ANALISIS II

Tecnicatura Superior en Análisis, Desarrollo y Programación de Aplicaciones
Segundo año
ISFDyT N°166

Prof. Meana José

Introducción a las funciones 1

1.1 Funciones

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Una función f es una regla que asigna a cada valor x de un conjunto D, exactamente un elemento, llamad $f(x)$, de un conjunto E.

Otra forma de definir una función es:

Una función f es una relación entre dos variables, donde a cada valor de la variable independiente x se le asiga un único valor de la variable dependiente y $[f(x)]$. La variable independiente toma valores de un conjunto de partida D y la dependiente de un conjunto de llegada E.

- El conjunto de partida D recibe el nombre de **Dominio** de la función.
- El conjunto de llegada E recibe en nombre de **Codominio** de la función, del cuál los elementos $f(x)$ pertenecen a un subconjunto del mismo llamado **Imagen** o **Rango** de la función.
- La **variable independiente** toma valores del dominio y la **dependiente** de la imagen.

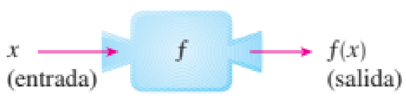


Diagrama de máquina para una función f

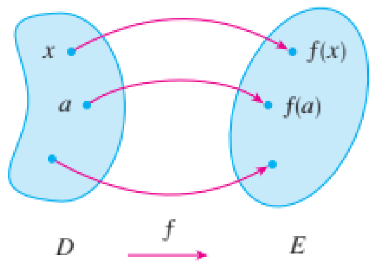
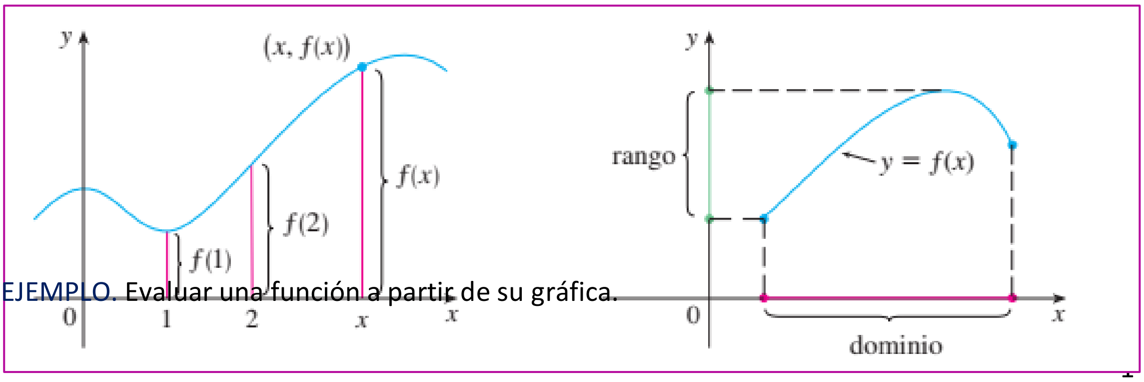


Diagrama de flechas para f

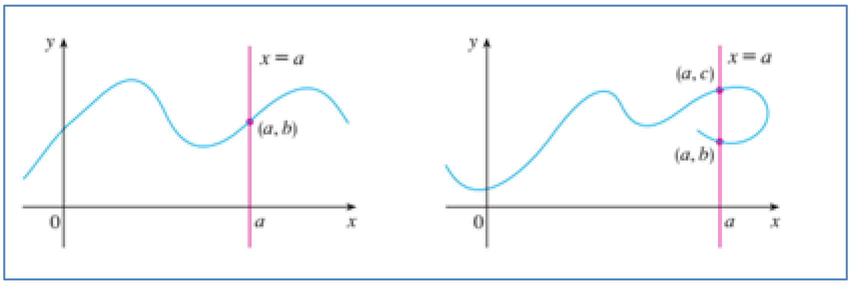
Representación gráfica de una función sobre un sistema de ejes coordenados



EJEMPLO. Evaluar una función a partir de su gráfica.

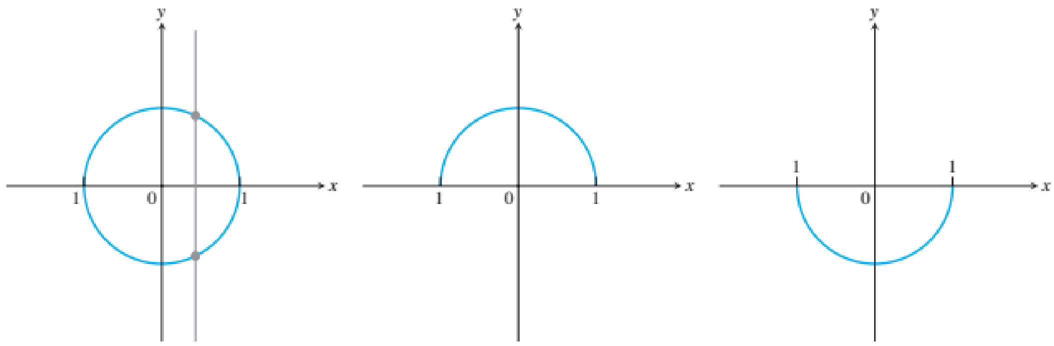
PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.



Es decir, si exite una recta vertical que corta a la gráfica en dos puntos (cómo en la gráfica de la izquierda); la relación no es una función; esto se debe a que existe al menos un valor de dominio que no le corresponde un único elemento de la imagen.

EJEMPLO. Los gráficos (b) y (c) representan una funión mientras que el (a) no.



(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y = \sqrt{1 - x^2}$ (c) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Ejercicio 1. Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba desde la ventana de una habitación con una velocidad inicial de 10 m/s. Se sabe que $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$ es la fórmula que permite calcular la altura a la que se encuentra la piedra, medida desde el suelo, t segundos después de que fue lanzada.

a. ¿A qué altura se encuentra la piedra 2 segundos después de que fue lanzada?
b. ¿A qué altura está la ventana?
c. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza esa piedra, y en qué momento la alcanza?
d. A partir del gráfico de la función, estimar cuándo chocará esa piedra con el suelo.

Ejercicio 2. Supongamos que en el mismo instante en que se lanza la piedra del problema anterior, simultáneamente, desde el suelo, se lanza un proyectil. Se sabe que en este caso $j(t) = 6t$ es la fórmula que permite calcular la altura del proyectil, medida de desde el suelo, t segundos después de que fue lanzada.

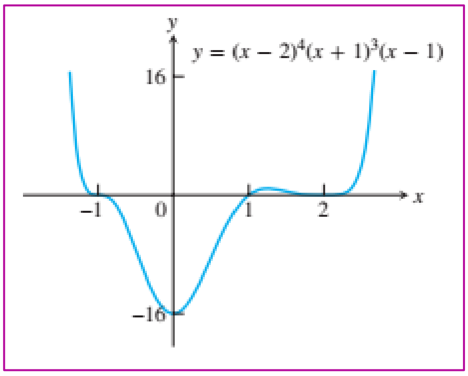
a. Una persona sentada dentro de la habitación, ¿en qué momento ve pasar el proyectil?
b. ¿En qué momento la piedra y el proyectil alcanzan la misma altura? ¿Cuál es esa altura?

INTERSECCIÓN CON LOS EJES

Dos elementos importantes en el análisis de funciones son las intersecciones de las gráficas con los ejes coordenados.

- **Intersección con el eje de las ordenadas (eje y)**
  La intersección de la gráfica con en eje y recibe el nombre de **ordenada al origen** y se la detona cómo un punto en el plano
  $$\text{Ordenada al origen: } (0; f(0))$$
- **Intersección con el eje de las abscisas (eje x)**
  La intersección de la gráfica con en eje x recibe el nombre **ceros de la función o raíces**; y se la detona cómo un punto en el plano
  Raíces: $(x_1; 0), (x_2; 0), \dots, (x_n; 0)$ siendo n el número de raíces de la función

EJEMPLO. Analicemos la ordena y las raíces de la siguiente función
$$f(x) = (x-2)^4(x+1)(x-1)$$



- Analizamos la ordenada al origen:
  $$f(0) = (0-2)^4(0+1)(0-1) = -16$$
  Luego, la ordenada al origen de f es en $(0; -16)$

- Analizamos la ordenada las raíces:
  $$f(x) = 0$$
  $$(x-2)^4(x+1)(x-1) = 0$$
  Luego, los valores que anulan a f son $x = 2 \wedge x = -1 \wedge x = -1$
  Por lo tanto las raices de f son $(2; 0), (-1; 0), (1; 0)$

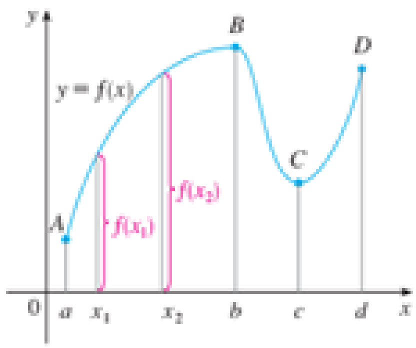
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Otro de los aspectos importantes en el análisis de las funciones es si la función es creciente o decreciente.

- Una función f se llama **creciente** en un intervalo I si
  $$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$
  Al <u>intervalo de crecimiento</u> lo denotamos $I^{\uparrow}$
- Se llama **decreciente** en un intervalo I si
  $$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 > x_2 \text{ en } I$$
  Al <u>intervalo de decrecimiento</u> lo denotamos $I^{\downarrow}$

EJEMPLO. Cómo vemos en el gráfico, la función f

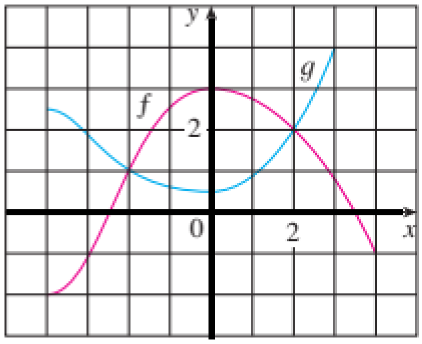
- crece desde el punto A al B y luego del C al D.
- decrece desde el punto B al C.



Es decir, la función f

- es **creciente** en el intervalo $(a; b)\ U\ (c; d)$
  $$I^{\uparrow} = (a; b)\ U\ (c; d)$$
- Y es **decreciente** en el intervalo (b, c)
  $$I^{\downarrow} = (b, c)$$

Ejercicio 3. Dadas las siguientes gráficas f y g.



a. Exprese los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.
b. ¿Para qué valores de x es $f(x) = 3$?
c. ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?
d. Indicar el dominio y la imagen de f.
e. Indicar el dominio y la imagen de g.
f. Señalar en intervalo de crecimiento y decrecimiento de f.
g. Indicar las raíces de g.
h. Indicar la ordenada al origen de g.
i. Calcular $f(2) + g(2)$ y $f(0) + g(-2)$

REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN

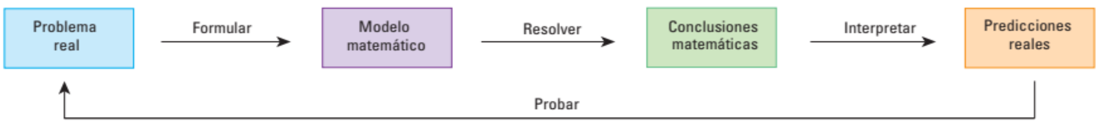
Hay cuatro formas de representar una función:

- Verbalmente (coloquial) (por una descripción en palabras)
- Numéricamente (aritméticamente) (por una tabla de valores)
- Visualmente (geométricamente) (por una gráfica)
- Algebraicamente (por una fórmula)

Las representaciones de una función nos aportan datos muy importantes de la misma y cada una de ellas nos permite comprender (o acercarnos a dicha compresión) diferentes aspectos; aspectos que nos brindan información pertinente para realzar su análisis.

1.2 Modelos Matemáticos

Para ayudarnos a entender mejor al mundo, es frecuente que recurramos a descripciones matemáticas de fenómenos particulares, por ejemplo, las funciones son una herramienta matemática muy utilizadas para estos casos, ya que nos permiten describir el mundo que nos rodea mediante un objeto matemático para luego analizar su comportamiento y reinterpretando los datos obtenidos nuevamente podemos anticipar o conjeturar afirmaciones.



Existen diferentes tipos de funciones que permiten modelar la realidad.

Ejercicio 4. Estudios recientes indican que el promedio de temperatura de la superficie de nuestro planeta ha estado subiendo continuamente. Algunos científicos han modelado la temperatura por medio de la función lineal

$$T(t) = 0{,}02t + 8{,}50$$

Donde T es la temperatura (en $C°$) y t representa años desde 1900.

a. ¿Qué representa la pendiente y la ordenada al origen?
b. ¿Qué temperatura promedio habrá en el mundo para el 2022? ¿y para el 2100?
c. ¿En qué año se registró una temperatura promedio de 50° C?

Ejercicio 5. En una chacra se quiere cerrar un área rectangular para la huerta aprovechando una pared existente. Para hacer los otros tres lados del rectángulo se dispone de 170 metros de tejido metálico.

La función de determina el área de la huerta en función de uno de los lados laterales de la cerca es:

$$A(x) = 170x - x^2$$

a. Calcular el área de la huerta si uno de los lados laterales de la cerca mide $0.5\ m$. Y si mide $0.9\ m$.

b. Si que desea que la huerta tenga una superficie de $3000\ m^2$ ¿Cuáles son las dimensiones de la cerca?

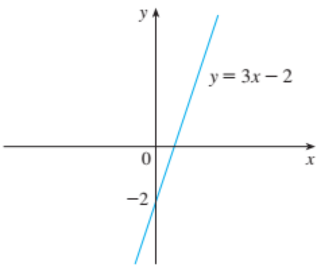
c. Hallar las dimensiones de la cerca para que la huerta tenga la mayor superficie posible.

FUNCIÓN LINEAL

Las funciones de la forma

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in R$$

Reciben el nombre de **funciones lineales**, su representación gráfica es una **recta**, y el parámetro $\boldsymbol{a}$ se conoce cómo la **pendiente** y el parámetro $\boldsymbol{b}$ se lo conoce como la **ordena**.



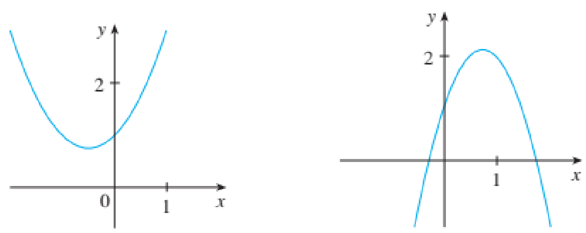
x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Las funciones de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in R\,; a \neq 0$$

Reciben el nombre de **funciones cuadráticas** y su representación gráfica es una **parábola**.



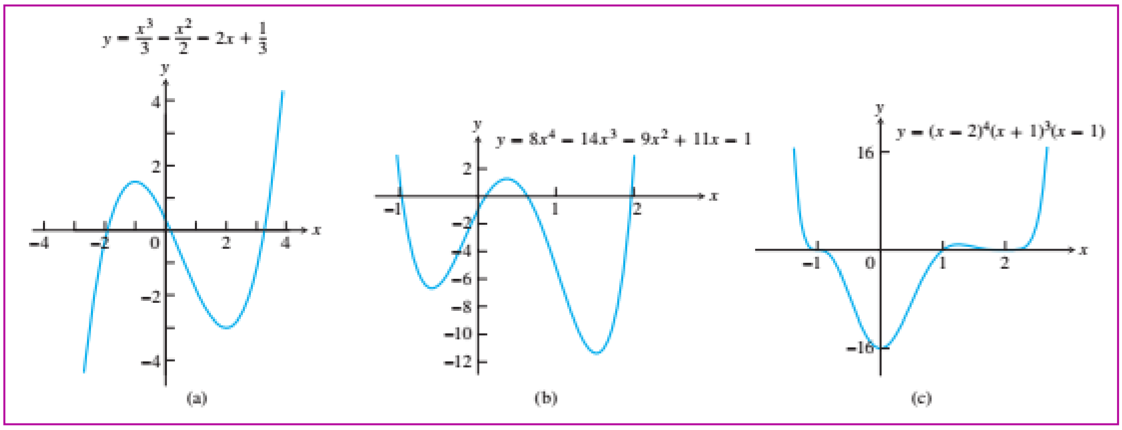
(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

FUNCIÓN POLINOMICA

Las funciones de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n, a_{n-1}, \ldots a_0 \in R; a_n \neq 0$$

Con n entero no negativo, reciben el nombre de **funciones polinómicas** de grado (orden) n; claramente las funciones lineales y las cuadráticas son casos particulares de las funciones polinómicas. Los parámetros $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$ reciben el nombre de coeficientes.

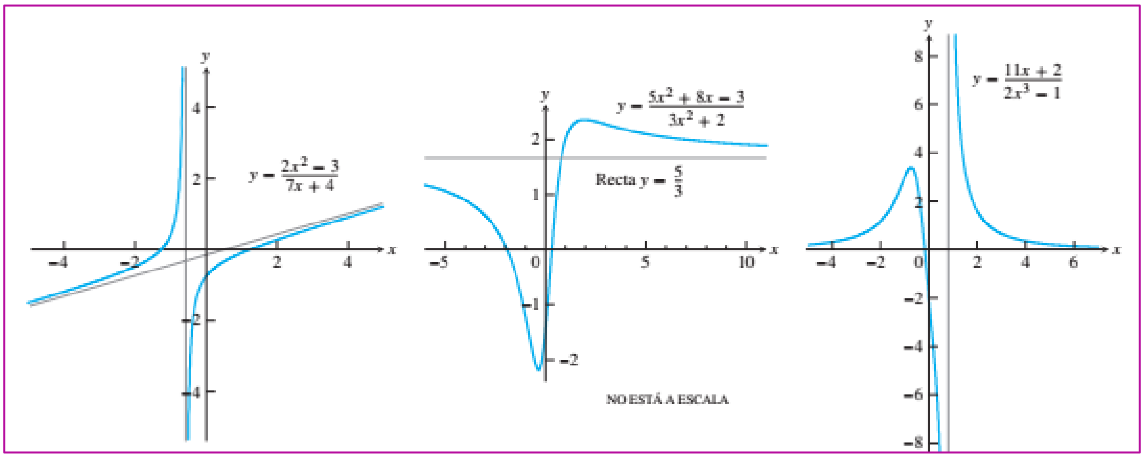


FUNCION RACIONAL

Las funciones de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

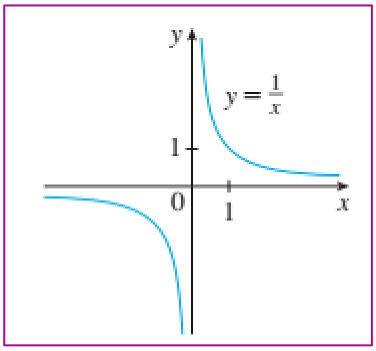
Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, reciben el nombre de **funciones racionales**



Las funciones racionales donde $P(x) = ax + b$ y $Q(x) = cx + d$ es decir

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Son un caso particular de las funciones racionales y se denominan **funciones homográficas**; cuya representación gráfica es una **hipérbola**.



EJERCICIOS

Ejercicio 8. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{3x + 2}{x - 2} \qquad g(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1}$$

Indicar:

a. Dominio e imagen.
b. Ordenada al origen y raíces.
c. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d. Conjuntos de positividad y negatividad.
e. Asíntotas.
f. Realizar un gráfico aproximado que represente a la función.

Ejercicio 9. Se observó una población de esporas bacterianas durante un lapso de 8 horas. Dicha población fue ataca con fenol al 5% y se modelizo la variación de la población con la siguiente fórmula.

$$F(t) = 286 \cdot e^{-0.2t} + 10$$

Donde F es la cantidad de esporas bacterianas sobrevivientes y t el tiempo transcurrido en horas.

a. Indicar el dominio y la imagen de F en el contexto del enunciado.
b. ¿Cuál era la cantidad inicial de esporas?
c. Luego de transcurridas 2 horas, aún se puede observan esporas bacterianas sobrevivientes, ¿Cuál es el número aproximado de esporas que aún sobreviven?
d. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que queden 100 esporas por gota?

Ejercicio 10. Una taza de té se encuentra a una temperatura de $100°\ C$ y se deja 5 minutos en una habitación donde la temperatura es de $25°\ C$. La función que modela la temperatura del té en función del tiempo, medido en minutos, está dada por

$$T(t) = 25 + 75e^{-0.8t}$$

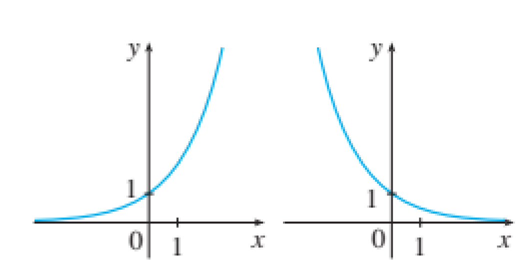
a. Identificar las variables dependiente e independiente; y sus respectivas unidades.
b. Indicar dominio e imagen de la función en el contexto dado.
c. ¿Cuál es la temperatura aproximada del té a los dos minutos?
d. ¿En qué tiempo aproximado el té estará a una temperatura de $60°C$?

FUNCIÓN EXPONENCIAL

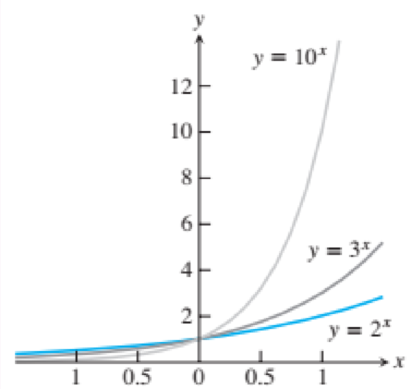
Las funciones de la forma

$$f(x) = k.a^x + b, \quad k \neq 0, a \neq 1$$

Se denominan **funciones exponenciales**



(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$



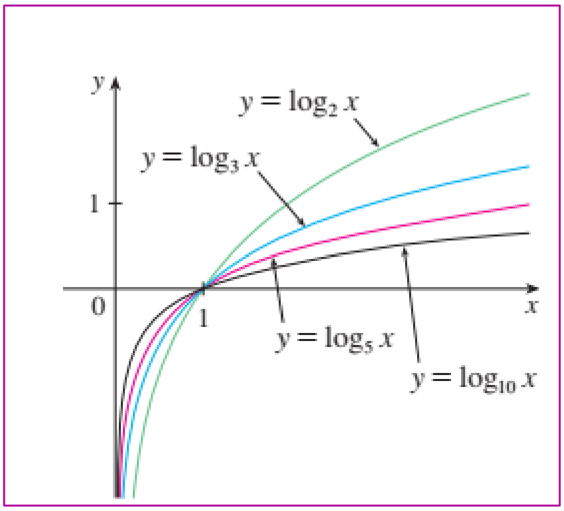
(a) $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 10^x$

FUNCIÓN LOGARITMICA

Las funciones de la forma

$$f(x) = \log_b(x)\,, \quad b > 0$$

Se denominan **funciones logarítmicas**, y es la función inversa de la exponencial



Ejercicio 11. Una colonia de insectos crece rápidamente y luego se nivela. La cantidad de insectos (en miles), en función del tiempo (en semanas), se puede calcular mediante la función:

$$I(s) = 12 - 8.\left(\frac{3}{4}\right)^s$$

a. ¿Cuántos insectos había inicialmente?
b. ¿Cuántos insectos habrá al cabo de una semana? ¿Y al cabo de 3 semanas?
c. ¿Cuántas semanas deben pasar para que en la colonia haya 10.000 insectos?
d. ¿Cuántas semanas deben pasar para que en la colonia haya 13.000 insectos?
e. Realicen una gráfica de la función de manera aproximada para visualizar el crecimiento de la población de insectos a medida que pasa el tiempo.

Ejercicio 12. Una población de conejos en una isla aislada crece siguiendo un modelo logístico, ya que los recursos en la isla (alimento y espacio) son limitados. Inicialmente, se introducen 10 conejos en la isla, y en ausencia de restricciones, la población se duplicaría cada 3 meses. Sin embargo, el ecosistema solo puede soportar un máximo de 500 conejos debido a la capacidad de carga del entorno.

$$P(t) = \frac{500}{1 + 49e^{-0.6t}}$$

a. Indicar la imagen en el contexto del problema
b. ¿Cuál es la población inicial?
c. ¿Cuánto tiempo tomará para que la población se duplicará?
d. ¿Cuánto tiempo tomará para que la población alcance 90% de la capacidad de carga de la isla?
e. ¿En qué momento la población se extingue? ¿Por qué?
f. Con el paso de los años ¿cuál es la cantidad de habitantes que se espera que cohabiten?

1.3Trigonometría

SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Existen diversos sistemas de medición de ángulos:

- Sistema sexagesimal
- Sistema circular

SISTEMA SEXAGESIMAL

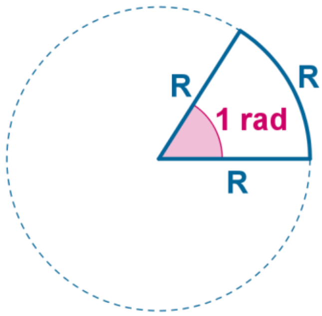
Es el sistema más conocido, donde la unidad de medida de un ángulo es el grado, y el subsistema de medidas son los minutos y segundos.

Cada grado equivale a 60 minutos, y cada minuto a 60 segundos.

$$1° \equiv 60' \qquad 1' \equiv 60''$$

SISTEMA CIRCULAR

En este sistema la unidad la unidad de medida es el **radián.** El radián es un ángulo central, cuyo arco es igual al radio de la circunferencia a la cual pertenece.



Observar el siguiente GIF que representa al radián

Cómo vemos en gráfico, un ángulo central de cualquier circunferencia que dé "un giro completo" mide 360° (en el sistema sexagesimal) y 2π radianes (en el sistema circular).

De esta forma podemos observar que

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

Por lo tanto tenemos que

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{y} \quad 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

Por ejemplo 45° equivalen a

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{4}\pi \text{ rad}$$

Y $\frac{\pi}{6}$ rad equivalen a

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30°$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIÓN SENO

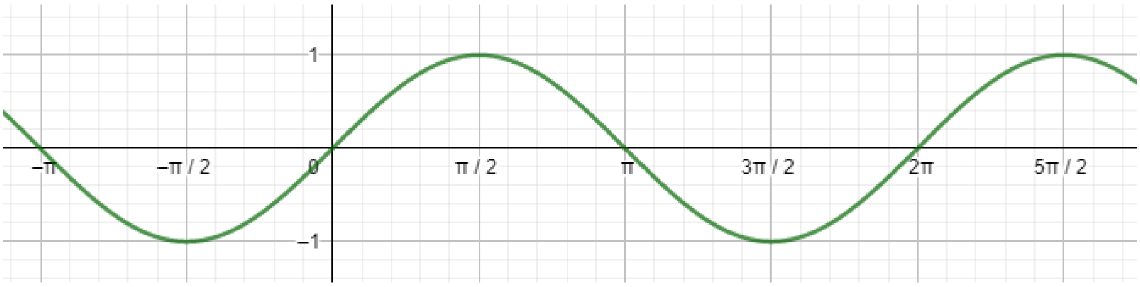
Consideramos la función

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

grado	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$f(x)$																	

Primero la representamos por medio de una tabla para luego graficarla. Para ello podemos realizar una tabla con los ángulos notables.

Luego representamos la función gráficamente:



Observar el GIF de la función seno.

Analicemos el comportamiento de la función $f(x) = \text{sen}\, x$

$$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \qquad \text{Im}\, f = [-1; 1]$$

$$\text{Periodo} = 2\pi$$

$$\text{Ordena al origen: } (0; 0)$$

$$\text{Raices: } (k\pi; 0) \quad \text{con} \;\; k \in Z$$

$$\text{puntos mámixos: } \left(\frac{4k+1}{2}\,; 1\right) \quad k \in Z$$

$$\text{puntos mínimos: } \left(\frac{4k-1}{2}\,; -1\right) \quad k \in Z$$

Periodo: la función seno es periódica lo que significa que su ciclo se repite cada cierto periodo, el periodo es el intervalo que ocupa un ciclo.

FUNCIÓN COSENO

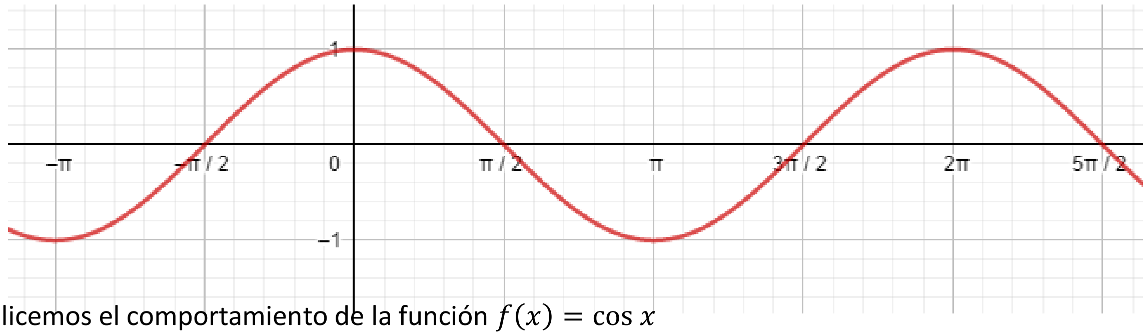
Consideramos la función

$$f(x) = \cos(x)$$

$grado$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$f(x)$																	

Primero la representamos por medio de una tabla para luego graficarla. Para ello podemos realizar una tabla con los ángulos notables.

Luego representamos la función gráficamente:



Analicemos el comportamiento de la función $f(x) = \cos x$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = [-1; 1]$$

$$\text{Ordena al origen: } (0; 1)$$

$$\text{Raices: } \left(\frac{2k+1}{2}\pi; 0\right) \text{ con } k \in Z$$

$$\text{puntos mámixos: } (2k\pi \ ; 1) \quad k \in Z$$

$$\text{puntos mínimos: } ((2k+1)\pi \, ; -1) \quad k \in Z$$

EJERCICIOS

Ejercicio 13. Sea $f(x) = A.\text{sen}(Bx + \alpha) + D$ y $g(x) = A.\cos(Bx + \alpha) + D$

a. Ingresar al siguiente link https://www.geogebra.org/classic/sr48uxjf
b. Desplazar los deslizadores en $A = 1, B = 1, \alpha = 0, D = 0$.
c. Mover el deslizador A y observar el comportamiento de la curva.
d. Dejar el $A = 1$ y luego mover el deslizador B, observar el comportamiento de la curva.
e. Dejar el $B = 1$ y luego mover el deslizador α, observar el comportamiento de la curva.
f. Dejar el $\alpha = 0$ y luego mover el deslizador D, observar el comportamiento de la curva.

Ejercicio 14. La naturaleza periódica de estas funciones las hace apropiadas para modelar fenómenos como son las mareas, resortes en vibración y ondas de sonidos. En este caso analizaremos la función $L(t)$ que modela el número de horas de luz diurnas en Filadelfia en t días después del 1 de enero.

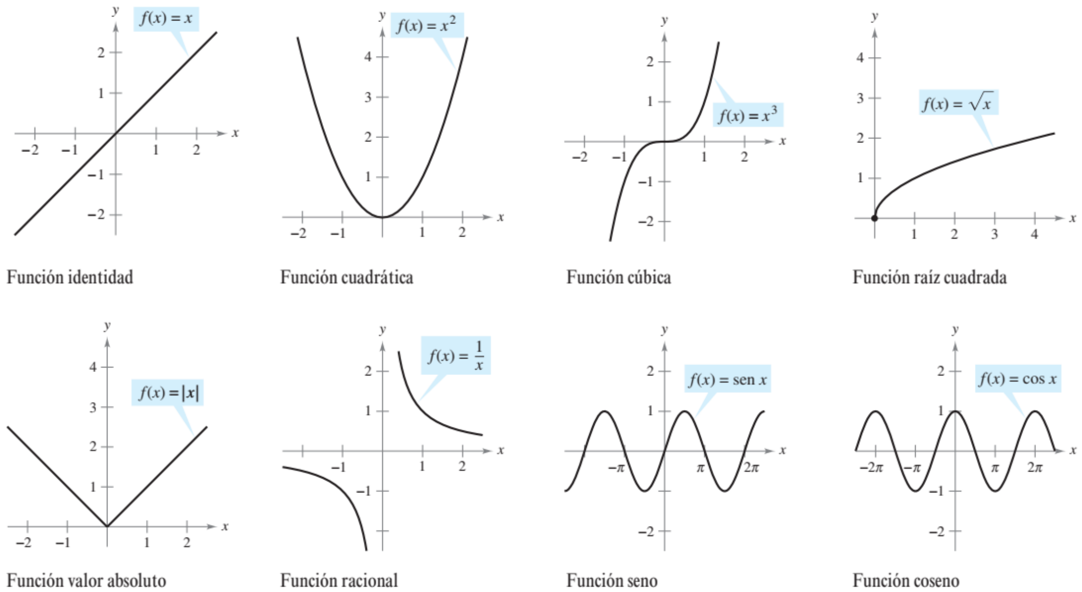
$$L(t) = 12 + 2{,}8 \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$$

a. ¿Cuántas horas diurnas tiene el 1 de enero?
b. ¿Cuántas horas de luz tendrá aproximadamente el 28 de Febrero?
c. ¿Cuál es la mayor cantidad de luz que puede tener un día en Filadelfia? ¿y la menor?

1.4 Clasificación de funciones

La noción de función es fruto de los esfuerzos de muchos matemáticos de los siglos XVII y XVII. Mención especial merece Leonhard Euler, a quién debemos la notación $y = f(x)$. Hacia finales del siglo XVIII, los matemáticos y científicos habían llegado a la conclusión de que un gran número de fenómenos de la vida real podían representarse mediante modelos matemáticos, construidos a partir de una colección de funciones, estas funciones se dividen en tres categorías:

1. Funciones algebraicas (polinómicas, radicales, racionales).
2. Funciones trígono métricas (seno, coseno, tangentes, etc.).
3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

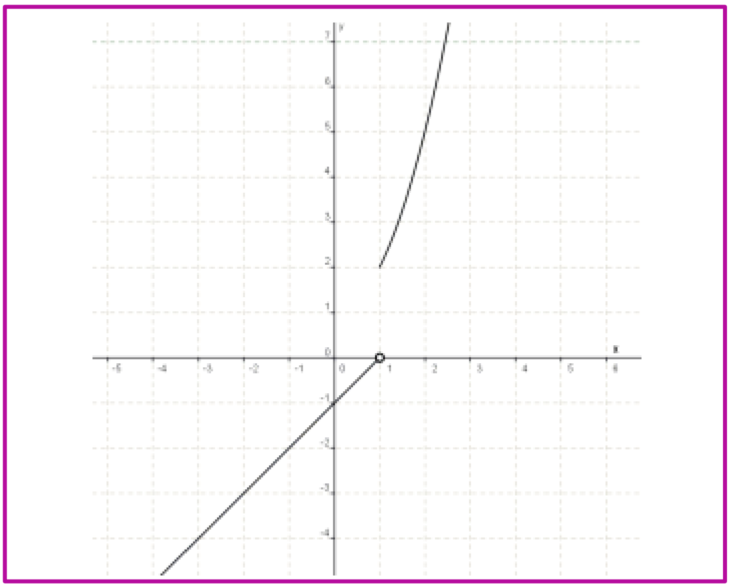


Gráficas de ocho funciones básicas

Y las diferentes funciones que se obtienen al operar entre ellas.

FUNCIONES DEFINIDAS POR RAMAS

Una función definida por ramas es una función que para distintos subconjuntos del dominio, le corresponde distintas reglas de asignación.



Por ejemplo

Sea $f: R \to R$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x < 1 \\ x^2 + 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Dom } f = R$$

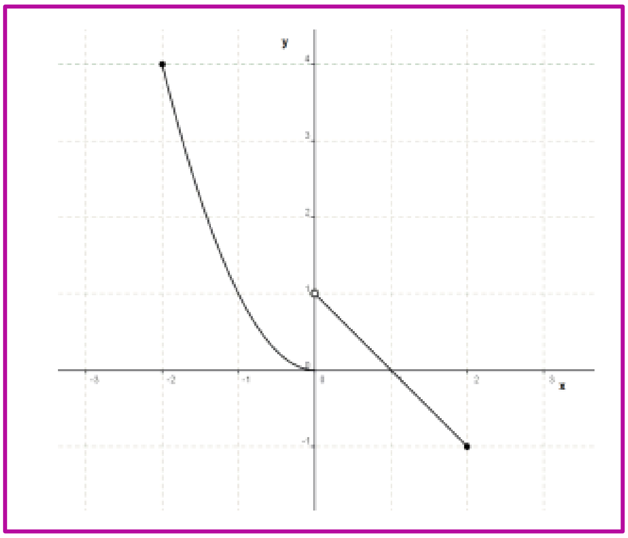
$$\text{Im } f = (-\infty; 0) \cup [2; \infty)$$

Sea $f: [-2; 2] \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & si \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{Dom } f = [-2; 0] \cup (0; 2]$$

$$\text{Im } f = [-1; 4]$$



Ejercicio 15. Trazar la gráfica de las siguientes funciones y luego analizar: Dominio e imagen, ordenada al origen y raíces. Cada uno de los elementos se debe analizar analíticamente, excepto la imagen que se puede expresar en función del gráfico.

a. $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & 1 < x \end{cases}$

c. $h(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & x < -1 \\ x & -1 \leq x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \end{cases}$

d. $j(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \ln(x) & x > 0 \end{cases}$

Anexo: Transformaciones Lineales y Funciones de Activación en Redes Neuronales

Las capas de una red neuronal realizan transformaciones lineales seguidas de funciones de activación no lineales. ¿Cómo afecta la elección de funciones de activación como la ReLU o la sigmoidal al comportamiento de una red neuronal?

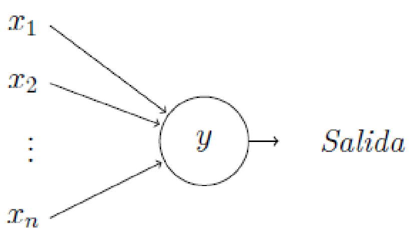
Introducción

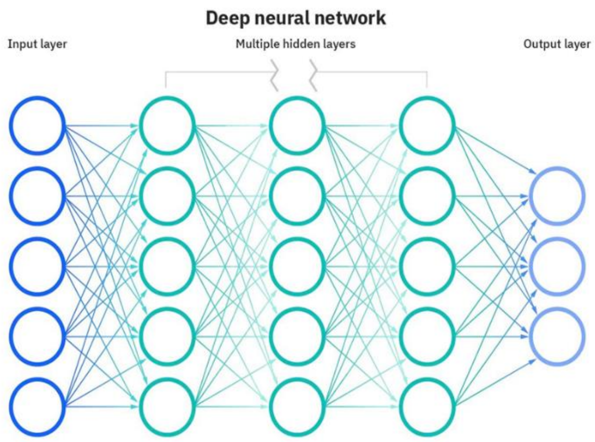
"Las redes neuronales están inspiradas en cómo funciona el cerebro humano. Básicamente, son sistemas que imitan la capacidad de aprender de la experiencia, como cuando nosotros resolvemos problemas basándonos en lo que ya sabemos. Estas redes se componen de unidades que procesan información, y a medida que van aprendiendo, mejoran su capacidad para reconocer patrones, como imágenes o tendencias. Hay modelos que imitan más directamente al cerebro, y otros que están diseñados solo para cumplir con tareas específicas."

Redes neuronales y computadoras digitales

La computación neuronal se diferencia de la digital en varios aspectos claves. Los sistemas neurológicos no aplican principios de circuitos lógicos o digitales, ya que las neuronas no funcionan de manera síncrona o asíncrona como en los sistemas digitales. No hay un reloj maestro que sincronice sus impulsos, y el umbral de activación de una neurona varía con el tiempo, lo que impide que se comporten como circuitos lógicos. Además, las neuronas y sinapsis actúan como integradores analógicos, no como elementos de memoria binarios. Dado que los circuitos del cerebro no implementan computación recursiva ni algorítmica, el cerebro debe ser considerado un computador analógico, no digital.

Partiendo de la neurona como elemento básico, estas se organizan en capas que se conectan entre sí dando lugar a la red, es decir, una red consta de una o varias capas consecutivas entre la información de entrada (*input*) y la de salida (*output*). Hoy en día, las redes más populares son las que acumulan muchas capas intermedias (*hidden layers*) en lo que se conoce como Deep Learning.



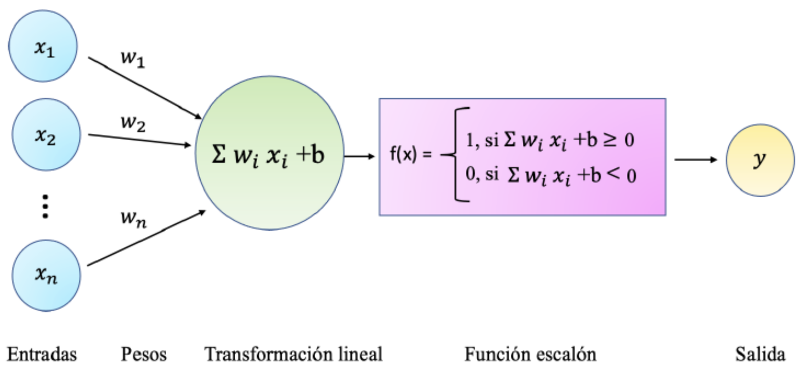


La neurona es la unidad básica de procesamiento dentro de una red. Cada neurona recibe un *input* de la capa anterior y tras una serie de cálculos genera un valor de *output* que sirve de entrada para una o varias neuronas de la capa siguiente. El *input* que recibe cada neurona a través de las conexiones con las neuronas de la capa anterior depende del valor de salida de cada una de ellas x_j y del peso correspondiente a dicha conexión w_j, que marca el grado de intensidad con que una neurona afecta a la otra. Los cálculos realizados por la neurona consisten en una suma de los valores de entrada ponderada con sus respectivos pesos, a la que se aplica una función de activación $f(z)$, para dar lugar al *output* de la misma.

Utilizando notación vectorial, dada una capa $r \in 1, \dots, R$ donde R es el número de capas de la red, se tiene para cada neurona *k* de dicha capa un vector de pesos $w_k^r = (w_{k1}^r, \dots, w_{kN}^r)$ que corresponde a las conexiones de esta con cada una de las N neuronas de la capa anterior. También hay otro parámetro que caracteriza cada neurona llamada *bias* o sesgo, b_k^r.

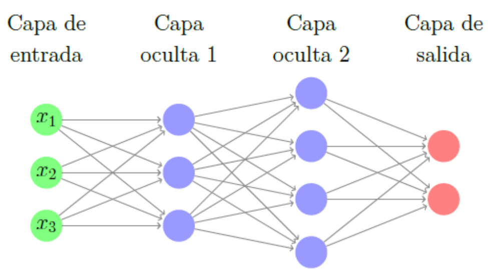
De este modo, dado el *output* de una capa $r-1$, descrito por el vector $\mathbf{x}^{r-1}=(x^{r-1}_1, \dots x^{r-1}_N)$, se introduce un valor en la función de activación de la neurona $k \in 1, \dots, N$ de la capa *r* dado por:

$$z_k^r = \sum_{j=1}^{N} w_{kj}^r \, x_j^{r-1} + b_k^r = w_k^r \cdot x^{r-1} + b_k^r$$



Se comprueba que este cálculo realizado por la neurona es una transformación lineal, que será seguida por una operación no lineal a través de la función *f*(*z*). Esta es la base de las capas de neuronas, realizar sucesivas transformaciones lineales seguidas de no lineales hasta llegar al *output* (cada capa puede tener distinta función de activación). En el caso de no introducir las no linealidades, se podría sustituir una red de varias capas por una de una única capa al ser todas las operaciones lineales, de manera que no tendría sentido hablar de *Deep Learning*.

El *output* de una neurona k la capa r vendrá dado entonces por $f(z_k^r) = a_k^r$. Tras atravesar toda la red, es decir, las R capas de neuronas, se tiene un valor a la salida $a^R(w, b)$ que puede ser un escalar o un vector, según si la capa de salida está formada por una o varias neuronas. Este valor es función de todos los pesos y *biases* de cada una de las capas, que a su vez son los parámetros que habrá que ajustar en el entrenamiento. Se puede intuir que el número de parámetros se multiplica enseguida incluso en redes relativamente sencillas, por lo que el coste computacional puede incrementarse rápidamente.



¿Qué son las funciones de activación?

Las funciones de activación son un componente integral de las **redes neuronales** que les permite aprender patrones complejos en los datos. Transforman la señal de entrada de un nodo de una red neuronal en una señal de salida que pasa a la capa siguiente. Sin funciones de activación, las redes neuronales se limitarían a modelar únicamente relaciones lineales entre entradas y salidas.

Las funciones de activación introducen no linealidades, lo que permite a las redes neuronales aprender mapeos muy complejos entre entradas y salidas.

Elegir la función de activación adecuada es crucial para entrenar redes neuronales que generalicen bien y proporcionen previsiones precisas.

¿Por qué son esenciales las funciones de activación?

Sin funciones de activación, las redes neuronales solo consistirían en operaciones lineales como la multiplicación de matrices. Todas las capas realizarían transformaciones lineales de la entrada, y no se introducirían no linealidades.

Tipos de funciones de activación

Las redes neuronales aprovechan diferentes tipos de funciones de activación para introducir no linealidades y permitir el aprendizaje de patrones complejos. Cada función de activación tiene sus propias propiedades y es adecuada para determinados casos de uso.

Por ejemplo, la función sigmoide es ideal para los problemas de clasificación binaria, softmax es útil para la previsión multiclase y ReLU ayuda a superar el problema de desvanecimiento de gradiente.

Utilizar la función de activación adecuada para la tarea conduce a un entrenamiento más rápido y a un mejor rendimiento.

Veamos algunas de las funciones de activación comunes:

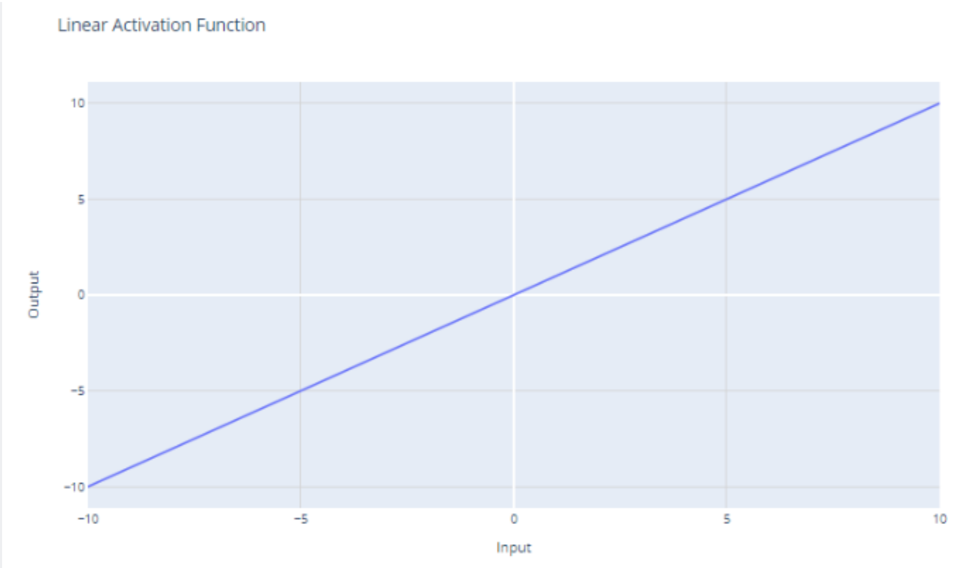
- La **función de activación lineal** es la función de activación más sencilla, definida como:

$$f(x) = x$$

Simplemente devuelve la entrada x como salida. Gráficamente, es una línea recta con una pendiente de 1.

El principal caso de uso de la función de activación lineal es en la capa de salida de una red neuronal utilizada para la regresión. Para los problemas de regresión en los que queremos prever un valor numérico, utilizar una función de activación lineal en la capa de salida garantiza que la red neuronal produzca un valor numérico. La función de activación lineal no reduce ni transforma la salida, por lo que se devuelve el valor real previsto.

Sin embargo, la función de activación lineal rara vez se utiliza en las capas ocultas de las redes neuronales. Esto se debe a que no proporciona ninguna no linealidad. El objetivo de las capas ocultas es aprender combinaciones no lineales de las características de entrada. Utilizar una activación lineal todo el tiempo restringiría el modelo a aprender solo transformaciones lineales de la entrada.



- La **función de activación sigmoide**, a menudo representada como σ(x), es una función infinitamente diferenciable históricamente importante en el desarrollo de las redes neuronales. La función de activación sigmoide tiene la forma matemática:

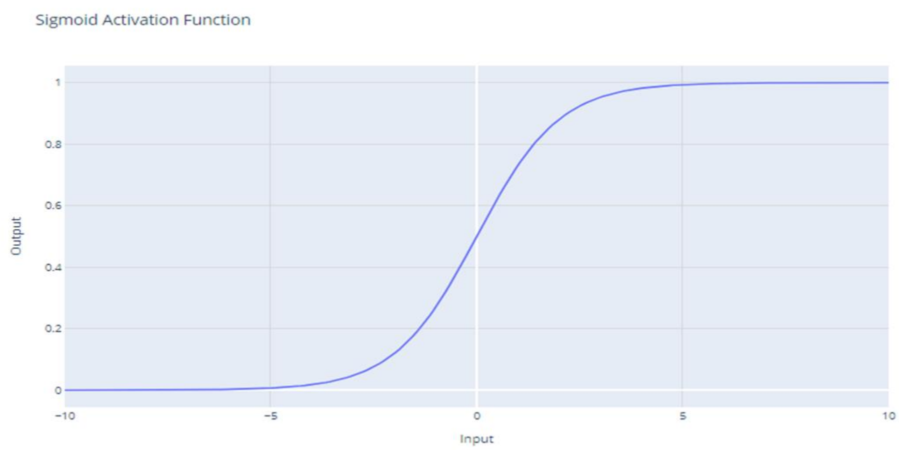
$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Toma una entrada de valor real y la reduce a un valor entre 0 y 1. La función sigmoide tiene una curva en forma de "S" que tiende a 0 para los números negativos grandes y a 1 para los números positivos grandes. Los resultados pueden interpretarse fácilmente como probabilidades, lo que la hace natural para los problemas de clasificación binaria.

Las unidades sigmoides fueron populares en las primeras redes neuronales, ya que el gradiente es más fuerte cuando la salida de la unidad está cerca de 0,5, lo que permite un entrenamiento eficaz por retropropagación. Sin embargo, las unidades sigmoides sufren el problema de "desvanecimiento de gradiente", que dificulta el aprendizaje en las redes neuronales profundas.

A medida que los valores de entrada se vuelven significativamente positivos o negativos, la función se satura en 0 o 1, con una pendiente extremadamente plana. En estas regiones, el gradiente es muy próximo a cero. Esto da lugar a cambios muy pequeños en los pesos durante la retropropagación, sobre todo para las neuronas de las primeras capas de las redes profundas, lo que hace que el aprendizaje sea penosamente lento o incluso lo detenga. Esto se conoce como el problema de desvanecimiento de gradiente en las redes neuronales.

El principal caso de uso de la función sigmoide es como activación de la capa de salida de los modelos de clasificación binaria. Reduce la salida a un valor de probabilidad entre 0 y 1, que puede interpretarse como la probabilidad de que la entrada pertenezca a una clase determinada.



- La **función de activación de tangente hiperbólica (tanh)** se define como:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La función $tanh$ produce valores en el intervalo de -1 a +1. Esto significa que puede tratar valores negativos con más eficacia que la función sigmoide, que tiene un intervalo de 0 a 1.

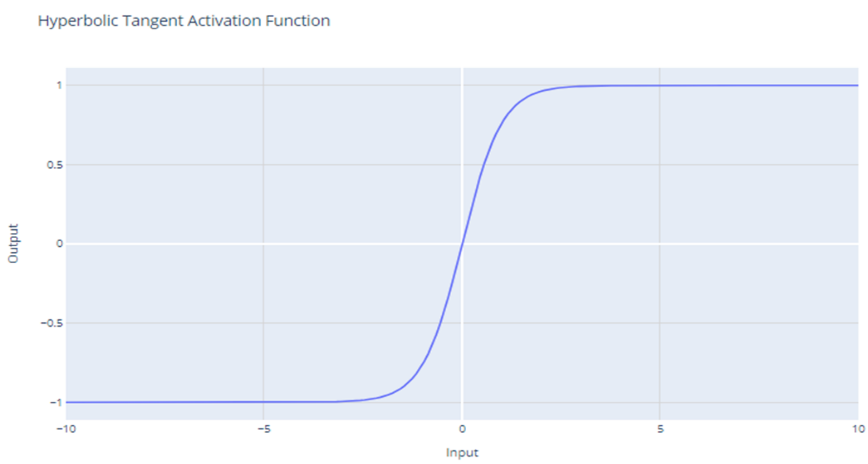
A diferencia de la función sigmoide, $tanh$ está centrada en cero, lo que significa que su resultado es simétrico alrededor del origen del sistema de coordenadas. Esto suele considerarse una ventaja porque puede ayudar a que el algoritmo de aprendizaje converja más rápidamente.

Como el resultado de $tanh$ oscila entre -1 y $+1$, tiene gradientes más fuertes que la función sigmoide. Los gradientes más fuertes suelen dar lugar a un aprendizaje y una convergencia más rápidos durante el entrenamiento, porque tienden a ser más resistentes frente al problema de desvanecimiento de gradiente que los gradientes de la función sigmoide.

A pesar de estas ventajas, la función $tanh$ sigue sufriendo el problema de desvanecimiento de gradiente. Durante la retropropagación, los gradientes de la función tanh pueden llegar a ser muy pequeños (próximos a cero). Esta cuestión es especialmente problemática para las redes profundas con muchas capas; los gradientes de la función de pérdida pueden llegar a ser demasiado pequeños para realizar cambios significativos en los pesos durante el entrenamiento, ya que se retropropagan a las capas iniciales. Esto puede ralentizar drásticamente el proceso de entrenamiento y provocar malas propiedades de convergencia.

La función $tanh$ se utiliza con frecuencia en las capas ocultas de una red neuronal. Debido a su naturaleza centrada en cero, cuando los datos también se normalizan para que tengan media cero, puede resultar un entrenamiento más eficiente.

Si hay que elegir entre la función sigmoide y la función $tanh$ y no se tiene ninguna razón específica para preferir una a la otra, $tanh$ suele ser la mejor opción por las razones antes mencionadas. Sin embargo, la decisión también puede verse influida por el caso de uso concreto y el comportamiento de la red durante los experimentos de entrenamiento iniciales.



- La **función de activación de unidad lineal rectificada (ReLU)** tiene la forma:

$$f(x) = \max(0, x)$$

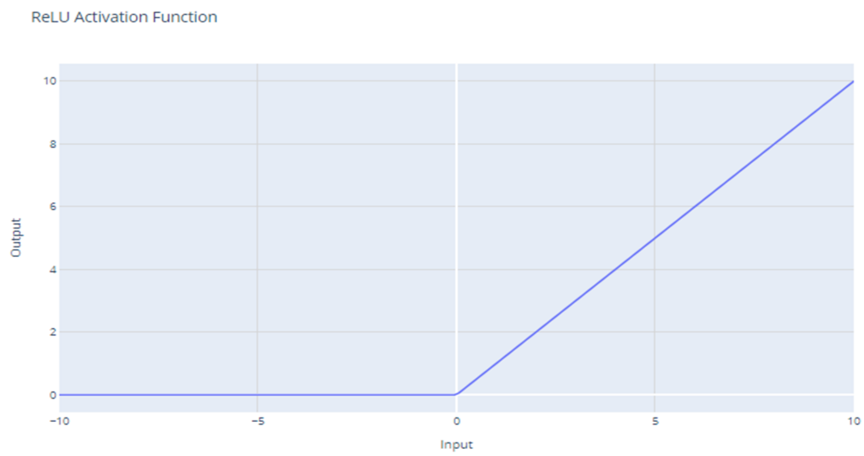
Umbraliza la entrada en cero, devolviendo 0 para valores negativos y la propia entrada para valores positivos.

Para entradas mayores que 0, ReLU actúa como una función lineal con un gradiente de 1. Esto significa que no modifica la escala de las entradas positivas y permite que el gradiente pase sin cambios durante la retropropagación. Esta propiedad es fundamental para mitigar el problema de desvanecimiento de gradiente.

Aunque ReLU es lineal para la mitad de su espacio de entrada, técnicamente es una función no lineal porque tiene un punto no diferenciable en $x = 0$, donde cambia bruscamente con respecto a x. Esta no linealidad permite a las redes neuronales aprender patrones complejos

Como ReLU produce cero para todas las entradas negativas, conduce naturalmente a activaciones dispersas; en cualquier momento, solo se activa un subconjunto de neuronas, lo que conduce a una computación más eficiente.

La función ReLU es computacionalmente poco costosa porque implica un simple umbral en cero. Esto permite a las redes escalar a muchas capas sin un aumento significativo de la carga computacional, en comparación con funciones más complejas como la función $tanh$ o la sigmoide.



- La **función de activación softmax**, también conocida como función exponencial normalizada, es especialmente útil en el contexto de los problemas de clasificación multiclase. Esta función opera sobre un vector, a menudo denominado logits, que representa las previsiones o las puntuaciones brutas de cada clase calculadas por las capas anteriores de una red neuronal.

Para un vector de entrada x con elementos $x1, x2, ..., x_C$, la función softmax se define como:

$$f(x_i) = \frac{e^{x_i}}{\sum_{j=1}^{K} e^{x_i}}$$

El resultado de la función softmax es una distribución de probabilidad cuya suma es uno. Cada elemento del resultado representa la probabilidad de que la entrada pertenezca a una clase determinada.

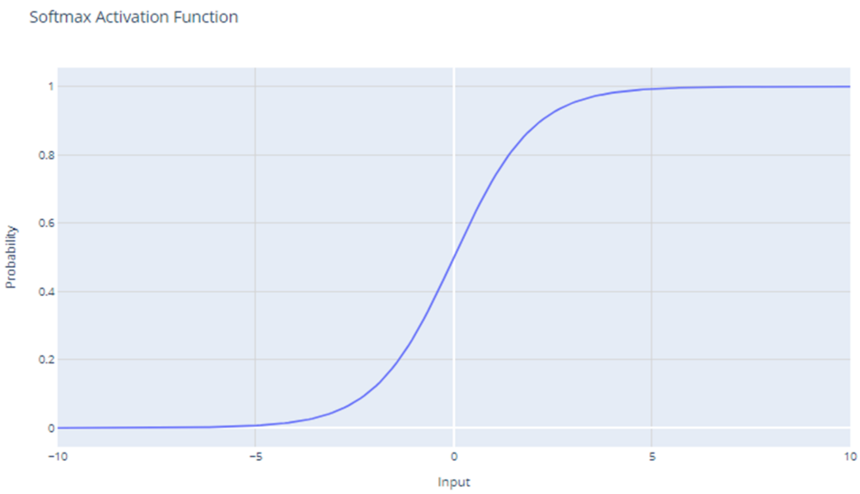
El uso de la función exponencial garantiza que todos los valores de salida sean no negativos. Esto es crucial porque las probabilidades no pueden ser negativas.

Softmax amplifica las diferencias en el vector de entrada. Incluso pequeñas diferencias en los valores de entrada pueden dar lugar a diferencias sustanciales en las probabilidades de salida, con los valores de entrada más altos tendiendo a dominar en la distribución de probabilidad resultante.

Softmax se suele utilizar en la capa de salida de una red neuronal cuando la tarea consiste en clasificar una entrada en una de varias (más de dos) categorías posibles (clasificación multiclase).

Las probabilidades producidas por la función softmax pueden interpretarse como puntuaciones de confianza para cada clase, lo que proporciona información sobre la certeza del modelo en cuanto a sus previsiones.

Como softmax amplifica las diferencias, puede ser sensible a los valores atípicos o extremos. Por ejemplo, si el vector de entrada tiene un valor muy grande, softmax puede "reducir" las probabilidades de otras clases, dando lugar a un modelo demasiado confiado.

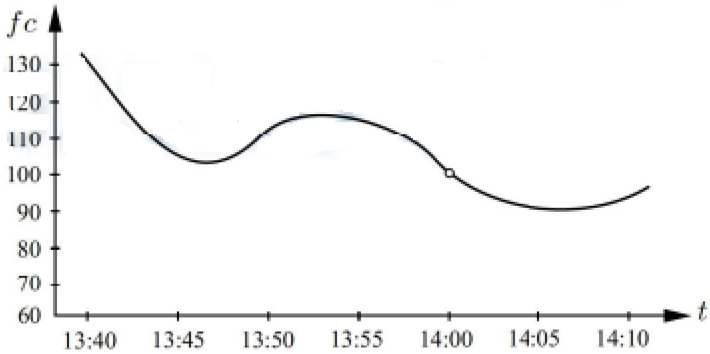


Límite y Continuidad

2

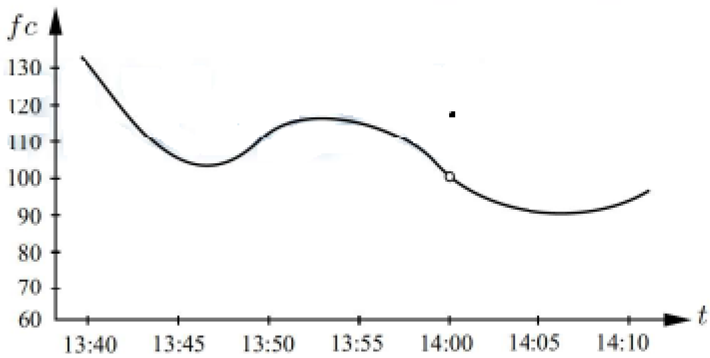
2.1 Valor esperado

Ejercicio 0. Un dispositivo registra los valores de la frecuencia cardíaca de un paciente internado, generando una gráfica. Debido a una falla en el dispositivo de impresión en la gráfica no aparece el valor correspondiente a las 14 horas. La figura siguiente es el gráfico obtenido:



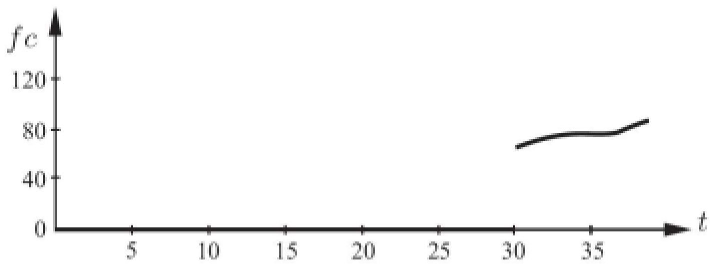
a. ¿Qué valor se espera que haya tenido la frecuencia cardíaca a las 13:50 hs? ¿Por qué?
b. ¿Qué valor se espera que haya tenido la frecuencia cardíaca a las 14:00 hs? ¿Por qué?

Ahora bien, supongamos que la impresión hubiera sido esta:



c. En este caso, ¿qué diríamos del valor esperado para el paciente a las 14:00 hs?

Ejercicio 1. Para continuar con el tema de la frecuencia cardíaca, consideremos la siguiente situación: un individuo sufre un paro cardíaco mientras está internado en un hospital. Rápidamente es sometido a un proceso de reanimación el cual tiene éxito después de 30 segundos, restableciendo su frecuencia cardíaca a un valor de 80.

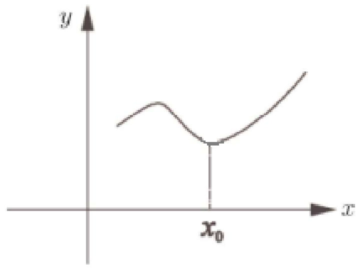


¿Cuál dirían que es el valor esperado de la frecuencia cardíaca en $t = 30$? ¿Es posible dar una respuesta que sea coherente al mismo tiempo con lo sucedido antes de ese instante y con lo sucedido después?

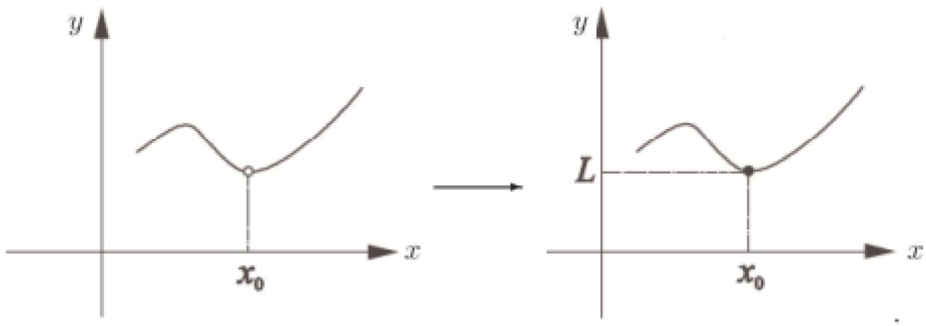
REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Gráficamente, es relativamente sencillo determinar si una función tiene un valor esperado L en un punto determinado. Digamos que la función es f y el punto en cuestión es x_0. Hay dos casos:

1. **La gráfica pase sin cortarse.** En este caso el valor esperado coincide con el valor real de la función.



2. **La gráfica tiene una interrupción** (un "agujero")



Ejercicio 2. Sea la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

a. Construir una lista de diez números, comenzando en 0, que sea creciente y cuyos términos sean cada vez más próximos a 1 (pero distintos de 1).

b. Luego calcular la imagen de cada uno de los valores de la lista; ¿a qué valor se aproximan?

x											$\rightarrow$
$f(x)$											

c. Construir una lista de diez números, comenzando en 2, que sea decreciente y cuyos términos sean cada vez más próximos 1 (pero distintos de 1)

d. Luego calcular la imagen de cada uno de los valores de la lista; ¿a qué valor se aproximan?

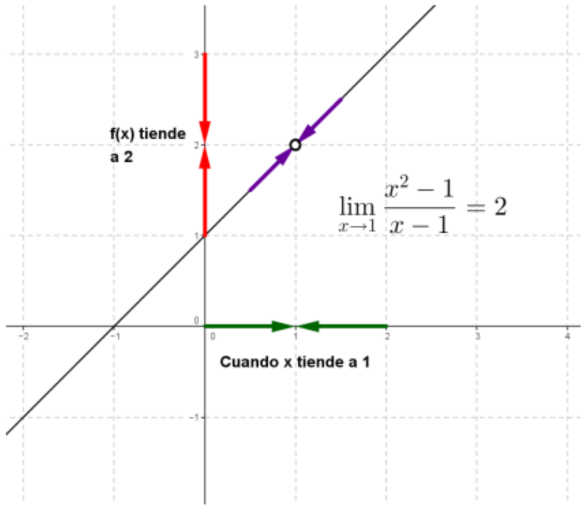
x											$\rightarrow$
$f(x)$											

e. Realizar un gráfico de la función en Symbolab, ¿Existe el valor esperado en $x = 1$? ¿Cuál es?

f. ¿Cuánto vale $f(1)$?

La conclusión de la actividad anterior es general y se puede expresar de la siguiente manera: Si una función tiene un valor esperado L en un punto x_0 entonces cada vez que nos aproximamos a x_0 por una serie de valores (sin importar la forma en la que lo hagamos), los valores de la función en los números de esa serie se aproximarán a L.

Esto justifica la siguiente definición:



VALOR ESPERADO

Si f tiene un valor esperado L en x_0 diremos que L es el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a** x_0 y lo denotamos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Así por ejemplo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sea c una constante y supongamos que existen los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x)$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1. El límite de una suma/resta es la suma/resta de los límites

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

2. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función

$$\lim_{x \to a}[cf(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

3. El límite un producto es el producto de los límites.

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

4. El límite del cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador sea distinto de cero)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si} \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

5. El límite de una potencia es la potencia del límite

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

6. El límite de una constante es la constante

$$\lim_{x \to a} c = c$$

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to 2}(x^3 + 5x + 1) = \lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2} 5x + \lim_{x \to 2} 1$$

$$= \left[\lim_{x \to 2} x\right]^3 + \lim_{x \to 2} 5 \cdot \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 1$$

$$= 2^3 + 5 \cdot 2 + 1$$

$$= 8 + 10 + 1$$

$$= 19$$

EJERCICIOS

Ejercicio 3. Calculas los siguientes límites

$$\lim_{x \to 3}(2x^3 - 3x + 4) =$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} =$$

Ejercicio 4. Usando las propiedades de los límites, y sabiendo que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1} g(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Calcular:

a. $\lim_{x \to 1}[f(x) + 2.g(x)] =$

b. $\lim_{x \to 1}[f(x).g(x)] =$

c. $\lim_{x \to 2} f(x)^3 =$

d. $\lim_{x \to 2}[f(x).g(x)] =$

e. $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} =$

f. $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)+5g(x)}{g(x)} =$

Ejercicio 5. Calcular el límite indicando que propiedad se utilizó.

a. $\lim_{x \to -1}(3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

b. $\lim_{x \to -1}[(x^2 - 1)^3.(x + 2)] =$

c. $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2+1}{3x-2} =$

d. $\lim_{x \to -1} \frac{2x-1}{(x+2)^2} =$

2.2 Límite

PROPIEDADES DE LA SUSTICIÓN DIRECTA

Si f es una función polinomial o racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Para aplicar la propiedad de la sustitución directa, la función debe ser continúa en a, concepto que estudiaremos más adelante; por se exige que para aplicar la dicha propiedad, se requiere que se polinomial, o en caso de ser racional, que el valor a pertencezca al dominio.

Por ejemplo, si f esta definida como $f(x) = 3x^2 - 5x$ y $a = 2$

$$\lim_{x \to 2} 3x^2 - 5x = f(2) = 3.2^2 - 5.2 = 2$$

Pero en el caso de $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ y $a = 1$ sucede que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

Lo que implica un error, puesto que la división no está definida para dividir por cero; en estos casos podemos trabajar la función algebraicamente para luego sí poder aplicar dicha propiedad.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

EJERCICIOS

Ejercicio 6. En caso de ser posible, calcular los siguientes límites por **sustitución directa**; en caso contrario, **simplificar la expresión algebraica** con la intención de calcular el límite.

a. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-6x+5}{x-5} =$

b. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-6x+5}{x-5} =$

c. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-2x-15}{x+5} =$

d. $\lim_{t \to -3} \frac{t^2-9}{2t^2+7t+3} =$

e. $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^3-8} =$

f. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} =$

Ejercicio 7. Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$$

a. Construir una lista de diez números, comenzando en -1, que sea creciente y cuyos términos sean cada vez más próximos a 0 (pero distintos de 0).

b. Luego calcular la imagen de cada uno de los valores de la lista; ¿a qué valor se aproximan?

x											$\rightarrow$
$f(x)$											

c. Construir una lista de diez números, comenzando en 1, que sea decreciente y cuyos términos sean cada vez más próximos 0 (pero distintos de 0)

d. Luego calcular la imagen de cada uno de los valores de la lista; ¿a qué valor se aproximan?

x											$\rightarrow$
$f(x)$											

e. Realizar un gráfico de la función en GeoGebra, ¿Qué sucede con los valores de la imagen cerca de 0?

f. ¿Cuánto vale $f(0)$?

2.3 Límites infinitos

En estos casos observamos que cuando x se aproxima a x_0, los valores de $f(x)$ crecen indefinidamente. La notación que usamos para estos casos es

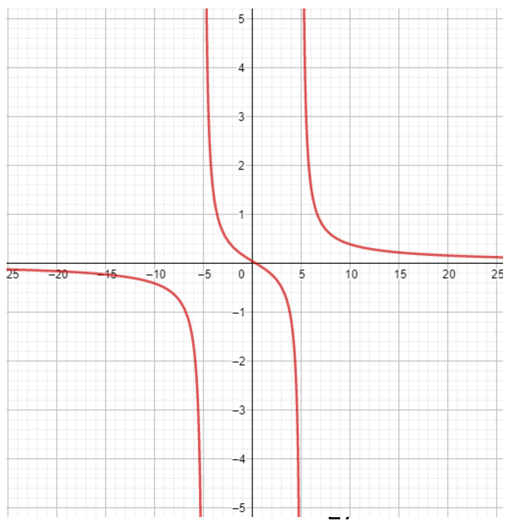
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

No significa que consideremos a ∞ como un número, ni tampoco que exista dicho límite.

CASOS EN LOS QUE LA FUNCIÓN TIENDE A INFINITO

Aquellas funciones que tienden a infinito <u>cuando x tienen a una constante</u>, son casos particulares, cómo por ejemplo:

- Funciones racionales.
- Funciones logarítmicas.
- Funciones trigonométricas (función tangente).



FUNCIONES RACIONALES

1. Dominio de las funciones racionales

Las funciones racionales están definidas para todos los valores de x que no anulan al denominador.

Sea $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces Dom $F = \{x \mid g(x) \neq 0\}$
Por ejemplo

$$F(x) = \frac{3x-1}{x^2-25}$$

Analizamos el dominio

$$x^2 - 25 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 5$$

$$\text{Dom } F = \mathbb{R} - \{-5; 5\}$$

2. Casos en que la función tiende a infinito

En aquellas funciones racionales en las que el denominador tiende a cero cuando x tienen a una constante, pero el numerador no; son los casos donde la función tiende a infinito en dicho valor.

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{\text{tiende a un valor distinto de cero}}{\text{tienen a cero}} \to \frac{f(a)}{0} = \infty}$$

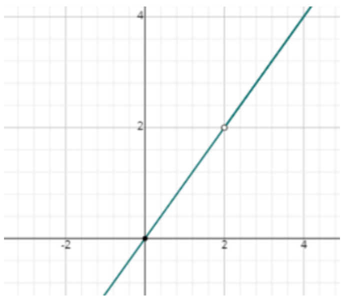
Los valores de las constantes donde la función puede llegar a tener a infinito, son aquellos valores que no pertenecen al dominio.
Por ejemplo

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^3-1} = \infty \qquad \lim_{x\to 5} \frac{3x-1}{x^2-25} = \infty$$

3. Casos en que la función tiene un punto vacío

En aquellos casos en que tanto el numerador como el denominador tiendan a cero cuándo x tiende a un valor constante, no garantiza que el límite en la función tienda a infinito. Por ejemplo

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x-2} = \frac{0}{0} \quad (\text{se denominada indeterminado})$$



Pero, podemos trabajar la expresión algebraicamente de modo que:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2$$

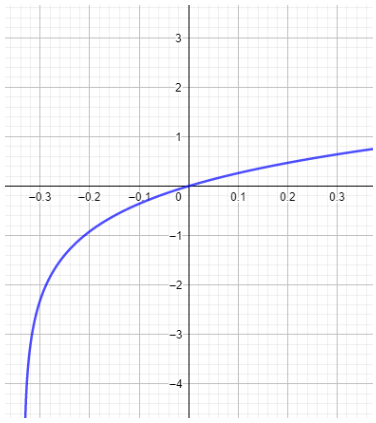
En este caso el límite sí existe y es 2

FUNCIONES LOGARITMICAS

1. Dominio de las funciones logarítmicas

En las funciones logarítmicas hay que señalar que el **dominio** son todos los valores que hacen positivo el argumento, es decir

Sea $f(x) = \log_b(ax+b)$, entonces Dom $f = \{x \mid ax + b > 0\}$



Por ejemplo

$$g(x) = \ln(3x+1)$$

Analizamos el dominio

$$3x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$$

$$\text{Dom } f = \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$$

2. Casos en que la función tiende a infinito

Las funciones logarítmicas tienden a infinito en aquellos valores en que se anula el argumento.

Por ejemplo

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \ln(3x+1) = \infty$$

EJERCICIOS

Ejercicio 8. Calcular, si existen, los siguientes límites. Graficar las funciones en Symbolab para validar los resultados.

a. $\lim_{x\to -1} \frac{x}{x+1} =$

b. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} =$

c. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2} =$

d. $\lim_{x\to 2} \ln(3x-5) =$

e. $\lim_{x\to -2} \ln(x^2-4) =$

f. $\lim_{x\to 1} \ln(1-3x) =$

LÍMITES EN EL INFINITO

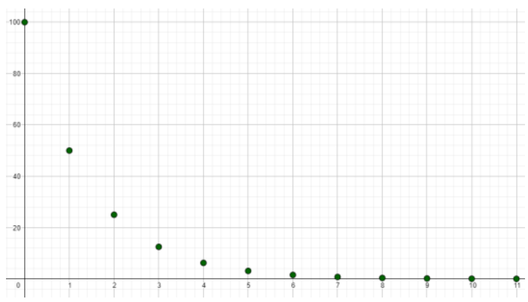
Ahora analizaremos aquellas funciones que tienden a infinito cuando x tienen a infinito.

1. Primero analicemos la siguiente sucesión que modela una de las paradojas de Zenón: "Lo que se está moviendo debe llegar a la etapa intermedia antes de llegar a la meta"

x	0	1	2	3	4	5	10	100
$\frac{100}{2^x}$								

Vemos que a medida que x toma valores cada vez más grandes, la sucesión toma valores cada vez más chicos, tendiendo a 0.

$$\frac{100}{2^x} \to 0 \text{ cuando } x \to \infty$$



De esta forma tenemos que

Si n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

2. Sea la función f definida como

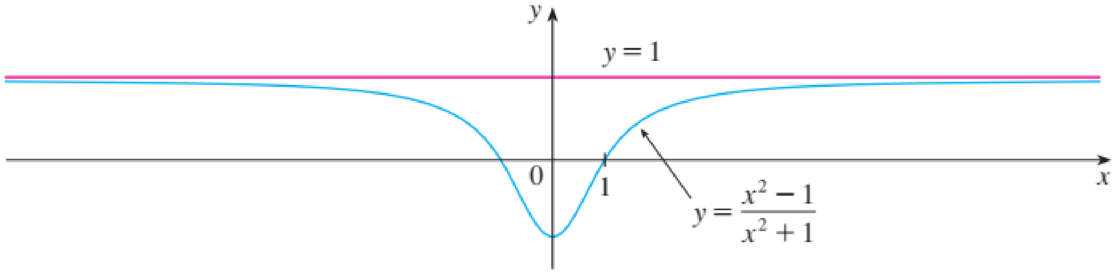
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

¿Qué sucede cuándo x toma valores arbitrariamente grandes? ¿y cuándo los valores son arbitrariamente chicos?

x	100	1000	90000	-100	-1000	-90000
$f(x)$						

Es decir podemos decir que cuándo x tienen a infinito (positivo o negativo) $f(x)$ tienen a 1, es decir

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \text{ o bien } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$



Otra notación para representar la situación es

$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to \infty$$

Ahora veremos cómo calcular límites en el infinito analíticamente, dado que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Y dado que la razón de este tipo de cantidades no está determinado, debemos trabajar algebraicamente las expresiones, de esta forma tenemos que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

EJERCICIOS

Ejercicio 9. Calcular los siguientes límites

a. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1} =$

b. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{2x^3 - 3x + 4} =$

c. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^3 + 1} =$

d. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 2x - 3}{4x^3 + 1} =$

e. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2} \right) =$

Ejercicio 10. Calcular los siguientes límites e interpretarlos gráficamente.

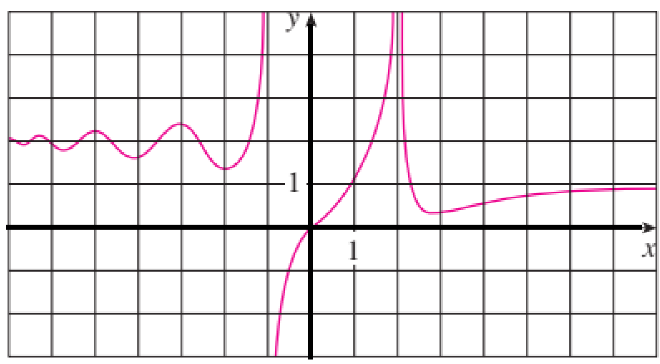
$$\lim_{x \to \infty} e^x = \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x =$$

Ejercicio 11. Sea f la función representada gráficamente. Calcular los siguientes límites

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to \infty} f(x) =$

$\lim_{x \to 2} f(x) =$



Ejercicio 12. Calcular los siguientes límites e interpretarlos gráficamente.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+1}= \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=$$

Analizar ciertos límites de una función nos brinda datos sobre la existencia de asíntotas verticales y horizontales.

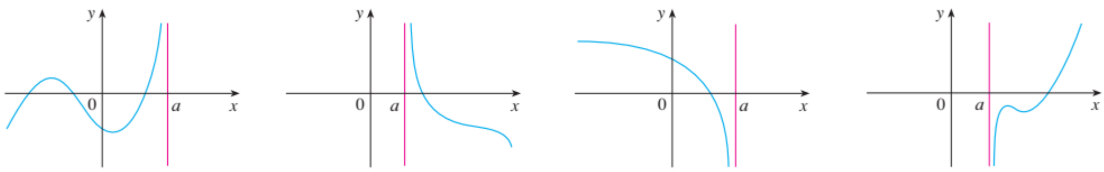
2.4 Asíntotas

Las asíntotas son aquellas rectas que cumplen la condición de que la distancia de cada punto de la recta a la gráfica de la función f tiende a cero.

ASÍNTOTA VERTICAL

La recta $x=a$ es una **asíntota vertical** de la función f, si el límite cuando x tiende a x_0 f tiende a infinito.

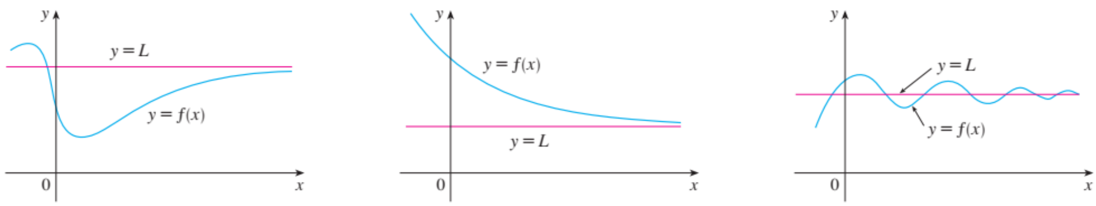
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$



ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta $y=L$ es una **asíntota horizontal** de la función f, si se verifica que el límite cuando x tiende a infinito tiende a un valor constante L.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$



EJERCICIOS

Ejercicio 13. Determinar las asíntotas (si existen) de las siguientes funciones racionales. Graficarlas en Symbolab.

$$f(x)=\frac{2x}{x-1} \qquad g(x)=\frac{4x^2-4x-8}{3x-6} \qquad h(x)=\frac{x-2}{x^2-4x+4}$$

Ejercicio 14. Determinar las asíntotas de las siguientes funciones.

$$f(x)=\frac{1}{e^x+1} \qquad g(x)=\frac{1}{e^x-1} \qquad h(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}\ (\text{función logística})$$

2.5 Límites laterales

En algunas funciones es necesario calcular el límite por mediantes los límites laterales, dado que no se puede aplicar la sustitución directa.

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L}$$

Es decir, si los límites laterales existen y son iguales, entonces el límite de la función existe y es igual a los límites laterales.

Por ejemplo, si queremos calcular el límite (si existe) en el caso de un función por ramas en en valor de x donde se produce el cambio de rama, entonces debemos usar los límites laterales para hallarlo.

Sea $f(x)$ una función por ramas definida cómo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & si\ x < -1 \\ x & si\ -1 \leq x < 1 \\ x^2 & si\ \ 1 \leq x \end{cases}$$

Analicemos los límites en los extremos de los intervalos que parten al dominio.

a. Para hallar $\lim_{x \to -1} f(x)$ debemos calcular los límites laterales en $x = -1$

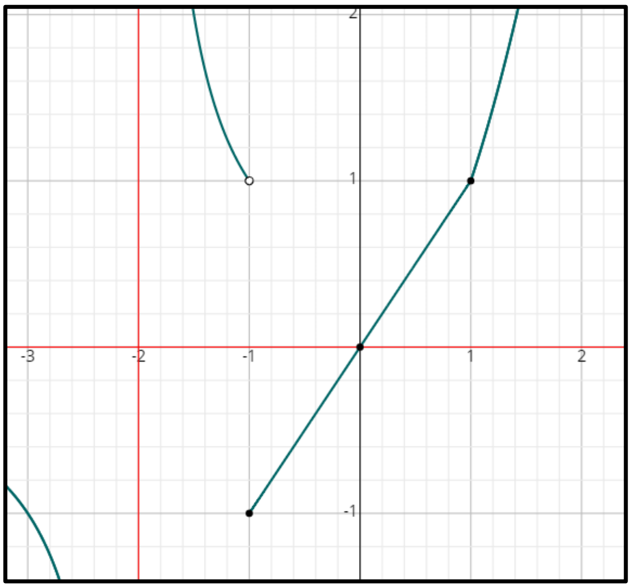
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-1+2} = \frac{1}{1} = 1 = l_1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x = -1 = l_2$$

Es decir, existen los límites laterales l_1 y l_2 pero cómo $1 = l_1 \neq l_2 = -1$, entonces el $\lim_{x \to -1} f(x)$ no existe.

$$\nexists \lim_{x \to -1} f(x)$$

b. Veamos que sucede con $\lim_{x \to 1} f(x)$



$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1 = l_1$$

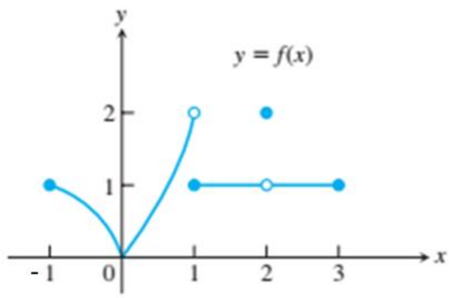
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1^2$$
$$= 1 = l_2$$

Es decir, existen los límites laterales l_1 y l_2; y además $l_1 = l_2$ por lo tanto

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

EJERCICIOS

Ejercicio 15. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de la función $f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderas y cuáles falsas? Justifique las falsas.

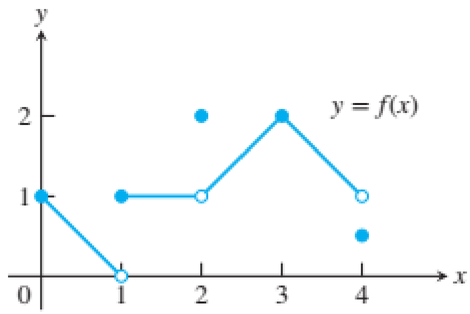


a. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$
b. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe
c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$
d. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$
e. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$
f. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe
g. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
h. $f(2) = 1$
i. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe para toda c en el intervalo abierto $(-1,1)$
j. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe para toda c en el intervalo abierto $(1,3)$

2.6 Continuidad

CONTINUIDAD EN UN PUNTO

Analicemos la continuidad de la siguiente función



a. ¿En qué intervalo es continúa?
b. ¿Cuáles son los valores de x en que la función es discontinúa?

- Analicemos que sucede en $x = 2$. Responder

  $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

  $f(2) =$

  Dado que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ … $f(2)$, entonces la función es _______________

- Analicemos que sucede en $x = 3$. Responder

  $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

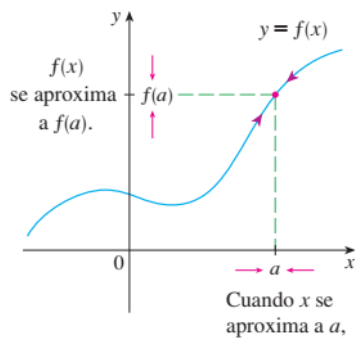
  $f(3) =$

  Dado que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ … $f(3)$, entonces la función es _______________

CONDICIONES PARA LA CONTINUIDAD EN UN PUNTO

Una función $f(x)$ es continua en $x = a$ si y sólo si se cumplen las siguiente tres condiciones.

1. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) =$
2. $\exists\, f(a) =$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$



O de forma más general

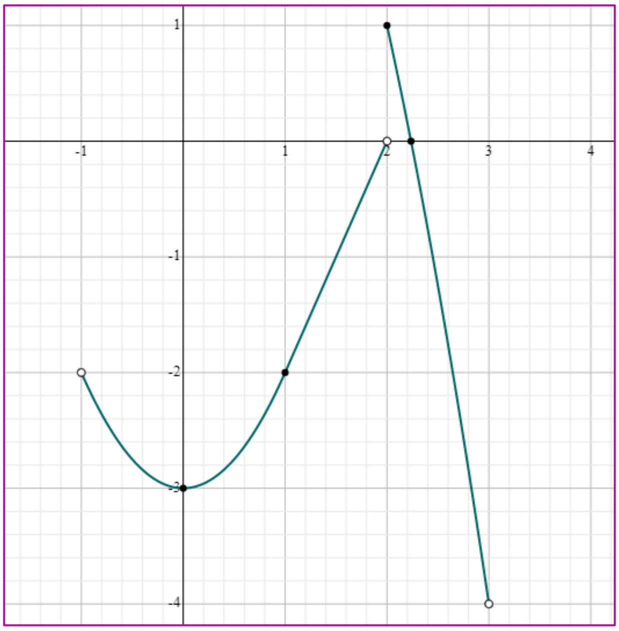
$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Por ejemplo sea la función $f(x)$ definida tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & si \quad -1 < x < 1 \\ 2x - 4 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2 & si \quad 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

Analicemos la continuidad en $x = 1$ y en $x = 2$

<u>En $x = 1$</u>



- $f(1) = 2.1 - 4 = -2$
- $\lim_{x \to 1} f(x) =$

Para analizar dicho límite debo hacerlo por medio de límites laterales

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 3 = 1^2 - 3 = -2 = l_1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x - 4 = 2.1 - 4 = -2 = l_2$$

$$l_1 = l_2 = -2$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -2$$

- $-2 = f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = -2$

Por lo tanto, $f(x)$ es continúa en $x = 1$

<u>En $x = 2$</u>

- $f(2) = 5 - 2^2 = 1$
- $\lim_{x \to 2} f(x) =$

Para analizar dicho límite debo hacerlo por medio de límites laterales

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x - 4 = 2.2 - 4 = 0 = l_1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 5 - x^2 = 5 - 4 = 1 = l_2$$

$$0 = l_1 \neq l_2 = 1$$

$$\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$$

No existe el límite de la función en $x = 2$ y por lo tanto la función no es continúa en $x = 2$

CONTINUIDAD EN INTERVALOS

Decimos que las funciones son continuas en un intervalo, si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.
Por ejemplo:

- Las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$
- Las funciones racionales son continua en todo su dominio.

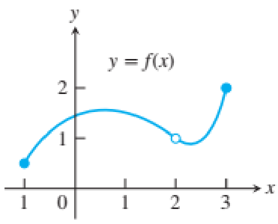
Ejercicio 16. Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 2 \\ 8-2x & x>2 \end{cases} \quad \text{en } x=2$$

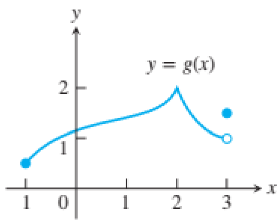
$$g(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & x<-1 \\ \dfrac{1}{x-4} & -1\le x\le 2 \\ \dfrac{1}{4}x-1 & x>2 \end{cases}$$

Ejercicio 17. Indicar si la función es continúa en el intervalo $[-1;3]$. Si no lo es, explicar donde falla la continuidad.

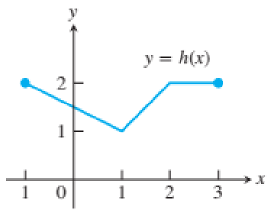
1.



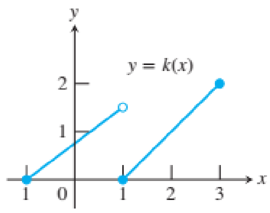
2.



3.



4.



Ejercicio 18. Considerar la siguiente función, cuya gráfica es:

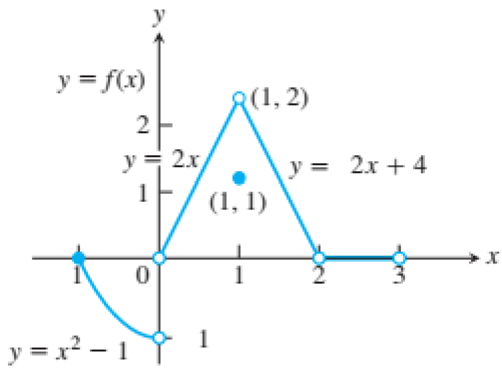
$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & -1\le x<0 \\ 2x, & 0<x<1 \\ 1, & x=1 \\ -2x+4, & 1<x<2 \\ 0, & 2<x<3 \end{cases}$$

a. ¿Existe $f(-1)$?
b. ¿Existe $\lim_{x\to -1^+} f(x)$?
c. ¿ $\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$?
d. ¿Es f continua en $x=-1$?

i. a. ¿Existe $f(1)$?
b. ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?
c. ¿ $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$?
d. ¿Es f continua en $x=1$?

ii. a. ¿Está f definida en $x=2$?
b. ¿Es f continua en $x=2$?

iii. ¿En qué valores de x es continua f?



Ejercicio 19. Analizar la continuidad de f en en $x=-1$ y $x=3$

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & si \quad x<-1 \\ x-1 & si \quad -1\le x<3 \\ x^2+1 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$$

exactamente 7500$? Graficar.

17) Encontrar a y b reales, tal que: $f:\Re \to \Re / f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x<1 \\ ax+b & si\ 1\le x\le 2 \\ 3x & si\ x>2 \end{cases}$ resulte continua en x = 1 y $x=2$

Ejercicio 19$\frac{1}{2}$. Encontrar a y b reales para que la función sea continua en todo su dominio. Sea f una función tal que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con

a.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\quad x<1 \\ ax+b & si\ \ 1\le\ x\le 2 \\ 3x & si\quad x>2 \end{cases}$$

b.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\quad x<0 \\ ax+b & si\ \ 0\le\ x<3 \\ x^2-2 & si\quad x\ge 3 \end{cases}$$

PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD

SI b es un número real y f y g son funciones continuas en $x=c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en c.

1. Múltiplo escalar de f: $b\cdot f$
2. Suma o diferencia entre f y g: $f\pm g$
3. Producto entre f y g: $f\cdot g$
4. Cociente entre f y g: $\frac{f}{g}$ siempre que $g\neq 0$

De esta forma las siguientes funciones son continuas en todo su dominio:

- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.
- Funciones radicales.
- Funciones exponenciales y logarítmicas.
- Funciones trigonométricas.

Y partiendo de estas funciones podemos construir una infinidad de funciones continuas en su dominio aplicando las propiedades de la continuidad, como por ejemplo.

$$f(x)=x+\operatorname{sen}x\quad f(x)=3\tan x\quad f(x)=\frac{x^2+1}{\cos x}\quad f(x)=e^{x^2}$$

EJERCICIOS

Ejercicio 20. Indicar los intervalos en que las siguientes funciones son continuas.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}\qquad g(x)=\ln(2x-1)\qquad h(x)=\sqrt{5x+10}$$

Ejercicio 21. Indicando las propiedades de continuidad, indicar en qué intervalos las siguientes funciones son continuas.

$$f(x)=2\sqrt{3-x}\qquad g(x)=\frac{\ln x+e^x}{x^2-1}$$

Ejercicio 22. Indicar en qué intervalos la función es continúa.

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x \cdot \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 23. La fuerza gravitacional en nuestro planeta, para una masa unitaria a una distancia r del centro de la Tierra es

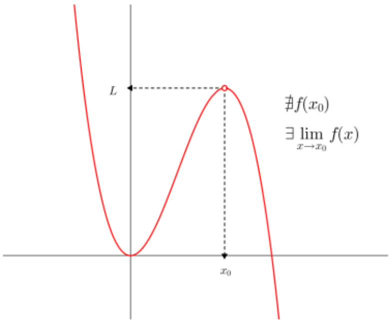
$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & r < R \\ \dfrac{GM}{r^3} & r \geq R \end{cases}$$

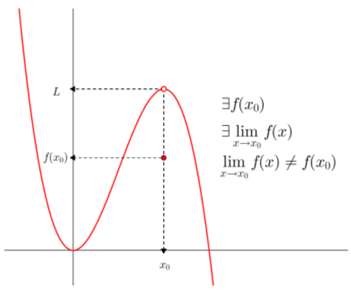
Donde M es la masa de la Tierra, R es su radio y G es la constante gravitacional. ¿Es F una función continua en r?

2.7 Discontinuidad

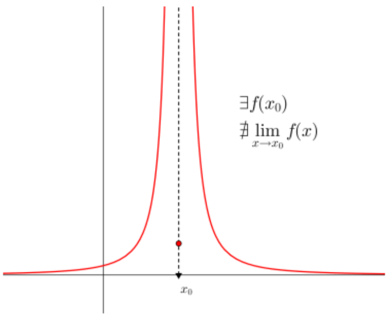
Cuando una función es discontinua en x_0, es porque no se cumple alguna/s de las condiciones requeridas en la definición de continuidad. Las distintas discontinuidades presentan características que las diferencian de las otras, por lo que podemos realizar una primera clasificación de las discontinuidades, en evitable y no evitables:

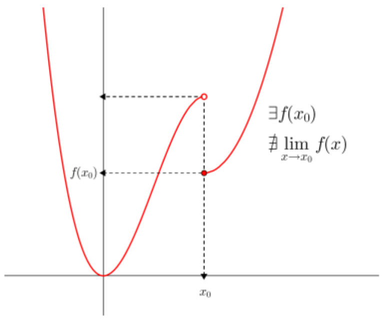
- La función f presenta una **discontinuidad evitable** en x_0 si existe el límite de la función en x_0, pero no existe $f(x_0)$; o existe $f(x_0)$ y también el límite de la función en x_0, pero no coinciden.





- En cualquier otro caso f presenta una **discontinuidad no evitable** en x_0

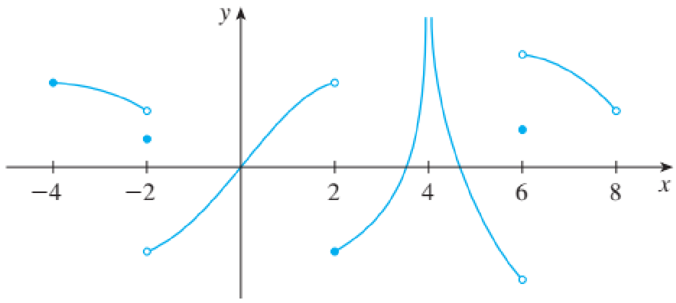




Ejercicio 20. Dada la siguiente función

a. Indicar los intervalos en que es continúa

b. Indicar los puntos de discontinuidad (discriminando entre evitable o no evitable)



Ejercicio 21. Para cada una de las siguientes funciones:

a. Determinar el dominio.
b. Indicar los intervalos de continuidad.
c. Indicar los puntos en donde la función es discontinua y clasificarla en evitable o no evitable.
d. Interpretar la función gráficamente usando Symbolab o GeoGebra según convenga.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{x^3} & si\ x < 0 \\ \cos x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$j(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1 & si \quad -1 < x \leq 2 \\ 2x + 6 & si \quad 2 < x < 3 \\ x^3 - 15 & si \quad 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Derivada 3

3.1 Derivada: Una interpretación física

Ejercicio 0. Los 100 metros llanos.
Supongamos que la función

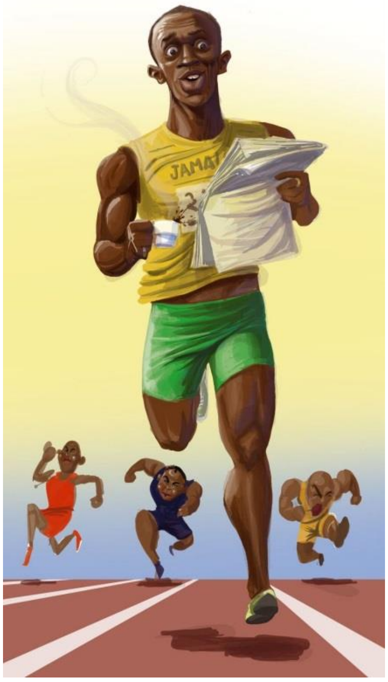
$$f(t) = 0{,}05t^3 + 5t$$

describe cómo corre Usaín Bolt los 100 metros llanos, donde t el tiempo medido en segundos $[\text{seg}]$ y f es la distancia recorrida en metros $[\text{m}]$ después de t segundos.

a. ¿Cuál fue la velocidad promedio del corredor si realizó los 100 metros en 10 seg?

Es claro que Usaín Bolt no corre los 100 metros a una velocidad constante, en algunos tramos corre más rápido que otros.

b. Analizar cuál es la velocidad promedio en la que corrió los primeros 8 segundos.
c. ¿Y cuál fue la velocidad promedio entre los 4 y los 8 segundos?
d. ¿Y entre los 4 y los 6 segundos?
e. ¿Cómo podríamos calcular a qué velocidad corría Usaín Bolt a los 4 segundos?
f. ¿Podemos saber si Usaín Bolt aumenta la velocidad cuándo comienza la carrera o cuándo está terminando?



DERIVADA

La derivada de una función f en un número a, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Y nos denota la rapidez de cambio (o tasa de variación) en a.

Así por ejemplo si

$$f(t) = 0{,}05t^3 + 5t$$

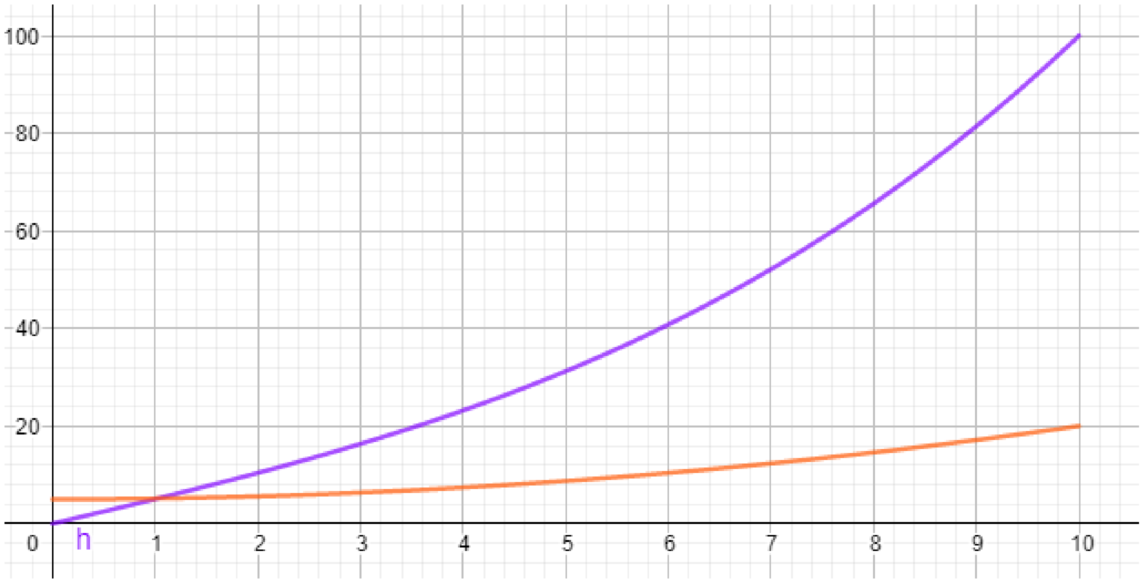
$$f'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = 5{,}6$$

Nos indica que la velocidad instantánea (o rapidez) en 2 es de $5{,}6 \frac{m}{seg}$

GRÁFICO DE LA FUNCION DERIVADA

Siguiendo con el ejemplo de la velocidad de Usaín Bolt, grafiquemos la función que representa la distancia recorrida según el tiempo, en segundos ($f(t)$); y la gráfica de la velocidad instantánea ($f'(t)$)

Gráfica de la función $f(t)$ [violeta] y $f'(t)$ [naranja].



OTRAS NOTACIONES

Si usamos la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la variable dependiente es y, entonces algunas notaciones alternativas comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)] = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se denominan **operadores diferenciales** porque indican la operación de derivación, que es el proceso de calcular una derivada.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Para derivar funciones existen reglas prácticas que hacen más ágil el cálculo sin tener que realizar el límite del cociente incremental.

En notación de Leibniz, escribimos las siguientes reglas:

Derivada de una función constante Sea c una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Regla de potencia Sea n un número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Regla del múltiplo constante. Sea c una cosntante y f una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[c\,f(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

Regla de la suma (resta). Sean f y g funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

EJEMPLO

$$f(x) = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5$$

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = f'(x) = 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

Ejercicio 2. Calcular por regla las siguientes derivadas.

a. $f(x) = 5$
b. $f(x) = x^2$
c. $f(x) = x^4$
d. $f(x) = x$
e. $f(x) = \frac{1}{x}$
f. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
g. $f(x) = \sqrt{x}$
h. $f(x) = \sqrt[4]{x}$

Ejercicio 3. Calcular por regla las siguientes derivadas.

a. $f(x) = 2x^5 + x^4 - 2x + 5$
b. $f(t) = 40t - 16t^2$
c. $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$
d. $f(x) = x^3 - 4x + 6$
e. $f(x) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$
f. $f(t) = 2t^{-\frac{2}{3}}$
g. $f(x) = \frac{3}{4}x^8$
h. $f(x) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$
i. $f(x) = (x-2)(2x+3)$

Ejercicio 5. La función $h(t)$ representa la altura [m] de una pelota que es lanzada al aire en función del tiempo [seg].

$$h(t) = 40t - 16t^2$$

a. ¿Desde qué altura fue lanzada la pelota?
b. ¿A qué altura se encontraba al segundo de ser lanzada?
c. Calcular la velocidad promedio entre los 0,5 segundos y el segundo 1,25.
d. Calcular la velocidad instantánea a los 1,25 segundos y a los 2,2 segundos.
e. Graficar la función $f(t)$ y $f'(t)$. ¿Qué relación se puede establecer entre las gráficas? ¿Qué representa la raíz de $f'(t)$?

Ejercicio 5 $\frac{1}{2}$. Si una piedra es lanzada hacia arriba en el planeta Marte, su altura [m] después de t segundos está dada por

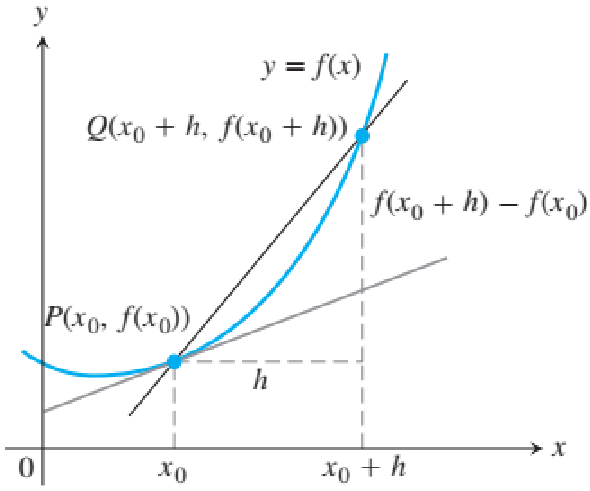
$$H(t) = 10t - 1.86t^2$$

a. Encuentre la velocidad de la piedra en el primer segundo luego de ser lanzada.
b. ¿Cuándo caerá la piedra en la supercie?
c. ¿Con qué velocidad caerá?
d. ¿En qué momento alcanza su máxima altura?

3.2 Derivada: Una mirada desde lo geométrico

La pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$ es el número

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$



Considerando que el límite exista.
La recta tangente a la curva en P es la recta que pasa por P con pendiente m.

Otra forma de expresión es

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ejercicio 6. Dada la siguiente función $f(x) = x^3 - 12x$ hallar la pendiente de la recta tangente en los valores

$$x_0 = -4 \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 4$$

Graficarla e interpretar geométricamente el signo de la derivada.

Ejercicio 7. Encuentre los puntos en la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la tangente es horizontal.

Ejercicio 8. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ tiene una tangente horizontal?

Ejercicio 9. Demuestre que la curva $6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4.

ALGUNAS REGLAS MÁS DE DERIVACIÓN

SI bien, existen varias reglas de derivación, en este curso solo recurriremos a una selección de ellas, a las reglas más útiles para los problemas que son atravesados por la derivación.

Derivada de la función exponencial natural.

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

Derivada de la función logaritmo natural.

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

Derivada de funciones trigonométricas.

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\text{sen}\,(x)$$

La regla del producto. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]$$

EJEMPLO

$$\frac{d}{dx}[x\cdot e^x] = 1.e^x + x.e^x = e^x + x.e^x$$

La regla del cociente. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)]\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

EJEMPLO

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^x}{\text{sen}(x)}\right] = \frac{e^x.sen(x) - e^x.\cos(x)}{[sen\,(x)]^2}$$

Ejercicio 10. Derivar usando las reglas de derivación

$f(x) = (x^3 + 2x)e^x$ $\quad g(x) = \sqrt{x}\,e^x$ $\quad y = \dfrac{\text{sen}\,x}{x^2}$

$j(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$ $\quad k(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ $\quad m(t) = (t+e^t)(3-\cos t)$

Ejercicio 11.

a. SI $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ encuentre $f'(1)$.

b. SI $g(x) = \frac{x}{e^x}$ encuentre $g''(1)$

Ejercicio 12. La función $f(t)$ expresa la concentración en sangre de una droga t horas después de haber inyectado una determinada dosis.

$$f(t) = \frac{t}{20t^2 + 50t + 80}$$

a. Indicar el dominio y la imagen en el contexto del problema.
b. ¿En qué momento la concentración en sangre de la droga supera el 0.005?
c. ¿Cuál es la máxima concentración en sangre de la droga? ¿En qué momento ocurre?
d. ¿Cuál es la variación de la concentración en sangre de la droga en una hora? ¿y en dos horas? ¿y en cinco horas?
e. Determinar en qué intervalos de tiempos la concentración en sangre crece y en cuáles decrece.

f. ¿Cuál es la concentración de sangre de la droga que se espera que quede en el cuerpo?

3.3 Función compuesta y Regla de la cadena

FUNCIÓN COMPUESTA

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada la composición de f con g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

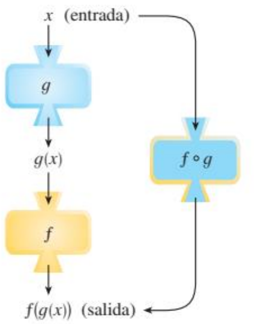


FIGURA 11
La máquina $f \circ g$ está compuesta de la máquina g (primera) y a continuación la máquina f.

EJEMPLO

Sea $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 3$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-3) = (x-3)^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2+1) = x^2 + 1 - 3 = x^2 - 2$$

Mirar el siguiente video: minuto 8:14 hasta el 9:12
https://www.youtube.com/watch?v=M5QHwkkHgAA&ab_channel=DotCSV

REGLA DE LA CADENA

Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida por $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x y F' está dado por el producto

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

En notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables ambas, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Nota: Al usar la Regla de la cadena trabajamos de "afuera hacia adentro". Es decir, primero derivamos la función exterior f (evaluada en la función interior $g(x)$) y luego multiplicamos por la derivada de la función interior g.

EJEMPLO

Sea $F(x) = \cos(x^2+1)$, en este caso tenemos que

$$f(x) = \cos x \;\text{ y }\; g(x) = x^2 + 1$$

De modo que

$$F(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2+1) = \cos(x^2+1)$$

Luego

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

$$F'(x) = -\operatorname{sen}(x^2+1)(2x)$$

$$= -2x \operatorname{sen}(x^2+1)$$

Ejercicio 13. Escribir la función compuesta en la forma $f\big(g(x)\big)$ y luego calcule $[f(g(x)]'$

a. $y = \operatorname{sen}(2x)$

b. $y = (2x^3+5)^4$

c. $y = \cos(x^3)$

d. $y = \sqrt{2 - e^x}$

e. $y = e^{2x}$

f. $y = \ln(x^2)$

Ejercicio 14. La cantidad de habitantes de cierta isla está modelizada por la siguiente función:

$$P(t) = \frac{20000}{1 + 6e^{-0,1t}}$$

Donde P indica la cantidad de habitantes de la población en función de tiempo t, medido en años.

a. ¿Cuántos habitantes se cree que inicialmente abordaron la isla?
b. ¿En qué año se registró la máxima tasa de crecimiento?
c. ¿Cuál es la cantidad de habitantes que se espera alcanzar en el futuro?

Ejercicio 15. Sea f una función derivable. Calcular las siguientes derivadas

a. $\left[\text{sen}\big(f(x)\big)\right]' =$
b. $\left[f\big(\text{sen}^2(x)\big)\right]' =$
c. $[f(e^x)]' =$
d. $[f^2(\cos(2x))] =$

Ejercicio 16. Encontrar los puntos en el intervalo $[0; 2\pi]$ de la función

$$f(x) = 2sen(x) + sen^2(x)$$

en la que la recta tangente es horizontal.

Ejercicio 17. Si $F(x) = f\big(g(x)\big)$, donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$, encontrar $F'(5)$.

Ejercicio 18. Si $h(x) = f^2(g(x))$, donde $g(0) = 1$, $g'(0) = -2$, $f(1) = 2$ y $f'(1) = -1$, encontrar $h'(0)$

Ejercicio $\mathbf{18\frac{1}{2}}$. Si $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$. Encontrar $r'(1)$.

3.4 Derivabilidad de una función

DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN

- Una función f es **derivable en a** si existe $f'(a)$.
- Una función f es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) si es derivable en todo punto de dicho intervalo.

Existen varias formas para analizar si una función f es derivable/diferenciable; una de ellas es derivar la función y analizar el dominio,

- En todos los puntos del dominio que la función f' esté definida, entonces es derivable en dichos puntos.
- En aquellos puntos en los que la función f' no este definida, f no es derivable.

EJEMPLOS

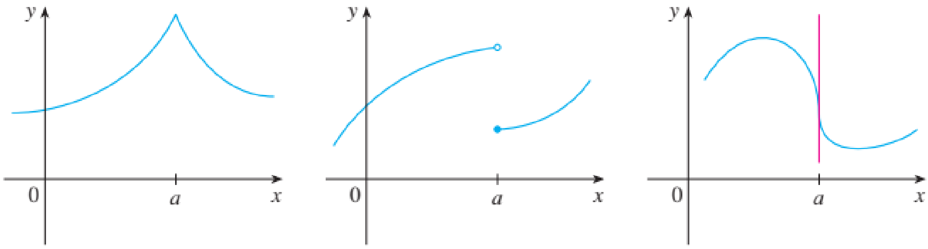
Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 + 3x$$
$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 2x + 3$$
$$\text{Dom } f' = \mathbb{R}$$
f es derivable en $\mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$
$$\text{Dom g} = \mathbb{R} - \{0\}$$
$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$\text{Dom } g' = \mathbb{R} - \{0\}$$
g es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

$$h(x) = \sqrt[3]{x}$$
$$\text{Dom } h = \mathbb{R}$$
$$h'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$
$$\text{Dom } h' = \mathbb{R} - \{0\}$$
h es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

Tres aspectos geométricos en las que f no es derivable en un punto a



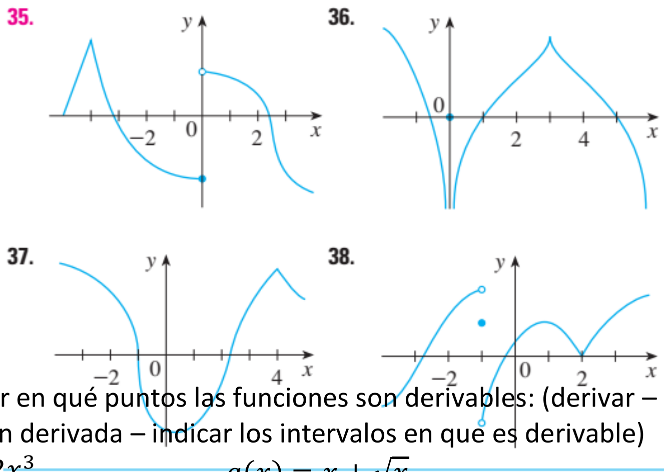
(a) Una esquina (b) Una discontinuidad (c) Una tangente vertical

DERIVABILIDAD Y CONTINIDAD

Si f es derivable en a, entonces f es continua en a

Ejercicio 19. Realizar los ejercicios 35 al 38 del Stewart (pág. 157)

35–38 Se da la gráfica de f. Exprese, con razones, los números en los que f no es derivable.



Ejercicio 20. Analizar en qué puntos las funciones son derivables: (derivar – analizar el dominio de la función derivada – indicar los intervalos en que es derivable)

$$f(x) = x^2 - 2x^3 \qquad g(x) = x + \sqrt{x} \qquad h(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 3}$$

$$j(x) = (x^2 - 1)^{2/3} \qquad k(x) = \ln(x + 1) \qquad m(x) = \cos(x^2)$$

3.5 Máximos y mínimos relativos

Ejercicio 21. Una empresa de producción de envases metálicos quiere diseñar un cilindro sin tapa superior con capacidad de 500 cm³ de volumen y desea minimizar la cantidad de material utilizado en su fabricación.
La ecuación del volumen de un cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

donde r es el radio y h la altura.
La superficie del cilindro sin tapa es la suma del área lateral y la base:

$$A = 2\pi rh + \pi r^2$$

a. Hola expresa el área hola te la superficie del cilindro sin tapa hoy en función hola del radio.
b. Hollar hola la dimensión del radio hoy que minimiza la cantidad de material hola utilizado

Ejercicio $21\frac{1}{2}$. Sea la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$$

a. Analizar el dominio de la función.
b. Analizar la continuidad y derivabilidad.
c. Hallar los puntos donde la pendiente de la recta tangente a la curva es nula.
d. Partir el dominio de la función en subconjuntos:

$$(-\infty; x_1); (x_1, x_2); \cdots; (x_n, \infty)$$

Siendo $x_1, x_2, \cdots, x_n$ los valores de la abscisa correspondiente a la recta tangente con pendiente nula.
e. Evaluar la derivada en puntos pertenecientes a cada uno de los intervalos creados.
f. Completar la siguiente tabla

Intervalo				
f'				
Crecimiento				

INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

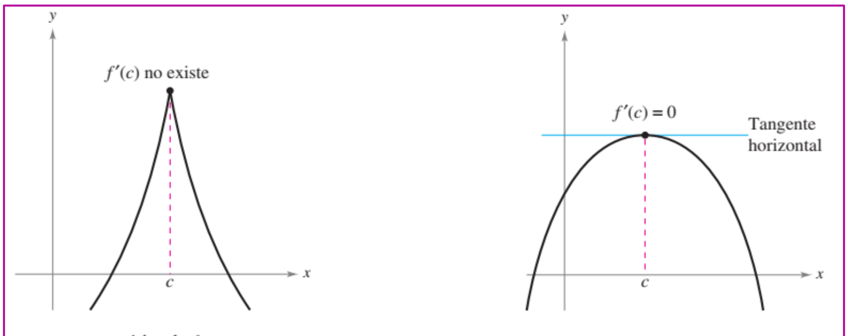
Sea una función f continua $[a, b]$ y derivable (a, b)

- Una funciónf es **creciente** en el intervalo (a, b) si $f'(x) > 0$, con $a < x < b$
- Una funciónf es **decreciente** en el intervalo (a, b) si $f'(x) < 0$, con $a < x < b$

PUNTOS CRÍTICOS

Un punto crítico es un punto que pertenece al dominio de la función f y que no pertenece al dominio de la derivada de la función o que la derivada en dicho punto sea nula; es decir:
Sea $c \in \text{Dom } f$, c es un punto crítico si satisface:

$$f'(c) = 0 \vee c \notin \text{Dom } f'$$



c es un punto crítico de f

Los puntos críticos **son posibles** máximos o mínimos relativos.

MÁXIMOS Y MÍNITOS RELATIVOS

Una función f tiene un **máximo relativo** en un punto c perteneciente al dominio si

$f(x) \leq f(c)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a c

Una función f tiene un **mínimo relativo** en un punto c perteneciente al dominio si

$f(x) \geq f(c)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a c

Teorema: Si f es una función continúa en c y c es un punto crítico, entonces

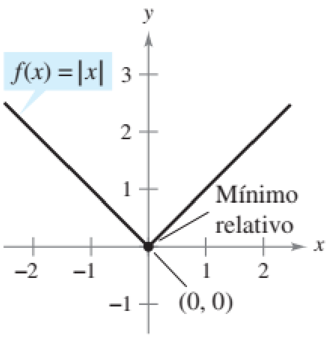
$(c, f(c))$ es un **máximo relativo** si f pasa de ser creciente a decreciente en c

$(c, f(c))$ es un **mínimo relativo** si f pasa de ser decreciente a creciente en c

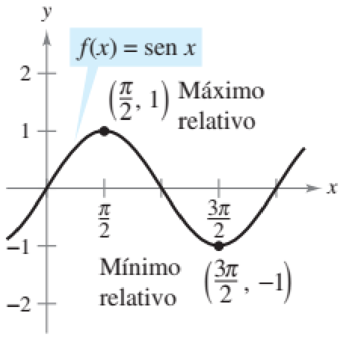
ANÁLISIS DE LA DERIVADA SEGUNDA

Sea f'' una función continua cerca de x_0.

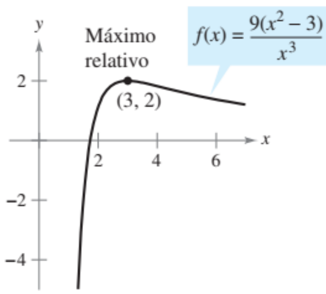
a. Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.
b. Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.
c. Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$, entonces no se tiene suficiente información.



b) $f'(0)$ no existe



c) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = ($



a) $f'(3) = 0$

EJEMPLO

Sea $f(x) = x^4 - 4x^3$. Es claro que el dominio de f son todos los reales. Analicemos el crecimiento de la función, para ello necesitamos la derivada primera:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

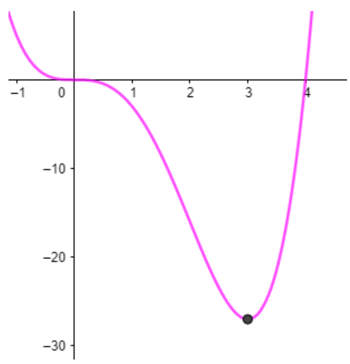
Para analizar el crecimiento debemos buscar primero, si existen, los puntos críticos; para ello necesitamos hallar los valores que anulan a la derivada primera:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$4x^2(x - 3) = 0$$

Luego los valores que la anulan son

$x_1 = 0 \wedge x_2 = 3$



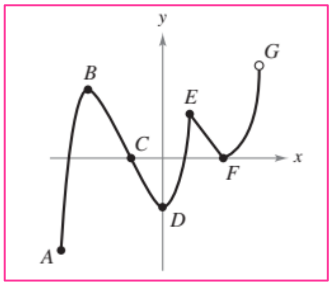
Por lo tanto los puntos $(0; 0)$ y $(3, f(3))$ son posibles máximos o mínimos relativos, veamos si lo son.

Intervalos del dominio	$(-\infty; 0)$	$(0,3)$	$(3, \infty)$
	$f'(-1) < 0$	$f'(1) < 0$	$f'(4) > 0$
Crecimiento	Decrece	Decrece	Crece

La función es decreciente en $(-\infty; 0) \cup (0; 3)$ y crece de $(3; \infty)$

Y tienen un mínimo relativo en $(3; -27)$

Ejercicio 22. Decidir si cada uno de los puntos etiquetados es:



- Máximo relativo
- Mínimo relativo
- Ninguno de los anteriores

Ejercicio 23. Indicar máximos y mínimos relativos de las funciones en los intervalos dados; y analizar los intervalos de crecimiento.

a. $f(x) = x^2 - 2x$, $[0, 4]$

b. $g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$, $[-1, 2]$

c. $h(x) = x^3 - 12x$, $[0, 4]$

d. $j(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $[-2, 2]$

e. $k(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$, $[-1. 1]$

Ejercicio 24. Realizar el siguiente ejercicio del Thomas (pág 252)

En los ejercicios 11 a 14, relacione cada tabla con una de las gráficas.

11.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

12.

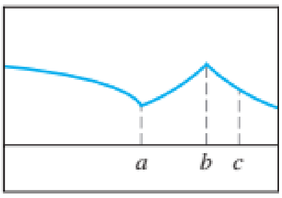
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	-5

13.

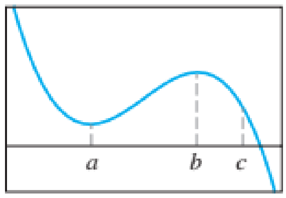
x	$f'(x)$
a	no existe
b	0
c	-2

14.

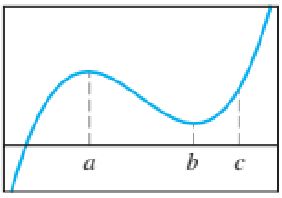
x	$f'(x)$
a	no existe
b	no existe
c	-1.7



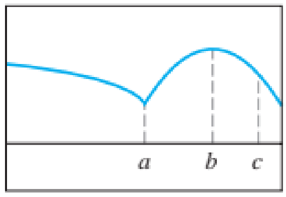
(a)



(b)



(c)



(d)

Ejercicio 25. Encontrar las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 125 metros cuya área sea tan grande como fuese posible.

Ejercicio 26. Encontrar las dimensiones de un rectángulo con un área de $1000m^2$ cuyo perímetro sea el más pequeño posible.

Ejercicio 27. Un modelo empleado para el rendimiento Y de una cosecha agrícola como una función del nivel de nitrógeno n en el suelo (medido en unidades apropiadas) es

$$Y(n) = \frac{kn}{1 + n^2}$$

Donde k es una constante positiva. ¿Qué nivel de nitrógeno da el mejor rendimiento?

Ejercicio 28. El alcance horizontal de un proyectil disparado en el vacío por un cañón que forma un ángulo ϕ con la horizontal es:

$$R(\phi) = \frac{v_0 \operatorname{sen}(2\phi)}{g}$$

Con $v_0 =$ velocidad inicial y $g =$ aceleración de la gravedad.

Determinar el ángulo ϕ para el cual el alcance es máximo con una velocidad inicial dada.

3.6 Concavidad y convexidad

Ejercicio 29. La función que describe el crecimiento del pez abadejo se obtuvo de ajustar una función exponencial a un número de datos de longitud promedio (L) medida en centímetros tomados a lo largo del tiempo, medido en años:

$$L(t) = 53 - 42{,}824e^{-2t}$$

a) Identificar las variables independientes y dependientes con sus respectivas unidades de medida.
b) Indicar el dominio de la función en el contexto del problema (considerando que los abadejos llegan a vivir hasta 15 años)
c) Indicar la imagen de la función en el contexto del problema y expresar su significado.
d) ¿Cuántos miden, en promedio, los abadejos cuando comienzan a realizarse las mediciones?
e) Si se pueden pescar a partir de los $35\ \mathrm{cm}$, ¿a partir de qué edad se pueden empezar a pescar?
f) ¿Cuál es la tasa de crecimiento de los abadejos al año, a los dos años y a los cinco años?
g) ¿Cuándo crecen más rápidos los abadejos?

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

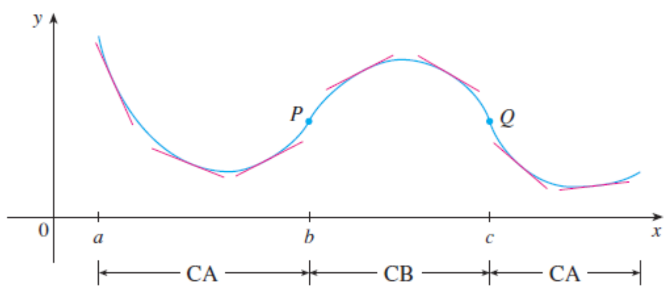
Una función (o su gráfica) se denomina **cóncava** (o cóncava hacia arriba) en un intervalo I si f' es una función creciente en I.

Una función (o su gráfica) se denomina **convexa** (o cóncava hacia abajo) en un intervalo I si f' es una función decreciente en I.

En el gráfico se puede observar que las pendientes de las rectan tangentes aumentan de izquierda a derecha en el intervalo (a, b), de modo que f' es creciente y por lo tanto f es cóncava en (a, b).

Del mismo modo, se puede observar que las pendientes de las rectas tangentes disminuyen de izquierda a derecha en (b, c), de modo que f' es decreciente y por lo tanto f es convexa en (b, c).

Los puntos P y Q reciben el nombre de puntos de inflexión, son los puntos en donde la función pasa de ser cóncava a convexa (o viceversa).



ANÁLISIS DE CONCAVIDAD

a. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava en I.
b. Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es convexa en I.

PUNTO DE INFLEXIÓN

Un punto $(x_0, f(x_0))$ se denomina **punto de inflexión** si en él la curva que representa la función f pasa de cóncava a convexa o viceversa.

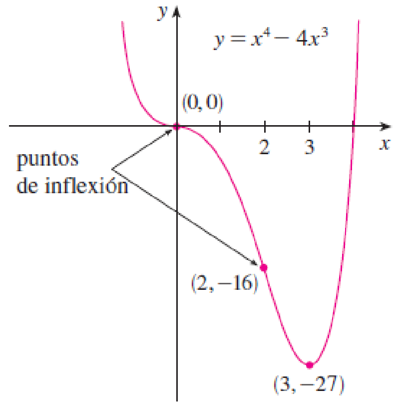
Un punto $(x_0, f(x_0))$ <u>es un posible</u> punto de inflexión de la función f si satisface alguna de las siguientes condiciones

$$f''(x) = 0 \text{ ó } x_0 \notin \text{Dom } f''$$

EJEMPLO

Sea $f(x) = x^4 - 4x^3$. Analicemos la concavidad, para ello calculamos la derivada primera y la segunda

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \qquad f''(x) = 12x^2 - 24x$$



Primero buscamos los números que anulan a la derivada segunda para encontrar los **posibles puntos de inflexión**:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0$$
$$12x(x-2) = 0$$

Luego los valores que anulan a la función son:

$$x_1 = 0 \wedge x_2 = 2$$

Por lo tanto $(0;0)$ y $(2,-16)$ <u>son posibles puntos de inflexión</u>, para identificar si lo son o no analizamos la concavidad en los intervalos abiertos del dominio:

Intervalos del dominio	$(-\infty;0)$	$(0;2)$	$(2;\infty)$
	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$
Signo de $f´´$	cóncava	convexa	cóncava

Luego los puntos $(0;0)$ y $(2,-16)$ son puntos de inflexión y la función es cóncava en $(-\infty;0) \cup (2;\infty)$ y convexa en $(0;2)$

Ejercicio 30. Analizar la concavidad de las siguientes funciones en sus dominios:

a. $f(x) = x^4 + 3x^3 - x + 1$

b. $g(x) = x^2 e^x$

c. $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$

d. $j(x) = \ln(x^2+1)$

Ejercicio 31. Una curva de respuesta a un medicamento describe el nivel de medicación en el torrente sanguíneo después de administrarla. Con frecuencia se usa una función de variación rápida

$$S(t) = At^p e^{-kt}$$

para modelar la curva de respuesta, reflejando una variación rápida inicial del nivel de medicamento y luego una reducción más gradual.

Si, para un medicamento en particular, $A = 0{,}01$, $p = 4$, $k = 0{,}07$ y t se mide en minutos, calcular:

a. ¿Cuál es la tasa del nivel de medicación en el torrente sanguíneo a los 20 minutos? ¿y a los 25? ¿y a los 80?
b. ¿Cuál es el momento en que el nivel de medicación alcanza su valor más alto? ¿Cuál es ese valor?
c. ¿En qué intervalo de tiempo la tasa de nivel de medicación se encuentra en aumento?

d. Con el trascurrir del tiempo, ¿qué nivel de medicación tiende a quedar en el torrente sanguíneo?

Ejercicio 32. Una población de peces en un lago está inicialmente en 200 individuos. Se sabe que la tasa de crecimiento inicial de la población es proporcional a su tamaño y a la cantidad de recursos disponibles en el lago.

La función que modela la cantidad de individuos en función del tiempo en años es:

$$F(t) = \frac{1000}{1 + 4e^{-0.15t}}$$

a. Indicar el dominio y la imagen en el contexto del problema.
b. Indicar la cantidad de peces luego de 5, 10 y 15 años.
c. ¿En qué momento la población se duplica? ¿En qué momento la población alcanza los 1000 individuos?
d. ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la población en el primer año? ¿y a los 9 años?
e. ¿Qué sucede con la tasa de crecimiento de los individuos a partir de los 10 años?
f. ¿Cuál es la cantidad máxima de peces que puede contener el lago?
g. ¿Cuál es la tasa máxima de crecimiento de la población? ¿En qué tiempo se ocurre?

Integrales **4**

4.1 Diferenciales y Antidiferenciales

Ejercicio 0. Completa la siguiente tabla siendo dx un desplazamiento horizontal de la variable independiente.

Sea $f(x) = 107x^2 + 37x$ y sea $L(x) = 37x$ la recta tangente a f en el origen, graficar en GeoGebra los elementos y luego completar la siguiente tabla

x	$f(x)$	$L(x)$	dx	$f(0+dx)$	$L(0+dx)$	$f'(x)$	$f'(x)dx$
0	0	0	0,5				
0			0,3				
0			0,1				
0			0,01				
0							
0							

Algunas veces utilizamos la notación de Leibniz, dy/dx para representar la derivada de y con respecto a x. A pesar de su apariencia, **ésta no es una razón.** Ahora veremos dos variables nuevas, dx y dy; con la propiedad de que, si su razón existe, ésta será igual a la derivada.

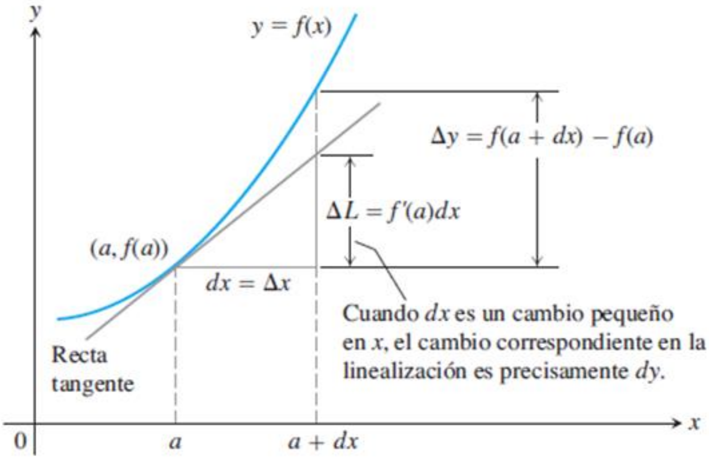
DIFERENCIAL

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. La **diferencial dx** es una variable independiente. La **diferencial dy** es

$$dy = f'(x)dx$$

A diferencia de la variable independiente dx, la variable dy siempre es una variable dependiente. Depende de x y de dx. Si se da un valor específico a dx y x es un número particular en el dominio de la función f, entonces el valor numérico de dy está determinado.

Geométricamente, la recta tangente L es la mejor aproximación lineal a la curva f en $(x_0, f(x_0))$ para valores próximos a x_0. La diferencial dy es el cambio ΔL en la linalización de f cuando $x = x_0$ cambia por una cantidad $\Delta x = dx$



El cambio correspondiente en la recta tangente L es

$$\Delta L = L(a + dx) - L(a) = dy$$

Sea m la pendiente de la recta tangente L

$$f'(x) = m = \frac{\Delta L}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = f'(x)dx$$

Esto es, el cambio en la linealización de f es precisamente el valor de la diferencial dy cuando $x = a$ y $dx = \Delta x$. En consecuencia, dy representa la magnitud que la recta tangente sube o baja cuando x cambia en una cantidad $dx = \Delta x$.

EJEMPLO

Función	Diferencial
$y = x^2$	$dy = 2x\ dx$
$y = 2\text{sen x}$	$dy = 2\cos x\ dx$
$y = \frac{1}{x}$	$dy = -\frac{dx}{x^2}$

Ejercicio 1. Dada la función hallar la diferencial dy

a. $f(x) = x^5 + 37x$
b. $g(x) = \sqrt{x}$
c. $h(x) = \ln(2x - 2)$
d. $j(x) = \frac{x^2}{\cos x}$

Ejercicio 2. Dadas las siguientes diferenciales, hallar la función y

a. $dy = 2x\ dx$
b. $dy = 3x^2 dx$
c. $dy = e^x dx$
d. $dy = \cos x\ dx$

e. $dy = \frac{1}{x}\, dx$

f. $dy = x^2 + 4x^3 dx$

ANTIDERIVADA

Una función F es una **antiderivada** de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Por ejemplo

Si $f(x) = 2x$, la antiderivada es $F(x) = x^2$ pues $F'(x) = 2x = f(x)$

Pero ¿solamente $F(x) = x^2$ cumple la condición de $F'(x) = f(x)$? Es claro que no pues $F(x) = x^2 + 2$ también satisface la condición. Por lo tanto la antiderivada más general es

$$F(x) + C \text{ donde } C \text{ es una constante arbitraria}$$

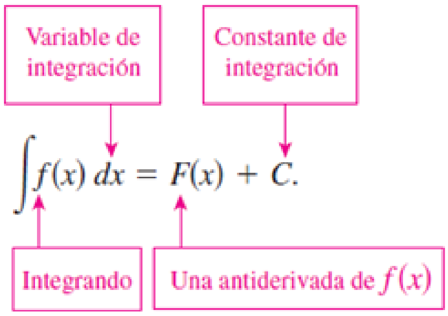
La **antidiferenciación** es el proceso de determinar todas las antiderivadas de una función dada. El símbolo $\int$ denota la operación de antidiferenciación y se escribe

$$\int dy = \int f(x)dx = F(x) + C$$

4.2 Integrales indefinidas

INTEGRALES INDEFINIDAS

El conjunto de todas las antiderivadas de f es la **integral indefinida** de f con respecto a x



Ejercicio 3. Resolver las siguientes integrales indefinidas

a. $\int 2x - 7dx$

b. $\int 10 - x\, dx$

c. $\int \frac{1}{x^2} + x\, dx$

d. $\int 9x^2 - 4x + 5dx$

e. $\int \frac{1}{x} + \operatorname{sen} x\, dx$

f. $\int \cos t + 1dt$

TEOREMA 4.1. Si una función f es un función continua en in intervalo $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES

Sean f y g don funciones integrables y k es una constante, entonces

1. $\int 0\, dx = C$
2. $\int k\, dx = kx + C$

   Propiedad de linealidad (3 y 4)

3. $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$
4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
5. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ con } n \neq -1$

Por ejemplo

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3\frac{x^2}{2} + C = \frac{3}{2}x^2 + C$$

Lo ideal al resolver una integral es reescribir (aplicando propiedades en caso que se pueda), integrar y luego simplificar.

Integral original ⇨ Reescribir ⇨ Integrar ⇨ Simplificar

Por ejemplo

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
a)	$\int \frac{1}{x^3}\,dx$	$\int x^{-3}\,dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
b)	$\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{1/2}\,dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
c)	$\int 2\operatorname{sen} x\,dx$	$2\int \operatorname{sen} x\,dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

Ejercicio 4. Resolver las siguientes integrales, y luego devivar la función primitiva para validar la integral

a. $\int (x+1)(x^3-2)\ dx$

b. $\int \sqrt{2x} + \cos x\, dx$

c. $\int x^{4/3} - 5\operatorname{sen} x\ dx$

d. $\int \left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx$

e. $\int -3\cos x + 2x^5 dx$

f. $\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$

4.3 Integrales definidas

Veamos el siguiente Recurso de GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/cpw2MEw2

Como se ve en el Recurso, lo que se trata es calcular el área encerrada debajo de la curva por medio de aproximaciones de construcciones de rectángulos, este proceso se lo conoce como las sumas de Riemann.

Cuando se satisface la definición, decimos que las sumas de Riemann de f en $[a,b]$ **convergen** a la integral definida $I = \int_a^b f(x)\,dx$ y que f es integrable en $[a,b]$. Existen muchas opciones de una partición P como alternativas de puntos c_k para cada partición. La integral definida existe cuando siempre obtenemos el mismo límite I, sin importar qué elecciones hayamos hecho. Cuando existe el límite, lo escribimos como la integral definida

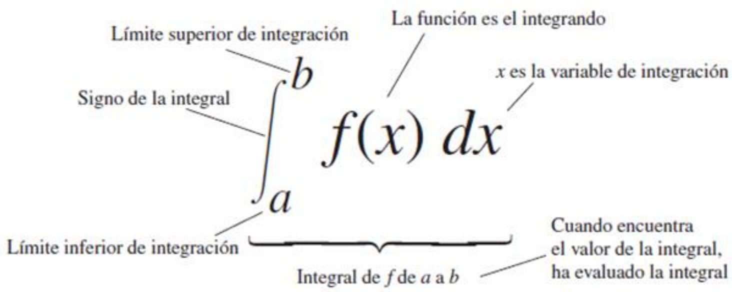
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I = \int_a^b f(x)dx$$

Donde P es toda partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$ con $\|P\| < \delta$, $(\delta > 0)$ y cualquier elección de c_k en $[x_{k-1}, x_k]$

Leibniz introdujo una notación para la integral definida que evidencia su construcción como un límite de sumas de Riemann. Leibniz imaginó a las sumas finitas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ convirtiéndose en una suma infinita de los valores de la función $f(x)$ multiplicada por anchos “infinitesimales” dx de los subintervalos. El símbolo de suma $\sum$ se reemplaza por el símbolo de integral $\int$, cuyo origen es la letra "S". Los valores de la función, $f(c_k)$ son reemplazados por una selección continua de valores de $f(x)$. El ancho de los subintervalos, Δx_k se convierte en la diferencial dx. Es como si sumáramos todos los productos de la forma $f(x)\cdot dx$ cuando x va de a a b. Aun cuando esta notación evidencia el proceso de construcción de una integral, es la definición de Riemann la que da un significado preciso de la integral definida.

INTEGRALES DEFINIDAS

Las funciones continuas son integrables. Es decir, si una función f es continua en un intervalo $[a,b]$, su integral definida en $[a,b]$ existe y es:



Y se lee "la integral de a a b de f de x con respecto a x"

Newton y Leibniz demostraron cómo se podía usar el Cálculo para determinar el área de una región acotada por una curva o un conjunto de curvas, evaluando mediante antidiferenciación una integral definida. El procedimiento incluye lo que se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo, que establece una relación entre derivada e integral definida.

TEOREMA FUNDEMENTAL DEL CÁLCULO. Parte 1

Si f es continua en $[a,b]$, entonces $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) y su derivada es $f(x)$.

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

TEOREMA FUNDEMENTAL DEL CÁLCULO. Parte 2 (Regla de Barrow)

Si f es continua en $[a,b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)-F(a)$$

Por ejemplo

$$\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\operatorname{sen}x\Big|_0^{\pi}=\operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}0=0-0=0$$

$$\int_1^4\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx=\left[x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{x}\right]_1^4=\left[4^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{4}\right]-\left[(1)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{1}\right]=[8+1]-5=4$$

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

1. Orden de integración: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
2. Intervalo de ancho cero: $\int_a^a f(x)dx=0$
3. Múltiplo constante: $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
4. Suma y diferencia: $\int_a^b\big(f(x)\pm g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
5. Aditividad: $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

Ejercicio 5. Resolver las siguientes integrales definidas.

a. $\int_{-2}^{0}(2x+5)\,dx$

b. $\int_{-3}^{4}\left(5-\frac{x}{2}\right)dx$

c. $\int_{0}^{4}\left(3x-\frac{x^3}{4}\right)dx$

d. $\int_{-2}^{2}(x^3-2x+3)dx$

e. $\int_{0}^{1}(x^2+\sqrt{x})dx$

f. $\int_{0}^{5}x^{3/2}\,dx$

g. $\int_{1}^{32}x^{-6/5}dx$

h. $\int_{-2}^{-1}\frac{2}{x^2}dx$

i. $\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx$

j. $\int_{0}^{\pi}(1+\cos x)\;dx$

Ejercicio 6. Dadas

$$\int_0^5 f(x)dx = 10 \;\text{ y }\; \int_5^7 f(x)dx = 3$$

Hallar:

a. $\int_0^7 f(x)dx$

b. $\int_5^0 f(x)dx$

c. $\int_5^5 f(x)dx$

d. $\int_0^5 3f(x)dx$

Ejercicio 7. Dadas

$$\int_0^3 f(x)dx = 4 \;\text{ y }\; \int_3^6 f(x)dx = -1$$

Hallar:

a. $\int_0^6 f(x)dx$

b. $\int_6^3 f(x)dx$

c. $\int_3^3 f(x)dx$

d. $\int_3^6 -5f(x)dx$

ÁREA DEBAJO DE LA CURVA DE UNA FUNCIÓN NO NEGATIVA

El área que está debajo de la gráfica de una función continua no negativa se define como una integral definida.

Sea $y=f(x)$ es no negativa e integrable en un intervalo $[a,b]$, entonces el **área debajo de la curva $\boldsymbol{y=f(x)}$ en $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$** es la integral de f de a a b.

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

Resumen:

Para encontrar el área entre la gráfica de $y=f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a,b]$ se debe:

1. Subdividir $[a,b]$ en los ceros de f.
2. Integrar f es cada intervalo.
3. Sumar los valores absolutos de las integrales.

Ejercicio 8. Encontrar el área de la región comprendida entre la curva y el eje x.

a. $y=-x^2-2x, \quad -3\le x\le 2$
b. $y=3x^2-3, \quad -2\le x\le 2$
c. $y=x^3-3x^2+2x, \quad 0\le x\le 2$
d. $y=-x^2-2x, \quad -3\le x\le 2$

e. $y = x^3 - 4x, \qquad -2 \leq x \leq 2$
f. $y = x^{1/3}, \qquad -1 \leq x \leq 8$
g. $y = x^{1/3} - x, \qquad -1 \leq x \leq 8$

Ejercicio 9. Hallar el área de la región limitada por las siguientes curvas:

a. $\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = 2x \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \\ y = -x^2 + 2x + 8 \\ y = 0 \end{cases}$

Ejercicio 10. Hallar el área determinada por las funciones $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$ en el intervalo $[-3,5]$.

Ejercicio 11. Hallar el área determinada por las curvas $\begin{cases} y = \operatorname{sen}(3x) \\ y = \cos(x) \end{cases}$ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.