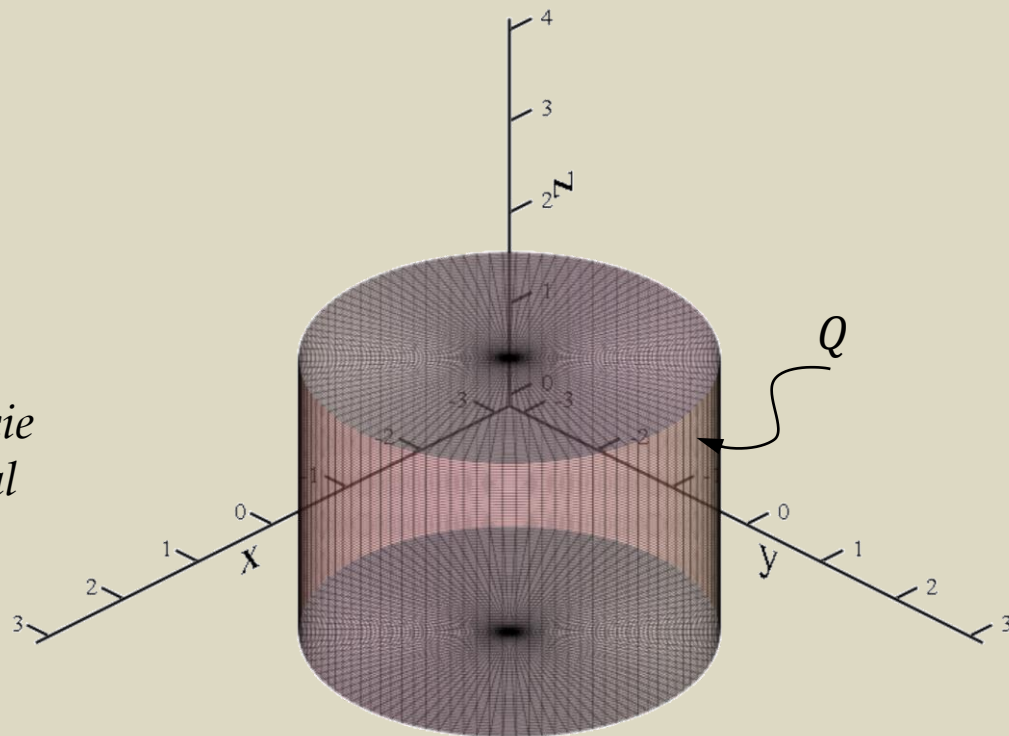
$$Q: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_Q \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

El flujo de $\vec{F}(x, y, z)$ a través de la superficie S , en la dirección de \hat{n} , es igual a la integral triple de la $\operatorname{div}\vec{F}$ sobre Q .

Recordando la definición de $\operatorname{div}(\vec{F})$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$



Campos Vectoriales

Las funciones escalares del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ son:

$$M(x, y, z) = x^3 \quad ; \quad N(x, y, z) = y^3 \quad ; \quad P(x, y, z) = z^3$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 3x^2 \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 3y^2 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

$$Q: \{(r, \theta, z) \in R^3 / 0 \leq r \leq 2 ; 0 \leq \theta, \leq 2\pi ; 0 \leq z \leq 3\}$$

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_Q \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \int \int \int_Q (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dV$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 3(r^2 + z^2) r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 3(r^3 + rz^2) dz dr d\theta$$

$$3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(r^3 z + r \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^3 dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^3 + 9r) dr d\theta$$

Campos Vectoriales

$$3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} r^4 + \frac{9}{2} r^2 \right) \Big|_0^2 d\theta = 3 \int_0^{2\pi} (12 + 18) d\theta$$

$$3 \cdot 30 \int_0^{2\pi} d\theta = 90 (\theta) \Big|_0^{2\pi} = 180\pi$$

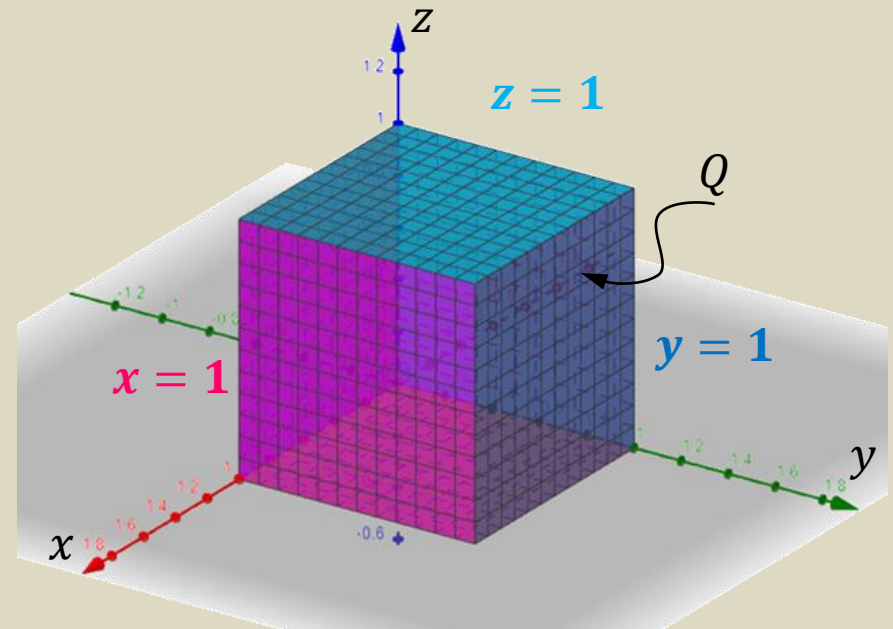
Ejemplo 2. Verificar el cumplimiento del Teorema de Gauss, siendo el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x + 3z)\hat{i} + (x^2y - 1)\hat{j} - (xz^2)\hat{k}$$

donde Q es un recinto cúbico, de lado unitario, indicado en la figura.

$$Q: \begin{cases} x = 0 \text{ (lateral)} \\ x = 1 \text{ (lateral)} \\ y = 0 \text{ (lateral)} \\ y = 1 \text{ (lateral)} \\ z = 0 \text{ (base)} \\ z = 1 \text{ (techo)} \end{cases}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_Q \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$



Campos Vectoriales

Las funciones escalares del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ son:

$$M(x, y, z) = 2x + 3z; \quad N(x, y, z) = x^2y - 1; \quad P(x, y, z) = -xz^2$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2 \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial y} = x^2 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -2xz$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2 + x^2 - 2xz$$

$$Q: \{(x, y, z) \in R^3 / 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1\}$$

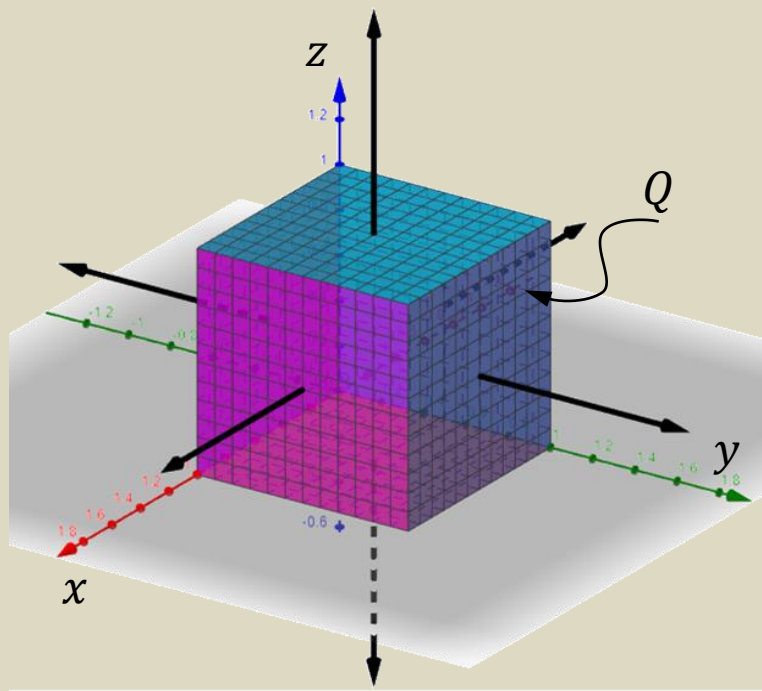
$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_Q \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \int \int \int_Q (2 + x^2 - 2xz) dV$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2 + x^2 - 2xz) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (2z + x^2z - xz^2) \Big|_0^1 dy dx$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (2 + x^2 - x) dy dx = \int_0^1 (2 + x^2 - x) dx = \left(2x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{6}$$

Campos Vectoriales

Para completar la verificación del Teorema de Gauss, resta calcular la integral de flujo y comparar el resultado con la integral triple asociada al recinto Q de la $\text{div}(\vec{F})$



Para $x = 0 \Rightarrow \hat{n}: (-1, 0, 0)$

Para $x = 1 \Rightarrow \hat{n}: (1, 0, 0)$

Para $y = 0 \Rightarrow \hat{n}: (0, -1, 0)$

Para $y = 1 \Rightarrow \hat{n}: (0, 1, 0)$

Para $z = 0 \Rightarrow \hat{n}: (0, 0, -1)$

Para $z = 1 \Rightarrow \hat{n}: (0, 0, 1)$

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \int \int_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \dots + \int \int_{S_6} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_Q \text{div}(\vec{F}) dV$$

Campos Vectoriales

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x + 3z)\hat{i} + (x^2y - 1)\hat{j} - (xz^2)\hat{k}$$

Para $z = 0$

$$\hat{n} \equiv -\hat{k}: (0, 0, -1) \quad \therefore \quad \vec{F} \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} 0 dS = 0$$

Para $z = 1$

$$\hat{n} \equiv \hat{k}: (0, 0, 1) \quad \therefore \quad \vec{F} \cdot \hat{n} = -x \Rightarrow \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 -x dy dx = \int_0^1 -x dx = \left(-\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

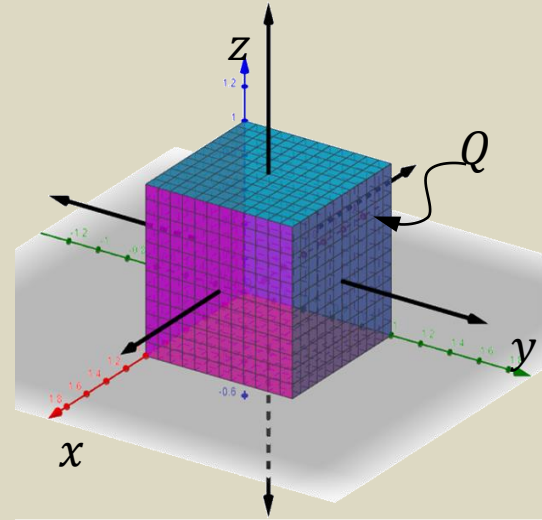
Para $y = 0$

$$\hat{n} \equiv -\hat{j}: (0, -1, 0) \quad \therefore \quad \vec{F} \cdot \hat{n} = 1 \Rightarrow \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 1 dz dx = 1$$

Para $y = 1$

$$\hat{n} \equiv \hat{j}: (0, 1, 0) \quad \therefore \quad \vec{F} \cdot \hat{n} = x^2 - 1 \Rightarrow \iint_{S_4} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 - 1) dz dx = \int_0^1 (x^2 - 1) dx$$

$$\iint_{S_4} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$



Campos Vectoriales

Para $x = 0$ $\vec{F}(x, y, z) = (2x + 3z)\hat{i} + (x^2y - 1)\hat{j} - (xz^2)\hat{k}$

$$\hat{n} \equiv -\hat{i}: (-1, 0, 0) \quad \therefore \vec{F} \cdot \hat{n} = -3z \Rightarrow \iint_{S_5} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 -3z dy dz =$$

$$\iint_{S_5} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^1 -3z dz = \left(-3 \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{3}{2}$$

Para $x = 1$

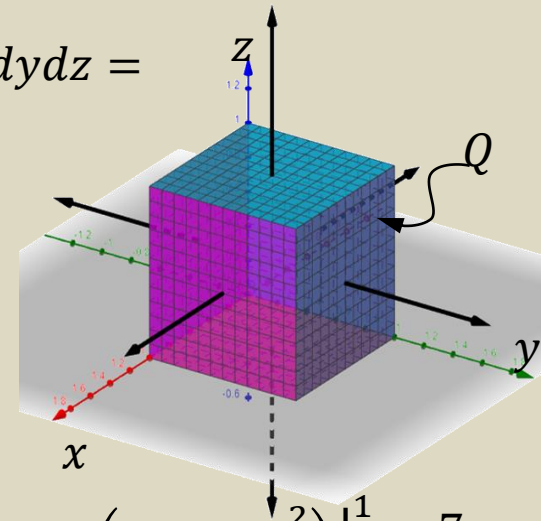
$$\hat{n} \equiv \hat{i}: (1, 0, 0) \quad \therefore \vec{F} \cdot \hat{n} = 2 + 3z \Rightarrow$$

$$\iint_{S_6} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 (2 + 3z) dy dz = \int_0^1 (2 + 3z) dz \iint_{S_6} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \left(2z + 3 \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{2}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dS + \dots + \iint_{S_6} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{11}{6} = \iiint_Q \text{div}(\vec{F}) dV}$$

Por lo tanto, se verifica el cumplimiento del Teorema de Gauss



Campos Vectoriales

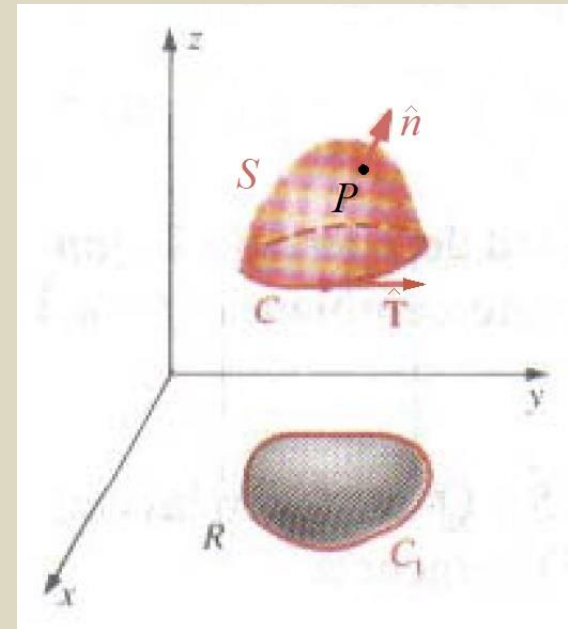
Teorema de Stokes

Sea S la representación gráfica de la función $z = f(x, y)$, tal que f tiene derivadas parciales primeras continuas.

Sea C_1 la proyección horizontal de la curva C , siendo C_1 la frontera de la región R . Si $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales primeras continuas en una región del espacio que contiene a S , entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{T} \cdot ds = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} dS \quad d\vec{r} = \hat{T} \cdot ds$$

La integral curvilínea de la componente tangencial del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ a lo largo de la curva C , recorrida un sola vez en sentido positivo es igual a la integral de superficie sobre S de la componente normal del $\text{rot} \vec{F}$.



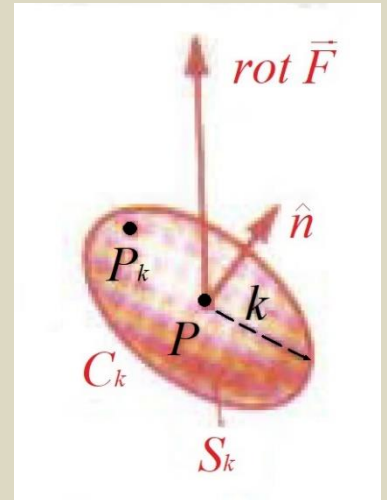
Campos Vectoriales

Interpretación del rotor

Sea P un punto cualquiera, sea S_k el disco circular de radio k con centro en P y sea C_k la frontera de S_k .

$$\left. \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} \right|_P = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\pi k^2} \oint_{C_k} \vec{F} \cdot \hat{T} \cdot ds$$

Si $\vec{F}(x, y, z)$ es el campo de velocidades de un fluido, entonces $\left. \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} \right|_P$ es la circulación del fluido, por unidad de longitud, alrededor del borde de un disco circular perpendicular a \hat{n} . Alcanzará su máximo valor cuando \hat{n} sea paralelo al $\text{rot} \vec{F}$.



Campos Vectoriales

Ejemplo 3. Verificar el cumplimiento del Teorema de Stokes, si el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (3z)\hat{i} + (4x)\hat{j} + (2y)\hat{k}$$

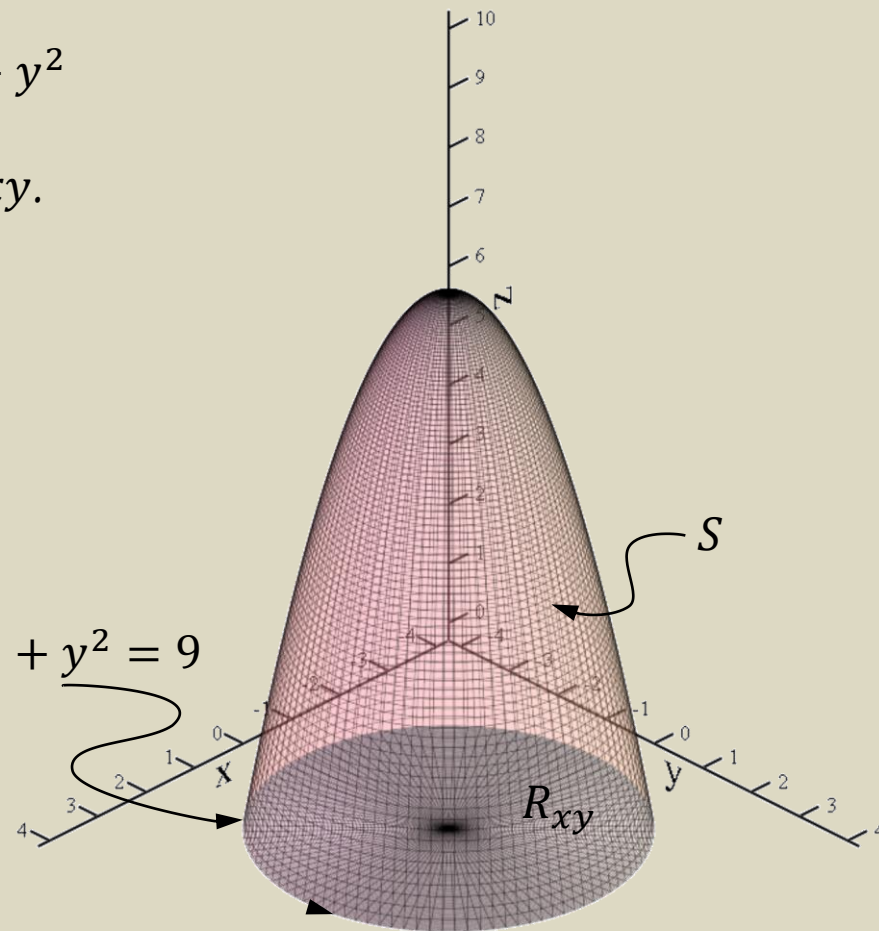
Siendo S la porción de paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ ubicado por encima del plano horizontal xy y la curva C es la traza del paraboloide con el plano xy .

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot \hat{T} \cdot ds = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

$$C: \begin{cases} z = 0 \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow C: x^2 + y^2 = 9$$

Solución. Para la verificación del Teorema de Stokes, se comienza determinando el valor de la integral de línea

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C 3zdx + 4xdy + 2ydz$$



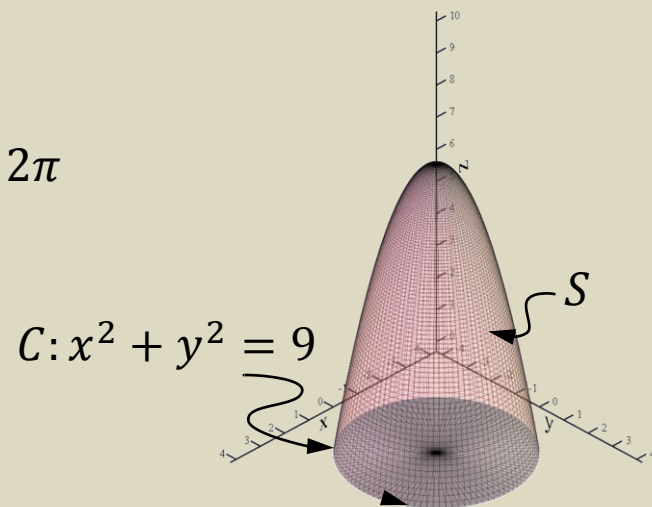
Campos Vectoriales

Planteando la parametrización de la curva C , se obtiene

$$C: \begin{cases} x = 3\cos t & \Rightarrow dx = -3(\sin t)dt \\ y = 3\sin t & \Rightarrow dy = 3(\cos t)dt \\ z = 0 & \Rightarrow dz = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 2\pi$$

Reemplazando cada una de las componentes de \vec{F} y las ec. paramétricas de C , en la integral de línea queda

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_C 3zdx + 4xdy + 2ydz = \oint_C 4xdy \\ &= \int_0^{2\pi} 4(3\cos t) [3(\cos t)dt] = 36 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t)dt = 36 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)dt \\ &= 18 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 18 \cdot 2\pi + 0 = 36\pi \end{aligned}$$



Campos Vectoriales

Para finalizar la verificación, queda calcular la sig. integral de superficie

$$\int \int_S \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

Donde se determinará su resultado utilizando la proyección regular sobre el plano xy . Definiendo la función

$$g(x, y, z) = z - (9 - x^2 - y^2) = 0$$

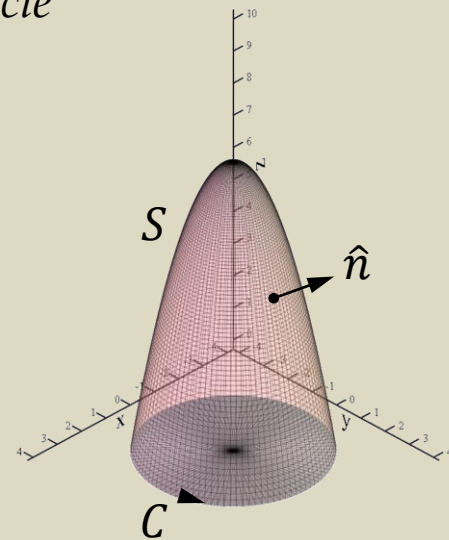
$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$$

el vector normal unitario \hat{n} a S , resulta

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} g(x, y, z)}{|\vec{\nabla} g(x, y, z)|} = \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{[2x]^2 + [2y]^2 + 1}} = \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

recordando la expresión para el dS

$$dS = \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA = \sqrt{[-2x]^2 + [-2y]^2 + 1} dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA$$



Campos Vectoriales

Luego se calcula el $\text{rot}\vec{F}$

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 4x & 2y \end{vmatrix} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\text{rot}\vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{(2x\hat{i} + 2y\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = \frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

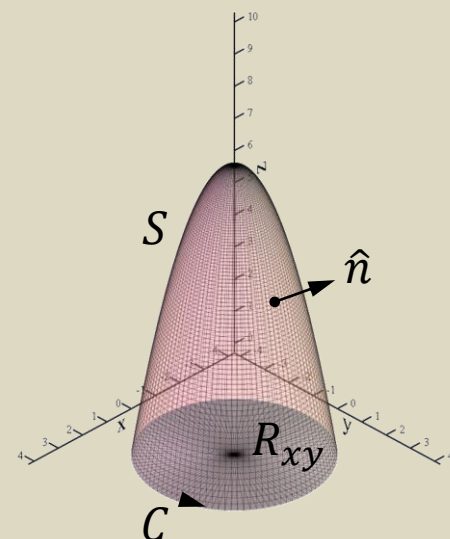
$$\int \int_S \text{rot}\vec{F} \cdot \hat{n} dS = \int \int_{R_{xy}} \left(\frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right) \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA = \int \int_{R_{xy}} (4x + 6y + 4) dA$$

Para determinar el resultado de la integral doble, adoptamos coordenadas polares

$$R_{xy}: \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 3; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\int \int_{R_{xy}} (4x + 6y + 4) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4r\cos\theta + 6r\sin\theta + 4)r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4r^2\cos\theta + 6r^2\sin\theta + 4r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3}r^3\cos\theta + 2r^3\sin\theta + 2r^2 \right) \Big|_0^3 d\theta$$



Campos Vectoriales

$$\int_0^{2\pi} (36\cos\theta + 54\operatorname{sen}\theta + 18)d\theta = (36\operatorname{sen}\theta - 54\cos\theta + 18\theta)\Big|_0^{2\pi}$$
$$= 0 - 54\cos 2\pi - (-54\cos 0) + 18 \cdot 2\pi = 36\pi$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = 36\pi$$

Por lo tanto, se verifica el cumplimiento del Teorema de Stokes

Bibliografía

- ❖ Cálculo con Geometría Analítica. Autor. E. Swokowski.
- ❖ Cálculo de Varias Variables. Autor. J. Stewart.

¡Muchas gracias!

¿Consultas?