Unidad 5: Diferenciabilidad de campos escalares y vectoriales.

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Comprender el concepto de diferenciabilidad de funciones escalares y vectoriales y sus relaciones con la derivabilidad y la continuidad.
2. Comprender la relación entre la diferenciabilidad de un campo escalar en un punto y la existencia del espacio tangente.
3. Conocer y aplicar el teorema de la derivación de funciones compuestas a problemas que involucren campos escalares y vectoriales.
4. Comprender la relación entre el vector gradiente de una función escalar diferenciable y sus conjuntos de nivel.

Introducción

En el curso de Análisis Matemático I, se definió la derivabilidad de una función de variable real en un punto como aquélla para la cual existe la derivada en dicho punto. Para funciones de varias variables no es posible generalizar de manera directa, ya que hemos visto que pueden existir las derivadas parciales y, sin embargo, no admitir derivada direccional en ninguna otra dirección en el punto, o bien ser discontinua en un punto y admitir derivada en toda dirección en dicho punto. En consecuencia, la derivada direccional no constituye una extensión satisfactoria del concepto de derivada para funciones de una variable real. Con el objeto de establecer una generalización eficiente es preciso profundizar algunos conceptos, ya que la idea de función derivable es un algo más compleja para funciones de varias variables.
Por lo tanto, desarrollaremos una generalización más conveniente que implica la continuidad y que, al mismo tiempo, posibilite la extensión natural de los resultados de la teoría de derivación en una dimensión a varias variables. Definiremos la *diferenciabilidad* de funciones de varias variables reales. Como veremos, la diferenciabilidad es una propiedad local, que implica la continuidad. Entre las reglas de diferenciación destacaremos posteriormente la regla de la cadena.

Con el objeto de comprender el significado de esta generalización, es preciso que recordemos los conceptos de derivada y diferencial para funciones reales de una variable real, como así también sus interpretaciones geométricas.

Recuerdos imborrables

Una función real de una variable real $f: A \subset R \to R$, con $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, definida al menos en un entorno del punto x_0, es derivable en dicho punto, si existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = tg\hat{\beta}$.
El valor de la derivada representa, desde el punto de vista geométrico, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0), cuya ecuación es: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Sabemos que:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h.f'(x_0)}{h} \text{ (1)}$$

(por propiedad de los límites que afirma: Si una función tiene límite en un punto, entonces la diferencia entre función y el límite es un infinitésimo en dicho punto)
En este caso, la diferencia entre las imágenes de la función y las correspondientes a la recta tangente es un infinitésimo de orden superior a $x - x_0$.
A la transformación lineal $T: R \to R / T(h) = h.f'(x_0) = df(x_0, h)$ se la denomina *diferencial de la función* f en el punto x_0, cuyo valor representa geométricamente la ecuación de la recta tangente referida a unos nuevos ejes coordenados paralelos a x e y con origen en el punto P, en la figura 5.1, el diferencial está representado por la longitud del segmento $\overline{RS}$, es decir, es el incremento de la ordenada medido sobre la tangente a la curva en ese punto.

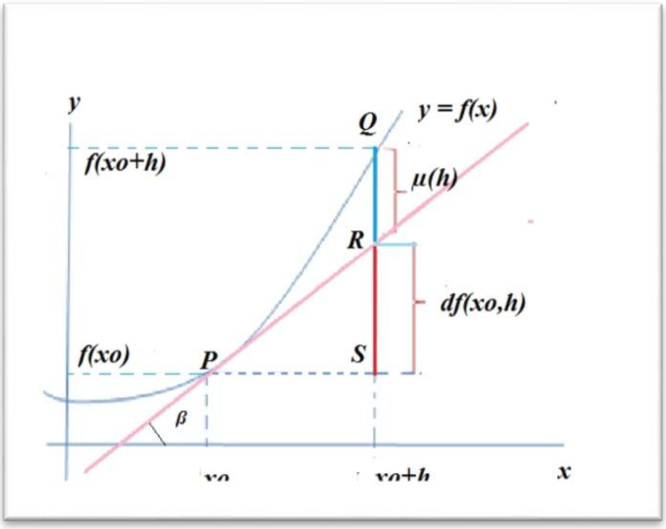


Figura 5.1: Diferencial de una función de una variable real.

La longitud del segmento $\overline{QR}$ coincide con $f(x_0 + h) - f(x_0) - h.f'(x_0)$ y depende del incremento h, y si a dicha longitud se la designa $\mu(h)$, entonces: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h.f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mu(h)}{h}$ que vale 0 cuando la función f es diferenciable en x_0.

Por ello, la aplicación lineal $T(h)$ es una ***buena aproximación*** de la función $f(x)$ en el entorno del punto x_0
Recordemos que las igualdades (1) son las que permiten comprender intuitivamente el significado analítico de la derivada: la función $P: R \to R$ definida por $P(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)\ \forall x \in R$, que es un polinomio de primer grado, es una buena aproximación de f en las cercanías del punto x_0, puesto que la diferencia $f(x) - P(x)$ tiende a cero en el punto x_0, "mucho más rápidamente" que la diferencia $(x - x_0)$.
Por ello es válida la aproximación $f(x) \approx P(x)$ para valores cercanos al punto x_0.
Esto fundamenta el establecimiento del siguiente teorema.

Teorema 5.1: Sea $f: A \subset R \to R$, con $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. f es derivable en x_0 y el valor de la derivada es $f'(x_0)$.
b. Existe una única transformación lineal $T: R \to R / T(h) = h.f'(x_0)$ tal que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - h.f'(x_0)}{h} = 0$.
c. Existe un número real $f'(x_0)$ y una función de variable real definida en un entorno de 0, $\mu: E(0,\delta) \to R / f(x_0 + h) - f(x_0) = h.f'(x_0) + \mu(h)$ y $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\mu(h)}{h} = 0$.

Cabe destacar que si f es una función vectorial o escalar de varias variables el límite $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - h.f'(x_0)}{h} = 0$ carece de sentido ya que el denominador es un vector. En ese caso se reemplaza este vector por su norma para que sea posible realizar una generalización de este teorema para funciones escalares de varias variables.

Ahora detallaremos la relación local (no global, en todo el dominio de la función) entre continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de funciones de varias variables en un punto dado $\vec{x}_0$

1. No existe relación alguna entre la existencia de las derivadas direccionales y la continuidad de la función en el punto: existen funciones continuas que no admiten alguna (incluso ninguna) derivada direccional; y, recíprocamente, existen funciones que tienen todas las derivadas direccionales y no son continuas.
2. Tampoco existe relación entre la existencia de las derivadas parciales (ambas discontinuas, necesariamente) y la existencia de las restantes derivadas direccionales.
3. Sin embargo, si la función es diferenciable, entonces es continua. El recíproco es falso: hay funciones continuas que no son diferenciables.
4. Si la función es diferenciable en un punto, entonces admite derivadas direccionales según cualquier dirección en ese punto (esta proposición será demostrada a posteriori) El recíproco es falso: la existencia de todas las derivadas direccionales no garantiza la diferenciabilidad de la función.
5. No obstante, si existen las funciones derivadas parciales y son continuas en el punto, entonces es posible garantizar que la función es diferenciable (y por tanto además admite derivadas direccionales según cualquier dirección).
6. La diferenciabilidad de la función no asegura que las derivadas parciales sean continuas en el punto.
7. Las funciones f que admiten las derivadas parciales continuas se dicen de clase C^1, y se expresa $f \in C^1$
En particular, son diferenciables (aunque no todas las funciones diferenciables son de clase C^1, como se ha dicho previamente).

Definición 5.1: Función vectorial diferenciable.
Una función $\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$ y $\vec{x}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \overset{\circ}{A}$ se llama ***diferenciable en el punto*** $\vec{x}_0$, si existe una transformación lineal $\vec{T}: R^n \to R^m$ (que depende de la función $\vec{f}$ como del punto $\vec{x}_0$) que verifica:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\left\|\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - \vec{T}(\vec{h})\right\|}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Usando las propiedades de la norma, es fácil comprobar que esta igualdad es equivalente a:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - \vec{T}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Es importante destacar que $\vec{h}$ es un vector, es el vector de los incrementos $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in R^n$
Dado que $\vec{x}_0$es un punto interior del dominio de $\vec{f}$, la expresión $\vec{\mu}(\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - \vec{T}(\vec{h})$está definida en alguna bola con centro en $\vec{0}$ $(B(\vec{0}, r))$.
Esta definición es equivalente a la que sigue:

Definición 5.2: Una función$\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$ y $\vec{x}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \overset{\circ}{A}$se llama diferenciable en el punto $\vec{x}_0$, si existe una transformación lineal $\vec{T}: R^n \to R^m$ y una función vectorial $\vec{\mu}: E(\vec{0}, \delta) \subset R^n \to R^m / \vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{T}(\vec{h}) + \vec{\mu}(\vec{h})$ siendo $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{\mu}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$.

Esta última condición expresa que $\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})$ difiere de una *función afín* $[\vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{T}(\vec{h})]$ en una función vectorial infinitésimo $\vec{\mu}(\vec{h})$ que se aproxima al vector nulo más rápido que el orden lineal cuando $\vec{h} \to \vec{0}$.
Es posible demostrar que si esta transformación lineal $\vec{T}: R^n \to R^m$existe, entonces es única. De esta forma, la transformación lineal $\vec{T}$ recibe el nombre de ***diferencial*** de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$y se designa $d\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{h})$ o bien $D\vec{f}(\vec{x}_0)$, cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas de R^n y R^m se denomina ***matriz jacobiana de*** $\vec{f}$ en el punto $\vec{x}_0$ y se la expresa $J\vec{f}(\vec{x}_0)$.

Teorema 5.2: Unicidad de la diferencial

Si una función $\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$ y $\vec{x}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^\circ$, es diferenciable en el punto $\vec{x}_0$, entonces al diferencial es única.

Demostración. Se supone que existen dos diferenciales de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$, $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$, por lo tanto:

$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{T}_1(\vec{h}) + \vec{\mu}_1(\vec{h})$ siendo $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{\mu}_1(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$ y,

$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{T}_2(\vec{h}) + \vec{\mu}_2(\vec{h})$ siendo $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{\mu}_2(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$, luego restando miembro a miembro, resulta:

$\vec{T}_1(\vec{h}) - \vec{T}_2(\vec{h}) = \vec{\mu}_2(\vec{h}) - \vec{\mu}_1(\vec{h})$ y así $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{T}_1(\vec{h}) - \vec{T}_2(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{\mu}_2(\vec{h}) - \vec{\mu}_1(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$.

Si $\vec{x} \neq \vec{0}$, entonces $t\vec{x} \to \vec{0}$ cuando $t \to 0^+$ y, por tanto,

$\lim_{t\to 0^+} \frac{\vec{T}_1(t\vec{x}) - \vec{T}_2(t\vec{x})}{\|t\vec{x}\|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t[\vec{T}_1(\vec{x}) - \vec{T}_2(\vec{x})]}{|t|\|\vec{x}\|} = \frac{\vec{T}_1(\vec{x}) - \vec{T}_2(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|t|}$ de donde $\vec{T}_1(\vec{x}) = \vec{T}_2(\vec{x})\ \forall \vec{x} \neq \vec{0}$

Teorema 5.3: Equivalencia para la diferenciabilidad de funciones vectoriales

Sea una función vectorial $\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$, $\vec{x}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^\circ$ y $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, entonces son equivalentes:

i) $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$.

ii) f_i es diferenciable en $\vec{x}_0$, para cada $i = 1,2, \dots, n$ (cada función coordenada de $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$)

Definición 5.3: Una función $\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$ se dice ***diferenciable en un conjunto abierto*** $B \subset A$ si es diferenciable en cada uno de los puntos de B.

Con anterioridad se ha establecido que si una función vectorial $\vec{f}: A \subset R^n \to R^m$ es diferenciable en un punto $\vec{x}_0 \in A^\circ$ existe una única transformación lineal $\vec{T}: R^n \to R^m$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas de R^n y R^m es la ***matriz jacobiana de*** $\vec{f}$ en el punto $\vec{x}_0$ y se la expresa $J\vec{f}(\vec{x}_0)$. Veremos quién es esta matriz.

Teorema 5.4: La matriz asociada a la transformación lineal $\vec{T}: R^n \to R^m$ respecto de las bases canónicas de R^n y R^m es la matriz jacobiana $J\vec{f}(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)\right)$ con $\begin{cases} i = 1,2, \dots, m \\ j = 1,2, \dots, n \end{cases}$

Demostración. Sea $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0, \vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ y la transformación lineal $\overline{T}(\vec{h})$ que tiene asociada

una matriz de dimensión $m \times n$ es: $\vec{T}(\vec{h}) = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ t_{m1} & \dots & t_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

Como $\vec{f}(\vec{x})$ es diferenciable en el punto $\vec{x}_0$ se verifica: $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - \vec{T}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$

y por lo tanto, de acuerdo con el teorema de equivalencia para la diferenciabilidad anteriormente enunciado, este límite debe verificarse componente a componente, por ejemplo, para componente j

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f_j(\vec{x}_0+\vec{h})-f_j(\vec{x}_0)-\sum_{k=1}^{n} t_{jk}h_k}{\|\vec{h}\|}=0$$

Ahora bien, si $\vec{h}=\lambda\check{e}_i$ siendo $\check{e}_i$el correspondiente versor de la base canónica de R^n

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f_j(\vec{x}_0+\lambda\check{e}_i)-(f_j(\vec{x}_0)+\lambda t_{ji})}{\lambda}=\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}(\frac{f_j(\vec{x}_0+\lambda\check{e}_i)-f_j(\vec{x}_0))}{\lambda}-\frac{\lambda t_{ji}}{\lambda})=0\Rightarrow\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)-t_{ji}=0$$

En consecuencia, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)=t_{ji}$

Nota: Es preciso destacar que el límite del primer cociente es la derivada direccional de la función escalar f_j en el punto $\vec{x}_0$ y en la dirección de los versores de la base canónica, es decir, las derivadas parciales de f_j en el punto $\vec{x}_0$. De esta forma, la matriz jacobiana es:

$$J\vec{f}(\vec{x}_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Si $n = m$ *la* matriz es cuadrada y a su determinante se lo denomina determinante Jacobiano o simplemente Jacobiano de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$.
Es también importante destacar que una función $\vec{f}$ podría no ser diferenciable en $\vec{x}_0$ y no obstante todas sus componentes admitir derivadas parciales en el punto $\vec{x}_0$. De esta forma, es factible construir la matriz descripta anteriormente, pero se la denomina matriz derivada. Sólo será la matriz jacobiana si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$.

Comentarios:

- Es evidente que tomando otras derivadas direccionales en $\vec{x}_0$ que no fueran según los vectores de la base canónica de R^n se obtendría otra matriz asociada a la transformación lineal $\vec{T}(\vec{h})$. La matriz Jacobiana $J\vec{f}(\vec{x}_0)$ es entonces, la matriz asociada a la diferencial referida a la base canónica.
- Obsérvese que los coeficientes de la matriz Jacobiana son números cuyo valor, en general, cambia al cambiar de punto. Esto pone de manifiesto que la transformación lineal depende del punto considerado.

Definición 5.4: Función escalar diferenciable.
Una función $f: A \subset R^n \to R$ y $\vec{x}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \overset{\circ}{A}$ se llama ***diferenciable en el punto*** $\vec{x}_0$**,** si existe una transformación lineal $T: R^n \to R$ (que depende de la función f como del punto $\vec{x}_0$) que verifica:

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - T(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Ya que $\vec{x}_0$ es un punto interior del dominio de f, la expresión $\mu(\vec{h}) = f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - T(\vec{h})$ está definida en alguna bola con centro en $\vec{0}$ ($B(\vec{0}, r)$)

Esta definición es equivalente a la que sigue:

Definición 5.5: Una función $f: A \subset R^n \to R$ y $\vec{x}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \overset{\circ}{A}$ se llama diferenciable en el punto $\overline{X}_0$, si existe una transformación lineal $T: R^n \to R$ y una función escalar $\mu: E(\overline{0}, \delta) \subset R^n \to R \;/\; f(\overline{X}_0 + \overline{h}) - f(\overline{X}_0) = T(\overline{h}) + \mu(\overline{h})$ *siendo* $\lim\limits_{\overline{h} \to 0} \dfrac{\mu(\overline{h})}{\|\overline{h}\|} = 0$

Esta última condición expresa que $f(\overline{X}_0 + \overline{h})$ difiere de una *función afín* $\left[f(\overline{X}_0) + T(\overline{h}) \right]$ en una función escalar infinitesimal $\mu(\overline{h})$ que se aproxima a cero más rápido que el orden lineal cuando $\overline{h} \to \overline{0}$. En este sentido $T(\overline{h})$ es una buena aproximación local de $f(\overline{X}_0 + \overline{h}) - f(\overline{X}_0)$

De la misma forma que se mostró para funciones vectoriales diferenciables, esta transformación lineal $T: R^n \to R$ existe, es única y recibe el nombre de ***diferencial*** de f en $\overline{X}_0$ y se designa $df(\overline{X}_0, \overline{h})$ o bien $D\overline{f}(\overline{X}_0)$, cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas de R^n y R se llama clásicamente como $\overline{\nabla f}(\overline{X}_0)$ (operador "nabla[1]") **vector gradiente[2]** de f en el punto $\overline{X}_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \overset{0}{A}$ y se lo expresa:

[1] *La Historia informa que el nombre podría deberse al nombre griego de un instrumento musical parecido a un arpa que tiene aproximadamente forma triangular, aunque algunos historiadores hacen referencia a Maxwell como quien comenzó a emplearlo humorísticamente. Como el símbolo de la letra griega delta mayúscula es* Δ *, el de nabla,* ∇ *, es una delta invertida. El gradiente fue denotado Δ por Hamilton en 1846, hacia 1870 se denoto ∇ la letra delta invertida, que se llamó "atled". En 1871 Maxwell escribió "la cantidad ∇P es un vector". El nombre de "pendiente" como se conocía en un principio pasó de uso y se reemplazó por la de "gradiente"; se refiere a la palabra grado, el peralte de un camino o una superficie. El nombre de (nabla apareció impreso por vez primera en 1901 en Vector Analysis, un libro para uso de estudiantes de matemáticas y física.*

[2] *La palabra gradiente es un tecnicismo de la Física y disciplinas afines (meteorología, geodesia, etc.) Es razón entre la variación del valor de una magnitud en dos puntos próximos y la distancia que los separa. Gradiente de temperatura, de presión. Por eso el gradiente barométrico es la relación de la diferencia de presión barométrica entre dos puntos. Otro significado de gradiente en el diccionario es también "declive".*
La palabra deriva del latín, del participio de presente "gradiens", "gradientis"(que da pasos, que desciende o asciende por una grada o escalinata), del verbo latino "gradi" Este verbo no sólo expresa la idea de andar o avanzar, sino también la idea de un avance reglado según pasos bien medidos o escalones predeterminados porque se vincula con el vocablo latino "gradus"(paso, escalón)y con el verbo "scandere"(del que proviene escala)puede referirse a una marcha ascendente o descendente por gradas, lo que es conveniente con el significado técnico del gradiente.

$$\overline{\nabla}f(\overline{X}_0)=(D_1f(\overline{X}_0),D_2f(\overline{X}_0),...,D_nf(\overline{X}_0))=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{X}_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{X}_0),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{X}_0)\right)$$

Cabe observar que si *m* = 1, la matriz Jacobiana es una matriz fila y es el vector gradiente de f en $\overline{X}_0$.

Si *m* > 1, las filas de la matriz Jacobiana son los vectores gradiente de las funciones componentes de $\overline{f}$ en $\overline{X}_0$, es decir: $J\overline{f}(\overline{X}_0)=\begin{pmatrix}\overline{\nabla}f_1(\overline{X}_0)\\ \vdots \\ \overline{\nabla}f_m(\overline{X}_0)\end{pmatrix}$

Para tener en cuenta…

Para aquellas funciones escalares que admitan todas las derivadas parciales en un punto $\overline{X}_0$, pero no son diferenciables en ese punto, puede construirse el vector cuyas componentes son las derivadas parciales en $\overline{X}_0$ y, con frecuencia, se lo denomina *vector derivada de f* en el punto $\overline{X}_0$ y se escribe $\overline{Df}(\overline{X}_0)$. Sólo se habla de vector gradiente cuando la función es diferenciable en $\overline{X}_0$ en virtud de los atributos que le asigna la diferenciabilidad.

Plano tangente a una superficie

Ahora es posible afirmar con mayor precisión lo dicho anteriormente con respecto a que $T(\overline{h})$ es una buena aproximación local de $f(\overline{X}_0+\overline{h})-f(\overline{X}_0)$, ya que si se desprecia la función $\mu(\overline{h})$, que es un infinitésimo, y si $z=f(\overline{X}_0+\overline{h})-\mu(\overline{h})$, resulta: $z-f(\overline{X}_0)=\overline{\nabla}f(\overline{X}_0).\overline{h}=\sum_{i=1}^{n}h_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{X}_0)$

Además, haciendo $\overline{x}=\overline{X}_0+\overline{h}$ se obtiene: $z-f(\overline{X}_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{X}_0).(x_i-a_i)$ que consiste la ecuación del "hiperplano tangente" a la gráfica de *f* incluido en el espacio R^{n+1} que pasa por el punto $\left(\overline{X}_0,f(\overline{X}_0)\right)$.

Concretamente, para funciones de una y dos variables independientes, resulta:

Si $n=1$ $\quad y-f(x_0)=f'(x_0).(x-x_0)$ es la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $(x_0,\ \underset{f(x_0)}{y_0}\ )$.

Si $n=2$ $\quad z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).(y-y_0)$ es la ***ecuación del plano tangente*** a la "superficie" $z=f(x,y)$ en el punto $(x_0,y_0,\ \underset{f(x_0,y_0)}{z_0}\ )$, cuyas pendientes en las direcciones de los ejes x e y, son $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ respectivamente, o en otras palabras, el plano que pasa por el punto (x_0,y_0,z_0) y tiene como vectores directores a $\overrightarrow{u_x}=\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$ y $\overrightarrow{u_y}=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.

Este plano contiene a las rectas tangentes en el punto (x_0, y_0, z_0) a la superficie $z = f(x, y)$ en las direcciones de los ejes x e y, por ello parece lógico llamarlo ***plano tangente*** en el punto (x_0, y_0, z_0) a la superficie $z = f(x, y)$. Esta denominación será completamente justificada más adelante cuando se concluya que contiene a la recta tangente en (x_0, y_0, z_0) en *cualquier* dirección.

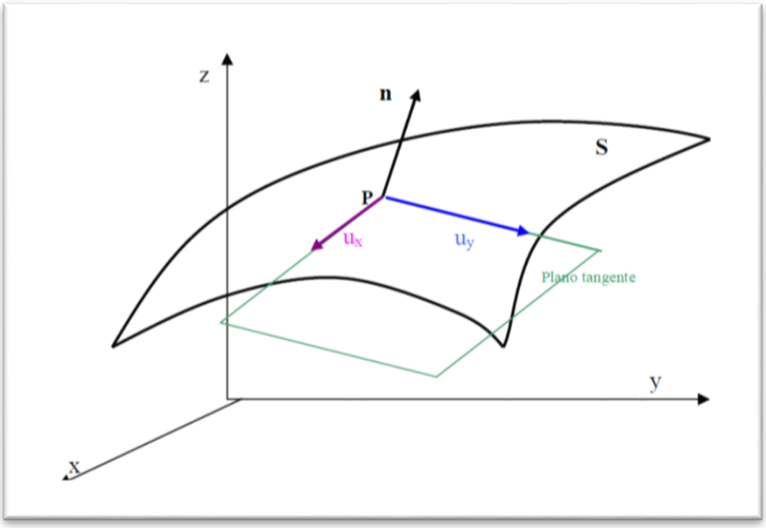


Figura 5.2: Plano tangente a una superficie

La expresión lineal obtenida de la ecuación del plano tangente, despejando z, $T(x, y)$ es:

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).(y-y_0)}_{df(\vec{X}_0)}$$

Y, en consecuencia

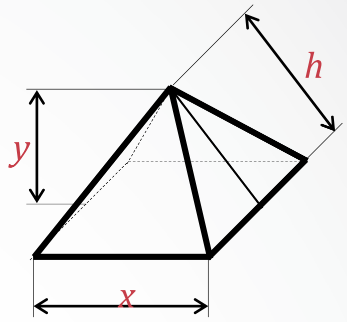
$$f(x,y) \approx T(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).(y-y_0)}_{df(\vec{x}_0)}$$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(\vec{x}_0) \quad (I)$$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx df(\vec{x}_0) \quad \Rightarrow \Delta f \approx df$$

y es la única expresión lineal en *x* e *y* que aproxima a la función $f(x, y)$ en el punto indicado, denominada **aproximación lineal de** f en (x_0, y_0, z_0), y la fórmula *(I)* se llama ***fórmula de aproximación lineal***.

La diferencial ***df*** representa el incremento que experimentaría la función al pasar de (x_0, y_0) a $(\underbrace{x_0+h_1}_{x}, \underbrace{y_0+h_2}_{y})$ si la función se sustituyese por su aproximación lineal en (x_0, y_0). En otras palabras, es el incremento medido sobre el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0), a diferencia del incremento real ***Δf*** es el incremento real que experimenta la función al pasar de (x_0, y_0) a $(\underbrace{x_0+h_1}_{x}, \underbrace{y_0+h_2}_{y})$ medido sobre la superficie.



Ejemplo 5.1: Determinar aproximadamente el valor de la siguiente raíz cuadrada

$$\sqrt{4{,}01^2+3{,}98^2+2{,}02^2}$$

Los tres números elevados al cuadrado dentro de la raíz son muy próximos a los enteros 4, 4 y 2, respectivamente. Por lo tanto, es posible considerar a la raíz como una función escalar de tres variables evaluada en las proximidades del punto (4,4,2), y aproximar su valor mediante una función lineal.

$$f(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad (x_0,y_0,z_0)=(4;4;2)$$

$$f(x;y;z)\cong f(x_0,y_0,z_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(4.01\ ,\ 3.98,\ 2.02)\cong\sqrt{4^2+4^2+2^2}+\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]_{(4,4,2)}(4{,}01-4)+\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]_{(4,4,2)}(3{,}98-4)$$

$$+\left[\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]_{(4,4,2)}(2{,}02-2)=$$

$$=\sqrt{36}+\left[\frac{4}{\sqrt{36}}\right]\cdot 0{,}01+\left[\frac{4}{\sqrt{36}}\right]\cdot(-0{,}02)+\left[\frac{2}{\sqrt{36}}\right]\cdot 0{,}02=6+\tfrac{2}{3}\cdot 0{,}01-\tfrac{2}{3}\cdot 0{,}02+\tfrac{1}{3}\cdot 0{,}02=6$$

Compárese este valor con el de 6,000075 que se obtiene con la calculadora!

Ejemplo 5.2: Para modelizar el proceso de desgaste de las pirámides egipcias, se construye un modelo en miniatura de las mismas, con un lado de la base de 6 cm y una altura de 4 cm. Luego de someterlo a rigurosas condiciones ambientales, se comprueba que el lado de la base disminuyó en 0,1 cm, y la altura disminuyó en 0,2 cm. Mediante una aproximación lineal, estimar cuál fue la disminución del área lateral de la pirámide.

Éste es un problema de *modelización,* en el cual no se conoce explícitamente la función a aproximar, debe deducirse de la situación física descripta.

En este caso, es preciso determinar el área lateral de la pirámide en función de las magnitudes conocidas, el lado de la base (x) y la altura (y) y h la altura de cada uno de los triángulos que componen el área lateral de la pirámide. Por el teorema de Pitágoras, h puede ser expresado en términos de x y y, así:

$$h=\sqrt{y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Entonces, el área de cada uno de estos triángulos es:

$$A_T=\frac{xh}{2}=\frac{x}{2}\sqrt{y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Y el área lateral total es 4 veces el área de cada uno de los triángulos:

$$A=4A_T=2x\sqrt{y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Se trata de aproximar linealmente esta función, las coordenadas del punto son las dimensiones dadas del cuerpo:

$(x_0,y_0)=(6,4)$

La aproximación lineal para el área lateral es:

$$A\cong A(6,4)+\frac{\partial A}{\partial x}(6,4)(x-6)+\frac{\partial A}{\partial y}(6,4)(y-4)=\left(2x\sqrt{y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)_{(6,4)}+$$

$$+\left[2\sqrt{y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}+\frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right]_{(6;4)}\cdot(x-6)+\left[\frac{2xy}{\sqrt{y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right]_{(6,4)}\cdot(y-4)=$$

$$=60+\tfrac{68}{5}(x-6)+\tfrac{48}{5}(y-4)$$

Para determinar aproximadamente el valor cuando el lado de la base disminuyó 0,1 cm y la altura disminuyó 0,2 cm, debemos adoptar x - 6 = -0,1 y y - 4 = -0,2, y en tales condiciones tendremos:

A = 60 – (68/5) ·0,1 – (48/5) ·0,2 = 60 – 3,28

Dado que el área inicial, con una altura de 4 cm y un lado de la base de 6 cm, era de 60 cm^2, la disminución de área fue de 3,28 cm^2.

Para tener en cuenta…

1. Obsérvese que la ecuación $z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0)$ tiene sentido (y define, por tanto, un plano en R^3) para una función escalar que simplemente posea derivadas parciales en el punto (x_0, y_0), pero, si la función no es diferenciable, dicho plano no tiene utilidad alguna como aproximación local de la superficie.
2. La versión de la definición de diferenciabilidad analizada para una función escalar de dos variables independientes es:

Una función $f : A \subseteq R^2 \to R \ / \ \ z = f(x, y)\ \ y\ \ \overline{X}_0 = (x_0, y_0) \in \overset{0}{A}$ es *diferenciable en el punto* $\overline{X}_0$, si existen sus derivadas parciales en ese punto, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ \ y\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, y se verifica:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0 \quad \text{siendo}$$

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

De esta forma, para que una función sea diferenciable en un punto no sólo se requiere la existencia de las derivadas parciales en ese punto, sino también que la diferencia entre la función y el plano de ecuación $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0)$ sea un infinitésimo de orden superior a uno, o bien, que el plano sea una buena aproximación de la función en las cercanías del punto. Si esta condición se verifica, entonces el plano mencionado es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$, es decir, el plano generado por las rectas tangentes en las direcciones de los ejes es, en verdad, el plano tangente a la gráfica de *f* en el punto (x_0, y_0).

Ejemplo 5.3: La función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ ¿es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) = (1,2)$?
Las derivadas parciales existen y valen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)} = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,2)} = 8$$

Así que el *único candidato posible a ser el plano tangente* en $el\ punto\ (x_0, y_0) = (1,2)$

es: $$z = f(1,2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)} .(x - 1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,2)} .(y - 2) = 9 + 2(x - 1) + 8(y - 2)$$

Para probar que f es diferenciable en el punto se debe mostrar que se verifica:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x^2+2y^2)-\left(9+2(x-1)+8(y-2)\right)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x^2+2y^2)-(9+2x-2+8y-16)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x^2+2y^2)-(2x+8y-9)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x^2-2x+1)+2(y^2-4y+4)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^2+2(y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

Si se efectúa un cambio de variables $u=x-1 \quad y \quad v=y-2$, resulta:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(u)^2+2(v)^2}{\sqrt{(u)^2+(v)^2}}$$

Luego empleando coordenadas polares es:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 cos^2\theta+2\rho^2 sen^2\theta}{\sqrt{\rho^2 cos^2\theta+\rho^2 sen^2\theta}}=0 \Rightarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(cos^2\theta+2sen^2\theta)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0} \rho(cos^2\theta+2sen^2\theta)=0$$

Luego $\rho|cos^2\theta+2sen^2\theta|\le 3\rho=F_{(\rho)}, como \ \lim_{\rho\to 0} 3\rho=0$, entonces f es diferenciable en (1,2)

La existencia de las derivadas parciales de una función escalar en un punto NO es suficiente para que admita plano tangente en ese punto, tal como se muestra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 5.4: Sea la función definida por $f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Es posible usar, si existen, las derivadas parciales en el punto (0,0) para escribir la ecuación de un plano.

$z=f(x_0,y_0)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).(x-x_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).(y-y_0)$ que resulta ser el único “candidato” posible como plano tangente a la gráfica de *f* en (0,0). Pero, ¿es verdaderamente el plano tangente?, es decir, ¿ese plano constituye una aproximación local de la función *f* de buena calidad? Investiguemos…

Se calculan las derivadas parciales de *f* en el punto (0,0) empleando la definición:

$$D_1 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$
$$D_2 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

En consecuencia, el único candidato posible para plano tangente es $z=x+y$. ¿Es este plano una buena aproximación de *f* en las proximidades del origen?
Si se trata de una buena aproximación, ambos resultados deben proporcionar resultados similares. Veamos la cuestión con un enfoque más “microscópico” accediendo al origen por subconjuntos. Tal como se procede con los límites restringidos, evaluaremos la función $f(x,y)=x+y+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y el plano $z=x+y$ sobre puntos de la recta, por ejemplo, $y=x$ siempre que $(x,y)\neq(0,0)$. De esta forma, el problema se reduce a un problema de aproximación local en una variable real.
Entonces, si $y=x$, resulta:

$$f(x,x)=\varphi(x)=x+x+\frac{x.x}{\sqrt{x^2+x^2}}=2x+\frac{x^2}{\sqrt{2x^2}}=2x+\frac{x^2}{|x|\sqrt{2}}=2x+\frac{|x|}{\sqrt{2}}$$

$$z=x+x=2x$$

¿Es $x+y+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\approx x+y$ una buena aproximación para puntos próximos al origen? NO, ya que $\varphi(x)=2x+\frac{|x|}{\sqrt{2}}$ no es derivable en $x=0$, de modo que esta aproximación no existe, por tanto la aproximación $x+y+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\approx x+y$ no es correcta y así el plano $z=x+y$ no es el plano tangente a la gráfica de *f* en el punto (0,0).

Naturalmente que, para este caso, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}\neq 0$$ o bien no existe. Comprobémoslo!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$ y este límite doble, ya analizado con anterioridad, no existe (basta restringir la función sobre puntos del haz de rectas que pasan por el origen)

Recta normal a una superficie

Si se desea hallar la ecuación de la recta normal a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0), puede calcularse un vector normal al plano tangente calculando el producto vectorial entre los vectores $\overrightarrow{u_x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$ y $\overrightarrow{u_y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$. Así,

$$\vec{n} = \overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right)$$

y la **ecuación vectorial de la recta normal** por el punto (x_0, y_0, z_0) es $\overline{X} = \overline{X}_0 + \lambda\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right) \quad \lambda \in R$, y en forma cartesiana:

$$\frac{x - x_0}{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1} \qquad si \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \ \ y \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Concepto de gradiente

Para una función escalar $f : A \subseteq R^2 \to R$ y $\overline{X}_0 = (x_0, y_0) \in \overset{0}{A}$, la diferencial en el punto (x_0, y_0) es: $df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).\underbrace{(x - x_0)}_{h_1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).\underbrace{(y - y_0)}_{h_2}$. El 2° miembro es una expresión de primer orden que puede ser interpretada como el producto escalar del vector incremento $\overline{h} = (h_1, h_2)$ y el vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

Tal como ya ha sido presentado, este vector de R^2 se denomina gradiente de la función y se escribe $\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ o también $grad\, f(x_0, y_0)$.

En consecuencia, si *f* es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces la diferencial $df(\overline{X}_0, \overline{h})$ es el producto escalar del vector gradiente de *f* en (x_0, y_0) y el vector de incrementos $\overline{h} = (h_1, h_2)$:

$$df(\overline{X}_0, \overline{h}) = \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) \cdot (h_1, h_2).$$

En general, para una función escalar $f : A \subseteq R^n \to R$, $\overline{X}_0 \in \overset{0}{A}$ y $\vec{h} = (h_1, h_2, ..., h_n)$ diferenciable en $\overline{X}_0$, la diferencial en el punto $\overline{X}_0$ es: $df(\overline{X}_0, \overline{h}) = \overline{\nabla f}(\overline{X}_0) \cdot \vec{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{X}_0).h_i$ también denominada ***diferencial total*** de la función f en el punto (x_0, y_0).

Se verá a continuación propiedades muy importantes del vector gradiente y su utilidad en el análisis de funciones de varias variables…

Condiciones necesarias de diferenciabilidad

Teorema 5.5: Sea $\overline{f} : A \subseteq R^n \to R^m$, $\overline{X}_0 \in \overset{0}{A}$. Si $\overline{f}$ es diferenciable en el punto $\overline{X}_0$, entonces $\overline{f}$ es continua en $\overline{X}_0$.

Demostración.
Como $\overline{f}$ es diferenciable en el punto $\overline{X}_0$, se verifica que existe una función vectorial

$\overline{\mu} : E(\overline{0}, \delta) \subset R^n \to R^m$ / $\overline{f}(\overline{X}_0 + \vec{h}) - \overline{f}(\overline{X}_0) = J\,\overline{f}(\overline{X}_0) \cdot \vec{h} + \overline{\mu}(\vec{h})$ *siendo* $\lim_{\vec{h} \to \overline{0}} \frac{\overline{\mu}(\vec{h})}{\left\|\vec{h}\right\|} = \overline{0}$ y así:

$$\lim_{\vec{h} \to \overline{0}} \left[\overline{f}(\overline{X}_0 + \vec{h}) - \overline{f}(\overline{X}_0) \right] = \lim_{\vec{h} \to \overline{0}} \left[J\,\overline{f}(\overline{X}_0) \cdot \vec{h} + \overline{\mu}(\vec{h}) \right] = \overline{0} \ \text{ya que} \lim_{\vec{h} \to \overline{0}} \overline{\mu}(\vec{h}) = \lim_{\vec{h} \to \overline{0}} \left\|\vec{h}\right\| \frac{\overline{\mu}(\vec{h})}{\left\|\vec{h}\right\|} = \overline{0}$$

Por lo tanto, $\lim_{\vec{h} \to \overline{0}} \overline{f}(\overline{X}_0 + \vec{h}) = \overline{f}(\overline{X}_0)$, entonces $\overline{f}$ es continua en $\overline{X}_0$.

Para tener en cuenta…
Cabe enfatizar que la continuidad es sólo condición necesaria para la diferenciabilidad, pero no es suficiente. Por ello, la proposición recíproca es falsa como se muestra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.5: La continuidad no permite asegurar la existencia de plano tangente.

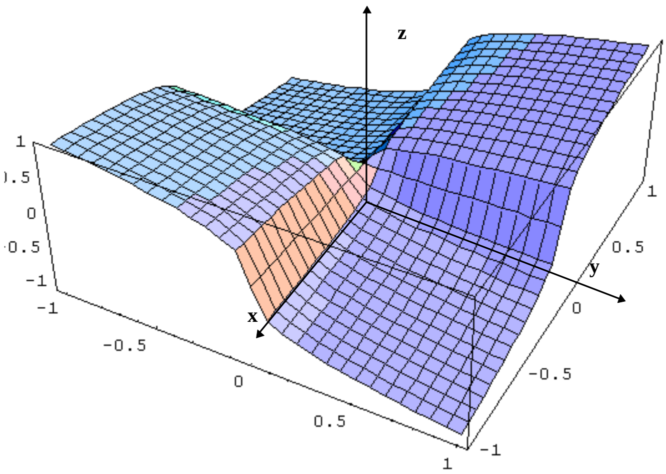
Sea $f : R^2 \to R$ / $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{3}}$. Es continua en (0,0) ya que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = f(0,0) = 0$

Es posible calcular las dos derivadas parciales en (0;0) empleando la definición:

$$f'_x(0;0) = \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(h;0)-F(0;0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^{\frac{1}{3}}.0-0}{h} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(0;h)-F(0;0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0.h^{\frac{1}{3}}-0}{h} = 0 \end{array}$$

Es decir, existen las dos derivadas parciales de *f* en (0;0) y son iguales a 0. De acuerdo con la interpretación geométrica de la derivada parcial, esto significa que al cortar la superficie representativa de la función con los planos y = 0 ó *x* = 0, se obtienen curvas tales que sus rectas tangentes en (0;0;0) son el eje **x** y el eje **y** respectivamente.

Si el plano tangente a la superficie en (0;0;0) existiera, debe contener a estas dos rectas y, por lo tanto, el plano tangente debería ser el plano xy. Si se observa la gráfica de esta función con $z \geq 0$.



Es evidente que en (0;0;0) no existe plano tangente, aunque existan las derivadas parciales. Para que *f* sea diferenciable en (0,0) debe verificarse que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0).(x-0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0).(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} \overset{?}{=} 0$$, ahora bien,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-0-0.x-0.y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ Si se considera el conjunto $S=\{(x,y)\in R^2 \;/\; y=x\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{|x|\sqrt{2}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{2}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{-x\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{2}} = +\infty \end{cases}$$

Entonces, el límite doble no existe en virtud de la no existencia de un límite direccional, hecho que fundamenta la no existencia del plano tangente en (0,0,0), y por lo tanto la función no es diferenciable en (0,0).

Teorema 5.6: Sea $f: A \subseteq R^n \to R$, $\overline{X}_0 \in \overset{0}{A}$. Si f es diferenciable en el punto $\overline{X}_0$, entonces f admite derivada en toda dirección $\vec{u} \neq \vec{0}$ / $\left\|\vec{u}\right\| = 1$ en $\overline{X}_0$ y $f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = df(\overline{X}_0, \breve{u}) = \nabla f(\overline{X}_0)\cdot\breve{u}$

Demostración:

Como f es diferenciable en el punto $\overline{X}_0$, se verifica:

$$\mu: E(\vec{0},\delta) \subset R^n \to R \ / \ f(\overline{X}_0 + \vec{h}) - f(\overline{X}_0) = \overrightarrow{\nabla f}(\overline{X}_0)\cdot\vec{h} + \mu(\vec{h}) \ \ siendo \ \lim_{\vec{h}\to 0}\frac{\mu(\vec{h})}{\left\|\vec{h}\right\|} = 0$$

Sea $\vec{h} = t\breve{u}$ con $t \in R$, si $\vec{h} \to \vec{0}$, $t \to 0$, entonces

$$f(\overline{X}_0 + t\breve{u}) - f(\overline{X}_0) = \overrightarrow{\nabla f}(\overline{X}_0)\cdot(t\breve{u}) + \mu(t\breve{u}) \ \ siendo \ \lim_{t\to 0}\frac{\mu(t\breve{u})}{\left\|t\breve{u}\right\|} = 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{f(\overline{X}_0 + t\breve{u}) - f(\overline{X}_0)}{t} = \frac{\overrightarrow{\nabla f}(\overline{X}_0)\cdot(t\breve{u}) + \mu(t\breve{u})}{t}$$

$$\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{f(\overline{X}_0 + t\breve{u}) - f(\overline{X}_0)}{t}}_{f'(\overline{X}_0,\breve{u})} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\overrightarrow{\nabla f}(\overline{X}_0)\cdot\breve{u}\right)t + \mu(t\breve{u})}{t} = \overrightarrow{\nabla f}(\overline{X}_0)\cdot\breve{u}$$

En consecuencia, $f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \nabla f(\overline{X}_0)\cdot\breve{u}$ lo que prueba el teorema.

Esta fórmula de la derivada direccional implica que la recta tangente a la curva coordenada en la dirección de $\breve{u}$ que pasa por el punto $\overline{X}_0$ está contenida en el hiperplano tangente.

Este teorema proporciona información muy importante ya que la diferenciabilidad de una función escalar en un punto asegura, por un lado la existencia de todas las derivadas direccionales en dicho punto, y por el otro brinda una regla de cálculo para la derivada direccional: el producto interior entre el vector gradiente de la función calculado en el punto y el versor cuya dirección y sentido se deriva.

Ejemplo 5.6:

$$F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad \text{en } \vec{X}_o=(0;0)$$

F es continua en (0,0) ya que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\text{inf initésimo}}{x} \cdot \underbrace{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}_{\substack{\text{función acotada en} \\ \text{una bola reducida de } (0,0)}} = 0 = F(0,0)$

Empleando la definición de derivada direccional, resulta:

Sea un versor genérico de R², $\overset{\vee}{u}=(u_1,u_2)$.

$$F'(\vec{X}_o,\overset{\vee}{u}) = \lim_{t\to0}\frac{F(\vec{P}_o+t\overset{\vee}{u})-F(\vec{P}_o)}{t} \Rightarrow F'(\vec{P}_o,\overset{\vee}{u}) = \lim_{t\to0}\frac{F(tu_1,tu_2)-F(0,0)}{t}$$

$$F'(\vec{X}_0,\overset{\vee}{u}) = \lim_{t\to0}\frac{\dfrac{tu_1.(tu_2)^2}{(tu_1)^2+(tu_2)^2}-0}{t} = \lim_{t\to0}\frac{\dfrac{t^3u_1u_2^{\,2}}{t^2(u_1^{\,2}+u_2^{\,2})}}{t} = \frac{u_1u_2^{\,2}}{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}} = u_1u_2^{\,2}$$ pues $u_1^{\,2}+u_2^{\,2}=1$, ya que $\overset{\vee}{u}=(u_1,u_2)$ es un versor.

Este resultado nos permite asegurar que la función tiene derivada en cualquier dirección y sentido. Podemos escribir esta derivada en función de u_1:

$$F'(\vec{X}_o,\overset{\vee}{u}) = u_1.(1-u_1^2) = u_1-u_1^3 = \varphi(u_1)$$

Como se pide la o las direcciones en la que la derivada direccional es máxima, y la función a maximizar es de una variable, se buscará el valor de u_1 que anula la derivada primera (puntos estacionarios), en los que la derivada segunda sea negativa
Es decir:

Como $\varphi(u_1)=u_1-u_1^3$, entonces $\varphi'(u_1)=1-3u_1^2$

$$\varphi'(u_1)=1-3u_1^2=0 \Rightarrow u_1^2=\frac{1}{3} \Rightarrow |u_1|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Y $\varphi''(u_1)=-6u_1 \Rightarrow \varphi''\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)<0$

Además, $|u_2|=\sqrt{1-u_1^2}$ entonces, $|u_2|$ = $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.Entonces las direcciones en la que la derivada direccional es máxima son: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$=$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Cabe destacar que no se ha empleado el vector gradiente en virtud de que aún no se ha determinado la diferenciabilidad de la función F en el punto (0,0). De todas formas, si la función fuera diferenciable en (0,0), la dirección de máxima derivada en él es única, por lo cual como se han determinado dos direcciones de derivada máxima, la función no es diferenciable en (0,0). De esta forma, el cálculo de la derivada dirección mediante el vector gradiente no es aplicable en este caso.

Si hubiésemos calculado el límite para probar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)-F(0,0)-\frac{\partial F}{\partial x}(0,0).(x-0)-\frac{\partial F}{\partial y}(0,0).(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0).(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0-0.(x-0)-0.(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Este límite no existe ya que si se considera el conjunto $S=\{(x,y)\in R^2 \;/\; y=x\}$ resulta:

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{|x|^3}$ y no existe. Por tanto, la función F no es diferenciable en (0,0), tal como se había concluido anteriormente.

Relación entre el vector gradiente y la derivada direccional

El producto interior entre dos vectores se puede calcular como el producto entre las normas de dichos vectores y el coseno del ángulo que ellos forman, por lo tanto, si f es diferenciable en $\overline{X}_0$ y $\nabla f(\overline{X}_0)\neq\vec{0}$

$$f'(\overline{X}_0,\breve{u})=\nabla f(\overline{X}_0)\cdot\breve{u}=\left\|\nabla f(\overline{X}_0)\right\|\cdot\underbrace{\|\breve{u}\|}_{1}\cos\theta=\left\|\nabla f(\overline{X}_0)\right\|\cdot\cos\theta$$

Observación importante: La derivada direccional es máxima si $\cos\theta=1$, cuando $\theta=0$, es decir en la dirección y sentido del vector gradiente, y su valor máximo es $\left\|\nabla f(\overline{X}_0)\right\|$ (en la dirección y sentido del vector unitario $\frac{\nabla f(\overline{X}_0)}{\left\|\nabla f(\overline{X}_0)\right\|}$). El vector gradiente de f en el punto $\overline{X}_0$, si es no nulo, indica la dirección y sentido de máximo crecimiento de f a partir de $\overline{X}_0$, en el sentido de que la pendiente en esa dirección es máxima, y la norma del gradiente representa la *máxima derivada direccional o máxima razón de cambio*, es decir, el mayor incremento que puede experimentar la función si las variables independientes sufren un incremento (vectorial) unitario.

Es preciso tener cautela para la interpretación de esta relación: el hecho de que la dirección de máximo crecimiento de la función *f* en el punto $\overline{X}_0$ se produzca en el sentido del vector $\nabla f(\overline{X}_0)$, no significa que la función siempre "crecerá" en ese sentido. En términos generales, una vez que se llega al punto $\overline{X}_0 + t\breve{u}$ la dirección de máximo crecimiento puede cambiar. Si se interpreta este hecho desde un ejemplo de la vida real: cuando un alpinista intenta escalar una pared por su pendiente más abrupta, no siempre sigue la misma dirección, sino que en cada instante debe redirigir su curso hacia la zona que, en ese instante, apunta hacia la máxima pendiente.

Cabe enfatizar en este sentido que, la dirección de máximo ascenso en un punto no tiene por qué apuntar, en general, hacia un máximo local o global de la función. Por ejemplo, para la función escalar dada por $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$ en el punto $\overline{X}_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{7}{10}\right)$, el vector gradiente es: $\overrightarrow{\nabla f}(\overline{X}_0) = \left(\frac{9}{20}, \frac{63}{25}\right)$ cuya dirección y sentido no apunta hacia el máximo local ubicado en el punto (1,0). A continuación en la figura 5.3 se observan las curvas de nivel de *f,* el punto $\overline{X}_0$ y el gradiente de la función en dicho punto, luego un campo vectorial generalizado del gradiente, con los vectores gradientes de la función calculados en diversos puntos.

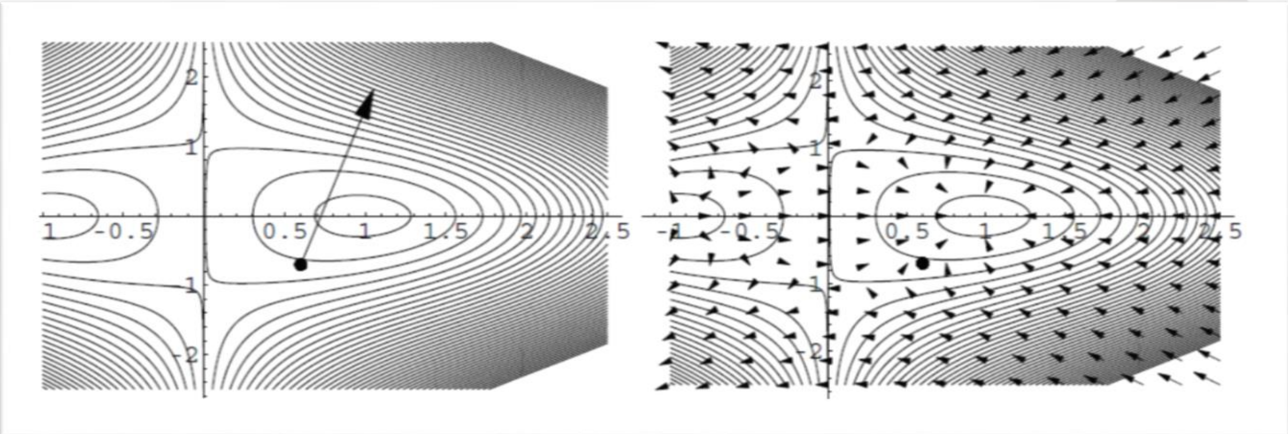


Figura 5.3: Curvas de nivel y campo de gradiente

1. La derivada direccional es mínima (razón de cambio mínima) si $\cos\theta = -1$, cuando $\theta = \pi$, es decir en la dirección y sentido opuesto del vector gradiente, y su valor mínimo es $-\left\|\nabla f(\overline{X}_0)\right\|$
2. La derivada direccional es nula si $\cos\theta = 0$, cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir en la dirección normal al vector gradiente.

En la figura 5.4 se puede apreciar los vectores gradiente y versor para una función escalar de dos variables independientes.

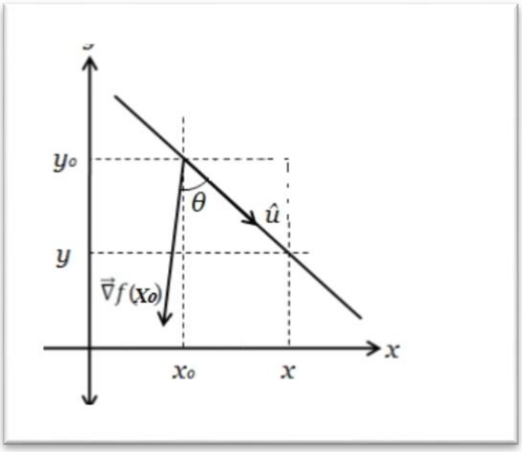


Figura 5.4: Vector gradiente y versor

3. La derivada direccional de f en el punto $\overline{X}_0$ según la dirección del versor $\breve{u}$ viene dada por el producto interior $f'(\overline{X}_0,\breve{u}) = \nabla f(\overline{X}_0)\cdot\breve{u}$. En definitiva, los vectores tangentes a las curvas coordenada en la dirección de $\breve{u}$ que pasa por el punto $\overline{X}_0$ son combinaciones lineales de los vectores tangentes a las curvas en ese punto según las direcciones de los ejes OX y OY . Esto es evidente desde el punto de vista geométrico, desde el momento que todos los vectores están situados sobre el hiperplano tangente, y éste queda determinado por las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{X}_0)$. De esta forma, en las funciones diferenciables es inmediato calcular las derivadas direccionales, reduciéndolas a un simple producto interior de vectores.

4. Si $f : A \subseteq R^n \to R \;\; A \; abierto$ es diferenciable en $\overline{X}_0 \in A$ y $f(\overline{X}_0) = c$, entonces el vector gradiente $\nabla f(\overline{X}_0)$ es ortogonal al conjunto de nivel $S_c = \left\{\overline{x} \in A \;/\; f(\overline{x}) = c\right\}$ en el punto $\overline{X}_0$. (significa que es ortogonal a cada vector tangente a $S_c \; en \; \overline{X}_0$.

La demostración de esta última proposición se verá posteriormente cuando se estudie la derivación de funciones compuestas.
Para esta propiedad del gradiente de una función escalar, es posible dar una interpretación física. Por ejemplo, si se considera un campo escalar $T(x, y, z)$ que mide la temperatura del punto $(x, y, z) \in R^3$, entonces, la dirección según la cual varia más rápidamente la temperatura es la del gradiente $\nabla f(\overline{X}_0)$, y esta dirección es ortogonal a la 'superficie' isoterma que pasa por $\overline{X}_0$, pensando que sobre las isotermas la temperatura no experimento cambios, si no que por el contrario permanece constante.

La proposición recíproca del Teorema 5.6 es falsa, es decir, la existencia de todas las derivadas direccionales de una función en un punto no garantiza la diferenciabilidad en dicho punto, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.7: La función definida por $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ es continua en (0,0), ya que:

$\left|\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}\right|\leq|y|$ y luego *f* es continua en (0,0).

Para cada versor $\breve{u}$, la derivada dirección en (0,0) es:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\overline{X}_0+t\breve{u})-f(\overline{X}_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{tu_1u_2^3}{u_1^2+t^2u_2^4}=0 \quad \forall\breve{u}$$

Sin embargo, la función *f* no es diferenciable en (0,0) ya que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0).(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{xy^3}{x^2+y^4}-0-0.(x-0)-0.(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Este límite no existe ya que si se considera el conjunto $S=\left\{(x,y)\in R^2\ /\ y^2=x\right\}$, resulta:

$\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}}\frac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{y^5}{2y^4\sqrt{y^4+y^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{2|y|\sqrt{y^2+1}}$ cuyos límites laterales son diferentes, por lo tanto, esta función proporciona un ejemplo interesante de una función continua tal que los vectores $\left\{\breve{u},\ f'((0,0),\breve{u}) : \breve{u}\in R^2\right\}$ forman un plano, "candidato" a ser plano tangente, y sin embargo *f* no es diferenciable en (0, 0). Para ver gráficamente la razón de la no diferenciabilidad de *f* en (0,0) se recomienda utilizar un programa graficador que permita visualizar la gráfica de *f* en un entorno de (0, 0). Es posible apreciar que por muy poderoso que sea el zoom en un entorno de (0,0,0) siempre se observará un pliegue a lo largo del eje Oy y nunca es factible que la gráfica de *f* se confunda con el plano *z* = 0. Esto se debe a que en este ejemplo la aplicación $\breve{u}\to f'((0,0),\breve{u})$, aunque es lineal no proporciona una aproximación local del incremento $f(u_1,u_2)-f(0,0)$ que sea uniforme en todas las direcciones.

Ejemplo 5.8: Dada una función f : D $\subseteq$ R² → R diferenciable, se sabe que la dirección de máximo crecimiento en un punto (x_0, y_0) es (3/5, 4/5), se desea calcular:

a) El valor de la derivada direccional en (x_0, y_0) en dicha dirección.

Como *f* es diferenciable, la derivada direccional en el punto (x_0, y_0) en cualquier dirección de R^2 existe y es igual al producto interior entre el vector gradiente de la función en ese punto y el versor dirección. Además, la dirección de máximo crecimiento en un punto es la misma que la del vector gradiente de la función en ese mismo punto. La derivada direccional en el punto (x_0, y_0) en la dirección de máximo crecimiento es:

$$D_{\overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0)}f(x_0,y_0)=\overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0).\left[\overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0)\right]^t$$

Aún no conociendo el vector gradiente, se sabe que será un vector resultante de multiplicar (3/5,4/5), dirección de máximo crecimiento, por una constante k positiva, k>0. Si k =1, el vector gradiente coincide con el vector (3/5,4/5). La derivada direccional en la dirección de máximo crecimiento resulta:

$$D_{\overline{\nabla f}(x_0,y_0)} f(x_0,y_0) = k\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = k\,\frac{9+16}{25} = k > 0.$$

b) Una dirección de crecimiento nulo en (x_0, y_0).
Como f es diferenciable, la derivada direccional en el punto (x_0, y_0) en cualquier dirección de R^2 existe y es igual al vector gradiente de la función en ese punto por el versor dirección. La derivada direccional en un punto en una dirección de crecimiento nulo es nula. De igualar a cero la derivada direccional se obtiene la ecuación que cumplirá toda dirección de crecimiento nulo. Bastará con determinar una solución de dicha ecuación para calcular una dirección de crecimiento nulo. También, cualquier vector ortogonal al vector que indica la dirección de máximo crecimiento, (3/5, 4/5) es válido.

$$D_{(u_1,u_2)} f(x_0,y_0) = \left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{3u_1+4u_2}{25} = 0 \rightarrow 3u_1+4u_2 = 0.$$

Por ejemplo, el vector (1, -3/4) indica una dirección de crecimiento nulo.

Condiciones suficientes de diferenciabilidad

Teorema 5.7: Sea $f: A \subseteq R^n \to R,\ A\ abierto$, tal que, en una bola $B(\overline{X}_0, r) \subset A$, existen las funciones derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ para $i=1,\ldots,n$ y todas ellas continuas en el punto $\overline{X}_0$, entonces la función f es diferenciable en $\overline{X}_0$.

La demostración de este teorema no será desarrollada. [3]
La condición del enunciado *no es necesaria* para la diferenciabilidad; es decir, una función puede ser diferenciable en un punto, tener derivadas definidas en todo punto de una bola con centro en ese punto y ser discontinuas en él.

Ejemplo 5.9: La función $f: R^2 \to R \ / \ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sen\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua en (0,0) (existe el límite de *f* en (0,0) y vale cero, ya que se trata del producto entre un infinitésimo y una función acotada), y existen las derivadas parciales en una bola $B((0,0),r)$, pero no son continuas en ese punto. No obstante *f* es diferenciable en (0,0) (admite plano tangente en dicho punto cuya ecuación es z = 0) Verifíquelo!!

[3] Para quien se sienta interesado en la demostración de este teorema se sugiere consultar la bibliografía propuesta por la Cátedra.

Aplicando la definición de derivada parcial se obtiene $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

Además, $\forall (x,y)\neq(0,0)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+(x^2+y^2)\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right].\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.2x\right)=$$

$$=2x sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]$$ y, en forma análoga se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]$$

En ambos casos, el límite para $(x,y)\to(0,0)$ del segundo término no existe ya que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

pues si la función se restringe al conjunto $S=\left\{(x,y)\in R^2\ /\ y=x\right\}$, resulta:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|\sqrt{2}}$ cuyos límites laterales son diferentes. Por lo tanto, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}$. De la misma forma, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}$, por lo cual $f\notin C^1(0,0)$

Este teorema establece una condición suficiente tan utilizada en la práctica por su simplicidad, que sus hipótesis sirven para caracterizar las llamadas funciones de clase uno

Definición 5.6: Funciones de clase uno.

Una función $f:A\subseteq R^n\to R$, A *abierto* es ***diferenciable con continuidad*** o ***continuamente diferenciable*** en A si existen las funciones derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ para $i=1,\ldots,n$ y todas ellas continuas en A. Se denota $C^1(A)$ al conjunto de todas las funciones continuamente diferenciables sobre *A*, por esta razón se las denomina también ***funciones de clase uno*** en A. ($f\in C^1(A)$)

Definición 5.6: Funciones de clase *m*.

Una función $f:A\subseteq R^n\to R$, A *abierto* se dice es ***de clase m*** en el abierto *A* ($f\in C^m(A)$) si lo es en cada uno de sus puntos, es decir.
Existen todas las funciones derivadas parciales hasta el orden *m* en *A*, y
Las funciones derivadas parciales de orden *m* son continuas en *A*.
Naturalmente, al ser continuas las derivadas parciales de orden *m* existen y son continuas todas las derivadas parciales de orden menor que *m*.

Para tener en cuenta...
Si la función *f* admite derivadas parciales de todo orden y son continuas en *A*, se dice que *f* ***es de clase*** ∞ en *A*.
Se escribe ($f \in C^{\infty}(A)$)
En resumen, la forma más económica de estudiar el dominio de diferenciabilidad de una función escalar consiste en hallar los puntos en los que están definidas todas sus funciones derivadas parciales, para determinar posteriormente en cuáles de ellos son continuas. Así, la función es diferenciable en estos puntos. En aquellos puntos en los que existen las derivadas parciales y éstas no son funciones continuas, es necesario analizar directamente la diferenciabilidad según la definición, pues se carece de información (puede ser que la función sea diferenciable o no).
Por otra parte, en los puntos en los que la función no es continua o no tiene todas las derivadas direccionales, tampoco es diferenciable.

Observación importante: Es importante recalcar que el gradiente de una función en un punto sólo está definido si la función es diferenciable en dicho punto, lo cual ya ha sido mencionado más arriba. La mera existencia del vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{X}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{X}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{X}_0)\right)$ no es suficiente para que se le otorgue el nombre de gradiente, dado que ya hemos visto que hay funciones que admiten todas las derivadas direccionales en un punto y aún así no son diferenciables en dicho punto. El motivo de esta particular exigencia es que el vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{X}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{X}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{X}_0)\right)$ verifica unas propiedades cuando la función es diferenciable que de otro modo no verifica. Para poder distinguir una situación de otra se reserva el término gradiente para los vectores $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{X}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{X}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{X}_0)\right)$ asociados a funciones diferenciables en el punto $\overline{X}_0$.

Ejemplo 5.10: Se supone que una montaña tiene forma de un paraboloide elíptico *z* = *c* - *ax*^{2} - *by*^{2} , donde *a*, *b* y *c* son constantes positivas, *x* e *y* son las coordenadas este-oeste y norte-sur, y *z* es la altitud sobre el nivel del mar (*x*, *y* y *z* están medidas en metros). En el punto (1,1), ¿en qué dirección aumenta más rápido la altitud? Si se suelta una piedra en (1,1), ¿en qué dirección comenzará a rodar?

La función $z = f(x,y) = c - ax^2 - by^2$ es polinómica, de modo que admite derivadas parciales continuas en todo R^2, por lo tanto *f* es diferenciable en (1,1). Se ha visto con anterioridad que una función aumenta más rápidamente en la dirección del vector gradiente, y disminuye más rápidamente en la dirección opuesta al mismo. En este caso:

$$\nabla f(x;y) = (-2ax;-2by) \Rightarrow \nabla f(1;1) = (-2a;-2b) \Rightarrow \mathbf{u} = \frac{\nabla f(1;1)}{\|\nabla f(1;1)\|} = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Ésa es la dirección de máximo crecimiento. La piedra rodará en la dirección en la cual más rápidamente disminuya la altura, es decir, la opuesta a la recién hallada:

Máximo decrecimiento $\Rightarrow \mathbf{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Ejemplo 5.11: Calcular $F'(\vec{X}_0;\check{v})$ siendo $F(x,y) = x^2 - 2xy$; $\overline{X}_0$=(1;1) y $\check{v} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Como F es polinómica, es posible asegurar que tiene derivadas parciales continuas ($F \in C^1(R^2)$) y, en consecuencia, es diferenciable en $\overline{X}_0$, y, por lo tanto, es válido calcular la derivada direccional empleando el vector gradiente.

$$\left.\begin{array}{l} F'_x = 2x-2y \;\Rightarrow F'_x(\overline{X}_0)=0 \\ F'_y = -2x \;\Rightarrow F'_y(\overline{X}_0) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{\nabla F}(\overline{X}_0) = (0;-2)$$

Resulta: $F'(\vec{X}_0;\check{v}) = \overrightarrow{\nabla F}(\overline{X}_0)\cdot \check{v} = (0,-2)\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

Ejemplo 5.12: Dados los siguientes campos escalares y el punto $\vec{X}_o$ que en cada caso se indica, se desea hallar la o las direcciones en las que la derivada direccional en $\vec{X}_o$ es máxima .

$F(x;y) = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{y}$ en $\vec{X}_o$ =(2,-2)

$$\left.\begin{array}{l} F'_x = \frac{-1}{x^2} - \frac{2x}{y} \\ F'_y = \frac{x^2}{y^2} \end{array}\right\}$$

Son continuas en $\vec{X}_o$,la dirección de máxima derivada está dada por el vector gradiente en $\vec{X}_o$

$$\overrightarrow{\nabla F}(\vec{X}_o) = \left(-\frac{5}{2},1\right)$$

Luego la dirección de máxima derivada es $\check{v} = \dfrac{\nabla F(\vec{X}_o)}{\left\|\nabla F(\vec{X}_o)\right\|} = \dfrac{\left(\frac{-5}{2};1\right)}{\frac{\sqrt{29}}{2}} = \left(\frac{-5}{\sqrt{29}};\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$

Ejemplo 5.13: ¿Dónde intersecta al eje *z* el plano tangente a la gráfica de la superficie $z = f(x,y) = e^{x-y}$ en (1; 1; 1)?
La ecuación del plano tangente expresado en términos de las derivadas parciales en un punto (x_0; y_0; z_0) es:

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0; y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0; y_0)(y - y_0)$$

En este caso (x_0; y_0; z_0) = (1; 1; 1) y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(x_0; y_0) = e^{0-0} = 1$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{x-y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(x_0; y_0) = -e^{0-0} = -1$$

Y, reemplazando en la ecuación del plano,

$$z = 1 + 1\cdot(x-1) - 1\cdot(y-1) = x - y + 1$$

En el eje *z* resulta, *x* = *y* = 0, y por lo tanto el plano tangente intersecta a ese eje en *z* = 1

Nótese que, para esta función, las derivadas parciales son continuas en (1,1), en consecuencia, $f \in C^1$ en el punto (1,1), de modo que *f* es diferenciable en (1,1) y así tiene sentido la existencia del plano tangente a su gráfica por ese punto.

Propiedades de las funciones diferenciables

Sean $\overline{f}$ y $\overline{g}$ dos funciones vectoriales tales que $\overline{f}, \overline{g} : A \subset R^n \to R^m$ A *abierto y* $\overline{X}_0 \in A$ ambas diferenciables en $\overline{X}_0$, entonces se verifica:

1. $\overline{f} + \overline{g}$ es diferenciable en $\overline{X}_0$ y además $D\left(\overline{f} + \overline{g}\right)_{(\overline{X}_0)} = D\overline{f}_{(\overline{X}_0)} + D\overline{g}_{(\overline{X}_0)}$ y sus matrices jacobianas son $J\left(\overline{f} + \overline{g}\right)_{(\overline{X}_0)} = J\overline{f}_{(\overline{X}_0)} + J\overline{g}_{(\overline{X}_0)}$
2. $\lambda\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{X}_0$ y $D(\lambda\overline{f})_{(\overline{X}_0)} = \lambda D\overline{f}_{(\overline{X}_0)}$ $\lambda \in R$ y $J(\lambda\overline{f})_{(\overline{X}_0)} = \lambda J\overline{f}_{(\overline{X}_0)}$
3. Sean f y g dos funciones escalares tales que $\overline{f}, \overline{g} : A \subset R^n \to R$ A *abierto y* $\overline{X}_0 \in A$, ambas diferenciables en $\overline{X}_0$, entonces se verifica:

a) $f.g$ es diferenciable en $\overline{X}_0$ y $\overrightarrow{\nabla(f.g)}_{(\overline{X}_0)} = \overrightarrow{\nabla f}_{(\overline{X}_0)} \cdot g_{(\overline{X}_0)} + f_{(\overline{X}_0)} \cdot \overrightarrow{\nabla g}_{(\overline{X}_0)}$

b) Si $g_{(\overline{X}_0)} \neq 0$ entonces la función $\frac{f}{g}$ es diferenciable en el punto $\overline{X}_0$ y se verifica:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right)_{(\overline{X}_0)} = \frac{\overrightarrow{\nabla f}_{(\overline{X}_0)} \cdot g_{(\overline{X}_0)} - f_{(\overline{X}_0)} \cdot \overrightarrow{\nabla g}_{(\overline{X}_0)}}{g^2_{(\overline{X}_0)}}$$

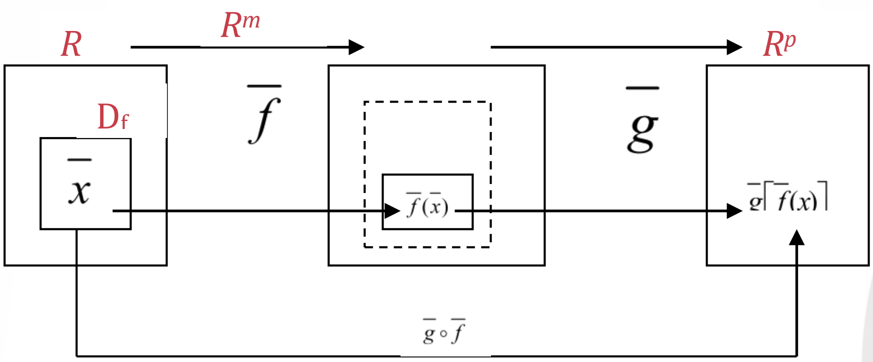
En forma análoga a lo que sucede con la continuidad, la diferenciabilidad se preserva cuando se efectúan operaciones elementales.

Funciones compuestas

Sean las funciones $\overline{f}: A \subseteq R^n \to R^m \;/\; A \text{ abierto y } \overline{g}: B \subseteq R^m \to R^p \;/\; B \text{ abierto y } \overline{f}(A) \subseteq B$. De esta forma tiene sentido definir la composición de $\overline{f}$ y $\overline{g}$, estando bien definida la función compuesta:

$$\overline{\varphi} = \overline{g} \circ \overline{f}: A \subseteq R^n \to R^p \;/ \left(\overline{g} \circ \overline{f}\right)_{(\bar{x})} = \overline{g}\left[\overline{f}(\bar{x})\right]$$

En un diagrama, resulta:



Recordemos en primer lugar cómo funcionaba la regla de la cadena para las funciones reales de una variable real para derivar la función compuesta de dos funciones derivables. Es decir, si $f(x)$ es derivable en x_0 y $g(x)$ es derivable en $f(x_0)$, entonces $(g \circ f)_{(x)}$ también es derivable en x_0 y se verifica

$$(g \circ f)'_{(x_0)} = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

De manera general, estas expresiones son válidas sustituyendo las derivadas ordinarias por las matrices jacobianas correspondientes.

Teorema 5.8: **Derivación de funciones compuestas. La regla de la cadena.**
Sean las funciones $\overline{f}: A \subseteq R^n \to R^m \;/\; A \text{ abierto y } \overline{g}: B \subseteq R^m \to R^p \;/\; B \text{ abierto y } \overline{f}(A) \subseteq B$. Si $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{X}_0 \in A$, y $\overline{g}$ es diferenciable en $\overline{y}_0 = \overline{f}\left(\overline{X}_0\right) \in B$,entonces la función compuesta $\overline{\varphi} = \overline{g} \circ \overline{f}: A \subseteq R^n \to R^p$ es diferenciable en $\overline{X}_0$ y se verifica $d\overline{\varphi}_{\bar{x}_0} = d\left(\overline{g} \circ \overline{f}\right)_{(\overline{X}_0)} = d\overline{g}_{\left[\overline{f}(\overline{X}_0)\right]} \circ d\overline{f}_{(\overline{X}_0)}$.(la diferencial de la función compuesta es la composición de las diferenciales). Siendo su expresión matricial mediante matrices Jacobianas:$J\vec{\varphi}(\vec{x}_0) = J\left(\vec{g} \circ \vec{f}\right)(\vec{x}_0) = J\vec{g}\left[\vec{f}(\vec{x}_0)\right].J\vec{f}(\vec{x}_0)$ donde el punto es el producto matricial.

Ejemplo 5.14: Sean las funciones $\overline{f}: R^3 \to R^2 / \overline{f}(x_1,x_2,x_3) = \left(e^{x_1} - x_2, x_1^2 + 2x_2 + x_3\right)$, $D_{\overline{f}} = R^3$. $\overline{g}: R^2 \to R^2 / \overline{g}(y_1,y_2) = \left(y_1 sen y_2, y_1^2 + y_2^2\right)$, $D_{\overline{g}} = R^2$.

Analicemos si existe la matriz derivada de la función compuesta, es decir, la matriz que represente a la transformación diferencial de la función compuesta $\overline{\varphi} = \overline{g} \circ \overline{f}$ en el punto (0,0,0):
En primer lugar, se comprueba la existencia de la función compuesta y su diferenciabilidad en el punto (0,0,0), es decir, el cumplimiento de las hipótesis de la regla de la cadena:

La función $\overline{f}$ compuesta con $\overline{g}$ resulta definida así: $\overline{g} \circ \overline{f}: R^3 \to R^2$

$$\overline{f}\left(D_{\overline{f}}\right) = \overline{f}\left(R^3\right) \subseteq R^2 = D_g, \; luego \; \overline{f}\left(D_{\overline{f}}\right) \subseteq D_{\overline{g}}$$

¿Es $\overline{f}$ una función diferenciable en (0,0,0)?
Sí, ya que sus funciones componentes son diferenciables en todos los puntos de R^3, por lo que $\overline{f}$ lo es en todo R^3. La primera es suma de una función exponencial con dominio R^3 y otra polinómica; y la segunda es polinómica. Ambas funciones son de clase C^1 en (0,0,0)
¿Es $\overline{g}$ una función diferenciable en $\overline{f}(0,0,0) = \left(e^0 - 0, \; 0+0+0\right) = (1,0)$?
Sí, ya que sus funciones componentes son diferenciables en todos los puntos de R^2 por lo que $\overline{g}$ lo será en todo R^2. La primera es el producto de una polinómica y una trigonométrica con dominio R^2; y la segunda es polinómica.
Como se cumplen las hipótesis de la regla de la cadena, la función compuesta es diferenciable en el (0,0,0), teniendo como derivada:

$$J(\overline{g} \circ \overline{f})_{(0,0,0)} = J\overline{g}_{\left[\overline{f}(0,0,0)\right]} \cdot J\overline{f}_{(0,0,0)} = J\overline{g}_{(1,0)} \cdot J\overline{f}_{(0,0,0)}$$

Cálculo de $J\overline{f}(0,0,0)$:

$$J\overline{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \nabla \vec{f}_1(x_1,x_2,x_3) \\ \nabla \vec{f}_2(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix}$$

$$\nabla \vec{f}_1(x_1,x_2,x_3) = \left(e^{x_1}, -1, \; 0\right),$$

$$\nabla \vec{f}_2(x_1,x_2,x_3) = (2x_1, \; 2, \; 1).$$

Evaluados en el (0,0,0) resulta:

$$\nabla \vec{f}_1(0,0,0) = \left(e^0, -1, \; 0\right) = (1, -1, \; 0),$$

$$\nabla \vec{f}_2(0,0,0) = (2(0), \; 2, \; 1) = (0, \; 2, \; 1).$$

$$J\overline{f}(0,0,0) = \begin{pmatrix} \nabla \vec{f}_1(0,0,0) \\ \nabla \vec{f}_2(0,0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, el cálculo de $J\overline{g}[\overline{f}(0,0,0)] = J\overline{g}(1,0)$

$$J\overline{g}(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\nabla g}_1(y_1,y_2) \\ \overrightarrow{\nabla g}_2(y_1,y_2) \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{\nabla g}_1(y_1,y_2) = (seny_2, y_1 \cos y_2)$,

$\overrightarrow{\nabla g}_2(y_1,y_2) = (2y_1,\ 2y_2)$.

Evaluados en el punto (1,0) son:

$\overrightarrow{\nabla g}_1(1,0) = (sen(0),\ (1)\ \cos 0) = (0,\ 1)$,

$\overrightarrow{\nabla g}_2(1,0) = (2(1),\ 2(0)) = (2,\ 0)$.

$$J\overline{g}(1,0) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\nabla g}_1(1,0) \\ \overrightarrow{\nabla g}_2(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz Jacobiana correspondiente a la función compuesta es:

$$J(\vec{g}\circ\vec{f})(0,0,0) = J\vec{g}\left(\vec{f}(0,0,0)\right).J\vec{f}(0,0,0) = J\vec{g}(1,0).J\vec{f}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.15: Si $z = f(x,y) = sen(xy)$ se desea calcular $\frac{dz}{dt}$, sabiendo que $x = e^{2t}$; $y = e^{3t}$

En primer lugar, se construye una función vectorial con los datos $\overline{g}: R \to R^2$ / $\overline{g}(t) = (e^{2t}, e^{3t})$

La función compuesta $z(t) = f \circ \overline{g}_{(t)}: R \to R$ es una función real de una variable real, por eso se trata de una derivada total y no una derivada parcial (la función compuesta depende de una sola variable)

f es diferenciable en R^2 por tratarse de la composición de funciones diferenciables (una función trigonométrica y una polinómica) las funciones componentes de $\overline{g}$ son diferenciables en *R* por tratarse de funciones exponenciales diferenciables en *R*, luego, la función compuesta existe tal que

$$\overline{g}\left(D_{\overline{g}}\right) = (R^+ \times R^+) \subset D_f = R^2$$

La función compuesta $z(t) = f \circ \overline{g}_{(t)}: R \to R$ es diferenciable en *R*, y por tanto:

$$\frac{dz}{dt} = z'(t) = \vec{\nabla} f[\vec{g}(t)].J\vec{g}(t) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{(e^{2t},e^{3t})} . \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} = (ycos(xy) \quad xcos(xy))|_{(e^{2t},e^{3t})}. \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} =$$

$$= (e^{3t}cos(e^{5t}) \quad e^{2t}cos(e^{5t})).\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} = 2e^{5t}cos(e^{5t}) + 3e^{5t}cos(e^{5t}) = 5e^{5t}cos(e^{5t})$$

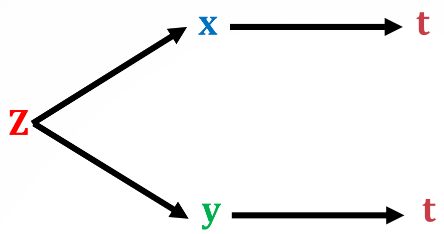
En este caso se trata de la composición de una función de dos variables $f(x,y)$ donde a su vez cada una de estas variables dependen de una variable t. Esto significa que z es también una función que depende de t:

$$z = f(x(t), y(t))$$

Supongamos que f es una función diferenciable. La regla de la cadena que nos da la diferencial de z como función de t es:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

En caso como este, es útil diseñar un árbol de dependencia**:**



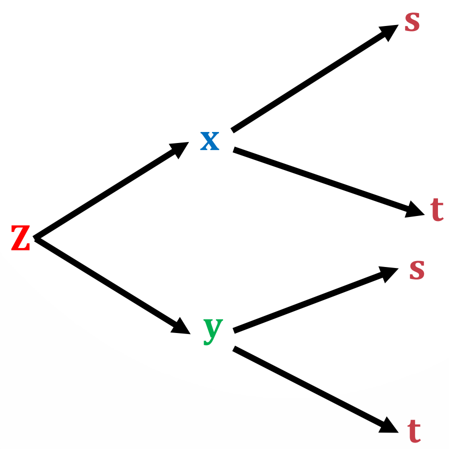
Segundo Caso: considerando ahora el caso donde $z = f(x, y)$ es una función diferenciable y donde a su vez $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ son funciones diferenciables de s y t. Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Se observa que estas dos derivadas parciales son las componentes del vector gradiente de la función compuesta, que es la matriz jacobiana de su diferencial

Árbol de Dependencia:



Ejemplo 5.16:
Si $z = f(x,y) = x^2y - y^4x^3$, donde $x = t^3 + 2s$ e $y = s.lnt$, las derivadas parciales de z respecto de s y t son:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s} = (2xy - 3y^4x^2)2 - (x^2 - 4y^3x^3).lnt$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} = (2xy - 3y^4x^2)3t^2 - (x^2 - 4y^3x^3).\frac{s}{t}$$

Sustituyendo los valores de x e y en función de t:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2[(t^3 + 2s).s.lnt - 3(s.lnt)^4(t^3 + 2s)^2] - [(t^3 + 2s)^2 - 4(s.lnt)^3(t^3 + 2s)^3].lnt$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = [(t^3 + 2s).s.lnt - 3(s.lnt)^4(t^3 + 2s)^2]3t^2 - [(t^3 + 2s)^2 - 4(s.lnt)^3(t^3 + 2s)^3].\frac{s}{t}$$

Calcule la matriz Jacobiana de la función compuesta y compruebe que sus componentes son las derivadas parciales recientemente obtenidas (Sugerencia, organice las dos funciones que se van a componer estableciendo dominio y rango de cada una de ellas y obtenga la matriz de la diferencial mediante el producto matricial de las Jacobianas) y comparta el resultado en el foro.

Ejemplo 5.17: Para la función $\overline{f}(x,y,z) = (x^2 + yz^2, sen(x^2 + y^2))$, calculamos la matriz Jacobiana en el punto (1,1,1).:

Para ello, $\begin{matrix} f_1(x,y,z) = x^2 + yz^2 \\ f_2(x,y,z) = sen(x^2 + y^2) \end{matrix}$, cuyas derivadas parciales son continuas en todo punto de su dominio, entonces, existe la matriz Jacobiana de dimensión 2x3 por ser $\overline{f}$ diferenciable en (1,1,1) (al ser de clase C^1 en ese punto)

$$J\overline{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & z^2 & 2yz \\ 2x\cos(x^2 + y^2) & 2y\cos(x^2 + y^2) & 0 \end{pmatrix}$$ y evaluada en el punto (1,1,1) es:

$$J\overline{f}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2\cos(2) & 2\cos(2) & 0 \end{pmatrix}$$

Con anterioridad se han expresado las propiedades del vector gradiente, y, entre ellas, la propiedad de ortogonalidad a los conjuntos de nivel que se ha enunciado sin demostrar. A continuación se desarrolla la prueba del siguiente teorema.

Teorema 5.9:

Si $f: A \subseteq R^n \to R$ A *abierto* es diferenciable en $\overline{X}_0 \in A$ y $f(\overline{X}_0) = c$, entonces el vector gradiente $\nabla f(\overline{X}_0)$ es ortogonal al conjunto de nivel $S_c = \left\{ \overline{x} \in A \;/\; f(\overline{x}) = c \right\}$ en el punto $\overline{X}_0$. (significa que es ortogonal a cada vector tangente a S_c *en* $\overline{X}_0$.

Si $\vec{u} \in R^n$ es tangente a S_c *en* $\overline{X}_0$ existe un camino $\overline{r}: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to S_c$ con $\overline{r}(t_0) = \overline{X}_0$ y $\overline{r}'(t_0) = \vec{u}$

La función $\varphi(t) = f\left[\overline{r}(t)\right] = c$ en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Así, por la regla de la cadena resulta:

$\varphi'(t_0) = df[\vec{r}(t_0)].\vec{r}'(t_0) = \vec{\nabla} f[\vec{r}(t_0)].\vec{r}'(t_0) = \vec{\nabla} f[\vec{x}_0].\vec{u}=0$

en consecuencia el vector gradiente es ortogonal al vector tangente al conjunto de nivel, y así el gradiente es ortogonal al conjunto de nivel S_c *en* $\overline{X}_0$. En la figura 5.5 se muestra la ortogonalidad del vector gradiente y las líneas de nivel de una función escalar $z = f(x, y)$.

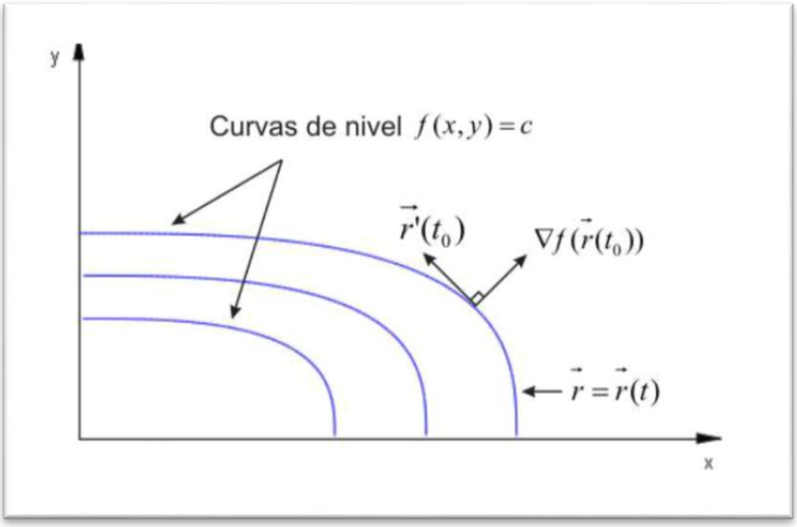


Figura 5.5: Ortogonalidad del vector gradiente y las líneas de nivel

De la misma manera, el vector gradiente de una función escalar de tres variables independientes $w = F(x, y, z)$ en un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel S definida por la ecuación $F(x, y, z) = c$ que pasa por *P*.

Si $\overline{r}(t) = \big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big)$ es cualquier curva sobre la superficie S que pasa por P en un instante t_0, entonces $F(\overline{r}(t)) = c$ y nuevamente $\overrightarrow{\nabla F}(x_0, y_0, z_0) \cdot \overline{r}'(t_0) = 0$ (I)

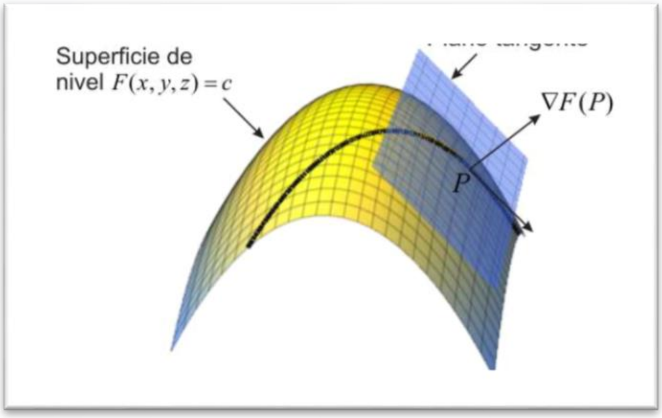


Figura 5.6: Ortogonalidad del vector gradiente y las superficies de nivel

Como la ecuación (I) se verifica para todas las curvas sobre S que pasan por P, resulta natural definir el plano tangente a S en el punto P como el plano que pasa por $P=(x_0,y_0,z_0)$ y que tiene por vector normal el gradiente $\overrightarrow{\nabla F}(x_0,y_0,z_0)$, por lo que su ecuación es: $(\vec{x}-P)\cdot\overrightarrow{\nabla F}(P)=0$ y su expresión cartesiana, tal como se puede observar en la figura 5.6.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0).(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0).(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0).(z-z_0)=0 \quad \text{(II)}$$

Es interesante observar que como la gráfica de una función de dos variables $z = f(x,y)$ puede ser considerada como la superficie de nivel $F(x,y,z) = 0$ donde $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, al aplicar la ecuación (I) a esta F en particular, se obtiene la ecuación (II)

Ejemplo 5.18: En la figura 5.7 se muestran las curvas de nivel de la función $f(x,y)=(x^2+y^2).e^{-x^2-y^2}$ y el campo de gradiente asociado, y se puede observar la ortogonalidad del campo con las líneas de nivel.

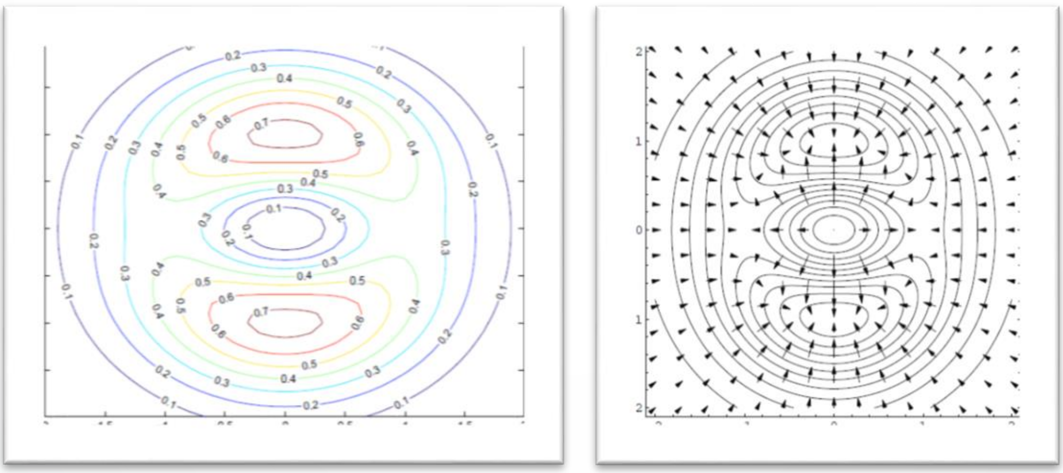


Figura 5.7: Curvas de nivel y campos de gradientes

Probando que f no es diferenciable en un punto

¿Cómo se demuestra que una función escalar no es diferenciable?
En primer lugar, a partir de todas las herramientas presentadas para el análisis de la diferenciabilidad, para que una función sea diferenciable debe cumplir necesariamente algunas propiedades. Si se comprueba que alguna de estas propiedades falla, entonces queda probado inmediatamente que *f* no puede ser diferenciable.
Por ejemplo: "Diferenciabilidad implica continuidad".
Por lo tanto, si *f* no es continua en $\overline{X}_0$, entonces no es diferenciable en ese punto.

Se conoce el resultado que "Diferenciabilidad implica derivabilidad".
Luego, *si no existen la derivada de f en* $\overline{X}_0$ *en alguna dirección (incluyendo las derivadas parciales), entonces f no es diferenciable en ese punto.*

En el caso de que las condiciones 1 y 2 se cumplan, aún no será posible determinar si la función *f* es diferenciable en el punto $\overline{X}_0$. Luego, se puede analizar si $f \in C^1$ *en* $\overline{X}_0$, es decir si admite las funciones derivadas parciales continuas en ese punto. En caso afirmativo, puede establecerse que *f* es diferenciable en $\overline{X}_0$. Si $f \notin C^1$ *en* $\overline{X}_0$, esta condición suficiente no sirve para probar que *f* es o no diferenciable. En este caso deberá probarse la diferenciabilidad empleando la definición, es decir mediante la comprobación de la existencia y validez de límite:

$$\lim_{\overline{h}\to 0} \frac{\left\| f(\overline{X}_0+\overline{h})-f(\overline{X}_0)-Df(\overline{X}_0).\overline{h} \right\|}{\left\|\overline{h}\right\|}=0.$$

Si este límite no existe, o bien no vale cero, entonces la función *f* no es diferenciable en el punto $\overline{X}_0$. Nótese que $Df(\overline{X}_0)$ es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de *f* en el punto $\overline{X}_0$. Como ya ha sido expresado con anterioridad, este vector puede existir y, sin embargo no verificar este límite. En caso de satisfacerlo, se trata del vector gradiente de *f* en el punto $\overline{X}_0$.

Para tener en cuenta…
Este mismo análisis se realizará para determinar si una función vectorial $\overline{f}$ es diferenciable en el punto $\overline{X}_0$, ya que se investiga la diferenciabilidad de cada una de sus funciones componentes que son funcione escalares.

Comentarios adicionales sobre derivabilidad y diferenciabilidad.

Al analizar funciones escalares de varias variables independientes ha sido preciso distinguir entre las nociones de derivabilidad (existencia de las derivadas direccionales) y diferenciabilidad (existencia del plano tangente como una buena aproximación de la función en las cercanías de un punto).
La derivabilidad es una noción muy débil, de la que se pueden deducir muy pocas consecuencias. La existencia de derivadas parciales depende exclusivamente del comportamiento de *f* en dos direcciones del plano. Y, tal como se ha visto, esa información puede ser muy poco representativa del comportamiento global de la función.
En particular: *f* puede tener derivadas parciales en un punto, sin ser ni siquiera continua en ese punto.