COORDENADAS POLARES

Las regiones de integración también se pueden caracterizar utilizando coordenadas polares. Posteriormente se trabajarán en mayor profundidad, pero hagamos un primer análisis:

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \theta \end{cases}$$

Tenemos las equivalencias entre coordenadas cartesianas y polares.

Las coordenadas polares entonces son la coordenada radial $\boldsymbol{r}$ que va desde el origen hasta los puntos de una curva y la coordenada angular θ medida desde el eje $\boldsymbol{x}$ positivo.

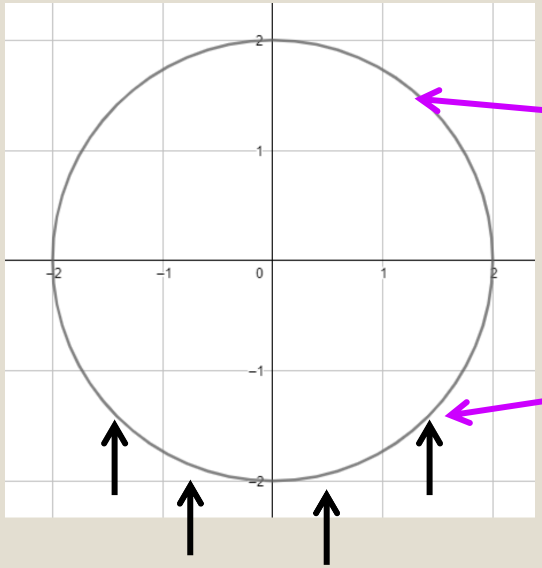
Definir una región en coordenadas polares implica definir los intervalos de las dos coordenadas recién descriptas.

Ciertas regiones se describen mejor utilizando coordenadas polares, lo cual también simplifica el posterior proceso de integración.

EJEMPLO 3) Caracterizar la siguiente región en coordenadas cartesianas y polares.

a) $x^2 + y^2 = 4$

Se trata de una circunferencia de radio 2 centrada en el origen.



Mitad superior
$y = \sqrt{4 - x^2}$

Mitad inferior
$y = -\sqrt{4 - x^2}$

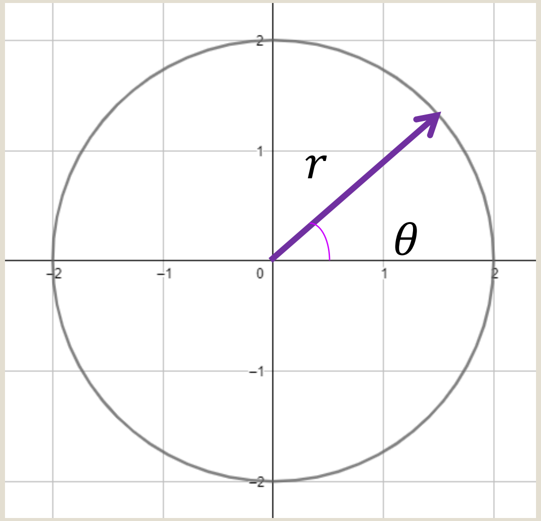
Si la caracterizamos como región Tipo I, la variable $\boldsymbol{x}$ se mueve entre -2 y 2.

Luego, mirando de abajo hacia arriba, vemos que $\boldsymbol{y}$ se cruza primero con la mitad inferior de la circunferencia y luego con la mitad superior. Esto se corresponde con las dos funciones que se obtienen de despejar $\boldsymbol{y}$ de la ecuación de la circunferencia.

$$R_{TI}: \{(x, y) \in R^2 / -2 \leq x \leq 2 \, ; -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$$

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx$$

Una circunferencia en coordenadas polares equivale a una región rectangular en coordenadas cartesianas, ambas variables se mueven entre valores constantes.



No debemos olvidar que estamos hablando de regiones. La circunferencia encierra una región circular. Sobre dicha región vemos que el ángulo gira una vuelta completa y luego la coordenada radial a lo largo de todo el movimiento del ángulo se mueve siempre desde el origen hasta la circunferencia cuya distancia al origen es constante. Por lo tanto:

$$\boxed{R_P:\{(r,\theta) \in R^2 / 0 \leq r \leq 2 \,;\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}} \longrightarrow \boxed{\int_0^{2\pi}\int_0^{2} f(r,\theta)\,dA}$$

Observando los resultados:

$$R_{TI}:\{(x,y)\in R^2/-2\le x\le 2\,;-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\}\qquad \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx$$

$$R_P:\{(r,\theta)\in R^2/0\le r\le 2\,;0\le\theta\le 2\pi\}\qquad \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2} f(r,\theta)dA$$

Los límites de integración en coordenadas polares son más simples para este caso.

La coordenada radial $\boldsymbol{r}$ es siempre positiva, con lo cual no se manejará en intervalos negativos.

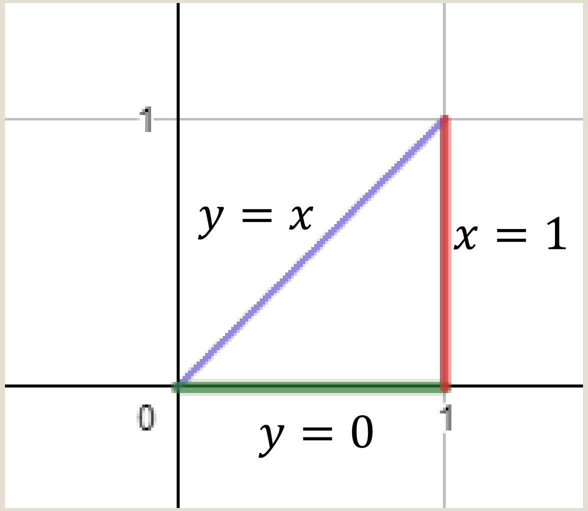
En cuanto a la coordenada angular, su intervalo siempre se expresa en radianes.

En general el ángulo se mueve entre valores constantes y $\boldsymbol{r}$ entre valores constantes o funciones del ángulo. Por eso siempre se deja para el final la integral correspondiente a θ.

Cuando trabajamos en coordenadas polares, no solo la región se trabaja en polares, sino también la función y el diferencial de área dA queda todo en función de $\boldsymbol{r}$ y θ. No podemos mezclar sistemas de coordenadas. $dA = r\,dr\,d\theta$

b) Región comprendida entre las curvas: $y = x \qquad y = 0 \qquad x = 1$

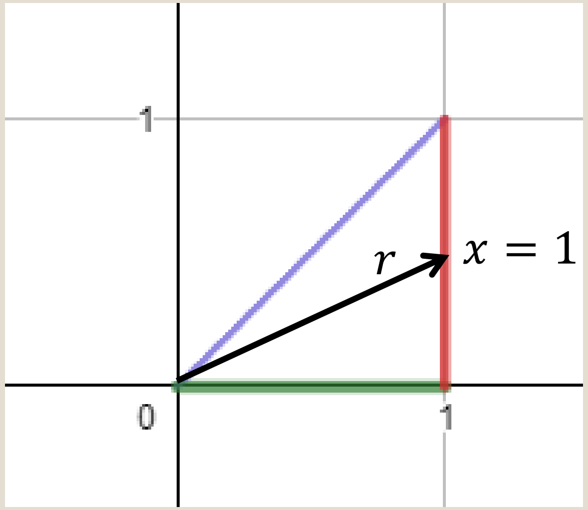
Si graficamos, hacemos la intersección e identificamos el área encerrada :



Para coordenadas cartesianas utilicemos región Tipo II a modo de práctica.

$$R_{TII}: \{(x, y) \in R^2 / y \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\} \longrightarrow \int_0^1 \int_y^1 f(x, y)dxdy$$

Para coordenadas polares debemos analizar un poco más. Angularmente la región se mueve desde el eje $\boldsymbol{x}$ positivo hasta la recta $y = x$, es decir desde $0°$ a $45°$ o en radianes desde 0 a $\frac{\pi}{4}$.



La coordenada radial vemos que siempre inicia desde el origen, con lo cual su valor inicial del intervalo va a ser 0. Y luego a lo largo de toda la región tiene como curva extrema la recta $x = 1$. Sin embargo, eso no significa que $\boldsymbol{r}$ llega hasta 1, lo que debemos hacer es pasar la $\boldsymbol{x}$ a coordenadas polares, con lo cual la ecuación resultará:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = r\cos\theta \end{cases} \longrightarrow r\cos\theta = 1 \longrightarrow r = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

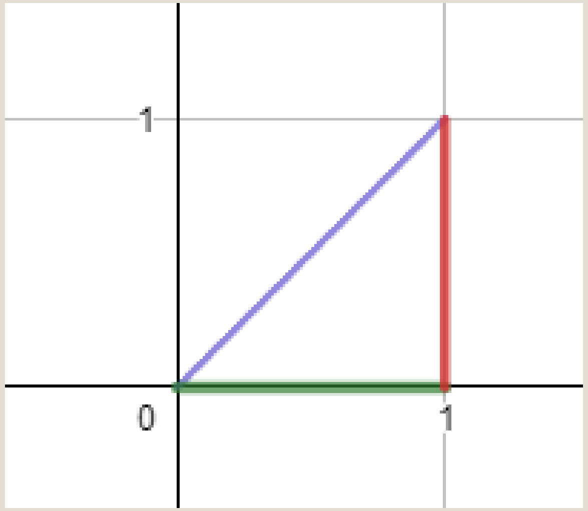
Es decir que la región en coordenadas polares será:

$$\boxed{R_P: \{(r,\theta) \in R^2 / 0 \le r \le \sec\theta \, ; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}} \longrightarrow \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta} f(r,\theta) dA}$$

Diferencias entre las regiones y los límites de la coordenada radial

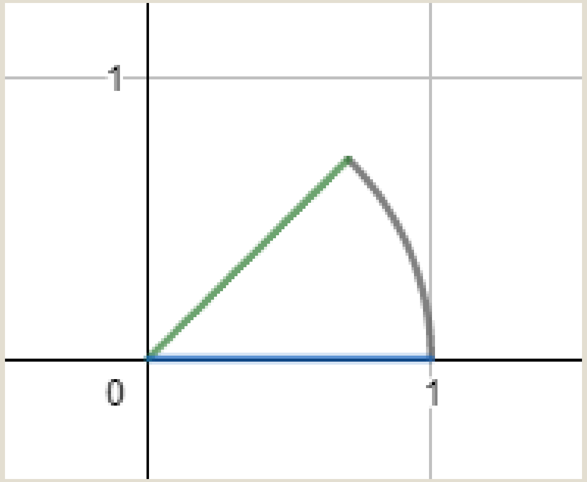
$$R_P\colon\{(r,\theta)\in R^2/0\le r\le sec\theta\,;0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{sec\theta} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$



$$R_P\colon\{(r,\theta)\in R^2/0\le r\le 1\,;0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$



RESOLUCIÓN INTEGRALES DOBLES

Antes de resolver una integral es necesario construirla, lo cual requiere de dos elementos básicos: definir los límites de integración y establecer la función a integrar.

En algunos casos ya tendremos todos los elementos definidos y solo tendremos que proceder a la resolución de la integral.

Las integrales se resuelven con las reglas ya conocidas, aplicándolas sobre la variable correspondiente al diferencial. Luego de cada proceso de integración aplicamos los límites correspondientes.

CÁLCULO DE ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

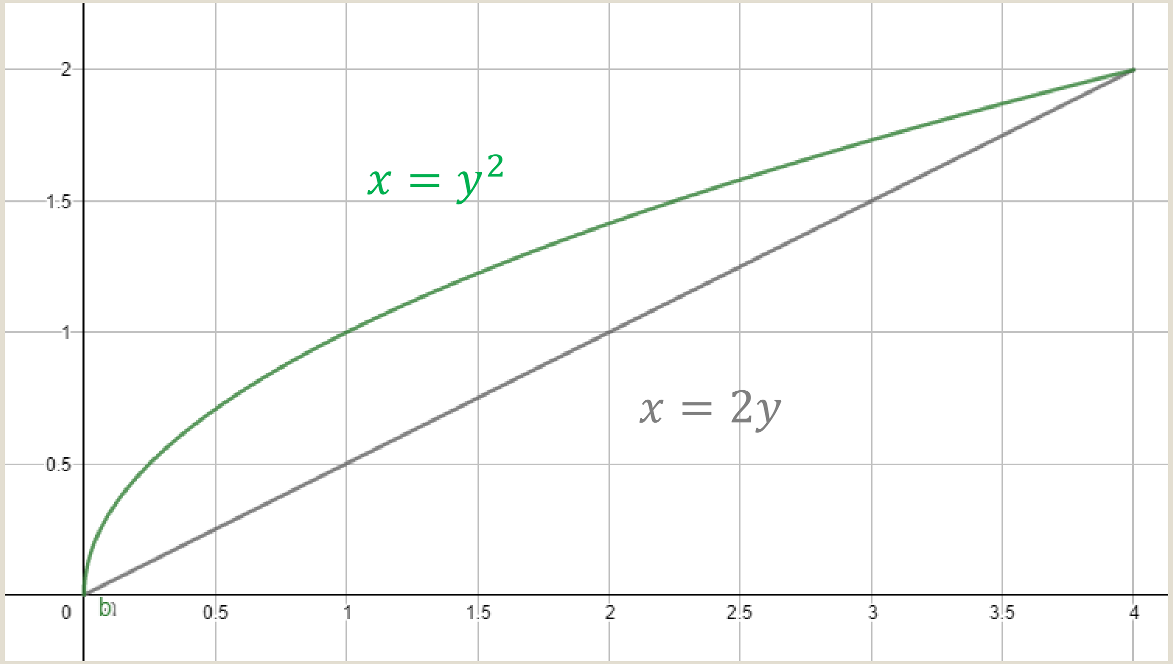
Para estos casos, definimos los límites de integración que representen la región cuya área deseamos calcular.

La particularidad es que la función a integrar será: $\boxed{f(x,y) = 1}$

EJEMPLO 4) Resolver la siguiente integral:

a) $$\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{2y}(4x-y)\,dx\,dy$$

En este caso no es necesario, pero, a modo de práctica, graficamos la región de integración:



Región Tipo II

Primero integramos respecto a x. Tenemos dos términos, los integramos por separado:

$$\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x - 1y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(4\frac{x^2}{2} - xy\right)\Big|_{y^2}^{2y} dy =$$

Ahora reemplazamos los límites en la variable sobre la cual integramos

$$\int_0^2 (2x^2 - xy)\big|_{y^2}^{2y} dy = \int_0^2 \{[2(2y)^2 - (2y)y] - [2(y^2)^2 - (y^2)y]\}\, dy =$$

Operamos algebraicamente antes de proceder con la segunda integral:

$$\int_0^2 (8y^2 - 2y^2 - 2y^4 + y^3)dy = \int_0^2 (-2y^4 + y^3 + 6y^2)dy = \left(-2\frac{y^5}{5} + \frac{y^4}{4} + 6\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 =$$

$$\left(-\frac{2}{5}y^5 + \frac{y^4}{4} + 2y^3\right)\Big|_0^2 = \left[\left(-\frac{2}{5}(2)^5 + \frac{(2)^4}{4} + 2(2)^3\right)\right] - \left[\left(-\frac{2}{5}(0)^5 + \frac{(0)^4}{4} + 2(0)^3\right)\right] = -\frac{64}{5} + 4 + 16 - 0 = \mathbf{\frac{36}{5}}$$

b) $\int_1^e \int_0^x lnx\, dydx$

$$\int_1^e \int_0^x lnx\, dydx = \int_1^e (ylnx)\Big|_0^x dx = \int_1^e (xlnx - 0lnx)\, dx = \int_1^e xlnx\, dx$$

Esta última integral se resuelve por partes, con lo cual la resolvemos en un renglón por separado y luego trasladamos el resultado para aplicar los límites de integración.

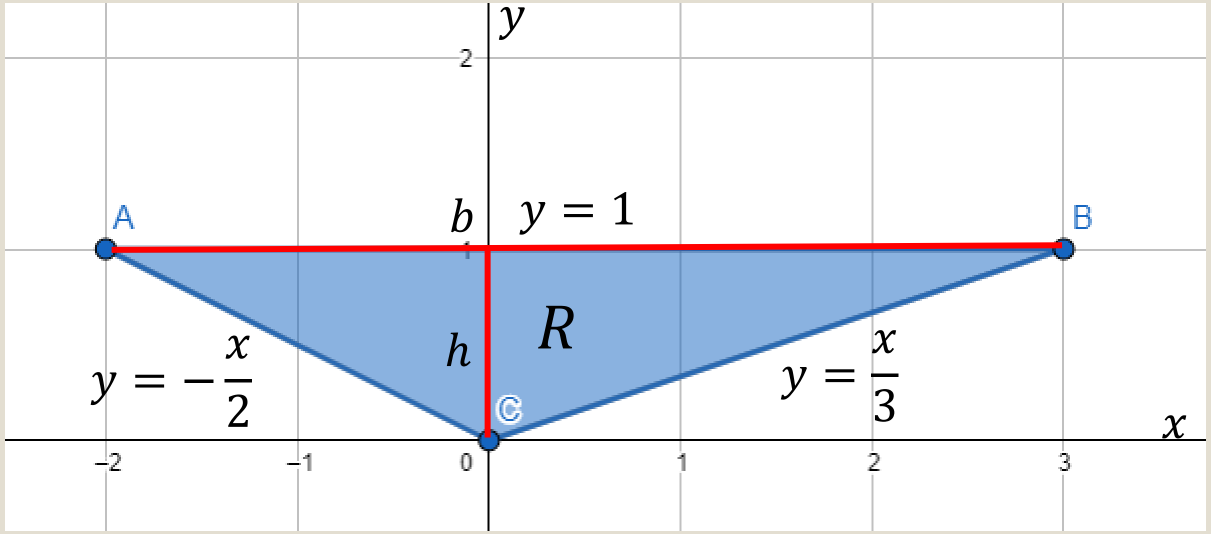
$$u = lnx \qquad du = \frac{1}{x}dx \qquad dv = xdx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int xlnx\, dx = \frac{x^2}{2}lnx - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}lnx - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4}$$

$$\therefore \int_1^e xlnx\, dx = \left(\frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\underbrace{\cancel{lne}}_{1} - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\underbrace{\cancel{ln1}}_{0} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^2+1)}$$

EJEMPLO 5) a) Calcular el área de la región triangular con vértices: $(0,0),(3,1),(-2,1)$.

Esta región ya la estudiamos cuando aprendimos a definir límites de integración:



El área de un triángulo es base por altura sobre 2. Observando el triángulo del gráfico, vemos que posee una altura $h = 1$ y una base $b = 5$, con lo cual su área será:

$$A = \frac{1 * 5}{2} = \frac{5}{2}$$

Usando integrales para calcular el área de una región deberemos llegar al mismo valor.

Definiendo la región Tipo II la integral resultó: $\int_0^1 \int_{-2y}^{3y} f(x,y)dxdy$

Sin embargo, como queremos calcular el área entonces $f(x,y) = 1$, con lo cual tendremos:

$$\int_0^1 \int_{-2y}^{3y} 1\, dxdy = \int_0^1 \int_{-2y}^{3y} dxdy$$

Resolvamos:

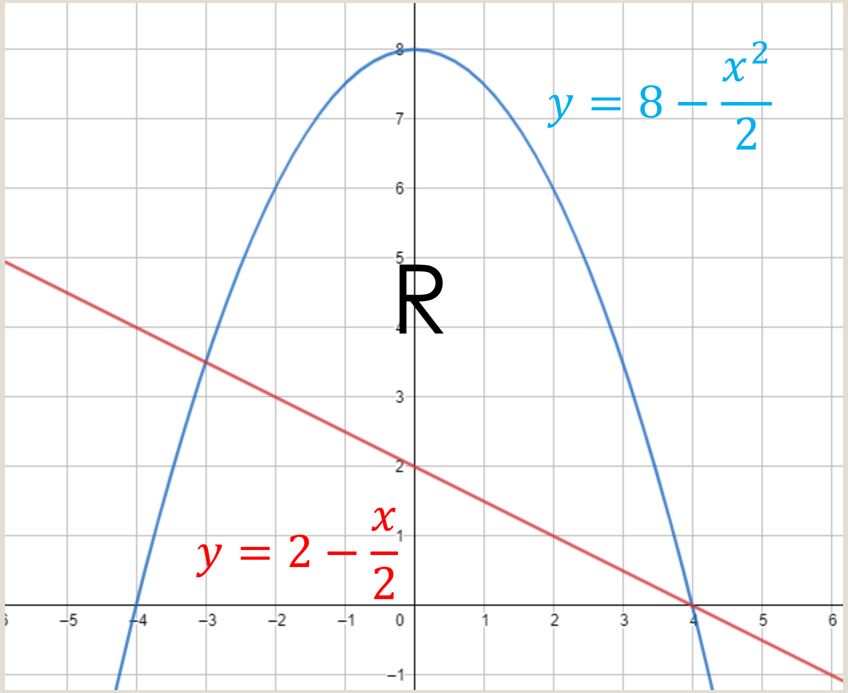
$$\int_0^1 \int_{-2y}^{3y} 1dxdy = \int_0^1 x\Big|_{-2y}^{3y} dy = \int_0^1 [3y - (-2y)]dy =$$

Esto es lo que conocemos como función de arriba menos función de abajo para calcular área entre curvas.

$$\int_0^1 5ydy = \frac{5}{2}y^2\Big|_0^1 = \frac{5}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{5}{2} \equiv A_R$$

b) Área de la región delimitada por las curvas: $y = 8 - \frac{x^2}{2}$; $y = 2 - \frac{x}{2}$.

Primero graficamos para identificar la región y establecer los límites de integración:



Como $\boldsymbol{y}$ se mueve entre funciones de $\boldsymbol{x}$, es región Tipo I. Lo que resta es sacar los puntos de intersección de ambas curvas ya que éstos serán los límites de $\boldsymbol{x}$.

$$8 - \frac{x^2}{2} = 2 - \frac{x}{2} \longrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 6 = 0 \longrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Con lo cual la integral a resolver será: $\int_{-3}^{4}\int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dydx$

$$\int_{-3}^{4}\int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dydx = \int_{-3}^{4} y\Big]_{2-x/2}^{8-x^2/2} dx = \int_{-3}^{4}\left[\left(8-\frac{x^2}{2}\right)-\left(2-\frac{x}{2}\right)\right]dx =$$

$$\int_{-3}^{4}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+6\right)dx = -\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}+6x\Big]_{-3}^{4} =$$

$$\left(-\frac{4^3}{6}+\frac{4^2}{4}+6*4\right)-\left(-\frac{(-3)^3}{6}+\frac{(-3)^2}{4}+6(-3)\right) =$$

¡¡¡Precaución con los signos!!!
¡Usar Paréntesis!

$$-\frac{64}{6}+4+24-\left(-\frac{-27}{6}+\frac{9}{4}-18\right) = -\frac{32}{3}+28-\frac{27}{6}-\frac{9}{4}+18 = \mathbf{\frac{343}{12}} \equiv A_R$$

Es el cálculo de un área,
Resultado siempre positivo.