Campos Vectoriales - 1° Parte

Campos Vectoriales

U. T. N°11. Campos Vectoriales – Primera parte:

- Campos Vectoriales.
- Rotacional de un campo vectorial.
- Divergencia de un campo vectorial.
- Integrales de línea de funciones escalares y vectoriales.
- Teoremas de evaluación para la Integral de Línea.

Campos Vectoriales

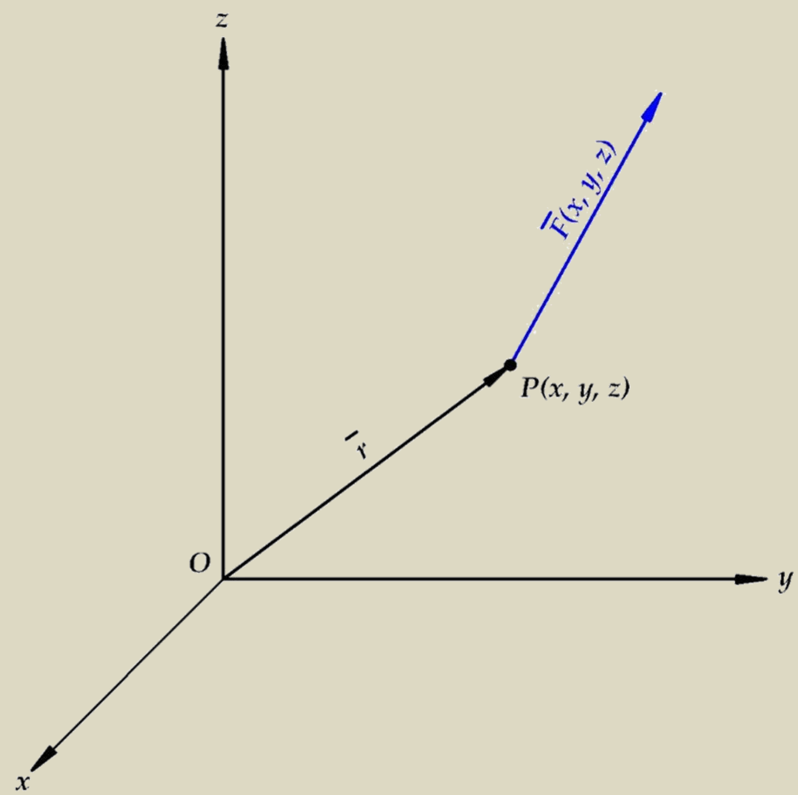
Campos Vectoriales.

Sea $D \subset R^3$. Un campo vectorial en tres dimensiones, es una función vectorial $\vec{F}$ que asigna a cada punto $P(x, y, z) \in D$ un único vector tridimensional $\vec{F}(x, y, z) \in R^3$.

Se supone la existencia de un sistema de coordenadas, de modo tal que la función vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ representativa del campo vectorial, se puede escribir como

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\hat{\imath} + N(x, y, z)\hat{\jmath} + P(x, y, z)\hat{k}$$

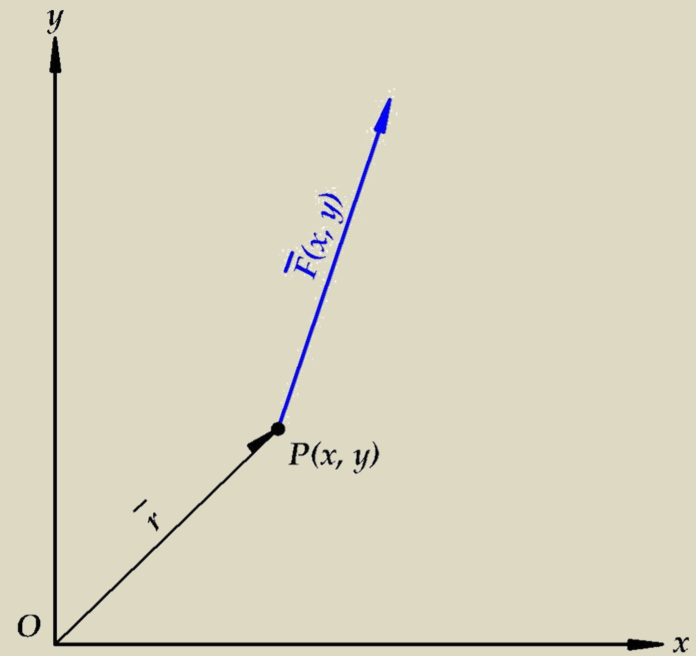
donde $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ y $P(x, y, z)$ son funciones escalares de tres variables, las cuales son las componentes del campo vectorial, definidas en D.



Campos Vectoriales

Análogamente, se puede definir un campo vectorial en dos dimensiones, cuya función vectorial $\vec{F}$ se puede escribir como

$$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\hat{\imath} + N(x,y)\hat{\jmath}$$



donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones escalares de dos variables, las cuales son las componentes del campo vectorial, definidas en D.

Campo vectorial estacionario

Un campo vectorial tridimensional $\vec{F}(x,y,z)$ se denomina estacionario si las funciones escalares componentes $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ y $P(x,y,z)$ son independientes del tiempo.

Campos Vectoriales

Campo vectorial de variación inversa con el cuadrado de la distancia

Sea $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ el vector posición del punto $P(x, y, z)$. Se dice que el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo de variación inversa con $\|\vec{r}\|^2$ si:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\vec{r}\|^2}\hat{u} \quad con \quad \begin{cases} c = cte. \\ \hat{u} \equiv \hat{r} \end{cases}$$

<u>*Ejemplo 1.*</u> *Campos vectoriales de variación inversa con el cuadrado de la distancia*

❖ *Campo gravitacional terrestre*

$$\vec{F}(x, y, z) = -G\frac{M \cdot m}{\|\vec{r}\|^2}\hat{r}$$

❖ *Campo Eléctrico*

$$\vec{F}(x, y, z) = c\frac{Q \cdot q}{\|\vec{r}\|^2}\hat{r}$$

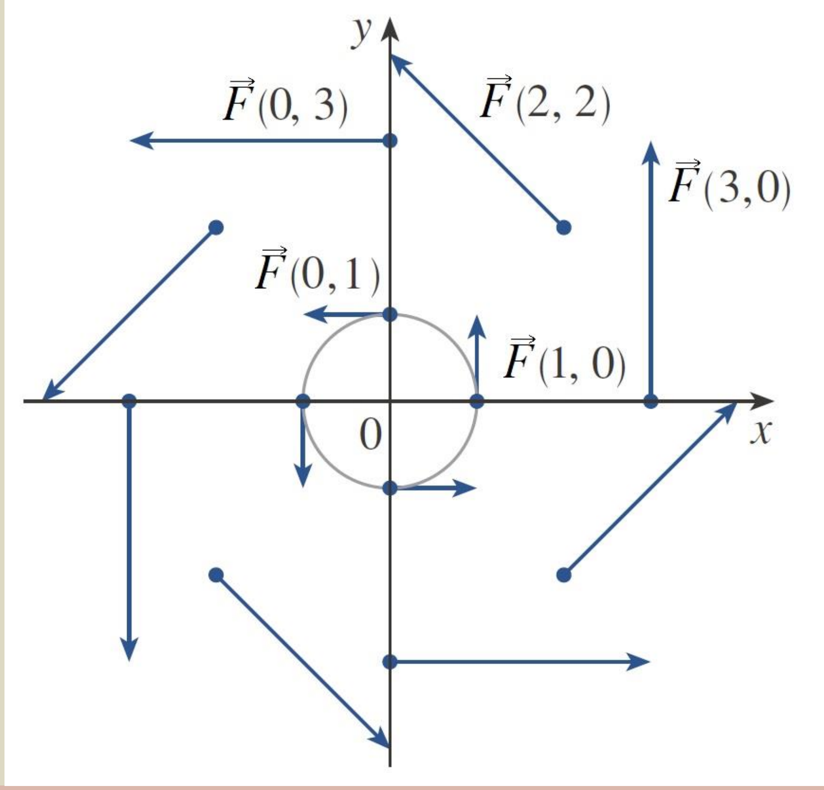
Campos Vectoriales

Ejemplo 2. Representar gráficamente el campo vectorial bidimensional dado

$$\vec{F}(x,y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} M(x,y) = -y \\ N(x,y) = x \end{cases}$$

Para la rep. gráfica de $\vec{F}(x,y)$, se debe generar una tabla de valores indicando los puntos (x,y) adoptados (aleatoriamente) y los vectores resultantes del $\vec{F}(x,y)$, para ser graficados conjuntamente en un sistema cartesiano de ejes xy.

(x,y)	$\vec{F}(x,y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$	(x,y)	$\vec{F}(x,y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$
$(1,0)$	$0\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$	$(-1,0)$	$0\hat{\imath} - 1\hat{\jmath}$
$(2,2)$	$-2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$	$(-2,-2)$	$2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$
$(3,0)$	$0\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$	$(-3,0)$	$0\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$
$(0,1)$	$-1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$	$(0,-1)$	$1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$
$(-2,2)$	$-2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$	$(2,-2)$	$2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$
$(0,3)$	$-3\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$	$(0,-3)$	$3\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$



Campos Vectoriales

Rotacional de un campo vectorial

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial dado por $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\hat{\imath} + N(x,y,z)\hat{\jmath} + P(x,y,z)\hat{k}$, donde las funciones componentes $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ y $P(x,y,z)$ tienen derivadas parciales.

El operador vectorial $\vec{\nabla}$ (Nabla) es $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

Se aclara que las componentes del operador $\vec{\nabla}$ (Nabla), son las ***derivadas parciales*** que deben aplicarse a una dada función, la cual puede ser de dos o tres variables independientes.

El rotacional de $\vec{F}(x,y,z)$ es la ***función vectorial***

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M(x,y,z) & N(x,y,z) & P(x,y,z) \end{vmatrix}$$

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Campos Vectoriales

Divergencia de un campo vectorial

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial dado por $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\hat{\imath} + N(x,y,z)\hat{\jmath} + P(x,y,z)\hat{k}$ donde las funciones componentes $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ y $P(x,y,z)$ tienen derivadas parciales.

La divergencia de $\vec{F}(x,y,z)$ es la ***función escalar***

$$div\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

El símbolo "$div\vec{F}$" se lee "divergencia de $\vec{F}$". La $div\vec{F}$ tiene la misma interpretación física en tres y dos dimensiones.

Campos Vectoriales

<u>Ejemplo 3.</u> *Encontrar el rotacional y la divergencia para el campo vectorial dado:*

$$\vec{F}(x,y,z) = \overbrace{(4xy^2z)}^{M(x,y,z)}\hat{\imath} + \overbrace{(x^2cosz)}^{N(x,y,z)}\hat{\jmath} + \overbrace{(ye^{2z})}^{P(x,y,z)}\hat{k}$$

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^{2z} \\ \dfrac{\partial N}{\partial z} = -x^2senz \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial z} = 4xy^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xcosz \\ \dfrac{\partial M}{\partial y} = 8xyz \end{cases}$$

$$\boxed{rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = (e^{2z} + x^2senz)\hat{\imath} - (0 - 4xy^2)\hat{\jmath} + (2xcosz - 8xyz)\hat{k}}$$

$$div\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 4y^2z \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2ye^{2z}$$

$$\boxed{div\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 4y^2z + 2ye^{2z}}$$

Campos Vectoriales

Integrales de línea o curvilíneas

Antes de definir formalmente las integrales de línea $\int_C f(x,y)ds$, $\int_C f(x,y)dx$ y $\int_C f(x,y)dy$, daremos algunas consideraciones sobre la curva C y la función $f(x,y)$:

1. Una curva plana C es regular si admite una parametrización

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b$$

   tal que $g'(t)$ y $h'(t)$ son continuas y no simultáneamente nulas en el intervalo cerrado $[a,b]$. La orientación o sentido positivo de recorrido de la curva C coincide con el movimiento de un punto sobre la curva cuando el parámetro t aumenta.

2. Una curva plana C es regular parte por parte si $[a,b]$ puede dividirse en subintervalos cerrados de modo tal que C sea regular en cada subintervalo.

3. Sea $f(x,y)$ una función de dos variables continua en una región D, que contiene una curva C regular con parametrización

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b$$

Campos Vectoriales

En el proceso de definición de las tres integrales de línea $\int_C f(x,y)ds$, $\int_C f(x,y)dx$ y $\int_C f(x,y)dy$, comenzamos particionando el intervalo del parámetro $[a,b]$, de modo tal que

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_{k-1} \leq t_k \ldots \leq t_n = b$$

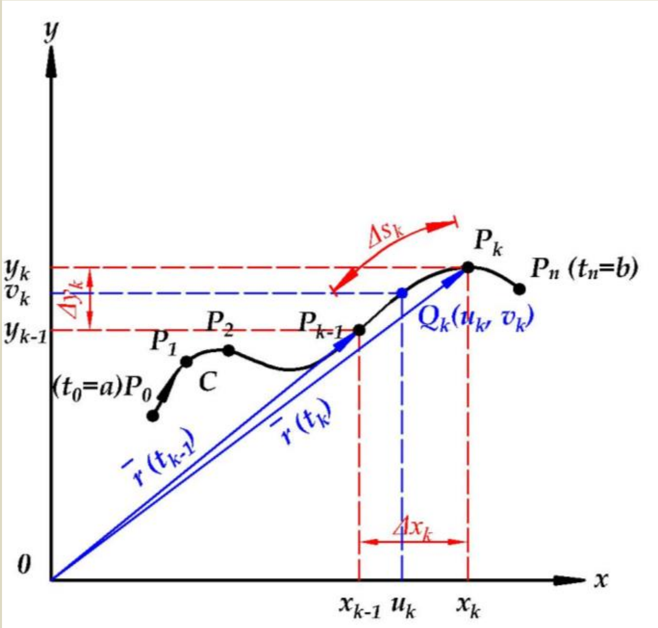
Para cada valor de t, mediante las ec. paramétricas, determinamos un punto sobre la curva C.

La norma de la partición $\|\Delta\|$, coincide con la longitud del mayor subintervalo $[t_{k-1}; t_k]$.

Sea Q(u_k, v_k), un punto del subarco $\overset{\frown}{P_{k-1}P_k}$, correspondiente a algún valor del parámetro t en $[t_{k-1}; t_k]$.

Consideremos ahora las tres sumas de Riemann

$$\sum_k f(u_k, v_k) \cdot \Delta s_k \,;\, \sum_k f(u_k, v_k) \cdot \Delta x_k \,;\, \sum_k f(u_k, v_k) \cdot \Delta y_k$$



Campos Vectoriales

Por último, si ***los límites de la sumas de Riemann existen***, cuando $\|\Delta\| \to 0$, son entonces las integrales de línea de f sobre C con respecto a s, x e y, respectivamente, y se denotan como

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k) \cdot \Delta s_k \equiv \int_C f(x,y)ds$$

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k) \cdot \Delta x_k \equiv \int_C f(x,y)dx$$

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k) \cdot \Delta y_k \equiv \int_C f(x,y)dy$$

Si $f(x,y)$ es una función continúa en la región D, que contiene a C, los límites anteriores existen y son los mismos para todas las parametrizaciones de la curva, siempre que se respete el sentido de recorrido. Además, las integrales se pueden evaluar sustituyendo las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt \\ y = h(t) \Rightarrow dy = h'(t)dt \end{cases} \qquad \begin{cases} ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ ds = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}dt \end{cases}$$

Campos Vectoriales

Teoremas de evaluación para integrales de línea

Si una curva regular C está dada por $x = g(t)$, $y = h(t)$; con $a \le t \le b$, y $f(x,y)$ es una función continua en la región D que contiene a C, entonces

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f[g(t),h(t)] \cdot \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} \cdot dt$$

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f[g(t),h(t)] \cdot g'(t) \cdot dt$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f[g(t),h(t)] \cdot h'(t) \cdot dt$$

Estas definiciones y teoremas se generalizan a tres variables cuando $f(x,y,z)$ es una función escalar y C una curva en el espacio.

Si la curva C es la representación gráfica de una función $y = F(x)$ con $a \le x \le b$

$$C : \begin{cases} x = t & \Rightarrow dx = dt \\ y = F(t) & \Rightarrow dy = F'(t)dt = F'(x)dx \end{cases}$$

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f[t,F(t)] \cdot \sqrt{1 + [F'(t)]^2} \cdot dt = \int_a^b f[x,F(x)] \cdot \sqrt{1 + [F'(x)]^2} \cdot dx$$

Campos Vectoriales

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f[t,F(t)]\cdot dt = \int_a^b f[x,F(x)]\cdot dx$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f[t,F(t)]\cdot F\,'(t)\cdot dt = \int_a^b f[x,F(x)]\cdot F\,'(x)\cdot dx$$

<u>Aditividad</u>

Las integrales de línea tienen una propiedad importante, la de ser aditivas. Si la curva C está formada por la unión de un número finito de curvas regulares $C: C_1 \cup C_2 \cup, \dots, \cup C_n$, entonces la integral de línea sobre la curva C de la función $f(x,y)$ es igual a la suma de las integrales de línea sobre las curvas que la conforman.

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)ds$$

Campos Vectoriales

Ejemplo 4. Calcular la integral de línea sobre la curva regular C, conformada por los segmentos de recta C_1 y C_2, para la función dada

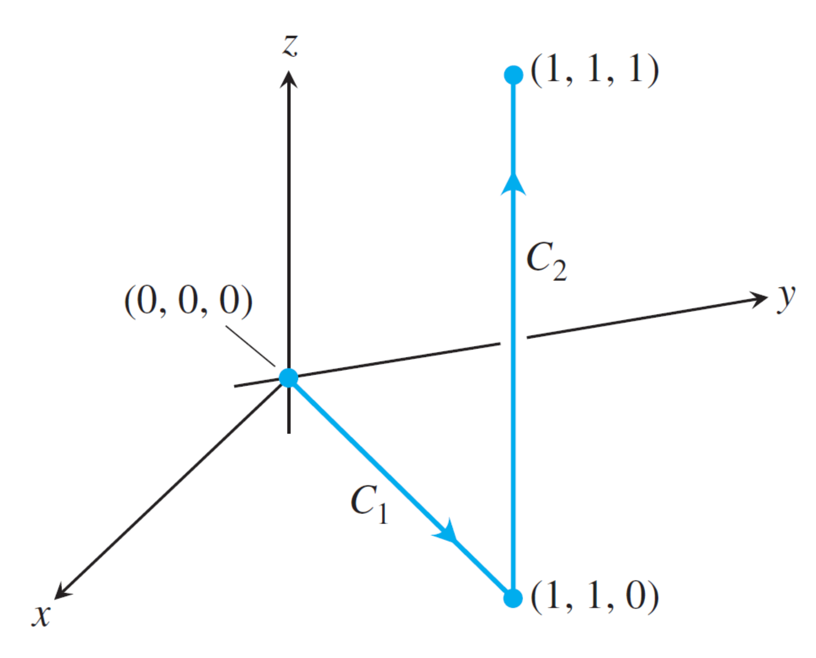
$$f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$$

Solución. Primero parametrizamos las curvas C_1 y C_2

$$C: C_1 \cup C_2$$

$$C_1: \begin{cases} x = t \Rightarrow dx = 1dt \\ y = t \Rightarrow dy = 1dt \\ z = 0 \Rightarrow dz = 0dt \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

$$C_2: \begin{cases} x = 1 \Rightarrow dx = 0dt \\ y = 1 \Rightarrow dy = 0dt \\ z = t \Rightarrow dz = 1dt \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$



Campos Vectoriales

Luego, se aplica la propiedad de aditividad para obtener el resultado de la integral de línea

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{C_1} f(x,y,z)ds + \int_{C_2} f(x,y,z)ds$$

Recordando la función $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ *y las parametrizaciones de* C_1 *y* C_2 *se tiene*

$$C_1: \begin{cases} x = t \Rightarrow dx = 1dt \\ y = t \Rightarrow dy = 1dt \quad 0 \leq t \leq 1 \\ z = 0 \Rightarrow dz = 0dt \end{cases} \qquad C_2: \begin{cases} x = 1 \Rightarrow dx = 0dt \\ y = 1 \Rightarrow dy = 0dt \quad 0 \leq t \leq 1 \\ z = t \Rightarrow dz = 1dt \end{cases}$$

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (0)^2}dt + \int_0^1 f(1,1,t)\sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2}dt$$

$$= \int_0^1 (t - 3t^2)\sqrt{2}dt + \int_0^1 (t-2)\sqrt{(1)^2}dt$$

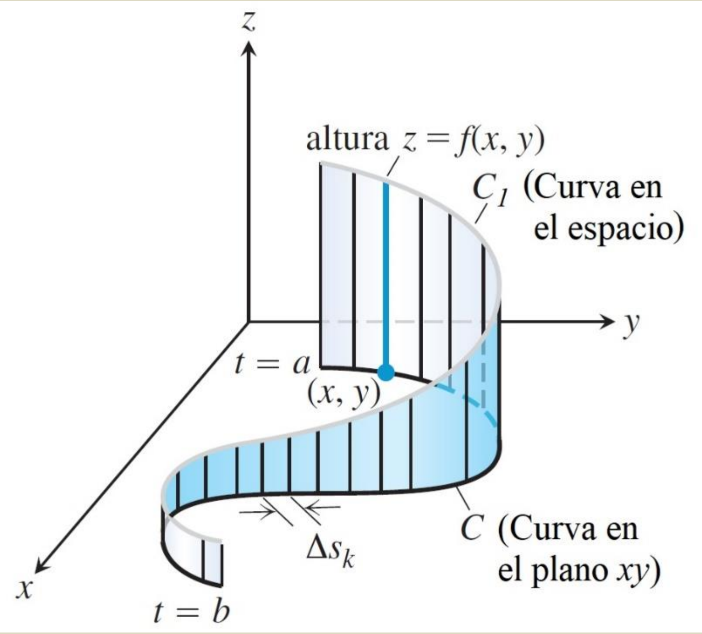
$$= \sqrt{2}\left(\frac{t^2}{2} - t^3\right)\bigg|_0^1 + \left(\frac{t^2}{2} - 2t\right)\bigg|_0^1 = \sqrt{2}\left(\frac{1^2}{2} - 1^3\right) + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1$$

$$\int_C f(x,y,z)ds = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}$$

Campos Vectoriales

<u>Interpretación geométrica</u>

Existe una interpretación geométrica de las integrales de línea en el plano. Si C es una curva regular en el plano xy cuyas ec. paramétricas están dadas por $x = g(t)$, $y = h(t)$; $a \leq t \leq b$, se genera una superficie cilíndrica al mover una recta a lo largo de C ortogonal al plano xy, manteniendo la recta paralela al eje z.



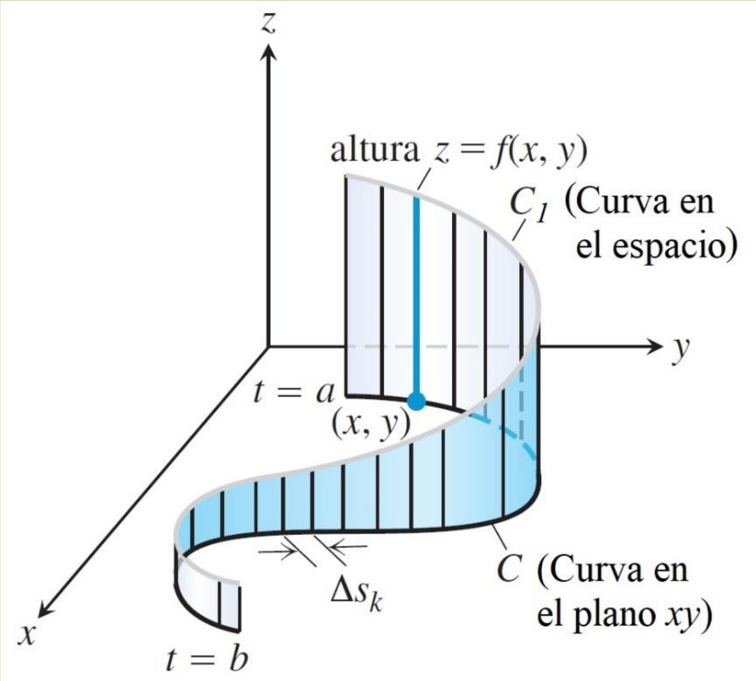
Si $z = f(x, y)$ es una función continua y positiva, sobre una región en el plano que contiene a la curva C, entonces la gráfica de f es una superficie que se encuentra por encima del plano xy.

La superficie cilíndrica al intersectarse con la gráfica de $f(x, y)$, genera una curva en el espacio C_1(de color gris) que se encuentra por arriba del plano xy, cuya proyección acompaña los cambios de curvatura de C.

Campos Vectoriales

La superficie cilíndrica está limitada superiormente por la gráfica de $f(x, y)$ e inferiormente por el plano xy. Además, la superficie cilíndrica tiene por directriz a la curva C y por generatriz a una recta colineal con el eje z, la cual es ortogonal al plano xy.

En cualquier punto (x, y) perteneciente a la curva C, el valor de la altura para la superficie cilíndrica, se determina mediante la expresión de $z = f(x, y)$.



<u>Aplicaciones de integrales de línea</u>

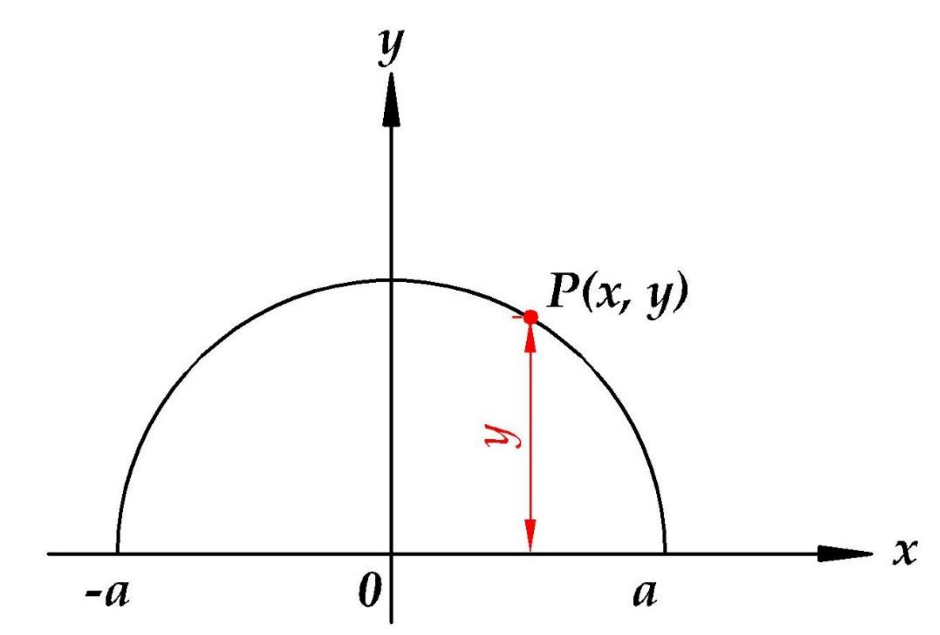
$$m = \int_C \delta(x, y)\,ds$$

m: masa de un alambre

$\delta(x, y)$: densidad por unidad de longitud

Campos Vectoriales

Ejemplo 5. *Determinar la masa de un alambre con forma de semicircunferencia cuyo radio es $r = a$, si la masa por unidad de longitud (densidad), en un punto P perteneciente al alambre, es proporcional a la distancia desde el punto P al eje x.*



Solución. *Planteamos la función densidad*

$$\delta(x,y) = k \cdot y$$

Luego, parametrizamos la semicircunferencia

$$C: \begin{cases} x = a \cdot \cos(t) \Rightarrow dx = -a \cdot sen(t)dt \\ y = a \cdot sen(t) \Rightarrow dy = a \cdot \cos(t)\, dt \\ \qquad 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Finalmente, planteamos y resolvemos la integral de línea para obtener la masa m

$$m = \int_C \delta(x,y)ds = \int_C ky \cdot ds = \int_0^{\pi} ka \cdot sen(t) \cdot \sqrt{\underbrace{[a \cdot \cos(t)]^2 + [a \cdot sen(t)]^2}_{a^2}} \cdot dt$$

$$m = ka^2 \int_0^{\pi} sen(t) \cdot dt = ka^2 \,(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = ka^2(-\cos\pi + \cos 0) = 2ka^2$$

Campos Vectoriales

Integrales de línea de campos vectoriales

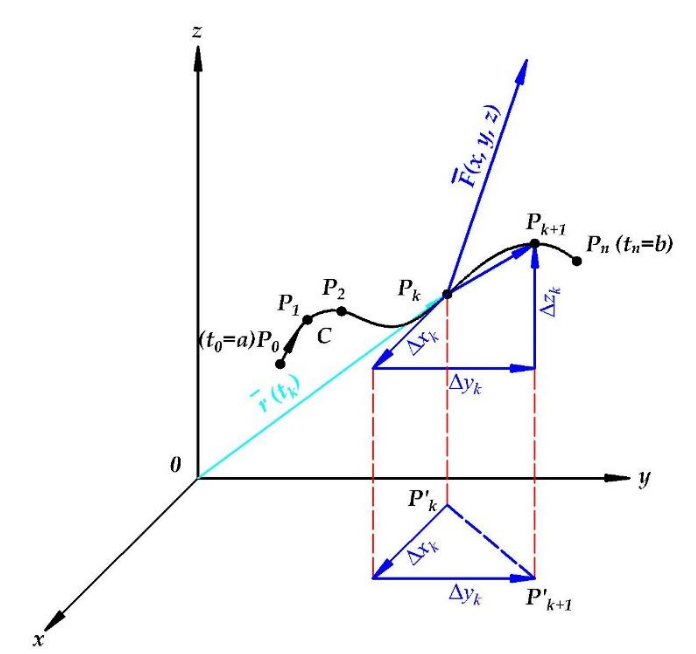
Una de las aplicaciones más importante de las integrales de línea en la física, es determinar el trabajo W efectuado por un campo de fuerza $\vec{F}$, a lo largo de la curva C.

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\hat{\imath} + N(x,y,z)\hat{\jmath} + P(x,y,z)\hat{k}$$

donde M, N y P son funciones continuas, que actúa sobre una región D del espacio, que contiene a una curva regular C cuya parametrización está dada por

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \quad \text{con } a \le t \le b \\ z = k(t) \end{cases}$$



Se consideran, para establecer la definición de trabajo, sólo los puntos sobre la curva C.

Se divide C mediante los puntos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, tales que P_k tiene coordenadas (x_k, y_k, z_k). Si la norma $\|\Delta\|$ es pequeña, entonces P_k es próximo a P_{k+1} para cada k.

Campos Vectoriales

Por lo tanto, el trabajo realizado por $\vec{F}(x,y,z)$ a lo largo del subarco $\widehat{P_k P_{k+1}}$ se puede estimar por el trabajo Δw_k realizado por la fuerza constante $\vec{F}(x_k,y_k,z_k)$ cuando su punto de aplicación recorre $\overline{P_k P_{k+1}}$, teniendo en cuenta que

$$\overline{P_k P_{k+1}} = \Delta x_k \hat{\imath} + \Delta y_k \hat{\jmath} + \Delta z_k \hat{k}$$
$$\Delta w_k = \vec{F}(x_k,y_k,z_k) \cdot \left(\Delta x_k \hat{\imath} + \Delta y_k \hat{\jmath} + \Delta z_k \hat{k}\right)$$
$$\Delta w_k = M(x_k,y_k,z_k) \cdot \Delta x_k + N(x_k,y_k,z_k) \cdot \Delta y_k + P(x_k,y_k,z_k) \cdot \Delta z_k$$
$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k \Delta w_k = \int_C M(x,y,z) \cdot dx + N(x,y,z) \cdot dy + P(x,y,z) \cdot dz$$

Recordando la ecuación vectorial del ***vector posición*** $\vec{r}$ tenemos

$$\begin{cases} \vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \\ d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \quad W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Además, podemos escribir al $d\vec{r} = \hat{T} \cdot ds$, donde $\hat{T}$ es el ***vector tangente unitario***, entonces al trabajo efectuado por un campo de fuerza $\vec{F}(x,y,z)$ a lo largo de la curva C, lo podemos expresar como

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \hat{T} \cdot ds$$

Bibliografía

❖ Cálculo con Geometría Analítica. Autor. E. Swokowski.
❖ Cálculo de Varias Variables. Autor. J. Stewart.

¡Muchas gracias!

¿Consultas?