Unidad 4: Derivación parcial y direccional

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Comprender la noción de derivación respecto de una dirección como razón de cambio de la función en dicha dirección.
2. Conocer las relaciones entre la continuidad, la derivación parcial y la derivado direccional de campos escalares.
3. Comprender la idea intuitiva sobre la construcción de un concepto mas poderoso que el derivado direccional que permita aproximar linealmente a la función en las proximidades de un punto.

Introducción

En el curso de Análisis Matemático I se han desarrollado los métodos del cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones a funciones reales de una variable real. Comenzaremos a estudiar ahora el cálculo diferencial de funciones escalares y vectoriales de varias variables. En las clases anteriores se extendieron los conceptos de límite y continuidad para esta clase de funciones. El objetivo actual es extender los conceptos derivada y diferenciabilidad.

Derivadas Parciales de una función escalar de varias variables

Tal como se ha estudiado con anterioridad, la derivada de una función real de una variable real mide la razón de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente.
Cuando se define la derivada de una función real de variable real en un punto x_0 como:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

se requiere que la función f esté definida en un entorno del punto x_0, ya que es necesario para que exista $f(x_0+h)$ en dicho entorno.
En algunas aplicaciones en las que se emplean funciones de varias variables es frecuente determinar cómo puede resultar afectada la función por cambios en una de sus variables independientes. Esto puede llevarse a cabo analizando aisladamente esa variable independiente. Por ejemplo, para observar el efecto de un catalizador en un experimento, un Ingeniero químico puede repetir sucesivas veces el experimento, con distintas cantidades de ese catalizador en cada oportunidad, mientras mantiene constantes todas las demás variables, como la temperatura y presión. Otro ejemplo sencillo, el volumen *V* de un gas es una función que depende de su temperatura *T* y de la presión *P* ejercida sobre él; o sea *V = f(T,P)*. Cuando *T* y *P,* varían, *V* varía.

Se supone que sólo varía una de ellas, *T* o *P,* mientras la otra permanece constante. Así resulta ahora una función de una sola variable, y la derivada de *f(T,P)* se calcula con respecto a esa variable con los métodos y reglas del cálculo diferencial para funciones de una sola variable real estudiadas en Análisis Matemático I. Si *T* varía mientras *P* permanece constante, la derivada de *f(T, P)* con respecto a *T* se llama la *derivada* parcial (con respecto a *T*) En forma análoga, si *P* varía mientras *T* permanece constante, se obtiene la *derivada* parcial (con respecto a *P*) De forma análoga este procedimiento se puede emplear para encontrar la razón de cambio de una función *f* con respecto a una de sus varias variables independientes. Este proceso se llama **derivación parcial** y el resultado se llama **derivada parcial** de *f* respecto de esa variable independiente elegida. Esta forma de analizar un proceso multivariable es frecuente en todos los ámbitos científicos. En economía este proceso se denomina análisis ***ceteris paribus***, que significa "*siendo iguales todas las demás cosas*". Mediante este procedimiento, para funciones de dos variables x e y , $f(x,y)$, es posible medir dos razones de cambio: según varíe *x*, dejando a *y* fija, y otra según varíe *y* dejando a *x* fija.
Suponiendo que varía sólo *x*, permaneciendo *y* fija, por ejemplo $y = y_0$, donde y_0 es una constante. De esta forma se obtiene una función de una sola variable x, $g(x) = f(x, y_0)$ definida en un entorno de x_0.
La derivada de g en el punto x_0 es el límite del cociente incremental:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

Si este límite existe, se denomina **derivada parcial de** f **respecto de la variable *x*** en el punto (x_0, y_0) y se lo designa como $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ o $D_1 f(x_0,y_0)$ o $f_x'(x_0,y_0)$
En forma equivalente es posible definirlo para y como variable y x fija, es decir, x es constante y se obtiene $\alpha(y) = f(x_0, y)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(y_0+h)-\alpha(y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

Si este límite existe, se denomina **derivada parcial de** f **respecto de la variable *y*** en el punto (x_0, y_0) y se lo designa como $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ o $D_2 f(x_0,y_0)$ o $f_y'(x_0,y_0)$

Definiciones 4.1 Definición (Derivada Parcial)
Sea $f: A \subseteq R^n \to R$ y $\overline{X}_0 = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \overset{0}{A}$. Se denomina ***derivada parcial*** de la función f en el punto $\overline{X}_0$ respecto de la variable **i-ésima** y se expresa $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overline{X}_0\right)$ o $D_i f\left(\overline{X}_0\right)$ o $f_{x_i}'\left(\overline{X}_0\right)$ a:
$D_i f\left(\overline{X}_0\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,...,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,...,a_i,...,a_n)}{h}$ siempre que este límite exista.

Cabe destacar que, para obtener la derivada parcial respecto de la variable x_i en el punto $\overline{X}_0 = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n)$ se consideran constantes todas las variables, excepto la variable x_i y resulta equivalente derivar a la función de una sola variable real $g(x_i) = f(a_1, ..., x_i, ..., a_n)$. Así es posible calcular las derivadas parciales aplicando reglas y métodos de derivación para funciones reales de una variable real.

Observaciones

La simbología $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ recibe el nombre de **notación de Jacobi**[1],  mientras que $D_1 f(x,y) = f'_x(x,y)$

y $D_2 f(x,y) = f'_y(x,y)$ recibe el nombre de **notación de Cauchy**[2].

Si *f* es una función escalar de variables independientes *x* e *y*, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es una función que se obtiene a partir de *f* , la cual es la derivada ordinaria de *f* respecto a *x*, considerándose a *y* como una constante.

Definición 4.2: Sea *f* una función de n variables $x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n$. La función derivada parcial de *f* con respecto a x_k, es aquella función representada por $D_k f$, tal que su valor en cualquier punto $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\Re^n$, del dominio de *f*, está dado por:

$$D_k f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_k + h, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)}{h}$$, si el límite existe.

[1] *Carl Gustav Jakob Jacobi, Nació 10 de diciembre de 1804 en Potsdam, Prusia, actual Alemania, murió 18 de febrero de 1851 en Berlín) fue un matemático alemán. Autor muy prolífico, contribuyó en varios campos de la matemática, principalmente en el área de las funciones elípticas, el álgebra, la teoría de números y las ecuaciones diferenciales. También destacó en su labor pedagógica, por la que se le ha considerado el profesor más estimulante de su tiempo.*

[2] ***Augustin Louis Cauchy*** *(París, 21 de agosto de 1789 - Sceaux, 23 de mayo de 1857) Matemático francés. Cauchy fue pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.*

Interpretación geométrica de la derivada parci

Para una función dada por $z = f(x,y)$ cuya gráfica es una superficie S. Si $f(x_0, y_0) = z_0$ entonces el punto $\overline{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ está ubicado sobre la superficie S. El plano vertical $y = y_0$ interseca a la superficie S en la curva C_1 (es decir C_1, es la traza de la superficie S sobre el plano $y = y_0$) Análogamente, al plano vertical $x = x_0$ interseca a la superficie S en la curva C_2. Ambas curvas pasan por el punto P. (Ver gráficos)

Cabe remarcar que la curva C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f(x, y_0)$ y, así, la pendiente de su recta tangente T_1 en el punto $\overline{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. La curva C_2 es la gráfica de la función $\alpha(y) = f(x_0, y)$ y la pendiente de su recta tangente T_2 en el punto $\overline{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es $\alpha'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. En consecuencia, la derivada parcial de una función escalar de varias variables representa lo mismo que la derivada de la función $g(x_i)$ en el punto a_i, es decir, se considera la restricción a la recta paralela al eje x_i. La existencia de las derivadas parciales en un punto garantiza la existencia de la recta tangente, tal como se representa en los siguientes gráficos para una función escalar de dos variables independientes:

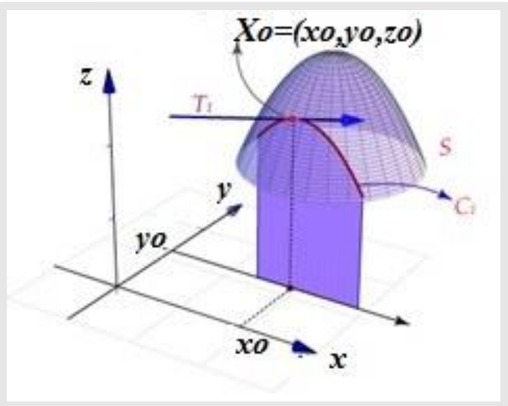


Figura 4.1: Derivada parcial respecto de x

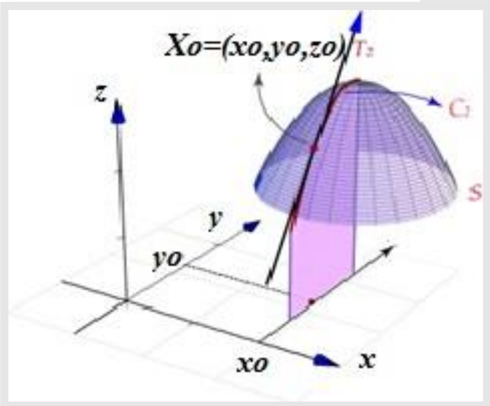


Figura 4.2: Dirivada parcial respecto de y

En resumen, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ son razones de cambio respecto de cada variable permaneciendo la otra variable constante, y se interpretan geométricamente como las pendientes de las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto $\overline{X}_0$, respectivamente.

Las derivadas parciales pueden ser vistas como razones de cambio. Si $z = f(x,y)$, entonces f_x representa la razón de cambio con respecto a x, cuando y permanece fija. De manera semejante, f_y representa la razón de cambio con respecto a y, cuando x permanece fija.

Se suelen denominar *curvas coordenadas* a las curvas C_1 y C_2 (tangentes al paralelo y al meridiano) Ver figura 4.1 y 4.2

Ejemplo 4.1: Para calcular las derivadas parciales en el punto (3,-1) de la función dada por $f(x,y)=2x^2y^3-2x+3y-7$, se considera a *y* como una constante cuando se deriva respecto a *x*, y a *x* como una constante cuando se deriva con respecto a *y*:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y^3-2x+3y-7\right)=4xy^3-2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2y^3-2x+3y-7\right)=6x^2y^2+3$$

y, evaluadas en el punto dado, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,-1)=-14$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,-1)=57$$

Ejemplo 4.2: Las derivadas parciales de la función definida por $f(x,y,z)=yz\cos(xyz)$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(yz\cos(xyz)\right)=-y^2z^2sen(xyz)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(yz\cos(xyz)\right)=z\cos(xyz)-xyz^2sen(xyz)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(yz\cos(xyz)\right)=y\cos(xyz)-xy^2zsen(xyz)$$

Ejemplo 4.3: Para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva que resulta como intersección de la superficie dada por $f(x,y)=5-2x^2-2y^2$ (paraboloide de eje z) y el plano $y=2$ para $x_0=1$.

La pendiente de la recta tangente está dada por el valor de la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ en el punto $(x_0,y_0)=(1,2)$.

Calcularemos la pendiente empleando, en primer lugar, la definición de derivada parcial respecto a *x:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5-2(1+h)^2-2.2^2-(-5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5-2(1+2h+h^2)-8+5}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{5-2-4h-2h^2-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{3}-4h-2h^2-\cancel{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}-2(2+h)=-4$$

El cálculo de la derivada parcial usando las reglas de derivación, es: $\frac{\partial f}{\partial x}=-4x\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=-4$ que proporciona el mismo resultado.

Como $f(1,2)=-5$, entonces el punto $\overline{X}_0=(1,2,-5)$

Como la recta es $z=-4x+m,\ y=2$, pero pasa por el punto $\overline{X}_0=(1,2,-5)$ y así

$$z=-4x+m\Rightarrow -5=-4+m\Rightarrow m=-1$$

Luego la ecuación paramétrica de la recta tangente es:

$$T=\begin{cases}x=t\\ y=2\\ z=-4t-1\end{cases},\quad t\in R$$

Observación importante: Recordando que para funciones reales de una variable real la derivabilidad de una función en un punto implica la continuidad en dicho punto. Una primera diferencia importante con las propiedades de las funciones de una variable es que, a diferencia de ellas, para funciones de varias variables la existencia de las derivadas parciales en un punto no garantiza la continuidad en él, tal como se exhibe en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.4: Sea la función definida por $g(x,y)=\begin{cases} 3x-4y & si \quad xy=0 \\ 2 & si \quad xy\neq 0 \end{cases}$

La derivada parcial respecto a x en el punto (0,0) es $D_1 g(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(0+h,0)-g(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h}{h}=3$

De la misma forma $D_2 g(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(0,0+h)-g(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-4h}{h}=-4$

No obstante, esta función no tiene límite en el punto (0,0) ya que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=1$ si (x,y) es cualquier punto de la bola reducida con centro en (0,0) que no pertenece a los ejes coordenados, y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$ cuando (x,y) es cualquier punto de la bola reducida con centro en (0,0) que pertenece a los ejes coordenados. Así, *g* es discontinua en el punto (0,0).

Ejemplo 4.5: La función definida por $f(x,y)=\begin{cases} 1 & si \quad xy=0 \\ 0 & si \quad xy\neq 0 \end{cases}$ es discontinua en (0,0) pero existen las derivadas parciales en ese punto. En efecto, el límite doble en (0,0) no existe ya que, acercándose al origen por puntos que pertenezcan a los ejes coordenados, las imágenes de la función de acercan a 1, pero acercándose por un haz de rectas que pasan por el origen, las imágenes se aproximan a 0. En consecuencia, *f* es discontinua en (0,0). Analicemos ahora la existencia de las derivadas parciales en (0,0),

$$D_1 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

$$D_2 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

ambos límites existen, por lo tanto existen las derivadas parciales de *f* en el origen.

De la misma forma que para funciones reales de una variable real, la continuidad en un punto no es suficiente para la existencia de las derivadas parciales en dicho punto, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Conclusión

Existencia de derivadas parciales en un punto $\not\Rightarrow$ continuidad en el punto

Ejemplo 4.6: La función definida por $\varphi(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & si\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ La función es continua en (0,0) ya que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{inifinitésimo}\quad\underbrace{\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)}_{\substack{función\ acotada\\ en\ una\ bola\ reducida\ del\ origen}}=0=\varphi(0,0)$. Las derivadas parciales en el origen son:

$$D_1\varphi(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{\varphi(0+h,0)-\varphi(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{h^2}\cos\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|\cos\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}\quad no\,existe$$

$$D_2\varphi(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{\varphi(0,0+h)-\varphi(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{h^2}\cos\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|\cos\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}\quad no\ existe$$

Cabe recordar que $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|h|}{h}$ no existe porque los límites laterales son diferentes (se trata de la función sg(*h*)) y $\lim\limits_{h\to0}\cos\left(\dfrac{1}{h^2}\right)$ tampoco existe. En consecuencia, la función φ no admite derivadas parciales en (0,0).

Conclusión

Continuidad en el punto $\not\Rightarrow$ Existencia de derivadas parciales en un punto

De esta forma se irrumpe la regularidad derivabilidad-continuidad que verifican las funciones de una variable real. Para las funciones escalares de varias variables, la continuidad y la existencia de las derivadas parciales son independientes entre sí. Por ello, es necesario introducir un concepto más fuerte que implique la continuidad. Éste se denomina ***diferenciabilidad*** que se tratará posteriormente.

Derivadas Parciales de orden superior

En general, para una función escalar $f(x,y)$ puede derivarse dos veces y así se obtienen las derivadas de segundo orden. Estas derivadas se expresan de la siguiente forma:

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, derivada segunda de *f* con respecto a *x* dos veces.

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, derivada segunda de *f* con respecto a *y* dos veces.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, derivada segunda de *f* con respecto a *x* e *y*.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, derivada segunda de *f* con respecto a *y* e *x*.

Las dos últimas derivadas de segundo orden se denominan ***derivadas parciales mixtas o cruzadas*** y frecuentemente coinciden.

En general, si $f: A \subseteq R^n \to R$ admite derivada parcial respecto a la i-ésima variable en puntos de A, entonces es posible diseñar una nueva función denominada ***Función Derivada Parcial i-ésima***.

Definición 4.3: (Función derivada parcial)

Sea $f: A \subseteq R^n \to R$ y $B=\left\{\bar{x} \in A \,/\, existe \;\; \overset{\circ}{D_i f(\bar{x})}\right\}$. Se denomina *función derivada parcial* respecto a la *i-ésima* variable a la función $\frac{\partial f}{\partial x_i}=D_i f: B \to R$

Esta función derivada parcial a su vez puede admitir derivadas parciales respecto a cualquiera de sus variables, las que se denominan ***derivadas parciales de segundo orden***.

Definición 4.4: (Derivadas parciales de orden superior)

Sea $f: A \subseteq R^n \to R$, con A un conjunto abierto. Se supone existe la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}=D_i f: B \to R$, entonces se expresa como $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=D_{ij} f$ y se denomina derivada parcial de segundo orden, es la derivada respecto de la variable *j* de la derivada parcial respecto de la variable *i*.

De forma totalmente equivalente es posible definir derivadas parciales de órdenes superiores.

Actividad para resolver y discutir en el foro:

Actividad 4.1: Piensen cuántas derivadas de segundo orden son posibles para una función escalar de 3 variables independientes. Extiendan el resultado a un campo escalar de n variables independientes.

Ejemplo 4.7: Para 0 < *x* < *y* sea la función escalar definida por: $f(x;y)=\int_x^y e^t \ln t dt$

Se desea calcular las derivadas parciales segundas de la función *f*.
Se empleará el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral para funciones de una variable real visto en cursos anteriores de cálculo (teorema de la función primitiva) donde la variable está en el extremo superior de la integral.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\int_x^y e^t \ln t dt=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_y^x e^t \ln t dt\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\int_y^x e^t \ln t dt=-e^x \ln x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\int_x^y e^t \ln t dt=e^y \ln y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-e^x \ln x\right)=-e^x \ln x-\frac{e^x}{x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \ln y\right)=e^y \ln y+\frac{e^y}{y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} f(x;y)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} f(x;y)=0$$

Se ha mencionado que, en general, las derivadas mixtas coinciden. Sin embargo, esto no siempre sucede, tal como se muestra en el siguiente ejemplo

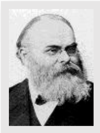
Ejemplo 4.8: Para la función definida por $g(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \;\; xy\neq 0 \\ 0 & si \;\; xy=0 \end{cases}$ Las derivadas parciales son:

La derivada parcial respecto a *x* en el punto (0,*y*) es $D_1 g(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h,y)-g(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hy\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}}{h}=-y$

y $D_2 g(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x,0+h)-g(x,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{xh\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2}}{h}=x$. De esta forma, $D_{12}g(0,0)=-1 \;\; y \;\; D_{21}g(0,0)=1$

NO COINCIDEN!!

¿Existirá algún criterio para analizar cuándo una función escalar admite derivadas mixtas iguales? Afortunadamente sí!!

Teorema 4.1 (de Schwarz[3])  **Condición suficiente para la igualdad de las derivadas mixtas.**

Sea $f: A \subseteq R^2 \to R$ y A un conjunto abierto. Si existen las funciones derivadas segundas mixtas $D_{12} f$ y $D_{21} f$ en un entorno del punto (x_0, y_0) y ambas son continuas en (x_0, y_0), entonces se verifica que: $D_{12} f(x_0, y_0) = D_{21} f(x_0, y_0)$

Este resultado puede garantizarse con hipótesis más débiles según lo establece el siguiente teorema.

Teorema 4.2:
Sea $f: A \subseteq R^2 \to R$ y A un conjunto abierto. Si existen las funciones $D_1 f$, $D_2 f$ y $D_{12} f$ en un entorno del punto (x_0, y_0) y $D_{12} f$ es continua en (x_0, y_0), entonces existe $D_{21} f(x_0, y_0)$ y coincide con $D_{12} f(x_0, y_0)$

Actividad para resolver y discutir en el foro:

Actividad 4.2: Compruebe que la función definida por $f(x,y) = \begin{cases} xy^2 sen\left(\dfrac{1}{y}\right) & si \;\; y \neq 0 \\ 0 & si \;\; y = 0 \end{cases}$ verifica $D_{12} f(0,0) = D_{21} f(0,0)$, pero que ambas derivadas parciales segundas son discontinuas en (0,0). ¿Contradice este hecho el teorema de Schwarz?

Derivada direccional. Derivada débil o derivada de *Gateaux*[4] para campos escalares

Se ha establecido que las derivadas parciales de una función escalar $f: A \subseteq R^2 \to R$ representan las pendientes de las curvas coordenadas trazadas sobre la superficie $z = f(x,y)$ siguiendo las direcciones de los ejes x e y. Cabe mencionar que las derivadas parciales proporcionan escasa información sobre la variación de la función, sólo en la dirección de los ejes coordenadas. Ahora es preciso conocer cómo es la pendiente de la curva trazada sobre la superficie en una dirección arbitraria regida por el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

[3] *La autoría de este teorema pertenece a Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) nacido en Silesia (Polonia actual). Fue un matemático alemán conocido por su trabajo en análisis complejo.*
[4] *El matemático **René Eugène Gâteaux** (1889-1914) falleció en la entrada del pueblo de Rouvroy (Francia), durante la guerra. Es principalmente conocido por su definición de una derivada direccional utilizada en el cálculo de variaciones y en teoría de control óptimo.*

Comenzamos a construir el concepto considerando, en primer lugar, una función $f: A \subseteq R^2 \to R /\ z = f(x,y)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ son $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$ $t \in R$. Así entonces, la **derivada de *f* en la dirección del vector** $\vec{u}$ **y en punto** $\bar{x}_0$ es:

$$f'(\bar{x}_0, \vec{u}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\vec{u}) - f(\bar{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Cabe observar que el numerador de este fracción es el incremento que experimenta *f* al pasar del punto (x_0, y_0) al punto del plano al que se llega avanzando *t* unidades con rumbo $\vec{u} = (u_1, u_2)$. De esta manera se da continuidad al esquema conceptual del cociente incremental $\dfrac{\Delta f}{\Delta r}$, siendo $\Delta r = t$ la distancia (con signo) que existe entre los puntos finales de las variables independientes y los valores iniciales.

Este contexto conlleva a expresar la siguiente definición.

Definición 4.5: Derivada de una función escalar respecto de un vector.

Sea $f: A \subseteq R^n \to R$ y $\bar{x}_0 \in \overset{\circ}{A}$ y un vector $\bar{u} \in R^n$, *con* $\bar{u} \neq \bar{0}$ en cuya dirección se desea indagar la variación de la función. Se denomina ***derivada respecto del vector*** $\bar{u}$ y se designa $f'(\bar{x}_0, \vec{u}) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\bar{x}_0) = D_{\vec{u}} f(\bar{x}_0)$, a $f'(\bar{x}_0, \vec{u}) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(\bar{x}_0 + t\vec{u}) - f(\bar{x}_0)}{t}$ siempre que el límite exista.

La derivada $f'(\bar{x}_0, \vec{u})$ proporciona una medida de la variación de la función *f* en la dirección del vector $\vec{u}$, que depende proporcionalmente de la norma y del sentido de dicho vector.

En la práctica, para poder comparar las medidas de variación que se obtienen en las diferentes direcciones, es habitual considerar un vector $\vec{u}$ con norma unitaria, es decir $\|\vec{u}\| = 1$

Si el vector $\vec{u}$ es unitario ($\|\vec{u}\| = 1$), entonces $f'(\bar{x}_0, \breve{u}) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(\bar{x}_0 + t\breve{u}) - f(\bar{x}_0)}{t}$ se denomina ***derivada direccional*** de la función *f* ***en el punto*** $\bar{x}_0$ correspondiente a la ***dirección*** $\breve{u}$.

Interpretación geométrica de la derivada direccional

Tal como se muestra en el gráfico, la gráfica de la función $g(t) = f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$ es la curva intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano vertical cuyas ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \quad t \in R \\ z \;\; arbitrario \end{cases}$.

Así, la derivada direccional de la función *f* en el punto (x_0, y_0) según la dirección del versor $\breve{u}$ es la pendiente de la recta tangente (***T***) a la curva intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano vertical determinado por la recta del plano $z = 0$ que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene la dirección de versor $\breve{u}$.

Con frecuencia, a la curva intersección mencionada (coloreada en rojo en el gráfico) se la suele llamar "*curva coordenada en la dirección de* $\breve{u}$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) o también denominada *curva en dirección* α correspondiente a $\breve{u} = (\cos\alpha, sen\alpha)$. El vector tangente a dicha curva tiene componente horizontales u_1 y u_2 y como componente vertical a $f'(\overline{x}_0, \breve{u})$, es decir: $(u_1, u_2, f'(\overline{x}_0, \breve{u}))$. En consecuencia, las ecuaciones paramétricas de la recta tangente T son $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \qquad t \in R \\ z = z_0 + tf'(\overline{x}_0, \breve{u}) \end{cases}$

De esta forma, por el punto (x_0, y_0, z_0) pasa una familia de curvas coordenadas, y para cada una de esas direcciones, la existencia de la derivada direccional equivale a la existencia de recta tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) a la curva coordenada. Ya conocemos dos de todas estas curvas cuando interpretamos geométricamente las derivadas parciales. Si la función *f* admitiera derivadas en cualquier dirección en el punto (x_0, y_0), podremos plantearnos cuál será el subconjunto del espacio R^3 que describa al haz de rectas que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0). Parecería natural que todas las rectas tangentes estuvieran incluidas en un mismo plano, en el plano que incluye a las rectas tangentes al paralelo y al meridiano. Lamentablemente esto no siempre ocurre…! La existencia de todas las derivadas direccionales en un punto **no** es suficiente para que todas las rectas tangentes a las curvas coordenadas pertenezcan a un *mismo plano tangente*. Veremos, con posterioridad, que es preciso ampliar el concepto para que dicho plano tangente exista.

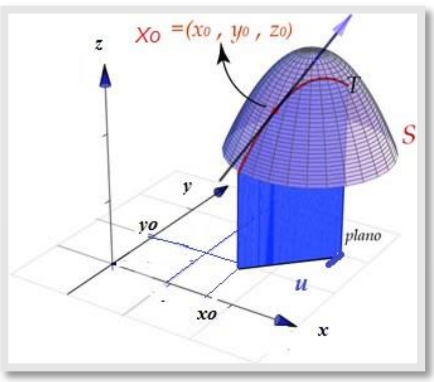


Figura 4.3: Derivada direccional respecto del versor u

Observaciones

1. Si el versor $\breve{u}=\breve{e}_i=(0,...,1,...,0)$, es decir es el i-ésimo versor de la base canónica en R^n, entonces la derivada direccional $f'(\bar{x}_0,\breve{u})=D_{\breve{e}_i}f(\bar{x}_0)=D_i f(\bar{x}_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$, es decir, las derivadas direccionales según los versores de la base canónica, son las derivadas parciales respecto de cada una de las variables independientes. En consecuencia, si f admite en un punto $\bar{x}_0$ derivada direccional en cualquier dirección $\breve{u}$ entonces existen todas las derivadas parciales de f en dicho punto. La proposición recíproca es FALSA!! La función del ejemplo 4, definida por $g(x,y)=\begin{cases}3x-4y & si \quad xy=0\\ 2 & si \quad xy\neq 0\end{cases}$ admite, como ya fue mostrado, las dos derivadas parciales en el punto (0,0), no obstante si se emplea la definición de derivada direccional, resulta:
$D_{\breve{u}}g(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(0+tu_1,0+tu_2)-g(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2}{h}$. Como este límite no existe, entonces no existe derivada direccional en ninguna otra dirección diferente a la de los ejes coordenados.

2. Tal como se ha mencionado anteriormente para las derivadas parciales, una vez determinados el punto $\bar{x}_0$ interior al dominio de la función f y la dirección $\breve{u}$, entonces se obtiene la función real de una sola variable real $g(t)=f(\bar{x}_0+t\breve{u})$ definida al menos en un entorno de $t=0$. Luego ,
$f'(\bar{x}_0,\breve{u})=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\bar{x}_0+t\breve{u})-f(\bar{x}_0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(t)-g(0)}{t}=g'(0)$ y la existencia de $f'(\bar{x}_0,\breve{u})$ equivale a la existencia de $g'(0)$. Una vez más, se puede observar que la derivada dirección $f'(\bar{x}_0,\breve{u})$ mide la variación de la función cuando ella está restringida a los puntos de la recta $\bar{x}=\bar{x}_0+t\breve{u}$, $t\in R$
Por ello, como en el caso de las derivadas parciales, para el cálculo de la derivada direccional basta derivar la función de una variable $g(t)=f(\bar{x}_0+t\breve{u})$ y evaluarla en $t=0$.

Ejemplo 4.9: Se desea obtener la derivada direccional de la función escalar definida por $f(x,y)=3xy^2-2x^3y$ en el punto $\bar{x}_0=(x_0,y_0)=(1,-1)$ en la dirección que forma ángulo $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ con el semieje positiva de abscisas. Por lo tanto, el versor $\breve{u}=\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(\cos\dfrac{\pi}{6},sen\dfrac{\pi}{6}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ y se puede armar la función $g(t)$:

$g(t)=f\left(1+\dfrac{t\sqrt{3}}{2},-1+\dfrac{t}{2}\right)=3\left(1+\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+\dfrac{t}{2}\right)^2-2\left(1+\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(-1+\dfrac{t}{2}\right)$ que, al derivarla y luego de algunos cálculos, resulta:

$g'(t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-1+\frac{t}{2}\right)^2+3\left(1+\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+\frac{t}{2}\right)-3\sqrt{3}\left(1+\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(-1+\frac{t}{2}\right)-\left(1+\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)^3$, y evaluando esta derivada en $t=0$ es: $f'(x_0,\breve{u}) = g'(0) = \frac{9\sqrt{3}}{2} - 4 \approx 3.79 > 0$. Este es el valor de la derivada direccional deseado, y significa que, si el punto (x,y) se desplaza t unidades de longitud por la recta que pasa por el punto (1,-1) en un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con el eje x, la función crece aproximadamente $\left(\frac{9\sqrt{3}}{2} - 4\right)t \approx 3.79t$ unidades, siendo la aproximación cada vez mejor cuanto más pequeño sea t.

Cabe observar que este método de cálculo de la derivada direccional no siempre será ágil ya que dependerá de la complejidad de la fórmula de generación de imágenes de la función escalar considerada. Ahora mismo, en este ejemplo, es posible apreciar la extensión de los cálculos. Más adelante, analizaremos otro método de cálculo más rápido con hipótesis de trabajo más exigentes para la función escalar.

Cabe cuestionar cuál es la relación que existe entre la derivada respecto de un vector $\vec{u}$ y la derivada respecto de otro vector $\vec{v}\neq\vec{0}$ que tenga la misma dirección que $\vec{u}$, es decir, $\vec{v}=\lambda\vec{u}$ *con* $\lambda\neq 0$. Esta vinculación está expresada en el siguiente teorema.

Teorema 4.3:

Sea $f:A\subseteq R^n \to R$ y $\bar{x}_0\in \mathring{A}$ y un vector $\vec{u}\in R^n$, *con* $\bar{u}\neq\bar{0}$. Si $f'(\bar{x}_0,\vec{u})$ existe, entonces también existe $f'(\bar{x}_0,\lambda\vec{u})$ para cualquier $\lambda\neq 0$ y $f'(\bar{x}_0,\lambda\vec{u})=\lambda f'(\bar{x}_0,\vec{u})$

Demostración:

$$f'(\bar{x}_0,\lambda\vec{u})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}_0+t(\lambda\vec{u}))-f(\bar{x}_0)}{t}=\lambda\lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}_0+(t\lambda)\vec{u})-f(\bar{x}_0)}{\lambda t}=$$

$$=\lambda\lim_{\lambda t\to 0}\frac{f(\bar{x}_0+(t\lambda)\vec{u})-f(\bar{x}_0)}{\lambda t}=\lambda f'(\bar{x}_0,\vec{u})$$

De la misma manera que con anterioridad se mostró que la existencia de las derivadas parciales de una función escalar *f* en un punto no es condición suficiente para garantizar la continuidad de *f* en ese punto, la existencia de la derivada direccional en cualquier dirección tampoco garantiza la continuidad, por ello la denominación de "la *debilidad* de la derivada de Gateaux o *derivada débil"*. Este hecho se muestra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.10: La función definida por $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} & si\ \ y\neq 0 \\ 0 & si\ \ y=0 \end{cases}$ admite todas las derivadas direccionales en el punto (0,0) pero es discontinua en él.

$$f'((0,0),\breve{u})=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tu_1,0+tu_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{(tu_1)^3}{tu_2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{tu_1^3}{u_2}=0 \qquad \forall u_2\neq 0$$

$si\ \ u_2=0\ \ \ es\ decir,\ en\ las\ direcciones\ de\ los\ versores\ (1,0)\ y\ (-1,0)\ resulta:$

$$f'((0,0),(1,0))=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=\lim_{t\to 0}0=0$$

$$f'((0,0),(-1,0))=\lim_{t\to 0}\frac{f(-t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=\lim_{t\to 0}0=0$$

En consecuencia, f admite derivada en cualquier dirección en el punto (0,0), pero es discontinua en dicho punto, ya que no existe el límite de f en el origen pues:

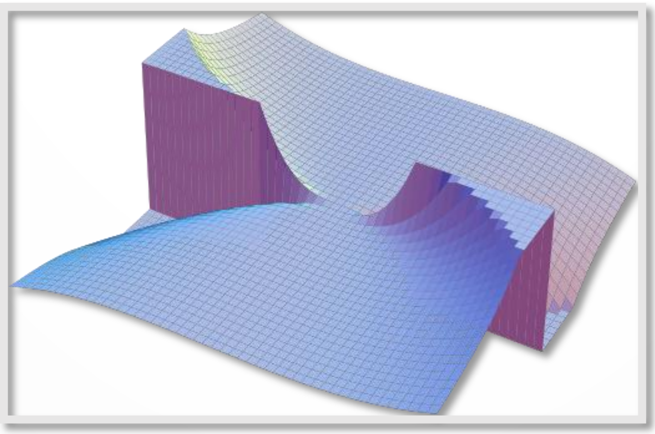
Si $S_1=\{(x,y):\ y=x^2\}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{S_1}(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}x=0$

Si $S_2=\{(x,y):\ y=x^3\}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{S_2}(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1$

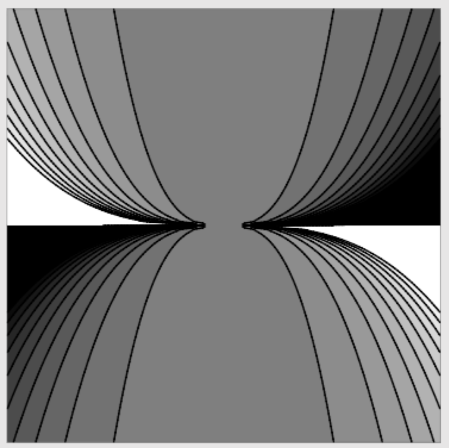
Así, como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{S_1}(x,y)\neq\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{S_2}(x,y)$, el límite doble no existe en (0,0) y f es discontinua en él.

Nótese que las derivadas parciales en el origen valen cero (en la dirección de los versores de la base canónica de R^2.

La gráfica de esta función es la siguiente:



El mapa de contorno (líneas de nivel) correspondiente a la función es:



Conclusión

Existencia de todas las derivadas direccionales en un punto $\not\Rightarrow$ continuidad en el punto

Ejemplo 4.11: Con anterioridad analizamos la existencia de las derivadas parciales en el origen de la función definida por $\varphi(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ y concluimos que es continua en (0,0) y no admite derivadas parciales en dicho punto.
Las derivadas direccionales en el origen son:

$$D_{\breve{u}}\varphi(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(0+tu_1,0+tu_2)-\varphi(0,0)}{t}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{t^2(u_1^2+u_2^2)}\cos\left(\dfrac{1}{t^2(u_1^2+u_2^2)}\right)}{t}=\lim_{h\to 0}\frac{|t|\cos\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}{t}\quad no\, existe$$

($u_1^2+u_2^2=1$ por ser $\breve{u}$ un versor) En consecuencia, la función φ no admite ninguna derivada direccional en (0,0).

Conclusión

Continuidad en un punto $\not\Rightarrow$ Existencia de todas las derivadas dirección