Unidad 7. Polinomios de Taylor y extremos de funciones de varias variables

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Comprender la Fórmula de Taylor para funciones escalares de varias variables como una extensión natural de la Fórmula de Taylor para funciones de una sola variable real.
2. Calcular aproximaciones de funciones escalares a través de polinomios de Taylor.
3. Conocer la diferencia entre un extremo global y un extremo local de una función escalar de varias variables, como así también las técnicas para determinarlos.

Fórmula de Taylor para funciones escalares de varias variables

En el primer curso de Análisis Matemático I han sido estudiadas las funciones de una variable real que pueden ser aproximadas por polinomios en las proximidades de un punto. Esta aproximación local introduce un error que, en general, puede ser estimado. La Fórmula de Taylor con Resto de Lagrange es:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2!}f''(x_0)h^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}$$

con $0<\theta<1$

Si ahora $\vec{x}_0$ y $\vec{x}_0+\vec{h}$ son puntos del espacio R^n y designamos en forma paramétrica al segmento que los une $\left[\!\left[\vec{x}_0,\vec{x}_0+\vec{h}\right]\!\right]=\left\{\vec{x}\in R^n / \vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{h}\ ,\ con\ \ 0\le t\le 1\right\}$

Evaluar una función $f:R^n\to R$ sobre puntos de dicho segmento es equivalente a considerar una función de una sola variable real $G(t)=f(\vec{x}_0+t\vec{h})$. Es posible expandir a la función $G(t)$ por la Fórmula de Maclaurin y, con $t=1$, se obtendrá el valor $f(\vec{x}_0+\vec{h})$. El desarrollo obtenido se denomina Fórmula de Taylor con Resto para la función escalar *f* en el punto $\vec{x}_0$.

Teorema 7.1. Teorema de Taylor:

Sea $f:D\subseteq R^n\to R$, *D* un conjunto abierto, una función de clase $m+1$ y el segmento

$\left[\!\left[\vec{x}_0,\vec{x}_0+\vec{h}\right]\!\right]=\left\{\vec{x}\in R^n / \vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{h}\ ,\ con\ \ 0\le t\le 1\right\}\subset D$, entonces existe θ con $0<\theta<1$ tal que

$$f(\vec{x}_0+\vec{h})=f(\vec{x}_0)+\overbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0).h_i}^{diferencial\ de\ 1^{\circ}orden}+\overbrace{\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\vec{x}_0).h_i.h_j}^{diferencial\ de\ 2^{\circ}orden}+\ldots+\overbrace{\frac{1}{m!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_m}}(\vec{x}_0).h_{i_1}.h_{i_2}\ldots h_{i_m}}^{diferencial\ de\ orden\, m}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{m+1}=1}^{n}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_{m+1}}}(\vec{x}_0+\theta\vec{h}).h_{i_1}.h_{i_2}\ldots h_{i_{m+1}}}_{diferencial\ de\ orden\,(m+1)}$$

¿Cómo es este desarrollo para una función $f: D \subseteq R^2 \to R \ / \ z = f(x,y)$ en un punto $(x_0, y_0) \in D$? Veamos,

$\vec{h} = (h_1, h_2) = (x - x_0, y - y_0)$

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).h_2}^{diferencial\ de 1^o orden} + \frac{1}{2!}(\overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0).h_1^{\,2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0).h_1.h_2 +}^{diferencial\ de\ 2^o orden}$$

$$+\overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).h_2^{\,2}}^{diferencial\ de\ 2^o orden}) + \frac{1}{3!}(\overbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0).h_1^{\,3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0).h_1^{\,2}.h_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0,y_0).h_1.h_2^{\,2} +}^{diferencial\ de\ 3^o orden}$$

$$+\overbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0).h_2^{\,3}}^{diferencial\ de\ 3^o orden}) + \ldots + \frac{1}{m!}(\overbrace{\frac{\partial^m f}{\partial x^m}(x_0,y_0).h_1^{\,m} + m\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1}\partial y}(x_0,y_0).h_1^{\,m-1}.h_2 +}^{diferencial\ de\ orden\ m}$$

$$\overbrace{+\frac{m(m-1)}{2}\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-2}\partial y^2}(x_0,y_0).h_1^{\,m-2}.h_2^{\,2} + \ldots + \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(x_0,y_0).h_2^{\,m}}^{diferencial\ de\ orden\ m}) + \underbrace{R_m}_{Resto\ o\ Residuo}$$

De esta forma es posible expresar la Fórmula de Taylor más compacta como:

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{m!}d^m f(x_0,y_0) + R_m$$

Se puede apreciar que los diferenciales sucesivos pueden generarse -en forma similar- a la luz del desarrollo del Binomio de Newton, pero teniendo en cuenta, que en el caso de las derivadas sólo son derivadas parciales sucesivas y NO potencias.

Si en lugar de emplear $h_1 \ y \ h_2$ se reemplazan por $h_1 = x - x_0$, $h_2 = y - y_0$, entonces la Fórmula de Taylor queda expresada en potencias de $(x - x_0) \ e \ (y - y_0)$.

De la misma forma que para funciones de una variable real, si el punto $\vec{x_0} = \vec{0}$, entonces se obtiene la Fórmula de Maclaurin con resto.

Por lo general, emplearemos la expansión de Taylor de una función para analizar su comportamiento en las proximidades de un punto, por ejemplo, existencia de extremos locales y globales. Una estimación del último término de este desarrollo permite acotar la diferencia entre la función y los distintos polinomios obtenidos.

Teorema 7.2. Fórmula de Taylor de 2º orden:

Sea $f: D \subseteq R^n \to R$, D un conjunto abierto, una función de clase C^2. Si el segmento $\left[\!\left[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}\right]\!\right] = \left\{\vec{x} \in R^n / \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{h}\ ,\ con\ \ 0 \le t \le 1\right\} \subset D$, entonces existe una función $\varphi: R^n \to R$ que verifica:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0).h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0).h_i.h_j + \frac{\left\|\vec{h}\right\|^2}{2}.\varphi(\vec{h}) \quad con \ \ \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \varphi(\vec{h}) = 0$$

Ejemplo 7.1: Para determinar el polinomio de 2º grado asociado a la función $f(x,y)=x^2y^2$ alrededor del punto (1,-1), buscamos las derivadas parciales sucesivas de f hasta el 2º orden y las evaluamos en el punto dado.

$$f(1,-1)=1 \quad \frac{\partial f}{\partial x}=2xy^2 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)=2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)=-2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y^2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)=2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x^2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1)=2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,-1)=-4$$

En consecuencia, el polinomio de Taylor de 2º grado en potencias de $(x-1)$ e $(y+1)$ que designamos $T_{2,f}(x,y)$ es:

$$T_{2,f}(x,y)=\underbrace{1+2(x-1)-2(y+1)}_{z_p}+\frac{1}{2}\left[2(x-1)^2+2.(-4)(x-1)(y+1)+2(y+1)^2\right]$$
$$T_{2,f}(x,y)=\underbrace{1+2(x-1)-2(y+1)}_{z_p}+(x-1)^2-4(x-1)(y+1)+(y+1)^2$$

Es conveniente que el lector observe detenidamente los primeros tres términos del 2º miembro de la igualdad anterior y compare con la *z* del plano tangente al gráfico de *f* en el punto (1,-1). En la unidad V se estudiaron las aproximaciones lineales de una función diferenciable por medio del plano tangente cuya ecuación es lineal en *x* e *y*. Tal como se ha mencionado oportunamente, la aproximación lineal es una buena aproximación de la función en las proximidades del punto, pero no es la mejor!!! A medida que se emplean polinomios de mayor grado mejora la bondad de la aproximación.

Ejemplo 7.2: Ahora determinamos el polinomio de Maclaurin de 2º grado asociado a la función definida por: $f(x,y,z)=\cos(2x+y+3z)$

Es preciso calcular el valor de la función y de las sucesivas derivadas de *f* en el punto (0,0,0).

$$f(0,0,0)=1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}=-2sen(2x+y+3z) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-sen(2x+y+3z) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-3sen(2x+y+3z) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4\cos(2x+y+3z) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0)=-4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\cos(2x+y+3z) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0)=-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-9\cos(2x+y+3z) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0)=-9$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2\cos(2x+y+3z) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0,0)=-2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-6\cos(2x+y+3z) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(0,0,0)=-6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-3\cos(2x+y+3z) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(0,0,0)=-3$$

Así entonces,

$$T_{2,f}(x,y,z)=1+\frac{1}{2}\left[-4x^2-y^2-9z^2-4xy-12xz-6yz\right]=1-2x^2-\frac{y^2}{2}-\frac{9}{2}z^2-2xy-6xz-3yz$$

Extremos locales de una función escalar

En este espacio analizaremos la existencia de máximos y mínimos locales (relativos), de funciones escalares de varias variables independientes como una importante contribución del cálculo diferencial, y en particular de la fórmula de Taylor que anteriormente hemos presentado.

Definición 7.1:

Sea una función $f: D\subset R^n \to R \ / \ f(\vec{x})=f(x_1,x_2,...,x_n)$. Se dice que la función *f* alcanza en el punto $\vec{x_0}\in D$ un **máximo local (relativo)** $f(\vec{x_0})$, si existe una bola $B(\vec{x_0},\delta)/B(\vec{x_0},\delta)\subset D$ y $f(\vec{x})\leq f(\vec{x_0}) \quad \forall \vec{x}\in B(\vec{x_0},\delta)$

Definición 7.2:
Se dice que la función *f* alcanza en el punto $\overrightarrow{x_0} \in D$ un **mínimo local (relativo)** $f(\overrightarrow{x_0})$, si existe una bola $B(\overrightarrow{x_0},\delta) / B(\overrightarrow{x_0},\delta) \subset D$ y $f(\vec{x}) \geq f(\overrightarrow{x_0}) \quad \forall \vec{x} \in B(\overrightarrow{x_0},\delta)$

Definición 7.3:
Se dice que la función *f* alcanza en el punto $\overrightarrow{x_0} \in D$ un **mínimo global (absoluto)** $f(\overrightarrow{x_0})$, si $f(\vec{x}) \geq f(\overrightarrow{x_0}) \quad \forall \vec{x} \in D$

Definición 7.4:
Se dice que la función *f* alcanza en el punto $\overrightarrow{x_0} \in D$ un **máximo global(absoluto)** $f(\overrightarrow{x_0})$, si $f(\vec{x}) \leq f(\overrightarrow{x_0}) \quad \forall \vec{x} \in D$

En general, un valor máximo local o mínimo local se denomina extremo de *f*. El vocablo "locales" significa que la relación de mayor o de menor (según corresponda el extremo) es considerada para los puntos que se encuentran en las proximidades del extremo.
Es necesario desarrollar herramientas que permitan la detección de extremos locales de una función escalar. Recordemos que en Análisis Matemático I han sido analizados criterios para determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función de una sola variable real. Para las funciones derivables ha sido presentado el teorema de Fermat (condición necesaria) que permite determinar posibles extremos de una función aportando los llamados “puntos estacionarios” (ceros de la derivada primera) Asimismo se han analizado los teoremas que permiten discriminar los máximos y los mínimos (el teorema del signo de la derivada primera en el entorno del punto estacionario y el criterio del signo de la derivada segunda).
A continuación enunciaremos un teorema que resulta ser el análogo al teorema de Fermat visto para funciones de una sola variable real.

Teorema 7.3: Condición necesaria para la existencia de extremos locales.

Sea una función $f: D \subset R^n \to R$ y el punto $\overrightarrow{x_0} \in \mathrm{int}(D)$ y *f* es diferenciable en él. Si *f* admite un extremo en $\overrightarrow{x_0}$ entonces todas las derivadas parciales primeras de *f* son nulas en $\overrightarrow{x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overrightarrow{x_0}) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{x_0}) = 0$, es decir, el vector gradiente en dicho punto es el vector nulo ($\overrightarrow{\nabla f}(\overrightarrow{x_0}) = \vec{0}$)

Demostración: Si suponemos que f alcanza un extremo local en $\overrightarrow{x_0}$, por ejemplo un máximo local, se verifica que $\forall \vec{u} \in R^n$ la función $\varphi(t) = f(\overrightarrow{x_0} + t\vec{u})$ admite un máximo local para $t = 0$. Entonces, por la condición necesaria para la existencia extremos locales para funciones de una variable real se cumple $\varphi'(0) = 0$ y usando la regla de la cadena para determinar $\varphi'(t)$, resulta: $\varphi'(t) = \overrightarrow{\nabla f}(\overrightarrow{x_0} + t\vec{u}) \bullet \vec{u}$ y evaluada en $t = 0$, es $\varphi'(0) = \overrightarrow{\nabla f}(\overrightarrow{x_0}) \bullet \vec{u} = 0 \quad \forall \vec{u} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{\nabla f}(\overrightarrow{x_0}) = \vec{0}$.

Para $n = 2$ este hecho se interpreta geométricamente. Si las derivadas parciales en el punto (x_0, y_0) son nulas, entonces el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es horizontal, y su ecuación es $z = f(x_0, y_0)$ tal como se puede visualizar en el siguiente gráfico:

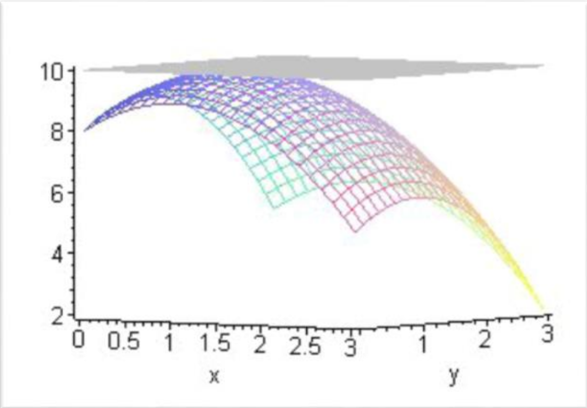


Figura 7.1: Plano tangente horizontal en un extremo local.

Definición 7.5:
Los puntos para los cuales se anulan todas las derivadas parciales primeras de una función se denominan *puntos estacionarios o críticos*.

Los puntos estacionarios de una superficie pueden ser máximos, mínimos o puntos silla o de ensilladura. ¿Qué es un punto silla o de ensilladura? Respondemos esta cuestión expresando la siguiente definición.

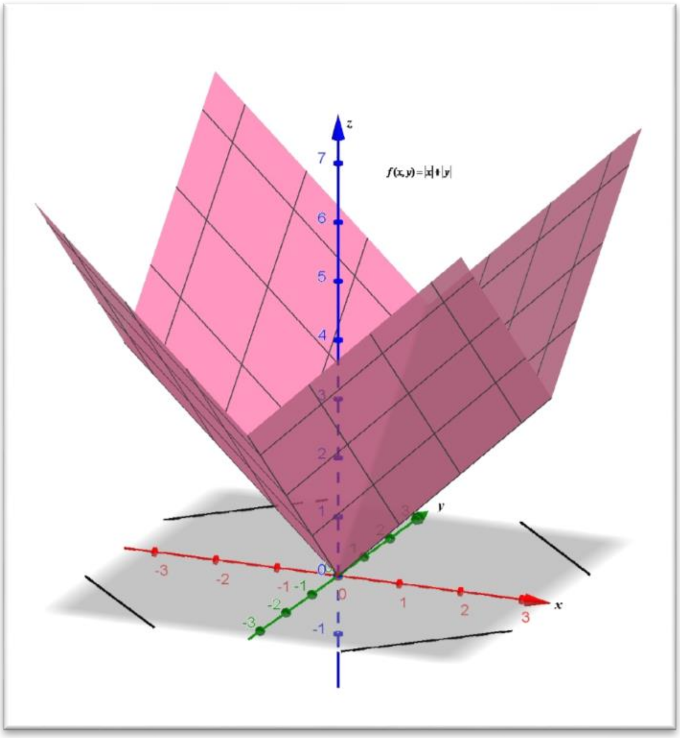
Definición 7.6:
Un punto estacionario $\overrightarrow{x_0}$ se dice silla o de ensilladura si, toda bola $B(\overrightarrow{x_0}, \delta)$ contiene puntos $\vec{x} \;/\; f(\vec{x}) < f(\overrightarrow{x_0})$ y otros puntos $\vec{y} \;/\; f(\vec{y}) > f(\overrightarrow{x_0})$.
Los puntos silla resultan ser aquellos puntos estacionarios de una función en los que ella no alcance extremos locales

Deben recordar que esta definición es similar a la vista para puntos de inflexión de funciones de una variable real.

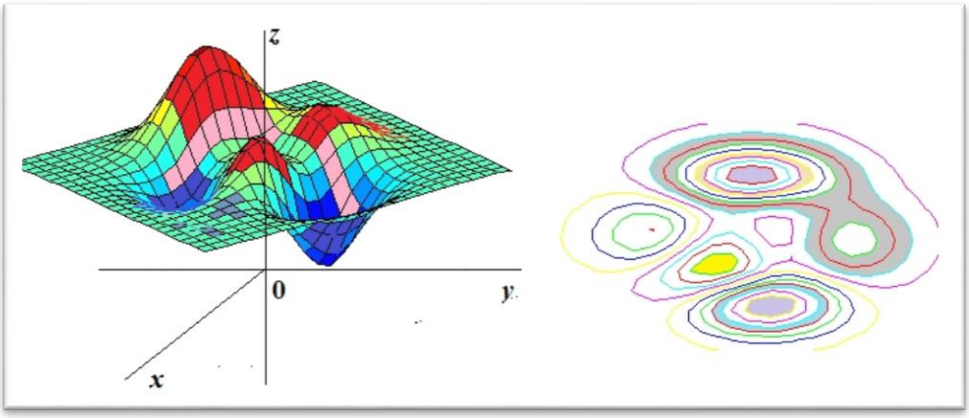
Observaciones al teorema

1. El teorema proporciona la condición necesaria pero no suficiente (lo mismo sucede con las funciones de una variable real). Por ejemplo, la función definida por $f(x,y)=2x^3-y^3$ admite derivadas primeras nulas en el punto (0,0), pero en cualquier bola que se considere de dicho punto la función cambia de signo, es decir, $f(t,0)=2t^3$ que puede ser mayor o menor que cero, según *t* sea mayor o menor que cero, por tanto $f(0,0)=0$ no es extremo de *f*.

2. Puede ocurrir también que una función admita un extremo local en un punto $\overrightarrow{x_0}$ pero que en él no existan las derivadas parciales y, en consecuencia, no es diferenciable en $\overrightarrow{x_0}$ (la gráfica de *f* no admite plano tangente) De esta forma, el Teorema 7.3 no puede ser empleado. Consideremos, para clarificar esta idea, la función $f:R^2\to R \;\;/\;\; f(x,y)=|x|+|y|$. Esta función, si bien es continua en (0,0), no admite derivadas parciales primeras en dicho punto. No obstante, la función admite un mínimo local que además es global, pues $f(x,y)=|x|+|y|>0=f(0,0)\;\;\forall(x,y)\neq(0,0)$. Obsérvese que la gráfica de la función presenta en (0,0) un



3. Para $n=2$, los mapas de contorno constituyen una herramienta gráfica importante para ubicar extremos locales de una función $z=f(x,y)$, ya que si cuando k aumenta o disminuye, las líneas de nivel se concentran alrededor de un punto, entonces se trata de un extremo local. Si por el contrario cuando k aumenta o disminuye, las líneas de nivel se alejan en ese punto, entonces no se trata de un extremo. Por ello, los mapas de contorno son útiles para describirla orografía de un espacio. Las líneas de contorno que están más cercanas muestran un paisaje muy empinado. En cambio, las líneas de contorno muy espaciadas indican un paisaje que es más plano con una pendiente más suave.



Una vez determinados los puntos estacionarios es preciso generar una herramienta que permita clasificarlos, es decir, si son extremos locales o bien puntos silla. A tal fin, seguiremos un itinerario equivalente al analizado en el curso anterior para funciones de una variable real, en cuanto al establecimiento de condiciones suficientes para la existencia de extremos locales. En aquella oportunidad se introdujeron condiciones suficientes para clasificar puntos estacionarios: el criterio del signo de la derivada primera en el entorno del punto crítico y el criterio del signo de la derivada segunda. Este último está basado en el empleo de la fórmula de Taylor de la función alrededor del punto estacionario. Para funciones de varias variables trataremos de emplear un procedimiento equivalente. A tal fin necesitamos analizar previamente algunas cuestiones del Álgebra Lineal que nos servirán de sustento para encontrar las condiciones suficientes para clasificar extremos y puntos silla.

Revisión de Conceptos del Álgebra Lineal

Matrices y formas Cuadráticas

Definiciones:

Sea $A=\left(a_{ij}\right)$ una matriz simétrica (recuerde que A es simétrica si coincide con su traspuesta) de orden n.

1. A es una matriz **definida positiva** si $\vec{x}.A.\vec{x}^t > 0 \quad \forall \vec{x} \in R^n \quad , \quad \vec{x} \neq \vec{0}$

2. A es una matriz **definida negativa** si $\vec{x}.A.\vec{x}^t < 0 \quad \forall \vec{x} \in R^n \quad , \quad \vec{x} \neq \vec{0}$

3. A es una matriz **semidefinida positiva** si $\vec{x}.A.\vec{x}^t \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in R^n$ y existen $\vec{y}, \vec{z} \in R^n$, $con \ \vec{z} \neq \vec{0}$, tales que $\vec{y}.A.\vec{y}^t > 0 \quad y \quad \vec{z}.A.\vec{z}^t = 0$.

4. A es una matriz **semidefinida negativa** si $\vec{x}.A.\vec{x}^t \leq 0 \quad \forall \vec{x} \in R^n$ y existen $\vec{y}, \vec{z} \in R^n$, $con \ \vec{z} \neq \vec{0}$, tales que $\vec{y}.A.\vec{y}^t < 0 \quad y \quad \vec{z}.A.\vec{z}^t = 0$.

5. La matriz A es **indefinida** si existen $\vec{y}, \vec{z} \in R^n$, tales que $\vec{y}.A.\vec{y}^t > 0 \quad y \quad \vec{z}.A.\vec{z}^t < 0$.

Toda matriz real simétrica define una ***forma cuadrática*** real a la cual representa en la base canónica.

Definición. Formas cuadráticas.

Se llama forma cuadrática asociada a una matriz simétrica *A* de orden n, a una función definida por $q: R^n \to R$ dada por: $q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \vec{x}.A.\vec{x}^t$

Tal como se puede apreciar, una forma cuadrática constituye un polinomio de 2º grado con n variables, ya que:

$$\vec{x}.A.\vec{x}^t = (x_1, x_2, ..., x_n).\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & : & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = a_{11}x_1^{\,2} + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + ... + a_{nn}x_n^{\,2}$$

Es interesante obtener la matriz simétrica a partir de este polinomio. En primer lugar, los coeficientes de los términos cuadráticos son los elementos de la diagonal principal de la matriz. Por otra parte, el elemento a_{ij} es el coeficiente del término rectangular $x_i x_j$, y lo mismo sucede con el coeficiente a_{ji} que precede al término rectangular $x_j x_i$, pero resulta que por tratarse de números reales, y siendo la matriz *A* simétrica, es $a_{ij}x_i x_j = a_{ji}x_j x_i$. De esta forma, para construir la matriz simétrica *A* a partir del polinomio, se divide a la mitad el coeficiente asociado a cada término rectangular $x_i x_j$ y ubicarlo en la fila *i*, columna *j* y, luego, también en la fila *j*, columna *i* (recuerde que la matriz es simétrica)

Veamos un ejemplo:

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ la forma cuadrática es:

$$q(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 - z^2 + (3+3)xy + (1+1)xz + (8+8)yz$$

$$q(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 - z^2 + 6xy + 2xz + 16yz$$

Para comprender el procedimiento inverso veámoslo con otro ejemplo:

La forma cuadrática $q(x,y,z) = 3x^2 - 7y^2 + 5z^2 - 4xy + 5xz - yz$ tiene como matriz asociada a:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -7 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

Es frecuente clasificar a las formas cuadráticas en definida positiva, definida negativa, semidefinida positiva, semidefinida negativa, indefinida o nula cuando su matriz asociada lo es.

El Álgebra Lineal nos permite clasificar las formas cuadráticas empleando diversas herramientas. Se pueden emplear los autovalores de la matriz asociada y los menores principales (determinantes), entre otros.

1. **Método para clasificar formas cuadráticas empleando autovalores.**

Sea una forma cuadrática $q: R^n \to R \ / \ q(\vec{x}) = \vec{x}.A.\vec{x}^t$ cuya matriz asociada simétrica de orden *n* es *A*.
a. *q* es **definida positiva** si todos los autovalores λ_i de la matriz A son positivos $\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1,...,n$.
b. *q* es **definida negativa** si todos los autovalores λ_i de la matriz A son negativos $\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1,...,n$.
c. *q* es **semidefinida positiva** si todos los autovalores λ_i de la matriz A son no negativos $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1,...,n$.
d. *q* es **semidefinida negativa** si todos los autovalores λ_i de la matriz A son no positivos $\lambda_i \leq 0 \quad \forall i = 1,...,n$.
e. *q* es **indefinida** si la matriz A admite autovalores positivos y negativos, es decir $\exists i, j \ / \lambda_i < 0 \ \ y \ \ \lambda_j > 0$.

Nota: recuerde que para determinar los autovalores de una matriz es preciso obtener los ceros del polinomio característico es decir: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

1. **Método para clasificar formas cuadráticas empleando menores principales.**

Recordemos en primer lugar la siguiente definición:

Definición:

Se denomina **menor principal** de la matriz *A* de orden *k* al determinante de la submatriz formada por las *k* primeras filas y las *k* primeras columnas de A. En general, se indican así:

$$\Delta_1 = \det(a_{11}) \ ; \ \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ ; \ ..... \ ; \ \Delta_n = \det(A)$$

Sea una forma cuadrática $q: R^n \to R \ / \ q(\vec{x}) = \vec{x}.A.\vec{x}^t$ cuya matriz asociada simétrica de orden *n* es *A*.
a. *q* es **definida positiva** si todos los menores principales de la matriz A son positivos $\Delta_i > 0 \quad \forall i = 1,...,n$.
b. *q* es **definida negativa** si los menores principales de la matriz A son positivos y negativos en forma alternada comenzando con $\Delta_1 < 0$, es decir: $\Delta_i < 0 \ \ si \ \ i \ es \ impar \ , \ \Delta_i > 0 \ si \ \ i \ es \ par$

c. Si $\Delta_n = \det(A) \neq 0$ y los demás menores principales no verifican alguno de los dos casos anteriores, entonces *q* es **indefinida.**
d. *q* es **definida positiva, semidefinida positiva o nula** sí, y sólo sí, todos sus menores principales son no negativos.
e. *q* es **definida negativa, semidefinida negativa o nula** sí, y sólo sí, todos sus menores principales de orden *k* no nulos admiten el mismo signo que $(-1)^k$.

¿Por qué hemos realizado esta revisión del Álgebra Lineal? ¿Qué relación tiene el análisis de la existencia de extremos locales de un función escalar de varias variables con las formas cuadráticas?
Tal como se mencionó en la introducción, emplearemos el desarrollo en Fórmula de Taylor alrededor de un punto estacionario, más concretamente el teorema 7.1. que hemos enunciado con anterioridad.

Definición 7.7:

Sea $f:D\subset R^n\to R$, D un conjunto abierto, una función de clase $C^2(D)$. Se llama matriz HESSIANA (debido al matemático alemán Ludwig Otto Hesse y empleada por James Joseph Sylvester) de f en el punto $\vec{x}_0\in D$ y en adelante la designaremos $Hf(\vec{x}_0)$ a la matriz cuyos elementos son las derivadas parciales de 2º orden evaluadas en el punto $\vec{x}_0$

$$Hf(\vec{x}_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \dots & \dots & . & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Como la función es de clase $C^2(\vec{x}_0)$ se verifica el Teorema de Schwarz y así la matriz Hessiana es simétrica, y por lo tanto es posible determinar su forma cuadrática asociada:

$q(\vec{h})=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\vec{x}_0).h_i.h_j$ que es el diferencial de 2º orden en la Fórmula de Taylor alrededor del punto $\vec{x}_0$.

Teorema 7.4. Condición suficiente para la existencia de extremos locales:
Sea $f:D\subset R^n\to R$, D un conjunto abierto, una función de clase $C^2(D)$, y $\vec{x}_0$ un punto estacionario de f, es decir, $\overrightarrow{\nabla f}(\vec{x}_0)=\vec{0}$, y $q(\vec{h})=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\vec{x}_0).h_i.h_j$.

a. Si $q(\vec{h})$ es definida positiva, entonces f alcanza un mínimo local en $\vec{x}_0$.
b. Si $q(\vec{h})$ es definida negativa, entonces f alcanza un máximo local en $\vec{x}_0$.
c. Si $q(\vec{h})$ es indefinida, entonces f tiene un punto silla o de ensilladura en $\vec{x}_0$.
d. Si $q(\vec{h})$ es semidefinida, entonces el criterio no otorga información en $\vec{x}_0$.

Si se aplica el teorema 7.1 a la función *f* en el punto estacionario $\vec{x}_0$, resulta:

$$f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)=\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0).h_i.h_j+\frac{\|\vec{h}\|^2}{2}.\varphi(\vec{h}) \quad con \quad \lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\varphi(\vec{h})=0$$

El diferencial de primer orden es nulo ya que el punto $\vec{x}_0$ es estacionario ($\overrightarrow{\nabla f}(\overrightarrow{x_0})=\vec{0}$) Para analizar si la función alcanza un extremo local o bien un punto silla, basta con analizar el signo del primer miembro de esta igualdad en las proximidades del punto $\vec{x}_0$. No es difícil probar que el término dominante en el 2º miembro es $\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0).h_i.h_j=\frac{1}{2!}q(\vec{h})$. Así, el signo de la forma cuadrática determina el signo de la diferencia $f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)$.

De esta forma, es posible unificar estos resultados con los conceptos del Álgebra Lineal revisados.

Teorema 7.5. Teorema de Sylvester:

Sea $f: D\subset R^n \to R$, D un conjunto abierto, una función de clase $C^2(D)$, y $\vec{x}_0$ un punto estacionario de *f* y Δ_i los menores principales (definidos como antes) de la matriz Hessiana evaluada en $\vec{x}_0$.

a. Si $\Delta_i>0 \quad \forall i=1,...,n$, entonces *f* alcanza un mínimo local en $\vec{x}_0$.

b. Si $\Delta_i<0 \ \ si\ \ i\ \ es\ impar$, $\Delta_i>0\ \ si\ \ i\ \ es\ par$ entonces *f* alcanza un máximo local en $\vec{x}_0$.

c. Si $\Delta_n=\det(A)\neq 0$ y los demás menores principales no verifican alguno de los dos casos anteriores, entonces *f* tiene un punto silla en $\vec{x}_0$.

Para *n* = 2, resulta:

a. Si $\det H\ f(\vec{x}_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\end{vmatrix}>0 \ \ y \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)>0$, entonces *f* alcanza un mínimo local en $\vec{x}_0$.

b. Si $\det H\ f(\vec{x}_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\end{vmatrix}>0 \ \ y \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)<0$, entonces *f* alcanza un máximo local en $\vec{x}_0$.

c. Si $\det H\ f(\vec{x}_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\end{vmatrix}<0$, entonces *f* tiene un punto silla en $\vec{x}_0$.

d. Si $\det H\ f(\vec{x}_0)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) \end{vmatrix}=0$ entonces el criterio no proporciona información, y es preciso realizar el análisis del comportamiento de la función en las proximidades del punto estacionario usando otras herramientas, como ser, por ejemplo, la definición de extremo local o de punto silla.

Ejemplo 7.3: Para la función definida por $f:R^2 \to R \ / \ f(x,y)=x^3+y^3-3xy+1$ determinemos sus extremos locales, si existen. En primer lugar se trata de una función de clase C^∞ en todo punto de su dominio (R^2) ya que es una función polinómica. De esta manera, por la condición necesaria, los extremos locales, si existen, se alcanzarán sólo en los puntos estacionarios. Luego, busquemos estos puntos. Para ello, debemos obtener las derivadas parciales de primer orden, igualarlas a cero, construir con ellas un sistema de ecuaciones y encontrar las soluciones, si existen. Por lo general, el sistema es NO lineal, y no siempre es tan sencillo la búsqueda de las soluciones. Recomendamos por ello, estar atento con la elección de la estrategia para resolver dicho sistema, como así también cuidar de no perder soluciones ni aportar soluciones "extrañas" al mismo. Quizás este paso sea el más dificultoso porque requiere de un fluido manejo algebraico. Regresando al ejemplo:

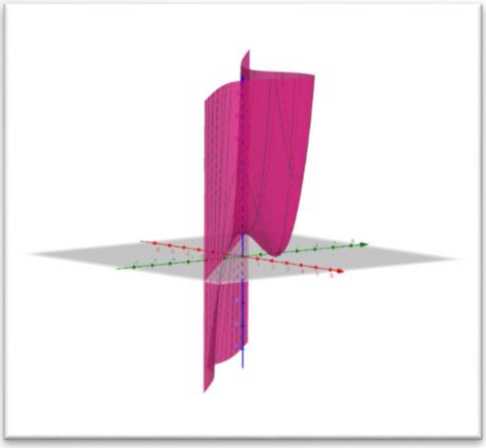
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=y \\ y^2=x \end{cases} \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=0 \\ y_2=1 \end{cases}.$$

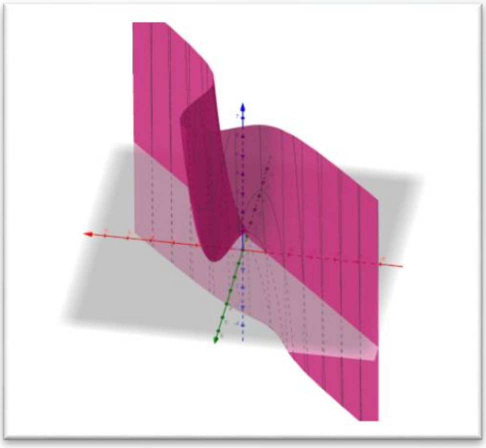
En consecuencia, los puntos estacionarios de *f* son $\vec{x}_1=(0,0)$ y $\vec{x}_2=(1,1)$. Luego, para investigar si en ellos la función alcanza valores extremos o bien puntos de ensilladura, es preciso construir la matriz Hessiana y evaluarla en los puntos obtenidos. Así, las derivadas parciales de segundo orden son:

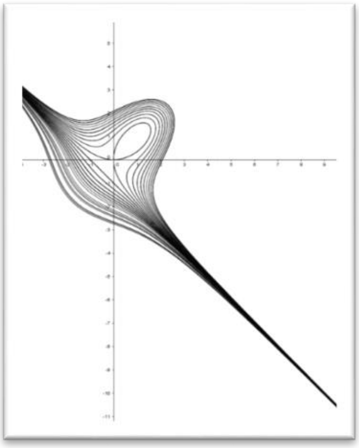
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3 \end{cases}$$

. Los determinantes de las matrices Hessianas evaluados en los puntos $\vec{x}_1=(0,0)$ y $\vec{x}_2=(1,1)$ son:

$\det H\ f(\vec{x}_1)=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-9<0$ $\det H\ f(\vec{x}_2)=\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}=36-9=27>0$, entonces de acuerdo con el Teorema 7.4. de Sylvester, *f* alcanza en $\vec{x}_1=(0,0)$ un punto silla y en $\vec{x}_2=(1,1)$ un mínimo local. En las siguientes figuras se puede observar distintas visualizaciones de la gráfica de la función en las que se aprecia claramente la ubicación de los dos puntos clasificados. También se observan las líneas de nivel correspondientes a la función *f*.







Cabe destacar que el hecho de que en un punto del dominio de una función exista un punto silla, no significa que la gráfica de dicha función en ese punto tenga el mismo aspecto geométrico que la silla de montar, si no que en la proximidades del punto silla las imágenes de la función son mayores y otras menores que la imagen de la función en el punto silla.

Ejemplo 7.4: Investiguemos si la función definida por: $f: R^3 \to R \,/\, f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 2y - 2z - 1$ admite extremos locales. La función *f* es de clase C^∞. Las derivadas parciales de primer orden son:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales tiene como única solución $\vec{x}_1 = (1,1,-1)$. Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz Hessiana evaluado en ese punto es:

$$\Delta_3 = \det H\ f(\vec{x}_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0\ ,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0\ \ y\ \ \Delta_1 = 2 > 0$$

Por lo tanto, el punto $\vec{x}_1 = (1,1,-1)$ es un punto silla.

Nota: Cabe destacar que la matriz Hessiana evaluada en el punto $\vec{x}_1 = (1,1,-1)$ es una matriz diagonal, y por lo tanto los elementos de la diagonal son los autovalores de la matriz. En este caso, sus autovalores son positivos y negativos, por lo cual se concluye que el punto $\vec{x}_1 = (1,1,-1)$ es un punto silla.

Ejemplo 7.5: Dada la función definida por $f : R^3 \to R\ /\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$, *f* es de clase C^∞, encontremos los puntos estacionarios:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales tiene como única solución $\vec{x}_1 = \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 1\right)$. La matriz Hessiana evaluada en este punto es $H(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (Compruébelo!). Para encontrar sus autovalores resolvemos la ecuación característica $P(\lambda) = \det\left(H(\vec{x}_1) - \lambda I\right) = 0$ (recuerde que las matrices simétricas tienen todos sus autovalores reales). En este caso, $P(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$, por lo tanto los autovalores son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$, todos positivos. De esta forma, la matriz Hessiana es definida positiva y, así, la función *f* alcanza en el punto $\vec{x}_1 = \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 1\right)$ un valor mínimo local.

Ejemplo 7.6: La función $g : R^2 \to R\ /\ g(x,y) = 2xy - 2x^2 - 3y^2 + 2$, admite un único punto estacionario $\vec{x}_1 = (0,0)$ y la matriz Hessiana evaluada en dicho punto es $Hg(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = 20 > 0\ \ y\ \ \Delta_1 = -4 < 0$. De esta forma la matriz Hessiana es definida negativa en (0,0) y la función *g* alcanza en ese punto un máximo local $g(0,0) = 2$. Compruebe todos los resultados aquí expresados!

Ejemplo 7.7: Los puntos estacionarios de la función definida por $f: R^2 \to R \,/\, f(x,y) = (2x-y)^2$ son

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4(2x-y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2(2x-y) = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado ya que una de la ecuaciones es combinación lineal de la otra. En consecuencia, admite infinitas soluciones, todas ellas se encuentran sobre la recta de ecuación $y = 2x$. La matriz Hessiana de *f* es: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Su determinante es cero, por lo cual el teorema no proporciona información sobre la naturaleza de los puntos estacionarios. Para ello, es preciso investigar cómo se comportan las imágenes de la función en las proximidades de los puntos estacionarios.

Vemos que $f(x,y) = (2x-y)^2 \geq 0 = f(x,2x) \quad \forall (x,y) \in R^2$, por lo cual todos los puntos que se encuentran sobre la recta $y = 2x$ son mínimos locales y, en este caso también, mínimos globales. ¿Por qué?

Compartan sus argumentaciones en el foro.

Ejemplo 7.8: La función definida por $f: R^2 \to R \,/\, f(x,y) = 4 - (2x^2 + y^2)$ tiene un único punto estacionario en (0,0). La matriz Hessiana evaluada en él es:

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ que es una matriz diagonal, por lo tanto sus autovalores son $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$ ambos negativos. En consecuencia, la función *f* alcanza en el punto (0,0) un máximo local de valor 4. El gráfico de esta función es un paraboloide elíptico con el vértice en el punto (0,0,4). Las líneas de nivel asociadas son elipses concéntricas en el origen de coordenadas. Por otra parte, otra forma de clasificar el punto estacionario puede ser analizando el comportamiento de las imágenes de la función en las proximidades del punto estacionario, es decir: $f(x,y) = 4 - (2x^2 + y^2) \leq 4 = f(0,0) \quad \forall (x,y) \in R^2$. De esta forma, la función *f* no sólo alcanza en (0,0) un máximo local si no también un máximo global.

Ejemplo 7.9: La función definida por $g: R^2 \to R \,/\, g(x,y) = 3xy + 2$ tiene como único punto estacionario el (0,0), la matriz Hessiana de *g* evaluada en dicho punto es $Hg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Sus autovalores son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$. Por lo tanto, la función *g* admite un punto silla en (0,0). También en este caso, es posible analizar la existencia del punto de ensilladura empleando la definición de este tipo de punto, investigando el comportamiento de las imágenes de la función en las cercanías del punto (0,0). En efecto, para puntos próximos puede ser:

$x \geq 0 \; e \; y \leq 0$ (4to. cuadrante) resulta $g(x,y) = 3xy + 2 \leq 2 = g(0,0)$

$x \geq 0 \; e \; y \geq 0$ (1er. cuadrante) resulta $g(x,y) = 3xy + 2 \geq 2 = g(0,0)$

En consecuencia, la función *g* admite un punto silla en el punto (0,0).

Determine las líneas de nivel de la función *g* del ejemplo 7.9. y relacione las características del mapa de contorno con la presencia del punto silla. Comenten sus hallazgos en el foro.

Ejemplo 7.10: La función definida por $f: R^2 \to R \,/\, f(x,y) = 3x^2 + 2y^3$ admite como único punto estacionario a (0,0). La matriz Hessiana evaluada en (0,0) es $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Su determinante es cero (esta matriz es semidefinida positiva pues admite un autovalor positivo y otro nulo) y el teorema de Sylvester no proporciona información. No obstante, podemos investigar cómo se comportan las imágenes de la función en las proximidades del origen. En efecto, en puntos de la forma $(0,y)$ resulta $f(0,y) = 2y^3$:

$Si \;\; y > 0 \;\; es \;\; f(0,y) = 2y^3 > 0 = f(0,0)$

$Si \;\; y < 0 \;\; es \;\; f(0,y) = 2y^3 < 0 = f(0,0)$

En consecuencia, *f* admite en (0,0) un punto silla.

Ejemplo 7.11: La función definida por $f: R^2 \to R \,/\, f(x,y) = x^2 + 2y^4 - 9xy^2$ admite como punto estacionario a (0,0) (¿es único?) La matriz Hessiana evaluada en (0,0) es $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Su determinante es cero (esta matriz es semidefinida positiva pues admite un autovalor positivo y otro nulo) y el teorema de Sylvester no proporciona información. No obstante, podemos indagar cuál es el comportamiento de las imágenes de la función en las proximidades del origen. En efecto, en puntos de la forma $(0,y)$ resulta: $f(0,y) = 2y^4 \geq 0 = f(0,0)$, pero en la proximidades de (0,0) y en puntos que pertenecen a la parábola $x = y^2$ es: $f(y^2, y) = -6y^4 \leq 0 = f(0,0)$. Por lo tanto, *f* admite en (0,0) un punto silla.

Extremos globales de funciones escalares en conjuntos compactos

Recordemos que, con anterioridad, se ha establecido cuándo un conjunto A en el espacio R^n es compacto.
Un conjunto $A \subset R^n$ se dice compacto si es un conjunto cerrado y acotado.
Intuitivamente decimos que el conjunto A es compacto si "cabe" en una bola abierta o cerrada.
El *teorema de Weierstrass* establece que:
Si $f: A \subset R^n \to R$ es una función escalar continua en A y A un conjunto compacto, entonces existen puntos $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A$ tales que se verifica^ $f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_2) \quad \forall \vec{x} \in A$.
Esto significa que la función continua sobre un conjunto compacto alcanza en él los valores máximo y mínimo globales.
Si además la función *f* es diferenciable en algún conjunto abierto que contenga a A, ¿dónde pueden estar ubicados los extremos globales de *f* ? Para responder este interrogante existen algunas posibilidades que se describen a continuación:
a. Pueden ser puntos que estén en el "borde" del conjunto A, es decir, en la frontera de A.
b. Pueden ser puntos estacionarios de f e interiores al conjunto A.
c. Pueden ser puntos en los que la función f no es diferenciable en la frontera de A, si existieran.

Supongamos que $f : A \subset R^2 \to R \ / \ z = f(x, y)$ y la frontera del conjunto compacto A es una curva Ω que puede expresarse de forma implícita $\varphi(x, y) = c \quad c \in R$ o también dicha curva puede ser parametrizable. Los extremos globales de una función deben ser buscados en puntos interiores de A que sean además puntos estacionarios de *f*, o bien en puntos que pertenezcan a la frontera. Para saber si los extremos globales los alcanza en la curva frontera, es necesario hallar la ecuación explicita de Ω de la forma $y = g(x)$ *o bien* $x = \beta(y)$, según corresponda y algebraicamente sea posible el despeje (recuerde el teorema de las funciones implícitas) De esta forma, se realiza la composición de la función *f* con la función $y = g(x)$ *o bien* $x = \beta(y)$, es decir, supongamos que es $y = g(x)$, entonces, la función compuesta $\mu(x) = f(x, g(x))$ resulta ser ahora una función real de una sola variable independiente. Luego, se buscan sus puntos estacionarios y se los clasifica según las condiciones de suficiencia para la existencia de extremos locales (métodos analizados en Análisis Matemático I) Si no fuera posible el despeje de la ecuación de la curva Ω, entonces deberá intentarse efectuar una parametrización de Ω, o bien emplear un método denominado "los multiplicadores de Lagrange" que no lo trataremos en esta sección.
Una vez encontrados todos los extremos locales interiores de A y los que pertenecen a su frontera, deberá realizarse la comparación entre las imágenes de todos ellos a través de la función *f* y apartar el menor y el mayor entre ellos como mínimo y máximo globales de *f* respetivamente.

Ejemplo 7.12: Se desea encontrar los extremos globales de la función definida por:
$f : S \subset R^2 \to R \ / \ f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y$ con $S = \{(x, y) \in R^2 \ / \ 0 \le x \le 3 \ , \ 0 \le y \le 2\}$

El dominio de esta función *S* es un conjunto compacto, ya que se trata del interior y la frontera de un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados cuyos vértices son:
$A = (0,0)$, $B = (3,0)$, $C = (3,2)$, $D = (0,2)$ y, por otra parte, la función *f* es una función polinómica y, por lo tanto, continua en todo punto del conjunto *S*. En consecuencia, se cumplen las hipótesis del Teorema de Weierstrass y, así, existen el máximo y el mínimo global de la función dada en el conjunto *S*.

Ahora buscamos los puntos estacionarios pertenecientes al $\overset{\circ}{S}$ (conjunto interior de *S*) Para ello determinamos las derivadas parciales primeras de *f* y las igualamos a cero (condición necesaria para la existencia de extremos locales)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3x + 2 = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $P = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{9}\right)$ (único punto estacionario)

La imagen de *f* en *P* es: $f(P) = f\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{9}\right) = \dfrac{8}{9}$

No es necesario analizar si este punto es máximo o mínimo local porque no es lo pedido, por lo tanto, analizamos lo que sucede en la frontera (si se pidiera calcular también los extremos locales, se debería aplicar el criterio del Hessiano en el punto P)
La frontera de *S* es la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.
Una parametrización del segmento $\overline{AB}$ es $\vec{\lambda}_1 : [0,3] \to R^2 \ / \ \vec{\lambda}_1(t) = (t, 0)$

Sobre los puntos del segmento $\overline{AB}$ la función *f* se transforma en una función de una sola variable independiente $\varphi(t) = f(t,0) = 2t^2 \;\; con \;\; 0 \le t \le 3$. Es fácil ver que la función φ es una función creciente en el intervalo $[0,3]$ ($\varphi'(t) = 4t \ge 0 \quad \forall t \in [0,3]$) De esta forma, el valor mínimo lo alcanza en el punto (0,0) y el valor máximo en el punto (3,0)

Una parametrización del segmento $\overline{BC}$ es $\vec{\lambda}_2 : [0,2] \to R^2 \;\; / \;\; \vec{\lambda}_2(t) = (3,t)$

Si evaluamos a *f* sobre los puntos del segmento $\overline{BC}$ resulta:

$g(t) = f(3,t) = 18 - 7t \;\; con \;\; 0 \le t \le 2$. La función g es una función decreciente en el intervalo $[0,2]$ ($g'(t) = -7 < 0 \quad \forall t \in [0,2]$) Por tanto, el valor máximo lo alcanza en el punto (3,0) y el valor mínimo en el punto (3,2)

Una parametrización del segmento $\overline{CD}$ es $\vec{\lambda}_3 : [0,3] \to R^2 \;\; / \;\; \vec{\lambda}_3(t) = (t,2)$

Sobre los puntos del segmento $\overline{CD}$ la función f es $\mu(t) = f(t,2) = 2t^2 - 6t + 4 \;\; con \;\; 0 \le t \le 3$ y $\mu'(t) = 4t - 6 = 0 \;\Rightarrow\; t_0 = \dfrac{3}{2}$, $\mu'(t) = 4t - 6 < 0 \;\; \forall t \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ y $\mu'(t) = 4t - 6 > 0 \quad \forall t \in \left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$ Aplicando el criterio del signo de la derivada primera en el entorno del punto estacionario, $t_0 = \dfrac{3}{2}$ es un mínimo local de *f* sobre los puntos del segmento $\overline{CD}$ y su valor es $f\left(\dfrac{3}{2}, 2\right) = -\dfrac{1}{2}$

Una parametrización del segmento $\overline{DA}$ es $\vec{\lambda}_4 : [0,2] \to R^2 \;\; / \;\; \vec{\lambda}_4(t) = (0,t)$

Sobre los puntos del segmento $\overline{DA}$ la función *f* es $\gamma(t) = f(0,t) = 2t \;\; con \;\; 0 \le t \le 2$. La función γ es una función creciente en el intervalo $[0,2]$ ($\gamma'(t) = 2 > 0 \quad \forall t \in [0,2]$) Así, el valor mínimo lo alcanza en el punto (0,0) y el valor máximo en el punto (0,2)

Los valores a confrontar son:

$$f(A) = f(0,0) = 0 \;\; ; \;\; f(B) = f(3,0) = 18 \;\; ; \;\; f(C) = f(3,2) = 4 \;\; ; \;\; f\left(\frac{3}{2}, 2\right) = -\frac{1}{2} \; ;$$

$$f(D) = f(0,2) = 4 \;\; ; \;\; f(P) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right) = \frac{8}{9}$$

De la comparación se concluye que la función *f* alcanza el valor máximo global en el punto $B(3,0)$ y dicho valor es 18, y el valor mínimo global lo alcanza en el punto $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$ que es $-\dfrac{1}{2}$.