EJERCICIOS CUADERNO 2 - SLIT

2. Respuesta Impulso.

① Solución por Convolución.

Sabemos que la respuesta impulso del sistema es:

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

Luego

$$y_{conv}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-2\tau} [e^{-(t-\tau)} u(t-2)]\, d\tau$$

$$= e^{-t} \int_{0}^{t} e^{-2\tau} e^{\tau} d\tau = e^{-t} \int_{0}^{t} e^{-\tau} d\tau$$

$$= e^{-t} [-e^{-\tau}]_{0}^{t}$$

$$= e^{-t}(1 - e^{-t})$$

$$= e^{-t} - e^{-2t}$$

- Se multiplica por $u(t)$ para anular en $t<0$

$$\boxed{y_{cv}(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t) = y_{EDO}(t)}$$

∴ Ambas coinciden exactamente

② Comprobamos que $h(t)$ para $x(t) = \delta(t)$

partiendo de:

$$y'(t) + y(t) = \delta(t), \quad y(0^-) = 0$$

$$y = ce^{-1}$$

- Se integra la EDO en un intervalo $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ alrededor de $t=0$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y'(t)\,dt + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt \Rightarrow [y]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + O(\varepsilon) = 1$$

Como $y(0^-)=0$ y el segundo termino tiende a cero al hacer $\varepsilon \to 0$; obtenemos $y(0^+)=1$

- Luego para $t>0$, $y(0^+)=1$ es la condición y la solución homogenea es:

$$h(t) = y(t) = 1 \cdot e^{-t} = e^{-t} \quad t>0$$

- Juntando con $h(t)=0$, para $t<0$

$$\boxed{h(t) = e^{-t}u(t)}$$

③ Comprobación manual de la integral de convolución

partimos de.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

Con $x(\tau) = e^{-2\tau}u(\tau)$, y $h(t-\tau) = e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)$

1. Acotamo soportes.

- $x(1) \neq$ Solo Si $\tau \geq 0$
- $h(t-\tau) \neq 0$ Solo si $t-\tau \geq 0 \iff \tau \leq t$

$\rightarrow$ Integración efectiva desde $\tau = \max(0, t-\infty) = 0$ hasta $\tau = \min(t, \infty) = t$

2. Integral

$$y(t) = \int_0^t e^{-2\tau} e^{-(t-\tau)}\,d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{-2\tau} e^{\tau}\,d\tau$$

$$= e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau = e^{-t}[e^{-\tau}]_0^t = \underline{e^{-t}(1-e^{-t})}$$

3. Teniendo en cuenta Heaviside:
para forzar $y(t)=0$ si $t<0$, se multiplica por $u(t)$.

$$\boxed{y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\,u(t)}$$

$\Longrightarrow$ Se verifica que la integral de convolución reproduce exactamente la solución obtenida por EDO