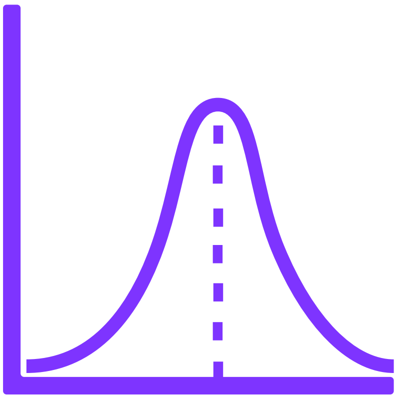

Probabilidad y Estadística

Práctica:

Ejercicio 1:

- Se está considerando utilizar un nuevo sistema de radar para un misil de defensa. El sistema está verificando mediante la experimentación, con un simulador, en el cual se fingen las situaciones de Muerte o No Muerte. En 30 intentos, ocurren 250 muertes.

a) **Aceptar/Rechazar, con un nivel de significación de 0,04, la afirmación de que la probabilidad de una muerte con el nuevo sistema no excede la probabilidad de 0,8.**

b) **Hallar el intervalo de confianza del 96% para la proporción poblacional del número de muertes.**

c) **Hallar el valor de** p**.**

d) **Hallar la probabilidad de rechazar la Hipótesis Nula, si el verdadero valor de la probabilidad fuera 0,833.**

e) **Tomando el valor 0,8 para probabilidad de una muerte, y estableciendo que el número de muertes para un cierto número de intentos es una variable aleatoria binomial, la probabilidad de que en 100 intentos el número de muertes esté comprendido entre 70 y 90. Hacer la corrección por continuidad.**

a) **Aceptar/Rechazar, con un nivel de significación de 0,04, la afirmación de que la probabilidad de una muerte con el nuevo sistema no excede la probabilidad de 0,8.**

- $\alpha = 0{,}04$ - $1 - \alpha = 0{,}94$ - $\pi = 0{,}8$

- $n = 300 \quad \Rightarrow \quad n > 30$ - $p = \dfrac{250 \text{ (muertes)}}{300 \text{ (intentos)}} \simeq 0{,}833$

- $H_0 : \pi \geq 0{,}8 \quad \rightarrow \quad$ Hipótesis Nula
- $H_0 : \pi < 0{,}8 \quad \rightarrow \quad$ Hipótesis Alternativa

- Se necesita conocer el valor del estimador Z_α. Dicho valor se obtendrá por medio de la tabla de Distribución Z, buscando para cuál valor de Z se tiene una probabilidad de 0,04. Observando la tabla, se puede ver que el valor más indicado para Z_α es -1,75, ya que dicho valor tiene una probabilidad de 0,0401. Por lo tanto, $Z_{0,04} = -1{,}75$.

- Regla de decisión:
  - Si $Z_p \geq -1{,}75 \quad \rightarrow \quad$ Acepto H_0
  - Si $Z_p < -1{,}75 \quad \rightarrow \quad$ Rechazo H_0

- Se deberá hallar el estadístico de prueba Z_p:

- $Z_p = \dfrac{p - \pi}{\sigma_p}$ - $\sigma_p = \sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\dfrac{(0{,}8)(1-(0{,}8))}{300}} \simeq 0{,}0231$

- $Z_p = \dfrac{p - \pi}{\sigma_p} \quad \Rightarrow \quad Z_p = \dfrac{(0{,}833) - (0{,}8)}{0{,}0231} \quad \Rightarrow \quad Z_p \simeq 1{,}43$

- Como $Z_p \geq -1{,}75$, es decir, $1{,}43 \geq -1{,}75$, acepto H_0. Por lo tanto, hay evidencias de que la probabilidad de una muerte con el nuevo sistema excede el 80%.

b) **Hallar el intervalo de confianza del 96% para la proporción poblacional del número de muertes.**

- $P(p + Z_{\sigma/2} \,.\, \sigma_p \leq \pi \leq p - Z_{1+\alpha/2} \,.\, \sigma_p) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

- $Z_{\sigma/2} = Z_{0{,}04/2} = Z_{0{,}02} = -\,2{,}05$

- $Z_{1-\sigma/2} = Z_{1-(0{,}04/2)} = Z_{0{,}98} = 2{,}05$

- $L_i = p + Z_{\sigma/2} \,.\, \sigma_p = (0{,}833) - (2{,}05)(0{,}0231) \simeq 0{,}786$

- $L_s = p + Z_{\sigma/2} \,.\, \sigma_p = (0{,}833) + (2{,}05)(0{,}0231) \simeq 0{,}88$

- $P(0{,}786 \leq \pi \leq 0{,}88) = 0{,}96 = 96\,\%$

c) **Hallar el valor de p.**

- p = minimo valor de Rechazo = $P(Z \leq Z_p)$

- $p = P(Z \leq 1{,}43) \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}9236$

d) **Hallar la probabilidad de rechazar la Hipótesis Nula, si el verdadero valor de la probabilidad fuera 0,833.**

- El análisis de la potencia es apropiado cuando la preocupación es sobre el rechazo correcto, o no, de una hipótesis nula.

- La potencia de una prueba estadística o el poder estadístico es la probabilidad de que la hipótesis nula sea rechazada cuando la hipótesis alternativa es verdadera (es decir, la probabilidad de no cometer un Error de Tipo II). La potencia es en general una función de las distribuciones posibles, a menudo determinada por un parámetro, bajo la hipótesis alternativa

- Potencia = $\pi = P(\text{rechazar } H_0 \,|\, H_0 \text{ es falsa}) = 1 - \beta$

- Debo obtener β:

$$- \beta = P\left(Z_p \le Z_c \mid \pi\right) \Rightarrow \beta = P\left(Z_p \le 1{,}75 \mid 0{,}833\right)$$

$$\Rightarrow \beta = P\left(Z_p \le \frac{p - \pi}{\sigma_p}\right)$$

$$\Rightarrow \beta = P\left(Z_p \le \frac{0{,}833 - 0{,}833}{0{,}0231}\right)$$

$$\Rightarrow \beta = P\left(Z_p \le 0\right) \Rightarrow \beta = 0{,}5000$$

- Potencia $= \pi = 1 - \beta \Rightarrow \pi = 1 - 0{,}5000 \Rightarrow \pi = 0{,}5 = 50\,\%$

e) **Tomando el valor 0,8 para probabilidad de una muerte, y estableciendo que el número de muertes para un cierto número de intentos es una variable aleatoria binomial, la probabilidad de que en 100 intentos el número de muertes esté comprendido entre 70 y 90. Hacer la corrección por continuidad.**

- $n = 100$ - $x_1 = 70$ - $x_2 = 90$

- Si n es muy grande ($n > 30$) y ni p ni q están muy próximas a cero, la distribución Binomial puede aproximarse estrechamente a la distribución Normal con variable estándar dada por:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

- En la práctica, dicha aproximación es muy buena si ambos np y nq son mayores que 5.

- $np = (100)(0{,}8) = 80 > 5$ - $nq = (100)(1 - 0{,}8) = 20 > 5$

- Como n es relativamente grande, $np = (100)(0{,}8) = 80 > 5$ y $nq = (100)(1 - 0{,}8) = 20 > 5$, es posible aproximar la distribución Binomial a la distribución Normal.

- Antes de seguir, se debe corregir la variable aleatoria sumando o restando 0,5 al valor de dicha variable si se la desea excluir o incluir, respectivamente.

- Como el enunciado indica que el número de muertes esté comprendido entre 70 y 90, no se incluirá a ninguno de los dos extremos.

- $Z_1 = \dfrac{(x_1 + 0{,}5) - np}{\sqrt{npq}} \quad \Rightarrow \quad Z = \dfrac{(70 + 0{,}5) - (100)(0{,}8)}{\sqrt{(100)(0{,}8)(0{,}2)}} \quad \Rightarrow \quad Z = -2{,}37$

- $Z_2 = \dfrac{(x_2 + 0{,}5) - np}{\sqrt{npq}} \quad \Rightarrow \quad Z = \dfrac{(90 + 0{,}5) - (100)(0{,}8)}{\sqrt{(100)(0{,}8)(0{,}2)}} \quad \Rightarrow \quad Z = 2{,}62$

- Se buscan la probabilidades correspondientes a dichos valores de Z:

- $P(Z < -2{,}37) = 0{,}0089 = 0{,}89\,\%$

- $P(Z < 2{,}62) = 0{,}9956 = 99{,}56\,\%$

- $P(70 < X < 90) = P(X < 90) - P(X < 70)$

- $P(70 < X < 90) = P(Z < 2{,}62) - P(Z < -2{,}37)$

- $P(70 < X < 90) = 0{,}9956 - 0{,}0089 = 0{,}9867 = 98{,}67\,\%$