



Unidad 11 – Teoremas integrales. Teoremas del análisis vectorial. Green. Gauss. Stokes

Para esta unidad nos proponemos los siguientes objetivos:

1. Comprender y aplicar los operadores vectoriales más comunes.
2. Orientar superficies y curvas cerradas.
3. Conocer los teoremas de Green, Gauss y Stokes, comprender las relaciones entre ellos y sus diferencias.
4. Aplicar los teoremas integrales para el cálculo del flujo de campos vectoriales.

Una parte de las Matemáticas denominada "Cálculo Vectorial o Análisis Vectorial" constituye el campo disciplinar acerca del análisis real multivariable de vectores bidimensionales o en múltiples dimensiones. Desarrolla herramientas (fórmulas y métodos) para resolver problemas importantes de la Ingeniería, las Ciencias Físicas, la Mecánica y el Electromagnetismo. Existen tres operadores vectoriales de gran relevancia en el Análisis Vectorial:

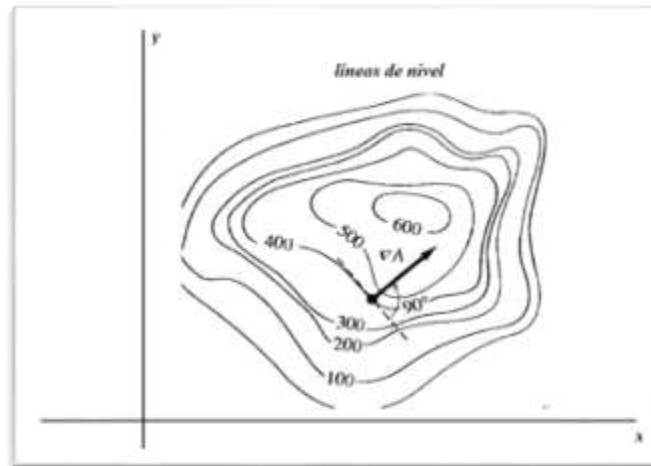
1. El GRADIENTE de un campo escalar. Ya presentado cuando se analizó la diferenciabilidad de campos escalares. Como ya sabemos el Gradiente de un campo escalar es un campo vectorial cuya norma mide la tasa de variación en la dirección de dicho vector. El vector gradiente es ortogonal a los conjuntos de nivel del campo escalar y "apunta" en la dirección de máximo crecimiento del campo. Su norma proporciona el valor de la derivada direccional máxima.
2. La DIVERGENCIA de un campo vectorial. Representa la variación de un campo vectorial. La divergencia de un campo vectorial es un campo escalar. ¿Cuál es el sentido físico de esta variación? Proporciona una noción de la tendencia de un campo vectorial a "crearse" o diverger hacia ciertos puntos.
3. El ROTOR o ROTACIONAL de un campo vectorial. El rotacional de un campo vectorial es otro campo vectorial que mide la tendencia de rotación del campo vectorial alrededor de un punto. La palabra ROTOR hace referencia inevitablemente a la rotación. Una idea intuitiva de su significado podría ser que al colocar una rueda de paletas infinitamente pequeña en el interior del campo vectorial, ella girará.

Formalicemos definiendo estos operadores.



Definición 11.1: Gradiente de un campo escalar

Es un operador que transforma un campo escalar de $n \geq 1$ variables en un campo vectorial de R^n y se indica con la letra NABLA ∇ . En efecto, sea la función $f : D \subseteq R^n \rightarrow R$ con D un conjunto abierto no vacío y f diferenciable, entonces el Gradiente de f es el campo vectorial $\vec{\nabla} f : D \rightarrow R^n$ definido por $\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$



Propiedades de ortogonalidad del gradiente a los conjuntos de nivel



Ejemplo 11.1: Veamos el campo de gradiente asociado al siguiente campo escalar $T(x, y) = x \cdot e^{-(x^2+y^2)}$. Supongamos que mide temperatura cuya gráfica aproximada se muestra en la figura 11.1:

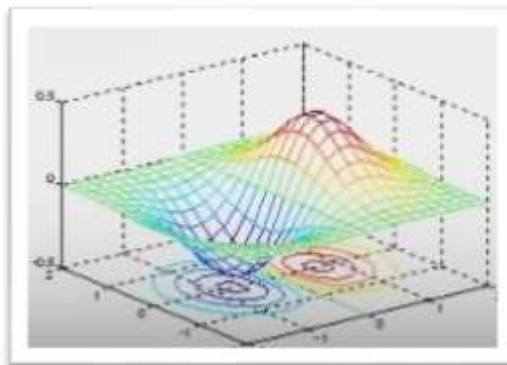


Figura 11.1: Gráfica del campo escalar $T(x, y) = x \cdot e^{-(x^2+y^2)}$

Algunas líneas de nivel de T (isotermas) se pueden ver en la Figura 11.2

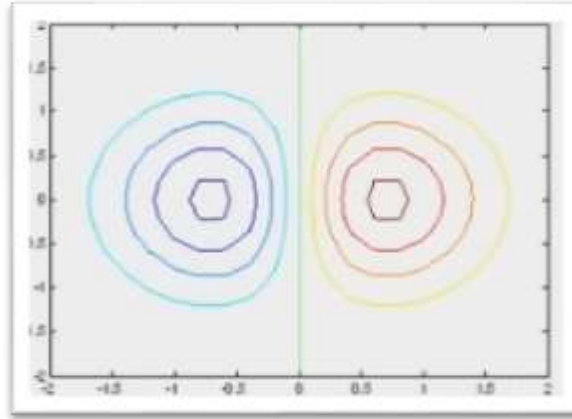


Figura 11.2: Líneas de nivel de $T(x, y) = x.e^{-(x^2+y^2)}$

El campo de gradientes de $T(x, y) = x.e^{-(x^2+y^2)}$ es:

$$\nabla T(x, y) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) = (e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2 e^{-(x^2+y^2)}, -2xy e^{-(x^2+y^2)}) = ((1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}, -2xy e^{-(x^2+y^2)})$$

La representación gráfica de este campo vectorial se puede ver en la Figura 11.3

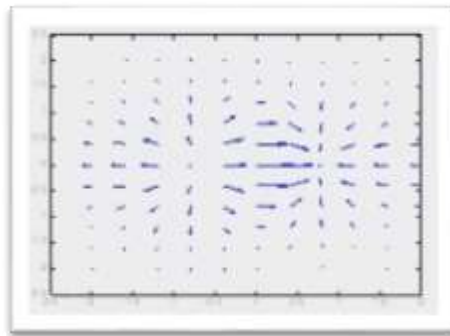


Figura 11.3: Campo de direcciones



Definición 11.2: Divergencia de un campo vectorial

Es un operador que transforma un campo vectorial de R^n en un campo escalar de R^n y se indica con el símbolo "div". En efecto, sea el campo vectorial $\vec{F} : D \subseteq R^n \rightarrow R^n$ con D un conjunto abierto no vacío y $\vec{F} \in C^1$ tal que $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, entonces la Divergencia del campo vectorial \vec{F} es el campo $\text{div} \vec{F} : D \rightarrow R$ definido por:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$



Este campo escalar puede pensarse como el producto escalar entre el operador Nabla y el campo \vec{F} , es decir:

$$\text{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

Es preciso destacar que la divergencia sólo se escribe como un producto escalar, pero en realidad no lo es, ya que los elementos del operador nabla no tienen argumento y, por tanto, carecen de sentido. En consecuencia, la notación usando el producto escalar sólo es útil para recordar la expresión de la divergencia en forma sencilla. Es simplemente una forma de representación simbólica.

La divergencia de un campo de velocidad de un fluido da cuenta de la variación del flujo del fluido, es decir, mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente en una superficie que encierra un elemento de volumen infinitesimal, proporcionando la *tasa de expansión o contracción del fluido*.

Enfatizamos que la divergencia de un campo vectorial es un valor escalar con signo. Si la divergencia es positiva, significa que el campo emana hacia el exterior de dicho punto y, por tanto, es una **fente o manantial**. Si la divergencia es negativa, el campo converge hacia un punto del interior del volumen, y se lo denomina un **sumidero**. Si la divergencia es cero el campo neto (diferencia entre las líneas de flujo entrantes y salientes) sería nulo. En ese caso, decimos que el fluido es **incompresible**.

En el caso de los campos magnéticos se comprueba la ausencia de fuentes y/o sumideros, es decir tienen divergencia nula.

Los campos vectoriales que admiten divergencia nula se denominan campos solenoidales, se destacan porque sus líneas de campo son cerradas sobre sí mismas, es decir, no tienen extremos donde se originan y terminan. Si existieran dichos extremos, el flujo neto alrededor de uno de ellos sería no nulo, lo cual significaría la presencia de una fuente o sumidero del campo.

Si el volumen elegido solamente contiene fuentes o sumideros de un campo, entonces su divergencia es siempre distinta de cero.

Para comprender mejor el significado de este operador podemos imaginar que el agua circula libremente por un caño de gran diámetro y sin rozamiento. Cada partícula de agua está afectada por una velocidad V (todas a la misma velocidad V) Si se aísla un volumen interior al caño y se estudia la cantidad de agua que ingresa y egresa del volumen interior elegido, se observa que son las mismas, es decir, la cantidad de agua que ingresa coincide con la que egresa ya que el líquido no se comprime ni se expande. De esta forma, decimos que el campo vectorial de velocidades del líquido que circula tiene divergencia nula. No existen regiones interiores del volumen en las que se acumule (divergencia positiva) líquido ni en las que se pierda líquido (divergencia negativa)

Ahora bien, si imaginamos que el caño está cerrado por ambos extremos y contiene un gas a presión y luego se libera uno de los extremos, el análisis realizado anteriormente sobre el volumen daría un resultado diferente, ya que las velocidades de salida del extremo liberado son mayores que las de entrada del extremo cerrado. En este caso, la divergencia es diferente de cero (concretamente divergencia negativa)

Si $\text{div}\vec{F} > 0$ fuente o manantial (existen más líneas de flujo salientes que entrantes)

Si $\text{div}\vec{F} < 0$ sumidero (existen más líneas de flujo entrantes que salientes)

Si $\text{div} \vec{F} = 0$, entonces el fluido es incompresible y el campo \vec{F} se dice solenoidal (no hay fuentes ni sumideros, existe la misma cantidad de líneas de flujo salientes que entrantes)

Observaciones sobre la divergencia de un campo vectorial

1. La divergencia de un campo vectorial define punto a punto la intensidad de las fuentes o sumideros del campo.
2. La divergencia del campo gravitacional indica la densidad de materia en un punto.
3. La divergencia del campo de velocidad de un fluido indica si existen fuentes o sumideros del fluido.
4. La divergencia del campo eléctrico indica la presencia de densidad de carga.
5. La divergencia del campo magnético es siempre nula en tanto que no existe una carga magnética elemental.

Un ejemplo muy frecuente en Física es la Ley de Gauss: "El flujo del campo eléctrico \vec{E} a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga q contenida dentro de la superficie, dividida por la constante ϵ_0 "

$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (ρ es densidad volumétrica de carga, ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío, recuerde que

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2 = 8,8542 \text{ pF} / \text{m})$$

Esto indica que el campo eléctrico diverge hacia una distribución de carga; es decir, que el campo eléctrico está dirigido de una carga a otra. Esta noción será analizada mediante el concepto de líneas de campo que veremos posteriormente.



Ejemplo 11.2: Para los siguientes campos vectoriales calculamos la divergencia.

a) $\vec{F} = (x, y) \Rightarrow \text{div} \vec{F} = 1 + 1 = 2 > 0$

b) $\vec{F} = (0, 1) \Rightarrow \text{div} \vec{F} = 0 + 0 = 0$

c) $\vec{F} = (-x, -y) \Rightarrow \text{div} \vec{F} = -1 - 1 = -2 < 0$

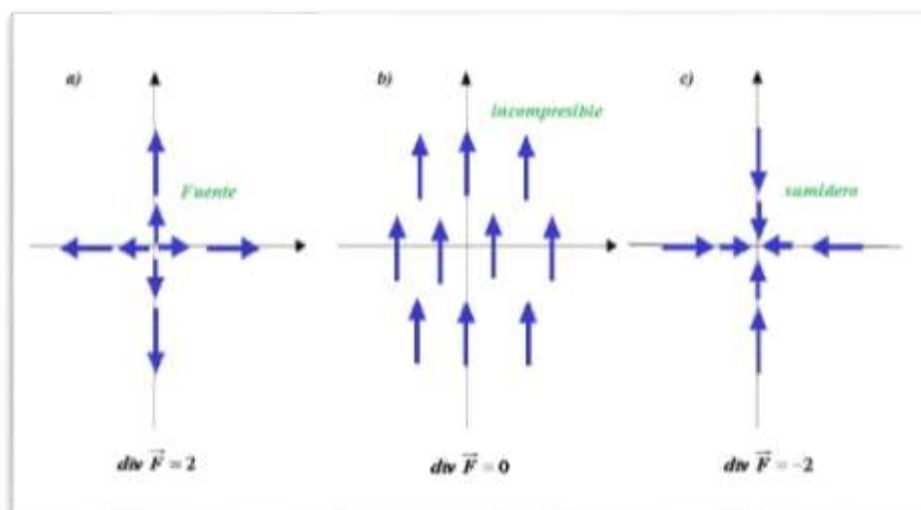


Figura 11.4: Campos vectoriales correspondientes al ejemplo 11.2

Actividad para resolver y discutir en el foro



Actividad 11.1: Encuentre un campo vectorial cuya divergencia sea:

a. 1

b. $yz + z^2$

c. $\sqrt{x^2 + z^2}$



Definición 11.3: Rotor o Rotacional de un campo vectorial

Es un operador que transforma un campo vectorial de R^3 en un campo vectorial de R^3 y se indica con el símbolo "rot" o "curl"¹. En efecto, sea el campo vectorial $\vec{F} : D \subseteq R^3 \rightarrow R^3$ con D un conjunto abierto no vacío y $\vec{F} \in C^1$ tal que $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, entonces el *Rotor* o *el Rotacional* del campo vectorial \vec{F} es el campo $rot \vec{F} : D \rightarrow R^3$ definido por:

$$rot \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Este campo vectorial puede pensarse como el producto vectorial entre el operador Nabla y el campo \vec{F} , es

$$\text{decir: } rot \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Es necesario resaltar que el rotor sólo se escribe como un determinante, pero en realidad no lo es, ya que los elementos de la segunda fila no tienen argumento y, por tanto, carecen de sentido. Además, dicho determinante sólo puede desarrollarse por la primera fila. En síntesis, la notación usando el determinante sólo sirve para recordar fácilmente la expresión del rotor.

Para comprender con mayor claridad el significado de este operador vectorial, supongamos llenar con agua una bañera y luego la desagotamos, en la rejilla se observa que el agua fluye haciendo "remolinos" como se puede ver en la Figura 11.6, ya que el líquido gira en un sentido concreto. Si colocamos la ruedita de paletas, mencionada anteriormente, figura 11.5, dentro del flujo saliente, siempre girará cualquiera sea su ubicación dentro del flujo saliente con una velocidad proporcional al del rotacional. Se trata pues de un campo de velocidades rotacional, es decir, $rot \vec{F} \neq \vec{0}$ y para definir la dirección y sentido del rotor se emplea la regla del tirabuzón (o de la mano derecha).

¹ Maxwell, introdujo el término "curl" (bucle, rizo o rotor) de un campo de fuerzas

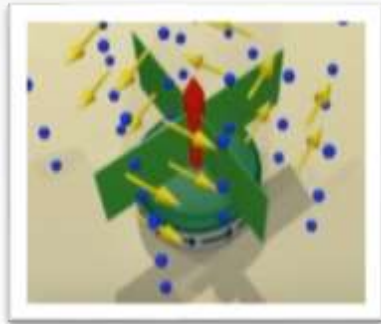


Figura 11.5: Rueda de paletas en un campo rotacional

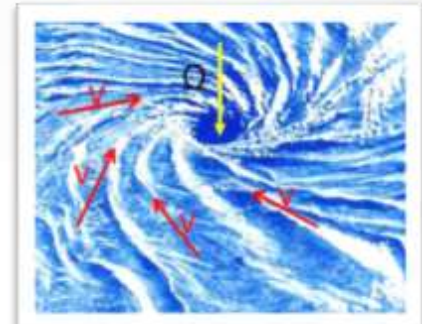


Figura 11.6: Rotación de fluidos

Un caso similar ocurre con ciertos canales donde pasa agua (o algún otro medio líquido) que circula con frotamiento. La velocidad va decreciendo a medida que se aproxima a las paredes. Luego, la rueda de paletas girará en el interior del medio líquido. En consecuencia, el campo de velocidades del líquido que circula también es rotacional ($\text{rot} \vec{F} \neq \vec{0}$). Si se diseñan canales y curvas para tratar de que la rueda no gire (o sólo en ciertas regiones) habrá menores pérdidas de circulación, o sea, el rotor o rotacional está relacionado a energía de pérdidas o torbellinos durante la circulación de medios líquidos. Los automóviles con formas aerodinámicas mejoran la circulación minimizando la pérdida por frotamiento.

Un campo vectorial con $\text{rot} \vec{F} \neq \vec{0}$ se dice **rotacional** como se visualiza en la Figura 11.7

Un campo vectorial con $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ se dice **irrotacional**. Cuando se indica el movimiento de un fluido, si $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ indica ausencia de **vorticidad**. En dinámica de fluidos o en Ciencias de la Atmósfera, se denomina **vorticidad** a una magnitud física (vectorial) que mide la rotación de las partículas del fluido. La vorticidad se define como el rotacional del campo de velocidades del fluido \vec{F} , es decir: $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

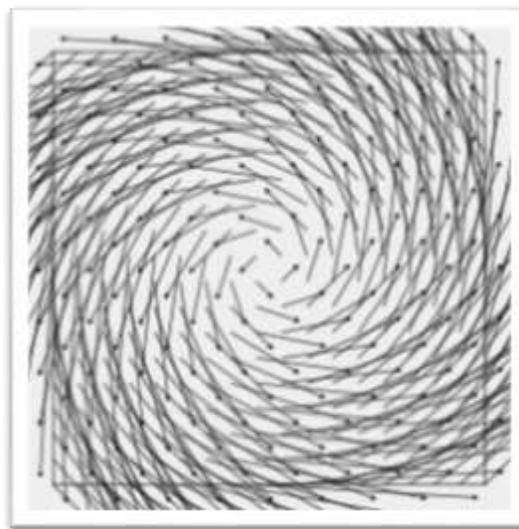


Figura 11.7: Campo rotacional

Es necesario advertir que si $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$, entonces \vec{F} (siendo $\vec{F} \in C^1$) admite matriz jacobiana simétrica ¿Por qué? En el ejemplo 8.25 de la Unidad 8 se analizó si el campo definido por $\vec{F}: R^2 - \{(0,0)\} \rightarrow R^2 / \vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ es conservativo. \vec{F} (siendo $\vec{F} \in C^1$ en su dominio) admite matriz jacobiana simétrica, pero **no es conservativo** ya que la integral de línea del campo \vec{F} a lo largo de cualquier curva cerrada que encierra al punto (0,0) no se anula. Resulta que el conjunto $D = R^2 - \{(0,0)\}$ no es un conjunto simplemente conexo (cualquier curva cerrada simple que encierre al origen se contrae por deformaciones sucesivas en el origen que no pertenece a D) No obstante,

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}, \text{ es decir, se trata de un campo vectorial}$$

irrotacional que no posee potencial escalar o función potencial.



¡ATENCIÓN...!

De este caso, se puede advertir que $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ es condición necesaria, pero no suficiente para que el campo \vec{F} sea conservativo, es decir, no todo campo irrotacional es conservativo.

La condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial $\vec{F}: D \subseteq R^3 \rightarrow R^3$ sea conservativo es la siguiente:



Teorema 11.1: Campos conservativos y campos irrotacionales

Sea una campo vectorial $\vec{F}: D \subseteq R^3 \rightarrow R^3$ de clase $C^1(D)$ y D un conjunto abierto y simplemente conexo.

\vec{F} es un campo conservativo en D , sí y sólo sí, $\text{rot} \vec{F} = \vec{0} \quad \forall (x, y, z) \in D$

Los campos conservativos (que verifican las hipótesis anteriores) son irrotacionales
Este teorema podrá ser demostrado empleando posteriormente el Teorema de Green.

Actividades para resolver y discutir en el foro



Actividad 11.2: Calcule la divergencia y el rotacional de los siguientes campos vectoriales:

a. $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$; b. $\vec{F}(x, y) = (\text{sen} x, -\text{sen} y)$

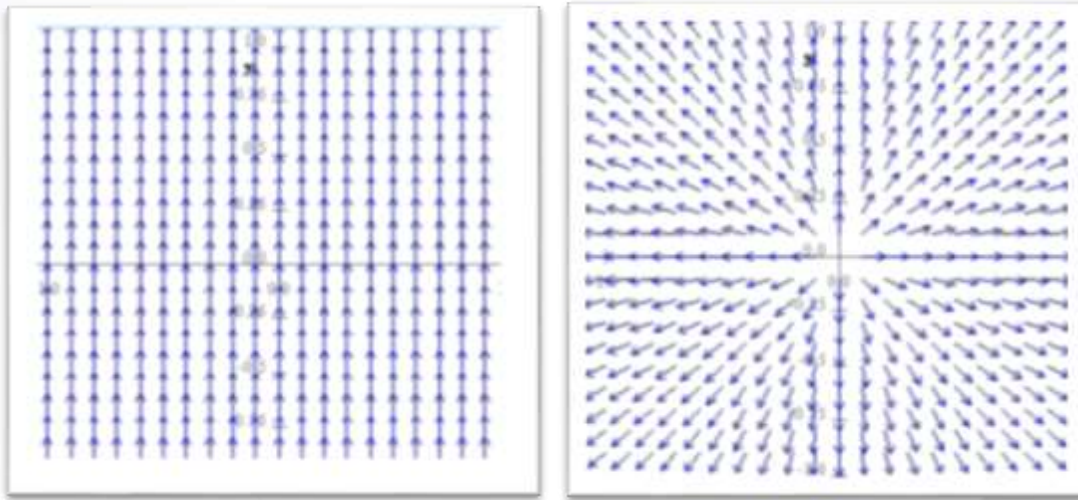
Indique si son fuentes o sumideros, rotacionales o irrotacionales.



Actividad 11.3: Para el campo vectorial dado por $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^k}$, siendo $\vec{r} = (x, y, z)$ y $r = \|\vec{r}\|$. Calcule $\text{div } \vec{F}$. Luego determine los valores reales de k para que el campo sea incompresible.



Actividad 11.4: Si los campos de velocidades de un fluido \vec{F} tienen los siguientes campos de direcciones



Determine para cada uno, el signo de la divergencia en el origen. Justifique la respuesta desde los conceptos teóricos vistos hasta ahora.

Una rueda con paletas, ¿giraría? ¿hacia dónde?



Ejemplo 11.3: En la Figura 11.8 se puede observar la representación gráfica del campo vectorial $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{1+x^2+y^2}, \frac{x}{1+x^2+y^2} \right)$ y del rotacional de \vec{F} .

$$\text{rot } \vec{F}(x, y) = \left(0, 0, \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2} \right)$$

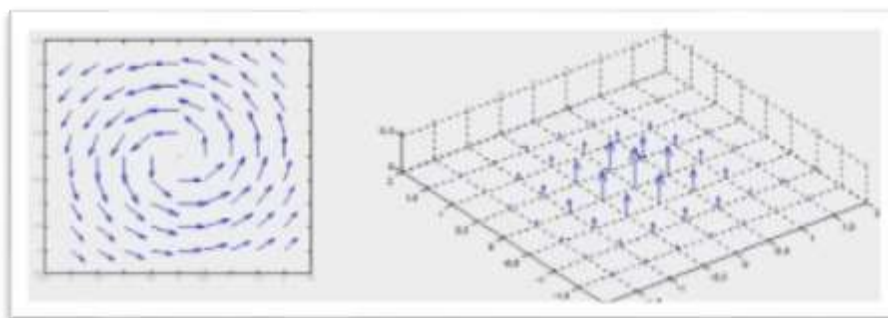


Figura 11.8: Campo vectorial rotacional y su rotor asociado.

Se puede apreciar que en las proximidades del origen el campo produce "remolinos" y rota en dirección contraria a las agujas del reloj (antihorario). De esta forma si colocamos un sacacorchos en ese punto (por la regla de la mano derecha) emergerá hacia arriba (en el sentido positivo del eje z). Si se cambiara la dirección del campo vectorial, entonces el rotacional apuntaría hacia abajo (en el sentido negativo del eje z) como se puede ver en la Figura 11.9

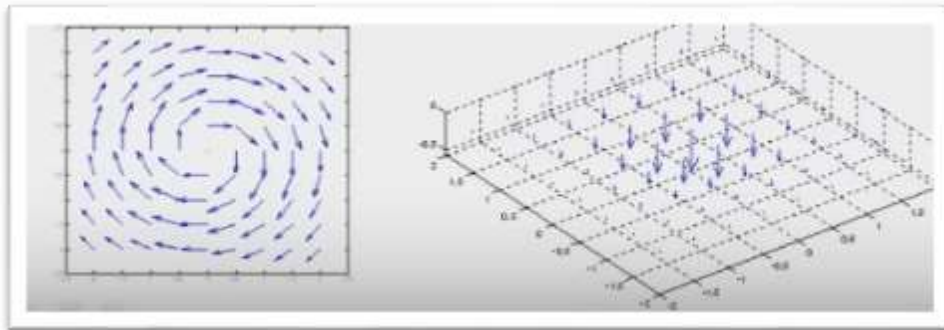


Figura 11.9: Campo vectorial rotacional con cambio de dirección y su rotor asociado.



Ejemplo 11.4: Se observa en la Figura 11.10 el campo de direcciones de un campo de velocidades \vec{F} de un fluido. ¿Qué sucede en el origen con la divergencia y el rotor de \vec{F} ? Se visualiza en la Figura 11.10 que el campo de direcciones apunta hacia el origen, lo que conlleva a pensar que el fluido se concentra en torno al origen, por lo tanto, $\text{div } \vec{F}(0,0,0) < 0$. En el origen el campo posee un sumidero. Por otra parte, si colocáramos una rueda de paletas no giraría debido a que el campo actúa radialmente, es decir $\text{rot } \vec{F}(0,0,0) = \vec{0}$. Se trata de un campo irrotacional.

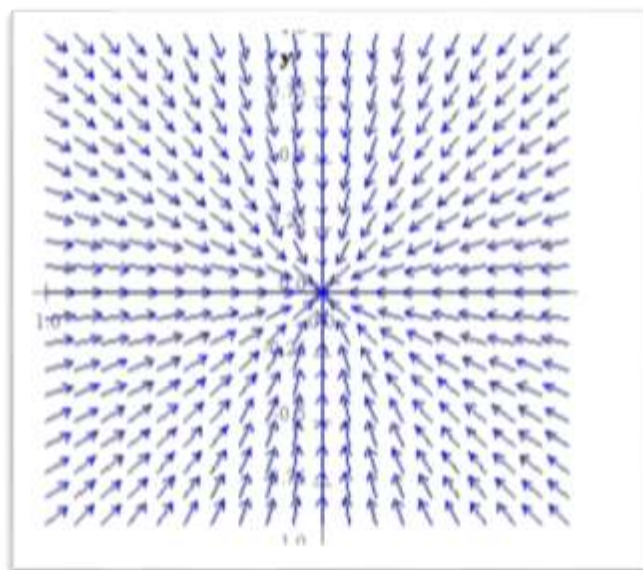


Figura 11.10: Campo de direcciones correspondiente al ejemplo 11.4

Propiedades

1. Si f es un campo escalar de clase C^2 , entonces $\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$. Recíprocamente, si $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ en un conjunto simplemente conexo, entonces \vec{F} es conservativo, por lo cual existe un campo escalar f (función potencia) tal que $\nabla f = \vec{F}$.
2. Si \vec{F} es un campo vectorial de clase C^2 , entonces $\text{div}(\text{rot}(\vec{F})) = 0$. Recíprocamente, si $\text{div}(\vec{F}) = 0$, entonces existe un campo vectorial \vec{G} tal que $\text{rot}(\vec{G}) = \vec{F}$.

La propiedad 1 (proposición directa) se demuestra como consecuencia del teorema de Schwarz sobre la igualdad de las derivadas de segundo orden mixtas. Para la proposición recíproca es suficiente resolver el sistema (ya visto en la Unidad 8):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = F_3 \end{cases}$$

La propiedad 2 es trivial y, para su proposición recíproca, bastará definir:

$$G_1(x, y, z) = \int_0^x F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt$$

$$G_2(x, y, z) = -\int_0^x F_1(x, y, t) dt$$

$$G_3(x, y, z) = 0$$



Ejemplo 11.5: El campo vectorial dado por $\vec{F}(x, y) = (3x^2y + 3, x^3 + 2y + 2)$ está definido en R^2 y es de clase $C^1(R^2)$ ya que sus componentes son funciones polinómicas y admiten derivadas primeras parciales continuas en R^2 . Por otra parte, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in R^2$ y como el dominio del campo vectorial dado es simplemente conexo, entonces el campo \vec{F} es conservativo. Por lo tanto, \vec{F} admite potencial escalar (función potencial) $\varphi / \nabla \varphi = \vec{F}$. Para encontrarla, planteamos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2y + 3 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^3 + 2y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x, y) = x^3y + 3x + \alpha(y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^3 + 2y + 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^3 + \alpha'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + \alpha'(y) = x^3 + 2y + 2 \Rightarrow \alpha'(y) = 2y + 2 \Rightarrow \alpha(y) = y^2 + 2y + k$$

$$\therefore \varphi(x, y) = x^3y + 3x + y^2 + 2y + k$$

y la función potencial que verifica $\varphi(1, -1) = 1$ es para el valor de $k = 0$

$$\varphi(x, y) = x^3y + 3x + y^2 + 2y$$



Definición 11.4.: Laplaciano de un campo escalar.

Es un operador que transforma un campo escalar de n variables en un campo escalar de R^n y se indica con el símbolo " ∇^2 ". En efecto, sea el campo escalar $f : D \subseteq R^n \rightarrow R$ con D un conjunto abierto no vacío y $f \in C^2$, entonces el Laplaciano² del campo escalar f es el campo escalar $\nabla^2 f : D \rightarrow R$ definido por:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Este campo escalar puede pensarse como la divergencia del campo de gradientes de la función f , es decir:

$$\nabla^2 f = \text{div } \vec{\nabla} f = \nabla \bullet \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

De la misma forma que hemos mencionado para los operadores divergencia y rotor, esta forma de escribir al Laplaciano (como producto interior entre el operador Nabla y el vector gradiente) es meramente simbólica.



Definición 11.5: Las funciones $f \in C^2$ que verifican $\nabla^2 f = 0$ se dicen funciones armónicas.

Propiedades de los operadores vectoriales.

Si los campos escalares f, g son de clase C^2 , y los campos vectoriales \vec{F}, \vec{G} de clase C^1 , entonces se verifica:

1. $\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2. $\text{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{div} \vec{F} + \text{div} \vec{G}$
3. $\text{div}(f \cdot \vec{F}) = \vec{\nabla}f \bullet \vec{F} + f \cdot \text{div} \vec{F}$
4. $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \bullet \text{rot} \vec{F} - \vec{F} \bullet \text{rot} \vec{G}$
5. $\text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot} \vec{F} + \text{rot} \vec{G}$
6. $\text{rot}(f \cdot \vec{F}) = f \cdot \text{rot} \vec{F} + \vec{\nabla}f \times \vec{F}$
7. $\text{rot}(\vec{\nabla}f) = \vec{0}$
8. $\text{div}(\text{rot} \vec{F}) = 0$
9. $\text{rot}(\text{rot} \vec{F}) = \vec{\nabla}(\text{div} \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

En esta igualdad se debe tener presente que $\nabla^2 \vec{F}$ es el vector $\nabla^2 \vec{F} = (\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \dots, \nabla^2 F_n)$.

² Pierre Simon Laplace, matemático francés (1749-1827)

Actividad para resolver y discutir en el foro



Actividad 11.5: Empleando las definiciones de los operadores y las propiedades del Álgebra vectorial conocidas intenten demostrar estas identidades antes enunciadas. Expónganlas en el foro para comentarlas.



Definición 11.6: Líneas de campo

Dado un campo vectorial $\vec{F}: R^3 \rightarrow R^3$ se denomina línea de campo a cualquier curva regular tangente en cada punto al campo vectorial. Si el campo es un campo de fuerzas, las líneas de campo se llaman líneas de fuerza; en cambio si el campo es un campo de velocidades de un fluido, las líneas de campo se denominan líneas de flujo.

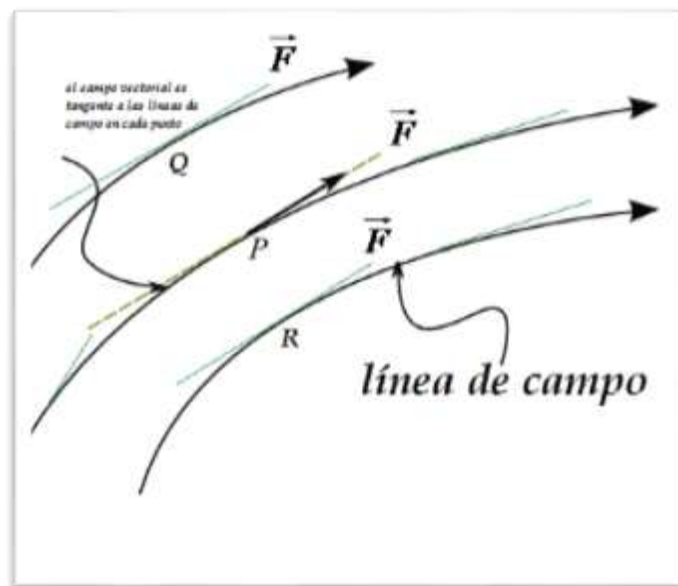


Figura 11.11: Líneas de campo

En física, las líneas de campo contribuyen a visualizar un campo electrostático, magnético o cualquier otro campo vectorial estático. Fundamentalmente forman un mapa del campo.

Supongamos una línea del campo \vec{F} expresada en forma paramétrica $\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Si en cada punto $\vec{X}(t)$ el campo es tangente a la línea de campo considerada, significa que el vector $\vec{F}(\vec{X}(t))$ es paralelo al vector tangente o vector velocidad (recuerde lo visto en la Unidad 8) $\vec{X}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, es decir, existe una función escalar $\lambda(t)$ que verifica: $\vec{X}'(t) = \lambda(t) \cdot \vec{F}(\vec{X}(t))$ (dos vectores paralelos son proporcionales, $\lambda(t)$ es el factor de proporcionalidad)

De esta igualdad de vectores e igualando componentes resulta:

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda(t).F_1(x, y, z) \\ y'(t) = \lambda(t).F_2(x, y, z) \\ z'(t) = \lambda(t).F_3(x, y, z) \end{cases} \quad \text{y equivale a} \quad \frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

En consecuencia, si se desea determinar las líneas de campo de un campo vectorial es necesario resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden precedente. Si además se requiere que la curva pase por el punto (x_0, y_0, z_0) , entonces el sistema de ecuaciones tendrá una única solución (siempre que el campo \vec{F} verifique las hipótesis necesarias, es decir que \vec{F} esté bien definido, regular y no nulo)

De esta forma es posible afirmar que las líneas de campo conforman una familia de curvas que no se intersecan entre ellas, es decir, para cada punto fijo del espacio pasa una y sola una línea de campo del campo \vec{F} .

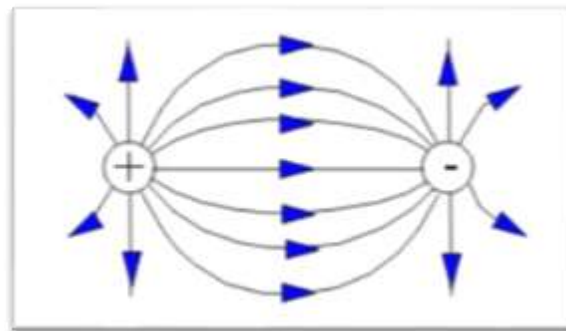


Figura 11.12: Líneas de campo eléctrico en la región que rodea dos cargas opuestas

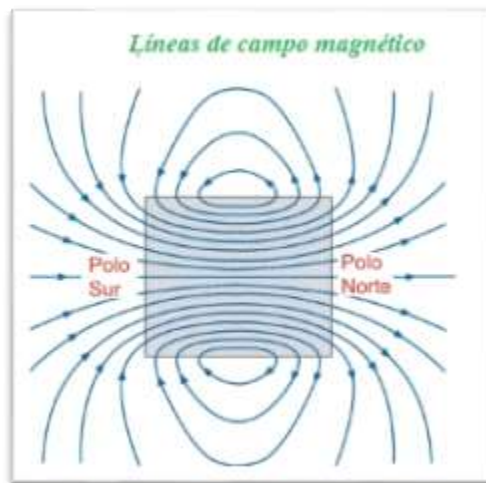


Figura 11.13: Representación de un campo magnético mediante sus líneas de campo. En cada punto del espacio el campo es tangente a las líneas de campo.

Como los polos magnéticos nunca se dan separadamente, así las **líneas de campo** son siempre cerradas, saliendo del polo Norte y entrando por el polo Sur.

Las líneas de fuerza -usadas por primera vez por Michael Faraday³ sirven para diseñar gráficamente un campo, son imaginarias y no tienen presencia física.

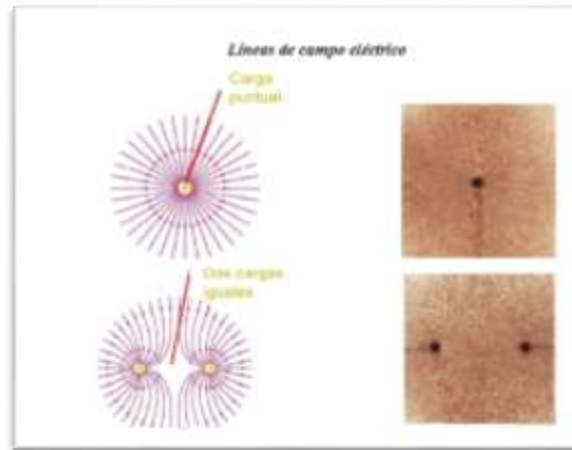


Figura 11.14: Líneas de campo eléctrico

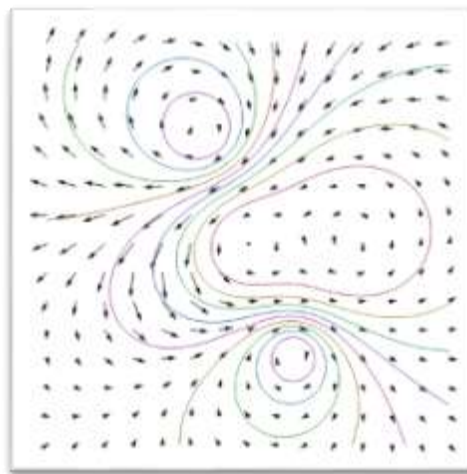


Figura 11.15: Líneas de campo

Propiedades de las líneas de campo

Dada una región sobre la cual se ha definido un campo vectorial estático, existe una familia de curvas tales que:

1. Todo punto de la región donde existe el campo pertenece a una y sólo una de las curvas de la familia, lo que significa que las líneas de campo no se intersecan entre sí.
2. El vector tangente a cualquiera de las líneas de campo coincide con el campo vectorial.
3. La dirección de recorrido de las líneas de campo coincide con la del campo vectorial en cada punto.
4. Pueden ser curvas cerradas (campo magnético) o curvas abiertas (campo gravitatorio, campo eléctrico)

³ Físico y Químico Inglés (1791-1867)

5. Las líneas de campo no se intersecan. Si lo hicieran existirían dos vectores de campo diferentes en el punto de intersección.
6. Si las líneas de campo son salientes, el punto de donde provienen se llama fuente o manantial, caso contrario, si las líneas de campo son entrantes, se llama sumidero.
7. Si el campo vectorial es uniforme, las líneas de campo son rectas paralelas y equiespaciadas.
8. Si las líneas de campo tienden a converger el campo vectorial es más intenso.
9. Las líneas de campo son ortogonales a las superficies o curvas equipotenciales como se puede ver en la figura 11.16



Figura 11.16: Ortogonalidad entre las líneas de campo y líneas equipotenciales



Ejemplo 11.6: Calculemos las líneas de flujo del campo vectorial definido $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{F}(x, y) = (-y, x)$

La ecuación diferencial es, en este caso: $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden de variables separables (ya vistas en la unidad 1)

$$-x dx = y dy \Rightarrow -\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = K$$

Las líneas de flujo constituyen una familia de circunferencias con centro en el origen que se pueden ver en la figura 11.17

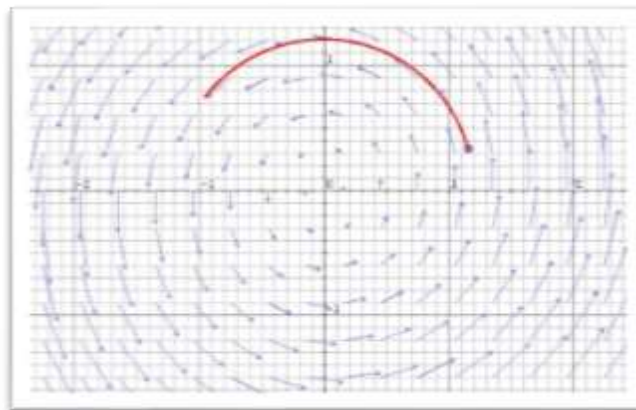


Figura 11.17: Líneas de flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$

Obsérvese que, si calculamos el rotacional de este campo vectorial, resulta:

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - (-1)) = (0, 0, 2) \neq (0, 0, 0)$$

Por lo cual, este campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ es rotacional. Si se inspecciona la figura 11.17 se aprecia la rotación del campo. Si suponemos que el campo \vec{F} proporciona la dirección de un fluido y se coloca una rueda de paletas, ésta tiende a rotar en el sentido antihorario. Si empleamos la Regla del tirabuzón o de la mano derecha, el rotacional estará apuntando hacia el semieje z positivo (hacia dentro) con componentes nulas en x y en y . En este caso, el rotacional de \vec{F} es un vector constante, lo que significa que no depende de su posición, la "cantidad" de rotación es la misma en todo punto.



Ejemplo 11.7: Calculemos las líneas de flujo del campo vectorial definido $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{F}(x, y) = (y, x)$

La ecuación diferencial es, en este caso: $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$

Es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables.

$$x dx = y dy \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow x^2 - y^2 = K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Las líneas de campo constituyen una familia de hipérbolas equiláteras de eje x o y , dependiendo del valor de K . Por otra parte, se observa que el campo vectorial $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{F}(x, y) = (y, x)$ es un campo conservativo ya

que $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, por tanto existe una función potencial $\phi(x, y) / \nabla \phi = \vec{F}$ como ha sido

analizado en la Unidad 8. Si hallamos la Función potencial $\phi(x, y)$, resulta que: $\phi(x, y) = xy + k$ (verifíquelo), así las líneas de nivel de $\phi(x, y)$, llamadas **líneas equipotenciales** son $xy = C$, que resultan ser trayectorias ortogonales a las líneas de campo $x^2 - y^2 = K$

$$x^2 - y^2 = K \Rightarrow 2x - 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$$


$$xy = C \Rightarrow y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

De lo que se deduce que ambas familias son ortogonales.

Obsérvese en este caso que:

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 1) = (0, 0, 0)$$

Por lo cual, el campo $\vec{F}(x, y) = (y, x)$ es irrotacional.

 **Ejemplo 11.8:** Determinemos las líneas de campo correspondientes al campo vectorial definido por $\vec{F}(x, y) = (x, -y)$, vemos una representación del campo:

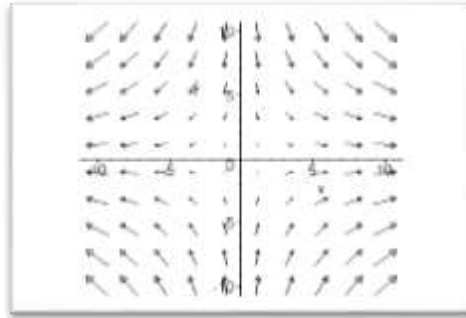


Figura 11.18: Representación del campo $\vec{F}(x, y) = (x, -y)$

Para determinar las líneas de campo resolvemos la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|y| + C \Rightarrow \ln|x| + \ln|y| = C \Rightarrow \ln|xy| = \ln k \Rightarrow xy = \tilde{k}$$

$$\tilde{k} \in \mathbb{R}$$

Las líneas de campo constituyen una familia de hipérbolas que se pueden apreciar en la Figura 11.19

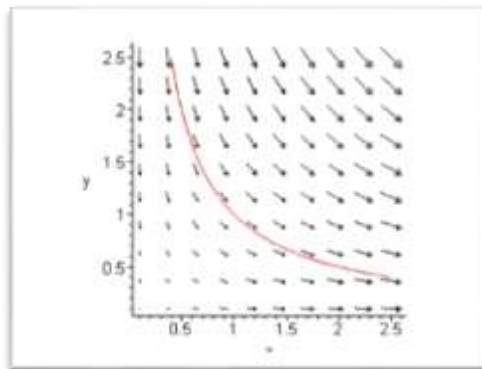


Figura 11.19: Líneas de campo de $\vec{F}(x, y) = (x, -y)$

Clasificación de los campos vectoriales

1. **Campos vectoriales irrotacionales.** Son aquellos campos vectoriales \vec{F} para lo cuales se verifica: $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$ para todo punto del dominio D del campo. Si D es un conjunto abierto y conexo, la circulación del campo sobre cualquier curva cerrada incluida en D es nula. Son campos que admiten potenciales escalares y sus líneas de campo son abiertas. Admite fuentes y sumideros. Ejemplo típico, campo electrostático.



2. **Campos solenoidales.** Son aquellos campos vectoriales \vec{F} para lo cuales se verifica: $\text{div}\vec{F} = 0$ para todo punto del dominio D del campo. El flujo del campo sobre cualquier superficie cerrada es nula. Sus líneas de campo son cerradas y no admite fuentes ni sumideros. Ejemplo típico, campo magnético.

Cabe destacar que un campo vectorial puede no ser irrotacional ni solenoidal, es decir, existen campos vectoriales que admiten divergencia no nula y rotacional diferente del vector nulo.



Teorema de Green⁴

Introducción

Este teorema constituye una herramienta sumamente útil para el cálculo de integrales dobles e integrales de líneas. Bajo condiciones que a continuación estableceremos en las hipótesis del teorema, una integral doble sobre una región plana y acotada D en R^2 puede ser calculada mediante una integral de línea sobre la curva ∂D frontera de la región D , una curva cerrada simple y regular o regular a trozos, orientada en forma positiva. Recordemos que una curva cerrada simple (Curva de Jordan⁵) está orientada positivamente si al recorrerla, la región que encierra siempre queda a la izquierda, tal como se puede ver en la figura 11.20 y la denotaremos ∂D^+ .

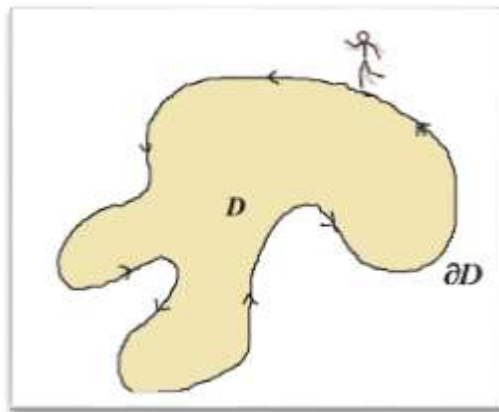


Figura 11.20: Curva de Jordan orientada en forma positiva



Teorema 11.2: Teorema de Green

Si \vec{F} es un campo vectorial $\vec{F}: B \subseteq R^2 \rightarrow R^2 / \vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ de clase $C^1(B)$ con B un conjunto abierto y, además una curva de Jordan ∂D (cerrada y simple) regular a trozos orientada positivamente que encierra una región D tal que $(\partial D \cup D) \subset B$, entonces se verifica:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Observaciones

1. El teorema de Green constituye una fuente más de información para profundizar la vinculación que existe entre los campos vectoriales conservativos y los irrotacionales, ya que si se cumplen las hipótesis del teorema, la integral doble del primer miembro de la igualdad dará como resultado cero si el campo es irrotacional (matriz jacobiana simétrica) y, por lo tanto, la circulación del campo sobre la curva frontera de la región también se anulará. Por lo cual, el campo vectorial tendrá más posibilidades de ser conservativo. Si la región D es un dominio simplemente conexo, según lo analizado con anterioridad, los campos irrotacionales son conservativos.

⁴ George Green (1793-1841) Matemático inglés que se destacó por importantes aportes a la Física, a electricidad y al magnetismo.

⁵ Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) Matemático francés. Aportes importantes a la teoría de los grupos y al Análisis.

Sabemos que cualquier campo vectorial \vec{F} de clase C^1 conservativo en un dominio D es irrotacional en D . Ahora bien, si consideramos un campo $\vec{F}: S \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $C^1(S)$ e irrotacional en S , para cualquier conjunto $S' \subseteq S$, ¿es el campo \vec{F} conservativo en S' ? Para dar respuesta a esta cuestión veamos dos posibilidades:

1. Si S es simplemente conexo, entonces el campo \vec{F} es conservativo en S' .
2. Si S no es simplemente conexo, no existe garantía para afirmar que \vec{F} sea conservativo en S' , no obstante sí es posible afirmar que \vec{F} es conservativo en cualquier dominio simplemente conexo $S' \subseteq S$

Esto se puede ver en el análisis del campo vectorial del ejemplo 8.25 de la Unidad 8, definido por

$$\vec{F}: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right). \vec{F} \text{ (siendo } \vec{F} \in C^1 \text{ en su dominio) admite matriz jacobiana}$$

simétrica, pero no es conservativo ya que la integral de línea del campo \vec{F} a lo largo de cualquier curva cerrada que encierra al punto $(0,0)$ no se anula. El conjunto $S = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ no es un conjunto simplemente conexo,

$$\text{pero si ahora consideramos el campo } \vec{F}: \underbrace{\mathbb{R}^2 - \{(x,y) / x \leq 1\}}_{S'} \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Se observa que $S' \subset S$ y además el dominio S' es un conjunto simplemente conexo. En consecuencia, como el campo \vec{F} es irrotacional, también es conservativo en todo punto de S' , lo que significa que la integral de línea del campo sobre cualquier curva cerrada simple y regular a trozos incluida en S' vale cero.

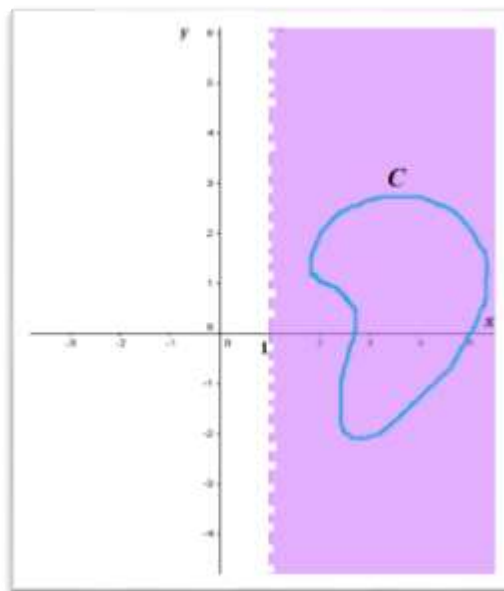


Figura 11.21: Conjunto S'

3. Recordemos que la integral de línea del segundo miembro de la igualdad que plantea el teorema de Green, puede ser expresada en la forma diferencial (presentada en la Unidad 8), de esta forma, resulta:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D^+} F_1(x,y) dx + F_2(x,y) dy$$

Ejemplo 11.9: Verifiquemos el Teorema de Green para el campo vectorial definido por $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{F}(x, y) = (x + 2y^2, x^2 + 3y)$ para la curva ∂D un cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ que se observa en la figura 11.22. El campo vectorial es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ ya que sus funciones componentes son funciones polinómicas. La curva borde es cerrada simple y regular a trozos, y la orientamos en sentido positivo (en este caso antihorario), por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema de Green. Como debemos verificar el teorema de Green, es necesario calcular la integral doble, calcular la integral de línea y concluir que sus valores coinciden. Comenzamos por el cálculo de la integral de línea. Para ello, es necesario parametrizar cada arco que constituye el borde.

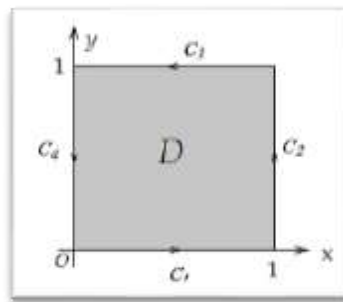


Figura 11.22

La curva C_1 es la imagen de la función $\vec{X}_1: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{X}_1(t) = (t, 0) \Rightarrow d\vec{X}_1 = (1, 0)dt$

La curva C_2 es la imagen de la función $\vec{X}_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{X}_2(t) = (1, t) \Rightarrow d\vec{X}_2 = (0, 1)dt$

La curva C_3 es la imagen de la función $\vec{X}_3: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{X}_3(t) = (1-t, 1) \Rightarrow d\vec{X}_3 = (-1, 0)dt$

La curva C_4 es la imagen de la función $\vec{X}_4: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{X}_4(t) = (0, 1-t) \Rightarrow d\vec{X}_4 = (0, -1)dt$

Así, $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$. Entonces: $\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \quad ; \quad \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (1+3t) dt = \frac{5}{2} \quad ; \quad \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (t-3) dt = -\frac{5}{2} \quad ;$$

$$\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (3t-3) dt = -\frac{3}{2}$$

En consecuencia, $\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -1$

Calculemos ahora la integral doble sobre la región que encierra el polígono.

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 4y$ Como la región D es un cuadrado, la integral doble se calcula fácilmente empleando el

Teorema de Fubini sobre rectángulos. En este caso, es $D = [0,1] \times [0,1]$

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (2x - 4y) dy dx = \int_0^1 (2x - 2) dx = -1$$

Por lo tanto, se verifica el teorema de Green. Cabe destacar que, para este caso, es más sencillo calcular la integral doble para determinar la circulación del campo vectorial dado sobre la curva cerrada.

En adelante se revisarán las hipótesis del teorema de Green y se empleará la herramienta que menos resulte fatigosa para el cálculo de la circulación.



Ejemplo 11.10: Calculemos $\oint_{\partial D^+} ydx - xdy$, siendo ∂D es la frontera del cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$ orientada positivamente. Observemos que la integral de línea está expresada en forma diferencial y que el campo vectorial dado no es conservativo pues su matriz jacobiana no es simétrica, es decir:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -1 \neq 1 = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Y así la integral de línea sobre la curva cerrada ∂D no se anula. Por ello, intentaremos calcularla mediante el uso del Teorema de Green. Las condiciones del problema cumplen sus hipótesis, pues $\vec{F}(x, y) = (y, -x)$ es una función de clase $C^1(R^2)$ y la frontera del cuadrado es una curva cerrada regular a trozos, por lo tanto la circulación del campo vectorial puede calcularse mediante la integral doble sobre la región que encierra ∂D .

$$\oint_{\partial D^+} ydx - xdy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (-1 - 1) dxdy = (-2) \underbrace{\text{Área}(D)}_4 = -8$$

El cálculo de la integral doble es muy sencillo comparado con el de la circulación, para la cual es preciso parametrizar cada tramo de la curva frontera.

Cálculo de áreas de regiones planas mediante el Teorema de Green

Si $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \quad \forall (x, y) \in D$, entonces la integral doble del primer miembro de la igualdad del Teorema de Green proporciona el área de la región D . Así será posible calcularla a través de la integral de línea del segundo miembro (siempre que sea más sencilla su cálculo que el cálculo del área de la región D mediante integrales dobles) aplicado a diversos campos vectoriales rotacionales que verifiquen $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$, entre ellos:

$$\vec{F}(x, y) = (-y, 0)$$

$$\vec{F}(x, y) = (0, x)$$


$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \right)$$

Todos estos campos son diferenciables con continuidad hasta todo orden en R^2 y verifican $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ en todo punto del plano. Por lo tanto, el área de la región D puede calcularse:

$$\text{Área}(D) = \oint_{\partial D^+} -ydx \quad o$$

$$\text{Área}(D) = \oint_{\partial D^+} xdy \quad o \text{ bien}$$

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} -ydx + xdy$$

 **Ejemplo 11.11:** Calculemos el área de la región plana encerrada por la astroide mediante la aplicación del Teorema de Green.

La parametrización de esta curva es $\vec{X}:[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{X}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$

El área de la región D es:

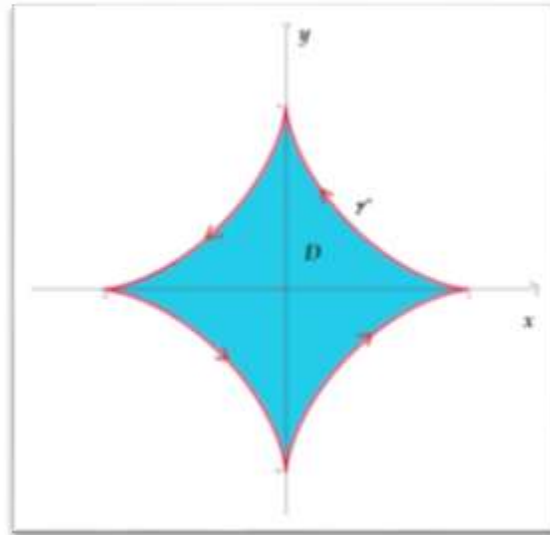


Figura 11.23: Astroide

$$\begin{aligned} \text{Área}(D) &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma^+} -ydx + xdy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t, \cos^3 t) \cdot (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3\cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3}{8} \pi \end{aligned}$$

Necesitamos indagar si es posible extender el Teorema de Green a regiones más generales (con agujeros). Estas regiones son llamadas regiones múltiplemente conexas que definimos a continuación. Por ejemplo, cuando la región es un anillo o bien tiene uno o varios "agujeros". En estos casos, la integral de línea se evalúa sobre la curva frontera de la región en su totalidad (frontera externa y frontera interna) orientada siempre positivamente, es decir que, al recorrerla, la región limitada por ella debe estar siempre a la izquierda, tal como desarrollaremos a continuación.

En primer lugar veamos el significado de una región múltiplemente conexa.



Definición 11.7: Conjuntos múltiplemente conexos

Se dice que un conjunto es múltiplemente conexo si es conexo pero no simplemente conexo.

En la figura 11.24 se observan algunos tipos de regiones múltiplemente conexas.

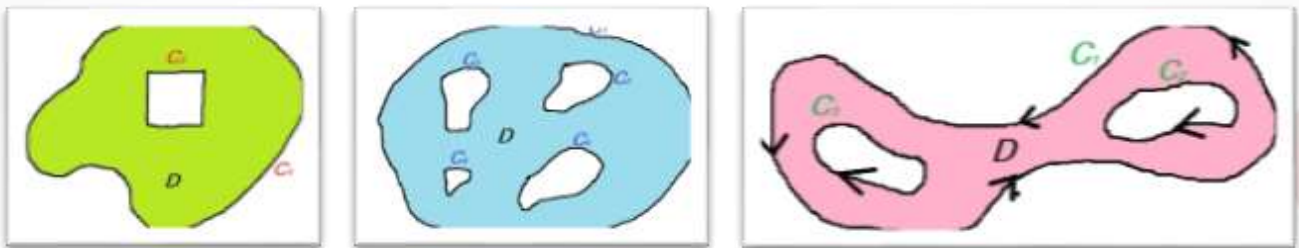


Figura 11.24: Regiones múltiplemente conexas.

En una de las regiones exhibidas en la figura 11.24 se observa que al orientar positivamente la frontera de la región, las dos curvas interiores, aisladamente, están orientadas en forma negativa. Es necesario tener presente este hecho para comprender el siguiente teorema.

Generalización del Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas



Teorema 11.3:

Si \vec{F} es un campo vectorial $\vec{F}: B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ de clase $C^1(B)$ con B un conjunto abierto, tal que $B \supset D$, y las curvas las curvas de Jordan C_1, C_2, \dots, C_n regulares a trozos que verifican las siguientes propiedades:

1. Las curvas no se cortan entre ellas.
2. Las curvas C_2, \dots, C_n están incluidas en la región que encierra C_1
3. Cada C_i está en el exterior de C_j con $i \neq j$, $i, j = 2, \dots, n$

y D es la reunión de C_1 con la porción interior a C_1 que no está dentro de ninguna C_j ($j = 2, \dots, n$), entonces se verifica:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_1^+} (F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy) - \sum_{j=2}^n \oint_{C_j^+} (F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy)$$

Veamos la idea de la demostración para el caso $n = 2$ que se visualiza en la figura 11.25

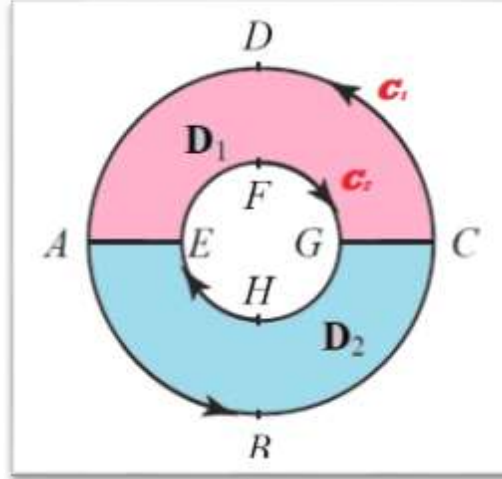


Figura 11.25: Región doblemente conexa

Se puede descomponer la región D como la unión de dos regiones conexas D_1 y D_2 / $D_1 \cup D_2 = D$ realizando dos cortes AE y GC como se ve en la figura 11.25. En cada una de las regiones es válido el Teorema de Green, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \oint_{\partial D_1^+} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \oint_{\partial D_2^+} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \left\{ \int_{CDA} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \right. \\ &+ \int_{AE} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \int_{EFG} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \int_{GC} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \left. \right\} + \\ &+ \left\{ \int_{ABC} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \int_{CG} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \int_{GHE} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \right. \\ &+ \left. \int_{EA} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \right\} \end{aligned}$$

Las integrales de línea sobre los arcos de curva AE y EA se cancelan ya que se trata de la misma integral pero opuesta (porque los caminos son opuestos), lo mismo sucede con las integrales sobre GC y CG . En consecuencia, resulta:

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy &= \left\{ \int_{CDA} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \int_{ABC} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \right\} + \\ &+ \left\{ \int_{EFG} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \int_{GHE} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \right\} = \int_{C_1^+} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy + \\ &+ \int_{C_2^-} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \int_{C_1^+} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy - \int_{C_2^+} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C_1^+} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy - \int_{C_2^+} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$$

Obsérvese que el signo menos se debe a que la curva C_2 se recorre en sentido negativo.

Corolario del teorema 11.3: Invarianza de una integral de línea por deformación del camino

Si \vec{F} es un campo vectorial $\vec{F}: B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ de clase $C^1(B)$ con B un conjunto abierto conexo con matriz jacobiana simétrica, es decir, $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in B$, y dos curvas de Jordan regulares a trozos C_1 y C_2 incluidas en B que verifique los siguientes requisitos:

1. C_2 está en el interior de C_1
2. Los puntos interiores a C_1 que son exteriores a C_2 pertenecen a B , entonces se verifica:

$$\int_{C_1^+} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = \int_{C_2^+} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$$

La demostración de esta proposición es inmediata ya que la integral doble sobre D se anula ya que se verifica

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in B.$$

El significado de este teorema está basado sobre la idea que, el valor de una integral de línea sobre una curva cerrada simple incluida en B no varía si la curva se cambia por deformación en otra curva cerrada simple cualquiera de B , siempre que las curvas intermedias que se obtengan en el proceso de deformación queden todas incluidas en B . El conjunto B abierto y conexo (no se requiere que sea simplemente conexo)



Ejemplo 11.12: Calculemos $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ si $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{F}(x, y) = (x^2 y^3, y)$ γ es una parametrización del borde de la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ orientada positivamente.

El campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x^2 y^3, y)$ es de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 , pero no es un campo conservativo, ya que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2 y^2$ y $\frac{\partial F_2}{\partial x} \neq \frac{\partial F_1}{\partial y}$. Así el campo no admite potencial escalar. La región D no es un conjunto simplemente conexo. Podremos calcular la circulación del campo a lo largo de su borde empleando el Teorema de Green para regiones no simplemente conexas, es decir:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma_1^+} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy - \int_{\gamma_2^+} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$$

A tal efecto utilizaremos el primer miembro de la igualdad, es decir, calcularemos la integral doble sobre la región D que se muestra en la figura 11.26 mediante coordenadas polares.

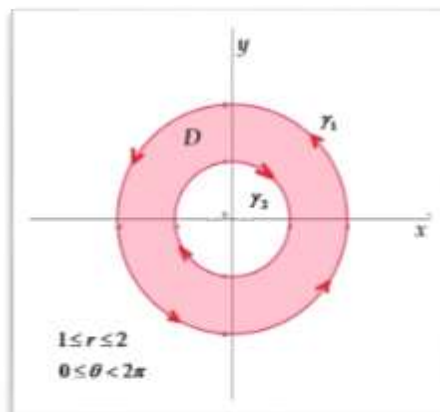


Figura 11.26: Corona circular. Conjunto no simplemente conexo.



$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = -3 \iint_D x^2 y^2 dx dy = -3 \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta dr d\theta = \\ &= -3 \left(\int_1^2 r^5 dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \right) = -\frac{63}{2} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\theta}{4} d\theta \right) = -\frac{63}{8} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{8} \right]_0^{2\pi} = \\ &= -\frac{63}{8} \pi\end{aligned}$$



Teorema de la divergencia (Teorema de Gauss⁶)

Cuestiones previas al teorema

Este teorema relaciona una integral triple sobre un sólido y una integral de superficie evaluada sobre la superficie frontera del sólido. Cuando fueron presentadas las curvas en R^n en la Unidad 8, se introdujo el concepto de parametrización de un arco de curva, y se hizo hincapié en que el proceso de parametrización lleva consigo la orientación asignada a dicho arco. Este hecho no se produce si se emplea coordenadas cartesianas. Por lo tanto, para cada parametrización de un arco de curva existe un sentido de orientación del mismo. Sólo hay dos sentidos de orientación de un arco de curva γ que se visualizan en la figura 11.27.

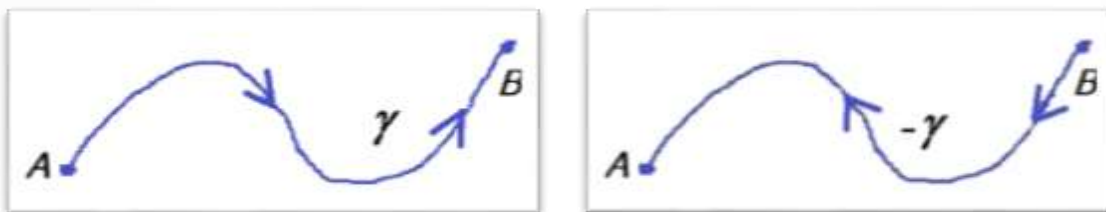


Figura 11.27: Arco de curva orientado

Por otra parte, si la curva es cerrada y simple (curva de Jordan) también admite dos orientaciones, la positiva que se obtiene recorriendo la curva de manera que la región que encierra se mantenga siempre a la izquierda, y la negativa que es la orientación contraria como se muestra en la figura 11.28

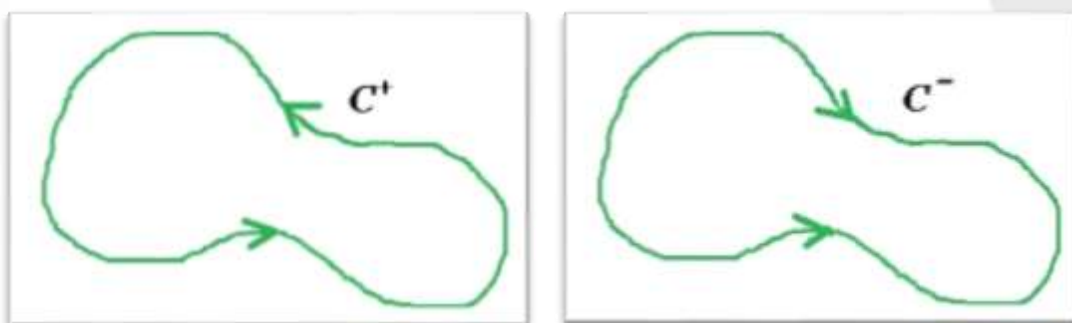


Figura 11.28: Curvas de Jordan orientadas en forma positiva y negativa.

Ahora es preciso que planteemos, ¿Una superficie en R^3 es orientable? y si fuera posible, ¿Cómo puede ser orientada? Para dar respuesta a estos interrogantes veamos algunos resultados importantes.

⁶ Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Matemático alemán destacado también por sus aportes a la astronomía, a la geodesia y a la Física. Hizo contribuciones muy valiosas a la teoría de números, al análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, el magnetismo y la óptica. Está conceptualizado como «el príncipe de las matemáticas» y «el matemático más destacado desde la antigüedad»

Si consideramos un campo vectorial \vec{F} y una superficie S transversal a las líneas de campo, la integral sobre S de la componente de \vec{F} normal a S representa el Flujo de \vec{F} a través de la superficie S , tal como ya ha sido visto en la Unidad 10, y desempeña un rol fundamental en la formulación de muchos teoremas y propiedades físicas, como así también en diversas aplicaciones. Se mencionó con anterioridad que el signo del Flujo depende del sentido escogido del versor normal a la superficie, por ello es necesario establecer cuándo una superficie se dice orientable.

Superficies orientadas. Borde de una superficie.

Sea S una superficie regular parametrizada por $\vec{\sigma}: T \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, entonces los versores:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)}{\|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\|} \quad \text{y} \quad -\vec{n} = -\frac{\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)}{\|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\|}$$

son normales a la superficie S como se visualiza en la figura 11.29, y la elección de uno de ellos corresponde a privilegiar uno de los dos "lados" o "caras" de la superficie. Por ejemplo, para una superficie esférica se trata del lado o cara interna, o bien del lado o cara externa) De esta forma, la elección de uno de estos versores podrá estar vinculada al concepto de orientación de la superficie S .

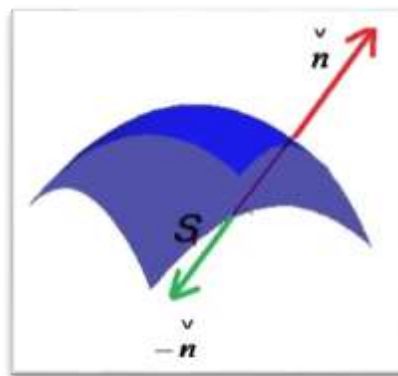


Figura 11.29: Superficie orientada



Definición 11.8: Superficie orientable

Una superficie regular S se dice orientable si, para cada curva continua cerrada incluida en S , parametrizada por $\vec{\sigma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ se verifica que $\vec{n}(\vec{\sigma}(a)) = \vec{n}(\vec{\sigma}(b))$.

Esta definición expresa en otras palabras que, si se sigue el versor normal a la superficie S a través de una curva cerrada ubicada sobre ella, después de un giro completo, el versor normal debe regresar nuevamente al punto inicial con el mismo sentido. Por lo tanto, la superficie S se dice orientable si es posible establecer en cada uno

de sus puntos un versor normal que varíe con continuidad sobre la misma superficie S (excepto quizás en la frontera de S) La mayoría de las superficies con las que trabajaremos son orientables, por ejemplo, superficies esféricas, superficies parabólicas, superficies elípticas, plano, etc.

Cuando la superficie viene expresada con su fórmula explícita $z = f(x, y)$, si ella es orientable entonces es posible determinar los versores normales en un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ a saber:

$$\vec{n} = \pm \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0}, -\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0}, 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} \right)^2 + 1}}$$

En general, para una superficie S como la que se observa en la figura 11.30 se considera la cara positiva (exterior) a aquella determinada por el versor normal de componente z positiva.

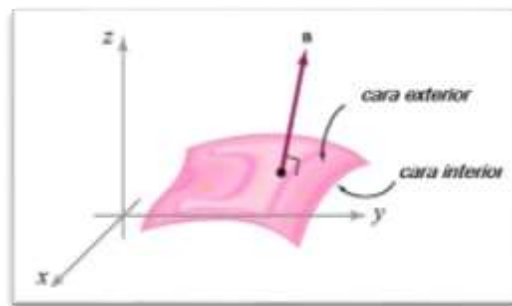


Figura 11.30: Orientación positiva y negativa de una superficie orientable

Si la superficie S es el borde de una región $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ de tipo I, II, III o IV (superficie cerrada), en general se elige como orientación positiva con el versor normal apuntando hacia afuera de S (versor normal saliente), como se observa en la figura 11.31 y como orientación negativa con el versor normal apuntando hacia adentro de S (versor normal entrante)

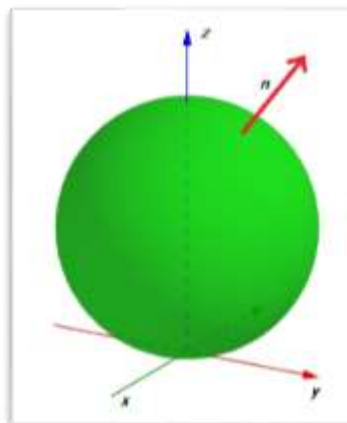


Figura 11.31: Superficie cerrada orientada en forma positiva



Definición 11.9: La orientación de una superficie está determinada por una elección del versor normal a ella, \vec{n} o $-\vec{n}$. Una superficie se dice orientada si sobre ella ha sido elegida una de las dos orientaciones posibles.



Observaciones importantes

1. No todas las superficies son orientables. La superficie no orientable más conocida es la "Cinta de Möbius"⁷. Para construirla podemos tomar una tira rectangular de papel, luego le damos media vuelta y finalmente unimos sus extremos. Una vez construida, si trazamos una línea de color -comenzando por un punto cualquiera- a lo largo de la cinta terminamos en el punto en el que se inició la línea. Este trazado sugiere, tal como se observa en la figura 11.32, que si el vector normal parte del punto inicial con un sentido concreto y, al terminar el recorrido de la línea del trazado, llega al punto inicial pero con el sentido opuesto. Esta superficie admite una sola cara, una única curva borde y por tanto no es una superficie orientable, tal como se muestra en la figura 11.32

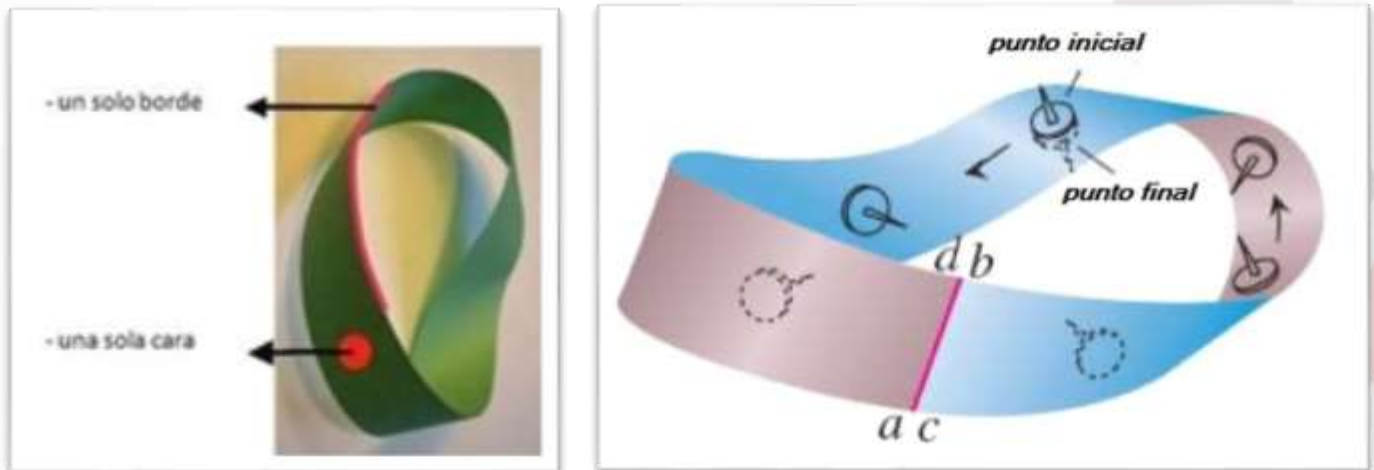


Figura 11.32: Cinta de Möbius. Superficie no orientable

⁷ August Ferdinand Möbius (1790-1868) Matemático alemán que también se dedicó a la Astronomía, a la geometría proyectiva y a la teoría de números. Discípulo de Gauss.

Existen otras superficies famosas no orientables tales como la Botella de Klein y el Caracol de Möbius quienes también tienen una sola cara (uniláteras)



Figura 11.33: Otras superficies no orientables.

2. La orientación de la superficie S obtenida a partir de la elección de una de sus caras induce una orientación positiva de cada una de las curvas que conforman el borde. Así, entonces, se elige el sentido de recorrido de cada una de ellas de manera que recorriéndola y permaneciendo sobre la cara de S que se ha elegido como positiva, quedan los puntos de S a la izquierda, tal como se ve en la Figura 11.34. Cuando el borde de la superficie está orientado positivamente emplearemos el símbolo ∂S^+ .

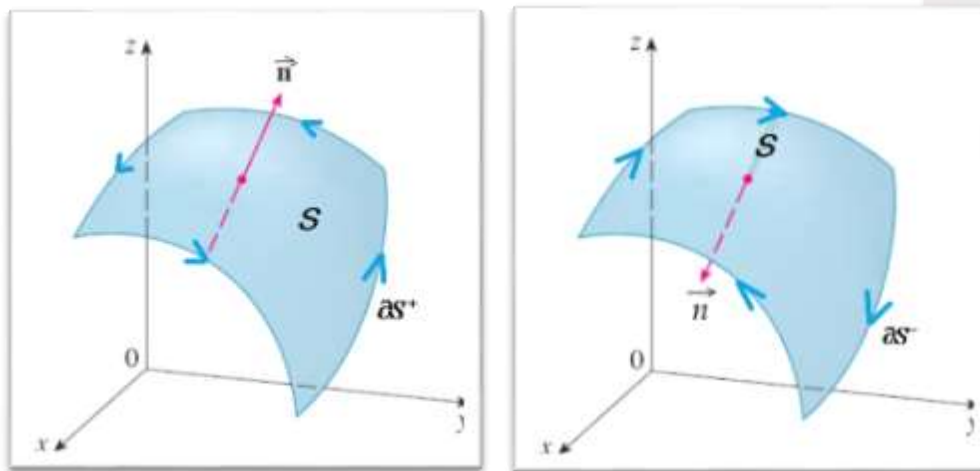


Figura 11.34: Superficies orientadas con bordes orientados

Sea S una superficie orientada según el vector normal con frontera la curva ∂S . Esta curva recibe de la orientación de S una orientación según la Regla de la mano derecha, de esta forma: si el dedo pulgar de la mano derecha sigue la dirección y el sentido de \vec{n} , con la mano cerrada, los otros dedos indicarán la orientación para ∂S que se la conoce como **orientación inducida**. En la figura 11.35 se puede apreciar el significado de la regla de la mano derecha.

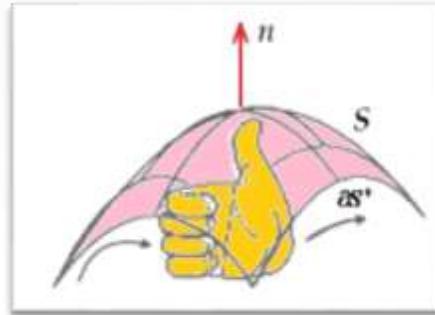


Figura 11.35: Regla de la mano derecha para orientación de superficies y sus bordes.

3. Sea la superficie S suave que admite una parametrización regular $\vec{\sigma}: T \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Para cada punto $\vec{X} \in S$ existe $\vec{n}(\vec{X}) = \frac{\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)}{\|\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)\|}$, entonces la

elección del versor normal a la superficie es continua y le proporciona una orientación. Se dice que S está orientada por la parametrización $\vec{\sigma}$, o bien que la parametrización $\vec{\sigma}$ **induce una orientación** que está dada por el sentido del campo de versores normales.

Todas las cuestiones presentadas nos ha preparado para enunciar y conocer uno de los resultados más importantes de este curso, no sólo porque sintetiza (desde el punto de vista matemático) varios conceptos tratados en las unidades anteriores, sino también porque su aplicación se puede apreciar en muchas ramas de la Física y de las Matemáticas.



Teorema 11.4: Teorema de la Divergencia o de Gauss

Si $V \subset \mathbb{R}^3$ es un sólido cuya superficie frontera ∂V es una superficie regular y orientable; indicando con \vec{n} el vector normal unitario exterior a, y $\vec{F}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $C^1(V)$, entonces se verifica:

$$\iiint_V \text{div } \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

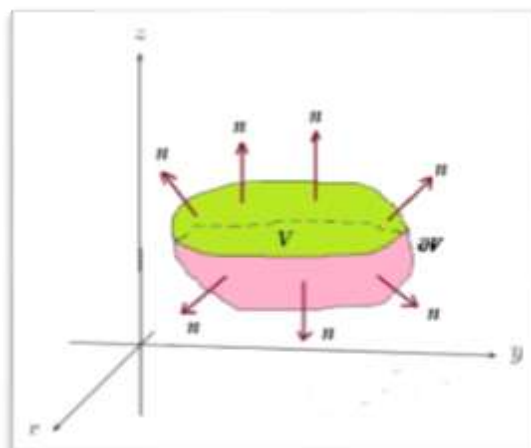


Figura 11.36: Suoerficie cerrada orientada con el campo de vectores normales apuntando hacia afuera.

En otras palabras, el flujo de un campo vectorial saliente de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia del campo sobre la región encerrada por la misma superficie.

Significado físico del Teorema de Gauss.

Si el campo vectorial \vec{F} es un campo de vectores describiendo el movimiento de un fluido, entonces la integral de superficie es la cantidad de fluido que entra o sale por la superficie (según el signo). La integral triple sobre V mide cuánto se comprime o expande el fluido en el interior. Dichos valores numéricos coinciden.

El teorema plantea una ecuación de equilibrio entre las dos cantidades y permite realizar el cálculo del flujo de un campo vectorial a través de una superficie mediante una integral triple, sin necesidad de conocer una parametrización concreta o bien contando con una parametrización muy compleja lo que dificulta el cálculo de la integral de superficie. El resultado será siempre el flujo saliente que atraviesa la superficie.

Observaciones

1. El flujo saliente de una superficie (orientable y regular a trozos) de un campo vectorial constante es nulo.

Véase que, en este caso, $\text{div } \vec{F} = 0$ y, así, $\iiint_V \text{div } \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V 0 \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 0$

2. Si el campo vectorial es el rotor de otro campo, es decir $\vec{F} = \text{rot } \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{G}$, entonces

$$\iiint_V \text{div } \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V \underbrace{\text{div}(\text{rot } \vec{G})}_0 \, dx \, dy \, dz = \iiint_V 0 \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \text{rot } \vec{G} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$



Ejemplo 11.13: En este caso es preciso calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z)$ a través de la superficie frontera del conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ mostrada en la Figura 11.37

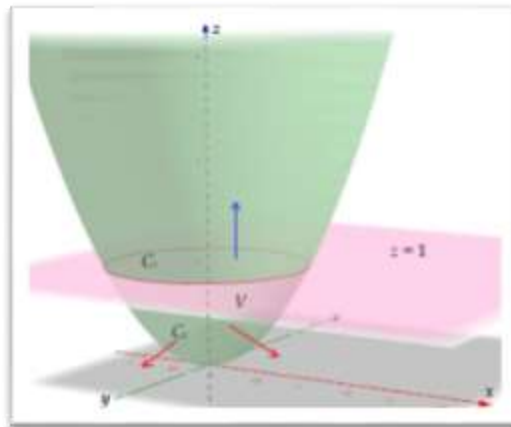


Figura 11.37: Superficie regular a trozos.

Se trata de una superficie cerrada regular a trozos formada por dos superficies C_1 y C_2 . Para calcular el flujo mediante la definición sería necesario calcular dos integrales de superficies, una sobre la superficie C_1 y la otra sobre la superficie C_2 , ambas orientadas de manera que la superficie total esté orientada con las normales salientes. Es obvio que es trabajoso realizar el cálculo del flujo de esta forma. Por lo tanto, y aprovechando que la superficie es cerrada realizaremos el cálculo del flujo mediante el Teorema de la divergencia o de Gauss empleando la integral triple de la divergencia del campo dado.

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = 2x + 2y + 1$$

El conjunto V es una región elemental de tipo I en R^3 , en consecuencia,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iint_D \int_{x^2+y^2}^1 (1+2x+2y) dz dy dx = \\ &= \iint_D (1-x^2-y^2)(1+2x+2y) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)(1+2r \cos \theta + 2r \sin \theta) r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Nótese que la región plana D es la proyección de V sobre el plano (xy) , que, en este caso, se trata de un círculo con centro en el origen y radio 1. Así, para integrar sobre D utilizamos polares.



Ejemplo 11.14: Se considera el campo vectorial $\vec{F}: R^3 \rightarrow R^3$ / $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ y el tronco de cilindro $V = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1+y\}$. Calcularemos el flujo ascendente de \vec{F} a través de la elipse $S_2 = \{(x, y, 1+y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$ de dos maneras diferentes:

- Mediante el cálculo directo del flujo
- Aplicando apropiadamente el Teorema de la divergencia.

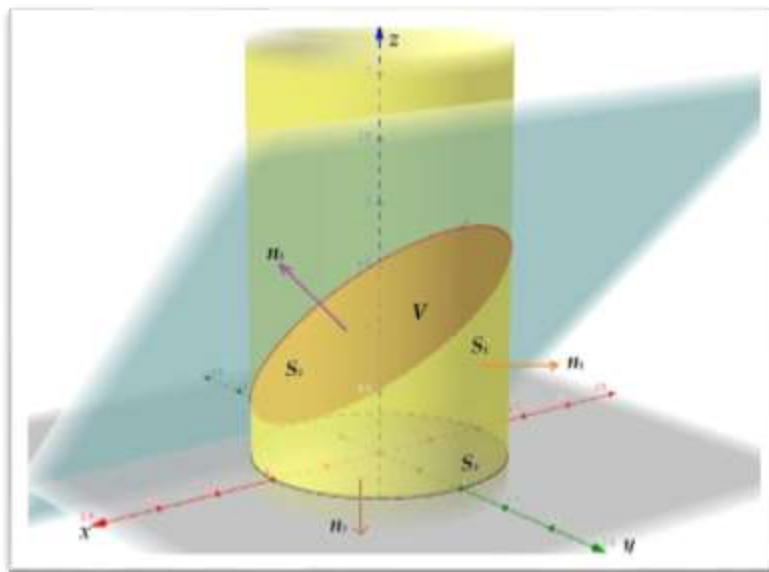


Figura 11.38 Superficie cilíndrica truncada y orientada con normales salientes

- Parametrizamos la elipse incluida en el plano de ecuación $z = 1 + y$

$\vec{\sigma}: R^2 \rightarrow R^3$ / $\vec{\sigma}(u, v) = (u, v, 1+v)$, por lo tanto, el conjunto $S_2 = \{(u, v, 1+v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ es una región del plano $z = 1 + y$, como se puede observar en la figura 11.38

Determinamos el campo de vectores normales a la superficie S_2 : $\vec{n}_2 = \vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$

Así el flujo del campo vectorial \vec{F} sobre la superficie S_2 con la normal apuntando hacia el sentido positivo del eje z es:

$$\begin{aligned}\Phi_{s_2}(\vec{F}) &= \iint_A \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot (\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v) du dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + r \sin \theta) r d\theta dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r + r^2 \sin \theta) d\theta dr = \pi\end{aligned}$$

(en coordenadas polares)

b. Si consideramos la superficie cerrada $\partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ y calculamos el flujo del campo vectorial sobre ∂V , teniendo presente que $\Phi_{\partial V}(\vec{F}) = \Phi_{s_1}(\vec{F}) + \Phi_{s_2}(\vec{F}) + \Phi_{s_3}(\vec{F})$.

Para calcular el flujo $\Phi_{\partial V}(\vec{F})$ empleamos la integral triple de la divergencia del Teorema de la Gauss, sabiendo que la región V es una región elemental de tipo I en R^3 .

$\text{div } \vec{F} = 1$, por lo tanto.

$$\begin{aligned}\Phi_{\partial V}(\vec{F}) &= \iiint_V \text{div } \vec{F} dV = \iiint_V dV = \iint_A \left(\int_0^{1+y} dz \right) dy dx = \iint_A (1+y) dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + r \sin \theta) r dr d\theta = \pi\end{aligned}$$

Como sólo deseamos el flujo sobre la superficie S_2 , calculamos ahora el flujo del campo sobre las superficies S_1 y S_3 para luego restarlos al $\Phi_{\partial V}(\vec{F})$.

Parametrizamos la superficie cilíndrica S_1 :

$\vec{\sigma}: [0, 2\pi] \times R \rightarrow R^3 / \vec{\sigma}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ y el campo de vectores normales a la superficie S_1 :

$$\vec{n}_1 = \vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, 0, 0)$$

Así el flujo del campo vectorial \vec{F} sobre la superficie S_1 con la normal apuntando hacia la cara exterior de la superficie cilíndrica. Entonces.

$$\Phi_{s_1}(\vec{F}) = \iint_A \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot (\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v) du dv = \iint_A \vec{0} \cdot (\cos u, 0, 0) du dv = 0$$

Este resultado es esperable ya que la dirección del campo es paralela a las paredes de la superficie cilíndrica.

El campo de vectores normales a la superficie S_3 es obvio $\vec{n}_3 = (0, 0, -1)$, ya que es una porción del plano (xy) limitada por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, y debe apuntar hacia el semieje negativo de las z (saliente para la superficie cerrada ∂V)

$$\Phi_{s_3}(\vec{F}) = \iint_A -z dy dx = \iint_A 0 dy dx = 0 \text{ pues sobre todo punto perteneciente a la superficie } S_3, z = 0.$$

En síntesis, $\Phi_{s_2}(\vec{F}) = \Phi_{\partial V}(\vec{F}) - \Phi_{s_1}(\vec{F}) - \Phi_{s_3}(\vec{F}) = \pi - 0 - 0 = \pi$ que coincide con el resultado obtenido en la parte a).

Actividad para resolver y discutir en el foro



Actividad 11.6: Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 1)$ a través de la superficie $S = \{(x, y, z) / z = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}$ orientada con la normal que tiene coordenada z positiva

A continuación presentaremos otro resultado importante que permite relacionar una integral de superficie con una integral de línea

Teorema del Rotacional (o de Stokes⁸)



Teorema 11.5: Teorema del rotacional o de Stokes

Sea S una superficie regular orientada con versor normal \vec{n} , cuyo borde ∂S^+ orientada positivamente es una curva regular o regular a trozos. Sea además \vec{T} el versor tangente a ∂S^+ . Si el campo vectorial $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con S una región abierta tal que $S \subset D$, es de clase $C^1(D)$, entonces se verifica que:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial S^+} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

$$\text{o también } \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

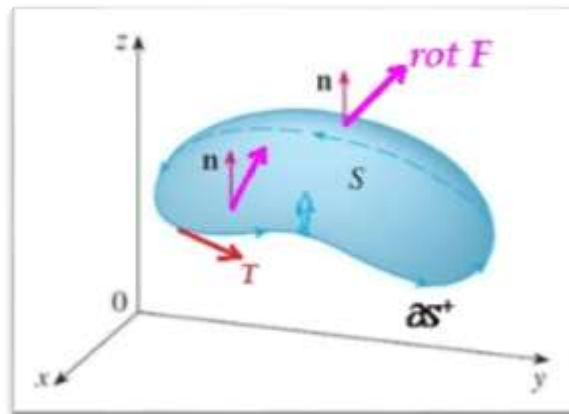


Figura 11.39

El teorema de Stokes establece que es posible calcular la circulación del campo a lo largo de una curva cerrada mediante el flujo del rotacional del campo vectorial a través de cualquier superficie S tridimensional que tenga como borde dicha curva cerrada. Ver figura 11.39.

Observaciones

1. Para el caso particular que la superficie S coincida con un dominio D del plano (xy) (con frontera regular) como se observa en la figura 11.40, y $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ un campo vectorial, entonces $\vec{n} = (0, 0, 1) = \vec{k}$

$$\text{y } \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot (0, 0, 1) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

⁸ Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) Matemático y físico irlandés. Realizó aportes importantes a la dinámica de fluidos, la óptica y la física matemática

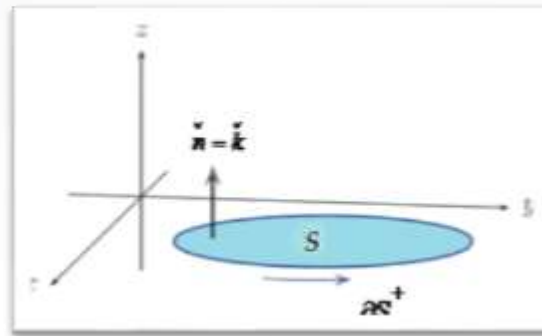
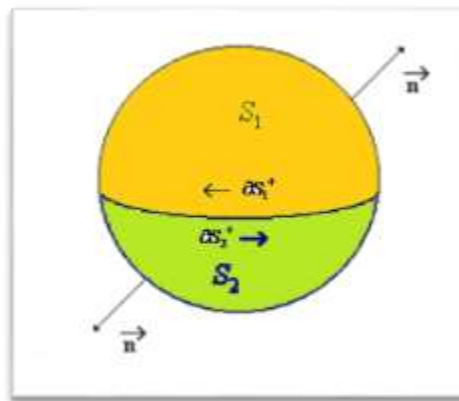


Figura 11.40

y así la igualdad del Teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial S^+} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$$
 que es la igualdad del Teorema de Green. Por ello, el Teorema de Green es considerado el Teorema de Stokes en el plano.

2. Cuando se trata de una superficie esférica se obtiene un resultado interesante mediante el Teorema de Stokes. La superficie puede ser descompuesta en dos semiesferas $S = S_1 \cup S_2$ que comparten la curva borde recorridas en sentidos opuestos.



Las integrales de línea sobre cada curva borde coinciden en valor absoluto pero signos opuestos. Por lo tanto,

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial S_1^+} \vec{F} \cdot \vec{T} ds + \oint_{\partial S_2^+} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = 0. \quad \text{En consecuencia,}$$

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Este hecho no sólo es válido para una superficie esférica sino para cualquier superficie orientable cerrada. ¿Por qué?

3. Con el Teorema de Stokes nos reencontramos con el hecho de que si un campo vectorial \vec{F} es irrotacional, es decir, $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$, y está definido en un conjunto simplemente conexo de R^3 , entonces la circulación (trabajo) del campo \vec{F} sobre una curva cerrada (en este caso una curva en R^3) es nula.

4. Cabe preguntarse, ¿qué sucede si un campo vectorial admite rotacional nulo en un dominio conexo pero NO simplemente conexo? En primer lugar, es obvio que, si $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$, el flujo a través de cualquier superficie es cero, y por lo tanto también es nula la circulación total sobre el borde ∂S . No obstante, en casos como este se debe tener precaución porque el borde podría tratarse de dos curvas, como se puede ver en la figura 11.41

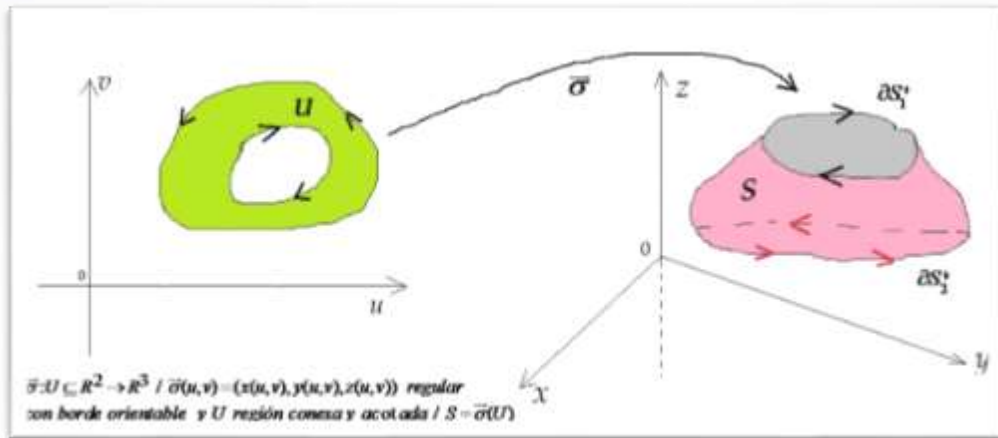


Figura 11.41: Superficie orientable en R^3 con dos curvas borde orientables.

Esto significa que la suma de las circulaciones (trabajos) del campo sobre ambas curvas borde (orientadas positivamente) es nula, pero este hecho no significa que la circulación del campo (trabajo) sobre cada borde sea nula. Veamos un ejemplo en el que se pone de manifiesto este comportamiento.



Ejemplo 11.15: Con anterioridad hemos analizado el campo vectorial

$$\vec{F}: \underbrace{R^3 - \{(x, y, z) \in R^3 / x = y = 0\}}_D \rightarrow R^3 / \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

El dominio D es conexo, pero no simplemente conexo, ¿Por qué?

Ya hemos probado que $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$. Supongamos que se considera la porción de superficie

$S = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + y^2 = 1\}$ limitada por $z = 0$ y $z = 3$ que se muestra en la figura 11.42

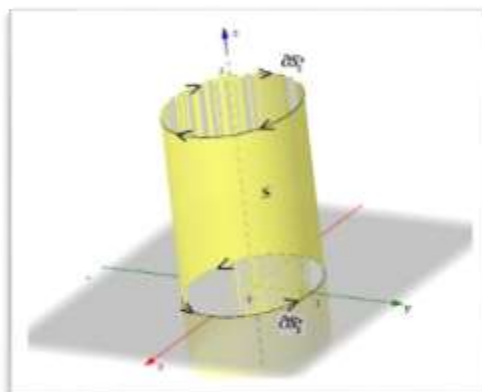


Figura 11.42: Superficie orientable con bordes orientables.

En consecuencia, el flujo del rotor a través de esta superficie es nulo, pero esto no significa que las circulaciones sobre cada una de los bordes ∂S_1^+ y ∂S_2^+ por separado sean nulas, si no porque se compensan, son iguales en valor absoluto pero con signos opuestos (se trata de la misma curva orientadas con sentidos opuestos, una incluida en el plano $z = 0$ y la otra en el plano $z = 3$) De hecho, el trabajo del campo sobre uno de los bordes es 2π y sobre el otro borde es -2π . ¡Compruébelo calculando ambas circulaciones!



Ejemplo 11.16: Calculemos ahora la circulación del campo vectorial definido por:

$\vec{F}(x, y, z) = (y + z, -x + z, x + y + z^2)$ a lo largo de la curva C intersección de las superficies de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y + z = 3$, recorrida en el sentido horario desde el punto de vista de un observador ubicado en el origen de coordenadas.

Se trata de un campo vectorial de clase $C^1(R^3)$

Una parametrización regular del plano de ecuación $x + y + z = 3$ es: $\vec{\sigma}: R^2 \rightarrow R^3 / \vec{\sigma}(u, v) = (u, v, 3 - u - v)$, por lo tanto, el conjunto $S = \{(u, v, 3 - u - v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ es una región del plano $x + y + z = 3$ y entonces la curva C es la frontera del conjunto S , es decir, $C = \partial S$ como se visualiza en la figura 11.43

Determinamos el campo de vectores normales a la superficie S : $\vec{n} = \vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$

La parametrización escogida de la superficie S la orienta de manera que el vector normal apunta en el sentido requerido. Es posible usar el teorema de Stokes para el cálculo de la circulación pedida mediante el flujo del rotacional del \vec{F} .

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & -x + z & x + y + z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, -2), \text{ por lo tanto:}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (0, 0, -2) \cdot (1, 1, 1) du dv = -2 \iint_S du dv = -2 \cdot \text{Área}(S) = -2\pi$$

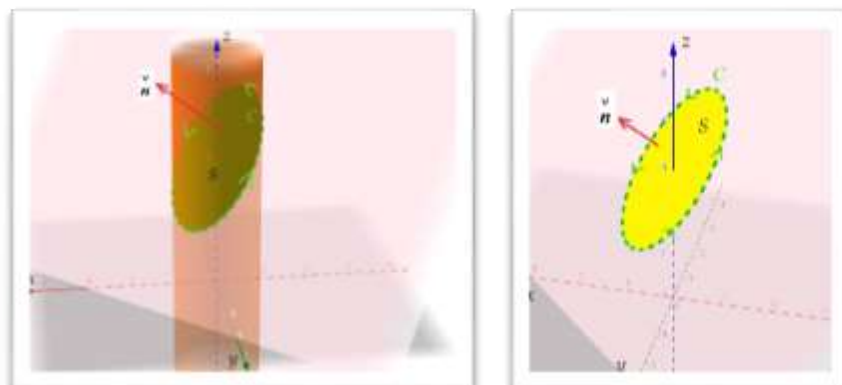


Figura 11.43 Superficie S y curva orientada

Actividad para resolver y discutir en el foro



Actividad 11.7: Use el teorema de Stokes para calcular la circulación del campo vectorial dado $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$, y C

es la frontera del triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ orientada en sentido anti-horario visto desde el eje z positivo y $\vec{F}(x,y,z) = (x+y^2, y+z^2, z+x^2)$



Ejemplo 11.17: Para el campo vectorial $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{F}(x,y,z) = (xz, yz, x^2+y^2)$ calculamos el flujo saliente de \vec{F} a través de la superficie cónica de ecuación $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ que se encuentra en el semiespacio $z \geq 0$.

Primera metodología de resolución

Se trata de un campo vectorial de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$

Una parametrización regular de la superficie S dada es:

$$\vec{\sigma}: \underbrace{[0,4] \times [0,2\pi]}_A \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{\sigma}(r,\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 4-r),$$

$$\vec{n} = \vec{\sigma}'_r \times \vec{\sigma}'_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & -1 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (r \cos \theta, r \sin \theta, r) \text{ que se trata de un vector saliente (3ra componente}$$

positiva)

Calculamos por definición el flujo del campo vectorial dado:

$$\begin{aligned} \Phi_s(\vec{F}) &= \iint_A \vec{F}(\vec{\sigma}(r,\theta)) \cdot (\vec{\sigma}'_r \times \vec{\sigma}'_\theta) dr d\theta = \int_0^4 \int_0^{2\pi} ((4-r)r^2 \cos^2 \theta + (4-r)r^2 \sin^2 \theta + r^3) d\theta dr = \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} ((4-r)r^2 + r^3) d\theta dr = 4 \int_0^4 \int_0^{2\pi} r^2 d\theta dr = 8\pi \cdot \frac{64}{3} = \frac{512}{3} \pi \end{aligned}$$

Segunda metodología de resolución

Calcularemos el flujo del campo vectorial dado mediante una conveniente aplicación del teorema de la Divergencia (o de Gauss).

Nótese que la superficie dada S no es cerrada, por lo tanto no existe una región limitada en el espacio tridimensional. De esta forma no se puede emplear el Teorema de Gauss. No obstante, si a la superficie dada se le agrega su base en el plano (xy) , es decir, la superficie

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 16, z=0\}$$

resulta una superficie cónica cerrada con su base (cono) y con el vértice en el punto $(0,0,4)$ Su base es el círculo con centro en $(0,0)$ y radio 4 en el plano (xy) , es decir, la nueva superficie cerrada es $K = S \cup T$, que encierra la región V en \mathbb{R}^3 tal como se observa en la figura 11.44

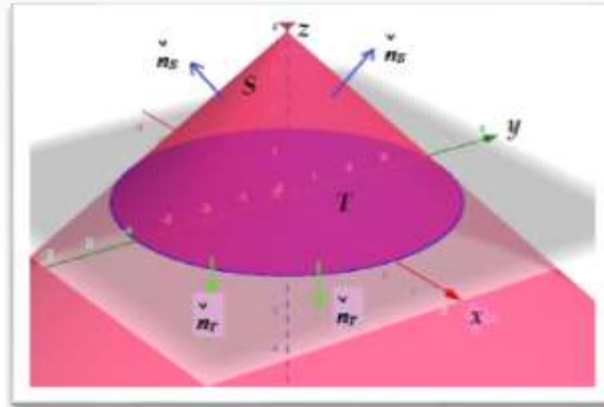


Figura 11.44: Superficie cónica

El Teorema de Gauss plantea $\iint_K \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz$, pero

$$\iint_K \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_T \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz$$

En consecuencia, se verifica que $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz - \underbrace{\iint_T \vec{F} \cdot \vec{n} dS}_{\Phi_T(\vec{F})}$

Para que esta técnica de cálculo del flujo sea conveniente, las dos integrales del segundo miembro de la igualdad anterior deben ser sencillas comparadas con el cálculo que hemos realizado en la metodología anterior. Veamos...

$$\text{div } \vec{F} = z + z + 0 = 2z$$

Para el cálculo de la integral triple empleamos coordenadas cilíndricas.

$$\iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r} 2z r dz d\theta dr = 2\pi \int_0^4 (r^3 - 8r^2 + 16r) dr = \frac{128}{3} \pi$$

A este resultado debemos restarle el flujo sobre la base del cono ubicada en el plano (xy)

La parametrización de la base del cono es:

$$\vec{\sigma}: \underbrace{[0, 4] \times [0, 2\pi]}_A \rightarrow R^3 / \vec{\sigma}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$$

$$\vec{n} = \vec{\sigma}'_r \times \vec{\sigma}'_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r) \text{ que se trata de un vector entrante, para lo cual, para que la}$$


superficie T quede orientada con las normales salientes, debemos considerar el vector opuesto, tal como se ve en la figura 11.44

$$\Phi_T(\vec{F}) = \iint_A \vec{F}(\vec{\sigma}(r, \theta)) \cdot (\vec{\sigma}'_r \times \vec{\sigma}'_\theta) dr d\theta = - \int_0^4 \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr = -128\pi$$

En resumen, $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz - \underbrace{\iint_T \vec{F} \cdot \vec{n} dS}_{\Phi_T(\vec{F})} = \frac{128}{3} \pi - (-128\pi) = \frac{512}{3} \pi$ resultado que coincide con

aquél obtenido en la primera metodología.

La idea de aplicar convenientemente el teorema de Gauss para el cálculo del flujo de un campo vectorial sobre una superficie abierta orientable, está dirigida a la determinación y agregado de alguna otra superficie que la transforme en superficie cerrada cuya parametrización y cálculo del flujo sean sencillos. En el caso presentado se hubiese podido también agregar otras superficies de cara al objetivo, como por ejemplo, la porción de paraboloides $z = x^2 + y^2 - 16$ que está por debajo del plano (xy) , pero el cálculo sobre ella tiende a ser más complejo que sobre un círculo en el plano (xy) cuyo campo de vectores normales es inmediato.

 **Ejemplo 11.18:** Calculemos $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ si $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ γ es una parametrización del borde de la región $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y = z\}$ orientado en sentido antihorario respecto de un observador situado sobre el eje z , tal como se muestra en la figura 11.45

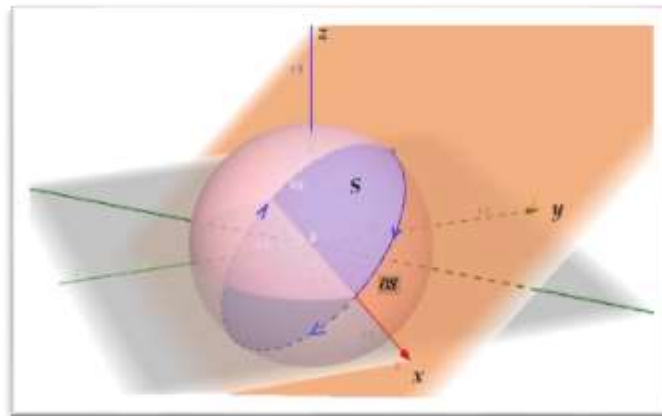


Figura 11.45: Elipse en el plano $y = z$ y dentro de la esfera de radio unitario.

El campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ es conservativo. En efecto, si calculamos su rotacional es:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

Dado que \mathbb{R}^3 es un conjunto simplemente conexo, entonces el campo vectorial \vec{F} es conservativo, y como la curva ∂S es cerrada

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \vec{0} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$