Anexo: masa y centro de masa

i. Masa de una lámina

$$m = \int\int_R \delta(x,y)\, dA \qquad donde\ \ la\ función\ \delta(x,y)\ es\ la\ densidad\ superficial\ en\ \left[\frac{gr}{cm^2}\right]$$

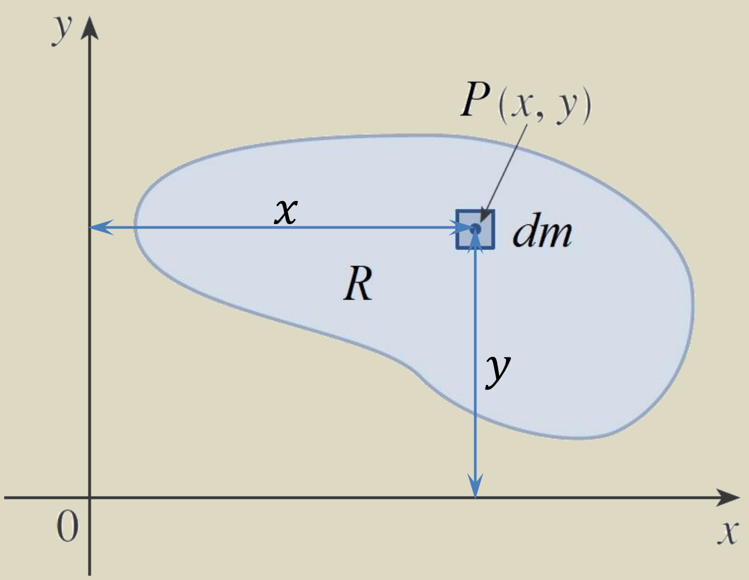
ii. Masa de un sólido

$$m = \iiint_Q \delta(x,y,z)\, dV \quad donde\ la\ función\ \delta(x,y,z)\ es\ la\ densidad\ de\ volumen\ en\ \left[\frac{gr}{cm^3}\right]$$

iii. Centro de masa de una lámina $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int\int_R x\, \delta(x,y)\, dA}{\int\int_R \delta(x,y)\, dA}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int\int_R y\, \delta(x,y)\, dA}{\int\int_R \delta(x,y)\, dA}$$



Anexo: masa y centro de masa

iv. Centro de masa de un sólido $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Momentos de primer orden o momento estático, con respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \iiint_Q x\, \delta(x, y, z)\, dV \quad ; \quad M_{xz} = \iiint_Q y\, \delta(x, y, z)\, dV \quad ; \quad M_{xy} = \iiint_Q z\, \delta(x, y, z)\, dV$$

siendo m la masa del sólido

$$m = \iiint_Q \delta(x, y, z)\, dV$$

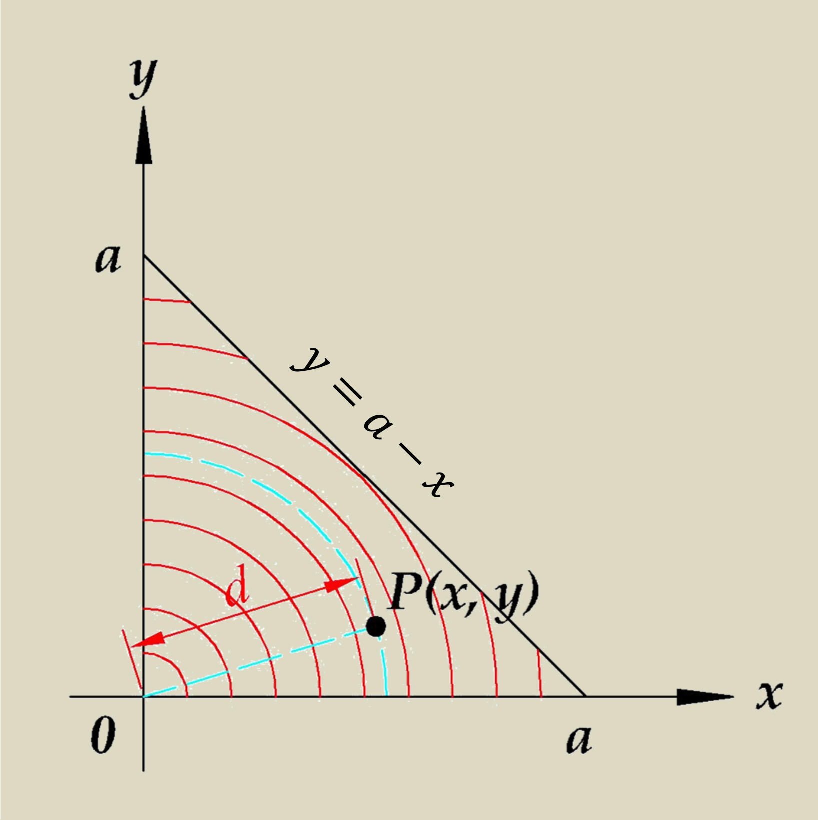
Las coordenadas del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del sólido quedan determinadas por las siguientes expresiones

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Anexo: masa y centro de masa

<u>*Ejemplo 1*</u>

Calcular la masa de una lámina que tiene la forma de un triángulo isósceles con catetos de longitud a, coincidentes con los ejes x e y, suponiéndose que la densidad $\delta(x,y)$ en un punto P de la lámina es proporcional al cuadrado de la distancia del punto P al origen del sistema de referencia.



$$d^2 = x^2 + y^2$$

$$\delta(x,y) = kd^2$$

$$\delta(x,y) = k(x^2 + y^2)$$

$$R: \{(x,y)/0 \leq x \leq a\,; 0 \leq y \leq a - x\}$$

$$m = \iint_R \delta(x,y)\, dA$$

Anexo: masa y centro de masa

- *Se determina la masa de la lámina*

$$m = \int\int_R \delta(x,y)\, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k\,(x^2 + y^2\,)\, dy\, dx = k\int_0^a \left[\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{a-x}\right] dx =$$

$$= k\int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3}\right] dx = k\int_0^a \left[ax^2 - x^3 + \frac{(a-x)^3}{3}\right] dx =$$

$$= k\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(a-x)^4}{12}\right)\Bigg|_0^a = k\left[\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} - 0 - 0 + 0 + \frac{a^4}{12}\right] =$$

$$\boxed{\boldsymbol{m = \frac{ka^4}{6}}}$$

Debido a la consigna que presenta la función densidad, el Centro de Masa de la lámina se mueve según la recta $x = y$. Entonces, se debe cumplir que:

$$\bar{x} = \bar{y}$$

Anexo: masa y centro de masa

- *Se determina la coordenada $\bar{x}$*

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad ; \quad M_y = \int\int_R x\,\delta(x,y)\,dA \quad ; \quad m = \frac{ka^4}{6}$$

$$M_y = \int_0^a \int_0^{a-x} [kx(x^2+y^2)]dydx = k\int_0^a \int_0^{a-x} [(x^3+xy^2)]dydx$$

$$= k\int_0^a \left[\left(x^3y + \frac{xy^3}{3}\right)\Big|_0^{a-x}\right]dx = k\int_0^a \left[x^3(a-x) + \frac{x(a-x)^3}{3}\right]dx$$

$$= k\int_0^a \left[ax^3 - x^4 + \frac{xa^3}{3} - \frac{3a^2x^2}{3} + \frac{3ax^3}{3} - \frac{x^4}{3}\right]dx$$

$$= k\left(\frac{ax^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{a^3x^2}{6} - \frac{a^2x^3}{3} + \frac{ax^4}{4} - \frac{x^5}{15}\right)\Big|_0^a = ka^5\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{15}\right]$$

$$M_y = \frac{ka^5}{15} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{ka^5/15}{ka^4/6} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{x}} = \frac{\mathbf{2a}}{\mathbf{5}}$$

Anexo: masa y centro de masa

- *Se determina la coordenada $\bar{y}$*

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad ; \quad M_x = \int\int_R y\, \delta(x,y)\, dA \quad ; \quad m = \frac{ka^4}{6}$$

$$M_x = \int_0^a \int_0^{a-x} [ky(x^2+y^2)]dydx = k\int_0^a \int_0^{a-x} [(x^2y+y^3)]dydx$$

$$= k\int_0^a \left[\left(x^2\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^{a-x} \right] dx = k\int_0^a \left[\frac{x^2(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{4} \right] dx$$

$$= k\int_0^a \left[\frac{x^2}{2}(a^2-2ax+x^2) + \frac{(a-x)^4}{4} \right] dx = \frac{k}{2}\left(\frac{a^2x^3}{3} - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\frac{(a-x)^5}{5} \right)\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{ka^5}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right] \quad \Rightarrow \quad M_x = \frac{ka^5}{15}$$

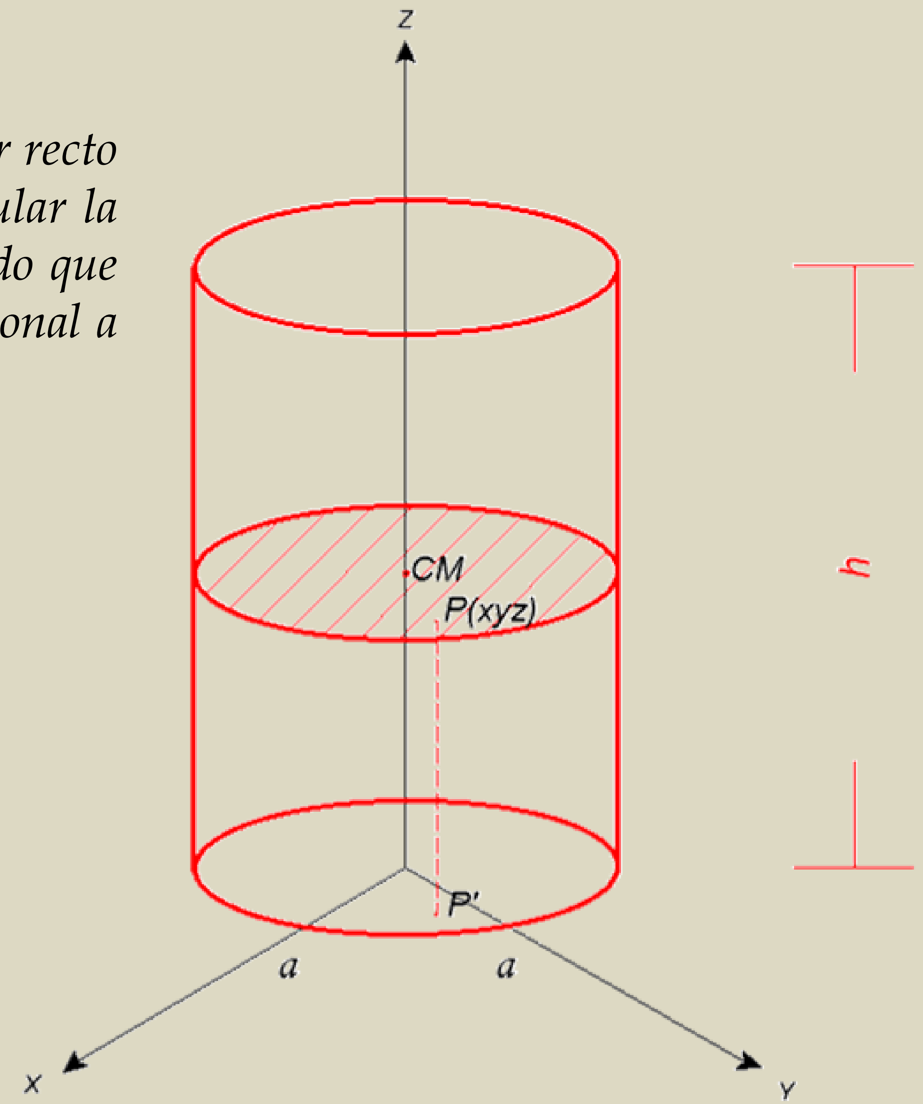
$$\bar{y} = \frac{ka^5/_{15}}{ka^4/_{6}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\bar{y} = \frac{2a}{5}}$$

Entonces, se verifica que $\boxed{\boldsymbol{\bar{x} = \bar{y} = \frac{2a}{5}}}$

Anexo: masa y centro de masa

Ejemplo 2

Un sólido tiene la forma de un cilindro circular recto con un radio de base $r = a$, y altura h. Calcular la masa y el centro de masa del sólido suponiendo que la densidad en un punto del sólido es proporcional a la distancia del punto a la base del cilindro.



$$\delta(x, y, z) = k \cdot z$$

$$Q: \{ (r, \theta, z) \, / \, 0 \leq r \leq a \, ; \, 0 \leq \theta \leq 2\pi \, ; \, 0 \leq z \leq h \}$$

Anexo: masa y centro de masa

- *Se determina la masa del sólido:*

$$\iiint\limits_{Q} \boldsymbol{\delta(x,y,z).dV}$$

$$\iiint\limits_{Q} kz.dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h} kz.r.dz.dr.d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} k\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^h .r.dr.d\theta$$

$$= k.\frac{h^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r.dr.d\theta = k.\frac{h^2}{2}.\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^a .d\theta = \frac{k.h^2.a^2}{4}\int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{k.h^2.a^2}{4}(\theta)\Big|_0^{2\pi} = \boxed{\boldsymbol{\frac{k.h^2\,a^2.\pi}{2}}}$$

Las coordenadas del Centro de Masa del sólido se mueven a lo largo del eje z, entonces se debe cumplir que: $\bar{x} = \bar{y} = 0$

Anexo: masa y centro de masa

- *Se determina la coordenada* $\overline{z}$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} \quad ; \quad m = \frac{k.h.^2\,a^2.\pi}{2} \quad ; \quad \delta(xyz) = k.z$$

$$M_{xy} = \iiint_Q z.\delta(xyz).dV = \iiint_Q z.kz.dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h} k.z^2.r.dz.dr.d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} k\left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^h r.dr.d\theta = k\frac{h^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r.dr.d\theta = k\frac{h^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^a d\theta = \frac{kh^3a^2}{6}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M_{xy}} = \frac{\boldsymbol{kh^3a^2\pi}}{\boldsymbol{3}}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{k.h^3.a^2.\pi}{3}}{\frac{k.h.^2\,a^2.\pi}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{z} = \frac{2}{3}h}$$

Anexo: masa y centro de masa

- *Se verifica* $\bar{x} = 0$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad ; m = \frac{k.h.^2\, a^2.\pi}{2} \quad ; \quad \delta(xyz) = k.z$$

$$M_{yz} = \iiint_Q x.\delta(xyz).dV = \iiint_Q x.kz.dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h} r.cos\theta.kz.r.dz.dr.d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h} k.r^2.cos\theta.z.dz.dr.d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2(cos\theta)\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^h dr.d\theta =$$

$$= k.\frac{h^2}{2}\int^{2\pi} (cos\theta)\left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^a d\theta = \frac{k.h^2.a^3}{6}\int_0^{2\pi} cos\theta.d\theta = \frac{k.h^2.a^3}{6}(sen\theta)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{k.h^2.a^3.0}{6} \Rightarrow \boldsymbol{M_{yz} = 0}$$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{0}{\frac{k.h.^2\, a^2.\pi}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{x} = 0}$$

Anexo: masa y centro de masa

- *Se verifica* $\bar{y} = 0$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad ; \quad m = \frac{k.h.^2\, a^2.\pi}{2} \quad ; \quad \delta(xyz) = k.z$$

$$M_{xz} = \iiint_Q y.\delta(xyz).dV = \iiint_Q y.kz.dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h} r.sen\theta.kz.r.dz.dr.d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h} k.r^2.sen\theta.z.dz.dr.d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2.(sen\theta)\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^h dr.d\theta =$$

$$= k\frac{h^2}{2}\int^{2\pi} sen\theta\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^a d\theta = \frac{k.h^2.a^3}{6}\int_0^{2\pi} sen\theta.d\theta = \frac{k.h^2.a^3}{6}(-sen\theta)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{k.h^2.a^3}{6}cos2\pi - \left(-\frac{k.h^2.a^3}{6}.cos0\right) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{M_{xz} = 0}$$

$$\left.\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{0}{\frac{k.h.^2\, a^2.\pi}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{y} = 0}\right\} \textit{Entonces, se verifica que } \boxed{\bar{x} = \bar{y} = 0} \therefore \ \boldsymbol{CM\left(0;0;\frac{2}{3}h\right)}$$

Anexo: momentos de inercia

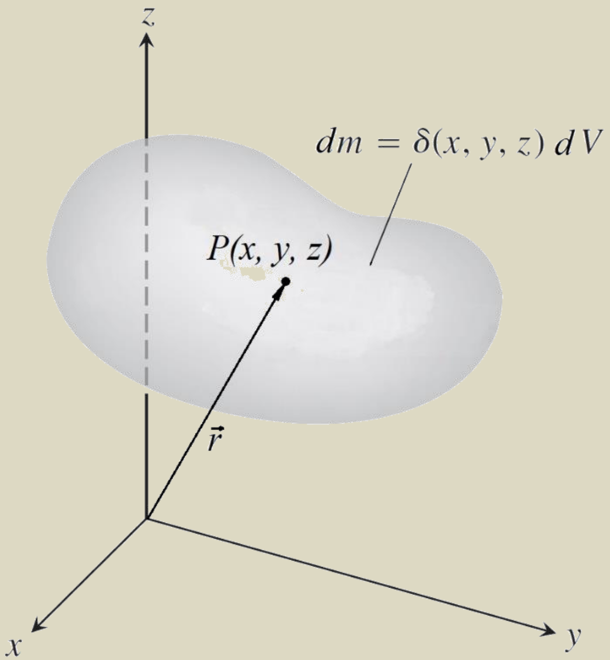
Momentos de Inercia

El momento de inercia I es una medida de la inercia rotacional de un cuerpo. Cuando un cuerpo gira en torno a uno de los ejes principales de inercia, la inercia rotacional puede ser representada como una magnitud vectorial llamada momento de inercia. El momento de inercia refleja la distribución de masa de un cuerpo o de un sistema de partículas en rotación, respecto a un eje de giro. El momento de inercia sólo depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento.

Para un cuerpo de masa continua (medio continuo), se generaliza como:

$$I = \int_m r^2 \, dm = \int_V \rho r^2 \, dV$$

El límite de inferior V de la integral indica que se integra sobre todo el volumen del cuerpo, el cual se resuelve a través de una ***integral triple***.



Anexo: momentos de inercia

Sin embargo, en el caso más general posible, la inercia rotacional debe determinarse por medio del tensor de inercia. La descripción tensorial es necesaria para el análisis de sistemas complejos, por ejemplo en movimientos giroscópicos.
El tensor de inercia de un sólido o cuerpo rígido, es un tensor simétrico de segundo orden, que expresado en una base ortonormal respecto del origen, viene dado por una matriz simétrica, cuyos elementos son:

$$I_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} I_{11}^{(0)} & I_{12}^{(0)} & I_{13}^{(0)} \\ I_{21}^{(0)} & I_{22}^{(0)} & I_{23}^{(0)} \\ I_{31}^{(0)} & I_{32}^{(0)} & I_{33}^{(0)} \end{pmatrix}$$

La matriz es simétrica respecto de la diagonal principal

$$I_{ij}^{(0)} = \int_m \left(\delta_{ij} r^2 - x_i x_j\right) dm$$

Siendo $\vec{r}$ el vector que determina la posición del punto P, tal que

$$\vec{r} = x_1 \hat{\imath} + x_2 \hat{\jmath} + x_3 \hat{k} \quad \Rightarrow \quad r^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$$

y δ_{ij}, es el *delta de Kronecker* definida como:

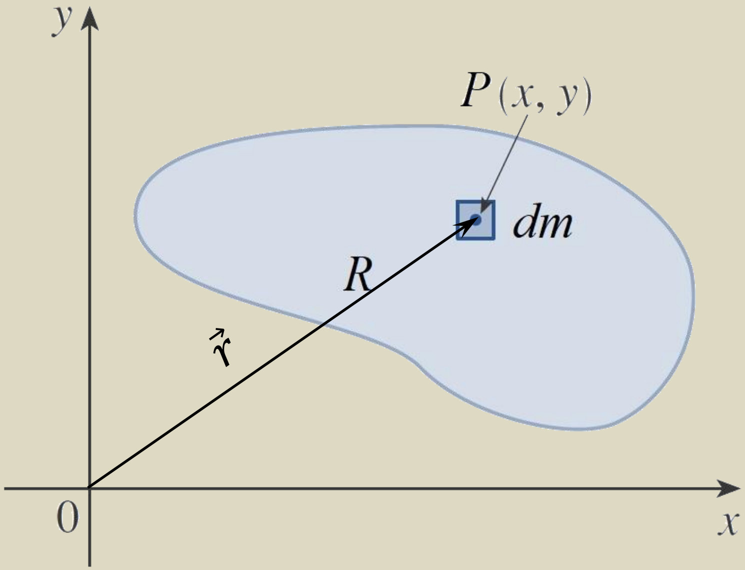
$$\delta_{ij}: \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$$

Anexo: momentos de inercia

Los elementos I_{ii}, para $i = 1, 2, 3$ reciben el nombre de momento de inercia respecto al eje x_i, y son las componentes de la diagonal principal del tensor de inercia.

<u>Momento de inercia para una placa</u>

Siendo $\vec{r}$ el vector posición del punto P



$$\vec{r} = x_1\hat{\imath} + x_2\hat{\jmath} \;\; \Rightarrow \;\; r^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 \;\; (x_3 = 0)$$

$$I_{11} \equiv I_x = \iint_R {x_2}^2 dm = \iint_R y^2 \delta(x, y) dA$$

$$I_{22} \equiv I_y = \iint_R {x_1}^2 dm = \iint_R x^2 \delta(x, y) dA$$

$$I_{33} \equiv I_z = \iint_R ({x_1}^2 + {x_2}^2) dm = \iint_R (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA = I_x + I_y$$

Anexo: momentos de inercia

Momento de inercia para un sólido

Siendo $\vec{r}$ el vector posición del punto P

$$\vec{r} = x_1\hat{\imath} + x_2\hat{\jmath} + x_3\hat{k}$$

$$r^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$$

$$I_{11} \equiv I_x = \iiint_Q ({x_2}^2 + {x_3}^2)\delta(x,y,z)dV$$

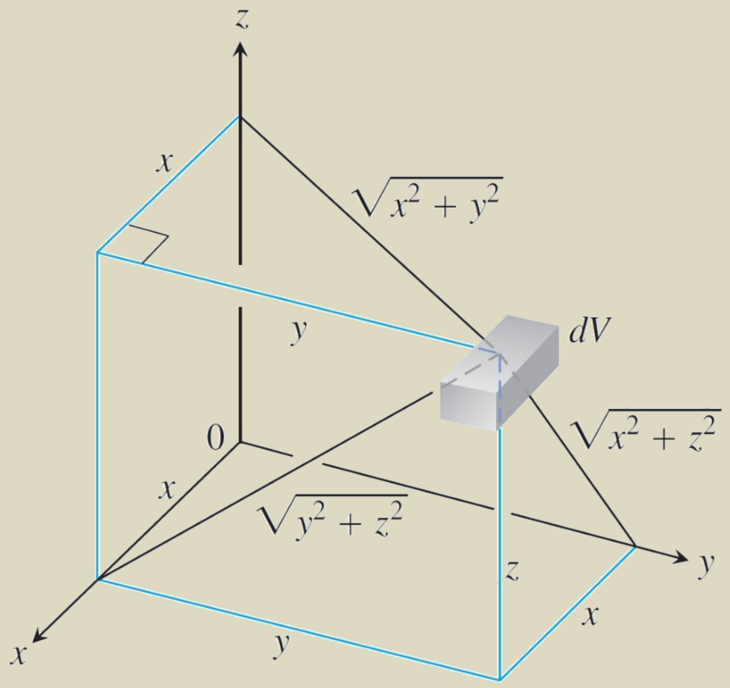
$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)\delta(x,y,z)dV$$

$$I_{22} \equiv I_y = \iiint_Q ({x_1}^2 + {x_3}^2)\delta(x,y,z)dV$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)\delta(x,y,z)dV$$

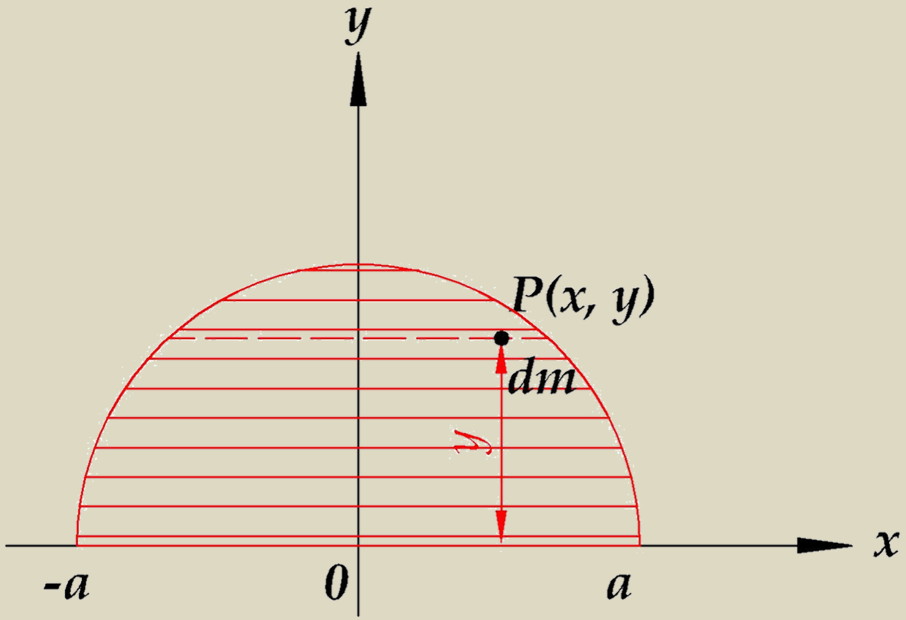
$$I_{33} \equiv I_z = \iiint_Q ({x_1}^2 + {x_2}^2)\delta(x,y,z)dV = \iiint_Q (x^2 + y^2)\delta(x,y,z)dV$$

Distancias para dV a los planos y ejes coordenados.



Anexo: momentos de inercia

<u>Ejemplo 3.</u> Una lámina tiene la forma de semicírculo de radio $r = a$, ubicado en el semiplano superior. La densidad superficial en un punto P de la placa es proporcional a la distancia del punto P al eje x. Calcular los momentos de inercia respecto a los ejes x e y.



Para la solución se plantea una región de tipo I

$$R_I : \left\{ (x, y) \;/\; -a \leq x \leq a \;; 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \right\}$$

Anexo: momentos de inercia

- *Primero se determina el momento de inercia respecto al eje x (Ix)*

$$R_I\colon\left\{(x,y)\ /\ -a \le x \le a\ ;0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2}\right\}$$

$$\delta(x,y) = ky$$

$$\boldsymbol{Ix = \iint_R y^2.\delta(x,y).dm}$$

$$Ix = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} k.y^3.dy.dx = \int_{-a}^{a} k\left(\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{k}{4}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^2dx =$$

$$= \frac{k}{4}\int_{-a}^{a}[a^4-2a^2x^2+x^4]dx = \frac{k}{4}\left(a^4x-\frac{2}{3}a^2x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{ka^5}{4}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{Ix = \frac{4}{15}ka^5}}$$

Anexo: momentos de inercia

- *Segundo se determina el momento de inercia respecto al eje y (Iy)*

$R_I : \left\{(x, y) \; / \; -a \leq x \leq a \; ; 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\right\}$

$\delta(x, y) = ky$

$$\boldsymbol{Iy = \iint_R x^2 . \delta(x, y). dm}$$

$$Iy = \int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2 . ky. dy. dx = k \int_{-a}^{a} x^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = k \int_{-a}^{a} x^2 \frac{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2}{2} dx =$$

$$= k \int_{-a}^{a} \frac{x^2(a^2 - x^2)}{2} dx = \frac{k}{2} \int_{-a}^{a} (a^2x^2 - x^4) dx = \frac{k}{2}\left(a^2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{k}{2} a^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left[\frac{k}{2} a^5 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{ka^5}{2} \frac{2}{15} - \frac{ka^5}{2}\left(-\frac{2}{15}\right) = \boxed{\boldsymbol{\frac{2}{15} ka^5 = Iy}}$$

Anexo: momentos de inercia

- *Luego, se determinan de los momentos de inercia aplicando* ***coordenadas polares,*** *para verificar los resultados obtenidos en* ***coordenadas cartesianas:***

$$R:\{(r,\theta)\ /\ 0 \leq r \leq a\ ;0 \leq \theta \leq \pi\}$$

$$x = rcos\theta \Rightarrow x^2 = r^2.cos^2\theta \qquad ; \qquad f(x,y) = ky \ \Rightarrow f(r,\theta) = krsen\theta$$

$$\boldsymbol{Iy = \iint_R x^2.f(x,y).dA} = \int_{0,}^{\pi}\int_0^a r^2.cos^2\theta.k.r.sen\theta.r.dr.d\theta$$

$$Iy = k\int_0^{\pi}\int_0^a r^4.cos^2\theta.sen\theta.dr.d\theta = k\int_0^{\pi}(cos^2\theta)(sen\theta)\left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^a d\theta$$

$$= \frac{ka^5}{5}\int_0^{\pi} cos^2\theta.sen\theta.d\theta = \frac{ka^5}{5}\int_1^{-1} u^2\ (-1)du =$$

$$Por\ sustitución\ u = cos\theta \Rightarrow du = -sen\theta d\theta \Rightarrow -du = sen\theta d\theta$$

$$Iy = -\frac{ka^5}{5}\left(\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^{-1} = -\frac{ka^5}{15}(-1) - \left[-\frac{ka^5}{15}.1\right] = \boxed{\boldsymbol{\frac{2}{15}ka^5 = Iy}}$$

Anexo: momentos de inercia

$$\boldsymbol{Ix = \iint_R y^2 f(x,y).dA}$$

$$Si\ y = rsen\theta \Rightarrow y^2 = r^2.sen^2\theta \qquad ; \qquad f(x,y) = ky \Rightarrow f(r,\theta) = krsen\theta$$

$$Ix = \int_0^{\pi}\int_0^{a}(r^2sen^2\theta)(krsen\theta)\ rdrd\theta = k\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^4(sen^3\theta)\ drd\theta = k\int_0^{\pi}(sen^3\theta)\left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^a d\theta$$

$$= k\int_0^{\pi}\frac{a^5}{5}(sen^3\theta)d\theta = \frac{ka^5}{5}\int_0^{\pi}(sen^3\theta)d\theta = \frac{ka^5}{5}\int_0^{\pi}(1-cos^2\theta)(sen\theta)d\theta =$$

$$Por\ sustitución \Rightarrow u = cos\theta \Rightarrow du = -sen\theta d\theta \Rightarrow -du = sen\theta d\theta$$

$$= \frac{ka^5}{5}\int_1^{-1}(1-u^2)(-1)du = \frac{ka^5}{5}\int_1^{-1}(u^2-1)\ du = \frac{ka^5}{5}\left(\frac{u^3}{3}-u\right)\Big|_1^{-1} =$$

$$= \frac{ka^5}{5}\left[\left(\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)\right] = \frac{ka^5}{5}\left[-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right] \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Ix = \frac{4}{15}ka^5}}$$

Por lo tanto, utilizando coordenadas polares o coordenadas cartesianas, se verifica que los resultados de los momentos de inercia respecto de los ejes x e y, coinciden independientemente del sistema de coordenadas adoptado.

Anexo: momentos de inercia

Ejemplo 4.

Determinar el momento de inercia del sólido con forma de cilindro recto, del ejemplo 2, respecto del eje z.
Teniendo en cuenta que la densidad es $\delta(x, y, z) = kz$. *El recinto* Q *queda limitado por:*

$$Q: \{(r, \theta, z)\ 0 \leq r \leq a\ ; 0 \leq \theta \leq 2\pi\ ; 0 \leq z \leq h\}$$

$$\boldsymbol{Iz = \iiint_{Q} (x^2 + y^2)\delta(xyz)dV}$$

En coordenadas polares $(x^2 + y^2) = r^2$

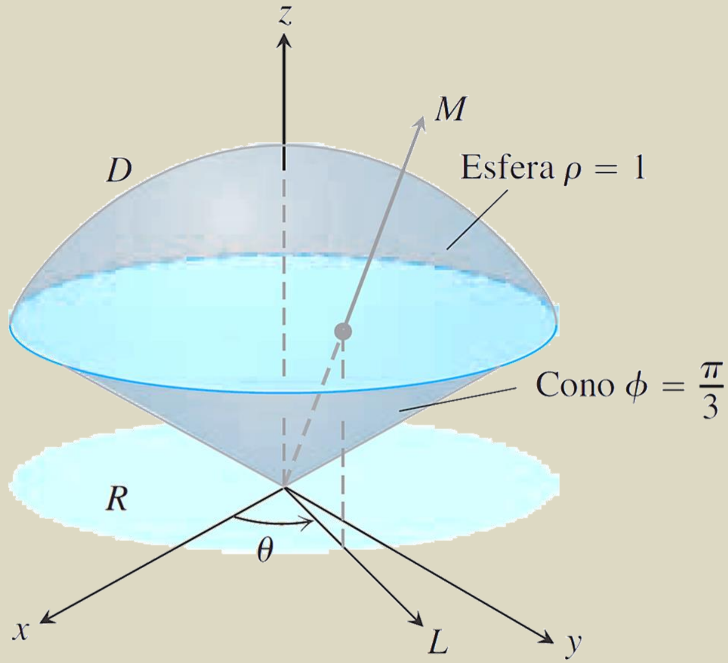
$$Iz = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{h} r^2.kz.r.dz.dr.d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} k\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^h r^3.dr.d\theta = \frac{kh^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} r^3.dr.d\theta$$

$$= \frac{kh^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^a d\theta = \frac{kh^2a^4}{8} \int_0^{2\pi} d\theta = \boxed{\boldsymbol{\frac{kh^2a^4\pi}{4} = Iz}}$$

Anexo: momentos de inercia

Ejemplo 5. *Siendo D, un recinto limitado por una esfera de radio $\rho = 1$ y por un cono cuyo ángulo es $\emptyset = \frac{\pi}{3}$, donde la función de densidad es $\delta(x, y, z) = 1$ (densidad constante).*

Determinar el momento de inercia del sólido con respecto al eje z.



$$D\colon \left\{ (\rho; \emptyset; \theta) \;/\; 0 \le \rho \le 1 \;; 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{3}; 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

Anexo: momentos de inercia

En coordenadas rectangulares, el momento de inercia es: $I_Z = \iiint_D (x^2 + y^2)dV$

En coordenadas esféricas, $x^2 + y^2 = (\rho\, sen\emptyset\, cos\theta)^2 + (\rho\, sen\emptyset\, sen\theta)^2 = \rho^2$. *Por lo tanto,*

$$I_Z = \iiint_D (\rho^2 sen^2\emptyset)\rho^2 sen\emptyset\; d\rho\; d\emptyset\; d\theta \;=\; \iiint_D (\rho^4 sen^3\emptyset)\; d\rho\; d\emptyset\; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 (\rho^4 sen^3\emptyset)\; d\rho\; d\emptyset\; d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 (sen^3\emptyset)\; d\emptyset\; d\theta =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - cos^2\emptyset)\,(sen\emptyset)\; d\emptyset\; d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \left(-cos\emptyset + \frac{cos^3\emptyset}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \frac{5}{24}\, d\theta = \frac{1}{24}[2\pi] = \boxed{\boldsymbol{\frac{\pi}{12} = I_Z}}$$

Bibliografía

- Cálculo con Geometría Analítica. Autor. E. Swokowski.
- Cálculo de Varias Variables. Autor. J. Stewart.

¡Muchas gracias!

¿Consultas?