Unidad 12 - Ecuaciones diferenciales ordinarias – Segunda parte

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Identificar y resolver ecuaciones diferenciales totales exactas y aquellas transformables en totales exactas mediante la determinación de factores de integración.
2. Determinar gráfica y analíticamente las líneas de campo de un campo vectorial.
3. Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias a coeficientes constantes lineales de enésimo orden no homogéneas.

Introducción

En la **Unidad 1** vimos la importancia de las ecuaciones diferenciales en la formación de científicos e ingenieros, puesto que permiten modelizar numerosas situaciones de la vida realen los más variados ámbitos.
Resolverlas constituye una necesidad, si se desea conocer la evolución futura de un sistema o de un fenómeno modelizado.
En la**Unidad1** desarrollamos dos métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias: el de variables separables y el de ecuaciones lineales, pero estos dos métodos no son suficientes para resolver todos los casos posibles.
En esta unidad desarrollaremos más métodos de resolución, algunos incluso para EDOs de orden superior al primero, y con interesantes aplicaciones a las ciencias y la ingeniería, una de las cuales ya ha sido introducida en la **Unidad 11**.

Líneas de campo

Supongamos que se tiene un campo vectorial $\vec{f}(x, y)$ que representa la velocidad del agua en la superficie de un canal, y deseamos conocer la trayectoria que seguiría una boya colocada en la superficie del agua al ser empujada por la corriente.
En la figura 12.1 se ve la representación de un campo de velocidades de este tipo.

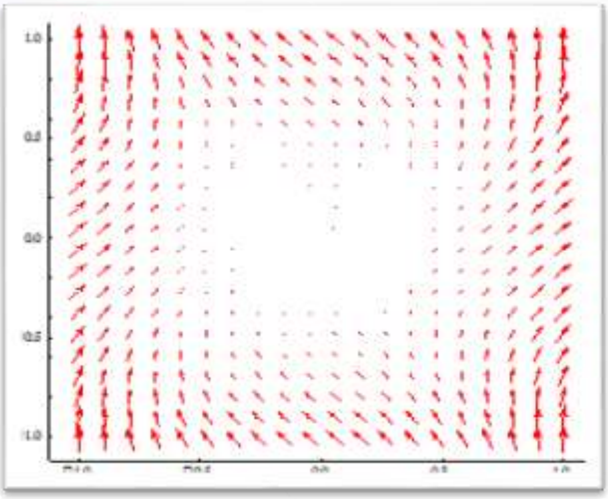

Figura 12.1: Representación gráfica de un campo vectorial que modeliza la velocidad del agua de la superficie de un canal: en cada punto (x, y)del plano se ha representado el vector $\vec{f}(x, y)$.

En el Instituto Argentino de Oceanografía (IADO), dependiente del Conicet, acaban de desarrollar - con tecnología propia - una boya con sensores que permiten medir, en cada instante, velocidad y dirección del viento, temperatura, humedad, presión y radiación solar, así como concentraciones de clorofila y oxígeno disueltos en el agua, para estudiar el fitoplancton.

Figura 12.2: La boya con sensores desarrollada en el IADO.

Un GPS determina en cada instante la posición de la boya, y un trasmisor envía lo datos medidos a la computadora ubicada en tierra. ¿Qué trayectoria veríamos en una pantalla, si conocemos la posición inicial de la boya, al colocarla en el canal que parte del Dique Paso Piedras, donde la presencia de algas y fitoplancton dificultan la provisión de agua a la ciudad de Bahía Blanca? La trayectoria sería una curva que, en cada punto, tiene al vector campo de velocidades $\vec{f}(x, y)$ por vector tangente. Estas curvas se denominan *líneas de campo,*y para el campo $\vec{f}(x,y)$ representado en la figura 12.1tendrían el aspecto que se ve en la figura 12.3.

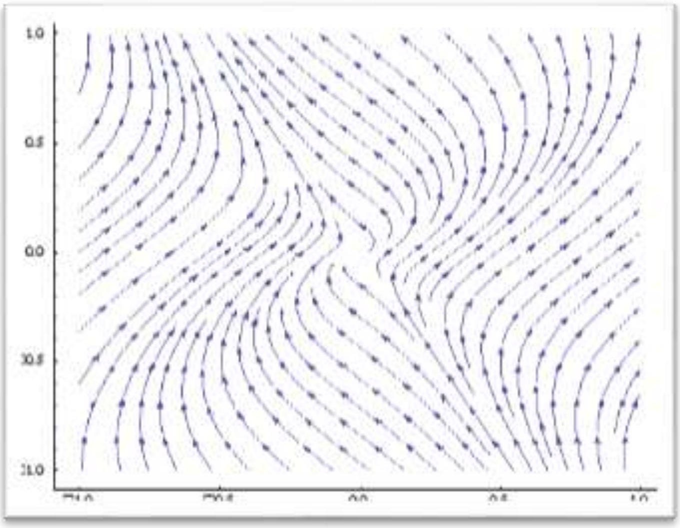

Figura 12.3:Líneas de campo correspondientes al campo $\vec{f}(x,y)$representado en la Figura 12.1. Para graficarlas se usó la función “StreamPlot” del programa Mathematica©

Tal como ya hemos visto, es posible hallar la ecuación de estas curvas resolviendo una ecuación diferencial ordinaria.
Recordemos la definición.

Definición 12.1: Dado un campo vectorial continuo $\vec{f}$, llamaremos *líneas de campo* a la familia de curvas contenidas en el dominio del campo que, en cada punto, tienen al vector campo por vector tangente.

Se trata de una familia de curvas en el plano, para el caso de campos con dominio en R^2 e imagen en R^2, mientras que son familias de curvas en el espacio para los campos definidos de R^3 en R^3.
Esta familia se obtiene resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{F_1(x,y)} = \frac{dy}{F_2(x,y)} \text{para un campo en } R^2,$$

$$\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)} \text{para un campo en } R^3.$$

En el caso plano, si recordamos que $dy = y'dx$, la expresión puede escribirse también de la siguiente forma:

$$y' = \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)}$$

que es una EDO cuya solución son las líneas de campo buscadas.

En el caso de un campo en R^3 obtenemos un sistema de EDOs, cuya expresión es

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{F_1(x,y,z)} = \dfrac{dy}{F_2(x,y,z)} \\ \dfrac{dy}{F_2(x,y,z)} = \dfrac{dz}{F_3(x,y,z)} \end{cases} \text{o bien} \begin{cases} \dfrac{dx}{F_1(x,y,z)} = \dfrac{dy}{F_2(x,y,z)} \\ \dfrac{dx}{F_1(x,y,z)} = \dfrac{dz}{F_3(x,y,z)} \end{cases} \text{o bien} \begin{cases} \dfrac{dx}{F_1(x,y,z)} = \dfrac{dy}{F_2(x,y,z)} \\ \dfrac{dy}{F_2(x,y,z)} = \dfrac{dz}{F_3(x,y,z)} \end{cases}$$

Utilizaremos la expresión que resulte más sencilla de resolver.

Ejemplo 12.1: Hallar las líneas de campo correspondientes al campo vectorial plano $\vec{f}(x,y) = (-y,x)$.

Un diagrama similar al de la figura 12.1para el campo $\vec{f}(x,y) = (-y,x)$ es el que se ve en la figura 12.4.

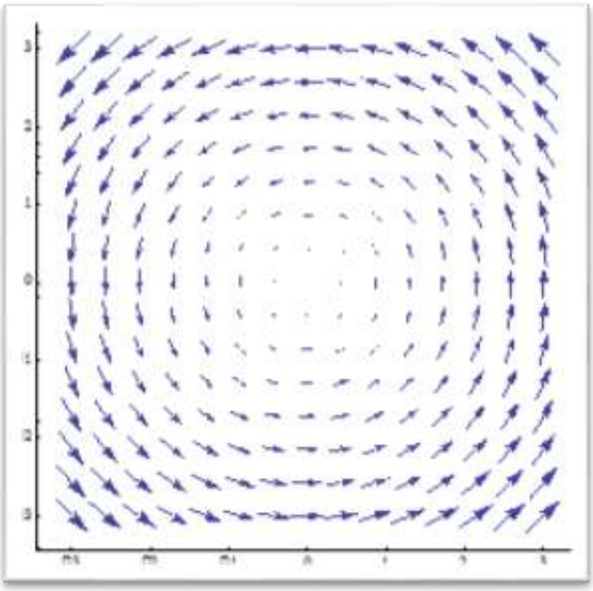

Figura 12.4: Representación gráfica del campo vectorial $\vec{f}(x,y) = (-y,x)$.

Esta representación gráfica nos permite intuir que las líneas de campo deben ser circunferencias. Verifiquémoslo planteando y resolviendo la EDO de las líneas de campo:

$$\frac{dx}{f_1(x,y)} = \frac{dy}{f_2(x,y)}$$

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

que resulta de variables separables:

$$xdx = -ydy$$

$$\int xdx = -\int ydy$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$$x^2 + y^2 = K$$

que efectivamente corresponde a una familia de circunferencias, como habíamos anunciado. La función "StreamPlot" del Mathematica© proporciona el gráfico que vemos en la figura 12.5.

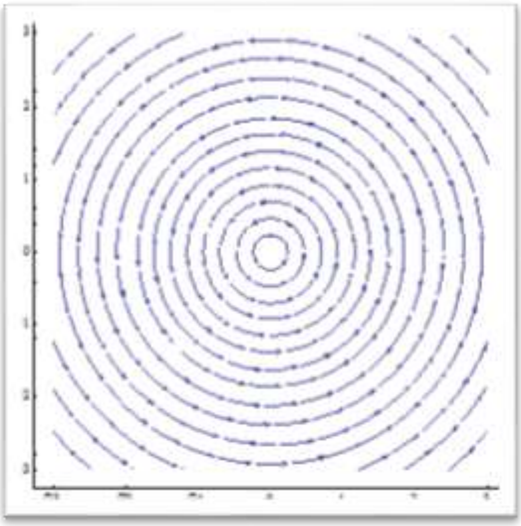

Figura 12.5: Líneas de campo correspondientes a $\vec{f}(x, y) = (-y, x)$

Ejemplo 12.2: Hallar las líneas de campo correspondientes al siguiente campo vectorial, definido en el espacio: $\vec{f}(x, y, z) = (xy, x^2, zy)$.
Si el campo corresponde a la velocidad del viento, ¿qué trayectoria seguirá un grano de polen que en el instante inicial se encuentra en el punto (1,0,3)?

Planteamos la ecuación de las líneas de campo

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

$$\frac{dx}{xy}=\frac{dy}{x^2}=\frac{dz}{zy}$$

que nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones que pueden desvincularse entre sí, para poder resolverlas:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{xy}=\dfrac{dy}{x^2}\\ \dfrac{dx}{xy}=\dfrac{dz}{zy}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}\\ \dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}xdx=ydy\\ \dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{z}\end{cases}$$

Integrando resultan

$$\begin{cases}x^2-y^2=K\\ x=Cz\end{cases}$$

de modo que las líneas de campo son las curvas del espacio que se obtienen mediante la intersección de la familia de cilindros hiperbólicos$x^2-y^2=K$con la familia de planos $x=Cz$.

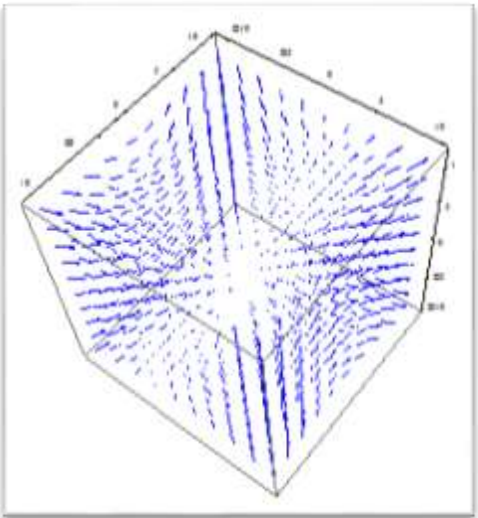

Figura 12.6: Representación del campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=(xy,x^2,zy)$.
Se intuyen las líneas de campo como intersección de cilindros hiperbólicos y planos.
El programa Mathematica© carece de la función StreamPlot en 3D.

Un grano de polen que inicialmente se encuentra en $(1{,}0{,}3)$ seguirá la línea de campo que pasa por ese punto, vale decir

$$\begin{cases} 1^2 - 0^2 = K \\ 1 = 3C \end{cases} \Rightarrow \quad K = 1 C = \frac{1}{3}$$

Esta curva es

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 3x = z \end{cases}$$

Esta curva se puede parametrizar usando funciones hiperbólicas, recordando que $cosh^2(t) - senh^2(t) = 1$.
La trayectoria del grano de polen es

$$\vec{X}(t) = (\cosh(t)\,, senh(t), 3\cosh(t)) t \geq 0$$

(Observar que en el punto de inicio de la trayectoria, $(1{,}0{,}3)$, es $\vec{f}(1{,}0{,}3) = (0{,}1{,}0)$ de modo que el vector tangente tiende a hacer crecer la coordenada "y" de la posición, y eso ocurre con $senh(t)$ a partir de $t = 0$ cuando varía hacia las $t > 0$, de modo que el sentido de la parametrización es el correcto)

Ejemplo 12.3: Determinemos las líneas de campo de $\vec{f}(x, y) = (y^2 - x^2, 2xy)$.

La ecuación diferencial de las líneas de campo es

$$\frac{dx}{F_1(x,y)} = \frac{dy}{F_2(x,y)}$$

O bien

$$y' = \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)}$$

Es decir

$$y' = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

Tenemos aquí un inconveniente: la EDO que acabamos de obtener no es lineal (pues aparece y^2 multiplicando a y', por ejemplo) ni es de variables separables (como se comprueba intentando separar los términos con x de los términos con y en miembros diferentes) de modo que no podríamos resolverla por ninguno de los métodos que conocemos…
Pero observemos lo siguiente: si llamamos$f(x, y) = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$, esta función $f(x, y)$ tiene una característica particular. Calculemos $f(t.x, t.y)$, donde podemos imaginar que t es un "factor de cambio de escala" en los ejes x e y (por ejemplo, tenemos los ejes graduados en centímetros y pasamos a graduarlos en milímetros):

$$f(t.x,t.y)=\frac{2.t.x.t.y}{t^2y^2-t^2x^2}=\frac{t^22xy}{t^2(y^2-x^2)}=\frac{2xy}{y^2-x^2}=f(x,y)$$

Esta función verifica, entonces, que

$f(t.x,t.y)=f(x,y),$

(es decir permanece invariante frente a un cambio de escala de sus variables).
Las funciones con esta propiedad tienen un nombre particular:

Definición 12.2: Una función $f(x,y)$ que verifica que $f(t.x,t.y)=f(x,y)$ se denomina función homogénea de grado 0.
Nota: Esta definición se generaliza, aunque no utilizaremos el concepto más que para grado 0. Si la función verifica que $f(t.x,t.y)=t^m f(x,y)$ se denomina función homogénea de grado m.

Veremos que, con funciones homogéneas de grado 0, es posible resolver de manera sencilla la ecuación diferencial $y'=f(x,y)$,como la que nos quedó planteada en el **Ejemplo 12.3**, realizando un cambio de variables y transformándola en una EDO de variables separables.

Ecuaciones diferenciales de tipo homogénea

Definición 12.3: Llamaremos ecuación diferencial de tipo homogénea a toda EDO de primer orden de la forma $y'=f(x,y)$ donde la función $f(x,y)$ es una función homogénea de grado 0.

Teorema 12.1: Toda EDO de tipo homogéneo $y'=f(x,y)$, con $f(x,y)$ una función homogénea de grado 0, se convierte en una ecuación de variables separables si se efectúa el cambio de variables $y(x)=x.z(x)$

En efecto:

$$\begin{array}{rcl} y(x)=x.z(x) & \Rightarrow & y'(x)=z(x)+x.z'(x) \\ y'=f(x,y) & \Rightarrow & z+x.z'=f(x,x.z) \end{array}$$

Usando ahora la propiedad de homogeneidad de f es

$$f(x,x.z)=f(x.1,x.z)\overset{\substack{\text{para}\\ t=x}}{\triangleq} f(1,z)$$

por lo que resulta

$$z+x.z'=f(1,z)$$

esto es

$$x.z' = f(1,z) - z$$

que es una EDO de variables separables que puede resolverse del siguiente modo, si $f(1,z) \neq z$ y para $x \neq 0$:

$$\frac{z'}{f(1,z) - z} = \frac{1}{x}$$
$$\int \frac{dz}{f(1,z) - z} = \int \frac{dx}{x}$$

Volviendo al **Ejemplo 12.3**, **r**esolvamos la ecuación que nos quedó planteada:

$$y' = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

Si $y = xz$ resulta

$$z + xz' = \frac{2x^2 z}{x^2 z^2 - x^2} = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

$$xz' = \frac{2z}{z^2 - 1} - z$$

$$xz' = \frac{2z - z^3 + z}{z^2 - 1}$$

$$\frac{z^2 - 1}{3z - z^3} z' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{z^2 - 1}{3z - z^3} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\frac{1}{3} \int \frac{\overbrace{(1 - z^2)dz}^{du}}{\underbrace{z - \frac{1}{3}z^3}_{u}} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-ln\left|z - \tfrac{1}{3}z^3\right| = 3ln|x| + C$$

$$\frac{1}{z - \frac{1}{3}z^3} = Kx^3$$

Reemplazando ahora z por $\frac{y}{x}$ se tiene la familia de curvas buscada:

$$\frac{1}{\frac{y}{x}-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3}=Kx^3$$

Así,

$$3x^2y-y^3=k$$

es la familia de líneas de campo de $\vec{f}(x,y)=(y^2-x^2,2xy)$, expresada en forma implícita. En la figura 12.7se observan, superpuestos, las líneas de campo (en azul) y los vectores campo (en rojo).

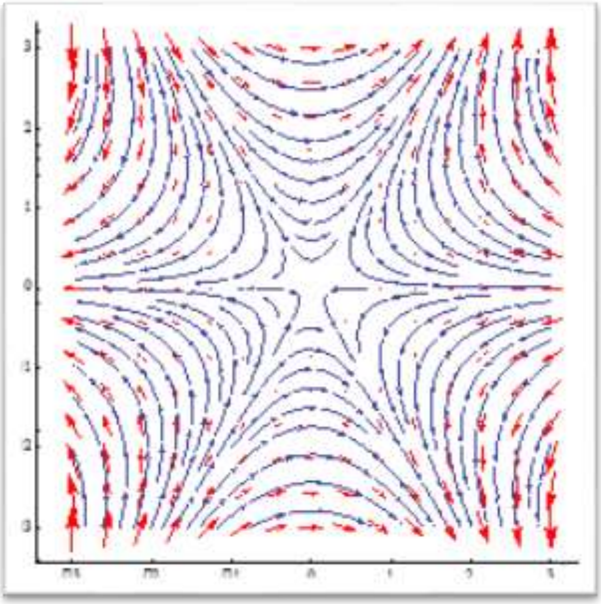

Figura 12.7: Representación del campo vectorial $\vec{f}(x,y)=(y^2-x^2,2xy)$ y algunas de sus líneas de campo.

Ecuaciones diferenciales totales exactas

Veremos a continuación otro método de resolución de EDOs de primer orden.

Ejemplo 12.4: Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$(y^2-x^2)y'-(2xy+x)=0$$

No es lineal (porque aparece y^2 multiplicando a y'), no es de variables separables (como se comprueba intentando separar los términos con x de los términos con y en miembros diferentes). Tampoco es de tipo homogéneo pues si la escribimos en la forma

$$y' = \frac{2xy + x}{y^2 - x^2}$$

la función que figura en el segundo miembro no permanece invariante si reemplazamos (x, y) por $(t.x, t.y)$. Pero multiplicando por el diferencial de la variable independiente x, podemos escribirla de la siguiente forma

$$(y^2 - x^2)y'dx - (2xy + x)dx = 0$$

o bien

$$-(2xy + x)dx + (y^2 - x^2)\underbrace{y'dx}_{dy} = 0,$$

que es lo mismo que

$$-(2xy + x)dx + (y^2 - x^2)dy = 0$$

Si llamamos $F_1(x, y) = -(2xy + x)$ y $F_2(x, y) = y^2 - x^2$ observemos que resultan

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -2x = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in R^2$$

Si consideramos $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$ como las componentes de un campo vectorial $\vec{f}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, este campo resultaría conservativo, ya que la igualdad $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ se corresponde con la simetría de su matriz jacobiana, que ocurre además en todo R^2 que es un conjunto abierto y simplemente conexo (ver Proposición 8.4).
Pero

$$\vec{f}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \quad \text{y} \quad \vec{f}(x, y) = \nabla\varphi \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ \text{y} \ F_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

por lo que la EDO, escrita en la forma $-(2xy + x)dx + (y^2 - x^2)dy = 0$, puede expresarse

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0 \quad \text{(nótese que si } \varphi \text{ es diferenciable } \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = d\varphi(x, y))$$

vale decir $d\varphi = 0$ para la función potencial $\varphi(x, y)$.

La expresión $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy$ se denomina *expresión diferencial exacta*, por eso las ecuaciones diferenciales de este tipo reciben el nombre de *ecuaciones diferenciales totales exactas*.
Como a su vez $d\varphi = 0$,la ecuación es equivalente a $\varphi(x, y) = k$, de manera que la familia de curvas de nivel de φ es: $\varphi(x, y) = k$ que se denomina familia de *curvas o líneas equipotenciales*[1] de $\vec{f}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$
Esta familia es la solución general de la ecuación diferencial dada.
Para resolver la ecuación dada, entonces, debemos hallar el potencial φ del campo $(F_1(x, y), F_2(x, y))$:

[1]"E*qui"* significa "igual"; *curvas equipotenciales*son curvas donde el potencial permanece igual o constante.

$$\begin{cases} \varphi'_x = -2xy - x \\ \varphi'_y = y^2 - x^2 \end{cases} \rightarrow \quad \varphi(x,y) = -x^2y - \tfrac{1}{2}x^2 + \alpha(y)$$

Comparando, se deduce que debe ser $\alpha'(y) = y^2$ por lo que $\alpha(y) = \frac{y^3}{3} + C$.
Así, $\varphi(x,y) = -x^2y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$ y la solución del problema es la familia de curvas equipotenciales, cuya ecuación (implícita) es

$$-x^2y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C = k$$

o, lo que es lo mismo,

$$6x^2y + 3x^2 - 2y^3 = K$$

Esta es la SG de la ecuación diferencial dada.
Si nos hubieran dado una condición inicial, podríamos determinar la solución particular correspondiente. Por ejemplo, si nos dicen que la solución debe pasar por el punto$(0,1)$, sería

$$6.0^2.1 + 3.0^2 - 2.1^3 = K,$$

de modo que $K = -2$ y la solución particular del PVI $\begin{cases} (y^2 - x^2)y' - (2xy + x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ es

$$6x^2y + 3x^2 - 2y^3 = -2$$

Ejemplo 12.5: Consideremos ahora la ecuación

$$(y - x)y' - xy = 0$$

De igual modo que en el ejemplo anterior, no es lineal, ni de variables separables, ni de tipo homogénea.
Si la escribimos, como antes, en la forma diferencial

$$-xydx + (y - x^2)dy = 0,$$

resulta: $\qquad F_1(x,y) = -xy \quad$ y $\quad F_2(x,y) = y - x^2$

se observa que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -x \;\;, \; pero \;\; \frac{\partial F_2}{\partial x} = -2x$ y $\frac{\partial F_1}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}$ de modo que el campo $\vec{f}(x,y)$ no es un campo conservativo, y así la ecuación diferencial dada no es total exacta y, en consecuencia, no podemos proceder del mismo modo que en el ejemplo 12.4.

Ahora bien, podemos intentar buscar algún factor mediante el cual sea posible transformar la ecuación diferencial no exacta en otra esencialmente equivalente que sea total exacta. Dicho factor, si existe, se denomina *factor integrante* o *factor de integración* que presentamos a continuación.

Determinación de factores integrantes

Con frecuencia aparecen ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma $F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = 0$ no total exacta que pueden ser transformadas en totales exactas multiplicándolas por una función $\mu(x,y) \neq 0$ denominado *factor integrante*. Si multiplicamos miembro a miembro la ecuación diferencial no exacta por este factor, resulta:

$\mu(x,y).F_1(x,y)dx + \mu(x,y).F_2(x,y)dy = 0$ que ahora es una ecuación diferencial total exacta y, por lo tanto admite como solución $\varphi(x,y) = C$ (familia de curvas equipotenciales) tal que:

$$d\varphi(x,y) = \underbrace{\mu(x,y).F_1(x,y)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{\mu(x,y).F_2(x,y)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

Y se verifica $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, es decir:

$$\frac{\partial[\mu(x,y).F_1(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(x,y).F_2(x,y)]}{\partial x}$$

Derivando en cada miembro de esta igualdad obtenemos:

$$\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}.F_1(x,y) + \mu(x,y).\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}.F_2(x,y) + \mu(x,y).\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} \qquad \text{(I)}$$

No se debe perder de vista que esta última ecuación es una ecuación diferencial en derivadas parciales cuya resolución escapa de los objetivos de este curso siendo $\boldsymbol{\mu(x,y)}$ es la función incógnita. Esto sucede porque hemos supuesto que el factor integrante depende de las variables *x* e *y*. Para evitar el planteo de esta situación determinaremos factores integrantes que dependan de una sola variable, los que lamentablemente no siempre existen como analizaremos más adelante.
Supongamos que la propuesta consiste en determinar el factor integrante $\boldsymbol{\mu(x)}$. Dado que este factor sólo depende de la variable *x*, la igualdad (I) queda reducida a:

$$\mu(x).\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = \frac{d\mu(x)}{dx}.F_2(x,y) + \mu(x).\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}$$

que se trata de una ecuación diferencial de primer orden de variables separables con función incógnita $\mu(x)$, entonces

$$\frac{\boldsymbol{d}\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{F_2(x,y)}.\left[\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}\right]$$

Y así,

$$\int \frac{\boldsymbol{d}\mu(x)}{\mu(x)} = \int \frac{1}{F_2(x,y)}.\left[\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}\right]dx$$

$$ln|\mu(x)| = \int \frac{1}{F_2(x,y)}.\left[\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}\right]dx$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{F_2(x,y)}\cdot\left[\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}\right]dx}$$

De forma análoga se obtiene $\mu(y) = e^{\int \frac{1}{F_1(x,y)}\cdot\left[\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\right]dx}$

Estos factores existen <u>sólo</u> si la integral que figura en el exponente sólo es una función que depende de *x* en el caso de $\mu(x)$, y sólo depende de *y* en el caso de $\mu(y)$.
Se debe tener presente que en el proceso de obtención de ambos factores integrantes se han omitido las constantes de integración en virtud que es suficiente encontrar un factor de integración que transforme a la ecuación no exacta en total exacta. Claramente, en el caso de que existan estos factores integrantes, existen infinitos que se diferencian en una constante.
Obtenido el factor integrante, sea $\mu(x)$ o bien $\mu(y)$, se multiplica miembro a miembro a la ecuación diferencial no exacta por él y luego se resuelve la ecuación diferencial total exacta obtenida sabiendo que todas las soluciones de $\mu(x,y).F_1(x,y)dx + \mu(x,y).F_2(x,y)dy = 0$ son también soluciones de la ecuación diferencial no exacta $F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = 0$.
Por otra parte, si bien ambas ecuaciones son equivalentes, el hecho de multiplicar a la ecuación diferencial no exacta por un factor de integración puede causar la pérdida y/o ganancia de soluciones. Por ello, se recomienda verificar cuidadosamente si se han perdido o se han agregado soluciones.

Retomamos el ejemplo de la ecuación diferencial no exacta que hemos dejado pendiente.

La ecuación es $-xydx + (y - x^2)dy = 0$

Tratemos de hallar, por ejemplo, $\mu(y) \neq 0$ multiplicando a la ecuación por este factor:

$$-xy\mu(y)dx + (y - x^2)\mu(y)dy = 0$$

Ahora definimos

$$P(x,y) = -xy\mu(y) \quad \text{y} \quad Q(x,y) = (y - x^2)\mu(y)$$

Para que la nueva ecuación sea diferencial total exacta pedimos que se verifique:

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$$

$$-x\mu(y) - xy\mu'(y) = -2x\mu(y)$$

$$y\mu'(y) = \mu(y)$$

$$\int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}dy = \int \frac{1}{y}dy$$

$$\ln|\mu(y)| = \ln|y| + C$$
$$\mu(y) = Ky$$

Ahora sólo resta elegir un factor integrante (el más sencillo) y convertir la ecuación en diferencial exacta, para buscar el potencial escalar. Tomando $\mu(y) = y$ se obtiene:

$$-xy^2dx + (y - x^2)ydy = 0$$

$P(x, y) = -xy^2$ y $Q(x, y) = (y - x^2)y$

$$P'_y(x, y) = -2xy = Q'_x(x, y)$$

con lo cual el campo $(P(x, y), Q(x, y))$ es, ahora, conservativo y buscamos el potencial escalar:

$$\begin{cases} \varphi'_x = -xy^2 \\ \varphi'_y = y^2 - x^2y \end{cases} \rightarrow \quad \varphi(x, y) = -\tfrac{1}{2}x^2y^2 + \alpha(y)$$

Comparando se deduce que debe ser $\alpha'(y) = y^2$ por lo que $\alpha(y) = \frac{y^3}{3} + C$.

Así, $\varphi(x, y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^3}{3} + C$ y la solución del problema es la familia de curvas de ecuación (implícita)

$$-\tfrac{1}{2}x^2y^2 + \frac{y^3}{3} + C = k$$

o, lo que es lo mismo,

$$3x^2y^2 - 2y^3 = K$$

que es la SG de la ecuación diferencial dada.
Si nos hubieran solicitado la solución del PVI

$$\begin{cases} (y - x)y' - xy = 0 \\ \quad y(0) = -2 \end{cases}$$

la SP sería $3x^2y^2 - 2y^3 = 16$

Por lo general, al resolver este tipo de ecuaciones, se obtienen soluciones expresadas de forma implícita.

Hemos desarrollado, entonces, métodos para resolver EDOs de primer orden:

1. variables separadas o separables;
2. lineales;
3. homogéneas, y
4. diferenciales totales exactas o transformables en diferenciales totales exactas.

A continuación, daremos métodos para resolver EDOs de orden superior al primero, aunque de un tipo particular.
Antes de ello, les proponemos una actividad de síntesis temática para que discutan.

Actividad para resolver y discutir en el Foro

Actividad 12.1: Clasifiquen las siguientes ecuaciones diferenciales en *"de variables separables", "lineales", "de tipo homogéneo", "diferenciales exactas" y "reducibles a diferenciales exactas".*
Tengan en cuenta que cada ecuación puede pertenecer a varias de categorías a la vez. En algunas de las ecuaciones es posible que deban tratar algunas soluciones o puntos singulares aparte, o restringir el dominio de trabajo, para poder decidir la clasificación.
Finalmente, elijan una ecuación que pueda resolverse por más de dos métodos y resuélvanla por todos ellos, comparando las soluciones obtenidas.

$a)\ (y^2 - xy)y' - xy = 0$
$b)\ (x + y)x^2dx + xy^2dy = 0$
$c)\ (1 - x^2)y' - 2xy = 0$
$d)\ (y - xy)y' - xy^2 = 0$
$e)\ 3x^2y^2y' + 2xy^3 = 0$
$f)\ sen(x)y' = -ycos(x)$
$g)\ y' = (x + y)/(x - y)$
$h)\ sen(y)y' - sec(x)y = 0$
$i)\ -3y^2dx + 2(y - xy)dy = 0$
$j)\ 2xy^3dx + dy = 0$

Variables separables	Lineales	De tipo homogéneo	Diferenciales exactos	Reducibles a diferenciales exactas

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales de orden superior al primero con coeficientes constantes

Desarrollaremos, a continuación, un método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior al primero, donde la función incógnita y sus derivadas aparecen en una suma algebraica de términos con coeficientes constantes.
Concretamente, nos ocuparemos de ecuaciones del tipo que definiremos a continuación.

Definición 12.4: Se denomina ecuación diferencial lineal de enésimo orden a coeficientes constantes no homogénea a la ecuación

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ y a_0 son constantes reales y $g(x)$ es una función continua de la variable independiente x.

En el caso particular en que $g(x) \equiv 0$ la ecuación se dirá *homogénea* y es la primera que analizaremos..Luego presentaremos dos métodos para resolver la ecuación no homogénea.

Resolución de la ecuación homogénea

En primer lugar, enunciemos los siguientes teoremas.

Teorema 12.2: Dados n números reales $k_0, k_1, k_2, \dots$ y k_{n-1}, existe una única solución, definida en toda la recta real, para el PVI

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y(0) = k_0 \\ y'(0) = k_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) = k_{n-1} \end{cases}$$

Teorema 12.3: El conjunto

$$S = \{f: R \to R / f \text{ es solución de } a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0\}$$

es un subespacio de dimensión n del espacio vectorial de las funciones reales n veces derivables.

La demostración del primero de los teoremas excede el nivel de este curso, pero el segundo es de demostración sencilla si nos basamos en el primero.
En efecto: es fácil ver que una base de S son las soluciones de los siguientes n PVI - cada una de las cuales existe y es única en virtud del teorema 12.1:

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

En efecto: si $f_1(x)$ es solución del primer PVI, $f_2(x)$ del segundo, …, $f_n(x)$ del último, se ve, de modo sencillo, que

$$y(x) = k_0 f_1(x) + k_1 f_2(x) + \cdots + k_{n-1} f_n(x)$$

es solución de

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y(0) = k_0 \\ y'(0) = k_1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(0) = k_{\mathrm{n-1}} \end{cases}$$

¡Compruébenlo y discútanlo en el Foro con sus compañeros!

A partir de estos dos teoremas podemos deducir que, para resolver la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

bastará con encontrar n soluciones linealmente independientes de la misma, $f_1, f_2, \ldots, f_n$, ya que entonces una solución general (que indicaremos SGH) será, simplemente, una combinación lineal de ella con n constantes arbitrarias:

$$y_H(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_n f_n(x)$$

Queda claro que se necesita una herramienta que nos permita determinar cuándo una familia de n soluciones es linealmente independiente, para poder decidir si se trata de una base del espacio de soluciones de una EDO.
Esa herramienta es el determinante que definimos a continuación.

Definición 12.5: Dada una familia $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ formada por n funciones $n-1$ veces derivables en un intervalo I, se llama *wronskiano*[2] *de la familia* al siguiente determinante (que resulta una función de x, definida en el intervalo I):

$$W_F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \vdots & f_n''(x) \\ \dots & \dots & & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

El resultado que necesitamos se enuncia en el siguiente Teorema:

Teorema 12.4: Dada la familia $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, formada por n funciones $n-1$ veces derivables en un intervalo I, si el determinante wronskiano de la misma, $W_F(x)$, no se anula en I entonces la familia resulta linealmente independiente en ese intervalo.

La demostración es sencilla pues, si queremos ver que $f_1, f_2, \dots, f_n$ son funciones linealmente independientes, debemos plantear una combinación lineal igualada a 0

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0$$

y probar que necesariamente resultan$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.
Pero a partir de esa combinación lineal y teniendo en cuenta que las funciones son n veces derivables, podemos construir un sistema de n ecuaciones en las n incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \\ \alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x) + \dots + \alpha_n f_n'(x) = 0 \\ \alpha_1 f_1''(x) + \alpha_2 f_2''(x) + \dots + \alpha_n f_n''(x) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 f_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Si se sabe que $W_F(x)$ no se anula en I, sea x_0 un punto de ese intervalo.
Entonces

[2]*JózefHoene-Wronski (1776-1853) Matemático Polaco dedicado al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias.*

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0) + \cdots + \alpha_n f_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 f_1'(x_0) + \alpha_2 f_2'(x_0) + \cdots + \alpha_n f_n'(x_0) = 0 \\ \alpha_1 f_1''(x_0) + \alpha_2 f_2''(x_0) + \cdots + \alpha_n f_n''(x_0) = 0 \\ \cdots \\ \alpha_1 f_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 f_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

es un sistema lineal homogéneo de incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ cuyo determinante es $\mathrm{W}_F(x_0) \neq 0$, por lo tanto su única solución es $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, por lo que la familia de funciones resulta linealmente independiente.

El paso siguiente es encontrar n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.
En primer lugar, observemos que en la EDO

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

la función incógnita y sus sucesivas derivadas deberían ser funciones "del mismo tipo", ya que una suma algebraica de las mismas da 0.
Esto no podría ocurrir con polinomios, por ejemplo, pues al derivar el grado de los polinomios va decreciendo y los términos de grados más altos no tendrían cómo anularse. Funciones que al ser derivadas originan otras funciones de su mismo tipo son, por, ejemplo, las exponenciales y los senos y cosenos. Concentrémonos en las funciones exponenciales porque luego veremos que los senos y cosenos también pueden expresarse de forma exponencial.
Propongamos una función de la forma $y(x) = e^{kx}$. ¿Qué ocurre si la reemplazamos en la ecuación? Obtendríamos

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y =$$

$$= a_n k^n e^{kx} + a_{n-1} k^{n-1} e^{kx} + \cdots + a_2 k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_0 e^{kx}$$

yes preciso que resulte

$$e^{kx}[a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0] = 0$$

pero la función exponencial nunca se anula, de modo que necesariamente deberá ser

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$$

Se trata de una ecuación polinómica de grado n que se denomina *ecuación característica* asociada a la EDO lineal homogénea de coeficientes constantes. Sus raíces serán las que permitirán construir funciones del tipo $y(x) = e^{kx}$que resulten solución de la EDO.
Si obtuviéramos n de estas soluciones, y resultaran LI, …¡tendríamos una base soluciones y el problema resuelto!
Veremos, a continuación, dos teoremas que nos serán de suma utilidad

Teorema 12.5 (*Teorema Fundamental del Álgebra*): El polinomio de grado n

$$p(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_2k^2 + a_1k + a_0$$

con coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ y $a_0$reales, tiene exactamente n raíces en el conjunto de los números complejos (incluyendo las raíces con sus multiplicidades).

Proposición 12.6: Si $k_1 \neq k_2$ entonces e^{k_1x} y e^{k_2x} son linealmente independientes. También lo son e^{kx} y xe^{kx} cualquiera sea k.

La demostración del primer teorema, de suma importancia, excede el nivel del curso.
La proposición es de fácil demostración calculando, simplemente, los respectivos determinantes wronskianos y comprobando que son no nulos:

$$W_{\{e^{k_1x}, e^{k_2x}\}} = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} = e^{k_1x}k_2e^{k_2x} - e^{k_2x}k_1e^{k_1x} = \underbrace{(k_2 - k_1)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{pues } k_1 \neq k_2}} \underbrace{e^{(k_1+k_2)x}}_{\substack{\neq 0 \\ \text{por ser} \\ \text{exponencial}}} \neq 0$$

$$W_{\{e^{kx}, xe^{kx}\}} = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx} + kxe^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} + kxe^{2kx} - kxe^{2kx} = e^{2kx} \neq 0$$

Por otra parte, la proposición puede generalizarse para cualquier número de exponenciales y para sucesivas potencias de x, esto es:

Proposición 12.7: Si $k_1, k_2, \dots, k_m$ son m números distintos entonces $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{k_mx}$ son linealmente independientes. También lo son e^{kx}, $xe^{kx}, x^2e^{kx}, \dots, x^re^{kx}$ cualquiera sea k y cualquiera sea el natural r.

Observaciones

1. Si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz compleja $a + ib$, el número complejo conjugado $a - ib$ también es raíz del mismo polinomio.

2. Recordemos la fórmula de Euler:$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + isen(\varphi)$

Por ello,
$e^{(a+ib)x} = e^{ax}\big(\cos(bx) + isen(bx)\big)ye^{(a-ib)x} = e^{ax}\big(\cos(bx) - isen(bx)\big)$

por lo que una combinación lineal de $e^{(a+ib)x}$y$e^{(a-ib)x}$ podrá escribirse del siguiente modo:

$$C_1e^{(a+ib)x} + C_2e^{(a-ib)x} =$$

$$= C_1e^{ax}\big(\cos(bx) + isen(bx)\big) + C_2e^{ax}\big(\cos(bx) - isen(bx)\big) =$$

$$= (C_1 + C_2)e^{ax}\cos(bx) + (C_2 - iC_2)e^{ax}sen(bx) =$$

$$= K_1e^{ax}\cos(bx) + K_2e^{ax}sen(bx)$$

Esto significa que, en lugar de seleccionar las soluciones linealmente independientes (pero complejas) $e^{(a+ib)x}$y $e^{(a-ib)x}$, podemos considerar las soluciones $e^{ax}\cos(bx)$y$e^{ax}sen(bx)$ que son reales, y también LI, como se ve a continuación:

$W_{\{e^{ax}\cos(bx),\, e^{ax}sen(bx)\ \}} =$

$= \begin{vmatrix} e^{ax}cos(bx) & e^{ax}sen(bx) \\ ae^{ax}cos(bx) - b\, e^{ax}sen(bx) & ae^{ax}sen(bx) + b\, e^{ax}cos(bx) \end{vmatrix} =$

$= ae^{2ax}cos(bx)sen(bx) + \ be^{ax}cos^2(bx) - \ ae^{2ax}sen(bx)cos(bx) + b\, e^{ax}sen^2(bx)$

$= \ be^{ax} \neq 0$

3. Si el polinomio característico $P(k) = a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_2k^2 + a_1k + a_0$ tiene una raíz k_0 de multiplicidad r, se puede demostrar que no sólo e^{k_0x} es solución de la ecuación homogénea $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ sino que también lo son $e^{k_0x}, xe^{k_0x}, x^2e^{k_0x}, \ldots, x^{r-1}e^{k_0x}$.

Veámoslo para el caso de una ecuación de orden 2 con una raíz doble. El caso general supone cálculos algo más complicados.

Si$a_2k^2 + a_1k + a_0 = a_2(k - k_0)^2$, entonces$a_2k^2 + a_1k + a_0 = a_2k^2 - 2a_2k_0k + a_2{k_0}^2$

y la EDO es$a_2y'' - 2a_2k_0y' + a_2{k_0}^2y = 0$

Reemplazando xe^{k_0x} en $a_2y'' - 2a_2k_0y' + a_2{k_0}^2y$ se obtiene

$$a_2\left(2k_0e^{k_0x} + x{k_0}^2e^{k_0x}\right) - 2a_2k_0(e^{k_0x} + xk_0e^{k_0x}) + a_2{k_0}^2xe^{k_0x} = 0$$

de modo que xe^{k_0x} también es solución, además de e^{k_0x}.

Tenemos ya todos los elementos necesarios para resolver la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Construimos el polinomio característico

$$p(k) = a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_2k^2 + a_1k + a_0$$

2. Calculamos las raíces de la ecuación característica

$$a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_2k^2 + a_1k + a_0 = 0$$

(para lo cual recurriremos a fórmulas resolventes, Teorema de Gauss, reemplazo directo, Regla de Ruffini, etc.)

3. Si la ecuación tuviera n raíces reales distintas $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $\{e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}\}$ es una base de soluciones y la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_H = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + \cdots + C_ne^{k_nx}$$

4. Si alguna de las raíces resultara compleja, también el número conjugado será raíz. En ese caso, en lugar de considerarse como parte de la base soluciones las funciones $e^{(a+ib)x}$ye$^{(a-ib)x}$, se considerarán, como miembros de la base, las soluciones reales $e^{ax}\cos(bx)$ye$^{ax}sen(bx)$.

5. Si alguna de las raíces, k_0, sea ésta real o compleja, resultara con multiplicidad r, en lugar de considerar únicamente la solución e^{k_0x} se considerarán las r soluciones $e^{k_0x}, xe^{k_0x}, x^2e^{k_0x}, \ldots, x^{r-1}e^{k_0x}$.

De este modo, siempre lograremos, para $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$, una base formada por n soluciones linealmente independientes. Esta base suele denominarse *conjunto fundamental* asociado a la EDO.

Ilustremos el método de resolución con algunos ejemplos.

Ejemplo 12.6: Para cada una de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, encontrar la solución general:

$a)\ y'' + 2y' - 3y = 0;$
$b)\ y''' + 3y'' + 3y' + y = 0;$
$c)\ y'' + y = 0;$
$d)\ 2y''' - 14y'' + 38y' - 26y = 0;$
$e)\ y^{(4)} - 2y''' + 11y'' - 10y' + 25y = 0$

EDO	*Ecuación característica*	*Raíces*	*Conjunto fundamental*
$y'' + 2y' - 3y = 0$	$k^2 + 2k - 3 = 0$	$1, -3$	$\{e^x, e^{-3x}\}$
$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$	$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0$	1 triple	$\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$
$y'' + y = 0$	$k^2 + 1 = 0$	$i, -i$	$\{cos(x), sen(x)\}$
$2y''' - 14y'' + 38y' - 26y = 0$	$2k^3 - 14k^2 + 38k - 26 = 0$	$1,$ $2 \pm 3i$	$\{e^x, e^{2x}\cos(3x), e^{2x}sen(3x)\}$
$y^{(4)} - 2y''' + 11y'' - 10y' + 25y = 0$	$k^4 - 2k^3 + 11k^2 - 10k + 25 = 0$	$1 \pm 2i$ dobles	$\{e^x\cos(2x), e^xsen(2x),$ $xe^x\cos(2x), xe^xsen(2x)\}$

Resolución de la ecuación no homogénea

Ahora necesitamos resolver la ecuación no homogénea

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$$

donde$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ y $a_0$son constantes reales y $g(x)$ es una función continua conocida de la variable independiente x.
Es sencillo demostrar, tal como lo hicimos en la Unidad 1, que *la diferencia entre dos soluciones de la ecuación no homogénea resulta ser solución de la homogénea* (intenten probarlo y discutan la demostración con sus compañeros en el foro: ¡es muy fácil!).
Nuevamente, como hicimos para las ecuaciones de primer orden, si encontráramos una solución particular de la ecuación no homogénea, $y_P(x)$, podríamos construir su solución general del siguiente modo:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

ya que la diferencia entre dos soluciones de la no homogénea es solución de la homogénea ($y_H(x)$ designa la solución general de la ecuación homogénea, SGH).
Necesitamos, pues, un método que nos permita calcular soluciones particulares de la no homogénea.
Daremos dos métodos. El primero, denominado "de los coeficientes indeterminados", puede emplearse cuando la función $g(x)$ es una suma algebraica de exponenciales multiplicadas por polinomios (vale decir, cuando $g(x)$ es una función del mismo tipo que las que se obtienen como soluciones de la ecuación homogénea). El otro método se emplea cualquiera sea la función continua $g(x)$ y es una generalización del método de variación de parámetros que estudiamos para las ecuaciones de primer orden.

Método de los coeficientes indeterminados

Consideremos en primer lugar la ecuación

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = p(x) e^{\alpha x}$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado m en x.
Una vez calculada la solución general de la ecuación diferencial homogénea (SGH) debemos proponer una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (SPNH), para sumarla a la SGH y obtener la SGNH.
Para proponer una solución debemos tener en cuenta si $e^{\alpha x}$ es parte o no del conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea:

Si αno es raíz de la ecuación característica, se propone

$$y_P(x) = q(x) e^{\alpha x}$$

donde $q(x)$ es un polinomio genérico de grado m:

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

siendo $b_m,\ b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ coeficientes a determinar (de allí el nombre del método). Para ello se reemplaza $y_P(x) = q(x) e^{\alpha x}$ en la EDO y se obtienen los coeficientes.

Si α es raíz de multiplicidad r de la ecuación característica, se propone

$$y_P(x) = x^r q(x) e^{\alpha x}$$

donde $q(x)$ es nuevamente un polinomio genérico de grado m.
Como en el caso anterior, se reemplaza $y_P(x) = x^r q(x) e^{\alpha x}$ en la EDO y se obtienen los coeficientes.

Si $g(x)$ es una suma de términos de la forma $p(x)e^{\alpha x}$, vale decir $g(x) = p_1(x)e^{\alpha_1 x} + p_2(x)e^{\alpha_2 x} + \cdots + p_s(x)e^{\alpha_s x}$, se propone $y_P(x)$ como una suma de términos de la forma $q_i(x)e^{\alpha_i x}$ o $x^{r_i} q_i(x) e^{\alpha_i x}$ según corresponda a los diferentes tipos de raíces α_i de la ecuación característica asociada a la EDO homogénea.

Veamos algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 12.7: Resolver el siguiente PVI $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = xe^{2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

En primer lugar, resolvamos la EDO homogénea: $y'' + 2y' - 3y = 0$.
La ecuación característica es $k^2 + 2k - 3 = 0$ cuyas raíces son $1, -3$, por lo que el sistema fundamental es $\{e^x, e^{-3x}\}$. Resulta, entonces,

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$

Ahora debemos proponer la $y_p(x)$. Como es $g(x) = \underbrace{x}_{\substack{\text{polinomio} \\ \text{de grado 1}}} \underbrace{e^{2x}}_{\substack{\text{exponencial} \\ \text{que no está} \\ \text{en sist. fund.}}}$, proponemos

$$y_P(x) = \underbrace{(ax+b)}_{\substack{\text{polinomio} \\ \text{genérico} \\ \text{de grado 1}}} e^{2x}$$

Reemplazamos en la EDO para hallar los coeficientes:

$$\begin{array}{lcrl} y_P = (ax+b)e^{2x} & \to & & -3y_P = (-3ax - 3b)e^{2x} \\ y_P' = ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x} & \to & + & 2y_P' = 2ae^{2x} + 4(ax+b)e^{2x} \\ y_P'' = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4(ax+b)e^{2x} & \to & & y_P'' = 4ae^{2x} + 4(ax+b)e^{2x} \\ \hline xe^{2x} = 5axe^{2x} + (5b+6a)e^{2x} & & & \end{array}$$

Igualando los coeficientes de igual grado en x de ambos miembros resultan

$$\begin{cases} xe^{2x}: & 1 = 5a \\ e^{2x}: & 0 = 5b + 6a \end{cases}$$

de manera que $a = \frac{1}{5}$; $b = -\frac{6}{25}$.

Observen una forma cómoda de disponer los cálculos para calcular los coeficientes.
Una solución particular de la no homogénea es, entonces, $y_P(x) = (\frac{1}{5}x - \frac{6}{25})e^{2x}$. Se puede comprobar que es correcto reemplazando en la EDO.
La SG del problema es

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x} + (\tfrac{1}{5}x - \tfrac{6}{25})e^{2x}$$

Ahora sólo resta elegir las constantes C_1, C_2 de acuerdo con las condiciones iniciales para tener la SP:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + (\tfrac{1}{5}x - \tfrac{6}{25})e^{2x}$$

$$y' = C_1e^x - 3C_2e^{-3x} + \tfrac{1}{5}xe^{2x} + 2(\tfrac{1}{5}x - \tfrac{6}{25})e^{2x}$$

$$y(0) = 1 \qquad \rightarrow \qquad C_1 + C_2 = \frac{31}{25}$$

$$y'(0) = -1 \qquad \rightarrow \qquad C_1 - 3C_2 = -\frac{14}{25}$$

Entonces $C_1 = \frac{79}{100}$, $C_2 = \frac{9}{20}$ y la SP del PVI es

$$y = \frac{79}{100}e^x + \frac{9}{20}e^{-3x} + (\tfrac{1}{5}x - \tfrac{6}{25})e^{2x}$$

Ejemplo 12.8: Resolver el siguiente PVI $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = xe^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Se trata de la misma EDO que en el ejemplo anterior pero esta vez $g(x)$ es de la forma $g(x) = p(x)e^{\alpha x}$ con $\alpha = 1$, que es raíz de la ecuación característica de multiplicidad 1.
La SGH es la misma que en el ejemplo anterior:

$$y_H(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x}$$

pero esta vez propondremos

$$y_P(x) = \underbrace{x}_{\substack{\text{1 raíz} \\ \text{simple} \\ \text{de la} \\ \text{ec. car.}}} \underbrace{(ax + b)}_{\substack{\text{polinomio} \\ \text{genérico} \\ \text{de grado 1}}} e^x$$

Para hallar los coeficientes indeterminados reemplazamos nuevamente en la ecuación

$$y_P = (ax^2 + bx)e^x \qquad \rightarrow \qquad -3y_P = (-3ax^2 - 3bx)e^x$$

$$y_P' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x \qquad \rightarrow \qquad + \quad 2y_P' = (4ax + 2b)e^x + (2ax^2 + 2bx)e^x$$

$y_P'' = 2ae^x + 2(2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x \quad \rightarrow \quad y_P'' = 2ae^x + (4ax+2b)e^x + (ax^2+bx)e^x$

$xe^x = 8axe^x + (2a+4b)e^x$

Observen que los coeficientes de x^2e^x(que no aparece en $g(x)$ y hemos tenido que agregar debido a la presencia de e^x en el conjunto fundamental) se cancelan en el cálculo de los coeficientes (esto siempre ocurrirá de este modo).

Verifiquen que la SG de la EDO es

$$y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + x(\tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{16})e^x$$

mientras que la SP del PVI es

$$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-3x} + x(\tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{16})e^x$$

Ejemplo 12.9: Proponer una SP para la siguiente ecuación con coeficientes constantes: $y^{(4)} + 2y'' + y = 2xcos(x) + e^x$

La ecuación característica es

$$k^4 + 2k^2 + 1 = (k^2+1)^2 = 0$$

por lo que las raíces son i y – i, cada una doble.
Como $\pm i = 0 \pm 1.i$, el sistema fundamental es

$$\{e^{0.x}\cos(1.x)\,, e^{0.x}\,\text{sen}(1.x)\,, xe^{0.x}\cos(1.x)\,, xe^{0.x}\,\text{sen}(1.x)\} =$$

$$= \{\cos(x)\,, sen(x), xcos(x), xsen(x)\}$$

por lo que la SGH es

$$y_H(x) = C_1\cos(x) + C_2sen(x) + C_3xcos(x) + C_4xsen(x)$$

Puesto que $g(x) = 2xcos(x) + e^x$ propondremos

$$y_P(x) = \underbrace{x^2}_{\substack{\text{por ser}\\ \pm i\\ \text{raíces dobles}}}\ \underbrace{(ax+b)}_{\substack{\text{polinomio}\\ \text{de grado 1}\\ \text{por el } 2x \text{ de}\\ g(x)}}\,[\underbrace{c\cos(x) + d\ sen(x)}_{\substack{\text{combinación}\\ \text{de senos y cosenos}\\ \text{por el} \cos(x) \text{ de la } g(x)}}] + \underbrace{h\,e^x}_{\substack{\text{porque}\\ \text{en } g(x)\\ \text{aparece}\\ 1.e^x}}$$

El cálculo de los coeficientes demanda un esfuerzo de cálculo considerable.

Actividad para resolver y discutir en el Foro

Actividad 12.2: Propongan soluciones particulares para las siguientes ecuaciones no homogéneas:
$a)\ y'' + 2y' - 3y = e^{-3x} + e^{x};$
$b)\ y''' + 3y'' + 3y' + y = x^2e^{2x}$
$c)\ y''' + 3y'' + 3y' + y = xe^{x}$
$d)\ y'' + y = 2\cos(x);$
$d)\ 2y''' - 14y'' + 38y' - 26y = e^{2x};$
$e)\ 2y''' - 14y'' + 38y' - 26y = e^{2x}\cos(3x)$
$e)\ y^{(4)} - 2y''' + 11y'' - 10y' + 25y = xe^{x}\cos(2x)$
(En el ejercicio 12.6tienen las raíces de las correspondientes ecuaciones características).

A continuación desarrollaremos un método más general para calcular soluciones particulares, que es aplicable con cualquier función $g(x)$ que aparezca en el segundo miembro de una EDO lineal no homogénea con coeficientes constantes.

Método de variación de parámetros

Sabemos que para resolver una ecuación diferencial a coeficientes constantes no homogénea

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(x)$$

debemos construir la solución general de la ecuación homogénea mediante una combinación de funciones exponenciales (cuyos parámetros obtenemos a partir de la ecuación característica) y luego buscar una solución particular de la ecuación no homogénea. Esto último lo sabemos hacer si $g(x)$ es una combinación de polinomios y exponenciales: basta proponer una solución particular "similar a $g(x)$", teniendo ciertas precauciones si las funciones exponenciales ya están presentes en la solución de la ecuación homogénea.
Pero, ¿qué ocurre si $g(x)$ no es una combinación de polinomios y funciones exponenciales?
Introduciremos aquí un método que será útil para encontrar una solución particular, cualquiera sea la forma de $g(x)$.
Mostraremos su desarrollo para una ecuación de segundo orden, pero fácilmente se extiende a un orden n cualquiera.

Supongamos que tenemos la ecuación diferencial ordinaria, con coeficientes constantes y de segundo orden,

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$$

y supongamos que $\{f_1(x), f_2(x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$, vale decir $f_1(x)$y $f_2(x)$son 2soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.
La SGH será

$$y_H(x) = C_1f_1(x) + C_2f_2(x)$$

Es razonable pensar que la solución particular $y_P(x)$ “no es muy distinta de $y_H(x)$", aunque no podrá tener exactamente la misma forma, porque reemplazar $C_1f_1(x) + +C_2f_2(x)$ en la ecuación nos daría 0.
Se propone, entonces, una solución particular de la forma

$$y_P(x) = C_1(x)f_1(x) + C_2(x)f_2(x)$$

donde las constantes las hemos reemplazado por cantidades “variables” $C_i(x)$ – es decir, funciones - que elegiremos convenientemente, de modo que $y_P(x)$resulte solución de la ecuación no homogénea.
Veamos cómo podemos hacer esto…

$$y_P(x) = C_1(x)f_1(x) + C_2(x)f_2(x)$$

Derivemos la expresión:

$$y_P'(x) = C_1'(x)f_1(x) + C_2'(x)f_2(x) + C_1(x)f_1'(x) + C_2(x)f_2'(x)$$

Como vamos a *elegir* las funciones $C_i(x)$, impongamos una condición (más adelante veremos que es viable) que simplifique los cálculos:

$$C_1'(x)f_1(x) + C_2'(x)f_2(x) = 0 \qquad (1)$$

por lo que resulta

$$y_P'(x) = C_1(x)f_1'(x) + C_2(x)f_2'(x)(1*)$$

Derivemos nuevamente:

$$y_P''(x) = C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x) + C_1(x)f_1''(x) + C_2(x)f_2''(x)$$

Ya llegamos al mayor orden de derivación que aparece en la ecuación.
Impongamos en este caso la siguiente condición

$$C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x) = \frac{1}{a_2}g(x) \qquad (2)$$

por lo que resultará

$$y_P''(x) = \frac{1}{a_2}g(x) + C_1(x)f_1''(x) + C_2(x)f_2''(x)(2*)$$

Observemos que $y_P(x)$ resulta así solución de la ecuación no homogénea.
En efecto: remplazando (1*) y (2*) en la ecuación obtenemos:

$$a_2y_P'' + a_1y_P' + a_0y_P =$$

$$= a_2[\frac{1}{a_2}g(x) + C_1(x)f_1''(x) + C_2(x)f_2''(x)] +$$

$$+a_1[C_1(x)f_1'(x)+C_2(x)f_2'(x)]+$$

$$+a_0[C_1(x)f_1\ \ (x)+C_2(x)f_2\ \ (x)]=$$

$$=g(x)+C_1(x)\underbrace{[a_2f_1''(x)+a_1f_1'(x)+a_0f_1\ \ (x)]}_{\substack{=0\ \text{ pues } f_1(x) \text{ es solución}\\ \text{de la ec. homogénea}}}+$$

$$+C_2(x)\underbrace{[a_2f_2''(x)+a_1f_2'(x)+a_0f_2\ \ (x)]}_{\substack{=0\ \text{ pues } \mathrm{f}_2(x) \text{ es solución}\\ \text{de la ec. homogénea}}}=g(x)$$

Esto significa que proponiendo

$$y_P(x)=C_1(x)f_1(x)+C_2(x)f_2(x)$$

donde las funciones-incógnitas$C_1(x),C_2(x)$ cumplen las condiciones adicionales

$$\begin{cases} C_1'(x)f_1(x)+C_2'(x)f_2(x)=0 & (1)\\ C_1'(x)f_1'(x)+C_2'(x)f_2'(x)=\frac{1}{a_2}g(x) & (2)\end{cases}$$

se obtiene una solución particular de la ecuación no homogénea.
Observemos que el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2), donde las incógnitas son $C_1(x),C_2(x)$(en realidad, sus derivadas) se puede escribir en forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x)\\ C_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ \frac{1}{a_2}g(x)\end{pmatrix}$$

y podemos asegurar que tiene solución pues el determinante de este sistema de ecuaciones es el *wronskiano* del sistema fundamental $\{f_1(x),f_2(x)\}$, que sabemos que es no nulo por ser $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones linealmente independientes.

Ejemplo 12.10: Resolvamos el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y''+y=\sec(x)\\ y(0)=1\\ y'(0)=-1\end{cases}$$

Observemos que $g(x)$ no es de la forma “polinomio x exponencial”.
Resolvamos en primer lugar la ecuación homogénea

$y''+y=0.$

La ecuación característica es

$$k^2 + 1 = 0$$

Las raíces son $\pm i$ por lo que el sistema fundamental de soluciones es

$\{\cos(x), sen(x)\}$.

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_H(x) = C_1\cos(x) + C_2 sen(x)$$

Proponemos

$$y_P(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)sen(x)$$

y para obtener las funciones $C_1(x), C_2(x)$ planteamos

$$C_1'(x)f_1(x) + C_2'(x)f_2(x) = 0$$

$$C_1'(x)f_1'(x) + C_2'(x)f_2'(x) = \frac{1}{a_2}g(x)$$

Resultan

$$C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)sen(x) = 0$$

$$-C_1'(x)sen(x) + C_2'(x)\cos(x) = \sec(x)$$

O bien, matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sec(x) \end{pmatrix}$$

Resolviendo por Regla de Cramer se obtienen

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(x) \\ \sec(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{-\tan(x)}{1} = -\tan(x)$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\mathrm{sen}(x) & \sec(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

Integrando cada una de las ecuaciones se obtienen $C_1(x), C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int \tan(x)\,dx = \ln[\cos(x)] + K_1$$

$$C_2(x) = \int dx = x + K_2$$

Como necesitamos una primitiva para cada $C_i(x)$ elegimos constantes de integración nulas (las más sencillas) y resulta

$$y(x) = \underbrace{C_1\cos(x) + C_2 sen(x)}_{y_H(x)} + \underbrace{\ln[\cos(x)]\cos(x) + x sen(x)}_{y_P(x)}$$

Ahora sólo restaría aplicar las condiciones iniciales $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ para obtener las constantes C_1, C_2.

Comprueben que resultan $C_1 = 1, C_2 = -2$.