PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES

Hasta el momento trabajamos con funciones vectoriales de una sola variable:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

El parámetro t es la variable y las componentes son las ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio. De forma que una función vectorial nos permite parametrizar curvas para luego poder evaluar integrales sobre ellas.

Si subimos un escalón, ahora tendremos funciones vectoriales de dos variables:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{\imath} + y(u,v)\vec{\jmath} + z(u,v)\vec{k}$$

Tenemos dos parámetros u y v; y las funciones escalares componente $x(u,v)$, $y(u,v)$ y $z(u,v)$ son las ecuaciones paramétricas de una superficie en el espacio.

Podemos así parametrizar superficies, definiendo la correspondiente función vectorial, para luego evaluar integrales sobre ellas.

SUPERFICIE CON PROYECCIÓN REGULAR

Son superficies que se obtienen como gráfica de una función de dos variables $z = f(x, y)$.

La ventaja de estos casos es que podemos utilizar las variables independientes (x, y) como parámetros simplificando el proceso de parametrización, el cual sería:

$$\begin{cases} x \\ y \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas de la superficie.

Los intervalos dependen de la región en el plano xy.

Función vectorial asociada:

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + f(x, y)\vec{k}$$

De igual manera podemos utilizar las expresiones de coordenadas cilíndricas y esféricas:

CILÍNDRICAS:

$$\begin{cases} x = acos\theta \\ y = asen\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \vec{r}(z,\theta) = acos\theta\vec{\imath} + asen\theta\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Cilindro circular recto de radio a.

ESFÉRICAS:

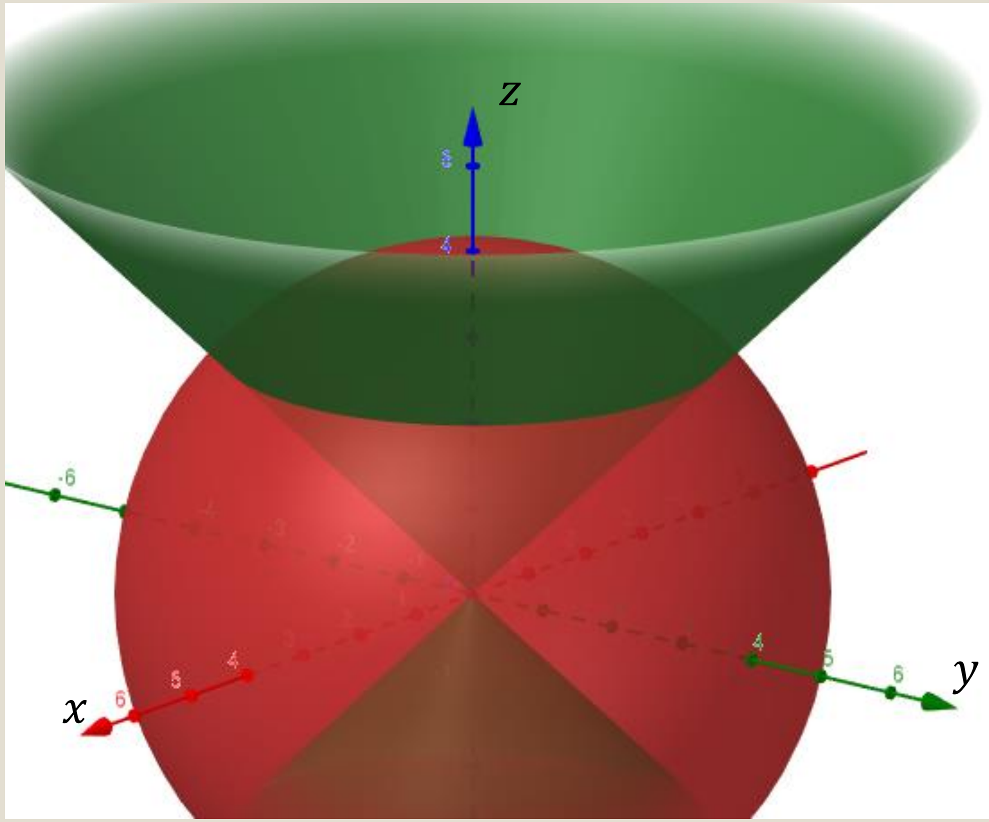
$$\begin{cases} x = asen\varphi cos\theta \\ y = asen\varphi sen\theta \\ z = acos\varphi \end{cases} \qquad \vec{r}(\theta,\varphi) = asen\varphi cos\theta\vec{\imath} + asen\varphi sen\theta\vec{\jmath} + acos\varphi\vec{k}$$

Esfera radio a.

EJERCICIO 1) Parametrizar las siguientes superficies:

d) Porción de esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ en el interior del cono $x^2 + y^2 = z^2$

Tenemos una esfera centrada en el origen de radio 4 y un cono circular recto de eje z.



El ejercicio nos indica parametrizar la porción del casquete esférico que se encuentra en el interior del cono.

Como se trata de una esfera, podemos utilizar las coordenadas esféricas para hacer el proceso de parametrización. Recordamos que la esfera es de radio 4:

$$\begin{cases} x = 4sen\varphi cos\theta \\ y = 4sen\varphi sen\theta \\ z = 4cos\varphi \end{cases}$$

Para completar la parametrización resta definir los intervalos de cada parámetro para que las ecuaciones representen solo la porción de superficie deseada.

θ: Es el ángulo sobre el plano horizontal. Si proyectáramos la porción de casquete sobre el piso, nos resultaría en una circunferencia completa, es decir que el ángulo da toda una vuelta. Lo que debemos pensar es que consideramos la superficie a lo largo de una revolución.

φ: El ángulo de inclinación respecto del eje z. Como el eje pertenece a la porción de superficie, el ángulo iniciará en 0 y luego se inclinará hasta limitar con el cono. Como en el cono todas las variables tienen el mismo coeficiente su inclinación es a 45°.

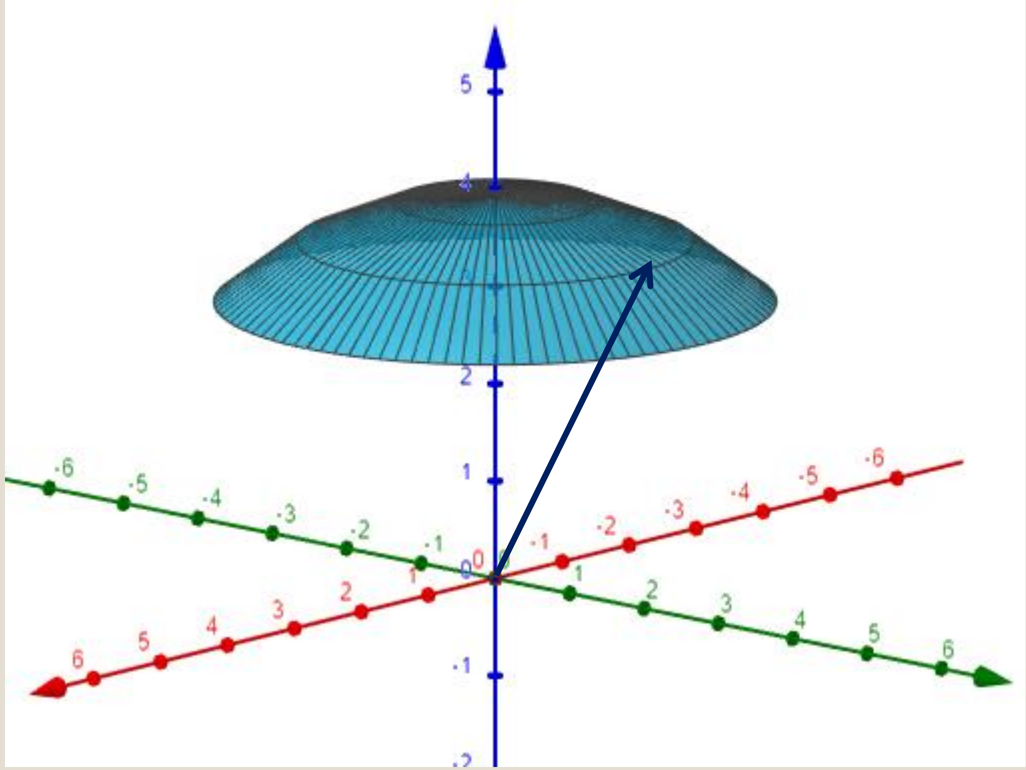
Con este análisis terminamos de definir los intervalos para completar la parametrización.

$$\begin{cases} x = 4sen\varphi cos\theta \\ y = 4sen\varphi sen\theta \\ z = 4cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} \end{matrix}$$

La función vectorial asociada:

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = 4sen\varphi cos\theta\vec{\imath} + 4sen\varphi sen\theta\vec{\jmath} + 4cos\varphi\vec{k}$$

Si en Geogebra usamos el comando «Superficie» y colocamos las ecuaciones paramétricas recién definidas, el software graficará la superficie que el ejercicio nos indica.



Al igual que ocurría en curvas, la función vectorial inicia desde el origen e irá recorriendo todos los puntos de la superficie a medida que los parámetros varían.

EJERCICIO 2) Identificar y graficar la superficie.

c) $\vec{r}(u,v) = v\cos u\vec{\imath} + v\,sen\,u\vec{\jmath} + v^2\vec{k}$ Con $\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{6}$; $0 \leq u \leq 2\pi$

Para identificar la superficie el proceso es similar a identificar curvas, debemos hallar relaciones entre x, y, z eliminando los parámetros.

Extraemos las ecuaciones paramétricas de la función vectorial:

$$\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\,sen\,u \\ z = v^2 \end{cases} \longrightarrow$$

Observando estas expresiones, son análogas a las coordenadas polares, pero en lugar de r y θ, tenemos los parámetros u y v.

Podemos elevar al cuadrado y sumar:

$$x^2 + y^2 = v^2\cos^2 u + v^2 sen^2 u \longrightarrow x^2 + y^2 = v^2$$

Pero si observamos la última expresión para z:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = v^2 \\ z = v^2 \end{cases} \longrightarrow x^2 + y^2 = z$$

De esta forma hallamos la relación entre coordenadas.

La expresión corresponde con la ecuación de un paraboloide circular de eje z, por lo tanto esa es la superficie representada por la función vectorial.

Sin embargo, ahora debemos graficar, y la porción de paraboloide que grafiquemos dependerá de los intervalos definidos en los parámetros.

u: Como se encuentra dentro de identidades trigonométricas, se trata de un parámetro angular. Además, su intervalo $[0, 2\pi]$ deja claro que se trata de una vuelta angular.

v: Esta asociada con el radio de la base del paraboloide y la altura del mismo. Podemos usar su relación con z para definir la porción de superficie representada.

Sabemos que $z = v^2$

Si $\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{6} \longrightarrow 2 \leq v^2 \leq 6 \longrightarrow 2 \leq z \leq 6$

Significa que tenemos la porción de paraboloide entre alturas 2 y 6.

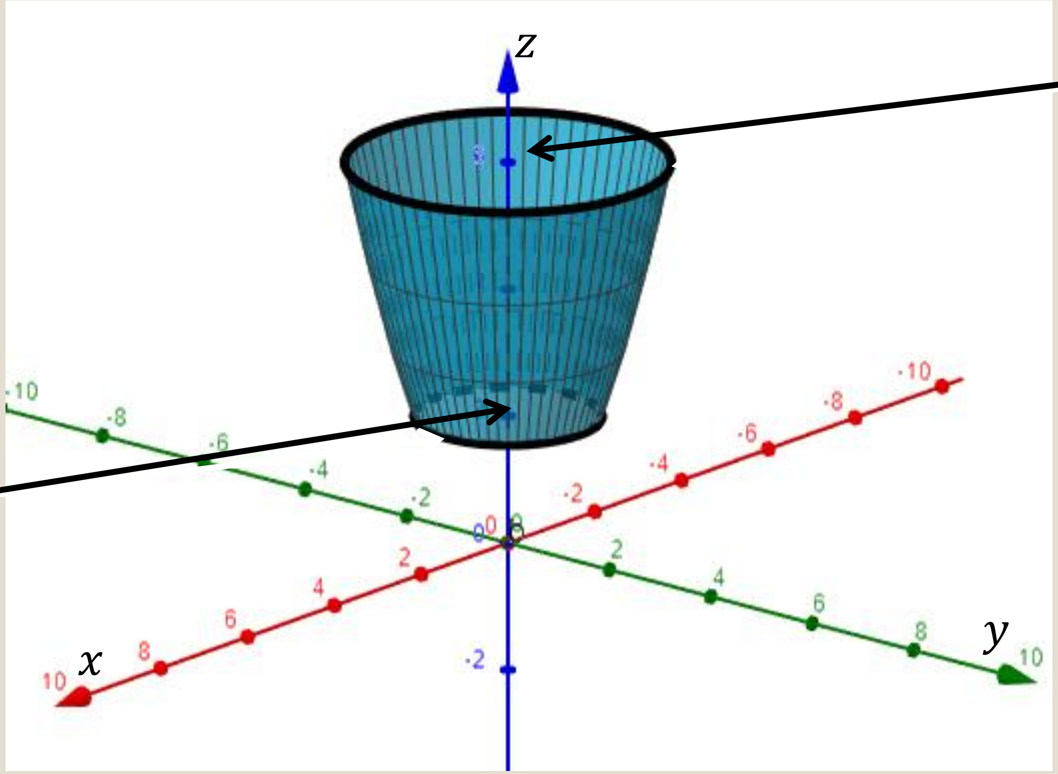
Sabemos que $x^2 + y^2 = z$

Si $z = 2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 2$

Si $z = 6 \longrightarrow x^2 + y^2 = 6$

Tenemos una circunferencia de radio 1.41 a una altura $z = 2$ y una circunferencia de radio 2.45 en la altura $z = 6$. Con estas curvas como extremos podemos graficar la superficie.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ z = 6 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

INTEGRAL DE SUPERFICIE

Se pretende evaluar una función de tres variables sobre una superficie en el espacio.

La expresión correspondiente es:

$$\iint_S g(x,y,z)dS$$

Ahora no tenemos regiones en el plano, sino diferenciales de superficie en el espacio.

Sin embargo, para evaluarla necesitamos recurrir a una parametrización de la superficie y luego realizar la integral sobre el dominio de los parámetros, resultando lo siguiente:

$$\iint_D g[x(u,v);y(u,v);z(u,v)]|\vec{r}_u x \vec{r}_v|dA$$

El dominio D es el definido por los intervalos de ambos parámetros.

$dS = |\vec{r}_u x \vec{r}_v|dA$: La función vectorial tendrá dos derivadas parciales, el módulo del producto vectorial entre las derivadas parciales es lo que necesitamos.

SUPERFICIE CON PROYECCIÓN REGULAR

Si tenemos una superficie gráfica de una función $z = f(x,y)$:

$$|\vec{r}_u x \vec{r}_v| dA = \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\, dxdy$$

Entonces la integral de superficie se resuelve:

$$\iint_D \; g[x;y;f(x,y)]\sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\, dxdy$$

Con lo cual no sería necesario recurrir a la función vectorial y sus derivadas parciales.

ÁREA DE UNA SUPERFICIE ALABEADA

Si quiero calcular el área de una superficie, la función a integrar debe ser $g(x,y,z) = 1$.

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_S dS = \iint_D |\vec{r}_u x \vec{r}_v| dA$$

Si la superficie es con proyección regular:

$$\iint_D \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1} dxdy$$ Fórmula que ya conocemos.

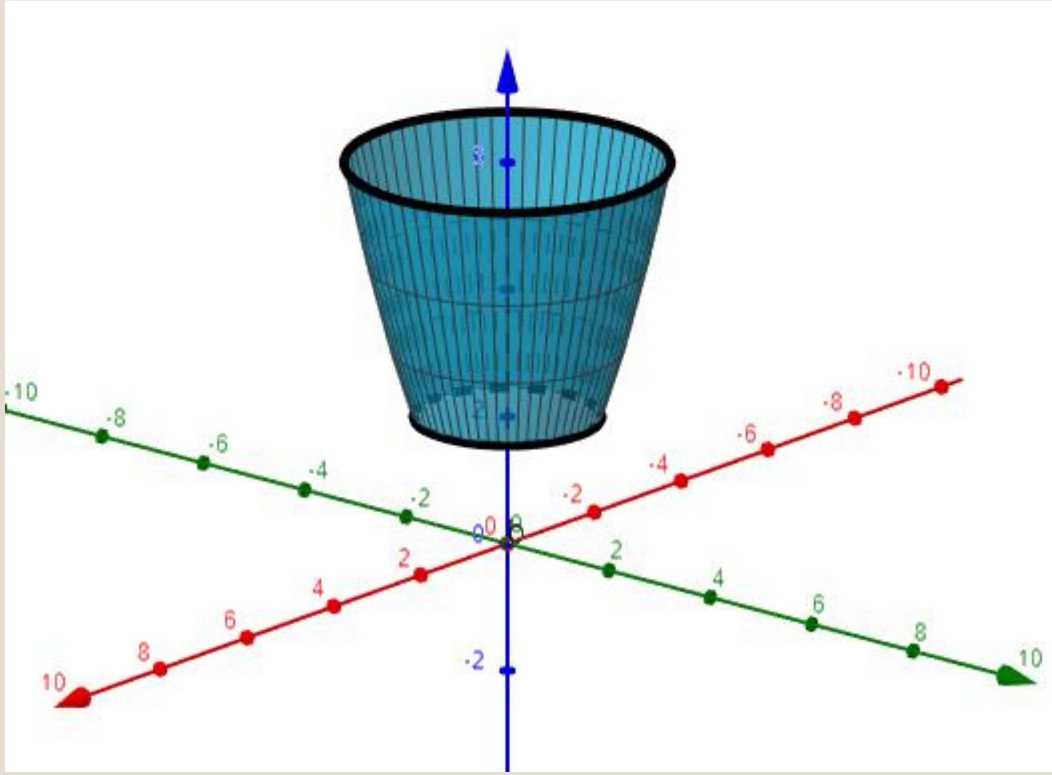
TP N° 18: EJERCICIO 1) Calcular el área de las siguientes superficies:

b) Superficie del inciso «2c»

En el ejercicio anterior identificamos la superficie dada por la siguiente función vectorial:

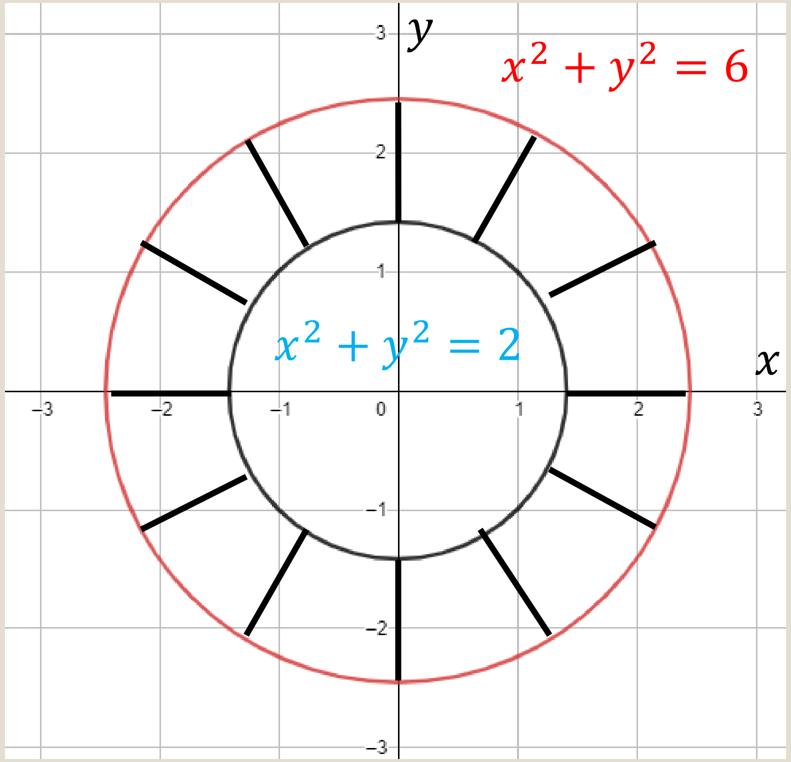
$$\vec{r}(u,v) = v cos u \vec{\imath} + v sen u \vec{\jmath} + v^2 \vec{k} \qquad \text{Con } \sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{6} \;\; ; \;\; 0 \leq u \leq 2\pi$$

Y el resultado fue una porción de paraboloide entre alturas 2 y 6:



Ahora calcularemos el área de dicha superficie.

La proyección de esta superficie sobre el plano xy es la región contenida entre las curvas de nivel extremas de la superficie, es decir las dos circunferencias que hemos identificado.



Como es una región circular conviene caracterizar en coordenadas polares:

$$R: \{(r, \theta) \in R^2 / \sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{6} \,; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Luego la función y sus derivadas parciales: $z = x^2 + y^2 \longrightarrow \begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = 2y \end{cases}$

Por lo tanto, el área de la superficie estará dada por:

$$\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, r dr d\theta$$

Cambiamos a coordenadas polares: $\displaystyle \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4r^2+1}\, r dr d\theta$

Por sustitución:

$$u = 4r^2+1$$

$$du = 8rdr$$

$$\int \sqrt{4r^2+1}\, r dr = \int \frac{\sqrt{u}}{8} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{12} = \frac{(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4r^2+1}\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} d\theta =$$

$$= \frac{1}{12}\left\{\left[4\left(\sqrt{6}\right)^2+1\right]^{\frac{3}{2}} - \left[4\left(\sqrt{2}\right)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}\right\} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right)} \equiv A_S$$

El ejercicio lo resolvimos utilizando proyección regular y resultó un procedimiento igual al utilizado en el práctico de integración múltiple. Resolvamos el mismo ejemplo usando la función vectorial que parametriza la superficie:

$$\vec{r}(u,v) = vcosu\vec{\imath} + vsenu\vec{\jmath} + v^2\vec{k} \qquad \text{Con } \sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{6}\ ;\ 0 \leq u \leq 2\pi$$

En este ejemplo de hecho es conveniente utilizar este procedimiento ya que conocemos de principio la función vectorial y los intervalos de los parámetros, solo resta operar.

La integral a resolver será:

$$\iint_D |\vec{r}_u x \vec{r}_v| dA = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} |\vec{r}_u x \vec{r}_v| dvdu$$

Los intervalos coinciden porque hicimos coincidir las coordenadas polares con los parámetros. Calculemos él módulo del producto vectorial:

$$\vec{r}_u = -vsenu\vec{\imath} + vcosu\vec{\jmath} + 0\vec{k} \qquad \vec{r}_v = cosu\vec{\imath} + senu\vec{\jmath} + 2v\vec{k}$$

$$\vec{r_u} x \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -vsenu & vcosu & 0 \\ cosu & senu & 2v \end{vmatrix} = 2v^2 cosu\vec{\imath} + 2v^2 senu\vec{\jmath} - v\vec{k} = v(2vcosu\vec{\imath} + 2vsenu\vec{\jmath} - 1\vec{k})$$

$$|\vec{r}_u x \vec{r}_v| = \sqrt{v^2[4v^2 \cos^2 u + 4v^2 sen^2 u + 1]} = v\sqrt{4v^2 + 1}$$

Entonces la integral es:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} |\vec{r}_u x \vec{r}_v| dvdu = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4v^2 + 1} vdvdu$$

Esa expresión final coincide con la integral resuelta anteriormente, pero en función de los parámetros. Sin embargo, su resultado será el mismo:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4v^2 + 1} vdvdu = \frac{\pi}{6}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) \equiv A_S$$

Diferencias entre ambas expresiones:

$$\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4r^2+1}\, r dr d\theta \qquad \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{4v^2+1}\, v dv du$$

Al hacer coincidir los parámetros con las coordenadas polares, tanto los límites como la función a integrar coinciden.

Sin embargo, en un procedimiento utilizamos la raíz cuadrada de las derivadas parciales cuando tenemos proyección regular y al utilizar coordenadas polares el $dA = r dr d\theta$.

En cambio, cuando usamos la parametrización, el $dA = du dv$. La r, que en este caso sería v, lo que correspondería con el Jacobiano de las polares, surge del módulo del producto vectorial, no forma parte del diferencial de área.

$$\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \underbrace{\sqrt{4r^2+1}}_{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\, \underbrace{r dr d\theta}_{dA} \qquad \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \underbrace{\sqrt{4v^2+1}\, v}_{|\vec{r}_u x \vec{r}_v|}\, \underbrace{dv du}_{dA}$$

EJERCICIO 2) Calcular $\iint_S g(x,y,z)dS$

b) $f(x,y,z) = z$ sobre el cilindro $y = z^2\,; 0 \leq x \leq 3\,; 0 \leq z \leq 4$

Debemos integrar una función sobre una superficie. El procedimiento es análogo al hecho en el punto anterior para calcular área de superficie, la única diferencia es que ahora debemos añadir a la integral la función del ejercicio. Podemos realizarlo por proyección regular o por parametrización.

Lo conveniente es utilizar proyección regular para facilitar el proceso de parametrización y luego desarrollar el ejercicio utilizando la función vectorial y el módulo del producto vectorial.

Como la superficie es $y = f(x,z)$, las ecuaciones paramétricas y función vectorial serán:

$$\begin{cases} x \\ y = f(x,z) = z^2 \\ z \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{matrix} \qquad \vec{r}(x,z) = x\vec{\imath} + z^2\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Haciendo coincidir los parámetros con las variables del plano de proyección (xz) los intervalos ya los podemos utilizar como límites de integración tal cual los da el ejercicio.

Ahora desarrollamos usando las derivadas parciales de la función vectorial:

$$\vec{r}(x,z) = x\vec{\imath} + z^2\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}_x = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_z = 0\vec{\imath} + 2z\vec{\jmath} + 1\vec{k}$$

$$\vec{r}_x x \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + 2z\vec{k} \longrightarrow |\vec{r}_u x \vec{r}_v| = \sqrt{1+4z^2}$$

Ponemos la función en términos de los parámetros: $g(x,y,z) = g(x,z^2,z) = z$

Finalmente, la integral será:

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \int_0^4 \int_0^3 z\sqrt{1+4z^2}\,dxdz$$

$$\int_0^4 \int_0^3 z\sqrt{1+4z^2}\,dxdz = \int_0^4 x\Big]_0^3 z\sqrt{1+4z^2}dz = 3\int_0^4 z\sqrt{1+4z^2}dz =$$

$$u = 4z^2 + 1$$

$$du = 8zdz$$

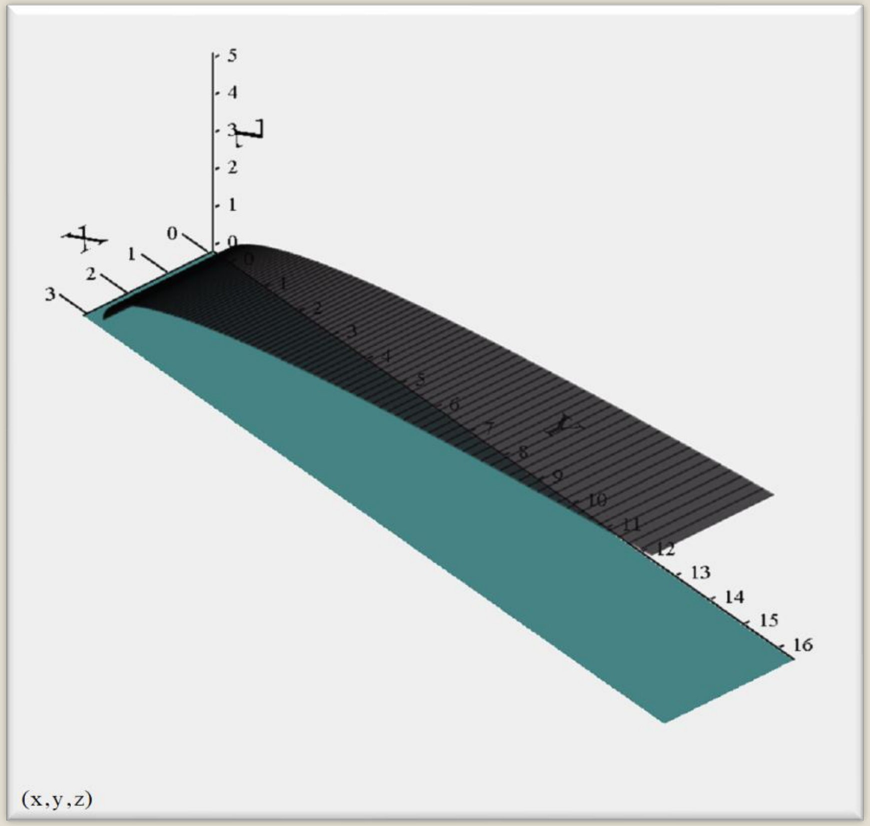
$$\int \sqrt{4z^2+1}zdz = \int \frac{\sqrt{u}}{8}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{12} = \frac{(4z^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

$$3\int_0^4 z\sqrt{1+4z^2}dz = 3\left.\frac{(4z^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12}\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left\{[4(4)^2+1]^{\frac{3}{2}} - [4(0)^2+1]^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{1}{4}\left(65^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

Podemos identificar a modo de práctica la superficie sobre la cual integramos:

$$y = z^2\,;0 \leq x \leq 3\,;0 \leq z \leq 4$$

Un cilindro parabólico, que surge como proyección de la parábola en el plano yz a lo largo del eje x.



Observando el intervalo de x, el cilindro solo se proyecta entre 0 y 3.

Como z tiene intervalo positivo, solo es la rama derecha del cilindro.