ÁREA DE SUPERFICIE EN EL ESPACIO – SUPERFICIE ALABEADA

Calcularemos el área de diversas superficies, por ejemplo, las gráficas de funciones de dos variables.

Cuando calculamos el área de una región plana en el plano xy, la integral es: $\iint_R dA$

Donde la función a integrar es 1.

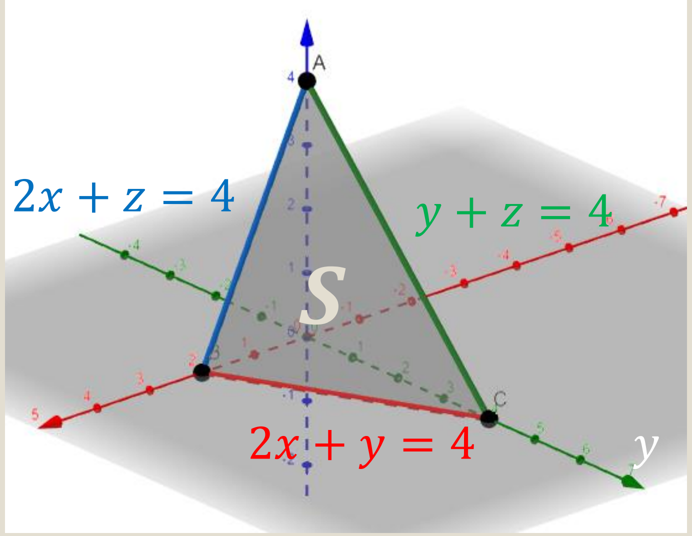
Ahora si queremos el área de una superficie alabeada, la integral a resolver será:

$$\iint_R \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\, dA$$

Donde las derivadas parciales son de la función que genera la superficie en cuestión y la región de integración es la proyección de la superficie que vamos a calcular sobre el plano xy, es decir, la sombra que hace la superficie sobre el piso.

EJEMPLO 7) Calcular el área de la porción del plano $2x + y + z = 4$ en el primer octante.

Este plano ya lo utilizamos para calcular volumen debajo de una superficie:



En este caso vamos a calcular el área de la superficie del plano, es decir el área de la cara oblicua del tetraedro.

Para completar la integral necesitamos la región de proyección y las derivadas parciales.

La región proyectada en el plano xy ya la conocemos y la caracterizamos como Tipo I:

$$R_{TI}: \{(x, y) \in R^2 / 0 \le x \le 2 \; ; \; 0 \le y \le 4 - 2x\}$$

En cuanto a las derivadas parciales, despejamos z de la ecuación del plano y derivamos:

$$z = 4 - 2x - y \longrightarrow \begin{cases} f_x = -2 \\ f_y = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\iint_R \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\, dA = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1}\ dydx$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-2x} \sqrt{6}\, dydx = \sqrt{6} \int_0^2 \int_0^{4-2x} dydx$$

Como dentro de la integral quedó un 1 el resultado de la integral será el área de la región triangular.

Siendo la altura del triángulo 4 y la base 2, el área de dicho triángulo es 4. Por lo tanto:

$$\sqrt{6} \int_0^2 \int_0^{4-2x} dydx = \mathbf{4\sqrt{6}}$$

Área de la porción del plano en el primer octante.
¡Resultado POSITIVO!

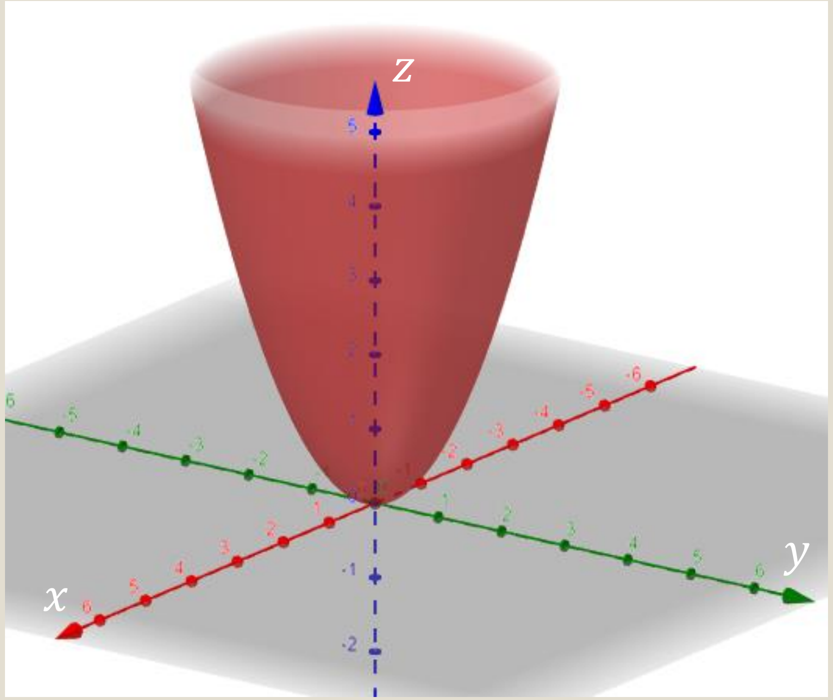
De todos modos, es posible resolver la integral:

$$\int_0^2 \int_0^{4-2x} dydx = \int_0^2 (4-2x)dx = \left.(4x - x^2)\right]_0^2 = 8 - 4 = \mathbf{4}$$

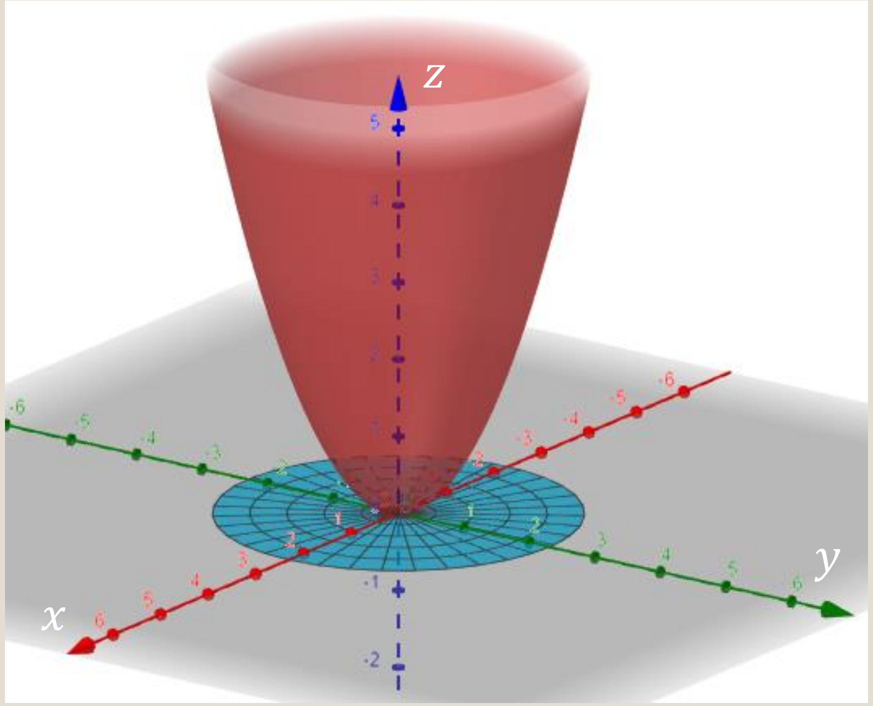
EJEMPLO 8) Calcular el área del paraboloide $z = x^2 + y^2$ entre $z = 1$ y $z = 2$.

Para entender este ejercicio, empecemos considerando el paraboloide completo:

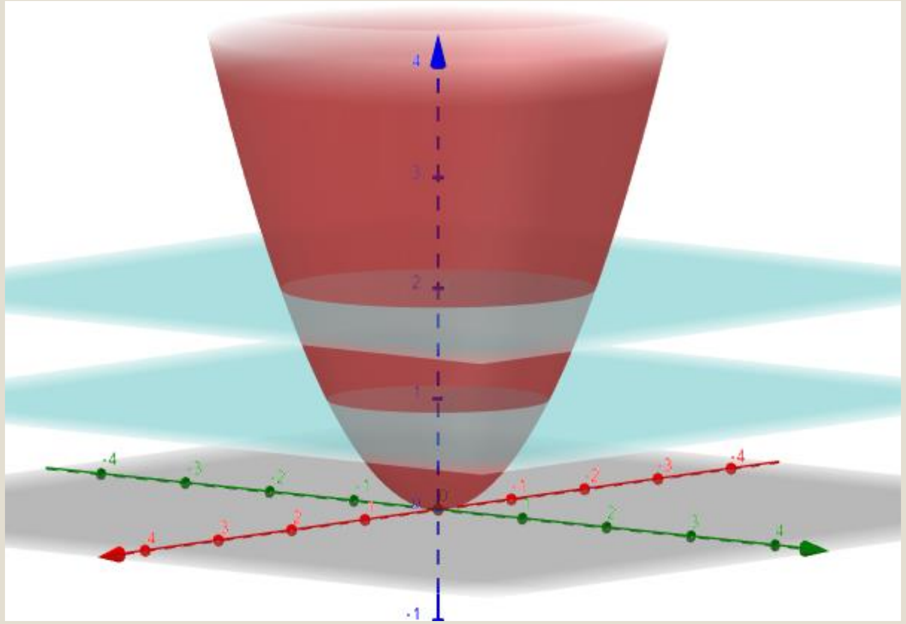
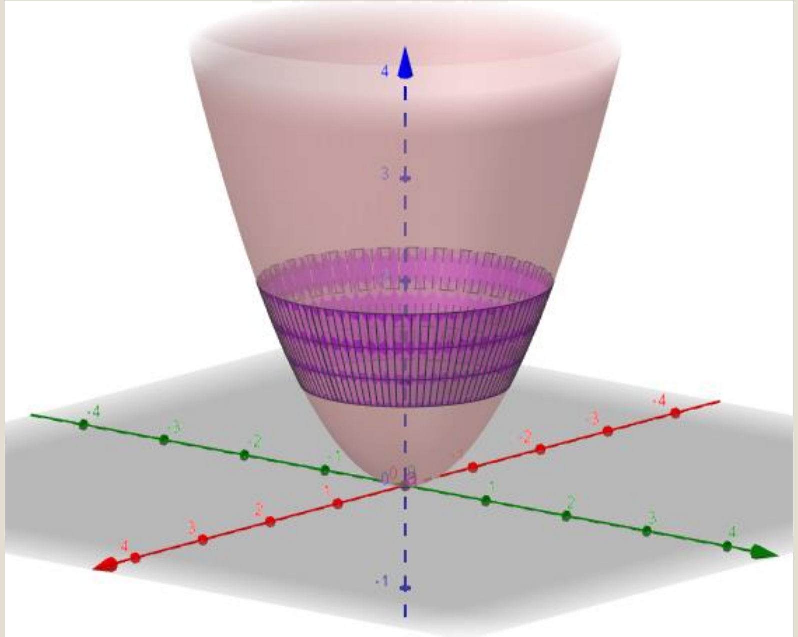
La gráfica del paraboloide es la siguiente



Su proyección sobre el plano xy es:



Sin embargo, nosotros queremos la porción que se encuentra entre $z = 1$ y $z = 2$. Estas dos ecuaciones representan dos planos horizontales a sus respectivas alturas.

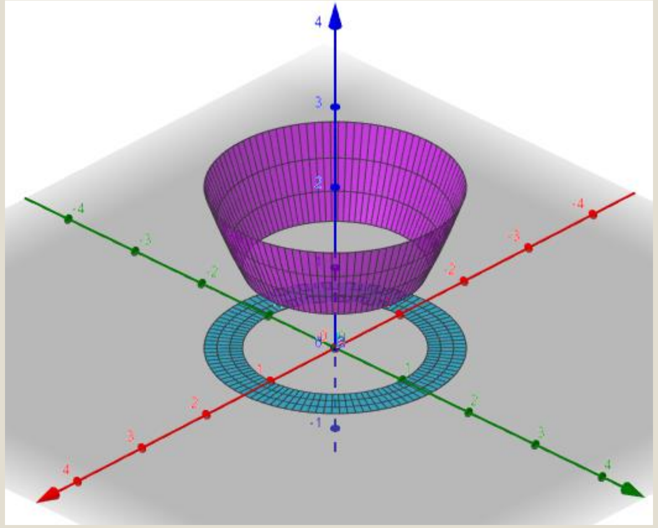
 

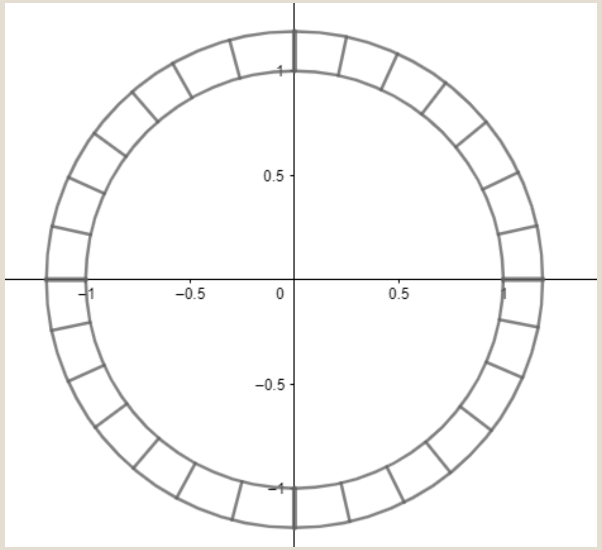
Una vez conocida la porción de superficie, debemos hacer su proyección. Las curvas extremas de la superficie son las dos curvas de nivel obtenidas al cortar con los planos:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} \qquad x^2 + y^2 = 1$$ Circunferencia de radio 1 centrada en el origen.

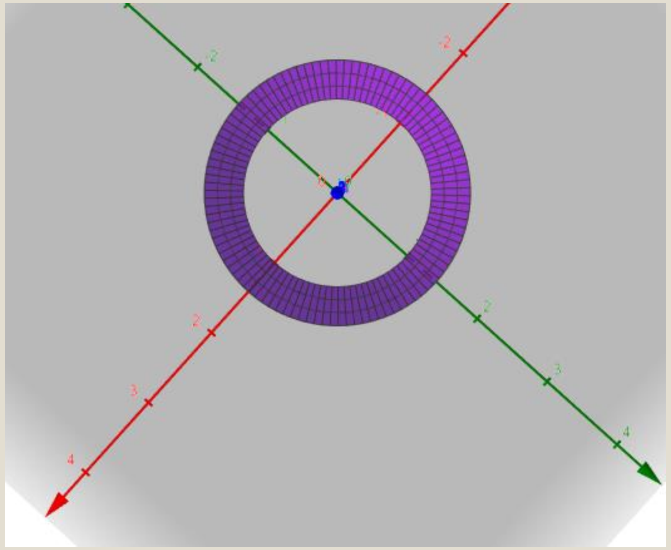
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases} \qquad x^2 + y^2 = 2$$ Circunferencia de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.

Al graficar estas curvas sobre el plano, la región de proyección será aquella contenida entre ambas circunferencias.

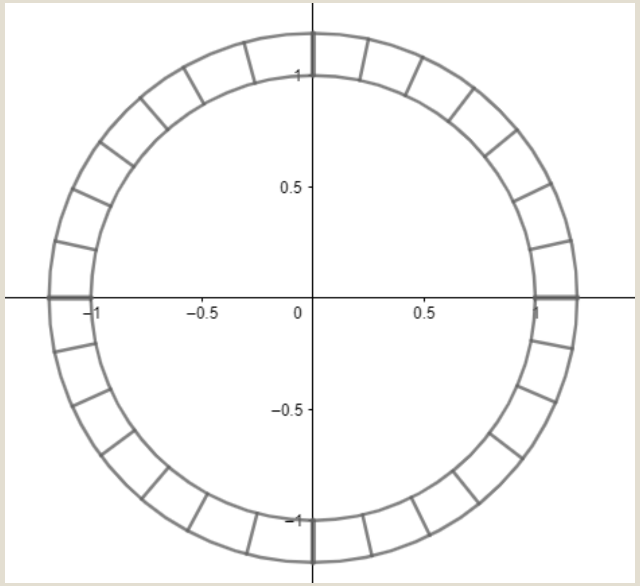




Aprovechando la disponibilidad gráfica, una forma fácil de ver la proyección es enfocar la superficie desde arriba y la forma que se vea es la proyección.



Observar que, al enfocar desde arriba,
la superficie violeta superpone exactamente
a la proyección azul.



Siendo una región circular conviene usar polares:

$$R_P:\{(r,\theta) \in R^2 / 1 \leq r \leq \sqrt{2}\ ;\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Luego la función y sus derivadas son:

$$z = x^2 + y^2 \qquad \begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = 2y \end{cases}$$

Entonces la integral resulta:

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, r dr d\theta$$

Sin embargo, como la región de integración es polar, debemos pasar todo a polares:

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2 + 1}\, r dr d\theta$$

Por sustitución:

$$u = 4r^2 + 1$$

$$du = 8\,rdr$$

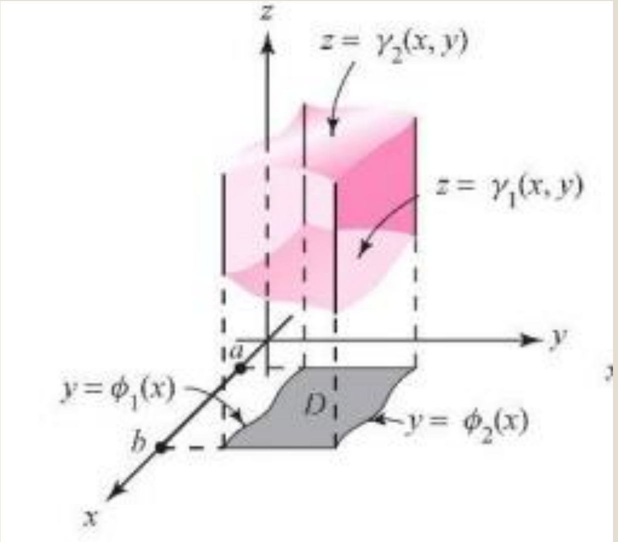
$$\int \sqrt{4r^2+1}\,rdr = \int \frac{\sqrt{u}}{8}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{12} = \frac{(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2+1}\,rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12}\right]_1^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{1}{12}\left\{\left[4\left(\sqrt{2}\right)^2+1\right]^{\frac{3}{2}} - \left[4(1)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}\right\}\underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}} d\theta}_{2\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}\left(9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right)}$$

INTEGRALES TRIPLES

Consisten en tres procesos de integración sucesivos: $\iiint_Q f(x,y,z)dV$

En estos casos debemos definir sólidos Q sobre los cuales integraremos, para ello se deben especificar los intervalos de las tres coordenadas.



Para lograrlo especificamos las primeras dos variables mediante la proyección del sólido, es decir como si se tratara de una región.

Luego establecemos la tercera variable, definiendo que superficies ofician de piso y techo del sólido.

Para calcular el volumen de un sólido con integrales triples, es análogo a calcular áreas planas con integrales dobles, la función a integrar debe ser $f(x,y,z) = 1$.

EJEMPLO) Calcular usando integrales triples el volumen del sólido limitado por:

$$z = 4y^2 \qquad z = 2 \qquad x = 2 \qquad x = 0$$

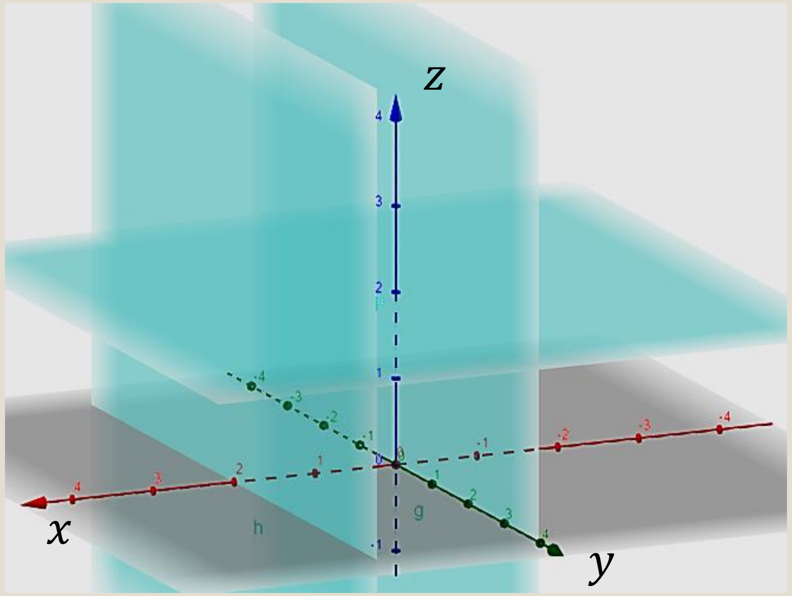
Las ecuaciones precedentes corresponden todas a superficies ya que deben encerrar un volumen.

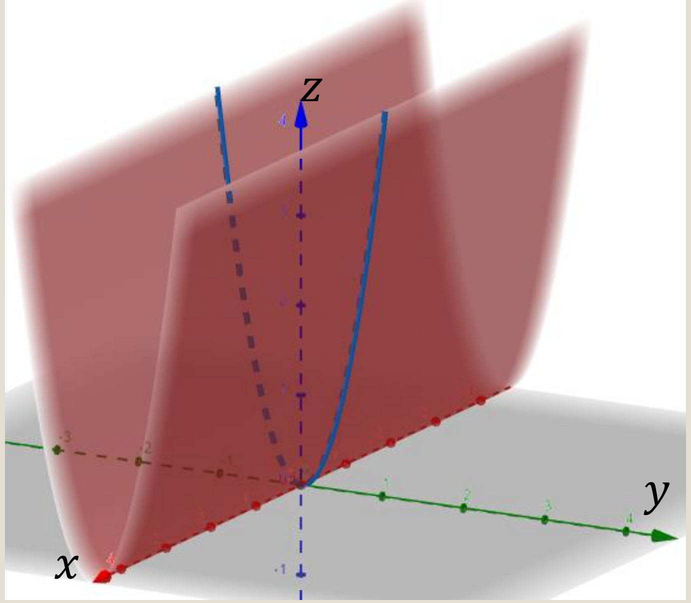
$z = 2 \quad x = 2 \quad x = 0$

Planos paralelos a los planos coordenados, pasantes por las respectivas coordenadas.

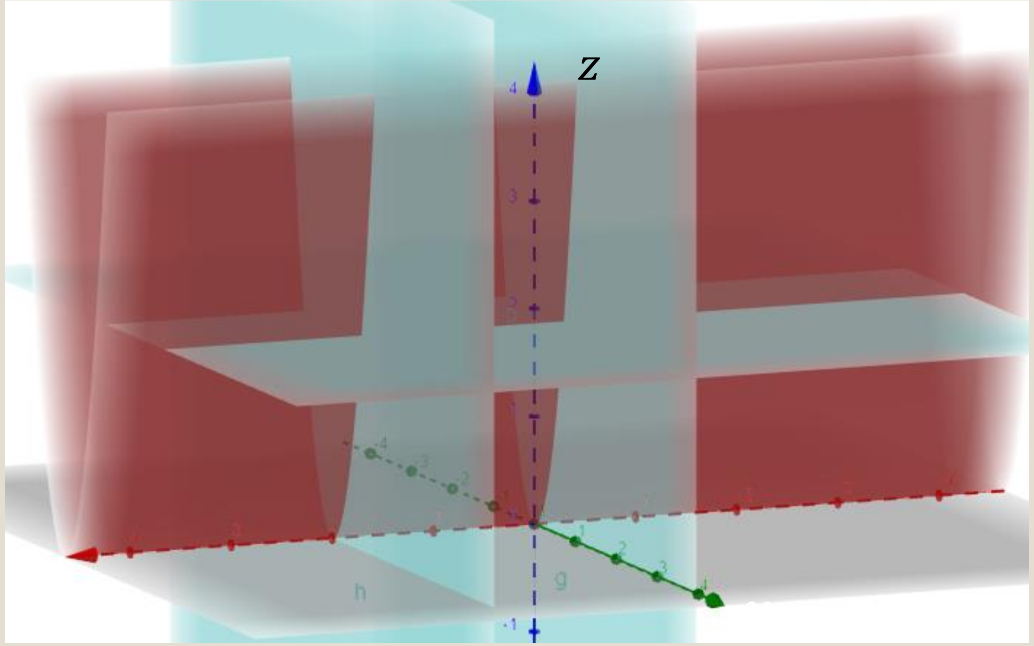
$z = 4y^2$:

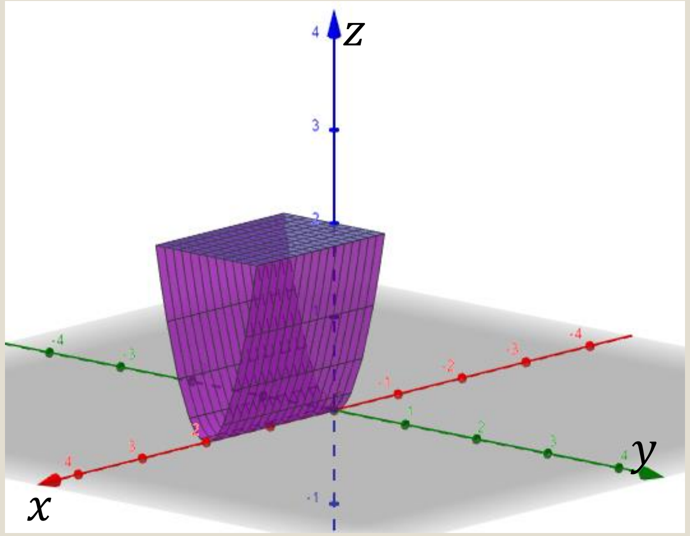
Corresponde con una parábola en el plano yz, que al faltar la variable x, se extiende paralelamente al eje de dicha variable, resultando en un Cilindro Parabólico de eje x.





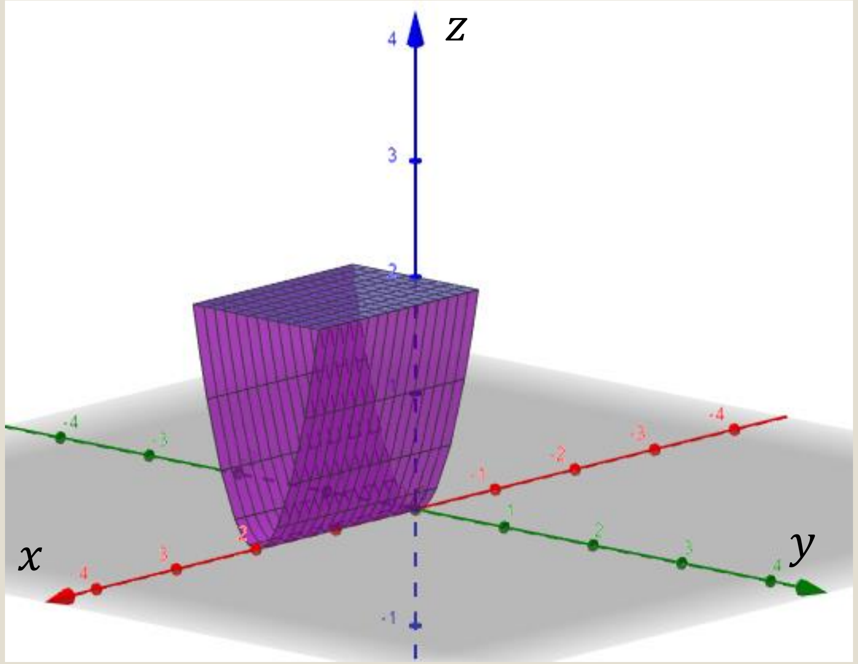
Juntando todas las superficies:





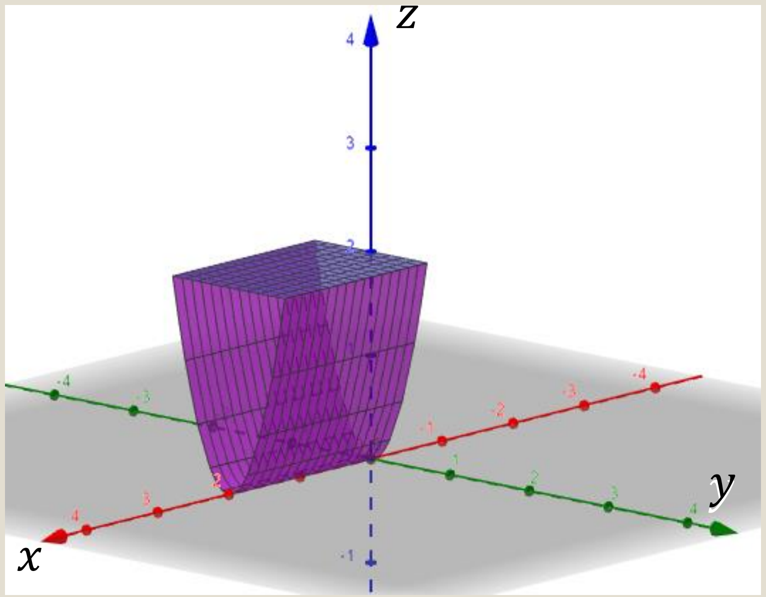
Los planos $x = 0$ y $x = 2$ funcionan de paredes laterales, mientras que el plano $z = 2$ oficia de techo del sólido. El sólido simula una carpa o un túnel dado vuelta.

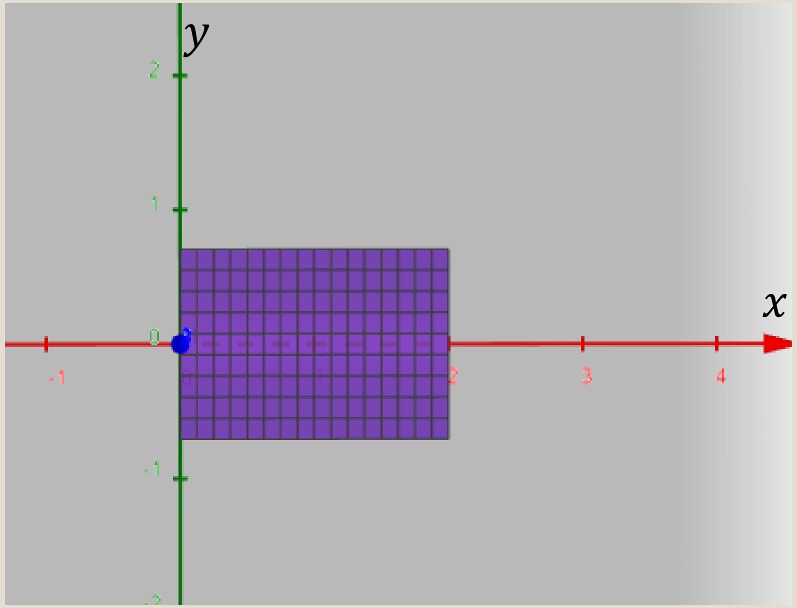
Una vez identificado el sólido debemos proyectarlo. Podemos elegir cualquiera de los planos coordenados para hacer la proyección, en general habrá alguna que sea conveniente frente a las otras, ya sea por la forma de la proyección o por las superficies que ofician de piso y techo después.



Este sólido tiene dos proyecciones sencillas que son sobre los planos xy y zy, estudiemos que sucede en cada caso.

Proyección sobre el plano xy: Miramos el sólido desde arriba, paralelo al eje z.



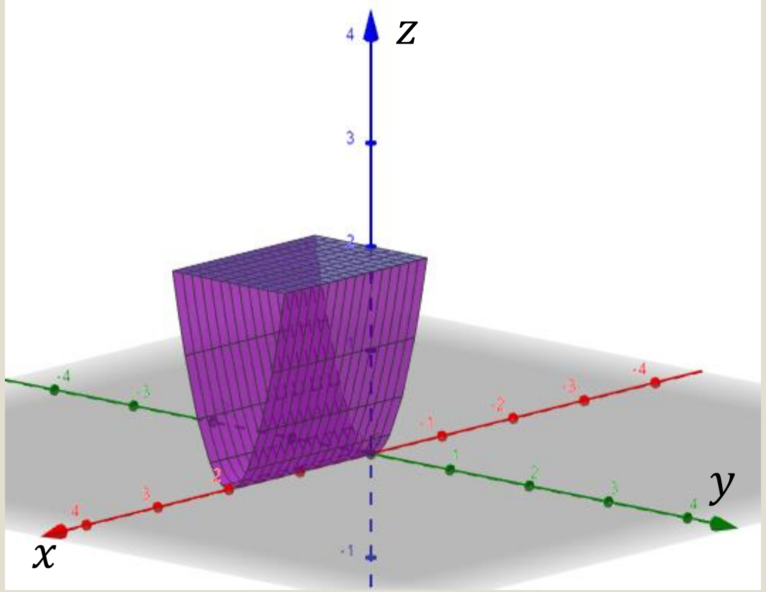


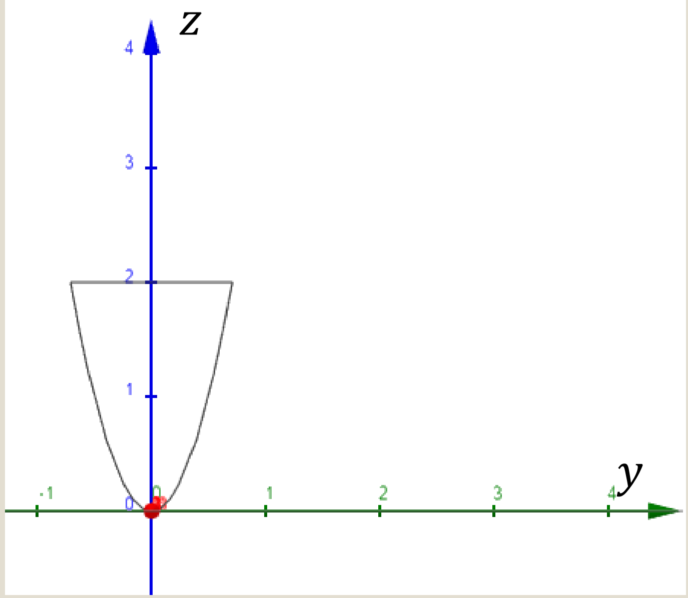
Obtenemos un rectángulo en el plano xy. Recordar también que la proyección es la sombra que genera el sólido. Sus dimensiones son de 0 a 2 en x, luego para obtener y, la proyección que se obtuvo es a partir del corte del plano $z = 2$, por lo tanto, reemplazamos este valor en la ecuación del cilindro parabólico para despejar el intervalo de y.

Luego nos resta medir z entre que superficies se mueve. De abajo a arriba, el piso del sólido es el cilindro parabólico y el techo es el plano horizontal. De esta manera terminamos de definir el sólido.

Proyección sobre el plano yz:

Miramos el sólido desde el lateral, de forma paralela al eje x.





Obtenemos una región parabólica en el plano yz. Nos conviene definirla de forma que la variable y se mueva entre valores constantes y luego z entre funciones de y.

Una vez definida la región, nos resta definir la variable x, entre cuales superficies se mueve. Siempre barremos el eje desde los negativos hacia los positivos.

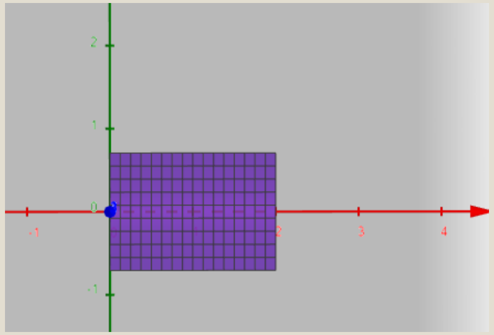
El piso y techo en este caso son las paredes planas laterales del sólido. Es decir, el piso es $x = 0$ y el techo $x = 2$.

Resumiendo:

La proyección plana sobre el plano xy es una región rectangular sencilla y luego en los límites de z consideramos el cilindro parabólico.

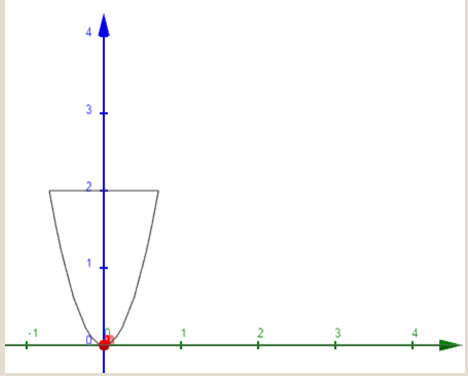
La proyección plana sobre el plano yz es una región parabólica, levemente más compleja que el rectángulo, pero luego la variable x se mueve entre superficies planas.

MORALEJA: ¡Nada se pierde, todo se transforma!



$$Q\colon \{(x,y,z) \in R^3 / 0 \leq x \leq 2\,; -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\,; 4y^2 \leq z \leq 2\}$$

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_0^2 \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{4y^2}^{2} 1dzdydx$$



$$Q\colon \{(x,y,z) \in R^3 / 0 \leq x \leq 2\,; -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\,; 4y^2 \leq z \leq 2\}$$

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{4y^2}^{2} \int_0^2 1dxdzdy$$

En este caso como el sólido es sencillo y las proyecciones que realizamos también, resultó que la definición analítica del sólido Q en ambos casos es igual:

$$Q:\{(x,y,z) \in R^3/0 \leq x \leq 2\,;-\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2\,;4y^2 \leq z \leq 2\}$$

Si bien el sólido no cambia según la proyección que se realice, la definición analítica en general varía con la proyección y el orden en el que se van definiendo las variables.

Para la proyección en el plano xy la integral es:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \int_{4y^2}^{2} 1dzdydx$$

Las últimas dos variables de integración con sus respectivas integrales corresponden con las variables que conforman la región de proyección.

En general el orden de integración es inverso al orden en el que se definieron las variables, la última que se define es la primera que se integra.

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \int_{4y^2}^{2} 1dzdydx$$

x e y se pueden integrar en cualquier orden ya que sus límites son constantes.

Pero z si o si debemos integrarla antes que y, ya que en uno de sus límites poseen una función de y.

Ahora sí resolvamos la integral:

$$\int_0^2 \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{4y^2}^{2} dzdydx \;=\int_0^2 \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} z\Big]_{4y^2}^{2} dydx \;=\int_0^2 \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (2-4y^2)\, dydx$$

$$=\int_0^2 \left(2y-\frac{4}{3}y^3\right)\Bigg]_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} dx = \int_0^2 \left\{\left[2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right]-\left[2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{4}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right]\right\} dx =$$

$$=\left(\underbrace{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}}+\underbrace{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)\int_0^2 dx \;=\frac{4}{3}\sqrt{2}*2 \;= \boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{2}} \quad \equiv Volumen\ de\ Q$$

Función impar entre valores opuestos su resultado se duplica.

EJEMPLO) a) Evaluar la integral:

$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{z^2}\int_{x-z}^{x+z} z\,dy\,dx\,dz = \int_{1}^{2}\int_{0}^{z^2} zy\Big]_{x-z}^{x+z} dx\,dz = \int_{1}^{2}\int_{0}^{z^2} z[(x+z)-(x-z)]\,dx\,dz =$$

$$= \int_{1}^{2}\int_{0}^{z^2} z[2z]\,dx\,dz = \int_{1}^{2} 2z^2x\Big]_{0}^{z^2} dz = \int_{1}^{2} 2z^4 dz = \frac{2}{5}z^5\Big]_{1}^{2} = \frac{2}{5}(32-1) = \mathbf{\frac{62}{5}}$$

b) Evaluar la integral:

$$\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}}\int_{2}^{3} dy\,dx\,dz = \int_{0}^{1}\int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} y\Big]_{2}^{3} dx\,dz = (3-2)\int_{0}^{1} x\Big]_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} dz = \int_{0}^{1}(\sqrt{4-z}-\sqrt{1-z})dz$$

$$= \int_{0}^{1}\sqrt{4-z}\,dz - \int_{0}^{1}\sqrt{1-z}\,dz$$

$$u = 4-z$$

$$du = -dz$$

$$\int \sqrt{4-z}\,dz = -\int \sqrt{u}\,du = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(4-z)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{4-z}\,dz - \int_0^1 \sqrt{1-z}\,dz \;= -\frac{2}{3}(4-z)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 - \left[-\frac{2}{3}(1-z)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1\right] =$$

$$= \left[\left(-\frac{2}{3}\right)(3)^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{2}{3}\right)(4)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\left(-\frac{2}{3}\right)(0)^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{2}{3}\right)(1)^{\frac{3}{2}}\right] \;= -\frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\left(7-\sqrt{27}\right)}$$