INTEGRALES DE LINEAS
en dos dimensiones

Teorema de evaluación

Sea f una función de dos variables, x e y, continua en una región D, la cual contiene una curva regular C con una parametrización $x = g(t),\ \ y = h(t);\ \ a \leq t \leq b$. Se definirán tres integrales diferentes de f sobre C:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f\big(g(t); h(t)\big)\sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f\big(g(t); h(t)\big)\, g'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f\big(g(t); h(t)\big)\, h'(t)\, dt$$

Y los diferenciales quedan definidos:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt \quad \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}}\right\} \quad \begin{matrix} dx = g'(t)\, dt \\ dy = h'(t)\, dt \end{matrix}$$

Invertir la dirección de integración cambia el signo de la integral respecto de las variables x e y, no así respecto de S.

Estas definiciones y teoremas se generalizan a 3 variables con $f(x, y, z)$ es una función escalar y C una curva en el espacio.

INTEGRAL DE LINEA DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea $F(x,y,z)$ un campo vectorial continúo definido sobre una curva regular C con parametrización $x=f(t),\ \ y=g(t),\ \ z=h(t)$, con $t\in[a,b]$

La integral de línea de $F(x,y,z)$ a lo largo de C es:

$$\boxed{\int_C F*dr=\int_a^b F\big(r(t)\big)*r'(t)\ *dt=\int_C F*T\ *ds=\int_C M(x,y,z)dx+N(x,y,z)dy+P(x,y,z)dz}$$

Donde:

$$F(x,y,z)=M(x,y,z)\breve{\imath}+N(x,y,z)\breve{\jmath}+P(x,y,z)\ \breve{k}$$

$$r(t)=f(t)\breve{\imath}+g(t)\breve{\jmath}+h(t)\ \breve{k}$$ Vector posición

$$dr=dx\ \breve{\imath}+dy\ \breve{\jmath}+dz\ \breve{k}$$

T es el vector tangente unitario y ds es el diferencial de la función longitud de arco $s(t)$

EJERCICIO 1 b) Calcular $\int_C f(x,y)ds$, $\int_C f(x,y)dx$, $\int_C f(x,y)dy$ para el siguiente caso:

$$f(x,y) = x^3 + y \qquad x = 3t \qquad y = t^3 \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Primero calculamos $dx = g'(t)\,dt$ y $dy = h'(t)\,dt$, para poder calcular ds.

$$\begin{cases} x = 3t \longrightarrow dx = 3dt \\ y = t^3 \longrightarrow dy = 3t^2dt \end{cases}$$

Entonces:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt = \sqrt{(3dt)^2 + (3t^2dt)^2} = \sqrt{(9 + 9t^4)dt^2} = \sqrt{9(1 + t^4)}\,dt$$

$$ds = 3\sqrt{1 + t^4}\,dt$$

Entonces $\int_C f(x,y)ds$ $\qquad ds = 3\sqrt{1+t^4}\,dt$

$$\int_C (x^3+y)ds = \int_0^1 \left((3t)^3+t^3\right) * 3\sqrt{1+t^4}\,dt = \int_0^1 (27t^3+t^3) * 3\sqrt{1+t^4}\,dt = \int_0^1 28t^3 * 3\sqrt{1+t^4}\,dt$$

$$= \int_0^1 84t^3\sqrt{1+t^4}\,dt$$

Integramos por sustitución

$$\boxed{\begin{array}{c} u = 1+t^4 \\ du = 4t^3dt \quad \rightarrow \dfrac{du}{4} = t^3dt \end{array}}$$

$$= \frac{84}{4}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = 21\int_0^1 (u)^{1/2}\,du = 21\frac{u^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 = 14\,u^{3/2}\Bigg|_0^1 = 14\,(1+t^4)^{3/2}\Bigg|_0^1$$

$$= 14\left[(1+1^4)^{3/2} - (1+0^4)^{3/2}\right] = 14\left[(2)^{3/2} - (1)^{3/2}\right] = \boxed{14[\sqrt{8}-1]}$$

Entonces $\int\limits_{C} f(x,y)dx$

$$\int_{C} (x^3 + y)dx = \int_0^1 \left((3t)^3 + t^3\right) * 3dt = \int_0^1 (27t^3 + t^3) * 3dt = \int_0^1 28t^3 * 3dt = \int_0^1 84\, t^3\, dt$$

$$= 84\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^1 = 21t^4\Bigg|_0^1 = 21$$

Entonces $\int\limits_{C} f(x,y)dy$

$$\int_{C} (x^3 + y)dy = \int_0^1 \left((3t)^3 + t^3\right) * 3t^2dt = \int_0^1 (27t^3 + t^3) * 3t^2dt = \int_0^1 28t^3 * 3t^2dt = \int_0^1 84\, t^5\, dt$$

$$= 84\frac{t^6}{6}\Bigg|_0^1 = 14t^6\Bigg|_0^1 = 14$$

EJERCICIO 1 d)

Calcular $\int_C (xy + z)ds$, donde C tiene por ecuación vectorial : $r(t) = acost\breve{\imath} + asent\,\breve{\jmath} + bt\breve{k}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

Primero calculamos $dx = f'(t)\,dt$, $dy = g'(t)\,dt$ y $dz = h'(t)\,dt$, para poder calcular ds.

$$\begin{cases} x = a\,cost & \longrightarrow & dx = -\,a\,sent\,dt \\ y = a\,sent & \longrightarrow & dy = a\cos t\,dt \\ z = bt & \longrightarrow & dz = b\,dt \end{cases}$$

Entonces:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt = \sqrt{(-\,a\,sent\,dt)^2 + (a\cos t\,dt)^2 + (b\,dt)^2}$$

$$ds = \sqrt{(a^2sen^2t + a^2cos^2t + b^2)dt^2} = \sqrt{(a^2(sen^2t + cos^2t) + b^2)dt^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)}\,dt$$

Entonces $\int_{C}(xy+z)ds$ $\qquad ds=\sqrt{(a^2+b^2)}\,dt$

$$\int_{C}(xy+z)ds=\int_0^{2\pi}(a\,cost*a\,sent+bt)*\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\int_0^{2\pi}(a^2\cos t\,sen\,t+bt)*\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos t\,sen\,t+bt)\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\left[\int_0^{2\pi}a^2\cos t\,sen\,t\,dt+\int_0^{2\pi}bt\,dt\right]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left[a^2\int_0^{2\pi}\cos t\,sen\,t\,dt+b\int_0^{2\pi}t\,dt\right]$$

Integramos por sustitución

$$\boxed{\begin{array}{c}u=\cos t\\ du=-sen\,t\,dt\end{array}}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left[-a^2\int_0^{2\pi}u\,du+b\int_0^{2\pi}t\,dt\right]=\sqrt{a^2+b^2}\left[-a^2\frac{u^2}{2}+b\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left[-a^2\frac{(\cos t)^2}{2} + b\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2}\left[-a^2\left(\frac{(\cos 2\pi)^2}{2} - \frac{(\cos 0)^2}{2}\right) + b\left(\frac{(2\pi)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left[-a^2\left(\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) + b\left(\frac{4\pi^2}{2}\right)\right] = \sqrt{a^2+b^2} * (2b\pi^2)$$

$$\boxed{\int_{C}(xy+z)\,ds = \sqrt{a^2+b^2} * (2b\pi^2)}$$

MASA, CENTRO DE MASA Y MOMENTO DE INERCIA DE UN ALAMBRE DELGADO

EJERCICIO 2 a) Un alambre de densidad constante tiene la forma de la hélice:

$x = a\cos t \quad y = a\,sen\,t \quad z = bt \quad 0 \leq t \leq 3\pi$. Calcular la masa del alambre y su centro de masa.

$$\left.\begin{aligned} dx &= -a\,sen\,t\,dt \\ dy &= a\cos t\,dt \\ dz &= b\,dt \end{aligned}\right\} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{[-a\,sen\,t]^2 + [a\cos t]^2 + b^2}\,dt$$

$$ds = \sqrt{a^2(cos^2 t + sen^2 t) + b^2}\,dt$$

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt$$

Si queremos calcular la masa debemos integrar la función densidad de masa sobre la respectiva región:

$$m = \int_c \delta(x,y,z)ds = \int_0^{3\pi} \delta\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \delta\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{3\pi} dt \ = 3\pi\,\delta\sqrt{a^2+b^2}$$

Para las coordenadas del centro de masa:

$$\bar{x}_{CM} = \frac{\int_c \; x\,\delta\, ds}{m} \qquad \bar{y}_{CM} = \frac{\int_c \; y\,\delta\, ds}{m} \qquad \bar{z}_{CM} = \frac{\int_c \; z\,\delta\, ds}{m}$$

Entonces:

$$\bar{x}_{CM} = \frac{\int_c \; x\,\delta\, ds}{m} = \frac{\int_0^{3\pi} a\,cost\;\delta\,\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{3\pi\,\delta\,\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\int_0^{3\pi} a\,cost\;\,dt}{3\pi} = \frac{a}{3\pi}\int_0^{3\pi} cost\;\,dt = \frac{a}{3\pi}sent\;\Big|_0^{3\pi}$$

$$\bar{x}_{CM} = \frac{a}{3\pi}(sen\;3\pi\; - sen\;0) = 0$$

$$\bar{y}_{CM} = \frac{\int_c \; y\,\delta\, ds}{m} = \frac{\int_0^{3\pi} a\,sen\,t\;\delta\,\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{3\pi\,\delta\,\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\int_0^{3\pi} a\,sen\,t\;\,dt}{3\pi} = \frac{a}{3\pi}\int_0^{3\pi} sen\,t\;\,dt = -\frac{a}{3\pi}cost\;\Big|_0^{3\pi}$$

$$\bar{y}_{CM} = \frac{a}{3\pi}(-cos\;3\pi + cos\;0) = \frac{2\,a}{3\pi}$$

$$\bar{z}_{CM} = \frac{\int_c \ z\,\delta\,ds}{m} = \frac{\int_0^{3\pi} b\,t\,\delta\,\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{3\pi\,\delta\,\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\int_0^{3\pi} b\,t\ \,dt}{3\pi} = \frac{b}{3\pi}\int_0^{3\pi} t\ \,dt = \frac{b}{3\pi} * \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{3\pi}$$

$$\bar{z}_{CM} = \frac{b}{3\pi}\left(\frac{(3\pi)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) = \frac{9\pi^2 b}{6\pi} = \frac{3\pi b}{2}$$

Por lo tanto el centro de masa será:

$$\boxed{\overline{CM} = 0\,\breve{\imath} + \frac{2a}{3\pi}\breve{\jmath} + \frac{3\pi b}{2}\breve{k}}$$

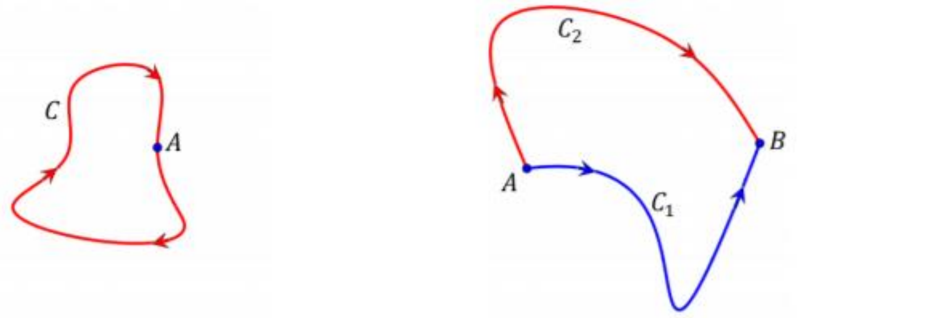
INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

Curvas simples y regiones simplemente conexas

Una curva simple es una curva que no se corta a sí misma en ningún lugar entre sus puntos extremos. Una región simplemente conexa del plano es una región D conexa tal que toda curva cerrada simple en D puede contraerse a un punto sin salir de D. Intuitivamente, **las regiones simplemente conexas son regiones sin agujeros** que puedan ser atrapados por una curva cerrada, y no puede estar formada por piezas separadas. Por ejemplo, todo el plano es una región simplemente conexa.

(a) Curvas. (b) Regiones.

Decimos que una curva C en D, parametrizada por la función vectorial $\vec{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$, es cerrada si su punto final coincide con su punto inicial, esto es, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.



(a) Curva cerrada. (b) Dos caminos que comienzan en *A* y terminan en *B*.

La integral de línea de un campo vectorial <u>conservativo</u> en una región D, a lo largo de una curva C, depende sólo del punto inicial y del punto final de la curva, sin importar la trayectoria que va desde el extremo inicial hasta el extremo final de la curva

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial <u>conservativo</u> en una región D, entonces la integral de línea de $\vec{F}$ es <u>independiente de la trayectoria en D.</u>

Sea $\mathrm{F}(x,y) = M(x,y)\breve{\imath} + N(x,y)\breve{\jmath}$ un campo vectorial bidimensional cuyas funciones escalares componentes $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones continuas en alguna región conexa D, la integral curvilínea:

$$\boxed{\int_{\mathbf{C}} F * dr = \int_{\mathbf{C}} M(x,y)dx + N(x,y)dy} \quad ①$$

Es independiente de la trayectoria C, si y solo si existe alguna función escalar diferenciable $f(x,y)$ tal que su diferencial total (o exacto):

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dy$$

Sea igual a integrando de ① . Deben cumplirse las siguientes igualdades:

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Aplicando el Lema de Schwartz:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Y como las derivadas parciales segundas cruzadas son iguales

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

La función escalar $f\,(x,y)$ recibe el nombre de FUNCIÓN POTENCIAL

Otra forma de presentar el Teorema de independencia de la trayectoria

Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ tienen derivadas parciales continuas en alguna región abierta y conexa D:

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad \text{Es independiente de la trayectoria} \leftrightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Dado que para un campo vectorial de dos variables independientes:

$$rot\ F = 0\ \breve{\imath} + 0\breve{\jmath} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\ \breve{k}$$

Como $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

Podemos afirmar que $\int_C F * dr$ Es independiente de la trayectoria $\leftrightarrow \quad rot\ F = 0$

EJEMPLO Determinar en el siguiente caso si la $\int_c F * dr$ es independiente de la trayectoria. En caso afirmativo encontrar la Función Potencial.

$$\int_{(-1,0)}^{(5,\frac{\pi}{2})} \underbrace{2x\ sen\ y}_{M(x,y)}\, dx + \underbrace{(x^2 \cos y\ - 3y^2)}_{N(x,y)}dy$$

Debemos verificar que : $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ $\longrightarrow$ $2x \cos y = 2x \cos y$ Es independiente de la trayectoria

Entonces existe una Función Potencial: $U\,(x, y) = K$. Para encontrar la función potencial debemos partir de:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Entonces, integrando ambos miembros de la primera de las expresiones respecto de x :

$$U\,(x, y) = \int 2x\ sen\ y\ dx$$

$$U(x,y) = x^2 sen\, y + \emptyset\,(y)$$

Notar que la constante de integración es constante con respecto a x, es decir es una función de y, que llamamos $\emptyset\,(y)$. A continuación, derivamos esta expresión con respecto a y (para comparar con la expresión que ya tenemos de $\mathrm{N}(x,y)$):

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = x^2 cosy + \emptyset'(y) \; = N(x,y)$$

$$x^2 cosy + \emptyset'(y) = x^2 \cos y \; - 3y^2$$

Despejamos $\emptyset'(y)$

$$\emptyset'(y) = x^2 \cos y \; - 3y^2 - x^2 cosy$$

$$\emptyset'(y) = -3y^2$$

Integramos ambos miembros:

$$\emptyset(y) = \int -3y^2\, dy$$

$$\emptyset(y) = -y^3 + C$$

Reemplazamos en U (x, y): $U\,(x, y) = x^2 sen\; y + \emptyset\,(y) = K$

$$U\,(x, y) = x^2 sen\; y - y^3 + C = K$$

$$U\,(x, y) = x^2 sen\; y - y^3 = K_1$$ FUNCIÓN POTENCIAL

Entonces la función potencial evaluada en los puntos $(5, \frac{\pi}{2})$ y (-1,0) :

$$\int_{(-1,0)}^{(5,\frac{\pi}{2})} 2x\; sen\; y\; dx + (x^2 \cos y - 3y^2)dy = x^2 sen\; y - y^3 \Big|_{(-1,0)}^{(5,\frac{\pi}{2})} = 5^2 sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - [(-1)^2 sen\,(0) - (0)^3]$$

$$= 25 - \frac{\pi^3}{8}$$