INTEGRALES DOBLES - REGIONES DE INTEGRACIÓN

Expresamos la integral doble de una función de dos variables a lo largo de una región plana R de la siguiente manera:

$$\iint_R f(x,y)dA$$

Donde R es la región de integración en el plano de las variables independientes.

En coordenadas cartesianas existen tres tipos de regiones:

Región rectangular: Una región con forma de rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes cartesianos. Tanto la variable x como y se mueven entre valores constantes.

Región tipo I: Es aquella en la cual la variable x se mueve entre constantes e y entre funciones de x.

Región tipo II: Es aquella en la cual la variable y se mueve entre constantes y x entre funciones de y.

EJEMPLO 1)

Graficar las regiones correspondientes a los límites de integración, identificando de qué tipo de región se trata y modificar el orden de integración.

$$\int_{1}^{2}\int_{1-x}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

Para identificar la región debemos identificar las curvas que la componen, siendo necesaria una lectura de los límites de integración con sus respectivos diferenciales.

Las integrales se leen de adentro hacia afuera, con lo cual asociamos:

$x = 2$

$y = \sqrt{x}$

$$\int_{1}^{2}\int_{1-x}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

$y = 1 - x$

$x = 1$

La integral con límites constantes es la primera en escribirse y la última en resolverse.

Es decir que las curvas que delimitan la región son:

$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 1 - x \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{y}$ se mueve entre funciones de $\boldsymbol{x}$.

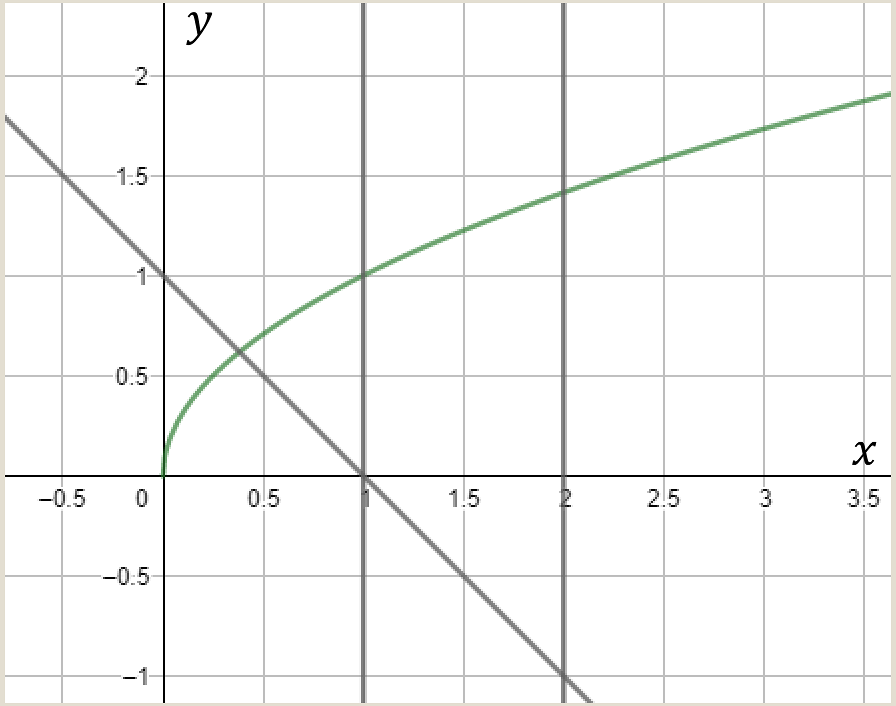
Se trata entonces de una región Tipo I.

$\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{x}$ se mueve entre constantes.

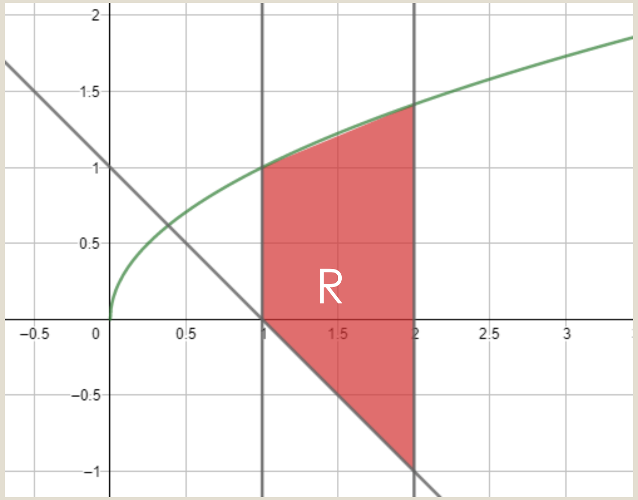
Grafiquemos las curvas:

$x = 1$ y $x = 2$ son dos rectas verticales que nos delimitan el ancho de la región.

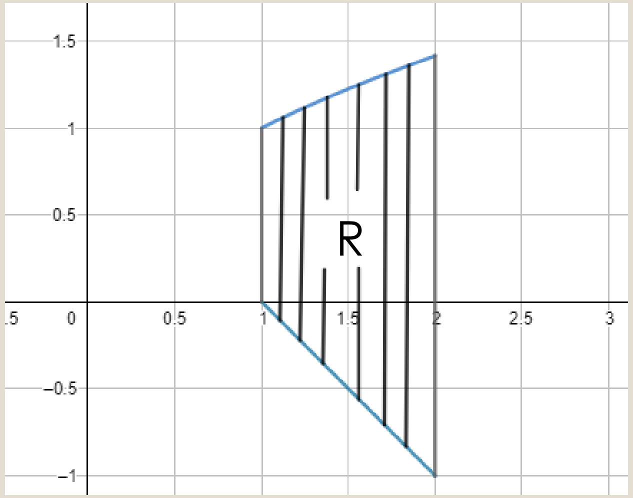
Luego $\boldsymbol{y}$ se mueve entre funciones de $\boldsymbol{x}$; estas funciones harán de techo y piso de la región.



La región a estudiar será la que quede comprendida entre las curvas graficadas:



Sin embargo, para indicarlas se lo hace con líneas, en este caso verticales por ser región Tipo I. A su vez podemos eliminar los tramos de las curvas que no pertenezcan a la región y así simplificar el gráfico.



Expresión analítica de la región

$$R_{TI}\!:\{(x,y) \in R^2 / 1 \leq x \leq 2\,; 1 - x \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

Lo que debemos hacer ahora es invertir los límites de integración, para ello debemos caracterizar la región según el otro tipo. Es decir, si nuestra región es Tipo I, ahora debemos pasarla a Tipo II, provocando así un cambio en el orden de integración.

Volvamos a la integral inicial: $$\int_{1}^{2}\int_{1-x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$$

Mirando de adentro hacia afuera vemos que la primera integral se corresponde con la variable $\boldsymbol{y}$, la cual se mueve entre funciones de $\boldsymbol{x}$ (región Tipo I); luego sigue la integral correspondiente a $\boldsymbol{x}$, la cual se mueve entre constantes (región Tipo I). A observar:

Al aplicar los límites de la integral respecto de $\boldsymbol{y}$, aparecen funciones de $\boldsymbol{x}$, variable de la cual ya aplicamos la integral anteriormente

$$\cancel{\int_{1-x}^{\sqrt{x}}\int_{1}^{2} f(x,y)dxdy}$$

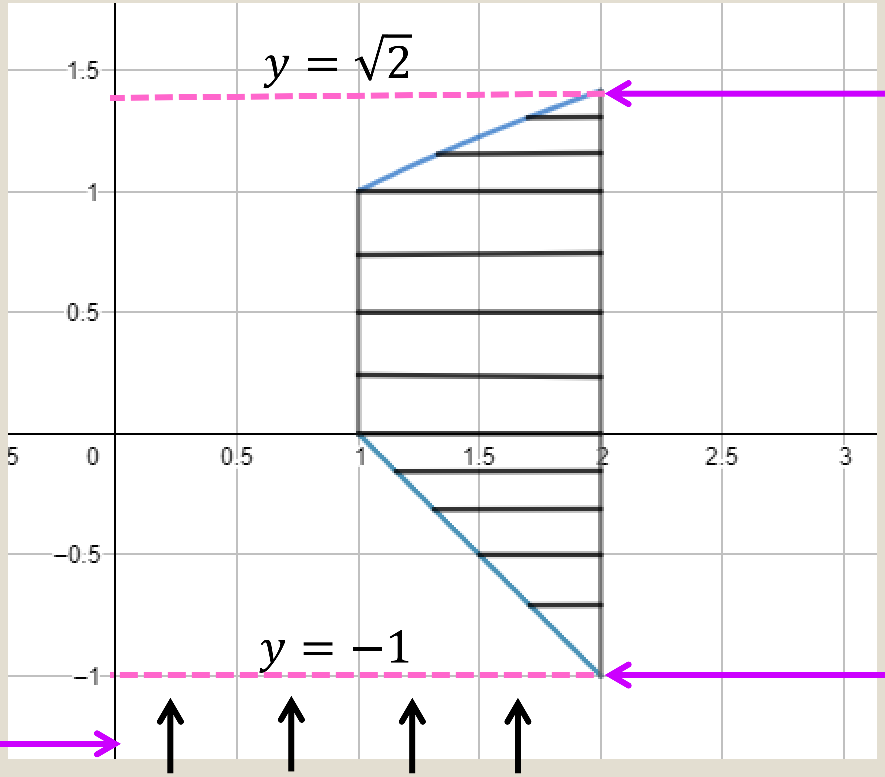
Integro primero respecto a $\boldsymbol{x}$.

Por último, respecto a $\boldsymbol{y}$.

Y esto debe ser así, ya que no podemos tener al final de una integral, límites de integración que posean una variable respecto de la cual ya se integró.

Es por eso que cada tipo de región nos establece un orden específico de integración, el cual si deseamos invertir nos obligará a modificar la caracterización de la región.

Para pasar a Tipo II imaginemos la región horizontalmente:



Extremo superior: Intersección entre las curvas $x = 2$ e $y = \sqrt{x}$

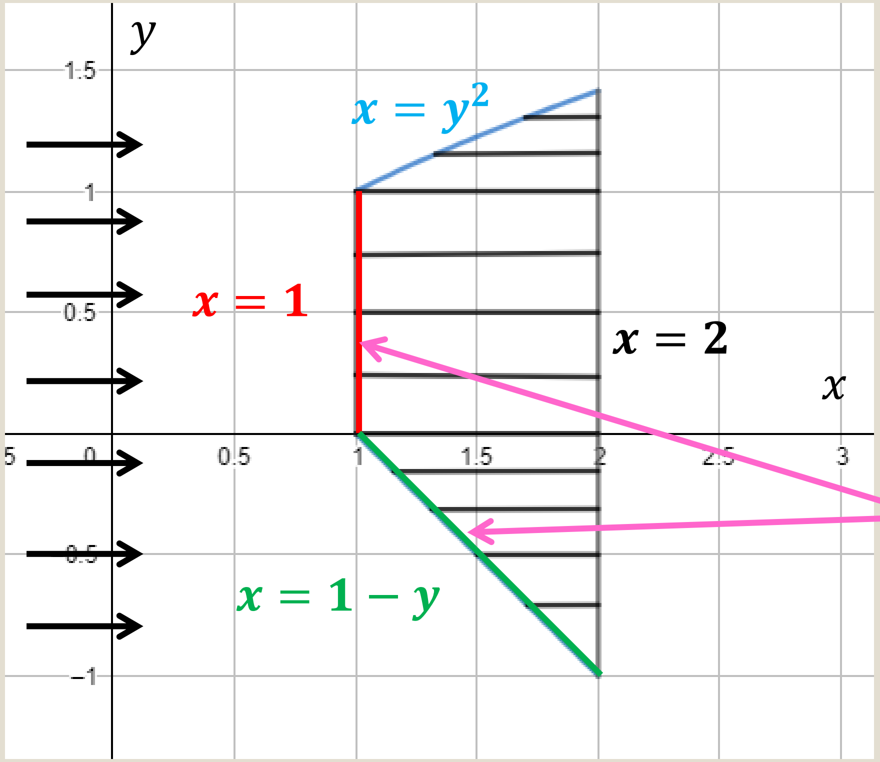
Extremo inferior: Intersección entre las curvas $x = 2$ y $y = 1 - x$

Lectura ascendente en $\boldsymbol{y}$.

Lo primero que debemos fijar es la variable que se mueve entre constantes, en este caso es $\boldsymbol{y}$. Mirando los extremos de la región vemos que $\boldsymbol{y}$ se mueve entre -1 y $\sqrt{2}$. Estas son dos rectas horizontales que delimitan el alto de la región.

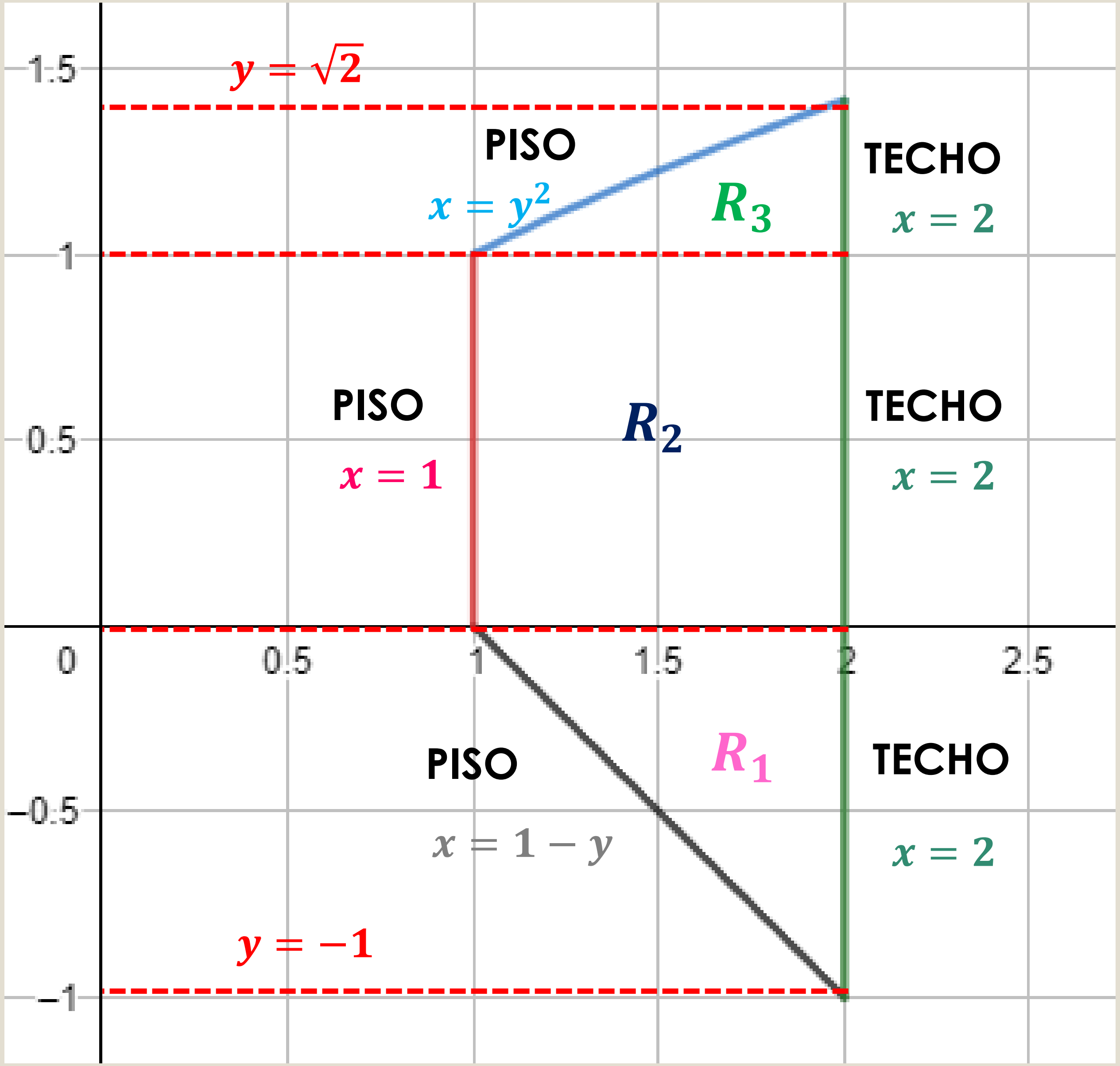
Luego nos fijamos en la otra variable, en este caso $\boldsymbol{x}$, la cual se moverá entre funciones de $\boldsymbol{y}$. Estas funciones, de izquierda a derecha, ofician de piso y techo de la región. Las expresiones de estas funciones las obtenemos de las funciones que ya tenemos, pero despejando $\boldsymbol{x}$ como función de $\boldsymbol{y}$. Sin embargo, a lo largo de la región, cuando $\boldsymbol{y}$ se mueve entre -1 y $\sqrt{2}$, vemos que el piso de la región se va modificando. Esto nos exige una partición de la región.

Lectura de izquierda a derecha en $\boldsymbol{x}$.



Diferentes curvas iniciales.

Para hacer la partición, debemos hacer que la variable $\boldsymbol{y}$ vaya variando en intervalos en los cuales el piso y techo de la región sean únicos.



Escribimos las expresiones analíticas correspondientes a cada región:

Punto inferior de la región

$$R_1: \{(x, y) \in R^2 / 1 - y \leq x \leq 2\,; -1 \leq y \leq 0\}$$

Piso y Techo en cada Subregión.

El final de una región es el inicio de la siguiente.

$$R_2: \{(x, y) \in R^2 / 1 \leq x \leq 2\,; 0 \leq y \leq 1\}$$

$$R_3: \{(x, y) \in R^2 / y^2 \leq x \leq 2\,; 1 \leq y \leq \sqrt{2}\}$$

Punto superior de la región

Observar que R_2 es una región rectangular, ambas variables se mueven entre valores constantes.

El orden de integración en estas regiones es indistinto.

Finalmente armamos la integral utilizando la región Tipo II. Tendremos una integral por cada región caracterizada.

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R1} f(x,y)dA + \iint_{R2} f(x,y)dA + \iint_{R3} f(x,y)dA$$

Para completar las integrales, los límites inferiores establecidos gráficamente y en las expresiones analíticas serán los límites inferiores en las integrales; de igual manera los límites superiores.

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dA = \int_{-1}^{0}\int_{1-y}^{2} f(x,y)dxdy + \int_{0}^{1}\int_{1}^{2} f(x,y)dxdy + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{y^2}^{2} f(x,y)dxdy}$$

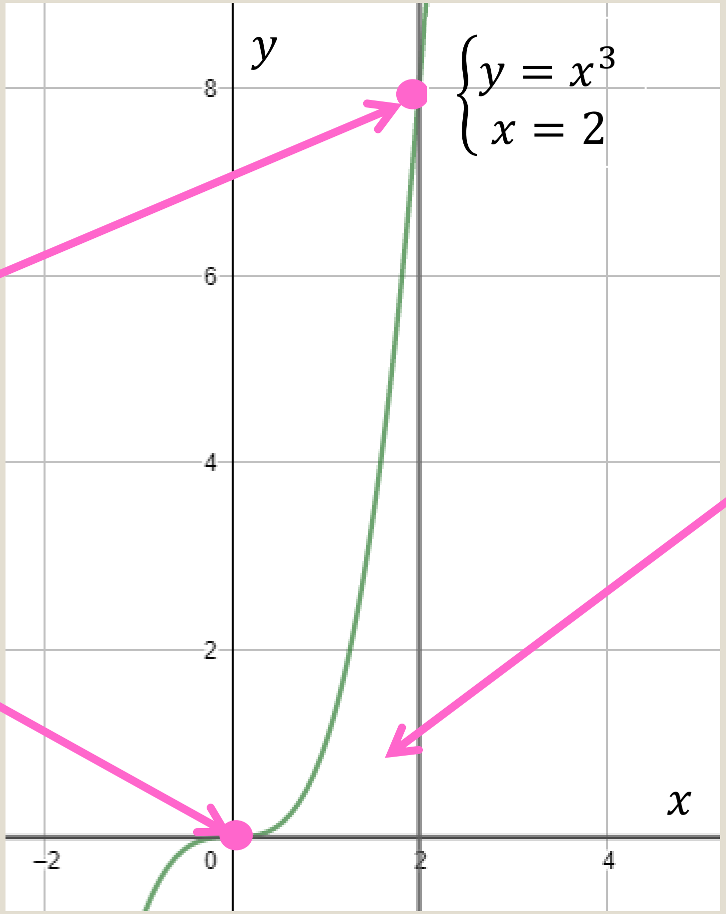
Observar que el orden de los diferenciales (orden de integración) se invirtió. Leyendo de adentro hacia afuera, los límites de cada integral se corresponden con los límites de sus respectivas variables. Y el orden de integración es tal que siempre la integral externa posee límites de integración constantes.

Es importante la elección del tipo de región a la hora de resolver un ejercicio, ya que de ello dependerá lo fácil o complejo en la resolución.

EJEMPLO 2) Establecer límites de integración para la región delimitada por:

a) $y = x^3 \qquad x = 2 \qquad y = 0$

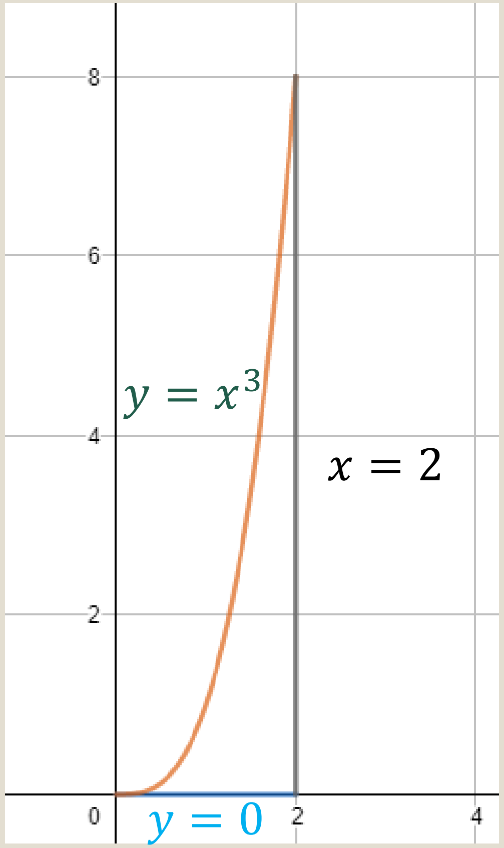
Grafiquemos las curvas:



Obtenemos los puntos de intersección igualando ecuaciones.

Identificamos el área encerrada.

Observamos el gráfico, seleccionamos el tipo de región a utilizar y procedemos:



Si es Tipo I:

$$R_{TI}:\{(x,y) \in R^2/0 \leq x \leq 2\,;0 \leq y \leq x^3\}$$

$$\int_0^2 \int_0^{x^3} f(x,y)dydx$$

Si es Tipo II:

$$R_{TII}:\{(x,y) \in R^2/\sqrt[3]{y} \leq x \leq 2\,;0 \leq y \leq 8\}$$

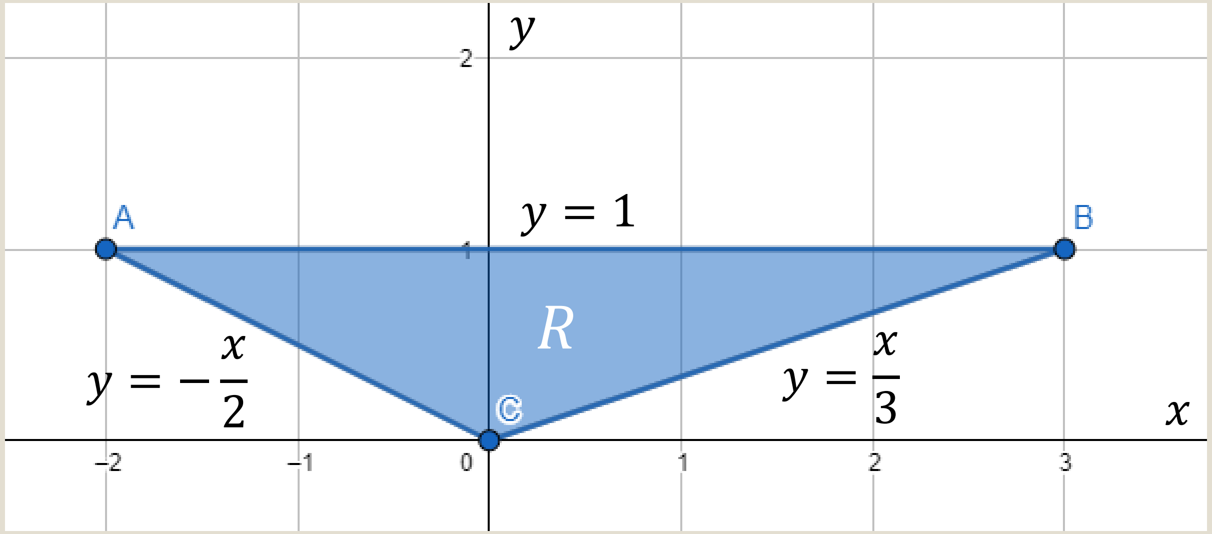
$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} f(x,y)dxdy$$

Esta región es sencilla de caracterizar según ambos tipos, sin embargo, viendo los límites de integración, tal vez sea mejor usar Tipo I para evitar la raíz cúbica.

La expresión de $f(x,y)$ también nos puede inducir que límites de integración son convenientes entre región Tipo I y II.

b) Región triangular con vértices en: $(0,0); (3,1); (-2,1)$.

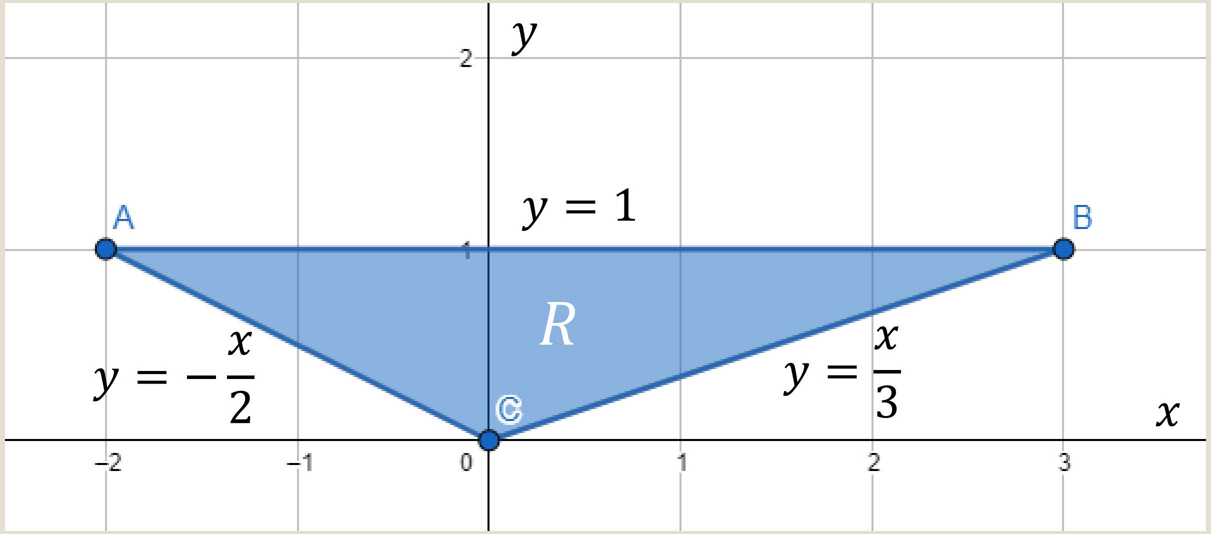
Para identificar la región colocamos los puntos sobre el plano y los unimos mediante segmentos rectos para formar el triángulo.



Para poder caracterizar la región debemos identificar las curvas frontera del triángulo.

En todos los casos de tratan de rectas, podemos utilizar recta entre dos puntos para hallar sus ecuaciones.

Viendo la región en forma vertical (Tipo I), vemos que sobre todo su ancho la curva inferior (piso) se modifica, obligándonos a partir la región, con lo cual sería conveniente caracterizarla del Tipo II.



Región Tipo II:

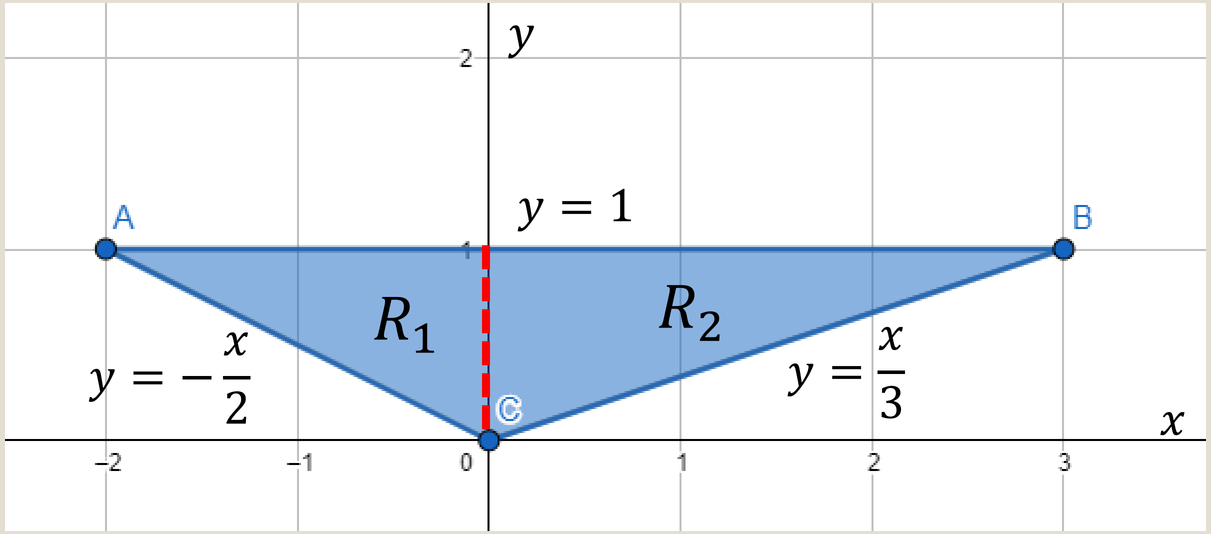
Empezamos con los valores de $\boldsymbol{y}$. Observando de abajo hacia arriba, los puntos extremos sobre el eje vertical son 0 y 1.

Luego miramos $\boldsymbol{x}$ desde izquierda a derecha. A lo largo de todo el alto de la región, la primera curva que nos cruzamos a la izquierda es la recta AC (piso) y continuando hacia la derecha tenemos la recta CB (techo). En ambas rectas despejamos $\boldsymbol{x}$ en función de $\boldsymbol{y}$.

Por lo tanto, la expresión analítica y la integral resultarán:

$$\boxed{R_{TII}: \{(x, y) \in R^2 / -2y \leq x \leq 3y \,; 0 \leq y \leq 1\}} \longrightarrow \boxed{\int_0^1 \int_{-2y}^{3y} f(x, y)\,dx\,dy}$$

Completar en clase como sería la caracterización de la región Tipo I



$$R_1 : \{(x, y) \in R^2 / -2 \leq x \leq 0 \,; -\frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$$

$$R_2 : \{(x, y) \in R^2 / 0 \leq x \leq 3 \,; \frac{x}{3} \leq y \leq 1\}$$

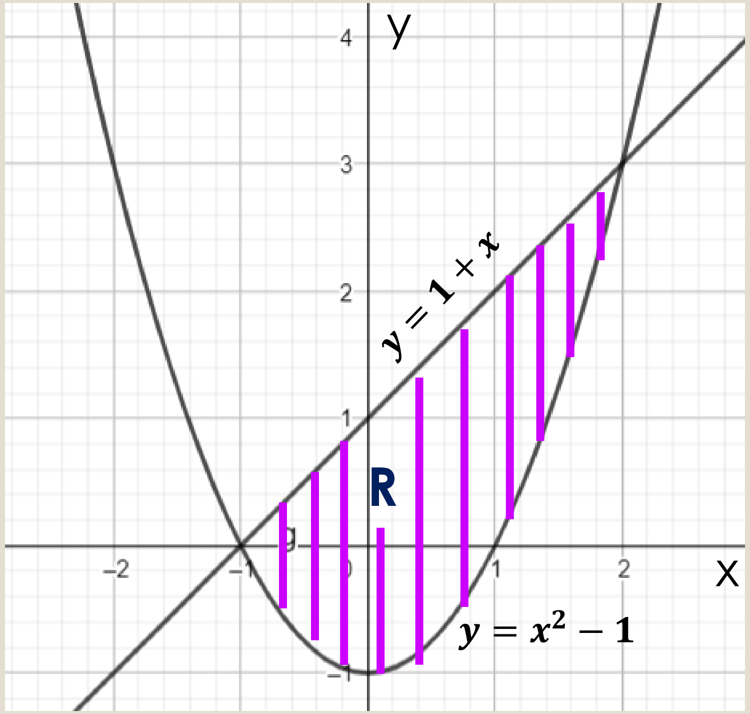
$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_{R1} f(x, y)dA + \iint_{R2} f(x, y)dA$$

$$\boxed{\iint_R f(x, y)dA = \int_{-2}^{0}\int_{-\frac{x}{2}}^{1} f(x, y)dydx + \int_{0}^{3}\int_{\frac{x}{3}}^{1} f(x, y)dydx}$$

EJEMPLO Dada la función $f(x,y) = x + x^2y$ donde R es la región delimitada por $y = x^2 - 1\,;\, y = 1 + x$

Se quiere calcular $\iint_R f(x,y)dA$

Grafiquemos las curvas:



$$R_{TI}: \{(x,y) \in R^2 / -1 \leq x \leq 2\,;\, x^2 - 1 \leq y \leq 1 + x\}$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2-1}^{1+x}(x + x^2y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{2}\left(xy + x^2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2-1}^{1+x} dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}\left[x(1+x) + x^2\frac{(1+x)^2}{2}\right] - \left[x(x^2-1) + x^2\frac{(x^2-1)^2}{2}\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{2}\left[x^2 + 2x + \frac{3}{2}x^4 - \frac{x^6}{2}\right]dx = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{14}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{234}{35}$$