Parcial 1: Conceptos Básicos y Serie de Fourier
Señales y Sistemas 2025-I

Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza, Ph.D.
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, y Computación
Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales

1. Instrucciones

- Para recibir crédito total por sus respuestas, estas deben estar claramente justificadas e ilustrar sus procedimientos y razonamientos (paso a paso) de forma concreta, clara y completa.
- El parcial debe ser enviado al correo electrónico `amalvarezme@unal.edu.co` antes de las 23:59 del 16 de mayo de 2025, vía link de GitHub, con componentes teóricas de solución a mano en formato pdf y componentes de simulación en un cuaderno de Python. Si el correo unal o GitHub presentan inconsistencias, enviar los archivos como adjunto en `.zip`.
- Los códigos deben estar debidamente comentados y discutidos en celdas de texto (markdown). Códigos no comentados ni discutidos, no serán contabilizados en la nota final.
- Incluir en el asunto del correo de envío del parcial: Parcial 1 SyS 2025-1: Nombre completo.

2. Preguntas

1. Se tiene un microprocesador de 5 bits con entrada análoga de -3.3 a 5 [v]. Diseñe el sistema de acondicionamiento y digitalización para la señal: $x(t) = 20\sin(7t-\pi/2) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$. Presente las simulaciones y gráficas de los procedimientos más representativos en un cuaderno de Python, incluyendo al menos dos períodos de la señal estudiada.

2. Cuál es la señal obtenida en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de $5kHz$, aplicado a la señal $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$?. Realizar la simulación del proceso de discretización. En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

3. La distancia media entre dos señales $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, se puede expresar a partir de la potencia media:

$$d(x_1,x_2) = \bar{P}_{x_1-x_2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2\, dt.$$

   Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

$$x_1(t) = A\cos(w_0 t), \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T, A \in \mathbb{R}^+$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t < \frac{T}{4} \\ -1 & si \quad \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4} \\ 1 & si \quad \frac{3T}{4} \le t < T \end{cases}$$

   ¿Cuál es la distancia media entre las señales?. Corrobore sus desarrollos con Sympy.

4. Sea $x^{''}(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(ti-tf)n^2 w_o^2}\int_{t_i}^{t_f} x^{''}(t) e^{-jnw_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   ¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x^{''}(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?.

   Encuentre el espectro de Fourier, su magnitud, fase, parte real, parte imaginaria y el error relativo de reconstrucción para $n \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$, a partir de $x^{''}(t)$ para la señal $x(t)$ en la Figura 1. Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$ y presente las respectivas simulaciones sobre Python.

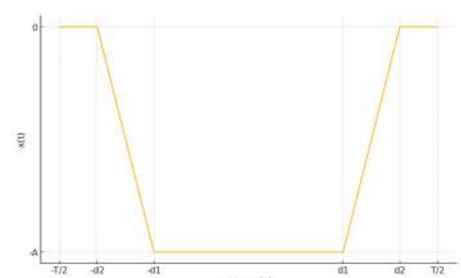


Figura 1: Señal $x(t)$ - ejercicio 4.

SOLUCION

1) microprocesador = 5bits → Analoga $-3{,}3V$ a $5V$

Diseño de sistema de acondicionamiento y digitalización para la Señal

$$x(t) = 20\sin(7t - \pi/2) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$$

$A_1 = 20$, $A_2 = 3$, $A_3 = 2$

Se tiene un termino Seno y 2 Cosenos funciones que oscilan entre -1 y 1 por lo tanto.

$$X(max) = 20(1) - 3(-1) + 2(1) = 25V$$

$$X(min) = 20(-1) - 3(1) + 2(-1) = -25V$$

$$\underbrace{[-25V - 25V]}_{50V}$$

Atenuación

$\#Estados = 2^5 = \boxed{32}$

$\Delta Rango = 5 - (-3{,}3V) = \boxed{8{,}3V}$

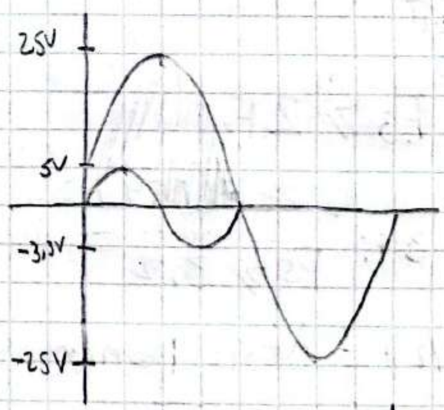
Se necesita hacer el acondicionamiento ya que el microprocesador solo recibe señales entre $(-3{,}3V$ a $5V)$

Vmax in 25V

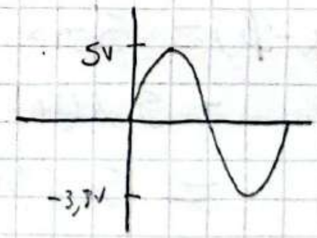
Vmin in -25V

Vmax out 5V

Vmin out -3,3V



$$m = \frac{V_{maxo} - V_{mino}}{V_{maxin} - V_{minin}} = \frac{5 - (-3{,}3)}{25 - (-25)}$$



$m = \frac{8{,}3}{50} = \boxed{0{,}166}$ Escalamiento

$$b = y - mx = Y_{min} - m\,x_{min} = V_{mino} - V_{min}\,m = -3{,}3V - (-25)(0{,}166)$$

$b = \boxed{0{,}85}$ V. offset

$f =$

$y = mx + b$

$X(t)_{Acond} = 0{,}166\, X(t) + 0{,}85$

Digitalización 2^5

$\# Estado = 32 \rightarrow 31$ Saltos Ra

$\Delta V = \frac{Rango}{Saltos} = \frac{8{,}3V}{31} \simeq 0{,}267V$

La señal acondicionada se puede cuantizar asignando a cada nivel (32) por separado $\simeq 0{,}267V$, iniciando en $-3{,}3V$

Ahora se halla Frecuencia de muestreo necesaria.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F =$

$\omega_1 = 7 = \frac{7}{2\pi} = 0{,}8 = F_1$

$\omega_2 = 5 = \frac{5}{2\pi} = 1{,}11 = F_2$

$\omega_3 = 10 = \frac{10^{5}}{2\pi} = 1.59 = F_3$

$Fs \geq 2F_0$

$Fs \geq 2(1.59)$

$Fs \geq 3.2$

$Sen(7t - \pi/2) =$ descomponemos la función seno como:

$Sen(\alpha - \beta) = Sen\alpha . Cos\beta - Sen\beta . Cos\alpha$

$= Sen(7t)\cos(\cancel{\pi/2})^{0} - Sen(\cancel{\pi/2})^{1}\cos(7t)$

$= \cancel{Se(7t)}.0 - 1.\cos(7t)$

$= -\cos 7t$

$X(t) = -20\cos(7t) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$

Acondicionando la señal original queda.

$x(t)$ Ajustada $= 0{,}166\left(-20\cos(7t) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)\right)$

$x(t)$ Ajustada $= -3{,}32\cos(7t) - 0{,}5\cos(5t) + 0{,}33\cos(10t)$

2) Cuál es la Señal obtenida en tiempo discreto al utilizar un conversor A/D con frecuencia de muestreo 5KHz aplicado a la Señal.

$$X(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

Realizar simulación de discretización. En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñar e implementar un conversor adecuado para la señal estudiada

$F_S = 5KHz = 5000\ Hz$

$F_S \geq 2F_0$ • Se calcula cada frecuencia para hallar F_{max}

$F_S \geq 2F_{max}$

$\omega_3 = 11000\pi = \frac{2\pi}{T_3} = 2\pi F_3$

$\omega_1 = 1000\pi = \frac{2\pi}{T_1} = 2\pi F_1$; $\omega_2 = 2000\pi = \frac{2\pi}{T_2} = 2\pi F_2$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1000\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = \underline{500}\ Hz\ ✓ \\ F_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{2000\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = \underline{1000}\ Hz\ ✓ \\ F_3 &= \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{11000\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = \underline{5500\ Hz}\ X \end{aligned}\right\} \text{ALIASING}$$

F_3 no cumple el teorema de Nyquist $F_S \geq 2F_0$

$F_S \geq 2\max(F_1, F_2, F_3)$

$F_S \geq 2\max(500\ Hz, 1000\ Hz, \underline{5500\ Hz})$

$F_S \geq 2(5500)$

$F_S \geq 11000\ Hz$

$5000\ Hz \not\geq 11000\ Hz \rightarrow 5000\ Hz < 11000\ Hz$ NO ES APROPIADA

- Ahora se discretiza la señal.

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

continuo discreto

$$\omega \rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{N} = 2\pi F \quad ; \quad f = \frac{1}{N} = \frac{F_{(1,2,3)}}{F_S}$$

$$t \rightarrow n \xrightarrow{\quad} \text{se multiplica po } (F_1, F_2, F_3) \text{ se divide por } (F_S)$$

$$X(n/F_S) = 3\cos(1000\pi n) + \sin(2000\pi n) + 10\cos(11000\pi n)$$

$$X(n/F_S) = 3\cos\left(\frac{1000\pi n}{F_{S1}}\right) + 5\sin\left(\frac{2000\pi n}{F_{S2}}\right) + 10\cos\left(\frac{11000\pi n}{F_{S3}}\right)$$

$$X(n/F_S) = 3\cos\left(\frac{500\,Hz\,2\pi n}{5000\,Hz}\right) + 5\sin\left(\frac{2000\,Hz\,2\pi n}{5000\,Hz}\right) + 10\cos\left(\frac{5500\,2\pi n}{5000\,Hz}\right)$$

$$X(n/F_S) = 3\cos\left(\frac{2\pi n}{10}\right) + 5\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 10\cos\left(\frac{22\pi n}{10}\right)$$

$$X[n/F_S] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 10\cos\left(\frac{11\pi n}{5}\right)$$

$0{,}2\pi\ [0-2\pi]$ ✓ $\quad 0{,}4\pi\ [0 \text{ a } 2\pi]$ ✓ $\quad 2{,}2\pi\ (0-2\pi)$ ✗

1 $\quad$ 2 $\quad$ $\boxed{3}$

Como el 3er Coseno esta por fuera del periodo de 2π, esto indica que es un ALIASING, por lo que se debe hallar la frecuencia original por lo que se resta 2π para encontrar la copia que esta dentro del intervalo de $(0-2\pi)$

$$\Omega_{orig} = \Omega_{copia} \pm 2K\pi)$$

$$\Omega_3 = \frac{11\pi}{5} \notin [0-2\pi)$$

$$\Omega_3 - 2\pi = \frac{11}{5}\pi - 2\pi = \frac{11\pi - 10\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$$

- Ahora se debe volver a llevar esta frecuencia al coseno que se considera que quedara con su frecuencia original de discretización.

$$X[n/Fs] = \underbrace{3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)} + 5\sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + \underbrace{10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)}$$

Se suman los terminos con la misma frecuencia angular obteniendo:

$$X[n/Fs] = 13\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

3. La distancia entre dos señales $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, se puede expresar a partir de la potencia media:

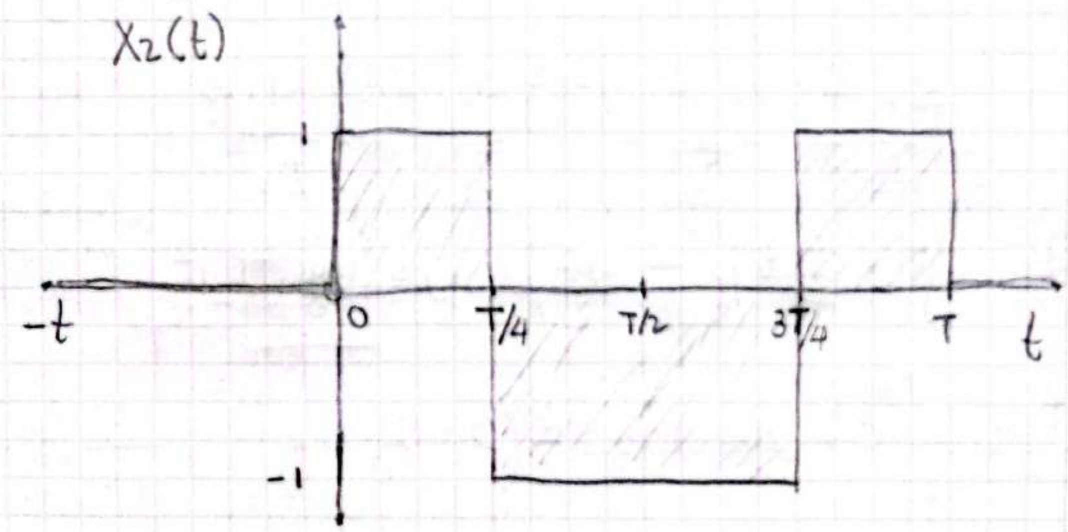
$$d(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1-x_2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2\, dt$$

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$

$$x_1(t) = A\cos(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T, A \in \mathbb{R}^+$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t < T/4 \\ -1 & \text{si} \quad \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{3T}{4} < t < T \end{cases}$$

distancia media entre las señales?



Se evalua la señal en los 3 intervalos $x_2(t)$. Por lo que se divide la integral de $\bar{P}_x$ en 3.

$$\bar{P}_{x_1-x_2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{T/4} |A\cos(\omega_0 t) - 1|^2\, dt + \int_{T/4}^{3T/4} |A\cos(\omega_0 t) + 1|^2\, dt$$
$$+ \int_{3T/4}^{T} |A\cos(\omega_0 t) - 1|^2\, dt$$

Se aplica binomio Cuadrado perfecto para expandir la integral y factorizar

$$\bar{P}_{x_1-x_2} = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T/4} (A^2\cos^2(\omega_0 t) - 2A\cos(\omega_0 t) + 1)\, dt$$

$$+ \int_{T/4}^{3T/4} (A^2\cos^2(\omega_0 t) + 2A\cos(\omega_0 t) + 1)\, dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} [A^2\cos^2(\omega_0 t) - 2A\cos(\omega_0 t) + 1]\, dt$$

- Se evalua Cada una de las integrales de acuerdo a los limites o intervalos

1) $0 \leq t < T/4$

$$\int_0^{T/4} [A^2\cos^2(\omega_0 t) - 2A\cos(\omega_0 t) + 1]\, dt$$

Propiedad Trigonometrica.

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$\int_0^{T/4} [A^2\left(\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}\right) - 2A\cos(\omega_0 t) + 1]\, dt$$

Simplificando fracciones

$$\int_0^{T/4} \Big(\underbrace{\frac{A^2}{2}}_{\boxed{I_1}} + \underbrace{\frac{A^2}{2}\cos(2\omega_0 t)}_{\boxed{I_2}} \underbrace{-2A\cos(\omega_0 t)}_{\boxed{I_3}}\Big) \underbrace{+1}_{I_4}\, dt$$

Se separa la integral en sumas y restas, y separando constantes

$$\frac{A^2}{2}\int_0^{T/4} dt = \frac{A^2 t}{2}\Big|_0^{T/4} = \frac{A^2}{2}\frac{T}{4} - 0 = \boxed{\frac{A^2 T}{8}} = \boxed{I_1}$$

$$\boxed{I_2} = \frac{A^2}{2}\int_0^{T/4} \cos(2\omega_0 t)\, dt = \frac{A^2}{2}\left(\frac{\operatorname{Sen}(2\omega_0 t)}{2\omega_0}\right)\Big|_0^{T/4} = \frac{A^2}{4\omega_0}\left[\sin\left(\frac{T}{2}\omega_0\right) - \cancel{\sin(0)}^{\,0}\right]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad = \frac{A^2}{4\omega_0}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{\cancel{2\omega_0}}\omega_0\right)\right) = \frac{A^2}{4\omega_0}\cancel{\sin(\pi)}^{\,0} = \boxed{0}$$

$$\boxed{I_3} = 2\int_0^{T/4} A\cos(\omega_0 t)\, dt = 2A\left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right)\Big|_0^{T/4} = \frac{2A}{\omega_0}\sin\left(\frac{\omega_0 T}{4}\right)$$

$U = \omega_0 t$

$du = \omega_0 dt$, $\frac{du}{\omega_0} = dt \rightarrow \frac{2}{\omega_0}\int_0^{T/4} \cos(u)\, du = \frac{2A}{\omega_0}\operatorname{Sen}(u)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\frac{2A}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 \cdot \frac{2\pi}{4\omega_0}\right) = \frac{2A}{\omega_0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{2A}{\omega_0}}$$

$$I_4 = \int_0^{T/4} dt = t\Big|_0^{T/4} = T/4$$

$$= I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = \frac{A^2 T}{8} - \frac{2A}{\omega_0} + \frac{T}{4}$$

2) Ahora se evalua para $\frac{T}{4} \leq t < \frac{3}{4}T$

$$\int_{T/4}^{3T/4} \left(A^2\cos^2(\omega_0 t) + 2A\cos(\omega_0 t) + 1\right) dt$$

identidad trigonometrica

Reescribiendo la integral $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$

$$= \int_{T/4}^{3T/4} \left[A^2\left(\frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}\right) + 2A\cos(\omega_0 t) + 1\right] dt$$

$$= \int_{T/4}^{3T/4} \left[\underbrace{\frac{A^2}{2}}_{I_1} + \underbrace{\frac{A^2}{2}\cos(2\omega_0 t)}_{I_2} + \underbrace{2A\cos(\omega_0 t)}_{I_3} + \underbrace{1}_{I_4}\right] dt$$

$$\boxed{I_1} = \frac{A^2}{2}\int_{T/4}^{3T/4} dt = \boxed{\frac{A^2 T}{4}}$$

$$\boxed{I_2} = \frac{A^2}{2}\int_{T/4}^{3T/4} \cos(2\omega_0 t)\, dt = \frac{A^2}{2}\left(\frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0}\right)\Bigg|_{T/4}^{3T/4}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$2\omega_0 \cdot \frac{3T}{4} = 3\pi \qquad \overbrace{\frac{A^2}{2}\left(\frac{\sin(3\pi) - \sin(\pi)}{2\omega_0}\right)}^{0} = 0$$

$\sin(3\pi) = 0$

$$2\omega_0 \cdot \frac{T}{4} = \pi \quad \sin(\pi) = 0$$

- En el Codigo Poner A como Variable Simbolica

$$\boxed{I_3} = 2\int_{T/4}^{3T/4} A\cos(\omega_0 t)\,dt = 2A\left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right)\Bigg|_{T/4}^{3T/4}$$

$u = \omega_0 t$; $du = \omega_0 dt$ $\quad \frac{1}{\omega_0}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{\omega_0}\operatorname{Sen}(u)$

$\frac{du}{\omega_0} = dt$

Con $\omega_0 T = 2\pi$

$\omega_0 \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$\omega_0 \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$= 2A\left(\frac{-1-1}{\omega_0}\right) = -\frac{4A}{\omega_0}$ $\quad \boxed{I_4} = \int_{T/4}^{3T/4} dt = t\Big|_{T/4}^{3T/4} = \frac{3T}{4} - \frac{T}{4} = \boxed{\frac{T}{2}}$

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = \frac{A^2 T}{4} + 0 - \frac{4A}{\omega_0} + \frac{T}{2} = \boxed{\frac{A^2 T}{4} - \frac{4A}{\omega_0} + \frac{T}{2}}$$

3) Ahora se evalua para $\frac{3T}{4} \leq t < T$

$$\int_{3T/4}^{T} \left[A^2\cos^2(\omega_0 t) + 2A\cos(\omega_0 t) + 1\right] dt$$

$\cos^2(\theta) = \frac{1+2\cos\theta}{2}$ $\quad$ Se aplica nuevamente la identidad trigonometrica

$$= \int_{3T/4}^{T} \left[A^2\left(\frac{1+2\cos\theta}{2}\right) + 2A\cos(\omega_0 t) + 1\right] dt$$

$$= \int_{3T/4}^{T} \Big[\underbrace{\frac{3A^2}{2}}_{I_1} + \underbrace{\frac{A^2}{2}\cos(2\omega_0 t)}_{I_2} + \underbrace{2A\cos(\omega_0 t)}_{I_3} + \underbrace{1}_{I_4}\Big] dt$$

$$\boxed{I_1} = \int_{3T/4}^{T} \frac{3A^2}{2}\,dt = \frac{3A^2}{2} t\Big|_{3T/4}^{T} = \frac{3}{2}\cdot\frac{T}{4}A^2 = \boxed{\frac{3A^2 T}{8}}$$

$$I_2 = \int_{3T/4}^{T} \frac{A}{2}\cos(2\omega_0 t)\,dt = \frac{A}{2}\left[\frac{\operatorname{Sen}(2\omega_0 t)}{2\omega_0}\right]\Bigg|_{3T/4\,(a)}^{T\,(b)}$$

(b) $2\omega_0 T = 2\pi \Rightarrow 2\omega_0 T = 4\pi$ $\quad = \frac{A}{2}\left(\left[\frac{\cancel{\operatorname{Sen}(4\pi)}}{2\omega_0}\right] - \left[\frac{\cancel{\operatorname{Sen}(3\pi)}}{2\omega_0}\right]\right)$

$\operatorname{Sen}(4\pi) = 0$

(a) $2\omega_0 \frac{3T}{4} = 3\pi \Rightarrow \operatorname{Sen}(3\pi) = 0$ $\quad I_2 = \boxed{0}$

$$I_3 = \int_{3T/4}^{T} 2A\cos(2\omega_0 t)\,dt = 2A\left(\frac{\operatorname{Sen}(\omega_0 t)}{\omega_0}\right)\Bigg|_{\frac{3T}{4}\,(a)}^{T\,(b)}$$

(b) $\omega_0 T = 2\pi \rightarrow \operatorname{Sen}(2\pi) = 0$ $\quad \boxed{I_3} = 2A\left(\frac{0-(-1)}{\omega_0}\right) = \frac{2A}{\omega_0}$

(a) $\omega_0 \frac{3T}{4} = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \operatorname{Sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Entonces tendremos $\quad \boxed{I_4} = \int_{3T/4}^{T} 1\,dt = t\Big|_{3T/4}^{T} = T - \frac{3T}{4} = \boxed{\frac{T}{4}}$

Sumando cada integral.

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = \frac{A^2 T}{8} + 0 - \frac{2A}{W_0} + \frac{T}{4} = \boxed{\frac{A^2 T}{8} - \frac{2A}{\omega_0} + \frac{T}{4}}$$

- Ahora se suman los 3 resultados de los intervalos y se calcula la potencia media de las señales $(x_1 - x_2)$

$$\bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T\to\infty}\left[\underbrace{\frac{A^2T}{8}}_{A_1} - \underbrace{\frac{2A}{\omega_0}}_{B_1} + \underbrace{\frac{T}{4}}_{C_1} + \underbrace{\frac{A^2T}{4}}_{A_2} - \underbrace{\frac{4A}{\omega_0}}_{B_2} + \underbrace{\frac{T}{2}}_{C_2} + \underbrace{\frac{A^2T}{8}}_{A_3} - \underbrace{\frac{2A}{\omega_0}}_{B_3} + \underbrace{\frac{T}{4}}_{C_3}\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{4A^2T}{8_2} - \frac{8A}{\omega_0} + 1\right] \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{A^2 T}{2} - \frac{\overset{4}{\cancel{8}}A T}{\frac{\cancel{2}\pi}{T}} + 1\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[T\left(\frac{A^2}{2} - \frac{4A}{\pi} + 1\right]\right. \text{ Fact Comun } T$$

$$= \boxed{\frac{A^2}{2} - \frac{4A}{\pi} + 1}$$

4. Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$ donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Partimos del peso o espectro de Fourier

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Integramos por partes

$$u = x(t) \qquad du = x'(t)\,dt$$

$$dv = e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad v = \frac{j e^{-jn\omega_0 t}}{n\omega_0}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Sustituyendo

$$C_n = \frac{1}{T}\left[\left(x(t)\frac{j e^{-jn\omega_0 t}}{n\omega_0}\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2} - \underbrace{\frac{j}{n\omega_0}\int_{-T/2}^{T/2} x'(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}_{\text{Nuevamente se resuelve por partes}}\right]$$

$$u = x'(t) \rightarrow du = x''t\,dt$$

$$dv = e^{-jn\omega_0 t} dt \rightarrow v = \frac{j e^{-jn\omega_0 t}}{n\omega_0}$$

de esta manera se obtiene.

$$\int_{-T/2}^{T/2} x'(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \left[x'(t)\frac{je^{-jn\omega_0 t}}{n\omega_0}\right]\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{j}{n\omega_0}\int_{-T/2}^{T/2} x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Así tenemos C_n de la siguiente manera

$$C_n = \frac{1}{T}\left(\left[x(t)\frac{je^{-jn\omega_0 t}}{n\omega_0}\right|_{-T/2}^{T/2} - \frac{j}{n\omega_0}\left(\left[x'(t)\frac{je^{-jn\omega_0 t}}{n\omega_0}\right]\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{j}{n\omega_0}\int_{-T/2}^{T/2} x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right]\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(jx(t)\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{n\omega_0}\right)\Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{T}\left[x'(t)\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{n^2\omega_0^2}\right]\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{1}{Tn^2\omega_0^2}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

- Se evalua la primera integral teniendo en cuenta.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

$$\frac{1}{T}\left(jx(t)\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{n\omega_0}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{T}\left(jx(T/2)T\frac{e^{-jn\pi}}{2n\pi} - jx(-T/2)T\frac{e^{jn\pi}}{2n\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{jT}{2n\pi}\left[x(T/2)e^{-jn\pi} - x(-T/2)e^{jn\pi}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[x(T/2) + x(-T/2)\cdot\sin(n\pi)\right]$$

$$= 0$$

Se evalua la segunda integral pero en vez de $x(t)$ tenemos $x'(t)$, la cual sera igual a la anterior, por lo que tambien sera 0

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{Tn^2\omega_0^2}\int_{-T/2}^{T/2} x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Tomamos el rango de $T = t_f - t_i$

$$-\frac{1}{(t_f - t_i)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt}$$

- Ahora para los coeficientes de la serie trigonométrica se tiene que el espectro de la serie de fourier se puede calcular como:

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\left[\cos(n\omega_0 t) - j\sin(n\omega_0 t)\right] dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\cos(n\omega_0 t) - \frac{j}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\sin(n\omega_0 t)\, dt$$

utilizando la igualdad de la parte real de:

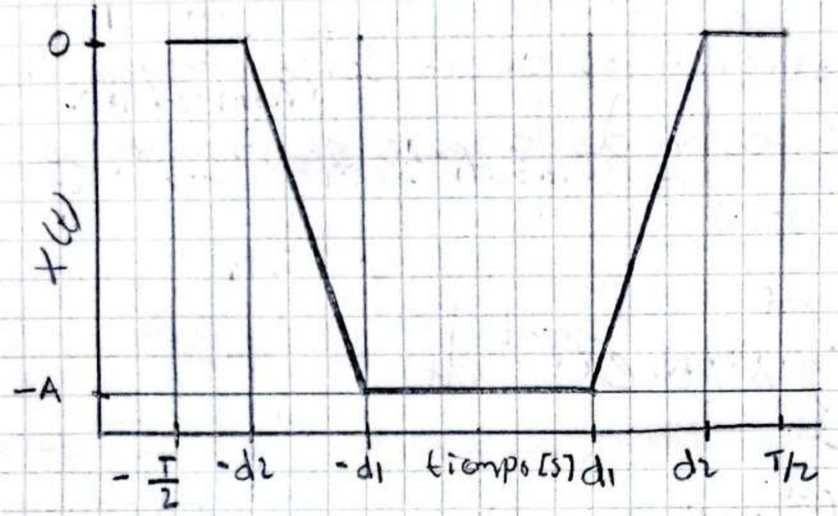
$a_n = 2\,\mathrm{Re}\{C_n\}$ se tiene:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt}$$

ahora para la parte imaginaria $b_n = -2\,\mathrm{Im}\{C_n\}$ tenemos:

$$\boxed{b_n = \frac{2}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\sin(n\omega_0 t)\, dt}$$

Encuentre el espectro de Fourier, su magnitud y el error relativo de reconstrucción para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$. Comprobar el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$.



Se define la función a trozos de la siguiente manera.

$$x(t) = \begin{cases} -T/2 \leq t < -d_2 & \rightarrow x(t) = 0 \\ -d_2 \leq t < -d_1 & \rightarrow x(t) = m_1 t + b_1 \\ -d_1 \leq t < d_1 & \rightarrow x(t) = -A \\ d_1 \leq t < d_2 & \rightarrow x(t) = m_2 t + b_2 \\ d_2 \leq t < T/2 & \rightarrow x(t) = 0 \end{cases}$$

Al realizar la razón de cambio se puede obtener las pendientes $m_1 \wedge m_2$

$m_1 t + b \quad [-d_2 ; -d_1]$

$$m_1 = \frac{-A - (0)}{-d_1 - (-d_2)} = \frac{-A}{-d_1 + d_2} = \frac{-A}{d_2 - d_1}$$

$m_2 t + b \quad [d_1, d_2]$

$$m_2 = \frac{0-(-A)}{d_2-d_1} = \frac{A}{d_2-d_1}$$

$t \to d_2 \to$ pasa de 0 a $m_1 \to \Delta$ Positivo de magnitud m_1

$t \to d_1 \to$ pasa de m_1 a 0 $\to \Delta$ negativo de magnitud m_1

$t \to d_1 \to$ pasa de 0 a $m_2 \to \Delta$ positivo de magnitud m_2

$t \to d_2 \to$ pasa de m_2 a 0 $\to \Delta$ negativo de magnitud m_2

Ahora se toma la formula general de euler complejo para hallar los coeficientes

$$\tilde{x}(t) = C_0 + \sum_n C_n \cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{-Tn^2\omega_0^2}\left[\int e^{-jn\omega_0 t d_2} dt - \int e^{-jn\omega_0 t d_1} dt + \int e^{jn\omega_0 t d_1} dt - \int e^{jn\omega_0 t d_2} dt\right]$$

Se descompone el euler complejo en terminos de seno y coseno con parte $\{Re\}$ ó $\{Im\}$

$$\frac{1}{-Tn^2\omega_0^2}[\cos(n\omega_0 d_2) + j\,\mathrm{sen}(n\omega_0 d_2)] - [\cos(n\omega_0 d_1) + j\,\mathrm{sen}(n\omega_0 d_2)] + \ldots$$

$$\ldots + [\cos(n\omega_0 d_1) - \mathrm{sen}(n\omega_0 d_1)] - [\cos(n\omega_0 d_2) - j\,\mathrm{sen}(n\omega_0 d_1)] + \ldots$$

$$\ldots + \cos(n\omega_0 d_1) - j\,\mathrm{sen}(n\omega_0 d_1) - \cos(n\omega_0 d_2) + j\,\mathrm{sen}(n\omega_0 d_2)]$$

$$= 2j\,\mathrm{sen}(n\omega_0 d_2) - 2\,\mathrm{sen}(n\omega_0 d_1)$$

$m_2 t + b \quad [d_1, d_2]$

$$m_2 = \frac{0-(-A)}{d_2-d_1} = \frac{A}{d_2-d_1}$$

$t - d_2 \rightarrow$ pasa de 0 a $m_1 \rightarrow \Delta$ Positivo de magnitud m_1

$t - d_1 \rightarrow$ pasa de m_1 a 0 $\rightarrow \Delta$ negativo de magnitud m_1

$t - d_1 \rightarrow$ pasa de 0 a $m_2 \rightarrow \Delta$ positivo de magnitud m_2

$t - d_2 \rightarrow$ pasa de m_2 a 0 $\rightarrow \Delta$ negativo de magnitud m_2

Ahora se toma la formula general de euler complejo para hallar los coeficientes

$$\tilde{x}(t) = C_0 + \sum_n C_n \cdot e^{-jnw_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{-Tn^2 w_0^2}\left[\int e^{-jnw_0 t d_2} dt - \int e^{-jnw_0 t d_1} dt + \int e^{jnw_0 t d_1} dt - \int e^{jnw_0 t d_2} dt\right]$$

Se descompone el euler complejo en terminos de seno y coseno con parte $\{Re\}$ ó $\{Im\}$

$$\frac{1}{-Tn^2 w_0^2}\Big[\cos(nw_0 d_2) + j\,sen(nw_0 d_2)\Big] - \Big[\cos(nw_0 d_1) + j\,sen(nw_0 d_2)\Big] + \ldots$$

$$\ldots + \Big[\cos(nw_0 d_1) - sen(nw_0 d_1)\Big] - \Big[\cos(nw_0 d_2) - j\,sen(nw_0 d_2)\Big] + \ldots$$

$$\ldots + \cos(nw_0 d_1) - j\,sen(nw_0 d_1) - \cos(nw_0 d_2) + j\,sen(nw_0 d_2)\Big]$$

$$= 2j\,sen(nw_0 d_2) - 2\,sen(nw_0 d_1)$$

$$C_n = \frac{1}{-Tn^2\omega_0^2}\left(2\,\text{Sen}(n\omega_0 d_2) - 2\,\text{Sen}(n\omega_0 d_1)\right)$$

Por lo tanto el espectro es:

$$C_n = \frac{2j}{-Tn^2\omega_0^2}\left(\text{Sen}(n\omega_0 d_2) - \text{Sen}(n\omega_0 d_1)\right]$$

- magnitud

$$C_n = a_n + b_n j$$

donde $a_n = 0$, entonces.

$$C_n = b_n j$$

$$|C_n| = |b_n j|$$

$$|C_n| = \sqrt{a^2 + b^2} = b_n \qquad C_n = b_n \Rightarrow \text{para todo lo que acompaña a la } j$$

$$|C_n| = \frac{2\left(\text{Sen}(n\omega_0 d_2) - \text{Sen}(n\omega_0 d_1)\right)}{-Tn^2\omega_0^2}$$

- Fase

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Como $a_n = 0$ $\quad \theta = \pm\frac{\pi}{2}$ Como esta en todo el eje imaginario entonces:

$$\theta C_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{Si } |C_n| > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{Si } |C_n| < 0 \\ 0 & \text{Si } |C_n| = 0 \end{cases}$$

- Parte Real

C_n: no tiene parte $\{Re\}$ $\therefore$ $a_n = 0$

- Parte Imaginaria

Es el mismo b_n es decir:

$$b_n = \frac{2}{-Tn^2\omega_0^2}\left(Sen(n\omega_0 d_2) - Sen(n\omega_0 d_1)\right)$$

- Error Relativo.

Alcance: Los coeficientes $x''(t)$. Se halla los coeficientes de $x(t)$:

- Coeficientes $x''(t)$ Son:

$$C_n'' = -n^2\omega_0^2 \cdot C_n$$

Queremos encontrar el C_n original, por lo tanto se despeja

$$C_n'' = \frac{C_n''}{-n^2\omega_0^2} \longrightarrow \text{Coeficientes de } x(t), \quad n \neq 0$$

Con lo anterior tenemos que:

$$C_n'' = -n^2\omega_0^2\left(\frac{j}{-Tn^2\omega_0^2}(Sen(n\omega_0 d_2) - Sen(n\omega_0 d_1)\right]$$

$$C_n'' = \frac{2j}{T}\left[Sen(n\omega_0 d_2) - Sen(n\omega_0 d_1)\right]$$

- Ahora se halla potencia de la señal P_x usando.

$$\lim_{N\to\infty} P_x = \sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2 \cdot P_n = 0 \text{ ; donde } P_n = 1$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

- Al Calcular $|C_n|^2$ Con los $n\ [-5,5]$

$$\sum_{n=-5}^{5} 2|C_n|^2$$

- Se halla $|C_n|^2$

$$|C_n| = \frac{2}{-Tn^2 \omega_0^2}\left(Sen(n\omega_0 d_2) - Sen(n\omega_0 d_1)\right)$$

$$|C_n|^2 = \frac{4}{-T^2 n^4 \omega_0^4}\left(Sen(n\omega_0 d_2) - Sen(n\omega_0 d_1)\right)$$

- Tomando el error relativo tenemos:

$$\%\,\varepsilon_r = \left(1 - \frac{\sum_{n=1}^{5} 2|C_n|^2}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2}\right) * 100\,\%$$

$$\%\,\varepsilon_r = \left[1 - \frac{\sum_{n=1}^{5} 2\left[\frac{4}{-Tn^4\omega_0^4}\left(Sen(n\omega_0 d_2) - Sen(n\omega_0 d_1)\right)\right]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\left[\frac{4}{-Tn^4\omega_0^4}\left(Sen(n\omega_0 d_2) - Sen(n\omega_0 d_2)\right)\right]}\right] * 100\%$$