Ejercicios 1

Teorema de Green para el calculo de áreas

a)

Ejercicio nº 1

Enuncie y demuestre una de las fórmulas del Corolario del Teorema de Green para el cálculo de áreas.

Calcule a integral de línea $\int_C (4xy + x^2y)dx + (x^2y + 2y^2)dy$, donde C está es la curva cerrada con orientación antihoraria formada por $y = x^2; y = 2x$ puede resolverse mediante el teorema de Green

b)

Ejercicio nº 1

Enuncie y demuestre una de las fórmulas del Corolario del Teorema de Green para el cálculo de áreas.

Calcule la integral de línea $\int_C (4xy + x^2y)dx + (x^2y + 2y^2)dy$, donde C está es la curva cerrada con orientación horaria formada por $y = \sqrt{x}; y = \frac{x}{3}$ mediante el teorema de Green

Teorema de Green en regiones con agujeros

a)

Ejercicio nº 1

Cómo se aplica el teorema de green en regiones con agujeros. Justifique la fórmula obtenida.

Calcule la integral de línea $\int_C (4xy + x^2y)dx + (x^2y + 2y^2)dy$, donde C está es la curva cerrada con orientación horaria formada por $y = x^2; y = x + 2$ mediante el teorema de Green

Teorema de evaluación de integrales dobles en coordenadas polares

a)

Ejercicio nº 1

Enuncie el teorema de evaluación de integrales dobles en coordenadas polares, mostrando cómo se calcula el área del elemento de partición y calcule el área interior a la curva $r = 6\cos 2\theta$ y exterior a la curva $r = 3$ en el semiplano con $x \geq 0$

b)

Ejercicio nº 1

Enuncie el teorema de evaluación de integrales dobles en coordenadas polares, mostrando cómo se calcula el área del elemento de partición y calcule el calcule volumen del sólido y limitado por el cilindro $r = 2cos\theta$ que se encuentra debajo de la gráfica de $z = 3r$ y por encima del plano xy

c)

Ejercicio nº 1

Enuncie el teorema de evaluación de integrales dobles en coordenadas polares, mostrando cómo se calcula el área del elemento de partición y calcule el área interior a la curva $r = 8\cos 2\theta$ y exterior a la curva $r = 4\sqrt{3}$ en el semiplano con $x \geq 0$

d)

Ejercicio nº 1

Enuncie el teorema de evaluación de integrales dobles en coordenadas polares, mostrando cómo se calcula el área del elemento de partición y calcule el área interior a la curva $r = 2sin2\theta$ y exterior a la curva $r = 1$ en el primer cuadrante

e)

Ejercicio nº 1

Enuncie el teorema de evaluación de integrales dobles en coordenadas polares, mostrando cómo se calcula el área del elemento de partición y calcule el área interior a la curva $r = 2sin2\theta$ y exterior a la curva $r = \sqrt{3}$ en el primer cuadrante

Ejercicios 2

Integral de línea de campo vectorial

a)

Ejercicio nº 2:

La integral de línea de un campo escalar respecto del arco depende del sentido de recorrido de la curva? Y la de un campo vectorial? Justifique sus respuestas.

Calcule la integral de linea del campo vectorial: $F^{\to}(x, y, z) = 2x.\vec{\imath} + 3x.\vec{\jmath} + 4z.\vec{k}$ a lo largo de la curva C dada por: $r^{\to}(t) = 2cos(t).\vec{\imath} + 3t.\vec{\jmath} + 2sin(t).\vec{k}$; $con\ \pi \leq t \leq \pi$

b)

Ejercicio nº 2:

La integral de línea de un campo escalar respecto del arco depende del sentido de recorrido de la curva? Y la de un campo vectorial? Justifique sus respuestas.

Calcule la integral de linea del campo vectorial: $F^{\to}(x, y, z) = 4x.\vec{\imath} + 3y.\vec{\jmath} + 2x.\vec{k}$ a lo largo de la curva C dada por: $r^{\to}(t) = 2cos(t).\vec{\imath} + 2sin(t).\vec{\jmath} + 3t.\vec{k}$; $con\ \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

c)

Ejercicio nº 2:

La integral de línea de un campo escalar respecto del arco depende del sentido de recorrido de la curva? Y la de un campo vectorial? Justifique sus respuestas.

Calcule la integral de linea del campo vectorial: $F^{\to}(x, y, z) = 2y.\vec{\imath} + 3y.\vec{\jmath} + 4z.\vec{k}$ a lo largo de la curva C dada por: $\vec{r}(t) = 3t.\vec{\imath} + 2cos(t).\vec{\jmath} + 2sin(t).\vec{k}$; $con\ \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$

d)

Ejercicio nº 2:
Qué ocurre si se invierte el sentido de recorrido de la curva en una integral de línea de un campo escalar respecto del arco? Y respecto de x ó de y? Y la de un campo vectorial? Justifique sus respuestas.
Calcule la integral de linea del campo vectorial: $\vec{F}(x,y,z) = 4x.\vec{i} + 3y.\vec{j} + 2y.\vec{k}$ a lo largo de la curva C dada por: $\vec{r}(t) = 2cos(t).\vec{i} + 2sin(t).\vec{j} + 3t.\vec{k}$; $con\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

e)

Ejercicio nº 2:
Qué ocurre si se invierte el sentido de recorrido de la curva en una integral de línea de un campo escalar respecto del arco? Y respecto de x ó de y? Y en el caso de un campo vectorial? Justifique sus respuestas.
Calcule la integral de linea del campo vectorial: $\vec{F}(x,y,z) = 2z.\vec{i} + 3y.\vec{j} + 4z.\vec{k}$ a lo largo de la curva C dada por: $\vec{r}(t) = 3t.\vec{i} + 2cos(t).\vec{j} + 2sin(t).\vec{k}$; $con\ \pi \leq t \leq 2\pi$

f)

Ejercicio nº 2:
Qué ocurre si se invierte el sentido de recorrido de la curva en una integral de línea de un campo escalar respecto del arco? Y respecto de x ó de y? Y la de un campo vectorial? Justifique sus respuestas.
Calcule la integral de linea del campo vectorial: $\vec{F}(x,y,z) = 4x.\vec{i} + 3y.\vec{j} + 2y.\vec{k}$ a lo largo de la curva C dada por: $\vec{r}(t) = 2cos(t).\vec{i} + 2sin(t).\vec{j} + 3t.\vec{k}$; $con\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

g)

Ejercicio nº 2:
Qué ocurre si se invierte el sentido de recorrido de la curva en una integral de línea de un campo escalar respecto del arco? Y respecto de x ó de y? Y en el caso de un campo vectorial? Justifique sus respuestas.
Parametrice la circunferencia de radio 2 centrada en el origen de coordenadas y calcule la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = 2x.\vec{i} + 3z.\vec{j} + 4z.\vec{k}$ entre los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$ recorriéndola en sentido antihorario.

Ejercicios 3

Independencia de trayectoria y gradiente y calcular el trabajo realizado de C a C1

a)

Ejercicio nº 3:
Defina independencia de trayectoria y campos gradientes. Hay alguna relación entre ambos? Si es necesario, enuncie el/los teoremas relacionados.
Dado el campo de fuerzas $F(x,y,z) = (y^2 cosx)\boldsymbol{i} + (2y\sin x + e^{2z})\boldsymbol{j} + (2ye^{2z})\boldsymbol{k}$, determine si es conservativo. En caso afirmativo, encuentre la función potencial.
Calcular el trabajo realizado al mover punto a lo largo de la trayectoria C formada por los segmentos $C1$: desde $(0,1,1/2)$ hasta $(\pi,1,1)$, y $C2$: desde $(\pi,1,1)$ hasta $(\pi/2,3,2)$

b)

Ejercicio nº 3:

Defina independencia de trayectoria y campos gradientes. Hay alguna relación entre ambos? Si es necesario, enuncie el/los teoremas relacionados.

Dado el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2z\boldsymbol{i} + (2y+3)\boldsymbol{j} + 2(x+1)\boldsymbol{k}$, determine si es conservativo. En caso afirmativo, encuentre la función potencial.

Calcular el trabajo realizado al mover punto a lo largo de la trayectoria C formada por los segmentos $C1$: desde (1,0,0) hasta (1,1,0), y $C2$: desde (1,1,0) hasta (1,2,1)

c)

Ejercicio nº 3:

Defina independencia de trayectoria y campos gradientes. Hay alguna relación entre ambos? Si es necesario, enuncie el/los teoremas relacionados.

Dado el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2x\boldsymbol{i} + (z+3)\boldsymbol{j} + (y+2)\boldsymbol{k}$, determine si es conservativo. En caso afirmativo, encuentre la función potencial.

Calcular el trabajo realizado al mover punto a lo largo de la trayectoria C formada por los segmentos $C1$: desde (1,0,0) hasta (1,1,0), y $C2$: desde (1,1,0) hasta (1,2,1)

d)

Ejercicio nº 3:

Defina independencia de trayectoria y campos gradientes. Hay alguna relación entre ambos? Si es necesario, enuncie el/los teoremas relacionados.

Dado el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz+3)\boldsymbol{i} + (xz+4)\boldsymbol{j} + (xy+1)\boldsymbol{k}$, determine si es conservativo. En caso afirmativo, encuentre la función potencial.

Calcular el trabajo realizado al mover punto a lo largo de la trayectoria C formada por los segmentos $C1$: desde (0,0,0) hasta (1,1,0), y $C2$: desde (1,1,0) hasta (1,1,1)

Campo vectorial en una región coneza y calcular trabajo de C a C1

a)

Ejercicio nº 3:

Justifique que dado un campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ en una región conexa D

$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr}$ es independiente de la trayectoria en $D \Leftrightarrow \oint_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = 0$ para toda curva cerrada $\boldsymbol{C}$ en D

Dado el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz+3)\boldsymbol{i} + (xz+4)\boldsymbol{j} + (xy+1)\boldsymbol{k}$, determine si es conservativo. En caso afirmativo, encuentre la función potencial.

Calcular el trabajo realizado al mover punto a lo largo de la trayectoria C formada por los segmentos $C1$: desde (0,0,0) hasta (1,1,0), y $C2$: desde (1,1,0) hasta (1,1,1)

b)

Ejercicio nº 3:

Justifique que dado un campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ en una región conexa D

$\int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr}$ es independiente de la trayectoria en $D \Leftrightarrow \oint_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = 0$ para toda curva cerrada $\boldsymbol{C}$ en D

Dado el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2z\boldsymbol{i} + (2y+3)\boldsymbol{j} + 2(x+1)\boldsymbol{k}$, determine si es conservativo. En caso afirmativo, encuentre la función potencial.

Calcular el trabajo realizado al mover punto a lo largo de la trayectoria C formada por los segmentos $C1$: desde (1,0,0) hasta (1,1,0), y $C2$: desde (1,1,0) hasta (1,2,1) c)

Ejercicio nº 3:
Demuestre la relación que hay entre independencia de trayectoria e integral nula para toda curva cerrada, de un campo vectorial en una región conexa.
Dado el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz+3)\boldsymbol{i} + (xz+4)\boldsymbol{j} + (xy+1)\boldsymbol{k}$, determine si es conservativo. En caso afirmativo, encuentre la función potencial.
Calcular el trabajo realizado al mover punto a lo largo de la trayectoria C formada por los segmentos $C1$: desde (0,0,0) hasta (1,1,0), y $C2$: desde (1,1,0) hasta (1,1,1)

Campo vectorial en r3 y establecer relación entre valor rotacional y la condición de ser conservativo el campo.

a)

Ejercicio nº 3:
Dado un Campo Vectorial en R^3, establezca qué relación hay entre el valor del rotacional y la condición de ser conservativo el campo. Diga cuál implica a cual y bajo que condiciones de la región.
Dado el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2z\boldsymbol{i} + (2y+5)\boldsymbol{j} + 2(x+2)\boldsymbol{k}$, determine si es conservativo. En caso afirmativo, encuentre la función potencial.
Calcular el trabajo realizado al mover punto a lo largo de la trayectoria C formada por los segmentos $C1$: desde (1,0,0) hasta (1,1,0), y $C2$: desde (1,1,0) hasta (1,2,1)

b)

Ejercicio nº 3:
Dado un Campo Vectorial en R^3, establezca qué relación hay entre el valor del rotacional y la condición de ser conservativo el campo. Diga cuál implica a cual y bajo que condiciones de la región.
Dado el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz+11)\boldsymbol{i} + (xz-7)\boldsymbol{j} + (xy+1)\boldsymbol{k}$, determine si es conservativo. En caso afirmativo, encuentre la función potencial.
Calcular el trabajo realizado al mover punto a lo largo de la trayectoria C formada por los segmentos $C1$: desde (0,0,0) hasta (1,1,0), y $C2$: desde (1,1,0) hasta (1,1,1)

c)

Ejercicio nº 3:
Dado un Campo Vectorial en R^3, establezca qué relación hay entre el valor del rotacional y la condición de ser conservativo el campo. Diga cuál implica a cual y bajo que condiciones de la región.
Dado el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz+11)\boldsymbol{i} + (xz-7)\boldsymbol{j} + (xy+1)\boldsymbol{k}$, determine si es conservativo. En caso afirmativo, encuentre la función potencial.
Calcular el trabajo realizado al mover punto a lo largo de la trayectoria C formada por los segmentos $C1$: desde (0,0,0) hasta (1,1,0), y $C2$: desde (1,1,0) hasta (1,1,1)

Ejercicios 4

Integral lineal de campo a través de Teorema de Stokes

a)

Ejercicio nº 4:
Interpretación del rotacional en un punto mediante el teorema de Stokes.
Sea C la curva en el espacio definida por la intersección de $x^2+y^2=4$ con $x+z=4$, con sentido de circulación que proyecte un sentido antihorario en el plano xy.
Calcule la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = -y^2.\vec{i} + 2(1+x).\vec{j} - z^3.\vec{k}$ a lo largo de C aplicando el Teorema de Stokes

b)

Ejercicio nº 4:
Interpretación del rotacional en un punto mediante el teorema de Stokes.
Sea C la curva en el espacio definida por la intersección de $x^2 + y^2 = 16$ con $x + z = 8$, con sentido de circulación que proyecte un sentido antihorario en el plano xy.
Calcule la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (4 - y^2).\vec{i} + 2x.\vec{j} - z^3.\vec{k}$ a lo largo de C aplicando el Teorema de Stokes

c)

Ejercicio nº 4:
Interpretación del rotacional en un punto mediante el teorema de Stokes.
Sea C la curva en el espacio definida por la intersección de $x^2 + y^2 = 9$ con $x + z = 6$, con sentido de circulación que proyecte un sentido antihorario en el plano xy.
Calcule la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = -y^2.\vec{i} + 2x.\vec{j} - z^3.\vec{k}$ a lo largo de C aplicando el Teorema de Stokes

d)

Ejercicio nº 4:
Interpretación del rotacional en un punto mediante el teorema de Stokes.
Sea C la curva en el espacio definida por la intersección de $x^2 + y^2 = 1$ con $x + z = 3$, con sentido de circulación que proyecte un sentido antihorario en el plano xy.
Calcule la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = -y^2.\vec{i} + 2x.\vec{j} - (3 - z).\vec{k}$ a lo largo de C aplicando el Teorema de Stokes

Integral de superficie de campo vectorial y calcular flujo a través de superficie dada

a)

Ejercicio nº 4:
Defina la integral de superficie de un Campo Vectorial y muestre cómo queda el teorema de evaluación cuando la superficie está dada por $z = f(x,y)$
Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = 3y.\vec{i} - 3x.\vec{j} - z.\vec{k}$, calcule el flujo a través de la superficie dada por $2x + 3y + z = 6$ en el primer octante con $\vec{n}$ hacia arriba

b)

Ejercicio nº 4:
Defina la integral de superficie de un Campo Vectorial y muestre cómo queda el teorema de evaluación cuando la superficie está dada por $z = f(x,y)$
Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = z.\vec{k}$, calcule el flujo a través de la superficie dada por: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $0 \leq z$ con $\vec{n}$ hacia arriba

c)

Ejercicio nº 4:
Defina la integral de superficie de un Campo Vectorial y muestre cómo queda el teorema de evaluación cuando la superficie está dada por $\mathbf{r}(u,v)$
Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = y.\vec{i} - x.\vec{j} + z.\vec{k}$, calcule el flujo a través de la superficie dada por: $z^2 = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq 3$ con $\vec{n}$ hacia arriba

d)

Ejercicio nº 4:

Defina la integral de superficie de un Campo Vectorial

Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = 3y.\vec{\imath} - 3x.\vec{\jmath} - z.\vec{k}$, calcule el flujo a través de la superficie dada por: $z^2 = x^2 + y^2$ con $0 \le z \le 4$ con $\vec{n}$ hacia arriba

e)

Ejercicio nº 4:

Defina la integral de superficie de un Campo Vectorial

Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = z.\vec{k}$, calcule el flujo a través de la superficie dada por: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $0 \le z, y$ con $\vec{n}$ hacia arriba

Ejercicios 5

Interpretar la divergencia en un punto mediante el teorema de Gauss. Calcular flujo de campo vectorial a través de S mediante el Teorema de Gauss

a)

Ejercicio nº 5:

Interpretación de la divergencia en un punto mediante el teorema de Gauss.

Sea Q la región limitada por los tres planos coordenados, y el plano $2x + 2y + z = 6$ (en el primer octante).
Sea S la superficie que limita a la región Q. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z^2.\vec{k}$ a través de S mediante el teorema de Gauss

b)

Ejercicio nº 5:

Interpretación de la divergencia en un punto mediante el teorema de Gauss.

Sea Q la región limitada por las superficie $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x.\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z^2.\vec{k}$ a través de S mediante el teorema de Gauss.

c)

Ejercicio nº 5:

Interpretación de la divergencia en un punto mediante el teorema de Gauss.

Sea Q la región limitada por los tres planos coordenados, y el plano $2x + 2y + z = 6$ (en el primer octante).
Sea S la superficie que limita a la región Q. Calcule el flujo del campo vectorial
$\vec{F}(x,y,z) = \frac{3}{2}x^2.\vec{\imath} + xy.\vec{\jmath} + y.\vec{k}$ a través de S mediante el teorema de Gauss

d)

Ejercicio nº 5:

Interpretación de la divergencia en un punto mediante el teorema de Gauss.

Sea Q la región limitada por los tres planos coordenados, y el plano $2x + 2y + z = 6$ (en el primer octante).
Sea S la superficie que limita a la región Q. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x.\vec{\imath} + y^2.\vec{\jmath} + z.\vec{k}$ a través de S mediante el teorema de Gauss

e)

Ejercicio nº 5:

Interpretación de la divergencia en un punto mediante el teorema de Gauss.

Sea Q la región limitada por los tres planos coordenados, y el plano $2x + 2y + z = 6$ (en el primer octante). Sea S la superficie que limita a la región Q. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z^2.\vec{k}$ a través de S mediante el teorema de Gauss

f)

Ejercicio nº 5:

Interpretación de la divergencia en un punto mediante el teorema de Gauss.

Sea Q la región limitada por $z = x^2 + y^2$; y por $z = 4$. Sea S la superficie que limita a la región Q. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = y.\vec{i} + x.\vec{j} + z^2.\vec{k}$ a través de S mediante el teorema de Gauss

¿Qué ocurre con el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada cuando la dovergencia es toda la región? Calcular flujo de campo vectorial a través de S mediante el Teorema de Gauss

a)

Ejercicio nº 5:

Qué ocurre con el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada cuando la divergencia es nula en toda la región? Es necesario que la región sea simplemente conexa para poder dar una respuesta? Justifique ambas respuestas.

Sea Q la región limitada por los tres planos coordenados, y el plano $2x + 2y + z = 6$ (en el primer octante). Sea S la superficie que limita a la región Q. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z^2.\vec{k}$ a través de S mediante el teorema de Gauss

b)

Ejercicio nº 5:

Qué ocurre con el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada cuando la divergencia es nula en toda la región? Es necesario que la región sea simplemente conexa para poder dar una respuesta? Justifique ambas respuestas.

Sea Q la región limitada por los tres planos coordenados, y el plano $2x + 2y + z = 8$ (en el primer octante). Sea S la superficie que limita a la región Q. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x.\vec{i} + y^2.\vec{j} + z.\vec{k}$ a través de S mediante el teorema de Gauss.