Unidad 6: Funciones definidas en forma implícita

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Comprender la idea de curvas y superficies generadas implícitamente por una ecuación.
2. Conocer y utilizar correctamente el teorema de existencia y unicidad de las funciones definidas en forma implícita.

Introducción

Es usual expresar la ecuación de una curva en la forma explícita $y = f(x)$ o bien *implícita* $F(x, y) = 0$, por ejemplo, la ecuación de una circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio *R* puede ser expresada por $x^2 + y^2 = R^2$. Si fuera necesario determinar la ecuación de la curva en la forma $y = f(x)$ debería resolverse la ecuación $F(x, y) = 0$ realizando el despeje algebraico de la variable *y*. Este procedimiento no siempre es posible ya que podrían aparecer obstáculos algebraicos que impidan el despeje, tal como sucede en el caso de la ecuación $x^3y^2 - sen(x + y) = 2$ Este hecho aparece con frecuencia, y ello no significa que la variable *y* no sea función de *x*, o bien *x* función de *y*, simplemente no es factible el despeje.

Definición 6.1:
Sea la ecuación $F(x, y) = 0$ y un punto (x_0, y_0) que la verifica, es decir: $F(x_0, y_0) = 0$. Se dice que dicha ecuación *define implícita y localmente* a $y = f(x)$ en las proximidades del punto (x_0, y_0) si $y_0 = f(x_0)$ y $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in E(x_0)$.

No siempre es posible aseverar que toda ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ sea la representación implícita de una función $y = f(x)$, algunos ejemplos de este hecho lo muestran las siguientes ecuaciones:

1. La ecuación $2x^2 + y^2 + 2 = 0$ no se satisface para valores reales de *x* e *y*
2. La ecuación $2x^2 + y^2 = 0$ sólo se satisface para el par $(x, y) = (0, 0)$

A partir de estos ejemplos, es preciso realizar un análisis más detallado sobre cuáles son los requisitos para los que una ecuación $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$ y su gráfica una curva, y las propiedades que ella verifica.

Esta indagación puede alcanzar a ecuaciones que dependan de más de dos variables, es decir, $F(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) = 0$. Para poder dar una interpretación geométrica que permita facilitar la comprensión, comenzaremos trabajando en tres dimensiones.

Conocemos que la gráfica de una función $F : A \subseteq R^2 \to R \ / \ z = F(x, y)$, es una superficie en el espacio tridimensional. Así, las soluciones de la ecuación $F(x, y) = 0$ se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} z = F(x,y) \\ z = 0 \end{cases}$. Geométricamente, este hecho representa determinar la intersección de la superficie $z = F(x, y)$ con el plano (*x* ,*y*) o bien el plano $z = 0$. ¿Existe tal intersección? Una primera opción consiste en que la intersección sea vacía, es decir, la superficie y el plano (*x* ,*y*) no se cortan, por ejemplo el caso ya presentado $2x^2 + y^2 + 2 = 0$(representa un paraboloide elíptico $F(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2$ cuya grafica se encuentra totalmente por encima del plano (*x, y*) en el semiespacio con z positivo). Para este caso, no existe curva intersección.

Naturalmente, sólo es necesario determinar aquellos casos para los cuales existe al menos un punto (x_0, y_0) que verifique $F(x_0, y_0) = 0$. A dicho punto lo denominaremos *punto inicial* para la solución.

Definición 6.2:

Sea C un subconjunto no vacío de R^2, un punto $P = (x_0, y_0) \in C$ se dice regular de C si existe alguna bola B de (x_0, y_0) tal que el conjunto de puntos de C contenido en B es la gráfica de una función de x o bien la gráfica de una función de y.

Se verá más adelante cuando se analice parametrización de curvas que este concepto puede ser expresado de otra forma equivalente.

La propuesta es generar herramientas que permitan informar si al despejar la variable "y" existe una sola posibilidad de resolver, es decir, si sólo se encontrará una función $y = f(x)$ (o bien $x = \varphi(y)$) tal que $F(x, f(x)) = 0$ (o bien $F(\varphi(y), y) = 0$) u otras posibilidades adicionales, o sea, otras funciones $f_k(x)$ que verifican $F(x, f_k(x)) = 0$ (o bien, $\varphi_j(y)$ tales que $F(\varphi_j(y), y) = 0$).

Ejemplo 6.1: Supongamos la función escalar de dos variables independientes $F(x, y) = y^3 + 2y^2 - 4xy - 8x$ .Se desea investigar si la línea de nivel cero de F, a la que designaremos como $L_0 = \{(x, y) \in R^2 \ / \ y^3 + 2y^2 - 4xy - 8x = 0\}$, define a alguna función en las proximidades de algunos puntos, en otras palabras si la ecuación $y^3 + 2y^2 - 4xy - 8x = 0$ puede resolverse para x o bien para y en las cercanías de ciertos puntos.

En primer lugar, ¿qué posibilidad existe para despejar de esta ecuación x e y?

Los puntos (1,-2), (4,4) y (0,0) son puntos iniciales ya que: $F(4, 4) = 0$, $F(1, -2) = 0$ y $F(0, 0) = 0$

La ecuación $y^3 + 2y^2 - 4xy - 8x = 0$ también puede ser expresada como:

$$(y + 2)(y^2 - 4x) = 0$$

Consideremos una bola (atención! aquí la bola es rectangular!!!) del punto (4,4), por ejemplo: $B(4,4)=\{(x,y)\in R^2 / 3<x<5 \;\; y \;\; 3<y<5\}$. Se puede observar que la intersección de la bola con L_0 es una función de x en el entorno (3,5) de $x=4$ dada por $f(x)=2\sqrt{x}$. De esta forma el punto (4,4) es un punto regular de L_0 .

Ahora bien, el punto (1,-2) no es regular ya que la intersección de L_0 con una bola centrada en (1,-2) no resulta ser la gráfica de una única función de *x*, para cualquier bola del punto (1,-2) la ecuación $y^3+2y^2-4xy-8x=0$ permite realizar más de un despeje de *y*, pues para cada *x* próximo a $x = 1$ los puntos $(x,-2)$ y $(x,-2\sqrt{x})$ son soluciones de dicha ecuación. Por otra parte, el gráfico de L_0 no corresponde a una función de *x* en ninguna bola del punto (0, 0), sin embargo, es posible observar que, para este caso, el gráfico de L_0 corresponde a una función de *y* definida en un entorno de $y=0$, en consecuencia (0, 0) es un punto regular.

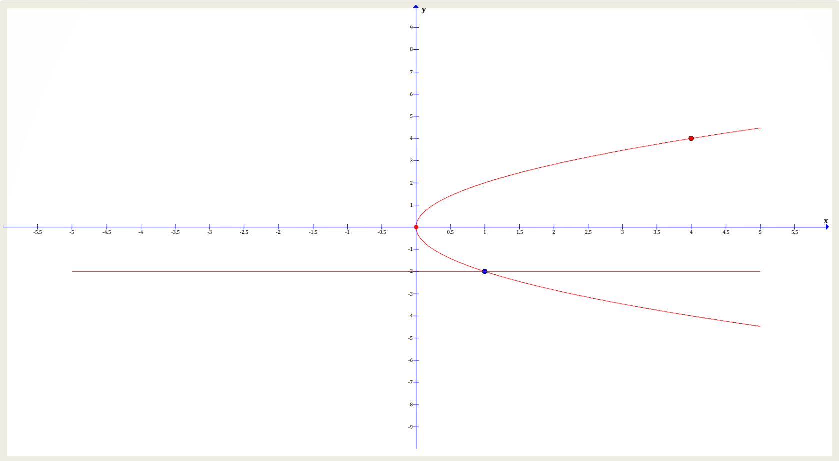


Figura 6.1: Gráfico de una función $x = \varphi(y)$ en cualquier bola con centro en el origen

Si se considera en cambio la ecuación $(x^2+3y^2)(2x+3y^2+2)=0$ es posible advertir que los puntos que la satisfacen son los que pertenecen a la parábola de ecuación $2x=-3y^2-2$ y el punto (0,0). De esta forma, el punto (0,0) resuelve la ecuación dada pero no existe algún entorno de $x=0$ en el que esté definida una función implícita $y=f(x)$ *o* $x=\varphi(y)$ tal como se muestra en la figura 6.2:

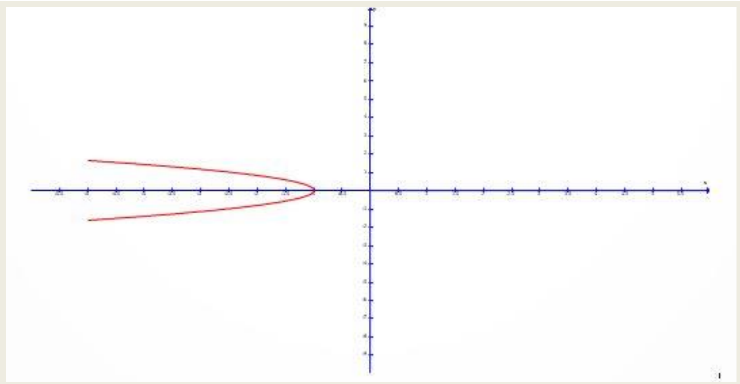


Figura 6.2: No existe curva en las proximidades del origen

Si se conoce un punto inicial y siendo la función $F(x, y)$ diferenciable en dicho punto, puede ocurrir que el plano tangente sea horizontal o no en él.

1. Si el plano tangente es horizontal en el punto inicial, entonces podría ser imposible encontrar solución de la forma $y = f(x)$ o bien $x = \varphi(y)$ a partir del punto (x_0, y_0). Por ejemplo, en el caso planteado con anterioridad $F(x, y) = 2x^2 + y^2$ admite la solución inicial $(x_0, y_0) = (0,0)$, pero no posee a ningún otro punto del plano *(x, y)*. Por otra parte, la superficie $F(x, y) = xy$ (paraboloide hiperbólico muy conocido por "silla de montar") se intersecta con el plano *(x, y)* según dos rectas $x = 0$ e $y = 0$ (los ejes coordenados), pero dicha intersección no puede representarse por una función $y = f(x)$ o $x = \varphi(y)$ en ninguna bola con centro en el punto (0,0).

Actividad para resolver y discutir en el Foro

Actividad 6.1: Justifique por qué no existe curva en las proximidades del origen. Ayúdese con el mapa de contorno.

El mapa de contorno de *F* resulta ser una familia de hipérbolas equiláteras que se visualiza en la figura 6.3.

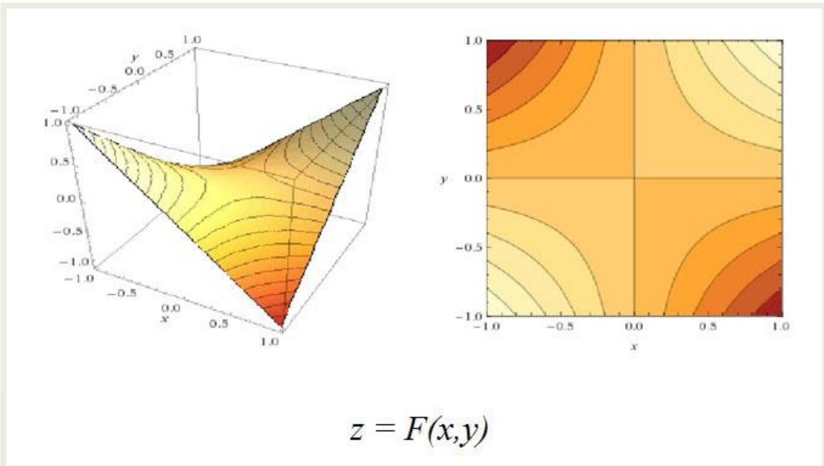


Figura 6.3: Mapa de contorno de $F(x, y) = xy$

También puede ocurrir que el plano tangente sea horizontal en el punto inicial y aun así la ecuación $F(x, y) = 0$ admita solución de la forma $y = f(x)$ o $x = \varphi(y)$, por ejemplo: $F(x, y) = (x + y)^2$.

En resumen, si el plano tangente a la gráfica de $z = F(x, y)$ es horizontal en el punto inicial (x_0, y_0), entonces NO es posible determinar si la ecuación $F(x, y) = 0$ admite alguna solución de la forma $y = f(x)$ o bien $x = \varphi(y)$ en alguna bola con centro en el punto inicial.

2. Si el plano tangente no es horizontal en el punto inicial, entonces la superficie corta al plano *(x,y)* en las proximidades del punto (x_0, y_0) en una única curva bien definida, y que dicha curva pueda representarse por la ecuación $y = f(x)$ o $x = \varphi(y)$ en una bola con centro en (x_0, y_0).

Cabe destacar que afirmar que: si el plano tangente a la superficie de ecuación $z = F(x, y)$ no es horizontal en el punto inicial (x_0, y_0), equivale a que al menos una de las derivadas parciales de *F* en el punto (x_0, y_0) sea no nula. Recuerde que la ecuación del plano tangente de *F* en (x_0, y_0) es:

$$z - F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0)$$

y que la única forma para la cual este plano es horizontal es que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \ .$$

Cabe notar que este análisis siempre fue realizado en las cercanías del punto inicial, ya que en una bola con centro en él, la superficie puede ser aproximada por una porción del plano tangente. Por lo tanto, se trata de un "análisis local".
Este análisis geométrico permite establecer condiciones suficientes para la existencia de funciones definidas implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$ en las proximidades de un punto inicial. Enunciemos a continuación un teorema muy bonito que proporciona dichas condiciones y, además, una técnica para determinar la derivada.

Teorema 6.1: de la función implícita. Teorema de Cauchy-Dini. (Condiciones suficientes)
Si $F : U \subseteq R^2 \to R$ es una función de clase C^1 en U (admite todas sus derivadas parciales primeras continuas en *U*) y (x_0, y_0) un punto interior a U tal que $F(x_0, y_0) = 0 \ \ y \ \ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} \neq 0$, entonces existen un intervalo *I*, con centro en el punto x_0, y una única función $f : I \subset R \to R \ / \ y = f(x)$ derivable y de clase C^1 en el intervalo *I* tal que $y_0 = f(x_0)$, que es solución de la ecuación $F(x, y) = 0$, es decir, se verifica que $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in I$. Además, la derivada de la función $y = f(x)$ en cada punto del intervalo *I* es:

$$f'(x) = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x, f(x))}}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x, f(x))}}$$

Observaciones importantes al teorema de la función implícita

1. El teorema de la **función implícita** asegura, bajo ciertas condiciones y con carácter local tal como se ha mencionado anteriormente, la existencia de dicha función aunque no sea posible determinarla explícitamente. Por ello, este teorema constituye una herramienta muy valiosa para caracterizar a la función sin necesidad de conocer su ecuación explícita, como así también para detectar puntos regulares.

2. El teorema tiene limitaciones por ser de carácter local, es decir, permite garantizar que cerca de un punto (x_0, y_0) que verifique $F(x_0, y_0) = 0$, existe una **única** función *y = f(x)* tal que $F(x, f(x)) = 0$ sólo para cada x cercano a x_0.

3. El objetivo del teorema no es resolver la ecuación $F(x, y) = 0$, que como ya ha sido mencionado, puede ser dificultoso e incluso imposible resolverla en forma exacta. Se trata de establecer condiciones (suficientes) sobre F para un punto inicial (x_0, y_0), sea regular. El teorema no permite obtener la función *y = f(x)* o bien determinar si la ecuación $F(x, y) = 0$ se satisface para cualquier punto *(x, y)*. Todas estas cuestiones más "globales" están fuera del alcance de este teorema.

4. Sólo mencionaremos la demostración del teorema en lo referente a la técnica de derivación de la función implícita, la prueba de la existencia y la diferenciabilidad de *y = f(x)* está fuera de los objetivos de este curso. Ahora bien, una vez probadas la unicidad y la diferenciabilidad, es posible mostrar cómo se calcula la derivada de *f* simplemente con el uso del teorema de la derivación de funciones compuestas, Regla de la Cadena aplicado a $F(x, y) = 0$.

Si la curva C dada por *y = f(x)* existe y es única (también podría parametrizarse), entonces se satisface:

$$F(x, f(x)) = 0$$

por tanto, usando la regla de la cadena (se considera que las funciones *F* y *f* admiten derivadas continuas) resulta: $\nabla F(x, f(x)) \,.\, (1, f'(x))=0$

y calculando el producto escalar, resulta:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)).f'(x) = 0$$

y como hipótesis $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$, se obtiene: $f'(x) = -\dfrac{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x, f(x))}}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x, f(x))}}$

Se observa que $\overrightarrow{\nabla F}(x, y)$ tiene la dirección normal a la curva C en el punto (x, y), por tanto si $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) = 0$ en un punto $A = (x_0, y_0)$, entonces el vector gradiente es horizontal y de este modo la curva de nivel C no puede ser considerada como gráfico de una función *y = f(x)*. En forma análoga, si $\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) = 0$ en un punto $B = (x_1, y_1)$, entonces el vector gradiente es vertical y la curva no puede ser el gráfico de una función $x = \varphi(y)$. Este hecho se puede apreciar en la figura 6.4:

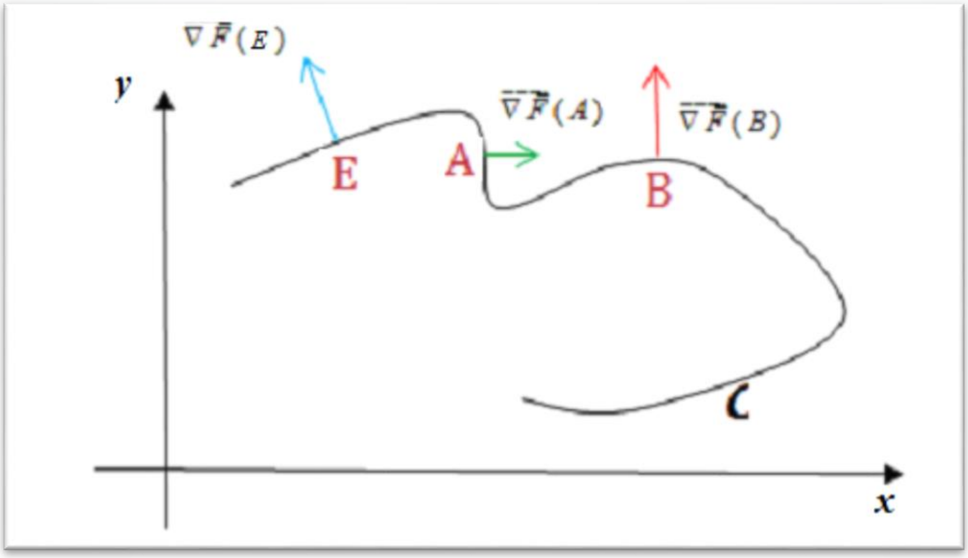


Figura 6.4: Relación entre el vector gradiente y los conjuntos de nivel

5. El teorema de la función implícita también puede ser enunciado en forma equivalente para asegurar la existencia de una función $x = \varphi(y)$, de la siguiente forma:
Si $F: U \subseteq R^2 \to R$ es una función de clase C^1 en U (admite todas sus derivadas parciales primeras continuas en *U*) y (x_0, y_0) un punto interior a U tal que $F(x_0, y_0) = 0 \quad y \quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$, entonces existen un intervalo *J*, con centro en el punto y_0, y una **única** función $\varphi: J \subset R \to R \ / \ x = \varphi(y)$ derivable y de clase C^1 en el intervalo *J* tal que $x_0 = \varphi(y_0)$, que es solución de la ecuación $F(x, y) = 0$, es decir, se verifica que $F(\varphi(y), y) = 0 \quad \forall x \in J$. Además, la derivada de la función $x = \varphi(y)$ en cada punto del intervalo *J* es:

$$\varphi'(y) = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(\varphi(y),y)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(\varphi(y),y)}}$$

Si ambas derivadas parciales son simultáneamente no nulas en el punto (x_0, y_0), es decir: $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0 \quad y \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$, significa que la ecuación $F(x, y) = 0$ puede ser resulta tanto para *x* como para *y*. Geométricamente, este hecho se puede observar en el gráfico anterior ya que $\overrightarrow{\nabla F}(E) \neq (0,0)$.

Extensión del Teorema de la función implícita para más de dos variables independientes. Teorema de Cauchy-Dini (Condiciones suficientes)

Si $F:U\subseteq R^{n+1}\to R\ /\ F(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1})$ es una función de clase C^1 en U (admite todas sus derivadas parciales primeras continuas en *U*) y $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,x_{n+1}^0)$ un punto interior a U que satisface $F(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,x_{n+1}^0)=0$ y $\left.\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\right|_{(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,x_{n+1}^0)}\neq 0$, entonces existen una bola *B* con centro en el punto $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ y una única función $f:B\subset R^n\to R\ /\ x_{n+1}=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ continua y de clase C^1 en la bola *B* tal que $x_{n+1}^0=f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$, que es solución de la ecuación $F(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1})=0$, es decir, se verifica que $F(x_1,x_2,\dots,x_n,f(x_1,x_2,\dots,x_n))\quad \forall x\in B$. Además, las derivadas parciales de la función $x_{n+1}=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ en cada punto de la bola *B* es:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=-\frac{\left.\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\right|_{(x_1,x_2,\dots,x_n,f(x_1,x_2,\dots,x_n))}}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\right|_{(x_1,x_2,\dots,x_n,f(x_1,x_2,\dots,x_n))}}\qquad para\quad k=1,2,\dots,n$$

Observaciones importantes:

1. La interpretación geométrica del teorema proporciona un criterio local (en las proximidades de un punto) para conocer cuándo una ecuación dada por $F(x,y,z)=0$, representa un "trozo" de la gráfica de una función $f:R^2\to R$.
2. Para calcular las ***derivadas sucesivas*** de una función definida implícitamente es preciso tener presente que *f* sigue siendo función de x_i y cada vez debe derivarse como función compuesta. Esta situación será enfatizada en algún ejemplo más adelante.

Ejemplo 6.2: Muestre que la ecuación

$$x+y+z=sen\left(xyz\right)$$

puede ser resuelta para *z* en las proximidades del punto (0,0,0), y luego determine las derivadas parciales de la solución en ese punto. En caso de ser posible determine la función $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Se puede apreciar que en la ecuación dada es imposible despejar alguna de las variables en términos de las otras porque existen obstrucciones algebraicas que lo impiden. Este hecho no significa que no hace una dependencia entre dichas variables. Comenzaremos por revisar el cumplimiento de las condiciones del teorema de las funciones implícitas.

En primer lugar, expresemos la ecuación dada en la forma

$$F(x, y, z) = 0$$

efectuando algunos despejes algebraicos:

$$x + y + z - sen(xyz) = 0$$

De esta forma es:

$$F(x, y, z) = x + y + z - sen(xyz)$$

cuyas derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - yz\cos(xyz)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - xz\cos(xyz)$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 - xy\cos(xyz)$$

que resultan ser funciones continuas, ya que se trata de la diferencia entre la función constante y otra función que es producto de polinómicas con trigonométricas, continuas en todo R^3.

Por otra parte, $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0$

En consecuencia, se verifican todas las hipótesis requeridas por el teorema y, así existe una única función: $z = f(x, y)$ continua y con derivadas parciales continuas en todo punto de R^2, en particular en las proximidades de (0,0,0).

Sus derivadas parciales evaluadas en el punto (0,0) son:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)}} = -\frac{1}{1} = -1 \;\; ; \;\; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,0,0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)}} = -\frac{1}{1} = -1$$

Cabe remarcar, que como también se verifica:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0 \quad y \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0$$

Entonces, la ecuación:

$$x + y + z = sen(xyz)$$

también puede ser resuelta para *x* y para *y*.

Para determinar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, es necesario obtener en primer lugar $\frac{\partial z}{\partial x}$. en forma implícita, es decir

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{1-yz\cos(xyz)}{1-xy\cos(xyz)}$$

Ahora bien, para determinar la derivada segunda de z respecto de x dos veces, debe derivarse respecto de x a $\frac{\partial z}{\partial x}$

Es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1-yz\cos(xyz)}{1-xy\cos(xyz)}\right)$$

para lo cual debe derivarse el cociente respecto de x y teniendo en cuenta que z depende de x y cuya derivada fue calculada en I.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\left[-y\frac{\partial z}{\partial x}\cos(xyz)+yz\,sen(xyz).\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right].(1-xy\cos(xyz))-(1-yz\cos(xyz))\left(-y\cos(xyz)+xy\,sen(xyz).\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right)}{(1-xy\cos(xyz))^2}$$

En esta expresión debe sustituirse $\frac{\partial z}{\partial x}$ por el segundo miembro de I y luego realizar las simplificaciones algebraicas que sean posibles para reducir su expresión final. Cabe destacar que este proceso puede resultar tedioso debido a que la expresión va asumiendo una forma cada vez más extensa a medida que se deriva, pero, no hay que perder de vista que sólo se están empleando las reglas clásicas de derivación. El lector puede determinar en forma equivalente $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ Inténtelo, consulte y socialice los resultados...!

Ejemplo 6.3: Muestre que la ecuación $xy^2-x^2y+xsen\,z=2$ puede ser resuelta para *z* en las proximidades del punto $\overrightarrow{P_0}=(1,-1,0)$ y luego determine la dirección de máximo crecimiento de *z* y el valor máximo. Aproxime el valor de $z(0.98,-1.001)$ mediante el plano tangente a la gráfica de la superficie $z=f(x,y)$

Consideramos la función $F(x,y,z)=xy^2-x^2y+xsen\,z-2$. En primer lugar se verifica que $F(1,-1,0)=0$. Por otra parte, F es una función de clase C^1 *en* R^3 ya que se trata de suma de funciones polinómicas y productos de polinómicas con senos y cosenos. Además,

$\frac{\partial F}{\partial z}=x\cos z$ y evaluada en el punto $\overrightarrow{P_0}$ es: $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{\overrightarrow{P_0}}=1$ por lo tanto en las proximidades del punto $(1,-1)$ existe una única función $z=f(x,y)$ de clase C^1 *en* $(1,-1)$ y, por tanto, diferenciable en dicho punto. En consecuencia, f admite derivada direccional en cualquier dirección en ese punto y la dirección y sentido de máximo crecimiento es la del vector gradiente de f, cuyas componentes son las derivadas parciales de f en el punto $(1,-1)$. Para determinarlas se emplea el teorema de las funciones implícitas, es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 2xy + sen\, z$$

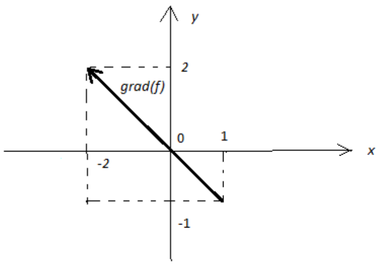
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy - x^2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-1)} = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,-1,0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1,-1,0)}} = -\frac{3}{1} = -3 \quad ; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-1)} = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,0,0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)}} = -\frac{-3}{1} = 3$$

El vector gradiente de f en el punto (1,-1) es: $\overrightarrow{\nabla f}(1,-1) = (-3,3)$, su norma es el valor máximo de la derivada direccional, $\left\|\overrightarrow{\nabla f}(1,-1)\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ y los cosenos directores son:

$$\cos\alpha = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\alpha} = 3\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\beta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta} = \frac{\pi}{4}$$



La ecuación del plano tangente a la gráfica de *f* en el punto (1,-1,0) es:

$$z - 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)(y+1) \quad \Rightarrow \quad z = -3(x-1) + 3(y+1)$$

$$z = -3x + 3y + 6$$

Dado que la función *f* es diferenciable en el punto (1,-1), y de acuerdo a lo estudiado en funciones diferenciables, una "porción" de gráfico de la superficie $z = f(x,y)$ puede ser aproximada por una "porción" de su plano tangente en las proximidades del punto (1,-1)

En consecuencia, $f(0.98,-1.001) \simeq -3(0.98) + 3(-1.001) + 6 = 0.054$

Ejemplo 6.4: Si la ecuación $F(2x^2 - 3y^2 + 4z^2, 3x - 2y + 5z) = 0$ define implícitamente a $z = f(x,y)$ es posible calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

En este ejemplo es importante tener en cuenta que el primer miembro de la ecuación dada es una composición de funciones, es decir: $H = F \circ \vec{G}$ con $\vec{G}: R^3 \to R^2$ tal que:

$\vec{G}(x,y,x) = (\overbrace{2x^2-3y^2+4z^2}^{u}, \overbrace{3x-2y+5z}^{v})$ de clase $C^1(R^3)$ al ser cada función componente una función polinómica. Suponemos también que la función escalar $F: R^2 \to R$ es también de clase $C^1(R^2)$ y entonces $H: R^3 \to R$ es diferenciable y admite derivadas primeras parciales que pueden obtenerse mediante la regla de la cadena: $\overrightarrow{\nabla H}(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla F}_{(G(x,y,z))} \bullet D\vec{G}_{(x,y,z)}$ con $D\vec{G}$ la matriz Jacobiana de $\vec{G}$.

$$\overrightarrow{\nabla H}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4x & -6y & 8z \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4x\frac{\partial F}{\partial u} + 3\frac{\partial F}{\partial v} \\ -6y\frac{\partial F}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v} \\ 8z\frac{\partial F}{\partial u} + 5\frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\frac{\partial H}{\partial x} = 4x\frac{\partial F}{\partial u} + 3\frac{\partial F}{\partial v}$; $\frac{\partial H}{\partial y} = -6y\frac{\partial F}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}$; $\frac{\partial H}{\partial z} = 8z\frac{\partial F}{\partial u} + 5\frac{\partial F}{\partial v}$

Si $\frac{\partial H}{\partial z} = 8z\frac{\partial F}{\partial u} + 5\frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$, entonces la ecuación dada puede resolverse para z, es decir existe una única función $z = f(x,y)$ (superficie en R^3) de clase $C^1(R^2)$ y sus derivadas primeras parciales pueden ser calculadas empleando el teorema de la función implícita:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial z}} = -\frac{4x\frac{\partial F}{\partial u} + 3\frac{\partial F}{\partial v}}{8z\frac{\partial F}{\partial u} + 5\frac{\partial F}{\partial v}} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial z}} = -\frac{-6y\frac{\partial F}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}}{8z\frac{\partial F}{\partial u} + 5\frac{\partial F}{\partial v}}$$

Ejemplo 6.5: Es posible mostrar que la ecuación $e^{2x-y+2z} + 3x - 8z = 1 + sen(xyz)$ puede ser resuelta respecto de z en puntos cercanos al origen de coordenadas (0,0,0).

Expresamos la ecuación dada $F(x,y,z) = e^{2x-y+2z} + 3x - 8z - 1 - sen(xyz) = 0$

La función F es de clase $C^1(R^3)$ por ser suma de funciones polinómicas, senoidales y exponenciales. Calculamos $\frac{\partial F}{\partial z} = 2e^{2x-y+2z} - 8 - xy\cos(xyz)$ y evaluándola en el punto (0,0) resulta: $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} = 2 - 8 = -6 \neq 0$, y así en las proximidades del punto (0,0,0) la ecuación dada define implícitamente a $z = f(x,y)$ de clase $C^1(R^2)$ y sus derivadas pueden ser obtenidas empleando el teorema de las funciones implícitas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(0,0,0)}=-\left.\frac{2e^{2x-y+2z}+3-yz\cos(xyz)}{2e^{2x-y+2z}-8-xy\cos(xyz)}\right|_{(0,0,0)}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(0,0,0)}=-\left.\frac{-e^{2x-y+2z}-xz\cos(xyz)}{2e^{2x-y+2z}-8-xy\cos(xyz)}\right|_{(0,0,0)}=-\frac{1}{6}$$

Ejemplo 6.6: ¿Para qué valores de ***a*** la ecuación $x^2+y^3+xy+x^3+ay=0$ puede ser resuelta para *y* en las proximidades del punto (0,0) siendo $a\in R$?

En primer lugar verifiquemos se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita. Si $F(x,y)=x^2+y^3+xy+x^3+ay$, entonces $F(0,0)=0 \quad \forall a$.

Como *F* es una función polinómica admite derivadas parciales continuas en R^2, y en particular en el punto (0,0), por lo cual *F* es de clase $C^1(0,0)$. Dichas derivadas son:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+y+3x^2 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2+x+a$$

$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=a$, en consecuencia, si $a\neq 0$, la ecuación dada $F(x,y)=0$ define a la variable *y* como función de *x* en las proximidades de *x* = 0.

Ejemplo 6.7: Sea la función $f:R^2\to R$ de clase $C^2(R^2)$ y se sabe que $f(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$. Deseamos analizar si la ecuación $\int_0^{f(x,y)}e^{t^2}dt=0$ puede resolverse para *y* en las proximidades del punto (0,0)

Consideremos $F(x,y)=\int_0^{f(x,y)}e^{t^2}\,dt$ y verificamos se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita: $F(0,0)=\int_0^{f(0,0)}e^{t^2}\,dt=\int_0^{0}e^{t^2}dt=0$. Además la función $F(x,y)=\int_0^{f(x,y)}e^{t^2}\,dt$ es de clase C^1, ya que resulta ser la composición de dos funciones diferenciables con continuidad a saber:

$F(x,y)=\left(G\circ f\right)(x,y)$ *siendo* $G(t)=\int_0^{t}e^{u^2}du$ *de clase* C^1 y también *f* es C^1 (ya que es de clase C^2 por lo datos dados) , así existen las derivadas parciales de *F* que se obtiene empleando la regla de la cadena y el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Función Primitiva)

$$\frac{\partial F}{\partial x}=e^{f^2(x,y)}.\frac{\partial f}{\partial x} \;\Rightarrow\; \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,0)}=e^{\overbrace{f^2(0,0)}^{0}}.\overbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}}^{0}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=e^{f^2(x,y)}.\frac{\partial f}{\partial y} \;\Rightarrow\; \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,0)}=e^{\overbrace{f^2(0,0)}^{0}}.\overbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}}^{1}=1\neq 0$$

En consecuencia, la ecuación $\int_0^{f(x,y)}e^{t^2}dt=0$ define de forma implícita a una única función $y=\varphi(x)$ en un entorno del punto *x* = 0.