姓名________ 学号________ 成绩________

本试题共八题，满分 100，要求全做，答案请写在答题纸上。

一、判断下面说法是否正确。（10 分）

1.高斯消去法求解 $n\times n$ 线性方程组时，使用乘法次数为 $\frac{n^3}{3}+n^2+\frac{n}{3}$；

2.在求解 $n\times n$ 线性方程组时，Gauss-Jordan 使用乘法次数为 $\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2}$；

3. $rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$；

4.设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，则 $\dim R(A)+\dim N(A)=n$；

5. 矩阵 $U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i & -1+i\\ 1+i & 1-i\end{pmatrix}$ 为酉矩阵；

6. 如果矩阵 A 和 B 为相似矩阵，那么 $rank(A)=rank(B)$；

7. 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，$R(A^TA)=R(A)$；

8. $trace(AB)=trace(BA)$；

9.矩阵 $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ 为正交矩阵；

10. $\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\det(AD)-\det(BC)$。

二、写出矩阵的秩为 r 的十种等价陈述。（10 分）

三、（1）写出三维空间中分别绕 x 轴、y 轴和 z 轴旋转 θ 角的旋转矩阵；（3 分）

（2）写出矩阵 1-Norm,2-Norm 和 ∞-Norm 的定义。（3 分）

四、简要说明所有实矩阵 $A_{m\times n}$ 构成实数域 R 上的向量空间，并说明其中零元素的唯一性。

五、设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 4 & 8 & 12 & -8\\ 2 & 3 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 1 & -4\end{pmatrix},$$

（1） 求矩阵 A 的 LU 分解 $PA=LU$；（10 分）

（2） 使用 LU 分解求解线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{b}=(3,60,1,5)^T$；（5 分）

六、（1）写出 Classical Gram-Schmidt 实现算法；（3 分）

（2）设

$$A=\begin{pmatrix}0 & -20 & -14\\ 3 & 27 & -4\\ 4 & 11 & -2\end{pmatrix}$$

使用 Gram-Schmidt 正交化方法求出矩阵 A 的 QR 分解。（12 分）

七、设

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 4\\ 2 & -14 & -3\\ -2 & 14 & 0\\ 1 & -7 & 15\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\ -15\\ 0\\ 30\end{pmatrix}.$$

（1）使用 Householder reduction 方法，找出 $R(A)$ 的一组标准正交基；（12 分）

（2）使用 Householder reduction 方法计算 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解。（7 分）

八、设 A 和 B 为 $m\times n$ 的矩阵，证明：$trace(A^TB)^2\le trace(A^TA)trace(B^TB)$。（10 分）