Integración Múltiple

Integración Múltiple

U. T. N°10. Integrales Múltiples. Integrales triples. Contenidos:

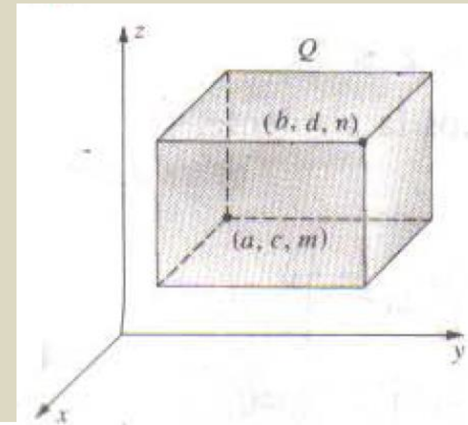
- Integral triple. Definición. Cálculo de volúmenes
- Coordenadas cilíndricas
- Coordenadas esféricas
- Masa, centro de masa y momentos de inercia de una lámina y de un sólido

Integración Múltiple

Integrales triples

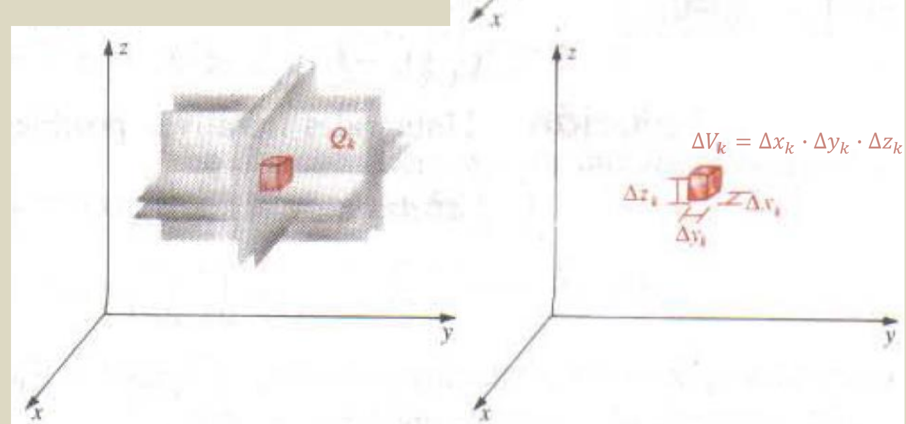
Integrales triples en coordenadas cartesianas

Sea $f(x, y, z)$ una función de tres variables independientes continua en un recinto Q



$$Q: \{(x, y, z) \,/\, a \leq x \leq b \,; c \leq y \leq d \,;\, m \leq z \leq n\}$$

Donde a, b, c, d, m y n son constantes reales.
El recinto Q se particiona mediante planos Paralelos a los planos coordenados, entonces obtenemos $\{Q_k\}$.
La norma de la partición $||\Delta||$, es la longitud de la mayor diagonal correspondiente a todos los $\{Q_k\}$. El volumen elemental de Q_k es $\Delta V_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k \cdot \Delta z_k$. Finalmente, resulta



$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k \equiv \int\int\int_Q f(x, y, z)\, dV = I$$

Integración Múltiple

Si $f(x,y,z)$ es continua en un recinto Q, el resultado de las siguientes integrales iterativas es el mismo

$$\int\int\int_Q f(x,y,z)\,dV = \int_a^b\int_c^d\int_m^n f(x,y,z)dzdydx = \int_c^d\int_m^n\int_a^b f(x,y,z)dxdzdy =$$

$$= \int_a^b\int_m^n\int_c^d f(x,y,z)dydzdx = \int_m^n\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)dydxdz =$$

$$= \int_c^d\int_a^b\int_m^n f(x,y,z)dzdxdy = \int_m^n\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

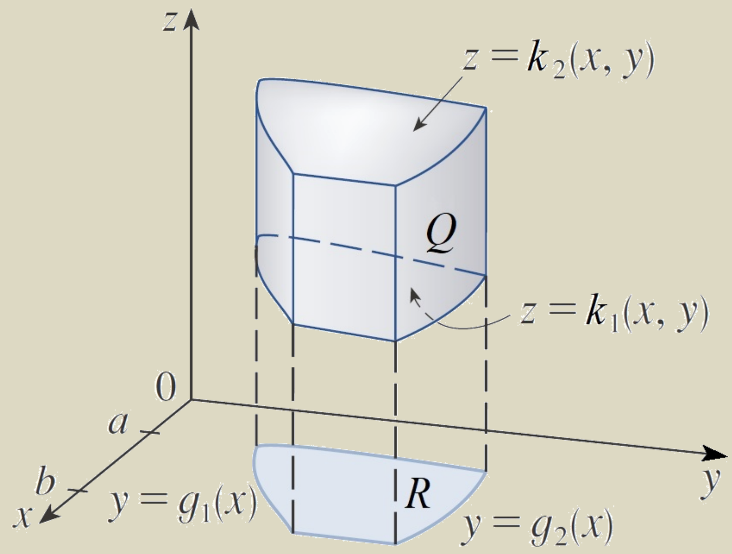
Integración Múltiple

Si $f(x,y,z)$ es continua en un recinto Q definido por:

$$Q\colon \{(x,y,z)\ /\ a \le x \le b\ ;\ g_1(x) \le y \le g_2(x);\ k_1(x,y) \le z \le k_2(x,y)\}$$

con g_1,g_2,k_1 y k_2 funciones continuas.
Además,

$g_1(x) \le g_2(x) \qquad \forall x \in [a,b]$
$k_1(x,y) \le k_2(x,y) \quad \forall (x,y) \in R$



Se denota a la integral triple, proyectando el recinto Q sobre el plano xy, donde R es una región plana de tipo I :

$$I = \int\int\int_Q f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

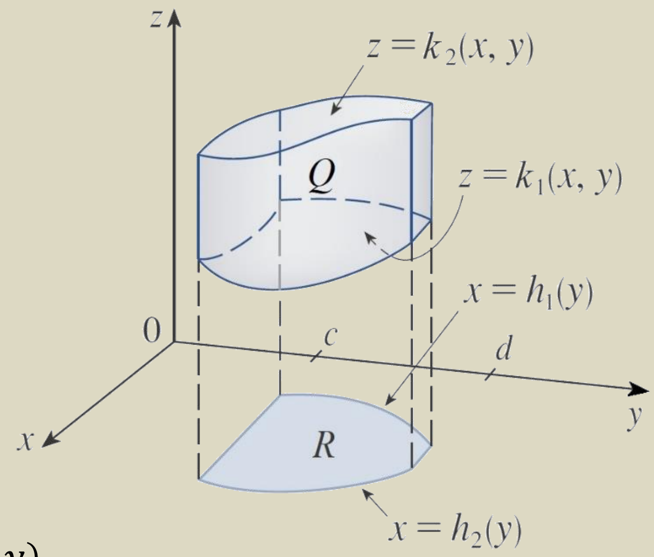
Integración Múltiple

Análogamente, si $f(x,y,z)$ es continua en un recinto Q definido por:

$$Q\colon \{(x,y,z)\ /\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\ ;c \leq y \leq d\ ; k_1(x,y) \leq z \leq k_2(x,y)\}$$

con h_1,h_2,k_1 y k_2 funciones continuas.
Además,

$$\begin{array}{ll} h_1(y) \leq h_2(y) & \forall y \in [c,d] \\ k_1(x,y) \leq k_2(x,y) & \forall (x,y) \in R \end{array}$$



Se denota a la integral triple, proyectando el recinto Q sobre el plano xy, donde R es una región plana de tipo II:

$$I = \iiint_Q f(x,y,z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z) dzdxdy$$

Del mismo modo, se puede plantear las integrales triples iterativas restantes proyectando, el recinto Q, sobre los planos coordenados xz e yz respectivamente.

Integración Múltiple

Volumen del recinto Q, determinación mediante integrales triples

Si $f(x,y,z)=1,\ \forall(x,y,z)\in Q$, entonces el volumen V_Q del recinto Q se determina mediante la siguiente expresión

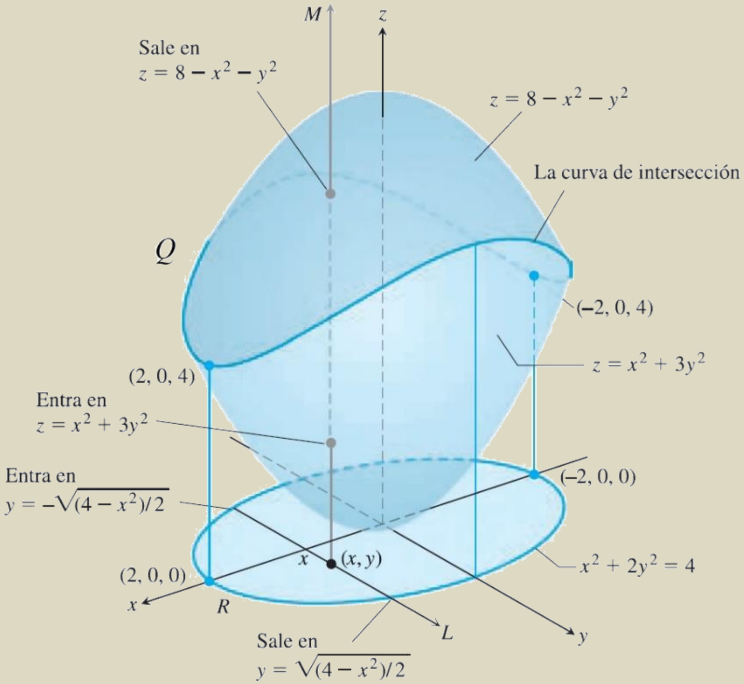
$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV=\iiint_Q 1\,dV=V_Q$$

Ejemplo 1. Calcule el volumen, utilizando integrales triples, del recinto Q limitado por las superficies $z=x^2+3y^2$ y $z=8-x^2-y^2$

$$V_Q=\iiint_Q f(x,y,z)\,dV$$

$$=\iiint_Q 1\,dV$$

$$=\iiint_Q dzdydx$$



Integración Múltiple

Se plantea el recinto Q

$$Q:\left\{(x,y,z)\ /\ -2\le x\le 2\ ;-\sqrt{\left(\frac{4-x^2}{2}\right)}\le y\le\sqrt{\left(\frac{4-x^2}{2}\right)};x^2+3y^2\le z\le 8-x^2-y^2\right\}$$

Luego, se reemplazan los límites de integración y se establece el orden de integración en la integral triple

$$V_Q=\int\int\int_Q 1\cdot dV=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\left(\frac{4-x^2}{2}\right)}}^{\sqrt{\left(\frac{4-x^2}{2}\right)}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2}1\cdot dzdydx$$

$$V_Q=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\left(\frac{4-x^2}{2}\right)}}^{\sqrt{\left(\frac{4-x^2}{2}\right)}}(8-2x^2-4y^2)\,dydx=8\pi\sqrt{2}$$

<u>Nota</u>: queda para el alumno la resolución posterior de la integral doble, planteada en la clase con la respuesta del volumen.

Integración Múltiple

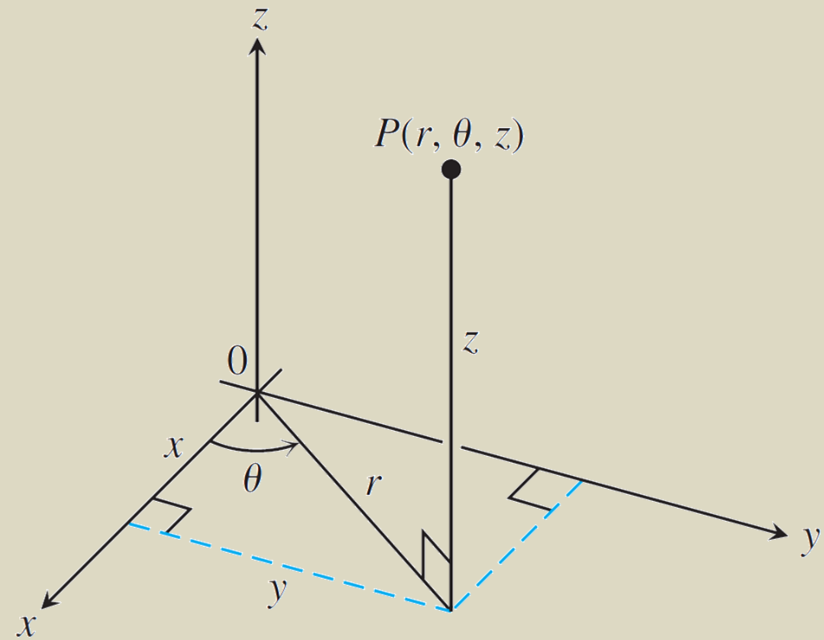
<u>Integrales triples en coordenadas cilíndricas</u>

Las ***coordenadas cilíndricas*** representan un punto P en el espacio mediante la terna de coordenadas (r, θ, z) donde

1. r y θ son las coordenadas polares de la proyección vertical de P sobre el plano xy.

2. z es la coordenada vertical rectangular.

Las ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas, o rectangulares, (x, y, z) y las cilíndricas (r, θ, z) son:



$$\begin{cases} x = r \cdot cos\,\theta \\ y = r \cdot sen\,\theta \\ z = z \end{cases} \quad con \quad r \geq 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \theta = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

Integración Múltiple

Si $f(r,\theta,z)$ es continua en un recinto Q definido por:

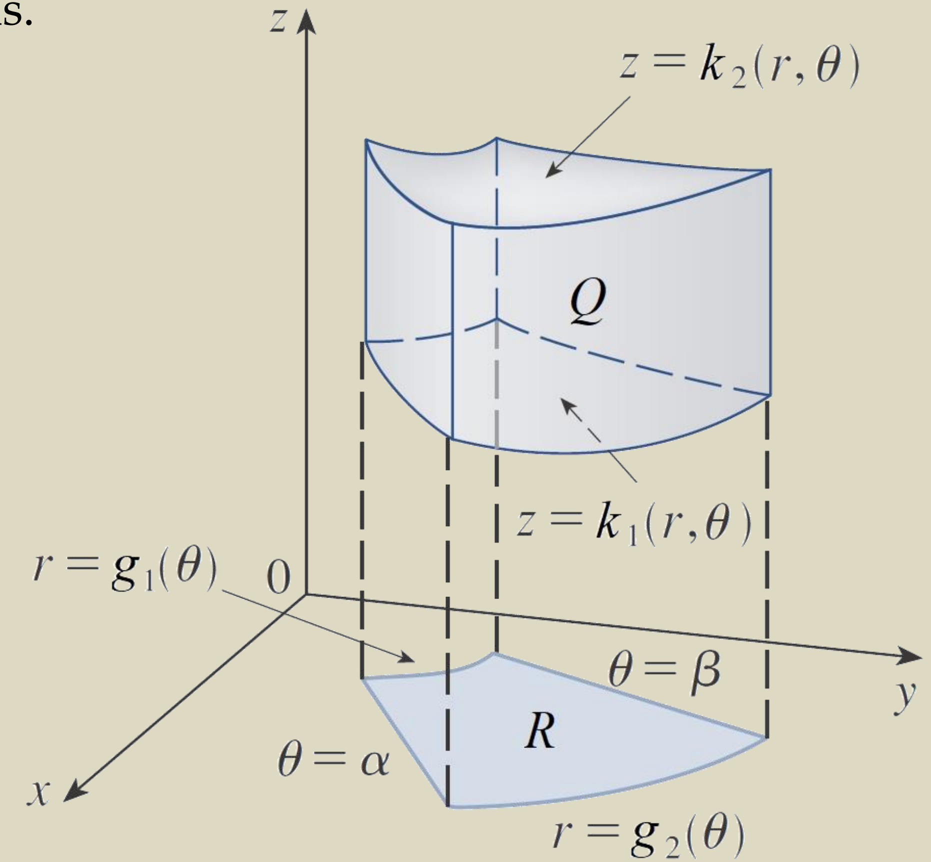
$$Q:\{(r,\theta,z)/g_1(\theta)\leq r\leq g_2(\theta)\ ;\ \alpha\leq\theta\leq\beta\ ;\ k_1(r,\theta)\leq z\leq k_2(r,\theta)\}$$

con g_1,g_2,k_1 y k_2 funciones continuas.

Además,

$g_1(\theta)\leq g_2(\theta) \qquad \forall\theta\epsilon\ [\alpha,\beta]$

$k_1(r,\theta)\leq k_2(r,\theta) \quad \forall(r,\theta)\epsilon\ R$



Integración Múltiple

La partición $\{Q_k\}$ en coordenadas cilíndricas se obtiene mediante una familia de superficies cilíndricas circulares de radio constante coaxiales con el eje z (cilindros circulares de radio $r = a$), un haz de planos que contiene al eje z (planos $\theta = \theta_0$) y una familia de planos paralelos al plano xy (planos $z = z_0$).

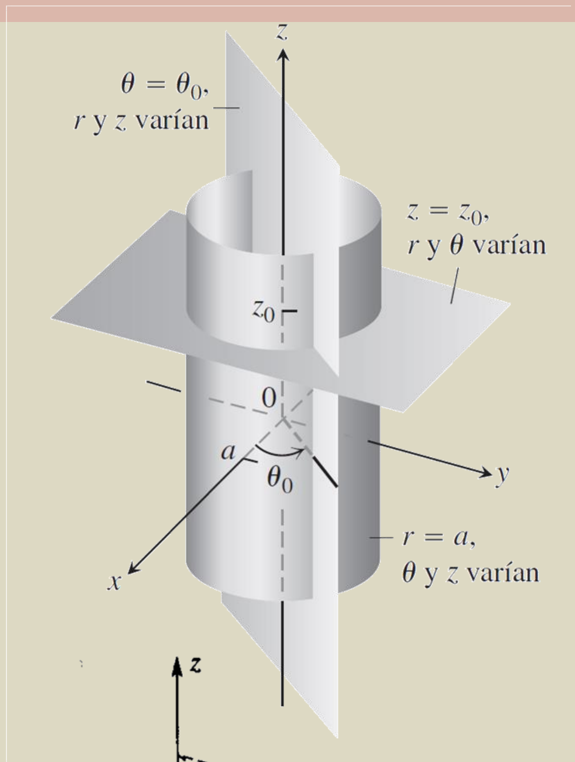
Eligiendo un punto (r_k, θ_k, z_k) en el centro del elemento Q_k (cuña cilíndrica), podemos determinar su volumen elemental como

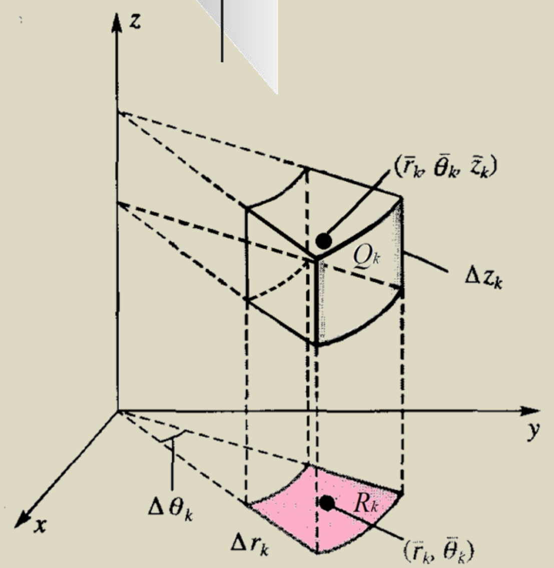
$$\Delta V_k = \Delta A_k \cdot \Delta z_k$$

Recordando que el área de R_k es

$$\Delta A_k = \bar{r}_k \cdot \Delta r_k \cdot \Delta\theta_k$$

$$\Delta V_k = (\bar{r}_k \cdot \Delta r_k \cdot \Delta\theta_k) \cdot \Delta z_k$$

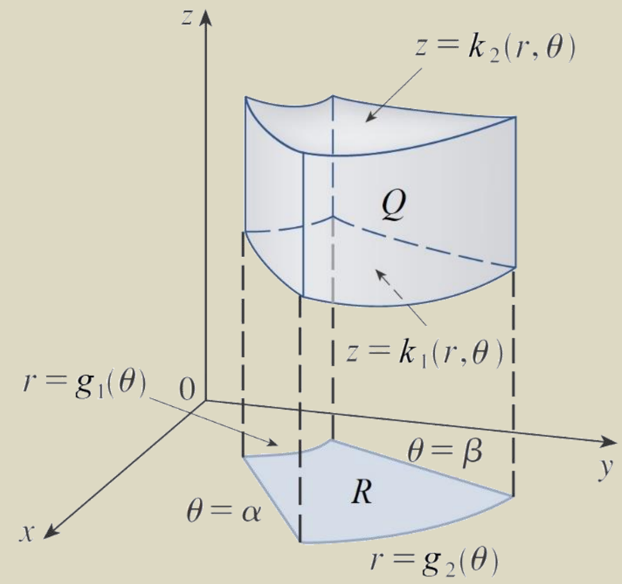




Integración Múltiple

Estableciendo el límite de la suma de Riemann, cuando la norma de la partición interna $\|\Delta\| \to 0$

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k f(r_k, \theta_k, z_k) \cdot \Delta V_k \equiv \int\int\int_Q f(r, \theta, z)\, dV$$



Siempre que el límite exista.

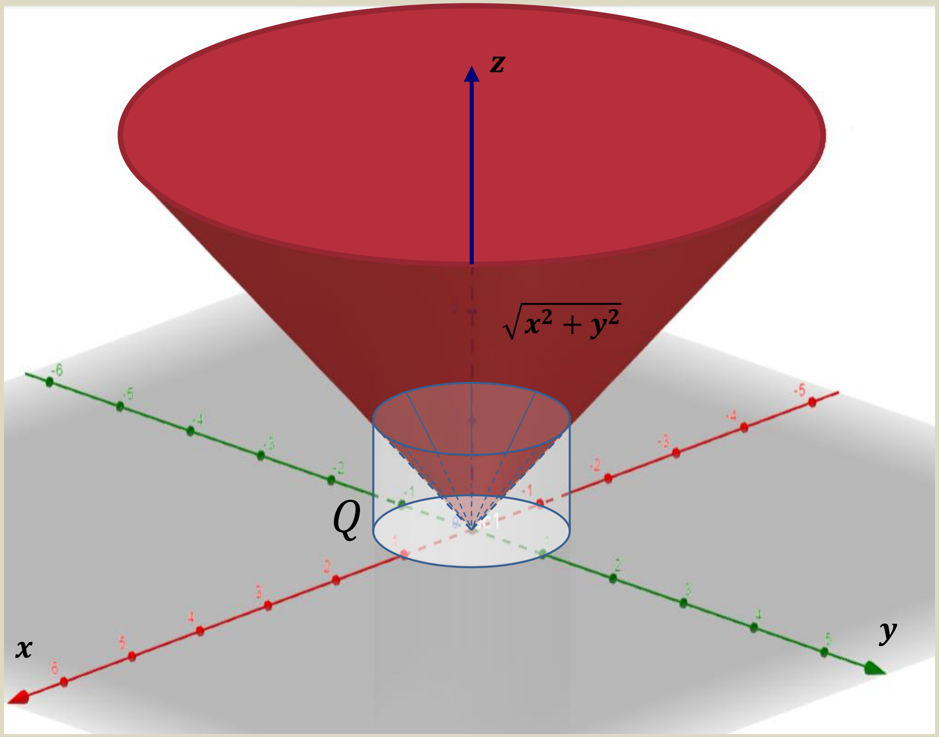
Finalmente, se denota a la integral triple, proyectando el recinto Q sobre el plano xy, donde R es una región plana:

$$I = \int\int\int_Q f(r, \theta, z)\, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, \underbrace{rdzdrd\theta}_{dV}$$

Integración Múltiple

<u>Ejemplo 2:</u> *Utilizar coordenadas cilíndricas para evaluar la siguiente integral triple:*

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} 3z^2\,dz\,dy\,dx$$



$$Q:\{(r;\theta;z)\ /\ 0\le r\le 1\,;0\le\theta\le 2\pi\,;0\le z\le r\}$$

Integración Múltiple

$$Q: \{(r, \theta, z) \,/\, 0 \leq r \leq 1\, ; 0 \leq \theta \leq 2\pi\, ; 0 \leq z \leq r\}$$

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} 3z^2\, dz\, dy\, dx$$

$$I = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \int_{0}^{r} 3z^2\, r\, dz\, dr\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \left(3\,\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{r} r\, dr\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} r^3\, r\, dr\, d\theta$$

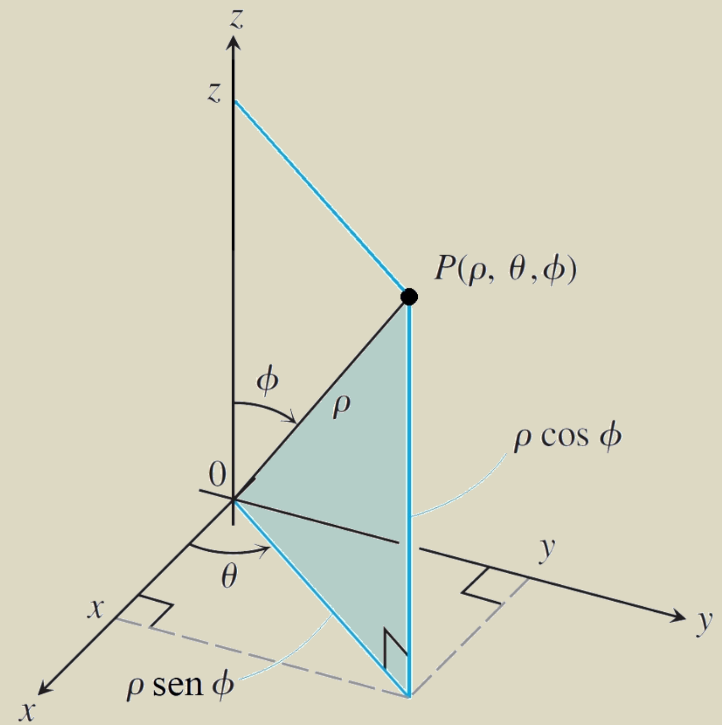
$$I = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} r^4\; dr\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_{0}^{1} d\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{5}\; d\theta = \left(\frac{1}{5}\,\theta\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{2}{5}\pi$$

Integración Múltiple

Integrales triples en coordenadas esféricas

Las ***coordenadas esféricas*** representan un punto P en el espacio mediante la terna de coordenadas (ρ, θ, ϕ) donde

1. ρ es la distancia de P al origen.
2. θ es el ángulo formado entre el semieje positivo x y la proyección de $\overrightarrow{OP}$ sobre el plano xy (segmento celeste).
3. ϕ es el ángulo formado entre el semieje positivo z y el segmento $\overrightarrow{OP}$.



Las ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas, o rectangulares, (x, y, z) y las esféricas(ρ, θ, ϕ) son:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot sen\,\phi \cdot cos\,\theta \\ y = \rho \cdot sen\,\phi \cdot sen\,\theta \\ z = \rho \cdot cos\,\phi \end{cases} \quad con \quad \rho \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ \theta = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \phi = arctg\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \end{cases}$$

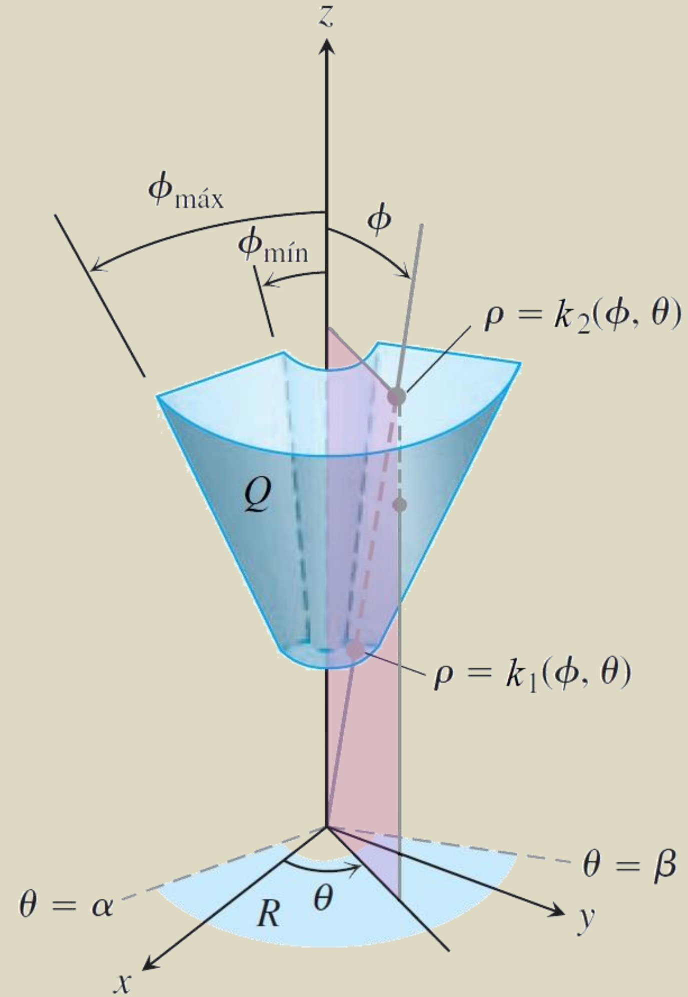
Integración Múltiple

Si $f(\rho,\theta,\phi)$ es continua en un recinto Q definido por:

$$Q\colon\{(\rho,\theta,\phi)/\alpha \leq \theta \leq \beta\ ;\ \phi_{mín} \leq \phi \leq \phi_{máx}\ ;\ k_1(\theta,\phi) \leq \rho \leq k_2(\theta,\phi)\}$$

con k_1 y k_2 funciones continuas.

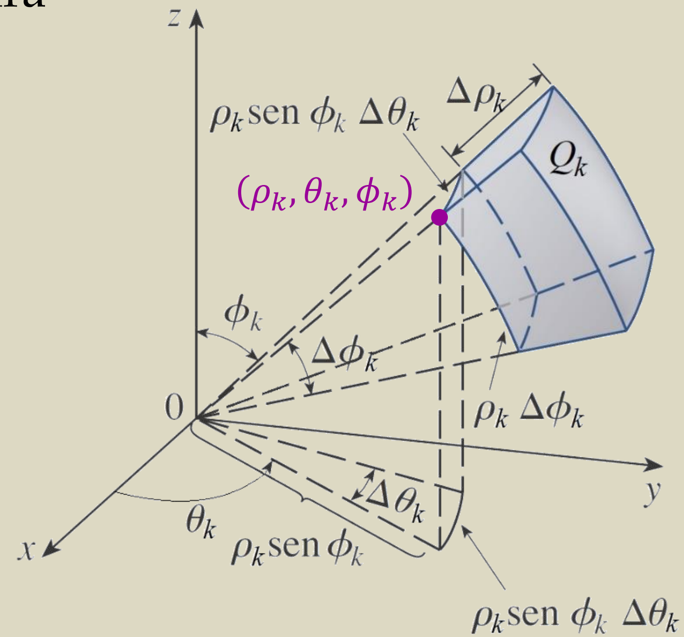
$$k_1(\theta,\phi) \leq k_2(\theta,\phi) \quad \forall(\theta,\phi)\epsilon\ R$$

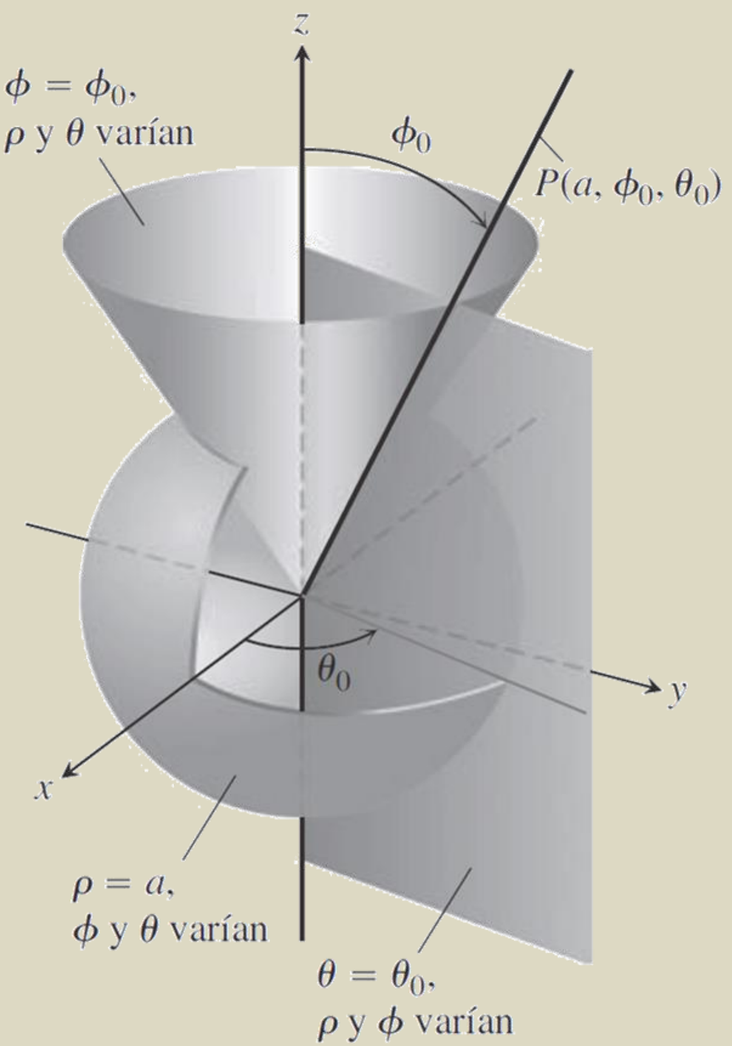


Integración Múltiple

La partición $\{Q_k\}$ en coordenadas esféricas se obtiene mediante una familia de esferas concéntricas en el polo, un haz de planos que contiene al eje z (planos $\theta = \theta_0$) y una familia de conos coaxiales con el eje z y vértice en el origen.

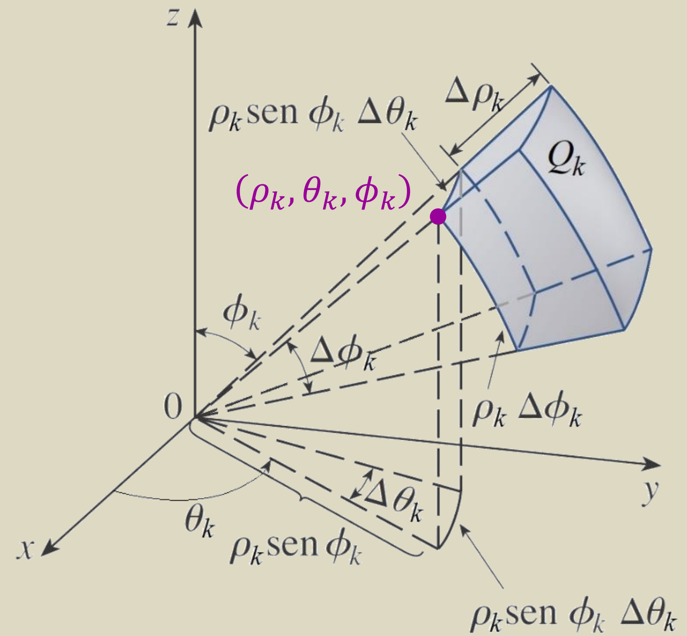
El elemento Q_k tiene la forma de una cuña esférica, la cual puede visualizarse en la figura





Integración Múltiple

El volumen del elemento Q_k, puede calcularse aproximadamente considerándolo como un paralelepípedo rectangular, con $\Delta\rho_k, \Delta\theta_k$ y $\Delta\phi_k$ lo suficientemente pequeños.
Para un punto $(\rho_k, \theta_k, \phi_k)$ ubicado en la esquina del elemento Q_k (cuña esférica), se puede demostrar que su volumen elemental es



$$\Delta V_k = \Delta\rho_k \cdot (\rho_k \Delta\phi_k) \cdot (\rho_k sen\phi_k \Delta\theta_k)$$

$$\Delta V_k = {\rho_k}^2 \cdot (sen\phi_k) \cdot \Delta\rho_k \cdot \Delta\theta_k \cdot \Delta\phi_k$$

Estableciendo el límite de la suma de Riemann, cuando la norma de la partición interna $\|\Delta\| \to 0$

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k f(\rho_k, \theta_k, \phi_k) \cdot \Delta V_k \equiv \int\int\int_Q f(\rho, \theta, \phi)\, dV$$

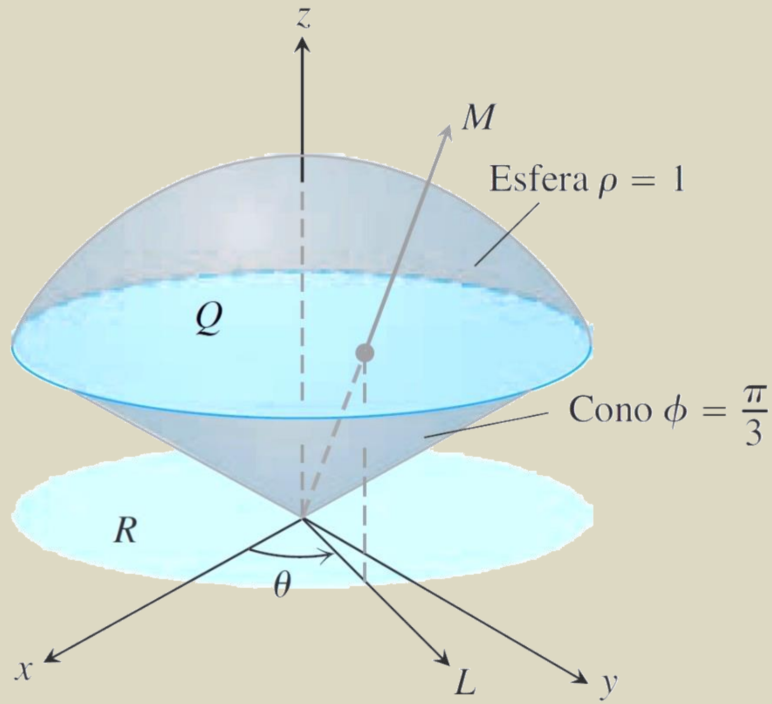
Siempre que el límite exista.

Integración Múltiple

Finalmente, se denota a la integral triple asociada al recinto Q, de la siguiente manera:

$$I = \iiint_Q f(\rho,\theta,\phi)\, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_{mín}}^{\phi_{máx}} \int_{k_1(\theta,\phi)}^{k_2(\theta,\phi)} f(\rho,\theta,\phi) \underbrace{\cdot \rho^2 (sen\phi) \cdot d\rho d\phi d\theta}_{dV}$$

<u>Ejemplo 3.</u> Calcular el volumen del recinto Q, utilizando integrales triples, limitado por: la esfera de radio $\rho = 1$ y el cono de ec. $\emptyset = \frac{\pi}{3}$



Solución. Primero representamos el recinto Q en el espacio.
Luego, planteamos como queda conformado Q, cuyos límites de integración para ρ, θ y $\emptyset$ son:

$$Q: \left\{ (\rho, \emptyset, \theta) \,/\, 0 \leq \rho \leq 1\,; 0 \leq \theta \leq 2\pi\,; 0 \leq \emptyset \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

Integración Múltiple

Finalmente, se plantea a la integral triple en coord. esféricas, asociada al recinto Q, de la siguiente manera:

$$V_Q = \int\int\int_Q 1\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 1\cdot \underbrace{\rho^2(sen\phi)\cdot d\rho d\phi d\theta}_{dV}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 (sen\phi)\cdot d\phi d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(sen\phi)\, d\phi d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(-cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(-cos\frac{\pi}{3}+cos0\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{6}\cdot\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{6}\cdot 2\pi = \frac{1}{3}\pi$$

Bibliografía

- Cálculo con Geometría Analítica. Autor. E. Swokowski.
- Cálculo de Varias Variables. Autor. J. Stewart.

¡Muchas gracias!

¿Consultas?