TALLER #2 - Part 2 - Laplace

Punto_5

Señal de entrada: $x(t) = e^{-at^2}$; $a \in \mathbb{R}^+$

El Sistema A: $y_A(t) = x^2(t)$

El sistema B: Un SLIT con respuesta al impulso:

$h_B(t) = Be^{-bt^2}$

* a) Salida del sistema en Serie.

$$x(t) \xrightarrow{h_B(t)} y(t) \xrightarrow{\text{cuadrado}} y_A(t)$$

Prop.

1) $x(t) * h_B(t) \longrightarrow y(t)$

2) $y_A(t) = y^2(t)$

① Propiedad de Convolución $x(t) * h_B(t)$

$$y(t) = x(t) * h_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_B(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(\tau) = e^{-a\tau^2} \cdot h_B(t-\tau) = Be^{-b(t-\tau)^2}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2} \cdot Be^{-b(t-\tau)^2}\, d\tau$$

$$y(t) = B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2} \cdot e^{-b(t-\tau)^2}\, d\tau$$

$\boxed{(t-\tau)^2 = t^2 - 2t\tau + \tau^2}$ Expandiendo el binomio cuadrado.

- Ahora se sustituye:

$$y(t) = B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2} e^{-b(t^2-2t\tau+\tau^2)}\, d\tau$$

$$y(t) = Be^{-bt^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)[\tau^2 - \frac{2bt}{a+b} + \tau]}\, d\tau$$

Se completa el Cuadrado:

$$\tau^2 - \frac{2bt}{a+b}\tau = \left(\tau - \frac{bt}{a+b}\right)^2 - \left(\frac{bt}{a+b}\right)^2$$

Se Sustituye:

$$y(t) = Be^{-bt^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)\left[\left(\tau - \frac{bt}{a+b}\right)^2 - \left(\frac{bt}{a+b}\right)^2\right]} d\tau$$

$$= Be^{-bt^2} e^{\frac{b^2t^2}{a+b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)(\tau-\mu)} d\tau$$

donde: $\boxed{\mu = \frac{bt}{a+b}}$

La integral es Gaussiana, y su resultado es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-K(\tau-\mu)^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{K}}, \quad K = a+b$$

$$y(t) = B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\, e^{-\frac{abt^2}{a+b}}$$

2) Se aplica el sistema A: $yA(t) = y^2(t)$

$$yA(t) = \left(B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\, e^{-\frac{abt^2}{a+b}}\right)^2$$

$$\boxed{y(t) = B^2 \cdot \frac{\pi}{a+b} \cdot e^{-2\frac{abt^2}{a+b}}}$$

*b) Salida del sistema en Serie.

$$x(t) \xrightarrow{A} yA(t) = x^2(t) \xrightarrow{hB(t)} y(t)$$

1) Aplicar Sistema A directamente.

$$yA(t) = x^2(t) = (e^{-at^2})^2$$

$$\boxed{yA(t) = e^{-2at^2}}$$

Powered by CamScanner

2) Aplicar Convolución con $h_B(t) = Be^{-bt^2}$

$$y(t) = y_A(t) * h_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a\tau^2} \cdot Be^{-b(t-\tau)^2}\, d\tau$$

- Este Calculo se Considera analogo al anterior, Simplemente se Cambia el valor de a por 2a

$$y(t) = B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a\tau^2} \cdot e^{-b(t-\tau)^2}\, d\tau$$

$$\boxed{y(t) = B\sqrt{\frac{\pi}{2a+b}} \cdot e^{-\frac{2abt^2}{2a+b}}}$$