EDO

TALLER #2 Transformada de Laplace

-Demuestre si los siguientes sistemas de la forma $y = \mathcal{H}(x)$, son sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLIT). (Simular en Python):

[1] • $y[n] = x[n]/3 + 2x[n-1] - y[n-1]$

[2] • $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x^2[k]$

[3] • $y[n] = \text{median}(x[n])$; donde median es la función mediana sobre una ventana de tamaño 3.

[4] • $y[t] = Ax(t) + B$; $A, B \in \mathbb{R}$

---

① - Linealidad Sistema [1]

Sea $x_1[n] \longrightarrow y_1[n]$, y $x_2[n] \longrightarrow y_2[n]$, definidas por:

$$y_1[n] = \frac{x_1[n]}{3} + 2x_1[n-1] - y_1[n-1]$$

$$y_2[n] = \frac{x_2[n]}{3} + 2x_2[n-1] - y_2[n-1]$$

Se quiere probar que:

$$x[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$$
$$y[n] = a y_1[n] + b y_2[n]$$

Sustituyendo

$$y[n] = \frac{a x_1[n] + b x_2[n]}{3} + 2(a x_1[n-1] + b x_2[n-1]) - y[n-1]$$

Comparación directa

$$y[n-1] = a y_1[n-1] + b y_2[n-1]$$

$$\therefore \; y[n] = a y_1[n] + b y_2[n]$$

Se cumple la propiedad de linealidad.

→ $x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$, entonces:

$$y[n-n_0] = \frac{x[n-n_0]}{3} + 2x[n-n_0-1] - y[n-n_0-1]$$

Como la forma de la ecuación no cambia al desplazar la entrada, se dice que el sistema es invariante en el tiempo.

En conclusión el sistema es SLIT.

② Sistema 2 -

→ Linealidad

Sea $x[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$; $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x^2[k]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (a^2 x_1^2[k] + b x_2[k])^2$$

Factorizando se obtiene.

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} (a^2 x_1^2[k] + 2ab x_1[k] + b^2 x_2^2[k]) \neq$$

$$\neq a \sum x_1^2 + b \sum x_2^2[k]$$

No cumple la propiedad de linealidad

→ Invarianza en el tiempo:

desplazando $x[n] \rightarrow x[n-n_0]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x^2[k-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x^2[k] = y[n-n_0]$$

Cumple con invarianza en el tiempo ✓

como no se cumplen ambas condiciones

Linealidad X

invariaza ✓

El sistema no es SLIT

Powered by CamScanner

3) Sistema 3. $y[n] = \tilde{x}(x[n-1], x_n, x[n+1])$

→ Linealidad:

Se tiene en cuenta que la mediana no es una operación lineal, EJ:

- $x_1 = [1,1,1]$; $\tilde{x} = 1$
- $x_2 = [3,3,3]$; $\tilde{x} = 3$

pero $0.5 * 1 + 0.5 * 3 = 2$, OK, en general falla

$x_3 = [0, 5, 100]$ $\tilde{x} = 5$

$x_4 = [0, 6, 100]$ $\tilde{x} = 6$

$x = x_3 + x_4 = [0, 11, 200]$, $\tilde{x} = 11$

Pero no siempre ocurre $\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 = 5 + 6 = 11$ por lo que el comportamiento no es garantizado

∴ No es Lineal X

→ Invarianza en el tiempo:

Si se desplaza la Señal, tambien se desplazara la ventana | el sistema si es Variante en el tiempo:

En conclusión

Linealidad X

Invarianza ✓

El sistema no es SLIT.

④ - Sistema 4 $y(t) = Ax(t) + B$; Linealidad

→ Se requiere que:

$$T\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aT\{x_1(t)\} + bT\{x_2(t)\}$$

Verificación: $T\{x(t)\} = Ax(t) + B$

Entonces:

$$T\{ax_1 + bx_2\} = A(ax_1 + bx_2) + B$$

Mientras que:

$$aT\{x_1\} + bT\{x_2\} = a(Ax_1 + B) + b(Ax_2 + B)$$

$$= A(ax_1 + bx_2) + (a + b)B$$

Solo si $B = 0$

Pero si $B \neq 0$

Es Lineal Cuando $B = 0$ ✓

→ Invarianza en el tiempo.

Si se desplaza la entrada.

$$x(t) \rightarrow x(t - t_0) \Rightarrow y(t) = Ax(t - t_0) + B = y(t - t_0)$$

∴ Es Variante en el tiempo

Solo si $B = 0$ es SLIT ✓

Pero si $B \neq 0$ No es SLIT