INTEGRACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES

Tenemos un campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$

Su integral de superficie se define como:

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z).d\vec{S} = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

Donde: $d\vec{S} = \vec{n}dS$ con $\vec{n}$ un versor normal a la superficie.

Para evaluar esta integral también debemos recurrir a la parametrización.

Con parametrización, el producto vectorial entre las derivadas parciales de la función vectorial resulta en un vector normal a S, por lo tanto, dividiendo por el módulo:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u x \vec{r}_v}{|\vec{r}_u x \vec{r}_v|}$$

Y recordando: $dS = |\vec{r}_u x \vec{r}_v| dA$, reemplazamos en la integral:

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z).d\vec{S} = \iint_D \vec{F}[x(u,v);y(u,v);z(u,v)].\frac{\vec{r}_u x \vec{r}_v}{|\vec{r}_u x \vec{r}_v|}.|\vec{r}_u x \vec{r}_v| dA$$

$$\boxed{\iint_D \vec{F}[x(u,v);y(u,v);z(u,v)].(\vec{r}_u x \vec{r}_v) dA}$$

SUPERFICIE CON PROYECCIÓN REGULAR

Teniendo una función $z = f(x, y)$, la expresamos en forma de superficie de nivel:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad z - f(x, y) = 0$$

En este caso el gradiente de la función se puede usar como vector normal a la superficie:

$$\vec{\nabla}\varphi = -f_x(x, y)\vec{\imath} - f_y(x, y)\vec{\jmath} + 1\vec{k} \qquad \vec{n} = \frac{-f_x(x, y)\vec{\imath} - f_y(x, y)\vec{\jmath} + 1\vec{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}$$

Pero si la superficie es de proyección regular, entonces:

$$dS = |\vec{r}_u x \vec{r}_v| dA = \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + \left[f_y(x, y)\right]^2 + 1dxdy}$$

Al reemplazar en la integral, se simplificarán las raíces y la integral se reduce a:

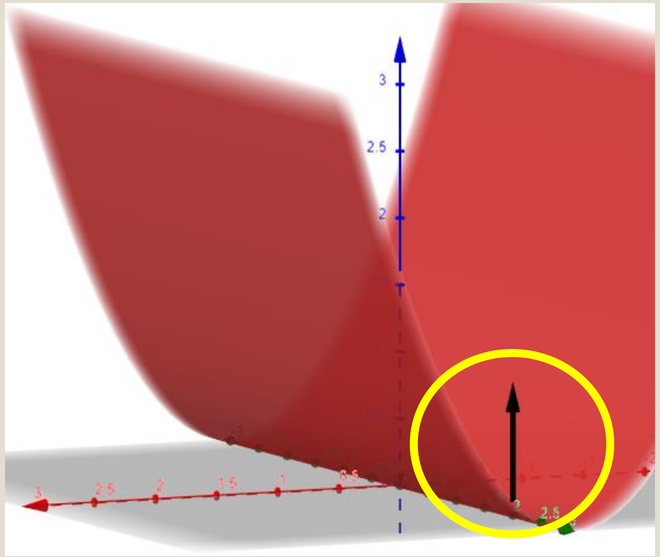
$$\boxed{\iint_D \vec{F}[x; y; f(x, y)].\, [-f_x(x, y)\vec{\imath} - f_y(x, y)\vec{\jmath} + 1\vec{k}]dA}$$

Al multiplicar escalarmente por el vector normal, estamos considerando la componente del campo perpendicular a la superficie, razón por la que se denomina **integral de flujo.**

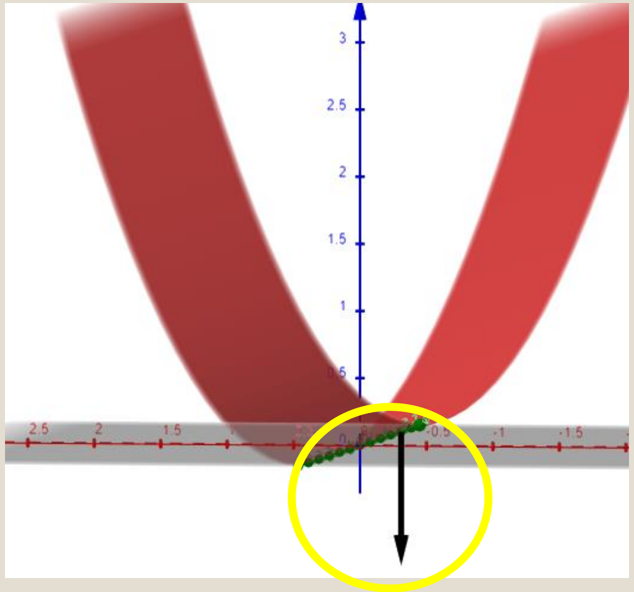
Una última consideración es sobre el vector normal, una superficie tiene dos caras y el vector normal puede apuntar en ambos sentidos. Puede ser que apunte hacia el lado interno de la superficie, es decir hacia «adentro» o hacia el lado externo o hacia «afuera».

Salvo que se indique lo contrario, el vector que se considera como «positivo» y se usa en los cálculos es el vector que apunta al lado **externo** de la superficie.

Cuando se obtenga el vector normal, a través del signo de sus componentes se determina cual de los dos es. En caso de necesitar el contrario, se cambia el signo de todas las componentes y de esa manera obtenemos el vector en sentido opuesto.



Vector normal hacia «adentro»



Vector normal hacia «afuera»

Ejercicio 3)
TP n°18

Calcular la integral de flujo $\iint_S \vec{F}(x,y,z).d\vec{S}$

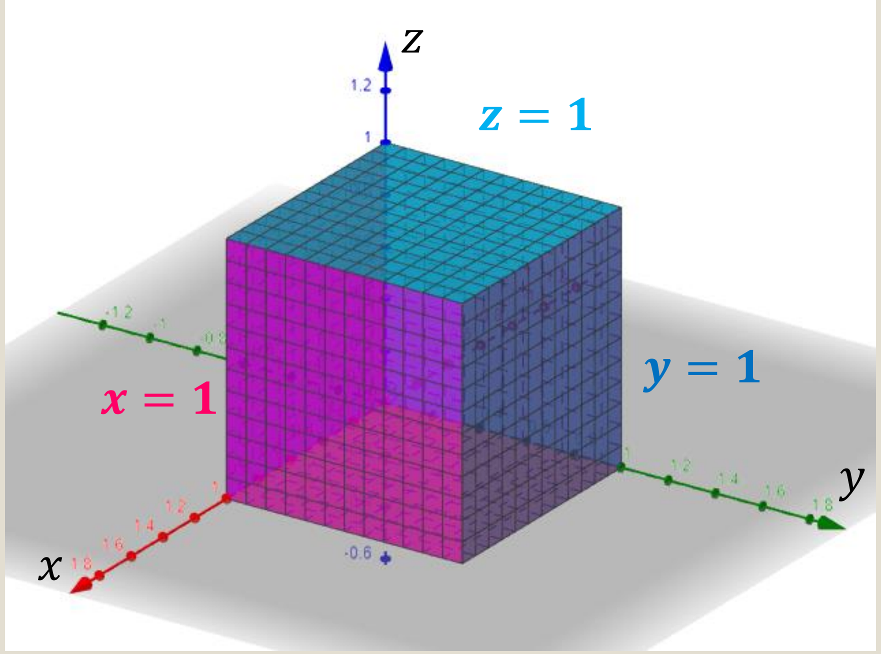
c) $\vec{F}(x,y,z) = (xy, y^2, z)$ Sobre las caras del cubo: $0 \leq x \leq 1\,; 0 \leq y \leq 1\,; 0 \leq z \leq 1.$

La superficie sobre la cual integraremos se trata de un cubo y como tal posee 6 caras, debiendo separar la integral de flujo en la suma de 6 integrales.

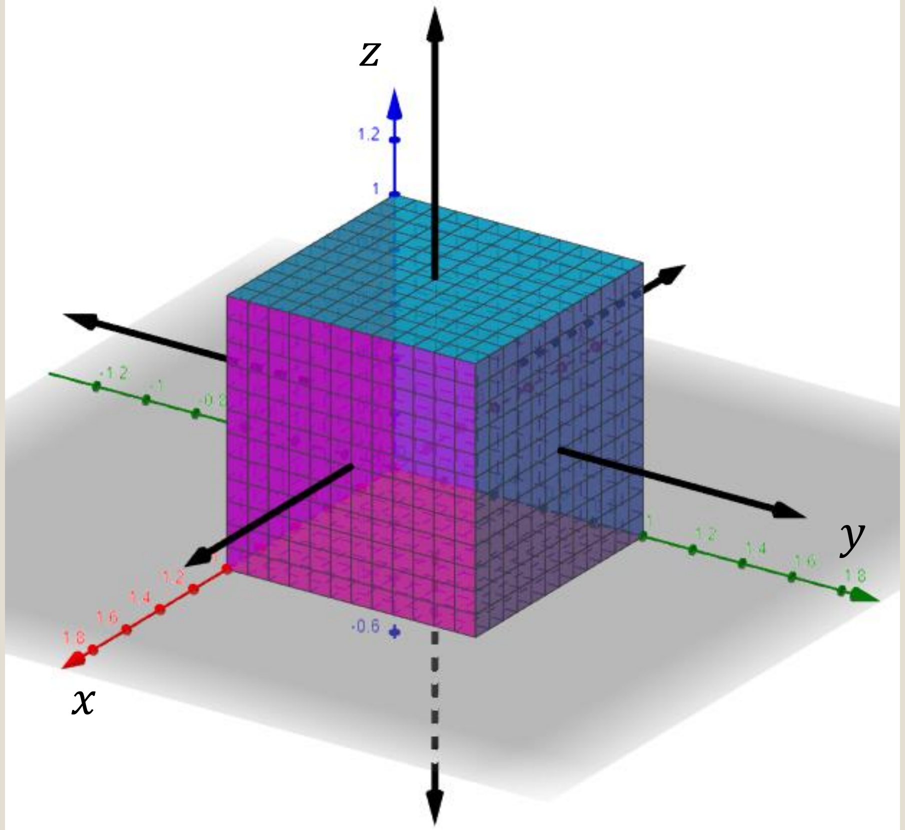
Cada una de las caras posee la ecuación del plano correspondiente, así tendremos:

$$x = 0\,, x = 1\,, y = 0\,, y = 1\,, z = 0, z = 1$$

Graficando:



Definamos el vector normal exterior a cada cara del cubo. Como los planos son perpendiculares a cada uno de los ejes, entonces los vectores normales serán paralelos a dichos ejes.



Para $x = 0$: $\vec{n}: (-1, 0, 0)$

Para $x = 1$: $\vec{n}: (1, 0, 0)$

Para $y = 0$: $\vec{n}: (0, -1, 0)$

Para $y = 1$: $\vec{n}: (0, 1, 0)$

Para $z = 0$: $\vec{n}: (0, 0, -1)$

Para $z = 1$: $\vec{n}: (0, 0, 1)$

Todos los vectores apuntan hacia afuera del cubo, paralelamente a los ejes. Este paso no es necesario ya que los vectores normales los calcularemos, pero siendo fácil definirlos nos ayudará a comprender el proceso de cálculo.

Empecemos a calcular cara por cara: Parametrizamos la superficie usando proyección regular y luego calculamos el vector normal por medio del producto vectorial de las derivadas parciales.

Para $\boldsymbol{x = 0}$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{matrix} \qquad \vec{r}(y,z) = 0\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad \begin{matrix} \vec{r}_y = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_z = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 1\vec{k} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_y x \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

Vector normal a la superficie $x = 0$, pero que apunta hacia adentro del cubo. Como necesitamos el exterior, cambiamos los signos.

$\longrightarrow \quad \vec{n} = -1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = (-1, 0, 0)$ Tal cual lo definimos anteriormente.

Es importante primero graficar la superficie para identificar hacia que lado apunta $\vec{n}$.

Ahora colocamos el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy, y^2, z) \longrightarrow \vec{F}(0,y,z) = (0, y^2, z)$$

Ahora hacemos el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(0,y,z) \cdot \vec{n} = (0, y^2, z) \cdot (-1,0,0) = 0$$

$$\therefore \iint_S \vec{F}(x,y,z).d\vec{S} = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_S 0dS = 0$$

Para $x = 1$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{matrix} \qquad \vec{r}(y,z) = 1\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad \begin{matrix} \vec{r}_y = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_z = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 1\vec{k} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_y x \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

Vector normal a la superficie $x = 1$, en este caso apunta hacia afuera por lo tanto no se modifica.

Ahora colocamos el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy, y^2, z) \longrightarrow \vec{F}(1,y,z) = (y, y^2, z)$$

Ahora hacemos el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(1,y,z)\cdot\vec{n} = (y, y^2, z)\cdot(1,0,0) = y$$

$$\therefore \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \int_0^1\int_0^1 y\,dy\,dz = \frac{1}{2}$$

Para $y = 0$:

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{matrix} \qquad \vec{r}(x,z) = x\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad \begin{matrix} \vec{r}_x = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_z = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 1\vec{k} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_x x \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

Vector normal a la superficie $y = 0$, en este caso apunta hacia afuera por lo tanto no se modifica.

Ahora colocamos el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy, y^2, z) \longrightarrow \vec{F}(x,0,z) = (0,0,z)$$

Ahora hacemos el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(x,0,z) \cdot \vec{n} = (0,0,z) \cdot (0,-1,0) = 0$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Para $y = 1$:

$$\begin{cases} x = x \\ y = 1 \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{matrix} \qquad \vec{r}(x,z) = x\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad \begin{matrix} \vec{r}_x = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_z = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 1\vec{k} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_x x \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

Vector normal a la superficie $y = 1$, pero que apunta hacia adentro del cubo. Como necesitamos el exterior, cambiamos los signos.

$$\longrightarrow \quad \vec{n} = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 0\vec{k} \quad = (0, 1, 0)$$

Ahora colocamos el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2, z) \quad \longrightarrow \quad \vec{F}(x, 1, z) = (x, 1, z)$$

Ahora hacemos el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(x, 1, z) \cdot \vec{n} = (x, 1, z) \cdot (0,1,0) \ = 1$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 1\, dx\, dz = 1$$

Para $z = 0$:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{matrix} \qquad \vec{r}(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + 0\vec{k} \qquad \begin{matrix} \vec{r}_x = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_y = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 0\vec{k} \end{matrix}$$

$$\vec{r}_x x \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 1\vec{k}$$

Vector normal a la superficie $z = 0$, pero que apunta hacia adentro del cubo. Como necesitamos el exterior, cambiamos los signos.

$$\longrightarrow \qquad \vec{n} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - 1\vec{k} \quad = (0,0,-1)$$

Ahora colocamos el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy, y^2, z) \quad \longrightarrow \quad \vec{F}(x,y,0) = (xy, y^2, 0)$$

Ahora hacemos el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(x,y,0) \cdot \vec{n} = (xy, y^2, 0) \cdot (0,0,-1) = 0$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Para $z = 1$: $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 \end{cases}$ $\quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + 1\vec{k}$$

$$\vec{r}_x = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$
$$\vec{r}_y = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_x x \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 1\vec{k}$$

Vector normal a la superficie $z = 1$, en este caso apunta hacia afuera por lo tanto no se modifica.

Ahora colocamos el campo vectorial en función de la parametrización:

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy, y^2, z) \longrightarrow \vec{F}(x,y,1) = (xy, y^2, 1)$$

Ahora hacemos el producto escalar entre el campo y el vector normal:

$$\vec{F}(x,y,1) \cdot \vec{n} = (xy, y^2, 1) \cdot (0,0,1) \quad = 1$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 1 \, dx \, dy = 1$$

Sumando todos los resultados: $$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0 + \frac{1}{2} + 0 + 1 + 0 + 1 = \frac{5}{2}$$