TP Nº 1 – Ecuaciones diferenciales

Trabajo realizado por el Profesor Ing. Pablo J. García y la JTP Ing. Erika A. Sacchi (2017). Ampliado y corregido por la Ing. Valeria B. Elizalde, bajo la supervisión del Co-Coordinador de Cátedra Ing. Jorge Disandro (2018)

Primera parte: Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

1. *Temario*

- Variables separables
- Reducibles a variables separables (homogéneas)
- Trayectorias ortogonales
- Exactas
- Reducibles a exactas
- Lineales (Lagrange/Método general)
- No lineales (Bernoulli)

2. *Resumen teórico*

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n, es una ecuación en la que aparecen $x, y, y', y'', \ldots\ y^{(n)}$, donde y es una función de x, e $y^{(n)}$ es la n-ésima derivada de y con respecto a x.

El orden de la ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Una función f es solución de una ecuación diferencial, si la ecuación se satisface cuando $y = f(x)$ y sus derivadas se sustituyen en la ecuación.

Resolver una ecuación diferencial consiste en hallar las posibles soluciones de la ecuación.

Tipos de soluciones de una ecuación diferencial de orden n

La **solución general** es una familia de funciones que son solución de la ecuación diferencial y que tienen tantas constantes arbitrarias e independientes como el orden de la ecuación diferencial.

Una **solución particular**, se obtiene de la solución general obteniendo valores específicos a cada constante. Generalmente se obtienen a partir de condiciones iniciales, ó condiciones de contorno.

Finalmente las soluciones que no provienen de la solución general se denominan **soluciones singulares**.

Las soluciones generales no tienen representación gráfica, en tanto que las soluciones particulares sí las tienen, se denominan curvas integrales.

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Ecuaciones diferenciales de variables separables

Son de la forma $y' = f(x).g(y)$

Se escriben en la forma diferencial $\frac{1}{g(y)}\,.dy = f(x).dx$

y luego se resuelve integrando cada término con respecto al respectivo diferencial

$$\int \frac{1}{g(y)}\,.dy = \int f(x).dx$$

Ecuaciones homogéneas (o reducibles a Variables Separables)

La función $f(x,y)$ es homogénea de grado n, si $f(t.x,t.y) = t^n.f(x,y)$

Una EDO de primer orden se llama homogénea si puede escribirse en la forma diferencial

$P(x,y).dx + Q(x,y).dy = 0$, donde P y Q son funciones homogéneas del mismo grado.

Una EDO homogénea se puede llevar a una EDO de variables separables mediante alguna de las sustituciones algebraicas $y = u.x$ ó $x = v.y$ donde u y v son nuevas variables dependientes de x.

Por ejemplo, si una EDO homogénea se puede llevar a la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Se resuelve mediante $\frac{y}{x} = u \implies y = u\,.x \implies y' = u'.x + u$

Y reemplazando en la ecuación diferencial $u'.x + u = f(u) \implies \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(f(u) - u\right)$ que es una EDO de variables separables con la función incógnita $u(x)$. Se resuelve ésta última y luego se encuentre $y(x)$ mediante la sustitución propuesta.

Pueden darse otras relaciones entre x e y diferentes de las mencionadas. En general esto se da en ecuaciones que, sin ser homogéneas, sí son reducibles a Variables Separables mediante alguna relación adecuada. En esos casos la relación será un dato del ejercicio (Ver Ej. Propuesto 2.1.a)

Ecuaciones diferenciales exactas

Son EDO de la forma $P(x,y).dx + Q(x,y).dy = 0$, donde P y Q son continuas en una región R y además $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

En tal caso, existe una función potencial $U(x,y)$ tal que $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$ y $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$ y entonces $dU = \frac{\partial U}{\partial x}.dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,.dy = P(x,y).dx + Q(x,y).dy$.

Siendo $dU = 0$ y hallando $U(x,y)$ por integración se obtiene la solución general $U(x,y) = C$

Para hallar $U(x,y)$, sabemos que debe satisfacer $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$ y $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$.

Integrando la primera condición respecto de x,

$U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial x}\,.dx = \int P(x,y)\,.dx + g(y)\ (*)$, como se integró respecto de la variable x, la constante de integración *g(y)* depende de la variable y.

Derivamos ahora $U(x,y)$ respecto de y : $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\int P(x,y).dx] + g'(y) = Q(x,y)$

De donde $g'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}[\int P(x,y).dx]$, y luego integrando esta última expresión respecto de y, obtendremos $g(y)$; reemplazado en (*) permitirá encontrar la solución general $U(x,y) = C$.

Ecuaciones lineales de primer orden

Son EDO de la forma $y' + A(x).y = B(x)$

a) Incompletas u homogéneas: es el caso en que $B(x) = 0$. La ecuación se reduce a

$y' + A(x).y = 0$

Esta ecuación se resuelve en variables separables con el método visto.

b) Completas ó no homogéneas: es el caso en que $B(x) \neq 0$. Entonces se supone que la solución general es de la forma $y(x) = u(x).v(x)$, donde $u(x)$ es solución particular de la ecuación incompleta, y $v(x)$ es una función a determinar.
Para determinar $v(x)$ se reemplazan $y = u.v$ y $y' = u'.v + u.v'$ en la ecuación completa, resultando $u'.v + u.v' + A(x).u.v = B(x) \Longrightarrow [u' + A(x).u].v + u.v' = B(x)$ donde el paréntesis se anula por ser u solución particular de la incompleta y resulta $u.v' = B(x)$. De esta última se obtiene $v(x)$ por integración directa $v(x) = \int \frac{B(x)}{u}\, dx + C$.
Por último la función $v(x)$ hallada se multiplica por $u(x)$ para brindar la solución general de la EDO completa: $y(x) = u(x).v(x)$ (Nótese que la solución general tendrá una sola constante C correspondiente a $v(x)$ por cuanto $u(x)$ es solución particular de la EDO incompleta)

Ecuación de Bernoulli

Es de la forma $y' + A(x).y = B(x).y^{\alpha}$

Si $\alpha \neq 0 \; y \; \alpha \neq 1$ se divide ambos miembros por y^{α} resultando $y^{-\alpha}y' + A(x).y^{1-\alpha} = B(x)$, donde se advierte que llamando $u = y^{1-\alpha}$ resulta $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}.y'$. De este modo la ecuación se convierte en la EDO lineal de primer orden $\frac{u'}{(1-\alpha)} + A(x).u = B(x)$ en la incógnita u. Se resuelve con el método anterior hallando u , y luego encontrando y mediante la sustitución propuesta.

Formación de ecuaciones diferenciales

Dada una familia de funciones que dependen de n parámetros, se busca la EDO de orden n de la cual es solución general. Para ello, se encuentra la derivada de orden n de dicha familia, y en caso de persistir en la misma algunos de los parámetros, se eliminan tomando en cuenta la función y las derivadas de orden menor.

Trayectorias ortogonales

Una trayectoria ortogonal de una familia de curvas es una curva que corta perpendicularmente a todas y cada una de las curvas de la familia dada (es decir que sus respectivas tangentes en el punto de intersección son ortogonales entre sí).

Dos familias de curvas son mutuamente ortogonales cuando cada curva de una de las familias es una trayectoria ortogonal de la otra familia y viceversa.

Sea una familia de curvas, dependientes de una única constante, dada mediante su ecuación diferencial $F(x,y,y') = 0$ (En caso de tener la ecuación de la familia de curvas se obtiene la ecuación diferencial correspondiente).

Entonces la familia de trayectorias ortogonales a ésta tendrá por ecuación diferencial $F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right) = 0$.

En forma explícita:

$y' = f(x,y)$ (Ecuación diferencial de la primera familia de curvas)

$y' = -\frac{1}{f(x,y)}$ (Ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales)

En ambos casos, resolviendo la segunda ecuación diferencial se obtienen las trayectorias ortogonales.

3. *Ejercicios resueltos*

1) Resolver la siguiente EDO de variables separables

$$(1+x).dy - y.dx = 0$$

Dividimos por $(1+x).y$ y reescribimos la ecuación

$$\frac{1}{y}.dy = \frac{1}{(1+x)}dx$$

Integramos ambos miembros

$$\int \frac{1}{y}.dy = \int \frac{1}{(1+x)}dx$$

$$\ln|y| = \ln|1+x| + C_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|1+x|+C_1}$$

$$|y| = e^{\ln|1+x|}.e^{C_1}$$

$$|y| = |1+x|.e^{C_1}$$

$$y = (1+x).e^{C_1} \text{ ó } y = -(1+x).e^{C_1}$$

Como e^{C_1} toma siempre valores positivos $\forall C_1$, definimos $C = \pm e^{C_1}$, resultando

$\boxed{y = C.(1+x)}$ Solución General

2) Resolver la siguiente EDO de variables separables

$$y' = -\frac{x}{y}\text{ ; para } y(4) = 3$$

Llevamos a la forma diferencial

$$y.dy = -x.dx$$

Integrando

$$\int y.dy = \int -x.dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

Donde llamando $C = 2.C_1$ puede reescribirse como

$\boxed{x^2 + y^2 = C}$ Solución General (familia de círculos concéntricos de radio $\sqrt{C}$)

Aplicando las condiciones iniciales, para $x = 4, y = 3$, resulta

$4^2 + 3^2 = C$ ó sea $C = 25$, es decir $\boxed{x^2 + y^2 = 25}$ Solución Particular

Nota: en todos los ejercicios resueltos que siguen podrían agregarse condiciones iniciales con el objeto de obtener una solución particular. Queda para ejercitación del alumno.

3) Resolver la EDO Homogénea

$$y' = \frac{2xy - y^2}{x^2}$$

Reescribimos $y' = 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$
Llamando $u = \frac{y}{x}$; resulta $y = u.x$ y $y' = u'.x + u$
Sustituimos en la EDO

$$u'.x + u = 2u - u^2$$

Es decir

$$u'.x = u - u^2$$

Esta ecuación es de variables separables

$$\frac{du}{u - u^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u - u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

Para integrar el primer miembro, se recurre a descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{u - u^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1 - u}$$

Que se satisface para $A = B = 1$

$$\int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1 - u}\right) du = \int \frac{dx}{x}$$

Resolviendo

$\ln|u| - \ln|1 - u| = \ln|x| + C_1$

$$\ln\left|\frac{u}{1 - u}\right| = \ln|x| + C_1$$

$$\frac{u}{1 - u} = \mathrm{C\,x}$$

Reemplazando $u = \frac{y}{x}$

$$\frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = \mathrm{C\,x}$$

Resulta

$$y = \mathrm{C\,x}\,(x - y)$$

De donde se puede despejar la variable y en forma explícita si se lo desea, resultando

$\boxed{y = \frac{Cx^2}{1+Cx}}$ Solución General

4) Resolver la siguiente EDO exacta

$$2xy.dx + (x^2 - 1).dy = 0$$

Verificamos: $P(x, y) = 2xy$; y $Q(x, y) = (x^2 - 1)$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, entonces es exacta.

Entonces $\exists\ U(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - 1$$

Integramos la primera ecuación respecto de x

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}\,.\,\mathrm{dx} = \int 2xy.\,dx$$

$U(x,y) = x^2.y + g(y)$,

donde la constante de integración es función de la(s) variable(s) respecto de la cual no se está integrando.

Para determinar dicha función, verificamos la segunda ecuación derivando la función encontrada respecto de y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1$$

Entonces $g'(y) = -1$, y

$g(y) = -y$. (Al integrar no se incluye la constante de integración pues luego se igualará la función potencial a una constante)

Reemplazando en la $U(x,y)$ encontrada, resulta

$$U(x,y) = x^2.y - y$$

La solución general es $U(x,y) = C$, es decir

$x^2.y - y = C$, ó

$\boxed{y = \frac{C}{(x^2-1)}}$ Solución General

Obs: este ejemplo particular también admite ser resuelto por separación de variables (verifíquelo).

5) Resolver la siguiente EDO reducible a exacta mediante factores integrantes.

$$(k+1)y.\,dx + (m+1)x.\,dy = 0, \text{ con } k \neq m$$

Factor integrante $\mathrm{F(x,y) = x^k y^m}$

En primer lugar, verifiquemos que no se trata de una EDO exacta.

$$\mathrm{P(x,y) = (k+1)y\,;\ \ Q(x,y) = (m+1)x}$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}} = \mathrm{k+1}\,;\ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{m+1}$$

Resulta $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}} \neq \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}}$, $\forall\ \mathrm{k \neq m}$, entonces la EDO no es exacta.

Se multiplica por el factor integrante $\mathrm{F(x,y) = x^k y^m}$, y se obtiene

$$\mathrm{(k+1)x^k y^{m+1}.\,dx + (m+1)x^{k+1} y^m.\,dy = 0}$$

Ahora resulta:

$$P(x,y) = (k+1)x^k y^{m+1}\,;\ Q(x,y) = (m+1)x^{k+1} y^m$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (k+1)(m+1)x^k y^m = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

En consecuencia, esta EDO sí es exacta, y se resuelve como el ejercicio anterior.

Complete el ejercicio.

6) Resolver la EDO lineal de primer orden completa

$$y' + 3x^2 y = 6x^2$$

Para resolverla, procedemos a encontrar una solución particular de la EDO de primer orden incompleta u homogénea

$$y' + 3x^2 y = 0$$

Escribiéndola en forma diferencial

$$\frac{dy}{y} = -3x^2 . dx$$

Resolviendo por variables separables, resulta

$$y = e^{-x^3}$$

Resolvemos ahora la completa $y' + 3x^2 y = 6x^2$, proponiendo como solución general $y(x) = u(x). v(x)$,

Donde $u(x)$ es una solución particular de la EDO incompleta (en este caso $u(x) = e^{-x^3}$),

y $v(x)$ una función a determinar.

Entonces:

$$y(x) = e^{-x^3}. v(x)$$

$$y'(x) = -3x^2 e^{-x^3}. v(x) + e^{-x^3}. v'(x)$$

Reemplazando en la EDO

$$-3x^2 e^{-x^3}. v(x) + e^{-x^3}. v'(x) + 3x^2 e^{-x^3}. v(x) = 6x^2$$

$$e^{-x^3}. v'(x) = 6x^2$$

De donde

$$v'(x) = 6x^2 e^{x^3}$$

$$v(x) = \int 6x^2 e^{x^3} dx$$

Resolviendo por sustitución simple, llamando $t = x^3$ resulta

$v(x) = 2e^{x^3} + \mathrm{C}$

Y en consecuencia, la solución general de la EDO lineal de primer orden, completa, será

$y(x) = e^{-x^3}(2e^{x^3} + \mathrm{C})$ ó

$\boxed{y(x) = 2 + \mathrm{C}. e^{-x^3}}$ Solución General

7) Hallar la solución particular del ejercicio anterior para la condición inicial

$$y(0) = 6$$

Debe ser para $x = 0$, $y = 6$. Reemplazando en la solución general

$y(0) = 2 + \mathrm{C}\,.e^0 = 6$, entonces $C = 4$, y resulta

$\boxed{y(x) = 2 + 4\,.e^{-x^3}}$ Solución Particular

8) Hallar la solución de la ecuación de Bernoulli

$$x.y' + 2y + x^5\,y^3e^x = 0$$

Reescribimos la ecuación en la forma

$$y' + \frac{2}{x}y + x^4\,y^3e^x = 0$$

Dividimos por y^3

$$y^{-3}.y' + \frac{2}{x}y^{-2} + x^4\,e^x = 0$$

Planteamos la sustitución $u = y^{-2}$
Con lo que $u' = -2.y^{-3}.y'$
Sustituyendo en la EDO original resulta

$$-\frac{1}{2}\,u' + \frac{2}{x}u + x^4\,e^x = 0$$

$$u' - \frac{4}{x}u = 2x^4\,e^x$$

Que es una EDO lineal de primer orden, completa, con función incógnita $u(x)$.
Resolviendo con el método visto encontramos la solución general

$$u = x^4(2\,e^x + C)$$

Reemplazando por $u = y^{-2}$, obtenemos
$y^{-2} = x^4(2\,e^x + C)$, es decir

$\boxed{y = \frac{x^{-2}}{\sqrt{(2\,e^x + C)}}}$ Solución General

4.*Ejercicios de aplicación*

1. La población de un país se duplica cada 50 años. Si la tasa de crecimiento de la población con el tiempo es directamente proporcional a la cantidad de habitantes en un momento determinado, calcular la cantidad de años al cabo de la cual la población será el triple de la inicial.

Sea y(t) la cantidad de población en un momento t arbitrario; y sea $y(0) = y_o$ la población inicial.

Entonces la tasa de crecimiento de la población con el tiempo está dada por:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = k.y}$$

Se trata de una Ecuación Diferencial que se resuelve en variables separables.

$$\frac{1}{y}.dy = k\,dt$$

Integrando ambos miembros se obtiene:

$$\ln|y| = k.t + \ln C_1$$

Operando se llega a la solución general de la ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{y(t) = C_1.e^{kt}}$$

Aplicando la Condición Inicial: $y = y_o$ en $t = t_o = 0$ se obtiene el valor de la constante de integración C_1:

$$y(0) = yo = C_1.e^0 \Rightarrow C_1 = yo$$

Por lo tanto la Solución particular asociada a la C.I. dada es:

$$\boldsymbol{y(t) = yo. e^{kt}}$$

Para t = 50 años la población será y(50) = 2 y_o => y(50) = 2 y_o = y_o $e^{50\,k}$ expresión de la que se puede obtener el valor de la constante de proporcionalidad k:

$e^{50\,k}$ = 2 => 50 k = ln 2 => k = (ln 2) / 50 = 0,01386

Ahora puede determinarse la incógnita, a saber: el tiempo t para el cual la población será y(t) = 3 y_o

3 y_o = y_o $e^{k\,t}$ => reemplazando el valor de k se obtiene el valor de t buscado: 3 y_o = y_o $e^{0{,}01386\,t}$ => operando se obtiene:

ln 3 = 0,01386 t => t = ln 3 / 0,01386 => t ≈ 79,25 años

2. Una esfera de cobre se calienta hasta una temperatura T = 100 ºC. En el instante inicial (t = 0) se coloca la esfera en agua, cuya temperatura se mantiene constante a 30 ºC. Al término de 3 minutos, la temperatura de la esfera desciende a 70 ºC. Hallar el tiempo necesario para que la temperatura de la esfera descienda a 31 ºC.

Se trata de un ejemplo en que debe aplicarse la **Ley de enfriamiento de Newton**, según la cual la razón de cambio de la temperatura T de la esfera es proporcional a la diferencia de temperatura de la esfera y la del medio que la rodea (agua). Se considera que la temperatura T es la misma en todos los puntos de la esfera. La expresión analítica de la Ley de enfriamiento de Newton, aplicada al caso en estudio es:

$$\boldsymbol{\frac{dT}{dt} = -k.(T - 30)}$$

En esta expresión K es la constante de proporcionalidad: k > 0. El signo (–) se justifica en el descenso de la temperatura de la esfera. Resolviendo por Variables separables:

$$\frac{dT}{(T-30)} = -k.dt$$

Luego de integrar se llega a la solución general de la Ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{T(t) = C. e^{-kt} + 30}$$

La Condición inicial dada es que en t = 0 la temperatura es T(0) = 100 ºC => reemplazando en la anterior se obtiene el valor de C = 70.

Por lo tanto la solución particular asociada a la C.I. dada es:

$$\boldsymbol{T(t) = 70. e^{-kt} + 30}$$

Además el enunciado afirma que T(3) = 70 ºC, dato a partir del cual se puede obtener el valor de la constante k:

$$T(3) = 70. e^{-3k} + 30 = 70 \Rightarrow 70. e^{-3k} = 40$$

Operando y aplicando la función logaritmo se llega a: k = (1/3) ln (7/4) = 0.1865.

La Ley de variación de la temperatura con el tiempo queda:

$$T(t) = 70. e^{-0{,}1865\,t} + 30$$

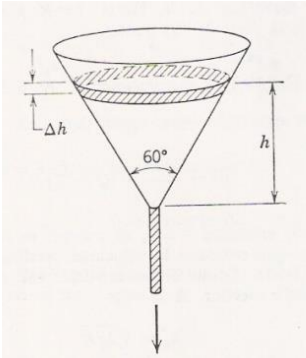
Para el caso pedido, cuando t = t_1 => T(t_1) = 31 ºC ; reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

T(t_1) = 31 = 70 $e^{-0{,}1865\,t_1}$ + 30

70 $e^{-0{,}1865\,t_1}$ = 1

0,1865 t_1 = ln 70 => t_1 = (ln 70) / 0,1865 => **t_1 ≈ 22,78 min**

3. Un embudo tiene la forma de un cono circular recto con ángulo de apertura 60º. La boca de salida tiene una sección recta cuya área es A = 0,5 cm^2.
En el instante inicial (t = 0) se abre la boca de salida y el agua contenida en el embudo fluye hacia afuera.
Determinar el tiempo en que se vaciará el embudo, suponiendo que el nivel inicial del agua es h(0) = 10 cm.



Se trata de un ejemplo en el que debe aplicarse la **Ley de Torricelli**, válida para este tipo de escurrimientos, según la cual la velocidad v de salida del agua por la boca del embudo es:

$$\mathbf{V = 0{,}6.\ (2gh)^{1/2}}$$

expresión en la cual:
g: aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra (980 cm/seg^2);
h: altura instantánea del nivel de agua por encima del orificio de salida del agua.
El volumen de agua que sale por la boca del embudo en el intervalo de tiempo Δt es:
ΔV = A. v. Δt = 0,5 v Δt => reemplazando la expresión de la velocidad dada por la Ley de Torricelli se tiene:

$$\mathbf{\Delta V = 0{,}3\ (2gh)^{1/2}\ \Delta t}$$

Como la cantidad de agua que sale por la boca del embudo estuvo antes dentro de éste, la variación de la cantidad de agua en el interior del embudo para el intervalo de tiempo Δt será:

$$\mathbf{\Delta V = -\pi\ r^2.\ \Delta h}$$

expresión en la cual:
r: radio del círculo formado por el nivel de agua a la altura h(t) => r = h. tang 30º = 1 / √3.
El signo (–) se justifica porque el volumen de agua dentro del embudo disminuye.

$$\Delta V = -\pi\ (h^2/3).\ \Delta h$$

Igualando ambos volúmenes se obtiene la siguiente igualdad:

$$\mathbf{\Delta V = 0{,}3\ (2gh)^{1/2}\ \Delta t = -\pi\ (h^2/3).\ \Delta h}$$

Operando se puede expresar el siguiente cociente:

$$\mathbf{(\Delta h\ /\ \Delta t) = -\ [0{,}9\ (2g)^{1/2}\ h^{-3/2}]\ /\ \pi}$$

Haciendo tender a cero Δt (Δt → 0) se obtiene la siguiente derivada:

$$\mathbf{dh/dt = -\ k\ h^{-3/2}} \qquad \text{siendo } k = 0{,}9\ (2g)^{1/2} / \pi \approx 12{,}7$$

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden en Variables separables. Separando variables e integrando se llega a la siguiente Solución general:

$$\mathbf{(2/5)\ h^{5/2} = -\ kt + C}$$

Aplicando la C. I.: h (0) = 10 cm se obtiene el valor de la constante de integración: C = (2/5) $10^{5/2}$
Por lo tanto la Solución particular asociada a esa C. I. será:

$$\mathbf{(2/5)\ h^{5/2} = -\ kt + (2/5)\ 10^{5/2}}$$

Despejando el valor de t se obtiene:

$$\mathbf{t = 2\,(10^{5/2} - h^{5/2}) / 5\,k}$$

Reemplazando en valor de k y haciendo h = 0 (condición para el embudo vacío) se obtiene el tiempo de vaciado:

$$\mathbf{t = (2 \times 10^{5/2}) / 5 \times 12,7 \approx 10 \text{ segundos.}}$$

4. La siguiente Ecuación diferencial de primer orden está asociada a un campo de velocidades estacionario (no depende del tiempo) y bidimensional, de un fluido incompresible[1]:

$$\mathbf{(0,5 + 0,8\,x)\,dx + (1,5 - 0,8\,y)\,dy = 0} \quad (1)$$

La solución general de esta EDO de primer orden corresponde a las llamadas líneas de corriente del escurrimiento.
Para el caso propuesto determinar:

a) Obtener la ecuación general de dichas líneas de corriente;
b) Obtener la ecuación particular de la línea de corriente que pasa por el punto (0, 2);
c) Obtener la función representativa de las líneas equipotenciales que son ortogonales a las anteriores.

La ecuación diferencial dada tiene la forma de la siguiente EDO:

$$\mathbf{M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0}$$

Siendo M(x, y) = (0,5 + 0,8x) y N(x, y) = (1,5 – 0,8 y).
El primer paso en la resolución del ejercicio es verificar si la ecuación diferencial (1) es o no es exacta. Para ello debe cumplirse que

$$\frac{\partial \boldsymbol{M(x,y)}}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{N(x,y)}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

Haciendo ambas derivadas parciales se verifican que no sólo son iguales sino que ambas son nulas:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M(x,y)}}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{N(x,y)}}{\partial \boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto, existe una función escalar f(x, y) cuyo diferencial total (o exacto) d f (x, y) = 0; por lo tanto se cumplirá que f(x, y) = C = constante. La función f(x, y) será representativa de las líneas de corriente del escurrimiento. Deberán cumplirse:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (\mathbf{0,5 + 0,8}\,\boldsymbol{x}) \quad ; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (\mathbf{1,5 - 0,8}\,\boldsymbol{y})$$

Comenzando el cálculo con la primera igualdad se puede escribir:

$$f(x, y) = \int (0,5 + 0,8\,x)\,dx + \phi(y) \quad (2)$$

expresión en la cual la función ϕ (y) oficia de constante de integración. En efecto, en general en las Ecuaciones Diferenciales Exactas las funciones M(x, y) y N(x, y) son funciones de dos variables independientes. La integral (2) es una integral indefinida de una función de dos variables, integrada respecto de una sola de ellas; en este caso la variable x. Por lo tanto la constante de integración podrá ser una función de la otra variable (caso más general) o una constante numérica.
Integrando por sustitución se obtiene una expresión general de f(x, y):

$$f(x, y) = [(0,5 + 0,8\,x)^2 / 0,8 \,.\, 2] + \phi(y)$$

Para determinar el valor de ϕ (y) se deriva f(x, y) parcialmente respecto de y; y a la derivada así obtenida se la igual a N(x, y):

[1] La expresión vectorial de dicho campo de velocidades es: **V** (x, y) = (0,5 + 0,8 x) **i** + (1,5 – 0,8 y) **j**

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \mathrm{N(x,y)} = \ (1,5 - 0,8\ \mathrm{y})$$

Por lo tanto ϕ (y) = $\int$(1,5 – 0,8 y) dy + C => ϕ (y) = [– (1,5 – 0,8 y)^2 / 1,6] + C_1

Finalmente la función buscada f(x, y) correspondiente a las líneas de corriente del escurrimiento queda:

f(x, y) = [(0,5 + 0,8 x)^2 / 1,6] – [(1,5 – 0,8 y)^2 / 1,6] + C_1 = K

f(x, y) = [(0,5 + 0,8 x)^2 / 1,6] – [(1,5 – 0,8 y)^2 / 1,6] = C

La C. I. es que, para x = 0 => y = 2; reemplazando esa C. I. en la ecuación anterior se obtiene el respectivo valor de C. Haciendo los cálculos se obtiene C = 0,15. Por lo tanto la Solución particular asociada a la C. I. dada es:

[(0,5 + 0,8 x)^2 / 1,6] – [(1,5 – 0,8 y)^2 / 1,6] = 0,15

La segunda parte del ejercicio consiste en obtener la función g(x, y) representativa de las líneas equipotenciales, que son ortogonales a las líneas de corriente. Aplicando la teoría de **Trayectorias Ortogonales** se puede escribir:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = -\ \frac{(0,5 + 0,8x)}{(1,5 - 0,8y)}$$

Esta expresión, que es función de las coordenadas x e y de un punto en el escurrimiento, nos da la pendiente de la recta tangente a la curva equipotencial pasante por ese punto. Para asegurar la ortogonalidad entre las líneas de corriente y las líneas equipotenciales deberá cumplirse:

$$y' = -\ \frac{1}{Y'}$$

Las respectivas derivadas primeras deberán ser inversas y de signo cambiado. Por lo tanto[2]:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = Y' = \frac{(1,5 - 0,8y)}{(0,5 + 0,8x)}$$

A partir de esta expresión se puede obtener una nueva EDO de primer orden, que es la siguiente:

(1,5 – 0,8 Y) dx – (0,5 + 0,8 x) dY = 0

que es del tipo: M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, con M(x, Y) = (1,5 – 0,8Y) en tanto que N(x, Y) = – (0,5 + 0,8x).

Se puede verificar que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\,0,8$$

Por lo tanto se trata de una Ecuación Diferencial Exacta; entonces existe una g(x, y) = C que se obtiene siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para la determinación de f(x, y). Resolviendo se obtiene:

g(x, y) = 1,5 x – 0,8 x y – 0,5 y = C

Con la C.I. dada en el caso anterior, a saber: si x = 0 => y = 2, puede obtenerse el valor de la constante C. Reemplazando los valores de x e y se tiene C = **–** 1. Por lo tanto la Solución Particular asociada a dicha C.I. es:

g(x, y) = 1,5 x – 0,8 x y – 0,5 y = – 1

[2] Para distinguir las pendientes de ambas rectas tangentes se usa una nomenclatura diferente a fin de evitar confusiones: y’ es la derivada de la función representativa de las curvas de corriente, en tanto que Y’ es la derivada de la función representativa de las líneas equipotenciales.

5.*Ejercicios propuestos*

1. Encontrar la solución general de las ecuaciones diferenciales resolviendo mediante el método de variables separables:

a) $y' = \frac{(x^2 - 1)}{y^2}$

b) $y^4 e^{2x} + \frac{dy}{dx} = 0$

c) $y' = 3x^2\, y$

d) $y \ln y\ dx + x\, dy = 0$

2. Hallar las soluciones particulares de las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el método de variables separables con las condiciones iniciales o de borde, solicitadas:

a) $y' = \sqrt{y+1}\ .cos\, x$; si $y\,(\pi) = 0$

b) $2\, y\, y' + y' - 4x = 3x^2 + 2$; si $y\,(0) = -1$

c) x (y – 3) y´= 4y ; si y (1)= 2

d) $x^3 sin(y).y' = 2$; si: (a) $y\,(\pi) = 1$; (b) $y\,(1) = \pi$

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales reducibles a variables separables (homogéneas):

a) $\mathrm{y}^2 - \mathrm{xy} + \mathrm{x}^2\, \mathrm{y}' = 0$

b) $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

c) $y' = \frac{y - x}{y + x}$

d) $y' = \frac{y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}{xy}$

e) Encontrar la solución general de: $(2x - 4y + 5)\, y' + x - 2y + 3 = 0$ donde $v = x - 2y$

4. Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas:

a) $y^2 = c\, x^3$

b) $3x^2 + 5y^2 = c$

c) $x^2 - y^2 = c$

d) $y = c\, e^{-x}$

5. Verificar que las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y encontrar la solución general:

a) $(4x + e^y)\, dx + xe^y\, dy = 0$

b) $sh\, x\, cos\, y\, dx - ch\, x\, sin\, y\, dy = 0$

c) $(4x^3 y^3 - 2xy)\, dx + (3x^4 y^2 - x^2)\, dy = 0$

d) $(6x^2 + 2xy^2)\, dx + (2x^2 y + 5)\, dy = 0$

6. Evaluar si las siguientes son ecuaciones diferenciales exactas y en caso que no fueran exactas llevarlas a la forma con el factor integrante correspondiente:

a) $\sin y\, dx + \cos y\, dy = 0$; F.I.: $f(x) = e^x$

b) $2y\, dx + 3x\, dy = 0$; F.I.: $f(x, y) = xy^2$

c) $(3x + 4xy)\, dx - (3x^2 / y)\, dy = 0$; F.I.: $f(x, y) = \frac{1}{xy}$

d) $4y\, dx + 3x\, dy = 0$; F.I.: $f(x, y) = x^3 y^2$

7. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

a) $y' + tg(x).y = sec(x)$

b) $xy' + 2y = 5x^3$

c) $y' - y = x$

d) Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $y' + y\, tg\, x = \sin 2x$, si $y(\pi) = 1$

e) Utilizar el Método general para encontrar la solución particular de

$xy' + y + 4 = 0$, si $y(1) = 0$

8. Mediante el Método de Bernoulli encontrar las soluciones generales:

a) $y' - 5y = -\frac{5}{2}.x.y^4$

b) $y' + \frac{1}{x} y = x^3 . y^4$

c) $\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = x^{-2} . y^2$

6. *Bibliografía*

- *Cálculo con Geometría Analítica*, de Earl W. Swokowski
- *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones de modelado*, de Dennis G. Zill
- *Ecuaciones diferenciales*, Frank Ayres.
- *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*, de James Stewart.
- *Cálculo y Geometría Analítica*, de Roland E. Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwawrds.
- *El Cálculo*, de Louis Leithold.
- *Matemáticas avanzadas para Ingeniería*, Erwin Kreyszig, Volumen 1.
- Apuntes de clase de la Prof. Marta Duarte.