TP N° 14-16 – Campos Vectoriales – Integrales curvilíneas

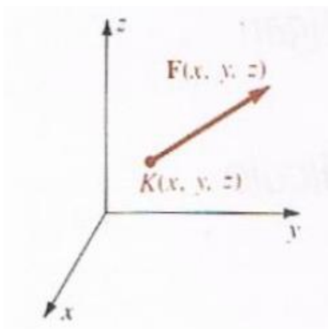
Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017). Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018)

TP	Contenido
14	Campos Vectoriales/Divergencia y rotor
15	Integrales de Línea - Aplicaciones
16	Independencia de la trayectoria/ Teorema de Green – Corolario para el cálculo de áreas

1.*Temario*

- Campos Vectoriales
- Divergencia y rotor
- Integrales de Línea - Aplicaciones
- Independencia de la trayectoria
- Teorema de Green – Corolario para el cálculo de áreas

2.*Resumen teórico*



Campo Vectorial [1]

Sea $D \subset \mathbb{R}^3$. Un campo vectorial en tres dimensiones es una función vectorial **F** que asigna a cada punto $P{:}\,(x, y, z) \in D$ un único vector tridimensional $\boldsymbol{F}(x, y, z) \in V^3$

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(z, y, z)\boldsymbol{k}$$

donde M(x, y, z), N(x, y, z) y P(x, y, z) son funciones escalares definidas en D.

Campo vectorial estacionario

Un campo vectorial tridimensional $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ se denomina **estacionario** si las funciones escalares componentes M(x, y, z), N(x, y, z) y P(x, y, z) son independientes del tiempo.

Campo conservativo

Dada una función escalar $f(x, y, z)$ se definió el vector gradiente como:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

[1] Se utilizarán letras en negrilla para indicar vectores.

Si un campo vectorial es gradiente de una función escalar, tal que: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{\nabla} f(x,y,z)$ se dice que $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial conservativo y $f(x,y,z)$ se llama ***función de potencial*** de $\boldsymbol{F}$.

Rotacional de un campo vectorial

Sea $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ un campo vectorial dado por: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + Q(z,y,z)\boldsymbol{k}$ donde: $M(x,y,z), N(x,y,z)$ y $P(x,y,z)$ tienen derivadas parciales.

Introduciendo el operador diferencial **Nabla**:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\ \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\ \boldsymbol{k}$$

aplicado a la función escalar $f(x,y,z)$ se obtiene el gradiente de la función: $\boldsymbol{grad}\ f(x,y,z) = \boldsymbol{\nabla} f(x,y,z)$

El rotacional de $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ es la función vectorial dada por:

$$rot\ \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

Resulta:

$$\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

Divergencia de un campo vectorial

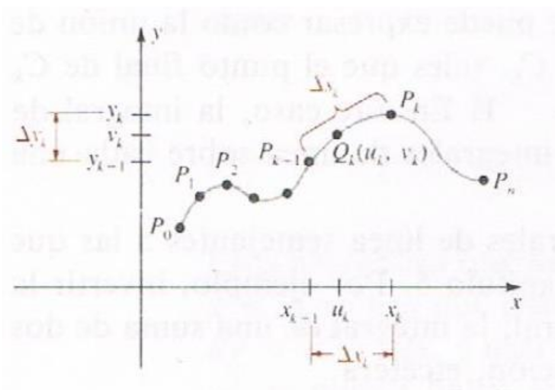
Sea $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ un campo vectorial dado por: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + Q(z,y,z)\boldsymbol{k}$ donde: $M(x,y,z), N(x,y,z)$ y $P(x,y,z)$ tienen derivadas parciales.

La divergencia de $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ es la función escalar dada por:

$$div\ \boldsymbol{F} = \nabla.\boldsymbol{F} = \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Integrales de línea en dos dimensiones

Sea $\mathcal{C}$ una curva plana regular (o alisada) con parametrización $x = g(t); y = h(t)$; con $t \in [a,b]$. Sea $f(x,y)$ una función continua en una región D que contiene a la curva $\mathcal{C}$. Se definen las integrales de línea con respecto a s, x, e y como sigue:



en la que: $\Delta s_k = \sqrt{{\Delta x_k}^2 + {\Delta y_k}^2}$

Cuando $\Delta y_k = 0$ entonces $\Delta s_k = \Delta x_k$ y la integral queda:

$$\int_C f(x,y)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\Delta x_k$$

De la misma manera, cuando $\Delta x_k = 0$ entonces $\Delta s_k = \Delta y_k$ y la integral queda:

$$\int_C f(x,y)dy = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\Delta y_k$$

Teorema de evaluación

Con las hipótesis precedentes:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dx^2} = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

Entonces la primera integral adopta la forma:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f[g(t), h(t)]\sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}dt$$

En tanto que las dos restantes adoptan las siguientes expresiones:

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f[g(t), h(t)]g'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f[g(t), h(t)]h'(t)dt$$

Invertir la dirección de integración cambia el sigo de la integral de línea respecto de las variables x y de y. No así respecto de s.

Estas definiciones y teoremas se generalizan a tres variables cuando f(x, y, z) es una función escalar y $\mathcal{C}$ una curva en el espacio.

Integral de línea de un campo vectorial

Sea $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva regular (o alisada) $\mathcal{C}$ con parametrización $x = g(t);\ y = h(t);\ z = k(t);$ con $t \in [a,b]$.

La integral de línea de $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ a lo largo de $\mathcal{C}$ es:

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_a^b \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)].\boldsymbol{r}'(t).dt = \int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{T}\ ds = \int_C M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + Q(x,y,z)dz =$$

Donde:

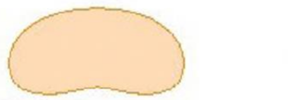
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + Q(z,y,z)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$$ (Vector posición)

$$\boldsymbol{dr} = dx\ \boldsymbol{i} + dy\ \boldsymbol{j} + dz\ \boldsymbol{k}$$

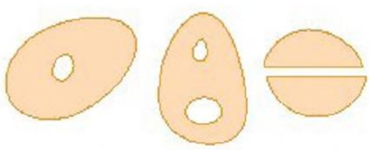
Además: $\boldsymbol{T}$ es el vector tangente unitario y ds es el diferencial de la función longitud de arco s(t)

Independencia de la trayectoria



región simplemente conexa

Definiciones



regiones que no son simplemente conexas

Región conexa: dos puntos cualesquiera de la región se pueden unir mediante una trayectoria totalmente contenida en la región.

Región simplemente conexa: toda curva cerrada simple en la región encierra en su interior sólo puntos de la región.

Teorema:
Sea $\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\,\boldsymbol{i} + N(x,y)\,\boldsymbol{j}$ un campo vectorial bidimensional cuyas funciones escalares componentes $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones continuas en alguna región conexa D, la integral curvilínea

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_C M(x,y).dx + N(x,y)dy \quad (1)$$

es independiente de la trayectoria C, si y sólo sí existe alguna función escalar diferenciable $f(x,y)$ tal que su diferencial total (o exacto):

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy$$

sea igual al integrando de la (1). En estas condiciones deberán cumplirse las siguientes igualdades:

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{dx} \quad ; \quad N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{dy}$$

Como las componentes del campo vectorial son funciones continuas y la función escalar $f(x,y)$ es diferenciable las dos igualdades precedentes pueden volver a derivarse:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

Los segundos miembros de las igualdades anteriores son las derivadas segundas cruzadas de la función escalar $f(x,y)$ que por ser diferenciables es también continua. Por lo tanto, por el Lema de Schwartz dichas derivadas segundas cruzadas son iguales y se concluye que, para que la integral curvilínea del campo vectorial sea independiente de la trayectoria deberá cumplirse la siguiente condición necesaria y suficiente:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

La función escalar $f(x,y)$ recibe el nombre de **función potencial.**

Este desarrollo podrá extenderse a integrales curvilíneas en las que el campo vectorial sea tridimensional, es decir función de tres variables independientes, del tipo:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

En este caso:

$$\boldsymbol{dr} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$$

Por lo tanto:

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_C M(x,y,z).dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$$

Siguiendo el procedimiento anterior se concluye que la integral será independiente de la trayectoria si y sólo si se cumplen las siguientes tres igualdades:

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{dy} = \frac{\partial N(x,y,z)}{dz} \quad ; \quad \frac{\partial P(x,y,z)}{dx} = \frac{\partial M(x,y,z)}{dz} \quad ; \quad \frac{\partial M(x,y,z)}{dy} = \frac{\partial N(x,y,z)}{dx}$$

Otras formas de presentar el Teorema de Independencia de la Trayectoria:

Segunda presentación:

Sea $\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\ \boldsymbol{i} + N(x,y)\ \boldsymbol{j}$ continuo en una región D abierta y conexa.

$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr}$ es independiente de la trayectoria $\Leftrightarrow \boldsymbol{F}(x,y) = \boldsymbol{\nabla} f(x,y)$ para alguna función escalar $f(x,y)$.

Dado que las derivadas parciales primera de la función escalar $f(x,y)$ son iguales, respectivamente a las componentes del campo vectorial, pero a su vez son las componentes de la función vectorial gradiente de $f(x,y)$, entonces, se puede enunciar el teorema de la siguiente manera:

"La integral curvilínea:

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_C M(x,y).dx + N(x,y)dy \quad (1)$$

es independiente de la trayectoria C, si y sólo sí $\boldsymbol{F}(x,y) = \boldsymbol{\nabla} f(x,y)$".

Cuando el campo vectorial es igual al gradiente de alguna función escalar$f(x,y)$ se dice que es un **campo vectorial conservativo.**

Tercera presentación:

De lo anterior se deriva la siguiente formulación del Teorema:

"La integral curvilínea:

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_C M(x,y).dx + N(x,y)dy \quad (1)$$

es independiente de la trayectoria C, si y sólo sí $\boldsymbol{F}(x,y)$es un **campo vectorial conservativo**.

Cuarta presentación:

Sea $\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ un campo vectorial continuo en una región D abierta y conexa, y sea $\mathcal{C}$ una curva regular parte por parte con extremos $A(x_1, y_1)\ y\ B(x_2, y_2)$ contenida en D. Entonces:

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \boldsymbol{\nabla} f(x,y) \Rightarrow \int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = f(x,y)\Big]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)$$

La integral curvilínea resulta igual a la diferencia de potencial entre los puntos A y B, extremos de la trayectoria $\mathcal{C}$.

Quinta presentación:

Sea $\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ un campo vectorial continuo en una región D abierta y conexa; y sea $\mathcal{C}$ una curva plana, regular parte por parte, cerrada y simple $\Longrightarrow$

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} \text{ es independiente de la trayectoria } \Leftrightarrow \oint_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = 0;\ \forall\ \boldsymbol{C} \text{ plana, regular, cerrada y simple}$$

dado que al ser $\mathcal{C}$ una curva cerrada, las coordenadas de los puntos A y B son coincidentes y por lo tanto la diferencia de potencial será nula.

Última presentación:

Si $M(x,y)\ y\ N(x,y)$ tienen derivadas parciales continuas en una región D abierta y simplemente conexa:

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy \text{ es independiente de la trayectoria } \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Dado que para un campo vectorial de dos variables independientes:

$$\boldsymbol{rot\ F} = \ 0\ \boldsymbol{i} + 0\ \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\ \boldsymbol{k}$$

al cumplirse la condición

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

puede afirmarse que:

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} \text{ es independiente de la trayectoria } \Leftrightarrow \ rot\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

Condiciones equivalentes

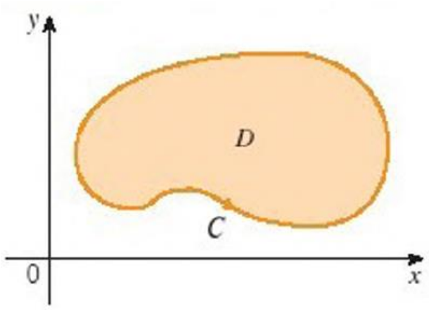
Si $\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$, donde M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta y conexa D, y $\mathcal{C}$ es una curva plana, regular parte por parte en D, las siguientes formulaciones son equivalentes:

1. $\boldsymbol{F}(x,y) = \ \boldsymbol{\nabla} f(x,y), es\ decir\ \boldsymbol{F}\ es\ conservativo$
2. $\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr}$ es independiente de la trayectoria
3. $\oint_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = 0$ para toda curva cerrada $\boldsymbol{C}$

Si además D es simplemente conexa:

4. $rot\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$

Teorema de Green



Sea $\mathcal{C}$ una curva plana, regular por partes, cerrada y simple; y sea R la región que consta de $\mathcal{C}$ y su interior. Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones con derivadas parciales continuas en una región abierta D que contiene a R, entonces:

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Sentido de circulación de $\mathcal{C}$: el que deja a la región R a la izquierda (antihorario).

Corolario
Si la frontera de una región R en el plano (x, y) es una curva plana, regular parte por parte, cerrada y simple $\mathcal{C}$, entonces el área de R es:

$$A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx \ = \frac{1}{2}\oint_C xdy \ - \text{ydx}$$

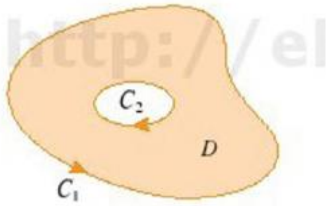


FIGURA 9

Regiones con agujeros

Se aplica el Teorema de Green integrando sobre toda la frontera (externa e interna) circulando las mismas de modo que R se mantenga a la izquierda de la curva $\mathcal{C}$.

$$\oint_{C_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy + \oint_{C_2} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

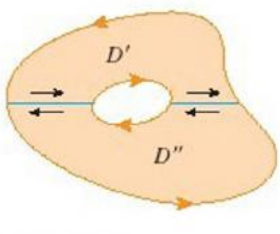


FIGURA 10

Forma vectorial del Teorema de Green:

$\oint_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{T}\ ds = \iint_R (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{F})\boldsymbol{k}\, dA$

3. *Ejercicios resueltos*

1) **Encuentre el campo vectorial gradiente de** $z = f(x,y) = x^2y - y^3$ **:**

El campo vectorial gradiente de $f(x,y)$ estará dado por:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = 2\text{xy}\,\boldsymbol{i} + (x^2 - 3y^2)\boldsymbol{j}}$$

2) **Encuentre el campo vectorial gradiente de** $w = f(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ **, donde** m, M y G **son constantes.**

El campo vectorial gradiente de $f(x,y,y)$ estará dado por:

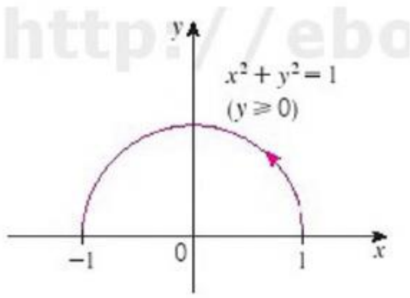
$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \frac{-mMG\ x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{i} + \frac{-mMG\ y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{j} + \frac{-mMG\ z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{k}}$$

Este campo vectorial es el **campo gravitatorio**, que se estudia en Física.

3) **Evalúe** $\int_C (2 + x^2y)ds$ **donde** C **es la semicircunferencia superior de ecuación** $x^2 + y^2 = 1$.

En primer lugar, obtenemos una parametrización de C



$C \begin{cases} x = g(t) = \cos t \\ y = h(t) = \sin t \end{cases}$, con $0 \leq t \leq \pi$

Por lo que:

$g'(t) = -\sin t$, $h'(t) = \cos t$

Como $f(x,y), g'(t)$ y $h'(t)$ son funciones continuas, se aplica el teorema de evaluación:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f[g(t),h(t)]\sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}dt$$

$$\int_C (2 + x^2y)ds = \int_0^\pi [2 + (\cos t)^2 \sin t]\sqrt{[-\sin t]^2 + [\cos t]^2}\ dt$$

$$\int_0^\pi [2 + (\cos t)^2 \sin t]\ dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi$$

$$\boxed{\int_C (2 + x^2 y)ds = 2\pi + \frac{2}{3}}$$

4) **Evalúe** $\int_C y \sin z \ ds$ **donde** C **es la hélice circular recta cuyas ecuaciones paramétricas son:**

$$C \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} ,con \ \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Como $f(x, y, z), g'(t), h'(t)$ y $k'(t)$ son funciones continuas, se aplica el teorema de evaluación:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f[g(t), h(t), k(t)]\sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2 + [k'(t)]^2}dt$$

$$\int_C y \sin z \ ds = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t \sqrt{[-\sin t]^2 + [\cos t]^2 + [1]^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin^2 t \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\, dt$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \frac{1}{2}\sin 2t)\right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{\int_C y \sin z \ ds = \sqrt{2}\,\pi}$$

5) **Determine el trabajo efectuado por el campo vectorial** $\boldsymbol{F}(x,y) = x^2\,\boldsymbol{i} - xy\,\boldsymbol{j}$ **, a lo largo del cuarto de circunferencia cuya ecuación vectorial es:** $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\ \boldsymbol{i} + \sin t\ \boldsymbol{j},\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ **.**

La curva C está dada por su representación paramétrica:

$$C \begin{cases} x = g(t) = \cos t \\ y = h(t) = \sin t \end{cases}, \text{ con } \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

La integral de línea de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ está dada por:

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_a^b \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)].\boldsymbol{r}'(t).dt = \int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{T}\ ds$$

Usando la primera expresión, resulta:

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\, dx - xydy$$

Como $f(x, y), g'(t)$ y $h'(t)$ son funciones continuas, se aplica el teorema de evaluación resultando:

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\, t(-\sin t)\ dt - \sin t\ \cos t \cos t\, dt = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\ t\ \sin t\ \ dt = \left[\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = -\frac{2}{3}}$$

Si utilizamos la segunda expresión:

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_a^b \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)].\boldsymbol{r}'(t).\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2\, t\, \boldsymbol{i} - -\sin t\, \cos t\, \boldsymbol{j})(-\sin t\, \boldsymbol{i} + \cos t\, \boldsymbol{j}).\,dt$$
$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\, t\, \sin t\, dt$$

obteniéndose lógicamente el mismo resultado.

6) **Evalúe $\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr}$ donde $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xy\,\boldsymbol{i} + yz\,\boldsymbol{j} + zx\,\boldsymbol{j}$, y $\boldsymbol{C}$ es la cúbica torcida dada por:**

$$C\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}, con\ \ 0 \le t \le 1$$

Dada la parametrización, resultan:

$$dx = dt\,, \qquad dy = 2tdt, \qquad dz = 3t^2dt$$

La integral de línea de $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ a lo largo de $\boldsymbol{C}$ está dada por:

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_C M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz = \int_C xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$$

Como $g'(t), h'(t)$ y $k'(t)$ son funciones continuas, se aplica el teorema de evaluación resultando:

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} == \int_0^1 t\,t^2\,dt + t^2t^3\,2tdt + t^3t\,3t^2\,dt = \int_0^1 (t^3 + 5\,t^6)\,dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{7}t^7\right]_0^1$$

$$\boxed{\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \frac{27}{28}}$$

7) **Determine si el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = (x-y)\,\boldsymbol{i} + (x-2)\,\boldsymbol{j}$, es conservativo o no lo es.**

Las funciones componentes serán:

$$M(x,y) = x - y$$
$$N(x,y) = x - 2$$

Entonces:

$$M_y(x,y) = -1$$
$$N_x(x,y) = 1$$

Como

$$\boxed{M_y(x,y) \neq N_x(x,y)}$$

entonces el campo vectorial **no es conservativo**.

8) **Dado el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = (3+2xy)\,\boldsymbol{i} + (x^2 - 3y^2)\,\boldsymbol{j}$,**

a. determine si es conservativo o no lo es;
b. si es conservativo obtenga la función potencial
c. evalúe la integral de línea $\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr}$ siendo $\boldsymbol{C}$ la curva dada por $\boldsymbol{r}(t) = e^t \sin t\,\boldsymbol{i} + e^t \cos t\,\boldsymbol{j}$, **con** $0 \le t \le \pi$.

Serán:

$$M(x,y) = 3 + 2xy$$
$$N(x,y) = x^2 - 3y^2$$

Entonces:

$$M_y(x,y) = 2x$$
$$N_x(x,y) = 2x$$

Como

$$\boxed{M_y(x,y) = N_x(x,y)}$$

en todo el plano $\mathbb{R}^2$, el cual es abierto y simplemente conexo, entonces el campo vectorial **es conservativo**.
Como el campo es conservativo, existe una función potencial $f(x,y)$ tal que $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \boldsymbol{F}(x,y)$. Será entonces:

$$f_x(x,y) = 3 + 2xy \quad (*)$$
$$f_y(x,y) = x^2 - 3y^2 \quad (**)$$

Integramos $(*)$ respecto de x:

$$\int f_x(x,y)\,dx = \int (3 + 2xy)\,dx$$
$$f(x,y) = 3x + x^2y + g(y) \; (***)$$

donde $g(y)$ es una constante para la variable x, dependiendo sólo de la variable y. Para determinar su valor, derivamos la última expresión respecto de y, obteniendo:

$$f_y(x,y) = x^2 + g'(y)$$

Igualando con $(**)$ resulta:

$$x^2 - 3y^2 = x^2 + g'(y)$$
$$g'(y) = -3y^2$$

que integrada respecto de y, nos da:

$$\int g'(y)\,dy = \int -3y^2\,dy$$
$$g(y) = -y^3 + C, \text{donde } C \text{ es una constante.}$$

Reemplazando en $(***)$ resulta:

$$\boxed{f(x,y) = 3x + x^2y + -y^3 + C}$$

Finalmente, para calcular $\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr}$ siendo el campo conservativo y teniendo la función potencial, determinamos los extremos inicial y final de la curva $\boldsymbol{C}$, para aplicar:

$$\int_{\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)}^{\mathrm{B}(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2)} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = f(x,y)]_{(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)}^{(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2)} = f(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2) - f(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)$$

Evaluamos la función vectorial en los extremos del intervalo del parámetro t:

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{r}(\pi) = -e^{\pi}\,\boldsymbol{j}$$

Con lo que

$$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_{(0,1)}^{(0,-e^{\pi})} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = [3x + x^2y \pm y^3]_{(0,1)}^{(0,-e^{\pi})}$$
$$\boxed{\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = e^{3\pi} + 1}$$

9) **Dado el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y^2\,\boldsymbol{i} + (2xy + e^{3z})\,\boldsymbol{j} + 3ye^{3z}\,\boldsymbol{k}$, determine su integral de línea entre los puntos** $A(1,3,-1)$ y $B(0,2,5)$.

Como el campo está definido en todo $\mathbb{R}^3$, que es simplemente conexo, calcularemos su rotor para ver si es conservativo. Recordemos que:

$$rot\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N} & \boldsymbol{P} \end{vmatrix}$$

Que en este caso resulta:

$$rot\ \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & (2xy + e^{3z}) & 3ye^{3z} \end{vmatrix} = (3e^{3z} - 3e^{3z})\boldsymbol{i} + (0 - 0)\,\boldsymbol{j} + (2y - 2y)\boldsymbol{k}$$

$$rot\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

Entonces $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ es un campo conservativo. En consecuencia, procedemos a buscar su función potencial $f(x, y, z)$, que verifique $\boldsymbol{\nabla} f(x, y, z) = \boldsymbol{F}(x, y, z)$

Deberá cumplir:

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = y^2, (*) \\ f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z}\ , (**) \\ f_z(x, y, z) = 3ye^{3z}\ , (***) \end{cases}$$

Para encontrar $f(x, y, z)$ integramos la igualdad $(*)$ respecto de x:

$$\int f_x(x, y, z)\, dx = \int y^2\, dx$$

$$f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z) \quad (****)$$

Donde $g(y, z)$es una constante para la variable x, es decir que depende sólo de las variables y, z. Para determinarla, derivamos la igualdad respecto de y.

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

Igualando a (**), resulta

$$2xy + g_y(y, z) = 2xy + e^{3z}$$
$$g_y(y, z) = e^{3z}$$

Ahora, integrando respecto de y resulta

$$\int g_y(y, z)\, dy = \int e^{3z}\, dy$$
$$g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$$

Donde $h(z)$ es una constante para las variables x, y que depende sólo de la variable z. Reemplazamos $g(y, z)$ en $(****)$ resultando:

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Finalmente derivamos la última expresión respecto de z:

$$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z} + h'(z)$$

Igualando a $(***)$, resulta:

$$3ye^{3z} = 3ye^{3z} + h'(z)$$

$$h'(z) = 0$$

Es decir que:

$$h(z) = C\ (constante)$$

Por lo que resulta:

$$\boxed{f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + C}$$

Se puede verificar que $\boldsymbol{\nabla} f(x, y, z) = \boldsymbol{F}(x, y, z)$
Finalmente:

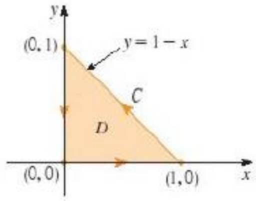
$$\int_{\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1,\mathrm{z}_1)}^{\mathrm{B}(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2,\mathrm{z}_2)} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = f(x, y, z)]_{(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1,\mathrm{z}_1)}^{(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2\mathrm{y}_2)} = f(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2, \mathrm{z}_2) - f(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1)$$

$$\int_{A(1,3,-1)}^{B(0,2,5)} y^2\, dx + \left(2xy + e^{3z}\right) dy + 3ye^{3z}\, dz = [xy^2 + ye^{3z}]_{(1,3,-1)}^{(0,2,5)} = 2e^{15} - 9 - 3e^{-3}$$

$$\boxed{\int_{A(1,3,-1)}^{B(0,2,5)} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = 2e^{15} - 9 - 3e^{-3}}$$

10)**Evalúe la integral de línea del campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = x^4\,\boldsymbol{i} + xy\,\boldsymbol{j}$, donde $\boldsymbol{C}$ es la curva triangular que consiste de los segmentos rectilíneos de $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ a $(\mathbf{1},\mathbf{0})$, de $(\mathbf{1},\mathbf{0})$ a $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ y de $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ a $(\mathbf{0},\mathbf{0})$.**

Verificaremos si se puede aplicar el Teorema de Green. La curva es la graficada en el gráfico adjunto y su sentido de circulación es anti horario (positivo para el teorema).
Se trata de una curva plana, simple, cerrada, suave por tramos y con orientación positiva. La región R es la encerrada por la curva y las funciones componentes $M(x,y) = x^4$; $N(x,y) = xy$ tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contenga a R.
En consecuencia se cumplen las hipótesis del **Teorema de Green** y es válido:



$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 - x\}$

Entonces:

$$\oint_C x^4dx + xy\,dy = \iint_R (\,y - 0)dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dydx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \mathrm{dx} = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{dx} = \left[-\frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1$$

$$\boxed{\oint_C x^4dx + xy\,dy = \frac{1}{6}}$$

11)**Evalúe la integral de línea del campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (3y - e^{\sin x})\,\boldsymbol{i} + (7x - \sqrt{y^4+1}\,\boldsymbol{j}$, donde $\boldsymbol{C}$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$**

Se trata de una curva simple, cerrada, suave por tramos y con orientación positiva. La región R es la encerrada por la curva y las funciones componentes:

$M(x,y) = 3y - e^{\sin x}$
$N(x,y) = 7x - \sqrt{y^4+1}$

tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contenga a R. En consecuencia se cumplen las hipótesis del Teorema de Green y es válido:

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 - x\}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3\ ; \frac{\partial N}{\partial x} = 7$$

Entonces:

$$\oint_C (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x - \sqrt{y^4+1}\,dy = \iint_R (7-3)dA = \iint_R 4dA$$

Como R es el **disco** limitado por $x^2 + y^2 = 9$, resulta conveniente evaluar la integral doble en coordenadas polares, donde:

$$R = \{(r,\theta) / \ 0 \le \theta \le 2\pi;\ 0 \le r \le 3\}$$

$$\iint_R 4\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^3 4\,r\,drd\theta = 4\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3 d\theta = 4\int_0^{2\pi}\frac{9}{2}d\theta = 4\left[\frac{9}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = 36\pi$$

$$\boxed{\oint_C (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x - \sqrt{y^4+1}\,dy = 36\pi}$$

12)**Determine el área delimitada por la elipse de ecuación:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$x = a\cos t\ ; y = b\sin t\ ; 0 \le t \le 2\pi$$

Se aplica el **Corolario del Teorema de Green** para el cálculo de áreas donde, si la frontera de una región R en el plano (x, y) es una curva plana, regular parte por parte, cerrada y simple $\mathcal{C}$, entonces el área de R es:

$$A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - \text{ydx}$$

Utilizamos la tercera expresión:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - \text{ydx} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t\, b\cos t - b\sin t\,(-a\sin t)]dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\, dt = \pi$$

$$\boxed{A = \pi}$$

13)**Dado el campo vectorial** $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$,

a. Evalúe la integral de línea del campo sobre la curva C dada por la circunferencia: $(x-4)^2+(y-1)^2=1$

b. Demuestre que $\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi$ **,** para cualquier curva C simple, cerrada y positiva que encierre en su interior al origen de coordenadas.

Se trata de una curva plana, simple, cerrada, regular parte por parte y con orientación positiva. La región R es la encerrada por la curva y las funciones componentes:

$$M(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$N(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

y sus derivadas parciales:

$$M_y(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$N_x(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

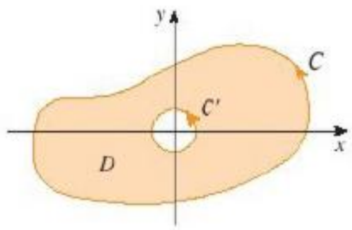
Vemos que $M_y(x,y) = N_x(x,y)$, para todo $(x,y) \neq (0{,}0)$. En consecuencia el campo vectorial es conservativo para cualquier región simplemente conexa en $\mathbb{R}^2$que no tenga al origen (0,0) en su interior.

Como la circunferencia $(x-4)^2+(y-1)^2=1$ no pasa por el origen, no lo deja en su interior, existirá una región abierta y simplemente conexa en $\mathbb{R}^2$que contenga a la circunferencia y a su región interior, y no contenga al origen, en la cual el campo vectorial es conservativo. Por lo tanto:

$$\boxed{\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0}$$

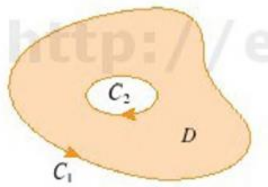
Sea ahora $\boldsymbol{C}$ una curva plana, simple, cerrada y positiva que encierre en su interior al origen de coordenadas. En este caso no se garantiza que campo sea conservativo. Tampoco es de aplicación el Teorema de Green sobre la curva $\boldsymbol{C}$ y la región interior limitada por ella.

Como C es una trayectoria cerrada arbitraria, consideremos una circunferencia C' centrada en el origen de radio a, de modo que C'quede dentro de C, como indica la figura.
Ambas curvas se consideran orientadas en el sentido anti horario.
Sea R la región comprendida entre ambas.



En este caso, es de aplicación el Teorema de Green para regiones con agujeros:

$$\oint_{C_1} M(x,y)dx + N(x,y)dy + \oint_{C_2} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$



donde las curvas se recorren en sentido positivo, que es el que deja a la región R a la izquierda (como se indica en el gráfico adjunto).

En el caso planteado, como el sentido positivo del Teorema de Green para la curva C' es contrario al planteado, resulta:

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy + \oint_{-C'} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Pero sobre la región R $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$, por lo cual resulta:

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy - \oint_{C'} M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \oint_{C'} M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

La curva C' tiene las ecuaciones paramétricas:

$$x = a\cos t \ ; y = a\sin t \ ; 0 \le t \le 2\pi$$

Entonces:

$$\oint_{C'} M(x,y)dx + N(x,y)dy = \oint_{C'} \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-a\sin t}{(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\,(-a\sin t) + \frac{a\cos t}{(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2} a\cos t\right] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Por lo cual:

$$\boxed{\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = 2\pi}$$

4. *Ejercicios de aplicación técnica*

1. Masa de un alambre

Determinar la masa de un alambre con forma de semicircunferencia de radio **a**, ubicada en el semiplano superior, para el cual la densidad de masa $\delta(x, y)$ es proporcional a la distancia de un punto P(x, y) del alambre al eje x.

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia son:

$C \begin{cases} x = g(t) = \text{a} \cos t \\ y = h(t) = \text{a} \sin t \end{cases}$, con $0 \le t \le \pi$

La distancia de cualquier punto P (x, y) del alambre al eje x es la coordenada y del punto. Por lo tanto la densidad de masa del alambre es la función:

$\delta(x, y) = ky$, k: constante de proporcionalidad.

Derivando las ecuaciones paramétricas de C se obtienen las siguientes igualdades:

$g'(t) = -\text{a sen} t$; $h'(t) = \text{a} \cos t$

La masa **m** del alambre será:

$$\int_C \delta(x, y) ds = \int_C ky\, ds = \int_0^\pi k\, a\, sent\sqrt{a^2sen^2t + a^2cos^2t}\; dt = \int_0^\pi k\, a^2 sent\; dt = k\, a^2[-\cos t]_0^\pi = 2ka^2$$

El alumno repetirá el cálculo considerando que la densidad es proporcional a la distancia del punto P(x, y) al eje y; es decir que: $\delta(x, y) = kx$

Analizando el resultado obtenido y formulando las precisiones necesarias en relación a la simetría del alambre respecto del eje y.

2. Centro de masa de un alambre.

Un alambre toma la forma de una semicircunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ con $y \ge 0$ y es más grueso cerca de su base que de la parte superior. Calcule el **centro de masa del alambre** si la densidad lineal en cualquier punto es proporcional a su distancia desde la recta y = 1.

El alambre adopta la forma de una semicircunferencia de radio 1, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$C \begin{cases} x = g(t) = \cos t \\ y = h(t) = \sin t \end{cases}$, con $0 \le t \le \pi$

Por lo tanto se puede demostrar que ds = dt.

La densidad de masa del alambre será: $\delta(x, y) = k(1 - y)$; k: constante de proporcionalidad.

La masa **m** del alambre resulta:

$$m = \int_C \delta(x, y) ds = \int_C k(1 - y) ds = \int_0^\pi k(1 - sent) dt = k[t + cost]_0^\pi = k(\pi - 2)$$

Por simetría del alambre respecto del eje y, el centro de masa estará ubicado sobre dicho eje. Por lo tanto la coordenada x del centro de masa será nula.

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\delta(x, y) ds = \frac{1}{k(\pi - 2)}\int_C yk(1 - y) ds = \frac{1}{\pi - 2}\int_0^\pi (sent - sen^2t) dt =$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi - 2}\left[-cost - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen\; 2t\right]_0^\pi = \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)} \approx 0{,}038$$

Finalmente el centro de masa estará ubicado en: (0; 0,038).

TP N° 14- Campos Vectoriales/Divergencia y rotor

1) **Realizar la descripción gráfica del campo vectorial $\boldsymbol{F}$ dado por**:

a) $\boldsymbol{F}(x,y) = -y\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j}$

b) $\boldsymbol{F}(x,y) = x\,\boldsymbol{i} - y\,\boldsymbol{j}$

c) $\boldsymbol{F}(x,y) = 3\,\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

d) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2\,\boldsymbol{k}$

e) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = -x\,\boldsymbol{i} - y\,j - z\,\boldsymbol{k}$

f) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\,\boldsymbol{i} + z\,\boldsymbol{k}$

2) **Rotacional y divergencia**:

a) Encontrar el rotacional y la divergencia para: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xy^2 z^4\ \boldsymbol{i} + (2x^2 y + z)\,\boldsymbol{j} + y^3\ z^2\ \boldsymbol{k}$

b) Encontrar rotor y divergencia para: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^3\,ln\,z\,\boldsymbol{i} + xe^{-y}\,\boldsymbol{j} - (y^2 + 2z)\,\boldsymbol{k}$

c) Encontrar rotor y divergencia para: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 3xyz^2\,\boldsymbol{i} + y^2\,sen\,z\,\boldsymbol{j} + xe^{2z}\ \boldsymbol{k}$

TP N° 15- Integrales curvilíneas

1) **Evaluar cada una de las siguientes Integrales curvilíneas**:

a) $\int_c xy^2 \ ds$ donde $\boldsymbol{C}$ es la parte de la circunferencia unitaria con centro en el origen que se encuentra en el primer cuadrante.

b) Calcular $\int_c f(x,y) \ ds$, $\int_c f(x,y) \ dx$ y $\int_c f(x,y) \ dy$ para los siguientes casos:

- $f(x,y) = x^3 + y \ , x = 3t \ , y = t^3 \ ; \ 0 \le t \le 1$
- $f(x,y) = xy^{2/5} , x = (1/2)t \ , y = t^{5/2} \ ; \ 0 \le t \le 1$

c) $\int_c$ xyz ds ; C es el segmento entre (0,0,0) y (1,2,3)

d) $\int_C (xy+z)ds$ donde C tiene por ecuación vectorial: $\boldsymbol{r}(t) = a\ cost\ \boldsymbol{i} + a\ sent\ \boldsymbol{j} + bt\ \boldsymbol{k}$ con $0 \le t \le 2\pi$

2) **Masa y centro de masa y momentos de inercia de un alambre delgado**.

a) Un alambre de densidad constante tiene la forma de la hélice:

$$x = cos\ t \ , y = a\ sen\ t, z = bt; \ 0 \le t \le 3\,\pi$$

Calcular la masa del alambre y su centro de masa.

a) Un alambre delgado tiene la forma de semi circunferencia de radio a. La densidad lineal de masa en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P a la recta que pasa por los extremos del alambre. Calcular el centro de masa del alambre y sus momentos de inercia.

3) **Trabajo**

a) Sea C la parte de la parábola $y = x^2$ que se encuentra entre (0,0) y (3,9) y sea $\boldsymbol{F}(x,y) = -y\ \boldsymbol{i} + x\ \boldsymbol{j}$.

Calcular el trabajo realizado por el campo vectorial a lo largo de la curva C.

b) La fuerza en un punto (x, y) del plano coordenado es **F(**x, y) = $(x^2 + y^2)$ ***i*** + x y ***j.***

Calcular el trabajo realizado por el campo vectorial a lo largo de la gráfica de $y = x^3$ desde (0,0) hasta (2,8).

c) Siendo F(x, y, z) = y ***i*** + z ***j*** + x ***k***, la fuerza de un punto (x, y, z) calcular el trabajo realizado por la misma a lo largo de la cúbica alabeada x = t, $y = t^2$, $z = t^3$ de (0,0,0) a (2,4,8).

TP N° 16- Independencia de la trayectoria/Teorema de Green

1) **Independencia de la trayectoria**

Determinar en los siguientes casos si la $\int_c \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r}$ es independiente de la trayectoria. En caso afirmativo, encontrar la función potencial y evaluar la diferencia de potenciales cuando corresponda:

a) $\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy$

b) $\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} e^x \text{ sen } y\, dx + e^x \cos y\, dy$

c) $\int_{(0,1)}^{(2,3)} [(2x + y^3)\, \boldsymbol{i} + (3xy^2)\, \boldsymbol{j}]\ (dx\, \boldsymbol{i} + dy\, \boldsymbol{j})$

d) $\int_c (x^2 y\, dx + 3xy^2\, dy)$

e) $\int_{(0,1,1/2)}^{(\pi/2,3,2)} (y^2 \cos x)\, dx + (2y \text{ sen } x + e^{2z})\, dy + 2ye^{2z}\, dz$

f) $\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)} (6xy^3 + 2z^2)\, dx + 9x^2 y^2\, dy + (4xz + 1)\, dz$

2) **Teorema de Green**

a) Calcular las siguientes **integrales de línea** aplicando el Teorema de Green siempre y cuando se verifiquen las hipótesis del teorema que permiten utilizarlo:

a. $\oint_c 5xy\, dx + x^3\, dy$, donde C es la trayectoria que consta de las curvas $y = x^2$, y = 2x entre los puntos (0,0) y (2,4).

b. $\oint_c (x^2 + y)dx + xy^2\, dy$, donde C es la curva formada por $y^2 = x$, $y = -x$ de (0,0) a (1, −1).

c. $\oint_c \sqrt{y}\, dx + \sqrt{x}\, dy$, donde C es el triángulo con vértices (1,1) , (3,1) y (2,2).

d. $\oint_c e^x \text{ sen } y\, dx + e^x \cos y\, dy$, C es la elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$

e. $\oint_c (x + y^2)\, dx + (1+ x^2)\, dy$, C es la curva dada por $y = x^3$, $y = x^2$ de (0,0) a (1,1).

f. $\oint_c x^2 y^2\, dx + (x^2 - y^2)\, dy$ donde C es el cuadrado con vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1).

b) Verificar el cumplimiento del Teorema de Green para los siguientes casos:

a. $\oint_c (x^2 + y^2)dx + 2xy\, dy$, C está acotada por las gráficas de $y = +\sqrt{x}$, y = 0 y x = 4

b. $\oint_c (x + y)\, dx + (y + x^2)dy$, donde C región formada por $x^2 + y^2 = 1$ $x^2 + y^2 = 4$

3) **Calcular el área de la región indicada utilizando una integral de línea (Corolario del Teorema de Green):**

a. de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$

b. Región acotada por $y = 4x^2$, $y = 16x$

c. Región formada por $y = x^3$, $y = +\sqrt{x}$

5. *Bibliografía*

- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwards.
- El Cálculo, de Louis Leithold.
- Matemática Superior para Ingenieros y Físicos, de Iván y Elizabeth Sokolnikoff
- Cálculo con Geometría analítica, de George Thomas y Ross Finney.