Integral curvilínea

Análisis de los elementos que la componen

Dada una curva C que se desarrolla ente sus extremos A y B, y en la misma región del espacio existe un campo vectorial $\bar{\mathbf{A}}$

La integral curvilínea se define como: **"**la integral sobre C entre A y B del producto escalar de $\bar{\mathbf{A}}$ y $\bar{\mathbf{dl}}$ "

$$T = \int_{C\ A}^{B} \bar{A} \cdot \bar{dl}$$

donde $\bar{\mathbf{dl}}$ representa el segmento orientado diferencial de la curva.

Este concepto es sencillo cuando trabajamos con una trayectoria recta y un campo uniforme.
Pero cuando debemos operar en el espacio tridimensional, con una trayectoria no recta y un campo variable, comprender la resolución, requiere conocer detalladamente los elementos que la componen.

Empecemos por un repaso de derivadas.
Por definición de derivada de una función $f_{(x)}$ es**:**

$d\, f_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x}$ o sea, **<u>es el incremento de la función sobre el incremento de la variable</u>**

Apliquémoslo por ejemplo a $f_{(x)} = x^2$

$d\, f_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x} \qquad f'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

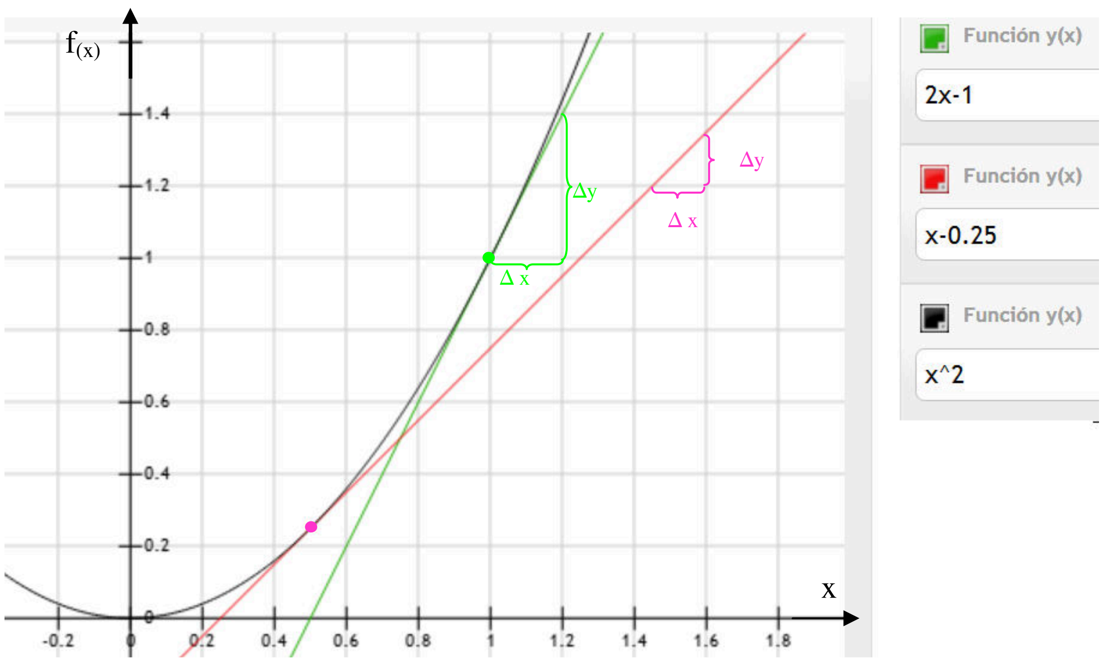
$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x^2 + 2\,x\Delta x + \Delta x^2) - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\,x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2\,x + \Delta x = 2x$

¿Como podemos visualizarlo?
Calculemos la función y la derivada de la función $f_{(x)} = x^2$ en dos puntos diferentes.

$f_{(x)} = x^2$ para $x = 1$ y $x = 0{,}5$ $\qquad f_{(1)} = 1 \qquad f_{(\mathbf{0,5})} = 0{,}25$

$f'_{(x)} = 2x$ para $x = 1$ y $x = 0{,}5$ $\qquad f'_{(1)} = 2 \qquad f'_{(\mathbf{0,5})} = 1$

¿Que significan estos valores? Podemos verlo en un Gráfico



Vemos en el puno ● x= 0,5 ; y = 0,25 pasa la recta tangente (rosa) y que la variación en **x, Δx** es igual a la variación en **y, Δy.**
En cambio en el puno ● x = 1 ; y = 1 pasa la recta tangente (verde).
Cuando la variación en **x, Δx** es 1**;** la variación en **y, Δy** es el doble.

El valor de la derivada en el punto, me indica, cuanto aumenta la función por el aumento en la variable **x**.
Es la relación entre el **Δx** y **Δy** o más precisamente entre **dx** y **dy**
Guardemos bien esta idea que vamos a volver sobre ella.
A esto se lo llama también pendiente de la curva.

<u>Parametrización de una función</u>: Empecemos con un ejemplo.

Para componer la trayectoria de un tiro oblicuo, partimos de la función del movimiento en **x** y la función del movimiento en **y**.

$$x_{(t)} = x_0 + v_{x0} .t$$

$$y_{(t)} = y_o + v_{yo}.t - 1/2\ g\, t^2$$

Si queremos componer la parábola de **y** como función de **x,** despejamos **x** y reemplazamos.

$$\frac{x - x_0}{v_{x0}} = t \qquad y_{(x)} = y_o + v_{yo}.\frac{(x - x_0)}{v_{x0}} - \frac{g\,(x - x_0)^2}{2\ \ v_{x0}^2} =$$

$$y_{(x)} = y_o + \frac{v_{yo}.x}{v_{x0}} - \frac{v_{yo}.\,x_0}{v_{x0}} - \frac{g}{2\,v_{x0}^2}\,(x^2 - 2.x_0\,x + x_0^{\,2})$$

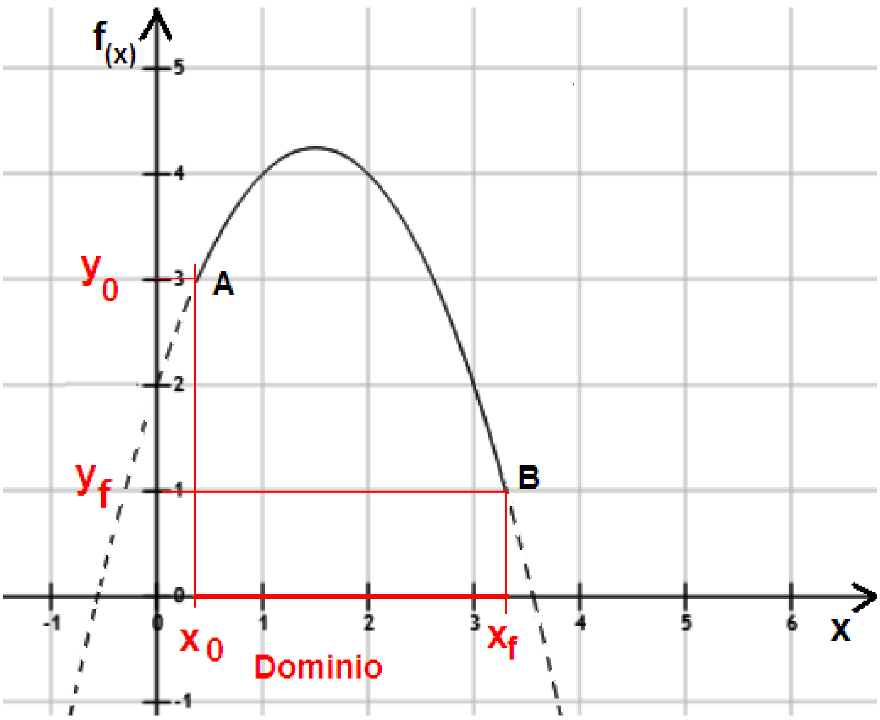
$$y_{(x)} = y_o + \frac{v_{yo}.x}{v_{x0}} - \frac{v_{yo}.\,x_0}{v_{x0}} - \frac{g\,x^2}{2\,v_{x0}^2} + \frac{g\,x_0\,x}{v_{x0}^2} + \frac{g\,x_0^{\,2}}{2\,v_{x0}^2} \qquad \text{ordenando}$$

$$y_{(x)} = y_o - \frac{v_{yo}.\,x_0}{v_{x0}} - \frac{g\,x_0^{\,2}}{2\,v_{x0}^2} + \frac{v_{yo}.x}{v_{x0}} + \frac{g\,x_0\,x}{v_{x0}^2} - \frac{g\,x^2}{2\,v_{x0}^2}$$

$$y_{(x)} = \left[y_o - \frac{v_{yo}.\,x_0}{v_{x0}} - \frac{g\,x_0^{\,2}}{2\,v_{x0}^2}\right] + \left[\frac{v_{yo}.}{v_{x0}} + \frac{g\,x_0}{v_{x0}^2}\right] x - \left[\frac{g}{2\,v_{x0}^2}\right] x^2 \qquad \text{esto es, la parábola de la trayectoria}$$

Fíjense un interesante análisis, el dominio está restringido para valores $x_0 \leq x \leq x_f$
Si analizamos el inicio $x = x_o$ y remplazando obtenemos $y_{(xo)} = y_o$

Pero volvamos a lo nuestro: Graficando tenemos una curva de este tipo;



O sea tenemos dos formas de expresar el movimiento: en función de **x** o de **t.**
Cuando es en función de **t,** se las llamas ecuaciones paramétricas.
Para las curvas en el plano este análisis es relativamente sencillo.

Las matemáticas utilizan esta idea, para describir todo tipo de curvas, dependan o no del tiempo. Es particularmente útil para operar con curvas en el espacio tridimensional.
Se describe una curva en el espacio, en función de una variable externa, a la que en forma general la llamamos **t** o **u**. Como dijimos, las Matemáticas, utilizan este recurso aunque no dependan del tiempo.
Para describir coma varían las tres componentes **x**, **y**, **z** de cada punto a lo largo de la curva C, se formulan tres funciones, que dependen de una variable **u**.

$\mathbf{x} = \mathbf{r}_{x(u)}$ $\mathbf{y} = \mathbf{r}_{y(u)}$ $\mathbf{z} = \mathbf{r}_{z(u)}$

Las tres, componen una función vectorial, que determina el vector posición para todos los puntos de la curva. $\bar{\mathbf{r}}_{(u)} = (\mathbf{r}_{x(u)} \; ; \mathbf{r}_{y(u)} \; ; \mathbf{r}_{z(u)})$ o sea **para cada valor de u tenemos un punto de la curva**
(existen infinitas variantes para parametrizar cada curva, pero se usan las más simples)
Fíjense que **u** no forma parte del gráfico, es una variable externa, que se utiliza solo para describir la curva.

Vamos un paso más
Tenemos diferentes funciones que se definen para todos los puntos del espacio, por ejemplo campos vectoriales, como el Campo eléctrico $\bar{E}(\bar{r})$, o un campo escalar como el potencial $V(\bar{r})$.
Cuando queremos conocer qué valores adquieren estas funciones, solamente en los puntos de una curva C descripta por $\bar{\mathbf{r}}_{(u)} = (\mathbf{r}_{x(u)} \; ; \mathbf{r}_{y(u)} \; ; \mathbf{r}_{z(u)})$
Debemos reemplazar en su ecuación, las variables **x** ,**y** ,**z** por las tres funciones que describen la curva.
$\mathbf{r}_{x(u)} \; ; \mathbf{r}_{y(u)} \; ; \mathbf{r}_{z(u)}$ entonces nos quedará $\bar{E}_{(u)} = (\mathbf{f}_{(u)} \; ; \mathbf{g}_{(u)} \; ; \mathbf{h}_{(u)})$ o $V_{(u)}$.
A este proceso también se lo llama parametrización.

Entonces con cada valor de **u** no solo tenemos el **punto** de la curva que le corresponde, sino también el valor de la función campo en ese punto de la curva.
Si es un campo vectorial, será un vector. Si es un campo escalar, un escalar.

O sea ya tenemos dos de los elementos esenciales para hacer una integral curvilinea, pero nos falta uno muy importante que es el $\bar{\mathbf{dl}}$.

Volvamos ahora al concepto de derivada.
Cuando analizamos la derivada de la función $y = f_{(x)} = x^2$ vimos que su derivada $f'_{(x)} = 2x$
Podriamos parametrizar esta curva, por ejemplo:

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^2 \end{cases} \quad \text{y sus derivadas} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = 1 \\ \dfrac{dy}{du} = 2u \end{cases}$$

si hacemos la relacion dy/dx , nos queda $\dfrac{dy}{dx} = 2u$

para u=0,5 se cumple x =0,5 y = 0,25 ; dx = 1 dy= 1 $\dfrac{dy}{dx} = 1$

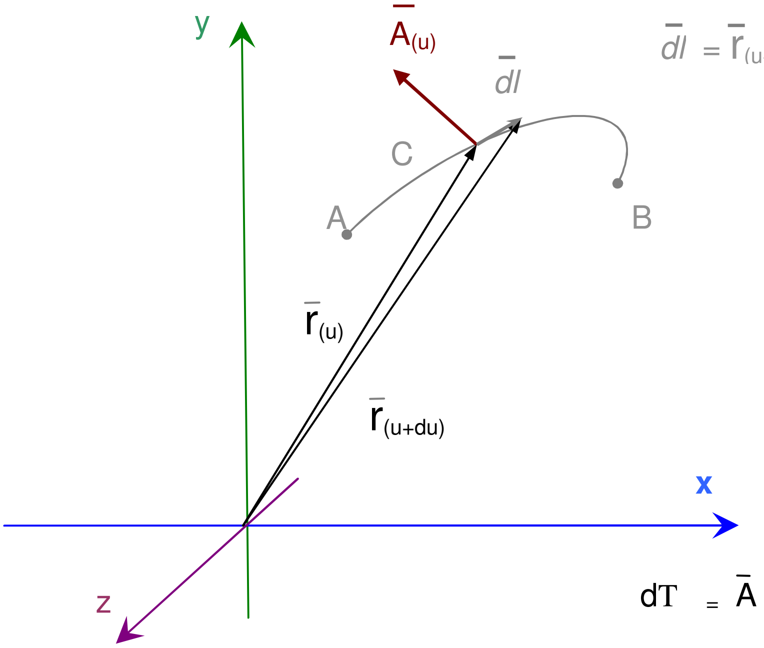
para u=1 se cumple x =1 y = 1 ; dx = 1 dy= 2 $\dfrac{dy}{dx} = 2$

Vemos que la derivada de **y** en un punto respecto de **x** no cambia por expresar la función de forma parametrizada.

Debemos expresar el $\bar{\mathbf{dl}}$ en función de la variable **u**. ¿Cómo parametrizamos el $\bar{\mathbf{dl}}$?

Debemos encontrar un versor en la dirección y sentido de $\bar{\mathbf{dl}}$. O sea $\check{\mathbf{dl}}$
Y expresar su módulo en función del parámetro **u**, pero ojo, **es un módulo diferencial.**
Con estos dos elementos tendremos el $\bar{\mathbf{dl}}_{(u)}$

$\bar{A}_{(u)}$ Campo vectorial   C Curva entre A y B $\bar{dl}$ Elemento diferencial de C



$\bar{dl} = \bar{r}_{(u+du)} - \bar{r}_{(u)}$

$dT = \bar{A} \cdot \bar{dl}$ $T_{(B)} = \int_{C\,A}^{B} \bar{A} \cdot \bar{dl}$

C=> $\bar{r}_{(u)} = (r_{x(u)}\,; r_{y(u)}\,; r_{z(u)})$ C parametrizada   entre A y B

u_1 y u_2 son los valores de **u** para definir el vector posición del puno A y B respectivamente

$\bar{A}_{(u)} = (f_{(u)}\,; g_{(u)}\,; h_{(u)})$ $\bar{A}$ parametrizado

Como vemos en la figura definimos el diferencial como $\bar{dl} = \bar{r}_{(u+du)} - \bar{r}_{(u)}$

Si derivamos la función parametrizada que define la curva $\bar{r}_{(u)} = (r_{x(u)}\,; r_{y(u)}\,; r_{z(u)})$

Obtenemos otra función vectorial $\bar{r}'_{(u)} = (r'_{x(u)}\,; r'_{y(u)}\,; r'_{z(u)})$

¿Qué representa esta función? Esta función nos determina en cada punto de la curva un vector.

Las componentes de ese vector, representan cómo se incrementa la curva en cada dirección, cuando **u** aumenta, o sea la relación de crecimiento entre cada una de las componentes y la variable **u.**

(Vea el siguiente dibujo) y analicémoslo para el punto **u** = ***i***

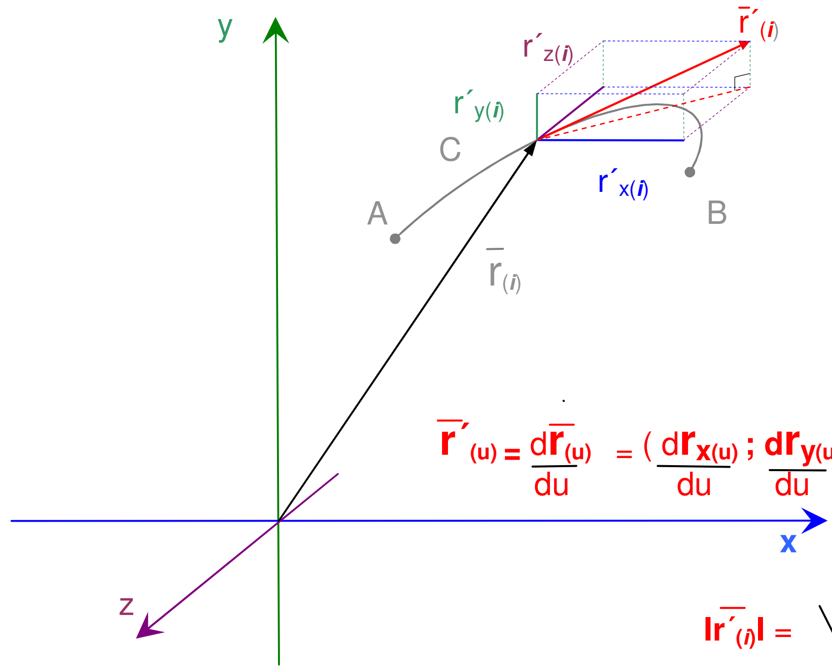
Este vector es tangente a la curva, o sea la dirección es la de la curva en ese punto. Si lo dividimos por su módulo obtenemos un vector unitario en esa dirección y sentido, que es el versor que estábamos buscando.

$$\frac{\bar{r}'_{(i)}}{|\bar{r}'_{(i)}|} = \left(\frac{r'_{x(i)}}{\sqrt{r'^{2}_{x(i)} + r'^{2}_{y(i)} + r'^{2}_{z(i)}}} \;;\; \frac{r'_{y(i)}}{\sqrt{r'^{2}_{x(i)} + r'^{2}_{y(i)} + r'^{2}_{z(i)}}} \;;\; \frac{r'_{z(i)}}{\sqrt{r'^{2}_{x(i)} + r'^{2}_{y(i)} + r'^{2}_{z(i)}}} \right) = \check{\mathbf{dl}}$$

Ahora nos falta calcular el módulo infinitesimal de $\bar{\mathbf{dl}}$

El módulo de $\bar{r}'_{(i)}$ representa el crecimiento del arco de curva en relación al crecimiento de **u.** Si multiplicamos esta relación de crecimiento por el crecimiento de infinitesimal de **u** que es **du** obtenemos el modulo del crecimiento infinitesimal de la curva que no es otra cosa que el módulo de $\bar{\mathbf{dl}}$

$$|\bar{r}'_{(i)}| \cdot du = |\bar{dl}|$$



$$\bar{r}'_{(u)} = \frac{d\bar{r}_{(u)}}{du} = \left(\frac{d\mathbf{r}_{x(u)}}{du} ; \frac{d\mathbf{r}_{y(u)}}{du} ; \frac{d\mathbf{r}_{z(u)}}{du} \right) = \left(\mathbf{r}'_{x(u)} ; \mathbf{r}'_{y(u)} ; \mathbf{r}'_{z(u)} \right)$$

$$|\bar{r}'_{(i)}| = \sqrt{\mathbf{r}'^{\,2}_{x(i)} + \mathbf{r}'^{\,2}_{y(i)} + \mathbf{r}'^{\,2}_{z(i)}}$$

Ahora podemos componer el vector $\mathbf{d\bar{l}}$

$$d\bar{l} = |d\bar{l}| \,.\, d\check{l} = \cancel{|\bar{r}'_{(i)}|} \,.\, du \,.\, \frac{\bar{r}'_{(i)}}{\cancel{|\bar{r}'_{(i)}|}} = \bar{r}'_{(i)} \,.\, du$$

Si es valido para $\mathbf{u} = \boldsymbol{i}$ es valido para todo $\mathbf{u}$

$$d\bar{l} = \bar{r}'_{(u)} \,.\, du = \left(\mathbf{r}'_{x(u)} ; \mathbf{r}'_{y(u)} ; \mathbf{r}'_{z(u)} \right) \,.\, du$$

Ahora podemos escribir finalmente la integral curvilínea de modo que podamos operar consistentemente con funciones expresadas en el espacio.

$$\int_{C\ A}^{B} \bar{A} \,.\, d\bar{l} \qquad \int_{C\ U1}^{U2} \left(\mathbf{f}_{(u)} ; \mathbf{g}_{(u)} ; \mathbf{h}_{(u)} \right) . \left(\mathbf{r}'_{x(u)} ; \mathbf{r}'_{y(u)} ; \mathbf{r}'_{z(u)} \right) . \, du$$

Como todos los componentes dependen de **u** podemos garantizar que en cada punto estamos haciendo el producto escalar correspondiente.

$$\int_{C\ A}^{B} \bar{A} \,.\, d\bar{l} \qquad \int_{C\ U1}^{U2} \left(\mathbf{f}_{(u)} . \mathbf{r}'_{x(u)} + \mathbf{g}_{(u)} . \mathbf{r}'_{y(u)} + \mathbf{h}_{(u)} . \mathbf{r}'_{z(u)} \right) . \, du$$

La resolución de esta integral, en cada caso particular, podrá tener diferente complejidad desde el punto de vista algebraico, pero comprender bien este análisis, nos garantiza un planteo y formulación adecuada.