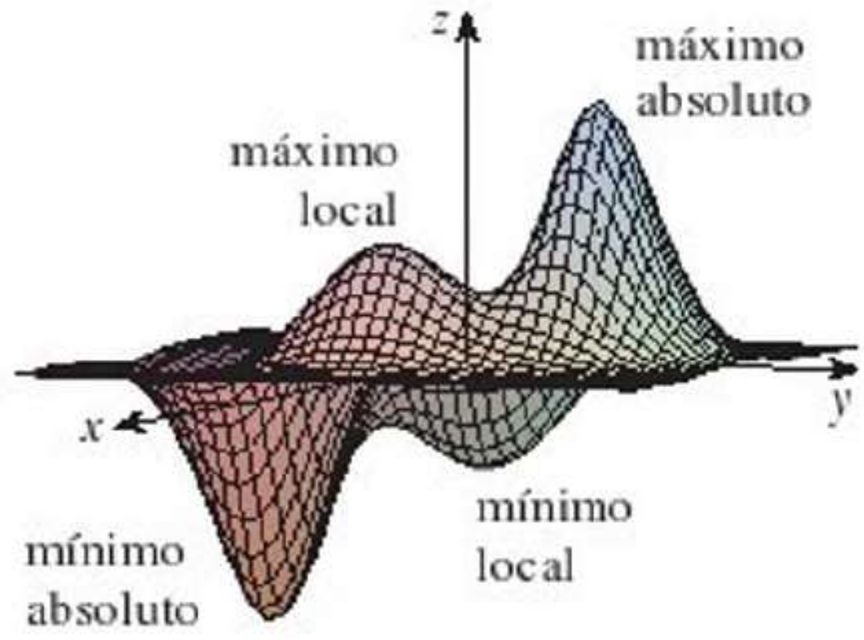
TP N° 9 – Extremos de funciones de dos y de tres variables independientes

Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017). Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018)

1. *Temario*

- Extremos de funciones de varias variables
- Multiplicadores de Lagrange

2. *Resumen teórico*



Extremos relativos

La función $z = f(x,y)$, de dos variables independientes, tiene un máximo local ó relativo en (a,b) si existe una región rectangular abierta R que contiene a (a,b) tal que $f(x,y) \leq f(a,b), \forall (x,y) \in R$.

La función $z = f(x,y)$, de dos variables independiente, tiene un mínimo local ó relativo en (a,b) si existe una región rectangular abierta R que contiene a (a,b) tal que $f(x,y) \geq f(a,b), \forall (x,y) \in R$.

Punto crítico

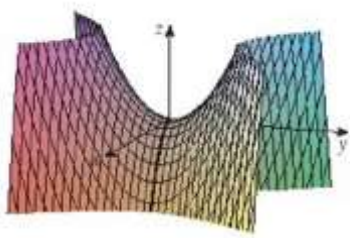
El punto (a, b) perteneciente al dominio de $z = f(x, y)$, es un punto crítico de la función si:

i) $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, ó
ii) $f_x(a, b) \nexists$ ó $f_y(a, b) \nexists$

Condición necesaria para la existencia de extremo relativo

Si $z = f(x, y)$ tiene un extremo relativo en (a, b), entonces (a, b) es un punto crítico de $f(x, y)$.

Esta condición es necesario, pero no es suficiente ya que podría tratarse, por ejemplo, de un punto de ensilladura (o punto de silla).



Criterio de la derivada segunda para la clasificación de puntos críticos

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables independientes, con derivadas parciales segundas continuas en una región rectangular abierta R que contiene a (a, b), con $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$

Sea $g(x, y) = f_{xx}(x, y). f_{yy}(x, y) - \left[f_{xy}(x, y)\right]^2, \forall\ (x, y)$ en R.

i) Si $g(a, b) > 0$, $f(x, y)$ tiene un extremo relativo en (a, b).
a. Si $f_{xx}(a, b) < 0$ se trata de un máximo relativo.
b. Si $f_{xx}(a, b) > 0$ se trata de un mínimo relativo.
ii) Si $g(a, b) < 0$ no hay extremo relativo en (a, b). Se trata de un punto de ensilladura ó punto estacionario.
iii) Si $g(a, b) = 0$, el criterio no decide.

Extremos absolutos

La función $z = f(x, y)$ tiene un máximo absoluto en (a, b) si $f(x, y) \leq f(a, b)$ en todo su dominio.

La función $z = f(x, y)$ tiene un mínimo absoluto en (a, b) si $f(x, y) \geq f(a, b)$ en todo su dominio.

Teorema de existencia de extremos absolutos

Si $z = f(x, y)$ es un función continua en una región cerrada y acotada R, entonces tiene un máximo absoluto $f(a, b)$ y un mínimo absoluto $f(c, d)$ en puntos (a, b) y (c, d) de R y se cumple:

$$f(c, d) \leq\ f(x, y)\ \leq f(c, d);\ \forall\ (x, y) \in R$$

.

Procedimiento para encontrar extremos absolutos

Para encontrar los valores máximos y mínimos absolutos de una función $z = f(x, y)$ continua sobre un conjunto cerrado y acotado R se procede del siguiente modo:

i) Se calculan los valores de la función en los puntos críticos de $f(x, y)$ en el interior de R

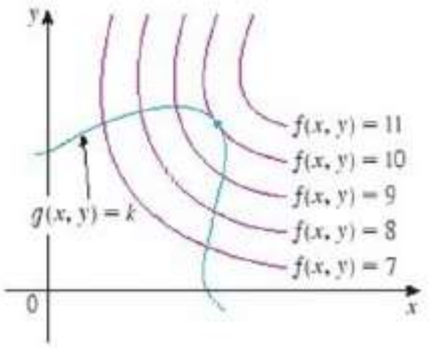
ii) Se determinan los valores extremos de $f(x,y)$ sobre la frontera de R
iii) El más grande de los valores anteriores es el valor máximo absoluto y el más pequeño de los valores anteriores es el valor mínimo absoluto.

Teorema de Lagrange

Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ funciones con derivadas parciales continuas. Si $f(x,y)$ tiene un máximo ó mínimo en (x_0,y_0) cuando está sometido a la restricción $g(x,y) = 0$, y $\nabla g(x_0,y_0) \neq \mathbf{0}$. Entonces existe un número real λ (denominado Multiplicador de Lagrange) tal que:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda . \nabla \mathrm{g}(x_0,y_0)$$

Para interpretar geométricamente la expresión anterior, nótese que en (x_0,y_0) la curva de la restricción $g(x,y) = 0$ es tangente a una curva de nivel pasante por (x_0,y_0), lo cual coincide con el hecho de que allí sus vectores gradientes (normales a las curvas) son paralelos.



Para aplicar el método y encontrar (x_0,y_0) se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda . g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda . g_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

No en todos los puntos obtenidos habrá valores extremos, ya que el teorema es condición necesaria, pero no suficiente. Si $f(x,y)$ tiene un máximo (ó mínimo), este será el mayor (ó menor) de los valores de la función en esos puntos.

Generalización a funciones de tres variables

Con una restricción

Sean $f(x,y,z)$ y $g(x,y,z)$ dos funciones de tres variables independientes, con derivadas parciales continuas. Si $f(x,y,z)$ tiene un máximo ó mínimo en (x_0,y_0,z_0) cuando está sometido a la restricción $g(x,y,z) = 0$, y $\nabla g(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que:

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda . \nabla \mathrm{g}(x_0,y_0,z_0)$$

Interpretación geométrica: en este caso, si $f(x,y,z)$ alcanza un valor extremo en (x_0,y_0,z_0) cuando está restringida a la superficie de nivel $g(x,y,z) = 0$ pasante por (x_0,y_0,z_0), en dicho punto ambas superficies serán tangentes entre sí, por cual sus respectivos vectores normales $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ y $\nabla \mathrm{g}(x_0,y_0,z_0)$ serán colineales.

Con dos restricciones

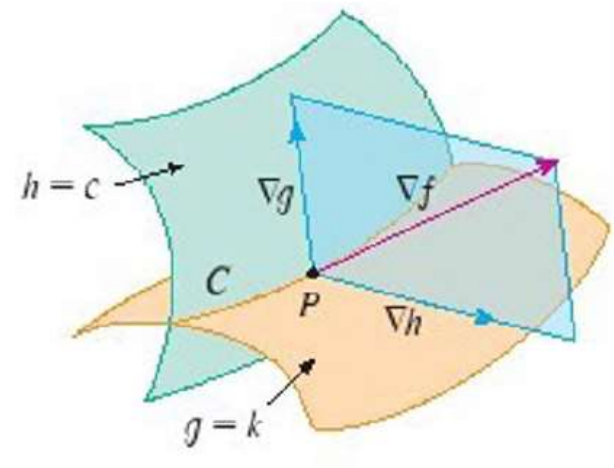
Sean $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ y $h(x,y,z)$ funciones de tres variables independientes, con derivadas parciales continuas. Si $f(x,y,z)$ tiene un máximo ó mínimo en (x_0,y_0,z_0) cuando está sometido a las restricciones $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$, y $\nabla g(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$ y $\nabla \mathrm{h}(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existen números reales λ y μ (Multiplicadores de Lagrange) tal que:

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda.\nabla \mathrm{g}(x_0,y_0,z_0) + \mu.\nabla \mathrm{h}(x_0,y_0,z_0)$$

Geométricamente $g(x,y,z) = 0$ es una superficie de nivel de $g(x,y,z)$. Del mismo modo $h(x,y,z) = 0$ es una superficie de nivel de $h(x,y,z)$. Ambas superficies se intersectan en la curva C y el punto $(x_0,y_0,z_0) \epsilon C$. Los vectores $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ y $\nabla h(x_0,y_0,z_0)$ son ambos ortogonales a la curva C y en consecuencia están contenidos en un plano normal a C.

Si $f(x,y,z)$ alcanza un extremo absoluto en (x_0,y_0,z_0) cuando está restringida a la curva C, y ésta es una curva suave, en dicho punto la curva C será tangente a la superficie de nivel de $f(x,y,z)$ que pasa por(x_0,y_0,z_0) . En consecuencia el vector $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ resultará normal a la curva C y estará contenido en un plano normal a la misma, por lo cual será coplanar con los vectores $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ y $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$. En consecuencia se cumple:

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda.\nabla \mathrm{g}(x_0,y_0,z_0) + \mu.\nabla \mathrm{h}(x_0,y_0,z_0),$$ para algún par de valores reales λ y μ.



3. *Ejercicios resueltos*

1) **Encontrar los puntos críticos de** $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

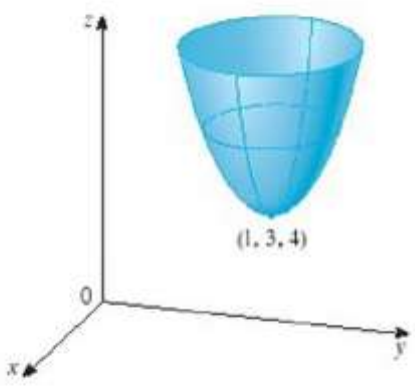
El dominio de $f(x,y)$ es $\mathbb{R}^2$. Calculamos las derivadas parciales:

$$f_x(x,y) = 2x - 2$$
$$f_y(x,y) = 2y - 6$$

Estas derivadas parciales existen en todo el dominio de $f(x,y)$.
Buscamos dónde se anulan:

$$2x - 2 = 0$$
$$2y - 6 = 0$$

Será para $x = 1$, $y = 3$. En consecuencia:



$\boxed{P(1,3) \text{ es punto crítico de } f(x,y)}$.

Analizando $f(x,y)$ vemos que, completando cuadrados, resulta:

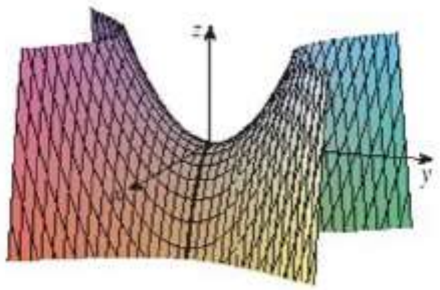
$$f(x,y) = 4 + (x-1)^2 + (y-3)^2$$

La representación gráfica de $f(x,y)$ es un paraboloide circular de eje z y vértice en (1, 3, 4).
Vemos que $f(1,3) = 4$ y que para cualquier punto $(x,y) \neq (1,3)$ la función adquiere valores mayores a 4. Por lo tanto $f(x,y)$ tiene un mínimo relativo en (1,3).

2) **Encuentre los extremos relativos de** $f(x,y) = x^2 - y^2$

El dominio de f es $\mathbb{R}^2$. La representación gráfica de la función es un paraboloide hiperbólico (o silla demontar) de eje z. Puesto que: $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = -2y$, las derivadas parciales existen en todo el dominio de f y el único punto crítico resulta ser $P(0,0)$ donde se anulan ambas derivadas primeras.

En dicho punto, la función toma valor $f(0,0) = 0$.



Por otra parte nótese que para los puntos situados sobre el eje de abscisas, distintos del origen (0,0), la función toma valores positivos, pues:

$f(x,0) = x^2 > 0$, $(si\ x \neq 0)$.

Recíprocamente, para puntos situados sobre el eje de ordenadas, distintos del origen, la función toma valores negativos, pues:

$f(0,y) = -y^2 < 0$, $(si\ y \neq 0)$.

Por lo tanto, todo disco que tenga al punto (0,0) como centro contiene puntos donde $f(x,y)$ toma valores mayores a $f(0,0)$, así como puntos donde $f(x,y)$ toma valores menores a $f(0,0)$. Por lo tanto $f(x,y)$ no tiene en (0,0) un extremo relativo, sino que tiene un punto de ensilladura.

Por tratarse del único punto crítico, $\boxed{f(x,y) \text{ no tiene extremos relativos en su dominio}}$.

3) **Encuentre los extremos relativos de** $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

El dominio de $f(x,y)$ es $\mathbb{R}^2$. Para determinar los puntos críticos, calculamos las derivadas parciales primeras.

$$f_x(x,y) = 4\,x^3 - 4y$$
$$f_y(x,y) = 4\,y^3 - 4x$$

Como las derivadas parciales existen en todo el dominio de $f(x,y)$, buscamos puntos críticos dónde se anulan.
Resulta el sistema de ecuaciones:

$$4\,x^3 - 4y = 0$$
$$4\,y^3 - 4x = 0$$

De la primera ecuación resulta $y = x^3$ que reemplazado en la segunda ecuación resulta $x^9 - x = 0$
Factorizando esta ecuación:

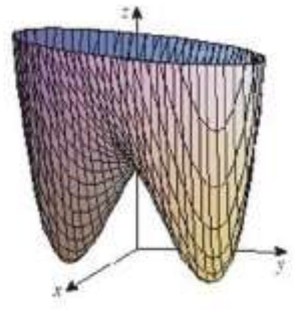
$$x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

que tiene tres raíces reales, $x = 0, x = 1$, $x = -1$, obteniéndose los puntos críticos $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ y $P_3(-1,-1)$.
Para utilizar el criterio de las derivadas parciales segundas, las calculamos:

$f_{xx}(x,y) = 12\,x^2,\ f_{yy}(x,y) = 12\,y^2\ ,\ f_{xy}(x,y) = -\,4$

Como las mismas son continuas en el dominio de $f(x,y)$, se puede aplicar el criterio y calculamos:



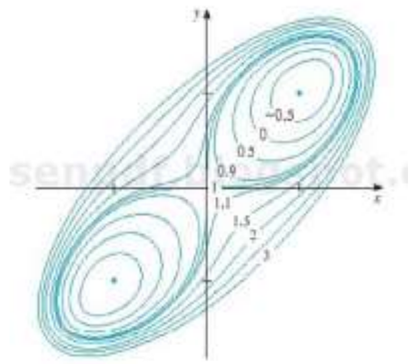
$$g(x,y) = f_{xx}(x,y).f_{yy}(x,y) - \left[f_{xy}(x,y)\right]^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Evaluando en $P_1(0,0)$ resulta $g(0,0) = -16\ < 0$. Entonces en P_1, no hay extremo. $\boxed{P_1(0,0) \text{ es un punto de ensilladura.}}$

Evaluando en $P_2(1,1)$ resulta $g(1,1) = 128 > 0$. Entonces hay extremo relativo en P_2. Como además $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, entonces $\boxed{f(x,y) \text{ tiene un mínimo relativo en } P_2(1,1)}$

Del mismo modo, evaluando en $P_3(-1,-1)$ resulta $g(-1,-1) = 128 > 0$. Entonces hay extremo relativo en P_3. Como además $f_{xx}((-1,-1) = 12 > 0$, entonces $\boxed{f(x,y) \text{ tiene un mínimo relativo en } P_3 - 1,-1)}$

Observando las curvas de nivel vemos que al alejarse de P_2 ó P_3 en cualquier dirección los valores de $f(x,y)$ aumentan, lo que coincide con la existencia de sendos mínimos relativos en dichos puntos. En cambio observando las curvas de nivel cerca de P_1 se observa que $f(x,y)$ aumenta en ciertas direcciones y disminuye en otras, lo que coincide con el hecho de tratarse de un punto de ensilladura.



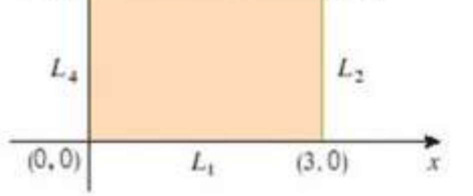
4) **Determine los Extremos Absolutos de la función** $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$, **en la región**

$$\mathrm{R} = \{\,(x,y) \in\ \mathbb{R}^2\ /\ 0 \le x \le 3\,, 0 \le y \le 2\}$$

Como $f(x,y)$ es polinomial, es continua en toda la región R, que es cerrada y acotada. En consecuencia, por el teorema visto anteriormente $f(x,y)$ alcanza valores extremos absolutos en R.
Si alguno de los extremos absolutos se alcanza en el interior de la región, será en algún punto crítico. Por eso, en primer lugar buscamos los puntos críticos en el interior de la región R. Para eso calculamos las derivadas parciales:

$$f_x(x,y) = 2x - 2y$$
$$f_y(x,y) = -2x + 2$$

Igualando ambas a cero, se obtiene el único punto crítico $P_1(1,1)$. Como P_1 pertenece al interior de R, es un punto candidato a que se alcance un extremo en él.



En segundo lugar procedemos a buscar los puntos candidatos a que se alcance un extremo sobre la frontera.
Como la frontera es un rectángulo, procedemos a analizar a $f(x,y)$ sobre cada uno de los lados del rectángulo $L_1,\ L_2\ , L_3\ y\ L_4$.

Para $L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 3 , y = 0\}$

Evaluando $f(x,y)$ sobre L_1, tenemos: $f(x,0) = x^2 = f_1(x)$, con $0 \leq x \leq 3$

Vemos que el problema se redujo a encontrar valores extremos para una función de una variable en un intervalo cerrado y acotado. Procedemos a buscar los puntos candidatos a extremos, buscando puntos críticos en el interior del intervalo y agregando los extremos de dicho intervalo.
Derivando e igualando a cero obtenemos $f_1'(x) = 2x = 0$, que se produce para $x = 0$ valor para el cual $y = 0$. Se trata de uno de los extremos del intervalo y por ello es un punto de interés., Agregamos el otro extremo del intervalo $x = 3$. Como $y = 0$ obtenemos los puntos $P_2(0,0)$ y $P_3(3,0)$.

Para $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 3 , \ 0 \leq y \leq 2\}$

Evaluando $f(x,y)$ sobre L_2, tenemos: $f(3,y) = 9 - 6y + 2y = 9 - 4y = f_2(y)$, con $0 \leq y \leq 3$

Nuevamente el problema se redujo a una función de una variable en un intervalo cerrado y acotado. Por tratarse de una función lineal, $f_2'(y) = -4$, no habrá punto crítico en el interior del intervalo, ya que no existe valor de y que anule la derivada primera..
Agregamos los extremos del intervalo $y = 0$, $y = 2$. Como $x = 3$ obtenemos los puntos $P_3(3,0)$ (ya hallado en el paso anterior) y $P_4(3,2)$.

Para $L_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 3 , y = 2\}$

Evaluando $f(x,y)$ sobre L_3, tenemos: $f(x,2) = x^2 - 4x + 4 = f_3(x)$, con $0 \leq x \leq 3$

Derivando e igualando a cero obtenemos $f_3{}'(x) = 2x - 4 = 0$, que se produce para $x = 2$. Este valor sí está en el interior del intervalo (0,3) por lo cual, como $y = 2$, agregamos el punto $P_5(2,2)$. Agregamos también los extremos del intervalo $x = 0$, $x = 3$. Como $y = 2$ obtenemos los puntos $P_6(0,2)$ y $P_4(3,2)$ (ya hallado en el paso anterior).

Para $L_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 0 , \ 0 \leq y \leq 2\}$

Evaluando $f(x,y)$ sobre L_4, obtenemos: $f(0,y) = 2y = f_4(y)$, con $0 \leq y \leq 3$

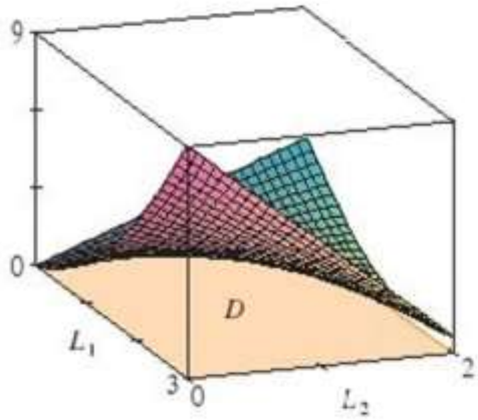
Nuevamente por tratarse de una función lineal, $f_4{}'(y) = 2$, no habrá punto crítico en el interior del intervalo.

Agregamos los extremos del intervalo $y = 0$, $y = 2$. Como $x = 0$ obtenemos los puntos $P_1(0,0)$ y $P_6(0,2)$ (ambos ya hallados en pasos anteriores).

Los extremos absolutos no pueden darse en otro punto que no sea en alguno de los seis encontrados. Como su existencia está garantizada por el teorema, procedemos a evaluar la función en cada uno de ellos, para determinar cuáles son los extremos máximo y mínimo absoluto.

Punto	$f(x,y)$
$P_1(1,1)$	$f(1,1) = 1$
$P_2(0,0)$	$f(0,0) = 0$
$P_3(3,0)$	$f(3,0) = 9$
$P_4(3,2)$	$f(3,2) = 1$
$P_5(2,2)$	$f(2,2) = 0$
$P_6(0,2)$	$P_6(0,2) = 4$

El valor máximo absoluto de $f(x,y)$ es 9 y se alcanza en $P_3(3,0)$
El valor mínimo absoluto de $f(x,y)$ es 0 y se alcanza en $P_2(0,0)$ y en $P_5(2,2)$



5) **Determine los Extremos Absolutos de la función** $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ **sobre la circunferencia** $x^2 + y^2 = 1$

La representación gráfica de $f(x,y)$ es un paraboloide elíptico de eje z y vértice en el origen de coordenadas.

Llamando $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, vemos que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones con derivadas parciales continuas (por ser polinómicas). En consecuencia se puede aplicar el Teorema de Lagrange que afirma que si $f(x,y)$ tiene un máximo ó mínimo en (x_0, y_0) cuando está sometido a la restricción $g(x,y) = 0$, y $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda . \nabla g(x_0, y_0)$

Para encontrar los posibles valores del punto, resolvemos:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda . \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

De dónde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda \, g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda \, g_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

En este caso, calculando las derivadas parciales de $f(x,y)$ y $g(x,y)$, resulta:

$$\begin{cases} 2x = \lambda \, 2x \\ 4y = \lambda \, 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Reescribiendo la primer ecuación, tenemos $2x - \lambda \, 2x = 2x\,(1 - \lambda) = 0$.
En consecuencia, puede ser $x = 0$ ó $\lambda = 1$.

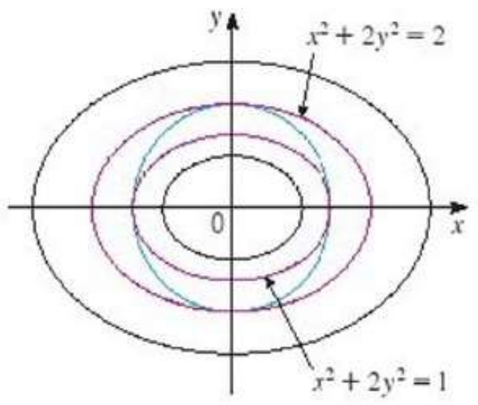
Si $x = 0$, entonces de la tercera ecuación resulta $y = \pm 1$. Se obtienen los puntos $P_1(0,1)$ y $P_2(0,-1)$
Si $\lambda = 1$, la segunda ecuación resulta $4y = 2y$, que sólo se cumple si $y = 0$. Finalmente de la tercera ecuación se obtiene $x = \pm 1$. Se obtienen los puntos $P_3(1,0)$ y $P_4(-1,0)$

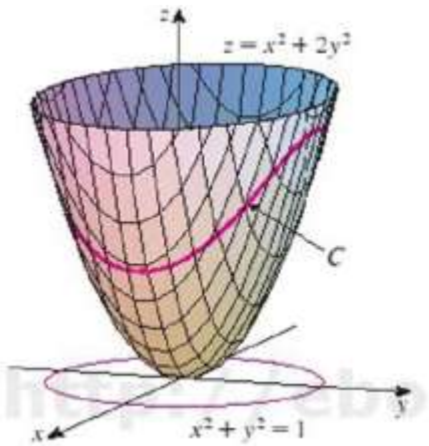
En consecuencia $f(x,y)$ sólo puede tener valores extremos absolutos en alguno de los puntos encontrados. Como $f(x,y)$ es continua y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es una región cerrada y acotada, la existencia de extremos absolutos está asegurada.

Por lo tanto, procedemos a evaluar la función en los puntos hallados:

Punto	$f(x,y)$
$P_1(0,1)$	$f(0,1)=2$
$P_2(0,-1)$	$f(0,-1)=2$
$P_3(1,0)$	$f(1,0)=1$
$P_4(-1,0)$	$f(-1,0)=1$

Entonces, el valor máximo absoluto de $f(x,y)$ sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$ es 2 y se alcanza en $P_1(0,1)$ y $P_2(0,-1)$ y el valor mínimo es 1 y lo alcanza en $P_3(1,0)$ y $P_4(-1,0)$.





6) **Determine los Extremos Absolutos de la función** $f(x,y)=x^2+2y^2$ **sobre el disco** $x^2+y^2\leq 1$

Como $f(x,y)$ es continua y el disco $x^2+y^2\leq 1$ es una región cerrada y acotada, la existencia de extremos absolutos está asegurada.

Los extremos absolutos pueden estar en puntos ubicados en el interior de la región, ó puntos ubicados sobre la frontera.

Si se encuentran en puntos en el interior de la región, estos serán puntos críticos de $f(x,y)$. Si se encuentran sobre la frontera, cumplirán la condición del Teorema de Lagrange.

Para ubicar los puntos críticos de $f(x,y)$ en el interior de la región, calculamos las derivadas parciales de $f(x,y)$:

$$f_x(x,y)=2x=0$$
$$f_y(x,y)=4y=0$$

Se anulan en $P_0(0,0)$.

Para ubicar los puntos candidatos sobre la frontera, se aplica:

$$\begin{cases} f_x(x,y)=\lambda\, g_x(x,y) \\ f_y(x,y)=\lambda\, g_y(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

donde $g(x,y)=0$ será: $x^2+y^2-1=0$.
Esto ya se hizo en el ejercicio anterior, y se obtuvieron los puntos $P_1(0,1)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(1,0)$ y $P_4(-1,0)$.

Evaluamos la función en los cinco puntos obtenidos:

Punto	$f(x,y)$
$P_0(0,0)$	$f(0,0) = 0$
$P_1(0,1)$	$f(0,1) = 2$
$P_2(0,-1)$	$f(0,-1) = 2$
$P_3(1,0)$	$f(1,0) = 1$
$P_4(-1,0)$	$f(-1,0) = 1$

Entonces, el valor máximo absoluto de $f(x,y)$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ es 2 y se alcanza en $P_1(0,1)$ y en $P_2(0,-1)$ (sobre la frontera de la región). El valor mínimo absoluto es 0 y lo alcanza en $P_0(0,0)$ (en el interior de la región).

7) **Determine los puntos sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están más cercanos y más lejanos al punto** $P(3,1,-1)$

La distancia de un punto genérico (x,y,z) al punto $P(3,1,-1)$ está dada por:

$$d(x,y,z) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

Los pasos algebraicos son más sencillos si maximizamos/minimizamos el cuadrado de la distancia, lo cual es válido, por lo tanto la función será:

$$d^2 = f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

La restricción es que el punto esté sobre la esfera, es decir:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

Tanto $f(x,y,z)$ como $g(x,y,z)$ tienen derivadas parciales continuas, entonces es aplicable el Teorema de Lagrange.

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda.\nabla \mathrm{g}(x_0,y_0,z_0)$$

Calculando las derivadas y reemplazando resulta:

$$\begin{cases} 2(x-3) = \lambda\, 2x \\ 2(y-1) = \lambda\, 2y \\ 2(z+1) = \lambda\, 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, resulta conveniente despejar x, y, z de las tres primeras ecuaciones expresándolas en términos de λ, para luego reemplazarlas en la cuarta ecuación y encontrar el valor de λ .

$$x = \frac{3}{1-\lambda} \ , \ y = \frac{1}{1-\lambda} \ , \ z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

Nótese que debe ser $\lambda \neq 1$ pues caso contrario las tres primeras ecuaciones resultan sin solución. Reemplazando en la cuarta ecuación resulta:

$$\frac{9}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} = 4$$

Resolviendo resulta:

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Valores que proporcionan los puntos:

$$P_1(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}) \text{ y } P_2(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}})$$

Evaluando:

$$f\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right) = (\frac{6}{\sqrt{11}}-3)^2 + (\frac{2}{\sqrt{11}}-1)^2 + (-\frac{2}{\sqrt{11}}+1)^2 = 15-4\sqrt{11}$$
$$f\left(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right) = (-\frac{6}{\sqrt{11}}-3)^2 + (-\frac{2}{\sqrt{11}}-1)^2 + (\frac{2}{\sqrt{11}}+1)^2 = 15+4\sqrt{11}$$

Resulta que el mínimo absoluto se obtiene en $P_1(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}})$, siendo ése el punto más cercano a $P(3,1,-1)$, y el máximo absoluto se obtiene en $P_2(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}})$, siendo ese el punto más alejado a $P(3,1,-1)$.

8) **Determine el valor máximo de la función** $f(x,y) = x+2y+3z$ **sobre la curva de intersección del plano** $x-y+z=1$ **y el cilindro** $x^2+y^2=1$.

Aplicaremos el Teorema de Lagrange para dos restricciones que dice: dadas $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ y $h(x,y,z)$ funciones con derivadas parciales continuas si $f(x,y,z)$ tiene un máximo ó mínimo en (x_0,y_0,z_0) cuando está sometido a las restricciones $g(x,y,z)=0$ y $h(x,y,z)=0$, y $\nabla g(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$ y $\nabla \mathrm{h}(x_0,y_0,z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existen números reales λ y μ tal que:

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda.\nabla \mathrm{g}(x_0,y_0,z_0) + \mu.\nabla \mathrm{h}(x_0,y_0,z_0)$$

En nuestro caso se cumple que $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ y $h(x,y,z)$ tienen derivadas parciales continuas por ser funciones polinómicas.
En consecuencia, para encontrar (x_0,y_0,z_0) obtenemos las derivadas parciales y luego planteamos la ecuación en componentes y le agregamos las dos ecuaciones de las restricciones, resultando:

$$\begin{cases} 1 = \lambda + 2x\mu \quad (a) \\ 2 = -\lambda + 2y\mu \quad (b) \\ 3 = \lambda \quad (c) \\ x-y+z-1=0 \quad (d) \\ x^2+y^2-1=0 \quad (e) \end{cases}$$

La tercera ecuación (c) define $\lambda = 3$.
Reemplazado en la primera (a) resulta $2x\mu = -2$, o sea $x = -\frac{1}{\mu}$
Del mismo modo, en la segunda ecuación (b) resulta $y = \frac{5}{2\mu}$
Sustituyendo ambos en la quinta ecuación (e), tenemos: $\frac{1}{\mu^2}+\frac{25}{4\mu^2} = 1$, de donde $\mu = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$
Entonces $x = -\frac{1}{\mu} = \mp\frac{2}{\sqrt{29}}$; $y = -\frac{5}{2\mu} = \pm\frac{5}{\sqrt{29}}$
Despejando de la cuarta (d) ecuación: $z = -x+y+1 = 1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}$
En consecuencia los puntos que satisfacen la condición de Lagrange serán:

$$P_1\left(-\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}},1+\frac{7}{\sqrt{29}}\right) \text{ y } P_2\left(\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}},1-\frac{7}{\sqrt{29}}\right)$$

Evaluamos la función en dichos puntos y obtenemos:

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}},1+\frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3+\sqrt{29}$$
$$f\left(\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}},1-\frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3-\sqrt{29}$$

En consecuencia, $\boxed{\text{el valor máximo de } f\ (x,y) \text{ sobre la curva dada es } 3+\sqrt{29}}$

4. *Ejercicios de aplicación*

1. **BENEFICIO EN LA PRODUCCIÓN.**

El beneficio obtenido al producir x unidades de un producto A_1 e y unidades de un producto A_2 está modeli**za**do por la siguiente función:

$$B(x,y) = 8x + 10y - (0{,}001)(x^2 + xy + y^2) - 10.000$$

Calcular el nivel de producción que proporciona un beneficio máximo.

SOLUCIÓN:
Las derivadas parciales de la función que describe el beneficio son las siguientes:

$$B_x(x,y) = 8 - (0{,}001)(2x + y)$$

$$B_y(x,y) = 10 - (0{,}001)(x + 2y)$$

Igualando ambas derivadas parciales a cero se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$8 - (0{,}001)(2x + y) = 0$$

$$10 - (0{,}001)(x + 2y) = 0$$

Después de operar algebraicamente el sistema queda reducido a:

$$(2x + y) = 8000$$
$$(x + 2y) = 10000$$

La solución del sistema de ecuaciones anterior se obtiene para los valores $x = 2000\ ;\ \ y = 4000$

Las derivadas parciales segundas de la función $B(x,y)$ son las siguientes:

$$B_{xx}(x,y) = -(0{,}001)(2) = -0{,}002 < 0$$

$$B_{yy}(x,y) = -(0{,}001)(2) = -0{,}002 < 0$$

$$B_{xy}(x,y) = -(0{,}001)(1\ ) = -0{,}001$$

Las tres derivadas parciales segundas no dependen de los valores de x e y. Ahora debe generarse la función:

$$\mathrm{G(x,y) = B_{xx}(x,y).\,B_{xx}(x,y) - \left[B_{xy}(x,y)\right]^2}$$

$$\mathrm{G(x,y)} = (-0{,}002).\,(-0{,}002) — (-0{,}001)^2 > 0$$

Dado que $\mathrm{G(x,y)} > 0$ y $B_{xx}(x,y) < 0$ se concluye que la función de beneficio tiene su máximo para una producción de 2000 unidades del producto A_1 y 4000 unidades del producto A_2.

2. **VOLUMEN MÁXIMO DE UNA CAJA**

Determinar el volumen máximo de un paralelepípedo rectangular con caras paralelas a los planos coordenados que se puede inscribir en un elipsoide escaleno de ecuación:

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$$

El volumen total de paralelepípedo está dado por la función:

$$V(x,y,z) = 8xyz$$

sujeta a la restricción: $g(x,y,z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$

Se utilizará el Teorema de Lagrange para resolver el problema. Para ello se determinan los respectivos gradientes de ambas funciones.

$$\nabla V(x,y,x) = 8yz\,\boldsymbol{i} + 8xz\,\boldsymbol{j} + 8xy\,\boldsymbol{k}$$

$$\nabla g(x,y,x) = 32x\,\boldsymbol{i} + 8y\,\boldsymbol{j} + 18z\,\boldsymbol{k}$$

La expresión del Teorema de Lagrange es: $\nabla V(x,y,x) = \lambda \nabla g(x,y,x)$

$$8yz\,\boldsymbol{i} + 8xz\,\boldsymbol{j} + 8xy\,\boldsymbol{k} = \lambda(32x\,\boldsymbol{i} + 8y\,\boldsymbol{j} + 18z\,\boldsymbol{k})$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 8yz = \lambda\,32x \quad (a) \\ 8xz = \lambda\,8y \quad (b) \\ 8xy = \lambda\,18z \quad (c) \\ 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0 \end{cases}$

Multiplicando (a) por x, (b) por y y (c) por z, y sumando esas tres ecuaciones se obtiene:

$$24xyz = \lambda\,32x^2 + \lambda\,8y^2 + \lambda\,18z^2 = 2\,\lambda\,(16x^2 + 4y^2 + 9z^2)$$

Pero $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$; por lo tato se puede escribir:

$$24xyz = 2\,\lambda\,(144)$$

O bien: $xyz = 12\,\lambda$. Esta última ecuación puede usarse para determinar los valores de x, y, x. Multiplicando (a) por x en ambos miembros se llega a:

$$8xyx == \lambda\,32x^2 \;;\; 8(12\lambda) = \lambda\,32x^2 \;;\; 96\,\lambda - \lambda\,32x^2 = 0$$

que se puede escribir: $\lambda\,32(3 - x^2) = 0$

Esta última ecuación nos provee los siguientes valores: $\lambda = 0$ (que debe desecharse pues nos daría un volumen nulo) y $x = \sqrt{3}$

De manera análoga se procede para determinar *y* (multiplicando ambos miembros de (b) por y) y para determinar *z* (multiplicando ambos miembros de (c) por z).

Se llega a los siguientes valores: $y = 2.\sqrt{3}$; $z = {}^{4\sqrt{3}}/_{3}$

Multiplicando los valores obtenidos en la función: $V(x,y,z) = 8xyz = 8(\sqrt{3})(2\sqrt{3})\left({}^{4\sqrt{3}}/_{3}\right) = 64\sqrt{3} \approx 111$

5. *Ejercicios propuestos*

1) Hallar los **puntos críticos**, si existen, de las siguientes funciones y clasificarlos:

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

b) $f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$

c) $f(x,y) = 5 + 4x - 3y + y^2 - 3xy$

d) $f(x,y) = e^x.sen\,y$

e) $f(x,y) = y^2 - x^2$

f) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

g) $f(x,y) = 1 - x^2\,y^2$

h) $f(x,y,z) = x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2$

2) Hallar los **extremos absolutos** y clasificarlos, si existen, de las siguientes funciones; suponiendo en cada caso que el dominio es la región D indicada:

a. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$; $D = \{ (x,y) \epsilon R^2 / -2 \leq x \leq 4 ; -1 \leq y \leq 3 \}$

b. $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$; D: región triangular con vértices en los puntos A: (1,2); B: $(1,-2)$; C: $(-1,-2)$

c. $f(x,y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$; D: región triangular limitada por: $y = x$; $y = -x$ e $y = 2$

d. $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 3y^3$; D: región comprendida entre las curvas $y = 4$; $y = x^2$

3) Utilizando el **Teorema de los Multiplicadores de Lagrange**, hallar los extremos absolutos, si los hay, de las siguientes funciones:

a. $f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$; sometida a la restricción $x + 2y = 24$

b. $f(x,y) = x^2 - y^2$; sujeta a la condición $x - 2y + 6 = 0$

c. $f(x,y) = xy$; restringido a la elipse $4x^2 + y^2 = 4$

d. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; sometida a la restricción $2x + y - z = 5$

e. $f(x,y,z) = xyz$ (función volumen); sujeta a la ligadura $x + y + z - 6 = 0$

f. $f(x,y,z) = xyz$; con restricciones $x + y + z = 32$, $x - y + z = 0$

g. $f(x,y,z) = x + y + z$; sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

4) **INGRESOS**.

Una industria fabrica dos productos. Los ingresos totales por la venta de x unidades del primer producto, y de y unidades del segundo producto es:

$$I(x,y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$$

Determinar los valores de *x* e *y* que proveen máximos ingresos.

5) VOLUMEN MÁXIMO

Una caja rectangular ha de estar apoyada sobre el plano (x, y) con un vértice en el origen del sistema de coordenadas y el vértice opuesto apoyado en el plano de ecuación:

$$6x + 4y + 3z = 24$$

Calcular el máximo volumen posible de dicha caja.

6) OPTIMIZACIÓN CON DOS FUNCIONES DE LIGADURA

Sea $T(x,y,z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto de la esfera de ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 11$$

Calcular las temperaturas extremas sobre la curva de intersección de la esfera con el plano $x + y + z = 3$.

6. *Bibliografía*

- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- El Cálculo, de Louis Leithold.