





# Ecuaciones diferenciales



Canek: Portal de Matemáticas

# Ecuaciones diferenciales

Ernesto Javier Espinosa Herrera (coordinador)

Ignacio Canals Navarrete

Ismael Muñoz Maya

Rafael Pérez Flores

Carlos Daniel Prado Pérez

Rubén Dario Santiago Acosta

Carlos Antonio Ulín Jiménez

Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco

Editorial Reverté

Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • México

2010

Universidad Autónoma Metropolitana

Rector general

Dr. José Lema Labadie

Secretario general

Mtro. Luis Javier Melgoza Valdivia

Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco

Rectora

M.A.V Paloma Ibañez Villalobos

Secretario

Ing. Darío Eduardo Guaycochea Guglielmi

Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Dr. Emilio Sordo Zabay

Jefe del Departamento de Ciencias Básicas

Dr. Luis Enrique Noreña Franco

© M. en C. Ernesto Javier Espinosa Herrera (coordinador)

Dr. Ignacio Canals Navarrete

Dr. Ismael Muñoz Maya

Dr. Rafael Pérez Flores y

M. en C. Carlos D. Prado Pérez y

M. en C. Rubén Darío Santiago Acosta

Dr. Carlos Antonio Ulín Jiménez

© Departamento de Ciencias Básicas

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Unidad Azcapotzalco

Universidad Autónoma Metropolitana

Av. San Pablo 180, col. Reynosa Tamaulipas

Deleg. Azcapotzalco, C.P. 02200 México D.F.

© Reverté Ediciones, S.A. de C.V.

Río Pánuco, 141, col. Cuauhtémoc

Deleg. Cuauhtémoc, C.P. 06500

México D.F.

ISBN de la colección

ISBN del volumen

Primera edición 2010

Impreso en China. *Printed in China*

Everbest Printing Co. Ltd

Block C Unit 5. 10th Floor 7 Ko Fai Road

Yau Tong Kowloon, Hong Kong

Captura de datos: Teresa Jurado Dorantes y Eliel Fabila

Portada:

Cuidado editorial: Concepción Asuar

Todo el material de *Ecuaciones diferenciales* se encuentra en línea en la dirección:

<http://canek.azc.uam.mx>

# Índice

<b>Prólogo</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>Capítulo 1 Conceptos básicos</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción	1
1.2 Definición de una ecuación diferencial	4
1.3 Soluciones de ecuaciones diferenciales	5
1.3.1 Soluciones de una ecuación	5
1.3.2 Solución de una ecuación diferencial	7
1.3.3 Tipos de soluciones de ecuaciones diferenciales	10
1.4 Condiciones Iniciales	12
1.5 Familias de curvas	14
1.5.1 Interpretación gráfica de $y' = f(x, y)$	14
1.5.2 Curva solución de un PVI	22
1.6 Existencia y unicidad de soluciones *	30
<b>Capítulo 2 Ecuaciones diferenciales de primer orden</b>	<b>35</b>
2.1 Introducción	35
2.2 Ecuaciones diferenciales de variables separables	38
2.3 Ecuaciones diferenciales lineales	45
2.4 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli	53
2.5 Ecuaciones diferenciales homogéneas	59
2.5.1 Resolución de ecuaciones diferenciales homogéneas	61
2.6 Ecuaciones diferenciales exactas	70
2.7 Factor integrante	84
2.8 Miscelánea	96
2.9 Ecuaciones reducibles a primer orden	106
2.9.1 Introducción	106
2.9.2 Reducción de orden	108
2.10 Sobre funciones de dos variables	111
2.10.1 Definiciones básicas	111
2.10.2 Derivadas parciales	115
2.10.3 Diferencial exacta o total	117
2.10.4 Derivación implícita	119
2.10.5 Derivadas parciales de orden superior	120
2.10.6 Integración parcial	122

<b>Capítulo 3</b>	<b>Aplicaciones de ED de primer orden</b>	<b>127</b>
3.1	Introducción	127
3.1.1	Las aplicaciones de las ED	127
3.2	Decaimiento radioactivo	128
3.3	Crecimiento de poblaciones	133
3.3.1	Modelo de Malthus	133
3.3.2	Modelo logístico	137
3.4	Ley de Newton de cambio de temperaturas	141
3.5	Mezclas	148
3.6	Mecánica	158
3.7	Problemas geométricos	166
3.7.1	Curvas definidas por sus tangentes y normales	167
3.7.2	Trayectorias ortogonales	169
3.8	Miscelánea	175
<b>Capítulo 4</b>	<b>Ecuaciones diferenciales de orden superior</b>	<b>183</b>
4.1	Conceptos básicos	183
4.1.1	Combinaciones lineales	186
4.1.2	Solución de un problema con condiciones iniciales	187
4.1.3	El Wronskiano	188
4.2	Reducción de orden	189
4.2.1	Reducción de orden en ED lineales de segundo orden	189
4.3	Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$	196
4.3.1	Espacio vectorial	196
4.3.2	Independencia lineal	197
4.3.3	Bases de un espacio vectorial	201
4.3.4	Ecuaciones diferenciales de orden $n$	202
4.4	ED lineales homogéneas con coeficientes constantes	207
4.4.1	ED homogéneas con coeficientes constantes de orden 2	207
4.4.2	ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden $n \geq 3$	215
4.5	Obtención de una ecuación diferencial	220
4.6	Método de coeficientes indeterminados	225
4.6.1	El método	232
4.7	Variación de parámetros	242
4.7.1	Variación de parámetros para ED de orden 2	242
4.7.2	Variación de parámetros para ED de orden $n$	251
4.8	Variación de parámetros y reducción de orden	259
<b>Capítulo 5</b>	<b>Aplicaciones de orden superior</b>	<b>267</b>
5.1	Introducción	267
5.2	Vibraciones mecánicas	268
5.2.1	Movimiento armónico simple	268
5.2.2	Vibraciones amortiguadas libres	289
5.2.3	Vibraciones forzadas	308
5.3	Circuitos eléctricos	323
5.3.1	Circuito RC de corriente continua	328
5.3.2	Circuito RL de corriente continua	331
5.3.3	Circuito $RLC$ de corriente continua	333
5.3.4	Circuito $RC$ de corriente alterna	337
5.3.5	Circuito RL de corriente alterna	340
5.3.6	Circuito LC de corriente alterna	342



5.3.7	Circuito RLC de corriente alterna . . . . .	346
5.3.8	Relación electromecánica . . . . .	348
<b>Capítulo 6</b>	<b>Transformada de Laplace . . . . .</b>	<b>351</b>
6.1	Introducción . . . . .	351
6.2	Definición de la Transformada de Laplace . . . . .	354
6.2.1	Definición y primeras observaciones . . . . .	354
6.2.2	Cálculo de la TL . . . . .	355
6.2.3	Más ejemplos de cálculo de la TL . . . . .	358
6.3	Existencia de TL . . . . .	361
6.4	Propiedades de la TL . . . . .	365
6.4.1	Cambio de escala . . . . .	367
6.4.2	Primera propiedad de traslación . . . . .	367
6.4.3	Segunda propiedad de traslación . . . . .	370
6.4.4	Transformada de una derivada . . . . .	373
6.4.5	Derivada de una transformada . . . . .	376
6.4.6	Transformada de una integral . . . . .	378
6.4.7	Integral de una transformada . . . . .	379
6.4.8	Transformada de una función periódica . . . . .	380
6.5	Aplicación de la TL para resolver ED . . . . .	384
6.5.1	Esquema general del método . . . . .	384
6.5.2	Técnicas de cálculo de $\mathcal{L}^{-1}$ . Fracciones parciales . . . . .	386
6.5.3	Técnicas de cálculo de $\mathcal{L}^{-1}$ . Método de Heaviside . . . . .	391
6.6	Aplicaciones . . . . .	408
6.7	Teorema de convolución y la delta de Dirac . . . . .	414
<b>Capítulo 7</b>	<b>Métodos numéricos . . . . .</b>	<b>423</b>
7.1	Introducción . . . . .	423
7.2	Método de Euler . . . . .	424
7.3	Método de Euler mejorado . . . . .	438
7.4	Método de Runge Kutta . . . . .	450
<b>Anexo</b>	<b>. . . . .</b>	<b>463</b>



# Prólogo

*¿Puede el aleteo de una mariposa en Brasil  
provocar un tornado en Texas?  
Edward Norton Lorenz*

El epígrafe anterior es el título de una conferencia que dictó E. N. Lorenz en un congreso de la American Association for the Advancement of Science (AAAS), y evoca una serie de imágenes sobre la influencia aparentemente desproporcionada, de que ciertos pequeños cambios, en reacciones que se encadenan y adquieren importancia hasta producir resultados mayores. Esas imágenes se han popularizado tanto que actualmente se usa la expresión *efecto mariposa* para referirse cotidianamente a esa clase de procesos, de forma muy libre sin un cabal conocimiento de su significado.

Para comprender el significado real de la expresión anterior es necesario primero entender el cambio, una cualidad de nuestro universo que, si bien es algo abstracta y difícil de apreciar, es susceptible de medirse y estudiarse. Uno de los temas más importantes del libro que está usted leyendo es el cambio, tema tratado con tal precisión que permita entender una gran variedad de procesos o fenómenos que involucran cambios. Este libro es el resultado del trabajo conjunto de un equipo de profesores pertenecientes adscritos a varias instituciones de educación superior (Universidad Autónoma Metropolitana – Azcapotzalco, Tecnológico de Monterrey – campus Estado de México e Instituto Tecnológico de Pachuca) con el fin de ayudar a la formación no sólo de los estudiantes de escuelas de ingeniería en nuestras instituciones, sino también en muchas otras que tengan la materia de ecuaciones diferenciales (ED) como parte de su curriculum. Este libro supone que el lector posee los conocimientos adquiridos en los cursos de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y algunas nociones de Cálculo en Varias Variables y Álgebra Lineal.

Al escribir este libro se ha pensado en el estudiante como el principal actor en la construcción de su propio conocimiento, por tal razón los autores hemos puesto un gran esfuerzo en su diseño y revisión, gráficas presentadas, selección de ejemplos resueltos con gran detalle que forman parte sustancial del libro, así como los problemas propuestos, cuya resolución tiene una gran importancia para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. En cuanto al estilo, hemos procurado usar un lenguaje claro y preciso, procurando siempre despertar la intuición del estudiante ante los hechos importantes, que se presentan en lo posible completamente pero evitando las complicaciones de un rigor matemático exagerado.

Con base en nuestra propia experiencia docente podemos afirmar que el material presentado será de utilidad para que el estudiante asimile los conceptos no sólo de ecuaciones diferenciales, sino también los nuevos conceptos y contenidos relacionados que encuentre durante su posterior formación en ingeniería. Los autores no pretendemos elaborar una obra nueva sobre ecuaciones diferenciales sino una obra que sea útil para el aprendizaje efectivo de las ED, si esto se logra nos sentiremos plenamente satisfechos.



# Introducción

Las ecuaciones diferenciales surgen con el nacimiento del cálculo en el siglo XVII, desde ese entonces se han utilizado para modelar diversos fenómenos físicos como el movimiento de partículas sometidas a fuerzas, movimiento planetario, entre muchos otros. Actualmente constituyen una de las herramientas más utilizadas por científicos e ingenieros para la modelación de ya que su sencillez permite relacionar los cambios que sufren las variables que describen fenómenos físicos, biológicos, sociales entre otros. El ámbito en que las ecuaciones diferenciales (ED) son aplicables es amplio, por esa razón es necesario contar con un marco base que permita conocer los aspectos fundamentales de las ED y sus soluciones para, posteriormente, utilizarlas en la modelación, donde es posible percibir la belleza de esta herramienta.

Este texto, escrito con la colaboración de siete profesores del área de diversas instituciones, rescata su experiencia en la enseñanza de las ED, de forma que el texto es único en la presentación y discusión de las ideas y ejemplos utilizados, así como en las aplicaciones mostradas en su desarrollo. Así revisamos en el libro los métodos clásicos de solución de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones en diversas áreas del conocimiento humano. El libro está dividido en siete capítulos, dos de ellos dedicados a las aplicaciones y los otros cinco a discutir con precisión los algoritmos y estrategias de solución.

En el primer capítulo, *Conceptos básicos*, se estudian los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales y se establece el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, dicho teorema es la base para reconocer cuando una ED tiene o no solución y si esta es o no única.

En el segundo capítulo, *Ecuaciones diferenciales de primer orden*, se revisan los métodos básicos para resolver las ED de primer orden, entre los cuales se tienen a: ED en variables separables, ED homogéneas, ED exactas y ED lineales. También se establece el concepto de factor integrante que permite transformar una ED no exacta en otra que si es exacta.

El tercer capítulo, *Aplicaciones de ED de primer orden*, se dedica a modelar y resolver diversas situaciones mediante las ecuaciones diferenciales. Algunas de las aplicaciones que se estudian son los modelos de Malthus y Logístico para el crecimiento de poblaciones y el método que permite construir una familia de trayectorias ortogonales a una familia de trayectorias dadas. También se utilizan las ED para modelar fenómenos físicos como la Ley de Enfriamiento de Newton, el decaimiento radiactivo así como problemas de mezclas.

En el cuarto capítulo, *Ecuaciones diferenciales de orden superior*, se establecen las bases para estudiar las ED de orden superior, en particular se estudian las ED lineales de segundo orden. Iniciamos con conceptos como dependencia e independencia lineal, superposición de soluciones y establecemos el teorema de existencia y unicidad de soluciones para ED lineales. Una buena parte de la discusión se centra en estudiar los métodos de coeficientes indeterminados y de variación de parámetros. En el primero de ellos se establece una estrategia basada en las características de la ED para proponer la forma de la solución para, posteriormente, determinar dicha solución. En el segundo método se parte de una combinación lineal de soluciones linealmente independientes de la ED, que llamaremos homogénea, para proponer la solución particular

mediante la variación de las constantes que nos aparecen en la primera solución. Finalmente, se presentan la teoría y ejemplos de ED lineales de orden superior a dos.

El quinto capítulo, *Aplicaciones de orden superior*, se dedica a analizar dos aplicaciones de la ED lineales de orden superior, vibraciones mecánicas y circuitos eléctricos. Dedizamos un amplio espacio al análisis de las diferentes soluciones que pueden aparecer al resolver un sistema mecánico formado por una masa, un amortiguador y un resorte sometidos en general a una fuerza de excitación. Posteriormente estudiamos los diferentes tipos de circuitos en serie que contienen un resistor, un capacitor y/o un inductor, todos los circuitos posibles con estas características se pueden modelar con ED lineales de primer o segundo orden.

En el sexto capítulo, *Transformada de Laplace*, se presenta la Transformada de Laplace y su uso en la solución de ED lineales. La idea del método es transformar la ED en una ecuación algebraica en un espacio donde se pueden manipular y despejar la transformada de la solución, posteriormente aplicando la transformada inversa se obtiene la solución de la ED original. El método utiliza una estrategia muy simple: pasar a un espacio donde determinar la solución sea más simple y después regresar al espacio original. Con este método resolveremos no sólo ecuaciones lineales de orden superior sino también sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrodiferenciales.

En el séptimo capítulo, *Métodos numéricos*, se dedica a presentar métodos de aproximación de la solución de ED de primer orden. Tres son los métodos que discutiremos, a saber: el método de Euler, el método de Euler mejorado y el método de Runge–Kutta, equivalentes a utilizar aproximaciones lineales, cuadráticas o cúbicas, respectivamente, de la solución de la ecuación diferencial.

Por último, en el anexo, *Soluciones a los ejercicios*, proporcionamos al lector las soluciones a todos los ejercicios que aparecen en este libro.

Ernesto Javier Espinosa Herrera  
Coordinador

## CAPÍTULO

# 1

## Conceptos básicos

### OBJETIVOS PARTICULARES

1. Identificar una ecuación diferencial.
2. Determinar que una función es solución de una ED.
3. Resolver un problema de valores iniciales dada una solución general.
4. Trazar isoclinas y campos de direcciones de una ED.
5. Encontrar la ED asociada a una familia de curvas.

### 1.1 Introducción

En este primer capítulo se sientan las bases para la presentación de la teoría y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que es la materia que nos ocupará principalmente en este libro. Las secciones de este capítulo se encargan de definir con claridad los conceptos más importantes asociados con las ecuaciones diferenciales y sus soluciones, junto con algunas de sus aplicaciones más elementales. En los capítulos siguientes se desarrollarán los métodos necesarios para encontrar dichas soluciones y se ahondará en el tema de las aplicaciones con ejemplos concretos.

Para el lector que se encuentra por primera vez en un curso de Ecuaciones Diferenciales (abreviado ED, en lo que sigue) resulta un tanto confusa la idea de esta clase de ecuaciones. Es muy probable que haya escuchado algunas cosas acerca de las ED, como por ejemplo, que son muy importantes, que aparecen en muchas aplicaciones de ciencia e ingeniería, o que son algo tan difícil de resolver como la cuadratura del círculo. En fin, se dice mucho sobre las ED pero sólo la experiencia de primera mano nos puede mostrar cuáles de las cosas que hemos oído son ciertas y cuáles son simplemente fama innmerecida.

En la experiencia de los que escriben, las ED representan una herramienta muy valiosa e insustituible para entender el mundo físico, pues ellas llevan en sí algo que no es fácil de manejar o incluso definir por ningún otro medio: el cambio. No hablamos aquí de algo intangible o imaginario que desearíamos que ocurriera en la vida de una persona o de la sociedad, sino de algo que es posible definir y manejar y que nos servirá para determinar de qué manera una variable (la dependiente) está en función de otra (la independiente) en casos en que esta dependencia sea demasiado complicada.

## Cambio de temperatura

Un ejemplo muy sencillo que puede dar una idea de lo que significa el cambio y como modelarlo, se refiere al enfriamiento de un objeto; por ejemplo agua hirviendo. Si en casa se hierve agua y luego se deja enfriar, el tiempo que tarda en enfriarse depende de la temperatura del medio circundante. No es lo mismo que el recipiente con agua caliente se deje sobre la hornilla donde se hirvió el agua a que el recipiente se deposite en la tarja de la cocina, o bien, a que en la tarja el recipiente se rodee con pedazos de hielo. Notamos que cuanto menor es la temperatura del medio circundante, más rápido se enfría el agua. Es decir, se puede observar experimentalmente que la rapidez de cambio de la temperatura del agua está en proporción directa a la diferencia de las temperaturas del agua y del medio circundante.

Concretando, si  $T_0 = 100^\circ\text{C}$  es la temperatura del agua hirviendo,  $T_c$  es la temperatura constante del medio circundante y  $T(t)$  es la temperatura del agua después de  $t$  minutos, entonces la rapidez de cambio de la temperatura del agua  $\left[\frac{d}{dt}T(t)\right]$  es directamente proporcional a la diferencia de las temperaturas  $[T(t) - T_c]$  del agua y del medio circundante. Esto se puede simbolizar así:

$$\frac{d}{dt}T(t) \propto [T(t) - T_c],$$

o mejor aún se puede afirmar que:

$$\frac{d}{dt}T(t) = k[T(t) - T_c], \quad (1.1)$$

donde  $k$  es una constante que puede determinarse experimentalmente, denominada constante de proporcionalidad, que se puede calcular por una lectura de la temperatura del agua (digamos  $T_1$ , ocurrida en el instante  $t_1$ ), diferente a la temperatura inicial  $T_0 = 100^\circ\text{C}$ .

Podemos decir entonces que la temperatura  $T(t)$  del agua en el instante  $t \geq 0$ , debe ser una función que satisfaga (1.1) y además el par de condiciones iniciales  $T(0) = 100$  y  $T(t_1) = T_1$ .

La igualdad (1.1) es precisamente, un ejemplo de una ecuación diferencial, donde  $T(t)$  es la incógnita.

## Caída libre

De acuerdo a la ley de caída libre de los cuerpos, que Galileo investigó y demostró experimentalmente, todos los cuerpos caen en el vacío (en ausencia de aire) sin importar su forma, peso, tamaño con la misma aceleración uniforme, y de la misma manera; más aún, la distancia recorrida en la caída es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido en ella.

Este enunciado de la ley de caída libre no es, a pesar de su aparente precisión, tan claro como el razonamiento mediante el cual se obtiene la fórmula que lo caracteriza, usando argumentos de ED que describimos a continuación, y que podrían representar el modo de pensar de Newton sobre este problema: para deducir el modelo partamos de la suposición de que todos los cuerpos cerca de la superficie de la Tierra caen hacia ella con la misma aceleración, denotemos a esta aceleración constante mediante  $g$ ; se sabe experimentalmente que, cerca del nivel del mar,  $g = -9.81 \text{ m/s}^2$ , y usualmente se le da el signo negativo para indicar que nuestro sistema de referencia apunta hacia arriba mientras que la aceleración apunta hacia abajo, hacia el centro de la tierra.

Supongamos que un cuerpo se encuentra inicialmente a una altura  $s_0$  y que se le imprime una velocidad inicial  $v_0$  que se toma como positiva si apunta hacia arriba o negativa si apunta hacia abajo. Si denotamos por  $s(t)$  la altura a la que se encuentra el cuerpo al tiempo  $t$ , resultará que su velocidad es  $v(t) = s'(t)$  y su aceleración es  $a(t) = v'(t) = s''(t)$ . La ley de caída libre dice simplemente que

$$s''(t) = g.$$

La anterior es una ED, que resume de manera muy concisa el enunciado de la ley de Galileo; mas aún, expresa de forma admirable por su sencillez el hecho de que los cuerpos son atraídos hacia el centro de la tierra por una fuerza constante y según la segunda ley del movimiento de Newton. Dicha fuerza es proporcional a la aceleración, por lo que en esta fórmula se sintetiza un gran conocimiento sobre el movimiento.



Para recuperar la ley de Galileo, se puede integrar la fórmula desde 0 hasta  $t$  para obtener así

$$\int_0^t s''(\tau) d\tau = s'(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = s'(t) - s'(0).$$

Nótese que en esta integral y las siguientes, dentro del integrando se ha sustituido la variable  $t$  por  $\tau$  para evitar que se confunda con el límite superior de integración.

$$\int_0^t s''(\tau) d\tau = \int_0^t g d\tau = g\tau \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = gt.$$

Igualando los resultados anteriores se tiene que:

$$s'(t) - s'(0) = gt$$

Además, tomando en cuenta que  $s'(t) = v(t)$  y también  $v(0) = v_0$ , obtenemos:

$$v(t) = s'(t) = s'(0) + gt = v_0 + gt.$$

Esta es otra ED tan simple como la primera y se puede integrar desde 0 hasta  $t$  para darnos

$$\int_0^t s'(\tau) d\tau = s(\tau) \Big|_0^t = s(t) - s(0),$$

por una parte, y

$$\int_0^t (v_0 + g\tau) d\tau = \left[ v_0\tau + g\frac{\tau^2}{2} \right] \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = v_0t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Nuevamente, igualando los resultados anteriores obtenemos:

$$s(t) - s(0) = v_0t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Al considerar que  $s(0) = s_0$  se obtiene la conocida fórmula del movimiento uniformemente acelerado:

$$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Nótese que si ahora seguimos el razonamiento a la inversa, es decir, derivamos dos veces la fórmula anterior, regresaremos a la ED original, es decir:

$$s'(t) = v_0 + gt$$

y también

$$s''(t) = g.$$

Por ese motivo decimos que la función encontrada  $s(t)$  resuelve la ED  $s''(t) = g$ .

De los ejemplos anteriores podemos obtener algunas ideas importantes:

1. Algunas leyes en la física y otras ciencias involucran cantidades como velocidad, aceleración, rapidez, tiempo, entre otras y pueden enunciarse en la forma de una ED.
2. Una ED que sirve para enunciar un resultado de la forma anterior decimos que *modela* el proceso en cuestión, y entre sus características, es una ecuación que relaciona a la variable de interés con una o más de sus derivadas.
3. Una vez construido un modelo como en el ejemplo anterior, podemos en algunos casos, obtener la relación entre las variables involucradas en el fenómeno mediante un proceso de *solución*.

4. Una parte importante del proceso de solución es tener presente ciertas *condiciones*, como la velocidad inicial y la altura inicial del cuerpo en el ejemplo anterior, que quedarán incorporadas en la expresión final de la función que resuelve la ED.
5. En el ejemplo anterior el proceso de solución consistió simplemente en integrar la ED; de hecho en el proceso de solución generalmente habrá que hacer alguna integración, pero en otros casos podrían requerirse otros procedimientos.

En las secciones siguientes definiremos con toda precisión lo que consideraremos una Ecuación Diferencial Ordinaria, lo que se debe entender por sus soluciones, y cómo al añadir ciertas condiciones adicionales a una ED es posible determinar una única solución. En los siguientes capítulos nos ocuparemos de los diferentes métodos de solución para ellas.

## 1.2 Definición de una ecuación diferencial

Antes de iniciar con las siguientes secciones de este capítulo es importante recordar que una ecuación es una proposición matemática que involucra una igualdad entre dos expresiones de cualquier índole, con la condición de que estas expresiones contengan *términos indefinidos*. Estos términos son expresiones, comúnmente llamadas incógnitas o indeterminadas, que representan algo (un número, vector, matriz, función, etc.) que no tiene asignado un valor fijo, pero que puede ser sustituido, en teoría al menos, por cualquier valor apropiado. Algunos valores convierten a la ecuación en una proposición falsa y otros en una proposición verdadera; a estos últimos valores se les llama *soluciones* de la ecuación.

- Una **ecuación diferencial** (ED) es una ecuación en la que se relaciona una variable independiente, una variable dependiente y al menos una de sus derivadas.

Una manera de expresar estas ecuaciones diferenciales es:

$$F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

- Nos ocuparemos únicamente de estudiar las ED **ordinarias** que son las que tienen sólo una variable independiente y todas las derivadas se realizan con respecto a esa variable independiente.
- Por otra parte, las derivadas que aparecen en una ecuación diferencial pueden ser de varios órdenes: primeras derivadas, segundas derivadas etc. Al mayor orden de la derivada que participa en la ecuación diferencial se le llama el **orden** de la ED.

**Ejemplo 1.2.1** Las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias:

1.  $y' = x^2$ , de orden 1.
2.  $y'' - 2y = x^2$ , de orden 2.
3.  $x^2 y''' - 2xy' = x^3$ , de orden 3.
4.  $(y^{(4)})^5 - 2x(y^{(3)})^2 = x^2 y^3$ , de orden 4.
5.  $\frac{dy}{dx} = ry \left(1 - \frac{y}{k}\right)$ , de orden 1.

- Las ecuaciones diferenciales **parciales** o ecuaciones en derivadas parciales, son aquellas que tienen más de una variable independiente y las derivadas (necesariamente parciales) se efectúan con respecto a estas variables independientes.

**Ejemplo 1.2.2** Las siguientes son ecuaciones diferenciales parciales:

1.  $\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial u}{\partial y} + u$ , de orden 1.

2.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ , de orden 2.
3.  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ , de orden 2.
4.  $\frac{\partial u}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ , de orden 2.
5.  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , sistema de dos ecuaciones parciales de orden 1.

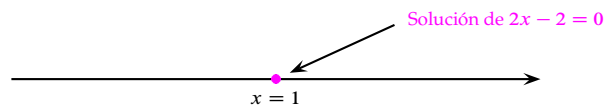
## 1.3 Soluciones de ecuaciones diferenciales

### 1.3.1 Soluciones de una ecuación

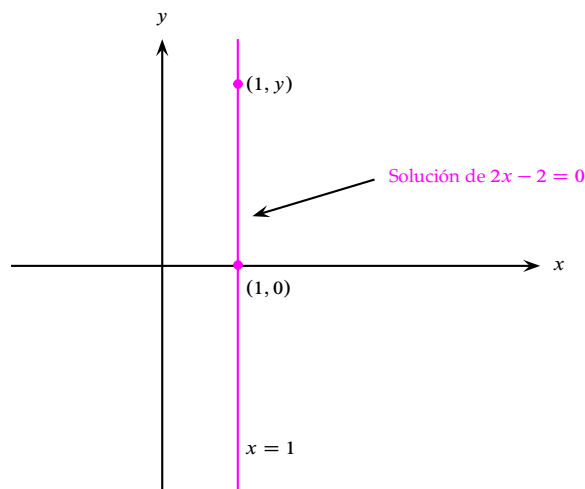
**Ejemplo 1.3.1** Resolver la ecuación:  $2x - 2 = 0$ .

▼ Resolver esta ecuación significa encontrar todos los valores que satisfacen la ecuación. ¿Cuáles son esos valores? depende en parte del conjunto en donde busquemos (es decir, el universo de trabajo), como se ve a continuación:

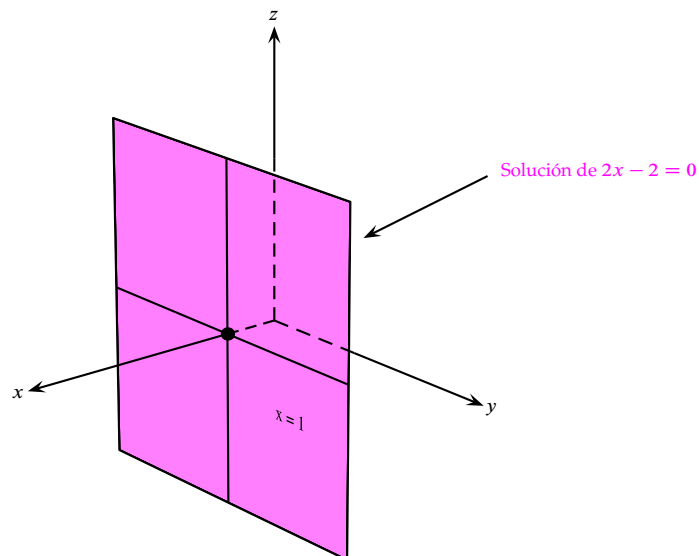
1. Si consideramos que  $x \in \mathbb{R}$  (el universo de trabajo es la recta real), el conjunto solución consta de un sólo punto  $x = 1$ . Lo mismo sucedería si consideramos como universo de trabajo sólo a los números enteros o bien sólo a los racionales.



2. Si el universo es ahora el plano  $\mathbb{R}^2$ , el conjunto solución de  $2x - 2 = 0$  consta de todos los puntos  $(x, y)$  que pertenecen a la recta  $x = 1$ , paralela al eje  $y$ , que pasa por el punto  $(1, 0)$ .



3. Si el contexto del problema para resolver la ecuación  $2x - 2 = 0$  es el espacio  $\mathbb{R}^3$ , el conjunto solución consta de todos los puntos  $(x, y, z)$  que se encuentran en el plano  $x = 1$ , paralelo al plano  $yz$  que pasa por el punto  $(1, 0, 0)$

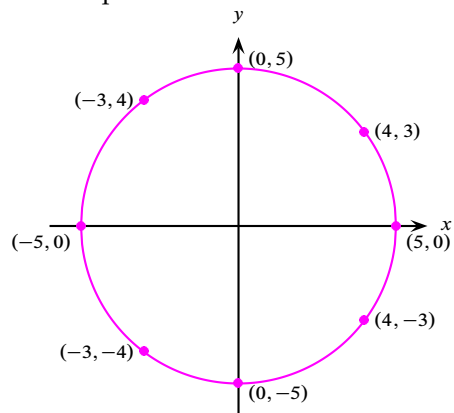


Observe que la solución de la ecuación considerada cambia dependiendo del universo de trabajo. □

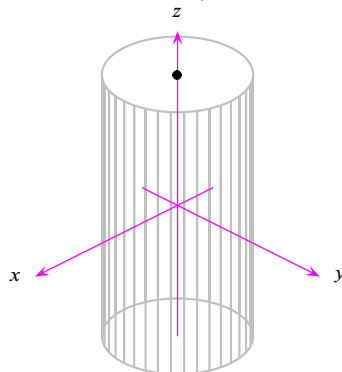
**Ejemplo 1.3.2** Resolver la ecuación:  $x^2 + y^2 = 25$ .



1. Si el universo de trabajo es el plano  $\mathbb{R}^2$ , el conjunto solución de  $x^2 + y^2 = 25$  consta de todos los puntos  $(x, y)$  que pertenecen a la circunferencia de radio 5 con centro en el origen. La figura siguiente marca algunas de las soluciones como pares de números reales:



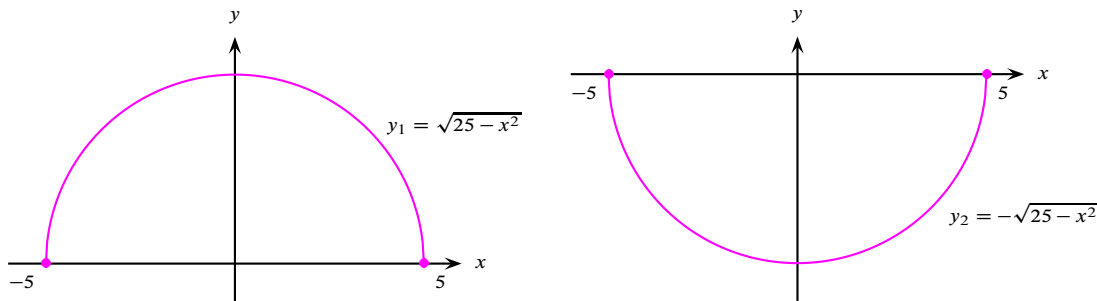
2. Si trabajamos en  $\mathbb{R}^3$ , el conjunto solución de  $x^2 + y^2 = 25$ , contiene todos los puntos  $(x, y, z)$  que pertenecen al cilindro recto circular de radio 5, con eje de simetría el eje  $z$ .



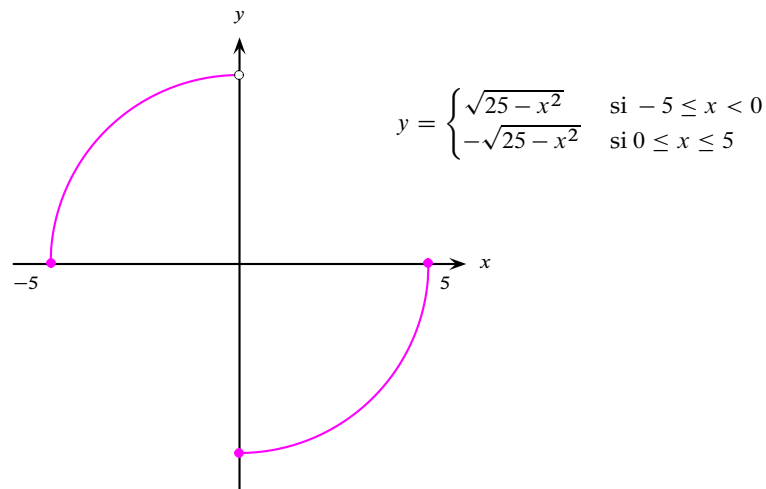
3. Cambiando el enfoque, supongamos que ahora nuestro universo es  $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ , el conjunto de las funciones reales de variable real: podemos obtener dos funciones continuas como soluciones de la ecuación  $x^2 + y^2 = 25$ , despejando  $y$  en función de  $x$  (suponiendo que deseamos que la variable independiente sea  $x$ ).

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \sqrt{25 - x^2} \\ y_2 = -\sqrt{25 - x^2} \end{cases} ; \text{ambas con dominio } [-5, 5]$$

Las gráficas de estas funciones son las siguientes:



También existen soluciones discontinuas como la siguiente:



En los ejercicios y problemas de este libro estaremos buscando por lo general soluciones  $f(x) \in \mathcal{F}$  que sean continuas.

Observe que una función como  $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ; con  $-5 \leq x \leq 0$  también es solución continua de la ecuación  $x^2 + y^2 = 25$ , sin embargo, en el universo  $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  se tomarán las soluciones con el dominio más amplio posible. Así, es preferible la solución  $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ; con  $-5 \leq x \leq 5$ .

□

De los ejemplos anteriores podemos concluir que una ecuación puede tener una, varias o una infinidad de soluciones y esto depende no sólo de la ecuación en sí, sino también del conjunto en el que buscamos las soluciones.

### 1.3.2 Solución de una ecuación diferencial

- Una **solución** de una ecuación diferencial de orden  $n$  en un intervalo  $I$  es una función definida en dicho intervalo que puede derivarse al menos  $n$  veces y que al sustituirse junto con sus derivadas se

satisface a la ecuación diferencial. Esto es, resulta una identidad para los valores de  $x$  en el intervalo  $I$ .

**Ejemplo 1.3.3** Verificar que las funciones  $y = 3x^2 + 7x + Ce^{-4x}$  ( $C \in \mathbb{R}$ , constante) son soluciones de la ecuación diferencial

$$y' + 4y = 12x^2 + 34x + 7.$$

▼ Derivamos:

$$y = 3x^2 + 7x + Ce^{-4x} \Rightarrow y' = 6x + 7 - 4Ce^{-4x}.$$

Sustituyendo  $y$  &  $y'$  en la ecuación diferencial, resulta:

$$\begin{aligned} y' + 4y &= 6x + 7 - 4Ce^{-4x} + 4(3x^2 + 7x + Ce^{-4x}) = \\ &= 6x + 7 - 4Ce^{-4x} + 12x^2 + 28x + 4Ce^{-4x} = \\ &= 12x^2 + 34x + 7. \end{aligned}$$

La ED se satisface para todos los valores de  $x \in \mathbb{R}$ . □

Con mucha frecuencia una solución de una ED puede estar definida de manera implícita como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.3.4** Usando derivación implícita, demostrar que las funciones definidas implícitamente por la ecuación

$$2xy + 3x^2y^2 = 1,$$

son soluciones de la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{-2y - 6xy^2}{2x + 6x^2y}.$$

▼ Derivamos

$$2xy + 3x^2y^2 = 1 \Rightarrow 2xy' + 2y + 3x^2 2yy' + 6xy^2 = 0.$$

Despejamos  $y'$ :

$$y'(2x + 6x^2y) = -2y - 6xy^2 \Rightarrow y' = \frac{-2y - 6xy^2}{2x + 6x^2y}.$$

□

**Ejemplo 1.3.5** Encontrar los valores de  $r$  de tal manera que la función  $y = e^{rx}$  sea solución de la ecuación diferencial:

$$y'' + 7y' + 12y = 0.$$

▼ Derivamos dos veces:

$$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2e^{rx}.$$

Sustituyendo  $y$ ,  $y'$  &  $y''$  en la ecuación diferencial

$$r^2e^{rx} + 7re^{rx} + 12e^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}(r^2 + 7r + 12) = 0 \Rightarrow r^2 + 7r + 12 = 0.$$

Note que aquí hemos cancelado el factor  $e^{rx}$ , que es  $\neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Factorizando, obtenemos:

$$r^2 + 7r + 12 = (r + 4)(r + 3) = 0.$$

Las soluciones de esta última ecuación son:  $r_1 = -4$  &  $r_2 = -3$ .

Tenemos entonces dos soluciones de la ecuación diferencial:

$$y_1 = e^{-4x} \quad \& \quad y_2 = e^{-3x}.$$

□

**Ejemplo 1.3.6** Encontrar los valores de  $r$  de tal manera que la función  $y = x^r$  sea solución de la ecuación diferencial:

$$x^2 y'' - x y' - 3y = 0.$$

▼ Derivamos dos veces con respecto a  $x$ :

$$y = x^r \Rightarrow y' = r x^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)x^{r-2}.$$

Sustituyendo  $y$ ,  $y'$  &  $y''$  en la ecuación diferencial, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 r(r-1)x^{r-2} - x r x^{r-1} - 3x^r &= r(r-1)x^r - r x^r - 3x^r = \\ &= x^r [r(r-1) - r - 3] = x^r (r^2 - r - r - 3) = \\ &= x^r (r^2 - 2r - 3) = 0. \end{aligned}$$

Entonces, suponiendo que  $x \neq 0$ , se obtiene:

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \Rightarrow (r-3)(r+1) = 0,$$

y esta última tiene soluciones  $r_1 = 3$  &  $r_2 = -1$ .

Existen entonces dos soluciones:

$$y_1 = x^3 \quad \& \quad y_2 = x^{-1}.$$

Note en este caso que la segunda función no está definida en  $x = 0$ , así que podemos decir que:

$y_1 = x^3$  resuelve la ecuación diferencial en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , mientras que  $y_2 = x^{-1}$  resuelve la ecuación diferencial en  $(-\infty, 0)$  o bien en  $(0, +\infty)$ . □

Es conveniente aclarar, para toda futura referencia lo que queremos decir por resolver.

- **Resolver una ecuación diferencial** es encontrar todas sus soluciones, es decir, es encontrar su conjunto solución. Siempre que sea posible, al resolver una ecuación diferencial hay que especificar en qué intervalo está definida cada función del conjunto solución.

Note que en el ejemplo anterior hicimos lo que se indica: especificar en qué intervalo está definida la función del conjunto solución.

- En el estudio de ED es frecuente interpretar  $y' = \frac{dy}{dx}$  como el cociente de diferenciales. De esta forma, por ejemplo, si la ED es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

ésta puede ser escrita como:

$$M(x, y) dx - N(x, y) dy = 0.$$

A esta expresión de la ED la denotaremos como su **forma diferencial**.

**Ejemplo 1.3.7** Probar que  $\frac{x^3}{3} + x + \frac{y^2}{2} - 2y = C$  define implícitamente la solución general de la ED:

$$(x^2 + 1) dx + (y - 2) dy = 0.$$

▼ A fin de no recurrir al concepto de derivada, procedemos directamente por diferenciales. Debemos recordar que la diferencial de una función  $y = f(x)$  se define mediante:

$$dy = f'(x) dx,$$

de lo cual se desprende que las reglas de derivación son idénticas para diferenciales cambiando únicamente la palabra derivada por diferencial. Así, tenemos:

$$d(xy) = x dy + y dx.$$

Para este ejemplo, calculamos la diferencial de ambos miembros de la solución general. Hallamos

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{y^2}{2} - 2y\right) &= d(C) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx + dx + \frac{1}{2} \cdot 2y dy - 2dy &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 dx + dx + y dy - 2dy &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x^2 + 1) dx + (y - 2) dy &= 0 \end{aligned}$$

que es la ED propuesta.

□

### 1.3.3 Tipos de soluciones de ecuaciones diferenciales

Al resolver una ecuación diferencial se encuentran comúnmente dos tipos de soluciones:

1. Una **solución particular** es la que representa una solución específica de la ecuación diferencial.

- a. Por ejemplo, en el ejemplo 1.3.6 hemos visto que  $y_1 = x^3$  es una solución particular de la ecuación diferencial,

$$x^2 y'' - x y' - 3y = 0$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- b. Análogamente, en el ejemplo 1.3.5 vemos que  $y_2 = e^{-3x}$  es una solución particular de

$$y'' + 7y' + 12y = 0,$$

2. La **solución general** representa a una familia de funciones que satisfacen la ecuación diferencial. Esta representación de la familia necesariamente incluye una o varias constantes arbitrarias, como se ve en los siguientes ejemplos:

- a. La familia de funciones  $y = x^3 + 4x^2 + 2x + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ) es la solución general de  $y' = 3x^2 + 8x + 2$ , como se aprecia de inmediato al derivar.
- b. Podemos decir, ampliando el anterior ejemplo, que si

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

entonces se tiene que

$$y = F(x) + C$$

es solución general de la ecuación diferencial  $y' = f(x)$ . En cierta forma la infinidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales proviene de este hecho.

- c. Las funciones  $y_1(x) = A \cos 3x$  &  $y_2(x) = B \sin 3x$ , para cualesquiera valores de  $A$  &  $B$ , son ambas soluciones de

$$y'' + 9y = 0,$$

como se comprueba de inmediato al derivar pues  $y_1'' = -9A \cos 3x$  &  $y_2'' = -9B \sin 3x$ , de modo que al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} y_1'' + 9y_1 &= -9A \cos 3x + 9A \cos 3x = 0 \text{ y similarmente} \\ y_2'' + 9y_2 &= -9B \sin 3x + 9B \sin 3x = 0 \end{aligned}$$

$y_3 = A \cos 3x + B \sin 3x$  es la solución general de la misma ecuación diferencial.



Además de los tipos anteriores, algunas ecuaciones diferenciales que se encuentran en raras ocasiones en la práctica admiten un tercer tipo de soluciones llamadas **singulares**, además de la solución general y particular. Tal es el caso por, ejemplo, de la ecuación diferencial

$$y' = 2(x - \sqrt{x^2 - y}).$$

Cuya solución general es:

$$y = 2px - p^2,$$

donde  $p$  es una constante arbitraria.

Por otra parte, si consideramos la función  $y = x^2$  nos encontramos con que es otra solución de  $y' = 2(x - \sqrt{x^2 - y})$ . Lo interesante de este ejemplo es que  $y = x^2$  no es una solución particular obtenida de la solución general  $y = 2px - p^2$ ; por tal motivo a  $y = x^2$  se le llama una solución **singular**.

### Ejercicios 1.3.1 Soluciones de ecuaciones diferenciales.

En cada uno de los siguientes ejercicios se presenta una ecuación diferencial y una función. Verificar que la función es solución de la ED. En cualquier caso, las  $C$  (con subíndice o sin él) que aparecen son constantes.

1.  $xy' + y = \cos x$ ;  $y = \frac{\sin x}{x}$ .
2.  $y' - \tan(x)y = 0$ ;  $y = \frac{C}{\cos x}$ .
3.  $L \frac{di}{dt} + Ri = E$ ;  $i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$  donde  $L \neq 0$ ,  $R \neq 0$  &  $E$  son constantes dadas y  $C$  es una constante arbitraria.
4.  $yy' = x - 2x^3$ ;  $y = x\sqrt{1 - x^2}$ .
5.  $y' = 3y^2$ ;  $y = -\frac{1}{3x + C}$ .
6.  $x \sin x \frac{dy}{dx} + (\sin x + x \cos x)y = xe^x$ ;  $y = \frac{e^x(x - 1) + C}{x \sin x}$ .
7.  $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ;  $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$ .
8.  $x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 + \sqrt{1 - x^2})e^x$ ;  $y = \left( \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right)(e^x + C)$ .
9.  $y \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$ ;  $y^2 = 2Cx + C^2$ .
10.  $y' = e^{(x-y)}$ ;  $y = \ln(C + e^x)$ .
11.  $xy \left( 1 - \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right) = (x^2 - y^2 - a^2) \frac{dy}{dx}$ ;  $y^2 = Cx^2 - \frac{a^2 C}{1 + C}$ .
12.  $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$ ;  $y = \sqrt{x^2 - Cx}$ .
13.  $(x - y)dx + xdy = 0$ ;  $y = x(C - \ln x)$ .
14.  $xy' = y \tan(\ln y)$ ;  $y = e^{\arcsen(Cx)}$ .
15.  $\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{3}{x} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ ;  $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$ .
16.  $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - A^2 y = 0$ ;  $y = C_1 e^{A \arcsen x} + C_2 e^{-A \arcsen x}$ , donde  $A$  es una constante.

$$17. y' - y = e^{x+x^2}; \quad y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x.$$

$$18. \frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}; \quad x = \frac{y+C}{1-Cy}.$$

$$19. (xy^2)' = xy^3(x^2+1); \quad y = -\frac{5}{x^3+5x-C\sqrt{x}}.$$

## 1.4 Condiciones Iniciales

De las definiciones y ejemplos de la sección anterior se ve que en general las ecuaciones diferenciales pueden tener una infinidad de soluciones. Entonces podemos preguntarnos: ¿cómo escoger alguna de las soluciones en particular? Las ecuaciones diferenciales servirán para modelar diversas situaciones en ingeniería y ciencias, de modo que la pregunta anterior tiene mucho sentido, pues si para resolver algún problema aplicado se requiere de sólo *una* respuesta del modelo y en lugar de esto encontramos una infinidad de posibles respuestas, aún faltará decidir cuál de ellas resuelve el problema; así pues, se necesita más *información* para decidir.

Por ejemplo, en un problema de caída libre si un objeto parte desde una altura de 100 m sobre el suelo, en la sección 1.1 hemos visto que su altura estará dada en cada momento  $t$  por

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,$$

donde la información dada nos permite ver que  $s_0 = 100$  m, pero no se conoce la velocidad inicial  $v_0$ . La expresión “parte desde una altura de 100 m” nos da la idea de que puede haber un empuje o velocidad al iniciar el experimento pero no nos da su valor. Así que lo más que podemos decir es que la altura del móvil al tiempo  $t$  será  $s(t) = -4.9t^2 + v_0t + 100$ , y para una respuesta a cualquier pregunta concreta sobre el movimiento necesariamente dependerá del valor  $v_0$ . Esta cantidad, que debería conocerse para determinar una única solución, es lo que se conoce como una *condición inicial*.

- Una **condición inicial** es un valor que debe satisfacer una solución particular  $y(t)$ , de una ecuación diferencial en un valor específico de la variable independiente, y que se puede especificar como  $y(t_0) = y_0$  para una ecuación diferencial  $F(t, y, y') = 0$ .

Si una ecuación diferencial puede resolverse para obtener una solución general que contiene una constante arbitraria, bastará con una condición inicial para determinar una solución particular; en casos en que la solución general de una ecuación diferencial contenga dos o más constantes arbitrarias, es de esperarse que se necesiten dos o más condiciones, aunque éstas se pueden dar de varias formas, que revisaremos en su oportunidad.

**Ejemplo 1.4.1** La solución general de la ecuación diferencial  $yy' - 4x = 0$ , puede escribirse como  $4x^2 - y^2 = C$ . Determinar la solución particular que satisface la condición  $y(2) = \sqrt{7}$ .

▼ Basta con sustituir los valores  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = \sqrt{7}$  en la solución general para definir un valor de  $C$ :

$$C = 4(2)^2 - (\sqrt{7})^2 = 16 - 7 = 9.$$

Por tanto, la solución particular buscada es  $4x^2 - y^2 = 9$  o bien  $y^2 = 4x^2 - 9$ , de donde  $y = \sqrt{4x^2 - 9}$ . Nótese que al despejar  $y$  hemos hecho una elección en el signo positivo del radical, para que se cumpla efectivamente la condición inicial.

□

- Un problema en el que se tiene una ED y se dan las condiciones iniciales necesarias para determinar una solución particular se denomina un **problema de valor inicial**, que abreviaremos PVI en todo el libro.

**Ejemplo 1.4.2** La ecuación diferencial  $y'' + 4y = 0$ , admite a  $y = A \cos(2t) + B \sin(2t)$  como solución general. Determine la solución particular que cumple con  $y(0) = 3$  &  $y'(0) = 8$ .



$$y(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t) \text{ & } y(0) = 3 \Rightarrow 3 = A \cos(0) + B \sin(0) \Rightarrow A = 3.$$

Para usar la segunda condición requerimos la derivada:

$$y'(t) = -2A \sin(2t) + 2B \cos(2t).$$

Así

$$y'(0) = 8 \Rightarrow 8 = -2A \sin(0) + 2B \cos(0) \Rightarrow 8 = 2B \Rightarrow B = 4.$$

Tenemos entonces la solución particular:

$$y(t) = 3 \cos(2t) + 4 \sin(2t).$$



**Ejercicios 1.4.1** Condiciones iniciales. *Soluciones en la página 463*

En cada uno de los siguientes ejercicios, verificar que la función dada es una solución general de la ED, después determinar la solución particular que satisfaga la condición dada.

1.  $y' + 2y = 0$  con  $y(0) = 3$ ;  $y = Ce^{-2x}$ .
2.  $yy' + x = 0$  con  $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ ;  $x^2 + y^2 = C$ .
3.  $y'' + \frac{1}{4}y = 0$  con  $y(\pi) = 1$  &  $y'(\pi) = -1$ ;  $y = A \cos\left(\frac{x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ .
4.  $yy' - \sin x = 0$  con  $y(\pi) = 1$ ;  $y^2 = C - 2 \cos x$ .
5.  $2y(x+1) + y' = 0$  con  $y(-2) = 1$ ;  $y = Ce^{-(x+1)^2}$ .
6.  $x \frac{dy}{dx} + y = e^{-\frac{x^2}{2}}$  con  $y(2) = -3$ ;  $y = \frac{C}{x} + \frac{1}{x} \int_2^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .
7.  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$  con  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  &  $y''(0) = -1$ ;  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ .
8.  $y'' = \frac{1}{2y'}$  con  $y(1) = 2$  y la tangente en este punto forma con la dirección positiva del eje  $x$  un ángulo de  $45^\circ$ ;  $y = \pm \frac{2}{3}(x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2$ .
9.  $y'' - 4y = 0$  con  $y(0) = 1$  &  $y'(0) = 2$ ;  $y = C_1 \sinh 2x + C_2 \cosh 2x$ .
10.  $2xyy' = x^2 + y^2$  con  $y(1) = 3$ ;  $y^2 = x^2 - Cx$ .
11.  $y + xy' = x^4(y')^2$  con  $y(1) = 0$ ;  $y = C^2 + \frac{C}{x}$ .
12.  $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$  con  $y(1) = 1$ ;  $y = Ce^{\frac{y}{x}}$ .
13.  $\frac{x}{2} \cot y \frac{dy}{dx} = -1$  con  $y(1) = \frac{\pi}{2}$ ;  $y = \arcsen \frac{C}{x^2}$ .
14.  $e^y dx + (xe^y + 2y) dy = 0$  con  $y(4) = 0$ ;  $xe^y + y^2 = C$ .
15.  $dx = \frac{y}{1 - x^2 y^2} dx + \frac{x}{1 - x^2 y^2} dy$  con  $y(0) = 2$ ;  $\ln \frac{1 + xy}{1 - xy} - 2x = C$ .

16.  $(1 + y^2 \sen 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0$  con  $y(2\pi) = \sqrt{\pi}$ ;  $x - y^2 \cos^2 x = C$ .
17.  $[\sen x \sen y - xe^y] dy = [e^y + \cos x \cos y] dx$  con  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ;  $xe^y + \sen x \cos y = 0$ .
18.  $3x^2(1 + \ln y) dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right) dy = 0$  con  $y(2) = 1$ ;  $x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$ .
19.  $\frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3} dx + \frac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y} dy = 0$  con  $y(2) = 1$ ;  $x^2y^2[4y^2 - x^2] = C$ .
20.  $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$  con  $y'(1) = 2$  &  $y(1) = 3$ ;  $y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$ .

## 1.5 Familias de curvas

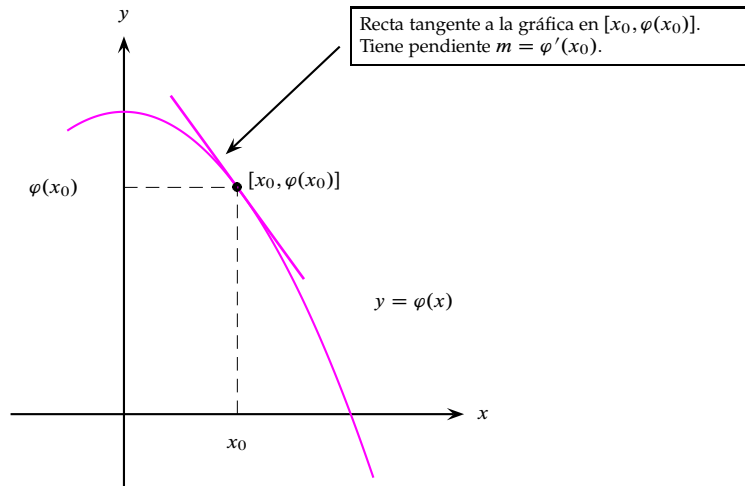
Para continuar con el estudio de las soluciones de las ED, daremos en esta sección una interpretación gráfica del conjunto de soluciones para una ED de primer orden dada. Es conveniente anotar que suponemos que una ED de primer orden en algunos casos se puede escribir en la forma:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

es decir, donde la derivada de la función incógnita ha sido despejada. A esta forma de escribir la ED se llama *forma normal*.

### 1.5.1 Interpretación gráfica de $y' = f(x, y)$

En esta sección haremos algunas consideraciones de tipo geométrico con el objetivo de ayudar a comprender mejor las ED y sus soluciones. Para lograr este propósito, es indispensable recordar que la derivada de una función  $y = \varphi(x)$  al evaluarse en  $x_0$  representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de dicha función que pasa por el punto  $[x_0, \varphi(x_0)]$ :



Esto ocurre siempre que la derivada *exista* en ese punto, es decir, que el límite que la define se pueda calcular en  $x_0$ . Más aún, conocida la pendiente y el punto por el que pasa la tangente, siempre se puede escribir su ecuación como:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \text{es decir} \quad \frac{y - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0),$$

o mejor:

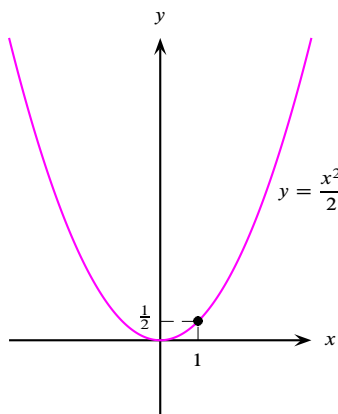
$$y = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0).$$

Tendremos muchas oportunidades de referirnos a estos hechos en lo que sigue, pero de momento basta con comentar que si se conociera solamente la derivada  $\varphi'(x)$  de una función, esto no sería suficiente para recuperar la función  $y = \varphi(x)$ , pues sólo se tendría la inclinación (pendiente) de las rectas tangentes, pero no la ubicación de los puntos de la curva. Cuando resolvemos una ED nos encontramos en la misma situación, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

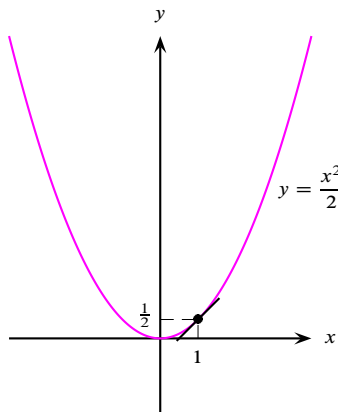
**Ejemplo 1.5.1** Analizar las soluciones de la ecuación diferencial:  $y' = x$ .

▼ Cuando  $x = 1$  tenemos que  $y' = 1$ , es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto  $(1, y)$  es  $m = 1$ .

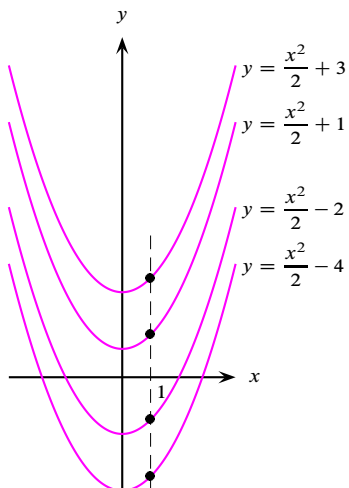
Considere a la curva  $y = \frac{x^2}{2}$ , que es una solución de la ecuación diferencial  $y' = x$ ,



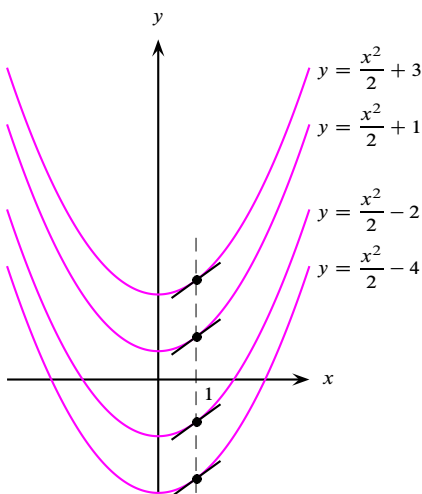
Nóte que la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = \frac{x^2}{2}$  en el punto  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$  es  $m = 1$



Otras curvas soluciones de la ED  $y' = x$  son las siguientes:



Observe que en todos los puntos con abscisa  $x = 1$  sobre las curvas, las pendientes de las rectas tangentes son iguales, es decir, cuando  $x = 1 \Rightarrow y' = 1 = m$ .

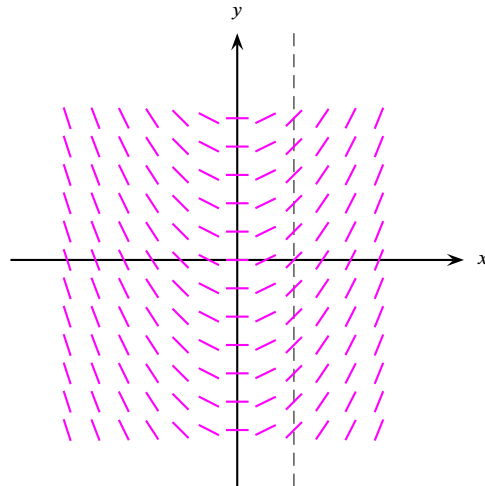


Una solución de la ecuación diferencial  $y' = x$  es una función  $y = g(x)$  que cuando pasa por el punto  $(x, y)$  del plano, el valor  $y' = f(x, y) = x$  proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la solución en dicho punto.

Si tomamos el punto  $(1, 5)$ , por ejemplo, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la solución que pasa por este punto es  $y' = f(1, 5) = 1$ . Este punto se encuentra sobre la recta  $x = 1$ . En un punto arbitrario sobre esta recta la solución que pasa por este punto,  $(1, y)$ , tiene recta tangente con pendiente:

$$y'(1, y) = f(1, y) = 1.$$

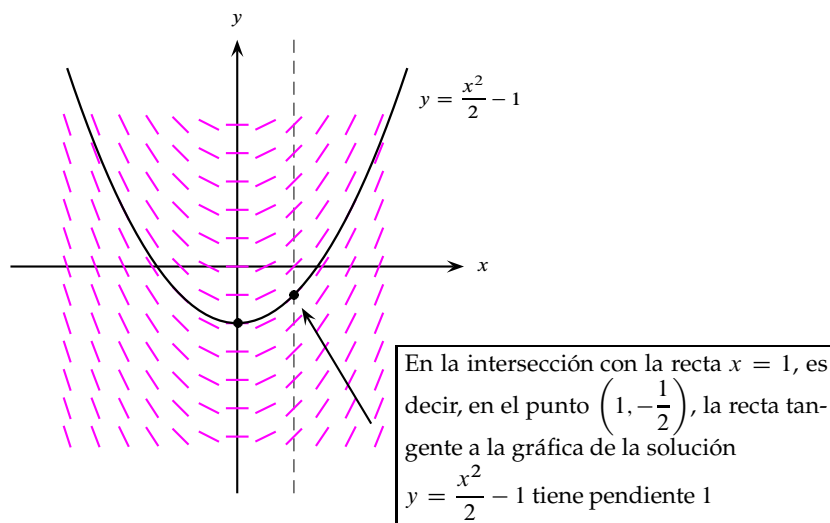
Sobre la recta vertical  $x = 1$  todas las soluciones tienen la misma pendiente  $m = 1$ .



Se ha visto en el curso de cálculo integral que la solución general de la ecuación diferencial  $y' = x$  es:

$$y = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Si dibujamos la gráfica de la única solución (solución particular), que pasa por el punto  $(0, -1)$ , es decir para la cual  $C = -1$ , tenemos:



□

Los segmentos de línea mostrados en las dos últimas figuras pretenden dar una idea de cómo se verían las rectas tangentes a cualquier curva solución de la ED; denominamos a estas figuras *campo de direcciones*, ya que muestran las inclinaciones que deben tener dichas rectas tangentes. Una idea que podría ser fructífera para visualizar las soluciones de una ED es la de trazar de manera aproximada curvas que tengan las tangentes del campo de direcciones.

- Dada la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$ .

Se llama **isoclina** al conjunto de los puntos del plano en donde las rectas tangentes a las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial tienen la misma pendiente. Estos puntos son aquellos que satisfacen  $y' = f(x, y) = C$ .

En el ejemplo anterior, la recta vertical  $x = 1$  representa una isoclina.

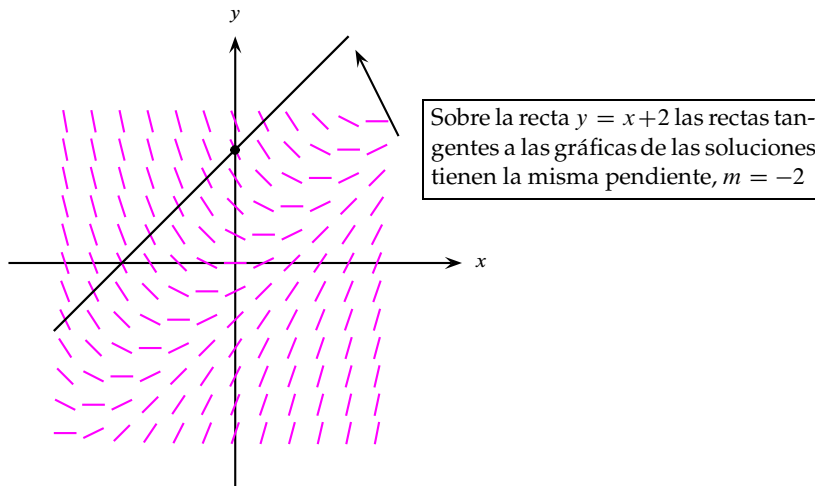
Aplicaremos el concepto recién definido en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.5.2** Describir el campo de direcciones, las isoclinas y la solución que pasa por el punto  $(0, 2)$  de la ecuación diferencial:  $y' = -y + x$ .

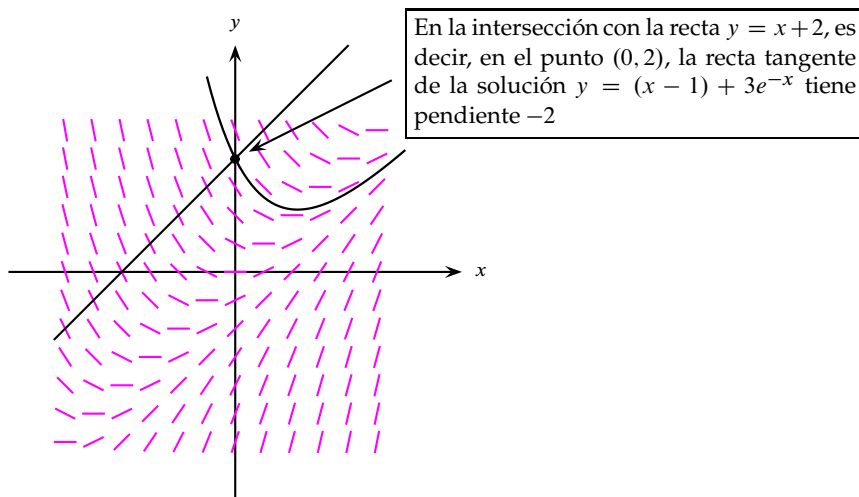
▼ Una solución de esta ecuación diferencial es una función  $y = g(x)$  que si pasa por el punto  $(x, y)$  del plano, el valor  $y' = f(x, y) = -y + x$  proporciona la pendiente de la recta tangente de la gráfica de la solución en dicho punto.

Así, si tomamos el punto del plano  $(0, 2)$ , en ese punto pasa una solución cuya recta tangente tiene como pendiente  $y'(0, 2) = f(0, 2) = -2 + 0 = -2$ .

Los puntos del plano en donde la pendiente de la recta tangente de las soluciones es igual a  $-2$  son aquellos que satisfacen  $y'(x, y) = f(x, y) = -y + x = -2$ , es decir, se encuentran sobre la recta  $y = x + 2$ .



Como se ha mencionado, más adelante se expondrán los métodos para encontrar la solución general de la ecuación diferencial  $y' = -y + x$ ; por ahora vamos a aceptar que ésta es  $y = (x - 1) + Ce^{-x}$ . Si dibujamos la gráfica de la única solución que pasa por el  $(0, 2)$ , es decir  $C = 3$ , tenemos:



En la figura se ve que la recta  $y = x - 1$  es una asíntota oblicua de la gráfica de la solución, es decir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} ((x - 1) + 3e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1).$$

en otras palabras, para  $x$  suficientemente grande  $y \approx x - 1$ .

□

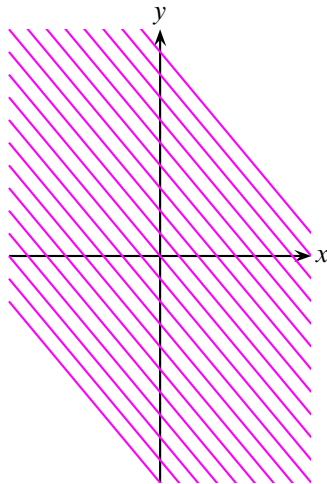
**Ejemplo 1.5.3** Analizar las isoclinas de la ED:  $y' = f(x, y) = x + y$  y bosquejar algunas curvas solución.



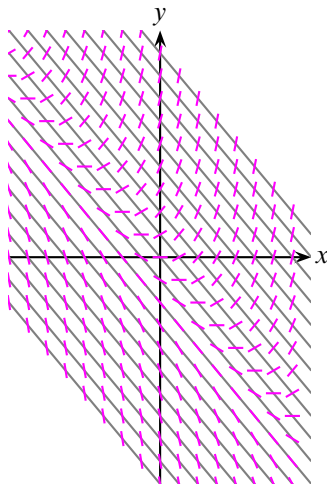
▼ Las isoclinas son simplemente las líneas rectas:

$$x + y = C \quad \text{o bien} \quad y = -x + C,$$

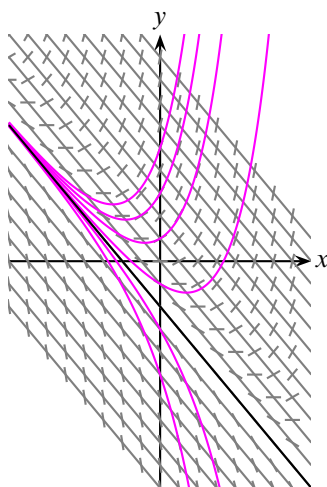
todas con pendiente  $-1$  y el parámetro  $C$  nos da sus ordenadas al origen.



Escogiendo algunos puntos en cada isoclina, podemos marcar en esos puntos pequeños segmentos que serán tangentes a las curvas solución:



Ahora podemos trazar algunas curvas solución:



Notemos que una de las isoclinas,  $y = -x - 1$  es también una curva solución, pues para ella se cumple  $y' = -1 = x + y$ . Esta situación no es muy común pero llega a ocurrir. □

Observaciones:

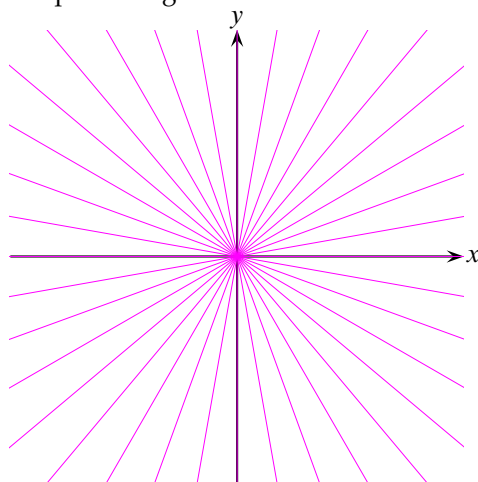
1. Como se mencionó anteriormente, intentar resolver una ED de la manera descrita nos dará solamente una idea aproximada de cómo se ven las soluciones. En el capítulo siguiente se describen métodos analíticos para resolver algunas ED de forma sistemática.
2. En los ejemplos mostrados sobre isoclinas, éstas tienen formas relativamente simples (rectas, círculos, parábolas, etc.) Sin embargo, si las isoclinas se describen mediante ecuaciones más complicadas, un análisis gráfico de las soluciones de una ED puede resultar muy difícil.
3. Aún en los casos sencillos en que se pueden usar las isoclinas con cierta facilidad hay que prestar especial atención a los casos en que se tiene  $y' = 0$  o bien  $y'$  queda indefinida, pues entonces las soluciones pueden tener una conducta extraordinaria (como perder la continuidad).

**Ejemplo 1.5.4** Analizar mediante isoclinas algunas soluciones de la ED:  $y' = -\frac{y}{x}$ .

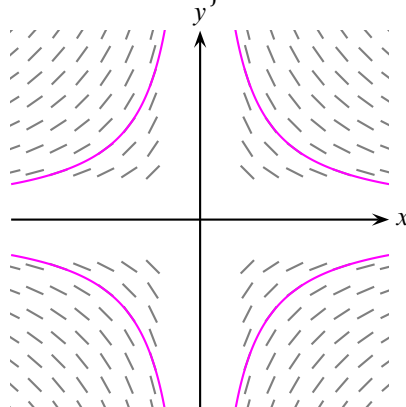
▼ Las isoclinas son:

$$-\frac{y}{x} = C \quad \text{o bien} \quad y = -Cx,$$

simplemente líneas rectas que pasan por el origen.



Sin embargo, notemos que ninguna de ellas se puede definir para  $x = 0$ , pues esto nos daría una indefinición ( $y' = -\frac{y}{0}$ ). Por tanto ninguna curva solución debería cruzar el eje  $y$ . De forma análoga, cuando  $C = 0$  obtenemos como isoclina  $y = 0$ , el eje  $x$ . La siguiente figura muestra el campo de direcciones y algunas curvas solución. Ninguna de ellas cruza los ejes coordenados.



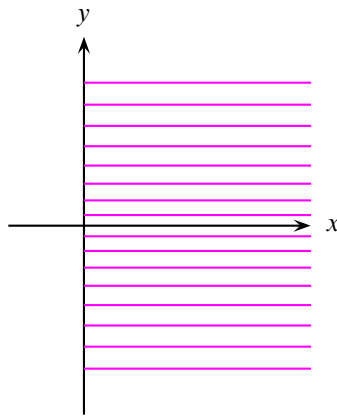


**Ejemplo 1.5.5** Analizar gráficamente algunas soluciones de la ED:  $\frac{dy}{dx} = 5y^{\frac{4}{5}}$  para  $x > 0$ .

▼ Como en este caso el valor de  $y'$  depende sólo de  $y$ , las isoclinas son rectas horizontales

$$5y^{\frac{4}{5}} = C \Rightarrow y = \pm \left(\frac{C}{5}\right)^{\frac{5}{4}}, \text{ para } C \geq 0,$$

y se ve que las isoclinas son simétricas con respecto al eje horizontal. La gráfica a continuación muestra las isoclinas correspondientes a  $C = 0, 2, 5, 10, 15$  y  $25$ .

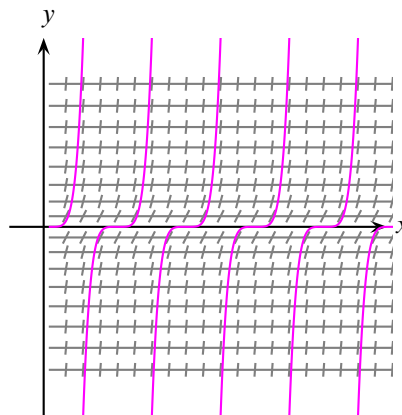


Notemos que:

$$y = (x - C)^5 \Rightarrow y' = 5(x - C)^4 = 5 \left( \sqrt[5]{(x - C^5)} \right)^4 = 5 [(x - C)^5]^{\frac{4}{5}} = 5[y]^{\frac{4}{5}}.$$

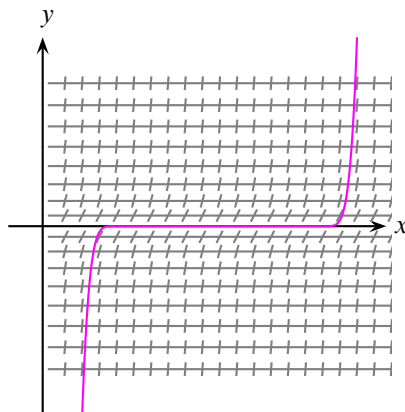
Es decir,  $y = (x - C)^5$  es una familia de soluciones de la ED:  $y' = 5y^{\frac{4}{5}}$ .

La figura siguiente muestra algunas curvas solución  $y = (x - C)^5$  para  $C = 2, 4, 6, 8, 10$  y el campo de direcciones:



Aquí hay que observar necesariamente que cuando una curva solución entra al eje  $x$  puede continuar su trayectoria indefinidamente en ese eje o bien salir de él en un punto posterior. La siguiente figura representa este caso para la solución:

$$\hat{y} = \begin{cases} (x - 2)^5 & \text{si } x < 2; \\ 0 & \text{si } 2 \leq x \leq 4; \\ (x - 4)^5 & \text{si } x > 4. \end{cases}$$



Para esta ED lo que sucede es que las soluciones no están definidas de manera única para toda  $x > 0$ . En la siguiente sección se discutirá un poco más detalladamente esta clase de conducta indeseable de las soluciones.

□

### Ejercicios 1.5.1 Interpretación gráfica de $y' = f(x, y)$ . Soluciones en la página 463

1. Considere la ED:  $\frac{dy}{dx} = 4\frac{x}{y}$ .
  - a. Encuentre sus isoclinas y trace su campo de direcciones.
  - b. Verifique que las rectas  $y = \pm 2x$  son curvas solución siempre que  $x \neq 0$ .
  - c. Trace aproximadamente la curva solución que cumplen la condición inicial  $y(2) = 1$ . También trace la curva solución que cumple con  $y(1) = 3$ .
  - d. Analice lo que sucede con las curvas solución del inciso anterior cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .
2. Algunos modelos en ED de la velocidad de un cuerpo en caída libre toman en cuenta la resistencia del aire al movimiento (esta resistencia opone una fuerza proporcional a alguna potencia de la velocidad  $v$ ), y se representa por una ED de la forma

$$\frac{dv}{dt} = a - bv^k,$$

donde  $a, b$  y  $k$  son constantes.

- a. Haga un esbozo del campo de direcciones para  $a = k = 1$  y  $b = \frac{1}{10}$ .
- b. Con el campo de direcciones anterior esboce las soluciones que corresponden a las condiciones iniciales  $v(0) = 0, 5, 10$  y  $15$  respectivamente. El valor  $v = 10$  se llama a menudo *velocidad terminal* o bien *límite*. ¿Puede ver por qué?
- c. Repita las indicaciones de los incisos anteriores para los valores  $a = 1, b = \frac{1}{8}$  y  $k = 3$ , y los valores iniciales  $v(0) = 0, 1, 2$  y  $3$ . ¿Cuál sería la velocidad límite en este caso?

### 1.5.2 Curva solución de un PVI

Como comentamos al hablar sobre las soluciones generales y particulares de una ED, ocurre que las soluciones generales contienen una o más constantes arbitrarias. Para encontrar valores determinados de esas constantes se requiere de una o más condiciones iniciales. Recordemos que llamamos un **problema de valor inicial** (PVI) al formado por una ED y una condición inicial, por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ con la condición } y(x_0) = y_0.$$

Discutiremos algunos aspectos relacionados con la existencia de soluciones de los PVI en la siguiente sección. De hecho, todas las ED & PVI que se presentan en este libro tienen solución, a menos que se indique expresamente lo contrario. Puede apreciarse algo con respecto a las soluciones de ED y PVI si consideramos las ED de primer orden más simples que puede haber, aquellas en las que  $f$  depende sólo de la variable  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \text{ con la condición } y(x_0) = y_0.$$

La solución de la ED es:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow y = \int f(x) dx.$$

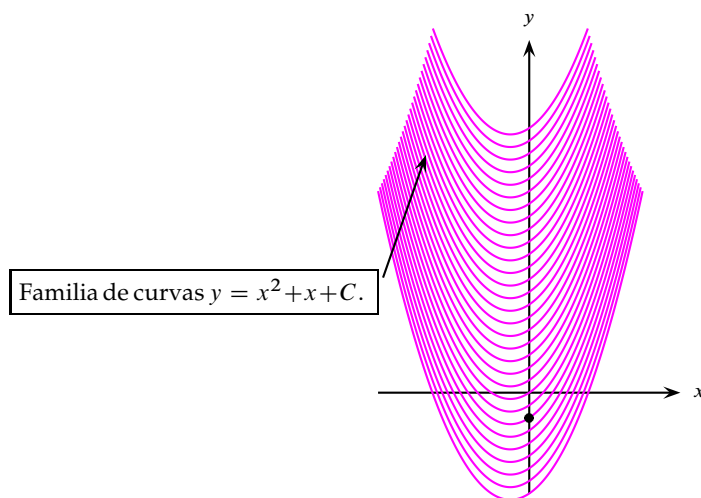
Es claro que la integral indefinida que está indicada debe contener una constante  $C$  aditiva arbitraria y si la condición  $y(x_0) = y_0$  puede cumplirse para una elección adecuada de  $C$ , ella nos dará la solución al PVI.

**Ejemplo 1.5.6** Encontrar la solución del PVI:  $y' = 2x + 1$ ; con la condición  $y(0) = -1$ .

▼ Esta ecuación diferencial se puede resolver por integración:

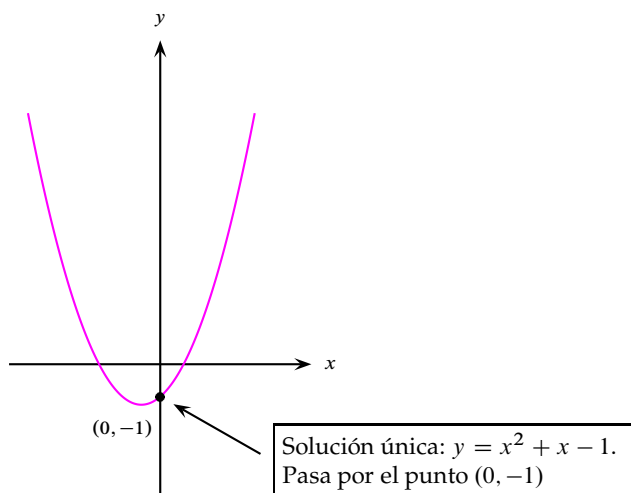
$$y' = 2x + 1 \Rightarrow y = \int (2x + 1) dx \Rightarrow y = x^2 + x + C.$$

Sin la condición inicial, la solución general de la ecuación diferencial es la familia de parábolas que se obtienen al trasladar hacia arriba y hacia abajo a la parábola  $y = x^2 + x$ :



Tomando en cuenta la condición inicial, la única solución que cumple  $y(0) = -1$  es aquella que pasa por el punto  $(0, -1)$  del plano cartesiano. Para obtener esta solución sustituimos  $x = 0$  &  $y = -1$  en la familia de curvas  $y = x^2 + x + C$  y obtenemos un valor de  $C$ :

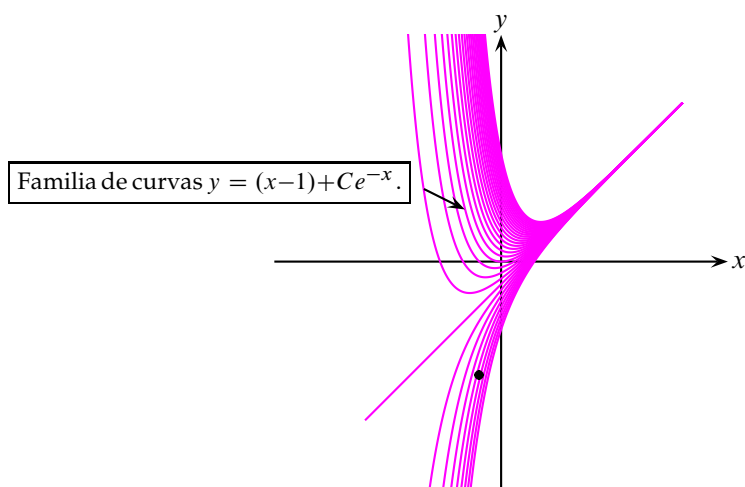
$$\begin{aligned} y &= x^2 + x + C \Rightarrow -1 = 0^2 + 0 + C \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= x^2 + x - 1 \text{ es la única curva que pasa por el punto } (0, -1) \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= x^2 + x - 1 \text{ es la única solución del problema: } y' = 2x + 1; \text{ sujeta a la condición } y(0) = -1. \end{aligned}$$



□

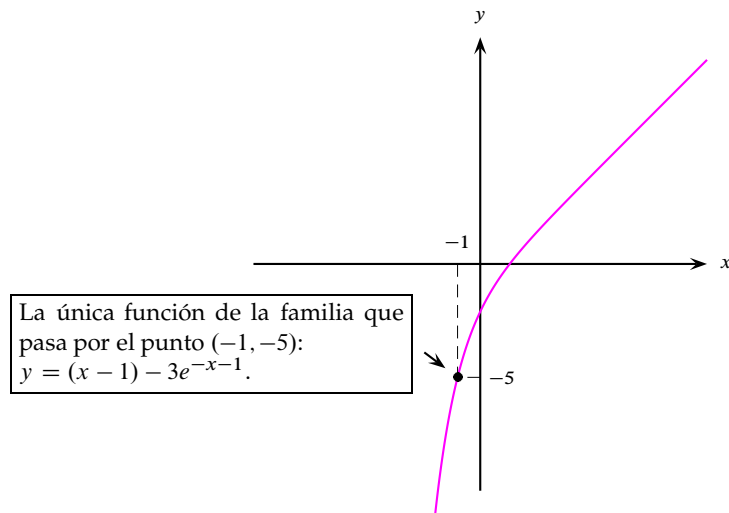
**Ejemplo 1.5.7** Encontrar la solución del PVI:  $y' = -y + x$  con la condición  $y(-1) = -5$ .

▼ Como se mencionó en el ejemplo 1.5.2, hemos aceptado que la solución general de la ecuación diferencial  $y' = -y + x$  es  $y = (x - 1) + Ce^{-x}$ .



De todas estas curvas sólo existe una que pasa por el punto  $(-1, -5)$ , es decir  $x = -1$  &  $y = -5$ . Sustituyendo  $x = -1$  &  $y = -5$  en la ecuación de la familia para obtener el valor de  $C$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 y &= (x - 1) + Ce^{-x} \Rightarrow -5 = (-1 - 1) + Ce^1 \Rightarrow -5 = -2 + Ce^1 \Rightarrow Ce^1 = -3 \Rightarrow C = -3e^{-1} \Rightarrow \\
 \Rightarrow y &= (x - 1) - 3e^{-1}e^{-x} \text{ es la única curva que pasa por el punto } (-1, -5) \Rightarrow \\
 \Rightarrow y &= (x - 1) - 3e^{-(1-x)} \text{ es la única solución del problema: } y' = -y + x; y(-1) = -5.
 \end{aligned}$$



□

Observaciones:

1. Si bien hemos escrito antes que la solución de  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  es  $y = \int f(x) dx$ , debe quedar entendido que la solución la podemos obtener de forma explícita en el supuesto caso de que se pueda realizar la integral. Algunas integrales, como  $\int e^{x^2} dx$  o bien  $\int \frac{\sin x}{x} dx$  no se pueden expresar en términos de *funciones elementales*, es decir, como sumas, productos, cocientes, potencias de las funciones: constantes,  $x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ , etc. En casos como esos tenemos que recurrir como último recurso a la evaluación de dichas integrales mediante métodos numéricos. El capítulo siete de este libro presenta algunos métodos utilizados para la solución de PVI.
2. La especificación de una condición inicial para una ED no puede ser completamente arbitraria. Por ejemplo, si a la ED  $y' = \frac{1}{x}$  le añadimos la condición  $y(0) = 5$ , entonces como la solución general es  $y = \ln x + C$ , vemos que no se puede cumplir  $y(0) = 5 = \ln 0 + C$ , pues  $\ln 0$  no está definido, como tampoco estaría definida la derivada  $y'(0) = \frac{1}{0}$ . Se deben cumplir ciertos requisitos, que describiremos en la siguiente sección, para que una condición inicial determine una solución particular de la ED.

De los ejemplos previos y lo discutido sobre soluciones generales de ED podemos concluir que la solución general de una ED es una *familia de curvas*.

- En general, podemos definir una familia de curvas con un parámetro como el conjunto de soluciones de una ecuación de la forma:

$$F(x, y, C) = 0,$$

donde  $x, y$  son coordenadas y  $C$  representa un **parámetro**, que es un valor numérico que se mantiene constante para cada curva.

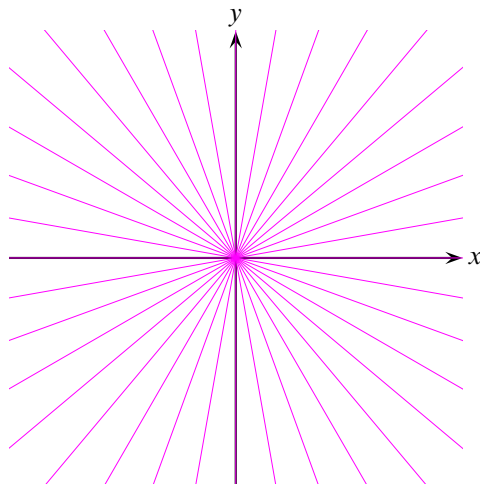
**Ejemplo 1.5.8** Presentamos varios ejemplos de familias de curvas.



1. La familia de todas las rectas que pasan por  $(0, 0)$ , excepto la vertical, se puede representar por la ecuación:

$$y = mx,$$

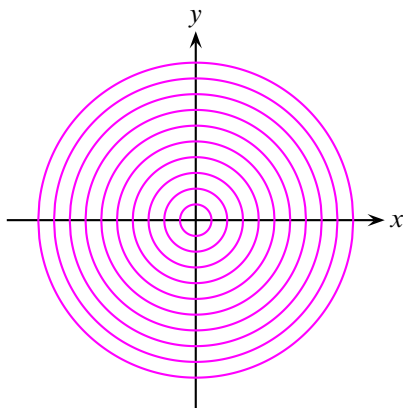
donde la pendiente  $m$  es un parámetro. La siguiente gráfica muestra las curvas de la familia para  $m = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 4$ , etc:



2. La familia de todos los círculos con centro  $(0, 0)$  se puede escribir como:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

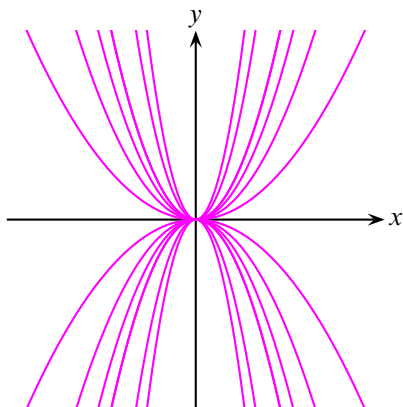
donde el valor de  $r^2$  (el cuadrado del radio) se puede tomar como parámetro. La gráfica siguiente muestra algunas curvas de esta familia para diferentes valores de  $r$ :



3. La familia de todas las parábolas con vértice en  $(0, 0)$  y el eje  $y$  como eje de simetría se expresa como:

$$y = cx^2,$$

donde el parámetro  $c$  indica hacia dónde abren las parábolas (arriba o abajo).

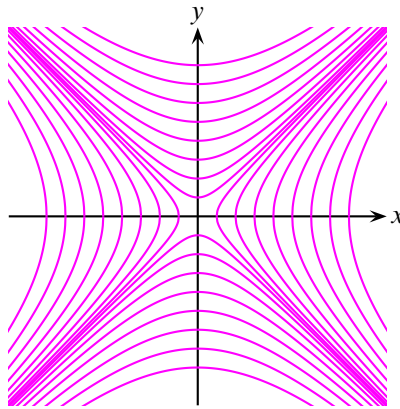




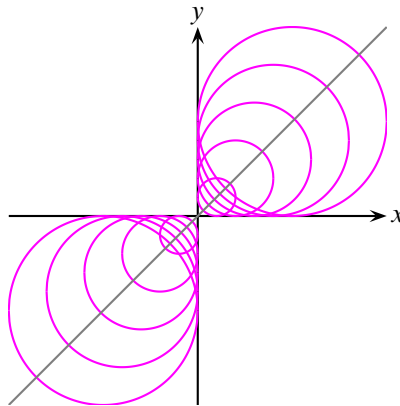
4. La familia de las curvas que respresenta la ecuación:

$$x^2 - y^2 = c,$$

donde  $c$  es el parámetro,  $c \in \mathbb{R}$ , es la familia de hipérbolas cuyo centro es el origen y con asíntotas oblicuas las rectas  $y = \pm x$ , las cuales también forman parte de esa familia (para el valor  $c = 0$ ). La gráfica siguiente muestra varias curvas de esta familia. Las rectas  $y = \pm x$  (no dibujadas) son las asíntotas. Las hipérbolas cuyas ramas cruzan el eje  $x$  son las que corresponden a  $c = 1, 2, 3, 4, \dots$ , mientras que las que tienen ramas que cortan al eje  $y$  corresponden a  $c = -1, -2, -3, \dots$ .



5. La familia de todos los círculos en el plano que son tangentes a los ejes coordenados  $x, y$ , que se encuentran en el primer y tercer cuadrante.



Para cada círculo de la familia debe suceder que el centro se encuentra en un punto de la forma  $C = (a, a)$  y tocar a los ejes en  $(a, 0)$  y  $(0, a)$ , por lo que su radio será  $r = |a|$  y la ecuación será:

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2,$$

con  $a$  como parámetro. Otra forma de escribir esta ecuación es, desarrollando los binomios y cancelando el término  $a^2$ :

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0.$$

□

En los ejemplos anteriores nos fue posible escribir una ecuación (algebraica) con sólo un parámetro y que representa a la totalidad de curvas de la familia. Una observación muy interesante es que también existe una ED que representa a las curvas de la familia, en el sentido de que las curvas solución de la ED son precisamente las curvas de la familia con la cual iniciamos. Para obtener esa ED lo que se hace es derivar (implícitamente por lo regular) la ecuación original de la familia y usando ambas ecuaciones eliminar el parámetro arbitrario. Ilustramos este procedimiento con las ecuaciones del ejemplo anterior.

**Ejemplo 1.5.9** Usar las familias del ejemplo anterior para obtener la ED asociada a cada familia.



1. Partiendo de la ecuación  $y = mx$  obtenemos al derivar  $\frac{dy}{dx} = m$ , de donde al sustituir esto último en la primera ecuación obtenemos:

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)x \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Cualquier función de la forma  $y = mx$  satisface esta ED, como se puede apreciar de inmediato por sustitución:

$$y = mx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = m \quad \& \quad y = mx \Rightarrow \frac{y}{x} = m \text{ para } x \neq 0.$$

2. Al derivar implícitamente la ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$  obtenemos  $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ , de donde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Es claro que la familia de círculos definida por  $x^2 + y^2 = r^2$  es solución de  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ .

3. Si derivamos la ecuación  $y = cx^2$  obtenemos  $\frac{dy}{dx} = 2cx$ ; de la ecuación original podemos despejar  $c$  para obtener  $c = \frac{y}{x^2}$  (suponiendo  $x \neq 0$ ) y al sustituir este valor de  $c$  en  $\frac{dy}{dx}$  resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x^2}\right)x = \frac{2y}{x} \quad \text{suponiendo } x \neq 0.$$

Las funciones  $y = cx^2$  son soluciones de la ED  $y' = \frac{2y}{x}$ , pues:

$$y = cx^2 \quad \& \quad y' = 2cx \Rightarrow y' = 2cx = 2\frac{y}{x^2}x = \frac{2y}{x}.$$

4. De manera análoga a los ejercicios anteriores, al derivar  $x^2 - y^2 = c$  implícitamente obtenemos

$$2x - 2y\frac{dy}{dx}, \quad \text{o sea} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

5. Al derivar implícitamente la ecuación de la familia obtenemos:

$$2x + 2yy' - 2a - 2y' = 0 \Rightarrow (y-1)y' + (x-a) = 0 \Rightarrow y' = \frac{a-x}{y-1}.$$

La ED anterior aún contiene al parámetro  $a$  que falta eliminar. Para ello podemos ayudarnos de la ecuación original de la familia:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2a(x+y) + a^2 &= 0 \Rightarrow a^2 - 2a(x+y) + (x+y)^2 = 2xy \Rightarrow \\ \Rightarrow [a + (x+y)]^2 &= 2xy \Rightarrow a = -(x+y) \pm \sqrt{2xy} \end{aligned}$$

Por tanto, la ED de la familias es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x+y) \pm \sqrt{2xy} - x}{y-1}.$$



Observaciones:

1. Podemos concluir que cualquier familia de curvas con un parámetro puede representarse por una ED, siguiendo el procedimiento descrito anteriormente: derivar implícitamente y eliminar el parámetro.
2. Si la familia de curvas depende de dos o más parámetros, es de esperarse que se tengan que calcular derivadas de orden superior para eliminar los parámetros. Obtendríamos así una ED de orden mayor que 1.

**Ejemplo 1.5.10** Encontrar una ED cuyas soluciones sean todas las curvas de la familia de dos parámetros  $A$  y  $B$  dada por:

$$y = A \cos x + B \sin x.$$

▼ Derivando obtenemos:

$$y' = -A \sin x + B \cos x \quad y \quad y'' = -A \cos x - B \sin x,$$

de manera que la suma de  $y$  con  $y''$  nos da:

$$y'' + y = (-A \cos x - B \sin x) + (A \cos x + B \sin x) = 0,$$

o simplemente

$$y'' + y = 0.$$



Note que en los dos últimos ejemplos estamos partiendo de una familia de curvas o funciones dadas para obtener una ED de la cual todas ellas son soluciones. Esto equivale comenzar con la respuesta de un problema para terminar con la pregunta del mismo, lo cual tiene un interés meramente teórico. Lo que nos ocupará en los capítulos siguientes es cómo hacer para encontrar las soluciones de una ED dada.

**Ejercicios 1.5.2** Curva solución de un PVI. *Soluciones en la página 463*

1. Para las siguientes familias de curvas determinar (i) La expresión algebraica que las describe. (ii) La ecuación diferencial de la cual son soluciones.
  - a. La familia de todas las elipses con centro en  $(0, 0)$  tales que el semieje horizontal es el doble del semieje vertical.
  - b. La familia de todas las rectas no verticales que pasan por el punto  $(1, 2)$ .
  - c. La familia de todas las parábolas que abren hacia arriba que son tangentes al eje  $x$ .
  - d. La familia de todas las hipérbolas cuyas asíntotas son los ejes  $x, y$ .
  - e. La familia de todos los círculos que pasan por los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ .
2. Dado el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ , considere la familia de todas las rectas que son tangentes a dicho círculo.
  - a. Determine la ecuación  $F(x, y, c) = 0$  que satisfacen todas esas rectas.
  - b. Encuentra la ED que satisfacen las rectas de la familia.
  - c. Demuestre que la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  define implícitamente una solución singular de la ED del inciso anterior.

## 1.6 Existencia y unicidad de soluciones \*

Hasta el momento hemos hablado de las ED y sus soluciones sin preocuparnos sobre el problema de la *existencia* de dichas soluciones. Es de esperarse que las ED que consideraremos en la mayoría de los casos tenga solución, de otra forma el tiempo y esfuerzo que se inviertan en buscar una solución estaría irremediablemente perdido. Por otra parte, el hecho de que para una ED en particular una persona no pueda encontrar su solución no significa que la ED no tenga solución. De aquí resulta muy deseable conocer algún criterio que nos permita decidir si una ED o bien un PVI tiene solución. En esta sección vamos a enunciar, sin demostración, un resultado de gran importancia, conocido como el Teorema de Existencia y Unicidad de Picard-Lindelöf, que proporciona algunas condiciones que garantizan que un PVI tenga solución única. Antes de enunciar un resultado importante de esta sección hagamos explícitas las siguientes afirmaciones, que damos por sentadas:

1. Toda ED de primer orden se puede escribir en la forma *normal*:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

donde  $f$  es una función de dos variables (aunque bien puede darse el caso que dependa solamente de una de ellas), definida en todo el plano  $xy$  o bien en una parte del plano llamada el *dominio* de  $f$ .

2. Recordemos que al par formado por una ED y condiciones iniciales se le llama un problema de valor inicial o PVI. Es decir, un PVI de primer orden es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0. \quad (1.2)$$

Dicho lo anterior, si una función  $y = \varphi(x)$  es solución del PVI (1.2), entonces por la segunda parte del Teorema Fundamental de Cálculo:

$$\int_{x_0}^x \varphi'(t) dt = \varphi(t) \Big|_{x_0}^x = \varphi(x) - \varphi(x_0),$$

despejando a  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x \varphi'(t) dt.$$

Ahora bien, por ser  $y = \varphi(x)$  una solución del PVI, debe cumplir con  $\varphi(x_0) = y_0$  y  $\varphi'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , de donde  $\varphi'(t) = f(t, y) = f(t, \varphi(t))$ . Resulta entonces que si  $y = \varphi(x)$  es una solución del PVI, entonces debe satisfacer la siguiente *ecuación integral*:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt. \quad (1.3)$$

Con el argumento anterior hemos mostrado que si  $y = \varphi(x)$  es solución del PVI (1.2) entonces también es solución de (1.3). Recíprocamente, si  $y = \varphi(x)$  satisface la ecuación integral (1.3) y se cumplen algunas condiciones de continuidad sobre la función  $f(x, y)$  del integrando (junto con su derivada parcial con respecto a su segunda variable), que hacen posible que la integral esté bien definida, entonces obtendríamos de (1.3) al derivar respecto a  $x$ , por la primera parte de teorema fundamental del cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \varphi(x) &= \frac{d}{dx} \left[ y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \right] = \frac{d}{dx} [y_0] + \frac{d}{dx} \left[ \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \right] = f(x, \varphi(x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi'(x) &= f(x, \varphi(x)) \quad \text{y además} \quad \varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, \varphi(t)) dt = y_0. \end{aligned}$$

Aunque puede resultar difícil de creer, la ecuación integral (1.3) es en general más accesible para el análisis que el PVI (1.2) e incluso proporciona la base para un método general de solución, que consiste en obtener

aproximaciones sucesivas  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  a la solución del PVI cada vez mejores, en el sentido de que se encuentran más cerca de la solución verdadera.

El esquema de aproximación es como sigue:

$\varphi_0(x)$  es cualquier aproximación a la solución; a falta de información se escoge comúnmente  $\varphi_0(x) = y_0$ , y a partir de ahí se define:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_0(t)) dt, \\ \varphi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_1(t)) dt, \\ &\vdots \\ \varphi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt,\end{aligned}$$

Cuando las condiciones a cumplir por  $f(x, y)$  se satisfacen, este esquema converge con bastante rapidez a la única solución del PVI.

**Ejemplo 1.6.1** Encuentre la solución al PVI:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \text{con la condición} \quad y(0) = 1.$$

▼ Definimos  $\varphi_0(x) = y_0 = 1$  y a partir de esta primera aproximación:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_0(t)) dt = 1 + \int_0^x 1 \cdot dt = 1 + t \Big|_0^x = 1 + x; \\ \varphi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_1(t)) dt = 1 + \int_0^x (1 + t) dt = 1 + \left( t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}; \\ \varphi_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_2(t)) dt = 1 + \int_0^x \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 + \left( t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} \right) \Big|_0^x = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}; \\ &\vdots \\ \varphi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt = 1 + \int_0^x \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} \right) dt = \\ &= 1 + \left( t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right) \Big|_0^x = 1 + \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right).\end{aligned}$$

Se puede apreciar entonces que las funciones  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \dots$  son las sumas parciales de la solución única del PVI, que está dada por la serie

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

como se puede verificar fácilmente.

□

El ejemplo previo se pudo resolver fácilmente porque así fue escogido, de modo que el lector pudiera apreciar cómo funciona el método de aproximaciones sucesivas. Hay que aclarar que este método no se aplica

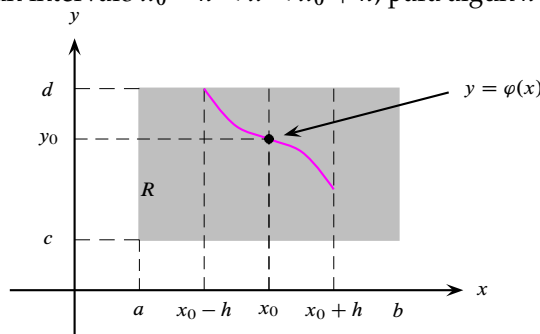
en todos los PVI (solamente en aquellos que satisfacen las condiciones para tener solución única), y aún en los casos en que se puede aplicar, la convergencia (a pesar de ser rápida) puede resultar difícil de apreciar, pues las integrales que dan las aproximaciones sucesivas se van tornando cada vez más complicadas. Afortunadamente, rara vez hay que emplear este método en la práctica; esta situación es similar al cálculo de integrales directamente a partir de la definición como límite de sumas de Riemann.

A continuación enunciamos el teorema de existencia y unicidad con una última aclaración: es costumbre en los textos de matemáticas que a cualquier afirmación titulada teorema se suponga que es una proposición *demostrable* y que debe demostrarse en el texto. Para nosotros cuando anunciamos un resultado con el título teorema significa que es algo importante para el desarrollo de los temas que siguen y muy posiblemente para todo el libro y material que se vea en otros cursos más avanzados. Sin embargo, esto no significa que proporcionaremos una demostración de ese resultado en este texto, dicha demostración puede encontrarse en alguna otra fuente.

- **Teorema de existencia y unicidad (Picard-Lindelöf):** Dado un PVI

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \text{con } y(x_0) = y_0,$$

supongamos que hay un rectángulo  $R = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$  que contiene al punto  $(x_0, y_0)$  en su interior y dentro del cual  $f(x, y)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  son continuas. Entonces el PVI tiene una única solución  $y = \varphi(x)$  definida en algún intervalo  $x_0 - h < x < x_0 + h$ , para algún  $h > 0$ .



Note que el contenido de este teorema es dar condiciones suficientes para que el PVI tenga solución única. El rectángulo  $R$  del que habla podría ser grande (incluso todo el plano) o bien pequeño, pero la curva  $y = \varphi(x)$  cuya existencia y unicidad garantiza el teorema está confinada al mismo rectángulo, incluso el intervalo  $x_0 - h < x < x_0 + h$  debe quedar contenido en el intervalo  $a < x < b$ . El teorema no dice tampoco qué tan pequeño será el número  $h$ , sólo afirma que es positivo. En el mejor de los casos (como en el último ejemplo anterior al teorema) este  $h$  puede ser  $+\infty$  y la solución está definida para todo  $x$ ; en el peor de los casos  $h$  puede ser un número positivo pequeño.

**Ejemplo 1.6.2** ¿Tiene solución el PVI:  $y' = x^2y - y^5$  con  $y(2) = -3$ ?

▼ Aquí tenemos que  $f(x, y) = x^2y - y^5$  &  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 5y^4$  son ambas funciones continuas para todo valor de  $x$  &  $y$ . En consecuencia, el teorema de existencia y unicidad garantiza que hay una solución única. □

**Ejemplo 1.6.3** ¿Tiene solución el PVI:  $y' = \ln(xy)$  con  $y(0) = 2$ ?

▼ Tenemos en el presente caso que  $f(x, y) = \ln(xy)$  &  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$ , ambas funciones definidas y continuas en  $R = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ . Dado que el punto  $(0, 2)$  no se encuentra en el interior de  $R$ , el teorema de existencia y unicidad no garantiza que haya solución única. Si se tuviera una condición inicial  $y(x_0) = y_0$  con ambas  $x_0 > 0, y_0 > 0$  de modo que el punto  $(x_0, y_0)$  esté dentro de  $R$ , entonces sí podríamos asegurar la existencia de una solución única. □

**Ejemplo 1.6.4** ¿Tiene solución el PVI:  $y' = 6xy^{\frac{2}{3}}$  con la condición  $y(0) = 0$ ?

▼ Tenemos ahora  $f(x, y) = 6xy^{\frac{2}{3}}$  definida y continua para todos los valores  $x, y$ , mientras que  $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x \cdot \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} = 4xy^{-\frac{1}{3}}$  está definida y es continua para todos los  $x, y$  excepto  $y = 0$ . La condición inicial dada está contenida en la recta  $y = 0$  donde  $\frac{\partial f}{\partial y}$  no está definida, así que el teorema no garantiza que haya solución única. Sin embargo en este ejemplo, a diferencia del anterior, sí hay solución aunque ésta no es única.

1. Para empezar, tenemos la solución trivial:  $y = \varphi_0(x) = 0$  para toda  $x$ , que satisface desde luego el PVI, pues

$$\varphi_0(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = 0 = 6x[\varphi_0(x)]^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot 0.$$

2. Otra solución es la función  $y = \varphi_1(x) = x^6$ , pues evidentemente:

$$\varphi_1(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi_1(x)}{dx} = 6x^5 = 6 \cdot x \cdot x^4 = 6x(\varphi_1(x))^{\frac{2}{3}}.$$

3. También se pueden hacer combinaciones de las soluciones anteriores, como:

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ x^6 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad \text{o también } \varphi_4(x) = \begin{cases} x^6 & \text{si } x < 0; \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Tener tan gran variedad de soluciones podría ser tan malo como no tener solución alguna, pues en los problemas de interés lo que se busca es una sola respuesta bien definida.

Podría probarse que el hecho de que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  es discontinua en el punto  $(x_0, y_0)$  de la condición inicial es lo que provoca tantas soluciones en vez de una sola. Sin embargo, investigar esta clase de temas, aún cuando puede ser de gran interés, queda fuera de los objetivos de un curso introductorio de ED y de este libro. □





## CAPÍTULO

# 2

## Ecuaciones diferenciales de primer orden

### OBJETIVOS PARTICULARES

1. Resolver ED de variables separables de primer orden.
2. Resolver ED lineales de primer orden.
3. Resolver ED de Bernoulli de primer orden.
4. Resolver ED homogéneas de primer orden.
5. Resolver ED exactas de primer orden.
6. Encontrar un factor integrante de una ED.
7. Resolver ED reducibles a orden 1.
8. Identificar el tipo de una ED.

### 2.1 Introducción

En este capítulo presentamos los métodos para resolver analíticamente ED de primer orden y PVI de los tipos más comunes que se usan en las aplicaciones prácticas. Los métodos vienen acompañados por pruebas o criterios que nos permitirán identificar una ED como perteneciente a uno de esos tipos, junto con un procedimiento de solución. Encontraremos también procedimientos mediante los cuales es posible transformar una ED a uno de esos tipos.

- Recordemos que **una ecuación diferencial ordinaria de primer orden** es una relación entre  $y'$ ,  $y$  &  $x$  (la variable independiente) de la forma:

$$F(x, y, y') = 0,$$

donde  $F$  es una función de tres variables.

**Ejemplo 2.1.1** Las siguientes expresiones matemáticas son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:



1.  $5y(y')^3 - 2xyy' - 4\sin x = 0.$

2.  $(7x - y^2)y' = e^{x^2} - 2.$

3.  $y\left(\frac{dy}{dx}\right) + 6x^2 = 3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^5.$

4.  $(y')^2 = (2x + y)(y').$

5.  $6y' = \frac{y+4}{x}.$

6.  $(x + y)dx + (\tan x^2 - xy)dy = 0.$



- En este libro encontraremos, en algunos casos, ED en las cuales es posible despejar  $y'$ , es decir:

$$y' = f(x, y).$$

Estas ecuaciones diferenciales se dice que están en **forma normal**.

**Ejemplo 2.1.2** Despejar  $y'$  de la siguiente ecuación diferencial:  $(3xy)y' - \sqrt{x^2 - y^2} = 5y'.$

▼ Realizando un poco de álgebra se obtiene:

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{3xy - 5}, \quad \text{siempre y cuando } 3xy - 5 \neq 0.$$

De aquí identificamos:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{3xy - 5}.$$



- Recordemos que otra forma de presentación para las ecuaciones diferenciales es la siguiente:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (2.1)$$

Si deseamos despejar una derivada de esta expresión, bien se puede considerar a  $x$  como la variable independiente y despejar  $\frac{dy}{dx}$  o bien se puede considerar a  $y$  como la variable independiente y despejar  $\frac{dx}{dy}$ .

1. Considerando a  $x$  como la variable independiente se tiene:

$$\begin{aligned} M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 &\Rightarrow M(x, y)dx = -N(x, y)dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow M(x, y) = -N(x, y) \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \text{ con la condición } N(x, y) \neq 0. \end{aligned}$$

2. Considerando a  $y$  como la variable independiente se tiene:

$$\begin{aligned} M(x, y) dx + N(x, y) dy &= 0 \Rightarrow M(x, y) dx = -N(x, y) dy \Rightarrow \\ \Rightarrow M(x, y) \frac{dx}{dy} &= -N(x, y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= x' = g(x, y) = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}, \text{ con la condición } M(x, y) \neq 0. \end{aligned}$$

Nótese que:  $y' \cdot x' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \left[ -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \right] \left[ -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right] = 1.$

**Ejemplo 2.1.3** Sea la ecuación diferencial:  $(3x^2y - xy^2) dx + (2xy - 3x^2y^2) dy = 0.$

1. Considerando a  $x$  como la variable independiente despejar  $\frac{dy}{dx}.$
2. Considerando a  $y$  como la variable independiente despejar  $\frac{dx}{dy}.$



1. Considerado a  $x$  como la variable independiente se tiene:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y - xy^2}{2xy - 3x^2y^2} = -\frac{\cancel{(xy)}(3x - y)}{\cancel{(xy)}(2 - 3xy)} = -\frac{3x - y}{2 - 3xy},$$

excepto los puntos que están en la hipérbola  $2 - 3xy = 0$  y en los ejes  $x$  ( $y = 0$ ) &  $y$  ( $x = 0$ ).

2. Considerado a  $y$  como la variable independiente se tiene:

$$x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{2xy - 3x^2y^2}{3x^2y - xy^2} = -\frac{\cancel{(xy)}(2 - 3xy)}{\cancel{(xy)}(3x - y)} = -\frac{2 - 3xy}{3x - y},$$

excepto los puntos que están en la recta  $3x - y = 0$  y en los ejes  $x$  &  $y$ .

De nuevo, vemos que:  $y' \cdot x' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \left[ -\frac{3x - y}{2 - 3xy} \right] \left[ -\frac{2 - 3xy}{3x - y} \right] = 1.$



**Ejemplo 2.1.4** Sea la ecuación diferencial:  $(2s^4 - 9ts) ds + (s^2 - 3ts) dt = 0.$

1. Considerando a  $s$  como la variable independiente despejar  $\frac{dt}{ds}.$
2. Considerando a  $t$  como la variable independiente despejar  $\frac{ds}{dt}.$



1. Considerado a  $s$  como la variable independiente se tiene:

$$t' = \frac{dt}{ds} = -\frac{2s^4 - 9ts}{s^2 - 3ts} = -\frac{\cancel{(s)}(2s^3 - 9t)}{\cancel{(s)}(s - 3t)} = -\frac{2s^3 - 9t}{s - 3t},$$

excepto los puntos que están en la recta  $s - 3t = 0$  y en el eje  $t$  ( $s = 0$ ).

2. Considerado a  $t$  como la variable independiente se tiene:

$$s' = \frac{ds}{dt} = -\frac{s^2 - 3ts}{2s^4 - 9ts} = -\frac{\cancel{s}(s - 3t)}{\cancel{s}(2s^3 - 9t)} = -\frac{s - 3t}{2s^3 - 9t},$$

excepto los puntos que están en la curva  $2s^3 - 9t = 0$  y en el eje  $t$  ( $s = 0$ ).

□

Recordemos que la derivada  $s'(t)$  es la razón de cambio instantánea de la función  $s(t)$ . Si  $s(t)$  es la posición de un objeto con respecto al tiempo, entonces  $s'(t)$  representa la velocidad instantánea de dicho objeto. Así también  $s'(t_0)$  se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función  $s(t)$  en el punto  $[t_0, s(t_0)]$ . Este concepto que se ha visto en el curso de cálculo diferencial, nos permitirá trabajar en el siguiente capítulo sobre problemas de crecimiento de poblaciones, mezclas, caída libre, decaimiento radioactivo, aplicaciones geométricas, entre otros, en los cuales se requiere encontrar las soluciones de una ED de primer orden.

A continuación se exponen las técnicas más conocidas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, ecuaciones que se requieren para resolver las aplicaciones anteriormente mencionadas.

## 2.2 Ecuaciones diferenciales de variables separables

El primer tipo de ED que presentamos es el de ED de variable separables, llamadas así porque es práctica común en ecuaciones de dos variables el tratar de separarlas, como se muestra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.2.1** Separar las variables de la siguiente ecuación algebraica:  $(x^2 - x)(y^2 + 3) = 2xy$ .

▼ Por separar las variables de la ecuación se entiende que por medio de operaciones algebraicas válidas se coloquen todas las  $x$  de un lado de la igualdad y todas las  $y$  del otro lado. En este caso

$$(x^2 - x)(y^2 + 3) = 2xy \Rightarrow \frac{x^2 - x}{x} = \frac{2y}{y^2 + 3}.$$

Se han colocado las  $x$  del lado izquierdo de la ecuación y las  $y$  del lado derecho.

□

**Ejemplo 2.2.2** Separar las variables de la siguiente ED:  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)}$ .

▼ Para una ED como ésta, separar variables significa que por medio de operaciones algebraicas válidas se escriba la ED en la forma:

$$g(y) dy = h(x) dx,$$

En este caso tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)} \Rightarrow \frac{y^2 + 3}{y} dy = \frac{2x}{x^2 - x} dx.$$

Para este caso:

$$g(y) = \frac{y^2 + 3}{y} \quad \& \quad h(x) = \frac{2x}{x^2 - x} \quad \text{con} \quad y \neq 0 \text{ y } x^2 - x \neq 0.$$

Del resultado anterior, se concluye que la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)}$  es una ED de variables separables.

□

**Ejemplo 2.2.3** Separar las variables de la siguiente ED:  $\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)}$ .

▼ Al escribir la ED en la forma  $g(y) dy = h(x) dx$  se tiene:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)} \Rightarrow \frac{x^2 - x}{x} dx = \frac{2y}{y^2 + 3} dy.$$

En este caso:

$$g(y) = \frac{2y}{y^2 + 3} \quad \& \quad h(x) = \frac{x^2 - x}{x} \quad \text{con } x \neq 0.$$

Se concluye que la ecuación diferencial  $\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)}$  es una ED de variables separables. □

- Una ecuación diferencial:  $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$  es **de variables separables** si podemos escribirla en la forma:

$$g(y) dy = h(x) dx.$$

El método para resolver una ecuación diferencial de variables separables consiste en integrar esta última igualdad, es decir:

$$\begin{aligned} \int g(y) dy &= \int h(x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha(y) + C_1 &= \beta(x) + C_2 \Rightarrow \alpha(y) - \beta(x) = C_2 - C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi(x, y) &= C, \text{ que es la solución general de la ED.} \end{aligned}$$

En general, la solución queda definida de manera implícita. Ilustramos este método con los ejemplos siguientes.

**Ejemplo 2.2.4** Resolver la ecuación diferencial:  $y' = \frac{dy}{dx} = \sen x$ .

▼ Separando las variables se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \sen x \Rightarrow dy = \sen x dx.$$

Integrando directamente:

$$\int dy = \int \sen x dx \Rightarrow y = -\cos x + C,$$

que es la solución general de la ED. □

**Ejemplo 2.2.5** Resolver la ecuación diferencial:  $y' = \sen y$ .

▼ Separando las variables se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \sen y \Rightarrow \frac{dy}{\sen y} = dx.$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sen y} &= \int dx \Rightarrow \int \csc y dy = x + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln |\csc y - \cot y| &= x + C. \end{aligned}$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita. □

**Ejemplo 2.2.6** Resolver la ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{(x^2 - 2)(y^2 + 3)}$ .

▼ Separando las variables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{(x^2 - 2)(y^2 + 3)} \Rightarrow \frac{y^2 + 3}{y} dy = \frac{2x}{x^2 - 2} dx.$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2 + 3}{y} dy + C_1 &= \int \frac{2x}{x^2 - 2} dx + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \left( y + \frac{3}{y} \right) dy &= \ln |x^2 - 2| + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y^2}{2} + 3 \ln |y| &= \ln |x^2 - 2| + C. \end{aligned}$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita. □

**Observaciones:** En este punto es pertinente aclarar que el uso del valor absoluto en la integral

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |y| + C$$

es la forma correcta de aplicar esta fórmula de integración. Sin embargo, con cierta frecuencia en las páginas siguientes y en el resto del libro, el lector podrá encontrar varias veces

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C.$$

Esto se hace por facilidad de escritura o bien por conveniencia, para hacer algunas manipulaciones y conseguir despejar a la variable dependiente en la solución de la ED.

Se supone también que el lector conoce, por sus cursos previos de cálculo, las convenciones usuales en la manipulación de funciones elementales. Así por ejemplo, al escribir

$$\text{sen } y = f(x) \Rightarrow y = \arcsen[f(x)]$$

no hace falta insistir que para que  $y$  sea una función bien definida se debe cumplir  $|f(x)| \leq 1$ .

En lo sucesivo omitiremos mencionar explícitamente las restricciones de este tipo: como que los denominadores deben ser  $\neq 0$ , los argumentos del logaritmo deben ser positivos etc, a menos que se considere muy necesario.

También para el resto del libro haremos algunas convenciones sobre la constante de integración que se añade en las integrales indefinidas, si:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{y} \quad G'(y) = g(y)$$

entonces escribimos equivalentemente:

$$\int F(x) dx = f(x) + C \quad \text{y} \quad \int G(y) dx = g(y) + C,$$

donde  $C$  representa una constante arbitraria, sin embargo si tenemos por ejemplo

$$F(x) dx = G(y) dx,$$

queremos concluir que

$$\int F(x) dx = \int G(y) dy,$$

o sea

$$f(x) + C_1 = g(y) + C_2.$$

No es necesario usar dos constantes arbitrarias ya que se puede escribir

$$f(x) = g(y) + C,$$

donde  $C$  sustituye a  $C_1 - C_2$ .

De forma similar y repeditamente en lo que sigue el lector podrá ver expresiones como  $C_1 + C_2 = C$ ,  $C_1 \cdot C_2 = C$ ,  $3C_1 = C$ ,  $e^{C_1} = C$ ,  $\cos C_1 = C$ , etc. en las que esencialmente se hace la convención de que la suma, la resta, el producto, la exponencial o cualquier otro valor funcional de una constante es *otra* constante.

Así por ejemplo, una fórmula como  $e^C = C$  no es necesariamente incorrecta al interpretarse como un ejemplo de estas convenciones.

**Ejemplo 2.2.7** Resolver la ecuación diferencial:  $y' = 2x\sqrt{y-1}$ .

▼ Separando las variables e integrando:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x(y-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (y-1)^{-\frac{1}{2}} dy = 2x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int (y-1)^{-\frac{1}{2}} dy &= 2 \int x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(y-1)^{\frac{1}{2}} + C_1 &= x^2 + C_2 \Rightarrow 2(y-1)^{\frac{1}{2}} = x^2 + C. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado:

$$4(y-1) = (x^2 + C)^2 \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{4}(x^2 + C)^2.$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma explícita. □

**Ejemplo 2.2.8** Resolver el PVI:  $y' = xy + x - 2y - 2$ ; con la condición  $y(0) = 2$ .

▼ Para separar las variables comenzamos factorizando y después integramos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x(y+1) - 2(y+1) = (y+1)(x-2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{y+1} &= (x-2) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int (x-2) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(y+1) + C_1 &= \frac{1}{2}(x-2)^2 + C_2 \Rightarrow \ln(y+1) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + C. \end{aligned}$$

Para determinar  $C$ , consideramos la condición inicial  $y(0) = 2$ :

$$\ln 3 = \frac{1}{2}(-2)^2 + C \Rightarrow C = \ln 3 - 2 \Rightarrow \ln(y+1) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \ln 3 - 2.$$

De donde

$$y+1 = e^{\frac{1}{2}(x-2)^2 + \ln 3 - 2} = e^{\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2} e^{\ln 3} \Rightarrow y = 3e^{\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2} - 1.$$

Esta última expresión representa la solución del PVI con  $y(0) = 2$ . □

**Ejemplo 2.2.9** Resolver la ED:  $(x^2 + 1)y' \tan y = x$ .

▼ Separando las variables e integrando:

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} \tan y = x \Rightarrow \tan y dy = \frac{x dx}{x^2 + 1} \Rightarrow \int \frac{\tan y}{\cos y} dy = \int \frac{x dx}{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ln(\cos y) + C_1 = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C_2 \Rightarrow -\ln(\cos y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

Podemos encontrar la forma explícita de la solución usando propiedades del logaritmo:

$$\ln(\cos y)^{-1} = \ln(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + C \Rightarrow (\cos y)^{-1} = e^{\ln(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + C} = e^{\ln(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} e^C.$$

Considerando  $e^C = C$  y observando que  $e^{\ln(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ , se tiene:

$$\frac{1}{\cos y} = C(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sec y = C\sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = \operatorname{arcsec}(C\sqrt{x^2 + 1}).$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita. □

**Ejemplo 2.2.10** Resolver la ED:  $\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$ .

▼ Al separar las variables se obtiene:

$$\frac{y-2}{(y-1)(y+3)} dy = \frac{x-2}{(x-1)(x+3)} dx \Rightarrow \int \frac{y-2}{(y-1)(y+3)} dy = \int \frac{x-2}{(x-1)(x+3)} dx.$$

Aplicando fracciones parciales, obtenemos:

$$-\frac{1}{4} \int \frac{dy}{y-1} + \frac{5}{4} \int \frac{dy}{y+3} = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{4} \int \frac{dx}{x+3}.$$

Multiplicando por 4, e integrando:

$$-\ln(y-1) + 5\ln(y+3) + C_1 = -\ln(x-1) + 5\ln(x+3) + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(y+3)^5 - \ln(y-1) = \ln(x+3)^5 - \ln(x-1) + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln \frac{(y+3)^5}{y-1} = \ln \frac{C(x+3)^5}{x-1} \Rightarrow \frac{(y+3)^5}{y-1} = \frac{C(x+3)^5}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y+3)^5(x-1) = C(x+3)^5(y-1).$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma explícita. □

**Ejemplo 2.2.11** Resolver el PVI:  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + e^{2y} \sin x}{3e^y + e^y \cos 2x}$ ; con la condición  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

▼ Comenzamos factorizando para separar las variables e integrar para obtener:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x)(1 + e^{2y})}{e^y(3 + \cos 2x)} \Rightarrow \frac{e^y}{1 + e^{2y}} dy = \frac{\sin x}{3 + \cos 2x} dx \Rightarrow \int \frac{e^y dy}{1 + e^{2y}} = \int \frac{\sin x}{3 + \cos 2x} dx.$$

Pero  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ , entonces:

$$\int \frac{e^y dy}{1 + (e^y)^2} = \int \frac{\sin x dx}{3 + [2\cos^2 x - 1]} = \int \frac{\sin x dx}{2 + 2\cos^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin x dx}{1 + (\cos x)^2}.$$



Ahora, integrando por sustitución:

$$\arctan e^y + C_1 = -\frac{1}{2} \arctan(\cos x) + C_2 \Rightarrow \arctan e^y = -\frac{1}{2} \arctan(\cos x) + C.$$

Considerando la condición inicial  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ :

$$\arctan e^0 = -\frac{1}{2} \arctan\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow \arctan 1 = -\frac{1}{2} \arctan 0 + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto, la solución buscada es:

$$\arctan e^y = -\frac{1}{2} \arctan(\cos x) + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 4 \arctan e^y + 2 \arctan(\cos x) = \pi.$$

Cualquiera de las dos últimas expresiones representa la solución del PVI de forma implícita. □

**Ejemplo 2.2.12** Resolver la ecuación diferencial:  $x^3 e^{2x^2+3y^2} dx - y^3 e^{-x^2-2y^2} dy = 0$ .

▼ Primero separamos las variables y planteamos las integrales:

$$x^3 e^{2x^2} e^{3y^2} dx = y^3 e^{-x^2} e^{-2y^2} dy \Rightarrow x^3 e^{2x^2} e^{x^2} dx = y^3 e^{-2y^2} e^{-3y^2} dy \Rightarrow \int x^2 e^{3x^2} x dx = \int y^2 e^{-5y^2} y dy.$$

Integrando por partes ambas integrales, usando las siguientes consideraciones:

$$\begin{aligned} u &= t^2, \quad \& dv = e^{at^2} dt, \\ du &= 2t dt, \quad \& v = \frac{1}{2a} e^{at^2}. \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} x^2 e^{3x^2} - \frac{1}{3} \int e^{3x^2} x dx &= -\frac{1}{10} y^2 e^{-5y^2} + \frac{1}{5} \int e^{-5y^2} y dy \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{6} x^2 e^{3x^2} - \frac{1}{18} e^{3x^2} &= -\frac{1}{10} y^2 e^{-5y^2} - \frac{1}{50} e^{-5y^2} + C. \end{aligned}$$

Multiplicando por 450 (mínimo común múltiplo de 6, 18, 10 y 50):

$$(75x^2 - 25)e^{3x^2} + (45y^2 + 9)e^{-5y^2} = C.$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita. □

**Ejemplo 2.2.13** Resolver la ED:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{\sqrt{x} + \sqrt{xy}}$ .

▼ Separamos variables factorizando primero y posteriormente integramos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{y+1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{y})} \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{y}}{y+1} dy = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int \frac{\sqrt{y} + 1}{y+1} dy = \int x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Resolvemos la primera integral mediante el cambio de variable  $\sqrt{y} = t$  para así obtener:

$$\begin{aligned} \int \frac{t+1}{t^2+1} 2t dt &= \int \frac{2t^2+2t}{t^2+1} dt = \\ &= \int \left( \frac{2t^2}{t^2+1} + \frac{2t}{t^2+1} \right) dt = \int \left( 2 - \frac{2}{t^2+1} + \frac{2t}{t^2+1} \right) dt = \\ &= 2t - 2 \arctan t + \ln(t^2+1) + C_1. \end{aligned}$$

Dado que  $t = \sqrt{y}$ , resulta:

$$2\sqrt{y} + \ln(y+1) - 2\arctan \sqrt{y} + C_1 = 2\sqrt{x} + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \ln(y+1) - 2\arctan \sqrt{y} = C.$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita. □

**Ejemplo 2.2.14** Resolver la ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - 3y + x - 3}{xy + 2y - x - 2}$ .

▼ Separando variables, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - 3y + x - 3}{xy + 2y - x - 2} = \frac{y(x-3) + (x-3)}{y(x+2) - (x+2)} = \frac{(y+1)(x-3)}{(y-1)(x+2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} dy = \frac{x-3}{x+2} dx.$$

Efectuando las divisiones e integrando:

$$\int \left(1 - \frac{2}{y+1}\right) dy = \int \left(1 - \frac{5}{x+2}\right) dx \Rightarrow y - 2\ln(y+1) + C_1 = x - 5\ln(x+2) + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y - \ln(y+1)^2 = x - \ln(x+2)^5 + C.$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita. □

**Ejercicios 2.2.1** Variables separables. *Soluciones en la página 463*

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1.  $\frac{dy}{dx} = \tan x + \sec x$ .
2.  $\frac{dy}{dx} = \tan y$ .
3.  $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{y}$ .
4.  $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x^2}$ .
5.  $\frac{ds}{dt} = \frac{(2t+1)(2s-1)}{2(t^2+t)}$ .
6.  $\frac{ds}{dt} = \frac{(s^3-s)(4t^3-6t)}{(t^4-3t^2)(3s^2-1)}$ .
7.  $\frac{du}{dt} = \frac{(u+1)(t+1)}{(u+2)(t-1)}$ .
8.  $\frac{dt}{du} = \frac{tu+u+3t+3}{tu+2u-t-2}$ .
9.  $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$ .
10.  $xy' - y = 2x^2y$ .
11.  $4tx \frac{dx}{dt} = x^2 + 1$ .
12.  $(y \ln x)^{-1} \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y+1}\right)^2$ .
13.  $\frac{d\theta}{dt} = (\cos t)(\cos 2\theta - \cos^2 \theta)$ .
14.  $\frac{dy}{dt} = e^{-2t+3y}$ .
15.  $\frac{dy}{dx} + y = yxe^{x+2}$ .
16.  $e^x y dy - (e^{-y} + e^{2x-y}) dx = 0$ .
17.  $2tx^2 + 2t + (t^4 + 1)x' = 0$  con  $x(0) = 1$ .
18.  $\frac{2r-1}{t} dr + \frac{r-2r^2}{t^2-1} dt = 0$  con  $r(2) = 4$ .
19.  $\frac{1}{(y-1)^2} dx + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dy = 0$ .
20.  $\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)$  con  $T(0) = T_0$ , donde  $k, T_0, T_1$  constantes.

## 2.3 Ecuaciones diferenciales lineales

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden pueden ser lineales o no lineales. En esta sección centraremos la atención en las ED lineales.

- Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es de la forma

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = g(x), \text{ donde } a_0(x) \neq 0 \text{ \& } g(x) \neq 0.$$

- Una ecuación diferencial **lineal homogénea** de primer orden es de la forma

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = 0, \text{ donde } a_0(x) \neq 0.$$

Notar que en este caso  $g(x) = 0$ .

**Ejemplo 2.3.1** *Mostrar que las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales:*

1.  $xy' - y = x^2$ .
2.  $y^2x' + 2yx = 3y$ .
3.  $(2y + 1)dx + (y^2x - y - x)dy = 0$ .

▼ En estos casos se tiene:

1.  $a_0(x) = x, a_1(x) = -1$  &  $g(x) = x^2$ .  
 $x$  es la variable independiente y la variable dependiente es  $y$ .
2.  $a_0(y) = y^2, a_1(y) = 2y$  &  $g(y) = 3y$ .  
 $y$  es la variable independiente y la variable dependiente es  $x$ .
3. Realizando algunas operaciones:

$$\begin{aligned} (2y + 1)dx + (y^2x - y - x)dy &= 0 \Rightarrow (2y + 1)\frac{dx}{dy} + y^2x - y - x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2y + 1)\frac{dx}{dy} + y^2x - x &= y \Rightarrow \\ \Rightarrow (2y + 1)\frac{dx}{dy} + (y^2 - 1)x &= y. \end{aligned}$$

Ahora se tiene lo siguiente:  $a_0(y) = 2y + 1, a_1(y) = y^2 - 1$  &  $g(y) = y$ .

$y$  es la variable independiente y la variable dependiente es  $x$ .

□

**Ejemplo 2.3.2** *Las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales homogéneas:*

1.  $xy' - y = 0$ .
2.  $y^2x' + 2yx = 0$ .
3.  $(2x + 5)y' + (x^2 - 5)y = 0$ .

▼ En estos casos se tiene:

1.  $a_0(x) = x, a_1(x) = -1$ .
2.  $a_0(y) = y^2, a_1(y) = 2y$ .
3.  $a_0(x) = 2x + 5, a_1(x) = x^2 - 5$ .

□

### Resolución de la ecuación diferencial lineal homogénea

Para resolver la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden se presentan a continuación dos procedimientos.

**Primer procedimiento.** La ecuación diferencial  $a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = 0$  es separable. En efecto:

$$\begin{aligned} a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y &= 0 \Rightarrow a_0(x)\frac{dy}{dx} = -a_1(x)y \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{y} &= -p(x)dx; \text{ donde } p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \text{ y } a_0(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Integrando se obtiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= -\int p(x)dx \Rightarrow \ln y + C_1 = -\int p(x)dx + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln y &= -\int p(x)dx + C \Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx + C} \Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx} e^C \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= Ce^{-\int p(x)dx}; \text{ donde } C \text{ es arbitrario.} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.3.3** Resolver la ED:  $x\frac{dy}{dx} + x^3y = 0$ , con  $x \neq 0$ .

▼ Separando las variables:

$$x\frac{dy}{dx} + x^3y = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -x^3y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2dx.$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= -\int x^2dx \Rightarrow \ln y + C_1 = -\frac{x^3}{3} + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln y &= -\frac{x^3}{3} + C \Rightarrow y = e^{-\frac{x^3}{3} + C} \Rightarrow y = e^C e^{-\frac{x^3}{3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= Ce^{-\frac{x^3}{3}}. \end{aligned}$$

Esta última expresión es la solución general de la ED.

□

**Segundo procedimiento.** Lo primero que se hace es **normalizar** la ecuación diferencial, es decir, dividimos la ecuación diferencial entre  $a_0(x) \neq 0$  para obtener el coeficiente del término con mayor derivada igual a uno:

$$\begin{aligned} a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y' + py &= 0. \end{aligned}$$

Como antes denotamos  $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ , con la restricción  $a_0(x) \neq 0$ .

A continuación se hacen las siguientes consideraciones:

a. Se define:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}.$$

En este caso no usamos la constante de integración de la integral  $e^{\int p(x) dx}$  para obtener una función  $\mu(x)$  lo más sencilla posible.

Por el teorema fundamental del cálculo, al derivar obtenemos:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{d}{dx} \left( e^{\int p(x) dx} \right) = e^{\int p(x) dx} \frac{d}{dx} \left( \int p(x) dx \right) = e^{\int p(x) dx} \cdot p(x) = \mu p.$$

es decir:

$$\mu' = \mu p.$$

b. Por otro lado:

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu \frac{dy}{dx} + y \frac{d\mu}{dx} = \mu \frac{dy}{dx} + y \mu p = \mu \left( \frac{dy}{dx} + p y \right).$$

Igualdad que se escribe como:

$$(\mu y)' = \mu(y' + p y). \quad (2.2)$$

• Para resolver la ecuación diferencial  $y' + p y = 0$ :

a. Se multiplica la ecuación diferencial por la función  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ :

$$\mu(y' + p y) = 0.$$

b. Se aplica la igualdad anterior (2.2):

$$(\mu y)' = 0.$$

c. Integrando, se obtiene:

$$\int (\mu y)' dx = \int 0 dx \Rightarrow \mu y = C \Rightarrow e^{\int p(x) dx} y = C$$

d. Por último se despeja la variable  $y$ :

$$y = \frac{C}{e^{\int p(x) dx}} \Rightarrow y = C e^{-\int p(x) dx}.$$

En este procedimiento la función  $\mu(x)$  se ha utilizado como factor para poder efectuar la integración y resolver la ecuación diferencial. Por esta razón se dice que  $\mu(x)$  es un **factor integrante** de la ecuación diferencial.

**Ejemplo 2.3.4** Resolver la ED:  $x \frac{dy}{dx} + x^3 y = 0$ , con  $x \neq 0$ .

▼ Se normaliza la ED dividiendo entre  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0.$$

Note que  $p(x) = x^2$ .

Se calcula un factor integrante  $\mu(x)$ :

$$\mu = e^{\int p(x) dx} \Rightarrow \mu = e^{\int x^2 dx} = e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Se multiplica por  $\mu$  la ecuación diferencial y se aplica la igualdad  $(\mu y)' = \mu(y' + p y)$ :

$$e^{\frac{x^3}{3}} (y' + x^2 y) = 0 \Rightarrow \left( e^{\frac{x^3}{3}} y \right)' = 0.$$

Al integrar se obtiene:

$$e^{\frac{x^3}{3}} y = C \Rightarrow y = C e^{-\frac{x^3}{3}}.$$

Notar que es el mismo resultado que obtuvimos en el ejemplo 2.3.3

□

### Resolución de una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden

1. Se normaliza la ecuación diferencial dividiendo entre  $a_0(x)$

$$a_0(x) \frac{dy}{dx} + a_1(x)y = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{g(x)}{a_0(x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x).$$

Se considera que  $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$  &  $f(x) = \frac{g(x)}{a_0(x)}$ , donde  $a_0(x) \neq 0$ .

2. Se calcula un factor integrante  $\mu(x)$ :

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}.$$

3. Se multiplica la ecuación diferencial por la función  $\mu(x)$ :

$$\mu(y' + py) = \mu f.$$

4. Considerando que  $(\mu y)' = \mu(y' + py)$  [ver (2.2) en página (47)], se tiene:

$$(\mu y)' = \mu f.$$

5. Integrando:

$$\int (\mu y)' dx = \int \mu f dx \Rightarrow \mu y + C_1 = \int \mu f dx + C_2.$$

6. Despejando la variable  $y$ :

$$y = \frac{1}{\mu} \int \mu f dx + \frac{C}{\mu}.$$

Se ha obtenido así la expresión de la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \int e^{\int p(x) dx} f(x) dx + C e^{-\int p(x) dx}.$$

**Ejemplo 2.3.5** Resolver la ED:  $y' - y = 5$ .

▼ En este caso la ecuación diferencial está normalizada.

Se tiene que  $p(x) = -1$  &  $f(x) = 5$ .

Se calcula un factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int (-1) dx} = e^{-x}.$$

Se multiplica la ecuación diferencial por  $\mu$  y se aplica la igualdad conocida (2.2) de la página 47:

$$\mu(y' + py) = \mu f \Rightarrow (\mu y)' = \mu f \Rightarrow (e^{-x}y)' = e^{-x}5.$$

Integrando y despejando a  $y$  obtenemos:

$$\int (e^{-x}y)' dx = \int e^{-x}5 dx \Rightarrow e^{-x}y + C_1 = -5e^{-x} + C_2 \Rightarrow e^{-x}y = -5e^{-x} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow y = -5 + Ce^x.$$

Esta última expresión es la solución general de la ED.

□

**Ejemplo 2.3.6** Resolver la ED:  $y' - xy = 5x$ .

▼ Esta ecuación diferencial está normalizada.

En este caso  $p(x) = -x$  &  $f(x) = 5x$ .

Se calcula un factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int (-x) dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Se multiplica la ecuación diferencial por  $\mu$  y se aplica la igualdad  $(\mu y)' = \mu(y' + py)$ :

$$(\mu y)' = \mu f \Rightarrow \left( e^{-\frac{x^2}{2}} y \right)' = e^{-\frac{x^2}{2}} 5x.$$

Integrando y despejando a  $y$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \left( e^{-\frac{x^2}{2}} y \right)' dx &= \int e^{-\frac{x^2}{2}} 5x dx \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} y + C_1 = -5e^{-\frac{x^2}{2}} + C_2 \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} y = -5e^{-\frac{x^2}{2}} + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = -5 + C e^{\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Esta última expresión es la solución general de la ED. □

**Ejemplo 2.3.7** Resolver la ED:  $xy' + y = 5x^3$ , donde  $x > 0$ .

▼ Se normaliza la ED dividiendo entre  $x$ :

$$y' + \frac{1}{x}y = 5x^2.$$

En este caso  $p(x) = \frac{1}{x}$  y  $f(x) = 5x^2$ .

Se calcula un factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int \left(\frac{1}{x}\right) dx} = e^{\ln x} = x.$$

Se multiplica la ED normalizada por  $\mu$  y se aplica la igualdad  $(\mu y)' = \mu(y' + py)$ :

$$(\mu y)' = \mu f \Rightarrow (xy)' = 5x^3.$$

Integrando y despejando  $y$ :

$$\begin{aligned} \int (xy)' dx &= \int 5x^3 dx \Rightarrow xy + C_1 = \frac{5}{4}x^4 + C_2 \Rightarrow xy = \frac{5}{4}x^4 + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \frac{5}{4}x^3 + \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Esta última expresión es la solución general de la ED. □

**Ejemplo 2.3.8** Resolver la ED:  $(100 + 2t)y' + y = 7(100 + 2t)$ .

▼ Se normaliza la ED dividiendo entre  $100 + 2t$ :

$$y' + \frac{1}{100 + 2t}y = 7.$$

En este caso  $p(t) = \frac{1}{100 + 2t}$  &  $f(t) = 7$ .

Se calcula un factor integrante:

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int \left(\frac{1}{100+2t}\right) dt} = e^{\frac{1}{2} \ln(100+2t)} = e^{\ln(100+2t)^{\frac{1}{2}}} = (100+2t)^{\frac{1}{2}}.$$

Se multiplica la ED normalizada por  $\mu$  y se aplica la igualdad  $(\mu y)' = \mu(y' + py)$ :

$$(\mu y)' = \mu f \Rightarrow \left[ (100+2t)^{\frac{1}{2}} y \right]' = 7(100+2t)^{\frac{1}{2}}.$$

Integrando y despejando  $y$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \left[ (100+2t)^{\frac{1}{2}} y \right]' dt &= 7 \int (100+2t)^{\frac{1}{2}} dt \Rightarrow (100+2t)^{\frac{1}{2}} y + C_1 = \frac{7}{2} \frac{(100+2t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (100+2t)^{\frac{1}{2}} y &= \left(\frac{7}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) (100+2t)^{\frac{3}{2}} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{7}{3}(100+2t) + \frac{C}{(100+2t)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Esta última expresión es la solución general de la ED. □

**Ejemplo 2.3.9** Resolver la ecuación diferencial:  $x^2 y' + 3xy = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ .

▼ Se divide entre  $x^2$  para normalizar la ED:

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}. \quad (2.3)$$

Se calcula el factor integrante:

$$\begin{aligned} \int p(x) dx &= \int \frac{3}{x} dx = 3 \ln x = \ln x^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(x) &= e^{\int p(x) dx} = e^{\ln x^3} = x^3 \end{aligned}$$

Se multiplica la ED (2.3) por  $\mu(x) = x^3$  y se aplica la igualdad  $(\mu y)' = \mu(y' + py)$ :

$$x^3 \left[ y' + \frac{3}{x}y \right] = x^3 \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} \Rightarrow [x^3 y]' = \operatorname{sen} x.$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int [x^3 y]' dx &= \int \operatorname{sen} x dx \Rightarrow x^3 y + C_1 = -\cos x + C_2 \Rightarrow x^3 y = -\cos x + C \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{C - \cos x}{x^3}. \end{aligned}$$

La cual es la solución general de la ecuación diferencial. □

**Ejemplo 2.3.10** Resolver la ecuación diferencial:  $(\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = x(\operatorname{sen} 2x) \cos x$ .

▼ Dividiendo entre  $\cos x$  para normalizar la ED:

$$y' + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} y = \frac{x(\operatorname{sen} 2x) \cos x}{\cos x} \Rightarrow y' + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} y = x(\operatorname{sen} 2x). \quad (2.4)$$



Calculando el factor integrante:

$$\begin{aligned}\int p(x) dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) = \ln(\cos x)^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(x) &= e^{\int p(x) dx} = e^{\ln(\cos x)^{-1}} = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}.\end{aligned}$$

Multiplicando la ED (2.4) por  $\mu(x)$  y aplicando la igualdad  $(\mu y)' = \mu(y' + py)$ :

$$\frac{1}{\cos x} \left[ y' + \frac{\sin x}{\cos x} y \right] = \frac{1}{\cos x} x \sin 2x \Rightarrow \left[ \frac{1}{\cos x} y \right]' = \frac{2x \sin x \cos x}{\cos x} = 2x \sin x.$$

De donde:

$$\int \left[ \frac{1}{\cos x} y \right]' dx = \int 2x \sin x dx.$$

Integrando por partes la integral de lado derecho:

$$\frac{1}{\cos x} y = -2x \cos x + 2 \sin x + C.$$

Por lo tanto la solución general es:

$$y = -2x \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + C \cos x \Rightarrow y = -2x \cos^2 x + \sin 2x + C \cos x.$$

□

**Ejemplo 2.3.11** Resolver la siguiente ED lineal:  $x' + 2yx = y$ .

▼ En este caso la ED está normalizada. El factor integrante es:

$$\int p(y) dy = \int 2y dy = y^2 \Rightarrow \mu(y) = e^{\int p(y) dy} = e^{y^2}.$$

Multiplicando la ED normalizada por  $\mu(y) = e^{y^2}$  y aplicando la igualdad conocida se tiene:

$$e^{y^2} [x' + 2yx] = ye^{y^2} \Rightarrow [e^{y^2} x]' = ye^{y^2}.$$

Integrando:

$$e^{y^2} x = \int ye^{y^2} dy = \frac{1}{2} e^{y^2} + C.$$

Por lo tanto la solución general es :

$$x = \frac{1}{2} + Ce^{-y^2}.$$

□

**Ejemplo 2.3.12** Resolver la siguiente ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}$ .

▼ Considerando a  $y$  en función de  $x$ , esta ecuación diferencial ordinaria no es lineal; pero si consideramos a  $x$  en función de  $y$  se tiene que:

$$\begin{aligned}(e^y - x) \frac{dy}{dx} &= 1 \Rightarrow e^y - x = \frac{dx}{dy} \Rightarrow \\ \Rightarrow x' + x &= e^y.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial lineal. Para resolverla se procede como en los ejercicios anteriores. El factor integrante es:

$$\int p(y) dy = \int dy = y \Rightarrow \mu(y) = e^y.$$

Entonces multiplicando la ED lineal (2.5) por  $\mu(y)$ , aplicando la igualdad conocida e integrando:

$$\begin{aligned} e^y [x' + x] &= e^y e^y \Rightarrow [e^y x]' = e^{2y} \Rightarrow \int [e^y x]' dy = \int e^{2y} dy \Rightarrow \\ \Rightarrow e^y x + C_1 &= \frac{1}{2} e^{2y} + C_2 \Rightarrow e^y x = \frac{1}{2} e^{2y} + C. \end{aligned}$$

La solución general de la ED es:

$$x = \frac{1}{2} e^y + c e^{-y}.$$

□

**Ejemplo 2.3.13** Resolver el siguiente PVI:  $y' - 2xy = x^3 e^{-x^2}$ ; con la condición  $y(0) = 1$ .

▼ Se tiene:

$$y' - 2xy = x^3 e^{-x^2}. \quad (2.6)$$

El factor integrante es:

$$\int p(x) dx = -2 \int x dx = -x^2 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{-x^2}$$

Multiplicando (2.6) por  $\mu(x)$ , aplicando la igualdad conocida e integrando se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{-x^2} [y' - 2xy] &= x^3 e^{-x^2} e^{-x^2} \Rightarrow [e^{-x^2} y]' = x^3 e^{-2x^2} \\ \int [e^{-x^2} y]' dx &= \int x^3 e^{-2x^2} dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes la integral del lado derecho:

$$\int x^3 e^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4} x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x^2} x dx.$$

Entonces:

$$e^{-x^2} y + C_1 = -\frac{1}{4} x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-2x^2} + C_2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} e^{-2x^2} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) e^{x^2} + C e^{x^2}.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = -\frac{1}{4} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2} + C e^{x^2}.$$

Considerando la condición inicial  $y(0) = 1$ , se tiene que:

$$1 = -\frac{1}{4} \left(0^2 + \frac{1}{2}\right) e^{-0} + C \Rightarrow 1 = -\frac{1}{8} + C \Rightarrow C = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

Por lo tanto, la solución que satisface el PVI es:

$$y = -\frac{1}{4} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2} + \frac{9}{8} e^{x^2}.$$

□

**Ejercicios 2.3.1** Ecuaciones diferenciales lineales. *Soluciones en la página 464*  
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

1.  $y' + 100y = 0$ .
2.  $x' - 10x = 0$ .
3.  $2z' - xz = 0$ .
4.  $xy' - 10y = 0$ .
5.  $(500 - t)S' + 4S = 0$ .
6.  $(100 + 3t)A' + A = 10$ .
7.  $y' + (\cot x)y = 2 \csc x$  con  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .
8.  $(2x + 5)\frac{dy}{dx} + 10y = 10(2x + 5)$  con  $y(0) = 0$ .
9.  $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 3xy = 6x$ .
10.  $xy' + (2x - 3)y = 4x^4$ .
11.  $xy' = 2y + x^2$ .
12.  $y' \cos x + y \operatorname{sen} x - 1 = 0$ .
13.  $x^2 y' + 2xy = x - 1$ .
14.  $(y - 1)x' - x = y(y - 1)^2$ .
15.  $xe^x y' + (x + 1)e^x y = 1$ .
16.  $y^2 dx + (3xy - 4y^3)dy = 0$ .
17.  $(x^2 + 1)dy = (x^3 - 2xy + x)dx$  con  $y(1) = 1$ .
18.  $(y^2 + 1)dx = (1 + xy)dy$  con  $x(1) = 0$ .
19.  $y' \cos x + y \operatorname{sen} x - \cos^3 x = 0$  con  $y(0) = -1$ .
20.  $Ly' + Ry = E \operatorname{sen} wx$  con  $y(0) = 0$ , donde  $L$ ,  $R$ ,  $E$  &  $w$  son constantes positivas.

## 2.4 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

- Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^r, \text{ con } r \neq 0, 1.$$

se denomina **ecuación diferencial de Bernoulli**.

Es claro que si  $r = 0$  entonces tenemos una ecuación diferencial lineal:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^0 \Rightarrow a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x).$$

También si  $r = 1$  entonces tenemos una ecuación diferencial lineal:

$$\begin{aligned} a_0(x)y' + a_1(x)y &= f(x)y \Rightarrow a_0(x)y' + a_1(x)y - f(x)y = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_0(x)y' + [a_1(x) - f(x)]y = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_0(x)y' + h(x)y = 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.4.1** Las siguientes ecuaciones diferenciales son de Bernoulli:

1.  $2y' + \frac{1}{x}y = x^2 y^{-1}$ ; donde  $r = -1$ .
2.  $y' - 2xy = x^3 y^5$ ; donde  $r = 5$ .
3.  $xy' + x^5 y = xy^{\frac{1}{2}}$ ; donde  $r = \frac{1}{2}$ .
4.  $5y^3 dx - y^2(-2x + y^2 x^4) dy = 0$ .

▼ En el caso de esta última ecuación diferencial, haciendo un poco de álgebra se puede llegar a una ecuación de Bernoulli:

$$\begin{aligned} 5y^3 dx - y^2(-2x + y^2 x^4) dy &= 0 \Rightarrow 5y^3 \frac{dx}{dy} - y^2(-2x + y^2 x^4) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5y^3 \frac{dx}{dy} = y^2(-2x + y^2 x^4) \Rightarrow 5y^3 \frac{dx}{dy} = -2y^2 x + y^4 x^4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5y^3 \frac{dx}{dy} + 2y^2 x = y^4 x^4, \end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli para  $x$  en función de  $y$ , con  $r = 4$ .

□

### Resolución de la ecuación diferencial de Bernoulli

- Una ecuación diferencial de Bernoulli:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^r, \text{ con } r \neq 0, 1.$$

se puede convertir en una ecuación diferencial lineal realizando el siguiente procedimiento:

1. Si se multiplica la ED por  $y^{-r}$  se obtiene:

$$a_0(x)y^{-r}y' + a_1(x)y^{1-r} = f(x). \quad (2.7)$$

2. Dado que se busca una ED lineal, esto nos sugiere el cambio de variable:

$$u = y^{1-r}. \quad (2.8)$$

3. Derivando con respecto a  $x$ :

$$u' = \frac{d}{dx}y^{1-r} = (1-r)y^{-r}y' \Rightarrow \frac{1}{1-r}u' = y^{-r}y'. \quad (2.9)$$

Sustituyendo en (2.7) las dos condiciones anteriores (2.8) y (2.9), obtenemos:

$$\frac{a_0(x)}{1-r}u' + a_1(x)u = f(x).$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial lineal para  $u$  en función de  $x$ . (La variable dependiente en este caso es  $u$ ).

4. Esta ecuación diferencial se resuelve con el método de la sección anterior. Posteriormente se reemplaza en la solución general obtenida la variable  $u$  usando  $u = y^{1-r}$  y obtenemos la solución general de la ED original.

**Ejemplo 2.4.2** Resolver la ED:  $2y' + \frac{1}{x}y = x^2y^{-1}$ .

▼ En esta ED de Bernoulli se tiene que  $r = -1$ .  
Multiplicando todo por  $y^{-r} = y^{-(-1)} = y$ :

$$2y'y + \frac{1}{x}y^2 = x^2. \quad (2.10)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = y^{1-r} = y^{1-(-1)} = y^2.$$

Derivando con respecto a  $x$ :

$$u' = \frac{d}{dx}y^2 = 2yy'.$$

Sustituyendo las dos condiciones anteriores en (2.10), obtenemos:

$$u' + \frac{1}{x}u = x^2. \quad (2.11)$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial lineal (para  $u$  en función de  $x$ ) cuyo proceso de resolución se presenta a continuación:

Se tiene que  $p(x) = \frac{1}{x}$ .

Calculando el factor integrante  $\mu(x)$ :

$$\mu = e^{\int p(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} \Rightarrow \mu = e^{\ln x} = x.$$

Multiplicando por  $\mu$  la ecuación diferencial (2.11) y aplicando la igualdad conocida:

$$x \left( u' + \frac{1}{x} u \right) = x^3 \Rightarrow (xu)' = x^3.$$

Integrando:

$$\int (xu)' dx = \int x^3 dx \Rightarrow xu + C_1 = \frac{1}{4}x^4 + C_2 \Rightarrow xu = \frac{1}{4}x^4 + C.$$

Despejando  $u$  y sustituyendo por  $y^2$  se obtiene:

$$u = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x}.$$

Esta última expresión es la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli. □

**Ejemplo 2.4.3** Resolver la ecuación diferencial:  $y' - 2xy = x^3y^5$ .

▼ Se tiene una ED de Bernoulli con  $r = 5$ .

Multiplicando todo por  $y^{-r} = y^{-5}$ :

$$y^{-5}y' - 2xy^{-4} = x^3. \quad (2.12)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = y^{-4}.$$

Derivando con respecto a  $x$ :

$$u' = \frac{d}{dx}y^{-4} = -4y^{-5}y' \Rightarrow \frac{1}{-4}u' = y^{-5}y'.$$

Sustituyendo las dos condiciones anteriores en (2.12), obtenemos:

$$\frac{1}{-4}u' - 2xu = x^3.$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal, la cual se resuelve a continuación.

Multiplicando por  $-4$  para normalizar:

$$u' + 8xu = -4x^3. \quad (2.13)$$

Se tiene que  $p(x) = 8x$ .

Calculando el factor integrante  $\mu(x)$ :

$$\mu = e^{\int p(x) dx} \Rightarrow \mu = e^{\int 8x dx} = e^{4x^2}.$$

Multiplicando por  $\mu$  la ecuación diferencial (2.13) lineal y aplicando la igualdad conocida:

$$e^{4x^2}(u' + 8xu) = -4x^3e^{4x^2} \Rightarrow (e^{4x^2}u)' = -4x^3e^{4x^2}$$

Integrando:

$$\int (e^{4x^2}u)' dx = \int -4x^3e^{4x^2} dx. \quad (2.14)$$

Resolvemos la integral del lado derecho aplicando integración por partes.

$$\begin{aligned}
 \int -4x^3 e^{4x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int x^2 e^{4x^2} 8x dx = \\
 -\frac{1}{2} \left( uv - \int v du \right) &= -\frac{1}{2} \left( x^2 e^{4x^2} - \int e^{4x^2} 2x dx \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} \left( x^2 e^{4x^2} - \frac{1}{4} \int e^{4x^2} 8x dx \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} \left( x^2 e^{4x^2} - \frac{1}{4} e^{4x^2} \right) + C_2 = \\
 &= e^{4x^2} \left( -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} \right) + C_2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u &= x^2 & \& & dv &= e^{4x^2} 8x dx \\
 du &= 2x dx & \& & v &= e^{4x^2}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.14)

$$e^{4x^2} u + C_1 = e^{4x^2} \left( -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} \right) + C_2 \Rightarrow e^{4x^2} u = e^{4x^2} \left( -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} \right) + C.$$

Despejando  $u$  y sustituyendo por  $y^{-4}$  obtenemos:

$$u = \left( -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} \right) + C e^{-4x^2} \Rightarrow y^{-4} = \left( -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} \right) + C e^{-4x^2},$$

que es la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli.

□

**Ejemplo 2.4.4** Resolver la ecuación diferencial:  $xy' + x^5 y = x^5 y^{\frac{1}{2}}$ .

▼ Para esta ecuación de Bernoulli se tiene que  $r = \frac{1}{2}$ .

Multiplicando todo por  $y^{-r} = y^{-\frac{1}{2}}$ :

$$xy' y^{-\frac{1}{2}} + x^5 y^{\frac{1}{2}} = x^5. \quad (2.15)$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = y^{1-r} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}.$$

Derivando con respecto a  $x$ :

$$u' = \frac{d}{dx} y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y' \Rightarrow 2u' = y^{-\frac{1}{2}} y'.$$

Sustituyendo las dos condiciones anteriores en (2.15), obtenemos:

$$2xu' + x^5 u = x^5,$$

que es una ecuación diferencial lineal y su proceso de solución es:

Dividiendo entre  $2x$  para normalizar:

$$u' + \frac{1}{2} x^4 u = \frac{1}{2} x^4. \quad (2.16)$$

Se tiene que  $p(x) = \frac{1}{2} x^4$ .

Calculando el factor integrante  $\mu(x)$ :

$$\mu = e^{\int p(x) dx} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{1}{2}x^4 dx} = e^{\frac{1}{10}x^5}.$$

Multiplicando por  $\mu$  la ecuación diferencial lineal (2.16) y aplicando la igualdad conocida:

$$e^{\frac{1}{10}x^5} \left( u' + \frac{1}{2}x^4 u \right) = e^{\frac{1}{10}x^5} \frac{1}{2}x^4 \Rightarrow \left( e^{\frac{1}{10}x^5} u \right)' = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{10}x^5} x^4.$$


Integrando:

$$\int \left( e^{\frac{1}{10}x^5} u \right)' dx = \frac{1}{2} \int e^{\frac{1}{10}x^5} x^4 dx. \quad (2.17)$$

Resolviendo la integral del lado derecho por sustitución:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int e^{\frac{1}{10}x^5} x^4 dx &= \\ = \int e^{\frac{1}{10}x^5} \frac{1}{2} x^4 dx &= \int e^t dt = e^t = e^{\frac{1}{10}x^5} + C. \end{aligned}$$

$t = \frac{1}{10}x^5 \Rightarrow dt = \left( \frac{1}{2}x^4 \right) dx$



Sustituyendo en (2.17):

$$e^{\frac{1}{10}x^5} u = e^{\frac{1}{10}x^5} + C$$

Despejando  $u$  y sustituyendo por  $y^{\frac{1}{2}}$ , obtenemos:

$$u = 1 + C e^{-\frac{1}{10}x^5} \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = 1 + C e^{-\frac{1}{10}x^5},$$

que es la solución general de la ecuación diferencial dada. □

**Ejemplo 2.4.5** Resolver la ecuación diferencial:  $5y^3 dx - y^2(-2x + y^2x^4) dy = 0$ .

▼ Como vimos anteriormente [Ejemplo 2.4.1, página (53)], considerando a  $y$  como la variable independiente, podemos transformar la ecuación diferencial en

$$5y^3 \frac{dx}{dy} + 2y^2x = y^4x^4,$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli para  $x$  en función de  $y$ , con  $r = 4$ .

Multiplicando todo por  $x^{-r} = x^{-4}$ :

$$5y^3 \frac{dx}{dy} x^{-4} + 2y^2x^{-3} = y^4. \quad (2.18)$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = x^{1-r} = x^{1-4} = x^{-3}.$$

Derivando con respecto a  $y$ :

$$u' = \frac{d}{dy} x^{-3} = -3x^{-4}x' \Rightarrow -\frac{1}{3}u' = x^{-4} \frac{dx}{dy}.$$

Sustituyendo las dos condiciones anteriores en (2.18) anterior, se obtiene:

$$-\frac{5}{3}y^3u' + 2y^2u = y^4. \quad (2.19)$$

que es una ecuación diferencial lineal, para  $u$  en función de  $y$ , cuyo proceso de solución es:

Se divide entre  $-\frac{5}{3}y^3$ , para normalizar la ED:

$$u' - \frac{6}{5}\left(\frac{1}{y}\right)u = -\frac{3}{5}y.$$

Se tiene que  $p(y) = -\frac{6}{5}\left(\frac{1}{y}\right)$ .

Calculando el factor integrante  $\mu(y)$ :

$$\mu = e^{\int p(y) dy} \Rightarrow \mu = e^{\int -\frac{6}{5}\frac{1}{y} dy} = e^{-\frac{6}{5}\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\frac{6}{5}\ln y} = y^{-\frac{6}{5}}.$$

Multiplicando por  $\mu$  la ecuación diferencial lineal (2.19) y aplicando la igualdad conocida:

$$y^{-\frac{6}{5}}\left(u' - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{y}u\right) = y^{-\frac{6}{5}}\left(-\frac{3}{5}y\right) \Rightarrow \left(y^{-\frac{6}{5}}u\right)' = -\frac{3}{5}y^{-\frac{1}{5}}.$$

Integrando:

$$\int \left(y^{-\frac{6}{5}}u\right)' dy = -\frac{3}{5} \int y^{-\frac{1}{5}} dy \Rightarrow y^{-\frac{6}{5}}u + C_1 = -\frac{3}{5} \frac{y^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C_2 \Rightarrow y^{-\frac{6}{5}}u = -\frac{3}{4}y^{\frac{4}{5}} + C.$$

Despejando  $u$  y sustituyendo por  $x^{-3}$  obtenemos:

$$u = -\frac{3}{4}y^2 + Cy^{\frac{6}{5}} \Rightarrow x^{-3} = -\frac{3}{4}y^2 + Cy^{\frac{6}{5}},$$

que es la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli. □

### Ejercicios 2.4.1 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli. Soluciones en la página 464

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1.  $y' + y = xy^2$ .

2.  $y' - 3y = xy^{-4}$ .

3.  $x' - 3x = tx^3$ .

4.  $x' + \frac{1}{5}x = x^{-3}$ .

5.  $s' + 7s = rs^7$ .

6.  $r' - 2r = sr^{-1}$ .

7.  $x^2y' - xy = x^{-7}y^{\frac{1}{2}}$ .

8.  $x^3y' + x^2y = x^7y^{\frac{3}{4}}$ .

9.  $y' + xy = xy^2$ .

10.  $y' - x^2y = x^2y^{-4}$ .

11.  $3(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy(y^3-1)$ .

12.  $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$  con  $y(1) = 1$ .

13.  $y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + y^{\frac{3}{2}} = 1$  con  $y(0) = 4$ .

14.  $e^{-x}(y' - y) = y^2$ .

15.  $y^2 dx + (xy - x^3) dy = 0$ .



## 2.5 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Al tratar con polinomios de más de una variable, se define el grado de cada término como la suma de los grados de sus variables.

1. Consideremos la función de dos variables  $x, y$ :  $F(x, y) = 2x^2y - xy^2 + 4y^3$ .

Observamos que:

- a. Todos los términos tienen el mismo grado 3.
- b. Si multiplicamos ambas variables por el mismo factor  $t$  es posible factorizar  $t^3$ , es decir:

$$\begin{aligned} F(tx, ty) &= 2(tx)^2(ty) - (tx)(ty)^2 + 4(ty)^3 = 2t^3x^2y - t^3xy^2 + 4t^3y^3 = t^3(2x^2y - xy^2 + 4y^3) = \\ &= t^3F(x, y). \end{aligned}$$

- c. Es posible factorizar  $x^3$ :

$$F(x, y) = 2x^2y - xy^2 + 4y^3 = x^3 \left[ 2 \left( \frac{y}{x} \right) - \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 4 \left( \frac{y}{x} \right)^3 \right] = x^3 F \left( 1, \frac{y}{x} \right).$$

- d. Es posible factorizar  $y^3$ :

$$F(x, y) = 2x^2y - xy^2 + 4y^3 = y^3 \left[ 2 \left( \frac{x}{y} \right)^2 - \left( \frac{x}{y} \right) + 4 \right] = y^3 F \left( \frac{x}{y}, 1 \right).$$

2. Sea ahora la función de dos variables  $x, y$ :  $G(x, y) = \sqrt[3]{2x^2y - xy^2 + 4y^3} = (2x^2y - xy^2 + 4y^3)^{\frac{1}{3}}$ .

Observamos que:

- a. Los términos del polinomio dentro de la raíz cubica tienen el mismo grado 3.
- b. Si multiplicamos ambas variables por el mismo factor  $t$  es posible factorizar  $t$ , es decir:

$$\begin{aligned} G(tx, ty) &= \sqrt[3]{2(tx)^2(ty) - (tx)(ty)^2 + 4(ty)^3} = \sqrt[3]{2t^3x^2y - t^3xy^2 + 4t^3y^3} = \\ &= \sqrt[3]{t^3(2x^2y - xy^2 + 4y^3)} = \sqrt[3]{t^3} \sqrt[3]{2x^2y - xy^2 + 4y^3} = \\ &= tG(x, y). \end{aligned}$$

- c. Es posible factorizar  $x$ :

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sqrt[3]{2x^2y - xy^2 + 4y^3} = \sqrt[3]{x^3 \left[ 2 \left( \frac{y}{x} \right) - \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 4 \left( \frac{y}{x} \right)^3 \right]} = x \sqrt[3]{2 \left( \frac{y}{x} \right) - \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 4 \left( \frac{y}{x} \right)^3} = \\ &= xG \left( 1, \frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$

- d. Es posible factorizar  $y$ :

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sqrt[3]{2x^2y - xy^2 + 4y^3} = \sqrt[3]{y^3 \left[ 2 \left( \frac{x}{y} \right)^2 - \left( \frac{x}{y} \right) + 4 \right]} = y \sqrt[3]{2 \left( \frac{x}{y} \right)^2 - \left( \frac{x}{y} \right) + 4} = \\ &= yG \left( \frac{x}{y}, 1 \right). \end{aligned}$$

La siguiente definición generaliza las propiedades antes referidas:

- Una función  $F(x, y)$  es una **función homogénea de grado  $n$**  si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1.  $F(tx, ty) = t^n F(x, y).$
2.  $F(x, y) = x^n F\left(1, \frac{y}{x}\right).$
3.  $F(x, y) = y^n F\left(\frac{x}{y}, 1\right).$

De acuerdo a esta definición tenemos que:

La función  $F(x, y) = 2x^2y - xy^2 + 4y^3$  es homogénea de grado 3.

La función  $G(x, y) = \sqrt[3]{2x^2y - xy^2 + 4y^3}$  es homogénea de grado 1.

Para demostrar que una función de dos variables es homogénea de grado  $n$  sólo es necesario demostrar una de las condiciones. Se acostumbra demostrar la primera condición.

**Ejemplo 2.5.1** Comprobar que la función  $H(x, y) = \sqrt[5]{x^2 + xy}$  es homogénea.



$$\begin{aligned} H(tx, ty) &= \sqrt[5]{(tx)^2 + (tx)(ty)} = \sqrt[5]{t^2x^2 + t^2xy} = \sqrt[5]{t^2(x^2 + xy)} = \sqrt[5]{t^2} \sqrt[5]{x^2 + xy} = \\ &= t^{\frac{2}{5}} \sqrt[5]{x^2 + xy} = t^{\frac{2}{5}} H(x, y). \end{aligned}$$

Vemos que  $H(x, y)$  es una función homogénea de dos variables de grado  $n = \frac{2}{5}$ .

□

**Ejemplo 2.5.2** Verificar que la función  $K(x, y) = \cos\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + \sin\left(\frac{y^3}{x^3}\right)$  es homogénea de grado 0.



$$\begin{aligned} K(tx, ty) &= \cos\left(\frac{(tx)^2}{(ty)^2}\right) + \sin\left(\frac{(ty)^3}{(tx)^3}\right) = \cos\left(\frac{t^2x^2}{t^2y^2}\right) + \sin\left(\frac{t^3y^3}{t^3x^3}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + \sin\left(\frac{y^3}{x^3}\right) = K(x, y) = t^0 K(x, y). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.5.3** Comprobar que  $D(x, y) = x + y - 1$  no es una función homogénea.

▼ Vamos a suponer que  $D(x, y)$  es homogénea, es decir, que cumple con:

$$D(tx, ty) = t^n D(x, y) \text{ para todo } t, x \text{ \& } y \in R \text{ y para algún } n.$$

Tenemos entonces que  $tx + ty - 1 = t^n(x + y - 1)$ .

Evaluando de manera arbitraria en  $x = 1, y = 2$  se tiene:

$$3t - 1 = 2t^n.$$

Evaluando para  $t = 0$  se tiene:

$$-1 = 0.$$

Los resultados anteriores nos proporcionan una contradicción. Por lo que tiene que ser falso lo que hemos supuesto. Por lo anterior se concluye que  $D(x, y)$  no es homogénea.

□

- La ecuación diferencial

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

es **homogénea** si ambas funciones  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  son homogéneas del mismo grado  $n$ .

**Ejemplo 2.5.4** Verificar que la ecuación diferencial  $(x - y) dx + (-2x + y) dy = 0$  es homogénea de grado 1.



$M(x, y) = x - y$  es una función homogénea de grado 1.

$N(x, y) = -2x + y$  es una función homogénea de grado 1.

Ambas funciones son homogéneas del mismo grado.

Por lo tanto la ecuación diferencial es homogénea. □

**Ejemplo 2.5.5** Comprobar que la ecuación diferencial  $(x - y) dx + (-2x + y + 7) dy = 0$  no es homogénea.



$M(x, y) = x - y$  es una función homogénea de grado 1.

$N(x, y) = -2x + y + 7$  no es una función homogénea.

Sólo una de las funciones  $M(x, y)$  &  $N(x, y)$  es homogénea.

Por lo tanto la ecuación diferencial no es homogénea. □

**Ejemplo 2.5.6** Determinar si la siguiente ecuación diferencial  $(x - y) dx + (x^2 - 3xy) dy = 0$  es homogénea.



En este caso:

$M(x, y) = x - y$  es una función homogénea de grado 1.

$N(x, y) = x^2 - 3xy$  es una función homogénea de grado 2.

Ambas funciones son homogéneas pero de grado diferente.

Por lo tanto la ecuación diferencial no es homogénea. □

### 2.5.1 Resolución de ecuaciones diferenciales homogéneas

Presentamos dos procedimientos para resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

Ambos procedimientos consisten en un conjunto de pasos para obtener una ecuación diferencial de variables separables.

- **Primer procedimiento.** Considerando que la variable independiente es  $x$  se despeja  $\frac{dy}{dx}$ :

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \Rightarrow N(x, y) dy = -M(x, y) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad N(x, y) \neq 0.$$

Puesto que ambas funciones  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  son homogéneas del mismo grado  $n$ , podemos factorizar  $x^n$  (la variable independiente es  $x$ ) en el numerador y en el denominador:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}. \quad (2.20)$$

Hacemos el cambio de variable  $u = \frac{y}{x}$  & despejamos  $y$ :

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux.$$

Derivamos con respecto a  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = u \frac{dx}{dx} + x \frac{du}{dx} = u + x \frac{du}{dx}.$$

Sustituimos en (2.20):

$$u + x \frac{du}{dx} = -\frac{M(1, u)}{N(1, u)} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = -\frac{M(1, u)}{N(1, u)} - u.$$

Por depender sólo de la nueva variable  $u$ , el segundo miembro de la ecuación diferencial, se puede considerar que  $-\frac{M(1, u)}{N(1, u)} - u = k(u)$  y obtenemos:

$$x \frac{du}{dx} = k(u).$$

Esta es ya una ecuación diferencial de variables separables.

$$\frac{du}{k(u)} = \frac{dx}{x}.$$

Para obtener la solución de esta ecuación diferencial se integran ambos miembros de la expresión. Posteriormente se sustituye  $u = \frac{y}{x}$  y se obtiene la solución general de la ecuación diferencial homogénea original  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ , considerando a  $x$  como variable independiente.

**Ejemplo 2.5.7** Resolver la ecuación diferencial  $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$ .

▼ Primero se despeja  $\frac{dy}{dx}$  considerando que la variable independiente es  $x$ :

$$\begin{aligned} (x - y) dx + (x + y) dy &= 0 \Rightarrow (x + y) dy = -(x - y) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{x - y}{x + y} = \frac{-(x - y)}{x + y}. \end{aligned}$$

Se factoriza  $x$ , la variable independiente, tanto del numerador como del denominador:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x} = \frac{x \left( \frac{y}{x} - 1 \right)}{x \left( \frac{y}{x} + 1 \right)} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}. \quad (2.21)$$

Se efectúa el cambio de variable  $u = \frac{y}{x}$ , posteriormente se despeja  $y$ :

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux.$$

Derivando con respecto a  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = u + x \frac{du}{dx}.$$

Sustituyendo en (2.21):

$$\begin{aligned} u + x \frac{du}{dx} &= \frac{u - 1}{u + 1} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{u - 1}{u + 1} - u = \frac{(u - 1) - u(u + 1)}{u + 1} = \\ &= \frac{u - 1 - u^2 - u}{u + 1} = \frac{-1 - u^2}{u + 1} = \frac{-(u^2 + 1)}{u + 1} = -\frac{u^2 + 1}{u + 1}. \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene:

$$x \frac{du}{dx} = -\frac{u^2 + 1}{u + 1}.$$

Separando variables:

$$\frac{u + 1}{u^2 + 1} du = -\frac{1}{x} dx.$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{u + 1}{u^2 + 1} du &= -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{u du}{u^2 + 1} + \int \frac{du}{u^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + \arctan u + C_1 = -\ln x + C_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + \arctan u = -\ln x + C, \end{aligned}$$

sustituyendo  $u = \frac{y}{x}$ , se obtiene:

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln x + C,$$

que es la solución general de la ecuación diferencial homogénea dada y que puede ser expresada como:

$$\ln(x^2 + y^2) + 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = C.$$

□

- **Segundo procedimiento.** Considerando que la variable independiente es  $y$ , se despeja  $\frac{dx}{dy}$ :

$$\begin{aligned} M(x, y) dx + N(x, y) dy &= 0 \Rightarrow M(x, y) dx = -N(x, y) dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \end{aligned}$$

Puesto que ambas funciones  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  son homogéneas del mismo grado  $n$ , se puede factorizar  $y^n$  (la variable independiente es  $y$ ) en el numerador y en el denominador:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\cancel{y^n} N\left(\frac{x}{y}, 1\right)}{\cancel{y^n} M\left(\frac{x}{y}, 1\right)} = -\frac{N\left(\frac{x}{y}, 1\right)}{M\left(\frac{x}{y}, 1\right)}. \quad (2.22)$$

Se hace el cambio de variable  $u = \frac{x}{y}$ ; luego se despeja  $x$ :

$$u = \frac{x}{y} \Rightarrow x = uy.$$

Derivando con respecto a  $y$ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(uy) = u \frac{dy}{dy} + y \frac{du}{dy} = u + y \frac{du}{dy}.$$

Sustituimos en (2.22):

$$u + y \frac{du}{dy} = -\frac{N(u, 1)}{M(u, 1)} \Rightarrow y \frac{du}{dy} = -\frac{N(u, 1)}{M(u, 1)} - u.$$

Por depender sólo de la nueva variable  $u$  el segundo miembro de la ecuación diferencial, se puede considerar que  $-\frac{N(u, 1)}{M(u, 1)} - u = h(u)$  y se obtiene:

$$y \frac{du}{dy} = h(u).$$

Esta última expresión es ya una ecuación diferencial de variables separables.

$$\frac{du}{h(u)} = \frac{dy}{y}.$$

Para obtener la solución de esta ecuación diferencial se integran ambos miembros de la expresión. Posteriormente se sustituye  $u = \frac{x}{y}$  y se obtiene de esta manera la solución general de la ecuación diferencial homogénea original  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ , considerando a  $y$  como la variable independiente.

**Ejemplo 2.5.8** Resolver la ecuación diferencial  $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$ .

▼ Esta ecuación diferencial se resolvió anteriormente por medio del primer procedimiento.

Considerando que la variable independiente es  $y$ , se despeja  $\frac{dx}{dy}$ :

$$\begin{aligned}(x - y) dx + (x + y) dy &= 0 \Rightarrow (x - y) dx = -(x + y) dy \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= -\frac{x + y}{x - y} = \frac{x + y}{-(x - y)}.\end{aligned}$$

Se factoriza  $y$  (la variable independiente) tanto del numerador como del denominador:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y + x}{y - x} = \frac{\cancel{y} \left(1 + \frac{x}{y}\right)}{\cancel{y} \left(1 - \frac{x}{y}\right)} = \frac{1 + \frac{x}{y}}{1 - \frac{x}{y}}. \quad (2.23)$$

Se hace el cambio de variable y se despeja  $x$ :

$$u = \frac{x}{y} \Rightarrow x = uy.$$

Derivando con respecto a  $y$ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(uy) = u + y \frac{du}{dy},$$

Se sustituye en (2.23):

$$u + y \frac{du}{dy} = \frac{1 + u}{1 - u} \Rightarrow y \frac{du}{dy} = \frac{1 + u}{1 - u} - u = \frac{(1 + u) - u(1 - u)}{1 - u} = \frac{1 + u - u + u^2}{1 - u} = \frac{1 + u^2}{1 - u}.$$

De esta forma se obtiene una ED de variables separables:

$$y \frac{du}{dy} = \frac{1 + u^2}{1 - u}.$$

Separando variables:

$$\frac{1 - u}{1 + u^2} du = \frac{1}{y} dy,$$

integrando:

$$\int \frac{1 - u}{1 + u^2} du = \int \frac{1}{y} dy \Rightarrow \int \frac{du}{1 + u^2} - \int \frac{u du}{1 + u^2} = \int \frac{dy}{y}$$

Calculando las integrales se obtiene:

$$\arctan u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + C_1 = \ln y + C_2 \Rightarrow \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) = \ln y + C,$$

sustituyendo  $u = \frac{x}{y}$ :

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = \ln y + C,$$

que es la solución general de la ecuación diferencial homogénea dada y que puede expresarse como:

$$2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \ln(x^2 + y^2) = C.$$

□

**Ejemplo 2.5.9** Obtener la solución general de la siguiente ED:  $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ , con  $x > 0$ .

▼ Considerando a  $x$  como la variable independiente se despeja  $\frac{dy}{dx}$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} + \frac{y}{x}.$$

Factorizando  $x$  (la variable independiente) tanto del numerador como del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}}{x} + \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}}{x} + \frac{y}{x} = \\ &= \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}}{x} + \frac{y}{x} = \frac{x \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x} + \frac{y}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Se efectúa el cambio de variable:

$$\frac{y}{x} = w \Rightarrow y = xw,$$

de donde, derivando con respecto a  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xw) = x \frac{dw}{dx} + w.$$

Sustituyendo en (2.24):

$$x \frac{dw}{dx} + w = \sqrt{1 - w^2} + w \Rightarrow x \frac{dw}{dx} = \sqrt{1 - w^2}.$$

Separando variables

$$\frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} &= \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \arcsen w + C_1 &= \ln x + C_2 \Rightarrow \arcsen w = \ln x + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \arcsen w &= \ln x + \ln C \Rightarrow \arcsen w = \ln(Cx). \end{aligned}$$

Hemos usado  $C = \ln C$ . De donde

$$w = \text{sen}[\ln(Cx)].$$

Pero  $w = \frac{y}{x}$ , entonces

$$\frac{y}{x} = \text{sen}[\ln(Cx)],$$

por lo que

$$y = x \text{sen}[\ln(Cx)],$$

es la solución general de la ecuación diferencial homogénea dada. □

**Ejemplo 2.5.10** Obtener la solución general de la ED:  $(x^2 + xy + 3y^2) dx - (x^2 + 2xy) dy = 0$ .

▼ Considerando a  $x$  como la variable independiente se despeja  $\frac{dy}{dx}$ :

$$(x^2 + 2xy) dy = (x^2 + xy + 3y^2) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + 3y^2}{x^2 + 2xy}.$$

Factorizando  $x^2$  (variable independiente) tanto del numerador como del denominador:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{y}{x} + 3\frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + 2\frac{y}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{y}{x} + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (2.25)$$

Efectuando el cambio de variable y derivando con respecto a  $x$ :

$$\frac{y}{x} = w \Rightarrow y = xw \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \frac{dw}{dx} + w.$$

Sustituyendo en (2.25) se obtiene

$$\begin{aligned} x \frac{dw}{dx} + w &= \frac{1 + w + 3w^2}{1 + 2w} \Rightarrow \\ \Rightarrow x \frac{dw}{dx} &= \frac{1 + w + 3w^2}{1 + 2w} - w = \frac{1 + w + 3w^2 - w - 2w^2}{1 + 2w} \Rightarrow \\ \Rightarrow x \frac{dw}{dx} &= \frac{w^2 + 1}{2w + 1}. \end{aligned}$$

Esta última expresión es una ED de variables separables.

$$\frac{2w + 1}{w^2 + 1} dw = \frac{dx}{x}.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{2w}{w^2 + 1} dw + \int \frac{dw}{w^2 + 1} &= \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(w^2 + 1) + \arctan w + C_1 &= \ln x + C_2 \Rightarrow \ln(w^2 + 1) + \arctan w = \ln x + C. \end{aligned}$$

Pero  $w = \frac{y}{x}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + \arctan \frac{y}{x} &= \ln x + C \Rightarrow \ln\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right) - \ln x + \arctan \frac{y}{x} = C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(y^2 + x^2) - \ln x^2 - \ln x + \arctan \frac{y}{x} &= C \Rightarrow \ln(x^2 + y^2) - 3 \ln x + \arctan \frac{y}{x} = C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(x^2 + y^2) - \ln x^3 + \arctan \frac{y}{x} &= C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3}\right) + \arctan \frac{y}{x} &= C. \end{aligned}$$

Esta última expresión es la solución general de la ecuación diferencial homogénea dada. □



**Ejemplo 2.5.11** Obtener la solución general de la ED:  $3x - 4y + (2x - y)y' = 0$ .

▼ En esta ED se puede despejar fácilmente  $\frac{dy}{dx}$ , es decir, considerar a  $x$  como la variable independiente:

$$(2x - y)\frac{dy}{dx} = 4y - 3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}.$$

Factorizando  $x$  (variable independiente) tanto del numerador como del denominador:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\left(4\frac{y}{x} - 3\right)}{x\left(2 - \frac{y}{x}\right)} = \frac{4\left(\frac{y}{x}\right) - 3}{2 - \left(\frac{y}{x}\right)}. \quad (2.26)$$

Efectuando el cambio de variable y derivando con respecto a  $x$ :

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.$$

Sustituyendo en (2.26) se tiene que

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{4u - 3}{2 - u}.$$

De donde

$$x\frac{du}{dx} = \frac{4u - 3}{2 - u} - u = \frac{4u - 3 - 2u + u^2}{2 - u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 + 2u - 3}{2 - u}.$$

Esta última expresión es una ED de variables separables:

$$\frac{2 - u}{u^2 + 2u - 3} du = \frac{dx}{x}.$$

Integrando mediante fracciones parciales el primer miembro de la ecuación:

$$\begin{aligned} \int \frac{-u + 2}{(u + 3)(u - 1)} du &= \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{5}{4} \int \frac{du}{u + 3} + \frac{1}{4} \int \frac{du}{u - 1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{5}{4} \ln(u + 3) + \frac{1}{4} \ln(u - 1) + C_1 &= \ln x + C_2 \Rightarrow -\frac{5}{4} \ln(u + 3) + \frac{1}{4} \ln(u - 1) = \ln x + C \end{aligned}$$

Multiplicando por 4 (y usando  $C = 4C$  &  $C = \ln C$ ):

$$\begin{aligned} -5 \ln(u + 3) + \ln(u - 1) &= 4 \ln x + C \Rightarrow \ln(u - 1) - \ln(u + 3)^5 = \ln x^4 + \ln C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left[ \frac{u - 1}{(u + 3)^5} \right] &= \ln(Cx^4) \Rightarrow \frac{u - 1}{(u + 3)^5} = Cx^4 \Rightarrow \\ \Rightarrow u - 1 &= Cx^4(u + 3)^5. \end{aligned}$$

Pero  $u = \frac{y}{x}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} - 1 &= Cx^4 \left( \frac{y}{x} + 3 \right)^5 \Rightarrow \frac{y - x}{x} = Cx^4 \left( \frac{y + 3x}{x} \right)^5 \Rightarrow \\ \Rightarrow y - x &= Cx^5 \frac{(y + 3x)^5}{x^5} \Rightarrow y - x = C(y + 3x)^5. \end{aligned}$$

que es la solución general de la ecuación diferencial dada. □

**Ejemplo 2.5.12** Obtener la solución general del PVI:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x}$ , con la condición  $y(1) = \frac{\pi}{4}$ .

▼ Separando en dos fracciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.27)$$

Realizando el cambio de variable y derivando con respecto a  $x$ :

$$\frac{y}{x} = w \Rightarrow y = wx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \frac{dw}{dx} + w.$$

Sustituyendo en (2.27) y simplificando se obtiene:

$$x \frac{dw}{dx} + w = w + \cos^2 w \Rightarrow x \frac{dw}{dx} = \cos^2 w,$$

que es una ED de variables separables:

$$\frac{dw}{\cos^2 w} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando:

$$\int \sec^2 w \, dw = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \tan w = \ln x + C.$$

Pero  $w = \frac{y}{x}$ , entonces

$$\tan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + C.$$

Considerando la condición inicial  $y(1) = \frac{\pi}{4}$  se tiene que:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln 1 + C \Rightarrow C = 1, \quad \text{ya que } \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{y}{x}\right) &= \ln x + 1 = \ln x + \ln e = \ln(ex) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{y}{x} = \arctan[\ln(ex)] \Rightarrow y = x \arctan[\ln(ex)], \end{aligned}$$

que es la solución de la ED con la condición  $y(1) = \frac{\pi}{4}$ . □

**Ejemplo 2.5.13** Obtener la solución general del PVI:  $y \, dx + x(\ln x - \ln y - 1) \, dy = 0$ ; con la condición  $y(1) = e$ .

▼ Vamos resolver este PVI por dos procedimientos:

1. Considerando a  $x$  como la variable independiente se despeja  $\frac{dy}{dx}$ :

$$x(\ln x - \ln y - 1)dy = -y \, dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x(\ln x - \ln y - 1)}.$$

Factorizando  $x$  tanto del numerador como del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{y}{x}}{\ln y + 1 - \ln x} = \frac{\frac{y}{x}}{\ln y + \ln e - \ln x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{\ln \frac{ye}{x}} = \frac{\frac{y}{x}}{\ln\left(e \frac{y}{x}\right)}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Haciendo el cambio de variable y derivando con respecto a  $x$ :

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u.$$

Sustituyendo en (2.28) se obtiene

$$\begin{aligned} x \frac{du}{dx} + u &= \frac{u}{\ln eu} = \frac{u}{1 + \ln u} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 + \ln u} - u = \frac{u - u - u \ln u}{1 + \ln u} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \frac{du}{dx} = -\frac{u \ln u}{1 + \ln u}. \end{aligned}$$

Esta última expresión es una ED de variable separables:

$$\frac{1 + \ln u}{u \ln u} du = -\frac{dx}{x}.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u \ln u} + \int \frac{du}{u} &= -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(\ln u) + \ln u = -\ln x + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln(\ln u) + \ln u + \ln x = C \Rightarrow \ln(xu \ln u) = C. \end{aligned}$$

Pero  $u = \frac{y}{x}$ , entonces

$$\ln \left[ x \frac{y}{x} \ln \left( \frac{y}{x} \right) \right] = C \Rightarrow \ln \left[ y \ln \frac{y}{x} \right] = C.$$

Considerando la condición inicial  $y(1) = e$ , se tiene que:

$$\ln \left[ e \ln \frac{e}{1} \right] = C \Rightarrow C = 1.$$

Por lo que

$$\ln \left[ y \ln \frac{y}{x} \right] = 1 \Rightarrow y \ln \frac{y}{x} = e,$$

que es la solución de la ED con  $y(1) = e$ .

2. Otro procedimiento es considerar a  $y$  como la variable independiente y despejar entonces a  $\frac{dx}{dy}$ :

$$\begin{aligned} y dx &= -x(\ln x - \ln y - 1) dy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}(\ln x - \ln y - 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} \left[ \ln \left( \frac{x}{y} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Considerando que  $\frac{x}{y} = w$ , despejando  $x$  y derivando con respecto a  $y$ :

$$\frac{x}{y} = w \Rightarrow x = yw \Rightarrow \frac{dx}{dy} = y \frac{dw}{dy} + w.$$

Sustituyendo en la última ED, se obtiene:

$$y \frac{dw}{dy} + w = -w(\ln w - 1) \Rightarrow y \frac{dw}{dy} = -w \ln w + w - w \Rightarrow y \frac{dw}{dy} = -w \ln w,$$

que es una ED de variables separables:

$$\frac{dw}{w \ln w} = -\frac{dy}{y}.$$

Integrando:

$$\int \frac{dw}{w \ln w} = - \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(\ln w) = -\ln y + C \Rightarrow \ln(\ln w) + \ln y = C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(y \ln w) = C \Rightarrow y \ln w = C$$

Pero  $w = \frac{x}{y}$ , entonces:

$$y \ln \left( \frac{x}{y} \right) = C.$$

Considerando la condición inicial  $y(1) = e$ :

$$C = e \ln \left( \frac{1}{e} \right) = e(\ln 1 - \ln e) = e(0 - 1) = -e \Rightarrow C = -e.$$

Por lo tanto, la solución de PVI es:

$$y \ln \left( \frac{x}{y} \right) = -e.$$

□

**Ejercicios 2.5.1** Ecuaciones diferenciales homogéneas. *Soluciones en la página 464*  
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1.  $x dx + (y - 2x) dy = 0$ .
2.  $(-t + r) dt + (7t - 4r) dr = 0$ .
3.  $(2x - y) dx + (-3x + 5y) dy = 0$ .
4.  $xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0$ .
5.  $x \frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
6.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$ .
7.  $xy dy = (y^2 - xy + x^2) dx$ .
8.  $(x^2 + y^2)y' + xy = 0$ .
9.  $(y^2 + 3xy) dx = (4x^2 + xy) dy$ .
10.  $xy' \sin^2 \left( \frac{y}{x} \right) = x + y \sin^2 \left( \frac{y}{x} \right)$ .
11.  $(x^2 - 8xy - 4y^2) dy = (x^2 + 2xy - 4y^2) dx$ .
12.  $xy^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - x^3$ ; con  $y(1) = 2$ .
13.  $xy' \arctan \left( \frac{y}{x} \right) + x = y \arctan \left( \frac{y}{x} \right)$ .
14.  $y dx + x(\ln x - \ln y - 1) dy = 0$  con  $y(1) = e$ .
15.  $yx \left( \frac{dx}{dy} \right) + y^2 e^{-\frac{x}{y}} = x^2$ .
16.  $xy'(\ln y - \ln x) + x = y(\ln y - \ln x)$ .
17.  $(x + 3y) dy = (x - y) dx$  con  $y(1) = 0$ .
18.  $xy' + xe^{\frac{y}{x}} = y$  con  $y(1) = 0$ .
19.  $(x - y) dy = (x + y) dx$  con  $y(-1) = 0$ .
20.  $y dx = x(\ln x - \ln y) dy$  con  $x(1) = 1$ .

## 2.6 Ecuaciones diferenciales exactas

Antes de abordar este tema sugerimos al lector revise la última sección de este capítulo, la cual trata sobre algunos conocimientos básicos y necesarios del cálculo de varias variables. Ahí se define la diferencial exacta o total de una función de dos variables  $f(x, y)$  de la siguiente manera:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Comenzamos entonces con una definición básica.

- Una expresión  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  es una ecuación diferencial **exacta** si cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:
  1.  $M(x, y) dx + N(x, y) dy$  es la diferencial exacta de una función  $f$ .
  2. Existe una función  $f(x, y)$  tal que  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ .
  3. Existe una función  $f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$  &  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ .
- Si  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  es una ecuación diferencial exacta, entonces se puede expresar como  $df(x, y) = 0$  para alguna función  $f(x, y)$ , por lo que

$$df(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) = C,$$

donde  $C$  es una constante arbitraria.

Diremos entonces que  $f(x, y) = C$ , con  $C \in \mathbb{R}$ , es **la solución general** de la ecuación diferencial exacta  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ .

**Ejemplo 2.6.1** *Mostrar que la ED  $(3x^2 - y) dx + (3y^2 - x) dy = 0$  es exacta y que tiene por solución general  $x^3 - xy + y^3 = C$ .*

▼ En efecto,

$$f(x, y) = x^3 - xy + y^3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 3y^2.$$

Luego:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (3x^2 - y) dx + (3y^2 - x) dy.$$

Por lo que:

$$(3x^2 - y) dx + (3y^2 - x) dy = 0 \text{ es una ecuación diferencial exacta.}$$

Su solución general es  $f(x, y) = C$ . Esto es:

$$x^3 - xy + y^3 = C.$$

□

**Ejemplo 2.6.2** *Mostrar que la ED  $(\sin y + y \sin x) dx + (x \cos y - \cos x) dy = 0$  es exacta y que tiene por solución general  $x \sin y - y \cos x = C$ .*

▼ En efecto,

$$f(x, y) = x \sin y - y \cos x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \sin y + y \sin x \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y - \cos x.$$

Luego:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (\sin y + y \sin x) dx + (x \cos y - \cos x) dy = 0 \text{ es una ED exacta.}$$

Y su solución general es  $f(x, y) = C$ . Esto es:

$$x \sin y - y \cos x = C.$$

□

En los dos ejemplos anteriores, la solución general  $f(x, y) = C$ , cuya diferencial total  $df$  aparece en la ecuación diferencial exacta  $df(x, y) = 0$ , fue proporcionada. Sin embargo, usualmente no sucede así, pues tenemos la ED y buscamos su solución. Esto plantea las interrogantes:

1. ¿Qué hacer cuando no se conoce la función  $f(x, y)$ , solución de la ecuación diferencial?.
2. ¿Cómo identificar si una ecuación en su forma diferencial es exacta?.
3. Y una vez identificada, ¿cómo calcular o determinar la función  $f(x, y)$ , solución de la ecuación diferencial?.

Las respuestas a estas preguntas están dadas en el siguiente teorema.

**Teorema.** Si  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$ ,  $\frac{\partial M}{\partial y}$ , &  $\frac{\partial N}{\partial x}$  son funciones continuas en una región rectangular

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \text{ \& } \alpha < y < \beta \right\},$$

entonces

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \text{ es exacta si y solo si } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

en cada punto  $(x, y) \in R$ .

El teorema anterior es equivalente al siguiente teorema:

**Teorema.** Si  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$ ,  $\frac{\partial M}{\partial y}$ , &  $\frac{\partial N}{\partial x}$  son funciones continuas en una región rectangular

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \text{ \& } c < y < d \right\},$$

entonces existe  $f(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \text{ si y solo si } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

en cada punto  $(x, y) \in R$ .

Vamos a dar un esbozo de la demostración de este teorema.

$\Rightarrow$ ) Si existe  $f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$  &  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$  entonces  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ .

▼ En efecto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_x = f_{xy}.$$

También

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{yx}.$$

Pero  $f_{xy} = f_{yx}$  por las condiciones de continuidad de la hipótesis del teorema. Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Esta igualdad es la que nos permite identificar a una ED exacta.

□

$\Leftarrow$ ) Si  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  entonces existe  $f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$  &  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ .

▼ Para demostrar la existencia de la función  $f(x, y)$  debemos construirla de tal manera que cumpla con las condiciones  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$  &  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ .

Partiendo de la primera condición  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$  e integrando con respecto a  $x$  se tiene:

$$\int^x \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int^x M(x, y) dx \Rightarrow f(x, y) = \int^x M(x, y) dx = P(x, y) + h(y), \quad (2.29)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial x} P(x, y) = M(x, y)$  &  $h(y)$  es la *constante de integración*, que en este caso debe ser una función únicamente de  $y$ .

Derivando respecto a  $y$  esta función  $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y) + h(y)] = P_y(x, y) + h'(y).$$

Al utilizar la segunda condición  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$  se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \Leftrightarrow P_y(x, y) + h'(y) = N(x, y) \Leftrightarrow h'(y) = N(x, y) - P_y(x, y),$$

de donde, integrando con respecto a  $y$ :

$$h(y) = \int^y [N(x, y) - P_y(x, y)] dy.$$

Finalmente sustituimos  $h(y)$  en (2.29) y se obtiene:

$$f(x, y) = P(x, y) + \int^y [N(x, y) - P_y(x, y)] dy.$$

que es la función buscada. El desarrollo anterior es precisamente el procedimiento que debemos seguir para la obtención de la función  $f(x, y)$ .

□

Comentarios a la demostración:

1. Para la obtención de  $h(y)$ , integramos con respecto a  $y$  la expresión de  $h'(y)$ :

$$h'(y) = N(x, y) - P_y(x, y)$$

Al efectuar la integración supusimos que  $h'(y)$  sólo depende de  $y$ . Comprobemos que esto, en efecto, es cierto. Vamos a verificar que no depende de  $x$  demostrando que  $\frac{\partial}{\partial x} h'(y) = 0$ .

$$\begin{aligned} h'(y) &= N(x, y) - P_y(x, y) = \\ &= N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int^x M(x, y) dx = \\ &= N(x, y) - \int^x \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) dx = \\ &= N(x, y) - \int^x M_y(x, y) dx \end{aligned}$$

Estamos considerando que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int^x \phi(x, y) dx = \int^x \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y) dx$$

y que

$$\frac{\partial}{\partial x} \int^x \phi(x, y) dx = \phi(x, y)$$

Derivamos con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} h'(y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x, y) - \int^x M_y(x, y) dx \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int^x M_y(x, y) dx = N_x(x, y) - M_y(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Ya que, por hipótesis se tiene,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ .

2. Para la obtención de la función  $f(x, y)$  pudimos haber partido de la segunda condición  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ , para luego llevar a cabo un desarrollo análogo al realizado:

- a. Integrar  $N(x, y)$  con respecto a  $y$  para tener  $f(x, y)$ .
- b. Derivar el resultado del paso anterior con respecto a  $x$  para tener  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .
- c. Utilizar la primera condición  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$ .
- d. Despejar  $h'(x)$  de la ecuación anterior.
- e. Integrar respecto a  $x$  para obtener  $h(x)$ .
- f. Sustituir  $h(x)$  en  $f(x, y)$  para así tener la función buscada.

**Ejemplo 2.6.3** Resolver la ED:  $(3x^2 - y) dx + (3y^2 - x) dy = 0$ .

▼ Primero verificamos que la ED es exacta:

$$\begin{aligned}
 (3x^2 - y) dx + (3y^2 - x) dy = 0 &\Rightarrow M = 3x^2 - y \text{ \& } N = 3y^2 - x \Rightarrow \\
 &\Rightarrow M_y = -1 \text{ \& } N_x = -1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{ la ecuación diferencial es exacta } \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \text{ Existe una función } f(x, y) \text{ tal que } df = M dx + N dy \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \text{ Existe una función } f(x, y) \text{ tal que } \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = M dx + N dy \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \text{ Existe una función } f(x, y) \text{ tal que } \frac{\partial f}{\partial x} = M \text{ \& } \frac{\partial f}{\partial y} = N.
 \end{aligned}$$

Luego la resolvemos, es decir, debemos determinar la función  $f(x, y)$ . Partimos de  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ , e integramos con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned}
 \int^x \frac{\partial f}{\partial x} dx &= \int^x M dx \Rightarrow f(x, y) = \int^x M dx = \int^x (3x^2 - y) dx = \beta \left( \frac{x^3}{\beta} \right) - yx + h(y) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f(x, y) = x^3 - xy + h(y)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Nuestro objetivo ahora es encontrar  $h(y)$ , para determinar totalmente a  $f(x, y)$ . Derivamos la expresión anterior con respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^3 - xy + h(y)] = 0 - x \cdot 1 + h'(y) = -x + h'(y).$$

Utilizamos la condición  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ :

$$-x + h'(y) = 3y^2 - x.$$

Despejamos  $h'(y)$ :

$$h'(y) = 3y^2.$$

Integrando con respecto a  $y$  se obtiene:

$$h(y) = \int 3y^2 dy = \beta \left( \frac{y^3}{\beta} \right) + C_1 = y^3 + C_1.$$



Sustituimos  $h(y)$  en (2.30) para obtener:

$$f(x, y) = x^3 - xy + y^3 + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es:

$$\begin{aligned} f(x, y) = C_2 &\Rightarrow x^3 - xy + y^3 + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^3 - xy + y^3 = C. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.6.4** Resolver la ED:  $(\sin y + y \sin x) dx + (x \cos y - \cos x) dy = 0$ .

▼ Primero verificamos que la ED es exacta:

$$\begin{aligned} (\sin y + y \sin x) dx + (x \cos y - \cos x) dy = 0 &\Rightarrow M = \sin y + y \sin x \quad \& \quad N = x \cos y - \cos x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} M_y &= \cos y + \sin x \\ N_x &= \cos y + \sin x \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{la ED es exacta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Existe una función } f(x, y) \text{ tal que } \frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N. \end{aligned}$$

Luego encontramos  $f(x, y)$ . Partimos de  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$  e integramos con respecto a  $y$ :

$$\begin{aligned} \int^y \frac{\partial f}{\partial y} dy &= \int^y N dy \Rightarrow f(x, y) = \int^y N dy = \int^y (x \cos y - \cos x) dy = x \sin y - (\cos x)y + h(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x, y) = x \sin y - y \cos x + h(x). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Derivamos con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [x \sin y - y \cos x + h(x)] = \sin y - y(-\sin x) + h'(x).$$

Utilizamos la condición  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$  para despejar  $h'(x)$ :

$$\sin y - y(-\sin x) + h'(x) = \sin y + y \sin x \Rightarrow h'(x) = 0.$$

Integrando se obtiene:

$$h(x) = C_1.$$

Sustituimos  $h(x)$  en (2.31) para obtener:

$$f(x, y) = x \sin y - y \cos x + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es:

$$\begin{aligned} f(x, y) = C_2 &\Rightarrow x \sin y - y \cos x + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \sin y - y \cos x = C. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.6.5** Resolver la ED:  $(2e^{2x} \sin 3y + 3e^{2y} \sin 3x) dx + (3e^{2x} \cos 3y - 2e^{2y} \cos 3x) dy = 0$ .

▼ En este caso:

$$\begin{aligned} M &= 2e^{2x} \sin 3y + 3e^{2y} \sin 3x \quad \& \quad N = 3e^{2x} \cos 3y - 2e^{2y} \cos 3x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} M_y &= 2e^{2x} (3 \cos 3y) + (3 \sin 3x) 2e^{2y} &= 6e^{2x} \cos 3y + 6e^{2y} \sin 3x \\ N_x &= (3 \cos 3y) 2e^{2x} - 2e^{2y} (-3 \sin 3x) &= 6e^{2x} \cos 3y + 6e^{2y} \sin 3x \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y = N_x. \end{aligned}$$

De lo anterior, la ED es exacta. Entonces existe una función  $f(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

Partimos de  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$  e integramos con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\partial f}{\partial x} dx &= \int^x M dx \Rightarrow f(x, y) = \int^x M dx = \int^x (2e^{2x} \sen 3y + 3e^{2y} \sen 3x) dx = \\ &= (\sen 3y) \int e^{2x} 2 dx + e^{2y} \int (\sen 3x) 3 dx = \\ &= (\sen 3y)e^{2x} + e^{2y}(-\cos 3x) + h(y) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= e^{2x} \sen 3y - e^{2y} \cos 3x + h(y). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Derivamos con respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}(\cos 3y)3 - (\cos 3x)2e^{2y} + h'(y).$$

Utilizamos la condición  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$  para despejar  $h'(y)$ :

$$3e^{2x} \cos 3y - 2e^{2y} \cos 3x + h'(y) = 3e^{2x} \cos 3y - 2e^{2y} \cos 3x \Rightarrow h'(y) = 0.$$

Integrando se obtiene:

$$h(y) = C_1.$$

Sustituimos  $h(y)$  en (2.32) para obtener:

$$f(x, y) = e^{2x} \sen 3y - e^{2y} \cos 3x + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= C_2 \Rightarrow e^{2x} \sen 3y - e^{2y} \cos 3x + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{2x} \sen 3y - e^{2y} \cos 3x = C. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.6.6** Resolver la ED:  $(ye^{xy} + 2x - 1) dx + (xe^{xy} - 2y + 1) dy = 0$ .

▼ Verificamos que la ED es exacta:

$$\left. \begin{aligned} M &= ye^{xy} + 2x - 1 \Rightarrow M_y = y(e^{xy}x) + e^{xy}(1) = e^{xy}(xy + 1) \\ N &= xe^{xy} - 2y + 1 \Rightarrow N_x = x(e^{xy}y) + e^{xy}(1) = e^{xy}(xy + 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{la ED es exacta.}$$

Entonces existe una función  $f(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

Partimos de  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$  e integramos con respecto a  $y$ :

$$\begin{aligned} \int^y \frac{\partial f}{\partial y} dy &= \int^y N dy \Rightarrow f(x, y) = \int^y N dy = \int^y (xe^{xy} - 2y + 1) dy = \int^y (e^{xy}x - 2y + 1) dy \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= e^{xy} - y^2 + y + h(x). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Derivamos con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[e^{xy} - y^2 + y + h(x)] = e^{xy}y + h'(x).$$

Utilizamos la condición  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$  para despejar  $h'(x)$ :

$$ye^{xy} + h'(x) = ye^{xy} + 2x - 1 \Rightarrow h'(x) = 2x - 1.$$

Integrando se obtiene:

$$h(x) = \int (2x - 1) dx = x^2 - x + C_1.$$

Sustituimos  $h(x)$  en (2.33) para obtener:

$$f(x, y) = e^{xy} - y^2 + y + x^2 - x + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es:

$$\begin{aligned} f(x, y) = C_2 &\Rightarrow e^{xy} - y^2 + y + x^2 - x + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{xy} - y^2 + y + x^2 - x = C. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.6.7** Determinar el valor de la constante  $k$  de modo que resulte exacta la siguiente ecuación diferencial:

$$(kx^2y + e^y) dx + (x^3 + xe^y - y) dy = 0.$$

▼ Para esta ED se tiene:

$$\begin{aligned} M &= kx^2y + e^y \Rightarrow M_y = kx^2 + e^y. \\ N &= x^3 + xe^y - y \Rightarrow N_x = 3x^2 + e^y. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial es exacta si se cumple

$$M_y = N_x \Rightarrow kx^2 + e^y = 3x^2 + e^y \Rightarrow kx^2 = 3x^2 \Rightarrow k = 3.$$

Por lo tanto la ecuación diferencial es exacta cuando  $k = 3$ .

□

**Ejemplo 2.6.8** Obtener alguna función  $M(x, y)$  de modo que la siguiente ecuación diferencial sea exacta:

$$M(x, y) dx + (x^3 + xe^y - y) dy = 0.$$

▼ Partimos del conocimiento de la función  $N(x, y)$ :

$$N = x^3 + xe^y - y \Rightarrow N_x = 3x^2 + e^y.$$

La ecuación diferencial es exacta si cumple:

$$M_y = N_x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + e^y.$$

Entonces, integrando esta última expresión se tiene:

$$\int^y \frac{\partial M}{\partial y} dy = \int^y (3x^2 + e^y) dy \Rightarrow M(x, y) = \int^y (3x^2 + e^y) dy = 3x^2y + e^y + h(x).$$

Donde  $h(x)$  es cualquier función de  $x$ , esto es, que no dependa de  $y$ .

$M(x, y)$  podría ser, entre otras funciones:

$$M(x, y) = 3x^2y + e^y + \arctan x;$$

$$\text{donde } h(x) = \arctan x.$$

$$M(x, y) = 3x^2y + e^y + x \ln x;$$

$$\text{donde } h(x) = x \ln x.$$

$$M(x, y) = 3x^2y + e^y + C;$$

$$\text{donde } h(x) = C.$$

□

**Ejemplo 2.6.9** Determinar alguna función  $N(x, y)$  de modo que la siguiente ecuación diferencial sea exacta:

$$(y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x) dx + N(x, y) dy = 0.$$

▼ Partimos del conocimiento de la función  $M(x, y)$ :

$$M = y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x \Rightarrow M_y = 2y \cos x - 3x^2.$$

La ecuación diferencial es exacta si cumple:

$$M_y = N_x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \cos x - 3x^2.$$

Entonces, integrando:

$$\int^x \frac{\partial N}{\partial x} dx = \int^x (2y \cos x - 3x^2) dx \Rightarrow N(x, y) = \int^x (2y \cos x - 3x^2) dx = 2y \sin x - x^3 + h(y).$$

Donde  $h(y)$  es cualquier función de  $y$ , esto es, depende de  $x$ .

$N(x, y)$  podría ser, entre otras funciones, cualquiera de las siguientes:

$$\begin{array}{ll} N(x, y) = 2y \sin x - x^3 + \ln y; & \text{donde } h(y) = \ln y. \\ N(x, y) = 2y \sin x - x^3 - ye^y; & \text{donde } h(y) = -ye^y. \\ N(x, y) = 2y \sin x - x^3 + C; & \text{donde } h(y) = C. \end{array}$$

□

**Ejemplo 2.6.10** Resolver el siguiente PVI:

$$3y^2 + 2y \sin 2x = \left( \cos 2x - 6xy - \frac{4}{1+y^2} \right) y'; \text{ con } y(0) = 1.$$

▼ Primero obtenemos la solución general de la ecuación diferencial y luego aplicamos la condición inicial:

$$\begin{aligned} 3y^2 + 2y \sin 2x &= \left( \cos 2x - 6xy - \frac{4}{1+y^2} \right) y' \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y^2 + 2y \sin 2x &= \left( \cos 2x - 6xy - \frac{4}{1+y^2} \right) \frac{dy}{dx} \Rightarrow \\ \Rightarrow (3y^2 + 2y \sin 2x) dx - \left( \cos 2x - 6xy - \frac{4}{1+y^2} \right) dy &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (3y^2 + 2y \sin 2x) dx + \left( 6xy - \cos 2x + \frac{4}{1+y^2} \right) dy &= 0. \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} M = 3y^2 + 2y \sin 2x &\Rightarrow M_y = 6y + 2 \sin 2x \\ N = 6xy - \cos 2x + \frac{4}{1+y^2} &\Rightarrow N_x = 6y + 2 \sin 2x \end{aligned} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{la ED es exacta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Existe una función } f(x, y) \text{ tal que } \frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

Partimos de  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$  e integramos con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\partial f}{\partial x} dx &= \int^x M dx \Rightarrow f(x, y) = \int^x M dx = \int^x (3y^2 + 2y \sin 2x) dx = 3y^2 x + y(-\cos 2x) + h(y) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= 3y^2 x + y(-\cos 2x) + h(y). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Derivamos con respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[3y^2x + y(-\cos 2x) + h(y)] = 6xy - \cos 2x + h'(y).$$

Utilizamos la condición  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$  para despejar  $h'(y)$ :

$$6xy - \cos 2x + h'(y) = 6xy - \cos 2x + \frac{4}{1+y^2} \Rightarrow h'(y) = \frac{4}{1+y^2}.$$

Integrando se obtiene:

$$h(y) = \int \frac{4}{1+y^2} dy = 4 \arctan y + C_1.$$

Sustituimos  $h(y)$  en (2.34) para obtener:

$$f(x, y) = 3xy^2 - y \cos 2x + 4 \arctan y + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es:

$$\begin{aligned} f(x, y) = C_2 &\Rightarrow 3xy^2 - y \cos 2x + 4 \arctan y + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3xy^2 - y \cos 2x + 4 \arctan y = C. \end{aligned}$$

Finalmente se aplica la condición inicial:  $y(0) = 1 \Rightarrow y = 1$  &  $x = 0$ :

$$3(0)1^2 - 1 \cos 0 + 4 \arctan 1 = C \Rightarrow 0 - 1 + 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = C \Rightarrow C = \pi - 1.$$

Por lo tanto la solución del PVI es:

$$3xy^2 - y \cos 2x + 4 \arctan y = \pi - 1.$$

□

**Ejemplo 2.6.11** Resolver la ED:  $y \cos x + 2xe^y + 1 + (\sin x + x^2e^y + 2y - 3)y' = 0$ .

▼ Se tiene que:

$$(y \cos x + 2xe^y + 1) dx + (\sin x + x^2e^y + 2y - 3) dy = 0. \quad (2.35)$$

Entonces

$$\left. \begin{aligned} M &= y \cos x + 2xe^y + 1 \Rightarrow M_y = \cos x + 2xe^y \\ N &= \sin x + x^2e^y + 2y - 3 \Rightarrow N_x = \cos x + 2xe^y \end{aligned} \right\} \text{ ya que } M_y = N_x, \text{ entonces (2.35) es una ED exacta.}$$

Por lo tanto, existe  $f(x, y)$  tal que  $f_x = M$  &  $f_y = N$ .

Partiendo de:

$$f_x = M = y \cos x + 2xe^y + 1.$$

Integrando con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned} \int^x f_x dx &= \int^x M dx \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= \int^x M dx = \int^x (y \cos x + 2xe^y + 1) dx = y \int^x \cos x dx + 2e^y \int^x x dx + \int^x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= y \sin x + x^2e^y + x + h(y). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Derivando parcialmente con respecto a  $y$ :

$$f_y = \operatorname{sen} x + x^2 e^y + h'(y).$$

Utilizando la condición  $f_y = N$  para despejar  $h'(y)$ :

$$f_y = N = \operatorname{sen} x + x^2 e^y + 2y - 3.$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x + x^2 e^y + h'(y) &= \operatorname{sen} x + x^2 e^y + 2y - 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(y) &= 2y - 3. \end{aligned}$$

Integrando:

$$h(y) = y^2 - 3y + C_1.$$

Sustituyendo  $h(y)$  en (2.36), obtenemos:

$$f(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + x + y^2 - 3y + C_1.$$

Entonces la solución general de la ED dada, es:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + x + y^2 - 3y + C_1 &= C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + x + y^2 - 3y &= C. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.6.12** Resolver el PVI:  $(2xy + 2y^2 e^{2x} - \operatorname{sen} x) dx + (x^2 + 2ye^{2x} + \ln y) dy = 0$ ; con  $y(0) = 1$ .

▼ Se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M &= 2xy + 2y^2 e^{2x} - \operatorname{sen} x \Rightarrow M_y = 2x + 4ye^{2x} \\ N &= x^2 + 2ye^{2x} + \ln y \Rightarrow N_x = 2x + 4ye^{2x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y = N_x \text{ entonces la ED es exacta.}$$

Por lo tanto existe  $f(x, y)$ , tal que  $f_x = M$  &  $f_y = N$ .

Partiendo de

$$f_y = N = x^2 + 2ye^{2x} + \ln y.$$

Integrando con respecto a  $y$ :

$$\begin{aligned} \int^y f_y dy &= \int^y N dy \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= \int^y N dy = \int^y (x^2 + 2ye^{2x} + \ln y) dy = x^2 \int dy + 2e^{2x} \int y dy + \int \ln y dy \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= x^2 y + y^2 e^{2x} + y \ln y - y + h(x). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Derivando parcialmente con respecto a  $x$ :

$$f_x = 2xy + 2y^2 e^{2x} + h'(x).$$

Utilizando la condición  $f_x = M$ , para despejar  $h'(x)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} 2xy + 2y^2 e^{2x} + h'(x) &= 2xy + 2y^2 e^{2x} - \operatorname{sen} x \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow \\ \Rightarrow h(x) &= \cos x + C_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $h(x)$  en (2.37) se obtiene:

$$f(x, y) = x^2 y + y^2 e^{2x} + y \ln y - y + \cos x + C_1,$$

entonces la solución general de la ED, es:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 y + y^2 e^{2x} + y \ln y - y + \cos x + C_1 &= C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 y + y^2 e^{2x} + y \ln y - y + \cos x &= C. \end{aligned}$$

Considerando que la condición inicial  $y(0) = 1 \Rightarrow x = 0 \& y = 1$ , se obtiene:

$$0^2 \cdot 1 + 1^2 e^0 + 1 \ln(1) - 1 + \cos(0) = C \Rightarrow 0 + 1 + 0 - 1 + 1 = C \Rightarrow C = 1.$$

Por lo tanto, la solución del PVI es:

$$x^2 y + y^2 e^{2x} + y \ln y - y + \cos x = 1.$$

□

**Ejemplo 2.6.13** Resolver la ED:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + by}{bx + cy}$ ; con  $a, b$  &  $c$  constantes.

▼

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{ax + by}{bx + cy} \Rightarrow (bx + cy) dy = -(ax + by) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow (ax + by) dx + (bx + cy) dy &= 0. \end{aligned}$$

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} M &= ax + by \Rightarrow M_y = b \\ N &= bx + cy \Rightarrow N_x = b \end{aligned} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{la ED es exacta.}$$

Entonces existe  $f(x, y)$  tal que  $f_x = M$  &  $f_y = N$ . De  $f_x = M$  se obtiene al integrar:

$$f(x, y) = \int^x M dx = \int^x (ax + by) dx = a \frac{x^2}{2} + byx + h(y). \quad (2.38)$$

Derivando parcialmente con respecto a  $y$ :

$$f_y = bx + h'(y).$$

Utilizando la condición  $f_y = N$ , para despejar  $h'(y)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} bx + h'(y) &= bx + cy \Rightarrow h'(y) = cy \Rightarrow \\ \Rightarrow h(y) &= c \frac{y^2}{2} + K_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $h(y)$  en (2.38), obtenemos:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} ax^2 + bxy + \frac{1}{2} cy^2 + K_1.$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ax^2 + bxy + \frac{1}{2} cy^2 + K_1 &= K_2 \Rightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2K_1 = 2K_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 &= K. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.6.14** Resolver la ED:  $(e^x \sen y - 2y \sen x) dx + (e^x \cos y + 2 \cos x) dy = 0$ .

▼ Se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M = e^x \sen y - 2y \sen x &\Rightarrow M_y = e^x \cos y - 2 \sen x \\ N = e^x \cos y + 2 \cos x &\Rightarrow N_x = e^x \cos y - 2 \sen x \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{la ED es exacta.}$$

Entonces existe  $f(x, y)$  tal que  $f_x = M$  &  $f_y = N$ . De  $f_y = N$  se obtiene al integrar con respecto a  $y$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int^y N dy = \int^y (e^x \cos y + 2 \cos x) dy = e^x \sen y + 2y \cos x + h(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= e^x \sen y + 2y \cos x + h(x). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Derivando parcialmente con respecto a  $x$ :

$$f_x = e^x \sen y - 2y \sen x + h'(x).$$

Utilizando que  $f_x = M$  para despejar  $h'(x)$  se tiene:

$$\begin{aligned} e^x \sen y - 2y \sen x + h'(x) &= e^x \sen y - 2y \sen x \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow h(x) &= C_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $h(x)$  en (2.39), se obtiene:

$$f(x, y) = e^x \sen y + 2y \cos x + C_1.$$

Por lo tanto la solución general es:

$$\begin{aligned} f(x, y) = C_2 &\Rightarrow e^x \sen y + 2y \cos x + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^x \sen y + 2y \cos x &= C. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.6.15** Resolver la ED:  $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sen 2x + 2x) dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3) dy = 0$ .

▼ Se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M = ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sen 2x + 2x &\Rightarrow M_y = (yxe^{xy} + e^{xy}) \cos 2x - 2xe^{xy} \sen 2x \\ N = xe^{xy} \cos 2x - 3 &\Rightarrow N_x = (ye^{xy} + e^{xy}) \cos 2x - 2xe^{xy} \sen 2x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow M_y = N_x &\Rightarrow \text{la ED es exacta.}$$

Entonces existe  $f(x, y)$  tal que  $f_x = M$  &  $f_y = N$ . Integrando con respecto a  $y$  la última igualdad:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int^y N dy = \int^y (xe^{xy} \cos 2x - 3) dy = \cos 2x \int^y e^{xy} x dy - 3 \int^y dy \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= e^{xy} \cos 2x - 3y + h(x). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Derivando con respecto a  $x$  e igualando a  $M$ :

$$\begin{aligned} f_x &= -2e^{xy} \sen 2x + ye^{xy} \cos 2x + h'(x); \\ M &= ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sen 2x + 2x; \\ -2e^{xy} \sen 2x + ye^{xy} \cos 2x + h'(x) &= ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sen 2x + 2x. \end{aligned}$$

Entonces, despejando  $h'(x)$  e integrando:

$$h'(x) = 2x \Rightarrow h(x) = x^2 + C_1.$$



Sustituyendo  $h(x)$  en (2.40), obtenemos:

$$f(x, y) = e^{xy} \cos 2x - 3y + x^2 + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$f(x, y) = C_2 \Rightarrow e^{xy} \cos 2x - 3y + x^2 = C.$$

□

**Ejercicios 2.6.1** Ecuaciones diferenciales exactas. *Soluciones en la página 464*  
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas.

1.  $(3x^2 + 2xy^2 - 2x) dx + (3y^2 + 2x^2y - 2y) dy = 0.$
2.  $(2xy - e^{2y}) dx + (x^2 + xe^{2y} - y) dy = 0.$
3.  $\left(y \sin x + \sin y + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$
4.  $(4x^3y + y^3 - 2x) dx + (x^4 + 3xy^2 - 3y^2) dy = 0.$
5.  $(y \cos x + 2xe^y - x) dx + (y + \sin x + x^2e^y) dy = 0.$
6.  $(e^x \sin y + 2y \sin x - 2x) dx + (e^x \cos y - 2 \cos x + 2y) dy = 0.$
7.  $(4x^3 + 4xy - 1) dx = (1 - 2x^2 - 2y) dy.$
8.  $(y \ln x + y) dx + (x \ln x - e^y) dy = 0.$
9.  $[y \sec^2(xy) + \sin x] dx + [x \sec^2(xy) + \sin y] dy = 0.$
10.  $\left(\frac{1}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right) dx + \left(\frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\right) dy = 0.$
11.  $\left(ye^y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) y' = \frac{y}{x^2 + y^2} - xe^x.$
12.  $(y \sin(2x) - 2y + 2y^2e^{xy^2}) dx - (2x - \sin^2x - 4xye^{xy^2}) dy = 0.$
13.  $(2xy - e^{3y}) dx + (x^2 - kxe^{3y} - 3y^2) dy = 0.$

Resolver los siguientes PVI.

14.  $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x) dx + (2y \sin x - x^3 + \ln y) dy = 0$  con  $y(0) = e$
15.  $(y + xe^x + 2) dx + (x + e^y) dy = 0$  con  $y(1) = 0.$
16.  $(e^y \sin x + \tan y) dy - (e^y \cos x - x \sec^2 y) dx = 0$  con  $y(0) = 0.$
17.  $\left(\frac{x+y}{1+x^2}\right) dx + (y + \arctan x) dy = 0$  con  $y(0) = 1.$
18. Determinar los valores de las constantes  $A$  y  $B$  que hacen exacta a la ecuación diferencial:
 
$$(y^3 - y^2 \sin x - 2x) dx + (Axy^2 + By \cos x - 3y^2) dy = 0.$$
19. Obtener una función  $M(x, y)$  de modo tal que sea exacta la ecuación diferencial:
 
$$M(x, y) dx + (e^x \cos y + 2 \cos y) dy = 0.$$
20. Obtener una función  $N(x, y)$  de modo tal que sea exacta la ecuación diferencial:

$$N(x, y) dy + \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 y} - 2x\right) dx = 0.$$

## 2.7 Factor integrante

Como puede observarse en todos los tipos de ED resueltas hasta ahora, es frecuente que hagamos manipulaciones algebraicas para simplificar su forma y resolverlas con cierta comodidad. Esto es válido pues las ED antes y después de las operaciones tendrán la misma solución. Sin embargo, algunas de la ED pueden perder la propiedad de exactitud al modificarse algebraicamente.

**Ejemplo 2.7.1** Vamos a calcular la diferencial total de la función  $f(x, y) = x^3y + x^2y^2$  y manipular la ED asociada para obtener una ED no exacta.

▼ Dado que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^2 \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2x^2y,$$

se tiene que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (3x^2y + 2xy^2) dx + (x^3 + 2x^2y) dy.$$

Claramente, la ED:

$$\underbrace{(3x^2y + 2xy^2)}_M dx + \underbrace{(x^3 + 2x^2y)}_N dy = 0 \quad (2.41)$$

es exacta, pues además de que hemos visto que el lado izquierdo es la diferencial total de  $f(x, y) = x^3y + x^2y^2$ , podemos comprobar la igualdad de las parciales mixtas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 4xy \quad \& \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 4xy.$$

En ambos paréntesis de la ED (6.56) podemos factorizar  $x$  y escribir:

$$x(3xy + 2y^2) dx + x(x^2 + 2xy) dy = 0,$$

o bien, si dividimos entre  $x$  obtendríamos

$$3xy + 2y^2 dx + x^2 + 2xy dy = 0. \quad (2.42)$$

Sin embargo esta nueva ED (2.42), aunque es equivalente a la (6.56), ya no es exacta, como podemos ver con las derivadas parciales mixtas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 4y \quad \& \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y.$$

□

Esto nos sugiere la idea de la existencias de ecuaciones diferenciales que no son exactas, pero que al ser multiplicadas por ciertas funciones  $\mu(x, y)$  dan como resultado ecuaciones diferenciales exactas, cuyas soluciones son también soluciones de las ecuaciones diferenciales originales no exactas.

- Supongamos inicialmente que se tiene una ecuación diferencial:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2.43)$$

que no es exacta. Esto es, que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

y que  $\mu(x, y)$  es una función tal que la ecuación diferencial, obtenida al multiplicar (2.43) por  $\mu$ :

$$\mu(x, y)M(x, y) dx + \mu(x, y)N(x, y) dy = 0$$

resulta exacta. Es decir, que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N).$$

Cuando esto sucede se dice que la función  $\mu(x, y)$  es un **factor integrante** de la ED (2.43).

Se supone, claro está, que la función  $\mu(x, y)$  no es la función idénticamente cero,  $\mu(x, y) \neq 0$  y además es posible que  $\mu(x, y)$  puede depender de dos variables  $x$  &  $y$  o bien de sólo una de ellas.

**Ejemplo 2.7.2** Verificar que la función  $\mu(x) = \frac{1}{x^3}$  es un factor integrante de la ecuación diferencial:

$$(3x^5 \tan y - 2y^3) dx + (x^6 \sec^2 y + 4x^3 y^3 + 3xy^2) dy = 0.$$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) = 3x^5 \tan y - 2y^3 &\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^5 \sec^2 y - 6y^2 \\ N(x, y) = x^6 \sec^2 y + 4x^3 y^3 + 3xy^2 &\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^5 \sec^2 y + 12x^2 y^3 + 3y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La ED no es exacta. Al multiplicar la ED la función  $\mu(x) = x^{-3}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} x^{-3}(3x^5 \tan y - 2y^3) dx + x^{-3}(x^6 \sec^2 y + 4x^3 y^3 + 3xy^2) dy &= 0; \\ (3x^2 \tan y - 2x^{-3} y^3) dx + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3x^{-2} y^2) dy &= 0; \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ahora se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \overline{M} = \mu M = 3x^2 \tan y - 2x^{-3} y^3 &\Rightarrow \frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = 3x^2 \sec^2 y - 6x^{-3} y^2 \\ \overline{N} = \mu N = x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3x^{-2} y^2 &\Rightarrow \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} = 3x^2 \sec^2 y - 6x^{-3} y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}.$$

Entonces la nueva ecuación diferencial (2.44) es exacta.

Por lo tanto la función  $\mu(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$  es un factor integrante de la ED dada. □

**Ejemplo 2.7.3** Verificar que la función  $\mu(y) = y^2$  es un factor integrante de la ecuación diferencial:

$$(3x^2 y + y^2) dx + (3x^3 - y^2 + 4xy) dy = 0.$$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) = 3x^2 y + y^2 &\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2y; \\ N(x, y) = 3x^3 - y^2 + 4xy &\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 9x^2 + 4y; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{la ED no es exacta.}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por la función  $\mu(y) = y^2$  se obtiene:

$$\begin{aligned} y^2(3x^2 y + y^2) dx + y^2(3x^3 - y^2 + 4xy) dy &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (3x^2 y^3 + y^4) dx + (3x^3 y^2 - y^4 + 4xy^3) dy &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ahora se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \mu M = \overline{M} = 3x^2 y^3 + y^4 &\Rightarrow \frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = 9x^2 y^2 + 4y^3 \\ \mu N = \overline{N} = 3x^3 y^2 - y^4 + 4xy^3 &\Rightarrow \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} = 9x^2 y^2 + 4y^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \Rightarrow \text{la nueva ED es exacta.}$$

Por lo que la función  $\mu(y) = y^2$  es un factor integrante de la ecuación diferencial (2.45) dada. □

**Ejemplo 2.7.4** Verificar que la función  $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$  es un factor integrante de la ecuación diferencial:

$$(2x^2 + 2y^2 - x) dx + (x^2 + y^2 - y) dy = 0.$$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - x &\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4y \\ N(x, y) = x^2 + y^2 - y &\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{la ED no es exacta.}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por la función  $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{x^2 + y^2} [2(x^2 + y^2) - x] \right) dx + \left( \frac{1}{x^2 + y^2} [(x^2 + y^2) - y] \right) dy = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( 2 - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx + \left( 1 - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ahora se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \mu M = \overline{M} = 2 - x(x^2 + y^2)^{-1} &\Rightarrow \frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = -x(-1)(x^2 + y^2)^{-2} 2y = 2xy(x^2 + y^2)^{-2} \\ \mu N = \overline{N} = 1 - y(x^2 + y^2)^{-1} &\Rightarrow \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} = -y(-1)(x^2 + y^2)^{-2} 2x = 2xy(x^2 + y^2)^{-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}.$$

La nueva ecuación diferencial (2.46) es exacta. Por lo tanto, la función  $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$  es un factor integrante de la ecuación diferencial dada. □

Por otra parte, si  $f(x, y) = c$  es la solución general de la ecuación diferencial exacta:

$$\mu(x, y)M(x, y) dx + \mu(x, y)N(x, y) dy = 0,$$

entonces  $f(x, y) = c$  satisface a la ecuación diferencial:

$$\mu(x, y) [M(x, y) dx + N(x, y) dy] = 0,$$

por lo que  $f(x, y) = c$  es la solución general de la ecuación diferencial (no exacta)

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \text{ ya que } \mu(x, y) \neq 0.$$

Es decir, la solución  $f(x, y) = c$  de la nueva ecuación diferencial exacta es también solución general de la ecuación diferencial original no exacta. Por lo tanto, para resolver la ecuación diferencial no exacta debemos resolver la ecuación diferencial exacta.

Pero la ecuación diferencial exacta se tendrá siempre y cuando se conozca un factor integrante, por lo cual es muy importante saber determinar u obtener dicho factor integrante para la ecuación diferencial no exacta ¿Cómo obtenerlo?

Veamos el caso general:

La función  $\mu(x, y)$  es un factor integrante para la ecuación diferencial no exacta:

$$\begin{aligned} &M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \text{ si y solo si } \mu M(x, y) dx + \mu N(x, y) dy = 0 \text{ es exacta } \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Rightarrow \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}. \end{aligned}$$

Vemos que  $\mu(x, y)$  debe ser solución de la ecuación diferencial:

$$\mu M_y + M\mu_y = \mu N_x + N\mu_x \quad (2.47)$$

Notamos aquí que para determinar  $\mu$  necesitamos resolver una ecuación diferencial parcial, lo cual no está a nuestro alcance. Por lo tanto, no podemos resolver el problema general, que es cuando un factor integrante  $\mu(x, y)$  depende de ambas variables  $x$  &  $y$ .

¿Qué sucede cuando  $\mu$  depende sólo de una variable?. Consideremos dos casos:

1. Cuando  $\mu$  depende sólo de  $x$  ( esto es,  $\mu$  no depende de  $y$ ).

$$\mu = \mu(x) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu_x = \mu'(x) \quad \& \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu_y = 0.$$

Al sustituir  $\mu(x)$  y sus derivadas en la ecuación diferencial (2.47) se tiene:

$$\begin{aligned} \mu(x)M_y + M\mu_y &= \mu(x)N_x + N\mu_x \Rightarrow \mu(x)M_y + M \cdot 0 = \mu(x)N_x + N\mu' \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(x)M_y - \mu(x)N_x &= N\mu' \Rightarrow N\mu' = (M_y - N_x)\mu(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= \frac{M_y - N_x}{N}, \end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria para  $\mu(x)$  siempre y cuando  $\frac{M_y - N_x}{N}$  dependa sólo de  $x$ , es decir, siempre y cuando el cociente  $\frac{M_y - N_x}{N}$  no dependa de la variable  $y$ , después de simplificar dicha expresión. ¿Por qué?, porque  $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$  no depende de  $y$ , depende solamente de  $x$ .

Ahora bien, si  $\frac{M_y - N_x}{N} = g(x)$ , entonces existe el factor integrante  $\mu = \mu(x)$  determinado por

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{M_y - N_x}{N} = g(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = g(x) dx$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mu}{\mu} &= \int g(x) dx \Rightarrow \ln \mu(x) = \int g(x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(x) &= e^{\int g(x) dx}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int g(x) dx = h(x) + C_1 \text{ con } C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu(x) = e^{h(x)+C_1} = e^{h(x)}e^{C_1} = Ce^{h(x)}, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

Lo cual nos indica la existencia de una infinidad de factores integrantes. Pero debido a la necesidad de contar con sólo un factor integrante, podemos ignorar la constante de integración  $C$  y quedarnos con  $\mu(x) = e^{h(x)}$ .

2. Cuando  $\mu$  depende sólo de  $y$  ( esto es,  $\mu$  no depende de  $x$ ).

$$\mu = \mu(y) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu_y = \mu'(y) \quad \& \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu_x = 0.$$

Al sustituir  $\mu(y)$  y sus derivadas en la ecuación diferencial (2.47) se tiene:

$$\begin{aligned} \mu(y)M_y + M\mu_y &= \mu(y)N_x + N\mu_x \Rightarrow \mu(y)M_y + M\mu'(y) = \mu(y)N_x + N \cdot 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow M\mu'(y) &= \mu(y)N_x - \mu(y)M_y = \mu(y)(N_x - M_y) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= \frac{N_x - M_y}{M}, \end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria para  $\mu(y)$  siempre y cuando  $\frac{N_x - M_y}{M}$  dependa sólo de  $y$ , es decir, siempre y cuando el cociente  $\frac{N_x - M_y}{M}$  no dependa de la variable  $x$ , después de simplificar dicha expresión.

¿Por qué?, porque  $\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}$  no depende de  $x$ , depende solamente de  $y$ .

Ahora bien, si  $\frac{N_x - M_y}{M} = g(y)$ , entonces existe el factor integrante  $\mu = \mu(y)$  determinado por

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{N_x - M_y}{M} = g(y) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = g(y) dy,$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mu}{\mu} &= \int g(y) dy \Rightarrow \ln \mu(y) = \int g(y) dy \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(y) &= e^{\int g(y) dy}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int g(y) dy = j(y) + C_1 \text{ con } C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu(y) = e^{j(y)+C_1} = e^{j(y)} e^{C_1} = C e^{j(y)}, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

Lo cual nos indica la existencia de una infinidad de factores integrantes. Pero debido a la necesidad de contar con sólo un factor integrante, podemos ignorar la constante de integración  $C$  y quedarnos con  $\mu(y) = e^{j(y)}$ .

**Ejemplo 2.7.5** Resolver la ED:  $(3x^5 \tan y - 2y^3) dx + (x^6 \sec^2 y + 4x^3 y^3 + 3xy^2) dy = 0$ .

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M &= 3x^5 \tan y - 2y^3 \Rightarrow M_y = 3x^5 \sec^2 y - 6y^2 \\ N &= x^6 \sec^2 y + 4x^3 y^3 + 3xy^2 \Rightarrow N_x = 6x^5 \sec^2 y + 12x^2 y^3 + 3y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x.$$

La ED no es exacta. ¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$ ? Es decir:

¿Es  $\frac{M_y - N_x}{N}$  una función de  $x$ ? Veamos:

$$\begin{aligned} \frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{(3x^5 \sec^2 y - 6y^2) - (6x^5 \sec^2 y + 12x^2 y^3 + 3y^2)}{x^6 \sec^2 y + 4x^3 y^3 + 3xy^2} = \\ &= \frac{-3x^5 \sec^2 y - 12x^2 y^3 - 9y^2}{x^6 \sec^2 y + 4x^3 y^3 + 3xy^2} = \frac{-3(x^5 \sec^2 y + 4x^2 y^3 + 3y^2)}{x(x^5 \sec^2 y + 4x^2 y^3 + 3y^2)} = \\ &= -\frac{3}{x}; \text{ que depende sólo de } x. \end{aligned}$$

Entonces existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$  dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= \frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx &= -\int \frac{3}{x} dx \Rightarrow \ln \mu(x) = -3 \ln x = \ln x^{-3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(x) &= x^{-3}. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por  $\mu(x) = x^{-3}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} x^{-3}(3x^5 \tan y - 2y^3) dx + x^{-3}(x^6 \sec^2 y + 4x^3 y^3 + 3xy^2) dy &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (3x^2 \tan y - 2x^{-3}y^3) dx + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3x^{-2}y^2) dy &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ahora se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \overline{M} &= 3x^2 \tan y - 2x^{-3}y^3 \Rightarrow \overline{M}_y = 3x^2 \sec^2 y - 6x^{-3}y^2; \\ \overline{N} &= x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3x^{-2}y^2 \Rightarrow \overline{N}_x = 3x^2 \sec^2 y - 6x^{-3}y^2; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x.$$

La nueva ED (2.48) es exacta. Entonces existe una función  $f(x, y)$  tal que:

$$df = f_x dx + f_y dy = \overline{M} dx + \overline{N} dy.$$

Es decir: existe  $f(x, y)$  tal que  $f_x = \overline{M}$  &  $f_y = \overline{N}$ . De tal suerte que:

$$\begin{aligned} f_x &= \overline{M} \Rightarrow f(x, y) = \int^x \overline{M} dx = \int^x (3x^2 \tan y - 2x^{-3}y^3) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= x^3 \tan y + x^{-2}y^3 + h(y), \text{ de donde} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^3 \sec^2 y + 3x^{-2}y^2 + h'(y), \text{ ahora} \\ f_y &= \overline{N} \Rightarrow x^3 \sec^2 y + 3x^{-2}y^2 + h'(y) = x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3x^{-2}y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(y) &= 4y^3 \Rightarrow h(y) = y^4 + C_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $h(y)$  en  $f(x, y)$  se tiene que:

$$f(x, y) = x^3 \tan y + x^{-2}y^3 + y^4 + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta, así como de la no exacta, es:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= C_2 \Rightarrow x^3 \tan y + x^{-2}y^3 + y^4 + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 \tan y + x^{-2}y^3 + y^4 &= C. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.7.6** Resolver la ED:  $(3x^2y + y^2) dx + (3x^3 - y^2 + 4xy) dy = 0$ .

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M &= 3x^2y + y^2 \Rightarrow M_y = 3x^2 + 2y; \\ N &= 3x^3 - y^2 + 4xy \Rightarrow N_x = 9x^2 + 4y; \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow \text{la ED no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$ ? Es decir, ¿Es  $\frac{M_y - N_x}{N}$  una función sólo de  $x$ ? Veamos:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(3x^2 + 2y) - (9x^2 + 4y)}{3x^3 - y^2 + 4xy} = \frac{-6x^2 - 2y}{3x^3 - y^2 + 4xy} \neq g(x).$$

Aquí vemos que  $\frac{M_y - N_x}{N}$  no depende sólo de  $x$ , ya que también depende de  $y$ . Esto nos permite asegurar que no existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$ .

Ahora bien, ¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(y)$ ? Es decir: ¿Es  $\frac{N_x - M_y}{M}$  una función sólo de  $y$ ? Veamos:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{(9x^2 + 4y) - (3x^2 + 2y)}{3x^2y + y^2} = \frac{6x^2 + 2y}{3x^2y + y^2} = \frac{2(3x^2 + y)}{y(3x^2 + y)} = \frac{2}{y}.$$

Aquí vemos que  $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2}{y}$  está en función sólo de  $y$ , lo que nos permite asegurar que existe un factor integrante  $\mu = \mu(y)$ , el cual está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2}{y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} dy &= \int \frac{2}{y} dy \Rightarrow \ln \mu(y) = 2 \ln y = \ln y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(y) &= y^2.\end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial no exacta por  $\mu(y) = y^2$  obtenemos:

$$\begin{aligned}y^2(3x^2y + y^2) dx + y^2(3x^3 - y^2 + 4xy) dy &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (3x^2y^3 + y^4) dx + (3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3) dy &= 0.\end{aligned}\quad (2.49)$$

Ahora se tiene:

$$\begin{cases} \overline{M} = 3x^2y^3 + y^4 \Rightarrow \overline{M}_y = 9x^2y^2 + 4y^3; \\ \overline{N} = 3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3 \Rightarrow \overline{N}_x = 9x^2y^2 + 4y^3; \end{cases} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \Rightarrow \text{la nueva ED 2.49 es exacta.}$$

Entonces existe una función  $f(x, y)$  tal que:

$$df = f_x dx + f_y dy = \overline{M} dx + \overline{N} dy.$$

Es decir; existe  $f(x, y)$  tal que  $f_x = \overline{M}$  &  $f_y = \overline{N}$ .

$$\begin{aligned}f_y = \overline{N} &\Rightarrow f(x, y) = \int^y \overline{N} dy = \int^y (3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3) dy \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= 3x^3 \left( \frac{y^3}{3} \right) - \frac{y^5}{5} + 4x \left( \frac{y^4}{4} \right) + h(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= x^3y^3 - \frac{1}{5}y^5 + xy^4 + h(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2y^3 + y^4 + h'(x), \text{ ahora} \\ f_x = \overline{M} &\Rightarrow 3x^2y^3 + y^4 + h'(x) = 3x^2y^3 + y^4 \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(x) &= 0 \Rightarrow h(x) = C_1.\end{aligned}$$

Sustituyendo  $h(y)$  en  $f(x, y)$  se tiene que:

$$f(x, y) = x^3y^3 - \frac{1}{5}y^5 + xy^4 + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta, así como de la no exacta, es:

$$\begin{aligned}f(x, y) = C_2 &\Rightarrow x^3y^3 - \frac{1}{5}y^5 + xy^4 + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5x^3y^3 - y^5 + 5xy^4 &= C.\end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.7.7** Resolver la ecuación diferencial:

$$(3y^2 \cot x + \sen x \cos x) dx - 2y dy = 0. \quad (2.50)$$



▼ Inicialmente se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M &= 3y^2 \cot x + \operatorname{sen} x \cos x \Rightarrow M_y = 6y \cot x \\ N &= -2y \Rightarrow N_x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \text{ entonces la ED (2.50) no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$ ?, es decir, ¿Es  $\frac{M_y - N_x}{N}$  una función, sólo de  $x$ ?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{6y \cot x}{-2y} = -3 \cot x.$$

Esta última expresión depende sólo de  $x$ , entonces sí existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$  y cumple con la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= \frac{M_y - N_x}{N} = -3 \cot x \Rightarrow \\ \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= -3 \cot x \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -3 \cot x \, dx \Rightarrow \\ \int \frac{d\mu}{\mu} &= -3 \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx \Rightarrow \ln \mu = -3 \ln(\operatorname{sen} x) = \ln(\operatorname{sen} x)^{-3} \Rightarrow \\ \mu(x) &= \operatorname{sen}^{-3} x. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial (2.50) por el factor integrante, se obtiene:

$$(3y^2 \operatorname{sen}^{-4} x \cos x + \operatorname{sen}^{-2} x \cos x) \, dx - 2y \operatorname{sen}^{-3} x \, dy = 0 \quad (2.51)$$

Se tiene ahora:

$$\left. \begin{aligned} \overline{M} &= 3y^2 \operatorname{sen}^{-4} x \cos x + \operatorname{sen}^{-2} x \cos x \Rightarrow \overline{M}_y = 6y \operatorname{sen}^{-4} x \cos x; \\ \overline{N} &= -2y \operatorname{sen}^{-3} x \Rightarrow \overline{N}_x = 6y \operatorname{sen}^{-4} x \cos x; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x.$$

La nueva ED (2.51) es exacta. Entonces existe  $f(x, y)$  tal que  $f_x = \overline{M}$  &  $f_y = \overline{N}$ . De la primera condición:

$$f_x = \overline{M} \Rightarrow f(x, y) = \int^y \overline{N} \, dy = \int^y -2y \operatorname{sen}^{-3} x \, dy = -y^2 \operatorname{sen}^{-3} x + h(x).$$

Derivando respecto a  $x$  e igualando a  $\overline{M}$ :

$$\begin{aligned} f_x &= 3y^2 \operatorname{sen}^{-4} x \cos x + h'(x) = 3y^2 \operatorname{sen}^{-4} x \cos x + \operatorname{sen}^{-2} x \cos x \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(x) &= \operatorname{sen}^{-2} x \cos x \Rightarrow \\ \Rightarrow h(x) &= \int \operatorname{sen}^{-2} x \cos x \, dx = -\operatorname{sen}^{-1} x + C_1. \end{aligned}$$

Entonces:

$$f(x, y) = -y^2 \operatorname{sen}^{-3} x - \operatorname{sen}^{-1} x + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= C_2 \Rightarrow \\ -y^2 \operatorname{sen}^{-3} x - \operatorname{sen}^{-1} x + C_1 &= C_2 \Rightarrow \frac{y^2}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} = C \Rightarrow \\ \Rightarrow y^2 + \operatorname{sen}^2 x &= C \operatorname{sen}^3 x. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.7.8** Resolver la ecuación diferencial:

$$(y \ln y + ye^x) dx + (x + y \cos y) dy = 0 \quad (2.52)$$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} M = y \ln y + ye^x \Rightarrow M_y = 1 + \ln y + e^x \\ N = x + y \cos y \Rightarrow N_x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow \text{la ED no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$ ?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 + \ln y + e^x - 1}{x + y \cos y} = \frac{\ln y + e^x}{x + y \cos y}.$$

El último cociente no depende sólo de  $x$ , entonces no existe  $\mu = \mu(x)$ .

¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(y)$ ?

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-\ln y - e^x}{y \ln y + ye^x} = -\frac{\ln y + e^x}{y(\ln y + e^x)} = -\frac{1}{y}.$$

En este caso, este último cociente sí depende sólo de  $y$ , entonces existe  $\mu = \mu(y)$  el cual cumple con la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= \frac{N_x - M_y}{M} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= -\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \mu &= -\ln y = \ln y^{-1} \Rightarrow \mu(y) = y^{-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial (2.52) por el factor integrante, se obtiene:

$$(\ln y + e^x) dx + (xy^{-1} + \cos y) dy = 0. \quad (2.53)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{M} = \ln y + e^x \Rightarrow \overline{M}_y = \frac{1}{y}; \\ \overline{N} = xy^{-1} + \cos y \Rightarrow \overline{N}_x = y^{-1}; \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \Rightarrow \text{la nueva ED (2.53) es exacta.}$$

Entonces existe  $f(x, y)$  tal que  $f_x = \overline{M}$  &  $f_y = \overline{N}$ . De la segunda igualdad:

$$f_y = \overline{N} \Rightarrow f(x, y) = \int^x (\ln y + e^x) dx = x \ln y + e^x + h(y).$$

Derivando respecto a  $y$  e igualando a  $\overline{N}$ :

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{x}{y} + h'(y) = xy^{-1} + \cos y \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(y) &= \cos y \Rightarrow h(y) = \sin y + C_1. \end{aligned}$$

Entonces

$$f(x, y) = x \ln y + e^x + \sin y + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$\begin{aligned} f(x, y) = C_2 &\Rightarrow x \ln y + e^x + \sin y + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \ln y + e^x + \sin y = C. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.7.9** Resolver la ED:  $y' = -\frac{y \operatorname{sen} 2x + xy^2}{y^3 - \operatorname{sen}^2 x}$ .

▼ Se puede escribir esta ecuación diferencial como:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{y \operatorname{sen} 2x + xy^2}{y^3 - \operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow (y \operatorname{sen} 2x + xy^2) dx = -(y^3 - \operatorname{sen}^2 x) dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \operatorname{sen} 2x + xy^2) dx + (y^3 - \operatorname{sen}^2 x) dy = 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Se tiene ahora:

$$\left. \begin{aligned} M &= y \operatorname{sen} 2x + xy^2 \Rightarrow M_y = \operatorname{sen} 2x + 2xy; \\ N &= y^3 - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow N_x = -2 \operatorname{sen} x \cos x = -\operatorname{sen} 2x; \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow \text{la ED (2.54) no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$ ?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\operatorname{sen} 2x + 2xy + \operatorname{sen} 2x}{y^3 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \operatorname{sen} 2x + 2xy}{y^3 - \operatorname{sen}^2 x} \neq g(x).$$

Entonces no existe  $\mu = \mu(x)$ , ya que la expresión anterior no depende sólo de  $x$ .

¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(y)$ ?

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-2 \operatorname{sen} 2x - 2xy}{y \operatorname{sen} 2x + xy^2} = \frac{-2(\operatorname{sen} 2x + xy)}{y(\operatorname{sen} 2x + xy)} = -\frac{2}{y}.$$

Entonces, por lo anterior, sí existe  $\mu = \mu(y)$ , el cual cumple con:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= -\frac{2}{y} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y} dy \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = -2 \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \mu = -2 \ln y = \ln y^{-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu(y) = y^{-2}. \end{aligned}$$

Multiplicando (2.54) por el factor integrante se obtiene:

$$(y^{-1} \operatorname{sen} 2x + x) dx + (y - y^{-2} \operatorname{sen}^2 x) dy = 0. \quad (2.55)$$

Vemos que:

$$\left. \begin{aligned} \overline{M} &= y^{-1} \operatorname{sen} 2x + x \Rightarrow \overline{M}_y = -y^{-2} \operatorname{sen} 2x \\ \overline{N} &= y - y^{-2} \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \overline{N}_x = -y^{-2} 2 \operatorname{sen} x \cos x = -y^{-2} \operatorname{sen} 2x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \Rightarrow \text{la ED (2.55) es exacta.}$$

Por lo tanto, existe  $f(x, y)$  tal que  $f_x = \overline{M}$  &  $f_y = \overline{N}$ . De la primera condición:

$$f_x = \overline{M} \Rightarrow f(x, y) = \int^x (y^{-1} \operatorname{sen} 2x + x) dx = -\frac{1}{2} y^{-1} \cos 2x + \frac{x^2}{2} + h(y). \quad (2.56)$$

Derivando con respecto a  $y$  e igualando a  $\overline{N}$ :

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{1}{2} y^{-2} \cos 2x + h'(y) = y - y^{-2} \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \\ &\Rightarrow h'(y) = y - y^{-2} \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2} y^{-2} \cos 2x = \\ &= y - y^{-2} \underbrace{\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)}_{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{2} y^{-2} \cos 2x = y - \frac{1}{2} y^{-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow h'(y) = y - \frac{1}{2} y^{-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow h(y) = \int \left( y - \frac{1}{2} y^{-2} \right) dy = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} y^{-1} + C_1. \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo  $h(y)$  en (2.56):

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}y^{-1} \cos 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^{-1} + C_1$$

Por lo tanto, por ser la diferencial de  $f(x, y)$  igual a cero,  $f(x, y)$  es una constante y la solución general de la ED es:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= C_2 \Rightarrow \\ -\frac{1}{2}y^{-1} \cos 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^{-1} + C_1 &= C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y^{-1} \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) &= C \Rightarrow \\ \Rightarrow y^{-1} \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) &= C. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $2y$ :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen}^2 x + y(x^2 + y^2) &= 2Cy \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + y(x^2 + y^2) &= Cy. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.7.10** Comprobar que la ED lineal:  $y' + p(x)y = q(x)$ ; con  $p(x) \neq 0$  no es exacta, pero que sí tiene factor integrante  $\mu = \mu(x)$ .

▼

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y - q(x) = 0 \Rightarrow [p(x)y - q(x)] dx + dy = 0 \quad (2.57)$$

Se tiene:

$$\left. \begin{aligned} M &= p(x)y - q(x) \Rightarrow M_y = p(x) \\ N &= 1 \Rightarrow N_x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow \text{la ED lineal (2.57) no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$ ?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x).$$

Por lo anterior, sí existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$  y cumple con:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'}{\mu} &= p(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = p(x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} &= \int p(x) dx \Rightarrow \ln \mu(x) = \int p(x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(x) &= e^{\int p(x) dx}. \end{aligned}$$

Multiplicando (2.57) por  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$  se obtiene :

$$[p(x)y - q(x)]e^{\int p(x) dx} dx + e^{\int p(x) dx} dy = 0. \quad (2.58)$$

Entonces:

$$\left. \begin{aligned} \overline{M} &= [p(x)y - q(x)]e^{\int p(x) dx} \Rightarrow \overline{M}_y = p(x)e^{\int p(x) dx}; \\ \overline{N} &= e^{\int p(x) dx} \Rightarrow \overline{N}_x = e^{\int p(x) dx} p(x); \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \Rightarrow \text{la ED (2.58) es exacta.}$$

Por lo tanto la ED (2.57) sí tiene un factor integrante y este es  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ .

□

**Ejemplo 2.7.11** Verificar que la ED lineal:  $x' + p(y)x = q(y)$ ; con  $p(y) \neq 0$  no es exacta, pero que sí tiene un factor integrando  $\mu = \mu(y)$ .



$$x' + p(y)x = q(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} + p(y)x - q(y) = 0 \Rightarrow dx + [p(y)x - q(y)] dy = 0. \quad (2.59)$$

Se tiene ahora:

$$\begin{aligned} M &= 2e^{2x} \sin 3y + 3e^{2y} \sin 3x & \& \quad N = 3e^{2x} \cos 3y - 2e^{2y} \cos 3x \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M &= 1 \Rightarrow M_y = 0; & \left\{ \begin{array}{l} N = p(y)x - q(y) \Rightarrow N_x = p(y); \end{array} \right. & \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow \text{la ED lineal (2.59) no es exacta.} \end{aligned}$$

¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$ ?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{0 - p(y)}{p(y)x - q(y)}; \text{ no depende sólo de } x.$$

Entonces no existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$ .

¿Existe un factor integrante  $\mu = \mu(y)$ ?

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{p(y) - 0}{1} = p(y), \text{ sí depende sólo de } y.$$

Sí existe un factor integrante  $\mu = \mu(y)$  y cumple con:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'}{\mu} &= p(y) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = p(y) dy \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int p(y) dy \Rightarrow \ln \mu(y) = \int p(y) dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu(y) = e^{\int p(y) dy}. \end{aligned}$$

Multiplicando (2.59) por  $\mu(y) = e^{\int p(y) dy}$  se obtiene:

$$e^{\int p(y) dy} dx + [p(y)x - q(y)] e^{\int p(y) dy} dy = 0. \quad (2.60)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} M &= 2e^{2x} \sin 3y + 3e^{2y} \sin 3x & \& \quad N = 3e^{2x} \cos 3y - 2e^{2y} \cos 3x \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \overline{M} &= e^{\int p(y) dy} \Rightarrow \overline{M}_y = e^{\int p(y) dy} p(y); & \left\{ \begin{array}{l} \overline{N} = [p(y)x - q(y)] e^{\int p(y) dy} \Rightarrow \overline{N}_x = p(y) e^{\int p(y) dy}; \end{array} \right. & \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \Rightarrow \text{la ED (2.60) es exacta.} \end{aligned}$$

Por lo tanto la ED (2.59) sí tiene un factor integrante y este es  $\mu(y) = e^{\int p(y) dy}$ .



**Ejercicios 2.7.1** Factor Integrante. *Soluciones en la página 465*

1. Verificar que la función  $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$  es un factor integrante de la ecuación diferencial:

$$(xy \sin y + xy^2 \sin x + \frac{1}{x}) dx + (x^2 y \cos y - xy \cos x + \frac{1}{y}) dy = 0.$$

2. Verificar que la función  $\mu(x, y) = \sec^2(xy)$  es un factor integrante de la ecuación diferencial:

$$[y + \sin x \cos^2(xy)] dx + [x + \sin y \cos^2(xy)] dy = 0.$$

3. Verificar que la función  $\mu(x, y) = \frac{1}{xy(x+2y)}$  es un factor integrante de la ecuación diferencial:

$$(xy + y^2) dx + (x^2 + 3xy) dy = 0.$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales encontrando un factor integrante.

4.  $(3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$
5.  $(2xy^2 - 3y^3) dx + (7 - 3xy^2) dy = 0.$
6.  $(y^3 + 2e^x y) dx + (e^x + 3y^2) dy = 0.$
7.  $(2x^2y + 2y + 5) dx + (2x^3 + 2x) dy = 0.$
8.  $\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 - 3x}{y}.$
9.  $(\sin y - 2ye^{-x} \sin x) dx + (\cos y + 2e^{-x} \cos x) dy = 0.$
10.  $y \cos x dx + (y \sin x + 2 \sin x) dy = 0$

## 2.8 Miscelánea

En este apartado queremos responder a la pregunta ¿Cómo proceder cuando se nos pide resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

y no nos dicen de qué tipo es?

La identificación del tipo de la ecuación diferencial ordinaria es importante para poder resolverla, ¿cómo identificarla?, ¿existe algún camino que nos ayude a eliminar posibilidades sin invertir demasiado tiempo?

### Análisis:

Se dan a continuación algunas sugerencias que nos ayudan a encontrar la forma de resolver la ED:

1. Una ecuación diferencial no es homogénea cuando en ella se tiene alguna función trigonométrica o inversa trigonométrica cuyo argumento no es  $\frac{x}{y}$  ni  $\frac{y}{x}$ ; también cuando se tiene alguna función exponencial cuyo exponente no es  $\frac{y}{x}$  ni  $\frac{x}{y}$ .
2. Si en una ecuación diferencial no hay funciones trascendentes y todos los términos son del mismo grado, entonces la ecuación diferencial es homogénea; y si en la ecuación diferencial aparece explícitamente el término  $\frac{y}{x}$  o bien el término  $\frac{x}{y}$ , entonces la ecuación diferencial puede ser homogénea de la forma  $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$  o bien  $\frac{dx}{dy} = F\left(\frac{x}{y}\right)$ .
3. Si el coeficiente de la diferencial  $dy$  es una función que depende sólo de  $x$ , entonces podemos pensar que se trata de una ecuación diferencial lineal o en una de Bernoulli para  $y = \phi(x)$ . Esto es, una del tipo  $y' + p(x)y = q(x)$  o bien  $y' + p(x)y = q(x)y^n$ .
4. Si el coeficiente de la diferencial  $dx$  es una función que depende sólo de  $y$ , entonces podemos pensar en una ecuación diferencial lineal o en una de Bernoulli para  $x = \phi(y)$ . Esto es, una del tipo  $x' + p(y)x = q(y)$  o bien  $x' + p(y)x = q(y)x^n$ .

5. Si para la ecuación diferencial  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  se tiene  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$  entonces la ED no es exacta. Además de esto:
- a. Si  $\frac{M_y - N_x}{N} \neq g(x)$ , entonces no existe factor integrante  $\mu = \mu(x)$ .  
En este caso la ecuación diferencial no es lineal. Como se vio en el ejemplo (??).
  - b. Si  $\frac{N_x - M_y}{M} \neq g(y)$ , entonces no existe factor integrante  $\mu = \mu(y)$ .  
En este caso la ecuación diferencial no es lineal. Como se vio en el ejemplo (??).
  - c. Si  $\frac{M_y - N_x}{N} \neq g(x)$  &  $\frac{N_x - M_y}{M} \neq g(y)$ .  
Entonces no existe factor integrante  $\mu$  de una sola variable, por lo cual la ecuación diferencial no es lineal.
6. Si la ecuación diferencial  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  no es homogénea, no es exacta y no tiene factor integrante de una sola variable (por lo que no es lineal), entonces intentamos expresar  $M(x, y)$  &  $N(x, y)$  como productos o cociente de funciones dependientes de una sola variable. Esto es, vemos si podemos separar la variables.
7. Si la ecuación diferencial no es homogénea ni exacta, no tiene factor integrante de una sola variable (por lo que no es lineal) y no es de variables separables, entonces probemos analizarla como una de Bernoulli. Esto es, intentemos expresar la ecuación diferencial  $M(x, y) dx + N(x, y) dy$  como  $y' + p(x)y = q(x)y^n$  o bien como  $x' + p(y)x = q(y)x^n$ .

**Comentario final.** Estas sugerencias están dadas en un orden que no es necesariamente único. El análisis de la ED juega un papel importante. Si ninguna de estas recomendaciones aplica a una ED se podría pensar en algún otro método no tratado en este capítulo.

**Ejemplo 2.8.1** Resolver la ED:  $(xe^y + e^{2y}) dy = (x - e^y) dx$ .

▼ **Análisis.** Al ver las exponenciales  $e^y$  &  $e^{2y}$  podemos decir que la ecuación diferencial no es homogénea. Viendo que los coeficientes de las diferenciales  $dx$  &  $dy$  son funciones que dependen de ambas variables podemos decir que la ecuación diferencial no parece ser lineal para  $y = \phi(x)$  ni para  $x = \phi(y)$ . Tomamos el camino de las exactas.

$$\begin{aligned}(xe^y + e^{2y}) dy &= (x - e^y) dx \Rightarrow -(x - e^y) dx + (xe^y + e^{2y}) dy = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (e^y - x) dx + (xe^y + e^{2y}) dy = 0.\end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\left. \begin{aligned} M &= e^y - x \Rightarrow M_y = e^y \\ N &= xe^y + e^{2y} \Rightarrow N_x = e^y \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{la ecuación diferencial es exacta.}$$

Entonces existe una función  $f(x, y)$  tal que  $f_x = M$  &  $f_y = N$ .  
Resolvemos la ecuación diferencial exacta:

$$\begin{aligned} f_x = M &\Rightarrow f(x, y) = \int^x M dx = \int^x (e^y - x) dx = e^y x - \frac{x^2}{2} + h(y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x, y) = xe^y - \frac{x^2}{2} + h(y). \end{aligned} \tag{2.61}$$

Se deriva  $f(x, y)$  con respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + h'(y).$$

Por otra parte:

$$f_y = N \Rightarrow xe^y + h'(y) = xe^y + e^{2y} \Rightarrow h'(y) = e^{2y} \Rightarrow h(y) = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1.$$

Sustituyendo  $h(y)$  en  $f(x, y)$ , es decir en (2.61), se tiene:

$$f(x, y) = xe^y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{2y} + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} f(x, y) = C_2 &\Rightarrow xe^y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{2y} + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2xe^y - x^2 + e^{2y} = C. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.8.2** Resolver la ED:  $(x^2 + xy + 3y^2)dx - (x^2 + 2xy)dy = 0$ .

▼ **Análisis.** Notamos que en la ecuación diferencial no hay funciones trascendentes y además que todos los términos o sumandos que se tienen, son del mismo grado, en este caso 2. Podemos decir entonces que la ecuación diferencial es homogénea.

Resolvemos la homogénea escribiéndola como  $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$  o bien como  $\frac{dx}{dy} = F\left(\frac{x}{y}\right)$ . Decidimos la primera forma (con  $x$  como variable independiente).

$$\begin{aligned} (x^2 + xy + 3y^2)dx - (x^2 + 2xy)dy &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x^2 + xy + 3y^2)dx &= (x^2 + 2xy)dy \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 + xy + 3y^2}{x^2 + 2xy} = \frac{x^2\left(1 + \frac{y}{x} + 3\frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + 2\frac{y}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{y}{x} + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1 + \frac{y}{x} + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)}. \end{aligned}$$

Si  $w = \frac{y}{x}$  entonces  $y = xw$  &  $\frac{dy}{dx} = x\frac{dw}{dx} + w$ . Al sustituir se obtiene:

$$\begin{aligned} x\frac{dw}{dx} + w &= \frac{1 + w + 3w^2}{1 + 2w} \Rightarrow \\ \Rightarrow x\frac{dw}{dx} &= \frac{1 + w + 3w^2}{1 + 2w} - w = \frac{1 + w + 3w^2 - w - 2w^2}{1 + 2w} = \frac{1 + w^2}{1 + 2w} \Rightarrow \\ \Rightarrow x dw &= \frac{1 + w^2}{1 + 2w} dx \Rightarrow \frac{1 + 2w}{1 + w^2} dw = \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Después de separar las variables, integramos

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + 2w}{1 + w^2} dw &= \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left( \frac{1}{1 + w^2} + \frac{2w}{1 + w^2} \right) dw = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \arctan w + \ln(1 + w^2) + C_1 &= \ln x + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \arctan w + \ln(1 + w^2) - \ln x &= C. \end{aligned}$$



Pero  $w = \frac{y}{x}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \arctan \frac{y}{x} + \ln \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right) - \ln x &= C \Rightarrow \arctan \frac{y}{x} + \ln \left( \frac{x^2 + y^2}{x^2} \right) - \ln x = C \Rightarrow \\ \Rightarrow \arctan \frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) - \ln x^2 - \ln x &= C \Rightarrow \arctan \frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) - 2 \ln x - \ln x = C \Rightarrow \\ \Rightarrow \arctan \frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) - 3 \ln x &= C, \end{aligned}$$

que es la solución general de la ED. □

**Ejemplo 2.8.3** Resolver el PVI:  $ye^{\frac{x}{y}} dx = (y + xe^{\frac{x}{y}}) dy$ ; con  $x(1) = 0$ .

▼ **Análisis.** Notamos que en la ecuación diferencial se tiene a la función exponencial con el exponente  $\frac{x}{y}$ . Sin dudarlo pensamos en una ecuación diferencial homogénea con el cambio de variable  $w = \frac{x}{y}$ .

Expresamos esta ecuación diferencial en la forma  $\frac{dx}{dy} = F\left(\frac{x}{y}\right)$ :

$$\begin{aligned} ye^{\frac{x}{y}} dx &= \left( y + xe^{\frac{x}{y}} \right) dy \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= \frac{y + xe^{\frac{x}{y}}}{ye^{\frac{x}{y}}} = \frac{y}{ye^{\frac{x}{y}}} + \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{ye^{\frac{x}{y}}} = e^{-\frac{x}{y}} + \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Si  $w = \frac{x}{y}$  entonces  $x = yw$  &  $\frac{dx}{dy} = y \frac{dw}{dy} + w$ . Al sustituir en la ED se obtiene:

$$y \frac{dw}{dy} + w = e^{-w} + w \Rightarrow y \frac{dw}{dy} = e^{-w} \Rightarrow e^w dw = \frac{dy}{y}.$$

Integrando:

$$\int e^w dw = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow e^w + C_1 = \ln y + C_2 \Rightarrow e^w = \ln y + C.$$

Pero  $w = \frac{x}{y}$ :

$$e^{\frac{x}{y}} = \ln y + C; \text{ que es la solución general de la ED.}$$

Ahora  $x(1) = 0 \Rightarrow x = 0$  &  $y = 1$ . Luego:

$$e^{\frac{0}{1}} = \ln 1 + C \Rightarrow 1 = 0 + C \Rightarrow C = 1.$$

Por lo tanto, la solución particular del problema es:

$$e^{\frac{x}{y}} = \ln y + C \text{ con } C = 1 \Rightarrow e^{\frac{x}{y}} = \ln y + 1,$$

que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{y}} &= \ln y + \ln e \Rightarrow e^{\frac{x}{y}} = \ln(ye) \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln[\ln(ye)] \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= y \ln[\ln(ye)], \end{aligned}$$

que es la solución del PVI. □

**Ejemplo 2.8.4** Resolver la ED:  $(2y \sin x - \tan x) dx + (1 - \cos x) dy = 0$ .

▼ **Análisis.** En esta ecuación diferencial hay funciones trigonométricas cuyos argumentos no son  $\frac{y}{x}$  ni  $\frac{x}{y}$ , por lo cual concluimos que la ecuación diferencial no es homogénea.

El coeficiente  $(2y \sin x - \tan x)$  de la diferencial  $dx$  no depende sólo de  $y$ , entonces descartamos que la ecuación diferencial sea lineal para  $x = \phi(y)$ . Pero el coeficiente  $(1 - \cos x)$  de la diferencial  $dy$  depende solamente de  $x$ , entonces la ecuación diferencial puede ser lineal o bien de Bernoulli para  $y = \phi(x)$ . Reescribiendo la ED se tiene:

$$\begin{aligned}(2y \sin x - \tan x) dx + (1 - \cos x) dy &= 0 \Rightarrow (2y \sin x - \tan x) + (1 - \cos x) \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - \cos x) \frac{dy}{dx} + (2y \sin x) &= \tan x \Rightarrow y' + \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} y = \frac{\tan x}{1 - \cos x}.\end{aligned}$$

La anterior es una ecuación diferencial lineal normalizada de la forma  $y' + p(x)y = q(x)$ ; la cual resolvemos así:

$$p(x) = \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} \Rightarrow \int p(x) dx = \int \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} dx = 2 \ln(1 - \cos x).$$

Un factor integrante es:

$$e^{\int p(x) dx} = e^{2 \ln(1 - \cos x)} = e^{\ln(1 - \cos x)^2} = (1 - \cos x)^2.$$

Multiplicamos la ED por este factor integrante:

$$(1 - \cos x)^2 \left[ y' + \frac{2 \sin x}{1 - \cos x} y \right] = (1 - \cos x)^2 \frac{\tan x}{1 - \cos x}.$$

Usamos la igualdad conocida:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [(1 - \cos x)^2 y] &= (1 - \cos x) \tan x = \tan x - \sec x \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - \cos x)^2 y &= \int (\tan x - \sec x) dx = \ln(\sec x) + \cos x + C \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{\ln(\sec x) + \cos x + C}{(1 - \cos x)^2},\end{aligned}$$

que es la solución general de la ED. □

**Ejemplo 2.8.5** Resolver la ED:  $(e^x + 1)^2 e^y dy - (e^y + 1)^3 e^x dx = 0$ .

▼ **Análisis.** Notamos que los coeficientes de las diferenciales  $dx$  &  $dy$  son productos de funciones de una sola variable; es decir las variables están separadas. No hay duda de que es una ecuación diferencial de variables separables.

$$\begin{aligned}(e^x + 1)^2 e^y dy - (e^y + 1)^3 e^x dx &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (e^x + 1)^2 e^y dy &= (e^y + 1)^3 e^x dx \Rightarrow \frac{e^y}{(e^y + 1)^3} dy = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx.\end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^y}{(e^y + 1)^3} dy &= \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx \Rightarrow \int (e^y + 1)^{-3} e^y dy = \int (e^x + 1)^{-2} e^x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(e^y + 1)^{-2}}{-2} + C_1 &= \frac{(e^x + 1)^{-1}}{-1} + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{2(e^y + 1)^2} + \frac{1}{e^x + 1} &= C \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2(e^y + 1)^2} &= C,\end{aligned}$$

que es la solución general de la ED. □

**Ejemplo 2.8.6** Resolver la ED:  $xy' - (x+1)y = x^2y^2$ .

▼ **Análisis.** Basta recordar la definición de una ecuación diferencial de Bernoulli para darnos cuenta que esta ecuación diferencial es de ese tipo. En efecto:

$$xy' - (x+1)y = x^2y^2 \Rightarrow y' - \frac{x+1}{x}y = xy^2,$$

que es de la forma  $y' + p(x)y = q(x)y^n$ . Entonces, la resolvemos:

$$y^{-2} \left[ y' - \frac{x+1}{x}y \right] = xy^2y^{-2} \Rightarrow y^{-2}y' - \frac{x+1}{x}y^{-1} = x.$$

Efectuamos el cambio de variable y derivamos:

$$w = y^{-1} \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-2}y' = -w'.$$

Al sustituir lo anterior se obtiene:

$$-w' - \frac{x+1}{x}w = x \Rightarrow w' + \frac{x+1}{x}w = -x. \quad (2.62)$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal. Calculamos ahora su factor integrante:

$$e^{\int \frac{x+1}{x} dx} = e^{\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx} = e^{x+\ln x} = e^x e^{\ln x} = e^x x = xe^x$$

Luego, multiplicando (2.62) por el factor integrante  $xe^x$  se tiene:

$$xe^x \left( w' + \frac{x+1}{x}w \right) = -x^2e^x \Rightarrow$$

Usando la igualdad conocida:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xe^xw) = -x^2e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xe^xw = - \int x^2e^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xe^xw = - \left[ x^2e^x - \int 2xe^x dx \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xe^xw = -x^2e^x + 2 \int xe^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xe^xw = -x^2e^x + 2 \left[ xe^x - \int e^x dx \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xe^xw = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \frac{C - e^x(x^2 - 2x + 2)}{xe^x}.$$

Integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & \& dv = e^x \\ du = 2x dx & \& v = e^x \end{array}$$

Integrando por partes:

$$\begin{array}{ll} u = x & \& dv = e^x \\ du = dx & \& v = e^x \end{array}$$

Finalmente, considerando que  $w = y^{-1} = \frac{1}{y}$ , se obtiene:

$$\frac{1}{y} = \frac{C - e^x(x^2 - 2x + 2)}{xe^x} \Rightarrow y = \frac{xe^x}{C - e^x(x^2 - 2x + 2)},$$

que es la solución general de la ED. □

**Ejemplo 2.8.7** Resolver la ED:  $(xy - 2y + x - 2) dy = (xy + 3y - x - 3) dx$ .

▼ **Análisis.** Esta ecuación diferencial no es homogénea ya que sus términos no son del mismo grado. Las funciones que acompañan a las diferenciales  $dx$  &  $dy$  dependen de ambas variables, lo que nos hace pensar que la ecuación diferencial no es lineal ni de Bernoulli. Parece no ser de variables separables ya que no es evidente que los coeficientes de las diferenciales  $dx$  &  $dy$  sean productos o cocientes de funciones que dependan de una sola variable.

Veamos si la ED es exacta:

$$(xy - 2y + x - 2) dy = (xy + 3y - x - 3) dx \Rightarrow (xy + 3y - x - 3) dx - (xy - 2y + x - 2) dy = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (xy + 3y - x - 3) dx + (-xy + 2y - x + 2) dy = 0.$$

Tenemos entonces:

$$\left. \begin{aligned} M &= xy + 3y - x - 3 \Rightarrow M_y = x + 3 \\ N &= -xy + 2y - x + 2 \Rightarrow N_x = -y - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow \text{la ecuación diferencial no es exacta.}$$

Veamos si tiene un factor integrante que dependa sólo de una variable:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x + 3 + y + 1}{-xy + 2y - x + 2} = \frac{x + y + 4}{-xy + 2y - x + 2} \neq g(x) \Rightarrow \text{no existe factor integrante } \mu(x). \\ \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-y - 1 - x - 3}{xy + 3y - x - 3} = \frac{-x - y - 4}{xy + 3y - x - 3} \neq g(y) \Rightarrow \text{no existe factor integrante } \mu(y).$$

¿De qué tipo es esta ecuación diferencial?. Revisamos de nuevo para ver si es de variables separables.

Ya que

$$xy - 2y + x - 2 = (xy - 2y) + (x - 2) = y(x - 2) + 1(x - 2) = (x - 2)(y + 1).$$

y además

$$xy + 3y - x - 3 = (xy + 3y) + (-x - 3) = y(x + 3) - 1(x + 3) = (x + 3)(y - 1).$$

Entonces

$$(xy - 2y + x - 2) dy = (xy + 3y - x - 3) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow (x - 2)(y + 1) dy = (x + 3)(y - 1) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y + 1}{y - 1} dy = \frac{x + 3}{x - 2} dx,$$

es una ED de variables separables, por lo que, integrando:

$$\int \frac{y + 1}{y - 1} dy = \int \frac{x + 3}{x - 2} dx.$$

Efectuando ambas divisiones e integrando, se tiene:

$$\int \left(1 + \frac{2}{y - 1}\right) dy = \int \left(1 + \frac{5}{x - 2}\right) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 2 \ln(y - 1) + C_1 = x + 5 \ln(x - 2) + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y + \ln(y - 1)^2 = x + \ln(x - 2)^5 + C_2 - C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow y + \ln(y - 1)^2 - x - \ln(x - 2)^5 = C,$$

que es la solución general de la ED.

□

**Ejemplo 2.8.8** Resolver la ED:  $\frac{dx}{dy} = \frac{2 \tan x \sen 2y}{\cos 2y - \sen x}$ .

▼ **Análisis.** Al ver los argumentos de las funciones trigonométricas podemos afirmar que la ecuación no es homogénea. Si reescribimos la ecuación como:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} = \frac{2 \tan x \sen 2y}{\cos 2y - \sen x} &\Rightarrow (\cos 2y - \sen x) dx = (2 \tan x \sen 2y) dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\cos 2y - \sen x) dx - (2 \tan x \sen 2y) dy = 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

y notando que los coeficientes de las diferenciales  $dx$  &  $dy$  dependen ambos de las 2 variables  $x$  &  $y$ , podemos decir que esta ecuación diferencial no es lineal, ni tampoco de Bernoulli, ya sea para  $y = \phi(x)$  o bien para  $x = \phi(y)$ .

También, podemos decir que la ecuación diferencial no parece ser de variables separables, ya que el coeficiente de  $dx$  no es producto de funciones dependientes de una sola variable. Veamos si se trata de una ED exacta.

Tenemos ahora, de (2.63):

$$\left. \begin{aligned} M = \cos 2y - \sen x &\Rightarrow M_y = -2 \sen 2y \\ N = -2 \tan x \sen 2y &\Rightarrow N_x = -2 \sec^2 x \sen 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow \text{la ED no es exacta.}$$

¿Tendrá un factor integrante dependiente de una sola variable?

$$\begin{aligned} \frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{-2 \sen 2y + 2 \sec^2 x \sen 2y}{-2 \tan x \sen 2y} = \frac{2(\sen 2y)(\sec^2 x - 1)}{-2 \tan x \sen 2y} = \\ &= \frac{\sec^2 x - 1}{-\tan x} = \frac{\tan^2 x}{-\tan x} = -\tan x = g(x) \end{aligned}$$

En vista de lo anterior existe un factor integrante  $\mu = \mu(x)$  dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = g(x) = -\tan x &\Rightarrow \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int -\tan x dx = \int \frac{-\sen x}{\cos x} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \mu(x) = \ln(\cos x) \Rightarrow \mu(x) = \cos x. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial no exacta (2.63) por  $\mu(x) = \cos x$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos x (\cos 2y - \sen x) dx - 2 \cos x \tan x \sen 2y dy &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\cos x \cos 2y - \sen x \cos x) dx - 2 \sen x \sen 2y dy &= 0. \end{aligned}$$

Vemos ahora que:

$$\left. \begin{aligned} \overline{M} &= \cos x \cos 2y - \sen x \cos x \Rightarrow \overline{M}_y = -2 \cos x \sen 2y \\ \overline{N} &= -2 \sen x \sen 2y \Rightarrow \overline{N}_x = -2 \cos x \sen 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x.$$

La nueva ecuación diferencial es exacta. Entonces existe una función  $f(x, y)$  tal que  $f_x = \overline{M}$  &  $f_y = \overline{N}$ . Ahora bien, integrando con respecto a  $y$ :

$$\begin{aligned} f_y = \overline{N} &\Rightarrow f(x, y) = \int^y \overline{N} dy = \int^y -2 \sen x \sen 2y dy = \sen x \int -2 \sen 2y dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x, y) = \sen x \cos 2y + h(x). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Derivando ahora con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned} f_x &= \cos x \cos 2y + h'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_x &= \overline{M} \Rightarrow \cos x \cos 2y + h'(x) = \cos x \cos 2y - \sen x \cos x \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(x) &= -\sen x \cos x \Rightarrow h(x) = \int (\cos x)(-\sen x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow h(x) &= \frac{1}{2} \cos^2 x + C_1 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $h(x)$  en (2.64) se tiene:

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos 2y + \frac{1}{2} \cos^2 x + C_1.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferenciales:

$$\begin{aligned} f(x, y) = C_2 &\Rightarrow \operatorname{sen} x \cos 2y + \frac{1}{2} \cos^2 x + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos 2y + \cos^2 x = C. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.8.9** Resolver la ED:  $y dx + (2xy - e^{-2y}) dy = 0$ .

▼ **Análisis.** Al observar el exponente de  $e^{-2y}$  podemos afirmar que la ecuación diferencial no es homogénea. Por otro lado, notamos que el coeficiente correspondiente a la diferencial  $dx$  es una función que depende sólo de la variable  $y$ , así podemos pensar que es una ecuación diferencial lineal o bien de Bernoulli para  $x = \phi(y)$ . Veamos:

$$\begin{aligned} y dx + (2xy - e^{-2y}) dy &= 0 \Rightarrow y dx = -(2xy - e^{-2y}) dy \Rightarrow \\ \Rightarrow y \frac{dx}{dy} &= -2xy + e^{-2y} \Rightarrow y \frac{dx}{dy} + 2xy = e^{-2y} \Rightarrow \\ \Rightarrow yx' + 2yx &= e^{-2y} \Rightarrow x' + 2x = \frac{e^{-2y}}{y}, \end{aligned}$$

que es, en efecto, una ecuación diferencial lineal para  $x = \phi(y)$ .

Un factor integrante para esta ecuación diferencial es  $\mu(y) = e^{2y}$ . Multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{2y}[x' + 2x] &= e^{2y} \left( \frac{e^{-2y}}{y} \right) \Rightarrow \frac{d}{dy}(e^{2y}x) = \frac{1}{y} \Rightarrow e^{2y}x = \int \frac{1}{y} dy \Rightarrow e^{2y}x = \ln y + C \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= (\ln y + C)e^{-2y}, \end{aligned}$$

que es la solución general de la ED.

□

**Ejemplo 2.8.10** Resolver la ED:  $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy = 0$ .

▼ **Análisis.** Al ver el exponente de la exponencial  $e^x$  podemos afirmar que la ecuación diferencial no es homogénea. Observando los coeficientes de las diferenciales  $dx$  &  $dy$  podemos decir que esta ecuación diferencial no es lineal, ni de Bernoulli, ya sea para  $y = \phi(x)$  o bien para  $x = \phi(y)$ . Así, debido a que el coeficiente de la diferencial  $dy$  no es un producto de funciones que dependan de una sola variable, podemos decir que la ecuación diferencial no es de variables separables. Veamos entonces si se trata de una ED exacta.

De la ecuación diferencial:

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy = 0. \quad (2.65)$$

Obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} M &= e^x \Rightarrow M_y = 0 \\ N &= e^x \cot y + 2y \csc y \Rightarrow N_x = e^x \cot y \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow \text{la ecuación diferencial no es exacta.}$$

¿Tendrá un factor integrante dependiente de una sola variable?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-e^x \cot y}{e^x \cot y + 2y \csc y} \neq g(x) \Rightarrow \text{no existe factor integrante } \mu = \mu(x).$$

Pero

$$\begin{aligned}\frac{N_x - M_y}{M} &= \frac{e^x \cot y}{e^x} = \cot y = g(y) \Rightarrow \text{existe factor integrante } \mu = \mu(y) \text{ dado por:} \\ \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= g(y) = \cot y \Rightarrow \int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} dy = \int \cot y dy = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \mu(y) = \ln(\sin y) \Rightarrow \mu(y) = \sin y.\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial no exacta (2.65) por  $\mu(y) = \sin y$  se obtiene:

$$\begin{aligned}e^x \sin y dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) \sin y dy &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^x \sin y dx + \left( e^x \frac{\cos y}{\sin y} + 2y \frac{1}{\sin y} \right) \sin y dy &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^x \sin y dx + (e^x \cos y + 2y) dy &= 0.\end{aligned}\tag{2.66}$$

Entonces, tenemos ahora:

$$\left. \begin{aligned}\overline{M} &= e^x \sin y \Rightarrow \overline{M}_y = e^x \cos y \\ \overline{N} &= e^x \cos y + 2y \Rightarrow \overline{N}_x = e^x \cos y\end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \Rightarrow \text{la nueva ED (2.66) es exacta.}$$

Entonces existe una función  $f(x, y)$  tal que  $f_x = \overline{M}$  &  $f_y = \overline{N}$ .

Integrando con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned}f_x = \overline{M} &\Rightarrow f(x, y) = \int^x \overline{M} dx = \int^x e^x \sin y dx = (\sin y)e^x + h(y) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= e^x \sin y + h(y).\end{aligned}\tag{2.67}$$

Derivando con respecto a  $y$ :

$$f_y = e^x \cos y + h'(y).$$

Luego:

$$\begin{aligned}f_y = \overline{N} &\Rightarrow e^x \cos y + h'(y) = e^x \cos y + 2y \Rightarrow \\ \Rightarrow h'(y) &= 2y \Rightarrow h(y) = y^2 + C_1.\end{aligned}$$

Al sustituir  $h(y)$  en (2.67) obtenemos:

$$f(x, y) = e^x \sin y + y^2 + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta, así como de la no exacta es:

$$\begin{aligned}f(x, y) = C_2 &\Rightarrow e^x \sin y + y^2 + C_1 = C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^x \sin y + y^2 &= C.\end{aligned}$$

□

### Ejercicios 2.8.1 Miscelánea. Soluciones en la página 465

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, algunas de las cuales pueden resolverse de varias formas.

1.  $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0.$
2.  $(1 - 2x^2 - 2y)y' = 4x^3 + 4xy.$
3.  $\left(x + ye^{\frac{y}{x}}\right)dx - xe^{\frac{y}{x}}dy = 0; \quad \text{con } y(1) = 0.$

4.  $y \frac{dx}{dy} = e^{-3y} - (3y + 1)x$ .
5.  $(x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) dx + (\cos y) dy = 0$ .
6.  $(3x^2y + e^y) dx + (x^3 + xe^y - 3y^2) dy = 0$ .
7.  $(1 + y^2)(e^{2x} dx - e^y dy) - (1 + y) dy = 0$ .
8.  $(1 - \cos x)y' = \tan x - 2y \operatorname{sen} x$ .
9.  $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$ .
10.  $(x + y) dy + (x - y) dx = 0$ .
11.  $x^2 y' = 3y^4 + 2xy$ ; con  $y(1) = \frac{1}{2}$ .
12.  $(x^4 \ln x - 2xy^3) dx + (3x^2 y^2) dy = 0$ .
13.  $(\cos x + \tan y \cos x) dx + (\operatorname{sen} x - 1) \sec^2 y dy = 0$ .
14.  $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x - \ln x) dx + (e^x \cos y + 2 \cos x - \ln y) dy = 0$ .
15.  $(x + 1)y' + (x + 2)y = 2xe^{-x}$ .
16.  $(y^3 + x^2 y) dy + (xy^2 + x^3) dx = 0$ .
17.  $xy dx - x^2 dy = y \sqrt{x^2 + y^2} dy$  con  $y(1) = 1$ .
18.  $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x) dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3) dy = 0$ .
19.  $(x^2 + y^2) dy + (3x^2 y + 2xy + y^3) dx = 0$ .
20.  $(xy - 2x + 4y - 8) dy = (xy + 3x - y - 3) dx$ .
21.  $(y \tan x - \cos^2 x) dx + dy = 0$  con  $y(0) = -1$ .
22.  $dy = (y - y^2) dx$ .
23.  $xy(1 + xy^2)y' = 1$  con  $y(1) = 0$ .

## 2.9 Ecuaciones reducibles a primer orden

### 2.9.1 Introducción

El ejemplo que discutiremos a continuación involucra una ecuación diferencial de orden mayor a uno que nos permitirá tener una respuesta a la siguiente situación: lanzamos una piedra hacia arriba, lo hacemos con toda la fuerza de la que disponemos; la piedra inicia un ascenso rápido; a medida que pasa el tiempo la velocidad disminuye hasta llegar a cero, en ese momento la piedra alcanza su altura máxima y empieza su descenso.

No importa qué tan fuerte la hayamos lanzado, la piedra regresará a la superficie de la tierra por efecto de la atracción gravitacional.

Veamos la situación con otros ojos, imaginemos ahora que alguien decide hacer un tiro vertical hacia arriba con una pistola, todos sabemos que la velocidad de la bala es enorme, pero ¿será suficiente su velocidad para no retornar a la superficie tal y como lo hace la piedra? Por sorprendente que parezca, la respuesta es no.

Entonces, ¿qué velocidad se requiere para escapar de la atracción terrestre?

Vivimos en una época en la que los viajes al espacio ya no son una ilusión sino una realidad, y es evidente que para realizar un viaje así es fundamental responder a la pregunta formulada. Pues bien, el planteamiento y análisis de una ED de segundo orden nos puede dar una respuesta satisfactoria a nuestra pregunta. Responderla constituirá nuestro primer ejemplo con una ED de orden superior.



**Ejemplo 2.9.1** Determinar la velocidad de escape de un cuerpo de masa  $m$ , es decir, hallar la mínima velocidad con la cual podamos asegurar que un cuerpo, una vez que la alcance, no regresará a la superficie de la Tierra.

▼ De lo tratado en la introducción, necesitamos una ley que nos permita determinar la atracción gravitatoria entre dos cuerpos, esta ley existe por supuesto y se conoce como la ley de gravitación universal de Newton la cual establece que, en magnitud, la fuerza de atracción entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros de gravedad. En símbolos, si  $m$  representa la masa del cuerpo,  $M$  la masa de la Tierra y  $r$  la distancia entre sus centros de gravedad, entonces, en magnitud, la fuerza  $F$  de atracción entre  $m$  y  $M$  es:

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

donde la  $G$  representa la constante de gravitación universal cuyo valor es  $6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$  y encontrada por Cavendish.

Ahora bien, por la segunda ley de Newton, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{mM}{r^2}$$

donde el signo negativo indica que la fuerza es de atracción y no de repulsión. Esta última expresión es una ecuación diferencial de segundo orden.

La condición inicial del problema exige que  $r(0) = R$ , donde  $R \approx 6340 \text{ km}$ , representa el radio de la tierra. observemos que la masa  $m$  del cuerpo se elimina en ambos miembros de la anterior ecuación, de donde se deduce inmediatamente que la velocidad de escape de la Tierra es la misma para cualquier cuerpo.

Existen varias técnicas para resolver ecuaciones como la anterior, en esta sección veremos la que corresponde al *método de reducción de orden*, éste consiste en grandes rasgos en un cambio de variable que reduce la ED a una de orden inferior. En nuestro caso, introducimos un cambio que parece muy natural, a saber:

$v = \frac{dr}{dt}$ , donde  $v$  representa la velocidad instantánea del cuerpo en cuestión.

Así, resolveremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2} \\ r(0) = R \end{cases} \quad \text{o equivalentemente:} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = -G \frac{M}{r^2} \\ r(0) = R \end{cases}$$

La última ecuación diferencial entraña dos dificultades:

1. Aparecen en la ecuación tres variables:  $v$ ,  $r$  y  $t$ .
2. Puesto que la variable dependiente es  $v$ , la condición inicial es  $v(0) = v_e$  que es la velocidad de escape. Estamos considerando que al tiempo  $t = 0$  se obtiene la velocidad de escape  $v_e$  y que ésta se alcanza a ras de la superficie terrestre.

Para resolver la primera dificultad, usamos la regla de la cadena, la cual en la notación de Leibniz establece que:

$$\frac{dv}{dt} = \left( \frac{dv}{dr} \right) \left( \frac{dr}{dt} \right) = v \frac{dv}{dr}$$

Así, nuestro problema lo hemos transformado al siguiente PVI:

$$\begin{cases} v \frac{dv}{dr} = -G \frac{M}{r^2} \\ v(0) = v_e \end{cases}$$

El PVI anterior representa un problema con una ED de orden uno que podemos resolver por separación de variables así:

$$v \frac{dv}{dr} = -G \frac{M}{r^2} \Rightarrow v dv = -GM r^{-2} dr \Rightarrow \int v dv = -GM \int r^{-2} dr$$

Al integrar, hallamos

$$\frac{v^2}{2} + C_1 = -GM \left( \frac{r^{-1}}{-1} \right) + C_2 \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} + C. \quad (2.68)$$

De la condición inicial en  $t = 0$ , sabemos que  $r(0) = R$  y  $v(0) = v_e$ , por lo cual:

$$\frac{v_e^2}{2} = \frac{GM}{R} + C \Rightarrow C = \frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R}.$$

Si ahora sustituimos el valor de  $C$  en la ecuación (2.68), obtenemos:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} + \frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R}$$

Volvamos a la pregunta: se pide determinar la velocidad de escape.

Para ello, lo que se quiere es que  $v(t)$  sea siempre positiva (para que  $m$  no se detenga) cuando  $r \rightarrow \infty$ . Pero:

$$v = \sqrt{2 \left( \frac{GM}{r} + \frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R} \right)} \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} v = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{2 \left( \frac{GM}{r} + \frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R} \right)} = \sqrt{2 \left( \frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R} \right)}.$$

Una revisión de la última igualdad nos hará ver que lo que se requiere se consigue si  $\frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R} \geq 0$ .

Por lo tanto, si buscamos la velocidad mínima de escape, será suficiente con exigir que  $\frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R} = 0$ , ecuación de la que se desprende la expresión:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Para el caso de la Tierra, sustituyendo  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ,  $M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$  y  $R = 6370 \text{ km}$ , hallamos que  $v_e = 11.194 \text{ km/s}$ .

Observe que los datos de la Tierra los utilizamos hasta el final, esto significa que la fórmula puede ser aplicada a cualquier cuerpo celeste, por ejemplo:

1. En la Luna la velocidad de escape es de 2.37 kilómetros por segundo, muy inferior a la de nuestro planeta pero suficiente con creces para impedir que un astronauta se pusiera en órbita dando inadvertidamente un salto.
2. La velocidad de escape es de 4.32 km/s en Mercurio; 10.15 en Venus; 5.07 en Marte; 59.5 en Júpiter; 35.5 en Saturno; 21.3 en Urano; 23.5 en Neptuno, y 1.22 en Plutón.
3. En el Sol la velocidad de escape es muy superior: 616 km/s.

□

Notemos que en la solución de este problema, originalmente se tiene una ED de segundo orden, la que pudimos resolver gracias a que fue transformada a una ED de primer orden. Es decir, en la solución del problema fue determinante reducir el orden de la ED original ( de orden 2 a orden 1), lo que fue posible debido a un adecuado cambio de variable.

## 2.9.2 Reducción de orden

Trataremos ahora con dos tipos de ED de segundo orden, que pueden ser reducidas a ED de primer orden mediante cambios de variable adecuados y se resuelven aplicando procedimientos particulares.

1. Ecuaciones diferenciales del tipo  $F(x, y', y'') = 0$ .

Es de notar que en este tipo de ED la variable independiente  $x$  aparece explícitamente en la ecuación, pero no así la variable dependiente  $y$ , de la cual aparecen solamente sus derivadas  $y'$  &  $y''$ .

**Ejemplo 2.9.2** La ED  $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$ , es de este tipo.

2. Ecuaciones diferenciales de la forma  $F(y, y', y'') = 0$ .

En éstas ED, la variable independiente  $x$  no aparece explícitamente en la ecuación.

**Ejemplo 2.9.3** La ED  $1 + (y')^2 = 2yy''$ , pertenece a este caso.

Ahora presentamos una tabla que resume el tratamiento que debe darse a cada uno de los tipos de ED mencionados, para llegar a su solución:

Tipo de ED	Cambio de variable	Aplicación de la regla de la cadena
$F(x, y', y'')$	$u = y'$	No aplica
$F(y, y', y'')$	$u = y'$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$

A continuación presentamos algunos ejemplos sobre el método reducción de orden que abarcan los dos casos anteriores.

**Ejemplo 2.9.4** Resolver la ED:  $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$ .

▼ Ya hemos visto, ejemplo (2.9.2), que la ED de segundo orden planteada pertenece al primer tipo de ecuación donde la variable  $x$  aparece explícitamente dentro de la ecuación. Efectuamos el cambio de variable:

$$y' = u \Rightarrow y'' = \frac{du}{dx}.$$

Con esta sustitución, la ED dada puede escribirse como la ED de primer orden:

$$x \frac{du}{dx} = u \ln\left(\frac{u}{x}\right).$$

Esta última ED puede ser escrita como:

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{u}{x}\right) \ln\left(\frac{u}{x}\right),$$

que es una ecuación diferencial homogénea. Aquí  $v = \frac{u}{x}$  resulta ser un cambio de variable adecuado. Así,

$$v = \frac{u}{x} \Rightarrow u = vx \Rightarrow \frac{du}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo, resulta

$$v + x \frac{dv}{dx} = v \ln(v),$$

tenemos ahora una ED que puede ser resuelta por el método de separación de variables, en efecto:

$$\begin{aligned} x \frac{dv}{dx} &= v \ln(v) - v \Rightarrow \frac{dv}{v[\ln(v) - 1]} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{dv}{v[\ln(v) - 1]} = \int \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Si en el miembro izquierdo ponemos  $w = \ln(v) - 1$ , hallamos  $dw = \frac{dv}{v}$  por lo que

$$\int \frac{dw}{w} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln[\ln(v) - 1] = \ln(x) + C.$$

Al aplicar en ambos miembros de esta igualdad la función exponencial:

$$e^{\ln[\ln(v)-1]} = e^{\ln(x)+C} = e^{\ln(x)} e^C \Rightarrow \ln v - 1 = Cx,$$

Por lo tanto

$$\ln(v) = Cx + 1 \Rightarrow v = e^{Cx+1} = ee^{Cx}.$$

Ahora  $v = \frac{u}{x}$ , implica que:

$$\frac{u}{x} = ee^{Cx} \Rightarrow u = exe^{Cx},$$

pero

$$u = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = exe^{Cx} \Rightarrow y = \int exe^{Cx} dx = e \int xe^{Cx} dx$$

Por último, mediante integración por partes, hallamos que:

$$y = \frac{e}{C} xe^{Cx} - \frac{e}{C^2} e^{Cx} + C_2,$$

que es la solución general de la ecuación diferencial dada.

Si usamos  $C = 0$  en se tiene  $u = ex$ , pero:

$$u = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = ex dx \Rightarrow y = \frac{1}{2} ex^2 + C.$$

Esta solución no pertenece a la familia de la solución general, es entonces una solución singular de la ED. □

**Ejemplo 2.9.5** Resolver la ED:  $1 + (y')^2 = 2yy''$ ; con  $y(0) = 1$ ;  $y'(0) = 1$ .

▼ Tenemos nuevamente una ecuación de segundo orden, que de acuerdo al ejemplo (2.9.3) es del segundo tipo de reducción debido a que no aparece la variable independiente  $x$  de manera explícita en la ecuación. Proponemos el cambio de variable  $u = y'$  y requerimos utilizar la regla de la cadena. De esta manera (ver la tabla anterior):

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy} \Rightarrow 1 + u^2 = 2yu \frac{du}{dy},$$

que es una ED de variables separables, por lo cual:

$$\begin{aligned} (1 + u^2) dy &= 2yu du \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2udu}{1 + u^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2udu}{1 + u^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln(y) = \ln(u^2 + 1) + C_1. \end{aligned}$$

Aplicamos la función exponencial en ambos lados de la ecuación:

$$y = e^{\ln(u^2+1)+C_1} = e^{C_1} (u^2 + 1) = C(u^2 + 1). \quad (2.69)$$

Ahora, por las condiciones iniciales y puesto que  $u = y'$  se tiene que:

$$y(0) = 1 \text{ \& } y'(0) = 1 \Rightarrow y(0) = 1 \text{ \& } u(0) = 1 \Rightarrow 1 = C(1^2 + 1) \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = 1/2.$$

Sustituimos  $C$  en (2.69) y despejamos a  $u$ , para buscar a  $y$  en función de  $x$ . Por lo que:

$$y = \frac{1}{2}(u^2 + 1) \Rightarrow 2y = u^2 + 1 \Rightarrow u = \sqrt{2y - 1}.$$

El signo negativo se ha descartado a fin de estar en posibilidades de cumplir la condición  $y'(0) = 1$ . Pero  $u = y' = \frac{dy}{dx}$  implica que:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y - 1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2y - 1}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{2y - 1}} = \int dx \Rightarrow \int (2y - 1)^{-\frac{1}{2}} dy = x + C_2 \Rightarrow \sqrt{2y - 1} = x + C_2.$$

Finalmente,  $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$ . Por lo tanto la solución del PVI es:

$$\sqrt{2y - 1} = x + 1 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}.$$

□

### Ejercicios 2.9.1 Ecuaciones reducibles a primer orden. Soluciones en la página 465

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes.

1.  $xy'' + y' + x = 0$ .

6.  $y'' + (y')^2 = 1$ .

2.  $yy'' = (y')^2$ .

7.  $yy'' + (y')^2 = 0$ .

3.  $xy'' + y' = 0$ .

8.  $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$  con  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ .

4.  $x^2y'' + xy' = 2$ .

9.  $2yy'' + y^2 = (y')^2$  con  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

5.  $x^2y'' - xy' = 3x^3$ .

10.  $y'' + y = (y')^2$  con  $y(1) = -\frac{1}{4}$ ,  $y'(1) = \frac{1}{2}$ .

## 2.10 Sobre funciones de dos variables

### 2.10.1 Definiciones básicas

Una función real de dos variables reales es una regla de correspondencia  $f$  que a cada pareja de números reales  $(x, y)$  en un conjunto  $D_f$  de plano, llamado el dominio de  $f$  le asocia un único número real  $z$ . Aquí  $z$  es la imagen de  $(x, y)$  bajo la acción de  $f$  y es denotado por  $z = f(x, y)$ .

En este caso el dominio de la función  $f$  es

$$D_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = f(x, y) \in \mathbb{R} \},$$

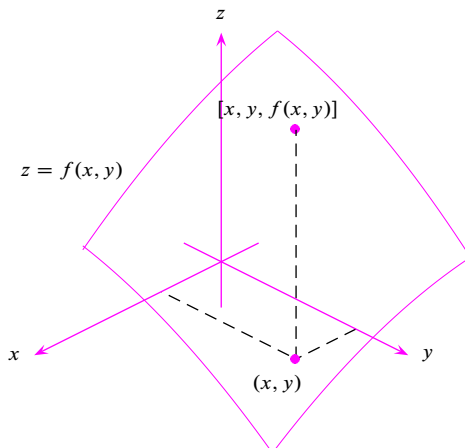
y el rango de la función  $f$  es

$$R_f = \{ z \in \mathbb{R} \mid z = f(x, y) \text{ para algún } (x, y) \in D_f \}.$$

Nótese que el dominio  $D_f$  es un subconjunto del plano cartesiano  $xy$ , esto es,  $D_f \subset \mathbb{R}^2$  y el rango  $R_f$  está contenido en  $\mathbb{R}$ , es decir,  $R_f \subset \mathbb{R}$ .

En consecuencia, la gráfica  $G_f$  de la función  $f$  está contenida en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , ya que

$$G_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f \text{ \& } z = f(x, y) \in \mathbb{R} \}.$$



Es importante resaltar que si se tiene una función definida mediante la fórmula  $z = f(x, y)$ , entonces  $f(a, b)$  se obtiene sustituyendo  $a$  en vez de  $x$  y  $b$  en vez de  $y$  en dicha fórmula.

**Ejemplo 2.10.1** Sea la función  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

Obtener:

- |                                     |                        |                                      |
|-------------------------------------|------------------------|--------------------------------------|
| 1. Su dominio.                      | 5. $f(a + 1, a - 1)$ . | 9. $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ .  |
| 2. $f(2, 3)$ .                      | 6. $f(2a, 3a)$ .       |                                      |
| 3. $f(-4, 1)$ .                     | 7. $f(3x, 3y)$ .       |                                      |
| 4. $f\left(1, \frac{2}{3}\right)$ . | 8. $f(yx, ty)$ .       | 10. $f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ . |



1. Su dominio  $D_f = \mathbb{R}^2$ , ya que  $x^2 - y^2 \in \mathbb{R}$  para cada  $x \in \mathbb{R}$  &  $y \in \mathbb{R}$ , esto es para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
2.  $f(2, 3) = 2^2 - 3^2 = 4 - 9 = -5$ .
3.  $f(-4, 1) = (-4)^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$ .
4.  $f\left(1, \frac{2}{3}\right) = 1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ .
5.  $f(a + 1, a - 1) = (a + 1)^2 - (a - 1)^2 = (a^2 + 2a + 1) - (a^2 - 2a + 1) = 4a$ .
6.  $f(2a, 3a) = (2a)^2 - (3a)^2 = 4a^2 - 9a^2 = -5a^2$ .
7.  $f(3x, 3y) = (3x)^2 - (3y)^2 = 9x^2 - 9y^2 = 9(x^2 - y^2) = 9f(x, y)$ .
8.  $f(tx, ty) = (tx)^2 - (ty)^2 = t^2x^2 - t^2y^2 = t^2(x^2 - y^2) = t^2f(x, y)$ .
9.  $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = 1^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}f(x, y)$ .
10.  $f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1^2 = \frac{x^2}{y^2} - 1 = \frac{x^2 - y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2}f(x, y)$ .

□

**Ejemplo 2.10.2** Sea la función  $g(x, y) = \frac{x + 2y}{y - 2x}$ .

Obtener:

1. Su dominio.
2.  $g(1, 3)$ .
3.  $g\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .
4.  $g(1 - a, a + 1)$ .
5.  $g(3a, 2a)$ .
6.  $g(tx, ty)$ .
7.  $g\left(1, \frac{y}{x}\right)$ .
8.  $g\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ .
9.  $g(x, c)$ .
10.  $g(c, y)$ .



1. Su dominio es todo el plano  $xy$  excepto la recta  $y = 2x$ , es decir:

$$D_g = \mathbb{R}^2 - \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = 0 \} = \mathbb{R}^2 - \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \}.$$

$$2. \quad g(1, 3) = \frac{1 + 2(3)}{3 - 2(1)} = \frac{1 + 6}{3 - 2} = \frac{7}{1} = 7.$$

$$3. \quad g\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - 2\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 3} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}} = -\frac{1}{7}.$$

$$4. \quad g(1 - a, a + 1) = \frac{(1 - a) + 2(a + 1)}{(a + 1) - 2(1 - a)} = \frac{1 - a + 2a + 2}{a + 1 - 2 + 2a} = \frac{a + 3}{3a - 1}.$$

$$5. \quad g(3a, 2a) = \frac{(3a) + 2(2a)}{(2a) - 2(3a)} = \frac{3a + 4a}{2a - 6a} = \frac{7a}{-4a} = -\frac{7}{4}.$$

$$6. \quad g(tx, ty) = \frac{(tx) + 2(ty)}{(ty) - 2(tx)} = \frac{t(x + 2y)}{t(y - 2x)} = \frac{x + 2y}{y - 2x} = g(x, y).$$

$$7. \quad g\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x} - 2(1)} = \frac{\frac{x + 2y}{x}}{\frac{y - 2x}{x}} = \frac{x + 2y}{y - 2x} = g(x, y)$$

$$8. \quad g\left(\frac{x}{y}, 1\right) = \frac{\frac{x}{y} + 2(1)}{1 - 2\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\frac{x + 2y}{y}}{\frac{y - 2x}{y}} = \frac{x + 2y}{y - 2x} = g(x, y)$$

$$9. \quad g(x, c) = \frac{x + 2c}{c - 2x}, \text{ que es función de } x \text{ para } c \text{ constante.}$$

$$10. \quad g(c, y) = \frac{c + 2y}{y - 2c}, \text{ que es función de } y \text{ para } c \text{ constante.}$$

□

**Ejemplo 2.10.3** Sea la función  $h(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ .

Obtener:

1. Su dominio.
2.  $h(0, 0)$ .
3.  $h(-3, 0)$ .
4.  $h(0, 4)$ .
5.  $h(3, -4)$ .
6.  $h(-1, 2)$ .
7.  $h(2a, 3a)$ .
8.  $h(tx, ty)$ .
9.  $h\left(1, \frac{y}{x}\right)$ .
10.  $h\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ .
11.  $h(x, c)$ .
12.  $h(c, y)$ .



1. Su dominio es el interior y frontera del círculo de radio 5 y centro en el origen

$$D_h = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 25 - x^2 - y^2 \geq 0 \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 5^2 \}.$$

2.  $h(0, 0) = \sqrt{25 - 0^2 - 0^2} = \sqrt{25} = 5.$   
 3.  $h(-3, 0) = \sqrt{25 - (-3)^2 - 0^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$   
 4.  $h(0, 4) = \sqrt{25 - 0^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3.$   
 5.  $h(3, -4) = \sqrt{25 - 3^2 - (-4)^2} = \sqrt{25 - 9 - 16} = \sqrt{0} = 0.$   
 6.  $h(-1, 2) = \sqrt{25 - (-1)^2 - 2^2} = \sqrt{25 - 1 - 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$   
 7.  $h(2a, 3a) = \sqrt{25 - (2a)^2 - (3a)^2} = \sqrt{25 - 4a^2 - 9a^2} = \sqrt{25 - 13a^2}.$   
 8.  $h(tx, ty) = \sqrt{25 - (tx)^2 - (ty)^2} = \sqrt{25 - t^2x^2 - t^2y^2} = \sqrt{25 - t^2(x^2 + y^2)}.$   
 9.  $h\left(1, \frac{y}{x}\right) = \sqrt{25 - 1^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \sqrt{24 - \frac{y^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{24x^2 - y^2}{x^2}}.$   
 10.  $h\left(\frac{x}{y}, 1\right) = \sqrt{25 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{24 - \frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{24y^2 - x^2}{y^2}}.$   
 11.  $h(x, c) = \sqrt{25 - x^2 - c^2} = \phi(x)$ , para  $c$  constante.  
 12.  $h(c, y) = \sqrt{25 - c^2 - y^2} = \phi(y)$ , para  $c$  constante.

□

**Ejercicios 2.10.1** Definiciones básicas. *Soluciones en la página 465*

1. Para la función  $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^3$ , obtener:

- |                 |  |  |
|-----------------|--|--|
| a. $f(2, 3).$   | e. $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$ | h. $x^3 f\left(1, \frac{y}{x}\right).$ |
| b. $f(-1, 1).$  | f. $f(1, 0).$                                | i. $f\left(\frac{x}{y}, 1\right).$     |
| c. $f(a, a).$   | g. $f\left(1, \frac{y}{x}\right).$           | j. $y^3 f\left(\frac{x}{y}, 1\right).$ |
| d. $f(tx, tx).$ |  |  |

2. Para la función  $g(x, y) = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ , obtener:

- |                |                 |                                    |
|----------------|-----------------|------------------------------------|
| a. $g(3, -4).$ | c. $g(tx, tx).$ | e. $g\left(1, \frac{y}{x}\right).$ |
| b. $g(4, -3).$ | d. $g(1, a).$   |                                    |

3. Para la función  $h(x, y) = \frac{x + ye^{y/x}}{xe^{y/x}}$ , obtener:

- |               |                |                 |
|---------------|----------------|-----------------|
| a. $h(1, 0).$ | c. $h(-1, 0).$ | e. $h(tx, ty).$ |
| b. $h(a, a).$ | d. $h(y, x).$  |                 |



4. Para la función  $\phi(t, u) = \frac{u}{t}(\ln u - \ln t)$ , obtener:

a.  $\phi(1, 1)$ .

b.  $\phi(a, a)$ .

c.  $\phi(rt, ru)$ .

d.  $\phi\left(1, \frac{u}{t}\right)$ .

e.  $\phi\left(\frac{t}{u}, 1\right)$ .

5. Para la función  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy - x^2}$ , obtener:

a.  $f(2, 1)$ .

b.  $f(a, -a)$ .

c.  $f(tx, ty)$ .

d.  $f(1, a)$ .

e.  $f(a, 1)$ .

f.  $f(ty, tx)$ .

g.  $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ .

h.  $f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ .

### 2.10.2 Derivadas parciales

En el curso de cálculo de una variable la derivada de una función  $u = \phi(t)$  se definió de la siguiente forma:

$$\phi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t},$$

cuando el límite existe.

Recordemos que para calcular este límite:

Primero se incrementa la variable independiente  $t$  en una cantidad  $h = \Delta t$ .

A continuación se obtiene el incremento de la variable dependiente  $u$  mediante:

$$\Delta u = \phi(t + \Delta t) - \phi(t),$$

Luego se obtiene la razón de incrementos  $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ .

Finalmente se calcula  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$  (cuando el límite existe) que es precisamente la derivada  $\phi'(t)$  denotada también por  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{du}{dt} = \phi'(t) = u'(t)$ .

Para una función de dos variables  $z = f(x, y)$  se define de manera análoga:

- La derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  como

$$f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

- La derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$  como

$$f_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Otras notaciones para estas derivadas parciales son

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \& \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Interpretamos estas definiciones diciendo lo siguiente:

1. En la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  se incrementa en  $h$  solamente a la variable independiente  $x$  para luego obtener el incremento de la variable dependiente  $z$  mediante  $\Delta z = f(x+h, y) - f(x, y)$  y finalmente calcular (cuando existe):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = f_x.$$

Notamos que la variable independiente  $y$  se mantiene fija. La variable  $y$  no es incrementada.

2. En la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$  se incrementa en  $h$  solamente a la variable independiente  $y$  para luego obtener el incremento de la variable dependiente  $z$  mediante  $\Delta z = f(x, y+h) - f(x, y)$  y finalmente calcular (cuando existe):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = f_y.$$

Notamos que la variable independiente  $x$  se mantiene fija. La variable  $x$  no es incrementada.

De esta observaciones se desprende que:

1. Al calcular la derivada parcial  $f_x$ , de  $f$  con respecto a  $x$ , a la variable  $y$  se le considera como constante.
2. Al calcular la derivada parcial  $f_y$ , de  $f$  con respecto a  $y$ , a la variable  $x$  se le considera como constante.

**Ejemplo 2.10.4** Calcular las derivadas parciales de la función  $f(x, y) = 2x^5 - 3x^3y^2 + 4y^3 - 5$ .



$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^5 - 3x^3y^2 + 4y^3 - 5) = 2\frac{\partial}{\partial x}(x^5) - 3y^2\frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(4y^3 - 5) = \\ &= 2(5x^4) - 3y^2(3x^2) + 0 = 10x^4 - 9x^2y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^5 - 3x^3y^2 + 4y^3 - 5) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^5) - 3x^3\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + 4\frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(-5) = \\ &= 0 - 3x^3(2y) + 4(3y^2) - 0 = -6x^3y + 12y^2. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.10.5** Calcular las derivadas parciales de la función  $g(x, y) = x^2y^3e^{xy}$ .



$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3e^{xy}) = (x^2y^3)\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{xy}\right) + e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) = \\ &= x^2y^3e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(xy) + e^{xy}y^3\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = \\ &= x^2y^3e^{xy}y \cdot 1 + e^{xy}y^3 \cdot 2x = e^{xy}(x^2y^4 + 2xy^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_y &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3e^{xy}) = (x^2y^3)\left(\frac{\partial}{\partial y}e^{xy}\right) + e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3) = \\ &= x^2y^3e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}(xy) + e^{xy}x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^3) = \\ &= x^2y^3e^{xy}x \cdot 1 + e^{xy}x^2 \cdot 3y^2 = e^{xy}(x^3y^3 + 3x^2y^2). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.10.6** Calcular las derivadas parciales de la función  $w(t, u) = \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^{10}$ .



$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^{10} = 10 \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^{10-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right) = \\ &= 10 \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^9 \cdot \frac{(t^2 + u^2) \frac{\partial}{\partial t} (t^2 - u^2) - (t^2 - u^2) \frac{\partial}{\partial t} (t^2 + u^2)}{(t^2 + u^2)^2} = \\ &= 10 \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^9 \cdot \frac{(t^2 + u^2)(2t - 0) - (t^2 - u^2)(2t + 0)}{(t^2 + u^2)^2} = \\ &= 10 \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^9 \cdot \frac{2t^3 + 2tu^2 - 2t^3 + 2tu^2}{(t^2 + u^2)^2} = \\ &= 10 \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^9 \cdot \frac{4tu^2}{(t^2 + u^2)^2} = \frac{40tu^2(t^2 - u^2)^9}{(t^2 + u^2)^{11}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^{10} = 10 \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^{10-1} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right) = \\ &= 10 \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^9 \cdot \frac{(t^2 + u^2) \frac{\partial}{\partial u} (t^2 - u^2) - (t^2 - u^2) \frac{\partial}{\partial u} (t^2 + u^2)}{(t^2 + u^2)^2} = \\ &= 10 \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^9 \cdot \frac{(t^2 + u^2)(0 - 2u) - (t^2 - u^2)(0 + 2u)}{(t^2 + u^2)^2} = \\ &= 10 \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^9 \cdot \frac{-2t^2u - 2u^3 - 2t^2u + 2u^3}{(t^2 + u^2)^2} = \\ &= 10 \left(\frac{t^2 - u^2}{t^2 + u^2}\right)^9 \cdot \frac{-4t^2u}{(t^2 + u^2)^2} = \frac{-40t^2u(t^2 - u^2)^9}{(t^2 + u^2)^{11}}.\end{aligned}$$

□

**Ejercicios 2.10.2** Derivadas parciales. *Soluciones en la página 466*

Calcular las derivadas parciales de las funciones siguientes:

1.  $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y^2 - 5y^4 + 6$ .

4.  $w = t^2u^3e^{t^2u^3}$ .

2.  $g(x, y) = e^x \sin y - e^y \cos x$ .

3.  $z = \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^2}$ .

5.  $h(x, y) = x \tan(x^2 + y^2) - y \sec(x^2 + y^2)$ .

### 2.10.3 Diferencial exacta o total

- Se define la **diferencial exacta o total** de una función  $z = f(x, y)$  como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

o bien

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

**Ejemplo 2.10.7** Obtener la diferencial exacta o total de la función  $f(x, y) = e^{xy^2}$ .

▼ La derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  es

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy^2}) = e^{xy^2} \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = e^{xy^2} y^2 \cdot 1 = y^2 e^{xy^2}.$$

La derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$  es

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy^2}) = e^{xy^2} \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = e^{xy^2} x \cdot 2y = 2xy e^{xy^2}.$$

La diferencial exacta o total de  $f$  es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = y^2 e^{xy^2} dx + 2xy e^{xy^2} dy.$$

□

**Ejemplo 2.10.8** Obtener la diferencial exacta de la función  $g(t, u) = \sin \frac{t}{u}$ .

▼ La derivada parcial de  $g$  con respecto a  $t$  es:

$$g_t = \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sin \frac{t}{u} \right) = \left( \cos \frac{t}{u} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{u} \right) = \left( \cos \frac{t}{u} \right) \cdot \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{u} \cos \frac{t}{u}.$$

La derivada parcial de  $g$  con respecto a  $u$  es:

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \sin \frac{t}{u} \right) = \left( \cos \frac{t}{u} \right) \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{t}{u} \right) = \left( \cos \frac{t}{u} \right) \cdot t \cdot \frac{\partial}{\partial u} u^{-1} = \left( \cos \frac{t}{u} \right) \cdot t \cdot (-u^{-2}) = -\frac{t}{u^2} \cos \frac{t}{u}.$$

La diferencial exacta o total de  $g$  es:

$$dg = g_t dt + g_u du = \frac{1}{u} \cos \frac{t}{u} dt - \frac{t}{u^2} \cos \frac{t}{u} du = \frac{1}{u^2} \left( \cos \frac{t}{u} \right) (u dt - t du).$$

□

**Ejemplo 2.10.9** Obtener la diferencial exacta de la función  $z = e^x \cos y + e^y \tan x$ .

▼ La derivada parcial de  $z$  con respecto a  $x$  es:

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + e^y \tan x) = \cos y \cdot \frac{\partial}{\partial x} e^x + e^y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \tan x = \cos y e^x + e^y \sec^2 x = \\ &= e^x \cos y + e^y \sec^2 x. \end{aligned}$$

La derivada parcial de  $z$  con respecto a  $y$  es:

$$\begin{aligned} z_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y + e^y \tan x) = e^x (-\sin y) + (\tan x) e^y = \\ &= -e^x \sin y + e^y \tan x. \end{aligned}$$

La diferencial exacta o total de  $z$  es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (e^x \cos y + e^y \sec^2 x) dx + (-e^x \sin y + e^y \tan x) dy.$$

□

**Ejercicios 2.10.3** Diferencial total. *página 466*

Obtener la diferencial exacta o total de cada una de las siguientes funciones:

1.  $f(x, y) = y \sin x - x \cos y.$

4.  $y = u^3 - 2u^2w + 3uw^2 - 4w^2.$

2.  $g(x, y) = xy \tan(xy).$

3.  $z = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$

5.  $\phi(x, u) = \sqrt{u^2 - x^2}.$

### 2.10.4 Derivación implícita

Con frecuencia consideramos que una función de dos variables  $z = F(x, y)$  puede utilizarse, cuando se considera una curva de nivel  $F(x, y) = C$ , para definir implícitamente a una de las variables  $y$  en función de la otra  $x$ . Calcular la derivada  $\frac{dy}{dx}$  se lograba en cálculo de una variable mediante la derivación implícita. En esta sección veremos una forma alternativa.

**Ejemplo 2.10.10** Sea la función  $F(x, y) = 2x^2y - xy^3$ .

▼ Podemos hacer los siguientes cálculos:

1. Notemos que:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - xy^3) = 2y(2x) - y^3(1) = 4xy - y^3$$

y que

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - xy^3) = 2x^2(1) - x(3y^2) = 2x^2 - 3xy^2.$$

2. Si consideramos la ecuación  $2x^2y - xy^3 = 7$  como un lugar geométrico en el plano que en cada punto del mismo define localmente una función  $y = f(x)$ , podemos entonces derivar implícitamente con respecto a  $x$  y despejar  $\frac{dy}{dx}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2x^2y - xy^3) &= \frac{d}{dx}(7) = 2x^2 \frac{d}{dx}(y) + y \frac{d}{dx}(2x^2) - x \frac{d}{dx}(y^3) - y^3 \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(7) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x^2 \frac{dy}{dx} + 4xy - 3xy^2 \frac{dy}{dx} - y^3 = 0 \Rightarrow (2x^2 - 3xy^2) \frac{dy}{dx} = -4xy + y^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4xy + y^3}{2x^2 - 3xy^2} = -\frac{4xy - y^3}{2x^2 - 3xy^2}. \end{aligned}$$

Dado lo anterior, vemos que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

□

En general, podemos afirmar entonces que:

• Si la ecuación  $F(x, y) = C$  define a  $y$  implícitamente como una función de  $x$  entonces

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \text{ siempre que } F_y \neq 0.$$

Recordemos que esta ED proporciona la pendiente de la recta tangente, en  $(x_0, y_0)$ , a la gráfica de una función definida implícitamente que pasa por el punto  $(x_0, y_0)$ .

**Ejemplo 2.10.11** Encontrar una ecuación diferencial que satisfacen las circunferencias de radio  $r$  con centro en el origen:  $x^2 + y^2 = r^2$ .

▼ Ya que  $x^2 + y^2 = r^2$  entonces  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ , en este caso  $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$  (con  $r$  es constante). De aquí que:

$$F_x = 2x \quad y \quad F_y = 2y.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

La ecuación diferencial solicitada es:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

□

**Ejemplo 2.10.12** Encontrar una ecuación diferencial que satisfacen las parábolas con vértice en el origen:  $y = cx^2$ .

▼ Ya que  $y = cx^2$  entonces  $\frac{y}{x^2} = c$ , en este caso  $F(x, y) = \frac{y}{x^2}$ .

$$F_x = y \left( -\frac{2}{x^3} \right) = -\frac{2y}{x^3} \quad y \quad F_y = \frac{1}{x^2}.$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-\frac{2y}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2y}{x}.$$

La ecuación diferencial solicitada es:

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

□

**Ejercicios 2.10.4** Derivación implícita. *Soluciones en la página 466*

Obtener  $\frac{dy}{dx}$  de la siguientes ecuaciones:

1.  $\frac{x}{y} - xy^2 + 3 = 0$

3.  $3x - y + Ce^{-x} = 0.$

4.  $x \ln y = xy^2 + e^{2y}.$

2.  $5x^2y + \ln x = 0.$

5.  $\sin x - 3y + 2xy = 0.$

## 2.10.5 Derivadas parciales de orden superior

Al calcular las derivadas parciales de una función  $z = f(x, y)$  se obtienen nuevas funciones que en general, también dependen de  $x$  &  $y$ . Esto es  $f_x = g(x, y)$  &  $f_y = h(x, y)$ .

A estas nuevas funciones se les denomina **primeras derivadas parciales** de la función  $z = f(x, y)$ .

Al derivar parcialmente estas nuevas funciones se obtienen las **segundas derivadas parciales** de la función  $z = f(x, y)$  las cuales son las siguientes:

1. Derivando con respecto a  $x$  a la función  $g(x, y) = f_x$  se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

que es la segunda derivada parcial de  $f$ , con respecto a  $x$  dos veces.

2. Derivando con respecto a  $y$  a la función  $g(x, y) = f_x$  se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

que es la segunda derivada parcial de  $f$ , primero con respecto a  $x$  & luego con respecto a  $y$ .

3. Derivando con respecto a  $x$  a la función  $h(x, y) = f_y$  se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

que es la segunda derivada parcial de  $f$ , primero con respecto a  $y$  y luego con respecto a  $x$ .

4. Derivando con respecto a  $y$  a la función  $h(x, y) = f_y$  se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial y} h(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

que es la segunda derivada parcial de  $f$ , con respecto a  $y$  dos veces.

- A las parciales  $f_{xy}$  &  $f_{yx}$  se les conoce como **segundas derivadas parciales mixtas**.

**Ejemplo 2.10.13** Calcular las segundas derivadas parciales de la función  $f(x, y) = 3x^4 - 5x^2y^2 + 6y^4$ .



$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(3x^4 - 5x^2y^2 + 6y^4) = 3(4x^3) - 5y^2(2x) + 0 = 12x^3 - 10xy^2.$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(3x^4 - 5x^2y^2 + 6y^4) = 0 - 5x^2(2y) + 6(4y^3) = -10x^2y + 24y^3.$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial}{\partial x}(12x^3 - 10xy^2) = 12(3x^2) - 10y^2(1) = 36x^2 - 10y^2.$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial}{\partial y}(12x^3 - 10xy^2) = 0 - 10x(2y) = -20xy.$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial}{\partial x}(-10x^2y + 24y^3) = -10y(2x) + 0 = -20xy.$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial}{\partial y}(-10x^2y + 24y^3) = -10x^2(1) + 24(3y^2) = -10x^2 + 72y^2.$$

Nótese aquí que  $f_{xy} = -20xy = f_{yx}$ . Las segundas derivadas parciales mixtas son iguales.



**Ejemplo 2.10.14** Calcular las segundas derivadas parciales de la función  $z = e^{xy}$ .



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} = e^{xy} \frac{\partial}{\partial x}(xy) = e^{xy} y \cdot 1 = ye^{xy}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} = e^{xy} \frac{\partial}{\partial y}(xy) = e^{xy} x \cdot 1 = xe^{xy}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (ye^{xy}) = y \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} = y(e^{xy} y) = y^2 e^{xy}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (ye^{xy}) = y \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} + e^{xy} \frac{\partial}{\partial y} y = y(e^{xy} x) + e^{xy} \cdot 1 = xy e^{xy} + e^{xy} = e^{xy} (xy + 1).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (xe^{xy}) = x \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} + e^{xy} \frac{\partial}{\partial x} x = x(e^{xy} y) + e^{xy} \cdot 1 = xy e^{xy} + e^{xy} = e^{xy} (xy + 1).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (xe^{xy}) = x \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} = x^2 e^{xy}.$$

Notamos aquí que  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{xy} (xy + 1) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ . Las segundas derivadas parciales mixtas son iguales.

□

- Bajo condiciones de continuidad las segundas derivadas parciales mixtas son iguales, Esto es, si las funciones  $f$ ,  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_{xy}$  &  $f_{yx}$  son continuas en cierta región, entonces  $f_{xy} = f_{yx}$ .

### Ejercicios 2.10.5 Derivación de orden superior. Soluciones en la página 466

Calcular las segundas derivadas parciales y verificar la igualdad de las parciales mixtas para las funciones siguientes.

1.  $f(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ .

4.  $z(x, y) = (2x - 3y)^5$ .

2.  $g(x, y) = e^x \cos(y) + e^y \sin(x)$ .

3.  $h(x, y) = \sin(xy)$ .

5.  $w(u, y) = \cos(3u + 2y)$ .

### 2.10.6 Integración parcial

1. Recordemos que para la integral indefinida de funciones de una variable si  $\frac{d}{dt} f(t) = g(t)$  y  $C$  es cualquier constante, entonces

$$\frac{d}{dt} [f(t) + C] = g(t) \quad \text{así que} \quad \int g(t) dt = f(t) + C.$$

Donde  $C$  es la constante de integración.

Ahora bien, con funciones de dos variables  $x$  &  $y$ , tenemos lo siguiente:

2. Si  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = g(x, y)$  &  $h(y)$  es una función que depende solamente de  $y$ , entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(x, y) + h(y)] = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} h(y) = g(x, y) + 0 = g(x, y).$$

Por lo que, integrando parcialmente con respecto a  $x$ :

$$\int^x g(x, y) dx = f(x, y) + h(y),$$

donde  $h(y)$  hace el papel de constante de integración.



3. De manera análoga, si  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \phi(x, y)$  &  $\eta(x)$  es cualquier función que depende solamente de  $x$ , entonces:

$$\frac{\partial}{\partial y} [f(x, y) + \eta(x)] = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \eta(x) = \phi(x, y) + 0 = \phi(x, y).$$

Por lo que, integrando parcialmente con respecto a  $y$ :

$$\int^y \phi(x, y) dy = f(x, y) + \eta(x),$$

donde  $\eta(x)$  es ahora la constante de integración.

Observación. Cuando se integra parcialmente con respecto a una de las variables, la otra variable se considera constante y participa en la constante de integración.

**Ejemplo 2.10.15** Calcular

$$\int^x f(x, y) dx \text{ \& } \int^y f(x, y) dy, \text{ para } f(x, y) = 5x^4 - 6x^3y^2 + 8y^3 - 2.$$

▼ Primero:

$$\begin{aligned} \int^x f(x, y) dx &= \int^x (5x^4 - 6x^3y^2 + 8y^3 - 2) dx = \\ &= 5 \int x^4 dx - 6y^2 \int x^3 dx + 8y^3 \int dx - 2 \int dx = \\ &= 5 \left( \frac{x^5}{5} \right) - 6y^2 \left( \frac{x^4}{4} \right) + 8y^3 x - 2x + h(y) = \\ &= x^5 - \frac{3}{2} x^4 y^2 + 8xy^3 - 2x + h(y). \end{aligned}$$

Donde  $h(y)$  es cualquier función que depende sólo de  $y$ .

Segundo:

$$\begin{aligned} \int^y f(x, y) dy &= \int^y (5x^4 - 6x^3y^2 + 8y^3 - 2) dy = \\ &= 5x^4 \int dy - 6x^3 \int y^2 dy + 8 \int y^3 dy - 2 \int dy = \\ &= 5x^4 y - 6x^3 \left( \frac{y^3}{3} \right) + 8 \left( \frac{y^4}{4} \right) - 2y + h(x) = \\ &= 5x^4 y - 2x^3 y^3 + 2y^4 - 2y + h(x). \end{aligned}$$

Donde  $h(x)$  es cualquier función que depende sólo de  $x$ . □

**Ejemplo 2.10.16** Calcular

$$\int^x g(x, y) dx \text{ \& } \int^y g(x, y) dy, \text{ para } g(x, y) = \sqrt{2x - 3y}.$$

▼ Primero:

$$\int^x g(x, y) dx = \int^x (\sqrt{2x - 3y}) dx = \frac{1}{2} \int^x (2x - 3y)^{\frac{1}{2}} 2 dx.$$

Si  $u = 2x - 3y$  con  $y$  constante  $\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow du = 2 dx$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \int^x g(x, y) dx &= \frac{1}{2} \int^x (2x - 3y)^{\frac{1}{2}} 2 dx = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + h(y) = \\ &= \frac{1}{2} (2x - 3y)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{3} \right) + h(y) = \frac{1}{3} (2x - 3y)^{\frac{3}{2}} + h(y). \end{aligned}$$

Donde  $h(y)$  es cualquier función que depende sólo de  $y$ .

Segundo:

$$\int^y g(x, y) dy = \int^y (\sqrt{2x-3y}) dy = \frac{1}{-3} \int^y (2x-3y)^{\frac{1}{2}} (-3) dy$$

Si  $u = 2x - 3y$  con  $x$  constante  $\Rightarrow \frac{du}{dy} = -3 \Rightarrow du = -3 dy$ . Entonces:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \int^y (2x-3y)^{\frac{1}{2}} (-3) dy &= -\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + h(x) = \\ &= -\frac{1}{3} (2x-3y)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right) + h(x) = -\frac{2}{9} (2x-3y)^{\frac{3}{2}} + h(x). \end{aligned}$$

Donde  $h(x)$  es cualquier función que depende sólo de  $x$ .

□

**Ejemplo 2.10.17** Calcular

$$\int^x \phi(x, y) dx \ \& \ \int^y \phi(x, y) dy, \text{ para } \phi(x, y) = \cos xy.$$

▼ Primero:

$$\int^x \phi(x, y) dx = \int^x \cos xy dx = \int^x \frac{1}{y} (\cos xy) y dx.$$

Nótese que si  $u = xy$  con  $y$  constante  $\Rightarrow \frac{du}{dx} = y \Rightarrow du = y dx$ . Entonces:

$$\int^x \phi(x, y) dx = \frac{1}{y} \int^x (\cos xy) y dx = \frac{1}{y} \sin xy + h(y).$$

Donde  $h(y)$  es cualquier función que depende sólo de  $y$ .

Segundo:

$$\int^y \phi(x, y) dy = \int^y \cos xy dy = \int^y \frac{1}{x} (\cos xy) x dy.$$

Nótese que si  $u = xy$  con  $x$  constante  $\Rightarrow \frac{du}{dy} = x \Rightarrow du = x dy$ . Entonces:

$$\int^y \phi(x, y) dy = \frac{1}{x} \int^y (\cos xy) x dy = \frac{1}{x} \sin xy + h(x).$$

Donde  $h(x)$  es cualquier función que depende sólo de  $x$ .

□

**Ejemplo 2.10.18** Calcular

$$\int^x f(x, y) dx \ \& \ \int^y f(x, y) dy, \text{ para } f(x, y) = xye^{xy}.$$

▼ Primero:

$$\begin{aligned} \int^x f(x, y) dx &= \int^x xye^{xy} dx = \int^x xe^{xy} y dx = \\ &= uv - \int v du = xe^{xy} - \int^x e^{xy} dx = \\ &= xe^{xy} - \frac{1}{y} \int^x e^{xy} dx = \\ &= xe^{xy} - \frac{1}{y} e^{xy} + h(y) = \\ &= \left(x - \frac{1}{y}\right) e^{xy} + h(y). \end{aligned}$$

Usamos la técnica de integración por partes con  $y$  constante

$$\begin{aligned} u &= x & \& & dv &= e^{xy} y dx \\ du &= dx & \& & v &= e^{xy} \end{aligned}$$

Segundo:

$$\begin{aligned}
 \int^y f(x, y) dy &= \int^y xye^{xy} dy = \int^y ye^{xy} x dy = \\
 &= uv - \int v du = ye^{xy} - \int e^{xy} dy = \\
 &= ye^{xy} - \frac{1}{x} \int^y e^{xy} x dy = \\
 &= ye^{xy} - \frac{1}{x} e^{xy} + h(x) = \\
 &= \left( y - \frac{1}{x} \right) e^{xy} + h(x).
 \end{aligned}$$

Usamos la técnica de integración por partes con  $x$  constante

$$\begin{aligned}
 u &= y & \& & dv &= e^{xy} x dy \\
 du &= dy & \& & v &= e^{xy}
 \end{aligned}$$

□

### Ejercicios 2.10.6 Integración parcial. Soluciones en la página 466

Evaluar en cada ejercicio las integrales de la funciones presentadas

1.  $\int^x f(x, y) dx$  &  $\int^y f(x, y) dy$  para  $f(x, y) = 5x^4 - 6x^2y^2 + 4y^3 - 1$ .
2.  $\int^x g(x, y) dx$  &  $\int^y g(x, y) dy$  para  $g(x, y) = \sqrt[3]{4x - 5y}$ .
3.  $\int^x \phi(x, y) dx$  &  $\int^y \phi(x, y) dy$  para  $\phi(x, y) = xy(x^2 + y^2)^9$ .
4.  $\int^x f(x, y) dx$  &  $\int^y f(x, y) dy$  para  $f(x, y) = xy \cos xy$ .
5.  $\int^x g(x, y) dx$  &  $\int^y g(x, y) dy$  para  $g(x, y) = 2xye^{x^2 - y^2}$ .



## CAPÍTULO

# 3

## Aplicaciones de ED de primer orden

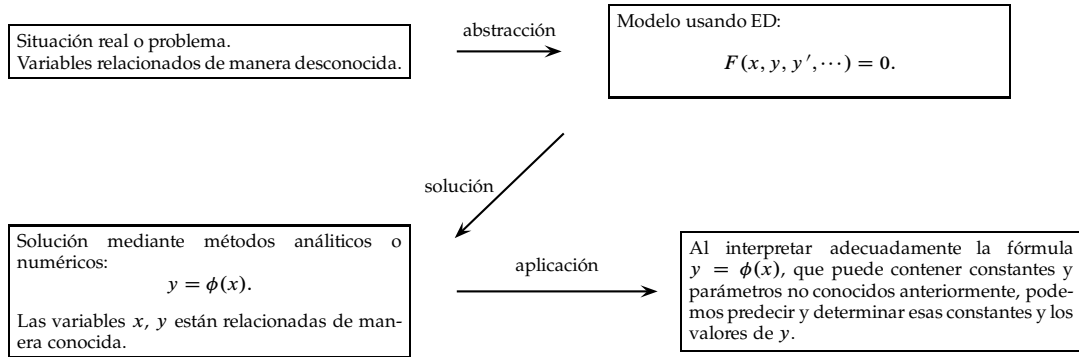
### 3.1 Introducción

La ciencia en cualquiera de sus ramas se dedica a estudiar una parte o bien un aspecto del Universo, que tiene entre sus principales características el cambio y la evolución. Apenas uno empieza a entender algún proceso un momento cuando éste ya está cambiando. Una cosa permanente en este Universo es paradójicamente el cambio. En matemáticas la principal herramienta que tenemos para entender o modelar de alguna manera el cambio es mediante la derivada de una función. Por tanto, muchas veces para poder entender la esencia de un proceso es necesario establecer relaciones que expliquen de qué manera se llevan a cabo sus cambios, y esto nos lleva directamente a las ecuaciones diferenciales. Es mediante las ED que se pueden plantear modelos matemáticos para muchos procesos.

Existe tan gran variedad de modelos que se plantean en términos de ED, aquí sólo se tratará de presentar algunos modelos que son representativos de esa gran variedad, algunos de ellos forman parte del trabajo cotidiano de los autores.

#### 3.1.1 Las aplicaciones de las ED

La actividad científica busca principalmente proporcionar explicaciones racionales y sistemáticas de los procesos que estudia; una vez que una teoría explica satisfactoriamente un proceso, es posible aplicar el entendimiento adquirido para predecir el comportamiento de ese proceso y, si es posible, modificarlo en beneficio de la sociedad. Se puede decir que en ese momento surge la tecnología que es, expresado de una manera simple, ciencia aplicada a la solución de problemas prácticos. Dentro de la actividad científica las ED han jugado un papel muy importante porque se utilizan muy frecuentemente para modelar procesos, siguiendo un esquema como el siguiente:



Muchas áreas de las distintas ramas de la ciencia y la ingeniería han utilizado el esquema anterior para resolver problemas y hacer aplicaciones de ED, como por ejemplo:

- En Química se ha logrado entender el mecanismo del decaimiento radioactivo utilizando un modelo con ED que presentaremos en la próxima sección. Algunos ejemplos de aplicación de la solución de ese modelo incluyen el fechado de piezas mediante trazas de materiales radioactivos, de gran importancia en arqueología e historia.
- Para algunas áreas en biología y ciencias sociales es importante llegar a determinar como evolucionan las poblaciones (animales o humanas) bajo diversas condiciones, tales como abundancia o escasez de recursos como alimento o espacio; competencia entre las misma especie o con otras especies etc. Algunos de estos modelos se presentan más adelante.
- Otros problemas de interés para la ingeniería incluyen: enfriamiento o calentamiento de piezas en un ambiente a temperatura constante; mezclas dinámicas de soluciones con diferentes concentraciones del soluto; problemas de mecánica; problemas geométricos y algunos otros que discutiremos con algún detalle más adelante.

## 3.2 Decaimiento radioactivo

Si observamos cierta cantidad inicial de sustancia o material radioactivo, al paso del tiempo se puede verificar un cambio en la cantidad de dicho material; la cantidad  $M$  del material es una función del tiempo  $t$ , esto es  $M = M(t)$ . Aún más, dadas las características de los materiales radioactivos, al paso del tiempo ocurre una desintegración o decaimiento del material. Esto no quiere decir que el material desaparezca, sino que la configuración interna de sus átomos cambia y dejan de ser radioactivos.

Experimentalmente se ha llegado al conocimiento de que en cualquier tiempo  $t \geq 0$ , la rapidez de cambio de la cantidad  $M(t)$  de material radioactivo, es directamente proporcional a la cantidad de material presente. Simbólicamente esto se expresa así:

$$\frac{d}{dt}M(t) \propto M(t)$$

donde  $\frac{d}{dt}M(t)$  es la rapidez de cambio de  $M(t)$  y el símbolo  $\propto$  denota la proporcionalidad existente entre la cantidad presente  $M(t)$  del material radioactivo y su rapidez de cambio.

Se afirma entonces que:

$$\frac{dM(t)}{dt} = kM(t). \quad (3.1)$$

donde  $k$  es la llamada constante de proporcionalidad. Debido a la desintegración, la cantidad  $M(t)$  de material radioactivo va disminuyendo (decreciendo) al paso del tiempo  $t$ , por lo tanto se tiene que  $\frac{d}{dt}M(t) < 0$ ,

lo que nos permite concluir que  $k < 0$  y que  $M(t) \geq 0$ .

Esta ecuación diferencial (3.1) representa el modelo matemático a resolver y es de variables separables. En efecto:

$$\frac{dM}{dt} = kM \Rightarrow \frac{dM}{M} = k dt.$$

Integrando se tiene:

$$\int \frac{dM}{M} = \int k dt \Rightarrow \ln M = kt + C_1 \Rightarrow M = e^{kt+C_1} = e^{kt} e^{C_1} = e^{kt} C.$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial (3.1) es:

$$M(t) = Ce^{kt}.$$

Es común conocer la cantidad (inicial) de material existente en  $t = 0$ , lo que se expresa por  $M(0) = M_0$ . Con esto podemos calcular la constante  $C$ :

$$M(0) = M_0 = Ce^{k \cdot 0} = C \Rightarrow C = M_0.$$

Entonces se tiene

$$M(t) = M_0 e^{kt}.$$

De esta última expresión observemos que se puede calcular  $k$  si se conoce la cantidad de material existente en un tiempo  $t_1 > 0$ , digamos  $M(t_1) = M_1 < M_0$ :

$$M(t_1) = M_1 = M_0 e^{kt_1} \Rightarrow \frac{M_1}{M_0} = e^{kt_1} \Rightarrow \ln \left( \frac{M_1}{M_0} \right) = kt_1.$$

Así concluimos que

$$k = \frac{\ln M_1 - \ln M_0}{t_1}.$$

#### Observaciones:

1. Un caso particular ocurre cuando  $M(t_1) = \frac{M_0}{2}$ . Esto es, se conoce el tiempo que transcurre para que la cantidad de material inicial decaiga la mitad. Este tiempo se conoce como *la vida media* del material radioactivo. Denotaremos con  $t_m$  a este tiempo. En este caso:

$$M(t_m) = \frac{M_0}{2} = M_0 e^{kt_m} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{kt_m} \Rightarrow \ln \left( \frac{1}{2} \right) = kt_m.$$

Entonces  $kt_m = -\ln 2$ , de donde podemos despejar por igual:

$$k = \frac{-\ln 2}{t_m} \quad \& \quad t_m = \frac{-\ln 2}{k}. \quad (3.2)$$

Además, en vista de lo anterior podemos afirmar que la vida media de un material no depende de la cantidad inicial del mismo.

2. Si se proporcionan  $M(t_1) = M_1$  &  $M(t_2) = M_2$  para dos tiempos  $t_1 < t_2$ , obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} M(t_1) &= M_1 = Ce^{kt_1}, \\ M(t_2) &= M_2 = Ce^{kt_2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $C$  y  $k$ . Para resolverlo podemos dividir la segunda ecuación entre la primera y así obtenemos:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{Ce^{kt_2}}{Ce^{kt_1}} = \frac{e^{kt_2}}{e^{kt_1}} = e^{k(t_2-t_1)}.$$

De donde:

$$\ln\left(\frac{M_2}{M_1}\right) = k(t_2 - t_1).$$

De aquí despejamos  $k$ :

$$k = \frac{\ln M_2 - \ln M_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.4)$$

Además, tenemos también de (3.3) que:

$$M_1 = Ce^{kt_1} \Rightarrow C = M_1 e^{-kt_1}$$

Por lo tanto, al sustituir en  $M(t) = Ce^{kt}$ , se obtiene:

$$M(t) = M_1 e^{k(t-t_1)},$$

en donde  $k$  es el valor obtenido en (3.4).

**Ejemplo 3.2.1** Se sabe que un material radioactivo se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si inicialmente hay 100 miligramos de material y después de dos años se observa que el 5 % de la masa original se desintegró, determinar:

1. Una expresión para la masa al momento  $t$ .
2. El tiempo necesario para que se desintegre el 10 % de la masa original.

▼ Si  $M(t)$  es la cantidad presente (en miligramos) de material radioactivo al cabo de  $t$  años, entonces  $M(t)$  está dada por la solución del PVI

$$M' = kM(t), \text{ con } M(0) = 100 \text{ \& } M(2) = 95.$$

1. Tenemos que  $M_0 = 100$  mg.

Por otro lado, considerando que  $M(t) = M_0 e^{kt}$  se tiene, para  $t = 2$ :

$$M(2) = 100 - 5 = 95 = 100e^{2k} \Rightarrow 0.95 = e^{2k} \Rightarrow \ln 0.95 = 2k \Rightarrow k = \frac{\ln 0.95}{2} \approx -0.02564.$$

Entonces la expresión solicitada es:

$$M(t) = 100e^{-0.02564t}.$$

2. Cuando se desintegra el 10 % de la masa quedan 90 mg de la misma, entonces:

$$90 = 100e^{-0.02565t} \Rightarrow \ln 0.9 = -0.02565t \Rightarrow t = \frac{\ln 0.9}{-0.02565} \approx 4.1076 \text{ años},$$

representa el tiempo para que se desintegre el 10 % de la masa original.

□

**Ejemplo 3.2.2** Un material radioactivo se desintegra dos tercios en mil años. Determinar su vida media.

▼ Suponemos que se cumple con el modelo de desintegración de esta sección y por lo tanto  $M(t) = M_0 e^{kt}$ . Si pierde dos tercios de material en mil años, entonces:

$$M(1\,000) = \frac{M_0}{3} = M_0 e^{1000k} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{1000k} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 1000k \Rightarrow k = \frac{-\ln 3}{1\,000} \approx -0.0010986.$$

Podemos calcular ya la vida media, usando (3.2):

$$t_m = \frac{-\ln 2}{k} = \frac{-\ln 2}{-0.0010986} \approx 630.92 \text{ años}.$$

□



**Ejemplo 3.2.3** Se ha detectado que el 0.5% de una sustancia radioactiva desaparece en 12 años.

1. ¿Qué porcentaje desaparecerá en 1 000 años?
2. ¿Cuál es la vida media de dicha sustancia?

▼ La cantidad de sustancia al cabo de  $t$  años está dada por  $M(t) = M_0 e^{kt}$ , donde  $M_0$  es la cantidad inicial de sustancia. Además:

$$M(12) = 0.995M_0 = M_0 e^{12k} \Rightarrow 0.995 = e^{12k} \Rightarrow \ln 0.995 = 12k \Rightarrow k = \frac{\ln 0.995}{12} \approx -0.0004177.$$

1. Sea  $p$  el porcentaje que queda de la sustancia radioactiva después de 1 000 años. Entonces:

$$M(1\,000) = pM_0 = M_0 e^{1\,000k} \Rightarrow p = e^{1\,000k} = e^{1\,000(-0.0004177)} \approx 0.65856.$$

Este resultado indica que a los 1 000 años quedará el 65.856% de la sustancia radioactiva original, es decir desaparecerá 34.144% de dicha sustancia.

2. Para hallar la vida media usamos el valor de  $k$  previamente calculado:

$$t_m = \frac{-\ln 2}{k} = \frac{-\ln 2}{-0.0004177} \approx 1659.44 \text{ años. } \approx 1660 \text{ años.}$$

□

En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación importante de las ED en arqueología.

El elemento carbono, presente en todos los compuestos orgánicos tiene un isótopo radioactivo, llamado carbono 14. El porcentaje del carbono 14 con respecto al carbono en los organismos vivos permanece constante y cuando éste muere el carbono 14 decae en la forma que hemos visto. Así que si sabemos cuánto carbono 14 ha perdido una parte de un organismo podremos encontrar el tiempo transcurrido a partir de su muerte.

Para ello sólo basta saber que el carbono 14 radiactivo tiene una vida media aproximada de 5 600 años.

**Ejemplo 3.2.4** Se encontraron huesos fósiles de un animal. Se analizaron y se detectó que cada hueso contenía una centésima parte del carbono 14 radioactivo. Determinar la antigüedad aproximada de los huesos encontrados.

▼ Supongamos que  $M(t)$  es la cantidad presente de carbono 14 en cada hueso al cabo de  $t$  años y que  $M_0$  es la cantidad original (inicial) de dicha sustancia radioactiva en cada hueso.  $M(t)$  está determinada por la solución del PVI:

$$M'(t) = kM(t); \quad \text{con} \quad M(0) = M_0 \quad \& \quad M(5\,600) = \frac{1}{2}M_0.$$

La solución general de la ecuación diferencial es:  $M(t) = Ce^{kt}$ , donde  $C = M_0$ . Ahora,

$$\begin{aligned} M(5\,600) &= \frac{1}{2}M_0 \Rightarrow M_0 e^{k(5\,600)} = \frac{1}{2}M_0 \Rightarrow e^{5\,600k} = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 5\,600k &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k = \frac{-\ln 2}{5\,600} \approx -0.000123776. \end{aligned}$$

Luego,

$$k = -(1.23776)10^{-4}.$$

Por lo que

$$M(t) = M_0 e^{-(1.23776)10^{-4}t}.$$

Ahora bien, considerando que cada hueso contenía una centésima parte del carbono 14 radioactivo original, se tiene que

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{1}{100}M_0 \Rightarrow M_0 e^{-(1.23776)10^{-4}t} = \frac{1}{100}M_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{-(1.23776)10^{-4}t} = \frac{1}{100} \Rightarrow -(1.23776)10^{-4}t = \ln\left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{-\ln 100}{-(1.23776)10^{-4}} = \frac{\ln 100}{1.23776}(10)^4 \approx 37\,205.6795. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la antigüedad (edad) aproximada de los huesos es

$$t \approx 37\,206 \text{ años.}$$

□

**Ejercicios 3.2.1** *Decaimiento radioactivo. Soluciones en la página 466.*

En los ejercicios siguientes suponga que la rapidez de decrecimiento es directamente proporcional a la cantidad presente.

- Si el 5% de una sustancia radiactiva se descompone en 50 años,
  - ¿qué porcentaje habrá al final de 500 años?,
  - ¿y después de 1 000 años?
  - ¿cuál es la vida media de esta sustancia?
- Si la vida media de una sustancia radiactiva es de 1 800 años,
  - ¿qué porcentaje estará presente al final de 100 años?,
  - ¿en cuántos años quedará el 10% de la sustancia?
- Un año después de la producción de cierta sustancia radioactiva, se tenían 100 gramos de ésta y dos años después 75 gramos ¿cuánto se produjo inicialmente? ¿cuál es la vida media de la sustancia?
- El carbono  $C^{14}$  extraído de un cráneo antiguo contenía solamente una sexta parte del carbono  $C^{14}$  original. ¿Cuál es la antigüedad del cráneo?
- Calcular la vida media de una sustancia radioactiva que en 10 años decae un 25%.
- Un análisis de restos fósiles de un dinosaurio demostró que estos contenían sólo el 6.24 % del carbono 14 original. Determinar la antigüedad aproximada del dinosaurio.
- Los neutrones en una pila atómica crecen a una razón proporcional al número de neutrones presente en cualquier instante (debido a la fisión nuclear). Si inicialmente hay  $N_0$  neutrones y luego se tienen  $N_1$  y  $N_2$  neutrones presentes en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente, mostrar que

$$\left(\frac{N_2}{N_0}\right)^{t_1} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{t_2}$$

- El uranio se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si  $M_1$  y  $M_2$  gramos están presentes en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente, mostrar que la vida media del uranio es

$$t_m = \frac{(t_2 - t_1)(\ln 2)}{\ln M_1 - \ln M_2}$$

### 3.3 Crecimiento de poblaciones

En esta sección veremos algunos modelos de ED que sirven para representar la forma en que evoluciona el número  $P(t)$  de habitantes de una determinada población conforme pasa el tiempo  $t \geq 0$ . Es evidente que dicho número  $P(t)$  varía con el tiempo, pues en todas las poblaciones se cumple el ciclo biológico nacimiento-crecimiento-reproducción-muerte, sin importar la especie que observemos (pueden ser bacterias, hongos, conejos, animales en peligro de extinción, poblaciones humanas de lugares de todo el mundo). Lo que más afecta a  $P(t)$  son los nacimientos y las muertes, aunque otros fenómenos como la migración (que no consideraremos aquí) también lo afectan.

Vale la pena aclarar, que  $P(t)$  es un número entero, pues es la cantidad de habitantes (que denominamos *población*), pero en los casos que estudiaremos a continuación se considera como una función real de variable real, ya que sólo así podemos hacer un modelo con ED.

#### 3.3.1 Modelo de Malthus

Fue al parecer Euler quien desarrolló los primeros modelos de población, pero comúnmente se atribuye a Malthus<sup>1</sup> el desarrollo y análisis del primer modelo de evolución de  $P(t)$ , según el cual

$$P'(t) = kP(t). \quad (3.5)$$

Es decir, en cada instante el cambio de la población es proporcional al total de la población en ese instante. Por ejemplo, si  $P(t) > 0$  y  $P(t)$  creciente implica que  $k > 0$ .

Resolvemos la ecuación diferencial (3.5):

$$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \frac{dP}{P} = k dt.$$

Integrando se tiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P} &= \int k dt \Rightarrow \ln P = kt + C_1 \Rightarrow P = e^{kt+C_1} = e^{kt} e^{C_1} = e^{kt} C \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(t) = Ce^{kt}. \end{aligned}$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial (3.5).

Es común conocer la población inicial,  $P(0) = P_0$ . Con esto podemos calcular la constante  $C$ :

$$\begin{aligned} P(0) = P_0 &= Ce^{k \cdot 0} = C \Rightarrow C = P_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(t) = P_0 e^{kt}. \end{aligned}$$

Para calcular  $k$  es necesario conocer la cantidad de población existente en un tiempo  $t_1 > t_0$ , digamos  $P(t_1) = P_1$ :

$$\begin{aligned} P(t_1) = P_1 &= P_0 e^{kt_1} \Rightarrow \frac{P_1}{P_0} = e^{kt_1} \Rightarrow \ln \left( \frac{P_1}{P_0} \right) = kt_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow k = \frac{\ln P_1 - \ln P_0}{t_1}. \end{aligned}$$

#### Observaciones:

1. Si  $t_d$  es el tiempo en el que la población se duplica,  $P(t_d) = 2P_0$ , entonces tenemos de acuerdo con la ecuación previa:

$$P(t_d) = 2P_0 = P_0 e^{kt_d} \Rightarrow 2 = e^{kt_d} \Rightarrow \ln 2 = kt_d$$

---

<sup>1</sup>Thomas Malthus (1776 – 1834) fue un economista inglés, considerado el fundador de la demografía. Es muy famoso por su publicación *Ensayo sobre el principio de la población* (1798) en la cual concluía que la población humana crece de manera exponencial mientras que la producción total de alimentos crece en forma lineal, pronosticando un futuro sombrío para la población. Afortunadamente su predicción no se ha cumplido. Sus ideas tuvieron alguna influencia en la teoría de la evolución de Darwin.

Entonces:

$$k = \frac{\ln 2}{t_d} \quad \& \quad t_d = \frac{\ln 2}{k}. \quad (3.6)$$

Lo anterior indica que el tiempo para que una población se duplique no depende de la cantidad inicial de la misma.

2. Si se proporcionan  $P(t_1) = P_1$  &  $P(t_2) = P_2$  para dos tiempos  $t_1 < t_2$ , obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} P(t_1) = P_1 &= Ce^{kt_1}, \\ P(t_2) = P_2 &= Ce^{kt_2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para resolver este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $C$  y  $k$ , dividimos la segunda ecuación entre la primera y obtenemos:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{Ce^{kt_2}}{Ce^{kt_1}} = \frac{e^{kt_2}}{e^{kt_1}} = e^{k(t_2-t_1)}.$$

Entonces:

$$\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = k(t_2 - t_1).$$

De donde:

$$k = \frac{\ln P_2 - \ln P_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.8)$$

Tenemos también, usando (3.7) que  $C = P_1 e^{-kt_1}$ . Como  $P(t) = Ce^{kt}$  se tiene:

$$P(t) = P_1 e^{k(t-t_1)}.$$

con  $k$  dado por (3.8).

3. Hemos mencionado que la derivada  $\frac{dP}{dt}$  es la rapidez de cambio de la población  $P(t)$ . A esta derivada también se le denomina tasa de cambio de la población. De aquí surge una expresión frecuentemente usada en los problemas de población: tasa de crecimiento.

La tasa de crecimiento de una población en cierto tiempo  $t$  se define como la razón  $\frac{P'(t)}{P(t)}$  y se da comúnmente en términos porcentuales anuales. Es decir, la tasa de crecimiento de una población es precisamente la constante de proporcionalidad  $k = \frac{P'(t)}{P(t)}$ . Recuerdese que  $P'(t) = kP(t)$ .

4. Así como  $P(t) = P_0 e^{kt}$  nos sirve para calcular la población creciente de una comunidad, es posible utilizarla para calcular una población que disminuye al paso del tiempo. Sólo debemos tener presente que:

- a. Si la población  $P(t)$  aumenta, entonces  $\frac{d}{dt}P(t) = kP(t)$  con  $k > 0$ .
- b. Si la población  $P(t)$  disminuye, entonces  $\frac{d}{dt}P(t) = kP(t)$  con  $k < 0$ .

**Ejemplo 3.3.1** En un cultivo de bacterias se estimó que inicialmente había 150 bacterias y 200 después de una hora. Suponiendo una rapidez de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presente, determinar:

1. La cantidad de bacterias después de  $t$  horas.
2. La cantidad de bacterias después de 2 horas.

3. El tiempo que debe transcurrir para que la población se triplique.



1. Si  $P(t)$  es la cantidad de bacterias presentes después de  $t$  horas, entonces  $P(0) = P_0 = 150$  y  $P(1) = P_1 = 200$ . Luego,  $P(t)$  está dada por la solución del problema de valores iniciales (PVI):

$$P'(t) = kP(t); \quad \text{con} \quad P(0) = 150 \quad \& \quad P(1) = 200.$$

Puesto que  $P(t) = Ce^{kt}$ , se tiene:

$$P(0) = 150 \Rightarrow Ce^0 = 150 \Rightarrow C = 150 \Rightarrow P(t) = 150e^{kt}.$$

$$P(1) = 200 \Rightarrow 150e^k = 200 \Rightarrow e^k = \frac{200}{150} = \frac{4}{3} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.2877 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(t) = 150e^{0.2877t},$$

que es la solución del PVI y es cantidad de bacterias después de  $t$  horas.

2. La cantidad de bacterias después de 2 horas es:

$$P(2) = 150e^{(0.2877)(2)} \approx 266.6666;$$

$$P(2) \approx 267 \text{ bacterias.}$$

3. Para que la población se triplique:

$$P(t) = 3P_0 \Rightarrow 150e^{0.2877t} = 3(150) \Rightarrow e^{0.2877t} = 3 \Rightarrow 0.287682t = \ln(3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(3)}{0.2877} \approx 3.8186 \text{ horas} \Rightarrow t \approx 3 \text{ horas, } 49 \text{ minutos, } 7 \text{ segundos.}$$



**Ejemplo 3.3.2** Cierta población de bacterias tiene una rapidez de cambio proporcional a sí misma. Si en una hora tuvo un crecimiento del 50%,

1. ¿Cuál es la población después de  $t$  horas?
2. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?
3. ¿Cuánto habrá aumentado la población en 10 horas?



1. Sea  $P(t)$  la población total de bacterias después de  $t$  horas. Como no se dice la población inicial, suponemos que ésta es  $P_0$  y debido a que la población creció un 50 % en una hora, entonces

$$P(1) = P_0 + 0.5P_0 = 1.5P_0.$$

Por lo tanto,  $P(t)$  está dada por la solución del PVI:

$$P'(t) = kP(t) \text{ con } P(0) = P_0.$$

Sabemos que  $P(t) = P_0e^{kt}$ , entonces:

$$P(1) = 1.5P_0 \Rightarrow P_0e^k = 1.5P_0 \Rightarrow e^k = 1.5 \Rightarrow k = \ln(1.5) \approx 0.4055 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(t) = P_0e^{0.4055t}.$$

que es la solución del PVI que da la población de bacterias después de  $t$  horas.

2. Para que la población se duplique

$$\begin{aligned} P(t) = 2P_0 &\Rightarrow P_0 e^{0.4055t} = 2P_0 \Rightarrow e^{0.4055t} = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0.4055t = \ln(2) \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{0.4055} \approx 1.7094 \text{ horas.} \end{aligned}$$

Entonces la población se duplicará en:

$$t \approx 1 \text{ horas, } 42 \text{ minutos, } 33 \text{ segundos.}$$

3. La población después de 10 horas es:

$$P(10) = P_0 e^{(0.4055)(10)} = P_0 e^{4.055} = 57.685 P_0.$$

Por lo tanto, en 10 horas la población habrá aumentado a 57.685 veces la población inicial.

□

**Ejemplo 3.3.3** Si la población de cierta comunidad crece al 2% anual ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población se duplique?

▼ Aquí, el 2% anual mencionado es precisamente la tasa de crecimiento de población. Se tiene entonces que  $k = 2\% = 0.02$ . Además, por la segunda observación, el tiempo para que una población se duplique está dada por:

$$t = \frac{\ln 2}{k}.$$

Luego,

$$t_2 = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{0.02} \approx 34.6574 \text{ años} \Rightarrow t_2 \approx 34 \text{ años, } 240 \text{ días.}$$

□

**Ejercicios 3.3.1** Modelo de Malthus. *Soluciones en la página 466.*

1. La población de una comunidad aumenta con una rapidez proporcional a sí misma. Si la población inicial es de 2000 y aumenta en un 10% en 5 años:
  - a. ¿Cuál será la población en  $t$  años?
  - b. ¿Qué porcentaje habrá aumentado en 10 años?
  - c. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población sea de 20 000 personas?
2. La población de una comunidad aumenta con una rapidez proporcional a sí misma. Si la población se duplicó en 20 años, ¿en cuántos años se triplicará?
3. La población de cierta especie de animales aumenta al 5% anual. ¿En cuánto tiempo se duplica la población?
4. La población de cierta especie de animales aumenta al 10% anual. ¿En cuánto tiempo se triplica la población?
5. Experimentalmente se sabe que la población de cierta bacteria se duplica cada 30 horas. ¿Cuál es la tasa de crecimiento por día?

### 3.3.2 Modelo logístico

El modelo de Malthus tiene muchas limitaciones. Por ejemplo, predice que una población crecerá exponencialmente con el tiempo, que no ocurre en la realidad. Si la especie considerada dispone de todos los medios para vivir, como espacio, aire, alimento, entonces su crecimiento será de tipo exponencial; pero si los recursos escasean entonces habrá competencia para acceder a ellos (peleas, guerras a veces, supervivencia de los más fuertes) y la razón de crecimiento no será la misma. Por esta razón al modelo de Malthus se le llama de *crecimiento irrestricto*, mientras que el modelo presentado a continuación se le denomina modelo de *crecimiento con restricciones*.

El modelo llamado de crecimiento logístico, fue introducido por Pierre François Verhulst en 1838 y supone que la razón de crecimiento es proporcional conjuntamente tanto a la población misma como a la cantidad faltante para llegar a la máxima población sustentable. Escribiremos dicho modelo como

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right). \quad (3.9)$$

En este modelo el número  $r$  se conoce como la *razón de crecimiento intrínseco*, y  $K$  es la *capacidad sustentable* que es el máximo valor que puede tener  $P$ . El valor de  $r$  depende sólo de la especie considerada, mientras que  $K$  depende tanto de la especie como del ambiente en donde se desarrolla ésta y es el máximo valor posible en ese ambiente.

Nótese que si el valor de  $P$  es muy pequeño comparado con  $K$ , entonces  $1 - \frac{P}{K} \approx 1$  y la ED (3.9) es semejante a la de Malthus. Por otro lado, si  $P$  se aproxima a  $K$  entonces  $1 - \frac{P}{K} \approx 0$  y esto haría que  $\frac{dP}{dt} \approx 0$ , en consecuencia la población  $P(t)$  sería casi constante.

Resolvamos la ED. Observemos que es separable:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = r dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = rt + C_1.$$

La integral del primer miembro se resuelve mediante fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} &= \frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{K}} \Rightarrow A \left(1 - \frac{P}{K}\right) + BP = 1 \Rightarrow \left(B - \frac{A}{K}\right)P + A = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow A = 1 \quad \& \quad B - \frac{A}{K} = 0 \Rightarrow A = 1 \quad \& \quad B = \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int \left[ \frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{P}{K}} \right] dP = \ln P + \frac{1}{K} \int \frac{dP}{1 - \frac{P}{K}} = \ln P - \ln |K - P|.$$

Ahora, si se toma en consideración que  $P < K$ , se tiene que  $|K - P| = K - P$ , por lo cual:

$$\ln \left( \frac{P}{K - P} \right) = rt + C_1 \Rightarrow \frac{P}{K - P} = C e^{rt}.$$

Antes de despejar  $P$  usemos la condición inicial  $P(0) = P_0$ , para determinar  $C$ :

$$\frac{P_0}{K - P_0} = C e^0 = C \Rightarrow \frac{P}{K - P} = \frac{P_0}{K - P_0} e^{rt}.$$

Ahora despejamos  $P$ , denotando por comodidad  $\frac{P_0}{K - P_0} = C$ :

$$\begin{aligned}\frac{P}{K - P} = Ce^{rt} &\Rightarrow P = (K - P)Ce^{rt} = KCe^{rt} - PCe^{rt} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P + PCe^{rt} = KCe^{rt} \Rightarrow P = \frac{KCe^{rt}}{1 + Ce^{rt}}.\end{aligned}$$

Para simplificar esta fórmula dividimos numerador y denominador entre  $Ce^{rt}$  para obtener finalmente:

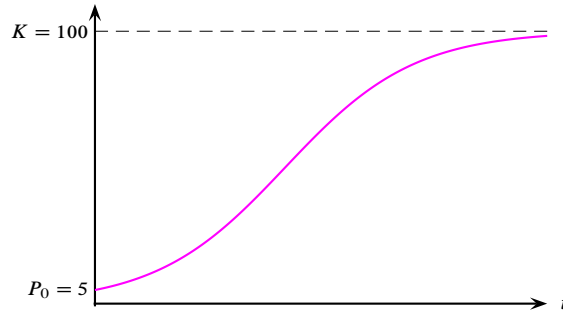
$$P(t) = \frac{K}{\frac{1}{Ce^{rt}} + 1} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right)e^{-rt}}. \quad (3.10)$$

**Ejemplo 3.3.4** Utilizando un modelo logístico con capacidad sustentable  $K = 100 \times 10^9$ , una población mundial (humana) de  $5 \times 10^9$  en 1986 y una razón de crecimiento de 2 % anual, hacer una predicción de la población mundial para el año 2010. ¿Cuándo será esta población de  $32 \times 10^9$ ? Los datos provistos son aproximaciones de los datos observados en la realidad.

▼ En este ejemplo tenemos  $K = 100$ ,  $P_0 = 5$  (en miles de millones de habitantes del planeta) en 1986 y  $r = 0.02$ . La solución de la ecuación logística  $\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$  es, de acuerdo a la ecuación (3.10):

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right)e^{-rt}} = \frac{100}{1 + \left(\frac{100 - 5}{5}\right)e^{-0.02t}} = \frac{100}{1 + 19e^{-0.02t}}$$

en miles de millones de habitantes.



En el año 2010 tendremos  $t = 24$  y

$$P(24) = \frac{100}{1 + 19e^{-(0.02)(24)}} = \frac{100}{1 + 19e^{-0.48}} \approx 7,838,904,588 \text{ habitantes.}$$

La población será de  $32 \times 10^9$  en el tiempo  $t_1$  que determinamos como sigue:

$$\begin{aligned}P(t_1) = \frac{100}{1 + 19e^{-0.02t_1}} = 32 &\Rightarrow 100 = 32 + 608e^{-0.02t_1} \Rightarrow 608e^{-0.02t_1} = 68 \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{-0.02t_1} = \frac{68}{608} \Rightarrow -0.02t_1 = \ln\left(\frac{68}{608}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{\ln\left(\frac{68}{608}\right)}{-0.02} \approx 109.5334 \text{ años}\end{aligned}$$

Esto es a mediados del año 2,095. Esto, claro está, si las tendencias se mantienen; afortunadamente, la razón de crecimiento  $r = 0.02$  no es una constante y con el tiempo en muchos países ha estado disminuyendo, entre otros aspectos gracias a la planificación familiar.

□



**Ejemplo 3.3.5** Las reservas pesqueras del halibut (especie de gran tamaño, parecida al lenguado) en el Pacífico se modelan con la ED logística con capacidad sustentable de  $80.5 \times 10^6$ , medida en kg (biomasa), y razón de crecimiento intrínseco de 0.71 por año. Si la biomasa inicial es la cuarta parte de la capacidad sustentable, encontrar la biomasa después de un año y el tiempo que debe pasar para que la biomasa inicial se duplique, es decir que llegue a la mitad de la capacidad sustentable.

▼ El PVI a resolver es:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right), \text{ con } r = 0.71, \quad K = 80.5 \times 10^6 \text{ kg de biomasa}, \quad P_0 = \frac{K}{4}.$$

Nótese que ahora  $P(t)$  no es el número de habitantes de la población sino la biomasa al tiempo  $t$ , es decir la masa total de los peces de la especie halibut en el Pacífico. No repetiremos el proceso de resolución de la ED, sino escribiremos directamente su solución dada en (??):

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left( \frac{K - P_0}{P_0} \right) e^{-rt}} = \frac{K}{1 + \left( \frac{K - K/4}{K/4} \right) e^{-rt}} = \frac{K}{1 + 3e^{-rt}} = \frac{80.5 \times 10^6}{1 + 3e^{-0.71t}}.$$

Al cabo de un año la biomasa será:

$$P(1) = \frac{80.5 \times 10^6}{1 + 3e^{-0.71}} = 32,526,138.39 \text{ kg}.$$

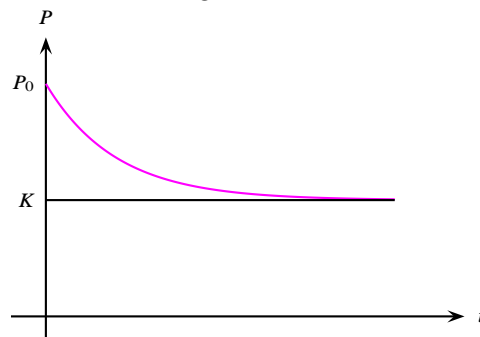
El tiempo necesario para duplicar la biomasa se determina de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(t_1) &= \frac{K}{1 + 3e^{-0.71t_1}} = \frac{1}{2}K \Rightarrow \frac{1}{1 + 3e^{-0.71t_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + 3e^{-0.71t_1} = 2 \Rightarrow \\ 3e^{-0.71t_1} &= 1 \Rightarrow -0.71t_1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0.71} \approx 1.54734 \text{ años}, \end{aligned}$$

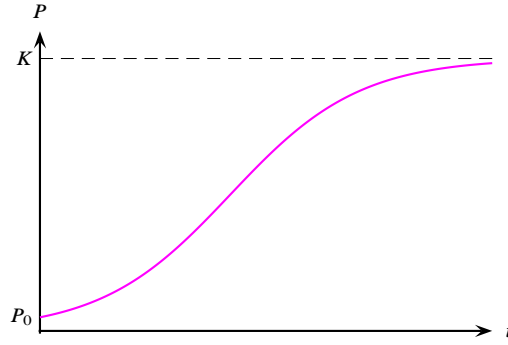
o sea, 1 año, 6 meses y 17 días aproximadamente.

□

Finalizamos esta sección con algunas observaciones sobre la solución de la ecuación logística. Primero hay que notar que en las situaciones de interés se tiene  $P_0 < K$ , pues no es muy realista suponer que la población inicial sea mayor que la capacidad sustentable. En el caso extremo  $P_0 > K$  se tiene que  $\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right)$  es negativa, es decir la población decrece hasta llegar (asintóticamente), según el modelo, a  $K$ .



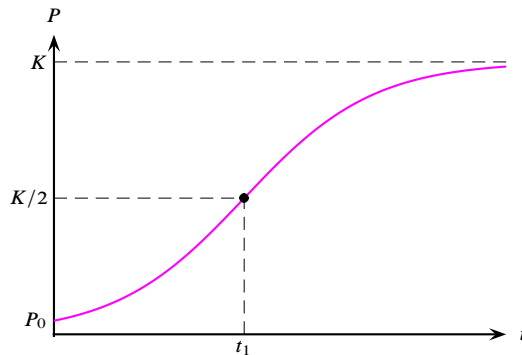
En la situación más común en que  $P_0 < K$ , la derivada  $\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right)$  es positiva, o sea que la función  $P(t)$  será siempre creciente y tenderá asintóticamente a  $K$  cuando  $t \rightarrow \infty$ :



La forma típica de la curva solución, llamada curva logística, es la de una S alargada, como se ilustra en la figura de arriba. Es interesante observar que hay un cambio en la curvatura de  $P(t)$ , que es justamente en un punto de inflexión. Demostraremos a continuación que la inflexión ocurre precisamente cuando  $P(t) = \frac{K}{2}$ . Para ello solo tenemos que encontrar la segunda derivada e igualar a cero:

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[ rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right) \right] = rP' \left( 1 - \frac{P}{K} \right) - \frac{r}{K} P' P = rP' - rP' \frac{P}{K} - \frac{r}{K} P' P = \\ &= rP' - 2rP' \frac{P}{K} = rP' \left( 1 - \frac{2P}{K} \right) = 0 \Rightarrow rP' = 0 \text{ o bien } 1 - \frac{2P}{K} = 0; \end{aligned}$$

pero  $rP' = 0$  no puede ser, pues ya hemos visto que  $P' = \frac{dP}{dt} > 0$  siempre, así que debe darse la segunda opción:  $1 - \frac{2P}{K} = 0 \Rightarrow \frac{2P}{K} = 1 \Rightarrow P = \frac{K}{2}$ . El tiempo  $t_1$  en que ocurre el punto de inflexión dependerá de los parámetros  $P_0$  y  $r$ , pero la coordenada vertical es siempre la misma  $\frac{K}{2}$ .



Se puede comprobar también que en el punto de inflexión la razón de crecimiento  $\frac{dP}{dt}$  es máxima (ver los ejercicios).

Los modelos presentados y discutidos en esta sección son los que han demostrado ser de mayor utilidad por dar predicciones con una aproximación bastante razonable en la práctica. Sin embargo es pertinente aclarar que las predicciones obtenidas con ellos pueden contener errores por no tomar en cuenta todas las variables que afectan al proceso. Así sucedió con Malthus, quien con el modelo de crecimiento exponencial predijo en 1798 una catástrofe que no llegó nunca, pues no tomó en cuenta los adelantos en la tecnología agropecuaria y alimenticia, que han permitido a la población humana seguir viviendo, sin problemas, casi dos siglos más de lo que él predijo.

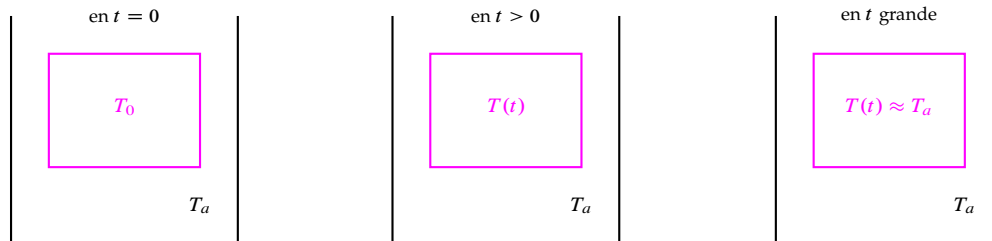
### Ejercicios 3.3.2 Modelo logístico. Soluciones en la página 467.

1. Supongamos que una población satisface un modelo logístico con  $K = 500$  y que la población inicial es 100 y a los 10 años llegó a 200. Determine la razón de crecimiento intrínseco  $r$ .

- La Población mundial en 1939 era aproximadamente  $2.3 \times 10^9$  habitantes y en 2009 se estima en  $6.7 \times 10^9$  habitantes. Algunos especialistas consideran que la capacidad sustentable del planeta es de  $11 \times 10^9$  habitantes, en condiciones de bienestar (es decir, sin desnutrición ni padecimientos por falta de recursos). Considere  $t = 0$  en 1939,  $P(0) = 2.3 \times 10^9$  y una capacidad sustentable de  $11 \times 10^9$ .  
Encuentre una fórmula para  $P(t)$  con  $t \geq 0$ , determine  $P$  en el año 2020 y el tiempo  $t_1$  en el que habrá  $10 \times 10^9$  habitantes.
- Compruebe que para una población que satisface el modelo logístico la máxima razón de crecimiento de la población es  $\frac{rK}{4}$ , y que se alcanza cuando el tamaño de la población es  $\frac{K}{2}$ .
- Para una población que cumple el modelo logístico con  $r$ ,  $P_0$  y  $K$  dados encuentre el tiempo  $t_1$  para el cual  $P(t)$  tiene un punto de inflexión.

### 3.4 Ley de Newton de cambio de temperaturas

Si un cuerpo u objeto que tiene una temperatura  $T_0$  es depositado en un medio ambiente que se mantiene a una temperatura  $T_a$  constante, con  $T_a \neq T_0$ , la experiencia nos dice que, al paso del tiempo, la temperatura del cuerpo tiende a ser igual a la del medio circundante. Es decir, si  $T(t)$  es la temperatura del cuerpo en el tiempo  $t$ , entonces  $T(t) \rightarrow T_a$  cuando  $t$  crece. Es posible representar esto en un diagrama como sigue:



Para modelar la temperatura del objeto utilizamos *La ley de enfriamiento de Newton*, ésta afirma que *la rapidez de cambio* de la temperatura de un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el medio circundante. Esto es,

$$T'(t) = k[T(t) - T_a]$$

donde  $k$  es la constante de proporcionalidad.

Notemos aquí dos situaciones:

- Cuando  $T_0 > T_a$  y por lo mismo  $T(t) > T_a$ , en el cuerpo ocurre un enfriamiento y se tiene que  $T(t)$  decrece y  $T(t) - T_a > 0$ , es decir  $\frac{d}{dt}T(t) < 0$  y  $T(t) - T_a > 0$ , por lo que  $\frac{d}{dt}T(t) = k[T(t) - T_a] \Rightarrow k < 0$
- Cuando  $T_0 < T_a$  y por lo mismo  $T(t) < T_a$ , en el cuerpo ocurre un calentamiento y se tiene que  $T(t)$  crece y  $T(t) - T_a < 0$ , es decir  $\frac{d}{dt}T(t) > 0$  y  $T(t) - T_a < 0$ , por lo que  $\frac{d}{dt}T(t) = k[T(t) - T_a] \Rightarrow k < 0$

Concretando: sea enfriamiento o calentamiento, la ecuación diferencial  $\frac{d}{dt}T(t) = k[T(t) - T_a]$  tiene sentido siempre y cuando  $k$  sea negativa ( $k < 0$ ).

Tenemos entonces que la temperatura  $T(t)$  del cuerpo en el instante  $t \geq 0$  está determinada por el PVI:

$$T'(t) = k[T(t) - T_a] \text{ con la condición inicial } T(0) = T_0.$$

Resolvemos la ecuación diferencial, que es claramente de variables separables:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{T - T_a} &= k dt \Rightarrow \\
\Rightarrow \int \frac{dT}{T - T_a} &= k \int dt \Rightarrow \\
\Rightarrow \ln |T - T_a| &= kt + C_1 \Rightarrow \\
\Rightarrow |T - T_a| &= e^{kt+C_1} = e^{kt} e^{C_1} = C e^{kt} \Rightarrow \\
\Rightarrow |T - T_a| &= C e^{kt} \Rightarrow \\
\Rightarrow T - T_a &= C e^{kt} \Rightarrow \\
\Rightarrow T(t) &= T_a + C e^{kt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T > T_a &\Rightarrow T - T_a > 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow |T - T_a| = T - T_a.
\end{aligned}$$

Obtenemos lo mismo, si:

$$\begin{aligned}
T < T_a &\Rightarrow T - T_a < 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow |T - T_a| = C e^{kt} \Rightarrow \\
&\Rightarrow -(T - T_a) = C e^{kt} \Rightarrow \\
&\Rightarrow T - T_a = -C e^{kt} \Rightarrow T - T_a = C e^{kt}.
\end{aligned}$$

que es la temperatura del cuerpo en el instante  $t \geq 0$ .

Para tener bien determinada la temperatura  $T(t)$  son necesarias dos condiciones adicionales que permitan calcular valores únicos para las constantes  $C$  y  $k$ . Estas condiciones podrían ser las temperaturas del cuerpo en dos instantes cualesquiera y una de ellas podría ser la temperatura inicial  $T_0$ .

**Ejemplo 3.4.1** Un cuerpo que tiene una temperatura de  $70^\circ F$  es depositado (en el tiempo  $t=0$ ) en un lugar donde la temperatura se mantiene a  $40^\circ F$ . Después de 3 minutos la temperatura del cuerpo ha disminuido a  $60^\circ F$ .

1. ¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 5 minutos?
2. ¿Cuánto tiempo pasará para que el cuerpo tenga  $50^\circ F$ ?

▼ Si  $T(t)$  es la temperatura del cuerpo en  $^\circ F$  después de  $t$  minutos, entonces la ecuación diferencial que modela a  $T(t)$  es

$$T'(t) = k[T(t) - T_a],$$

donde  $T_a = 40^\circ F$  es la temperatura fija del medio circundante.

Las condiciones adicionales son  $T(0) = 70$  y  $T(3) = 60$ .

Luego, la temperatura  $T(t)$  está dada por la solución del PVI:

$$T'(t) = k[T(t) - 40]; \quad \text{con } T(0) = 70 \quad \& \quad T(3) = 60.$$

Resolvamos este problema:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= k(T - 40) \Rightarrow \frac{dT}{T - 40} = k dt \Rightarrow \\
\Rightarrow \int \frac{dT}{T - 40} &= k \int dt \Rightarrow \ln(T - 40) = kt + C_1 \Rightarrow \\
\Rightarrow T - 40 &= e^{kt+C_1} \Rightarrow T(t) = C e^{kt} + 40.
\end{aligned}$$

Ahora,

$$T(0) = 70 \Leftrightarrow T(0) = C e^{k \cdot 0} + 40 = 70 \Leftrightarrow C + 40 = 70 \Leftrightarrow C = 30$$

por lo que,  $T(t) = 30e^{kt} + 40$ , entonces:

$$\begin{aligned}
T(3) = 60 &\Rightarrow 30e^{k \cdot 3} + 40 = 60 \Rightarrow e^{3k} = \frac{60 - 40}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ln e^{3k} = 3k = \ln \left( \frac{2}{3} \right) \Rightarrow k = \frac{1}{3} \ln \left( \frac{2}{3} \right) \approx -0.1352.
\end{aligned}$$

Luego,

$$T(t) = 30e^{-0.1352t} + 40.$$

1. ¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 5 minutos?

$$T(5) = 30e^{-0.1352(5)} + 40 = 55.26286 \Rightarrow T(5) \approx 55.263^\circ \text{ F.}$$

2. ¿Cuánto tiempo pasará para que el cuerpo tenga  $50^\circ \text{ F}$ ?

$$\begin{aligned} T(t) = 50 &\Rightarrow 30e^{-0.1352t} + 40 = 50 \Rightarrow e^{-0.1352t} = \frac{50-40}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -0.1352t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3 \Rightarrow t = \frac{\ln 3}{0.1352} = \frac{1.0986123}{0.1352} \approx 8.128536 \text{ minutos} \end{aligned}$$

Entonces el cuerpo tendrá una temperatura de  $50^\circ$  después de  $t \approx 8$  minutos, 8 segundos.

□

**Ejemplo 3.4.2** Un objeto que tiene una temperatura de  $50^\circ \text{ F}$  se coloca a las 10:00 horas en un horno que se mantiene a  $375^\circ \text{ F}$ . A las 11:15 horas su temperatura era de  $125^\circ \text{ F}$ . ¿A qué hora estará el objeto a  $150^\circ \text{ F}$ ?

▼ La ecuación diferencial que modela el problema es:

$$\frac{d}{dt}T(t) = k[T(t) - T_a]$$

donde  $T_a = 375^\circ \text{ F}$  es la temperatura constante del medio circundante.

Puesto que de 10 am a 11:15 am transcurren 75 minutos, las condiciones adicionales son:

$$T(0) = 50 \quad \text{y} \quad T(75) = 125.$$

Luego la temperatura  $T(t)$  del objeto está dada por la solución del PVI:

$$T'(t) = k[T(t) - 375]; \quad \text{con} \quad T(0) = 50 \quad \& \quad T(75) = 125.$$

Sabemos que:

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Rightarrow T(t) = 375 + Ce^{kt}.$$

Ahora, usando la condición inicial:

$$T(0) = 50 \Rightarrow 375 + Ce^0 = 50 \Rightarrow C = 50 - 375 \Rightarrow C = -325.$$

Por lo que,

$$T(t) = 375 - 325e^{kt}.$$

Usando la segunda condición, se tiene:

$$\begin{aligned} T(75) = 125 &\Rightarrow 375 - 325e^{k \cdot 75} = 125 \Rightarrow e^{75k} = \frac{125-375}{-325} = \frac{-250}{-325} = \frac{10}{13} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 75k = \ln\left(\frac{10}{13}\right) \Rightarrow k = \frac{1}{75} \ln\left(\frac{10}{13}\right) = -0.0034982 \approx -0.0035. \end{aligned}$$

Luego,

$$T(t) = 375 - 325e^{-0.0035t}.$$

El objeto tendrá la temperatura de  $T = 150^\circ \text{ F}$  cuando:

$$\begin{aligned} T(t) = 150 &\Rightarrow 375 - 325e^{-0.0035t} = 150 \Rightarrow e^{-0.0035t} = \frac{150-375}{-325} = \frac{-225}{-325} = \frac{9}{13} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -0.0035t = \ln\left(\frac{9}{13}\right) = -0.367725 \Rightarrow t = \frac{0.367725}{0.0035} \approx 105.06 \text{ minutos.} \end{aligned}$$

Es decir, la temperatura del objeto será  $T = 150^\circ \text{ F}$  después de  $t = 105$  minutos, a partir de las 10 de la mañana. Por lo tanto, la temperatura será de  $150^\circ \text{ F}$  aproximadamente a las 11 : 45 horas.

□

**Ejemplo 3.4.3** Una taza de café cuya temperatura es de  $190^\circ F$  se coloca en un cuarto cuya temperatura es de  $65^\circ F$ . Dos minutos más tarde la temperatura del café es de  $175^\circ F$ . ¿Después de cuánto tiempo la temperatura del café será de  $150^\circ F$ ?

▼ Sea  $T(t)$  la temperatura (en  $^\circ F$ ) del café en el instante (minuto)  $t \geq 0$ . Aquí se tiene que:

$$T(0) = 190, T_a = 65 \text{ y } T(2) = 175$$

El PVI a resolver es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 65); \quad \text{con} \quad T(0) = 190 \quad \& \quad T(2) = 175,$$

para determinar la temperatura del café en cualquier instante (minuto)  $t \geq 0$ . Sabemos que:

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Rightarrow T = 65 + Ce^{kt}.$$

Usando la condición inicial, tenemos:

$$T(0) = 190 \Rightarrow T(0) = 65 + Ce^{k \cdot 0} = 190 \Rightarrow C = 125 \Rightarrow T(t) = 65 + 125e^{kt}.$$

Ahora usamos la segunda condición:

$$\begin{aligned} T(2) = 175 &\Rightarrow T(2) = 65 + 125e^{k \cdot 2} = 175 \Rightarrow e^{2k} = \frac{110}{125} = \frac{22}{25} \Rightarrow 2k = \ln\left(\frac{22}{25}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{22}{25}\right) \approx -0.0639 \Rightarrow k \approx -0.0639. \end{aligned}$$

Entonces:

$$T(t) = 65 + 125e^{-0.0639t},$$

que es la temperatura (en  $^\circ F$ ) del café en el minuto  $t \geq 0$ .

Sea  $t_1$  el instante en que  $T(t_1) = 150$ . Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} T(t_1) = 65 + 125e^{-0.0639t_1} = 150 &\Rightarrow e^{-0.0639t_1} = 0.68 \Rightarrow -0.0639t_1 = \ln 0.68 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_1 = \frac{\ln 0.68}{-0.0639} \approx 6.0354 \text{ minutos.} \end{aligned}$$

Por lo tanto deben transcurrir  $t_1 \approx 6$  minutos, 2 segundos para que la temperatura del café sea de  $150^\circ F$ . □

**Ejemplo 3.4.4** Un termómetro en el que se lee  $70^\circ F$  se coloca en un lugar donde la temperatura es de  $10^\circ F$ . Cinco minutos más tarde el termómetro marca  $40^\circ F$ . ¿Qué tiempo debe transcurrir para que el termómetro marque medio grado más que la temperatura del medio ambiente?

▼ Sea  $T(t)$  la temperatura (en  $^\circ F$ ) del termómetro en el instante (minuto)  $t \geq 0$ . Aquí se tiene que:

$$T(0) = 70, T_a = 10 \text{ y } T(5) = 40$$

El PVI a resolver es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10) \quad \text{con} \quad T(0) = 70 \quad \& \quad T(5) = 40.$$

La solución es:

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Rightarrow T(t) = 10 + Ce^{kt}$$

Utilizamos la condición inicial:

$$T(0) = 70 \Rightarrow T(0) = 10 + Ce^{k(0)} = 70 \Rightarrow C = 60 \Rightarrow T(t) = 10 + 60e^{kt}.$$

La segunda condición nos permite calcular  $k$ :

$$T(5) = 40 \Rightarrow T(5) = 10 + 60e^{5k} = 40 \Rightarrow e^{5k} = 0.5 \Rightarrow \ln(0.5) \Rightarrow k = \frac{\ln 0.5}{5} \approx -0.1386.$$

En conclusión:

$$T(t) = 10 + 60e^{-0.1386t}.$$

Sea  $t_1$  el minuto en que  $T(t_1) = 10.5^\circ F$

$$\begin{aligned} T(t_1) &= 10 + 60e^{-0.1386t_1} = 10.5 \Rightarrow e^{-0.1386t_1} = \frac{0.5}{60} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -(0.1386)t_1 = \ln(0.0083) \Rightarrow t_1 = \frac{\ln 0.0083}{-0.1386} \approx 34.54 \text{ minutos.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tiempo que debe transcurrir para que el termómetro marque medio grado más que la temperatura ambiente es de  $t_1 \approx 34$  minutos, 32 segundos. □

**Ejemplo 3.4.5** Un termómetro que está en el interior de una habitación se lleva al exterior donde la temperatura es de  $5^\circ F$ . Después de un minuto el termómetro marca  $55^\circ F$  y después de 5 minutos marca  $30^\circ F$ . ¿Cuál era la temperatura del termómetro en la habitación?

▼ Sea  $T(t)$  la temperatura (en  $^\circ F$ ) del termómetro en el instante (minuto)  $t \geq 0$ . Aquí se tiene que:

$$T_a = 5, T(1) = 55, T(5) = 30 \text{ \& } T(0) = T_0, \text{ que es la temperatura a determinar.}$$

Al resolver la ED, resulta:

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Rightarrow T(t) = 5 + Ce^{kt}.$$

Usando la condición inicial

$$T(0) = T_0 \Rightarrow 5 + Ce^{k \cdot 0} = T_0 \Rightarrow C = T_0 - 5 \Rightarrow T(t) = 5 + (T_0 - 5)e^{kt}.$$

Usando ahora las dos condiciones dadas:

$$T(1) = 55 \Rightarrow 5 + (T_0 - 5)e^k = 55 \Rightarrow (T_0 - 5)e^k = 50 \Rightarrow T_0 - 5 = 50e^{-k}. \quad (3.11)$$

$$T(5) = 30 \Rightarrow 5 + (T_0 - 5)e^{5k} = 30 \Rightarrow (T_0 - 5)e^{5k} = 25 \Rightarrow T_0 - 5 = 25e^{-5k}. \quad (3.12)$$

Las expresiones (3.11) y (3.12) conforman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $T_0$  y  $k$ ). Entonces, por igualación:

$$\begin{aligned} 50e^{-k} &= 25e^{-5k}, (\text{multiplicando por } e^{5k}) \Rightarrow 50e^{4k} = 25 \Rightarrow e^{4k} = 0.5 \Rightarrow 4k = \ln(0.5) \Rightarrow \\ &\Rightarrow k = \frac{\ln(0.5)}{4} = -0.1733 \Rightarrow k \approx -0.1733. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $k$  en (3.11):

$$T_0 - 5 = 50e^{-k} \Rightarrow T_0 = 5 + 50e^{0.1733} \Rightarrow T_0 = 64.46^\circ F.$$

Es la temperatura que marcaba el termómetro en la habitación. □

**Ejemplo 3.4.6** En una habitación la temperatura que marca un termómetro clínico es de  $20^\circ C$ . Para detectar si un paciente tiene fiebre (definida como temperatura corporal de  $38^\circ C$  o más) se coloca un termómetro en la axila del paciente. Si al cabo de un minuto el termómetro marca  $27^\circ C$  en una persona sana (con temperatura de  $36^\circ C$ ), ¿Cuánto tiempo se debe dejar en una persona con fiebre para detectarla con un error no mayor a  $0.2^\circ C$ ?

▼ Si  $T(t)$  es la temperatura que marca el termómetro a los  $t$  minutos, entonces tenemos que:

$$T(0) = 20^\circ\text{C}, T(1) = 27^\circ\text{C} \text{ \& } T_a = 36^\circ\text{C}.$$

Con estos datos podemos obtener el valor de  $k$ , que en cierta forma mide la sensibilidad del termómetro. El PVI es entonces:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 36) \quad \text{con} \quad T(0) = 20 \quad \& \quad T(1) = 27.$$

Sabemos que:

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Rightarrow T(t) = 36 + Ce^{kt}.$$

Usando la condición inicial:

$$T(0) = 20 = 36 + Ce^{k \cdot 0} \Rightarrow C = 20 - 36 = -16 \Rightarrow T(t) = 36 - 16e^{kt}.$$

Usamos ahora la segunda condición:

$$T(1) = 27 = 36 - 16e^{k \cdot 1} \Rightarrow 16e^k = 36 - 27 = 9 \Rightarrow e^k = \frac{9}{16} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{9}{16}\right) = -0.57536.$$

Como se anotó antes, este valor de  $k$  es una constante del termómetro. Si ahora ese mismo termómetro se usa en un paciente que tal vez tenga fiebre ( $T_a \geq 38^\circ\text{C}$  ahora, con  $T_a$  no conocida), entonces tenemos que resolver el PVI:

$$\frac{dT}{dt} = -0.57536(T - T_a) \quad \text{con} \quad T(0) = 20,$$

y hallar el valor de  $t$  de modo que  $T(t) \geq T_a - 0.2$ .

Resolviendo como antes, tendremos  $T(t) = T_a + Ce^{-0.57536t}$ , pero ahora

$$T(0) = 20 \Rightarrow T_a + C = 20 \Rightarrow C = 20 - T_a,$$

así que la temperatura marcada por el termómetro para el tiempo  $t \geq 0$  es:

$$T(t) = T_a + (20 - T_a)e^{-0.57536t}$$

Ahora sólo tenemos que comparar esta expresión con  $T_a - 0.2$  y resolver para  $t$ :

$$\begin{aligned} T(t) = T_a + (20 - T_a)e^{-0.57536t} \geq T_a - 0.2 &\Rightarrow (T_a - 20)e^{-0.57536t} \leq 0.2 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-0.57536t} \leq \frac{0.2}{T_a - 20} &\Rightarrow -0.57536t \leq \ln\left(\frac{0.2}{T_a - 20}\right) \Rightarrow t \geq \frac{\ln\left(\frac{0.2}{T_a - 20}\right)}{-0.57536} \end{aligned}$$

(se invirtió la desigualdad por dividir entre un número negativo).

Es decir,

$$t \geq \frac{\ln 0.2}{-0.57536} - \frac{\ln(T_a - 20)}{-0.57536} = 2.7973 + \frac{\ln(T_a - 20)}{0.57536}$$

El último término está en función de la temperatura  $T_a$  del paciente, que no se conoce en principio; sin embargo podemos hacer una estimación, pues en seres humanos  $T_a$  es cuando mucho  $42^\circ\text{C}$  en casos extremos.

El valor del último término sería entonces a lo más  $\frac{\ln 22}{0.57536} = 5.3724$ , y esto sumado al primer término daría un total de  $t \geq 8.17$  minutos, alrededor 8 min 10 seg. Por lo tanto, para detectar una  $T_a = 38^\circ\text{C}$  se requerirían  $2.7973 + \frac{\ln 18}{0.57536} = 7.82$  min, o sea alrededor de 7 min 50 seg.

□

Un ejemplo relacionado con el anterior, de aplicación de la Ley de enfriamiento de Newton en medicina consiste en determinar el tiempo en que falleció una persona cuyo cadáver se encuentra en un medio ambiente frío. La homeostasis, o conjunto de funciones vitales de un individuo colaboran para mantener su temperatura corporal (en condiciones normales, sin enfermedad) entre  $36$  y  $36.5^\circ\text{C}$ ; sin embargo, al morir el cadáver del individuo se comporta como un cuerpo caliente en un medio frío (puesto que su organismo ya no produce calor).



**Ejemplo 3.4.7** Un ganadero salió una tarde a cazar a un lobo solitario que estaba diezmado su rebaño. El cuerpo del ganadero fue encontrado sin vida por un campesino, en un cerro cerca del rancho junto al animal cazado, a las 6 : 00 horas del día siguiente. Un médico forense llegó a las 7 : 00 y tomó la temperatura del cadáver, registrando  $23^{\circ}\text{C}$ ; una hora más tarde, y habiendo notado que en la noche y aún a esas horas la temperatura ambiente era aproximadamente de  $5^{\circ}\text{C}$ , el médico volvió a medir la temperatura corporal del cadáver y observó que era de  $18.5^{\circ}\text{C}$ . ¿A qué hora murió el ganadero aproximadamente?

▼ Podemos suponer por la información proporcionada, que la temperatura ambiente se mantuvo casi constante como  $T_a = 5^{\circ}\text{C}$  y también que hasta el instante de su muerte, cuyo momento desconocemos, la temperatura corporal del ganadero fue de  $36^{\circ}\text{C}$ .

Tiene mucho sentido que el forense haya tomado dos mediciones de la temperatura del cuerpo, para determinar el valor de  $k$ . Podemos denotar por  $T(t)$  la temperatura del cuerpo al tiempo  $t$ , medido en horas; por comodidad, hagamos  $t = 0$  a las 7 : 00 horas y  $t = 1$  a las 8 : 00 horas, así que tenemos el PVI:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a), \quad \text{con} \quad T(0) = 23^{\circ}\text{C} \quad \& \quad T(1) = 18.5^{\circ}\text{C},$$

con  $T_a = 5^{\circ}\text{C}$ . Se busca determinar el tiempo (negativo)  $t_0$  en el que  $T(t_0) = 36^{\circ}\text{C}$ . Al resolver la ED sabemos que:

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Rightarrow T = 5 + e^{kt+C_1} = Ce^{kt}.$$

Al usar las condiciones resulta

$$T(0) = 23 \Rightarrow 23 - 5 = 18 = Ce^{k \cdot 0} \Rightarrow C = 18 \Rightarrow T - 5 = 18e^{kt}$$

$$T(1) = 18.5 \Rightarrow 18.5 - 5 = 13.5 = 18e^k \Rightarrow e^k = \frac{13.5}{18} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{13.5}{18}\right) = -0.2877$$

En síntesis, tenemos de lo anterior que  $T(t) = 5 + 18e^{-0.2877t}$  en la solución del PVI.

Para determinar  $t_0$ , consideramos  $T(t_0) = 36$  y resolvemos:

$$\begin{aligned} 36 &= 5 + 18e^{-0.2877t_0} \Rightarrow 18e^{-0.2877t_0} = 36 - 5 \Rightarrow e^{-0.2877t_0} = \frac{31}{18} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -0.2877t_0 = \ln\left(\frac{31}{18}\right) \Rightarrow t_0 = \frac{\ln(31/18)}{-0.2877} = -1.8895 \approx 1 \text{ hr } 53 \text{ min.} \end{aligned}$$

Es decir, el deceso ocurrió aproximadamente una hora y 53 minutos antes de las 7 : 00 (hora de la primer toma de temperatura), esto es, alrededor de las 5 : 07 horas. □

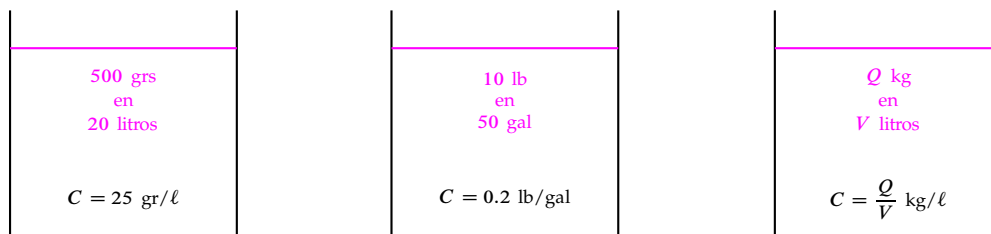
**Ejercicios 3.4.1** Ley de Newton de cambio de temperaturas. *Soluciones en la página 467.*

1. La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de  $200^{\circ}\text{C}$  y la temperatura del aire que lo rodea es de  $30^{\circ}\text{C}$ . Después de 10 minutos la temperatura de la superficie del motor es  $180^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuánto tiempo tomará para que la temperatura del motor baje a  $40^{\circ}\text{C}$ ?
2. Un recipiente con agua a una temperatura de  $100^{\circ}\text{C}$  se coloca en una habitación que se mantiene a una temperatura constante de  $60^{\circ}\text{C}$ . Después de 3 minutos la temperatura del agua es de  $90^{\circ}\text{C}$ . Determinar la temperatura del agua después de 6 minutos. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura del agua sea de  $75^{\circ}\text{C}$ ?
3. Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura del aire es de  $70^{\circ}\text{F}$ , al exterior donde la temperatura es de  $10^{\circ}\text{F}$ . Después de medio minuto el termómetro marca  $50^{\circ}\text{F}$ . ¿Cuánto marca el termómetro cuando  $t = 1$  minuto? ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura marcada por el termómetro sea de  $15^{\circ}\text{F}$ ?
4. Una taza de café caliente, inicialmente a  $95^{\circ}\text{C}$ , al estar en una habitación que tiene una temperatura constante de  $21^{\circ}\text{C}$ , se enfría hasta  $80^{\circ}\text{C}$  en 5 minutos. Determinar la temperatura del café después de 10 minutos. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el café tenga una temperatura agradable de  $50^{\circ}\text{C}$ ?

5. Una barra metálica, cuya temperatura inicial es de  $20^{\circ}\text{C}$ , se deja caer en un recipiente que contiene agua hirviendo (a  $100^{\circ}\text{C}$ ) y su temperatura aumenta  $2^{\circ}\text{C}$  después de 1 segundo. Determinar la temperatura de la barra metálica después de 10 segundos. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura de la barra sea de  $60^{\circ}\text{C}$ ?
6. Un termómetro que indica  $70^{\circ}\text{F}$  se coloca en un horno precalentado y mantenido a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio del horno, un observador registra que la temperatura marcada por el termómetro es de  $110^{\circ}\text{F}$  después de medio minuto y de  $145^{\circ}\text{F}$  después de un minuto. ¿A qué temperatura está el horno?
7. Un termómetro en el que se lee  $80^{\circ}\text{F}$  se lleva al exterior. Cinco minutos más tarde el termómetro indica  $60^{\circ}\text{F}$ . Después de otros cinco minutos el termómetro señala  $50^{\circ}\text{F}$ . ¿Cuál es la temperatura del exterior?
8. Un material cerámico se saca en cierto momento de un horno cuya temperatura es de  $750^{\circ}\text{C}$ , para llevarlo a una segunda etapa de un proceso que requiere que el material se encuentre a una temperatura de a lo más  $200^{\circ}\text{C}$ . Suponga que la temperatura de una sala de enfriamiento donde se colocará este cerámico es de  $5^{\circ}\text{C}$  y que después de 15 minutos la temperatura del material es de  $600^{\circ}\text{C}$ . ¿En cuánto tiempo el material cerámico estará listo para entrar a la segunda etapa de su proceso?
9. A la 13 : 00 horas un termómetro que indica  $10^{\circ}\text{F}$  se retira de un congelador y se coloca en un cuarto cuya temperatura es de  $66^{\circ}\text{F}$ . A la 13 : 05 el termómetro indica  $25^{\circ}\text{F}$ . Más tarde el termómetro se coloca nuevamente en el congelador. A las 13 : 30 el termómetro da una lectura de  $32^{\circ}\text{F}$ . ¿Cuándo se regresó el termómetro al congelador? ¿cuál era la lectura del termómetro en ese momento?
10. Luis invitó a Blanca a tomar café en la mañana. Luis sirvió dos tazas de café. Blanca le agregó crema suficiente como para bajar la temperatura de su café  $1^{\circ}\text{F}$ . Después de 5 minutos, Luis agregó suficiente crema a su café como para disminuir su temperatura en  $1^{\circ}\text{F}$ , después tanto Luis como Blanca empezaron a tomar su café. ¿Quién tenía el café más frío?

### 3.5 Mezclas

Si disolvemos 500 gramos de azúcar en 20 litros de agua, obtenemos una solución dulce con una concentración  $C = \frac{500}{20} \text{ g}/\ell = 25 \text{ g}/\ell$  de azúcar (se lee 25 gramos por litro y significa 25 gramos de azúcar por cada litro de solución). Cuando disolvemos 10 libras de sal en 50 galones de agua, obtenemos una solución salina o salmuera con una concentración  $C = \frac{10}{50} \text{ lb}/\text{gal} = 0.2 \text{ lb}/\text{gal}$  de sal (léase 0.2 libras por galón). En general, si disolvemos  $Q$  kilogramos (o cualquier unidad de masa) de un soluto en  $V$  litros (o alguna otra unidad de volumen) de un solvente, obtenemos una solución con una concentración  $C = \frac{Q}{V} \text{ kg}/\ell$ , del soluto (léido  $C$  kilogramos por litro y entendido como  $C$  kilogramos de soluto por cada litro de solución). Esto es



Ahora supongamos que inicialmente (en  $t = 0$ ) tenemos en un tanque una cantidad  $V_0$  de solución donde hay disuelta una cantidad  $Q_0$  de un soluto. Supongamos también que a partir de  $t = 0$ , se deja entrar otra solución al tanque con una rapidez  $R_e$  (flujo de entrada) y con una concentración  $C_e$  (concentración de

entrada) del mismo soluto y que al mismo tiempo se deja salir del tanque la nueva solución (considerada uniforme por mezclado) con una rapidez  $R_s$  (flujo de salida) y una concentración  $C_s$  (concentración de salida) del mismo soluto.

Observamos aquí varias cosas.

1. Si  $R_e = R_s$ , entonces la cantidad  $V_0$  de solución se mantiene constante al paso del tiempo  $t$ .
2. Si  $R_e \neq R_s$ , entonces la cantidad  $V$  de solución será función del tiempo  $t$ ; es decir,  $V = V(t)$ . Aún más, si  $R_e > R_s$  entonces  $V(t) > V_0$  y es creciente, mientras que si  $R_e < R_s$  entonces  $V(t) < V_0$  y es decreciente.
3. En general, la cantidad  $Q$  de soluto en el tanque será función del tiempo  $t$ ; es decir,  $Q = Q(t)$ .
4. Correspondientemente, la concentración  $C$  del soluto en el tanque será función del tiempo  $t$ ; y será según que  $R_e = R_s$  o  $R_e \neq R_s$ ,

$$C(t) = \frac{Q(t)}{V_0} \quad \text{o bien} \quad C(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

5. Un problema que es de interés en esta clase de procesos consiste en determinar la cantidad  $Q(t)$  de soluto en el tanque en cualquier instante  $t \geq 0$ .

Para resolver este problema procedemos como sigue:

Consideremos primero la rapidez con que cambia la cantidad de soluto  $Q(t)$  en el tanque y que está dada por la rapidez con que entra el soluto menos la rapidez con la que sale. Esto es,

$$\frac{d}{dt}Q(t) = (\text{rapidez con que entra el soluto}) - (\text{rapidez con que sale el soluto})$$

Si tomamos en cuenta que

La rapidez con que entra el soluto es:  $R_e C_e$ .

La rapidez con que sale el soluto es:  $R_s C_s = R_s C(t)$ .

El modelo de este proceso queda como el PVI:

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_e C_e - R_s C(t) \quad \text{con} \quad Q(0) = Q_0.$$

El método de solución de este PVI dependerá de las condiciones del problema.

**Ejemplo 3.5.1** En un tanque que contiene 1 000 litros de agua, inicialmente se disuelven 5 kg de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de 20 litros por minuto y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a la misma razón. Considerando que la concentración de la solución que entra es de 0.01 kg/l, determinar:

1. La cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier instante  $t \geq 0$ .
2. La cantidad de sal en el tanque después de 30 minutos.
3. La cantidad de sal en el tanque después de mucho tiempo.
4. El tiempo que debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque.

▼ Sea  $Q(t)$  la cantidad (en kg) de sal en el tanque después de  $t$  minutos. Como inicialmente se tienen 5 kg de sal, entonces  $Q(0) = 5$ .

La rapidez de cambio de la cantidad  $Q(t)$  de sal en el tanque en el instante  $t$  es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = (\text{rapidez con que entra la sal}) - (\text{rapidez con que sale la sal})$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?

Ya que la solución entra con una rapidez  $R_e = 20 \ell/\text{min}$  y con una concentración  $C_e = 0.01 \text{ kg}/\ell$ , entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_e C_e = (20 \ell/\text{min}) (0.01 \text{ kg}/\ell) = 0.2 \text{ kg}/\text{min}.$$

¿Con qué rapidez sale la sal del tanque?

La rapidez con que sale la solución del tanque es  $R_s = 20 \ell/\text{min}$ . Sin embargo, la concentración de sal a la salida se debe hallar a partir de estas consideraciones:

Ya que entra solución a razón de  $20 \ell/\text{min}$  y sale solución a la misma razón, es claro que el volumen  $V$  de solución en el tanque es constante:  $V = \text{volumen inicial} = 1\,000$  litros.

Después de  $t$  minutos hay  $Q(t)$  kg de sal disueltos en 1 000 litros de solución, por lo que la concentración de sal en la solución que sale es

$$C_s = \frac{Q(t)}{V} = \frac{Q(t)}{1\,000} \text{ kg}/\ell.$$

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_s C_s = (20 \ell/\text{min}) \left[ \frac{Q(t)}{1000} \text{ kg}/\ell \right] = \frac{Q(t)}{50} \text{ kg}/\text{min}.$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad  $Q(t)$  de sal en el tanque, después de  $t$  minutos es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q(t) &= R_e C_e - R_s C_s = 0.2 - \frac{Q(t)}{50} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q'(t) + \frac{Q(t)}{50} = 0.2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad de sal en el tanque  $Q(t)$  está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{1}{50} Q(t) = 0.2 \quad \text{con} \quad Q(0) = 5.$$

1. Resolvemos la ecuación diferencial:

$$Q'(t) + \frac{1}{50} Q(t) = 0.2$$

la cual es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante a  $e^{\frac{1}{50}t}$ , por lo que:

$$\begin{aligned} e^{\frac{t}{50}} \left[ Q'(t) + \frac{1}{50} Q(t) \right] &= 0.2 e^{\frac{t}{50}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ e^{\frac{t}{50}} Q(t) \right] = 0.2 e^{\frac{t}{50}} \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\frac{t}{50}} Q(t) &= 0.2 \int e^{\frac{t}{50}} dt = (0.2)(50) e^{\frac{t}{50}} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(t) &= e^{-\frac{t}{50}} \left( 10 e^{\frac{t}{50}} + C \right) \Rightarrow Q(t) = 10 + C e^{-\frac{t}{50}}. \end{aligned}$$

Ahora bien, considerando la condición inicial:

$$Q(0) = 5 \Rightarrow Q(0) = 10 + C e^0 = 5 \Rightarrow 10 + C = 5 \Rightarrow C = -5,$$

por lo que

$$Q(t) = 10 - 5e^{-\frac{t}{50}}$$

es la cantidad de sal (en kg) que hay en el tanque después de  $t$  minutos.

2. La cantidad de sal que hay después de 30 minutos es:

$$\begin{aligned} Q(30) &= 10 - 5e^{-\frac{30}{50}} = 10 - 5e^{-0.6} \approx 7.25594182 \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q(30) \approx 7.256 \text{ kg}. \end{aligned}$$

3. La cantidad de sal que hay después de mucho tiempo la podemos denotar y calcular como sigue:

$$Q_{\text{lím}} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 10 - 5e^{-\frac{t}{50}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 10 - \frac{5}{e^{\frac{t}{50}}} \right) = 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_{\text{lím}} = 10 \text{ kg.}$$

4. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque?

$$Q(t) = 8 \Rightarrow 10 - 5e^{-\frac{t}{50}} = 8 \Rightarrow e^{-\frac{t}{50}} = \frac{8-10}{-5} = \frac{-2}{-5} = 0.4 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{t}{50} = \ln(0.4) \Rightarrow t = -50 \ln(0.4) \approx 45.81453659 \text{ min.}$$

Es decir,  $t \approx 45$  minutos, 48 segundos.

□

**Ejemplo 3.5.2** Un tanque que tiene capacidad para 2 000 litros, contiene inicialmente 1 000 litros de agua con 8 kg de sal disuelta. Se bombea salmuera al tanque a razón de 20 ℓ/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera a razón de 15 ℓ/min. Considerando que la concentración de la solución que entra es de 0.01 kg/ℓ, determinar:

1. La cantidad de sal que hay en el tanque después de  $t$  minutos.
2. La cantidad de sal que hay en el tanque después de una hora.
3. La concentración de sal en el tanque cuando éste se llena.

▼ Sea  $Q(t)$  la cantidad (en kg) de sal en el tanque después de  $t$  minutos.

Como inicialmente se tienen 8 kg de sal, entonces  $Q(0) = 8$ .

La rapidez de cambio de la cantidad  $Q(t)$  de sal en el tanque en el instante  $t$  es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = (\text{rapidez con que entra la sal}) - (\text{rapidez con que sale la sal}).$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?

Ya que la solución entra con una rapidez  $R_e = 20$  ℓ/min y con una concentración  $C_e = 0.01$  kg/ℓ, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es:

$$R_e C_e = (20 \text{ ℓ/min}) (0.01 \text{ kg/ℓ}) = 0.2 \text{ kg/min.}$$

La rapidez con que sale la solución del tanque es  $R_s = 15$  ℓ/min.

Pero ¿con qué concentración de sal?

Ya que entra solución a razón de 20 ℓ/min y sale solución a razón de 15 ℓ/min, entonces quedan en el tanque 5 litros de solución en cada minuto que transcurre. Después de  $t$  minutos habrán quedado almacenados en el tanque  $5t$  litros de solución, los cuales se sumarán a los 1 000 litros de solución iniciales. Es decir, después de  $t$  minutos habrá en el tanque  $(1\,000 + 5t)$  litros de solución en los que estarán disueltos  $Q(t)$  kg de sal, por lo cual la concentración de sal en la solución que sale es:

$$C_s = \frac{Q(t)}{1\,000 + 5t} \text{ kg/ℓ.}$$

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es:

$$R_s C_s = (15 \text{ ℓ/min}) \left[ \frac{Q(t)}{1\,000 + 5t} \text{ kg/ℓ} \right] = \frac{15Q(t)}{1\,000 + 5t} \text{ kg/min.}$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad  $Q(t)$  de sal en el tanque, después de  $t$  minutos es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_e C_e - R_s C_s = 0.2 - \frac{15Q(t)}{1\,000 + 5t},$$

o sea

$$Q'(t) + \frac{15}{1000 + 5t} Q(t) = 0.2.$$

Luego, la cantidad  $Q(t)$  está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{3}{200 + t} Q(t) = 0.2 \quad \text{con} \quad Q(0) = 8.$$

1. Resolvemos la ecuación diferencial:

$$Q'(t) + \frac{3}{200 + t} Q(t) = 0.2,$$

la cual es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante a:

$$e^{\int \frac{3}{200+t} dt} = e^{3 \int \frac{dt}{200+t}} = e^{3 \ln(200+t)} = e^{\ln(200+t)^3} = (200 + t)^3,$$

por lo que:

$$\begin{aligned} (200 + t)^3 \left[ Q'(t) + \frac{3}{200 + t} Q(t) \right] &= 0.2(200 + t)^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} [(200 + t)^3 Q(t)] &= 0.2(200 + t)^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow (200 + t)^3 Q(t) &= 0.2 \int (200 + t)^3 dt = 0.2 \frac{(200 + t)^4}{4} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(t) &= \frac{0.05(200 + t)^4 + C}{(200 + t)^3} = 0.05(200 + t) + \frac{C}{(200 + t)^3}. \end{aligned}$$

Ahora bien, considerando la condición inicial,

$$\begin{aligned} Q(0) = 8 \Rightarrow Q(t = 0) &= 0.05(200) + \frac{C}{(200)^3} = 8 \Rightarrow 10 + \frac{C}{(200)^3} = 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow C &= (8 - 10)(200)^3 \Rightarrow C = -2(200)^3 \end{aligned}$$

por lo que,

$$Q(t) = 0.05(200 + t) - \frac{2(200)^3}{(200 + t)^3} \Rightarrow Q(t) = 0.05(200 + t) - 2 \left( \frac{200}{200 + t} \right)^3$$

es la cantidad (en kg) de sal que hay en el tanque después de  $t$  minutos.

2. La cantidad de sal que hay en el tanque después de una hora (igual a 60 minutos) es

$$\begin{aligned} Q(60) &= 0.05(200 + 60) - 2 \left( \frac{200}{200 + 60} \right)^3 = 0.05(260) - 2 \left( \frac{200}{260} \right)^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(60) &= 13 - 0.91 = 12.09 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(60) &= 12.09 \text{ kg.} \end{aligned}$$

3. ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando éste se llena?

Primero veamos que el tanque se llena cuando el volumen variable  $V(t) = 1000 + 5t$  iguala a la capacidad de él que es de 2000 litros. Esto sucede cuando

$$V(t) = 2000 \Rightarrow 1000 + 5t = 2000 \Rightarrow 5t = 1000 \Rightarrow t = 200.$$

Es decir, el tanque se llena cuando han transcurrido  $t = 200$  minutos.

La cantidad de sal que hay en el tanque en dicho instante es:

$$\begin{aligned} Q(200) &= 0.05(200 + 200) - 2 \left( \frac{200}{200 + 200} \right)^3 = \\ &= 0.05(400) - 2 \left( \frac{200}{400} \right)^3 = 20 - 2 \left( \frac{1}{8} \right) = 19.75 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(200) &= 19.75 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la concentración de sal en el tanque en este instante es:

$$\begin{aligned} C(200) &= \frac{Q(200)}{2000} \text{ kg}/\ell = \frac{19.75}{2000} \text{ kg}/\ell \Rightarrow \\ \Rightarrow C(200) &= 0.009875 \text{ kg}/\ell \Rightarrow C(200) \approx 0.01 \text{ kg}/\ell. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.5.3** En un tanque que contiene 500 galones de agua, inicialmente se disuelven 10 libras de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de 4 galones por minuto y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a razón de 5 galones por minuto. Considerando que la solución que entra tiene sal con una concentración de 0.1 libra/gal, determinar:

1. La cantidad de sal que hay en el tanque después de  $t$  minutos.
2. La cantidad de sal en el tanque después de media hora.
3. La concentración de sal en el tanque cuando quedan 100 galones de solución.

▼ Sea  $Q(t)$  la cantidad (en lb) de sal en el tanque después de  $t$  minutos.

Como inicialmente se tienen 10 lb de sal, entonces  $Q(0) = 10$ .

La rapidez de cambio de la cantidad  $Q(t)$  de sal en el tanque en el instante  $t$  es:

$$\frac{d}{dt}Q(t) = (\text{rapidez con que entra la sal}) - (\text{rapidez con que sale la sal})$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?

Ya que la solución entra con una rapidez  $R_e = 4$  gal/min y con una concentración  $C_e = 0.1$  lb/gal, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_e C_e = (4 \text{ gal/min}) (0.1 \text{ lb/gal}) = 0.4 \text{ lb/min}$$

¿Con qué rapidez sale la sal del tanque?

La rapidez con que la solución sale del tanque es  $R_s = 5$  gal/min. Pero ¿con qué concentración de sal?

Ya que la solución entra a razón de 4 gal/min y sale solución a razón de 5 gal/min, entonces el tanque pierde 1 galón de solución en cada minuto que transcurre. Después de  $t$  minutos se habrán perdido  $t$  galones de solución de los 500 galones iniciales. Es decir, después de  $t$  minutos quedarán en el tanque  $(500 - t)$  galones de solución, en los que estarán disueltas  $Q(t)$  lb de sal, por lo que la concentración de sal en la solución que sale será

$$C_s = \frac{Q(t)}{500 - t} \text{ lb/gal}$$

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_s C_s = (5 \text{ gal/min}) \left[ \frac{Q(t)}{500 - t} \text{ lb/gal} \right] = \frac{5Q(t)}{500 - t} \text{ lb/min.}$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad  $Q(t)$  de sal en el tanque, después de  $t$  minutos es:

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_e C_e - R_s C_s = 0.4 - \frac{5Q(t)}{500 - t}$$

o sea

$$Q'(t) + \frac{5}{500-t} Q(t) = 0.4$$

Luego, la cantidad  $Q(t)$  está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{5}{500-t} Q(t) = 0.4 \quad \text{con} \quad Q(0) = 10.$$

1. Resolvemos la ecuación diferencial:

$$Q'(t) + \frac{5}{500-t} Q(t) = 0.4.$$

Esta es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante a:

$$e^{\int \frac{5}{500-t} dt} = e^{5 \int \frac{dt}{500-t}} = e^{-5 \ln(500-t)} = e^{\ln(500-t)^{-5}} = (500-t)^{-5}$$

por lo cual:

$$\begin{aligned} (500-t)^{-5} \left[ Q'(t) + \frac{5}{500-t} Q(t) \right] &= 0.4(500-t)^{-5} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} [(500-t)^{-5} Q(t)] &= 0.4(500-t)^{-5} \Rightarrow \\ \Rightarrow (500-t)^{-5} Q(t) &= 0.4 \int (500-t)^{-5} dt = -0.4 \frac{(500-t)^{-4}}{-4} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(t) &= (500-t)^5 [0.1(500-t)^{-4} + C] = 0.1(500-t) + C(500-t)^5. \end{aligned}$$

Ahora bien, considerando la condición inicial:

$$\begin{aligned} Q(0) = 10 &\Rightarrow Q(0) = 0.1(500) + C(500)^5 = 10 \Rightarrow 50 + C(500)^5 = 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow C &= \frac{10-50}{(500)^5} \Rightarrow C = \frac{-40}{(500)^5} \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} Q(t) &= 0.1(500-t) + \frac{-40}{(500)^5} (500-t)^5 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(t) &= 0.1(500-t) - 40 \left( \frac{500-t}{500} \right)^5 \end{aligned}$$

es la cantidad (en lb) de sal que hay en el tanque después de  $t$  minutos.

2. La cantidad de sal que hay en el tanque después de media hora (30 minutos) es:

$$\begin{aligned} Q(30) &= 0.1(500-30) - 40 \left( \frac{500-30}{500} \right)^5 = 0.1(470) - 40 \left( \frac{470}{500} \right)^5 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(30) &= 47 - 29.3562 = 17.6438 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(30) &= 17.6438 \text{ lb.} \end{aligned}$$

3. ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando quedan 100 galones de solución?

Después de  $t$  minutos hay en el tanque  $(500-t)$  galones de solución y éstos serán 100 galones cuando:  $500-t = 100 \Rightarrow t = 400$ . Es decir, en el tanque hay 100 galones de solución cuando han transcurrido  $t = 400$  minutos.



La cantidad de sal en dicho instante es

$$\begin{aligned} Q(400) &= 0.1(500 - 400) - 40 \left( \frac{500 - 400}{500} \right)^5 = \\ &= 0.1(100) - 40 \left( \frac{100}{500} \right)^5 = 10 - 0.0128 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(400) &= 9.9872 \text{ lb} \end{aligned}$$

por lo tanto, la concentración de sal en el tanque en este instante es:

$$\begin{aligned} C(400) &= \frac{Q(400)}{100} \text{ lb/gal} = \frac{9.9872}{100} \text{ lb/gal} \Rightarrow \\ \Rightarrow C(400) &= 0.099872 \text{ lb/gal} \Rightarrow \\ \Rightarrow C(400) &\approx 0.1 \text{ lb/gal.} \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.5.4** Un estanque contiene  $100 \text{ m}^3$  de agua contaminada. Con el propósito de descontaminarlo se introduce agua limpia a razón de  $2 \text{ m}^3/\text{min}$  y el agua contaminada (uniformemente mezclada) se deja salir del estanque a la misma razón.

1. ¿Qué porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de una hora?
2. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un 90 %?

▼ Sea  $Q_0$  la cantidad inicial (en  $t = 0$ ) de contaminantes en el estanque y sea  $Q(t)$  la cantidad de contaminantes después de  $t$  minutos.

La rapidez de cambio de la cantidad  $Q(t)$  de contaminantes en el estanque, en el minuto  $t \geq 0$  es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = (\text{rapidez con que entran los contaminantes}) - (\text{rapidez con que salen contaminantes})$$

Como entra agua limpia al estanque, entonces nada entra de contaminante.

Como entra y sale agua del estanque a la misma razón, ( $2 \text{ m}^3/\text{min}$ ) entonces la cantidad de agua en el estanque es siempre la misma ( $100 \text{ m}^3$ ), por lo cual la concentración de contaminantes en cada  $\text{m}^3$  de agua que sale del estanque es:  $\frac{Q(t)}{100}$

Luego,

$$\frac{d}{dt}Q(t) = 2(0) - 2\frac{Q(t)}{100} \Rightarrow Q'(t) = -\frac{Q(t)}{50}.$$

Por lo tanto, la cantidad  $Q(t)$  de contaminantes en el estanque después de  $t$  minutos, está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{1}{50}Q(t) = 0 \quad \text{con} \quad Q(0) = Q_0.$$

Se observa que se trata de una ED lineal homogénea, que podemos resolver separando variables.

1. ¿Qué porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de una hora?

$$\begin{aligned} Q'(t) + \frac{1}{50}Q(t) &= 0 \Rightarrow Q'(t) = -\frac{1}{50}Q(t) \Rightarrow \frac{Q'(t)}{Q(t)} = -\frac{1}{50} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{Q'(t)}{Q(t)} dt &= -\frac{1}{50} \int dt \Rightarrow \ln Q(t) = -\frac{1}{50}t + C \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(t) &= e^{-\frac{1}{50}t+C} = e^{-\frac{t}{50}}e^C = e^{-\frac{t}{50}}C \Rightarrow \\ \Rightarrow Q(t) &= Ce^{-\frac{t}{50}} \end{aligned}$$

que es la solución general de la ED. Ahora bien,

$$Q(0) = Q_0 \Rightarrow Ce^0 = Q_0 \Rightarrow C = Q_0$$

Por lo que,

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{50}}.$$

Entonces, la cantidad de contaminantes después de 60 minutos (una hora), en el estanque, es:

$$Q(60) = Q_0 e^{-\frac{60}{50}} = Q_0 e^{-1.2}.$$

Así, la cantidad de contaminantes que se han eliminado del estanque en 60 minutos, es:

$$Q_0 - Q(60) = Q_0 - Q_0 e^{-1.2} = Q_0(1 - e^{-1.2}).$$

¿Y qué porcentaje es esta cantidad de  $Q_0$ ?

$$\frac{Q_0 - Q(60)}{Q_0}(100) = \frac{Q_0(1 - e^{-1.2})}{Q_0}(100) = (1 - e^{-1.2})100 = 69.88.$$

Por lo tanto, después de una hora se habrán eliminado el 69.88 % de los contaminantes del estanque.

2. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un 90 %? Si después de  $t = t_1$  minutos los contaminantes han disminuido en un 90 %, entonces  $Q(t_1) = 10\%$  de  $Q_0 = (0.1)Q_0$  es la cantidad de contaminantes en el estanque después de  $t_1$  minutos. Luego,

$$\begin{aligned} Q(t_1) &= (0.1)Q_0 \Rightarrow Q_0 e^{-\frac{t_1}{50}} = (0.1)Q_0 \Rightarrow e^{-\frac{t_1}{50}} = 0.1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{t_1}{50} = \ln(0.1) \Rightarrow t_1 = -50 \ln(0.1) \approx 115.13 \text{ (minutos)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que los contaminantes en el estanque hayan disminuido en un 90 % deben transcurrir aproximadamente 115 minutos, 8 segundos.

□

### Ejercicios 3.5.1 Mezclas. Soluciones en la página 467.

- Un tanque contiene 100 litros de agua salada en el cual hay 2 kilogramos de sal disueltos. Agua salada con 0.25 kgs de sal por litro entra al tanque a razón de 16 litros/minutos y la mezcla bien agitada sale a la misma razón.
  - Obtener la cantidad de sal en el tanque después de  $t$  minutos.
  - Determinar la cantidad de sal después de 10 minutos.
  - Determinar la concentración de sal después de media hora.
  - ¿Cuánta sal hay después de un tiempo largo?
- Un tanque contiene 50 galones de agua pura. Una solución de agua salada con 1 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma razón.
  - ¿Cuánta sal hay en el tanque después de  $t$  minutos?
  - ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la mezcla del tanque tenga una concentración de 0.5 lb de sal por galón?
  - ¿Cuál es la concentración de sal después de un tiempo largo?
- Un tanque contiene 100 galones de agua salada con 10 lb de sal disuelta. Agua salada con 1.5 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 3 gal/min y la mezcla bien agitada sale a razón de 4 gal/min.

- a. Obtener la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo  $t \geq 0$ .
  - b. Determinar la cantidad de sal en el tanque después de 10 minutos.
  - c. Calcular la concentración de sal en el tanque después de 20 minutos.
  - d. Determinar la concentración de sal en el tanque, cuando hay solamente 10 galones de solución.
4. Un tanque con capacidad para 500 galones contiene inicialmente 10 lb de sal disueltas en 200 galones de agua. Se bombea al tanque salmuera que contenga 2 lb/gal a razón de 4 gal/min y se permite que la mezcla salga del tanque a razón de 3 gal/min.
  - a. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque después de  $t$  minutos?
  - b. ¿Cuál es la concentración de sal después de una hora?
  - c. ¿Cuánta sal contiene el tanque cuando se llena?
  - d. ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando se llena?
5. Un tanque contiene inicialmente 60 galones de agua pura. A razón de 2 gal/min entra al tanque salmuera que contiene 1 lb de sal por galón y la solución uniformemente mezclada sale del tanque a razón de 3 gal/min.
  - a. Obtener la cantidad de sal en el tanque después de  $t$  minutos.
  - b. Calcular la concentración de sal en el tanque después de media hora.
  - c. Determinar la concentración de sal en el tanque cuando hay solamente 10 galones de solución.
  - d. ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?
6. Un depósito contiene 100 galones de salmuera en la que hay disueltas 40 lbs de sal. Se desea reducir la concentración de sal hasta 0.1 lb/gal vertiendo agua pura en el depósito a razón de 5 gal/min y permitiendo que salga a la misma razón. La mezcla se mantiene uniforme.

¿Cuánto tiempo se conseguirá el propósito?
7. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de agua en los cuales hay 10 lb de sal disueltas. Una salmuera que contiene  $\frac{1}{2}$  lb de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de 6 gal/min. La solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera del tanque con una rapidez de 4 gal/min. Calcular el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 min.
8. Se bombea cerveza con un contenido de 8 % de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 500 galones de cerveza con 6 % de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior a razón de 5 gal/min en tanto que el líquido mezclado se extrae del tanque a razón de 6 gal/min.
  - a. ¿Qué cantidad de alcohol hay en el tanque después de  $t$  minutos?
  - b. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el tanque después de una hora?
9. Un tanque de 100 galones contiene inicialmente agua pura. Una solución de colorante al 30% fluye en el tanque a una tasa de 5 gal/min y la mezcla resultante sale a la misma tasa. Después de 15 min el proceso se detiene y se hace fluir agua pura al tanque a una tasa de 5 gal/min y la mezcla sale a la misma tasa. Encuentre la cantidad de colorante en el tanque después de 30 minutos.
10. Un tanque de 100 gal se llena inicialmente con 40% de solución colorante. Una solución colorante al 20% fluye hacia el tanque a una tasa de 5 gal/min. La mezcla sale del tanque a la misma tasa y pasa a otro tanque de 100 gal que se había llenado inicialmente con agua pura. La mezcla resultante sale del segundo tanque a una tasa de 5 gal/min. Obtenga una expresión para la cantidad de colorante en el segundo tanque. ¿Cuál es la concentración de colorante en el segundo tanque después de 30 minutos?

### 3.6 Mecánica

El paracaidismo es uno de los deportes extremos que aumenta día a día sus adeptos. Los que practican este deporte se tiran desde un avión en movimiento y caen al inicio en caída libre, luego extienden su cuerpo perpendicularmente a la trayectoria de caída y finalmente abren su paracaídas para aterrizar suavemente. Es notorio el cambio de la velocidad de caída del paracaidista de una etapa a la siguiente. Nuestra experiencia nos dice que el cambio observado se debe precisamente a la interacción del aire (del medio) con la persona y luego con el paracaídas. Interacción que se traduce en una resistencia del aire al movimiento del paracaidista.

Observamos aquí dos tipos de movimiento:

1. Una caída libre, que es el tipo de movimiento donde la resistencia del aire o del medio es despreciable, por lo que se considera nula.
2. Una caída no libre o con fricción, que es el tipo de movimiento donde la resistencia del aire o del medio no es despreciable. En este caso el medio se opone al movimiento del paracaidista.

Experimentalmente se sabe que todo fluido (por ejemplo: aire, agua y aceite) se opone al movimiento de todo cuerpo u objeto que pasa a través de él. Dicha oposición al movimiento se manifiesta mediante una fuerza de resistencia que tiene dirección contraria al movimiento del cuerpo y con una magnitud que para velocidades pequeñas es directamente proporcional a la magnitud de la velocidad instantánea (rapidez) del cuerpo.

Para modelar el movimiento de un cuerpo a través de un fluido es necesario tener presente la segunda ley de Newton, la cual establece una proporcionalidad directa entre la fuerza resultante  $F$  que actúa sobre el cuerpo y la aceleración instantánea  $a$  de éste. Esto es,  $F = ma$ , donde la masa  $m$  del cuerpo juega el papel de la constante de proporcionalidad.

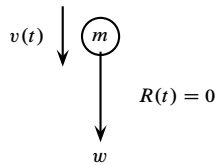
Tengamos presente también que:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d}{dt}v(t), & \text{donde } v(t) \text{ es la velocidad instantánea;} \\ v(t) &= \frac{d}{dt}x(t), & \text{donde } x(t) \text{ es la posición instantánea;} \\ w &= mg & \text{es el peso del cuerpo de masa } m. \end{aligned}$$

Si  $R(t)$  es la fuerza de resistencia del fluido al movimiento de  $m$ , entonces su magnitud  $|R(t)|$  es directamente proporcional a la rapidez  $|v(t)|$  de  $m$ . Esto es,  $|R(t)| = \beta |v(t)|$ , donde  $\beta > 0$  es la constante de proporcionalidad y además  $R(t) = -\beta v(t)$  por ser  $R(t)$  y  $v(t)$  de sentidos opuestos.

Tomando en cuenta lo anterior se presentan dos tipos de movimientos:

1. Caída libre. Usamos la siguiente figura:



Se considera hacia abajo la dirección positiva. Se tiene que la única fuerza que actúa sobre la masa  $m$  es su peso  $w = mg$ .

$$\begin{aligned} F &= ma(t) \text{ \& } F = w \Rightarrow ma(t) = w \Rightarrow ma(t) = mg \Rightarrow \\ \Rightarrow a(t) &= g \Rightarrow \frac{d}{dt}v(t) = g \Rightarrow v(t) = gt + C_1. \end{aligned}$$

Suponiendo que la velocidad inicial es  $v_0$ , entonces:

$$v(0) = v_0 \Rightarrow g(0) + C_1 = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0.$$

Entonces, la velocidad instantánea es:

$$v(t) = gt + v_0.$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = gt + v_0 &\Rightarrow x(t) = \int (gt + v_0) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t) = g\left(\frac{t^2}{2}\right) + v_0t + C_2. \end{aligned}$$

Suponiendo que la posición inicial es  $x_0$ , se tiene que:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow \frac{1}{2}g(0)^2 + v_0(0) + C_2 = x_0 \Rightarrow C_2 = x_0.$$

Luego, la posición instantánea es:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0.$$

Resumiendo: en una caída libre la aceleración es constante y el objeto obedece las ecuaciones para movimiento uniformemente acelerado, es decir:

$$a(t) = g.$$

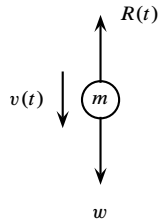
La velocidad instantánea es:

$$v(t) = v_0 + gt.$$

La posición instantánea es:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2.$$

2. Caída no libre (con resistencia). Usamos la siguiente figura:



Considerando hacia abajo la dirección positiva:

$$\begin{aligned} F &= ma(t) \quad \& \quad F = w + R(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow ma(t) &= w + R(t) \Rightarrow ma(t) = mg - \beta v(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow m \frac{d}{dt}v(t) &= mg - \beta v(t) \Rightarrow mv'(t) + \beta v(t) = mg \Rightarrow \\ \Rightarrow v'(t) + \frac{\beta}{m}v(t) &= g. \end{aligned}$$

Suponiendo que la velocidad inicial es  $v_0$ , se tiene que la velocidad instantánea  $v(t)$  queda dada por la solución del problema de valores iniciales (PVI):

$$v'(t) + \frac{\beta}{m}v(t) = g; \quad \text{con} \quad v(0) = v_0.$$

Resolvemos este problema. La ED es lineal no homogénea para  $v(t)$  y tiene por factor integrante a la exponencial:  $e^{\frac{\beta}{m}t}$ . Luego,

$$\begin{aligned} e^{\frac{\beta}{m}t} \left[ v'(t) + \frac{\beta}{m}v(t) \right] &= g e^{\frac{\beta}{m}t} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ e^{\frac{\beta}{m}t} v(t) \right] = g e^{\frac{\beta}{m}t} \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\frac{\beta}{m}t} v(t) &= g \int e^{\frac{\beta}{m}t} dt = g \left( \frac{m}{\beta} \right) e^{\frac{\beta}{m}t} + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow v(t) &= \left( \frac{mg}{\beta} e^{\frac{\beta}{m}t} + C_1 \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} = \frac{mg}{\beta} + C_1 e^{-\frac{\beta}{m}t} \Rightarrow \\ \Rightarrow v(t) &= \frac{mg}{\beta} + C_1 e^{-\frac{\beta}{m}t}. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$v(0) = v_0 \Rightarrow \frac{mg}{\beta} + C_1 e^0 = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0 - \frac{mg}{\beta}.$$

Por lo tanto,

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} + \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} = \frac{w}{\beta} + \left( v_0 - \frac{w}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

que es la velocidad instantánea del cuerpo de masa  $m$  en el tiempo  $t \geq 0$ .

Notemos aquí que

$$\begin{aligned} \beta > 0, m > 0 \text{ y } t > 0 &\Rightarrow \frac{\beta}{m}t > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{\beta}{m}t \right) = +\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\beta}{m}t} &= +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\beta}{m}t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{\beta}{m}t}} = 0. \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{mg}{\beta} + \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} \right] = \frac{mg}{\beta}.$$

Denominamos velocidad límite a este resultado, que es una velocidad constante.

$$v_{\text{lím}} = \frac{mg}{\beta} = \frac{w}{\beta}.$$

y que es el comportamiento de la velocidad  $v(t)$  a medida que el tiempo  $t$  crece.

Observe que la velocidad límite se alcanza cuando el peso del paracaidista es igual a la fuerza de resistencia del aire, es decir, cuando las fuerzas que actúan sobre el paracaidista están en equilibrio.

Esta velocidad límite constante es la que permite al paracaidista un aterrizaje suave.

Ahora, en cuanto a la posición instantánea  $x(t)$  del cuerpo de masa  $m$  en el tiempo  $t \geq 0$  se tiene lo siguiente

Ya que  $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ , entonces:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t) dt = \int \left[ \frac{mg}{\beta} + \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} \right] dt = \\ &= \frac{mg}{\beta}t + \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) \int e^{-\frac{\beta}{m}t} dt = \\ &= \frac{mg}{\beta}t + \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) \left( -\frac{m}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{mg}{\beta}t - \frac{m}{\beta} \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} + C_2. \end{aligned}$$

Y si  $x_0$  es la posición inicial del cuerpo, entonces:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 &\Rightarrow \frac{mg}{\beta}(0) - \frac{m}{\beta} \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) e^0 + C_2 = x_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{m}{\beta} \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) + C_2 = x_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_2 = x_0 + \frac{m}{\beta} \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la posición instantánea es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mg}{\beta}t - \frac{m}{\beta} \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} + x_0 + \frac{m}{\beta} \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{mg}{\beta}t + \frac{m}{\beta} \left( v_0 - \frac{mg}{\beta} \right) \left[ 1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right]. \end{aligned}$$

Dos fórmulas muy particulares se tienen cuando  $v_0 = 0$  y  $x_0 = 0$ . En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{mg}{\beta} - \frac{mg}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}t} = \frac{mg}{\beta} \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) \\ x(t) &= \frac{mg}{\beta}t + \frac{m}{\beta} \left( -\frac{mg}{\beta} \right) \left[ 1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right] = \frac{mg}{\beta} \left[ t - \frac{m}{\beta} \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) \right]. \end{aligned}$$

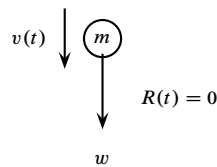
Ahora, veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 3.6.1** Una masa de 2 kg cae desde el reposo bajo la influencia de la gravedad y con resistencia despreciable del aire.

1. Modelar el movimiento Mediante una ecuación diferencial.
2. Determinar la velocidad de la masa en cualquier instante  $t \geq 0$ .
3. Calcular la velocidad después de 5 segundos.
4. Determinar el tiempo que transcurre para que la velocidad sea de 100 m/s.
5. Determinar la distancia recorrida por la masa durante los primeros  $t$  segundos.
6. Calcular la distancia recorrida por la masa entre los segundos  $4^\circ$  y  $5^\circ$ , así como entre los segundos  $5^\circ$  y  $6^\circ$ .



1. Usaremos la siguiente figura:



Considerando hacia abajo la dirección positiva.

Si  $a(t)$  es la aceleración instantánea:

$$ma(t) = w \Rightarrow m \frac{d}{dt} v(t) = mg \Rightarrow v'(t) = g.$$

Al caer desde el reposo, ocurre que  $v(0) = 0$ .

Luego la velocidad instantánea  $v(t)$  de la masa está dada por la solución del problema de valor inicial (PVI):

$$v'(t) = g; \quad \text{con} \quad v(0) = 0.$$

2. Resolvemos este PVI:

$$\begin{aligned}v'(t) &= g \Rightarrow v(t) = gt + C. \\v(0) &= 0 \Rightarrow 0 = g(0) + C \Rightarrow C = 0.\end{aligned}$$

Entonces:  $v(t) = gt = 9.8t$  m/s, que es la velocidad de la masa en cualquier instante  $t \geq 0$ .

3. Después de 5 segundos la velocidad es:  $v(5) = 9.8(5)$  m/s = 49 m/s.

4. La velocidad  $v(t)$  es de 100 m/s cuando:  $v(t) = 100 \Rightarrow 9.8t = 100 \Rightarrow t = \frac{100}{9.8}$  s = 10.2 s.

5. Si  $x(t)$  es la posición de la masa  $m$  con respecto a su punto de partida, entonces:

$$\begin{aligned}v(t) &= 9.8t \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) = 9.8t \Rightarrow x(t) = 9.8 \left( \frac{t^2}{2} \right) + C \Rightarrow \\&\Rightarrow x(t) = 4.9t^2 + C.\end{aligned}$$

Considerando que la posición inicial con respecto a su punto de partida es  $x(0) = 0$ , se tiene que:

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 4.9(0)^2 + C \Rightarrow C = 0.$$

Entonces, la posición de  $m$  después de  $t$  segundos es  $x(t) = 4.9t^2$  m, que es precisamente la distancia recorrida por  $m$  durante ese tiempo.

6. La posición de  $m$  después de  $t = 4$  segundos es:

$$x(4) = 4.9(4)^2 \text{ m} = 78.4 \text{ m}.$$

La posición de  $m$  en  $t = 5$  segundos es:

$$x(5) = 4.9(5)^2 \text{ m} = 122.5 \text{ m}.$$

La posición de  $m$  en  $t = 6$  segundos es:

$$x(6) = 4.9(6)^2 \text{ m} = 176.4 \text{ m}.$$

La distancia recorrida entre los segundos 4º y 5º es:

$$x(5) - x(4) = (122.5 - 78.4) \text{ m} = 44.1 \text{ m}.$$

La distancia recorrida entre los segundos 5º y 6º es:

$$x(6) - x(5) = (176.4 - 122.5) \text{ m} = 53.9 \text{ m}.$$

□

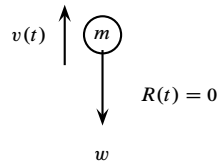
**Ejemplo 3.6.2** Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad de 20 m/s y el aire no se opone al movimiento.

1. Modelar el movimiento mediante una ecuación diferencial.
2. Determinar la velocidad de la pelota.
3. Determinar el tiempo de subida de la pelota y la máxima altura que alcanza.
4. Calcular la velocidad de la pelota después de 2 y 3 segundos.
5. Calcular el tiempo que tarda la pelota en regresar a su posición inicial.





1. Usaremos la figura siguiente:



Considerando hacia arriba la dirección positiva:

Si  $a(t)$  es la aceleración instantánea, entonces:

$$ma(t) = -w \Rightarrow m \frac{d}{dt}v(t) = -mg \Rightarrow v'(t) = -g.$$

Luego, la velocidad instantánea  $v(t)$  está dada por la solución del PVI:

$$v'(t) = -g; \quad \text{con} \quad v(0) = 20.$$

2. Se tiene que:

$$v'(t) = -g \Rightarrow v(t) = -gt + C \Rightarrow v(t) = -9.8t + C.$$

Aplicamos la condición inicial:

$$v(0) = 20 \Rightarrow -9.8(0) + C = 20 \Rightarrow C = 20.$$

Luego, la velocidad de la pelota en cualquier tiempo es:

$$v(t) = -9.8t + 20 \text{ m/s.}$$

3. La pelota sube mientras su velocidad es positiva y se detiene en el instante  $t_1$  en que:

$$v(t_1) = 0 \Rightarrow -9.8t_1 + 20 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{20}{9.8} = 2.0408 \text{ s.}$$

Luego, durante 2.0408 segundos la pelota sube.

Para calcular la altura máxima alcanzada por la pelota, determinamos primero la posición  $x(t)$ .

$$\begin{aligned} v(t) &= -9.8t + 20 \Rightarrow x'(t) = -9.8t + 20 \Rightarrow \\ \Rightarrow x(t) &= \int (-9.8t + 20) dt = -9.8 \frac{t^2}{2} + 20t + C \Rightarrow \\ \Rightarrow x(t) &= -4.9t^2 + 20t + C. \end{aligned}$$

Considerando que la condición inicial se tiene que:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = -4.9t^2 + 20t$$

La altura máxima que alcanza la pelota es

$$\begin{aligned} x_{max} &= x(t_1) = -4.9t_1^2 + 20t_1 = -4.9(2.0408)^2 + 20(2.0408) \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{max} &= 20.4082 \text{ m.} \end{aligned}$$

4. La velocidad de la pelota después de 2 segundos es

$$v(2) = -9.8(2) + 20 = 0.4 \Rightarrow v(2) = 0.4 \text{ m/s}$$

donde el signo positivo significa que la pelota se dirige hacia arriba.

La velocidad de la pelota después de 3 segundos es:

$$v(3) = -9.8(3) + 20 = -9.4 \Rightarrow v(3) = -9.4 \text{ m/s}$$

donde el signo negativo significa que la pelota se dirige hacia abajo.

5. Para calcular el tiempo que tarda la pelota en regresar a su posición inicial, usemos  $x(t) = 0$ :

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &\Rightarrow -4.9t^2 + 20t = 0 \Rightarrow -t(4.9t - 20) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -t = 0 \quad \text{o bien} \quad 4.9t - 20 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_0 = 0 \quad \text{o bien} \quad t_2 = 4.0816. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tiempo que tarda en regresar es:  $t_2 = 4.0816$  segundos.

□

Observemos que en el ejemplo anterior, que el tiempo  $t_2$  es el doble del tiempo  $t_1$  que tarda la pelota en alcanzar la altura máxima. También notemos que la velocidad en el instante  $t_2$  en el que la pelota regresa a su posición inicial es:

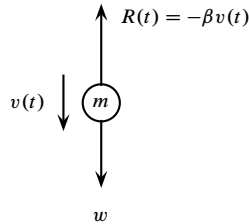
$$v(t_2) = v(4.0816) = -9.8(4.0816) + 20 = -20 \text{ m/s.}$$

Esto es, el modelo sin resistencia del aire predice que un objeto lanzado desde el nivel del suelo hacia arriba dura el mismo tiempo en subir hasta la altura máxima que en volver de esa altura al suelo. Más aún, la rapidez con la que impacta el suelo es la misma con que fue lanzado hacia arriba. Esto puede no ser totalmente cierto en realidad, pues la resistencia del aire juega un papel que puede ser importante. Veamos a continuación algunos ejemplos con resistencia del aire.

**Ejemplo 3.6.3** Un paracaidista y su paracaídas pesan 200 lb. En el instante en que el paracaídas se abre, él está viajando verticalmente hacia abajo a 40 pie/s. Si la resistencia del aire varía de manera directamente proporcional a la velocidad instantánea y su magnitud es de 180 lb cuando la velocidad es de 45 pie/s:

1. Determinar la velocidad y la posición del paracaidista en cualquier instante  $t \geq 0$ .
2. Calcular la velocidad límite.

▼ Usaremos la siguiente figura:



Consideramos que la dirección positiva es hacia abajo y que  $t \geq 0$  a partir de que el paracaídas se abre. La resistencia del aire es  $R$  y cumple con que  $|R| = \beta |v(t)|$ , con  $\beta > 0$ , y  $R = -\beta v(t)$ . Tenemos:

$$v(0) = v_0 = 40 \text{ pie/s} \quad \& \quad x(0) = x_0 = 0 \quad \& \quad w = mg.$$

Como  $mg = w = 200 \text{ lb}$  entonces  $m = \frac{200}{g} = \frac{200}{32} = \frac{25}{4} \Rightarrow m = \frac{25}{4} \text{ slug}$ .

Ya que  $|R| = \beta |v(t)|$  y  $|R| = 180$  cuando  $|v(t)| = 45$ , entonces  $\beta = 4$ .

1. En cualquier segundo  $t \geq 0$  ocurre que

$$\begin{aligned} ma(t) &= w + R \Rightarrow m \frac{d}{dt} v(t) = mg - \beta v(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{25}{4} v'(t) = 200 - 4v(t) \Rightarrow v'(t) = 32 - \frac{16}{25} v(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow v'(t) + \frac{16}{25} v(t) = 32. \end{aligned}$$

La velocidad instantánea está dada por la solución del PVI:

$$v'(t) + \frac{16}{25}v(t) = 32; \quad \text{con} \quad v(0) = 40.$$

Esta ecuación diferencial es lineal con factor integrante  $e^{\frac{16}{25}t}$ . Luego,

$$\begin{aligned} e^{\frac{16}{25}t} \left[ v'(t) + \frac{16}{25}v(t) \right] &= 32e^{\frac{16}{25}t} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ e^{\frac{16}{25}t} v(t) \right] = 32e^{\frac{16}{25}t} \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\frac{16}{25}t} v(t) &= 32 \int e^{\frac{16}{25}t} dt = 32 \left( \frac{25}{16} \right) e^{\frac{16}{25}t} + C = 50e^{\frac{16}{25}t} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow v(t) &= 50 + Ce^{-\frac{16}{25}t}. \end{aligned}$$

Ahora:  $v(0) = 40 \Rightarrow 50 + Ce^0 = 40 \Rightarrow C = -10$ .

Entonces, la velocidad instantánea (en pie/s) del paracaidista en cualquier  $t \geq 0$ , es:

$$v(t) = 50 - 10e^{-\frac{16}{25}t}.$$

Si  $x(t)$  es la posición instantánea, medida a partir del punto donde se abre el paracaídas, entonces

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) \quad \& \quad v(t) = 50 - 10e^{-\frac{16}{25}t} \Rightarrow \\ \Rightarrow x'(t) &= 50 - 10e^{-\frac{16}{25}t} \Rightarrow x(t) = \int (50 - 10e^{-\frac{16}{25}t}) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow x(t) &= 50t - 10 \left( -\frac{25}{16} \right) e^{-\frac{16}{25}t} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow x(t) &= 50t + \frac{125}{8} e^{-\frac{16}{25}t} + C. \end{aligned}$$

Como  $x_0 = x(0) = 0$ , entonces ocurre que:

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 50(0) + \frac{125}{8}e^0 + C \Rightarrow C = -\frac{125}{8}.$$

Por lo que la posición del paracaidista en el instante (segundo)  $t \geq 0$  es (en pies):

$$\begin{aligned} x(t) &= 50t + \frac{125}{8}e^{-\frac{16}{25}t} - \frac{125}{8} \Rightarrow \\ \Rightarrow x(t) &= 50t + \frac{125}{8} \left( e^{-\frac{16}{25}t} - 1 \right). \end{aligned}$$

2. La velocidad límite del paracaidista es:

$$\begin{aligned} v_{\text{lim}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 50 - 10e^{-\frac{16}{25}t} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 50 - \frac{10}{e^{\frac{16}{25}t}} \right] = 50 \\ v_{\text{lim}} &= 50 \text{ pie/s.} \end{aligned}$$

Observe que esta velocidad ocurre cuando el peso es igual a la fuerza de resistencia del aire.

□

1. Una piedra de 500 gramos cae desde el reposo debido a la gravedad y con resistencia despreciable del aire.
  - a. Mediante una ecuación diferencial modelar el movimiento de la piedra.
  - b. Determinar la velocidad (en m/s) de la piedra en cualquier instante  $t \geq 0$ .
  - c. Calcular la posición (en metros) de la piedra en cualquier instante  $t \geq 0$ .
  - d. Calcular la velocidad de la piedra y la distancia recorrida al cabo de 5 s.
  - e. Determinar el tiempo en que la piedra alcanza una velocidad de 100 m/s.
  - f. Calcular la distancia recorrida entre los segundos  $6^\circ$  y  $8^\circ$  así como entre los segundos  $8^\circ$  y  $10^\circ$ .
2. Una máquina de entrenamiento en beisbol se utiliza para lanzar directamente hacia arriba una pelota desde el suelo con velocidad inicial de 40 m/s. Suponiendo que la resistencia del aire es despreciable,
  - a. Calcular la altura máxima alcanzada por la pelota y el tiempo que tarda en alcanzarla.
  - b. Determinar cuándo y con qué velocidad golpeará la pelota el suelo.
3. Un cuerpo que pesa 8 lb cae desde el reposo hacia la tierra. Suponiendo que la resistencia del aire es numéricamente igual a  $2v(t)$ , donde  $v(t)$  es la velocidad instantánea de pie/s, calcular:
  - a. La velocidad después de  $t$  segundos.
  - b. La distancia recorrida al cabo de  $t$  segundos.
  - c. La velocidad límite del cuerpo.
4. Una pequeña gota de aceite de 0.2 gramos de masa cae en el aire desde el reposo. La resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea y es de 160 dinas cuando la gota cae a 40 cm/s. Determinar:
  - a. La velocidad al cabo de  $t$  segundos.
  - b. La posición después de  $t$  segundos.
  - c. La velocidad límite de la gota.
5. Un paracaidista y su paracaídas pesan 256 libras. En el instante en que el paracaídas se abre, él está cayendo verticalmente a 10 pie/s. Suponiendo que la resistencia del aire es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea y que ella es de 400 lb cuando ésta es de 20 pie/s, determinar:
  - a. La velocidad del paracaidista al cabo de  $t$  segundos.
  - b. La posición del paracaidista al cabo de  $t$  segundos.
  - c. La velocidad límite del paracaidista.
6. Un hombre y su paracaídas pesan 160 libras y caen desde el reposo hacia la tierra. Antes de que el paracaídas se abra, la resistencia del aire (en libras) es numéricamente igual a  $\frac{1}{2}v$  (donde  $v$  es la velocidad instantánea en pie/s) y a partir de que se abre la resistencia es  $\frac{5}{8}v^2$ . Si el paracaídas se abre a los 5 segundos, calcular la velocidad del paracaidista en cualquier segundo  $t$ :
  - a. Antes de abrirse el paracaídas.
  - b. Después de abrirse el paracaídas.

### 3.7 Problemas geométricos

En esta sección trataremos problemas geométricos que se pueden plantear y resolver mediante ecuaciones diferenciales que se obtienen considerando la interpretación geométrica de la derivada, que como sabemos es la pendiente de la recta tangente a la curva (gráfica de la función) en un punto.

### 3.7.1 Curvas definidas por sus tangentes y normales

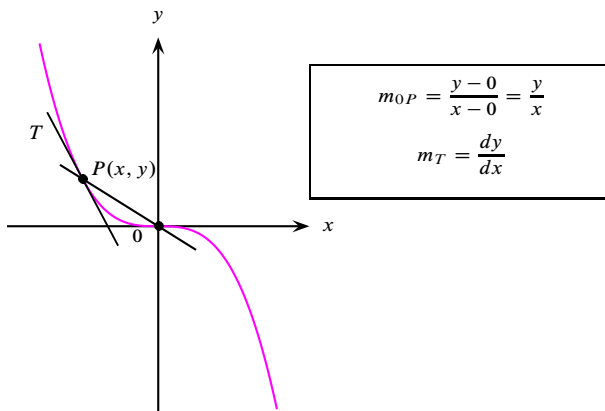
Aquí es conveniente recordar que:

1. Si una curva está definida mediante una función  $y = f(x)$  y  $P(x, y)$  es un punto arbitrario de ella, entonces la derivada  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  nos da la pendiente  $m_T$  de la recta tangente  $T$  a la curva en el punto arbitrario  $P(x, y)$ . Es decir,  $\frac{dy}{dx} = f'(x) = m_T$ .
2. Si una curva está definida mediante una ecuación  $g(x, y) = 0$ , donde se tiene implícitamente definida a  $y = f(x)$  y  $P(x, y)$  es un punto arbitrario de la curva, entonces la derivada (calculada mediante derivación implícita)  $\frac{dy}{dx} = \phi(x, y)$  nos da la pendiente  $m_T$  de la recta tangente  $T$  a dicha curva en el punto arbitrario  $P(x, y)$ . Es decir,  $\frac{dy}{dx} = \phi(x, y)$ .
3. Si la pendiente de la recta tangente  $T$  a una curva en un punto arbitrario  $P(x, y)$  es  $m_T \neq 0$  y  $N$  es la recta normal a la misma curva en el mismo punto  $P$ , entonces la pendiente de  $N$  es  $m_N = -\frac{1}{m_T}$ .

También debemos considerar que:

Si  $C_1$  y  $C_2$  son dos curvas que se intersecan en el punto  $P$ , con rectas tangentes  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente (en dicho punto) y  $\theta$  es el ángulo formado por  $T_1$  y  $T_2$ , entonces las curvas  $C_1$  y  $C_2$  se intersecan en  $P$  formando un ángulo  $\theta$  entre ellas.

**Ejemplo 3.7.1** Determinar una curva para la cual la pendiente de la recta tangente en cada punto es  $r$  veces la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.



▼ Sea  $P(x, y)$  un punto arbitrario de la curva  $y = f(x)$  & sea  $T$  la recta tangente a ella en  $P$ .

La pendiente de la recta tangente  $T$  es  $m_T = \frac{dy}{dx}$

Si  $m$  es la pendiente del segmento de recta  $OP$ , entonces  $m = \frac{y}{x}$

Como la pendiente  $m_T$  es  $r$  veces la pendiente  $m$ , entonces

$$m_T = rm \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = r \left( \frac{y}{x} \right)$$

que es una ecuación diferencial que resolvemos separando variables

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = r \left( \frac{y}{x} \right) &\Rightarrow \frac{dy}{y} = r \left( \frac{dx}{x} \right) \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = r \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln y = r \ln x + C_1 \Rightarrow \ln y = \ln x^r + C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{\ln y} = e^{\ln x^r + C_1} \Rightarrow y = e^{\ln x^r} e^{C_1} = x^r C \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = Cx^r. \end{aligned}$$

Luego, cualquiera de las curvas  $y = Cx^n$  cumple con la propiedad pedida.  
 Por ejemplo: con  $C = -3$  y  $n = 5$  se tiene la curva  $y = -3x^5$ , cuya derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = -3(5x^4) = 5 \left( \frac{-3x^5}{x} \right) = 5 \left( \frac{y}{x} \right),$$

cumpliendo la condición  $\frac{dy}{dx} = n \left( \frac{y}{x} \right)$  para  $n = 5$ . □

**Ejemplo 3.7.2** Una curva es tal que la pendiente de la recta tangente en cada punto es proporcional a la abscisa del punto de tangencia. Determine la forma general de tal curva.

▼ Sea  $y = f(x)$  la ecuación de la curva y  $P(x, y)$  un punto arbitrario de ella.  
 La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto  $P$  está dada por la derivada  $y'$ .  
 Debido a que la pendiente ( $y'$ ) de la tangente es proporcional a la abscisa ( $x$ ) del punto de tangencia  $P$ , entonces:  $y' = C_1x$ , donde  $C_1$  es la constante de proporcionalidad. De aquí que,

$$y' = C_1x \Rightarrow y = \int C_1x \, dx = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 = C_3x^2 + C_2$$

Por lo tanto, las curvas que cumplen con la propiedad establecida, son todas las parábolas verticales de la forma:  $y = Cx^2 + K$ , donde  $C$  y  $K$  son constantes.

Por ejemplo, para  $C = 4$  y  $K = -3$  se tiene la parábola  $y = 4x^2 - 3$ , cuya derivada es  $y' = 8x$  donde  $y'$  es proporcional a  $x$ , con constante de proporcionalidad  $C_1 = 8$ . □

**Ejemplo 3.7.3** Halle una curva que pase por el punto  $(1, 1)$  de tal manera que la pendiente de la tangente en cada punto sea proporcional al cuadrado de la ordenada de este punto.

▼ Sea  $y = f(x)$  la ecuación de la curva y  $P(x, y)$  un punto arbitrario de ella.  
 La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto  $P$  está dada por  $y'$ .  
 Debido a que la pendiente ( $y'$ ) de la tangente es proporcional al cuadrado de la ordenada ( $y^2$ ), entonces:  $y' = C_1y^2$ , donde  $C_1$  es la constante de proporcionalidad. De aquí que,

$$\begin{aligned} y' = C_1y^2 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = C_1dx \Rightarrow \int y^{-2} dy = \int C_1 dx \\ &\Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = C_1x + C_2 \Rightarrow -\frac{1}{y} = C_1x + C_2 \Rightarrow \frac{1}{y} = -(C_1x + C_2) \\ &\Rightarrow y = \frac{-1}{C_1x + C_2} \end{aligned}$$

Por pasar la curva por el punto  $(1, 1)$  ocurre que:

$$x = 1 \text{ \& } y = 1 \Rightarrow 1 = \frac{-1}{C_1(1) + C_2} \Rightarrow C_1 + C_2 = -1 \Rightarrow C_2 = -1 - C_1$$

Por lo cual,

$$y = \frac{-1}{C_1x + C_2} = \frac{-1}{C_1x + (-1 - C_1)} = \frac{-1}{C_1(x - 1) - 1}$$

Por lo tanto, el requisito pedido es cumplido por la familia de curvas:  $y = \frac{1}{1 - C(x - 1)}$  donde  $C$  es una constante arbitraria. Por ejemplo, para  $C = 2$  se tiene la curva:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{-2x + 3}, \text{ la cual tiene por derivada a} \\ y' &= \frac{2}{(-2x + 3)^2}, \text{ que puede ser expresada como} \\ y' &= (2) \frac{1}{(-2x + 3)^2} = (2) \left( \frac{1}{-2x + 3} \right)^2 = (2)y^2 \end{aligned}$$

donde se ve que la derivada  $y'$  es proporcional a  $y^2$ .

□

### Ejercicios 3.7.1 Tangentes y normales. Soluciones en la página 468

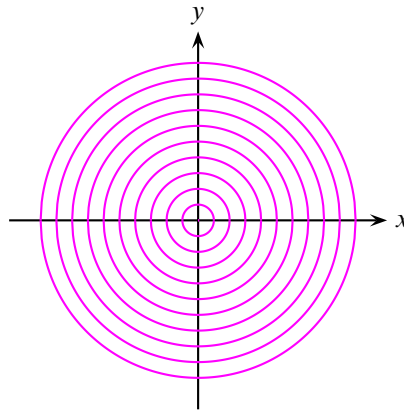
1. Halle una curva que pase por el punto  $(0, -2)$  de tal modo que la pendiente de la recta tangente en cada punto sea igual a la ordenada de dicho punto aumentada en 3 unidades.
2. Determine una curva que pase por el punto  $(2, 1)$  de tal manera que la recta tangente en cualquier punto tenga la misma dirección que la recta que une al origen de coordenadas con dicho punto.
3. Describa el tipo de curva que tiene la propiedad de que todas sus rectas normales pasan por un punto fijo de coordenadas  $(x_0, y_0)$ .
4. Encuentre la curva que satisface que el área de la región bajo la curva y sobre el eje  $x$ , desde el punto  $(0, 1)$  hasta el punto  $(x, y)$ , ambos en la curva, es igual a la ordenada del punto  $(x, y)$ .
5. Halle la familia de curvas que tienen la propiedad de que el segmento de la tangente a la curva comprendido entre los ejes coordenados se divide a la mitad en el punto de contacto.

### 3.7.2 Trayectorias ortogonales

Si consideramos la familia de curvas

$$x^2 + y^2 = c, \quad \text{con } c > 0,$$

podemos decir que esta familia es el conjunto de las circunferencias de radio  $r = \sqrt{c}$  con centro en el origen.



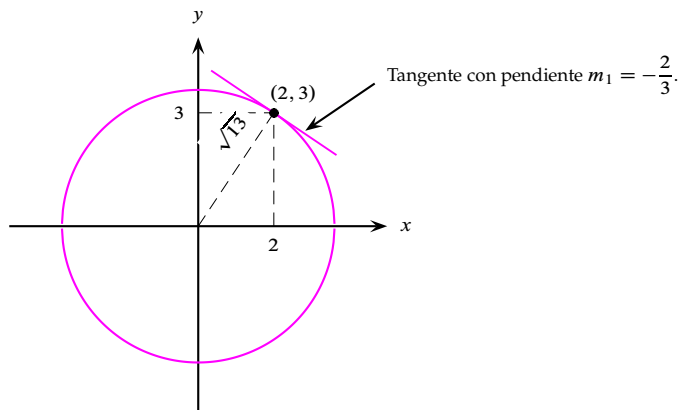
Esta es una familia de curvas de la forma:

$$F(x, y) = c; \text{ donde } F(x, y) = x^2 + y^2$$

Una ecuación diferencial asociada a esta familia de curvas es (véase la sección ??):

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

En un punto arbitrario del plano  $(x, y)$ , la curva de la familia que pasa por ese punto tiene recta tangente con pendiente  $-\frac{x}{y}$ . Por ejemplo, por el punto  $(2, 3)$  pasa la circunferencia de radio  $\sqrt{13}$  y su recta tangente en dicho punto tiene pendiente  $m_1 = -\frac{2}{3}$



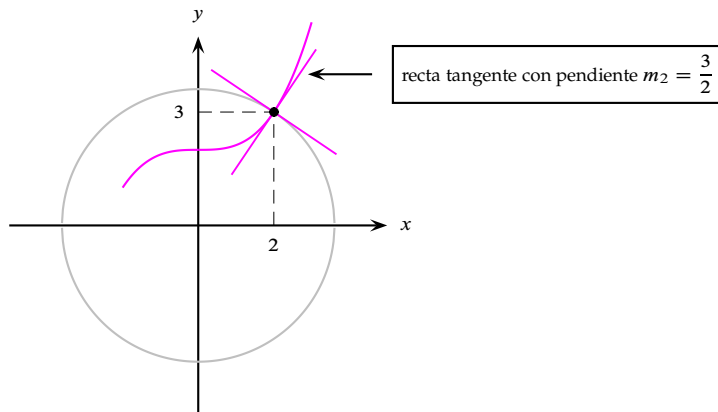
Ahora bien, se sabe que dos rectas que se intersecan son ortogonales ( o perpendiculares) si sus pendientes satisfacen:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o bien} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{o bien} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Es decir, la pendiente de una recta es el negativo del inverso multiplicativo de la pendiente de la otra.

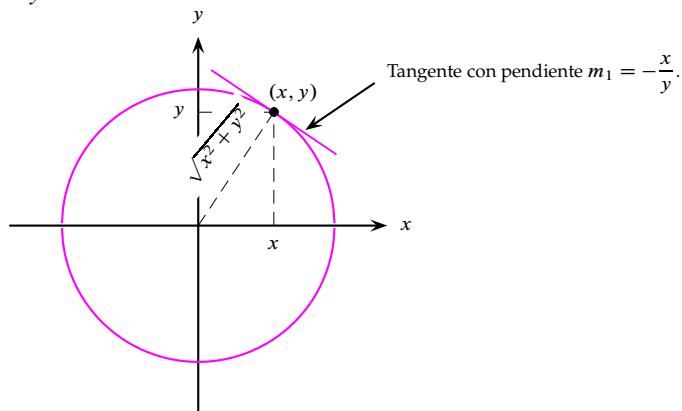
Existen curvas que pasan por el punto  $(2, 3)$  y que tiene como pendiente de la tangente  $m_2 = \frac{3}{2}$ .

Por ejemplo  $y = \frac{1}{8}x^3 + 2$  pasa por el punto  $(2, 3)$  y la pendiente de su tangente en ese punto es  $m_2 = \frac{3}{2}$ :



Decimos entonces que en el punto  $(2, 3)$  las curvas  $x^2 + y^2 = \sqrt{13}$  &  $y = \frac{1}{8}x^3 + 2$  son *ortogonales* puesto que sus tangentes son ortogonales. Cumplen que  $m_1 \cdot m_2 = -1$

Ahora, si tomamos un punto arbitrario del plano  $(x, y)$  por donde pasa una circunferencia de radio  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  cuya tangente tiene pendiente  $m_1 = -\frac{x}{y}$ :





podemos generar entonces una ecuación diferencial con la igualdad  $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ . Esta ED es:

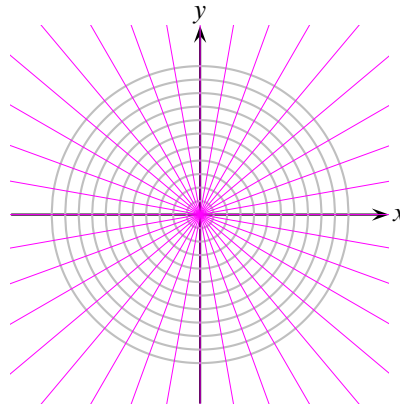
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \quad (O)$$

La anterior ED tiene soluciones tales que, cuando una curva solución pasa por el punto  $(x, y)$  su recta tangente es ortogonal a la tangente de la circunferencia que pasa por ese punto.

Vamos a resolver la ecuación diferencial anterior (O) por separación de variables:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln y = \ln x + C &\Rightarrow \ln y = \ln x + \ln C \Rightarrow \ln y = \ln Cx \Rightarrow \\ \Rightarrow y = Cx. \end{aligned}$$

La solución general de esta ecuación diferencial representa a la familia de rectas que pasa por el origen. Notamos que cada recta de la familia  $y = Cx$  interseca ortogonalmente a cada una de las circunferencias de la familia  $x^2 + y^2 = c$ . Así, con el método indicado, hallamos una familia de curvas (y no una única curva) tal que cada uno de sus miembros es ortogonal a cada una de las curvas de la familia  $x^2 + y^2 = c$ . Esto se ve en la siguiente figura:



□

- Cuando cada curva de una familia  $\mathcal{C}_1$  es ortogonal a cada una de las curvas de otra familia  $\mathcal{C}_2$ , se dice que  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son familias ortogonales de curvas o bien que  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son familias de trayectorias ortogonales.

### ¿Cómo encontrar la familia ortogonal a una familia dada?

Si tenemos una familia de curvas de la forma:

$$F(x, y) = c$$

Se calcula la ecuación diferencial asociada a dicha familia:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Se afirma entonces que la ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal es:

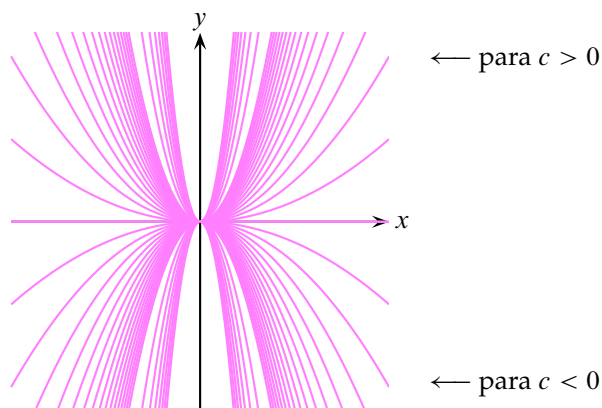
$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}.$$

Resolvemos esta ecuación diferencial y su solución general es la familia ortogonal a la familia dada.

**Ejemplo 3.7.4** Obtener la familia ortogonal a la familia:

$$y = cx^2.$$

▼ Esta familia es el conjunto de las parábolas con vértice en el origen.



Calculamos la ecuación diferencial asociada a esta familia de curvas. Escribimos  $y = cx^2$  como:

$$\begin{aligned}\frac{y}{x^2} &= c \text{ donde } F(x, y) = \frac{y}{x^2}. \\ F_x &= y \left( -\frac{2x}{x^4} \right) = -\frac{2y}{x^3}. \\ F_y &= \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Entonces la ecuación diferencial asociada a la familia de parábolas es:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-\frac{2y}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2y}{x}.$$

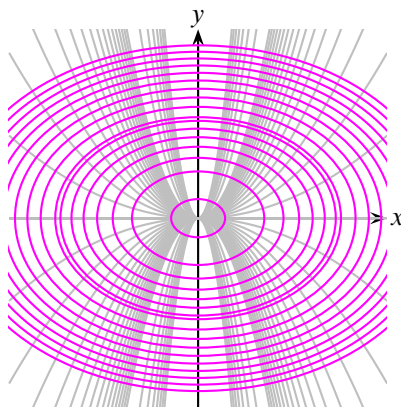
Por lo tanto la ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} = -\frac{x}{2y}$$

Resolvemos esta ED por variables separables:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{2y} \Rightarrow 2y \, dy = -x \, dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int 2y \, dy = -\int x \, dx \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C \Rightarrow \frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{C} = 1,\end{aligned}$$

es la familia ortogonal y representa una familia de elipses con centro en el origen:



□

**Ejemplo 3.7.5** Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas:

$$2x^2 + y^2 = 4cx; \quad \text{con } c \text{ constante.}$$

▼ Obtenemos la ED asociada a esta familia:

$$2x^2 + y^2 = 4cx \Rightarrow \frac{2x^2 + y^2}{4x^2} = c \Rightarrow F(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y^2}{4x}.$$

Entonces

$$F_x = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{4x^2} = \frac{2x^2 - y^2}{4x^2} \quad \& \quad F_y = \frac{y}{2x}.$$

Luego, la ED asociada es:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\frac{2x^2 - y^2}{4x^2}}{\frac{y}{2x}} = -\frac{2x^2 - y^2}{2xy}.$$

Por lo tanto, la ED asociada a las trayectorias ortogonales es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{2xy}{2x^2 - y^2}.$$

Notamos que esta ED es homogénea y la resolvemos como tal:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2x^2 - y^2} = \frac{x^2 \left( \frac{2y}{x} \right)}{x^2 \left( 2 - \frac{y^2}{x^2} \right)} = \frac{2 \left( \frac{y}{x} \right)}{2 - \left( \frac{y}{x} \right)^2}$$

Tenemos:

$$w = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xw \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \frac{dw}{dx} + w.$$

Al sustituir en la ED se obtiene:

$$\begin{aligned} x \frac{dw}{dx} + w &= \frac{2w}{2 - w^2} \Rightarrow x \frac{dw}{dx} = \frac{2w}{2 - w^2} - w = \frac{2w - 2w + w^3}{2 - w^2} = \frac{w^3}{2 - w^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2 - w^2}{w^3} dw = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{2 - w^2}{w^3} dw = \int \left( 2w^{-3} - \frac{1}{w} \right) dw \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln x = 2 \left( \frac{w^{-2}}{-2} \right) - \ln w + C = -\frac{1}{w^2} - \ln w + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln x + \frac{1}{w^2} + \ln w = C. \end{aligned}$$

Y debido a que  $w = \frac{y}{x}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}\ln x + \frac{x^2}{y^2} + \ln\left(\frac{y}{x}\right) &= C \Rightarrow \\ \Rightarrow \cancel{\ln x} + \frac{x^2}{y^2} + \ln y - \cancel{\ln x} &= C \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \ln y &= C \Rightarrow x^2 + y^2 \ln y = Cy^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, las trayectorias ortogonales están dadas por la familia de curvas:

$$x^2 + y^2 \ln y = Cy^2$$

donde  $C$  es constante. □

**Ejemplo 3.7.6** Calcular las trayectorias ortogonales de la familia de curvas:

$$\cos y = ce^{-x}; \quad \text{con } c \text{ constante.}$$

▼ Obtenemos la ED asociada a esta familia de curvas:

$$\cos y = ce^{-x} \Rightarrow e^x \cos y = c \Rightarrow F(x, y) = e^x \cos y.$$

Entonces:

$$F_x = (\cos y)e^x = e^x \cos y \quad \& \quad F_y = e^x(-\sin y) = -e^x \sin y$$

Luego, la ED asociada es:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\cancel{e^x} \cos y}{-\cancel{e^x} \sin y} = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Por lo que, la ED asociada a las trayectorias ortogonales es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y}{\cos y},$$

que resolvemos por variables separables.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\sin y}{\cos y} \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y} dy = -dx \Rightarrow \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(\sin y) &= -x + C \Rightarrow \sin y = e^{-x+C} = e^{-x}e^C = e^{-x}C.\end{aligned}$$

Por lo tanto, las trayectorias ortogonales están dadas por:

$$\sin y = Ce^{-x}; \quad \text{con } C \text{ constante.} \quad \square$$

**Ejercicios 3.7.2** Trayectorias ortogonales. *Soluciones en la página 468*

Encontrar la familia de curvas ortogonales a cada una de las siguientes familias.

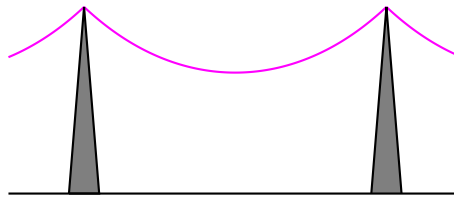
1.  $y^2 = 2cx$ .
2.  $y = ce^x$ .
3.  $y^2 - 2x^2 = c$ .
4.  $cx^2 + y^2 = 1$ .

5.  $y = cx^2$ .
6.  $x^2 + y^2 = 2ay$ .
7.  $y^2 = 2p(x - a)$ ,  $p$  es un número conocido.
8.  $x^2 - y^2 = a$ .
9.  $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ .
10.  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)^2$ .

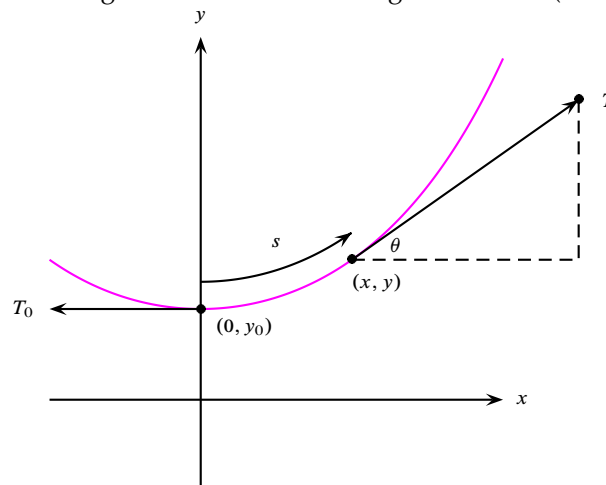
### 3.8 Miscelánea

En esta sección presentamos algunos ejemplos adicionales de aplicación de las ED en la solución de problemas variados. Algunos de estos problemas utilizan técnicas ya presentadas anteriormente o generalizaciones de ellas.

**Ejemplo 3.8.1** Encontrar la forma que adopta un cable flexible que se encuentra suspendido entre dos puntos a la misma altura y cuelga por la acción de su propio peso. Esa es la forma que adoptan por ejemplo los cables de electricidad o los que sostienen puentes colgantes.



▼ Coloquemos el eje  $y$  (eje de las ordenadas) de modo que pase por el punto más bajo de la curva que da la forma de la cadena, en donde la tangente debe ser desde luego horizontal (ver la siguiente figura).



Denotemos por  $s$  la longitud de arco medida desde el punto más bajo  $(0, y_0)$  a un punto variable  $(x, y)$ , y mediante  $w(s)$  a la densidad lineal de peso de la cadena. Por lo tanto, para conocer el peso de un tramo de la cadena tenemos que integrar  $w(s) ds$ .

Para obtener la ED de la curva sólo tenemos que considerar que la porción de cadena entre  $(0, y_0)$  y el  $(x, y)$  está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas: una es la tensión horizontal  $T_0$  en  $(0, y_0)$ ; la segunda es la tensión variable  $T$  en el punto  $(x, y)$ , que actúa en la dirección tangente debido a la flexibilidad de la cadena; la última es una fuerza hacia abajo igual al peso de la cadena entre esos dos puntos. Si descomponemos  $T$  en sus componentes horizontal y vertical e igualamos las partes correspondientes, obtenemos

$$T \cos \theta = T_0 \quad \text{y} \quad T \sin \theta = \int_0^s w(\alpha) d\alpha \quad (*)$$

De la primera ecuación obtenemos entonces:

$$T \sin \theta = T \cos \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = T_0 \tan \theta = T_0 \frac{dy}{dx}$$

Por otro lado, sustituyendo la segunda ecuación en  $(*)$  en esta última igualdad obtenemos:

$$T_0 \frac{dy}{dx} = \int_0^s w(\alpha) d\alpha.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo podemos eliminar la integral, derivando. Usamos también la regla de la cadena y obtenemos:

$$T_0 y'' = \frac{d}{dx} \int_0^s w(\alpha) d\alpha = \frac{d}{ds} \left( \int_0^s w(\alpha) d\alpha \right) \frac{ds}{dx} = w(s) \sqrt{1 + (y')^2}$$

donde la última igualdad resulta de la fórmula para longitud de arco  $s = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx$ .

En conclusión tenemos

$$T_0 y'' = w(s) \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Esta es la ED de la curva pedida.

Para poder resolver esta ED necesitamos tener información adicional sobre la densidad lineal  $w(s)$ . Si suponemos para simplificar que esta densidad es constante, digamos  $w_0$ , entonces podemos resolver la ED.

Denotemos por  $p = \frac{w_0}{T_0}$  para escribir:

$$y''(x) = p \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

Por reducción de orden (sección \*, página \*), si sustituimos ahora  $v = y'$ , &  $\frac{dv}{dx} = y''$ , tenemos la ED separable:

$$\frac{dv}{dx} = p \sqrt{1 + v^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = p dx,$$

Integrando, obtenemos:

$$\ln(v + \sqrt{1 + v^2}) = px + C$$

Como  $v = y' = 0$  cuando  $x = 0$ , resulta:

$$C + p \cdot 0 = \ln(0 + \sqrt{1 + 0^2}) = \ln 1 = 0,$$

así que tenemos simplemente:

$$\ln(v + \sqrt{1 + v^2}) = px \Rightarrow v + \sqrt{1 + v^2} = e^{px}.$$

Deseamos despejar  $v$ :

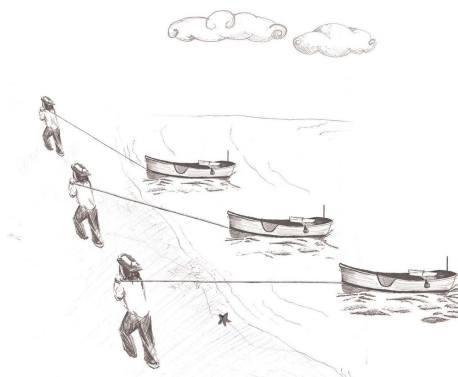
$$\begin{aligned} \sqrt{1 + v^2} = e^{px} - v &\Rightarrow 1 + v^2 = (e^{px} - v)^2 = e^{2px} - 2e^{px}v + v^2 \\ \Rightarrow 2e^{px}v &= e^{2px} - 1 \Rightarrow v = \frac{e^{2px} - 1}{2e^{px}} = \frac{e^{px} - e^{-px}}{2} = \sinh(px). \end{aligned}$$

Integrando por último para obtener  $y$ , resulta:

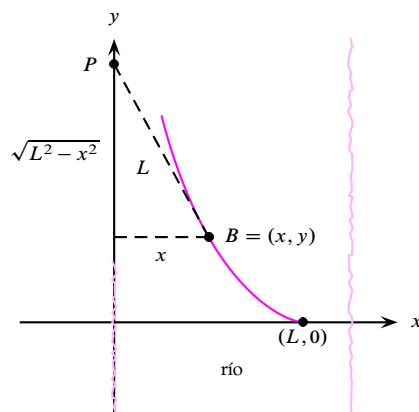
$$y = \int \sinh(px) dx = \frac{\cosh(ph)}{p} + C.$$

A la curva que resulta se le llama *catenaria*, ya que el problema fue planteado originalmente con cadenas. □

**Ejemplo 3.8.2** Un pescador en la orilla de un río (que podemos suponer recta) empieza a caminar en una dirección a velocidad constante jalando un bote que está flotando en el río mediante una cuerda de longitud  $L$ , manteniendo siempre tirante la cuerda (como en la figura) ¿Cuál será la trayectoria del bote? La curva que se obtiene se llama *tractriz*.



▼ Si imaginamos estar parados a la orilla del río con el pescador caminando por la misma orilla y alejándose del lugar en que estamos parados, podemos representar la orilla del río como el eje  $y$  y al pescador como un punto  $P$  que se mueve en la dirección positiva del eje  $y$  partiendo del origen. Mientras que el bote  $B$  se encuentra inicialmente en  $(L, 0)$  como en la figura siguiente:



Como la cuerda se mantiene tirante siempre, su dirección debe ser tangente a la trayectoria del bote, es decir  $PB$  tiene la misma pendiente que la tangente a la curva  $\frac{dy}{dx}$ . Pero entonces tendremos, (colocamos el signo negativo ya que la pendiente es negativa)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x},$$

que es una ED separable y podemos resolver integrando:

$$dy = -\frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x} dx \Rightarrow y = -\int \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x} dx.$$

Sustituimos  $x = L \cos \theta \Rightarrow dx = -L \sin \theta d\theta$ .

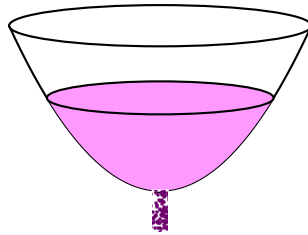
$$\begin{aligned}
 y &= - \int \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x} dx = - \int \frac{\sqrt{L^2 - L^2 \cos^2 \theta}}{L \cos \theta} (-L \sin \theta d\theta) = \\
 &= \int \frac{\sqrt{L^2(1 - \cos^2 \theta)} \sin \theta d\theta}{\cos \theta} = L \int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\cos \theta} = L \int \frac{(1 - \cos^2 \theta) d\theta}{\cos \theta} = \\
 &= L \int \frac{d\theta}{\cos \theta} - L \int \cos \theta d\theta = L \int \sec \theta d\theta - L \sin \theta = \\
 &= L \ln(\sec \theta + \tan \theta) - L \sin \theta + C = \\
 &= \ln \left( \frac{L}{x} + \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x} \right) - \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{L} + C.
 \end{aligned}$$

Usando la condición  $y(L) = 0$  obtenemos  $C = 0$  y finalmente:

$$y = L \ln \left( \frac{L + \sqrt{L^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{L^2 - x^2}.$$

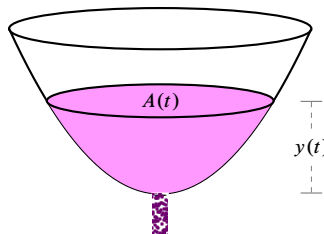
□

Según la ley de Torricelli el agua que escapa de un depósito con un pequeño orificio en el fondo sale a una velocidad igual a la que habría adquirido si hubiese caído libremente desde el nivel (superior) del agua hasta el orificio.



Si el área del orificio inferior es  $a$ , entonces en el intervalo de tiempo  $dt$ , el agua que escapa por el orificio recorre una distancia o altura  $v dt$ , por lo que el volumen que escapa en ese intervalo será: área de la base  $\times$  altura  $= av dt$ , para ese cilindro de agua. Por otra parte, si  $y(t)$  denota la profundidad (o altura) del agua sobre el orificio y  $A(t)$  es el área de la sección transversal horizontal del depósito de agua a la altura  $y(t)$ , entonces la variación del volumen de agua dentro del depósito será

$$d(\text{Vol.}) = A(y) dy,$$



O sea que en el intervalo de tiempo  $dt$  el volumen que se escapa del depósito es

$$d(\text{Vol.}) = A(y) dy = -av dt.$$



El signo negativo es porque el volumen en el depósito va decreciendo; de aquí obtenemos entonces al dividir entre  $dt$  y tomar límites

$$A(y) \frac{dy}{dt} = -av.$$

En esta ED aparecen tres variables, altura, velocidad y tiempo. La ley de Torricelli nos permite eliminar  $v$ , pues ésta viene dada como la velocidad en caída libre desde una altura  $y$ , y podemos simplemente igualar las energías cinética y potencial:  $\frac{v^2}{2} = gy$  para despejar  $v = \sqrt{2gy}$ , donde  $g$  es la constante gravitacional. Así obtenemos, finalmente:

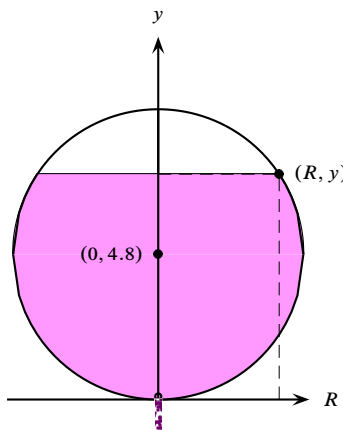
$$A(y) \frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}.$$

**Ejemplo 3.8.3** Si a un depósito de forma esférica con un radio de 4 pies que se encuentra completamente lleno se le perfora un agujero circular en el fondo de una pulgada de radio y no hay más flujos de entrada o salida, ¿cuánto tiempo se requiere para que se vacíe?

▼ Recordemos que un pie = 12 pulgadas, así que el depósito tiene un radio  $R$  de 48 pulgadas y el orificio un radio de 1 pulgada, luego  $a = \pi(1)^2 \text{ plg}^2$ .

Para determinar  $A(y)$  consideremos un círculo en el plano  $Ry$  con radio 48 plg. y centro en  $(0, 48)$  de modo que el radio  $R$  que corresponde a la altura  $y$  se obtiene de la ecuación

$$R^2 + (y - 48)^2 = 48^2 \Rightarrow R^2 + y^2 - 96y + 48^2 = 48^2 \Rightarrow R^2 = 96y - y^2$$



Este valor de  $R$  es el que corresponde a la altura  $y$  del agua sobre el orificio, y la correspondiente área para la ED es  $A(y) = \pi R^2 = \pi(96y - y^2)$ , de donde

$$\begin{aligned} \pi(96y - y^2) \frac{dy}{dt} &= -\pi \sqrt{2gy} \Rightarrow (y^2 - 96y) \frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy} \\ \Rightarrow \frac{y^2 - 96y}{\sqrt{y}} dy &= \sqrt{2g} dt \Rightarrow \int (y^{\frac{3}{2}} - 96y^{\frac{1}{2}}) dy = \int \sqrt{2g} dt \\ \Rightarrow \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} - 96 \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} &= \sqrt{2g} t + C \end{aligned}$$

Cuando  $t = 0$  teníamos  $y = 96$ , de modo que  $C = \frac{2}{5}(96)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(96)^{\frac{3}{2}} \approx -24\,079.46$

$$\Rightarrow y^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{5} y - 64 \right) = \sqrt{2g} t - 24,079.46.$$

Para responder la pregunta, buscamos el tiempo  $t$  para el cual  $y = 0$  cuando se cumpla:

$$\sqrt{2g} t - 24\,079.46 = 0 \Rightarrow t = \frac{24\,079.46}{\sqrt{2g}};$$

Como y estaba en pulgadas, debemos convertir  $C = 24\,079.46$  a pies y usar además  $g = 32$  pie/s, así que:

$$t = \frac{2\,006.62}{\sqrt{64}} \approx 250.83 \text{ s (aproximadamente 4 min y 11 s).}$$

□

**Ejemplo 3.8.4** En un colegio que cuenta con 130 alumnos se detecta en cierto día un brote de influenza que afecta a 20 niños. Por recomendación de las autoridades sanitarias se fija el siguiente criterio: si en 5 días a partir de la detección, se presentan 20 casos más, entonces la escuela se debe declarar en cuarentena. Pasados dos días desde que se detectó el virus, 5 niños más presentan la enfermedad. Suponga que la enfermedad se propaga de forma directamente proporcional al número de niños sanos y enfermos, y además que se trata de un sistema aislado, es decir, considere que la población total permanece y que todos los niños se encuentran en contacto unos con otros. ¿Será necesario que la escuela declare estado de cuarentena?

▼ Denotemos por  $E(t)$  al número de niños enfermos al tiempo  $t$ . Como la población total del colegio es de 130 niños, entonces el número de niños sanos es  $130 - E(t)$ . La suposición de que la enfermedad se propaga en forma proporcional al número de niños sanos y enfermos nos da la ED:

$$\frac{dE}{dt} = aE(130 - E)$$

De los datos tenemos además que  $E(0) = 20$  y  $E(2) = 25$ , con  $t$  medido en días. La forma de esta ED es la del método logístico con el máximo de  $E$  siendo 130, que podemos escribir

$$\frac{dE}{dt} = rE \left( 1 - \frac{E}{130} \right),$$

para  $r = 130a$ . De acuerdo a lo visto en la sección 3.4, la solución de esta ecuación es

$$E(t) = \frac{k}{1 + \left( \frac{k - P_0}{P_0} \right) e^{-rt}} = \frac{130}{1 + \left( \frac{130 - 20}{20} \right) e^{-rt}} = \frac{130}{1 + 5.5e^{-rt}}.$$

Dado que  $E(2) = 25$ , tenemos entonces

$$\begin{aligned} 25 &= \frac{130}{1 + 5.5e^{-2r}} \Rightarrow 25 + 137.5e^{-2r} = 130 \Rightarrow 137.5e^{-2r} = 105 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2r = \ln \left( \frac{105}{137.5} \right) \Rightarrow r = \frac{\ln \left( \frac{105}{137.5} \right)}{-2} \approx 0.1348 \\ &\Rightarrow E(t) = \frac{130}{1 + 5.5e^{-0.1348t}}. \end{aligned}$$

Para ver si es necesario declarar cuarentena, calculamos  $E(5) = \frac{130}{1 + 5.5e^{-(0.1348)(5)}} \approx 34.18$ .

Como no se ha llegado a la cifra crítica de 40 enfermos en 5 días, no es necesario declarar estado de cuarentena.

Modelos similares a éste se pueden usar para modelar el esparcimiento de rumores en una población.

□

### Ejercicios 3.8.1 Miscelánea. Soluciones en la página 469.

1. Una bola de naftalina pierde masa por evaporación con una rapidez proporcional a su área superficial instantánea. Si la mitad de la masa se pierde en 100 días, ¿cuánto tiempo se necesita para que el radio disminuya a la mitad de su valor inicial? ¿cuánto tiempo pasará hasta que la bola desaparezca por completo?

(Sugerencia: el volumen y área superficial de una esfera de radio  $r$  son  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  y  $S = 4\pi r^2$  respectivamente.)

2. El gerente de una empresa de 5 000 trabajadores se encuentra en el extranjero cuando le señalan que un rumor sobre el cierre de ésta se propaga entre sus empleados. Se le informa que en este momento aproximadamente 200 trabajadores lo han escuchado (y creído). El gerente requiere diez días más para arreglar sus asuntos y le informan al cabo de tres días que el rumor ha sido oído por 400 personas. Suponga que la tasa de cambio de las personas que han oído el rumor es proporcional al número de los que lo han oído y al de las que no lo han oído y que el gerente tomará la decisión de regresar a la empresa para aclarar la situación sólo si el rumor es oído por 900 empleados al cabo de los 7 días desde el día en el que él conoció la información. ¿Qué le recomendaría al gerente? ¿suspender su viaje o continuarlo?
3.
  - a. Resuelva el ejemplo 3 para un depósito en forma de cilindro circular recto con radio de 2 pies y altura de 6 pies y un orificio circular de una pulgada de radio en el fondo.
  - b. Misma pregunta para un depósito de forma cónica con el vértice hacia abajo, con radio máximo de 5 pies, altura de 10 pies y el orificio en el fondo de 2 pulgadas de radio.
4. Para anestesiar a una persona con un peso de 50 kg se requiere que la concentración de anestesia en el cuerpo de la persona sea por lo menos de 45 mg por kilogramo del peso de la persona. Suponga que el medicamento es eliminado de la corriente sanguínea de la persona en forma exponencial con una vida media de 5 horas. ¿Qué dosis simple debe ser administrada para tener anestesiada a esta persona durante una hora?
5. Una embarcación viaja en dirección  $N$  a una velocidad constante  $v_0$ . En cierto instante la embarcación es avistada por un barco pirata ubicado en la dirección  $E$  a una distancia de  $L$  km, el cual le dispara un torpedo que viaja con una rapidez constante igual al doble de la primera embarcación. Proporcionar una ED que modele la trayectoria del torpedo y una vez resuelta la ED, determinar dicha trayectoria, el punto en que el torpedo alcanzará a la embarcación y el tiempo recorrido del torpedo.
6. El lago Chapala tiene un volumen de  $8 \text{ km}^3$  y los flujos de entrada y salida se dan a razón de  $5.1 \text{ km}^3/\text{año}$ . Suponga que al tiempo  $t = 0$  (años) su concentración de contaminantes es de  $0.05\%$  y que en un tiempo después la concentración de contaminantes que ingresa al agua es de  $0.01\%$ . Suponiendo que el agua se mezcle perfectamente dentro del lago, ¿cuánto tiempo pasará para que la concentración de contaminantes en el lago se reduzca al  $0.02\%$ ?



## CAPÍTULO

# 4

## Ecuaciones diferenciales de orden superior

### OBJETIVOS PARTICULARES

#### 4.1 Conceptos básicos

En este capítulo trataremos sobre el procedimiento que debemos llevar a cabo para obtener la solución general de la ED lineal no homogénea de orden  $n$ :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x).$$

Con este objetivo realizaremos un estudio detallado sobre la forma de resolver a la ED lineal no homogénea de segundo orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x)$$

y para esto trataremos primero con la ED lineal homogénea de segundo orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Así, una vez obtenida la solución general de la homogénea, resolvemos la no homogénea.

- Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden es de la forma:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (4.1)$$

Es decir, los coeficientes de  $y$  así como de sus dos derivadas depende sólo de  $x$  (o son constantes) y los exponentes de  $y$  y sus derivadas son 1.

La parte izquierda de la ecuación diferencial es **un operador**  $L$  que asocia funciones a funciones, es decir,  $L$  es una función de funciones:

$$L : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F},$$

donde  $\mathcal{F}$  es el conjunto de funciones reales de variable real que son derivables a cualquier orden.

- $L$  se define como sigue

$$L(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

- Una **solución** de la ecuación diferencial (4.1) es una función  $f(x) \in \mathcal{F}$  que cumple:

$$L[f(x)] = 0.$$

Es decir, al sustituir  $f(x)$  y sus derivadas correspondientes en la ecuación diferencial, la satisfacen.

- **Resolver** la ecuación diferencial (4.1) significa encontrar todas sus soluciones.

**Ejemplo 4.1.1** La siguiente es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0.$$

En este caso

$$L(y) = x^2 y'' + 2xy' - 6y.$$

1. Si  $f(x) = x$  calcular  $L[f(x)]$ .
2. Si  $g(x) = x^2$  calcular  $L[f(x)]$ .



1. Si  $y = f(x) = x$ , calcular  $L(x)$ .

Sabemos en este caso que  $y' = 1$  &  $y'' = 0$

$$L(y) = L[f(x)] = L(x) = x^2(0) + 2x(1) - 6x = 2x - 6x = -4x.$$

Por consiguiente, la función  $y = x$  no es solución de la ecuación diferencial  $L(y) = 0$ .

2. Si  $y = g(x) = x^2$  calcular  $L(x^2)$ .

Sabemos en este caso que  $y' = 2x$  &  $y'' = 2$

$$L(y) = L[g(x)] = L(x^2) = x^2(2) + 2x(2x) - 6x^2 = 2x^2 + 4x^2 - 6x^2 = 0.$$

Este último resultado nos dice que la función  $y = x^2$  es solución de la ecuación diferencial  $L(y) = 0$ .



El operador  $L$  tiene las siguientes propiedades:

- Si  $y$  es solución de  $L(y) = 0$  entonces  $\bar{y} = cy$  también es solución; donde  $c \in \mathbb{R}$  es una constante arbitraria.

▼ Como  $y$  es solución de  $L(y) = 0$  entonces

$$L(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Aplicando el operador  $L(y)$  a la función  $\bar{y} = cy$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} L(\bar{y}) &= L(cy) = a_2(x)(cy)'' + a_1(x)(cy)' + a_0(x)(cy) = \\ &= a_2(x) \cdot cy'' + a_1(x) \cdot cy' + a_0(x) \cdot cy = \\ &= c \underbrace{[a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y]}_{L(y)=0} = \\ &= c \cdot L(y) = c \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\bar{y} = cy$  es solución.



- Si  $y_1$  &  $y_2$  son soluciones de  $L(y) = 0$  entonces  $y_1 + y_2$  también es solución.

▼ Como  $y_1$  &  $y_2$  son soluciones de  $L(y) = 0$  entonces:

$$L(y_1) = a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0.$$

$$L(y_2) = a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0.$$

Al sustituir en  $L(y)$  la función  $y = y_1 + y_2$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= a_2(x)(y_1 + y_2)'' + a_1(x)(y_1 + y_2)' + a_0(x)(y_1 + y_2) = \\ &= a_2(x)[y_1'' + y_2''] + a_1(x)[y_1' + y_2'] + a_0(x)[y_1 + y_2] = \\ &= \underbrace{[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1]}_{L(y_1)=0} + \underbrace{[a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2]}_{L(y_2)=0} = \\ &= L(y_1) + L(y_2) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $y_1 + y_2$  es solución. □

Podemos resumir las propiedades anteriores como sigue:

- Si  $L(y) = 0$  y  $c$  es una constante, entonces  $L(cy) = cL(y) = 0$ .
- Si  $L(y_1) = 0$  y  $L(y_2) = 0$  entonces  $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0$ .

Tomando en cuenta lo anterior se cumple lo siguiente:

- Si  $L(y_1) = 0$  y  $L(y_2) = 0$  entonces  $L(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$ , donde  $c_1$  &  $c_2$  son constantes arbitrarias.

▼ En efecto, si  $L(y_1) = 0$  y  $L(y_2) = 0$  entonces

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = L(c_1y_1) + L(c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

□

**Ejemplo 4.1.2** Sea la ecuación diferencial

$$L(y) = y'' + 2y' + y = 0.$$

Comprobar que  $y_1 = e^{-x}$ ,  $y_2 = xe^{-x}$  &  $\bar{y} = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$ , son soluciones de la ED  $L(y) = 0$ .

▼ Primero comprobamos que  $y_1 = e^{-x}$  es solución:

$$y_1 = e^{-x} \Rightarrow y_1' = -e^{-x} \Rightarrow y_1'' = e^{-x}.$$

Entonces:

$$L(y_1) = L(e^{-x}) = e^{-x} - 2e^{-x} + e^{-x} = 0.$$

De igual forma, para  $y_2 = xe^{-x}$ :

$$y_2 = xe^{-x} \Rightarrow y_2' = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow y_2'' = -2e^{-x} + xe^{-x}.$$

Entonces:

$$L(y_2) = L(xe^{-x}) = -2e^{-x} + xe^{-x} + 2(e^{-x} - xe^{-x}) + xe^{-x} = 0.$$

Finalmente, para  $\bar{y} = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$  se tiene que:

$$L(\bar{y}) = L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1(0) + c_2(0) = 0.$$

Por lo cual,  $\bar{y} = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$  es también solución de la ED. □

### 4.1.1 Combinaciones lineales

- Dadas dos funciones  $y_1 \in \mathcal{F}$  &  $y_2 \in \mathcal{F}$ , se dice que la función

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad \text{donde } c_1 \in \mathbb{R} \text{ & } c_2 \in \mathbb{R} \text{ son constantes arbitrarias,}$$

es **una combinación lineal** de las funciones  $y_1$  &  $y_2$ .

Nótese que en el ejemplo (4.1.2) vimos que las funciones  $y_1 = e^{-x}$ ,  $y_2 = x e^{-x}$  &  $\bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$  son soluciones de

$$L(y) = y'' + 2y' + y = 0.$$

Entonces por la definición anterior se puede afirmar que toda combinación lineal de las funciones  $y_1 = e^{-x}$  &  $y_2 = x e^{-x}$  también es solución de  $L(y) = 0$ .

- Definimos a la *recta generada por una función*  $f \in \mathcal{F}$ , como el conjunto  $R_f$  de todas las combinaciones lineales de esa función, que en este caso es el conjunto de todos los múltiplos de la función:

$$R_f = \left\{ c f \mid c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{F}.$$

Una representación de este concepto:



Estamos dando una representación en analogía con los vectores.

**Ejemplo 4.1.3** La recta generada por la función  $f(x) = x^2$  es

$$R_{x^2} = \left\{ c x^2 \mid c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ▼ Así las funciones  $g(x) = 5x^2$  y  $h(x) = -\frac{2}{7}x^2$  pertenecen a esta recta.

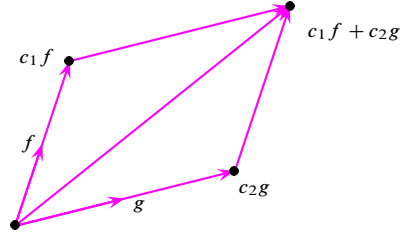
□

- Dos funciones  $f$  y  $g$  son *colineales* cuando pertenecen a una misma recta. Esto es, cuando una es un múltiplo de la otra.
- Definimos al *plano generado por dos funciones no colineales*  $y_1 = f(x)$  &  $y_2 = g(x)$  como el conjunto  $\Pi_{f,g}$  de todas las combinaciones lineales de las funciones:

$$\Pi_{f,g} = \left\{ c_1 f + c_2 g \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{F}.$$

Podemos visualizar este plano como sigue:





**Ejemplo 4.1.4** El plano generado por las funciones  $y_1 = x^2$  &  $y_2 = \sin x$  es:

$$\Pi_{x^2, \sin x} = \left\{ c_1 x^2 + c_2 \sin x \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

▼ Así la función  $g(x) = -x^2 + 7 \sin x$  está en este plano, tomando  $c_1 = -1$  &  $c_2 = 7$ .  
Igualmente la función  $i(x) = 30x^2 - 9 \sin x$  está en el plano, tomando  $c_1 = 30$  &  $c_2 = -9$ .

□

### Teorema de existencia y unicidad

- Dado el siguiente PVI:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0; \quad \text{con } y(x_0) = y_0 \quad \& \quad y'(x_0) = y_1 \quad (4.2)$$

Si suponemos que  $a_2(x) \neq 0$ ,  $a_1(x)$  &  $a_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $I$  y si  $x_0 \in I$ , entonces el PVI tiene una solución única  $y(x)$  para  $x \in I$ .

### 4.1.2 Solución de un problema con condiciones iniciales

Suponiendo que podemos encontrar dos soluciones  $y_1$  &  $y_2$  no colineales de la ED lineal homogénea:

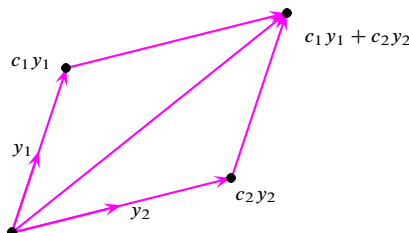
$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

y que generamos con estas dos soluciones el plano:

$$\Pi_{y_1, y_2} = \left\{ c_1 y_1 + c_2 y_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Queremos saber bajo qué condiciones la solución del PVI (4.2) es una función que está en este plano. Es decir, cuándo la solución que se menciona que existe y es única es de la forma:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$



Para que esto suceda dicha solución debe cumplir las condiciones iniciales. Puesto que:

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

De las condiciones iniciales obtenemos que:

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Por lo tanto, para que la solución del PVI (4.2) exista en el plano mencionado deben existir las constantes  $c_1$  &  $c_2$  que satisfagan el sistema (4.3). Éste es un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas  $c_1$  y  $c_2$ . Sabemos que un sistema de este tipo tiene solución única si su determinante es diferente de cero. En este caso, el determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

En consecuencia, para resolver el PVI (4.2), se tienen que encontrar dos soluciones  $y_1$  &  $y_2$  que satisfagan

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

### 4.1.3 El Wronskiano

- Dadas dos funciones  $y_1 \in \mathcal{F}$  &  $y_2 \in \mathcal{F}$ , se define el **Wronskiano** de estas funciones como sigue:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

**Ejemplo 4.1.5** Calcular el Wronskiano de las funciones  $y_1 = \cos x$  &  $y_2 = \sin x$ .



$$W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ (\cos x)' & (\sin x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$



Con esta nueva definición, podemos afirmar:

- Para resolver el PVI, basta con encontrar dos soluciones  $y_1$  &  $y_2$  de la ecuación diferencial lineal homogénea cuyo Wronskiano sea diferente de cero. El conjunto de todas las soluciones es entonces el plano generado por estas funciones. La solución del PVI es un elemento (un vector) de este plano. Por esto, denominamos solución general de la ED a la combinación lineal:

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

- Un conjunto de funciones  $\{y_1, y_2\}$  que cumple con la condición anterior se llama un **conjunto fundamental de soluciones**. Es decir, un conjunto  $\{y_1, y_2\}$  será un conjunto fundamental de soluciones si:

1. Cada  $y_i$  es solución de la ED.
2.  $y_1$  &  $y_2$  no son colineales.

**Ejemplo 4.1.6** Encontrar la solución general de la ED:

$$y'' + y = 0.$$

▼ Es fácil ver que las funciones  $y_1 = \cos x$  &  $y_2 = \sin x$  son soluciones de la ED. Por el ejemplo (4.1.5) estas funciones tienen Wronskiano no nulo. Por lo tanto la solución general de la ED es:

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$



## 4.2 Reducción de orden

Un método para encontrar soluciones que formen un conjunto fundamental de la ED, será nuestro trabajo en las siguientes secciones.

### 4.2.1 Reducción de orden en ED lineales de segundo orden

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

de la cual se conoce una solución a la que llamaremos  $y_1$ . De acuerdo con lo visto en la sección anterior, requerimos una segunda solución  $y_2$  de la ecuación diferencial de tal manera que el conjunto  $\{y_1, y_2\}$  constituya un conjunto fundamental de soluciones.

A fin de encontrar esta segunda solución, aplicaremos un método llamado variación de parámetros que se debe a D'Alembert.

La idea fundamental es la siguiente: debido a que la ecuación es lineal, y dado que  $y_1$  es solución, entonces  $ay_1$  para  $a$  constante, también es solución. La pregunta que se formula en este método es, ¿cómo encontrar una función  $u$ , de tal manera que  $y_2 = uy_1$  también sea solución de la ecuación?

Para el desarrollo de la idea de D'Alembert, requerimos en primer lugar normalizar la ecuación; esto es, necesitamos que el coeficiente de  $y''$  sea 1. Para ello, dividimos la ecuación entre  $a_2(x)$ , obteniendo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \text{ donde } p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ y } q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}; \text{ con } a_2(x) \neq 0.$$

Queremos ahora determinar bajo qué condiciones podemos asegurar que  $y_2 = uy_1$  es solución. Notemos que, por ser  $y_1$  solución de la ED, tenemos:

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0.$$

Si derivamos  $y_2$  dos veces, hallamos:

$$\begin{aligned} y_2 &= uy_1. \\ y_2' &= uy_1' + u'y_1. \\ y_2'' &= uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo en  $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$ , obtenemos:

$$\underbrace{uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1}_{y_2''} + \underbrace{py_1' + pu'y_1}_{py_2'} + \underbrace{qy_1u}_{qy_2} = 0.$$

Reagrupamos en términos de  $u, u'$  y  $u''$ , resulta:

$$\begin{aligned} u \underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{L(y_1)=0} + y_1u'' + 2y_1u' + py_1u' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1u'' + 2y_1u' + py_1u' &= 0. \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable  $w = u'$ , la ED se reduce a otra de orden uno, concretamente:

$$y_1w' + 2y_1'w + py_1w = 0 \Rightarrow y_1 \frac{dw}{dx} + 2y_1'w + py_1w = 0.$$

Si escribimos ahora la ecuación en forma diferencial, hallaremos:

$$y_1dw + 2y_1'w dx + py_1w dx = 0.$$

Esta última expresión es una ED que puede resolverse mediante separación de variables. En efecto, multiplicando por  $\frac{1}{wy_1}$ , tenemos:

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + pdx = 0.$$

Integrando, encontramos:

$$\int \frac{dw}{w} + 2 \int \frac{y_1'}{y_1} dx + \int p dx = C \Rightarrow \ln w + 2 \ln y_1 + \int p dx = C.$$

Aplicando propiedades de logaritmos encontramos:

$$\ln(y_1^2 w) + \int p dx = C, \text{ luego } \ln(y_1^2 w) = C - \int p dx.$$

Si ahora aplicamos la función exponencial,

$$y_1^2 w = e^{C - \int p dx} = e^C e^{-\int p dx} = C e^{-\int p dx}.$$

Así,

$$w = \frac{du}{dx} = C \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2},$$

Y debido a que  $w = u'$ , se tiene entonces que:

$$\frac{du}{dx} = w \Rightarrow u = \int w dx \Rightarrow u = C \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx + K.$$

De esta manera, cualquiera de las funciones  $u \neq 0$  que resulten de esta fórmula será de utilidad para construir una segunda solución  $y_2 = uy_1$ . Como:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & uy_1 \\ y_1' & uy_1' + u'y_1 \end{vmatrix} = \cancel{uy_1 y_1'} + u'y_1^2 - \cancel{uy_1 y_1'} = u'y_1^2 = \\ &= C \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} (y_1^2) = C e^{-\int p dx} \neq 0. \end{aligned}$$

resulta que  $\{y_1, y_2\}$  es un conjunto fundamental de soluciones. Tomamos el caso más sencillo para la función  $u$ , esto es  $C = 1$  y  $K = 0$ ;  $u$  toma la forma:

$$u = \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx.$$

En resumen, tenemos el siguiente resultado:.

- Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4.4)$$

y una solución no nula  $y_1$ , entonces:

1. La función  $y_2 = uy_1$ , donde

$$u = \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx,$$

es también solución y además  $\{y_1, y_2\}$ , conforma un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación.

2. La solución general de la ED (4.4) está dada por:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

**Ejemplo 4.2.1** Consideremos la ED lineal homogénea de segundo orden:

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0.$$

1. Verificar que  $y_1 = x^2$  es una solución de la ED.
2. Encontrar una segunda solución  $y_2$  de la ecuación.
3. Escribir la solución general de la ecuación.



1. En primer lugar calculamos la primera y segunda derivada de  $y_1$ :

$$y_1 = x^2 \Rightarrow y_1' = 2x \quad \& \quad y_1'' = 2.$$

Si sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\underbrace{x^2 (2)}_{y_1''} + 2x \underbrace{(2x)}_{y_1'} - 6 \underbrace{(x^2)}_{y_1} = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x^2 = 0,$$

concluimos que  $y_1$  es una solución de la ecuación diferencial.

2. Usamos ahora el resultado anterior. Determinamos  $u$ .

Primero necesitamos normalizar la ecuación para lo cual dividimos entre  $x^2$ . Obtenemos:

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{6}{x^2}y = 0.$$

Usamos la fórmula del teorema anterior con  $p = \frac{2}{x}$  &  $y_1 = x^2$ , encontramos:

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{(x^2)^2} dx = \int \frac{e^{-2 \ln x}}{x^4} dx = \int \frac{e^{\ln(x^{-2})}}{x^4} dx = \\ &= \int \frac{x^{-2}}{x^4} dx = \int x^{-6} dx = -\frac{1}{5}x^{-5}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $y_2 = u y_1 = -\frac{1}{5}x^{-5} \cdot x^2 = -\frac{1}{5}x^{-3}$ .

3. La solución general es:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x^2 + c_2 \left( -\frac{1}{5}x^{-3} \right) = c_1 x^2 + c_2 x^{-3}.$$



**Ejemplo 4.2.2** Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED dada y escribir su solución general.

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0; \quad y_1(x) = x.$$

▼ Vamos a usar dos procedimientos.

1. Procedimiento 1: uso de la fórmula.

Primero, normalizamos la ED; para ello, dividimos entre  $x^2$ :

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0.$$

Usamos ahora el teorema de esta sección con  $p = \frac{2}{x}$  &  $y_1 = x$ , encontramos:

$$u = \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{x^2} dx = \int \frac{e^{-2\ln x}}{x^2} dx = \int \frac{e^{\ln(x^{-2})}}{x^2} dx = \int \frac{x^{-2}}{(x)^2} dx = \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3}x^{-3}.$$

Por lo tanto,

$$y_2 = uy_1 = -\frac{1}{3}x^{-3}x = -\frac{1}{3}x^{-2}.$$

Así, la solución general de la ED es:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-2}.$$

O bien

$$y = c_1x + c_2x^{-2}.$$

2. Procedimiento 2: Sustitución de  $y_2 = u(x)y_1(x)$ .

Si  $y_2 = ux$  entonces:

$$y_2' = u'x + u \quad \& \quad y_2'' = u''x + 2u'$$

Sustituimos en la ED para garantizar que  $y_2 = uy_1$  sea solución:

$$x^2y_2'' + 2xy_2' - 2y_2 = 0.$$

Se debe cumplir entonces:

$$\begin{aligned} x^2(u''x + 2u') + 2x(u'x + u) - 2(ux) &= 0 \\ x^3u'' + 2x^2u' + 2x^2u' + 2xu - 2xu &= 0 \\ x^3u'' + 4x^2u' &= 0 \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $x^3$

$$u'' + \frac{4}{x}u' = 0. \tag{4.5}$$

Si  $u' = w$  entonces  $u'' = \frac{dw}{dx}$ . Sustituyendo en (4.5) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} + \frac{4}{x}w &= 0 \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -\frac{4}{x}w \Rightarrow \frac{dw}{w} = -4\frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{dw}{w} &= -4 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln w = -4\ln x + C_1 \Rightarrow \ln w = \ln x^{-4} + \ln C_1 = \ln(C_1x^{-4}) \Rightarrow \\ \Rightarrow w &= C_1x^{-4}. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} w = u' = \frac{du}{dx} &\Rightarrow \frac{du}{dx} = C_1x^{-4} \Rightarrow u = C_1 \int x^{-4} dx = C_1 \frac{x^{-3}}{-3} + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= \frac{C_1}{-3}x^{-3} + C_2 \Rightarrow u = C_1x^{-3} + C_2. \end{aligned}$$

Si tomamos  $C_1 = 1$  &  $C_2 = 0$  obtenemos que  $u = x^{-3}$ .

Pero  $y_2(x) = ux$ , entonces:

$$y_2(x) = x^{-3}x = x^{-2} \Rightarrow y_2(x) = x^{-2}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED  $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ , es:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \Rightarrow y = c_1x + c_2x^{-2}.$$

□

**Ejemplo 4.2.3** Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED dada y escribir su solución general.

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0; \quad y_1(x) = x^{-1}.$$

▼ Si  $y_2(x) = u(x)y_1(x)$  entonces:

$$y_2 = ux^{-1}.$$

$$y_2' = u'x^{-1} - ux^{-2}.$$

$$y_2'' = u''x^{-1} - 2u'x^{-2} + 2ux^{-3}.$$

Sustituyendo en la ED  $x^2y_2'' + 3xy_2' + y_2 = 0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2(u''x^{-1} - 2u'x^{-2} + 2ux^{-3}) + 3x(u'x^{-1} - ux^{-2}) + ux^{-1} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u''x - 2u' + 2ux^{-1} + 3u' - 3ux^{-1} + ux^{-1} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u''x + u' &= 0. \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $x$  para normalizar la ED:

$$u'' + \frac{1}{x}u' = 0. \quad (4.6)$$

Si  $u' = w$  entonces  $u'' = \frac{dw}{dx}$ , sustituyendo en (4.6) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{x}w &= 0 \Rightarrow \frac{dw}{w} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{dw}{w} &= -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln w = -\ln x + C_1 = \ln x^{-1} + \ln C_1 = \ln(C_1x^{-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow w &= C_1x^{-1}. \end{aligned}$$

Pero  $w = u' = \frac{du}{dx}$ , por lo que:

$$\frac{du}{dx} = C_1x^{-1} \Rightarrow u = C_1 \int x^{-1} dx = C_1 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow u = C_1 \ln x + C_2.$$

Si tomamos, por ejemplo,  $C_1 = 1$  y  $C_2 = 0$ , hallamos que  $u = \ln x$ . Ya que  $y_2(x) = ux^{-1}$ , entonces

$$y_2 = \frac{\ln x}{x}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED:

$$y = c_1x^{-1} + c_2x^{-1} \ln x.$$

□

**Ejemplo 4.2.4** Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED dada y escribir su solución general.

$$(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad y_1(x) = e^{-2x}.$$

▼ Si  $y_2(x) = u(x)y_1(x)$  entonces:

$$\begin{aligned}y_2 &= ue^{-2x}. \\y_2' &= u'e^{-2x} - 2ue^{-2x} = (u' - 2u)e^{-2x}. \\y_2'' &= u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4ue^{-2x} = (u'' - 4u' + 4u)e^{-2x}.\end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$(2x + 1)y_2'' + 4xy_2' - 4y_2 = 0,$$

se obtiene

$$(2x + 1)(u'' - 4u' + 4u)e^{-2x} + 4x(u' - 2u)e^{-2x} - 4ue^{-2x} = 0.$$

Multiplicando por  $e^{2x}$  se tiene que

$$\begin{aligned}(2x + 1)(u'' - 4u' + 4u) + 4x(u' - 2u) - 4u &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2x + 1)u'' + (-8x - 4 + 4x)u' + (8x + 4 - 8x - 4)u &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2x + 1)u'' + (-4x - 4)u' &= 0.\end{aligned}$$

Dividiendo entre  $(2x + 1)$  para normalizar:

$$u'' - \frac{4x + 4}{2x + 1}u' = 0. \quad (4.7)$$

Si  $u' = w$  entonces  $u'' = \frac{dw}{dx}$ . Sustituyendo en (4.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dx} - \frac{4x + 4}{2x + 1}w &= 0 \Rightarrow \frac{dw}{w} = \frac{4x + 4}{2x + 1}dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{dw}{w} &= \int \left(2 + \frac{2}{2x + 1}\right)dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln w &= 2x + \ln(2x + 1) + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow w &= e^{2x}e^{\ln(2x+1)}e^{C_1} = e^{2x}(2x + 1)C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow w &= C_1(2x + 1)e^{2x}, \text{ pero } w = \frac{du}{dx} \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= C_1 \int (2x + 1)e^{2x}dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t &= 2x + 1 & \& & dv &= e^{2x}dx \\ dt &= 2dx & \& & v &= \frac{1}{2}e^{2x}\end{aligned}$$

Aplicando integración por partes se tiene que:

$$u = C_1 \left( \frac{1}{2}(2x + 1)e^{2x} - \int e^{2x}dx \right).$$

Entonces:

$$u = C_1xe^{2x} + C_2$$

Tomando  $C_1 = 1$  &  $C_2 = 0$ , hallamos que  $y_2(x) = ue^{-2x} = xe^{2x} \cdot e^{-2x} = x$ . Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-2x} + c_2x.$$

□

**Ejemplo 4.2.5** Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED dada y escribir su solución general.

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0; \quad y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}\sin x$$



▼ Si  $y_2(x) = u(x)y_1(x)$  entonces

$$y_2 = ux^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x.$$

$$y_2' = u'x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x + u \left( x^{-\frac{1}{2}} \cos x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sen} x \right).$$

$$y_2'' = u''x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x + 2u' \left( x^{-\frac{1}{2}} \cos x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sen} x \right) + u \left( -x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x - x^{-\frac{3}{2}} \cos x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} \operatorname{sen} x \right).$$

Sustituyendo en  $x^2y_2'' + xy_2' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y_2 = 0$ , se obtiene, después de algunas operaciones:

$$u''x^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} x + 2u'x^{\frac{3}{2}} \cos x = 0.$$

De donde dividiendo entre  $x^{\frac{3}{2}}$ :

$$u'' \operatorname{sen} x + 2u' \cos x = 0. \quad (4.8)$$

Si  $u' = w$  entonces  $u'' = \frac{dw}{dx}$ . Sustituyendo en (4.8) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} \operatorname{sen} x + 2w \cos x &= 0 \Rightarrow \frac{dw}{dx} \operatorname{sen} x = -2w \cos x \Rightarrow \frac{dw}{w} = -2 \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{dw}{w} = -2 \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln w = -2 \ln(\operatorname{sen} x) + C_1 = \ln(\operatorname{sen} x)^{-2} + \ln C_1 = \ln [C_1(\operatorname{sen} x)^{-2}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow w = C_1(\operatorname{sen} x)^{-2}. \end{aligned}$$

Pero  $w = u' = \frac{du}{dx}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= C_1 \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = C_1 \csc^2 x \Rightarrow u = C_1 \int \csc^2 x dx = C_1(-\cot x) + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = -C_1 \cot x + C_2 \Rightarrow u = C_1 \cot x + C_2. \end{aligned}$$

Si se toma a  $C_1 = 1$  &  $C_2 = 0$  obtenemos  $u = \cot x$ , entonces

$$\begin{aligned} y_2 &= ux^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x = (\cot x)x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \left( x^{-\frac{1}{2}} \right) \operatorname{sen} x \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \cos x. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la ED

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0,$$

está dada por:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x + c_2x^{-\frac{1}{2}} \cos x \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(x) = x^{-\frac{1}{2}}(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x). \end{aligned}$$

□

#### Ejercicios 4.2.1 Reducción de orden. Soluciones en la página 469

Obtener la solución general de la ED dada, considerando que  $y_1$  es una solución de ella.

1.  $2y'' + 3y' - 2y = 0$ ;  $y_1 = e^{-2x}$ .
2.  $4y'' - 12y' + 9y = 0$ ;  $y_1 = e^{\frac{3x}{2}}$ .
3.  $y'' + 4y = 0$ ;  $y_1 = \operatorname{sen} 2x$ .
4.  $y'' + 6y' + 9y = 0$ ;  $y_1 = e^{-3x}$ .
5.  $y'' + 4y' + 13y = 0$ ;  $y_1 = e^{-2x} \cos 3x$ .
6.  $9y'' - 4y = 0$ ;  $y_1 = e^{\frac{2x}{3}}$ .
7.  $x^2y'' - 6xy' + 10y = 0$ ;  $y_1 = x^2$ .
8.  $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ ;  $y_1 = \frac{1}{x}$ .
9.  $x^2y'' + 8xy' + 12y = 0$ ;  $y_1 = x^{-3}$ .
10.  $-x^2y'' + xy' + 8y = 0$ ;  $y_1 = x^4$ .
11.  $(1-x)y'' + xy' - y = 0$ ;  $y_1 = x$ .
12.  $xy'' + 2y' + xy = 0$ ;  $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ .
13.  $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ ;  $y_1 = x$ .
14.  $xy'' + (x-1)y' - y = 0$ ;  $y_1 = e^{-x}$ .
15.  $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ ;  $y_1 = e^x$ .

### 4.3 Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$

En esta sección presentaremos un método general para resolver **ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$**  cuya forma es:

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (4.9)$$

Estas ecuaciones se caracterizan por las dos propiedades siguientes:

1. La variable dependiente  $y$  así como sus derivadas tienen exponente igual a 1 o bien 0 exclusivamente.
2. Los coeficientes  $a_n(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$  y la función  $g(x)$  son funciones que sólo dependen de  $x$ , o son constantes. Es decir, no dependen de la variable dependiente  $y$ .

Cabe decir que no existen métodos, ni generales ni sencillos que permitan resolver ecuaciones diferenciales no lineales de orden  $n$ . ¿Qué hace la diferencia?, la respuesta es simple: poder usar o no el bagaje del álgebra lineal. Ésta es una rama muy útil de las matemáticas donde encontramos las definiciones, conceptos y resultados que nos permitirán resolver el problema general. Así, nuestro estudio pasará obligadamente por algunas de las ideas más importantes de este tema que se presentan a continuación.

#### 4.3.1 Espacio vectorial

Un espacio vectorial consta de un conjunto  $V$ , cuyos elementos denotados por  $\vec{v}$  se llaman vectores, y dos operaciones: adición vectorial y multiplicación por escalar que satisfacen un conjunto de axiomas. No entraremos en el detalle de todos ellos porque para nosotros dos axiomas importantes son los siguientes:

1. Existe un vector en  $V$  al que se le llama *vector cero* y se escribe como  $\vec{0}$  tal que  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$  para todo  $\vec{v} \in V$ .

2. Dados los vectores  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  y los escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V$ .

A esto se le llama *cerradura* bajo la adición y multiplicación por escalares.

Los vectores a los que nos hemos referido, así como las operaciones de adición y multiplicación por escalar pueden ser muy diversos, sin embargo, nos limitaremos a los casos habituales en nuestro tratamiento.

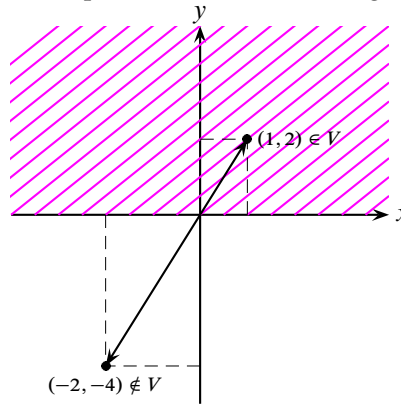
**Ejemplo 4.3.1** Si  $V = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  y definimos las operaciones de adición y multiplicación por escalar de la siguiente manera:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{y} \quad \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b),$$

obtenemos que  $V$ , junto con las operaciones indicadas, es un espacio vectorial.

**Ejemplo 4.3.2** Si  $V = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \geq 0\}$  y adoptamos las operaciones del ejemplo (4.3.1), entonces  $V$  no es un espacio vectorial.

▼ En efecto, si tomamos  $\vec{v} = (1, 2) \in V$  y el escalar  $\alpha = -2$ , por ejemplo, resulta que  $\alpha\vec{v} = -2(1, 2) = (-2, -4) \notin V$  debido a que la segunda componente del vector es negativa.



□

Deseamos resaltar lo siguiente:

1. El concepto de espacio vectorial nos permite dotar a un conjunto con operaciones que producen resultados que nuevamente satisfacen las condiciones que definen al conjunto.
2. Si  $V$  es un espacio vectorial (con las operaciones de adición y multiplicación por escalar), al vector  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$  se le llama **combinación lineal de los vectores  $\vec{u}$  &  $\vec{v}$** .

**Ejemplo 4.3.3** El conjunto de las funciones derivables es un espacio vectorial.

### 4.3.2 Independencia lineal

Un vector contiene información. El concepto de independencia lineal nos dirá en cierto sentido si un vector aporta o no información adicional a la ya considerada por un conjunto de vectores. Precisamos:

- Sea  $V$  un espacio vectorial y sean  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  vectores del mismo. Diremos que estos vectores son **linealmente independientes** si

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad (4.10)$$

solamente se cumple si  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

- En caso contrario diremos que el conjunto de vectores  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  es **linealmente dependiente**.

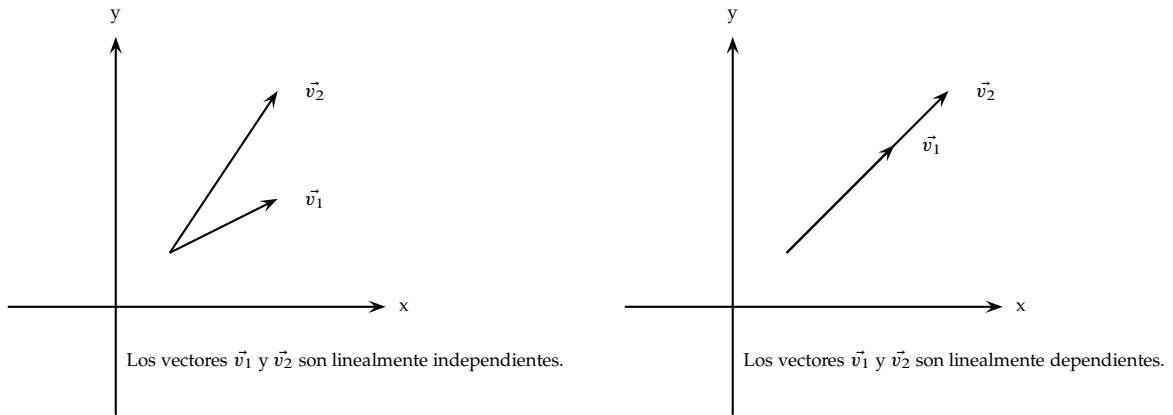
Supongamos que el conjunto  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  es linealmente dependiente. Esto significa que la ecuación (4.10) se cumple para al menos un  $c_i \neq 0$ .

Si suponemos que  $c_1 \neq 0$ . Entonces de (4.10) hallamos lo siguiente:

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \vec{v}_2 - \dots - \frac{c_n}{c_1} \vec{v}_n$$

Lo que significa que la información del vector  $\vec{v}_1$  se puede obtener de una combinación lineal del resto de los vectores, en otras palabras: la información de  $\vec{v}_1$  no aporta información adicional a la que ya se conocía por medio del resto de vectores. Esto significa que podemos prescindir de este vector.

Los conceptos de independencia y dependencia lineal tienen una interpretación gráfica interesante que podemos visualizar en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ :



Las ideas anteriores pueden y deben ser extendidas al espacio vectorial de las funciones. Esto lo usaremos en nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales. Concretamente:

- Una colección de funciones  $f_1, \dots, f_n$  definidas en un intervalo  $J$  se dice que es **linealmente independiente** si:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \text{ para toda } x \in J \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

- Si la combinación lineal anterior se cumple para al menos un  $c_i \neq 0$ , diremos que la colección es **linealmente dependiente**

Para el caso particular de dos funciones, la definición anterior equivale a lo siguiente:

- $\{f_1, f_2\}$  es un conjunto **linealmente dependiente** de funciones si y sólo si  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = c$ , para toda  $x \in J$  y alguna constante  $c$ .

**Ejemplo 4.3.4** Las funciones

$$f_1(x) = e^x \cos 2x \quad \text{y} \quad f_2(x) = e^x \sin 2x$$

conforman un conjunto linealmente independiente de funciones.

▼ La razón es muy simple:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{e^x \cos 2x}{e^x \sin 2x} = \cot 2x, \text{ no es una constante.}$$

Entonces

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \neq c \text{ para } c \text{ constante.}$$

□

**Ejemplo 4.3.5** Determine si el conjunto  $\{f_1(x) = \arcsen x, f_2(x) = \arccos x, f_3(x) = 1\}$  es linealmente independiente o bien linealmente dependiente.

▼ Como  $\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ , entonces:

$$\arcsen x = \frac{\pi}{2}(1) + (-1)\arccos x \Rightarrow f_1(x) = \frac{\pi}{2}f_3(x) + (-1)f_2(x),$$

deducimos que la información de la función  $f_1(x) = \arcsen x$  puede recuperarse (vía una combinación lineal) de las otras dos funciones  $f_2(x) = \arccos x$  &  $f_3(x) = 1$ .

En consecuencia, el conjunto  $\{f_1(x) = \arcsen x, f_2(x) = \arccos x, f_3(x) = 1\}$  es linealmente dependiente. □

- Sean  $\{f_1, f_2\}$  soluciones de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

con  $a_1(x)$  &  $a_0(x)$  funciones continuas en un intervalo  $J$ . Entonces, tenemos dos casos:

1. Si  $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$  para algún  $x \in J$  entonces el conjunto  $\{f_1(x), f_2(x)\}$  es linealmente independiente.
2. Si  $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0$  para algún  $x \in J$  entonces el conjunto  $\{f_1(x), f_2(x)\}$  es linealmente dependiente.

▼ En efecto, puesto que  $f_1$  &  $f_2$  son soluciones de la ED, tenemos que:

$$\begin{aligned} f_1'' + a_1(x)f_1' + a_0(x)f_1 &= 0. \\ f_2'' + a_1(x)f_2' + a_0(x)f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera de las ecuaciones anteriores por  $f_2(x)$ , la segunda por  $f_1(x)$  y restamos la primera de la segunda, hallamos:

$$\begin{aligned} f_2 f_1'' + a_1(x)f_2 f_1' + a_0(x)f_1 f_2 &= 0 \\ f_1 f_2'' + a_1(x)f_1 f_2' + a_0(x)f_1 f_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow f_1 f_2'' - f_2 f_1'' + a_1(x)[f_1 f_2' - f_2 f_1'] = 0. \quad (4.11)$$

Deseamos resaltar la expresión  $f_1 f_2' - f_2 f_1'$ . Su estudio se atribuye al matemático polaco Hoëne Wronski. Si la expresamos por medio de  $W(x) = W(f_1, f_2)(x)$ , observamos que:

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_2 f_1',$$

y además que:

$$W' = \frac{d}{dx}(f_1 f_2' - f_2 f_1') = (f_1 f_2'' + f_1' f_2') - (f_2 f_1'' + f_2' f_1') = f_1 f_2'' - f_2 f_1''.$$

Por lo que la ecuación (4.11) se expresa como

$$W'(x) + a_1(x)W(x) = 0,$$

que es un ED de variables separables:

$$\frac{dW}{dx} = -a_1(x)W \Rightarrow \frac{dW}{W} = -a_1(x)dx.$$

Por lo tanto, al integrar:

$$\ln W = \int -a_1(x) dx + C.$$

De aquí deducimos que

$$W = e^{-\int a_1(x) dx + C}.$$

Así obtenemos como solución:

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x) dx}$$

Y como la función exponencial nunca se anula, tenemos que:

1. Si  $C \neq 0$  entonces  $W(x) \neq 0$  para todo  $x \in J$ .
2. Si  $C = 0$ , entonces  $W(x) = 0$  para toda  $x \in J$ .

Ahora, si consideramos la combinación lineal:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0 \Rightarrow c_1 f_1' + c_2 f_2' = 0,$$

tenemos el sistema:

$$\begin{cases} c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0 \\ c_1 f_1' + c_2 f_2' = 0 \end{cases} \quad (\text{donde } c_1 \text{ \& } c_2 \text{ son las incógnitas,})$$

deducimos que en caso de que  $W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \neq 0$ , para algún  $x \in J$ , la solución del sistema será únicamente la solución trivial  $c_1 = c_2 = 0$ , de lo cual se desprende que el conjunto  $\{f_1(x), f_2(x)\}$  es linealmente independiente, mientras que si  $W(x) = 0$ , se puede garantizar una solución no trivial para  $c_1$  y  $c_2$ , por lo cual  $\{f_1(x), f_2(x)\}$  resultará un conjunto linealmente dependiente. □

**Ejemplo 4.3.6** Las funciones  $f_1(x) = x$  &  $f_2(x) = x^2$ , con  $x \neq 0$ , son soluciones de la ED lineal:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y;$$

además son linealmente independientes.

▼ En efecto:

$$\begin{aligned} f_1 = x &\Rightarrow f_1' = 1 \Rightarrow f_1'' = 0, \\ f_2 = x^2 &\Rightarrow f_2' = 2x \Rightarrow f_2'' = 2. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} x^2 f_1'' - 2x f_1' + 2f_1 &= x^2(0) - 2x(1) + 2(x) = 0, \\ x^2 f_2'' - 2x f_2' + 2f_2 &= x^2(2) - 2x(2x) + 2(x^2) = 0. \end{aligned}$$

Esto es:  $f_1(x) = x$  &  $f_2(x) = x^2$  son soluciones de la ED. Además:

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_1' f_2 = (x)(2x) - (1)(x^2) = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0.$$

Por lo tanto:  $f_1(x) = x$  &  $f_2(x) = x^2$  son soluciones linealmente independientes. La solución general de la ED es:

$$y = c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1 x + c_2 x^2.$$

□

**Ejemplo 4.3.7** Las funciones  $f_1(x) = 3xe^{-2x}$  &  $f_2(x) = -5xe^{-2x}$ , con  $x \neq 0$ , son soluciones de la ED lineal:

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

además son linealmente dependientes.

▼ En efecto:

$$\begin{aligned} f_1 &= 3xe^{-2x} \Rightarrow f_1' = (-6x + 3)e^{-2x} \Rightarrow f_1'' = (12x - 12)e^{-2x}, \\ f_2 &= -5xe^{-2x} \Rightarrow f_2' = (10x - 5)e^{-2x} \Rightarrow f_2'' = (-20x + 20)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} f_1'' + 4f_1' + 4f_1 &= [(12x - 12) + 4(-6x + 3) + 4(3x)]e^{-2x} = (0)e^{-2x} = 0, \\ f_2'' + 4f_2' + 4f_2 &= [(-20x + 20) + 4(10x - 5) + 4(-5x)]e^{-2x} = (0)e^{-2x} = 0. \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} W(f_1, f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_1' f_2 = (3xe^{-2x})(10x - 5)e^{-2x} - (-6x + 3)e^{-2x}(-5xe^{-2x}) = \\ &= (30x^2 - 15x - 30x^2 + 15x)e^{-4x} = (0)e^{-4x} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f_1(x) = 3xe^{-2x}$  &  $f_2(x) = -5xe^{-2x}$  son soluciones linealmente dependientes. □

### 4.3.3 Bases de un espacio vectorial

- Sean  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ,  $n$  vectores de un espacio vectorial  $V$ . Diremos que el conjunto  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  constituye una **base del espacio vectorial** si se cumplen las siguientes condiciones:
  1. El conjunto  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  es un conjunto linealmente independiente, en otras palabras, ningún vector del conjunto puede obtenerse de los demás vectores a través de una combinación lineal.
  2. El conjunto  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  genera el espacio vectorial, es decir, todo vector  $\vec{w}$  del espacio vectorial puede ser expresado mediante una combinación lineal de los vectores  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ , es decir:

$$\vec{w} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n, \text{ para cualquier } \vec{w} \in V$$

- Todas las bases del espacio vectorial  $V$  tienen el mismo número de vectores. A este número común se le conoce como **dimensión del espacio vectorial**. La dimensión del espacio vectorial que se está considerando es  $n$ .

Nosotros trabajaremos, de manera general, con espacios vectoriales que puedan ser descritos por sólo un número finito de vectores, esto es, espacios vectoriales de dimensión finita.

**Ejemplo 4.3.8** Consideremos el espacio vectorial  $V = \mathbb{R}^3$  con las operaciones de adición y multiplicación por escalar usuales. Examinar en cada caso si los vectores son linealmente independiente o bien linealmente dependientes. Decidir también si generan el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ :

1.  $\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ .
2.  $\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 1, 0)$  &  $\vec{v}_4 = (1, 1, 1)$ .
3.  $\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 1, 0)$ .

▼

1. Los vectores  $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$  son linealmente independientes (un argumento a favor de nuestra afirmación es que uno no es múltiplo del otro). Sin embargo, no generan al espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ . Por ejemplo, el vector  $\vec{w} = (1, 1, 1)$  no puede ser escrito como una combinación lineal de  $\vec{v}_1$  &  $\vec{v}_2$ . En efecto, si  $w$  fuera una combinación lineal de  $\vec{v}_1$  &  $\vec{v}_2$ , obtendríamos:

$$\begin{aligned}\vec{w} &= c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 \Rightarrow (1, 1, 1) = c_1(1, 0, 1) + c_2(0, 1, 1) \\ &\Rightarrow (1, 1, 1) = (c_1, 0, c_1) + (0, c_2, c_2) \Rightarrow (1, 1, 1) = (c_1, c_2, c_1 + c_2) \\ &\Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 1, c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow 2 = 1, \text{ imposible.}\end{aligned}$$

2. Los vectores  $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 1, 0)$  &  $\vec{v}_4 = (1, 1, 1)$ , no forman una base del espacio vectorial. En este caso,  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4\}$  es un conjunto linealmente dependiente, en efecto:

$$\vec{v}_4 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3$$

3. Puede verificarse que los vectores  $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 1, 0)$  conforman una base del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ , por lo que su dimensión es 3.

□

#### 4.3.4 Ecuaciones diferenciales de orden $n$

Aplicaremos los aspectos teóricos anteriores a la discusión de nuestro interés principal: las ecuaciones diferenciales lineales. Centraremos nuestra presentación para ED de orden  $n = 2$ , no sin antes señalar que todo lo que desarrollaremos será igualmente válido para el caso general de cualquier orden  $n$ . Consideraremos la ecuación diferencial:

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = Q(x), \quad (4.12)$$

en un intervalo  $J$  en el cual  $A_2(x) \neq 0$  para toda  $x \in J$ . De esta manera, podemos dividir (4) entre  $A_2(x)$  para obtener una ecuación *normalizada* de la forma:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x) \quad (4.13)$$

De aquí en adelante supondremos que  $a_1(x)$ ,  $a_0(x)$  &  $q(x)$  son continuas en el intervalo  $J$ . Siempre supondremos que  $J$  es el conjunto más grande posible donde todas ellas son continuas. Por ejemplo, dada la ecuación diferencial lineal

$$y'' - x^2y' + y = \ln x,$$

tiene como intervalo  $J$  al intervalo  $(0, \infty)$ . Es en ese intervalo donde buscaremos la solución de la ED.

Al igual que las ED de primer orden, es conveniente tener un resultado que garantice que una ED como las que estamos considerando posea soluciones y que provea condiciones bajo las cuales un PVI tiene solución única. Para ese efecto, enunciamos el siguiente resultado fundamental:

- **Teorema de existencia y unicidad.** Supongamos que  $a_1(x)$ ,  $a_0(x)$  y  $q(x)$  son funciones continuas en el intervalo  $J$ . Entonces la ED:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x), \quad (4.14)$$

tiene solución definida en el intervalo  $J$ . Más aún para un punto  $x_0 \in J$  fijo y números reales  $y_0, y_1$  dados el PVI formado por la ED (4.14), con

$$y(x_0) = y_0 \quad \& \quad y'(x_0) = y_1,$$

tiene una única solución.



- La ED lineal (4.13) con  $q(x) \neq 0$  para algún  $x \in J$  se dice que es **no homogénea**.

La ED lineal (4.13) con  $q(x) = 0$  para toda  $x \in J$  se dice que es **homogénea**. Es la ED homogénea asociada a la ED no homogénea anterior.

Consideremos la ED lineal homogénea asociada a (4.14):

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (4.15)$$

Sea  $V$  el conjunto de soluciones de (4.15).

Notemos que  $y = 0$  satisface la ecuación (4.15), es decir, la función  $y = 0 \in V$ .

Ahora, si  $y_1$  &  $y_2$  están en  $V$ , entonces:

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0 \quad \& \quad y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0$$

Si tomamos una combinación lineal de estas dos soluciones, hallamos que:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \Rightarrow y' = c_1y_1' + c_2y_2' \quad \& \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + a_1(x)[c_1y_1' + c_2y_2'] + a_0(x)[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1] + c_2[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2] \\ &= c_1[0] + c_2[0] = 0 \end{aligned}$$

Esto significa que  $V$  es un espacio vectorial y por lo tanto es posible aplicar la teoría que hemos discutido previamente sobre el tema. Particularmente nos interesa determinar la dimensión de este espacio, porque si logramos determinarla podremos saber el número de funciones que se requieren para describir todo el espacio vectorial, es decir, de escribir cualquier solución de (8) mediante una combinación lineal de algunas soluciones (suponiendo que el espacio resulta de dimensión finita).

Sea  $y$  una solución de (8) que satisfaga las condiciones:

$$y(x_0) = a \quad \& \quad y'(x_0) = b \quad (4.16)$$

Sabemos ya que  $c_1y_1 + c_2y_2$  es la solución general de (4.15), pero nos preguntamos si podremos encontrar valores únicos de las constantes  $c_1$  &  $c_2$  tales que  $c_1y_1 + c_2y_2$  satisfaga (4.16), es decir, tales que:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = a \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = b \end{cases}$$

Esto será cierto, si  $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ . Ésta es precisamente la condición para independencia lineal. Luego, concluimos que si el conjunto  $\{y_1, y_2\}$  es linealmente independiente, podremos satisfacer con la combinación lineal  $c_1y_1 + c_2y_2$  las condiciones (4.16). Como consecuencia del teorema sobre existencia y unicidad enunciado anteriormente, concluimos que:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

Esto significa que  $\{y_1, y_2\}$  constituye una base del espacio de soluciones de la ecuación diferencial lo que nos permitirá expresar cualquier solución en términos de  $y_1$  &  $y_2$ .

Resumimos nuestras ideas en el siguiente teorema.

- Sea  $V$  el conjunto de todas las funciones que son solución de la ecuación diferencial:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

1. Entonces  $V$  es un espacio vectorial.

2. Si  $y_1$  &  $y_2$  son soluciones linealmente independientes, entonces  $\{y_1, y_2\}$  constituye una base de  $V$  por lo cual todo elemento de  $V$ , es decir, cualquier solución de la ecuación diferencial puede ser escrita como una combinación lineal de  $y_1$  &  $y_2$ , en símbolos: para cualquier

$$y \in V \Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

3. El resultado anterior establece que la dimensión de  $V$  es 2.  
4. Al conjunto  $\{y_1, y_2\}$  se le llama *conjunto fundamental de soluciones* de la ecuación diferencial lineal homogénea.

**Ejemplo 4.3.9** Verifique que las funciones  $y_1 = e^x \cos 2x$ ,  $y_2 = e^x \sin 2x$  forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial  $y'' - 2y' + 5y = 0$ . Después forme la solución general de la ecuación y posteriormente halle la solución particular que satisface las condiciones iniciales  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

▼ En primer lugar verificaremos que  $y_1$  &  $y_2$  son soluciones de la ecuación diferencial, como la verificación es similar, sólo probaremos nuestra afirmación para  $y_1$ . Tenemos:

$$y_1 = e^x \cos 2x \Rightarrow y_1' = -2e^x \sin 2x + e^x \cos 2x \text{ \& } y_1'' = -3e^x \cos 2x - 4e^x \sin 2x$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial estos cálculos, hallamos:

$$\begin{aligned} & -3e^x \cos 2x - 4e^x \sin 2x - 2[-2e^x \sin 2x + e^x \cos 2x] + 5[e^x \cos 2x] = \\ & = -3e^x \cos 2x - 4e^x \sin 2x + 4e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x + 5e^x \cos 2x = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $y_1 = e^x \cos 2x$  es solución de la ED.

En segundo lugar, requerimos mostrar que el conjunto  $\{y_1, y_2\}$  es un conjunto linealmente independiente. Para ello, tenemos dos estrategias, la primera consiste en determinar la naturaleza del cociente  $y_1/y_2$ , éste es:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x \cos 2x}{e^x \sin 2x} = \cot 2x \neq c.$$

De esto se deduce que  $\{y_1, y_2\}$  es un conjunto linealmente independiente y en consecuencia un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial.

Sin embargo, con el propósito de ilustrar lo que discutimos sobre el wronskiano, mostraremos la independencia lineal de las funciones por medio de este concepto, para ello, consideramos:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} e^x \cos 2x & e^x \sin 2x \\ -2e^x \sin 2x + e^x \cos 2x & 2e^x \cos 2x + e^x \sin 2x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que  $y_1$  &  $y_2$  son soluciones de la ED, su wronskiano se anula idénticamente o bien es diferente de cero para todo  $x \in \mathbb{R}$ , en consecuencia, no requerimos hacer el cálculo del anterior determinante para todo  $x$ , bastará tomar un valor particular; por ejemplo, si  $x = 0$ :

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

De este resultado concluimos que el conjunto de soluciones  $\{y_1, y_2\}$  es linealmente independiente, y en consecuencia podemos decir que éste es un conjunto fundamental de soluciones para la ED. Así, con base en lo discutido en la teoría preliminar, la solución general de la ED está expresada por:

$$y(x) = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$$

Finalmente, para hallar la solución particular consideramos las condiciones iniciales. En primer lugar tenemos:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 e^0 \cos(0) + c_2 e^0 \sin(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

De esta forma, la solución se reduce a  $y(x) = c_2 e^x \sen 2x$ . Ahora, de  $y'(0) = 1$  deducimos que:

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_2 (2e^x \cos 2x + e^x \sen 2x) \text{ \& } y'(0) = 1 \\ \Rightarrow 1 &= c_2 (2e^0 \cos 0 + e^0 \sen 0) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Concluimos que la solución buscada es:  $y(x) = \frac{1}{2} e^x \sen 2x$ . □

Para cerrar esta sección, discutiremos un resultado asociado al teorema anterior.

- Suponiendo que  $y_p$  es una solución conocida de la ED lineal no homogénea:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x), \quad (4.17)$$

que  $\bar{y}$  es cualquier solución de (4.17) y que  $\{y_1, y_2\}$  es un conjunto fundamental de soluciones de la ED lineal homogénea

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

se puede afirmar que: cualquier solución de la ED (4.17) puede ser escrita en la forma:

$$\bar{y} = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

▼ Nuestra primera observación es que  $\bar{y} - y_p$  es una solución de la ED homogénea asociada; en efecto:

$$\begin{aligned} (\bar{y} - y_p)'' + a_1(x)(\bar{y} - y_p)' + a_0(x)(\bar{y} - y_p) &= \\ = (\bar{y}'' + a_1(x)\bar{y}' + a_0(x)\bar{y}) - (y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p) &= \\ = q(x) - q(x) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, ya que  $\bar{y} - y_p$  es una solución de la ED homogénea asociada, ésta puede ser escrita como una combinación lineal de  $y_1$  &  $y_2$ , esto es:

$$\bar{y} - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Es decir:

$$\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

En conclusión, toda solución de (4.17) puede ser escrita como la suma de la solución general de la ED homogénea asociada y una solución conocida  $y_p$  de (4.17). Denominamos **solución particular** de (4.17) a la solución conocida  $y_p$ . □

### Ejercicios 4.3.1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$ . *Soluciones en la página 469*

1. Mostrar que tanto  $\{y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}\}$  como  $\{y_3 = \sinh x, y_4 = \cosh x\}$  son conjuntos fundamentales de soluciones para la ecuación diferencial  $y'' - y = 0$ .
2. a. Verificar que  $y_1 = x^2$  &  $y_2 = x^{-1}$  son soluciones de la ecuación diferencial  $x^2 y'' - 2y = 0$ .  
¿La combinación lineal  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  es solución de la ecuación?  
b. Verificar que  $y_1 = 1$  &  $y_2 = x^{\frac{1}{2}}$  son soluciones de la ecuación diferencial  $xy'' + (y')^2 = 0$ ,  $x > 0$ .  
¿La combinación lineal  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  es solución de la ecuación (en general)?  
c. Si hay alguna diferencia entre **a.** y **b.**, ¿en qué radica esta diferencia?
3. a. Sea  $y_1(x)$  una solución de la ecuación diferencial  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ .  
¿Es  $y_2(x) = c y_1(x)$  solución de la ecuación diferencial?

- b. Si  $V$  representa el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial, ¿es  $V$  un espacio vectorial?
4. Calcular el wronskiano de cada una de los siguientes pares de funciones.
- $y_1 = \sin x$  &  $y_2 = \cos x$
  - $y_1 = e^{-2x} \sin x$  &  $y_2 = e^{-2x} \cos x$
  - $y_1 = \sinh 3x$  &  $y_2 = 4(e^{3x} - e^{-3x})$
  - $y_1 = x \sin 2x$  &  $y_2 = \sin 2x$
5. a. Extender la definición de wronskiano para el caso de tres funciones.
- b. Calcular el wronskiano de cada uno de las siguientes tripletas de funciones.
- $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = xe^x$  &  $y_3 = x^2e^x$
  - $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$  &  $y_3 = 1$
  - $y_1 = \cos x + \sin x$ ,  $y_2 = \cos x - \sin x$  &  $y_3 = \cos x$

En cada uno de los siguientes ejercicios, verificar que el conjunto dado es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación proporcionada, después encontrar la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas.

- $y'' + y' - 2y = 0$ ;  $\{y_1 = e^x, y_2 = e^{-2x}\}$  con  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$
- $y'' + 4y = 0$ ;  $\{y_1 = \cos 2x, y_2 = \sin 2x\}$  con  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 4$
- $y''' - 2y'' + 5y' = 0$ ;  $\{y_1 = 1, y_2 = e^x \cos 2x, y_3 = e^x \sin 2x\}$  con  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = -1$
- $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ ;  $\{y_1 = x^2, y_2 = x^{-3}\}$  con  $y(2) = 1$ ,  $y'(2) = 0$
- $xy'' + y' = 0$ ,  $x > 0$ ;  $\{y_1 = 1, y_2 = \ln x\}$  con  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = 3$
- Determinar la dependencia o independencia lineal de cada uno de los siguientes conjuntos de funciones.
  - $\{e^x, e^{-x}, 2\}$
  - $\{\arcsen x, \arccos x, \pi\}$
  - $\{e^{4x}, e^{-4x}, \cosh 4x\}$
  - $\{e^x \cos 2x, e^x \sin 2x, e^{-4x}\}$
- Suponga que  $y_1$  es una solución no nula de la ecuación  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ .
  - Verifique que si  $y_2$  es una segunda solución tal que  $\{y_1, y_2\}$  es linealmente independiente, entonces  $\frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2}$ .
  - Verifique que  $y_1 = x$  es una solución de  $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ , use a) para determinar la solución general de la ecuación diferencial.
- Muestre que  $y_1 = 3x^2 - 1$  satisface la ecuación  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$  y tiene un mínimo en  $x = 0$ .
  - Verifique ahora que cualquier otra solución  $y_2$  tal que  $\{y_1, y_2\}$  es linealmente independiente, no puede tener mínimo en  $x = 0$ .
- Demuestre que  $y = x^3$  es una solución de  $yy'' = 6x^4$ , pero que si  $c^2 \neq 1$ , entonces  $y = cx^3$  no es una solución de la ecuación diferencial. ¿Por qué este hecho no contradice la teoría discutida en esta sección?

15. Verifique que  $y_1 = 1$  &  $y_2 = x^{\frac{1}{2}}$  son soluciones de  $yy'' + (y')^2 = 0$ , pero que la suma  $y = y_1 + y_2$  no es solución. ¿Por qué este hecho no contradice la teoría discutida en esta sección?
16. a. Determine si el conjunto de funciones  $\{y_1 = \sin x^2, y_2 = \cos x^2\}$  es linealmente dependiente o independiente.  
 b. Calcule  $W(y_1, y_2)(0)$   
 c. ¿Existe una ecuación de la forma  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  (en la que  $p$  &  $q$  sean funciones continuas) tal que  $y_1$  &  $y_2$  sean soluciones de la ecuación diferencial?

En los siguientes ejercicios se proporciona una ecuación diferencial no homogénea, una solución particular, condiciones iniciales y un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial homogénea asociada, respectivamente. En cada caso encuentre la solución particular del PVI.

17.  $y'' + y = 3x$ ;  $y_p = 3x$ ; con  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -2$ ;  $\{\cos x, \sin x\}$   
 18.  $y'' - 2y' - 3y = 6$ ;  $y_p = -2$ ; con  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 11$ ;  $\{e^{-x}, e^{3x}\}$   
 19.  $y'' - 4y = \sinh x$ ;  $y_p = -\frac{1}{3}\sinh x$ ; con  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ;  $\{e^{2x}, e^{-2x}\}$

## 4.4 ED lineales homogéneas con coeficientes constantes

### 4.4.1 ED homogéneas con coeficientes constantes de orden 2

El objetivo de esta sección es determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

donde  $a \neq 0$ ,  $b$  y  $c$  son constantes.

Una solución  $y(x)$  de esta ED es una función que satisface:  $c$ -veces la función  $y(x)$ , más  $b$ -veces su primera derivada  $y'(x)$ , más  $a$ -veces su segunda derivada  $y''(x)$ , debe ser igual a cero.

Para que esto suceda la función  $y(x)$  y sus derivadas deben tener la misma forma, lo que quiere decir que las funciones  $y(x)$ ,  $y'(x)$  &  $y''(x)$  deben diferir entre ellas en a lo más un factor constante. Una función que cumple con este requisito es la función exponencial  $y = e^{rx}$ , con  $r$  constante. En efecto:

$$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2e^{rx}.$$

Supongamos pues que las soluciones de  $ay'' + by' + cy = 0$  son de la forma  $y = e^{rx}$ , con  $r$  constante. Ahora,  $y = e^{rx}$  es solución si

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Rightarrow ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0, \end{aligned}$$

ya que  $e^{rx} > 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

Concretando:  $y = e^{rx}$  es solución de la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.18}$$

si y sólo si  $r$  es solución de la ecuación algebraica

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{4.19}$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática están dadas por la conocida fórmula:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

y la naturaleza de dichas soluciones depende del signo del discriminante  $b^2 - 4ac$ .

A la ecuación algebraica (4.19) la denominamos la **ecuación característica** o bien la **ecuación auxiliar** de la ED (4.18). Y al polinomio  $p(r) = ar^2 + br + c$  le llamaremos el **polinomio característico** o bien el **polinomio auxiliar** de la ecuación diferencial.

Existen tres posibilidades para el discriminante  $b^2 - 4ac$ . Veamos que sucede en cada caso.

**Caso 1.** En este caso se tiene:  $b^2 - 4ac > 0$ .

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{R} \Rightarrow r \in \mathbb{R}.$$

Aquí se tienen dos soluciones reales

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \& \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

las cuales son diferentes ( $r_1 \neq r_2$ ).

Conociendo estas raíces del polinomio auxiliar, podemos factorizar este polinomio como sigue:

$$p(r) = a(r - r_1)(r - r_2).$$

Estas raíces reales diferentes generan un par de funciones exponenciales reales, que son soluciones de la ecuación diferencial

$$r = r_1 \longrightarrow y_1 = e^{r_1 x} = e^{r_1 x}.$$

$$r = r_2 \longrightarrow y_2 = e^{r_2 x} = e^{r_2 x}.$$

Obtenidas éstas debemos preguntarnos si  $y_1 = e^{r_1 x}$  &  $y_2 = e^{r_2 x}$  forman un conjunto fundamental de soluciones para la ED  $ay'' + by' + cy = 0$

Para responder a esta cuestión calculamos el Wronskiano de  $y_1$  &  $y_2$ :

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = \\ &= r_2 e^{r_1 x + r_2 x} - r_1 e^{r_1 x + r_2 x} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x}. \end{aligned}$$

Debido a que  $e^{(r_1 + r_2)x} > 0$  para cada  $x \in \mathbb{R}$  y  $r_2 - r_1 \neq 0$ , por ser  $r_1 \neq r_2$ , se tiene que  $W(y_1, y_2) \neq 0$  en todo  $\mathbb{R}$ .

Luego,  $y_1 = e^{r_1 x}$  &  $y_2 = e^{r_2 x}$  forman un conjunto fundamental de soluciones, por lo que la solución general de la ecuación diferencial, en este caso, es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

**Ejemplo 4.4.1** Obtener la solución general de la ED

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

▼ Proponiendo  $y = e^{rx}$  como solución de la ED se obtiene la ecuación auxiliar  $r^2 - 5r + 6 = 0$ , cuyas soluciones son:

$$r = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} r_1 = 3, \\ r_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{3x}, \\ y_2 = e^{2x}. \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

Es decir, la solución general de la ED es el plano generado por las funciones  $y_1 = e^{3x}$  &  $y_2 = e^{2x}$ , las cuales forman un conjunto fundamental de soluciones.

□

**Caso 2.** En este caso  $b^2 - 4ac = 0$ .

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \Rightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Aquí se tiene sólo una solución real  $r_1 = -\frac{b}{2a}$ , de multiplicidad dos, la cual genera una función exponencial real  $y_1 = e^{r_1 x} = e^{-\frac{b}{2a}x}$ , que es solución de la ecuación diferencial.

Conociendo esta raíz de multiplicidad 2, factorizamos el polinomio auxiliar como sigue:

$$p(r) = a(r - r_1)^2.$$

Por la necesidad de tener dos soluciones reales linealmente independientes de la ecuación diferencial, aplicamos el método de reducción de orden para obtener otra solución  $y_2$ .

Proponiendo  $y_2 = ue^{-\frac{b}{2a}x}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} y_2' &= u'e^{-\frac{b}{2a}x} + ue^{-\frac{b}{2a}x} \left(-\frac{b}{2a}\right) = \left(u' - \frac{b}{2a}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x}; \\ y_2'' &= \left(u'' - \frac{b}{2a}u'\right)e^{-\frac{b}{2a}x} + \left(u' - \frac{b}{2a}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x} \left(-\frac{b}{2a}\right) = \\ &= \left(u'' - \frac{b}{2a}u' - \frac{b}{2a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x} = \left(u'' - \frac{b}{a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x}. \end{aligned}$$

Ahora,  $y_2$  es solución de  $ay'' + by' + cy = 0$  si

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a \left(u'' - \frac{b}{a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x} + b \left(u' - \frac{b}{2a}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x} + cu e^{-\frac{b}{2a}x} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(au'' - bu' + \frac{b^2}{4a}u + bu' - \frac{b^2}{2a}u + cu\right)e^{-\frac{b}{2a}x} &= 0 \Rightarrow au'' + u \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow au'' + \left(\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}\right)u &= 0 \Rightarrow au'' + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}u = 0 \Rightarrow au'' - \frac{b^2 - 4ac}{4a}u = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow au'' &= 0, \text{ ya que } b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow u'' = 0, \text{ ya que } a \neq 0. \end{aligned}$$

Pero  $u'' = 0 \Rightarrow u' = c_1 \Rightarrow u = c_1x + c_2$ , con  $c_1$  &  $c_2$  constantes.

De esta familia de funciones elegimos una función:

$$c_1 = 1 \text{ \& } c_2 = 0 \Rightarrow u = x.$$

Entonces podemos tomar para la segunda solución:

$$y_2 = ue^{-\frac{b}{2a}x} = xe^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Y debido a que la solución  $y_2 = uy_1$  forma con  $y_1$  un conjunto fundamental de soluciones, se puede afirmar que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} = (c_1 + c_2x)e^{rx}, \text{ con } r = -\frac{b}{2a}.$$

**Ejemplo 4.4.2** Obtener la solución general de la ED

$$4y'' - 12y' + 9y = 0.$$

▼ Proponiendo  $y = e^{rx}$  como solución de la ED se obtiene la ecuación característica:

$$4r^2 - 12r + 9 = 0,$$

de donde resulta:

$$r = \frac{12 \pm 0}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2} \Rightarrow y_1 = e^{\frac{3}{2}x}.$$

Entonces otra solución es  $y_2 = xe^{\frac{3}{2}x}$ . Por lo tanto, la solución general es:

$$y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{\frac{3}{2}x} \Rightarrow y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3}{2}x}.$$

□

**Caso 3.** En este caso:  $b^2 - 4ac < 0$ .

$$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} \notin \mathbb{R} \Rightarrow r \notin \mathbb{R}.$$

Aquí las soluciones no son reales, sino que son números complejos dados de la siguiente manera

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac < 0 &\Rightarrow -(b^2 - 4ac) = 4ac - b^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{4ac - b^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow r &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(4ac - b^2)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \Rightarrow \\ \Rightarrow r &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-1} \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm i\beta, \end{aligned}$$

$$\text{donde } \alpha = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \text{ \& } \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \in \mathbb{R}.$$

Se tienen dos soluciones complejas:

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \& \quad r_2 = \alpha - i\beta.$$

Conociendo estas raíces complejas del polinomio auxiliar, podemos factorizar este polinomio como sigue:

$$p(r) = a(r - r_1)(r - r_2).$$

Estas raíces generan un par de funciones exponenciales complejas, que son soluciones de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} r = r_1 &\longrightarrow y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x}, \\ r = r_2 &\longrightarrow y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x}. \end{aligned}$$

A partir de este par de funciones complejas, generamos un par de soluciones reales. Para ello se utiliza la fórmula de Euler, la cual asegura que para  $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Considerando esta fórmula y las identidades

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad \& \quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta.$$

se obtiene que

$$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta.$$

Es decir,

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta.$$



Utilizando estas fórmulas para  $e^{i\theta}$  &  $e^{-i\theta}$  con  $\theta = \beta x$ , se tiene que

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x+i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) \\y_2 &= e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x-i\beta x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x)\end{aligned}$$

Y debido a que  $y_1$  &  $y_2$  son soluciones de la ecuación diferencial  $ay'' + by' + cy = 0$ , también lo son:

$$\begin{aligned}y_1 + y_2 &= e^{\alpha x} (2 \cos \beta x + 0) = 2e^{\alpha x} \cos \beta x, \\y_1 - y_2 &= e^{\alpha x} (0 + 2i \operatorname{sen} \beta x) = 2ie^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.\end{aligned}$$

Así también, son soluciones de la misma ecuación diferencial, las funciones:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ \phi_2 &= \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.\end{aligned}$$

que son funciones reales y que constituyen una pareja de soluciones para la ED.

¿Forman  $\phi_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$  &  $\phi_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$  un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial  $ay'' + by' + cy = 0$ ?

Para responder esto calculamos el Wronskiano de  $\phi_1$  &  $\phi_2$ :

$$\begin{aligned}W(\phi_1, \phi_2) &= \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix} = \phi_1 \phi_2' - \phi_2 \phi_1' = \\ &= e^{\alpha x} (\cos \beta x) [\alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x] - e^{\alpha x} (\operatorname{sen} \beta x) [\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x] = \\ &= e^{2\alpha x} [\alpha \cos \beta x \operatorname{sen} \beta x + \beta \cos^2 \beta x - \alpha \operatorname{sen} \beta x \cos \beta x + \beta \operatorname{sen}^2 \beta x] = \\ &= e^{2\alpha x} [\beta (\cos^2 \beta x + \operatorname{sen}^2 \beta x)] = \beta e^{2\alpha x} \\ W(\phi_1, \phi_2) &= \beta e^{2\alpha x}, \text{ donde } \beta = \frac{4ac - b^2}{2a} \neq 0.\end{aligned}$$

Entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$W(\phi_1, \phi_2) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0,$$

por lo cual se puede afirmar que las funciones reales  $\phi_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$  &  $\phi_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$  forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial.

Por lo tanto, la solución general de  $ay'' + by' + cy = 0$ , en este caso, es

$$y = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \Rightarrow y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x).$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son la parte real e imaginaria de las raíces  $r = \alpha \pm i\beta$ .

**Ejemplo 4.4.3** Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

▼ Proponiendo  $y = e^{rx}$  como solución de la ED se obtiene la ecuación auxiliar:

$$r^2 + 4r + 13 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i \text{ (raíces complejas).}$$

Entonces, la solución general es:

$$y = e^{-2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x).$$

□

Observe que la ecuación característica  $ar^2 + br + c = 0$  de la ED  $ay'' + by' + cy = 0$  se obtiene asociando las derivadas  $y^{(n)}$  con la potencias  $r^n$  en la forma:

$$y^{(n)} \longrightarrow r^n.$$

Aquí, interpretamos  $y^{(0)} = y$ , por lo tanto asociamos:

$$y^{(0)} = y \longrightarrow 1 = r^0.$$

**Ejemplo 4.4.4** Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$-2y'' - 3y' + 2y = 0.$$

▼ Proponiendo  $y = e^{rx}$  como solución de la ED se obtiene la ecuación característica:

$$-2r^2 - 3r + 2 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$r = \frac{3 \pm 5}{-4} = \begin{cases} r_1 = -2, \\ r_2 = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-2x}, \\ y_2 = e^{\frac{1}{2}x}. \end{cases}$$

Entonces la solución general de la ED es:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}.$$

□

**Ejemplo 4.4.5** Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

▼ Proponiendo  $y = e^{rx}$  como solución de la ED se obtiene la ecuación auxiliar:

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$r = \frac{-2 \pm 0}{2} \Rightarrow r_1 = r_2 = -1 \Rightarrow y_1 = e^{-x}.$$

Entonces, la raíz  $-1$  es de multiplicidad 2, necesitamos otra solución, ésta es  $y_2 = xe^{-x}$ . Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \Rightarrow y = (c_1 + c_2 x) e^{-x}.$$

□

**Ejemplo 4.4.6** Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y' + y = 0.$$

▼ Proponiendo  $y = e^{rx}$  como solución de la ED se obtiene la ecuación característica:

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ (raíces complejas).}$$

Entonces la solución general de la ED es:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

□

**Ejemplo 4.4.7** Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = 0.$$

▼ Proponiendo  $y = e^{rx}$  se obtiene la ecuación auxiliar:

$$r^2 + 4 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$r = \pm \sqrt{-4} = 0 \pm 2i \text{ (raíces complejas)}.$$

Entonces la solución general es:

$$y = e^{0x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \Rightarrow y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

□

**Ejemplo 4.4.8** Obtener la solución general del PVI:

$$9y'' - y = 0, \text{ con } y(0) = 1 \quad \& \quad y'(0) = \frac{2}{3}.$$

▼ Proponiendo  $y = e^{rx}$  como solución de la ED se obtiene la ecuación característica:

$$9r^2 - 1 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$r = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1}{3}, \\ r_2 = -\frac{1}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\frac{1}{3}x}, \\ y_2 = e^{-\frac{1}{3}x}. \end{cases}$$

Entonces la solución general de la ED es:

$$y = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Derivando esta solución general, se obtiene:

$$y' = \frac{1}{3}c_1 e^{\frac{1}{3}x} - \frac{1}{3}c_2 e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Usando las condiciones iniciales :

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 1, \\ y'(0) &= \frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La solución del sistema anterior, de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, es:

$$c_1 = \frac{3}{2} \quad \& \quad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la solución del PVI, es la función:

$$y = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}x}.$$

□

**Ejemplo 4.4.9** Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' = 0.$$

▼ Proponiendo  $y = e^{rx}$  como solución de la ED se obtiene la ecuación auxiliar:

$$r^2 - 5r = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} r_1 = 0, \\ r_2 = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{0x} = 1, \\ y_2 = e^{5x}. \end{cases}$$

Entonces la solución general de la ED es:

$$y = c_1 + c_2 e^{5x}.$$

□

**Ejemplo 4.4.10** Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + w^2 y = 0, w \text{ constante}.$$

▼ Proponiendo  $y = e^{rx}$  se obtiene la ecuación característica:

$$r^2 + w^2 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$r = \pm \sqrt{-w^2} = \pm wi = 0 \pm wi \text{ (raíces complejas)}.$$

Por lo tanto la solución general es:

$$y = e^{0x}(c_1 \operatorname{sen} wx + c_2 \cos wx) \Rightarrow y = c_1 \operatorname{sen} wx + c_2 \cos wx.$$

□

La solución general del ejemplo anterior puede expresarse así:

$$y = A \operatorname{sen}(wx + \phi), \text{ con } A \text{ \& } \phi \text{ constantes}.$$

Para obtener la última expresión se efectúa el desarrollo siguiente:

Se tiene

$$y = c_1 \operatorname{sen} wx + c_2 \cos wx.$$

Se quiere

$$\begin{aligned} y &= A \operatorname{sen}(wx + \phi) = A(\operatorname{sen} wx \cos \phi + \operatorname{sen} \phi \cos wx) = \\ &= (A \cos \phi) \operatorname{sen} wx + (A \operatorname{sen} \phi) \cos wx. \end{aligned}$$

Igualando la expresión que se quiere con la que se tiene se llega a:

$$(A \cos \phi) \operatorname{sen} wx + (A \operatorname{sen} \phi) \cos wx = c_1 \operatorname{sen} wx + c_2 \cos wx$$

Igualdad que se cumple si

$$\begin{cases} A \cos \phi = c_1, \\ A \operatorname{sen} \phi = c_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2 \cos^2 \phi = c_1^2, \\ A^2 \operatorname{sen}^2 \phi = c_2^2. \end{cases}$$

Sumando las últimas igualdades:

$$A^2(\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow A^2 = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

$$\text{De } A \cos \phi = c_1 \text{ se tiene: } \cos \phi = \frac{c_1}{A} = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

$$\text{De } A \operatorname{sen} \phi = c_2 \text{ se tiene: } \operatorname{sen} \phi = \frac{c_2}{A} = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

Resumiendo, la solución general de la ED

$$y'' + w^2 y = 0$$

es

$$y = c_1 \operatorname{sen} wx + c_2 \cos wx.$$

Que puede expresarse como

$$y = A \operatorname{sen}(wx + \phi).$$

Donde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

$$\cos \phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

$A$  es denominada amplitud y  $\phi$  es denominado ángulo de fase.

**Ejercicios 4.4.1** ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden 2. *Soluciones en la página 470*  
Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes.

1.  $y'' - 5y' + 6y = 0.$

9.  $y'' + 4y' + 5y = 0.$

2.  $y'' + y = 0.$

10.  $y'' - y = 0.$

3.  $4y'' - 4y' + y = 0.$

Resolver los siguientes PVI.

4.  $y'' + 2y' - 3y = 0.$

11.  $y'' + 16y = 0$ ; con  $y(0) = 2$  &  $y'(0) = -2.$

5.  $4y'' + y = 0.$

12.  $y'' + y' - 2y = 0$ ; con  $y(0) = 0$  &  $y'(0) = 1.$

6.  $9y'' - 6y' + y = 0.$

13.  $y'' - 6y' + 9y = 0$ ; con  $y(0) = 0$  &  $y'(0) = 2.$

7.  $6y'' - y' - y = 0.$

14.  $y'' + 4y' + 5y = 0$ ; con  $y(0) = 1$  &  $y'(0) = 0.$

8.  $y'' - 2y' + 2y = 0.$

15.  $y'' + 4y' + 3y = 0$ ; con  $y(0) = 2$  &  $y'(0) = 0.$

#### 4.4.2 ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden $n \geq 3$

En la sección anterior hemos obtenido las soluciones de la ED lineal homogénea con coeficientes constantes de orden dos:

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Las soluciones fueron determinadas proponiendo una solución de la forma exponencial  $y = e^{rx}$ , con  $r$  constante, y resolviendo luego la ecuación característica:

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Los tres diferentes tipos de solución de esta ecuación algebraica determinaron los tres diferentes tipos de solución general para la ecuación diferencial.

De manera análoga se resuelve la ecuación diferencial lineal homogénea de orden  $n \geq 3$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_4 y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

donde los coeficientes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  son constantes y  $a_n \neq 0$ .

Se propone que una solución sea de la forma  $y = e^{rx}$ , de donde:

$$y = e^{rx} \Rightarrow y' = r e^{rx} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rx} \Rightarrow y^{(3)} = r^3 e^{rx} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

Al sustituir en la ecuación diferencial se obtiene la ecuación auxiliar o característica:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_4 r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

El polinomio auxiliar o característico de grado  $n$ :

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_4 r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0$$

tiene  $n$  raíces. Esta última afirmación se sustenta en el teorema fundamental del álgebra, en el que se asegura que: "todo polinomio de grado  $n \geq 1$  con coeficientes reales o complejos tiene exactamente  $n$  raíces reales o complejas, considerando sus multiplicidades". Cada una de las raíces genera una solución de la ecuación diferencial.

Cuando una raíz  $r$  se repite  $k$ -veces, se dice que tiene multiplicidad  $k$ , y una raíz es de multiplicidad uno cuando sólo aparece una vez. Así, la suma de las multiplicidades de las raíces será igual al grado  $n$  del polinomio característico.

Ilustramos mediante los siguientes ejemplos las relaciones entre ED lineales con coeficientes constantes, sus polinomios característicos y las multiplicidades de sus raíces.

**Ejemplo 4.4.11** Encuentra una ED que tenga como polinomio característico:

$$p(r) = (r - 1)^2(r + 3)(r - 2)^3$$

▼ Las raíces del polinomio  $p(r)$  son:

$r = 1$  (cuando  $r - 1 = 0$ ), y por repetirse 2 veces, tiene multiplicidad 2.

$r = -3$  (cuando  $r + 3 = 0$ ), y tiene multiplicidad 1.

$r = 2$  (cuando  $r - 2 = 0$ ), y por repetirse 3 veces, tiene multiplicidad 3.

La suma de las multiplicidades en este caso es  $6 = 2 + 1 + 3$ , que es precisamente el grado del polinomio característico:

$$p(r) = (r - 1)^2(r + 3)(r - 2)^3 = r^6 - 5r^5 + r^4 + 37r^3 - 86r^2 + 76r - 24.$$

Este polinomio es el polinomio auxiliar asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes:

$$y^{(6)} - 5y^{(5)} + y^{(4)} + 37y^{(3)} - 86y'' + 76y' - 24y = 0,$$

que es de orden 6. □

**Ejemplo 4.4.12** Encuentra una ED que tenga como polinomio característico:

$$p(r) = r^3(r^2 - 1)(r^2 + 1)$$

▼  $p(r)$  tiene las raíces siguientes:

$r = 0$  (cuando  $r^3 = 0$ ), y tiene multiplicidad 3.

$r = \pm 1$  (cuando  $r^2 - 1 = 0$ ), con multiplicidad 1 cada una.

$r = \pm i$  (cuando  $r^2 + 1 = 0$ , o bien  $r^2 = -1$ ), con multiplicidad 1 cada una.

La suma de las multiplicidades es 7, esto es,  $3 + 1 + 1 + 1 + 1$ , que es precisamente el grado del polinomio característico

$$p(r) = r^3(r^2 - 1)(r^2 + 1) = r^7 - r^3,$$

el cual es el polinomio auxiliar asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$y^{(7)} - y^{(3)} = 0$$

que es de orden 7. □

El mayor problema que encontraremos al resolver la ecuación diferencial lineal homogénea de orden  $n \geq 3$ , está en encontrar las raíces del polinomio característico de grado  $n$ :

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0,$$

ya que, en general, no se tiene una fórmula para encontrar sus raíces, como sí se tiene para la ecuación de segundo grado.

Un resultado que ayuda en esta problemática es el teorema del residuo, el cual nos permite afirmar que:

Si  $P(r)$  es un polinomio (característico) y  $r = r_1$  es una raíz de  $P(r)$ , entonces  $(r - r_1)$  es un factor de  $P(r)$ . Esto es,  $P(r) = (r - r_1)Q(r)$ ; donde  $Q(r)$  es el polinomio que resulta al dividir  $P(r)$  entre  $r - r_1$ . Es claro que si  $P(r)$  es de grado  $n$ , entonces  $Q(r)$  es de grado  $n - 1$ .

En álgebra superior se demuestra que si  $r = \frac{\alpha}{\beta}$  es una raíz racional del polinomio

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0,$$

entonces,  $\alpha$  debe ser un divisor de  $a_0$  y  $\beta$  debe ser un divisor del coeficiente  $a_n$ . De esta manera para un polinomio como  $p(r) = r^3 - r^2 + r - 1$ , sus posibles raíces racionales son de la forma  $r = \frac{\alpha}{\beta}$ , donde  $\alpha$  es un divisor de  $a_0 = 1$  y  $\beta$  es un divisor de  $a_3 = 1$ . Esto es, los posibles valores de  $\alpha$  son  $\pm 1$  y de  $\beta$  son  $\pm 1$ , por ello, las posibles raíces racionales del polinomio  $p(r)$  son  $r = \pm 1$ . Ahora bien, para determinar si alguno de estos valores es una raíz del polinomio se requiere saber si  $p(r) = 0$ . Mediante cálculos numéricos podemos ver que  $r = 1$  es una raíz de  $p(r)$  ya que  $p(1) = 0$ .

**Ejemplo 4.4.13** Encuentre las raíces del polinomio  $P(r) = r^3 - r^2 + r - 1$ .



Por ser  $r = 1$  una raíz de  $P(r)$ , se puede afirmar que  $(r - 1)$  es un factor de  $P(r)$ .

Realizando la división de polinomios:

$$\frac{P(r)}{r - 1} = \frac{r^3 - r^2 + r - 1}{r - 1}$$

encontramos que  $\frac{P(r)}{r - 1} = r^2 + 1$ , por lo cual  $P(r) = (r - 1)(r^2 + 1)$ . De esto se desprende que:

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0 \Rightarrow (r - 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Por lo tanto las raíces de  $P(r)$  son:  $r = 1$  &  $r = \pm i$ . □

**Ejemplo 4.4.14** Encuentre las raíces del polinomio  $P(r) = r^3 + r^2 - 4r - 4$ .

▼ Mediante cálculos numéricos podemos ver que  $P(r) = 0$  para  $r = 2$ . Se afirma entonces que  $r = 2$  es una raíz de  $P(r)$ , por lo cual  $(r - 2)$  es un factor de  $P(r)$ .

Realizando la división  $\frac{P(r)}{r - 2}$  obtenemos que:

$$\frac{r^3 + r^2 - 4r - 4}{r - 2} = r^2 + 3r + 2,$$

por lo que se puede afirmar que  $r^3 + r^2 - 4r - 4 = (r - 2)(r^2 + 3r + 2)$ .

Y debido a que  $r^2 + 3r + 2 = (r + 1)(r + 2)$ , tenemos:

$$r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0 \Rightarrow (r - 2)(r + 1)(r + 2) = 0.$$

Por lo tanto las raíces de  $P(r)$  son:  $r = -2$ ,  $r = -1$  y  $r = 2$ .

□

Otro resultado del álgebra indica que: todo polinomio con coeficientes reales se puede expresar como producto de polinomios lineales y polinomios cuadráticos irreducibles (con coeficientes también reales). Dichos polinomios cuadráticos no pueden factorizarse mediante polinomios lineales con coeficientes reales. En consecuencia:

- El polinomio característico  $P(r)$  de grado  $n \geq 3$ , puede expresarse como un producto de factores que pueden ser lineales o bien cuadráticos irreducibles.
- Los factores lineales generan raíces reales  $r$ .
- Los factores cuadráticos irreducibles siempre generan parejas de raíces complejas conjugadas  $r = \alpha \pm i\beta$ .

Podemos entonces utilizar las soluciones obtenidas en la ED lineal homogénea de orden 2, a efecto de construir un conjunto fundamental de soluciones de la ED lineal homogénea de orden  $n \geq 3$ . Tenemos:

- Si  $r$  es una raíz real de multiplicidad  $k$ , entonces en el conjunto fundamental de soluciones se incluirán las soluciones

$$\{e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}\}$$

- Si  $r = \alpha \pm i\beta$  es un par de soluciones complejas conjugadas de multiplicidad  $m$ , entonces en el conjunto fundamental de soluciones se incluirán las soluciones:

$$\begin{aligned} &\{e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \cos \beta x\}; \\ &\{e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, x^2e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \sin \beta x\}. \end{aligned}$$

Y como en el caso de la ED lineal homogénea de orden 2, la solución general de la ED lineal homogénea de orden  $n \geq 3$ , será una combinación lineal de soluciones de estos tipos.

**Ejemplo 4.4.15** Obtener la solución general de la ecuación diferencial  $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ .

▼ Proponiendo como solución a  $y = e^{rx}$  se obtiene la ecuación característica:

$$r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0,$$

que, como vimos en el ejemplo 4.4.14 anterior, se puede expresar así:

$$(r - 2)(r + 1)(r + 2) = 0,$$

ecuación que se cumple cuando:

$$\begin{cases} r - 2 = 0, \\ r + 1 = 0, \\ r + 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2, \\ r_2 = -1, \\ r_3 = -2. \end{cases}$$

Tenemos entonces 3 raíces reales, las que generan 3 soluciones exponenciales

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-x} \quad \& \quad y_3 = e^{-2x},$$

las cuales forman un conjunto fundamental de soluciones.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x},$$

donde  $c_1$ ,  $c_2$  &  $c_3$  son constantes arbitrarias.

□



**Ejemplo 4.4.16** Resolver la ecuación diferencial  $y^{(3)} - y'' + y' - y = 0$ .

▼ Proponiendo como solución a  $y = e^{rx}$  se obtiene la ecuación característica:

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0,$$

que, como vimos en el ejemplo 4.4.13, anterior se puede expresar así:

$$(r - 1)(r^2 + 1) = 0,$$

ecuación que se cumple cuando:

$$\begin{cases} r - 1 = 0, \\ r^2 + 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1, \\ r^2 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1, \\ r = \pm i. \end{cases}$$

Tenemos una raíz real  $r_1 = 1$ , la cual genera una solución exponencial:  $y_1 = e^x$ .

También se tiene un par de raíces complejas conjugadas  $r = \pm i = 0 \pm 1i$ , las cuales dan origen a las soluciones:  $y_2 = e^{0x} \cos 1x = \cos x$  &  $y_3 = e^{0x} \sin 1x = \sin x$ .

Entonces el conjunto fundamental de soluciones está conformado por las funciones:  $e^x$ ,  $\cos x$  &  $\sin x$ .

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x,$$

con  $c_1, c_2$  &  $c_3$  constantes arbitrarias. □

**Ejemplo 4.4.17** Obtener la solución general de la ED  $y^{(6)} - 5y^{(5)} + y^{(4)} + 37y^{(3)} - 86y'' + 76y' - 24y = 0$ .

▼ Proponiendo como solución a  $y = e^{rx}$  se obtiene la ecuación característica

$$r^6 - 5r^5 + r^4 + 37r^3 - 86r^2 + 76r - 24 = 0,$$

que, como vimos en el ejemplo 4.4.11 anterior, se puede expresar así:

$$(r - 1)^2(r + 3)(r - 2)^3 = 0,$$

ecuación que se cumple cuando:

$$\begin{cases} (r - 1)^2 = 0, \\ r + 3 = 0, \\ (r - 2)^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r - 1 = 0, \\ r + 3 = 0, \\ r - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1, \\ r_2 = -3, \\ r_3 = 2. \end{cases}$$

Que son raíces reales de diversas multiplicidades.

La raíz real  $r_1 = 1$  de multiplicidad 2 genera dos soluciones:  $y_1 = e^x$  &  $y_2 = xe^x$ .

La raíz real  $r_2 = -3$  de multiplicidad 1 da origen a sólo una solución:  $y_3 = e^{-3x}$ .

La raíz real  $r_3 = 2$  de multiplicidad 3 genera tres soluciones:  $y_4 = e^{2x}$ ,  $y_5 = xe^{2x}$  &  $y_6 = x^2e^{2x}$ .

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-3x} + c_4 e^{2x} + c_5 x e^{2x} + c_6 x^2 e^{2x} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 e^{-3x} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) e^{2x}. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 4.4.18** Resolver la ecuación diferencial  $y^{(7)} + 8y^{(5)} + 16y^{(3)} = 0$ .

▼ Proponiendo como solución a  $y = e^{rx}$  se obtiene la ecuación característica:

$$r^7 + 8r^5 + 16r^3 = 0,$$

que se puede expresar así:

$$r^3(r^4 + 8r^2 + 16) = 0 \Rightarrow r^3(r^2 + 4)^2 = 0,$$

ecuación que se cumple cuando:

$$\begin{cases} r^3 = 0, \\ (r^2 + 4)^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 0, \\ r^2 + 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 0, \\ r^2 = -4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 0, \\ r = \pm 2i. \end{cases}$$

\* La raíz real  $r = 0$  tiene multiplicidad 3 y genera tres soluciones:

$$y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = xe^{0x} = x \text{ \& } y_3 = x^2e^{0x} = x^2.$$

\* El par de raíces complejas conjugadas  $r = 0 \pm 2i$  de multiplicidad 2, genera 4 soluciones:

$$y_4 = e^{0x} \cos 2x = \cos 2x; y_5 = e^{0x} \sin 2x = \sin 2x; y_6 = x \cos 2x \text{ \& } y_7 = x \sin 2x.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y = c_1(1) + c_2x + c_3x^2 + c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x + c_6x \cos 2x + c_7x \sin 2x,$$

o bien

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_6x) \cos 2x + (c_5 + c_7x) \sin 2x.$$

□

**Ejercicios 4.4.2** ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden  $n$ . *Soluciones en la página 470*  
Obtener la solución general de las ED siguientes:

1.  $y''' + 7y'' + 10y' = 0$ .

9.  $y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$ .

2.  $y''' - 2y'' + y' = 0$ .

10.  $y^{(4)} - 16y = 0$ .

3.  $y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 0$ .

11.  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ .

4.  $y^{(4)} - y'' = 0$ .

12.  $y^{(7)} - 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$ .

5.  $y^{(4)} + y'' = 0$ .

13.  $16y^{(4)} - y = 0$ .

6.  $y^{(6)} - y'' = 0$ .

14.  $y^{(3)} - 8y = 0$ .

7.  $y''' + y'' - 2y = 0$ .

15.  $y^{(5)} + 8y^{(3)} = 0$ .

8.  $y''' + 3y'' + 3y' + 1 = 0$ .

16.  $y^{(8)} - 2y^{(4)} + y = 0$ .

## 4.5 Obtención de una ecuación diferencial

Hasta ahora el problema tratado ha sido:

- Obtener la solución general de una ED lineal homogénea con coeficientes constantes.

En esta sección trataremos con el problema inverso:

- Obtener una ED lineal homogénea de coeficientes constantes a partir de su solución general.

Para obtener la solución general de una ED lineal homogénea con coeficientes constantes, recuérdese que tuvimos que llevar a cabo los pasos siguientes:

1. Proponer como solución a una función exponencial.

2. Obtener la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial.
3. Calcular las raíces de la ecuación.
4. Identificar un conjunto fundamental de soluciones
5. Finalmente escribir la solución general.

Por otro lado, para el problema inverso de obtener una ED lineal homogénea de coeficientes constantes a partir de su solución general, es de imaginarse que hay que llevar a cabo los pasos anteriormente mencionados pero en sentido opuesto. Esto es, dada la solución general de una ecuación diferencial:

1. Identificar un conjunto fundamental de soluciones.
2. Ubicar a las raíces del polinomio característico.
3. Escribir el polinomio auxiliar o bien la ecuación auxiliar.
4. Y finalmente proponer una ecuación diferencial.

**Ejemplo 4.5.1** Obtener una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general a  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}$ .

▼ De la solución general  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}$  podemos considerar:

1. Las funciones  $y_1 = e^{2x}$  &  $y_2 = e^{-5x}$  forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial buscada.
2.  $y_1 = e^{2x} = e^{rx} \Rightarrow r = 2$  es una raíz &  $(r - 2)$  es un factor de la ecuación característica.  
 $y_2 = e^{-5x} = e^{rx} \Rightarrow r = -5$  es una raíz &  $(r + 5)$  es un factor de la ecuación característica.
3. Entonces la ecuación que puede ser considerada como la ecuación característica de la ecuación diferencial es:

$$(r - 2)(r + 5) = 0 \Rightarrow r^2 + 3r - 10 = 0.$$

4. Por lo que, una posible ecuación diferencial es:

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

□

**Ejemplo 4.5.2** Determinar una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general a  $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ .

▼ De la solución general  $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$  podemos considerar:

1. Un conjunto fundamental de soluciones esta formado por las funciones  $y_1 = e^{3x}$  &  $y_2 = x e^{3x}$ .
2. Con  $y_1 = e^{3x} = e^{rx}$  &  $y_2 = x e^{3x} = x e^{rx}$  podemos decir que  $r = 3$  es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio característico.
3. Este polinomio puede ser considerado como  $P(r) = (r - 3)^2$ , el cual genera a la ecuación característica:

$$(r - 3)^2 = 0 \Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0.$$

4. Por lo cual, una posible ecuación diferencial es:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

□

**Ejemplo 4.5.3** Obtener una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general a  $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ .

▼ La solución general puede ser expresada como :

$$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x.$$

1. Podemos considerar que  $y_1 = e^{-x} \cos 2x$  &  $y_2 = e^{-x} \sin 2x$ , son funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones.
2. De aquí podemos decir que dos raíces complejas conjugadas del polinomio característico están dadas por  $r = -1 \pm 2i$ , ambas de multiplicidad uno.
3. Una ecuación característica es:

$$\begin{aligned} r = -1 \pm 2i &\Rightarrow r + 1 = \pm 2i \Rightarrow (r + 1)^2 = 4i^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 4(-1) \Rightarrow r^2 + 2r + 1 + 4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r^2 + 2r + 5 = 0. \end{aligned}$$

4. Por lo tanto, una posible ecuación diferencial es:

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

□

**Ejemplo 4.5.4** Determinar una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general a  $y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-4x}$ .

▼ La solución general puede ser expresada como:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-4x}.$$

1. Podemos considerar que  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = x e^x$  &  $y_3 = e^{-4x}$ , son funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones.
2. Con  $y_1 = e^x = e^{rx}$  &  $y_2 = x e^x = x e^{rx}$  podemos decir que  $r = 1$  es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio característico y que  $(r - 1)^2$  es un factor de éste.  
Con  $y_3 = e^{-4x} = e^{rx}$  se puede afirmar que  $r = -4$  es una raíz de multiplicidad 1 y que  $(r + 4)$  es un factor del polinomio característico.
3. Dicho polinomio puede ser escrito como:

$$P(r) = (r - 1)^2(r + 4) = (r^2 - 2r + 1)(r + 4) = r^3 + 2r^2 - 7r + 4.$$

Una ecuación característica es:

$$r^3 + 2r^2 - 7r + 4 = 0.$$

4. Una posible ecuación diferencial es:

$$y''' + 2y'' - 7y' + 4y = 0.$$

□

También se puede obtener una ecuación diferencial a partir del conocimiento de las raíces del polinomio característico, junto con sus multiplicidades.

**Ejemplo 4.5.5** Obtener una ED lineal homogénea con coeficientes constantes, cuyo polinomio característico tiene por raíces a  $r = \pm 1$  &  $r = \pm i$ , todas de multiplicidad 1.



1. Por ser  $r = 1$  y  $r = -1$  raíces de multiplicidad 1, se tiene que dos soluciones de la ecuación diferencial son  $y_1 = e^x$  &  $y_2 = e^{-x}$ , y dos factores del polinomio característico son:  $(r - 1)$  &  $(r + 1)$ .

Por ser  $r = \pm i = 0 \pm 1i$  raíces complejas conjugadas de multiplicidad 1, se tiene que dos soluciones de la ecuación diferencial son  $y_3 = e^{0x} \cos x = \cos x$  &  $y_4 = e^{0x} \sin x = \sin x$ ; se tiene además que dos factores del polinomio característico son:  $(r - i)$  &  $(r + i)$ .

2. El polinomio característico es:

$$P(r) = (r - 1)(r + 1)(r - i)(r + i) = (r^2 - 1)(r^2 - i^2) = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = r^4 - 1.$$

Una ecuación característica es:  $r^4 - 1 = 0$ .

3. Una posible ecuación diferencial es:

$$y^{(4)} - y = 0.$$

La solución general de esta ecuación diferencial es:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$



**Ejemplo 4.5.6** Determinar una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, cuyo polinomio característico tiene las siguientes raíces:  $r = 0$  de multiplicidad 3;  $r = \frac{2}{3}$  de multiplicidad 2, y  $r = -\frac{3}{2}$  de multiplicidad 1.



1. Por ser  $r = 0$  una raíz de multiplicidad 3, se tiene que tres soluciones de la ecuación diferencial son  $e^{0x} = 1$ ,  $x e^{0x} = x$  &  $x^2 e^{0x} = x^2$ ; y además un factor del polinomio característico es:  $(r - 0)^3 = r^3$ .

Por ser  $r = \frac{2}{3}$  una raíz de multiplicidad 2, se tiene que dos soluciones de la ecuación diferencial son  $e^{\frac{2}{3}x}$  &  $x e^{\frac{2}{3}x}$ ; y un factor del polinomio característico es:  $\left(r - \frac{2}{3}\right)^2$  o bien  $(3r - 2)^2$ .

Por ser  $r = -\frac{3}{2}$  una raíz de multiplicidad 1, se tiene que una solución de la ecuación diferencial es  $e^{-\frac{3}{2}x}$ ; y un factor del polinomio característico es:  $\left(r + \frac{3}{2}\right)$  o bien  $(2r + 3)$ .

2. El polinomio característico es:

$$P(r) = r^3(3r - 2)^2(2r + 3) = r^3(9r^2 - 12r + 4)(2r + 3) = 18r^6 + 3r^5 - 28r^4 + 12r^3.$$

Una ecuación característica es:

$$18r^6 + 3r^5 - 28r^4 + 12r^3 = 0.$$

3. Una posible ecuación diferencial es:

$$18y^{(6)} + 3y^{(5)} - 28y^{(4)} + 12y^{(3)} = 0.$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + (c_4 + c_5 x) e^{\frac{2}{3}x} + c_6 e^{-\frac{3}{2}x}.$$



**Ejemplo 4.5.7** Determinar una ED lineal homogénea con coeficientes constantes, que tenga como solución a la función  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

▼ La función  $f(x) = x^2 e^{-x}$  está asociada con la raíz  $-1$  de multiplicidad 3. Es decir un factor del polinomio característico es

$$(r + 1)^3 = r^3 + 3r^2 + 3r + 1.$$

Una posible ED que tiene a este polinomio auxiliar es:

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

La solución general de esta ED es:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}.$$

Es decir, La ED que hemos encontrado también tiene como solución a las funciones  $y_1 = e^{-x}$  &  $y_2 = x e^{-x}$ . □

**Ejercicios 4.5.1** Obtención de una ecuación diferencial. *Soluciones en la página 470*

Obtener una ED lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general a:

1.  $y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{5x}$ .
2.  $y = (c_1 + c_2 x) e^{-8x}$ .
3.  $y = e^{-2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$ .
4.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$ .
5.  $y = c_1 + c_2 x + e^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x)$ .
6.  $y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{x}{3}} + c_3 x e^{\frac{x}{3}}$ .
7.  $y = (c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x$ .
8.  $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) e^x$

Obtener una ED lineal homogénea con coeficientes constantes cuyo polinomio característico tenga por raíces a:

9.  $r = 2$  de multiplicidad 3 y  $r = -3$  de multiplicidad 2.
10.  $r = -2, r = 3$  y  $r = -4$ , todas de multiplicidad 1.
11.  $r = \pm 3i$  de multiplicidad 2.
12.  $r = 0$  de multiplicidad 2 y  $r = -2$  de multiplicidad 3.
13.  $r = \pm i$  &  $r = \pm 1$ , todas de multiplicidad 2.
14.  $r = \frac{1}{2}, r = \frac{2}{3}$  y  $r = \frac{2}{3}$  todas de multiplicidad 1.
15.  $r = -3 \pm 2i$  de multiplicidad 2.

## 4.6 Método de coeficientes indeterminados

En esta sección presentamos una método que se utiliza para encontrar una solución particular de una ED lineal no homogénea de orden  $n$ . La necesidad de encontrar dichas soluciones particulares proviene del siguiente resultado, que generaliza el que vimos en la página 205:

- La solución general de una ED lineal no homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

esta dada por

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x),$$

donde

$y_p(x)$  es una solución particular de esta ED no homogénea,

$y_c(x)$  es la *solución complementaria*, que es la solución general de la ED homogénea asociada:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_3(x)y^{(3)} + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

es decir,  $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ , donde  $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$  forman un conjunto fundamental de soluciones para la lineal homogénea.

El método de coeficientes indeterminados es un procedimiento utilizado para obtener una solución particular  $y_p(x)$  para la ED lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_3y^{(3)} + a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x).$$

Una restricción que existe para poder aplicar este método consiste en el tipo de función que puede ser  $g(x)$ . El método funcionará adecuadamente cuando  $g(x)$  sólo sea alguno de los tipos siguientes:

1.  $g(x) = P_n(x)$ , un polinomio de grado  $n \geq 0$ .

Los polinomios de grado  $n$  son generados por las funciones  $\{1, x, \cdots, x^n\}$  y como se ha visto en este contexto estas funciones están asociadas a la raíz cero de multiplicidad  $n + 1$ .

2.  $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ ; con  $\alpha$  constante y  $P_n$  un polinomio de grado  $n$ .

Estas funciones son generadas por las funciones  $\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \cdots, x^n e^{\alpha x}\}$  las cuales están asociadas a la raíz  $\alpha$  de multiplicidad  $n + 1$ .

3.  $g(x) = P_n(x)\sin \beta x + Q_n(x)\cos \beta x$ , donde  $\beta$  es constante y  $P_n$  &  $Q_n$  son polinomios con el mayor de sus grados igual a  $n$ .

Estas funciones son generadas por las funciones  $\{\cos \beta x, x \cos \beta x, \cdots, x^n \cos \beta x\}$  y  $\{\sin \beta x, x \sin \beta x, \cdots, x^n \sin \beta x\}$  las cuales están asociadas a las raíces  $\pm i\beta$  ambas de multiplicidad  $n + 1$ .

4.  $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x + Q_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$  con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes;  $P_n$  &  $Q_n$  son polinomios de manera que el mayor de los grados entre ellos es  $n$ .

Estas funciones son generadas por las funciones  $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \cdots, x^n e^{\alpha x} \cos \beta x\}$  y  $\{e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \cdots, x^n e^{\alpha x} \sin \beta x\}$  las cuales están asociadas a las raíces  $\alpha \pm i\beta$  ambas de multiplicidad  $n + 1$ .

5.  $g(x)$  puede ser combinación lineal de funciones de los 4 tipos anteriores.

Debemos notar aquí que:

- Si  $g(x) = P_n(x)$ , entonces  $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$  con  $\alpha = 0$ .

Es decir, todo polinomio  $P_n(x)$  puede ser considerado de la forma  $P_n(x)e^{\alpha x}$ , donde  $\alpha = 0$ .

- Con  $\alpha = 0$ :  $P_n(x) \sin \beta x + Q_n(x) \cos \beta x = e^{\alpha x} (P_n(x) \sin \beta x + Q_n(x) \cos \beta x)$

Es decir, todas las funciones del tipo 3 son un caso particular de las del tipo 4.

Como se ha dicho, el método de coeficientes indeterminados sirve para determinar una solución particular  $y_p(x)$  de la ED lineal no homogénea con coeficientes constantes:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Dicho de otra manera, este método sirve para encontrar una función  $y = y_p(x)$  tal que, al aplicársele el operador dado por

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y,$$

el resultado sea, precisamente, la función  $g(x)$ . Esto es,

$$L[y_p(x)] = g(x).$$

A continuación mostraremos mediante ejemplos cómo al aplicar el operador  $L[y]$  se transforman ciertos tipos de funciones, para poder empezar a extraer algunas conclusiones importantes.

**Ejemplo 4.6.1** Sea la ED  $L[y] = y'' + 2y' - 8y = 0$ . Analizar la forma en la que se transforman las funciones  $y = x^2 - 1$ ,  $y = e^{2x}$ ,  $y = \sin x - \cos x$ ,  $y = e^{-4x}$  &  $y = (2x - 1)e^{3x}$  al aplicarles el operador  $L[y]$ .



1. El polinomio auxiliar asociado a la ED es:

$$P(r) = r^2 + 2r - 8 = (r - 2)(r + 4).$$

2. Si  $y = x^2 - 1$ , entonces  $y' = 2x$  &  $y'' = 2$ . Luego,

$$L[y] = L[x^2 - 1] = (2) + 2(2x) - 8(x^2 - 1) = -8x^2 + 4x + 10$$

Aquí, un polinomio de grado 2 es transformado en otro polinomio del mismo grado.

3. Si  $y = e^{2x}$ , entonces  $y' = 2e^{2x}$  &  $y'' = 4e^{2x}$ . Luego,

$$L[y] = L[e^{2x}] = (4e^{2x}) + 2(2e^{2x}) - 8(e^{2x}) = 0$$

Aquí, la exponencial  $e^{2x}$  es anulada por  $L[y]$ ; es decir,  $e^{2x}$  es solución de la ecuación diferencial. Se tiene además que 2 es una raíz del polinomio auxiliar.

4. Si  $y = \sin x - \cos x$ , entonces  $y' = \cos x + \sin x$  &  $y'' = -\sin x + \cos x$ . Luego,

$$L[y] = (-\sin x + \cos x) + 2(\cos x + \sin x) - 8(\sin x - \cos x) = 11 \cos x - 7 \sin x$$

Aquí, una combinación lineal de  $\sin x$  &  $\cos x$  se transforma en otra combinación lineal de las mismas funciones. Ambas funciones están asociadas a los números  $\pm i$ , que no son raíces del polinomio auxiliar.

5. Si  $y = e^{-4x}$ , entonces  $y' = -4e^{-4x}$  &  $y'' = 16e^{-4x}$ . Luego,

$$L[y] = L[e^{-4x}] = (16e^{-4x}) + 2(-4e^{-4x}) - 8(e^{-4x}) = 0$$

Aquí, la exponencial  $e^{-4x}$  es anulada por  $L[y]$ ; es decir,  $e^{-4x}$  es solución de la ecuación diferencial. Se tiene que  $-4$  es una raíz del polinomio auxiliar.



6. Si  $y = (2x - 1)e^{3x}$ , entonces  $y' = (6x - 1)e^{3x}$  &  $y'' = (18x + 3)e^{3x}$ . Luego,

$$L[y] = (18x + 3)e^{3x} + 2(6x - 1)e^{3x} - 8(2x - 1)e^{3x} = (14x + 9)e^{3x}$$

Aquí, el producto de un polinomio  $P_1(x)$  por la exponencial  $e^{3x}$  es transformado en otro producto del mismo tipo de funciones:  $P_1(x)e^{3x}$ . Se tiene que 3 no es raíz del polinomio auxiliar.

□

**Ejemplo 4.6.2** Sea la ED  $L[y] = y'' - y' - 6y = 0$ . Analizar la forma en la que se transforman las funciones  $y = (3x^2 - 1)e^{2x}$ ,  $y = (x^3 + 1)e^{-2x}$ ,  $y = (2 - x^2)e^{3x}$  &  $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  al aplicarles el operador  $L[y]$ .

▼

1. El polinomio característico asociado a  $L[y]$  es

$$P(r) = r^2 - r - 6 = (r + 2)(r - 3)$$

el cual tiene por raíces de multiplicidad 1 a  $r = -2$  &  $r = 3$ , por lo que:  $L[y] = 0$  para  $y = e^{-2x}$  &  $y = e^{3x}$ .

Aún más,  $L[y] = 0$  para  $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$ , con  $c_1$  &  $c_2$  constantes, que es la solución general de la ED homogénea.

2. Si  $y = (3x^2 - 1)e^{2x}$ , entonces  $y' = (6x^2 + 6x - 2)e^{2x}$  &  $y'' = (12x^2 + 24x + 2)e^{2x}$ . Luego,

$$\begin{aligned} L[y] &= (12x^2 + 24x + 2)e^{2x} - (6x^2 + 6x - 2)e^{2x} - 6(3x^2 - 1)e^{2x} = \\ &= (-12x^2 + 18x + 10)e^{2x}. \end{aligned}$$

Aquí, el producto de un polinomio de grado dos,  $P_2(x) = (3x^2 - 1)$ , por la exponencial  $e^{2x}$  es transformado en otro producto del mismo tipo: un polinomio de grado dos,  $\hat{P}_2(x) = -12x^2 + 18x + 10$ , por la exponencial  $e^{2x}$ . Y notamos que la exponencial  $e^{2x}$  está asociada a  $r = 2$ , que no es raíz del polinomio característico.

3. Si  $y = (x^3 + 1)e^{-2x}$ , entonces  $y' = (-2x^3 + 3x^2 - 2)e^{-2x}$  &  $y'' = (4x^3 - 12x^2 + 6x + 4)e^{-2x}$ . Luego,

$$\begin{aligned} L[y] &= (4x^3 - 12x^2 + 6x + 4)e^{-2x} - (-2x^3 + 3x^2 - 2)e^{-2x} - 6(x^3 + 1)e^{-2x} = \\ &= (-15x^2 + 6x)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Aquí notamos que el producto de un polinomio de grado tres,  $P_3(x) = x^3 + 1$ , por la exponencial  $e^{-2x}$  se transforma en un producto de un polinomio de grado dos,  $\hat{P}_2(x) = -15x^2 + 6x$ , por la exponencial  $e^{-2x}$ . El factor polinomial bajó de grado en 1. Y notamos que  $e^{-2x}$  está asociada a  $r = -2$ , que sí es raíz del polinomio característico y además tiene multiplicidad 1.

4. Si  $y = (2 - x^2)e^{3x}$ , entonces  $y' = (-3x^2 - 2x + 6)e^{3x}$  &  $y'' = (-9x^2 - 12x + 16)e^{3x}$ . Luego,

$$\begin{aligned} L[y] &= (-9x^2 - 12x + 16)e^{3x} - (-3x^2 - 2x + 6)e^{3x} - 6(2 - x^2)e^{3x} = \\ &= (-10x - 2)e^{3x}. \end{aligned}$$

Observamos que el producto de un polinomio de grado dos,  $P_2(x) = 2 - x^2$ , por la exponencial  $e^{3x}$  es transformado en un producto de un polinomio de grado uno,  $\hat{P}_1(x) = -10x - 2$ , por la exponencial  $e^{3x}$ . El factor polinomial bajó de grado en 1. Vemos también que  $e^{3x}$  está asociada a  $r = 3$ , que es una raíz de multiplicidad 1, del polinomio característico.

5. Si  $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ , entonces  $y' = 12x^2 - 6x + 2$  &  $y'' = 24x - 6$ . Luego,

$$\begin{aligned} L[y] &= (24x - 6) - (12x^2 - 6x + 2) - 6(4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) = \\ &= -24x^3 + 6x^2 + 18x - 2. \end{aligned}$$

Aquí un polinomio de grado tres,  $P_3(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ , fue transformado en otro polinomio del mismo grado,  $\widehat{P}_3(x) = -24x^3 + 6x^2 + 18x - 2$ . Observamos además que  $y = P_3(x) = P_3(x)e^{0x}$  está asociado a  $r = 0$ , que no es raíz del polinomio característico.

□

**Ejemplo 4.6.3** Sea la ED  $L[y] = y''' - 2y'' + y' = 0$ . Analizar la forma en la que se transforman las funciones  $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ ,  $y = x^4 - x^2 + 1$ ,  $y = (x^3 + x^2 - x - 1)e^x$  &  $y = 3 \sin 2x - \cos 2x$  al aplicarles el operador  $L[y]$ .



1. El polinomio característico asociado a  $L[y]$  es

$$P(r) = r^3 - 2r^2 + r = r(r^2 - 2r + 1) = r(r - 1)^2$$

el cual tiene por raíces a  $r = 0$ , de multiplicidad 1, y  $r = 1$ , de multiplicidad 2, por lo que:

- a.  $L[y] = 0$  para  $y = e^{0x} = 1$ ,  $y = e^x$  &  $y = xe^x$ .  
b. Aún más:  $L[y] = 0$  para  $y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x$ , con  $c_1, c_2$  &  $c_3$  constantes.
2. Si  $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ , entonces  $y' = (-x^2 + x)e^{-x}$ ,  $y'' = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$  &  $y''' = (-x^2 + 5x - 4)e^{-x}$ . Luego,

$$\begin{aligned} L[y] &= (-x^2 + 5x - 4)e^{-x} - 2(x^2 - 3x + 1)e^{-x} + (-x^2 + x)e^{-x} = \\ &= (-4x^2 + 12x - 6)e^{-x} \end{aligned}$$

Aquí el producto de un polinomio de grado dos,  $P_2(x) = x^2 + x + 1$ , por la exponencial  $e^{-x}$  fue transformado en otro producto del mismo tipo; producto de polinomio de grado dos,  $\widehat{P}_2(x) = -4x^2 + 12x - 6$ , por la exponencial  $e^{-x}$ . Y notamos aquí que la exponencial  $e^{-x}$  está asociada a  $r = -1$ , que no es raíz del polinomio característico.

3. Si  $y = x^4 - x^2 + 1$ , entonces  $y' = 4x^3 - 2x$ ,  $y'' = 12x^2 - 2$  &  $y''' = 24x$ . Luego,

$$L[y] = (24x) - 2(12x^2 - 2) + (4x^3 - 2x) = 4x^3 - 24x^2 + 22x + 4$$

Aquí un polinomio de grado cuatro,  $P_4(x) = x^4 - x^2 + 1$ , fue transformado en un polinomio de grado tres,  $\widehat{P}_3(x) = 4x^3 - 24x^2 + 22x + 4$ . El polinomio bajó de grado en 1. Y notamos que  $y = P_4(x) = P_4(x)e^{0x}$  está asociado a  $r = 0$ , que es una raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico.

4. Si  $y = (x^3 + x^2 - x - 1)e^x$ , entonces  $y' = (x^3 + 4x^2 + x - 2)e^x$ ,  $y'' = (x^3 + 7x^2 + 9x - 1)e^x$  &  $y''' = (x^3 + 10x^2 + 23x + 8)e^x$ . Luego,

$$\begin{aligned} L[y] &= (x^3 + 10x^2 + 23x + 8)e^x - 2(x^3 + 7x^2 + 9x - 1)e^x + (x^3 + 4x^2 + x - 2)e^x = \\ &= (6x + 8)e^x \end{aligned}$$

Aquí el producto de un polinomio de grado tres,  $P_3(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ , por la exponencial  $e^x$  es transformado en un producto de un polinomio de grado uno,  $\widehat{P}_1(x) = 6x + 8$ , por la exponencial  $e^x$ . El factor polinomial bajó de grado en 2. Y notamos que  $e^x$  está asociada a  $r = 1$ , que es una raíz de multiplicidad 2, del polinomio característico.

5. Si  $y = 3 \sin 2x - \cos 2x$ , entonces

$$y' = 6 \cos 2x + 2 \sin 2x, y'' = -12 \sin 2x + 4 \cos 2x \quad \& \quad y''' = -24 \cos 2x - 8 \sin 2x. \text{ Luego,}$$

$$\begin{aligned} L[y] &= (-24 \cos 2x - 8 \sin 2x) - 2(-12 \sin 2x + 4 \cos 2x) + (6 \cos 2x + 2 \sin 2x) = \\ &= 18 \sin 2x - 26 \cos 2x \end{aligned}$$

Aquí una combinación lineal de  $\sin 2x$  &  $\cos 2x$  se transformó en otra combinación lineal de  $\sin 2x$  &  $\cos 2x$ . Y notamos que  $\sin 2x = e^{0x} \sin 2x$  &  $\cos 2x = e^{0x} \cos 2x$  son funciones asociadas a  $r = 0 \pm 2i = \pm 2i$ , que no son raíces del polinomio característico.

□

**Ejemplo 4.6.4** Sea la ED  $L[y] = y^{(5)} + y^{(3)} = 0$ . Analizar la forma en la que se transforman las funciones  $y = x^2 e^x$ ,  $y = x^8 - x^4 + 1$ ,  $y = x \sin x - x \cos x$  &  $y = 3 \sin 2x - 2 \cos 2x$  al aplicarles el operador  $L[y]$ .



1. El polinomio característico asociado a  $L[y]$  es

$$P(r) = r^5 + r^3 = r^3(r^2 + 1),$$

el cual tiene a  $r = 0$  como una raíz de multiplicidad 3 y a  $r = \pm i$  como raíces complejas conjugadas de multiplicidad 1, por lo que

- a.  $L[y] = 0$  para  $y = e^{0x} = 1$ ,  $y = x e^{0x} = x$ ,  $y = x^2 e^{0x} = x^2$ ,  $y = e^{0x} \cos x = \cos x$  &  $y = e^{0x} \sin x = \sin x$ .  
b. Aún más:  $L[y] = 0$  para  $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x$ , con  $c_1, c_2, c_3, c_4$  &  $c_5$  constantes arbitrarias, que es la solución general de la ED.

2. Si  $y = x^2 e^x$ , entonces

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + 2x)e^x, & y^{(4)} &= (x^2 + 8x + 12)e^x, \\ y'' &= (x^2 + 4x + 2)e^x, & y^{(5)} &= (x^2 + 10x + 20)e^x. \\ y^{(3)} &= (x^2 + 6x + 6)e^x, \end{aligned}$$

Luego,

$$L[y] = (x^2 + 10x + 20)e^x + (x^2 + 6x + 6)e^x = (2x^2 + 16x + 26)e^x.$$

Aquí el producto de un polinomio de grado dos,  $P_2(x) = x^2 e^x$ , por la exponencial  $e^x$  se transforma en otro producto de polinomio de grado dos,  $\widehat{P}_2(x) = 2x^2 + 16x + 26$ , por la misma exponencial  $e^x$ . Notamos además que la exponencial  $e^x$  está asociada a  $r = 1$ , que no es raíz del polinomio característico.

3. Si  $y = x^8 - x^4 + 1$ , entonces

$$\begin{aligned} y' &= 8x^7 - 4x^3, & y^{(4)} &= 1680x^4 - 24, \\ y'' &= 56x^6 - 12x^2, & y^{(5)} &= 6720x^3. \\ y^{(3)} &= 336x^5 - 24x, \end{aligned}$$

Luego,

$$L[y] = (6720x^3) + (336x^5 - 24x) = 336x^5 + 6720x^3 - 24x.$$

Aquí un polinomio de grado ocho,  $P_8(x) = x^8 - x^4 + 1$ , es transformado en un polinomio de grado cinco,  $\widehat{P}_5(x) = 336x^5 + 6720x^3 - 24x$ . El polinomio bajó de grado en 3. Y notamos también que el polinomio  $y = P_8(x) = P_8(x)e^{0x}$  está asociado a  $r = 0$ , que es una raíz de multiplicidad 3 del polinomio característico.

4. Si  $y = x \sin x - x \cos x$ , entonces

$$\begin{aligned}
y' &= (x+1)\sin x + (x-1)\cos x, & y^{(4)} &= (x-4)\sin x + (-x-4)\cos x, \\
y'' &= (-x+2)\sin x + (x+2)\cos x, & y^{(5)} &= (x+5)\sin x + (x-5)\cos x, \\
y^{(3)} &= (-x-3)\sin x + (-x+3)\cos x,
\end{aligned}$$

Luego,

$$L[y] = [(x+5)\sin x + (x-5)\cos x] + [(-x-3)\sin x + (-x+3)\cos x] = 2\sin x - 2\cos x.$$

Aquí una expresión de la forma  $P_1(x)\sin x + \widehat{P}_1(x)\cos x$  donde  $P_1(x) = x$  &  $\widehat{P}_1(x) = -x$  son polinomios de grado 1, es transformada en sólo una combinación lineal de  $\sin x$  &  $\cos x$ . El factor polinomial bajó de grado en 1. Y notamos que  $\sin x$  &  $\cos x$  están asociadas a  $r = \pm i$ , que son raíces de multiplicidad 1 del polinomio característico.

5. Si  $y = 3\sin 2x - 2\cos 2x$ , entonces

$$\begin{aligned}
y' &= 4\sin 2x + 6\cos 2x, & y^{(4)} &= 48\sin 2x - 32\cos 2x, \\
y'' &= -12\sin 2x + 8\cos 2x, & y^{(5)} &= 64\sin 2x + 96\cos 2x, \\
y^{(3)} &= -16\sin 2x - 24\cos 2x,
\end{aligned}$$

Luego,

$$L[y] = (64\sin 2x + 96\cos 2x) + (-16\sin 2x - 24\cos 2x) = 48\sin 2x + 72\cos 2x.$$

Aquí una combinación lineal de  $\sin 2x$  &  $\cos 2x$ , es transformada en otra combinación lineal de  $\sin 2x$  &  $\cos 2x$ . Además las funciones  $\sin 2x$  &  $\cos 2x$  están asociadas a  $r = \pm 2i$ , que no son raíces del polinomio característico.

□

Podemos resumir algunas observaciones hechas en los ejemplos previos que servirán para dar soporte al método de coeficientes indeterminados; estas van en el sentido de resaltar las transformaciones que resultan por la aplicación del operador  $L[y]$  sobre las funciones  $y = f(x)$  suministradas. Para esto, comparamos a la función dada  $y = f(x)$ , con la función  $F(x) = L[f(x)]$  obtenida después de ser aplicado dicho operador  $L[y]$ .

Función dada	→	Operador	→	Función obtenida
$y = f(x)$	→	$L[y]$	→	$F(x) = L[f(x)]$

1. Para empezar, es necesario conocer el polinomio característico  $P(r)$  asociado al operador  $L[y]$ , así como sus raíces, con sus respectivas multiplicidades.
2. Cuando la función dada es de la forma

$$y = f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x)\sin \beta x + Q_n(x)\cos \beta x)$$

y no tiene relación alguna con las raíces de la ecuación auxiliar, entonces la función obtenida  $F(x) = L[f(x)]$  tendrá del mismo tipo y característica que la original, es decir:

$$L[f(x)] = F(x) = e^{\alpha x} (\widehat{P}_n(x)\sin \beta x + \widehat{Q}_n(x)\cos \beta x).$$

- Si  $f(x)$  es un polinomio  $P_n(x)$  de grado  $n$  y  $r = 0$  no es raíz del polinomio auxiliar, entonces  $L[f(x)]$  es otro polinomio de grado  $n$ .
- Si  $f(x) = P_n(x)e^{rx}$ , donde  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$  y  $r = \alpha$  no es raíz de la ecuación auxiliar, entonces de manera similar  $L[f(x)] = \widehat{P}_n(x)e^{rx}$ .
- Si  $f(x) = P_n(x)\sin\beta x + Q_n(x)\cos\beta x$ , donde  $P_n(x)$  &  $Q_n(x)$  son polinomios con el mayor de sus grados igual a  $n$  y si  $r = \pm i\beta$  no son raíces de la ecuación auxiliar, entonces  $L[f(x)] = \widehat{P}_n(x)\sin\beta x + \widehat{Q}_n(x)\cos\beta x$ , donde  $\widehat{P}_n(x)$  &  $\widehat{Q}_n(x)$  son otros polinomios con el mayor de sus grados igual a  $n$ .
- De manera similar y generalizando los puntos anteriores, si  $r = \alpha \pm i\beta$  no son raíces de la ecuación auxiliar asociada a  $L[y]$ , entonces

$$L[e^{\alpha x} (P_n(x)\sin\beta x + Q_n(x)\cos\beta x)] = e^{\alpha x} (\widehat{P}_n(x)\sin\beta x + \widehat{Q}_n(x)\cos\beta x)$$

donde  $P_n(x)$  &  $Q_n(x)$  son polinomios con el mayor de sus grados igual a  $n$  y  $\widehat{P}_n(x)$  &  $\widehat{Q}_n(x)$  son otros polinomios con el mayor de sus grados igual a  $n$ .

### 3. Cuando la función dada $y = f(x)$ es de la forma

$$y = f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x)\sin\beta x + Q_n(x)\cos\beta x)$$

sí guarda relación con alguna de las raíces del polinomio auxiliar, entonces la función  $L[f(x)]$  obtenida será del mismo tipo, pero su característica se modificará, disminuyendo en general el grado de los polinomios. A grandes rasgos

$$F(x) = L[f(x)] = e^{\alpha x} (\widehat{P}_k(x)\sin\beta x + \widehat{Q}_k(x)\cos\beta x)$$

con  $k < n$ .

- Si  $f(x) = P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$  y  $r = 0$  es una raíz de el polinomio característico, con multiplicidad  $m$  entonces:
  - a. Si  $m = 1$ , la función obtenida  $F(x) = L[f(x)] = \widehat{P}_{n-1}(x)$  es un polinomio de grado  $n - 1$ .
  - b. Si  $m = 2$ , la función obtenida  $F(x) = L[f(x)] = \widehat{P}_{n-2}(x)$  es un polinomio de grado  $n - 2$ .
  - c. Si  $m \leq n$ , la función obtenida  $F(x) = L[f(x)] = \widehat{P}_{n-m}(x)$  sea un polinomio de grado  $n - m$ .
  - d. Por supuesto, si  $m > n$ , entonces  $F(x) = L[P_n(x)] = 0$ , pues cualquier polinomio de grado  $n \leq m$  será solución de la ED  $L[y] = 0$ .
- Si  $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$  donde  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$ ,  $r = \alpha$  es una raíz del polinomio característico, de multiplicidad  $m$ , entonces:
  - a. Si  $m = 1$ , la función obtenida  $F(x) = L[P_n(x)e^{\alpha x}] = \widehat{P}_{n-1}(x)e^{\alpha x}$ , donde  $\widehat{P}_{n-1}(x)$  es un polinomio de grado  $n - 1$ .
  - b. Si  $m = 2$ , la función obtenida  $F(x) = L[P_n(x)e^{\alpha x}] = \widehat{P}_{n-2}(x)e^{\alpha x}$ , donde  $\widehat{P}_{n-2}(x)$  es un polinomio de grado  $n - 2$ .
  - c. Si  $m \leq n$ , la función obtenida  $F(x) = L[P_n(x)e^{\alpha x}] = \widehat{P}_{n-m}(x)e^{\alpha x}$ , donde  $\widehat{P}_{n-m}(x)$  es un polinomio de grado  $n - m$ .
  - d. Si  $m > n$ , de manera análoga al caso anterior  $F(x) = L[P_n(x)] = 0$ .
- Si  $f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x)\sin\beta x + Q_n(x)\cos\beta x]$ , donde  $P_n(x)$  &  $Q_n(x)$  son polinomios con el mayor de sus grados igual a  $n$  y si  $r = \alpha \pm i\beta$  son raíces de la ecuación auxiliar, de multiplicidad  $m$ , entonces:
  - a. Si  $m = 1$ , la función obtenida tendrá la forma:

$$F(x) = L[f(x)] = e^{\alpha x} [\widehat{P}_{n-1}(x)\sin\beta x + \widehat{Q}_{n-1}(x)\cos\beta x],$$

donde  $\widehat{P}_{n-1}(x)$  &  $\widehat{Q}_{n-1}(x)$  son polinomios con el mayor de sus grados igual a  $n - 1$ .

- b. Si  $m = 2$ , la función obtenida tendrá la forma:

$$F(x) = L[f(x)] = e^{\alpha x} \left[ \widehat{P}_{n-2}(x) \sen \beta x + \widehat{Q}_{n-2}(x) \cos \beta x \right],$$

donde  $\widehat{P}_{n-2}(x)$  &  $\widehat{Q}_{n-2}(x)$  son polinomios con el mayor de sus grados igual a  $n - 2$ .

- c. Si  $m \leq n$ , la función obtenida tendrá la forma:

$$F(x) = L[f(x)] = e^{\alpha x} \left[ \widehat{P}_{n-m}(x) \sen \beta x + \widehat{Q}_{n-m}(x) \cos \beta x \right],$$

donde  $\widehat{P}_{n-m}(x)$  &  $\widehat{Q}_{n-m}(x)$  son polinomios con el mayor de sus grados igual a  $n - m$ .

- d. Igual que los casos anteriores, si la multiplicidad  $m$  de las raíces  $\alpha \pm i\beta$  de la ecuación auxiliar asociada a la ED  $L[y] = 0$ , es mayor que  $n$ , el grado máximo de  $P_n(x)$  &  $Q_n(x)$ , entonces:

$$L[e^{\alpha x} (P_n(x) \sen \beta x + Q_n(x) \cos \beta x)] = 0.$$

### 4.6.1 El método

Como ya hemos dicho, el método de coeficientes indeterminados se utiliza para determinar o encontrar una función  $y = y_p(x)$ , que al serle aplicada el operador:

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y$$

produzca como resultado la función  $g(x)$  conocida.

Esto es, dadas la función  $g(x)$  y el operador  $L[f(x)]$ , determinar la función  $y = y_p(x)$  tal que

Función desconocida		Operador		Función conocida
$y = y_p(x)$	$\longrightarrow$	$L[y]$	$\longrightarrow$	$g(x) = L[y_p(x)]$

Por esto, para determinar una solución particular  $y = y_p(x)$  de la ecuación diferencial  $L[y] = g(x)$ , se propone el procedimiento siguiente:

1. Encontrar el polinomio característico  $P(r)$  asociado al operador  $L[y]$  y determinar sus raíces con sus respectivas multiplicidades.
2. Analizar a la función conocida  $g(x)$  y decidir si tiene o no relación con alguna de las raíces de  $P(r)$ .
3. Si  $g(x)$  no tiene relación con alguna de las raíces de  $P(r)$ , entonces se propone que  $y_p(x)$  sea del mismo tipo que  $g(x)$ .
4. Si  $g(x)$  está relacionada con alguna raíz  $r$  de  $P(r)$  y ésta tiene multiplicidad  $m$ , entonces se propone que  $y_p(x)$  sea el producto de  $x^m$  por una función del mismo tipo que  $g(x)$ .

Como podrá notarse, a la función  $y_p = f(x)$  que se propone del mismo tipo que la función  $g(x)$ , se le multiplica por el factor polinomial  $x^m$ , para así compensar el decrecimiento del grado del polinomio  $P_n(x)$  contenido en  $f(x)$  que observamos en los ejemplos anteriores. Esta función  $y_p$  tiene los coeficientes del polinomio  $P_n(x)$  desconocidos los cuales determinaremos al sustituir  $y_p$  en el operador e igualar el resultado con  $g(x)$ .

**Ejemplo 4.6.5** Obtener la solución general de la ED lineal no homogénea:

$$y'' - 4y' + 3y = 9x^2 - 36x + 37,$$

por el método de coeficientes indeterminados.

▼ Primero se obtiene la solución general de la homogénea asociada:

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Proponiendo  $y = e^{rx}$  se obtiene la ecuación característica:

$$r^2 - 4r + 3 = 0,$$

que tiene por soluciones a  $r = 1$  &  $r = 3$ , ambas de multiplicidad uno.

Por lo anterior, la solución complementaria de la ED dada es:

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}.$$

Ahora obtenemos una solución particular  $y_p$  de la ED lineal

$$y'' - 4y' + 3y = 9x^2 - 36x + 37.$$

Aquí la función  $g(x) = 9x^2 - 36x + 37$  es un polinomio de grado 2.

Es decir:  $g(x) = P_2(x) = P_2(x)e^0 = P_2(x)e^{0x}$ , donde se tiene el factor  $e^{rx}$  con  $r = 0$ .

Como  $r = 0$  no es raíz del polinomio característico  $P(r) = r^2 - 4r + 3$ , entonces se propone como solución particular una función del mismo tipo que  $g(x)$ :

$$y_p(x) = x^0(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C,$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son coeficientes que deberán ser determinados. Ahora,

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y_p' = 2Ax + B \Rightarrow y_p'' = 2A.$$

Sustituyendo en  $y_p'' - 4y_p' + 3y_p = 9x^2 - 36x + 37$ , se obtiene:

$$2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 9x^2 - 36x + 37.$$

Asociando términos con respecto a las potencias de  $x$ ,

$$(3A)x^2 + (-8A + 3B)x + (2A - 4B + 3C) = 9x^2 - 36x + 37.$$

Hemos obtenido dos polinomios, los serán iguales cuando así lo sean los coeficientes de los términos del mismo grado, por esto:

$$\begin{cases} 3A = 9 & \text{coeficientes de } x^2. \\ -8A + 3B = -36 & \text{coeficientes de } x^1. \\ 2A - 4B + 3C = 37 & \text{coeficientes de } x^0 \text{ (términos constantes).} \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones que tiene por solución a:

$$A = 3; \quad B = -4 \quad \& \quad C = 5.$$

Entonces la solución particular es:

$$y_p(x) = 3x^2 - 4x + 5.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = y_p(x) + y_c(x) = 3x^2 - 4x + 5 + c_1 e^x + c_2 e^{3x}.$$

□

**Ejemplo 4.6.6** Resolver la ED lineal no homogénea:

$$y'' + 4y' = 12x^2 - 10x - 16,$$

por el método de coeficientes indeterminados.

▼ Obtenemos primero la solución general de ED lineal homogénea asociada:

$$y'' + 4y' = 0.$$

Proponiendo  $y = e^{rx}$  se obtiene la ecuación característica:

$$r^2 + 4r = 0,$$

que tiene por soluciones a  $r = 0$  &  $r = -4$ , ambas de multiplicidad uno. Por lo anterior la solución complementaria de la ED dada es:

$$y_c(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-4x} = c_1 + c_2 e^{-4x}.$$

Como segundo paso obtenemos una solución particular  $y_p$  de la ED lineal:

$$y'' + 4y' = 12x^2 - 10x - 16.$$

Aquí la función  $g(x) = 12x^2 - 10x - 16$  es un polinomio de grado 2.

Es decir:  $g(x) = P_2(x) = P_2(x)e^0 = P_2(x)e^{0x}$ , donde se tiene el factor  $e^{rx}$  con  $r = 0$ .

Como  $r = 0$  es una raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico ( $r^2 + 4r$ ), entonces se propone como solución particular a:

$$y_p(x) = x^1(Ax^2 + Bx + C) = x(Ax^2 + Bx + C),$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son coeficientes que deben ser determinados. Ahora,

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx \Rightarrow y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C \Rightarrow y_p'' = 6Ax + 2B.$$

Sustituyendo en  $y_p'' + 4y_p' = 12x^2 - 10x - 16$ , se obtiene:

$$(6Ax + 2B) + 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 12x^2 - 10x - 16.$$

Asociando términos con respecto a las potencias de  $x$ :

$$(12A)x^2 + (6A + 8B)x + (2B + 4C) = 12x^2 - 10x - 16.$$

Hemos obtenido dos polinomios, los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales, por esto:

$$\begin{cases} 12A = 12 & \text{coeficientes de } x^2. \\ 6A + 8B = -10 & \text{coeficientes de } x^1. \\ 2B + 4C = -16 & \text{coeficientes de } x^0 \text{ (términos constantes).} \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones que tiene por solución a:

$$A = 1; \quad B = -2 \quad \& \quad C = -3.$$

Entonces la solución particular es:

$$y_p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$y = y_p(x) + y_c(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + c_1 + c_2 e^{-4x}.$$

□

**Ejemplo 4.6.7** Obtener la solución general de la ED:

$$y''' + 3y'' = -36x^2 + 12x + 42,$$

por el método de coeficientes indeterminados.



▼ Primero se obtiene la solución complementaria proponiendo:  $y = e^{rx}$ .

$$y''' + 3y'' = 0 \Rightarrow r^3 + 3r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r + 3) = 0.$$

Esta ecuación característica tiene por solución a  $r = 0$ , raíz de multiplicidad 2 y a  $r = -3$ , raíz de multiplicidad 1.

Por lo tanto, la solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{-3x} = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-3x}.$$

En segundo lugar, se obtiene una solución particular  $y_p$  de la ED lineal

$$y''' + 3y'' = -36x^2 + 12x + 42.$$

Aquí la función  $g(x) = -36x^2 + 12x + 42$  es un polinomio de grado 2.

Es decir:  $g(x) = P_2(x) = P_2(x)e^0 = P_2(x)e^{0x}$ , donde se tiene el factor  $e^{rx}$  con  $r = 0$ .

Como  $r = 0$  es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio característico ( $r^3 + 3r^2$ ), entonces se propone como solución particular a:

$$y_p(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son coeficientes que deben ser determinados. Ahora,

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \Rightarrow y_p' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p'' &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C \Rightarrow y_p''' = 24Ax + 6B. \end{aligned}$$

Sustituyendo en  $y_p''' + 3y_p'' = -36x^2 + 12x + 42$ , se obtiene:

$$(24Ax + 6B) + 3(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = -36x^2 + 12x + 42.$$

Asociando términos con respecto a las potencias de  $x$ ,

$$(36A)x^2 + (24A + 18B)x + (6B + 6C) = -36x^2 + 12x + 42.$$

Hemos obtenido dos polinomios, los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales, por esto:

$$\begin{cases} 36A = -36 & \text{coeficientes de } x^2. \\ 24A + 18B = 12 & \text{coeficientes de } x^1. \\ 6B + 6C = 42 & \text{coeficientes de } x^0 \text{ (términos constantes).} \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones que tiene por solución a:

$$A = -1; \quad B = 2 \quad \& \quad C = 5.$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$y = y_p(x) + y_c(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2 + c_1 + c_2 x + c_3 e^{-3x}.$$

□

**Ejemplo 4.6.8** Resolver la ED:  $y'' + y = (5x - 1)e^{2x}$ , por el método de coeficientes indeterminados.

▼ Se obtiene primero la solución complementaria proponiendo  $y = e^{rx}$ :

$$y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Las soluciones de la ecuación característica son  $r = i$  &  $r = -i$ , ambas de multiplicidad 1.

La solución complementaria es:

$$y_c(x) = e^{0x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Obtenemos ahora una solución particular  $y_p$  de la ED lineal

$$y'' + y = (5x - 1)e^{2x}.$$

Aquí la función  $g(x) = (5x - 1)e^{2x}$  es el producto de un polinomio de grado uno, por la exponencial  $e^{2x}$ .

Es decir:  $g(x) = P_1(x)e^{2x} = P_1(x)e^{rx}$ , con  $r = 2$ .

Como  $r = 2$  no es raíz del polinomio característico ( $r^2 + 1$ ), entonces se propone como solución particular a:

$$y_p(x) = x^0(Ax + B)e^{2x} = (Ax + B)e^{2x},$$

donde  $A$  y  $B$  son coeficientes a determinar. Ahora,

$$y_p = (Ax + B)e^{2x} \Rightarrow y_p' = (2Ax + 2B + A)e^{2x} \Rightarrow y_p'' = (4Ax + 4B + 4A)e^{2x}$$

Sustituyendo en  $y_p'' + y_p = (5x - 1)e^{2x}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} (4Ax + 4B + 4A)e^{2x} + (Ax + B)e^{2x} &= (5x - 1)e^{2x} \\ (4Ax + 4B + 4A) + (Ax + B) &= (5x - 1) \\ (5A)x + (5B + 4A) &= 5x - 1 \end{aligned}$$

Hemos obtenido dos polinomios, los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales, por esto:

$$\begin{cases} 5A = 5 & \text{coeficientes de } x^1. \\ 5B + 4A = -1 & \text{coeficientes de } x^0 \text{ (términos constantes).} \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones que tiene por solución a:

$$A = 1 \quad \& \quad B = -1.$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = (x - 1)e^{2x}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$y = y_p(x) + y_c(x) = (x - 1)e^{2x} + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

□

**Ejemplo 4.6.9** Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' - 5y' + 4y = (12x - 5)e^{4x},$$

por el método de coeficientes indeterminados.

▼ Obtenemos primero la solución general de la homogénea asociada:

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Proponiendo  $y = e^{rx}$  se obtiene la ecuación característica:

$$r^2 - 5r + 4 = 0,$$

que tiene por soluciones a  $r = 1$  &  $r = 4$ , ambas de multiplicidad 1. Por lo tanto, la solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

Ahora se obtiene una solución particular  $y_p$  para la ED lineal

$$y'' - 5y' + 4y = (12x - 5)e^{4x}.$$

Aquí la función  $g(x) = (12x - 5)e^{4x}$  es el producto de un polinomio de grado uno, por la exponencial  $e^{4x}$ . Es decir:  $g(x) = P_1(x)e^{4x} = P_1(x)e^{rx}$ , con  $r = 4$ .

Como  $r = 4$  es una raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico ( $r^2 - 5r + 4$ ), entonces se propone como solución particular a:

$$y_p(x) = x^1(Ax + B)e^{4x} = x(Ax + B)e^{4x}.$$

con  $A$  y  $B$  coeficientes a determinar. Ahora,

$$\begin{aligned} y_p &= (Ax^2 + Bx)e^{4x} \Rightarrow y_p' = 4(Ax^2 + Bx)e^{4x} + (2Ax + B)e^{4x} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p'' &= 16(Ax^2 + Bx)e^{4x} + 8(2Ax + B)e^{4x} + (2A)e^{4x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = (12x - 5)e^{4x},$$

eliminando  $e^{4x}$ , simplificando y asociando términos con respecto a las potencias de  $x$ , se obtiene:

$$(6A)x + (2A + 3B) = 12x - 5.$$

Hemos obtenido dos polinomios, los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales, por esto:

$$\begin{cases} 6A = 12 & \text{coeficientes de } x^1. \\ 2A + 3B = -5 & \text{coeficientes de } x^0 \text{ (términos constantes).} \end{cases}$$

Lo anterior, es un sistema de ecuaciones que tiene por solución a:

$$A = 2 \quad \& \quad B = -3.$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = (2x^2 - 3x)e^{4x} = x(2x - 3)e^{4x}.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = y_p(x) + y_c(x) = (2x^2 - 3x)e^{4x} + c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

□

**Ejemplo 4.6.10** Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 4y = 2(9x - 2)e^{2x},$$

por el método de coeficientes indeterminados.

▼ Primero se obtiene la solución complementaria proponiendo  $y = e^{rx}$ :

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r - 2)^2 = 0.$$

Esta ecuación característica tiene por solución a  $r = 2$ , que es de multiplicidad 2.

Por lo tanto, la solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}.$$

Obtenemos ahora una solución particular  $y_p(x)$  para la ED lineal

$$y'' - 4y' + 4y = (18x - 4)e^{2x}.$$

Aquí la función  $g(x) = (18x - 4)e^{2x}$  es el producto de un polinomio de grado uno, por la exponencial  $e^{2x}$ .

Es decir:  $g(x) = P_1(x)e^{2x} = P_1(x)e^{rx}$ , con  $r = 2$ .

Como  $r = 2$  es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio característico ( $r^2 - 4r + 4$ ), entonces se propone como solución particular a:

$$y_p(x) = x^2(Ax + B)e^{2x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x},$$

con  $A$  y  $B$  coeficientes a determinar. Ahora,

$$\begin{aligned} y_p &= (Ax^3 + Bx^2)e^{2x} \Rightarrow y_p' = 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} + (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p'' &= 4(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} + 4(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + (6Ax + 2B)e^{2x} \end{aligned}$$

Sustituyendo en  $y_p'' - 4y_p' + 4y_p = (18x - 4)e^{2x}$ , eliminando  $e^{2x}$ , simplificando y asociando términos con respecto a las potencias de  $x$ , se obtiene:

$$(6A)x + (2B) = 18x - 4.$$

Hemos obtenido dos polinomios, los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales, por esto:

$$\begin{cases} 6A = 18 & \text{coeficientes de } x^1. \\ 2B = -4 & \text{coeficientes de } x^0 \text{ (términos constantes).} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = -2. \end{cases}$$

Entonces la solución particular es:

$$y_p(x) = x^2(3x - 2)e^{2x} = (3x^3 - 2x^2)e^{2x}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$y = y_p(x) + y_c(x) = (3x^3 - 2x^2)e^{2x} + (c_1 + c_2x)e^{2x} = (3x^3 - 2x^2 + c_1 + c_2x)e^{2x}.$$

□

**Ejemplo 4.6.11** Obtener la solución general de la ED:

$$y'' + 2y' + 5y = 19 \sin 2x + 8 \cos 2x,$$

por el método de coeficientes indeterminados.

▼ Obtenemos primero la solución complementaria proponiendo  $y = e^{rx}$ :

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y = 0 &\Rightarrow r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow r = -1 \pm 2i \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio característico son  $r_1 = -1 + 2i$  &  $r_2 = -1 - 2i$ , ambas de multiplicidad 1. Por lo tanto, la solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Determinamos a continuación una solución particular  $y_p(x)$  para la ED lineal

$$y'' + 2y' + 5y = 19 \sin 2x + 8 \cos 2x.$$

Aquí la función  $g(x) = 19 \sin 2x + 8 \cos 2x$  es una combinación lineal de  $\sin 2x$  &  $\cos 2x$ , que es una función relacionada con los números complejos  $r = 0 \pm 2i$ , que no son raíces del polinomio característico. Por esta razón se propone como solución particular a:

$$y_p(x) = A \sin 2x + B \cos 2x,$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes que debemos determinar. Ahora,

$$y_p = A \sin 2x + B \cos 2x \Rightarrow y_p' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x \Rightarrow y_p'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x.$$

Sustituyendo en  $y_p'' + 2y_p' + 5y_p = 19 \sin 2x + 8 \cos 2x$ , se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} -4A \sin 2x & - & 4B \cos 2x \\ -4B \sin 2x & + & 4A \cos 2x \\ 5A \sin 2x & + & 5B \cos 2x \\ \hline (A - 4B) \sin 2x & + & (4A + B) \cos 2x \end{array} = 19 \sin 2x + 8 \cos 2x$$

Hemos obtenido dos combinaciones lineales de las funciones  $\sin 2x$  y  $\cos 2x$ , que como hemos observado anteriormente son funciones linealmente independientes. Por lo tanto estas combinaciones lineales son iguales cuando sus coeficientes correspondientes son iguales, por esto:

$$\begin{cases} A - 4B = 19 & \text{coeficientes de } \sin 2x. \\ 4A + B = 8 & \text{coeficientes de } \cos 2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - 4B = 19 \\ 16A + 4B = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17A = 51 \\ B = 8 - 4A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -4 \end{cases}$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = 3 \sin 2x - 4 \cos 2x.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$y = y_p(x) + y_c(x) = 3 \sin 2x - 4 \cos 2x + e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

□

**Ejemplo 4.6.12** Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + 9y = 12 \cos 3x,$$

por el método de coeficientes indeterminados.

▼ Se obtiene primero la solución complementaria proponiendo  $y = e^{rx}$ :

$$y'' + 9y = 0 \Rightarrow r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i = 0 \pm 3i.$$

Las raíces del polinomio característico son  $r = 0 \pm 3i$ , ambas de multiplicidad 1.

La solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1 e^{0x} \cos 3x + c_2 e^{0x} \sin 3x = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

A continuación obtenemos una solución particular  $y_p(x)$  para la ED lineal:

$$y'' + 9y = 12 \cos 3x.$$

Aquí la función  $g(x) = 12 \cos 3x = 0 \sin 3x + 12 \cos 3x$  es una combinación lineal de  $\sin 3x$  &  $\cos 3x$ , que es una función relacionada con los números complejos  $r = 0 \pm 3i$ , que son raíces del polinomio característico de multiplicidad 1. Por esta razón se propone como solución particular a:

$$y_p(x) = x^1(A \sin 3x + B \cos 3x) = Ax \sin 3x + Bx \cos 3x.$$

Por lo que:

$$y_p' = (-3Bx + A) \sin 3x + (3Ax + B) \cos 3x \quad \& \quad y_p'' = (-9Ax - 6B) \sin 3x + (-9Bx + 6A) \cos 3x.$$

Al sustituir en  $y_p'' + 9y_p = 12 \cos 3x$ , se obtiene:

$$-6B \sin 3x + 6A \cos 3x = 12 \cos 3x.$$

Igualdad que se cumple cuando:  $A = 2$  y  $B = 0$

Entonces la solución particular es:  $y_p(x) = 2x \sin 3x$ . Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$y = y_p(x) + y_c(x) = 2x \sin 3x + c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

□

**Ejemplo 4.6.13** Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' - 2y' + 5y = -20e^x \sin 2x,$$

por el método de coeficientes indeterminados.

▼ Obtenemos primero la solución complementaria proponiendo  $y = e^{rx}$ :

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y = 0 &\Rightarrow r^2 - 2r + 5 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i. \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio característico son  $r = 1 \pm 2i$ , ambas de multiplicidad 1.

La solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Obtenemos ahora una solución particular  $y_p(x)$  para la lineal:

$$y'' - 2y' + 5y = -20e^x \sin 2x.$$

Aquí la función  $g(x) = -20e^x \sin 2x = -20e^x \sin 2x + 0e^x \cos 2x$  es una combinación lineal de  $e^x \sin 2x$  &  $e^x \cos 2x$ , que es una función relacionada con los números complejos  $r = 1 \pm 2i$ , que son raíces del polinomio característico de multiplicidad 1. Por esta razón se propone como solución particular a:

$$y_p(x) = x^1 (Ae^x \sin 2x + Be^x \cos 2x) = Ax e^x \sin 2x + Bx e^x \cos 2x.$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} y_p' &= (Ax - 2Bx + A)e^x \sin 2x + (2Ax + Bx + B)e^x \cos 2x, \\ y_p'' &= (-3Ax - 4Bx + 2A - 4B)e^x \sin 2x + (4Ax - 3Bx + 4A + 2B)e^x \cos 2x. \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación diferencial  $y_p'' - 2y_p' + 5y_p = -20e^x \sin 2x$ , se obtiene:

$$(-4B)e^x \sin 2x + (4A)e^x \cos 2x = -20e^x \sin 2x.$$

Que se cumple cuando

$$\begin{cases} -4B = -20, \\ 4A = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 5, \\ A = 0. \end{cases}$$

Entonces la solución particular es:  $y_p(x) = 5x e^x \cos 2x$ . Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = y_p(x) + y_c(x) = 5x e^x \cos 2x + e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

□

### Principio de superposición

Muchas ED son de la forma:

$$L[y] = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_m(x), \quad (4.20)$$

donde

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y$$

y  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$  son funciones arbitrarias.

En estos casos, pueden hallarse soluciones particulares para cada ecuación diferencial:

$$L[y] = g_j(x); \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Una vez hallada la correspondiente solución particular  $y_{p_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , puede demostrarse que la suma de todas ellas

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}$$

constituye una solución particular de (4.20).

A este procedimiento se le conoce como **principio de superposición**.

A continuación presentamos algunas ED que requieren del principio de superposición.

1.  $y'' + 4y = 2x^2 + 1 + e^x \cos x.$

Aquí,  $g_1(x) = 2x^2 + 1$  &  $g_2(x) = e^x \cos x.$

2.  $y'' - 4y' + y = 3xe^{2x} + \sen x.$

Aquí,  $g_1(x) = xe^{2x}$  &  $g_2(x) = \sen x.$

3.  $y''' - 2y'' + 4y' = x^2 + x \sen x + (2x - 2) \cos x.$

Aquí,  $g_1(x) = x^2$  &  $g_2(x) = x \sen x + (2x - 2) \cos x.$

4.  $y''' - y' = \sen x - 2 \cos 2x.$

Ahora, el hecho de que las funciones trigonométricas tengan diferente argumento nos obliga a considerar por separado  $g_1(x) = \sen x$  &  $g_2(x) = -2 \cos 2x.$

#### Ejercicios 4.6.1 Método de coeficientes indeterminados. *Soluciones en la página 470*

Por el método de coeficientes indeterminados encontrar una solución particular y escribir la solución general de cada ecuación diferencial.

1.  $y'' - y' - 2y = -2x^3 + x^2 + 4x + 1.$

2.  $y'' - y' - 2y = 16xe^{3x}.$

3.  $y'' - 5y' + 6y = 10 \sen 2x - 50 \cos 2x.$

4.  $y'' + 4y = (5x^2 + 4x - 3)e^x.$

5.  $4y'' - 4y' + y = (-3x + 4) \sen x - 2(2x - 1) \cos x.$

6.  $y'' + y' = 3.$

7.  $y'' + 4y' + 4y = 2(x + 3).$

8.  $y'' - y' - 12y = e^{4x}.$

9.  $y'' + 25y = 6 \sen x.$

10.  $y'' - 2y' + 5y = e^x \sen x.$

11.  $y'' - y = x^2 e^x.$

12.  $y'' + 25y = 20 \operatorname{sen} 5x$ .
13.  $y'' + y' + y = x \operatorname{sen} x$ .
14.  $y'' - y' = (3x^2 + 6x + 1)e^x$ .
15.  $x''(t) + x(t) = 2 \operatorname{sen} t$ .
16.  $y'' - 2y' - 8y = (12x - 10)e^{4x}$ .
17.  $y'' - 4y' + 4y = (18x - 4)e^{2x}$ .
18.  $y'' + 12y' + 100y = 48 \operatorname{sen} 10t$ .
19.  $4y'' - 12y' + 9y = 17 \operatorname{sen} 2x - 31 \cos 2x$ .
20.  $y'' - 5y' + 6y = (3 - 2x)e^{2x}$ .

## 4.7 Variación de parámetros

### 4.7.1 Variación de parámetros para ED de orden 2

El método que presentamos en esta sección, llamado de variación de parámetros es un procedimiento útil y más general que el anterior para la obtención de una solución particular  $y_p(x)$  de la ED lineal no homogénea y se basa en el conocimiento de la solución general de la ED lineal homogénea asociada a la ED original.

Presentamos primeramente este método para las ED lineales de segundo orden. Diremos que el método de variación de parámetros se usa para obtener una solución particular  $y_p(x)$  de la ED lineal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (1)$$

a partir del conocimiento de la solución general de la ED lineal homogénea asociada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (2)$$

Si suponemos que la solución general de la ED lineal homogénea (2) está dada por la combinación lineal

$$\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x),$$

esto significa que  $\phi_1(x)$  &  $\phi_2(x)$  son soluciones de la ED (2) y además su Wronskiano  $W[\phi_1(x), \phi_2(x)] \neq 0$  en todo el intervalo  $(\alpha, \beta)$  donde las funciones  $p(x)$  &  $q(x)$  son continuas. Es decir,  $\phi_1(x)$  &  $\phi_2(x)$  forman un conjunto fundamental de soluciones para la ED (2).

Supongamos pues que  $\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$  es la solución general de  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ .

El método de variación de parámetros propone que la solución particular  $y_p(x)$  tenga la misma forma que  $\phi(x)$ , pero permitiendo cambiar  $c_1$  y  $c_2$ . Esto es, propone que  $y_p(x)$  sea

$$y_p(x) = u_1\phi_1(x) + u_2\phi_2(x),$$

donde  $u_1$  &  $u_2$  son funciones de  $x$  desconocidas. Para determinarlas procedemos de la siguiente manera: ¿Cómo determinar a las funciones  $u_1$  &  $u_2$ ? Para lograr determinarlas buscaremos qué condiciones deben cumplir para que la función propuesta  $y_p$  sea solución de la ED (1). Lo primero que necesitamos hacer es calcular las derivadas  $y'_p, y''_p$  para sustituirlas en (1) y ver cuales propiedades deben cumplir  $u_1, u_2$ :

$$y_p = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 \Rightarrow y'_p = u'_1\phi_1 + u_1\phi'_1 + u'_2\phi_2 + u_2\phi'_2. \quad (3)$$

Antes de obtener  $y''_p$ , suponemos que:

$$u'_1\phi_1 + u'_2\phi_2 = 0.$$

Esto se hace con la finalidad de que en la expresión de  $y''_p$  no aparezcan  $u''_1$  &  $u''_2$ , ya que la inclusión de estas segundas derivadas en  $y''_p$  haría mucho más compleja la obtención de las funciones  $u_1$  &  $u_2$ .



Se tiene entonces que usando la condición anterior en (3):

$$y_p' = u_1\phi_1' + u_2\phi_2',$$

por lo cual, al volver a derivar, obtenemos:

$$y_p'' = u_1'\phi_1' + u_1\phi_1'' + u_2'\phi_2' + u_2\phi_2''.$$

Ahora bien,  $y_p$  es solución de la ED lineal  $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$  sólo si se cumple que:

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = g(x),$$

Esta condición, al sustituir las expresiones obtenidas de  $y_p$ ,  $y_p'$  &  $y_p''$  nos da:

$$\underbrace{[u_1'\phi_1' + u_1\phi_1'' + u_2'\phi_2' + u_2\phi_2'']}_{y_p''} + p(x)\underbrace{[u_1\phi_1' + u_2\phi_2']}_{y_p'} + q(x)\underbrace{[u_1\phi_1 + u_2\phi_2]}_{y_p} = g(x)$$

Al factorizar  $u_1$  y  $u_2$ :

$$u_1'\phi_1' + u_1[\phi_1'' + p(x)\phi_1' + q(x)\phi_1] + u_2'\phi_2' + u_2[\phi_2'' + p(x)\phi_2' + q(x)\phi_2] = g(x)$$

Pero por ser  $\phi_1$  &  $\phi_2$  soluciones de la ED homogénea se cumple:

$$\phi_1'' + p(x)\phi_1' + q(x)\phi_1 = 0 \quad \& \quad \phi_2'' + p(x)\phi_2' + q(x)\phi_2 = 0,$$

Entonces debe cumplirse que

$$u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' = g(x)$$

Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' = 0 \\ u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' = g(x). \end{cases} \quad (4)$$

El determinante  $\Delta s$  del sistema es

$$\Delta s = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix} = W(\phi_1, \phi_2).$$

Y debido a que el Wronskiano  $W(\phi_1, \phi_2)(x) \neq 0$  entonces  $\Delta s \neq 0$ , por lo que el sistema de ecuaciones tiene una única solución. Dicha solución única es por la regla de Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \phi_2 \\ g(x) & \phi_2' \end{vmatrix}}{\Delta s} = \frac{-g(x)\phi_2}{W(\phi_1, \phi_2)} \Rightarrow u_1'(x) = -\frac{g(x)\phi_2(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))}.$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_1' & g(x) \end{vmatrix}}{\Delta s} = \frac{g(x)\phi_1}{W(\phi_1, \phi_2)} \Rightarrow u_2'(x) = \frac{g(x)\phi_1(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))}.$$

De donde obtenemos  $u_1$  &  $u_2$  mediante integración

$$u_1 = -\int \frac{g(x)\phi_2(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))} dx \quad \& \quad u_2 = \int \frac{g(x)\phi_1(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))} dx.$$

Sustituyendo  $u_1(x)$  &  $u_2(x)$  en  $y_p(x)$  se tiene que la solución particular de la lineal es

$$y_p(x) = \phi_1(x) \int \frac{-g(x)\phi_2(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))} dx + \phi_2(x) \int \frac{g(x)\phi_1(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))} dx. \quad (5)$$

Finalmente, podemos escribir la solución general de la ED lineal como

$$y(x) = y_p(x) + \phi(x);$$

$$y(x) = y_p(x) + [c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)].$$

con la  $y_p(x)$  obtenida previamente.

**Ejemplo 4.7.1**

Utilizando el método de variación de parámetros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ED lineal:

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x},$$

considerando que  $y_1 = x^2$  &  $y_2 = x^3$  forman un conjunto fundamental de soluciones para la ED homogénea asociada:

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

▼ Sea  $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$  una solución particular.

Entonces:

$$y_p = u_1 x^2 + u_2 x^3 \Rightarrow y'_p = u'_1 x^2 + 2u_1 x + u'_2 x^3 + 3u_2 x^2.$$

Suponiendo que:

$$u'_1 x^2 + u'_2 x^3 = 0, \quad (A)$$

se tiene que:

$$y'_p = 2u_1 x + 3u_2 x^2 \quad \& \quad y''_p = 2u'_1 x + 2u_1 + 3u'_2 x^2 + 6u_2 x.$$

Sustituyendo en la ED normalizada:

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = \frac{1}{x^3},$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} (2u'_1 x + 2u_1 + 3u'_2 x^2 + 6u_2 x) - \frac{4}{x}(2u_1 x + 3u_2 x^2) + \frac{6}{x^2}(u_1 x^2 + u_2 x^3) &= \frac{1}{x^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2xu'_1 + u_1(2 - 8 + 6) + 3x^2u'_2 + u_2(6x - 12x + 6x) &= \frac{1}{x^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2xu'_1 + 3x^2u'_2 &= \frac{1}{x^3}. \end{aligned} \quad (B)$$

Entonces  $u'_1$  &  $u'_2$  satisfacen el sistema formado por las ecuaciones (A) y (B)

$$\begin{cases} x^2 u'_1 + x^3 u'_2 = 0 \\ 2x u'_1 + 3x^2 u'_2 = x^{-3} \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4.$$

La solución del sistema es

$$\begin{aligned} u'_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ x^{-3} & 3x^2 \end{vmatrix}}{W} = \frac{-1}{x^4} = -x^{-4}. \\ u'_2 &= \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & x^{-3} \end{vmatrix}}{W} = \frac{x^{-1}}{x^4} = x^{-5}. \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\int x^{-4} dx = -\frac{x^{-3}}{-3} + C_1 = \frac{1}{3}x^{-3} + C_1. \\ u_2 &= \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C_2 = -\frac{1}{4}x^{-4} + C_2. \end{aligned}$$

Tomando  $C_1 = 0$  y  $C_2 = 0$  obtenemos  $u_1 = \frac{1}{3}x^{-3}$  y  $u_2 = -\frac{1}{4}x^{-4}$ . Así una solución particular es:

$$y_p = u_1 x^2 + u_2 x^3 = \frac{1}{3}x^{-3}x^2 - \frac{1}{4}x^{-4}x^3 = \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{4}x^{-1} = \frac{1}{12}x^{-1}.$$

Entonces la solución general de la ED lineal es:

$$y = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Rightarrow y = \frac{1}{12}x^{-1} + c_1 x^2 + c_2 x^3.$$

□

### Ejemplo 4.7.2

Utilizando el método de variación de parámetros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ED lineal:

$$x^2 y'' - xy' + y = 4x \ln x,$$

considerando que  $y_1 = x$  &  $y_2 = x \ln x$  forman un conjunto fundamental de soluciones para la ED homogénea asociada:

$$x^2 y'' - xy' + y = 0.$$

▼ Sea  $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$  una solución particular propuesta por este método:

Entonces:

$$y_p = u_1 x + u_2 x \ln x \quad \& \quad y'_p = u'_1 x + u_1 + u'_2 x \ln x + u_2(1 + \ln x).$$

Imponiendo la condición:

$$u'_1 x + u'_2 x \ln x = 0, \tag{C}$$

resulta

$$y'_p = u_1 + u_2(1 + \ln x) \quad \& \quad y''_p = u'_1 + u'_2(1 + \ln x) + u_2 \left( \frac{1}{x} \right).$$

Sustituyendo estas expresiones en la ED normalizada:

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{4}{x} \ln x,$$

se obtiene:

$$\left[ u'_1 + u'_2(1 + \ln x) + u_2 \frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x} [u_1 + u_2(1 + \ln x)] + u_1 \frac{1}{x} + u_2 \frac{1}{x} \ln x = \frac{4}{x} \ln x \Rightarrow$$

factorizamos  $u_1$  &  $u_2$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow u'_1 + u'_2(1 + \ln x) + u_2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} \ln x \right) + u_1 \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) &= \frac{4}{x} \ln x \Rightarrow \\ \Rightarrow u'_1 + (1 + \ln x)u'_2 &= \frac{4}{x} \ln x. \end{aligned} \tag{D}$$

Entonces  $u'_1$  y  $u'_2$  satisfacen el sistema conformado por las ecuaciones (C) y (D).

$$\begin{cases} x u'_1 + (x \ln x) u'_2 = 0 \\ u'_1 + (1 + \ln x) u'_2 = 4x^{-1} \ln x \end{cases}$$

El determinante del sistema es:

$$W = \begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & 1 + \ln x \end{vmatrix} = x + x \ln x - x \ln x = x.$$

La solución del sistema es:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \ln x \\ 4x^{-1} \ln x & 1 + \ln x \end{vmatrix}}{W} = -4x^{-1}(\ln x)^2.$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 4x^{-1} \ln x \end{vmatrix}}{W} = 4x^{-1} \ln x.$$

Integrando:

$$u_1 = -4 \int x^{-1}(\ln x)^2 dx = -4 \int (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = -\frac{4}{3}(\ln x)^3 + C_1.$$

$$u_2 = 4 \int x^{-1} \ln x dx = 4 \int (\ln x) \frac{dx}{x} = 2(\ln x)^2 + C_2.$$

Tomando simplemente  $u_1 = -\frac{4}{3}(\ln x)^3$  &  $u_2 = 2(\ln x)^2$  se tiene que una solución particular es:

$$y_p = u_1 x + u_2 x \ln x = -\frac{4}{3}(\ln x)^3 x + 2(\ln x)^2 x \ln x \Rightarrow y_p(x) = \frac{2}{3}x(\ln x)^3.$$

Entonces la solución general de la ED está dada:

$$y = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x(\ln x)^3 + c_1 x + c_2 x \ln x.$$

□

### Ejemplo 4.7.3

Utilizando el método de variación de parámetros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ED lineal:

$$y'' + y = \sec^2 x.$$

▼ Primero se obtiene un conjunto fundamental de soluciones para la ED homogénea asociada:

$$y'' + y = 0.$$

Proponiendo  $y = e^{rx}$  para resolver la ED homogénea, se obtiene:

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{-1} = 0 \pm 1i.$$

Entonces:

$$\begin{cases} y_1 = e^{0x} \operatorname{sen} 1x = \operatorname{sen} x. \\ y_2 = e^{0x} \cos 1x = \cos x. \end{cases}$$

Estas dos funciones forman un conjunto fundamental de soluciones de la ED homogénea asociada. Se propone como solución particular:

$$y_p = u_1 \operatorname{sen} x + u_2 \cos x,$$

se obtiene:

$$y_p' = u_1' \operatorname{sen} x + u_1 \cos x + u_2' \cos x - u_2 \operatorname{sen} x.$$

Suponiendo:

$$u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = 0, \tag{E}$$

se tiene:

$$y_p' = u_1 \cos x - u_2 \operatorname{sen} x \quad \& \quad y_p'' = u_1' \cos x - u_1 \operatorname{sen} x - u_2' \operatorname{sen} x - u_2 \cos x.$$

Sustituyendo en

$$y_p'' + y_p = \sec^2 x,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} (u_1' \cos x - u_1 \sin x - u_2' \sin x - u_2 \cos x) + (u_1 \sin x + u_2 \cos x) &= \sec^2 x \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1' \cos x - u_2' \sin x &= \sec^2 x \end{aligned} \quad (F)$$

De este modo  $u_1'$  y  $u_2'$  satisfacen el sistema formado por (E) y (F):

$$\begin{cases} u_1' \sin x + u_2' \cos x = 0. \\ u_1' \cos x - u_2' \sin x = \sec^2 x. \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \Rightarrow W = -1.$$

La solución del sistema es:

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \sec^2 x & -\sin x \end{vmatrix}}{W} = \frac{-\sec^2 x \cos x}{-1} = \sec x. \\ u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \sec^2 x \end{vmatrix}}{W} = \frac{\sin x \sec^2 x}{-1} = -\sin x \sec^2 x. \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \sec x \, dx = \ln(\sec x + \tan x) + C \\ u_2 &= -\int \sin x \sec^2 x \, dx = -\int \sec x \tan x \, dx = -\sec x + C. \end{aligned}$$

Tomando  $u_1 = \ln(\sec x + \tan x)$  &  $u_2 = -\sec x$ ; se tiene que, una solución particular es:

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 \sin x + u_2 \cos x \Rightarrow y_p = (\sin x) \ln(\sec x + \tan x) - (\sec x) \cos x \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p &= (\sin x) \ln(\sec x + \tan x) - 1. \end{aligned}$$

Entonces la solución general es:

$$y = (\sin x) \ln(\sec x + \tan x) - 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

□

#### Ejemplo 4.7.4

Utilizando el método de variación de parámetros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ED lineal:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^x}.$$

▼ Primero se obtiene un conjunto fundamental de soluciones para la ED homogénea asociada:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

proponemos  $y = e^{rx}$  y se obtiene:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ & } r_2 = 2,$$

entonces

$$y_1 = e^x \quad \& \quad y_2 = e^{2x},$$

son funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones.

Se propone como solución particular:

$$y_p = u_1 e^x + u_2 e^{2x},$$

y se obtiene:

$$y_p' = u_1' e^x + u_1 e^x + u_2' e^{2x} + 2u_2 e^{2x}.$$

Suponiendo

$$u_1' e^x + u_2' e^{2x} = 0, \quad (G)$$

se tiene

$$y_p' = u_1 e^x + 2u_2 e^{2x} \quad \& \quad y_p'' = u_1' e^x + u_1 e^x + 2u_2' e^{2x} + 4u_2 e^{2x}.$$

Sustituyendo en

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = \frac{e^{3x}}{1 + e^x},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} (u_1' e^x + u_1 e^x + 2u_2' e^{2x} + 4u_2 e^{2x}) - 3(u_1 e^x + 2u_2 e^{2x}) + 2(u_1 e^x + u_2 e^{2x}) &= \frac{e^{3x}}{1 + e^x} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1' e^x + u_1 e^x(1 - 3 + 2) + 2u_2' e^{2x} + u_2 e^{2x}(4 - 6 + 2) &= \frac{e^{3x}}{1 + e^x} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1' e^x + 2u_2' e^{2x} &= \frac{e^{3x}}{1 + e^x}. \end{aligned} \quad (H)$$

Entonces  $u_1'$  y  $u_2'$  debe satisfacer el sistema formado por (G) y (H):

$$\begin{cases} e^x u_1' + e^{2x} u_2' = 0. \\ e^x u_1' + 2e^{2x} u_2' = \frac{e^{3x}}{1 + e^x}. \end{cases}$$

El determinante del sistema es:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \Rightarrow W = e^{3x}.$$

La solución del sistema es:

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \frac{e^{3x}}{1 + e^x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{-e^{2x} e^{3x}}{e^{3x}(1 + e^x)} = -\frac{e^{2x}}{1 + e^x}. \\ u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^{3x}}{1 + e^x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{e^x e^{3x}}{e^{3x}(1 + e^x)} = \frac{e^x}{1 + e^x}. \end{aligned}$$

Integrando:

$$u_1 = -\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx \quad \& \quad u_2 = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$$

Utilizando el cambio de variable  $t = 1 + e^x$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= \ln(1 + e^x) - (1 + e^x) + C_1. \\ u_2 &= \ln(1 + e^x) + C_2. \end{aligned}$$

Tomando  $u_1 = \ln(1 + e^x) - (1 + e^x)$  &  $u_2 = \ln(1 + e^x)$ , se obtiene la solución particular:

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 e^x + u_2 e^{2x} = \\ &= [\ln(1 + e^x) - (1 + e^x)]e^x + [\ln(1 + e^x)]e^{2x} = \\ &= e^x \ln(1 + e^x) + e^{2x} \ln(1 + e^x) - e^x(1 + e^x) = \\ &= [e^x \ln(1 + e^x)][1 + e^x] - e^x(1 + e^x) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p(x) &= e^x(1 + e^x)[\ln(1 + e^x) - 1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$y = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Rightarrow y = e^x(1 + e^x)[\ln(1 + e^x) - 1] + c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

□

De acuerdo a lo discutido en esta sección, una solución particular  $y_p$  de la ED lineal *normalizada*:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

tiene la forma:

$$y_p(x) = u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_2(x)$$

donde  $\{\phi_1(x), \phi_2(x)\}$  es un conjunto fundamental de soluciones de la ED homogénea asociada:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

y las funciones  $u_1$  &  $u_2$  se obtienen integrando, respectivamente, a las funciones  $u'_1$  &  $u'_2$ , que son soluciones del sistema

$$\begin{cases} \phi_1 u'_1 + \phi_2 u'_2 = 0 \\ \phi'_1 u'_1 + \phi'_2 u'_2 = g(x) \end{cases}$$

el cual resolvemos por el método de Cramer. Aún más:

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} \quad \& \quad u'_2 = \frac{W_2}{W}$$

donde  $W = W[\phi_1(x), \phi_2(x)] \neq 0$  (para toda  $x$  en el intervalo donde  $p(x)$  &  $q(x)$  sean continuas) y  $W_1$  &  $W_2$  están dadas mediante un determinante en el que se sustituye la columna 1 & 2, respectivamente, de  $W$  por la columna:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Es conveniente señalar las fortalezas y debilidades de este método en comparación con el método de coeficientes indeterminados, tratado en la sección anterior.

1. El método de coeficientes indeterminados es en muchos casos más sencillo y fácil de aplicar que el de variación de parámetros, pero tiene esta limitación: sólo es aplicable cuando  $g(x)$  tiene la forma de un polinomio, exponencial, combinación lineal de senos y cosenos o una suma de las funciones mencionadas.
2. El método de variación de parámetros en cambio es aplicable en principio para *cualquier* función  $g(x)$  y en este sentido es mucho más general. Además se puede usar para ED lineales aún cuando no sean de coeficientes constantes. Lo único que se necesita es contar con un conjunto fundamental de soluciones  $\{\phi_1, \phi_2\}$ . Esta generalidad del método tiene un costo, puesto que obtener una solución particular  $y_p$  es necesario calcular las integrales:

$$u_1 = \int -\frac{\phi_2(x)g(x)}{W(x)} dx \quad \& \quad u_2 = \int \frac{\phi_1(x)g(x)}{W(x)} dx.$$

Estas integrales pueden ser muy complicadas de resolver.

**Ejercicios 4.7.1** Variación de parámetros para ED de orden 2. *Soluciones en la página 471*

Utilizando variación de parámetros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial dada. Considerar que las funciones  $y_1 = y_1(x)$  &  $y_2 = y_2(x)$  forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea asociada.

1.  $x^2 y'' - 6xy' + 10y = -8x^3$ ;  $y_1 = x^2$  &  $y_2 = x^5$

2.  $x^2 y'' - xy' - 3y = -30\sqrt{x}$ ;  $y_1 = x^3$  &  $y_2 = \frac{1}{x}$

3.  $-x^2 y'' + xy' + 8y = \frac{65}{\sqrt[3]{x}}$ ;  $y_1 = x^4$  &  $y_2 = x^{-2}$

4.  $x^2 y'' + 8xy' + 12y = \frac{6}{x^2}$ ;  $y_1 = x^{-3}$  &  $y_2 = x^{-4}$

5.  $x^2 y'' - 6xy' + 10y = 4x \ln x - 5x$ ;  $y_1 = x^5$  &  $y_2 = x^2$

Utilizando variación de parámetros, determinar una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial dada.

6.  $y'' - y = e^x$

7.  $y'' - y = e^{-x}$

8.  $y'' + y = \operatorname{sen} x$

9.  $y'' + y = \cos x$

10.  $y'' - 2y' + y = 6xe^x$

11.  $y'' + 2y' + y = 12xe^{-x}$

12.  $y'' + y = \tan x$

13.  $y'' + 4y = 4 \sec 2x$

14.  $y'' + 9y = 9 \sec 3x \tan 3x$

15.  $y'' - y = e^{-2x} \operatorname{sen} e^{-x}$

16.  $y'' + 4y = \operatorname{sen}^2 2x$

17.  $y'' + 4y = \cos^2 2x$

18.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

19.  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

20.  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$



### 4.7.2 Variación de parámetros para ED de orden $n$

#### Descripción del método general

Una vez discutido el método de variación de parámetros para ecuaciones diferenciales de orden 2, en esta sección extenderemos dicho método a ecuaciones diferenciales de orden  $n$  para  $n > 2$ . Así, consideraremos el caso de la ED lineal no homogénea normalizada:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x) \quad (4.21)$$

cuya ED homogénea asociada es:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0 \quad (4.22)$$

Suponemos conocido el conjunto fundamental de soluciones:

$$\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\}$$

con el cual podemos formar la solución general de la ecuación (4.22),

$$\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x). \quad (4.23)$$

En lo que sigue, supondremos también que las funciones  $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$  &  $g(x)$  son continuas en el intervalo  $(\alpha, \beta)$  donde el conjunto de funciones  $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\}$  satisface:

$$W[\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)] = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ para todo } x \in (\alpha, \beta)$$

Como vimos en la sección anterior, el método se apoya en la idea de que las constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  de la ecuación (??) las podemos reemplazar por un conjunto de funciones indeterminadas  $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$  por conocer, que permiten generar una solución particular

$$y_p(x) = u_1(x)\phi_1(x) + u_2(x)\phi_2(x) + \cdots + u_n(x)\phi_n(x) \quad (4.24)$$

de la ecuación (4.21). Como queremos determinar  $n$  funciones, es de esperarse que debemos imponer  $n$  condiciones a las funciones  $u_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Es claro que una de las condiciones debe ser sin lugar a dudas el cumplimiento de la ecuación (4.21).

La idea central de este método radica en no resolver para las funciones  $u_j(x)$  ecuaciones diferenciales que sean de orden mayor que 1, es decir, buscaremos las restantes  $n - 1$  condiciones de manera que nunca tengamos que considerar alguna relación en la que intervenga alguna derivada  $u_j^{(k)}(x)$  para  $k > 1$ .

Con esto en mente, a partir de (4.24) obtenemos al derivar:

$$y_p' = [u_1\phi_1' + u_2\phi_2' + \cdots + u_n\phi_n'] + [u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 + \cdots + u_n'\phi_n]$$

Para asegurar de que no aparezca alguna  $u_j''(x)$ , al calcular la segunda derivada, requerimos que en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ :

$$u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 + \cdots + u_n'\phi_n = 0. \quad (4.25)$$

Entonces, tenemos ahora:

$$y_p' = u_1\phi_1' + u_2\phi_2' + \cdots + u_n\phi_n'.$$

Por lo tanto,

$$y_p'' = [u_1\phi_1'' + u_2\phi_2'' + \cdots + u_n\phi_n''] + [u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' + \cdots + u_n'\phi_n'].$$

Por la misma razón que expusimos anteriormente, ahora planteamos la condición:

$$u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' + \cdots + u_n'\phi_n' = 0. \quad (4.26)$$

De donde se desprende que:

$$y_p'' = u_1\phi_1'' + u_2\phi_2'' + \cdots + u_n\phi_n'' \quad (4.27)$$

Si proseguimos de la misma manera, determinaremos que se deben cumplir las relaciones:

$$u_1'\phi_1^{(h)} + u_2'\phi_2^{(h)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(h)} = 0, \quad h = 0, 1, 2, \dots, n-2, \quad (4.28)$$

y

$$y_p^{(k)} = u_1\phi_1^{(k)} + u_2\phi_2^{(k)} + \cdots + u_n\phi_n^{(k)} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.29)$$

Finalmente, si para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  sustituimos las relaciones (4.29) en (4.21), hallamos:

$$\underbrace{u_1\phi_1^{(n)} + \cdots + u_n\phi_n^{(n)} + u_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)}}_{y_p^{(n)}} + a_{n-1} \underbrace{[u_1\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n\phi_n^{(n-1)}]}_{y_p^{(n-1)}} + \cdots + a_0 \underbrace{[u_1\phi_1 + \cdots + u_n\phi_n]}_{y_p} = g(x) \quad (4.30)$$

Ahora reacomodamos la ecuación (4.30) factorizando  $u_1, u_2 \cdots u_n$ :

$$u_1[\phi_1^{(n)} + a_{n-1}\phi_1^{(n-1)} + \cdots + a_0\phi_1] + \cdots + u_n[\phi_n^{(n)} + a_{n-1}\phi_n^{(n-1)} + \cdots + a_0\phi_n] + [u_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)}] = g(x). \quad (4.31)$$

Observamos que como cada una de las funciones del conjunto  $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\}$  satisface la ecuación (4.22), todos los términos en (4.31) son iguales a cero con excepción del último; esto permite llegar a la conclusión de que:

$$u_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)} = g(x) \quad (4.32)$$

Al reunir todas las condiciones indicadas en (4.28) junto con la ecuación (4.32), concluimos que las funciones incógnitas  $u_1', \dots, u_n'$  satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases} u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 + \cdots + u_n'\phi_n = 0 \\ u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' + \cdots + u_n'\phi_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1'\phi_1^{(n-2)} + u_2'\phi_2^{(n-2)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-2)} = 0 \\ u_1'\phi_1^{(n-1)} + u_2'\phi_2^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)} = g(x) \end{cases} \quad (4.33)$$

Ahora bien, como indicamos anteriormente:

$$W[\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)] \neq 0, \quad \text{para todo } x \in (\alpha, \beta)$$

Por lo tanto, considerando (4.33) como un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas  $u_1', \dots, u_n'$ , podemos utilizar la regla de Cramer para obtener la solución única para  $u_1', \dots, u_n'$ . Obtenemos:

$$u_k' = \frac{W_k}{W[\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)]} = \frac{W_k}{W}; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.34)$$

Donde  $W_k$  difiere de  $W[\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)] = W$  en que tiene, como columna  $k$ -ésima, a la columna:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Las funciones  $W = W(x)$  y  $W_k = W_k(x)$  son continuas, en consecuencia que las expresiones  $u'_k = \frac{W_k}{W}$  son integrables, e integrando se determinan las funciones incógnitas  $u_1(x), \dots, u_n(x)$ .

Finalmente observe que si en lugar de la ecuación diferencial (1), tuviéramos:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = b(x)$$

(es decir, si  $a_n(x)$  no es idénticamente igual a 1), entonces hay que poner  $g(x) = \frac{b(x)}{a_n(x)}$  en lugar de  $g(x)$  en la última ecuación de (4.33). En otras palabras, hay que normalizar la ED.

A continuación ejemplificamos lo anterior.

**Ejemplo 4.7.5** Resolver la ED:  $y^{(3)} + 4y' = \cot 2x$ .

▼ Primero observamos que esta ecuación diferencial no puede ser resuelta por medio del método de coeficientes indeterminados debido a la presencia de la función cotangente. La ED ya está normalizada ya que el coeficiente de la mayor derivada de la ecuación es igual a 1.

Para la solución, determinamos en primer lugar la ecuación característica correspondiente a la ED asociada, ésta es:

$$r^3 + 4r = r(r^2 + 4) = 0.$$

Las raíces de esta ecuación algebraica son:  $r_1 = 0$ ;  $r_{2,3} = \pm 2i$ . Por lo tanto, el conjunto fundamental de soluciones está integrado por las funciones:

$$\phi_1 = 1, \phi_2 = \cos 2x \text{ \& } \phi_3 = \sin 2x.$$

El Wronskiano  $W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  es:

$$\begin{aligned} W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \\ 0 & -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \\ 0 & -4 \cos 2x & -4 \sin 2x \end{vmatrix} = 8 \sin^2 2x + 8 \cos^2 2x = \\ &= 8[\sin^2 2x + \cos^2 2x] = 8. \end{aligned}$$

De acuerdo a lo discutido en el procedimiento general, requerimos hallar  $W_1, W_2$  y  $W_3$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \cos 2x & \sin 2x \\ 0 & -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \\ \cot 2x & -4 \cos 2x & -4 \sin 2x \end{vmatrix} = \cot 2x[2 \cos^2 2x + 2 \sin^2 2x] = 2 \cot 2x. \\ W_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin 2x \\ 0 & 0 & 2 \cos 2x \\ 0 & \cot 2x & -4 \sin 2x \end{vmatrix} = -\cot 2x[2 \cos 2x] = -2 \cot 2x \cos 2x. \end{aligned}$$

y

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 0 \\ 0 & -2 \sin 2x & 0 \\ 0 & -4 \cos 2x & \cot 2x \end{vmatrix} = -2 \sin 2x \cot 2x = -2 \cos 2x.$$

De esta manera, obtenemos para  $u_1, u_2$  y  $u_3$  las siguientes expresiones:

Para  $u_1$ :

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W} dx = \int \frac{2 \cot 2x}{8} dx = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \right) \ln(\sin 2x) = \frac{1}{8} \ln(\sin 2x).$$

Para  $u_2$ :

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \int \frac{W_2}{W} dx = \int \frac{-2 \cot 2x \cos 2x}{8} dx = \\
 &= -\frac{1}{4} \int \frac{\cos^2 2x}{\sin 2x} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1 - \sin^2 2x}{\sin 2x} dx = \\
 &= -\frac{1}{4} \left[ \int \csc 2x dx - \int \sin 2x dx \right] = \\
 &= -\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \ln(\csc 2x - \cot 2x) + \frac{1}{2} \cos 2x \right] = \\
 &= -\frac{1}{8} \ln(\csc 2x - \cot 2x) - \frac{1}{8} \cos 2x.
 \end{aligned}$$

Finalmente para  $u_3$ :

$$u_3 = \int \frac{W_3}{W} dx = \int \frac{-2 \cos 2x}{8} dx = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \right) \sin 2x = -\frac{1}{8} \sin 2x.$$

Estamos ahora listos para obtener la solución general la cual, como sabemos, resulta sumando la solución complementaria y la solución particular que calculamos con del método de variación de parámetros. De esta manera la solución general de la ED es:

$$\begin{aligned}
 y &= [c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + c_3 \phi_3] + [u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2 + u_3 \phi_3] = \\
 &= c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + \\
 &+ \frac{1}{8} \ln(\sin 2x) - \frac{1}{8} \ln(\csc 2x - \cot 2x) \cos 2x - \underbrace{\frac{1}{8} \cos^2 2x - \frac{1}{8} \sin^2 2x}_{=-\frac{1}{8}} = \\
 &= c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + \frac{1}{8} \ln(\sin 2x) - \frac{1}{8} \ln(\csc 2x - \cot 2x) \cos 2x.
 \end{aligned}$$

□

### La ecuación diferencial de Cauchy-Euler

El ejemplo anterior muestra cómo generar una solución particular y la consecuente solución general de la ED por el método de variación de parámetros si tan sólo se conoce el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada. Hay que decir que tuvimos a nuestro favor que la ecuación homogénea es de coeficientes constantes, característica que facilitó la determinación del conjunto fundamental.

Si los coeficientes no son constantes, la tarea puede resultar más compleja con excepción de algunos casos particulares, como el que discutimos a continuación.

- La ED de Cauchy-Euler de orden 3 tiene la siguiente forma general:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x); \text{ donde } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ son constantes.}$$

La ED de Cauchy-Euler de orden 3 tiene la siguiente forma:

$$a_3 x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x). \quad (4.35)$$

Este tipo de ED se puede reducir a una ED de coeficientes constantes si se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = e^t$$

Derivamos usando la regla de la cadena:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{d}{dt}(e^t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-t} \frac{dy}{dt}.$$

Es decir

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}. \quad (4.36)$$

Al calcular la segunda derivada obtenemos:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \left( e^{-t} \frac{dy}{dt} \right)}{\frac{d}{dt}(e^t)} = \\ &= \frac{e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2} - e^{-t} \frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

Es decir

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right). \quad (4.37)$$

Para la tercera derivada encontramos que:

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \left[ e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right]}{\frac{d}{dt}(e^t)} = \\ &= \frac{e^{-2t} \left( \frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) - 2e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)}{e^t} = e^{-3t} \left( \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

Es decir

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = e^{-3t} \left( \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right). \quad (4.38)$$

Al sustituir (4.36), (4.37) y (4.38) en ((4.35)) y tomando en consideración que  $x^{-1} = e^{-t}$  obtenemos una ED con coeficientes constantes y variable independiente  $t$ .

**Ejemplo 4.7.6** Resolver la ED:  $x^3 y^{(3)} + 3x^2 y'' - 3xy' = x \ln x$ .

▼ Si sustituimos (4.36), (4.37) y (4.38) en la ED, obtenemos:

$$e^{3t} \left[ e^{-3t} \left( \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) \right] + 3e^{2t} \left[ e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] - 3e^t \left[ e^{-t} \frac{dy}{dt} \right] = e^t \ln e^t.$$

Que se simplifica en:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} - 3 \frac{dy}{dt} = te^t,$$

o bien en

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 4 \frac{dy}{dt} = te^t.$$

Esta es una ED con coeficientes constantes, para resolverla aplicamos el procedimiento conocido. En este caso, la ecuación característica asociada a la ED homogénea es:

$$r^3 - 4r = r(r^2 - 4) = r(r - 2)(r + 2) = 0,$$

cuyas raíces son  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 2$  &  $r_3 = -2$ . Deducimos entonces que el conjunto fundamental de soluciones está integrado por las funciones:

$$\phi_1 = 1; \phi_2 = e^{2t} \text{ & } \phi_3 = e^{-2t}.$$

El Wronskiano correspondiente para este caso es:

$$W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & 2e^{2t} & -2e^{-2t} \\ 0 & 4e^{2t} & 4e^{-2t} \end{vmatrix} = 8 + 8 = 16.$$

Y las funciones  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$  son:

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & 2e^{2t} & -2e^{-2t} \\ te^t & 4e^{2t} & 4e^{-2t} \end{vmatrix} = te^t[-2 - 2] = -4te^t. \\ W_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-2t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ 0 & te^t & 4e^{-2t} \end{vmatrix} = 2te^{-t}. \\ W_3 &= \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 4e^{2t} & te^t \end{vmatrix} = 2te^{3t}. \end{aligned}$$

Por último, integramos para determinar las funciones incógnitas  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  y así obtenemos:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{W_1}{W} dt = \int \frac{-4te^t}{16} dt = -\frac{1}{4} \int te^t dt = -\frac{1}{4}e^t(t - 1). \\ u_2 &= \int \frac{W_2}{W} dt = \int \frac{2te^{-t}}{16} dt = \frac{1}{8} \int te^{-t} dt = -\frac{1}{8}e^{-t}(t + 1). \\ u_3 &= \int \frac{W_3}{W} dt = \int \frac{2te^{3t}}{16} dt = \frac{1}{8} \int te^{3t} dt = \frac{1}{72}e^{3t}(3t - 1). \end{aligned}$$

En conclusión, la solución de la ED está dada por:

$$\begin{aligned} y &= [c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3] + [u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3] = \\ &= [c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t}] - \frac{1}{4}e^t(t - 1) - \frac{1}{8}e^{-t}(t + 1)e^{2t} + \frac{1}{72}e^{3t}(3t - 1)e^{-2t} = \\ &= [c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t}] + e^t \left[ -\frac{1}{4}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{8} + \frac{1}{24}t - \frac{1}{72} \right] = \\ &= [c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t}] + \frac{1}{9}e^t(1 - 3t). \end{aligned}$$

Sin embargo en la ecuación inicial, no es  $t$  la variable independiente, sino  $x$ .

De  $x = e^t$ , hallamos que  $t = \ln x$ . Sustituyendo en el resultado anterior, encontramos:

$$y = c_1 + c_2x^2 + c_3x^{-2} + \frac{1}{9}x(1 - 3 \ln x).$$

□

**Ejemplo 4.7.7** Resolver el siguiente PVI:

$$x^2y^{(3)} - xy'' + y' = \frac{\ln x}{x}, \text{ con } y(1) = 0, y'(1) = 1 \text{ & } y''(1) = -1.$$

▼ Primero multiplicamos la ecuación por  $x$  a fin de llevarla a una ecuación del tipo Cauchy-Euler:

$$x^3 y^{(3)} - x^2 y'' + xy' = \ln x.$$

Si hacemos ahora el cambio de variable  $x = e^t$  e incorporamos los resultados (4.36), (4.37) y (4.38):

$$e^{3t} \left[ e^{-3t} \left( \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) \right] - e^{2t} \left[ e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] + e^t \left[ e^{-t} \frac{dy}{dt} \right] = t.$$

Al simplificar, hallamos:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = t,$$

o bien:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} = t.$$

Esta es una ED con coeficientes constantes. La ecuación característica correspondiente a la ED homogénea asociada es:

$$r^3 - 4r^2 + 4r = r(r^2 - 4r + 4) = r(r - 2)^2 = 0.$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación son  $r_1 = 0$  y  $r_2 = r_3 = 2$ . En consecuencia, las funciones que integran el conjunto fundamental de soluciones de la ED homogénea asociada son:

$$\phi_1 = 1, \phi_2 = e^{2t}, \phi_3 = te^{2t}.$$

Con ellas podemos calcular el Wronskiano  $W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , éste es:

$$W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ 0 & 4e^{2t} & (4t+4)e^{2t} \end{vmatrix} = (8t+8)e^{4t} - (8t+4)e^{4t} = 4e^{4t}.$$

De manera similar:

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ t & 4e^{2t} & (4t+4)e^{2t} \end{vmatrix} = t[(2t+1)e^{4t} - 2te^{4t}] = te^{4t}, \\ W_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & te^{2t} \\ 0 & 0 & (2t+1)e^{2t} \\ 0 & t & (4t+4)e^{2t} \end{vmatrix} = -t(2t+1)e^{2t} = (-2t^2 - t)e^{2t}, \\ W_3 &= \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 4e^{2t} & t \end{vmatrix} = 2te^{2t}. \end{aligned}$$

Así, por el método de variación de parámetros, las funciones incógnitas  $u_1, u_2$  y  $u_3$  son:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{W_1}{W} dt = \int \frac{te^{4t}}{4e^{4t}} dt = \frac{1}{4} \left( \frac{t^2}{2} \right) = \frac{1}{8} t^2, \\ u_2 &= \int \frac{W_2}{W} dt = \int \frac{(-2t^2 - t)e^{2t}}{4e^{4t}} dt = -\frac{1}{4} \int (2t^2 + t)e^{-2t} dt. \end{aligned}$$

Si en la última integral aplicamos integración por partes, obtenemos:

$$u_2 = \frac{1}{16} e^{-2t} (3 + 6t + 4t^2).$$

Otra integración por partes nos da como resultado:

$$u_3 = \int \frac{W_3}{W} dt = \int \frac{2te^{2t}}{4e^{4t}} dt = \frac{1}{2} \int te^{-2t} dt = -\frac{1}{8} e^{-2t} (2t + 1).$$

De  $x = e^t$  obtenemos  $y = \ln x$ . Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} y &= [c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t}] + \frac{1}{8} t^2 + \frac{1}{16} e^{-2t} (3 + 6t + 4t^2) e^{2t} - \frac{1}{8} e^{-2t} (2t + 1) t e^{2t} = \\ &= [c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t}] + \frac{1}{8} t^2 + \frac{3}{16} + \frac{3}{8} t + \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{8} t = \\ &= [c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t}] + \frac{1}{8} t^2 + \frac{1}{4} t. \end{aligned}$$

De  $x = e^t$ , obtenemos  $t = \ln x$ , por lo tanto, la solución general de la ecuación en la variable original  $x$  es:

$$y = c_1 + c_2 x^2 + c_3 x^2 \ln x + \frac{1}{8} \ln^2 x + \frac{1}{4} \ln x.$$

Ahora bien, de las condiciones iniciales obtenemos:

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0.$$

Para aplicar la segunda condición requerimos la primera derivada, ésta es:

$$y' = 2c_2 x + c_3 [x + 2x \ln x] + \frac{1}{4} \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{4x}.$$

Por lo tanto,  $y'(1) = 1$  produce:

$$1 = 2c_2 + c_3 + \frac{1}{4} \quad \text{o bien} \quad 2c_2 + c_3 = \frac{3}{4}.$$

Finalmente, para usar la tercera condición requerimos la segunda derivada, al calcularla encontramos:

$$y'' = 2c_2 + c_3 [3 + 2 \ln x] + \frac{1}{4} \left( \frac{1 - \ln x}{x^2} \right) - \frac{1}{4x^2}.$$

De donde, de la condición  $y''(1) = -1$ , hallamos:

$$-1 = 2c_2 + 3c_3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \quad \text{o bien} \quad -1 = 2c_2 + 3c_3$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 0 \\ 2c_2 + c_3 &= \frac{3}{4} \\ 2c_2 + 3c_3 &= -1 \end{cases}$$

obtenemos  $c_1 = -\frac{13}{16}$ ,  $c_2 = \frac{13}{16}$  &  $c_3 = -\frac{7}{8}$ . Al sustituir estos valores en la solución general, hallamos la siguiente solución particular:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{13}{16} + \frac{13}{16} x^2 - \frac{7}{8} x^2 \ln x + \frac{1}{8} \ln^2 x + \frac{1}{4} \ln x = \\ &= \frac{1}{16} [-13 + 13x^2 - 14x^2 \ln x + 2 \ln^2 x + 4 \ln x]. \end{aligned}$$

□

#### Ejercicios 4.7.2 Variación de parámetros para ED de orden $n$ . Soluciones en la página 471

Utilice el método de variación de parámetros o el correspondiente a la ED de Cauchy-Euler para proporcionar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Si se indica, utilice la información proporcionada.

1.  $y^{(3)} - y'' = 12x^2 + 6x$



2.  $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$
3.  $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$
4.  $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$
5.  $y''' = 2y'' + 1$
6.  $y^{(4)} + 16y'' = 64 \cos(4x)$
7.  $y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 12e^{2x} + 24x^2$
8.  $y^{(4)} - 2y'' + y = 100 \cos 3x$
9.  $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = e^x$
10.  $y^{(3)} = \frac{24(x+y)}{x^3}$
11.  $x^3y^{(3)} - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3$
12.  $x^3y^{(3)} + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^4$
13.  $x^3y^{(3)} - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4 \ln x$
14.  $x^3y^{(3)} + x^2y'' - 6xy' + 6y = 30x$
15.  $xy^{(3)} + 2xy'' - xy' - 2xy = 1$ , si el conjunto fundamental de soluciones está integrado por:  
 $\phi_1 = e^x, \phi_2 = e^{-x}, \phi_3 = e^{-2x}$
16.  $x^2y^{(3)} - 2y' = 5 \ln x$ , si el conjunto fundamental de soluciones está integrado por:  
 $\phi_1 = 1, \phi_2 = \ln x \text{ \& } \phi_3 = x^3$ .
17.  $y^{(3)} - y' = -2x$ , con  $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad \& \quad y''(0) = 2$
18.  $y^{(4)} - y = 8e^x$ , con  $y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1 \quad \& \quad y'''(0) = 0$
19.  $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 12e^{-x}$ , con  $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad \& \quad y''(0) = -3$
20.  $y^{(4)} - y = \cos(x)$ , con  $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad \& \quad y''(0) = y'''(0) = 0$

## 4.8 Variación de parámetros y reducción de orden

Con lo anteriormente tratado hasta aquí, podemos hacer las afirmaciones siguientes:

1. Con el método de variación de parámetros podemos resolver la ED lineal no homogénea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

siempre y cuando conozcamos la solución general  $\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$  de la ED lineal homogénea asociada  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

2. Con el método de variación de parámetros podemos resolver la ED lineal con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

3. Aplicando primero el método de reducción de orden y luego el método de variación de parámetros, podemos resolver la ED lineal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

con el conocimiento de sólo una solución  $y = \phi_1(x)$  de la ED lineal homogénea asociada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Sobre las dos primeras afirmaciones ya hemos ejemplificado y ahora lo haremos sobre la última afirmación.

### Ejemplo 4.8.1

Utilizando el método de variación de parámetros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ED:

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^{2x},$$

considerando que  $y_1 = x + 1$  es solución de la ED homogénea asociada:

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0.$$

▼ Primero mediante reducción de orden, se obtiene otra solución  $y_2$  de la homogénea asociada y luego se aplica variación de parámetros para determinar una solución particular.

Para obtener  $y_2$  se propone  $y_2 = uy_1$ .

$$y_2 = (x+1)u \Rightarrow y_2' = (x+1)u' + u \Rightarrow y_2'' = (x+1)u'' + 2u'.$$

Sustituyendo en:

$$xy_2'' - (x+1)y_2' + y_2 = 0,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} & x[(x+1)u'' + 2u'] - (x+1)[(x+1)u' + u] + (x+1)u = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & x(x+1)u'' + [2x - (x+1)^2]u' + [-(x+1) + (x+1)]u = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & x(x+1)u'' - (x^2+1)u' = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Si  $u' = w$  entonces  $u'' = \frac{dw}{dx}$ . Sustituyendo lo anterior en (4.39) se tiene que:

$$\begin{aligned} & x(x+1)\frac{dw}{dx} - (x^2+1)w = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & x(x+1)\frac{dw}{dx} = (x^2+1)w \Rightarrow \frac{dw}{w} = \frac{x^2+1}{x(x+1)} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow & \int \frac{dw}{w} = \int \frac{x^2+1}{x^2+x} dx \Rightarrow \ln w = \int \left[ 1 + \frac{-x+1}{x(x+1)} \right] dx \Rightarrow \\ \Rightarrow & \ln w = x + \int \frac{-x+1}{x(x+1)} dx. \end{aligned}$$

Integrando mediante fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \ln w &= x + \int \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} \right) dx = \\ &= x + \ln x - 2\ln(x+1) + C = \\ &= x + \ln x + \ln(x+1)^{-2} + \ln C \Rightarrow \\ \Rightarrow & \ln w = x + \ln[Cx(x+1)^{-2}] \Rightarrow \\ \Rightarrow & w = e^x Cx(x+1)^{-2}. \end{aligned}$$

Pero  $w = u'$ , entonces

$$u' = e^x C x (x+1)^{-2} \Rightarrow u = C \int x e^x (x+1)^{-2} dx$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= C \left[ -x e^x (x+1)^{-1} - \int -e^x dx \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= C [-x e^x (x+1)^{-1} + e^x] + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= C e^x (x+1)^{-1} + C_1. \end{aligned}$$

Tomando  $u = e^x (x+1)^{-1}$  se obtiene como una segunda solución a

$$y_2 = (x+1)u = (x+1)e^x (x+1)^{-1} \Rightarrow y_2 = e^x.$$

Entonces, la solución general de la ED homogénea asociada es:

$$y_c = c_1(x+1) + c_2 e^x.$$

Ahora se aplica variación de parámetros proponiendo:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2.$$

Con  $y_1 = x+1$  y  $y_2 = e^x$ :

$$y_p = (x+1)u_1 + e^x u_2 \Rightarrow y_p' = (x+1)u_1' + u_1 + e^x u_2' + e^x u_2.$$

Suponiendo que

$$(x+1)u_1' + e^x u_2' = 0, \quad (4.40)$$

se tiene:

$$y_p' = u_1 + e^x u_2 \quad \& \quad y_p'' = u_1' + e^x u_2' + e^x u_2.$$

Sustituyendo en

$$x y_p'' - (x+1) y_p' + y_p = x^2 e^{2x},$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} x[u_1' + e^x u_2' + e^x u_2] - (x+1)[u_1 + e^x u_2] + (x+1)u_1 + e^x u_2 &= x^2 e^{2x} \Rightarrow \\ \Rightarrow x u_1' + x e^x u_2' + [x e^x - (x+1)e^x + e^x]u_2 + [-(x+1) + (x+1)]u_1 &= x^2 e^{2x} \Rightarrow \\ \Rightarrow x u_1' + x e^x u_2' &= x^2 e^{2x} \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $x$ :

$$u_1' + e^x u_2' = x e^{2x}. \quad (4.41)$$

Entonces  $u_1'$  y  $u_2'$  deben satisfacer el sistema conformado por las ecuaciones (4.40) y (4.41).

$$\begin{cases} (x+1)u_1' + e^x u_2' = 0. \\ u_1' + e^x u_2' = x e^{2x}. \end{cases}$$

El determinante del sistema es:

$$W = \begin{vmatrix} x+1 & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^x - e^x = x e^x \Rightarrow W = x e^x.$$

La solución del sistema es:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ xe^{2x} & e^x \end{vmatrix}}{W} = \frac{-xe^{3x}}{xe^x} = -e^{2x}.$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ 1 & xe^{2x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{(x+1)xe^{2x}}{xe^x} = (x+1)e^x.$$

Integrando las ecuaciones anteriores:

$$u_1 = -\int e^{2x} dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$u_2 = \int (x+1)e^x dx = xe^x + C$$

Tomando  $u_1 = -\frac{1}{2}e^{2x}$  &  $u_2 = xe^x$  se tiene que una solución particular es:

$$y_p = (x+1)u_1 + e^x u_2 = -\frac{1}{2}(x+1)e^{2x} + e^x xe^x =$$

$$= \left[ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + x \right] e^{2x} = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED dada es:

$$y = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} + c_1(x+1) + c_2e^x.$$

□

### Ejemplo 4.8.2

Utilizando el método de variación de parámetros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial ordinaria.

$$x^2 y'' + xy' + y = \sec(\ln x),$$

considerando que  $y_1 = \sin(\ln x)$  es solución de la ED homogénea asociada:

$$x^2 y'' + xy' + y = 0.$$

▼ Primero se aplica el método de reducción de orden para determinar otra solución  $y_2$  de la ED homogénea asociada y luego se obtiene una solución particular de la ED no homogénea mediante variación de parámetros.

Para determinar  $y_2$  se propone  $y_2 = uy_1$ .

$$y_2 = u \sin(\ln x) \Rightarrow y_2' = u' \sin(\ln x) + ux^{-1} \cos(\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2'' = u'' \sin(\ln x) + 2u' x^{-1} \cos(\ln x) + ux^{-2} [-\cos(\ln x) - \sin(\ln x)].$$

Sustituyendo en

$$x^2 y_2'' + xy_2' + y_2 = 0,$$

se obtiene:

$$u'' x^2 \sin(\ln x) + u' x [2 \cos(\ln x) + \sin(\ln x)] = 0.$$

Dividiendo entre  $x^2 \operatorname{sen}(\ln x)$ :

$$u'' + u' \frac{1}{x} \left[ 2 \frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)} + 1 \right] = 0. \quad (4.42)$$

Si  $u' = w$  entonces  $u'' = \frac{dw}{dx}$ . Sustituyendo lo anterior en (4.42) se tiene que :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \left[ -2 \frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right] w \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{dw}{w} &= -2 \int \frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)} \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln w &= -2 \ln[\operatorname{sen}(\ln x)] - \ln x + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln w &= \ln[\operatorname{sen}(\ln x)]^{-2} + \ln x^{-1} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln w &= \ln C x^{-1} [\operatorname{sen}(\ln x)]^{-2} \Rightarrow \\ \Rightarrow w &= C x^{-1} [\operatorname{sen}(\ln x)]^{-2} = \frac{C}{x} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\ln x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow w &= \frac{C}{x} \csc^2(\ln x). \end{aligned}$$

pero  $w = u'$ , entonces:

$$u = C \int \csc^2(\ln x) \frac{dx}{x} = -C \cot(\ln x) + C_1,$$

tomando  $u = \cot(\ln x)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} y_2 &= [\cot(\ln x)] \operatorname{sen}(\ln x) = \frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)} \operatorname{sen}(\ln x) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_2 &= \cos(\ln x). \end{aligned}$$

Luego, la solución general de la ED homogénea asociada es:

$$y_c = c_1 \operatorname{sen}(\ln x) + c_2 \cos(\ln x).$$

Ahora se aplica variación de parámetros, proponiendo:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

con  $y_1 = \operatorname{sen}(\ln x)$  y  $y_2 = \cos(\ln x)$ , Entonces:

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 \operatorname{sen}(\ln x) + u_2 \cos(\ln x) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p' &= u_1' \operatorname{sen}(\ln x) + u_1 x^{-1} \cos(\ln x) + u_2' \cos(\ln x) - u_2 x^{-1} \operatorname{sen}(\ln x). \end{aligned}$$

Considerando que:

$$u_1' \operatorname{sen}(\ln x) + u_2' \cos(\ln x) = 0, \quad (4.43)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1 x^{-1} \cos(\ln x) - u_2 x^{-1} \operatorname{sen}(\ln x) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p'' &= u_1' x^{-1} \cos(\ln x) - u_1 x^{-2} [\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)] - \\ &\quad - u_2' x^{-1} \operatorname{sen}(\ln x) - u_2 x^{-2} [\cos(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x)]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ED normalizada:

$$y_p'' + \frac{1}{x} y_p' + \frac{1}{x^2} y_p = \frac{1}{x^2} \sec(\ln x),$$

se obtiene:

$$u_1' \frac{1}{x} \cos(\ln x) - u_2' \frac{1}{x} \sin(\ln x) = \frac{1}{x^2} \sec(\ln x). \quad (4.44)$$

Entonces  $u_1'$  &  $u_2'$  satisfacen el sistema conformado por las ecuaciones (4.43) y (4.44).

$$\begin{cases} u_1' \sin(\ln x) + u_2' \cos(\ln x) = 0. \\ u_1' \frac{1}{x} \cos(\ln x) - u_2' \frac{1}{x} \sin(\ln x) = \frac{1}{x^2} \sec(\ln x). \end{cases}$$

El determinante del sistema es:

$$W = \begin{vmatrix} \sin(\ln x) & \cos(\ln x) \\ \frac{1}{x} \cos(\ln x) & -\frac{1}{x} \sin(\ln x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} \sin^2(\ln x) - \frac{1}{x} \cos^2(\ln x) = -\frac{1}{x} [\sin^2(\ln x) + \cos^2(\ln x)] = -\frac{1}{x}.$$

La solución del sistema es:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos(\ln x) \\ \frac{1}{x^2} \sec(\ln x) & -\frac{1}{x} \sin(\ln x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{-\frac{1}{x^2} \sec(\ln x) \cos(\ln x)}{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \sin(\ln x) & 0 \\ \frac{1}{x} \cos(\ln x) & \frac{1}{x^2} \sec(\ln x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{\frac{1}{x^2} \sin(\ln x) \sec(\ln x)}{-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x} \frac{\sin(\ln x)}{\cos(\ln x)}.$$

De aquí que:

$$u_1 = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

$$u_2 = \int \frac{-\sin(\ln x)}{\cos(\ln x)} \frac{dx}{x} = \ln[\cos(\ln x)] + C.$$

Tomando  $u_1 = \ln x$  &  $u_2 = \ln[\cos(\ln x)]$ , se tiene por solución particular a :

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p &= (\ln x) \sin(\ln x) + \ln[\cos(\ln x)] \cos(\ln x) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p &= (\ln x) \sin(\ln x) + [\cos(\ln x)] \ln[\cos(\ln x)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es:

$$\begin{aligned} y &= y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= (\ln x) \sin(\ln x) + [\cos(\ln x)] \ln[\cos(\ln x)] + c_1 \sin(\ln x) + c_2 \cos(\ln x) \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= [\ln x + c_1] \sin(\ln x) + (\ln[\cos(\ln x)] + c_2) \cos(\ln x). \end{aligned}$$

□

#### Ejercicios 4.8.1 Variación de parámetros y reducción de orden. Soluciones en la página 472

Obtener la solución general de la ecuación diferencial dada, considerando que  $y_1$  es una solución de la ED homogénea asociada.

1.  $x^2y'' - xy' + y = 2x; \quad y_1 = x$
2.  $5x^2y'' - 3xy' + 3y = \sqrt{x}; \quad y_1 = x^{\frac{3}{5}}$
3.  $x^2y'' - xy' + y = \ln x; \quad y_1 = x$
4.  $x^2y'' - xy' - 3y = -\frac{16 \ln x}{x}; \quad y_1 = x^3$
5.  $x^2y'' - xy' + 2y = x \ln x; \quad y_1 = x \cos(\ln x)$





## CAPÍTULO

# 5

## Aplicaciones de orden superior

### OBJETIVOS PARTICULARES

### 5.1 Introducción

En este capítulo se presentarán dos tópicos en los cuales las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden juegan un papel vital para su modelación, a saber, vibraciones mecánicas y circuitos eléctricos.

Un principio fundamental de la física establece que los sistemas físicos tienden a estar en una posición de mínima energía potencial denominada posición de equilibrio y si, por alguna razón, el sistema es forzado a salir de ese equilibrio entonces tenderá a regresar a él. Por ejemplo, piense por un momento en un péndulo estático; si golpea la masa del péndulo con una pequeña fuerza, el sistema saldrá de su posición de equilibrio y en algún momento posterior se detendrá, pero al no estar en equilibrio retornará buscando dicha posición.

La teoría de oscilaciones pequeñas permite describir cuantitativa y cualitativamente el movimiento que ocurre en los sistemas físicos cuando están cerca de su posición de equilibrio estable. Muchos fenómenos (péndulos, terremotos, mareas, etc.) pueden ser analizados utilizando esta teoría. El modelo más simple que permite describir cuantitativa y cualitativamente el fenómeno de vibración es el sistema masa-resorte, también llamado oscilador armónico, en el cual no hay pérdida de energía. Otro modelo es el de masa-resorte-amortiguador donde además se consideran fuerzas disipativas, en este caso la energía no se conserva y las oscilaciones tienden a desaparecer en el tiempo. Un tercer modelo es el oscilador forzado que considera fuerzas de excitación que incrementan o reducen la energía del sistema. En algunos casos esta fuente de energía puede llegar a ser la responsable de la destrucción del sistema.

En la primera parte de este capítulo analizaremos los osciladores libre, amortiguado y forzado.

La segunda parte la dedicaremos al estudio de los circuitos eléctricos RLC en serie que están formados por un resistor  $R$ , un inductor  $L$  y un capacitor  $C$ . Estos circuitos encuentran su aplicación más práctica en el sistema eléctrico de una instalación ya sea doméstica o industrial y en todos los aparatos eléctricos que utilizamos en nuestra vida cotidiana. En nuestro análisis describiremos cómo se comportan la carga y la corriente en circuitos RLC. Finalmente, estableceremos una relación electromecánica entre las vibraciones mecánicas y los circuitos eléctricos.

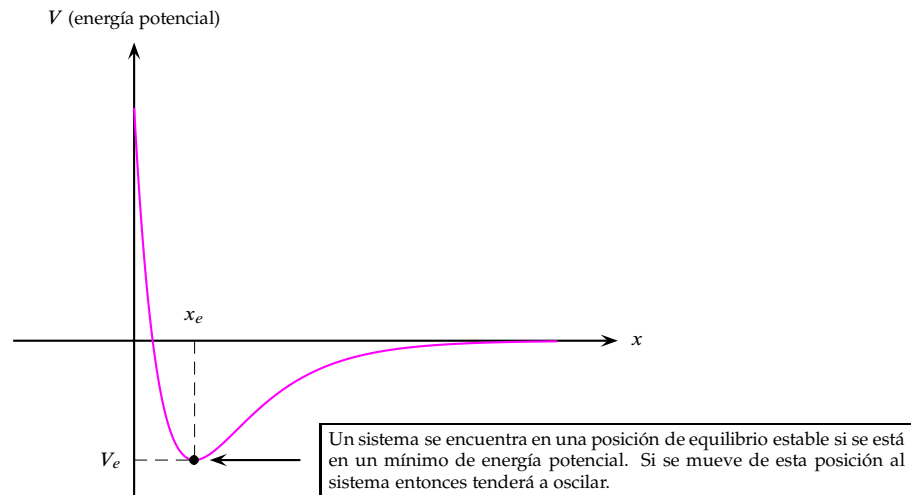
## 5.2 Vibraciones mecánicas

Comenzamos el estudio de los fenómenos oscilatorios, presentando algunos ejemplos en que estos fenómenos ocurren además del que se mencionó en la introducción.

Otro ejemplo puede ocurrir cuando se realiza un viaje en avión. En condiciones normales el avión permanece estable en gran parte del recorrido; sin embargo, una turbulencia puede provocar la pérdida momentánea de la estabilidad y el equilibrio; cuando esto ocurre el avión empieza a vibrar intentando regresar a su posición de equilibrio. Afortunadamente el avión cuenta con diversos aparatos que permiten la disipación de la vibración de forma rápida y segura.

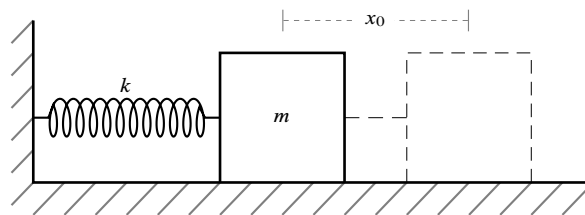
Un tercer ejemplo lo podemos observar cuando se viaja en un auto y sin reducir la velocidad se pasa por un tope o bache. Inmediatamente el auto empieza a vibrar verticalmente y sólo la acción de los amortiguadores permite reducir y desaparecer las vibraciones del auto.

En general, las vibraciones aparecen cuando se aplica una pequeña fuerza a un sistema físico que se encuentra inicialmente en un estado de equilibrio estable. Cuando esta fuerza desaparece el sistema tiende a regresar a su posición de equilibrio. Para entender el proceso físico que ocurre, recordemos que un sistema físico está en una posición de equilibrio estable cuando se encuentra en un mínimo de energía potencial.



Para que abandone esa posición es necesario proporcionarle energía mediante la acción de una fuerza. Cuando se deja de aplicar la fuerza el sistema ha adquirido energía potencial, que al intentar retornar a la posición de equilibrio, se transforma en energía cinética. De suerte que cuando pasa la posición de equilibrio tendrá energía cinética y no se detendrá; continuará su movimiento transformando ahora, hasta que desaparezca, su energía cinética en potencial. Esta transferencia entre energía cinética y potencial se repetirá indefinidamente a menos que algún mecanismo permita la disipación de energía mecánica.

### 5.2.1 Movimiento armónico simple



Sistema masa-resorte para el estudio de las vibraciones mecánicas

Para iniciar el estudio de las vibraciones mecánicas analicemos una situación cotidiana y simple. Consideremos un cuerpo de masa  $m$  que está unido a una pared por medio de un resorte de constante  $k$  (sistema masa-resorte) y que se encuentra sobre una mesa horizontal. Por simplicidad supongamos también que no

existe fricción entre el cuerpo y la mesa y que el sistema se encuentra inicialmente en equilibrio. De repente, el resorte se comprime (o se elonga) una distancia pequeña  $x_0$ , medida desde la posición de equilibrio (ver figura anterior), y se imprime una velocidad  $v_0$ . Desde ese momento, el resorte ejerce una fuerza sobre la masa que tiende a regresarla a su posición de equilibrio inicial. En general, esta fuerza depende de la distancia comprimida (o elongada) del resorte. Si la compresión (o elongación) es pequeña se puede suponer que la fuerza es directamente proporcional a dicha deformación y que siempre apunta hacia la posición de equilibrio o en sentido contrario a la deformación. Dicha suposición se conoce como Ley de Hooke para resortes lineales. Es decir, la fuerza  $F_R$  que en todo momento ejerce el resorte sobre la masa está dada por:

$$F_R = -kx,$$

donde  $x$  es la deformación y  $k > 0$  es la *constante del resorte*.

Por otra parte, y de acuerdo con la segunda ley de Newton, la suma de todas las fuerzas que se aplican a un cuerpo produce un cambio a su movimiento que se rige por la ecuación

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Igualando estos dos resultados se obtiene el PVI que modela el sistema masa-resorte:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \text{ con las condiciones iniciales } x(0) = x_0 \text{ \& } v(0) = v_0.$$

o equivalentemente:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0; \quad \text{con } x(0) = x_0 \text{ \& } x'(0) = v_0. \quad (5.1)$$

El modelo encontrado es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes. Para resolverla proponemos como solución de la ecuación diferencial una función del tipo  $x = e^{rt}$ . Derivando dos veces con respecto al tiempo y sustituyendo en (5.1) obtenemos la ecuación algebraica:

$$(mr^2 + k)e^{rt} = 0 \Rightarrow mr^2 + k = 0$$

cuyas dos raíces son imaginarias debido a que  $m$  y  $k$  son constantes positivas,

$$mr^2 + k = 0 \Rightarrow r^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow r = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i; \text{ donde } i = \sqrt{-1}.$$

Si definimos la **frecuencia natural** del sistema como  $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$  tendremos  $r = \pm iw$ , de tal forma que un conjunto fundamental de soluciones lo constituyen las dos funciones sinusoidales  $\cos wt$  y  $\sin wt$ . Entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt. \quad (5.2)$$

Derivando la ecuación (5.2) se obtiene la velocidad del cuerpo, ésta es:

$$x'(t) = v(t) = -c_1 w \sin wt + c_2 w \cos wt. \quad (5.3)$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  que aparecen en las ecuaciones (5.2) y (5.3) se deben determinar a partir de las condiciones iniciales de movimiento. Como la masa se encuentra inicialmente ( $t = 0$ ) a una distancia  $x_0$  de la posición de equilibrio y se suelta con velocidad inicial  $v_0$ , entonces se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1(1) + c_2(0) = c_1. \\ v_0 &= v(0) = -c_1 w \sin(0) + c_2 w \cos(0) = -c_1 w(0) + c_2 w(1) = c_2 w. \end{aligned} \quad (5.4)$$

de donde

$$c_1 = x_0 \quad \& \quad c_2 = \frac{v_0}{w}. \quad (5.5)$$

Finalmente, sustituyendo los resultados anteriores (5.5) en la ecuación (5.2), se obtiene la siguiente expresión para la posición instantánea de la masa en todo tiempo  $t$ :

$$x(t) = x_0 \cos wt + \frac{v_0}{w} \sin wt. \quad (5.6)$$

Por otra parte, para poder analizar la ecuación anterior conviene escribirla en cualquiera de las dos formas compactas equivalentes:

$$x(t) = A \sin(wt + \phi) \quad \text{o bien} \quad x(t) = A \cos(wt - \phi_1).$$

Equivalencia que se obtiene con recordar que las funciones seno y coseno están desfasadas un ángulo  $\frac{\pi}{2}$ , es decir:

$$\sin \theta = \cos \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right).$$

En consecuencia, si elegimos  $\theta = wt + \phi$  se debe cumplir

$$wt + \phi - \frac{\pi}{2} = wt - \phi_1$$

de donde

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

Queremos reescribir la posición de la masa en la forma  $x(t) = A \sin(wt + \phi)$ .

Se tiene  $x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$  y se quiere  $x(t) = A \sin(wt + \phi)$ .

Lo que se tiene coincide con lo que se quiere cuando:

$$\begin{aligned} c_1 \cos wt + c_2 \sin wt &= A \sin(wt + \phi) = \\ &= A[\sin wt \cos \phi + \cos wt \sin \phi] = \\ &= (A \cos \phi) \sin wt + (A \sin \phi) \cos wt = \\ &= (A \sin \phi) \cos wt + (A \cos \phi) \sin wt. \end{aligned}$$

Y esto sucede si:

$$A \sin \phi = c_1 \quad \& \quad A \cos \phi = c_2 \quad (5.7)$$

De estas igualdades se tiene que:

$$c_1^2 + c_2^2 = A^2 \sin^2 \phi + A^2 \cos^2 \phi = A^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = A^2 (1) = A^2.$$

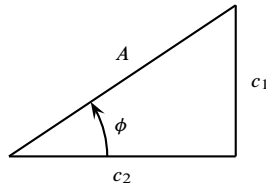
De donde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},$$

y además, con  $c_2 \neq 0$ ,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = \tan \phi \Rightarrow \phi = \arctan \frac{c_1}{c_2}.$$

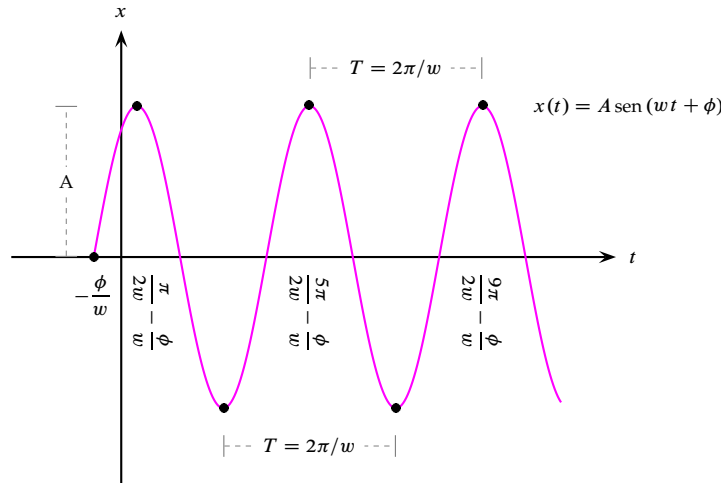
Es útil recordar estas relaciones usando el triángulo:



Obtenemos así una fórmula simplificada de la posición de la masa, con respecto a su posición de equilibrio:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(wt + \phi). \quad (5.8)$$

En esta expresión,  $A$  y  $\phi$  se definen respectivamente como la **amplitud** de la oscilación y el **ángulo de fase**. Veamos ahora el significado físico de estos conceptos y que se representan en la figura siguiente:



Se tiene que la posición  $x(t)$  toma valores en el intervalo  $[-A, A]$  ya que:

$$\begin{aligned} -1 \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1, \text{ con } \theta \in \mathbb{R} &\Rightarrow |\operatorname{sen} \theta| \leq 1, \text{ con } \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\operatorname{sen}(wt + \phi)| \leq 1 \Rightarrow A |\operatorname{sen}(wt + \phi)| \leq A, \text{ con } A > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |A \operatorname{sen}(wt + \phi)| \leq A \Rightarrow |x(t)| \leq A \Rightarrow -A \leq x(t) \leq A. \end{aligned}$$

De forma que  $A$  es la máxima separación del cuerpo con respecto a la posición de equilibrio. De aquí que  $A$  es la *amplitud* (máxima) de la oscilación.

Este desplazamiento máximo ocurre cuando:

$$\begin{aligned} |x(t)| = A &\Rightarrow |\operatorname{sen}(wt + \phi)| = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(wt + \phi) = \pm 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow wt + \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \text{ entero} \Rightarrow \\ &\Rightarrow wt + \phi = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \text{ con } n \text{ entero} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{(2n + 1)\frac{\pi}{2} - \phi}{w}, \text{ con } n \text{ entero y } t \geq 0. \end{aligned}$$

Mediante esta relación se obtienen los instantes en que  $x(t) = A$  ( $n$  par), así como los instantes en que  $x(t) = -A$  ( $n$  impar) y la condición  $t \geq 0$ .

A la diferencia entre dos tiempos consecutivos donde  $x(t) = A$  se le denomina **periodo** de la función  $x(t)$  y al movimiento realizado en dicho intervalo de tiempo se le conoce como una *oscilación completa*. Es decir, el periodo  $T$  es el (intervalo de) tiempo que tarda la masa  $m$  en dar una oscilación completa.

Mostraremos ahora que  $T = \frac{2\pi}{w}$  s. Para ello consideremos que  $x(t) = A \operatorname{sen}(wt + \phi)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} x(t + T) &= A \operatorname{sen}[w(t + T) + \phi] = A \operatorname{sen}\left[w\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) + \phi\right] = \\ &= A \operatorname{sen}[wt + 2\pi + \phi] = A \operatorname{sen}[(wt + \phi) + 2\pi] = \\ &= A \operatorname{sen}(wt + \phi) = x(t). \end{aligned}$$

Lo que implica que  $x(t + T) = x(t)$  para  $T = \frac{2\pi}{w}$ .

Ahora bien, si la masa  $m$  tarda  $T$  segundos en dar una oscilación completa ¿Cuántas veces oscilará en un segundo? Al número  $f$  de oscilaciones que da el oscilador armónico en la unidad de tiempo se denomina **frecuencia** del oscilador y queda determinada por la proporción:

$$\frac{1 \text{ oscilaciones}}{T \text{ segundos}} = \frac{f \text{ oscilaciones}}{1 \text{ segundo}}; \text{ de donde } f = \frac{1}{T} \frac{\text{oscilaciones}}{\text{segundo}}$$

Es decir, la frecuencia  $f$  del oscilador armónico está dada por:

$$f = \frac{1 \text{ osc}}{T \text{ seg}} = \frac{1 \text{ ciclos}}{T \text{ seg}} = \frac{w}{2\pi} \text{ hertz.}$$

Observe que la frecuencia  $f$  del oscilador es diferente de la frecuencia natural  $w$  del sistema.

Además note que el periodo  $T = \frac{2\pi}{w}$  también es la diferencia entre dos tiempos consecutivos en los que  $x(t) = -A$ .

Finalmente, estudiemos el número real  $\phi$ . Al número  $\phi$  se le denomina *ángulo de fase*, ya que está relacionado con el desfaseamiento  $\frac{\phi}{w}$  que existe entre las curvas  $x(t) = \text{sen } wt$  &  $x(t) = \text{sen}(wt + \phi)$ .

Ahora, ¿cómo determinamos el valor de  $\phi$ ?

Recordemos que la posición instantánea  $x(t)$  está dada por

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \text{sen } wt = A \text{sen}(wt + \phi).$$

De aquí que:

1. Si  $c_1 = x_0 = 0$  entonces,

$$x(t) = c_2 \text{sen } wt = A \text{sen}(wt + \phi) \Rightarrow A = |c_2| \text{ \& } \phi = 0 \text{ o bien } \phi = \pi$$

2. Si  $c_2 = \frac{v_0}{w} = 0$  entonces,

$$x(t) = c_1 \cos wt = c_1 \text{sen} \left( wt + \frac{\pi}{2} \right) = A \text{sen}(wt + \phi) \Rightarrow A = |c_1| = |x_0| \text{ \& } \phi = \frac{\pi}{2}.$$

3. Si  $c_2 \neq 0$  entonces,

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \text{sen } wt = A \text{sen}(wt + \phi) \Rightarrow A \text{sen } \phi = c_1 \text{ \& } A \cos \phi = c_2,$$

de donde:  $\phi = \arctan \frac{c_1}{c_2}$

Para calcular  $\phi$  con esta fórmula por lo común es necesario utilizar una calculadora, la cual nos proporciona un número:  $\arctan \frac{c_1}{c_2} = \phi_c$

¿Es este número  $\phi_c$  en verdad el número  $\phi$  que buscamos?. Aparentemente sí, pero hay que analizar con más detalle. Veamos.

La función  $\theta = \arctan u$  es la inversa de la función  $u = \tan \theta$  para  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  y éste es el rango que obtenemos al usar una calculadora. Por esta razón una calculadora dará siempre un número  $\phi_c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ; cuando se usan radianes y no grados. ¡Nunca se debe usar grados para funciones trigonométricas si hay derivadas o integrales en ellas!

Para  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  sabemos que  $\cos \theta > 0$ .

Por lo tanto, reconsiderando las igualdades

$$A \text{sen } \phi = c_1 \quad \& \quad A \cos \phi = c_2$$

- a. Si  $c_2 > 0$  entonces  $\cos \phi > 0$ , por lo cual  $\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  y coincide con  $\phi_c$ . Esto es,  $\phi = \phi_c$ .
- b. Si  $c_2 < 0$  entonces  $\cos \phi < 0$ , por lo cual  $\phi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  y no coincide con  $\phi_c$ . En este caso ocurre que entre  $\phi$  y  $\phi_c$  existe una diferencia de  $\pi$  radianes, por lo que:  $\phi = \phi_c + \pi$ . Esto es, al número  $\phi_c$  dado por una calculadora se le debe sumar  $\pi$  para así tener el ángulo de fase  $\phi$ .

¿En qué instantes pasa la masa  $m$  por la posición de equilibrio?

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &\Rightarrow A \sin(\omega t + \phi) = 0 \Rightarrow \sin(\omega t + \phi) = 0 \\ &\Rightarrow \omega t + \phi = n\pi, \text{ con } n\text{-entero} \\ &\Rightarrow t = \frac{n\pi - \phi}{\omega}, \text{ con } n\text{-entero y } t \geq 0 \end{aligned}$$

Es decir, mediante esta relación se obtienen los instantes  $t \geq 0$  en que  $x(t) = 0$ ; esto es, los instantes en que el cuerpo pasa por su posición de equilibrio.

Por otra parte, si la posición y velocidad iniciales son  $x_0$  y  $v_0$  entonces, de acuerdo con las ecuaciones (5.5) y (5.7), la amplitud es

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Y el ángulo de fase satisface

$$\tan \phi = \frac{x_0 \omega}{v_0}.$$

Reuniendo estos resultados es posible escribir la expresión (5.8) en la página 271 como

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right).$$

Hemos dicho que en un movimiento vibratorio es importante saber qué está pasando con la energía. Para ello necesitamos reescribir la ecuación diferencial (5.1) de la página 269 en una forma alternativa. Consideraremos entonces que

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx &= 0 \\ \Rightarrow m \frac{dv}{dt} + kx &= 0, \quad \text{usando la definición de velocidad } v = \frac{dx}{dt}. \\ \Rightarrow m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} + kx &= 0, \quad \text{aplicando la regla de la cadena } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}. \\ \Rightarrow mv \frac{dv}{dx} + kx &= 0, \quad \text{aplicando de nueva cuenta la definición de velocidad.} \\ \Rightarrow mv dv + kx dx &= 0, \quad \text{separando las variables.} \end{aligned}$$

Finalmente, integrando obtenemos  $E$ , la energía total del sistema:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C. \quad (5.9)$$

En esta expresión identificamos los siguientes términos:

- La energía cinética del sistema  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ , debida a que el cuerpo se mueve con velocidad  $v$ .
- La energía potencial del resorte  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ , debida a que el resorte se comprime o elonga una cantidad  $x$ .

- La energía total del sistema  $E = E_c + E_p$ .

La ecuación (5.9) se conoce como la ley de conservación de energía para el caso de un sistema masa-resorte y señala que la suma de energía cinética más la energía potencial del resorte siempre es una constante. Esto significa que cuando se pierde energía potencial se gana energía cinética y viceversa, de tal suerte que el resultado de su suma no cambia. En consecuencia, cuando la distancia  $x$  de la masa a la posición de equilibrio disminuye entonces aumenta la velocidad, y la máxima velocidad de la masa se obtiene justo cuando ésta pasa por la posición de equilibrio del sistema. Por otra parte, cuando la masa se aleja aumenta la energía potencial del resorte y disminuye su energía cinética. Cuando ésta última finalmente se anula, se obtiene la mayor elongación o compresión del resorte, a estos puntos se les conoce como *puntos de retorno*.

**Ejemplo 5.2.1** Considere una masa de 10 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante  $k = 10$  N/m. Si se alarga el resorte una distancia de 0.02 m y se suelta a partir del reposo, determine la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, la frecuencia de oscilación, la amplitud, el ángulo de fase y las energías cinética y potencial en el tiempo  $t$ .

▼ El PVI que modela esta situación es:

$$10 \frac{d^2x}{dt^2} + 10x = 0, \quad \text{con } x(0) = 0.02 \quad \& \quad x'(0) = 0.$$

Proponiendo como solución  $x = e^{rt}$ , derivando dos veces con respecto al tiempo, sustituyendo estos resultados en la ecuación diferencial y simplificando obtenemos la ecuación característica:

$$10r^2 + 10 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son  $r_{1,2} = \pm i$ . Como ambas son complejas, las dos funciones que resuelven la ecuación diferencial y que son linealmente independientes son  $\cos t$  &  $\sin t$ . De suerte que la solución general de la ecuación diferencial es la combinación lineal de ellas, es decir:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Derivando obtenemos la velocidad de la masa:

$$x'(t) = v(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Para determinar los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  utilizamos las condiciones iniciales. Para ello sustituimos en el tiempo  $t = 0$  los valores  $x_0 = 0.02$  y  $v_0 = 0$ . Así obtenemos:

$$\begin{aligned} 0.02 &= x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1(1) + c_2(0) = c_1; \\ 0 &= v(0) = -c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = -c_1(0) + c_2(1) = c_2. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo los coeficientes en las expresiones para la posición y la velocidad obtenemos:

$$x(t) = 0.02 \cos t = 0.02 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \& \quad v(t) = -0.02 \sin t.$$

Tanto la posición como la velocidad son funciones sinusoidales de frecuencia natural  $w = 1$  rad/s, periodo  $T = 2\pi$  s y de amplitud  $A = 0.02$  m. La frecuencia de oscilación es  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$  osc/seg =  $\frac{1}{2\pi}$  hertz. El ángulo de fase es  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

Observe que el máximo valor de  $x(t)$  se obtiene cuando  $\cos t = 1$ , y esto se logra en los tiempos:

$$t = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$$

De la misma forma, el mínimo valor de  $x(t)$  se obtiene cuando  $\cos t = -1$ , y esto ocurre cuando:

$$t = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$$



En estos tiempos la velocidad se anula.

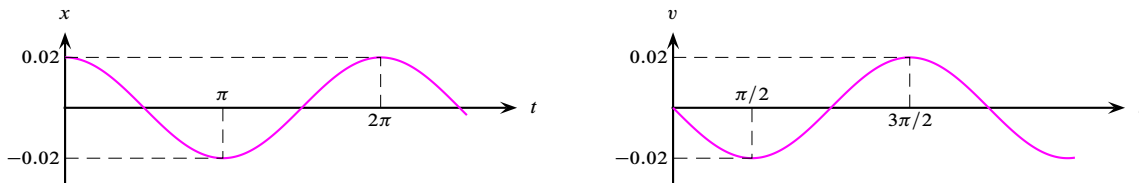
Igualmente, la rapidez de la masa es máxima cuando  $|\sin t| = +1$ , que ocurre cuando  $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$

Esta rapidez máxima se alcanza en la posición de equilibrio  $x = 0$ . En la figura siguiente se muestra tanto la posición como la velocidad en el tiempo.

Por otra parte la energía cinética y potencial están dadas por

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0.002 \sin^2 t \quad \& \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0.002 \cos^2 t.$$

Sumando las dos energías y usando la identidad  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , obtenemos que la energía total es constante  $E_T = 0.002$  Joules.



1. En la gráfica de la izquierda, la que corresponde a la posición de la masa, los puntos de la gráfica que se encuentran arriba del eje horizontal son los tiempos en los cuales  $x(t) > 0$ . En esos momentos la masa se encuentra a la derecha de la posición de equilibrio. Para aquellos  $t$  que corresponden a los puntos de la grafica por debajo de la posición horizontal, la masa se encuentra a la izquierda de la posición de equilibrio.
2. En la siguiente gráfica,  $v(t) > 0$  (gráfica arriba del eje horizontal) nos indica que la velocidad de la masa es hacia la derecha. También vemos que  $v(t) < 0$  (gráfica abajo del eje horizontal) nos indica que la masa tiene una velocidad que se dirige hacia la izquierda.

□

**Ejemplo 5.2.2** Considere una masa de 2 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante  $k = 200$  N/m, se comprime al resorte una distancia de 0.03 m y se le suelta con una velocidad de 0.4 m/s hacia la posición de equilibrio. Determine la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, calcule también la frecuencia de oscilación, la amplitud y el ángulo de fase.

▼ El PVI que describe el movimiento de la masa es:

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 200x = 0, \quad \text{con} \quad x(0) = -0.03 \text{ m} \quad \& \quad v(0) = 0.4 \text{ m/s}.$$

La ecuación característica en este caso es:

$$2r^2 + 200 = 0 \Rightarrow r^2 + 100 = 0,$$

cuyas soluciones son  $r = \pm 10i$ . En consecuencia, dos soluciones linealmente independientes son:

$$x_1(t) = \cos 10t \quad \& \quad x_2(t) = \sin 10t.$$

De forma que la solución general es la combinación lineal de ellas:

$$x(t) = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t.$$

Al derivar con respecto al tiempo obtenemos la velocidad de la masa, ésta es:

$$v(t) = -10c_1 \sin 10t + 10c_2 \cos 10t.$$

Utilizando las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{aligned}-0.03 &= x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1; \\ 0.4 &= v(0) = -10c_1 \sin(0) + 10c_2 \cos(0) = 10c_2.\end{aligned}$$

De donde resulta:

$$c_1 = -0.03, \quad c_2 = 0.04.$$

Sustituyendo estos valores en la función posición  $x(t)$  obtenemos:

$$x(t) = -0.03 \cos 10t + 0.04 \sin 10t.$$

Expresamos a  $x(t)$  en la forma  $x(t) = A \sin(10t + \phi)$ .

Para esto consideramos que

$$A = \sqrt{(-0.03)^2 + (0.04)^2} = 0.05.$$

Y además que

$$\begin{aligned}x(t) &= -0.03 \cos 10t + 0.04 \sin 10t = A \sin(10t + \phi) = \\ &= A(\sin 10t \cos \phi + \sin \phi \cos 10t) = \\ &= (A \cos \phi) \sin 10t + (A \sin \phi) \cos 10t,\end{aligned}$$

siempre y cuando

$$\begin{aligned}A \sin \phi &= -0.03 \quad \& \quad A \cos \phi = 0.04 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin \phi &= \frac{-0.03}{A} = \frac{-0.03}{0.05} = -0.6 \quad \& \quad \cos \phi = \frac{0.04}{A} = \frac{0.04}{0.05} = 0.8,\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\tan \phi &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{-0.6}{0.8} = -0.75 \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_c &= \arctan(-0.75) = -0.6435 \text{ rad.}\end{aligned}$$

Como  $\cos \phi = 0.8 > 0$  entonces  $\phi = \phi_c = -0.6435$  rad.

Por lo tanto, la posición de la masa con respecto a su posición de equilibrio es:

$$x(t) = 0.05 \sin(10t - 0.6435) \text{ metros}$$

La amplitud es:  $A = 0.05 \text{ m.}$

El periodo es:  $T = \frac{2\pi}{10} \text{ s} = \frac{\pi}{5} \text{ s} \approx 0.6283 \text{ s.}$

La frecuencia de oscilación es:  $f = \frac{1}{T} \text{ hertz} = \frac{5}{\pi} \text{ hertz.}$

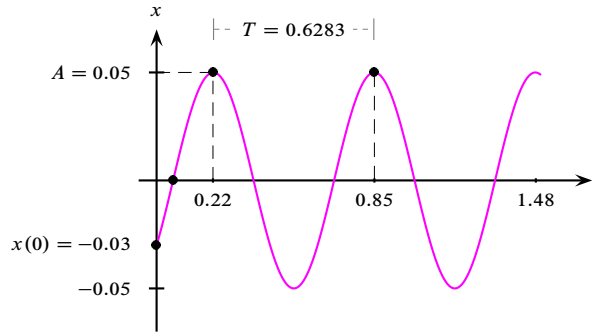
El ángulo de fase es:  $\phi = -0.6435.$

El desfaseamiento es:  $\frac{\phi}{\omega} = -0.06444 \text{ rad.}$

La velocidad instantánea de la masa es:

$$v(t) = x'(t) = 0.5 \cos(10t - 0.6435) \text{ m/seg}$$

Considerando lo anterior construimos la gráfica de la posición, que se muestra en la siguiente figura:



□

**Ejemplo 5.2.3** Cuando se aplica a un resorte una fuerza de 28.8 N éste se estira 0.2 m. Un cuerpo de masa 9 kg se une al extremo libre de dicho resorte y es puesto en movimiento con posición inicial  $x(0) = 0.1$  m y velocidad inicial  $v(0) = -0.4$  m/s. Encuentre la amplitud, la frecuencia natural, la frecuencia de oscilación y el periodo del movimiento resultante.

▼ En este caso, primero se determina la constante del resorte. Para ello basta con utilizar la Ley de Hooke,  $F_R = -kx$  con los datos  $F = 28.8$  N y  $x = 0.2$  m, tenemos entonces que

$$F + F_R = 0 \Rightarrow 28.8 - k(0.2) = 0 \quad \text{de donde} \quad k = 144 \text{ N/m.}$$

La ecuación diferencial del movimiento es:

$$9 \frac{d^2 x}{dt^2} + 144x = 0,$$

cuya ecuación característica es:  $r^2 + 16 = 0$ . Las soluciones de esta ecuación algebraica son  $r = \pm 4i$ . Entonces dos soluciones linealmente independientes son:

$$x_1(t) = \cos 4t \quad \& \quad x_2(t) = \sin 4t.$$

Y la solución general es:

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t.$$

La velocidad de la masa es, derivando la ecuación anterior,

$$v(t) = -4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t.$$

Utilizando las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{aligned} 0.1 &= x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1; \\ -0.4 &= v(0) = -4c_1 \sin(0) + 4c_2 \cos(0) = 4c_2. \end{aligned}$$

De donde:

$$c_1 = 0.1 \quad \& \quad c_2 = -0.1.$$

Entonces

$$x(t) = 0.1 \cos 4t - 0.1 \sin 4t.$$

Considerando que:

$$x(t) = A \sin(4t + \phi) = A(\sin 4t \cos \phi + \cos 4t \sin \phi) = (A \cos \phi) \sin 4t + (A \sin \phi) \cos 4t$$

se debe cumplir que:  $A \sin \phi = c_1 = 0.1$  y  $A \cos \phi = c_2 = -0.1$

de donde:  $A = \sqrt{(0.1)^2 + (-0.1)^2} = 0.1414$ ;  $\sin \phi = 0.7072$  y  $\cos \phi = -0.7072$ .

Además:  $\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{0.7072}{-0.7072} = -1 \Rightarrow \phi_c = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ .

Pero  $\cos \phi = -0.1 < 0 \Rightarrow \phi = \phi_c + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi = 2.3562 \text{ rad.}$

Por lo tanto:

$$x(t) = A \sin(4t + \phi) = (0.1414) \sin\left(4t + \frac{3\pi}{4}\right).$$

La amplitud es:  $A = 0.1414 \text{ m.}$

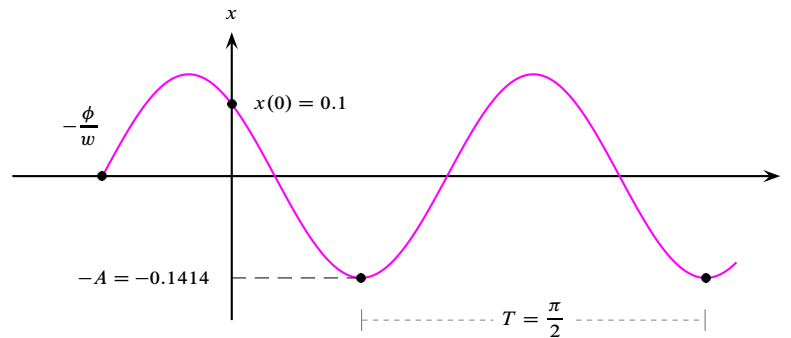
La frecuencia natural es:  $w = 4 \text{ rad/s.}$

El periodo es:  $T = \frac{2\pi}{4} \text{ s} = \frac{\pi}{2} \text{ s.}$

La frecuencia de oscilación es:  $f = \frac{1}{T} \text{ hertz} = \frac{2}{\pi} \text{ hertz.}$

El ángulo de fase es  $\phi = 2.3562 \text{ rad.}$

La gráfica de la posición  $x(t)$  se ve en la figura siguiente:



□

### Caso de un resorte colocado verticalmente

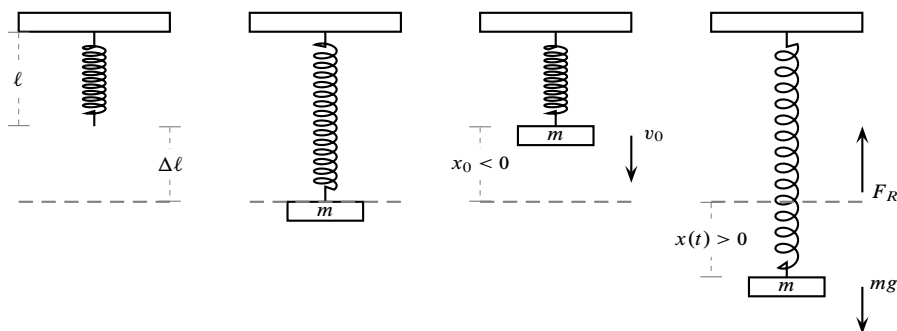
Los problemas anteriores trataron de oscilaciones horizontales.

¿Qué sucede cuando el resorte se coloca verticalmente?

Supongamos que se tiene un resorte colocado verticalmente con su extremo superior fijo. Al colocar un cuerpo de masa  $m$  en su extremo libre, el resorte sufre una deformación en su longitud  $\ell$ . Sea  $\Delta\ell$  la longitud de la deformación del resorte al quedar la masa  $m$  en reposo; esto es, al estar  $m$  en su posición de equilibrio. En esta posición ocurre que:  $-k\Delta\ell + mg = 0$  de donde se puede determinar el valor de la constante del resorte, a saber:  $k = \frac{mg}{\Delta\ell}$ .

Al colocar a  $m$  en una posición inicial  $x_0$  e imprimirle una velocidad inicial  $v_0$ ,  $m$  tiende a oscilar en torno a su posición de equilibrio.

En la siguiente figura se muestra un esquema del resorte vertical.



Las dos fuerzas que en todo momento actúan sobre la masa  $m$  son la fuerza del resorte  $F_R$  y la fuerza de la gravedad  $mg$ . Cuando el resorte está alargado ambas fuerzas apuntan en sentidos diferentes y cuando el resorte está comprimido apuntan en el mismo sentido.

Si tomamos como origen de coordenadas a la posición de equilibrio y la dirección positiva del eje vertical hacia abajo, entonces de acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza total es

$$\begin{aligned} mx''(t) &= mg - k[x(t) + \Delta l] \Rightarrow \\ \Rightarrow mx''(t) &= mg - kx(t) - k\Delta l \Rightarrow \\ \Rightarrow mx''(t) + kx(t) &= mg - k\Delta l \Rightarrow \\ \Rightarrow mx''(t) + kx(t) &= 0, \quad \text{ya que } mg = k\Delta l. \end{aligned}$$

Luego, la posición  $x(t)$  de  $m$  con respecto a su posición de equilibrio está dada, de nuevo, por la solución del PVI:

$$mx''(t) + kx(t) = 0; \quad \text{con } x(0) = x_0 \quad \& \quad x'(0) = v_0.$$

**Ejemplo 5.2.4** Un resorte cuelga verticalmente de un techo, el resorte se elonga un centímetro cuando se coloca una masa de 1.5 kg y después el sistema queda en equilibrio. Posteriormente se elonga el resorte una cantidad adicional de 1.5 cm y se suelta a partir del reposo. Determine la constante del resorte, la posición y la velocidad de la masa en el tiempo  $t \geq 0$ . ¿Cuál es la frecuencia de oscilaciones de la masa y la amplitud del movimiento?

▼ Cuando el resorte se elonga 0.01 m el sistema está en equilibrio, esto significa que:

$$k\Delta l = mg \quad \text{de donde} \quad k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{1.5 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2}{0.01 \text{ m}} = 1470 \text{ N/m}.$$

La posición  $x(t)$  de la masa  $m$ , con respecto a su posición de equilibrio, está dada por la solución del PVI:

$$1.5x''(t) + 1470x = 0; \quad \text{con } x(0) = 0.015 \quad \& \quad x'(0) = 0.$$

La ecuación característica de la ED es, en este caso,

$$1.5r^2 + 1470 = 0 \Rightarrow r^2 + 980 = 0,$$

cuyas raíces son, aproximadamente,  $r = \pm 31.305i$ . Entonces la solución general de la ED y su derivada están dadas por:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos(31.305t) + c_2 \sin(31.305t); \\ v(t) &= -31.305c_1 \sin(31.305t) + 31.305c_2 \cos(31.305t). \end{aligned}$$

Calculemos ahora los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  utilizando para ello las condiciones iniciales  $x_0 = 0.015$  y  $v_0 = 0$ . Sustituyendo en las ecuaciones anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} 0.015 &= x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1; \\ 0 &= v(0) = -31.305c_1 \sin(0) + 31.305c_2 \cos(0) = 31.305c_2. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo los coeficientes  $c_1 = 0.015$  &  $c_2 = 0$  en las expresiones para la posición y la velocidad obtenemos:

$$x(t) = 0.015 \cos(31.305t), \quad \& \quad v(t) = -0.4695 \sin(31.305t).$$

Esta función  $x(t)$  tiene frecuencia natural  $w = 31.305 \text{ rad/s}$  y periodo  $T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{31.305} = 0.2007 \text{ s}$ . Es decir, la masa realizará aproximadamente  $f = \frac{1}{T} = \frac{31.305}{2\pi} \approx 4.9823 \approx 5$  oscilaciones en un segundo y la amplitud es  $A = 0.015 \text{ m}$ .

□

**Ejemplo 5.2.5** Un sistema masa-resorte está colocado en forma vertical. La masa del cuerpo es de 9 kg y la constante del resorte es 25 N/m. Al inicio la masa se libera desde un punto que está a 4 cm arriba de la posición de equilibrio imprimiéndole una velocidad hacia abajo de 2 m/s.

1. ¿Cuántos ciclos completos habrá completado la masa al final de 20 segundos?
2. ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo por segunda vez? ¿Cuál es su velocidad instantánea en ese momento?
3. ¿En qué instante la masa alcanza sus desplazamientos extremos ya sea arriba o abajo de la posición de equilibrio?
4. ¿Cuál es la posición, la velocidad y la aceleración de la masa a los 10 segundos?

▼ Los datos en el problema son:  $m = 9$  kg;  $k = 25$  N/m;  $x_0 = -4$  cm y  $v_0 = 2$  m/s.

Si  $x(t)$  es la posición instantánea (en metros) de la masa  $m$ , con respecto a su posición de equilibrio, al cabo de  $t$  segundos, entonces  $x(t)$  está dada por la solución del PVI:

$$mx''(t) + kx(t) = 0; \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad \& \quad x'(0) = v_0;$$

$$9x''(t) + 25x(t) = 0; \quad \text{con } x(0) = -0.04, \quad \& \quad x'(0) = 2.$$

Para resolver el problema proponemos  $x(t) = e^{rt}$  como solución de la ED, así se obtiene:

$$\begin{aligned} 9x''(t) + 25x(t) = 0 &\Rightarrow 9r^2 + 25 = 0 \Rightarrow r^2 = -\frac{25}{9} \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\frac{25}{9}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow r = \pm\frac{5}{3}i. \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = c_1 \cos\left(\frac{5}{3}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{5}{3}t\right),$$

y la velocidad instantánea es

$$v(t) = x'(t) = -\frac{5}{3}c_1 \sin\left(\frac{5}{3}t\right) + \frac{5}{3}c_2 \cos\left(\frac{5}{3}t\right).$$

Aplicando las condiciones iniciales obtenemos:

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = -0.04 \Rightarrow c_1 = -0.04,$$

$$x'(0) = -\frac{5}{3}c_1 \sin 0 + \frac{5}{3}c_2 \cos 0 = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{6}{5} = 1.2.$$

De manera que la posición instantánea es:

$$x(t) = -0.04 \cos\left(\frac{5}{3}t\right) + 1.2 \sin\left(\frac{5}{3}t\right),$$

y la velocidad instantánea es:

$$v(t) = x'(t) = 0.0667 \sin\left(\frac{5}{3}t\right) + 2 \cos\left(\frac{5}{3}t\right).$$

Para tener a  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  consideramos que:

La amplitud  $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(-0.04)^2 + (1.2)^2} = 1.2007$ .

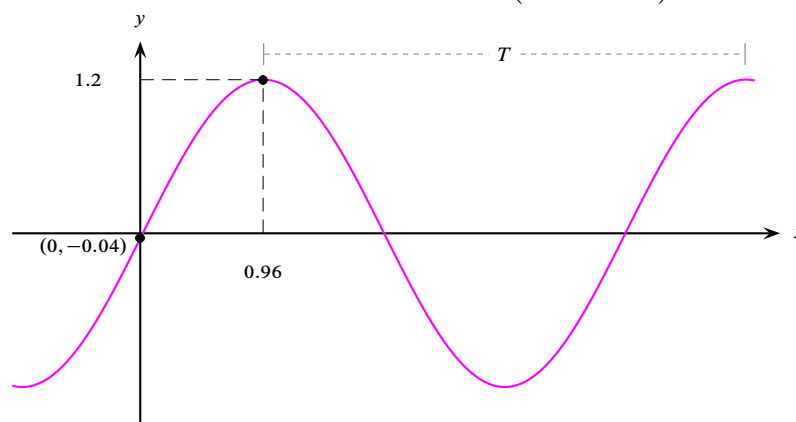
El ángulo de fase  $\phi$  está dado por:

$$\begin{aligned} A \sin \phi &= -0.04 \quad \& \quad A \cos \phi = 1.2, \\ \sin \phi &= \frac{-0.04}{A} = -0.0333 \quad \& \quad \cos \phi = \frac{1.2}{A} = 0.9994, \\ \tan \phi &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{-0.0333}{0.9994} = -0.0333, \\ \phi_c &= \arctan(-0.0333) \Rightarrow \phi_c = -0.0333. \end{aligned}$$

No hay cambio en el valor de  $\phi$  debido a que  $\cos \phi > 0$ .

Por lo tanto, la posición instantánea es:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = 1.201 \sin\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right).$$



Usando lo anterior podemos obtener los siguientes resultados:

1.

El periodo es:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6\pi}{5} \text{ s} = 3.7699 \text{ s}.$

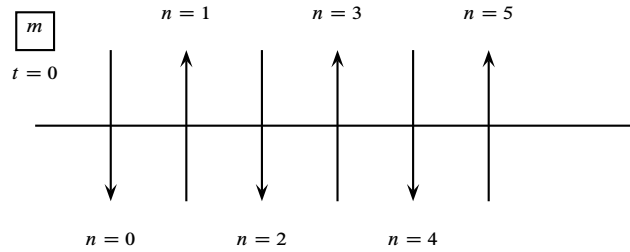
La frecuencia de oscilación es:  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3.7699} \approx 0.2653 \text{ osc/s}.$

El total de oscilaciones en 20 s es:  $20 \cdot f = 20(0.2653) \approx 5.3 \text{ oscilaciones}.$

2. La masa  $m$  pasa por la posición de equilibrio cuando:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \Rightarrow 1.201 \sin\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{5}{3}t - 0.0333 = n\pi, \quad \text{con } n \text{ entero} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{3}{5}(n\pi + 0.0333), \quad \text{con } n \text{ entero y } t \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{3}{5}(n\pi + 0.0333), \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Considerando la posición inicial  $x_0$  de  $m$  se tiene que:



La masa  $m$  pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo cuando:

$$n = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{5}(0\pi + 0.0333) \text{ s} = 0.01999 \text{ s} \approx 0.02 \text{ s.}$$

$$n = 2 \Rightarrow t = \frac{3}{5}(2\pi + 0.0333) \text{ s} = 3.7899 \text{ s} \approx 3.79 \text{ s.}$$

$$n = 4 \Rightarrow t = \frac{3}{5}(4\pi + 0.0333) \text{ s} = 7.5598 \text{ s} \approx 7.56 \text{ s.}$$

y así sucesivamente.

La masa  $m$  pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia arriba cuando:

$$n = 1 \Rightarrow t = \frac{3}{5}(\pi + 0.0333) \text{ s} = 1.9049 \text{ s} \approx 1.90 \text{ s.}$$

$$n = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{5}(3\pi + 0.0333) \text{ s} = 5.6749 \text{ s} \approx 5.67 \text{ s.}$$

$$n = 5 \Rightarrow t = \frac{3}{5}(5\pi + 0.0333) \text{ s} = 9.4448 \text{ s} \approx 9.44 \text{ s.}$$

y así sucesivamente.

Entonces, la masa  $m$  pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo por segunda vez en el instante  $t \approx 3.79 \text{ s}$  y su velocidad en ese momento es  $v(3.79) = 0.5968 \text{ m/s}$ .

3. Por otra parte, la masa  $m$  alcanza sus desplazamientos extremos cuando

$$\begin{aligned} |x(t)| = A &\Rightarrow x(t) = \pm A \Rightarrow A \sin\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) = \pm A \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) = \pm 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{5}{3}t - 0.0333 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{con } n \text{ entero} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{5}{3}t = (2n+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333, \quad \text{con } n \text{ entero y } t \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{3}{5}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333\right], \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

De aquí que la masa  $m$  alcanza sus desplazamientos extremos cuando:

$$n = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{5}\left[(0+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333\right] \text{ s} \approx 0.96 \text{ s.}$$

$$n = 1 \Rightarrow t = \frac{3}{5}\left[(2+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333\right] \text{ s} \approx 2.85 \text{ s.}$$

$$n = 2 \Rightarrow t = \frac{3}{5}\left[(4+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333\right] \text{ s} \approx 4.73 \text{ s.}$$

$$n = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{5}\left[(6+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333\right] \text{ s} \approx 6.62 \text{ s.}$$

y así sucesivamente.



4. Finalmente, la posición, la velocidad y la aceleración a los 10 segundos se obtiene evaluando  $x(t)$ ,  $v(t) = x'(t)$  &  $a(t) = x''(t)$  en  $t = 10$ . Obtenemos:

$$x(t) = 1.201 \sin\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right), v(t) = 2.002 \cos\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) \text{ \& } a(t) = -3.3367 \sin\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right).$$

Entonces:

$$x(10) = 1.201 \sin\left(\frac{50}{3} - 0.0333\right) \text{ m} = -0.9594 \text{ m}.$$

$$v(10) = 2.002 \cos\left(\frac{50}{3} - 0.0333\right) \text{ m/s} = -1.2043 \text{ m/s}.$$

$$a(10) = -3.3367 \sin\left(\frac{50}{3} - 0.0333\right) \text{ m/s}^2 = 2.6656 \text{ m/s}^2.$$

Esto es,

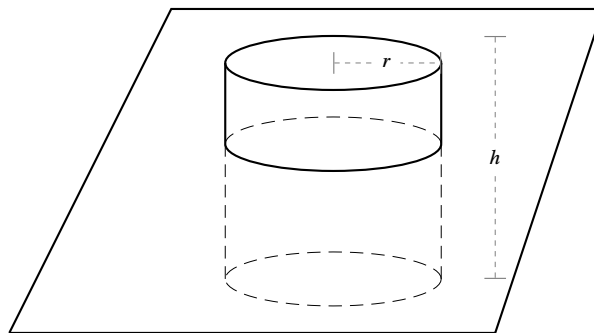
$$x(10) \approx -0.96 \text{ m}, \quad v(10) \approx -1.2 \text{ m/s} \quad \& \quad a(10) \approx 2.67 \text{ m/s}^2.$$

lo que significa que a los 10 segundos la masa  $m$  está a 0.96 m arriba de la posición de equilibrio, dirigiéndose hacia arriba con una rapidez de 1.2 m/s y con una aceleración dirigida hacia abajo de 2.67 m/s<sup>2</sup>.

□

Los siguientes ejemplos tratan con sistemas que no son exactamente masa-resorte, pero su análisis es similar y las respuestas que obtendremos también.

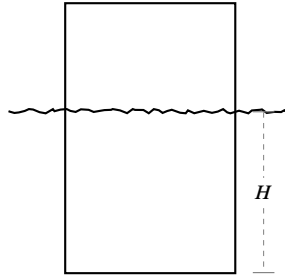
**Ejemplo 5.2.6** Una boya cilíndrica de radio  $r$ , altura  $h$  y densidad  $\rho_{\text{boya}}$  se encuentra flotando en la superficie de un lago, como se muestra en la figura. Inicialmente la boya se encuentra en equilibrio, de repente se sumerge una distancia  $x_0$  y se suelta con velocidad igual a cero. Determine la ecuación diferencial que modela el sistema y su solución. Si la boya tiene dimensiones  $h = 1 \text{ m}$ ,  $r = 0.5 \text{ m}$ , y su densidad es  $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$ , determine la posición y la velocidad de la boya en todo tiempo si se sumerge una profundidad de  $x_0 = 0.01 \text{ m}$  a partir de la posición en equilibrio. Recuerde que  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  y que  $\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ .



▼ De acuerdo con el principio de flotación de Arquímedes, la boya se encuentra en equilibrio cuando la fuerza de flotación es igual al peso de la boya. Por una parte, el volumen que ocupa la boya es  $V = \pi r^2 h$  y su peso es igual a

$$w_{\text{boya}} = m_{\text{boya}} g = \rho_{\text{boya}} V g = \rho_{\text{boya}} \pi r^2 h g.$$

Por otra parte, supongamos que la boya está en equilibrio cuando se encuentra sumergida una altura  $H$ .



Como la fuerza de flotación es igual al peso del líquido desplazado, tenemos que

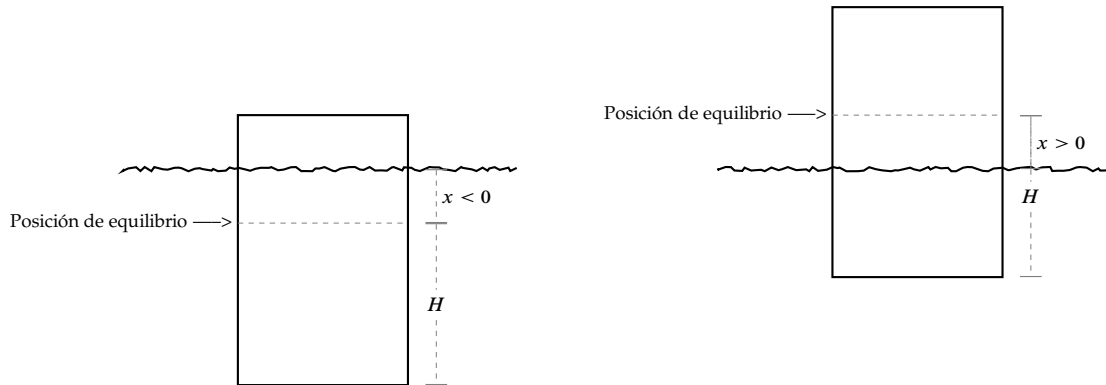
$$F_{\text{flot}} = m_{\text{agua}}g = \rho_{\text{agua}}V_{\text{despl}}g = \rho_{\text{agua}}\pi r^2 Hg.$$

Igualando las dos últimas expresiones podemos obtener la altura  $H$  que se sumerge la boya cuando se encuentra en equilibrio.

$$w_{\text{boya}} = F_{\text{flot}} \Rightarrow \rho_{\text{agua}}\pi r^2 Hg = \rho_{\text{boya}}\pi r^2 hg \Rightarrow \rho_{\text{agua}}H = \rho_{\text{boya}}h \Rightarrow H = \frac{\rho_{\text{boya}}h}{\rho_{\text{agua}}}.$$

Ahora, sobre esta distancia  $H$ , sumergimos la boya una altura adicional  $x_0$  y la soltamos con velocidad  $v_0 = 0$ . Entonces la fuerza de flotación ya no es igual al peso, el sistema deja de estar en equilibrio y empieza a oscilar.

En cualquier momento la posición de equilibrio se encuentra una distancia  $x$  con respecto al agua, como se muestra en la figura:



Suponemos que  $x$  es negativa cuando la posición de equilibrio de la boya está sumergida una distancia  $x$  y negativa cuando dicha posición de equilibrio sobresale  $x$ .

La fuerza que siente la boya en cualquier momento es ahora:

$$F = F_{\text{flot}} - m_{\text{boya}}g = \rho_{\text{agua}}\pi r^2(H - x)g - \rho_{\text{boya}}\pi r^2 hg = -\rho_{\text{agua}}\pi r^2 xg.$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton,  $F = ma$ , el movimiento de la boya se describe, a partir de la posición en equilibrio, por medio de

$$\begin{aligned} m_{\text{boya}} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\rho_{\text{agua}}\pi r^2 xg \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_{\text{boya}}\pi r^2 h \frac{d^2x}{dt^2} &= -\rho_{\text{agua}}\pi r^2 xg \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_{\text{boya}}h \frac{d^2x}{dt^2} &= -\rho_{\text{agua}}xg. \end{aligned}$$

Que se puede reescribir como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left( \frac{\rho_{\text{agua}}g}{\rho_{\text{boya}}h} \right)x = 0.$$

Esta ecuación diferencial es del tipo masa-oscilador que hemos estado estudiando. La frecuencia natural es:

$$w = \sqrt{\frac{\rho_{\text{agua}}g}{\rho_{\text{boya}}h}}.$$

La solución general es entonces:

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt.$$

Y la velocidad con la que mueve la boya es

$$v(t) = -c_1 w \sin wt + c_2 w \cos wt.$$

Finalmente, si suponemos que  $x(0) = -x_0$  y  $v(0) = 0$ , obtenemos:  $c_1 = -x_0$  y  $c_2 = 0$ . Utilizando estos dos resultados se obtiene la forma de la oscilación de la boya.

$$x(t) = -x_0 \cos wt.$$

Para el caso en que  $h = 1$  m,  $r = 0.5$  m,  $\rho = 500$  kg/m<sup>3</sup>,  $x_0 = 0.01$  m y considerando que  $\rho_{\text{agua}} = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, se tiene que:

$$w = \sqrt{\frac{(1000)(9.8)}{(500)(1)}} = 4.4272.$$

Por lo que la posición de la boya dada las condiciones iniciales es:

$$x(t) = -0.01 \cos(4.4272t),$$

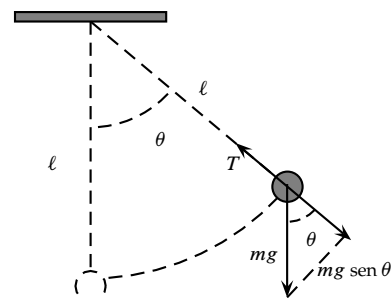
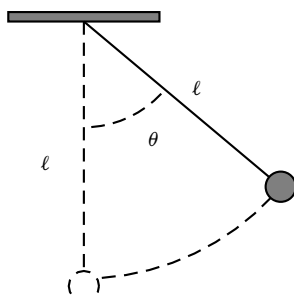
y la velocidad es:

$$v(t) = x'(t) = 0.0443 \sin(4.4272t).$$

□

**Ejemplo 5.2.7** Un péndulo de masa  $m = 2$  kg y de longitud  $\ell$  igual a 2.45 m está suspendido sobre un marco horizontal, como se ilustra en la figura. El péndulo se levanta un ángulo de  $10^\circ$  y se suelta con una velocidad angular de  $-0.4$  rad/s.

1. ¿Cuántos ciclos completos habrá completado el péndulo después de 10 s?
2. ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con velocidad angular positiva por tercera vez?
3. ¿En qué instantes la masa alcanza sus desplazamientos extremos?
4. ¿Cuál es la posición de la masa del péndulo en cualquier tiempo?
5. ¿Cuál es la posición de la masa a los 10 segundos?



▼ Primero se determina la ecuación diferencial del movimiento, para ello se considera el diagrama de fuerzas que se muestra en la figura. Las dos únicas fuerzas que actúan sobre la masa son la tensión  $T$  de la cuerda que se considera rígida y el peso  $mg$  del cuerpo. En la dirección del segmento que une el punto de soporte del péndulo con la masa (dirección radial) la fuerza neta es cero, ya que en esa dirección la masa está en equilibrio.

Por otra parte, en la dirección del movimiento del péndulo (dirección tangencial) sólo actúa la componente tangencial del peso, que es:  $-mg \sin \theta$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, tenemos en la dirección tangencial:

$$ma_{tan} = -mg \sin \theta,$$

donde la aceleración  $a_{tan}$  se relaciona con el ángulo  $\theta$  de acuerdo a

$$a_{tan} = \ell \alpha = \ell \frac{d^2 \theta}{dt^2},$$

donde  $\alpha$  es la aceleración angular. Reuniendo estos dos últimos resultados obtenemos:

$$m\ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta,$$

de donde

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

Para ángulos pequeños, donde es posible suponer que  $\sin \theta \approx \theta$ , obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta = 0.$$

Observe que no importa el valor de la masa  $m$ , ya que la ecuación diferencial no depende de ella. Sustituyendo los valores de la longitud de la cuerda  $\ell = 2.45$  m y de la constante  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> obtenemos:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 4\theta = 0.$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\theta(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

La velocidad angular  $\theta'(t)$  se obtiene derivando esta expresión. Tenemos entonces que:

$$\theta'(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t.$$

Las condiciones iniciales del problema son:

$$\theta(0) = 10^\circ = 10\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad} = \frac{\pi}{18} \text{ rad} \approx 0.1745 \text{ rad, } \& \theta'(0) = -0.4 \text{ rad/s.}$$

Tomando esto en cuenta y usando las dos expresiones anteriores tenemos:

$$c_1 = \frac{\pi}{18} \approx 0.1745 \quad \& \quad c_2 = -0.2 = -\frac{1}{5}.$$

De manera que:

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t = 0.1745 \cos 2t - 0.2 \sin 2t.$$

Para reescribir  $\theta(t)$  en la forma  $\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ , se considera que:

$$\theta(t) = A \sin \omega t \cos \phi + A \cos \omega t \sin \phi.$$

La amplitud es  $A = \sqrt{(0.1745)^2 + (-0.2)^2} = 0.2654$ . El ángulo de fase  $\phi$  está dado por:

$$A \sin \phi = 0.1745 \quad \& \quad A \cos \phi = -0.2.$$

Entonces:  $\tan \phi = \frac{0.1745}{-0.2} = -0.8725 \Rightarrow \phi_c = \arctan(-0.8725) = -0.7174$  y debido a que  $\cos \phi < 0$ :

$$\phi = \phi_c + \pi = -0.7174 + \pi = 2.4242.$$

De forma que el ángulo  $\theta$  en el tiempo  $t$  es:

$$\theta(t) = 0.2654 \sin(2t + 2.4242) \text{ rad.}$$

y la velocidad angular es:

$$\theta'(t) = 0.5308 \cos(2t + 2.4242) \text{ rad/s.}$$

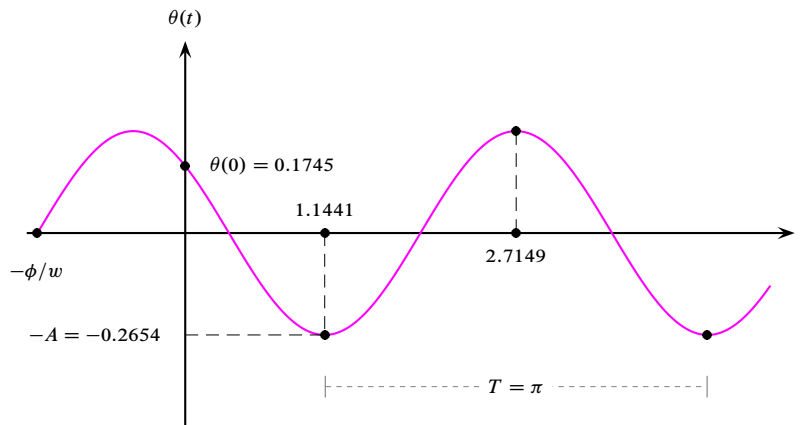
Estamos ahora en condiciones de responder las preguntas de este ejemplo:

1. Como el periodo es de  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$  s, entonces en 10 s se realizan  $\frac{10}{\pi} \approx 3$  oscilaciones completas.
2. La masa pasa por la posición de equilibrio cuando  $\theta(t) = 0$ , esto ocurre cuando

$$\sin(2t + 2.4242) = 0 \Rightarrow 2t + 2.4242 = n\pi, \text{ con } n \text{ entero y } t \geq 0 \Rightarrow t = \frac{n\pi - 2.4242}{2} \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Observe que para valores impares de  $n$  la velocidad angular está dada por  $\theta'(t) = -0.5308$  rad/s. Así que la tercera vez que se cruza la posición de equilibrio con velocidad angular negativa ocurre cuando  $n = 5$ , es decir, cuando  $t \approx 6.6419$  s.

La siguiente es la gráfica de  $\theta(t)$ :



3. Por otra parte, el péndulo obtiene sus valores extremos o de retorno cuando la velocidad angular es cero. Es decir, cuando

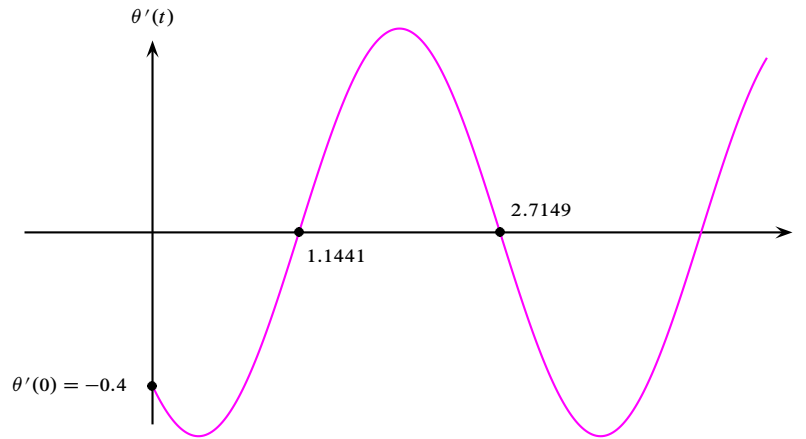
$$\cos(2t + 2.4242) = 0 \Rightarrow 2t + 2.4242 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \text{ entero y } t \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t = (2n + 1)\frac{\pi}{2} - 2.4242 \Rightarrow t = \frac{(2n + 1)\pi}{4} - 1.2121, \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

O sea que:

$$t = 1.1441 \text{ s; } 2.7149 \text{ s; } 4.2857 \text{ s; } \dots$$

La siguiente es la gráfica de  $\theta'(t)$ :



4. Las coordenadas cartesianas de la masa del péndulo con respecto a un sistema de coordenadas con origen en el punto de soporte es (nuevamente observe la figura):

$$\begin{aligned}x(t) &= l \sin[\theta(t)] = 2.45 \sin[0.2654 \sin(2t + 2.4242)], \\y(t) &= -l \cos[\theta(t)] = -2.45 \cos[0.2654 \sin(2t + 2.4242)].\end{aligned}$$

5. Finalmente, la posición de la masa a los 10 s se obtiene evaluando las funciones anteriores, así tenemos:

$$\begin{aligned}\theta(10) &= 0.2654 \sin(22.4242) \approx -0.1114 \text{ rad.} \\x(10) &= l \cos[\theta(10)] = 2.45 \cos(-0.1114) \approx 2.4348 \text{ m.} \\y(10) &= -l \sin[\theta(10)] = -2.45 \sin(-0.1114) \approx 0.2724 \text{ m.}\end{aligned}$$

□

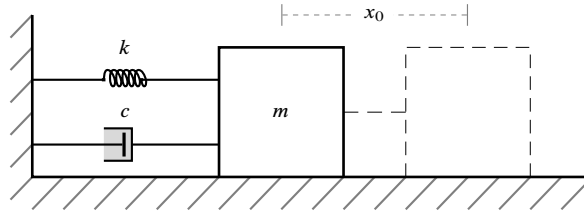
### Ejercicios 5.2.1 Movimiento armónico simple. Soluciones en la página: 472

- Un resorte de constante  $k$  está conectado en uno de sus extremos a un cuerpo de masa  $m$  y en el otro a una pared. El sistema masa-resorte descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. Determine la posición y velocidad del cuerpo con las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$ .
  - $m = 0.5 \text{ kg}$ ,  $k = 8 \text{ N/m}$ ,  $x(0) = 0 \text{ m}$ ,  $v(0) = 2 \text{ m/s}$ .
  - $m = 2.5 \text{ kg}$ ,  $k = 10 \text{ N/m}$ ,  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ ,  $v(0) = -1.2 \text{ m/s}$ .
- Un cuerpo de masa  $m$  está unido al extremo de un resorte estirado una distancia  $d$  por una fuerza  $F$ . El cuerpo es puesto en movimiento en una posición inicial de  $x(0) = x_0$  y velocidad inicial  $v(0) = v_0$ . Encuentre la amplitud, la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo del movimiento resultante. Determine la posición en la forma  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  y la velocidad.
  - $m = 4 \text{ kg}$ ,  $d = 0.2 \text{ m}$ ,  $F = 15 \text{ N}$ ,  $x(0) = 0.6 \text{ m}$ ,  $v(0) = 1.5 \text{ m/s}$ .
  - $m = 4 \text{ kg}$ ,  $d = 0.25 \text{ m}$ ,  $F = 100 \text{ N}$ ,  $x(0) = 0.1 \text{ m}$ ,  $v(0) = -1 \text{ m/s}$ .
- Una masa  $m$  igual a  $32 \text{ kg}$  se suspende verticalmente de un resorte y por esta razón éste se alarga  $39.2 \text{ cm}$ . Determine la amplitud y el periodo de movimiento si la masa se libera desde un punto situado  $20 \text{ cm}$  arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de  $1 \text{ m/s}$ . ¿Cuántos ciclos completos habrá completado la masa al final de  $40$  segundos? Suponga  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .
- Una masa de  $9 \text{ kg}$  alarga un resorte  $9.8 \text{ cm}$ , el sistema masa-resorte se encuentra suspendido verticalmente. La masa se libera desde el reposo de un punto situado  $5 \text{ cm}$  debajo de la posición de equilibrio.
  - Encuentre la posición de la masa en los tiempos  $t = 5$  y  $10$  segundos.

- b. ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando  $t$  es igual a 12 segundos? ¿En qué dirección se dirige en ese instante?
  - c. ¿En qué tiempos la masa pasa por la posición de equilibrio?
  - d. ¿En qué tiempos tiene el resorte su máxima compresión y su máxima elongación?
5. Una fuerza de 4 newtons alarga un resorte 4 cm. En el extremo del resorte colocado verticalmente se pone una masa de 25 kg y se libera el sistema desde su posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 10 m/s. Encuentre la ecuación de movimiento.
6. Un resorte con constante de 20 N/m se suspende verticalmente de un soporte y se coloca una masa de 20 kilogramos. El sistema se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 10 m/s.
  - a. Determine la amplitud, la frecuencia angular y el periodo del movimiento.
  - b. Calcule la posición y la velocidad en todo tiempo  $t$ .
  - c. ¿Cuál es la máxima velocidad de la masa? ¿Qué pasa con la aceleración en ese instante?
7. Una masa de 0.4 kg se une a un resorte de constante 3.6 N/m. Cuando el sistema se suelta se exhibe un movimiento armónico simple. Determine la ecuación de movimiento si la masa se libera inicialmente desde un punto 15 cm debajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 0.45 m/s hacia abajo.
8. Una masa de 40 kg alarga un resorte 9.8 cm. Al inicio la masa se libera desde un punto que está 40 cm arriba de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 4 m/s.
  - a. ¿Cuáles son la amplitud, la frecuencia angular y el periodo del movimiento?
  - b. ¿Cuántos ciclos (completos) habrá completado la masa al final de 3 segundos?
  - c. ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo por sexta vez?
  - d. ¿Cuál es la velocidad y la aceleración en ese instante?
  - e. ¿En qué instante la masa alcanza sus desplazamientos extremos en cualquier lado de la posición de equilibrio?
  - f. ¿Cuál es la posición, velocidad y aceleración en los tiempos  $t = 5, 10, 15, 20$  y 25 segundos?
  - g. ¿En qué instantes la masa está a 0.40 metros abajo de la posición de equilibrio?
9. Determine la posición y la velocidad en el tiempo de un péndulo con las condiciones siguientes. Suponga que  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .
  - a.  $\ell = 0.098 \text{ m}$ ,  $m = 0.5 \text{ kg}$ ,  $\theta(0) = 0 \text{ rad}$ ,  $\theta'(0) = 0.02 \text{ rad/s}$ .
  - b.  $\ell = 0.49 \text{ m}$ ,  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $\theta(0) = -0.2 \text{ rad}$ ,  $\theta'(0) = 0 \text{ rad/s}$ .
  - c.  $\ell = 9.8 \text{ m}$ ,  $m = 2.5 \text{ kg}$ ,  $\theta(0) = 0.1 \text{ rad}$ ,  $\theta'(0) = -0.1 \text{ rad/s}$ .
10. Un péndulo de 20 cm de longitud y masa de 0.5 kg oscila. Si en el tiempo  $t = 0$  el ángulo y la velocidad son  $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$  radianes y  $\theta'(0) = \frac{7\pi}{12} \text{ rad/s}$ , determinar el periodo de movimiento, la amplitud, el ángulo de fase,  $\theta(t)$ ,  $\theta'(t)$  y el primer tiempo para el cual  $\theta = 0$  radianes.

### 5.2.2 Vibraciones amortiguadas libres

Continuando el desarrollo del estudio de las vibraciones, supongamos que se agrega ahora un dispositivo mecánico (amortiguador) al sistema masa-resorte que tiene el efecto de reducir la velocidad de la masa cuando el sistema se encuentra vibrando, ver figura.



El amortiguador ejerce una fuerza dependiente de la velocidad de la masa, entre mayor sea la velocidad mayor es la fuerza que ejerce. Por simplicidad supondremos que esta fuerza en magnitud es proporcional a la rapidez, es decir:  $|F_A| = c|v(t)|$ , donde  $c > 0$  es la constante de proporcionalidad. Entonces, la fuerza que ejerce el amortiguador es:

$$F_A = -cv(t) = -c \frac{dx}{dt},$$

donde el signo negativo indica que la fuerza de amortiguación va en sentido contrario a la velocidad del cuerpo. La fuerza total ejercida sobre la masa es, entonces:

$$F = F_R + F_A = -kx - c \frac{dx}{dt}, \text{ donde } F_R \text{ es la fuerza del resorte,}$$

lo que se puede escribir como:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \text{o bien} \quad mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0, \quad (5.10)$$

La ecuación (5.10) modela el movimiento amortiguado de la masa. En este caso, la fuerza de amortiguación produce una pérdida de energía en el sistema masa-resorte de forma que ahora no se satisface la ecuación de conservación de la energía (5.9) en la página (273). Es de notar que todos los parámetros del modelo ( $m$ ,  $c$  y  $k$ ) son cantidades positivas. La misma ecuación diferencial modela al sistema masa-resorte colocado verticalmente.

La ecuación característica de la ecuación diferencial es:

$$mr^2 + cr + k = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son:

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad \& \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}. \quad (5.11)$$

El signo del radicando  $c^2 - 4mk$  determina el tipo de movimiento del sistema. Tenemos tres posibilidades: que el radicando en cuestión sea positivo, negativo o cero. Analizemos a continuación cada uno de estos casos

**Movimiento sobreamortiguado.**  $c^2 - 4mk > 0$ , es decir  $c > \sqrt{4mk}$

En el caso  $c^2 - 4mk > 0$  las dos raíces que aparecen en (5.11) son diferentes y *ambas son negativas*, esto implica directamente que la solución de la ED lineal homogénea es:

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad \text{con} \quad r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad \& \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (5.12)$$

Las dos funciones exponenciales que aparecen en (5.12) son decrecientes, en consecuencia, no se espera vibración alguna y el sistema tiende rápidamente a regresar a su posición de equilibrio, por esa razón decimos que el movimiento es *sobreamortiguado*. La forma explícita del movimiento depende de las condiciones iniciales, que además sirven para determinar las constantes  $c_1, c_2$ .



Por ejemplo, consideremos el caso de un sistema masa-resorte-amortiguador con condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = 0$ . La primera condición  $x(0) = x_0$  se obtiene evaluando la expresión (5.12) en el tiempo  $t = 0$ . Así obtenemos:

$$x_0 = x(0) = c_1 + c_2. \quad (5.13)$$

Derivando la ecuación (5.12) obtenemos

$$v(t) = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}.$$

Evaluando en  $t = 0$  obtenemos la segunda ecuación a considerar

$$0 = v(0) = c_1 r_1 + c_2 r_2. \quad (5.14)$$

El sistema de ecuaciones lineales (5.13) y (5.14) para  $c_1$ ,  $c_2$  se puede resolver de diferentes formas, en este caso si seleccionamos la regla de Cramer, obtenemos:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ 0 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_0 r_2}{r_2 - r_1}; \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ r_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{-x_0 r_1}{r_2 - r_1}.$$

Finalmente, sustituyendo en (5.12) obtenemos la siguiente expresión para la posición

$$x(t) = \left( \frac{x_0 r_2}{r_2 - r_1} \right) e^{r_1 t} - \left( \frac{x_0 r_1}{r_2 - r_1} \right) e^{r_2 t} = \left( \frac{x_0}{r_2 - r_1} \right) (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}). \quad (5.15)$$

De la ecuación (5.11), tenemos que

$$r_2 - r_1 = \frac{-\sqrt{c^2 - 4mk}}{m}.$$

Esto nos permite simplificar la ecuación (5.15) de forma que:

$$x(t) = \frac{-x_0 m}{\sqrt{c^2 - 4mk}} (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}) = \frac{x_0 m}{\sqrt{c^2 - 4mk}} (r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}).$$

**Ejemplo 5.2.8** Considere un sistema masa-resorte-amortiguador con las constantes siguientes

$$c = 5 \text{ N} \cdot \text{seg}/\text{m}; \quad m = 2 \text{ kg}; \quad k = 2 \text{ N}/\text{m}; \quad x_0 = 1 \text{ m}; \quad v_0 = 0 \text{ m/s}.$$

Resuelva la ecuación diferencial y grafique la posición en el tiempo.

▼ En este caso la ecuación diferencial a resolver es:

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 2x = 0,$$

cuya ecuación característica es:

$$2r^2 + 5r + 2 = 0.$$

Como las dos raíces de esta ecuación cuadrática son

$$r_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(2)}}{2(2)} = \begin{cases} -2; \\ -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Para determinar las constantes necesitamos calcular la velocidad y utilizar las condiciones iniciales. La velocidad se obtiene derivando la posición y está dada por

$$v(t) = -2c_1 e^{-2t} - \frac{1}{2}c_2 e^{-\frac{t}{2}}.$$

Si ahora utilizamos las condiciones iniciales  $x_0 = 1$  &  $v_0 = 0$  obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2; \\ 0 &= -2c_1 - \frac{1}{2}c_2. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se tiene  $c_2 = -4c_1$ . Sustituyendo en la primera resulta  $c_1 = -\frac{1}{3}$ . Finalmente  $c_2 = \frac{4}{3}$ . Así se obtiene que la posición en todo tiempo está dada por la expresión:

$$x(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}} \text{ m},$$

de donde es posible determinar tanto la velocidad como la aceleración derivando una y dos veces. Así obtenemos que

$$v(t) = \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}} \text{ m/s} \quad \& \quad a(t) = -\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}} \text{ m/s}^2.$$

Algunas observaciones interesantes son las siguientes:

1. ¿Pasa  $m$  por la posición de equilibrio? Para responder la pregunta encontremos, si existe, el tiempo en el que  $x(t) = 0$ :

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{3}e^{-2t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4e^{-\frac{t}{2}}e^{2t} = 1 \Rightarrow e^{\frac{3}{2}t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}t = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{2}{3}(-\ln 4) = -\frac{2}{3}(\ln 4), \quad \text{vemos que } t < 0 \end{aligned}$$

Esto nos indica que no hay  $t \geq 0$  para el cual  $x(t) = 0$ . Entonces,  $m$  no pasa por la posición de equilibrio.

2. ¿Hay instantes en que la velocidad de  $m$  sea cero? Esto ocurre si  $v(t) = 0$ , así tenemos:

$$\begin{aligned} v(t) = 0 &\Rightarrow \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}e^{-2t} = \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{-2t} = e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow e^{-2t}e^{\frac{t}{2}} = 1 \Rightarrow e^{-\frac{3}{2}t} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{3}{2}t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{aligned}$$

Esto nos indica que  $v(t) = 0$  solamente al inicio del movimiento.

Aún más,  $v(t) < 0$  cuando  $-\frac{3}{2}t < 0$ , lo que ocurre cuando  $t > 0$ . Entonces, en todo instante  $t > 0$  sucede que  $v(t) < 0$ , o sea  $x'(t) < 0$ ; lo que nos permite afirmar que la posición  $x(t)$  decrece al paso del tiempo.

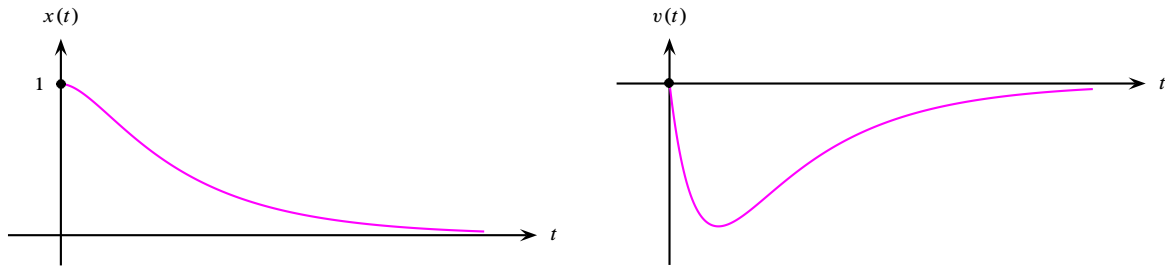
3. ¿Qué ocurre con la posición  $x(t)$  y la velocidad  $v(t)$  al paso del tiempo?

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{3e^{2t}} + \frac{4}{3e^{\frac{t}{2}}} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{e^{2t}} \right) + \frac{4}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{e^{\frac{t}{2}}} \right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3e^{2t}} - \frac{2}{3e^{\frac{t}{2}}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{e^{2t}} \right) - \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{e^{\frac{t}{2}}} \right) = 0\end{aligned}$$

Esto es, al paso del tiempo, la masa  $m$  tiende a detenerse en la posición de equilibrio.

4. Las gráficas de  $x(t)$  y  $v(t)$  son las siguientes:



5. Por otra parte, la energía obtenida con la suma de la energía cinética más la energía potencial está dada por:

$$\begin{aligned}E &= E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \left( \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}} \right)^2 + \left( -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{9} \left( 4e^{-4t} - 8e^{-\frac{5t}{2}} + 4e^{-t} + e^{-4t} - 8e^{-\frac{5t}{2}} + 16e^{-t} \right) = \\ &= \frac{1}{9} \left( 5e^{-4t} - 16e^{-\frac{5t}{2}} + 20e^{-t} \right).\end{aligned}$$

Claramente, esta energía no permanece constante en el tiempo y se va reduciendo hasta desaparecer. Podemos afirmar que el amortiguador, en efecto, disipa energía del sistema masa-resorte.

□

**Ejemplo 5.2.9** Una masa de 5 kg se une a un resorte de constante  $k = 5$  N/m y a un amortiguador de constante  $c = 26$  N·s/m. La masa se suelta del punto  $x_0 = -0.1$  metros con velocidad  $v_0 = 1.94$  m/s, determine

1. La posición, velocidad y aceleración de la masa en el tiempo  $t \geq 0$ .
2. El tiempo en que la masa cruza por la posición de equilibrio y la velocidad en ese instante.
3. El tiempo en que la velocidad de la masa es 0 m/s, así como la posición y aceleración en ese instante.

▼ La posición  $x(t)$  de  $m$ , con respecto a la posición de equilibrio, está dada por la solución del PVI

$$5\frac{d^2x}{dt^2} + 26\frac{dx}{dt} + 5x = 0 \quad \text{con} \quad x(0) = -0.1 \text{ m} \quad \& \quad x'(0) = 1.94 \text{ m/s}$$

Proponiendo como solución  $x = e^{rt}$  obtenemos la ecuación característica

$$5r^2 + 26r + 5 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r_{1,2} = \frac{-26 \pm \sqrt{676 - 4(5)(5)}}{2(5)} = \frac{-26 \pm 24}{10} = \begin{cases} -5; \\ -\frac{1}{5}, \end{cases}$$

de donde inferimos que la posición de la masa es

$$x(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-\frac{t}{5}}$$

y su velocidad está dada por

$$v(t) = -5c_1 e^{-5t} - \frac{1}{5}c_2 e^{-\frac{t}{5}}.$$

Como en el tiempo  $t = 0$  s se tiene que  $x_0 = -0.1$  m con velocidad  $v_0 = 1.94$  m/s, tenemos sustituyendo en las dos ecuaciones previas que:

$$\begin{aligned} -0.1 &= c_1 + c_2 : \\ 1.94 &= -5c_1 - 0.2c_2. \end{aligned}$$

Para resolver este sistema usamos el método de Cramer. Tenemos entonces que

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0.1 & 1 \\ 1.94 & -0.2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -0.2 \end{vmatrix}} = \frac{0.02 - 1.94}{-0.2 + 5} = \frac{-1.92}{4.8} = -0.4;$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0.1 \\ -5 & 1.94 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -0.2 \end{vmatrix}} = \frac{1.94 - 0.5}{-0.2 + 5} = \frac{1.44}{4.8} = 0.3.$$

1. Con estos resultados obtenemos la posición, y derivando la velocidad y la aceleración de la masa en el tiempo  $t \geq 0$ ,

$$x(t) = -0.4e^{-5t} + 0.3e^{-\frac{t}{5}} \text{ m};$$

$$v(t) = 2e^{-5t} - 0.06e^{-\frac{t}{5}} \text{ m/s};$$

$$a(t) = -10e^{-5t} + 0.012e^{-\frac{t}{5}} \text{ m/s}^2.$$

2. Observe que la masa cruza por la posición de equilibrio cuando

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &\Rightarrow 0 = -0.4e^{-5t} + 0.3e^{-\frac{t}{5}} \Rightarrow 0.4e^{-5t} = 0.3e^{-\frac{t}{5}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{0.4}{0.3} = e^{5t - \frac{t}{5}} = e^{\frac{24t}{5}} \Rightarrow \frac{24t}{5} = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{5}{24} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.0599 \text{ s}. \end{aligned}$$

La velocidad en este tiempo es

$$v(0.0599) = 2e^{-5(0.0599)} - 0.06e^{-\frac{0.0599}{5}} \approx 1.4228 \text{ m/s}.$$

3. La máxima separación de la posición de equilibrio se obtiene cuando la velocidad es cero, esto ocurre cuando

$$\begin{aligned} v(t) = 0 &\Rightarrow 0 = 2e^{-5t} - 0.06e^{-\frac{t}{5}} \Rightarrow 2e^{-5t} = 0.06e^{-\frac{t}{5}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2}{0.06} = e^{\frac{24t}{5}} \Rightarrow \frac{24t}{5} = \ln\left(\frac{2}{0.06}\right) = \ln\left(\frac{100}{3}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{5}{24} \ln\left(\frac{100}{3}\right) \approx 0.7305 \text{ s.} \end{aligned}$$

En este tiempo la posición está dada por

$$x(0.7305) = -0.4e^{-5(0.7305)} + 0.3e^{-\frac{0.7305}{5}} \approx 0.2489 \text{ m.}$$

Y la aceleración es

$$a(0.7305) = -10e^{-5(0.7305)} + 0.012e^{-\frac{0.7305}{5}} \approx -0.2489 \text{ m/s}^2.$$

En efecto, como la aceleración es negativa se tiene un máximo en la posición.

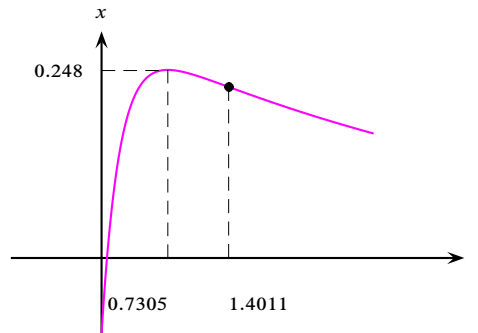
Por otra parte la aceleración se anula cuando

$$\begin{aligned} 0 &= -10e^{-5t} + 0.012e^{-\frac{t}{5}} \Rightarrow e^{\frac{24}{5}t} = \frac{10}{0.012} = 833.333 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{5}{24} \ln(833.333) \approx 1.4011 \text{ s.} \end{aligned}$$

Antes y después de ese tiempo el signo de la aceleración es diferente, esto implica que la posición tiene en  $t = 1.4011$  un punto de inflexión. La posición en este tiempo es

$$x(1.4011) = -0.4e^{-5(1.4011)} + 0.3e^{-\frac{1.4011}{5}} = 0.2263 \text{ m.}$$

Estos resultados nos permiten construir la gráfica de la posición, que podemos observar en la figura siguiente:



□

### Movimiento críticamente amortiguado. $c = \sqrt{4mk}$

En este caso las dos raíces de la ecuación característica son iguales a  $r = -\frac{c}{2m}$ , ver (5.11), página 290. La solución de la ecuación diferencial homogénea es:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{r_1 t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{c}{2m} t}. \quad (5.16)$$

La función posición contiene un término exponencial decreciente, ahora multiplicado por una función lineal del tiempo. Se espera que la posición decrezca hacia la posición de equilibrio sin vibrar. La manera en que

lo haga dependerá de las condiciones iniciales. Para mostrarlo basta con mostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Si se aplica la regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{c}{2m}t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 t}{e^{\frac{c}{2m}t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_2}{\frac{c}{2m} e^{\frac{c}{2m}t}} = 0$$

Ahora consideremos, por ejemplo, que las condiciones iniciales de un sistema masa-resorte-amortiguador son  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$ . Derivando la ecuación (5.16) se obtiene la velocidad.

$$v(t) = c_2 e^{-\frac{c}{2m}t} - (c_1 + c_2 t) \left( \frac{c}{2m} \right) e^{-\frac{c}{2m}t} = \left( c_2 - \frac{(c_1 + c_2 t) c}{2m} \right) e^{-\frac{c}{2m}t}. \quad (5.17)$$

Las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$  se obtienen evaluando en  $t = 0$  las ecuaciones (5.16) y (5.17). Así obtenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = c_1; \\ v_0 &= v(0) = c_2 - \frac{c_1 c}{2m}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$c_1 = x_0 \quad \& \quad c_2 = v_0 + \frac{c x_0}{2m}.$$

Sustituyendo en la ecuación (5.16) obtenemos finalmente que

$$x(t) = \left[ x_0 + \left( v_0 + \frac{c x_0}{2m} \right) t \right] e^{-\frac{c}{2m}t}. \quad (5.19)$$

**Ejemplo 5.2.10** Considere un sistema masa-resorte-amortiguador con las constantes siguientes

$$c = 4 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}; \quad m = 2 \text{ kg}; \quad k = 2 \text{ N}/\text{m}; \quad x_0 = 1 \text{ m}; \quad v_0 = 0 \text{ m/s}.$$

Encuentre la posición en el tiempo y elabore una grafica de este movimiento.

▼ La ecuación diferencial del movimiento es

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 2x = 0.$$

Cuya ecuación característica es  $2r^2 + 4r + 2 = 0$ , o sea  $r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$ . Las dos soluciones de esta ecuación son iguales a  $r = -1$ , de forma que la solución de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} = (c_1 + c_2 t) e^{-t}.$$

Derivando obtenemos la velocidad:

$$v(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} = (c_2 - c_1) e^{-t} - c_2 t e^{-t}.$$

Las constantes se determinan utilizando las condiciones iniciales  $x(0) = 1$  &  $v(0) = 0$ . Tenemos en este caso el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 1 \Rightarrow 1 = c_1; \\ v(0) &= v_0 = 0 \Rightarrow 0 = c_2 - c_1, \end{aligned}$$

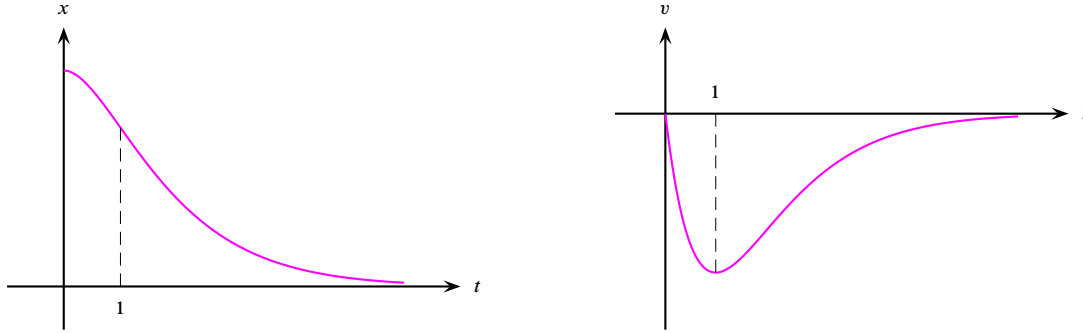
de donde  $c_1 = c_2 = 1$ . Sustituyendo en las expresiones de posición y velocidad obtenemos

$$x(t) = (1 + t) e^{-t} \text{ m}; \quad \& \quad v(t) = -t e^{-t} \text{ m/s}.$$

Derivando la velocidad obtenemos la aceleración:

$$a(t) = -e^{-t} + t e^{-t} = (t - 1) e^{-t} \text{ m/s}^2.$$

Observe que en todo tiempo  $t > 0$  la posición es positiva y la velocidad es negativa. Esto significa que la posición es una función decreciente del tiempo. Por otra parte, la aceleración es negativa cuando  $0 < t < 1$  y positiva cuando  $t > 1$ . Esto significa que la gráfica de la función posición tiene un punto de inflexión en  $t = 1$  y que la gráfica de la velocidad tiene un mínimo en  $t = 1$ . También tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , lo que significa que la recta  $x = 0$  es una asíntota horizontal de  $x(t)$ . En las figuras siguientes se muestran las gráficas de la posición y de la velocidad de la masa:



Al inicio del movimiento la velocidad es cero y posteriormente siempre es negativa, con un valor mínimo en  $t = 1$  s, cuando la aceleración se anula, en ese momento la velocidad es  $v(1) = -e^{-1} = -0.3679$  m/s. También se observa que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ .

□

**Ejemplo 5.2.11** Una masa de 8 kg se une a un resorte de constante  $k = 2$  N/m y a un amortiguador de constante  $c = 8$  N·s/m. Si la masa se suelta del punto  $x_0 = -0.1$  m con velocidad  $v_0 = -1.94$  m/s, determine

1. La posición y la velocidad de la masa en el tiempo.
2. El tiempo en que la masa cruza por la posición de equilibrio.
3. El tiempo en que la velocidad de la masa es 0 m/s.

▼ La ecuación diferencial que modela este sistema masa-resorte-amortiguador es

$$8 \frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 2x = 0.$$

Proponiendo como solución  $x = e^{rt}$  obtenemos la ecuación característica:

$$8r^2 + 8r + 2 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$r_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(8)(2)}}{2(8)} = -\frac{1}{2},$$

de donde inferimos que la posición de la masa es

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{t}{2}},$$

y su velocidad

$$v(t) = c_2 e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} (2c_2 - c_1 - c_2 t) e^{-\frac{t}{2}}.$$

Como en el tiempo  $t = 0$  s se tiene  $x_0 = -0.1$  m y velocidad  $v_0 = -1.94$  m/s, sustituyendo en las dos ecuaciones previas tenemos que:

$$\begin{aligned} -0.1 &= c_1; \\ -1.94 &= \frac{1}{2} (2c_2 - c_1). \end{aligned}$$

La solución de este sistema es  $c_1 = -0.1$  &  $c_2 = -1.99$ .

1. Con estos resultados obtenemos la posición y la velocidad de la masa en el tiempo

$$x(t) = -(0.1 + 1.99t)e^{-\frac{t}{2}} \text{ m} \quad \& \quad v(t) = (-1.94 + 0.995t)e^{-\frac{t}{2}} \text{ m/s.}$$

2. En este caso la masa no cruza por la posición de equilibrio ya que  $x(t) < 0$  para  $t > 0$ . Aún más,

$$x(t) = 0 \Rightarrow -(0.1 + 1.99t)e^{-\frac{t}{2}} = 0 \Rightarrow 0.1 + 1.99t = 0 \Rightarrow t = -\frac{0.1}{1.99} \Rightarrow t < 0$$

lo cual no tiene sentido.

3. Por otra parte, la máxima separación de la posición de equilibrio se obtiene cuando la velocidad es cero, esto ocurre cuando

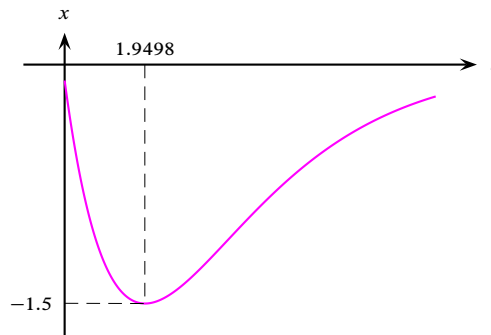
$$v(t) = 0 \Rightarrow 0 = (-1.94 + 0.995t)e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow t = \frac{1.94}{0.995} \approx 1.9498 \text{ s.}$$

En este tiempo la posición es:

$$x(1.9498) = -[0.1 + 1.99(1.9498)]e^{-\frac{1.9498}{2}} = -1.5014 \text{ m.}$$

Se observa que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , así que la posición tiende asintóticamente a la recta  $x = 0$ .

Estos resultados nos permiten esbozar la gráfica de la posición:



□

**Ejemplo 5.2.12** Un sistema masa-resorte-amortiguador está colocado en forma vertical. La masa del cuerpo es de 0.2 kg, la constante del resorte es de 5 N/m y la constante del amortiguador es de 2 N·s/m. Al inicio la masa se libera desde un punto que está 4 cm. abajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 0.1 m/s. Utilice la expresión (5.19) para determinar

1. La posición, velocidad y aceleración instantáneas.
2. El tiempo en que la masa alcanza su distancia más alejada de la posición de equilibrio.

▼ Aún cuando el sistema está colocado en forma vertical la ecuación diferencial del movimiento es la misma:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0.$$

Por lo tanto, la posición  $x(t)$  de  $m$ , con respecto a la posición de equilibrio esta dada por la ED:

$$0.2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0,$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 0.04 \text{ m}$ ; &  $v(0) = 0.1 \text{ m/seg.}$

En este caso tenemos que  $m = 0.2$ ;  $k = 5$ ; &  $c = 2$ ; de donde  $c^2 - 4mk = 4 - 4(0.2)(5) = 0$ , en consecuencia, tenemos un movimiento críticamente amortiguado.



1. Utilizando la ecuación (5.19) obtenemos

$$x(t) = \left[ x_0 + \left( v_0 + \frac{cx_0}{2m} \right) t \right] e^{-\frac{c}{2m}t} = \left[ 0.04 + \left( 0.1 + \frac{0.04}{0.2} \right) t \right] e^{-\frac{t}{0.2}} = (0.04 + 0.3t) e^{-5t}.$$

La velocidad y aceleración instantáneas se obtiene derivando la posición una y dos veces, respectivamente, con respecto al tiempo. Derivando y simplificando se obtiene:

$$v(t) = (0.1 - 1.5t) e^{-5t} \text{ m/s}; \quad \& \quad a(t) = (-2 + 7.5t) e^{-5t} \text{ m/s}^2.$$

2. Para determinar el punto más alejado basta con calcular el tiempo donde la velocidad se anula.

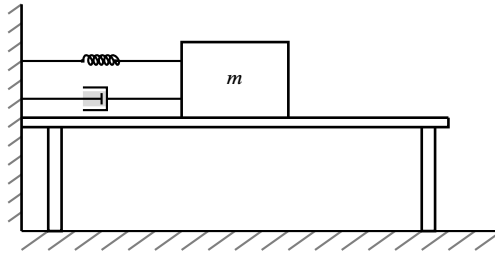
$$v(t) = 0 \Rightarrow (0.1 - 1.5t)e^{-5t} = 0 \Rightarrow 0.1 - 1.5t = 0 \Rightarrow t = \frac{0.1}{1.5} \approx 0.0667.$$

La posición en este instante es

$$x(0.0667) = [0.04 + 0.3(0.0667)]e^{-5(0.0667)} \approx 0.043 \text{ m}.$$

□

**Ejemplo 5.2.13** Considere una masa de 10 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante  $k = 40 \text{ N/m}$  y un amortiguador de constante  $c = 40 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ . El sistema se encuentra sobre una mesa horizontal y no existe fricción entre la masa y la mesa. La masa se coloca en una posición  $x_0 = 0.03 \text{ m}$  y se suelta con velocidad  $v_0 = 0.1 \text{ m/s}$ . Determine la posición de la masa y las energías cinética y potencial en el tiempo  $t$ .



En este caso el modelo que describe el sistema es

$$10x''(t) + 40x'(t) + 40x(t) = 0 \quad \text{o bien} \quad x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0$$

con las condiciones

$$x_0 = 0.03 \text{ m} \quad \& \quad v_0 = 0.1 \text{ m/s}.$$

Tenemos un movimiento críticamente amortiguado ya que

$$c^2 - 4mk = (40)^2 - 4(10)(40) = 0.$$

Procedamos a determinar la solución, para ello empezamos con la ecuación característica asociada. Ésta es:

$$r^2 + 4r + 4 = 0, \quad \text{o sea} \quad (r + 2)^2 = 0$$

Las dos raíces de esta ecuación son iguales:  $r_{1,2} = -2$ , así que la solución de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} = (c_1 + c_2 t) e^{-2t}.$$

Derivando tenemos la velocidad

$$v(t) = -2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-2t} - 2c_2 t e^{-2t} = (c_2 - 2c_1) e^{-2t} - 2c_2 t e^{-2t}.$$

Aplicando las condiciones iniciales obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x(0) = x_0 = 0.03 &\Rightarrow 0.03 = c_1; \\v(0) = v_0 = 0.1 &\Rightarrow 0.1 = c_2 - 2c_1.\end{aligned}$$

De donde se obtiene:  $c_1 = 0.03$ ; &  $c_2 = 0.16$ . Finalmente la posición y la velocidad están dadas por:

$$\begin{aligned}x(t) &= 0.03e^{-2t} + 0.16te^{-2t} = (0.03 + 0.16t)e^{-2t} \text{ m}; \\v(t) &= 0.1e^{-2t} - 0.32te^{-2t} = (0.1 - 0.32t)e^{-2t} \text{ m/s}.\end{aligned}$$

Las energías cinética y potencial del sistema en el tiempo están dadas por

$$\begin{aligned}E_C &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(10)(0.1 - 0.32t)^2 e^{-4t} = 5(0.1 - 0.32t)^2 e^{-4t} \text{ Joule}; \\E_P &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(40)(0.03 + 0.16t)^2 (e^{-4t}) = 20(0.03 + 0.16t)^2 e^{-4t} \text{ Joule}.\end{aligned}$$

Sumando estas dos energías y simplificando se obtiene la energía total

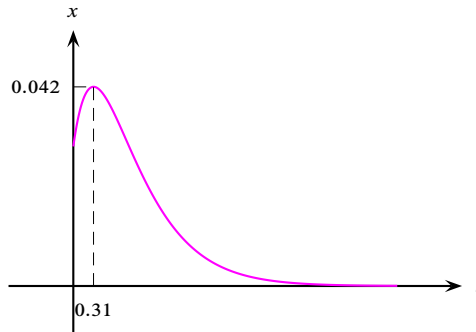
$$E_{total}(t) = (1.024t^2 - 0.128t + 0.068)e^{-4t} \text{ Joule}.$$

Observe que la energía total no se conserva ya que se va reduciendo en el tiempo debido al factor exponencial, esto significa que el amortiguador disipa energía del sistema y lo hace hasta que el sistema se detiene totalmente en la posición de equilibrio.

Por otra parte, observe que en el tiempo  $t = \frac{0.1}{0.32} = 0.3125$  segundos, la velocidad de la masa se anula; es en este tiempo cuando la masa alcanza su máximo desplazamiento

$$x(0.3125) = [0.03 + 0.16(0.3125)]e^{-2(0.3125)} = 0.0428 \text{ m}.$$

Al paso del tiempo la posición se acerca a la posición de equilibrio. En la gráfica siguiente se muestra la posición de la masa en el tiempo



□

**Movimiento subamortiguado.**  $c^2 - 4mk < 0$ , es decir,  $c < \sqrt{4mk}$

En este caso las dos raíces (5.11) de la ecuación característica son complejas y están dadas por:

$$r_1 = \frac{-c + i\sqrt{4mk - c^2}}{2m} \quad \& \quad r_2 = \frac{-c - i\sqrt{4mk - c^2}}{2m}.$$

Un conjunto de soluciones linealmente independientes de esta ED está formado por las funciones

$$x_1(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) \quad \& \quad x_2(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right).$$

La solución general se obtiene considerando una combinación lineal de estas dos funciones.

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left[ c_1 \cos \left( \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t \right) + c_2 \sin \left( \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t \right) \right]. \quad (5.20)$$

Los términos sinusoidales que aparecen en (5.20) nos indican que el sistema oscilará alrededor de la posición de equilibrio. Sin embargo, como el factor exponencial es decreciente se espera que la amplitud de vibración sea cada vez más pequeña. Nuevamente, las condiciones iniciales determinarán en gran medida la forma de la vibración. Por ejemplo, analicemos qué ocurre si el sistema tiene las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 \quad \& \quad v(0) = 0.$$

Definamos primero

$$\alpha = -\frac{c}{2m} \quad \& \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}. \quad (5.21)$$

Entonces la posición y la velocidad están dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t} [c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t]; \\ v(t) &= \alpha e^{\alpha t} [c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t] + \beta e^{\alpha t} [-c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t] = \\ &= (\alpha c_1 + \beta c_2) e^{\alpha t} \cos \beta t + (\alpha c_2 - \beta c_1) e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Considerando las condiciones iniciales obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 \Rightarrow c_1 = x_0; \\ v(0) &= 0 \Rightarrow \alpha c_1 + \beta c_2 = 0, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$c_1 = x_0 \quad \& \quad c_2 = -\frac{\alpha x_0}{\beta}.$$

Sustituyendo en la ecuación (5.22) obtenemos la función posición

$$x(t) = e^{\alpha t} \left[ x_0 \cos \beta t - \frac{\alpha x_0}{\beta} \sin \beta t \right] = \frac{x_0}{\beta} e^{\alpha t} [\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t].$$

Usando la relación (5.21) la solución anterior se puede expresar como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2mx_0}{\sqrt{4mk - c^2}} e^{-\frac{c}{2m}t} \left[ \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} \cos \left( \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t \right) + \frac{c}{2m} \sin \left( \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t \right) \right] = \\ &= \frac{x_0}{\sqrt{4mk - c^2}} e^{-\frac{c}{2m}t} \left[ \sqrt{4mk - c^2} \cos \left( \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t \right) + c \sin \left( \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

□

**Ejemplo 5.2.14** Considere un sistema masa-resorte-amortiguador con las constantes siguientes

$$c = 2 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}; \quad m = 10 \text{ kg}; \quad k = 5 \text{ N}/\text{m}; \quad x_0 = 1 \text{ m}; \quad y \quad v_0 = 0 \text{ m}/\text{s}.$$

Encuentre la función posición.

▼ En este caso la ecuación diferencial que modela el sistema es

$$10 \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

La ecuación característica asociada es:

$$10r^2 + 2r + 5 = 0,$$

cuyas soluciones están dadas por

$$r_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(10)(5)}}{2(10)} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i; \quad r_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4(10)(5)}}{2(10)} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

Dos soluciones linealmente independientes son entonces

$$x_1(t) = e^{-\frac{t}{10}} \cos \frac{7}{10}t \quad \& \quad x_2(t) = e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \frac{7}{10}t.$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial se obtiene considerando una combinación lineal de las dos soluciones previas:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{t}{10}} \cos \frac{7}{10}t + c_2 e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \frac{7}{10}t.$$

La velocidad instantánea se obtiene derivando la posición

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{c_1}{10} e^{-\frac{t}{10}} \cos \frac{7}{10}t - \frac{7c_1}{10} e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \frac{7}{10}t - \frac{c_2}{10} e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \frac{7}{10}t + \frac{7c_2}{10} e^{-\frac{t}{10}} \cos \frac{7}{10}t = \\ &= \left(-\frac{c_1}{10} + \frac{7c_2}{10}\right) e^{-\frac{t}{10}} \cos \frac{7}{10}t - \left(\frac{7c_1}{10} + \frac{c_2}{10}\right) e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \frac{7}{10}t. \end{aligned}$$

Para determinar el valor de las constantes  $c_1$  &  $c_2$  utilizamos las condiciones iniciales  $x(0) = 1$  &  $v(0) = 0$ . Tenemos entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = 1 &\Rightarrow c_1 = 1; \\ v(0) = v_0 = 0 &\Rightarrow -\frac{c_1}{10} + \frac{7c_2}{10} = 0, \end{aligned}$$

cuya solución es  $c_1 = 1$  &  $c_2 = \frac{1}{7}$ . Sustituyendo en la posición y la velocidad obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{t}{10}} \cos \frac{7}{10}t + \frac{1}{7} e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \frac{7}{10}t; \\ v(t) &= -\left(\frac{7}{10} + \frac{1}{70}\right) e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \frac{7}{10}t = -\frac{5}{7} e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \frac{7}{10}t. \end{aligned}$$

La posición  $x(t)$  se puede reescribir en la forma:

$$x(t) = B e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \left( \frac{7}{10}t + \phi \right).$$

En efecto, si se desarrolla la expresión anterior obtenemos:

$$x(t) = B e^{-\frac{t}{10}} \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{7}{10}t \right) \cos \phi + \cos \left( \frac{7}{10}t \right) \operatorname{sen} \phi \right].$$

Si comparamos con la expresión de  $x(t)$  obtenida previamente se tiene:

$$B \cos \phi = \frac{1}{7} \quad \& \quad B \operatorname{sen} \phi = 1.$$

Entonces:

$$B = \sqrt{B^2 \cos^2 \phi + B^2 \operatorname{sen}^2 \phi} = \sqrt{\frac{1}{49} + 1} = \frac{\sqrt{50}}{7},$$

y el ángulo fase  $\phi$  esta dado por:

$$\tan \phi = \frac{B \sin \phi}{B \cos \phi} = 7 \Rightarrow \phi = \phi_c = \arctan(7) \approx 1.4289 \text{ rad.}$$

Finalmente:

$$x(t) = \frac{\sqrt{50}}{7} e^{-\frac{t}{10}} \sin \left( \frac{7t}{10} + 1.4289 \right).$$

La parte sinusoidal de esta expresión tiene frecuencia natural  $\omega = \frac{7}{10}$  rad/s. En consecuencia su periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{20\pi}{7} \text{ s.}$$

Además sus puntos máximos se obtienen cuando:

$$\begin{aligned} \sin \left( \frac{7t}{10} + 1.4289 \right) &= 1 \Rightarrow \frac{7t}{10} + 1.4289 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{7t}{10} + 1.4289 &= \left( 2n + \frac{1}{2} \right) \pi \Rightarrow t = \frac{10}{7} \left[ \left( 2n + \frac{1}{2} \right) \pi - 1.4289 \right] \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Por ejemplo, el primer tiempo donde se obtiene un máximo ocurre cuando

$$\frac{7t}{10} + 1.4289 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{10}{7} \left[ \frac{\pi}{2} - 1.4289 \right] \approx 0.2027 \text{ s.}$$

De forma similar, los puntos mínimos se obtienen cuando

$$\frac{7t}{10} + 1.4289 = \left( 2n + \frac{3}{2} \right) \pi \Rightarrow t = \frac{10}{7} \left[ 2n\pi + \frac{3}{2}\pi - 1.4289 \right] \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots$$

Por ejemplo, el primer tiempo donde se obtiene un mínimo es

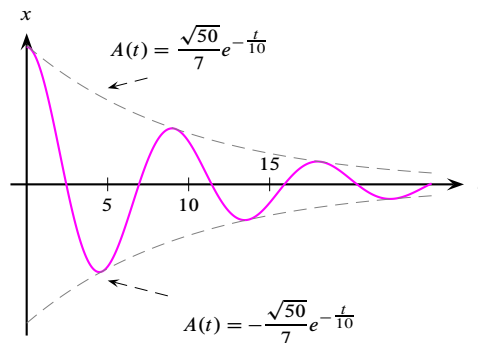
$$t = \frac{10 \left( \frac{3}{2}\pi - 1.4289 \right)}{7} \approx 4.6907 \text{ s.}$$

Por otra parte, la amplitud cambia y decrece en el tiempo de forma exponencial

$$A(t) = \frac{\sqrt{50}}{7} e^{-\frac{t}{10}}.$$

Para elaborar la gráfica de la posición primero se grafican la amplitud y su negativo. Posteriormente, dentro de estas dos curvas, se colocan los puntos que corresponden a los máximos y mínimos de la parte sinusoidal empezando en  $t = 0.2027$  s.

En la figura siguiente se muestra la gráfica de la posición de la masa en el tiempo.





**Ejemplo 5.2.15** Un sistema masa-resorte-amortiguador con constantes  $m = 6.5 \text{ kg}$ ,  $c = 12 \text{ N-s/m}$  &  $k = 6.5 \text{ N/m}$ , se suelta del reposo desde una distancia  $x_0 = 0.1 \text{ m}$ . Determinar:

1. La posición y la velocidad de la masa en el tiempo  $t = 2$  segundos.
2. Los tiempos donde la masa alcanza sus valores máximos y mínimos.
3. La amplitud variable de las oscilaciones.



1. La posición  $x(t)$  de  $m$ , con respecto a la posición de equilibrio, en el instante  $t \geq 0$  está dada por la solución del PVI:

$$\begin{aligned} mx''(t) + cx'(t) + kx(t) &= 0 \quad \text{con } x(0) = x_0 \quad \& \quad v(0) = v_0; \\ 6.5x''(t) + 12x'(t) + 6.5x(t) &= 0 \quad \text{con } x(0) = 0.1 \quad \& \quad v(0) = 0. \end{aligned}$$

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$6.5r^2 + 12r + 6.5 = 0$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} r &= \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(6.5)^2}}{2(6.5)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 169}}{13} = \frac{-12 \pm \sqrt{-25}}{13} = \frac{-12 \pm 5i}{13} \\ r &= -\frac{12}{13} \pm \frac{5}{13}i \end{aligned}$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = e^{-\frac{12}{13}t} \left( c_1 \cos \frac{5}{13}t + c_2 \sin \frac{5}{13}t \right)$$

de donde se tiene que

$$v(t) = x'(t) = \frac{1}{13}e^{-\frac{12}{13}t} \left[ (-5c_1 - 12c_2) \sin \frac{5t}{13} + (5c_2 - 12c_1) \cos \frac{5t}{13} \right]$$

Aplicando las condiciones iniciales se obtiene:

$$\begin{aligned} x(0) = 0.1 &\Rightarrow e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 0.1 \Rightarrow c_1 = 0.1 \\ v(0) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{13}e^0[(-5c_1 - 12c_2) \sin 0 + (5c_2 - 12c_1) \cos 0] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5c_2 - 12c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{12}{5}c_1 = \frac{12}{5}(0.1) \Rightarrow c_2 = 0.24 \end{aligned}$$

Por lo tanto la posición de la masa es:

$$x(t) = e^{-\frac{12}{13}t} \left( 0.1 \cos \frac{5}{13}t + 0.24 \sin \frac{5}{13}t \right) \text{ m}$$

y su velocidad es:

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{12}{13}e^{-\frac{12}{13}t} \left[ 0.1 \cos \frac{5}{13}t + 0.24 \sin \frac{5}{13}t \right] + e^{-\frac{12}{13}t} \left[ -\frac{0.5}{13} \sin \frac{5}{13}t + \frac{1.2}{13} \cos \frac{5}{13}t \right] = \\ &= \frac{1}{13}e^{-\frac{12}{13}t} (-3.38) \sin \frac{5t}{13} = -0.26e^{-\frac{12}{13}t} \sin \frac{5}{13}t \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Luego, en  $t = 2$  seg se tiene que

$$x(2) = e^{-\frac{24}{13}} \left( 0.1 \cos \frac{10}{13} + 0.24 \operatorname{sen} \frac{10}{13} \right) \text{ m} \approx 0.04 \text{ m}$$

$$v(2) = -0.26e^{-\frac{24}{13}} \operatorname{sen} \frac{10}{13} \text{ m/s} \approx -0.029 \text{ m/s}$$

2. Para determinar los tiempos donde la masa alcanza sus valores extremos, necesitamos calcular los instantes en los que la velocidad se anula. Esto sucede cuando,

$$v(t) = 0 \Rightarrow -0.26e^{-\frac{12}{13}t} \operatorname{sen} \frac{5}{13}t = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{5t}{13} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5t}{13} = n\pi, \quad \text{con } n\text{-entero}$$

$$\Rightarrow t = \frac{13}{5}n\pi, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Para estos instantes la posición está dada por

$$x(t) = e^{-\frac{12}{13}(\frac{13}{5}n\pi)} \left[ 0.1 \cos \left( \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{5}n\pi \right) + 0.24 \operatorname{sen} \left( \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{5}n\pi \right) \right]$$

$$x(t) = e^{-\frac{12}{5}n\pi} [0.1 \cos n\pi + 0.24 \operatorname{sen} n\pi]$$

$$x(t) = (0.1)e^{-\frac{12}{5}n\pi} \cos n\pi; \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Algunos de los valores extremos de la posición son los siguientes

$n$	$t$	$x(t)$
0	0	0.100
1	$\frac{13}{5}\pi$	$-0.1e^{-\frac{12}{5}\pi}$
2	$\frac{26}{5}\pi$	$0.1e^{-\frac{24}{5}\pi}$
3	$\frac{39}{5}\pi$	$-0.1e^{-\frac{36}{5}\pi}$
4	$\frac{52}{5}\pi$	$0.1e^{-\frac{48}{5}\pi}$
5	$13\pi$	$-0.1e^{-12\pi}$

3. Para determinar la amplitud variable de las oscilaciones es necesario expresar a la posición

$$x(t) = e^{-\frac{12}{13}t} \left( 0.1 \cos \frac{5t}{13} + 0.24 \operatorname{sen} \frac{5t}{13} \right)$$

en la forma

$$x(t) = e^{-\frac{12}{13}t} B \operatorname{sen} \left( \frac{5t}{13} + \phi \right)$$

Para esto se debe cumplir que

$$0.1 \cos \frac{5t}{13} + 0.24 \operatorname{sen} \frac{5t}{13} = (B \operatorname{sen} \phi) \cos \frac{5t}{13} + (B \cos \phi) \operatorname{sen} \frac{5t}{13}$$

Es decir:  $B \operatorname{sen} \phi = 0.1$  &  $B \cos \phi = 0.24$ .

De donde:  $B = \sqrt{(0.1)^2 + (0.24)^2} = 0.26$ .

Además:  $\tan \phi = \frac{0.1}{0.24} = 0.4167 \Rightarrow \phi_c = \arctan(0.4167) = 0.3948$ .

Y debido a que  $\cos \phi > 0$  se tiene entonces que  $\phi = \phi_c = 0.3948$ .

Por lo tanto, la posición instantánea es:

$$x(t) = B e^{-\frac{12}{13}t} \sin\left(\frac{5t}{13} + \phi\right) \text{ m} \Rightarrow x(t) = 0.26 e^{-\frac{12}{13}t} \sin\left(\frac{5t}{13} + 0.3948\right) \text{ m}.$$

De aquí que la amplitud variable es:

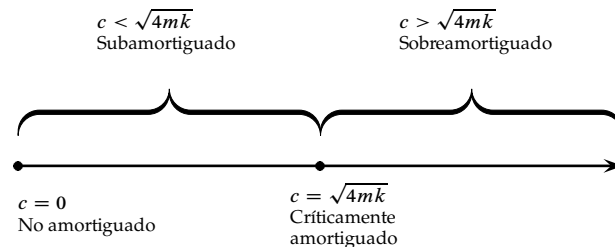
$$A(t) = 0.26 e^{-\frac{12}{13}t} \text{ m}.$$

□

Para concluir esta sección es pertinente sintetizar la teoría y ejemplos discutidos como sigue: los sistemas masa-resorte-amortiguador con constantes  $m - k - c$  respectivamente, presentan alguna de las siguientes conductas, que están determinadas por la relación entre las constantes:

1. Si  $c^2 > 4mk$  el movimiento es sobreamortiguado. En este caso no hay oscilación.
2. Si  $c^2 < 4mk$  el movimiento es subamortiguado y habrá oscilaciones que se desvanecerán cuando  $t \rightarrow \infty$ .
3. Si  $c^2 = 4mk$  el movimiento es críticamente amortiguado. Esta es una conducta límite entre los otros dos casos.

Note que si las constantes  $m$  y  $k$  de la masa y resorte están dadas, entonces al incluir un amortiguador con constante  $c$  en el sistema sucederá uno de los caso anteriores del acuerdo al diagrama siguiente:



### Ejercicios 5.2.2 Vibraciones amortiguadas libres. Soluciones en la página: 473

1. Un resorte de constante  $k$  y un amortiguador de constante  $c$  están conectados en uno de sus extremos a un cuerpo de masa  $m$  y en el otro a una pared. El sistema descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. Determine la posición y velocidad del cuerpo con las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ , &  $v(0) = v_0$ .
  - a.  $m = \frac{1}{2} \text{ kg}$ ,  $c = 3 \text{ Ns/m}$ ,  $k = 4 \text{ N/m}$ ,  $x(0) = 0 \text{ m}$ ,  $v(0) = 2 \text{ m/s}$ .
  - b.  $m = 4 \text{ kg}$ ,  $c = 16 \text{ Ns/m}$ ,  $k = 16 \text{ N/m}$ ,  $x(0) = 1 \text{ m}$ ,  $v(0) = -1 \text{ m/s}$ .
  - c.  $m = \frac{1}{4} \text{ kg}$ ,  $c = 5 \text{ Ns/m}$ ,  $k = 169 \text{ N/m}$ ,  $x(0) = 0.4 \text{ m}$ ,  $v(0) = 16 \text{ m/s}$ .
2. Un cuerpo de masa igual a 1 kg está unido a un resorte de constante  $k = 5 \text{ N/m}$  y a un amortiguador con constante  $c = 2 \text{ N-s/m}$ . Se alarga el resorte una distancia de 0.3 metros y se suelta del reposo. Determine los tiempos en que se obtienen los dos primeros desplazamientos máximos y los dos primeros desplazamientos mínimos. Calcule también la amplitud y el ángulo fase del movimiento.

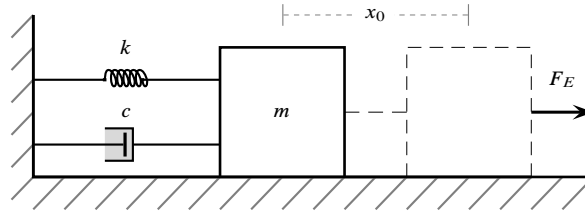


3. A un sistema masa-resorte con masa igual a 5 kg y constante del resorte igual a 5 N/m se le conecta un amortiguador de constante  $c$ . Determine la posición y velocidad del cuerpo con las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  m,  $v(0) = 2$  m/s para los siguientes valores de la constante de amortiguamiento  $c = 6, 8, 10, 12$  y 14 N·s/m.
4. A un sistema masa-resorte con masa igual a 0.5 kg y constante del resorte igual a 12.5 N/m se le conecta un amortiguador de constante  $c = 4$  N·s/m. Determine la posición y velocidad del cuerpo cuando las condiciones iniciales son  $x(0) = 0$  m,  $v(0) = 0.2$  m/s, ¿qué ocurre si las condiciones iniciales se modifican a  $x(0) = 0$  m,  $v(0) = -0.2$  m/s.
5. Una masa de 1 kg se une a un resorte de constante  $k = 4$  N/m. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a cinco veces la velocidad instantánea. La masa se libera desde un punto situado 0.3 metros arriba de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 2.4 m/s. Determine el tiempo en el que la masa pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el tiempo en el que la masa alcanza su desplazamiento extremo ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?
6. Un resorte de 21 cm mide 30.8 cm después de colgarle una masa de 1/4 de kilogramo. El medio por el que se mueve la masa ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 3 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si la masa se libera de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 2 m/s. Calcule el tiempo en el que la masa alcanza su desplazamiento extremo ¿cuál es la posición de la masa en ese instante?
7. Una masa de un kilogramo se fija a un resorte cuya constante es 16 N/m y luego el sistema completo se sumerge en un líquido que ofrece una fuerza amortiguadora igual a 10 veces la velocidad instantánea. Determine la posición de la masa si:
  - a. La masa se libera del reposo desde un punto situado 0.1 metros debajo de la posición de equilibrio.
  - b. La masa se libera desde un punto 0.1 metros debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 1.2 m/s.
8. Una fuerza de 2 N alarga un resorte 10 cm. Una masa de 0.2 kg se une al resorte y luego se sumerge el sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 4 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si en el tiempo  $t = 0$  se libera la masa desde el reposo en un punto situado a 5 cm por encima de la posición de equilibrio. ¿Pasará la masa por la posición de equilibrio?
9. Sobre un resorte de 1.5 metros se coloca una masa de 0.125 kilogramos y el resorte se elonga hasta medir 1.598 metros. Se retira la masa y se sustituye con una de 0.5 kilogramos. Después se coloca el sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 3 veces la velocidad instantánea.
  - a. Obtenga la ecuación de movimiento si en el tiempo  $t = 0$  se libera la masa desde el reposo en un punto situado a 20 cm por encima de la posición de equilibrio.
  - b. Obtenga el tiempo en el cual la masa pasa por primera vez a través de la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.
  - c. Determine los tiempos en los que la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo.
  - d. Calcule los tiempos en los que la masa tiene velocidad igual a cero y los puntos donde esto ocurre.
10. Una masa de 3 kilogramos se sujeta a un resorte y se desliza horizontalmente con coeficiente de amortiguamiento  $c$ . La constante del resorte es  $k = 12$  N/m y el movimiento comienza en la posición de equilibrio  $x_0 = 0$  metros con una velocidad inicial diferente de cero

- a. Suponiendo que no existe amortiguamiento, ¿qué tiempo tomará al objeto para regresar a la posición de reposo por primera vez?
  - b. ¿Qué valor de  $c$  es necesario para que el sistema presente amortiguamiento crítico?
  - c. ¿Qué ocurre en el tiempo que se encontró en el inciso a. cuando  $c$  aumenta, aproximándose al valor del amortiguamiento crítico?
11. Una masa de  $\frac{1}{2}$  kilogramo se sujeta a un resorte que se encuentra en un medio que posee un coeficiente de amortiguamiento  $\gamma$ . La constante del resorte es  $k = \frac{169}{2}$  N/m y el movimiento comienza en la posición de equilibrio con una velocidad inicial positiva de 2.4 m/s.
    - a. Determine el tipo de movimiento que se tiene para  $\gamma = 13$ .
    - b. Calcular la posición y la velocidad de la masa para  $\gamma = 13$ .
    - c. Determine la posición y la velocidad de la masa para  $\gamma = 12$ .
    - d. Obtener la posición y la velocidad de la masa para  $\gamma = 16.25$ .
    - e. Mostrar las gráficas de las posiciones para los valores de  $\gamma$  anteriores.
  12. Una masa de  $\frac{1}{7}$  kg alarga un resorte en 0.2 metros. La masa se coloca a 0.1 metros por arriba del punto de equilibrio y luego inicia el descenso con una velocidad positiva de 0.5 m/s. El movimiento se efectúa en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a  $\frac{8}{5}$  veces la velocidad instantánea en todo momento. Encuentre la ecuación que describe la posición del peso en el instante  $t$ . Suponga que  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>.
  13. Considere un resorte al que una masa de 0.25 kg alarga en 9.8 cm. La masa está sujeta al resorte y se mueve en un medio que imprime una fuerza de amortiguamiento igual a 5 veces la velocidad instantánea. La masa se coloca a 0.15 metros por arriba del punto de equilibrio y se libera con una velocidad negativa de 1.5 m/s. Encuentre la posición de la masa en el tiempo  $t$ .
  14. Un resorte de constante  $k = 8$  N/m se coloca en forma vertical y colgado de él se coloca una masa de 2 kilogramos. Posteriormente se coloca la masa a una altura de 0.1 metros arriba del punto de equilibrio y se suelta con una velocidad positiva de 1.72 m/s. Si el medio ofrece una resistencia igual a 5 veces la velocidad instantánea, determine
    - a. Los tres primeros tiempos en que la masa pasa por la posición de equilibrio.
    - b. Los tres primeros tiempos en que la masa se detiene.
  15. Un resorte de constante  $k = 8$  N/m se coloca en forma vertical y colgado de él se coloca una masa de 2 kilogramos. Posteriormente se sube la masa a una altura de 0.1 metros arriba del punto de equilibrio y se suelta con una velocidad negativa de 1.48 m/s. Si el medio ofrece una resistencia igual a  $\frac{24}{5}$  veces la velocidad instantánea, determine:
    - a. Los tres primeros tiempos en que la masa pasa por la posición de equilibrio.
    - b. Los tres primeros tiempos en que la masa se detiene.

### 5.2.3 Vibraciones forzadas

Los sistemas estudiados hasta ahora exhiben una dinámica que depende de ciertas constantes *intrínsecas* al sistema, es decir, las únicas fuerzas que actúan son internas al sistema. Supondremos en esta sección que se aplica una fuerza externa llamada de **excitación**  $F_E$  sobre el sistema masa-resorte-amortiguador, ver la siguiente figura:



En este caso la fuerza total ejercida sobre la masa está dada por

$$F = F_R + F_A + F_E = -kx - c \frac{dx}{dt} + F_E.$$

Usando nuevamente la segunda ley de Newton obtenemos la ED que modela el sistema.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} + F_E.$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_E. \quad (5.24)$$

o bien en la forma:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F_E$$

La fuerza de excitación juega un papel diferente al de las otras fuerzas internas del sistema, pues a veces provoca una reducción de la velocidad y en otras provoca un aumento. Es decir, la fuerza de excitación puede reducir o aumentar la energía cinética del sistema. Cuando la fuerza de excitación sea distinto de cero diremos que el sistema masa-resorte-amortiguador está **forzado**.

Hasta este momento la fuerza  $F_e$  puede ser de cualquier tipo y para determinar sus efectos tendremos que resolver la ecuación diferencial (5.24) por cualquiera de los métodos estudiados hasta ahora.

Sin embargo, cuando la fuerza  $F_e$  es del tipo sinusoidal

$$F_E = F_0 \cos w_e t,$$

suelen ocurrir fenómenos físicos de interés. En este caso la ecuación a resolver es:

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos w_e t$$

La ecuación característica es entonces:

$$mr^2 + cr + k = 0$$

cuyas raíces son:

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

y las formas de la solución  $x(t)$  dependerá de la relación que exista entre  $r_{1,2}$  y  $w_e$

### Vibraciones forzadas, caso $c \neq 0$

Consideremos que la fuerza de excitación es una función sinusoidal del tipo  $F_E = F_0 \cos w_e t$ . Claramente si  $c \neq 0$  ninguna de las dos raíces de la ecuación característica es igual a  $iw_e$ . Entonces de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados, la forma de la solución particular es

$$x_p(t) = A \sin w_e t + B \cos w_e t. \quad (5.25)$$

Calculando la primera y segunda derivadas obtenemos la velocidad y la aceleración de la masa.

$$\begin{aligned}x'(t) &= v_p(t) = Aw_e \cos w_e t - Bw_e \sin w_e t; \\x''(t) &= a_p(t) = -Aw_e^2 \sin w_e t - Bw_e^2 \cos w_e t.\end{aligned}$$

Sustituyendo estos dos resultados en (5.24), la ecuación diferencial de movimiento, se obtiene

$$-mw_e^2 [A \sin w_e t + B \cos w_e t] + cw_e [A \cos w_e t - B \sin w_e t] + k [A \sin w_e t + B \cos w_e t] = F_0 \cos w_e t.$$

Agrupando términos en las funciones  $\cos w_e t$  y  $\sin w_e t$  obtenemos:

$$[-mw_e^2 B + cw_e A + kB] \cos w_e t + [-mw_e^2 A - cw_e B + kA] \sin w_e t = F_0 \cos w_e t.$$

Las funciones  $\cos w_e t$  y  $\sin w_e t$  son linealmente independientes, entonces para que se satisfaga la condición anterior, sólo se requiere que:

$$\begin{cases} -mw_e^2 B + cw_e A + kB = F_0 \\ -mw_e^2 A - cw_e B + kA = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cw_e A + (k - mw_e^2) B = F_0; \\ (k - mw_e^2) A - cw_e B = 0; \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer encontramos la solución de este sistema:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\begin{vmatrix} F_0 & k - mw_e^2 \\ 0 & -cw_e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cw_e & k - mw_e^2 \\ k - mw_e^2 & -cw_e \end{vmatrix}} = \frac{-cw_e F_0}{-c^2 w_e^2 - (k - mw_e^2)^2} = \frac{cw_e F_0}{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2 c^2}; \\ B &= \frac{\begin{vmatrix} cw_e & F_0 \\ k - mw_e^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cw_e & k - mw_e^2 \\ k - mw_e^2 & -cw_e \end{vmatrix}} = \frac{-(k - mw_e^2) F_0}{-c^2 w_e^2 - (k - mw_e^2)^2} = \frac{(k - mw_e^2) F_0}{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2 c^2}.\end{aligned}$$

Sustituyendo  $A$  y  $B$  en (5.25) obtenemos una expresión para la solución particular

$$x_p(t) = \underbrace{\left[ \frac{cw_e F_0}{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2 c^2} \right]}_A \sin w_e t + \underbrace{\left[ \frac{(k - mw_e^2) F_0}{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2 c^2} \right]}_B \cos w_e t. \quad (5.26)$$

Podemos simplificar esta expresión a la forma  $C \sin w_e t$ :

$$\begin{aligned}A \sin w_e t + B \cos(w_e t) &= x_p(t) = C \sin(w_e t + \phi) \\ &= C [\sin w_e t \cos \phi + \sin \phi \cos w_e t] \\ &= (C \cos \phi) \sin w_e t + (C \sin \phi) \cos w_e t.\end{aligned}$$

Esta igualdad se cumple cuando:

$$C \cos \phi = A \quad \& \quad C \sin \phi = B.$$

De donde se obtiene:

$$C^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2 + B^2 \Rightarrow C^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \&$$

$$\frac{C \sin \phi}{C \cos \phi} = \frac{B}{A} \Rightarrow \tan \phi = \frac{B}{A} \Rightarrow \phi = \arctan \left( \frac{B}{A} \right)$$

Además

$$\begin{aligned}
 C^2 = A^2 + B^2 &= \left[ \frac{c w_e F_0}{(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2} \right]^2 + \left[ \frac{(k - m w_e^2) F_0}{(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2} \right]^2 \\
 &= \frac{c^2 w_e^2 F_0^2}{[(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2]^2} + \frac{(k - m w_e^2)^2 F_0^2}{[(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2]^2} \\
 &= \frac{F_0^2}{[(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2]^2} [c^2 w_e^2 + (k - m w_e^2)^2] \\
 &= \frac{F_0^2 [(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2]}{[(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2]^2} = \frac{F_0^2}{(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2}
 \end{aligned}$$

por lo que

$$C = \sqrt{\frac{F_0^2}{(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2}}$$

por otra parte,

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{(k - m w_e^2) F_0}{(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2}}{\frac{c w_e F_0}{(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2}} = \frac{(k - m w_e^2) F_0}{c w_e F_0} = \frac{k - m w_e^2}{c w_e}$$

por lo cual

$$\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) = \arctan\left(\frac{k - m w_e^2}{c w_e}\right)$$

Se tiene entonces que

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2}} \text{sen}(w_e t + \phi)$$

donde  $\phi = \arctan\left(\frac{k - m w_e^2}{c w_e}\right)$ .

Por lo tanto, la posición instantánea de  $m$ , con respecto a la posición de equilibrio, en el tiempo  $t \geq 0$  es

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde la solución complementaria  $x_h(t)$  tiene la forma de un movimiento sobreamortiguado, críticamente amortiguado o bien subamortiguado. En cualquiera de los casos ocurre que:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0$ . Debido a esto se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x_h(t) + x_p(t)] = \lim_{x \rightarrow \infty} x_p(t)$$

Esto es, al paso del tiempo sucede que

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m w_e^2)^2 + w_e^2 c^2}} \text{sen}(w_e t + \phi)$$

**Ejemplo 5.2.16** Un sistema masa-resorte-amortiguador tiene parámetros  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $c = 2 \text{ N}\cdot\text{s/m}$  &  $k = 1 \text{ N}$ . Si se aplica una fuerza de excitación  $F_E = 17 \cos t$ , determine la posición y velocidad de la masa en todo tiempo suponiendo que  $x(0) = 0 \text{ m}$  &  $v(0) = 0 \text{ m/s}$ .

▼ La ED que modela el sistema es:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = 17 \cos t. \quad (5.27)$$

que tiene ecuación característica:

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

y cuyas raíces  $r_{1,2} = -1$  son diferentes de  $i\omega_e = i$ . Tenemos entonces que la solución de la ED homogénea es:

$$x_h = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t},$$

y la solución particular, siguiendo el método del coeficientes indeterminados, es del tipo:

$$x_p = A \cos t + B \sin t.$$

Derivando  $x_p$  se obtiene:

$$x_p' = -A \sin t + B \cos t.$$

$$x_p'' = -A \cos t - B \sin t.$$

Sustituyendo en la ED (5.27), resulta:

$$-A \cos t - B \sin t + 2(-A \sin t + B \cos t) + A \cos t + B \sin t = 17 \cos t$$

Se obtiene:

$$-2A \cos t + 2B \sin t = 17 \cos t \Rightarrow A = 0 \text{ \& } B = \frac{17}{2}.$$

Tenemos entonces:

$$x_p = \frac{17}{2} \sin t.$$

La solución general de la ED es:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{17}{2} \sin t.$$

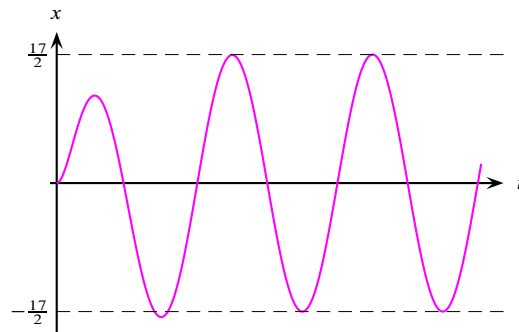
Los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  los determinamos usando las condiciones iniciales. De  $x(0) = 0$  se obtiene que  $c_1 = 0$ . Si derivamos

$$x'(t) = v(t) = c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} + \frac{17}{2} \cos t.$$

Evaluando en  $t = 0$  obtenemos  $0 = c_2 + \frac{17}{2}$  de donde  $c_2 = -\frac{17}{2}$  y la posición está dada por:

$$x(t) = -\frac{17}{2} t e^{-t} + \frac{17}{2} \sin t.$$

Observe que al paso de tiempo sólo se preserva el movimiento oscilatorio provocado por la fuerza de excitación.



□

### Vibraciones forzadas, caso $c = 0$ y $w_e \neq w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

En este caso la fuerza de excitación es  $F_e = F_0 \cos w_e t$ , de forma que la ED que modela el sistema es:

$$mx'' + kx = F_0 \cos w_e t,$$

cuya solución particular está dada por (5.26):

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - mw_e^2} \cos w_e t.$$

Observe que la solución  $x_p(t)$  es proporcional a la fuerza de excitación, de hecho esta es la parte de la solución general que se preservará en el tiempo.

Si se cumple que  $k \approx mw_e^2$  (esto es,  $w_e^2 \approx \frac{k}{m}$ ), la amplitud de la oscilación de  $x(t)$  es grande. A este fenómeno se le conoce como **resonancia**.

**Ejemplo 5.2.17** Considere un sistema masa-resorte con los parámetros  $m = 1$  kg;  $c = 0$  N·s/m,  $k = 1$  N/m y  $F_E = 2 \cos 2t$  y condiciones iniciales  $x_0 = \frac{1}{10}$  y  $v_0 = 0$ . Determine la posición, la velocidad y la aceleración en el tiempo  $t$ .

▼ La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2 \cos 2t. \quad (5.28)$$

La ecuación característica es  $r^2 + 1 = 0$ , cuyas raíces son  $r = \pm i$ . De aquí la solución de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

En este caso la frecuencia natural de excitación  $w_e = 2$  rad/s es diferente de la frecuencia natural de las funciones sinusoidales  $w = 1$  rad/s. Por esa razón y de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados, proponemos la solución particular

$$x_p(t) = A \cos 2t + B \sin 2t. \quad (5.29)$$

Derivando esta expresión dos veces se tiene

$$x'(t) = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t \quad \& \quad x''(t) = -4A \cos 2t - 4B \sin 2t.$$

Sustituyendo en la ecuación (5.28) se obtiene

$$-4A \cos 2t - 4B \sin 2t + A \cos 2t + B \sin 2t = 2 \cos 2t;$$

es decir,

$$-3A \cos 2t - 3B \sin 2t = 2 \cos 2t$$

De donde tenemos el sistema de ecuaciones algebraicas siguiente

$$\begin{aligned} -3A &= 2, \text{ coeficientes de las funciones coseno;} \\ -3B &= 0, \text{ coeficientes de las funciones seno.} \end{aligned}$$

La solución de este sistema es  $A = -2/3$  &  $B = 0$ . Sustituyendo en (5.29) obtenemos la solución particular.

$$x_p(t) = -\frac{2}{3} \cos 2t.$$

Finalmente, sumando la solución particular con la solución de la ecuación homogénea obtenemos la solución general de la ecuación diferencial

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{2}{3} \cos 2t.$$

La velocidad de la masa se obtiene derivando la posición

$$v(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + \frac{4}{3} \sin 2t.$$

Para determinar las constantes desconocidas, basta con utilizar las condiciones iniciales. Al hacerlo obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = \frac{1}{10} &\Rightarrow \frac{1}{10} = c_1 - \frac{2}{3}; \\ v(0) = v_0 = 0 &\Rightarrow 0 = c_2. \end{aligned}$$

cuya solución es  $c_1 = \frac{23}{30}$ ; y  $c_2 = 0$ . Finalmente, la posición de la masa está dada por

$$x(t) = \frac{23}{30} \cos t - \frac{2}{3} \cos 2t.$$

Analicemos con mayor detalle  $x(t)$ . La función  $\cos t$  es de periodo  $2\pi$  y la función  $\cos 2t$  es de periodo  $\pi$ . En consecuencia, la función de posición  $x(t)$  es de periodo  $2\pi$ . La velocidad y aceleración de la masa son entonces:

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{23}{30} \sin t + \frac{4}{3} \sin 2t; \\ a(t) &= -\frac{23}{30} \cos t + \frac{8}{3} \cos 2t. \end{aligned}$$

De donde, los puntos de retorno o de máxima o mínima amplitud (aquellos donde  $v = 0$ ) satisfacen

$$\frac{23}{30} \sin t = \frac{4}{3} \sin 2t.$$

Usando la identidad  $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$  se tiene

$$\frac{23}{30} \sin t = \frac{8}{3} \sin t \cos t.$$

Que se satisface cuando

$$\sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

y cuando

$$\cos t = \frac{23}{80} \Rightarrow \begin{cases} t = 1.2792 + 2n\pi & \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \\ t = (2\pi - 1.2792) + 2n\pi = 5.004 + 2n\pi & \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Note que:

$$\begin{aligned} x(0) = x(2\pi) = x(4\pi) = \dots &= \frac{23}{30} - \frac{2}{3} = \frac{3}{30} = 0.1 \\ x(\pi) = x(3\pi) = \dots &= -\frac{23}{30} - \frac{2}{3} = -\frac{43}{30} \approx -1.4333 \end{aligned}$$

Además como:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$$



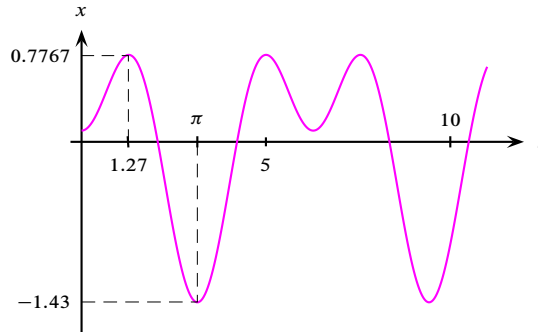
se tiene

$$x(t) = \frac{23}{30} \cos t - \frac{4}{3} \cos^2 t + \frac{2}{3}$$

Así que evaluando en el tiempo en que  $\cos t = \frac{23}{80}$  o sea  $t = \arccos \frac{23}{80} = 1.2791$  se tiene:

$$x(1.2791) = \frac{23}{80} \cdot \frac{23}{80} - \frac{4}{3} \left( \frac{23}{80} \right)^2 + \frac{2}{3} = 0.7769$$

Al graficar se obtiene:



□

**Ejemplo 5.2.18** Considere un sistema masa-resorte con masa  $m = 5$  kg y constante de restitución  $k = 20$  N/m que está sometido a una fuerza de excitación  $F = 5 \cos 3t$  N. Si el sistema tiene condiciones iniciales  $x(0) = 0.02$  m y  $v(0) = 0$  m/s, determine la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en todo tiempo  $t$ .

▼ En este caso tenemos  $c = 0$ ,  $m = 5$ ,  $k = 20$ ,  $w_e = 3$  y  $F_0 = 5$ . La ecuación diferencial que modela este sistema es:

$$5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 20x = 5 \cos 3t.$$

La ecuación característica asociada es  $5r^2 + 20 = 0$ , que tiene raíces  $r_{1,2} = \pm 2i$ . Por lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Como la frecuencia de estas funciones sinusoidales es  $w = 2$  que es diferente de la frecuencia de la excitación  $w_e = 3$ , proponemos como solución particular

$$x_p(t) = A \sin 3t + B \cos 3t.$$

Derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$5(-9A \sin 3t - 9B \cos 3t) + 20(A \sin 3t + B \cos 3t) = 5 \cos 3t.$$

Desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned} (-45A + 20A) \sin 3t + (-45B + 20B) \cos 3t &= 5 \cos 3t \\ (-25A) \sin 3t + (-25B) \cos 3t &= 5 \cos 3t \end{aligned}$$

De donde resulta

$$\begin{aligned} -25A &= 0, \text{ coeficientes de las funciones seno,} \\ -25B &= 5, \text{ coeficientes de las funciones coseno.} \end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$A = 0 \quad \& \quad B = -\frac{1}{5}.$$

Finalmente la solución particular es:

$$x_p(t) = -\frac{1}{5} \cos 3t.$$

La solución general es la suma de las soluciones particular y homogénea,

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \frac{1}{5} \cos 3t.$$

La velocidad en todo tiempo  $t$  está dada por:

$$v(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{3}{5} \sin 3t.$$

Aplicando las condiciones iniciales  $x(0) = 0.02$  m y  $v(0) = 0$  m/s obtenemos  $c_1 - \frac{1}{5} = 0.02$  &  $2c_2 = 0$ . De donde  $c_1 = 0.22$  &  $c_2 = 0$ .

Así la posición instantánea de  $m$  es:

$$x(t) = 0.22 \cos 2t - \frac{1}{5} \cos 3t.$$

La velocidad y la aceleración son entonces:

$$v(t) = -0.44 \sin 2t + 0.6 \sin 3t;$$

$$a(t) = -0.88 \cos 2t + 1.8 \cos 3t.$$

La función  $\cos 3t$  es de periodo  $2\pi/3$  y la función  $\cos 2t$  es de periodo  $\pi$ . En consecuencia, la función posición  $x(t)$  es de periodo  $2\pi$ . Observe que en este periodo  $\cos 3t$  se repetirá completamente tres veces y  $\cos 2t$  dos veces.

Por otra parte, los puntos de retorno satisfacen  $v = 0$ , de donde

$$\frac{44}{100} \sin 2t = \frac{3}{5} \sin 3t \Rightarrow \frac{44}{60} \sin 2t = \sin 3t.$$

Usando las identidades

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t;$$

$$\begin{aligned} \sin 3t &= \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t = 2 \sin t \cos^2 t + \cos^2 t \sin t - \sin^3 t \sin t = \\ &= 3 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t = 4 \sin t \cos^2 t - \sin t. \end{aligned}$$

Se tiene

$$\frac{88}{60} \sin t \cos t = 4 \sin t \cos^2 t - \sin t,$$

que se satisface cuando

$$\sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

o cuando

$$4 \cos^2 t - \frac{88}{60} \cos t - 1 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática en  $\cos(t)$ , así que:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{60}(11 \pm \sqrt{1021}) = \begin{cases} -0.3492 \\ 0.7729 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} t = 1.9275 + 2n\pi & \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \\ t = (2\pi - 1.9275) + 2n\pi = 4.3557 + 2n\pi & \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \\ t = 0.2906 + 2n\pi & \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \\ t = (2\pi - 0.7729) + 2n\pi = 5.5103 + 2n\pi & \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

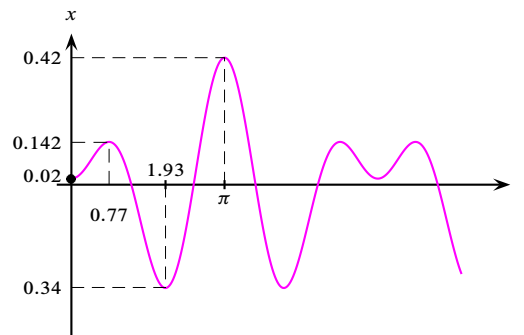
Consideremos ahora sólo los puntos que están dentro del intervalo  $[0, 2\pi)$  para aprovechar que la función posición es de periodo  $2\pi$ , éstos son, ordenados de mayor a menor

$$t = 0, 0.772906, 1.9275, \pi, 4.355565, 5.51028$$

Calculando la aceleración en estos puntos y aplicando el criterio de la segunda derivada para extremos, se tiene

$a(0)$	$= 0.92$	$\Rightarrow x(0)$	$= 0.02$	es un mínimo.
$a(0.7729)$	$= -1.2462$	$\Rightarrow x(0.7729)$	$= 0.1416$	es un máximo.
$a(1.9275)$	$= 2.2446$	$\Rightarrow x(1.9275)$	$= -0.3418$	es un mínimo.
$a(\pi)$	$= -2.6800$	$\Rightarrow x(\pi)$	$= 0.4200$	es un máximo.
$a(4.3556)$	$= 2.2446$	$\Rightarrow x(4.3556)$	$= -0.3418$	es un mínimo.
$a(5.5103)$	$= -1.2462$	$\Rightarrow x(5.5103)$	$= 0.1416$	es un máximo.

Al graficar se obtiene:



□

**Ejemplo 5.2.19** Considere el sistema masa-resorte del ejemplo anterior donde  $m = 5 \text{ kg}$  &  $k = 20 \text{ N/m}$ . El sistema se somete a una fuerza de excitación  $F = 5 \cos 2.1t \text{ N}$ . Si el sistema tiene condiciones iniciales  $x(0) = 0 \text{ m}$  y  $v(0) = 0 \text{ m/s}$ , determine la posición y velocidad de la masa en todo tiempo  $t$ .

▼ De acuerdo con la ecuación (5.26), la solución particular es:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - mw_e^2} \cos w_e t = \frac{5}{20 - 5(2.1)^2} \cos 2.1t = -\frac{100}{41} \cos 2.1t.$$

Y la solución general es, entonces:

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \frac{100}{41} \cos 2.1t.$$

La velocidad en todo tiempo  $t$  está dada por la derivada de la posición

$$v(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{210}{41} \sin 2.1t.$$

Considerando las condiciones iniciales  $x(0) = 0 \text{ m}$  &  $v(0) = 0 \text{ m/s}$  obtenemos  $c_1 - \frac{100}{41} = 0$  &  $2c_2 = 0$ . De donde  $c_1 = \frac{100}{41}$  &  $c_2 = 0$ . Así la posición en todo tiempo se reduce a:

$$x(t) = \frac{100}{41} [\cos 2t - \cos 2.1t].$$

La velocidad es, entonces:

$$v(t) = \frac{100}{41} [-2 \sin 2t + 2.1 \sin 2.1t].$$

Necesitamos reescribir la función posición para construir la gráfica. Para ello recordemos la identidad trigonométrica siguiente:

$$2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A - B) - \cos(A + B).$$

Si identificamos

$$\begin{cases} A - B = 2t, \\ A + B = 2.1t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2.05t, \\ B = 0.05t. \end{cases}$$

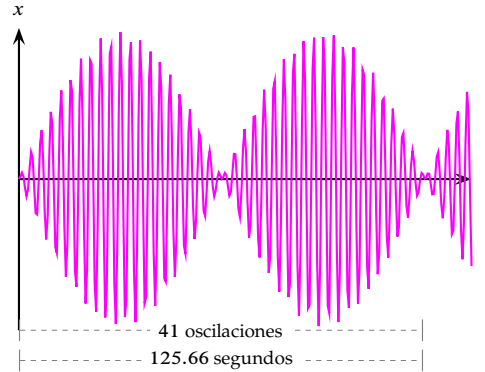
tenemos que:

$$x(t) = \frac{200}{41} \operatorname{sen} 0.05t \operatorname{sen} 2.05t.$$

Podemos interpretar que la masa oscila con una amplitud  $A(t) = \frac{200}{41} \operatorname{sen} 0.05t$  dependiente del tiempo y con una frecuencia natural dada por  $w = 2.05 \text{ rad/s}$ . Para construir la gráfica basta con construir las gráficas de la amplitud y de su negativo y dentro de éstas una función oscilatoria de periodo  $T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{2.05} =$

3.065 s. La amplitud tiene periodo  $T_a = \frac{2\pi}{0.05} = 125.6636$  y en ese tiempo se producen aproximadamente  $\frac{T_a}{T} = \frac{125.6636}{3.065} \approx 41$  oscilaciones.

En la figura siguiente se muestra la gráfica de la posición. Al fenómeno de que la amplitud se comporte como función del tiempo de forma sinusoidal se le conoce como *pulsación*.



□

### Vibraciones forzadas, caso $c = 0$ y $w_e = w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

La ecuación diferencial que nos interesa resolver es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F_0 \cos w_e t. \quad (5.30)$$

La ecuación característica es  $mr^2 + k = 0$ , cuyas soluciones son  $r_{1,2} = \pm iw = \pm iw_e$ . Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$x_h(t) = c_1 \cos w_e t + c_2 \operatorname{sen} w_e t.$$

En este caso la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia de las funciones sinusoidales. Por esa razón y de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados, proponemos la solución particular.

$$x_p(t) = t [A \cos w_e t + B \operatorname{sen} w_e t].$$

Calculemos la primera y segunda derivada de  $x_p(t)$

$$\begin{aligned}\frac{dx_p}{dt} &= A \cos w_e t + B \sin w_e t + t [-A w_e \sin w_e t + B w_e \cos w_e t]. \\ \frac{d^2 x_p}{dt^2} &= -2A w_e \sin w_e t + 2B w_e \cos w_e t + t [-A w_e^2 \cos w_e t - B (w_e^2) \sin w_e t].\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial de movimiento (5.30) se obtiene

$$-2A\sqrt{mk} \sin w_e t + 2B\sqrt{mk} \cos w_e t = F_0 \cos w_e t.$$

Igualando coeficientes correspondientes de las funciones sinusoidales obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}-2A\sqrt{mk} &= 0, \text{ coeficientes de las funciones seno,} \\ 2B\sqrt{mk} &= F_0, \text{ coeficientes de las funciones coseno.}\end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$A = 0 \quad \& \quad B = \frac{F_0}{2\sqrt{km}}.$$

Finalmente, la solución particular es entonces:

$$x_p(t) = \frac{F_0 t}{2\sqrt{km}} \sin w_e t. \quad (5.31)$$

La solución general es entonces:

$$x(t) = c_1 \cos w_e t + c_2 \sin w_e t + \frac{F_0 t}{2\sqrt{km}} \sin w_e t = x_h(t) + x_p(t).$$

En ese caso la amplitud depende del tiempo y aumenta con él.

**Ejemplo 5.2.20** Considere un sistema masa-resorte con constantes  $m = 10 \text{ kg}$  &  $k = 40 \text{ N/m}$ . Sobre el sistema se aplica una fuerza de excitación  $F_e = 20 \cos 2t$ . Determine la posición de la masa si el sistema se encuentra en reposo en el estado de equilibrio al tiempo  $t = 0 \text{ s}$ , es decir:  $x_0 = 0 \text{ m}$ ,  $v_0 = 0 \text{ m/s}$ .

▼ La ecuación diferencial a resolver es

$$10 \frac{d^2 x}{dt^2} + 40x = 20 \cos 2t.$$

La ecuación característica es  $10r^2 + 40 = 0$ , cuyas soluciones son  $r_{1,2} = \pm 2i$ . Por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial homogénea es:

$$x_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

La frecuencia de la fuerza de excitación es igual a la frecuencia de las funciones sinusoidales. Proponemos entonces la solución particular.

$$x_p(t) = t [A \cos 2t + B \sin 2t].$$

Derivando dos veces se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{dx_p}{dt} &= A \cos 2t + B \sin 2t + t [-2A \sin 2t + 2B \cos 2t]; \\ \frac{d^2 x_p}{dt^2} &= -4A \sin 2t + 4B \cos 2t + t [-4A \cos 2t - 4B \sin 2t].\end{aligned}$$

Sustituyendo la función  $x_p(t)$  y la segunda derivada en la ecuación diferencial se obtiene:

$$-40A \sen 2t + 40B \cos 2t = 20 \cos 2t.$$

De donde se deduce que

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, la solución particular y la solución general son

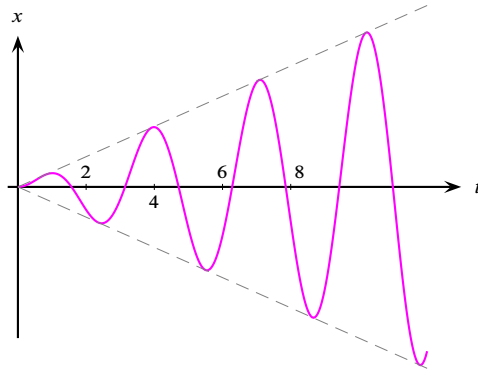
$$x_p(t) = \frac{t}{2} \sen 2t;$$

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sen 2t + \frac{t}{2} \sen 2t.$$

La velocidad se obtiene derivando la expresión anterior,

$$v(t) = -2c_1 \sen 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{1}{2} \sen 2t + t \cos 2t.$$

Considerando las condiciones iniciales se obtiene que  $c_1 = c_2 = 0$ . Entonces la solución general coincide con la solución particular.  $x(t) = \frac{t}{2} \sen 2t$ . Para graficar esta función observemos que la parte sinusoidal tiene frecuencia  $w = 2$  rad/s y periodo  $T = \frac{2\pi}{w} = \pi$  segundos y que la amplitud de las oscilaciones aumenta en el tiempo. Entonces primero se grafican las rectas  $y = \pm \frac{t}{2}$  y posteriormente se construye la gráfica de  $x(t)$  considerando que los cruces con el eje horizontal (tiempo) se producen en  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$  y los máximos y mínimos en  $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots$  de forma alternada. Físicamente lo que está ocurriendo es que la fuerza de excitación está en sintonía con el movimiento del sistema masa resorte y siempre le está proporcionando energía, de ahí que la amplitud crezca indefinidamente. La figura muestra la gráfica del movimiento.



□

**Ejemplo 5.2.21** Considere un sistema masa-resorte con coeficientes  $m = 5$  kg &  $k = 20$  N/m. Se aplica ahora una fuerza de excitación  $F(t) = 5 \cos 2t$  N. Determine la posición y velocidad de la masa en todo tiempo  $t$  si el sistema tiene condiciones iniciales  $x(0) = 0$  m &  $v(0) = 0$  m/s.

▼ En este caso la frecuencia de la fuerza de excitación es igual a una de las raíces de la ecuación característica. Tenemos entonces, de acuerdo con la ecuación (5.31), que una solución particular es

$$x_p(t) = x_p(t) = \frac{F_0 t}{2\sqrt{km}} \sen \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) = \frac{5t}{2\sqrt{20(5)}} \sen 2t = \frac{1}{4} t \sen 2t$$

La solución general es entonces:

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sen 2t + \frac{1}{4} t \sen 2t$$

La velocidad en todo tiempo  $t$  está dada por:

$$v(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2}t \cos 2t$$

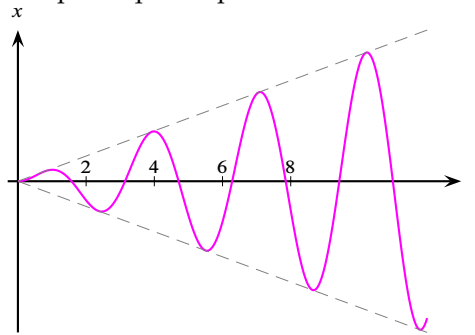
Imponiendo las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  m y  $v(0) = 0$  m/s, obtenemos  $c_1 = 0$ ; y  $c_2 = 0$ . Así la solución general se reduce a:

$$x(t) = \frac{1}{4}t \sin 2t$$

La velocidad es, entonces:

$$v(t) = \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2}t \cos 2t$$

En la figura siguiente se muestra la posición de la masa en el tiempo. Observe que entre más tiempo pasa más aumenta la amplitud de las oscilaciones. En este caso la fuerza de excitación siempre suministra energía al sistema, por lo cual es de esperar que después de un cierto tiempo el sistema se destruya.



□

**Ejemplo 5.2.22** Un resorte experimenta un alargamiento de 0.025 metros por haber sido suspendida de él una masa de 2 kg. Al extremo superior del resorte se le da un movimiento  $y = 0.4 \sin 2t + 0.4 \cos 2t$  metros. Si no hay resistencia del aire, determine la posición de la masa en todo tiempo. Suponga por comodidad que  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

▼ La constante del resorte se obtiene igualando el peso con la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa cuando se está en equilibrio. Es decir:  $mg = k\Delta l$ , de donde  $k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{2(10)}{0.025} = 800$  N/m. Consideremos que el origen de coordenadas se encuentra en el centro de la masa cuando el sistema está en equilibrio. La elongación o compresión del resorte es entonces  $x - y$ , de forma que la fuerza del resorte sobre la masa es:

$$F = -k(x - y) = -800x + 320 \sin 2t + 320 \cos 2t.$$

Entonces, la ecuación diferencial que describe el movimiento es, de acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} = -800x + 320 \sin 2t + 320 \cos 2t.$$

Simplificando se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 400x = 160 \sin 2t + 160 \cos 2t.$$

Claramente la solución de la ecuación homogénea es:

$$x_h(t) = c_1 \cos 20t + c_2 \sin 20t.$$

Para determinar una solución particular proponemos:

$$x_p(t) = A \sin 2t + B \cos 2t.$$

Derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos:

$$396A \sin 2t + 396B \cos 2t = 160 \sin 2t + 160 \cos 2t.$$

De donde se infiere que  $A = B = 0.4$ . Concluimos entonces que:

$$x_p(t) = 0.4 \sin 2t + 0.4 \cos 2t.$$

Y que:

$$x_h(t) = c_1 \cos 20t + c_2 \sin 20t + 0.4 \sin 2t + 0.4 \cos 2t.$$

Si utilizamos las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $v(0) = 0$  obtenemos el sistema:

$$0 = c_1 + 0.4;$$

$$0 = 20c_2 + 0.8$$

de donde

$$c_1 = -0.4 \quad \& \quad c_2 = -0.04.$$

Finalmente, la solución es:

$$x_h(t) = -0.4 \cos 20t - 0.04 \sin 20t + 0.4[\sin 2t + \cos 2t]$$

□

### Ejercicios 5.2.3 Vibraciones forzadas. Soluciones en la página: 474

- Un resorte de constante  $k$  y un amortiguador de constante  $c$  están conectados en uno de sus extremos a un cuerpo de masa  $m$  y en el otro a una pared. El sistema descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. Sobre el sistema se aplica una fuerza de excitación  $F_e(t)$ . Determine la posición y velocidad del cuerpo con las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  &  $v(0) = v_0$ .
  - $m = 0.5$  kg;  $c = 3$  N·s/m;  $k = 4$  N/m;  $x(0) = 0$  m;  $v(0) = 2$  m/s &  $F_e(t) = 3 \cos t$ .
  - $m = 2.5$  kg;  $c = 0$  N·s/m;  $k = 10$  N/m;  $x(0) = 0.1$  m;  $v(0) = -1.2$  m/s &  $F_e(t) = 2 \cos 2t$ .
  - $m = 0.5$  kg;  $c = 0$  N·s/m;  $k = 32$  N/m;  $x(0) = 0$  m;  $v(0) = 0$  m/s &  $F_e(t) = 3 \cos 8t$ .
  - $m = \frac{1}{4}$  kg;  $c = 4$  N·s/m;  $k = 25$  N/m;  $x(0) = 0.1$  m;  $v(0) = -0.1$  m/s &  $F_e(t) = 8 \cos 2t$ .
  - $m = 1$  kg;  $c = 3$  N·s/m;  $k = 6.25$  N/m;  $x(0) = 0$  m;  $v(0) = 0$  m/s &  $F_e(t) = 3 \cos 5t$ .
- Un cuerpo de masa igual a 4 kg está unido a un resorte de constante  $k = 16$  N/m. Se alarga el resorte una distancia de 0.3 metros y se suelta desde el reposo. Si sobre el sistema se aplica una fuerza externa  $F_e(t) = 1.5 \cos 4t$  determine la posición y velocidad del cuerpo en todo tiempo.
- Un cuerpo de masa igual a 4 kg está unido a un resorte de constante  $k = 64$  N/m. Si sobre el sistema se aplica una fuerza de excitación  $F_e(t) = 1.5 \cos 4t$  determine la posición y velocidad del cuerpo en todo tiempo si se supone que el la masa estaba en la posición  $x_0 = 0.3$  y en reposos al tiempo  $t = 0$  segundos. ¿Qué ocurre cuando  $F_e = 1.5 \cos 4.5t$ ?
- A un sistema masa-resorte con masa igual a 2 kg y constante del resorte igual a 8 N/m se le somete a una fuerza de excitación  $F_e(t) = 5 \cos wt$ . Determine la posición del cuerpo con las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  m &  $v(0) = 0$  m/s para los siguientes valores de  $w = 2.5, 2.1, 2, 1.9$  y  $1.5$  rad/s. Elabore en cada caso una gráfica de la posición de la masa y compárelas.
- Un cuerpo de masa 1 kg está unido a un resorte de constante  $k = 1$  N/m. Determine la posición y la velocidad de la masa en todo tiempo si sobre ésta se aplica una fuerza de excitación  $F_e(t) = e^{-t}$  a partir de  $t = 0$  suponiendo que el sistema estaba en reposo y en su posición de equilibrio.



6. Un cuerpo de masa 1 kg está unido a un resorte de constante  $k = 1$  N/m. Determine la posición y la velocidad de la masa en todo tiempo si sobre ésta se aplica una fuerza de excitación  $F_e(t) = e^{-t} \cos 2t$  a partir de  $t = 0$  suponiendo que el sistema estaba en reposo y en su posición de equilibrio.
7. Un cuerpo de masa 1 kg está unido a un resorte de constante  $k = 16$  N/m. Determine la posición y la velocidad de la masa en todo tiempo si sobre ésta se aplica una fuerza de excitación  $F_e(t) = e^{-t} \sin t$  a partir de  $t = 0$  y suponiendo que el sistema estaba en reposo y en su punto de equilibrio.
8. Un sistema masa-resorte-amortiguador está colocado verticalmente y tiene constante  $m = \frac{1}{8}$  kg,  $c = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$  y  $2$  N/m. Inicialmente la masa es colocada 1 m abajo de la posición de equilibrio, donde se le imprime una velocidad de 8 m/s hacia arriba. Determina la posición y la velocidad instantánea de la masa  $m$  si sobre el sistema se aplica una fuerza de excitación  $F_e(t) = 12.5 \sin 2t$  N a partir de  $t = 0$ .
9. Un sistema masa-resorte-amortiguador tiene constantes  $m = 6.5$  kg,  $c = 12$  N·s/m &  $k = 6.5$  N/m. Determine la posición y velocidad de la masa en todo tiempo si sobre ésta se aplica una fuerza de excitación  $F_e(t) = 5e^{-\frac{12}{13}t} \cos(\frac{5}{13}t)$  a partir de  $t = 0$  y suponiendo que el sistema estaba en reposo y en su posición de equilibrio.
10. Sobre un sistema masa-resorte de constantes  $m = 1$  kg y  $k = 100$  N·s/m se aplica una fuerza de excitación  $F_e(t) = 2 \cos 10t$  durante un lapso de tiempo  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Suponga que el sistema parte del reposo y de su posición de equilibrio. Determine la posición y velocidad antes y después de  $t = 2\pi$ .
11. Sobre un sistema masa-resorte de constantes  $m = 1$  kg y  $k = 1$  N·s/m se aplica una fuerza de excitación  $F_e(t) = 2 \cos t$  durante un lapso de tiempo  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Suponga que el sistema parte del reposo y de su posición de equilibrio.
  - a. Determine la posición y velocidad antes y después de  $t = 2\pi$ .
  - b. ¿Qué ocurre con la posición y velocidad en  $t = 2\pi$ ?

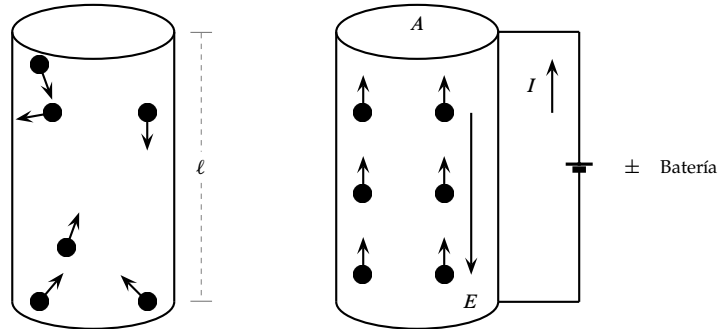
## 5.3 Circuitos eléctricos

Desde hace más de un siglo la humanidad ha utilizado en su beneficio la energía eléctrica. Actualmente usamos diferentes aparatos que la necesitan, baste recordar sólo los aparatos electrodomésticos que tenemos en nuestras casas para reconocer que sin ellos nuestra vida sería diferente. La energía eléctrica se transmite de diversas formas, por ejemplo, la instalación eléctrica en nuestras casas transmite la energía por medio de cables de cobre que forman diferentes circuitos. Estos circuitos son los más simples, pero en los aparatos electrónicos (teléfonos celulares, televisiones, etc.) aparecen elementos que almacenan y distribuyen la energía de diversas formas. En esta sección se estudian los conceptos básicos de circuitos y las ED que los modelan. Se inicia con los conceptos de campo eléctrico y diferencia de potencial.

La energía eléctrica se transmite por diversos materiales llamados conductores, estos materiales tienen la propiedad de que cargas eléctricas (electrones o iones positivos) libres circulan por ellos en direcciones aleatorias, como los átomos en un gas confinado, y sólo se mueven en una dirección preferencial cuando se coloca una *fente de voltaje o batería* en los extremos del conductor, ver la siguiente figura. En principio esta fuente de voltaje produce una *diferencia de potencial*  $V$  que a su vez produce un campo eléctrico  $E$  entre los extremos del conductor, lo que provoca que las cargas  $Q$  sean arrastradas en la dirección del campo con una fuerza que experimentalmente es  $F = QE$ . De forma simple, si la longitud del conductor es  $\ell$  entonces el campo y la diferencia de potencial se relacionan mediante  $E = V/\ell$ , de donde la diferencia de potencial está dada por  $V = E\ell = F\ell/Q$ . Es decir,  $V$  se define como la energía necesaria para transportar una distancia  $\ell$  una carga unitaria. En el sistema MKSC (cuyas unidades son metro, kilogramo, segundo y coulomb), la unidad del voltaje es el volt, que satisface:

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule/coulomb}.$$

En conclusión, una *fente de voltaje* es una fuente de energía eléctrica que provoca que se muevan cargas sobre un conductor. Por comodidad, cuando se hable de potencial nos referiremos a lo que hemos llamado diferencia de potencial.



Cuando se establece el campo eléctrico las cargas ordenan su movimiento y circulan por el conductor estableciendo una corriente eléctrica  $I$ . Si una cantidad de carga  $dQ$  cruza una sección transversal del conductor en una fracción de tiempo  $dt$ , definimos la intensidad de corriente como:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Como las cargas pueden ser positivas o negativas es necesario establecer un signo convencional para la dirección de la corriente, la convención usual es seleccionar ésta como la dirección en que se moverían cargas negativas para un campo eléctrico dado  $E$ . Por ejemplo, en el caso de la figura anterior se puede observar que la dirección de la corriente se establece del polo negativo al polo positivo de la batería. Por otra parte, la unidad de la corriente en el sistema MKS es el ampere; como las unidades de la carga y del tiempo son coulombs y segundos respectivamente, tenemos de acuerdo con la ecuación anterior que

$$1 \text{ ampere} = 1 \text{ coulomb/segundo}.$$

Antes de estudiar propiamente a los circuitos eléctricos necesitamos describir los elementos básicos que los forman, éstos son el resistor, el capacitor y el inductor. Analicemos cada uno de ellos por separado, empezando por el resistor.

### Resistor

Si se aplica la misma diferencia de potencial  $V$  a los extremos de dos conductores de materiales diferentes, por ejemplo, cobre y aluminio, con la misma geometría (forma y dimensiones), se producen intensidades de corriente diferentes  $I$ . La razón se debe a que existe una propiedad de los materiales que se conoce como la **resistencia**  $R$ , que se define experimentalmente por medio de

$$R = \frac{V}{I}. \quad (5.32)$$

Para el caso en que la corriente obtenida sea directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicado  $I \propto V$ , la resistencia  $R$  será una constante; los materiales con esta propiedad se llaman materiales ohmicos ya que satisfacen la ley de Ohm:

**Ley de Ohm** La intensidad de la corriente eléctrica que circula por un conductor es directamente proporcional a la diferencial de potencial aplicada e inversamente proporcional a la resistencia del mismo.

$$I = \frac{V}{R}$$

Observe que la expresión (5.32) se cumple siempre independientemente de que el material sea ohmico o no, sólo en el caso de que  $R$  sea una constante tendremos que el material cumple con la ley de Ohm. Desde un punto de vista físico, la resistencia depende de las características geométricas del conductor y de una propiedad llamada *resistividad*  $\rho$ . Por ejemplo, en el caso de un conductor cilíndrico como el de la figura anterior, de longitud  $\ell$  y área transversal  $A$ , se tiene que la resistencia aumenta directamente con la longitud e inversamente con el área, es decir, la resistencia  $R$  satisface

$$R = \rho \frac{\ell}{A}.$$

En el sistema MKS,  $R$  tiene unidades de ohm ( $\Omega$ ) y de acuerdo con la expresión anterior, el ohm se define como

$$1 \text{ ohm} = 1 \text{ volt/ampere}.$$

Otro fenómeno que involucra a las resistencias es el *efecto Joule*. Este efecto establece que una resistencia se calienta y disipa energía en forma de calor cuando se hace circular una corriente por ella. Para determinar la energía disipada recordamos que la diferencia  $dU$  de energía en los extremos de un resistor es:

$$dU = V dQ = VI dt.$$

De forma que la potencia, energía por unidad de tiempo, es entonces

$$P = \frac{dU}{dt} = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}.$$

Esta es la base del funcionamiento de las bombillas o focos que producen luz eléctrica. Estos dispositivos están formados por una resistencia al vacío, que se calienta cuando se hace circular una corriente por ella y la energía se disipa en forma de luz.

La unidad utilizada para la potencia es el watt, que se define simplemente como

$$1 \text{ watt} = \text{volt} \cdot \text{ampere} = 1 \text{ joule /segundo}.$$

### Capacitor

Un **capacitor** es un dispositivo formado por dos conductores, en general pueden ser de geometrías arbitrarias pero en nuestro caso consideraremos que ambos conductores son placas colocadas de forma paralela una a la otra y que se encuentran totalmente aisladas. Se dice que el capacitor está *cargado* cuando una de las placas tiene una carga  $Q$  y la otra placa una carga  $-Q$ , de tal manera que la carga total es cero. Para cargar un capacitor basta con conectar los extremos de una batería a cada una de las placas que lo forman. Sobre las placas se acumulan cargas de igual magnitud y opuestas. Experimentalmente se encuentra que la carga  $Q$  depende directamente de la diferencia de potencial,  $Q \propto V$ , de tal manera que

$$Q = CV, \tag{5.33}$$

donde  $C$  es una constante que recibe el nombre de **capacitancia**. Al igual que la resistencia, la capacitancia también depende de la geometría de las placas, aunque independientemente de la forma del capacitor siempre se satisface la relación (5.33). En el sistema MKS,  $C$  tiene unidades de farad (F) y de acuerdo con la expresión anterior, el farad se define como

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb/volt}.$$

En la práctica es usual utilizar el microfarad ( $1\mu F = 10^{-6} F$ ) y el picofarad ( $1pF = 10^{-12} F$ ).

Por otra parte, cuando un capacitor se carga de alguna forma también se está almacenando energía, para ver que esto en efecto ocurre, consideremos un elemento diferencial de energía, se tiene:

$$dU = V dQ = \frac{Q}{C} dQ.$$

Si integramos esta relación se obtiene la energía almacenada por un capacitor

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2. \quad (5.34)$$

### Inductor

Un **inductor** es un dispositivo que toma en cuenta el campo magnético generado por la corriente que circula por un conductor. De acuerdo con la experiencia, cuando sobre circula una corriente dependiente del tiempo por un conductor, se genera una diferencia de potencial (también llamada fuerza electromotriz) que depende directamente de la velocidad de variación de la corriente, es decir,  $V \propto \frac{dI}{dt}$ . La constante de proporcionalidad entre estas dos cantidades es precisamente la **inductancia**  $L$ . Tenemos entonces que

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad (5.35)$$

Al igual que en el caso de la resistencia y capacitancia, la inductancia es una cantidad que depende de la geometría del conductor. En el sistema MKS,  $L$  tiene unidades de henry (H) y de acuerdo con la expresión anterior, el henry se define como

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ volt} \cdot \text{segundo} / \text{ampere}.$$

Al igual que los capacitores cargan energía de un campo eléctrico, los inductores cargan energía de un campo magnético. La diferencia  $dU$  de energía en los extremos de un inductor es:

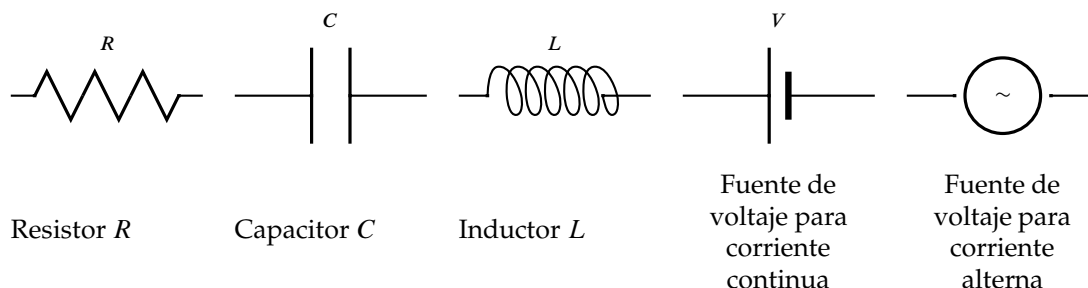
$$dU = V dQ = L \frac{dI}{dt} I dt = LI dI.$$

Si integramos esta relación se obtiene la energía almacenada por un inductor

$$U = \frac{LI^2}{2}.$$

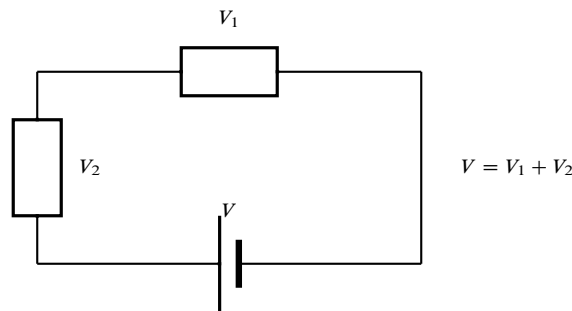
Como conclusión general podemos decir que un resistor disipa  $RI^2$  de energía por el efecto joule, que un capacitor almacena  $\frac{1}{2}CV^2$  de energía en forma de carga y que un inductor almacena  $\frac{1}{2}LI^2$  de energía en forma de corriente cuando circula una corriente por ellos.

En la figura siguiente se muestran las representaciones gráficas para resistores, capacitores, inductores y fuentes de voltaje que se utilizan comúnmente en los circuitos eléctricos.



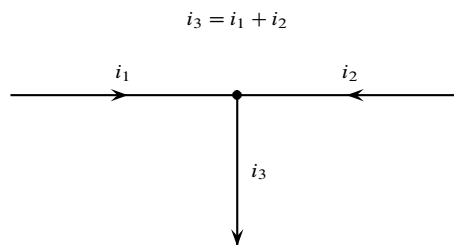
Antes de empezar nuestro estudio de circuitos mediante ED, necesitamos presentar dos resultados, conocidos como leyes de Kirchhoff de voltaje y de corriente que serán útiles posteriormente.

**Ley de Kirchhoff de voltaje.** La suma de las caídas de voltaje (diferencias de potencial) a través de los elementos de un circuito en una malla simple (circuito cerrado sin cruces), es igual al voltaje (diferencia de potencial) aplicado.



Esta ley de voltaje es una forma de expresar que la energía se conserva en una malla simple, es decir que la energía proporcionada como voltaje (energía por unidad de carga) se puede disipar cuando pasa por un resistor o almacenar cuando pasa por un capacitor o un inductor, de suerte que la suma de estas energías es igual a la energía total proporcionada al circuito.

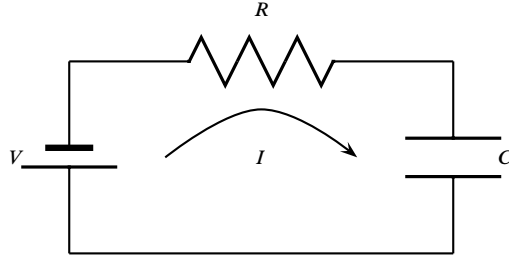
**Ley de Kirchhoff de corriente.** La corriente que entra a un nodo simple (punto donde convergen varias líneas de corriente) es la suma de todas las corrientes que salen de ese nodo.



Esta ley es una consecuencia de la conservación de la carga sobre un circuito. Es decir, si a un nodo llega una carga  $Q$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  entonces esa misma carga debe distribuirse por todas las salidas del nodo, de tal forma que la suma de toda la carga que entra al nodo sea igual a la suma de toda la carga que sale.

Iniciemos ahora nuestro estudio de circuitos eléctricos. Hay dos tipos que nos interesen: los circuitos de corriente continua, donde la fuente de voltaje es tal que la corriente producida no cambia de dirección en el tiempo, y los circuitos de corriente alterna donde la corriente cambia de dirección. Generalmente, en el primer caso, la fuente de voltaje produce una diferencia de potencial  $V$  constante en el tiempo. Una situación común que ocurre en el segundo caso es cuando la fuente produce un potencial que cambia periódicamente de signo, podemos representar  $V$  mediante una función sinusoidal, es decir:  $V = V_0 \cos wt$  donde  $V_0$  es la amplitud del voltaje y  $w$  es su frecuencia natural. La representación gráfica de ambas fuentes de voltaje se muestran en la figura anterior.

### 5.3.1 Circuito RC de corriente continua



En esta figura se muestra un circuito  $RC$  de corriente continua, este circuito está formado por una malla simple con una fuente de voltaje  $V$  constante, un resistor  $R$  y un capacitor  $C$ . Cuando se conecta la fuente, las caídas de potencial son: sobre el resistor  $RI$  y sobre el capacitor  $Q/C$ . De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje tenemos entonces que

$$V = RI + \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}.$$

Es decir

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V. \quad (5.36)$$

La fuente de voltaje proporciona una diferencia de potencial constante  $V$ . Resolvemos la ED que resulta. Para esto reescribamos esta ecuación, multiplicando por  $C$ , como

$$VC - Q = RC \frac{dQ}{dt}.$$

Separando variables:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{VC - Q}.$$

Integrando esta última ecuación, considerando la condición inicial de que al tiempo  $t = 0$  la carga en el capacitor es cero coulombs,  $Q(0) = 0$ , obtenemos

$$\int \frac{dt}{RC} = \int \frac{dQ}{VC - Q} \Rightarrow \frac{t}{RC} = -\ln(VC - Q) + K.$$

Usamos  $Q(0) = 0$

$$\frac{0}{RC} = -\ln(VC) + K \Rightarrow K = \ln VC.$$

De esta manera

$$\frac{t}{RC} = -\ln(VC - Q) + \ln VC = \ln \left( \frac{VC}{VC - Q} \right).$$

Aplicando la función exponencial a ambos miembros se tiene

$$e^{\frac{1}{RC}t} = \frac{VC}{VC - Q}.$$

Despejando  $Q$  obtenemos

$$VC - Q = VC e^{-\frac{1}{RC}t} \Rightarrow Q = VC - VC e^{-\frac{1}{RC}t} = VC \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right).$$

Entonces:

$$Q = VC \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right). \quad (5.37)$$

Derivando esta última expresión obtenemos la corriente que circula por el circuito

$$I = \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

A la constante  $\tau_c = RC$  se le conoce como *constante capacitiva* del circuito y su efecto es ampliar o reducir el tiempo de carga del capacitor. Observe que en el tiempo  $t = 0$ , la carga almacenada en el capacitor es  $Q = 0$ , en consecuencia no hay caída de potencial sobre el capacitor en ese momento. Con el tiempo el capacitor se carga totalmente con una carga  $Q = VC$  y la diferencia de potencial es la proporcionada por la fuente de voltaje. Ocurre exactamente lo contrario en la resistencia, en el tiempo  $t = 0$  la corriente es  $I = V/R$  y la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia es exactamente la que proporciona la fuente de potencial. Cuando  $t$  crece la corriente decrece hasta desaparecer, entonces no hay diferencia de potencial en la resistencia.

**Ejemplo 5.3.1** Considere un circuito RC con  $R = 120$  ohms y  $C = 1/1200$  farads. Al tiempo  $t = 0$  se conecta una fuente de voltaje constante  $V = 120$  volts. Si inicialmente el capacitor estaba descargado, determine cómo cambia la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito.

▼ En este caso la ecuación diferencial que satisface la carga es:

$$V = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow 120 = 120 \frac{dQ}{dt} + 1200Q \Rightarrow 1 = \frac{dQ}{dt} + 10Q. \quad (5.38)$$

Para resolver la ecuación anterior utilizamos el método de separación de variables, tenemos entonces que:

$$dt = \frac{dQ}{1 - 10Q}.$$

Integrando esta ecuación tenemos:

$$t = -\frac{1}{10} \ln(1 - 10Q) + K.$$

Considerando que al tiempo  $t = 0$  segundos la carga en el capacitor es cero coulombs,  $Q(0) = 0$ , obtenemos

$$0 = -\frac{1}{10} \ln[1 - 10(0)] + K \Rightarrow 0 = -\frac{1}{10} \ln 1 + K \Rightarrow K = 0.$$

Despejamos la carga  $Q$ :

$$t = -\frac{1}{10} \ln(1 - 10Q) \Rightarrow -10t = \ln(1 - 10Q) \Rightarrow e^{-10t} = 1 - 10Q,$$

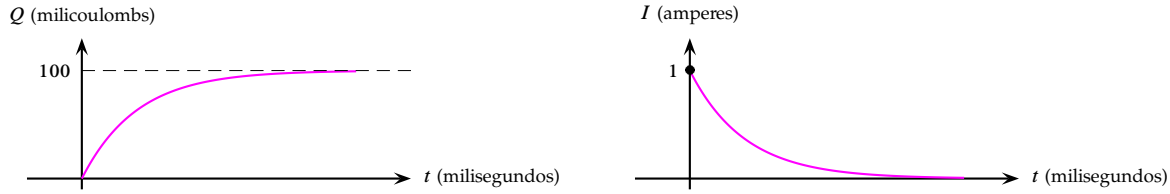
de donde

$$Q = 0.1 (1 - e^{-10t}).$$

La corriente que circula por el circuito se obtiene derivando la carga, así tenemos:

$$I = e^{-10t}.$$

Observe que la máxima carga del capacitor será  $Q = 0.1$  coulombs = 100 milicoulombs y la mayor corriente será de  $I = 1$  ampere. Las gráficas siguientes muestran tanto el comportamiento de la carga como el de la corriente en el tiempo.



□

**Ejemplo 5.3.2** Considere el circuito RC del ejemplo anterior ( $R = 120$  ohms y  $C = 1/1200$  farads). Si se desconecta la fuente cuando la carga es de 8 milicoulombs, determine cómo cambia la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito después de desconectar la fuente.

▼ La ED de la carga es:

$$V = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0 = 120 \frac{dQ}{dt} + 1200Q \Rightarrow 0 = \frac{dQ}{dt} + 10Q. \quad (5.39)$$

Separando variables se tiene que:

$$-10 dt = \frac{dQ}{Q}.$$

Integrando esta ecuación tenemos:

$$-10t + K = \ln Q \Rightarrow Q = Ke^{-10t}.$$

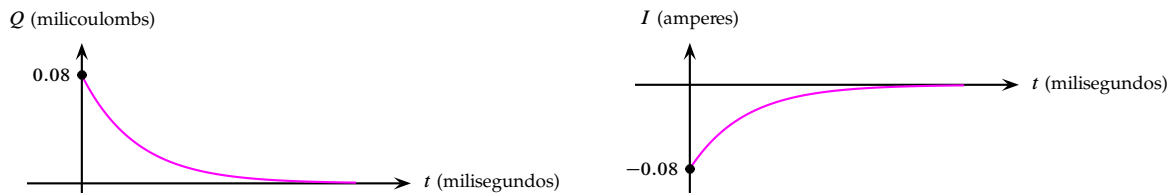
Considerando que al tiempo  $t = 0$  segundos la carga en el capacitor es de 8 milicoulombs,  $Q(0) = 0.008$ , obtenemos que la constante  $K = 0.008$ . Finalmente obtenemos:

$$Q = 0.008e^{-10t} \text{ coulombs.}$$

La corriente que circula por el circuito se obtiene derivando la carga, así tenemos:

$$I = -0.08e^{-10t} \text{ amperes.}$$

Observe que ahora tanto la carga como la corriente tienden a cero rápidamente. Físicamente la carga que tiene el capacitor sirve para generar una corriente en el circuito, que al cruzar por la resistencia se disipa en forma de calor. En la figura siguiente se muestra el comportamiento de la carga y la corriente en el tiempo.



□

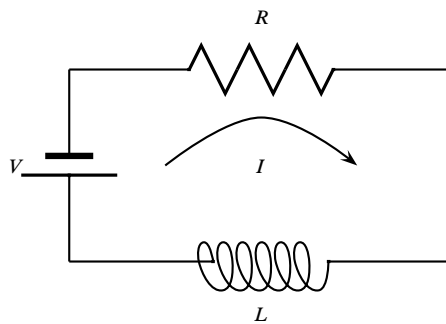
**Ejercicios 5.3.1** Circuito RC de corriente continua. *Soluciones en la página: 475*

1. Se conecta un resistor  $R = 100 \Omega$  con un capacitor  $C = 10^{-3} f$  a una fuente de voltaje directa  $V = 50$  volts formando un circuito RC. Si inicialmente el capacitor tiene carga  $Q_0 = 0$ , determine la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo  $t$ .
2. Un circuito RC se forma con un resistor  $R = 80 \Omega$ , un capacitor  $C = 10^{-2} f$  y una fuente de voltaje directa de 100 volts. Determinar la carga y la corriente en todo tiempo suponiendo que inicialmente el capacitor tiene carga  $Q_0 = 0$  coulombs.



3. Determinar la carga y la corriente en un circuito RC formado por un resistor  $R = 20 \Omega$ , un capacitor  $C = 0.04 \text{ f}$  y una fuente de voltaje directa  $V = 120 \text{ volts}$ . Suponga que al inicio la carga del capacitor es de 2 coulombs.
4. Un circuito RC tiene un resistor  $R = 40 \Omega$  y un capacitor  $C = 0.002 \text{ f}$ . Suponga que se coloca con una fuente de voltaje  $V = 80 \text{ volts}$ . Determine la corriente que circula sobre el circuito en todo tiempo suponiendo que el capacitor tiene una carga inicial de 0.01 coulombs.
5. Una fuente de voltaje de 160 volts se conecta a un resistencia de  $200 \Omega$  y a un capacitor  $C = 0.05 \text{ f}$  formando un circuito RC. Suponga que en el tiempo  $t = 0$  el capacitor tiene una carga de  $Q_0 = 3$  coulombs. Determine la carga en el capacitor en todo tiempo.

### 5.3.2 Circuito RL de corriente continua



En la figura anterior se muestra un circuito RL de corriente continua. Este circuito está formado por una malla simple con una fuente de voltaje  $V$  constante, una resistencia  $R$  y una inductancia  $L$ . Cuando se conecta la fuente, la caída de potencial en la resistencia es  $RI$  y en el inductor es  $L \frac{dI}{dt}$ . De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje tenemos entonces que

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI. \quad (5.40)$$

Observe que las ecuación (5.40) y la ecuación (5.36) de la página 328 son similares, con sólo identificar:

Ecuación (5.40)		Ecuación (5.36)
$I$	$\longleftrightarrow$	$Q$
$L$	$\longleftrightarrow$	$R$
$R$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{C}$

Con lo anterior y usando (5.37) obtenemos que la corriente que circula por el circuito está dada por:

$$I = \frac{V}{R} \left( 1 - e^{-\frac{1}{L/R}t} \right).$$

Derivando con respecto a  $t$  esta expresión, se obtiene:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} e^{-\frac{1}{L/R}t}.$$

Note también que en el tiempo  $t = 0$ , la corriente es  $I = 0$ , y su cambio es máximo y dado por  $\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L}$ . En consecuencia, en  $t = 0$ , se tiene la máxima caída de potencial sobre el inductor. Cuando el tiempo crece se reduce la caída de potencial hasta desaparecer.

A la constante  $\tau_L = \frac{L}{R}$  se le conoce como *constante inductiva* e indica qué tan rápido la corriente pasa a un valor estacionario en un circuito  $RL$ .

**Ejemplo 5.3.3** Se conectan un resistor  $R = 40$  ohms y un inductor  $L = 0.1$  henries en serie con una fuente de voltaje  $V = 110$  volts. Si originalmente no existe corriente sobre el circuito, determine la corriente en el tiempo.

▼ La ecuación diferencial para este circuito  $RL$  de corriente continua es:

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI \Rightarrow 0.1 \frac{dI}{dt} + 40I = 110 \Rightarrow \frac{dI}{dt} + 400I = 1100. \quad (5.41)$$

Separando variables se obtiene

$$\frac{dI}{1100 - 400I} = dt.$$

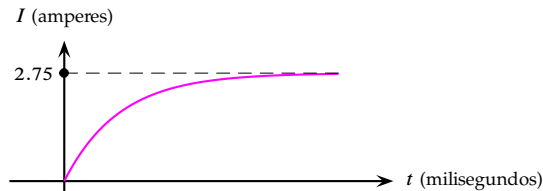
Integrando esta ecuación tenemos

$$\begin{aligned} t + C &= -\frac{1}{400} \ln(1100 - 400I) \Rightarrow \ln(1100 - 400I) = -400t + K \Rightarrow \\ \Rightarrow 1100 - 400I &= Ke^{-400t} \Rightarrow I(t) = \frac{11}{4} + Ke^{-400t}. \end{aligned}$$

Considerando que al tiempo  $t = 0$  segundos la corriente es de cero amperes, se obtiene  $0 = I(0) = \frac{11}{4} + K$ , de donde  $K = -\frac{11}{4}$ . Finalmente,

$$I(t) = \frac{11}{4} (1 - e^{-400t}) \text{ amperes.}$$

Para tiempos suficientemente grandes la corriente se acerca a su valor límite  $I = 11/4 = 2.75$  amperes. En la figura siguiente se muestran la corriente en el tiempo. Es notable que en escasos 15 milisegundos se obtenga una corriente de 2.74318 amperes, muy cercana al valor límite esperado para el circuito.



□

**Ejemplo 5.3.4** Cuando circula una corriente de 2 amperes en el ejemplo anterior, se desconecta la fuente de voltaje. Determinar la corriente que circula por el circuito en todo tiempo.

▼ La ecuación diferencial que modela la corriente en esta situación es

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI \Rightarrow 0.1 \frac{dI}{dt} + 40I = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} + 400I = 0. \quad (5.42)$$

Separando variables se obtiene

$$\frac{dI}{I} = -400 dt.$$

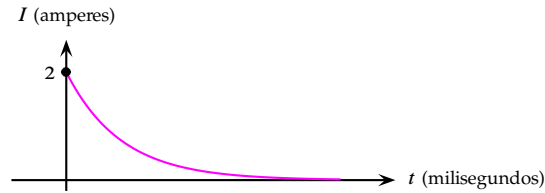
Integrando esta ecuación tenemos

$$-400t + K = \ln I \Rightarrow I(t) = Ke^{-400t}.$$

Utilizando la condición inicial  $I(0) = 2$  amperes, se tiene que  $K = 2$ , de forma que:

$$I(t) = 2e^{-400t} \text{ amperes.}$$

La corriente decrece ahora de forma exponencial, esta corriente se establece porque el inductor almacena energía en forma de corriente y al desconectar la fuente de voltaje busca eliminar esta energía. En la figura siguiente se muestra la corriente en el tiempo. En sólo 15 milisegundos la corriente cambia de 2 amperes a 0.005 amperes, muy cerca ya de desaparecer.

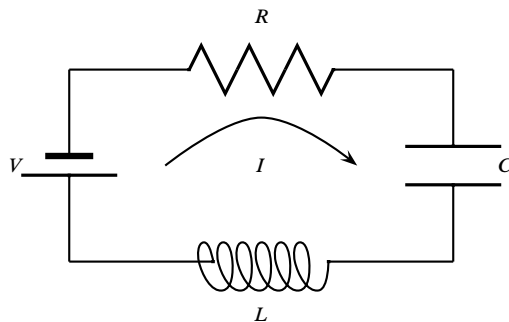


□

### Ejercicios 5.3.2 Circuito RL de corriente continua. Soluciones en la página: 476

1. Se conecta en serie un resistor de  $10\ \Omega$  con un inductor de  $2H$  y una fuente de voltaje directa de 50 volts formando un circuito  $RL$ . Determine la corriente en el tiempo  $t$  suponiendo que originalmente no circula corriente por el circuito. ¿Cuál es la máxima corriente que circula por el circuito? ¿En qué tiempo se alcanza la mitad de la corriente máxima?
2. Un circuito  $RL$  en serie está formado por un resistor de  $2\ \Omega$ , un inductor  $0.5H$  y una fuente de voltaje directa  $V = 120$  volts. Determinar la corriente en el tiempo  $t$  si originalmente circula una corriente de 20 amperes en el circuito. ¿En qué tiempo se obtiene el 75% de la corriente máxima?
3. Un resistor de  $1.2\ \Omega$  se conecta con un inductor de  $0.01\ H$  en serie. Se coloca además una fuente de voltaje directa  $V = 4.8$  volts para formar un circuito  $RL$ . Determinar la corriente en el tiempo  $t$  si originalmente la corriente que circula por el circuito es de 2 amperes.
4. Se conecta un resistor de  $6.8\ \Omega$  en serie con un inductor de  $0.1\ H$ . Una fuente de voltaje directa  $V = 20$  volts suministra energía al circuito. Suponiendo que originalmente circula una corriente de 1 ampere por el circuito, determinar la corriente en el tiempo  $t$ .
5. Un circuito  $RL$  está formado por una resistencia de  $82\ \Omega$ , un inductor de  $3H$  y una fuente de voltaje  $V = 20$  volts. Determinar la corriente en el tiempo  $t$  si originalmente no circula corriente por el circuito. ¿Qué ocurre con la corriente si se duplica la fuente de voltaje?

### 5.3.3 Circuito RLC de corriente continua



Consideremos ahora un circuito formado por un resistor  $R$ , un capacitor  $C$  y un inductor  $L$  conectados en serie con una fuente de voltaje  $V$ , ver la figura anterior. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje se tiene que

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI = V.$$

Como  $I = \frac{dQ}{dt}$ , obtenemos la siguiente ED para la carga:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V. \quad (5.43)$$

Derivando esta ED se obtiene la ecuación diferencial que modela la corriente:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}. \quad (5.44)$$

Con cualquiera de estas dos ecuaciones diferenciales podemos analizar qué ocurre con la corriente y con la carga en un circuito. Sugerimos, sin embargo, determinar primero la carga del capacitor utilizando la ecuación (5.43) y posteriormente derivar con respecto al tiempo para obtener la corriente en el circuito.

Observe que las ecuaciones diferenciales que gobiernan la carga y la corriente eléctrica en un circuito tienen la misma forma que la ecuación diferencial que describe las vibraciones mecánicas y, en consecuencia, dependiendo de las constantes  $R$ ,  $L$  &  $C$  del circuito, se tendrán diferentes tipos de comportamiento de la carga y de la corriente.

**Ejemplo 5.3.5** Se conecta en serie una fuente de voltaje  $V = 1.5$  volts, una resistencia  $R = 20$  ohms, un capacitor de  $10^{-3}$  farads y un inductor  $L = 0.1$  henries. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito en todo tiempo si inicialmente el capacitor está totalmente descargado y no fluye corriente sobre el circuito.

▼ La ecuación diferencial asociada al circuito RLC en serie de este ejemplo es

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0.1 \frac{dI}{dt} + 20I + 10^3 Q = 1.5 \Rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} + 200 \frac{dQ}{dt} + 10^4 Q = 15, \quad (5.45)$$

con las condiciones iniciales  $Q(0) = 0$  coulombs &  $I(0) = 0$  amperes. Esta ecuación es similar a la ecuación diferencial de un resorte amortiguado sometido a una fuerza constante externa. La ecuación auxiliar es:

$$r^2 + 200r + 10^4 = 0.$$

Cuyas raíces son  $r_{1,2} = -100$ . Como las raíces son iguales, la solución de la ecuación homogénea es de la forma

$$Q_h(t) = Ae^{-100t} + Bte^{-100t}.$$

Por otra parte, una solución particular es de la forma  $Q_p(t) = \frac{15}{10000} = 0.0015$  coulombs. Así que la carga está dada por

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_h(t) = 0.0015 + Ae^{-100t} + Bte^{-100t}.$$

Y la corriente por

$$I(t) = -100Ae^{-100t} + Be^{-100t} - 100Bte^{-100t}.$$

Usando las condiciones iniciales  $Q(0) = 0$ ,  $I(0) = 0$  obtenemos el sistema de ecuaciones

$$0 = 0.0015 + A;$$

$$0 = -100A + B.$$

De donde,  $A = -0.0015$ ,  $B = -0.15$ . Finalmente, la carga y la corriente son, para tiempos  $t \geq 0$ ,

$$Q(t) = 0.0015 - 0.0015e^{-100t} - 0.15te^{-100t} = 0.0015(1 - e^{-100t} - 100te^{-100t});$$

$$I(t) = 15te^{-100t}.$$

Observe que la corriente tiene un máximo cuando  $I'(t) = 0$ .

$$I'(t) = 15e^{-100t} - 1500te^{-100t} = 0 \Rightarrow t = 0.01 \text{ s.}$$

Para  $0 \leq t \leq 0.01$  la corriente crece; para  $t \geq 0.01$  la corriente decrece. Por otra parte, la carga es creciente siempre, ya que  $t = 0$  es el único tiempo donde  $I(t) = Q'(t) = 0$ .

□

**Ejemplo 5.3.6** Se conecta en serie una fuente de voltaje  $V = 110$  volts, un capacitor de  $10^{-3}$  farads y un inductor  $L = 0.1$  henries. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito en todo tiempo si inicialmente el capacitor estaba totalmente descargado y no fluía corriente sobre el circuito. ¿En qué tiempo se obtiene la máxima corriente fluyendo por el circuito?

▼ Para un circuito  $LC$  en serie, como el de este ejemplo, la ED asociada es:

$$V = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0.1 \frac{dI}{dt} + 10^3 Q = 110 \Rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} + 10^4 Q = 1100, \quad (5.46)$$

con las condiciones iniciales  $Q(0) = 0$  &  $I(0) = 0$  coulombs. Esta ecuación es similar a la ecuación diferencial de un resorte libre sometido a una fuerza constante externa. La ecuación auxiliar es:

$$r^2 + 10^4 = 0.$$

Cuyas raíces son  $r_{1,2} = \pm 100i$ . Como las raíces son complejas tenemos que la solución a la ecuación homogénea es de la forma

$$Q_h(t) = A \cos 100t + B \sin 100t.$$

Por otra parte, una solución particular es de la forma  $Q_p(t) = \frac{1100}{10000} = 0.11$  coulombs. Así que la carga está dada por

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_h(t) = 0.11 + A \cos 100t + B \sin 100t.$$

Y la corriente es

$$I(t) = -100A \sin 100t + 100B \cos 100t.$$

Usando las condiciones iniciales  $Q(0) = 0$ ,  $I(0) = 0$  obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= 0.11 + A; \\ 0 &= 100B. \end{aligned}$$

De donde  $A = -0.11$  &  $B = 0$ . Finalmente la carga y la corriente son, para tiempos  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} Q(t) &= 0.11 (1 - \cos 100t); \\ I(t) &= 11 \sin 100t. \end{aligned}$$

La frecuencia natural de estas expresiones sinusoidales es  $w = 100$  rad/s y su periodo es  $T = \frac{2\pi}{w} = \frac{\pi}{50} \approx 0.0628$  s.

□

**Ejemplo 5.3.7** Determinar la carga en todo tiempo sobre un circuito  $RLC$  en serie que satisface  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Consideramos que la fuente de voltaje es constante e igual a  $V$ , la carga inicial en el capacitor es cero y no circula corriente en el circuito.

▼ La ED (5.43) modela este sistema. A pesar de no ser una ED lineal homogénea, se puede convertir en una ED homogénea mediante un cambio de variable  $Z = Q - VC$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= \frac{dQ}{dt} - \frac{d}{dt}(VC) = \frac{dQ}{dt}. \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= \frac{d^2 Q}{dt^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5.43):

$$L \frac{d^2 Z}{dt^2} + R \frac{dZ}{dt} + \frac{Z + VC}{C} = V,$$

o bien

$$L \frac{d^2 Z}{dt^2} + R \frac{dZ}{dt} + \frac{Z}{C} = 0.$$

La ecuación característica es:

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0,$$

cuya solución es

$$r_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Puesto que  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , el argumento dentro del radical es negativo, entonces la solución para  $Z$  es:

$$Z = e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ A \cos \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) \right].$$

De donde

$$\begin{aligned} Q &= VC + e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ A \cos \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) \right]. \\ I = Q' &= e^{-\frac{R}{2L}t} \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) \left[ -A \sin \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) \right] - \\ &\quad - \frac{R}{2L} e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ A \cos \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) \right] \end{aligned}$$

Al evaluar en  $t = 0$ , considerando que  $Q(0) = 0$ , se tiene:

$$0 = VC + A \Rightarrow A = -VC.$$

Evaluando  $I$  en  $t = 0$ , considerando que  $I(0) = 0$ , se tiene la segunda condición:

$$0 = B \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} - \frac{RA}{2L} \Rightarrow B = \frac{RA}{2L \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = -\frac{RVC}{2L \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Finalmente,

$$Q = VC - VC e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) + \frac{R}{2L \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \sin \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) \right],$$

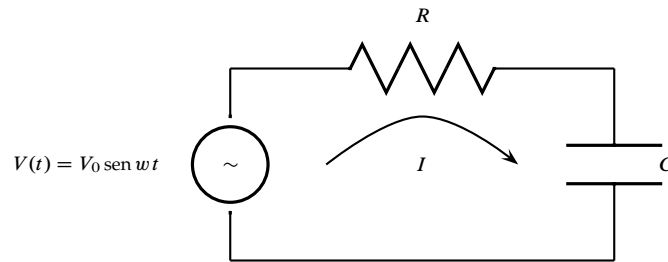
que corresponde en su símil mecánico a una oscilación amortiguada. Observe que cuando el tiempo crece la carga se estabiliza en  $Q = VC$ , que físicamente significa que el capacitor con el tiempo se carga totalmente.  $\square$

### Ejercicios 5.3.3 Circuito RLC de corriente continua. Soluciones en la página: 476

1. Se conecta en serie un resistor de  $12 \Omega$ , un capacitor de  $0.1 f$ , un inductor de  $2H$  y una fuente de voltaje  $V = 20$  volts formando un circuito RLC. Si originalmente se encuentra descargado el capacitor y no circula corriente por el circuito, determinar en todo tiempo posterior expresiones para la carga y la corriente.

2. Un circuito RLC en serie está formado por un resistor de  $4\ \Omega$ , un capacitor de un farad y un inductor de 4 Henries. Una fuente de voltaje  $V = 120$  volts suministra energía al circuito. Suponga que originalmente no circula corriente por el circuito y que el capacitor está descargado. Determinar la corriente que circula en todo tiempo por el circuito. ¿En qué tiempo se obtiene la corriente máxima?
3. Se conecta en serie un resistor de  $4\ \Omega$ , un capacitor de 0.05 farads y un inductor de 0.2 Henries a una fuente de voltaje  $V = 50$  volts formando un circuito RLC. Determinar la carga en el capacitor y la corriente por el circuito en el tiempo  $t$  si inicialmente la carga es de 2 coulombs y no circula corriente por el circuito. ¿En qué tiempo el capacitor obtiene su mayor carga?
4. Un circuito RLC está formado por un resistor  $R = 3.2\ \Omega$ , un inductor  $L = 0.4H$ , un capacitor  $C = 0.1$  farads. Si colocamos una fuente de voltaje directa de 50 volts en  $t = 0$  segundos y la suspendemos en  $t = \pi/3$  segundos, determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito antes y después de  $t = \pi/3$  segundos, suponiendo que inicialmente el capacitor tiene una carga de 5 coulombs y circula una corriente de 12 amperes.
5. Se conecta en serie un resistor  $R = 5\ \Omega$ , un capacitor de 0.04 farads, un inductor de 0.5 Henries y una fuente de voltaje  $V = 120$  volts. Determinar la carga en el capacitor y la corriente por el circuito en el tiempo  $t$  si inicialmente la carga es de 10 coulombs y la corriente de 5 amperes.

### 5.3.4 Circuito RC de corriente alterna



En la figura anterior se muestra un circuito RC de corriente alterna, este circuito está formado por una malla simple con una fuente de voltaje  $V(t)$  de tipo sinusoidal, un resistor  $R$  y un capacitor  $C$ . De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje tenemos entonces que la carga satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} V &= RI + \frac{Q}{C} \Rightarrow R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{V_0}{R} \sen wt. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Esta es una ED lineal no homogénea de primer orden cuyo factor integrante es  $e^{\frac{1}{RC}t}$ . Obtenemos entonces:

$$e^{\frac{1}{RC}t} \left( \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} \right) = \frac{V_0}{R} e^{\frac{1}{RC}t} \sen wt \Rightarrow \frac{d \left( e^{\frac{1}{RC}t} Q \right)}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{\frac{1}{RC}t} \sen wt.$$

Si integramos esta última ecuación, obtenemos

$$e^{\frac{1}{RC}t} Q = \int \frac{V_0}{R} e^{\frac{1}{RC}t} \sen wt \, dt + K \Rightarrow Q = \frac{V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}}{R} \int e^{\frac{1}{RC}t} \sen wt \, dt + K e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Utilizando la formula de integración

$$\int e^{at} \sen bt \, dt = \frac{e^{at}(a \sen bt - b \cos bt)}{a^2 + b^2},$$

obtenemos:

$$Q = \frac{V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}}{R} \left[ \frac{e^{\frac{1}{RC}t} \left( \frac{1}{RC} \sen wt - w \cos wt \right)}{\left( \frac{1}{RC} \right)^2 + w^2} \right] + K e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Usando la condición  $Q(0) = 0$  obtenemos:

$$0 = \frac{V_0}{R} \left[ \frac{-w}{\left( \frac{1}{RC} \right)^2 + w^2} \right] + K \Rightarrow K = \frac{V_0}{R} \left[ \frac{w}{\left( \frac{1}{RC} \right)^2 + w^2} \right].$$

Simplificando tenemos que:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{V_0}{R \left( \frac{1}{RC} \right)^2 + R w^2} \left[ \frac{1}{RC} \sen wt - w \cos wt + w e^{-\frac{1}{RC}t} \right] = \\ &= \frac{V_0 RC^2}{1 + R^2 C^2 w^2} \left[ \frac{1}{RC} \sen wt - w \cos wt + w e^{-\frac{1}{RC}t} \right] \end{aligned} \quad (5.48)$$

Observe que con el tiempo se obtiene una expresión para  $Q(t)$  donde no aparece el término exponencial, es decir, para  $t \rightarrow \infty$  obtenemos la carga de estado estable dada por:

$$Q = \frac{V_0}{R \left( \frac{1}{RC} \right)^2 + R w^2} \left[ \frac{1}{RC} \sen wt - w \cos wt \right],$$

que se puede escribir como:

$$Q(t) = \frac{V_0}{R \sqrt{\left( \frac{1}{RC} \right)^2 + w^2}} \sen(wt + \phi).$$

Donde el ángulo de fase  $\phi$  satisface

$$\cos \phi = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\left( \frac{1}{RC} \right)^2 + w^2}}, \quad \sen \phi = -\frac{w}{\sqrt{\left( \frac{1}{RC} \right)^2 + w^2}} \quad \& \quad \tan \phi = -wRC.$$

Es decir, la carga es una función sinusoidal de la misma frecuencia que el voltaje de entrada. De hecho la corriente sólo estará desfasada un ángulo  $\phi$  del voltaje de entrada. La corriente está dada por

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{w V_0}{R \sqrt{\left( \frac{1}{RC} \right)^2 + w^2}} \cos(wt + \phi).$$



**Ejemplo 5.3.8** Determinar la carga que se almacena en un capacitor de un circuito RC de corriente alterna si  $R = 12$  ohms,  $C = 1/1200$  farads,  $V = 110 \cos 60t$  e inicialmente el capacitor no tiene carga.

▼ La ecuación diferencial que modela la carga es:

$$V = RI + \frac{Q}{C} \Rightarrow 12 \frac{dQ}{dt} + 1200Q = 110 \cos 60t \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + 100Q = \frac{110}{12} \cos 60t, \quad (5.49)$$

Esta es una ED lineal no homogénea con la condición inicial  $Q(0) = 0$  coulombs. Esta ED corresponde al caso de un resorte forzado no amortiguado. El factor integrante es  $Q = e^{\int 100 dt} = e^{100t}$ . Aplicando el método conocido:

$$e^{100t} \left( \frac{dQ}{dt} + 100Q \right) = \frac{110}{12} e^{100t} \cos 60t \Rightarrow \frac{dQe^{100t}}{dt} = \frac{110}{12} e^{100t} \cos 60t.$$

Si usamos la fórmula de integración

$$\int e^{at} \cos bt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \cos bt + b \sin bt) + K,$$

obtenemos:

$$Qe^{100t} = \left( \frac{110}{12} \right) \left( \frac{e^{100t}}{100^2 + 60^2} \right) (100 \cos 60t + 60 \sin 60t) + K,$$

de donde

$$Q(t) = \left( \frac{11}{16320} \right) (100 \cos 60t + 60 \sin 60t) + Ke^{-100t}.$$

Usando  $Q(0) = 0$  obtenemos que  $0 = Q(0) = \left( \frac{1100}{16320} \right) + K$ , de donde:  $K = -\frac{1100}{16320} = -\frac{110}{1632}$ . Finalmente, la carga y la corriente son, para tiempos  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{11}{1632} (10 \cos 60t + 6 \sin 60t) - \frac{110}{1632} e^{-100t}; \\ I(t) &= \frac{660}{1632} (-10 \sin 60t + 6 \cos 60t) + \frac{11000}{1632} e^{-100t}. \end{aligned}$$

Vemos que los términos exponenciales son transitorios porque desaparecen rápidamente. En el caso de la carga, con el tiempo queda el término del estado estable:

$$Q(t) = \frac{11}{1632} (10 \cos 60t + 6 \sin 60t),$$

que puede reescribirse como

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{11}{1632} \sqrt{10^2 + 6^2} \left( \frac{10}{\sqrt{10^2 + 6^2}} \cos 60t + \frac{6}{\sqrt{10^2 + 6^2}} \sin 60t \right) = \\ &= \frac{11}{24\sqrt{34}} (\sin \phi \cos 60t + \cos \phi \sin 60t) = \\ &= \frac{11}{24\sqrt{34}} \sin(60t + \phi) \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la identidad

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

e identificado el ángulo fase como aquel que satisface

$$\sin \phi = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 6^2}}; \quad \cos \phi = \frac{6}{\sqrt{10^2 + 6^2}}; \quad \tan \phi = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Se tiene  $\phi = \phi_c = \arctan \frac{5}{3} \approx 1.0304$ . Observe que la funciones de carga y voltaje están desfasadas entre sí un ángulo  $\frac{\pi}{2} - \phi$ . En efecto:

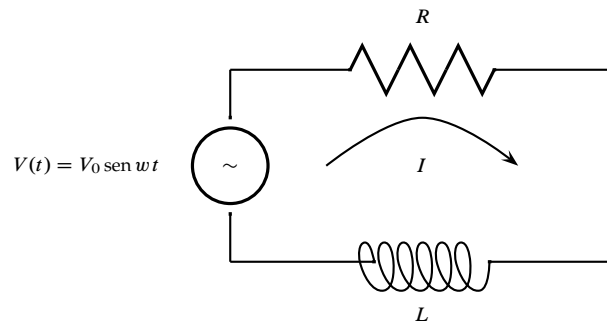
$$\sin \left[ (60t + \phi) + \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] = \sin \left( 60t + \frac{\pi}{2} \right) = \cos 60t.$$

□

### Ejercicios 5.3.4 Circuito RC de corriente alterna. Soluciones en la página: 476

1. Se conecta una fuente de voltaje alterno de  $120 \cos 60\pi t$  volts a un circuito RC. Suponiendo que  $R = 60\Omega$ ,  $C = 0.02f$  y que inicialmente el capacitor está descargado, determinar la carga y la corriente al tiempo  $t$ .
2. Se conecta un resistor de  $100\Omega$  con un capacitor de  $0.001$  farads y con una fuente de voltaje alterna  $V = 120 \cos 5t$  volts, formando un circuito RC. Si inicialmente el capacitor no tiene carga, determine una expresión para la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo  $t$ .
3. Una resistencia de  $25\Omega$  y un capacitor de  $0.02$  farads se conectan en serie con una fuente de voltaje  $V = 125 \cos 5t + 100 \sin 2t$  volts. Suponga que al tiempo  $t = 0$  segundos la carga del capacitor es  $Q = 1$  coulomb, encuentre una expresión para la carga del capacitor al tiempo  $t$ .
4. Un circuito RC está formado por una resistor de  $20\Omega$ , un capacitor de  $0.001$  farads y una fuente de voltaje alterno  $V = 100 \cos 50t$  volts. Si originalmente la carga en el capacitor es de  $20$  coulombs, determine la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo  $t$ .
5. Un circuito RC se forma con una resistor de  $200\Omega$ , un capacitor de  $0.01$  faradas y una fuente de voltaje  $V = 100e^{-3t} \cos 4t$  volts. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo  $t$ , suponiendo que  $Q(0) = 20$  coulombs.

### 5.3.5 Circuito RL de corriente alterna



El circuito de la figura anterior está formado por una malla simple con una fuente de voltaje  $V(t)$  de tipo sinusoidal, un resistor  $R$  y un inductor  $L$  y se le conoce como circuito RL de corriente alterna. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje tenemos que

$$\begin{aligned} V_0 \sin wt &= RI + L \frac{dI}{dt} \Rightarrow L \frac{dI}{dt} + RI = V_0 \sin wt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{V_0}{L} \sin wt. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Observe que esta ecuación (5.50) es similar a la ecuación (5.47) página 337, identificando:

Ecuación (5.47)		Ecuación (5.50)
$Q$	$\longleftrightarrow$	$I$
$R$	$\longleftrightarrow$	$L$
$\frac{1}{C}$	$\longleftrightarrow$	$R$

la solución de la ecuación diferencial (5.50) tiene la misma forma que la ecuación (5.47). Así obtenemos de la solución (5.48) que la corriente que circula sobre el circuito está dada por:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{V_0}{L \left( \frac{R}{L} \right)^2 + Lw^2} \left[ \frac{R}{L} \sin wt - w \cos wt + we^{-\frac{L}{R}t} \right] = \\ &= \frac{V_0 L}{R^2 + L^2 w^2} \left[ \frac{R}{L} \sin wt - w \cos wt + we^{-\frac{L}{R}t} \right] \end{aligned}$$

Que se puede reescribir como

$$I(t) = \frac{V_0 L w e^{-\frac{L}{R}t}}{R^2 + L^2 w^2} + \frac{\frac{V_0}{L}}{\sqrt{\left( \frac{R}{L} \right)^2 + w^2}} \sin(wt + \phi)$$

Donde el ángulo de fase  $\phi$  satisface

$$\cos \phi = \frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\left( \frac{R}{L} \right)^2 + w^2}}, \quad \sin \phi = -\frac{w}{\sqrt{\left( \frac{R}{L} \right)^2 + w^2}} \quad \& \quad \tan \phi = -\frac{wL}{R}.$$

Observe que para tiempos grandes la corriente que circula por el circuito tiene la misma frecuencia que el voltaje de entrada.

**Ejemplo 5.3.9** Determinar la corriente en un circuito  $RL$  de corriente alterna si  $R = 1$  ohms,  $L = 0.01$  henries y  $V = \cos 60t$ . Suponga que inicialmente no circula corriente por el circuito.

▼ La ecuación diferencial para este ejemplo es:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V(t) \Rightarrow 0.01 \frac{dI}{dt} + I = \cos 60t \Rightarrow \frac{dI}{dt} + 100I = 100 \cos 60t.$$

Multiplicamos por el factor integrante  $\mu = e^{100t}$  ambos lados para obtener:

$$\frac{de^{100t} I}{dt} = 100e^{100t} \cos 60t.$$

Utilizando la relación:

$$\int e^{at} \cos bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \cos bt + b \sin bt) + K,$$

obtenemos el resultado

$$\begin{aligned} e^{100t} I &= \frac{100e^{100t}}{100^2 + 60^2} (100 \cos 60t + 60 \sin 60t) + K \Rightarrow \\ \Rightarrow I &= \frac{100}{100^2 + 60^2} (100 \cos 60t + 60 \sin 60t) + Ke^{-100t} \end{aligned}$$

Si al tiempo  $t = 0$  no hay corriente, entonces se tiene que

$$0 = \frac{100}{100^2 + 60^2}(100) + K \Rightarrow K = -\frac{10^4}{100^2 + 60^2}.$$

Finalmente, la corriente está dada por:

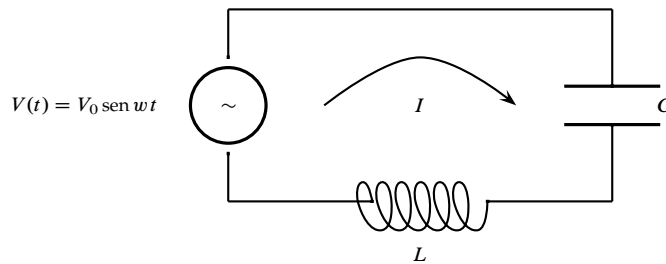
$$\begin{aligned} I &= \frac{100}{100^2 + 60^2}(100 \cos 60t + 60 \sin 60t - 100e^{-100t}) = \\ &= \frac{25}{34} \cos 60t + \frac{15}{34} \sin 60t - \frac{25}{34}e^{-100t}. \end{aligned}$$

□

### Ejercicios 5.3.5 Circuito RL de corriente alterna. Soluciones en la página: 476

1. Se conectan en serie un resistor de  $30 \Omega$  y un inductor de  $0.1$  henries a una fuente de voltaje alterna que suministra  $V = 100 \cos 400t$  volts. Si inicialmente no circula corriente por el circuito, determine una expresión para la corriente en el tiempo  $t$ .
2. Un circuito RL está formado por un resistor de  $10 \Omega$ , un inductor de  $0.02$  H y una fuente de voltaje alterna que suministra  $V = 120 \cos 500t$  volts. Determine la corriente que circula por el circuito suponiendo que originalmente no hay corriente alguna.
3. Se conectan un resistor de  $25 \Omega$  y un inductor  $L$  de  $0.5$  henries a una fuente de voltaje alterna  $V = 12 \cos 50t + 10 \sin 20t$  volts formando un circuito  $RL$ . Si inicialmente circula una corriente de un ampere, determine la corriente que circula en el tiempo  $t$ .
4. Un circuito en serie está formado por una resistencia  $R = 20 \Omega$ , una inductancia  $L = 0.05$  H y una fuente de voltaje que suministra  $V = 80 \cos 100t$  volts. Suponga que originalmente circula una corriente de  $4$  amperes. ¿Cuál será la corriente al tiempo  $t$ ?
5. Se conecta un resistor de  $2 \Omega$  y un inductor de  $0.25$  henries a una fuente de voltaje alterna que suministra  $V = 10e^{-5t} \cos 12t$  volts formando un circuito  $RL$ . Suponga que la fuente se conecta cuando circula por el circuito una corriente de  $5$  amperes. Determine la corriente que circula en el tiempo  $t$ .

### 5.3.6 Circuito LC de corriente alterna



Un circuito  $LC$  simple de corriente alterna, como el de la figura anterior, está formado por una fuente de voltaje  $V(t)$ , un capacitor  $C$  y un inductor  $L$ . Las caídas de potencial en el circuito son  $Q/C$  sobre el capacitor y  $L \frac{dI}{dt}$  sobre el inductor. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje tenemos que:

$$V_0 \sen wt = \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = \frac{V_0}{L} \sen wt. \quad (5.51)$$

Si definimos

$$w_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

podemos reescribir la ecuación (5.51) como:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + w_{LC}^2 Q = \frac{V_0}{L} \sin wt, \quad (5.52)$$

cuya solución depende de si la frecuencia  $w$  del voltaje de entrada es igual o diferente a la frecuencia natural  $w_{LC}$ .

**Caso i.** En el caso de que  $w_{LC} \neq w$  la solución está dada por  $Q(t) = Q_H(t) + Q_P(t)$  donde

$$Q_h(t) = A \cos w_{LC}t + B \sin w_{LC}t,$$

es la solución de la ecuación homogénea y

$$Q_p(t) = D \sin wt,$$

es una solución particular. Para obtener el coeficiente  $D$  derivamos dos veces y sustituimos en la ecuación (5.52), así resulta que

$$(-w^2 + w_{LC}^2) D \sin wt = \frac{V_0}{L} \sin wt,$$

de donde se infiere que:

$$D = \frac{V_0}{L(w_{LC}^2 - w^2)} \Rightarrow Q_p(t) = \frac{V_0}{L(w_{LC}^2 - w^2)} \sin wt.$$

Finalmente,

$$Q(t) = A \cos w_{LC}t + B \sin w_{LC}t + \frac{V_0}{L(w_{LC}^2 - w^2)} \sin wt.$$

Los coeficientes  $A$  y  $B$  se obtienen al considerar las condiciones iniciales, por ejemplo,  $Q(0) = 0$  &  $I(0) = 0$ . Evaluando la carga al tiempo  $t = 0$  se tiene que  $A = 0$ . Derivando con respecto al tiempo obtenemos la corriente por el circuito:

$$I(t) = B w_{LC} \cos(w_{LC}t) + \frac{V_0 w}{L(w_{LC}^2 - w^2)} \cos(wt),$$

y evaluando en  $t = 0$  tenemos que:

$$0 = B w_{LC} + \frac{V_0 w}{L(w_{LC}^2 - w^2)} \Rightarrow B = -\frac{V_0 w}{L w_{LC} (w_{LC}^2 - w^2)}.$$

La carga y la corriente son entonces

$$Q(t) = -\frac{V_0 w}{L w_{LC} (w_{LC}^2 - w^2)} \sin w_{LC}t + \frac{V_0}{L (w_{LC}^2 - w^2)} \sin wt;$$

$$I(t) = \frac{V_0 w}{L (w_{LC}^2 - w^2)} [\cos wt - \cos w_{LC}t].$$

Observe que la carga y la corriente dependen de la frecuencia del voltaje de entrada y de la frecuencia natural  $w_{LC}$ .

**Caso ii.** El otro caso de interés en un circuito  $LC$  es cuando se tiene  $w_{LC} = w$ . La carga en este caso está dada por

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t),$$

donde

$$Q_h(t) = A \cos w_{LC}t + B \sin w_{LC}t$$

es la solución de la ecuación homogénea y de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados,

$$Q_p(t) = Dt \sin w_{LC}t + Et \cos w_{LC}t$$

es una solución particular. Para obtener los coeficiente  $D$  y  $E$  derivamos dos veces  $Q_p(t)$  y sustituimos en la ecuación (5.52), así resulta

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{L} \sin w_{LC}t &= 2Dw_{LC} \cos w_{LC}t - 2Ew_{LC} \sin w_{LC}t - Dt w_{LC}^2 \sin w_{LC}t - Et w_{LC}^2 \cos w_{LC}t + \\ &+ w_{LC}^2 [Dt \sin w_{LC}t + Et \cos w_{LC}t] = \\ &= 2Dw_{LC} \cos w_{LC}t - 2Ew_{LC} \sin w_{LC}t, \end{aligned}$$

de donde se infiere que:

$$D = 0 \quad \& \quad E = -\frac{V_0}{2w_{LC}L}.$$

Por lo que se obtiene, finalmente, que

$$Q_p(t) = -\frac{V_0 t}{2w_{LC}L} \cos w_{LC}t.$$

En consecuencia:

$$Q(t) = A \cos w_{LC}t + B \sin w_{LC}t - \frac{V_0 t}{2w_{LC}L} \cos w_{LC}t.$$

Los coeficientes  $A$  y  $B$  se obtienen al considerar las condiciones iniciales, por ejemplo,  $Q(0) = 0$  &  $I(0) = 0$ . Evaluando la carga al tiempo  $t = 0$  se tiene que  $A = 0$ . Derivando con respecto al tiempo obtenemos la corriente sobre el circuito

$$I(t) = Bw_{LC} \cos w_{LC}t - \frac{V_0}{2w_{LC}L} \cos w_{LC}t + \frac{V_0 t}{2L} \sin w_{LC}t.$$

y evaluando en  $t = 0$  tenemos que:

$$0 = Bw_{LC} - \frac{V_0}{2w_{LC}L} \Rightarrow B = \frac{V_0}{2Lw_{LC}^2}.$$

La carga y la corriente son entonces

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{V_0}{2Lw_{LC}^2} \sin w_{LC}t - \frac{V_0 t}{2w_{LC}L} \cos w_{LC}t; \\ I(t) &= \frac{V_0 t}{2L} \sin w_{LC}t. \end{aligned}$$

Estas expresiones muestran que en un circuito  $LC$  puede existir resonancia y que la carga en el capacitor así como la corriente oscilarán con gran amplitud. Desde luego, esto provocará que en algún momento un elemento del circuito se dañe y en consecuencia deje de funcionar el circuito.

**Ejemplo 5.3.10** Considere un circuito  $LC$  de corriente alterna con  $L = 1$  henry,  $C = 0.25$  farads y una fuente de voltaje.  $V = 20 \cos 2t$ . Determine la corriente y la carga al tiempo  $t \geq 0$  si inicialmente ambas son cero.

▼ La ecuación diferencial a resolver, [ver ecuación (5.51)], es:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 4Q = 20 \cos 2t.$$

La solución de la ED homogénea es:

$$Q_h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Como la frecuencia de la fuente de voltaje es igual a la frecuencia natural de las funciones sinusoidales, proponemos entonces la solución particular:

$$Q_p(t) = t [A \cos 2t + B \sin 2t].$$

Derivando dos veces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dQ_p}{dt} &= A \cos 2t + B \sin 2t + t [-2A \sin 2t + 2B \cos 2t]; \\ \frac{d^2 Q_p}{dt^2} &= -4A \sin 2t + 4B \cos 2t + t [-4A \cos 2t - 4B \sin 2t]. \end{aligned}$$

Sustituyendo la función  $Q_p(t)$  y la segunda derivada en la ecuación diferencial se obtiene

$$-4A \sin 2t + 4B \cos 2t = 20 \cos 2t,$$

de donde se deduce que:

$$A = 0 \quad \& \quad B = 5.$$

Finalmente, la solución particular y la solución general son

$$\begin{aligned} Q_p(t) &= 5t \sin 2t; \\ Q(t) &= c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + 5t \sin 2t. \end{aligned}$$

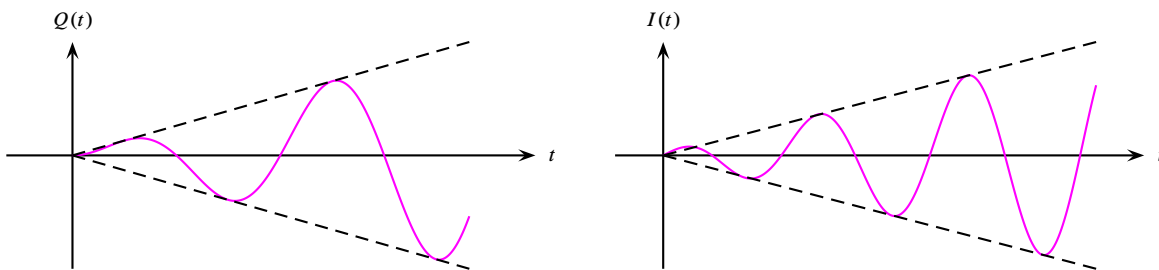
La corriente se obtiene derivando la expresión anterior, ésta es:

$$I(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + 5 \sin 2t + 10t \cos 2t.$$

Considerando las condiciones iniciales se obtiene que  $c_1 = c_2 = 0$ . Entonces la carga y la corriente están dadas por

$$\begin{aligned} Q(t) &= 5t \sin 2t; \\ I(t) &= 5 \sin 2t + 10t \cos 2t. \end{aligned}$$

Ambas funciones se grafican a continuación:

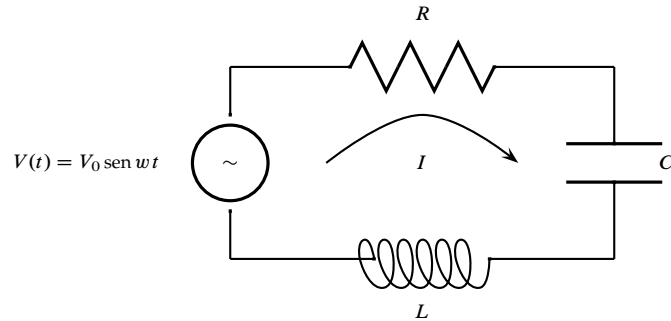


Observe que la carga sobre el capacitor crece y decrece con amplitud cada vez más grande, por esta razón en algún momento el circuito dejará de funcionar.

□

**Ejercicios 5.3.6** Circuito LC de corriente alterna. *Soluciones en la página: 476*

1. Se conecta en serie un capacitor de 0.01 farads, un inductor de 0.01 henries y una fuente de voltaje que suministra  $V = 10 \cos(10t)$  volts para formar un circuito LC. Determine una expresión para la carga y la corriente en todo tiempo  $t$  posterior suponiendo que inicialmente el capacitor estaba descargado y que no circulaba corriente alguna en el circuito.
2. Un circuito LC se forma conectando un capacitor de 0.4 farads, un inductor de 0.004 henries y una fuente de voltaje que proporciona  $V = 2 \cos(20t)$  volts. Si al inicio el capacitor tenía una carga de 0.01 coulombs y circulaba una corriente de 0.05 amperes encuentre la carga al tiempo  $t$  segundos.
3. Se conecta una fuente de voltaje que provee  $V = 10 \cos(20t)$  volts a un circuito LC formado por un capacitor de 0.5 farads y un inductor de 0.005 henries. Suponiendo que el capacitor se encontraba descargado y no circulaba corriente sobre el circuito encuentre la carga y la corriente sobre el circuito.
4. Un circuito LC está formado por una fuente de voltaje que suministra  $V = 2 \cos(50t)$  volts, un capacitor de 0.2 farads y un inductor de 0.002 henries. Determine la carga y la corriente sobre el circuito suponiendo que al inicio el capacitor tenía una carga de 4 coulombs y circulaba una corriente de 50 amperes.
5. Se aplica un voltaje de  $V = 10 \cos(100t)$  durante  $\pi/200$  segundos a un circuito LC formado por un capacitor de 0.1 farads y un inductor de 0.001 henries e inmediatamente después se suspende. Determine la carga y la corriente sobre el circuito en todo tiempo  $t$  suponiendo que originalmente el capacitor se encontraba descargado y no circulaba corriente sobre el circuito.

**5.3.7 Circuito RLC de corriente alterna**

El último circuito que estudiaremos es el circuito  $RLC$  de corriente alterna, ver figura anterior. En este caso la ecuación que modela la carga en el circuito es exactamente la ecuación (5.43), con  $V(t) = V_0 \sen(wt)$ . La ecuación que modela la carga es:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \sen wt. \quad (5.53)$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación de vibraciones amortiguadas forzadas que estudiamos en la sección previa. Nuevamente existen diferentes posibilidades de la solución dependiendo del valor de los coeficientes  $R$ ,  $L$  y  $C$  que aparecen en la ecuación.

**Ejemplo 5.3.11** Un circuito  $RLC$  de corriente alterna está formado por los siguientes elementos: una resistencia de 4 ohms, un capacitor de 4 milifarads, un inductor de 25 milihenries y un fuente de voltaje  $V = 110 \cos 60t$ . Determinar la carga y la corriente en todo tiempo si inicialmente la carga sobre el capacitor es cero y no fluye corriente por el circuito.



▼ La ecuación diferencial asociada al circuito  $RLC$  en serie de este ejemplo es

$$\begin{aligned} V &= L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0.025 \frac{dI}{dt} + 4I + 250Q = 110 \cos 60t \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 160 \frac{dQ}{dt} + 10^4 Q &= 4400 \cos 60t, \end{aligned} \quad (5.54)$$

con las condiciones iniciales  $Q(0) = 0$  coulombs &  $I(0) = 0$  amperes. Esta ecuación se corresponde con un oscilador amortiguado y forzado. La ecuación auxiliar es:

$$r^2 + 160r + 10^4 = 0.$$

Cuyas raíces son  $r_{1,2} = -80 \pm 60i$ . Como las raíces son complejas, la solución a la ecuación homogénea es de la forma

$$Q_h(t) = c_1 e^{-80t} \cos 60t + c_2 e^{-80t} \sin 60t.$$

Por otra parte, como la frecuencia de la fuente de voltaje no es igual a ninguna de la raíces de la ecuación auxiliar, la solución particular tiene la forma

$$Q_p(t) = A \cos 60t + B \sin 60t.$$

Derivando una y dos veces con respecto al tiempo y después sustituyendo en la ecuación diferencial (??)A59 obtenemos que

$$\begin{aligned} &-3600A \cos 60t - 3600B \sin 60t + \\ &+ 160(60B \cos 60t - 60A \sin 60t) + \\ &+ 10^4(A \cos 60t + B \sin 60t) = 4400 \cos 60t \end{aligned}$$

Simplificando resulta

$$3200[(2A + 3B) \cos 60t + (2B - 3A) \sin 60t] = 4400 \cos 60t.$$

De aquí se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3200(2A + 3B) &= 4400; \\ 2B - 3A &= 0. \end{aligned}$$

Cuya solución es  $A = \frac{11}{52}$ ;  $B = \frac{33}{104}$ . Finalmente, la solución particular es

$$Q_p(t) = \frac{11}{52} \cos 60t + \frac{33}{104} \sin 60t.$$

La carga está dada entonces por

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_h(t) = \frac{11}{52} \cos 60t + \frac{33}{104} \sin 60t + c_1 e^{-80t} \cos 60t + c_2 e^{-80t} \sin 60t.$$

Derivando se obtiene la corriente en el tiempo

$$I(t) = e^{-80t} \cos 60t (-80c_1 + 60c_2) - e^{-80t} \sin 60t (80c_2 + 60c_1) + \frac{495}{26} \cos 60t - \frac{165}{13} \sin 60t.$$

En el tiempo  $t = 0$ , las condiciones iniciales implican que:

$$\begin{aligned} 0 &= Q(0) = \frac{11}{52} + c_1; \\ 0 &= I(0) = -80c_1 + 60c_2 + \frac{495}{26}. \end{aligned}$$

Del sistema anterior, la solución es  $c_1 = -\frac{11}{52}$ ;  $c_2 = -\frac{187}{312}$ . Finalmente, la carga y la corriente son, para tiempos  $t \geq 0$ ,

$$Q(t) = \frac{11}{52} \cos 60t + \frac{33}{104} \sin 60t - \frac{11}{52} e^{-80t} \cos 60t - \frac{187}{312} e^{-80t} \sin 60t;$$

$$I(t) = -\frac{495}{26} e^{-80t} \cos 60t + \frac{2365}{39} e^{-80t} \sin 60t + \frac{495}{26} \cos 60t - \frac{165}{13} \sin 60t.$$

Observe nuevamente que tenemos términos transitorios que desaparecen en el tiempo. La carga y la corriente que permanecen tienen la misma frecuencia que la fuente de voltaje y sólo se encuentran desfasadas.

□

### Ejercicios 5.3.7 Circuito RLC de corriente alterna. Soluciones en la página: 476

1. Un circuito RLC está formado por una resistencia de  $R = 12 \Omega$ , un capacitancia de  $C = 0.1$  farads y un inductancia de  $L = 2$  henries. Se conecta una fuente de voltaje que suministra  $V = 20 \cos 5t$  volts. Si inicialmente el capacitor está descargado y no circula corriente alguna por el circuito, encuentre una expresión para la carga y la corriente en todo tiempo  $t$  posterior.
2. Se conecta en serie una resistencia  $R = 4 \Omega$ , un capacitor  $C = 1$  F y un inductor  $L = 4$  H, a una fuente de voltaje de corriente alterna  $V = 100 \cos t$  volts. Determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito en el tiempo  $t$  si originalmente el capacitor está descargado y la corriente es de 6 amperes.
3. Se conectan en serie un resistor de  $4 \Omega$ , un capacitor de 0.05 farads, un inductor de 0.2 henries y una fuente de voltaje alterna que suministra  $V = 120 \cos 6t$  volts. Determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito en el tiempo  $t$  si originalmente la carga es de 2 coulombs y no circula corriente.
4. Un circuito RLC con constantes  $L = 0.4$  H,  $R = 3.2 \Omega$  y  $C = 0.1$  F se conecta a una fuente de voltaje que proporciona  $V = 20 \cos 3t$  volts. ¿Cuál será la carga en el capacitor y la corriente por el circuito si al conectar la fuente, el capacitor tiene una carga de 5 coulombs y circula una corriente de 12 amperes?.
5. Se conecta en serie una resistor  $R$ , un capacitor  $C$  y un inductor  $L$  a una fuente de voltaje  $V$ . Determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito en el tiempo  $t$  si originalmente la carga es  $Q_0$  la corriente es  $I_0$ .

### 5.3.8 Relación electromecánica

Como colofón de esta sección comentaremos que existe una relación entre las ecuaciones diferenciales que modelan las vibraciones mecánicas y los circuitos. Esta relación electro-mecánica es de utilidad cuando se requiere modelar el comportamiento de un sistema mecánico debido a que es mucho más sencillo construir un sistema eléctrico equivalente. En la tabla siguiente se presenta la relación entre los diferentes elementos que componen un sistema eléctrico y un sistema mecánico

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$	$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V(t)$
Masa $m$	Inductancia $L$
Constante de amortiguamiento $c$	Resistencia $R$
Constante del resorte $k$	Capacitancia recíproca $1/C$
Posición $x$	Carga $Q$ )
Fuerza $F$	Voltaje $V$



## CAPÍTULO

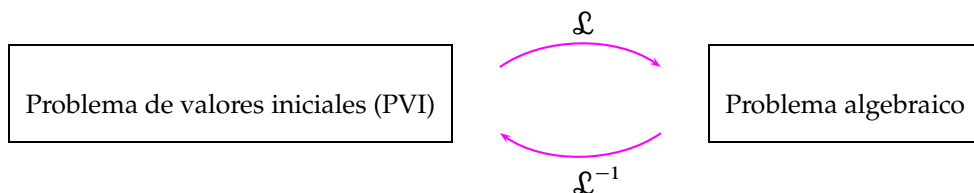
# 6

## Transformada de Laplace

### OBJETIVOS PARTICULARES

### 6.1 Introducción

En este capítulo presentamos un método de solución de ecuaciones diferenciales llamado Transformada de Laplace (denotado con la abreviatura TL o con el símbolo  $\mathcal{L}$ ). La TL es una poderosa herramienta utilizada con mucha frecuencia en física, matemáticas e ingeniería, donde se le usa para el análisis y solución de diversos problemas, como por ejemplo, el cálculo de integrales impropias, análisis de señales y sistemas etcétera. La TL se denomina así en honor al matemático Pierre-Simon Laplace, quien la definió a finales del siglo XVIII, aunque no la utilizó para resolver ecuaciones diferenciales. Casi 100 años después Oliver Heaviside (1850-1925), un ingeniero inglés famoso por sus aportaciones a la teoría electromagnética, creó el cálculo operacional donde la TL juega un papel preponderante. Al aplicar este cálculo operacional a la solución de ED se obtuvieron métodos complementarios a los métodos de solución conocidos en esa época (como los que hemos visto en los capítulos anteriores). A reserva de describir con mayor detalle el proceso posteriormente, podemos adelantar de momento que el método de la TL para resolver ecuaciones diferenciales consiste en traducir un problema de valor inicial a un ámbito diferente, generalmente algebraico, en donde la TL de la solución buscada se puede despejar y la solución del PVI se obtendrá aplicando una transformación inversa a la TL.



Aplicar este método para resolver ED presupone un manejo fluido de la TL y su inversa y el objetivo de este capítulo es lograr que el lector adquiera y desarrolle habilidades para el cálculo de ambos tipos de transformaciones en la solución de ED.

### Motivación y ejemplos

Una pregunta que el lector podría estarse haciendo es: ¿qué necesidad hay de aprender un nuevo método como el de la TL si ya hemos visto otros bastante efectivos para resolver ED? Para tener una respuesta completa habría que estudiar todo el presente capítulo, pero podemos decir por el momento que con la TL se pueden resolver problemas de ED que con los métodos tradicionales sería muy difícil o imposible abordar.

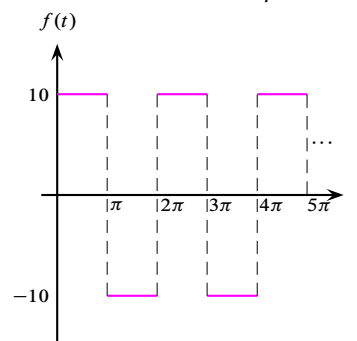
Aunque sobre la TL hay muchas más aplicaciones de las que se presentan en este libro, ofrecemos a continuación un conjunto de problemas para los cuales los métodos vistos hasta ahora no proporcionan un método adecuado de solución. Sólo hemos considerado en capítulos previos algunos casos en que la fuerza externa en

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

es por lo menos continua en el intervalo donde se requiere resolver la ED. Los ejemplos siguientes incluyen funciones con discontinuidades de salto, ecuaciones integro-diferenciales y la delta de Dirac, que no es siquiera una función como se entiende usualmente. Se sigue entonces que hace falta ampliar el alcance de los métodos hasta ahora desarrollados, lo cual conseguiremos con la TL.

### Sistemas oscilatorios con fuerzas de excitación discontinuas

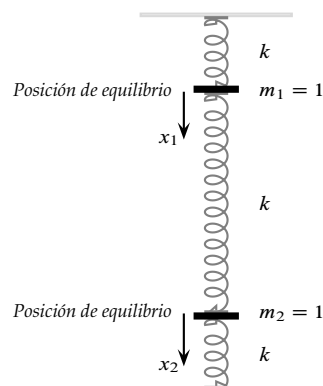
**Ejemplo 6.1.1** Consideremos un sistema masa-resorte con  $m = 2$  kg,  $c = 4$  N·m/s y  $k = 10$  N/m. Supongamos que el sistema está inicialmente en reposo y en equilibrio por lo cual  $x(0) = x'(0) = 0$  y que la masa es impulsada por una fuerza de excitación  $f(t)$  cuya gráfica se muestra en la figura siguiente: una onda cuadrada con amplitud de 10 N y periodo igual a  $2\pi$ . Encontrar la posición de la masa en cualquier instante.



Observamos que la función  $f(t)$  no es continua.

### Sistemas acoplados que llevan a sistemas de ecuaciones diferenciales

**Ejemplo 6.1.2** Dos masas iguales de 1 kg, se encuentran vinculadas mediante tres resortes de masas despreciables y constantes de restitución  $k$ , como se muestra en la figura siguiente. Determinar la posición de cada masa en cualquier instante si  $k = 3$  N/m.



Este modelo involucra dos variables  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ . Es de esperarse que el modelo requiera un sistema de ED.

### Ecuaciones integro-diferenciales

Como hemos discutido en el capítulo anterior, para un circuito en serie RLC, la aplicación del principio de conservación de la energía nos lleva a una de las leyes de Kirchoff:

La suma de las caídas de voltaje a través de los elementos de un circuito eléctrico es igual al voltaje aplicado. En símbolos:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V(t),$$

donde la resistencia  $R$  se mide en ohms ( $\Omega$ ), la inductancia  $L$  en henrys ( $H$ ), la capacitancia  $C$  en farads ( $F$ ), y el voltaje aplicado  $V$  en volts ( $V$ ).

Observemos que tanto  $Q$  como  $I$  son funciones definidas para  $t \geq 0$  con derivadas continuas. Se considera que el capacitor se encuentre sin carga en el tiempo  $t = 0$ .

Por otro lado, por el teorema fundamental del cálculo, es posible plantear que:

$$Q(t) = \int_0^t I(t) dt,$$

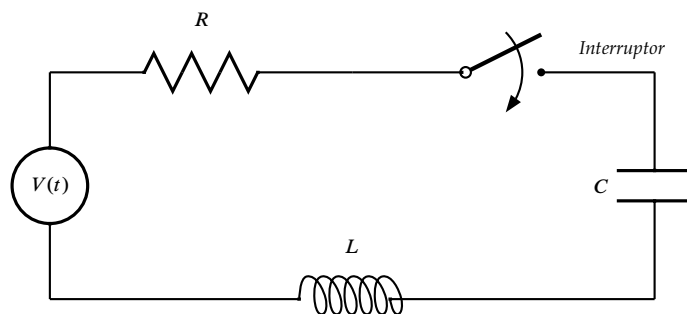
por lo cual podemos reescribir la ecuación del circuito en serie RLC como:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt = V(t).$$

Ecuaciones de este tipo se denominan **ecuaciones integro-diferenciales**. La TL nos permite resolver este tipo de ecuaciones de manera sistemática.

**Ejemplo 6.1.3** Calcular la corriente en un circuito en serie RLC cuyos componente son: una resistor de  $2 \Omega$ , un inductor de  $1 H$ , un capacitor de  $1 F$  y una fuente de voltaje que entrega

$$V(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < 1 \\ 2 - t & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases} \quad \text{volts.}$$



Notemos que la ED que vamos a resolver contiene derivadas e integrales y la fuente de voltaje es una función definida por partes.

### Ecuaciones diferenciales en las que interviene una función impulso

En ingeniería resulta de interés el análisis y la correspondiente solución de sistemas masa-resorte, circuitos eléctricos y cargas mecánicas (tal vez sobre vigas) donde se produce algún impulso o alguna colisión, lo cual ocurre cuando una fuerza relativamente grande actúa en un tiempo considerablemente pequeño.

Casos típicos de estas situaciones son las colisiones entre partículas elementales, el golpe de un bate sobre una pelota de baseball, un peso grande concentrado en un punto de una viga por un intervalo de tiempo

corto, una fuerza electromotriz que cambia repentinamente en un intervalo pequeño de tiempo por efecto, tal vez, de un rayo, entre otros.

En tales situaciones, a menudo ocurre que el principal efecto de la fuerza depende sólo del valor de la integral

$$p = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt,$$

El número  $p$  anterior se llama *impulso de la fuerza*  $f(t)$  en el intervalo  $[t_1, t_2]$  y la fuerza  $f(t)$  se describe por  $f(t) = p\delta(t - t_0)$  donde  $\delta(t - t_0)$  se conoce como **delta de Dirac**.

**Ejemplo 6.1.4** Una masa unida a un resorte se libera desde el reposo a dos metros por debajo de la posición de equilibrio y comienza a vibrar. Después de 5 s, la masa recibe un golpe que suministra un impulso (momento lineal) sobre la masa de 8 N·s dirigido hacia abajo. El modelo que describe la situación queda de la siguiente manera:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 8\delta(t - 5) \quad \text{con } x(0) = 2 \quad \& x'(0) = 0.$$

Hallar la posición de la masa en cualquier instante.

Notemos que el lado derecho de esta ED es esta *función delta* que no es una función como las que hemos considerado hasta ahora: no es diferenciable ni continua.

## 6.2 Definición de la transformada de Laplace

### 6.2.1 Definición y primeras observaciones

En la gran mayoría de los sistemas de interés para la física y la ingeniería es posible (al menos en principio) predecir su comportamiento futuro partiendo de condiciones dadas en un determinado tiempo, que podemos desde luego suponer que es  $t = 0$ . Sólo en muy contados ejemplos es factible predecir el comportamiento pasado del sistema. En lo que sigue nos ocuparemos solamente de la parte de las funciones  $f(t)$  definida para valores  $t \geq 0$ , sin darle importancia a lo que sucede para  $t < 0$ . Con esta aclaración podemos enunciar la siguiente definición de la transformada de Laplace, en ocasiones denominada *unilateral*:

- La **transformada de Laplace** (TL) de una función  $f(t)$  se define mediante:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

para todos los valores  $s \in \mathbb{R}$  para los cuales la integral impropia anterior sea convergente.

- Si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  diremos también que  $f(t)$  es la **transformada inversa de Laplace** de  $F(s)$ , lo que denotaremos como:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

A esta conexión entre  $f(t)$  y  $F(s)$  se le suele representar mediante el esquema:

$$f(t) \longleftrightarrow F(s).$$

Observaciones:

1. Recordemos que una integral impropia como la anterior se define como un límite de integrales sobre intervalos finitos, es decir,

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} f(t) dt,$$

si el límite existe. El resultado de la integral será en general una función que depende de  $s$ . Al calcular una TL no siempre se especifica el rango de valores  $s$  para los cuales la integral existe, no obstante en algunos casos es recomendable determinarlo.



2. En ocasiones a esta transformada se le llama *unilateral*.

Podemos ampliar la definición dada la TL *bilateral*. Ésta es:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

No obstante, el manejo y aplicación de ésta tiene otras complicaciones debidas en parte a problemas de convergencia que caen fuera del alcance e interés de este libro.

### 6.2.2 Cálculo de la TL

Usaremos la definición para calcular la TL de algunas funciones.

#### Ejemplo 6.2.1

Calcular la TL de la función escalón unitario.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

▼ Usando la definición de la TL, se tiene:

$$\begin{aligned} U(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} dt = \\ &= \left(-\frac{1}{s}\right) \lim_{R \rightarrow \infty} (e^{-sR} - 1) = \left(-\frac{1}{s}\right) \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^{sR}} - 1\right). \end{aligned}$$

Observamos ahora que el límite anterior existe sólo si  $s > 0$ . En este caso,  $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-sR} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{sR}} = 0$ , en consecuencia,

$$U(s) = \left(-\frac{1}{s}\right) (-1) = \frac{1}{s}.$$

De esta manera, hemos hallado nuestra primer fórmula de TL:

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s} \text{ con } s > 0. \quad (6.1)$$

□

**Ejemplo 6.2.2** Calcular la TL de la función  $f(t) = e^{at}$ , para  $t \geq 0$  &  $a \in \mathbb{R}$ .

▼ Aquí

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{(a-s)t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^R = \\ &= \left[ \frac{1}{a-s} \right] \lim_{R \rightarrow \infty} [e^{(a-s)R} - 1]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Al estudiar el límite anterior, concluimos su existencia siempre y cuando  $a - s < 0$ . En este caso, tenemos que  $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{(a-s)R} = 0$ , por lo que:

$$F(s) = \frac{1}{a-s} (-1) = \frac{1}{s-a}, \text{ con } s > a.$$

También podemos escribir:

$$e^{at} \longleftrightarrow \frac{1}{s-a}, \text{ con } s > a. \quad (6.3)$$

□

**Ejemplo 6.2.3** Calcular la TL de la función:

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{si } t < 1; \\ 4 & \text{si } 1 \leq t. \end{cases}$$

▼ Partiendo de la definición de la TL, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} e^{2t} dt + \int_1^{\infty} e^{-st} 4 dt = \int_0^1 e^{(2-s)t} dt + 4 \int_1^{\infty} e^{-st} dt = \\ &= \left. \frac{e^{(2-s)t}}{2-s} \right|_0^1 + 4 \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-sR}}{-s} - \frac{e^{-s}}{-s} \right) = \frac{e^{2-s}}{2-s} - \frac{1}{2-s} + \frac{4e^{-s}}{s} = \\ &= \frac{1-e^{2-s}}{s-2} + \frac{4e^{-s}}{s}, \text{ para } s > 0 \text{ y } s \neq 2. \end{aligned}$$

Para  $s = 2$  se tiene que la integral se reduce a:

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_0^{\infty} e^{-2t} f(t) dt = \int_0^1 e^{-2t} e^{2t} dt + \int_1^{\infty} e^{-2t} 4 dt = \\ &= \int_0^1 dt + 4 \int_1^{\infty} e^{-2t} dt = 1 - \lim_{R \rightarrow \infty} \left( 2e^{-2t} \Big|_1^R \right) = 1 + 2e^{-2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \begin{cases} \frac{1-e^{2-s}}{s-2} + \frac{4e^{-s}}{s} & \text{si } s > 0 \text{ y } s \neq 2, \\ 1 + 2e^{-2} & \text{si } s = 2. \end{cases}$$

□

- **Propiedad de linealidad de la TL.**

Una propiedad importante de la TL es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{af(t) \pm bg(t)\} &= \int_0^{\infty} [af(t) \pm bg(t)]e^{-st} dt = \\ &= a \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \pm b \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt = \\ &= a \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \pm b \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt = \\ &= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) \pm bG(s). \end{aligned}$$

Es decir

$$\mathcal{L}\{af(t) \pm bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} \pm \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (6.4)$$

- **Una fórmula recursiva para la TL**

Hay fórmulas de integración que reducen el resultado de una integral a una integral más sencilla, por lo común mediante una integración por partes. Vamos a calcular  $\mathcal{L}\{t^n\}$ :

Usamos en el desarrollo:

$$\begin{aligned}
 u &= t^n, & dv &= e^{-st}, \\
 du &= nt^{n-1}, & v &= -\frac{e^{-st}}{s}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{t^n e^{-st}}{s} \Big|_0^R \right] - \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s} n t^{n-1} dt = \\
 &= -\frac{1}{s} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{R^n}{e^{Rs}} - 0 \right] + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt.
 \end{aligned}$$

Aplicamos  $n$ -veces la regla de L'Hôpital ocurre que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^n}{e^{Rs}} = 0$ . Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt \quad \text{si } s > 0.$$

Registramos lo anterior como una fórmula recursiva:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.5)$$

Aplicando esta fórmula podemos obtener los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^1\} &= \frac{1}{s} \mathcal{L}\{t^0\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{u\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}. \\
 \mathcal{L}\{t^2\} &= \frac{2}{s} \mathcal{L}\{t^1\} = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2 \cdot 1}{s^3}. \\
 \mathcal{L}\{t^3\} &= \frac{3}{s} \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{3}{s} \cdot \frac{2 \cdot 1}{s^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{s^4}. \\
 \mathcal{L}\{t^4\} &= \frac{4}{s} \mathcal{L}\{t^3\} = \frac{4}{s} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{s^4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{s^5}.
 \end{aligned}$$

Generalizando, vemos lo siguiente:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.6)$$

**Ejemplo 6.2.4** Calcular la TL de la funciones:  $f_1(t) = t^3 + 3t$ ,  $f_2(t) = 2t - 5$  &  $f_3(t) = 2e^t + 3e^{2t} - e^{-3t}$ .

▼ Usando las propiedades anteriores:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^3 + 3t\} &= \mathcal{L}\{t^3\} + 3\mathcal{L}\{t\} = \frac{3!}{s^4} + 3\frac{1!}{s^2} = \frac{6}{s^4} + \frac{3}{s^2} = \frac{6 + 3s^2}{s^4}. \\
 \mathcal{L}\{2t - 5\} &= 2\mathcal{L}\{t\} - 5\mathcal{L}\{u(t)\} = 2\frac{1}{s^2} - 5\frac{1}{s} = \frac{2 - 5s}{s^2}. \\
 \mathcal{L}\{2e^t + 3e^{2t} - e^{-3t}\} &= 2\mathcal{L}\{e^t\} + 3\mathcal{L}\{e^{2t}\} - \mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \\
 &= \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s-2} - \frac{1}{s+3} = \frac{2(s-2)(s+3) + 3(s-1)(s+3) - (s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \\
 &= \frac{2(s^2 + s - 6) + 3(s^2 + 2s - 3) - (s^2 - 3s + 2)}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{4s^2 + 11s - 23}{(s-1)(s-2)(s+3)}.
 \end{aligned}$$

De manera similar es posible calcular la TL de cualquier función que sea combinación lineal de potencias enteras de  $t$  y exponenciales  $e^{at}$ , para  $a \in \mathbb{R}$ . □

Hasta el momento, a partir de la definición y primeras propiedades de la TL tenemos una cantidad limitada de funciones cuyas TL podemos calcular. Conforme avancemos en las siguientes secciones se ampliará considerablemente la clase de funciones para las cuales podemos calcular su TL.

### 6.2.3 Más ejemplos de cálculo de la TL

Al estudiar ED lineales homogéneas con coeficientes constantes consideramos conveniente introducir los números complejos de la forma  $z = \alpha + i\beta$  y las correspondientes fórmulas de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad \& \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta.$$

Las propiedades de la integral son válidas para constantes complejas, es decir, que si  $z = \alpha + i\beta$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int z f(t) dt &= \int (\alpha + i\beta) f(t) dt = \alpha \int f(t) dt + i\beta \int f(t) dt = \\ &= (\alpha + i\beta) \int f(t) dt = z \int f(t) dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, la fórmula

$$\mathcal{L}\{e^{zt}\} = \frac{1}{z - a}$$

es válida con  $z$  es complejo. Ya que si  $z = \alpha + i\beta$ , en la deducción de la fórmula, ver ejemplo 6.2.2, requeriríamos considerar:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{(z-s)R} = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{i\beta R} e^{(\alpha-s)R} = 0 \quad \text{cuando } \alpha - s < 0.$$

Así, para que la fórmula anterior sea válida se requiere que su parte real cumpla  $\operatorname{Re}(z) = \alpha < s$ . Utilicemos ahora las consideraciones previas para resolver los ejemplos siguientes.

#### Ejemplo 6.2.5

Calcular la TL de las funciones:

$$f(t) = \cos kt \quad \& \quad f(t) = \operatorname{sen} kt \quad \text{para } k \in \mathbb{R}.$$

▼ Si usamos la observación previa sobre linealidad de la integral con números complejos y la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{ikt}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{ikt} dt = \int_0^\infty e^{-st} (\cos kt + i \operatorname{sen} kt) dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \cos kt dt + i \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} kt dt = \mathcal{L}\{\cos kt\} + i \mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\}. \end{aligned}$$

También, de acuerdo a lo dicho antes, sobre la transformada de una función con exponente complejo,

$$\mathcal{L}\{e^{ikt}\} = \frac{1}{s - ik} = \frac{1}{s - ik} \left( \frac{s + ik}{s + ik} \right) = \frac{s + ik}{s^2 + k^2} = \frac{s}{s^2 + k^2} + i \frac{k}{s^2 + k^2}.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} + i \mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2} + i \frac{k}{s^2 + k^2}.$$

De aquí, al igualar las partes reales e imaginarias respectivamente, determinamos que:

$$\begin{aligned} \cos kt &\longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + k^2} \quad \text{con } s > 0, \\ \operatorname{sen} kt &\longleftrightarrow \frac{k}{s^2 + k^2} \quad \text{con } s > 0. \end{aligned}$$

La validez de estas fórmulas se logra puesto que  $\operatorname{Re}(ik) = 0 < s$ .

□

- Se puede generalizar la fórmula (6.5) para  $\mathcal{L}\{t^n\}$  al caso de exponentes no enteros, introduciendo la **función Gamma**  $\Gamma(z)$ , estudiada por Euler en el siglo XVIII:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx,$$

que se puede definir para números complejos  $z$  con  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , aunque aquí restringimos nuestra atención a  $\Gamma(r)$  con  $r > 0$ . La propiedad que caracteriza a  $\Gamma(r)$  es la de generalizar el factorial de enteros positivos, ya que integrando por partes obtenemos:

$$\Gamma(r+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^r dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -e^{-x} x^r \Big|_0^R \right) - \int_0^{\infty} -e^{-x} r x^{r-1} dx = r \int_0^{\infty} e^{-x} x^{r-1} dx = r \Gamma(r).$$

Hemos usado para resolver por partes la primera integral:

$$\begin{cases} u = x^r, & dv = e^{-x} dx, \\ du = r x^{r-1} dx, & v = -e^{-x}, \end{cases}$$

De este modo, la fórmula recursiva obtenida:

$$\Gamma(r+1) = r \Gamma(r) \quad (6.7)$$

junto con la observación de que  $\Gamma(1) = 1$  nos permiten concluir:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2 \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 3 \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!.$$

y en general

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.8)$$

**Ejemplo 6.2.6** Calcular  $\mathcal{L}\{t^r\}$  con  $r > 0$ .

▼ Aplicando la definición de TL:

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^r dt = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^r \left(\frac{dx}{s}\right) = \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^r dx = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}.$$

Hemos usado para resolver por partes la primera integral:

$$\begin{cases} x = st \Rightarrow & t = \frac{x}{s}, \\ dx = s dt \Rightarrow & dt = \frac{dx}{s}. \end{cases}$$

□

De aquí que para la función  $f(t) = t^r$  con  $r > 0$  se tiene que

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}. \quad (6.9)$$

Puesto que, usando (6.8):

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Vemos que la fórmula (6.9) generaliza la anterior (6.6).

- Vamos a demostrar:  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

▼ Usando la definición de  $\Gamma$ :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{2}}} dx.$$

Haciendo

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du,$$

se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du = \int_0^{\infty} 2e^{-u^2} du.$$

Ahora

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} 2e^{-u^2} du \cdot \int_0^{\infty} 2e^{-v^2} dv = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} 2e^{-(u^2+v^2)} dudv.$$

Usando coordenadas polares:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(0 + \frac{1}{2}\right) d\theta = 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi,$$

de donde

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

□

A partir del resultado anterior, usando (6.7):

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

⋮

**Ejemplo 6.2.7** Calcular  $\mathfrak{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\}$ .

▼ Usamos (6.9):

$$\mathfrak{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{3}{4} \sqrt{\pi}}{\sqrt{s^5}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{s^5}}.$$

□

**Ejemplo 6.2.8** Calcular  $\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}$ .

▼

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \mathfrak{L}\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

□

Este ejemplo muestra que podemos aplicar la fórmula para los exponentes  $r$  negativos que cumplan  $-1 < r < 0$ .

Por supuesto, para exponentes  $r$  que no sean enteros o múltiplos impares de  $\frac{1}{2}$ , el cálculo de  $\Gamma(r+1)$  puede ser muy complicado y requerir de alguna aproximación numérica.

**Ejercicios 6.2.1** Definición. Soluciones en la página 476.

Utilizar la definición para hallar la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

1.  $f(t) = e^{\frac{1}{5}t}$ .
2.  $f(t) = e^{t-2}$ .
3.  $f(t) = 6 - t^2$ .
4.  $f(t) = t - 8 + e^t$ .
5.  $f(t) = \begin{cases} 3t & \text{si } t < 1; \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$
6.  $f(t) = \begin{cases} -t^2 + 3t - 2 & \text{si } 1 \leq t \leq 2; \\ 0 & \text{si } t \notin [1, 2]. \end{cases}$
7.  $f(t) = t \cos at$ ;  $a$  constante.
8.  $\cosh kt = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$  &  $\sinh kt = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$ .

**6.3 Existencia de TL**

Los resultados encontrados en las secciones anteriores nos podrían hacer pensar que bastará cuidar el rango de la variable  $s$  para asegurar la existencia de la TL de una función, sin embargo, para algunas funciones éste no es el caso. Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar esa posibilidad.

**Ejemplo 6.3.1** Mostrar que no existe la TL de la función  $f(t) = e^{t^2}$  para ningún valor de  $s$ .

▼ Por la definición de la TL, se tiene:

$$\mathfrak{L}\{e^{t^2}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt.$$

1. Primero veremos que la integral siguiente diverge:

$$\int_1^\infty e^{v^2} dv.$$

En efecto, puesto que  $e^{v^2} > e^v$  en  $(1, \infty)$ , entonces:

$$\int_1^\infty e^{v^2} dv \geq \int_1^\infty e^v dv = \infty.$$

2. Si  $s > 0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{e^{t^2}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt = \int_0^\infty e^{t^2-st} dt = \int_0^\infty e^{t^2-st+\frac{s^2}{4}} e^{-\frac{s^2}{4}} dt = \\ &= \int_0^\infty e^{\left(t-\frac{s}{2}\right)^2} e^{-\frac{s^2}{4}} dt = \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}} \int_0^\infty e^{\left(t-\frac{s}{2}\right)^2} dt \end{aligned}$$

Si usamos  $v = t - s$  se tiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{e^{t^2}\} &= \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}} \int_{-s}^\infty e^{v^2} dv = \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}} \left[ \int_{-s}^1 e^{v^2} dv + \int_1^\infty e^{v^2} dv \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}} \left[ \int_0^1 e^{v^2} dv + \int_1^\infty e^{v^2} dv \right] \geq \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}} \left[ \int_1^\infty e^{v^2} dv \right] \geq \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}} \left[ \int_1^\infty e^v dv \right] = \infty. \end{aligned}$$

□

El ejemplo anterior muestra que la TL de  $f(t) = e^{t^2}$  no existe por el gran crecimiento que tiene esta función cuando  $t \rightarrow \infty$ , comparado con el crecimiento de  $e^{-st}$  en la misma situación al infinito. La función  $e^{t^2}$  domina a  $e^{-st}$  para cualquier valor de  $s$ , de modo que  $e^{t^2-st}$  será positiva y creciente cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por ello la integral  $\int_1^\infty e^{t^2-st} dt$  diverge. Es importante recalcar que el gran crecimiento de  $e^{t^2}$  cuando  $t \rightarrow \infty$  es la causa de la divergencia y no la función en un intervalo limitado. El siguiente ejemplo muestra que  $e^{t^2}$  puede tener TL si se restringe a un intervalo finito.

**Ejemplo 6.3.2** Mostrar que la función  $f(t) = \begin{cases} ke^{t^2} & \text{si } t < B \\ 10^M & \text{si } t \geq B \end{cases}$  sí tiene TL, donde  $k, M$  &  $B$  son constantes.

▼ Usando la definición de la TL:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^B e^{-st} ke^{t^2} dt + \int_B^\infty e^{-st} (10^M) dt = \\ &= k \int_0^B e^{-st+t^2} dt + (10^M) \lim_{r \rightarrow \infty} \int_B^r e^{-st} dt = \\ &= k \int_0^B e^{t^2-st} dt + 10^M \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-sR}}{-s} + \frac{e^{-sB}}{s} \right) = \\ &= 10^M \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{se^{sR}} + \frac{e^{-sB}}{s} \right) + k \int_0^B e^{t^2-st} e^{\frac{s^2}{4}} e^{-\frac{s^2}{4}} dt = \\ &= \frac{10^M e^{-sB}}{s} + ke^{-\frac{s^2}{4}} \int_0^B e^{\left(t^2-st+\frac{s^2}{4}\right)} dt = \\ &= \frac{10^M e^{-sB}}{s} + ke^{-\frac{s^2}{4}} \int_0^B e^{\left(t-\frac{s}{2}\right)^2} dt. \end{aligned}$$

El valor obtenido así será finito y bien definido, sin importar cuán grandes puedan ser  $M$ ,  $B$  o  $k$ , para cualquier  $s > 0$ . La última integral, si bien no puede calcularse mediante funciones elementales, se puede acotar: si  $m(s) = \max_t \left(t - \frac{s}{2}\right)^2$  para  $0 \leq t \leq B$ , entonces:

$$\int_0^B e^{\left(t-\frac{s}{2}\right)^2} dt \leq \int_0^B e^{m(s)} dt = e^{m(s)} B$$

De este modo, la TL de esta función existe para cualquier  $s > 0$

□

**Ejemplo 6.3.3** Mostrar que la función  $f(t) = \begin{cases} \tan t & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$  no tiene TL.

▼ Hagamos una estimación de la TL. Sea  $m(s) = \min_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} \{e^{-st}\} = \min \left\{1, e^{-s\frac{\pi}{2}}\right\}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st} \tan t dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} m(s) \tan t dt = \\ &= m(s) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t dt = m(s) \lim_{R \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^R \tan t dt = \\ &= m(s) \lim_{R \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\ln(\sec R) - \ln(\sec 0)] = +\infty \end{aligned}$$



En este ejemplo la función  $\tan t$  tiene una asíntota vertical en  $t = \frac{\pi}{2}$ .

□

Los ejemplos anteriores nos llevan al cuestionamiento de las condiciones que podrían garantizar la existencia de la TL de una función. Un resultado en este sentido es el que se enuncia en el siguiente teorema cuya demostración omitimos.

### Teorema 6.1 Condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Laplace.

Sea  $f$  una función que cumple las siguientes condiciones:

1. Es seccionalmente continua sobre el intervalo  $t \leq A$  para cualquier  $A > 0$ , es decir, posee a lo más un número finito de discontinuidades de salto en dicho intervalo.
2. Es de orden exponencial para  $t \geq M$ , es decir,

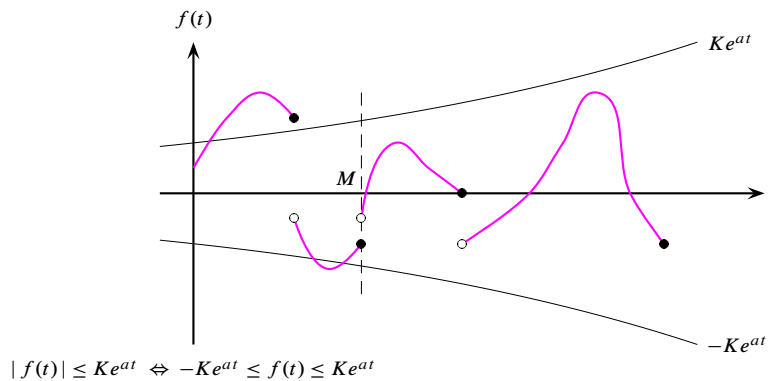
$$|f(t)| \leq Ke^{at} \text{ para } t \geq M \text{ donde } K, a \text{ \& } M \text{ son constantes.} \quad (6.10)$$

Entonces  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  existe para  $s > a$ .

Funciones  $f(t)$  que satisfacen las condiciones del teorema anterior se denominan **funciones seccionalmente continuas de orden exponencial**.

El orden exponencial que se exige a la función sólo se requiere a partir de  $t \geq M$ , puede suceder que en el intervalo  $t < M$  no se cumpla la desigualdad (6.10) para algunas  $t < M$ , sin embargo, esto no es importante pues no afecta la existencia de  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ .

La siguiente gráfica ilustra las dos condiciones anteriores.



### Unicidad de la TL

Hemos escrito anteriormente  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$  para indicar que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  y que  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ . Esta práctica se apoya en la presunción de que la TL de funciones distintas debe dar como resultado funciones también diferentes.

Si dos funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  tienen la misma TL, es decir, cumplen:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

tenemos por la linealidad de la TL que:

$$\mathcal{L}\{f(t) - g(t)\} = 0.$$

Es decir para que las funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  tengan la misma TL se debe cumplir:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} [f(t) - g(t)] dt = 0.$$

Dado que la función exponencial siempre es positiva, esta integral nos indica que  $f(t)$  y  $g(t)$  son *esencialmente iguales*. Un análisis más preciso de este concepto, nos lleva al siguiente resultado:

**Teorema 6.2 Teorema de Lerch sobre unicidad** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones seccionalmente continuas de orden exponencial con

$$f(t) \longleftrightarrow F(s) \quad \& \quad g(t) \longleftrightarrow G(s).$$

Supóngase que existe  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que las  $F(s) = G(s)$  para todo  $s > s_0$ . Entonces,  $f(t) - g(t)$  es una función nula, en el sentido de que

$$\int_0^a [f(t) - g(t)] dt = 0 \quad \text{para todo } a > 0;$$

en particular en los puntos de continuidad de ambas funciones se tiene  $f(t) = g(t)$ .

La conclusión del teorema sobre la igualdad de  $f$  &  $g$  se enuncia a menudo diciendo  $f$  &  $g$  son *iguales para casi todo  $t$* , esto es, para todo  $t$  excepto posiblemente en los puntos de discontinuidad, que son una cantidad finita o numerable. El Teorema de Lerch asegura que dos funciones que tengan la misma TL son *esencialmente iguales*. De esta forma, tiene sentido hablar de la transformada inversa  $\mathcal{L}^{-1}$  de una función, teniendo en cuenta que hay una *unicidad esencial*.

**Ejemplo 6.3.4** La funciones

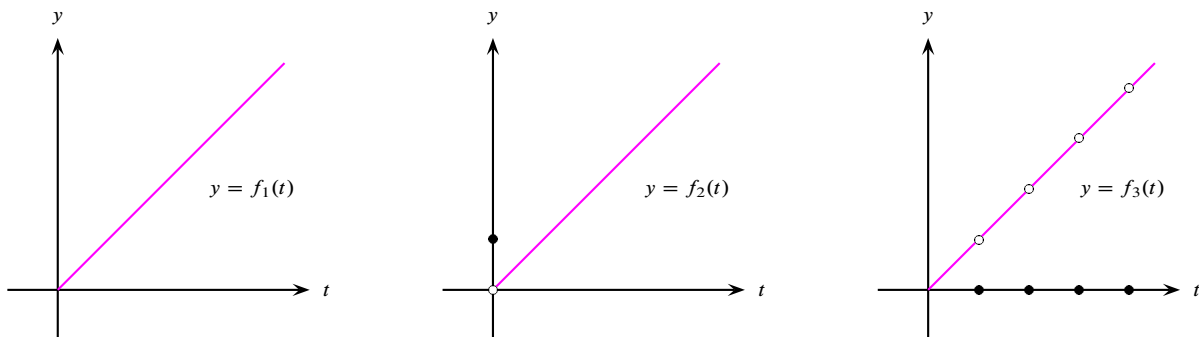
1.  $f_1(t) = t$ .

2.  $f_2(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \neq 0; \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

3.  $f_3(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \text{ no es entero;} \\ 0 & \text{si } t = 0, 1, 2, 3 \dots \end{cases}$

tienen todas la misma TL, a saber:  $F(s) = \frac{1}{s^2}$ .

▼ Las gráficas de estas funciones se presentan a continuación



□

**Ejercicios 6.3.1** Existencia de la TL. Soluciones en la página 477.

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones no tienen TL? Explique su respuesta.

a.  $f(t) = e^{2t} \cos 3t$ .

b.  $g(t) = \Gamma(t)$ .

c.  $h(t) = \cot t$ .

d.  $\phi(t) = \begin{cases} t \csc t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \\ e^{t-1} & \text{si } t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

e.  $\psi(t) = \begin{cases} te & \text{si } t \leq 1; \\ e^{t^2} & \text{si } t > 1. \end{cases}$

f.  $\mu(t) = \lfloor t \rfloor$ . Máximo entero menor o igual a  $t$ .

2. Suponga que dos funciones  $f$  &  $g$  cumplen que  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$  &  $g(t) \longleftrightarrow G(s)$ , donde:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 4} \text{ con } s > 0 \quad \text{y} \quad G(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 4} \text{ con } s > 2$$

¿Qué se puede concluir acerca de  $f$  &  $g$ ?

## 6.4 Propiedades de la $TL$

Con las propiedades de  $\mathcal{L}$  y las  $TL$  de funciones particulares que hemos visto hasta el momento, nos encontramos en posición de poder calcular la  $TL$  de una buena cantidad de funciones, esta situación, si bien satisfactoria aún no es del todo suficiente para nuestros propósitos de aplicar  $\mathcal{L}$  a la solución de ED. La siguiente tabla contiene la  $TL$  de funciones que hemos visto y algunas otras que veremos en esta sección.

La Transformada de Laplace			
	Función		Transformada
	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$\longleftrightarrow$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Fórmulas básicas			
1	1	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}$
2	$t$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2}$
3	$t^n; \quad n = 1, 2, \dots$	$\longleftrightarrow$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{s}}$
5	$t^r$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$
6	$e^{at}$ con $a > 0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s-a}$
7	$\cos kt$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$

8	$\operatorname{sen} kt$	$\longleftrightarrow$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
9	$\cosh kt$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$
10	$\operatorname{senh} kt$	$\longleftrightarrow$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
11	$t^n e^{at}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
12	$e^{at} \operatorname{sen} bt$	$\longleftrightarrow$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$
13	$e^{at} \cos bt$	$\longleftrightarrow$	$\frac{(s - a)}{(s - a)^2 + b^2}$
14	$u(t - a)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{e^{-as}}{s}$

A continuación enlistamos algunas propiedades adicionales que obtendremos en esta sección:

Propiedades de la TL				
1	Linealidad	$af(t) \pm bg(t)$	$\longleftrightarrow$	$aF(s) \pm G(s)$
2	Cambio de escala	$f(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
3	Primera propiedad de traslación	$e^{at} f(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s - a)$
4	Segunda propiedad de traslación	$u(t - a)f(t - a)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-as} F(s)$
5	Transformada de una derivada	$f'(t)$	$\longleftrightarrow$	$sF(s) - f(0)$
		$f''(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
		$f^{(n)}(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
6	Derivada de una transformada	$tf(t)$	$\longleftrightarrow$	$-F'(s)$
7	Transformada de una integral	$\int_0^t f(u)du$	$\longleftrightarrow$	$\frac{F(s)}{s}$

8	Integral de una transformada	$\frac{f(t)}{t}$	$\longleftrightarrow$	$\int_s^\infty F(u)du$
---	------------------------------	------------------	-----------------------	------------------------

De aquí en adelante, usaremos indistintamente la notación:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad \text{o bien} \quad f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

Conservaremos también la relación entre minúsculas y mayúsculas para relacionar a la transformada de una función con su transformada inversa. Asimismo, en cada una de las funciones involucradas en las propiedades supondremos que se satisfacen las condiciones de suficiencia para la existencia de la TL.

### 6.4.1 Cambio de escala

$$\mathcal{L}\{f(at)\} \longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \text{ con } a > 0 \quad (6.11)$$

▼ Si  $a > 0$ :

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt = \int_0^\infty e^{-s\frac{u}{a}} f(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Hemos usado:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = at \Rightarrow t = \frac{u}{a}, \\ du = a dt \Rightarrow dt = \frac{du}{a}. \end{array} \right.$$

□

### 6.4.2 Primera propiedad de traslación

Para cualquier  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} [e^{at} f(t)] dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a)$$

es decir,

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a). \quad (6.12)$$

Entonces, la TL de  $e^{at} f(t)$  es la misma que la de  $f(t)$ , con un corrimiento hacia  $a$ . Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{e^{3t} t^2\} = \frac{2}{s^3} \Big|_{s \rightarrow s-3} = \frac{2}{(s-3)^3}.$$

El símbolo  $\Big|_{s \rightarrow s-a}$  se usa sólo para indicar que hay que reemplazar la variable  $s$  en todas sus ocurrencias por  $s-a$ . Con este resultado obtenemos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at} t^n\} &= \frac{n!}{s^{n+1}} \Big|_{s \rightarrow s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}. \\ \mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} &= \frac{s}{s^2 + b^2} \Big|_{s \rightarrow s-a} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}. \\ \mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} &= \frac{b}{s^2 + b^2} \Big|_{s \rightarrow s-a} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.4.1** Obtener:  $\mathcal{L}\{e^{-3t} \cos t\}$  &  $\mathcal{L}\{e^{-3t} \sin t\}$ .



$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-3t} \cos t\} &= \frac{s}{s^2 + 1} \Big|_{s \rightarrow s+3} = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 1}. \\ \mathcal{L}\{e^{-3t} \sin t\} &= \frac{1}{s^2 + 1} \Big|_{s \rightarrow s+3} = \frac{1}{(s+3)^2 + 1}.\end{aligned}$$



**Ejemplo 6.4.2** Calcular:  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + s - 2}\right\}$ .

▼ Primero completamos cuadrados en el denominador:

$$\frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}.$$

Luego consideramos solamente a  $\frac{1}{s^2 - \frac{9}{4}}$ . De acuerdo con la tabla, la fórmula (10) nos da:

$$\frac{2}{3} \sinh \frac{3}{2}t \longleftrightarrow \frac{2}{3} \left( \frac{\frac{3}{2}}{s^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \right) = \frac{1}{s^2 - \frac{9}{4}}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \sinh \frac{3}{2}t &\longleftrightarrow \frac{2}{3} \left( \frac{\frac{3}{2}}{s^2 - \frac{9}{4}} \right) \\ \downarrow e^{-\frac{t}{2}} &\quad \downarrow s \rightarrow s + \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{2}} \sinh \frac{3}{2}t &\longleftrightarrow \frac{2}{3} \left( \frac{\frac{3}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} \right) = \frac{1}{s^2 + s - 2}\end{aligned}$$

Así concluimos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + s - 2}\right\} = \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{2}} \sinh \frac{3t}{2}.$$



**Ejemplo 6.4.3** Hallar:  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 6s + 10}\right\}$ .

▼ Completamos cuadrados en el denominador:  $\frac{s}{s^2 + 6s + 10} = \frac{s}{(s+3)^2 + 1}$ . Sabemos que:

$$\cos t \longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{ccc}
 \cos t & \longleftrightarrow & \frac{s}{s^2 + 1} \\
 \downarrow e^{-3t} & & \downarrow s \rightarrow s + 3 \\
 e^{-3t} \cos t & \longleftrightarrow & \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 1}
 \end{array}$$

Nos ha resultado  $\frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 1}$  y no  $\frac{s}{(s + 3)^2 + 1}$ . Arreglamos esta diferencia de la siguiente manera:

$$\frac{s}{(s + 3)^2 + 1} = \frac{(s + 3) - 3}{(s + 3)^2 + 1} = \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 1} - \frac{3}{(s + 3)^2 + 1}.$$

Incorporamos esta idea para hallar:

$$\begin{array}{ccc}
 \cos t - 3 \operatorname{sen} t & \longleftrightarrow & \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1} \\
 \downarrow e^{-3t} & & \downarrow s \rightarrow s + 3 \\
 (\cos t - 3 \operatorname{sen} t)e^{-3t} & \longleftrightarrow & \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 1} - \frac{3}{(s + 3)^2 + 1} = \frac{s}{(s + 3)^2 + 1}
 \end{array}$$

En consecuencia:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s + 3)^2 + 1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 6s + 10}\right\} = e^{-3t}(\cos t - 3 \operatorname{sen} t).$$

□

**Ejercicios 6.4.2** Primera propiedad de traslación. *Soluciones en la página 477.*

En cada uno de los ejercicios, calcular  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  o bien  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ :

1.  $f(t) = 3 \operatorname{sen} 4t - 2 \cos 5t$ .
2.  $f(t) = t^3 - 4t^2 + 5$ .
3.  $f(t) = e^{-4t}(t^2 + 1)^2$ .
4.  $f(t) = \operatorname{sen} \alpha t \cos \beta t$ .
5.  $f(t) = \operatorname{sen}^2 at$ .
6.  $F(s) = \frac{5}{s^2 + 4} + \frac{20s}{s^2 + 9}$ .
7.  $F(s) = \frac{2}{(s + 2)^4} + \frac{3}{s^2 + 16} + \frac{5(s + 1)}{s^2 + 2s + 5}$ .
8.  $F(s) = \frac{7}{s^2 + 10s + 41}$ .
9.  $F(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 5}$ .
10.  $F(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 10}$ .
11.  $F(s) = \frac{3s + 1}{s^2 - 4s + 20}$ .

### 6.4.3 Segunda propiedad de traslación

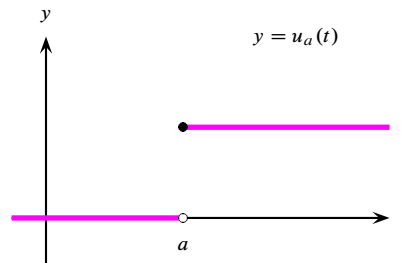
Esta propiedad permitirá resolver ecuaciones diferenciales donde aparezcan funciones discontinuas. Para entenderla es conveniente introducir una función con la que está estrechamente relacionada, la función *escalón unitario de Heaviside*, que es una modificación de  $u(t)$ , ya considerada antes:

**Función escalón unitario de Heaviside.**

Esta función se define para  $a > 0$  como:

$$u_a(t) = u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a; \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases} \quad (6.13)$$

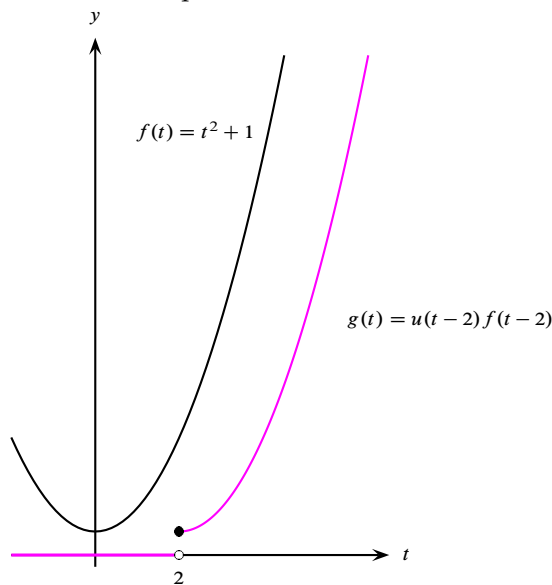
Cuya gráfica es:



Es decir, dado un  $a > 0$  la función asigna el valor 0 si  $t$  se encuentra a la izquierda de  $a$  y el valor 1 si  $t$  se encuentra a la derecha de  $a$ . El efecto que tiene esta función sobre otras puede apreciarse en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.4.4** Sea la función  $f(t) = t^2 + 1$ . Comparar su gráfica con la gráfica de  $g(t) = u(t - 2)f(t - 2)$ .

▼ Para  $t < 2$  se tiene  $g(t) = 0$  y para  $t \geq 2$  tenemos  $g(t) = f(t - 2)$  que representa un corrimiento de 2 unidades de la gráfica de  $f$  hacia la derecha. Al emplear estas consideraciones obtenemos:



□

En general, el efecto geométrico que tiene la multiplicación  $u(t - a)f(t - a)$  sobre la gráfica de una función  $f$  es *correrla*  $a$  unidades a la derecha, proyectando entonces al eje  $t$  aquella parte de la gráfica que se encuentre a la izquierda de  $a$ .



- Establecemos la segunda propiedad de traslación.

Para  $a > 0$ , si  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$  entonces  $u(t-a)f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s)$ .

▼ En efecto:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-a) f(t-a) dt = \\
 &= \int_0^a e^{-st} \underbrace{u(t-a)}_{=0} f(t-a) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} \underbrace{u(t-a)}_{=1} f(t-a) dt = \\
 &= \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-s(x+a)} f(x)}_{x=t-a} dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-sa} f(x) dx = \\
 &= e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = e^{-as} F(s).
 \end{aligned}$$

□

Note que en particular, si  $f(t) = 1$  se deduce que  $u(t-a) \longleftrightarrow \frac{e^{-as}}{s}$ .

**Ejemplo 6.4.5** Calcular la TL de la función  $h(t)$  que está definida por:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi; \\ 0 & \text{si } t \notin [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

▼ El cálculo de la TL se puede hacer mediante la definición, pero presentamos otra posibilidad que nos puede ayudar en situaciones más complicadas. La idea que presentaremos consiste en escribir a la función  $h$  mediante una combinación lineal de funciones escalón unitario de Heaviside para las cuales utilizamos los números  $a$  de la definición (6.13) como aquellos valores que aparecen en la propia función seccionada  $h$ , así escribimos  $h$  de la siguiente manera:

$$h(t) = Au(t-\pi) + Bu(t-2\pi)$$

donde  $A$  y  $B$  son factores que encontraremos por el método de coeficientes indeterminados.

1. Si  $\pi \leq t < 2\pi$  entonces  $t-\pi \geq 0$  &  $t-2\pi < 0$ , por lo que  $u(t-\pi) = 1$  &  $u(t-2\pi) = 0$ . Entonces, por definición de  $h(t)$  se tiene que  $h(t) = 1$  y por otra parte

$$h(t) = Au(t-\pi) + Bu(t-2\pi) \Rightarrow 1 = A(1) + B(0) \Rightarrow A = 1.$$

2. Si  $t \geq 2\pi$  entonces  $t-\pi > 0$  &  $t-2\pi \geq 0$ , por lo que  $u(t-\pi) = 1$  &  $u(t-2\pi) = 1$ . Entonces, por definición de  $h(t)$  se tiene que  $h(t) = 0$  y por otra parte

$$h(t) = Au(t-\pi) + Bu(t-2\pi) \Rightarrow 0 = A(1) + B(1) \Rightarrow B = -A = -1.$$

De esta manera  $h(t) = u(t-\pi) - u(t-2\pi)$ . Por lo tanto, a partir de la propiedad de linealidad y de la segunda propiedad de traslación, hallamos:

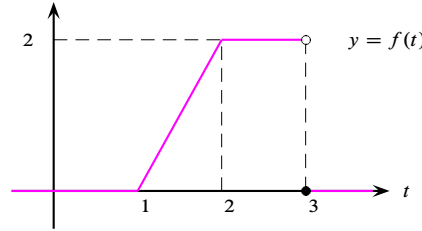
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{h(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t-\pi)\} - \mathcal{L}\{u(t-2\pi)\} = \\
 &= \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s} = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}.
 \end{aligned}$$

□

- En general, si  $f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } a \leq t \leq b; \\ 0 & \text{si } t \notin [a, b] \end{cases}$  entonces  $f(t)$  se puede expresar en términos de  $u(t)$  como

$$f(t) = g(t)u(t-a) - g(t)u(t-b). \quad (6.14)$$

**Ejemplo 6.4.6** Calcular la TL de la función  $f$  cuya gráfica se muestra en la siguiente figura:



▼ La definición analítica de la función  $f$  es:

$$f(t) = \begin{cases} 2t-2 & \text{si } 1 \leq t < 2; \\ 2 & \text{si } 2 \leq t < 3; \\ 0 & \text{si } t \notin [1, 3) \end{cases}$$

que se puede escribir como:

$$f(t) = \begin{cases} 2t-2 & \text{si } 1 \leq t < 2; \\ 0 & \text{si } t \notin [1, 2). \end{cases} + \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \leq t \leq 3; \\ 0 & \text{si } t \notin [2, 3]. \end{cases}$$

Si ahora aplicamos en resultado (6.14) se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= (2t-2)u(t-1) - (2t-2)u(t-2) + 2u(t-2) - 2u(t-3) = \\ &= 2(t-1)u(t-1) - 2(t-2)u(t-2) - 2u(t-3). \end{aligned}$$

De aquí resulta (por la linealidad de la TL) que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\} - 2\mathcal{L}\{(t-2)u(t-2)\} - 2\mathcal{L}\{u(t-3)\}.$$

Si ahora aplicamos la segunda propiedad de traslación y las fórmulas  $t \longleftrightarrow \frac{1}{s^2}$  y  $u(t-a) \longleftrightarrow \frac{e^{-as}}{s}$ , obtenemos:

$$F(s) = 2\frac{e^{-s}}{s^2} - 2\frac{e^{-2s}}{s^2} - 2\frac{e^{-3s}}{s}.$$

□

Cuando no ocurre que los argumentos de las funciones  $f(t-a)$  y  $u(t-a)$  son los mismos se debe proceder como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.4.7** Calcular la TL de la función  $f(t) = \sin(t)u(t-\pi)$

▼ Los argumentos de las funciones seno y escalón unitario  $u$  no son los mismos. Debemos hallar el mecanismo adecuado para hacerlos iguales, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(t)u(t-\pi) = \sin[(t-\pi) + \pi]u(t-\pi) \\ &= [\sin(t-\pi)\cos\pi + \sin\pi\cos(t-\pi)]u(t-\pi) = -\sin(t-\pi)u(t-\pi). \end{aligned}$$

Aplicando ahora la segunda propiedad de traslación se obtiene:

$$F(s) = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

□

**Ejemplo 6.4.8** Calcular  $\mathcal{L}\{t^2 u(t-3)\}$ .

▼ En este caso tenemos  $f(t-3)u(t-3) = t^2 u(t-3)$  es decir  $f(t-3) = t^2$ . y es necesario que encontremos  $f(t)$ . Para ello basta con hacer el cambio de variable  $t-3 = x$ ;  $t = x+3$ . Así:

$$f(x) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9,$$

es decir  $f(t) = t^2 + 6t + 9$ . Por lo cual:

$$\mathcal{L}\{f(t-3)u(t-3)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}e^{-3s} = \mathcal{L}\{t^2 + 6t + 9\}e^{-3s} = \left[\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right]e^{-3s}.$$

□

**Ejercicios 6.4.3** Segunda propiedad de traslación. *Soluciones en la página 477.*

En los siguientes ejercicios, calcular  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ :

1.  $f(t) = t^2 u(t-2)$ .

2.  $f(t) = \cos(t)u(t-1)$ .

3.  $f(t) = \begin{cases} -t^2 + 3t - 2 & \text{si } 1 \leq t \leq 2; \\ 0 & \text{si } t \notin [1, 2]. \end{cases}$

4.  $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < 2; \\ 1 & \text{si } 2 \leq t < 3; \\ e^{-2t} & \text{si } 3 \leq t. \end{cases}$

5.  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1; \\ t-1 & \text{si } 1 \leq t < 2; \\ 3-t & \text{si } 2 \leq t < 3; \\ 0 & \text{si } 3 \leq t. \end{cases}$

6.  $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } \pi; \\ 0 & \text{si } \pi < t. \end{cases}$

7.  $f(t) = \begin{cases} b & \text{si } a \leq t \leq 2a; \\ -b & \text{si } 2a \leq t \leq 3a; \\ 0 & \text{si } t < a \text{ y } t > 3a. \end{cases}$

$a, b$  constantes positivas.

8. Para  $a$  y  $t_0$  constantes,  $f(t) = ka$

si  $(k-1)t_0 \leq t < kt_0$  para  $k = 1, 2, 3 \dots$

### 6.4.4 Transformada de una derivada

La siguiente propiedad nos permite aplicar la TL a la solución de una ED.

Si  $f(t)$  es una función con derivada  $f'(t)$ , entonces

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) \Big|_0^R - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st} dt) =$$

Hemos usado:

$$\begin{aligned} u = e^{-st} &\Rightarrow du = -se^{-st} dt; \\ dv = f'(t) &\Rightarrow v = f(t). \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-sR} f(R)}_{\rightarrow 0} - \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st} f(t) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0^+).$$

en donde el primer límite ( $R \rightarrow \infty$ ) se anula, y hemos denotado al segundo ( $t \rightarrow 0^+$ ) por  $f(0^+)$ , ya que puede ser que  $f$  no esté definida en  $t = 0$ , en cuyo caso se debe calcular su límite cuando  $t \rightarrow 0$  por la derecha; siempre que no haya confusión escribiremos  $f(0)$  en lugar de  $f(0^+)$ .

Es decir

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \quad (6.15)$$

Utilizando la fórmula (6.15) iteradamente, vemos que si  $f$  y sus derivadas tienen TL, se puede calcular:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{df'(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s[sF(s) - f(0)] - f'(0) = \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Es decir:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(3)}(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(f''(t))\right\} = s\mathcal{L}\{f''(t)\} - f''(0) = s[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)] - f''(0) = \\ &= s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).\end{aligned}$$

Es decir:

$$\mathcal{L}\{f^{(3)}(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \quad (6.17)$$

Siguiendo este razonamiento, obtenemos en general:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (6.18)$$

**Ejemplo 6.4.9** Calcular  $\mathcal{L}\{\cos t\}$  usando la fórmula de la transformada de una derivada.

▼ Como es bien sabido  $\frac{d}{dt} \sin t = \cos t$ , entonces:

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \sin t\right\} = s\mathcal{L}\{\sin t\} - \sin 0 = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

□

**Ejemplo 6.4.10** Calcular  $\mathcal{L}\{t^n\}$  usando la fórmula de la transformada de una derivada.

▼ Como  $\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$ , por la fórmula de la transformación de una derivada, tenemos:

$$\mathcal{L}\{nt^{n-1}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}t^n\right\} = s\mathcal{L}\{t^n\} - t^n \Big|_{t=0}.$$

es decir

$$n\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = s\mathcal{L}\{t^n\} \Rightarrow \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}.$$

La misma fórmula recursiva (6.5) que obtuvimos en la página 357.

□

**Ejemplo 6.4.11** Determinar la TL de la función  $y(t)$ , solución del PVI:

$$y'' + ay' + by = f(t) \text{ con } y(0) = 0 \text{ \& } y'(0) = 0.$$

▼ Tenemos:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

y también

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s).$$

De esta manera, al aplicar TL en ambos lados de la ED resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'' + ay' + by\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{y''\} + a\mathcal{L}\{y'\} + b\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow \\ \Rightarrow s^2Y(s) + asY(s) + bY(s) &= F(s) \Rightarrow (s^2 + as + b)Y(s) = F(s).\end{aligned}$$

de donde

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b}.$$

Como se puede apreciar, mediante la aplicación de la TL y algo de álgebra tenemos casi resuelto el PVI. Salvo por un paso: hay que aplicar la transformación inversa para obtener así la solución

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2 + as + b}\right\}.$$

En casos particulares las constantes  $a, b$  serán conocidas, la función  $f(t)$  estará dada (y aún puede ser 0), lo mismo que las condiciones iniciales, que no siempre serán ambas 0. □

**Ejemplo 6.4.12** Resolver el PVI:  $y'' + 2y' + 4y = 0$  con  $y(0) = 1$  &  $y'(0) = -1$ .

▼ Aplicando (6.15) y (6.16) resulta

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) = sY(s) - 1 \quad \& \quad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2Y(s) - s + 2.$$

de donde

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 2y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \& y'(0) = -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} (s^2Y - s + 2) + 2(sY - 1) + 4Y = 0 \Rightarrow (s^2 + 2s + 4)Y - s = 0.$$

Note que la TL transforma un PVI en una ecuación algebraica, donde  $Y$  es una función de  $s$ , aún desconocida. Despejamos  $Y$  de la ecuación previa, se tiene:

$$(s^2 + 2s + 4)Y = s \Rightarrow Y(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 4} = \frac{s}{(s+1)^2 + 3}.$$

Para la última igualdad hemos usado  $s^2 + 2s + 4 = s^2 + 2s + 1 + 3 = (s+1)^2 + 3$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2 + 3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1) - 1}{(s+1)^2 + 3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2 + 3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 3}\right\} = \\ &= e^{-t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 3}\right\} - e^{-t} \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{s^2 + (\sqrt{3})^2}\right\} = \\ &= e^{-t} \cos \sqrt{3}t - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t} \sin \sqrt{3}t.\end{aligned}$$

□

**Ejemplo 6.4.13** Resolver el PVI:  $y'' + 9y = 0$  con  $y(0) = -2$  &  $y'(0) = 3$ .

▼ Tenemos ahora:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y + 2s - 3$$

y la ED después de aplicar la TL queda:

$$\begin{aligned}s^2Y + 2s - 3 + 9Y &= 0 \Rightarrow (s^2 + 9)Y = -2s + 3 \Rightarrow Y(s) = \frac{-2s + 3}{s^2 + 9} \Rightarrow \\ \Rightarrow y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s + 3}{s^2 + 9}\right\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 + 9}\right\} = -2\cos 3t + \sin 3t.\end{aligned}$$

□

Como se puede apreciar en los ejemplos anteriores, la *TL* nos ofrece otro método para encontrar la solución a *ED* lineales, siempre y cuando sea factible el cálculo de la transformada inversa de la función  $Y(s)$  obtenida. Para este último paso se requieren conocer las propiedades de la *TL* y de la transformada inversa para completar el proceso.

**Ejercicios 6.4.4** Transformada de una derivada. Soluciones en la página 477.

Resolver los siguientes PVI:

1.  $\frac{dx}{dt} + x = 0$ , con  $x(0) = 1$ .

4.  $\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} + 5z = 0$ ,  
con  $z(0) = -4$  &  $z'(0) = 3$ .

2.  $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$ , con  $y(0) = 2$  &  $y'(0) = -1$ .

5.  $\frac{d^3x}{dt^3} + x = 0$ ;  $x(0) = 1$ ,  
con  $x'(0) = 3$  &  $x''(0) = 8$ .

3.  $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ ,  
con  $x(0) = 1$  &  $x'(0) = -2$ .

6.  $\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} = 0$ ,  
con  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$  &  $y''(0) = 1$ .

### 6.4.5 Derivada de una transformada

Esta propiedad es útil cuando se requiere calcular transformadas inversas de funciones  $F(s)$  para las cuales se puede obtener su derivada o su integral definida. Haremos uso de esta propiedad para calcular la *TL* de funciones trascendentes.

- La propiedad establece:

$$\text{Si } f(t) \longleftrightarrow F(s), \text{ entonces } t^n f(t) \longleftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(s), \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

▼ Para demostrar esta propiedad notemos que bajo condiciones adecuadas, se satisface el siguiente resultado, llamado con frecuencia *regla de Leibniz*.

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty g(t, s) dt = \int_0^\infty \frac{\partial g(t, s)}{\partial s} dt$$

Bajo este supuesto, tenemos entonces:

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial(e^{-st} f(t))}{\partial s} dt = \int_0^\infty -e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}.$$

Es decir

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (6.19)$$

De manera similar,

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot t f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{d}{ds} \left( -\frac{d}{ds} F(s) \right) = \frac{d^2}{ds^2} F(s).$$

Continuando con el razonamiento podemos concluir en general:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s). \quad (6.20)$$

O de otra forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t). \quad (6.21)$$

□

**Ejemplo 6.4.14** Calcular  $\mathcal{L}\{t \cosh 2t\}$ .

▼ Si escribimos:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cosh 2t\} = \frac{s}{s^2 - 4},$$

Directamente de la propiedad se desprende que:

$$\mathcal{L}\{t \cosh 2t\} = -\frac{d}{ds} F(s) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^2 - 4} \right) = -\frac{s^2 - 4 - s(2s)}{(s^2 - 4)^2} = -\frac{s^2 - 4 - 2s^2}{(s^2 - 4)^2} = \frac{s^2 + 4}{(s^2 - 4)^2}.$$

□

**Ejemplo 6.4.15** Calcular:  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right\}$ .

▼ En primer lugar buscaremos una función  $F(s)$  tal que  $F'(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$ . Tenemos:

$$F(s) = \frac{1}{2} \int (s^2 + 1)^{-2} (2s ds) = -\frac{1}{2(s^2 + 1)},$$

Donde, sin pérdida de generalidad (ver el siguiente desarrollo) podemos tomar la constante de integración como cero. De esta forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds} \left( \frac{-1}{2(s^2 + 1)} \right)\right\} = \left(-\frac{1}{2}\right) (-1)t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \frac{t}{2} \sin t.$$

Observemos la posición del factor  $(-1)$ . Es decir,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right\} = \frac{t \sin t}{2}.$$

□

**Ejemplo 6.4.16** Calcular:  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$ .

▼ Estamos buscando  $f(t)$  tal que  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$ .

Si consideramos que  $F(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$ , al derivar, hallamos:

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{-s^{-2}}{\underbrace{1 + \left(\frac{1}{s}\right)^2}_{(*)}} = -\frac{1}{s^2 + 1}$$

donde hemos multiplicado numerador y denominador en  $(*)$  por  $s^2$ . Si usamos la propiedad 6.19, tenemos:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s) = \frac{1}{1 + s^2} = \mathcal{L}\{\sin t\}.$$

Entonces por el teorema de Lerch:

$$tf(t) = \sin t \Rightarrow f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

□

**Ejemplo 6.4.17** Determinar:  $\mathcal{L}^{-1}\{\ln s\}$ .

▼ Si escribimos  $F(s) = \ln s$ , tenemos:

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \ln s = \frac{1}{s}.$$

Así, por la propiedad de derivación de una transformada:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s) = -\frac{1}{s} = \mathcal{L}\{-1\}, \quad \text{donde } f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

Tenemos por el teorema de Lerch:

$$tf(t) = -1 \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\ln s\} = -\frac{1}{t}.$$

□

**Ejercicios 6.4.5** Derivada de una transformada. *Soluciones en la página 477.*

Calcular  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  o bien  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  según sea el caso.

1.  $f(t) = t \operatorname{sen} at.$

3.  $F(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right).$

2.  $f(t) = t \cos at.$

4.  $f(t) = t^2 \operatorname{senh} t$  &  $f(t) = t^2 \cosh t.$

### 6.4.6 Transformada de una integral

- Esta propiedad establece que:

$$\text{Si } f(t) \longleftrightarrow F(s), \text{ entonces } \int_0^t f(u) du \longleftrightarrow \frac{F(s)}{s}.$$

▼ Si definimos  $g(t) = \int_0^t f(u) du$ , entonces por el teorema fundamental del cálculo:

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(u) du = f(t) \quad \& \quad g(0) = \int_0^0 f(u) du = 0.$$

Por lo tanto:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = sG(s) - g(0).$$

De donde  $F(s) = sG(s)$ , y de aquí:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

□

**Ejemplo 6.4.18** Calcular:  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3 + 4s}\right\}.$

▼ Observamos que:

$$\frac{1}{s^3 + 4s} = \frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{\left(\frac{1}{s^2 + 4}\right)}{s} = \frac{F(s)}{s}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3 + 4s}\right\} = \int_0^t f(u) du,$$



donde:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \quad \& \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

De esta manera:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2} \sin 2u \, du = -\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \cos 2u \Big|_0^t = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t).$$

□

**Ejemplo 6.4.19** Resolver la ecuación integro-diferencial:  $f(t) + \int_0^t f(u) \, du = 1$ .

▼ Aplicamos TL en ambos miembros:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) + \int_0^t f(u) \, du\right\} = \mathcal{L}\{1\} \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \, du\right\} = \mathcal{L}\{1\} \Rightarrow F(s) + \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s},$$

donde  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ . De aquí:

$$sF(s) + F(s) = 1 \Rightarrow F(s)(s + 1) = 1 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\} = e^{-t}.$$

□

**Ejercicios 6.4.6** Transformada de una integral. *Soluciones en la página 478.*

En cada uno de los ejercicios, calcular  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  o bien  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

1.  $f(t) = e^{-3t} \int_0^t \tau \sin 2\tau \, d\tau.$

3.  $F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$

2.  $f(t) = e^{-3t} \int_0^t \frac{\sin 2\tau}{\tau} \, d\tau.$

4.  $F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}.$

### 6.4.7 Integral de una transformada

- Estableceremos ahora la siguiente propiedad:

$$\text{Si } f(t) \longleftrightarrow F(s), \text{ entonces } \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) \, du.$$

▼ Para convencernos de la validez de esta fórmula, notemos que, por una parte para  $t > 0$ :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{t \left(\frac{1}{t}\right) f(t)\right\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} \Rightarrow \frac{d}{ds} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = -F(s) \quad (6.22)$$

Por otra parte, usando el teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{ds} \int_s^\infty F(u) \, du = -\frac{d}{ds} \int_s^s F(u) \, du = -F(s) \quad (6.23)$$

De (6.22) y (6.23) se sigue que como  $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\}$  y  $\int_s^\infty F(u) \, du$  tienen la misma derivada, deben ser iguales, excepto posiblemente por una constante aditiva. Que dicha constante es cero se puede ver tomando el límite cuando  $s \rightarrow \infty$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} \, dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \int_s^\infty F(u) \, du + C \right) \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0.$$

Cabe señalar que una premisa para la validez de este argumento es que la transformada  $F$  debe ser continua para todo  $s$  mayor que algún número real  $a$ .

□

**Ejemplo 6.4.20** Hallar la TL de  $f(t) = \frac{\sen t}{t}$  y a partir del resultado obtenido determinar el valor de la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{\sen t}{t} dt.$$

▼ Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\sen t}{t}\right\} &= \int_s^{\infty} F(u) du = \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan u \Big|_s^R = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (\arctan R - \arctan s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s. \end{aligned}$$

Para determinar la integral impropia relacionamos el resultado anterior con la definición de TL y hallamos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sen t}{t}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\sen t}{t} e^{-st} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan s.$$

Si en el resultado anterior tomamos  $s = 0$ , obtenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sen t}{t} e^{-0t} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan 0,$$

de donde:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sen t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

□

**Ejercicios 6.4.7** Integral de una transformada. *Soluciones en la página 478.*

En cada uno de los ejercicios, calcular  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  o bien  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

1.  $f(t) = \frac{1 - \cos 3t}{t}.$

3.  $f(t) = \frac{\sinh t}{t}.$

2.  $f(t) = \frac{e^{-3t} \sen 2t}{t}.$

4.  $F(s) = \frac{2s}{(s^2 - 1)^2}.$

### 6.4.8 Transformada de una función periódica

Recordemos que una función  $f$  es periódica con periodo  $p > 0$  si satisface:

$$f(t + p) = f(t), \text{ para toda } t.$$

Para el cálculo de la TL de una función de este tipo, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \\ &= \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t) dt + \cdots + \underbrace{\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt + \cdots}_{(*)} \end{aligned}$$

Si ahora, tomamos la integral (\*), y hacemos el cambio de variable  $t = u + np$  (con lo cual  $dt = du$ ), hallamos que:  $t = np \Rightarrow u = 0$  &  $t = (n+1)p \Rightarrow u = p$ . Entonces, por la periodicidad de  $f$ :

$$\begin{aligned} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt &= \int_0^p e^{-s(u+np)} f(u+np) du = \\ &= e^{-nps} \int_0^p e^{-su} f(u) du. \end{aligned}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \\ &= \int_0^p e^{-st} f(t) dt + e^{-ps} \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \dots + e^{-nps} \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \dots = \\ &= (1 + e^{-ps} + \dots + e^{-nps} + \dots) \int_0^p e^{-st} f(t) dt. \end{aligned} \quad (6.24)$$

En el último resultado hemos tomado en cuenta que la variable de integración es *muda*, es decir:

$$\int_0^p e^{-su} f(u) du = \int_0^p e^{-st} f(t) dt.$$

Ahora bien, lo que aparece entre paréntesis en (6.24) es una serie geométrica, con razón  $r = e^{-ps}$ , para la cual se tiene, en caso de convergencia, el siguiente resultado:

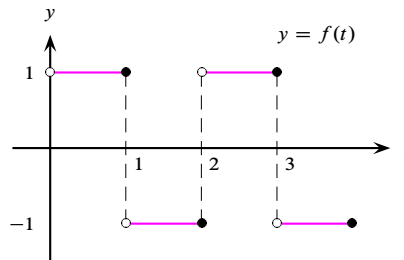
$$1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots = \frac{1}{1-r}, \text{ si } |r| < 1.$$

En nuestro caso, con  $|r| = e^{-ps} = \frac{1}{e^{ps}} < 1$  (para  $s > 0$ ), obtenemos finalmente que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt. \quad (6.25)$$

Observamos que esta fórmula es en cierto sentido la misma que aparece en la definición de TL con dos particularidades: la primera es que sólo se integra a lo largo de un periodo, la segunda es que se introduce el factor  $\frac{1}{1 - e^{-ps}}$ .

**Ejemplo 6.4.21** Calcular la TL de la función  $f$  cuya gráfica se muestra en la siguiente figura.



▼ Primero, observamos que se tiene una función periódica con período  $p = 2$  y que la expresión analítica de esta función en el intervalo  $(0, 2]$  es:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1; \\ -1 & \text{si } 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Luego, de acuerdo con el resultado recién expuesto:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[ \int_0^1 e^{-st} (1) dt + \int_1^2 e^{-st} (-1) dt \right] = \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^1 + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_1^2 \right] = \frac{1}{s(1-e^{-2s})} [(1-e^{-s}) + (e^{-2s} - e^{-s})] = \\ &= \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s(1-e^{-2s})} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s(1+e^{-s})(1-e^{-s})} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}.\end{aligned}$$

Aunque éste es un resultado perfectamente válido, todavía es posible dar una expresión alternativa; sólo debemos recordar que la función tangente hiperbólica se define por:

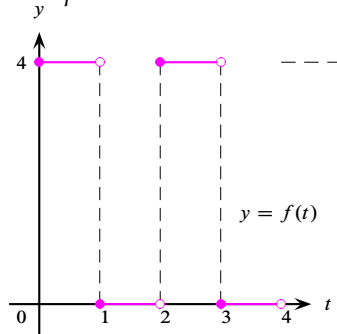
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Si en la última expresión multiplicamos numerador y denominador por  $e^{\frac{s}{2}}$  hallamos finalmente que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \cdot \frac{e^{\frac{s}{2}}}{e^{\frac{s}{2}}} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \frac{e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}}{e^{\frac{s}{2}} + e^{-\frac{s}{2}}} = \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{s}{2}\right).$$

□

**Ejemplo 6.4.22** Un sistema masa–resorte con  $m = 2$  kg y  $k = 8$  N/m se encuentra inicialmente en reposo y en equilibrio. Para  $t \geq 0$ , una fuerza de excitación con periodo  $p = 2$  y cuya gráfica se muestra a continuación impulsa a la masa. Determinar la posición de ésta en cualquier instante.



▼ Sea  $x(t)$  la posición de la masa en cualquier instante, entonces ésta puede determinarse mediante la solución del siguiente PVI:

$$mx'' + kx = f(t) \quad \text{con} \quad x(0) = 0 \text{ \& } x'(0) = 0$$

o bien

$$2x'' + 8x = f(t) \quad \text{con} \quad x(0) = 0 \text{ \& } x'(0) = 0$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \leq t < 1; \\ 0 & \text{si } 1 \leq t < 2; \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t) \text{ para todo } t \geq 0.$$

Notemos que la función de excitación tiene una infinidad de discontinuidades de salto, por lo cual las técnicas de solución de ED estudiadas en capítulos anteriores son poco útiles; requerimos usar TL. Aplicando, entonces, TL en la ED obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{2x''\} + \mathcal{L}\{8x\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2[s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)] + 8X(s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t) dt,\end{aligned}$$

donde  $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ . Ahora, la integral en el miembro derecho queda:

$$\int_0^2 e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} f(t) dt + \int_1^2 e^{-st} f(t) dt = 4 \int_0^1 e^{-st} dt = -\frac{4}{s} e^{-st} \Big|_0^1 = \frac{4(1 - e^{-s})}{s}.$$

Con este cálculo e incorporando las condiciones iniciales  $x(0) = x'(0) = 0$ , hallamos:

$$\begin{aligned} 2s^2 X(s) + 8X(s) &= \frac{4}{1 - e^{-2s}} \left( \frac{1 - e^{-s}}{s} \right) \Rightarrow 2X(s)(s^2 + 4) = \frac{4}{(1 - e^{-s})(1 + e^{-s})} \left( \frac{1 - e^{-s}}{s} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2X(s)(s^2 + 4) &= \frac{4}{s(1 + e^{-s})}. \end{aligned}$$

De donde

$$X(s) = \frac{2}{s(s^2 + 4)} \cdot \frac{1}{1 + e^{-s}}.$$

Para el cálculo de  $x(t)$  necesitamos hallar  $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ , por lo cual procedemos en dos etapas:

1. Determinar  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 4)}\right\}$ .
2. Expresamos  $\frac{1}{1 + e^{-s}}$  como una suma infinita de términos y aplicamos la segunda propiedad de traslación.

De esta manera, calculamos en primer lugar,  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 4)}\right\}$ . Por la propiedad de la transformada de una integral, se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 4)}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} dt = \int_0^t \sin 2t dt = -\frac{1}{2} \cos 2t \Big|_0^t = -\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t).$$

Ahora, expresemos  $\frac{1}{1 + e^{-s}}$  como una suma infinita de términos. Para ello, recordemos que

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots = \frac{1}{1 - r} \text{ con } |r| < 1.$$

Si en este resultado consideramos  $r = -e^{-s}$ , entonces para  $s > 0$  se tiene  $|r| = e^{-s} < 1$ , por lo tanto:

$$\frac{1}{1 + e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \dots$$

De esta manera

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 4)} \cdot \frac{1}{1 + e^{-s}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 4)}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \dots)\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 4)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \cdot \frac{2}{s(s^2 + 4)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s} \cdot \frac{2}{s(s^2 + 4)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s} \cdot \frac{2}{s(s^2 + 4)}\right\} + \dots \end{aligned}$$

Resulta que:

$$x(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2t] - \frac{1}{2}u(t-1)[1 - \cos 2(t-1)] + \frac{1}{2}u(t-2)[1 - \cos 2(t-2)] - \frac{1}{2}u(t-3)[1 - \cos 2(t-3)] + \dots$$

o bien

$$x(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2t] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u(t-n)[1 - \cos 2(t-n)] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t-n)[1 - \cos 2(t-n)].$$

□

## 6.5 Aplicación de la TL para resolver ED

En esta sección presentamos con detalle la manera en que utilizaremos la TL para obtener la solución de un PVI. Con este método podremos no sólo resolver PVI con ED lineales como las consideradas en los capítulos 4 y 5, sino también otros tipos de PVI que no se han planteado antes en este libro.

### 6.5.1 Esquema general del método

Para una ED lineal de segundo orden con coeficientes constantes y condiciones iniciales en  $t = 0$ ,

$$y'' + ay' + by = f(t) \quad \text{con} \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \quad (6.26)$$

Aplicamos TL a la ED, considerando (6.15) y (6.16) resulta:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0) = sY - y_0 \quad \& \quad \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - sy_0 - y_1.$$

El resultado será entonces:

$$\begin{aligned} (s^2Y - sy_0 - y_1) + a(sY - y_0) + bY &= (s^2 + as + b)Y - sy_0 - y_1 - ay_0 = F(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow (s^2 + as + b)Y &= F(s) + sy_0 + y_1 + ay_0 \end{aligned}$$

de donde

$$Y(s) = \frac{F(s) + sy_0 + y_1 + ay_0}{s^2 + as + b}. \quad (6.27)$$

Hemos convertido el PVI (6.26) en una expresión algebraica en la que  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  ya se encuentra despejada y en donde la función buscada es  $y(t)$ . Para encontrar  $y(t)$  se toma la transformada inversa en (6.27):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s) + sy_0 + y_1 + ay_0}{s^2 + as + b}\right\} \quad (6.28)$$

Este es el esquema general del método de la TL para resolver un PVI que como se observa consiste en tres etapas.

1. Aplicar la TL a la ED, tomando en cuenta las condiciones iniciales.
2. Despejar  $Y(s)$ . Esto será posible en muchos casos puesto que el resultado de aplicar  $\mathcal{L}$  a una ED lineal de coeficientes constantes es una ecuación lineal con incógnita  $Y(s)$ .
3. Aplicar TL inversa a  $Y(s)$  para obtener  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ . En general es en este paso donde se tienen las dificultades, puesto que se requiere de un buen manejo del cálculo de  $\mathcal{L}^{-1}$  de las funciones resultantes. Veremos algunas técnicas en los ejemplos siguientes para determinar dicha transformada inversa.

**Ejemplo 6.5.1** Resolver el PVI:  $y'' + 9y = 5t + 2$  con  $y(0) = 5$  &  $y'(0) = -1$ .

▼ Como:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 5s + 1$$

resulta

$$s^2Y - 5s + 1 + 9Y = \frac{5}{s^2} + \frac{2}{s} \Rightarrow (s^2 + 9)Y = \frac{5 + 2s}{s^2} + 5s - 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{5s^3 - s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2 + 9)}.$$

La solución del PVI será entonces:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s^3 - s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2 + 9)} \right\}.$$

Pospondremos el cálculo de la transformada inversa para la siguiente subsección. □

**Ejemplo 6.5.2** Encontrar la solución general de la ED:  $y'' + 6y' + 25y = 0$ .

▼ Como no hay condiciones iniciales explícitas podemos suponer que  $y(0) = y_0$  y  $y'(0) = y_1$ , de modo que obtendremos

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y_0 \quad \& \quad \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy_0 - y_1$$

de donde al aplicar TL en la ED obtenemos:

$$\begin{aligned} s^2Y - sy_0 - y_1 + 6(sY - y_0) + 25Y &= 0 \Rightarrow (s^2 + 6s + 25)Y = sy_0 + y_1 + 6y_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{y_0s + 6y_0 + y_1}{s^2 + 6s + 25} = \frac{y_0s + 6y_0 + y_1}{(s^2 + 6s + 9) + 16} = \frac{y_0s + 6y_0 + y_1}{(s + 3)^2 + 4^2} \end{aligned}$$

La solución de la ED se obtiene aplicando la transformada inversa:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{y_0s + 6y_0 + y_1}{(s + 3)^2 + 4^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{y_0(s + 3) + 6y_0 + y_1 - 3y_0}{(s + 3)^2 + 4^2} \right\} = \\ &= y_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 4^2} \right\} + (3y_0 + y_1) \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s + 3)^2 + 4^2} \right\} = \\ &= y_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 4^2} \right\} + \frac{3y_0 + y_1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{4}{(s + 3)^2 + 4^2} \right\} = \\ &= y_0 e^{-3t} \cos 4t + \frac{3y_0 + y_1}{4} e^{-3t} \sin 4t. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 6.5.3** Resolver el PVI:  $y'' + 2ty' + 2y = e^{2t}$  con  $y(0) = 1$  &  $y'(0) = 2$ .

▼ Notemos ahora que

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0) = sY - 1 \quad \& \quad \mathcal{L}\{y''\} = s\mathcal{L}\{y'\} - y'(0) = s(sY - 1) - 2 = s^2Y - s - 2.$$

En cuanto al segundo término de la ED:

$$\mathcal{L}\{ty'\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y'\} = -\frac{d}{ds} [sY - 1] = -Y - sY'.$$

Entonces la TL de la ED queda como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' + 2ty' + 2y\} &= \mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{ty'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \\ &= (s^2Y - s - 2) + 2(-Y - sY') + 2Y = \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s - 2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -2sY' + (s^2 - 2 + 2)Y &= \frac{1}{s - 2} + s + 2 = \frac{1 + (s - 2)(s + 2)}{s - 2} = \frac{s^2 - 3}{s - 2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -2sY' + s^2Y &= \frac{s^2 - 3}{s - 2} \Rightarrow \\ \Rightarrow Y' - \frac{s}{2}Y &= \frac{s^2 - 3}{-2s(s - 2)}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

En este caso el problema original fue una ED lineal no homogénea con coeficientes variables. Al aplicar TL a la ED no se redujo a una ecuación algebraica sino a una ED (6.29) para  $Y(s)$ . La nueva ED (6.29) es más sencilla que la original porque es lineal de primer orden. El plan a seguir aquí sería primero resolver la ED lineal de primer orden para  $Y(s)$  y después aplicar  $\mathcal{L}^{-1}$  al resultado obtenido. □

### 6.5.2 Técnicas de cálculo de $\mathcal{L}^{-1}$ . Fracciones parciales

Para determinar  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  de expresiones del tipo  $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  en donde  $Q(s)$  es un polinomio y  $P(s)$  es otro polinomio de grado menor que el grado de  $Q(s)$  posiblemente multiplicado por una exponencial, procederemos buscando descomponer la función  $F(s)$  en términos más simples de forma similar al método de fracciones parciales utilizado en la integración de funciones racionales.

**Teorema 6.3** *Teorema fundamental del álgebra.* Todo polinomio

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

de grado  $n \geq 1$ , cuyos coeficientes pueden ser números reales o complejos, tiene tantas raíces como su grado (contando multiplicidad) y se puede factorizar como:

$$Q(s) = a_n (s - r_1)^{m_1} (s - r_2)^{m_2} \cdots (s - r_k)^{m_k},$$

donde las  $r_i$  son las raíces y las  $m_i$  son las multiplicidades de cada una, con

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n.$$

Más aún, si los coeficientes son reales entonces las raíces complejas aparecen en pares conjugados, es decir, si  $r = \alpha + \beta i$  es una raíz entonces  $\bar{r} = \alpha - \beta i$  es otra raíz, de modo que en ese caso  $Q(s)$  contendrá un factor

$$(s - r)(s - \bar{r}) = (s - \alpha - \beta i)(s - \alpha + \beta i) = (s - \alpha)^2 + \beta^2$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  reales.

Por lo anterior podemos factorizar el denominador  $Q(s)$  en factores lineales de la forma  $(s - r_i)$  o bien factores cuadráticos irreducibles de la forma  $(s - \alpha)^2 + \beta^2$  así como potencias de ellos.

Las fracciones parciales en que se descompone el cociente  $\frac{P(s)}{Q(s)}$  son de las formas

$$\frac{A}{s - r}, \quad \frac{B}{(s - r)^m}, \quad \frac{Cs + D}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}, \quad \frac{Ks + L}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^m}$$

donde los números  $A, B, C, \dots$  pueden encontrarse de diversas formas.

**Ejemplo 6.5.4** Descomponer  $F(s) = \frac{3s - 7}{(s - 1)(s - 3)}$  en fracciones parciales y calcular  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

▼ Buscamos  $A$  y  $B$  de modo que

$$\frac{3s - 7}{(s - 1)(s - 3)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s - 3}.$$

Para que la suma de fracciones iguale al cociente original se debe cumplir que

$$\frac{A(s - 3) + B(s - 1)}{(s - 1)(s - 3)} = \frac{3s - 7}{(s - 1)(s - 3)}$$

y esto ocurre sólo si los numeradores son iguales:

$$A(s - 3) + B(s - 1) = 3s - 7, \quad (6.30)$$

dado que los denominadores de estas fracciones son iguales. Con esta condición en mente, se determinarán  $A$  y  $B$  basados en el supuesto de que la relación que los determina se cumple idénticamente para todo número  $s$ . Hay dos estrategias a seguir y las ilustraremos a continuación:



1. Agrupar términos e igualar los coeficientes de las mismas potencias de ambos lados de (6.30). Haciendo esto obtenemos:

$$A(s-3) + B(s-1) = 3s-7 \Rightarrow (A+B)s - (3A+B)s = 3s-7 \Rightarrow A+B=3 \quad \text{y} \quad 3A+B=7.$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas  $A, B$  obtenemos  $A=2$  y  $B=1$ .

2. Asignar directamente valores a  $s$  para obtener varias ecuaciones más simples que (6.30). Para esto, escogemos valores para  $s$  que hagan que varios términos del lado izquierdo de (6.30) se anulen. Estos valores son las raíces del denominador  $Q(s)$ . Para el presente ejemplo:

- Si  $s=1$ , entonces  $A(1-3) + B(1-1) = 3(1)-7 \Rightarrow -2A = -4 \Rightarrow A=2$ .
- Si  $s=3$  entonces  $A(3-3) + B(3-1) = 3(3)-7 \Rightarrow 2B = 2 \Rightarrow B=1$ .

La solución es la misma que se obtuvo utilizando la estrategia anterior. Esto ocurre cuando los coeficientes que buscamos son los asociados a las fracciones simples de términos no repetidos.

Usando cualquiera de los dos caminos hemos obtenido que

$$\frac{3s-7}{(s-1)(s-3)} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-3}$$

y de aquí

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-7}{(s-1)(s-3)}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 2e^t + e^{3t},$$

por la linealidad de  $\mathcal{L}^{-1}$ .

□

**Ejemplo 6.5.5** Descomponer  $F(s) = \frac{2s-8}{s^2-5s+6}$  en fracciones parciales y calcular  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

▼ Factorizamos el denominador:

$$s^2-5s+6 = (s-2)(s-3).$$

Buscamos  $A$  y  $B$  de modo que

$$\frac{2s-8}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3) + B(s-2)}{(s-2)(s-3)}.$$

De nuevo, basta con que se cumpla la identidad de los numeradores:

$$A(s-3) + B(s-2) = 2s-8,$$

- Si  $s=2$ , entonces  $A(2-3) + B(2-2) = 2(2)-8 \Rightarrow -A = -4 \Rightarrow A=4$ .
- Si  $s=3$  entonces  $A(3-3) + B(3-2) = 2(3)-8 \Rightarrow B = -2$ .

por consiguiente

$$\frac{2s-8}{s^2-5s+6} = \frac{4}{s-2} - \frac{2}{s-3}$$

y de aquí podemos concluir además que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-8}{s^2-5s+6}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 4e^{2t} - 2e^{3t}.$$

□

**Ejemplo 6.5.6** Descomponer  $F(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 5s - 2}{s(s+1)(s-2)(s+3)}$  en fracciones parciales y encontrar  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

▼ Buscamos  $A, B, C, D$  de modo que:

$$\frac{s^3 - 4s^2 + 5s - 2}{s(s+1)(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+3}.$$

Esta igualdad se cumple sólo cuando:

$$A(s+1)(s-2)(s+3) + Bs(s-2)(s+3) + Cs(s+1)(s+3) + Ds(s+1)(s-2) = s^3 - 4s^2 + 5s - 2.$$

Entonces, evaluando en las raíces del denominador:

1. Si  $s = 0$  entonces

$$\begin{aligned} A(1)(-2)(3) + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0 &= 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -6A &= -2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. Si  $s = -1$  entonces

$$\begin{aligned} A \cdot 0 + B(-1)(-3)(2) + C \cdot 0 + D \cdot 0 &= (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 6B &= -12 \Rightarrow B = -2. \end{aligned}$$

3. Si  $s = 2$  entonces

$$\begin{aligned} A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(2)(3)(5) + D \cdot 0 &= (2)^3 - 4 \cdot (2)^2 + 5 \cdot (2) - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 30C &= 0 \Rightarrow C = 0. \end{aligned}$$

4. Si  $s = -3$  entonces

$$\begin{aligned} A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D(-3)(-2)(-5) &= (-3)^3 - 4 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) - 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -30D &= -27 - 36 - 15 - 2 = -80 \Rightarrow D = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto, el cociente original se descompone como:

$$F(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 5s - 2}{s(s+1)(s-2)(s+3)} = \frac{1}{3} \frac{1}{s} + \frac{(-2)}{s+1} + \frac{0}{s-2} + \frac{\frac{8}{3}}{s+3}.$$

De lo anterior podemos concluir también que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{8}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \frac{1}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-3t}.$$

□

**Ejemplo 6.5.7** Descomponer  $F(s) = \frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)}$  en fracciones parciales y calcular  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

▼ Este ejemplo muestra lo que puede ocurrir cuando hay factores repetidos en el denominador. Ahora buscaremos  $A, B, C$  de manera que:

$$\frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2}.$$

Esta igualdad se cumple sólo cuando:

$$As(s-2) + B(s-2) + Cs^2 = 8s^2 - 7s + 6.$$

Evaluamos en las dos raíces del denominador:

1. Si  $s = 0$  entonces

$$\begin{aligned} A \cdot 0 + B(-2) + C \cdot 0 &= 8 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2B &= 6 \Rightarrow B = -3. \end{aligned}$$

2. Si  $s = 2$  entonces

$$\begin{aligned} A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(2^2) &= 8 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4C &= 32 - 14 + 6 = 24 \Rightarrow C = 6. \end{aligned}$$

Para obtener  $A$  podemos dar a  $s$  cualquier otro valor y usar los valores ya determinados para  $B$  y  $C$ :

3. Por ejemplo, si  $s = 1$  entonces

$$\begin{aligned} A(1)(-1) + B(-1) + C(1^2) &= 8 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow -A - B + C &= 8 - 7 + 6 = 7 \Rightarrow -A - (-3) + 6 = 7 \Rightarrow -A = -2 \Rightarrow A = 2. \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$F(s) = \frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)} = \frac{2}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{6}{s-2}.$$

De lo anterior podemos concluir:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = 2 - 3t + 6e^{2t}.$$

□

**Ejemplo 6.5.8** Descomponer en fracciones parciales  $F(s) = \frac{9s^4 - 16s^3 - 25s^2 + 154s - 99}{(s-2)^3(s+3)^2}$  y calcular  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

▼ Buscamos constantes  $A, B, C, D, E$  de modo que:

$$F(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s-2)^3} + \frac{D}{s+3} + \frac{E}{(s+3)^2},$$

y esto ocurre si:

$$\begin{aligned} A(s-2)^2(s+3)^2 + B(s-2)(s+3)^2 + C(s+3)^2 + D(s-2)^3(s+3) + E(s-2)^3 &= \\ = 9s^4 - 16s^3 - 25s^2 + 154s - 99. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Usamos las dos raíces de denominador para determinar los coeficientes:

1. Si  $s = 2$  entonces

$$\begin{aligned} A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(5^2) + D \cdot 0 + E \cdot 0 &= 9 \cdot 2^4 - 16 \cdot 2^3 - 25 \cdot 2^2 + 154 \cdot 2 - 99 \Rightarrow \\ \Rightarrow 25C &= 144 - 128 - 100 + 308 - 99 = 125 \Rightarrow C = 5. \end{aligned}$$

2. Si  $s = -3$  entonces

$$\begin{aligned} A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0 + E(-5)^3 &= 9 \cdot (-3)^4 - 16 \cdot (-3)^3 - 25 \cdot (-3)^2 + 154 \cdot (-3) - 99 \Rightarrow \\ \Rightarrow -125E &= 729 + 432 - 225 - 462 - 99 = 375 \Rightarrow E = -3. \end{aligned}$$

Podríamos continuar asignando valores a  $s$  (como 0, 1, -1, etc.) para obtener ecuaciones que deben satisfacer los coeficientes que aún faltan por determinar, pero seguiremos un camino diferente para mostrar un nuevo enfoque que es especialmente útil cuando se tienen raíces repetidas, como en el presente ejemplo. Si tomamos la derivada en ambos lados de (6.31) resulta:

$$\begin{aligned} 2A(s-2)(s+3)^2 + 2A(s-2)^2(s+3) + B(s+3)^2 + 2B(s-2)(s+3) + \\ + 2C(s+3) + 3D(s-2)^2(s+3) + D(s-2)^3 + 3E(s-2)^2 &= \\ = 36s^3 - 48s^2 - 50s + 154. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Si ahora en (6.32) hacemos de nuevo  $s = 2$  y  $s = -3$  obtendremos:

3. Si  $s = 2$

$$A \cdot 0 + A \cdot 0 + B(5^2) + B \cdot 0 + 2C(5) + D \cdot 0 + D \cdot 0 + E \cdot 0 = 36(2^3) - 48(2^2) - 50(2) + 154 \Rightarrow \\ \Rightarrow 25B + 10C = 288 - 192 - 100 + 154 \Rightarrow 25B + 50 = 150 \Rightarrow B = 4.$$

4. Si  $s = -3$

$$A \cdot 0 + A \cdot 0 + B \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0 + D(-5)^3 + 3E(-5)^2 = 36(-3)^3 - 48(-3)^2 - 50(-3) + 154 \Rightarrow \\ \Rightarrow -125D + 75E = -1100 \Rightarrow -125D = -1100 + 225 \Rightarrow D = 7.$$

El éxito de esta estrategia radica esencialmente en el hecho de que al derivar un término de la forma

$$G(s) = J(s-a)(s-b)^k \text{ con } k > 1 \text{ resulta } G'(s) = J(s-b)^k + kJ(s-a)(s-b)^{k-1},$$

y al evaluar esta derivada en  $s = a$  el segundo término se anula pero el primero ya no lo hace. Por otro lado, si se evalúa esta derivada en  $s = b$  ambos términos se anulan. Así, para determinar el último coeficiente  $A$ , podemos derivar (6.32) de nuevo y evaluar en  $s = 2$ . Escribiendo únicamente los términos que no se anulan en tal situación, resulta:

$$(2A(s+3)^2 + 2B(s+3) + 2B(s+3) + 2C) \Big|_{s=2} = 108s^2 - 96s - 50 \Big|_{s=2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2A(5)^2 + 4B(5) + 2C = 432 - 192 - 50 \Rightarrow \\ \Rightarrow 50A = 190 - 20B - 2C = 190 - 80 - 10 = 100 \Rightarrow A = 2.$$

Por consiguiente, la descomposición en fracciones parciales queda:

$$F(s) = \frac{2}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{5}{(s-2)^3} + \frac{7}{s+3} - \frac{3}{(s+3)^2}.$$

Si aplicamos  $\mathcal{L}^{-1}$  en la anterior igualdad obtendremos:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \\ = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^3}\right\} + 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} = \\ = 2e^{2t} + 4te^{2t} + \frac{5}{2}t^2e^{2t} + 7e^{-3t} - 3te^{-3t} = \left(2 + 4t + \frac{5}{2}t^2\right)e^{2t} + (7 - 3t)e^{-3t}.$$

□

**Ejemplo 6.5.9** Descomponer el cociente  $Y(s) = \frac{5s^3 - s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2 + 9)}$  en fracciones parciales y calcular  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ .

▼ Buscamos los coeficientes  $A, B, C, D$  para los cuales:

$$\frac{5s^3 - s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2 + 9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9} = \frac{As(s^2 + 9) + B(s^2 + 9) + (Cs + D)s^2}{s^2(s^2 + 9)}.$$

Para que esto ocurra debe suceder:

$$As(s^2 + 9) + B(s^2 + 9) + (Cs + D)s^2 = 5s^3 - s^2 + 2s + 5.$$

1. Si  $s = 0$  entonces

$$A \cdot 0 + B(9) + (C \cdot 0 + D) \cdot 0 = 5 \cdot 0^3 - 0^2 + 2 \cdot 0 + 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow 9B = 5 \Rightarrow B = \frac{5}{9}.$$

2. Si  $s = 3i$ , de modo que  $s^2 = -9$  y  $s^3 = (3i)^3 = -27i$ , tenemos

$$\begin{aligned} A(3i)(-9 + 9) + B(-9 + 9) + (C \cdot 3i + D)(-9) &= 5(-27i) - (-9) + 2(3i) + 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-27i)C - 9D &= -129i + 14 \Rightarrow \begin{cases} -27C = -129; \\ -9D = 14; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{129}{27} = \frac{43}{9}; \\ D = -\frac{14}{9}. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Ya conocidos  $B = \frac{5}{9}$ ,  $C = \frac{43}{9}$  y  $D = -\frac{14}{9}$ , para determinar  $A$  podemos dar cualquier valor a  $s$  y sustituir los ya conocidos de  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Si  $s = 1$ :

$$\begin{aligned} A(1)(1^2 + 9) + B(1^2 + 9) + (C \cdot 1 + D)(1^2) &= 5(1^3) - 1^2 + 2 \cdot 1 + 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow 10A + 10B + C + D &= 11 \Rightarrow 10A + \frac{50}{9} + \frac{43}{9} - \frac{14}{9} = 11 \Rightarrow \\ \Rightarrow 10A &= 11 - \frac{79}{9} = \frac{20}{9} \Rightarrow A = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

De lo anterior, nos queda

$$Y(s) = \frac{5s^3 - s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2 + 9)} = \frac{2}{s} + \frac{5}{s^2} + \frac{\frac{43}{9}s - \frac{14}{9}}{s^2 + 9}.$$

Si aplicamos ahora  $\mathcal{L}^{-1}$  en la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \frac{2}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{5}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{43}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 9}\right\} - \frac{14}{27}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 + 9}\right\} = \\ &= \frac{2}{9} + \frac{5}{9}t + \frac{43}{9}\cos 3t - \frac{14}{27}\sin 3t. \end{aligned}$$

□

Esta función es solución de la ED en el ejemplo 6.5.1 de la página 384.

**Ejercicios 6.5.1** Aplicación de la TL para resolver ED. *Soluciones en la página ??.*

Calcular  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  de las funciones siguientes, utilizando el método de fracciones parciales:

1.  $F(s) = \frac{4s + 3}{s^2 + 3s + 2}.$

4.  $F(s) = \frac{3s^3 + 2s^2 + 4s - 1}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)}.$

2.  $F(s) = \frac{3s + 2}{s^2(s + 1)^2}.$

3.  $F(s) = \frac{4s + 1}{(s + 2)(s^2 + 1)}.$

5.  $F(s) = \frac{1}{s^3(s^2 + 1)^2}.$

### 6.5.3 Técnicas de cálculo de $\mathcal{L}^{-1}$ . Método de Heaviside

En esta sección estudiaremos otra estrategia para calcular la transformada inversa de Laplace de funciones racionales  $F(s) = P(s)/Q(s)$  conocido como el método de Heaviside, dicho método considera cuatro casos, todos ellos surgen del tipo de raíces que tenga la función polinomial  $Q(s)$ . Los cuatro casos son: factores lineales no repetidos, factores lineales repetidos, factores cuadráticos irreducibles no repetidos y factores cuadráticos irreducibles repetidos. Analicemos cada uno de ellos por separado.

### Factores lineales no repetidos

En este caso todas las raíces del polinomio  $Q(s)$  son simples o de multiplicidad 1, es decir, todas aparecen exactamente una vez. Para establecer el método de Heaviside consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.5.10** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{4s+2}{(s-7)(s+8)}$ .

▼ Como el denominador de  $F(s)$  es un producto de factores lineales no repetidos tenemos, de acuerdo con el método de fracciones parciales, que  $F(s)$  se descompone como:

$$F(s) = \frac{4s+2}{(s-7)(s+8)} = \frac{C_1}{s-7} + \frac{C_2}{s+8} \quad (6.33)$$

Sabemos que  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$ , por lo cual la transformada inversa de  $F(s)$  es

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^{-8t} \quad (6.34)$$

Claramente la transformada inversa es una combinación lineal de exponenciales del tipo  $e^{a_i t}$  donde  $a_i$  es una raíz simple del denominador de  $F(s)$ . Determinemos ahora los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ , para ello multipliquemos la ecuación (6.33) por el denominador de  $F(s)$ , es decir por  $(s-7)(s+8)$ , tenemos entonces:

$$4s+2 = C_1(s+8) + C_2(s-7).$$

Esta relación se debe satisfacer para todo valor de  $s$ , en particular si evaluamos cuando  $s = 7$  se tiene que:

$$4(7)+2 = C_1(7+8) + C_2(7-7) \Rightarrow C_1 = \frac{30}{15} = 2.$$

Observe que el valor de  $C_1$  se obtuvo multiplicando primero por  $(s-7)(s+8)$ , después evaluando en  $s = 7$  y finalmente, dividiendo entre el valor que se obtuvo al evaluar el término  $(s+8)$ . Este procedimiento es equivalente a sólo multiplicar  $F(s)$  por  $(s-7)$  y evaluar posteriormente en  $s = 7$ . en efecto, si multiplicamos la ecuación (6.33) por  $(s-7)$  obtenemos:

$$(s-7)F(s) = \frac{4s+2}{s+8} = C_1 + \frac{C_2(s-7)}{s+8}$$

y al evaluar en  $s = 7$  resulta

$$\lim_{s \rightarrow 7} (s-7)F(s) = \frac{4s+2}{s+8} \Big|_{s=7} = C_1 + \frac{C_2(7-7)}{7+8} \Rightarrow C_1 = \frac{30}{15} = 2.$$

En esta expresión hemos usado  $\lim_{s \rightarrow 7} (s-7)F(s)$  porque  $F(s)$  no está definida en  $s = 7$ . Sin embargo, como  $(s-7)$  es un factor no repetido el resultado de la simplificación del producto  $(s-7)F(s)$  si se encuentra definido. Note que el término que contiene el coeficiente  $C_2$  se anula al evaluar en  $s = 7$ .

Siguiendo este último procedimiento calculamos  $C_2$ , para este caso primero multiplicamos la ecuación (6.33) por  $(s+8)$ , obteniendo

$$(s+8)F(s) = \frac{4s+2}{s-7} = \frac{C_1(s+8)}{s-7} + C_2.$$

Si ahora evaluamos en  $s = -8$  resulta:

$$\lim_{s \rightarrow -8} (s+8)F(s) = \frac{4s+2}{s-7} \Big|_{s=-8} = \frac{C_1(-8+8)}{-8-7} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{-30}{-15} = 2.$$

Finalmente sustituyendo los valores de  $C_1 = 2$  y  $C_2 = 2$  en la ecuación (6.34) obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = 2e^{7t} + 2e^{-8t}.$$

□

Dos conclusiones arroja este ejemplo. Primero, si  $F(s) = P(s)/Q(s)$  es una función racional con grado de  $P$  menor que grado de  $Q$  y si  $Q(s)$  se puede expresar como un producto de factores lineales no repetidos del tipo  $s - a_i$  entonces la transformada inversa de  $F(s)$  es una combinación lineal de funciones  $e^{a_i t}$ , es decir:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + \cdots + C_n e^{a_n t} \quad (6.35)$$

donde  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  son raíces simples de  $Q(s)$ . Como segunda conclusión podemos decir que los coeficientes  $C_i$  están dados por:

$$C_i = \lim_{s \rightarrow a_i} (s - a_i) F(s) \quad (6.36)$$

o de forma más simple los coeficientes  $C_i$  se obtienen eliminando el factor  $(s - a_i)$  del denominador de  $F(s)$  y evaluando el resultado en  $s = a_i$ .

• **Método de Heaviside**

1. Determinar todas las raíces reales  $a_i$   $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , de multiplicidad 1 de  $Q(s)$ .
2. Calcular los coeficientes  $C_i$  usando la ecuación (6.36).
3. Sumar a la transformada inversa el término:

$$C_i e^{a_i t} + C_2 e^{a_2 t} + \cdots + C_n e^{a_n t}.$$

Observe que  $Q(a_i) = 0$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  lo cual permite escribir los coeficientes  $C_i$  en la forma:

$$C_i = \lim_{s \rightarrow a_i} (s - a_i) F(s) = \lim_{s \rightarrow a_i} \frac{P(s)}{\frac{Q(s)}{s - a_i}} = \frac{\lim_{s \rightarrow a_i} P(s)}{\lim_{s \rightarrow a_i} \frac{Q(s)}{s - a_i}} = \frac{\lim_{s \rightarrow a_i} P(s)}{\lim_{s \rightarrow a_i} \frac{Q(s) - Q(a_i)}{s - a_i}} = \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)}.$$

**Teorema 6.4** Si  $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  es un cociente de dos polinomios de modo que el grado de  $Q(s)$  es mayor al de  $P(s)$ , entonces en el cálculo de la inversa  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ , el término que corresponde a un factor lineal no repetido  $(s - a)$  de  $Q(s)$  queda expresado como

$$\frac{P(a)}{Q_1(a)} e^{at} \quad \text{o bien por} \quad \frac{P(a)}{Q'(a)} e^{at}$$

donde  $Q_1(s)$  representa el polinomio obtenido de  $Q(s)$  eliminando el factor  $(s - a)$  o en otra forma:

$$Q(s) = (s - a)Q_1(s), \quad Q_1(a) \neq 0.$$

- Finalmente, podemos concluir que cuando  $Q(s)$  es un producto de factores lineales no repetidos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{i=1}^n \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)} e^{a_i t} = \sum_{i=1}^n \frac{P(a_i)}{Q_i(a_i)} e^{r_i t}.$$

Estamos ahora en condiciones de establecer el método de Heaviside para el caso de factores lineales no repetidos.

**Ejemplo 6.5.11** Determinar la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s - 7}{(s + 3)(s + 4)(s - 1)}.$$

▼ Notemos que la fracción es propia y su denominador sólo está formado por factores lineales no repetidos, en consecuencia su descomposición en fracciones parciales es

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s - 7}{(s+3)(s+4)(s-1)} = \frac{C_1}{s+3} + \frac{C_2}{s+4} + \frac{C_3}{s-1}$$

y la transformada inversa de  $F(s)$  está dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t} + C_3 e^t$$

donde

$$\begin{aligned} C_1 &= \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) F(s) = \frac{s^2 + 3s - 7}{(s+4)(s-1)} \Big|_{s=-3} = \frac{9-9-7}{(-3+4)(-3-1)} = \frac{7}{4}; \\ C_2 &= \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) F(s) = \frac{s^2 + 3s - 7}{(s+3)(s-1)} \Big|_{s=-4} = \frac{16-12-7}{(-4+3)(-4-1)} = \frac{-3}{5}; \\ C_3 &= \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) F(s) = \frac{s^2 + 3s - 7}{(s+3)(s+4)} \Big|_{s=1} = \frac{1+3-7}{(1+3)(1+4)} = \frac{-3}{20}. \end{aligned}$$

Por lo cual, la transformada inversa de Laplace es

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{7}{4}e^{-3t} - \frac{3}{5}e^{-4t} - \frac{3}{20}e^t.$$

□

Apliquemos ahora el método de Heaviside en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 6.5.12** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{1}{s(s^2-1)(s^2-9)}$ .

▼ Observemos que la fracción es propia y que todas las raíces del denominador,  $s = 0, 1, -1, 3, -3$ , son de multiplicidad 1, es decir son raíces simples. Entonces la descomposición en fracciones parciales de  $F(s)$  es:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s(s^2-1)(s^2-9)} = \frac{1}{s(s-1)(s+1)(s-3)(s+3)} \\ &= \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s-1} + \frac{C_3}{s+1} + \frac{C_4}{s-3} + \frac{C_5}{s+3} \end{aligned}$$

y su transformada inversa está dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t} + C_4 e^{3t} + C_5 e^{-3t}$$

donde los coeficientes  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  son:

$$\begin{aligned} C_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} (s) F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s-3)(s+3)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{(-1)(1)(-3)(3)} = \frac{1}{9}; \\ C_2 &= \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s-3)(s+3)} \Big|_{s=1} = \frac{1}{(1)(2)(-2)(4)} = -\frac{1}{16}; \\ C_3 &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) F(s) = \frac{1}{s(s-1)(s-3)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{-1(-2)(-4)(2)} = -\frac{1}{16}; \\ C_4 &= \lim_{s \rightarrow 3} (s-3) F(s) = \frac{1}{s(s-1)(s+1)(s+3)} \Big|_{s=3} = \frac{1}{(3)(2)(4)(6)} = \frac{1}{144}; \\ C_5 &= \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) F(s) = \frac{1}{s(s-1)(s+1)(s-3)} \Big|_{s=-3} = \frac{1}{-3(-4)(-2)(-6)} = \frac{1}{144}. \end{aligned}$$

Por lo cual, la transformada inversa de Laplace es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{16}e^{-t} + \frac{1}{144}e^{3t} + \frac{1}{144}e^{-3t}.$$

□



### Factores lineales repetidos

Consideremos ahora el caso en que alguna de las raíces de  $Q(s)$  son de multiplicidad mayor o igual a dos.

**Ejemplo 6.5.13** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{1}{s(s-4)^2}$ .

▼ Como  $s = 4$  es una raíz doble, la descomposición en fracciones parciales de  $F(s)$  es:

$$F(s) = \frac{1}{s(s-4)^2} = \frac{A}{(s-4)^2} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s}. \quad (6.37)$$

Conocemos el resultado:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\}e^{at} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}.$$

La forma de la transformada inversa de  $F(s)$  de (6.37) es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = Ate^{4t} + Be^{4t} + C. \quad (6.38)$$

Observe que la transformada inversa es una combinación lineal de las funciones  $te^{4t}$ ,  $e^{4t}$ , 1. Para determinar los coeficientes procedemos como sigue. Para el coeficiente  $C$  basta con multiplicar la ecuación (6.37) por  $s$  y posteriormente evaluar en  $s = 0$ , así obtenemos:

$$C = \lim_{s \rightarrow 0} (s) F(s) = \frac{1}{(s-4)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{16}.$$

No podemos seguir el proceso anterior para calcular  $A$  y  $B$  ya que si multiplicamos la ecuación (6.37) por  $(s-4)$  no obtenemos, después de simplificar, una expresión definida en  $s = 4$ . Necesitamos multiplicar (6.37) por  $(s-4)^2$  para que se encuentre definida la expresión, si lo hacemos obtenemos:

$$\frac{1}{s} = A + B(s-4) + \frac{C(s-4)^2}{s}. \quad (6.39)$$

Esta expresión se simplifica cuando se evalúa en  $s = 4$  ya que sólo se preserva el coeficiente  $B$  en el lado derecho, tenemos entonces al evaluar en ese punto que  $A = \frac{1}{4}$ .

La expresión previa (6.39) es una identidad válida para  $s \neq 4$  y si derivamos a ambos lados obtenemos una expresión válida también. Derivando (6.39) resulta:

$$-\frac{1}{s^2} = B + C \frac{s \cdot 2(s-4) - (s-4)^2}{s^2} = B + \frac{2C(s-4)}{s} - C \frac{(s-4)^2}{s^2}.$$

Si evaluamos nuevamente en  $s = 4$  obtenemos  $B = -\frac{1}{16}$ .

Observe que no es importante derivar el término  $\frac{A(s-4)^2}{s}$  ya que se anulará cuando se evalúe en  $s = 4$ .

Reuniendo estos resultados obtenemos finalmente la transformada inversa de  $F(s)$ , ésta es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{4}te^{4t} - \frac{1}{16}e^{4t} + \frac{1}{16}.$$

□

Este ejemplo permite ver que cuando en  $Q(s)$  aparecen factores lineales repetidos del tipo  $(s-a)^2$  entonces el desarrollo en fracciones parciales contendrá términos de la forma:

$$\frac{A}{(s-a)^2} + \frac{B}{s-a}$$

y, en consecuencia, en la transformada inversa tendremos:

$$Ate^{at} + Be^{at} \quad (6.40)$$

donde

$$A = \lim_{s \rightarrow a} (s - a) F(s), \quad B = \lim_{s \rightarrow a} \frac{d}{ds} [(s - a) F(s)]. \quad (6.41)$$

En general, si  $Q(s)$  contiene factores de la forma  $(s-a)^n$ , entonces la transformada inversa de  $F(s)$  contendrá términos de la forma:

$$A_1 e^{at} + A_2 t e^{at} + A_3 t^2 e^{at} + \cdots + A_n t^{n-1} e^{at} \quad (6.42)$$

donde los coeficientes están dados por:

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} \lim_{s \rightarrow a} \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} [(s-a)^n F(s)] \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.43)$$

como se mostrará más adelante. Estos resultados son el núcleo del método de Heaviside que establecemos a continuación.

#### • Método de Heaviside

1. Determine las raíces reales  $s = a$  de multiplicidad  $n$  de  $Q(s)$ .
2. Calcular los coeficientes  $A_k$  de (6.43).
3. Sustituir los coeficientes en (6.42) y sumarlo a la transformada inversa.

Los resultados anteriores se formalizan en el siguiente teorema.

**Teorema 6.5** Si  $\frac{P(s)}{Q(s)}$  es el cociente de dos polinomios, con el grado de  $Q(s)$  mayor que el de  $P(s)$ , entonces al calcular  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  los términos que surgen correspondientes al factor repetido  $(s-r)^k$  de  $Q(s)$  son como sigue:

$$\left[ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g^{(j)}(r)}{j!} \cdot \frac{t^{k-1-j}}{(k-1-j)!} \right] e^{rt}$$

en donde  $g^{(j)}(s)$  es la  $j$ -ésima derivada de la función  $g(s)$ , definida como el cociente  $\frac{P(s)}{Q_1(s)}$ , donde  $Q_1(s)$  es el producto de todos los factores de  $Q(s)$  excepto  $(s-r)^k$ , es decir  $Q_1(s) = \frac{Q(s)}{(s-r)^k}$ .

▼ Para ver que esta afirmación es válida y también para comprender la lógica detrás de la fórmula, recordemos que una técnica utilizada en fracciones parciales consistía en usar derivadas. Comenzaremos por notar que las fracciones parciales que corresponden al factor lineal repetido  $(s-r)^k$  son las siguientes:

$$\frac{A_1}{s-r} + \frac{A_2}{(s-r)^2} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{(s-r)^{k-1}} + \frac{A_k}{(s-r)^k},$$

de modo que la descomposición en fracciones parciales de  $F(s)$  se vería, denotando con  $H(s)$  al resto de las fracciones como:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{Q_1(s)(s-r)^k} = \frac{g(s)}{(s-r)^k} = \frac{A_1}{s-r} + \frac{A_2}{(s-r)^2} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{(s-r)^{k-1}} + \frac{A_k}{(s-r)^k} + H(s). \quad (6.44)$$

Multiplicando como antes por  $(s-r)^k$  resulta de lo anterior

$$g(s) = A_1(s-r)^{k-1} + A_2(s-r)^{k-2} + \cdots + A_{k-1}(s-r) + A_k + H(s)(s-r)^k.$$

En esta igualdad, al hacer  $s = r$  se anulan todos los términos excepto  $g(r) = A_k$ .

Si ahora derivamos ambos lados de la igualdad resultará:

$$g'(s) = A_1(k-1)(s-r)^{k-2} + A_2(k-2)(s-r)^{k-3} + \cdots + A_{k-1} + [H(s) \cdot k \cdot (s-r)^{k-1} + (s-r)^k H'(s)]$$

Nótese que desapareció  $A_k$  por ser constante. Si de nuevo hacemos  $s = r$  en esta igualdad se anulan todos los términos excepto  $g'(r) = A_{k-1}$ .

Continuando este proceso de derivar y evaluar en  $s = r$  y notando como antes que las primeras  $k-1$  derivadas del producto  $(s-r)^k H(s)$  se anulan al evaluar en  $s = r$ , se obtiene de manera sucesiva:

$$\begin{aligned} g(r) &= 0!A_k \Rightarrow A_k = \frac{g(r)}{0!}; \\ g'(r) &= 1!A_{k-1} \Rightarrow A_{k-1} = \frac{g'(r)}{1!}; \\ g''(r) &= 2!A_{k-2} \Rightarrow A_{k-2} = \frac{g''(r)}{2!}; \\ &\vdots \\ g^{(k-2)}(r) &= (k-2)!A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{g^{(k-2)}(r)}{(k-2)!}; \\ g^{(k-1)}(r) &= (k-1)!A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{g^{(k-1)}(r)}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

O en una sola expresión:

$$A_{k-j} = \frac{g^{(j)}(r)}{j!} \quad \text{con } j = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

Así que las fracciones parciales en el desarrollo (6.44) de  $\frac{P(s)}{Q(s)}$ , que corresponden al factor  $(s-r)^k$  son las siguientes:

$$\frac{g^{(k-1)}(r)}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{s-r} + \frac{g^{(k-2)}(r)}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{(s-r)^2} + \cdots + \frac{g'(r)}{1!} \cdot \frac{1}{(s-r)^{k-1}} + \frac{g(r)}{0!} \cdot \frac{1}{(s-r)^k}$$

Por último, dado que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-r)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{rt},$$

concluimos que al aplicar  $\mathcal{L}^{-1}$  a la suma de fracciones anteriores resulta, después de ordenar:

$$\frac{g^{(k-1)}(r)}{(k-1)!} e^{rt} + \frac{g^{(k-2)}(r)}{(k-2)!} \frac{t}{1!} e^{rt} + \cdots + \frac{g'(r)}{1!} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} e^{rt} + \frac{g(r)}{0!} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{rt}$$

O sea

$$\left[ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g^{(j)}(r)}{j!} \cdot \frac{t^{k-1-j}}{(k-1-j)!} \right] e^{rt},$$

tal como afirma el teorema.

□

Por otra parte, si regresamos al caso  $n = 2$  y sustituimos los valores obtenidos en (6.41) sustituyendo estos valores en la expresión (6.40) obtenemos una forma alternativa de la transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned}
 Ate^{at} + Be^{at} &= \lim_{s \rightarrow a} (s-a)F(s)te^{at} + \lim_{s \rightarrow a} \frac{d}{ds}(s-a)F(s)e^{at} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow a} \left[ (s-a)F(s)te^{at} + \frac{d}{ds}[(s-a)F(s)]e^{at} \right] = \\
 &= \lim_{s \rightarrow a} \left[ (s-a)F(s)te^{st} + \frac{d}{ds}[(s-a)F(s)]e^{st} \right] = \\
 &= \lim_{s \rightarrow a} \left[ (s-a)F(s)\frac{de^{st}}{ds} + \frac{d}{ds}[(s-a)F(s)]e^{st} \right] = \\
 &= \lim_{s \rightarrow a} \frac{d}{ds}[(s-a)F(s)e^{st}].
 \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado:

$$\lim_{s \rightarrow a} e^{st} = \lim_{s \rightarrow a} e^{at}; \quad \frac{d(uv)}{ds} = \frac{du}{ds}v + u\frac{dv}{ds} \quad \& \quad \frac{\partial e^{st}}{\partial s} = te^{st}.$$

Es decir, para calcular la transformada inversa de funciones con términos repetidos basta con calcular:

$$\lim_{s \rightarrow a} \frac{d}{ds}[(s-a)F(s)e^{st}].$$

Este resultado es el núcleo del método de Heaviside. En el caso general cuando  $Q(s)$  contenga factores del tipo  $(s-a)^n$  entonces la transformada inversa contendrá términos de la forma:

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow a} \frac{d^n}{ds^n} [(s-a)^n F(s)e^{st}]. \quad (6.45)$$

**Ejemplo 6.5.14** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{7s-6}{(s-5)(s+1)^3}$ .

▼ Como  $s = -1$  es una raíz triple, la descomposición en fracciones parciales de  $F(s)$  es:

$$F(s) = \frac{7s-6}{(s-5)(s+1)^3} = \frac{A}{s-5} + \frac{2B}{(s+1)^3} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+1}. \quad (6.46)$$

Si ahora usamos el resultado:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)^n} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^n} \right\} e^{at} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$$

con  $n = 2, 3$  obtenemos que la transformada inversa de  $F(s)$  es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = Ae^{5t} + Bt^2e^{-t} + Cte^{-t} + De^{-t} \quad (6.47)$$

Observe que hemos colocado un factor 2 multiplicado por  $B$  en (6.46) para que apareciera sólo el factor  $B$  en (6.47).

Note también que la transformada inversa es una combinación lineal de  $e^{5t}$  y de un polinomio general de grado dos multiplicado por  $e^{-t}$ . Para determinar los coeficientes procedemos como sigue. Para el coeficiente  $A$  basta con multiplicar por  $(s-5)$  la ecuación (6.46) y evaluar después en  $s = 5$ , así obtenemos:

$$A = \lim_{s \rightarrow 5} (s-5)F(s) = \left. \frac{7s-6}{(s+1)^3} \right|_{s=5} = \frac{29}{216}.$$

Si multiplicamos la ecuación (6.46) por  $(s + 1)$  o por  $(s + 1)^2$  obtenemos una expresión que no está definida en  $s = -1$ . Necesitamos multiplicar por  $(s + 1)^3$  para tener una expresión definida en el punto, de esta forma obtenemos:

$$\frac{7s-6}{s-5} = \frac{A(s+1)^3}{s-5} + 2B + C(s+1) + D(s+1)^2. \quad (6.48)$$

Si ahora evaluamos en  $s = -1$  resulta  $2B = \frac{-7-6}{-1-5} = \frac{13}{6}$  ya que los otros términos del lado derecho se anulan. La última expresión es una identidad válida para  $s \neq 5$ , esperamos entonces que la expresión que se obtiene al derivar ambos miembros se mantenga. Derivando (6.48) entonces resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{7s-6}{s-5} \right) &= \frac{d}{ds} \left( \frac{A(s+1)^3}{s-5} + 2B + C(s+1) + D(s+1)^2 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(s-5)7 - (7s-6)(1)}{s-5} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{A(s+1)^3}{s-5} + 2B + C(s+1) + D(s+1)^2 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{29}{(s-5)^2} &= \frac{2A(s-8)(s+1)^2}{(s-5)^2} + C + 2D(s+1). \end{aligned}$$

Evaluando en  $s = -1$  resulta  $C = -\frac{29}{36}$ .

Note que no es importante derivar el término  $\frac{A(s+1)^3}{s-5}$  ya que al evaluar en  $s = -1$  se anulará.

Para evaluar el coeficiente  $D$  derivamos nuevamente la expresión previa notando que la derivada del primer término del lado derecho se anulará al evaluar en  $s = -1$ . Tenemos entonces:

$$\frac{d}{ds} \left( -\frac{29}{(s-5)^2} \right) \Big|_{s=-1} = 2D \Rightarrow \frac{58}{(s-5)^3} \Big|_{s=-1} = 2D \Rightarrow -\frac{29}{216} = D.$$

Resulta finalmente que la transformada inversa de  $F(s)$  es:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{29}{216}e^{5t} + \frac{13t^2}{12}e^{-t} - \frac{29}{36}te^{-t} - \frac{29}{216}e^{-t}.$$

□

**Ejemplo 6.5.15** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{s+4}{(s-3)(s+5)^2}$ .

▼ El denominador de  $F(s)$  tiene la raíz simple  $s = 3$  y la raíz doble  $s = -5$ . De acuerdo con esto, su descomposición en fracciones parciales es:

$$F(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s+5)^2} + \frac{C}{s+5}$$

y la transformada inversa es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = Ae^{3t} + Bte^{-5t} + Ce^{-5t}$$

donde los coeficientes están dados por:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow 3} [(s-3)F(s)] = \frac{s+4}{(s+5)^2} \Big|_{s=3} = \frac{7}{64}; \\ B &= \lim_{s \rightarrow -5} [(s+5)^2 F(s)] = \frac{s+4}{s-3} \Big|_{s=-5} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}; \\ C &= \lim_{s \rightarrow -5} \frac{d}{ds} [(s+5)^2 F(s)] = \frac{d}{ds} \left( \frac{s+4}{s-3} \right) \Big|_{s=-5} = \frac{-7}{(s-3)^2} \Big|_{s=-5} = \frac{-7}{64}. \end{aligned}$$

Finalmente, la transformada inversa está dada por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{7}{64}e^{3t} + \frac{1}{8}te^{-5t} - \frac{7}{64}e^{-5t}.$$

□

**Ejemplo 6.5.16** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{1}{s^3(s-1)^2}$ .

▼ El denominador de  $F(s)$  tiene la raíz triple  $s = 0$  y la raíz doble  $s = 1$ , por lo cual su descomposición en fracciones parciales es

$$F(s) = \frac{2A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{(s-1)^2} + \frac{E}{s-1}$$

y su transformada inversa es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = At^2 + Bt + C + Dte^t + Ee^t$$

donde los coeficientes están dados por:

$$\begin{aligned} 2A &= \lim_{s \rightarrow 0} [s^3 F(s)] = \frac{1}{(s-1)^2} \Big|_{s=0} = 1; \\ B &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s^3 F(s)] = \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{(s-1)^2} \right] \Big|_{s=0} = \frac{-2}{(s-1)^3} \Big|_{s=0} = 2; \\ C &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [s^3 F(s)] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{(s-1)^2} \right) \Big|_{s=0} = \frac{3}{(s-1)^4} \Big|_{s=0} = 3; \\ D &= \lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)^2 F(s)] = \frac{1}{s^3} \Big|_{s=1} = 1; \\ E &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} [(s-1)^2 F(s)] = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^3} \right) \Big|_{s=1} = \frac{-3}{s^4} \Big|_{s=1} = -3. \end{aligned}$$

Finalmente, la transformada inversa está dada por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3 + te^t - 3e^t.$$

□

**Ejemplo 6.5.17** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{4s+3}{(s+1)^2(s-1)^2}$ .

▼ El denominador de  $F(s)$  tiene las raíces dobles  $s = -1, 1$ . Así que, de acuerdo con el resultado 6.45) tenemos que la transformada inversa está dada por la suma de las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  siguientes:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} [(s+1)F(s)e^{st}] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[ \frac{(4s+3)e^{st}}{(s-1)^2} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(s-1)^2(4e^{st} + (4s+3)te^{st}) - ((4s+3)e^{st})2(s-1)}{(s-1)^4} = \\ &= \frac{4(4e^{-t} + (-1)te^{-t}) - (-e^{-t})2(-2)}{16} = \frac{16e^{-t} - 4te^{-t} - 4e^{-t}}{16} = \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} [(s-1)F(s)e^{st}] = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} \left[ \frac{(4s+3)e^{st}}{(s+1)^2} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s+1)^2(4e^{st} + (4s+3)te^{st}) - ((4s+3)e^{st})2(s+1)}{(s+1)^4} = \\ &= \frac{4(4e^t + 7te^t) - (7e^t)2(2)}{16} = \frac{16e^t + 28te^t - 28e^t}{16} = -\frac{3}{4}e^t + \frac{7}{4}te^t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformada inversa está dada por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} - \frac{3}{4}e^t + \frac{7}{4}te^t.$$

□

**Ejemplo 6.5.18** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{1}{s^3(s-1)}$ .

▼ El denominador de  $F(s)$  tiene las raíces  $s = 0, 1$ , la primera de ellas triple y la segunda simple. Así que, de acuerdo con el resultado (6.45) tenemos que la transformada inversa está dada por la suma de las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  siguientes:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [(s^3)F(s)e^{st}] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{e^{st}}{s-1} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s-1)te^{st} - e^{st}}{(s-1)^2} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s-1)^2(te^{st} + (s-1)t^2e^{st} - te^{st}) - ((s-1)te^{st} - e^{st})2(s-1)}{(s-1)^4} \right] = \\ &= \frac{1}{2}(-t^2 - (-t-1)2(-1)) = -\frac{t^2}{2} - t - 1. \end{aligned}$$

y

$$f_2(t) = \lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)F(s)e^{st}] = \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{e^{st}}{s^3} \right) = e^t.$$

Por lo tanto, la transformada inversa está dada por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{t^2}{2} - t - 1 + e^t.$$

□

### Factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Esta situación corresponde al caso en que en el denominador  $Q(s)$  de  $F(s) = P(s)/Q(s)$  aparecen factores cuadráticos irreducibles simples del tipo  $(s-a)^2 + b^2$ , es decir, cuando  $Q(s)$  tiene raíces complejas simples de la forma  $a + bi$ . Los resultados del caso de factores lineales no repetidos son aplicables en esta situación aunque requieren del uso del álgebra de los números complejos. También existe una segunda posibilidad que requiere del cálculo de la parte real e imaginaria de una cantidad compleja. Ambas posibilidades las estudiaremos en los ejemplos siguientes.

**Ejemplo 6.5.19** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{4}{s(s^2+1)}$ .

▼ En este caso las raíces del denominador son  $s = 0, = i, -i$ , de forma que la descomposición en fracciones parciales es:

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-i} + \frac{C}{s+i}$$

y la transformada inversa es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A + Be^{it} + Ce^{-it}.$$

Para obtener los coeficientes seguimos el proceso estudiado en el caso de factores lineales no repetidos. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] = \frac{4}{s^2+1} \Big|_{s=0} = 4; \\ B &= \lim_{s \rightarrow i} [(s-i)F(s)] = \frac{4}{s(s+i)} \Big|_{s=i} = \frac{4}{i(2i)} = -2; \\ C &= \lim_{s \rightarrow -i} [(s+i)F(s)] = \frac{4}{s(s-i)} \Big|_{s=-i} = \frac{4}{-i(-2i)} = -2; \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados tenemos que la transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 4 + -2e^{it} - 2e^{-it} = 4 - 4\cos t$$

donde usamos la relación  $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$ .

□

Notemos que el cálculo de la transformada inversa para el caso de factores cuadráticos irreducibles simples, siguiendo el proceso anterior, requiere de las expresiones

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

ambas ya utilizadas en el texto. Estudiemos ahora una segunda opción mediante los ejemplos siguientes.

**Ejemplo 6.5.20** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{4s + 5}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$ .

▼ En este caso los factores cuadráticos  $s^2 + 1$  y  $s^2 + 9$  son irreducibles y sus raíces son  $\pm i$  y  $\pm 3i$  respectivamente, por lo cual la descomposición de  $F(s)$  en fracciones parciales tiene la forma

$$F(s) = \frac{4s + 5}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + 3D}{s^2 + 9} \quad (6.49)$$

y su transformada inversa es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A \cos t + B \sin t + C \cos 3t + D \sin 3t. \quad (6.50)$$

Para determinar los coeficientes seguimos el proceso siguiente. Multiplicando (6.49) por  $s^2 + 1$  se tiene

$$\frac{4s + 5}{s^2 + 9} = As + B + \frac{(Cs + 3D)(s^2 + 1)}{s^2 + 9}.$$

Evaluando en  $s = i$  el segundo término del lado derecho desaparece y se obtiene:

$$\frac{4i + 5}{-1 + 9} = Ai + B \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad \& \quad B = \frac{5}{8}.$$

Si ahora multiplicamos (6.49) por  $s^2 + 9$  se tiene:

$$\frac{4s + 5}{s^2 + 1} = \frac{(As + B)(s^2 + 9)}{s^2 + 1} + Cs + 3D$$

y evaluando en  $s = 3i$  resulta:

$$\frac{12i + 5}{-9 + 1} = 3Ci + 3D \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2} \quad \& \quad D = -\frac{5}{24}.$$

Finalmente, la transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{5}{8} \sin t - \frac{1}{2} \cos 3t - \frac{5}{24} \sin 3t.$$

□

**Ejemplo 6.5.21** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{1}{(s^2 - 2s + 2)(s^2 + 4)}$ .



▼  $F(s)$  se puede escribir como  $F(s) = \frac{1}{[(s-1)^2 + 1](s^2 + 4)}$ . Los factores cuadráticos  $(s-1)^2 + 1$  y  $s^2 + 4$  son irreducibles y sus raíces son  $1 \pm i$  y  $\pm 2i$  respectivamente. La descomposición de  $F(s)$  en fracciones parciales es de la forma:

$$F(s) = \frac{1}{((s-1)^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{A(s-1) + B}{(s-1)^2 + 1} + \frac{Cs + 2D}{s^2 + 4} \quad (6.51)$$

y su transformada inversa es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A \cos(t)e^t + B \sin(t)e^t + C \cos 2t + D \sin 2t.$$

Note que  $A$  se multiplica por  $s-1$  y  $D$  por 2 para que en la transformada inversa aparezcan sólo  $A$  y  $D$ . Para determinar los coeficientes multiplicaremos por los factores irreducibles. Si multiplicamos la ecuación (6.51) por  $(s-1)^2 + 1$  tenemos:

$$\frac{1}{s^2 + 4} = A(s-1) + B + \frac{(Cs + 2D)((s-1)^2 + 1)}{s^2 + 4}.$$

Si ahora evaluamos en  $s = 1 + i$  el segundo término del lado derecho de esta última expresión se anula y obtenemos entonces:

$$\frac{1}{(1+i)^2 + 4} = Ai + B.$$

Como

$$Ai + B = \frac{1}{(1+i)^2 + 4} = \frac{1}{4 + 2i} = \frac{4 - 2i}{(4 + 2i)(4 - 2i)} = \frac{4 - 2i}{16 + 4} = \frac{1}{5} - \frac{i}{10}$$

tenemos, al igualar las partes reales e imaginarias que  $A = -1/10$ ,  $B = 1/5$ . De la misma forma, si multiplicamos la ecuación (6.51) por  $s^2 + 4$  tenemos:

$$\frac{1}{(s-1)^2 + 1} = \frac{(A(s-1) + B)(s^2 + 4)}{(s-1)^2 + 1} + Cs + 2D.$$

Evaluando en  $s = 2i$  se anula el primer término del lado derecho de esta expresión y obtenemos:

$$\frac{1}{(2i-1)^2 + 1} = 2Ci + 2D.$$

Como:

$$2Ci + 2D = \frac{1}{(2i-1)^2 + 1} = \frac{1}{-4 - 4i + 1 + 1} = \frac{1}{-2 - 4i} = \frac{-2 + 4i}{(-2 - 4i)(-2 + 4i)} = \frac{-2 + 4i}{4 + 16} = -\frac{1}{10} + \frac{i}{5}$$

resulta, igualando las partes reales y las imaginarias, que  $C = 1/10$ ,  $D = -1/20$ . Finalmente, la transformada inversa de Laplace es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{10} \cos(t)e^t + \frac{1}{5} \sin(t)e^t + \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{20} \sin 2t.$$

□

Analizamos el trabajo realizado en los dos últimos ejemplos. Al inicio identificamos los factores cuadráticos irreducibles y las raíces de  $Q(s)$ . Después por cada factor del tipo  $(s-a)^2 + b^2$  propusimos que aparecieran los siguientes términos en el desarrollo en fracciones parciales

$$\frac{A(s-a) + bB}{(s-a)^2 + b^2}$$

lo que nos llevó directamente a los términos que debe contener la transformada inversa

$$A \cos(bt)e^{at} + B \sin(bt)e^{at}. \quad (6.52)$$

El cálculo de los coeficientes lo hicimos multiplicando  $F(s)$  por el factor irreducible y evaluando en la raíz  $s = a + bi$ , es decir:

$$\lim_{s \rightarrow a+bi} [(s-a)^2 + b^2] F(s) = A(s-a) + Bb \Big|_{s=a+bi} = Abi + Bb.$$

De aquí igualamos las partes reales e imaginarias de la ecuación para obtener el resultado:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{b} \operatorname{Im} \lim_{s \rightarrow a+bi} [(s-a)^2 + b^2] F(s); \\ B &= \frac{1}{b} \operatorname{Re} \lim_{s \rightarrow a+bi} [(s-a)^2 + b^2] F(s). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Estas son expresiones generales que podemos utilizar siempre que tengamos factores cuadráticos simples e irreducibles en  $Q(s)$  y son parte central del método de Heaviside que establecemos a continuación.

• **Método de Heaviside**

1. Determinar todas las raíces complejas  $a + bi$  de multiplicidad 1 de  $Q(s)$ .
2. Calcular los coeficientes  $A$  y  $B$  usando (6.53).
3. Calcular el término (6.52) y sumarlo en la transformada inversa.

Apliquemos el método en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 6.5.22** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{3s+4}{(s^2+1)(s+2)}$ .

▼ Notemos primero que  $Q(s) = (s^2+1)(s+2)$  sólo tiene el factor cuadrático irreducible  $s^2+1$  cuyas raíces son  $s = a \pm bi = \pm i$ , de donde identificamos que  $a = 0$  y  $b = 1$ . Además se tiene un factor lineal  $s+2$  con raíz  $s = -2$ . En consecuencia, la transformada inversa de  $F(s)$  es una combinación lineal de las funciones  $\cos t$ ,  $\sin t$  &  $e^{-2t}$ , es decir:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A \cos t + B \sin t + C e^{-2t}$$

donde los coeficientes  $A$  y  $B$  están dados por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{b} \operatorname{Im} \lim_{s \rightarrow a+bi} [(s-a)^2 + b^2] F(s) = \operatorname{Im} \lim_{s \rightarrow i} [(s^2+1)F(s)] = \operatorname{Im} \frac{3s+4}{s+2} \Big|_{s=i} = \\ &= \operatorname{Im} \frac{3i+4}{i+2} = \operatorname{Im} \frac{(3i+4)(2-i)}{(i+2)(2-i)} = \operatorname{Im} \frac{6i+8+3-4i}{5} = \frac{2}{5}. \\ B &= \frac{1}{b} \operatorname{Re} \lim_{s \rightarrow a+bi} [(s-a)^2 + b^2] F(s) = \operatorname{Re} \lim_{s \rightarrow i} [(s^2+1)F(s)] = \operatorname{Re} \frac{3s+4}{s+2} \Big|_{s=i} = \\ &= \operatorname{Re} \frac{3i+4}{i+2} = \operatorname{Re} \frac{(3i+4)(2-i)}{(i+2)(2-i)} = \operatorname{Re} \frac{6i+8+3-4i}{5} = \frac{11}{5}. \end{aligned}$$

El coeficiente  $C$  se calcula como:

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} [(s+2)F(s)] = \frac{3s+4}{s^2+1} \Big|_{s=-2} = \frac{-6+4}{4+1} = -\frac{2}{5}.$$

Finalmente, la transformada inversa de Laplace es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{2}{5} \cos t + \frac{11}{5} \sin t - \frac{2}{5} e^{-2t}.$$

□

**Ejemplo 6.5.23** Determinar la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{1}{s^4 + 4s^2}$ .

▼ Notemos que  $Q(s) = s^4 + 4s^2 = s^2(s^2 + 4)$  sólo tiene el factor cuadrático irreducible  $s^2 + 4$  cuyas raíces son  $s = a \pm bi = \pm 2i$ , de donde identificamos que  $a = 0$  y  $b = 2$ . También tiene un factor lineal  $s^2$  con raíz doble  $s = 0$ . Por lo tanto, la transformada inversa de  $F(s)$  es una combinación lineal de las funciones  $\cos 2t$ ,  $\sin 2t$ ,  $t$  &  $1$ , es decir:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A \cos 2t + B \sin 2t + Ct + D.$$

Los coeficientes  $A$  y  $B$  están dados por:

$$A = \frac{1}{b} \operatorname{Im} \lim_{s \rightarrow a+bi} [(s-a)^2 + b^2] F(s) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \lim_{s \rightarrow 2i} [(s^2 + 4)F(s)] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{1}{s^2} \Big|_{s=2i} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{-1}{4} = 0.$$

$$B = \frac{1}{b} \operatorname{Re} \lim_{s \rightarrow a+bi} [(s-a)^2 + b^2] F(s) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lim_{s \rightarrow 2i} [(s^2 + 4)F(s)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{s^2} \Big|_{s=2i} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{-1}{4} \right) = -\frac{1}{8}.$$

Por otra parte, los coeficientes  $C$  y  $D$  están dados por:

$$C = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2 F(s)] = \frac{1}{s^2 + 4} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4}.$$

$$D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s^2 F(s)] = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2 + 4} \right) \Big|_{s=0} = \left( \frac{-2s}{(s^2 + 4)^2} \right) \Big|_{s=0} = 0.$$

Finalmente, la transformada inversa de Laplace es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{8} \sin 2t + \frac{1}{4}t.$$

□

Podemos resumir lo que hemos hallado hasta aquí en el siguiente teorema, cuya demostración omitimos:

**Teorema 6.6** Si para el cociente de polinomios  $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  el grado del denominador  $Q(s)$  es mayor que el del numerador  $P(s)$  y si el denominador tiene un factor cuadrático de la forma  $(s-a)^2 + b^2$ , de modo que

$$Q(s) = [(s-a)^2 + b^2]Q_1(s) \text{ con } Q_1(a+ib) \neq 0,$$

entonces, denotando  $G(s) = \frac{P(s)}{Q_1(s)}$ ,  $G_I = \operatorname{Im} [G(a+ib)]$ ,  $G_R = \operatorname{Re} [G(a+ib)]$ , el término de  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  que corresponde al factor  $(s-a)^2 + b^2$  es:

$$\frac{e^{at}}{b} [G_I \cdot \cos bt + G_R \cdot \sin bt].$$

**Ejemplo 6.5.24** Encontrar la transformada inversa de  $F(s) = \frac{s^2 - 5s + 7}{(s-3)[(s-1)^2 + 4]}$ .

▼ Las raíces de denominador de  $Q(s)$  son  $3$  &  $1 \pm 2i$ , de modo que

$$F(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{Bs+C}{(s-1)^2 + 2^2}$$

de modo que usando los teoremas 6.5 y 6.6 obtenemos:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{3^2 - 5(3) + 7}{(3-1)^2 + 4} \cdot e^{3t} + \frac{e^t}{2} [G_I \cdot \cos 2t + G_R \cdot \sin 2t].$$

Donde  $G(s)$  es  $F(s)$  suprimiendo del denominador el factor en el cual  $1 + 2i$  es raíz, así:

$$G(s) = \frac{s^2 - 5s + 7}{s - 3},$$

por lo que

$$\begin{aligned} G(1 + 2i) &= \frac{(1 + 2i)^2 - 5(1 + 2i) + 7}{(1 + 2i) - 3} = \frac{1 + 4i - 4 - 5 - 10i + 7}{-2 + 2i} = \frac{-1 - 6i}{-2 + 2i} = \\ &= \frac{(-1 - 6i)(-2 - 2i)}{(-2)^2 + (2)^2} = \frac{(2 - 12) + i(2 + 12)}{8} = -\frac{10}{8} + \frac{14}{8}i = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4}i; \end{aligned}$$

luego  $G_R = -\frac{5}{4}$ ,  $G_I = \frac{7}{4}$ , así que

$$f(t) = \frac{1}{8}e^{3t} + \frac{e^t}{8} [7 \cos 2t - 5 \sin 2t].$$

□

**Ejemplo 6.5.25** Encontrar la transformada inversa de  $F(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 11}{[(s - 2)^2 + 3^2][(s - 3)^2 + 2^2]}$ .

▼ El Teorema 6.6 se puede aplicar aún cuando haya raíces complejas distintas, como es este caso. La componente correspondiente al primer factor cuadrático  $[(s - 2)^2 + 3^2]$ , cuyas raíces son  $2 \pm 3i$ , es:

$$\frac{e^{2t}}{3} [G_{1R} \cos 3t + G_{1I} \sin 3t]$$

con  $G_1(s)$  tomado de  $F(s)$  omitiendo del denominador el factor  $[(s - 2)^2 + 3^2]$  para el cual  $2 + 3i$  es raíz. Por lo tanto:

$$G_1(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 11}{(s - 3)^2 + 4}$$

De manera análoga la componente correspondiente al segundo factor cuadrático  $[(s - 3)^2 + 2^2]$ , cuyas raíces son  $3 + 2i$ , es:

$$\frac{e^{3t}}{2} [G_{2R} \cos 2t + G_{2I} \sin 2t]$$

con

$$G_2(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 11}{(s - 2)^2 + 9}$$

Calculamos primero los valores para  $G_1$ :

$$\begin{aligned} G_1(2 + 3i) &= \frac{(2 + 3i)^3 - 4(2 + 3i)^2 + 11}{(2 + 3i - 3)^2 + 4} = \frac{8 + 36i - 54 - 27i - 4(4 + 12i - 9) + 11}{1 - 6i - 9 + 4} = \\ &= \frac{8 - 54 + 20 + 11 + i(36 - 27 - 48)}{-4 - 6i} = \frac{-15 - 39i}{-4 - 6i} = \frac{15 + 39i}{4 + 6i} = \frac{(15 + 39i)(4 - 6i)}{4^2 - (6i)^2} = \\ &= \frac{60 + 234 + i(156 - 90)}{4^2 + 6^2} = \frac{294 + 66i}{52} = \frac{147}{26} + \frac{33}{26}i. \end{aligned}$$

Luego para  $G_2$

$$\begin{aligned} G_2(3 + 2i) &= \frac{(3 + 2i)^3 - 4(3 + 2i)^2 + 11}{(3 + 2i - 2)^2 + 9} = \frac{27 + 54i - 36 - 8i - 4(9 + 12i - 4) + 11}{1 + 4i - 4 + 9} = \\ &= \frac{27 - 36 - 20 + 11 + i(54 - 8 - 48)}{6 + 4i} = \frac{-9 - 2i}{6 + 4i} = \frac{-18 - 2i}{6 + 4i} = \frac{(-18 - 2i)(6 - 4i)}{6^2 + 4^2} = \\ &= \frac{-108 - 8 + i(72 - 12)}{52} = \frac{-116 + 60i}{52} = -\frac{29}{13} + \frac{15}{13}i. \end{aligned}$$

Por tanto, la transformada inversa buscada es:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{e^{2t}}{3} \left[ \frac{147}{26} \cos 3t + \frac{33}{26} \operatorname{sen} 3t \right] + \frac{e^{3t}}{2} \left[ -\frac{29}{13} \cos 2t + \frac{15}{13} \operatorname{sen} 2t \right] = \\ &= \frac{e^{2t}}{78} [147 \cos 3t + 33 \operatorname{sen} 3t] + \frac{e^{3t}}{26} [-29 \cos 2t + 15 \operatorname{sen} 2t]. \end{aligned}$$

□

### Factores cuadráticos irreducibles repetidos

En este caso que, basta para los objetivos del texto, considerar el ejemplo siguiente resuleto con la ecuación 6.45.

**Ejemplo 6.5.26** Determinar la Transformada inversa de  $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)^2}$ .

▼ Tenemos en este caso que  $Q(s) = s(s^2 + 1)^2 = s(s - i)^2(s + i)^2$  tiene dos raíces complejas dobles, a saber:  $s = i, -i$ . Así que, de acuerdo con la ecuación 6.45, tenemos que la transformada inversa es la suma de tres funciones  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s)e^{st}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{st}}{(s^2 + 1)^2} = 1. \\ f_2(t) &= \lim_{s \rightarrow i} \frac{d}{ds} [(s - i)^2 F(s)e^{st}] = \lim_{s \rightarrow i} \frac{d}{ds} \frac{e^{st}}{s(s + i)^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow i} \frac{(s(s + i)^2 t e^{st} - e^{st}((s + i)^2 + 2s(s + i)))}{s^2(s + i)^4} = \\ &= \frac{(i(2i)^2 t e^{it} - e^{it}((2i)^2 + 2i(2i)))}{i^2(2i)^4} = \frac{-4ite^{it} + 8e^{it}}{-16} = \frac{1}{4}ite^{it} - \frac{1}{2}e^{it}. \\ f_3(t) &= \lim_{s \rightarrow -i} \frac{d}{ds} [(s + i)^2 F(s)e^{st}] = \lim_{s \rightarrow -i} \frac{d}{ds} \frac{e^{st}}{s(s - i)^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -i} \frac{(s(s - i)^2 t e^{st} - e^{st}((s - i)^2 + 2s(s - i)))}{s^2(s - i)^4} = \\ &= \frac{(-i(-2i)^2 t e^{-it} - e^{-it}((-2i)^2 - 2i(-2i)))}{(-i)^2(-2i)^4} = \frac{4ite^{-it} + 8e^{-it}}{-16} = -\frac{1}{4}ite^{-it} - \frac{1}{2}e^{-it}. \end{aligned}$$

De forma que la transformada inversa está dada por:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 1 + \frac{1}{4}ite^{it} - \frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{4}ite^{-it} - \frac{1}{2}e^{-it} = \\ &= 1 + \frac{1}{4}it(e^{it} - e^{-it}) - \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \\ &= 1 + \frac{1}{4}it(2i \operatorname{sen} t) - \frac{1}{2}2 \cos t = 1 - \frac{1}{2}t \operatorname{sen} t - \cos t. \end{aligned}$$

□

**Ejercicios 6.5.1** Aplicación de la TL para resolver ED. *Soluciones en la página ??.*

Calcular  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  de las funciones siguientes, utilizando el método de Heaviside:

$$1. F(s) = \frac{3s+2}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}.$$

$$2. F(s) = \frac{2s}{(s-1)^2(s+2)^3}.$$

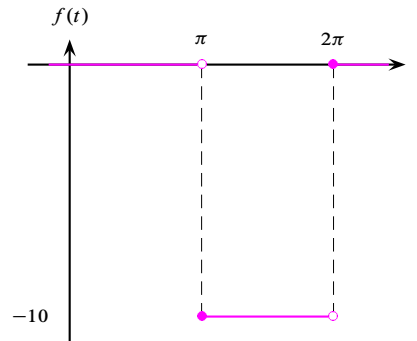
$$3. F(s) = \frac{s^2+s-1}{(s-1)^2(s^2+1)(s-3)}.$$

$$4. F(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s^2+4)(s^2+1)}.$$

$$5. F(s) = \frac{4}{(s^2+1)^3(s-2)}.$$

## 6.6 Aplicaciones

**Ejemplo 6.6.1** Consideremos un sistema masa-resorte con  $m = 2$  kg,  $c = 4$  N·m/s y  $k = 10$  N/m. Supongamos que el sistema está inicialmente en reposo y en equilibrio por lo cual  $x(0) = x'(0) = 0$  y que la masa es impulsada por una fuerza de excitación  $f(t)$  cuya gráfica se muestra en la figura siguiente: Encontrar la posición de la masa en cualquier instante.



▼ La posición  $x(t)$  de la masa  $m$  está dada por la solución del PVI:

$$2x''(t) + 4x'(t) + 10x(t) = f(t) = \begin{cases} -10 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi; \\ 0 & \text{si } t \notin [\pi, 2\pi). \end{cases} \quad \text{con } x(0) = x'(0) = 0.$$

La función  $f(t)$  puede escribirse como  $f(t) = -10[u(t-\pi) - u(t-2\pi)]$ , entonces por la linealidad de la TL tenemos:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{10e^{-2\pi s}}{s} - \frac{10e^{-\pi s}}{s}.$$

Ahora, tomamos TL en ambos miembros de la ED para obtener:

$$2[s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)] + 4[sX(s) - x(0)] + 10X(s) = F(s).$$

Al sustituir las condiciones iniciales y nuestro cálculo de  $F(s)$ , hallamos:

$$\begin{aligned} 2s^2 X(s) + 4sX(s) + 10X(s) &= \frac{10e^{-2\pi s}}{s} - \frac{10e^{-\pi s}}{s} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(s^2 + 2s + 5)X(s) &= \frac{10e^{-2\pi s}}{s} - \frac{10e^{-\pi s}}{s} \Rightarrow \\ \Rightarrow X(s) &= \frac{5e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)} - \frac{5e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para hallar  $x(t)$  lo único que resta es obtener la transformada inversa de Laplace. En primer lugar, por la primera propiedad de traslación, se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t.$$

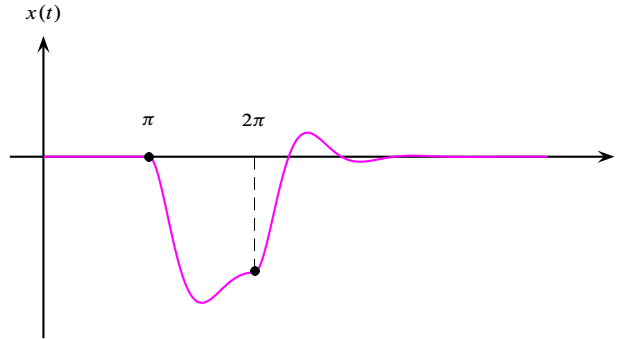
Luego, calculamos  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}\right\}$  utilizando la propiedad de la transformada de una integral:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}\right\} &= \int_0^t \frac{1}{2}e^{-u} \sin(2u) du = -\frac{1}{10} \left[ e^{-u} (2 \cos 2u + \sin 2u) \right]_0^t \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{10}e^{-t}[2 \cos 2t + \sin 2t].\end{aligned}$$

Finalmente, al utilizar la segunda propiedad de traslación y la periodicidad de las funciones seno y coseno, determinamos que:

$$\begin{aligned}x(t) &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 2s + 5)}\right\} = \\ &= \left\{1 - \frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}[2 \cos(2t - 4\pi) + \sin(2t - 4\pi)]\right\}u(t - 2\pi) - \\ &\quad - \left\{1 - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}[2 \cos(2t - 2\pi) + \sin(2t - 2\pi)]\right\}u(t - \pi) = \\ &= \left\{1 - \frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}[2 \cos 2t + \sin 2t]\right\}u(t - 2\pi) - \left\{1 - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}[2 \cos 2t + \sin 2t]\right\}u(t - \pi).\end{aligned}$$

Podemos apreciar, en la gráfica de la función posición  $x(t)$  que presentamos a continuación, la excitación que sobre el sistema tiene la función  $f(t)$  en el intervalo  $[\pi, 2\pi]$ . Nótese que después de que la fuerza cesa, el sistema tiende al reposo por efecto de la fuerza de amortiguamiento.



□

**Ejemplo 6.6.2** Calcular la corriente en un circuito en serie RLC cuyos componente son: una resistor de  $2\Omega$ , un inductor de  $1\text{ H}$ , un capacitor de  $1\text{ F}$  y una fuente de voltaje que suministra

$$V(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1; \\ 2 - t & \text{si } 1 \leq t \leq 2; \\ 0 & \text{si } t > 2, \end{cases} \quad \text{volts.}$$

Este es el ejemplo 6.1.3 de la introducción.

▼ Al sustituir los valores  $L$ ,  $R$ , y  $C$  en la ED del circuito:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V(t)$$

obtenemos la ecuación integro-diferencial:

$$\frac{dI}{dt} + 2I + \int_0^t I(t)dt = V(t) \quad \text{con} \quad I(0) = 0$$

Calculamos la TL de la función de voltaje. Lo primero que observamos es que:

$$V(t) = t + (2 - 2t)u(t - 1) + (t - 2)u(t - 2) = t - 2(t - 1)u(t - 1) + (t - 2)u(t - 2).$$

Por lo tanto, por la segunda propiedad de traslación,

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s^2}$$

Si ahora aplicamos TL en ambos miembros de la ecuación integro-diferencial utilizando las propiedades requeridas (transformada de una derivada y de una integral), encontramos:

$$s\tilde{I}(s) - I(0) + 2\tilde{I}(s) + \frac{\tilde{I}(s)}{s} = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s^2}, \text{ donde } I(t) \longleftrightarrow \tilde{I}(s)$$

Ahora, sustituyendo  $I(0) = 0$  y multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por  $s$ , hallamos:

$$s^2\tilde{I}(s) + 2s\tilde{I}(s) + \tilde{I}(s) = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s} \Rightarrow \tilde{I}(s) = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s(s+1)^2}$$

Todo lo que resta es el cálculo de la transformada inversa. Procedemos de la siguiente manera.

Primero, aplicamos fracciones parciales a la expresión  $\frac{1}{s(s+1)^2}$ ; obtenemos:

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right\} = 1 - e^{-t} - te^{-t}$$

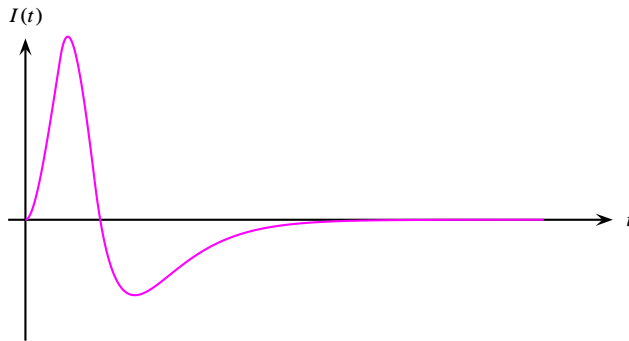
Aplicamos la segunda propiedad de traslación al resultado anterior:

$$\begin{aligned} I(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s(s+1)^2}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\} \end{aligned}$$

De donde:

$$I(t) = [1 - e^{-(t-2)} - (t-2)e^{-(t-2)}]u(t-2) - 2[1 - e^{-(t-1)} - (t-1)e^{-(t-1)}]u(t-1) + [1 - e^{-t} - te^{-t}].$$

La gráfica de la función de corriente es la siguiente.

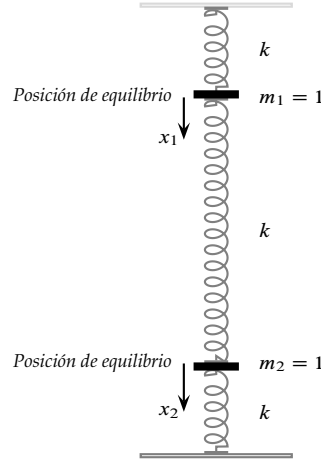


La corriente es prácticamente cero a partir del décimo segundo después del cierre del interruptor en el circuito.

□



**Ejemplo 6.6.3** Dos masas iguales de 1 kg, se encuentran vinculadas mediante tres resortes de masas despreciables y constantes de restitución  $k$ , como se muestra en la figura adjunta. El sistema está dispuesto verticalmente y las masas están desprovistas de rozamiento así como de fuerzas de excitación. Añadimos ahora la información desde la cual se rompe el equilibrio:  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ ,  $x_1'(0) = 3$ ,  $x_2'(0) = -3$ . Determinar la posición de cada masa en cualquier instante si  $k = 3$  N/m. Este es el ejemplo 6.1.2 de la introducción.



▼ Enumeramos los resortes de arriba hacia abajo con los números 1, 2 y 3. Cuando el sistema está en movimiento, el resorte 2 está sujeto a elongación y compresión, por consiguiente su elongación neta es  $x_2 - x_1$ . Por lo tanto, de la ley de Hooke deducimos que los resortes 1 y 2 ejercen fuerzas  $-kx_1$  y  $k(x_2 - x_1)$  respectivamente sobre la masa  $m_1$ . De esta manera, si no hay fuerzas externas ni fuerzas de amortiguamiento, entonces la fuerza neta sobre la masa  $m_1$  es  $-kx_1 + k(x_2 - x_1)$ . Ahora por la segunda ley de Newton, tenemos:

$$m_1 x_1'' = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

De manera similar, la fuerza neta ejercida en la masa  $m_2$  se origina por la elongación y compresión de los resortes 2 y 3. De manera más concreta, las fuerzas ejercidas sobre la masa 2 son, por el resorte 3,  $-kx_2$  y por el resorte 2,  $-k(x_2 - x_1)$ . Luego, por la segunda ley de Newton:

$$m_2 x_2'' = -kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

Si ahora sustituimos los valores de las masas  $m_1 = m_2 = 1$  y el valor de  $k = 3$ , obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones que resolveremos utilizando TL.

$$\begin{cases} x_1'' = -3x_1 + 3(x_2 - x_1) \\ x_2'' = -3x_2 - 3(x_2 - x_1) \end{cases} \quad \text{con } x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_1'(0) = 3 \text{ \& } x_2'(0) = -3.$$

Aplicamos TL en ambos miembros de cada ecuación, obtenemos:

$$\begin{cases} s^2 F(s) - sx_1(0) - x_1'(0) = -3F(s) + 3[G(s) - F(s)]; \\ s^2 G(s) - sx_2(0) - x_2'(0) = -3G(s) - 3[G(s) - F(s)]. \end{cases}$$

donde  $x_1(t) \longleftrightarrow F(s)$  &  $x_2(t) \longleftrightarrow G(s)$ . Si ahora aplicamos las condiciones iniciales el sistema anterior se convierte en:

$$\begin{cases} s^2 F(s) - s - 3 = -3F(s) + 3[G(s) - F(s)] \\ s^2 G(s) - s + 3 = -3G(s) - 3[G(s) - F(s)] \end{cases}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $F(s)$  y  $G(s)$ . Ordenamos el último sistema con el propósito de despejar nuestras incógnitas:

$$\begin{cases} (s^2 + 6)F(s) - 3G(s) = s + 3 \\ 3F(s) - (s^2 + 6)G(s) = -s + 3 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} (s^2 + 6)F(s) - 3G(s) = s + 3 \\ -3F(s) + (s^2 + 6)G(s) = s - 3 \end{cases}$$

Si utilizamos la regla de Cramer para la solución del anterior sistema, hallamos:

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 9s + 9}{s^4 + 12s^2 + 27} \quad \& \quad G(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 9s - 9}{s^4 + 12s^2 + 27}.$$

El denominador de cada una de las expresiones es el mismo, y puede escribirse como:

$$s^4 + 12s^2 + 27 = (s^2 + 6)^2 - 9 = (s^2 + 9)(s^2 + 3).$$

De esta manera:

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 9s + 9}{(s^2 + 9)(s^2 + 3)} \quad \& \quad G(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 9s - 9}{(s^2 + 9)(s^2 + 3)}.$$

De donde, al utilizar fracciones parciales, encontramos que:

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 9s + 9}{(s^2 + 9)(s^2 + 3)} = \frac{s}{s^2 + 3} + \frac{3}{s^2 + 9} \quad \& \quad G(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 9s - 9}{(s^2 + 9)(s^2 + 3)} = \frac{s}{s^2 + 3} - \frac{3}{s^2 + 9}.$$

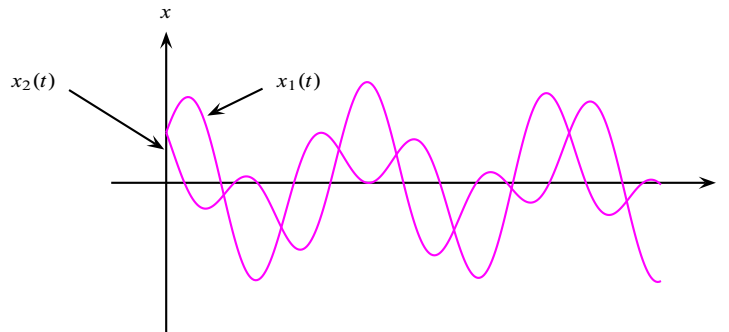
Por lo tanto,

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 3} + \frac{3}{s^2 + 9} \right\} = \cos(\sqrt{3}t) + \sin(3t)$$

y

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 3} - \frac{3}{s^2 + 9} \right\} = \cos(\sqrt{3}t) - \sin(3t)$$

La siguiente gráfica muestra ambas funciones.



□

### Ejercicios 6.6.1 Aplicaciones. Soluciones en la página 478.

Usar la TL para resolver los siguientes PVI.

1.  $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t$  con  $x(0) = x'(0) = 0$

2.  $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin 3t$  con  $x(0) = x'(0) = 0$

3.  $\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin t$  con  $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

4.  $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = f(t)$  con  $y(0) = y'(0) = 0$ , donde  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ \frac{t-5}{5} & \text{si } 5 \leq t < 10 \\ 1 & \text{si } t \geq 10 \end{cases}$

5.  $\frac{d^2y}{dt^2} + y = f(t)$  con  $y(0) = 0$  &  $y'(0) = 1$ , donde  $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ 3 & \text{si } t \geq 6 \end{cases}$

6.  $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = u(t - \pi) - u(t - 3\pi)$  con  $y(0) = y'(0) = 0$
7.  $\frac{d^2y}{dt^2} + y = I_0\delta(t)$  con  $y(0) = y'(0) = 0$
8.  $2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = \delta(t - 5)$  con  $y(0) = y'(0) = 0$
9.  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = \sin t + \delta(t - 3\pi)$  con  $y(0) = y'(0) = 0$
10.  $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \cos t \delta(t - 2\pi)$  con  $y(0) = 0$  &  $y'(0) = 1$
11. 
$$\begin{cases} 3\frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} = 1 \\ \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{con } x(0) = y(0) = 0$$
12. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y + \sin t \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y + 1 \end{cases} \quad \text{con } x(0) = 0 \text{ & } y(0) = 1$$
13. 
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + y = 1 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + x = 0 \end{cases} \quad \text{con } x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$$
14. 
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2x = 0 \\ 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \cos t \end{cases} \quad \text{con } x(0) = 0, x'(0) = 0 \text{ & } y(0) = 0$$
15.  $y(t) = t + \int_0^t y(u) \sin(t - u) du$
16. 
$$\begin{cases} y' + 2y + 6 \int_0^t z dt = -2u(t) \\ y' + z' + z = 0 \end{cases} \quad \text{con } y(0) = -5 \text{ & } z(0) = 6$$

Usar la transformada de Laplace para resolver cada uno de los siguientes problemas.

17. Calcular  $y(t)$  si  $y' + 3y + 2 \int_0^t y dt = f(t)$  con  $y(0) = 1$  y  $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 1 \leq t \leq 2; \\ 0 & \text{si } t \notin [1, 2]. \end{cases}$
18. Un circuito eléctrico consiste de una resistencia de  $R$  ohms en serie con un condensador de capacitancia  $C$  faradios, un generador de  $E$  volts y un interruptor. Si en el tiempo  $t = 0$  se cierra el interruptor y si la carga inicial en el capacitor es cero, determine la carga en el condensador en cualquier tiempo. Suponer que  $R$ ,  $C$  y  $E$  son constantes.
19. Un paracaidista cae desde el reposo. El peso combinado de él y su paracaídas es  $W$ . El paracaídas ejerce una fuerza en ambos (por resistencia del aire) que es proporcional a la velocidad durante la caída, esto es  $F_R \propto v$ . El paracaidista cae hacia abajo, y se requiere hallar su posición en cualquier momento.
  - a. Si se supone que el paracaídas está abierto desde el momento inicial.

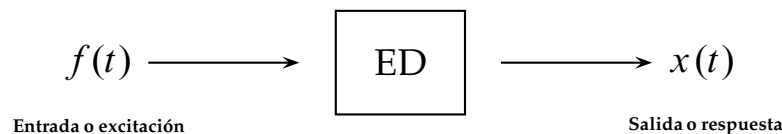
- b. Si se supone que el paracaídas se abre 10 segundos después de iniciada la caída.
20. Un líquido transporta una droga en un órgano de volumen  $V_0 \text{ cm}^3$  a una tasa de  $\alpha \text{ cm}^3/\text{s}$  y sale a una tasa de  $\beta \text{ cm}^3/\text{s}$ , donde  $V_0$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes. Supongamos que en el tiempo  $t = 0$  la concentración de la droga es 0 y al administrar la droga, dicha concentración aumenta linealmente hasta un máximo de  $k$  en el tiempo  $t = t_0$ , en el cual el proceso se detiene.
- a. Determinar la concentración de la droga en el órgano en todo instante  $t$ .
- b. Calcular la concentración pico de la droga, es decir, el máximo valor de su concentración en el órgano.
21. Una masa que pesa 32 lb se encuentra sujeta al extremo de un resorte ligero que se estira 1 pie cuando se le aplica una fuerza de 4 lb. Si la masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio cuando  $t = 0$  y si en ese instante se aplica una fuerza de excitación  $f(t) = \cos(2t)$  que cesa abruptamente en  $t = 2\pi$  segundo, determinar la función de posición de la masa en cualquier instante si se permite a la masa continuar su movimiento sin impedimentos.
22. Un circuito  $RLC$ , con  $R = 110 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  y  $C = 0.001 \text{ F}$  tiene conectada una batería que proporciona 90 volts. Suponga que en  $t = 0$  no hay corriente en el circuito ni carga en el condensador, y que en el mismo instante se cierra el interruptor por un segundo. Si al tiempo  $t = 1$  se abre el interruptor y así se conserva, encontrar la corriente resultante en el circuito.
23. Una masa de 1 g se sujeta a un resorte cuya constante es  $k = 4 \text{ dina/cm}$ , la masa se aparta del reposo en  $t = 0$  a 3 cm bajo la posición de equilibrio y se deja vibrar sin amortiguamiento ni perturbación hasta que en el instante  $t = 2\pi$  se le da un golpe con un martillo que le produce un impulso  $p = 8$ . Determinar el movimiento de la masa.

## 6.7 Teorema de convolución y la delta de Dirac

En el análisis de sistemas lineales, como en los sistemas vibratorios (mecánicos y eléctricos), uno de los objetivos es conocer la respuesta (o salida) del sistema provocada por una función de excitación (o entrada). En secciones anteriores modelamos sistemas vibratorios mediante ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\alpha x''(t) + \beta x'(t) + \gamma x(t) = f(t),$$

donde  $f(t)$  es una función de excitación (o entrada) del sistema, mientras que  $x(t)$  es la respuesta (o salida) a esta excitación. De esta manera, el propósito de resolver un PVI es determinar cómo la ED (una caja negra) transforma una función de entrada  $f(t)$  en una salida  $x(t)$  cuando se conocen las condiciones iniciales  $x(0)$  &  $x'(0)$ . La siguiente figura es una representación de estos elementos



En este capítulo, un PVI:

$$\alpha x''(t) + \beta x'(t) + \gamma x(t) = f(t) \quad \text{con} \quad x(0) = 0 \text{ \& } x'(0) = 0 \quad (6.54)$$

ha sido resuelto, aplicando TL a la ED anterior. No obstante existen problemas que llevan a PVI similares a (6.54) los cuales no siempre permiten encontrar la solución de manera directa. La razón es que no se conoce con precisión, cómo afecta la caja negra a la función de entrada. Para resolver este tipo de problemas, se introducen al sistema funciones de entrada que se conocen como impulsos y una vez conocida la respuesta a estos impulsos se obtiene la salida  $x(t)$  mediante una operación llamada *convolución* es una extensión, básicamente, de la propiedad de *superposición*.

## La delta de Dirac

Consideremos una fuerza  $f(t)$  que actúa sólo durante un intervalo de tiempo muy pequeño  $a \leq t \leq b$ , con  $f(t) = 0$  para todo valor de  $t$  fuera del intervalo. Ejemplos típicos de este tipo de fuerzas serían, la fuerza impulsiva de un bat que golpea una pelota (el impacto es casi instantáneo) o bien un rápido aumento de voltaje (resultante de la descarga de un rayo), por ejemplo. En tales situaciones, el principal efecto de la fuerza depende sólo del valor de la integral:

$$p = \int_a^b f(t) dt \quad (6.55)$$

y no es influenciado por la forma precisa en que varía  $f(t)$ . El número  $p$  de la ecuación (6.55) se llama *impulso* de la fuerza  $f(t)$  sobre el intervalo  $[a, b]$ .

Ahora bien, en el caso de una fuerza  $f(t)$  que actúa sobre una partícula de masa  $m$  constante, se tiene por la segunda ley de Newton:

$$f(t) = mv'(t) = \frac{d}{dt}[mv(t)]$$

De donde, por el teorema fundamental del cálculo:

$$p = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[mv(t)] dt = mv(t) \Big|_a^b = mv(b) - mv(a).$$

A cada término en el miembro derecho del resultado anterior se le llama momento lineal, así que el impulso de la fuerza es igual a la variación del momento lineal de la partícula. En la práctica, el cambio en el momento lineal es el único efecto que interesa, por lo tanto sólo necesitamos conocer el impulso de la fuerza; no necesitamos conocer ni la función precisa  $f(t)$  ni el lapso exacto durante el cual actúa la fuerza. Si ahora seleccionamos un número fijo  $\varepsilon > 0$  que se aproxime a la duración de ese lapso y reemplazamos a  $f(t)$  por:

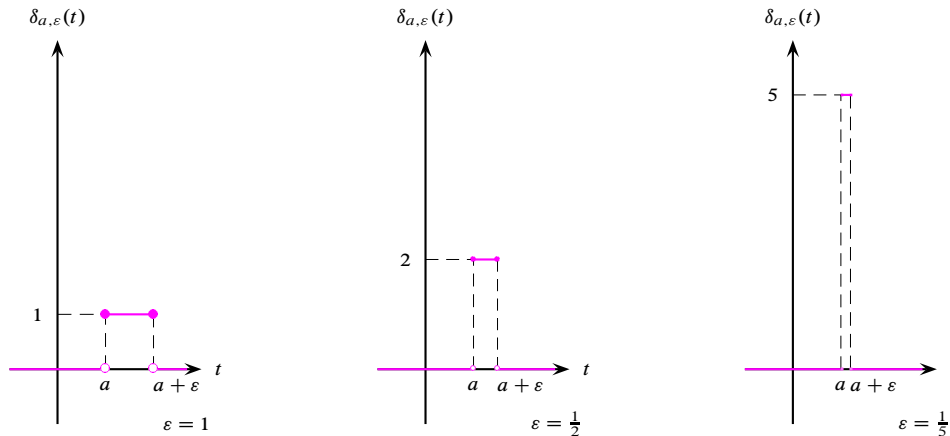
$$\delta_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } a \leq t \leq a + \varepsilon; \\ 0 & \text{si } t \notin [a, a + \varepsilon]. \end{cases} \quad (6.56)$$

entonces, para  $b = a + \varepsilon$ , el impulso de  $\delta_{a,\varepsilon}(t)$  sobre el intervalo  $[a, b]$  es:

$$p = \int_a^b \delta_{a,\varepsilon}(t) dt = \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1$$

Así,  $f(t) = \delta_{a,\varepsilon}(t)$  tiene un impulso unitario, cualquiera que sea el número  $\varepsilon > 0$ .

Notemos el comportamiento de  $\delta_{a,\varepsilon}(t)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  por medio de las siguientes gráficas:



Como el lapso preciso durante el cual actúa la fuerza no parece ser importante, resulta tentador pensar en un impulso instantáneo que ocurra precisamente en el tiempo  $t = a$ . Así, parece razonable pensar que esta idea la conseguiríamos bajo un proceso de límite, concretamente cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Si adoptamos este proceso, tendríamos:

$$\delta(t - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{a,\varepsilon}(t).$$

Encaminados por las consideraciones formales, si también pudiéramos intercambiar el límite con el signo de integral, se seguiría que:

$$\int_0^\infty \delta(t - a) dt = \int_0^\infty \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{a,\varepsilon}(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{a+\varepsilon} \delta_{a,\varepsilon}(t) dt = 1. \quad (6.57)$$

Pero el límite, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , en (6.56) da:

$$\delta(t - a) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = a; \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases} \quad (6.58)$$

Es claro que ninguna función puede satisfacer a la vez las condiciones (6.57) y (6.58). En primer lugar, la sola presencia del símbolo  $+\infty$  nos hace ver que  $\delta$  no es una función en el sentido usual. Además, aceptando ver en el símbolo  $+\infty$  un número, la función cuyo valor es cero en todas partes con la excepción de un solo punto proporciona 0 como valor de la integral y no 1 como hemos obtenido. Alrededor de 1950, después de que los ingenieros y físicos habían estado usando amplia y fructíferamente la función delta por casi 20 años sin una justificación rigurosa, el matemático francés Laurent Schwartz desarrolló la teoría matemática de las funciones generalizadas que proporcionó el fundamento lógico para las técnicas basadas en la delta de Dirac. El símbolo  $\delta(t - a)$ , se llama *delta de Dirac* en  $a$ , en honor al físico teórico británico P.A.M. Dirac que en los primeros años de la década de 1930 la introdujo suponiendo que disfrutaba de las propiedades (6.57) y (6.58).

Como  $\delta(t - a)$  no es una función, soslayaremos el problema de su definición yendo en todo caso a la consideración de su efecto operativo. El siguiente cálculo motiva el significado que le asignaremos. Si  $h(t)$  es una función continua en un intervalo que contenga a  $[a, a + \varepsilon]$ , entonces el teorema del valor medio para integrales implica que:

$$\int_a^{a+\varepsilon} h(t) dt = \varepsilon h(t_0).$$

Para algún punto  $t_0$  en el intervalo  $[a, a + \varepsilon]$ . De esta manera:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty h(t) \delta_{a,\varepsilon}(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{a+\varepsilon} h(t) \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon h(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(t_0) = h(a).$$

En la última igualdad hemos utilizado la continuidad de  $h$ .

Si en el cálculo anterior pudiéramos intercambiar el límite con la integral [como ya hemos supuesto en (6.57)], entonces tendríamos que:

$$\int_0^\infty h(t) \delta(t - a) dt = h(a) \quad (6.59)$$

Note entonces que si se aplica un impulso  $p$  en  $t = a$ , entonces la fuerza aplicada se puede modelar por  $f(t) = p\delta(t - a)$ .

**Ejemplo 6.7.1** Calcular la TL de  $f(t) = \delta(t - a)$ .

▼ Usando (6.59), con  $h(t) = e^{-st}$ :

$$\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - a) dt = e^{-as}.$$

□

- De acuerdo a las consideraciones anteriores, formalmente podemos decir que la derivada de la función escalón unitario es la delta de Dirac. Es decir:

$$u'(t - a) = \delta(t - a) \quad (6.60)$$

▼ En efecto, observamos que

$$\delta_{a,\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon} [u(t - a) - u(t - a - \varepsilon)],$$

de donde

$$\delta(t - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{a,\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t - a) - u(t - a - \varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t - a - \varepsilon) - u(t - a)}{-\varepsilon} =$$

tomando  $h = -\varepsilon$  se tiene que:  $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow h \rightarrow 0$ ,

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t - a + h) - u(t - a)}{h} = u'(t - a).$$

□

Ahora podemos resolver el siguiente ejemplo, presentado en la introducción.

**Ejemplo 6.7.2** (Problema 6.1.4 de la introducción).

Una masa unida a un resorte se libera desde el reposo a dos metros por debajo de la posición de equilibrio y comienza a vibrar. Después de 5 s, la masa recibe un golpe que suministra un impulso (momento lineal) sobre la masa de 8 N·s dirigido hacia abajo. Hallar la posición de la masa en cualquier instante.

▼ El sistema queda descrito por el siguiente PVI:

$$mx''(t) + kx(t) = 8\delta(t - 5) \quad \text{con} \quad x(0) = 2 \text{ \& } x'(0) = 0.$$

Dividiendo entre  $m$

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{8}{m}\delta(t - 5) \quad \text{con} \quad x(0) = 2 \text{ \& } x'(0) = 0.$$

Tal y como hicimos en el capítulo sobre vibraciones, consideramos  $w^2 = \frac{k}{m}$ . Al aplicar TL en ambos miembros de la ED:

$$x''(t) + w^2x(t) = \frac{8}{m}\delta(t - 5)$$

Obtenemos:

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + w^2X(s) = \frac{8}{m}e^{-5s}.$$

Así, al sustituir las condiciones iniciales, encontramos:

$$(s^2 + w^2)X(s) = 2s + \frac{8}{m}e^{-5s}$$

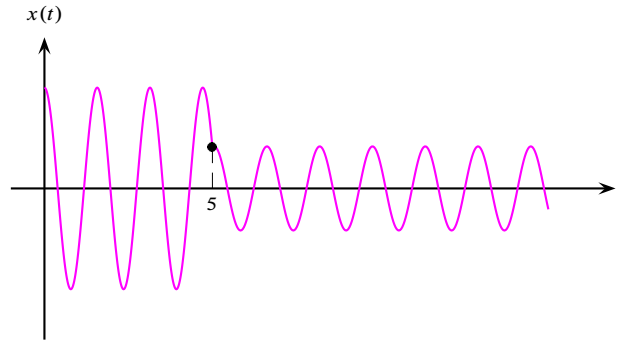
de donde:

$$X(s) = \frac{2s + \frac{8}{m}e^{-5s}}{s^2 + w^2} = \frac{2s}{s^2 + w^2} + \frac{8}{m} \frac{e^{-5s}}{s^2 + w^2}.$$

Lo único que resta es obtener  $x(t)$  mediante el cálculo de la TL inversa. De esta manera:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{s^2 + w^2} \right\} + \frac{8}{m} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-5s}}{s^2 + w^2} \right\} = \\ &= 2 \cos wt + \frac{8}{mw} u(t - 5) \sin[w(t - 5)] = \\ &= 2 \cos wt + \frac{8}{\sqrt{mk}} u(t - 5) \sin[w(t - 5)]. \end{aligned}$$

Observemos que dada la presencia de la función  $u(t - 5)$ , el efecto que tiene el impulso sobre el sistema sólo es detectable para  $t \geq 5$ . La gráfica de la función de posición es la siguiente.



En la gráfica resulta notoria la perturbación que se imprime al sistema en el tiempo  $t = 5$  segundos por efecto del impulso aplicado. Obsérvese que en ese momento, la masa está debajo de la posición de equilibrio y se va dirigiendo hacia esta posición cuando recibe un golpe justo en la dirección contraria, lo que explica por qué la oscilación se aminora y además por qué se aprecia en ese instante un cambio abrupto en la dirección tangencial sobre la gráfica.

□

## Convolución

Como hemos indicado, es posible determinar la respuesta que sobre un sistema eléctrico tiene un impulso, llamado también pulso, de corta duración. Así, si se excita al sistema con un pulso  $\delta(t)$  podemos obtener su respuesta  $h(t)$ , llamada respuesta al impulso. Si el impulso se aplica en el tiempo  $t = s$ , lo único que ocurre es un retraso en la salida y ésta será  $h(t - s)$ . Si ahora, el impulso tuviese una intensidad diferente de la unidad en  $t = s$ , por ejemplo  $f(s)\delta(t - s)$ , entonces por la linealidad la salida será  $f(s)h(t - s)$ . Si consideramos la suma de todas las entradas de este tipo, entonces la función de excitación es

$$\int_0^\infty f(s)\delta(t - s) ds = f(t) \quad \text{por la propiedad (6.59).}$$

Por otro lado, como una extensión de la propiedad de superposición para ED lineales, deducimos que la respuesta del sistema es:

$$x(t) = \int_0^\infty f(s)h(t - s) ds. \quad (6.61)$$

Las figuras siguientes corresponden a diferentes funciones de excitación y salidas correspondientes:

$$\begin{array}{lclclcl} \delta(t) & \longrightarrow & \boxed{\text{ED}} & \longrightarrow & h(t) & \quad \delta(t-s) & \longrightarrow & \boxed{\text{ED}} & \longrightarrow & h(t-s) \\ f(s)\delta(t-s) & \longrightarrow & \boxed{\text{ED}} & \longrightarrow & f(s)h(t-s) & \quad \int_0^\infty f(s)\delta(t-s) ds & \longrightarrow & \boxed{\text{ED}} & \longrightarrow & \int_0^\infty f(s)h(t-s) ds \end{array}$$

El miembro derecho del último resultado (6.61) se conoce como convolución de  $f$  con  $h$  y se escribe  $f(t) * h(t)$ , Por lo tanto:

$$x(t) = f(t) * h(t) = \int_0^\infty f(s)h(t - s) ds.$$

La forma general de convolución entre  $h(t)$  &  $f(t)$  puede simplificarse debido a que la respuesta al impulso  $h(t)$  cumple  $h(t) = 0$  si  $t < 0$ . De esta forma  $h(t - s) = 0$  para  $s > t$ . De donde deducimos que podemos cambiar el límite superior de integración a  $t$  en lugar de  $\infty$ . De esta manera tenemos la siguiente definición:

- La convolución de las funciones  $y$  &  $h$ , escrita como,  $y * h$  se define mediante:

$$x(t) = \int_0^t y(s)h(t - s)ds = y(t) * h(t)$$



**Ejemplo 6.7.3** Obtener la convolución  $f * g$  de las funciones  $f(t) = e^{-t}$  &  $g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha$  constante.



$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t f(s)g(t-s) ds = \int_0^t e^{-s} \alpha e^{-\alpha(t-s)} ds = \alpha \int_0^t e^{-\alpha t} e^{(\alpha-1)s} ds = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} e^{-\alpha t} \left[ e^{(\alpha-1)s} \right] \Big|_0^t = \frac{\alpha}{\alpha-1} e^{-\alpha t} \left[ e^{(\alpha-1)t} - 1 \right] = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} [e^{-t} - e^{-\alpha t}] \quad \text{si } \alpha \neq 1. \end{aligned}$$

Si  $\alpha = 1$ , tenemos:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) ds = \int_0^t e^{-s} e^{-\alpha(t-s)} ds = \int_0^t e^{-s} e^{-t} e^s ds = e^{-t} \int_0^t ds = t e^{-t}.$$

De esta forma:

$$f(t) * g(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} [e^{-t} - e^{-\alpha t}] & \text{si } \alpha \neq 1; \\ t e^{-t} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

□

En esta sección tenemos tres resultados importantes:

1. Para una función  $h(t)$  continua

$$\int_0^\infty h(t)\delta(t-a) dt = h(a) \quad \text{con } a > 0.$$

2. La derivada de la función escalón unitario es la delta de Dirac:

$$u'(t-a) = \delta(t-a).$$

3. La respuesta  $x(t)$  de un sistema de la forma:

$$\alpha x''(t) + \beta x'(t) + \gamma x(t) = f(t) \quad \text{con } x(0) = 0 \text{ & } x'(0) = 0,$$

se puede hallar calculando la convolución de la función excitación  $f(t)$  con la función respuesta al impulso  $h(t)$ , es decir:

$$x(t) = f(t) * h(t) = \int_0^t f(s)h(t-s) ds.$$

- **Teorema.** Las siguientes propiedades se cumplen para la convolución.

1. Conmutatividad:  $f * g = g * f$ .
2. Asociatividad:  $(f * g) * h = f * (g * h)$ .
3.  $f(t) * g(t) \longleftrightarrow F(s)G(s)$ .

**Ejemplo 6.7.4** Hallar la convolución de  $f(t) = \sin t$  &  $g(t) = \delta(t)$ .



$$f(t) * \delta(t) = \int_0^t f(s)\delta(t-s) ds = f(t) = \sin t.$$

□

**Ejemplo 6.7.5** Hallar  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3 + 4s} \right\}$ .

▼ Escribimos:

$$\frac{1}{s^3 + 4s} = \frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 4}.$$

Entonces, con  $F(s) = \frac{1}{s}$  &  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$ , distinguimos que  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$  &  $g(t) \longleftrightarrow G(s)$  donde:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \quad \& \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3 + 4s}\right\} = f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = \int_0^t g(s)f(t-s) ds = \int_0^t \frac{1}{2} \sin 2s ds = -\frac{1}{4} \cos 2s \Big|_0^t = \frac{1}{4} [1 - \cos 2t].$$

Notemos que en lugar de calcular  $f(t) * g(t)$  procedimos al cálculo de  $g(t) * f(t)$  porque éste produce una integral más sencilla de realizar. □

**Ejemplo 6.7.6** Resolver la ecuación integro-diferencial:

$$x(t) = 5 \cos t + \int_0^t x(s)(t-s) ds.$$

▼ Si  $f(t) = t$ , entonces la ecuación puede ser escrita como:

$$x(t) = 5 \cos t + x(t) * f(t).$$

Si ahora aplicamos TL en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{5 \cos t\} + \mathcal{L}\{x(t) * f(t)\} \Rightarrow \\ \Rightarrow X(s) &= 5 \frac{s}{s^2 + 1} + X(s) \cdot \frac{1}{s^2} \Rightarrow X(s) \left[1 - \frac{1}{s^2}\right] = \frac{5s}{s^2 + 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow X(s) \left[\frac{s^2 - 1}{s^2}\right] &= \frac{5s}{s^2 + 1} \Rightarrow X(s) = \frac{5s^3}{(s^2 - 1)(s^2 + 1)} = \frac{\frac{5}{4}}{s - 1} + \frac{\frac{5}{4}}{s + 1} + \frac{5s}{2(s^2 + 1)}. \end{aligned}$$

donde el último resultado se obtuvo por fracciones parciales. Por lo tanto, al aplicar TL inversa:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{4}}{s - 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{4}}{s + 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{2(s^2 + 1)}\right\} = \\ &= \frac{5}{4}e^t + \frac{5}{4}e^{-t} + \frac{5}{2} \cos t. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 6.7.7** La respuesta al impulso unitario de un sistema es  $h(t) = e^{-t}$ . Obtener la respuesta  $x(t)$  dada la función de excitación  $y(t) = tu(t)$  si las condiciones iniciales son  $x(0) = 0$  &  $x'(0) = 0$ .

▼ La respuesta se obtiene a través de la convolución, tenemos:

$$x(t) = y(t) * h(t) = h(t) * y(t) = \int_0^t h(s)y(t-s) ds$$

De modo que:

$$x(t) = \int_0^t e^{-s}(t-s)u(t-s) ds = \int_0^t (t-s)e^{-s} ds.$$

Si ahora integramos por partes, con  $u = t - s$ ,  $dv = e^{-s} ds$  &  $t$  constante, obtenemos:

$$x(t) = -(t-s)e^{-s} \Big|_0^t - \int_0^t e^{-s} ds = t + \left(e^{-s} \Big|_0^t\right) = t + e^{-t} - 1.$$

□

**Ejercicios 6.7.1** Teorema de convolución y la delta de Dirac. *Soluciones en la página 479.*  
En cada uno de los siguientes casos, hallar la transformada de Laplace.

1. Calcular la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones.

a.  $f(t) = e^t \delta(t - 2)$ .

b.  $g(t) = t \delta(t - 1)$ .

c.  $h(t) = t e^{-t} \delta(t + 1)$ .

2.  $f(t) = \int_0^t (t - u)^2 \cos 2u \, du$ .

3.  $g(t) = \int_0^t (t - u) e^u \, du$ .

4.  $h(t) = \int_0^t e^{-(t-u)} \operatorname{sen} u \, du$ .

5. Hallar  $y(t)$  si  $y(t) + \int_0^t (t - u) y(u) \, du = 1$ .

6. Determinar  $y(t)$  si  $y'(t) - \frac{1}{2} \int_0^t (t - u)^2 y(u) \, du = -t$ ;  $y(0) = 1$ .

7. Encontrar  $y(t)$  si  $y(t) + 2 \int_0^t \cos(t - u) y(u) \, du = e^{-t}$ .

8. Calcular  $y(t)$  si  $y'(t) + y(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t - u) y(u) \, du$ ;  $y(0) = 1$ .



## CAPÍTULO

# 7

## Métodos numéricos

### OBJETIVOS PARTICULARES

Al terminar este capítulo será capaz de aplicar los métodos de Euler, Euler modificado y Runge Kutta para resolver numéricamente una ecuación diferencial de primer orden.

### 7.1 Introducción

En el capítulo dos de este libro se presentó una amplia gama de métodos analíticos para resolver el PVI

$$y' = f(x, y) \quad \text{con } y(x_0) = y_0.$$

Estudiamos los métodos para resolver ecuaciones separables, exactas, homogéneas y lineales entre otras. Sin embargo, no todas las ecuaciones diferenciales de primer orden pueden clasificarse dentro de estos tipos y con frecuencia no es posible determinar soluciones por métodos analíticos. Por esta razón es necesario considerar estrategias diferentes que, lejos de resolver la ED analíticamente, permiten al menos obtener soluciones aproximadas.

Una primera posibilidad es utilizar aproximaciones polinomiales; estos métodos se basan en el uso de polinomios de grado  $n$  que se acercan a la solución exacta en un intervalo dado. De tal forma que entre mayor sea el grado utilizado mayor será la precisión del método y mejor será la aproximación en el intervalo.

Una segunda posibilidad es establecer estrategias numéricas de aproximación. Estos métodos se basan en la evaluación de la función  $f(x, y)$  en varios puntos de forma que sea posible estimar la solución de la ED en un punto dado.

Se presentan en este capítulo tres métodos basados en algoritmos numéricos.

El primero de ellos será el método de *Euler* que consiste en usar una aproximación lineal de la solución.

El segundo método que analizaremos será el de *Euler-Mejorado* que tiene relación con la aproximación cuadrática de la solución.

Finalizaremos el capítulo describiendo el método de *Runge-Kutta* que se relaciona con la aproximación polinomial de Taylor de la solución de orden cuatro.

## 7.2 Método de Euler

En general, la solución de un PVI,  $y' = f(x, y)$  con  $y(x_0) = y_0$ , es una función  $y(x)$  que se puede desarrollar mediante un polinomio de Taylor en  $x = x_0$  de cualquier orden.

La aproximación más simple, conocida como **aproximación lineal**, se obtiene al desarrollar la solución  $y(x)$  mediante un polinomio de Taylor de orden uno, en este caso tenemos

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = y(x_0) + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Podemos observar que la solución se aproxima por medio de una línea recta que coincide con la ecuación de la recta tangente a la curva solución en  $x = x_0$ . Esta aproximación produce buenos resultados sólo para puntos cercanos al punto  $x = x_0$ . Por ejemplo, si deseamos conocer el valor de  $y(x)$  cuando la variable independiente toma el valor  $x = x_0 + h$ , un punto cercano a  $x_0$ , tenemos:

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + y'(x_0)h = y(x_0) + f(x_0, y_0)h,$$

donde  $h = x - x_0$  es el cambio de  $x_0$  a  $x$ . Escribiremos  $\tilde{y}_1$  para representar a la cantidad de la derecha en la expresión anterior, es decir:

$$\tilde{y}_1(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h = y(x_0) + f(x_0, y_0)h.$$

Como en general  $y(x_0 + h) \neq \tilde{y}_1(x_0 + h)$  tendremos un error en la aproximación. Hay varias formas de medir el error, pero aquí nos interesa destacar el error absoluto, el relativo y el porcentual.

- El **error absoluto**  $EA$  es la diferencia positiva entre el valor exacto  $y(x_0 + h)$  y el aproximado  $\tilde{y}_1$ , es decir:

$$EA = |y(x_0 + h) - \tilde{y}_1(x_0 + h)|,$$

- El **error relativo**  $ER$  se obtiene tomando la razón que hay entre el error absoluto y el valor exacto  $y(x_0 + h)$  de la función

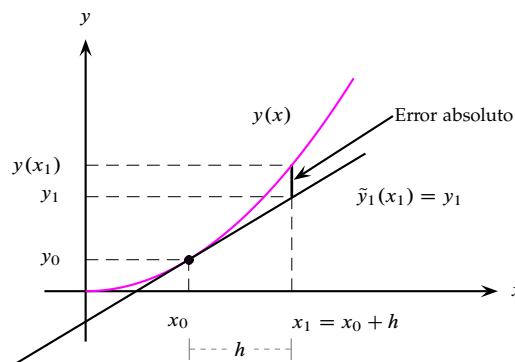
$$ER = \left| \frac{y(x_0 + h) - \tilde{y}_1(x_0 + h)}{y(x_0 + h)} \right|.$$

- El **error porcentual**  $EP$  de la aproximación está dado por:

$$EP = 100 \cdot ER\% = 100 \left| \frac{y(x_0 + h) - \tilde{y}_1(x_0 + h)}{y(x_0 + h)} \right| \%.$$

Todos estos errores pueden reducirse significativamente haciendo que el valor de  $h$  sea cada vez más pequeño, con lo cual se mejora la aproximación.

En la siguiente figura se ilustra gráficamente la curva solución  $y(x)$  y la aproximación en  $x_1 = x_0 + h$ , así como el error absoluto cometido.



**Ejemplo 7.2.1** Encuentre una aproximación de la solución en  $x = 0.1$  del PVI:  $y' = 2y$  con  $y(0) = 1$ .

▼ De la condición inicial tenemos

$$y(0) = 1 \Rightarrow y'(0) = 2y(0) = 2.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en el punto  $x = 0.1$  consideremos la aproximación lineal de la solución alrededor de  $x = 0$ :

$$\tilde{y}_1(h) = y(0) + y'(0)h = 1 + 2h.$$

Como  $h = 0.1$  tenemos:

$$\tilde{y}_1(0.1) = 1 + 2(0.1) = 1.2.$$

Por otra parte la solución analítica de este PVI es  $y(x) = e^{2x}$ . Si evaluamos esta expresión en  $x = 0.1$  tendremos el valor exacto

$$y_{exacto} = e^{0.2} \approx 1.2214.$$

Observemos que la aproximación lineal proporciona una cifra decimal exacta teniendo un error porcentual en la aproximación de:

$$EP = 100 \left| \frac{y_{exacto} - \tilde{y}_1}{y_{exacto}} \right| \% = 100 \left| \frac{1.2214 - 1.2}{1.2214} \right| \% = 1.75209\%.$$

□

**Ejemplo 7.2.2** Encuentre una solución aproximada en  $x = 1.2$  del PVI:  $y' = x - y$  con  $y(1) = 2$ .

▼ De la condición inicial tenemos:

$$y(1) = 2 \Rightarrow y'(1) = 1 - y(1) = 1 - 2 = -1.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en el punto  $x = 1.2$  consideremos la aproximación lineal de la solución alrededor de  $x = 1$ :

$$\tilde{y}_1(1 + h) = y(1) + y'(1)h = 2 - h.$$

Como  $h = x - x_0 = 1.2 - 1 = 0.2$  tenemos que:

$$\tilde{y}_1(1.2) = 2 - 0.2 = 1.8.$$

Por otra parte, la ecuación diferencial es lineal. Por lo tanto, si escribimos  $y' + y = x$ , el factor integrante es  $\mu = e^{\int dx} = e^x$ . Y la solución general es:

$$y = x - 1 + 2e^{1-x}.$$

Evalutando esta expresión en  $x = 1.2$  obtenemos el valor exacto:

$$y_{exacto} = 1.2 - 1 + 2e^{1-1.2} = 0.2 + 2e^{-0.2} \approx 1.83746.$$

Observemos que la aproximación lineal proporciona una cifra decimal de la solución exacta y el error porcentual en la aproximación es:

$$EP = 100 \left| \frac{y_{exacto} - \tilde{y}_1}{y_{exacto}} \right| \% = 100 \left| \frac{1.83746 - 1.8}{1.83746} \right| \% = 2.03868\%.$$

□

**Ejemplo 7.2.3** Encuentre una aproximación de la solución en  $x = 2.01$  del PVI:

$$y' = xy, \quad \text{con } y(2) = 4.$$

▼ En este caso tenemos:

$$y(2) = 4 \Rightarrow y'(2) = 2y(2) = 2(4) = 8.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en el punto  $x = 2.01$  consideremos primero la aproximación lineal de la solución alrededor de  $x = 2$ :

$$\tilde{y}_1(2+h) = y(2) + y'(2)h = 4 + 8h.$$

Como  $h = x - x_0 = 2.01 - 2 = 0.01$  tenemos que:

$$\tilde{y}_1(2.01) = 4 + 8(0.01) = 4.08.$$

Por otra parte, la ecuación diferencial es separable, de forma que separando variables e integrando resulta la solución general:

$$y = C e^{\frac{x^2}{2}}$$

y usando la condición inicial  $y(2) = 4$  tenemos  $C = 4e^{-2}$  por lo que la solución del PVI es:

$$y = 4e^{-2+\frac{x^2}{2}}.$$

Si evaluamos esta expresión en  $x = 2.01$  obtenemos el valor exacto:

$$y_{exacto} = 4e^{-2+\frac{(2.01)^2}{2}} \approx 4.0810.$$

La aproximación lineal proporciona dos cifras decimales de la solución exacta con un error porcentual de

$$EP = 100 \left| \frac{y_{exacto} - \tilde{y}_1}{y_{exacto}} \right| \% = 100 \left| \frac{4.08101 - 4.08}{4.08101} \right| \% = 0.0247\%.$$

□

**Ejemplo 7.2.4** Encuentre una aproximación de la solución en  $x = 0.9$  del PVI:

$$y' = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{con} \quad y(1) = 4.$$

▼ De la condición inicial tenemos

$$y(1) = 4 \Rightarrow y'(1) = \frac{1-4}{1+4} = \frac{-3}{5} = -0.6.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en el punto  $x = 0.9$  consideremos la aproximación lineal de la solución alrededor de  $x = 1$

$$\tilde{y}_1(1+h) = y(1) + y'(1)h = 4 - 0.6h.$$

En este caso tenemos  $h = x - x_0 = -0.1$ , por lo cual

$$\tilde{y}_1(0.9) = 4 - 0.6(-0.1) = 4.06.$$

Por otra parte, la ecuación diferencial es homogénea, proponemos entonces el cambio:

$$y = xu, \quad y' = u + xu'.$$

La ecuación diferencial se transforma en:

$$u + xu' = \frac{x - xu}{x + xu} \Rightarrow u + xu' = \frac{1-u}{1+u}.$$



Simplificando tenemos:

$$xu' = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1-u-u(1+u)}{1+u} = \frac{1-2u-u^2}{1+u} \Rightarrow \frac{1+u}{1-2u-u^2} du = \frac{dx}{x}.$$

Finalmente, integrando obtenemos:

$$-\frac{1}{2} \ln(1-2u-u^2) = \ln x + C \Rightarrow \ln(1-2u-u^2) + 2 \ln x = C.$$

Que podemos reescribir como:

$$\ln[(1-2u-u^2)x^2] = C \Rightarrow (1-2u-u^2)x^2 = C.$$

Si ahora usamos  $y = ux$  tenemos:

$$x^2 - 2ux^2 - u^2x^2 = C \Rightarrow x^2 - 2yx - y^2 = C.$$

Considerando la condición inicial  $y(1) = 4$  resulta:

$$C = 1 - 2(4) - 16 = -23 \Rightarrow x^2 - 2yx - y^2 = -23 \Rightarrow y^2 + 2xy - x^2 - 23 = 0.$$

Completando cuadrados tenemos:

$$y^2 + 2xy + x^2 = 2x^2 + 23 \Rightarrow (y+x)^2 = 2x^2 + 23 \Rightarrow y+x = \pm\sqrt{2x^2+23}.$$

Sólo consideramos el signo positivo porque la curva solución tiene que pasar por el punto  $(1, 4)$ , tenemos entonces:

$$y(x) = -x + \sqrt{2x^2 + 23}.$$

Si evaluamos esta expresión en  $x = 0.9$  tendremos el valor exacto :

$$y_{exacto} = -0.9 + \sqrt{2(0.9)^2 + 23} \approx 4.06185.$$

En este ejemplo, la aproximación lineal nos proporciona dos cifras decimales exactas de la solución, teniendo un error porcentual de

$$EP = 100 \left| \frac{y_{exacto} - \tilde{y}_1}{y_{exacto}} \right| \% = 100 \left| \frac{4.06185 - 4.06}{4.06185} \right| \% = 0.0455457\%.$$

□

En los siguientes ejercicios se muestra como aproximar la solución en dos pasos.

**Ejemplo 7.2.5** Considere el PVI:  $y' = x - y$  con  $y(1) = 2$ . Encuentre una aproximación de la solución en  $x = 1.1$ . Posteriormente use esta aproximación para determinar la solución en  $x = 1.2$ .

▼ La aproximación lineal de la solución alrededor de  $x = 1$  es:

$$\tilde{y}_1(1+h) = y(1) + y'(1)h = y(1) + [1 - y(1)]h = 2 + (1-2)h = 2 - h.$$

Considerando  $h = 0.1$  obtenemos:

$$\tilde{y}_1(1.1) = 2 - 0.1 = 1.9.$$

Ahora consideremos la aproximación lineal en  $x = 1.1$ , aquí tenemos:

$$\tilde{y}_1(1.1+h) = y(1.1) + y'(1.1)h = y(1.1) + [1.1 - y(1.1)]h = 1.9 - 0.8h.$$

Evalando en  $h = 0.1$  obtenemos la aproximación pedida:

$$\tilde{y}_1(1.2) = 1.9 - 0.8(0.1) = 1.82.$$

Evaluando la solución exacta  $y = x - 1 + 2e^{1-x}$  (ver ejemplo 7.2.2) en  $x = 1.2$  tenemos:

$$y_{\text{exacto}} = 1.2 - 1 + 2e^{1-1.2} = 0.2 + 2e^{-0.2} \approx 1.8375.$$

En este caso el error porcentual cometido en la aproximación está dada por:

$$EP = 100 \left| \frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_1}{y_{\text{exacto}}} \right| \% = 100 \left| \frac{1.8375 - 1.82}{1.8375} \right| \% = 0.9502\%.$$

que, en efecto, es menor que el cometido al calcular  $\tilde{y}_1(1.2)$  directamente con sólo una aproximación, como puede verse en el ejemplo 7.2.2, en el cual  $EP = 2.0386\%$ , en el cual  $EP = 2.03868\%$ . □

**Ejemplo 7.2.6** Considere el PVI:  $y' = xy$  con  $y(2) = 4$ . Encuentre una aproximación en  $x = 2.005$  de la solución, posteriormente úsela para determinar la solución en  $x = 2.01$ .

▼ De la condición inicial  $y(2) = 4$  tenemos que  $y'(2) = 2y(2) = 2(4) = 8$ . Si ahora queremos determinar un valor aproximado de la solución en el punto  $x = 2.01$  consideremos la aproximación lineal de la solución alrededor de  $x = 2$ , que está dada por:

$$\tilde{y}_1(2+h) = y(2) + y'(2)h = 4 + 8h.$$

Usando  $h = 0.005$  tenemos que:

$$\tilde{y}_1(2.005) = 4 + 8(0.005) = 4.04$$

Por otra parte, la aproximación lineal de la solución alrededor de  $x = 2.005$  es:

$$\tilde{y}_1(2.005+h) = y(2.005) + y'(2.005)h = y(2.005) + 2.005y(2.005)h.$$

Utilizando el resultado previo tenemos:

$$\tilde{y}_1(2.005+h) = 4.04 + 2.005(4.04)h = 4.04 + 8.1002h.$$

Evaluando esta expresión en  $h = 0.005$  obtenemos la aproximación pedida:

$$\tilde{y}_1(2.01) = 4.04 + 8.1002(0.005) = 4.0805.$$

Comparemos ahora esta aproximación con la solución exacta  $y = 4e^{-2+\frac{1}{2}x^2}$  (ver ejemplo 7.2.3) evaluada en el punto  $x = 2.01$ , es decir, si consideramos que

$$y_{\text{exacto}} = 4e^{-2+\frac{(2.01)^2}{2}} \approx 4.08101,$$

podemos notar que el error porcentual de la aproximación es:

$$EP = 100 \left| \frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_1}{y_{\text{exacto}}} \right| \% = 100 \left| \frac{4.08101 - 4.0805}{4.08101} \right| \% = 0.0124969\%.$$

Compare el resultado con el obtenido en el ejemplo 7.2.3, en el cual  $EP = 0.0247\%$ . □

**Ejemplo 7.2.7** Encuentre una aproximación de la solución en  $x = 0.9$  del PVI:

$$y' = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{con} \quad y(1) = 4.$$

Primero determine una aproximación de la solución en  $x = 0.95$  y posteriormente use su resultado para obtener la aproximación pedida.

▼ Procedamos como en los casos anteriores, primero consideremos la aproximación lineal de la solución alrededor de  $x = 1$ :

$$\tilde{y}_1(1+h) = y(1) + y'(1)h = y(1) + \frac{1-y(1)}{1+y(1)}h = 4 + \frac{-3}{5}h = 4 - 0.6h.$$

Si usamos  $h = -0.05$  tenemos:

$$\tilde{y}_1(0.95) = 4 - 0.6(-0.05) = 4.03.$$

Considerando ahora la aproximación lineal de la solución alrededor de  $x = 0.95$  se tiene:

$$\tilde{y}_1(0.95+h) = y(0.95) + y'(0.95)h = y(0.95) + \frac{0.95-y(0.95)}{0.95+y(0.95)}h.$$

Si ahora usamos el resultado previo  $y(0.95) = 4.03$ :

$$\tilde{y}_1(0.95+h) = 4.03 + \frac{0.95-4.03}{0.95+4.03}h = 4.03 - 0.6185h.$$

Evalutando esta expresión cuando  $h = -0.05$  obtenemos finalmente que:

$$\tilde{y}_1(0.9) = 4.03 - 0.6185(-0.05) = 4.0609.$$

Comparamos ahora el error cometido con respecto a la solución de la ED (ver ejemplo 7.2.4):

$$y = -x + \sqrt{2x^2 + 23}.$$

que produce al evaluar en  $x = 0.9$

$$y_{exacto} = -0.9 + \sqrt{2(0.9)^2 + 23} \approx 4.0618.$$

De donde el error porcentual está dado por:

$$EP = 100 \left| \frac{y_{exacto} - \tilde{y}_1}{y_{exacto}} \right| \% = 100 \left| \frac{4.06185 - 4.0609}{4.0619} \right| \% = 0.0229\%.$$

Compare con lo que se calculó en el ejemplo 7.2.4, donde  $EP = 0.0455\%$ .

□

En los últimos cuatro ejemplos hemos ilustrado una técnica para aproximar la solución en dos puntos cercanos a  $x_0$ . Siguiendo este procedimiento es posible establecer un algoritmo que nos permita calcular la solución en tantos puntos como queramos de un intervalo dado. En efecto, suponga que se desea aproximar la solución de  $y' = f(x, y)$  con la condición inicial  $y(x_0) = y_0$  en los puntos con abscisas

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \dots$$

Consideremos primero la aproximación lineal de la curva solución alrededor de  $x_0$ :

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = y(x_0) + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

En esta expresión hemos sustituido la derivada  $y'(x_0)$  por el valor de la función  $f(x, y)$  evaluada en el punto inicial  $(x_0, y_0)$ . Una aproximación de  $y(x_1)$  sobre la curva solución se obtiene sustituyendo el punto  $x_1 = x_0 + h$  en la ecuación previa, obtenemos de esta forma el valor :

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad \text{donde } h = x_1 - x_0. \quad (7.1)$$

Consideremos nuevamente, para obtener una aproximación de la solución en  $x_2 = x_0 + 2h$ , la aproximación lineal de la solución que pasa por  $(x_1, y(x_1))$ , es decir:

$$y(x) = y(x_1) + y'(x_1)(x - x_1) = y(x_1) + f(x_1, y(x_1))(x - x_1).$$

Para continuar el proceso necesitamos hacer otra aproximación. En efecto, como se desconoce el valor de  $y(x_1)$  lo aproximamos por el valor  $y_1$  obtenido antes. De aquí resulta:

$$y(x) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1).$$

De esta forma al sustituir  $x_2$  en la ecuación anterior obtenemos:

$$y(x_2) = y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \quad \text{donde } h = x_2 - x_1. \quad (7.2)$$

El proceso se puede seguir indefinidamente obteniendo en cada paso un nuevo punto que aproxima la solución. A este proceso se le conoce como método de Euler.

### Método de Euler

- La solución numérica del PVI:  $y' = f(x, y)$  con  $y(x_0) = y_0$  con tamaño de paso  $h$  está formada por los puntos  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  que se obtienen mediante las fórmulas de recurrencia:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i). \end{aligned} \quad (7.3)$$

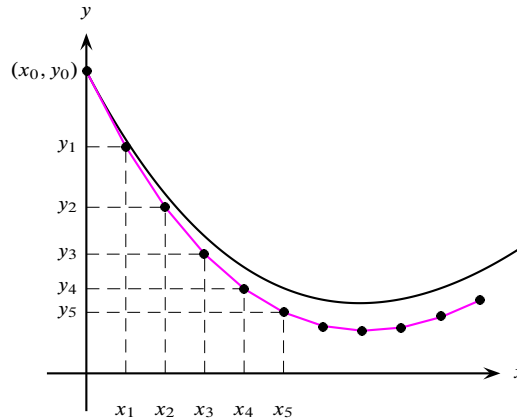
con  $i = 0, 1, 2, 3 \dots$ , y los segmentos rectilíneos entre cada par de puntos consecutivos.

En muchas ocasiones conviene definir el cambio en alturas  $y_{i+1} - y_i$  por  $k_i$ , en estos casos tenemos

$$k_i = y_{i+1} - y_i = hf(x_i, y_i).$$

de suerte que la ecuación (7.3) se puede escribir como

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \\ y_{i+1} &= y_i + k_i. \end{aligned}$$



En la figura anterior se muestra el proceso seguido para determinar la solución aproximada, observe que en cada paso se obtiene un error mayor debido a que se acumulan los errores cometidos en los pasos previos, a este error se le conoce como **error de propagación**. Sin embargo, es plausible pensar que los errores de aproximación y de propagación se reducen al considerar tamaños de paso pequeños. En efecto, si se considera la serie de Taylor de la solución  $y(x)$  en  $x_i$  tenemos

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!}y''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^3 + \dots = \\ &= y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!}f'(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!}f''(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)^3 + \dots = \\ &= y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!}f'(x_i, y_i)h^2 + \frac{1}{3!}f''(x_i, y_i)h^3 + \dots \end{aligned}$$

Claramente, los dos primeros términos corresponden a la aproximación de Euler y el error cometido está dado, justamente, por los términos restantes. Mas aún, el error es proporcional al cuadrado del tamaño de paso  $h$ , en consecuencia, si disminuimos el error por un factor de dos entonces el error se reduce en un factor de cuatro. Es decir, para mejorar los resultados que arroja el método de Euler, basta con reducir el tamaño de paso. Sin embargo, el error de propagación no disminuye generalmente de esta forma y siempre habrá que considerarlo en nuestra solución.

**Ejemplo 7.2.8** Considere el PVI:  $y' = x^2 - xy^2$  con  $y(1) = 2$ . Utilice el método de Euler para calcular  $y(1.2)$ , utilice  $h = 0.1$ .

▼ En este caso debemos repetir el proceso de Euler dos veces con  $h = 0.1$ . Obtenemos  $y_1$  considerando que  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ,  $f(x, y) = x^2 - xy^2$  y utilizando la ecuación de la recta tangente en  $x = x_0$ , es decir:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 2 + 0.1 f(1, 2) = 2 + 0.1(-3) = 1.7.$$

Repetimos el proceso aplicando ahora la ecuación (7.2), obtenemos en este caso:

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1.7 + 0.1 f(1.1, 1.7) = 1.7 + 0.1 [(1.1)^2 - (1.1)(1.7)^2] = 1.5031.$$

Es decir,  $y_2 = 1.5031$  es una aproximación de  $y(1.2)$ . □

**Ejemplo 7.2.9** Encuentre una aproximación de  $y(x)$  en  $x = 1.5$ , si  $y(x)$  es la solución del PVI:  $y' = x - 2y + y^2$  con  $y(1) = 1$ , utilice para ello el método de Euler con  $h = 0.1$ .

▼ En este caso debemos repetir cinco veces el proceso de Euler ya que  $h = 0.1$ , obtendremos entonces valores aproximados de  $y(x)$  correspondientes a

$$x = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.$$

Consideremos  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  y  $f(x, y) = x - 2y + y^2$ , obtenemos entonces  $y_1$  utilizando la ecuación de la recta tangente en  $x = x_0$

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + 0.1 f(1, 1) = 1 + 0.1(0) = 1.0.$$

Repetimos el proceso considerando  $(x_1, y_1) = (1.1, 1.0)$ , obtenemos en este caso

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1.0 + 0.1 f(1.1, 1.0) = 1.0 + 0.1(1.1 - 2 + 1) = 1.01.$$

Repetimos nuevamente el proceso considerando  $(x_2, y_2) = (1.2, 1.01)$ , obtenemos entonces:

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = 1.01 + 0.1 f(1.2, 1.01) = 1.01 + 0.1(1.2 - 2.02 + 1.0201) = 1.03001.$$

Repetimos el proceso otras tres veces, así obtenemos

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + h f(x_3, y_3) = 1.0300 + 0.1 f(1.3, 1.0300) = \\ &= 1.0300 + 0.1[1.3 - 2(1.0300) + (1.0300)^2] = 1.0601, \\ y_5 &= y_4 + h f(x_4, y_4) = 1.0601 + 0.1 f(1.4, 1.0601) = \\ &= 1.0601 + 0.1[1.4 - 2(1.0601) + (1.0601)^2] = 1.1005, \\ y_6 &= y_5 + h f(x_5, y_5) = 1.1005 + 0.1 f(1.5, 1.1005) = \\ &= 1.1005 + 0.1[1.5 - 2(1.1005) + (1.1005)^2] = 1.1515. \end{aligned}$$

En conclusión, una aproximación de la solución en  $x = 1.5$  es  $y_6 = 1.1515$ . □

**Ejemplo 7.2.10** Utilice el método de Euler, con tamaño de paso  $h = 0.1$ , para determinar una aproximación numérica de la solución del PVI:  $y' = x - y$  con  $y(0) = 1$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Repita considerando ahora tamaños de paso iguales a  $h = 0.05$  y  $h = 0.01$  y analizar el comportamiento del error porcentual.

▼ Como el tamaño de paso es  $h = 0.1$  debemos encontrar valores aproximados de la solución  $y(x)$  en los puntos

$$x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0.$$

Aplicamos primero la ecuación (7.1) para calcular  $y_1$ , consideramos para ello que  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  y que  $f(x, y) = x - y$ , obtenemos entonces:

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 1 + 0.1(0 - 1) = 0.9.$$

Determinamos ahora  $y_2$  utilizando la ecuación (7.2), considerando  $(x_1, y_1) = (0.1, 0.9)$ , tenemos entonces:

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0.9 + 0.1(0.1 - 0.9) = 0.82.$$

El valor  $y_3$  lo calculamos utilizando  $(x_2, y_2) = (0.2, 0.82)$  y la relación de recurrencia (7.3) para el caso  $i = 2$ , obtenemos en este caso

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.82 + 0.1(0.2 - 0.82) = 0.758.$$

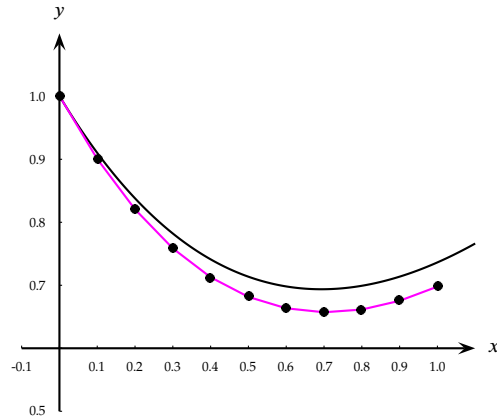
Seguimos con el proceso otras siete veces para calcular  $y_4, y_5, \dots, y_{10}$ . En la tabla siguiente se muestran los resultados obtenidos, en la primera columna se muestra el número de paso  $i$ , en las dos siguientes se muestran los resultados  $(x_i, y_i)$  calculados todos con cuatro cifras decimales significativas y redondeo al decimal más cercano. Por otra parte, calculamos los valores  $y(x_i)$  con  $i = 1, 2, \dots, 10$  considerando que la solución analítica de la ecuación diferencial es

$$y(x) = x - 1 + 2e^{-x}.$$

Estos resultados se muestran en la cuarta columna. Finalmente, en la quinta columna se muestra el error porcentual  $EP$ . Observe que este error se incrementa al aumentar el número de pasos.

$i$	$x_i$	$y_i$	$y(x_i)$	$EP$
0	0	1	1	0.00%
1	0.1	0.9000	0.9097	1.07%
2	0.2	0.8200	0.8375	2.09%
3	0.3	0.7580	0.7816	3.02%
4	0.4	0.7122	0.7406	3.83%
5	0.5	0.6810	0.7131	4.50%
6	0.6	0.6629	0.6976	4.97%
7	0.7	0.6566	0.6932	5.28%
8	0.8	0.6609	0.6987	5.41%
9	0.9	0.6748	0.7131	5.37%
10	1	0.6973	0.7358	5.23%

En la figura siguiente se muestra un esquema de la solución aproximada, observe que la curva asociada a la solución exacta es suave mientras que la solución aproximada está formada por un conjunto de puntos y los segmentos rectilíneos que los unen. El origen de coordenadas en la gráfica se ha colocado en  $(0, 0.6)$ .



Por otra parte, esperamos reducir el error haciendo más pequeño el tamaño de paso  $h$ . Para mostrarlo repitamos el proceso considerando ahora  $h = 0.05$ . En el primer paso consideremos  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  y apliquemos la ecuación (7.1), tenemos entonces

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 1 + 0.05(0 - 1) = 0.95.$$

Utilizando  $(x_1, y_1) = (0.05, 0.95)$  y la ecuación (7.2) tenemos:

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0.95 + 0.05(0.05 - 0.95) = 0.905.$$

Utilizando  $(x_2, y_2) = (0.1, 0.905)$  y la relación de recurrencia (7.3) con  $i = 2$  obtenemos

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.905 + 0.05(0.1 - 0.905) = 0.8649.$$

Si ahora usamos  $(x_3, y_3) = (0.15, 0.8648)$  y la relación de recurrencia (7.3) con  $i = 3$  obtenemos

$$y_4 = y_3 + h f(x_3, y_3) = y_3 + h(x_3 - y_3) = 0.8648 + 0.05(0.15 - 0.8648) = 0.8290.$$

Podemos seguir este proceso hasta calcular todos los valores pedidos. En la tabla siguiente se muestran los resultados que corresponden sólo a las abscisas  $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$  para el tamaño de paso  $h = 0.05$ .

Si ahora consideramos  $h = 0.01$  obtenemos los siguientes resultados parciales

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 1 + 0.01(0 - 1) = 0.99,$$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0.99 + 0.01(0.01 - 0.99) = 0.9802,$$

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.9802 + 0.01(0.02 - 0.9802) = 0.970,$$

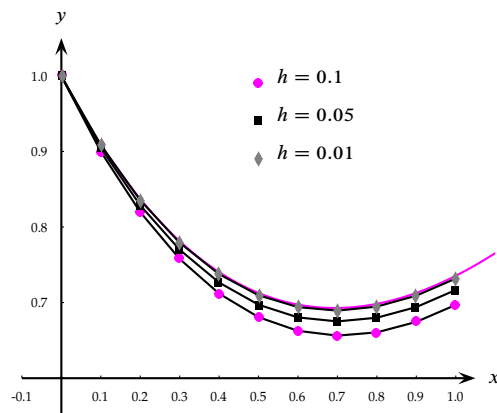
$$y_4 = y_3 + h f(x_3, y_3) = y_3 + h(x_3 - y_3) = 0.9706 + 0.01(0.03 - 0.9706) = 0.9612.$$

Nuevamente, podemos seguir el proceso hasta obtener los valores solicitados. En la siguiente tabla se muestran los resultados que corresponden sólo a las abscisas  $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ . En la figura siguiente se muestran las gráficas obtenidas para cada caso. Observemos que las curvas se aproximan cada vez más a la gráfica de la solución analítica. Podemos observar que el error de propagación es máximo en  $x = 1$  en los tres casos que hemos considerado  $h = 0.1, 0.05, 0.01$ , esto se ilustra en la figura siguiente:

$x_i$	$y_i(x)$	$h=0.1$		$h=0.05$		$h=0.01$	
		$y_i$	$EA$	$y_i$	$EA$	$y_i$	$EA$
0	1.0000	1.0000	0	1.0000	0	1.0000	0
0.1	0.9097	0.9000	0.0097	0.9050	0.0047	0.9088	0.0009
0.2	0.8375	0.8200	0.0175	0.8290	0.0085	0.8358	0.0017

0.3	0.7816	0.7580	0.0236	0.7702	0.0114	0.7794	0.0022
0.4	0.7406	0.7122	0.0284	0.7268	0.0138	0.7379	0.0027
0.5	0.7131	0.6810	0.0321	0.6975	0.0156	0.7100	0.0031
0.6	0.6976	0.6629	0.0347	0.6807	0.0169	0.6943	0.0033
0.7	0.6932	0.6566	0.0366	0.6754	0.0179	0.6897	0.0035
0.8	0.6987	0.6609	0.0378	0.6803	0.0184	0.6950	0.0037
0.9	0.7131	0.6748	0.0383	0.6944	0.0187	0.7095	0.0036
1	0.7358	0.6974	0.0384	0.7170	0.0188	0.7321	0.0037

El origen de coordenadas en la gráfica se ha colocado en  $(0, 0.6)$ .



En conclusión, el método de Euler se basa en la aproximación lineal de la solución  $y(x)$  en  $x = x_0$  y requiere evaluar la función  $f(x, y)$  sólo una vez en cada aproximación. Sin embargo, el cálculo se complica al tratar de encontrar una buena solución en un intervalo dado ya que la necesidad de reducir los errores de aproximación y propagación requieren reducir el tamaño de paso  $h$ , en consecuencia, se requiere hacer un gran número de cálculos que con una herramienta de cómputo se pueden realizar rápidamente. Una primera posibilidad es utilizar hojas de cálculo, por ejemplo Excel, una segunda alternativa consiste en implementar el método en algún lenguaje de programación, como Mathematica, siguiendo el pseudocódigo que se indica abajo. A continuación ilustramos el uso de Excel y Mathematica para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de Euler.

#### • Pseudocódigo del método de Euler

1. Proporcionar:  $f, x_0, y_0, h, n$
2. Imprimir  $x_0, y_0$
3. Desde  $i = 1$  hasta  $i = n$ 
  - a. Calcular  $y_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0)$
  - b. Hacer  $y_0 = y_1; x_0 = x_0 + h;$
  - c. Imprimir  $x_0, y_0$
4. Terminar



**Ejemplo 7.2.11** Utilice Excel para determinar un valor aproximado de  $y(1)$  si  $y(x)$  es la solución del PVI:

$$y' = x^2 y + y \quad \text{con} \quad y(0) = 1.$$

Considere que el tamaño de paso es  $h = 0.1$ .

▼ En este caso se repetirá el proceso  $n = 10$  veces mediante las siguientes instrucciones para una hoja de cálculo de Excel.

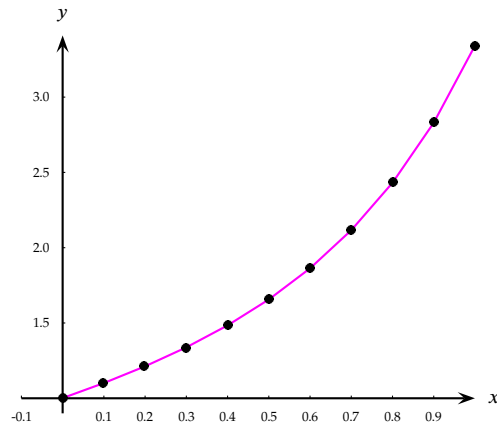
• El método de Euler en Excel.

1. En las celdas A1, A2, A3 se escriben las etiquetas: " $x_0=$ ,  $y_0=$ ,  $h=$ ".
2. En las celdas B1, B2, B3 se escriben " $=0$ ,  $=1$ ,  $=0.1$ " respectivamente.
3. En las celdas A5, B5, C5, D5, se escriben las etiquetas: " $i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $k_i$ ". Recuerde que  $k_i = h f(x_i, y_i)$
4. Se escriben en las celdas A6:A16 los números " $0, 1, 2, \dots, 10$ ".
5. En las celdas B6 y C6 se escriben respectivamente: " $=B1$ ,  $=B2$ ".
6. En la celda D6 se escribe " $=B\$3*(B6^2*C6+C6)$ ". Observe que en este paso, se evalúa la función  $f(x, y) = x^2 y + y$  y se multiplica por  $h$ . Es decir, se calcula  $k_i$ .
7. En la celda B7 se escribe " $=B6+\$B\$3$ ".
8. En la celda C7 escribimos ahora " $=C6+D6$ ". Observe que en este paso estamos el método de Euler.
9. Se selecciona la celdas D6 y se copia en D7
10. Se seleccionan las celdas B7-D7 y se arrastran hasta llegar a las celdas B16-D16.
11. Se grafica la solución utilizando el asistente de gráficos con la opción de *XY-Dispersión*.

En la siguiente tabla se muestran los resultados numéricos obtenidos:

$i$	$x_i$	$y_i$	$k_i$
0	0	1	0.1
1	0.1	1.1	0.1111
2	0.2	1.2111	0.1259544
3	0.3	1.3370544	0.14573893
4	0.4	1.48279333	0.172004026
5	0.5	1.654797356	0.206849669
6	0.6	1.861647025	0.253183995
7	0.7	2.114831021	0.315109822
8	0.8	2.429940843	0.398510298
9	0.9	2.828451141	0.511949657
10	1	3.340400798	0.66808016

La gráfica asociada se presenta en la figura siguiente. El origen de coordenadas en la gráfica se ha colocado en  $(0, 1)$ .



□

**Ejemplo 7.2.12** Resolver el PVI:  $y' = x - 3y$ ,  $y(0) = 1$ , utilizando el método de Euler implementado en Mathematica y repitiendo el proceso  $n = 10$  veces con tamaño de paso  $h = 0.3$

▼ Aplicaremos el pseudocódigo en el paquete Mathematica 7.0, el programa necesario lo presentamos a continuación con comentarios para su mejor comprensión.

- El método de Euler en Mathematica

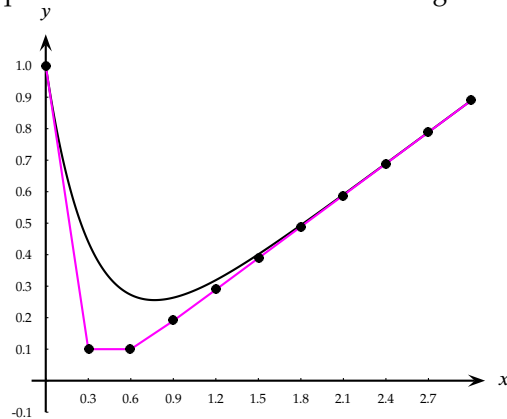
```
f[x_, y_] := x - 3y; (* Definir f *)
x0=0; (* Abscisa del punto inicial *)
y0=1; (* Ordenada del punto inicial *)
h=0.3; (* Incremento en el paso *)
n=10; (* Total de pasos a realizar *)
lista={{x0,y0}}; (* Definir lista con punto inicial *)
Do[ y1=y0+ h*f[x0,y0]; (* Determinar y1 *)
    y0=y1; (* Intercambiar y0 con y1 *)
    x0=x0+h; (* Incrementar x0 *)
    AppendTo[lista,{x0,y0}], (* Incluir punto en la lista *)
    {i,1,n}]; (* Terminar el proceso *)
ListPlot[lista] (* Graficar los puntos obtenidos *)
```

Los resultados que se obtienen se muestran en la tabla siguiente, hemos incluido los valores exactos de la ordenada, valores que corresponden a la función

$$y(x) = \frac{1}{9} (3x - 1 + 10e^{-3x}).$$

$x$	$\tilde{y}_1$	$y_{exacto}$
0	1	1.
0.3	0.1	0.440633
0.6	0.1	0.272554
0.9	0.19	0.263562
1.2	0.289	0.319249
1.5	0.3889	0.401232
1.8	0.48889	0.493907
2.1	0.588889	0.590929
2.4	0.688889	0.689718
2.7	0.788889	0.789226
3.	0.888889	0.889026

También mostramos la gráfica que se obtiene con estos datos en la figura siguiente:



□

### Ejercicios 7.2.1 Euler. Soluciones en la página 479.

Determine una aproximación lineal de la solución  $y(x)$  de cada una de los siguientes PVI en el punto indicado utilizando el  $h$  proporcionado. En los casos que se requiera aplique dos veces el proceso de aproximación lineal.

1.  $y' = xy + y$  con  $y(4) = 1$  en  $x = 4.2$  para  $h = 0.2$ .
2.  $y' = 0.2y - 5y^2$  con  $y(1) = 3$  en  $x = 1.2$  para  $h = 0.1$ .
3.  $y' = 2x + x^2 - y$  con  $y(0) = 1$  en  $x = 0.4$  para  $h = 0.2$ .

Considere las siguientes PVI. Determine una aproximación numérica de la solución en el punto indicado utilizando el método de Euler con el tamaño de paso señalado en cada caso. Utilice redondeo a cuatro cifras decimales en todos sus cálculos.

4.  $y' = x^2 + 2y$  con  $y(1) = 5$ , calcule  $y(1.3)$  para  $h = 0.1$ .
5.  $y' = x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1$  con  $y(0) = 0$ , calcule  $y(0.5)$  para  $h = 0.1$ .
6.  $y' = \frac{x^2 + 1}{y}$  con  $y(0) = 2$ , calcule  $y(0.25)$  para  $h = 0.05$ .

7. Considere el PVI  $y' = 2x + 2y - 1$  con  $y(1) = 1$ . Utilice el método de Euler para construir una tabla numérica de  $x$  contra  $y$  de la solución de la ecuación diferencial tomando  $h = 0.1$  en el intervalo  $[1, 2]$ . Estime el error relativo cometido en cada paso comparando la solución numérica con la solución analítica.
8. Considere el PVI  $y' = 3x - 2y$  con  $y(0) = 1$ . Determine una aproximación numérica de la solución en  $x = 1.5$  utilizando el método de Euler con tamaño de paso  $h = 0.1$ . Compare su resultado con la solución exacta. Utilice redondeo a cuatro cifras decimales en todos sus cálculos.
9. Considere el PVI  $P' = 5P - P^2$  con  $P(0) = 1.5$ . Determine una aproximación numérica de la solución en  $x = 0.5$  utilizando el método de Euler con tamaño de paso  $h = 0.1$ . Compare su resultado con la solución exacta. Utilice redondeo a cuatro cifras decimales en todos sus cálculos.

### 7.3 Método de Euler mejorado

Consideremos ahora el polinomio de Taylor de orden 2 de  $y(x)$  en  $x = x_0$  para aproximar a la solución del PVI:  $y' = f(x, y)$  con  $y(x_0) = y_0$ . Esta aproximación se conoce como **aproximación cuadrática**  $\tilde{y}_2$  dada por:

$$y(x) \approx \tilde{y}_2(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}y''(x_0)(x - x_0)^2.$$

El valor de  $y(x)$  en  $x = x_0 + h$  se aproxima entonces por:

$$y(x_0 + h) \approx \tilde{y}_2(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2.$$

Como en general  $y(x_0 + h) \neq \tilde{y}_2(x_0 + h)$ , obtendremos errores al usar esta aproximación los cuales pueden catalogarse como errores absoluto, relativo y porcentual y las fórmulas para calcularlos son exactamente las mismas que se definieron en la sección previa.

**Ejemplo 7.3.1** Considere el PVI:  $y' = 2x + 1$  con  $y(0) = 1$ . Encuentre una aproximación cuadrática de la solución  $y(x)$  en  $x = 1$ .

▼ Derivando la ED con respecto a  $x$  obtenemos:

$$y'' = 2.$$

Usando la condición inicial y evaluando las derivadas, se tiene:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2.$$

En consecuencia, la aproximación cuadrática  $\tilde{y}_2(x)$  de la solución  $y(x)$  para  $x = x_0 + h$  alrededor de  $x_0 = 0$  está dada por:

$$\tilde{y}_2(0 + h) = y(0) + y'(0)h + \frac{1}{2}y''(0)h^2 = 1 + h + h^2.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en  $x = 1$  usamos  $h = 1$ , tenemos entonces:

$$\tilde{y}_2(1) = 1 + 1 + (1)^2 = 3.$$

La solución del PVI es  $y(x) = x^2 + x + 1$  por lo cual al evaluar en  $x = 1$  resulta  $y_{\text{exacto}} = 3$ . En este caso  $\tilde{y}_2 = y_{\text{exacto}}$ . □

El resultado del ejemplo anterior es de utilidad para describir una forma alternativa de interpretar la aproximación cuadrática. En efecto, la aproximación lineal  $\tilde{y}_1(x)$  está dada en general por:

$$\tilde{y}_1(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h.$$

Así que en este caso particular:

$$\tilde{y}_1(0+h) = y(0) + y'(0)h = 1+h.$$

de donde, el cambio en la variable dependiente es:

$$\tilde{y}_1(0+h) - y(0) = y'(0)h = h.$$

Denotamos el cambio anterior por  $k_1$ , es decir,

$$k_1 = \tilde{y}_1(0+h) - y(0) = y'(0)h = f(0,1)h = h.$$

Nos preguntamos ahora si es posible evaluar la función en un segundo punto y reproducir la aproximación cuadrática. La respuesta es afirmativa, para mostrarlo observemos que el punto  $(x_0+h, y_0+k_1) = (h, 1+h)$  se encuentra sobre la recta definida por la aproximación lineal, que está dada por:

$$\tilde{y}_1(x_0+h) = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) = y_0 + (x-x_0).$$

Si ahora calculamos la aproximación lineal de la solución en este punto  $(h, 1+h)$  tenemos:

$$\tilde{y}_1(h+h) = y(h) + y'(h)h = y(h) + f(h, 1+h)h = y(h) + [2h+1]h = y(h) + 2h^2 + h.$$

Denotando ahora el nuevo cambio en la variable dependiente como:

$$k_2 = \tilde{y}_1(h+h) - y(h) = 2h^2 + h,$$

y usando  $k_1 = h$  tenemos que:

$$k_2 = 2h^2 + k_1 \Rightarrow h^2 = \frac{k_2 - k_1}{2}.$$

En resumen  $y(x_0) = y(0) = 1$ ,  $k_1 = y'(0)h = h$ ,  $y''(0) = 2$  por lo cual la aproximación cuadrática se puede escribir como:

$$\tilde{y}_2(h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 = 1 + h + h^2 = 1 + k_1 + \frac{k_2 - k_1}{2} = 1 + \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

En los ejemplos siguientes mostraremos que siempre será posible determinar  $k_1$  y  $k_2$  de forma que:

$$\tilde{y}_2(h) = y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Es decir, la aproximación cuadrática está dada, al menos en este ejemplo, por el valor de la función  $f(x, y)$  en  $(x_0, y_0)$  mas un cambio lineal promedio  $\frac{k_1 + k_2}{2}$ .

**Ejemplo 7.3.2** Encuentre una aproximación cuadrática de la solución de la ecuación diferencial:

$$y' = x - y, \quad \text{con } y(1) = 2,$$

en el punto  $x = 1.2$ . Posteriormente demuestre que dicha aproximación se puede reescribir como

$$\tilde{y}_2 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

▼ Derivando la ecuación diferencial con respecto a  $x$  se tiene:

$$y'' = 1 - y' = 1 - x + y.$$

Usando la condición inicial obtenemos:

$$y(1) = 2, \quad y'(1) = 1 - y(1) = 1 - 2 = -1, \quad y''(1) = 1 - 1 + y(1) = 2.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en el punto  $x = 1.2$  desarrollamos  $y(x)$  en polinomio de Taylor de orden dos en  $x_0 = 1$ :

$$\tilde{y}_2(1+h) = y(1) + y'(1)h + \frac{1}{2}y''(1)h^2 = 2 - h + h^2.$$

Con  $h = 0.2$  tenemos que:

$$\tilde{y}_2(1.2) = 2 - 0.2 + (0.2)^2 = 1.84.$$

Por otra parte, como la solución analítica es  $y = x - 1 + 2e^{1-x}$  (ver ejemplo 7.2.2), al evaluar en  $x = 1.2$  se tiene que:

$$y_{exacto} = 1.2 - 1 + 2e^{1-1.2} = 0.2 + 2e^{-0.2} \approx 1.8375.$$

La aproximación cuadrática proporciona una cifra decimal exacta con un error porcentual de:

$$EP = 100 \left| \frac{y_{exacto} - \tilde{y}_2}{y_{exacto}} \right| \% = 100 \left| \frac{1.8375 - 1.84}{1.8375} \right| \% = 0.1382\%.$$

Notemos que en este caso  $f(x, y) = x - y$ . Si denotamos  $k_1$  y  $k_2$  como

$$k_1 = y'(1)h = f(1, 2)h = (1 - 2)h = -h,$$

y

$$k_2 = f(1+h, 2+k_1)h = [1+h - (2+k_1)]h = [1+h - (2-h)]h = -h + 2h^2 = k_1 + 2h^2.$$

tenemos

$$h^2 = \frac{k_2 - k_1}{2}.$$

Por lo que:

$$\tilde{y}_2(1+h) = 2 - h + h^2 = 2 + k_1 + \frac{k_2 - k_1}{2} = 2 + \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Como se quería demostrar. □

**Ejemplo 7.3.3** Encuentre una aproximación cuadrática de la solución en  $x = 0.9$  de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{con} \quad y(1) = 4.$$

Muestre después que

$$\tilde{y}_2 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

▼ En este caso la solución analítica, ver ejemplo (7.2.4), está dada por:

$$y = -x + \sqrt{2x^2 + 23},$$

que evaluada en  $x = 0.9$  produce el valor exacto:

$$y_{exacto} = -0.9 + \sqrt{2(0.9)^2 + 23} \approx 4.0619.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución, derivamos la ecuación diferencial, así obtenemos :

$$y'' = \frac{(1-y')(x+y) - (1+y')(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y - 2xy'}{(x+y)^2}.$$

De la condición inicial  $y(1) = 4$ , tenemos:

$$y'(1) = \frac{1-4}{1+4} = \frac{-3}{5} = -0.6,$$

$$y''(1) = \frac{8+1.2}{(1+4)^2} = \frac{9.2}{25} = 0.368.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en el punto  $x = 0.9$  consideremos la aproximación cuadrática  $\tilde{y}_2(x)$  de la solución alrededor de  $x = 1$

$$\tilde{y}_2(1+h) = y(1) + y'(1)h + \frac{1}{2}y''(1)h^2 = 4 - 0.6h + 0.184h^2. \quad (*)$$

En este caso tenemos  $h = -0.1$ , por lo cual

$$\tilde{y}_2(0.9) = 4 - 0.6(-0.1) + 0.184(-0.1)^2 = 4.06184.$$

En este ejemplo, la aproximación cuadrática proporciona cuatro cifras decimales exactas de la solución con un error porcentual de

$$EP = 100 \left| \frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_2}{y_{\text{exacto}}} \right| \% = 100 \left| \frac{4.06185 - 4.06184}{4.06185} \right| \% = 0.000246193\%.$$

Este es un error muy pequeño que mejora el calculado por el método de Euler, en el ejemplo 7.2.4 donde  $EP = 0.04554$ . Por otra parte, como

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y},$$

y denotamos, como en los ejemplos previos,

$$k_1 = y'(1)h = f(1, 4)h = \frac{1-4}{1+4}h = -0.6h$$

y

$$k_2 = f(1+h, 4+k_1)h = f(1+h, 4-0.6h)h = \left( \frac{-3+1.6h}{5+0.4h} \right) h = \left( \frac{\frac{-3+1.6h}{5}}{\frac{5+0.4h}{5}} \right) h = \left( \frac{-0.6+0.32h}{1+0.08h} \right) h.$$

Si usamos ahora la fórmula siguiente, que representa el desarrollo de una serie geométrica,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots, \quad \text{cuando } |x| < 1$$

obtenemos

$$k_2 = (-0.6 + 0.32h)(1 - 0.08h + 0.0064h^2 + \dots)h = -0.6h + 0.368h^2 + \dots \approx k_1 + 0.368h^2,$$

de donde

$$0.184h^2 \approx \frac{k_2 - k_1}{2}.$$

Por lo que, usando (\*):

$$\tilde{y}_2(h) = 4 - 0.6h + 0.184h^2 \approx 4 + k_1 + \frac{k_2 - k_1}{2} = 4 + \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

□

**Ejemplo 7.3.4** Considere la ecuación diferencial

$$y' = x - y, \quad \text{con } y(1) = 2.$$

Encuentre una aproximación cuadrática de la solución en  $x = 1.1$ , posteriormente use esta aproximación para determinar la solución en  $x = 1.2$ .

▼ Recordemos que

$$y'' = 1 - y' = 1 - x + y.$$

La aproximación cuadrática de la solución alrededor de  $x = 1$  con  $y'(1) = 1 - 2 = -1$ ,  $y''(1) = 1 - (-1) = 2$  es:

$$\tilde{y}_2(1+h) = y(1) + y'(1)h + \frac{1}{2}y''(1)h^2 = 2 - h + h^2.$$

Considerando  $h = 0.1$  obtenemos

$$\tilde{y}_2(1.1) = 2 - 0.1 + (0.1)^2 = 1.91.$$

Si ahora calculamos la función  $y(x)$  y sus dos primeras derivadas en  $x = 1.1$  obtenemos:

$$y(1.1) = 1.91, \quad y'(1.1) = 1.1 - y(1.1) = 1.1 - 1.91 = -0.81, \quad y''(1.1) = 1 - 1.1 + y(1.1) = 1.81.$$

Por lo cual la aproximación cuadrática en  $x = 1.1$  está dada por:

$$\tilde{y}_2(1.1+h) = y(1.1) + y'(1.1)h + \frac{1}{2}y''(1.1)h^2 = 1.91 - 0.81h + 0.905h^2.$$

Evalutando en  $h = 0.1$  obtenemos la aproximación pedida:

$$\tilde{y}_2(1.2) = 1.91 - 0.81(0.1) + 0.905(0.1)^2 = 1.83805.$$

Comparando con la solución exacta obtenida al evaluar la solución  $y = x - 1 + 2e^{1-x}$  en  $x = 1.2$  tenemos:

$$y_{\text{exacto}} = 1.2 - 1 + 2e^{1-1.2} = 0.2 + 2e^{-0.2} \approx 1.83746.$$

En este caso el error porcentual cometido en la aproximación está dado por:

$$EP = 100 \left| \frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_2}{y_{\text{exacto}}} \right| \% = 100 \left| \frac{1.83746 - 1.83805}{1.83746} \right| \% = 0.03211\%.$$

que, en efecto, es menor que el cometido al calcular  $\tilde{y}_2(1.2)$  con una sola aproximación cuadrática, como puede verificarse en el ejmplo 7.3.2 donde  $EP = 0.1382\%$ .

□

**Ejemplo 7.3.5** Encuentre una aproximación cuadrática de la solución en  $x = 0.9$  del PVI

$$y' = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{con} \quad y(1) = 4.$$

Primero determine una aproximación de la solución en  $x = 0.95$  y posteriormente use su resultado para obtener la aproximación pedida.

▼ Procedamos como en los tres ejemplos anteriores, primero observemos que la solución analítica está dada por:

$$y = -x + \sqrt{2x^2 + 23},$$

y evaluada en  $x = 0.9$  produce el valor exacto:

$$y_{\text{exacto}} = -0.9 + \sqrt{2(0.9)^2 + 23} \approx 4.06185.$$

Para determinar la solución aproximada, necesitamos la derivada de la ecuación diferencial, que está dada por:

$$y'' = \frac{2y - 2xy'}{(x+y)^2}.$$



De la condición inicial tenemos que

$$\begin{aligned} y(1) &= 4, \\ y'(1) &= \frac{1-4}{1+4} = \frac{-3}{5} = -0.6, \\ y''(1) &= \frac{8+1.2}{(1+4)^2} = \frac{9.2}{25} = 0.368 \end{aligned}$$

Por lo cual, la aproximación cuadrática de la solución alrededor de  $x = 1$  es:

$$\tilde{y}_2(1+h) = y(1) + y'(1)h + \frac{1}{2}y''(1)h^2 = 4 - 0.6h + 0.184h^2.$$

Si usamos  $h = -0.05$  tenemos:

$$\tilde{y}_2(0.95) = 4 - 0.6(-0.05) + 0.184(-0.05)^2 = 4.03046.$$

Calculando  $y(x)$  y sus dos primeras derivadas en  $x = 0.95$  tenemos:

$$\begin{aligned} y(0.95) &= 4.03046, \\ y'(x) &= \frac{x-y}{x+y} \Rightarrow y'(0.95) = \frac{0.95 - 4.03046}{0.95 + 4.03046} = -0.618509, \\ y''(x) &= \frac{2y - 2xy'}{(x+y)^2} \Rightarrow y''(0.95) = \frac{2(4.03046) - 2(0.95)(-0.618509)}{(0.95 + 4.03046)^2} = 0.372348. \end{aligned}$$

Considerando ahora la aproximación cuadrática de la solución alrededor de  $x = 0.95$  se tiene:

$$\tilde{y}_2(0.95+h) = y(0.95) + y'(0.95)h + \frac{1}{2}y''(0.95)h^2 = 4.03046 - 0.618509h + 0.186174h^2.$$

Evaluando esta expresión cuando  $h = -0.05$  obtenemos finalmente que:

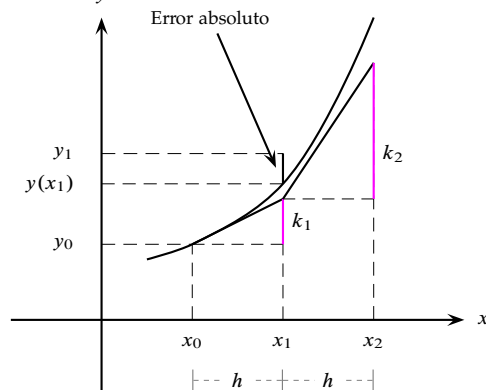
$$\tilde{y}_2(0.9) = 4.03046 - 0.618509(-0.05) + 0.186174(-0.05)^2 = 4.06185.$$

Resultado que es exactamente igual en cinco cifras decimales al resultado exacto, claramente el error porcentual es 0%.

□

En los primeros tres ejemplos de esta sección mostramos que la aproximación cuadrática se puede reescribir usando dos términos  $k_1$  y  $k_2$  que se obtienen evaluando la función  $f(x, y)$  en puntos adecuados. En los últimos dos ejemplos mostramos cómo utilizar una doble aproximación cuadrática para estimar la solución de la ecuación diferencial en un punto dado. Desde luego que podemos estimar la solución con mayor número de aproximaciones cuadráticas, mejorando sustancialmente los resultados que arroja el método de Euler. Para ilustrar este nuevo método consideremos los cambios en la variable dependiente  $y$ , que se obtienen al calcular con el método de Euler las dos primeras aproximaciones, estos cambios son:

$$\begin{aligned} k_1 &= y_1 - y_0 = h f(x_0, y_0), \\ k_2 &= y_2 - y_1 = h f(x_1, y_1) = h f(x_0 + h, y_0 + k_1). \end{aligned}$$



El significado geométrico de ambas cantidades se ilustra en la figura (??). Observemos que  $k_1$  es el cambio en la altura cuando  $x$  se incrementa una cantidad  $h$  partiendo de  $x_0$ , mientras que  $k_2$  es el cambio en la variable  $y$  cuando  $x$  pasa de  $x_0 + h$  a  $x_0 + 2h$ . Observe ahora que el promedio de ambas cantidades produce un cambio en la altura que aproxima mejor el cambio que sufre la solución  $y(x)$ . Es decir, una mejor aproximación a  $y(x_1)$ , que la obtenida por el método de Euler, está dada por:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2). \quad (7.4)$$

Siguiendo este proceso podemos calcular ahora una aproximación  $y_2$  de  $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$  utilizando:

$$\begin{aligned} k_1 &= y_2 - y_1 = h f(x_1, y_1), \\ k_2 &= y_3 - y_2 = h f(x_2, y_2) = h f(x_1 + h, y_1 + k_1), \\ y_2 &= y_1 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Observe que  $k_1$  &  $k_2$  han conservado sus índices.

En general, para obtener una aproximación  $y_i$  de  $y(x_i) = y(x_0 + ih)$  seguimos el llamado Método de Euler–Mejorado que establecemos a continuación.

- **Método de Euler–Mejorado**

La solución numérica de la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$  con la condición inicial  $y(x_0) = y_0$  con tamaño de paso  $h$  está formada por los puntos  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  que se obtienen mediante las fórmulas de recurrencia:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \\ k_1 &= h f(x_i, y_i), \\ k_2 &= h f(x_i + h, y_i + k_1), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2} (k_1 + k_2). \end{aligned} \quad (7.5)$$

con  $i = 0, 1, 2, 3 \dots$

A continuación mostraremos que este método produce, en general, mejores resultados que el método de Euler. En efecto, sustituyendo  $k_1$  y  $k_2$  en la  $y_{i+1}$  obtenemos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + \underbrace{f(x_i + h, y_i + k_1)}_{(*)}].$$

Desarrollando (\*) en serie de Taylor la función  $f(x, y)$  alrededor del punto  $(x_i, y_i)$  resulta:

$$f(x_i + h, y_i + k_1) = f(x_i, y_i) + h f_x(x_i, y_i) + k_1 f_y(x_i, y_i),$$

luego

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) + h f_x(x_i, y_i) + k_1 f_y(x_i, y_i) + \dots] = \\ &= y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left[ f_x(x_i, y_i) + \frac{k_1}{h} f_y(x_i, y_i) \right] + \dots \end{aligned}$$

Usando  $k_1 = h f(x_i, y_i)$  y simplificando obtenemos

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)] + \dots$$

O bien

$$y_{i+1} = y_i + h y'(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i, y_i) + \dots \quad (7.6)$$

Para obtener la última igualdad utilizamos  $y' = f(x, y)$ . En consecuencia:

$$y'' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Claramente la relación (7.6) muestra que la aproximación del método de Euler-Mejorado es equivalente a un desarrollo de Taylor de orden dos, en consecuencia el error cometido en cada paso es proporcional a  $h^3$ , lo cual es una mejora sustantiva con respecto al método de Euler. Sin embargo, tal mejora se obtiene mediante el aumento en el número de evaluaciones de la función  $f(x, y)$  que pasa de uno a dos en cada aproximación.

**Ejemplo 7.3.6** Considere la ecuación diferencial  $y' = x^2 - xy^2$  con la condición inicial  $y(1) = 2$ . Utilice el método de Euler-Mejorado para estimar  $y(1.2)$ , considere  $h = 0.1$ .

▼ Como el tamaño de paso es  $h = 0.1$  debemos repetir el proceso de Euler-Mejorado dos veces. Con  $i = 1$ , para calcular  $k_1, k_2$  &  $y_1$ . Si consideramos que  $(x_0, y_0) = (1, 2)$  y que  $f(x, y) = x^2 - xy^2$  obtenemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_0, y_0) = 0.1 f(1, 2) = 0.1(-3) = -0.3, \\ k_2 &= h f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0.1 f(1.1, 1.7) = 0.1((1.1)^2 - 1.1(1.7)^2) = -0.1969, \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 2 + 0.5(-0.3 - 0.1969) = 1.7516. \end{aligned}$$

Repetimos el proceso 7.5 con  $i = 2$ , obtenemos en este caso:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_1, y_1) = 0.1 f(1.1, 1.7516) = -0.2165, \\ k_2 &= h f(x_1 + h, y_1 + k_1) = 0.1 f(1.2, 1.5351) = -0.1388, \\ y_2 &= y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1.7516 + 0.5(-0.2165 - 0.1388) = 1.5740. \end{aligned}$$

En conclusión,  $y_2 = 1.5740$  es una aproximación de  $y(1.2)$ . □

**Ejemplo 7.3.7** Considere el PVI:  $y' = x - y$  con  $y(0) = 1$ . Determine una solución numérica en el intervalo  $[0, 1]$  utilizando primero  $h = 0.1$  y después  $h = 0.05$ . Compare los resultados de los dos casos anteriores con la solución numérica obtenida mediante el método de Euler y la solución analítica de la ecuación diferencial.

▼ Para  $h = 0.1$  necesitaremos repetir diez veces el proceso de Euler-Mejorado. Basta hacerlo un par de veces para ilustrar el procedimiento. Consideremos el caso  $i = 1$  del proceso 7.5 para calcular  $k_1, k_2$  &  $y_1$ , necesitamos además  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  y  $f(x, y) = x - y$ . Obtenemos en este caso:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_0, y_0) = 0.1 f(0, 1) = 0.1(-1) = -0.1, \\ k_2 &= h f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0.1 f(0.1, 0.9) = 0.1(0.1 - 0.9) = -0.08, \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + 0.5(-0.1 - 0.08) = 0.91. \end{aligned}$$

Nuevamente repetimos el proceso con  $i = 2$ , obtenemos ahora:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_1, y_1) = 0.1 f(0.1, 0.91) = -0.081, \\ k_2 &= h f(x_1 + h, y_1 + k_1) = 0.1 f(0.2, 0.829) = -0.0629, \\ y_2 &= y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.91 + 0.5(-0.081 - 0.0629) = 0.8381. \end{aligned}$$

Repetiendo el proceso otras ocho veces obtenemos los resultados que se muestran en la tabla siguiente, hemos incluido además los resultados correspondientes a la solución analítica  $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$  y los errores absoluto y porcentual.

$x_i$	$y_i$	$k_1$	$k_2$	$y(exacta)$	EA	EP
0.0000	1.0000	-0.1000	-0.0800	1	0	0%
0.1000	0.9100	-0.0810	-0.0629	0.9097	0.0003	0.03%
0.2000	0.8381	-0.0638	-0.0474	0.8375	0.0006	0.07%
0.3000	0.7825	-0.0483	-0.0334	0.7816	0.0009	0.12%
0.4000	0.7417	-0.0342	-0.0208	0.7406	0.0011	0.15%
0.5000	0.7142	-0.0214	-0.0093	0.7131	0.0011	0.15%
0.6000	0.6989	-0.0099	0.0011	0.6976	0.0013	0.19%
0.7000	0.6945	0.0005	0.0105	0.6932	0.0013	0.19%
0.8000	0.7000	0.0100	0.0190	0.6987	0.0013	0.19%
0.9000	0.7145	0.0186	0.0267	0.7131	0.0014	0.2%
1.0000	0.7372	0.0263	0.0337	0.7358	0.0014	0.19%

Consideremos ahora  $h = 0.05$ , necesitamos ahora repetir el proceso 20 veces para obtener la solución numérica. Aplicando las ecuaciones (7.5) con  $i = 1$  obtenemos:

$$k_1 = h f(x_0, y_0) = 0.05 f(0, 1) = 0.05(-1) = -0.05,$$

$$k_2 = h f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0.05 f(0.05, 0.95) = 0.05(0.05 - 0.95) = -0.045,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + 0.5(-0.05 - 0.045) = 0.9525.$$

Repitiendo otra vez el proceso con  $i = 2$  obtenemos:

$$k_1 = h f(x_1, y_1) = 0.05 f(0.05, 0.9525) = -0.0451,$$

$$k_2 = h f(x_1 + h, y_1 + k_1) = 0.05 f(0.1, 0.9074) = -0.0404,$$

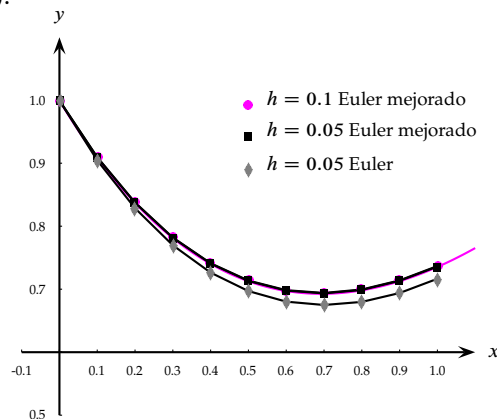
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.91 + 0.5(-0.0451 - 0.0404) = 0.9098.$$

Los resultados para el intervalo  $[0, 1]$  se muestran en la tabla siguiente, donde se han incluido los cálculos de Euler (para  $h = 0.05$ ) y exactos. Note que la solución con el Método de Euler-Mejorado con  $h = 0.1$  reproduce mejor los resultados exactos que la solución numérica obtenida con el método de Euler con  $h = 0.05$ . Observe además que las soluciones numéricas calculadas con el método de Euler-Mejorado están ligeramente arriba de la solución analítica.

	Euler-Mejorado		Euler	Exacto
$x_i$	$y_i(h = 0.1)$	$y_i(h = 0.05)$	$y_i(h = 0.05)$	$y_{exacto}$

0.00	1	1	1.0000	1
0.10	0.91	0.9098	0.9050	0.9097
0.20	0.8381	0.8377	0.8290	0.8375
0.30	0.7825	0.782	0.7702	0.7816
0.40	0.7417	0.7411	0.7268	0.7406
0.50	0.7142	0.7135	0.6975	0.7131
0.60	0.6989	0.6982	0.6807	0.6976
0.70	0.6945	0.6938	0.6754	0.6932
0.80	0.7	0.6993	0.6803	0.6987
0.90	0.7145	0.7138	0.6944	0.7131
1.00	0.7372	0.7364	0.7170	0.7358

Las gráficas de las curvas obtenidas se muestran en la siguiente figura. El origen de coordenadas en la gráfica se ha colocado en  $(0, 0.6)$ .



□

En conclusión, al igual que en el método de Euler podemos reducir los errores de aproximación y de propagación haciendo más pequeño el tamaño de paso  $h$ , lo que implica un mayor esfuerzo de cálculo y, en consecuencia, para determinar rápidamente la solución de la ecuación considerada es necesario utilizar alguna herramienta computacional. En los siguientes dos ejemplos ilustramos el cálculo de la solución numérica utilizando Excel y en Mathematica aquí hemos implementado el pseudocódigo asociado a este método de Euler–Mejorado.

- Pseudocódigo del método de Euler–Mejorado

1. Proporcionar:  $f, x_0, y_0, h, n$
2. Imprimir  $x_0, y_0$
3. Desde  $i = 1$  hasta  $i = n$

a. Calcular

$$k_1 = h * f(x_0, y_0);$$

$$k_2 = h * f(x_0 + h, y_0 + k_1);$$

$$y_1 = y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

b. Hacer  $y_0 = y_1$ ;  $x_0 = x_0 + h$ ;

c. Imprimir  $x_0, y_0$

4. Terminar

**Ejemplo 7.3.8** Use el método de Euler–Mejorado en una hoja de cálculo de Excel para determinar un valor aproximado de  $y(1)$  si  $y(x)$  es la solución de la ecuación diferencial

$$y' = x^2 y + y,$$

con la condición inicial  $y(0) = 1$ . Considere que el tamaño de paso es  $h = 0.1$ .

▼ Utilizamos las siguientes instrucciones en una hoja de cálculo de Excel para resolver el ejemplo:

• El método de Euler–Mejorado en Excel.

1. En las celdas A1, A2, A3 se escriben las etiquetas: " $x_0=$ ,  $y_0=$ ,  $h=$ ".
2. En las celdas B1, B2, B3 se escriben " $=0$ ,  $=1$ ,  $=0.1$ ", respectivamente.
3. En las celdas A5, B5, C5, D5, E5 se escriben las etiquetas: " $i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ".
4. Se escriben en las celdas A6:A16 los números "0, 1, 2, ..., 10".
5. En las celdas B6 y C6 se escriben, respectivamente: " $=B1$ ,  $=B2$ ".
6. En la celda D6 se escribe " $=B\$3*(B6^2*C6+C6)$ ". Observe que en este paso, se evalúa la función  $f(x, y) = x^2 y + y$  en el punto  $(x_0, y_0)$  y se multiplica por  $h$ , a esta expresión la llamamos  $k_1$ .
7. En la celda E6 se escribe " $=B\$3*((B6+B\$3)^2*(C6+D6)+(C6+D6))$ ". Observe que en este paso, se evalúa la función  $f(x, y) = x^2 y + y$  en el punto  $(x_0 + h, y_0 + k_1)$  y se multiplica por  $h$ , a esta expresión la llamamos  $k_2$ .
8. En la celda B7 se escribe " $= B6 + \$B\$3$ ".
9. En la celda C7 escribimos ahora " $=C6+(D6+E6)/2$ ". Observe que en este paso estamos usando el método de Euler–Mejorado.
10. Se seleccionan las celdas D6-E6 y se copian en D7-E7.
11. Se seleccionan las celdas B7-E7 y se arrastran hasta llegar a las celdas B16-E16.
12. Se grafica la solución utilizando el asistente de gráficos con la opción de **XY-Dispersión**.

En la tabla siguiente se muestran los resultados numéricos obtenidos

$i$	$x_i$	$y_i$	$k_1$	$k_2$
0	0	1	0.1	0.1111
1	0.1	1.10555	0.11166055	0.126589897
2	0.2	1.224675224	0.127366223	0.147372518
3	0.3	1.362044594	0.148462861	0.175218865

4	0.4	1.523885457	0.176770713	0.212582021
5	0.5	1.718561824	0.214820228	0.262939959
6	0.6	1.957441917	0.266212101	0.331324449
7	0.7	2.256210192	0.336175319	0.425151224
8	0.8	2.636873463	0.432447248	0.555547049
9	0.9	3.130870612	0.566687581	0.739511639
10	1	3.783970221	0.756794044	1.003508903



**Ejemplo 7.3.9** Resolver el PVI:

$$y' = x - 3y, \quad y(0) = 1,$$

utilizando el método de Euler–Mejorado repitiendo el proceso  $n = 10$  veces con  $h = 0.3$  implementando el método en Mathematica.

▼ Aplicamos el pseudocódigo del método para elaborar el siguiente programa en el paquete Mathematica 7.0, hemos incluido comentarios para que dicho programa quede más claro.

• El método de Euler–Mejorado en Mathematica

```
f[x_, y_] := x - 3y; (* Definir f *)
x0=0; (* Abscisa del punto inicial *)
y0=1; (* Ordenada del punto inicial *)
h=0.3; (* Incremento en el paso *)
n=10; (* Total de pasos a realizar *)
lista={{x0,y0}}; (* Definir lista con punto inicial *)
Do[ k1=h*f[x0,y0]; (* Calcular k1 *)
    k2=h*f[x0+h,y0+k1]; (* Calcular k2 *)
    y1=y0+(k1+k2)/2; (* Determinar y1 *)
    y0=y1; (* Intercambiar y0 con y1 *)
    x0=x0+h; (* Incrementar x0 *)
    AppendTo[lista,{x0,y0}], (* Incluir punto en la lista *)
{i,1,n}]; (* Terminar el proceso *)
ListPlot[lista] (* Graficar los puntos obtenidos *)
```

Después de correr este programa, obtenemos los resultados que se muestran en la tabla siguiente, aquí hemos incluido los valores exactos, valores que se obtiene evaluando la función

$$y(x) = \frac{1}{9} (3x - 1 + 10e^{-3x}),$$

en los puntos  $x = 0, 0.3, 0.6, \dots, 3$ .

$x$	$\tilde{y}_2$	$y_{\text{exacto}}$
-----	---------------	---------------------

0	1	1.
0.3	0.55	0.440633
0.6	0.37225	0.272554
0.9	0.331986	0.263562
1.2	0.361153	0.319249
1.5	0.425382	0.401232
1.8	0.507318	0.493907
2.1	0.598196	0.590929
2.4	0.693589	0.689718
2.7	0.791262	0.789226
3.	0.890087	0.889026

### Ejercicios 7.3.1 Euler-Mejorado. Soluciones en la página 479

Determine una aproximación cuadrática de la solución  $y(x)$  de cada una de las siguientes PVI utilizando el  $h$  proporcionado. En los casos que se requiera aplique dos veces el proceso de aproximación cuadrática para obtener una estimación de la solución.

1.  $y' = 2x - y$  con  $y(0) = 3$  en  $x = 0.2$  para  $h = 0.2$ .
2.  $y' = x - xy$  con  $y(1) = 2$  en  $x = 1.1$  para  $h = 0.1$ .
3.  $y' = y - x + 5$  con  $y(1) = 1$  en  $x = 1.2$  para  $h = 0.1$ .
4.  $y' = x^2 - y$  con  $y(0) = 3$  en  $x = 0.4$  para  $h = 0.2$ .

Use el método de Euler-Mejorado para determinar una aproximación numérica de la solución en el punto indicado de cada una de las siguientes PVI, utilice el tamaño de paso proporcionado y utilice redondeo a cuatro cifras decimales en todos sus cálculos.

5.  $y' = x^2 - y$  con  $y(1) = 2$ , calcule  $y(1.5)$  para  $h = 0.1$ .
6.  $y' = x + 2y - 1$  con  $y(2) = 1$ , calcule  $y(2.5)$  para  $h = 0.1$ .
7.  $y' = \frac{x^2 + 4}{y}$  con  $y(0) = 1$ , calcule  $y(0.25)$  para  $h = 0.05$ .
8.  $y' = xy$  con  $y(2) = 1$ , calcule  $y(3)$  para  $h = 0.2$ .

## 7.4 Método de Runge Kutta

En las secciones previas se resolvió el PVI:  $y' = f(x, y)$  con  $y(x_0) = y_0$  utilizando aproximaciones lineal y cuadrática de la solución  $y(x)$ . Observamos entonces que la aproximación cuadrática produce resultados



con errores menores que la aproximación lineal. Esperamos obtener todavía mejores resultados si aumentamos el grado del polinomio de aproximación. Cuando consideramos el polinomio de Taylor para  $y(x)$  en  $x = x_0$  de orden cuatro, obtenemos la denominada **aproximación cuártica**, que es:

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}y''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4.$$

El valor de  $y(x)$  en  $x = x_0 + h$  se aproxima entonces por el polinomio que denotaremos  $\tilde{y}_4(x_0 + h)$ :

$$y(x_0 + h) \approx \tilde{y}_4(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2!}y''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(x_0)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(x_0)h^4.$$

En general, las cantidades  $y(x_0 + h)$  &  $\tilde{y}_4(x_0 + h)$  son diferentes. Al igual que en los casos previos, se produce un error absoluto  $EA$  de aproximación que se calcula tomando el valor absoluto de su diferencia, tal como como se hizo en las secciones anteriores.

**Ejemplo 7.4.1** Encuentre la aproximación cuártica de la solución  $y(x)$  en  $x = 0.1$  del PVI:

$$y' = 2y \quad \text{con} \quad y(0) = 1.$$

▼ Derivando tres veces la ecuación diferencial con respecto a  $x$  tenemos:

$$\begin{aligned} y'' &= 2y' = 2(2y) = 4y, \\ y^{(3)} &= 2y'' = 2(4y) = 8y, \\ y^{(4)} &= 2y^{(3)} = 2(8y) = 16y. \end{aligned}$$

Evaluando en  $x = 0$  y usando la condición inicial  $y(0) = 1$  obtenemos:

$$\begin{aligned} y'(0) &= 2y(0) = 2, \\ y''(0) &= 2y'(0) = 2[2] = 4, \\ y^{(3)}(0) &= 2y''(0) = 2[4] = 8, \\ y^{(4)}(0) &= 16y(0) = 16, \end{aligned}$$

Por lo cual la aproximación cuártica de la solución alrededor de  $x_0 = 0$  está dada por.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_4(h) &= y(0) + y'(0)h + \frac{1}{2!}y''(0)h^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(0)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(0)h^4 = \\ &= 1 + 2h + 2h^2 + \frac{4}{3}h^3 + \frac{2}{3}h^4. \end{aligned}$$

Si aproximamos la solución en el punto  $x = 0.1$  usando  $h = 0.1$ , tendremos:

$$\tilde{y}_4(0.1) = 1 + 2(0.1) + 2(0.1)^2 + \frac{4}{3}(0.1)^3 + \frac{2}{3}(0.1)^4 = 1.2214.$$

La solución analítica  $y(x) = e^{2x}$  evaluada en  $x = 0.1$  es  $y_{exacto} = e^{0.2} \approx 1.2214$ . Es decir, considerando sólo cuatro cifras significativas, la aproximación  $\tilde{y}_4$  no tiene error.

□

Recordemos que en la aproximación lineal se requiere evaluar la función  $f(x, y)$  en un punto y que la aproximación cuadrática es equivalente a promediar el valor de dicha función en dos puntos, se podría intuir entonces que la aproximación cuártica debe ser equivalente a hacer un valor ponderado del valor de la función  $f(x, y)$  en cuatro puntos. Para apreciar esto podemos considerar las siguientes cantidades

$k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  definidas por:

$$\begin{aligned} k_1 &= y'(x_0)h = f(x_0, y_0)h = 2y_0h, \\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)h = 2\left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right)h = 2(y_0 + y_0h)h = 2y_0h + 2y_0h^2, \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)h = 2\left(y_0 + \frac{k_2}{2}\right)h = 2(y_0 + y_0h + y_0h^2)h = 2y_0h + 2y_0h^2 + 2y_0h^3, \\ k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + k_3)h = 2(y_0 + k_3)h = 2(y_0 + 2y_0h + 2y_0h^2 + 2y_0h^3)h = \\ &= 2y_0h + 4y_0h^2 + 4y_0h^3 + 4y_0h^4. \end{aligned}$$

Considerando  $y_0 = 1$  tenemos que:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2h, \\ k_2 &= 2h + 2h^2, \\ k_3 &= 2h + 2h^2 + 2h^3, \\ k_4 &= 2h + 4h^2 + 4h^3 + 4h^4. \end{aligned}$$

De donde resulta

$$\begin{aligned} 2h &= k_1, \\ 2h^2 &= k_2 - k_1, \\ 2h^3 &= k_3 - k_2, \\ 4h^4 &= k_4 - 2k_3 + k_1. \end{aligned}$$

Usando estos resultados en la aproximación polinomial de cuarto grado se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{y}_4(h) &= 1 + 2h + 2h^2 + \frac{4}{3}h^3 + \frac{2}{3}h^4 = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{2}{3}(2h^3) + \frac{1}{6}(4h^4) = \\ &= 1 + k_1 + (k_2 - k_1) + \frac{2}{3}(k_3 - k_2) + \frac{1}{6}(k_4 - 2k_3 + k_1) = 1 + k_2 + \frac{2}{3}(k_3 - k_2) + \frac{1}{6}(k_4 - 2k_3 + k_1) = \\ &= 1 + \frac{6k_2 + 4(k_3 - k_2) + (k_4 - 2k_3 + k_1)}{6} = \\ &= 1 + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \end{aligned}$$

Es decir, evaluando la función  $f(x, y)$  en cuatro puntos es posible recuperar la aproximación cuártica de Taylor. Note que el término  $\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$  es un promedio ponderado donde  $k_2$  y  $k_3$  tienen mayor importancia que  $k_1$  y  $k_4$ .

**Ejemplo 7.4.2** Encuentre una aproximación cuártica de la solución del PVI:

$$y' = x - y, \quad \text{con } y(1) = 2,$$

en el punto  $x = 1.2$ . Muestre después que:

$$\tilde{y}_4(h) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

▼ De la ecuación diferencial tenemos, al derivar tres veces con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned} y'' &= 1 - y' = 1 - (x - y) = 1 - x + y, \\ y^{(3)} &= -y'' = -(1 - x - y) = -1 + x + y, \\ y^{(4)} &= -y^{(3)} = -(-1 + x - y) = 1 - x + y. \end{aligned}$$

Si usamos ahora la condición inicial  $y(1) = 2$  obtenemos:

$$\begin{aligned}y'(1) &= -1, \\y''(1) &= 2, \\y^{(3)}(1) &= -2, \\y^{(4)}(1) &= 2.\end{aligned}$$

Por lo cual la aproximación cuártica de la solución alrededor de  $x = 1$  está dada por:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_4(h) &= y(1) + y'(1)h + \frac{1}{2!}y''(1)h^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(1)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(1)h^4 = \\&= 2 - h + h^2 - \frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{12}h^4.\end{aligned}$$

Usando  $h = 0.2$  obtenemos la aproximación pedida

$$\tilde{y}_4(1.2) = 2 - 0.2 + (0.2)^2 - \frac{1}{3}(0.2)^3 + \frac{1}{12}(0.2)^4 = 1.8375.$$

La solución analítica es  $y = x - 1 + 2e^{1-x}$ , ver ejemplo 7.2.2, y evaluada en  $x = 1.2$  produce:

$$y_{exacto} = 1.2 - 1 + 2e^{1-1.2} = 0.2 + 2e^{-0.2} \approx 1.8375,$$

se tiene una aproximación de cuatro cifras significativas exactas, en este caso el error porcentual es:

$$EP = 100 \left| \frac{y_{exacto} - \tilde{y}_4}{y_{exacto}} \right| \% = 100 \left| \frac{1.83746 - 1.83747}{1.83746} \right| \% = 0.0005\%.$$

Mostremos ahora que esta aproximación cuártica es equivalente a un promedio ponderado de números  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  relacionados con la evaluación de la función  $f(x, y) = x - y$  en cuatro puntos. En efecto, si definimos:

$$\begin{aligned}k_1 &= y'(x_0)h = f(x_0, y_0)h = (x_0 - y_0)h, \\k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)h = \left(x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{k_1}{2}\right)h = (x_0 - y_0)h + \frac{h^2}{2} - (x_0 - y_0)\frac{h^2}{2}, \\k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)h = (x_0 - y_0)h + h^2 - \frac{h^3}{2}, \\k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + k_3)h = (x_0 - y_0)h + 2h^2 - h^3 + \frac{h^4}{2}.\end{aligned}$$

tenemos al considerar  $x_0 = 1$  &  $y_0 = 2$  que

$$\begin{aligned}k_1 &= -h, \\k_2 &= -h + h^2, \\k_3 &= -h + h^2 - \frac{h^3}{2}, \\k_4 &= -h + 2h^2 - h^3 + \frac{h^4}{2}.\end{aligned}$$

De lo anterior resulta

$$\begin{aligned}-h &= k_1, \\h^2 &= k_2 + h = k_2 - k_1, \\\frac{-h^3}{2} &= k_3 + h - h^2 = k_3 - k_1 - (k_2 - k_1) = k_3 - k_2, \\\frac{h^4}{2} &= k_4 + h - 2h^2 + h^3 = k_4 - k_1 - 2k_2 + 2k_1 - 2k_3 + 2k_2 = k_4 - 2k_3 + k_1.\end{aligned}$$

Usando estos resultados en la aproximación polinomial de cuarto grado se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_4(h) &= 2 - h + h^2 - \frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{12}h^4 = \\ &= 2 + k_1 + (k_2 - k_1) + \frac{2}{3}(k_3 - k_2) + \frac{1}{6}(k_4 - 2k_3 + k_1) = \\ &= 2 + \frac{6k_2 + 4(k_3 - k_2) + (k_4 - 2k_3 + k_1)}{6} = \\ &= 2 + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.\end{aligned}$$

Es decir, evaluando la función  $f(x, y)$  en cuatro puntos es posible recuperar la aproximación cuártica de Taylor. □

En los ejemplos previos surge de forma natural la pregunta ¿porqué se evaluó la función  $f(x, y)$  en los puntos  $(x_0, y_0)$ ,  $\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$ ,  $\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$ ,  $(x_0 + h, y_0 + k_3)$ ? Para responderla notemos que si queremos aproximar el valor de la solución  $y(x)$  en  $x_1 = x_0 + h$  cuando sabemos su valor en  $x_0$  debemos evaluar la función  $f(x, y)$  en puntos  $(x, y)$  tales que las abscisas se encuentren ubicadas en el intervalo  $[x_0, x_0 + h]$ ; por ejemplo en  $x_0, x_0 + \alpha_1 h, x_0 + \alpha_2 h, x_0 + h$  donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son números entre 0 y 1. Por otra parte, las ordenadas deben considerar las cantidades  $k_i$ , que son los cambios de la variable dependiente  $y$ , los cuales en general están dados por:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_0, y_0)h, \\ k_2 &= f(x_0 + \alpha_1 h, y_0 + \beta_1 k_1)h, \\ k_3 &= f(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_2 k_2)h, \\ k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + k_3)h.\end{aligned}$$

donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  también son números entre 0 y 1. En los ejercicios anteriores hemos seleccionado

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$$

para facilitar los cálculos, aún cuando esta no es la única posibilidad para mostrar que la aproximación cuártica es equivalente a evaluar la función  $f(x, y)$  en cuatro puntos.

**Ejemplo 7.4.3** Encuentre una aproximación cuártica de la solución del PVI:

$$y' = xy, \quad \text{con } y(2) = 4.$$

Utilice esta aproximación para calcular  $y(2.01)$ . Muestre después que

$$\tilde{y}_4(h) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

▼ Si derivamos tres veces la ecuación diferencial con respecto a la variable  $x$  obtenemos

$$\begin{aligned}y'' &= y + xy' = y + x^2y, \\ y^{(3)} &= y' + 2xy + x^2y' = 3xy + x^3y, \\ y^{(4)} &= 3y + 3xy' + 3x^2y + x^3y' = 3y + 6x^2y + x^4y.\end{aligned}$$

Si usamos ahora la condición inicial  $y(2) = 4$  resulta:

$$\begin{aligned}y'(2) &= 8, \\ y''(2) &= 20, \\ y^{(3)}(2) &= 56, \\ y^{(4)}(2) &= 172.\end{aligned}$$

Con estos resultados obtenemos la siguiente aproximación cuártica de la solución  $y(x)$  alrededor del punto  $x = 2$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_4(h) &= y(2) + y'(2)h + \frac{1}{2!}y''(2)h^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(2)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(2)h^4 = \\ &= 4 + 8h + 10h^2 + \frac{28}{3}h^3 + \frac{43}{6}h^4.\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando  $h = 0.01$  obtenemos una aproximación de  $y(x)$  en  $x = 2.01$ :

$$\tilde{y}_4(2.01) = 4 + 8(0.01) + 10(0.01)^2 + \frac{28}{3}(0.01)^3 + \frac{43}{6}(0.01)^4 = 4.08101.$$

En este caso la solución analítica está dada por  $y = 4e^{-2+\frac{x^2}{2}}$  y su valor en  $x = 2.01$  por:

$$y_{exacto} = 4e^{-2+\frac{(2.01)^2}{2}} \approx 4.08101.$$

Nuestra aproximación  $\tilde{y}_4$  reproduce cinco cifras decimales de la solución analítica  $y_{exacto}$ , en consecuencia, tiene un error porcentual del 0%.

Mostremos ahora como podemos reescribir esta aproximación de grado cuatro usando evaluaciones de la función  $f(x, y) = xy$  en cuatro puntos. Consideremos como en ejemplos previos  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ . Definimos primero:

$$\begin{aligned}k_1 &= y'(2)h = f(2, 4)h = 8h, \\ k_2 &= f\left(2 + \frac{h}{2}, 4 + \frac{k_1}{2}\right)h = 2h^3 + 10h^2 + 8h, \\ k_3 &= f\left(2 + \frac{h}{2}, 4 + \frac{k_2}{2}\right)h = \frac{h^5}{2} + \frac{9h^4}{2} + 12h^3 + 10h^2 + 8h, \\ k_4 &= f\left(2 + h, 4 + k_3\right)h = \frac{h^7}{2} + \frac{11h^6}{2} + 21h^5 + 34h^4 + 28h^3 + 20h^2 + 8h.\end{aligned}$$

Necesitamos despejar  $h, h^2, h^3$  y  $h^4$  en términos de  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$ . Para ello despreciamos los términos con potencias de  $h$  superiores a cuatro porque suponemos que  $h$  es pequeña. Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned}k_1 &= 8h, \\ k_2 &= 2h^3 + 10h^2 + 8h, \\ k_3 &= \frac{9h^4}{2} + 12h^3 + 10h^2 + 8h, \\ k_4 &= 34h^4 + 28h^3 + 20h^2 + 8h.\end{aligned}$$

De donde resulta:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) &= \frac{1}{6}\left[8h + 2(2h^3 + 10h^2 + 8h) + 2\left(\frac{9h^4}{2} + 12h^3 + 10h^2 + 8h\right) + \right. \\ &\quad \left. + 34h^4 + 28h^3 + 20h^2 + 8h\right] = \\ &= 8h + 10h^2 + \frac{28}{3}h^3 + \frac{43}{6}h^4.\end{aligned}$$

Usando estos resultados en la aproximación polinomial de cuarto grado se tiene:

$$\tilde{y}_4(h) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 4 + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.$$

que es el resultado pedido. □

Como se aprecia en los últimos ejemplos, el método presentado en esta sección produce aproximaciones a la solución de un PVI que mejoran significativamente los resultados obtenidos con los métodos de Euler y Euler mejorado, como se puede ver al comparar las aproximaciones de las secciones 7.2 y 7.3 y la presente, al resolver los mismos PVI. En general un problema asociado a un PVI consiste en aproximar  $y(x_1)$  para un punto  $x_1 \neq x_0$ , donde  $y$  es la solución del PVI:  $y' = f(x, y)$  con  $y(x_0) = y_0$ . Una aproximación  $\tilde{y}(x_1) \approx y(x_1)$  tendrá usualmente un error, que está en función de la distancia  $|x_1 - x_0|$ , entre los puntos inicial y final. Para ello, al utilizar la fórmula de Taylor de orden  $n$  con  $h = x_1 - x_0$ :

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0; h),$$

donde el último término, que da el error de aproximación será proporcional a  $h^{n+1}$ , así que si  $h$  es pequeño ( $|h| \ll 1$ ),  $h^{n+1}$  será mucho más pequeño.

De aquí que si se utilizan polinomios de Taylor de orden mayor, se esperaría obtener errores más pequeños, o sea aproximaciones con mayor precisión. Sin embargo el esfuerzo computacional aumenta significativamente con el orden del polinomio de Taylor y no es muy recomendable.

Por otra parte, si  $|x_1 - x_0|$  no es lo suficientemente pequeña, la acción más recomendable sería subdividir el intervalo entre  $x_0$  y  $x_1$  en intervalos suficientemente pequeños de tamaño  $h$  haciendo aproximaciones en los puntos intermedios  $x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$  utilizando alguno de los métodos presentados aquí e iterando el proceso hasta llegar a  $x_1 = x_0 + Nh$ , donde  $N$  es el número de subintervalos. Naturalmente, en cada paso de este proceso hay un error de aproximación y estos errores se irán acumulando en general. Por esta razón es poco recomendable utilizar métodos numéricos para aproximar la solución de una ED en puntos muy lejanos al valor inicial.

Se presentan a continuación el método de Runge–Kutta, su pseudocódigo, programación y ejemplos de aplicación.

#### • Método de Runge–Kutta (RK4)

La solución numérica del PVI:  $y' = f(x, y)$  con  $y(x_0) = y_0$  con tamaño de paso  $h$  está formada por los puntos  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  que se obtienen mediante las fórmulas de recurrencia:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \\ k_1 &= h f(x_i, y_i), \\ k_2 &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= h f(x_i + h, y_i + k_3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \tag{7.7}$$

con  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  y los segmentos rectilíneos entre cada par de puntos consecutivos.

**Ejemplo 7.4.4** Use el método de Runge Kutta RK4 para calcular  $y(0.5)$  de la solución del problema de valor inicial  $y' = 1 + x^2y^2$  con  $y(0) = 1$  considerando  $h = 0.25$ .

▼ Como el tamaño de paso es  $h = 0.25$  repetiremos el proceso RK4 dos veces. Usamos el método 7.7 con  $i = 1$ , para calcular  $k_1, k_2, k_3, k_4$  &  $y_1$ , además consideremos  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  y  $f(x, y) = 1 + x^2y^2$ , así

obtenemos:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h f(x_0, y_0) = 0.25 f(0, 1) = 0.25(1) = 0.25, \\
 k_2 &= h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.25 f(0.125, 1.125) = 0.2549, \\
 k_3 &= h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.25 f(0.125, 1.1254) = 0.2549, \\
 k_4 &= h f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.25 f(0.25, 1.255) = 0.2746, \\
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(0.25 + 0.5098 + 0.51 + 0.2746) = 1.2574.
 \end{aligned}$$

Repetimos el proceso 7.7 con  $i = 2$  y obtenemos en este caso:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h f(x_1, y_1) = 0.25 f(0.25, 1.2574) = 0.2747, \\
 k_2 &= h f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.25 f(0.375, 1.3948) = 0.3184, \\
 k_3 &= h f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.25 f(0.375, 1.4166) = 0.3206, \\
 k_4 &= h f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.25 f(0.5, 1.578) = 0.4056, \\
 y_2 &= y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(0.2747 + 0.6368 + 0.6412 + 0.8112) = 1.5838.
 \end{aligned}$$

Es decir,  $y_2 = 1.5838$  es una aproximación de  $y(0.5)$ .

□

**Ejemplo 7.4.5** Considere el PVI:  $y' = x + \frac{1}{y}$  con  $y(1) = 2$ . Utilice el método de RK4 para estimar  $y(3)$ ; utilice  $h = 1$ .

▼ Nuevamente repetiremos el proceso 7.7 dos veces, tenemos en este caso:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h f(x_0, y_0) = f(1, 2) = 1.5, \\
 k_2 &= h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = f(1.5, 2.75) = 1.8636, \\
 k_3 &= h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = f(1.5, 2.9318) = 1.8411, \\
 k_4 &= h f(x_0 + h, y_0 + k_3) = f(2, 3.8411) = 2.2603, \\
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2 + \frac{1}{6}(1.5 + 3.7272 + 3.6822 + 2.2603) = 3.8616.
 \end{aligned}$$

Repetimos otra vez el proceso, obtenemos ahora:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h f(x_1, y_1) = f(2, 3.8616) = 2.259, \\
 k_2 &= h f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = f(2.5, 4.9911) = 2.7004, \\
 k_3 &= h f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = f(2.5, 5.2118) = 2.6919, \\
 k_4 &= h f(x_1 + h, y_1 + k_3) = f(3, 6.5535) = 3.1526, \\
 y_2 &= y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3.8616 + \frac{1}{6}[2.259 + (2)2.7004 + (2)2.6919 + 3.1526] = 6.561.
 \end{aligned}$$

Concluimos que una aproximación numérica a  $y(3)$  es  $y_2 = 6.561$ .

□

**Ejemplo 7.4.6** Considere el PVI:  $y' = x - y$  con  $y(0) = 1$ . Determine una solución numérica usando el método RK4 en el intervalo  $[0, 1]$ , utilice  $h = 0.1$ . Finalmente, compare los resultados con la solución analítica del PVI.

▼ Ahora aplicaremos el método RK4 diez veces considerando cuatro cifras decimales. Para obtener  $y_1$  procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_0, y_0) = 0.1f(0, 1) = -0.1, \\ k_2 &= h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.1f(0.05, 0.95) = -0.09, \\ k_3 &= h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1f(0.05, 0.955) = -0.0905, \\ k_4 &= h f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1f(0.1, 0.9095) = -0.081, \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(-0.1 - 0.18 - 0.181 - 0.081) = 0.9097. \end{aligned}$$

Repetimos el proceso 7.7 para obtener  $y_2$ , tenemos entonces:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_1, y_1) = 0.1f(0.1, 0.9097) = -0.0810, \\ k_2 &= h f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.1f(0.15, 0.8692) = -0.0719, \\ k_3 &= h f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1f(0.15, 0.8737) = -0.0724, \\ k_4 &= h f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1f(0.2, 0.8373) = -0.0637, \\ y_2 &= y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.9097 + \frac{1}{6}[-0.0810 - 0.0719 + 2(-0.0724) + 2(-0.0637)] = 0.8375. \end{aligned}$$

Continuando el proceso obtendremos los resultados que se muestran en la tabla siguiente donde además se han incluido los resultados exactos. Observe que el método reproduce con mucha precisión los resultados exactos.

$x_i$	$\tilde{y}_4$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$y_{exacto}$
0	1	-0.1	-0.09	-0.0905	-0.081	1
0.1	0.9097	-0.081	-0.0719	-0.0724	-0.0637	0.9097
0.2	0.8375	-0.0638	-0.0556	-0.056	-0.0481	0.8375
0.3	0.7816	-0.0482	-0.0408	-0.0411	-0.034	0.7816
0.4	0.7406	-0.0341	-0.0274	-0.0277	-0.0213	0.7406
0.5	0.713	-0.0213	-0.0152	-0.0155	-0.0098	0.7131
0.6	0.6976	-0.0098	-0.0043	-0.0045	0.0007	0.6976
0.7	0.6932	0.0007	0.0056	0.0054	0.0101	0.6932
0.8	0.6987	0.0101	0.0146	0.0144	0.0187	0.6987
0.9	0.7132	0.0187	0.0227	0.0225	0.0264	0.7131
1	0.7358					0.7358





En el método RK4, al igual que en los métodos de Euler y Euler-mejorado, se pueden reducir los errores de aproximación y de propagación reduciendo el tamaño de paso  $h$ . Sin embargo, esto implica la evaluación de la función  $f(x, y)$  en un mayor número de puntos  $y$ , en consecuencia, un mayor esfuerzo de cálculo, razón por la cual necesitamos nuevamente utilizar herramientas computacionales como Excel o bien Mathematica, los siguientes dos ejemplos muestran la implementación del pseudocódigo asociado al método RK4 en estos paquetes.

- **Pseudocódigo del método de Runge-Kutta**

1. Proporcionar:  $f, x_0, y_0, h, n$
2. Imprimir  $x_0, y_0$
3. Desde  $i = 1$  hasta  $i = n$ 
  - a. Calcular

$$\begin{aligned} k_1 &= h * f(x_0, y_0); \\ k_2 &= h * f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right); \\ k_3 &= h * f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right); \\ k_4 &= h * f(x_0 + h, y_0 + k_3); \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

- b. Hacer  $y_0 = y_1; x_0 = x_0 + h;$
  - c. Imprimir  $x_0, y_0$
4. Terminar

**Ejemplo 7.4.7** Use el método RK4 en una hoja de cálculo de Excel para determinar un valor aproximado de  $y(1)$  si  $y(x)$  es la solución del PVI:

$$y' = x^2 y + y \quad \text{con} \quad y(0) = 1$$

Considere que el tamaño de paso es  $h = 0.1$

▼ Utilizamos las siguientes instrucciones en una hoja de cálculo de Excel para resolver el ejemplo.

- **El método RK4 en Excel**

1. En las celdas A1, A2, A3 se escriben las etiquetas: " $x_0=$ ,  $y_0=$ ,  $h=$ ".
2. En las celdas B1, B2, B3 se escriben " $=0$ ,  $=1$ ,  $=0.1$ ", respectivamente.
3. En las celdas A5, B5, C5, D5, E5, F5, G5 se escriben las etiquetas: " $i, x_i, y_i, k_1, k_2, k_3, k_4$ ".
4. Se escriben en las celdas A6:A16 los números "0, 1, 2, ..., 10".
5. En las celdas B6 y C6 se escriben, respectivamente: " $=B1$ ,  $=B2$ ".
6. En la celda D6 se escribe " $=B\$3*(B6^2*C6+C6)$ ". Observe que en este paso, se evalúa la función  $f(x, y) = x^2 y + y$  en el punto  $(x_0, y_0)$  y se multiplica por  $h$ , a esta expresión la llamamos  $k_1$ .
7. En la celda E6 se escribe " $=B\$3*((B6+\$B\$3/2)^2*(C6+D6/2)+(C6+D6/2))$ ". Observe que en este paso, se evalúa la función  $f(x, y) = x^2 y + y$  en el punto  $\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$  y se multiplica por  $h$ , a esta expresión la llamamos  $k_2$ .

8. En la celda F6 se escribe "=\$B\$3\*((B6+\$B\$3/2)^2\*(C6+E6/2)+(C6+E6/2))". En este paso, se evalúa la función  $f(x, y) = x^2y + y$  en el punto  $\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$  y se multiplica por  $h$ , a esta expresión la llamamos  $k_3$ .
9. En la celda G6 se escribe "=\$B\$3\*((B6+\$B\$3)^2\*(C6+F6)+(C6+F6))". En este paso, se evalúa la función  $f(x, y) = x^2y + y$  en el punto  $(x_0 + h, y_0 + k_3)$  y se multiplica por  $h$ , a esta expresión la llamamos  $k_4$ .
10. En la celda B7 se escribe "= B6 + \$B\$3".
11. En la celda C7 escribimos ahora "=C6+(D6+2\*E6+2\*F6+G6)/6". En este paso obtenemos el valor de la aproximación.
12. Se seleccionan las celdas D6-G6 y se copian en D7-G7.
13. Se seleccionan las celdas B7-G7 y se arrastran hasta llegar a las celdas B16-G16.
14. Se grafica la solución utilizando el asistente de gráficos con la opción de **XY-Dispersión**.

En la tabla siguiente se muestran los resultados numéricos obtenidos

$i$	$x_i$	$y_i$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
0	0	1	0.1	0.1052625	0.105526283	0.111658155
1	0.1	1.105539287	0.111659468	0.118749982	0.119112485	0.127363784
2	0.2	1.224663984	0.127365054	0.136886817	0.13739266	0.148464174
3	0.3	1.362062015	0.14846476	0.161224046	0.161940161	0.176784252
4	0.4	1.523991586	0.176783024	0.193889068	0.194917568	0.214863644
5	0.5	1.718868243	0.21485853	0.23787525	0.239374214	0.266320974
6	0.6	1.958147982	0.266308125	0.297487716	0.299705364	0.336420149
7	0.7	2.257667054	0.336392391	0.379041133	0.382373066	0.43296658
8	0.8	2.639698282	0.432910518	0.491972447	0.497059156	0.567753096
9	0.9	3.136152752	0.567643648	0.650650163	0.658546158	0.758939782
10	1	3.793648764	0.758729753	0.877376118	0.889848817	1.035052965

□

**Ejemplo 7.4.8** Resolver el PVI:

$$y' = x - 3y, \quad y(0) = 1,$$

utilizando el método de Runge–Kutta repitiendo el proceso  $n = 10$  con  $h = 0.3$  implementando el método en Mathematica.

▼ El código del método RK4 en Mathematica 7.0 se muestra a continuación. Hemos incluido comentarios para que sea más sencillo y claro.

• El método de Runge–Kutta en Mathematica

```

f[x_, y_] := x - 3y;          (* Definir f *)
x0 = 0;                       (* Abscisa del punto inicial *)
y0 = 1;                       (* Ordenada del punto inicial *)
h = 0.3;                      (* Incremento en el paso *)
n = 10;                       (* Total de pasos a realizar *)
lista = {{x0, y0}};          (* Definir lista con punto inicial *)
Do[ k1 = h*f[x0, y0];        (* Calcular k1 *)
    k2 = h*f[x0 + h/2, y0 + k1/2]; (* Calcular k2 *)
    k3 = h*f[x0 + h/2, y0 + k2/2]; (* Calcular k3 *)
    k4 = h*f[x0 + h, y0 + k3];    (* Calcular k4 *)
    y1 = y0 + (k1 + 2k2 + 2k3 + k4) / 6; (* Determinar y1 *)
    y0 = y1;                    (* Intercambiar y0 con y1 *)
    x0 = x0 + h;                (* Incrementar x0 *)
    AppendTo[lista, {x0, y0}],    (* Incluir punto en la lista *)
    {i, 1, n}];                (* Terminar el proceso *)
ListPlot[lista]               (* Graficar los puntos obtenidos *)

```

Los resultados que se obtienen se muestran en la tabla siguiente, hemos incluido los valores exactos de la ordenada, valores que corresponden a la solución

$$y(x) = \frac{1}{9} (3x - 1 + 10e^{-3x}).$$

$x$	$\tilde{y}_4$	$y_{exacto}$
0	1	1.
0.3	0.445375	0.440633
0.6	0.276431	0.272554
0.9	0.265938	0.263562
1.2	0.320544	0.319249
1.5	0.401894	0.401232
1.8	0.494232	0.493907
2.1	0.591084	0.590929
2.4	0.689791	0.689718
2.7	0.789259	0.789226
3.	0.889041	0.889026

Determine una aproximación cuártica  $\tilde{y}_4(x)$  de la solución  $y(x)$  de cada una de los siguientes PVI en el punto indicado utilizando el  $h$  proporcionado. En los casos que se requiera aplique dos veces el proceso de aproximación cuártica para obtener una estimación de la solución.

1.  $y' = 4x - 2y$ , sujeto a  $y(0) = 3$  en  $x = 0.2$  con  $h = 0.2$ .
2.  $y' = y - y^2$ , sujeto a  $y(0) = 0.1$  en  $x = 0.3$  con  $h = 0.3$ .
3.  $y' = 4x^2 - 2y$ , sujeto a  $y(0) = 3$  en  $x = 0.4$  con  $h = 0.2$ .

Considere los siguientes PVI. Para cada uno de ellos, use el método RK4 para construir una tabla numérica  $x$  vs  $y$  de la solución de la ecuación diferencial tomando el tamaño de paso dado en el intervalo pedido. Estime en cada ejercicio el error relativo cometido.

4.  $y' = 2x + 2y - 1$  con  $y(1) = 1$ ; calcule  $y(1.5)$  con  $h = 0.1$ .
5.  $y' = \frac{x^2 + 2x}{y + 1}$  con  $y(0) = 1$ ; calcule  $y(2.5)$  con  $h = 0.5$ .

Resuelva los siguientes PVI con los tamaños de paso proporcionados mediante los métodos de Euler, Euler–Mejorado y Runge–Kutta. Compare los resultados obtenidos en los tres métodos con la solución  $y(x)$  del PVI.

6.  $y' = 2xy - y$  con  $y(0) = 1$ , desde  $x = 0$  hasta  $x = 2$ , con  $h = 0.2$ .
7.  $y' = y(15 - y)$  con  $y(0) = 1$ , desde  $x = 0$  hasta  $x = 1$ , con  $h = 0.1$ .
8.  $y' = y \sin x$  con  $y(0) = 1$  en el intervalo  $(0, 12)$  con  $h = 0.5$ .

# Anexo

## Ejercicios 1.4.1 Condiciones iniciales. *página 13*

1.  $y = 3e^{-2x}$ .
2.  $x^2 + y^2 = 4$ .
3.  $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ .
4.  $y^2 = -1 - 2\cos x$ .
5.  $y = e^{-x(x+2)}$
6.  $y = -\frac{6}{x} + \frac{1}{x} \int_2^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
7.  $y = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{6}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x}$ .
8.  $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}$ .
9.  $y = \operatorname{senh} x + \cosh x$ .
10.  $y^2 = x^2 + 8x$ .
11.  $y = 1 - \frac{1}{x}$ , o bien  $y = 0$ .
12.  $y = e^{\frac{y}{x}-1}$ .
13.  $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .
14.  $xe^y + y^2 = 4$ .
15.  $\ln\left(\frac{1+xy}{1-xy}\right) = 2x$ .
16.  $x - y^2 \cos^2 x = \pi$ .
17.  $xe^y + \operatorname{sen} x \cos y = 1 + \frac{\pi}{2}$ .
18.  $x^3(1 + \ln y) - y^2 = 7$ .
19.  $4y^2 - x^2 = 0$ .
20.  $y = 3x^2 - 4x^2 \ln x$ .

## Ejercicios 1.5.1 Interpretación gráfica de $y' = f(x, y)$ . *página 22*

- 1.
- 2.

## Ejercicios 1.5.2 Curva solución de un PVI. *página 29*

- 1.
- 2.

## Ejercicios 2.2.1 Variables separables. *Página 44*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.
- 16.
- 17.
- 18.
- 19.
- 20.

**Ejercicios 2.3.1** Ecuaciones diferenciales lineales. *Página 52*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
7.  $y = \frac{2x - \pi}{\operatorname{sen} x}$
8.  $y = \frac{5}{6}(2x + 5) - \frac{5^7}{6}(2x + 5)^{-5}$
9.  $y = 2 + C(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$
10.  $y = 2x^3 + Cx^3e^{-2x}$
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.
- 16.
- 17.
- 18.
- 19.
20.  $y = \frac{E L w}{L^2 w^2 + R^2} \left[ \frac{R}{L w} \operatorname{sen} w x - \cos w x \right]$

**Ejercicios 2.4.1** Ecuaciones diferenciales de Bernoulli. *Página 58*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
11.  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + c(1 + x^2)}}$
12.  $y^3 = -3x^2 + cx^{\frac{3}{2}}$
13.  $y = (1 + 7e^{-\frac{3}{2}x})^{\frac{2}{3}}$
14.  $y = \frac{2}{ce^{-x} - e^x}$
15.  $x^2 = \frac{3y}{2 + cy^3}$

**Ejercicios 2.5.1** Ecuaciones diferenciales homogéneas. *Página 70*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.
16.  $y = C_1 e^{\frac{2x}{3}} + C_2 e^{-\frac{2x}{3}}$
17.  $y = C_1 x^2 + C_2 x^5$
18.  $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^3$
19.  $y = \frac{C_1}{x^3} + \frac{C_2}{x^4}$
20.  $y = C_1 x^4 + \frac{C_2}{x^2}$

**Ejercicios 2.6.1** Ecuaciones diferenciales exactas. *Página 83*

1.  $x^3 + x^2 y^2 - x^2 - y^2 + y^3 = C$
2. La ED no es exacta.
3.  $x \operatorname{sen}(y) - y \cos(x) + \ln |xy| = C.$
4.  $x^4 y + xy^3 - x^2 - y^3 = C.$
5.  $2y \operatorname{sen}(x) + 2x^2 e^y - x^2 - y^2 = C.$
6.  $e^x \operatorname{sen}(y) - 2y \cos(x) + y^2 - x^2 = c$
7.  $x^4 + 2x^2 y + y^2 - x - y = c$
8.  $xy \ln(x) - e^y = c$
9.  $\tan(xy) - \cos(x) - \cos(y) = c$

$$10. \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{x}{y}\right) + x - \frac{1}{y} = C$$

$$11. e^x - xe^x + e^y - ye^y + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = c$$

$$12. 2e^{xy^2} - 2xy - \frac{1}{2}y \cos(2x) + \frac{y}{2} = c$$

$$13. \text{La ED será exacta si } k = 3$$

$$14. y^2 \sin(x) + y \ln|y| = x^3 y + x^2 + y$$

$$15. xy + e^y + xe^x - e^x + 2x = 3$$

$$16. e^y \cos(x) - x \tan(y) = 1$$

$$17. y^2 + 2y \arctan(x) + \ln(1 + x^2) = 1$$

$$18. \text{La ED será exacta si } A = 3 \text{ y } B = 2$$

$$19. M(x, y) = e^x \sin(y) + k(x).$$

$$20. N(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{xy^2} + k(y).$$

### Ejercicios 2.7.1 Factor Integrante. *Página 95*

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

### Ejercicios 2.8.1 Miscelánea. *Página 105*

$$1. x^3 + x^2 y^2 - x^2 - y^2 + y^3 = c$$

$$2. \text{La ED no es exacta}$$

$$3. x \sin(y) - y \cos(x) + \ln|xy| = c$$

$$4. x^4 y + xy^3 - x^2 - y^3 = c$$

$$5. 2y \sin(x) + 2x^2 e^y - x^2 - y^2 = c$$

$$6. e^x \sin(y) - 2y \cos(x) + y^2 - x^2 = c$$

$$7. x^4 + 2x^2 y + y^2 - x - y = c$$

$$8. xy \ln(x) - e^y = c$$

$$9. \tan(xy) - \cos(x) - \cos(y) = c$$

$$10. \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{x}{y}\right) + x - \frac{1}{y} = c$$

$$11. e^x - xe^x + e^y - ye^y + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = c$$

$$12. 2e^{xy^2} - 2xy - \frac{1}{2}y \cos(2x) + \frac{y}{2} = c$$

$$13. \text{La ED será exacta si } k = 3$$

$$14. \text{La ED será exacta si } A = 3 \text{ y } B = 2$$

$$15. M(x, y) = e^x \sin(y) + k(x).$$

$$16. N(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{xy^2} + k(y).$$

$$17. y^2 \sin(x) + y \ln|y| = x^3 y + x^2 + y$$

$$18. xy + e^y + xe^x - e^x + 2x = 3$$

$$19. e^y \cos(x) - x \tan(y) = 1.$$

$$20. y^2 + 2y \arctan(x) + \ln(1 + x^2) = 1$$

$$21. y = C_1 x^4 + \frac{C_2}{x^2}$$

$$22. y = C_1 x^4 + \frac{C_2}{x^2}$$

$$23. y = C_1 x^4 + \frac{C_2}{x^2}$$

### Ejercicios 2.9.1 Ecuaciones reducibles a primer orden. *Página 111*

$$1. y = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln x + C_2$$

$$2. y = C_2 e^{C_1 x}$$

$$3. y = C_1 \ln|x| + C_2$$

$$4. y = (\ln x)^2 + C_1 \ln x + C_2$$

$$5. y = x^3 + C_1 x^2 + C_2$$

$$6. y = \ln|C_1 e^{2x} - 1| - x + C_2$$

$$7. y^2 = C_1 x + C_2$$

$$8. y = x^3 + 3x$$

$$9. y = \sin x + 1$$

$$10. y = \frac{x^2 - 2}{4}$$

### Ejercicios 2.10.1 Definiciones básicas. *Página 114*

1.

2.

3.

4.

5.

**Ejercicios 2.10.2** Derivadas parciales. *Página 117*

- |    |    |
|----|----|
| 1. | 4. |
| 2. | 5. |
| 3. |    |

**Ejercicios 2.10.3** Diferencial total. *Página 118*

- |    |    |
|----|----|
| 1. | 4. |
| 2. | 5. |
| 3. |    |

**Ejercicios 2.10.4** Derivación implícita. *Página 120*

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| 1. $y' = \frac{y - y^4}{x + 2xy^3}$             | 3.                                    |
| 2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{10yx^2 + 1}{5x^3}$ . | 4.                                    |
|   | 5. $y' = \frac{\cos x + 2y}{-2x + 3}$ |

**Ejercicios 2.10.5** Derivación de orden superior. *Página 122*

- |    |    |
|----|----|
| 1. | 4. |
| 2. | 5. |
| 3. |    |

**Ejercicios 2.10.6** Integración parcial. *Página 125*

- |    |    |
|----|----|
| 1. | 4. |
| 2. | 5. |
| 3. |    |

**Ejercicios 3.2.1** Decaimiento radioactivo. *página 132.*

1.   a. 59.9%;  
     b. 35.8%;  
     c. 675 años, 219 días.
2. 5 980 años, 270 días.
3.   a.  $M_0 = 133.333$  g.;  
     b. 2 años, 150 días.
4. 14 467 años.
5.  $t_m \approx 24$  años, 33 días
6. 22 413 años

**Ejercicios 3.3.1** Modelo de Malthus. *página 136.*

1.   a.  $P(t) = 2\,000e^{0.019062t}$ .  
     b. 21 %.  
     c.  $t \approx 120$  años, 290 días.
2.  $t \approx 31$  años, 255 días.
3.  $t \approx 13$  años, 315 días.
4.  $t \approx 10$  años, 360 días.
5.  $k = 55.45\%$  diario.



**Ejercicios 3.3.2** *Modelo logístico. página 140.*

1.  $t_1 = \frac{\ln 9}{0.4} \approx 0.5493$ .
2.  $t \approx 13$  años, 315 días.
3.  $\frac{rK}{4}$ .
4.  $t_1 = \frac{\ln(K - P_0)}{r} - \frac{\ln P_0}{r}$ .

**Ejercicios 3.4.1** *Ley de Newton de cambio de temperaturas. página 147.*

1. 3 horas, 46 minutos & 18 segundos.
2. 33 minutos & 44 segundos.
3. 2 minutos & 13 segundos.
4. 20 minutos & 41 segundos.
5. 27.38 s.
6.  $390^\circ F$ .
7.  $40^\circ F$ .
8. 1 hora, 29 minutos & 22 segundos.
9. 1 : 20 : 19 P.M.  $50.22^\circ F$ .
10. Luis

**Ejercicios 3.5.1** *Mezclas. página 156.*

1.
  - a.  $Q(t) = 25 - 23e^{-\frac{4}{25}t}$ .
  - b.  $Q(10) \approx 20$  kilogramos, 356 gramos.
  - c.  $C_{30} = 0.2481$  kg/l.
  - d.  $Q_{lim} = 25$  kg.
2.
  - a.  $Q(t) = 50(1 - e^{-\frac{t}{25}})$  lb.
  - b.  $t \approx 17$  minutos, 20 segundos.
  - c.  $C_{lim} = 1$  lb/gal.
3.
  - a.  $Q(t) = 1.5(100 - t) - 140\left(\frac{100 - t}{100}\right)^4$  lb.
  - b.  $Q(10) = 43.146$  lb.
  - c.  $C_{20} = 0.7832$  lb/gal.
  - d.  $C_{90} = 1.4986$  lb/gal.
4.
  - a.  $X(t) = 2(200 + t) - 390\left(\frac{200}{200 + t}\right)^3$  lb.
  - b.  $C_{60} = 1.31725$  lb/gal.
  - c.  $X(300) \approx 975$  lb.
  - d.  $C_{300} = 1.95$  lb/gal.
5.
  - a.  $A(t) = (60 - t) - 60\left(\frac{60 - t}{60}\right)^3$  lb.
  - b.  $C_{30} = 0.75$  lb/gal.
  - c.  $C_{50} = 0.972$  lb/gal.
  - d.  $A_{\max} = 46.146$  lb, en  $t = 25.38$  min.
6.  $t = 27$  min, 44 s.
7.  $Q(30) = 64.375$  lb.

8. a.  $A(t) = 0.08(500 - t) - 40\left(\frac{500 - t}{500}\right)^6$  gal.  
b. 3.778 %.
9. 7.477 gal.
10.  $20 + (t - 20)e^{-\frac{t}{20}}$ ;  
22.23 %.

**Ejercicios 3.6.1** *Mecánica. Soluciones en la página 165.*

1. a.  $v'(t) = g$ ;  $v(0) = 0$   
b.  $v(t) = 9.8t$  m/s  
c.  $x(t) = 4.9t^2$  m  
d.  $v(5) = 49$  m/s;  $x(5) = 122.5$  m  
e.  $t = 10.2$  seg.  
f. 137.2 metros & 176.4 metros
2. a.  $v(t) = 40 - 9.8t$  m/s;  $x(t) = 40t - 4.9t^2$  metros  
b.  $t = 4.08$  seg;  $x_{\text{máx}} = 81.63$  metros  
c.  $t = 8.16$  segundos;  $v = -40$  m/s
3. a.  $v(t) = 4(1 - e^{-8t})$  pies/seg  
b.  $x(t) = 4t + \frac{1}{2}(e^{-8t} - 1)$  pies.  
c.  $v_{\text{lim}} = 4$  pies/seg.
4. a.  $v(t) = 4.9(1 - e^{-20t})$ , cm/seg  
b.  $x(t) = 4.9t + 0.245(e^{-20t} - 1)$ , cms.  
c.  $v_{\text{lim}} = 4.9$  cm/seg
5. a.  $v(t) = 16 \left[ \frac{8e^{4t} - 3}{8e^{4t} + 3} \right]$  pie/s.  
b.  $x(t) = 4 \ln(8e^{4t} + 3) + 4 \ln(8 + 3e^{-4t}) - 8 \ln(11)$ .  
c.  $v_{\text{lim}} = 16$  pie/s.
6. a.  $v(t) = 320(1 - e^{-\frac{t}{10}})$ , para  $0 \leq t \leq 5$   
b.  $v(t) = \frac{16(1.291e^{4t-20} + 1)}{(1.291e^{4t-20} - 1)}$ , para  $t \geq 5$

**Ejercicios 3.7.1** *Tangentes y normales. página 169*

1.  $y = e^x - 3$ .
2.  $y = \frac{1}{2}x$ .
3.  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = C$ .
4.  $y = e^x$ .
5.  $xy = C$ .

**Ejercicios 3.7.2** *Trayectorias ortogonales. página 174*

1.  $y^2 + 2x^2 = C$ .
2.  $y^2 + 2x = C$ .
3.  $xy^2 = C$ .
4.  $x^2 + y^2 - \ln y^2 = C$ .
5.  $x^2 + 2y^2 = C$ .

6.  $x^2 + y^2 = Cx$ .
7.  $y = Ce^{-\frac{x}{p}}$ .
8.  $y = \frac{C}{x}$ .
9.  $(x^2 + y^2)^2 = k(2x^2 + y^2)$ .
10.  $(x^2 + y^2)^2 = kxy$ .

**Ejercicios 3.7.3** Miscelánea. *página 180.*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

**Ejercicios 4.2.1** Reducción de orden. *página 195*

1.  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{x}{2}}$ .
2.  $y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3x}{2}}$ .
3.  $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ .
4.  $y = (c_1 + c_2 x) e^{-3x}$ .
5.  $y = e^{-2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$ .
6.  $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x}$ .
7.  $y = c_1 x^2 + c_2 x^5$ .
8.  $y = \frac{c_1}{x} + c_2 x^3$ .
9.  $y = \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x^4}$ .
10.  $y = c_1 x^4 + \frac{c_2}{x^2}$ .
11.  $y = c_1 x + c_2 e^x$ .
12.  $y = \frac{1}{x} (c_1 \sin x + c_2 \cos x)$ .
13.  $y = c_1 x + c_2 \ln x$ .
14.  $y = c_1 e^{-x} + c_2 (x - 1)$ .
15.  $y = c_1 e^x + c_2 x^2 e^x$ .

**Ejercicios 4.3.1** Ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$ , *página 205*

1. Mostrar.
2. a. Sí.  
b. No.  
c. En la linealidad; la ED en a) es lineal, en b) no lo es.
3. No para ambas preguntas.
4. a.  $-1$ .  
b.  $-e^{-4x}$ .  
c.  $0$ .  
d.  $-\sin^2 2x$ .
5. a.  $W(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$ .  
b. i.  $2e^{3x}$ .  
ii.  $1$ .  
iii.  $0$ .
6.  $y = \frac{2}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x}$ .
7.  $y = \cos 2x + 2 \sin 2x$ .
8.  $y = \frac{1}{5}[-3 + 3e^x \cos 2x + e^x \sin 2x]$ .
9.  $y = \frac{3}{20}x^2 + \frac{16}{5}x^{-3}$ .
10.  $y = 2 + 3 \ln x$ .
11. a. Linealmente independiente.  
b. Linealmente dependiente.  
c. Linealmente dependiente.  
d. Linealmente independiente.
12. a. Verifique.  
b.  $y = c_1 x + c_2 x^{-2}$ .
13. a. Muestre.  
b. Verifique.
14. Porque la ED no es lineal.
15. Porque la ED no es lineal.
16. a. El conjunto es linealmente independiente.  
b.  $W(y_1, y_2) = 0$ .  
c. No.
17.  $y = 2 \cos(x) - 5 \sin(x) + 3x$ .
18.  $y = e^{-x} + 4e^{3x} - 2$ .
19.  $y = \frac{2}{3} \sinh 2x - \frac{1}{3} \sinh x$ .

**Ejercicios 4.4.1** ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden 2. *página 215*

1.  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

2.  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

3.  $y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{x}{2}}$

4.  $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$

5.  $y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}$

6.  $y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{x}{3}}$

7.  $y = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$

8.  $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

9.  $y = e^{-2x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

10.  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Resolver los PVI siguientes.

11.  $y = 2 \cos 4x - \frac{1}{2} \sin 4x$

12.  $y = \frac{1}{3} (e^x - e^{-2x})$

13.  $y = 2x e^{3x}$

14.  $y = e^{-2x} (\cos x + 2 \sin x)$

15.  $y = 3e^{-x} - e^{-3x}$

**Ejercicios 4.4.2** ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden  $n$ . *página 220*

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

**Ejercicios 4.5.1** Obtención de una ecuación diferencial. *página 224*

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

**Ejercicios 4.6.1** Método de coeficientes indeterminados. *página 241*

1.  $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + (C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x})$

2.  $y = (4x - 5)e^{3x} + (C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x})$

3.  $y = 5 \sin 2x + (C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x})$

4.  $y = (x^2 - 1)e^x + (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$

5.  $y = x \sin x + 2 \cos x + (C_1 + C_2 x) e^{\frac{x}{2}}$

6.  $y = 3x + (C_1 + C_2 e^{-x})$

7.  $y = \frac{x}{2} + 1 + (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$

8.  $y = \frac{x}{7} e^{4x} + (C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x})$

9.  $y = \frac{1}{4} \sin x + (C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x)$

10.  $y = \frac{1}{3} e^x \sin x + (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) e^x$

11.  $y = \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \right) e^x + (C_1 e^{-x} + C_2 e^x)$

12.  $y = -2x \cos 5x + (C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x)$

13.  $y = \sin x + (2 - x) \cos x + (C_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x) e^{-\frac{x}{2}}$

14.  $y = x(x^2 + 1)e^x + (C_1 + C_2 e^x)$

15.  $x(t) = -t \cos t + (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

16.  $y = (x^2 - 2x)e^{4x} + (C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x})$   
 17.  $y = (3x^3 - 2x^2 + C_1 x + C_2)e^{2x}$   
 18.  $y = -\frac{2}{5} \cos 10t + e^{-6t} + (C_1 \cos 8t + C_2 \sin 8t)$   
 19.  $y = \sin 2x + \cos 2x + (C_1 + C_2 x)e^{\frac{3x}{2}}$   
 20.  $y = (x^2 - x)e^{2x} + (C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x})$

**Ejercicios 4.7.1** Variación de parámetros para ED de orden 2. *página 250*

1.  $y_p(x) = 4x^3$ ;  $y = 4x^3 + C_1 x^2 + C_2 x^5$   
 2.  $y_p(x) = 8\sqrt{x}$ ;  $y = 8\sqrt{x} + C_1 x^3 + \frac{C_2}{x}$   
 3.  $y_p(x) = \frac{9}{\sqrt[3]{x}}$ ;  $y = \frac{9}{\sqrt[3]{x}} + C_1 x^4 + \frac{C_2}{x^2}$   
 4.  $y_p(x) = \frac{3}{x^2}$ ;  $y = \frac{3}{x^2} + \frac{C_1}{x^3} + \frac{C_2}{x^4}$   
 5.  $y_p(x) = x \ln x$ ;  $y = x \ln x + C_1 x^5 + C_2 x^2$   
 6.  $y_p(x) = \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{4} e^x$ ;  $y = \frac{1}{4} (2x - 1) e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$   
 7.  $y_p(x) = -\frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}$ ;  $y = -\frac{1}{4} (1 - 2x) e^{-x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$   
 8.  $y_p(x) = \frac{1}{2} (\sin x - x \cos x)$ ;  $y = -\frac{1}{2} x \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$   
 9.  $y_p(x) = \frac{1}{2} (x \sin x + \cos x)$ ;  $y = \frac{1}{2} x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$   
 10.  $y_p(x) = x^3 e^x$ ;  $y = (x^3 + C_2 x + C_1) e^x$   
 11.  $y_p(x) = 2x^3 e^{-x}$ ;  $y = (2x^3 + C_2 x + C_1) e^{-x}$   
 12.  $y_p(x) = -(\cos x) \ln(\sec x + \tan x)$ ;  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - (\cos x) \ln(\sec x + \tan x)$   
 13.  $y_p(x) = (\cos 2x) \ln(\cos 2x) + 2x \sin 2x$ ;  $y = (C_1 + \ln \cos 2x) \cos 2x + (C_2 + 2x) \sin 2x$   
 14.  $y_p(x) = 3x \cos 3x - \sin 3x - (\sin 3x) \ln(\cos 3x)$ ;  $y = 3x \cos 3x - (\sin 3x) \ln(\cos 3x) + C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$   
 15.  $y_p(x) = -e^x \cos e^{-x} - \sin e^{-x}$ ;  $y = -(e^x \cos e^{-x} + \sin e^{-x}) + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$   
 16.  $y_p(x) = \frac{1}{12} [1 + \cos^2(2x)]$ ;  $y = \frac{1}{12} [1 + \cos^2(2x)] + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$   
 17.  $y_p(x) = \frac{1}{12} [2 - \cos^2(2x)]$ ;  $y = \frac{1}{12} [2 - \cos^2(2x)] + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$   
 18.  $y_p(x) = x e^x (\ln x - 1)$ ;  $y = (C_1 + C_2 x) e^x + x e^x \ln x$   
 19.  $y_p(x) = x e^{-x} (\ln x - 1)$ ;  $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + x e^{-x} \ln x$   
 20.  $y_p(x) = e^{-x} \arctan e^x - \frac{1}{2} e^{-2x} \ln(1 + e^{2x})$ ;  $y = e^{-x} \arctan e^x - \frac{1}{2} e^{-2x} \ln(1 + e^{2x}) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

**Ejercicios 4.7.2** Variación de parámetros para ED de orden  $n$ . *página 258*

1.  $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2$ .  
 2.  $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2$ .  
 3.  $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$ .  
 4.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + \frac{1}{x}$ .  
 5.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 x + c_3 - \frac{1}{4} x^2$ .  
 6.  $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 4x + c_4 \sin 4x - \frac{1}{2} x \sin 4x$ .  
 7.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 + 3x^2 e^{2x} + 2x^3 + 6x^2 + 9x$ .

8.  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + \cos 3x$ .
9.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + \frac{1}{2} x e^x$ .
10.  $y = c_1 x^4 + x^{-\frac{1}{2}} \left[ c_2 \cos \left( \frac{\sqrt{23}}{2} \ln x \right) + c_3 \sin \left( \frac{\sqrt{23}}{2} \ln x \right) \right] - x$ .
11.  $y = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x^2 + \frac{x^3}{4}$ .
12.  $y = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^{-2} + \frac{x^4}{90}$ .
13.  $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \frac{1}{2} \ln x - \frac{7}{8}$ .
14.  $y = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^{-2} - 5x \ln x$ .
15.  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + \frac{e^x}{6} \int \frac{e^{-x}}{x} dx - \frac{e^{-x}}{2} \int \frac{e^x}{x} dx + \frac{e^{-2x}}{3} \int \frac{e^{2x}}{x} dx$ .
16.  $y = c_1 + c_2 \ln x + c_3 x^3 - \frac{5}{2} x \ln x + \frac{15}{4} x$ .
17.  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + x^2 = \sinh x + x^2$ .
18.  $y = e^{-x} - 3e^x + \cos x + 2 \sin x + 2x e^x$ .
19.  $y = e^{-x}(1 + x - x^2 + 2x^3)$ .
20.  $y = \frac{1}{8} e^x + \frac{5}{8} e^{-x} + \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} x \sin x$ .

**Ejercicios 4.8.1** Variación de parámetros y reducción de orden. *página 264*

1.  $y = c_1 x + c_2 x \ln x + x \ln^2 x$ .
2.  $y = c_1 x^{\frac{3}{5}} + c_2 x + 4\sqrt{x}$ .
3.  $y = c_1 x + c_2 x \ln x + \ln x + 2$ .
4.  $y = c_1 x^3 + c_2 x^{-1} + \frac{\ln x + 2 \ln^2 x}{x}$ .
5.  $y = c_1 x \cos(\ln x) + c_2 x \sin(\ln x) + x \ln x$ .

**Ejercicios 5.2.1** Movimiento armónico simple. *Página: 288*

1. a.  $x(t) = \frac{1}{2} \sin 4t$  m;  
 $v(t) = 2 \cos 4t$  m/s.  
 b.  $x(t) = 0.6083 \sin(2t + 2.9764)$  m;  
 $v(t) = 1.2566 \cos(2t + 2.9764)$  m/s.
2. a.  $A = \frac{2\sqrt{3}}{5}$  m;  
 $\omega = \frac{5\sqrt{3}}{2}$  rad/s;  
 $T = \frac{4\pi}{5\sqrt{3}}$  s;  
 $f = \frac{5\sqrt{3}}{4\pi}$  osc/s;  
 $x(t) = \frac{2\sqrt{3}}{5} \sin \left( \frac{5\sqrt{3}}{2} t + \frac{\pi}{3} \right)$  m;  
 $v(t) = 3 \cos \left( \frac{5\sqrt{3}}{2} t + \frac{\pi}{3} \right)$  m/s.  
 b.  $A = \frac{1}{5\sqrt{2}}$  m;  
 $\omega = 10$  rad/s;  
 $T = \frac{\pi}{5}$  s;
3.  $A = \frac{\sqrt{2}}{5}$  m;  
 $T = \frac{2\pi}{5}$  s;  
 $n = 31$  ciclos completos.
4. a.  $x(5) = 4.82483$  cm;  $x(10) = 4.3116$  cm.  
 b.  $v(12) = -0.29$  m/s; la masa se dirige hacia arriba.  
 c.  $t = \frac{(2n+1)\pi}{20}$ , con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$   
 d. Máxima compresión en  $t = \frac{(2n+1)\pi}{10}$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$   
 máxima elongación en  $t = \frac{n\pi}{5}$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$
5.  $x(t) = -5 \sin 2t$ .

6. a.  $A = 10$ ;  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ;  $T = 2\pi \text{ s}$ .  
 b.  $x(t) = 10 \sin t$ ;  $v(t) = 10 \cos t$   
 c.  $v_{\text{máx}} = 10 \text{ m/s}$ ;  $t = 2n\pi$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$   
 $a(t) = 0 \text{ m/s}^2$ ;  $t = 2n\pi$ ;  $n = 0, 1, \dots, 2$

7.  $x(t) = 0.15\sqrt{2} \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ m}$ ;  
 $v(t) = 0.45\sqrt{2} \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ m/s}$ .

8. a.  $A = 0.4\sqrt{2} \text{ m}$ ;  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ;  $T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$ .

b.  $n = \frac{3}{T}$ ; 4 ciclos completos.

c.  $t = \frac{41}{40}\pi \text{ s}$ .

d.  $v = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$ ;  $a = 0 \text{ m/s}^2$ .

e.  $t = \frac{1}{10}\left(\frac{3\pi}{4} + n\pi\right) \text{ s}$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$

f.

$t$	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
5	-0.4909	2.8104	49.0936
10	-0.5475	1.4238	54.7474
15	-0.5657	-0.0625	56.5651
20	-0.5442	-1.5444	54.4194
25	-0.4846	-2.9182	48.4607

g.  $t = \frac{\pi}{10}\left(2n + \frac{1}{2}\right) \text{ s}$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$

$t = \frac{\pi}{10}(2n + 1) \text{ s}$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$

9. a.  $\theta(t) = 0.002 \sin 10t \text{ rad}$ ;  
 $\theta'(t) = 0.02 \cos 10t \text{ rad/s}$ .

b.  $\theta(t) = -\frac{1}{5} \cos(2\sqrt{5}t) \text{ rad}$ ;  
 $\theta'(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \sin(2\sqrt{5}t) \text{ rad/s}$ .

c.  $\theta(t) = \frac{1}{5\sqrt{2}} \sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ rad}$ ;  
 $\theta'(t) = \frac{1}{5\sqrt{2}} \cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ rad/s}$ .

10.  $A = \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \text{ rad}$ .  $\phi = \frac{\pi}{4}$ ;  $T = \frac{2\pi}{7} \text{ s}$ .  
 $\theta(t) = \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \sin\left(7t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ rad}$ ;  
 $\theta'(t) = \frac{7\pi}{6\sqrt{2}} \cos\left(7t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ rad/s}$ .

### Ejercicios 5.2.2 Vibraciones amortiguadas libres. *Página: 306*

1. a.  $x(t) = -e^{-4t} + e^{-2t} \text{ m}$ ;  $v(t) = 4e^{-4t} - 2e^{-2t} \text{ m/s}$ .

b.  $x(t) = 0.8488e^{-\frac{t}{5}} \sin(7t + 3.0235) \text{ m}$

$v(t) = -0.1698e^{-\frac{t}{5}} \sin(7t + 3.0235) + 5.9414e^{-\frac{t}{5}} \cos(7t + 3.0235) \text{ m/s}$ .

c.  $x(t) = \left(\frac{1}{10} + \frac{26}{5}t\right)e^{-2t} \text{ m}$ ;  $v(t) = \left(5 - \frac{52}{5}t\right)e^{-2t} \text{ m/s}$ .

d.  $x(t) = (t + 1)e^{-2t} \text{ m}$ ;  $v(t) = -(2t + 1)e^{-2t} \text{ m/s}$ .

e.  $x(t) = \frac{2}{3}e^{-10t} \sin(24t) \text{ m}$ ;  $v(t) = e^{-10t} \left[-\frac{20}{3} \sin(24t) + 16 \cos(24t)\right] \text{ m/s}$ .

2. Amplitud:  $A(t) = 0.33541e^{-t} \text{ m}$ .

Ángulo de fase:  $\phi = 1.10715 \text{ rad}$ .

$x_{\text{máx}} \text{ en } t_1 = 0.231823 \text{ s}$  &  $t_2 = 3.37342 \text{ s}$ .

$x_{\text{mín}} \text{ en } t_3 = 1.80262 \text{ s}$  &  $t_4 = 4.94421 \text{ s}$ .

3.

$c$	$x(t)$ en m	$v(t)$ en m/s
6	$2.5e^{-0.6t} \sin(0.8t) \text{ m}$	$[2 \cos(0.6t) - 1.5 \sin(0.8t)]e^{-0.6t} \text{ m/s}$
8	$3.333e^{-0.8t} \sin(0.6t) \text{ m}$	$[2 \cos(0.6t) - 2.667 \sin(0.6t)]e^{-0.8t} \text{ m/s}$
10	$2te^{-t} \text{ m}$	$2(1 - t)e^{-t} \text{ m/s}$
12	$1.508(-e^{-1.863t} + e^{-0.537t}) \text{ m}$	$2.809e^{-1.863t} - 0.81e^{-0.537t} \text{ m/s}$
14	$1.02(-e^{-2.38t} + e^{-0.42t}) \text{ m}$	$2.428e^{-2.38t} - 0.428e^{-0.42t} \text{ m/s}$

4. Cuando  $x(0) = 0 \text{ m}$  y  $v(0) = 0.2 \text{ m/s}$  se tiene que:

$x(t) = \frac{0.2}{3}e^{-4t} \sin(3t) \text{ m}$  &  $v(t) = 0.2e^{-4t} \left(\cos(3t) - \frac{4}{3} \sin(3t)\right) \text{ m/s}$ .

Cuando  $x(0) = 0$  y  $v(0) = -0.2$  m/s se tiene que:

$$x(t) = -\frac{0.2}{3}e^{-4t} \sin(3t) \text{ m} \quad \& \quad v(t) = -0.2e^{-4t} \left( \cos(3t) - \frac{4}{3} \sin(3t) \right) \text{ m/s}$$

5.  $x(t) = 0$  cuando  $t = 0.1865$  seg.

$x(t) = x_{\text{máx}}$  cuando  $t = 0.6487$  seg.

$x_{\text{máx}} = x(0.6487) = 0.156827 \text{ m}.$

6.  $x(t) = \frac{1}{4}e^{-6t} \sin(8t) \quad \& \quad v(t) = 2e^{-6t} \cos(8t) - \frac{3}{2}e^{-6t} \sin(8t)$

$x(t) = x_{\text{máx}}$  cuando  $t = 0.1159$  seg.

$x_{\text{máx}} = x(0.1159) = 0.09977 \text{ m}.$

7. a.  $x(t) = -\frac{1}{30}e^{-8t} + \frac{2}{15}e^{-2t} \text{ m}.$

b.  $x(t) = \frac{1}{6}e^{-8t} - \frac{1}{15}e^{-2t} \text{ m}.$

8. a.  $x(t) = (-0.05 - 0.5t)e^{-10t}$

b. La masa no pasa por la posición de equilibrio

9. a.  $x(t) = -(0.2 \cos(4t) + 0.15 \sin(4t))e^{-3t} \quad \& \quad v(t) = 1.25e^{-3t} \sin(4t)$

b.  $t = 1.339 \text{ s.} \quad \& \quad v = -0.018 \text{ m/s}$

c.  $t = 0.7854n - 1.0172$  con  $n = 2, 4, 6, \dots$

d.  $t = \frac{n\pi}{4}$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$

La posición es  $x(t) = -0.2e^{-\frac{3n\pi}{4}}$

10. a.  $t = \frac{\pi}{2} \text{ s}.$

b.  $c = 12$

c.  $t \rightarrow \infty$

11. a. Movimiento críticamente amortiguado

b.  $x(t) = 2.4te^{-13t} \quad \& \quad v(t) = 2.4(1 - 13t)e^{-13t}$

c.  $x(t) = 0.48e^{-12t} \sin 5t \quad \& \quad v(t) = (2.4 \cos 5t - 5.76 \sin 5t)e^{-12t}$

d.  $x(t) = \frac{8}{65}e^{-6.5t} - \frac{8}{65}e^{-26t} \quad \& \quad v(t) = -\frac{4}{5}e^{-6.5t} + \frac{16}{5}e^{-26t}$

e. Las gráficas de  $x(t)$  de los incisos (b), (c) y (d) son:

12.  $x(t) = -\frac{1}{10} \left[ \cos\left(\frac{21t}{5}\right) + \sin\left(\frac{21t}{5}\right) \right]$

13.  $x(t) = -(0.15 + 3t)e^{-10t}$

14. a.  $t = 0.0622954; 2.02579; 3.98929$  segundos

b.  $t = 0.641853; 3.78345; 6.92504$  segundos

15. a.  $t = 1.9012; 3.8647; 5.82819$  segundos

b.  $t = 0.51727; 3.65886; 6.8$  segundos

### Ejercicios 5.2.3 Vibraciones forzadas. Página: 322

1. a.  $x(t) = -\frac{5}{17}e^{-4t} - \frac{17}{85}e^{-2t} + \frac{42}{85} \cos t \frac{36}{85} \sin t$

$v(t) = \frac{20}{17}e^{-4t} + \frac{34}{85}e^{-2t} - \frac{42}{85} \sin t + \frac{36}{85} \cos t$

b.  $x(t) = 0.2t \sin 2t + 0.1 \cos 2t - 0.6 \sin 2t$

$v(t) = 0.4t \cos 2t - 1.2 \cos 2t$

c.  $x(t) = \frac{3}{8}t \sin 8t; \quad v(t) = \frac{3}{8} \sin 8t + 3t \cos 8t$



- d.  $x(t) = \frac{3}{10} \cos 2t + \frac{1}{10} \sin 2t - \frac{1}{5} e^{-8t} \cos 6t - \frac{19}{60} e^{-8t} \sin 6t$ ;  
 $v(t) = -\frac{3}{5} \sin 2t + \frac{1}{5} \cos 2t - \frac{3}{10} e^{-8t} \cos 6t + \frac{56}{15} e^{-8t} \sin 6t$
- e.  $x(t) = -\frac{4}{41} \cos 5t + \frac{16}{205} \sin 5t + \frac{4}{41} e^{-\frac{3t}{2}} \cos 2t - \frac{5}{41} e^{-\frac{3t}{2}} \sin 2t$ ;  
 $v(t) = \frac{20}{41} \sin 5t + \frac{16}{41} \cos 5t - \frac{1}{82} e^{-\frac{3t}{2}} \sin 2t + \frac{16}{41} e^{-\frac{3t}{2}} \cos 2t$
2.  $x(t) = \frac{53}{160} \cos 2t - \frac{1}{32} \cos 4t$ ;  $v(t) = -\frac{53}{82} \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t$
3. Con  $F_e = 1.5 \cos 4t$ :  
 $x(t) = \frac{3}{64} t \sin 4t + \frac{3}{10} \cos 4t$   
 $v(t) = \frac{3}{64} \sin 4t + \frac{3}{16} t \cos 4t - \frac{6}{5} \sin 4t$ .  
 Con  $F_e = 1.5 \cos(4.1)t$ :  
 $x(t) = -\frac{25}{54} t \cos(4.1)t + \frac{103}{135} \cos 4t$   
 $v(t) = \frac{205}{108} \sin(4.1)t + \frac{3}{16} t \cos 4t - \frac{6}{5} \sin 4t$ .
4. a. Para  $w = 2.5$ :  $x(t) = -\frac{20}{9} \sin\left(\frac{t}{4}\right) \sin\left(\frac{9t}{4}\right)$ .  
 b. Para  $w = 1.5$ :  $x(t) = -\frac{20}{7} \sin\left(\frac{t}{4}\right) \sin\left(\frac{7t}{4}\right)$ .  
 c. Para  $w = 2.1$ :  $x(t) = -\frac{500}{41} \sin\left(\frac{t}{20}\right) \sin\left(\frac{41t}{20}\right)$ .  
 d. Para  $w = 1.9$ :  $x(t) = -\frac{500}{39} \sin\left(\frac{t}{20}\right) \sin\left(\frac{39t}{20}\right)$ .  
 e. Para  $w = 2$ :  $x(t) = -\frac{5}{8} \sin 2t$ .
5.  $x(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)$   
 $v(t) = \frac{1}{2}(-e^{-t} + \sin t + \cos t)$
6.  $x(t) = -\frac{1}{10} e^{-t} (\cos 2t + 2 \sin 2t) + \frac{1}{10} (\cos t + 3 \sin 2t)$   
 $v(t) = \frac{1}{10} e^{-t} (-3 \cos 2t + 4 \sin 2t) + \frac{1}{10} (3 \cos t - \sin t)$
7.  $x(t) = \frac{1}{130} e^{-t} (\cos t + 8 \sin t) - \frac{1}{130} \cos 4t - \frac{7}{520} \sin 4t$   
 $v(t) = \frac{1}{130} e^{-t} (7 \cos t - 9 \sin t) + \frac{1}{130} (4 \sin 4t - 7 \cos 4t)$
8.  $x(t) = 3 \sin 2t - 4 \cos 2t + (6t + 5)e^{-4t}$   
 $v(t) = 6 \cos 2t + 8 \sin 2t - (24t + 14)e^{-4t}$
9.  $x(t) = t e^{-\frac{12}{13}t} \sin\left(\frac{5t}{13}\right)$   
 $v(t) = \left[ \left(1 - \frac{12t}{13}\right) \sin\left(\frac{5t}{13}\right) + \frac{5t}{13} \cos\left(\frac{5t}{13}\right) \right]$
10. cuando  $0 \leq t \leq 2\pi$ :  $x(t) = \frac{1}{10} t \sin(10t)$  &  $v(t) = \frac{1}{10} \sin 10t + t \cos 10t$   
 Cuando  $t \geq 2\pi$ :  $x(t) = \frac{\pi}{5} \sin 10t$  &  $v(t) = 2\pi \cos 10t$
- 11.

## Ejercicios 5.3.1 Circuito RC de corriente continua. Página: 330

1.

- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

**Ejercicios 5.3.2** Circuito RL de corriente continua. *Página: 333*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

**Ejercicios 5.3.3** Circuito RLC de corriente continua. *Página: 336*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

**Ejercicios 5.3.4** Circuito RC de corriente alterna. *Página: 340*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

**Ejercicios 5.3.5** Circuito RL de corriente alterna. *Página: 342*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

**Ejercicios 5.3.6** Circuito LC de corriente alterna. *Página: 346*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

**Ejercicios 5.3.7** Circuito RLC de corriente alterna. *Página: 348*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

**Ejercicios 6.2.1** Definición. *Página 361.*

$$1. \frac{5}{5s-1}, \quad \text{para } s > \frac{1}{5}.$$

$$2. \frac{e^{-2}}{s-1}, \quad \text{para } s > 1.$$

$$3. \frac{6}{s} - \frac{2}{s^3}, \quad \text{para } s > 0.$$

$$4. \frac{-7s^2 + 9s - 1}{s^2(s-1)}.$$

$$5. 3 \left( -\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2} \right).$$

$$6. \frac{e^{-s}}{s^3}(s-2) + \frac{e^{-2s}}{s^3}(s+2).$$

$$7. \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}.$$

$$8. \mathcal{L}\{\cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2 - k^2};$$

$$\mathcal{L}\{\sinh(kt)\} = \frac{k}{s^2 - k^2}.$$

**Ejercicios 6.3.1** Existencia de la TL. *Página 364.*

1. a. Si.  
b. No.  
c. No.  
d. Si.

e. No.

f. Si.

2.  $f(t)$  y  $g(t)$  son iguales casi dondequiera.

**Ejercicios 6.4.2** Primera propiedad de traslación.. *página 369.*

$$1. F(s) = \frac{-2s^3 + 12s^2 - 32s + 300}{(s^2 + 16)(s^2 + 25)}.$$

$$2. F(s) = \frac{6 - 8s + 5s^3}{s^4}.$$

$$3. F(s) = \frac{24 + 4(s+4)^2 + (s+4)^4}{(s+4)^5}.$$

$$4. F(s) = \frac{\alpha s^2 + \alpha(\alpha^2 - \beta^2)}{[s^2 + (\alpha + \beta)^2][s^2 + (\alpha - \beta)^2]}.$$

$$5. F(s) = \frac{2a^2}{s[s^2 + 4a^2]}.$$

$$6. f(t) = \frac{5}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t.$$

$$7. f(t) = \frac{1}{3} e^{-2t} t^3 + \frac{3}{4} \sin 2t + 5e^{-t} \cos 2t.$$

$$8. f(t) = \frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t.$$

$$9. f(t) = e^{-t} \cos 2t.$$

$$10. f(t) = e^{-t} \cos 3t + \frac{2}{3} e^{-t} \sin 3t.$$

$$11. f(t) = e^{2t} \left( 3 \cos 4t + \frac{7}{4} \sin 4t \right).$$

**Ejercicios 6.4.3** Segunda propiedad de traslación. *página 373.*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
5.  $y = C_1 e^{\frac{2x}{3}} + C_2 e^{-\frac{2x}{3}}$

$$6. y = C_1 x^2 + C_2 x^5$$

$$7. y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^3$$

8.

**Ejercicios 6.4.4** Transformada de una derivada. *Página 376.*

$$1. y = \frac{C_1}{x^3} + \frac{C_2}{x^4}$$

2.

3.

4.

5.

6.

**Ejercicios 6.4.5** Derivada de una transformada. *Página 378.*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

**Ejercicios 6.4.6** Transformada de una integral. *Página 379.*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

**Ejercicios 6.4.7** Integral de una transformada. *Página 380.*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

**Ejercicios 6.6.1** Aplicaciones. *Página 412.*

1.  $x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$
2.  $x(t) = -\frac{5}{9}\text{sen}(t) + \frac{5}{18}\text{sen}(2t) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\text{sen}(2t) - t\cos(2t)\right)$
3.  $x(t) = \frac{1}{8}\left[e^t(t-2) + e^{-t}(t+2) + 2\text{sen}(t)\right]$
4.  $y(t) = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{4}(t-5) - \frac{1}{8}\text{sen}(2t-10)\right)u(t-5) - \left(\frac{1}{4}(t-10) - \frac{1}{8}\text{sen}(2t-20)\right)u(t-10)\right]$
5.  $y(t) = \frac{1}{2}\text{sen}(t) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}(t-6 - \text{sen}(t-6))u(t-6)$
6.  $y(t) = u(t-\pi)\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t-2\pi)\right] - u(t-3\pi)\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t-6\pi)\right]$
7.  $y(t) = I_0\text{sen}(t)$
8.  $y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}}e^{\frac{-(t-5)}{4}}\text{sen}\left[\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right]u(t-5)$
9.  $y(t) = \frac{1}{4}\text{sen}(t) - \frac{1}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(t-3\pi)}\text{sen}[\sqrt{2}(t-3\pi)]u(t-3\pi)$
10.  $y(t) = \text{sen}(t) - \text{sen}(t-2\pi)u(t-2\pi)$
11. 
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t} \\ y(t) = \frac{1}{5}e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t} \end{cases}$$
12. 
$$\begin{cases} x(t) = \frac{7}{2}e^t - 3e^{-t} + \frac{3}{2}\text{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(t) - 4t \\ y(t) = \frac{7}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} + \text{sen}(t) - 3t - 1 \end{cases}$$
13. 
$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \\ y(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + 1 \end{cases}$$
14. 
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{5}\cos(t) + \frac{2}{5}\text{sen}(t) - \frac{1}{5}e^{-t}\cos(t) - \frac{3}{5}e^{-t}\text{sen}(t) \\ y(t) = \frac{2}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\text{sen}(t) - \frac{2}{5}e^{-t}\cos(t) - \frac{6}{5}e^{-t}\text{sen}(t) \end{cases}$$
15.  $y(t) = t + \frac{t^3}{6}$
16.  $y(t) = 2u(t) - 4e^t - 3e^{-4t}$

Usar la transformada de Laplace para resolver cada uno de los siguientes problemas.

17. a.  $x(t) = \begin{cases} \frac{\alpha k}{\beta} t - \frac{\alpha k v_0}{\beta^2} (1 - e^{-\frac{bt}{v_0}}), & 0 \leq t < t_0 \\ \frac{\alpha k v_0}{\beta^2} e^{-\frac{bt}{v_0}} + \left( \frac{\alpha k}{\beta} t_0 - \frac{\alpha k v_0}{\beta^2} \right) e^{-\frac{b(t-t_0)}{v_0}}, & t_0 < t \end{cases}$
- b.  $x_{max} = \frac{\alpha k}{\beta} t_0 - \frac{\alpha k v_0}{\beta^2} (1 - e^{-\frac{bt_0}{v_0}})$ , un máximo que se alcanza en  $t = t_0$ .
18.  $Q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$
19. Si  $\beta$  representa la constante de proporcionalidad relacionada con la fuerza de fricción del aire sobre el paracaidista, entonces  $x(t) = \frac{W}{\beta} \left( t + \frac{W}{\beta g} e^{-\frac{\beta g t}{W}} - \frac{W}{\beta g} \right)$
20.  $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \sin(2t), & t < 2\pi \\ \frac{4}{\pi} \sin(2t), & t \geq 2\pi \end{cases}$
21.  $I(t) = \begin{cases} e^{-10t} - e^{-100t}, & t < 1 \\ (1 - e^{10t})e^{-10t} - (1 - e^{100t})e^{-100t}, & t \geq 1 \end{cases}$
22.  $x(t) = \begin{cases} 3 \cos(2t), & t \leq 2\pi \\ 5 \cos(2t - 0.6747), & t > 2\pi \end{cases}$
23.  $y(t) = 2e^{-2t} - e^{-t} + 2(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)})u(t-1) - 2(e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)})u(t-2)$

**Ejercicios 6.7.1** Teorema de convolución y la delta de Dirac. *Página 421.*

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| 1. a. $F(s) = e^{-2(s-1)}$ .       | 4. $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$ .  |
| b. $F(s) = e^{-s}$ .               | 5. $y(t) = e^{-t}$ .  |
| c. $F(s) = 0$ .                    | 6. $y(t) = \cos t$ .  |
| 2. $F(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)}$ . | 7. $y(t) = (1-2t+t^2)e^{-t}$ .  |
| 3. $F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$ .   | 8. $y(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ . |

**Ejercicios 7.2.1** Método de Euler. *página 437*

- |    |    |
|----|----|
| 1. | 6. |
| 2. | 7. |
| 3. | 8. |
| 4. | 9. |
| 5. |    |

**Ejercicios 7.3.1** Euler-Mejorado. *página 450*

- |    |    |
|----|----|
| 1. | 5. |
| 2. | 6. |
| 3. | 7. |
| 4. | 8. |

**Ejercicios 7.4.1** Método de Runge-Kutta. *página 461*

- |    |    |
|----|----|
| 1. | 4. |
| 2. | 5. |
| 3. | 6. |

7.

8.