TEOREMA DE LA DIVERGENCIA O DE GAUSS

Nos permite relacionar una integral de superficie con una integral triple. Su expresión:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_Q div\vec{F} dV$$

El flujo de $\vec{F}$ a través de una superficie cerrada S es igual a la integral triple de la $div\vec{F}$ sobre el volumen Q que tiene por frontera a la superficie S.

Fundamental que la superficie sea cerrada y que las componentes del campo sean diferenciables sobre todo el sólido Q, ya que debemos integrar la divergencia del campo, la cual involucra las derivadas parciales.

Este teorema nos otorga otro camino para calcular la integral de superficie.

En el caso de tener que verificarlo, es necesario resolver ambas integrales y llegar al mismo resultado.

EJERCICIO 1) TP n°19 Aplicar el Teorema de Gauss para calcular el flujo de $\vec{F}$

b) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$ Q el cubo limitado por: $0 \le x \le 1\,; 0 \le y \le 1\,; 0 \le z \le 1$

Tenemos 6 caras planas que encierran un volumen cúbico. Y luego las componentes del campo son funciones polinómicas por lo tanto diferenciables.

$$\iiint_Q div\vec{F}\,dV$$

Primero caracterizamos al volumen: como es un cubo, coordenadas cartesianas son útiles, además, es el caso más sencillo de sólido, sus límites son los aportados por el ejercicio.

$$Q: \{(x,y,z) \in R^3 / 0 \le x \le 1\,; 0 \le y \le 1\,; 0 \le z \le 1\}$$

Luego calculamos la divergencia del campo:

$$div\vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$$

Finalmente:

$$\iiint_Q div\vec{F}dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 2(x+y+z)\,dxdydz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 2\left(\frac{x^2}{2}+xy+xz\right)\Bigg|_0^1 \, dydz \quad = \int_0^1\int_0^1 2\left(\frac{1}{2}+y+z\right)dydz$$

$$= \int_0^1 y+2\frac{y^2}{2}+2yz\Bigg|_0^1 \, dz \quad = \int_0^1 (1+1+2z)\; dz$$

$$= 2z+2\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^1 = 2+1 \;= 3$$

TEOREMA DE STOKES

Relaciona una integral sobre una curva cerrada con una integral de superficie:

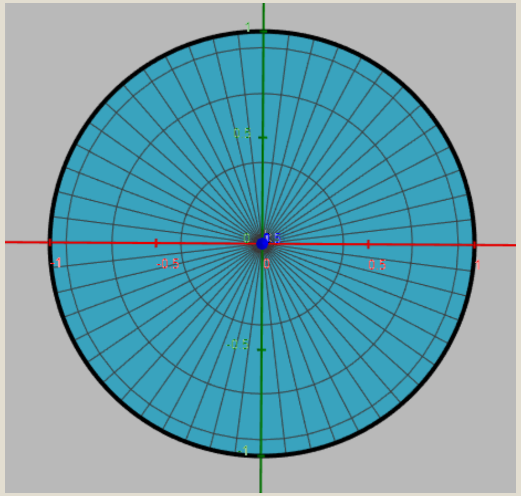
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} d\vec{S}$$

La integral de la componente tangencial del campo a lo largo de una curva cerrada es igual a la integral de flujo del rotacional del campo vectorial sobre la superficie que tiene como borde a la curva cerrada.

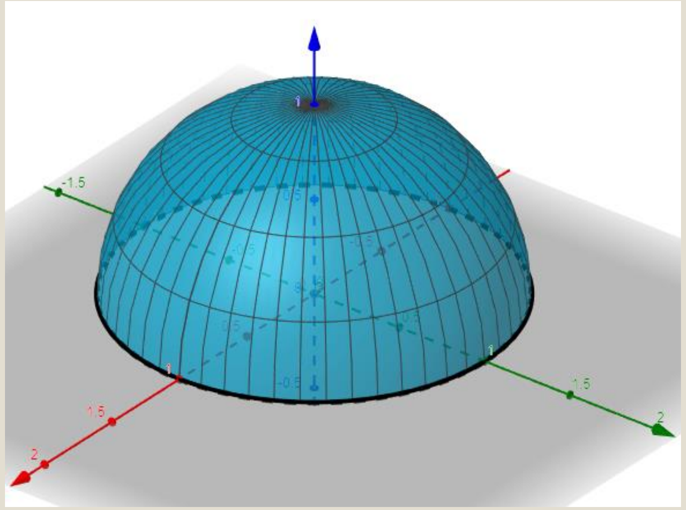
Debemos identificar la curva cerrada que es borde de la superficie y las componentes del campo deben ser diferenciables sobre la superficie ya que debemos integrar el rotacional, que involucra a las derivadas parciales.

Su expresión simbólica es idéntica a la del Teorema de Green, de hecho se lo considera una generalización del mismo.

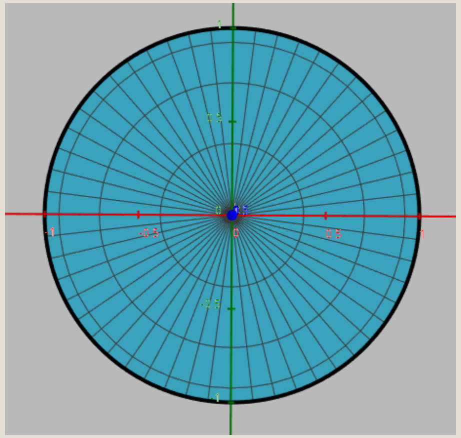
La diferencia es que el Teorema de Green involucra una curva plana que encierra una región en el plano, mientras que en el Teorema de Stokes la curva puede ser cualquier curva plana o espacial cerrada y podemos tener cualquier superficie que tenga como borde a la curva.



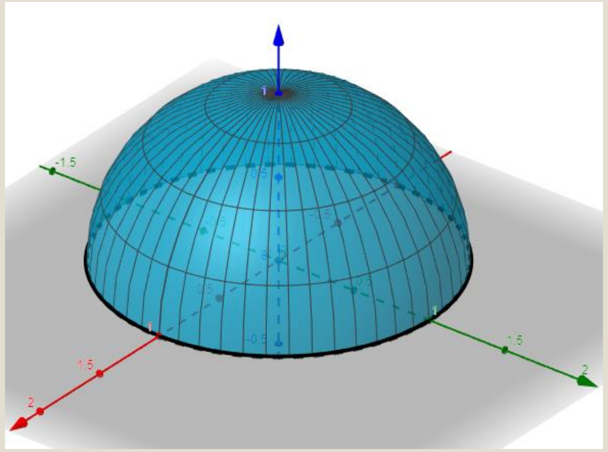
Teorema de Green.



Teorema de Stokes.



T. De Green.



T. De Stokes.

En ambas imágenes la curva negra es la misma, en Green estamos limitados a la región circular cerrada mientras que Stokes permite cualquier superficie que tenga como borde la circunferencia, como por ejemplo el casquete esférico de radio 1.

Si debemos verificar el teorema, hay que resolver ambas integrales y llegar al mismo resultado.

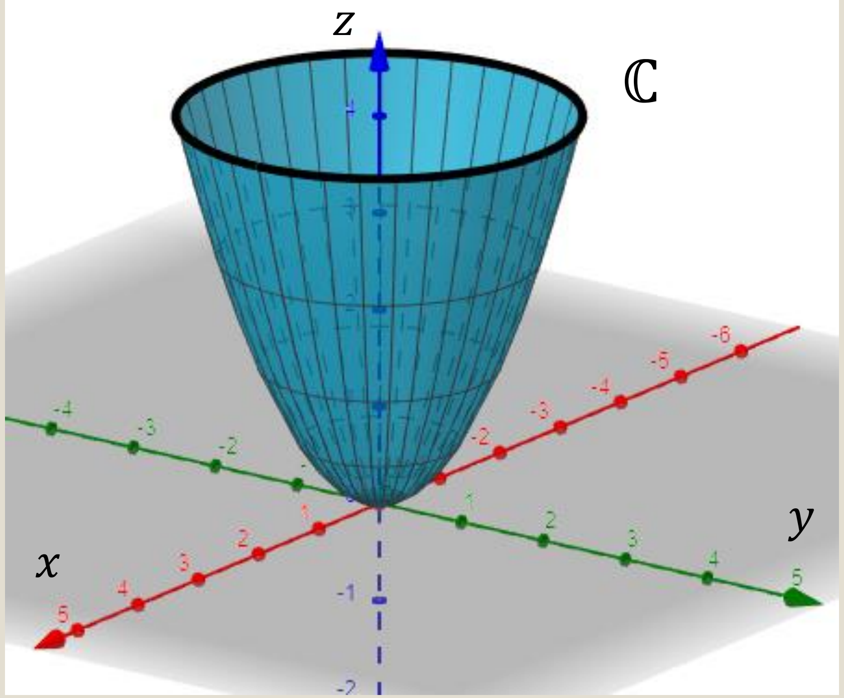
El vector normal en la integral de flujo siempre se toma el externo, pero luego en la integral curvilínea se debe recorrer la curva de forma tal que al aplicar la regla de la mano derecha, si cerramos en el sentido de recorrido, el pulgar apunte en el sentido del vector normal.

EJERCICIO 2) Aplicar el Teorema de Stokes para calcular $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

b) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{\imath} + (y^4 - x)\vec{\jmath} + z^2 seny\vec{k}$ Con $\vec{n}$ hacia arriba y $\mathbb{C}$: $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$

En este ejercicio nos indican el sentido del vector normal que se desea.

Grafiquemos el problema: Tenemos un paraboloide circular y un plano horizontal, la curva cerrada y borde de la superficie surge como intersección del plano y el paraboloide.



Deberíamos calcular la integral curvilínea sobre la curva negra, pero usando Stokes, hallaremos el resultado con la integral de flujo del rotacional.

Observamos que la curva es frontera tanto del paraboloide como del plano horizontal, pudiendo utilizar cualquiera de las superficies para el cálculo. Siendo el plano más sencillo, es el que utilizaremos.

Tenemos una superficie con proyección regular. Si bien se trata de un plano, la región de proyección es circular, por lo tanto, podemos asociarla con coord. cilíndricas:

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\,\mathrm{sen}\,v \\ z = 4 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{matrix} \qquad \vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\,\mathrm{sen}\,v\,\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{r}_u = \cos v\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,v\,\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_v = -u\,\mathrm{sen}\,v\,\vec{i} + u\cos v\,\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_u x \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \mathrm{sen}\,v & 0 \\ -u\,\mathrm{sen}\,v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + u\vec{k}$$

Como la componente *k* es positiva entonces el vector apunta hacia arriba.

Calculamos el rotacional del campo:

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} x \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & (y^4 - x) & z^2 seny \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(z^2 seny)}{\partial y} - \frac{\partial(y^4 - x)}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial(z^2 seny)}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial(y^4 - x)}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= z^2 \, cosy\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - 1\vec{k}$$

Ponemos el rotacional en términos de la parametrización:

$$rot\vec{F}(u,v) = (4)^2 \cos(usenv)\,\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - 1\vec{k} = \ 16\cos(usenv)\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - 1\vec{k}$$

Realizamos el producto escalar entre el vector normal y el rotacional:

$$rot\vec{F}(u,v) \cdot \vec{n} = (16\cos(usenv), 0, -1) \cdot (0,0,u) \ = -u$$

Por lo tanto:

$$\iint_S rot\vec{F} d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -ududv = \int_0^{2\pi} -\frac{u^2}{2}\Bigg|_0^2 \ dv \ = \int_0^{2\pi} -2\,dv \ \ \mathbf{= -4\pi}$$

Estudiemos que hubiese pasado si utilizábamos como superficie al paraboloide.

El procedimiento es prácticamente igual, pero z en lugar de ser constante será una función asociada con el paraboloide.

$$\begin{cases} x = ucosv \\ y = usenv \\ z = u^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{matrix} \qquad \vec{r}(u,v) = ucosv\vec{\imath} + usenv\vec{\jmath} + u^2\vec{k}$$

$$\vec{r}_u = cosv\vec{\imath} + senv\vec{\jmath} + 2u\vec{k}$$

$$\vec{r}_v = -usenv\vec{\imath} + ucosv\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_u x \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ cosv & senv & 2u \\ -usenv & ucosv & 0 \end{vmatrix} = -2u^2cosv\vec{\imath} - 2u^2senv\vec{\jmath} + u\vec{k}$$

Como la componente *k* es positiva entonces el vector apunta hacia arriba.

Calculamos el rotacional del campo: (Este paso no depende de la parametrización)

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla}x\vec{F} = z^2cosy\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - 1\vec{k}$$

Ponemos el rotacional en términos de la función vectorial:

$$rot\vec{F}(u,v) = (u^2)^2\cos(usenv)\,\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - 1\vec{k} = u^4\cos(usenv)\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - 1\vec{k}$$

Realizamos el producto escalar entre el vector normal y el rotacional:

$$rot\vec{F}(u,v)\cdot\vec{n} = (u^4\cos(usenv),0,-1)\cdot(-2u^2cosv,-2u^2senv,u)$$

$$rot\vec{F}(u,v)\cdot\vec{n} = -2u^6cosvcos(usenv) - u$$

Se habría agregado todo el término en rojo para integrar.

A modo de verificación se puede resolver la integral de línea; las ecuaciones paramétricas de la curva son: (Circunferencia radio 2 sobre altura 4.)

$$\mathbb{C}: \begin{cases} x = 2cos\theta \\ y = 2sen\theta \\ z = 4 \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad \begin{cases} dx = -2sen\theta \\ dy = 2cos\theta \\ dz = 0 \end{cases} \qquad \boxed{d\vec{r} = -2sen\theta\vec{\imath} + 2cos\theta\vec{\jmath} + 0\vec{k}}$$

Ponemos el campo en función del parámetro:

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{\imath} + (y^4 - x)\vec{\jmath} + z^2seny\vec{k}$$

$$\vec{F}(\theta) = 4\cos^2\theta\,\vec{\imath} + (16sen^4\theta - 2cos\theta)\vec{\jmath} + 16sen(2sen\theta)\vec{k}$$

Hacemos el producto $\vec{F} \cdot d\vec{r}$: $\quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = -8sen\theta\cos^2\theta + 32cos\theta sen^4\theta - 4\cos^2\theta$

Entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-8sen\theta\cos^2\theta + 32cos\theta sen^4\theta - 4\cos^2\theta)d\theta$$

Separando en tres integrales y resolviendo por método de sustitución se llega a:

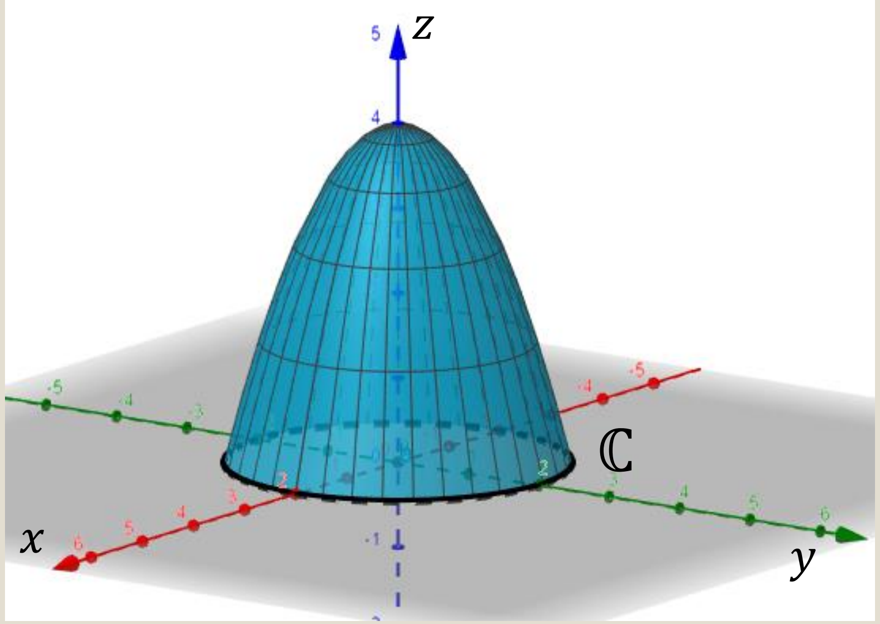
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \boldsymbol{-4\pi}$$

Se verifica el T. de Stokes.

EJERCICIO 3) Aplicar el Teorema de Stokes para calcular $\iint_S rot\vec{F}d\vec{S}$

a) $\vec{F}(x,y,z) = (zx, 2y^2, z^3)$ S: porción de $z = 4 - x^2 - y^2$ sobre el plano xy.

Grafiquemos:



En este caso habría que resolver la integral de flujo del rotacional sobre la porción del paraboloide por encima del plano xy, pero usando Stokes, podemos hallar el resultado utilizando la integral de línea del campo sobre la curva frontera del paraboloide.

La curva es una circunferencia de radio 2 que surge como intersección del paraboloide con el plano xy, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\mathbb{C}:\begin{cases} x = 2cos\theta \\ y = 2sen\theta \\ z = 0 \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad \begin{cases} dx = -2sen\theta \\ dy = 2cos\theta \\ dz = 0 \end{cases} \qquad \boxed{d\vec{r} = -2sen\theta\vec{\imath} + 2cos\theta\vec{\jmath} + 0\vec{k}}$$

Ponemos el campo en función del parámetro:

$$\vec{F}(x,y,z) = (zx, 2y^2, z^3) \longrightarrow \vec{F}(\theta) = (0, 8sen^2\theta, 0)$$

Hacemos el producto $\vec{F} \cdot d\vec{r}$:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (0, 8sen^2\theta, 0) \cdot \left(-2sen\theta\vec{\imath} + 2cos\theta\vec{\jmath} + 0\vec{k}\right) = 16cos\theta sen^2\theta$$

Entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 16cos\theta sen^2\theta d\theta$$

Sustitución: $\begin{cases} u = sen\theta \\ du = cos\theta d\theta \end{cases}$

$$\int_0^{2\pi} 16cos\theta sen^2\theta d\theta = \frac{16}{3} sen^3\theta\Big|_0^{2\pi} = \mathbf{0}$$

Se propone resolver la integral de flujo del rotor para verificar el Teorema.