# *TP N°4 – Derivadas parciales*

***Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017).***

***Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018).***

## 1. *Temario*

- Derivación parcial de funciones de dos y tres variables. Definición.
- Interpretación geométrica de la derivada parcial de funciones de dos variables.
- Derivadas parciales de orden superior.
- Teorema de Claireaut (ó Lema de Schwartz).
- Ecuaciones diferenciales parciales.

## 2. *Resumen teórico*

### *Derivadas parciales*

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables independientes. Las primeras derivadas parciales de $f(x, y)$ con respecto a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son las funciones $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ definidas por los siguientes límites:

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$
$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Regla para determinar las derivadas parciales:

Una función de n variables independientes tiene n derivadas parciales primeras. Para determinarlas se adopta una variable para derivar, en tanto que las (n – 1) variables restantes se comportan como constantes.

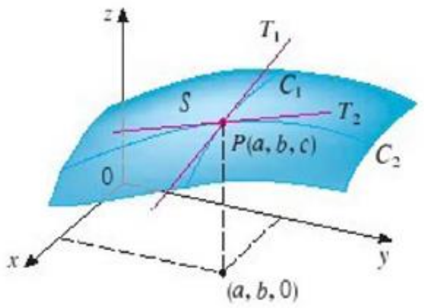
Para el caso de una función del tipo $z = f(x, y)$ :

1. Para determinar $f_x(x, y)$ se deriva $f(x, y)$ con respecto a *x,* conservando a *y* constante.
2. Para determinar $f_y(x, y)$ se deriva $f(x, y)$ con respecto a *y,* conservando a *x* constante.

### *Notaciones*

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

## Interpretación geométrica de la derivada parcial




Sea $S$ la superficie que representa gráficamente a z = $f(x,y)$. Sea $(a,b)$ un punto en el dominio de $f(x,y)$ y sea $c = f(a,b)$. El punto $P(a,b,c)$ está ubicado sobre $S$. Sea $C_1$ la curva intersección de $S$ con el plano vertical $y = b$ y sea $C_2$ la curva intersección de $S$ con el plano vertical $x = a$.

La derivada parcial $f_x(a,b)$ se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente $T_1$ a la curva $C_1$ en el punto $P(a,b,c)$.

Análogamente la derivada parcial $f_y(a,b)$ se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente $T_2$ a la curva $C_2$ en el punto $P(a,b,c)$.

## Derivadas de orden superior

Derivadas segundas:

$$(f_x)_x = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Análogamente para las derivadas terceras, etc.

## Teorema de Clairaut (o Lema de Schwartz)

Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables independientes *x e y.* Si $f(x,y)$, $f_x(x,y)$ ,$f_y(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$ y $f_{yx}(x,y)$ son funciones continuas en una región abierta *R*, entonces las derivadas parciales segundas cruzadas son iguales:

$$\boldsymbol{f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)} \textbf{ en } \boldsymbol{R}.$$

## Funciones de 3 variables

Sea $w = f(x,y,z)$ una función de tres variables independientes. Las primeras derivadas parciales de $f(x,y,z)$ con respecto a ***x***, a ***y***, y a ***z*** son las funciones $f_x(x,y,z)$ , $f_y(x,y,z)$ y $f_z(x,y,z)$definidas por los siguientes límites:

$$f_x(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$f_y(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$f_z(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}$$

## *Ecuaciones diferenciales parciales*

Son ecuaciones diferenciales en las que aparecen derivadas parciales. Involucran entonces funciones de varias variables. Por ejemplo la Ecuación de Laplace, para funciones de dos variables independientes:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

En el caso de funciones de tres variables independientes, esta ecuación toma la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = 0$$

Las funciones que cumplen con la Ecuación de Laplace se denominan **Funciones Armónicas**.

# 3. *Ejercicios resueltos*

1) **Obtener las derivadas parciales primeras para la siguiente función de dos variables, aplicando los límites que las definen:**

$$f(x,y) = x^2 + xy - y^2$$

a) Para obtener $f_x(x,y)$ se aplica el siguiente límite, incrementando ***x*** en el valor ***h***, manteniendo ***y*** constante:

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2 + (x+h)y - y^2] - (x^2 + xy - y^2)}{h}$$

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{[x^2 + 2xh + h^2 + xy + yh - y^2] - (x^2 + xy - y^2)}{h}$$

Simplificando en el numerador los términos repetidos que aparecen con signo cambiado, se obtiene:

$$\boldsymbol{f_x(x,y)} = \lim_{h\to 0} \frac{[2xh + h^2 + yh]}{h} = \mathbf{2\,x + y}$$

b) Para obtener $f_y(x,y)$ se aplica el siguiente límite, incrementando ***y*** en el valor ***h***, manteniendo ***x*** constante:

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{[x^2 + x(y+h) - (y+h)^2] - (x^2 + xy - y^2)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{[x^2 + xy + xh - y^2 - 2yh - h^2] - (x^2 + xy - y^2)}{h}$$

Simplificando en el numerador los términos repetidos que aparecen con signo cambiado, se obtiene:

$$\boldsymbol{f_y(x,y)} = \lim_{h\to 0} \frac{[xh - 2yh - h^2]}{h} = \mathbf{x - 2\,y}$$

2) **Sea $f(x,y) = 3x^2 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$**

Considerando a $y$ como constante, y derivando respecto de $x$, se obtiene:

$f_x(x,y) = 6x + 2\mathrm{x}\mathrm{y}^3$, luego $f_x(2,1) = 6.2 + 2.2.1^3 = 12 + 4 = 16$

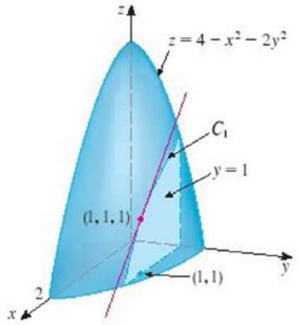
Considerando a $x$ como constante, y derivando respecto de $y$, se obtiene:

$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4\mathrm{y}$, luego $f_y(2,1) = 3.2^2 1^2 - 4.1 = 1244 = 8$

3) **Sea $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1,1)$ y $f_y(1,1)$ e interprete geométricamente esos valores como pendientes.**

Se tiene:

$$f_x(x,y) = -2x$$
$$f_y(x,y) = -4y$$
$$f_x(1,1) = -2$$
$$f_y(1,1) - 4$$

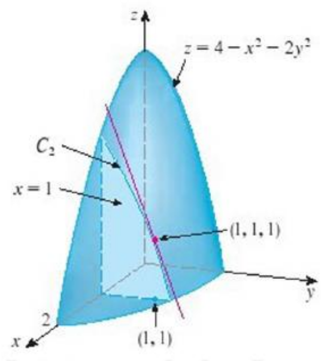



La representación gráfica de la función es el paraboloide de ecuación $z = 4 - x^2 - 2y^2$. El plano vertical $y = 1$ lo intersecta en la parábola $z = 2 - x^2,\ y = 1$, dando lugar a la curva $C_1$ en el gráfico.

$f_x(1,1) = -2$ es la pendiente de la recta tangente a esa parábola en el punto $[1,1,f(1,1)] = (1,1,1)$

Del mismo modo el plano vertical $x = 1$ intersecta al paraboloide en la parábola z = 3 – 2 $y^2$, $\mathrm{x} = 1$, dando lugar a la curva $C_2$ en el gráfico.

$f_y(1,1) = -4$ es la pendiente de la recta tangente a esa parábola en el punto $[1,1,f(1,1)] = (1,1,1)$




4) **Sea $f(x,y) = \sin\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{y}}$. Determine las derivadas parciales $\frac{\partial fx,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.**

Aplicando la Regla de la Cadena para funciones de una variable:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos\left(\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{y}}\right).\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{y}}\right) = \cos\left(\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{y}}\right).\left(\frac{1}{1+\mathrm{y}}\right)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \cos\left(\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{y}}\right).\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{y}}\right) = \cos\left(\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{y}}\right).\left[\frac{-1}{(1+\mathrm{y})^2}\right]$$

5) **Sea $f(x, y, z) = \mathrm{y\, e^{xy} \ln z}$ . Determine $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$.**

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \mathrm{y^2 e^{xy} \ln z}$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \mathrm{e^{xy} \ln z} + xy\mathrm{e^{xy} \ln z}$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\mathrm{y\, e^{xy}}}{\mathrm{z}}$$

6) **Sea $f(x, y) = \mathrm{x^3 + x^2y^3 - 2y^2}$. Determine las derivadas parciales segundas.**

Primero se calculan las derivadas primeras:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{3x^2 + 2xy^3}$$
$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{3x^2y^2 - 4y}$$

A continuación calculamos las derivadas segundas:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2\mathrm{y}^3$$
$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 6x\mathrm{y}^2$$
$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 6x\mathrm{y}^2$$
$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{6x^2y - 4}$$

Se verifica que las derivadas parciales segundas cruzadas son iguales $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. Esto no es coincidencia ya al ser $f(x, y)$, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y), f_{xy}(x, y)$y $f_{yx}(x, y)$ funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ se aplica el **Teorema de Claireaut** (o **Lema de Schwartz**) por el cual las derivadas segundas cruzadas son iguales en $\mathbb{R}^2$.

7) **Sea $f(x, y, z) = \sin(3\mathrm{x} + \mathrm{yz})$. Determine $f_{xxyz}(x, y, z)$**

$$f_x(x, y, z) = 3\cos(3\mathrm{x} + \mathrm{yz})$$
$$f_{xx}(x, y, z) = -9\sin(3\mathrm{x} + \mathrm{yz})$$
$$f_{xxy}(x, y, z) = -9z\cos(3\mathrm{x} + \mathrm{yz})$$
$$f_{xxyz}(x, y, z) = -9\cos(3\mathrm{x} + \mathrm{yz}) + 9yz\sin(3\mathrm{x} + \mathrm{yz})$$

8) **Verifique que $f(x, y) = e^x \sin y$ es una solución de la Ecuación de Laplace:**

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

Calculamos las derivadas parciales segundas:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = e^x \sin y$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -\, e^x \sin y$$

Entonces, reemplazando en la Ecuación de Laplace se tiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

9) **Verifique que $\boldsymbol{u(x,t) = \sin(x - at)}$, con $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación de onda:**

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Se obtienen las derivadas parciales segundas y se reemplaza en la ecuación de onda:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \cos(x - at)$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -a\cos(x - at)$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\sin(x - at)$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -a^2 \sin(x - at) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Se verifica que la función $u(x,t)$satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales.

# 4. *Ejercicios de aplicación*

**1. Inversión.**

El valor V de una inversión inicial de mil pesos ($ 1.000) a una tasa de interés del 10% compuesta anualmente es:

$$V(I,R) = 1.000\left[\frac{1 + 0{,}10(1 - R)}{1 + I}\right]^{10}$$

donde $I$ es la tasa anual de inflación y $R$ la tasa de impuestos del inversor. Calcular $V_I(0{,}03;\ 0{,}28)$ y $V_R(0{,}03;\ 0{,}28)$. Determinar cuál de las dos tasas, la de inflación o la de impuestos, tiene una influencia más "negativa" sobre el crecimiento de la inversión.

Para resolver el problema determinamos las derivadas parciales de la función:

$$V_1(I,R) = \left[\frac{1 + 0{,}10(1 - R)}{1 + I}\right]^{10}$$

ya que $V(I,R)$ = 1.000 $V_1(I,R)$

$$V_{1_I}(I,R) = \frac{\partial V_1(I,R)}{\partial I} = -\frac{10\,(-0{,}1.\mathrm{R} + 1{,}1)^{10}}{(\mathrm{I} + 1)^{11}}$$

Por su parte:

$$V_{1_R}(I,R) = \frac{\partial V_1(I,R)}{\partial R} = \frac{10(0{,}1\,\mathrm{R} - 1{,}1)^9}{(1+\mathrm{I})^{10}}$$

Evaluando las derivadas parciales en los valores de $I$ y de $R$ indicados se obtiene:

$$\boldsymbol{V_{1_I}(0,03;\ 0,28) \approx -14,479} \text{ y } \boldsymbol{V_{1_R}(0,03;\ 0,28) \approx -1,3912}$$

Como ambas derivadas parciales, calculadas en los valores especificados, son negativas, y la derivada parcial respecto de la tasa de inflación tiene mayor valor absoluto, se concluye que es esta derivada parcial la que tiene influencia más negativa sobre el crecimiento de la inversión.

**2. Distribución de temperatura.**

La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa está dada por la función:

$$T(x,y) = 500 - 0{,}6\,x^2 - 1{,}5\,y^2$$

donde x e y se miden en metros. Calcular, en el punto (2, 3), la razón de cambio[1] de la temeratura con respecto a la distancia recorrida en la placa en las direcciones de x e y, respectivamente.

Para resolver el problema se determinan las derivadas parciales primeras respecto de x e y.

$$T_x(x,y) = -1{,}2\,x$$
$$T_y(x,y) = -3\,y$$

Evaluadas ambas derivadas parciales en (2, 3) se obtienen los siguientes resultados:

$$\boldsymbol{T_x(2,2) = -2,4 \;\; ; \;\; T_y(2,3) = -9}$$

**3. Temperatura aparente (o Sensación térmica).**

Una medida de cómo siente una persona el calor lo da el índice de temperatura aparente, que admite como modelo la siguiente función:

$$A(t,h) = 0{,}855\,t - 22{,}4\,h + 1{,}20\,th - 0{,}544$$

donde $A$ es la temperatura aparente en ºC, $\boldsymbol{t}$ es la temperatura del aire y $\boldsymbol{h}$ la humedad relativa en forma decimal.[2]

a) Determinar las derivadas parciales $\frac{\partial A(t,h)}{\partial t}$ y $\frac{\partial A(t,h)}{\partial h}$ cuando $t =$ 30 ºC y $h$ = 0,80.

b) ¿Quién influye más sobre $A$, la temperatura del aire o la humedad? Justificar la respuesta.

a) Para resolver el problema se determinan las derivadas parciales primeras:

$$A_t(t,h) = 0{,}855 + 1{,}20\,\mathrm{h}$$
$$A_h(t,h) = -\,22{,}4 + 1{,}20\,\mathrm{t}$$

Evaluadas las derivadas parciales en los valores propuestos se obtiene:

$$A_t(30;\ 0{,}80) = 1{,}845 \quad ; \quad A_h(30;\ 0{,}80) = 13{,}6$$

b) Como la rapidez del cambio de la temperatura aparente en los valores estipulados respecto de la humedad (13,6) es mayor que la rapidez de cambio respecto de la temperatura (1,845) se concluye que la humedad

[1] Las expresiones “razón de cambio”, “ritmo de cambio” y “tasa de variación” son equivalentes.

[2] Fuente: *The UMAP Journal*, 1984.

(específicamente el cambio de ella) influye más sobre la temperatura aparente (o sensación térmica) que la temperatura real del aire (o un cambio de la misma).

**4. Penetración de congelamiento.**

En un estudio de penetración del congelamiento se encontró que la temperatura T en el tiempo *t* (medido en días) a una profundidad *x* (medida en pies)se puede modelar mediante la función:

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} sen(\omega t - \lambda x)$$

donde ω = 2π / 365 y λ es una constante positiva.

a) Determinar $\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$ e indicar su significado físico;

b) Determinar $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ e indicar su significado físico;

c) Demostrar que T satisface la Ecuación del Calor: $T_t = k\, T_{x\,x}$ para una cierta constante k.

d) ¿Cuál es el significado físico del término $-\lambda x$ en la expresión sen (ωt – λx)?

Resolución:

a) La derivada parcial de la función respecto de ***t*** es la siguiente:

$$\boldsymbol{T_t(x,t) = T_1 e^{-\lambda x} cos(\omega t - \lambda x)(\omega)}\ \textbf{(1)}$$

Indica la variación de la penetración de congelamiento con la temperatura.

b) La derivada parcial de la función respecto de ***x*** es la siguiente:

$$T_x(x,t) = T_1(-\lambda)e^{-\lambda x} sen(\omega t - \lambda x) + T_1(-\lambda)e^{-\lambda x} cos(\omega t - \lambda x)$$

$$\boldsymbol{T_x(x,t) = T_1(-\lambda)e^{-\lambda x}[\, sen(\omega t - \lambda x) + cos(\omega t - \lambda x)]}$$

Indica la variación de la penetración de congelamiento con la profundidad.

c) Para verificar la ecuación del calor indicada se debe obtener la derivada segunda $T_{x\,x}(x,t)$

$$T_{xx}(x,t) = \boldsymbol{T_1(-\lambda)^2 e^{-\lambda x}[\, sen(\omega t - \lambda x) + cos(\omega t - \lambda x)] + T_1(-\lambda)^2 e^{-\lambda x}[cos(\omega t - \lambda x) - sen(\omega t - \lambda x)]}$$

$$\boldsymbol{T_{xx}(x,t) = T_1 \lambda^2 e^{-\lambda x}\, 2\, cos\,(\omega t - \lambda x)}\ \textbf{(2)}$$

Reemplazando en la Ecuación del Calor indicada, la igualdad se cumple si:

$$\boldsymbol{T_1\, \omega e^{-\lambda x} cos(\omega t - \lambda x) = k\, T_1 \lambda^2 e^{-\lambda x}\, 2\, cos\,(\omega t - \lambda x)}$$

Por lo tanto la constante k deberá ser: $\boldsymbol{\omega = k\, \lambda^2\, 2}$ **=>** $\boldsymbol{k = \frac{\omega}{2\,\lambda^2}}$

d) La unidad de medida de ω es [ω] = rad/días. Si el tiempo t se mide en [t] días => [ω.t] se mide en radianes (se trata de una magnitud angular).
Por ello como x se mide en [x] = pies, para que λ x se mida también en radianes deberá ser [λ] = rad/pies. Entonces el producto λ x es el ángulo de desfasaje de la onda senoidal respecto del instante t = 0.

# 5. *Ejercicios propuestos*

1) Hallar las derivadas parciales primeras de la función $f(x,y) = x^3 y^2 - 2x^2 y + 3x$ utilizando los límites que las definen y evaluarlas en el punto P $(2,-1)$.

2) Encontrar las primeras derivadas parciales respecto de cada una de sus variables, utilizando las reglas de derivación estudiadas para funciones de una sola variable independiente:

a) $z = f(x,y) = 2x^4 y^3 - xy^2 + 3y + tgy$
b) $z = f(x,y) = ln\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$
c) $z = f(x,y) = arctg\frac{x}{y}$
d) $z = f(x,y) = e^x \, ln\, xy$
e) $z = f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}$
f) $w = f(x,y,z) = x^2 y^3 . \sin z + e^{xz}$
g) $w = f(x,y,z) = (2x + 3y)^{cos\, z}$

3) Hallar las derivadas parciales segundas de las funciones anteriores. En particular atender a las derivadas parciales segundas cruzadas. ¿Qué conclusión puede obtener del análisis de las derivas segundas cruzadas?

4) Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $36\, z = 4x^2 + 9y^2$ con el plano $x = 3$, en el punto $(3, 2, 2)$.

5) Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = 9\, x^2 - y^2$ con el plano $y$= 3, en el punto (1, 3, 0).

6) Sea $w = f(x,t) = e^{-c^2 t} sincx$ , demuestre que $w_{xx} = w_t$ para todo número real $c$.

7) Sea $w = tguv + 2\ln(u+v)$ verificar que $w_{uvv}$ = $w_{vuv}$= $w_{vvu}$

8) Analizar las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- Verificar que f(x, y) no es continua en (0,0).
- Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$, aplicando los límites que definen las derivadas parciales.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

- Hallar $f_x(x,y)$y $f_y(x,y)$ para (x, y) ≠ (0,0)
- Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$
- Hallar $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$. ¿Qué se puede decir con respecto a la continuidad de las derivadas parciales segundas cruzadas?

9) Determinar si las siguientes funciones son armónicas, es decir si satisfacen la Ecuación de Laplace:

a) $z = f(x,y) = ln\,(\sqrt{x^2 + y^2})$
b) $z = f(x,y) = cos\, x\, sinh\, y + sin\, x\, cosh\, y$
c) $z = f(x,y) = e^{-x} cos\, y + e^{-y} cos\, x$
d) $z = f(x,y) = arc\, tang\, \left(\frac{x}{y}\right)$

10) Demostrar que la función $v(x,t) = (x - at)^4 + \cos(x + at)$ verifica la ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

11) Demuestre que las funciones u(x, y) y v(x, y) satisfacen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

a) $u(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, v(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
b) $u(x,y) = e^x \cos y \; , v(x,y) = e^x \sin y$

**Observación**:

Ecuaciones de Cauchy – Riemann $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} ; \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$

12) La Ecuación de Van der Waals para *n* moles de un gas es:

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(\mathrm{V} - \mathrm{nb}) = n\,RT$$

donde *P* es la presión, *V* el volumen y *T* la temperatura del gas. La constante *R* es la constante universal de los gases; *a* y *b* son constantes positivas características de un gas en particular.
Determinar la derivada parcial primer de la temperatura respecto de la presión $\frac{\partial T}{\partial P}$ y la derivada parcial primera de la presión respecto del volumen $\frac{\partial P}{\partial V}$.

13) La ley de los gases para una masa fija *m* de un gas ideal a temperatura *T*, presión *P* y volumen *V* es:

$$P.V = \mathrm{m}RT$$

Donde R es la constante universal de los gases. Demostrar que:

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

14) La energía cinética de un cuerpo cuya masa es *m* y su velocidad es *v* está expresada por $K = \frac{1}{2} m v^2$. Demostrar que:

$$\frac{\partial K}{\partial m}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}\right) = \mathrm{K}$$

# 6. *Bibliografía*


- Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski
- Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, de James Stewart.
- Cálculo y Geometría Analítica, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- El Cálculo, de Louis Leithold.