

Unidad 8 – Curvas paramétricas.

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Comprender el concepto de parametrización de curvas y sus beneficios.
2. Parametrizar curvas en los espacios bidimensional y tridimensional.
3. Comprender la integral de línea de campos vectoriales y sus aplicaciones a la Física.
4. Reconocer campos vectoriales conservativos y no conservativos, como así también sus propiedades y la relación con la función potencial.

Introducción

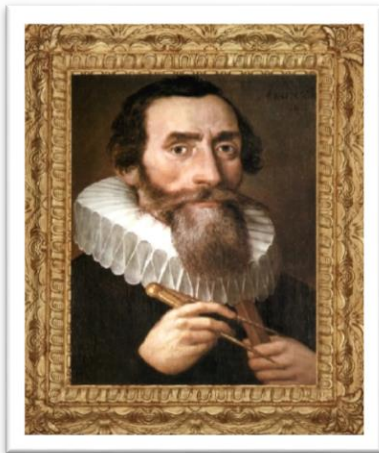


Figura 8.1: Johannes Kepler

Johannes Kepler descubrió, en el siglo XVII, que los planetas describen órbitas elípticas alrededor del sol.



Figura 8.2: Los planetas del sistema solar.

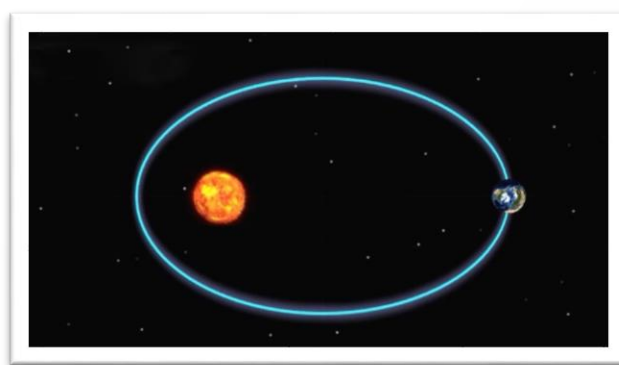


Figura 8.3: Una órbita elíptica alrededor del sol.

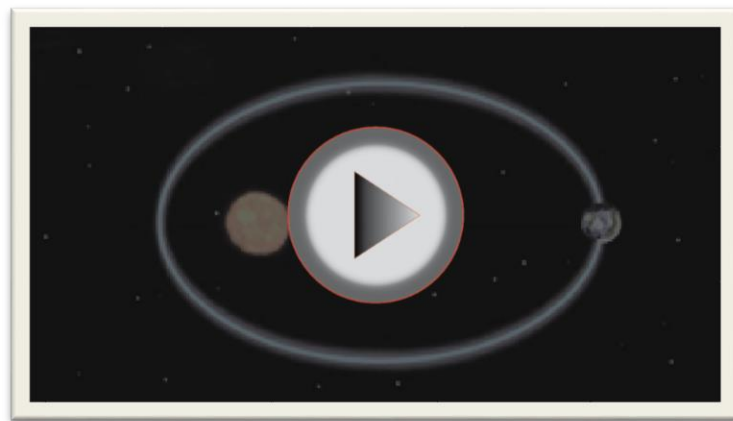
Conocer la *forma* de la trayectoria no nos alcanza para conocer la posición del planeta en cada instante.

Sabemos, por ejemplo, que la ecuación de una elipse en el plano es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ésta es una relación entre las coordenadas x e y de la posición que ocuparía el planeta a lo largo de todo el año planetario, pero no nos permite saber dónde se encuentra ubicado en cada momento.

Sería diferente si tuviéramos la posición $(x(t), y(t))$ en cada instante de tiempo t .



Video 8.1: Órbita elíptica

Obsérvese que $x(t)$ e $y(t)$ deberían ser funciones que, para todo t , verificaran que

$$\frac{[x(t)]^2}{a^2} + \frac{[y(t)]^2}{b^2} = 1$$

para poder asegurar que el punto pertenece a la elipse. Pero ahora podríamos saber dónde se encuentra el móvil en cada instante t (suponiendo que conocemos cuál es el plano de la órbita).

Además, para que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ representen un movimiento deberían ser, necesariamente, funciones continuas, porque el móvil no puede pasar de un punto a otro sin recorrer los puntos intermedios.

Vamos a generalizar esta idea, que sirve, por ejemplo, para describir trayectorias.

Parametrización de curvas:



Definición 8.1: Llamaremos *arco de curva*, o simplemente *curva*, a la *imagen de una función vectorial continua* $\vec{X}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $[a, b]$ es un intervalo de la recta real.

Nos interesarán, en particular, las curvas para los casos en que $n=2$ y $n=3$, que se corresponden a trayectorias en el plano y en el espacio.

Dada, por ejemplo, $\vec{X}(t) = (x(t), y(t))$, para $t \in [a, b]$, a medida que t va recorriendo los valores del intervalo $[a, b]$, $(x(t), y(t))$ va representando puntos del plano.

Si $x(t)$ e $y(t)$ son además funciones continuas, el par $(x(t), y(t))$ describe una curva en el plano para $t \in [a, b]$.

De modo similar, $\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t \in [a, b]$, describe una curva en el espacio si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones continuas.

Veamos algunos ejemplos...



Ejemplo 8.1: La función vectorial $\vec{X}(t) = (t, t^2)$, para $t \in [-2, 1]$, describe el arco de parábola $y = x^2$ que va desde el punto $(-2, 4)$ hasta el punto $(1, 1)$ a medida que el *parámetro* t va variando entre los extremos del intervalo $a = -2$ y $b = 1$.

En general, la ecuación cartesiana de la curva se puede obtener *eliminando* el *parámetro* t de las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \rightarrow y = x^2$.

Obsérvese que la descripción vectorial de una curva involucra un *sentido de recorrido*; en este caso, desde el *punto inicial* $(-2, 4)$ hasta el *punto final* $(1, 1)$. En la ecuación cartesiana esto no se evidencia.

La función vectorial $\vec{X}(t) = (t, t^2)$, con $t \in [-2, 1]$ se dice que es *una parametrización* del arco de parábola C .

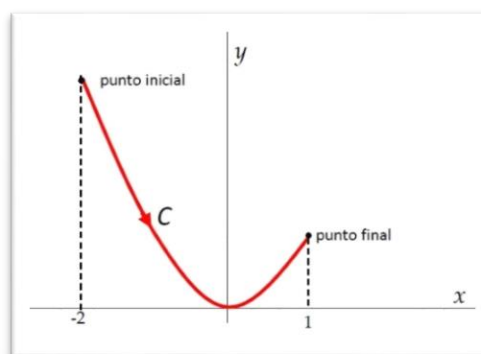


Figura 8.4: La imagen de la función vectorial del ejemplo 8.1.



Ejemplo 8.2: La función $\vec{X}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, para $t \in [0, 2\pi]$, describe una circunferencia con centro en el origen y radio 1, ya que $x = \cos(t)$ e $y = \sin(t)$ verifican la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Cuando la parametrización involucra senos y cosenos, una forma sencilla de eliminar el parámetro para encontrar la ecuación cartesiana de la curva es utilizar la relación pitagórica: $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si el parámetro t asume los valores crecientes, $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \pi$ se observa que el sentido de recorrido es *antihorario* (esto es, contrario a las agujas del reloj). El punto inicial y final coinciden, por lo que la curva es *cerrada*.

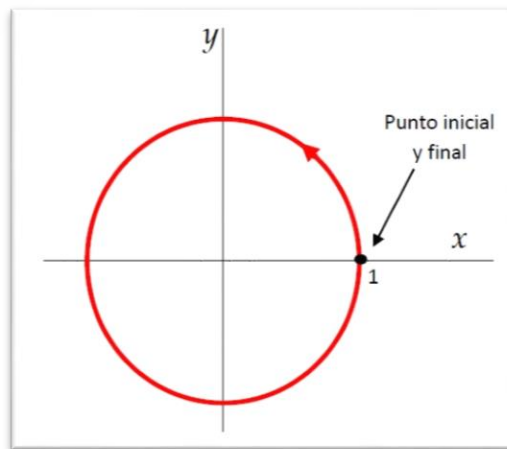


Figura 8.5: La circunferencia del ejemplo 8.2.



Ejemplo 8.3: La función $\vec{X}(t) = (2\sin(t), 3\cos(t))$, para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, describe un arco de elipse con centro en el origen y semiejes de longitudes 2 y 3.

En efecto: si $x = 2\sin(t)$ e $y = 3\cos(t)$, verifican la ecuación $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$, que corresponde a esa elipse.

Si t asume los valores $t = -\frac{\pi}{2}$, $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$ se observa que el sentido de recorrido es *horario*: el punto inicial es $(-2, 0)$ y el final es $(2, 0)$, pasando por $(0, 3)$, tal como se visualiza en la figura 8.6.

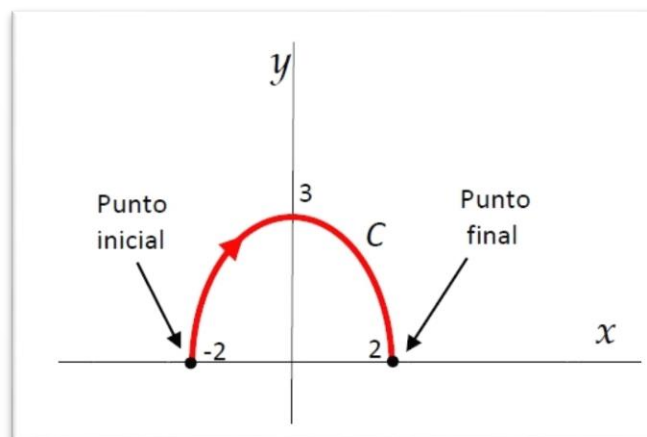


Figura 8.6: El arco de elipse del Ejemplo 8.3.



Ejemplo 8.4: Si la función fuera $\vec{X}(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$, para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (es decir, intercambiando seno y coseno en el ejemplo anterior, y manteniendo el intervalo $[a, b]$) observemos que se verifica nuevamente que $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{3})^2 = 1$, de modo que se trata nuevamente de un arco de la misma elipse. Si el parámetro t alcanza los valores $t = -\frac{\pi}{2}, t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$ se observa que el sentido de recorrido es ahora *antihorario*, con punto inicial $(0, -3)$ y punto final $(0, 3)$, pasando por $(2, 0)$

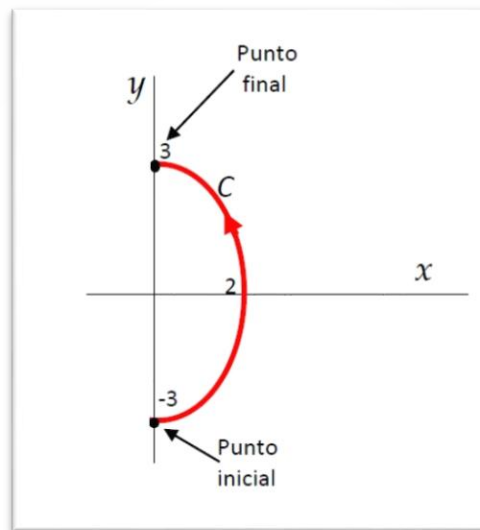


Figura 8.7: El arco de elipse del ejemplo 8.4.



Ejemplo 8.5: ¿Y si quisiéramos representar el mismo arco de parábola del primer ejemplo, pero recorrido en sentido contrario?

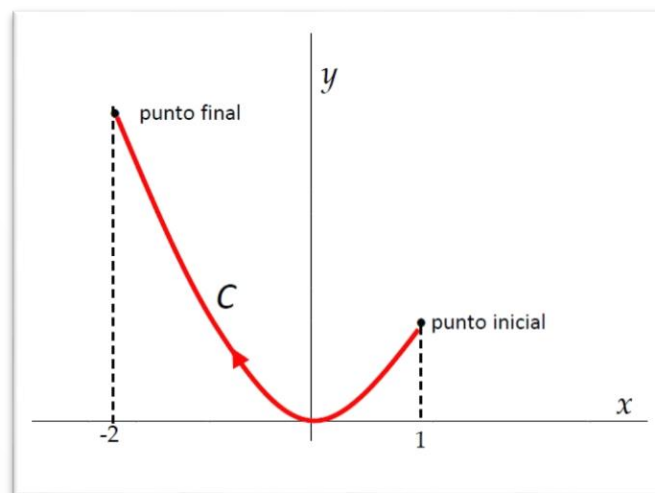


Figura 8.8: El arco de parábola del ejemplo 8.5.

Un modo sencillo de *reparametrizar* el arco de parábola con sentido contrario al dado es considerar, en lugar de la variable t , la nueva variable $t' = a + b - t$ (vale decir, hacer un *cambio de variables* conveniente). Observar que cuando $t = a$ resulta $t' = a + b - a = b$, mientras que cuando $t = b$ resulta $t' = a + b - b = a$, vale decir que t' recorre el intervalo en sentido contrario, invirtiendo el sentido de recorrido de la curva. Como en este ejemplo es $[a, b] = [-2, 1]$, será $t' = -2 + 1 - t = -1 - t$.

Basta entonces con definir la nueva función vectorial $\vec{Y}(t) = (-1 - t, (-1 - t)^2)$ para $t \in [-2, 1]$, que describe el trozo de parábola $y = x^2$ desde el punto $(1, 1)$ hasta el punto $(-2, 4)$, como se deseaba.



Ejemplo 8.6: Supongamos ahora que deseamos parametrizar la curva que se ve en la figura:

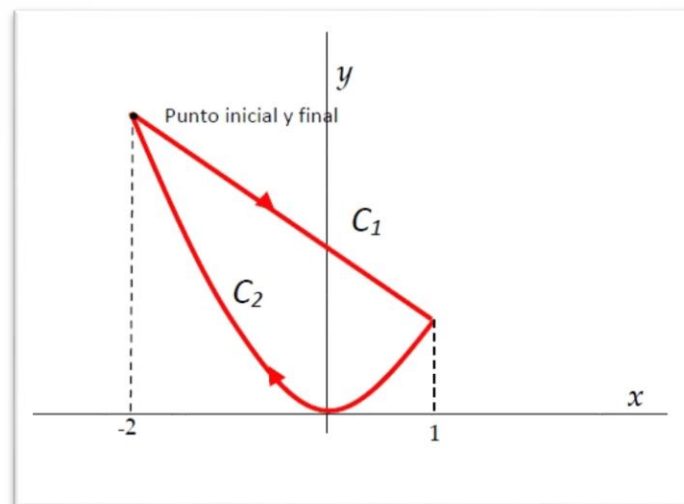


Figura 8.9: La curva cerrada del ejemplo 8.6.

Se trata de una curva cerrada, formada por el arco de parábola del Ejemplo 8.5 y por el segmento que une los puntos $(-2, 4)$ y $(1, 1)$.

No será posible definir una única función vectorial $\vec{X}(t) = (x(t), y(t))$ que describa toda la curva: será necesario definir una función por tramos.

El segmento que une los puntos $(-2, 4)$ y $(1, 1)$ podemos representarlo recurriendo a la ecuación vectorial de la recta que une dos puntos:

$$r: (x, y) = \underbrace{(-2, 4)}_{\text{punto de paso}} + t \underbrace{[(1, 1) - (-2, 4)]}_{\text{vector director en el sentido que nos interesa}}, t \in R$$

Obsérvese que, habiendo tomado como punto de paso el punto inicial y el director en el sentido en que nos interesa recorrer el segmento, basta elegir $t \in [0, 1]$ para tener C_1 descripta como necesitamos.

Una parametrización para el segmento es, entonces,

$$C_1: \vec{X}_1(t) = (-2 + 3t, 4 - 3t), \quad t \in [0, 1]$$



mientras que para el arco de parábola tenemos, como antes,

$$C_2: \vec{X}_2(t) = (-1 - t, (-1 - t)^2) \text{ para } t \in [-2, 1]$$

Observemos que $\vec{X}_1(1) = \vec{X}_2(-2)$ y $\vec{X}_1(0) = \vec{X}_2(1)$ lo que asegura que los dos tramos se “peguen” correctamente, garantizando la continuidad.

Podemos aún realizar un cambio de variable apropiado en la descripción de C_2 (“corriendo” el intervalo de variación del parámetro) para definir una única función:

$$C: \vec{X}(t) = \begin{cases} (-2 + 3t, 4 - 3t), & t \in [0, 1] \\ (-1 - (t - 3), (-1 - (t - 3))^2), & t \in [1, 4] \end{cases}$$

esto es

$$C: \vec{X}(t) = \begin{cases} (-2 + 3t, 4 - 3t), & t \in [0, 1] \\ (2 - t, (2 - t)^2), & t \in [1, 4] \end{cases}$$

que define la curva completa.

Acabamos de ver un ejemplo de *arcos de curva concatenados*:



Definición 8.2: Dadas dos funciones vectoriales continuas, $\vec{X}_1: [a, b] \rightarrow R^n$ y $\vec{X}_2: [c, d] \rightarrow R^n$, tales que $\vec{X}_1(b) = \vec{X}_2(c)$, cuyas imágenes son las curvas C_1 y C_2 , se define la *concatenación* de las curvas que representan, esto es $C = C_1 \cup C_2$, como la nueva curva que queda descrita por una nueva función vectorial \vec{X} (que a veces también se denota $\vec{X}_1 \oplus \vec{X}_2$) definida por

$$\vec{X}(t) = \begin{cases} \vec{X}_1(t), & t \in [a, b] \\ \vec{X}_2(t - b + c), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

Observen que la condición $\vec{X}_1(b) = \vec{X}_2(c)$ garantiza la continuidad de $\vec{X}(t)$.

Obsérvese que la condición $\vec{X}_1(b) = \vec{X}_2(c)$ garantiza la continuidad de $\vec{X}(t)$.

El proceso se podría reiterar concatenando un número finito cualquiera de curvas: $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$. Para ello, las correspondientes funciones vectoriales deberían cumplir con las condiciones necesarias para garantizar la continuidad.

Un ejemplo es la concatenación de segmentos, que se denomina *poligonal*, y puede ser abierta o cerrada.

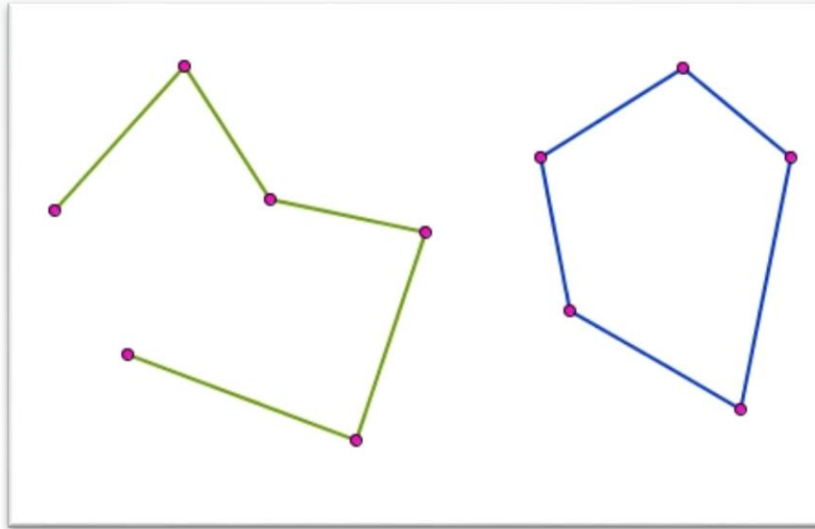


Figura 8.10: Poligonales: ejemplos de curvas concatenadas.



Ejemplo 8.7: La función $\vec{X}(t) = \left(\frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)}, \frac{\sin(t)\cos(t)}{1+\sin^2(t)} \right)$, para $t \in [0, 2\pi]$, describe la curva que se ve en la figura 8.11.

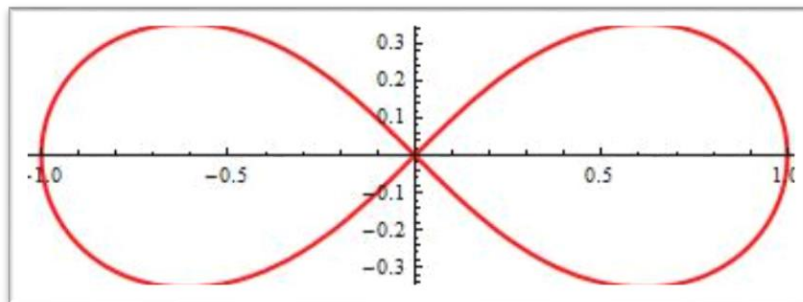


Figura 8.11: Una lemniscata de Bernoulli.

Esta curva se llama *lemniscata de Bernoulli* y tiene la característica de que, además de ser cerrada, se corta a sí misma, pues $\vec{X}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{X}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,0)$.

Es un ejemplo de *curva no simple*.



Definición 8.3: Las curvas del plano cerradas simples (es decir, que sólo tienen en común el punto inicial y final) se llaman *curvas de Jordan* (y son importantes, como veremos más adelante).

Continuemos con los ejemplos, ahora de curvas en el espacio:



Ejemplo 8.8: La función $\vec{X}(t) = (4\sin(t), 3, 4\cos(t))$, para $t \in [0, 2\pi]$, describe una circunferencia ubicada en el plano $y=3$, con centro en el punto $(0, 3, 0)$ y radio 4.

En efecto: $x = 4\sin(t)$ y $z = 4\cos(t)$ verifican la ecuación $x^2 + z^2 = 16$, que en el espacio corresponde a un cilindro circular recto de eje y y radio 4, e $y=3$ es la ecuación del plano cuya intersección con el cilindro determina la curva.

Dando valores a t se puede determinar el sentido de recorrido: para $t=0$ pasa por $(0, 3, 4)$, para $t = \frac{\pi}{2}$ pasa por $(4, 3, 0)$, para $t = \pi$ pasa por $(0, 3, -4)$, y para $t = 2\pi$ vuelve a $(0, 3, 4)$, por lo que la curva es *cerrada*.

Observen en la **Figura 8.12** que en este caso no podemos hablar de sentido horario o antihorario porque depende desde dónde miremos la curva en el espacio.

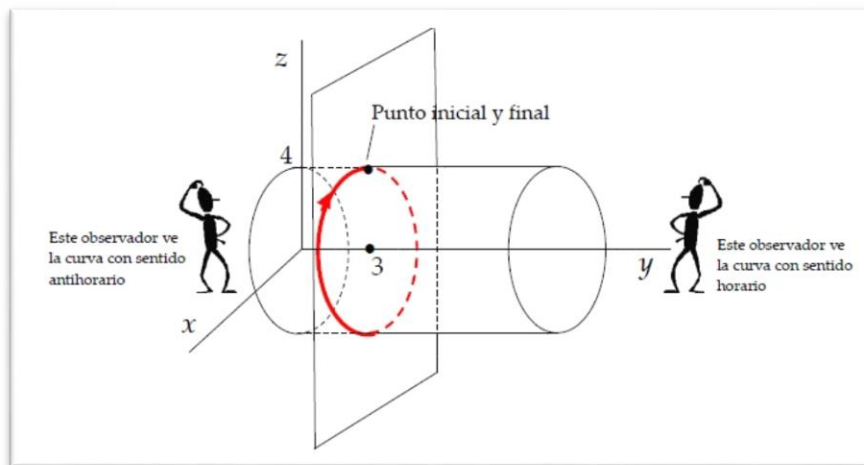


Figura 8.12: El observador de la izquierda ve girar la curva en sentido antihorario y el de la derecha, en sentido horario.



Ejemplo 8.9: Consideremos la curva definida en forma cartesiana por $C: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$ para $x \geq 0$, que corresponde a la intersección entre un paraboloide y una superficie esférica:

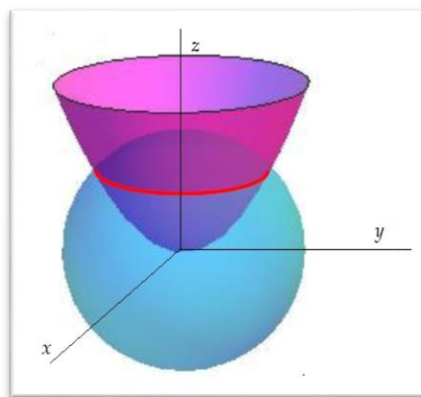


Figura 8.13: La curva del **Ejemplo 8.9** queda determinada por la intersección de una esfera y un paraboloide.



Éste es un ejemplo de curva definida como intersección de superficies. El gráfico de las superficies nos permite intuir que se trata de un arco de circunferencia, pero debemos confirmarlo.

Podemos parametrizar la curva de manera sencilla si la escribimos de forma equivalente, es decir, como intersección de otras superficies diferentes a las dadas, que faciliten definir la función vectorial:

$$C: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z + z^2 = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z^2 + z - 2 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \text{ ó } z = -2 \end{cases}$$

La solución $z = -2$ es incompatible con $z = x^2 + y^2$ pues en ésta última z es siempre positivo, de modo que resulta

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ con } x \geq 0$$

que corresponde a la intersección entre un cilindro circular recto de eje z y radio 1, y el plano $z=1$, considerando sólo los valores positivos de x . Se trata, efectivamente, de una semicircunferencia ubicada en el plano $z=1$, con centro en el punto $(0,0,1)$ y radio 1.

Una parametrización es $\vec{X}(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$, para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Obsérvese que hemos incorporado información sobre el sentido de recorrido que la definición cartesiana no aportaba.

Nótese que la misma circunferencia se puede obtener mediante la intersección de distintos pares de superficies, como ser:

- *esfera con paraboloide*
- *cilindro con plano*
- *esfera con plano*
- *plano con paraboloide*

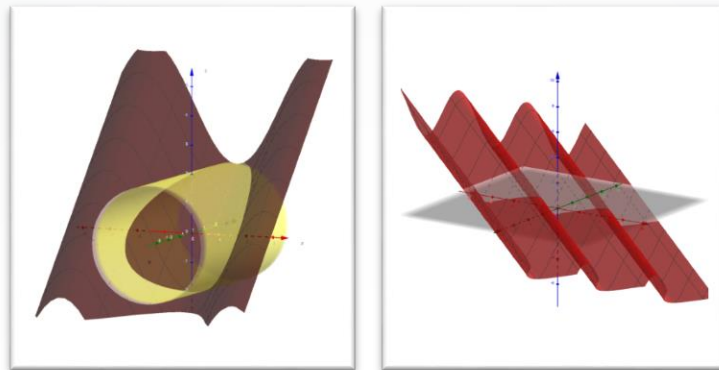
Esto ocurre con frecuencia con diversas curvas en el espacio: conviene buscar la forma de escritura más conveniente, de modo de facilitar la parametrización; en general la forma más sencilla se obtiene cuando se logra que una de las superficies dependa sólo de dos de las variables (superficie cilíndrica).



Ejemplo 8.10: La función $\vec{X}(t) = (2\sin(t), t, 2\cos(t))$ para $t \in [0, 4\pi]$, describe una curva en el espacio, pero aquí no es sencillo descubrir su forma escribiéndola como intersección de superficies... Podemos escribirla, por ejemplo, como

$$C: \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ z = 2\cos(y) \end{cases}$$

que es la intersección de un cilindro circular con una “chapa acanalada” ubicada a lo largo del eje x . Esto no nos permite intuir la forma de la curva.



Es posible esbozar una gráfica si imaginamos que, a medida que $x = 2\sin(t)$ y $z = 2\cos(t)$ completan dos giros completos alrededor del eje y (ya que $t \in [0, 4\pi]$), la ordenada y avanza entre 0 y 4π describiendo un "resorte", que recibe el nombre de **hélice circular**:

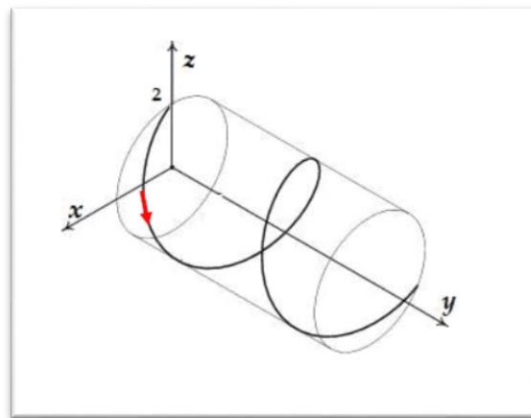


Figura 8.14: Una hélice de eje "y".

En el siguiente video pueden ver cómo se va generando una curva paramétrica en R^3 (una hélice cónica) a medida que t recorre el intervalo $[0, 10\pi]$:



Video 8.2: Parametrización de una curva



Para investigar:

En http://www.flashandmath.com/mathlets/calc/param2d/param_advanced.html

y en <https://graphsketch.com/parametric.php> encontrarán dos graficadores de curvas en el plano.

En <http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/parcur> hallarán un graficador de curvas en el espacio.

Actividad para resolver y discutir en el Foro



Actividad 8.1:

a) El movimiento de una partícula en el plano está definido por la función vectorial $\vec{X}_1(t) = (4 \cos(t), 4 \sin(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$. Grafique la curva que describe la partícula al moverse, indicando los puntos inicial y final, así como el sentido de recorrido.

b) Si el movimiento estuviera representado por $\vec{X}_2(t) = (-4 \sin(2t), 4 \cos(2t))$ para $t \in [0, 2\pi]$, ¿cuál sería la curva determinada? Compare con el ítem a) y extraiga conclusiones.

Un ejemplo con historia interesante



Ejemplo 8.11: A la curva plana imagen de la siguiente función vectorial,

$$\vec{X}(t) = (b(t - \sin(t)), b(1 - \cos(t))),$$

se la conoce con el nombre de *cicloide*. Es la curva que describe un punto de una circunferencia cuando ésta rueda sobre un eje sin deslizarse, como se ve en la **Figura 8.15**.

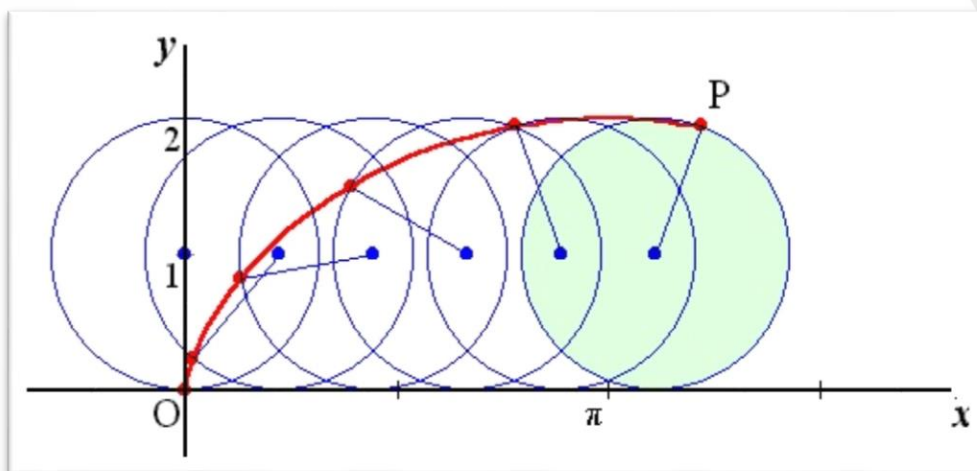


Figura 8.15: Generación de una cicloide.

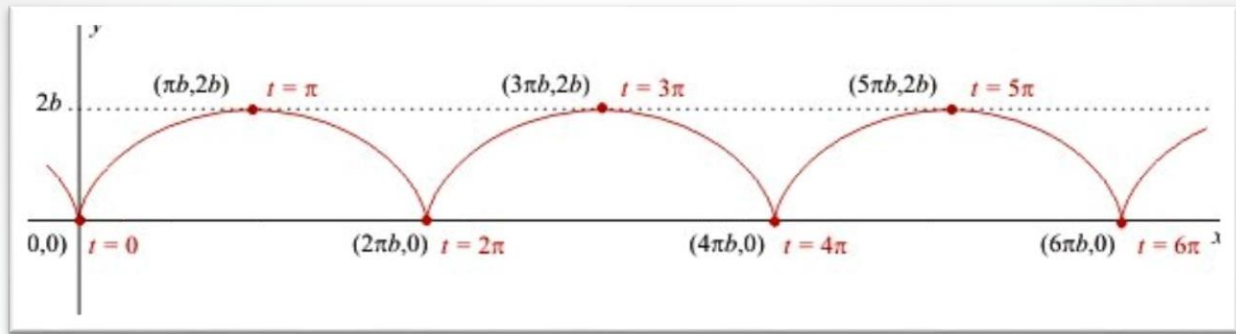


Figura 8.16: Varios arcos de una cicloide.

En <http://www.geogebra.org/m/444159> pueden ver la construcción de esta curva.

Su nombre proviene de la palabra griega κύκλος que significa “rueda”. Galileo se ocupó del estudio de esta curva; llegó a construir modelo de la misma en madera, y conjeturó que el área encerrada entre un arco de cicloide y el eje sobre el que ha rodado el círculo es π veces el área del círculo que la genera. Galileo quedó muy sorprendido cuando su discípulo Torricelli y el francés Roberval demostraron que el área bajo un arco de cicloide no era π veces el área del círculo, sino exactamente 3 veces.

La cicloide presenta algunas propiedades que no se encuentran en la generalidad de las curvas planas. Dos de ellas son propiedades físicas que han contribuido enormemente a la reputación de esta curva: la *tautocronía* y la *braquistocronía*.

La propiedad de tautocronía, se estudió en el año 1673. Christian Huygens (La Haya, 1629-1695), matemático, físico y astrónomo, descubrió que si un punto se desplaza a lo largo de la cicloide, bajo la acción de la gravedad, llegará al punto mínimo de la curva en un tiempo que no depende del punto desde donde comenzó a caer.

La propiedad de la braquistocronía de la cicloide es más conocida como la propiedad del descenso más rápido. Esto quiere decir que si un punto se desplaza bajo la acción de la gravedad, desde un punto más alto, A, hasta otro más bajo, B, la curva por la que llega antes al punto B es, precisamente, la cicloide.

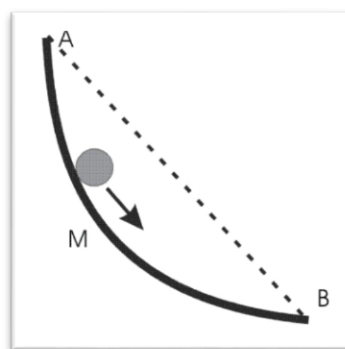


Figura 8.17: La propiedad de braquistocronía.

En el siglo XVII Johann Bernoulli planteó el entonces llamado "Problema de la braquistócrona". La solución al problema fue encontrada por diferentes matemáticos de la época, entre los que estaban Newton y Huygens.

En el Museo de Galileo de Florencia (Italia) se puede ver la cicloide de madera construida por Galileo, y experimentar estas dos propiedades interactuando con la curva.



Figura 8.18: El Museo Galileo y detalles de la cicloide de madera.



Para investigar:

En la siguiente página pueden ver, animada, la propiedad de tautocronía:
<http://www.matematicainteractiva.com/la-cicloide-propiedad-tautocrona>

Reparametrización de curvas

Hemos visto, entre los ejemplos y en las actividades, ejemplos de *reparametrizaciones*.



Definición 8.4: Una función vectorial $\vec{Y}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida sobre un intervalo real J , se dice que es una *reparametrización* de la curva representada por otra función vectorial $\vec{X}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, si ambas tienen la misma imagen, es decir si ambas describen el mismo arco de curva.

Reparametrizar una curva consiste básicamente en realizar un cambio de parámetro. Si imaginamos que el parámetro t es el tiempo en el que un punto $\vec{X}(t)$ recorre la curva que representa, reparametrizar consiste en realizar un cambio de escala del tiempo, y puede representar un cambio en la velocidad con que el punto recorre la curva.

Cuando se reparametriza una curva, originalmente descrita por una función vectorial continua $\vec{X}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, mediante una nueva función $\vec{Y}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos pensar que el parámetro t *recorre el intervalo I de otra forma*. Se puede lograr este efecto definiendo una función $\varphi: J \rightarrow I$ cuya variable puede ser, por ejemplo, u . Cuando la variable u recorre el intervalo J , las imágenes de φ recorrerán el intervalo I . A esta función φ se la denomina *cambio de parámetro*.

Ahora, la cuestión es responder a la pregunta: ¿puede ser la función φ cualquier función? ¿O deberá cumplir algunos requisitos?

Previamente observemos que:

- la reparametrización \vec{Y} es la composición $\vec{X} \circ \varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$,
- el cambio de parámetro φ debe ser sobreyectiva para garantizar que sus imágenes tomen todos los valores del parámetro t en el intervalo I ;



- el cambio de parámetro φ debe ser inyectiva, para garantizar que sus imágenes no se repitan, de lo contrario la nueva imagen se cortaría a sí misma aunque la curva original no lo haga. Esto se garantiza pidiendo que resulte φ siempre creciente o siempre decreciente, vale decir *monótona*.

En el caso de ser φ creciente, ambas parametrizaciones recorrerán la curva en el mismo sentido. En el caso de ser decreciente, en sentidos contrarios.

Actividades para resolver y discutir en el Foro



Actividad 8.2: Determine la curva que resulta de la intersección entre las superficies en \mathbb{R}^3 cuyas ecuaciones son: $x^2 + y^2 = 1$ e $y + z = 2$. Luego encuentre una parametrización que describa dicha curva intersección e indique el sentido asignado por la parametrización que propone.



Actividad 8.3: Muestre que la imagen de la función vectorial $\vec{X}(t) = (\sin(t), \cos(t), \sin^2(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$, representa la curva intersección entre las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $z = x^2$. Realice un esbozo de la curva e indique el sentido de recorrido. ¿A qué se parece? Observando que la segunda componente al cuadrado más la tercera componente suman 1, exprese la curva como intersección de otro par de superficies distintas a las dadas.



Actividad 8.4: Para cada uno de los siguientes casos, determine una función vectorial cuya imagen sea la curva determinada por la intersección entre cada par de superficies dadas; indique luego el sentido de recorrido asignado por la parametrización propuesta y grafique.

a) $z = 1 + y$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $y = x^2$ y el semielipsoide superior $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$

Velocidad de recorrido, recta tangente, plano normal

En la actividad anterior nos referimos informalmente a la *velocidad* con que se recorre una curva. Precisemos este concepto.

Supongamos que se tiene un arco de curva descrito por una función continua $\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t \in [a, b]$. Supongamos que las componentes fueran, además, funciones derivables en el interior del intervalo.

Considerando dos valores de t , t_1 y t_2 en (a, b) el vector $\vec{X}(t_2) - \vec{X}(t_1)$ es secante a la curva; también lo es el vector $\frac{\vec{X}(t_2) - \vec{X}(t_1)}{t_2 - t_1}$.

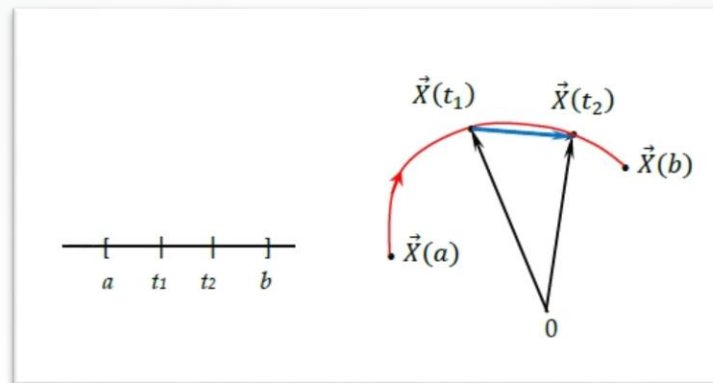


Figura 8.19: Un vector secante a un arco de curva.

Supongamos que t_2 se acerca indefinidamente a t_1 ...

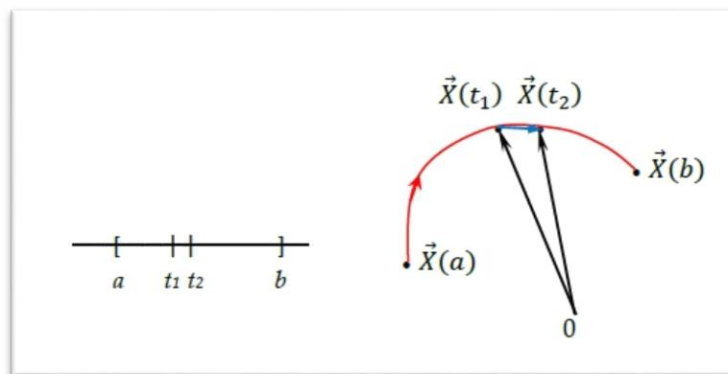


Figura 8.20: Otro vector secante, para puntos más cercanos.

Como las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, se supusieron derivables, existirá

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{X}(t_2) - \vec{X}(t_1)}{t_2 - t_1} = \left(\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}, \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} \right) = (x'(t_1), y'(t_1), z'(t_1))$$

y si no es nulo, resultará un *vector tangente a la curva* en el punto $\vec{X}(t_1)$, como se ve en la figura 8.21.

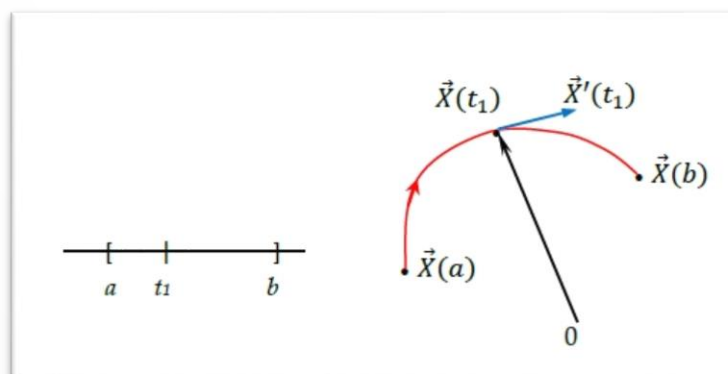


Figura 8.21: Un vector tangente a un arco de curva.



De modo que, si $\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t \in [a, b]$ es la parametrización de una curva y las componentes $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son además funciones derivables en el interior (a, b) , el vector $\vec{X}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ que se obtiene derivando la parametrización componente a componente, es un vector tangente a la curva en cada punto donde no se anule.



Definición 8.5: Sea el arco de curva parametrizado por la función continua $\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t \in [a, b]$ derivable $\forall t \in (a, b)$, se llama vector tangente al vector $\vec{X}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Observemos que, si lo escribimos en forma matricial (como vector columna),

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

el vector derivado es la *matriz jacobiana* de la función vectorial que representa la curva.

Si el parámetro t representa el tiempo, dicho vector representa el *vector velocidad* de recorrido mientras que su módulo, $\|\vec{X}'(t)\| = \|(x'(t), y'(t), z'(t))\|$ se denomina *rapidez*.

En los puntos donde el vector tangente existe y es no nulo podemos definir también un *versor* tangente:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{X}'(t)}{\|\vec{X}'(t)\|}$$



Definición 8.6: Curva regular

La parametrización de una curva $\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t \in [a, b]$, se dice que es *regular* si en cada punto de (a, b) existe y es *no nulo* el vector $\vec{X}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Si la parametrización es regular, salvo un número finito de puntos de (a, b) , se dice *regular a trozos*.

Observemos el siguiente ejemplo...



Ejemplo 8.12: Consideremos la curva plana cuya ecuación cartesiana es $x^{2/5} + y^{2/5} = 1$.

Se la puede parametrizar de manera sencilla si escribimos la ecuación del siguiente modo:

$$(\sqrt[5]{x})^2 + (\sqrt[5]{y})^2 = 1.$$

Basta definir ahora $\sqrt[5]{x} = \cos(t)$ y $\sqrt[5]{y} = \sin(t)$ para obtener la función vectorial continua

$\vec{X}(t) = (\cos^5(t), \sin^5(t))$, para $t \in [0, 2\pi]$, cuya imagen es la que aparece en la figura 8.22.

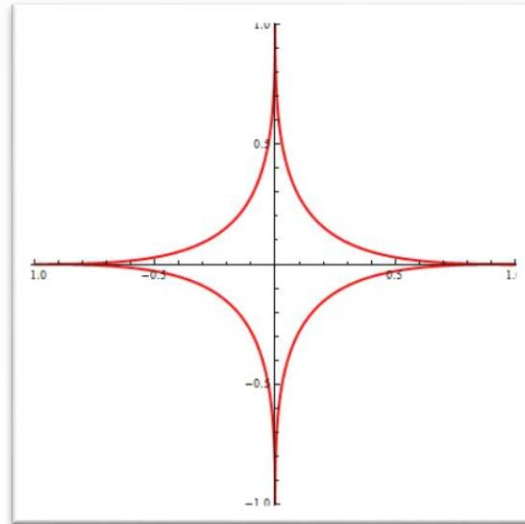


Figura 8.22: Una astroide.

Obsérvese que presenta “puntos angulosos”.

Verifiquen que su vector tangente existe en cada punto, pero se anula para algunos valores de t , que corresponden justamente a esos puntos angulosos. En ellos la curva *no es regular*: al ser nulo el vector tangente, no es posible definir una recta tangente.

¿Qué sentido tiene el vector tangente antes y después de cada uno de esos puntos? Obsérvese el cambio abrupto de dirección.

Éste es un ejemplo de una *curva regular a trozos*.

Recta tangente y plano normal a una curva

Observemos que si $\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t \in [a, b]$ es regular en un punto $\vec{X}(t_1)$, el vector $\vec{X}'(t_1)$ es tangente a la curva y entonces se puede determinar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva en el punto $\vec{X}(t_1)$

Ecuación de recta tangente a la curva en $\vec{X}(t_1)$: $r: (x, y, z) = \vec{X}(t_1) + \lambda \vec{X}'(t_1), \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$

Ecuación del plano normal a la curva en $\vec{X}(t_1)$: $\pi: [(x, y, z) - \vec{X}(t_1)] \cdot \vec{X}'(t_1) = 0$

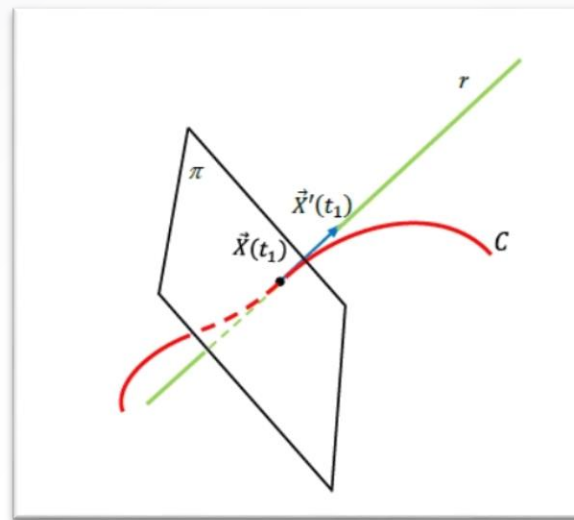


Figura 8.23: Recta tangente y plano normal a un arco de curva en un punto.

Para curvas en el plano bidimensional sólo tiene sentido definir la recta tangente.

Si $\vec{Y}(u) = (x(u), y(u), z(u))$, para $u \in J$, es una reparametrización de $\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t \in I$, y el cambio de parámetro φ es *derivable*, además de continua y biyectiva, entonces $\vec{Y}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ resulta regular también pues, aplicando la regla de la cadena resulta:

$$\vec{Y}'(u) = (\vec{X} \circ \varphi)'(u) = \vec{X}'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) = \underbrace{\vec{X}'(t)}_{\substack{\text{no se anula} \\ \text{por ser regular}}} \cdot \underbrace{\varphi'(u)}_{\substack{\text{no se anula} \\ \text{por ser monótona} \\ \text{(siempre creciente} \\ \text{o siempre decreciente)}}$$

Los vectores velocidad de ambas parametrizaciones resultan así linealmente dependientes en cada punto ($\varphi'(u)$ es el factor de proporcionalidad).

Las parametrizaciones resultarán con igual sentido si $\varphi'(u) > 0$ (vectores velocidad con igual dirección y sentido) y sentido contrario si $\varphi'(u) < 0$ (vectores velocidad con igual dirección y sentido contrario). Esto se corresponde con lo que afirmamos anteriormente (igual sentido si φ es creciente y sentido contrario si φ es decreciente).

Veamos algunos ejemplos...



Ejemplo 8.13: Busquemos la recta tangente en el punto (0,3) al arco de elipse descrito por la función $\vec{X}(t) = (2\text{sen}(t), 3\text{cos}(t))$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

En el punto que nos interesa:

$$(0,3) = (2\text{sen}(t_0), 3\text{cos}(t_0)) \rightarrow t_0 = 0$$

Calculemos el vector tangente genérico:

$$\vec{X}'(t) = (2\text{cos}(t), -3\text{sen}(t))$$



por lo que en el punto de interés es

$$\vec{X}'(0) = (2\cos(0), -3\sin(0)) = (2, 0)$$

La ecuación de la recta tangente es, entonces,

$$r: (x, y) = (0, 3) + \lambda(2, 0), \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$$



Ejemplo 8.14: Busquemos la recta tangente y el plano normal, en el punto $(0, 1, 2)$, a la hélice de ecuación $\vec{X}(t) = \left(\cos(t), \sin(t), \frac{4t}{\pi}\right)$ para $t \in [0, 5\pi]$:

En el punto que nos interesa:

$$(0, 1, 2) = \left(\cos(t_0), \sin(t_0), \frac{4t_0}{\pi}\right) \rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$$

Calculemos el vector tangente genérico:

$$\vec{X}'(t) = \left(-\sin(t), \cos(t), \frac{4}{\pi}\right)$$

por lo que en el punto de interés es

$$\vec{X}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{4}{\pi}\right) = \left(-1, 0, \frac{4}{\pi}\right)$$

La ecuación de la recta tangente es, entonces,

$$r: (x, y, z) = (0, 1, 2) + \lambda\left(-1, 0, \frac{4}{\pi}\right), \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$$

y la ecuación del plano normal,

$$\pi: [(x, y, z) - (0, 1, 2)] \cdot \left(-1, 0, \frac{4}{\pi}\right) = 0,$$

o sea

$$\pi: -x + \frac{4}{\pi}(z - 2) = 0$$

Actividad para resolver y discutir en el Foro



Actividad 8.5: Demuestre que la cicloide de ecuación $\vec{X}(t) = (2t - \sin(2t), 1 - \cos(2t))$, para $t \in [0, 6\pi]$, es una curva regular a trozos; indique en qué puntos no es posible definir recta tangente a la curva. ¿En qué puntos existe recta tangente horizontal?

Integrales de línea

Ya definimos lo que se entiende por “curva”, las distintas maneras que existen para representarlas, y la relación que se puede establecer entre esas distintas representaciones.

También definimos lo que dimos en llamar “parametrización regular” o “regular a trozos” y podemos obtener el vector tangente en cada punto no anguloso de una curva de esta naturaleza.

Ahora nos ocuparemos de “medir” la longitud de una curva, así como de evaluar otras magnitudes físicas importantes relacionadas con las trayectorias.

Para ello definiremos un tipo particular de integral que se denomina “integral de línea” o “integral curvilínea”, que en el cálculo se reducirá a una integral de una sola variable real, como las que calculamos en Análisis Matemático I, pero sus numerosas aplicaciones físicas comenzarán a develarnos cómo el cálculo de varias variables nos permite acercarnos a la solución de problemas reales con que deben enfrentarse los ingenieros.

Longitud de una curva:

Supongamos que tenemos en el espacio tridimensional una curva C , parametrizada regularmente:

$$C: \vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ para } t \in [a, b]$$

Solicitemos que se cumpla la hipótesis adicional de que la función que corresponde al vector derivado $\vec{X}'(t)$ (vector velocidad) varíe con continuidad en el intervalo (a, b) .

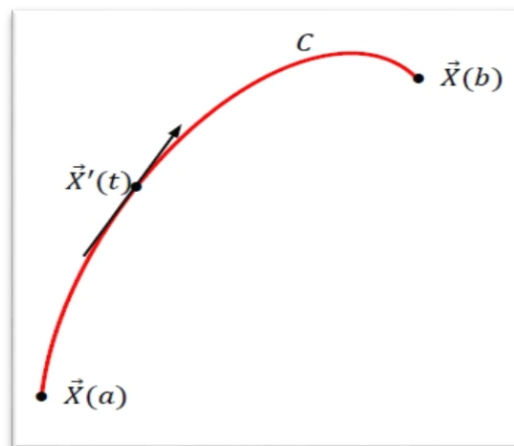


Figura 8.24: Vector tangente a un arco de curva.



Definición 8.7: Llamaremos *longitud del arco de curva C* a la siguiente integral

$$Long(C) = \int_C ds = \int_a^b \|\vec{X}'(t)\| dt$$

Claramente la integral existe, puesto que la función vectorial $\vec{X}'(t)$ se supuso continua y por lo tanto también lo es su módulo.

La interpretación es sencilla y justifica porqué la denominamos “longitud de arco”:

- sabemos que el vector tangente, $\vec{X}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, puede pensarse como la velocidad con que se mueve una partícula sobre la curva, a medida que el parámetro t (que representaría el tiempo) recorre el intervalo $[a, b]$.
- En un lapso infinitesimal de tiempo dt la partícula realiza un desplazamiento, también infinitesimal, $d\vec{s} = \vec{X}'(t)dt$, cuya longitud es $ds = \|d\vec{s}\| = \|\vec{X}'(t)\|dt$.
- Si queremos evaluar la longitud de la trayectoria que recorrió la partícula en el intervalo de tiempo $[a, b]$ bastará con “sumar” todos esos pequeños desplazamientos, y la operación matemática que representa esta “suma de infinitésimos” es la integral.

Rigurosamente, esta definición proviene de considerar “particiones” del intervalo $[a, b]$ y las correspondientes imágenes sobre la curva. Recordemos que una “partición” del intervalo $[a, b]$ es, simplemente, un conjunto de puntos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ que, sobre la curva, determinarán los puntos $\vec{X}(a), \vec{X}(t_1), \vec{X}(t_2), \dots, \vec{X}(t_{n-1}), \vec{X}(b)$.

La longitud de la poligonal resultante se acercará a la verdadera longitud de la curva cuanto “más fina” se considere la partición (es decir, cuantos más puntos interiores al intervalo $[a, b]$ contenga). En el límite, cuando la separación entre los puntos de la partición tienda a 0, el resultado representará la longitud del arco de curva.

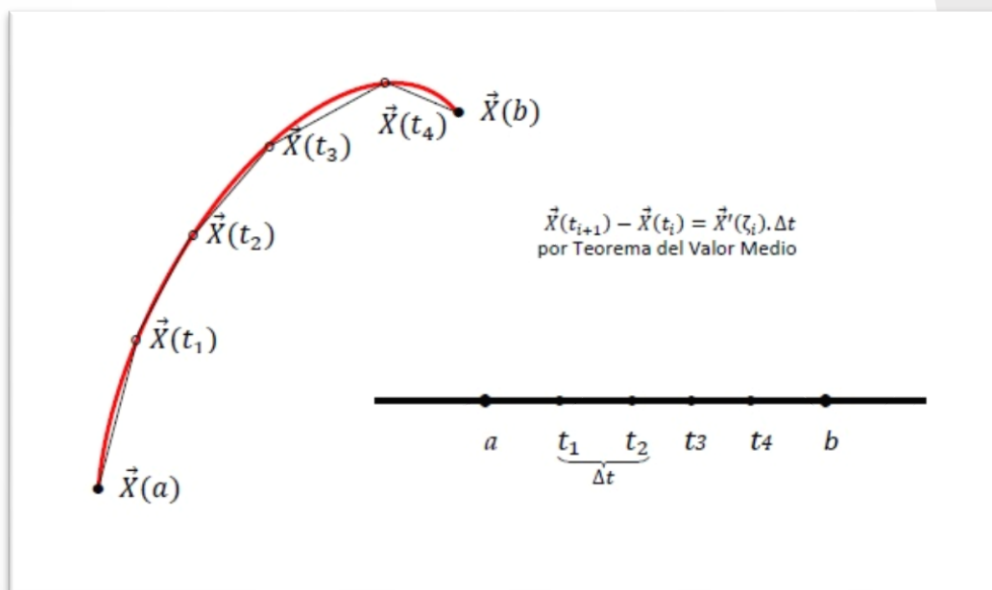


Figura 8.25: Rectificación de un arco de curva.



Ejemplo 8.15: Comprobemos que la longitud de una circunferencia de radio R es $2\pi R$. Para ello parametricemos la curva:

$$C: \vec{X}(t) = (R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t)) \text{ para } t \in [0, 2\pi]$$

Es $\vec{X}'(t) = (-R \cdot \sin(t), R \cdot \cos(t))$, $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{R^2 \cdot \sin^2(t) + R^2 \cdot \cos^2(t)} = R$, por lo que la longitud es

$$\text{Long}(C) = \int_C ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{X}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

tal como esperábamos.



Ejemplo 8.16: Calculemos la longitud de una espiral. La “espiral de Arquímedes” se define como “el lugar geométrico de un punto, moviéndose a velocidad constante, sobre una semirrecta, con extremo en el origen, que gira a velocidad angular constante”.

En coordenadas polares su ecuación se puede escribir $r = \theta$.

Teniendo en cuenta la relación entre coordenadas cartesianas y polares: $\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$ es sencillo definir una parametrización de la espiral:

$$C: \vec{X}(t) = (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t))$$

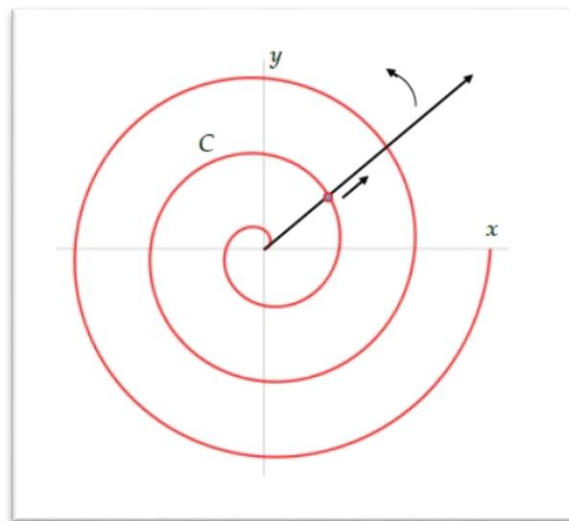


Figura 8.26: Espiral de Arquímedes.

Para una espiral de tres vueltas, como la de la **Figura 8.26**, deberá ser $t \in [0, 6\pi]$. La parametrización es regular pues

$$\vec{X}'(t) = (\cos(t) - t \cdot \sin(t), \sin(t) + t - \cos(t))$$

existe y es no nulo para todo valor del parámetro.

Resulta

$$\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{(\cos(t) - t \cdot \text{sen}(t))^2 + (\text{sen}(t) + t \cdot \cos(t))^2} = \sqrt{1 + t^2}$$

y por lo tanto la longitud es

$$\text{Long}(C) = \int_C ds = \int_0^{6\pi} \|\vec{X}'(t)\| dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{1 + t^2} dt =$$

$$= \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{\ln(1+\sqrt{1+t^2})}{2} \Big|_0^{6\pi} =$$

$$= \frac{6\pi\sqrt{1+36\pi^2}}{2} + \frac{\ln(1+\sqrt{1+36\pi^2})}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

Para obtener la primitiva de $\sqrt{1+t^2}$ podemos recurrir a:

- el método de sustitución, por ejemplo $t = \text{senh}(x)$, o
- una tabla de integrales (incluimos una en el material adicional de esta unidad), o
- una calculadora con función de integración, o bien
- un integrador en línea, como por ejemplo <http://integrals.wolfram.com/index.jsp>



Ejemplo 8.17: Para calcular la longitud de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, una posible parametrización es:


$$C: \vec{X}(t) = (2 \cdot \cos(t), 3 \cdot \text{sen}(t)) \text{ para } t \in [0, 2\pi].$$

Resulta $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{4 \cdot \text{sen}^2(t) + 9 \cdot \cos^2(t)} = \sqrt{4 + 5 \cdot \cos^2(t)}$, por lo que la longitud se obtiene mediante la integral

$$\text{Long}(C) = \int_C ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{X}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + 5 \cdot \cos^2(t)} dt$$

Recurriendo al integrador en línea obtenemos una “extraña” respuesta: $3E\left(x \mid \frac{5}{9}\right)$, y una breve explicación de que se trata de una “integral elíptica de segunda especie”.

Las integrales elípticas reciben su nombre, precisamente, del hecho de que aparecen al calcular la longitud de un arco de elipse. No pueden ser evaluadas más que numéricamente, ya que la primitiva no es una función elemental, y sus valores están tabulados, en función de los parámetros que contienen.

 **Ejemplo 8.18:** Calculemos la longitud de la hélice del ejemplo 8.10, parametrizada por $C: \vec{X}(t) = (2.\text{sen}(t), t, 2.\text{cos}(t))$ para $t \in [0, 4\pi]$.

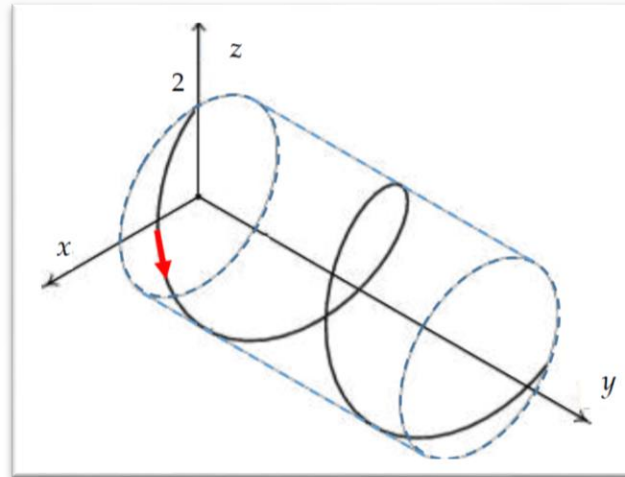



Figura 8.27: La hélice del Ejemplo 8.18

Es $\vec{X}'(t) = (2.\text{cos}(t), 1, -2.\text{sen}(t))$ y $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{4.\text{cos}^2(t) + 1 + 4.\text{sen}^2(t)} = \sqrt{5}$, por lo que la longitud es

$$\text{Long}(C) = \int_C ds = \int_0^{4\pi} \|\vec{X}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{5} dt = 2\sqrt{5}\pi$$

 **Ejemplo 8.19:** Calculemos la longitud de la curva cerrada, regular a trozos del ejemplo 8.6:

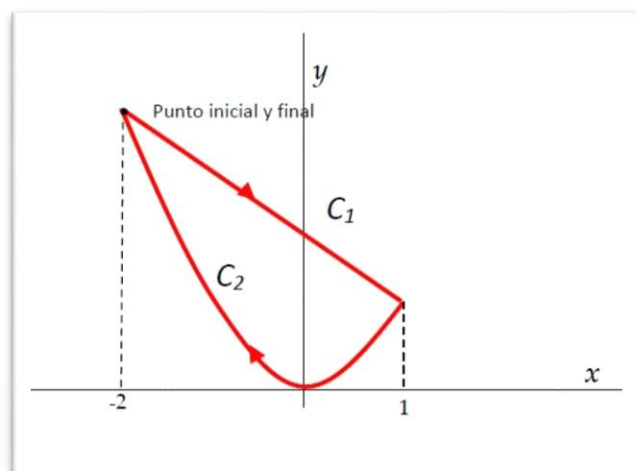


Figura 8.28: La curva cerrada del Ejemplo 8.19

Para calcular la longitud de la curva formada por arcos concatenados debemos calcular la longitud de cada tramo regular por separado y luego sumar ambas longitudes:

$$C_1: \vec{X}_1(t) = (-2 + 3t, 4 - 3t), \quad t \in [0, 1] \quad \therefore \quad \vec{X}'_1(t) = (3, -3) \quad \text{y} \quad \|\vec{X}'_1(t)\| = 3\sqrt{2}$$

$$C_2: \vec{X}_2(t) = (-1 - t, (1 + t)^2), \quad t \in [-2, 1] \quad \therefore \quad \vec{X}'_2(t) = (-1, 2(1 + t)) \quad \text{y entonces}$$

$$\|\vec{X}'_2(t)\| = \sqrt{4t^2 + 4t + 5}$$

La longitud es

$$\begin{aligned} \text{Long}(C_1 \oplus C_2) &= \int_{C_1} ds + \int_{C_2} ds = \int_0^1 \|\vec{X}'_1(t)\| dt + \int_{-2}^1 \|\vec{X}'_2(t)\| dt = \\ &= \int_0^1 3\sqrt{2} dt + \int_{-2}^1 \sqrt{4t^2 + 4t + 5} dt = 3\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(4\sqrt{4t^2 + 4t + 5} + 4t + 4) \Big|_{-2}^1 = \\ &= 3\sqrt{2} + \ln \frac{\sqrt{13} + 2}{\sqrt{13} - 2} \end{aligned}$$

Masas, centros de masa y otras magnitudes físicas

Los cables, alambres, varillas, sogas, cadenas, etc., son objetos en los cuales la longitud es la magnitud predominante, ya que el diámetro de la sección es mucho menor que el largo. Por ello es común que se defina la “densidad lineal” del material que los compone.

Si el material es homogéneo, esa densidad lineal es, simplemente, la masa del objeto dividida por su longitud, pero si el material no es homogéneo la densidad será una función que puede cambiar punto a punto.

La densidad lineal se mide en $\frac{\text{kilogramos}}{\text{metro}}$, $\frac{\text{gramos}}{\text{centímetro}}$, $\frac{\text{libras}}{\text{pulgada}}$, etc.

Si la forma de un alambre puede describirse mediante una curva, $C: \vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t \in [a, b]$, y el material es homogéneo, podremos calcular la masa calculando la longitud y multiplicando ese resultado por la densidad.

Si la densidad del material es una función $\delta(x, y, z)$ que cambia punto a punto, su masa se puede calcular razonando del siguiente modo:

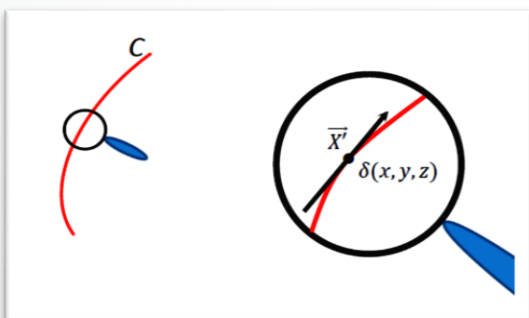


Figura 8.29: Observando desde cerca...

la masa de una porción pequeña de alambre, de longitud aproximada $\|\vec{X}'(t)\| dt$, será

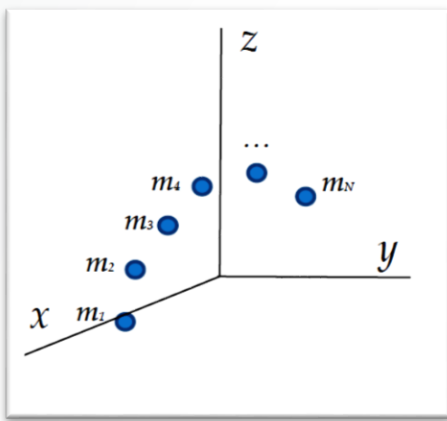
$$dm = \delta ds = \delta(\vec{X}(t)) \|\vec{X}'(t)\| dt$$

por lo que la masa de todo el alambre resulta ser la “suma” de todas esas pequeñas porciones:

$$M = \int_C \delta ds = \int_a^b \delta(\vec{X}(t)) \|\vec{X}'(t)\| dt$$

Estamos suponiendo que la parametrización es regular (o regular a trozos, en cuyo caso la integral será una suma de integrales sobre las porciones regulares).

Recordemos ahora cómo se define el centro de masa de un sistema de masas:



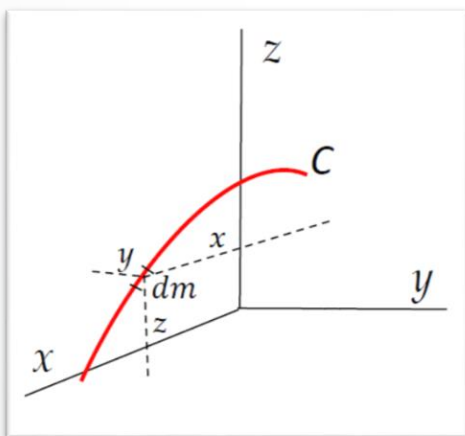
$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N z_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Figura 8.30: Un sistema discreto de masas.

Si ahora todas esas masas fueran pequeñas porciones de un alambre tendríamos



$$x_{CM} = \frac{\int_C x dm}{\int_C dm} = \frac{\int_C x \delta ds}{\int_C \delta ds}$$

$$y_{CM} = \frac{\int_C y dm}{\int_C dm} = \frac{\int_C y \delta ds}{\int_C \delta ds}$$

$$z_{CM} = \frac{\int_C z dm}{\int_C dm} = \frac{\int_C z \delta ds}{\int_C \delta ds}$$

Figura 8.31: Centro de masa de un alambre.

De modo similar, recordando que para calcular el momento de inercia de un sistema de masas con respecto a un eje, se debe multiplicar cada masa por el cuadrado de su distancia al eje considerado, y sumar luego todos esos productos, podemos calcular el momento de inercia de un alambre respecto de un eje cualquiera:

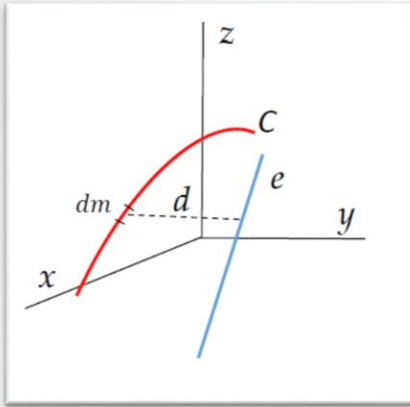


Figura 8.32: Momento de inercia de un alambre.

$$I_e = \int_C d^2 dm = \int_C d^2 \delta ds =$$

$$= \int_a^b d^2(\vec{X}(t)) \delta(\vec{X}(t)) \|\vec{X}'(t)\| dt$$



Ejemplo 8.20: Calculemos la masa, la coordenada y_{CM} y el momento de inercia respecto del eje de ordenadas, de un resorte con forma de hélice cuya ecuación es la función $C: \vec{X}(t) = (2 \cdot \text{sen}(t), t, 2 \cdot \text{cos}(t))$ para $t \in [0, 4\pi]$, si se sabe que la densidad de la aleación que lo constituye es, en cada punto, proporcional a la distancia de ese punto al plano xz .

La distancia de un punto (x, y, z) cualquiera al plano xz es $|y|$ por lo que la densidad del material es $\delta(x, y, z) = k|y|$ para cierta constante de proporcionalidad k .

Es $\vec{X}'(t) = (2 \cdot \text{cos}(t), 1, -2 \cdot \text{sen}(t))$ y $\|\vec{X}'(t)\| = \sqrt{4 \cdot \text{cos}^2(t) + 1 + 4 \cdot \text{sen}^2(t)} = \sqrt{5}$

Además, $\delta(x, y, z) = k|y|$ evaluada sobre los puntos de C es $\delta(\vec{X}(t)) = k|y(t)| = k|t|$.

La masa la calculamos, entonces, mediante la integral

$$M = \int_C \delta ds = \int_0^{4\pi} \delta(\vec{X}(t)) \cdot \|\vec{X}'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} k|t| \cdot \sqrt{5} dt = 8\sqrt{5}\pi^2 k$$

Para la coordenada y_{CM} :

$$y_{CM} = \frac{\int_C y dm}{\int_C dm} = \frac{\int_0^{4\pi} t \cdot k|t| \cdot \sqrt{5} dt}{8\sqrt{5}\pi^2 k} = \frac{8}{3}\pi$$

Como la distancia de un punto (x, y, z) cualquiera al eje y es $\sqrt{x^2 + z^2}$ resulta

$$I_y = \int_C d_y^2 dm = \int_C d_y^2 \delta ds = \int_0^{4\pi} d_y^2(\vec{X}(t)) \delta(\vec{X}(t)) \|\vec{X}'(t)\| dt =$$

$$= \int_0^{4\pi} [(2 \cos(t))^2 + (2 \sin(t))^2] \cdot k|t| \cdot \sqrt{5} dt = 32\sqrt{5}\pi^2 k$$

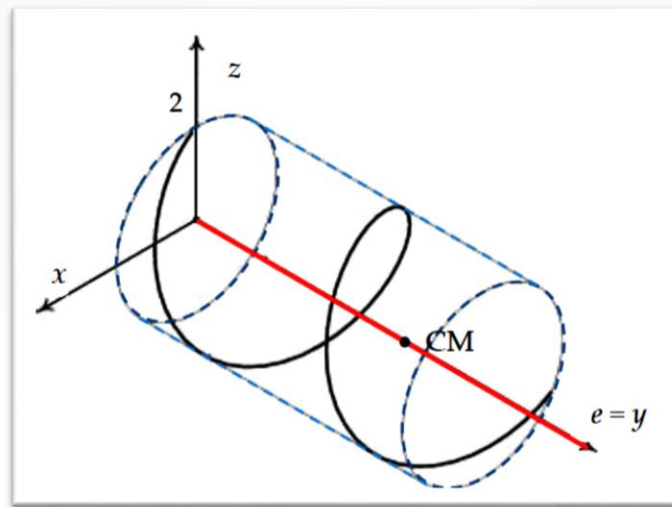


Figura 8.33: La hélice del ejemplo 8.20.

Invariancia de la integral de línea respecto de la parametrización

Tanto la longitud, como la masa, las coordenadas del centro de masa, el momento de inercia respecto de un eje, así como otras magnitudes físicas escalares que puedan evaluarse sobre curvas, responden a la forma

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{X}(t)) \cdot \|\vec{X}'(t)\| dt$$

donde la magnitud física escalar $f(x, y, z)$ se evalúa sobre los puntos de la curva y luego se integra a lo largo de ella. Esa magnitud es la función constante 1 en el caso de la longitud, es la densidad del material en el caso de la masa, es la densidad por la distancia a un eje al cuadrado en el caso del momento de inercia, etc.

En los ejemplos ofrecidos hemos descrito cada curva mediante *una* parametrización y hemos efectuado el cálculo utilizando esa función vectorial, pero... ¿qué ocurre si elegimos otra parametrización? Es obvio que el resultado no debería cambiar, ya que ni la longitud, ni la masa, ni la posición del centro de masa de un alambre puede depender del modo en que describamos su forma...

Veamos que esto efectivamente es así:



Teorema 8.1: El valor de $\int_C f ds$ no depende de la parametrización de la curva C .

En efecto: Supongamos que se definen dos parametrizaciones suaves diferentes de la misma curva:

$C: \vec{X}(t)$ para $t \in [a, b]$ y

$C: \vec{Y}(u)$ para $u \in [c, d]$

Sabemos que si representan la misma curva debe existir una función biyectiva y monótona (creciente o decreciente) $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ que realice la reparametrización:

$$u = \varphi(t)$$



$$\vec{X}(t) = \vec{Y}(\varphi(t)) = (\vec{Y} \circ \varphi)(t)$$

Como ambas parametrizaciones se supusieron suaves, debe existir $\varphi'(t)$ y ser continua y no nula $\forall t \in (a, b)$, resultando, por regla de la cadena,

$$\vec{X}'(t) = (\vec{Y} \circ \varphi)'(t) = \vec{Y}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Calculemos ahora la integral $\int_C f ds$ de un campo escalar f continuo:

$$\begin{aligned} \int_C f ds &\stackrel{\substack{= \\ \text{usando} \\ \text{la primera} \\ \text{parametrización}}}{=} \int_a^b f(\vec{X}(t)) \cdot \|\vec{X}'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b f((\vec{Y}(\varphi(t)))) \cdot \|\vec{Y}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\| dt = \int_a^b f((\vec{Y}(\varphi(t)))) \cdot \|\vec{Y}'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt \end{aligned}$$

Ahora bien: $\varphi(t) = u$ mientras que

$$|\varphi'(t)| dt = \varphi'(t) dt = du$$

si $\varphi'(t) > 0$ (caso de la función φ creciente), en cuyo caso $\varphi(a) = c$ y $\varphi(b) = d$, y

$$|\varphi'(t)| dt = -\varphi'(t) dt = -du$$

si $\varphi'(t) < 0$ (caso de la función φ decreciente), en cuyo caso $\varphi(a) = d$ y $\varphi(b) = c$, por lo que resulta, para ambos casos,

$$\int_C f ds = \int_a^b f((\vec{Y}(\varphi(t)))) \cdot \|\vec{Y}'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt = \int_c^d f((\vec{Y}(u))) \cdot \|\vec{Y}'(u)\| du$$

y de este modo la integral no depende de la parametrización.

Integral de línea de campos vectoriales. Trabajo de un campo de fuerzas

Supongamos ahora que se tiene una curva suave C que representa la trayectoria de una partícula que se mueve en el espacio, donde se halla definido un campo vectorial continuo $\vec{f}(x, y, z)$:

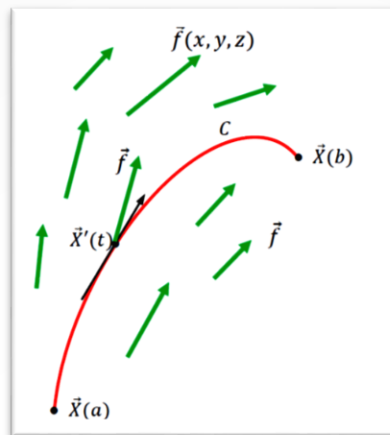


Figura 8.34: Un arco de curva inmerso en un campo vectorial.

Si ese campo representa un campo de fuerzas, puede interesarnos calcular el “trabajo” que el campo \vec{f} realiza sobre la partícula que se mueve desde $\vec{X}(a)$ hasta $\vec{X}(b)$.

Examinemos de cerca la situación:

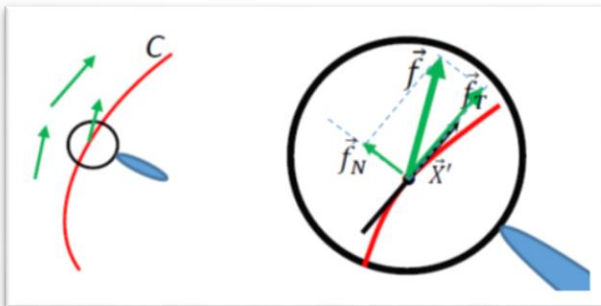


Figura 8.35: Observando desde cerca...

En cada punto de la trayectoria actúa el campo \vec{f} sobre la partícula que se traslada.

Se pueden considerar, en cada punto, las componentes tangencial y normal del campo de fuerzas.

Se sabe que la única componente que realiza trabajo es la componente tangencial al desplazamiento.

Cuando la partícula se desplaza una distancia $\|\vec{X}'(t)\|dt$, el campo realiza un trabajo (elemental) de magnitud $\|\vec{f}_T(\vec{X}(t))\|\|\vec{X}'(t)\|dt$, que puede evaluarse empleando el producto escalar

$$\vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t)dt$$

Observar que este producto escalar tiene en cuenta, incluso, si la partícula se desplaza en el mismo sentido de \vec{f}_T o en sentido contrario, ya que interviene el coseno del ángulo que forman \vec{f}_T y \vec{X}' .

El **trabajo total de la fuerza**, cuando la partícula se desplaza desde el punto inicial $\vec{X}(a)$ al punto final $\vec{X}(b)$, estará dado entonces por la expresión

$$L_C(\vec{f}) = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t)dt$$



Definición 8.8: Integral de línea de campos vectoriales

Sea $\vec{f}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua sobre U (abierto), y sea C un arco de curva parametrizada por $\vec{X}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 regular tal que $\vec{X}([a, b]) \subset U$ se denomina integral de línea del campo \vec{f} sobre la curva C

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt$$



Ejemplo 8.21: Una partícula se desplaza entre los puntos $(0,0,0)$ y $(2,2,4)$ sobre la curva determinada por la intersección del plano $z = x + y$ con el cilindro parabólico de ecuación $z = x^2$. Si actúa sobre ella el campo de fuerzas $\vec{f}(x, y, z) = (x \cdot z, y - z, x^2 \cdot y)$, determinar el trabajo que el campo realiza sobre la partícula. Interpretar físicamente el signo del resultado obtenido. ¿Qué ocurre si la partícula recorre el arco de curva en sentido contrario?

En primer lugar debemos parametrizar la curva:

El arco de curva es $C: \begin{cases} z = x + y \\ z = x^2 \end{cases}$

A partir de la ecuación de la segunda superficie podemos definir

$$x(t) = t, z(t) = t^2$$

por lo que, a partir de la ecuación del plano resulta

$$y = z - x \rightarrow y(t) = t^2 - t$$

Como entre $(0,0,0)$ y $(2,2,4)$ la coordenada "x" varía entre 0 y 2 tendremos la siguiente parametrización regular:

$$C: \vec{X}(t) = (t, t^2, t^2 - t) \text{ con } t \in [0, 2]$$

Evaluemos ahora

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) &= (x \cdot z, y - z, x^2 \cdot y)|_{\vec{X}(t)} \cdot (1, 2t, 2t - 1) = \\ &= (t \cdot (t^2 - t), t^2 - (t^2 - t), t^2 \cdot t^2) \cdot (1, 2t, 2t - 1) = t^3 - t^2 + 2t^2 + 2t^5 - t^4 \\ L_C(\vec{f}) &= \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt = \\ &= \int_0^2 (t^3 + t^2 + 2t^5 - t^4) dt = \frac{108}{5} \end{aligned}$$

El resultado positivo indica que *es el campo de fuerzas el que realiza trabajo sobre la partícula* en su desplazamiento sobre este arco de curva.

¿Qué ocurriría si la partícula se desplazara desde $(2,2,4)$ hasta $(0,0,0)$ sobre el mismo arco de curva?

Deberíamos reparametrizar la curva con sentido contrario.

Un modo sencillo de hacerlo es reemplazar t por $-u$ y considerar $u \in [-2, 0]$:

$$C^-: \vec{Y}(u) = (-u, u^2, u^2 + u) \text{ con } u \in [-2, 0]$$

El signo " $-$ " en la denominación de la curva es un modo de indicar que se la recorre en sentido contrario al utilizado anteriormente:



$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{Y}(u)) \cdot \vec{Y}'(u) &= (x, z, y - z, x^2 \cdot y)|_{\vec{Y}(u)} \cdot (-1, 2u, 2u + 1) = \\ &= (-u \cdot (u^2 + u), u^2 - (u^2 + u), u^2 \cdot u^2) \cdot (-1, 2u, 2u + 1) = u^3 + u^2 - 2u^2 + 2u^5 + u^4 \\ L_C(\vec{f}) &= \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{-2}^0 \vec{f}(\vec{Y}(u)) \cdot \vec{Y}'(u) du = \\ &= \int_{-2}^0 (u^3 - u^2 + 2u^5 + u^4) du = -\frac{108}{5}\end{aligned}$$

En este caso es la partícula la que entrega trabajo al campo.

Observar que si el resultado fuera nulo, el campo no realizaría trabajo sobre la partícula mientras ésta se desplaza entre los puntos extremos del arco. Esto podría ocurrir tanto porque el campo fuera perpendicular al desplazamiento en todo punto (en cuyo caso el integrando $\vec{f} \cdot d\vec{s}$ debería ser nulo) o bien porque en parte del recorrido el campo realiza trabajo sobre la partícula y en el resto de la trayectoria es la partícula la que entrega trabajo al campo.

El resultado que se obtuvo al cambiar el sentido de recorrido es igual en valor absoluto pero cambió su signo. Este resultado puede generalizarse, y puede demostrarse, además, la invariancia respecto de la parametrización, como se hizo para integrales de campos escalares:



Teorema 8.2: El valor de $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ no depende de la parametrización de la curva C , salvo eventualmente en su signo si se escoge una reparametrización de sentido contrario.

La demostración es muy similar a la realizada anteriormente: se definen dos parametrizaciones suaves diferentes de la misma curva:

$\vec{X}(t)$ para $t \in [a, b]$ y $\vec{Y}(u)$ para $u \in [c, d]$

Si representan la misma curva debe existir una función biyectiva y monótona (creciente o decreciente) $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ que realice la reparametrización:

$$u = \varphi(t)$$

$$\vec{X}(t) = \vec{Y}(\varphi(t)) = (\vec{Y} \circ \varphi)(t)$$

Debe existir $\varphi'(t)$ y ser continua y no nula $\forall t \in (a, b)$, resultando

$$\vec{X}'(t) = (\vec{Y} \circ \varphi)'(t) = \vec{Y}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Calculemos ahora la integral $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ de un campo vectorial \vec{f} continuo:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{usando} \\ \text{la primera} \\ \text{parametrización}}}{=} \int_a^b \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt =$$



$$= \int_a^b \vec{f}(\vec{Y}(\varphi(t))) \cdot \vec{Y}'(\varphi) \cdot \varphi'(t) dt$$

Como $\varphi(t) = u$ es $\varphi'(t)dt = du$

Si φ es creciente resultan $\varphi(a) = c$ y $\varphi(b) = d$ y entonces

$$\int_c^d f ds = \int_a^b \vec{f}(\vec{Y}(\varphi(t))) \cdot \vec{Y}'(\varphi) \cdot \varphi'(t) dt = \int_c^d f(\vec{Y}(u)) \cdot \vec{Y}'(u) du$$

y el resultado de la integral es el mismo cuando ambas parametrizaciones recorren la curva en el mismo sentido.

Si φ es decreciente, resultan $\varphi(a) = d$ y $\varphi(b) = c$, y entonces

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_c^d f ds}_{\substack{\text{Calculada} \\ \text{con la} \\ \text{parametrización} \\ \vec{X}(t)}} &= \int_a^b \vec{f}(\vec{Y}(\varphi(t))) \cdot \vec{Y}'(\varphi) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^c f(\vec{Y}(u)) \cdot \vec{Y}'(u) du = \\ &= - \int_c^d f(\vec{Y}(u)) \cdot \vec{Y}'(u) du = - \underbrace{\int_c^d f ds}_{\substack{\text{Calculada} \\ \text{con la} \\ \text{parametrización} \\ \vec{Y}(u)}} \end{aligned}$$

y la integral tiene el mismo valor absoluto pero signo contrario cuando las parametrizaciones difieren en su sentido.



Ejemplo 8.22: Calcular el trabajo que el campo fuerzas $\vec{f}(x, y) = (2xy, x^2)$, realiza sobre una partícula que da una vuelta completa a la circunferencia representada por $C: \vec{X}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Cuando la curva es cerrada, es usual denotar la integral a lo largo de ella del siguiente modo: $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$

$$\begin{aligned} L_C(\vec{f}) &= \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cdot 2 \cos(t) \cdot 2 \sin(t), 4 \cos^2(t)) \cdot (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-16 \sin^2(t) \cos(t) + 8 \cos^2(t) \cos(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (8 - 24 \sin^2(t)) \cos(t) dt = -8 \sin(t) - 24 \frac{\sin^3(t)}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

El resultado nulo indica que el campo no realiza trabajo sobre la partícula que efectúa un giro completo sobre la circunferencia. Como el integrando $\vec{f} \cdot d\vec{s}$ no es nulo, esto ocurre porque en parte del recorrido el campo realiza trabajo sobre la partícula y en el resto de la trayectoria es la partícula la que entrega trabajo al campo.

Observaciones:

- Si en lugar de un campo de fuerzas se considera el campo de velocidades de un fluido, la integral de línea se denomina “circulación”, en lugar de “trabajo”.
- Una notación alternativa para el cálculo de la integral de línea de un campo vectorial es la siguiente:

$$\int_C f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

donde f_1 , f_2 y f_3 son las componentes del campo.

Esta notación proviene de expresar el cálculo del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt = \\ &= \int_a^b (f_1(\vec{X}(t)), f_2(\vec{X}(t)), f_3(\vec{X}(t))) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt = \\ &= \int_a^b (f_1(\vec{X}(t)), f_2(\vec{X}(t)), f_3(\vec{X}(t))) \cdot \left(\underbrace{x'(t) dt}_{dx}, \underbrace{y'(t) dt}_{dy}, \underbrace{z'(t) dt}_{dz} \right) = \\ &= \int_C f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \end{aligned}$$

Dependencia de la integral de línea respecto de la trayectoria

Nos preguntamos a continuación qué efecto produce sobre la integral de línea de un campo vectorial el cambiar de trayectoria manteniendo los puntos inicial y final del recorrido.

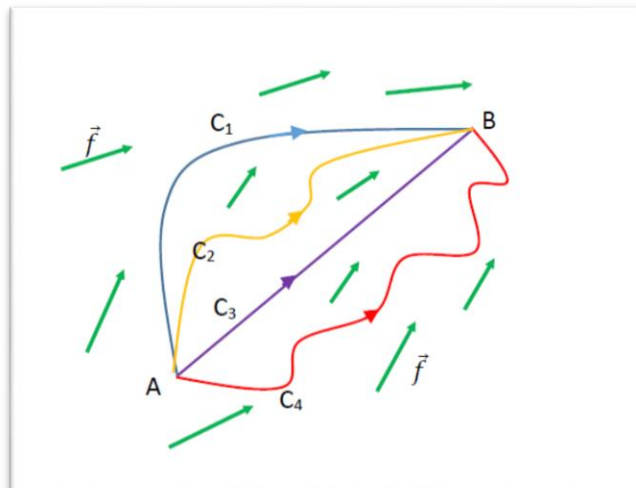


Figura 8.36: Múltiples caminos entre dos puntos fijos.



Definición 8.9: Campos vectoriales conservativos

\vec{f} es un campo conservativo en $D \Leftrightarrow \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ es independiente de la trayectoria C y sólo depende de los puntos inicial y final de C .

Otras definiciones equivalentes:

\vec{f} es un campo conservativo en $D \Leftrightarrow \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall C \subset D, C \text{ cerrada}$

\vec{f} es un campo conservativo en $D \Leftrightarrow \exists \frac{\varphi}{\vec{f}} = \vec{\nabla} \varphi \quad \varphi \text{ se denomina "función potencial"}$

De estas tres afirmaciones las dos primeras son de utilidad si queremos mostrar que un campo *no es conservativo*.

En efecto: bastará con ver que la integral sobre una *curva cerrada* no es nula, o que la integral entre dos puntos del dominio de un campo *depende* del camino, para asegurar que ese campo no es conservativo. En ese caso, el cálculo de su integral de línea sobre cualquier curva contenida en su dominio deberá realizarse parametrizando la curva y utilizando la definición $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt$.

Por el contrario, si un campo es conservativo, y por lo tanto existe una función potencial φ , cualquier integral de línea puede calcularse prescindiendo de la curva y teniendo en cuenta únicamente el potencial y los extremos del arco de curva: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A)$.

Consideremos, a propósito, un resultado importante que nos permite determinar fácilmente la posibilidad de que exista una función potencial:



Teorema 8.3: Si un campo vectorial \vec{f} es C^1 y conservativo en su dominio D (que suponemos abierto), entonces su matriz jacobiana es simétrica en D .

Efectivamente: si \vec{f} es conservativo en D resulta $\vec{f} = \vec{\nabla} \varphi$, es decir

$$f_1 = \varphi'_x, \quad f_2 = \varphi'_y, \quad f_3 = \varphi'_z$$

Consecuentemente, en cada punto del dominio es:

$$D_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} f'_{1x} & f'_{1y} & f'_{1z} \\ f'_{2x} & f'_{2y} & f'_{2z} \\ f'_{3x} & f'_{3y} & f'_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi'_x)'_x & (\varphi'_x)'_y & (\varphi'_x)'_z \\ (\varphi'_y)'_x & (\varphi'_y)'_y & (\varphi'_y)'_z \\ (\varphi'_z)'_x & (\varphi'_z)'_y & (\varphi'_z)'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi''_{xx} & \varphi''_{xy} & \varphi''_{xz} \\ \varphi''_{yx} & \varphi''_{yy} & \varphi''_{yz} \\ \varphi''_{zx} & \varphi''_{zy} & \varphi''_{zz} \end{pmatrix}$$

Si $\vec{f} \in C^1(D)$, sus componentes, $f_1 = \varphi'_x, f_2 = \varphi'_y, f_3 = \varphi'_z$, tienen derivadas primeras continuas, por lo tanto φ tiene derivadas segundas continuas.



Recordemos el Teorema de Schwarz, que establece que si las derivadas parciales segundas “cruzadas” (o mixtas) de un campo escalar existen y son continuas, entonces son iguales. Por lo tanto tendremos que

$$\varphi''_{xy} = \varphi''_{yx}, \quad \varphi''_{yz} = \varphi''_{zy}, \quad \varphi''_{xz} = \varphi''_{zx}$$

en todo D , de donde se desprende la simetría de la matriz $D_{\vec{f}}$ en su dominio.

Observemos que hemos probado la implicación

$$\vec{f} \text{ es un campo conservativo en } D \Rightarrow D_{\vec{f}} \text{ es simétrica}$$

La proposición recíproca es falsa.



Ejemplo 8.23: Calcular la circulación del campo de velocidades de un fluido, dado por $\vec{f}(x, y, z) = (yze^{xyz}, xze^{xyz} + 1, xye^{xyz})$, sobre la trayectoria definida por $C: \vec{X}(t) = (\cos(t) \ln(t), 2e^{\sin(t)}, \cos^2(t))$ con $t \in [1, \pi]$.

Observando la parametrización de la curva, el cálculo directo de la circulación, empleando la definición $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt$, se presenta sumamente complicado.

Sin embargo observemos que

$$D_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} f'_{1x} & f'_{1y} & f'_{1z} \\ f'_{2x} & f'_{2y} & f'_{2z} \\ f'_{3x} & f'_{3y} & f'_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 z^2 e^{xyz} & ze^{xyz} + xyz^2 e^{xyz} & ye^{xyz} + xy^2 ze^{xyz} \\ ze^{xyz} + xyz^2 e^{xyz} & x^2 z^2 e^{xyz} & xe^{xyz} + x^2 yze^{xyz} \\ ye^{xyz} + xy^2 ze^{xyz} & xe^{xyz} + x^2 yze^{xyz} & x^2 y^2 e^{xyz} \end{pmatrix}$$

que es simétrica en todo el espacio.

Existe la posibilidad, entonces, de que el campo $\vec{f}(x, y, z)$ sea conservativo.

Planteemos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que corresponde a $\vec{f} = \nabla\varphi$:

$$\begin{cases} \varphi'_x = yze^{xyz} \\ \varphi'_y = xze^{xyz} + 1 \\ \varphi'_z = xye^{xyz} \end{cases}$$

Integrando respecto de “x” la primera ecuación obtenemos

$$\varphi = e^{xyz} + h(y, z)$$

La razón de que incluyamos la función $h(y, z)$, en lugar de una constante de integración, es que toda función que dependa de las variables “y” y “z” funciona, para la derivación parcial según “x”, como una constante.

Derivando respecto de “y” obtenemos

$$\varphi'_y = xze^{xyz} + h'_y(y, z)$$

y comparando con la segunda ecuación del sistema concluimos que debe ser $h'_y(y, z) = 1$ por lo que, integrando según “y”, resulta $h(y, z) = y + g(z)$, donde nuevamente estamos considerando que toda función que no dependa de “y” funciona, para la derivación parcial según “y”, como una constante.

Finalmente, derivando $\varphi = e^{xyz} + y + g(z)$ respecto de “z” y comparando con la tercera ecuación resulta

$$\varphi(x, y, z) = e^{xyz} + y + K$$

Considerando ahora que la curva es

$$C: \vec{X}(t) = (\cos(t) \ln(t), 2e^{\sin(t)}, \cos^2(t)) \text{ con } t \in [1, \pi].$$

cuyo punto inicial es $\vec{X}(1) = (\cos(1) \ln(1), 2e^{\sin(1)}, \cos^2(1)) = (0, 2e^{\sin(1)}, \cos^2(1))$ y cuyo punto final es $\vec{X}(\pi) = (\cos(\pi) \ln(\pi), 2e^{\sin(\pi)}, \cos^2(\pi)) = (-\ln(\pi), 2, 1)$, la circulación pedida es

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \varphi(-\ln(\pi), 2, 1) - \varphi(0, 2e^{\sin(1)}, \cos^2(1)) = \\ &= e^{-2\ln(\pi)} + 2 + K - e^0 - 2e^{\sin(1)} - K = \frac{1}{\pi^2} + 1 - 2e^{\sin(1)} \end{aligned}$$

Observación:

Hemos obtenido $\varphi(x, y, z) = e^{xyz} + y + K$, con una constante de integración indefinida K .

Esto será siempre así, es decir: los potenciales estarán definidos “a menos de una constante” (salvo que además nos informen de su valor en algún punto del espacio) puesto que su cálculo se hace a través de la integración.



Ejemplo 8.24: Calcular el trabajo que el campo de fuerzas $\vec{f}(x, y, z) = (yz, xz, xy + y)$ realiza sobre la misma trayectoria del ejemplo 8.23.

Nuevamente el cálculo directo del trabajo, empleando la definición $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt$, se presenta complicado debido al proceso engorroso de la parametrización de la curva.

Si calculamos la matriz jacobiana

$$D_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} f'_{1x} & f'_{1y} & f'_{1z} \\ f'_{2x} & f'_{2y} & f'_{2z} \\ f'_{3x} & f'_{3y} & f'_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no resulta simétrica, por lo que el campo no es conservativo. Deberíamos, entonces, calcular la integral por definición.

Sin embargo, la falta de simetría de la matriz se debe únicamente a que $x+1 \neq x$. El número 1 que produce esa diferencia se debe al sumando “y” de la tercera componente.

Es posible escribir

$$\vec{f}(x, y, z) = (yz, xz, xy + x) = \underbrace{(yz, xz, xy)}_{\substack{\text{campo con} \\ \text{matriz jacobiana} \\ \text{simétrica}}} + \underbrace{(0, 0, y)}_{\substack{\text{campo} \\ \text{no conservativo} \\ \vec{h}}}$$

Es posible descomponer la integral en la siguiente suma

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_1^\pi \vec{f}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt = \int_1^\pi \vec{g}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt + \int_1^\pi \vec{h}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt$$

Ahora sólo resta encontrar el potencial para \vec{g} , que fácilmente se determina que existe y es $\varphi(x, y, z) = xyz + K$, y la definición de integral sólo es necesaria emplearla para la integral de \vec{h} .

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_1^\pi \vec{g}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt + \int_1^\pi \vec{h}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt =$$



$$\begin{aligned}
 &= \varphi(-\ln(\pi), 2, 1) - \varphi(0, 2e^{\sin(1)}, \cos^2(1)) + \int_1^\pi (0, 0, 2e^{\sin(t)}) \cdot \vec{X}'(t) dt = \\
 &= -2\ln(\pi) + \int_1^\pi 2e^{\sin(t)}(-2\sin(t)\cos(t)) dt \quad \stackrel{\text{integrando}}{\text{por partes}} \\
 &= -2\ln(\pi) - 4e^{\sin(t)}[\sin(t) - 1] \Big|_1^\pi = -2\ln(\pi) + 4e^{\sin(1)}[\sin(1) - 1]
 \end{aligned}$$

Veamos ahora una proposición que es, en cierta forma, recíproca del teorema 8.3, pero que exige hipótesis algo más exigentes.



Teorema 8.4: Si un campo vectorial \vec{f} tiene matriz jacobiana continua y simétrica en un conjunto D abierto y simplemente conexo entonces \vec{f} es conservativo.

Recordemos que un conjunto es simplemente conexo si es conexo y además toda curva cerrada contenida en él se puede deformar de manera continua hasta reducirla a un punto, sin salir del conjunto. De otra forma, el conjunto es *simplemente conexo* si toda curva cerrada simple incluida en él encierra sólo puntos del conjunto.

Puesto que los campos conservativos se caracterizan por el valor nulo de su integral sobre curvas cerradas, se comprende la necesidad de que el interior de toda curva cerrada en el dominio de análisis esté contenido en ese dominio.

En el ejemplo 8.23, puesto que la matriz jacobiana del campo es simétrica en todo el espacio (que es un conjunto simplemente conexo ya que "toda curva cerrada en R^3 encierra sólo puntos de R^3 "), se puede asegurar, antes de encontrar el potencial, que se trata de un campo conservativo. Si nos hubieran solicitado calcular la integral de línea sobre una curva cerrada, podríamos haber anticipado que el resultado sería nulo, aún sin haber encontrado la función potencial correspondiente.

Veamos el siguiente ejemplo interesante:



Ejemplo 8.25: Analizar si el campo $\vec{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ es conservativo.

En primer lugar, el dominio del campo es $R^2 - \{(0,0)\}$ por lo que debemos analizar la posibilidad de que exista o no un potencial en ese dominio.

Observemos que se trata de un dominio no simplemente conexo ya que toda curva cerrada contenida en $R^2 - \{(0,0)\}$ que encierre al origen contendrá en su interior un punto que no pertenece a dicho conjunto.

Como el dominio no es un conjunto simplemente conexo, aún cuando la matriz jacobiana fuera simétrica (verifiquen que efectivamente lo es) no es posible asegurar que el campo sea conservativo, ya que el resultado del teorema 8.4 no puede seguirse por no cumplirse sus hipótesis.

Intentemos, por tanto, encontrar un potencial:

$$\begin{cases} \varphi'_x = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \varphi'_y = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$



Integrando la primera ecuación respecto de “x” se obtiene

$$\varphi(x, y) = -y \int \frac{dx}{x^2 + y^2} = -y \cdot \frac{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)}{y} + g(y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + g(y)$$

y observamos que el dominio se ha restringido aún más: debemos prescindir de todo el eje de abscisas para que resulte definida la función $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$.

Derivando respecto de “y” y comparando con la segunda ecuación, se obtiene $g'(y) = 0$ de modo que resulta $\varphi(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + K$ pero no es válido en todo el dominio del campo.

El campo dado, entonces, no es conservativo en su dominio. Podría serlo si se lo redefine restringiendo su dominio al semiplano superior, por ejemplo.

