TP Nº 2 – Funciones de varias variables

Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017). Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018).

1. *Temario*

- Dominio de funciones de varias variables
- Superficies
- Curvas de nivel
- Superficies de nivel

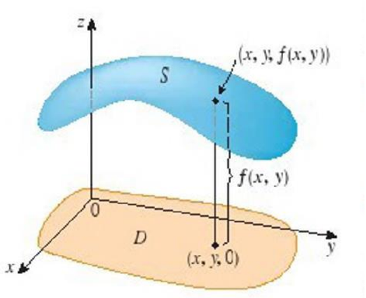
2. *Resumen teórico*

Función de 2 variables

Sea $D \subset R^2$. Una función de dos variables independientes es una correspondencia que asocia a cada par $(x, y) \in D$ un único número real $z = f(x, y)$. D es el dominio de f.
Notación: $f: D \to R$, dada por $z = f(x, y)$

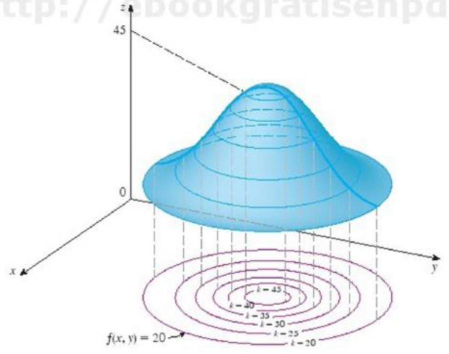
La representación gráfica de una función de dos variables, es una superficie en R^3 dada por:

$$S = \{[x, y, f(x, y)] \in R^3 / (x, y) \in D\}$$



Una curva de nivel k es el conjunto de todos los puntos del dominio de $f(x, y)$ para los cuales f toma el valor k:

$$C_k = \{(x, y) \in D \,/\, f(x, y) = k\}$$



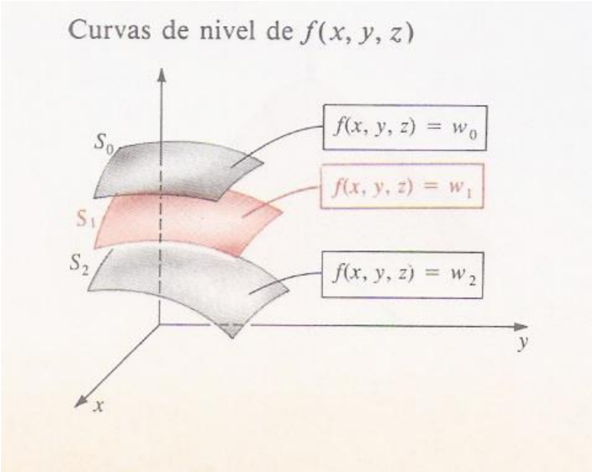
Función de 3 variables

Sea $D \subset R^3$. Una función de tres variables independientes es una correspondencia que asocia a cada terna $(x, y, z) \in D$ un único número real $w = f(x, y, z)$. D es el dominio de f.

Notación: $f: D \to R$, dada por $w = f(x, y, z)$

Una superficie de nivel *k* es el conjunto de todos los puntos del dominio de $f(x, y, z)$ para los cuales f toma el valor k:

$$S_k = \{(x, y, z) \in D \ / \ f(x, y, z) = k\}$$



Función de n variables

Sea $D \subset R^n$. Una función de n variables independientes es una correspondencia que asocia a cada n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ un único número real $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. D es el dominio de f.

Notación: $f: D \to R$, dada por $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Importante:

Se recomienda repasar las representaciones gráficas de curvas cónicas (en el plano) y de superficies cuádricas (en el espacio) ya que serán de uso habitual a lo largo del programa de la asignatura. Ver ANEXO al final de este TP.

3. *Ejercicios resueltos*

Dado que el contenido fundamental de este trabajo práctico se refiere a representación de superficies en el espacio, no se incluyen ejercicios resueltos sino que se dejan los mismos para su discusión en la clase práctica.

4. *Ejercicios de aplicación*

1) Ley de los gases ideales

La ley de los gases ideales establece que:

$$PV = kT$$

siendo P la presión, V el volumen, T la temperatura y k una constante de proporcionalidad.

Un depósito contiene 2.600 pulgadas cúbicas de nitrógeno a una presión de 20 libras por pulgada cuadrada (psi), a una temperatura de 300 ° K

a) Determinar k

De la expresión resulta $k = \frac{PV}{T}$

Con los datos $k = \frac{20\left[\frac{lb}{in^2}\right] 2600\ [in^3]}{300[°K]} = 173.33 \left[\frac{lb.in}{°K}\right]$

Unidades: *in* = pulgada , *lb*=libra

b) Expresar P como función de V y T, y describir sus curvas de nivel

$$P = f(V,T) = 173.33 \left[\frac{lb.in}{°K}\right] \frac{T}{V}$$

$$D_f = \{(V,T) \in \mathbb{R}^2\ /\ V \geq 0 \wedge T \geq 0\}$$

Las curvas de nivel *m* estarán dadas por:

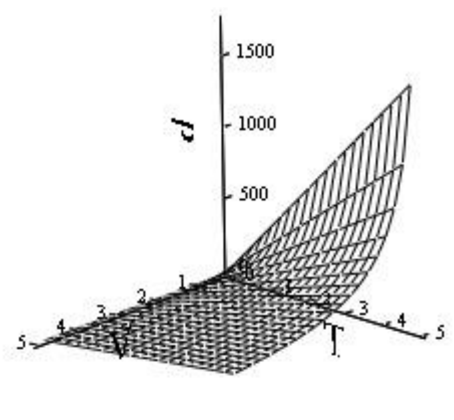
$$C_m\ =\ \{(V,T) \in D_f\ /\ P(V,T) = \mathrm{m}\} = \left\{(V,T) \in D_f\ /\ 173.33 \left[\frac{lb.in}{°K}\right] \frac{T}{V} = \mathrm{m}\right\}$$

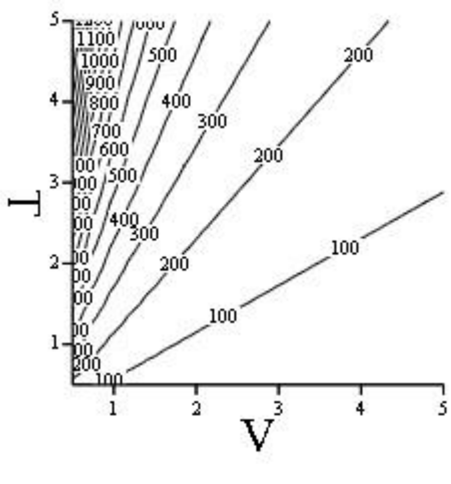
Obviando las unidades, resulta

$$T = \frac{m}{173.33} V \quad \text{para distintos valores de } m \geq 0.$$

Resulta que las curvas de nivel *m* de la presión, llamadas ***isobaras***, son semirrectas en el primer cuadrante, con ordenada al origen nula.

A continuación se grafican la función y algunas curvas de nivel, realizadas mediante el software Mathcad 14.





2) Índice de temperatura

El índice de temperatura (llamada también *sensación* térmica) se utiliza para representar la intensidad evidente del viento. Este índice W es una temperatura subjetiva que depende de la temperatura real T y de la rapidez del viento v. De este modo, W es una función de T y de v, y se escribe:

$$W = f(T, v)$$

Esta relación se modela mediante la siguiente función:

$$W = f(T, v) = 13.12 + 0.6215\,T - 11.37\,v^{0.16} + 0.3965\,T\,v^{0.16}$$

<u>Observación</u>: la función no es válida cuando $v = 0$.

Confeccione una tabla de doble entrada para los siguientes valores de T y v.

$$T \in \{5, 0, -5, -10, -15, -20, -25, -30, -35, -40\}$$

$$v \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$$

Confeccionamos la tabla indicando en filas las temperaturas y en columnas las velocidades del viento. En cada celda calculamos el valor correspondiente del índice de temperatura redondeado al número entero más próximo.

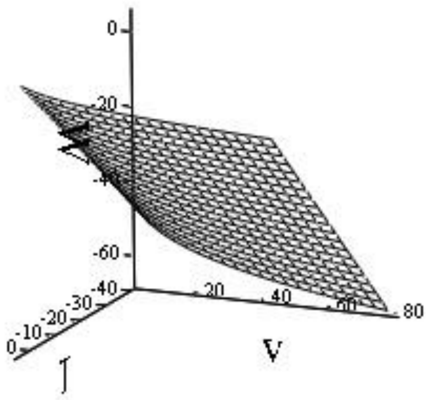
		v (rapidez del viento km/h)										
		5	10	15	20	25	30	40	**50**	60	70	80
T (temperatura real °C)	5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
	0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10
	-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	**-15**	-16	-16	-17
	-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24
	-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31
	-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
	-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45
	-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52
	-35	-41	-45	-48	-49	-51	-52	-54	-56	-57	-58	-60
	-40	-47	-51	-54	-56	-57	-59	-61	-63	-64	-65	-67

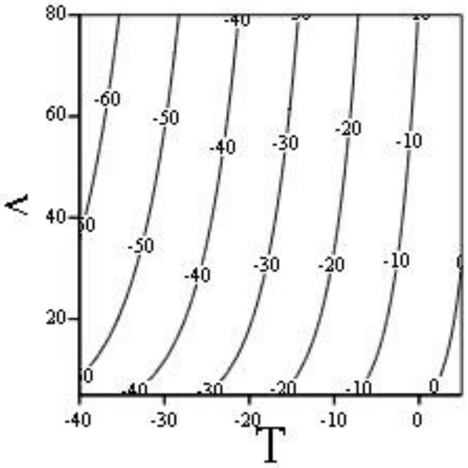
Por ejemplo, la tabla muestra que si la temperatura real es -5 °C y la rapidez del viento es 50 km/h, entonces:

$$W = f(-5, 50) = -15$$

El índice de temperatura es -15, lo que significa que se sentiría tanto frío como si la temperatura fuera -15 °C y no hubiera viento.

A continuación se grafican la función y algunas curvas de nivel:





3) Temperatura en una placa

Una placa delgada de metal, situada en el plano (x, y), está a una temperatura $T = f(x,y)$ en el punto (x,y). Las curvas de nivel de T se llaman ***isotermas*** porque la temperatura es igual en todos los puntos sobre la curva. Trace algunas isotermas si la función de temperatura está dada por:

$$T = f(x,y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

Su dominio es: $D_f = \mathbb{R}^2$

Las curvas de nivel k estarán dadas por:

$C_k = \{(x,y) \in D_f \ / \ T = f(x,y) = \mathrm{k}\} = \left\{(x,y) \in D_f \ / \ \frac{100}{1+x^2+2y^2} = k\right\}$ donde $0 < k \leq 100$.

Reordenando la expresión, considerando $k \neq 100$ se llega a:

$$1 = \frac{x^2}{\frac{100-k}{k}} + \frac{y^2}{\frac{100-k}{2k}}$$

que resultan ser elipses centradas en el origen del sistema de coordenadas, con eje principal coincidente con el eje x y con semiejes mayor $\sqrt{\frac{100-k}{k}}$ y menor $\sqrt{\frac{100-k}{2k}}$.

Si $k = 100$ resulta $\frac{100}{1+x^2+2y^2} = 100$, es decir $x^2 + 2y^2 = 0$ que es el origen de coordenadas (0,0).

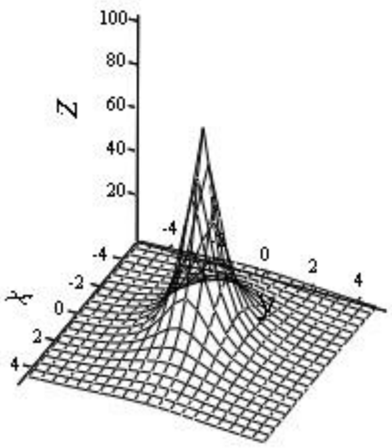
Si $k = 80$ resulta $1 = \frac{x^2}{\frac{100-80}{80}} + \frac{y^2}{\frac{100-80}{2.80}}$, es decir $1 = \frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{1/8}$ que es una elipse de semiejes mayor y menor $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, respectivamente.

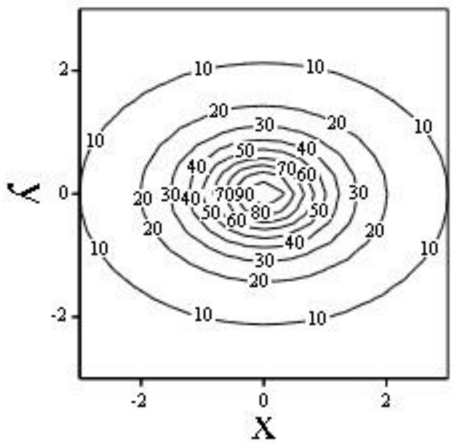
Si $k = 60$ resulta $1 = \frac{x^2}{\frac{100-60}{60}} + \frac{y^2}{\frac{100-60}{2.60}}$, es decir $1 = \frac{x^2}{2/3} + \frac{y^2}{1/3}$ que es una elipse de semiejes mayor y menor $\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $\sqrt{\frac{1}{3}}$, respectivamente.

Si $k = 40$ resulta $1 = \frac{x^2}{\frac{100-40}{40}} + \frac{y^2}{\frac{100-40}{2.40}}$, es decir $1 = \frac{x^2}{3/2} + \frac{y^2}{3/4}$ que es una elipse de semiejes mayor y menor $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

Si $k = 20$ resulta $1 = \frac{x^2}{\frac{100-20}{20}} + \frac{y^2}{\frac{100-20}{2.20}}$, es decir $1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ que es una elipse de semiejes mayor y menor 2 y $\sqrt{2}$, respectivamente.

A continuación se grafican la función y las curvas de nivel halladas:





4) Potencial eléctrico

Si $V = f(x, y)$ es el potencial eléctrico en un punto (x, y) del plano xy, entonces las curvas de nivel de V se llaman ***curvas equipotenciales***, porque en todos los puntos de dicha curva el potencial eléctrico es el mismo.
Trace algunas curvas equipotenciales si:

$$V = f(x, y) = \frac{100}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$$

El dominio de la función es:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 36\}$$

y la imagen:

$$Im_f = [\frac{50}{3}, +\infty)$$

Las curvas de nivel *k* estarán dadas por:

$$C_k = \left\{(x, y) \in D_f \ / \ V = f(x, y) = \text{k}\right\} = \left\{(x, y) \in D_f \ / \ \frac{100}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}} = k\right\}$$

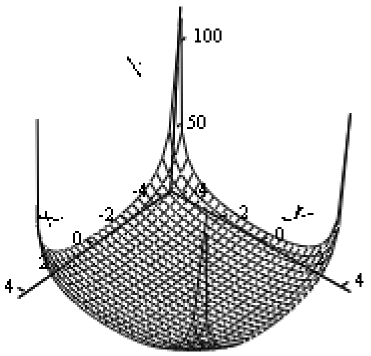
$$C_k = \left\{(x, y) \in D_f \ / \ x^2 + y^2 = 36 - (\frac{100}{k})^2\right\}$$

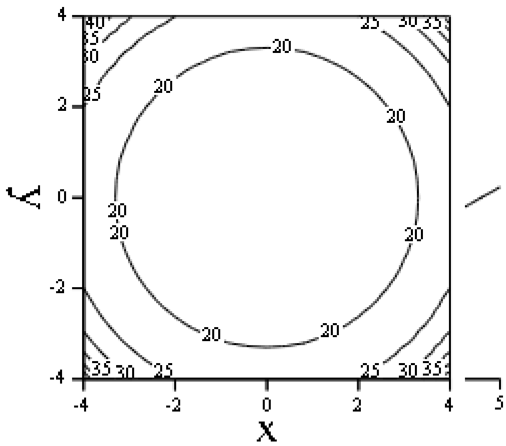
Si $k = \frac{50}{3}$ resulta $x^2 + y^2 = 0$, que es el origen del sistema de coordenadas (0,0).

Si $k = 20$ resulta $x^2 + y^2 = 9$, que es una circunferencia de radio 3

Si $k = 25$ resulta $x^2 + y^2 = 20$, que es una circunferencia de radio $\sqrt{20}$

A continuación se grafican la función y algunas curvas de nivel:





5. *Ejercicios propuestos*

1. Determinar y graficar el dominio de las siguientes funciones. Describir el recorrido de las mismas.

a) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$

b) $f(x,y) = ln\,(4 - x - y)$

c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

d) $f(x,y) = \frac{2}{x^2-y^2}$

e) $f(x,y) = \frac{1}{ln\,(6x+4y-3)}$

f) $f(x,y) = arc\ sin\,(5x - 3y)$

g) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

2. Representar gráficamente las siguientes superficies:

a) $6x + 3y + 4z = 24$

b) $6x + 4z = 24$

c) $4z = 12 - 3y^2$

d) $x^2 + (z-2)^2 = 4$

e) $4x^2 + 6y^2 = 1$

f) $z = e^x$

g) $z = y - x^2$

3. Describir y graficar las curvas de nivel de la función para el valor indicado:

a) $z = xy$ para $z = 1,\ z = -1,\ z = 2,\ z = -2,\ z = 3,\ z = -3$

b) $z = y - x^2$ para $z = -1, 0, 1, 2, 3$

c) $f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ para $K = -1, K = 1$

d) $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$; $z = 0, 2, 4, 6\ y\ 8$

e) Sea $f(x,y) = y.arctg\ x$, encuentre una ecuación para la curva de nivel de f que pasa por el punto $P(1,4)$.

4. Dibujar la superficie de nivel para el valor indicado:

a) $w = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ para $w = 1, 2, 3$

b) $f(x,y,z) = ln\,(x^2 + y^2 + z^2)$ para $w = 1$

c) $f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$; $w = -1, 0, 1, 2$

d) Sea $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - z^2$, encuentre una ecuación para la superficie de nivel de f que pasa por el punto $P(2,-1,3)$.

6. *Bibliografía*

- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- El Cálculo, de Louis Leithold.

IMPORTANTE: ver Anexo de Geometría plana y espacial.

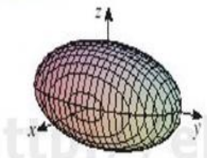
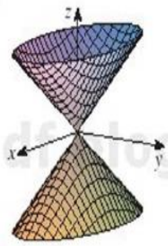
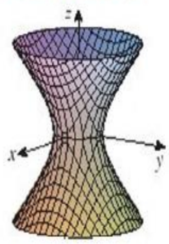
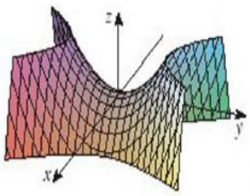
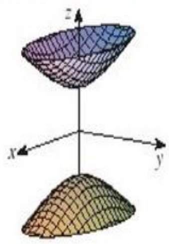
ANEXO

Curvas Cónicas:

Curva		Parábola	Elipse	Hipérbola
Parámetros		$p \to$ Dist. vértice al foco $\to$ Dist. vértice a directriz	$2a \to$ Long. eje mayor $2b \to$ Long. eje menor $2c \to$ Dist. entre focos $c^2 = a^2 - b^2$	$2a \to$ Long. eje transverso $2b \to$ Long. eje conjugado $2c \to$ Dist. entre focos $c^2 = a^2 + b^2$
Ec. Ord. con centro en el origen	El eje focal es el eje x	$y^2 = 4p\,x$ Directriz: $x + p = 0$, Foco: $F(p,0)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos: $F(c,0), F'(-c,0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos: $F(c,0), F'(-c,0)$
Ec. Ord. con centro en el origen	El eje focal es el eje y	$x^2 = 4p\,y$ Directriz: $y + p = 0$, Foco: $F(0,p)$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ Focos: $F(0,c), F'(0,-c)$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos: $F(0,c), F'(0,-c)$
Ec. Ord. con centro fuera del origen	Eje focal paralelo al eje x	$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Ec. Ord. con centro fuera del origen	Eje focal paralelo al eje y	$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Longitud del lado recto		$4p$	$2b^2/a$	$2b^2/a$
Excentricidad		$e = 1$	$e = c/a < 1$	$e = c/a > 1$

Superficies Cuádricas:

TABLA 1 Gráficas de superficies cuádricas

Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Todas las trazas son elipses. Si $a=b=c$, la elipsoide es una esfera.	Cono 	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x=k$ y $y=k$ son hipérbolas si $k\neq 0$ pero son pares de rectas si $k=0$.
Paraboloide elíptico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Las trazas verticales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas Se ilustra el caso donde $c<0$.	Hiperboloide de dos hojas 	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Las trazas horizontales en $z=k$ son elipses si $k>c$ o $k<-c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.