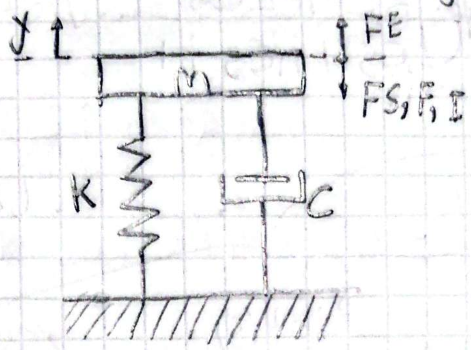
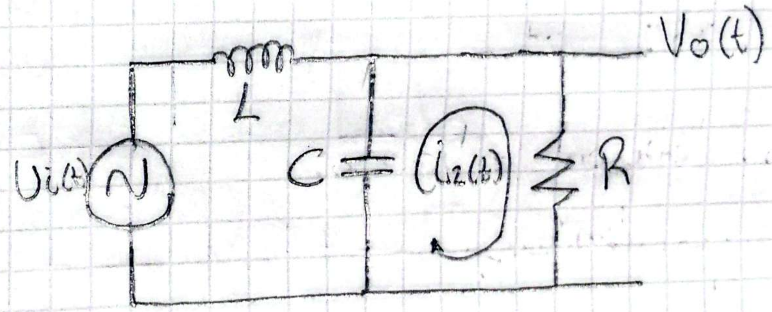
1. Encuentre la función de transferencia en lazo abierto que caracteriza el sistema masa, resorte, amortiguador presentado en la siguiente figura (asumir condiciones iniciales cero):



Posteriormente, encuentre el sistema equivalente del modelo masa, resorte, amortiguador, a partir del siguiente circuito eléctrico:



Se aplica la Ley de Voltaje de Kirchoff quedaría:

$$\Sigma V = Ui(t)$$

$Ui(t) = V_L + V_C + V_R$; donde $V_R = V_o$

$$Ui(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + R \cdot i(t)$$

Al tener un circuito RLC en serie todos los elementos comparten la misma corriente.

$$i_L = i_C = i_R = i(t)$$

Por Consecuente:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = F_6(t) = X(t)$$

Aplicando transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt}\right\} = S^n X(s);$$ tenemos que

$$ms^2y(s) + csy(s) + Ky(s) = X(s)$$ y:

$$\boxed{H(s) = \frac{y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+K}}$$ → Función de transferencia sistema masa, resorte amortiguados

- Ahora para el circuito eléctrico presentado, tenemos la respectiva función de transferencia

Ley de voltaje de Kirchoff malla $i_1(t)$

$$-V_i(t) + L\frac{d}{dt}i_1(t) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1(t) - i_2(t))\,dt = 0$$

Utilizando las impedancias transformadas se obtiene:

$$\boxed{V_i(s) = LsI_1(s) + (I_1(s) - I_2(s))\frac{1}{Cs}} \quad (1)$$

Ahora LVK Malla $i_2(t)$

$$i_2(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2(t) - i_1(t))\,dt = 0,$$ donde

$V_0 t = i_2(t)R$

Se usan las impedancias transformadas para obtener:

$$I_2(s)R + (I_2(s) - I_1(s)) = \frac{1}{Cs} = 0$$

despejando $I_1(s)$, se obtiene:

$$\frac{I_1(s)}{Cs} = + \frac{I_2(s)}{Cs} + I_2(s)R \Rightarrow I_1(s) = \frac{I_2(s)}{Cs} Cs + I_2(s) R Cs$$

$$\rightarrow \boxed{I_1(s) = I_2(s) \cdot (1 + (RCs))} \quad ②$$

Ahora se reempla ② en ①

$$Vi(s) = Ls I_2(s)(1 + CsR) + (I_2(s) \cdot (1 + CsR) - I_2(s)) \frac{1}{Cs}$$

$$Vi(s) = Ls I_2(s) + CRLs^2 I_2(s) + (I_2(s) + CRs I_2(s) - I_2(s)) \frac{1}{Cs}$$

$$Vi(s) = Ls I_2 + CRLs^2 I_2(s) + R I_2(s)$$

$$Vi(s) = I_2(s)[RLs^2 + Ls + R] \Rightarrow \frac{I_2(s)}{Vi(s)} = \frac{1}{CRLs^2 + Ls + R}$$

Reemplazando $I_2(s) = \frac{Vo(s)}{R}$, se obtiene:

$$\frac{Vo(s)}{R\,Vi(s)} = \frac{1}{CRLs^2 + Ls + R} \longrightarrow \frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{R}{CRLs^2 + Ls + R} \cdot \left(\frac{1/R}{1/R}\right)$$

$$\boxed{\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{1}{CLs^2 + \frac{L}{R}s + 1}} \longrightarrow \text{Función de transferencia circuito eléctrico}$$

- Equivalencia del circuito eléctrico en pendulo elástico.

Circuito eléctrico	Pendulo elástico
CL	m
L/R	c
1	K

Entonces:

$H(S) = \frac{1}{LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1}$; Su equivalente con el pendulo será:

$$H(S) = \frac{1}{ms^2 + cs + K} = \frac{\frac{1}{m}}{\left(s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{K}{m}\right)}$$

- Ahora se halla la forma canonica de segundo orden

• Comparando: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{K}{m}$

• Se igualan coeficientes:

$1 = 1 \longrightarrow COeFS^2$

$2\zeta\omega_n = \frac{C}{m} \longrightarrow COeFS$

$\omega_n^2 = \frac{K}{m} \longrightarrow$ COEF independiente

• hallando frecuencia natural no amortiguada

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

• Se halla factor de amortiguamiento.

$$2\zeta\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{C}{m} \longrightarrow \zeta = \frac{C}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

• Se halla la ganancia K

$$K\omega_n^2 = \frac{1}{m} \longrightarrow K = \frac{1}{m\omega_n^2} \longrightarrow K = \frac{1}{m.\frac{K}{m}} \longrightarrow \boxed{K = \frac{1}{K}}$$

- Finalmente la forma canonica de segundo orden es: $H(S) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + \zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$$H(S) = \frac{1}{K} \cdot \frac{\frac{K}{m}}{S^2 + 2\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}}\right)\sqrt{\frac{K}{m}}\, s + \frac{K}{m}}$$

$$H(S) = \frac{\frac{1}{m}}{S^2 + \frac{c}{m} + \frac{K}{m}}$$

$$\boxed{H(S) = \frac{1}{m\left(S^2 + \frac{c}{m} \cdot S + \frac{K}{m}\right)}}$$