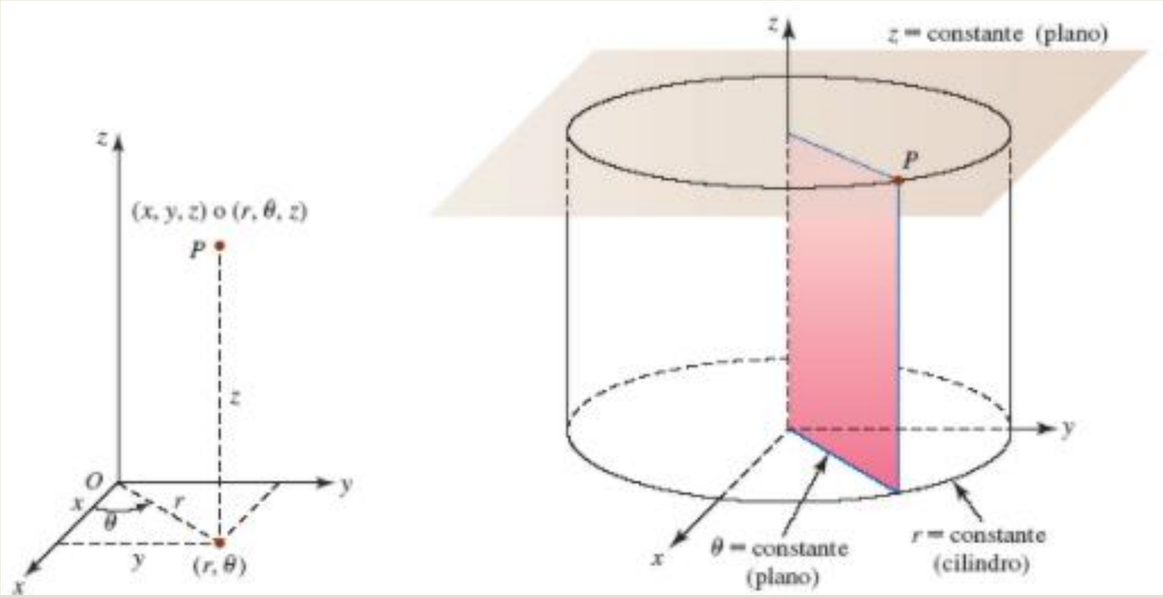
COORDENADAS CILÍNDRICAS

Conformadas por la terna (r, θ, z) podemos considerarlas como la unión de coordenadas polares en el plano con el eje vertical z de coordenadas cartesianas.

Por lo tanto, al trabajar con estas coordenadas, se proyecta y caracteriza una región en coordenadas polares y luego se define el tercer eje perpendicular al plano de proyección.

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)dV \qquad \text{Con } dV = r dz dr d\theta$$

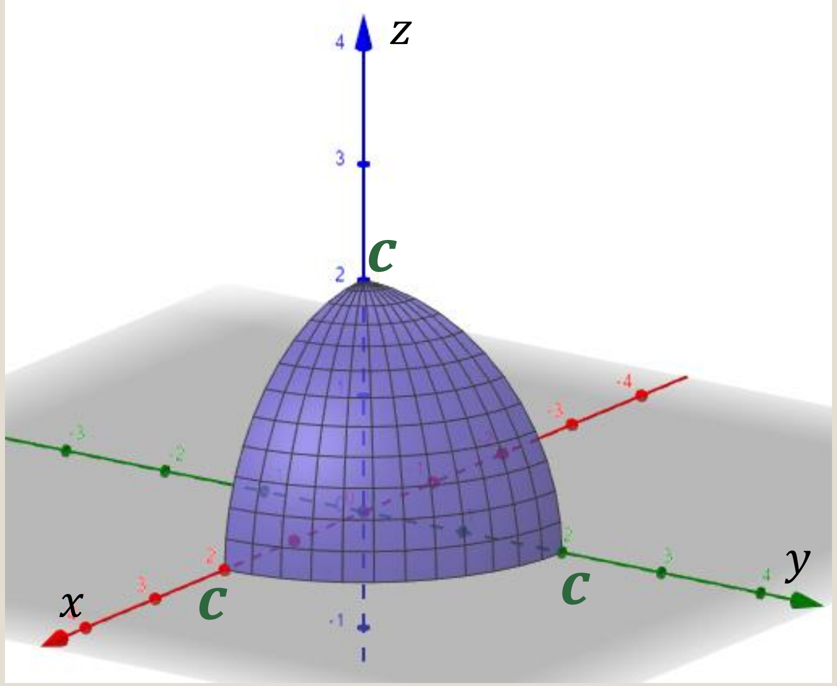


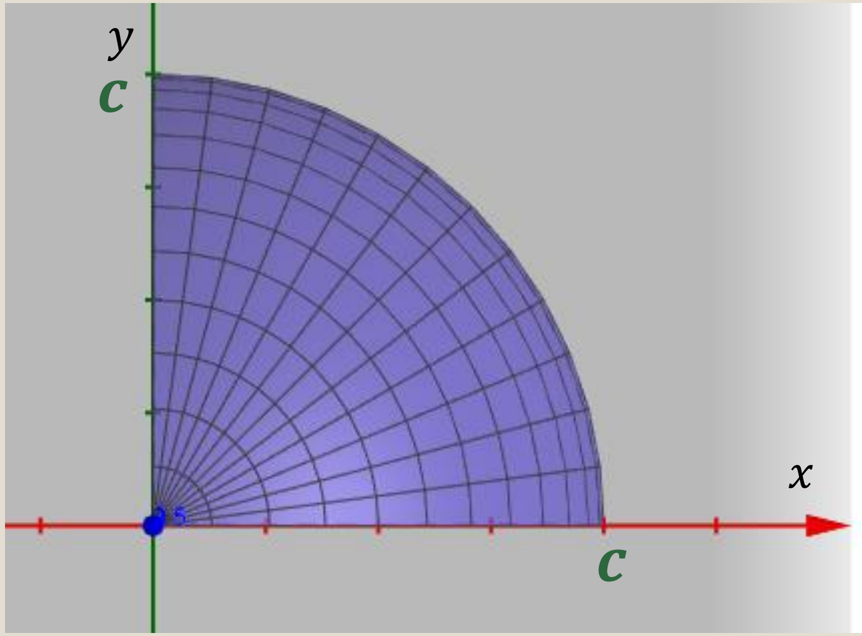
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

Ejercicio 1 a) (TP n°13)

Calcular el volumen de una esfera centrada en el origen y de radio c. Graficar solo la porción correspondiente al primer octante.





Como la esfera presenta simetría podemos trabajar con la porción del primer octante.

Si proyectamos la esfera sobre el plano xy obtenemos un cuarto de circunferencia.

Lo caracterizamos en coord. polares ya que así lo exigen las coordenadas cilíndricas.

$$R: \left\{(r, \theta) \in R^2 / 0 \leq r \leq c \,; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Para z, primero tenemos la base de la esfera que corresponde con el plano $z = 0$ y luego como techo tenemos el casquete esférico, debiendo despejar z de la ecuación de la esfera.

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \quad \longrightarrow \quad z = \sqrt{c^2 - (x^2 + y^2)}$$

Tomamos solo raíz positiva por ser el casquete superior. Y ahora debemos hacer el cambio a coordenadas cilíndricas:

$$z = \sqrt{c^2 - (x^2 + y^2)} \quad \longrightarrow \quad z = \sqrt{c^2 - r^2}$$

Es decir que el sólido estará dado por:

$$Q: \left\{(r, \theta, z) \in R^3 / 0 \leq r \leq c \,; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \,; 0 \leq z \leq \sqrt{c^2 - r^2}\right\}$$

Y la integral correspondiente:

$$\iiint_Q f(r, \theta, z) dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^c \int_0^{\sqrt{c^2 - r^2}} r dz dr d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{c}\int_0^{\sqrt{c^2-r^2}} rdzdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{c} z]_0^{\sqrt{c^2-r^2}}\ rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{c}(\sqrt{c^2-r^2}-0)\ rdrd\theta =$$

$$u = c^2 - r^2$$

$$du = -2rdr$$

$$\int \sqrt{c^2-r^2}rdr = \int -\frac{\sqrt{u}}{2}du = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(c^2-r^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{c}(\sqrt{c^2-r^2}-0)\ rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(c^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg]_0^{c} d\theta = -\frac{1}{3}\left[(0)-(c^2)^{\frac{3}{2}}\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi c^3}{6}$$

Finalmente, multiplicamos el resultado por 8 para obtener el volumen total de la esfera:

$$\frac{\pi c^3}{6} * 8 = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi c^3}$$

Ejercicio 1 b2) Evaluar cambiando a coordenadas cilíndricas:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dzdydx$$

Para realizar el cambio de coordenadas debemos identificar el sólido representado en los límites de integración.

El plano xy es el plano de proyección, y las ecuaciones que limitan la región son:

$x = 0 \quad x = 2$ Rectas verticales.

$y = -\sqrt{2x - x^2}$

$y = \sqrt{2x - x^2}$ Dos ramas de una curva. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

Se trata de una circunferencia, completamos cuadrados para llevarla a la forma canónica:

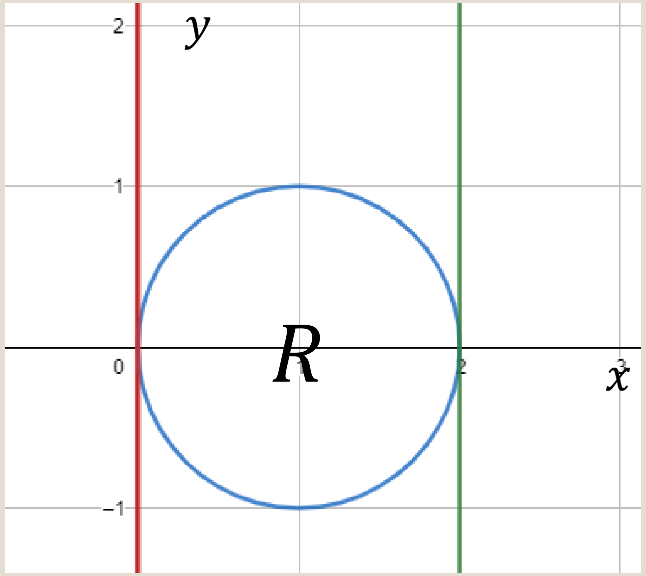
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = +1 \longrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Circunferencia de $r = 1$ y $\mathbb{C}: (1; 0)$

La región en cuestión es aquella encerrada por la circunferencia desplazada.

x varía de 0 a 2 cubriendo el ancho de la región.

y va desde la rama inferior de la circunferencia hasta la rama superior de la misma.



Para definir la región en polares hagamos la conversión de la ecuación de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \longrightarrow r^2 - 2rcos\theta = 0 \longrightarrow r^2 = 2rcos\theta \longrightarrow r = 2cos\theta \quad (r \neq 0)$$

Para definir el ángulo, debemos observar la ecuación de la curva. Como r es positivo, la curva estará definida cuando $\cos\theta$ sea positivo y ese intervalo es de $-90°$ a $90°$. Con esta definición, la curva inicia desde el origen en sentido antihorario hasta recorrer la vuelta y volver al origen cuando el ángulo es $90°$.

Como el origen está incluido en la región, la coordenada radial iniciará desde 0:

$$R_P : \left\{(r,\theta) \in R^2 / 0 \leq r \leq 2cos\theta \,; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ahora resta definir la tercera variable, perpendicular al plano de proyección. Como esta variable coincide en ambos sistemas de coordenadas, sus límites van a ser los mismos, solo es necesario expresarlos en las coordenadas correspondientes.

$$0 \leq z \leq x^2 + y^2 \qquad \longrightarrow \qquad 0 \leq z \leq r^2$$

Cambiamos de coordenadas la función a integrar:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \longrightarrow \qquad f(r,\theta) = \sqrt{r^2} = r \qquad (r > 0)$$

Y hacemos el cambio de variables, recordando la expresión de dV en cilíndricas:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dzdydx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2cos\theta} \int_0^{r^2} r * rdzdrd\theta$$

Un uso acorde de las coordenadas simplifica considerablemente los límites y el posterior proceso de integración.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2cos\theta}\int_{0}^{r^2} r^2dzdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2cos\theta} z\Big]_{0}^{r^2} r^2drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2cos\theta} r^4\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^5}{5}\Big]_{0}^{2cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\,d\theta = \frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\theta(\cos^2\theta)^2d\theta = \frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\theta(1-\text{sen}^2\,\theta)^2d\theta =$$

$$u = sen\theta$$

$$du = cos\theta d\theta$$

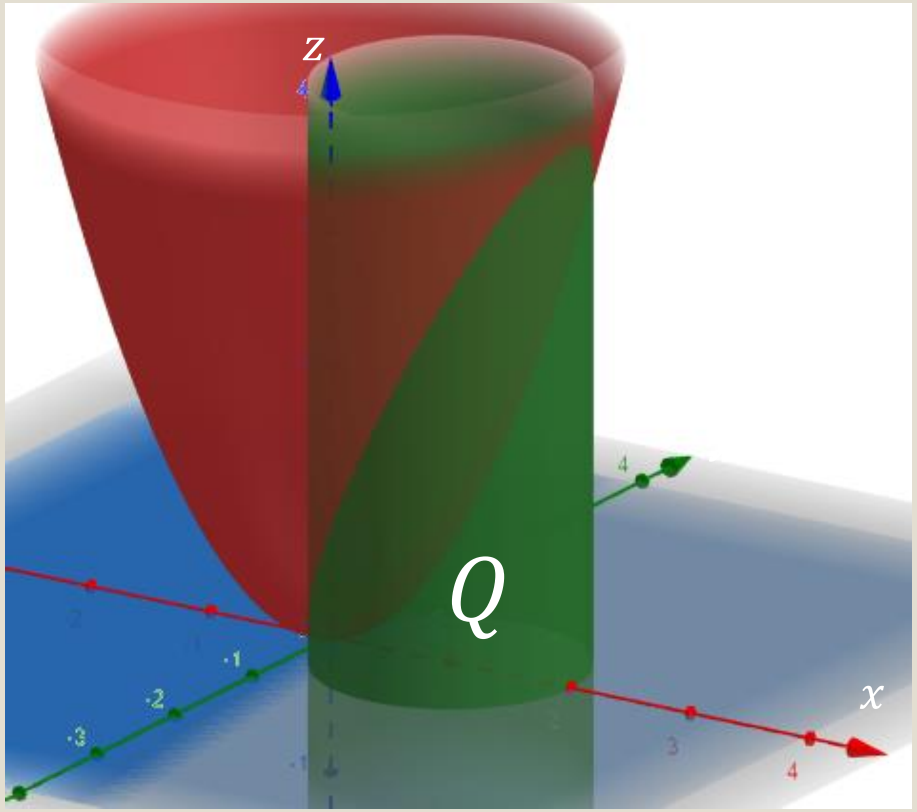
$$\int cos\theta(1-sen^2\theta)^2d\theta = \int(1-u^2)^2du = \int(u^4-2u^2+1)du = \frac{u^5}{5}-\frac{2}{3}u^3+u$$

$$\frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\theta(1-\text{sen}^2\,\theta)^2d\theta = \qquad \frac{32}{5}\left(\frac{sen^5\theta}{5}-\frac{2}{3}sen^3\theta+sen\theta\right)\Bigg]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{32}{5}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)-\left[\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)\right]\right\} = \frac{32}{5}\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{3}+2\right) = \mathbf{\frac{512}{75}}$$

$z = 0$	Plano xy
$z = x^2 + y^2$	Paraboloide circular de eje z.
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	Circunferencia desplazada sobre el plano xy que se proyecta sobre el eje z transformándose en un cilindro circular recto.

El sólido sobre el cual integramos, se encuentra contenido entre estas superficies. El plano funciona de base o piso, el cilindro hace de pared lateral y el paraboloide el techo.



COORDENADAS ESFÉRICAS

Consisten en la terna (ρ, θ, φ). La primera es el radio vector análogo a r en las polares, pero en el espacio.

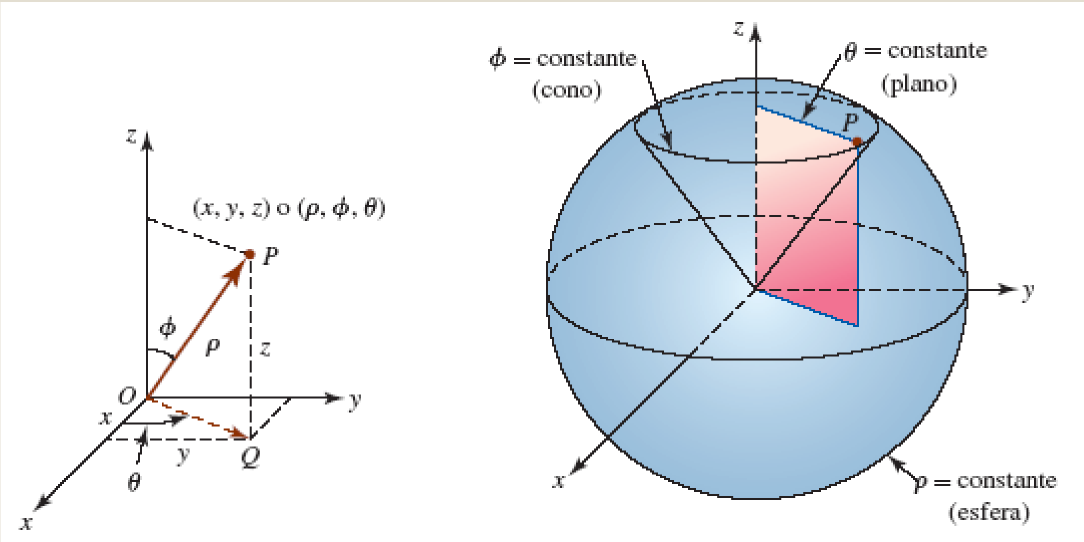
La segunda es el mismo ángulo de polares, medido desde el eje x positivo. La última es similar a θ, pero se mide desde el eje z positivo y como máximo vale 180°.

Como estas coordenadas son puramente espaciales, nos podemos ayudar con proyección del sólido, pero se suelen definir las tres al mismo tiempo directamente desde el sólido.

$$\iiint_Q f(\rho, \theta, \varphi) dV \qquad \text{Con } dV = \rho^2 sen\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

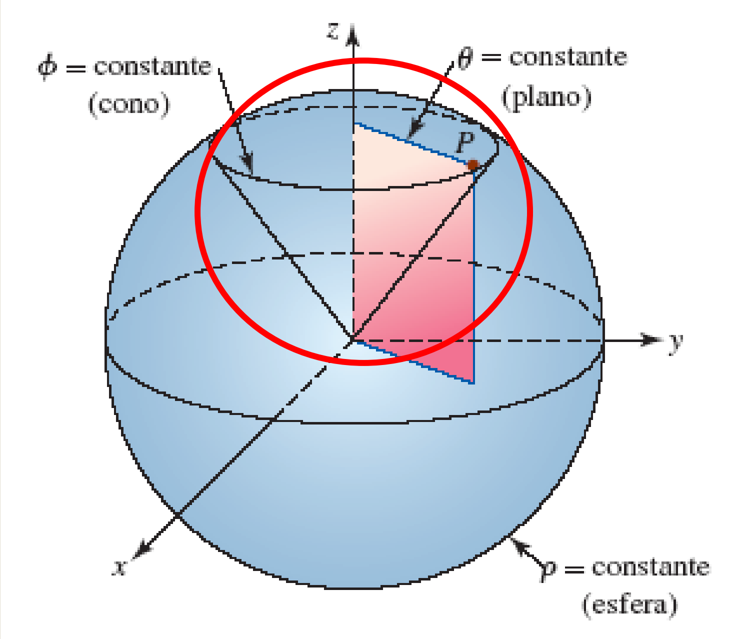
$$\begin{cases} x = \rho sen\varphi cos\theta \\ y = \rho sen\varphi sen\theta \\ z = \rho cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \theta = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \varphi = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$



Ejercicio 2 b) Calcular el volumen de la región Q acotada arriba por la esfera $\rho = a$ y abajo por el cono $\varphi = c$, con $0 < c < \frac{\pi}{2}$

Estamos en un caso donde dos coordenadas tienen valor constante, podemos ayudarnos del gráfico anterior:



Ya el ejercicio lo indica, tenemos como base un cono ($\varphi = cte$) y como techo una esfera ($\rho = cte$), con lo cual resulta algo similar a un cono de helado, justamente es el cono que se encuentra dibujado sobre la esfera.

Luego veremos que sucede con el intervalo del valor de c.

Para definir los intervalos de cada variable:

ρ: Como el origen forma parte del sólido, entonces siempre iniciamos desde 0, y luego tenemos como superficie techo el casquete esférico cuya expresión es $\rho = a$.

θ: Es el ángulo de rotación sobre el plano xy. El cono en este caso da toda la vuelta, si lo proyectáramos sobre el piso, nos daría una circunferencia completa.

φ: El ángulo de inclinación desde el eje z positivo. Como el eje positivo forma parte del sólido, entonces el ángulo inicia desde 0 y llegará hasta el cono que tiene valor $\varphi = c$.

Por lo tanto, el sólido: $Q\!:\{(\rho,\theta,\varphi) \in R^3 / 0 \le \rho \le a\,;0 \le \theta \le 2\pi\,;0 \le \varphi \le c\}$

Y su volumen será:

$$\iiint_Q f(\rho,\theta,\varphi)dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{c}\int_0^{a}\rho^2 sen\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

En este caso como todos los límites son constantes, el orden de integración es indistinto.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{c}\int_0^{a}\rho^2 sen\varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{c}\frac{\rho^3}{3}\Big]_0^a sen\varphi d\varphi d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{c} sen\varphi d\varphi d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(-cos\varphi)\Big]_0^c d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{3}[-\cos(c)-(-cos0)]\int_0^{2\pi}d\theta = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi a^3[1-\cos(c)]}$$

Si ahora consideramos los extremos de c:

$$\boxed{c=0} \longrightarrow \frac{2}{3}\pi a^3[1-\cos(0)] = \frac{2}{3}\pi a^3[1-1] = \boldsymbol{0}$$

Cuando $c = 0$ no tengo apertura desde el eje z, como un paraguas cerrado, por lo tanto, no tengo un volumen.

$$\boxed{c=\frac{\pi}{2}} \longrightarrow \frac{2}{3}\pi a^3\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2}{3}\pi a^3[1-0] = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi a^3}$$

En este caso la apertura es hasta la mitad, hasta el plano xy y tenemos como resultado media esfera.

Si $c = \pi$, pudiera tomar su valor máximo, tendríamos la esfera completa.

$$\boxed{c=\pi} \longrightarrow \frac{2}{3}\pi a^3[1-\cos(\pi)] = \frac{2}{3}\pi a^3[1-(-1)] = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a^3\ (Vol.Esfera)}$$

MASA, CENTRO DE MASA Y MOMENTO DE INERCIA

Si queremos calcular la masa de una placa debemos integrar la función densidad de masa sobre la respectiva región:

$$m = \iint_R \delta(x,y)dA$$

Para las coordenadas del centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_R y\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA}$$

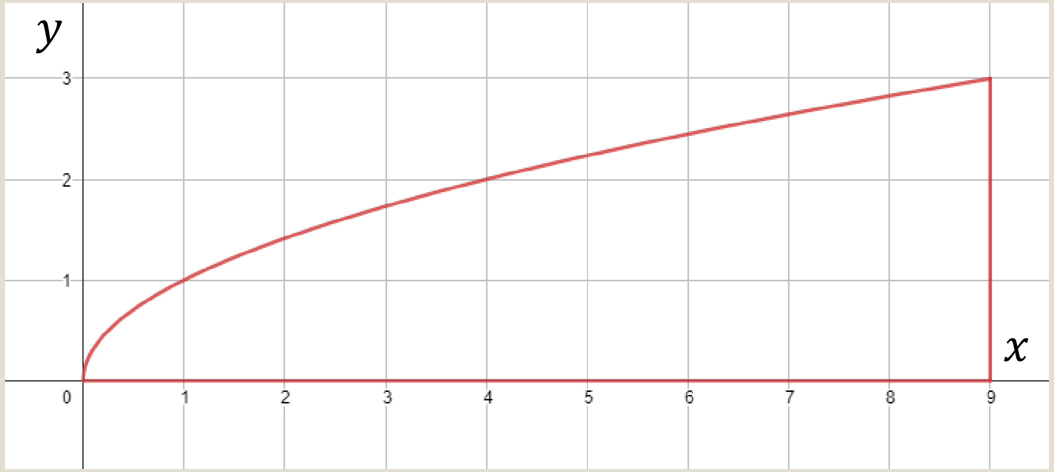
Los momentos de inercia:

$$I_x = \iint_R y^2\delta(x,y)dA \qquad I_y = \iint_R x^2\delta(x,y)dA$$

$$I_z = \iint_R (x^2+y^2)\delta(x,y)dA = I_x + I_y$$

Ejercicio 3c) Calcular masa, centro de masa y momentos de inercia de una placa definida entre las siguientes curvas: $y = \sqrt{x}$ $\quad y = 0$ $\quad x = 9$ $\quad \delta(x, y) = x + y$

Grafiquemos para definir la región y sus correspondientes límites de integración:



Para evitar la presencia de la raíz en los límites, podemos definir la región Tipo II:

$$R_{TII}: \{(x, y) \in R^2 / y^2 \leq x \leq 9 \,; 0 \leq y \leq 3\}$$

La masa de la placa será:

$$m = \iint_R \delta(x, y) dA = \int_0^3 \int_{y^2}^9 (x + y) dx dy$$

$$\int_0^3 \int_{y^2}^9 (x+y)dxdy = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg]_{y^2}^9 dy = \int_0^3 \left[\left(\frac{81}{2} + 9y\right) - \left(\frac{y^4}{2} + y^3\right)\right] dy =$$

$$\int_0^3 \left(-\frac{y^4}{2} - y^3 + 9y + \frac{81}{2}\right) dy = \left(-\frac{y^5}{10} - \frac{y^4}{4} + \frac{9}{2}y^2 + \frac{81}{2}y\right)\Bigg]_0^3 = -\frac{243}{10} - \frac{81}{4} + \frac{81}{2} + \frac{243}{2} = \boldsymbol{\frac{567}{10}}[\boldsymbol{M}]$$

Masa de la placa, valor positivo.

Coordenadas del centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA} = \frac{\int_0^3 \int_{y^2}^9 x(x+y)dxdy}{\int_0^3 \int_{y^2}^9 (x+y)dxdy} = \frac{\int_0^3 \int_{y^2}^9 (x^2+xy)dxdy}{\frac{567}{10}}$$

$$\int_0^3 \int_{y^2}^9 (x^2+xy)dxdy = \int_0^3 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}y\right)\Bigg]_{y^2}^9 dy = \int_0^3 \left[\left(\frac{729}{3} + \frac{81}{2}y\right) - \left(\frac{y^6}{3} + \frac{y^5}{2}\right)\right] dy =$$

$$\int_0^3 \left(-\frac{y^6}{3} - \frac{y^5}{2} + \frac{81}{2}y + 243\right) dy = \left(-\frac{y^7}{21} - \frac{y^6}{12} + \frac{81}{4}y^2 + 243y\right)\Bigg]_0^3 = -\frac{2187}{21} - \frac{729}{12} + \frac{729}{4} + 729 = \frac{10449}{14}$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA} = \frac{\frac{10449}{14}}{\frac{567}{10}} = \mathbf{\frac{645}{49}}\,[\boldsymbol{L}]$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA} = \frac{\int_0^3\int_{y^2}^9 y(x+y)dxdy}{\int_0^3\int_{y^2}^9 (x+y)dxdy} = \frac{\int_0^3\int_{y^2}^9 (xy+y^2)dxdy}{\frac{567}{10}}$$

$$\int_0^3\int_{y^2}^9 (xy+y^2)dxdy = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2}y + xy^2\right)\Big]_{y^2}^{9} dy = \int_0^3 \left[\left(\frac{81}{2}y + 9y^2\right) - \left(\frac{y^5}{2} + y^4\right)\right] dy =$$

$$\int_0^3 \left(-\frac{y^5}{2} - y^4 + 9y^2 + \frac{81}{2}y\right) dy = \left(-\frac{y^6}{12} - \frac{y^5}{5} + 3y^3 + \frac{81}{4}y^2\right)\Big]_0^3 = -\frac{729}{12} - \frac{243}{5} + 81 + \frac{729}{4} = \frac{1539}{10}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\delta(x,y)dA}{\iint_R \delta(x,y)dA} = \frac{\frac{1539}{10}}{\frac{567}{10}} = \mathbf{\frac{19}{7}}\,[\boldsymbol{L}]$$

Momentos de Inercia:

$$I_x = \iint_R y^2\delta(x,y)dA = \int_0^3 \int_{y^2}^{9} (xy^2 + y^3)dxdy = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2}y^2 + xy^3\right)\Bigg]_{y^2}^{9} dy =$$

$$\int_0^3 \left[\left(\frac{81}{2}y^2 + 9y^3\right) - \left(\frac{y^6}{2} + y^5\right)\right]dy = \int_0^3 \left(-\frac{y^6}{2} - y^5 + 9y^3 + \frac{81}{2}y^2\right)dy = \left(-\frac{y^7}{14} - \frac{y^6}{6} + \frac{9}{4}y^4 + \frac{81}{6}y^3\right)\Bigg]_0^3$$

$$= -\frac{2187}{14} - \frac{729}{6} + \frac{729}{4} + \frac{2187}{6} = \mathbf{\frac{7533}{28}}[\boldsymbol{M * L^2}]$$

$$I_y = \iint_R x^2\delta(x,y)dA = \int_0^3 \int_{y^2}^{9} (x^3 + x^2\,y)dxdy = \int_0^3 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}y\right)\Bigg]_{y^2}^{9} dy =$$

$$\int_0^3 \left[\left(\frac{6561}{4} + \frac{729}{3}y\right) - \left(\frac{y^8}{4} + \frac{y^7}{3}\right)\right]dy = \int_0^3 \left(-\frac{y^8}{4} - \frac{y^7}{3} + 243y + \frac{6561}{4}\right)dy = \left(-\frac{y^9}{36} - \frac{y^8}{24} + \frac{243}{2}y^2 + \frac{6561}{4}y\right)\Bigg]_0^3$$

$$= -\frac{19683}{36} - \frac{6561}{24} + \frac{2187}{2} + \frac{19683}{4} = \mathbf{\frac{41553}{6}}[\boldsymbol{M * L^2}]$$

¡Los Momentos de Inercia son siempre Positivos!