Integración Múltiple

Integración Múltiple

U. T. N°10. Integrales dobles. Contenidos:

- Conceptos Previos
- Integral doble. Definición
- Región rectangular, de tipo I y de tipo II
- Determinación de integrales dobles
- Cálculo integrales dobles en coordenadas cartesianas
- Cálculo integrales dobles en coordenadas polares
- Cálculo de volúmenes y áreas con integrales dobles
- Áreas de superficies alabeadas

Integración Múltiple

Conceptos Previos.

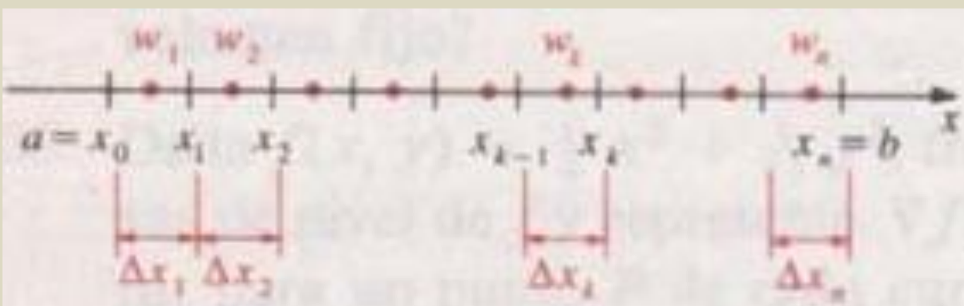
Integral definida

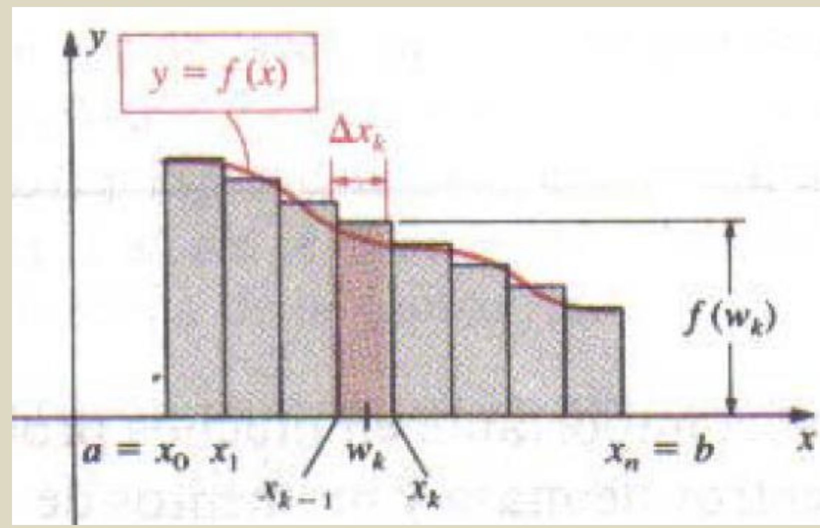
Se puede definir $\int_a^b f(x)dx$, en los sig cuatros pasos.

1. Partición $\{P_k\}$ del intervalo $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{k-1} < x_k \ldots < x_n = b$$

$||\Delta||$ norma de la partición, es la longitud del subintervalo más largo $[x_{k-1}; x_k]$





2. El área para cada rectángulo, siendo su altura $f(w_k)$ y ancho Δx_k, en el sub-intervalo $[x_{k-1}; x_k]$. Donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Al construir el rectángulo, este último, tiene partes en exceso y en defecto respecto de la curva

$$f(w_k) \cdot \Delta x_k$$

3. Considerar la suma de Riemann (suma de todas las áreas de los rectángulos del intervalo $[a, b]$)

$$\sum_k f(w_k) \cdot \Delta x_k$$

4. Establecer el límite de la suma de Riemann, cuando $\|\Delta\| \to 0$

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_k f(w_k) \cdot \Delta x_k \equiv \int_a^b f(x) dx$$

Siempre que el límite exista, entonces decimos que *f es integrable* $\forall x \in Dom\ f$ y la integral definida coincide con el resultado del límite.

Integración Múltiple

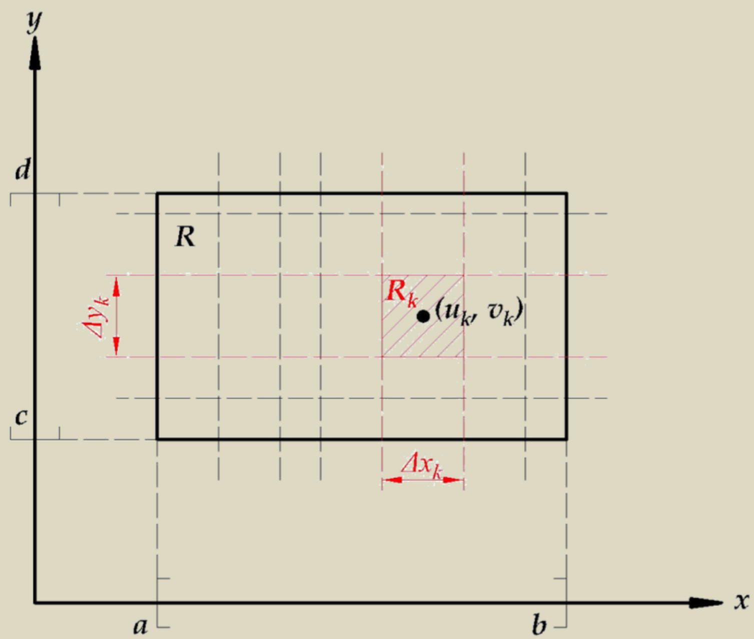
Integral doble en Coordenadas Cartesianas

1. Región rectangular

Sea f una función de dos variables tal que $f(x, y)$ existe en toda la *región rectangular cerrada* R del plano xy. A continuación, se definirá la integral doble asociada a R mediante los cuatro pasos utilizado para una función de una variable.

La región R está constituida por todos los puntos pertenecientes a un rectángulo, cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

$$R: \{(x, y) / a \leq x \leq b \,;\, c \leq y \leq d\}$$



La partición de la región rectangular R, se obtiene mediante rectas paralelas a los ejes coordenados x e y. La partición interna de la región R, se denota $\{R_k\}$. La norma de la partición $\|\Delta\|$, es la longitud de la diagonal más larga de todas las subregiones.

El área de R_k es $\Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$.

Consideramos la suma de Riemann como

$$\sum_k f(u_k, v_k) \cdot \Delta A_k$$

Integración Múltiple

Establecemos el límite de la suma de Riemann, cuando la norma de la partición interna $||\Delta|| \to 0$

$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k} f(u_k, v_k) \cdot \Delta A_k \equiv \int\int_R f(x,y)dA$$

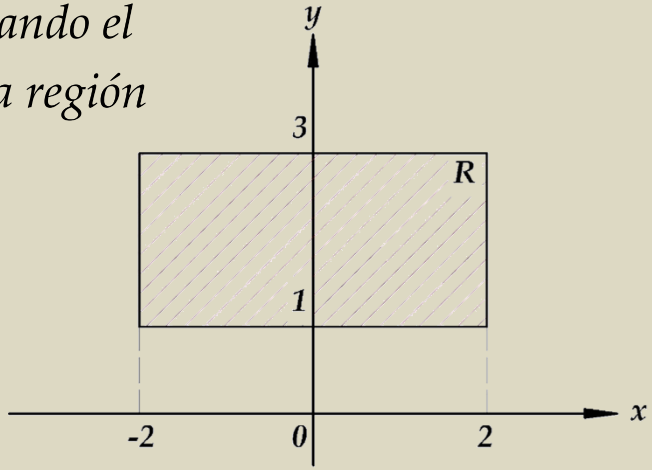
Siempre que el límite exista.

$$\int\int_R f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy$$

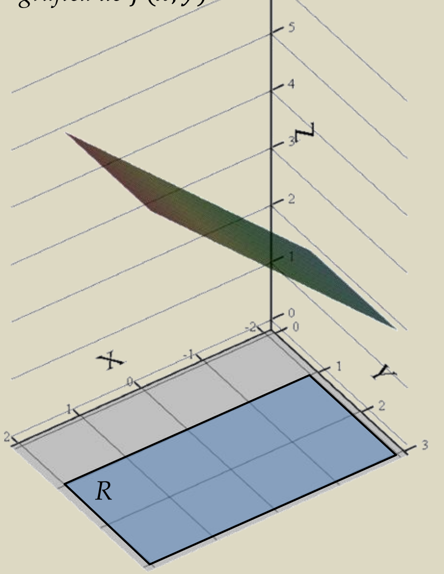
Si $f(x,y)$ es continua $\forall(x,y) \in R$, entonces el resultado de las integrales iterativas debe ser el mismo.

Integración Múltiple

Ejemplo 1. *Calcular la integral doble para la función* $f(x, y) = x + 4$, *primero utilizando el orden de integración* $dydx$ *(Región de tipo I) y luego cambiando el orden de integración por* $dxdy$ *(Región de tipo II). Siendo la región rectangular* $R: \{(x, y) \,/\, -2 \le x \le 2\,; 1 \le y \le 3\}$



Representación gráfica de $f(x, y)$



❖ *Considerando a la región de tipo I*

$$I = \int_{-2}^{2}\int_{1}^{3}(x + 4)\, dy\, dx = \int_{-2}^{2}(xy + 4y)\Big|_{1}^{3} dx =$$

$$I = \int_{-2}^{2}(2x + 8)dx = \left(2\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 32$$

❖ *Considerando a la región de tipo II*

$$I = \int_{1}^{3}\int_{-2}^{2}(x + 4)\, dx\, dy = \int_{1}^{3}\left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{2} dy =$$

$$I = \int_{1}^{3} 16dy = 16 \cdot y\Big|_{1}^{3} = 32$$

Integración Múltiple

2. <u>Región tipo I</u>

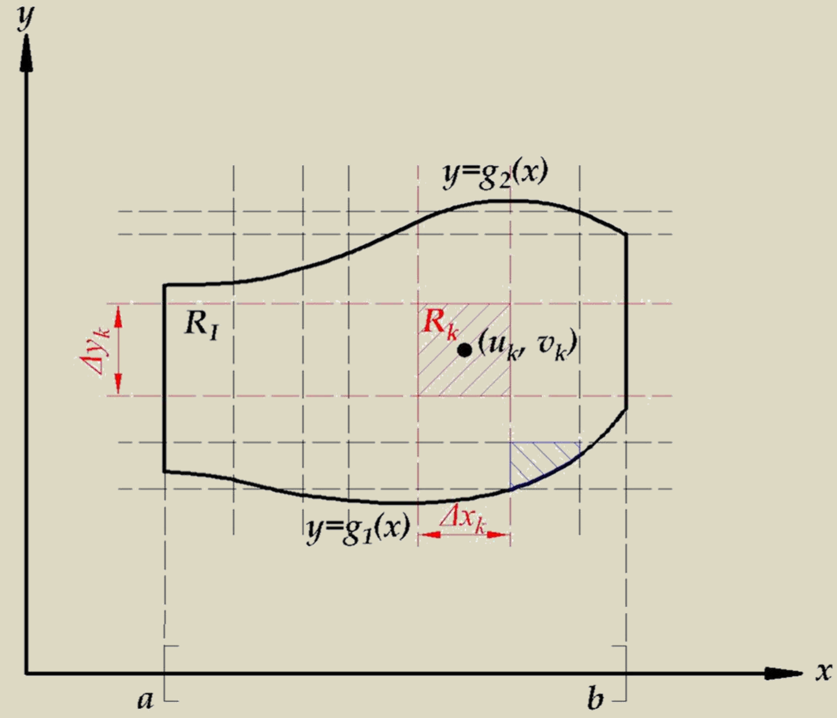
La partición de la región R_I, se obtiene mediante rectas paralelas a los ejes coordenados y queda conformada por todas las ***subregiones que se encuentran completamente contenidas*** en R_I.

$$R_I : \{(x, y)/a \leq x \leq b\,; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con g_1 y g_2 funciones continuas en $[a, b]$, donde $g_1(x) \leq g_2(x)\ \forall x \in [a, b]$.

La norma de la partición $\|\Delta\|$, es la longitud de la diagonal más larga de todas las subregiones. El área de R_k es $\Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$. Considerando la suma de Riemann como

$$\sum_k f(u_k, v_k) \cdot \Delta A_k$$



Estableciendo el límite de la suma de Riemann, cuando la norma de la partición interna $\|\Delta\| \to 0$

Integración Múltiple

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k) \cdot \Delta A_k \equiv \int\int_{R_I} f(x,y)dA$$

Siempre que el límite exista.

$$\int\int_{R_I} f(x,y)dA = \int\int_{R_I} f(x,y)dy\,dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

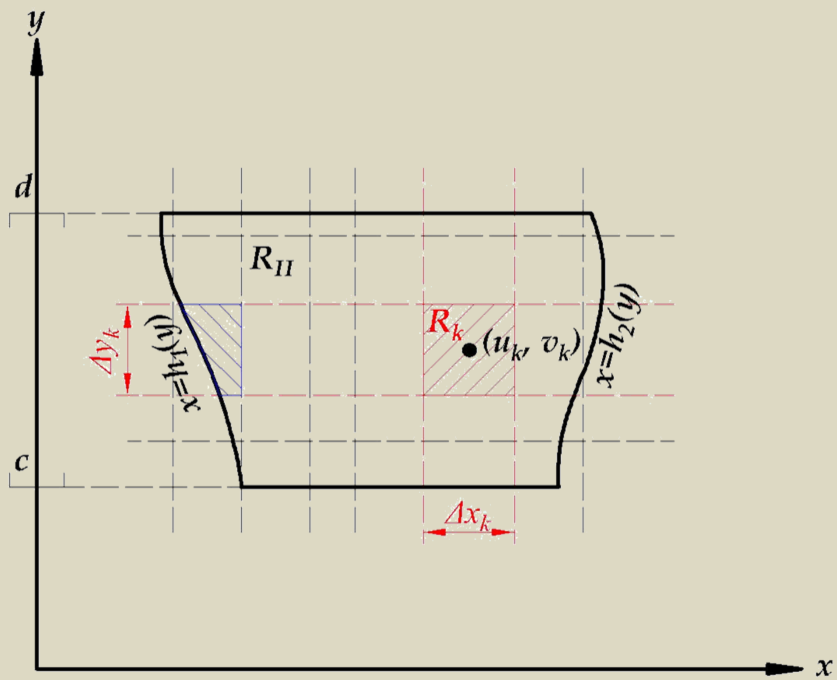
3. <u>Región tipo II</u>

Análogamente, se puede definir la integral doble asociada a una región R, representada en la figura como región de tipo II, mediante la expresión

$$R_{II}: \{(x,y)/\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y); c \leq y \leq d\}$$

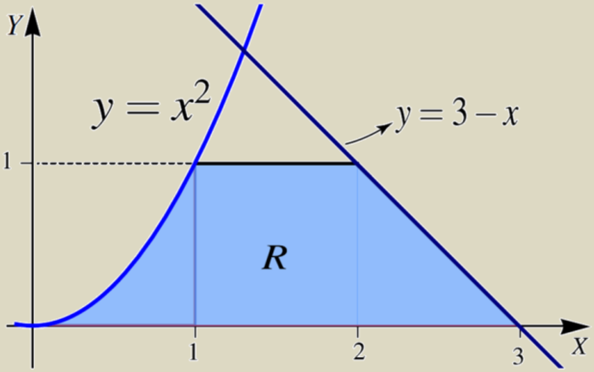
con h_1 y h_2 funciones continuas en $[c,d]$, donde $h_1(y) \leq h_2(y)\ \forall y \in [c,d]$

$$\int\int_{R_{II}} f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$



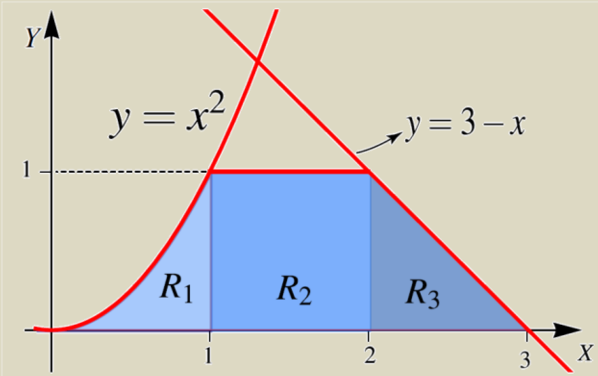
Integración Múltiple

Ejemplo 2. *Calcular la integral doble para la función $f(x,y) = x^2 + y^2$, asociada a la región R que se indica en el gráfico, primero utilizando el orden de integración $dydx$ (Región de tipo I) y luego cambiando el orden de integración por $dxdy$ (Región de tipo II)*



Solución

- *Considerando a R de tipo I, en este caso, se conforma la región R: $R_1 \cup R_2 \cup R_3$*

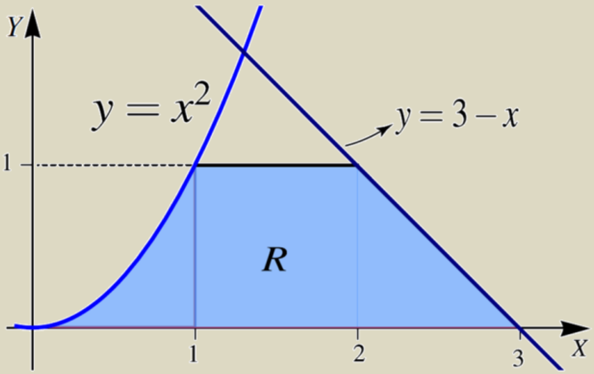


$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^1 (x^2 + y^2)\, dy\, dx + \int_2^3 \int_0^{3-x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

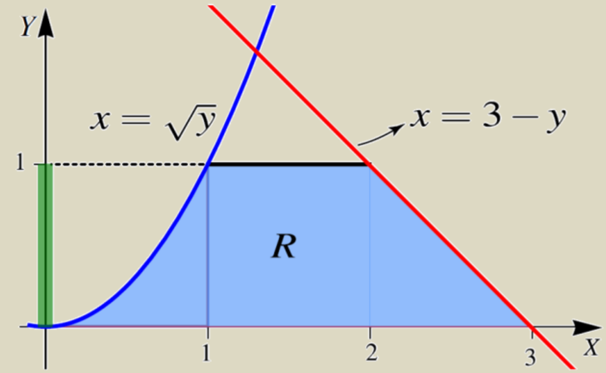
$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{x^2} dx + \int_1^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1} dx + \int_2^3 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{3-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3}\right) dx + \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx + \int_2^3 \left(9 - 9x + 6x^2 + \frac{4x^3}{3}\right) dx = \frac{1207}{210}$$

Integración Múltiple



❖ *Considerando a R de tipo II, no es necesario subdividir la región R para el cálculo de la integral doble.*



$$\iint_R (x^2+y^2)\,dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-y} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^{3-y} dy$$

$$= \int_0^1 \left\{\left[\frac{(3-y)^3}{3}+(3-y)y^2\right]-\left[\frac{\left(\sqrt{y}\right)^3}{3}+y^2\sqrt{y}\right]\right\} dy = \int_0^1 \left(9-9y+6y^2-\frac{4y^3}{3}-\frac{y^{3/2}}{3}-y^{5/2}\right) dy$$

$$= \left(9y-9\frac{y^2}{2}+6\frac{y^3}{3}-\frac{4y^4}{12}-\frac{2}{15}y^{5/2}-\frac{2}{7}\,y^{7/2}\right)\Bigg|_0^1 = 9-\frac{9}{2}+2-\frac{1}{3}-\frac{2}{15}-\frac{2}{7} = \frac{1207}{210}$$

Se verifica que el resultado, de ambas integrales iteradas, es el mismo.

Integración Múltiple

Integral doble en Coordenadas Polares

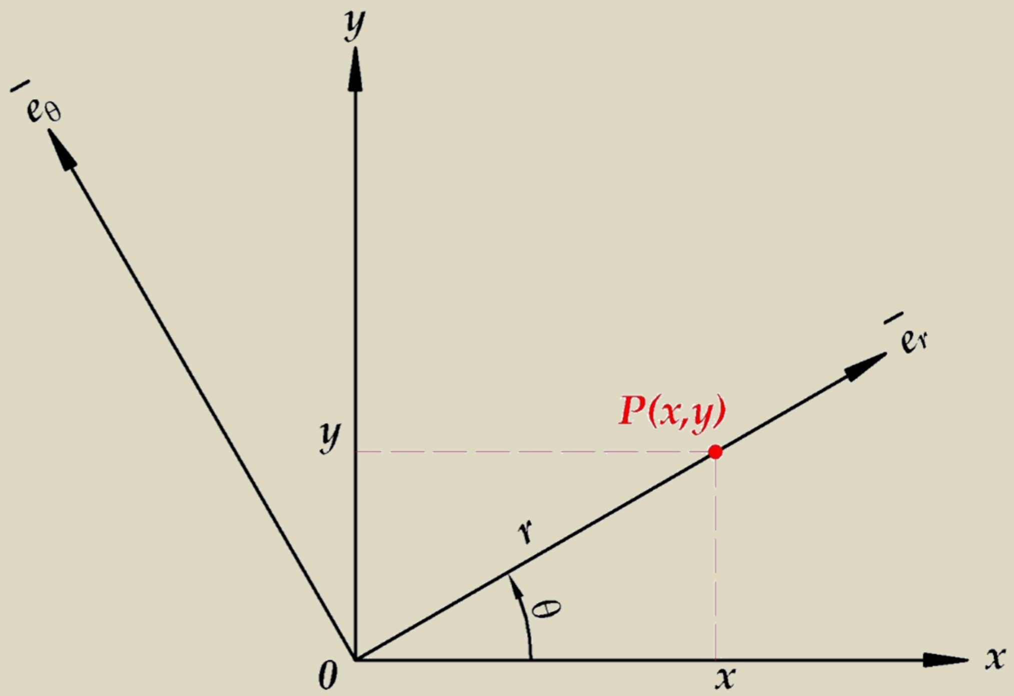
Sistema de Coordenadas Polares (r, θ)

Un punto $P(x, y) \in R^2$ queda determinado en coordenadas polares (r, θ), donde r es la distancia del origen al punto P yθ es el ángulo medido desde el eje x en sentido positivo (antihorario). La conversión de coordenadas polares a coordenadas cartesianas se hace con la siguiente transformación:

$$\begin{cases} x = r \cdot cos\,\theta \\ y = r \cdot sen\,\theta \end{cases} \quad con \quad r > 0$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$



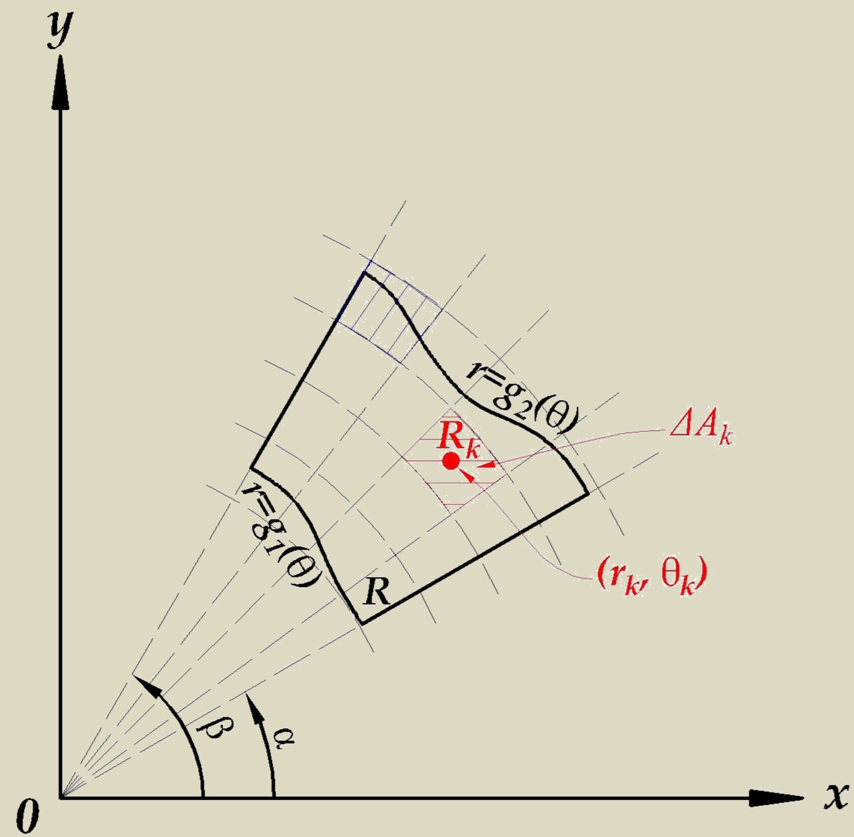
Integración Múltiple

Se puede definir $\int\int_R f(r,\theta)dA$, en los siguientes cuatros pasos.

1. Partición polar interior de la región R

$$R:\{(r,\theta)/\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta);\alpha \le \theta \le \beta\}$$

con g_1 y g_2 funciones continuas en $[\alpha,\beta]$, donde $g_1(\theta) \le g_2(\theta)\ \forall\theta\ \epsilon[\alpha,\beta]$ y además se debe cumplir que $r > 0$.
La partición de la región R, se obtiene mediante un haz de rectas que pasa por el origen y una familia de circunferencias concéntricas respecto del origen, quedando conformada por todas las ***subregiones que se encuentran completamente contenidas*** en R.
La partición interna de la región R, se denota $\{R_k\}$.
La norma de la partición $\|\Delta\|$, es la longitud mayor de las diagonales presente en las subregiones R_k.



Integración Múltiple

El área para subregión elemental R_k es ΔA_k, la cual se la puede determinar por la diferencia de áreas que a continuación se plantea:

$$\text{Área } 0BC^{\measuredangle} = \frac{1}{2}\cdot r_2 \cdot r_2 \cdot \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\cdot {r_2}^2 \cdot \Delta\theta_k \qquad \text{con} \qquad \Delta\theta_k = \frac{L.\,Arco}{L.\,Radio}$$

$$\text{Área } 0AD^{\measuredangle} = \frac{1}{2}\cdot r_1 \cdot r_1 \cdot \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\cdot {r_1}^2 \cdot \Delta\theta_k$$

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\cdot ({r_2}^2 - {r_1}^2)\cdot \Delta\theta_k$$

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\cdot (r_2 + r_1)\cdot (r_2 - r_1)\cdot \Delta\theta_k$$

$$\bar{r}_k = \frac{1}{2}\cdot (r_2 + r_1) \quad ; \quad \Delta r_k = (r_2 - r_1)$$

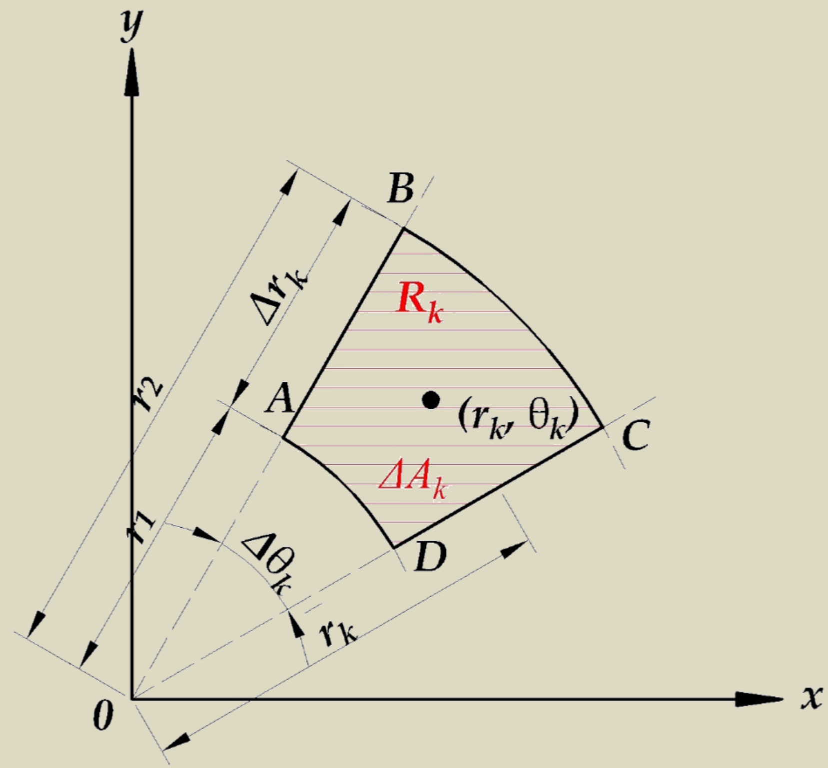
$$\Delta A_k = \bar{r}_k \cdot \Delta r_k \cdot \Delta\theta_k$$

2. Se calcula el producto

$$f(r_k, \theta_k)\cdot \Delta A_k$$

3. Considerando la suma de Riemann como

$$\sum_k f(r_k, \theta_k)\cdot \Delta A_k$$



4. Estableciendo el límite de la suma de Riemann, cuando la norma de la partición interna $\|\Delta\| \to 0$

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k} f(r_k, \theta_k) \cdot \Delta A_k \equiv \int\int_R f(r,\theta) dA$$

Siempre que el límite exista.

$$\int\int_R f(r,\theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta) r dr\, d\theta$$

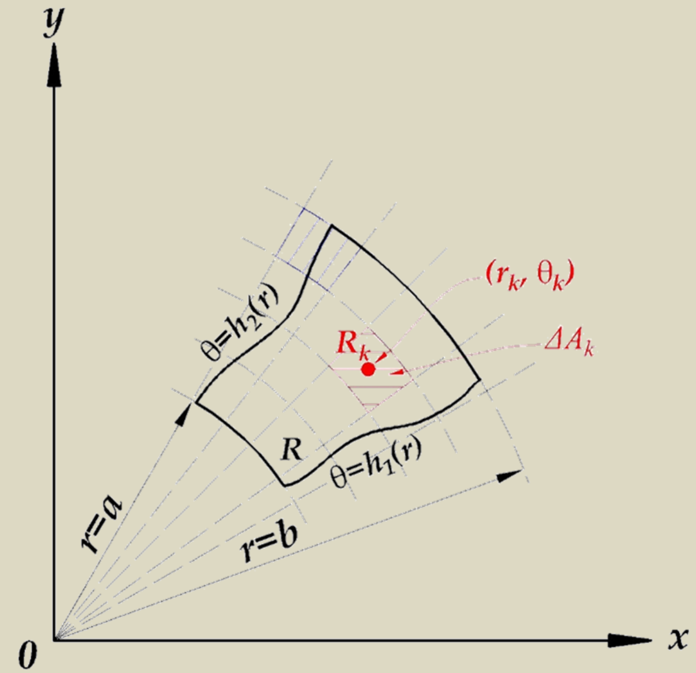
Es importante recordar que dA el tiene la siguiente expresión

$$dA = r dr d\theta$$

Integración Múltiple

Análogamente, se puede definir la integral doble iterativa para la región R

$R: \{(r, \theta)/\ a \leq r \leq b \quad ; \quad h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\}$



con h_1 y h_2 funciones continuas en $[a, b]$, donde $h_1(r) \leq h_2(r)\ \forall r \epsilon [a, b]$ y además se debe cumplir que $r > 0$.
Se denota a la integral doble iterativa de la siguiente manera

$$\int\int_R f(r, \theta) dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \theta) r\, d\theta\, dr$$

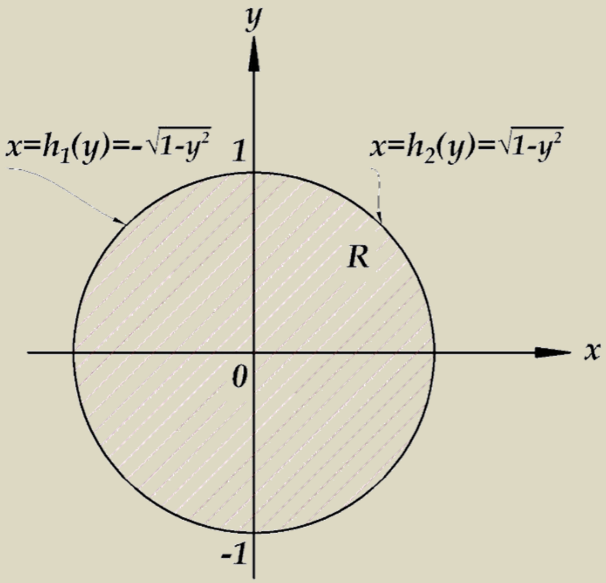
<u>Ejemplo 3.</u> Calcular utilizando coordenadas polares la integral doble dada en coordenadas cartesianas y graficar la región R.

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} ln(x^2 + y^2 + 1)\, dx\, dy$$

Integración Múltiple

Graficamos la región R, a partir de los límites de integración que figuran en la integral doble en coordenadas cartesianas

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} ln(x^2+y^2+1)\,dx\,dy$$



Luego realizamos la transformación a coordenadas polares, de la integral doble utilizando las siguientes expresiones

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot sen\,\theta \end{cases} \quad con \quad r > 0 \implies x^2+y^2 = r^2$$

$$\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

Por lo que la integral doble, con su correspondiente región, tendrán la siguiente forma

$$I = \int\int_R f(r,\theta)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)rdr\,d\theta$$

$$R{:}\,\{(r,\theta)/\ 0 \le r \le 1; 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Integración Múltiple

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ln(r^2+1)rdr\,d\theta$$

$$Aplicando\ sust.\ directa \begin{cases} u = r^2+1 \Rightarrow du = 2rdr \Rightarrow \dfrac{du}{2} = rdr \\ \qquad r_2 = 1 \ \Rightarrow u_2 = 2 \\ \qquad r_1 = 0 \ \Rightarrow u_1 = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ln(r^2+1)rdr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 ln(u)\frac{du}{2}d\theta =$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[u\cdot ln(u) - u]\Big|_1^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[2\cdot ln2 - 2 - (0-1)]d\theta =$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[2\cdot ln2 - 1]d\theta = \frac{[2\cdot ln2 - 1]}{2}\cdot\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{[ln2^2 - 1]}{2}\cdot 2\pi =$$

$$I = \pi\cdot[ln4 - 1]$$

Integración Múltiple

Propiedades de las integrales dobles

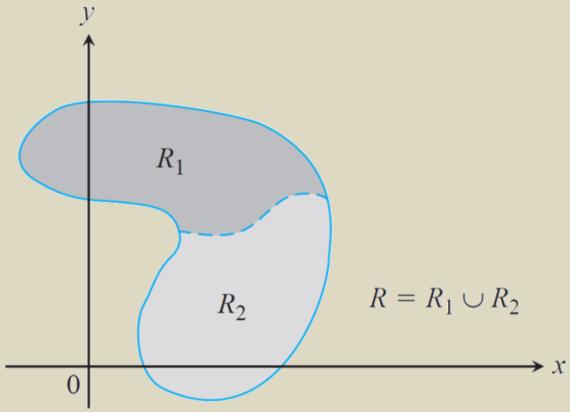
$$(i)\ \iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA \quad para\ todo\ número\ real\ c$$

$$(ii)\ \iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$$

$(iii)\ Si\ R\ es\ la\ únión\ de\ dos\ regiones\ R_1\ y\ R_2$
$que\ no\ se\ sobreponen\ o\ traslapan,$

$$R: R_1 \cup R_2$$

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$



$(iv)\ Si\ f(x,y) \geq 0\ en\ toda\ región\ R, entonces$

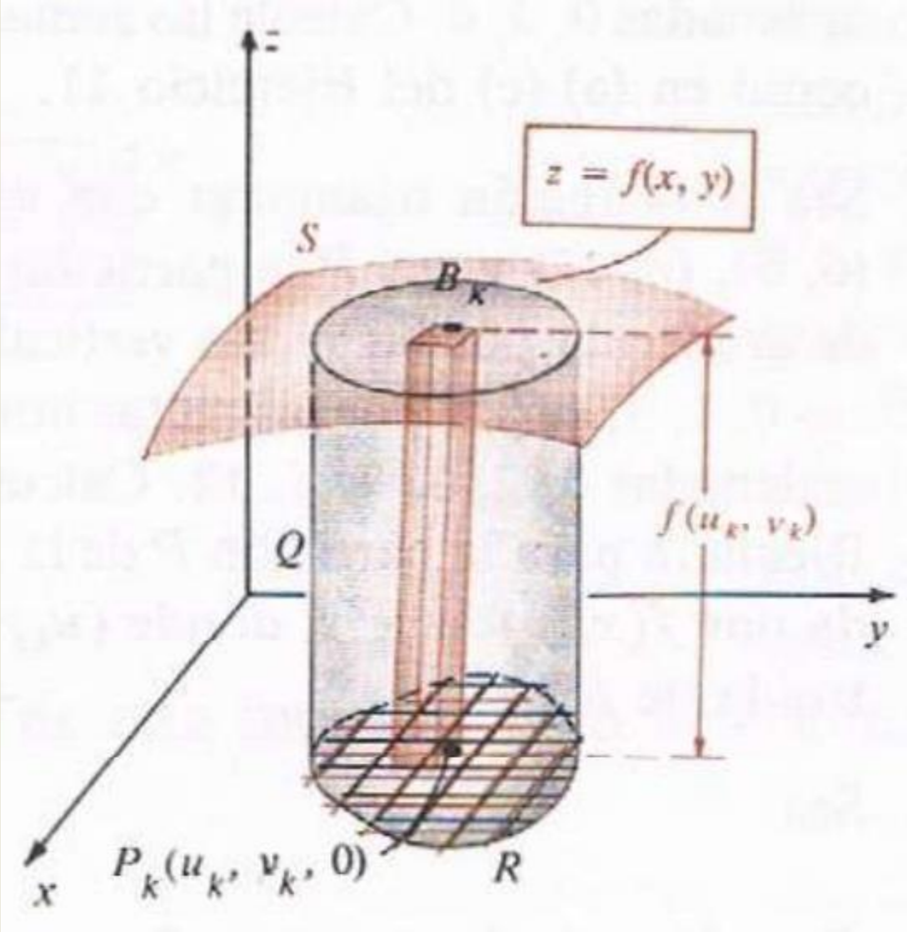
$$\iint_R f(x,y)dA \geq 0$$

Integración Múltiple

Cálculo de volúmenes y áreas con integrales dobles

Sea f una función continua de dos variables, tal que $f(x,y) \geq 0$ para todo(x,y) en una región cerrada R. El volumen del sólido V_Q, comprendido bajo la gráfica de $z = f(x,y)$ y sobre la región R es

$$V_Q = \int\int_R f(x,y)dA$$

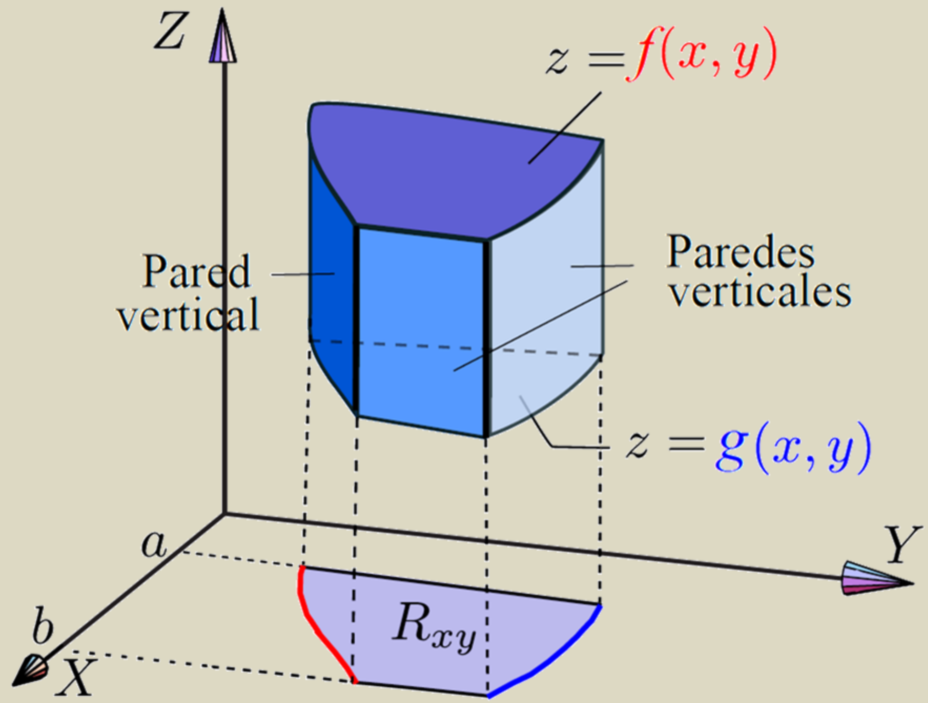


Integración Múltiple

Si el sólido Q está limitado, sobre la región cerrada R, por dos superficies de ecuaciones $z = f(x,y)$ y $z = g(x,y)$ siendo f y g funciones continuas y $f(x,y) - g(x,y) \geq 0$ sobre R, entonces

$$V_Q = \int\int_R [f(x,y) - g(x,y)]dA$$

Cabe aclarar que, muchas veces es conveniente considerar la región cerrada R como la proyección del sólido sobre los planos coordenados xz o yz.

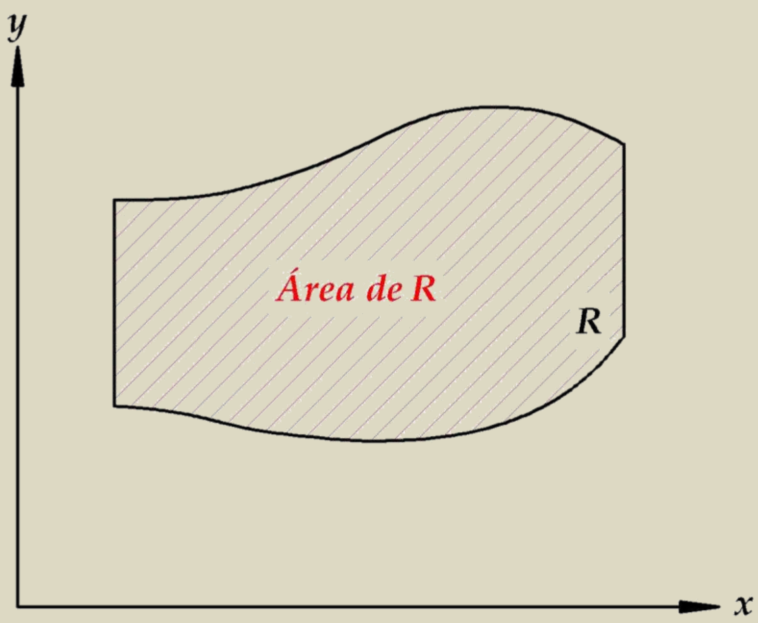


Integración Múltiple

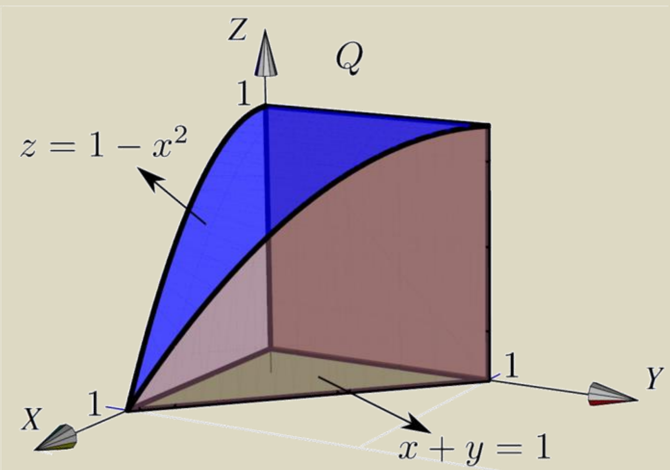
Si f es una función de dos variables, tal que $f(x, y) = 1$ para todo(x, y) en la región cerrada R. El *área plana* de la región R, será A_R, la cual se podrá determinar a través de la siguiente integral doble

$$A_R = \int\int_R f(x, y)dA$$

$$A_R = \int\int_R 1dA$$



<u>Ejemplo 4.</u> *Sea Q el sólido limitado por las superficies $z = 1 - x^2$, y $x + y = 1$ en el primer octante. Calcule el volumen del sólido V_Q utilizando integrales dobles y como región R, cada una de las proyecciones del sólido sobre los planos xy, xz e yz.*



Integración Múltiple

Calculamos el volumen V_Q, proyectando la superficie sobre el plano xy y considerando a R_{xy} de tipo I

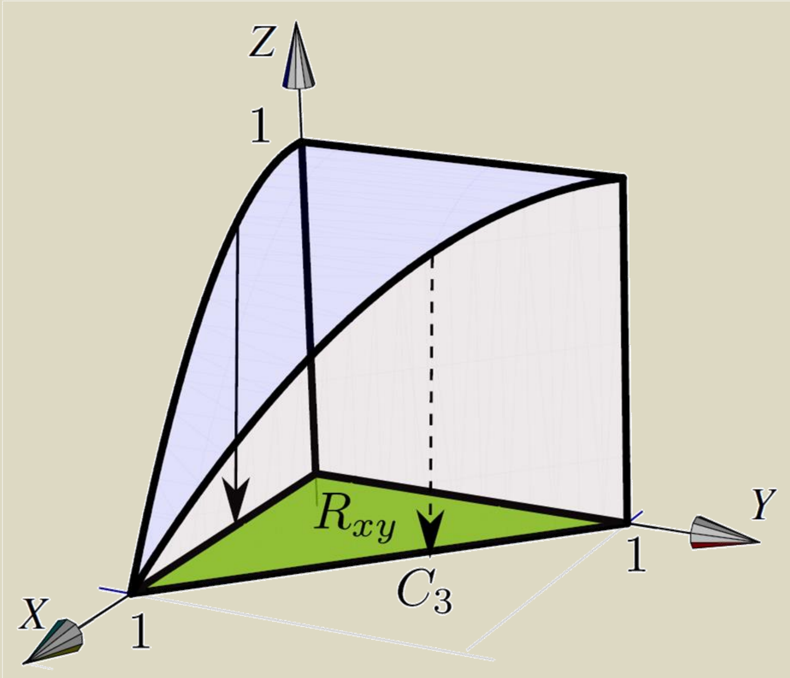
Para $f_1(x,y) \geq 0$, *con* $C_3: y = 1 - x$

$R_{xy}: \{(x,y) \,/\, 0 \leq x \leq 1 \,;\, 0 \leq y \leq 1 - x\}$

$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x^2)\, dy\, dx =$$

$$V_Q = \int_0^1 (y - x^2 y)\Big|_0^{1-x} dx =$$

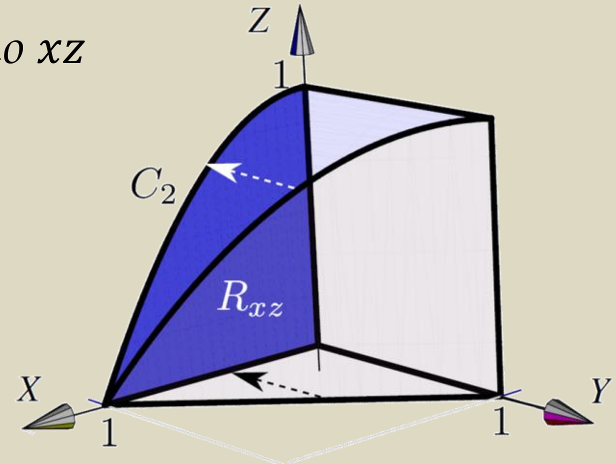
$$V_Q = \int_0^1 [(1 - x) - x^2 \cdot (1 - x)] dx = \frac{5}{12}$$



Queda como tarea para el alumno, calcular las dos integrales dobles que se dejan planteadas a continuación

Integración Múltiple

Planteo del volumen V_Q*, proyectando la superficie sobre el plano* xz

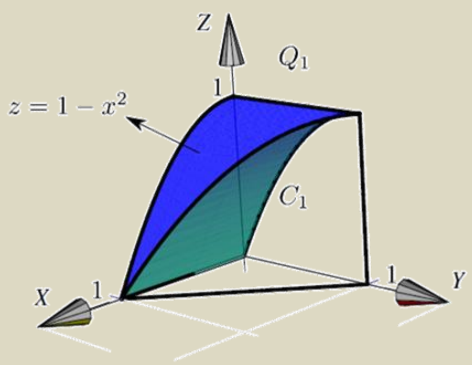


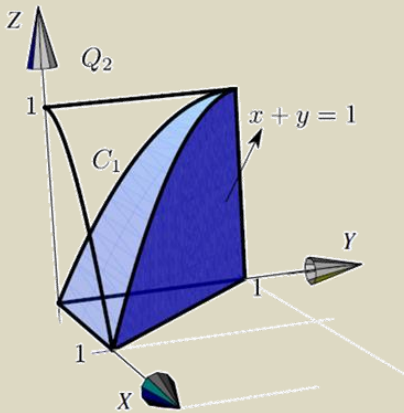
Para $f_2(x,z) \geq 0$ *con* $C_2: z = 1 - x^2$

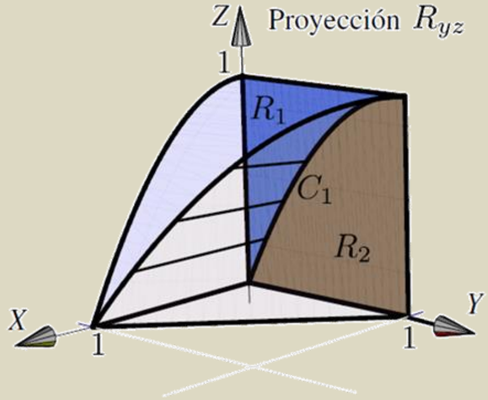
$R_{xz}: \{(x,z) \;/\; 0 \leq x \leq 1\,; 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$

$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1-x)\, dz\, dx \quad \left(Respuesta\ V_Q = \frac{5}{12} \right)$$

Planteo del volumen V_Q*, proyectando la superficie sobre el plano* yz*. En este caso, el sólido no está entre dos superficies. Desde el punto de vista del plano yz, tenemos un sólido* Q_1 *que está entre* $x = 0$ *y* $z = 1 - x^2$ *en la región* R_1 *y un sólido* Q_2 *que está entre* $x = 0$ *y el plano* $x + y = 1$ *en* R_2*. Ademas,* $Q: Q_1 \cup Q_2$*, entonces* $V_Q = V_{Q_1} + V_{Q_2}$



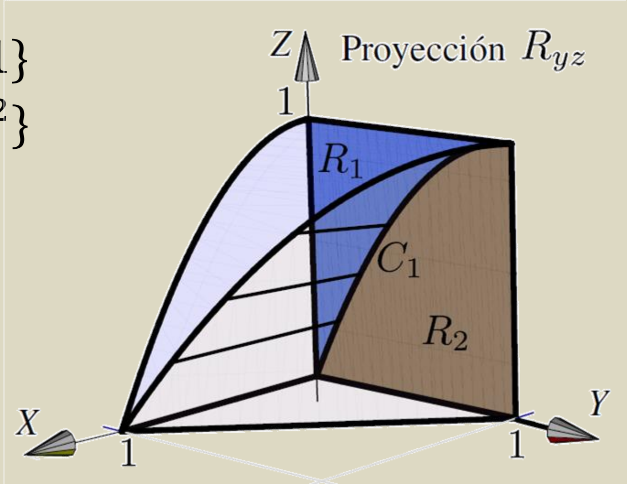




Integración Múltiple

Planteo del volumen V_Q*, proyectando la superficie sobre el plano yz. Para* $f_3(y,z) \geq 0$

$$R_{yz}: R_1 \cup R_2 \Rightarrow \begin{cases} R_1: \{(y,z) \,/\, 0 \leq y \leq 1 \,; 2y - y^2 \leq z \leq 1\} \\ R_2: \{(y,z) \,/\, 0 \leq y \leq 1 \,; 0 \leq z \leq 2y - y^2\} \end{cases}$$



La curva C_1 *divide la región de integración en dos partes, la región* R_1 *y la región* R_2*, cuya ecuación resulta de la intersección entre el cilindro parabólico de eje y con el plano proyectante (según el eje z).*

$$C_1: \begin{cases} z = 1 - x^2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - x^2 \\ x = 1 - y \end{cases} \Rightarrow C_1: z = 1 - (1-y)^2 \;\; \forall y \in [0,1]$$

Desde el punto de vista del plano yz , el sólido está limitado por las superficies

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-z} \\ x = 0 \end{cases} \textit{sobre } R_1 \textit{ y } \begin{cases} x = 1 - y \\ x = 0 \end{cases} \textit{sobre } R_2$$

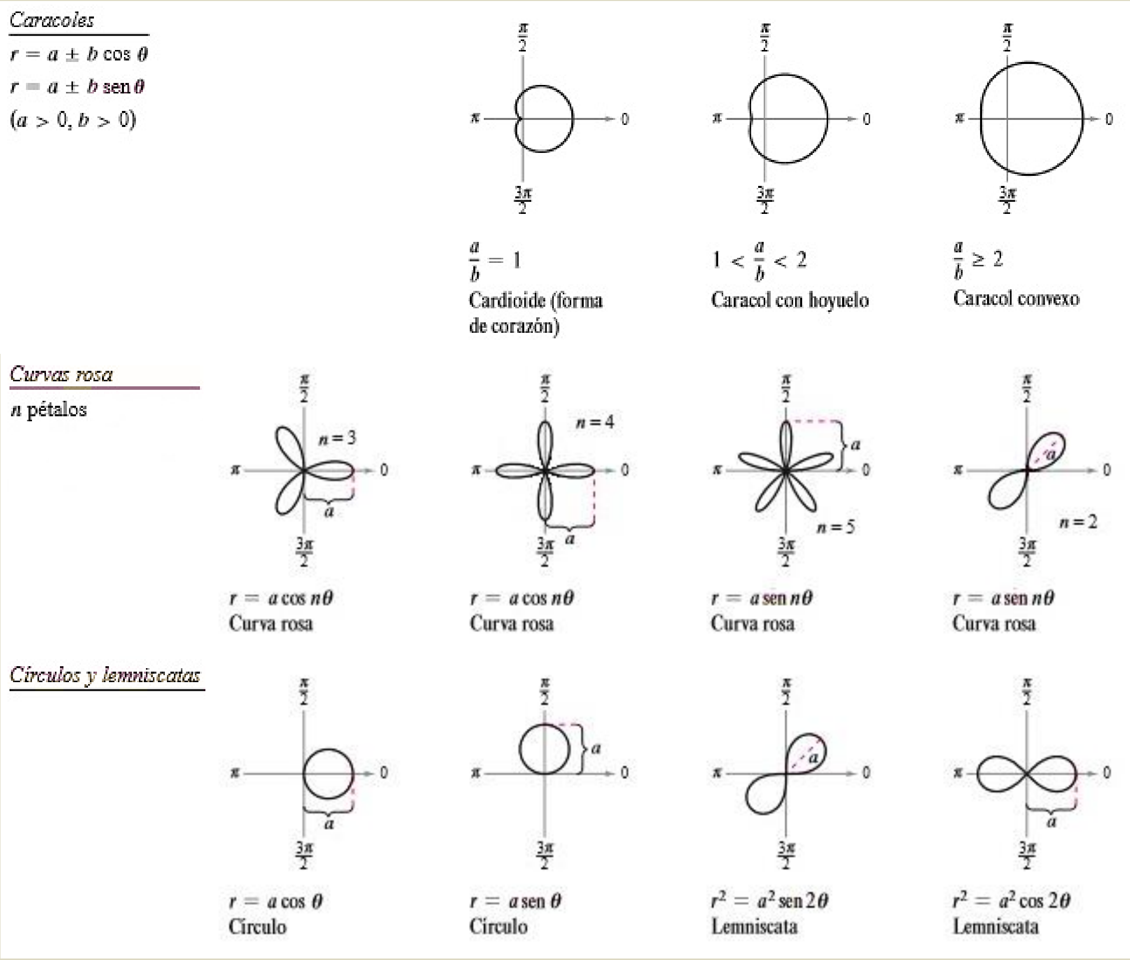
$$V_Q = \underbrace{\int_0^1 \int_{2y-y^2}^{1} \sqrt{1-z}\, dz\, dy}_{V_{Q_1}} + \underbrace{\int_0^1 \int_0^{2y-y^2} (1-y)\, dz\, dy}_{V_{Q_2}} \qquad \left(\textit{Respuesta } V_Q = \frac{5}{12} \right)$$

Integración Múltiple

Parámetros singulares de curvas en coordenadas polares

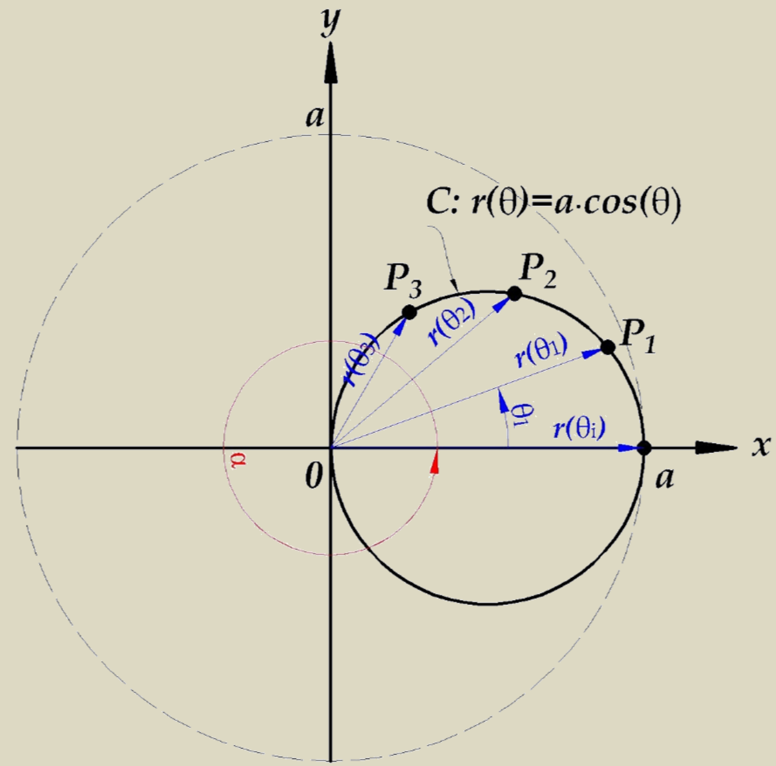
En el resumen de la figura, se muestran algunas de las ecuaciones, de las curvas en forma polar (para $r \geq 0$), las cuales resultan más simples, de analizar y representar, de manera comparativa con las ec. cartesianas. Por ejemplo, la ec. polar de una *circunferencia de radio a* y centro en el origen, es simplemente $r = a$.

Se realizará a continuación, un punteo de los parámetros intervinientes, de manera genérica, en las gráficas polares.



Integración Múltiple

O: Es el polo del Sistema de Coord. Polares
P: Es un punto arbitrario perteneciente a la curva o trayectoria polar C.
θ: Es la variable independiente (angular), con sentido de giro positivo coincidente con sentido de giro antihorario.
r: Variable dependiente de θ, que determina la distancia $\overline{OP}$ del polo al punto P.



Generalizando para $r = a \cdot cos(n\theta)$

a: Circunferencia auxiliar de radio a
n: Número de pétalos o lóbulos, presentes en la curva polar.
α: Separación angular entre los ejes de simetría de los pétalos o lóbulos, $\alpha = \frac{2\pi}{n}$
θ_i: Ángulo inicial o de arranque de la curva polar (puede, o no, ser cero θ_i), entonces obtengo el valor para $r_i(\theta_i)$.

Integración Múltiple

Para la obtención de los *puntos intersección de la curva con los ejes coordenados*

$$\begin{cases} \cap\, con\ el\ eje\ x \rightarrow & \begin{matrix} \theta_1 = 0 \rightarrow r_1(\theta_1) \\ \theta_2 = \pi \rightarrow r_2(\theta_2) \end{matrix} \\ \cap\, con\ el\ eje\ y \rightarrow & \begin{matrix} \theta_3 = \frac{1}{2}\pi \rightarrow r_3(\theta_3) \\ \theta_4 = \frac{3}{2}\pi \rightarrow r_4(\theta_4) \end{matrix} \end{cases}$$

En la determinación de los *puntos intersección de la curva con la circunferencia auxiliar de radio* $r = a$, se pueden obtener uno o más valores de θ, dependiendo de la naturaleza de la ecuación polar.

<u>Ejemplo 5.</u> Calcular el área plana de la región (celeste) limitada por la curva de ecuación

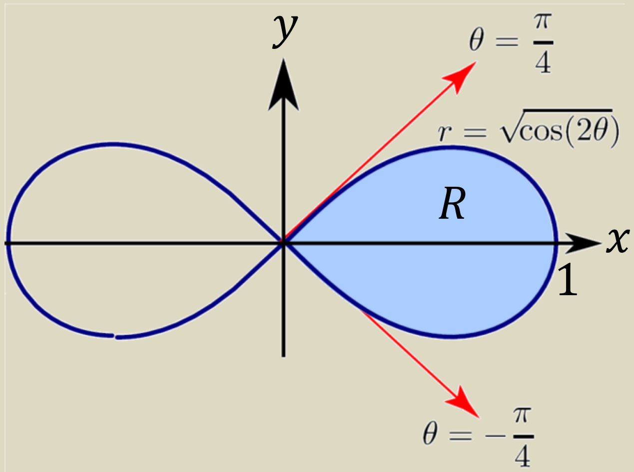
$$r^2 = cos(2\theta)$$

Despejando $r = \sqrt{cos(2\theta)}$ *y además con* $r \geq 0$, *se puede hallar el área de la región R mediante*

$$A_R = \int\int_R 1dA$$

Integración Múltiple

$$R:\left\{(r,\theta)/\ 0 \le r \le \sqrt{cos(2\theta)}\,; -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$$



$$A_R = \int\int_R 1dA = \int\int_R 1r dr\, d\theta$$

$$A_R = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{cos(2\theta)}} 1r dr\, d\theta$$

$$A_R = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{cos(2\theta)}} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{cos(2\theta)}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos(2\theta)\, d\theta$$

$$A_R = \frac{1}{2}\left[\frac{sen(2\theta)}{2}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left\{sen\left[2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - sen\left[2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\} = \frac{1}{4}(2) = \frac{1}{2}$$

Integración Múltiple

Área de una superficie alabeada

Sea f una función continua de dos variables con primeras derivadas parciales continuas, tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo(x, y) en una región cerrada R del plano xy.

Sea S la parte de la gráfica $f(x, y)$ cuya proyección en el plano xy es la región R.

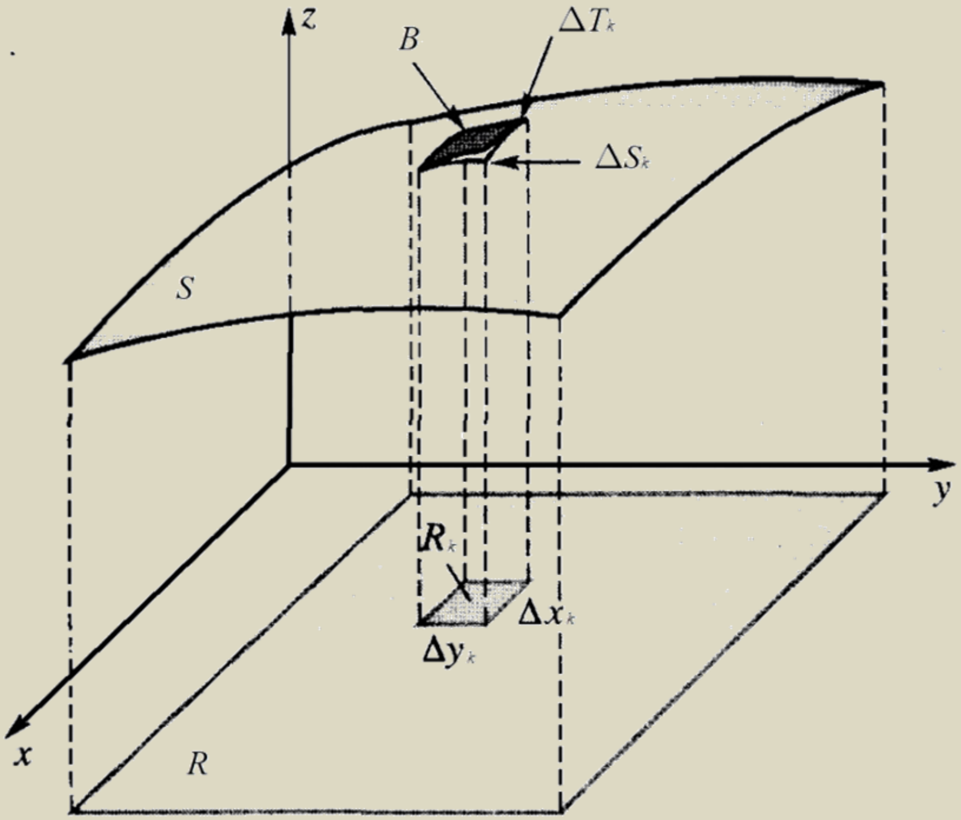
Se supone que ningún vector normal a S es paralelo al plano xy.

Se desea definir el área de S y obtener una expresión analítica para calcularla.

Sea $\{R_k\}$ una partición interior de la región R, que se obtiene mediante rectas paralelas a los ejes coordenados x e y.

Los lados de la subregión R_k de la partición son Δx_k e Δy_k y el área elemental es $\Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$.

Sea $(x_k, y_k, 0)$ un punto cualquiera de R_k y sea B el punto perteneciente a S y sus coordenadas son $B[x_k, y_k, f(x_k, y_k)]$.

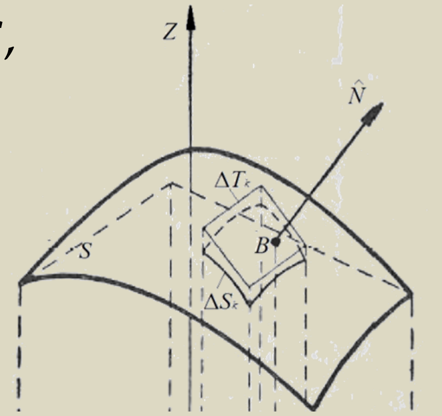


Integración Múltiple

Por el punto B pasa el *plano tangente a la superficie* S.

ΔT_k: es el área del elemento T_k perteneciente al plano tangente a S, con proyección horizontal en R_k.

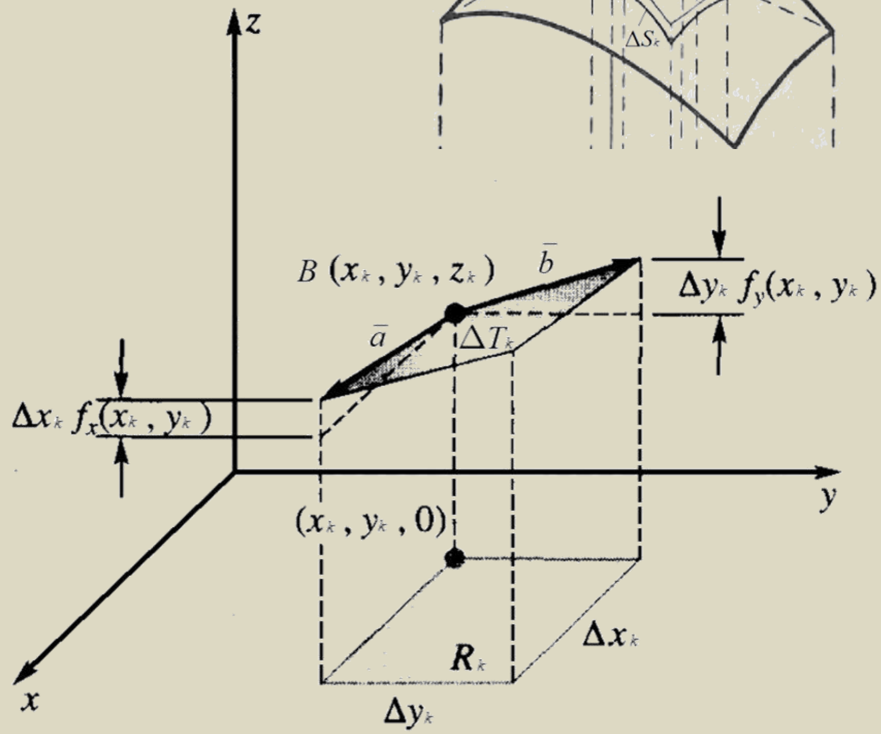
Si la partición es lo suficientemente pequeña, entonces $\Delta T_k \cong \Delta S_k$



$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k \Delta T_k = A \qquad (\text{Área de } S)$$

$$\Delta T_k = \left|\bar{a}_\wedge \bar{b}\right|$$

$$\bar{a} = \Delta x_k \hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + \Delta x_k \cdot f_x(x_k, y_k)\,\hat{k}$$
$$\bar{b} = 0\hat{\imath} + \Delta y_k \hat{\jmath} + \Delta y_k \cdot f_y(x_k, y_k)\,\hat{k}$$



$$\bar{a}_\wedge \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \Delta x_k & 0 & \Delta x_k \cdot f_x(x_k, y_k) \\ 0 & \Delta y_k & \Delta y_k \cdot f_y(x_k, y_k) \end{vmatrix}$$

$$\bar{a}_\wedge \bar{b} = -f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \Delta y_k \hat{\imath} - f_y(x_k, y_k)\Delta x_k \Delta y_k \hat{\jmath} + \Delta x_k \Delta y_k \hat{k}$$

Integración Múltiple

$$\Delta S_k \cong \Delta T_k = \left|\bar{a}_\wedge \bar{b}\right| = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + \left[f_y(x_k, y_k)\right]^2 + 1} \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k$$

La aproximación $\Delta S_k \cong \Delta T_k$ se cumple cuando Δx_k y Δy_k son suficientemente pequeños.

Estableciendo el límite de la suma de Riemann, cuando la norma de la partición interna $||\Delta|| \to 0$

$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_k \Delta T_k = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_k \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + \left[f_y(x_k, y_k)\right]^2 + 1} \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k =$$

$$= \int \int_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + \left[f_y(x, y)\right]^2 + 1} \cdot dA = A \qquad (\acute{A}rea\ de\ S)$$

Siempre que el límite exista.

Integración Múltiple

Otra manera de obtener el Área de S, es planteando la integral de superficie asociada a S del diferencial dS, cuyo estudio se verá en profundidad en la UTN°11. Donde

$$dS = \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1} \cdot dA$$

$$A = \underbrace{\int\int_S dS}_{\textit{Integral de superficie asociada a } S} = \underbrace{\int\int_R \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1} \cdot dA}_{\textit{Integral doble asociada a } R}$$

Integral de superficie asociada a S

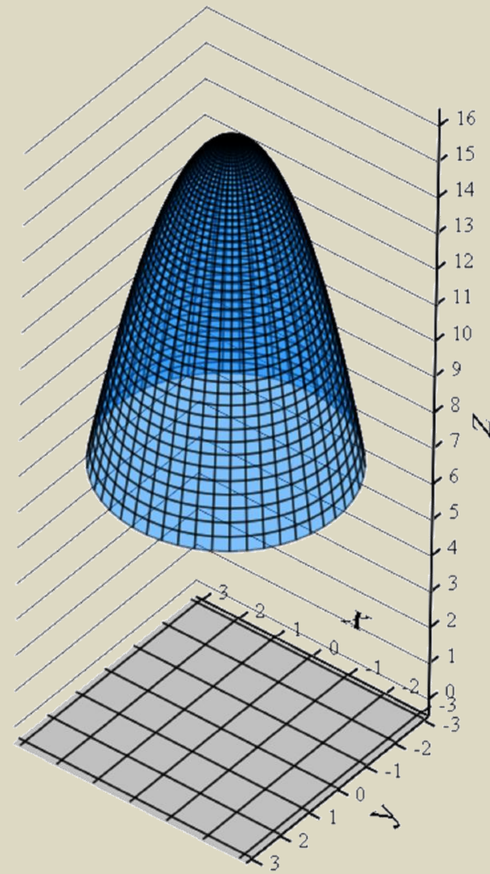
Integral doble asociada a R

Integración Múltiple

<u>Ejemplo 6.</u> Calcular el área de la porción de paraboloide de ecuación $z = 16 - x^2 - y^2$ *ubicada por arriba del plano* $z = 7$

$$\begin{cases} z = f(x,y) = 16 - x^2 - y^2 \\ z \geq 7 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f_x(x,y) = -2x \\ f_y(x,y) = -2y \end{cases}$$

Representación gráfica de $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$

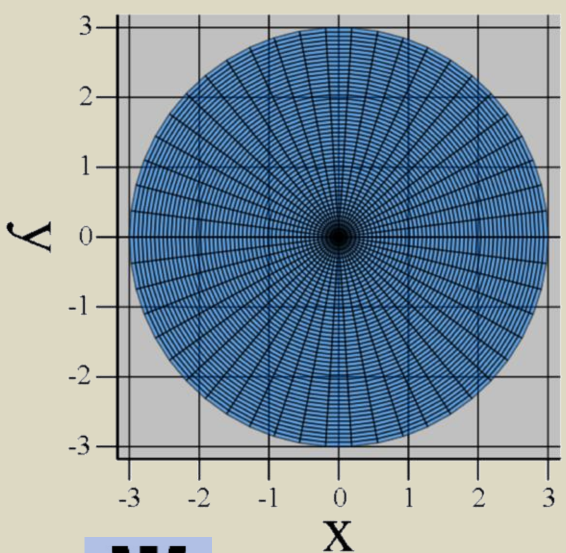


$$A = \int\int_R \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1} \cdot dA$$

$$A = \int\int_R \sqrt{[-2x]^2 + [-2y]^2 + 1} \cdot dA = \int\int_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \cdot dA$$

Adoptando para la resolución de la Integral doble del área de S, el sistema de coordenadas polares nos queda definida la región

$$R\colon \{(r, \theta) /\ 0 \leq r \leq 3 \ \ ; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



Integración Múltiple

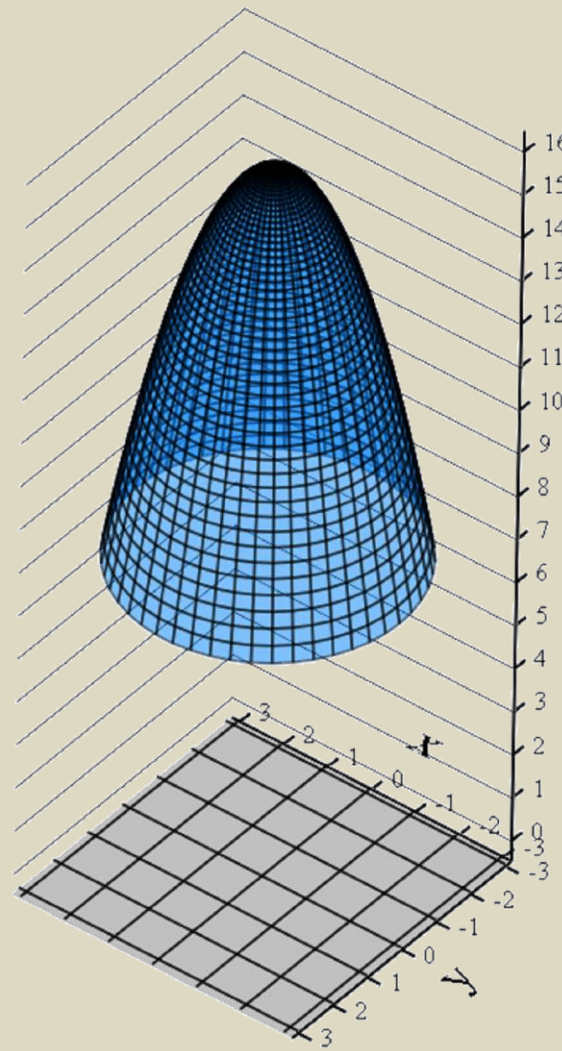
$$A = \int\int_R \sqrt{4x^2+4y^2+1} \cdot dA = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}\,r dr\, d\theta$$

$$\begin{matrix} Aplicando \\ sust.\ directa \end{matrix} \begin{cases} u = 4r^2+1 \Rightarrow du = 8rdr \Rightarrow \dfrac{du}{8} = rdr \\ r_2 = 3 \Rightarrow u_2 = 37 \\ r_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 1 \end{cases}$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_1^{37} u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{8} du d\theta = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} \left(u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^{37} d\theta$$

$$A = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\left[(37)^{\frac{3}{2}}-1\right] d\theta = \frac{\left[(37)^{\frac{3}{2}}-1\right]}{12}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$A = \frac{\left[(37)^{\frac{3}{2}}-1\right]}{12} \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{\left[(37)^{\frac{3}{2}}-1\right]}{12} 2\pi = \frac{\pi}{6} \cdot \left[(37)^{\frac{3}{2}}-1\right]$$



Bibliografía

- Cálculo con Geometría Analítica. Autor. E. Swokowski.
- Cálculo. Autor. E. Purcell

¡Muchas gracias!

¿Consultas?