



Unidad 9 – Integrales múltiples

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Revisión de la Integral de Riemann para funciones de una variable real.
2. Definir la Integral de Riemann para funciones escalares de dos y tres variables independientes.
3. Determinación de técnicas de Cálculo de Integrales Múltiples: Teorema de Fubini, Teoremas de cambio de variables en las integrales dobles y triples.

Integrales Dobles

Revisión de integrales unidimensionales

Las sumas de Riemann y la integral

Sea una función $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua (eventualmente continua por tramos con un número finito de saltos) y con un número entero $n \geq 1$ haciendo una partición P del intervalo $[a, b]$ dada por $x_k = \frac{k}{n}$, es decir, se consideran los puntos $P = \{a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n \leq b\}$



Definición 9.1: Se llama *Suma de Riemann* asociada a la partición P a:

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k \\ (x_k = \frac{k}{n} \in I)}} f(x_k)$$

$S_n(f)$ representa geométricamente el área (algebraica) (siempre que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$) de la región situada entre el eje de abscisas y el gráfico de la "función escalonada" f_n que es constantemente igual a $f(x_k)$ sobre cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ de longitud $\frac{1}{n}$

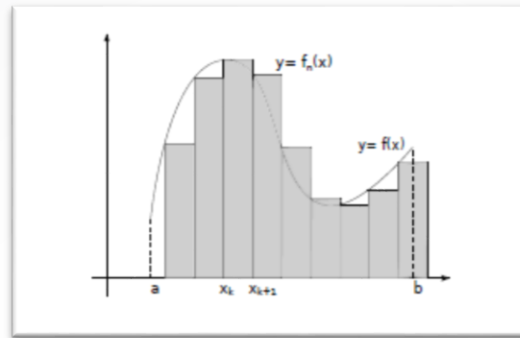


Figura 9.1: Interpretación de las sumas de Riemann

Cuando n es muy grande, la longitud de cada subintervalo $\frac{1}{n}$ es muy pequeño, y las funciones f_n son buenas aproximaciones de f donde ella es continua ya que varía muy poco sobre los intervalos de longitud pequeña. El siguiente teorema es importante ya que, no sólo presenta a la Integral de Riemann, si no que también proporciona un medio para aproximarla numéricamente.



Teorema 9.1: Si $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua por tramos, entonces las Sumas de Riemann $S_n(f)$ convergen a un número real límite cuando $n \rightarrow \infty$ y a ese límite se lo denomina la integral de f sobre $[a, b]$ y se lo denota $\int_a^b f(x)dx$.

La interpretación geométrica de la Integral de Riemann.

De acuerdo con la interpretación geométrica realizada anteriormente de las sumas de Riemann, la integral $\int_a^b f(x)dx$ resulta ser el área algebraica (si $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$) de la región R situada entre el gráfico de f , el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, que designaremos $R(f, a, b)$, es decir: $\int_a^b f(x)dx = \text{Área } R(f, a, b)$.

Si bien las integrales de Riemann se definen como límites de las Sumas de Riemann, luego se estableció un método de cálculo empleando el concepto de primitiva de una función, por ejemplo:

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx = \text{tg } x \Big|_0^{\pi/4} = \text{tg } \frac{\pi}{4} - \text{tg } 0 = 1$$

Este método de cálculo resulta ser la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo Integral que, como sabemos, es muy eficiente siempre que sea sencillo el cálculo de la función primitiva, es decir una primitiva expresable en término de funciones elementales. Por ejemplo, la función $f(x) = e^{x^2}$ tiene primitiva pero ésta no es una función elemental.

Integración Múltiple

¿Qué significado tiene la integral de una función de varias variables? Para responder este interrogante desarrollaremos la teoría de la integración de múltiples variables. Haremos énfasis en las integrales dobles y triples, pues aparecen en la mayoría de las aplicaciones de cálculo multivariable y aplicaciones físicas en el espacio tridimensional.

En una variable real, el interés está centrado en el cálculo del área de la región comprendida entre el gráfico de una función y un intervalo $[a, b]$ sobre el eje x . Una motivación para el estudio de las integrales dobles es el cálculo del volumen del sólido limitado por una superficie $z = f(x, y)$ y una región R sobre el plano xy .

Las dificultades de cálculo que podrán tener las integrales dobles no sólo pueden surgir por la complejidad del cálculo de la primitiva, sino también por la región sobre la que se integra. En primer lugar, integraremos sobre regiones rectangulares.

Integrales dobles

Consideremos una función $f : Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / z = f(x, y)$ acotada, no negativa y definida sobre el dominio rectangular $Q = [a, b] \times [c, d]$. Se desea calcular el volumen del sólido limitado por el gráfico de la superficie de la función f y del plano xy con la base Q tal como se observa en la figura 9.1:

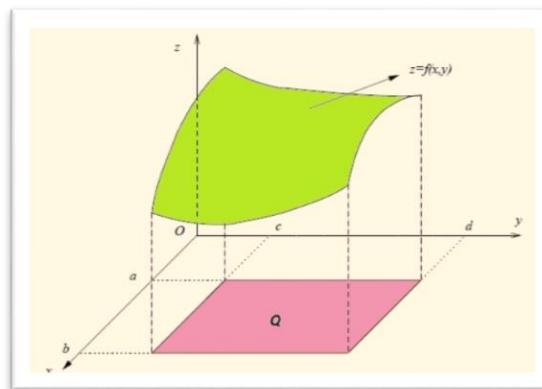


Figura 9.2: Sólido elemental de base rectangular

Procederemos de manera análoga a lo ya visto en el cálculo del área para una función real de una variable real. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, y el intervalo $[c, d]$ en m subintervalos, es decir, $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b\}$ y $S = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m+1} = d\}$ (los puntos considerados en cada intervalo no son necesariamente equiespaciados) Así, la **partición P** del rectángulo Q es $T \times S$

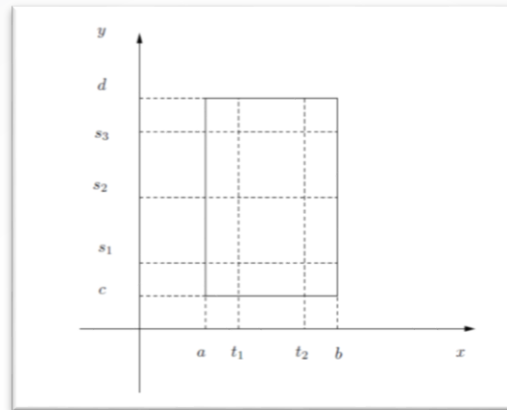


Figura 9.3: Particion del rectángulo Q

Llamemos rectángulo $Q_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ cuya área es: $\text{Área } Q_{ij} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ y construimos las sumas:

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} M_{ij} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = \sum_{i,j=1}^{n,m} M_{ij} \cdot \text{Área } (Q_{ij}) = S(f, P) \quad \gamma$$

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} m_{ij} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = \sum_{i,j=1}^{n,m} m_{ij} \cdot \text{Área } (Q_{ij}) = s(f, P)$$

¿Quiénes son M_{ij} y m_{ij} ? Estos valores son el supremo y el ínfimo de las imágenes de la función en cada subrectángulo de la partición P (ellos existen ya que la función f es acotada), es decir:

$$M_{ij} = \sup \{ f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \}$$

$$m_{ij} = \inf \{ f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \}$$

A dichas sumas se las denomina **Suma Superior y Suma inferior de Riemann** asociadas a la función f y respecto de la partición P . Cabe destacar que estas sumas son sumas dobles (tienen doble contador que por abuso de notación se escribe sólo una)

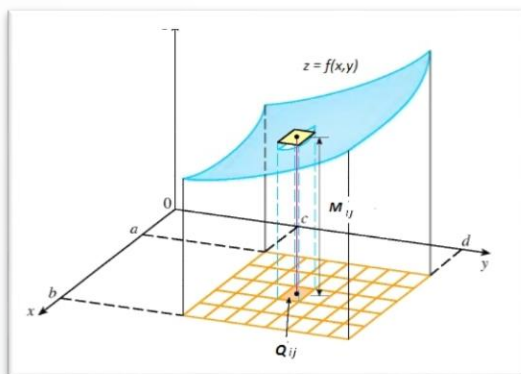


Figura 9.4: Elemento infinitesimal de volumen

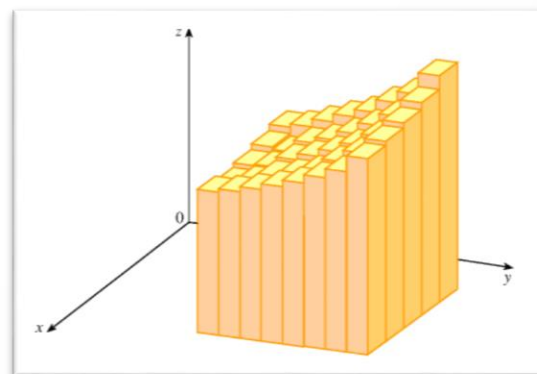


Figura 9.5: Suma de Riemann

Observemos que la suma superior de Riemann representa el volumen por exceso y la suma inferior de Riemann el volumen por defecto, es decir:

Para cada partición P del rectángulo Q , se verifica: $s(f, P) \leq \text{Volumen} \leq S(f, P)$

Si se considera una partición P' "más fina" que P , es decir, se consideran más puntos en los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, $P' \supset P$ entonces se verifica: $s(f, P) \leq s(f, P') \leq \text{Volumen} \leq S(f, P') \leq S(f, P)$

De esta forma, observamos que a medida que se refina la partición, las sumas superiores y las sumas inferiores se aproximan cada vez más al volumen buscado. Se trata de dos sucesiones de números reales:

$(S(f, P^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ y $(s(f, P^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$. La primera es la sucesión de sumas superiores de Riemann que es monótona decreciente acotada inferiormente y, por lo tanto, convergente al ínfimo de dicha sucesión, al que designaremos $\overline{\int_Q f} = \inf \{S(f, P^{(n)}): P \text{ partición de } Q\}$. La segunda es la sucesión de sumas inferiores de Riemann que resulta ser monótona creciente acotada superiormente y, por tanto, convergente al supremo de dicha sucesión, que denotaremos $\underline{\int_Q f} = \sup \{s(f, P^{(n)}): P \text{ partición de } Q\}$



Definición 9.2: La función $f: Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / z = f(x, y)$ acotada sobre Q es **integrable Riemann** en Q si $\overline{\int_Q f} = \underline{\int_Q f}$ y al valor común se lo denomina integral de f sobre Q , y se lo designa:

$$\int_Q f \quad \text{o} \quad \iint_Q f(x, y) dx dy = \iint_Q f(x, y) dA$$

¿Qué significa dA ? El símbolo dA en la integral doble recuerda al símbolo dx en las integrales unidimensionales, pero en este caso A hace referencia a la noción de "**área**"

Nótese que en esta definición no se prevé que la función f sea no negativa sobre el rectángulo Q . Este requisito sólo se emplea para interpretar a la integral como un volumen. Si la función cambia de signo en el rectángulo Q , y se verifica $\overline{\int_Q f} = \underline{\int_Q f}$, la función es integrable pero el valor de la integral no es el volumen del sólido. Se

trata del resultado de sumar y restar volúmenes (el volumen del sólido ubicado sobre el plano xy y el volumen del sólido que queda debajo del plano xy)



Teorema 9.2: Condición suficiente de integrabilidad.

Toda función continua en un rectángulo Q es integrable en dicho rectángulo.



Teorema 9.3: Condición necesaria y suficiente de integrabilidad.

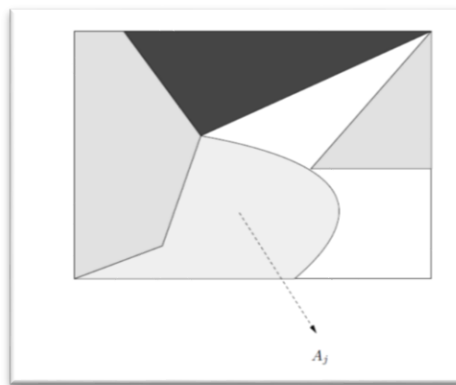
Una función acotada $f: Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / z = f(x, y)$ es integrable según Riemann sobre Q , sí y sólo sí para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P del rectángulo Q tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

La interpretación geométrica del teorema 9.3 consiste en la posibilidad de recubrir la superficie $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in Q$ mediante una familia de paralelepípedos asociados a un reticulado del rectángulo Q , la suma de cuyos volúmenes es tan pequeña como se desee.

Existe un conjunto de funciones denominadas "funciones seccionalmente continuas" en un dominio bidimensional cuya definición es similar a la vista para funciones reales de una variable real.



Definición 9.3: Sean los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n abiertos, disjuntos contenidos en el rectángulo Q tales que $\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} = Q$. Una función $f : Q \rightarrow R$ se dice **continua por tramos** en Q si existe una familia de conjuntos abiertos A_1, A_2, \dots, A_n que satisfaga $\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} = Q$, y funciones continuas $f_1, f_2, \dots, f_n : Q \rightarrow R$ tales que $f = f_j$ para cada A_j



Propiedades de las funciones integrables.

Supongamos dos funciones $f, g : Q \rightarrow R$ integrables sobre Q , $\alpha, \beta \in R$, entonces:

1. Homogeneidad

$\alpha f : Q \rightarrow R$ es integrable sobre Q y $\int_Q \alpha f = \alpha \int_Q f$

2. Linealidad

$\alpha f + \beta g : Q \rightarrow R$ es integrable sobre Q y $\int_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_Q f + \beta \int_Q g$ (la integración es una operación lineal)



3. Monotonía

Si $f(x, y) \geq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in Q$, entonces $\int_Q f \geq \int_Q g$

4. Aditividad

Si se subdivide al rectángulo Q en n rectángulos Q_1, Q_2, \dots, Q_n tales que para $j \neq k$ se verifica que:

$$Q_j \cap Q_k = \begin{cases} \emptyset & \text{o} \\ \text{puntos aislados,} & \text{(se dice comúnmente que la intersección es un conjunto de área cero)} \\ \text{o bien, un segmento} \end{cases}$$

f es integrable sobre Q , *sí y sólo sí*, f es integrable sobre cada Q_i y, además, $\int_Q f = \sum_{i=1}^n \int_{Q_i} f$

5. $|f|$ es integrable sobre Q y se verifica que: $\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|$ (esta propiedad se emplea con frecuencia para acotar el valor de una integral doble)

Hasta el momento no disponemos de un método práctico para calcular una integral doble sobre un rectángulo que no sea la aplicación de la definición 9.1, que suele ser una tarea compleja. A continuación, desarrollaremos un método que permite reducir el cálculo de una integral doble al cálculo de dos integrales unidimensionales.

Cálculo de integrales dobles sobre rectángulos

En este espacio presentaremos técnicas para el cálculo efectivo de una integral doble. En primer lugar, enunciaremos el **Teorema de Fubini**¹ para funciones continuas, que plantea la integración iterada. Este teorema resuelve desde el punto de vista teórico el problema, pero no siempre su empleo otorga resultados satisfactorios desde el punto de vista práctico, ya que puede ocurrir que las integrales iteradas planteadas no se puedan calcular con las técnicas habituales del cálculo de una variable (Teorema de Barrow), o bien, requieren de cálculos muy engorrosos, o bien la región de integración no es un rectángulo, si no una región elemental en R^2 (que definiremos más adelante)

Posteriormente, estudiaremos que el teorema del cambio de variable puede dar solución más satisfactoria a un cálculo engoroso transformando la integral en otra de cálculos más ágiles y sencillos. Una de las primeras aplicaciones del Teorema de Fubini es la fundamentación del conocido **Principio de Cavalieri**² para el cálculo de volúmenes.



¹ Guido Fubini, matemático italiano nacido en Venecia y fallecido en New York (1879-1943) Trabajó principalmente en temas del Análisis Matemático, en particular en ecuaciones diferenciales, análisis funcional y funciones de variable compleja. Estudió el cálculo de variaciones, teoría de grupos, geometría no euclídea y proyectiva.

² Buonaventura Cavalieri, matemático italiano nacido en Milán y fallecido en Bolonia (1598-1647) ha sido uno de los precursores del Cálculo Infinitesimal Moderno. Discípulo de Galileo. Introdujo en Italia el cálculo de logaritmos. Se destacó fundamentalmente por la introducción de la Teoría de los "indivisibles" en la que estudia las magnitudes geométricas como composición de un número

La técnica de Cavalieri para el cálculo del volumen aproximado de un objeto consiste en: “rebanar” el objeto; luego, para cada rebanada, se calcula el área de alguna de sus “caras” (o de alguna “cara intermedia”), después se la multiplica por el “espesor” de dicha rebanada (obteniendo así un volumen) y finalmente se suman todos esos volúmenes. Básicamente, se colocan dos objetos de la misma altura apoyados sobre un plano base de manera tal que al realizar las "rebanadas" en ambos objetos con planos paralelos a la base, el área de las dos secciones formadas en cada plano son iguales, entonces sus volúmenes son iguales.

Esta técnica, casi rudimentaria, es la descripción no rigurosa de las sumas de Riemann de alguna función que generamos con anterioridad. Para el caso que nos atañe en R^2 existen formas de cortar el sólido W que permiten obtener el área de cada "rebanada" o corte que se realice a dicho sólido. En concreto existen dos formas. Podemos intersectar al sólido W con un plano que pase por $x = x_0 \in [a, b]$ paralelo al plano yz , y así obtenemos una región plana limitada por la gráfica de la función $f(x_0, y) : [c, d] \rightarrow R$ y el eje y en el intervalo $[c, d]$ como se muestra en la figura 9.2, cuya área es $A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy$.

Esta función $A(x)$ puede estar definida sobre el intervalo $[a, b]$ y la emplearemos para aplicar el Principio de Cavalieri.

En forma análoga, es posible intersectar al sólido W con planos paralelos al plano xz , por ejemplo, si se elige $y = y_0 \in [c, d]$ se obtiene la región plana que se indica en la figura 9.3, limitada por la gráfica de la función $f(x, y_0) : [a, b] \rightarrow R$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$ cuya área es $B(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$.

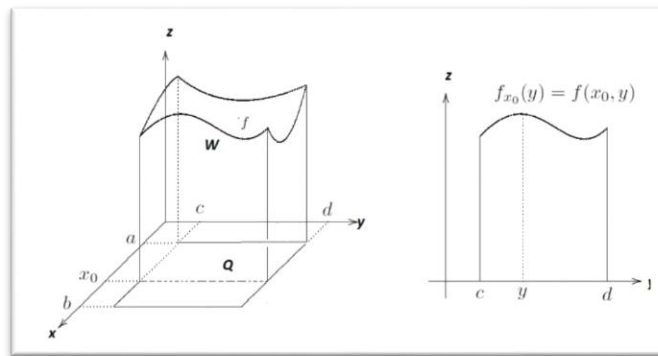


Figura 9.6: Secciones planas del sólido W con un plano paralelo al plano (yz)

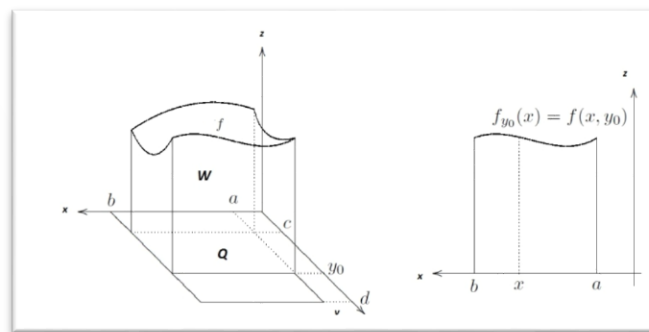


Figura 9.7: Secciones planas del sólido W con un plano paralelo al plano (xz)

finito de elementos o "indivisibles". El cálculo de áreas y volúmenes los realiza efectuando sumas de infinitos indivisibles. Así transcurre el inicio del cálculo de una integral definida aunque prescindiendo del paso al límite que sería desarrollado posteriormente.



Esta función $B(y)$ puede estar definida sobre el intervalo $[c, d]$ y también podremos emplearla para aplicar el Principio de Cavalieri.

Una vez determinadas las funciones $A(x)$ y $B(y)$ en los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente, es posible calcular el volumen del sólido W que hemos expresado como $\int_Q f$ de dos formas diferentes:

$$\int_Q f = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

o bien como:

$$\int_Q f = \int_c^d B(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Las integrales que figuran en los segundos miembros de las igualdades anteriores, se denominan **integrales iteradas**, que se calculan así: primero se calcula la integral que aparece dentro del paréntesis respecto de la variable que indica el diferencial y se deja a la otra variable fija (constante)

Las dos integrales iteradas proporcionan dos técnicas para el cálculo de $\int_Q f$ y ambas dan el mismo resultado.

A partir de este hecho, el Teorema de Fubini expresa esta propiedad afirmando que es posible calcular la integral doble cambiando el orden de integración bajo ciertas hipótesis iniciales que en breve enunciaremos. Ahora bien, es necesario precisar cuestiones que hemos establecido en la construcción de los 'cortes' del sólido W con planos paralelos. ¿Es siempre posible definir las funciones $A(x)$ y $B(y)$ en los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente? Si la función f es solamente integrable en el rectángulo Q , la respuesta es NO. De todas formas, la respuesta es afirmativa para un importante grupo de funciones, ¿Cuáles? las funciones continuas. Para ellas siempre estarán bien definidas las funciones $A(x)$ y $B(y)$.



Teorema 9.4: Teorema de Fubini para regiones rectangulares

Sea la función $f: Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / z = f(x, y)$. Si f es continua sobre Q , entonces

$$\int_Q f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Observaciones

1. Usualmente, expresaremos a las integrales iteradas sin el uso de paréntesis, es decir: $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ o bien, $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$.
2. Sean las funciones $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, entonces $\int_Q f = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d h(y) dy \right)$. Esto significa que si la función del integrando puede expresarse como el producto de dos funciones continuas, cada una de ella dependiente de una sola variable real, entonces la integral iterada puede calcularse como el producto de dos integrales unidimensionales, tal como lo apreciaremos en los ejemplos que siguen.



Ejemplo 9.1: Calcule $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x+y) dx dy$

Usamos el teorema de Fubini ya que la función que figura en el integrando es continua en el rectángulo

$$Q = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x+y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x+y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos y \right] dy = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \text{sen } y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \underbrace{-\text{sen } \pi}_{0} + \text{sen } \frac{\pi}{2} + \underbrace{\text{sen } \frac{\pi}{2}}_1 - \underbrace{\text{sen } 0}_0 = 2 \end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración, resultaría:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x+y) dy dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x+y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x \right] dx = -\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen } x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \underbrace{-\text{sen } \pi}_{0} + \text{sen } \frac{\pi}{2} + \underbrace{\text{sen } \frac{\pi}{2}}_1 - \underbrace{\text{sen } 0}_0 = 2 \end{aligned}$$

Naturalmente, ambos resultados coinciden ya que la función del integrando verifica las hipótesis del teorema de Fubini.



Ejemplo 9.2: Calcule $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x \cdot \cos y dx dy$

La función que figura en el integrando es de la forma $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$. Así, entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x \cdot \cos y dx dy &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x dx \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy \right) = (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot (\text{sen } y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right) \cdot \left(\text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } 0 \right) = 1 \end{aligned}$$



Ejemplo 9.3:

$$\text{Calcule } I = \int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) dy dx = \int_{-1}^1 \left(x^4 \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x^4}{2} + \frac{1}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 dx = \frac{4}{3}$$

Les proponemos, que antes de continuar con la lectura, participen en el foro resolviendo la siguiente consigna: Calcule la integral cambiando el orden de integración. ¿Da el mismo resultado? ¿Por qué?

Integrales dobles sobre regiones más generales en R^2

Ya hemos analizado cómo se calcula una integral doble de una función escalar de dos variables independientes sobre un rectángulo en R^2 . Ahora es necesario indagar cómo es el cálculo de la integral doble de una función continua sobre una región más general cerrada y acotada de R^2 . Es decir, evaluar $\int_D f$, si f es una función caracterizada por $f : D \subset R^2 \rightarrow R$ continua sobre D y D una región cerrada y acotada de R^2 . Para ello, definimos tres tipos de regiones en el plano que denominaremos "regiones elementales".



Definición 9.4: Región elemental de tipo I

Se dice que una región $D \subset R^2$ es una región elemental de tipo I (figura 9.8), si sus puntos (x, y) son aquellos para los que siendo x fijo entre los valores a y b , la coordenada y varía de $\alpha(x)$ a $\beta(x)$, siendo $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, en símbolos:

$$D = \{(x, y) \in R^2 / \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \text{ , para cada } x \in [a, b]\}$$

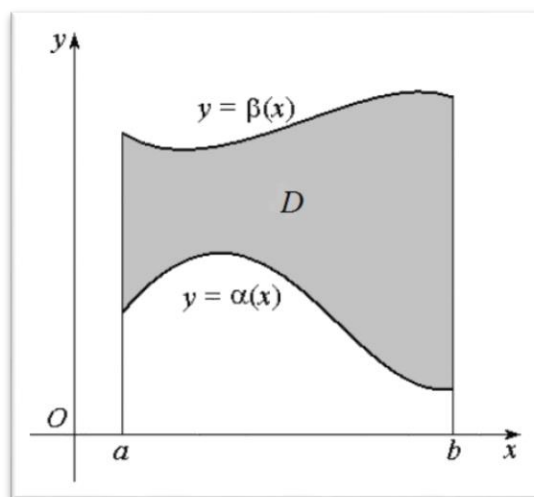


Figura 9.8: Región elemental de tipo I



Ejemplo 9.4: La región $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 3 \right\}$ es una región elemental de tipo I y su representación gráfica es:

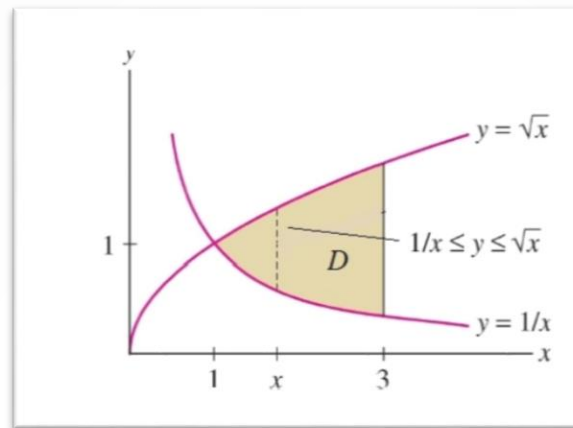


Figura 9.9: Región elemental de tipo I



Definición 9.5: Región elemental de tipo II

Se dice que una región $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región elemental de tipo II (figura 9.10), si sus puntos (x, y) son aquellos para los que siendo y fijo entre los valores c y d , la coordenada x varía de $\alpha(y)$ a $\beta(y)$, siendo $\alpha(y)$ y $\beta(y)$ funciones continuas en el intervalo $[c, d]$, en símbolos:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), \text{ para cada } y \in [c, d] \right\}$$

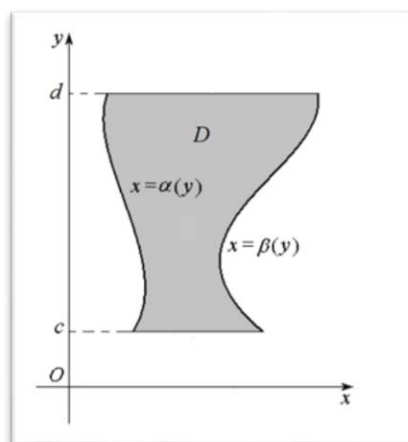


Figura 9.10: Región elemental de tipo II



Ejemplo 9.5: La región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$ es una región elemental de tipo II y su representación gráfica es:

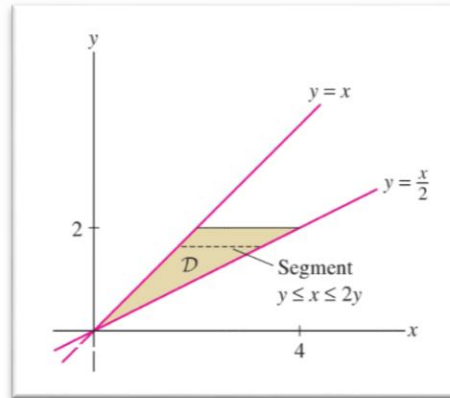


Figura 9.11: Región elemental de tipo II



Definición 9.6: Región elemental de tipo III

Se dice que una región $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región elemental de tipo III si D es una región elemental de tipo I y II simultáneamente.



Ejemplo 9.6: La región que se muestra en la figura 9.12 es una región elemental de tipo III, ya que puede ser descripta de dos formas posibles:

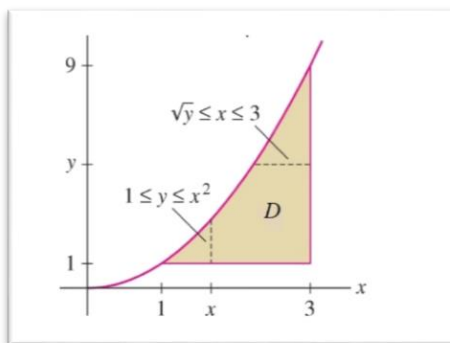


Figura 9.12: Región elemental de tipo III

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq y \leq x^2, 1 \leq x \leq 3\}$ como región elemental de tipo I, y también

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{y} \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 9\}$ como región elemental de tipo II. En consecuencia, la región D es una región elemental de tipo III.

Actividad para resolver y discutir en el foro

Antes de continuar con el desarrollo de esta unidad les proponemos que realicen la siguiente actividad de integración.



Actividad 9.1: Las regiones de las figuras 9.9 y 9.11, ¿son regiones elementales de tipo III? ¿Por qué?

Observación

Una región de tipo I, II o III se dice **región elemental**.

Integrales dobles sobre regiones elementales en R^2

Sea $f : D \subset R^2 \rightarrow R$ continua definida sobre una región elemental. Es posible definir la integral doble del campo escalar $f(x, y)$ sobre la región D considerando un rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ tal que $Q \supset D$ como se muestra en la figura 9.13.

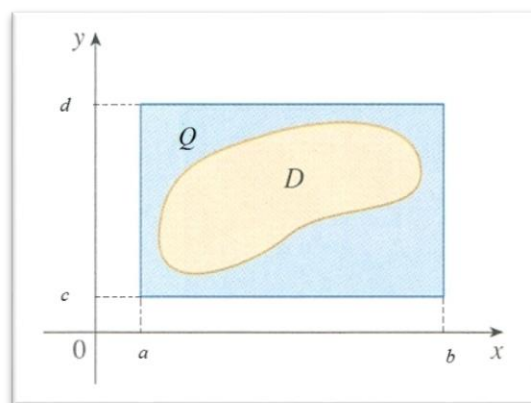


Figura 9.13: Rectángulo Q que contiene a la región D

Definimos ahora un nuevo campo escalar $\tilde{f}(x, y)$ de la siguiente forma:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \in (Q - D) \end{cases}$$

Podemos ver que integrar la función $f(x, y)$ sobre la región D es equivalente a integrar a $\tilde{f}(x, y)$ sobre el rectángulo Q , es decir, $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_Q \tilde{f}(x, y) dx dy$ (ver Figura 9.14)

Así, esta definición es independiente del rectángulo Q elegido.

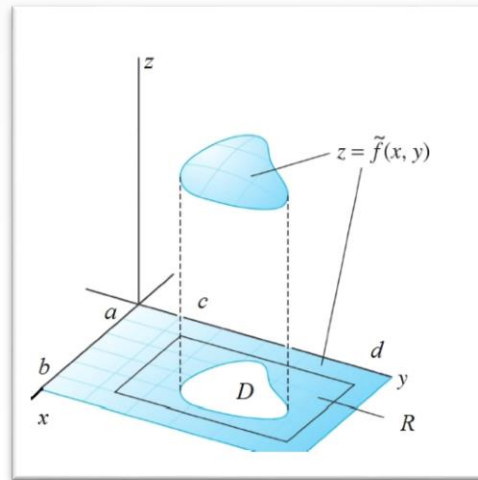


Figura 9.14: Solido definido sobre una región elementales en R^2

Cabe destacar que por ser $f(x, y)$ una función continua sobre la región D , las presuntas discontinuidades del campo escalar definido $\tilde{f}(x, y)$ estarían localizadas en la frontera de D , y dicha frontera está formada por una curva o curvas que asumimos continuas ya que la región D es una región elemental. En consecuencia, la nueva función $\tilde{f}(x, y)$ es acotada en Q y sus discontinuidades constituyen una unión finita de gráficas de funciones continuas, por lo que entonces será integrable en Q .

Supongamos que la región D es una región elemental de tipo I y que en el rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ es $c = \min_{x \in [a, b]} \alpha(x)$ y $d = \max_{x \in [a, b]} \beta(x)$ cuya existencia está garantizada debido a que tanto la función $\alpha(x)$ como $\beta(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$ y, por el teorema de Weierstrass, ambas alcanzan el valor máximo y mínimo en dicho intervalo. Las consideraciones expresadas se indican en la Figura 9.15

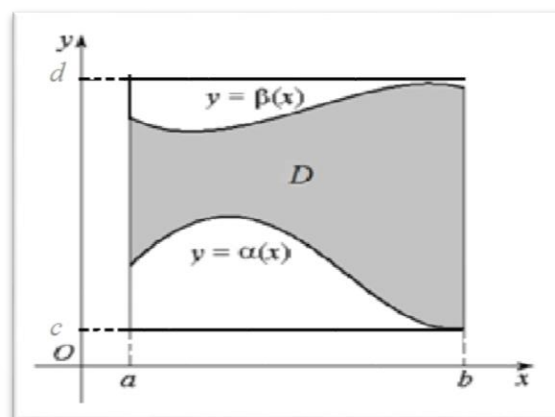


Figura 9.15: Rectángulo Q en el que se define la función \tilde{f}

Ahora es posible calcular $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_Q \tilde{f}(x, y) dx dy$ integrando la función $\tilde{f}(x, y)$ sobre el rectángulo Q mediante el Teorema de Fubini para regiones rectangulares.



$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_Q \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x, y) dx dy = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{\alpha(x)} \tilde{f}(x, y) dx dy + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \tilde{f}(x, y) dx dy + \int_{\beta(x)}^d \tilde{f}(x, y) dx dy \right)\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la función $\tilde{f}(x, y)$ considerada, resultan nulas las integrales que figuran en el primer y último término del paréntesis, luego:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx \right)$$

De manera análoga, si se considera a la región $D \subset R^2$ una región elemental de tipo II se obtiene:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx dy \right)$$



Teorema 9.5: Teorema de Fubini para regiones elementales en R^2

a. Sea la función $f : D \subset R^2 \rightarrow R$ continua sobre D . Si D es una región elemental de tipo I, entonces la función $\varphi : [a, b] \rightarrow R$ / $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$ es continua y, además,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx \right)$$

b. Sea la función $f : D \subset R^2 \rightarrow R$ continua sobre D . Si D es una región elemental de tipo II, entonces la función $\mu : [c, d] \rightarrow R$ / $\mu(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ es continua y, además,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx dy \right)$$

Cuando la región elemental D es de tipo III, la integral doble de una función continua sobre D puede ser calculada de las dos formas posibles expresadas en a) y en b). En este caso, es conveniente elegir aquella que resulte más sencilla de evaluar.



Observaciones importantes:

1. Cuando se expresa $\iint_D f(x, y) dx dy$ como una integral iterada, sea la región D de tipo I o II, es importante enfatizar que la última integral que se calcula debe contener sólo límites numéricos.
2. Para calcular la integral doble de un campo escalar sobre una región no rectangular D , es decir, una región más general, deberá siempre ser expresado, en primer lugar, como una integral iterada. Este paso dependerá de las características de la región D que determinarán cómo fijar los límites de integración. En consecuencia, es sumamente importante distinguir los diferentes tipos de regiones elementales ya presentados. Naturalmente, realizar el gráfico de la región D facilitará la fijación correcta de los límites de integración.

3. En el caso que la región elemental sea de tipo III, la integral $\iint_D f(x, y) dx dy$ puede evaluarse de dos formas diferentes enunciadas en el teorema de Fubini. Es conveniente elegir la forma que permita el cálculo más sencillo de la integral iterada. Puede ocurrir que en algunos casos, si bien puede cambiarse el orden en el proceso de integración, una de las integrales iteradas presente dificultades para la determinación de la función primitiva, tal como se mencionará más adelante en los ejemplos.
4. Si la función f es integrable sobre la región D y además $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D$, entonces $\iint_D f(x, y) dx dy = \text{Volumen}(W)$, siendo W el cilindroide limitado por la gráfica de la superficie $z = f(x, y)$ y la región D del plano xy que se muestra en la Figura 9.16

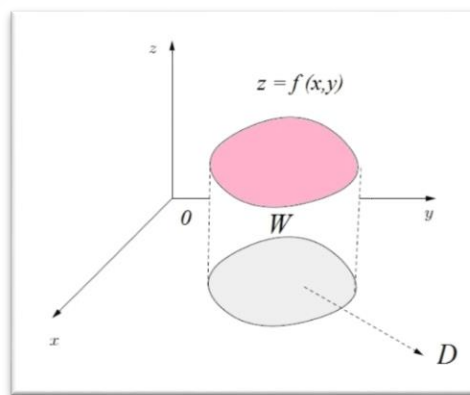


Figura 9.16: Cilindroide elemental en R^3

5. Si $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in D$, entonces $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D dx dy = \text{Área}(D)$ (el valor numérico es coincidente con el área de la región D , ya que si se trabajara con unidades proporcionaría la capacidad del cilindroide cuya base es la región D y cuyo "techo" está en el plano $z = 1$)
Si, por ejemplo, la región D es una región elemental de tipo I, es decir:
 $D = \{(x, y) \in R^2 / \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \text{ para cada } x \in [a, b]\}$, entonces:

$$\iint_D f(x, y) dy dx = \iint_D dy dx = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy dx = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)] dx = \text{Área}(D)$$
 Este resultado ya ha sido analizado y empleado para el cálculo de áreas de regiones planas en el curso de Análisis Matemático I, ¿lo recuerda?

Si la región D es una región elemental de tipo II, es decir:
 $D = \{(x, y) \in R^2 / \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), \text{ para cada } y \in [c, d]\}$, entonces se obtiene de forma análoga:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D dx dy = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dx dy = \int_c^d [\beta(y) - \alpha(y)] dy = \text{Área}(D)$$

6. Sean dos funciones $f, g : D \subset R^2 \rightarrow R$ integrables sobre una región acotada D en R^2 , tales que:
 $f(x, y) \geq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$, entonces $\iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dx dy = \text{Volumen}(T)$ siendo T el sólido definido por $T = \{(x, y, z) \in R^3 / g(x, y) \leq z \leq f(x, y) \text{ con } (x, y) \in D\}$ que se muestra en la Figura 9.17.

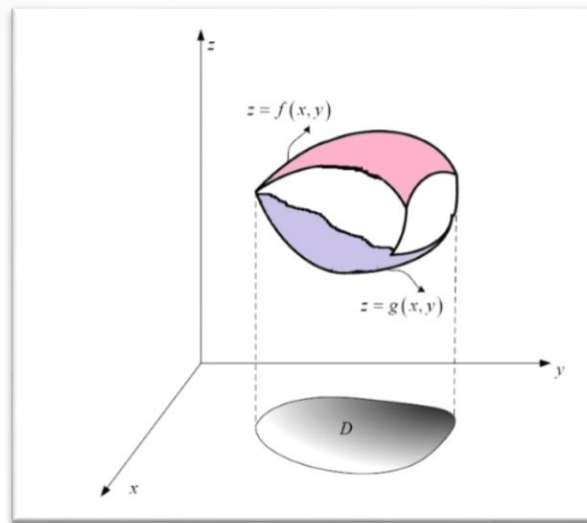
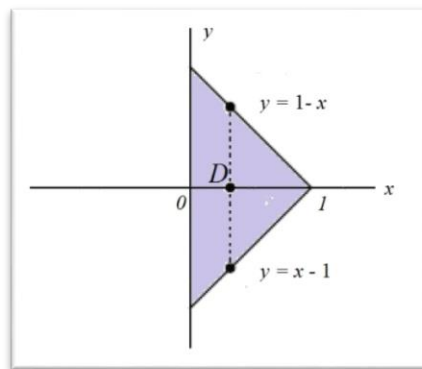


Figura 9.17: Solido T limitado por 2 superficies



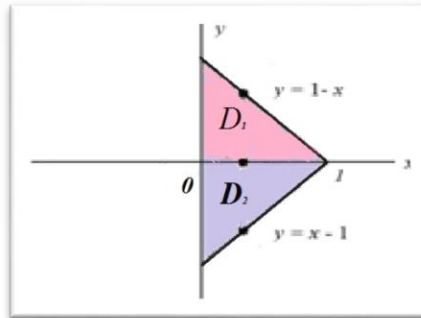
Ejemplo 9.7: Evalúe $\iint_D (2x + y^2) dx dy$ si la región D es el conjunto de puntos de R^2 limitado por el triángulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$.
El gráfico de la región D es:



Para determinar la frontera de D se hallan las ecuaciones de las rectas que pasan por los vértices del triángulo. Las ecuaciones de estas rectas son $y = x - 1$ e $y = 1 - x$. Se trata de una región elemental de tipo I, es decir, la descripción analítica de la región es $D = \{(x, y) \in R^2 / x - 1 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \iint_D (2x + y^2) dx dy &= \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} (2x + y^2) dy dx = \int_0^1 \left(2xy + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x-1}^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left[2x(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} - 2x(x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} \right] dx = \int_0^1 \left[4x - 4x^2 - \frac{2}{3}(x-1)^3 \right] dx = \\ &= \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{(x-1)^4}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

D no es una región elemental de tipo II, por lo cual si quisiéramos cambiar el orden de integración sería necesario el cálculo de dos integrales iteradas (no es económico) ya que la región D debería ser dividida en dos subregiones elementales de tipo II a saber:




La región D_1 es: $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1-y, 0 \leq y \leq 1\}$ y la región D_2 ,

$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq y+1, -1 \leq y \leq 0\}$. Por lo tanto,

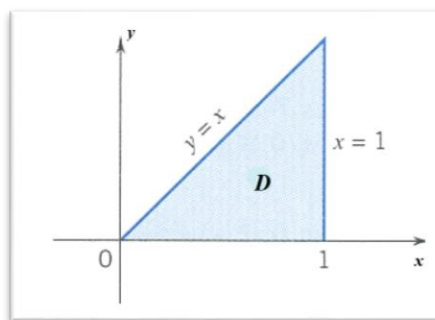
$$\iint_D (2x + y^2) dx dy = \iint_{D_1} (2x + y^2) dx dy + \iint_{D_2} (2x + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} (2x + y^2) dx dy + \int_{-1}^0 \int_0^{y+1} (2x + y^2) dx dy$$

Verifique que se obtiene idéntico resultado que con la integral iterada anterior.

Es evidente que el cálculo de esta integral resulta ser más sencillo considerando a la región D como de tipo I.

 **Ejemplo 9.8:** Calculemos $\iint_D \cos \frac{\pi x^2}{2} dA$ si D es la región plana limitada por $x=1$, $y=0$, $y=x$,

Geométricamente, la región D es:



D es una región elemental de tipo I y II, de tipo III, por tanto es posible realizar el cálculo de la integral de dos formas diferentes.

1. Como D es una región de tipo I, resulta que:

$$\iint_D \cos \left(\frac{\pi x^2}{2} \right) dA = \int_0^1 \int_0^x \cos \left(\frac{\pi x^2}{2} \right) dy dx = \int_0^1 \left[y \cdot \cos \left(\frac{\pi x^2}{2} \right) \right]_0^x dx = \int_0^1 x \cdot \cos \left(\frac{\pi x^2}{2} \right) dx$$

Para el cálculo de esta última integral unidimensional se realiza una sustitución para determinar una primitiva, y así, resulta:



$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dA = \int_0^1 x \cdot \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} \cos t \, dt = \frac{1}{\pi} (\sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

2. Ahora bien, la región D también es de tipo II, por lo tanto:

$$\iint_D \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dA = \int_0^1 \int_y^1 \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx dy$$

No es posible calcular (de manera exacta) esta última integral ya que se requiere del cálculo de la función primitiva de $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$ que, como ya conocemos, es continua en todo el eje real, por tanto

admite función primitiva, pero no es una función elemental. Esta función “no se puede integrar”, no en el sentido de que no exista la integral (todas las funciones continuas tienen primitiva), sino en el sentido de que no existe ninguna fórmula “elemental”, es decir, expresada en términos de polinomios, raíces, senos, cosenos, exponenciales, logaritmos, etc., que determine una función $G(x)$ tal que $G'(x) = g(x)$. Este ejemplo tiene como objetivo enfatizar la importancia del reconocimiento del tipo de región plana sobre la cual se integra, como así también la necesidad de estar preparados para reconocer la complejidad en los cálculos de las integrales iteradas.

Por ello queremos hacer hincapié en que algunas integrales dobles pueden ser mucho fáciles de calcular utilizando una u otra versión del teorema de Fubini, según sea la región D de tipo I o II.

Por ejemplo, supongamos que necesitamos calcular el área del perfil de una chapa “corrugada”



Ejemplo 9.9: Para el cálculo del área de la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin y \leq x \leq \sin y + b, \quad 0 \leq y \leq h\}$ planteamos:

$$\text{Área}(D) = \iint_D 1 \, dA = \int_0^h \int_{\sin y}^{\sin y + b} dx dy = \int_0^h (\sin y + b - \sin y) dy = \int_0^h b \, dy = b \cdot h$$

La región D no es una región elemental de tipo I, por lo cual cambiar el orden de integración, en este caso, haría el cálculo del área una tarea más engorrosa.

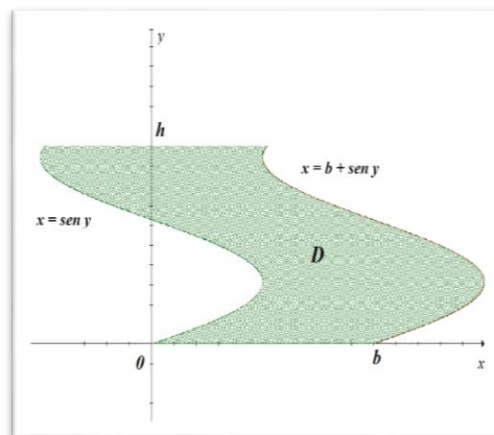
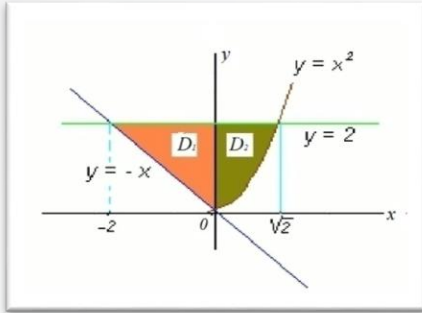


Figura 9.18: Chapa corrugada



Ejemplo 9.10: Calculemos $\iint_D (1+x+y)dydx$ si D es la región limitada por $y=-x$, $y=x^2$ e $y=2$

La región de integración D es una región elemental de tipo II, por tanto calculemos la integral iterada correspondiente:



$$\begin{aligned}\iint_D (1+x+y)dydx &= \int_0^2 \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1+x+y)dx dy = \int_0^2 \left(x + \frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_{-y}^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^2 \left[\sqrt{y} + \frac{y}{2} + y\sqrt{y} - \left(-y + \frac{y^2}{2} - y^2 \right) \right] dy = \int_0^2 \left[\sqrt{y} + \frac{y}{2} + y\sqrt{y} + \frac{3}{2}y \right] dy = \\ &= \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^3}{6} + \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{4}y^2 \Big|_0^2 = \frac{13}{3} + \frac{44\sqrt{2}}{15}\end{aligned}$$

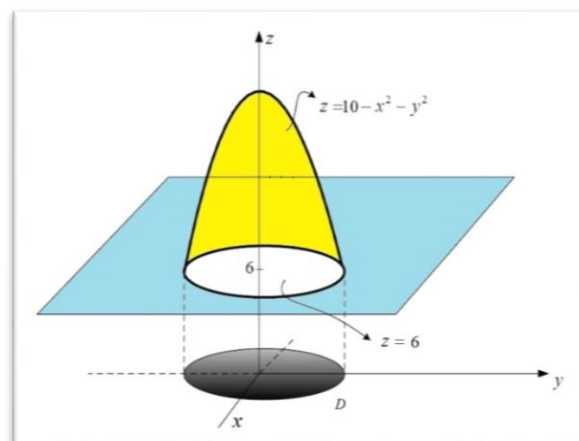
Actividades para resolver y discutir en el foro



Actividad 9.2: Calcule el área de la región plana D definida por el eje x , $x=2$, $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\sqrt{x}$



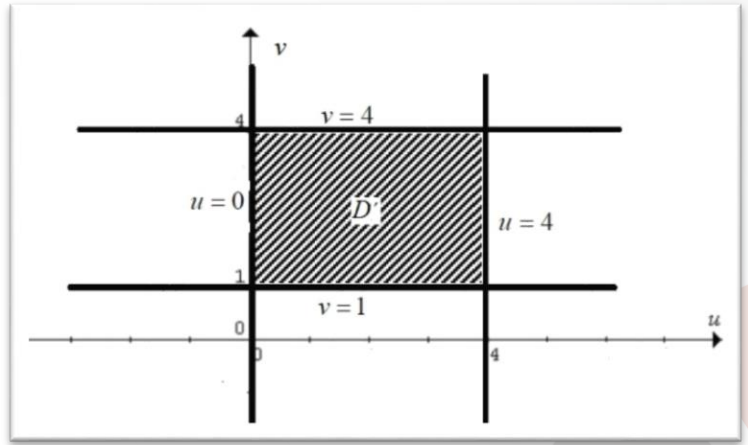
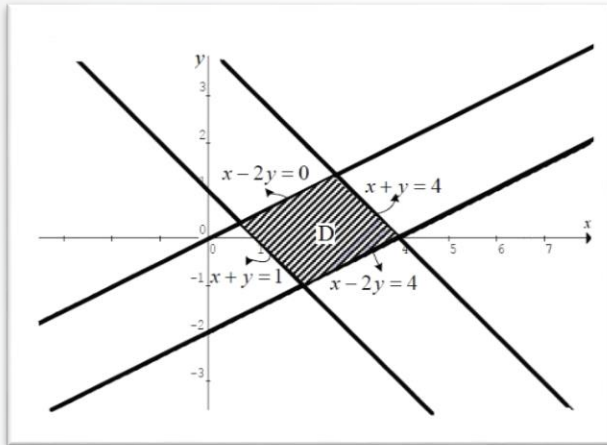
Actividad 9.3: Calcule el volumen del sólido limitado por la gráfica de la superficie $z=10-x^2-y^2$ y el plano $z=6$





Ejemplo 9.11: Obtengamos el área de la región D limitada por las rectas:

$$r_1: x-2y=0, \quad r_2: x+y=1, \quad r_3: x-2y=4, \quad r_4: x+y=4$$



Se observa que la región D no es una región elemental, por lo tanto, para calcular el área es preciso dividir a D en subregiones (¿Cuántas integrales iteradas serían necesarias?) Para los casos como éste, es posible realizar

un cambio de coordenadas. Definimos una transformación de coordenadas $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u + 2v}{3} \\ y = \frac{v - u}{3} \end{cases}$

Con este cambio de variables la región D se transforma en la región D^* , por tanto

$$\iint_D dA = \iint_{D^*} \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|}_{\frac{1}{3}} du dv = \int_0^4 \int_1^4 \frac{1}{3} du dv = 4$$

En este caso fue posible despejar las variables x e y en términos de las variables u y v . Si esto no fuera posible, es conveniente emplear la propiedad $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}$

$$\text{Así, } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}.$$

Cambio de variables en las integrales dobles

En el curso de Análisis Matemático I se ha analizado cómo realizar cambios de variables en las integrales definidas estableciendo que:



Teorema 9.6: Si $y = f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ y la función definida por $x = g(u)$ con derivada primera continua en un intervalo abierto $I \supset [u_1, u_2]$ tal que $a = g(u_1)$ y $b = g(u_2)$, entonces se verifica que $\int_a^b f(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(g(u)) \cdot g'(u)du$

Este cambio de variable pretende que la integral del segundo miembro admita un cálculo más sencillo que la integral del primer miembro.

En las integrales múltiples se busca establecer cambios de variables que disminuyan la complejidad del cálculo de las integrales iteradas, como así también transformar las regiones de integración en regiones elementales para las que sea más sencillo la fijación de los límites de integración. Para ello necesitamos desarrollar una herramienta teórica que permita los cambios de coordenadas en las integrales múltiples. El cambio de variables en las integrales múltiples es muy útil en Física.

Estableceremos algunas definiciones previas.



Definición 9.7: Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región elemental y la función $\vec{T}: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación $\vec{T}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ de clase C^1 y $J\vec{T}(u, v) = \vec{T}'(u, v)$ su matriz jacobiana. Se denomina **determinante jacobiano** de \vec{T} en (u, v) al determinante de la matriz jacobiana $J\vec{T}(u, v)$ y se lo designa:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det(J\vec{T}(u, v)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$



Teorema 9.7: Teorema del cambio de variables en las integrales dobles.

Sean D y D^* regiones elementales de \mathbb{R}^2 y $\vec{T}: D^* \rightarrow D$ una transformación de coordenadas de clase C^1 , inyectiva en D^* , con determinante jacobiano no nulo en todo punto de D^* , es decir $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in D^*$ y tal que $\vec{T}(D^*) = D$ y $\vec{T}^{-1}(D) = D^*$. Si $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre D , entonces la función $f \circ \vec{T}: D^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f \circ \vec{T}(u, v) = f(\vec{T}(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v))$ es integrable y además:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

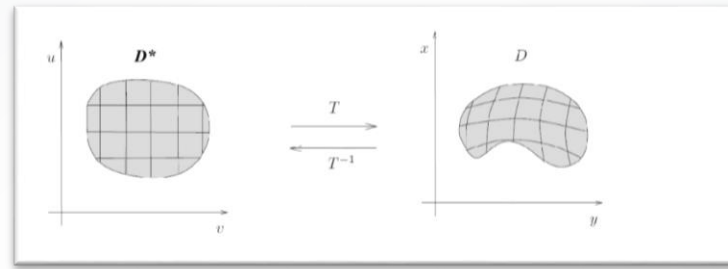


Figura 9.19: Función transformación de coordenadas



Observaciones importantes:

1. En el segundo miembro de esta igualdad $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ hace referencia al **valor absoluto** del determinante jacobiano de la transformación de coordenadas \vec{T} , y desempeña un rol equivalente al de $g'(u)$ en el teorema de cambio de variables para funciones de una variable real que hemos recordado al comienzo (compare los teoremas 9.6 y 9.7 y extraiga analogías)
2. La transformación de coordenadas \vec{T} debe ser "uno a uno" dado que su inyectividad es una de las hipótesis del teorema. Es lógico que se requiere tal tipo de asignación donde puntos diferentes del conjunto D^* se transformen en puntos diferentes del conjunto D . De esta forma, se podrá "regresar" sin dificultad del conjunto D al conjunto D^* mediante la transformación inversa \vec{T}^{-1} (que también es "uno a uno").
3. Es interesante analizar qué rol desempeña el Jacobiano en la fórmula del cambio de variables en las integrales dobles. A tal efecto, si se considera la función $f(x, y) = 1$, entonces:

$$\text{Área}(D) = \text{Área}(\vec{T}(D^*)) = \iint_D 1 \cdot dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

A partir de este resultado, el determinante jacobiano puede ser considerado como un factor de "ampliación o contracción de áreas" en el pasaje de D^* a D mediante la transformación de coordenadas \vec{T} .

4. El teorema del cambio de variables para integrales unidimensionales contribuye a hacer más ágil el cálculo de la función primitiva. En integrales múltiples, el teorema de cambio de variables no sólo aporta agilidad al cálculo de la integral, si no que también ayuda a integrar sobre una región más sencilla que la región de partida.
5. Una propiedad muy útil e interesante de los determinantes Jacobianos es: sea $\vec{T}^{-1}: D \rightarrow D^*$ la transformación inversa de \vec{T} , entonces su matriz asociada es $J\vec{T}^{-1} = J^{-1}\vec{T}$, es decir, las matrices jacobianas asociadas a transformaciones inversas son una matriz inversa de la otra y, además la relación que existe entre sus determinantes es: $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det(J\vec{T}(u, v)) = \frac{1}{\det(J\vec{T}^{-1}(u, v))} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}$

es decir, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}$

Cambios de variables más frecuentes en las integrales dobles

1. Transformaciones lineales.

Sea una transformación lineal $\vec{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

i. \vec{T} es inyectiva \Leftrightarrow el determinante de su matriz asociada es no nulo, es decir el determinante jacobiano de \vec{T} es no nulo.

ii. Si $\vec{T}(u, v) = (\alpha u + \beta v, \gamma u + \lambda v)$ es inyectiva, entonces la imagen de un rectángulo R , mediante la transformación \vec{T} , cuyos vértices son los puntos (u_0, v_0) , $(u_0 + \Delta u, v_0)$, $(u_0, v_0 + \Delta v)$, $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$, es el paralelogramo $\vec{T}(R)$ que tiene como vértices las imágenes de los vértices de R , y tiene como área:

$$\text{Área}(\vec{T}(R)) = \left| \det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \lambda \end{vmatrix} \right| \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \cdot \text{Área}(R) \quad (\text{se supone } \Delta u > 0, \Delta v > 0)$$

2. Coordenadas polares.

Para definir el sistema de coordenadas polares, en primer lugar se fija un origen O al que se denomina **polo** y una semirrecta L que tiene su punto de origen en el polo llamada **eje polar**. De esta forma, todo punto P del plano (que no sea el polo O) está determinado de forma única por los escalares r y θ . El número r mide la distancia del punto P al polo O , y θ mide el ángulo formado por el eje polar y la semirrecta que parte del polo y pasa por el punto P , tal como se muestra en la Figura 9.20.

Con este nuevo sistema de referencia se puede establecer una correspondencia biunívoca entre todos los puntos del plano, excluido el polo O , y los pares ordenados (r, θ) con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$

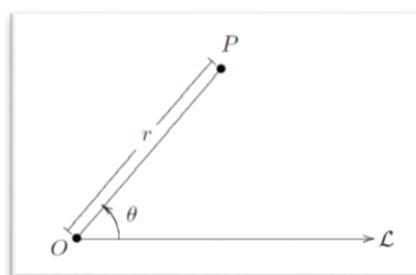
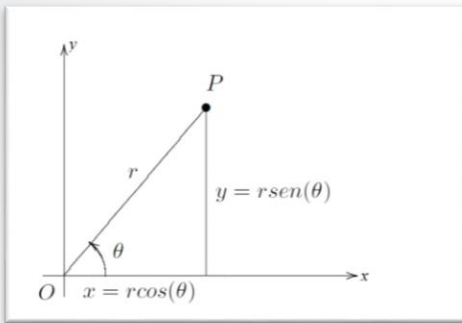


Figura 9.20: Polo y eje polar

Si consideramos un sistema rectangular en el que el origen coincide con el polo y el eje positivo de abscisas con el eje polar, entonces las coordenadas cartesianas se pueden expresar en términos de las coordenadas polares



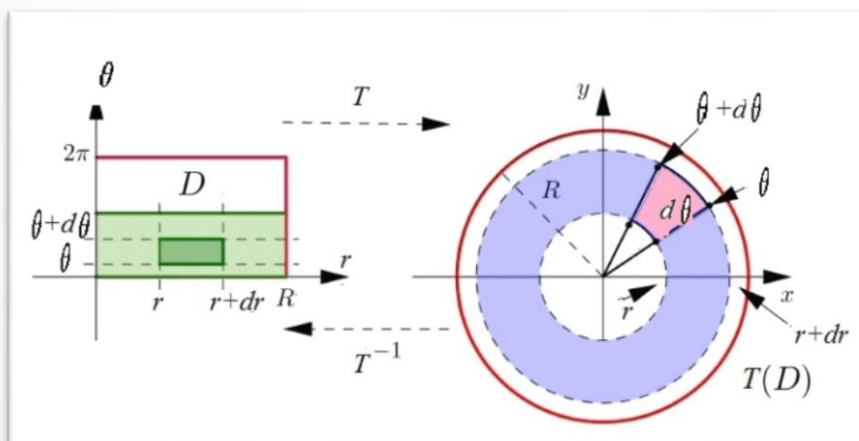
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad y \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

Definimos la transformación de coordenadas $\vec{T}: D^* = (0, +\infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{T}(r, \theta) = (\underbrace{r \cos \theta}_x, \underbrace{r \sin \theta}_y)$ y calculamos el módulo del determinante de la matriz jacobiana,

$$|\det(J\vec{T}(r, \theta))| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| = |r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta| = |r| = r$$

Luego, si la función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / z = f(x, y)$ es continua en D , entonces:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr d\theta$$



Es posible justificar intuitivamente la expresión del factor de ampliación o contracción de áreas " $r dr d\theta$ "

Consideremos un rectángulo en el plano $(r\theta)$ cuyos lados miden R y 2π , y también un rectángulo pequeño (infinitesimal) de vértices $r, r+dr, \theta, \theta+d\theta$ cuya área es $dr \cdot d\theta$. Dicho "rectángulito" se transforma en el plano (xy) en un sector de corona circular de área $r dr d\theta$, que se obtiene, por geometría elemental, como la diferencia

entre dos sectores circulares, el mayor limitado por la circunferencia externa y el menor limitado por la circunferencia interna. Se sabe que el área de un sector circular se calcula como el radio elevado al cuadrado por la amplitud del ángulo (medido en radianes!) dividido por dos, es decir:

$$\frac{(r+dr)^2 \cdot d\theta}{2} - \frac{r^2 \cdot d\theta}{2} = r dr d\theta + \frac{d\theta \cdot dr^2}{2} \approx r \cdot dr \cdot d\theta$$



El último término de la suma se desprecia por tratarse del producto de tres infinitésimos, y por lo tanto de orden superior al primer término que es el producto de dos infinitésimos.

Este cambio de variables resulta ser útil para el cálculo de integrales dobles en aquellos casos en los que el dominio de integración tiene una simetría de tipo circular, los que pueden expresarse fácilmente en coordenadas polares. Veremos en ejemplos posteriores que el uso de coordenadas polares es oportuno y conveniente en integrales dobles que simplifiquen el cálculo de la función primitiva y la forma geométrica de la región de integración.

3. Coordenadas elípticas.

Las coordenadas elípticas constituyen una pequeña modificación de las coordenadas polares, ya que

$\begin{cases} x = a r \cos \theta \\ y = b r \sin \theta \end{cases}$ con $a, b > 0$ y el valor absoluto del determinante jacobiano es

$$|\det(J\vec{T}(r, \theta))| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a r \sin \theta \\ b \sin \theta & b r \cos \theta \end{pmatrix} \right| = ab |r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta| = ab |r| = abr$$

De esta forma, si la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / z = f(x, y)$ es continua en D , entonces:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \cdot \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right|}_{abr} dr d\theta = \iint_{D^*} f(a r \cos \theta, b r \sin \theta) \cdot abr dr d\theta$$

Aplicaciones físicas de las integrales dobles

1. Masa de una lámina plana

Si una lámina tiene la forma de una región D en el plano (xy) y superficie de densidad variable dada por la función $\delta = \delta(x, y)$, entonces la masa de la lámina puede calcularse mediante la integral doble:

$$M = \iint_D \delta(x, y) dx dy$$

Si la lámina es homogénea, entonces la densidad $\delta(x, y) = k$ (constante)

2. Momentos estáticos o de primer orden de una lámina respecto de los ejes x e y

Los momentos estáticos son magnitudes geométricas que se definen para regiones planas que aparecen en los Cursos de Estática de Ingeniería (Cálculo de Vigas) Existen momentos estáticos del peso, de la masa, del volumen de cuerpos, de áreas y de arcos de curvas. Se los denomina momentos por su semejanza con los momentos de las fuerzas, que se calculan como el producto de una fuerza por la distancia de su línea de acción a un cierto eje y tienden a lograr que el cuerpo gire. Pero los momentos estáticos no producen ninguna tendencia al giro, por eso se los denomina estáticos. La fuerza de atracción de la gravedad terrestre con la que es atraído un cuerpo

se denomina "peso". Aunque usualmente es considerada como una fuerza concentrada, en realidad es la suma de los pesos de cada una de sus partículas. Las regiones planas pueden ser consideradas como una lámina de espesor infinitesimal. Así los momentos estáticos pueden calcularse respecto de los ejes mediante las siguientes integrales dobles:

$$M_x = \iint_D y \delta(x, y) dx dy \quad , \quad M_y = \iint_D x \delta(x, y) dx dy$$

Los momentos estáticos tienen significado meramente matemático, sin referencia física alguna, no obstante, se emplean para determinar otros objetos reales, como el centro de gravedad y el centro de masa de una lámina plana.

3. Centro de gravedad de una lámina

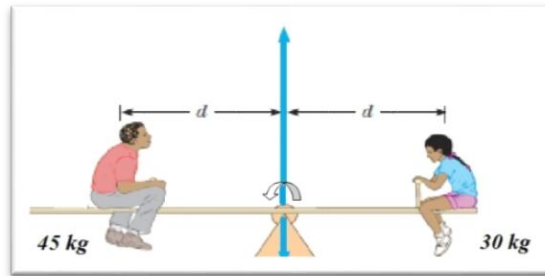


Figura 9.21: Momento estático en un sube y baja

Supongamos que dos niños están jugando en el sube y baja. De acuerdo con los pesos de sus cuerpos, el sube y baja rotará en el sentido que indica la flecha ya que el niño es más pesado que la niña. ¿Qué se puede hacer para nivelar el sube y baja, es decir que quede en posición horizontal (en equilibrio)? Modificar la distancia al eje de rotación d que se indica en el dibujo (esto es experimental, lo sabemos porque hemos jugado) Es posible que el más pesado se acerque al centro, o bien el más liviano se aleje más hasta lograr nivelar o diremos hasta encontrar el centro de masa del sistema. Al disminuir o aumentar la distancia, según corresponda, cambia el momento (que es la masa multiplicada por la distancia)

Nos proponemos ahora determinar el centro de gravedad de una lámina plana. Las coordenadas de su centro de gravedad se calculan como:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) dx dy}{\iint_D \delta(x, y) dx dy} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) dx dy}{\iint_D \delta(x, y) dx dy}$$

Obsérvese que, como el peso es igual al producto de la masa por la aceleración de la gravedad, o sea, $P = mg$, también $dP = g dm$. Si el valor de la gravedad es el mismo para todas las partículas de la lámina, el centro de masa y el centro de gravedad coinciden. Si una lámina es homogénea, es decir, que en cualquiera de sus partes la razón entre la masa y el área es constante $\delta(x, y) = k \quad \forall (x, y) \in D$ entonces, la posición de los centros de gravedad y de masa dependen sólo del área de la lámina. El punto cuyas coordenadas son los cocientes entre los momentos estáticos de la lámina y su área, se denomina *centroide* de la lámina y coincide con los dos centros mencionados.

4. Momentos de inercia de una lámina

El momento de inercia de área es una magnitud escalar que refleja la distribución de masas de una lámina plana en rotación respecto al eje de giro. El momento de inercia sólo depende de la geometría de la lámina

y de la posición del eje de giro, pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento. En Ingeniería Civil, el momento de inercia de área constituye una propiedad geométrica de secciones transversales de estructuras. desde el punto de vista físico, el momento de inercia tiene relación con las tensiones y deformaciones máximas que aparecen por flexión en un elemento estructural y, por tanto, junto con las propiedades del material determina la resistencia máxima de un elemento estructural bajo flexión.

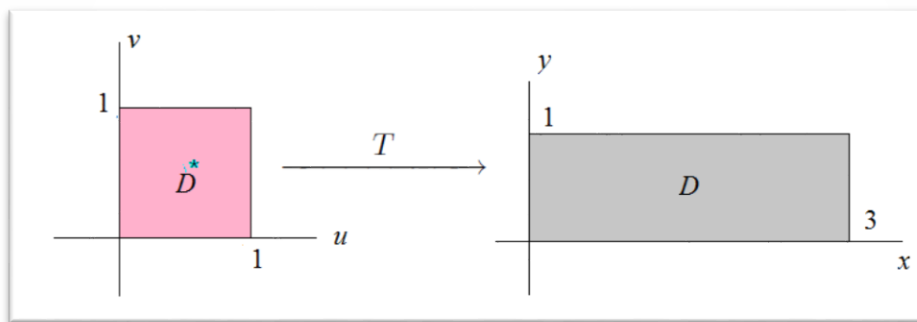
Los momentos de inercia respecto a los ejes x e y se calculan como:

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) dx dy \quad , \quad I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) dx dy$$

El momento de inercia respecto del origen es: $I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) dx dy$



Ejemplo 9.12: Se define una transformación de coordenadas $\vec{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\vec{T}(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$ y sea el rectángulo $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$. Hallemos la región en la que se transforma D^* , es decir, determinemos $D = \vec{T}(D^*)$



En primer lugar, $\begin{cases} x = -u^2 + 4u \\ y = v \end{cases}$ son las funciones componentes de la transformación \vec{T} . Ambas son funciones

de una única variable real. Determinemos los transformados de los vértices de la región D^* :

$$\vec{T}(0, 0) = (0, 0) \quad , \quad \vec{T}(1, 0) = (3, 0) \quad , \quad \vec{T}(1, 1) = (3, 1) \quad , \quad \vec{T}(0, 1) = (0, 1)$$

¿Es \vec{T} una transformación inyectiva? Al ser sus componentes funciones de una sola variable real, y, analizándolas por separado, se observa que, $x = -u^2 + 4u$ es una función cuadrática y que para todos los valores $0 \leq u \leq 1$ es inyectiva, e $y = v$ es una función lineal, también inyectiva. Por lo tanto, \vec{T} es inyectiva.



Ejemplo 9.13: Calcular la siguiente integral iterada $\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 y|_{x^2}^x dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{6}$$



Ejemplo 9.14: Calcular la siguiente integral iterada $\int_0^\pi \int_0^{\cos\theta} \rho \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\theta$

$$\int_0^\pi \int_0^{\cos\theta} \rho \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \rho^2 \operatorname{sen}\theta \right) \Big|_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \left(-\frac{1}{6} \cos^2\theta \right) \Big|_0^\pi = \frac{1}{3}$$



Ejemplo 9.15: Calcular $\iint_R \frac{x^2}{1+y^2} \, dx \, dy$, siendo $R = [0,1] \times [0,1]$

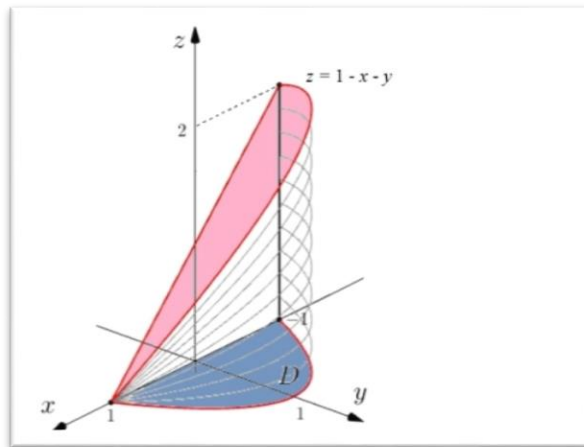
En esta función las variables se pueden separar, de modo que la integral se convierte en producto de integrales simples:

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy = \int_0^1 x^2 \, dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \, dy = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \operatorname{arc\,tg} y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

Actividades para resolver y discutir en el foro

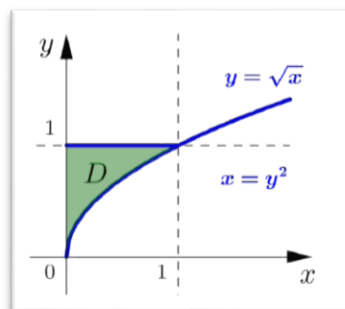


Actividad 9.4: Calcular el volumen del sólido $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y \geq 0, z \geq 0, x-y+z \leq 1, y \leq 1-x^2\}$



Actividad 9.5: Calcular la integral $I = \iint_D e^{y^3} \, dx \, dy$ siendo la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$

¿Qué sucede cuando se integra primero respecto de la variable y ?



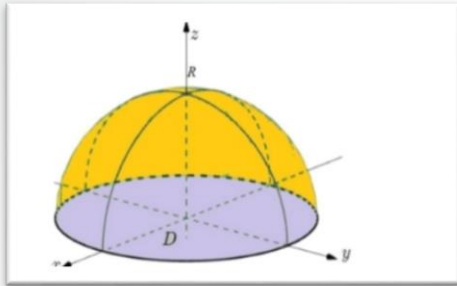


Ejemplo 9.16: Calcular el volumen de una esfera S de radio R .

En primer lugar, planteamos el cálculo en coordenadas rectangulares y luego en coordenadas polares.

$$Vol(S) = 2 \iint_S f(x, y) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Se ha empleado la simetría del sólido respecto del plano (xy) , por ello la integral está multiplicada por 2.



Ahora calculamos la integral en coordenadas cartesianas, sabiendo que se trata de un sólido limitado por dos superficies, la semisuperficie

esférica superior de ecuación $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, y la inferior $z = g(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, y D es la proyección de la superficie esférica sobre el plano (xy) (círculo con centro en el origen y radio R), por tanto:

$$Vol(S) = \iint_D [f(x, y) - g(x, y)] dx dy = 2 \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy dx$$

Esta integral doble es engorrosa y puede calcularse con mucho más esfuerzo que en coordenadas polares.



Ejemplo 9.17: Calcular $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - R)^2 + y^2 \leq R^2\}$

El cálculo de esta integral puede efectuarse de dos formas posibles:

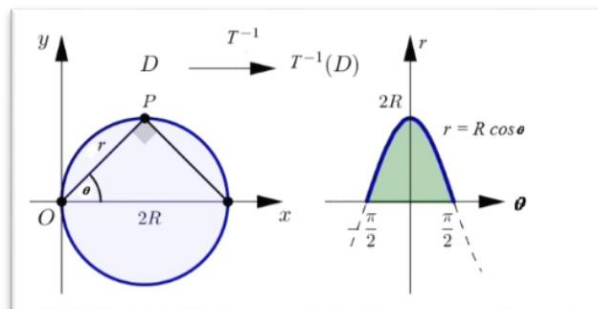
1. Se conserva el polo $(0,0)$ y $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, $0 \leq r \leq 2R \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $J = r$

Obsérvese que la ecuación de la circunferencia:

$(x - R)^2 + y^2 = R^2$ puede ser expresada en coordenadas polares como:

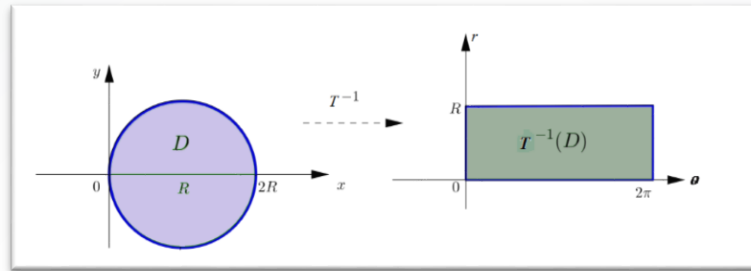
$$x^2 - 2Rx + y^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 2Rr \cos \theta \Rightarrow r = 2R \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R \cos \theta} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2R \cos \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{16R^4 \cos^4 \theta}{4} d\theta = \\ &= 4R^4 \frac{3}{8} \pi = \frac{3}{2} \pi R^4 \end{aligned}$$



2. Se traslada el polo $(0,0)$ al punto $(R,0)$ $\begin{cases} x = R + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $|J| = r$

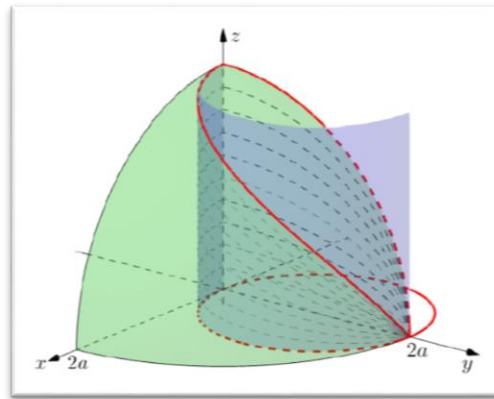
Calcule la integral de esta forma y compare los procedimientos.



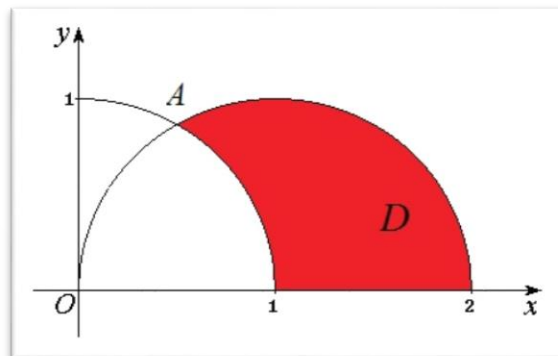
Actividad para resolver y discutir en el foro



Actividad 9.6: Calcular el volumen del sólido $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 2ay, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2\}$



Ejemplo 9.18: Calcule el volumen del sólido limitado por la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ y la región plana $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$



Obsérvese que el conjunto D no es una región elemental, por lo tanto, si se calculase el volumen pedido empleando coordenadas rectangulares, sería necesario descomponer a D y establecer los límites de integración con raíces cuadradas provenientes de los despejes de x o de y . Así, el cálculo de las integrales resultantes será trabajoso. Por ello se decide utilizar el sistema polar.

Determinamos el punto A de intersección de ambas circunferencias.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ Entonces, el ángulo } \theta \text{ varía en el intervalo } \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \text{ y } 1 \leq r \leq 2\cos\theta$$

$$Vol(S) = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^4}{4} \Big|_1^{2\cos\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4\cos^4\theta - \frac{1}{4} \right) d\theta = \frac{5}{12}\pi + \frac{7\sqrt{3}}{16}$$

¿Por qué el ángulo θ esta comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{3}$?

Actividades para resolver y discutir en el foro



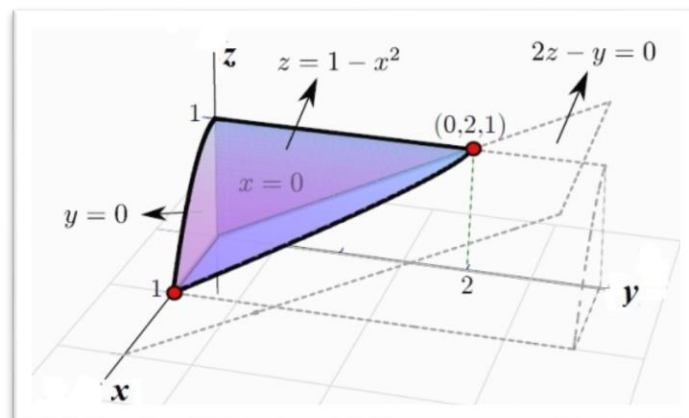
Actividad 9.7: Calcule el volumen del sólido limitado por las superficies
 $4z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 8y$, $z = 0$



Actividad 9.8: Calcule el volumen del sólido limitado por las superficies de ecuaciones
 $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ y $x^2 + y^2 = 4z$
 Realice los gráficos de los sólidos involucrados, primero con lápiz y papel y luego con el uso de algún graficador.



Ejemplo 9.19: Calcular el volumen del sólido W limitado por la superficie de ecuación $z = 1 - x^2$, $y = 2z$,
 $y = 0$, $x = 0$ en el primer octante.
 Representamos el sólido W resulta:



Es posible calcular el volumen de tres formas distintas:

1. Proyectando el sólido sobre el plano (xz) (la superficie proyectante es la superficie cilíndrica parabólica) resulta:

$$\text{Volumen } (W) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} 2z \, dz \right) dx = \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

2. Proyectando el sólido sobre el plano (yz) , resulta:

$$\text{Volumen } (W) = \int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^1 \sqrt{1-z} \, dz \right) dy = \frac{2}{3} \int_0^2 \left(1 - \frac{y}{2} \right)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2}{3} \left(-\frac{4}{5} \left(1 - \frac{y}{2} \right)^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{15}$$

3. Proyectando el sólido sobre el plano (xy) , resulta:

$$\text{Volumen } (W) = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x^2} \left(1 - x^2 - \frac{y}{2} \right) dy \right) dx = \int_0^1 (1-2x^2+x^4)^2 dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

En esta última opción, obsérvese que cuando se proyecta sobre el plano (xy) el sólido W está limitado inferiormente por el plano $z = \frac{y}{2}$ ("el piso") y superiormente por la superficie cilíndrica $z = 1 - x^2$ ("el

techo"), la región elemental en R^2 sobre la cual se integra. está limitada por la parábola de ecuación $y = 2 - 2x^2$ (se obtiene determinando la intersección entre la superficie cilíndrica y el plano)

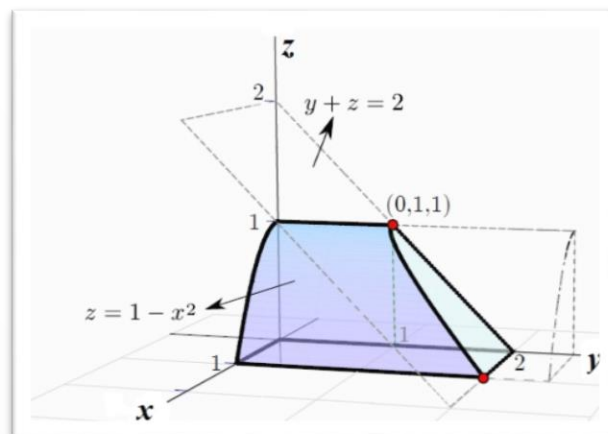
Cabe destacar a partir de este cálculo que, si bien las integrales son de fácil obtención cualquiera sea el plano sobre el que se proyecta el sólido, la primera opción es la más simple porque requiere de menor esfuerzo algebraico.

Es importante tener en cuenta este aspecto porque en muchos casos la elección del plano sobre el que se proyecta el sólido, define la complejidad de la integral a calcular en lo que se refiere a la determinación de la función primitiva como así también a la sencillez de la región sobre la que se calculará la integral.



Ejemplo 9.20: Calcular el volumen del sólido W limitado por las superficies de ecuaciones $z = 1 - x^2$, $y + z = 2$ en el primer octante.

Representamos el sólido W resulta (obsérvese que sólo ha cambiado el plano del ejemplo anterior)

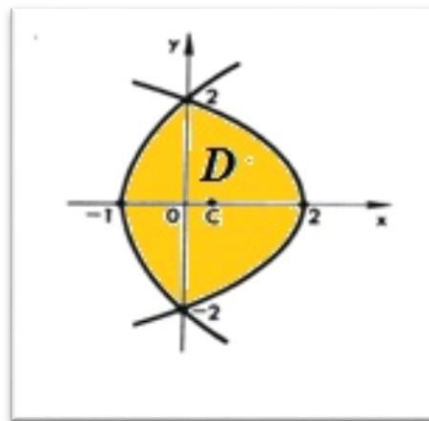


Es posible proyectar el sólido sobre el plano (xz) y así, el volumen se calcula:

$$\text{Volumen } (W) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} (2-y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{3}{2}x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{16}{15}$$



Ejemplo 9.21: Encontrar las coordenadas del centro de gravedad de la región limitada por las curvas: $y^2 = 4x+4$ e $y^2 = -2x+4$. El gráfico de la región plana propuesta es:



Como no se menciona la densidad de la región, suponemos es constante, es decir: $\delta(x, y) = k$ en todo punto de la región. Como además la región es simétrica respecto al eje x , resulta que $\bar{y} = 0$. En consecuencia, sólo es necesario calcular la abscisa del centro de gravedad de la región.

La masa es:

$$\text{Masa } (D) = \iint_D \delta(x, y) dx dy = 2 \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-\frac{y^2}{2}} k dx dy = 2k \int_0^2 \left[2 - \frac{y^2}{2} - \left(\frac{y^2}{4} - 1 \right) \right] dy = 8k, \text{ entonces.}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{\text{Masa}} = \frac{1}{8k} \iint_D \underbrace{\delta(x, y)}_k x dx dy = \frac{1}{8k} \cdot 2 \int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-\frac{y^2}{2}} k x dx dy = \frac{1}{8} \int_0^2 \left[\frac{1}{4} (4-y^2)^2 - \frac{1}{16} (y^2-4)^2 \right] dy = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2} y^2 + \frac{3}{16} y^4 \right) dy = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el centroide de la región D es: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2}{5}, 0 \right)$

Integrales Triples

La noción de integral puede ser extendida a tres dimensiones (también a más). Por el momento limitaremos el estudio al caso tridimensional definido sobre un paralelepípedo $W = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ en el que la función

$f: W \rightarrow R$ es continua, que en adelante designaremos como $\iiint_W f(x, y, z) dV$ o bien,

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx$$

Tal como sucede con las integrales dobles, la segunda notación sugiere que tales integrales se pueden calcular de a una variable en cada paso. Las integrales triples, como las dobles y las unidimensionales, están definidas como límite de sumas aproximantes. En tres dimensiones, las sumas aproximantes están definidas a partir de la división del paralelepípedo W en m subregiones W_{ijk} , cada una de las cuales admite volumen:

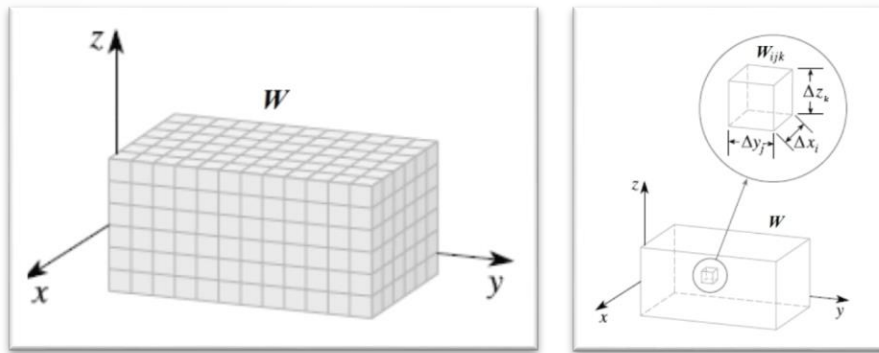


Figura 9.22: Partición en el paralelepípedo W y elemento infinitesimal de volumen

$\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) \cdot (z_k - z_{k-1})$, escogiendo un punto $P_i = (x_i, y_j, z_k)$ en cada subregión,

evaluando la suma $\sum_{i=1}^m f(P_i) \cdot \Delta V_i = \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) \cdot (z_k - z_{k-1})$.

Finalmente, la integral triple queda definida como el límite de dicha suma cuando la norma de la partición tiende a cero.



Definición 9.8: La función $f: W = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset R^3 \rightarrow R$ / $u = f(x, y, z)$ acotada sobre W es integrable sobre W si:


$\int_W f$ o $\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_W f(x, y, z) dW = \lim_{\delta P \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l f(x_i, y_j, z_k) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$ si este límite existe.

Para el cálculo de la integral triple también se establece el Teorema de Fubini para funciones continuas en el paralelepípedo $W = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, es decir:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx = \int_a^b \int_e^f \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx = \dots$$

Esta igualdad también se verifica para los diferentes cambios de orden en el proceso de integración para el cálculo de las integrales iteradas.

Actividad para resolver y discutir en el foro:

 **Actividad 9.9:** Retomando el párrafo anterior. ¿Cuántas integrales iteradas existen? Escribálas.

Integrales triples en regiones elementales de R^3

Ya hemos analizado cómo se calcula una integral triple de una función escalar de tres variables independientes sobre un paralelepípedo en R^3 . Ahora el objetivo es tratar el cálculo de la integral triple de una función continua sobre una región más general cerrada y acotada de R^3 . Es decir, evaluar $\int_S f(x, y, z) dV$, si f es una función caracterizada por $f: S \subset R^3 \rightarrow R$ continua sobre S y S una región cerrada y acotada de R^3 , tal como se muestra en la figura 9.23

Es posible establecer cuatro tipos de regiones elementales en R^3 : de tipo I, II, III y IV



Definición 9.9 : Sean dos funciones $u, v: D \subset R^2 \rightarrow R$ continuas tales que $v(x, y) \leq z \leq u(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$, se dice que el conjunto $S = \{(x, y, z) \in R^3 / v(x, y) \leq z \leq u(x, y) \quad \forall (x, y) \in D\}$ es una *región elemental de tipo I* siendo la región $D \subset R^2$ la proyección ortogonal del sólido S sobre el plano (xy) , que puede ser una región elemental de R^2 ya conocida, o bien descomponible en regiones elementales. Figura 9.23

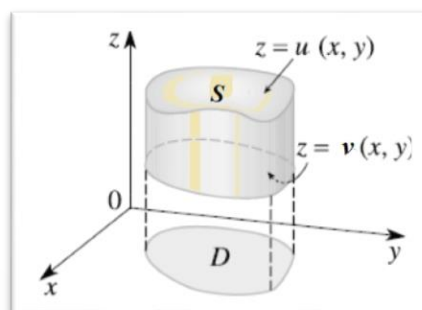


Figura 9.23: Región elemental de tipo I de R^3



Definición 9.10: Sean dos funciones $u, v: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $v(x, z) \leq y \leq u(x, z) \quad \forall (x, z) \in D$, se dice que el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / v(x, z) \leq y \leq u(x, z) \quad \forall (x, z) \in D\}$ es una *región elemental de tipo II*, siendo la región $D \subset \mathbb{R}^2$ la proyección ortogonal del sólido S sobre el plano (xz) , que puede ser una región elemental de \mathbb{R}^2 ya conocida, o bien descomponible en regiones elementales. Figura 9.24.

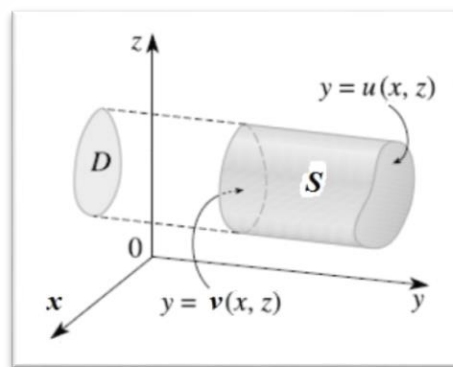


Figura 9.24: Región elemental de tipo II de \mathbb{R}^3



Definición 9.11: Sean dos funciones $u, v: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $v(y, z) \leq x \leq u(y, z) \quad \forall (y, z) \in D$, se dice que el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / v(y, z) \leq x \leq u(y, z) \quad \forall (y, z) \in D\}$ es una *región elemental de tipo III*, siendo la región $D \subset \mathbb{R}^2$ la proyección ortogonal del sólido S sobre el plano (yz) , que puede ser una región elemental de \mathbb{R}^2 ya conocida, o bien descomponible en regiones elementales. Figura 9.25

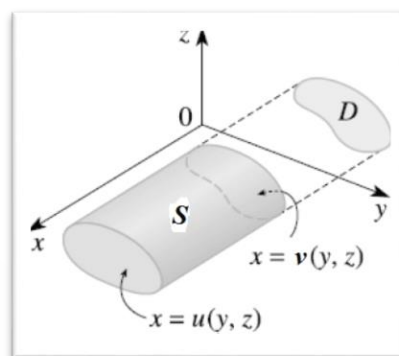


Figura 9.25: Región elemental de tipo III de \mathbb{R}^3



Definición 9.12: El conjunto $S \subset R^3$ es una *región elemental de tipo IV* si es de tipo I, II y III

Para definir una integral triple de una función sobre una región S acotada más general en R^3 , se procede de forma análoga que aquella efectuada para integrales dobles, es decir, se extiende la definición de esa función a un paralelepípedo $W = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ que incluya a la región dada de la siguiente forma:

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in S \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \in (W - S) \end{cases}$$

En consecuencia, resulta:

$$\iiint_W \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(x, y, z) dx dy dz$$

Para calcular esta última integral se extiende el Teorema de Fubini para regionales más generales en R^3 . Este teorema lo enunciaremos para una región elemental de tipo I, y se enuncia de forma similar para regiones elementales de tipo II y III.



Teorema 9.8: Teorema de Fubini para regiones elementales en R^3

Sea una función $f : S \subset R^3 \rightarrow R$ / $u = f(x, y, z)$ continua sobre S y S es una región elemental de tipo I de R^3 como la exhibida en la figura 9. , entonces $\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{v(x, y)}^{u(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$.

Obsérvese que la región $D \subset R^2$ puede ser de tipo I, II o III que ya fueron presentadas en las integrales dobles. Conforme sea dicha región D , por ejemplo de tipo I, entonces

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{v(x, y)}^{u(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{v(x, y)}^{u(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy dx$$

Si la región S es de tipo II, resulta: $\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{v(x, z)}^{u(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz$, y si S es una región de

tipo III, es $\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{v(y, z)}^{u(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dy dz$

Naturalmente que si la región S es de tipo IV, es posible integrar en el cualquier orden, es decir, es válido el cambio de orden de integración para el cálculo de las integrales iteradas.

Observación

Para poder realizar el cálculo de una integral triple sobre una región elemental, es preciso determinar de qué tipo es dicha región para poder establecer correctamente los límites de integración según el Teorema de Fubini. En diversos casos ocurre que, si bien la región S es de tipo IV y es posible integrar de cualquier forma, debe



priorizarse el orden de integración para el cual la región D proyectada sobre el plano coordenado correspondiente sea lo más simple posible, tal como se apreciará posteriormente en los ejemplos propuestos.

Propiedades de las integrales triples

Las propiedades que verifican las integrales triples son análogas a las propiedades establecidas con anterioridad para las integrales dobles.

Específicamente, para C una constante arbitraria y dos funciones $f, g : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continuas sobre S una región acotada del espacio tridimensional, se verifican las siguientes propiedades:

$$1. \iiint_S C \, dx \, dy \, dz = C \iiint_S dx \, dy \, dz = C \cdot \text{Volumen}(S)$$

Si $C=1$ el valor numérico de la integral triple proporciona el volumen del sólido S (sólo el valor numérico)

$$2. \text{Homogeneidad} \quad \iiint_S C f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = C \iiint_S f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$3. \text{Linealidad} \quad \alpha \text{ y } \beta \in \mathbb{R}$$

$$\iiint_S [\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)] \, dx \, dy \, dz = \alpha \iiint_S f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \beta \iiint_S g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$4. \text{No negatividad} \quad \text{si } f(x, y, z) \geq 0 \quad \forall (x, y, z) \in S, \text{ entonces } \iiint_S f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \geq 0$$

$$5. \text{Monotonía} \quad f(x, y, z) \leq g(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in S, \text{ entonces } \iiint_S f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \leq \iiint_S g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$6. \text{Aditividad, si } S = S_1 \cup S_2 \text{ y } S_1 \cap S_2 = \begin{cases} \text{vacío o} \\ \text{puntos aislados o} \\ \text{una curva} \end{cases}, \text{ entonces}$$

$$\iiint_S f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{S_1} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{S_2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Aplicaciones físicas de las integrales triples

Masa, centro de masa y momentos de inercia

Si $\delta(x, y, z)$ es la densidad de un sólido que ocupa la región S , entonces la *masa* de dicho sólido se calcula como

$$\text{Masa}(S) = \iiint_S \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Las *coordenadas del centro de masa* de S se calculan como:

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{Masa}} \iiint_S x \cdot \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{Masa}} \iiint_S y \cdot \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\text{Masa}} \iiint_S z \cdot \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Los *momentos de inercia respecto de los ejes* se calculan como:

$$I_x = \iiint_S (y^2 + z^2) \cdot \delta(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_y = \iiint_S (x^2 + z^2) \cdot \delta(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_z = \iiint_S (x^2 + y^2) \cdot \delta(x, y, z) dx dy dz$$

Cambio de variables en las integrales triples

También las consideraciones relativas a los cambios de variables para las integrales dobles pueden extenderse a las integrales triples. Una transformación geométrica $\vec{T} : R^3 \rightarrow R^3$ se utiliza para convertir una cierta región $S \subset R^3$ del espacio (xyz) en otra región $S^* \subset R^3$ del espacio (uvw) .

Sea una transformación $\vec{T} : S^* \subset R^3 \rightarrow S \subset R^3$ / $T(u, v, w) = (\underbrace{T_1(u, v, w)}_x, \underbrace{T_2(u, v, w)}_y, \underbrace{T_3(u, v, w)}_z)$



Teorema 9.9: Teorema del cambio de variables en las integrales triples

Sea una función $f : S \subset R^3 \rightarrow R$ continua sobre la región S y una transformación $\vec{T} : S^* \subset R^3 \rightarrow S \subset R^3$ / $T(u, v, w) = (\underbrace{T_1(u, v, w)}_x, \underbrace{T_2(u, v, w)}_y, \underbrace{T_3(u, v, w)}_z)$ inyectiva de clase C^1 cuya matriz

Jacobiana es inversible para todo punto $(u, v, w) \in S^*$, entonces

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{S^*} (f \circ \vec{T})(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Recordemos que en el segundo miembro de esta igualdad se denota como $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$ al módulo del determinante de la matriz Jacobiana de \vec{T} , es decir:

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \text{ que verifica } \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \neq 0 \text{ ya que la matriz jacobiana admite matriz inversa.}$$

Usualmente se emplean dos cambios de variables para las integrales triples muy conocidos y útiles. Ellos son: coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas que estableceremos a continuación.

1. Sistema de coordenadas cilíndricas

Si se desea calcular $\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz$ para la cual la región S es la que aparece en la figura 9.26.

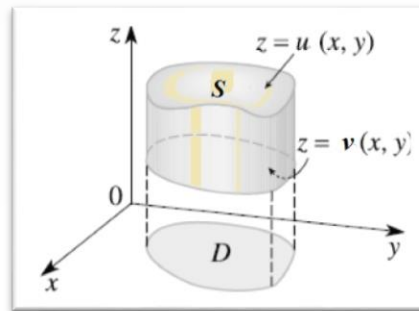


Figura 9.26: Región elemental S

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid v(x, y) \leq z \leq u(x, y) \quad \forall (x, y) \in D\}$ y D es la proyección ortogonal del sólido S sobre el plano (xy) . Supongamos que además la región D , que se muestra en la figura 9.27, puede ser fácilmente expresada en el sistema de coordenadas polares ya visto para integrales dobles.

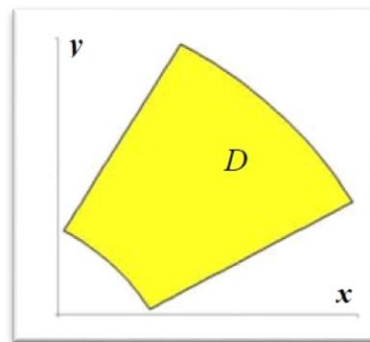


Figura 9.27: Región proyectada sobre el plano (xy)

Entonces, la función transformación a coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{T}: S^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \quad / \quad \vec{T}(r, \theta, z) = (\underbrace{r \cos \theta}_x, \underbrace{r \sin \theta}_y, \underbrace{z}_z)$$

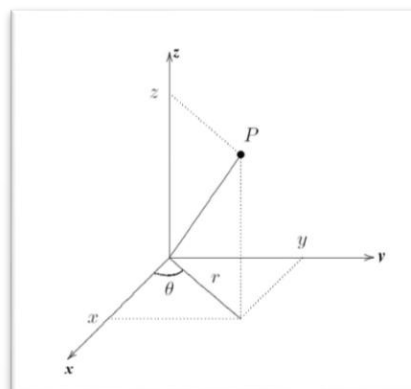


Figura 9.28: Sistema de coordenadas cilíndricas

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}$$

De esta forma, la región S^* es:

$$S^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 \leq r \leq r_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad v(r, \theta) \leq z \leq u(r, \theta)\}$$

El diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas se puede ver en los siguientes gráficos:

$$\Delta V = r \Delta r \Delta \theta \Delta z$$

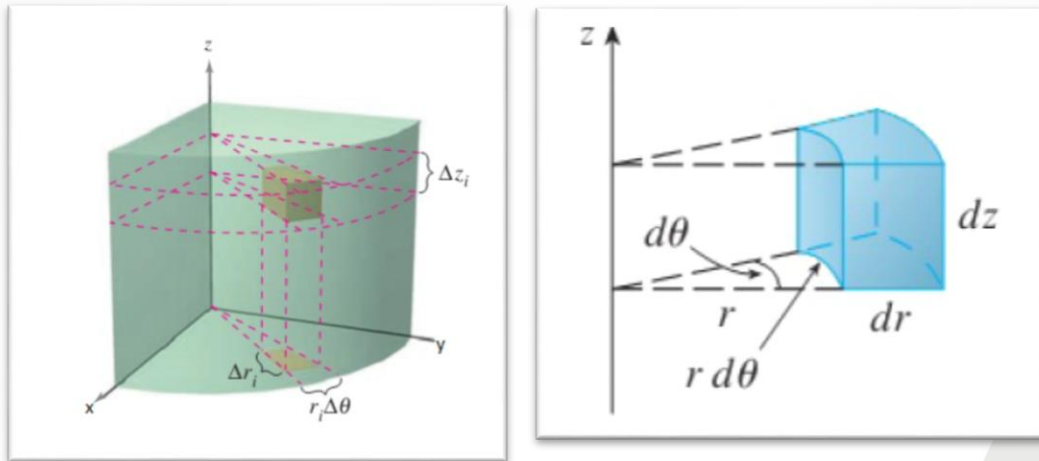


Figura 9.29: Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

El determinante jacobiano correspondiente a la transformación \vec{T} es:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

Por lo tanto, el teorema del cambio de variables para integrales triples empleando las coordenadas cilíndricas es:



Teorema 9.10: Teorema del cambio de variables a coordenadas cilíndricas para integrales triples

Si $f : S^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en la región

$S^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, v(r, \theta) \leq z \leq u(r, \theta), \text{ con } 0 \leq \theta_2 - \theta_1 < 2\pi\}$, entonces

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{S^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \underbrace{r dr d\theta dz}_{dV}$$

2. Sistema de coordenadas esféricas

Otro cambio de variables empleado con frecuencia es el sistema esférico.

Si se desea calcular $\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz$ para la cual la región S es la que aparece en la figura 9.30.

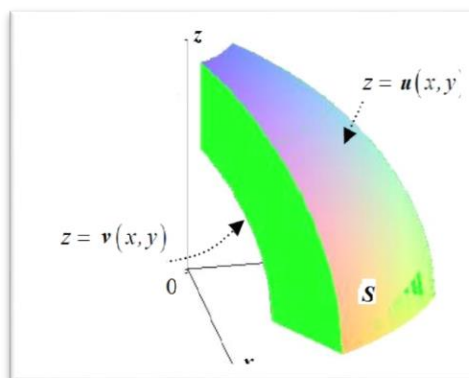


Figura 9.30: Región elemental S

Esta región puede ser expresada de manera más simple si se utiliza la transformación

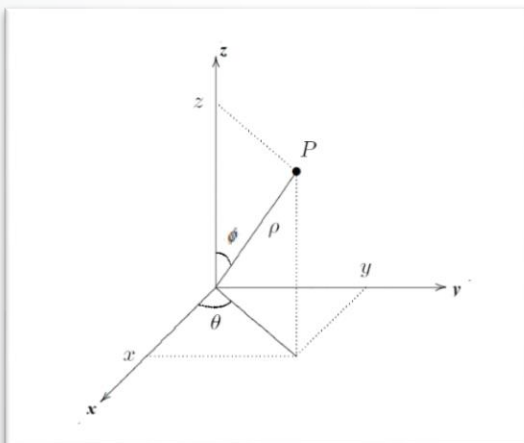
$$\vec{T} : S^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \mid \vec{T}(r, \theta, \phi) = (\underbrace{r \cos \theta \sin \phi}_x, \underbrace{r \sin \theta \sin \phi}_y, \underbrace{r \cos \phi}_z)$$

r se llama **distancia**,

θ se llama **longitud** de (x, y, z)

ϕ se llama **colatitud** de (x, y, z)

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi < \pi$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \quad \theta: \text{como en coordenadas cilíndricas}$$

De esta forma, la región $S^* = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$ (un paralelepípedo)

El determinante jacobiano correspondiente a la transformación \vec{T} es:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{pmatrix} = r \sin^2 \phi$$

Por lo tanto, el teorema del cambio de variables para integrales triples empleando las coordenadas esféricas es:



Teorema 9.11: Teorema del cambio de variables a coordenadas esféricas para integrales triples

Si $f: S^* \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en la región

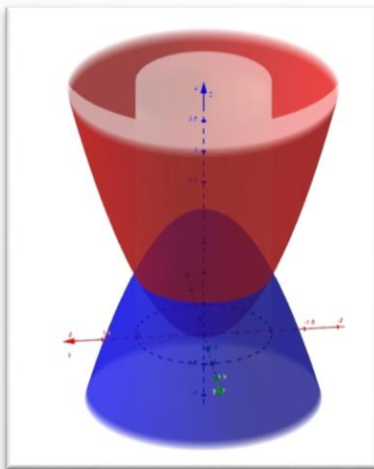
$$S^* = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\} \quad \text{con} \quad 0 \leq \theta_2 - \theta_1 < 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \leq \phi_2 - \phi_1 < \pi,$$

entonces

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{S^*} f(r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, z \cos \phi) r^2 \sin \phi dr d\theta dz$$



Ejemplo 9.22: Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$



En virtud de la simetría circular del sólido S , usaremos coordenadas cilíndricas. Obsérvese que la intersección de las superficies resulta ser una circunferencia incluida en el plano $z=1$. ¿Por qué? Si $z = x^2 + y^2$ resulta que $z = 2 - (x^2 + y^2) \Rightarrow z = 2 - z \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow z = 1$. Por lo tanto, la curva intersección entre las dos superficies es: $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$. Esto significa que la

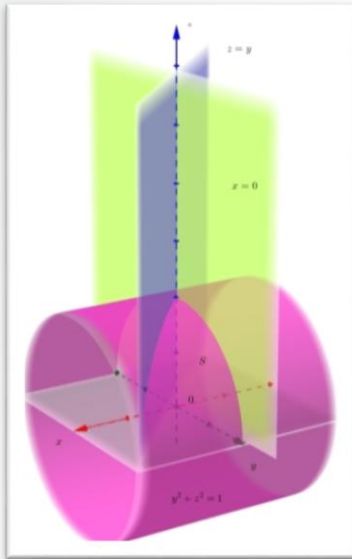
superficie "proyectante" es el cilindro circular de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, por lo tanto la proyección ortogonal del sólido S (D) sobre el plano (xy) es un círculo de radio 1 con centro en el punto $(0,0)$. El sólido S es una región elemental del tipo I en \mathbb{R}^3 , es decir: $2 - x^2 - y^2 \leq z \leq x^2 + y^2 \quad \forall (x, y) \in D$, y en coordenadas

cilíndricas es $2 - r^2 \leq z \leq r^2$ y la región D , $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Así el volumen del sólido S se calcula como:

$$\text{Vol}(S) = \iiint_S dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r - r^3) dr d\theta = 2\pi \left(r^2 - \frac{r^4}{2} \right) \Big|_0^1 = \pi$$



Ejemplo 9.23. Calcular el volumen del sólido limitado por $x=0$, $y=x$, $y^2+z^2=1$



Si se realiza el cálculo del volumen empleando coordenadas cartesianas, y teniendo en cuenta la simetría del cuerpo, se considera una sección en un octante y se multiplica por 4. Se proyecta el sólido S sobre el plano (yz) . La región D en dicho plano es un cuarto de círculo con centro en $(0,0)$ y radio 1.

$$Vol(S) = \iiint_S dx dy dz = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^y dx dz dy = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y dz dy = 4 \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} dy = \frac{4}{3}.$$

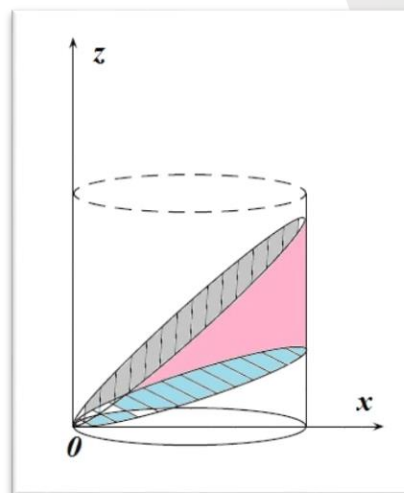
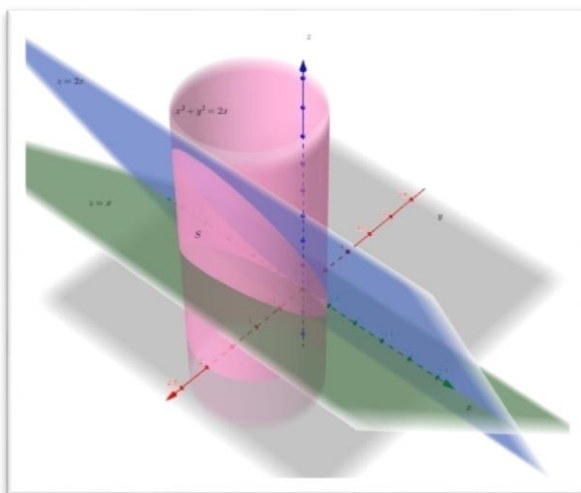
Puede efectuarse el mismo cálculo pero empleando coordenadas cilíndricas en las variables y, z , es decir:

$$\begin{cases} x = x \\ y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq r \cos \theta$$

$$Vol(S) = \iiint_S dx dy dz = 4 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r \cos \theta} r dx d\theta dr = 4 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta d\theta dr = 4 \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right) = \frac{4}{3}$$



Ejemplo 9.24: Calcular el volumen del sólido limitado por $x^2+y^2=2x$, $z=x$, $z=2x$



La superficie proyectante sobre el plano (xy) es la superficie cilíndrica circular de ecuación $x^2+y^2=2x$, esto significa que el sólido S se proyecta en dicho plano según el círculo de radio 1 y centro en el punto $(1,0)$

En coordenadas cilíndricas resulta: $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\underbrace{r \cos \theta}_x \leq z \leq \underbrace{2r \cos \theta}_{2x}$

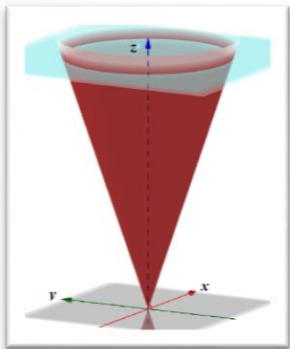
$$\begin{aligned} Vol(S) &= \iiint_S dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_{r\cos\theta}^{2r\cos\theta} r dz dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \cos\theta d\theta dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^{2\cos\theta} \right) \cos\theta d\theta = \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{8}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{16}{3} \left[\frac{3\theta}{8} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned}$$

*se duplica la integral
por ser $\cos^4\theta$ una función
par en el intervalo simétrico*



Ejemplo 9.25: Calcular el momento de inercia respecto al eje z del cono homogéneo con $0 \leq z \leq b$, tal que la superficie cónica tiene el vértice en el origen de coordenadas e interseca al plano $x=0$ según la recta de ecuación $z=2y$.

Usando coordenadas cilíndricas, la ecuación de la superficie cónica, según los datos, es $a^2(x^2 + y^2) = z^2 \Rightarrow z = ar$, la proyección del cono sobre el plano (xy) es un círculo con centro en $(0,0)$ y radio $\frac{b}{a}$



El momento de inercia es

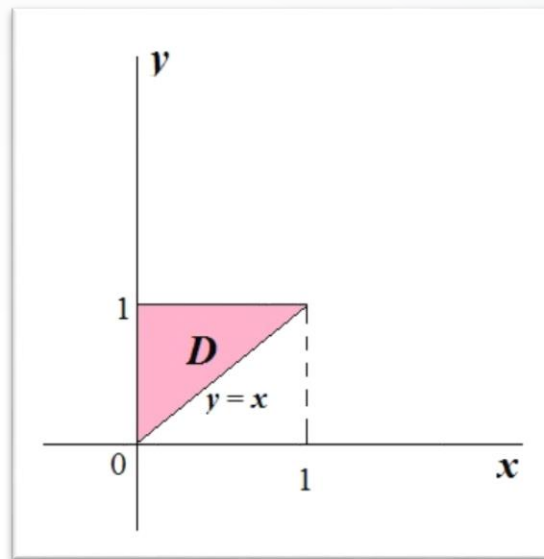
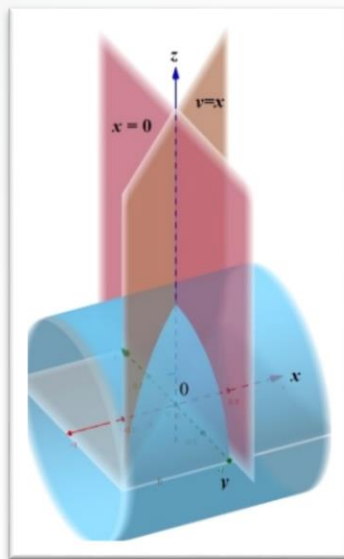
$$I_z = \iiint_S r^2 dV = \iint_D \left(\int_{ar}^b r^2 dz \right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{b}{a}} r^2 (b - ar) r dr d\theta = \frac{\pi b^5}{10a^4}$$



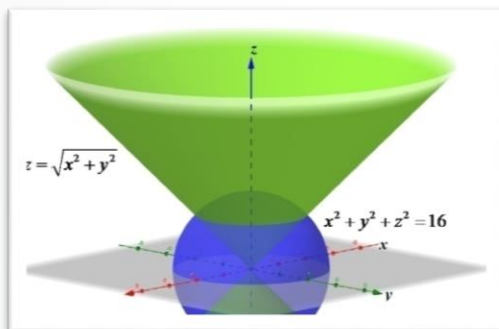
Ejemplo 9.26: Calcular la integral $\iiint_S z dV$ si S es la región de R^3 en el primer octante del cilindro $z^2 + y^2 = 1$ limitada por $y=x$ y $x=0$.

S es una región elemental del tipo I de R^3 , $0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}$, con $D = \{(x,y) \in R^2 / 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$ D es la proyección del sólido S sobre el plano (xy) .

$$\iiint_S z dV = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz dx dy \right) = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz dx dy = \frac{1}{8}$$



 **Ejemplo 9.27:** Calcular el volumen del sólido S limitado por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 16$



Usaremos coordenadas esféricas para el cálculo del volumen
Expresamos la ecuación de la semisuperficie cónica en coordenadas esféricas:

$$r \cos \phi = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi} \Rightarrow r \cos \phi = r \sin \phi \Rightarrow \tan \phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}, \text{ por lo tanto,}$$

$0 \leq r \leq 4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$. Así el volumen es:

$$\text{Volu}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^4 r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \frac{64}{3} \pi (2 - \sqrt{2})$$



Ejemplo 9.28: Calcular el volumen del sólido

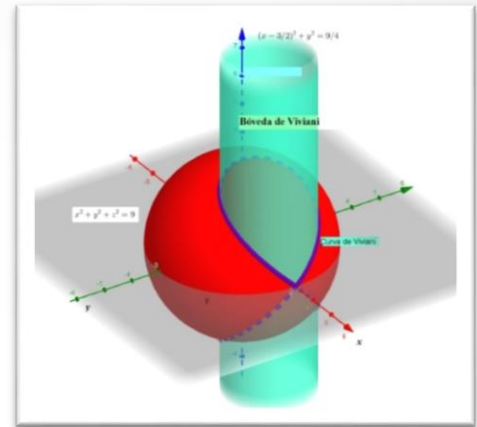
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq Rx, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

Para este caso empleamos coordenadas cilíndricas. Calcularemos un cuarto del volumen solicitado ya que se considerará en el primer octante.

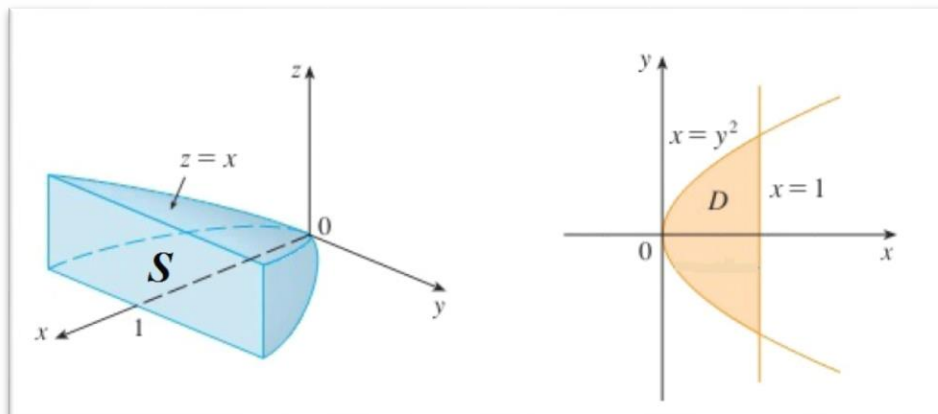
$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$x^2 + y^2 = Rx \Rightarrow r^2 = Rr \cos \theta \Rightarrow r = R \cos \theta$$

$$Vol(S) = \iiint_S dx dy dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R \cos \theta} \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} r dz dr d\theta = 2R^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$$



Ejemplo 9.29: Determinar las coordenadas del centro de masa del sólido S de densidad constante limitado por las superficies $x = y^2$, $z = 0$, $z = x$, $x = 1$



$$\begin{aligned} Masa(S) &= \iiint_S \delta(x, y, z) dV = \iiint_S k dV = k \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x dz dx dy = k \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x dx dy = k \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^1 dy = \\ &= k \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^4}{2} \right) dy = k \left(\frac{y}{2} - \frac{y^5}{10} \right) \Big|_{-1}^1 = k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) = \frac{4}{5} k \end{aligned}$$

Las coordenadas del centro de masa de S se calculan como:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{Masa} \iiint_S x \delta(x, y, z) dx dy dz = \frac{5}{4k} \iiint_S k x dV = \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x dz dx dy = \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 dx dy = \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \frac{x^3}{3} \Big|_{y^2}^1 dy = \\ &= \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{y^6}{3} \right) dy = \frac{5}{4} \left(\frac{y}{3} - \frac{y^7}{21} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21} + \frac{1}{3} - \frac{1}{21} \right) = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{Masa} \iiint_S y \cdot \delta(x, y, z) dx dy dz = \frac{5}{4k} \iiint_S ky dV = \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x y dz dx dy = \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 xy dx dy = \frac{5}{4} \int_{-1}^1 y \frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^1 dy = \\ &= \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^5}{2} \right) dy = \frac{5}{4} \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^6}{12} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{Masa} \iiint_S z \cdot \delta(x, y, z) dx dy dz = \frac{5}{4k} \iiint_S kz dV = \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x z dz dx dy = \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \frac{z^2}{2} \Big|_0^x dx dy = \frac{5}{4} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \frac{x^2}{2} dx dy = \\ &= \frac{5}{8} \int_{-1}^1 \frac{x^3}{3} \Big|_{y^2}^1 dy = \frac{5}{8} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{y^6}{3} \right) dy = \frac{5}{24} \left(y - \frac{y^7}{7} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{5}{24} \left(1 - \frac{1}{7} + 1 - \frac{1}{7} \right) = \frac{5}{14}\end{aligned}$$

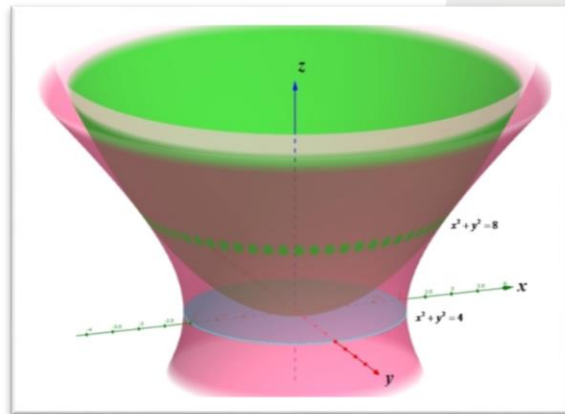
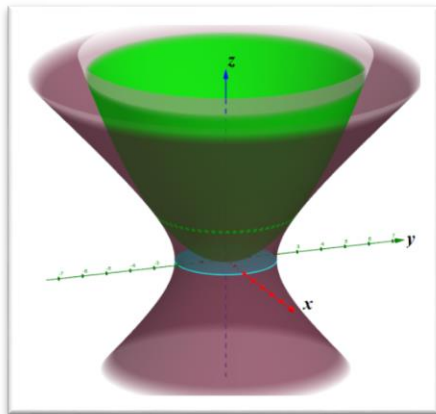
En consecuencia, las coordenadas del centro de masa son:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14} \right)$$



Ejemplo 9.30: Calcular $\iiint_S (1+z^2) dx dy dz$, siendo la región S limitada por las superficies

$$4z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 4 \quad \text{y} \quad z = 0$$



La superficie de ecuación $4z = x^2 + y^2$ corresponde a un paraboloide circular, y $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ a un hiperboloide de una hoja de eje z .

La región S no es una región elemental de tipo I, ya que si el punto (x, y) está dentro del círculo de radio 2, la superficie que la limite inferiormente es el plano (xy) y superiormente el paraboloide, pero si el punto está dentro del círculo de radio $2\sqrt{2}$ pero fuera del círculo de radio 2, la región está limitada inferiormente por el hiperboloide de una hoja y superiormente por el paraboloide. En consecuencia, es necesario descomponer la región en dos subregiones para calcular la integral triple prevista. Utilizaremos el sistema de coordenadas cilíndricas.

$$\iiint_S (1+z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\frac{r^2}{4}} r(1+z^2) dz + \int_0^{2\pi} \int_2^{2\sqrt{2}} \int_{\sqrt{r^2-4}}^{\frac{r^2}{4}} r(1+z^2) dz = \frac{56}{15} \pi$$



Ejemplo 9.31: Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies

$$z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2), \quad z^2 = 3(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

con $z \geq 0$.

Se trata de dos semisuperficies cónicas con vértice en el origen de coordenadas y una semisuperficie esférica. Un corte transversal del sólido con el plano (xz) es el que se muestra en la figura 9.31. Utilizaremos el sistema de coordenadas esféricas.

$$\text{Volumen}(S) = \iiint_S dV = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta = \frac{\pi R^3}{3} (\sqrt{3} - 1)$$

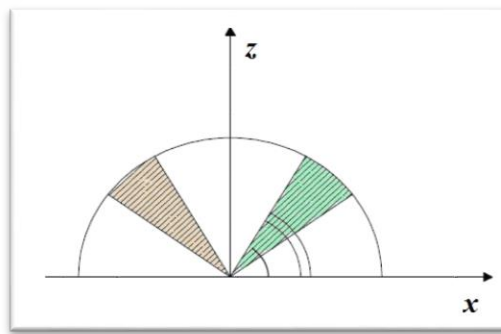
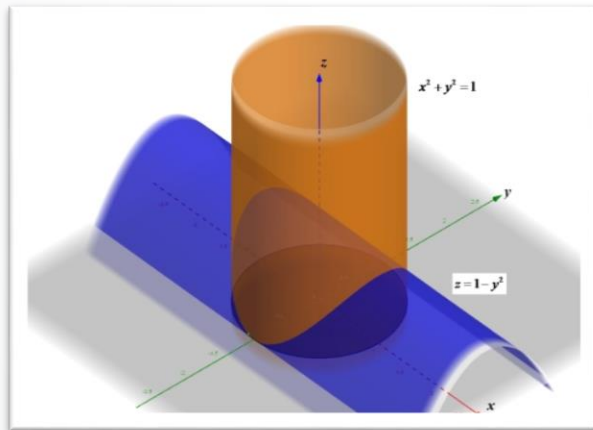


Figura 9.31



Ejemplo 9.32: Calcular la masa del sólido S de densidad proporcional a la distancia al plano (xy) , si S está limitado por las superficies $z = 1 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$ en el primer octante.



Se observa que la distancia de un punto en R^3 al plano (xy) está dada por la tercera componente (z) en valor absoluto. Es decir, la densidad es $\delta(x, y, z) = k|z|$. No obstante, como el sólido S está ubicado en el primer octante, $z \geq 0$, por lo tanto, $\delta(x, y, z) = kz$. S está limitado superiormente por la superficie cilíndrica parabólica $z = 1 - y^2$. La proyección del sólido sobre el plano (xy) es un cuarto de círculo de radio 1 (la superficie proyectante es la superficie cilíndrica circular)

$$\begin{aligned} \text{Masa}(S) &= \iiint_S \delta(x, y, z) dV = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{1-r^2 \sin^2 \theta} z r dz dr d\theta = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cdot \frac{(1-r^2 \sin^2 \theta)^2}{2} dr d\theta = \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{(r - 2r^3 \sin^2 \theta + r^5 \sin^4 \theta)}{2} dr d\theta = \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2} \sin^2 \theta + \frac{r^6}{6} \sin^4 \theta \right]_0^1 d\theta = \\ &= \frac{k}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 \theta + \frac{1}{3} \sin^4 \theta \right) d\theta = \frac{k}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{3} \sin^4 \theta \right) d\theta = \frac{5k\pi}{64} \end{aligned}$$

Ejemplo 9.33: Calcular $\iiint_T y^{-1} dx dy dz$ si el sólido $T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq y, x^2 + (y-1)^2 \leq 1, y \geq \frac{1}{2} \right\}$

El sólido T se proyecta sobre el plano (xy) y se obtiene la región D .

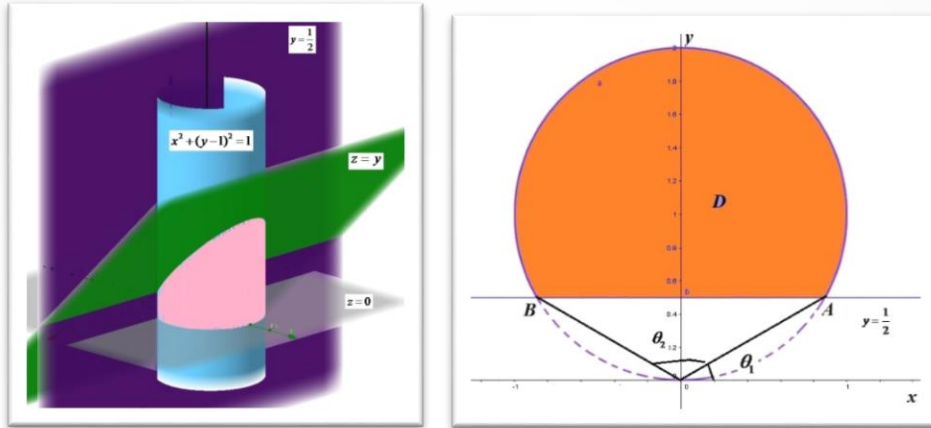


Figura 9.32

Para obtener las coordenadas de los puntos A y B indicados en la figura 9.31 se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow |x| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ en consecuencia } A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ y } B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

La región D es una región elemental de tipo II en \mathbb{R}^2 , los límites para la variable x estarán expresados mediante raíces cuadradas (debido a la ecuación de la circunferencia) Luego, el proceso de integración en coordenadas cartesianas podría dificultarse. Por ello, usaremos coordenadas cilíndricas.

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq 5\frac{\pi}{6}, \quad \frac{1}{2\sin\theta} \leq r \leq 2\sin\theta, \quad 0 \leq z \leq r\sin\theta$$

$$\begin{aligned} \iiint_T y^{-1} dx dy dz &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{5\frac{\pi}{6}} \int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{2\sin\theta} \int_0^{r\sin\theta} \frac{1}{r\sin\theta} r dz dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{5\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\sin\theta} \int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{2\sin\theta} r \sin\theta dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{5\frac{\pi}{6}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{2\sin\theta} r dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{5\frac{\pi}{6}} \left(4\sin^2\theta - \frac{1}{4\sin^2\theta} \right) d\theta = \frac{1}{2} \left[4\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) - \frac{1}{4} \cotg \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{5\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$