ALGEBRA

Tecnicatura Superior en Análisis, Desarrollo y Programación de Aplicaciones
Primer año
ISFDyT N°166

Prof. Meana José

Cálculo Proposicional 1

1.1 Operaciones entre proposiciones

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO PROPOSICIONAL

En la vida diaria y en el desarrollo de cualquier rama del conocimiento humano se utilizan ciertos discursos denominados razonamientos. Los elementos necesarios para el control de calidad de razonamientos que otorguen criterios para decidir si son rechazables o no, provienen de la *Lógica.*

Lógica.-de la palabra griega *logos,* es el estudio de modelos encontrados en los razonamientos. La tarea del lógico es estudiar reglas que permitan distinguir entre inferencia válida e inferencia engañosa, entre argumentos racionales o argumentos viciados.

Las construcciones del lenguaje pueden presentar formas muy complicadas, pero el análisis de sus elementos más simples permite la posibilidad de desentrañar la esencia lógica de estas formas complejas. Un concepto básico que se utiliza en lógica es el de **proposición**.

PROPOSICIONES

Una proposición es una construcción del lenguaje a la que se le puede asignar de modo inequívoco (que no admite duda) alguno de los dos valores de verdad. ***V* (verdadero)** o ***F* (falso)**.

Es decir, una **proposición** es una afirmación. Por lo tanto se pueden tomar sólo dos valores:

- V (verdadero)
- F (falso)

EJEMPLO

- *Todos los hombres son mortales*
- *Hoy es martes*
- *Un Argentino es Latinoamericano*

Cada una de estas oraciones son proposiciones. Pues podemos decir que son verdaderas o falsas sin lugar a dudas. Una <u>proposición es una oración declarativa</u> que afirma o niega algo, deben estar, implícitamente o explícitamente sujeto y predicado, pero no toda oración es una proposición.

EJEMPLO

Por ejemplo, consideremos las siguientes oraciones:

1. ¿Quién viene?
2. Deténgase
3. El calor dilata los cuerpos
4. Juan ama la música
5. La música es amada por Juan

La primera oración es una interrogativa y la segunda es una orden, pero de cada una de ellas nada se puede decir si son verdaderas o falsas. Una pregunta puede formularse o no, y una orden pude ser cumplida o no. En cambio de las tres restantes, que son declarativas, si puede decidirse si son verdaderas o falsas, a estas últimas son las que llamamos proposiciones.

EJEMPLO

Por ejemplo la oración

Esta afirmación es falsa

¿Es proposición o no?

Ahora bien, establecer el valor de verdad de las proposiciones es tarea de las ciencias particulares: *4 es un número par* tiene el valor de verdad *V* porque así lo dicen los matemáticos, *la vaca es un animal* tiene el valor de verdad *V* porque así lo afirman los veterinarios y *está lloviendo* es una proposición que según los casos puede tomar alguno de los valores *V* o *F*.

De hecho, en cualquier ciencia, inductiva o deductiva, la verdad o falsedad de ciertas proposiciones permite hacer inferencia (arribar a conclusiones) o tomar decisiones posteriores. Esta es la manera en que crece el conocimiento.

La **Lógica Proposicional se encarga de la *sintaxis***, es decir se ocupa de las reglas mediante las cuales se combinan las proposiciones para formar una nueva proposición compuesta y cómo determinar los valores de verdad de esta proposición final, a partir de los valores de verdad de sus componentes.

En matemática y computación tiene mucha importancia el análisis del lenguaje (*sintaxis*) desde un punto de vista lógico. En matemática, como ya dijimos, se estudia la veracidad de proposiciones tales como: *4 es un número par y*

Si es $a.b > 0$ *entonces, debe ser* $a > 0$ *y* $b > 0$, *o debe ser* $a < 0$ *y* $b < 0$

La construcción del edificio matemático descansa tanto en la lógica proposicional, como en la lógica de predicados (de la que veremos solamente el manejo con cuantificadores).

Algunas proposiciones en matemática se consideran válidas a priori, es decir sin demostración previa, y son los denominados *axiomas*. Por ejemplo:

> Por *un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela* es un axioma de la geometría euclidiana.

Siguiendo el patrón *Si…, entonces*, aquí vemos una instrucción típica de un programa de computación.

Si c > 0 entonces continuar el procedimiento y si c $\leq$ 0 entonces finalizar el procedimiento.

Instrucciones como ésta organizan la tarea del procesador y cuando hay varias (podrían ser miles) variables, depende de los conocimientos (y arte) del programador el darles un orden para que el programa se ejecute en el menor tiempo posible (optimización).
De allí que el cálculo proposicional sea básico en informática. Hay programas que se encargan de revisar las construcciones de lenguaje en otros programas. Son los compiladores. Diseñar un compilador requiere comprender muy bien la lógica que hay detrás de un lenguaje.

OPERACIONES ENTRE PROPOSICIONES

La acción de combinar proposiciones para obtener otra se llama **operación lógica**.

Todas las operaciones con proposiciones se definen mediantes tablas, llamadas *tablas de verdad*, las cuales presentan la veracidad o falsedad de proposiciones compuestas, basadas en los valores de verdad de cada una de las componentes. Los símbolos "p" y "q" que aparecen en las opresiones se llaman también **variables proposicionales** y los símbolos que van apareciendo para las operaciones se llaman **conectivos lógicos**, o también **operadores lógicos**.

Las operaciones entre las proposiciones son **binarias**¸ es decir sólo tenemos dos tipos de resultado "**Verdadero (V) o falso (F)**", que dependen de los posibles valores de las *variables proposicionales*, y esos posibles valores que pueden tomar también son únicamente V o F.

Sean *p* y q dos variables proposicionales, entonces si *p* es verdadera, *q* puede ser falsa o verdadera; y lo mismo sucede si *p* es falsa.

p	*q*	
V	V	*p y q verdaderas*
V	F	*p verdadera y q falsa*
F	V	*p falsa y q verdadera*
F	F	*p y q falsas*

Considerando cada uno de los posibles casos es que se formula una tabla que muestra todos los posibles resultados de las operaciones entre las variables, así nos queda la siguiente tabla

p	q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
V	V	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	F	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	V	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*
F	F	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*

Tabla Op

Cada una de las columnas muestra el resultado de una *operación lógica*, así se puede definir dieciséis *operadores lógicos*. En este curso sólo se trabajarán con los más sencillos.

Ejercicio 0. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F)

Proposición	Valor de Verdad	En símbolos
Hoy es viernes		
Hoy no es viernes		
Hoy se cursa álgebra		
Hoy se cursa análisis matemático		
Mañana es sábado y hoy se cursa álgebra		
Mañana es sábado y hoy se cursa análisis matemático		
Hoy se cursa álgebra o análisis matemático		
Hoy se cursa análisis matemático o sistemas de computación		
Si hoy se cursa álgebra, entonces mañana es sábado		
Si hoy es viernes, hoy se cursa sistemas de computación		
Si hoy se cursa análisis matemático, entonces mañana es martes		

NEGACIÓN

La *Negación* de la proposición p es la proposición $\neg p$ (se lee "no p"), cuya tabla de valores de verdad es

p	$\neg p$
V	F
F	V

Se trata de una **operación unitaria**, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.

EJEMPLO

La negación de

p: Todo hombre es honesto

Es

$\neg p$: No todo hombre es honesto

O bien,

$\neg p$: No es cierto que todo hombre es honesto

$\neg p$: Hay hombres que no son honestos

$\neg p$: Existen hombres deshonesto

Lo cual es verdad, pues p es falsa.

CONJUNCIÓN

La **Conjunción** o **producto lógico** de las proposiciones p y q es la proposición $p \wedge q$ (se lee "p y q"), cuya tabla de verdad es

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla que define la operación establece que la conjunción sólo es verdadera si lo son las dos proposiciones componentes. En todo otro caso es falsa.

EJEMPLO

Si declaramos

i) 3 es un número impar y 2 es un número primo se trata de la conjunción de las proposiciones

p: 3 es un número impar

q: 2 es un número primo

$$p \wedge q$$

Y por ser ambas verdaderas, la proposición compuesta es V.

ii) Hoy es lunes y mañana es jueves

Se trata de una proposición compuesta es falsa, ya que no coexisten las verdades de p y q.

DISYUNCIÓN

La *disyunción* o *suma lógica* de las proposiciones p y q es la proposición $p \vee q$ (se lee "*p* o *q*") cuya tabla de valores de verdad es

p	*q*	*p* ∨ *q*
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La conjunción o es utilizada en sentido incluyente, ya que la verdad de la disyunción se da en el caso de que al menos una de las proposiciones sea V. En el lenguaje ordinario la palabra o es utilizada en sentido excluyente o incluyente.

En matemática se utiliza la disyunción definida por la tabla precedente, la cual agota toda posibilidad.
La disyunción sólo es F en el caso en que las dos proposiciones componentes sean falsas.

EJEMPLO

i) Hoy es lunes o martes

Representa la disyunción de las proposiciones

p: hoy es lunes
q: hoy es martes.

El sentido de la conjunción *o* es excluyente, ya que *p* y *q* no pueden ser simultáneamente verdaderas. No obstante. La proposición compuesta puede analizarse a la luz de la tabla propuesta, a través de los tres últimos renglones, y será falsa solo si las dos son.

ii) Regalo los libros viejos o los que no me sirven

Es la disyunción de las proposiciones

p: Regalo los libros viejos
q: Regalo los libros que no me sirven

El sentido del *o* es incluyente, pues si en efecto regalo un libro que es viejo, y que además no me sirve, entonces *p* v *q* es V.

iii) 3 es un número impar o 4 es un número primo

Es una proposición V, pues la primera es V.

EJERCICIOS

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones.

a. En 1986, Argentina salía campeón del mundo.
b. $x + 3$ es un entero positivo

c. ¡Si todas las mañana fueran soleadas y despejadas cómo ésta!
d. Quince es un número impar.
e. ¿Qué hora es?
f. El rojo no es un color .

Ejercicio 2. En el libro Hijos de la libertad, de A. S. Neill, están escritas las siguientes proposiciones

p: Mis maestros hacen que todas las lecciones sean aburridas.
q: No aceptan las respuestas que no figuran en los libros.
r: Imponen un cúmulo de normas ridículas.

Expresar las siguientes proposiciones en lenguaje natural.

a. $\neg p$ b. $p \wedge q$ c. $\neg q \vee r$

Ejercicio 3. Escribir en forma simbólica las siguientes proposiciones compuestas:

a. La tarde de hoy tiene un sol brillante y no hace frío.
b. El sábado por la tarde dormiré siesta o saldré a dar una vuelta por el dique.
c. No es cierto que se haya terminado la cuarentena.

IMPLICACIÓN O CONDICIONAL

La *Implicación* de las proposiciones *p* y *q* es la proposición $p \longrightarrow q$ (se lee "*p* implica *q*", *o* "si *p* entonces *q*") cuya tabla de valores de verdad es

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Las proposiciones *p* y *q* se llaman antecedente y consecuente de la implicación o condicional. La implicación usual en matemática es formal en el sentido de que no es necesario que el consecuente se derive lógicamente del antecedente; cuando esto ocurre, la implicación se llama material y queda incluida en la primera.

Las tablas de valores de verdad se definen arbitrariamente, pero respetando el sentido común. Enunciamos la siguiente proposición.

"Si apruebo el examen, ENTONCES te presto el apunte" *(1)*

Se trata de la implicación de las proposiciones.

p: Apruebo el examen
q: Te presto el apunte

$$p \to q$$

Interesa inducir la verdad o falsedad de la implicación *(1)*, en términos de la V o F de las proposiciones *p* y *q*. El enunciado *(1)* puede pensarse como un compromiso, condicionado por *p,* y podemos asociar su verdad al cumplimiento del compromiso. Es obvio que si *p* es F, es decir, si no apruebo el examen, quedo liberado del compromiso, y preste o no preste el apunte la proposición *(1)* es V. es decir, si el antecedente es F, la implicación es V.
Si *p* es V, en cuyo caso apruebo el examen, y no presto el apunte, el compromiso no se cumple, y la proposición *(1)* es entonces F. Si *p* y *q* son V, entonces la implicación es V porque el compromiso se cumple.
De este modo, la implicación sólo es falsa cuando el antecedente es V y el consecuente es F.

EJEMPLO

i) Si hoy es lunes, entonces mañana es martes

Es la implicación de las proposiciones

p: Hoy es lunes

q: Mañana es martes

Como no puede darse antecedente V y consecuente F, la implicación es V.

ii) $1 = -1 \quad \longrightarrow \quad 1^2 = (-1)^2$

Es V por ser el antecedente F.

DOBLE IMPLICACIÓN O BICONDICIONAL

La *Doble implicación* de las proposiciones *p* y *q* es la proposición $p \longleftrightarrow q$ (se lee "*p* si y sólo si *q*"), cuya tabla de valores de verdad es.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doble implicación o bicondicional sólo es verdadera si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.
La doble implicación puede definirse como la conjunción de una implicación y su recíproca. De este modo, la tabla de valores de verdad de $p \longleftrightarrow q$, puede obtenerse mediante la tabla de $(p \rightarrow q) \wedge (p \longleftarrow q)$, como sigue

p	q	$p \longrightarrow q$	$p \longleftarrow q$	$(p \longrightarrow q) \wedge (p \longleftarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

(Esta tabla se comprenderá mejor luego de leer "*equivalencias lógicas*")

EJEMPLO

i) T es equilátero si y sólo si T es equiángulo. Es la doble implicación de las proposiciones

p: T es equilátero

q: T es equiángulo

Toda vez que p sea V, también lo es q, y análogamente, si p es F, q es F. De modo que la doble implicación es V.

ii) $a = b$ si y sólo si $a^2 = b^2$

Las proposiciones son

p: $a = b$

q: $a^2 = b^2$

La doble implicación propuesta es falsa si p es F y q es V. En los demás casos es V.

DIFERENCIA SIMÉTRICA O DISYUNCIÓN EXCLUYENTE

La **diferencia simétrica** o **disyunción excluyente** de las proposiciones p y q es la proposición $p \veebar q$ (*p* o *q*, en sentido excluyente y se lee "o bien *p*, o bien *q*") cuya tabla de valores de verdad es

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La verdad de $p \veebar q$ está caracterizada por la verdad de una y sólo una de las proposiciones componentes.

Es claro que $p \veebar q$ equivale a la negación de $p \leftrightarrow q$

Otros textos pueden representar la disyunción excluyente con el símbolo ∇

EJERCICIOS

Ejercicio 4. Sean $p: 4 \leq 10$ y $q: 0 \leq 1$ dos proposiciones. (La notación $x \leq y$ es abreviatura de: $x < y \ \vee \ x = y$).

Determinar el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

a. $\neg p$	b. $p \wedge q$	c. $p \vee q$	d. $p \leftrightarrow q$	e. $\neg q$
f. $p \vee \neg q$	g. $\neg p \vee \neg q$	h. $p \longrightarrow q$	i. $p \leftrightarrow \neg q$	j. $p \nabla$q

Ejercicio 5. Suponiendo que *p* y *q* son <u>verdaderos</u>, y *r* y *s* <u>falsos</u>, indicar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $p \vee (q \wedge r)$
b) $(p \wedge (q \wedge r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (r \vee s))$
c) $(\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \vee (((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \wedge s)$

Ejercicio 6. Suponiendo que $p \rightarrow q$ es falso, indicar los posibles valores de verdad para:

a) $p \wedge q$
b) $p \vee q$
c) $q \rightarrow p$

1.2 Proposiciones equivalentes

CONECTIVOS LÓGICOS

Hemos definido una **operación unitaria** $\neg$ (se aplica a una sola proposición) y **operaciones binarias** (se aplica a dos proposiciones) entre variables proposicionales, usando ciertos símbolos $\neg$, $\wedge$, $\vee, \longrightarrow, \leftrightarrow, \nabla$; estos símbolos se llaman *conectivos lógicos.*

PROPOSICIONES MOLECULARES Y EXPRESIONES BOOLEANAS

Es claro que siendo p, q y *r* tres proposiciones, entonces <u>está bien definida</u> por ejemplo la proposición $(p \wedge \neg q) \longrightarrow r$, desde que dada q, entonces $\boldsymbol{\neg q}$ **es de nuevo una proposición**, aplicando el operador unario $\sim$ a la proposición q, y de nuevo $\boldsymbol{p \wedge \neg q}$**,** **es otra proposición**, obtenida aplicado el operador $\wedge$ a p y a $\neg q$, por lo que ahora aplicando el operador $\longrightarrow$ a $p \wedge \neg q$ y r resulta que $(p \wedge \neg q) \longrightarrow r$ **es una nueva proposición**.
Las proposiciones p, q y r se denominan **proposiciones moleculares**, mientras que la proposición $(p \wedge \neg q) \longrightarrow r$ es una proposición más compleja y recibe el nombre de **expresión booleana** en las variables proposicionales *p, q* y *r.*

TABLAS DE VALORES

Veamos cómo construir la **tabla de verdad** para $(p \wedge \neg q) \longrightarrow r$. Como esta proposición está formada por aplicar operaciones a tres proposiciones, la tabla debe analizar todos los posibles casos. Para ello formaremos ochos filas, donde en la primer columna se completará con 4 V´s seguidos de 4 F´s; la siguiente se completará con 2 V´s seguido de 2 F´s y la tercera columna se alternarán V´s y F´s. De esta forma quedarán establecidas todas las posibles combinaciones.

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \longrightarrow r$
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

Esta tabla representa el valor de verdad de la proposición booleana según el valor de verdad de cada proposición molecular. Así, por ejemplo si el valor de verdad de *p* es V, el de *q* y *r* es F (cuarta fila), la proposición $(\mathrm{p} \wedge \sim\mathrm{q}) \longrightarrow \mathrm{r}$ tendrá valor de verdad falso.
Esta tabla nos permite analizar cada valor de verdad para cada una de las combinaciones posibles.

Observación: la cantidad de combinaciones posibles es 2^n, siendo n la cantidad de variables proposicionales.

EJERCICIOS

Ejercicio 7. Realizar tablas de valores para cada una de las siguientes proposiciones y luego responder: ¿Cuáles son las condiciones que se tienen que dar para que la expresión sea falsa? ¿Y verdadera?

a. $\neg p \vee q$
b. $p \vee \neg p$
c. $p \vee (p \wedge q)$
d. $p \rightarrow (q \vee r)$
e. $p \rightarrow (q \wedge r)$

EQUIVALENCIA LÓGICA

Vimos que es posible operar proposiciones *p, q, r,…* a partir de los conectivos lógicos para obtener nuevas proposiciones, que denominamos expresiones booleanas.
Ahora bien, diremos que dos o más **expresiones booleanas son lógicamente equivalentes** si tienen la misma tabla de verdad.

$$A \equiv B$$

EJEMPLO

La expresión booleana $p \longrightarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg p \vee q$

$$p \longrightarrow q \ \equiv \ \neg p \vee q$$

Construimos ambas tablas

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg p \vee q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Y verificamos que tienen el mismo valor de verdad. De forma más simplificada podemos hacerlo todo en una sola tabla de valores.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

De esta forma hemos demostrado que las proposiciones $p \longrightarrow q$ y $\neg p \vee q$ son lógicamente equivalentes.

SOBRE EL USO DE PARÉNTESIS O JERARQUÍAS DE LOS OPERADORES

Un tema importante en lógica e informática es tener criterios para reconocer las expresiones bien construidas, es decir que no presenten errores sintácticos. Esto lleva a la definición de *fórmula bien formada*. Pero hay que considerar los paréntesis izquierdo "(" derecho ")" también parte del lenguaje.

Por ejemplo $(\neg\ p \vee \wedge\ q \wedge \longrightarrow s) \wedge t$ y $(\neg\ (p \vee)\ q \longrightarrow (s) \wedge t)$ no son sintácticamente correctas.

Para no sobrecargar la escritura con un excesivo número de paréntesis haremos la siguiente convención.
Estableceremos el siguiente orden de prioridad: ~ (unario), $\wedge, \vee$ (binarios).

$\neg$	"es más fuerte que"	$\wedge$	"es más fuerte que"	$\vee$
negación		**conjunción**		**disyunción**

Esto significa que, si en una expresión figura ($\neg p$), entonces puede suprimirse el paréntesis, es decir el operador unario $\neg$ se aplica con prioridad a los otros que le siguen en el orden ("pega más que los que le siguen").
Si en una expresión figura ($p \wedge q$) puede suprimirse el paréntesis, es decir el operador binario $\wedge$ se aplica con prioridad a los otros que le siguen la lista ("pega más que los que le siguen"). Lo mismo para el otro conectivo.
Por ejemplo en la expresión: $((\neg\ p) \vee (q \wedge r) \longrightarrow s) \wedge t$ podemos omitir el paréntesis de ($\neg p$) y el de ($q \wedge r$) por lo que la expresión dada puede escribirse $(\neg p \vee q \wedge r \longrightarrow s) \wedge t$.

Esta convención es análoga a la que se hace sobre la procedencia de los operadores $-, +, x$ en el álgebra de los números reales. Allí se tiene por ejemplo que la expresión $(-3+2) \times 8 = -8$ es una expresión con operaciones efectuadas en otro orden.

EJERCICIOS

Ejercicio 8. Confeccionar las tablas de valores de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(p \wedge q) \rightarrow r$

b) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Ejercicio 9. Dadas las proposiciones primitivas p y q; determinar el valor de verdad de la siguiente proposición, sabiendo que $p \rightarrow q$ es falsa.

$$p \wedge \big[q \rightarrow [(\neg q \vee \neg p) \wedge q]\big]$$

Ejercicio 10. Comprobar con tablas de verdad las siguientes propiedades. (Es decir, demostrar con tablas que se cumplen las siguientes equivalencias lógicas)

a) $(p \vee q) \wedge r \equiv p \wedge r \vee q \wedge r$ Propiedad distributiva de la conjunción respecto de la disyunción

b) $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ Propiedad distributiva de la disyunción respecto de la conjunción

c) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ Ley de De Morgan

d) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ Ley de De Morgan

Ejercicio 11. Demostrar que $p \rightarrow q$ y $\neg(p \wedge \neg q)$ son lógicamente equivalentes.

1.3 Leyes lógicas

TAUTOLOGÍAS Y CONTRADICCIONES

Consideremos la proposición

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

Cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Es claro que esta proposición compuesta tiene valor de verdad verdadero independientemente los valores de verdad de cada una de las composiciones primitivas. Se dice entonces que tal proposición es una **tautología** o **ley lógica**.

En cambio $p \wedge \neg p$ es falso para cualquier valor de verdad de *p*. Se dice entonces que es una **contradicción**.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Usaremos el símbolo T_0 para denotar a la tautología y F_0 para denotar a la contradicción.

Ejercicio 12. Determinar si las siguientes proposiciones son leyes lógicas, es decir si son tautologías.

a) $p \wedge q \rightarrow q$
b) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
c) $p \rightarrow p \wedge q$
d) $p \rightarrow p \vee q$

IMPLICACIONES ASOCIADAS

Sea el condicional $p \rightarrow q$, que llamamos **directo**; en conexión con él, se presentan otros tres, obtenidos por permutaciones o negaciones del antecedente y consecuente:

$q \rightarrow p$ recíproco

$\sim p \rightarrow \sim q$ contrario

$\sim q \rightarrow \sim p$ contrarrecíproco

De estas implicaciones se desprende una equivalencia lógica importante.

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

Es decir, que la implicación directa es equivalente a su contrarrecíproca.

Si la implicación directa es V, también lo es la contrarrecíproca, pero no podemos afirmar la verdad de la recíproca o de la contraria. Pero si son verdaderos un condicional y su recíproco o contrario, entonces son verdaderos los cuatro, y las proposiciones antecedente y consecuente son equivalentes.

EJERCICIOS

Ejercicio 13. Escriba la recíproca y la contrarrecíproca de cada una de las siguientes implicaciones. Y luego analice el valor de verdad de la proposición, de la recíproca y de la contrarrecíproca.

a. Si paco vive en Tandil, entonces Paco vive en Argentina
b. Si hoy es martes, entonces mañana es lunes.

Ejercicio 14. Supongamos que si llueve Juan usa paraguas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Si no llueve entonces Juan no usa paraguas
b) Si no llueve entonces Juan usa paraguas.
c) Si Juan no usa paraguas entonces llueve
d) Si Juan no usa paraguas entonces no llueve

LEYES DEL CÁLCULO PROPOSICIONAL

En el cálculo proposicional se utilizan las siguientes leyes o tautologías cuya demostración se reduce a la confección de la correspondiente tabla de valores de verdad:

1. **Ley Conmutativa**
   De la disyunción: $p \vee q \equiv q \vee p$
   De la conjunción: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

2. **Ley Asociativa**
   De la disyunción: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
   De la conjunción: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

3. **Ley Distributiva**
   De la conjunción respecto de la disyunción:
   $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
   De la disyunción respecto de la conjunción:
   $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

4. **Leyes de De Morgan**
   La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones:
   $$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
   La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones:
   $$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

5. **Involutiva o Ley de la doble negación**
   $$\neg(\neg p) \equiv p$$

6. **Ley de Idempotencia**
   $$p \wedge p \equiv p$$
   $$p \vee p \equiv p$$

7. **Ley de Identidad**
   $$p \vee F_0 \equiv p$$
   $$p \wedge T_0 \equiv p$$

8. **Ley de Dominación**
   $$p \vee T_0 \equiv T_0$$
   $$p \wedge F_0 \equiv F_0$$

9. **Ley de inversos**
   $$p \vee \neg p \equiv T_0$$
   $$p \wedge \neg p \equiv F_0$$

10. **Ley de absorción**
   $$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$
   $$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

PRINCIO DE DUALIDAD

Sea t una proposición, si los únicos conectivos lógicos que tiene t son $\wedge$ y $\vee$ entonces el *dual* de t se obtiene al reemplazar cada ocurrencia $\wedge$ y $\vee$ por $\vee$ e $\wedge$, respectivamente, y cada ocurrencia T_o y F_0 por F_0 y T_0, respectivamente.

Esta dualidad resultante (*dual*) es también válida.

SIMPLIFICACIONES

Aplicando las leyes del cálculo proposicional y otras equivalencias lógicas se pueden simplificar las proposiciones compuestas en otras más sencillas y que siguen siendo lógicamente equivalentes.

Por ejemplo la proposición compuesta $\big((p \to q) \wedge p\big) \to q$ es equivalente a una tautología.

$$\big((p \to q) \wedge p\big) \to q \equiv T_0$$

Verificado al inicio del práctico.

Veamos cómo simplificar dicha proposición:

$\big((p \to q) \wedge p\big) \to q$	
$((\sim p \vee q) \wedge p) \to q$	$p \to q \equiv \sim p \vee q$
$((\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \to q$	Ley distributiva
$(F_0 \vee (q \wedge p)) \to q$	Ley de inversos
$(q \wedge p) \to q$	Ley de identidad
$\sim (q \wedge p) \vee q$	$p \to q \equiv \sim p \vee q$
$(\sim q \vee \sim p) \vee q$	Ley de De Morgan
$(\sim q \vee q) \vee \sim p$	Ley conmutativa y asociativa
$T_0 \vee \sim p$	Ley de inversos
T_0	Ley de dominación

EJERCICIOS

Ejercicio 15. Indique que Ley se utilizó en cada paso:

1)

	Leyes
$\sim (p \vee q) \vee [(\sim p \wedge q) \vee \sim q]$	
$\sim (p \vee q) \vee [\sim q \vee (\sim p \wedge q)]$	
$\sim (p \vee q) \vee [(\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q)]$	
$\sim (p \vee q) \vee [(\sim q \vee \sim p) \wedge T_0]$	

$\sim (p \vee q) \vee (\sim q \vee \sim p)$

$\sim (p \vee q) \vee \sim (q \wedge p)$

$\sim [(p \vee q) \wedge (q \wedge p)]$

$\sim [(q \wedge p) \wedge (p \vee q)]$

$\sim [q \wedge [p \wedge (p \vee q)]]$

$\sim [q \wedge p]$

2)

$(p \rightarrow q) \wedge [\sim q \wedge (r \vee \sim q)]$	Leyes
$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	
$(\sim p \vee q) \wedge \sim q$	
$(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)$	
$(\sim p \wedge \sim q) \vee F_0$	
$\sim p \wedge \sim q$	
$\sim (p \vee q)$	

Ejercicio 16. ¿Cuáles de las proposiciones son lógicamente equivalentes?

a. $(\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge \neg p)$
b. $p \wedge (r \rightarrow q)$
c. $\neg q \rightarrow \neg p$

Ejercicio 17. Indicar cuál es la proposición equivalente a:

$$[p \rightarrow \neg(q \rightarrow p)] \rightarrow \neg q$$

a. $\neg p \wedge \neg q$
b. $p \vee \neg q$
c. $p \wedge q$
d. $p \rightarrow \neg q$
e. $\neg p \vee q$

Ejercicio $17\frac{1}{2}$. Indicar cuál es la proposición equivalente a:

$$\neg[(q \to p) \wedge (p \to q)] \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

a. $p \to q$
b. $p \to \neg q$
c. $\neg(p \to q)$
d. $\neg(p \to \neg q)$
e. $\neg q \to p$

Ejercicios extras de Leyes:

Ejercicio 18.1. Simplificar las siguientes proposiciones compuestas mediantes la aplicación de leyes lógicas y sustituyendo expresiones lógicamente equivalentes.

a) $(p \vee q) \wedge \sim (\sim p \wedge q)$
b) $[\sim (p \wedge q)] \to (\sim p \vee \sim q)$
c) $[p \vee (q \wedge r)] \vee \sim [p \vee (q \wedge r)]$

Ejercicio18.2. Simplificar las siguientes proposiciones compuestas mediantes la aplicación de leyes lógicas.

a. $\neg(\neg p \wedge q) \vee p \to (q \vee \neg r)$
b. $r \to [\neg(\neg r \vee q)]$
c. $[p \to \neg(q \to p)] \to \neg q$
d. $[\neg p \to (q \wedge \neg p)] \to [\neg r \vee \neg p]$
e. $[(\neg p \wedge q)] \to (q \to p) \wedge p$

1.4 Cuantificadores

ESQUEMAS PROPOSICIONALES

Analicemos la siguiente oración:

"$x + 2$ es un número entero par"

¿Podemos afirmar que esa oración es una proposición?

Es claro que no, pues desconocemos al número $x + 2$, pero cada valor que toma x si podemos decir si esa afirmación es verdadera o falsa; por ejemplo si x es igual a 3 la oración es:

"$3 + 2$ es un número entero par"

Lo cual es falso, o si $x = 4$, diremos que la oración es verdadera.
Entonces, nuestra expresión "$x + 2$ es un número entero par" no es una proposición, pero para cada valor que le doy a la variable sí se transforma en una **proposición**. A este tipo de construcciones del lenguaje es a la que llamamos *proposiciones abiertas o esquemas proposicionales.*

ESQUEMAS PROPOSICIONALES

Una frase declarativa es un **esquema proposicional** si:

i. Contiene una o más variables.
ii. No es una proposición.
iii. Se convierte en una proposición cuando las variables que aparecen en ella se reemplazan por ciertas opciones permisibles.

Esas opciones permisibles son las que llamamos **universo de discurso**, pues las variables no pueden tomar cualquier valor para convertirse en proposiciones; por ejemplo supongamos que $x = a$ o que $x = blanco$. Las airmaciones resultantes siguen no siendo proposiciones.

Entonces el universo de discurso es el conjunto de opciones que permite considerar el esquema proposicional.

Los esquemas proposicionales son representamos como $p(x)$ donde para cada x la proposición *p* es verdadera o falsa.

EJEMPLO

$p(x)$: $x + 2$ es un número entero par. (ESQUEMA PROPOSICIONAL)
$p(1)$: $1 + 2$ es un número entero par. (FALSO)
$p(10)$: $10 + 2$ es un número entero par. (VERDADERO)

Las proposiciones con dos variables x, y las expresaremos como $q(x, y)$. Así por ejemplo consideremos

$q(x,y)$: Los números $y + 2, x - y$ y $x + 2y$ son enteros pares.

En este caso el universo de discurso son los números enteros, entonces para cada valor de x e y el esquema $q(x, y)$ se convierte en una proposición.

Siguiendo el ejemplo

Sea $x = 3$ e $y = 5$
$q(3, 5)$: Los números $5 + 2, 3 - 5$ y $3 + 2.5$ son enteros pares. (FALSO)
$q(8,6)$: Los números $6 + 2, 8 - 6$ y $8 + 2.6$ son enteros pares. (VERDADERO)

CUANTIFICADORES

A partir de los esquemas proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado *cuantificación*. Hay dos tipos de cuantificadores:

Cuantificador	Símbolo	Se lee
Existencial	∃	“existe”
Universal	∀	“para todo”

El cuantificador siempre va acompañado de la variable, y declara que la proposición que lo continúa es verdadera:

$\exists x : p(x)$ "existe x tal que $p(x)$ es verdadera"

$\forall x : p(x)$ "para todo x se cumple que $p(x)$ es verdadera"

Retomando el esquema proposicional $p(x)$: $x + 2$ es un número entero par, podemos construir las siguientes proposiciones:

$\exists x : p(x)$ "existe x tal que $x + 2$ es un número entero par"

$\forall x : p(x)$ "para todo x se cumple que $x + 2$ es un número entero par"

- ¿Qué podemos decir de $\exists x : p(x)$?
  - i. Podemos decir que es una proposición porque podemos determinar el valor de verdad de esa afirmación, y
  - ii. podemos decir que es verdadera, pues existe $x = 2$ tal que $2 + 2$ es un número entero par.

- ¿Qué podemos decir de $\forall x : p(x)$?
  - i. Que es una proposición, y
  - ii. Que su valor de verdad es falso, pues no es verdad que para cualquier valor de x esa proposición es verdadera. Por ejemplo si $x = 3$, la proposición es falsa.

De aquí se desprende que los cuantificadores (tanto el existencial como el universal) convierten a un esquema proposicional en una proposición, ya sea particularizando o generalizando.

EJEMPLOS

Sea el universo de discurso los números reales y los esquemas proposicionales $p(x), q(x), r(x)$ y $s(x)$

$$p(x): \quad x \geq 0$$
$$q(x): \quad x^2 \geq 0$$
$$r(x): \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$s(x): \quad x^2 + 1 = 0$$

Analizamos las siguientes proposiciones.

$\forall x : p(x)$	"todo número real es mayor o igual a cero"	FALSO

(Existe -2, que es un número real pero es negativo)

$\exists x : p(x)$	"existe al menos un número real que es mayor o igual a cero"	VERDADERO

(Existe π , que es un número real positivo)

$\exists x: [p(x) \wedge q(x)]$	"existe al menos un número real tal que dicho número es mayor o igual a cero y satisface $x^2 - 3x - 4 = 0$"	VERDADERO

(Existe el número real 4, que es mayor o igual a cero y $4^2 - 3.4 - 4 = 0$)

$\forall x: q(x)$	"todo número real elevado al cuadrado es no negativo"	VERDADERO
$\forall x: [r(x) \rightarrow p(x)]$	"todo número real que satisfaga la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ es mayor o igual que cero"	FALSO

(Existe -1 número real tal que $(-1)^2 - 3.(-1) - 4 = 0$ y es negativo)

$\exists x: s(x)$	"existe algún número real tal que $x^2 + 1 = 0$ "	FALSO

Los ejemplos anteriores ilustran cómo los esquemas proposicionales se convierten en proposición al agregarle un cuantificador, y luego se analiza el valor de verdad de dicha proposición.

Cómo vimos anteriormente, los esquemas proposicionales pueden tener más de una variable. Observemos el siguiente ejemplo:

Sea el universo de discurso los números enteros y el esquema proposicional:

$$t(m,n): \quad 41 = m^2 + n^2$$

La proposición $\exists m, \exists n: t(m,n)$ ¿Es verdadera?

$\exists m, \exists n: t(x)$	"existen al menos dos números enteros tal que la suma de sus cuadrados sea igual a 41"	VERDADERO

La proposición es verdadera pues $4^2 + 5^2 = 41$.

En cambio $\forall m, \exists n: t(m,n)$ no es verdadera.

NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES

Consideremos la proposición

"todos los números enteros son pares"

Escrito en proposición, sea $p(x)$: x es entero y $q(x)$: x es par.

$$\forall x: [p(x) \rightarrow q(x)]$$

Supongamos que quisiéramos negar esta afirmación, en lenguaje natural sería:

"No todos los números enteros son pares" o bien, "Hay números que son enteros y no son pares"

$$\exists x: [p(x) \wedge \sim q(x)]$$

Observemos que

$$p(x) \wedge \sim q(x) \equiv \sim [p(x) \rightarrow q(x)]$$

Es decir que al negar la proposición $\forall x: [p(x) \rightarrow q(x)]$ obtuvimos la proposición

$$\exists x: \sim [p(x) \rightarrow q(x)]$$

Entonces bien, para negar una proposición con el cuantificador universal, basta cambian el cuantificador universal por el existencial y negar la proposición.
De manera análoga si niega una proposición con el existencial, basta cambiar el cuantificador existencial por el universal y negar la proposición.

Reglas para negar proposiciones con un cuantificador

$$\sim [\forall x: p(x)] \equiv \exists x: \sim p(x)$$
$$\sim [\exists x: p(x)] \equiv \forall x: \sim p(x)$$

EJEMPLOS

Sea la proposición "todo entero admite un inverso aditivo"
Es decir, "para todo número entero existe otro entero que sumados dan cero"
Sea el esquema proposicional

$$p(x, y):\ x + y = 0$$

La proposición queda construida cómo

$$\forall x, \exists y: x + y = 0$$

Entonces su negación es

$$\exists\ x, \forall y: \sim [x + y = 0]$$

Es decir

$$\exists\ x, \forall y: x + y \neq 0$$

La traducción en lenguaje común es "existe algún numero entero que no admite inverso aditivo"
Otra forma es "existe algún número entero tal que la sumado con cualquier otro número entero es distinto de cero".

EJERCICIOS

Ejercicio17. Sea el universo de discurso los números reales y los esquemas proposicionales:

$$p(x): x \geq 0$$
$$q(x): x^2 + x - 6 = 0$$
$$r(x): x - 2 < 0$$
$$s(x): x^2 > 4$$

a. $\exists x: s(x) \wedge q(x)$
b. $\forall x: r(x) \vee s(x)$
c. $\exists x: q(x) \wedge \neg p(x)$
d. $\forall x: q(x) \rightarrow r(x)$

Ejercicio 19. Negar las siguientes proposiciones

i. $\exists x \,/\, p(x) \vee \sim q(x)$

ii. $\forall x : p(x) \rightarrow q(x)$

iii. $\forall x, \exists y: \; x.y = 0$

Ejercicios 20. Dadas las siguientes proposiciones

a. El cuadrado de todo número real es mayor que 2.
b. La raíz cuadrada de un número real siempre es positiva.
c. Existen números reales cuyo cubo aumentado en 1 es igual al cubo del siguiente.

Expresarlas simbólicamente, negar las expresiones obtenidas y retraducirlas al lenguaje ordinario.

1.5 Razonamiento deductivo válido

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO VÁLIDO

En matemática interesa el tipo de razonamiento llamado **deductivo**. Llamamos razonamiento deductivo al par ordenado $(\{p_i\}; q)$, siendo $\{p_i\}$ un conjunto finito de proposiciones, llamadas premisas, y q una proposición, llamada conclusión, respecto de la cual se afirma que deriva de las premisas.

OBSERVACIÓN

Cuando decimos que $\{p_i\}$ es un conjunto finito, estamos diciendo que

$$\{p_i\} = p_1; p_2; p_3; \dots; p_n$$

Donde *n* es un número natural.

Es decir, que se parte de un conjunto de proposiciones para arribar a una proposición q. Otra forma de expresar lo anterior es:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$$

Un razonamiento es deductivo si y sólo si las **premisas son evidencias de la verdad de la conclusión**, es decir, si $p_1; p_2; p_3; \dots; p_n$ son verdaderas, entonces q es verdadera. Un razonamiento deductivo es válido si no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. **De un razonamiento no se dice que es V o F, sino que es válido o no.**

En consecuencia, una vía para establecer la validez de un argumento dado es demostrar que la proposición compuesta $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ es una tautología.

EJEMPLO. FORMA 1 (CON TABLAS)

Sean p, q, r las proposiciones primitivas dadas como:

p: Rogelio estudia
q: Rogelio juega tenis
r: Rogelio aprueba Álgebra

Ahora bien, sean $p_1; p_2; p_3$ las premisas

p_1: Si Rogelio estudia, entonces aprobará Álgebra

p_2: Si Rogelio no juega tenis, entonces estudiará

p_3: Rogelió reprobó Álgebra

Queremos determinar si el argumento

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q$$

En palabras es decir:

es válido. Para lograrlo, escribimos $p_1; p_2; p_3$ como

$$p_1: \quad p \to r \qquad p_2: \quad \sim q \to p \qquad p_3: \sim r$$

Y examinamos la tabla de verdad de la implicación

			p_1	p_2	p_3	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q$
p	q	r	$p \to r$	$\sim q \to p$	$\sim r$	$[(p \to r) \wedge (\sim q \to p) \wedge \sim r] \Rightarrow q$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V

FORMA 2 (analizando sólo los casos verdaderos)

Otra forma de analizar la validez del razonamiento es aceptar cada una de las premisas como verdaderas y deducir el valor de verdad de la conclusión, de esta forma

Primero escribo el razonamiento de la siguiente forma, y considero que cada proposición es verdadera (las condiciones que establece el RLD)

$p \to r \qquad \equiv V \quad p \equiv F$

$\sim q \to p \qquad \equiv V \quad \sim q \equiv F$ entonces $q \equiv V$

$\sim r \qquad \equiv V \quad r \equiv F$

$\therefore q$

$p \to r$ (2) Como $p \to r$ es verdadero, y r es falso Por lo tanto p es falso

$\sim q \rightarrow p$	(3)	Como $\sim q \rightarrow p$ es verdadero, y p es falso	Por lo tanto $\sim q$ es falso
$\sim r$	(1)	$\sim r$ es verdadero,	Por lo tanto r es falso
$\therefore q$	**En conclusión q es verdadero y el razonamiento es válido**		

Para analizar un razonamiento partimos de premisas que nos pueden dar información precisa de las proposiciones (en este caso la tercer premisa), y luego continuamos analizando las demás hasta llegar a analizar el valor de verdad de la conclusión; en el caso que la conclusión resulte ser falsa, o el valor de verdad no se desprenda de las premisas, el razonamiento resultará inválido.

REGLA DE INFERENCIA

Llamamos regla de inferencia, a todo **esquema válido de razonamiento**, independientemente de la V o F de las proposiciones componentes. De este modo, toda regla de inferencia es tautológica.

Una regla de inferencia básica es la llamada *modus ponens*, que es la siguiente:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Que equivalentemente lo podemos escribir como $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$; el símbolo $\Rightarrow$ indica que el antecedente *implica lógicamente* al consecuente.

EJEMPLO

Los Siguientes argumentos válidos ilustran la aplicación del *Modus ponens.*

1. Lidia gana diez millones de dólares en la lotería
2. Si Lidia gana diez millones de dólares en la lotería, entonces José renunciará a su trabajo.
3. Por lo tanto, José renunciará a su trabajo.

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

1. Si Alejandra se va de paseo a París, entonces tendrá que ganarse una beca.
2. Alejandra se va de paseo a París.
3. Por lo tanto, Alejandra se ganó una beca.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Es fácil de probar que $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ es un razonamiento válido utilizando tablas.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V

F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

EJERCICIOS

Ejercicio 20.

a. Demostrar que el siguiente razonamiento no es válido.

$$[(p \to q) \wedge q] \to p$$

b. Muestra con un ejemplo la invalidez de este enunciado, es decir definir las proposiciones modelando situaciones reales.

Ejercicio 21. Probar las siguientes *Reglas de inferencia* y proponer una situación que la represente:

a. *Modus Tollens:* $[p \to q \wedge (\sim q)] \Rightarrow \sim p$
b. *Silogismo Hipotético*: $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$
c. *Silogismo Disyuntivo:* $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

Ejercicio 22. Analizar la validez de los siguientes razonamientos:

a. Si hay cierta probabilidad de lluvia o pierde su cinta roja para el cabello, entonces Loreta no cortará el césped. Siempre que la temperatura está por arriba de los 30° C, no hay probabilidad de lluvia. Hoy hay 32°C y Loreta está usando su cinta roja. Por lo tanto, en algún momento del día Loreta cortará el césped.
b. Si María obtiene el puesto de supervisora y trabaja mucho, entonces obtendrá un aumento. Si obtiene el aumento, entonces comprará un auto nuevo. Ella no ha adquirido un auto nuevo. Por lo tanto, María no ha obtenido el puesto de supervisora o no ha trabajado mucho.
c. Si Domingo va la carrera de autos, entonces Elena se enojará. Si Rafael juega cartas toda la noche, entonces Carmen se enojará. Si Elena o Carmen se enojan, le avisarán a Verónica (su abogada). Verónica no ha tenido noticias de estas dos clientes. En consecuencia, ni Domingo fue a las carreras ni Rafael jugó cartas toda la noche.

Ejercicio 23.

a. Demostrar que el siguiente razonamiento no es válido.

$$[(p \to q) \wedge q] \to p$$

b. Muestra con un ejemplo la invalidez de este enunciado, es decir definir las proposiciones modelando situaciones reales.

$$[(p \to q) \wedge q] \to p$$

Trabajo de repaso Unidad 1

Ejercicio 1. Dadas las proposiciones primitivas p y q; determinar el valor de verdad de la siguiente proposición, sabiendo que p es verdadera y q falsa.

$$p \wedge [q \rightarrow (\neg q \vee \neg p) \wedge q]$$

Ejercicio 2. Dadas las proposiciones primitivas p y q; determinar el valor de verdad de la siguiente proposición, sabiendo que $p \rightarrow q$ es falsa.

$$(p \vee \neg q) \wedge [p \rightarrow (\neg q \wedge p)]$$

Ejercicio 3. Indicar V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justificar las respuestas.

a. $[\neg p \vee q] \rightarrow [q \wedge p] \equiv p$
b. $p \wedge (q \rightarrow \neg r) \equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee \neg(\neg p \wedge r)$
c. $[\neg(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow p \wedge \neg(\neg q \wedge r)$ es verdadera (independientemente de los valores de las proposiciones p, q y r).
d. Si $p \equiv F$ y $q \equiv V$, y se desconoce el valor de r; entonces la proposición
$$(p \rightarrow r) \wedge \big[q \leftrightarrow [(\neg q \vee \neg p) \wedge q]\big]$$ es falsa.
e. La contrarrecíproca “si hoy es día de examen, mañana es sábado” es “si mañana no es sábado, entonces hoy es día de examen”

Ejercicio 4. Sea el universo de discurso los números reales y los esquemas proposicionales:

$$p(x): x + 2 \leq 0$$
$$q(x): x^2 - 5x - 36 = 0$$
$$r(x): \sqrt{x} < 5$$

e. $\exists x: p(x) \wedge q(x)$
f. $\exists x: r(x) \wedge \neg p(x)$
g. $\forall x: q(x) \rightarrow r(x)$

Ejercicio 5. Sea el universo de discurso los números reales y los esquemas proposicionales:

$$p(x): x < 0$$
$$q(x): x^2 - x - 12 = 0$$
$$r(x): \sqrt{x} \leq 0$$
$$s(x): x^2 \geq 16$$

a. $\exists x: p(x) \wedge q(x)$
b. $\forall x: p(x) \vee s(x)$
c. $\exists x: r(x) \wedge \neg p(x)$
d. $\forall x: q(x) \rightarrow s(x)$

Ejercicios 6. Consideremos que el universo de discurso son los números reales, y sea la siguiente afirmación:

“Si el cuadrado de un número es positivo, entonces dicho número puede ser positivo o negativo”

a. Expresar en forma simbólica la proposición.
b. Analizar su respectivo valor de verdad, justificando.
c. Escribir su negación en forma simbólica y coloquial.

Álgebra de Boole 2

2.1 Álgebras Booleanas

Sea $B = \{0,1\}$. Definimos en B tres operaciones: suma $(+)$, producto $(\cdot)$ y complemento $(\overline{})$.

Suma	**Producto**	**Complemento**
$0+0=0$	$\mathbf{0 \cdot 0 = 0}$	$\mathbf{\overline{0} = 1}$
$0+1=1$	$\mathbf{0 \cdot 1 = 0}$	$\mathbf{\overline{1} = 0}$
$1+0=1$	$\mathbf{1 \cdot 0 = 0}$	
$1+1=1$	$\mathbf{1 \cdot 1 = 1}$	

$$0+0=0 \qquad 1+1=1$$

$$0 \cdot 0 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1$$

Una variable x es una **variable booleana** si x sólo toma valores de B. En consecuencia:

i. $x + x = x$

ii. $x \cdot x = xx = x$

Para cualquier variable booleana x.

Además si x, y son variables booleanas, entonces

a. $x + y = 0$ si y sólo si $x = y = 0$.

b. $xy = 1$ si y sólo si $x = y = 1$.

EJERCICIOS

Ejercicio 1. Encuentren el valor de cada una de las siguientes expresiones booleanas si los valores de las variables booleanas w, x, y y z son $1, 1, 0$ y 0, respectivamente.

a. $\overline{xy} + \overline{x}\,\overline{y} =$

b. $w + \overline{x}y =$

c. $wx + \overline{y} + yz =$

d. $wx + xy + yz =$

e. $(wx + y\overline{z}) + w\overline{y} + \overline{(w+y)(\overline{x}+y)}$

Ejercicio 2. Sean w, x y y variables booleanas, <u>donde x toma el valor 1.</u> Para cada una de las siguientes expresiones booleanas, determinar, si es posible, el valor de la expresión. Si no es posible, encuentren entonces el número de asignaciones de valores de w e y tales que producen el valor de 1 para la expresión.

a. $x + xy + w$

b. $xy + w$

c. $\overline{x}y + xw$

d. $\overline{x}y + w$

2.2 Funciones Booleanas

Sea $B^n = \{(b_1, b_2, \dots, b_n) \backslash b_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n\}$, con $n \in \mathbb{N}$. Una función $f: B^n \to B$ es una **función de conmutación o booleana**, de n variables.

Las variables se enfatizan si escribimos $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde cada x_i para $1 \le i \le n$ es una variable booleana.

Por ejemplo sea $f: B^3 \to B$, donde $f(x,y,z) = xy + \overline{x}z$. Esta función booleana que determinada evaluando f para cada una de las posibles asignaciones a las variables x, y, z.

$$f(x,y,z) = xy + \overline{x}z$$

x	y	z	xy	$f(x,y,z) = xy + \overline{x}z$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

FORMA NORMAL DIYUNTIVA [EXPRESIÓN DISYUNTIVA CANÓNICA]

Sea f una función variable de n variables booleanas, es decir de $x_1,\ x_2, \dots, x_n$

i. Cada término x_i, o su complemento $\overline{x_i}$, para $1 \le i \le n$, es una **literal**;

ii. Un término de la forma $y_1 y_2 \cdots y_n$ donde cada $y_i = x_i$ o $\overline{x_i}$ para $1 \le i \le n$, es una **conjunción fundamental** [MINTERM];

iii. Una representación de f como suma de conjunciones fundamentales es una **forma normal disyuntiva** (f.n.d) de f.

Por ejemplo:

a) Sea f una función booleana de tres variables, entonces su f.n.d es:

$$f(x,y,z) = xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}z$$

b) Encuentre la f.n.d de $f: B^3 \to B$, donde

$$f(x,y,z) = xy + \overline{x}z$$

Para ello vamos a formar la tabla correspondiente a f

x	y	z	xy	$\overline{x}z$	$f(x,y,z) = xy + \overline{x}z$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

¿Cuál es la conjunción booleana que vale 1 cuando $x = 0$ $y = 0$ y $z = 1$?

Vemos que la última columna (la que nos brinda información de cada uno de los valores de f dependiendo de cada una de las variables booleanas) tiene cuatro unos, los cuales nos indican las cuatro **conjunciones fundamentales** necesarias para formar la f.n.d.

$$f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$$

Es claro que $xy + \overline{x}z$ es una expresión equivalente a $\overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$ (pues tienen la misma tabla de valores). Luego

$$f(x,y,z) = xy + \overline{x}z = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$$

x	y	z	xy	$\overline{x}z$	$xy + \overline{x}z$	$\overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

FUNCIONES BOOLEANAS EQUIVALENTES

Para $n \in \mathrm{N}$. $n \geq 2$, sean $f, g: B^n \to B$ dos funciones boleanas de las n variables booleanas $x_1, x_2, \dots, x_n$. Decimos que $\boldsymbol{f}$ **y** $\boldsymbol{g}$ **son equivalentes** y escribimos $f = g$ si las columnas para f y g (en sus respectivas tablas de función) son exactamente las mismas. Las tablas muestran que $f(b_1, b_2, \dots, b_n) = g(b_1, b_2, \dots, b_n)$ para cada una de las 2^n posibles asignaciones de 0 o 1 a cada una de las n variables booleanas $x_1, x_2, \dots, x_n$]

EJERCICIOS

Ejercicio 3. Dadas las siguientes tablas, escribir la función booleana correspondiente a)

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

b)

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Ejercicio 4. Dadas las siguientes funciones booleanas:

a. Construir su respectiva tabla de valores.
b. Hallar su f.n.d.

1) $f(x,y) = x + x\overline{y} + \overline{y}$
2) $f(x,y,z) = \overline{x}z + xy$
3) $f(w,x,y,z) = wx + xy + yz + zw + \overline{wx}y\overline{z} + \overline{wxy}z$

Ejercicio 5. Encuentre la función normal disyuntiva $f(w,x,y,z)$ donde cada uno de las conjunciones fundamentales (minters) valen 1, exactamente cuando:

i. $w = x = 0,\ y = z = 1$
ii. $w = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = 0$
iii. $w = 0,\ x = y = z = 1$
iv. $w = x = y = z = 0$

2.3 Leyes del Álgebra de Boole

Sean x, y, z variables booleanas, se cumple:

1.	$\overline{\overline{x}} = x$	Ley del doble complemento o involutiva
2.	$\overline{x+y} = \overline{x}\,\overline{y}$ $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$	Leyes de De Morgan
3.	$x + y = y + x$ $xy = yx$	Leyes conmutativas
4.	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	Leyes asociativas
5.	$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	Leyes distributivas
6.	$x + x = x$ $xx = x$	Leyes de Idempotencia
7.	$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	Leyes de identidad - Elemento neutro
8.	$x + \overline{x} = 1$ $x\,\overline{x} = 0$	Leyes de los inversos

9.	$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	Leyes de dominación
10,	$x + xy = x$ $x(x + y) = x$	Leyes de absorción

Por ejemplo, vamos a simplificar las siguientes expresiones booleanas

$$x + xy \qquad \text{y} \qquad wx + \overline{\overline{x}z} + (y + \overline{z}) =$$

$$x + xy = x(1 + y) = x.(1) = x$$

$$\begin{aligned} wx + \overline{\overline{x}z} + (y + \overline{z}) &= wx + \left(\overline{\overline{x}} + \overline{z}\right) + y + \overline{z} \\ &= wx + x + \overline{z} + y + \overline{z} \\ &= wx + x + \overline{z} + \overline{z} + y \\ &= wx + x + \overline{z} + y \\ &= (w + 1)x + \overline{z} + y \\ &= 1.x + \overline{z} + y \\ &= x + \overline{z} + y \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Ejercicio 6. Simplifique las siguientes expresiones booleanas

a. $xy + (x + y)\overline{z} + y$

b. $x + y + \overline{(\overline{x} + y + z)}$

c. $yz + wx + z + [wz(xy + wz)]$

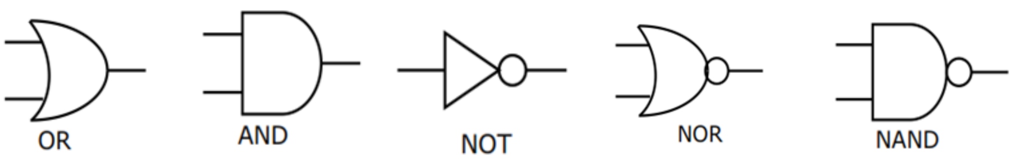
d. $\overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$

2.4 Red de puertas y Mapas de Karnaugh

RED DE PUERTAS

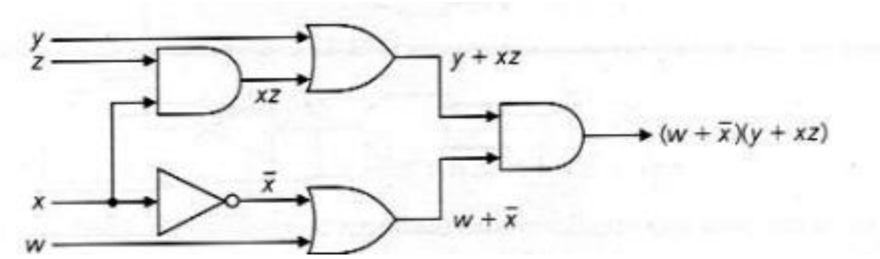
Las funciones booleanas presentan una teoría matemática muy interesante. Su importancia radica en su implementación por medio de **puertas lógicas** (dispositivos de un computador digital que realizan tareas específicas en el procesamiento de datos).

La siguiente figura contiene las puertas lógicas para la negación (complemento), conjunción y disyunción. Puesto que las operaciones booleanas $+$ y $\cdot$ son asociativas, podríamos tener más de dos entradas para una puerta AND o una puerta OR.



Compuerta lógica	
OR	Suma
AND	Producto
NOT	Complemento
NOR	Complemento de la suma
NAND	Complemento del producto

La siguiente figura es una red lógica o red de puertas con cuatro entradas para la expresión $(w+\bar{x})(y+xz)$. Los símbolos que aparecen en una línea a la izquierda de una puerta son las **entradas**, y cuando un segmento de recta está a la derecha de la puerta, recibe el nombre de



Los ejercicios proporcionarán algo de práctica en el trazado de una red lógica para una expresión booleana y en el paso de la red a una expresión. Por el momento, subrayaremos algunas características de estas redes.

1) Una línea de entrada puede expresarse para servir de entrada a más de una puerta
2) Las líneas de entrada y de salida sólo se juntan en las puertas
3) No se puede retroceder; es decir, la salida de una puerta g no puede usarse como entrada de la misma puerta g o de cualquier puerta que lleve (directa o indirectamente) a la puerta *g.*
4) Supondremos que la salida de una red de puertas es una función instantánea de las entradas presentes. No existe dependencia del tiempo y no damos importancia a las entradas anteriores.

Por ejemplo, debemos construir una red de puertas que represente la siguiente expresión booleana:

$$xy+\bar{x}z$$

EJERCICIOS

Ejercicio 7. Representar redes de puestas lógicas las siguientes expresiones booleanas.

a. $xy+(x+y)\bar{z}+y$
b. $x+y+\overline{(\bar{x}+y+z)}$
c. $wx+\overline{\bar{x}z}+(y+\bar{z})$

Ejercicio 8. Representar mediante expresiones booleanas las siguientes redes de puertas lógicas.

Figura 1

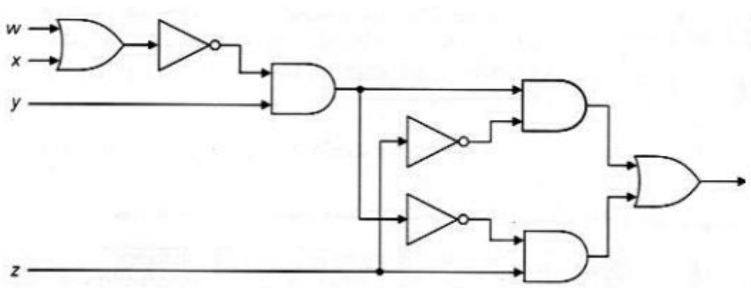


Figura 2

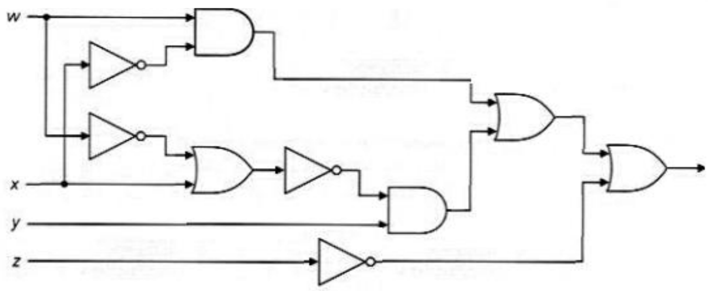
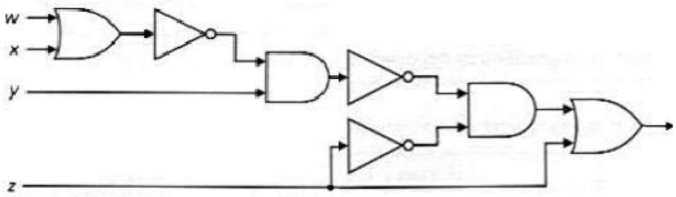


Figura 3



MAPAS DE KARNAUGH

Ahora bien, vimos cómo pasar de una función booleana a su f.n.d; ahora veremos el caso contrario, es decir, dada una función es su f.n.d, minimizarla (simplificar la expresión booleana para llegar a una expresión equivalente más reducida).
Para minimizar una expresión booleanas podemos utilizar las leyes del álgebra de Boole o bien, podemos hacerlo mediante los mapas de Karnaugh.

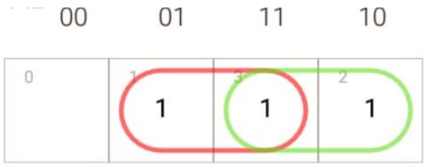
App: Boolean TT

Veamos cómo construir los mapas de Karnaugh con siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: Dos variables
Se quiere minimizar la siguiente función $f(x,y) = \overline{x}y + x\overline{y} + xy$

Para utilizar los mapas de Karnaugh se debe arma un esquema que involucre todos los literales y luego completamos con unos aquellas casillas que representan las conjunciones fundamentales.

xy	00	01	11	10
		1	1	1



Utilizamos *lazos* para agrupar los unos adyacentes, cada lazo puede agrupar hasta 2^n unos; y los unos pueden estar contenidos en más de un lazo. De esta forma creamos los siguientes lazos:

	$\bar{x}\,\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
xy	00	01	11	10
		1	1	1

De esta forma el lazo 1 agrupo dos unos adyacentes

$$l_1 = xy + \overline{x}y = y$$

El lazo 2 queda expresado de esta forma:

$$l_2 = xy + x\overline{y} = x$$

Luego la construimos la función g con la suma de cada lazo y así no queda determinada la función equivalente g, donde g es una función más simple.

$$g(x, y) = l_1 + l_2 = y + x = f(x, y)$$

Utilizando tablas es fácil ver que las funciones f y g son funciones son iguales.

Mediante leyes la función se minimiza de la siguiente forma:

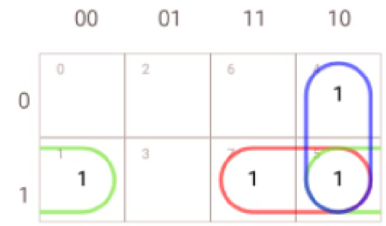
$\overline{x}y + x\overline{y} + xy$	
$\overline{x}y + x(\overline{y} + y)$	Propiedad distributiva
$\overline{x}y + x$	Ley de inversos
$(\overline{x} + x).(y + x)$	Propiedad distributiva
$y + x$	Ley de inversos

Ejemplo 2: Tres variables

Se quiere minimizar la siguiente función $f(x, y, z) = xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + xyz$.

Lo haremos mediante el diagrama de Karnaugh para tres variables.

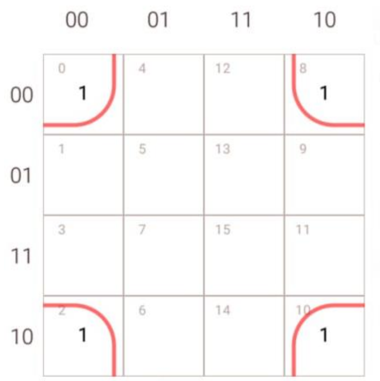
$x\backslash yz$	00	01	11	10
0				1
1	1		1	1



$$f(x,y,z) = y\bar{z} + xy + \ x\bar{z}$$

Ejemplo 3: Cuatro variables
Se quiere minimizar la siguiente función $f(w,x,y,z) = \overline{w}\overline{x}\overline{y}\overline{z} + \overline{w}\overline{x}y\overline{z} + w\overline{x}\overline{y}\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z}$.
Lo haremos mediante el diagrama de Karnaugh para cuatro variables.

$wx\backslash yz$	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1



$$f(w,x,y,z) = \overline{x}\,\overline{z}$$

Las siguientes sugerencias de uso de los mapas de Karnaugh se basan en lo hecho hasta ahora. Las enunciamos en este momento para poderlas usar en mapas más grandes.

1) Comience por combinar los términos de la tabla donde haya como máximo una posibilidad para la simplificación.
2) Verifique las cuatro esquinas de la tabla, pues pueden contener unos adyacentes aunque parezcan aislados
3) En todas las simplificaciones, intente obtener el bloque máximo posible de unos adyacentes para obtener un término producto minimal. (Recuerde que los unos pueden usarse más de una vez, en caso necesario, debido a la ley de idempotencia de +.)
4) Si existe una opción para simplificar una entrada en la tabla, intentemos usar unos adyacentes que no hayan sido utilizados en una simplificación anterior.

EJERCICIOS

Ejercicio 9. Dada la siguiente función booleana:

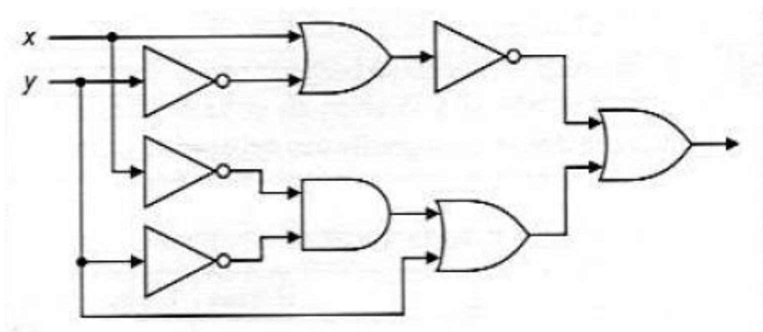
$$f(x,y,z) = xyz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

c. Minimizarla por medio de los mapas de Karnaugh.
d. Construir un esquema de red de puertas para su expresión simplificada.

Ejercicio 10. Para cada una de las siguientes funciones booleanas escribir su f.n.d y luego minimizarlas por medio de mapas de Karnaugh.

a) $f: B^3 \rightarrow B$, donde $f(x,y,z) = 1$ si y sólo sí exactamente dos variables tienen valor 1.
b) $f: B^3 \rightarrow B$, donde $f(x,y,z) = 1$ si y sólo sí al menos dos de las variables tienen valor 0.

Ejercicio 11. Construya un circuito más simple para la siguiente red:



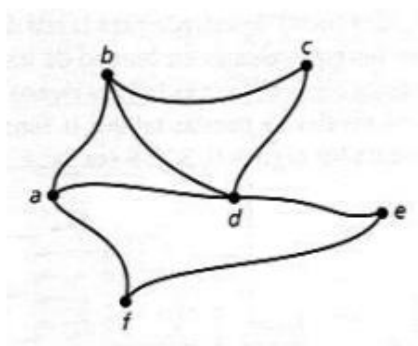
Ejercicio 12. Como responsable de un bazar de beneficencia, Paula deja su trabajo una tarde para hornear un pastel que será vendido en el bazar. Los siguientes miembros del comité del bazar ofrecen donar los ingredientes necesarios, como se muestra en la tabla.

	Harina	Leche	Mantequilla	Nueces	Huevos
Susana	X		X		
Dolores			X	X	
Berta	X	X			
Teresa		X			X
Ruth		X	X	X	

Paula envía a su hija Sarita a recoger los ingredientes.

a. Escribir una expresión booleana que represente el conjunto de voluntarias que debe tener en cuenta Paula para que Sarita pueda recoger todos los ingredientes necesarios y nada más.
b. Indicar cuáles son las posibilidades que tiene Sarita para pasar por las casas y conseguir todos los ingredientes (sin que sobre ni falte uno).

Ejercicio 13. Para el grafo de la figura, los vértices representan ciudades y las aristas carreteras.



Se quiere construir hospitales en alguna de estas ciudades, de modo que cada ciudad tenga un hospital o sea adyacente a una ciudad que lo tenga.
¿De cuantas formas podemos realizarlo, construyendo un número mínimo de hospitales?
Representar la situación por medio de una función booleana.

Ejercicio 14. Para su décimo cumpleaños, Marta quiere regalar a su hijo Juan algunos sellos de correos para su colección. En la tienda encuentra seis paquetes diferentes (que llamaremos u, v, w, x, y, z).
Los tipos de sellos de estos paquetes se muestran en la tabla.
Determine todas las combinaciones minimales de paquetes que Marta puede comprar de modo que Juan reciba algunos sellos de todas las regiones geográficas.

	Estados Unidos	Europa	Asia	África
u		✓		✓
v	✓		✓	
w	✓	✓		
x	✓			
y	✓			✓
z			✓	✓

EJERCICIOS DE REPASO: UNIDAD 2

Ejercicio 1. Dadas las siguientes funciones booleanas:

e. Construir su respectiva tabla de valores.
f. Hallar su forma canónica disyuntiva.
g. Minimizarla por medio de los mapas de Karnaugh y/o usando las leyes de Boole.
4) $f(x,y,z) = xz + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz$
5) $f(w,x,y,z) = \overline{w}x(\overline{y} + z) + w\overline{x}(\overline{y} + z)$

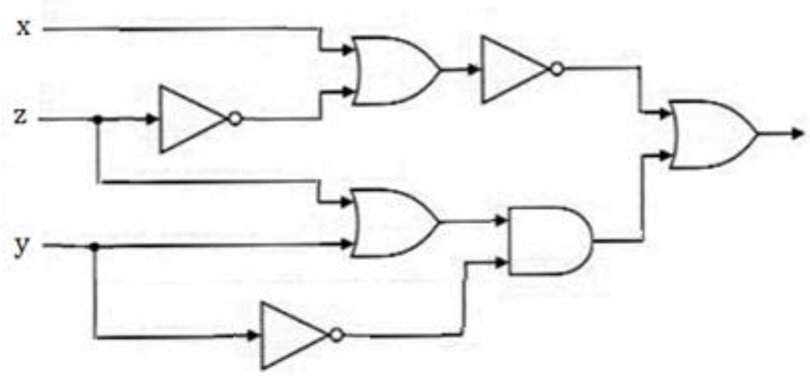
Ejercicio 2. Sea $f: B^3 \rightarrow B: f(x,y,z) = x\overline{y} + xy\overline{z}$

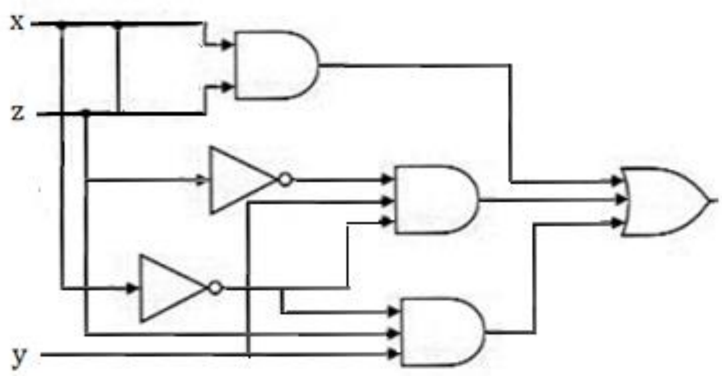
Indicar cuáles de las siguientes funciones booleanas son equivalentes a la función booleana dada, justificar cada respuesta.

a. $f(x,y,z) = x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}\,z + xy\overline{z}$
b. $f(x,y,z) = x\overline{z} + xy$
c. $f(x,y,z) = x\overline{y} + \overline{z}x$

Ejercicio 3. Dado el siguiente esquema

a. Escribir la expresión booleana que representa el circuito lógico.
b. Simplificar dicha expresión.





Iniciación al Estudio de Matrices 3

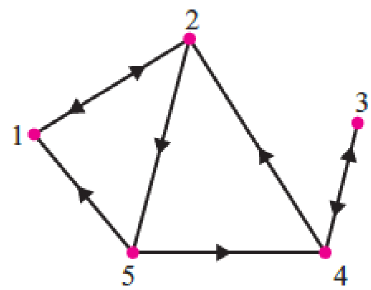
Supongamos que se está analizando un sistema de comunicaciones unido por líneas telefónicas.

En este sistema hay cinco estaciones. En la siguiente tabla se indican las líneas disponibles en dirección "a", y provenientes "de" las estaciones:

Estación	1	2	3	4	5
1		✓			
2	✓				✓
3				✓	
4		✓	✓		
5	✓			✓	

Entonces podemos leer que la estación 1 está comunicada con la estación 2; y que la estación 2 está comunicada con la estación 2 y con la 5.

Una representación gráfica de la situación es:



Y una representación matricial es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICES

Una **matriz A** de $\boldsymbol{m\,x\,n}$ es un arreglo rectangular de mn números distribuidos en un orden de m filas y n columnas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El número a_{ij} que aparece en la fila i-ésima y en la columna j-ésima de A, se conoce como la ij-ésima componente de A.

- Si A es una matriz de $m\,x\,n$ y además $m=n$, se dice que A es una *matriz cuadrada*.
- Una matriz A de $m\,x\,n$ cuyos componentes son todos ceros, se denomina *matriz de ceros* o *matriz nula*.
- Dos matrices A y B de $m\,x\,n$ son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales.

EJEMPLOS

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN

Los vectores pueden ser vistos cómo casos especiales de matrices, así como por ejemplo la matriz E puede verse cómo un vector columna o la matriz $F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puede verse como un vector fila.

3.1 Operaciones entre matrices y con un escalar

SUMA DE MATRICES

Sean A y B dos matrices de $3x3$ definidas cómo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & \pi \\ e & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ e & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & \pi+1 \\ 2e & 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Sean A y B dos matrices de $m\,x\,n$, la suma de A y B es la matriz $A+B$ de $m\,x\,n$ dada por:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{12} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz $A+B$ es la matriz cuyos componentes son la suma de los componentes correspondientes de A y de B. Es necesario destacar que para sumar dos matrices deben tener el mismo tamaño.

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Sea A una matriz de $3x3$ definidas cómo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & \pi \\ e & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular

$$4.A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & \pi \\ e & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 4\pi \\ 4e & 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz de $m\,x\,n$ y α un escalar, entonces la matriz αA de $m\,x\,n$ esta dada por:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz αA se obtiene multiplicando cada componente por el escalar α.

TEOREMA 1. Sean A, B y C matrices de $m\,x\,n$ y sea α un escalar. Entonces:

i. $A + 0 = A$ (en está situación 0 es la matriz nula)
ii. $0A = 0$
iii. $A + B = B + A$
iv. $A + (B + C) = (A + B) + C$
v. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
vi. $1A = A$

PRODUCTO ENTRE MATRICES

Sea A una matriz de $3x2$ y B una matriz de $2\,x\,2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz de $m\,x\,n$ y B una matriz de $n\,x\,p$, el producto AB es una matriz de $m\,x\,p$ donde cada componente de AB es el producto escalar entre los vectores fila de A por cada uno de los vectores columnas de B.

$$c_{ij} = (\text{renglón } i\ de\ A) \cdot (\text{columna } j\ de\ B)$$
$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nJ}$$

Dos matrices son **compatibles bajo la multiplicación** sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Ejercicio 2. Sea A una matriz de $3x2$ y B una matriz de $2\ x\ 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general el producto entre matrices no es conmutativo

TEOREMA 2. Si todas las sumas y los productos siguientes están definidos, entonces:

i. $A(BC) = (AB)C$
ii. $A(B + C) = AB + AC$
iii. $(A + B)C = AC + BC$

MATRIZ TRANSPUESTA

Sea A una matriz de mxn. Entonces la **transpuesta de A**, que se denota $\boldsymbol{A^t}$, es la matriz de nxm obtenida de intercambiar las filas por las columnas de A.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

POR EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 3. Si Sea A una matriz de nxm y B una matriz de mxp

i. La matriz A es simétrica si $A^t = A$
ii. $(AB)^t = B^t A^t$
iii. $(A^t)^t = A$
iv. Si A y B son de nxm, entonces $(A + B)^t = A^t + B^t$

Ejercicio 3. Realice las siguientes operaciones:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

a. $A + 2B$ b. $B - A$ c. $AC + BC$ d. C^2 e. $A.B^t$

f. Hallar la matriz D tal que $2A + 5B - D$ sea la matriz nula

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, pruebe que $A^2 + B^2 = (A + B)^2$.

Ejercicio 5. Dada la siguiente matriz, pruebe que $A^2 = A$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Una matriz A de $n \times n$ tal que $A^2 = I_n$ se llama involutiva. Pruebe que la siguiente matriz es involutiva:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. Encuentre B tal que $AB = C$. Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

3.2 Determinantes de orden 2 y 3

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

El determinante es una función $f: K^{nxn} \to R$, es decir, es una función que tiene cómo dominio el cuerpo de las matrices cuadradas y como imagen el conjunto de los números reales.

En otras palabras, el determinante asigna un número real (complejo) a cada matriz cuadrada de orden n, este número se obtiene mediante una fórmula generalizada que contiene $\boldsymbol{n}$**! factores**. De esta forma el determinante de una matriz de orden 2 tiene dos factores, una de orden 3 tiene seis factores y así sucesivamente.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN 2 $(2x2)$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de $2x2$, el determinante de dicha matriz es:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Con frecuencia se denota al determinante de una matriz como

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

EJEMPLOS. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

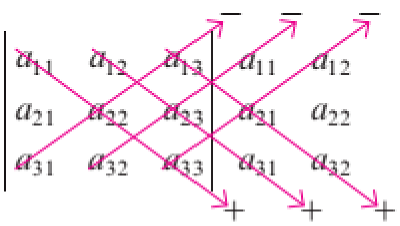
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 7 - 5(-2) = 17 \qquad |B| = -15 \qquad \det C = 0$$

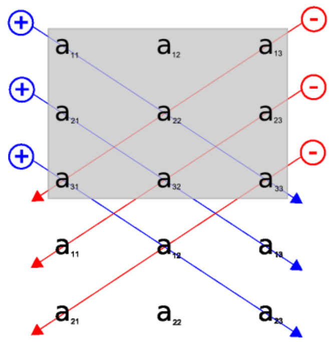
DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN 3 ($3x3$)

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz de $3x3$, entonces su determinante está definido como (Regla de Chio):

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})}$$



Otra técnica conocida es la **Regla de Sarrus**:



EJEMPLOS

Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det D &= 4.(-5).9 + 7.1.(-8) + (-2).3.6 - (-2)(-5)(-8) - 4.1.6 - 7.3.9 \\ &= -180 - 56 - 36 - (-80) - 24 - 159 \\ &= -405 \end{aligned}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|E| = 0$$

Ejercicio 8. Calcular los respectivos determinantes de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. ¿Para cuáles valores de a el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a+1 & -3 \\ 5 & 1-a \end{pmatrix}$ es igual a 0?

Ejercicio 10. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}$$

¿Para cuáles valores de a el $|A| = 0$?

3.3 Sistema de ecuaciones lineales

MATRICES DE COEFICIENTES

Dado un sistema de ecuaciones lineales, los coeficientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puede escribirse como elementos de una *matriz de coeficientes*. Por ejemplo:

$$\text{Sea el sistema} \quad \begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Entonces la matriz de coeficientes es} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Además podemos formar los vectores x y b tales que:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De esta manera el sistema de ecuaciones lineales puede expresarse en **forma matricial**:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$Ax = b$$

MATRIZ AUMENTADA

Usando la notación matricial la expresión (1) puede expresarse como la **matriz aumentada:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Ejercicio 11. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$3x - 2y = 4$$
$$5x + 2y = 12$$

a. Resuelva el sistema de ecuaciones por algún método ya conocido.
b. Clasificar el sistema y representarlo gráficamente.
c. Escriba el sistema anterior en su forma matricial: $Ax = b$.
d. Calcular $\det A$.
e. Construir una nueva matriz A_1 intercambiando el vector columna b por la primera columna de A.
f. Construir una nueva matriz A_2 intercambiando el vector columna b por la segunda columna de A.
g. Calcular $\det A_1$ y $\det A_2$
h. Calcular el cociente entre determinante A_1 y A; y el cociente entre el determinante A_2 y A.
i. ¿Qué sucede si el determinante de A es igual a cero?

REGLA DE CRAMER

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones, con n ecuaciones lineales y n incógnitas.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots & + a_{nn}x_n & = b_n \end{array}$$

Que puede representarse de la forma

$$Ax = b$$

Además sean

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Si el $\det A \neq 0$. Entonces el sistema $Ax = b$ es **compatible determinado** y la solución única está dada por:

$$\boxed{x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \quad \cdots \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}}$$

Ejercicio 12. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

1. $\begin{cases} 2x+4y+6z=14 \\ 3x-2y+z=-3 \\ 4x+2y-z=-4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=6 \\ 3x_1-2x_2-3x_3=5 \\ 8x_1+2x_2+5x_3=11 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -5x+8y+10z=-8 \\ x-7y \qquad =-2 \\ 10x+10y+6z=9 \end{cases}$

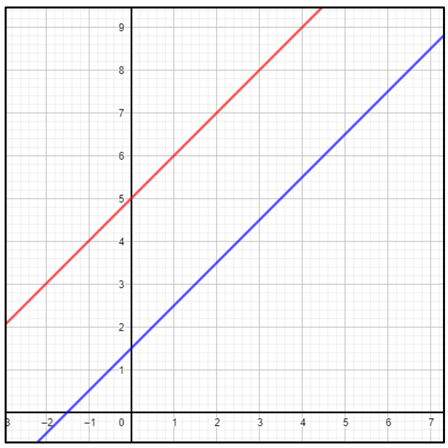
a. Resolverlos aplicando la regla de Cramer.
b. Interpretarlo geométricamente (usar GeoGebra): ¿Qué objetos geométricos intervienen?

Ejercicio 13. Un viajero recién regresado de Europa gastó en alojamiento, por día, $30 dólares en Inglaterra, $20 en Francia y $20 en España. En comidas, por día, $20 dólares en Inglaterra, $30 en Francia y $20 en España. Adicionalmente desembolsó $10 por día en cada país en gastos varios. El registro de nuestro viajero indica que gastó un total de $340 en alojamiento, $320 de alimentación y $140 en gastos varios en su recorrido por estos tres países. Demuestre que el registro debe ser incorrecto.

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones:

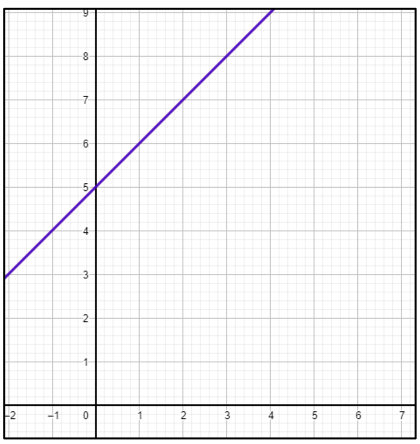
$$x-y=-5$$
$$2x-2y=-3$$



Vemos que su forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Además, es claro que $\det A = 0$; por lo que sabemos que el sistema <u>no tiene una única solución</u>. Vemos que gráficamente las rectas son paralelas, lo que implica que no tienen ningún punto en común.



Es decir, que **el sistema es incompatible** (o inconsistente)

En cambio, el sistema

$$x-y=-5$$
$$2x-2y=-10$$

Tiene todos los puntos en común, es decir que **el sistema es compatible indeterminado**.

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

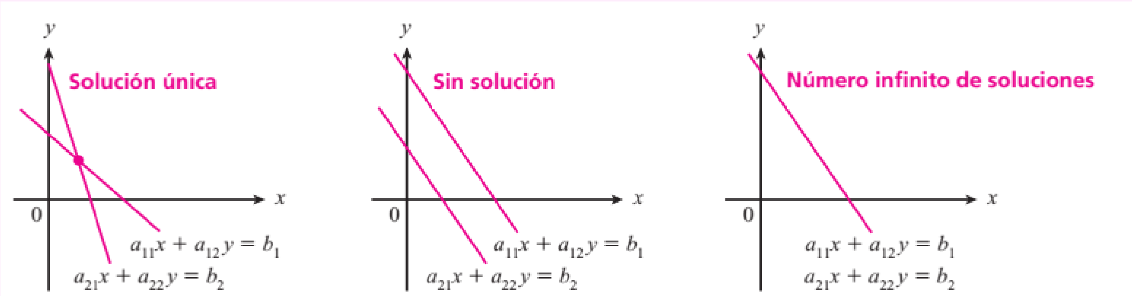
Compatible (tiene solución)

a. **Determinado:** Si tiene una **única** solución.

b. **Indeterminado:** Si tiene **infinitas** soluciones.

Incompatible (no tiene solución)

PARA EL CASO DE 2 ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección

b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección

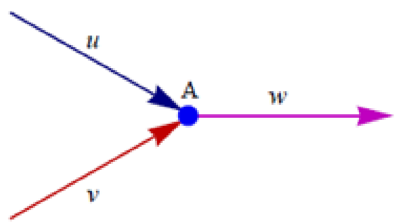
c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

3.4 Matrices escalonadas

Ejercicio $\mathbf{13\frac{1}{3}}$. Observar el siguiente esquema, ¿Cuánto mide la mesa? ¿y le gato y la tortuga?

Ejercicio $\mathbf{13\frac{2}{3}}$. Flujo de redes.

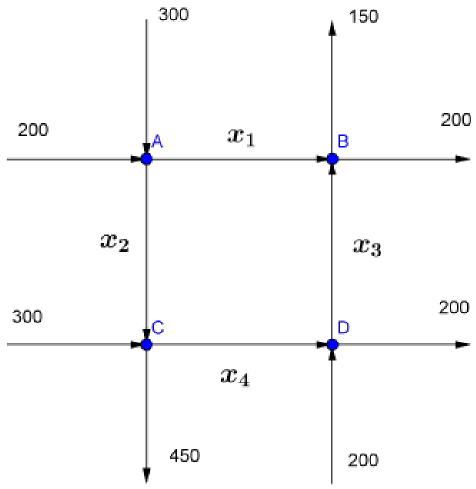
Una *red* consiste en un conjunto de puntos llamados *nodos*, con líneas que los conectas, denominadas *ramas*. La dirección del flujo se indica en cada rama y la cantidad (o tasa) de flujo se denota por medio de una variable. Por ejemplo en la figura siguiente se muestra una



red con un solo nodo.
Los flujos entrantes son u y v; y el saliente es w, y se satisface que:

$$u + v = w$$

Supongamos que en una cierta ciudad se va a realizar un arreglo en las calles y se quiere conocer el flujo de tránsito en alguna de ellas para tomar decisiones en cuanto a su redireccionamiento. En la red de la figura siguiente se indica el flujo de tráfico que entra o sale de cada calle, en números de vehículos por hora, considerando el tráfico promedio durante las horas pico. Se modela el problema



Nodo	Flujo entrante		Flujo saliente
A	$300 + 200$	$=$	$x_1 + x_2$
B	$x_1 + x_3$	$=$	$150 + 200$
C	$300 + x_2$	$=$	$x_4 + 450$
D	$x_4 + 200$	$=$	$x_3 + 200$

a. ¿Se puede obtener información de los flujos x_i?
b. Si se sabe que $x_4 = 250$, ¿se pueden conocer el resto de los flujos?

Observación.
Vemos que la regla de Cramer sólo nos es útil para sistemas de ecuaciones que:

- Tengan la misma cantidad de incógnitas que de ecuaciones.
- El sistema sea compatible determinado

Existen otras formas de solucionar un sistema de ecuaciones lineales; pero para ello necesitamos los siguientes conceptos:

OPERACIONES ELEMENTALES ENTRE FILAS DE UNA MATRIZ.

1. Multiplicar una fila por un escalar distinto de cero
2. Sumar un múltiplo escalar de una fila a otra fila.
3. Intercambiar filas

MATRICES EQUIVALENTES POR FILAS

Supongamos que la matriz A se puede transformar en la matriz B mediantes operaciones con filas. Entonces se dice que $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}$ **son equivalentes por filas**.

POR EJEMPLO

Sea la $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es equivalente por filas de A pues se puede llegar a B realizando operaciones elementales por filas a A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F_2 \rightarrow 2.F_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad F_2 \rightarrow F_2 + F_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

FORMA ESCALONADA

Una matriz está en su **forma escalonada** (que se obtiene por medio del *método de Gauss*) si cumple las siguientes tres condiciones:

- Todas las filas nulas (si existen) aparecen en la parte de debajo de la matriz.
- El primer número no nulo (si empezamos de izquierda a derecha) es 1 (**denominado pivote**).
- Si dos filas consecutivas no son nulas, entonces el primer 1 en la fila inferior está más a la derecha que el primer 1 de la fila superior, es decir tiene una cantidad creciente de ceros

Las siguientes matrices están en su forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por medio de operaciones elementales por filas se puede llevar cualquier matriz a su forma escalonada (o escalón reducida).

POR EJEMPLO

Hallar la forma escalonada de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad F_1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad F_3 \rightarrow F_3 - F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad F_2 \leftrightarrow F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad F_2 \rightarrow -1F_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad F_3 \rightarrow F_3 + 3F_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad F_3 \rightarrow \frac{1}{8}F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la forma escalonada de la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 10 \\ 7 & 0 & 3 \\ 18 & 16 & 16 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 16 & 10 \\ 0 & -28 & -\frac{29}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ La matriz B en su forma escalón.

RANGO DE UNA MATRIZ

El **rango** de una matriz es la cantidad de filas linealmente independientes de dicha matriz; es decir, es el número de filas no nulas de la matriz en su forma escalonada. Se denota $\mathrm{rg}(A)$.

POR EJEMPLO

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $rg(A) = 3$

Sea $B = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 10 \\ 7 & 0 & 3 \\ 18 & 16 & 16 \end{pmatrix}$; $rg(B) = 2$

Ejercicio 8. Determinar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Analizar el rango de las matrices según los valores de a.

$$K = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ a & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

FORMA ESCALONADA REDUCIDA

Una matriz está en su **forma escalonada reducida** si cumple las tres condiciones de la forma escalonada y además

- Cualquier columna que contenga el primer 1 de una fila tendrá ceros en los demás lugares.

Por ejemplo, las siguientes matrices están en forma escalonada reducida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Cualquier forma escalonada de una matriz A de tamaño $m \times n$ tiene el mismo número de filas distintas de ceros.
- Cada matriz es equivalente por filas a una y sólo una matriz escalonada reducida.

POR EJEMPLO

Vimos que la forma escalonada de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ahora veamos cómo es la matriz A en su forma escalón reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F_1 \to F_1 - F_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F_1 \to F_1 + F_3 \text{ y } F_2 \to F_2 - 3F_3$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A en su forma escalonada reducida.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

1. Construimos la matriz aumentada del sistema
$$(A \mid b)$$
2. Por medio de operaciones elementales por filas reducimos la matriz aumentada a la forma escalonada por filas, quedando una nueva matriz
$$(E \mid d)$$
3. Si en la matriz $(E \mid d)$ aparece una fila de una forma $[0\ 0 \cdots 0 |\ s]$ con $s \neq 0$, entonces el sistema no tiene solución. En caso contrario, continúe con el siguiente paso.
4. Con sustitución hacia atrás resolvemos el sistema equivalente a la matriz reducida.

EJEMPLO

a. Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss.
b. Clasificamos el sistema.
c. Interpretamos geométricamente.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ -x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$(A|b)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad F_2 \to F_2 - 2F_1 \qquad F_3 \to F_3 + F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad F_3 \to (-1)F_3 \quad F_2 \leftrightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \qquad F_3 \to F_3 + 5F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \qquad F_3 \to \left(-\frac{1}{2}\right)F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad Rg(A) = Rg(A|b) = 3$$

b. El sistema es compatible determinado.

$$x + 2y - z = 1 \quad (1)$$

$$y - z = -1 \quad (2)$$

$$z = 2 \quad (3)$$

Sustituyo (3) en (2)

$$y - 2 = -1$$

$$y = 1$$

Sustituyo en (1)

$$x + 2.1 - 2 = 1$$

$$x = 1$$

a.

$$S = \{(1; 1; 2)\}$$

c. La intersección de los tres planos en el punto $(1; 1; 2)$

TEOREMA DE ROUCHÉ – FROBENIUS

Ahora vamos a analizar las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo al rango de la matriz A y de la matriz ampliada $(A \mid b)$. Para ello enunciamos el Teorema de Rouché – Frobenius y algunas consecuencias.

Sea

$$Ax = b$$

Un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas. Sea $(A \mid b)$ su matriz ampliada. Entonces

- Si $Rg(A) = Rg(A|b) = n$ tiene solución, es compatible determinado.
- Si $Rg(A) = Rg(A|b) < n$ el sistema es compatible indeterminado.
- Si $Rg(A) < Rg(A|b)$ el sistema es incompatible.

EJEMPLO: Dado el siguiente sistema de ecuaciones

a. Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss.
b. Clasificamos el sistema.
c. Interpretamos geométricamente.

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x + y + z = 2 \\ 6x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Por medio de operaciones elementales, obtengo una matriz equivalente por filas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$$Rg(A) = 2 \qquad Rg(A) = 3$$

$$Rg(A) < Rg(A|b)$$

El sistema es incompatible.

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -3y - z = -5 \\ 0 \ = -5 \end{cases}$$

Geométricamente los tres planos no se intersecan todos juntos.

EJEMPLO: Dado el siguiente sistema de ecuaciones

a. Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss.
b. Clasificamos el sistema.
c. Interpretamos geométricamente.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \ = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 \qquad = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$Rg(A) = Rg(A|b) = 2$$

El sistema es compatible indeterminado (Por el Teorema de Roché - Frobenius)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 | x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \wedge x_3 - 2x_4 = 1\}$$

Ejercicio 10. Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento A, 1 unidad del alimento B y 2 unidades del alimento C. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento A, 3 del B y 1 del C. Para un pez de la especie 3, el promedio de semanal de consumo es de 2 unidades del alimento A, 2 unidades de alimento B y 2 unidades del C. Cada semana se suministra al lago 15.000 unidades del primer alimento, 20.000 del segundo y 12.000 del tercero. Considerando que todo el alimento se consume ¿qué cantidad de individuos de cada especie puede coexistir en el lago?

Ejercicio 11. Un editor publica un posible éxito de librería en tres presentaciones distintas: libro de bolsillo, edición para club de lectores y edición de lujo. Cada libro de bolsillo necesita un minuto para el cosido y 2 para el pegado. Cada libro de la edición para el club de lectores necesita 2 minutos para el cosido y 4 para el pegado. Cada libro en edición de lujo necesita 3 minutos para el cosido y 5 para el pegado. Si la planta de cosido está disponible 6 horas diarias y la planta de pegado 11 horas.

a. ¿Cuántos libros de cada presentación se pueden producir por día de modo que las plantas se aprovechen a toda su capacidad?
b. ¿Existe la posibilidad de que las plantas se aprovechen a toda su capacidad y que se produzcan la misma cantidad de cada tipo de presentación?

Ejercicio 12. Una industria alimenta sus plantas de producción con dos tipos distintos de combustibles. La primera planta de producción consume por hora 42 litros del combustible A y 21 litros del combustible. La segunda planta consume por hora 38 litros del combustible A y 52 litros del combustible B. Por último, la tercera planta consume por hora 50 litros del combustible A y 25 litros del combustible B.
Si se cuenta con 764 litros del combustible A y 580 del combustible B:

a. ¿Cuántas horas deberán funcionar cada motor para consumir el total de ambos combustibles?
b. ¿Es posible que la tercera planta funcione 12 horas y se consuma el total del combustible? ¿Cuántas horas deberán funcionar el resto de los motores?

Ejercicio 13. Resolver cada uno de los siguientes sistemas clasificándolos e indicando su conjunto solución:

a. $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y-z=3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+y-z=7 \\ 4x-y+5z=4 \\ 6x+y+3z=20 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 4x+y-z=0 \\ 2x+5y-7z=0 \end{cases}$

Ejercicio 14. Hallar la parábola $y=ax^2+bx+c$ que pasa por los puntos $(-1{,}9)$, $(1.-1)$ y $(3,4)$.

3.5 Matriz Inversa

MATRIZ IDENTIDAD

La matriz identidad de orden n en la matriz de tamaño $n \times n$ donde los elementos de la diagonal son todos son 1, y 0 en todas las demás posiciones. Es decir, $a_{ii}=1$, para todo $1 \leq i \leq n$, y $a_{ij}=0$ para todo $i \neq j$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Sea A una matriz de $n \times n$, si A es **inversible**, entonces su inversa es una matriz de $n \times n$ y la denotamos como A^{-1}, y además satisface $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

Sea A una matriz de orden n. Las siguientes expresiones son equivalentes:

i. A es invertible.
ii. Su inversa es única.
iii. $\det A \neq 0$
iv. A en su forma escalón reducida es la matriz I.
v. El sistema $Ax = b$ es compatible determinado.

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR EL MÉTODO DE GAUSS

Sea A una matriz de orden n.

i. Escribimos la matriz aumentada $(A \mid I)$.
ii. Escalonamos la matriz $(A \mid I)$ de manera tal que la matriz A quede expresada en su forma escalón reducida.
iii. La matriz resultante de escalonar la I es A^{-1}

EJEMPLO: Hallar la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Demostrar $A \cdot A^{-1} = I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1.(-1) - 2.1 = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Por lo tanto A admite inversa

$$A.A^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad F_2 \to F_2 - F_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad F_2 \to \left(-\tfrac{1}{3}\right) F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \qquad F_1 \to F_1 - 2F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A.A^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 1 \neq 0$$

Por lo tanto B es invertible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Escalono mediante operaciones elementales por filas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Verifico que $B \cdot B^{-1} = I$

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Ejercicio 15. Usando el método $x = A^{-1}b$, hallar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + 2z = 1 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 16. Usando el método de eliminación Gaussiana, determinar si son invertibles las siguientes matrices y hallar A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 17. Muestre que la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es su propia inversa.

Ejercicio 18. ¿Para cuáles valores de α la matriz $\begin{pmatrix} \alpha+1 & -3 \\ 5 & 1-\alpha \end{pmatrix}$ no es invertible?

Ejercicio 19. ¿Para cuáles valores de a la matriz $\begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}$ no tiene inversa?

Ejercicio 20. Demuestre que para todo número real θ $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es inversible.

Ejercicio 21. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ no es invertible.

Trabajo de repaso Unidad 3

Ejercicio 1. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate, bombarderos y de transporte, se encuentran estacionados en cierto campo aéreo secreto. Existe, además, un tipo de cohete que llevan dichos aviones; el de combate lleva 6 de ellos, el bombardero 4 y el de transporte sólo 2. El agente averigua que se requieren 248 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que cada avión transporta cajas compactas de material clasificado, los de combate y bombarderos llevan 1 y los de transporte llevan cuatro, y en total llevan 90 cajas compactas de material clasificado.
El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate, cuántos son bombarderos y cuántos de transporte.

Ejercicio 2. Indicar V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justificar cada respuesta:

a. El siguiente sistema es compatible determinado

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 6 \\ x + 3y + 2z = 7 \\ 4x + 5y - 3z = 17 \end{cases}$$

b. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. Sea A la misma matriz del inciso b; entonces $\det A = -4$

Ejercicio 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz I es la matriz identidad.

a. Hallar la matriz C si

$$A \cdot B - C^t = 3I$$

b. Calcular $\det(AB)$

c. Calcular $\det(BA)$

d. Calcular $(AB)^{-1}$ y $(BA)^{-1}$

Ejercicio 4. Dada la siguiente matriz, hallar el valor de k para que $A^2 = A$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ k & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Hallar los valores de k que hacen $\det A = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k+1 & 3 & 0 \\ 1 & k-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, clasificándolos según el Teorema Roché - Frobenius (Compatible determinado – Compatible indeterminado - Incompatible). En caso de que sea compatible determinado expresar el conjunto solución.

a. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -y + z = 1 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 14 \\ 3x - 2y + z = -3 \\ 4x + 2y - z = -4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 4x + y - z = 4 \\ 2x - 4y + 6z = 4 \end{cases}$

Principios del conteo 4

4.1 Principio de la suma y del producto

Ejercicio 0. Una biblioteca cuenta con 3 títulos diferentes de libros de física, 7 de química, 4 de literatura, 1 de poemas, 6 de matemática, 5 de historia y 4 de geografía.

a. Si un estudiante quiere estudiar algunas de las ciencias exactas ¿Cuántos libros diferentes puede elegir?
b. Alicia quiere llevarse uno de historia y uno de literatura. ¿Cuántas opciones tiene?
c. La bibliotecaria coloca todos los libros de física en una sola estantería, ¿de cuántas formas distintas pueden ser colocados? También coloca en una sola estantería los libros de geografía ¿de cuántas formas distintas pueden ser colocados?

PRINCIPIO DE LA SUMA

Si una primera tarea puede realizarse de m formas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de n formas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de $m+n$ formas. El principio (o regla) puede ampliarse a más de dos tareas.
Cabe detallar que una ocurrencia particular, como una primera tarea, puede realizarse de m formas, se supone que estas m formas son **distintas**, a menos que se indique lo contrario. Además se considera que la relación entre las tareas son excluyentes o disjuntas.

EJEMPLO
La Biblioteca de una universidad tiene 40 libros de texto de sociología y 50 libros de antropología. Por el principio de la suma, un estudiante puede elegir en $40+50$ libros de texto para aprender acerca de alguno de estos dos temas.

PRINCIPIO DEL PRODUCTO

Si un procedimiento se puede descomponer en las etapas primera y segunda, y si existen m posibles resultados para la primera etapta y si, para cada uno de estos resultados, existen n posibles resultados para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden dado, de mn formas. El principio (o regla) de la suma se puede extender a más de dos procesos. Además los procedimientos se consideran consecutivos e independientes.

EJEMPLO
El club de teatro de la Universidad Central realiza ensayos para una obra que se mostrará en primavera. Si seis hombres y ocho mujeres ensayan para los papeles principales (masculino y femenino), por regla del producto, el director puede elegir a la pareja principal de $6 \cdot 8$ formas distintas.

4.2 Permutaciones

PERMUTACIONES
Dada una colección de n objetos **distintos**, cualquier disposición (lineal) de estos se denomina *permutación* de la colección.

$$P(n) = n!$$

EJEMPLO
El número de permutaciones en la palabra MATRICES es $8!$.

Ejercicio 1. Los automóviles Buick se fabrican en 4 modelos, 12 colores, 3 tamaños de motor y 2 tipos de transmisión.

a. ¿Cuántos Buick distintitos se pueden fabricar?
b. Si uno de los colores disponibles es el azul, ¿cuántos Buick azules diferentes se pueden fabricar?

Ejercicio 2. A partir de Abril del 2016 Argentina se sumó a la patente única de Mercosur, donde la secuencia alfanumérica fue AB 123 CD, es decir dos letras seguido de tres números y concluyendo con dos letras.
¿Cuántas patentes distintas se pueden hacer?

Ejercicio 3. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar con las cifras impares {1,3,5,7,9} si:

a. No se pueden repetir los números?
b. Se pueden repetir los números?
c. Se pueden repetir los números y los números son mayores que 50000

Ejercicio 4. ¿Cuántos partidos distintos se pueden realizar dados cuatro equipos de futbol?

Ejercicio 5. ¿Cuántas palabras distintas (con o sin sentido) se pueden formar con la palabra MURCIELAGO? ¿y con la palabra AMA?

Ejercicio 6. Un sábado, cuando iban de compras, Juana y Teresa vieron a dos hombres alejarse en automóvil de la fachada de una joyería, justo antes de que sonara una alarma contra robos. Aunque todo ocurrió muy rápido, cuando fueron interrogadas las dos jóvenes, pudieron dar a la policía la siguiente información acerca de la placa (que contaba de tres letras seguidas de tres números) del automóvil que huyó. Juana estaba segura de que la segunda letra de la placa era una Q o una O, y que el último dígito era un 3 o un 8. Teresa dijo que la primera letra de la placa era cuna C o una G y que el primer dígito era definitivamente un 7. ¿Cuántas placas diferentes tendrá que verificar la policía?

Ejercicio 7. La primera puerta de un laboratorio se abre ingresando un número dígito menor que 6 y la segunda con uno menor que 4. ¿Cuáles son todas las posibles combinaciones que pueden aparecer si

a. Para ingresar al laboratorio se tiene que pasar por las dos puertas (abriendo una y luego la otra)?
b. Para ingresar al laboratorio se puede pasar por cualquier de ellas?

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Si existen n objetos con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo, …, y n_r de un r-ésimo tipo, donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, entonces existen

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

disposiciones lineales de los n objetos dados. (los objetos del mismo tipo son **indistinguibles**).

EJEMPLO

Si queremos ver la cantidad de posibles anagramas (palabras con o sin sentido) que se pueden formar con la palabra MASSASAUGA (serpiente venenosa de América del Norte) podemos aplicar la permutación con repetición.

$$\frac{10!}{4!\,3!}$$

- A sería del primer tipo (cuatro repeticiones)
- S sería del segundo tipo (tres repeticiones)
- las demás serían cada una de un orden distinto con una sola repetición.

$$\frac{10!}{4!\,3!\,1!\,1!\,1!} = \frac{10!}{4!\,3!} = 25200$$

Es decir, existen 25200 posibles anagramas.

Ejercicio 8.

a. ¿Cuántas permutaciones existen para las ocho letras a, c, f, g, i, t, w, x?
b. ¿Cuántas de las permutaciones comienzan con la letra t?
c. ¿Cuántas permutaciones comienzan con la letra t y terminan con la letra w?
d. ¿En cuántas permutaciones la letra c y la x se encuentran juntas?

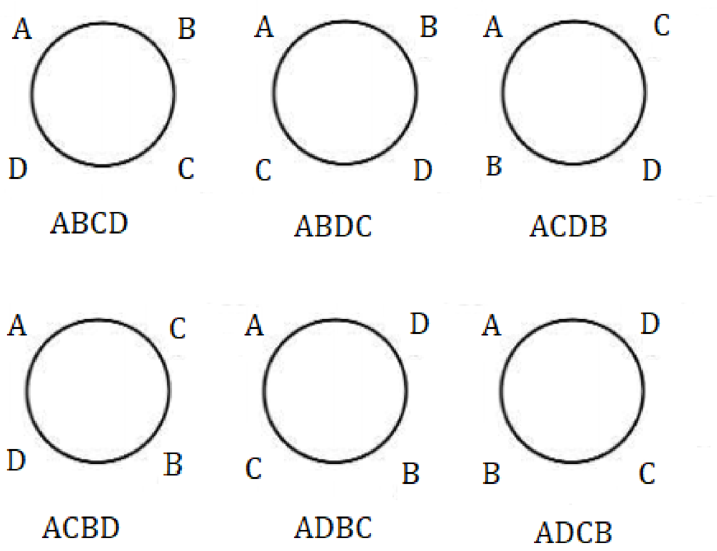
Ejercicio 9.

a. ¿Cuántos enteros positivos n se pueden formar con los dígitos 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7?
b. ¿Cuántos de esos enteros positivos son mayores que 5.000.000?

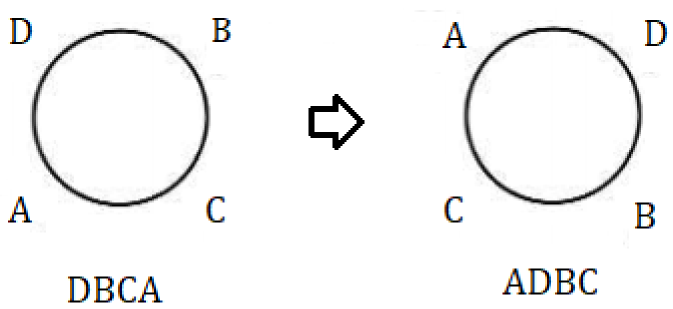
PERMUTACIONES CIRCULARES

Por ejemplo, si se desean sentar 4 personas en una mesa redonda, ¿cuántas disposiciones circulares son posibles?

Supongamos que las personas son A, B, C y D. Las posibles disposiciones son:



Cualquier otra disposición circular será igual a una de las presentadas, por ejemplo



Esto se debe a que para cada una de las disposiciones circulares, les corresponden 4 lineales

$$ABCD \rightarrow DABC \ \rightarrow CDAB \ \rightarrow BCDA$$

Entonces para solucionar la cantidad de disposiciones circulares, lo planteamos como disposiciones lineales y le restamos la cantidad de elementos que estamos permutando

$$\frac{4!}{4} = \frac{4.3!}{4} = 3! = 6$$

En general,

Si los n objetos **distintos** a permutar están en disposición circular, la permutación de los objetos es

$$(n-1)!$$

Ejercicio 10.

a. ¿De cuántas formas se pueden sentar siete personas en torno a una mesa circular?
b. Si dos de las personas insisten en sentarse juntas, ¿cuántas disposiciones son posibles?

4.3 Variaciones y combinaciones

PERMUTACIONES DE RANGO K O VARIACIONES

Si existen n objetos **distintos**, que se denotan con $a_1, a_2, \dots, a_n$ y k es un entero, con $1 \leq k \leq n$, entonces, por la regla del producto, el número de permutaciones de tamaño k para los $n$objetos es:

$$nPk = P(n,k) = V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

La diferencia entre las variaciones y las combinaciones es que en las variaciones sí importa el orden.

EJEMPLO
De un grupo de 15 personas se desea formar una comisión compuesta por presidente, vicepresidente y secretario. ¿Cuántas posibles comisiones distintas se pueden formar?

$$V_{15,3} = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{15.14.13.12!}{12!} = 15.14.13 = 2730$$

Ejercicio 12.
a) El consejo directivo de una empresa farmacéutica tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los 10 miembros del consejo) ¿Cuántas listas diferentes, formadas por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, puede presentar el consejo a los accionistas para su aprobación?
b) Tres miembros del consejo de directores son médicos. ¿Cuántas de las listas tienen

i. un médico nominado para la presidencia?
ii. exactamente un médico en la lista?
iii. al menos un médico en la lista?

COMBINACIONES

Dada una colección de n objetos **distintos**, el subconjunto k de n, que colecciona elementos de la colección dada sin importar el orden, se puede formar según el número combinatorio $\binom{n}{k}$; y se lee "n tomados de a k" o "número combinatorio n en k"

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)}$$

EJEMPLO
De un grupo de 30 estudiantes de la tecnicatura en programación, se desean armar grupos de cuatro alumnos para una parcial grupal. Por lo que existen $\binom{30}{4}$ posibles grupos.

Ejercicio 13. Una comisión de 5 personas debe elegirse entre 12 hombres y 8 mujeres.

a. ¿De cuántas formas puede hacerse tal elección sin distinción de sexo?
b. ¿Cuántas si al menos de haber 2 mujeres?
c. ¿Cuántas si a lo sumo debe haber 2 hombres?

Ejercicio 14. Un estudiante que realiza un examen de Álgebra debe responder siete de diez preguntas. ¿De cuántas formas puede hacer su elección si

a. No hay restricciones?
b. Debe contestar las dos primeras preguntas?
c. Debe responder al menos cuatro de las primeras seis preguntas?

SURTIDO DE PROBLEMAS

Ejercicio 15.

a. ¿Cuántos números enteros distintos se pueden formar con los dígitos 1, 3, 3, 7 y 8?
b. ¿Cuántos enteros de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 3, 5, 6, 7, y 9?

Ejercicio 16. Se colocan nueve llaves distintas en el aro de un llavero.

a. ¿De cuántas formas puede hacerse?
b. ¿Y en el caso de que se quiera que la del escritorio y la del botiquín estén juntas?

Ejercicio 17. ¿De cuántas formas es posible distribuir 12 libros diferentes entre cuatro niños de modo que

a. Cada niño reciba tres libros?
b. Los dos niños mayores reciban cuatro libros cada uno y los dos menores reciban dos libros cada uno?

Ejercicio 18. La producción de una pieza de una máquina consta de cuatro etapas. Hay seis líneas de ensamble disponibles para la primera etapa, cuatro líneas para la segunda etapa, cinco para la tercera y cinco para la última. Determina la cantidad de formas diferentes en que dicha pieza puede quedar ensamblada en este proceso de producción.

Ejercicio 19. a. ¿Cuántas disposiciones hay de todas las letras de la palabra SOCIOLOGICAL?
b. ¿En cuántas disposiciones están juntas la A y la G?
c. ¿En cuántas disposiciones están juntas todas las vocales?

Ejercicio 20. ¿Cuántos números capicúas hay de cinco dígitos (los ceros delante cuentan)?

Ejercicio 21. Con el fin de juntar fondos para una nueva alberca municipal, la cámara de comercio de cierta ciudad patrocina una carrera. Cada participante paga una cuota de inscripción de $100 y tiene la probabilidad de ganar uno de los trofeos de distinto tamaño que se entregarán a los primeros ocho corredores que lleguen a la meta.

a. Si 30 personas entran a la carrera, ¿de cuántas formas será posible entregar los trofeos?
b. Si Roberta y Clara son dos de las participantes en la carrera, ¿de cuántas formas se pueden otorgar los trofeos de modo que ellas queden entre los dos primeros lugares?

Ejercicio 22. Un profesor de ciencias de la computación tiene siete libros de programación diferentes en una estantería. Tres de los libros son de PYTHON; los otros cuatro de BASIC.

a. ¿De cuántas formas puede ordenar el profesor estos libros sin que haya restricciones?
b. ¿De cuántas formas puede ordenar los libros si todos los libros de PYTHON deben estar juntos y los de BASIC también?
c. ¿De cuántas formas puede ordenar los libros si solamente todos los libros de PYTHON deben estar juntos?

Anexo I. FINALES DE EJEMPLO

Final A

Ejercicio 1. Indicar V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justificar las respuestas.

a. $p \to (q \wedge r) \equiv (q \wedge r) \to p$
b. Si $s \to (t \vee u) \equiv F$ entonces $u \equiv V$
c. La proposición $[\sim(p \wedge q) \to r] \vee \sim r$ es una tautología

Ejercicio 2. Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & k-1 & 2 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}$$

a. Determinar las condiciones para que la matriz A sea invertible.
b. Verificar que la matriz inversa para $k = 0$ de A es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Sea $f: B^3 \to B: f(x,y,z) = x\overline{y} + xy\overline{z}$

Indicar cuáles de las siguientes funciones booleanas son equivalentes a la función booleana dada, justificar cada respuesta.

d. $f(x,y,z) = x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}\,z + xy\overline{z}$
e. $f(x,y,z) = x\overline{z} + xy$
f. $f(x,y,z) = x\overline{y} + \overline{z}x$

Ejercicio 4. Una estantería de una biblioteca cuenta con 5 libros de programación y 4 libros de matemática, cada uno de los libros es diferente y no están repetidos.

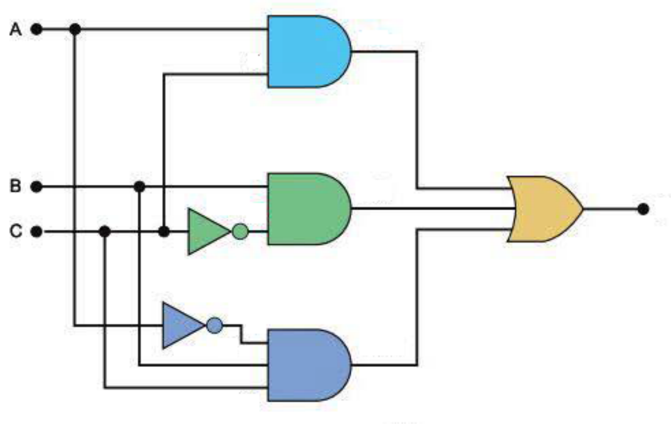
a. Si se quieren ordenar los libros en la estantería de forma que todos los libros de matemática estén juntos y todos los libros de programación estén juntos, ¿de cuántas formas se pueden organizar en el estante?
b. ¿De cuántas formas se pueden organizar si sólo se desea que los libros de programación estén juntos?
c. Julia llega a la biblioteca decida a llevarse dos libros de matemática (porque tiene un examen de álgebra) y dos de programación ¿cuántas son las diferentes formas en que los puede combinar?

Final B

Ejercicio 1. Indicar V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justificar las respuestas.

f. Si $p \equiv V$ y $q \equiv F$ entonces $p \to \neg(\neg q \vee r)$ es verdadera.
g. La contrarrecíproca de $(p \wedge q) \to r$ es $r \to \sim(p \wedge q)$
h. $\big((p \to q) \wedge p\big) \to q$ es una tautología

Ejercicio 2. Dado el siguiente esquema, construir otro circuito lógico, más simple, que represente al mismo esquema.



Ejercicio 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz I es la matriz identidad. Hallar la matriz C

$$(A \cdot B)^{-1} - C^t = 3I$$

Ejercicio 4. Tres conductores se detuvieron en un bar del camino. Uno de ellos compró cuatro sándwiches, una taza de café y diez medialunas, pagando un total de $1500. Otro conductor compró tres sándwiches, una taza de café y siete medialunas, pagando $1200. El tercer conductor compró tres sándwiches, un café y cinco medialunas y pagó $1160. ¿Cuál es el costo unitario de cada producto?

Ejercicio 5.

a. ¿De cuántas formas se puede armar un grupo de 5 personas si se las elige entre 5 hombres y 8 mujeres dados?
b. ¿Cuántos si al menos debe haber 2 mujeres en grupo?
c. ¿Cuántos si debe haber 2 hombres y 3 mujeres?

Final C

Ejercicio 1. Indicar V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justificar las respuestas.

i. $p \wedge (q \rightarrow \neg r) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r)$
j. Si $p \equiv V$ y $q \equiv F$ entonces $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$ es verdadera.
k. La contrarrecíproca de $(p \wedge q) \rightarrow r$ es $r \rightarrow \sim(p \wedge q)$

Ejercicio 2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema?

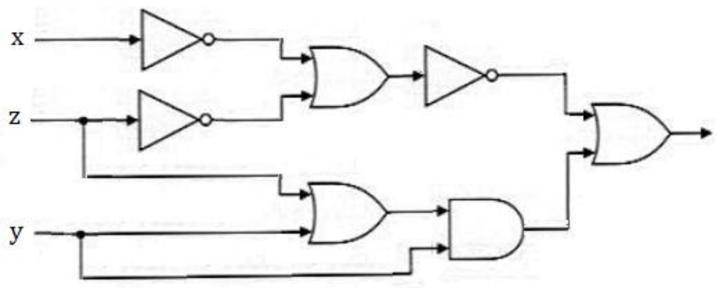
$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 14 \\ 3x - 2y + z = -3 \\ 4x + 2y - z = -4 \end{cases}$$

a. La matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ es invertible.
b. El sistema es compatible indeterminado.
c. Tiene solución $(2;\ 1; 1)$

Ejercicio 3. Dado el siguiente esquema

c. Escribir la expresión booleana que representa el circuito lógico.

d. Simplificar dicha expresión.



Ejercicio 4. a. ¿Cuántas disposiciones hay de todas las letras de la palabra BIBLIOTECARIA?

b. ¿En cuántas disposiciones están juntas la T y la R?

c. ¿En cuántas disposiciones empiezan con L?

Final D

Ejercicio 1. Sea $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r \equiv F$

Indicar **V** (verdadero) o **F** (falso) según corresponda. JUSTIFIQUE SU RESPUESTA.

a. $p \equiv V$

b. $\sim r \rightarrow (\sim p \wedge q) \equiv F$

c. $r \rightarrow (p \vee \sim q) \equiv F$

Ejercicio 2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema?

$$\begin{cases} 5x - y + 10z = 26 \\ 3x - y + 4z = 8 \\ x + 3z = 9 \end{cases}$$

a. La matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 10 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es invertible.

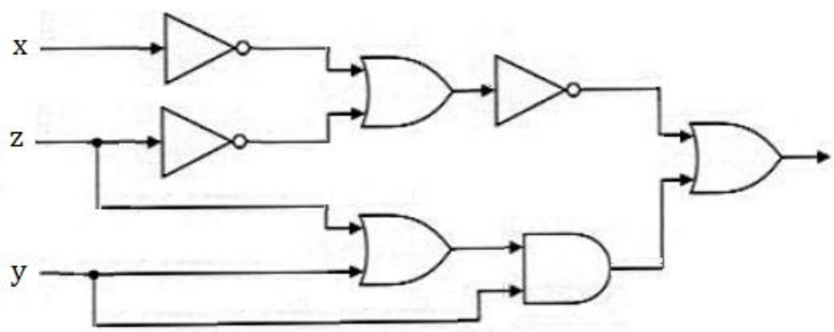
b. El sistema es compatible determinado.

c. Tiene solución $(1; -1; 2)$

Ejercicio 3. Dado el siguiente esquema

a. Escribir la expresión booleana que representa el circuito lógico.

b. Simplificar dicha expresión.



Ejercicio 4. Un profesor de ciencias de la computación tiene siete libros de programación diferentes en una estantería. Tres de los libros son de PYTHON; los otros cuatro de BASIC.

a. ¿De cuántas formas puede ordenar el profesor estos libros sin que haya restricciones?
b. ¿De cuántas formas puede ordenar los libros si todos los libros de PYTHON deben estar juntos y los de BASIC también?

¿De cuántas formas puede ordenar los libros si solamente todos los libros de PYTHON deben estar juntos?

Anexo II. Tabla de valores

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F