

姓名 _____ 学号 _____ 成绩 _____

本试题共八题，满分 100，要求全做，答案请写在答题纸上。

一、判断下面说法是否正确。(10 分)

1. 高斯消去法求解 $n \times n$ 线性方程组时，使用乘法次数为 $\frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{n}{3}$ ；

2. 在求解 $n \times n$ 线性方程组时，Gauss-Jordan 使用乘法次数为 $\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}$ ；

3. $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ ；

4. 设 A 为 $m \times n$ 的矩阵，则 $\dim R(A) + \dim N(A) = n$ ；

5. 矩阵 $U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$ 为酉矩阵；

6. 如果矩阵 A 和 B 为相似矩阵，那么 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ ；

7. 设 A 为 $m \times n$ 的矩阵， $R(A^T A) = R(A)$ ；

8. $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ ；

9. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ 为正交矩阵；

10. $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD) - \det(BC)$ 。

二、写出矩阵的秩为 r 的十种等价陈述。(10 分)

三、(1) 写出三维空间中分别绕 x 轴、 y 轴和 z 轴旋转 θ 角的旋转矩阵。(3 分)

(2) 写出矩阵 1-Norm, 2-Norm 和 ∞ -Norm 的定义。(3 分)

四、简要说明所有实矩阵 $A_{m \times n}$ 构成实数域 \mathbb{R} 上的向量空间，并说明其中零元素的唯一性。

五、设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & -8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

(1) 求矩阵 A 的 LU 分解 $PA = LU$, (10 分)

(2) 使用 LU 分解求解线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 其中 $\mathbf{b} = (3, 60, 1, 5)^T$, (5 分)

六、(1) 写出 Classical Gram-Schmidt 实现算法; (3 分)

(2) 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

使用 Gram-Schmidt 正交化方法求出矩阵 A 的 QR 分解。(12 分)

七、设

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & -14 & -3 \\ -2 & 14 & 0 \\ 1 & -7 & 15 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

(1) 使用 Householder reduction 方法, 找出 $R(A)$ 的一组标准正交基; (12 分)

(2) 使用 Householder reduction 方法计算 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解。(7 分)

八、设 A 和 B 为 $m \times n$ 的矩阵, 证明: $\text{trace}(A^T B)^2 \leq \text{trace}(A^T A) \text{trace}(B^T B)$ 。(10 分)