INTEGRALES DOBLES

VOLUMEN BAJO UNA SUPERFICIE

Mismo concepto aplicado en integrales simples de “área bajo la curva”.

Ahora tenemos un volumen bajo una superficie y podremos calcularlo con la integral doble:

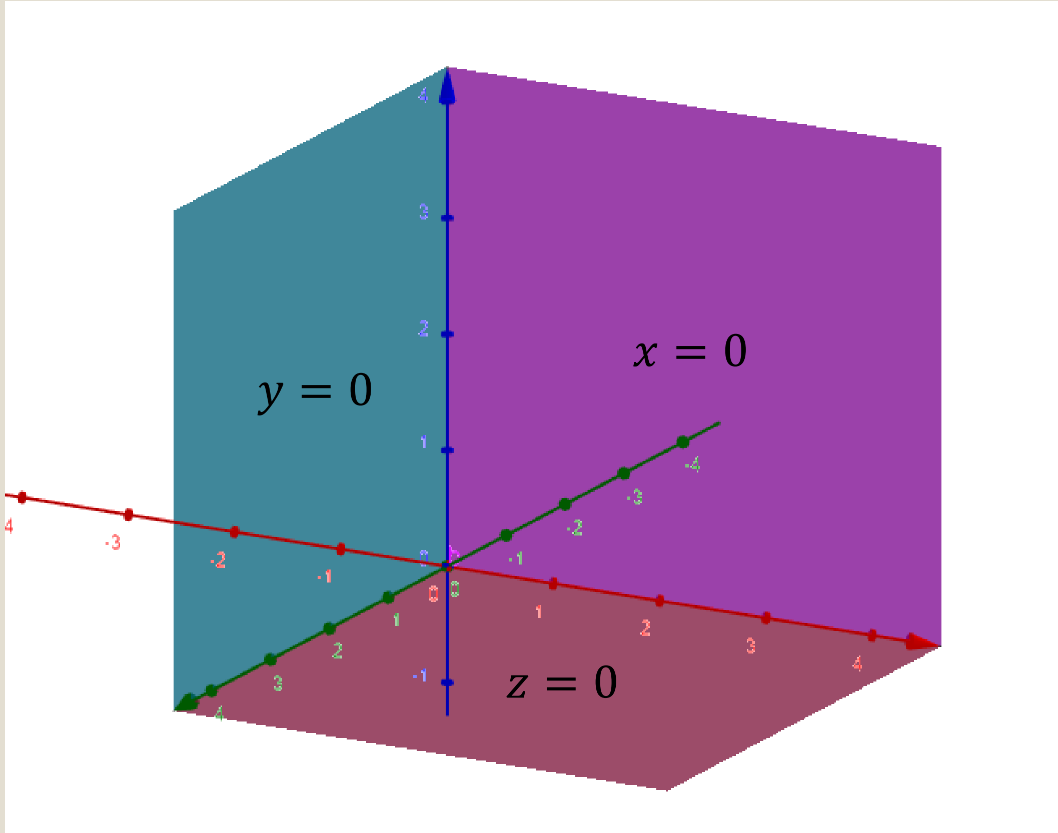
$$\iint_R f(x,y)dA$$

Siempre que la función $f(x,y)$ sea positiva en toda la región de integración, es decir que la gráfica de la superficie se encuentre por encima del plano xy.

Como calculamos un volumen, el resultado de estas integrales es siempre positivo.

EJEMPLO 6) a) Calcular el volumen debajo de la superficie gráfica de $2x + y + z = 4$, en el primer octante.

El primer octante es análogo al primer cuadrante en el plano, es aquel en el cual las tres variables son positivas. Se encuentra comprendido entre los tres planos coordenados.



La superficie corresponde a la ecuación de un plano. Para graficarlo debemos obtener la intersección con los tres ejes: $2x + y + z = 4$

Intersección eje x: $(y = z = 0) \longrightarrow 2x = 4 \longrightarrow x = 2$

Intersección eje y: $(x = z = 0) \longrightarrow y = 4$

Intersección eje z: $(x = y = 0) \longrightarrow z = 4$

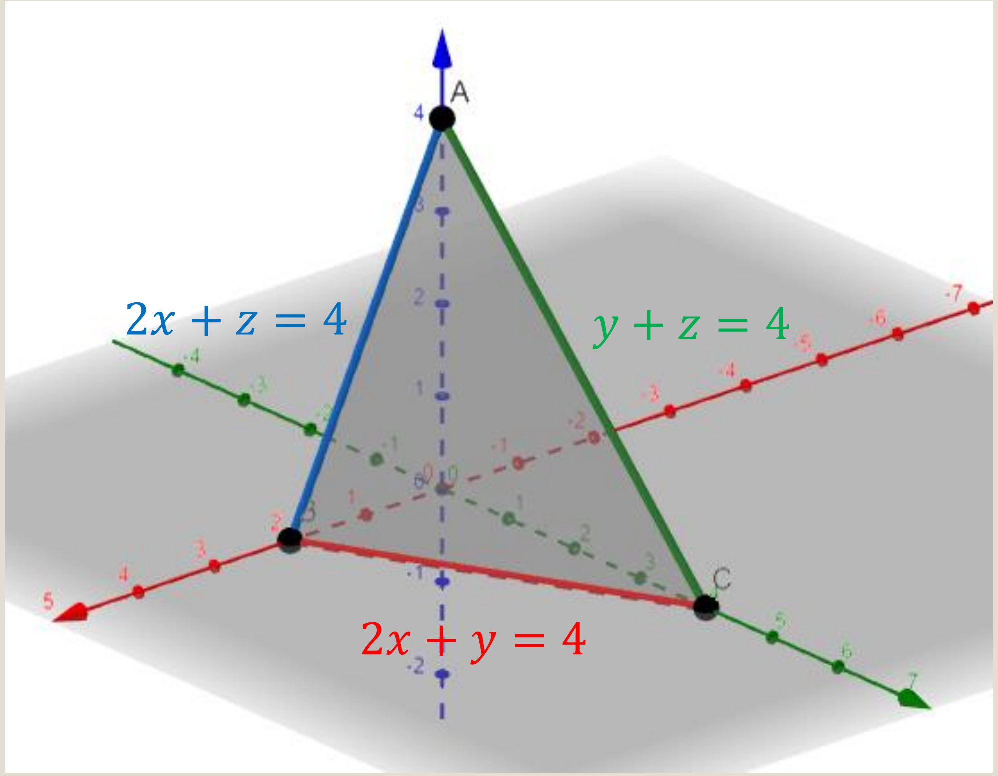
Luego esos puntos se unen con las trazas del plano, que son las intersecciones entre el plano en cuestión con cada uno de los planos coordenados:

Intersección con el plano xy: $(z = 0) \longrightarrow 2x + y = 4$ | Recta en el plano xy.

Intersección con el plano xz: $(y = 0) \longrightarrow 2x + z = 4$ | Recta en el plano xz.

Intersección con el plano yz: $(x = 0) \longrightarrow y + z = 4$ | Recta en el plano yz.

Volcando la información en un gráfico obtendremos una representación del plano en el primer octante.



Finalmente, para terminar de identificar el volumen bajo el plano, los planos coordenados ofician de paredes laterales y de piso, resultando en un tetraedro.

Para realizar la integral, la función a integrar se obtiene despejando $z = f(x, y)$ de la ecuación del plano.

$$z = 4 - 2x - y$$

Luego la región de integración es la "sombra" que hace el plano, gráfica de la función sobre el plano xy.

En este caso, la sombra coincide con la base del tetraedro:

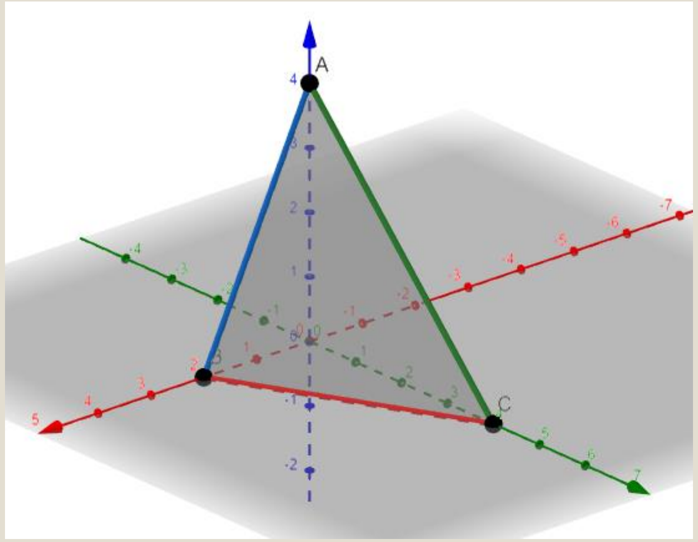
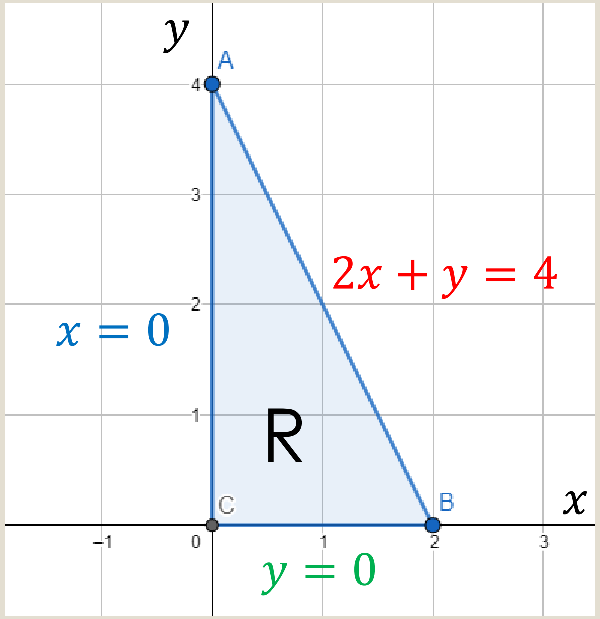


Gráfico volumen bajo la superficie



Proyección sobre el plano xy.

Caracterizamos la región, en este caso es similar hacerlo Tipo I o II.

$$R_{TI}: \{(x,y) \in R^2 / 0 \le x \le 2 \; ; \; 0 \le y \le 4-2x\}$$

Con lo cual, la integral a resolver será: $\iint_R f(x,y)dA = \int_0^2 \int_0^{4-2x} (4-2x-y)dydx$

Resolvemos:

$$\int_0^2 \int_0^{4-2x} (4-2x-y)dydx = \int_0^2 \left(4y - 2xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg]_0^{4-2x} dx =$$

$$\int_0^2 \left\{\left[4(4-2x) - 2x(4-2x) - \frac{(4-2x)^2}{2}\right] - [0]\right\} dx =$$

$$\int_0^2 (16 - 8x - 8x + 4x^2 - 8 + 8x - 2x^2)dx = \int_0^2 (2x^2 - 8x + 8)dx =$$

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x\right)\Bigg]_0^2 = \left[\frac{2}{3}(2)^3 - 4(2)^2 + 8(2)\right] - [0] = \boldsymbol{\frac{16}{3}}\,[\boldsymbol{L^3}]$$

Volumen debajo de la Superficie

b) Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies:

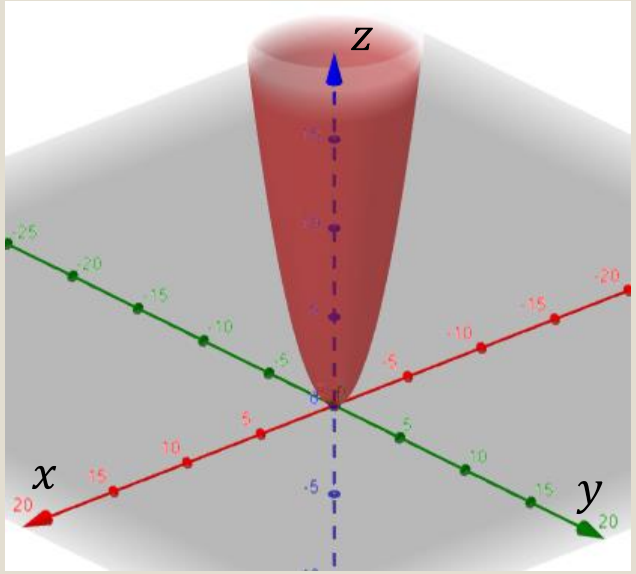
$$z = x^2 + y^2 \qquad\qquad y = 4 - x^2 \qquad\qquad \text{Planos coordenados.}$$

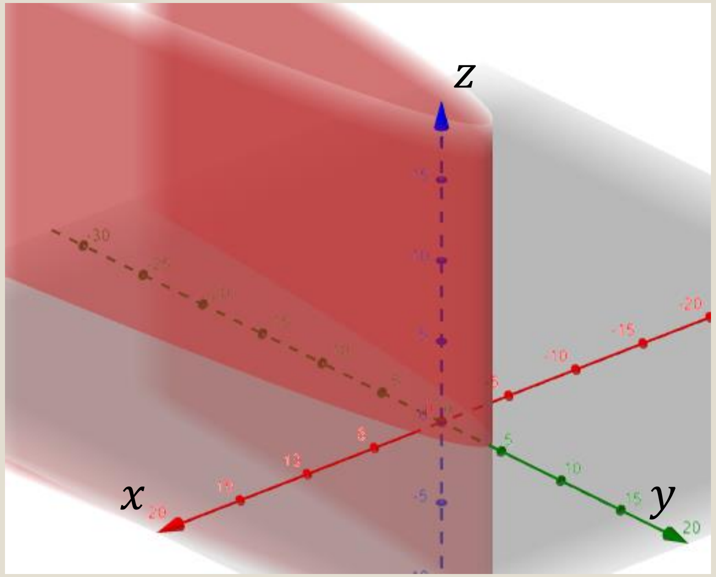
Tenemos:

$z = x^2 + y^2$ Paraboloide circular de eje z.

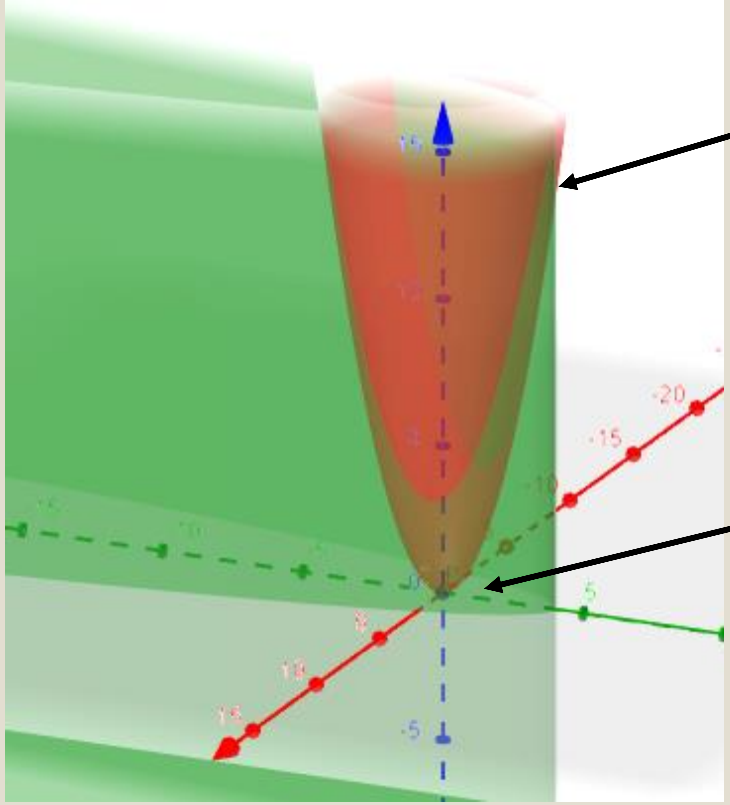
$y = 4 - x^2$ Cilindro parabólico de eje z. (Parábola en el plano xy que se extiende por z.)

Planos coordenados. $(x = 0, y = 0, z = 0)$





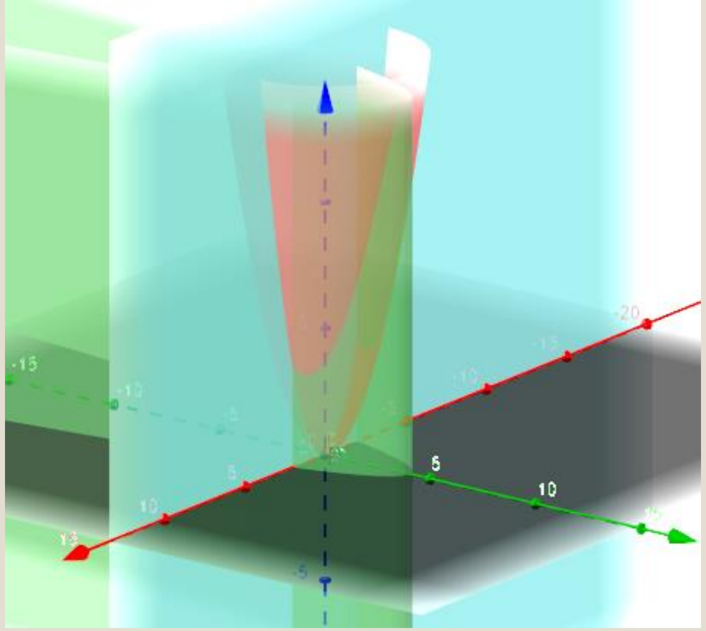
A la izquierda el paraboloide y a la derecha el cilindro parabólico. Unamos en un gráfico:

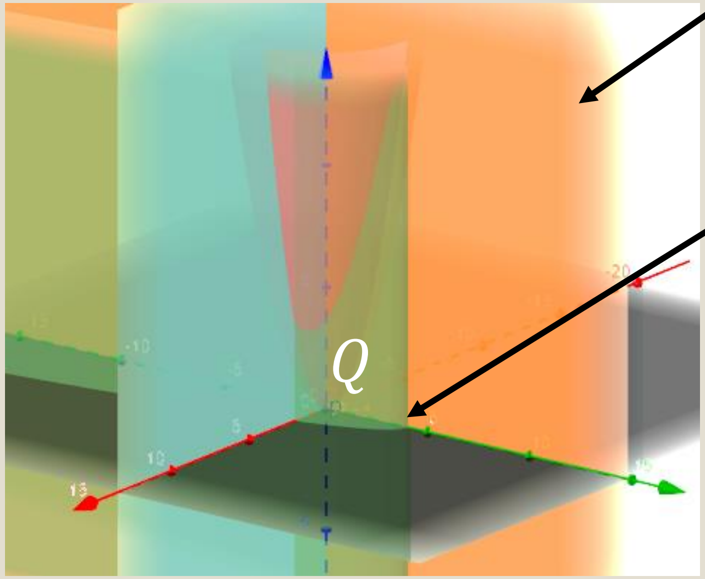


Cuando el paraboloide crece lo suficiente intersecta al cilindro, cerrando la parte superior del sólido.

Aún quedan por limitar la parte inferior y el lateral izquierdo, de eso se encargan los planos coordenados.

El plano $z = 0$ cerrará el sólido desde abajo y el plano $y = 0$ limitará el lateral.





$z = x^2 + y^2$ $\qquad$ $y = 4 - x^2$

$y = 0$ $\qquad$ $z = 0$

El sólido en sí ya está limitado y se podría aplicar una integral.

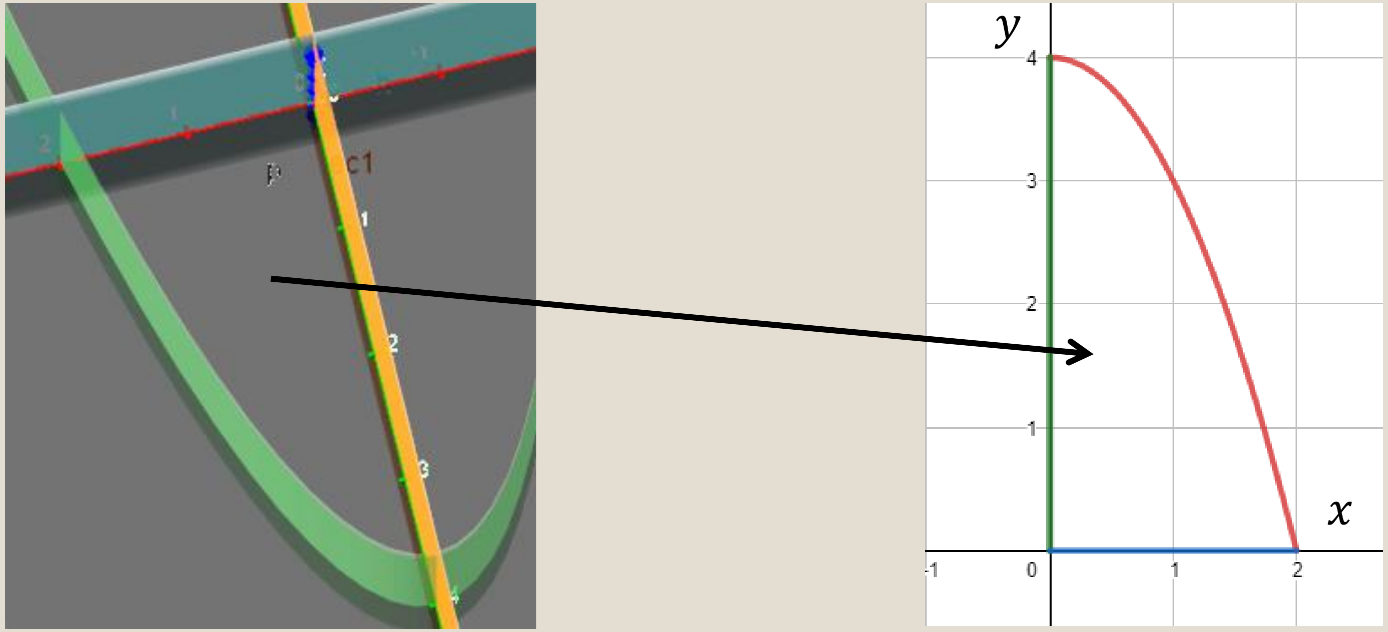
Resta el tercer plano $x = 0$, cuya función será cortar el sólido por la mitad.

Tomamos la mitad del sólido en el primer octante.

Para proyectar lo más conveniente será sobre el plano xy para evitar determinar la proyección exacta del paraboloide sobre los planos yz o xz.

La proyección será la base del sólido, la mitad de una región parabólica, ya que el sólido no posee secciones más anchas que generen una sombra predominante.

Sacando el paraboloide y mirando desde arriba observamos la región definida.



Definimos la región Tipo I:

$$R_{TI}: \{(x, y) \in R^2 / 0 \leq x \leq 2 \;\; ; \;\; 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

Siendo el paraboloide el techo del sólido, será la función bajo la cual calculemos el volumen sobre la región recién definida.

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} (x^2+y^2)dydx$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} (x^2+y^2)dydx = \int_0^2 x^2y + \frac{y^3}{3}\Big]_0^{4-x^2} dx =$$

$$\int_0^2 \left\{\left[x^2(4-x^2) + \frac{(4-x^2)^3}{3}\right] - [0]\right\} dx = \int_0^2 \left\{\left[4x^2 - x^4 + \frac{64-48x^2+12x^4-x^6}{3}\right]\right\} dx =$$

$$\int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} + 3x^4 - 12x^2 + \frac{64}{3}\right) dx = \left(-\frac{x^7}{21} + \frac{3}{5}x^5 - \frac{12}{3}x^3 + \frac{64}{3}x\right)\Big]_0^2 =$$

$$-\frac{2^7}{21} + \frac{3}{5}2^5 - \frac{12}{3}2^3 + \frac{64}{3} * 2 = \quad -\frac{128}{21} + \frac{96}{5} - \frac{96}{3} + \frac{128}{3} = \mathbf{\frac{2496}{105}}\ [\boldsymbol{L^3}]$$

COORDENADAS POLARES

EJERCICIO 1C)
(TP N°11)

$$\int_0^{\pi}\int_{asen\theta}^{a} r\,dr\,d\theta$$

Si bien el ejercicio no lo pide, identificaremos la región a modo de práctica:

Según los límites de integración, la región polar caracterizada es:

$$R_P:\{(r,\theta)\in R^2/asen\theta\le r\le a\ ;\ \ 0\le\theta\le\pi\}$$

En el caso del ángulo tenemos como intervalo media vuelta angular.

Para la coordenada radial, las curvas entre las cuales varía son:

$r=a$: Circunferencia de radio a, centrada en el origen.

$r=asen\theta$: Para identificar la curva pasemos a coordenadas cartesianas

$$r=asen\theta \longrightarrow r=a\frac{y}{r} \longrightarrow r^2=ay \longrightarrow x^2+y^2=ay$$

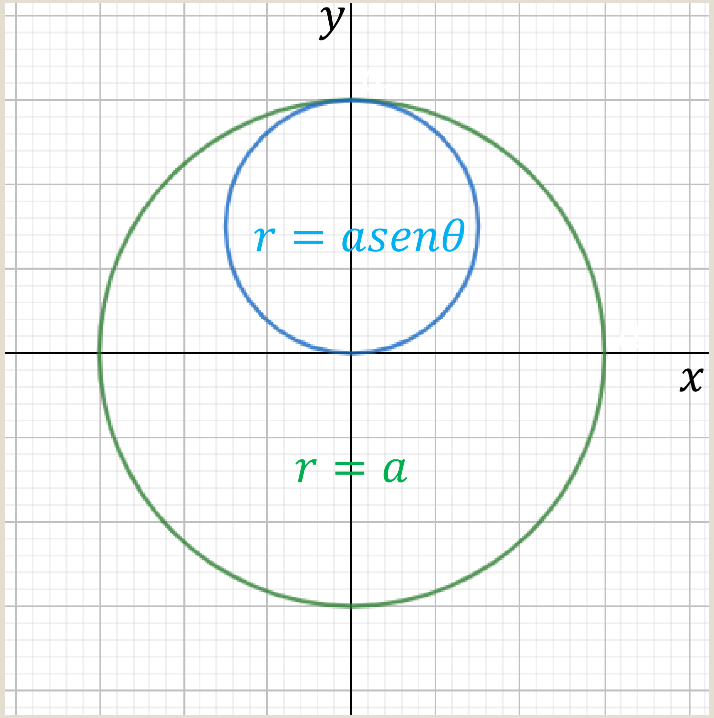
$$x^2+y^2-ay=0$$

Ecuación general de una circunferencia.
Completamos cuadrados para obtener la expresión canónica.

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$r = asen\theta$: Circunferencia de radio $r = \frac{a}{2}$, con centro $\mathbb{C}: \left(0; \frac{a}{2}\right)$

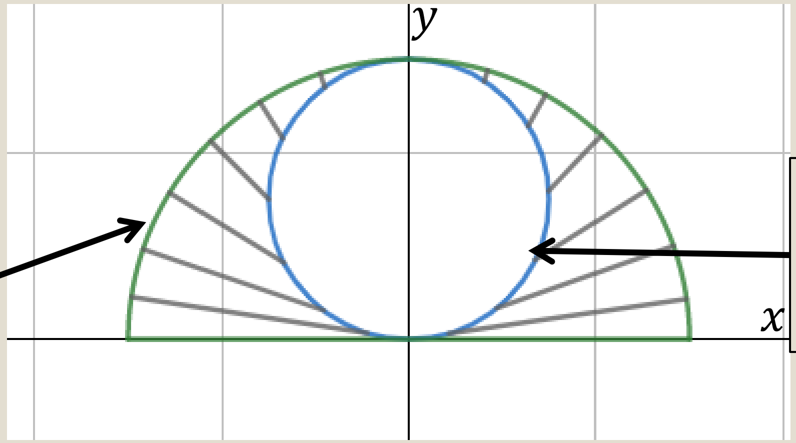
Graficamos ambas circunferencias:



Teniendo en cuenta el intervalo angular, la región contempla solo el hemisferio superior.

Luego, observando los límites de la coordenada radial, vemos que tiene como límite inferior la circunferencia desplazada y como límite superior la circunferencia mayor.

Y luego termina en la circunferencia exterior.



La coordenada radial inicia en esta circunferencia interior.

Ahora si resolvamos la integral:

$$\int_0^\pi \int_{asen\theta}^{a} r dr d\theta = \int_0^\pi \frac{r^2}{2}\Big]_{asen\theta}^{a} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (a^2 - a^2 sen^2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi (1 - sen^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \cos^2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \frac{1 + cos2\theta}{2} d\theta = \frac{a^2}{4}\left(\theta + \frac{sen2\theta}{2}\right)\Bigg]_0^\pi = \frac{a^2}{4}\left\{\left[\pi + \frac{sen2\pi}{2}\right] - \left[0 + \frac{sen0}{2}\right]\right\} = \boldsymbol{\frac{\pi a^2}{4}}$$

En polares, la expresión $rdrd\theta = dA$. Es decir que integramos la función $f(r,\theta) = 1$

Por lo tanto, el resultado que obtuvimos es equivalente al área de la región descripta.

EJERCICIO 4 A) Calcular el área del cardioide: $r = a(1 - cos\theta)$. Graficar.

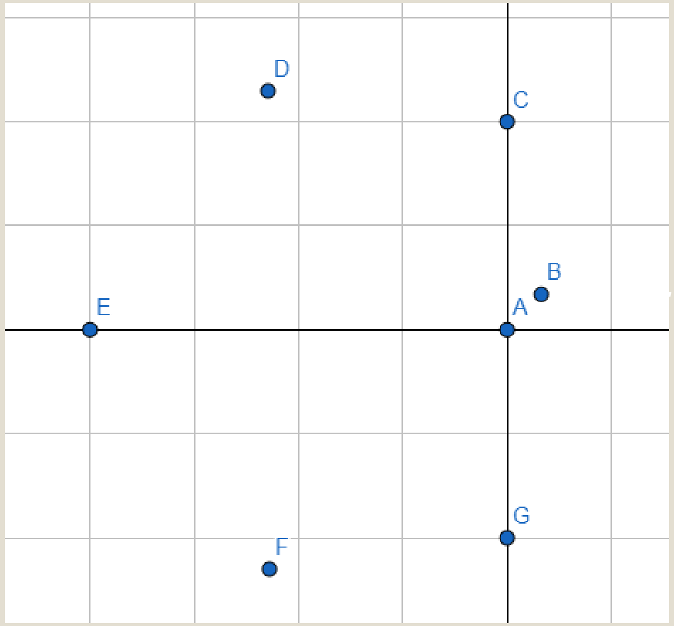
Para calcular el área necesitamos definir la integral y para ello debemos graficar: $r = a(1 - cos\theta)$

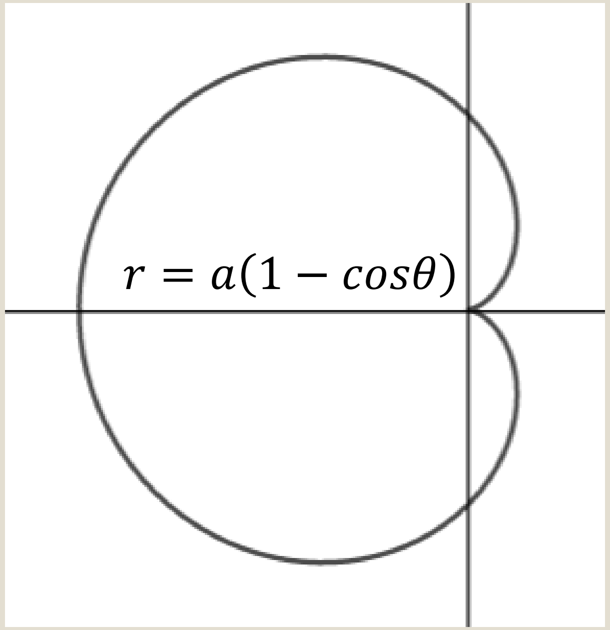
Como la función trigonométrica no toma valores mayores a la unidad, el paréntesis es positivo, por lo tanto, la coordenada radial está definida para todo valor de ángulo.

Si damos valores al ángulo y armamos una tabla tenemos:

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{cos\theta}$	$\boldsymbol{r}$
0	1	0
$\pi/4(45°)$	$\sqrt{2}/2$	$0{,}293a$
$\pi/2(90°)$	0	a
$3\pi/4(135°)$	$-\sqrt{2}/2$	$1{,}707a$
$\pi(180°)$	-1	$2a$
$5\pi/4(225°)$	$-\sqrt{2}/2$	$1{,}707a$
$3\pi/2(270°)$	0	a

Para graficar los puntos $P:(r,\theta)$ debemos considerar que r es la distancia desde el origen y tener en cuenta su respectiva coordenada angular.





Como es una curva cerrada, encierra una región, cuya área se debe calcular.

Como la región incluye al origen, la coordenada radial tendrá como límite inferior 0 y luego llegará hasta todos los puntos del cardiode, con lo cual su límite superior será la ecuación de la curva. Respecto al ángulo, el intervalo corresponde a una vuelta completa.

$$R_P: \{(r,\theta) \in R^2 / 0 \leq r \leq a(1 - cos\theta) \ ; \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Entonces el área del cardiode estará dada por:

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{a(1-cos\theta)} 1rdrd\theta$$

Resolviendo:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1-cos\theta)} rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Bigg]_0^{a(1-cos\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{[a^2(1-cos\theta)^2]-[0]\}d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-2cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-2cos\theta+\frac{1}{2}+\frac{cos2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2cos\theta+\frac{cos2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\theta-2sen\theta+\frac{sen2\theta}{4}\right)\Bigg]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{3}{2}2\pi-2sen2\pi+\frac{sen4\pi}{4}\right)-\left(0\cancelto{0}{-2sen0+\frac{sen0}{2}}\right)\right] = \frac{3}{2}\pi a^2$$

Ejercicio 4d) Calcular el área interior a la curva $r = 2sen3\theta$ y exterior a $r = 1$, sobre primer cuadrante.

Según el ejercicio tenemos un área entre curvas:

$r = 1$: Circunferencia radio 1 centrada en el origen.

$r = 2sen3\theta$: Rosa de tres pétalos

Para analizar la rosa, nos ayudaremos de la curva que ya conocemos $r = sen\theta$

Se trata de una curva cerrada cuyo valor máximo es 1, ya que la función seno adquiere como valor máximo la unidad. Luego está definida en el intervalo angular donde el seno es positivo, ya que la coordenada radial no puede ser negativa. Lo cual nos daba como resultado una única curva cerrada desplazada en el eje vertical.

$r = 2sen3\theta$: En este caso el valor máximo de la curva va a ser 2. Por otro lado, tenemos que el argumento esta multiplicado por 3, esto quiere decir que el seno repetirá su onda un total de tres veces cuando el ángulo complete una vuelta. En cada una de esas repeticiones, se generará una curva cerrada que llamamos pétalo de la rosa. Por lo tanto, la curva tendrá tres pétalos.

El extremo del pétalo se tiene cuando el seno adquiere su mayor valor, para este caso:

$$sen3\theta = 1 \longrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}(30°)$$

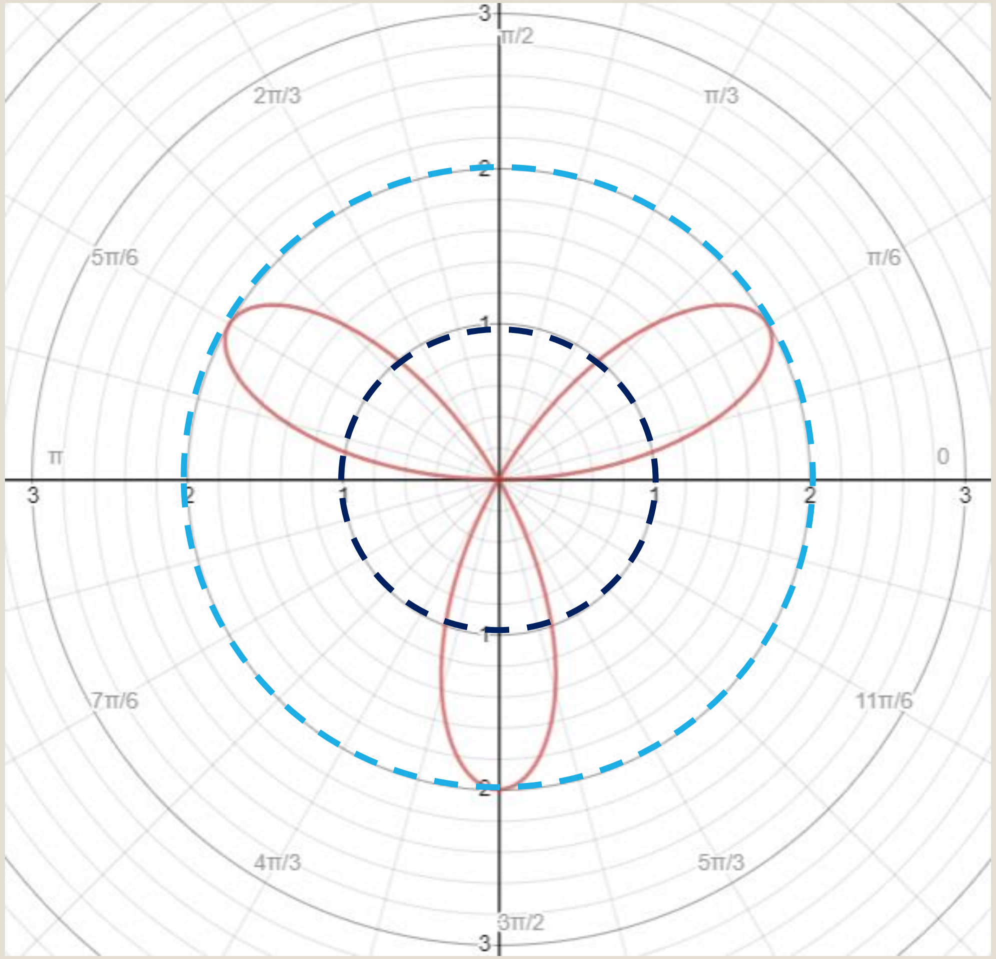
Desde el extremo, el pétalo es simétrico hacia ambos laterales, hasta cerrar en el origen, lo cual sucede cuando el seno se anula. Esto sucede para dos ángulos:

$$sen3\theta = 0 \longrightarrow \begin{cases} 3\theta = 0 \\ 3\theta = \pi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{3}(60°) \end{cases}$$

Es decir que el pétalo se desarrolla en el intervalo angular desde 0° a 60°, adquiriendo su valor máximo a los 30°. Además, es simétrico.

Luego, los tres pétalos son equidistantes, en este caso como son tres, estarán separados una distancia angular de 120°. Por lo tanto, el segundo pétalo tendrá su máximo a los 150° y el último pétalo a los 270°.

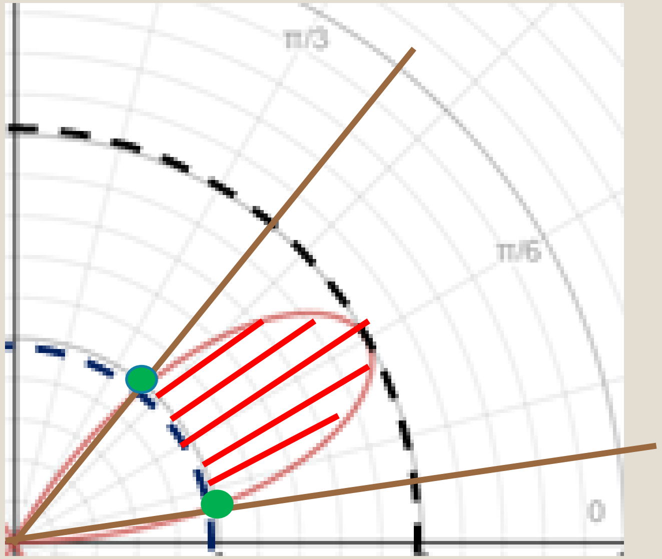
Es posible construir tabla de valores para ir aproximando puntos. A continuación, mostramos la curva ya construida.



Como el valor máximo de la gráfica es 2, podemos considerar que el gráfico se encuentra contenido dentro de una circunferencia de radio 2.

Añadimos sobre el gráfico la circunferencia de radio 1.

Solamente vamos a trabajar con el pétalo sobre el primer cuadrante.



La coordenada radial tiene como base la circunferencia de radio 1 y luego llega hasta el pétalo de la rosa.

El ángulo NO tiene como intervalo de 0° a 60° ya que no estamos tomando el pétalo completo, sino solo una parte.

Los segmentos marrones delimitan el intervalo angular de la región a considerar y vemos que es más chico que de 0° a 60°. Para obtener los límites del ángulo, tenemos que obtener los puntos de intersección entre las curvas. Para ello igualamos las curvas y despejamos:

$$\begin{cases} r = 1 \\ r = 2sen3\theta \end{cases} \longrightarrow 2sen3\theta = 1 \longrightarrow sen3\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{6} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{18}(10°)$$

Vemos que el límite inferior es $10°$. Para obtener el superior, como la región es simétrica podemos restar $10°$ a los $60°$ y obtenemos $50°$. La otra opción sino es saber que el seno también vale $\frac{1}{2}$ cuando el ángulo es $150°(\frac{5\pi}{6})$ y de ahí despejar.

Por lo tanto, la integral a resolver será:

$$\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}}\int_{1}^{2sen3\theta} r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} \frac{r^2}{2}\Bigg]_{1}^{2sen3\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} (4sen^2 3\theta - 1) d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} \left[4\frac{(1-cos6\theta)}{2} - 1\right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} (2 - 2cos6\theta - 1) d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} (1 - 2cos6\theta) d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{sen6\theta}{3}\right)\Bigg]_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{5\pi}{18} - \frac{sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{3}\right] - \left[\frac{\pi}{18} - \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{5\pi}{18} - \left(\frac{-\sqrt{3}}{6}\right)\right] - \left[\frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}}$$