

## Unidad 10 - Integrales de superficie

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Parametrizar diferentes tipos de superficies
2. Calcular integrales de superficie de campos escalares para la obtención de masa, momentos y centros de masa de superficies alabiadas.
3. Calcular integrales de superficie de campos vectoriales para la obtención de flujo de campos de velocidades de un fluido a través de una superficie.

### Introducción

En la ciudad de Valencia, España, hay un monumental acuario, construido según un proyecto del arquitecto español – mexicano Félix Candela:



**Figura 10.1:** El imponente “Oceanogràfic” de Valencia, España.

Su cubierta es una asombrosa estructura de hormigón armado, con la forma de cuatro paraboloides hiperbólicos cruzados. Este diseño, además de imitar una flor acuática, optimiza el ingreso de la luz que se refleja en el agua que circunda al edificio y el efecto es sorprendente...

Fue necesario pintar la cubierta con un producto hidrófugo y con propiedades elásticas que acompañaran las dilataciones térmicas sin dañarse... ¿Cómo pudieron calcular el área a cubrir, a fin de presupuestar el material necesario? Se trata de materiales caros, que no pueden desperdiciarse...

Concretamente, ¿cómo se calcula el área de una superficie alabeada de este tipo?

Con “alabeada” queremos decir “que no está contenida en un plano”, ya que para evaluar áreas planas contamos con las integrales dobles...

En esta Unidad veremos cómo se puede definir un nuevo tipo de integrales que nos permita hacer cálculos como éste, suponiendo que conocemos la ecuación de la superficie...

## Superficies paramétricas

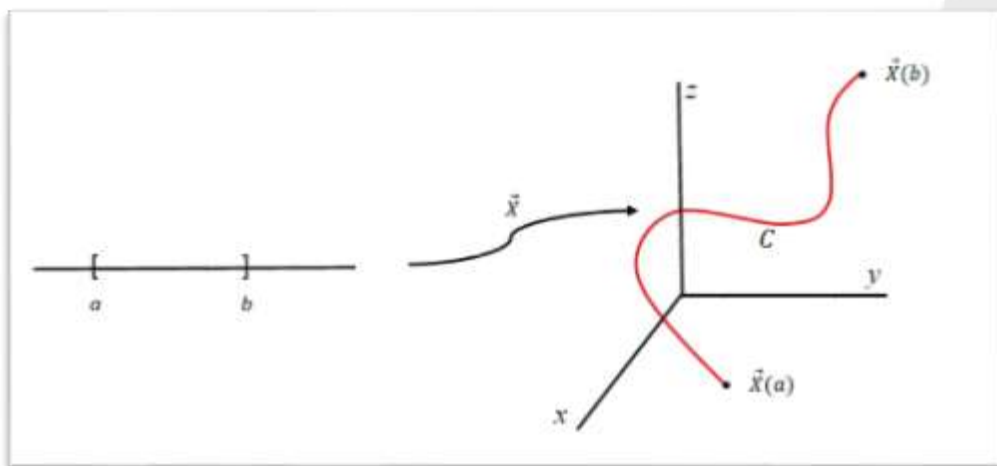
En primer lugar, veamos cómo definir superficies alabeadas en forma paramétrica.

Recordemos que una función vectorial

$$\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \text{ con } t \in [a, b]$$

y componentes continuas, representa un arco de curva  $C$  en el espacio.

A medida que el parámetro  $t$  recorre el intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\vec{X}(t)$  va recorriendo la curva  $C$ . La continuidad de las componentes nos asegura que el arco de curva se describe mediante un solo trazo, “sin levantar el lápiz”.



**Figura 10.2:** Una curva paramétrica.

Tal como hemos visto en la unidad 8, la parametrización  $\vec{X}(t)$  de la curva se dice *regular* si existe, y es no nulo en cada punto, el vector tangente

$$\vec{X}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

y se dice *regular a trozos* si deja de ser regular en, a lo sumo, un número finito de puntos del intervalo  $[a, b]$ . Una parametrización regular permite, por ejemplo, calcular la longitud del arco de curva y la circulación de un campo vectorial continuo a lo largo del mismo (trabajo) mediante integrales de línea.

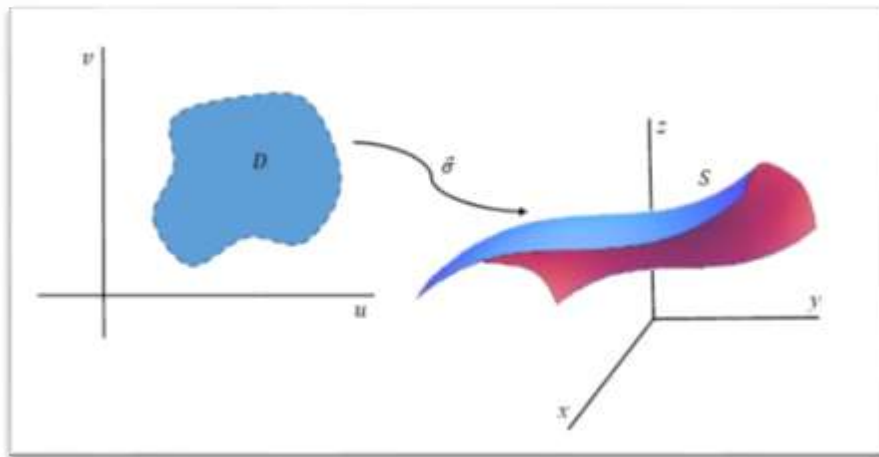
De modo similar, una función vectorial de dos parámetros,

$$\vec{\sigma}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

y componentes continuas, representa una porción de superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Los dos parámetros,  $u$  y  $v$ , que pertenecen al dominio plano  $D \subset \mathbb{R}^2$ , representan los *dos grados de libertad* que se tienen para “moverse” sobre una superficie y la función  $\vec{\sigma}(u, v)$  se dice *una parametrización* de esa superficie.

A medida que los parámetros  $u$  y  $v$  van recorriendo el conjunto  $D$ , el vector  $\vec{\sigma}(u, v)$  va recorriendo la superficie  $S$ . La continuidad de las componentes nos asegura que la porción de superficie no tiene “agujeros”:



**Figura 10.3:** Una superficie paramétrica.

Veamos algunos ejemplos...



**Ejemplo 10.1:** Consideremos la siguiente función vectorial de componentes continuas:

$$\vec{\sigma}(u, v) = (u - v, u + v, u - 1) \text{ con } u^2 + v^2 \leq 1$$

Representa una porción de plano en el espacio.

En efecto: son

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \\ z = u - 1 \end{cases}$$

Eliminando los parámetros resulta

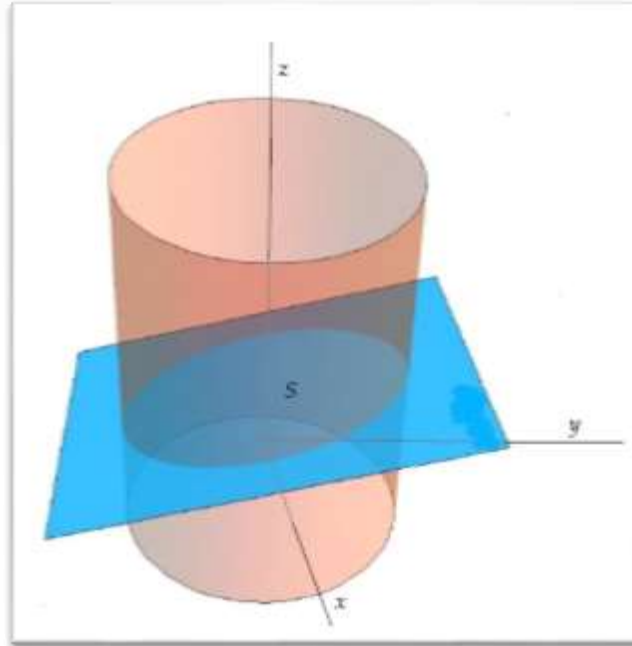
$$x + y = 2(z + 1)$$

o sea

$$x + y - 2z = 2,$$

que es la ecuación de un plano.

Como  $u^2 + v^2 \leq 1$ , resulta  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 \leq 1$ , por lo tanto  $x^2 + y^2 \leq 2$ , y se trata de la porción del plano interior al cilindro de ecuación  $x^2 + y^2 = 2$ .



**Figura 10.4:** La porción de plano del ejemplo 10.1 es la que se encuentra dentro del cilindro.

La función  $\vec{\sigma}$  “se encarga” de “deformar  $D$ ” todo lo que sea necesario, hasta transformarlo en  $S$  y posicionarlo en el lugar del espacio correspondiente.



**Ejemplo 10.2:** Consideremos ahora la siguiente función vectorial:

$$\vec{\sigma}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2) \text{ con } (u, v) \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$$

Representa un trozo de paraboloide.

En efecto:

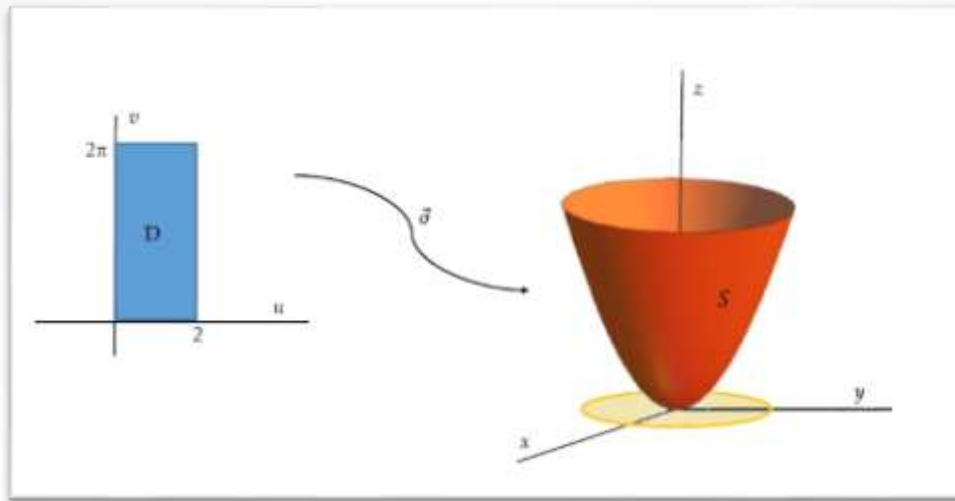
$$\begin{cases} x = u \cos(v) \\ y = u \sin(v) \\ z = u^2 \end{cases}$$

por lo que resulta

$$z = x^2 + y^2,$$

que es la ecuación de un paraboloide.

Como  $u \in [0, 2]$ , resulta  $z \in [0, 4]$  y por lo tanto se trata únicamente de la porción del paraboloide comprendida en esos valores de  $z$ . Observar que, como  $v \in [0, 2\pi]$ ,  $x$  e  $y$  toman todos los valores posibles entre  $-2$  y  $2$ , aunque no de manera independiente.



**Figura 10.5:** La porción de paraboloides del ejemplo 10.2

Si recordamos la definición de las coordenadas polares, aquí los parámetros tienen una interpretación geométrica clara:  $u$  es el radio  $r$  de coordenadas polares mientras que  $v$  es el ángulo  $\theta$ . Mientras  $u$  recorre  $[0,2]$  y  $v$  recorre  $[0,2\pi]$ ,  $x$  e  $y$  describen un círculo de radio 2, que es la proyección de la superficie en el plano  $xy$ .

Podemos imaginar que la parametrización  $\vec{\sigma}$  “frunce” el rectángulo  $D$  a lo largo del lado con  $u = 0$  y une los lados con  $v = 0$  y  $v = 2\pi$  formando un disco (algo así como una “escarpela”, pero sin “arrugas”): ese disco es el que vemos sombreado en el plano  $xy$  de la figura 10.5; luego “estira” ese disco suavemente y sin romperlo, hasta “calzarlo”, como una media, sobre el paraboloides.



**Ejemplo 10.3:** La gráfica de cualquier función continua  $z = f(x, y)$  representa una superficie  $S$  en el espacio y se la puede ver también de forma paramétrica.

En efecto: basta considerar  $x$  e  $y$  como parámetros y definir la función vectorial

$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  con  $(x, y) \in \text{Dom}(f)$  que se llama parametrización “trivial” de  $S$

Considerando una porción acotada  $D$  del dominio, se tendrá un trozo de superficie de área finita, y si la función  $f$  es inyectiva, el dominio  $D$  de los parámetros coincidirá con la proyección de la superficie sobre el plano  $xy$ .

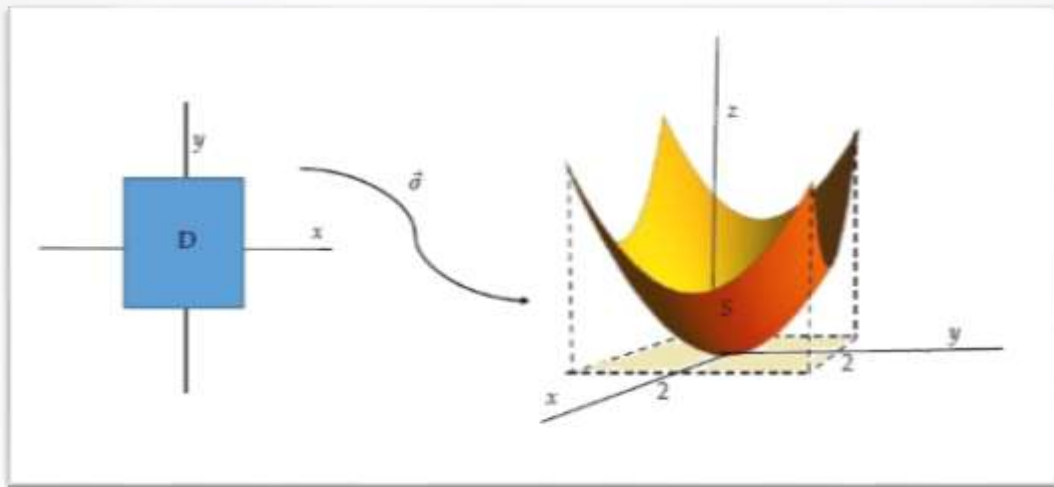
Por ejemplo, la gráfica de  $z = x^2 + y^2$  con  $x \in [-2,2]$ ,  $y \in [-2,2]$  representa una porción del mismo paraboloides que consideramos en el ejemplo anterior, pero esta vez la porción que queda dentro de la “caja” delimitada por  $(x, y) \in [-2,2] \times [-2,2]$ .

La parametrización es, en este caso,

$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$  con  $x \in [-2,2]$ ,  $y \in [-2,2]$ .


Observar que el dominio de los parámetros  $x$  e  $y$  coincide con la “sombra” que proyecta el trozo de superficie sobre el plano  $xy$ .





**Figura 10.6:** La porción de paraboloides del ejemplo 10.3

Nuevamente podemos imaginar que la parametrización “estira” el cuadrado sombreado que se ve en el plano  $xy$  de la figura 10.6, hasta acomodarlo plásticamente sobre la porción de paraboloides.

 **Ejemplo 10.4:** Sabemos que la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  representa una superficie esférica de radio 3 y centro en el origen, pero no es posible representarla con una única función  $z = f(x, y)$  pues para cada par  $(x, y)$  sobre el plano  $xy$  existen dos valores de  $z$ . Sólo pueden representarse de la forma  $\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  cada uno de los casquetes por separado:

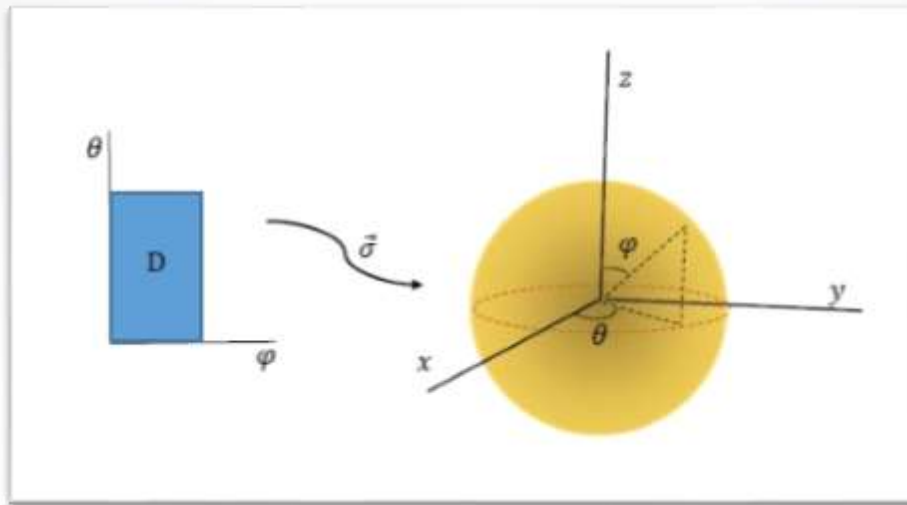
$\vec{\sigma}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{9 - x^2 - y^2})$  representa el casquete superior y

$\vec{\sigma}_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{9 - x^2 - y^2})$  representa el casquete inferior,

ambas con dominio  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$ .

Si se desea parametrizar toda la esfera con una sola función es posible recurrir a dos coordenadas angulares, que cumplen papeles similares a los de la latitud y la longitud en el globo terrestre:

$\vec{\sigma}(\theta, \varphi) = (3\cos(\varphi)\cos(\theta), 3\cos(\varphi)\sin(\theta), 3\sin(\varphi))$  con  $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  (recuerde las coordenadas esféricas)



**Figura 10.7:** La superficie esférica del ejemplo 10.4, con sus coordenadas angulares.



Para investigar:

En <http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/tools/parsur/> encontrarán un graficador online de superficies paramétricas.

## Vector normal a una superficie parametrizada



**Definición 10.1:** Dada una parametrización, definida por la función vectorial  $\vec{\sigma}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , diferenciable en  $S$ , llamaremos producto vectorial fundamental al siguiente vector:

$$\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \quad \text{con } (u, v) \in D$$

Veamos que, en caso de ser no nulo, este vector es normal a la superficie en cada punto.

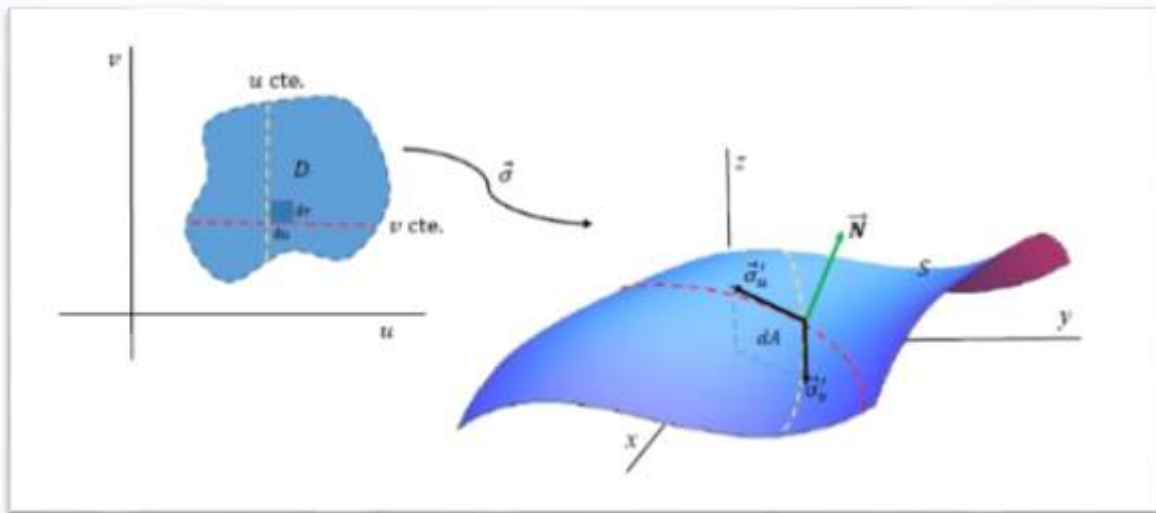
En efecto: en cada punto de la superficie  $P = \vec{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , cada una de las derivadas de la parametrización,

$$\vec{\sigma}'_u(u, v) = (x'_u(u, v), y'_u(u, v), z'_u(u, v)) \text{ y}$$

$$\vec{\sigma}'_v(u, v) = (x'_v(u, v), y'_v(u, v), z'_v(u, v)),$$

representan sendos vectores tangentes a la superficie  $S$  en ese punto  $P$ : el primero es un vector tangente a la curva que se obtiene sobre la superficie  $S$  dejando  $v$  constante y variando  $u$ , y el segundo es un vector tangente a la curva que se obtiene sobre la superficie  $S$  dejando  $u$  constante y variando  $v$ . Estas curvas que se obtienen variando uno solo de los parámetros y dejando fijo el otro se denominan curvas coordenadas, que fueron ya mencionadas en la unidad 4.

El producto vectorial de estos vectores tangentes resulta un vector normal a la superficie (en cada punto de la superficie donde existan ambos vectores tangentes y el producto sea no nulo).



**Figura 10.8:** Vector normal y elemento diferencial de área de una superficie paramétrica.



**Definición 10.2:** Decimos que una parametrización de una porción de superficie  $S$ , dada por la función vectorial  $\vec{\sigma}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , diferenciable en  $S$ , es **regular** si existe en cada punto de  $S$ , el vector normal a la superficie, y éste resulta un vector no nulo.

Además, el módulo del producto vectorial fundamental representa el área del pequeño paralelogramo que los vectores tangentes  $\vec{\sigma}'_u du$  (desplazamiento sobre la curva a  $v$  cte.) y  $\vec{\sigma}'_v dv$  (desplazamiento sobre la curva a  $u$  cte.) determinan sobre  $S$  y así,

$$\|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\| du dv$$

es el área del trocito de  $S$ ,  $dA$ , que se genera cuando los parámetros  $u$  y  $v$  varían en  $D$  en un pequeño cuadrado elemental de área  $du dv$ .

La cantidad  $\|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\|$  es, así, un factor que da cuenta de la deformación de áreas que se produce cuando “la parametrización *estira y lleva* la lámina de goma  $D$  hasta convertirla en la superficie  $S$ ”.





Veamos qué forma adopta el producto fundamental en el caso que la superficie  $S$  sea la gráfica de una función inyectiva  $z = f(x, y)$ .

En este caso se tiene

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, f(x, y)) \text{ con } (x, y) \in D = P_{xy}(S)$$

donde  $P_{xy}(S)$  es la proyección de la superficie sobre el plano  $xy$ .

Los vectores tangentes son

$$\vec{\sigma}'_x(x, y) = (1, 0, f'_x(x, y)) \text{ y}$$

$$\vec{\sigma}'_y(x, y) = (0, 1, f'_y(x, y)),$$

y entonces resultan

$$\vec{\sigma}'_x(x, y) \times \vec{\sigma}'_y(x, y) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x, y) \\ 0 & 1 & f'_y(x, y) \end{vmatrix} = (-f'_x(x, y), -f'_y(x, y), 1)$$

$$\|\vec{\sigma}'_x(x, y) \times \vec{\sigma}'_y(x, y)\| = \sqrt{[f'_x]^2 + [f'_y]^2 + 1}$$

Obsérvese que el vector normal es justamente normal al plano tangente a la gráfica de  $f$  (ya que  $f$  diferenciable)

Interesa también el siguiente concepto:



**Definición 10.3:** Diremos que una parametrización regular de una porción de superficie  $S$  es *suave* si el producto vectorial fundamental  $\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)$  resulta continuo en cada punto.

## Integrales de superficie de un campo escalar

Al igual que en el caso de las curvas, definiremos dos tipos de integrales de superficie:

1. Integral de superficie de campos escalares: permite calcular áreas de porciones de superficie, así como también masas y centros de masa de superficies alabeadas.
2. Integral de superficie de campos vectoriales: permite calcular flujo de campos vectoriales que atraviesan una superficie que se analizara posteriormente.

Supongamos que se tiene una superficie  $S$  con una parametrización suave  $\vec{\sigma}(u, v)$ .



Basándonos en el razonamiento geométrico que realizamos en el apartado anterior, la integral doble

$\iint_D \|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\| dudv$  evalúa el área de la porción de superficie  $S$ ,

donde  $D$  es el dominio de la parametrización de  $S$ . Intuitivamente la integral doble es una “suma”, sobre todo  $D$ , de los pequeños trozos de área elemental  $dudv$  multiplicados previamente por el factor de deformación  $\|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\|$ .

Indicaremos con  $\iint_S d\sigma$  este cálculo de área, es decir:

$$\text{Área}(S) = \iint_S d\sigma = \iint_D \|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\| dudv$$

Se puede demostrar que el resultado de esta integral no depende de la parametrización que se haya elegido para la superficie.

Si se desea calcular la masa de una chapa con la forma de la superficie  $S$  sabiendo que la densidad del material en cada punto es  $\delta(x, y, z)$ , bastará con calcular

$$M = \iint_S (\delta \circ \vec{\sigma}(u, v)) d\sigma = \iint_D \delta(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\| dudv$$

donde la densidad se ha evaluado en un punto genérico de la superficie, en función de los parámetros  $u$  y  $v$ . Las correspondientes coordenadas del centro de masa estarán dadas por:

$$x_{CM} = \frac{\iint_S x d\sigma}{\iint_S d\sigma} = \frac{\iint_D x(u, v) \delta(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\| dudv}{\iint_D \delta(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\| dudv}$$

$$y_{CM} = \frac{\iint_S y d\sigma}{\iint_S d\sigma} = \frac{\iint_D y(u, v) \delta(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\| dudv}{\iint_D \delta(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\| dudv}$$

$$z_{CM} = \frac{\iint_S z d\sigma}{\iint_S d\sigma} = \frac{\iint_D z(u, v) \delta(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\| dudv}{\iint_D \delta(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\| dudv}$$

donde tanto la densidad como las coordenadas deben evaluarse sobre la superficie  $S$ , en función de los parámetros  $u$  y  $v$ .

En el caso en que  $S$  sea la gráfica de una función inyectiva

$$z = f(x, y) \text{ con } (x, y) \in D = P_{xy}(S)$$

el área resultará:

$$\iint_S d\sigma = \iint_{P_{xy}(S)} \sqrt{[f'_x]^2 + [f'_y]^2 + 1} \, dxdy$$

Veamos algunos ejemplos...

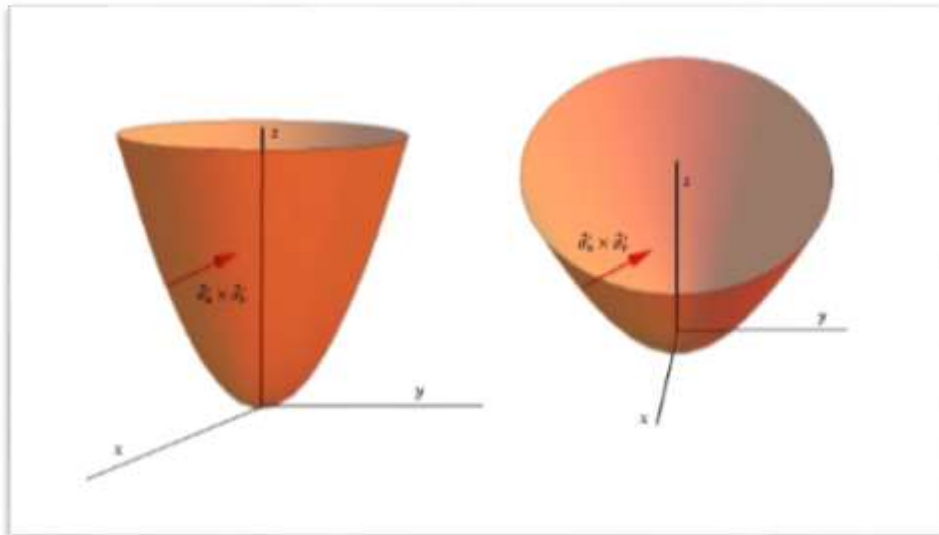


**Ejemplo 10.4:** Calculemos el área de la porción de paraboloide del ejemplo 10.2

Es  $\vec{\sigma}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2)$  con  $(u, v) \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$ , y por lo tanto

$$\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 2u \\ -u \sin(v) & u \cos(v) & 0 \end{vmatrix} = (-2u^2 \cos(v), -2u^2 \sin(v), u)$$

Observemos que la tercera componente de la normal es  $u \geq 0$ , por lo que el sentido del vector normal es hacia las  $z$  positivas, como se ve en la figura 10.9.



**Figura 10.9:** Vector normal a la cara interior del paraboloide.

El área es, entonces:

$$\begin{aligned} \iint_S d\sigma &= \iint_D \sqrt{4u^4 + u^2} du dv = \iint_D 2u \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}} du dv = \left( \int_0^2 2u \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}} du \right) \left( \int_0^{2\pi} dv \right) = \frac{4\pi}{3} \left( u^2 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \\ &= \frac{17\sqrt{17} - 1}{6} \pi \end{aligned}$$

Calculemos ahora la coordenada  $z$  del centro de masa, suponiendo que la densidad del material que constituye la chapa con forma de paraboloide es constante:

$$z_{CM} = \frac{\iint_S z \delta d\sigma}{\iint_S \delta d\sigma} = \frac{\iint_D \overbrace{z \delta(x,y,z)}^{\|\vec{\sigma}'_u(u,v) \times \vec{\sigma}'_v(u,v)\|} \overbrace{\delta_0}^{\delta_0} \underbrace{2u \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}}}_{\delta_0} du dv}{\iint_D \delta_0 2u \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}} du dv} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\delta_0(\int_0^2 u^3 \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}} du)(\int_0^{2\pi} dv)}{\delta_0(\int_0^2 2u \sqrt{u^2 + \frac{1}{4}} du)(\int_0^{2\pi} dv)} = \frac{\frac{2}{5}(u^2 + \frac{1}{4})^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(u^2 + \frac{1}{4})^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2}{\frac{2}{3}(u^2 + \frac{1}{4})^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2} = \\
 &= \frac{431\sqrt{17} + 1}{10(17\sqrt{17} - 1)} \cong 2.57
 \end{aligned}$$

 **Ejemplo 10.5:** Calculemos el área de una superficie esférica de radio  $a$  (ya sabemos que es  $4\pi a^2$ )

$$\vec{\sigma}(\theta, \varphi) = (a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), a \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), a \cos(\varphi)), (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}'_{\theta} \times \vec{\sigma}'_{\varphi} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & a \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) & 0 \\ a \cos(\varphi) \cos(\theta) & a \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & -a \operatorname{sen}(\varphi) \end{vmatrix} = \\
 &= (-a^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) \cos(\theta), -a^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), -a^2 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\vec{\sigma}'_{\theta}(\theta, \varphi) \times \vec{\sigma}'_{\varphi}(\theta, \varphi)\| &= \\
 &= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4(\varphi) \cos^2(\theta) + a^4 \operatorname{sen}^4(\varphi) \operatorname{sen}^2(\theta) + a^4 \operatorname{sen}^2(\varphi) \cos^2(\varphi)} = a^2 |\operatorname{sen}(\varphi)|
 \end{aligned}$$

El área es, entonces,

$$\iint_S d\sigma = \iint_D a^2 |\operatorname{sen}(\varphi)| d\theta d\varphi = a^2 \left( \int_0^{\pi} |\operatorname{sen}(\varphi)| d\varphi \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) = 2\pi a^2 \left( \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi \right) = 4\pi a^2$$

Si quisiéramos calcular la coordenada  $z$  del centro de masa, suponiendo que la densidad es constante, es:

$$\begin{aligned}
 z_{CM} &= \frac{\iint_S z \delta d\sigma}{\iint_S \delta d\sigma} = \frac{\iint_D \overbrace{(a \cos(\varphi))}^z \overbrace{\delta_0}^{\delta(x,y,z)} \overbrace{a^2 |\operatorname{sen}(\varphi)|}^{\|\vec{\sigma}'_{\theta}(\theta, \varphi) \times \vec{\sigma}'_{\varphi}(\theta, \varphi)\|} d\theta d\varphi}{\iint_D \delta_0 a^2 |\operatorname{sen}(\varphi)| d\theta d\varphi} = \\
 &= \frac{\delta_0 a^3 \left( \int_0^{\pi} \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right)}{\delta_0 4\pi a^2} = 0
 \end{aligned}$$

que, por simetría, sabemos que es correcta.

## Integrales de superficie de campos vectoriales

Definiremos seguidamente otro tipo de integral de superficie: la que corresponde a evaluar lo que llamaremos el “flujo” de un campo vectorial a través de una superficie  $S$  sobre la cual está definida ese campo.



Apelando a un modelo hidrodinámico, imaginemos que un campo vectorial continuo  $\vec{f}(x, y, z)$ , definido en un dominio de  $R^3$ , representa, en cada punto, la velocidad de un fluido que circula por el espacio, y que una superficie suave ubicada en ese dominio representa una membrana; se desea conocer la cantidad total de fluido que atraviesa esa membrana por unidad de tiempo. La cantidad efectiva de líquido que atraviesa la membrana será por efecto de la componente del campo normal a la superficie, ya que la componente tangencial sólo hace circular líquido al ras de la membrana y no hace que la atraviese.

El flujo total a través de la superficie estará dado por

$$\Phi_S(\vec{f}) = \iint_S \vec{f}|_S \cdot d\vec{\sigma}$$

Observar que el campo está evaluado sobre la superficie, y el elemento de área se toma en forma vectorial, para dotarlo de su dirección normal a la superficie; recordemos que el módulo de este elemento de área coincide con el área elemental sobre  $S$ , de modo que el producto escalar  $\vec{f}|_S \cdot d\vec{\sigma}$  está evaluando la cantidad de fluido que, en una unidad de tiempo, atraviesa la unidad elemental de área sobre  $S$ ; finalmente, el signo de integración indica que se suman todos esos flujos elementales.

Si la superficie  $S$  está definida por una parametrización suave  $\vec{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , con  $(u, v) \in D \subset R^2$ , el cálculo del flujo adquiere la forma:

$$\Phi_S(\vec{f}) = \iint_S \vec{f}|_S \cdot d\vec{\sigma} = \iint_S \vec{f}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)) du dv$$

Notemos que es posible seleccionar, con un simple cambio de signo, el sentido de la normal a la superficie que deseamos considerar.



**Ejemplo 10.6:** Se desea calcular el área de la porción de superficie definido por  $S: \begin{cases} z^2 = 1 - x^2 - y^2 \\ 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; z \geq 0 \end{cases}$  y el flujo del campo  $\vec{f}(x, y, z) = (x, z + y, 2y)$  a través de ella, considerando la normal con sentido hacia las  $z$  negativas.

Para calcular el área de la porción de superficie (que es un octavo de esfera de radio 1 y centro en el origen) hay que parametrizarla. Se podría hacer en coordenadas cartesianas o en esféricas.

En cartesianas, por ejemplo, la superficie se puede representar por:

$$\vec{\sigma}(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

por lo tanto el vector normal a la superficie (que contiene también el factor de deformación de áreas) es



$$d\vec{\sigma} = \vec{\sigma}'_x(x, y) \times \vec{\sigma}'_y(x, y) dxdy = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{vmatrix} dxdy =$$

$$= \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right) dxdy$$

Como la tercera componente es siempre positiva (vale siempre 1), señala hacia las  $z$  positivas, y como nos piden que lo haga hacia las  $z$  negativas, multiplicamos por  $-1$  el vector, para cambiarle el sentido: consideraremos

$$d\vec{\sigma} = \left( \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -1 \right) dxdy$$

Para calcular el área hay que integrar el módulo de este vector normal sobre la proyección del trozo de esfera sobre el plano  $xy$  (porque esas son las variables libres que elegimos) que es un cuarto de circunferencia de radio 1:

$$\iint_S d\sigma = \iint_{P_{xy}(S)} \|\vec{\sigma}'_x(x, y) \times \vec{\sigma}'_y(x, y)\| dxdy = \iint_{P_{xy}(S)} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}} 1 dxdy$$

$$\iint_S d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy \stackrel{\text{empleando coordenadas polares}}{\cong} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{\tilde{r}}{\sqrt{1-r^2}} dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left( -\sqrt{1-r^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Para calcular el flujo del campo  $\vec{f}(x, y, z) = (x, z + y, 2y)$  es necesario integrar el producto escalar del campo (evaluado sobre la superficie) por el vector normal, sobre la proyección de la porción de esfera sobre el plano  $xy$ .

Para evaluar el campo sobre la superficie, como la ecuación de  $S$  es  $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ , cada vez que aparece  $z$  lo reemplazamos por  $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$  (determinación positiva de la raíz porque se trata de una porción de la semiesfera superior).

Entonces es

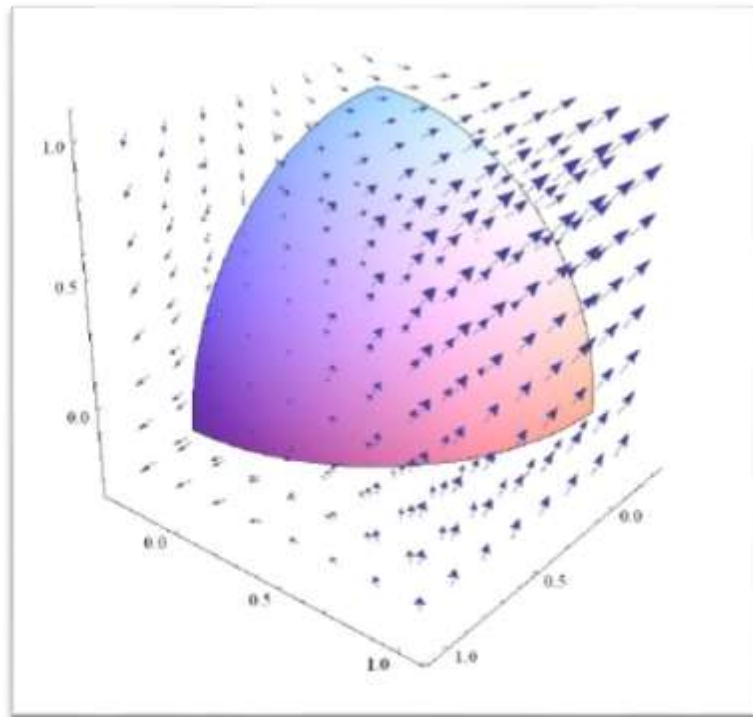
$$\Phi_S(\vec{f}) = \iint_S \vec{f}|_S \cdot d\vec{\sigma} =$$

$$= \iint_{P_{xy}(S)} \left( x, \sqrt{1-x^2-y^2} + y, 2y \right) \cdot \left( \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -1 \right) dxdy =$$



$$\begin{aligned}
 &= \iint_{P_{xy}(S)} \left( -\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - y - \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - 2y \right) dx dy = \\
 &= - \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left( \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 3y \right) dy \quad \begin{array}{l} \text{empleando} \\ \text{coordenadas} \\ \text{polares} \end{array} \quad \hat{=} \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \left( \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} + 3r \sin(\theta) \right) \overset{\text{jacobiano}}{\tilde{r}} dr = 1 - \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Que hayamos obtenido un flujo negativo significa que, en promedio, el líquido está pasando por  $S$  hacia las  $z$  positivas, y no hacia las negativas como supusimos. Esto se aprecia claramente en la figura 10.10.



**Figura 10.10:** El campo vectorial del ejemplo 10.6, fluyendo a través de la porción de esfera.

Si cambiáramos el sentido de la normal simplemente cambiaría el signo del flujo obtenido.