

# Circuitos Eléctricos

## Una mirada introductoria

Autores: Lic. Alejandro Paola. Dra Fabiana Prodanoff



INVESTIGACIÓN  
EN ENSEÑANZA  
DE LAS CIENCIAS

Facultad Regional La Plata / Universidad Tecnológica Nacional.  
Calle 60 y 124. La Plata (1900). Argentina.  
**GRUPO IEC** / 0221-412-4342 / [iec@frlp.utn.edu.ar](mailto:iec@frlp.utn.edu.ar)

## Prefacio

---

## Agradecimientos

## Contenido

1.- Introducción .....	6
2.- Aspectos generales .....	6
2.1.- Cables conductores .....	7
2.2.- Capacitores.....	7
2.3.- Resistores .....	9
2.4.- Inductores .....	11
2.5.- Fuentes de tensión continua.....	12
2.6.- Fuentes de tensión alterna .....	13
2.7.- Interruptores y conmutadores.....	14
3.- Representación gráfica de circuitos eléctricos .....	15
4.- Generalidades sobre la resolución de un circuito.....	16
4.1.- Reglas de Kirchhoff .....	17
5.- Regímenes transitorio y estacionario. ....	18
5.1.- Régimen estacionario con fuentes de tensión continúa. ....	19
5.2.- Circuitos equivalentes.....	21
5.3.- Régimen transitorio con fuentes de tensión continúa. ....	26
5.4.- Valores límites en procesos transitorios.....	36
5.5.- Limite estático.....	39
5.6.- Circuitos equivalentes en el límite estático .....	42
5.7.- Actividades.....	47
6.- Análisis energético de los circuitos elementales. ....	53
6.1.- Fuentes.....	53
6.2.- Resistores .....	54
6.3.- Capacitores.....	54
6.4.- Inductores .....	55
6.5.- Ejemplos de aplicación.....	55
6.5.1.- Carga de un capacitor .....	55
6.5.2.- Conexión de un inductor.....	56
6.5.3 Relajación de capacitores entre dos condiciones electrostáticas.....	57
6.6.- Actividades.....	59
7.- Circuitos alimentados con una fuente de tensión alterna.....	62
7.1.- La representación fasorial.....	62
7.2 Los circuitos más elementales.....	63

---

7.3. El circuito RLC serie. ....	67
7.4. El circuito RLC paralelo. ....	71
7.5. Valores eficaces. ....	73
7.6. Potencia suministrada por la fuente de tensión alterna. ....	74
7.7. Potencia disipada en componentes de un circuito. ....	75
7.8. Ejemplo 1. Circuito de sintonía. ....	77
7.9. Ejemplo 2. Disipación térmica en redes. ....	80
7.10. Actividades. ....	81

# CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En este libro se desarrollan los conceptos básicos relacionados con circuitos eléctricos, aspira a ser de ayuda para los estudiantes de las carreras de Ingeniería que se encuentren cursando la asignatura Física II “Electromagnetismo clásico”.

Los temas relacionados con los circuitos eléctricos pretenden ser la base para abordar de forma segura cursos más avanzados. Es por ello que los circuitos a desarrollar serán sencillos y evitando complejidades matemáticas.

## 1.- Introducción

La idea más básica acerca de un circuito eléctrico consiste en un camino cerrado por el que pueda circular una corriente eléctrica. Desde una mirada tecnológica, podríamos decir que un circuito es un arreglo de fuentes y dispositivos eléctricos conectados, que forman uno o más caminos cerrados, por los que ciertos elementos de comando pueden habilitar la circulación de corriente. Es fácil imaginar lo vasto del universo de ejemplos que la historia de la tecnología ha aportado en línea con esta definición.

Aquí nos abocaremos sólo a los aspectos básicos, que nos permitan un modesto abordaje del tema, aunque no dejaremos de lado su descripción matemática y la interpretación de los resultados que de ella se desprendan.

Para fijar ideas, consideremos el proceso de encender una lamparita. Dicho proceso constituye el objetivo del montaje tecnológico y la lamparita es un dispositivo que enciende bajo condiciones de alimentación eléctrica especificadas.

El circuito es el montaje que requiere la lamparita para que la electricidad llegue desde la fuente generadora y se adapte a los requerimientos específicos, incluyendo el elemento de comando que permita encenderla y apagarla. Este circuito es muy sencillo cuando pensamos en una linterna convencional, pero puede ser extraordinariamente complejo para una lamparita doméstica. Esto es debido a la cantidad de fuentes involucradas, como ser centrales eléctricas interconectadas que son remotas e inespecíficas.

## 2.- Aspectos generales

Como dispositivos a combinar sólo utilizaremos capacitores, resistores e inductores. Las fuentes podrán ser de tensión continua o de tensión alterna, evitando que en un mismo circuito tomen parte simultáneamente fuentes de ambos tipos. El circuito será siempre un montaje donde fuentes y dispositivos se vinculen mediante cables conductores, que formen caminos cerrados. Como elementos de comando, admitiremos sólo interruptores y conmutadores y como instrumentos de medición sólo utilizaremos amperímetros y voltímetros. Finalmente incluiremos el fusible como elemento de control y seguridad del circuito.

Todos los elementos mencionados, serán descriptos indicando sus características reales básicas y sus formas idealizadas en las primeras secciones. Luego trataremos los aspectos morfológicos de los

circuitos, introduciendo los conceptos de rama, nodo, malla y provincia. Con esto, discutiremos las cuestiones topológicas que cumplen los circuitos representables en el plano.

Luego, comenzaremos con el tratamiento matemático de los circuitos, introduciendo las reglas de Kirchhoff para mallas y nodos.

Los circuitos eléctricos básicos pueden tratarse con técnicas diferentes que dependen del tipo de fuentes que los alimentan y del régimen de funcionamiento. Abordaremos en primer lugar, circuitos con fuentes de tensión continua en régimen estacionario. Luego trataremos el caso de las mismas fuentes en régimen transitorio. Finalmente abordaremos circuitos con fuentes de tensión alterna en régimen estacionario. El régimen transitorio con fuentes de tensión alterna excede el alcance de este curso.

## 2.1.- Cables conductores

Los cables conductores en su forma más común están formados por uno o más filamentos de cobre, bajo una cobertura aislante, generalmente plástica. El cable de filamento único se utiliza en aquellos casos que es necesario una sección muy pequeña, como ocurre en sistemas de telefonía. En instalaciones de red doméstica, se utilizan cables de muchos filamentos para facilitar el manejo, debido a su mayor flexibilidad.

Los cables se proyectan teniendo en cuenta la corriente máxima que circulará por ellos y la resistencia que incorporarán al circuito. Con estos datos se determina la sección que se debe utilizar. Por su parte, la cobertura aislante se determina sabiendo la tensión a la que estará sometido el cable respecto de su entorno cercano (Fig. 1).

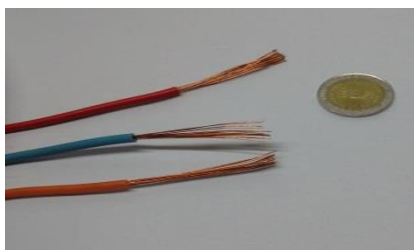


Figura 1: Imágenes de cables.

Una versión idealizada de cable conductor consiste en suponer que el mismo posee resistencia nula y a la vez que admite cualquier corriente, por elevada que fuera. Con esta simplificación, podemos admitir que en un tramo de cable ideal por el que circula una corriente, el potencial es constante. A menos que se especifique lo contrario, utilizaremos cables ideales omitiendo toda referencia al aislante, suponiendo que el mismo es el adecuado para las condiciones en que opera el circuito.

## 2.2.- Capacitores

Los capacitores son dispositivos que permiten el almacenamiento de energía a partir de la producción de un campo eléctrico sobre un medio dieléctrico, originado por cargas acumuladas en dos armaduras conductoras. En condiciones de funcionamiento, las cargas residentes en cada armadura son de igual magnitud y signo contrario. Mientras tanto, el campo eléctrico que ellas generan queda confinado al material dieléctrico que separa las armaduras. Así es que en el exterior

del capacitor no se observa campo eléctrico. Desde el punto de vista constructivo, un capacitor puede pensarse como un arrollamiento de dos cintas metálicas separadas por una delgadísima película de material no conductor. El desafío tecnológico para construir capacitores con mejores prestaciones consiste en lograr que estos separadores no conductores sean más y más delgados, a la vez que las cintas conductoras tengan áreas muy grandes (Fig .2).



Figura 2: Imágenes de capacitores.

Cuando se proyecta el uso de un capacitor en un circuito, se debe especificar su capacidad y la tensión máxima a la que será sometido. Ambas propiedades del dispositivo dependen de cuestiones constructivas que debe proporcionar el fabricante. En particular, la capacidad depende de la geometría y de las propiedades eléctricas del separador dieléctrico. Por su parte, la tensión máxima admisible la determina el coeficiente de ruptura dieléctrica del separador.

Dado que trataremos circuitos elementales, adoptaremos un modelo idealizado de capacitor en el cual el dieléctrico resiste sin importar que tan alta sea la tensión entre sus armaduras. Por tanto, sólo especificaremos la capacidad, a menos que en algún tratamiento se explicita lo contrario. La capacidad como magnitud física la representamos con la letra C. Recordemos que la unidad de capacidad en el sistema internacional es el Faradio, y se representa por la letra F. El símbolo circuital del capacitor es el siguiente (Fig. 3)

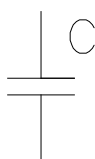


Figura 3: Símbolo circuital de un capacitor de capacidad C.

Detengámonos, por un momento, en algunas sutilezas relativas a los capacitores. Cuando se especifica la carga de un capacitor, se dice por ejemplo que el mismo tiene 0,007 C. Esto significa que en una de las armaduras tiene dicha carga, mientras que en la otra tiene la misma cantidad de carga pero de signo contrario. Lo que no se sabe es en qué armadura está la carga especificada. En vistas a plantear adecuadamente las cuestiones matemáticas, indicaremos con un asterisco (\*) en el símbolo de capacitor, la placa sobre la que se mide la carga (sabiendo que en la otra placa siempre habrá la misma cantidad de carga pero con signo opuesto). Con esta convención, la carga podrá ser especificada como positiva o negativa según corresponda sobre la placa indicada con el asterisco, incluyendo la posibilidad de cambiar el signo a lo largo del tiempo.

Otra cuestión que suele especificarse gráficamente es la polaridad del capacitor. Esto es, indicar con signos más y menos (+ y -) sobre las placas del símbolo circuital, según corresponda a la localización



de cada tipo de carga sobre el capacitor. El lector debe notar que esta especificación puede variar con el tiempo, lo que debe interpretarse como que la polaridad puede invertirse según las condiciones del circuito. Por tanto, cuando se especifican polaridades, se debe consignar el instante en que las mismas son evaluadas. Un símbolo completo con todas las especificaciones posibles es el siguiente (Fig. 4).

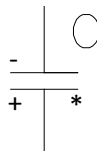


Figura 4: Símbolo circuital de un capacitor, la convención para definir la carga y una posible polaridad.

Algunos capacitores admiten ser cargados sólo con una polaridad. Tal es el caso de los llamados capacitores electrolíticos, dentro de los cuales existen procesos electroquímicos que no pueden invertirse. En estos casos, el fabricante debe especificar la polaridad con que habrá que conectar el dispositivo, mientras que el que proyecta el circuito debe tener cuidado de especificar la polaridad en el plano (y por supuesto, garantizar que la misma no se invertirá nunca a lo largo del tiempo). No utilizaremos este tipo de restricciones en los circuitos elementales que trataremos, a menos que se especifique lo contrario.

Existen algunos modelos de capacitores que permiten variar la capacidad. Los mismos fueron muy utilizados en circuitos de sintonía y reciben el nombre de capacitores variables. Para representarlos se le agrega al símbolo habitual una flecha cruzada como se muestra a continuación (Fig. 5).

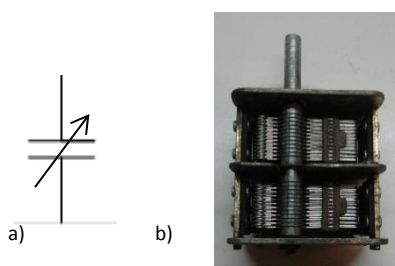


Figura 5: a) Símbolo circuital de un capacitor de capacidad variable;  
b) Imagen de un capacitor variable utilizado en circuitos de sintonía.

## 2.3.- Resistores

Los resistores son dispositivos que garantizan un valor calibrado de resistencia en el circuito y pueden utilizarse para fines muy diversos. La propiedad más significativa del resistor es su intercambio térmico con el ambiente que lo rodea, conocido como efecto Joule. Esto es, cuando una corriente pasa a través de un resistor, el mismo convierte la energía suministrada por la fuente, en energía térmica del material que lo compone. Posteriormente, intercambia dicha energía con el medio circundante en forma de calor o radiación electromagnética (Fig. 6).

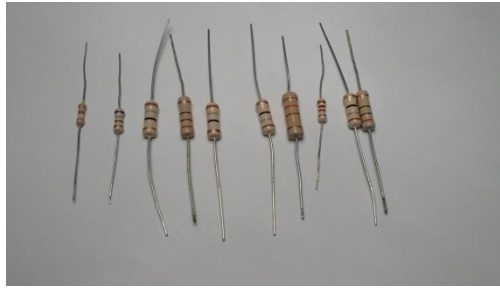
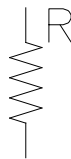


Figura 6: Imágenes de resistores.

Los resistores se eligen teniendo en cuenta el valor de resistencia requerida y la tensión máxima a la que serán sometidos. Estos datos los determina el fabricante y están relacionados con las propiedades del material que compone el dispositivo, la geometría del mismo y la forma en que ocurre la disipación térmica. En particular, la disipación resulta de crucial importancia, debido a que un mecanismo temporariamente ineficiente puede elevar rápidamente la temperatura ocasionando daños irreversibles en el resistor.

Nos referiremos a los resistores con una mirada idealizada, los caracterizaremos exclusivamente por su resistencia, suponiendo que pueden responder a cualquier tensión sin peligro de deteriorarse. Sin embargo, cuando las circunstancias lo requieran, haremos mención explícita de las limitaciones de un resistor real.

La resistencia eléctrica será representada como magnitud con la letra  $R$ , y su unidad en el sistema internacional es el Ohm que se indica con  $\Omega$ . El símbolo circuital de un resistor será el siguiente (Fig. 7)

Figura 7: Símbolo circuital de un resistor de resistencia  $R$ .

Muchos elementos circuitales, como cables, inductores, fuentes, etc., incorporan resistencia al circuito. En las aplicaciones que desarrollaremos, despreciaremos tales resistencias, aunque corresponde consignar que, de ser necesaria su especificación, se las suele indicar como un resistor agregado en un lugar adecuado del circuito. Nótese que en estos casos, en el plano del circuito existirá la indicación de un resistor que no aparecerá físicamente en el circuito real.

Desde el punto de vista operativo, conviene recordar que la corriente en un resistor siempre circula de potenciales más altos a potenciales más bajos. En la terminología habitual, se dice que en el resistor existe una caída de tensión que es justamente la diferencia de potencial entre sus extremos. Es así que en ciertas circunstancias se indica con signos más y menos (+ y -) en los extremos del símbolo de resistor, según corresponda respectivamente al mayor o menor potencial (Fig. 8).

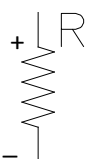


Figura 8: Símbolo circuital de un resistor indicando la caída de tensión.

Algunos resistores se diseñan con la posibilidad de variar el valor de resistencia, por lo que toman el nombre de resistores variables. El símbolo que los representa es el mismo que ya introdujimos, pero con el agregado de una flecha cruzada (Fig. 9).



Figura 9: a) Símbolo circuital de un resistor de resistencia variable;  
b) Imagen de un resistor variable.

## 2.4.- Inductores

Los inductores son dispositivos que pueden almacenar energía temporariamente en un campo magnético, generado a expensas de la corriente que circula por él. Desde el punto de vista constructivo, son arrollamientos de alambre de cobre esmaltado, conocidos como bobinas o bobinados, que a veces tienen un núcleo ferromagnético (por ejemplo de hierro). El esmaltado del alambre constituye un aislante muy delgado, para favorecer que el arrollamiento sea lo más compacto posible. Una vez realizado el devanado, se suele dar una mano de barniz especial, a fin de proteger, aislar y darle rigidez al conjunto (Fig. 10).

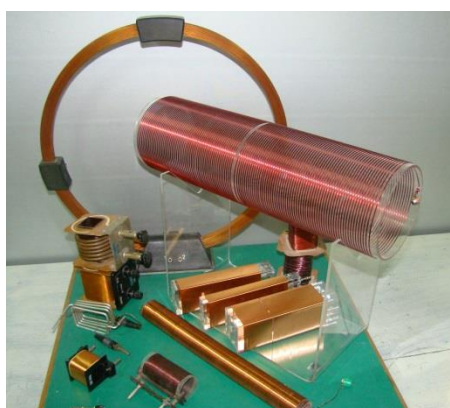


Figura 10: imágenes de inductores.

Cuando se incluye un inductor en un circuito, se debe proyectar especificando el coeficiente de autoinducción y la corriente máxima que circulará por él. Estas cuestiones son garantizadas por el fabricante. El coeficiente de autoinducción depende de la geometría del bobinado y de las propiedades magnéticas del núcleo. Por su parte, la corriente admisible surge de la temperatura máxima que resisten los aislantes (esmaltado y barniz), recuérdese que al tratarse de alambres conductores, existirá siempre una resistencia y, al circular corriente, la consiguiente disipación térmica por efecto Joule. Por tanto, en la construcción de estos dispositivos, el desafío tecnológico consiste en desarrollar pinturas aislantes que resistan cada vez más altas temperaturas.

Utilizaremos en los desarrollos subsiguientes, un modelo idealizado de inductor en que descartamos las cuestiones térmicas que limitan las corrientes admisibles. Por supuesto, nos reservamos el derecho de incorporar estos efectos haciéndolos explícitos cuando corresponda. Entonces, la única

magnitud significativa del inductor ideal será su coeficiente de autoinducción, al que denotaremos con la letra  $L$ . La correspondiente unidad en el sistema internacional es el Henrio, y su representación es  $H$ . El símbolo circuital del inductor es (Fig. 11)

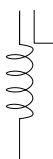


Figura 11: Símbolo circuital de un inductor de coeficiente de autoinducción  $L$ .

Como es sabido, cada vez que hay una corriente eléctrica hay un campo magnético asociado. Esto hace que el bobinado de un motor eléctrico, un cable coaxil o simplemente un cable conductor presenten efectos inductivos. En muchas aplicaciones tecnológicas, estos efectos deben ser tenidos en cuenta, por lo que se incluyen en el plano del circuito como inductores adicionales. Aquí nuevamente puede darse que un objeto indicado en el plano del circuito, no aparezca físicamente. Si bien no incluiremos este tipo de problemas, es importante tener conocimiento de tal posibilidad.

## 2.5.- Fuentes de tensión continua

Las fuentes de tensión continua son objetos que introducen una fuerza electromotriz en el circuito cuyo sentido no se invierte con el tiempo. Los ejemplos más comunes de este tipo de fuentes son las pilas y las baterías, que garantizan una tensión constante a partir de procesos químicos. También son muy habituales las fuentes que suministran tensión continua a partir de transformar la tensión alterna de la red domiciliaria. Estas últimas son por ejemplo los cargadores de teléfonos celulares o computadoras y las fuentes para pequeños electrodomésticos o aparatos electrónicos (Fig. 12).



Figura 12: Imágenes de fuentes de tensión continua.

Aquí conviene reflexionar brevemente sobre el concepto de fuerza electromotriz ( $fem$ ). Para ello conviene recordar que las corrientes eléctricas fluyen espontáneamente desde potenciales más altos hacia potenciales más bajos. Pero para que la corriente pueda instalarse en forma permanente en un circuito, necesitamos que en algún lugar del mismo ocurra lo contrario. Dentro de una pila ocurre justamente que las cargas viajan desde el punto de potencial más bajo al punto de potencial más alto. Para ello la pila utiliza una energía, que constituye su aporte al circuito. Cuando en un circuito ocurre este tipo de aporte energético, decimos que hay una fuerza electromotriz aplicada.

Cuando una pila está desconectada, su fuerza electromotriz coincide con la diferencia de potencial entre sus bornes. Esto suele prestarse a confusión, por lo que conviene remarcar que la  $fem$  da

cuenta de un proceso dentro de la pila, mientras que la diferencia de potencial se refiere a los estados extremos de dicho proceso. Esto último es lo que medirá un voltímetro entre los bornes de la pila.

Cuando una pila se conecta a un circuito y una corriente circula por ella, la diferencia de potencial entre sus bornes no coincide con la fem. Esto ocurre porque dentro de la pila existe una disipación térmica que se la interpreta en términos de una resistencia interna. Así tendremos, además de la fem, una caída de tensión interna, que debe computarse al momento de calcular la diferencia de potencial. Esto constituye la limitación más importante que tiene una fuente al ser considerada en un proyecto. La disipación térmica será mayor en la medida que la corriente sea más grande. Habitualmente, el fabricante especifica la corriente máxima a la que puede conectarse la fuente, sin correr peligro por efectos térmicos.

Despreciaremos, en general la resistencia interna de las fuentes, de ser incluida se lo explicitará. Cuando la resistencia interna se desprecia, decimos que la fuente es ideal. Para representar en el circuito las fuentes de tensión continua, utilizaremos el símbolo siguiente (Fig. 13)

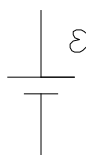


Figura 13: Símbolo circuital de una fuente de tensión continua.

Donde el segmento más largo se asocia siempre al borne de la fuente donde el potencial es mayor. La única especificación que requiere una fuente ideal es su fem, a la que denotaremos por la letra epsilon  $\varepsilon$  y se unidad es el Volt.

## 2.6.- Fuentes de tensión alterna

Las fuentes de tensión alterna son las que entregan una fuerza electromotriz (fem) cuyo sentido se invierte periódicamente en el tiempo. El principal ejemplo de estas fuentes lo constituyen los alternadores. Estos se utilizan como generadores en las grandes usinas que abastecen las redes domiciliarias e industriales. También son utilizados en buques, locomotoras, grupos electrógenos móviles, automóviles, etc. En general, podríamos decir que los alternadores son las fuentes apropiadas para requerimientos de potencia de gran escala. Otras fuentes de tensión alterna de escala menor se utilizan en electrónica y se conocen como fuentes de señales (Fig. 14).



Figura 14: Imagen de fuente de tensión alterna utilizada en electrónica.

La gran mayoría de los alternadores entregan una fuerza electromotriz, cuya dependencia con el tiempo es de forma senoidal con frecuencia fija. Por su parte, las fuentes de señales entregan perfiles diversos (onda cuadrada, triangular, diente de sierra, etc.), además de la forma senoidal. También tienen la posibilidad de variar la frecuencia en un rango muy amplio.

De la misma manera que las fuentes de tensión continua, los alternadores presentan limitaciones a tener en cuenta en el momento de proyectar un circuito. Sin embargo, ellos no suelen ser utilizados en forma directa. Por ejemplo, al conectar un electrodoméstico no se evalúa el efecto sobre la usina que lo alimenta. Así es que muchas veces se considera que la fuente de tensión alterna es ideal al momento de desarrollar pequeños proyectos que se conectarán a una gran red. Por el contrario, cuando la potencia eléctrica requerida es comparable con la del generador (según sea la especificación del fabricante), aparecen elementos relevantes como la resistencia interna, la autoinducción y la disipación térmica.

Utilizaremos fuentes ideales, que entregan una fem senoidal de la que especificaremos la amplitud  $V_F$ , medida en Volt y la frecuencia  $f$ , medida en Hertz. El símbolo circuital de la fuente de tensión alterna es el siguiente (Fig. 15)

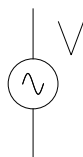


Figura 15: Símbolo circuital de una fuente de tensión alterna.

## 2.7.- Interruptores y conmutadores

Los interruptores y los conmutadores son elementos de comando que permiten operar sobre un circuito, habilitando o impidiendo la circulación de corriente por los conductores que los contienen. Los ejemplos más familiares son las teclas de encendido y apagado de luces en instalaciones domésticas. Los nombres de mercado son llave de un punto (para los interruptores) y llave de combinación (para los conmutadores). Habitualmente, las teclas no se diferencian externamente entre interruptores y conmutadores. Pero si observamos sus terminales vemos que los interruptores tienen lugar para dos conexiones, mientras que los conmutadores tienen lugar para tres conexiones. Por supuesto que existe una enorme variedad de modelos de interruptores y conmutadores, cuya elección depende de las necesidades. Como en otros dispositivos, la corriente máxima admisible es la limitación, por lo que el fabricante debe especificarla y el proyectista debe tenerla en cuenta al diseñar el circuito (Fig. 16).

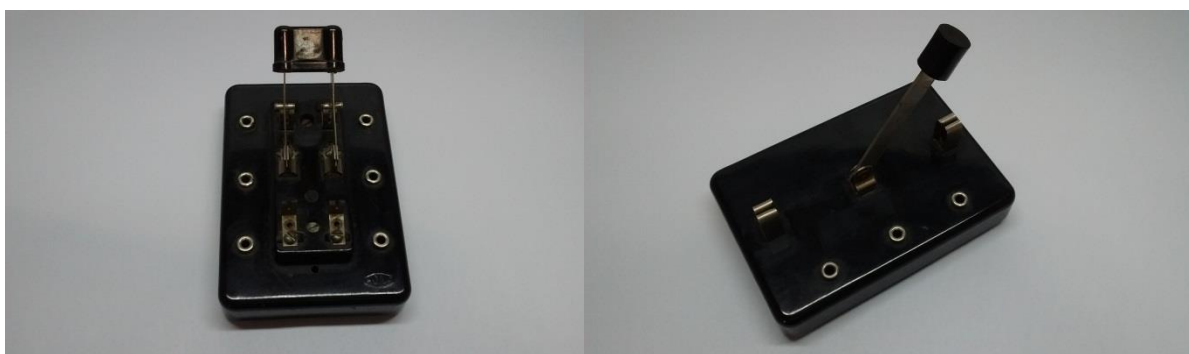


Figura 16: Imágenes de interruptores.

Los símbolos circuitales para interruptores y conmutadores son los siguientes (Fig. 17).

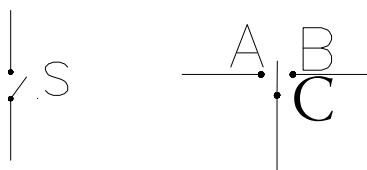


Figura 17: Símbolo circuitual de un interruptor y un conmutador.

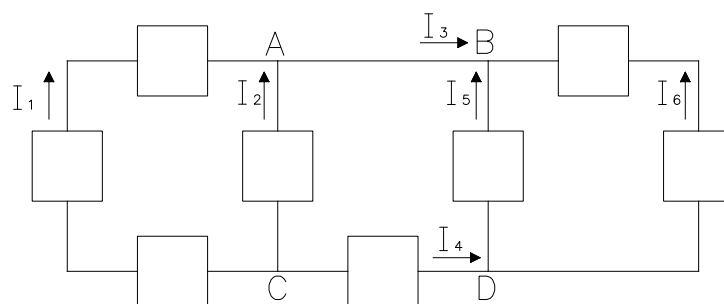
Estos símbolos son muy elocuentes respecto de la forma de conexión de cada elemento. Un interruptor se inserta en un conductor y opera impidiendo o permitiendo la circulación de corriente según esté respectivamente abierto o cerrado. Un conmutador permite vincular tres conductores que en el esquema se indican como A, B y C. En una posición, vincula el conductor A con el C y B está desconectando y en la otra posición vincula el conductor B con el C y A está desconectando.

### 3.- Representación gráfica de circuitos eléctricos

Una vez introducidos los elementos físicos que intervendrán en los circuitos, nos disponemos a representar gráficamente la forma en que los mismos se conectan para formar un circuito específico. Supondremos que los circuitos siempre son representables en el plano, a menos que en algún contexto se especifique lo contrario. En primer lugar, daremos una serie de definiciones que nos permitirán hacer una caracterización topológica del circuito. Los elementos topológicos clásicos son los nodos, las ramas y las mallas. Además reconoceremos un cuarto elemento al que denominaremos provincia. Sus definiciones son las siguientes:

- **Nodo.** Es cualquier punto del circuito en que se conectan tres o más conductores. En otras palabras, decimos que un punto del circuito es un nodo cuando, tomando dicho punto como inicio de un recorrido, existen al menos tres caminos conductores por donde alejarse del mismo. Indicaremos por N al número de nodos de un circuito.
- **Rama.** Es cualquier tramo de un circuito que se inicia en un nodo y termina en otro, sin pasar por ningún nodo intermedio. Una rama puede contener cualquier secuencia de dispositivos y fuentes conectadas mediante conductores. Al número de ramas de un circuito lo identificaremos con R.
- **Malla.** Es cualquier camino cerrado que pueda identificarse en un circuito. En este camino puede o no haber nodos, mientras que puede existir cualquier secuencia de dispositivos y fuentes. Denotaremos por M al número de mallas del circuito.
- **Provincia.** Para definir este concepto, imaginemos el plano del circuito como un mapa con divisiones políticas. Entonces, podremos identificar ciertas mallas que circunscriben una región homologable con una provincia. A las mallas con esta característica las llamaremos simplemente provincias. Observe el lector que todas las provincias son mallas, pero no todas las mallas son provincias. Al número de provincias identificables en el circuito lo llamaremos P.

Para fijar ideas, consideremos el siguiente circuito (Fig. 18)

Figura 18: Circuito con  $N = 4$ ,  $R = 6$ ,  $M = 6$  y  $P = 3$ .

Observemos que en este circuito el número de nodos es  $N=4$ , el número de ramas es  $R=6$ , el número de mallas es  $M=6$  y el número de provincias es  $P=3$ . Este ejemplo permite introducir una regla topológica que se cumple en todos los circuitos representables en el plano. Esta regla es que el número de ramas es siempre igual al número de provincias más el número de nodos menos uno (Ec. 1).

$$R = P + N - 1 \quad (1)$$

El lector puede probar que esto se cumple para el ejemplo elegido y para cualquier otro ejemplo que proponga. Por tanto, nos limitaremos a aceptarlo a partir de las evidencias surgidas de tales ejemplos.

En la siguiente figura (Fig. 19) se representa un circuito con dos provincias.

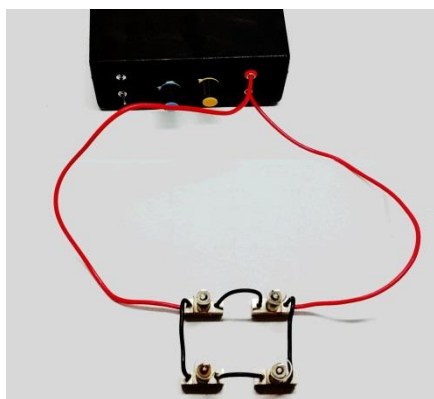


Figura 19: Circuito sencillo.

#### 4.- Generalidades sobre la resolución de un circuito

La inmensa diversidad de situaciones que se plantean al momento de diseñar un circuito eléctrico, hacen imposible establecer una regla general sobre el significado de la palabra “resolver”. Por lo tanto, nos concentraremos en una mirada muy parcializada de la resolución de circuitos, consistente en determinar las corrientes en cada rama como funciones del tiempo. Tal vez este objetivo no cubra ciertos aspectos de interés en el diseño de circuitos, pero permite un primer paso muy adecuado en relación con los fenómenos físicos que se desencadenan a partir de las distintas conexiones de fuentes y dispositivos. Supondremos que los datos constructivos de los elementos involucrados son conocidos (resistencias, capacidades, autoinducciones y fuerzas electromotrices). En estas condiciones, resolver el problema significa encontrar tantas corrientes (incógnitas) como ramas tenga el circuito. En general, estas incógnitas serán funciones del tiempo, aunque en muchos casos de interés se reducen a constantes.



Ahora centremos nuestra atención en el concepto de corriente eléctrica, recordando que, en sentido estricto, se trata de un flujo. Por tanto, es natural que sus valores puedan ser positivos o negativos, y que exista una cuestión convencional de por medio. Así es que antes de plantear cualquier ecuación con vistas a la resolución del circuito, es necesario elegir un criterio sobre el significado de los signos que las corrientes tomen al final del cálculo. Para ello, elegiremos sobre cada rama del circuito un sentido de circulación que indicaremos con una flecha, al que respetaremos en todo el cálculo como el que toma la corriente cuando es positiva a lo largo de dicha rama. Por el contrario, si la corriente al final resulta negativa, debe interpretarse simplemente como que su sentido de circulación es al revés del indicado por la flecha.

#### 4.1.- Reglas de Kirchhoff

Hasta este punto, hemos presentado sólo simbología circuital y cuestiones terminológicas. Ahora comenzamos con el tratamiento físico de los circuitos.

Podemos observar que en cada rama de un circuito habrá una única corriente (magnitud escalar) que requiere identificación consistente con la rama. Es decir, rama  $i$  - ésima con corriente  $I_i$  - ésima. Además debemos elegir un sentido de circulación que indique hacia dónde va la corriente cuando su valor es positivo. Para el ejemplo de la sección anterior (Fig. 18), aparecen en el gráfico las notaciones para las corrientes y sus respectivos sentidos.

Los circuitos siempre pueden entenderse como una red en que cada tramo de conductor posee un potencial instantáneamente uniforme. Por su parte, cada dispositivo se inserta aportando una diferencia de potencial que depende de su naturaleza física.

En algunos componentes, la diferencia de potencial entre sus terminales depende del sentido de la corriente (resistores e inductores). Para que no queden dudas en relación con los signos, en la figura siguiente (Fig. 20) incorporamos notaciones consistentes con las relaciones que se detallan luego (Ec. 2)

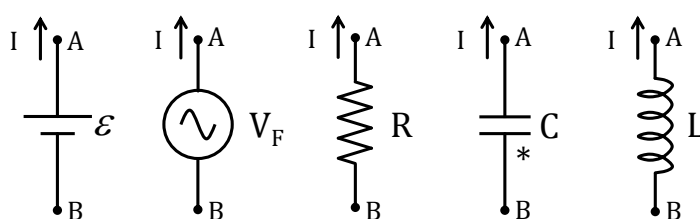


Figura 20: Detalle de la diferencia de potencial entre los terminales de los diferentes componentes de un circuito.

$V_B - V_A = \epsilon$	Pila	
$V_B - V_A = V_F \text{ sen } (\omega t)$	Fuente de tensión alterna	
$V_B - V_A = -IR$	Resistor	(2)
$V_B - V_A = \frac{Q^*}{C}$	Capacitor	
$V_B - V_A = -L \frac{di}{dt}$	Inductor	

Note que la diferencia de potencial del capacitor tiene indicado con un asterisco la cara en que reside la carga considerada (Fig. 20).

Ahora estamos en condiciones de enunciar las reglas de Kirchhoff.

**\*Regla de mallas:** En cualquier malla, la suma orientada de las diferencias de potencial medidas entre terminales de los dispositivos que la componen, debe ser nula.

**\*Regla de nodos:** En cualquier nodo, la suma de las corrientes que circulan por los conductores que se vinculan en el nodo, debe ser nula.

Estas reglas se pueden deducir con facilidad a partir del teorema de trabajo y energía, y de la ecuación de continuidad de la carga, respectivamente.

## 5.- Regímenes transitorio y estacionario.

Según hemos anticipado, los circuitos elementales pueden tener elementos de comandos como interruptores y conmutadores. Cada vez que se opera alguno de estos elementos, el circuito experimenta cambios en sus corrientes y en otras magnitudes relacionadas. Estos cambios, en general no son instantáneos. Si al momento de activar el interruptor (o conmutador) lo identificamos como el inicio del conteo de tiempos, observamos que en un lapso relativamente corto se dan fluctuaciones temporales importantes en las corrientes, en las cargas de capacitores, en las energías almacenadas en inductores, etc. Si este proceso tiende a la estabilización de las magnitudes, decimos que el mismo es un proceso transitorio, o que el circuito se encuentra en régimen transitorio. Si a posteriori, las magnitudes afectadas dejan de variar, decimos que el circuito alcanzó el régimen estacionario.

Abordaremos dos situaciones físicamente muy distintas: Circuitos donde todas sus fuentes son de tensión continua y circuitos que sólo poseen una fuente de tensión alterna. Analicemos el significado de la terminología “transitorio” y “estacionario”. En los circuitos que poseen solo fuentes de tensión continua, el régimen transitorio se extiende desde el instante de modificación de un elemento de comando hasta que las magnitudes físicas del circuito dejan de variar con el tiempo. Cuando ocurre esto último decimos que el circuito alcanza el régimen estacionario. Con un criterio análogo, en los circuitos dotados de una fuente de tensión alterna, también decimos que el régimen transitorio se inicia con la modificación de un elemento de comando. Pero estos circuitos no tienden a valores constantes de las variables físicas. Entonces, el criterio para establecer que el circuito ha alcanzado el régimen estacionario es que todas las variables del circuito oscilen armónicamente con la frecuencia de la fuente.

Esta clasificación no pretende ser completa, aun bajo la hipótesis de sencillez de nuestros circuitos. En efecto, algunos circuitos elementales suelen oscilar espontáneamente aun en ausencia de la fuente. Ejemplo de esto es una malla en la que se conectan un capacitor (inicialmente cargado) y un inductor. En estos casos debe tratarse el problema en forma particular, encuadrándolo según corresponda en algún régimen que será claro al final del análisis.

Los tratamientos que desarrollaremos en este texto están organizados en sentido creciente de complejidad matemática. En primer lugar trataremos técnicas para circuitos con fuentes de tensión continua en régimen estacionario. Luego extenderemos el análisis a casos sencillos de estos mismos

circuitos en régimen transitorio. Finalmente desarrollaremos tratamientos para circuitos con fuente de tensión alterna en régimen estacionario. El tratamiento de estos últimos circuitos en régimen transitorio escapan al alcance de este texto.

### 5.1.- Régimen estacionario con fuentes de tensión continúa.

Para el estudio de circuitos que alcanzan el régimen estacionario con fuentes de tensión continua pueden aplicarse algunas reglas prácticas, a saber:

- a) Si una rama contiene un capacitor, la corriente en la rama es nula, y el capacitor estará cargado con una diferencia de potencial compatible con su entorno circuital. Entonces almacenará energía en el campo eléctrico de acuerdo con (Ec. 3)

$$U_c = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (3)$$

- b) Si una rama contiene un inductor, la corriente a lo largo de dicha rama será la misma que si el inductor se reemplazara por un conductor ideal. El inductor almacenará energía en el campo de inducción magnética de acuerdo con (Ec. 4)

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 \quad (4)$$

Estas dos reglas permiten la simplificación de los circuitos, de modo que al momento de encontrar las corrientes, sólo habrá pilas y resistores. Una vez reducido el circuito a su formato más simple, podemos aplicar la siguiente regla topológica:

- c) La cantidad de corrientes (incógnitas) será siempre igual al número de ramas. Para evitar inconvenientes relacionados con la dependencia lineal de las ecuaciones, debemos utilizar tantas ecuaciones de mallas como provincias tenga el circuito, y tantas ecuaciones de nodos como el número de nodos menos uno. Ilustramos con un ejemplo. En la figura (Fig. 21), observamos que el circuito tiene tres ramas, dos provincias y dos nodos. Por tanto tenemos tres corrientes (incógnitas) y necesitamos tres ecuaciones linealmente independientes. Entonces podemos plantear dos ecuaciones de mallas y una ecuación de nodos.

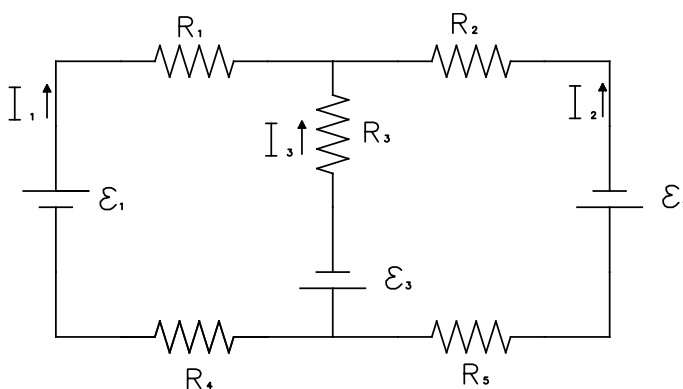


Figura 21: Ejemplo de un circuito compuesto por dos provincias.

Se eligen los sentidos de circulación de forma tal que las corrientes serán consideradas positivas. Para construir las ecuaciones, elegimos las mallas que coinciden con los contornos de las dos provincias, y el nodo superior (Ec. 5).

$$\begin{cases} \epsilon_1 - R_1 I_1 + R_3 I_3 + \epsilon_3 - R_4 I_1 = 0 \\ -\epsilon_3 - R_3 I_3 + R_2 I_2 + \epsilon_2 + R_5 I_2 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Reordenando nos queda el siguiente sistema lineal inhomogéneo (Ec. 6).

$$\begin{cases} (R_1 + R_4)I_1 - R_3 I_3 = \epsilon_1 + \epsilon_3 \\ (R_2 + R_5)I_2 - R_3 I_3 = \epsilon_3 - \epsilon_2 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Para fijar ideas consideremos los siguientes valores numéricos

$$R_1 = R_4 = 5 \, \Omega; R_2 = R_3 = 20 \, \Omega; R_5 = 10 \, \Omega \text{ y } \epsilon_1 = 4 \, \text{V}; \epsilon_2 = 18 \, \text{V}; \epsilon_3 = 7 \, \text{V}$$

Con esto el sistema toma la forma siguiente (Ec. 7):

$$\begin{cases} 10 \, \Omega I_1 - 20 \, \Omega I_3 = 11 \, \text{V} \\ 30 \, \Omega I_2 - 20 \, \Omega I_3 = -11 \, \text{V} \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

cuya solución se obtiene de resolver los siguientes determinantes (Ec. 8):

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 0 & -20 \\ -11 & 30 & -20 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 0 & -20 \\ 0 & 30 & -20 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 11 & -20 \\ 0 & -11 & -20 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 0 & -20 \\ 0 & 30 & -20 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (8)$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 0 & 11 \\ 0 & 30 & -11 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 0 & -20 \\ 0 & 30 & -20 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Entonces, operando cuidadosamente tenemos (Ec. 9):

$$I_1 = \frac{11(30 \cdot 1 - (-20) \cdot 1) - 20(-11 \cdot 1)}{10(30 \cdot 1 - (-20) \cdot 1) - 20(-30 \cdot 1)} = 0,7 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{10(-11 \cdot 1) - 11(20 \cdot 1) - 20(10 \cdot 1)}{10(30 \cdot 1 - (-20) \cdot 1) - 20(-30 \cdot 1)} = -0,5 \text{ A} \quad (9)$$

$$I_3 = \frac{10(11 \cdot 1) + 11(-30 \cdot 1)}{10(30 \cdot 1 - (-20) \cdot 1) - 20(-30 \cdot 1)} = -0,2 \text{ A}$$

Al resolver este tipo de sistemas suelen ocurrir a menudo dos tipos de errores. El primero consiste en equivocarse al momento de plantear las ecuaciones. El segundo surge de cuestiones numéricas debidas a la abundancia de cuentas. Lo único que podemos sugerir al respecto, es que tanto el planteo como el cálculo se hagan con sumo cuidado, y que posteriormente se reemplace el resultado en las ecuaciones como método de control.

Analizamos ahora los resultados, observemos que las corrientes  $I_2$  e  $I_3$  resultaron negativas. Esto debe interpretarse simplemente como que dichas corrientes circulan en sentidos contrarios al indicado en las ramas correspondientes<sup>1</sup>.

## 5.2.- Circuitos equivalentes.

En el abordaje de circuitos en régimen estacionario resulta conveniente cierto tipo de simplificaciones consistentes en reemplazar dos o más resistores por un único resistor equivalente. Esto no siempre es posible, por lo que tenemos que aprender a reconocer las situaciones en las cuales el reemplazo resulta viable.

Para ello identificaremos dos tipos de conexión conocidas como serie y paralelo.

**Conexión serie:** Se dice que dos resistores están conectados en serie cuando, “formando parte de un circuito más extendido” se conecta un borne de uno de los resistores con un borne del otro resistor. En dicha conexión solo puede haber un cable conductor sin nodos.

En esta conexión siempre ocurrirá que los dos resistores se encuentran sobre una misma rama del circuito, por lo que la corriente que circulara será la misma en ambos.

Llamemos A y B a puntos que se encuentran en los extremos del montaje serie (Fig. 22).

<sup>1</sup> Algunas veces se ha sugerido que cuando una corriente resulta negativa al final del cálculo, debe interpretarse como que la elección del sentido indicado en la rama está equivocado. Estos autores proponen re dibujar el circuito indicando los “sentidos correctos” donde todas las corrientes resultan positivas. Esto no es incompatible con nuestra presentación del tema, pero en esencia nada quita que una corriente sea lícitamente negativa. En efecto, la corriente por definición es un flujo (magnitud escalar real) por lo que su signo “no es definido positivo”.

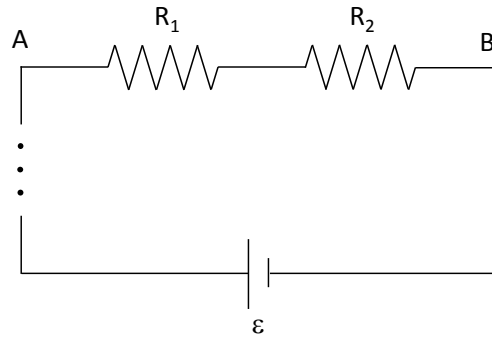


Figura 22: Parte de un circuito con dos resistores conectados en serie.

La diferencia de potencial entre estos puntos será la suma de las caídas de tensión que ocurre en los resistores de la rama, esto es (Ec. 10)

$$V_B - V_A = i R_1 + i R_2 = i(R_1 + R_2) \quad (10)$$

Aquí podemos observar que si los dos resistores fueran reemplazados por un único resistor cuya resistencia fuera la suma de  $R_1 + R_2$ , tanto la diferencia de potencial entre A y B como la corriente a través de la rama serían las mismas. En tal sentido, definimos la resistencia equivalente  $R_e$  como (Ec. 11):

$$R_e = R_1 + R_2 \quad (11)$$

Entonces, el circuito equivalente será (Fig. 23).

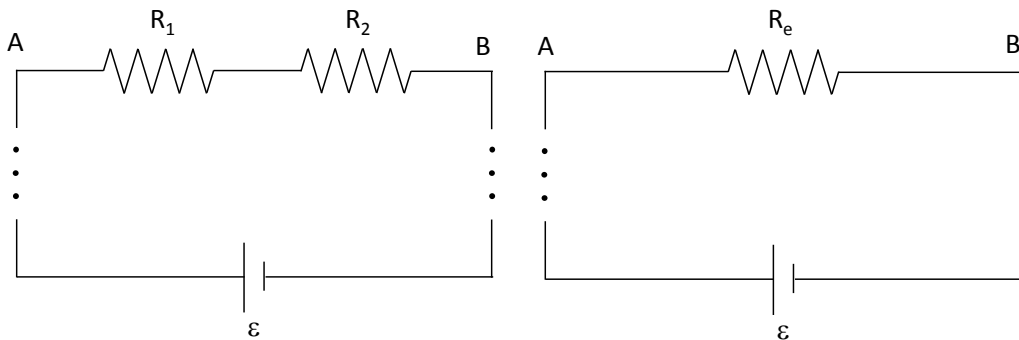


Figura 23: Parte de un circuito con dos resistores conectados en serie y su representación equivalente.

Este procedimiento de reducción del circuito puede utilizarse tantas veces como ocurra la conexión serie. Por ejemplo, si en una misma rama tuviéramos tres resistores, de resistencia  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , conectados en forma secuencial, podríamos construir un equivalente haciendo los siguientes reemplazos (Ec. 12):

$$R_e = R_1 + R_2 \quad (12)$$

$$R'_e = R_e + R_3 = R_1 + R_2 + R_3$$

Y así podríamos proceder con cualquier secuencia de resistores sobre una misma rama.

**Conexión paralelo:** Consideremos el caso de dos ramas de un circuito en que ambas se inician en un mismo nodo A y terminan ambas en un mismo nodo B. Supongamos ahora que en cada rama sólo hay un resistor. Llamaremos  $R_1$  y  $R_2$  a las resistencias de los resistores de las ramas 1 y 2 respectivamente (Fig. 24). A este montaje se lo llama conexión en paralelo.

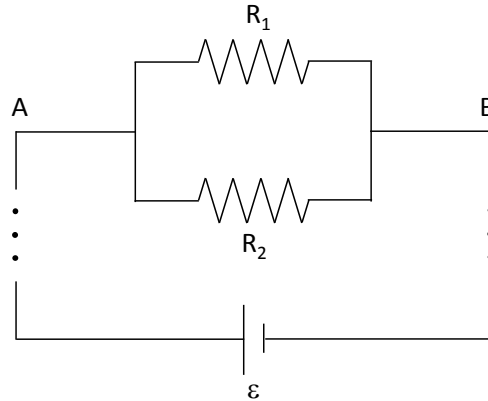


Figura 24: Parte de un circuito con dos resistores conectados en paralelo.

Observe nuevamente que el montaje es parte de un circuito más extendido. Como hemos supuesto que los conductores son ideales, el potencial en los bornes de ambos resistores conectados al nodo A es el mismo. Análogamente ocurre con el nodo B. Entonces, en cada rama vale que (Ec. 13):

$$V_B - V_A = i_1 R_1 = i_2 R_2 \quad (13)$$

Donde  $i_1$  e  $i_2$  son las corrientes respectivas en cada rama. Si llamamos  $i$  a la corriente que ingresa al nodo A y se bifurca entre las dos ramas, tendremos que (Ec. 14):

$$i = i_1 + i_2 \quad (14)$$

Naturalmente, esta corriente se reconstituye después del nodo B. Entonces, tenemos (Ec. 15):

$$i = \frac{V_B - V_A}{R_1} + \frac{V_B - V_A}{R_2} = (V_B - V_A) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (15)$$

En esta expresión podemos reconocer la posibilidad de incorporar una resistencia equivalente  $R_e$ , tal como se muestra en la figura (Fig. 25), definida de la siguiente manera (Ec. 16):

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (16)$$

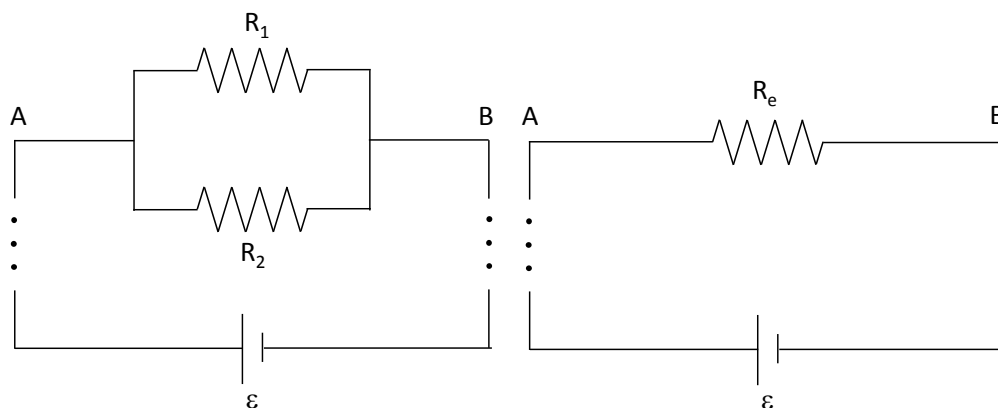


Figura 25: Parte de un circuito con dos resistores conectados en paralelo y su representación equivalente.

De la misma manera que en el caso serie, podemos extender el análisis a cualquier número de resistores conectados en paralelo. Por ejemplo para tres resistores en paralelo (con resistencia  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ ), procedemos del siguiente modo. Tomamos dos de las tres resistencias y construimos una equivalente (Ec. 17):

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (17)$$

Luego definimos una nueva resistencia equivalente  $R_e'$ , que resulta de resolver el paralelo entre  $R_e$  y  $R_3$  (Ec. 18)

$$\frac{1}{R_e'} = \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (18)$$

Siguiendo con este mismo mecanismo podemos extender el análisis a cualquier número de resistencias.

A modo de ejemplo, determinemos la resistencia equivalente del siguiente circuito donde todas las resistencias son iguales (Fig. 26):

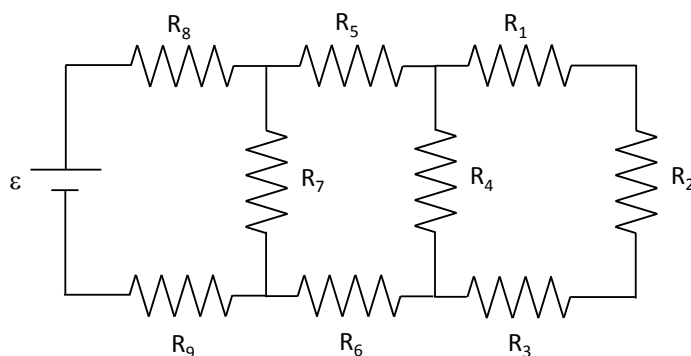


Figura 26: Ejemplo de un circuito reducible como series y paralelos.



En la rama que se encuentra más a la derecha del circuito observamos tres resistores en serie ( $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ ). Estos pueden ser reemplazados por una resistencia equivalente  $R_e$ , cuyo valor lo determinamos de la siguiente manera (Ec. 19):

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 = 3R \quad (19)$$

Luego, esta resistencia queda en paralelo con  $R_4$ . Entonces podemos reemplazar por un equivalente  $R'_e$  (Ec. 20).

$$\frac{1}{R'_e} = \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{R} = \frac{4}{3R} \quad (20)$$

Invirtiendo el resultado, tenemos  $R'_e = \frac{3}{4}R$ . Observemos como va quedando el circuito equivalente (Fig. 27)

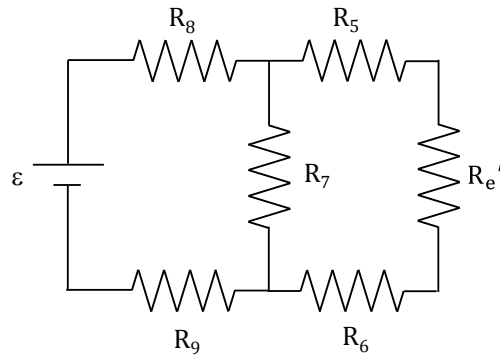


Figura 27: Primera reducción a un circuito equivalente.

Ahora procedemos análogamente para producir una resistencia equivalente  $R''_e$  (Ec. 21)

$$R''_e = R_5 + R'_e + R_6 = R + \frac{3}{4}R + R = \frac{11}{4}R \quad (21)$$

Quedando ahora  $R''_e$  en paralelo con  $R_7$  (Ec. 22). Este paralelo puede reemplazarse por una nueva resistencia equivalente  $R'''_e$ .

$$\frac{1}{R'''_e} = \frac{1}{R''_e} + \frac{1}{R_7} = \frac{4}{11R} + \frac{1}{R} = \frac{15}{11R} \quad (22)$$

Invirtiendo la expresión, tenemos  $R'''_e = \frac{11}{15}R$ . Veamos nuevamente como va el circuito equivalente (Fig. 28).

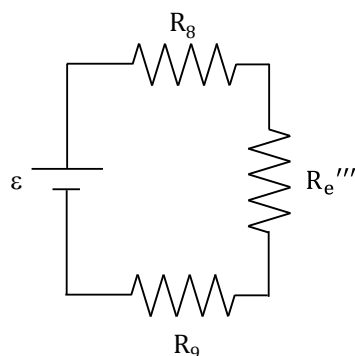


Figura 28: Segunda reducción a un circuito equivalente.

La última reducción que nos queda por hacer es una serie entre  $R_8$ ,  $R_e'''$  y  $R_9$  (Ec. 23).

$$R_e'''' = R_8 + R_e''' + R_9 = R + \frac{11}{15}R + R = \frac{41}{15}R \quad (23)$$

Finalmente tenemos el circuito reducido (Fig. 29).

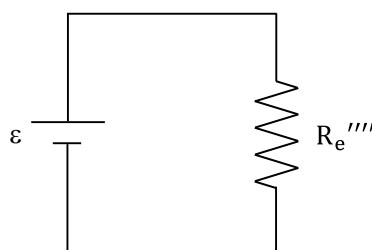


Figura 29: Circuito equivalente.

### 5.3.- Régimen transitorio con fuentes de tensión continua.

Los tratamientos realizados para circuito en régimen estacionario con fuentes de tensión continua, conducen a sistemas de ecuaciones algebraicas donde las incógnitas son corrientes constantes, que desde el punto de vista matemático son números reales (a determinar). La complejidad de estos tratamientos reside en el tamaño de los sistemas de ecuaciones inhomogéneas a resolver (como en el ejemplo anterior de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas).

Ahora bien, las reglas de Kirchhoff son aplicables a cualquier régimen, por lo que también podemos aplicarlas al caso transitorio. Sin embargo, las ecuaciones de mallas y de nodos no son, en general, ecuaciones algebraicas. Lo usual es que se trate de ecuaciones diferenciales, por lo que las soluciones (corrientes en cada rama del circuito) serán funciones del tiempo.

En tal sentido, entendemos que la matemática necesaria para estas resoluciones excede las posibilidades de este curso, excepto en una pequeña colección de problemas elementales. Estos serán siempre de una única malla por lo que la ecuación diferencial que deriva de las reglas de Kirchhoff tendrá una única función del tiempo a determinar.

Otro tipo de situaciones abordables con circuitos más complejos pueden ser tratadas con relativa sencillez si solo pretendemos conocer las corrientes iniciales del transitorio y las formas estacionarias a las que tienden las mismas.

**Caso a: carga y descarga de capacitores.**

Comencemos por el proceso de carga para el que utilizaremos el circuito de la figura (Fig. 30).

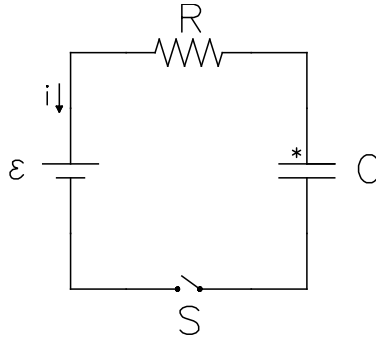


Figura 30: Configuración para analizar el proceso de carga de un capacitor.

Antes de iniciar el análisis observemos que al referirnos a la carga de un capacitor, estamos nombrando la carga de una de sus placas. En ciertas circunstancias es imprescindible identificar a qué placa nos referimos al indicar la carga. Por tanto, identificaremos con un asterisco (\*) a la placa en cuestión. Luego, también necesitaremos un sentido prefijado para la corriente que identificaremos como positiva (ver Fig. 30). Analicemos brevemente como se relacionan estas magnitudes. Para ello consideremos una sección del cable de alimentación del capacitor justo al lado de la placa indicada con \*. Supongamos que la placa está cargada positivamente en un estadio intermedio del proceso de carga. Entonces la carga de la placa está aumentando por lo que la derivada  $\frac{dq(t)}{dt}$  es positiva. Justamente la carga que ingresa a la placa está atravesando la sección indicada del conductor constituyendo el flujo que nosotros interpretamos como la corriente en el conductor. Dicha corriente circula en sentido contrario al indicado por la flecha (Fig. 30) con lo que concluimos que están relacionadas por (Ec. 24):

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} \quad (24)$$

donde  $i(t)$  y  $q(t)$  representan los valores instantáneos de corriente y carga respectivamente<sup>2</sup>.

Comenzamos con la resolución planteando la regla de Kirchhoff para la única malla que constituye el circuito. Supongamos que el interruptor  $S$  se cierra en el instante  $t = 0$ . Entonces, en cualquier instante posterior tenemos (Ec. 25):

$$-\epsilon - iR + \frac{q}{C} = 0 \quad (25)$$

<sup>2</sup>En lo que resta del tratamiento de circuitos, adoptaremos las letras minúsculas para indicar funciones del tiempo.

donde  $\epsilon$  es la fuerza electromotriz aportada por la pila,  $R$  es la resistencia y  $C$  la capacidad, todas magnitudes indicadas en el circuito. Reemplazando (24) en (25) y dividiendo todos los miembros por  $R$ , tenemos (Ec. 26):

$$-\frac{\epsilon}{R} + \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (26)$$

Despejando la derivada y reordenando, obtenemos una forma adecuada para la ecuación diferencial (Ec. 27):

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} (q - \epsilon C) \quad (27)$$

Vamos a realizar un cambio de variable para poder integrar de forma más simple (Ec. 28):

$$u = q - \epsilon C \quad \rightarrow \quad du = dq \quad (28)$$

Reemplazando la Ec. 28 en la Ec. 27 y separando variables, estamos en condiciones de integrar a ambos miembros (Ec. 29):

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{RC} \rightarrow \int_{u_0}^u \frac{du'}{u'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \quad (29)$$

Obsérvese que al plantear las integrales, las variables de integración se indican primadas. Esto se hace para evitar que las mismas se confundan con los límites superiores de integración, que también son variables. Así tenemos (Ec. 30):

$$\ln\left(\frac{u}{u_0}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow \frac{u}{u_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \quad (30)$$

Cambiamos  $u$  según su definición dada en Ec. 28, nos queda (Ec. 31)

$$\begin{aligned} \frac{q - \epsilon C}{-\epsilon C} &= e^{-\frac{t}{RC}} \\ q_{(t)} &= \epsilon C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

Definamos dos constantes,  $\tau$  y  $Q_\infty$ , llamadas constante de tiempo del circuito y carga límite del capacitor, respectivamente. Las mismas vienen dadas por (Ec. 32):

$$\tau = RC \quad Q_\infty = \epsilon C \quad (32)$$

La constante  $\tau$  tiene unidades de tiempo<sup>3</sup>. Si reemplazamos en la Ec. 31, nos queda (Ec. 33):

$$q(t) = Q_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (33)$$

Esta es la forma compacta habitual para la carga como función del tiempo, cuya grafica se muestra en la Figura 31 a).

Para obtener la corriente (Ec. 34), utilizamos la relación (24)

$$i(t) = -\frac{Q_{\infty}}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (34)$$

donde  $I_0$  representa la corriente inicial. (Ver fig.31 b).

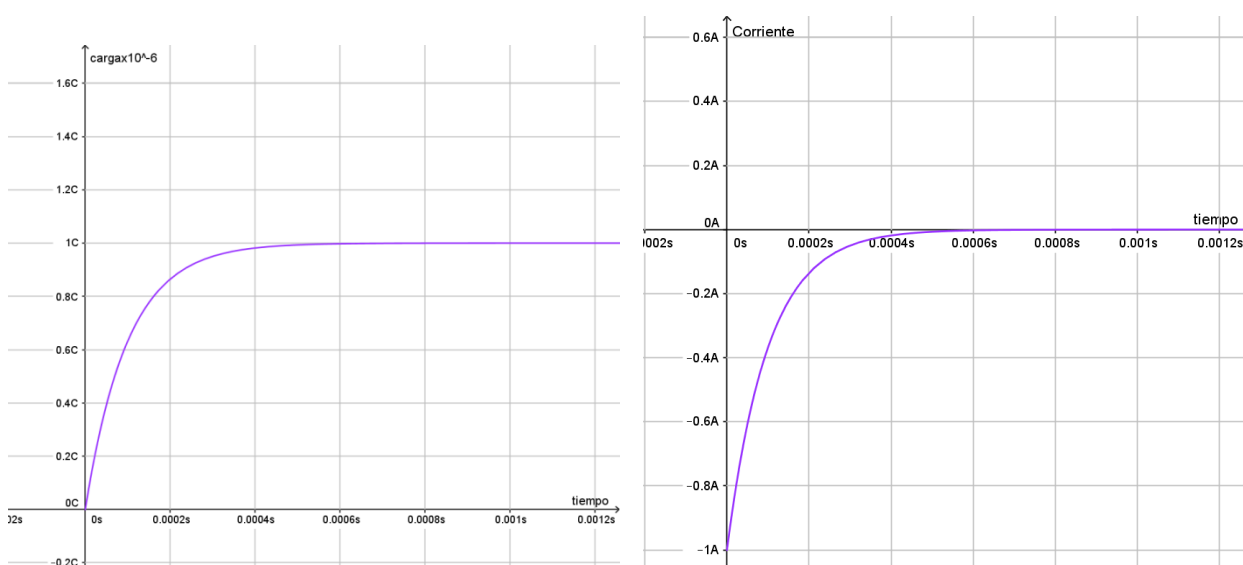


Figura 31 a y b: Grafica de la carga y la corriente para un capacitor en proceso de carga.

Analicemos ahora el significado de la constante de tiempo  $\tau$ . Si en la Ec. 32, reemplazamos  $t = \tau$  (Ec. 35):

$$q(\tau) = Q_{\infty}(1 - e^{-1}) = 0,63Q_{\infty} \quad (35)$$

Obsérvese que cuando el tiempo toma este valor  $\tau$ , la carga del capacitor alcanza el 63% de su valor máximo. Podemos utilizar  $\tau$ , como una medida de cuán rápida resulta la carga del capacitor (Fig. 32 a).

Análogamente, reemplazando por el tiempo  $t = \tau$  en la Ec. 34, podemos observar que  $\tau$  es un estimador con que la corriente decrece hasta el 37% de su valor inicial (Fig. 32 b).

<sup>3</sup>  $[\tau] = \Omega F = \Omega C/V = \Omega C / (A \Omega) = C/A = C/(C/s) = s$

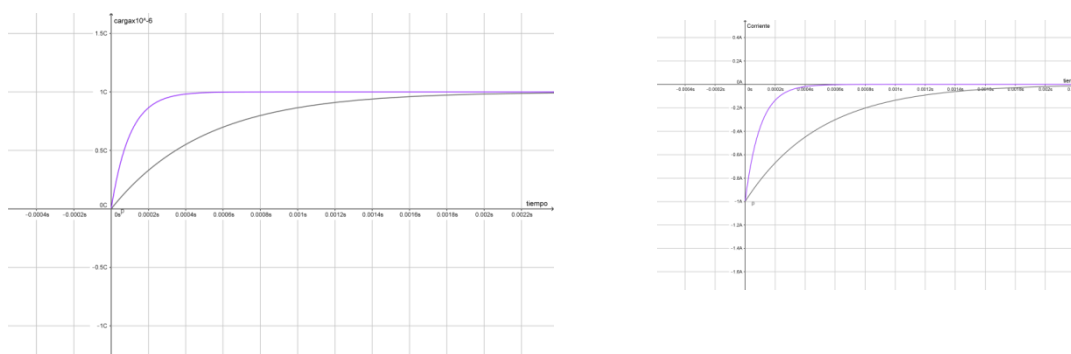


Figura 32 a y b: Grafica de la carga y de la corriente de un capacitor cuando se está cargando, de constante de tiempo 0,0001s y 0,0005s. Al aumentar la constante de tiempo aumenta el tiempo que le lleva al capacitor alcanzar la carga máxima y al circuito llegar al estado estacionario

Ahora nos ocupamos del proceso de descarga. Para ello utilizamos el circuito de la siguiente figura (Fig. 33), suponiendo que el capacitor esta previamente cargado con carga  $Q_0$ .

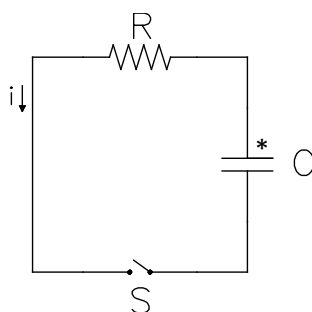


Figura 33: Configuración para analizar el proceso de descarga de un capacitor.

Utilizamos los mismos criterios de signos que en el caso anterior, por lo que la relación entre carga y corriente nuevamente viene dada por la Ecuación 24. Supongamos ahora que al tiempo  $t = 0$  se cierra el interruptor S. Entonces a cualquier tiempo posterior la regla de mallas de Kirchhoff conduce a (Ec. 36):

$$-iR + \frac{q}{C} = 0 \quad (36)$$

Reemplazando (24) en (36) y reordenando, tenemos (Ec. 37):

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (37)$$

Esta es una ecuación diferencial formalmente idéntica a (26), por lo que procedemos en forma análoga (Ec. 38):

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \rightarrow \int_{Q_0}^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \quad (38)$$

Integrando a ambos miembros tenemos (Ec. 39):

$$\ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow \frac{q}{Q_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \quad (39)$$

Utilizando la misma definición de  $\tau$  dada en (32) obtenemos la expresión para la carga como función del tiempo (Ec. 40):

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (40)$$

Para obtener la corriente como función del tiempo, utilizamos nuevamente (24), (Ec. 41):

$$i(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (41)$$

donde  $I_0$  es la corriente inicial.

Obsérvese que la expresión para la corriente en función del tiempo es análoga tanto para la carga (Ec. 34) como para la descarga (Ec. 41) del capacitor. Esto puede interpretarse como que la rapidez del tránsito de la carga tomada a partir del cierre del interruptor es similar en ambos procesos.

Las formas funcionales de carga y corriente se representan en la figura 34 a) y b).

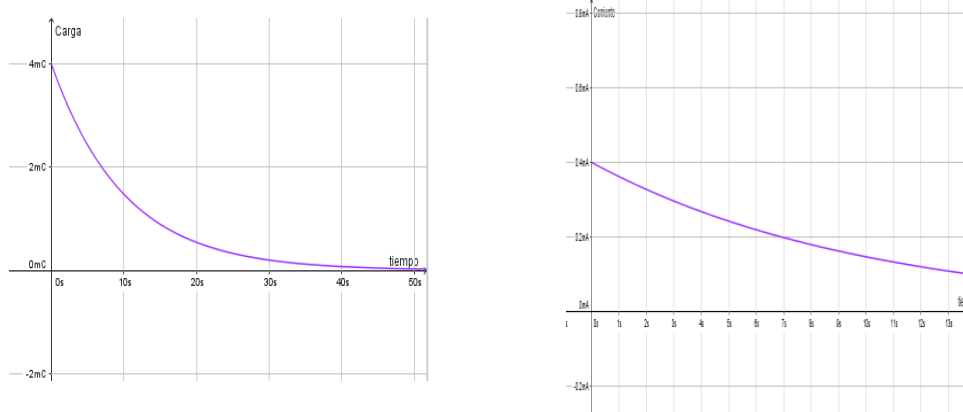


Figura 34 a y b: Grafica de la carga y de la corriente de un capacitor cuando se está descargando, de constante de tiempo 10s y 0,0005s.

### Caso b: Conexión y desconexión de inductores.

Consideremos en primer lugar, el proceso de conexión utilizando el circuito de la figura (Fig. 35).

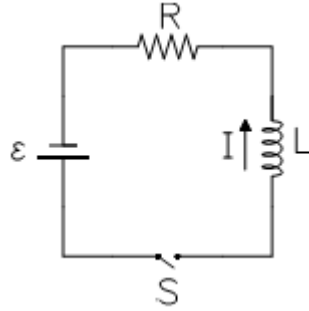


Figura 35: Configuración para analizar el proceso de conexión de un inductor.

Sobre el inductor está indicado el sentido en que la corriente será considerada positiva. Supongamos que al tiempo  $t = 0$ , se cierra el interruptor S. Entonces para tiempos posteriores tenemos la ecuación de malla dada por (Ec. 42)

$$\epsilon - iR - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (42)$$

Nuevamente la ecuación diferencial es análoga a la de la relación 26. Reordenando los términos, queda (Ec. 43):

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \left( i - \frac{\epsilon}{R} \right) \quad (43)$$

Aquí introducimos un cambio de variable tendiente a la integración de (43), (Ec. 44):

$$u = i - \frac{\epsilon}{R} \rightarrow du = di \quad (44)$$

con lo que tenemos (Ec. 45):

$$\frac{du}{u} = -\frac{Rdt}{L} \rightarrow \int_{u_0}^u \frac{du'}{u'} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt' \quad (45)$$

Resolvemos las integrales de ambos miembros y obtenemos (Ec. 46):

$$\ln \left( \frac{u}{u_0} \right) = -\frac{Rt}{L} \rightarrow \frac{u}{u_0} = e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (46)$$

Aparecen, nuevamente dos constantes  $\tau$  e  $I_\infty$ . La primera es la constante de tiempo del circuito, operativamente análoga a la presentada en la carga de capacitores. La segunda representa la corriente que alcanzará el circuito al finalizar el proceso transitorio (Ec. 47).

$$\tau = \frac{L}{R} \quad I_\infty = \frac{\epsilon}{R} \quad (47)$$



Reemplazando, tenemos (Ec. 48):

$$i(t) - I_{\infty} = -I_{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (48)$$

con lo que la corriente como función del tiempo (Ec. 49):

$$i(t) = I_{\infty} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (49)$$

En la figura 36 se muestra la forma de la corriente como función del tiempo. En ella puede observarse que a tiempos largos la corriente evoluciona hacia un valor definitivo en que el inductor se comporta como un cable, en concordancia con la regla propuesta para tratar los inductores en los regímenes estacionarios.

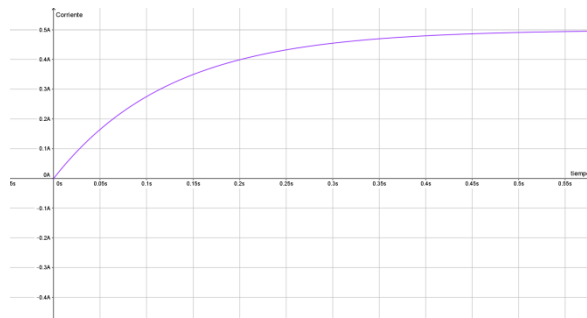


Figura 36: Grafica de la corriente en el proceso de conexión de un inductor.

Ahora tratamos el proceso de desconexión. Este requiere un circuito algo más complicado, porque el inductor no puede tener una corriente apriori sin una fuente que la sostenga. Entonces el circuito elemental que representa el proceso es el siguiente (Fig. 37).

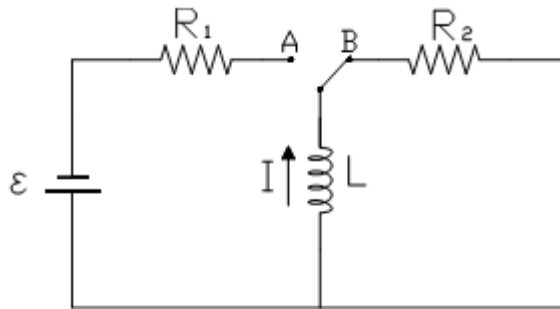


Figura 37: Configuración para analizar el proceso de desconexión de un inductor.

donde el proceso transitorio se inicia al tiempo  $t = 0$ , cuando el conmutador pasa de la posición A a la posición B. La corriente que circula inicialmente por el inductor es la que sostiene la pila y viene dada por (Ec. 50):

$$I_0 = \frac{\epsilon}{R_1} \quad (50)$$

Donde hemos supuesto que el conmutador había permanecido un tiempo suficientemente largo en la posición A.

Después de la conmutación, la regla de mallas conduce a (Ec. 51):

$$-iR_2 - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (51)$$

de donde la ecuación diferencial puede escribirse como sigue (Ec. 52):

$$\frac{di}{dt} + \frac{iR_2}{L} = 0 \quad (52)$$

Separando variables como en los casos anteriores, tenemos (Ec. 53):

$$\frac{di}{i} = -\frac{R_2 dt}{L} \rightarrow \int_{I_0}^i \frac{di'}{i'} = -\frac{R_2}{L} \int_0^t dt' \quad (53)$$

Integrando a ambos miembros obtenemos (Ec. 54):

$$\ln\left(\frac{i}{I_0}\right) = -\frac{R_2 t}{L} \rightarrow \frac{i}{I_0} = e^{-\frac{R_2 t}{L}} \quad (54)$$

Definimos la constante de tiempo  $\tau$  como (Ec. 55):

$$\tau = \frac{L}{R_2} \quad (55)$$

con lo que la corriente como función del tiempo toma la forma (Ec. 56):

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (56)$$

El problema queda así formalmente resuelto y en la figura 38 mostramos la corriente como función del tiempo.

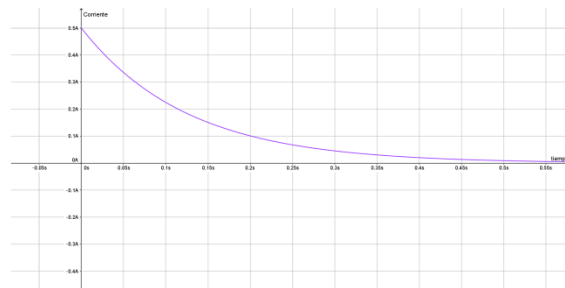


Figura 38: Gráfica de la corriente en el proceso de desconexión de un inductor.

Es interesante observar la fuerza electromotriz inducida en el inductor, a la que llamaremos  $\epsilon_L$ . La misma se obtiene como sigue (Ec. 57):

$$\epsilon_L(t) = -L \frac{di}{dt} = I_0 R_2 e^{-\frac{t}{\tau}} = \epsilon_{L_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (57)$$

donde  $\epsilon_{L_0}$  representa la fuerza electromotriz inicial en el inductor, es decir, justo después de operada la conmutación. Observemos el detalle siguiente, teniendo en cuenta la expresión (50), (Ec. 58):

$$\epsilon_{L_0} = I_0 R_2 = \frac{R_2}{R_1} \epsilon \quad (58)$$

Este resultado esconde una propiedad bastante sorprendente. Tanto los resistores de  $1 \Omega$  como los de  $10000 \Omega$  son fácilmente conseguibles. Las pilas de  $1,5 \text{ V}$  más fáciles aún. Entonces, haciendo  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 10000 \Omega$  y  $\epsilon = 1,5 \text{ V}$ , podemos obtener (aunque por un lapso extremadamente corto) una tensión  $\epsilon_{L_0} = 15000 \text{ V}$ . Este tipo de circuitos es utilizado en los dispositivos que producen chispas, como por ejemplo los encendedores electrónicos.

### Caso c: Circuitos oscilantes.

Algunos circuitos elementales, al menos en formato teórico, no alcanzan un régimen estacionario en el sentido propuesto en este capítulo. Aquí presentamos un ejemplo muy simple de este tipo de circuito. El mismo conecta en una malla, un capacitor y un inductor. El capacitor está inicialmente cargado con una carga  $Q_0$ , y el interruptor se acciona al tiempo  $t = 0$ . La relación entre cargas y corrientes sigue siendo compatible con la (24). (Fig. 39)

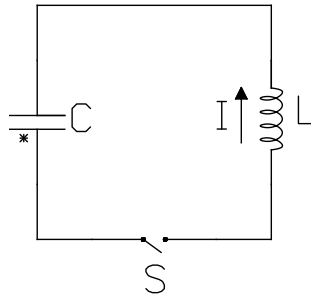


Figura 39: Configuración para analizar un circuito oscilante.

La regla de mallas conduce a (Ec. 59):

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (59)$$

Reemplazando (24) en (59), y dividiendo por  $L$  tenemos (Ec. 60):

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (60)$$

Esta es la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple, en la variable  $q(t)$ . Recordemos brevemente los osciladores mecánicos. Si la variable oscilante es  $x$  tenemos (Ec. 61):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (61)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular de oscilación. Las soluciones son de la forma (Ec. 62):

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi) \quad (62)$$

Homologando nuestra ecuación diferencial (60) con la solución mecánica (62), y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, tenemos la siguiente solución (Ec. 63):

$$q(t) = Q_0 \cos (\omega t) \quad \text{con} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (63)$$

Utilizando la Ec. 24 podemos obtener la corriente como función del tiempo (Ec. 64):

$$i(t) = Q_0 \omega \sin (\omega t) = I_0 \sin (\omega t) \quad (64)$$

Las soluciones 63 y 64 dan cuenta de la conducta oscilante del circuito. Cada vez que una corriente tenga el aspecto de la solución 64, diremos que se trata de una “corriente alterna”. La misma se caracteriza por invertir, regularmente en el tiempo, su sentido de circulación.

Este ejemplo, nos permite observar algunas cuestiones importantes. En primer lugar, que un circuito no requiere ser permanentemente estimulado por una fuente para que se dé un proceso sostenido en el tiempo. Por otra parte, el proceso que se desencadena no conduce a valores estabilizados de las variables temporales ( $q(t)$  e  $i(t)$ ). Sin embargo, el término “estacionario” suele aplicarse también para situaciones que, como está, el sistema evoluciona hacia una forma de solución periódica en el tiempo<sup>4</sup>.

#### 5.4.- Valores límites en procesos transitorios.

Según habíamos adelantado, circuitos más complejos que los de una sola malla pueden ser abordados en la medida que solo estemos interesados en sus conductas límites. Entendemos por conducta límite lo que ocurre en el circuito en el instante justo posterior a que un elemento de comando allá sido modificado, y a lo que ocurre cuando ha transcurrido mucho tiempo después de dicha acción.

Para fijar ideas, comencemos por imaginarnos un interruptor o conmutador que al tiempo  $t = 0$  es modificado (se abre o se cierra el interruptor o se invierte la posición del conmutador). Identificaremos con los símbolos  $t = 0^-$  y  $t = 0^+$  a los instantes “justo antes” y “justo después” de ocurrida la acción sobre el elemento de comando, respectivamente. Estos instantes no conviene asociarlos con una medida de tiempo, imaginando que representan “tanto tiempo antes” o “tanto tiempo después” de la acción. En tal sentido, podríamos pensar que son tiempos infinitesimalmente próximos al instante de la acción.

<sup>4</sup> Pospondremos el tratamiento detallado de éste tipo de estados estacionarios para secciones posteriores.

Por otra parte, identificaremos por  $t \rightarrow \infty$  a cualquier tiempo suficientemente largo como para dar por terminado el proceso transitorio. En un circuito elemental como los tratados, y atento a los requerimientos de precisión que convenga respetar, podríamos pensar que  $t \rightarrow \infty$  puede ser considerado como tres o cuatro veces la constante de tiempo del circuito.

Se pueden plantear dos reglas prácticas que son de mucha utilidad para estudiar la conducta de dispositivos frente a modificaciones en los comandos.

a) *La carga de un capacitor no puede ser discontinua.* Esto significa que los capacitores presentan la misma carga antes y después de la modificación de un comando. Entonces  $q(t = 0^-) = q(t = 0^+)$ .

b) *La corriente en un inductor no puede ser discontinua.* Así tendremos que  $i(t = 0^-) = i(t = 0^+)$ .

Teniendo en cuenta estas reglas, podemos abordar el caso particular en que los circuitos presentan todos sus capacitores inicialmente descargados, a la vez que no circula corriente por ninguna de las ramas que posean inductores. Supongamos ahora que el circuito se activa cerrando un interruptor. Como las cargas de cada uno de los capacitores, y las corrientes de cada uno de los inductores son nulas antes de la acción ( $t = 0^-$ ), deberán seguir siendo nulas después de la acción ( $t = 0^+$ ). En este sentido, podríamos imaginar el circuito en  $t = 0^+$  en forma simplificada suponiendo que las ramas que poseen capacitores operan como si dichos elementos se reemplazaran por un cable conductor. Mientras tanto, las ramas que contienen inductores pueden ser omitidas en el cálculo (dado que sus corrientes pueden considerarse conocidas “a priori” y valen cero).

Centrémonos en las conductas para  $t \rightarrow \infty$ , si los valores de cargas y corrientes en el circuito se estabilizaron, los capacitores estarán cargados en forma permanente y las ramas que los contienen tendrán corriente nula. Así mismo, los inductores habrán adquirido campos magnéticos permanentes producidos por corrientes fijas, por lo que su comportamiento puede entenderse como el de un cable conductor.

El siguiente cuadro sintetiza los conceptos que acabamos de introducir (Tabla 1).


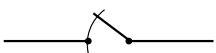



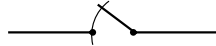
Elemento	$t = 0^+$	$t \rightarrow \infty$
		
		

Tabla 1: Comportamiento de los capacitores e inductores en tiempos límites.

A modo de ejemplo analicemos el siguiente circuito (Fig. 40):

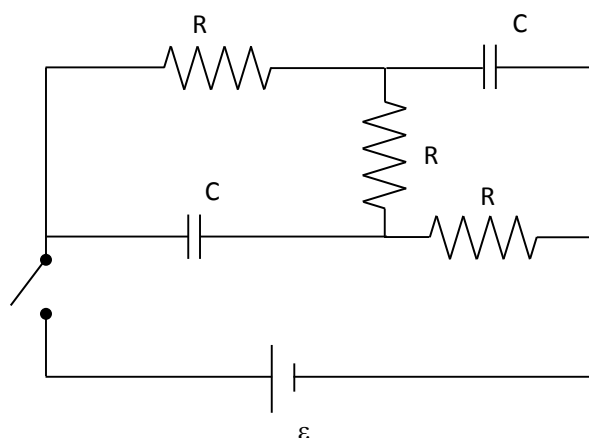
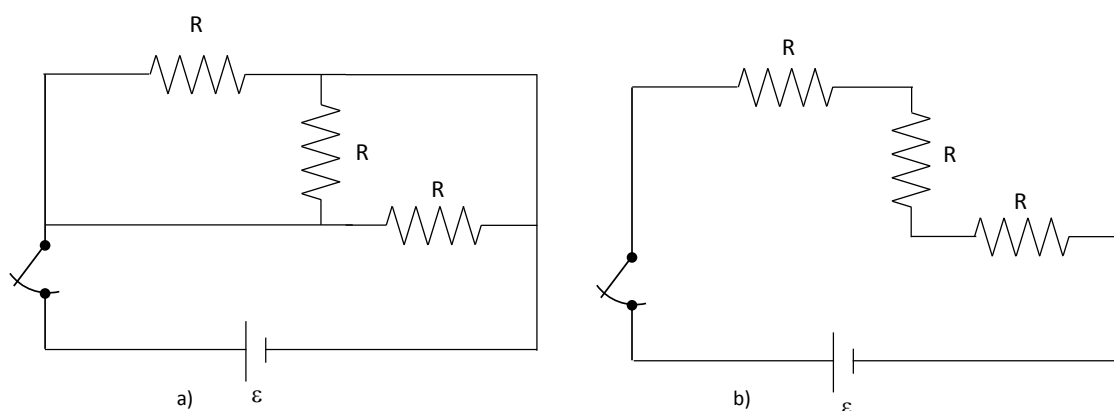


Figura 40: Ejemplo de circuito para analizar conductas límites en régimen transitorio.

Teniendo en cuenta la Tabla 1 podemos simplificar separadamente el circuito de la Fig. 40, para los casos  $t = 0^+$  y  $t \rightarrow \infty$ . En cada uno de estos casos el circuito puede resolverse mediante ecuaciones algebraicas (análogamente a lo que hacíamos en régimen estacionario) (Fig. 41).

Figura 41: Aspecto del circuito de la Fig. 40, en los tiempos límites. a) Para  $t = 0^+$  en régimen transitorio. b) Para  $t \rightarrow \infty$ 

El lector observará que a  $t = 0^+$  los resistores quedan conectados en paralelo, mientras que en  $t \rightarrow \infty$  estarán conectados en serie.

Es muy importante tener en cuenta que esta manera de pensar un circuito en régimen transitorio “no permite” conocer el detalle de las corrientes como funciones del tiempo, sino “sólo” sus valores límites. Como ejercicio a cargo del lector proponemos que encuentre las corrientes en cada rama del circuito de la Fig. 40 en sus versiones límites (Fig. 41). Así mismo, proponemos la resolución completa del circuito siguiente. (Fig. 42).

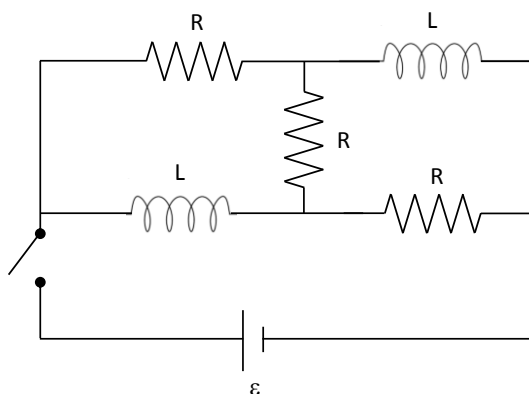


Figura 42: Ejemplo de circuito para analizar conductas límites en régimen transitorio.

### 5.5.- Limite estático

Un caso particular muy importante es aquel en que un circuito, habiendo transcurrido un proceso transitorio, llega a un estado estacionario en que todas las corrientes son nulas. Si este circuito posee capacitores, es posible que los mismos queden cargados. Entonces, su resolución consiste en determinar la carga final de cada capacitor<sup>5</sup>.

Para el abordaje de estas situaciones proponemos la resolución de dos circuitos elementales, cuyos resultados utilizaremos luego en situaciones más complejas.

**Circuito elemental I:** Este circuito consta simplemente de una pila que se conecta con un capacitor (Fig. 43).

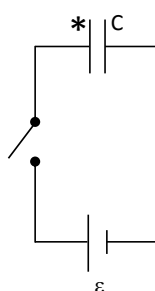


Figura 43: Conexión elemental de un capacitor con una pila.

En este caso, luego de transcurrir un tiempo suficiente desde el cierre del interruptor, el capacitor se ha cargado de modo que su diferencia de potencial es la misma que la de la pila. En estas condiciones la corriente se hará nula y la carga del capacitor será (Ec. 65):

$$q = \epsilon C \quad (65)$$

Por otra parte, la polaridad del capacitor coincidirá con la de la batería. Esto es, la placa positiva del capacitor será la que está conectada con el borne positivo de la pila y recíprocamente, la placa negativa con el borne negativo de la pila.

<sup>5</sup>La carga de los capacitores puede resultar de interés aun cuando el estado estacionario al que llegue el circuito no tenga todas las corrientes nulas. Pospondremos el tratamiento de estos casos para la sección siguiente.

El lector habrá observado que en el circuito no incorporamos un resistor, por lo que podría pensarse que la representación es irreal. Más aun, en sentido estricto este circuito tendría un transitorio de duración “nula”. Sin embargo, a pesar de este aparente defecto en la presentación, resulta simplificadorio, sin perjuicio de la resolución. La omisión de resistores e inductores en circuitos donde el estado estacionario llegue al límite estático es el recurso apropiado para resolver cuando se tiene la garantía de que las corrientes son nulas.

En esta sección utilizaremos circuitos que a lo sumo tendrán pilas y capacitores, y deberán interpretarse como formas simplificadas de circuitos más complejos en el límite estático.

**Circuito elemental II:** Consideremos un circuito formado por dos capacitores, cuyas placas derechas están conectadas entre sí y sus placas izquierdas pueden conectarse por un interruptor (Fig. 44). Supongamos que las capacidades son respectivamente  $C_1$  y  $C_2$ , mientras que las cargas iniciales son  $q_1$  y  $q_2$ . Estas últimas podrán tener valores positivos, negativos o nulos independientemente, pero en cualquier caso representan la carga de la placa indicada con \* en cada capacitor.

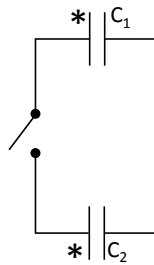


Figura 44: Conexión entre dos capacitores cargados.

Estamos interesados en conocer los valores finales de carga,  $q'_1$  y  $q'_2$ , después del transitorio que ocurre al cerrar el interruptor. Para ello observemos que con el interruptor cerrado, las placas izquierdas y el cable que las vincula constituyen un único medio conductor, y lo mismo ocurre con el lado derecho del circuito. Como el sistema alcanza el equilibrio electrostático el potencial de cada medio conductor debe ser único. Por tanto la diferencia de potencial  $V'_1$  debe ser igual a  $V'_2$ , tendremos (Ec. 66):

$$V'_1 = V'_2 \quad \rightarrow \quad \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2} \quad (66)$$

Por otra parte, la carga total residente en el conductor de la izquierda (incluyendo las dos placas), debe ser la misma después del transitorio por lo que resulta (Ec. 67):

$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2 \quad (67)$$

Las expresiones 66 y 67, constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyas soluciones son (Ec. 68):



$$q'_1 = C_1 \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} \quad (68)$$

$$q'_2 = C_2 \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}$$

Estos resultados podrán ser ambos positivos o ambos negativos. Recuérdese que los valores representan la carga de la placa indicada con asterisco, por lo que nuestro análisis incluye la polaridad.

Finalmente, observemos que la diferencia de potencial de ambos capacitores es la misma y puede deducirse muy sencillamente (Ec. 69):

$$V'_1 = V'_2 = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} \quad (69)$$

Ejemplo: Consideremos el circuito de la figura 45, donde la pila garantiza una diferencia de potencial  $\varepsilon = 10V$ , mientras que los capacitores tienen capacidades respectivas  $C_1 = 60 \mu F$  y  $C_2 = 30 \mu F$ .

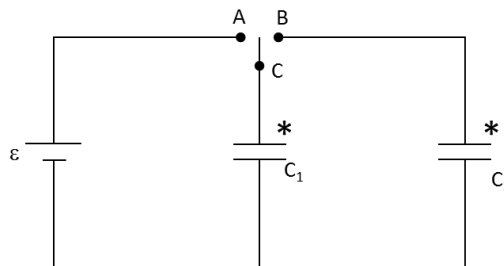


Figura 45: Conexión entre dos capacitores del ejemplo.

Cuando el conmutador se conecta en la posición A, la parte izquierda del circuito toma la forma del circuito elemental 1. Entonces, cuando alcanza la situación estática el capacitor adquiere una carga:

$$q_1 = \varepsilon C_1 = 10 V \cdot 60 \mu F = 600 \mu C$$

Si ahora el conmutador se pasa a la posición B, la parte derecha del circuito toma el aspecto del circuito elemental II, donde las cargas iniciales son  $q_1 = 600 \mu C$  y  $q_2 = 0$ . Entonces, las cargas finales las podemos obtener aplicando las relaciones 68

$$q'_1 = C_1 \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = 60 \mu F \frac{600 \mu C + 0}{60 \mu F + 30 \mu F} = 400 \mu C$$

$$q'_2 = C_2 \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = 30 \mu F \frac{600 \mu C + 0}{60 \mu F + 30 \mu F} = 200 \mu C$$

Por su parte la diferencia de potencial que en ambos capacitores será:

$$V'_1 = V'_2 = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{600\mu C + 0}{60\mu F + 30\mu F} = 6,66\text{ V}$$

## 5.6.- Circuitos equivalentes en el límite estático

Así como en el caso de los resistores, también es posible reducir algunos circuitos con capacitores, utilizando capacidades equivalentes. Nuevamente, debemos tener en cuenta que esto no siempre es posible mediante técnicas sencillas, por lo que debemos aprender a distinguir cuando tal reducción es viable.

Aquí propondremos las dos clases de reducción más sencillas. Estas son las conexiones serie y paralelo.

**Conexión serie:** Esta conexión se da cuando en un circuito más extendido hay dos capacitores de modo que un borne de uno está conectado con un borne del otro mediante un conductor sin nodo. Además, **dicha conexión debió hacerse con los capacitores descargados**. Ver Fig.46.

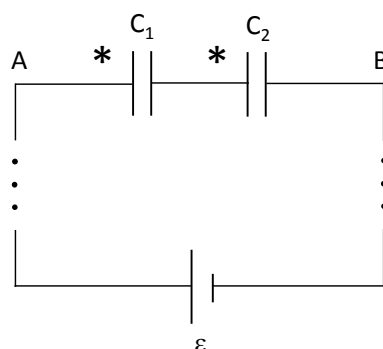


Figura 46: Ejemplo de conexión de dos capacitores en serie.

En la Figura 46, los asteriscos indican la placa de cada capacitor donde consideramos las cargas  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente. Por tanto, las placas no indicadas tendrán cargas  $-Q_1$  y  $-Q_2$ . Ahora imaginemos una superficie cerrada que pase por dentro de ambos capacitores (Fig. 47), aislando el conductor que une dichos capacitores y una placa de cada uno de ellos.

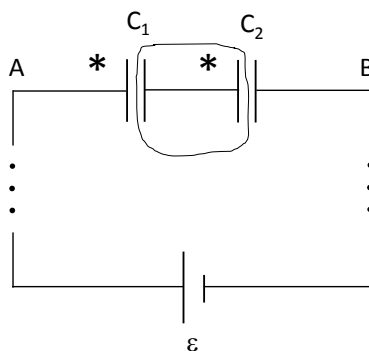


Figura 47: Análisis de la relación de cargas entre capacitores en serie.

Como los capacitores estaban originariamente descargados al momento de vincularlos, la carga neta en la parte aislada por la superficie imaginaria es nula. Esto seguirá siendo así siempre, dado que no existe ningún puente conductor entre esta parte del circuito y el resto del mismo. Por tanto, si estas placas se cargan será por procesos inductivos, manteniendo la carga neta nula. Entonces tendremos siempre que (Ec. 70)

$$-Q_1 + Q_2 = 0 \rightarrow Q_1 = Q_2 = Q \quad (70)$$

Por otra parte, la diferencia de potencial entre A y B puede tratarse como en cualquier rama de un circuito (Ec. 71)

$$V_A - V_B = V_1 + V_2 \quad (71)$$

Recordando que los capacitores cumplen con la relación  $V = \frac{Q}{C}$  entonces tenemos que (Ec. 72):

$$V_A - V_B = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad (72)$$

Aquí podemos reconocer la posibilidad de reemplazar por una capacidad equivalente  $C_e$  (Ec. 73):

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (73)$$

Donde el capacitor equivalente tendrá la misma carga que cada uno de los capacitores de la serie, mientras que su diferencia de potencial será la suma de las correspondientes a los capacitores de la serie (Fig. 48).

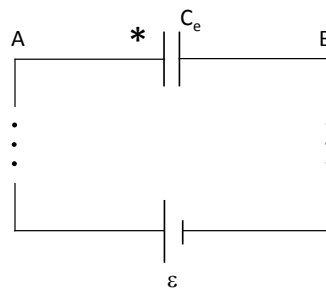


Figura 48: Parte de un circuito con la representación equivalente de dos capacitores conectados en serie.

Este último resultado puede extenderse a cualquier número de capacitores en serie, por sucesivas aplicaciones de la regla 73. Por ejemplo, para tres capacitores en serie tenemos (Ec. 74):

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (74)$$

**Conexión paralelo:** La conexión paralelo se da cuando, en un circuito más extendido, dos capacitores tienen conectadas sus placas del siguiente modo: una placa del primer capacitor está unida a una placa del segundo capacitor, y las otras dos placas también están unidas entre sí (Ver Fig. 49).

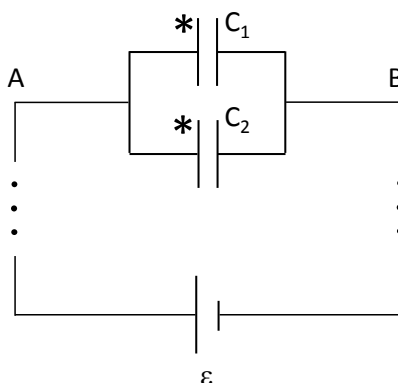


Figura 49: Ejemplo de conexión de dos capacitores en paralelo.

Observe sobre la figura 49, que las placas de la izquierda deben tener el mismo potencial por estar conectadas mediante un conductor. Idéntico razonamiento cabe sobre las placas de la derecha. Entonces concluimos que la diferencia de potencial es la misma en ambos capacitores. Así tenemos que (Ec. 75)

$$V_1 = V_2 = V \quad (75)$$

Por otra parte, la carga de cada capacitor (Ec. 76)

$$\begin{aligned} Q_1 &= V_1 C_1 \\ Q_2 &= V_2 C_2 \end{aligned} \quad (76)$$

Observando que la diferencia de potencial son iguales, la carga total del sistema puede escribirse como, (Ec. 77)

$$Q_1 + Q_2 = V (C_1 + C_2) \quad (77)$$

De esta relación se desprende la posibilidad de reemplazar a la conexión paralelo por un único capacitor equivalente  $C_e$  haciendo (Ec. 78):

$$C_e = C_1 + C_2 \quad (78)$$

Así tendremos que el capacitor equivalente tendrá la misma diferencia de potencial que cada uno de los capacitores 1 y 2, y su carga será la suma de las cargas de 1 y 2. (Fig. 50)

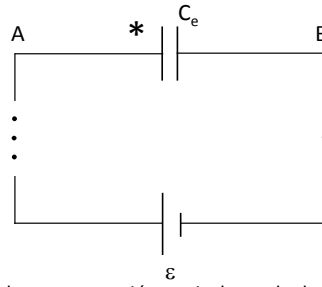


Figura 50: Parte de un circuito con la representación equivalente de dos capacitores conectados en paralelo.

Tal como hicimos en el caso serie, el análisis puede extenderse a  $n$  capacitores en paralelo por aplicaciones sucesivas de la relación 78. Por ejemplo, para tres capacitores en paralelo tendremos (Ec. 79)

$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 \quad (79)$$

Muchos circuitos con capacitores pueden ser reducidos por medio de aplicaciones múltiples del tipo serie y paralelo. A modo de ejemplo resolvamos el circuito de la figura 51, donde todos los capacitores tienen la misma capacidad:

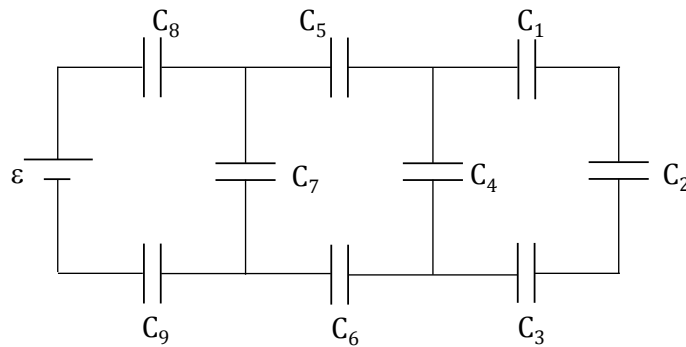


Figura 51: Ejemplo de un circuito reducible como series y paralelos.

En la rama que se encuentra más a la derecha del circuito tenemos tres capacitores en serie ( $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ ), los cuales vamos a reemplazar por un capacitor equivalente  $C_e$  (Ec. 80):

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{3}{C} \quad C_e = \frac{1}{3} C \quad (80)$$

Luego, este capacitor queda en paralelo con  $C_4$ , lo cual podemos reemplazar por un equivalente  $C'_e$  (Ec. 81).

$$C'_e = C_e + C_4 = \frac{1}{3} C + C = \frac{4}{3} C \quad (81)$$

El circuito equivalente tendrá la siguiente forma (Fig. 52)

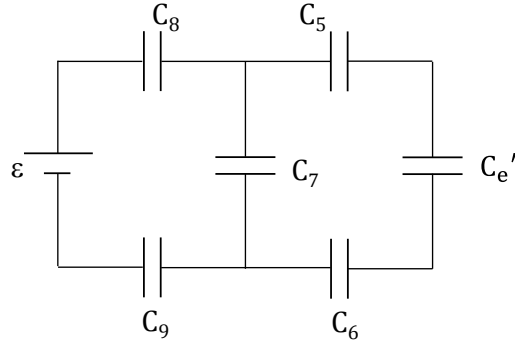


Figura 52: Primera reducción a un circuito equivalente.

Nuevamente, tenemos tres capacitores en serie (Ec. 82)

$$\frac{1}{C_e''} = \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_e'} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{3}{4C} = \frac{11}{4C} \quad C_e'' = \frac{4}{11} C \quad (82)$$

Quedando ahora  $C_e''$  en paralelo con  $C_7$  (Ec. 83), el cual se puede reemplazar por  $C_e'''$ .

$$C_e''' = C_e'' + C_7 = \frac{4}{11} C + C = \frac{15}{11} C \quad (83)$$

Veamos nuevamente como va el circuito equivalente (Fig. 53).

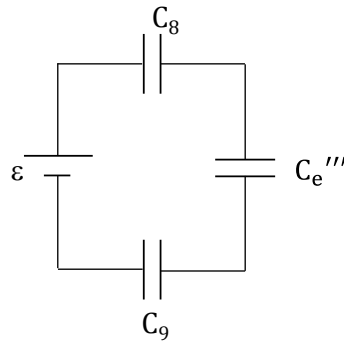


Figura 53: Segunda reducción a un circuito equivalente.

La ultima reducción que nos queda por hacer es una serie entre  $C_8$ ,  $C_e'''$  y  $C_9$  (Ec. 84).

$$\frac{1}{C_e''''} = \frac{1}{C_8} + \frac{1}{C_e'''} + \frac{1}{C_9} = \frac{1}{C} + \frac{11}{15C} + \frac{1}{C} = \frac{41}{15C} \quad C_e'''' = \frac{15}{41} C \quad (84)$$

Finalmente el circuito reducido quedará (Fig. 54).

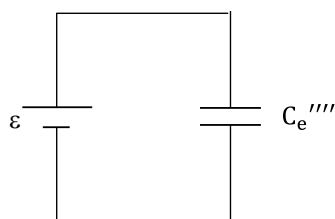


Figura 54: Circuito equivalente.

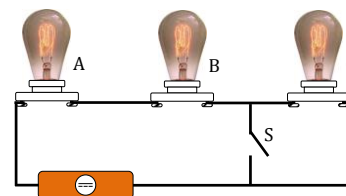
## 5.7.- Actividades

1. Una cafetera eléctrica tiene una resistencia de  $22\ \Omega$ . ¿Cuántas cafeteras pueden conectarse en paralelo a una fuente de  $220\text{ V}$ , si el fusible que protege la misma soporta una corriente máxima de  $30\text{ A}$ ? ¿Qué ocurre si conecto otra cafetera a la cantidad obtenida anteriormente?

Rta: 3

2. Tres lámparas idénticas están conectadas a una batería como muestra la figura. Cuando el interruptor S se cierra:

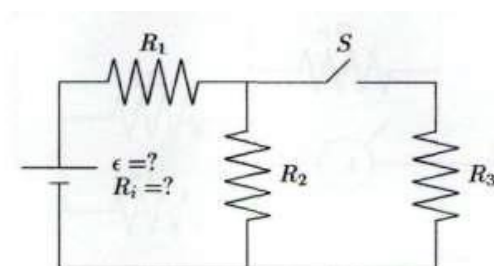
- ¿La intensidad de corriente a través de la batería aumenta, disminuye o permanece constante?
- ¿Las lámparas brillan más, menos o igual que cuando el interruptor se encontraba abierto?



3. La diferencia de potencial entre los bornes de una batería es de  $14,7\text{ V}$  cuando el circuito está abierto, mientras que al cortocircuitar sus bornes entrega una corriente de  $200\text{ A}$ . Calcule la intensidad de corriente al conectar una resistencia de  $0,5\ \Omega$  a dicha batería. Nota: en este problema suponga que la batería posee una resistencia interna.

Rta:  $25,8\text{ A}$ .

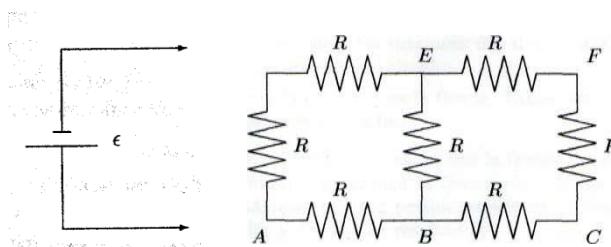
4. En el circuito de la figura, las resistencias son  $R_1 = 1200\ \Omega$ ,  $R_2 = 3300\ \Omega$  y  $R_3 = 2700\ \Omega$ . Cuando el interruptor S está abierto, la diferencia de potencial entre los bornes de la batería es de  $12\text{ V}$ . Luego, cuando se cierra S, dicha diferencia de potencial disminuye hasta  $11,92\text{ V}$ . Determine la fuerza electromotriz y la resistencia interna de la pila.

Rta:  $12,12\text{ V}$ ;  $44,44\ \Omega$ .

5. En el circuito de la figura, todas las resistencias son iguales ( $R = 1\ \Omega$ ), y la batería aporta una diferencia de potencial de  $12\text{ V}$ . Los terminales de la batería (indicados con flechas) pueden

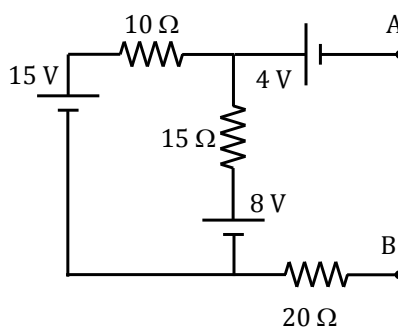
conectarse en diferentes partes del circuito. Encuentre la resistencia equivalente y la corriente que pasa por la batería en cada uno de los siguientes casos:

- Cuando la batería se conecta entre A y B.
- Cuando la batería se conecta entre A y C.
- Cuando la batería se conecta entre A y D.
- Cuando la batería se conecta entre A y E.
- Cuando la batería se conecta entre A y F.



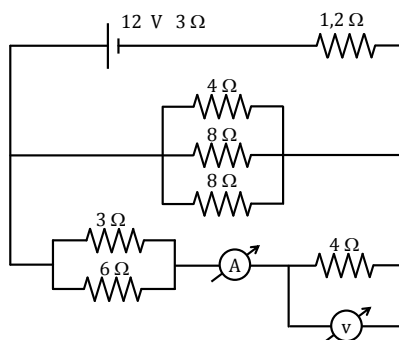
Rta: a)  $0,73 \Omega$ ;  $16,36 \text{ A}$ ; b)  $1,3 \Omega$ ;  $9 \text{ A}$ .  
c)  $0,73 \Omega$ ;  $16,36 \text{ A}$ ; d)  $0,93 \Omega$ ;  $12,9 \text{ A}$ .  
e)  $1 \Omega$ ;  $12 \text{ A}$ .

6. Determine la diferencia de potencial entre los puntos A y B del circuito de la figura.

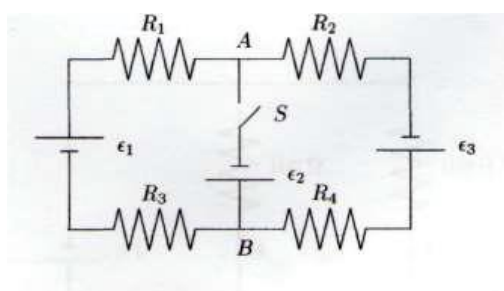


Rta:  $8,2 \text{ V}$ .

7. Determine la resistencia equivalente en el circuito de la figura. ¿Cuáles serán las lecturas del amperímetro A y del voltímetro V?



Rta:  $0,53 \text{ A}$ ;  $2,12 \text{ V}$ .



8. En el circuito de la figura, las tensiones suministradas por las baterías son  $\epsilon_1 = 15 \text{ V}$ ,  $\epsilon_2 = 10 \text{ V}$  y



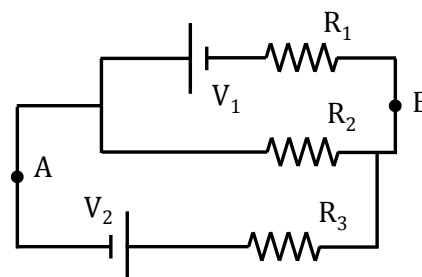
$\varepsilon_3 = 5 \text{ V}$ . Las resistencias son todas iguales  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5 \Omega$ .

- Determine la diferencia de potencial entre los puntos A y B mientras el interruptor S se mantiene abierto. Determine la potencia total disipada.
- Calcule las corrientes en cada rama del circuito cuando se cierra S. Determine nuevamente la potencia total disipada.

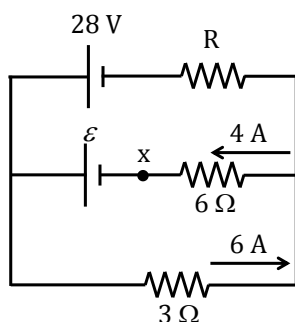
Rta: a) 5 V; 10 W

b) 2,5 A; 0,5 A; 3 A; 32,5 W

9. Para el circuito de la figura calcule la diferencia de potencial entre A y B. Las resistencias valen  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$  y  $R_3 = 6\Omega$ , mientras que la diferencia de potencial entregadas por las baterías son  $V_1 = 12 \text{ V}$  y  $V_2 = 8 \text{ V}$ .



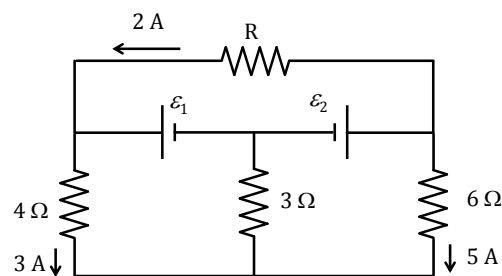
Rta: 1,8 V.



10. En el circuito de la figura encontrar la resistencia R, la corriente que circula por dicha resistencia y el valor de la fem  $\varepsilon$ .

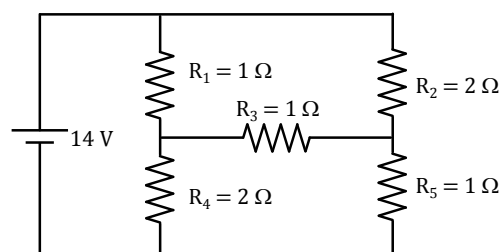
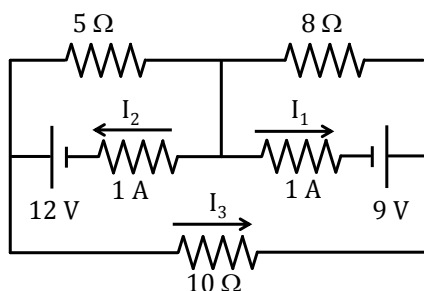
Rta: 5  $\Omega$ ; 2 A; 42 V.

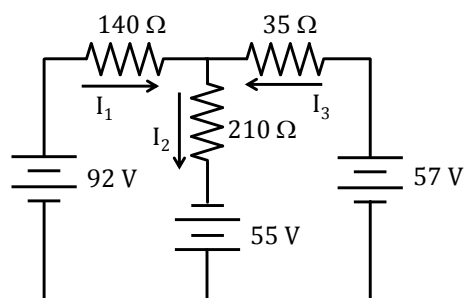
11. En el circuito de la figura encontrar la resistencia R y el valor de las fem  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ .



Rta: 9  $\Omega$ ; 36 V; 54 V.

12. En los siguientes circuitos calcular el valor de la corriente que circula por cada batería.

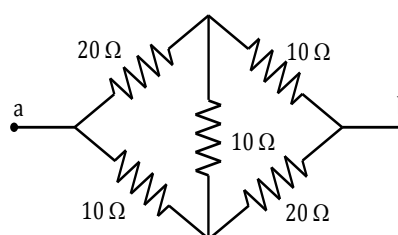
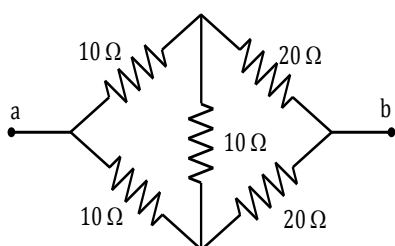




Rta: a) 0,84 A; 2,15 A; b) 14 A; c) 0,5 A; 1,57 A; 0,97 A.

13. En las siguientes figuras se han seleccionado tramos de circuitos que se conectan entre las terminales a y b a circuitos mayores.

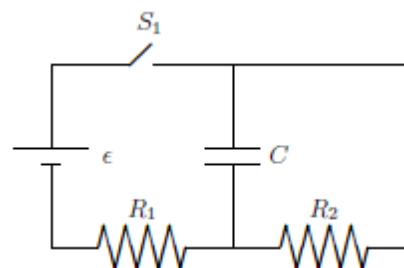
- Halle la resistencia equivalente de cada circuito.
- Suponga que a cada uno de los circuitos se conecta a una batería de 15 V. Determine la corriente a través de la rama vertical de cada circuito.



Rta: a) 15 Ω; 0 A.

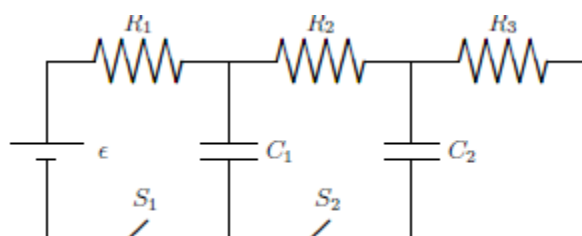
14. En el circuito de la figura, la batería suministra una tensión  $\epsilon = 12$  V, las resistencias son  $R_1 = 10$  Ω y  $R_2 = 20$  Ω, y la capacidad es  $C = 50$  μF.

- Suponga que inicialmente el capacitor está descargado, y se cierra el interruptor  $S_1$ . Determine la corriente en cada resistencia, justo después del cierre.
- Determine la carga del capacitor y las corrientes en cada resistencia, transcurrido un tiempo muy largo después del cierre de  $S_1$ .
- En las condiciones del inciso b, se abre el interruptor  $S_1$ . Calcule la carga del capacitor y la corriente en cada resistencia 2 ms después de abrir  $S_1$ .



Rta: a) 1,2 A; 0 A.  
b) 0,4 A; 0,4 A.  
c)  $5,9 \cdot 10^{-4}$  C; 0 A; 0,02 A.

15. En el circuito de la figura las resistencias son todas iguales  $R_1 = R_2 = R_3 = 10$  Ω, las



capacidades son  $C_1 = C_2 = 50 \mu F$  y la fuerza electromotriz de la pila es  $\varepsilon = 30 V$ . Suponga que los capacitores están inicialmente descargados. Determine la corriente a través de cada resistor y la carga en cada capacitor, en los instantes que se detallan en la siguiente secuencia.

- Justo después de cerrar simultáneamente los interruptores  $S_1$  y  $S_2$ .
- Mucho tiempo después de cerrados  $S_1$  y  $S_2$ .
- Justo después de abrir simultáneamente los interruptores  $S_1$  y  $S_2$ .
- Mucho tiempo después de abiertos  $S_1$  y  $S_2$ .
- Justo después de cerrar nuevamente  $S_2$ .
- Mucho tiempo después de cerrar  $S_2$ .

Rta: a) 3 A; 0 A; 0 A; 0 C; 0 C; b) 1 A; 1 A; 1 A; 1 mC; 50 mC; c) 0 A; 0 A; 1 A; 1 mC; 50 mC.  
d) 0 A; 0 A; 0 A; 1 mC; 0 C; e) 0 A; 2 A; 0 A; 1 mC; 0 C; f) 0 A; 0 A; 0 A; 0 C; 0 C.

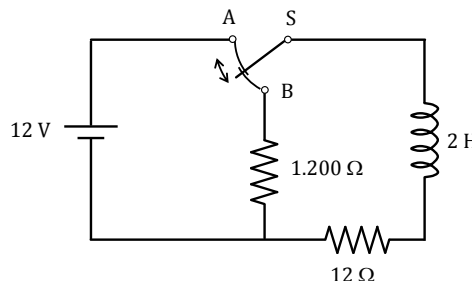
16. Los terminales de un capacitor de  $100 \mu F$  se conectan con los de un inductor de  $50 mH$ . El capacitor estaba originalmente cargado con  $30 \mu C$ .

- Pruebe que la carga del capacitor y la corriente en el inductor son variables oscilantes, y determine su frecuencia de oscilación.
- Determine la carga del capacitor y la corriente en el inductor cuando transcurrieron  $20 \mu s$  desde la conexión.

Rta: a) 0,6 A / 0 A; b)  $70 \mu s$  / 3,5 ms.

17. Una aplicación de un circuito RL es la generación de una alta tensión que varía en el tiempo a partir de una fuente de baja tensión, como se muestra en la figura.

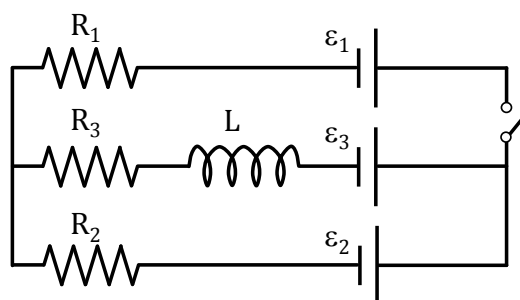
- ¿Cuál es la corriente en el circuito un largo tiempo después de que el interruptor ha estado en la posición A?
- Cuando se invierte el conmutador ¿cuál es la diferencia de potencial inicial en la resistencia de  $1200 \Omega$ ?
- ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que dicha diferencia de potencial disminuya hasta 12 V?



Rta: a) 1 A.; b) 1200 V; c)  $7 \cdot 10^{-3} s$

18. En el circuito de la figura con  $\varepsilon_1 = 20V$ ,  $\varepsilon_2 = 40V$ ,  $\varepsilon_3 = 10V$ ,  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$ ,  $R_3 = 20\Omega$ . Si antes de cerrar el interruptor S, por la malla inferior se había establecido ya una corriente estacionaria, encuentre:

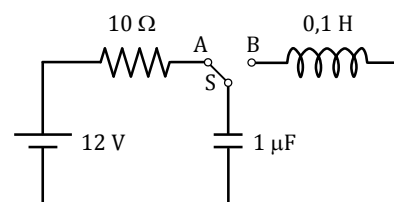
- la corriente que circula por la malla inferior un instante previo de cerrar S.
- la corriente en cada rama del circuito inmediatamente luego de que se cerró el interruptor S.



- c) las corrientes luego de un tiempo muy largo después de cerrar S.

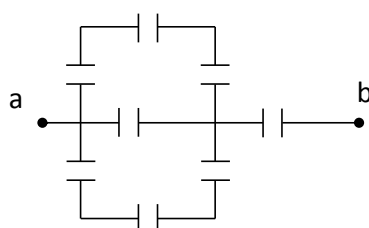
Rta: a) 1 A; b) 1,77 A, 1 A, 0,77 A; c) 2,8 A; 0,09 A; 2,7 A.

19. El interruptor de la figura se conecta a un punto a durante un largo tiempo. Después de que el interruptor se mueve al punto b, encuentre:



- la frecuencia de oscilación en el circuito LC.
- la carga máxima que se acumula en el capacitor y la corriente máxima que circula por el inductor y a  $t = 3$  s.
- la carga que se acumula en el capacitor y la corriente que circula por el inductor a  $t = 3$  s.

Rta: a) 3.162,3 1/s; b) 12  $\mu$ C; 1,2 A; c) 7,3  $\mu$ C; 0,96 A.

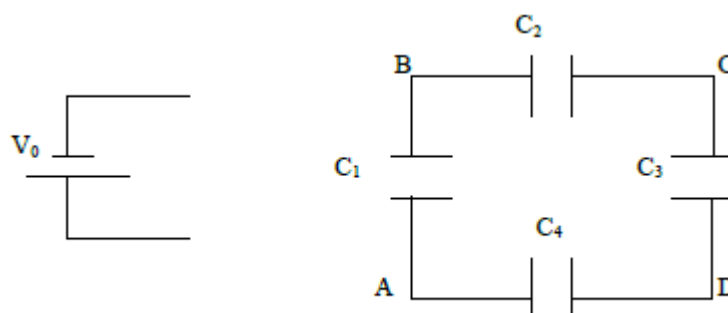


20. Considerando el arreglo de la figura de la derecha, determine la capacidad equivalente entre los puntos a y b de la figura, suponiendo que todos los elementos tienen una capacidad C.

Rta:  $\frac{5}{8} \cdot C$

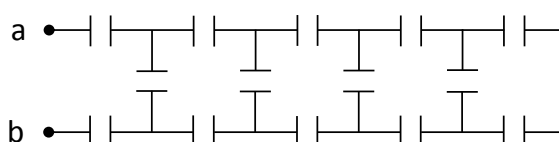
21. Los capacitores de la figura poseen las siguientes capacidades:  $C_1 = 5\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 10\mu\text{F}$ ,  $C_3 = 15\mu\text{F}$  y  $C_4 = 10\mu\text{F}$ . La diferencia de potencial de la batería es  $V_0 = 1,5$  V.

- Determine la capacidad equivalente del circuito y la carga en cada capacitor cuando la batería se conecta entre los puntos A y B.
- Repita el análisis cuando la conexión se realiza entre los puntos B y D.
- ¿Entre qué puntos debe realizarse la conexión para que el sistema tenga la máxima capacidad posible?



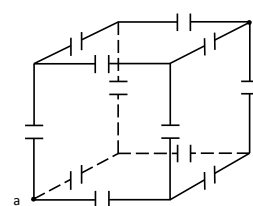
Rta: a) 8,75  $\mu$ F; 1,5 V; 7,5  $\mu$ C; 0,563 V; 5,63  $\mu$ C; 0,375 V; 5,63  $\mu$ C; 0,563 V; 5,63  $\mu$ C.  
b) 9,33  $\mu$ F; 1 V; 5  $\mu$ C; 0,5 V; 5  $\mu$ C; 0,9 V; 9  $\mu$ C; 0,6 V; 9  $\mu$ C.

22. El arreglo de la figura posee infinitos capacitores idénticos de capacidad C. Determine la capacidad equivalente del sistema visto desde las terminales a y b.



Rta: 0,4 C.

23. Considere un cubo cuyas aristas son alambres conductores soldados en los vértices, como se puede observar en la figura. Suponga, ahora, que en cada tramo de alambre (en cada arista) se intercala un capacitor C.



Este montaje se utiliza como parte de un circuito conectado de modo que sus terminales se encuentran en vértices opuestos. Determine la capacidad equivalente del arreglo.

Ayuda: Una buena manera de iniciar la resolución consiste en imaginar al sistema conectado con una batería, luego, observe los potenciales de cada nodo del circuito.

## 6.- Análisis energético de los circuitos elementales.

El análisis energético en un circuito permite establecer reglas de conservación muy útiles para hacer una visualización rápida de los fenómenos físicos involucrados. Para poder hacer estos abordajes, es necesario tratar las fuentes y dispositivos separadamente, entendiendo los fenómenos particulares que se dan en cada uno de ellos desde una caracterización energética. En tal sentido, daremos a continuación una breve descripción de cada elemento.

### 6.1.- Fuentes

Las fuentes, ya sean de tensión continua o alterna, serán en general los elementos que aportan energía al circuito. Habitualmente caracterizamos las fuentes mediante su fuerza electromotriz (fem), a la que denotamos por  $\varepsilon$ . La potencia instantánea que una fuente introduce en el circuito viene dada por (Ec. 85):

$$p(t) = \varepsilon(t)i(t) \quad (85)$$

Donde  $i(t)$  es la corriente que atraviesa la fuente en el instante considerado, y  $\varepsilon(t)$  es el valor instantáneo de la fem <sup>6</sup>.

La energía suministrada por una fuente en el lapso que transcurre entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , será (Ec. 86):

$$U_f = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt \quad (86)$$

Se define la potencia media temporal suministrada por la fuente, en el mismo lapso, como (Ec. 87),

<sup>6</sup>Observe el lector que  $\varepsilon(t)$  solo será variable en el tiempo para fuentes de tensión alterna. Las fuentes de tensión continua tendrán un valor constante de  $\varepsilon$  y podrán considerarse como un caso particular en que sigue siendo válida la relación 85.

$$P_f = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (87)$$

En particular, las fuentes de tensión continua aportan una potencia media temporal dada por (Ec. 88):

$$P_f = \frac{\epsilon}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt \quad (88)$$

Por su parte, las fuentes de tensión alterna las volveremos a tratar más profundamente en el apartado correspondiente.

## 6.2.- Resistores

Los resistores son los elementos por donde la energía abandona el circuito. El mecanismo que opera dentro del resistor es la conversión de la energía cinética de los portadores circulantes en energía térmica de la estructura del sólido que lo compone (Efecto Joule). Luego esta energía es disipada al ambiente mediante procesos térmicos<sup>7</sup>.

La potencia instantánea transferida en forma de energía térmica viene dada por (Ec. 89),

$$p_r(t) = R i^2(t) \quad (89)$$

Donde R es la resistencia del dispositivo e  $i(t)$  es la corriente instantánea que pasa a través del mismo. La energía disipada en el lapso que transcurre entre  $t_1$  y  $t_2$ , es (Ec. 90)

$$U_R = \int_{t_1}^{t_2} p_r(t) dt \quad (90)$$

La potencia media en el mismo intervalo será (Ec. 91)

$$P_f = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p_r(t) dt = \frac{R}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt \quad (91)$$

## 6.3.- Capacitores

Los capacitores son dispositivos que retienen energía temporariamente en el circuito. Ellos no incorporan ni disipan energía. Solo la almacenan. Dicha energía reside en el campo eléctrico que se genera entre las armaduras del capacitor. Observe que, a diferencia de las fuentes y los resistores, en los capacitores no es relevante definir una potencia, dado que no se involucran agentes externos que aportan o extraen energía.

La energía residente en el capacitor en un instante puede calcularse de las siguientes maneras (Ec. 92):

<sup>7</sup>En realidad, la disipación por Efecto Joule no es el único mecanismo por el que la energía puede dejar el circuito. El otro mecanismo posible es la radiación electromagnética, que ocurre por ejemplo en las antenas emisoras de radio. Sin embargo, nosotros no trataremos este mecanismo en virtud de la sencillez de los dispositivos involucrados en los circuitos elementales.

$$u_c(t) = \frac{1}{2} q(t)v(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{1}{2} C v^2(t) \quad (92)$$

Donde C es la capacidad del dispositivo,  $v(t)$  representa su diferencia de potencial y  $q(t)$  su carga.

## 6.4.- Inductores

De manera análoga a los capacitores, los inductores también retienen energía temporariamente. Ellos ni introducen ni disipan energía. Para que un inductor tenga energía almacenada, deberá circular a través de él una corriente eléctrica. Dicha energía residirá en el campo magnético del inductor. Nuevamente, carece de relevancia una potencia asociada a este dispositivo.

La energía instantánea residente en un inductor viene dada por (Ec. 93):

$$u_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad (93)$$

Donde L es el coeficiente de auto inducción mientras que  $i(t)$  es la corriente que circula por el dispositivo.

## 6.5.- Ejemplos de aplicación

### 6.5.1.- Carga de un capacitor

Consideremos el circuito elemental de carga de un capacitor de la Figura 30. Nos preguntamos a cerca de la energía que debe introducir la pila en el circuito en el lapso que transcurre entre el cierre del interruptor S ( $t = 0$ ) y un tiempo  $t$  cualquiera. Este cálculo puede realizarse por dos caminos. Observando la conservación de la energía podemos entender que la energía entregada por la pila hasta el tiempo  $t$ , tendrá que ser igual a la energía residente en el capacitor en dicho instante más la energía disipada en el resistor durante el mismo lapso. Entonces, llamando  $U_f(t)$  a la energía aportada por la pila tendremos las siguientes opciones (Ec. 94):

$$U_f(t) = \int_0^t \varepsilon i(t') dt' \quad (94)$$

o bien (Ec. 95)

$$U_f(t) = \int_0^t R i^2(t') dt' + \frac{q(t)^2}{2C} \quad (95)$$

Observemos que los dos caminos conducen al mismo resultado. Del análisis del transitorio tenemos que la carga del capacitor y la corriente del circuito vienen dadas por las expresiones 31 y 34. Comencemos por resolver por el primer camino (Ec. 96)

$$U_f(t) = \int_0^t \varepsilon i_0 e^{-t'/\tau} dt' = \tau \varepsilon i_0 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (96)$$

Si reemplazamos los valores de  $\tau$  e  $i_0$  (Ec. 32 y 34) en la relación 96, se obtiene (Ec. 97):

$$U_f(t) = \tau \varepsilon i_0 (1 - e^{-t/\tau}) = R C \varepsilon \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = C \varepsilon^2 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (97)$$

Veamos lo que ocurre por el otro camino (Ec. 98):

$$\begin{aligned}
U_f(t) &= \int_0^t R i_0^2 e^{-2t/\tau} dt + \frac{q_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2}{2C} \\
U_f(t) &= R C \frac{R}{2} \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 (1 - e^{-2t/\tau}) + \frac{\varepsilon^2 C^2}{2C} (1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau}) \\
U_f(t) &= \frac{C \varepsilon^2}{2} (1 - e^{-2t/\tau}) + \frac{\varepsilon^2 C}{2} (1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau}) \\
U_f(t) &= \frac{\varepsilon^2 C}{2} (2 - 2e^{-t/\tau}) = C \varepsilon^2 (1 - e^{-t/\tau})
\end{aligned} \tag{98}$$

Así, obtenemos una expresión idéntica a la relación 97.

Observemos qué ocurre cuando transcurre un tiempo muy largo ( $t \rightarrow \infty$ ). La energía entregada por la fuente converge al valor (Ec. 99)

$$U_f(t \rightarrow \infty) = C \varepsilon^2 \tag{99}$$

Mientras tanto el capacitor completa su carga, adquiriendo una energía final (Ec. 100)

$$U_c(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} C \varepsilon^2 \tag{100}$$

De donde concluimos que la energía que aporta la fuente en el proceso de carga de un capacitor es el doble que la energía que almacena dicho capacitor. Como conclusión adicional podemos decir que la mitad de la energía aportada por la fuente se disipa en el resistor.

### 6.5.2.- Conexión de un inductor

Consideremos ahora el circuito elemental de conexión de un inductor (Fig. 35). La corriente en el circuito viene dada por la función 49. La energía entregada por la pila hasta el tiempo  $t$ , viene dada por (Ec. 101)

$$\begin{aligned}
U_f(t) &= \int_0^t \varepsilon I_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) dt = \varepsilon I_\infty t - \frac{\varepsilon I_\infty L}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \\
R I_\infty^2 t - I_\infty^2 L \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) &= R I_\infty^2 t - I_\infty^2 L + I_\infty^2 L e^{-\frac{t}{\tau}}
\end{aligned} \tag{101}$$

Veamos ahora la energía disipada por el resistor hasta el mismo tiempo  $t$  (Ec. 102)

$$\begin{aligned}
U_R(t) &= \int_0^t R I_\infty^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt = \int_0^t R I_\infty^2 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-2\frac{t}{\tau}}\right) dt = \\
R I_\infty^2 t + 2R I_\infty^2 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} - 2R I_\infty^2 \tau - \frac{R I_\infty^2 \tau}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} + \frac{R I_\infty^2 \tau}{2} &= \\
R I_\infty^2 t + 2R I_\infty^2 \tau e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{3}{2} R I_\infty^2 \tau - \frac{R I_\infty^2 \tau}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} &= \\
R I_\infty^2 t + 2I_\infty^2 L e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{3}{2} I_\infty^2 L - \frac{I_\infty^2 L}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} &
\end{aligned} \tag{102}$$

Para determinar la energía que acumulo el inductor en su campo de inducción magnética hasta el tiempo  $t$ , podemos restar el resultado de la energía expresada en 102 de la expresada en 101 (Ec. 103)



$$U_L(t) = U_f(t) - U_R(t) = \frac{1}{2} I_\infty^2 L - I_\infty^2 L e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{I_\infty^2 L}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} = \quad (103)$$

$$\frac{1}{2} L I_\infty^2 \left( 1 - 2 e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-2\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{1}{2} L I_\infty^2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Observe que la energía en el inductor tiende a estabilizarse en un valor que constituye la energía adquirida en condiciones estacionarias. Esto se obtiene para tiempos suficientemente grandes ( $t \rightarrow \infty$ ) (Ec. 104).

$$U_L(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} L I_\infty^2 \quad (104)$$

Este resultado es consistente con que, en condiciones estacionarias la potencia suministrada por la fuente es igual a la potencia disipada en el resistor. Sin embargo en las energías totales a tiempos suficientemente largos nos queda lo siguiente (Ec. 105):

$$U_f(t \rightarrow \infty) = R I_\infty^2 t - I_\infty^2 L$$

$$U_R(t \rightarrow \infty) = R I_\infty^2 t - \frac{3}{2} I_\infty^2 L \quad (105)$$

Los términos afectados por el factor  $t$  son los que indican que la energía es acumulativa con el tiempo (tanto la suministrada por la fuente como la disipada en el resistor). Los términos restantes no dependen del tiempo y tiene información sobre lo ocurrido durante el lapso transitorio, en que se acumuló energía en el inductor. Naturalmente, la diferencia entre estas dos energías a grandes tiempos nos reproduce la ecuación 104.

### 6.5.3 Relajación de capacitores entre dos condiciones electrostáticas

Sea el circuito de la Figura 55, compuesto por un capacitor  $C_1$  cargada con carga  $q_1$ , que se conecta a través de una llave a dos capacitores  $C_2$  y  $C_3$ , inicialmente descargados.

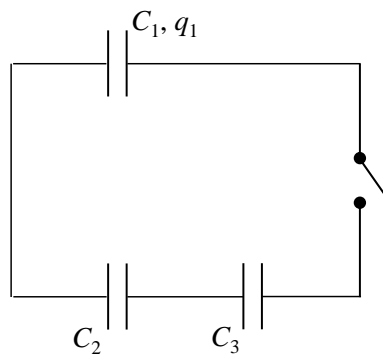


Figura 55: Circuito inicial.

Luego de cerrar la llave, nos queda un circuito equivalente al de la Figura 44 donde los capacitores  $C_2$  y  $C_3$  quedan conectados en serie, dado que hay un cable que los conecta (tal como se explicó en la Figura 47 y ecuación 70) (Fig. 56).

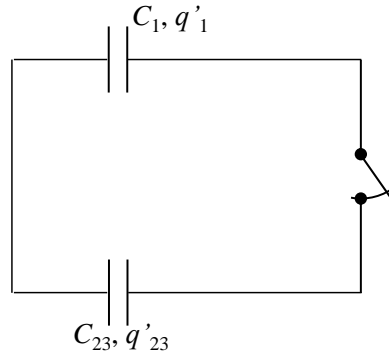


Figura 56: Circuito equivalente.

Entonces la capacidad equivalente será (Ec. 106):

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \quad (106)$$

Si tenemos en cuenta el planteo realiza en las Ecuaciones 68 y 69, nos queda para este circuito (Ec. 107):

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{C_1} &= \frac{q_{23}}{C_{23}} \\ q_1 &= q_1 + q_{23} \end{aligned} \quad (107)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se puede encontrar la carga final en cada uno de los capacitores en función de sus capacidades y la carga inicial (Ec. 108):

$$\begin{aligned} q_2 = q_3 = q_{23} &= \frac{C_{23}}{C_1 + C_{23}} q_1 = \frac{C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} q_1 \\ q_1 &= \frac{C_1}{C_1 + C_{23}} q_1 = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} q_1 \end{aligned} \quad (108)$$

Analicemos que ha sucedido con la energía. Inicialmente teníamos (Ec. 109),

$$U_i = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} \quad (109)$$

Para calcular la energía final, debemos sumar la energía de los tres capacitores (Ec. 110),

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C_2} + \frac{1}{2} \frac{q_3^2}{C_3} \\ U_f &= \frac{1}{2} \frac{C_1^2 (C_2 + C_3)^2 q_1^2}{(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)^2 C_1} + \frac{1}{2} \frac{C_2^2 C_3^2 q_1^2}{(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)^2 C_2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{C_2^2 C_3^2 q_1^2}{(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)^2 C_3} \end{aligned} \quad (110)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \frac{(C_2 + C_3) q_1^2}{(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)}$$

Puede observarse que la energía inicial y la final no son iguales. Si calculamos la diferencia entre ambas, nos queda (Ec. 111)

$$U_f - U_i = \frac{1}{2} \frac{(C_2 + C_3) q_1^2}{(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} - \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} = -\frac{1}{2} \frac{C_2 C_3 q_1^2}{C_1 (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)} \quad (111)$$

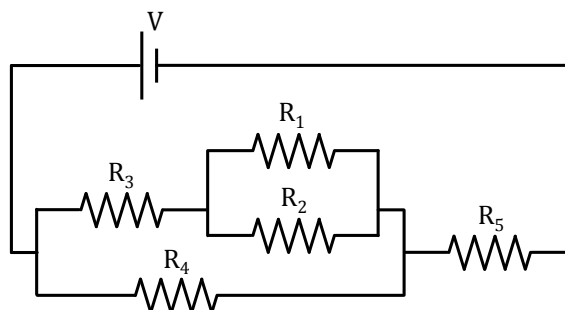
Obsérvese que el resultado es negativo, lo cual significa que hubo una pérdida de energía durante el proceso de reordenamiento de la carga.

Este resultado se repite en todos los procesos en que un sistema se relaja desde un estado electrostático a otro espontáneamente. Aquí podemos observar siempre que la energía del estado final será menor que la del estado inicial. Los circuitos poseen dos mecanismos por los cuales deshacerse de su energía. Uno es el efecto Joule, donde la energía de los campos se convierte en energía térmica de los medios materiales. El segundo mecanismo es la radiación electromagnética por lo que la energía de los campos es transferida a ondas viajeras que abandonan el circuito. Este efecto es lo que habitualmente observamos en las antenas emisoras.

## 6.6.- Actividades

1. La diferencia de potencial entregada por la batería es 12 V, y las resistencias valen  $R_1 = 6 \, \Omega$ ,  $R_2 = 12 \, \Omega$ ,  $R_3 = 4 \, \Omega$ ,  $R_4 = 8 \, \Omega$  y  $R_5 = 1 \, \Omega$ . Calcule:

- la resistencia equivalente.
- la corriente que circula por la batería.
- la corriente que circula por cada resistencia.
- la potencia en cada resistencia y la total.
- la potencia entregada por la batería.

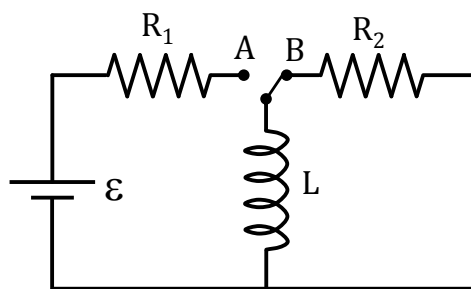
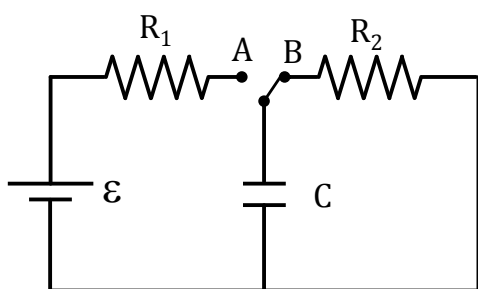


Rta: a)  $5 \, \Omega$ ; b)  $2,4 \, \text{A}$ ; c)  $0,8 \, \text{A}$ ;  $0,4 \, \text{A}$ ;  $1,2 \, \text{A}$ ;  $1,2 \, \text{A}$ ;  $2,4 \, \text{A}$   
 d)  $3,84 \, \text{W}$ ;  $1,92 \, \text{W}$ ;  $5,76 \, \text{W}$ ;  $11,52 \, \text{W}$ ;  $5,76 \, \text{W}$ ;  $28,8 \, \text{W}$ ; e)  $28,8 \, \text{W}$ .

2. Los circuitos de la figura son análogos, a menos de su rama central. En ambos casos la pila aporta una fuerza electromotriz  $\varepsilon = 12 \, \text{V}$ , y las resistencias son  $R_1 = 20 \, \Omega$  y  $R_2 = 50 \, \Omega$ . Por su parte, la capacidad es  $C = 10 \, \mu\text{F}$  y la autoinducción es  $L = 100 \, \text{mH}$ . Calcule en ambos casos:

- La corriente a través de la pila justo después de conectar el conmutador con el contacto A.
- El tiempo transcurrido hasta que la corriente alcanza la mitad de su valor máximo.
- La corriente a través de la pila después de mucho tiempo de la conexión con A.
- La energía almacenada en los campos en las condiciones del inciso c.
- La corriente a través de  $R_2$  justo después de conectar el conmutador en la posición B.

- f) La constante de tiempo del circuito en las condiciones del inciso e.



Rta: a) 0,6 A / 0 A; b) 70  $\mu$ s / 3,5 ms; c) 0 A / 0,6 A.  
d) 7,2  $10^{-4}$  J / 0,018 J; e) 0,24 A / 0,6 A; f) 5  $10^{-4}$  s / 2  $10^{-3}$  s.

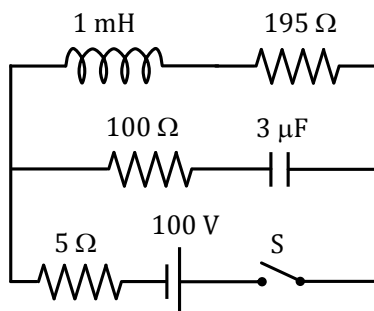
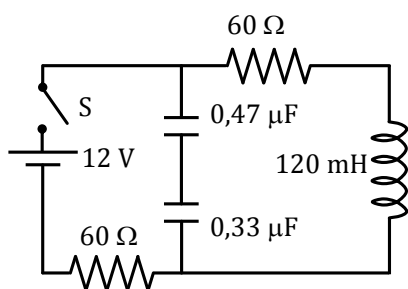
3. En el proceso de carga de un capacitor que se encuentra inicialmente descargado, las componentes se conectan en una única malla. Ellos son un capacitor de  $C = 100 \mu\text{F}$ , una resistencia de  $R = 2 \times 10^5 \Omega$  y una batería de fem  $\varepsilon = 10 \text{ V}$ . Además, el circuito consta de un interruptor que se cierra al tiempo  $t = 0 \text{ s}$ . Al cabo de 10 s de cerrado el interruptor, calcule:

- la carga en el capacitor.
- la corriente en el resistor.
- la tasa a la cual se almacena la energía en el capacitor (potencia).
- la tasa a la cual la batería entrega energía.

Rta: a) 4  $10^{-4}$  C; b) 4  $10^{-5}$  A; c) 1,6  $10^{-4}$  W; d) 4  $10^{-5}$  W.

4. Para los siguientes circuitos calcule:

- las corrientes, en cada rama, justo después de cerrar el interruptor.
- las corrientes, en cada rama, luego de transcurrido mucho tiempo desde el cierre del interruptor.
- la carga y la energía almacenada en cada capacitor (en la condiciones del inciso b).
- la energía final almacenada en la autoinducción (en la condiciones del inciso b).



Rta: a) 0,2 A; 0,1 A / 0,95 A; 0,5 A; b) 1,14  $\mu\text{C}$  / 292,5  $\mu\text{C}$ .  
c) 6  $10^{-4}$  J / 1,25  $10^{-4}$  J.

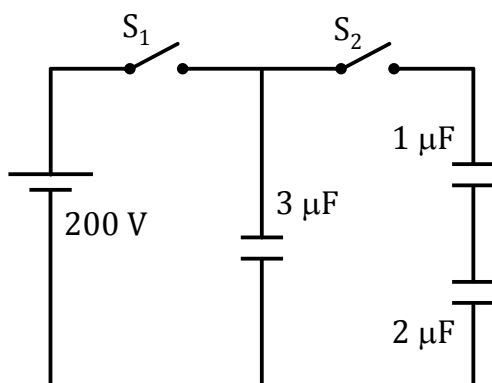
5. Un capacitor  $C_1$  de  $0,1 \mu\text{F}$  que se ha cargado a  $100 \text{ V}$ , se conecta a otro  $C_2$ , totalmente descargado, de  $0,3 \mu\text{F}$  de capacidad. Prediga justificadamente:
- ¿La carga final de  $C_1$  será mayor, menor o igual que la de  $C_2$ ?
  - ¿La diferencia de potencial entre las placas de  $C_2$  será mayor, menor o igual que  $100\text{V}$ ?
  - ¿La energía almacenada por el conjunto de capacitores será mayor, menor o igual que la almacenada inicialmente por  $C_1$ ?

Corrobore analíticamente cada una de las predicciones realizadas.

6. Dos capacitores  $C_1 = 5 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 2 \mu\text{F}$  se conectan respectivamente con fuentes de tensión  $V_1 = 20 \text{ V}$  y  $V_2 = 40 \text{ V}$ . Después de cargados se desconectan de las baterías.
- En estas condiciones, se conectan entre si las placas positivas y lo mismo se hace con las placas negativas. Calcule la diferencia de potencial y la carga final en cada capacitor. Determine la energía total almacenada antes y después de la conexión.
  - Repita el análisis para el caso en que se conectan entre si las placas de distinto signo.

Rta: a)  $25,72 \text{ V}$ ;  $51,42 \mu\text{C}$ ;  $128,58 \mu\text{F}$ .

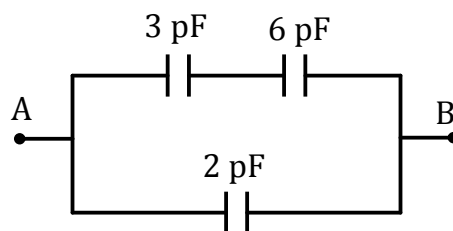
b)  $2,8 \text{ V}$ ;  $5,7 \mu\text{C}$ ;  $14,3 \mu\text{C}$ .



7. Tres capacitores se conectan como indica la figura. Primero se cierra el interruptor  $S_1$ . Luego se abre  $S_1$  y se cierra  $S_2$ . Determine la diferencia de potencial, la carga y la energía almacenada en cada capacitor, en las condiciones finales.

Rta:  $163,6 \text{ V}$ ;  $490,9 \mu\text{C}$ ;  $109,1 \mu\text{F}$ ;  $109,1 \mu\text{F}$ .

8. Considere tres capacitores de idéntica capacidad  $C$ . Suponga que diferentes combinaciones circuitales de estos capacitores se conectan a una misma fuente de tensión  $V$ .
- Determine todas las combinaciones posibles.
  - Habiendo conectado cada combinación de capacitores a la misma fuente, ¿cuál de ellas almacena mayor energía?
9. Determine la capacidad equivalente para la red de la figura, suponiendo que se conecta a una batería de  $12 \text{ V}$  en los puntos A y B. Calcule la diferencia de potencial, la carga y la energía en cada capacitor.



Rta:  $4 \text{ pF}$ ;  $12 \text{ V}$ ;  $24 \text{ pC}$ ;  $144 \text{ pJ}$ ;  $8 \text{ V}$ ;  $24 \text{ pC}$ ;  $96 \text{ pJ}$ ;  $4 \text{ V}$ ;  $24 \text{ pC}$ ;  $48 \text{ pJ}$ .

## 7.- Circuitos alimentados con una fuente de tensión alterna.

Los circuitos de corriente alterna constituyen un ejemplo cotidiano de aplicación del electromagnetismo, ya que las redes domiciliarias son circuitos de este tipo.

Cuando tratamos la ley de Faraday, observamos que los montajes de bobinas giratorias en campos magnéticos uniformes generan fuerzas electromotrices oscilantes, a expensas de la energía aportada por un agente externo (motor). Tal dispositivo puede utilizarse como fuente de alimentación para un circuito, en cuyo caso diremos que el dispositivo es una “fuente de tensión alterna”, y que el circuito está sometido a un “régimen de corriente alterna”<sup>8</sup>. En nuestro tratamiento, nos remitiremos exclusivamente a fuentes de tensión alterna que suministran tensiones de la forma (Ec. 112)

$$v_F(t) = V_F \text{ sen } (\omega t + \phi) \quad (112)$$

donde  $v_F(t)$  representa la diferencia de potencial garantizada entre los terminales de la fuente en cada instante (note que es una función del tiempo). Como se trata de una magnitud que oscila armónicamente, cabe definir su amplitud  $V_F$ , su frecuencia angular  $\omega$  y su fase inicial  $\phi$ .

Los circuitos que trataremos en este curso serán sólo los más elementales, incluyendo resistores, inductores y capacitores bajo la acción de una única fuente de tensión alterna. Como ya es sabido, la puesta en marcha de un circuito que contiene inductores y capacitores da lugar a un régimen transitorio. Nosotros no analizaremos tales efectos, por lo que asumiremos que la conexión de la fuente con el circuito se ha realizado largo tiempo atrás<sup>9</sup>. En estas condiciones, puede probarse que todas las tensiones y corrientes medibles del circuito oscilan armónicamente con la misma frecuencia que la fuente. Si llamamos  $u(t)$  a una tensión medida entre dos puntos del circuito, o a una corriente medida en un punto del circuito, la misma será de la forma (Ec. 113):

$$u(t) = U \text{ sen } (\omega t + \phi) \quad (113)$$

donde  $\omega$  siempre es la misma frecuencia angular de la fuente y  $\phi$  es una fase relativa particular de cada magnitud medida.

Con respecto a las notaciones, observemos como ejemplo la función (113). Reservaremos las letras minúsculas para identificar los valores instantáneos de una magnitud (variable dependiente del tiempo) y su homóloga mayúscula para la amplitud asociada.

### 7.1.- La representación fasorial.

Como sabemos, los vectores en el plano pueden representarse como segmentos orientados. Un fasor es un vector “rotante”, tal que el segmento que lo representa mantiene uno de sus extremos fijos, mientras que el otro (el que tiene flecha) gira sobre una circunferencia. Utilizaremos esta representación para el caso particular en que el fasor gira con frecuencia angular constante  $\omega$  en

<sup>8</sup>En realidad, la tecnología actual provee de fuentes de tensión alterna que funcionan por principios muy diversos, por lo que los dispositivos mencionados deben tomarse como un ejemplo para fijar ideas.

<sup>9</sup>En terminología más estricta, decimos que el régimen es “estacionario”, aunque la palabra se presta a confusión por la variabilidad temporal de las magnitudes involucradas.

sentido antihorario (Figura 57). Sea  $\vec{U}(t)$ , un fasor genérico, cuyas componentes en la notación habitual serán (Ec. 114):

$$u_x(t) = U \cos (\omega t + \phi) \quad (114 \text{ a})$$

$$u_y(t) = U \sin (\omega t + \phi) \quad (114 \text{ b})$$

donde  $U$  representa el módulo del fasor. Observe la completa analogía entre las funciones 113 y 114 b. En virtud de tal comparación, podemos interpretar que las funciones del tipo (113) "son" las proyecciones de fasores sobre el eje "y". En tratamientos posteriores nos referiremos a fasores reservando las notaciones vectoriales a tal fin.

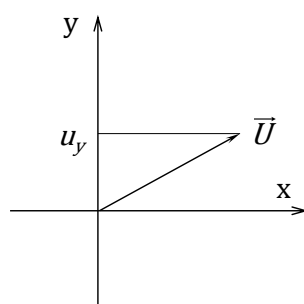


Figura 57: Diagrama de un fasor.

La principal ventaja de esta representación radica en que los fasores representativos de todas las magnitudes físicas giran a la misma velocidad angular, por lo que sus posiciones relativas se mantienen en el tiempo como si fuera un rotador rígido. Esto permite evaluar relaciones vectoriales a un tiempo, sabiendo que dichas relaciones se mantienen para todo tiempo posterior.

## 7.2 Los circuitos más elementales.

Los montajes más elementales que pueden concebirse en corriente alterna, surgen de la conexión de un único dispositivo (resistor, capacitor o inductor) con la fuente de tensión alterna. Estos circuitos se representan en las figuras 58.a, 58.b y 58.c.

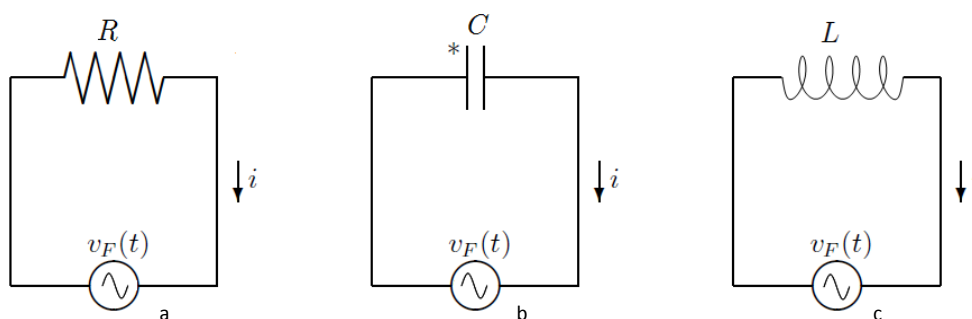


Figura 58: circuitos elementales: a) conexión de resistor, b) conexión de capacitor, c) conexión de inductor

Observe que en las figuras se indican sentidos de circulación para la corriente, aun cuando sabemos que la misma será oscilante. En realidad, la flecha indica que cuando la corriente en nuestros cálculos resulte positiva, interpretaremos que circula a favor de la flecha y viceversa. Estos sentidos se eligen en forma arbitraria, pero las ecuaciones deben ser consistentes con la convención adoptada<sup>10</sup>.

A continuación trabajaremos con cada uno de los circuitos, para establecer la corriente como función del tiempo en cada caso. Asimismo, aprovecharemos este análisis para definir magnitudes muy útiles en circuitos más complejos. En todos los casos supondremos que la fuente suministra una tensión alterna del tipo (112) con fase inicial nula (Ec. 115).

$$v_F(t) = V_F \text{ sen } (\omega t) \quad (115)$$

**a) Circuito con un resistor de resistencia R (figura 58.a):** Aplicando la regla de Kirchhoff, instantáneamente en la malla tenemos que (Ec. 116).

$$v_F - i R = 0 \quad (116)$$

donde se han omitido las dependencias temporales por simplicidad. Reemplazando por (115) tenemos (Ec. 117).

$$i = \frac{v_F}{R} = \frac{V_F}{R} \text{ sen } (\omega t) \quad (117)$$

Homologando con la forma 113 tenemos (Ec 118):

$$i(t) = I \text{ sen } (\omega t) \quad I = \frac{V_F}{R} \quad (118)$$

donde I es la amplitud de la corriente y además puede observarse que la fase relativa de la corriente es nula. En tal sentido, se dice que en un resistor, la tensión y la corriente están en fase.

**b) Circuito con un capacitor de capacidad C (figura 58.b):** En este punto cabe una consideración sutil; la carga del capacitor varía con el tiempo en forma armónica, por lo que sus valores serán alternativamente positivos y negativos. Como las dos placas del capacitor siempre tienen cargas opuestas, hay que adoptar una de ellas como referencia para la carga. La convención que elegimos aquí, es medir la carga sobre la placa en la que la corriente entra cuando es positiva (recordar el sentido de circulación). Como ayuda, colocamos en el dibujo un asterisco en la placa elegida. Con la convención establecida, la relación entre la carga del capacitor y la corriente en la rama que lo contiene es (Ec 119).

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (119)$$

<sup>10</sup> La elección de los sentidos de circulación es análoga a la que se plantea en circuitos de corriente continua.



Ahora aplicamos nuevamente la regla de Kirchhof sobre la malla (Ec 120):

$$v_F - \frac{q}{C} = 0 \quad (120)$$

de donde se tiene que (Ec. 121)

$$q = C v_F = C V_F \text{ sen } (\omega t) \quad (121)$$

Entonces, reemplazando la relación 121 en la 119 y derivando, tenemos la corriente (Ec. 122)

$$i = \omega C V_F \cos (\omega t) \quad (122)$$

Buscamos ahora que la corriente tenga un formato análogo a la función (113). Así tenemos (Ec. 123)

$$i(t) = I \text{ sen } \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad I = \omega C V_F \quad (123)$$

Con esta homologación tenemos una expresión para la amplitud de la corriente, a la vez que observamos que la fase relativa es  $\frac{\pi}{2}$ . En este sentido decimos que en una rama que contiene un capacitor, la corriente “adelanta en  $\frac{\pi}{2}$ ” respecto de la tensión.

Una magnitud muy práctica en la resolución de circuitos es la reactancia capacitiva  $x_C$  que se define como (Ec. 124)

$$x_C = \frac{1}{\omega C} \quad (124)$$

Dejamos a cargo del estudiante probar que la unidad de esta magnitud coincide con la unidad de resistencia. Observe además que la relación entre las amplitudes de la tensión y la corriente toma la forma (Ec. 125)

$$I = \frac{V_F}{x_C} \quad (125)$$

Como ayuda para el lector, observe que la expresión 125 tiene un formato análogo a la Ley de Ohm para resistores, donde la reactancia capacitiva toma el lugar de la resistencia.

**c) Circuito con un inductor de autoinducción L (figura 58.c):** Recordando la respuesta de los inductores (repasar Ley de Faraday y autoinducción) tenemos por aplicación de la regla de Kirchhof (Ec. 126)

$$v_F - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (126)$$

Esta es una ecuación diferencial que puede resolverse fácilmente. En primer lugar la escribimos como sigue (Ec. 127)

$$di = \frac{1}{L} v_F(t) dt = \frac{V_F}{L} \sin(\omega t) dt \quad (127)$$

Luego integramos en ambos miembros en forma indefinida (Ec. 128)

$$i = \frac{V_F}{L} \int \sin(\omega t) dt + \text{constante} \quad (128)$$

Con un cambio de variable muy simple tenemos que (Ec. 129)

$$i = -\frac{V_F}{\omega L} \cos(\omega t) + \text{constante} \quad (129)$$

Como la corriente debe tener la forma funcional (113), la constante debe ser nula.

Así tenemos (Ec. 130)

$$i(t) = I \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad I = \frac{V_F}{\omega L} \quad (130)$$

Con esta homologación tenemos una expresión para la amplitud de la corriente, a la vez que observamos que la fase relativa es  $-\frac{\pi}{2}$ . Por esto decimos que en la rama que contiene a un inductor la corriente “atrás”  $\frac{\pi}{2}$  con respecto a la tensión. Aquí también es conveniente introducir la magnitud  $x_L$  llamada reactancia inductiva, cuya definición es (Ec. 131)

$$x_L = \omega L \quad (131)$$

Nuevamente dejamos a cargo del lector probar que  $x_L$  tiene unidades de resistencia.

La relación entre las amplitudes de tensión y corriente es (Ec. 132)

$$I = \frac{V_F}{x_L} \quad (132)$$

Las representaciones fasoriales a  $t = 0$  de estos circuitos elementales son las siguientes (Figura 59).

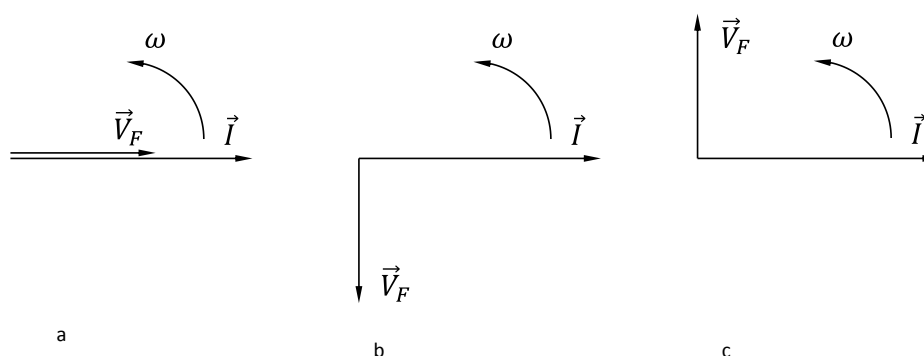


Figura 59: a) diagrama fasorial de la corriente y la caída de tensión en un resistor. La tensión y la corriente van en fase.  
 b) diagrama fasorial de la corriente y la caída de tensión en un capacitor. La corriente adelanta en  $\frac{\pi}{2}$  a la tensión.  
 c) diagrama fasorial de la corriente y la caída de tensión en un inductor. La corriente atrasa en  $\frac{\pi}{2}$  a la tensión.

En estos gráficos adquiere sentido la terminología utilizada anteriormente en esta sección. Nos referimos a los términos “atrasa” y “adelanta”. Si entendemos que el diagrama fasorial representa vectores en rotación observados en un instante nos podemos imaginar que un observador fijo en un lugar cercano al origen detectara los vectores al pasar por su posición. Si se trata del diagrama 59a, notara que los dos vectores pasan sobre el al mismo tiempo, en cuyo caso dirá que los vectores giran en fase. Si ahora se sitúa en el diagrama 59b, notara que el fasor de corriente pasa sobre él antes que el fasor de tensión. En este caso el observador afirmará que la corriente “adelanta” respecto de la tensión o, lo que es lo mismo, la tensión atrasa respecto de la corriente. Haciendo el mismo análisis en el diagrama 59c notaremos que se da la inversa que en 59b. Esto es, que la tensión adelanta respecto de la corriente o que la corriente atrasa respecto de la tensión.

### 7.3. El circuito RLC serie.

El circuito RLC serie se compone de un resistor, un capacitor y un inductor conectados en serie con la fuente de tensión alterna (figura 60).

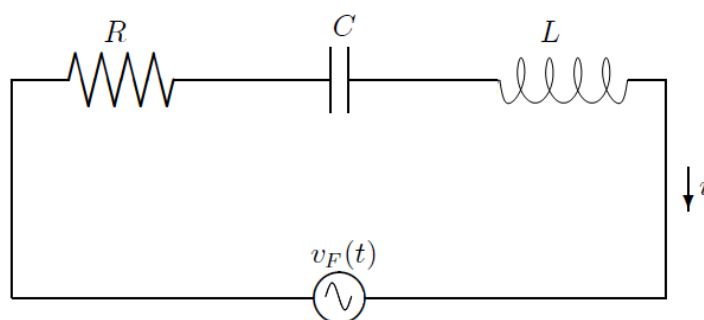


Figura 60: circuito RLC serie.

Como se trata de un circuito serie (una única rama), la corriente instantánea en cualquier punto del circuito debe ser la misma. Por simplicidad supondremos entonces que la fase inicial de la corriente es nula, y referiremos a ella todos los desfases de las demás magnitudes oscilantes. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos para los circuitos más elementales podemos escribir a priori la forma en que varían las tensiones en cada dispositivo. Esto es (Ec. 133)

$$\begin{aligned}
 i(t) &= I \sin(\omega t) \\
 v_F(t) &= V_F \sin(\omega t + \phi) \\
 v_R(t) &= V_R \sin(\omega t) \\
 v_C(t) &= V_C \sin(\omega t - \pi/2) \\
 v_L(t) &= V_L \sin(\omega t + \pi/2)
 \end{aligned} \tag{133}$$

Las tensiones subindicadas corresponden a mediciones instantáneas realizadas entre los terminales de cada dispositivo. La solución del problema consiste en establecer la amplitud  $I$  de la corriente, y la diferencia de fase  $\phi$  entre la tensión  $v_F$  en terminales de la fuente y la corriente  $i$  del circuito. El correspondiente diagrama fasorial a  $t = 0$  se muestra en la figura 61.

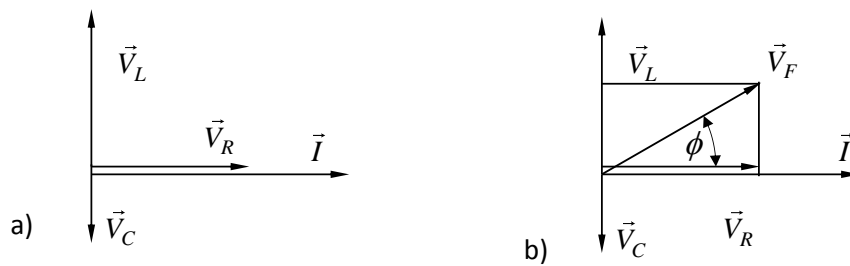


Figura 61: Diagrama fasorial circuito RLC serie.

La aplicación de la regla de Kirchhof en un instante sobre el circuito conduce a (Ec. 134)

$$v_F - v_R - v_C - v_L = 0 \tag{134}$$

o bien (Ec. 135)

$$v_F = v_R + v_C + v_L \tag{135}$$

Invocando la naturaleza fasorial de las magnitudes en juego, podemos aplicar propiedades vectoriales. En particular, la componente “y” de la suma de tres vectores es igual a la suma de las componentes “y” de cada uno de ellos. La figura 61 b es idéntica a la 61 a, con el agregado del vector  $\vec{V}_F$  que se obtiene como sigue (Ec. 136)

$$\vec{V}_F = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L \tag{136}$$

De la construcción geométrica (Fig. 61) se deduce que la relación entre módulos de los vectores anteriores es (Ec. 137)

$$V_F = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \quad (137)$$

mientras que la fase  $\phi$  puede obtenerse de (Ec. 138)

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} \quad (138)$$

Recordemos ahora las relaciones de amplitudes desarrolladas para los circuitos elementales (Ec. 139)

$$V_R = IR \quad V_C = I X_C \quad V_L = I X_L \quad (139)$$

Reemplazando en (137) tenemos que (Ec. 140)

$$\begin{aligned} V_F &= \sqrt{I^2 R^2 + (I X_L - I X_C)^2} \\ V_F &= I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \end{aligned} \quad (140)$$

Así podemos determinar la amplitud de la corriente en términos de los datos del circuito. Aprovechamos la circunstancia para definir una magnitud llamada impedancia del circuito, y habitualmente representada por  $Z$ . Dicha magnitud en general relaciona las amplitudes de la tensión entre terminales de la fuente con la corriente que circula por ella. Esto es (Ec. 141)

$$I = \frac{V_F}{Z} \quad (141)$$

En nuestro caso particular, la impedancia es (Ec. 142)

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (142)$$

Con un procedimiento análogo se obtiene la diferencia de fase  $\phi$ . Reemplazando las relaciones (139) en (138) tenemos (Ec. 143)

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{I X_L - I X_C}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (143)$$

Cuando el ángulo  $\phi$  toma valores positivos decimos que el circuito es inductivo. Por el contrario, si el ángulo  $\phi$  es negativo se dice que el circuito es capacitivo. En el caso particular en que  $\phi$  es nulo, decimos que el circuito está en resonancia.

Para concluir nuestro análisis observemos que las funciones 133 quedan completamente determinadas haciendo los siguientes pasos:

- a) con las relaciones 124 y 131 determinamos las reactancias inductiva y capacitiva.
- b) con las relaciones 141 y 142 determinamos la amplitud de la corriente  $I$ .
- c) con la relación 143 determinamos el ángulo de fase  $\phi$ .

- d) con las relaciones 139 determinamos las amplitudes de las tensiones  $V_R$ ,  $V_C$  y  $V_L$  en los respectivos dispositivos.

Ahora analicemos la relación entre la corriente y la frecuencia de la fuente. Para ellos reemplazamos las relaciones 124 y 131 en las relaciones 141 y 142. Así tenemos (Ec. 144):

$$I = \frac{V_F}{Z} = \frac{V_F}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}}$$

$$I(\omega) = \frac{V_F}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (144)$$

En la Figura 62 representamos esta función, donde podemos observar un máximo muy pronunciado en la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ . Esta frecuencia se da, como habíamos dicho, cuando el ángulo de fase  $\phi$  es nulo. De la relación 144, podemos deducir que la resonancia ocurre cuando las reactancias inductiva y capacitiva son iguales (Ec. 145).

$$x_L = x_C \rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (145)$$

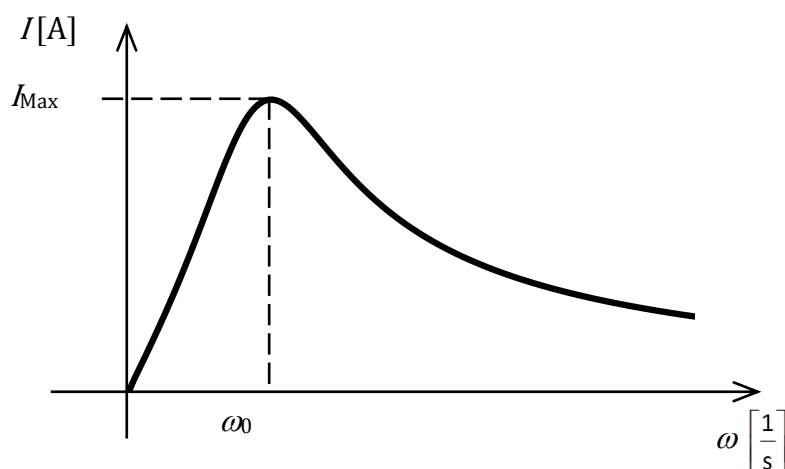


Figura 62: Gráfico de la amplitud de la corriente  $I$  como función de la frecuencia  $\omega$  de la fuente.

Con esta figura podemos interpretar que si la frecuencia de la fuente coincide con la frecuencia de resonancia del circuito, la corriente tendrá la máxima amplitud posible para una tensión dada. Así mismo, las corrientes serán tanto más débiles en cuanto la frecuencia de la fuente sea más lejana respecto de la de resonancia, ya sea que se trate de un circuito inductivo o capacitivo.

## 7.4. El circuito RLC paralelo.

En un nivel de complejidad análogo al apartado anterior tenemos el circuito en que un resistor de resistencia  $R$ , un capacitor de capacidad  $C$  y un inductor de autoinductancia  $L$  se conectan en paralelo con una fuente de tensión alterna de amplitud  $V_F$  y frecuencia  $f$ . (Fig. 63)

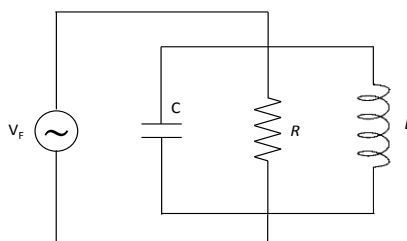


Figura 63: circuito RLC paralelo.

Dado que se trata de una conexión en paralelo, la diferencia de potencial instantánea entre los terminales de cada dispositivo es la misma y coincide con la de la fuente.

Por tanto, resulta operativamente conveniente definir el origen de tiempos de modo que la fase inicial de la tensión en la fuente sea nula. Luego, todas las corrientes serán oscilaciones armónicas con la frecuencia de la fuente y los desfases propios respecto de la tensión de la fuente. Los valores instantáneos son (Ec. 146)

$$\begin{aligned}
 v_F(t) &= V_F \text{ sen } (\omega t) \\
 i_F(t) &= I_F \text{ sen } (\omega t + \varphi) \\
 i_R(t) &= I_R \text{ sen } (\omega t) \\
 i_C(t) &= I_C \text{ sen } (\omega t + \pi/2) \\
 i_L(t) &= I_L \text{ sen } (\omega t - \pi/2)
 \end{aligned}
 \tag{146}$$

Aplicando la regla de Kirchhof para un instante en uno de los nodos del circuito tenemos que (Ec. 147)

$$i_F - i_R - i_C - i_L = 0 \tag{147}$$

o lo que es lo mismo (Ec. 148)

$$i_F = i_R + i_C + i_L \tag{148}$$

En este punto operamos en una manera análoga a la de la sección anterior, observando que la suma instantánea de las corrientes en los dispositivos puede ser referida a la componente “y” de los correspondientes fasores. En lenguaje vectorial tenemos (Ec. 149)

$$\vec{I}_F = \vec{I}_R + \vec{I}_C + \vec{I}_L \tag{149}$$

El correspondiente diagrama fasorial se indica en la figura 64

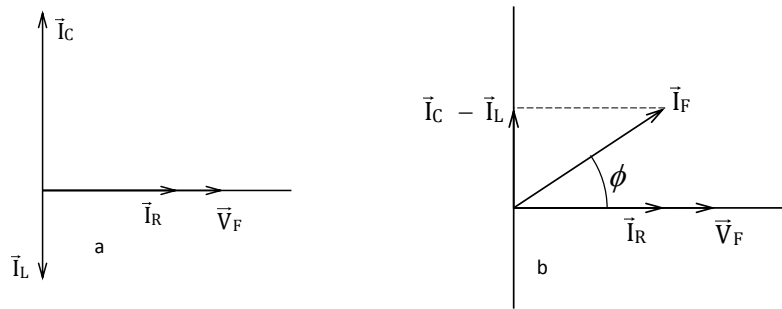


Figura 64: Diagrama fasorial circuito RLC paralelo.

Observando la geometría de la figura 64 b, podemos determinar la relación de módulos entre los vectores de la Ec. 149. (Ec. 150)

$$I_F = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \quad (151)$$

Usando las relaciones 118, 125 y 132, nos queda (Ec. 152)

$$I_F = \sqrt{\left(\frac{V_F}{R}\right)^2 + \left(\frac{V_F}{X_C} - \frac{V_F}{X_L}\right)^2} \quad (152)$$

$$I_F = V_F \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$$

Comparando con la relación 141, podemos definir la impedancia z como (Ec. 153)

$$z = \left( \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \right)^{-1} \quad (153)$$

La fase  $\phi$  puede obtenerse observando la geometría de la Figura 64 b (Ec. 154)

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{\frac{V_F}{X_C} - \frac{V_F}{X_L}}{\frac{V_F}{R}} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} \quad (154)$$

Siguiendo con la analogía respecto del circuito RLC serie, definimos la condición de resonancia cuando el ángulo de fase  $\phi$  es nulo.

Dejamos a cargo del lector que establezca los pasos necesarios para reconstruir todas las constantes que definen la solución completa del problema. Estas son las amplitudes y la fase en las funciones 146.



## 7.5. Valores eficaces.

El valor medio temporal de cualquier magnitud que oscila armónicamente, es nulo cuando se lo evalúa en un período de dicha oscilación. Por tanto, tal valor medio carece de interés como indicador para las magnitudes relevantes en corriente alterna. Un indicador no nulo es el llamado "valor eficaz". Sea  $u(t)$  una magnitud física oscilante. Su valor eficaz  $U_e$  se define como (Ec. 155)

$$U_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (155)$$

En el caso de interés en corriente alterna, en que las magnitudes son oscilaciones armónicas del tipo (113), tenemos (Ec. 156)

$$U_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 \sin^2(\omega t + \phi) dt} \quad (156)$$

Para resolver la integral que queda dentro de la raíz proponemos el siguiente cambio de variable (Ec. 157)

$$w = \omega t + \phi \quad \rightarrow dw = \omega dt \quad (157)$$

Por lo que los límites de integración pueden tratarse como sigue (Ec. 158)

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \omega 0 + \phi = \phi \\ T &\rightarrow \omega T + \phi = 2\pi f T + \phi = 2\pi + \phi \end{aligned} \quad (158)$$

Entonces reemplazando en la relación 156, tenemos (Ec. 159):

$$U_e = U \sqrt{\frac{1}{\omega T} \int_{\phi}^{\omega T + \phi} \sin^2(w) dw} \quad (159)$$

$$U_e = U \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\phi}^{2\pi + \phi} \sin^2(w) dw}$$

La expresión que queda bajo la raíz cuadrada puede resolverse con un poco de trabajo, o puede encontrarse en una tabla<sup>11</sup>. Su valor es  $1/2$ , por lo que (Ec. 160)

<sup>11</sup>En una tabla de integrales definidas, tendremos

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi+a} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi+a} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}$$

Este resultado conviene recordarlo, ya que las integrales que pueden llevarse a esta forma aparecen muy frecuentemente en diversas áreas de la física y la ingeniería.

$$U_e = \frac{U}{\sqrt{2}} \quad (160)$$

Esta expresión es aplicable a todas las corrientes y tensiones medibles en un circuito alimentado por una única fuente de tensión alterna en régimen estacionario. Los valores eficaces de una tensión o una corriente son justamente, los indicadores que detectan los instrumentos diseñados para medir en dicho contexto.

Por ejemplo, cuando un voltímetro diseñado para medir tensión alterna se lo coloca entre los orificios de un toma corriente domiciliario indica 220 Volt. Así es que, este número tan familiar para nosotros (220 V) es, rigurosamente hablando, la tensión eficaz de la red domiciliaria.

## 7.6. Potencia suministrada por la fuente de tensión alterna.

Las fuentes de tensión alterna no suministran energía a un ritmo constante, por lo que cabe definir una potencia instantánea dada por (Ec. 161)

$$p_F(t) = i_F(t) v_F(t) \quad (161)$$

No obstante, podemos establecer un valor medio significativo en virtud de la periodicidad de  $p(t)$ . Comencemos por recordar que para una función periódica en el tiempo con período  $T$ , el valor medio viene dado por (Ec. 162)

$$U_m = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (162)$$

que en nuestro caso se convierte en (Ec. 163)

$$P_{Fm} = \frac{1}{T} \int_0^T i_F(t) v_F(t) dt \quad (163)$$

La situación más general será cuando exista un defasaje  $\phi$  entre la tensión y la corriente, en cuyo caso tendremos (Ec. 164)

$$P_{Fm} = \frac{1}{T} \int_0^T I_F \sin(\omega t) V_F \sin(\omega t + \phi) dt \quad (164)$$

Recordemos aquí una propiedad de la suma de ángulos (Ec. 165)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (165)$$

Aplicando esta propiedad a la Ec. 164 tenemos (Ec. 166)

$$P_{Fm} = \frac{I_F V_F}{T} \left[ \cos \phi \int_0^T \sin^2(\omega t) dt + \sin \phi \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \right] \quad (166)$$

La segunda integral es nula, mientras que la primera es análoga a la resuelta en la sección anterior. Finalmente tenemos (Ec. 167)

$$P_{Fm} = \frac{1}{2} I_F V_F \cos \phi \quad (167)$$

Recordando la definición de valor eficaz de una magnitud oscilante, podemos reescribir el último resultado como (Ec. 168)

$$P_{Fm} = I_{Fe} V_{Fe} \cos \phi \quad (168)$$

En terminología técnica, la magnitud  $\cos \phi$  se denomina factor de potencia del circuito. Observando los diagramas fasoriales de los circuitos elementales, vemos que el factor de potencia vale la unidad cuando el circuito es resistivo, y es nulo cuando el circuito es inductivo o capacitivo puro (ver figuras 59). En el circuito RLC el factor de potencia vale uno en la resonancia.

## 7.7. Potencia disipada en componentes de un circuito.

Volviendo a los diagramas fasoriales de la figura 59, resulta inmediato observar que la potencia media suministrada por la fuente en los circuitos capacitivo o inductivo puros es nula. Naturalmente, esto se deduce de la ecuación 168, dado que el factor de potencia es nulo para ambos casos. Sin embargo, la potencia instantánea suministrada por la fuente no es nula en todo tiempo. Esta aparente paradoja se resuelve del siguiente modo: para fijar ideas consideremos el circuito elemental formado por una fuente de tensión alterna y un capacitor. Consideremos que inicialmente el capacitor está descargado. Cuando la fuente entrega valores positivos de potencia, en el circuito se establece una corriente variable en el tiempo cuya consecuencia es la carga del capacitor. A medida que el capacitor se carga, en él se intensifica el campo eléctrico acumulándose una cantidad de energía potencial. Luego de alcanzar el máximo de energía acumulada, la corriente se invierte iniciándose la descarga del capacitor. En ese lapso la potencia suministrada por la fuente es “negativa”. Cuando el capacitor se descargó completamente (es decir que ya no reside energía en él), podríamos interpretar que la fuente ha entregado una cantidad de energía que le fue devuelta por el capacitor, haciendo que el balance total sea nulo.

De manera análoga puede interpretarse lo que ocurre en un inductor. A medida que la corriente se va estableciendo en la rama que lo contiene, el inductor genera un campo magnético que almacena energía. Nuevamente, esta energía llega a su valor máximo cuando la corriente es máxima. Luego, en la parte del ciclo en que la corriente disminuye, el campo magnético se debilita. Esto puede interpretarse como una devolución de la energía temporariamente almacenada. Finalmente, el balance energético es también nulo.

Ahora tratemos la potencia disipada en un resistor. Recordando el efecto Joule, el valor instantáneo de la potencia disipada viene dado por (Ec. 169):

$$p_{R(t)} = i^2(t)R \quad (169)$$

Entonces, como la corriente en el resistor tiene una dependencia armónica con la frecuencia de la fuente tenemos (Ec 170):

$$p_R(t) = I^2 R \sen^2 (\omega t) \quad (170)$$

Esta expresión nos muestra la forma en que la potencia instantánea varía con el tiempo. En general, resulta más significativo a los efectos prácticos conocer el valor medio temporal de la potencia disipada. Esto es (171):

$$P_{Rm} = \frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt \quad (171)$$

Donde T representa el periodo de la oscilación de la corriente. Reemplazando Ec. 170 en 171, queda (Ec. 172):

$$P_{Rm} = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R \sen^2 (\omega t) dt \quad (172)$$

Para resolver esta integral proponemos un cambio de variables (Ec. 173)

$$u = \omega t \rightarrow du = \omega dt \quad (173)$$

Reemplazando en la Ec. 172, tenemos (Ec. 174):

$$P_{Rm} = \frac{I^2 R}{\omega T} \int_0^{\omega T} \sen^2 (u) du \quad (174)$$

$$U = \omega T = 2 \pi f T \text{ como } f T = 1 \rightarrow U = 2 \pi \quad (175)$$

$$P_{Rm} = I^2 R \left( \frac{1}{2 \pi} \int_0^{2 \pi} \sen^2 (u) du \right) \quad (176)$$

La expresión entre paréntesis ya la hemos conocido, y sabemos que vale  $\frac{1}{2}$  por lo que la potencia media disipada en la resistencia toma la forma (Ec. 177):

$$P_{Rm} = \frac{1}{2} I^2 R \quad (177)$$

Recordando la relación entre la amplitud de la corriente I y el valor eficaz asociada  $I_e$  (Ec. 157) podemos reescribir la potencia disipada en la forma siguiente (Ec. 178):

$$P_{Rm} = I_e^2 R \quad (178)$$

Este resultado pone a la potencia media en función de las magnitudes medibles, ya que la corriente eficaz es la magnitud que miden los amperímetros para circuitos de corriente alterna.

Si un circuito que posee una única fuente de tensión alterna, tiene un único resistor (aunque pueda tener capacitores e inductores), la potencia media suministrada por la fuente debe coincidir con la potencia media disipada en el resistor. Ahora bien, si el circuito tuviera varios resistores, el balance energético en valores medios temporales debe satisfacer que la suma de las potencias medias disipadas coincida con la potencia aportada por la fuente.

## 7.8. Ejemplo 1. Circuito de sintonía.

Los circuitos RLC serie (Fig. 60) pueden considerarse como el formato más básico de un circuito de sintonía, admitiendo que la fuente incorpora señales de múltiples frecuencias a la vez y que el capacitor admite variar su capacidad.

Retomemos la relación 144, que nos muestra la corriente como función de la frecuencia en un circuito de RLC serie (Ec. 179)

$$I(\omega) = \frac{V_F}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (179)$$

Recordemos que en la resonancia la corriente alcanza su valor máximo. Esto es (Ec. 180)

$$\omega \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad \text{entonces} \quad I(\omega_0) = \frac{V_F}{R} \quad (180)$$

La idea de un circuito de sintonía, por ejemplo para un radio receptor, consiste en admitir que muchas señales de distintas frecuencias generan corrientes que simultáneamente recorren el circuito.

Entre todas ellas, una de las señales genera una corriente de amplitud mucho mayor que todas las otras. Esta señal es la que posee una frecuencia que coincide con la frecuencia de resonancia del circuito. El capacitor variable permite cambiar la frecuencia de resonancia del circuito, dando lugar a la selección de la señal que queremos magnificar. Ahora bien, la calidad de un circuito de sintonía consiste en lograr que la corriente máxima para una frecuencia seleccionada sea muy grande comparada con la corriente de una señal cercana en frecuencia.

Por ejemplo, una señal de frecuencia modulada perteneciente a una emisora de radio podría ser la 90.5 MHz. Las emisoras más cercanas en frecuencia son las de 90.1 MHz y 90.9 MHz<sup>12</sup>.

En vista a analizar las características del circuito de sintonía, reeditemos el diagrama de la figura 62.

En el mismo hemos indicado la frecuencia de resonancia  $\omega_0$  que coincide con la frecuencia de la señal que queremos magnificar, y la frecuencia  $\omega_1$  correspondiente a la señal más próxima (Fig. 65).

<sup>12</sup>La diferencia de frecuencias entre dos emisoras de radio está regulada por normas internacionales que se utilizan al construir aparatos de radio tanto para la emisión como para la recepción. En este caso, para la banda de Frecuencia Modulada se estable una diferencias de frecuencias de 0.4 MHz.

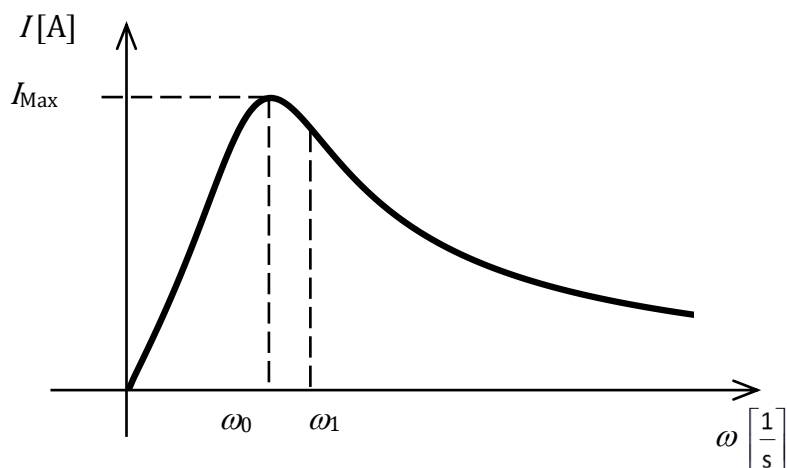


Figura 65: Diagrama de la corriente en función de la frecuencia donde se indica la frecuencia de resonancia y la frecuencia más próxima.

Observemos qué corriente corresponde a la frecuencia  $\omega_1$  (Ec. 181)

$$I(\omega_1) = \frac{V_F}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}} \quad (181)$$

Reacomodamos la expresión 181 (Ec. 182)

$$I(\omega_1) = \frac{V_F}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{\omega_1}\right)^2 \left(\omega_1^2 - \frac{1}{LC}\right)^2}}$$

$$I(\omega_1) = \frac{V_F}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{\omega_1}\right)^2 (\omega_1^2 - \omega_0^2)^2}} \quad (182)$$

$$I(\omega_1) = \frac{\omega_1 V_F}{\sqrt{\omega_1^2 R^2 + L^2 (\omega_1^2 - \omega_0^2)^2}}$$

$$I(\omega_1) = \frac{\omega_1 V_F}{\sqrt{\omega_1^2 R^2 + L^2 (\omega_1 - \omega_0)^2 (\omega_1 + \omega_0)^2}}$$

Para definir la calidad del circuito construimos el cociente  $I(\omega_1)/I(\omega_0)$ . El circuito resultara tanto más eficiente cuanto más pequeño resulte este cociente. Utilizando las expresiones 180 y 182, tenemos (Ec. 183)

$$\frac{I(\omega_1)}{I(\omega_0)} = \frac{\frac{\omega_1 V_F}{\sqrt{\omega_1^2 R^2 + L^2(\omega_1 - \omega_0)^2 (\omega_1 + \omega_0)^2}}}{\frac{V_F}{R}} \quad (183)$$

$$\frac{I(\omega_1)}{I(\omega_0)} = \frac{R \omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 R^2 + L^2(\omega_1 - \omega_0)^2 (\omega_1 + \omega_0)^2}}$$

Para el ejemplo de nuestra emisora de frecuencia modulada observemos que:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0 = 2\pi \cdot 0.4 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$$

mientras que

$$\omega_1 + \omega_0 \approx 2\omega_0 = 2\pi \cdot 181 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$$

Manteniendo el mismo nivel de aproximación, la expresión 183 toma la forma siguiente (Ec. 184)

$$\frac{I(\omega_1)}{I(\omega_0)} = \frac{R \omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 R^2 + 4 L^2 (\Delta\omega)^2 \omega_0^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 4 L^2 (\Delta\omega)^2}} \quad (184)$$

Para interpretar este resultado definamos por  $\alpha$  al cociente del primer miembro (Ec. 185)

$$\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 4 L^2 (\Delta\omega)^2}} \quad (185)$$

Entonces.

$$\alpha \sqrt{R^2 + 4 L^2 (\Delta\omega)^2} = R \quad \text{despejando } \Delta\omega = \frac{R}{2L\alpha} \sqrt{1 - \alpha^2}$$

Esta expresión tiene la información necesaria para diseñar el circuito respetando la norma que fija  $\Delta\omega$  y permite introducir el factor de calidad  $\alpha$ .

Eligiendo adecuadamente los valores de resistencia  $R$  y autoinducción  $L$  es posible lograr valores de  $\alpha$  tanto más pequeños cuanto mayor sea la calidad buscada. Observe el lector que la capacidad  $C$  no aparece explícitamente en esta expresión. Sin embargo, una vez elegido  $L$  debe seleccionarse la capacidad  $C$  como una variable que recorra adecuadamente el rango de frecuencias en que se define la banda. Por ejemplo, para un sintonizador de frecuencia modulada debiera recorrer el rango entre 88 MHz y 108 MHz<sup>13</sup>. A tal fin, el circuito debe ser dotado de un capacitor variable.

<sup>13</sup> Naturalmente, los circuitos que poseen los sintonizadores de radio son mucho más complejos que un RLC serie por tanto, el cálculo que nosotros realizamos no debe considerarse como un sistema real, sino como una versión muy simplificada que permite modelizar el sistema considerado.

## 7.9. Ejemplo 2. Disipación térmica en redes.

En el proceso en que la energía eléctrica viaja desde su lugar de origen hasta llegar a un usuario residencial o a una industria, la misma atraviesa diversas etapas. En la organización de este proceso suelen intervenir empresas especializadas. Consideremos algunas cuestiones que debe tener en cuenta la empresa que se dedica al transporte de la energía. Esta empresa “compra” energía a quien la produce, y le “vende” energía a quien la consume. Naturalmente, las mediciones de la energía se realizan en ambos extremos de la línea, y tanto cuando compra como cuando vende la facturación será proporcional a la energía que recibe o que entrega.

Ahora bien, los conductores a través de los cuales circula la corriente no son ideales, por lo que es esperable que parte de la energía comprada se “pierda” como disipación térmica por efecto Joule. Esta energía no se registra en los medidores domiciliarios ni en los de las industrias. Sin embargo es facturada por la empresa generadora.

A los efectos de este análisis, los conductores que intervienen en el transporte pueden modelarse como un resistor de resistencia  $R$ . Como hemos visto, la potencia media disipada en el resistor equivalente es proporcional al cuadrado de la corriente eficaz que circula por él (Ec. 186).

$$P_{Rm} = I_e^2 R \quad (186)$$

De esta expresión es evidente que la pérdida de energía será tanto mayor cuanto más alta sea la corriente eficaz que circula por los conductores. Por tanto, la empresa debe ser muy cuidadosa en transportar energía con la mínima corriente posible.

Ahora veamos lo que ocurre puertas adentro en la casa de un usuario o una industria. Lo que se observa es un circuito en el que se reparte la energía en dispositivos muy diversos, mucho de los cuales poseen inductores (por ejemplo, motores, transformadores, etc.). Cuando todo funciona correctamente los efectos inductivos y capacitivos del circuito esta compensados. En otras palabras, cada dispositivo y el circuito en conjunto operan en resonancia. Por el contrario, si el circuito o los dispositivos conectados tienen algún defecto de diseño o de funcionamiento, suele ocurrir que el circuito en conjunto visto desde su entrada tiene características inductivas<sup>14</sup>.

Veamos que consecuencia tiene esta anomalía en el circuito. Comencemos por recordar que la potencia media suministrada por una fuente viene dada por la Ec. 168.

$$P_{Fm} = I_{Fe} V_{Fe} \cos \phi$$

Para comprender lo que ocurre cuando un circuito domiciliario se corre de la condición de resonancia, analicemos el siguiente ejemplo. Supongamos que la energía consumida durante una hora es de 440 KWh. Si suponemos que el circuito estaba en resonancia ( $\cos \phi = 1$ ) tenemos la siguiente relación (Ec. 187)

$$U = I_{Fe} V_{Fe} \cos \phi \Delta t$$

$$440 \text{ KWh} = I_{Fe} \times 220 \text{ V} \times 1 \times 1 \text{ h} \quad 187$$

<sup>14</sup> Recordemos que los circuitos se llaman inductivos o capacitivos según sea negativa o positiva la diferencia de fase  $\phi$  entre la tensión y la corriente en la fuente.



de donde se obtiene que la corriente eficaz es  $I_{Fe} = 2 \text{ A}$ . Ahora observemos la que ocurre si el circuito, por ejemplo, es inductivo con  $\cos \phi = 0,8$ .

$$440 \text{ KWh} = I'_{Fe} \times 220 \text{ V} \times 0,8 \times 1 \text{ h}$$

En este caso la corriente será  $I'_{Fe} = 2,5 \text{ A}$

La empresa distribuidora facturara la misma cantidad de energía en ambos casos pero la perdida por efecto Joule en el cableado será mayor en el último caso. Observemos en qué proporción (Ec. 188).

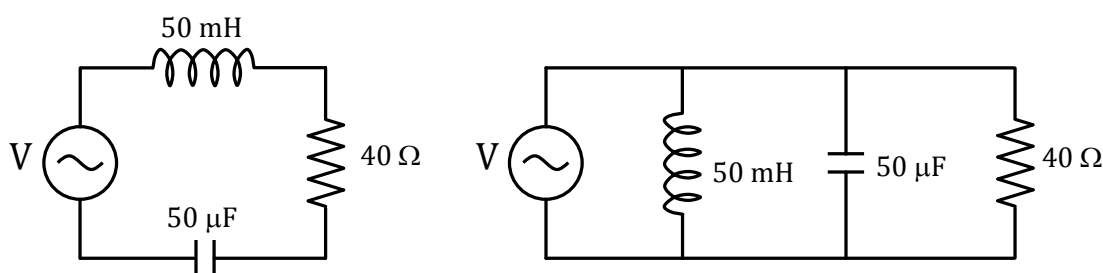
$$\frac{P'_{Rm}}{P_{Rm}} = \frac{I_e'^2 R}{I_e^2 R} = \frac{I_e'^2}{I_e^2} = \frac{(2,5 \text{ A})^2}{(2 \text{ A})^2} = 1,56 \quad 188$$

De aquí se deduce que un factor de potencia de 0,8 le significa a la empresa una pérdida que se incrementa en un 56% respecto a la situación de resonancia.

Esto justifica que las empresas distribuidoras sean muy estrictas en el control del factor de potencia, especialmente en las instalaciones de las industrias.

## 7.10. Actividades.

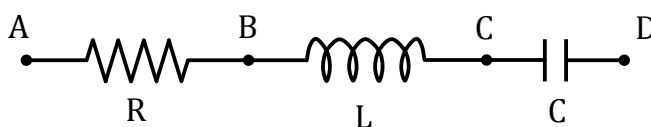
- La fuente de tensión de la figura tiene una salida  $v_f(t) = 100 \cos(1000 \frac{1}{s} t) \text{ V}$ .
  - Realice el diagrama fasorial para cada circuito.
  - Determine para cada circuito las amplitudes de la corriente y la diferencia de potencial en cada elemento.
  - Calcule la potencia media suministrada por la fuente en ambos casos.



Rta: b) 2 A, 100 V, 80 V, 40 V; c) 160 W / b) 2 A, 5 A, 2,5 A; c) 320 W.

- Una fuente de tensión alterna cuya amplitud es  $V_f=150 \text{ V}$  y su frecuencia es  $f = 50 \text{ Hz}$  está conectada entre los puntos A y D de la figura. Calcule las amplitudes de las tensiones entre los puntos:

- A y B;
- B y C;
- C y D,



d) B y D.

e) A y C.

Datos:  $R = 40\Omega$ ;  $L = 185 \text{ mH}$ ;  $C = 65\mu\text{F}$

Rta: a) 146 V; b) 212 V; c) 178,7 V; d) 33,3 V; e) 257,4 V.

3. Un generador de corriente alterna se conecta a una "caja negra", por medio de un par de terminales. La caja contiene un circuito RLC, posiblemente un circuito de varias mallas, cuyos elementos y arreglo no conocemos. La tensión y corriente que caracteriza este circuito son las siguientes:  $v(t) = 75 \sin(\omega t) \text{ V}$  y  $i(t) = 1,2 \sin(\omega t + 0,2) \text{ A}$ . Responda justificando cada una de sus respuestas:

- a) ¿Cuál es el factor de potencia del montaje?
- b) ¿Qué potencia suministra el generador?
- c) ¿La tensión estará adelantada o retrasada respecto de la corriente?
- d) El circuito que está en la caja, ¿es de naturaleza inductiva, capacitiva o resonante?
- e) Dentro de la "caja negra", ¿habrá necesariamente un capacitor? ¿Un inductor? ¿Un resistor?

4. Un circuito de tensión alterna constituido por una única malla, está formado por una fuente de tensión eficaz 110V y frecuencia 60 Hz, una resistencia de  $8\Omega$  y una inductancia de 10 mH.

- a) ¿Cuál es el factor de potencia del circuito?
- b) ¿Cuál es la capacidad del capacitor que, colocado en serie con el circuito llevaría el factor de potencia a la unidad?
- c) En qué fracción aumenta la amplitud de la corriente por la introducción de dicho capacitor.

Rta: a) 0,9; b)  $7 \cdot 10^{-4} \text{ F}$ ; c) 9/10.

5. Un circuito RLC serie está compuesto por un resistor de  $2\Omega$ , un capacitor de  $50\mu\text{F}$  y un inductor de 0,1 H.

- a) Calcule la frecuencia del generador para que la corriente esté adelantada  $45^\circ$  respecto de la tensión.
- b) Si la tensión máxima producida por el generador es de 12 V ¿qué valor indicará un amperímetro conectado en este circuito?
- c) Calcule la capacidad que debe agregarse en serie al circuito para poder sintonizar con él, correctamente, una señal de frecuencia  $f = 200 \text{ Hz}$ .

Rta: a) 72,3 Hz; b) 3,47 A.

6. Un circuito RLC serie esta alimentado por una fuente de tensión alterna de 200 V de tensión máxima y 2500 Hz de frecuencia. La resistencia es de  $60\Omega$  y la capacidad de  $8\mu\text{F}$ . Si la amplitud de la tensión en bornes del capacitor es de 150V, halle:

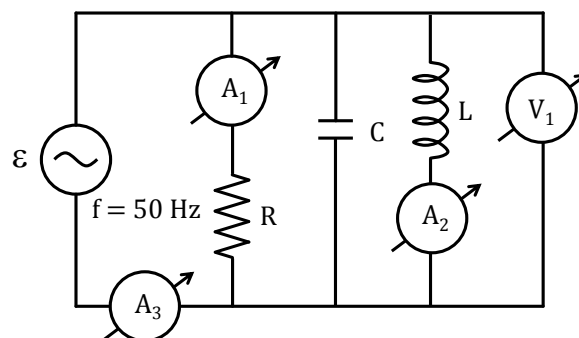
- a) La intensidad de corriente máxima que se establece en el circuito.

- b) El valor de la inductancia, sabiendo que la corriente del circuito adelanta a la tensión de la fuente.
- c) El ángulo de desfase entre la corriente del circuito y la tensión de la fuente.
- d) La potencia media disipada por el resistor.

Rta: a) 18,9 A; b) 8,3 mH; c)  $0,14 \pi$  d) 540 W.

7. Los instrumentos ideales de figura indican  $A_1 = 4\text{ A}$ ,  $A_2 = 3\text{ A}$ ,  $A_3 = 5\text{ A}$  y  $V_1 = 100\text{ V}$ .

- a) Realice el diagrama fasorial.
- b) Calcule la corriente eficaz que circula a través del capacitor.
- c) Determine los valores de  $R$ ,  $L$  y de  $C$ .
- d) Establezca la potencia disipada en el resistor.



Rta: a) 6 A; b) 25  $\Omega$ , 0,088 H,  $2 \cdot 10^{-4}$  F; 400 W.