

Unidad 2 - Funciones de varias variables y nociones básicas de Topología

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Comprender y distinguir los conceptos de función escalar y función vectorial.
2. Esbozar superficies y gráficos tridimensionales empleando herramientas inherentes al análisis de funciones.
3. Conocer los conceptos topológicos básicos como fundamentos para el desarrollo de nociones del análisis más avanzadas.

Introducción

¿Por qué varias variables?

En Análisis Matemático I fueron analizadas funciones de una sola variable:

$$y = f(x) \quad \text{para} \quad x \in \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}$$

Esta simplificación es útil para estudiar de manera simple los conceptos básicos del cálculo: límites, continuidad, derivadas, integrales...

Pero ningún fenómeno real depende de una única variable...

Veamos algunos ejemplos (haciendo simplificaciones para facilitar el análisis...)



Ejemplo 2.1: La temperatura de n moles de un gas (ideal) depende de su presión y del volumen que ocupa:

$$T = T(p, V) = \frac{1}{nR} p \cdot V$$

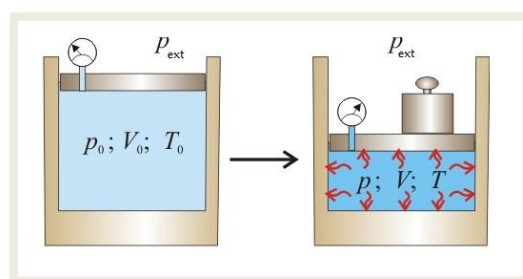


Figura 2.1: La temperatura de un gas depende del volumen que ocupa y de su presión.



Ejemplo 2.2: El empuje que recibe un avión depende de la superficie de las alas, de la densidad del aire y de las velocidades del aire por arriba y por debajo del aparato:

$$E = E(A, \delta, v_s, v_i) = \frac{A \cdot \delta}{2} (v_s^2 - v_i^2)$$

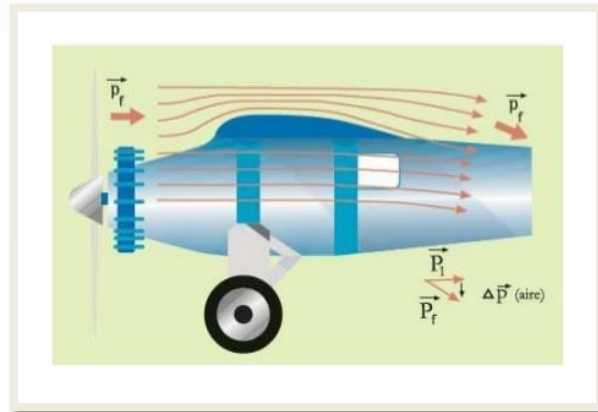


Figura 2.2: El empuje sobre las alas de un avión depende de la densidad del aire y de la diferencia de velocidades.



Ejemplo 2.3: La tasa efectiva que produce una inversión depende del capital invertido, el interés mensual, la cantidad de períodos de capitalización, el costo de las comisiones, y del monto de los impuestos:

$$T = T(C_0, i, n, c, I) = \frac{C_0(1 + i)^n - c - I}{C_0}$$



Figura 2.3: El rendimiento de un capital depende del interés y del tiempo.



Ejemplo 2.4: La fuerza con que se atraen dos cargas eléctricas depende de las cargas y de la posición de cada una de ellas:

$$\vec{F}(q_1, q_2, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

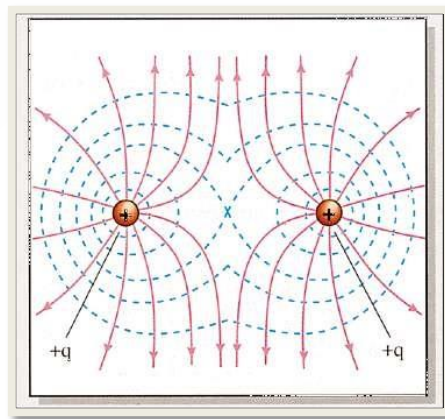


Figura 2.4: El campo eléctrico producido por dos cargas.



Ejemplo 2.5: La posición de un proyectil lanzado en el campo gravitatorio terrestre depende de la velocidad con que fue lanzado y del tiempo transcurrido desde su lanzamiento:

$$\vec{X} = \vec{X}(v_{0x}, v_{0y}, t) = (v_{0x} \cdot t, v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2})$$

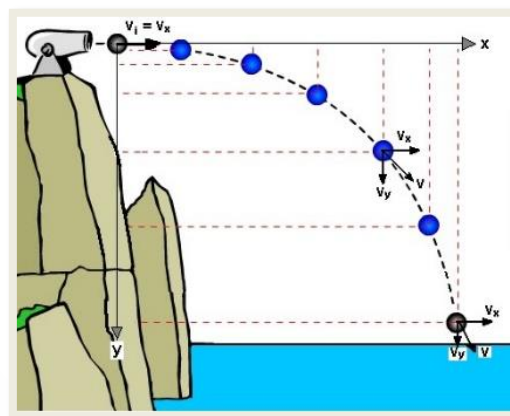


Figura 2.5: Un tiro oblicuo.

En los ejemplos que acabamos de presentar no sólo aparecen funciones de *varias variables independientes* sino que también, en algunos de ellos, *la imagen de la función es un vector*.

Con vectores nos referimos no sólo a los vectores geométricos del plano y del espacio

$$R^2 = \{(x_1, x_2)/x_1 \in R, x_2 \in R\}$$

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R\}$$

que admiten representación gráfica, sino también a los elementos de cualquier conjunto de la forma

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_i \in R \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$$

que sabemos que es un espacio vectorial sobre el conjunto de los números reales (y no admitirá representación gráfica si $n \geq 4$).

Por lo general, los vectores del plano los denotaremos, como es costumbre, (x, y) en lugar de (x_1, x_2) , y los del espacio tridimensional (x, y, z) en lugar de (x_1, x_2, x_3) .

Sin embargo, puede ocurrir que alguna vez, por conveniencia, usemos notación con subíndices, o indiquemos los vectores con flechas (\vec{x} , \vec{y} , etc.) también en el plano y en el espacio tridimensional.

En R^2 :

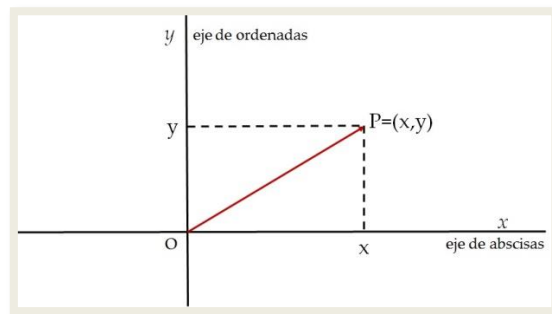


Figura 2.6: Coordenadas cartesianas en el plano.

El par (x, y) designará indistintamente tanto al punto P , de abscisa “ x ” y ordenada “ y ”, como al vector-flecha que va del origen al punto P .

En R^3

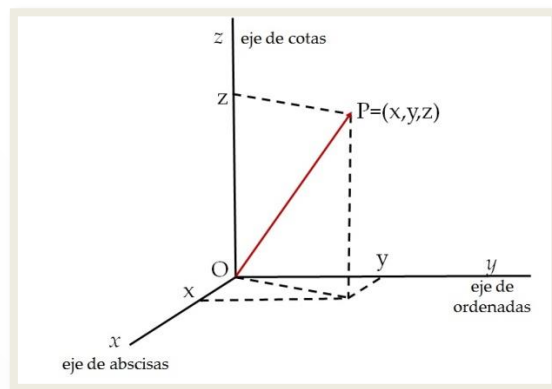


Figura 2.7: Coordenadas cartesianas en el espacio.



La terna (x, y, z) designará al punto P y también al vector-flecha \overrightarrow{OP} .

Para la representación espacial utilizaremos la terna de ejes que se denomina *dextrógira* (palabra que significa “que gira hacia la derecha”), y está orientada como se ve en la figura. La parte visible es el *primer octante*, que corresponde a abscisas, ordenadas y cotas positivas. El espacio tridimensional consta de ocho octantes (así como el plano, de cuatro cuadrantes)

Si se intercambiaran los ejes “ x ” e “ y ” se obtendría la terna llamada *levógira* (“que gira hacia la izquierda”).

Campos escalares, campos vectoriales y funciones vectoriales

En esta asignatura nos ocuparemos de generalizar los conceptos que en Análisis Matemático I se definieron para funciones de una variable (límites, continuidad, derivadas, integrales...) a estas funciones que involucran vectores.

Campos escalares, que asignan como imagen un escalar a una variable vectorial

Campos vectoriales, que asignan como imagen un vector a una variable vectorial

Funciones vectoriales, que asignan un vector a una variable escalar.



Definiciones 2.1: Llamaremos campo escalar a una función $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna, de manera unívoca, un número real z a cada vector $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

Campo vectorial es una función $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que asigna, de manera unívoca, un vector (y_1, y_2, \dots, y_m) a cada punto $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

Función vectorial es una función $\vec{f}: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ que asigna, de manera unívoca, un vector (y_1, y_2, \dots, y_m) a cada número real $t \in D$.

Dominio es el conjunto “ D ” en cada una de las definiciones anteriores, que designaremos D_f o bien $D_{\vec{f}}$.

Imagen o recorrido es el conjunto de los valores asignados por el campo o la función. Lo designaremos $Im(f)$ o bien $Im(\vec{f})$.

Actividad para resolver y discutir en el Foro



Actividad 2.1: ¿Pueden indicar a qué tipo corresponde, y entre qué conjuntos está definida, cada una de las funciones de los ejemplos presentados anteriormente?

Veamos más ejemplos:



Ejemplo 2.6: Consideremos el campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Este campo escalar de dos variables está definido mediante una fórmula polinómica.

En este caso x e y pueden asumir cualquier valor real pues no hay restricciones para el cálculo, por lo que claramente el dominio es $D = \mathbb{R}^2$.

Como $f(x, y)$ puede asumir cualquier valor no negativo, resulta $Im(f) = \{z \in \mathbb{R} / z \geq 0\}$.



Ejemplo 2.7: Consideremos ahora el campo escalar $f(x, y) = \sqrt{y + x^2 - 1}$.

Claramente su dominio se encuentra en el plano. Teniendo en cuenta la restricción de la raíz cuadrada podemos decir que $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y + x^2 - 1 \geq 0\}$.

Este conjunto representa la siguiente región del plano que se ve en la figura 2.8.

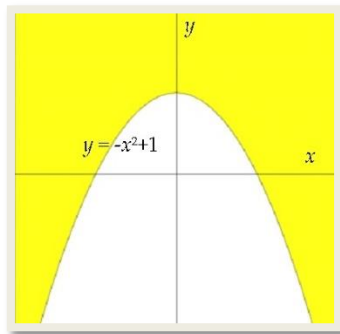


Figura 2.8: Dominio del campo del ejemplo 2.7.

Como $f(x, y)$ puede asumir cualquier valor no negativo, también resulta $Im(f) = \{z \in \mathbb{R} / z \geq 0\}$.



Ejemplo 2.8: Sea ahora el campo escalar $f(x, y, z) = \ln(x \cdot y \cdot z)$.

El dominio es $Dom(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \cdot y \cdot z > 0\}$ que corresponde a los octantes primero, tercero, sexto y octavo, sin incluir ninguno de los planos coordenados limitantes y de acuerdo con la siguiente convención:

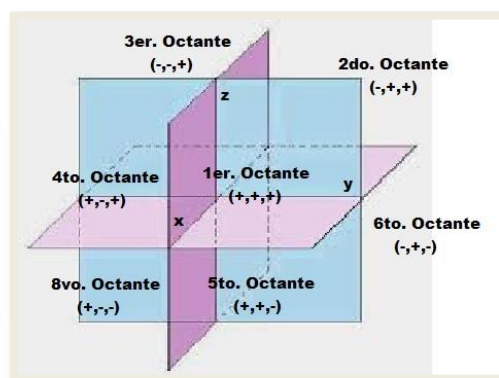


Figura 2.9: Los ocho octantes.

Sabiendo que el conjunto imagen de la función logarítmica es R , resulta entonces $Im(f) = R$



Ejemplo 2.9: Consideremos el campo vectorial $\vec{f}(x, y) = (\sqrt{x-y}, \ln(y+x^2))$.

El dominio es $Dom(\vec{f}) = \{(x, y) \in R^2 / x \geq y \wedge y + x^2 > 0\}$ puesto que ambas componentes deben estar definidas.

Representa la región del plano que está por debajo o sobre la recta $y = x$ y por encima de la parábola $y = -x^2$, incluyendo los puntos de la recta pero sin incluir los de la parábola.

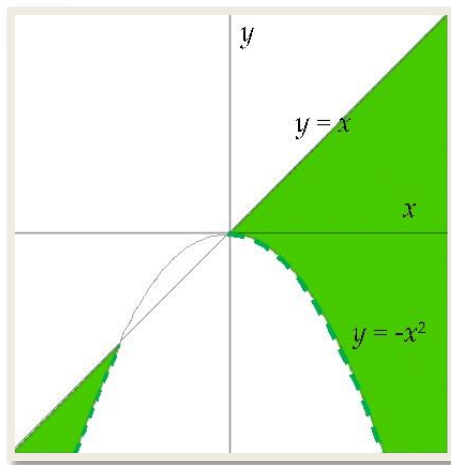


Figura 2.10: El dominio del campo del ejemplo 2.9.

Verifiquen que la imagen es $Im(\vec{f}) = \{(x, y) \in R^2 / x \geq 0\}$.



Ejemplo 2.10: Sea ahora la función vectorial $\vec{f}(t) = (\ln(t^2 - 1), \arcsen(2t - 2), t^3)$.

El dominio es $Dom(\vec{f}) = \{t \in R / t^2 - 1 > 0 \wedge -1 \leq 2t - 2 \leq 1\}$.

Comprueben que corresponde al intervalo $(1, \frac{3}{2})$, mientras que la imagen consiste en las ternas del espacio cuya segunda componente pertenece al intervalo $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Con respecto a estos dos últimos ejemplos podemos afirmar que:



El dominio de una función con varias componentes es la intersección de los dominios de todas esas componentes.



Ejemplo 2.11: Consideremos el campo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \arctan(x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^2)$

Comprueben que el dominio es todo R^4 , mientras que la imagen consiste en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Representación de campos escalares

Cuando trabajamos con funciones de una variable, podemos tener una idea del comportamiento de una función si esbozamos un gráfico.

En ese caso, si $y = f(x)$, el gráfico estará constituido por los puntos del plano de la forma $(x, f(x))$ que, bajo ciertas condiciones de continuidad, constituirán una *curva* en el plano.

Cuando la función depende de dos variables independientes y la imagen es un número real, el gráfico estará constituido por ternas del espacio: $(x, y, f(x, y))$.

Para cada par (x, y) en el dominio, deberíamos agregar la tercera componente $z = f(x, y)$ como cota, y la colección de todas esas cotas, al recorrer todo el dominio, constituirán la *gráfica* de la función. Bajo ciertas condiciones, todos esos puntos constituirán una *superficie* en el espacio.



Definición 2.2: Dado un campo escalar de n variables $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, se llama *gráfica de f* al siguiente subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} :

$$Gr(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \wedge x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

Observar que sólo se podrá, efectivamente, “graficar” si $n = 1, 2$ (respectivamente en el plano o en el espacio 3D).

Para $n \geq 3$ no hay representación gráfica posible y la gráfica se dice que es, en ese caso, una *hipersuperficie* en \mathbb{R}^{n+1} .

Retomemos el ejemplo $f(x, y) = x^2 + y^2$.

A diferencia de lo que ocurría con una variable, en que podíamos ir representando algunos valores puntuales y luego “imaginar” cómo completar o “rellenar” la curva-gráfico, esto no es posible de llevar a cabo con puntos en el espacio...:

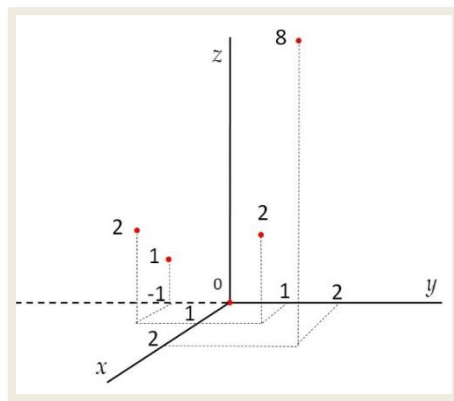


Figura 2.11: Algunos puntos de la gráfica del campo del ejemplo 2.6.

Aun cuando representáramos gran cantidad de ternas, sería difícil imaginar cómo completar la gráfica... Por eso se recurre a otras herramientas.

Una muy útil es representar el comportamiento de un campo escalar de dos variables en su propio dominio. Así como podemos imaginar el relieve de una región geográfica mirando su *mapa topográfico*

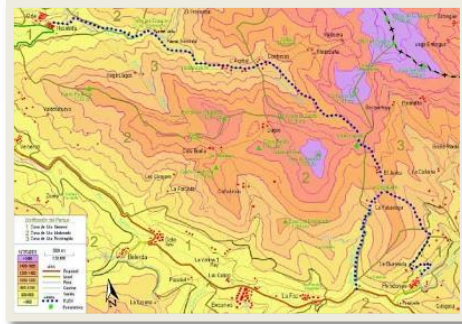


Figura 2.12: El mapa topográfico de una región montañosa.

donde se representan con curvas y diferentes colores las distintas alturas del terreno, se puede tener una noción del comportamiento de un campo escalar graficando sus *conjuntos de nivel*.



Definición 2.3: Para cada valor real $k \in \text{Im}(f)$, se denomina conjunto de nivel k de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ al siguiente subconjunto del dominio de f :

$$L_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D / f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}$$

Se trata de un subconjunto del dominio al que pertenecen todos los puntos del mismo donde la función toma el valor k .

Admitirá representación gráfica sólo si el dominio es un subconjunto de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 .

Para campos escalares de dos variables los conjuntos de nivel son, *en general*, curvas en el plano (decimos *en general* pues hay casos particulares en que pueden no ser curvas).

Estas curvas se denominan líneas o curvas de nivel, y resultan ser las proyecciones, sobre el plano xy , de los puntos de la superficie que están a cierta altura constante: al proyectar sobre el plano xy la intersección de la gráfica de la función con el plano $z = k$, se obtiene la curva de nivel de ecuación

$$L_k = \{(x, y) \in D / f(x, y) = k\}$$

Al considerar distintos valores de $k: k_1, k_2, k_3, \dots$, se obtiene un conjunto de curvas de nivel que conforman el *mapa* o diagrama de contorno.

En el siguiente gráfico se observa la relación que existe entre las curvas de nivel y la gráfica de la función: si las curvas son elevadas hasta la altura que indica el valor k se puede armar un esbozo de la superficie.

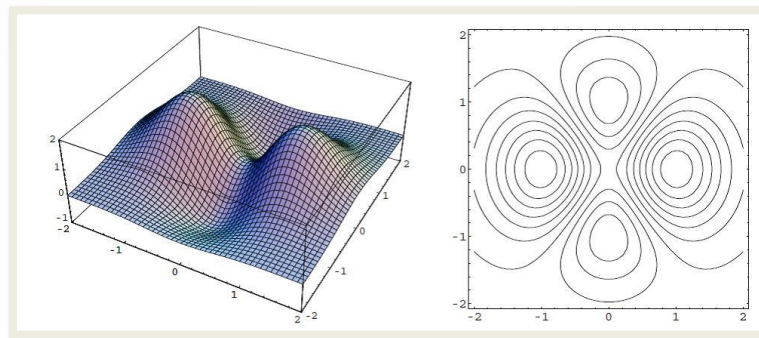
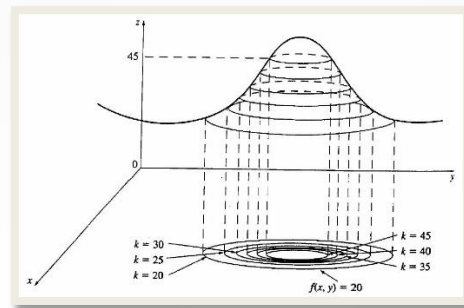


Figura 2.13: Gráfico y conjuntos de nivel de un campo escalar de dos variables.

Como los mapas de contorno se suelen dibujar para valores de k regularmente separados (por ejemplo, $k = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ó $k = 100, 200, 300, \dots$) se observa que la superficie es más “empinada” donde las curvas están más cercanas entre sí y menos empinada cuando se encuentran más separadas.

En los mapas topográficos de regiones montañosas, las curvas de nivel son curvas de elevación constante sobre el nivel del mar: si un individuo transita a lo largo de estas curvas, no asciende ni desciende.

Actividad para resolver y discutir en el Foro



Actividad 2.2: Otro ejemplo de conjuntos de nivel son los *mapas de isotermas e isobaras*:

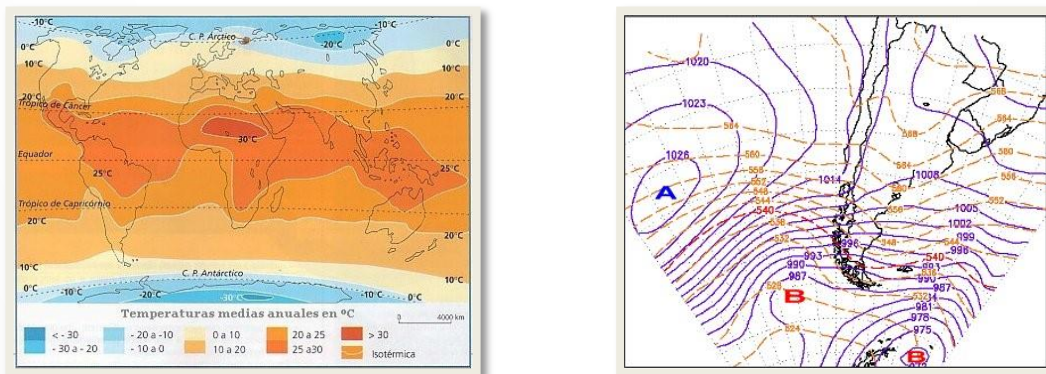


Figura 2.14: Mapas de isotermas e isobaras.

¿Pueden averiguar qué son?

Para campos escalares de tres variables los conjuntos de nivel son, en general, superficies en el espacio que se denominan *superficies de nivel*.

Para esos campos no es posible realizar una gráfica, ya que tendríamos que dibujar en cuatro dimensiones, por lo que las superficies de nivel serán la única manera de tener alguna representación gráfica del comportamiento de estas funciones.

Veamos algunos ejemplos...



Ejemplo 2.12: Retomemos el campo $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Los conjuntos de nivel son $L_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = k\}$, para cada $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Se trata de circunferencias con centro en el origen y radio \sqrt{k} .

El mapa de contorno tiene el siguiente aspecto:

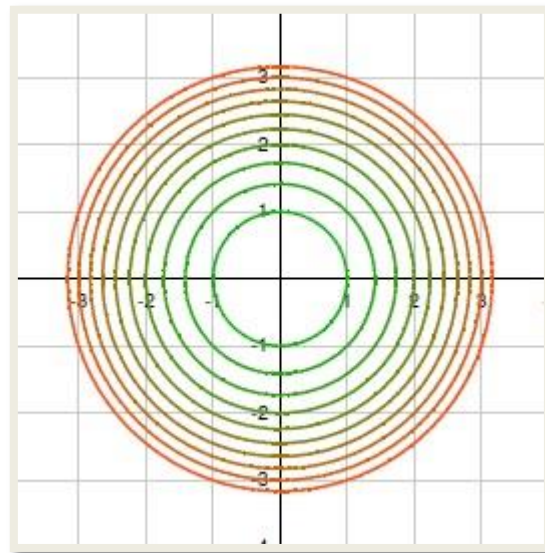


Figura 2.15: Conjuntos de nivel del campo del ejemplo 2.12.

Si se considera el eje z perpendicular en $(0,0)$ al plano del dibujo y se realiza una “copia” de cada curva de nivel a la altura k correspondiente, se podrá hacer un “esbozo” de la gráfica, eventualmente completando la información con las *trazas* con los planos coordenados, que en este caso son las parábolas

$$C_1: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases} \quad y \quad C_2: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Las secciones a alturas $k = 1, 2, 3, \dots$ (“copias” de los conjuntos de nivel, elevadas a la altura correspondiente) así como las trazas, permiten esbozar la gráfica del campo.

Observen que, al no existir (o ser vacíos), los conjuntos de nivel correspondientes a $k < 0$, se puede anticipar que la totalidad de la gráfica se encuentra por sobre el plano $z = 0$:

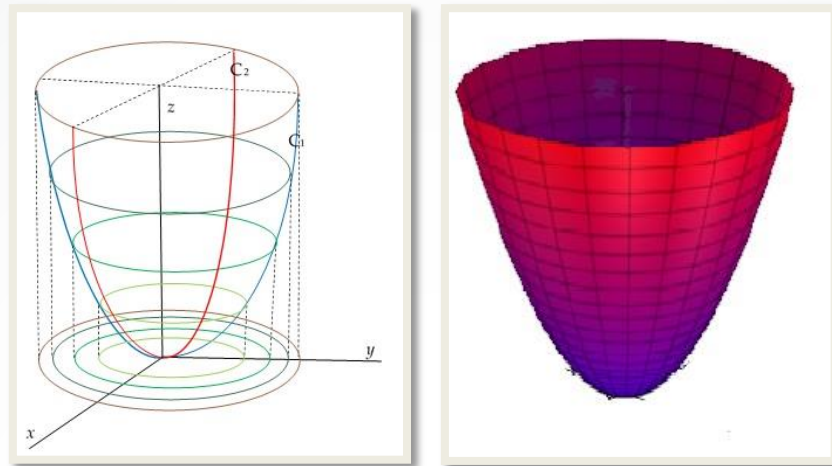


Figura 2.16: Trazas, secciones y gráfica correspondientes al campo del ejemplo 2.12.

Se trata de un paraboloide circular.



Ejemplo 2.13: Consideremos ahora el campo $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Los conjuntos de nivel son $L_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = k^2\}$, para cada $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Se trata de circunferencias con centro en el origen, pero esta vez de radio k .
El mapa de contorno tiene un aspecto muy similar al del campo anterior:

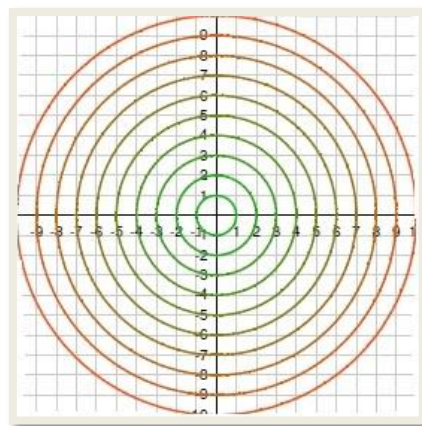


Figura 2.17: Conjuntos de nivel correspondientes al campo del ejemplo 2.13.

Las trazas con los planos coordenados en este caso son

$$C_1: \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = |y| \\ x = 0 \end{cases} \quad y \quad C_2: \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = |x| \\ y = 0 \end{cases}$$

Nuevamente las secciones a alturas $k = 1, 2, 3, \dots$ y las trazas, permiten esbozar la gráfica del campo, que se encuentra en su totalidad por sobre el plano $z = 0$ pues nuevamente son vacíos los conjuntos de nivel correspondientes a $k < 0$:

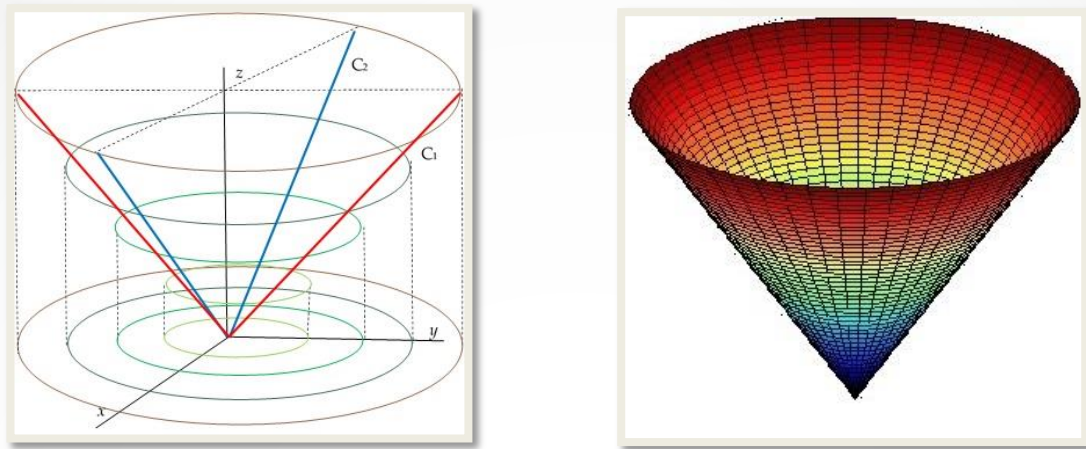


Figura 2.18: Trazas, secciones y gráfica correspondientes al campo del ejemplo 2.13.

Se trata de una semisuperficie cónica circular.

En estos dos últimos ejemplos se observa cómo, diagramas de contorno similares, pueden corresponder a gráficas diferentes. Observen que en este caso los diagramas difieren en la separación entre las curvas de nivel: en el ejemplo 2.12 están igualmente espaciadas mientras que en el ejemplo 2.11 no lo están.



Ejemplo 2.14: Para el campo escalar definido por $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, los conjuntos de nivel son $L_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = k^2\}$, para cada $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, que son superficies esféricas con centro en el origen y radio k :

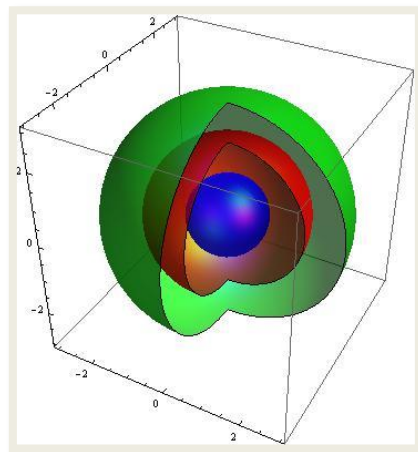


Figura 2.19: Conjuntos de nivel correspondientes al campo del ejemplo 2.14.



Ejemplo 2.15: Para determinar los conjuntos de nivel del campo escalar definido por

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

debemos tener en cuenta las dos partes de la definición de la función.

Para $k = 2$ el conjunto de nivel es $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x + y = 2 \wedge x > 0) \vee (x \leq 0)\}$.
Si $k \neq 2$, el conjunto de nivel es $L_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = k \wedge x > 0\}$.

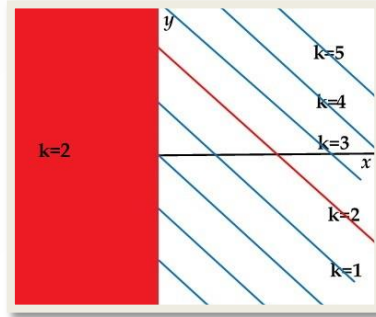


Figura 2.20: Conjuntos de nivel correspondientes al campo del ejemplo 2.15.

En este ejemplo se ve que un conjunto de nivel de un campo escalar de dos variables puede no ser una curva.



Ejemplo 2.16: Para encontrar los conjuntos de nivel del campo escalar definido por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{|z|}{x^2 + y^2} & \text{si } x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

Se observa que el dominio de f es \mathbb{R}^3 y su conjunto imagen es $Im(f) = [0, +\infty)$.

Cabe destacar que para hallar los conjuntos de nivel los valores de k sólo pueden ser no negativos (en virtud de su conjunto imagen)

Notemos que la función se anula si $z = 0$ o bien si $x = y = 0$, por lo que, cuando $k = 0$ se obtiene

$$L_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \text{ ó } x = y = 0\}$$

que corresponde al plano xy y al eje z .

Cuando $k > 0$, el conjunto de nivel es $L_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / |z| = k(x^2 + y^2)\}$ que representa, para cada valor de k , un par de superficies parabólicas simétricas respecto del plano xy , tal como se observa en la figura 2.21.

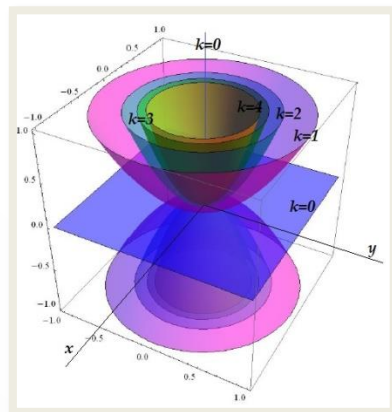


Figura 2.21: Conjuntos de nivel correspondientes al campo del ejemplo 2.16.



Para investigar:

Compartimos algunos enlaces interesantes:

- [Understanding Topographic Maps](#): En este video pueden ver cómo construir conjuntos de nivel para una superficie moldeada en arcilla.
- [Augmented Reality Sandbox](#): Este es un proyecto llevado a cabo por la Universidad de California (un mapa topográfico interactivo)
- [Contour Diagram Grapher](#): En este sitio encontrarán un graficador de curvas de nivel y en la parte inferior del mismo, un link para graficar la superficie correspondiente.
- [3D Calc Plotter](#): Se trata de un graficador de superficies online (para el cual necesitan tener instalado Java).

También les recomendamos que vean el siguiente video creado y diseñado especialmente por el Equipo Docente en el cual vemos cómo se genera un mapa topográfico:



Video 2.1: Construcción de un mapa topográfico.

Actividades para resolver y discutir en el Foro



Actividad 2.3: ¿Pueden cortarse dos curvas de nivel de un campo escalar de dos variables? Pista: ¿qué significaría que un mismo punto (x_0, y_0) perteneciera, a la vez, a L_{k_1} y a L_{k_2} , con $k_1 \neq k_2$?). Generalicen para un campo escalar cualquiera.



Actividad 2.4: ¿Es posible determinar unívocamente un campo, conocido su diagrama de contorno?



Actividad 2.5: Comparen los diagramas de contorno de los campos:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad \text{y} \quad f_3(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

Utilicen esos conjuntos de nivel para esbozar las gráficas de esos campos (si fuera necesario, completen con el estudio de trazas para realizar las gráficas).

Les recomendamos que hagan este trabajo ``a mano'', y luego comparen con el resultado que obtienen usando el graficador de mapas de contorno y de superficies que les sugerimos anteriormente: [Contour Diagram Grapher](#)

Representación de campos vectoriales

Para campos vectoriales de R^2 en R^2 y de R^3 en R^3 se acostumbra graficar, con origen en cada punto del dominio, un vector flecha que represente el valor vectorial del campo en ese punto:

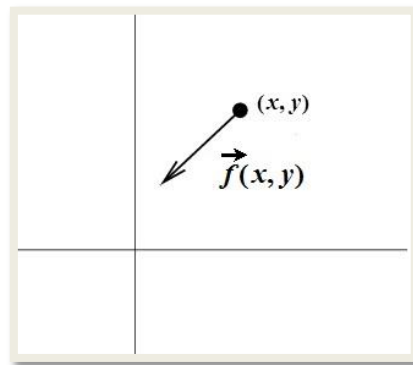


Figura 2.22: Un campo vectorial aplicado en un punto del plano.

Veamos algunos ejemplos...



Ejemplo 2.17: El campo $\vec{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$ se representa mediante el siguiente diagrama

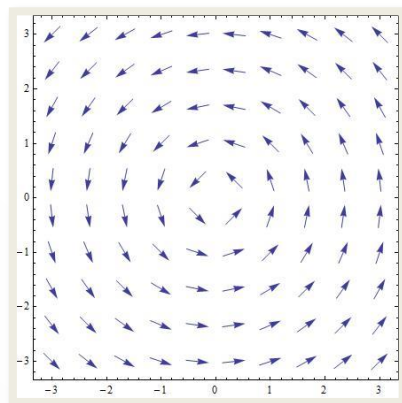



Figura 2.23: Representación del campo vectorial del ejemplo 2.17.

Si imaginan que se trata del campo de velocidades de un líquido, por ejemplo, pueden intuir qué trayectoria seguiría, bajo la acción del fluido, una partícula liviana que se dejara caer suavemente en un punto del plano.

 **Ejemplo 2.18:** El campo $\vec{f}(x, y, z) = (-y, 2z, x)$ se representa mediante el siguiente diagrama:

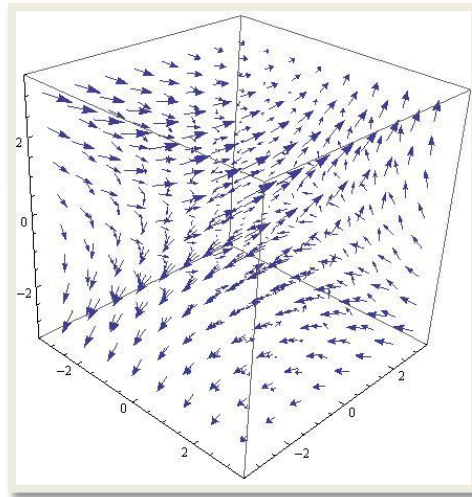


Figura 2.24: Representación del campo vectorial del ejemplo 2.18.

En [Windyty](#) podrán ver un ejemplo interesante de campo vectorial que además cambia con el tiempo...

Representación de funciones vectoriales

Las funciones vectoriales, con dominio en R e imagen en R^n , admiten una representación para los casos en que $n = 2$ y $n = 3$.

En estos casos se acostumbra representar el recorrido o imagen de la función, en el plano o en el espacio, según corresponda.


Dada, por ejemplo, $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$ para $t \in [a, b]$, a medida que variable t va recorriendo los valores del intervalo $[a, b]$, $(x(t), y(t))$ va representando puntos del plano.

Si $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas, el par $(x(t), y(t))$ irá describiendo una curva en el plano.

De modo similar, $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t \in [a, b]$, describirá una curva en el espacio si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones continuas.

En general, la variable t se llama parámetro y, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ con $t \in [a, b]$ se denominan ecuaciones paramétricas de una curva en R^3 . Esta parametrización se emplea comúnmente en Física para describir, por ejemplo el movimiento de una partícula en función del tiempo t transcurrido.

Veamos algunos ejemplos...

 **Ejemplo 2.19:** La función $\vec{f}(t) = (t, t^2)$ para $t \in [-2, 1]$, describe el trozo de parábola $y = x^2$ que va desde el punto $(-2, 4)$ hasta el punto $(1, 1)$ a medida que t va variando entre -2 y 1 . Observar que esta descripción involucra un sentido de recorrido (en este caso, desde el $(-2, 4)$ - punto inicial - hasta el $(1, 1)$ - punto final). La función vectorial $\vec{f}(t) = (t, t^2)$ se dice que es una parametrización del arco de parábola.

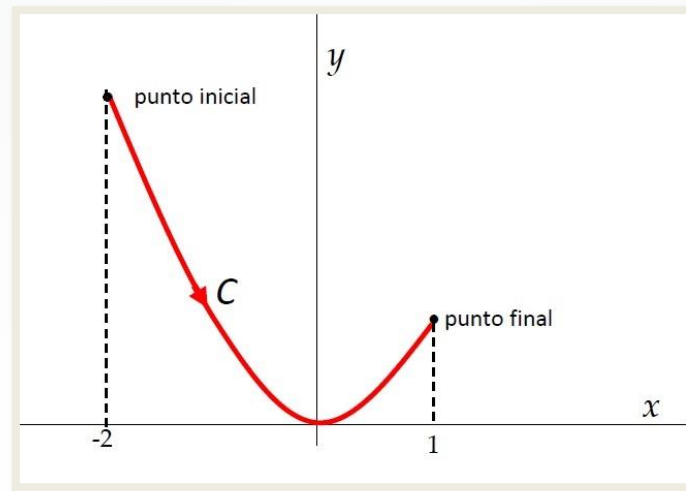


Figura 2.25: Representación de la función vectorial del ejemplo 2.19.



Ejemplo 2.20: La función $\vec{f}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$, describe una circunferencia con centro en el origen y radio 1, ya que $x = \cos(t)$ e $y = \sin(t)$ verifican que $x^2 + y^2 = 1$. Dando los valores $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ se observa que el sentido de recorrido es *antihorario*. El punto inicial y final coinciden, por lo que la curva es *cerrada*.

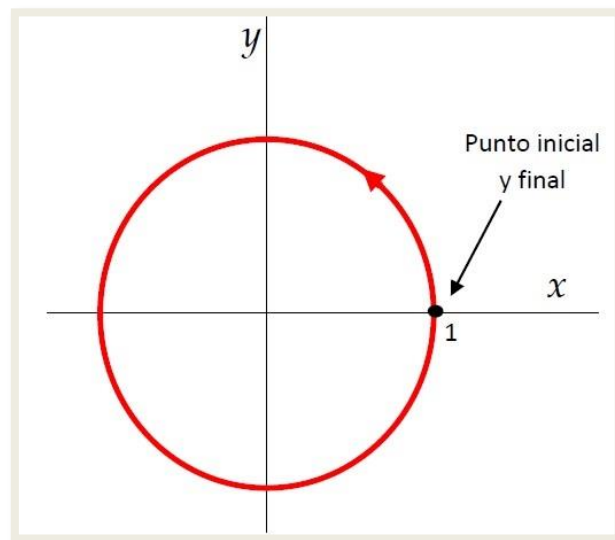


Figura 2.26: Representación de la función vectorial del ejemplo 2.20.



Ejemplo 2.21: La función $\vec{f}(t) = (2\sin(t), t, 2\cos(t))$ para $t \in [0, 4\pi]$, describe una curva en el espacio; a medida que $x = 2\sin(t)$ y $z = 2\cos(t)$ completan dos giros (ya que $t \in [0, 4\pi]$, la ordenada y avanza entre 0 y 4π , describiendo un "resorte", que recibe el nombre de hélice circular:

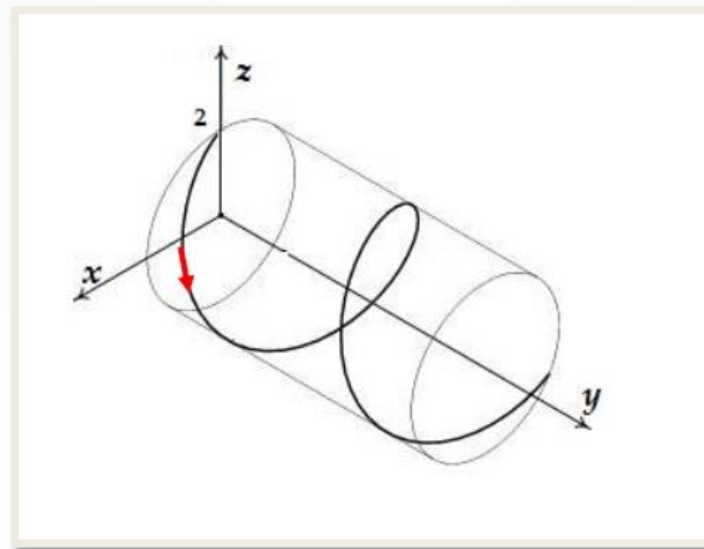


Figura 2.27: Representación de la función vectorial del ejemplo 2.21.



Ejemplo 2.22: La función $\vec{f}(t) = (\sin(t), \sin(t) + \cos(t), \cos(t))$ para $t \in [0, \pi]$, describe una curva plana en el espacio, pues todos sus puntos verifican que $y = x + z$, que es la ecuación de un plano; al mismo tiempo, $x = \sin(t)$ y $z = \cos(t)$ verifican que $x^2 + z^2 = 1$, que corresponde a la ecuación de un cilindro de eje y , sobre el que se completa medio giro (pues $t \in [0, \pi]$). La curva es un trozo de la elipse que se obtiene cortando el cilindro con el plano oblicuo de ecuación $y = x + z$:

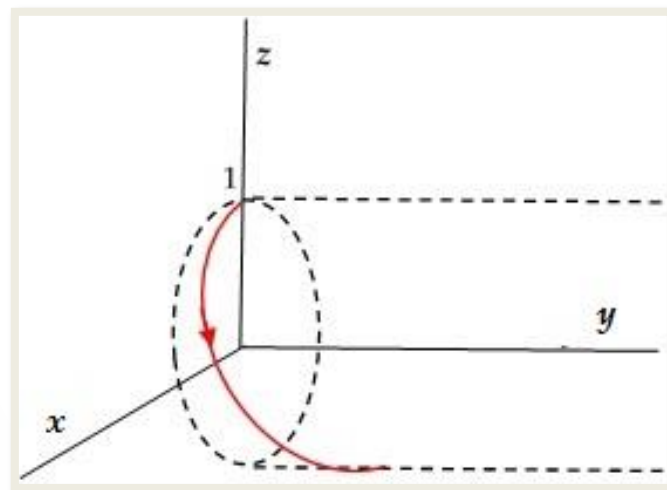


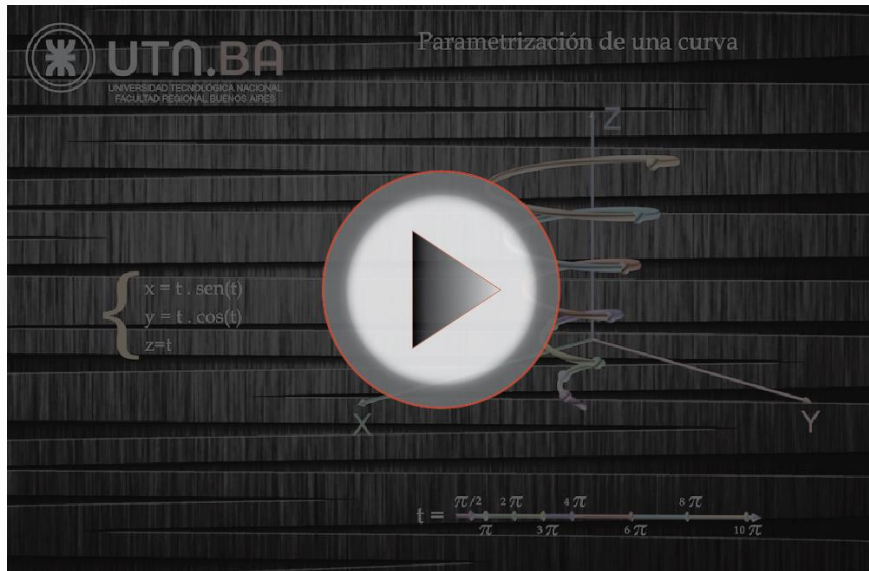
Figura 2.28: Representación de la función vectorial del ejemplo 2.22.



Para investigar

- [Parametric Curves On The Plane](#): Es un graficador de curvas en el plano.
- [Parametric](#): Otro graficador de curvas en el plano.
- [Parametric Curves in 3D](#): Es un graficador de curvas en el espacio tridimensional.

También les recomendamos que vean el siguiente video creado y diseñado especialmente por el Equipo Docente sobre curvas paramétricas:



Video 2.2: Visualización de la parametrización de una hélice cónica.

Nociones de Topología en R^n

Distancia en R^n

Para estudiar las nociones de límites y continuidad de funciones escalares y vectoriales necesitamos generar una noción de *cercanía*. Por ello necesitamos medir *distancias* entre los puntos de los conjuntos donde trabajemos.

Vamos a dotar de una *estructura de espacio métrico* al conjunto de vectores R^n .



Definición 2.4: Dados dos puntos \vec{x} e \vec{y} en R^n definiremos la distancia euclídea entre ellos del siguiente modo:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Esta definición es la que ya hemos utilizado para medir distancias en R^2 y R^3 :

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Al símbolo $\|\cdot\|$ se lo denomina “norma”, que en la definición 2.4 se llama norma euclídea o norma 2. A continuación, figuran las distancias mencionadas en el plano y en el espacio tridimensional.

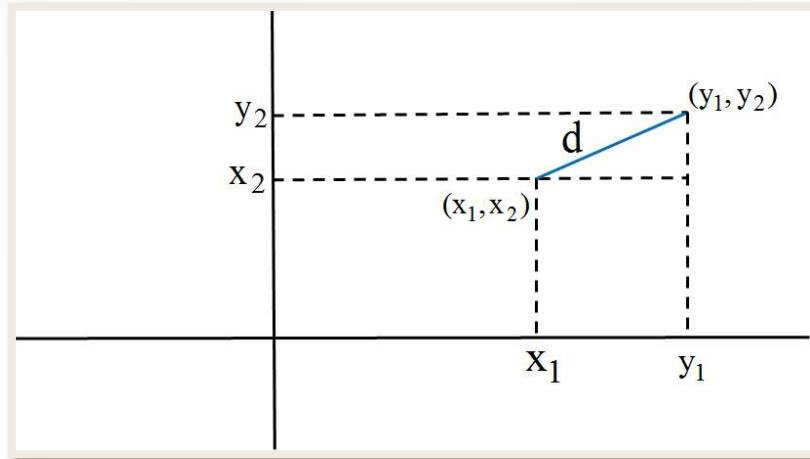


Figura 2.29: Distancia entre dos puntos del plano.

La expresión de la distancia euclídea entre dos puntos de R^2 se obtiene fácilmente mediante el Teorema de Pitágoras. ¿Pueden verificarlo?

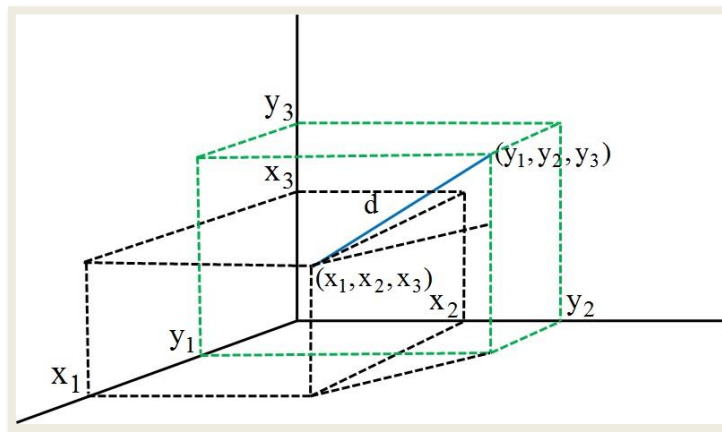


Figura 2.30: Distancia entre dos puntos del espacio tridimensional.

La expresión de la distancia euclídea entre dos puntos de R^3 se obtiene aplicando dos veces el Teorema de Pitágoras. ¿Pueden hacerlo?

Esta distancia verifica las siguientes propiedades, que son las que caracterizan a R^n como espacio métrico:

- es definida positiva: $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ y es 0 sólo si $\vec{x} = \vec{y}$;
- es simétrica: $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$;
- verifica la desigualdad triangular: $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R^n$.

Notemos que...

Las dos primeras propiedades son muy fáciles de verificar, a partir de la definición de la distancia.

La desigualdad triangular es algo más complicada, pero en R^2 y R^3 se corresponde con la posibilidad de construir un triángulo (de allí su nombre).

Ésta no es la única manera posible de medir distancias en R^n , existen otras, por ejemplo: La norma 1 y la norma infinita. Investiguen el significado geométrico de dichas normas.

Bolas o entornos en R^n



Definiciones 2.5: Dados un punto $\vec{x}_0 \in R^n$ y un número positivo r , definiremos:

Entorno abierto o n-bola abierta de centro \vec{x}_0 y radio r :

$$B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in R^n / d(\vec{x}, \vec{x}_0) < r\}$$

La n-bola cerrada de centro \vec{x}_0 y radio r :

$$B[\vec{x}_0, r] = \{\vec{x} \in R^n / d(\vec{x}, \vec{x}_0) \leq r\}$$

La n-bola abierta reducida de centro \vec{x}_0 y radio r :

$$B^*(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in R^n / 0 < d(\vec{x}, \vec{x}_0) < r\}$$

Visualicemos la interpretación geométrica de las n-bolas en dos y tres dimensiones y empleando la norma euclídea. En R^2 representan círculos (con o sin la circunferencia según sea bola cerrada o bola abierta respectivamente) En R^3 representan esferas (con o sin la superficie esférica según sea la bola cerrada o abierta respectivamente)

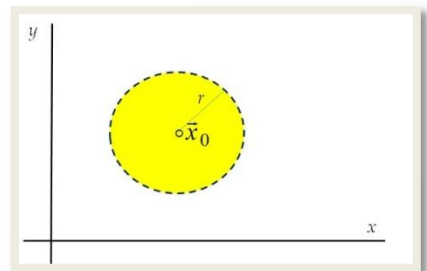
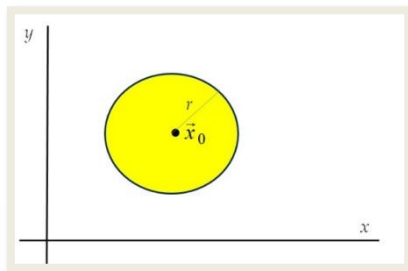
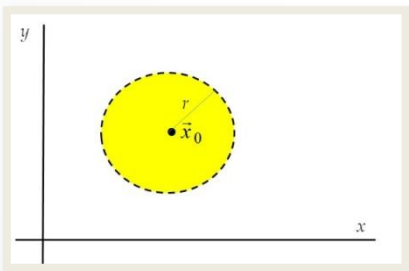


Figura 2.31: Entornos circulares en el plano.

Y en R^3 , respectivamente a las esferas

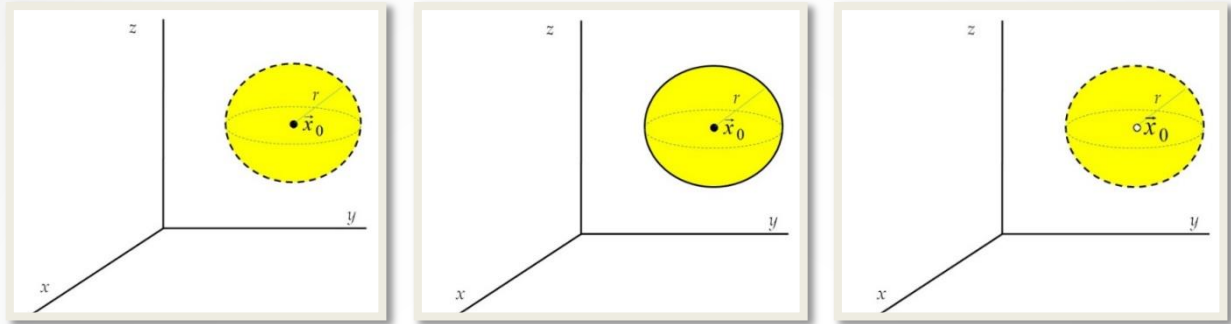


Figura 2.32: Entornos esféricos en el espacio.

Para $n \geq 4$ no existe representación gráfica posible.

Actividad para resolver y discutir en el Foro



Actividad 2.6: Investiguen cuál es la interpretación geométrica de las bolas abiertas cerradas y reducidas en el plano y en el espacio empleando las otras normas especificadas con anterioridad (norma 1 y norma infinita)

Topología de R^n



Definiciones 2.6: Dados un punto $\vec{x} \in R^n$ y un subconjunto $A \subset R^n$, diremos que:

- \vec{x} es un punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r) \subset A$
- \vec{x} es un punto exterior de A si es interior al complemento de A , vale decir si existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r) \subset A^c = R^n - A$.
- \vec{x} es un punto frontera de A si para todo $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r)$ contiene puntos de A y de su complemento.
- \vec{x} es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, $B^*(\vec{x}, r)$ contiene infinitos puntos de A .
- \vec{x} es un punto aislado de A si existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r) \cap A = \{\vec{x}\}$.

Dado el subconjunto $A \subset R^n$, indicaremos con...

- A^0 el conjunto de puntos interiores de A .
- $Ext(A)$ el conjunto de puntos exteriores de A .
- ∂A el conjunto de puntos frontera de A .
- A' , el conjunto de puntos de acumulación de A . Se denomina *conjunto derivado* de A .
- $I(A)$, el conjunto de puntos aislados de A .
- \bar{A} el conjunto $A \cup A'$. Se denomina *clausura* de A .



Definiciones 2.7: Dado el subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diremos que...

- A es abierto si cada punto $\vec{x} \in A$ es un punto interior de A .
- A es cerrado si su complemento, es decir $A^c = \mathbb{R}^n - A$, es abierto.
- A es acotado si existe $r > 0$ tal que $A \subset B(\vec{0}, r)$.
- A es compacto si es cerrado y acotado.

Es sencillo verificar (recurriendo a las definiciones) que...

- $A^0 \subset A$.
- A es abierto si y sólo si $A^0 = A$.
- A es cerrado si y sólo si $\partial A \subset A$.
- A es cerrado si y sólo si $\bar{A} \subset A$

Finalmente, en relación a la conectividad dentro del conjunto...



Definiciones 2.8: Dado el subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diremos que...

- A es convexo si con cada par de puntos de A también pertenece a A todo el segmento que los une.
- A es conexo si no puede incluirse en una unión disjunta de conjuntos abiertos no vacíos. (Intuitivamente, no es conexo si está formado por varias "partes").
- A es arco conexo si para cada par de puntos de A existe un arco de curva contenido en A que los une.
- Si A es conexo, se dice que es, además, simplemente conexo si toda curva cerrada contenida en A se puede deformar de manera continua hasta reducirla a un punto, sin salir del conjunto A .



Ejemplo 2.23: Consideremos el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y > 0\}$.

Se trata, en el plano, de los cuadrantes primero y tercero, sin considerar los ejes.

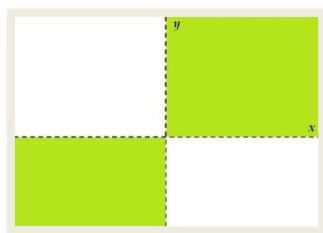


Figura 2.33: El conjunto del ejemplo 2.23.

El conjunto *es abierto* pues cada uno de sus puntos admite un disco, con centro en ese punto, totalmente contenido en el conjunto, aún los puntos muy cercanos a los ejes para los cuales, probablemente, haya que considerar un disco de radio muy pequeño.

El conjunto *no es cerrado* pues su complemento consiste en los cuadrantes segundo y cuarto, incluyendo los ejes, y los puntos de los ejes no admiten discos totalmente contenidos en los cuadrantes segundo y/o cuarto.

El conjunto *no es acotado* pues no puede incluirse en un disco de radio finito.

La *frontera* está constituida por los ejes coordenados.

El conjunto *no tiene puntos aislados*.

$$A' = \bar{A} = A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geq 0\}.$$

El conjunto *no es convexo* pues, por ejemplo, el segmento que une los puntos del conjunto (2,3) y (-1,1) no está contenido en el conjunto.

El conjunto *no es conexo* pues puede escribirse como una unión de abiertos disjuntos no vacíos: cada uno de los cuadrantes que lo forman.

El conjunto *no es arco conexo* pues, por ejemplo, (2,3) y (-1,1) no pueden ser unidos por ninguna curva totalmente contenida en el conjunto.

El conjunto *no es simplemente conexo* pues no es conexo.



Ejemplo 2.24: Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y + x^2 - 1 \geq 0\}$.

Se trata, en el plano, de los puntos que están por arriba o sobre la parábola de ecuación $y = -x^2 + 1$

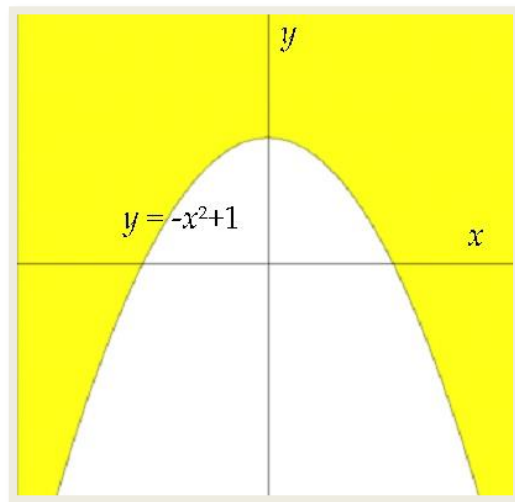


Figura 2.34: El conjunto del ejemplo 2.24.

El conjunto *no es abierto* pues cada uno de los puntos de la parábola no admite ningún disco, con centro en ese punto, totalmente contenido en el conjunto.

El conjunto *es cerrado* pues su complemento consiste en los puntos por debajo de la parábola, sin incluir a ésta, y cada uno de esos puntos admite un disco con centro en él, totalmente contenido en el complemento de A.

El conjunto *no es acotado* pues no puede incluirse en un disco de radio finito.

La *frontera* está constituida por los puntos de la parábola $y = -x^2 + 1$.

El conjunto *no tiene puntos aislados*.

$$A' = \bar{A} = A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y + x^2 - 1 \geq 0\}$$

El conjunto *no es convexo* pues, por ejemplo, el segmento que une $(1,0)$ con $(-1,0)$ no está totalmente contenido en el conjunto.

El conjunto *es conexo* pues está constituido por una sola “parte”.

El conjunto *es arco conexo* pues todo par de puntos del conjunto puede unirse con una curva totalmente contenida en el conjunto.

El conjunto *es simplemente conexo* pues toda curva cerrada contenida en A se puede deformar de manera continua hasta reducirla a un punto, sin salir del conjunto.



Ejemplo 2.25: Consideremos el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = \vec{0} \vee 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Se trata, en el espacio, del origen y de los puntos que están estrictamente por fuera de la esfera con centro en el origen y radio 1 y por dentro o sobre la esfera con centro en el origen y radio 2.

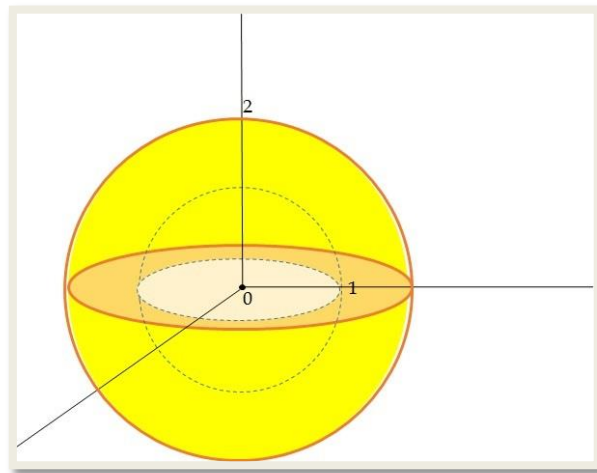


Figura 2.35: El conjunto del ejemplo 2.25.

El conjunto *no es abierto* pues, por ejemplo, ninguno de los puntos de la esfera de radio 2 admite una “esferita” con centro en ese punto, totalmente contenida en el conjunto.

El conjunto *no es cerrado* pues en su complemento están los puntos de la esfera de radio 1, y ninguno de esos puntos admite una “esferita” con centro en él, totalmente contenida en el complemento de A .

El conjunto *es acotado* pues se puede incluir en una esfera con centro en el origen, y de radio finito; de radio 3, por ejemplo.

La *frontera* está constituida por el origen y los puntos de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

El conjunto *tiene un punto aislado*: el origen.

$$A' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

$$\bar{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = \vec{0} \vee 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

El conjunto *no es convexo* pues, por ejemplo, el segmento que une $(0,0,0)$ con $(0,0,2)$ no está totalmente contenido en el conjunto.

El conjunto *no es conexo* pues está constituido por dos “partes”: una contiene al origen y la otra, la región entre las esferas.

El conjunto *no es arco conexo* pues, por ejemplo, el origen no puede unirse con ningún otro punto del conjunto mediante una curva totalmente contenida en el conjunto.



Actividades para resolver y discutir en el Foro



Actividad 2.7: Muestren que las cualidades de ser “abierto” y “cerrado” no son excluyentes.



Actividad 2.8: ¿Existen conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez? (Pista: ¿es \mathbb{R}^2 abierto? ¿Cuál es su complemento? ¿Es el conjunto vacío abierto? ¿Cuál es su complemento? ¿Pueden generalizar?



Actividad 2.9: Realicen un análisis topológico completo (como les mostramos en los ejemplos) del dominio del siguiente campo escalar:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{-x[(x-2)^2 + (y-2)^2]}}{y[(x-2)^2 + (y+2)^2]}$$



Actividad 2.10: De igual manera con el dominio del siguiente campo escalar:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x[2 - |x| - |y|]}}{|x| + |y| - 1}$$



Actividad 2.11: De igual modo con el dominio de

$$f(x, y, z) = \ln\left[\frac{(z-1)(2-z)}{1-x^2-y^2}\right]$$



Bibliografía:

- Apostol, Tom. *Calculus* Vol 1 y 2. Buenos Aires, Ed. Reverté S.A., 2° Edición.
- Pita Ruiz, Claudio. *Cálculo Vectorial*. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A 1° edición.
- Purcell, Edwin, Varberg, Dale y Rigdo, Steven. *Cálculo con Geometría Analítica*. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. 6° edición.
- Mardsen, Jerrold E. y Tromba, – Anthony. *Cálculo Vectorial I* Ed. Addison Wesley Longman, 4° edición.
- Castillo. Christina y otros. *Mathematica (Domine al Mathematica 99%)*. Ed. Paraninfo.
- Wolfram, Stephen. *The Mathematica Book*. Cambridge University Press.

