Unidad 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias – Primera parte.

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Comprender conceptual y operativamente la noción de ecuación diferencial ordinaria de primer orden y su interpretación geométrica.
2. Distinguir los diferentes tipos de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria.
3. Determinar una familia de curvas ortogonales a otra familia dada.

Introducción

Es muy frecuente, en las ciencias y en la ingeniería, que se describan fenómenos estableciendo relaciones entre las “variaciones” de ciertas cantidades.
Por ejemplo:

Ejemplo 1.1: “El cambio en la concentración de un producto en cierta reacción química es proporcional a la cantidad de producto presente.”

Figura 1.1: En química interesa la velocidad con que se producen las reacciones.

Ejemplo 1.2: "La disminución en la velocidad de un pistón, por efectos de la resistencia del fluido en que se mueve, está en relación directa al cuadrado de la velocidad que lleva el pistón en cada instante".

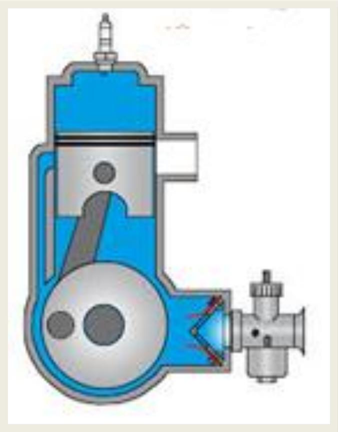

Figura 1.2: En mecánica es importante conocer la velocidad con que se mueven las piezas de un motor.

Ejemplo 1.3: "El volumen de un témpano de hielo disminuye en forma proporcional a la superficie del mismo expuesta a la radiación solar."

Figura 1.3: ¿Cuánto tardará en derretirse el témpano?

En cada uno de estos fenómenos, el modelo matemático que utilicemos para describirlos deberá necesariamente contener alguna magnitud que exprese "cambio", "tasa de variación", "velocidad"…

Volviendo al ejemplo 1.1, si $p(t)$ es la función que representa la concentración en el instante de tiempo t del producto que nos interesa, la ecuación que representa el fenómeno descripto será

$$p'(t) = k.p(t)$$

donde la derivada $p'(t)$ representa la variación temporal de la concentración, y k es una constante de proporcionalidad. Podría interesarnos conocer cómo varía con el tiempo la concentración p, y la ecuación anterior nos permitiría averiguarlo… (¿cómo?...)

El enunciado del ejemplo 1.2 podría expresarse

$$v'(t) = -K.v^2(t)$$

mientras que el enunciado del ejemplo 1.3 podría representarse por

$$V'(t) = -c.A(t)$$

donde $V(t)$ y $A(t)$ son funciones que expresan el volumen del témpano y su área expuesta, que necesariamente guardan entre sí alguna relación… Por ejemplo, en el caso simple – aunque poco realista – de que el témpano fuese un cubo de lado $L(t)$, serían $V(t) = L^3(t)$ y $A(t) = \frac{13}{9}L^2(t)$ (teniendo en cuenta que sólo la novena parte del témpano emerge fuera del agua) y podríamos tratar de resolver la ecuación para saber cómo varía la longitud del lado del cubo con el paso del tiempo…

En todos estos modelos aparece una ecuación que relaciona una función y su derivada…
En los ejemplos concretos que dimos, se trata de derivadas primeras, pero en otros problemas podrían también aparecer derivadas de mayor orden, y conocer la función involucrada nos permitiría predecir la evolución del sistema…

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Definición 1.1: Llamaremos *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) a toda ecuación que involucre a una función incógnita - de una única variable independiente - y a sus sucesivas derivadas, incluyendo eventualmente también a la variable independiente:

$$F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0$$

Definición 1.2: Llamaremos *orden de la ecuación diferencial* al mayor orden de derivación con que aparezca la función incógnita $y(x)$ en la ecuación diferencial:

$$F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0$$

es una EDO de orden n, con n un número natural mayor que 1.

Definición 1.3: Llamaremos *solución de la ecuación diferencial (en un intervalo I)* a toda función $\varphi(x)$, derivable por lo menos hasta el orden de la ecuación diferencial, que la satisfaga (vale decir, tal que reemplazada en la ecuación, junto a sus sucesivas derivadas, la verifique idénticamente).
Concretamente: si

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0$$

para todo valor de $x \in I$, entonces $\varphi(x)$ es solución de la EDO en el intervalo I.

Veamos algunos ejemplos…

Ejemplo 1.4: Consideremos la ecuación $p'(t) - 2p(t) = 0$, se trata de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden cuya incógnita es la función $p(t)$. Podría corresponder al ejemplo 1.1 si la constante de proporcionalidad k fuera 2.

En esta ecuación no aparece explícitamente la variable independiente t, salvo como argumento de la función incógnita.

Es sencillo verificar que $p(t) = e^{2t}$ es una solución de la ecuación para todo $t \in R$, porque la satisface idénticamente.

Pero observemos que también $p(t) = Ce^{2t}$ es solución en toda la recta real, cualquiera sea la constante C.

Si nos dijeran además que la concentración inicial del producto (en ciertas unidades convenientes) es, por ejemplo, 10, la función $p(t) = e^{2t}$ no lo verificaría (pues en $t = 0$ su valor es 1) pero $p(t) = 10e^{2t}$ sí verifica ambas condiciones:

$$\begin{cases} p'(t) - 2p = 0 \\ p(0) = 10 \end{cases}$$

Esto nos da la pauta de que una EDO puede tener *toda una familia* de soluciones posibles pero, añadiendo condiciones adicionales, se restringe la arbitrariedad en la elección de las mismas…

$$\begin{cases} p'(t) - 2p = 0 \\ p(0) = 10 \end{cases}$$

es lo que se llama un *problema de valores iniciales* (PVI).

Ejemplo 1.5: La ecuación $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden cuya incógnita es la función $y(x)$. En esta ecuación sí aparece explícitamente la variable independiente x. Observen que se la omite como argumento de la función incógnita pues, al aparecer explícitamente, se sobreentiende que es x la variable independiente y, por lo tanto, $y = y(x)$.
Comprueben que la función

$$y(x) = \frac{\mathrm{sen(x)}}{\sqrt{x}}$$

es una solución para $x > 0$, ya que la satisface idénticamente en esa semirrecta.
Con algo más de trabajo se puede comprobar que

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(C_1 sen(x) + C_2 \cos(x))$$

también es solución de la ecuación en la semirrecta de los reales positivos, cualesquiera sean las constantes reales arbitrarias C_1 y C_2.
No debería llamarnos la atención que el número de constantes arbitrarias coincida con el orden de la ecuación diferencial, ya que resolverla involucrará seguramente tantas integraciones como indique su orden, y cada vez que integremos aparecerá una constante de integración… Más adelante veremos en detalle este hecho.
Si nos dieran el dato adicional de que $y(\pi) = 0$ ¿cuánto debería valer C_2? ¿Y si fuera además $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$?
Otro interrogante interesante para un ingeniero sería: ¿es $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(C_1 sen(x) + C_2 \cos(x))$ el único tipo de solución posible? Porque si la ecuación representara un problema real, el hecho de que existiera más de una solución no nos permitiría predecir unívocamente el comportamiento futuro del sistema… Aparecen aquí dos cuestiones importantes: las de la *existencia* y la de la *unicidad* de soluciones de una EDO, aspectos que veremos reflejados en algunos de los siguientes ejemplos.[1]

Ejemplo 1.6: La ecuación $[z^{(5)}]^2 + (t^2 + 1)[z'']^4 + t^2 = 0$ es una EDO de quinto orden cuya incógnita es la función $z(t)$. Observen que la ecuación tiene la "forma" de un polinomio cuyas variables son $t, z, z', \dots, z^{(5)}$, ya que éstas aparecen sólo combinadas mediante productos, potencias naturales y sumas algebraicas. Como la derivada de mayor orden - $z^{(5)}$ - está elevada al cuadrado, se dice que la ecuación diferencial es *de segundo grado*; los ejemplos 1.4 y 1.5 corresponden a ecuaciones también de forma polinómica, pero de primer grado.
Presten atención a cómo se acostumbra indicar las derivadas de orden superior al tercero.
Observen que es imposible que esta ecuación tenga solución ya que $[z^{(5)}]^2$ es siempre mayor o igual que 0 mientras que $-(t^2 + 1)[z'']^4 - t^2$ es siempre menor o igual que 0. Vale decir: existen EDOs que carecen de solución…

[1] Existe un teorema que garantiza la existencia y unicidad de un problema de valor inicial, cuya demostración no haremos en este curso.

Ejemplo 1.7: La ecuación $[y''']^4 + sen(y) = 1$ es una EDO de tercer orden. A pesar de que la derivada de mayor orden está elevada a la cuarta potencia no se habla de “grado” de la ecuación en este caso, pues no tiene forma polinómica, ya que $sen(y)$ es una función trascendente.
“Por inspección” podemos asegurar que las funciones constantes de la forma $y(x) \equiv (2k+1)\frac{\pi}{2}$ con $k \in Z_{\geq 0}$ son soluciones. No podríamos determinar de manera sencilla si son las únicas soluciones posibles.

Observación: Hablamos de ecuaciones diferenciales *ordinarias* para referirnos a aquéllas en que la función incógnita depende de una única variable independiente. Veremos en este curso que una función puede depender de múltiples variables. En ese caso, las derivadas respecto de las distintas variables independientes se denominan *derivadas parciales* y se podrán entonces plantear *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* (EDP) cuyo estudio se realiza en cursos superiores de cálculo.

Volvamos a las EDOs y formalicemos algunos aspectos que observamos en los ejemplos…

Definición 1.4: Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden *n*, $F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$, una solución que depende de *n* constantes arbitrarias, $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, se denomina *solución general* (SG) *de la ecuación diferencial.* Se trata, en realidad, de toda una familia de soluciones; se llama *familia n-paramétrica* pues depende de *n* parámetros arbitrarios.

Definición 1.5: Dada la ecuación diferencial ordinaria de orden *n*, $F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$, si se establecen *n* condiciones que permitan otorgar valores a las *n* constantes arbitrarias de una solución general $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, obtendremos lo que se denomina una *solución particular* (SP) *de la ecuación diferencial.*

Definición 1.6: Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden *n*, $F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$, si se tiene una solución $\psi(x)$ que no se obtiene otorgando valores a las constantes arbitrarias de una solución general, se dice que es una *solución singular* (SS) *de la ecuación diferencial.*

Ejemplo 1.8: Las funciones $p(t) = Ce^{2t}$ constituyen la solución general (SG) de la ecuación $p'(t) - 2p(t) = 0$ mientras que $p(t) = 10e^{2t}$ es la solución particular (SP) del PVI $\begin{cases} p'(t) - 2p = 0 \\ p(0) = 10 \end{cases}$

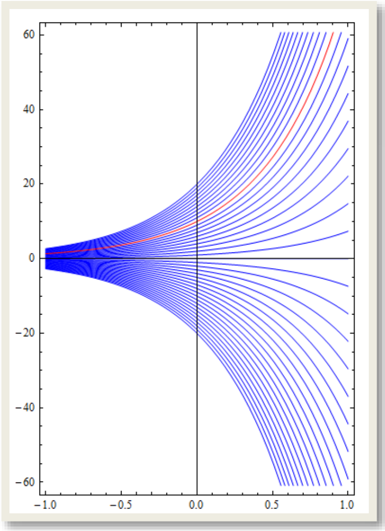

Figura 1.4: La solución general y una solución particular para el problema del ejemplo 1.8

En la figura 1.4 observamos, en color azul, cuarenta miembros de la familia uniparamétrica de soluciones $F = \{Ce^{2t}, C \in R\}$ y, destacada en color rojo, la solución particular que en $t = 0$ vale 10. Observemos que podríamos "tapizar" todo el plano con curvas de la familia, tomando infinidad de valores de la constante C: por cada punto del plano pasa una solución de la EDO $p' - 2p = 0$.
Las curvas de la familia no se cortan entre sí, por lo que por cada punto del plano pasa una única solución de esta ecuación diferencial.

Ejemplo 1.9: La ecuación diferencial ordinaria de primer orden y segundo grado

$$y.[(y')^2 + 1] - 2xy' = 0$$

tiene como solución general la familia de parábolas $F = \{y^2 + c^2 = 2cx, c \in R\}$.
En efecto: si derivamos respecto de x la expresión $y^2 + c^2 = 2cx$ obtenemos $2y.y' = 2c$ de modo que para estas curvas es $y.y' = c$.
Reemplazando en $y^2 + c^2 = 2cx$ obtenemos

$$y^2 + (y.y')^2 = 2xy.y'$$
$$y^2 + y^2(y')^2 - 2xy.y' = 0$$
$$y[y + y(y')^2 - 2x.y'] = 0$$

por lo que o bien $y(x)$ es la función idénticamente nula (lo que ocurre cuando $c = 0$) o bien verifica la ecuación $y + y(y')^2 - 2x.y' = 0$, como queríamos comprobar.

$y^2 + c^2 = 2cx$ es, entonces, la solución general de la ecuación de primer orden $y.[(y')^2 + 1] - 2xy' = 0$, ya que satisface la ecuación y depende de una constante arbitraria (observemos que hay una sola constante arbitraria, aunque aparece dos veces en la expresión).
Si nos interesara la solución de la ecuación que además verifique, por ejemplo, $y(1) = 1$, podremos obtener una solución particular dando un valor a la constante:

$$y(1) = 1 \quad \rightarrow \quad 1^2 + c^2 = 2c \quad \rightarrow \quad c = 1$$

por lo que la parábola de ecuación $y^2 + 1 = 2x$ es solución del problema

$$\begin{cases} y.[(y')^2 + 1] - 2xy' = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Pero veamos que en este caso la solución no es única…

Es sencillo verificar, por reemplazo directo, que las rectas $y = x$ e $y = -x$ también son soluciones de la EDO, pero claramente no son miembros particulares de la familia de parábolas: se trata de soluciones singulares (SS).
En el gráfico que se ofrece a continuación se ven en color azul ocho miembros de la familia de parábolas, y en color rojo, las dos soluciones singulares.
En general, las soluciones singulares resultan ser *curvas envolventes* de la familia de soluciones generales; el porqué del término “envolvente” resulta claro en el gráfico.

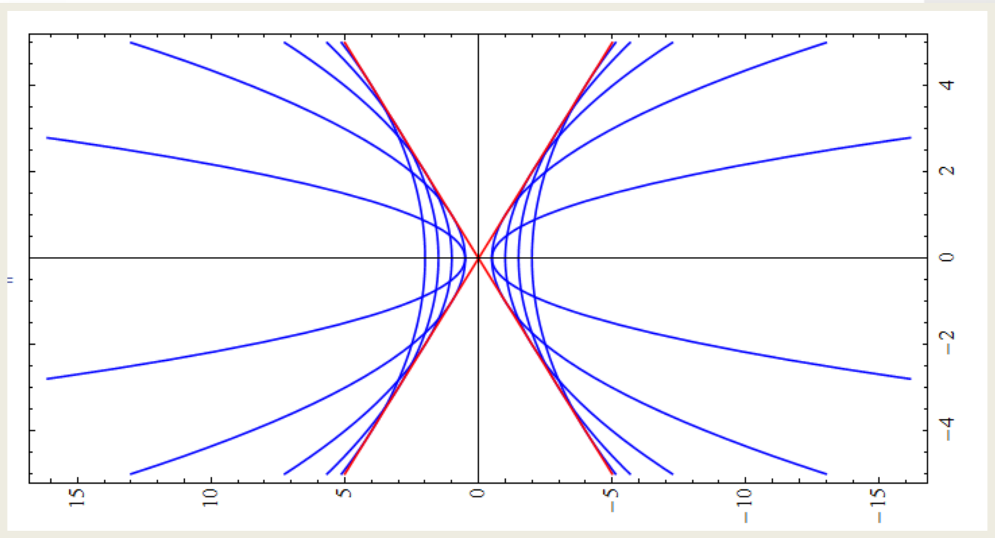

Figura 1.5: Varios miembros de la familia SG y una solución singular para el problema del ejemplo 1.9

Observen que en este problema no hay unicidad de soluciones ya que hay puntos del plano por los que pasa más de una solución. Precisamente por el punto $(1,1)$ pasan la solución particular $y^2 + 1 = 2x$ y la singular $y = x$.

Actividad para resolver y discutir en el Foro

Actividad 1.1: ¿Qué relación geométrica encuentran entre las rectas (envolventes) y las parábolas en la figura 1.5?

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

En esta primera parte del curso nos ocuparemos de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, vale decir, de las EDOs que tienen la forma

$$F\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0$$

y de los PVI de la forma

$$\begin{cases} F\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

donde $x_0, y_0 \in R$. En general, se elige $x_0 = 0$, y es por ello que se habla de "problema de valores *iniciales*".

Daremos, concretamente, métodos de resolución para dos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
El hecho de poder encontrar soluciones en estos casos, si se cumplen ciertas condiciones, despeja el problema de la existencia de solución en estos casos.

Ecuaciones de variables separadas (o variables separables)

Son las ecuaciones más sencillas de resolver. Seguramente lo utilizaron para tratar de resolver el problema del ejemplo 1.1.

Definición 1.7: Se llama *ecuación diferencial de variables separables* a la que es de la forma

$$f(y)y' + g(x) = 0$$

con $g(x)$ y $f\ (y)$ funciones continuas.

Para resolverla procedemos del siguiente modo

$$f(y)y' = -g(x)$$

ahora sólo nos resta integrar respecto de la variable independiente:

$$\int f(y)y'dx = -\int g(x)dx$$

Recordemos que $y = y(x)$ por lo que $y'dx = dy$ (recordar de Análisis Matemático I la definición de "diferencial de una función de una variable independiente").
Ahora sólo resta calcular las integrales:

$$\int f(y)dy = -\int g(x)dx$$

Ejemplo 1.10: Resolvamos con cierto cuidado la ecuación $p' - 2p = 0$

Podemos escribirla de la forma $f(p)p' = -g(t)$ considerando $f(p) = \frac{1}{p}$ mientras que $g(t) = 2$, pero esto requiere que p no se anule.
Pero observemos que la función idénticamente nula $p(t) \equiv 0$ es solución de la EDO, pues la función nula verifica que $p' - 2p = 0$.
Procedamos del siguiente modo entonces: en la ecuación $p' = 2p$ puede ocurrir que $p(t) \equiv 0$ (y ya tenemos así una primera solución) o bien $p(t) \neq 0$ por lo que podemos escribir

$$\frac{p'}{p} = 2$$

Ahora integramos:

$$\int \frac{p'}{p} dt = \int 2dt$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int 2dt$$

$$ln|p| = 2t + K$$

(Observemos que basta con poner la constante de integración en uno solo de los miembros).
Como buscamos la función $p(t)$:

$$e^{ln|p|} = e^{2t+K}$$
$$|p| = e^{2t}e^{K}$$

e^K es una nueva constante - arbitraria aunque siempre positiva - que podemos llamar A:

$$|p| = Ae^{2t} \quad \text{con } A \in R_{>0}$$

Sabemos que

$$|p| = \begin{cases} p & \text{si } p \geq 0 \\ -p & \text{si } p \leq 0 \end{cases}$$

Entonces la solución es

$$\begin{cases} p = \ Ae^{2t} & \text{con } A \in R_{>0} \ \text{ si } \ p \geq 0 \\ p = -Ae^{2t} & \text{con } A \in R_{>0} \ \text{ si } \ p \leq 0 \end{cases}$$

Pero entonces podemos reunir esta información en una sola expresión:

$$p(t) = \ Ce^{2t} \quad \text{con } C \in R_{>0} \cup R_{<0}$$

Recordemos que $p \equiv 0$ también es solución. Es posible incorporar la solución nula permitiendo que la constante valga también 0, y entonces podemos escribir la solución general del siguiente modo:

$$p(t) = \ Ce^{2t} \quad \text{con } C \in R$$

Obtenemos así la familia de exponenciales que constituye la SG de la ecuación diferencial dada, y cuyo gráfico ya vimos.

Ejemplo 1.11: Consideremos la ecuación diferencial $(x^2-4)y' - xy - \frac{x}{y} = 0$

En primer lugar, notemos que la derivada de la función incógnita, y', está multiplicada por el factor $x^2 - 4$. Este factor se anula para dos valores de la variable independiente: $x = -2$ y $x = 2$. Esos valores de la variable independiente se conocen como *puntos singulares* de la EDO (podemos pensar que, para esos valores de x, la ecuación diferencial pierde sentido, pues la derivada "desaparece"). No podemos anticipar de antemano qué ocurrirá con la solución en esos puntos, pero en principio sólo se puede asegurar que podremos resolver la ecuación en tres intervalos diferentes y excluyentes: $(-\infty,-2)$, $(-2{,}2)$ ó $(2,+\infty)$. Que podamos o no extender la solución a toda la recta dependerá de cada caso en particular.
Para $x \neq \pm 2$ es posible separar las variables efectuando operaciones algebraicas:

$$(x^2-4)y' = xy + \frac{x}{y}$$
$$(x^2-4)y' = x\frac{y^2+1}{y}$$
$$\frac{yy'}{y^2+1} = \frac{x}{x^2-4}$$

Luego se integra miembro a miembro respecto de la variable independiente:

$$\int \frac{yy'}{y^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2-4}dx$$

Recordando que $y'\,dx = dy$,

$$\int \frac{y}{y^2+1}dy = \int \frac{x}{x^2-4}dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}ln|x^2-4| + C$$

$$\ln(y^2+1) = ln|x^2-4| + K$$

$$= e^{ln|x^2-4|+K}$$

$$y^2+1 = e^{ln|x^2-4|}e^K$$

$$y^2+1 = A|x^2-4|$$

donde A es una constante positiva arbitraria. Se trata de una expresión *implícita* de la solución, puesto que la variable dependiente y no está despejada.
Observemos que esta expresión tiene diferentes significados, según el intervalo en que nos interesa la solución:

- Tanto en $(-\infty, -2)$ como en $(2, +\infty)$ es $|x^2-4| = x^2-4$ (¿por qué?). En estas dos semirrectas la SG es, entonces, $Ax^2 - y^2 = 4A + 1$ que representa una familia de hipérbolas.

- En $(-2,2)$ es $|x^2-4| = 4-x^2$ (¿por qué?). En este intervalo la SG es $Ax^2 + y^2 = 4A - 1$ que representa una familia de elipses para $A \geq \frac{1}{4}$.

Dependiendo del intervalo en que se encuentre x_0 de la condición inicial elegiremos una u otra familia de curvas para hallar la SP de un PVI específico.
En la figura 1.6 observamos, en color azul, algunos miembros de estas familias de soluciones y, en color rojo, las rectas que pasan por los puntos singulares y separan estas familias.

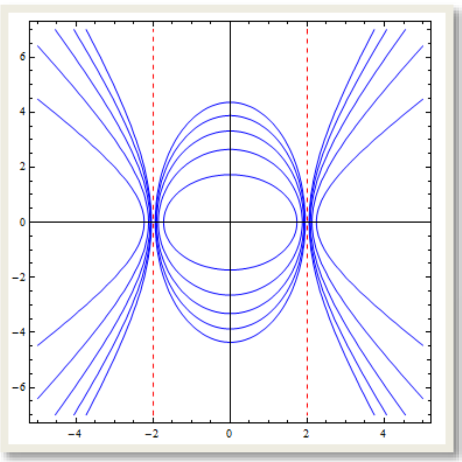

Figura 1.6: La familia de soluciones del ejemplo 1.11

En este caso, es imposible extender las soluciones a todo el eje real, pues los puntos -2 y 2 son puntos singulares de las curvas solución.

Verifiquen que la hipérbola $x^2 - 5y^2 = 9$ es solución del PVI

$$\begin{cases} (x^2-4)y' - xy - \dfrac{x}{y} = 0 \\ y(-3) = 0 \end{cases}$$

mientras que la parábola $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ es solución de

$$\begin{cases} (x^2-4)y' - xy - \dfrac{x}{y} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

¿Cómo determinamos estas soluciones particulares?

Actividades para resolver y discutir en el Foro

Actividad 1.2: Un cubito de hielo en un vaso de gaseosa se derrite siguiendo aproximadamente la ley del témpano cúbico del ejemplo 1.3, con una constante de proporcionalidad $c = 3\frac{cm}{min}$. Si originalmente es un cubo de $3cm$ de lado, ¿cuántos minutos tarda en tener $1cm$ de lado? Según esta "ley de derretimiento", ¿llega a desaparecer por completo el cubo? Discutan este hecho con sus compañeros en el foro.

Actividad 1.3: Se sabe que el pistón de un motor se está moviendo de manera amortiguada según la ley $v'(t) = -K.v^2(t)$ aunque no se conoce el valor de la constante de proporcionalidad K. Supongan que pueden medir con precisión la velocidad del pistón en cada instante. ¿Cómo podrían hacer para evaluar experimentalmente K? Si la velocidad se mide en $\frac{m}{s}$ ¿qué unidades debe tener esa constante?

Actividad 1.4: Demuestren que la ecuación diferencial $(y - xy)y' - y^2 + 1 = 0$ es de variables separables, hallen la SG y resuelvan el problema $\begin{cases} (y-xy)y' - y^2 + 1 = 0 \\ y(-2) = 1 \end{cases}$ (¡Cuidado!...: hay una pequeña "trampa" en este problema… Discútanlo con sus compañeros en el foro…)

Actividad 1.5: Resuelvan la ecuación diferencial $(x-1)y' + xy = x$ y prueben que la solución general puede extenderse de manera continua a toda la recta real, a pesar de haber un punto singular.

Actividad 1.6: La ecuación diferencial ordinaria $y''' + \frac{1}{x}y'' = \frac{2}{x}$ es de tercer orden. Sin embargo, como no aparecen ni y ni y', es posible utilizar un cambio de variables para convertirla en una ecuación de primer orden y resolverla. Este método se denomina *reducción del orden*. ¿Pueden resolverla? Recuerden dar la respuesta en términos de la función buscada $y(x)$.

Ecuaciones diferenciales lineales

Definición 1.8: Se llama *ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden* a la que es de la forma

$$p(x).y' + q(x).y = f(x)$$

con $p(x), q(x)$ y $f(x)$ funciones continuas en cierto intervalo I.

Definición 1.9: Se llama *ecuación homogénea* asociada (a la EDO lineal anterior) a la ecuación diferencial

$$p(x).y' + q(x).y = 0$$

Observemos que la ecuación lineal homogénea es de variables separadas. En efecto:

$$p(x).y' + q(x).y = 0$$

$$p(x).y' = -q(x).y$$

que tiene, por un lado, solución idénticamente nula, que indicaremos $y \equiv 0$, pero además, para los valores de x para los cuales $p(x) \neq 0$, resulta

$$\int \frac{y'}{y}dx = -\int \frac{q(x)}{p(x)}dx$$

$$ln|y| = -\int \frac{q(x)}{p(x)}dx + C$$

$$y = Ke^{-\int \frac{q(x)}{p(x)}dx} \quad \text{con } K \in R, K \neq 0$$

Esta última es la solución general de la ecuación lineal homogénea (SGH). Si permitimos que K tome el valor 0 incluiremos también a la solución nula que mencionamos más arriba.
Notemos que los valores de x para los cuales $p(x) = 0$ son puntos singulares de la ecuación, y probablemente determinen distintos intervalos de validez de la solución.
Veremos a continuación cómo encontrar, a partir de la SGH, la solución general de la ecuación no homogénea, pero antes de ello hagamos un par de observaciones:

i. Supongamos que tenemos dos funciones, $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$, que son soluciones de la ecuación lineal homogénea en un intervalo I, vale decir:

$$p(x).\varphi_1' + q(x).\varphi_1 = 0$$

$$p(x).\varphi_2' + q(x).\varphi_2 = 0$$

para todo $x \in I$.
Sean ahora $a, b \in R$. Entonces:

$$a.p(x).\varphi_1' + a.q(x).\varphi_1 = 0$$

$$b.p(x).\varphi_2' + b.q(x).\varphi_2 = 0$$

por lo que, sumando miembro a miembro,

$$a.p(x).\varphi_1' + a.q(x).\varphi_1 + b.p(x).\varphi_2' + b.q(x).\varphi_2 = 0$$

o bien

$$p(x).[a.\varphi_1' + b.\varphi_2'] + q(x).[a.\varphi_1 + b.\varphi_2] = 0$$

Esta última expresión nos está indicando que la nueva función, $\psi(x) = a.\varphi_1(x) + b.\varphi_2(x)$, que no es otra cosa que una *combinación lineal de* φ_1 y φ_2, es también solución de la ecuación homogénea.
Esto significa que *el conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea constituye un subespacio del espacio vectorial de las funciones derivables en el intervalo I*. Esto explica el nombre de *lineales* que reciben estas ecuaciones diferenciales.

El hecho de que $y = Ke^{-\int \frac{q(x)}{p(x)}dx}$, con $K \in R$, sea la solución general, nos da la pauta de que ese subespacio es de dimensión 1, y que la función no nula $e^{-\int \frac{q(x)}{p(x)}dx}$ constituye una base del mismo, ya que toda otra solución es un múltiplo escalar de ella.

ii. Supongamos ahora que tenemos dos funciones, $\gamma_1(x)$ y $\gamma_2(x)$, que son soluciones de la ecuación lineal no homogénea en el intervalo *I*, esto es:

$$p(x).\gamma_1' + q(x).\gamma_1 = f(x)$$

$$p(x).\gamma_2' + q(x).\gamma_2 = f(x)$$

Si restamos miembro a miembro…

$$p(x).\gamma_1' + q(x).\gamma_1 - p(x).\gamma_2' - q(x).\gamma_2 = f(x) - f(x)$$

o bien

$$p(x).[\gamma_1' - \gamma_2'] + q(x).[\gamma_1 - \gamma_2] = 0$$

Esta expresión nos está indicando que *la diferencia entre dos soluciones cualesquiera de la ecuación no homogénea constituye una solución de la ecuación homogénea*.

A partir de estas dos observaciones es sencillo ahora resolver la EDO lineal no homogénea. En efecto: ya conocemos la solución general de la ecuación homogénea:

$$y_H(x) = Ke^{-\int\frac{q(x)}{p(x)}dx}$$

Si encontráramos una solución particular de la ecuación no homogénea, $y_P(x)$, podríamos construir su solución general del siguiente modo:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

ya que la diferencia entre dos soluciones de la no homogénea es solución de la homogénea.
Un modo de lograr la solución particular es proponer una función de la forma

$$y_P(x) = K(x)e^{-\int\frac{q(x)}{p(x)}dx}$$

y "ajustar" la función $K(x)$ para que verifique la ecuación no homogénea.
Observemos que si $K(x)$ fuera constante, tendríamos la solución general de la homogénea; permitiendo que "varíe", la podremos elegir convenientemente para que resulte una solución particular de la no homogénea.
Este método para hallar soluciones particulares se denomina *método de variación de parámetros.*

Veamos en un ejemplo cómo funciona este método de resolución.

Ejemplo 1.12: Consideremos el siguiente PVI

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{x} + 2y = xe^{-x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La EDO no es de variables separables (primero observamos esto, pues su solución sería más sencilla si lo fuera). Es lineal no homogénea, con $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 2, f(x) = xe^{-x^2}$.
Como $p(x) \neq 0 \quad \forall x$, la ecuación no tiene puntos singulares.
Necesitamos encontrar la solución general de la ecuación para luego resolver el PVI.

Para ello, debemos buscar primero la solución general de la ecuación homogénea:

$$\frac{y'}{x} + 2y = 0$$

$$y' = -2x.y$$

Esta ecuación tiene, por un lado, la solución nula $y \equiv 0$ y, además de ella,

$$\frac{y'}{y} = -2x$$

$$\int \frac{y'}{y} dx = -\int 2x dx$$

$$ln|y| = -x^2 + C$$

$$y = Ke^{-x^2}$$

que también puede representar la solución nula si permitimos que K sea un número real cualquiera, incluso 0.
Para buscar la solución general de la no homogénea proponemos

$$y_P(x) = K(x)e^{-x^2}$$

y reemplazamos en la ecuación:

$$\frac{y_P'}{x} + 2y_P = xe^{-x^2}$$

$$\frac{K'(x)e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2}}{x} + 2K(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

$$\frac{K'(x)e^{-x^2}}{x} + K(x)\underbrace{\left[\frac{-2xe^{-x^2}}{x} + 2e^{-x^2}\right]}_{(*)} = xe^{-x^2}$$

Observen que los términos marcados con (*) no son otra cosa que la solución particular $y = e^{-x^2}$ de la EDO homogénea reemplazada en la ecuación, por eso esa suma de términos se anula (siempre ocurrirá esto al reemplazar y_P en la ecuación) y entonces tenemos:

$$K'(x)\frac{e^{-x^2}}{x} = xe^{-x^2}$$

$$K'(x) = x^2e^{-x^2+x^2} = x^2$$

$$K(x) = \int x^2 dx$$

$$K(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

Como necesitamos *una* solución particular, elijamos $K(x) = \frac{x^3}{3}$.
Así, obtenemos

$$y_P(x) = \frac{x^3}{3} e^{-x^2}$$

Ahora estamos en condiciones de construir la SG de la ecuación lineal no homogénea:

$$y(x) = \underbrace{Ke^{-x^2}}_{y_H(x)} + \underbrace{\frac{x^3}{3} e^{-x^2}}_{y_P(x)}$$

Ahora buscamos el valor de la constante para encontrar la solución particular que verifique que $y(0) = -5$:

$$2 = y(0) = Ke^{-0^2} + \frac{0^3}{3} e^{-0^2} = K$$

La solución del PVI es, entonces, $y(x) = (2 + \frac{x^3}{3})e^{-x^2}$.
Podemos verificar la respuesta reemplazando esta función en el PVI del enunciado. Les sugerimos que lo hagan.

En la figura 1.7 vemos la familia de soluciones generales de $\frac{y\prime}{x} + 2y = xe^{-x^2}$ y, destacada en rojo, la SP buscada.

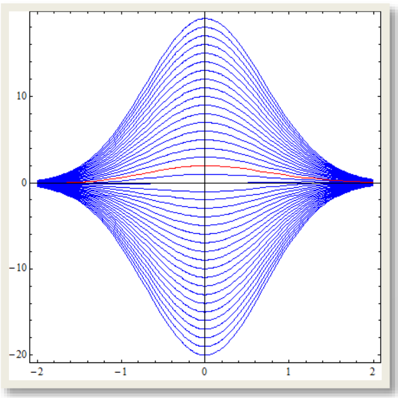

Figura 1.7: La familia SG y una SP para el problema del ejemplo 1.12

Actividades para resolver y discutir en el Foro

Actividad 1.7: ¿Cómo pueden verificar que la función $\varphi(x) = Ke^{-\int \frac{q(x)}{p(x)}dx}$ es, efectivamente, solución de la ecuación lineal homogénea $p(x).y' + q(x).y = 0$?

Actividad 1.8: Resuelvan la ecuación $\frac{y'}{sen(x)} + y = 1$ como de variables separables y luego considerándola como una ecuación diferencial lineal y comprueben que obtienen la misma solución general. Discutan: ¿en qué intervalos de la recta real es válida la resolución?

Actividad 1.9: La ecuación diferencial $y' + q(x)y = y^n f(x)$ se denomina "ecuación diferencial de Bernoulli".

a) ¿Para qué valores de *n* es lineal?
b) Verifiquen que, si $n \neq 1$ y se realiza el cambio de variables $z = y^{1-n}$, se convierte en una ecuación diferencial lineal en z.
c) Hallen la SG de la ecuación de Bernoulli $y' - \frac{y}{x} = y^3$

Aplicaciones de EDOs a familias de curvas

Hasta el momento hemos visto cómo a cada ecuación diferencial ordinaria le corresponde una familia de curvas, asociada a la solución general. Esa familia de curvas depende de tantos parámetros como indique el orden de la ecuación diferencial. Así, las ecuaciones diferenciales de primer orden dan origen a familias uniparamétricas; las de segundo orden a familias biparamétricas, como la SG de la ecuación del ejemplo 1.5, etc.
Nos interesa ahora resolver el problema inverso: dada una familia de curvas ¿es posible hallar una EDO cuya SG coincida con ella?
La respuesta es afirmativa y, simplemente, es necesario derivar miembro a miembro la ecuación de la familia de curvas dada.
Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.13: Consideremos la siguiente familia de parábolas que pasan por el origen y por el punto (1,0): $y = k(x^2 - x)\,, k \in R$. Queremos encontrar una EDO cuya solución general sea esta familia. Como es uniparamétrica, se tratará de una ecuación de primer orden, por lo que deberemos derivar una sola vez.

$$y = k(x^2 - x)$$

$$y' = k(2x - 1)$$

Pero en esta última ecuación aparece la constante arbitraria k que no debería estar presente en la ecuación diferencial. La despejamos entonces de la primera ecuación y la reemplazamos en la segunda:

$$y' = \frac{y}{x^2 - x}(2x - 1)$$

O bien

$$(x^2 - x)y' + (1 - 2x)y = 0$$

que es la EDO cuya solución general es la familia de parábolas dada, que vemos representada en la figura 1.8.

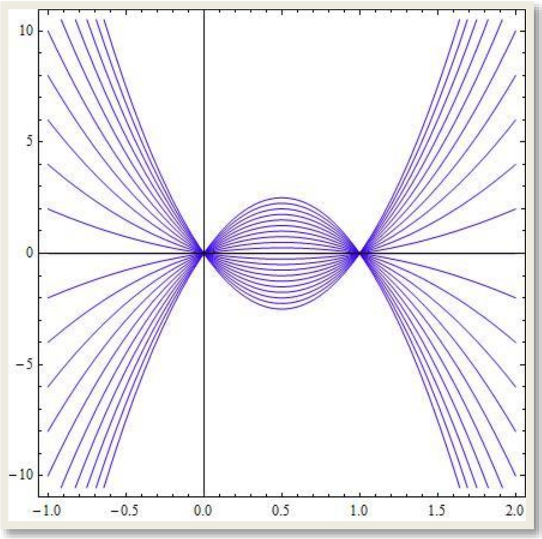

Figura 1.8: La familia de parábolas que resuelve el problema del ejemplo 1.13

Verificarlo es sencillo si se resuelve la ecuación diferencial obtenida. Les sugerimos que la resuelvan.

Ejemplo 1.14: Consideremos la siguiente familia de cosinusoides:

$$y = cos(kx + c), \qquad \text{con } \; k \in R \, , c \in R$$

Como se trata de una familia biparamétrica, la correspondiente ecuación diferencial será de segundo orden.

$$y = cos(kx + c) \qquad (1)$$

$$y' = -ksen(kx + c) \qquad (2)$$

$$y'' = -k^2 cos(kx + c) \qquad (3)$$

Para eliminar las constantes, dividimos miembro a miembro la ecuación (3) por la (1):

$$\frac{y''}{y} = -k^2$$

Recordemos que $cos^2(kx+c)+sen^2(kx+c)=1,$ de modo que si se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación (1) y de la ecuación (2), y luego sumando miembro a miembro, resulta:

$$y^2+\left(\frac{y'}{-k}\right)^2=1$$

$$y^2+\frac{(y')^2}{-\frac{y''}{y}}=1$$

por lo que

$$(1-y^2)y''+y(y')^2=0$$

es la EDO buscada (aunque no podemos comprobarlo pues aún no conocemos métodos para resolver ecuaciones de segundo orden).

Veamos otra aplicación a familias de curvas.

Definición 1.10: Dos familias de curvas, F_1 y F_2, se dicen *familias ortogonales* si los miembros de cada una de ellas corta a los miembros de la otra de modo que, en los puntos de intersección, las respectivas rectas tangentes son perpendiculares entre sí.

Observación: En el ámbito de la física se suele hablar de *familias de trayectorias ortogonales.*

Ejemplo 1.15: En la figura 1.9 se observan una familia de elipses y una familia de parábolas que son ortogonales entre sí.
Trazando imaginariamente las respectivas rectas tangentes en los puntos de intersección se observa que resultan ser rectas perpendiculares.

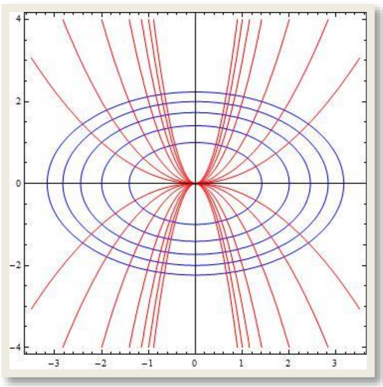

Figura 1.9: Dos familias de curvas ortogonales.

¿Cómo podemos obtener una familia ortogonal a otra familia dada? Es sencillo si se sabe cómo obtener la EDO correspondiente a una familia…

Teniendo en cuenta que:

- las rectas tangentes deben ser perpendiculares en los puntos de intersección,
- la derivada en cada punto representa la pendiente de la recta tangente correspondiente, y
- las rectas perpendiculares entre sí tienen pendientes recíprocas y opuestas en signo

es fácil de comprender el porqué del siguiente procedimiento para encontrar familias de curvas ortogonales…

1) Dada una familia uniparamétrica de curvas, $F_1 = \{y(x,c), c \in R\}$, se obtiene, por derivación, la EDO cuya solución general es la familia dada, es decir se obtiene la ecuación diferencial de primer orden: $G(x,y,y') = 0$
2) A continuación se reemplaza en esa ecuación y' por $-\frac{1}{y'}$.
   Se obtiene así una nueva EDO, $G\left(x,y,-\frac{1}{y\prime}\right) = 0$, que es la que admite a la familia ortogonal por solución general.
3) Se resuelve esta ecuación obtenida y se encuentra así la familia buscada.

Ejemplo 1.16: Busquemos la familia ortogonal a la familia de circunferencias con centro en el origen y radio $|c|$

$$F_1 = \{x^2 + y^2 = c^2, c \in R\}$$

En primer lugar, buscamos la EDO de la cual F_1 es SG:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$x + yy' = 0 \quad \rightarrow \quad \text{EDO de } F_1$$

Reemplazamos y' por $\frac{-1}{y\prime}$ y resolvemos:

$$x - \frac{y}{y'} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{EDO de } (F_1)^{\perp}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$ln|y| = ln|x| + C$$

$$y = Kx \quad \text{con} \quad K \in R$$

que constituye una familia de rectas que pasan por el origen, familia claramente ortogonal a la dada, como se ve en el siguiente gráfico:

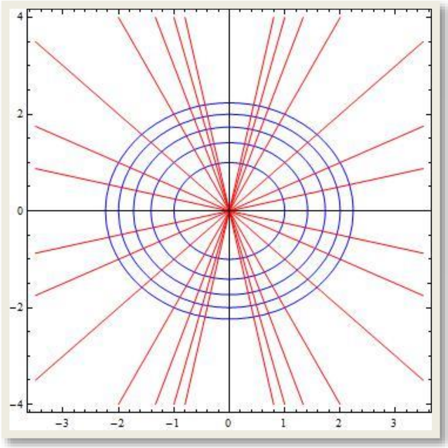

Figura 1.10: Las familias de curvas ortogonales que corresponden al ejemplo 1.16.

Observación: es usual denominar **red ortogonal** al conjunto de una familia de curvas y a la de sus curvas ortogonales. Posteriormente se estudiará el rol de las redes ortogonales en la Física.

Actividades para resolver y discutir en el Foro

Actividad 1.10: Verifiquen que la familia de parábolas $F = \{y^2 = 4k(k+x), k \in R\}$ "es ortogonal a sí misma" (discutan con sus compañeros en el foro qué significa esto...).

Actividad 1.11: Cada familia de la izquierda es ortogonal a una de las familias de la derecha, ¿pueden descubrir los pares correspondientes? Identifiquen y grafiquen las familias de curvas, siempre que sea posible.

a)	$3x + 4y = k$	1)	$x^2 - y^2 = c^2$
b)	$y = ke^x$	2)	$2x^2 + y^2 = c$
c)	$y = kx^2$	3)	$y^2 + 2x = c$
d)	$y^2 = kx^3$	4)	$x^{5/3} - y^{5/3} = c$
e)	$x^2 + y^2 = kx$	5)	$x^2 + 2y^2 = c$
f)	$x^{1/3} + y^{1/3} = k$	6)	$y = cx$
g)	$x^2 - y^2 = kx$	7)	$3x^2y + y^3 = c$
h)	$xy = k$	8)	$4x - 3y = c$
i)	$x^2 + y^2 = k^2$	9)	$x^2 + y^2 = cy$

Bibliografía: Bibliografía sugerida:
• Calculus Vol 1 y 2 2° edición (unidades temáticas I a X) Tom M. Apostol, Ed. Reverté S.A.
• Cálculo Vectorial 1° edición (unidades temáticas I a IX) Claudio Pita Ruiz, Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. Bibliografía complementaria:
• Cálculo con Geometría Analítica 6° edición (unidades temáticas I a X) Edwin J. Purcell, Dale Varberg; Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.
• Cálculo Vectorial I 4° edición (unidades temáticas I a IX) Jerrold E. Mardsen – Anthony J. Tromba, Ed. Addison Wesley Longman.
• El Cálculo 7° edición (unidades temáticas I a IX) Louis Leithold, Oxford University Press.
• Matemáticas Avanzadas para Ingeniería Vol. I 3° edición (unidades temáticas VI a X) Erwin Kreyszig, Ed. Limusa Wiley.
• Vectores y Tensores con sus aplicaciones 14° edición (unidades temáticas VI a IX) Luis A. Santaló, Editorial Universitaria de Buenos Aires. Bibliografía de referencia para aplicaciones computacionales:
• Mathematica (Domine al Mathematica 99%) E. Castillo – A.Iglesias – J.M. Gutierrez – E. Alvarez – A. Cobo, Ed. Paraninfo.
• The Mathematica Book Stephen Wolfram, Cambridge University Press.