UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Fundació Politècnica de Catalunya

Métodos cuantitativos II: Regresión lineal

Jose M Sallan jose.maria.sallan@upc.edu

15 de febrero de 2018

Outline

Introducción a la regresión lineal

Análisis de residuos y valores atípicos

Multicolinealidad

Variables categóricas

Regresión jerárquica

Análisis de mediación y moderación

Introducción a la regresión lineal

Análisis de residuos y valores atípicos

Multicolinealidad

Variables categóricas

Regresión jerárquica

Análisis de mediación y moderación

Regresión lineal

El análisis de regresión consiste en examinar las relaciones entre:

- una variable dependiente (o endogéna, respuesta o criterio) y
- un conjunto de p variables independentes (exógenas, predictoras) x_j

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i \tag{1}$$

Ejemplo: mtcars 1

El conjunto de datos `mtcars` incloye información sobre consumo de gasolina en millas por galón `mpg` y diez aspectos de diseño y desempeño para 32 automóviles (modelos de 1973-1974).

```
> head(mtcars)
```

	mpg	cyl	disp	hp	drat	wt	qsec	vs	am	gear	carb
Mazda RX4	21.0	6	160	110	3.90	2.620	16.46	0	1	4	4
Mazda RX4 Wag	21.0	6	160	110	3.90	2.875	17.02	0	1	4	4
Datsun 710	22.8	4	108	93	3.85	2.320	18.61	1	1	4	1
Hornet 4 Drive	21.4	6	258	110	3.08	3.215	19.44	1	0	3	1
Hornet Sportabout	18.7	8	360	175	3.15	3.440	17.02	0	0	3	2
Valiant	18.1	6	225	105	2.76	3.460	20.22	1	0	3	1

Ejemplo: mtcars 1

Resultados de la regresión lineal

Regresión de mpg frente a potencia hp peso wt y aceleración qsec

```
> mtcars01 <- lm(mpg ~ hp + wt + qsec, data=mtcars)
> summary(mtcars01)

Call:
lm(formula = mpg ~ hp + wt + qsec, data = mtcars)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.8591 -1.6418 -0.4636  1.1940  5.6092

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 27.61053    8.41993   3.279  0.00278 **
hp          -0.01782    0.01498  -1.190  0.24418
wt          -4.35880    0.75270  -5.791 3.22e-06 ***
qsec         0.51083    0.43922   1.163  0.25463
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.578 on 28 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8348,        Adjusted R-squared:  0.8171
F-statistic: 47.15 on 3 and 28 DF,  p-value: 4.506e-11
```

Entendiendo los resultados de la regresión lineal

Significación global del modelo

- Coeficiente de determinación R^2: fracción de la variablidad de y explicada por el modelo de regresión (modelos con R^2 cercano a 1 tienen buen ajuste)
- R^2 ajustado: coeficiente ajustado por el número de predictores p
- F-statistic: test de si el modelo de regresión explica y mejor que la media $\bar{y}$

Entendiendo los resultados de la regresión lineal

Significación de los coeficientes de regresión

- Hipótesis nula para cada variable:: el coeficiente de regresión es cero (no hya relación entre x_j e y)
- Podemos descartar la hipótesis nula si el p-valor es lo bastante pequeño

.	$p < 0{,}1$
*	$p < 0{,}05$
**	$p < 0{,}01$
***	$p < 0{,}001$

Ejemplo: mtcars 1

Interpretación de la regresión lineal


```
> mtcars01 <- lm(mpg ~ hp + wt + qsec, data=mtcars)
> summary(mtcars01)

Call:
lm(formula = mpg ~ hp + wt + qsec, data = mtcars)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.8591 -1.6418 -0.4636  1.1940  5.6092

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 27.61053    8.41993   3.279  0.00278 **
hp          -0.01782    0.01498  -1.190  0.24418
wt          -4.35880    0.75270  -5.791 3.22e-06 ***
qsec         0.51083    0.43922   1.163  0.25463
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.578 on 28 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8348,        Adjusted R-squared:  0.8171
F-statistic: 47.15 on 3 and 28 DF,  p-value: 4.506e-11
```

Ejemplo: mtcars 1

Interpretación de la regresión lineal

Ajuste global del modelo:

- El estadístico F muestra que la regresión explica mejor el modelo que la media
- Coeficiente de determinación elevado $R^2_{aj.} = 0,82$

Coeficientes de regresión:

- Expresan la relación entre la variable dependiente y cada una de las independientes
- En este modelo, sólo son significativos el término independiente y el coeficiente de regresión de `wt`
- Cuanto mayor es el peso `wt`, mayor es el consumo (menor es `mpg`)

Introducción a la regresión lineal

Análisis de residuos y valores atípicos

Multicolinealidad

Variables categóricas

Regresión jerárquica

Análisis de mediación y moderación

Diagnóstico de residuos

Los residuos son la diferencia entre el valor real y la predicción del modelo: $e_i = y_i - \hat{y}_i$

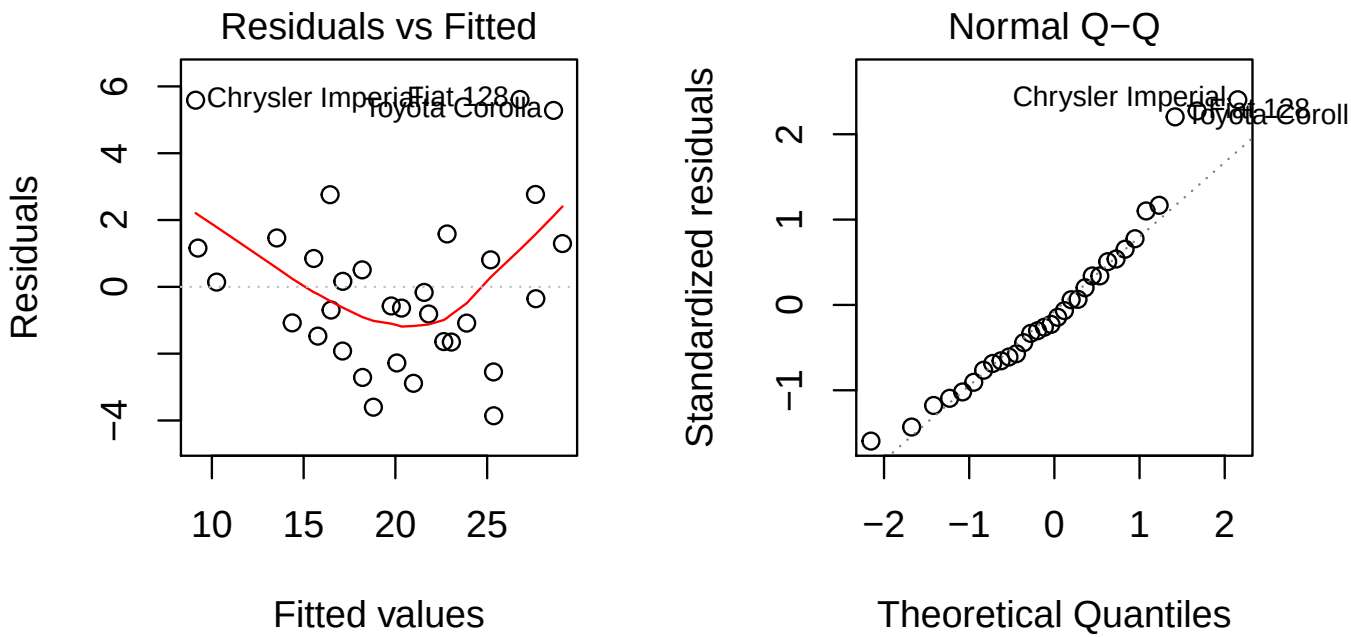
Propiedades de los residuos:

- han de tener media igual a cero y variación constante para $\hat{y}_i$
- han de seguir una distribución normal
- han de ser independientes del tiempo (si aplica)

Ejemplo: mtcars 1

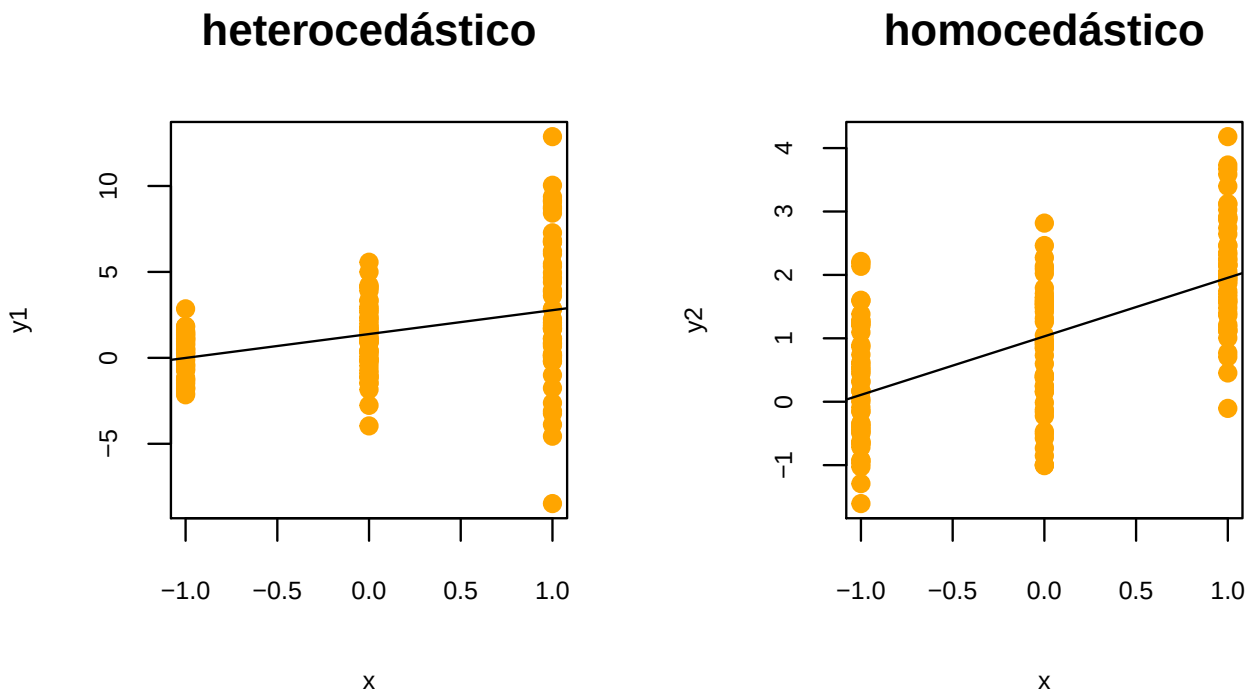
Gráficos de diagnóstico de los residuos

```
> par(mfrow=c(1,2), pty="s")
> plot(mtcars01, which=1)
> plot(mtcars01, which=2)
```



Ejemplo: dos modelos de regresión

Los residuos son homocedásticos su su varianza es independiente de $\hat{y}_i$, y heterocedásticos en caso contrario



Ejemplo: dos modelos de regresión

Comparativa de los coeficientes de x de los modelos 1 (heterocedástico) y 2 (homocedástico). El coeficiente de regresión de población es 1.

```
> coef(summary(mod.y1))
```

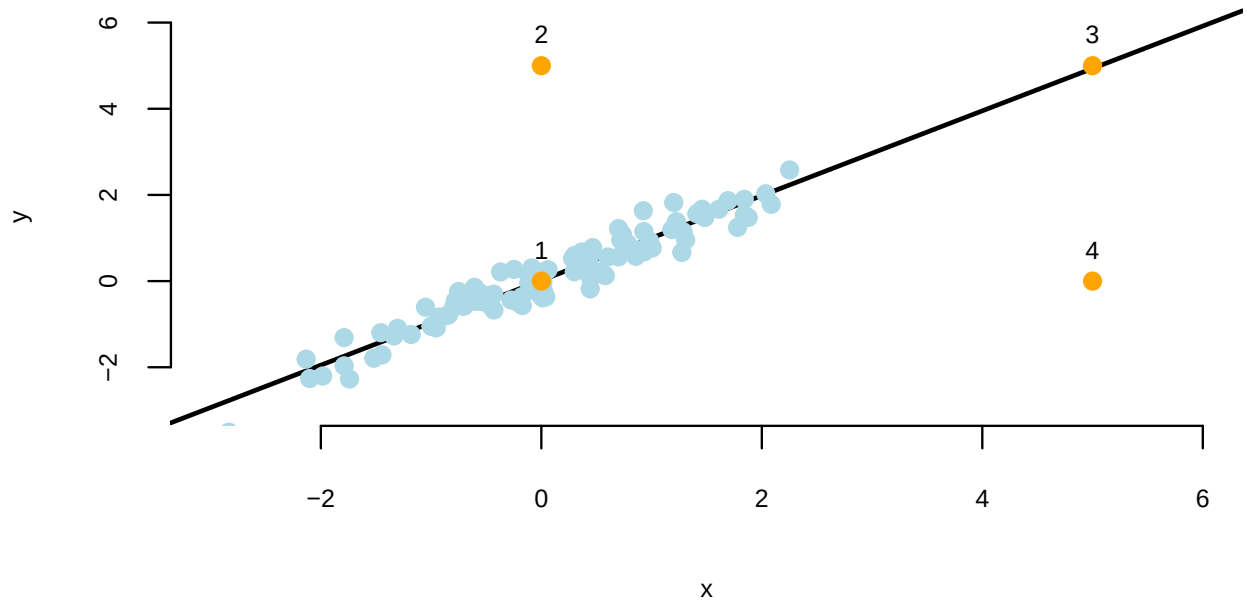
```
            Estimate Std. Error  t value     Pr(>|t|)
(Intercept) 1.385123  0.2333131 5.936757 1.984273e-08
x           1.390449  0.2857490 4.865981 2.885719e-06
```

```
> coef(summary(mod.y2))
```

```
             Estimate Std. Error   t value     Pr(>|t|)
(Intercept) 1.0312575 0.07809141 13.205774 8.432673e-27
x           0.9233003 0.09564205  9.653707 2.100486e-17
```

Para evitar la heterocedasticidad suelen hacerse transformaciones de las variables (logaritmo, raíz cuadrada)

Valores influyentes, de alto apalancamiento y atípicos



El punto 1 no es atípico *(outlier)*, el resto sí
El punto 2 es de bajo apalancamiento y baja influencia
El punto 3 es de alto apalancamiento y baja influencia
El punto 4 es de alto apalancamiento y alta influencia

Diagnóstico de influencia

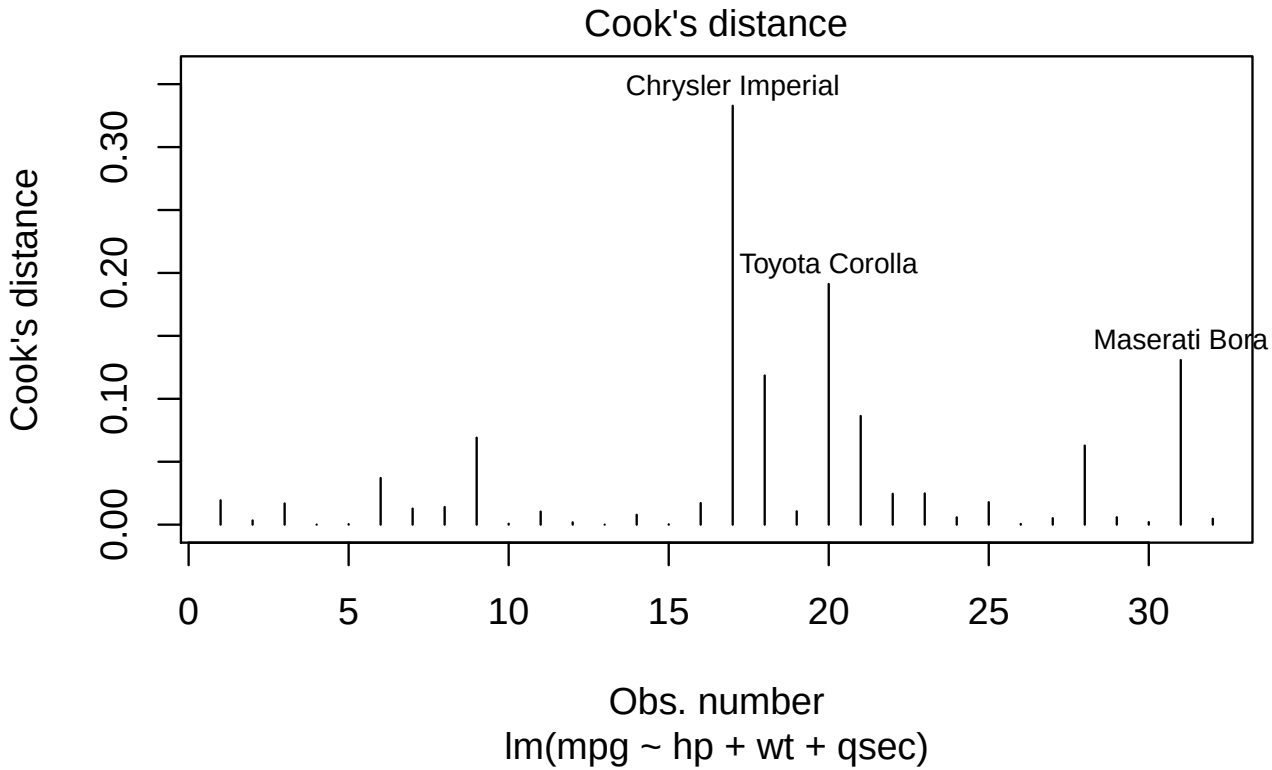
Puede accederse a una colección de los diagnósticos de influencia disponibles en **R** escribiendo en la consola `?influence.measures`

- `cooks.distance` La distancia de Cook del punto i es la variación estandardizada de las predicciones $\hat{y}_i$ cuando se elimina la observación i
- `dfbeta` / `dfbetas` es el cambio en los coeficientes de regresión no estandarizados y estandarizados cuando se elimina la observación i

Example: mtcars 1

Gráfico de distancias de Cook

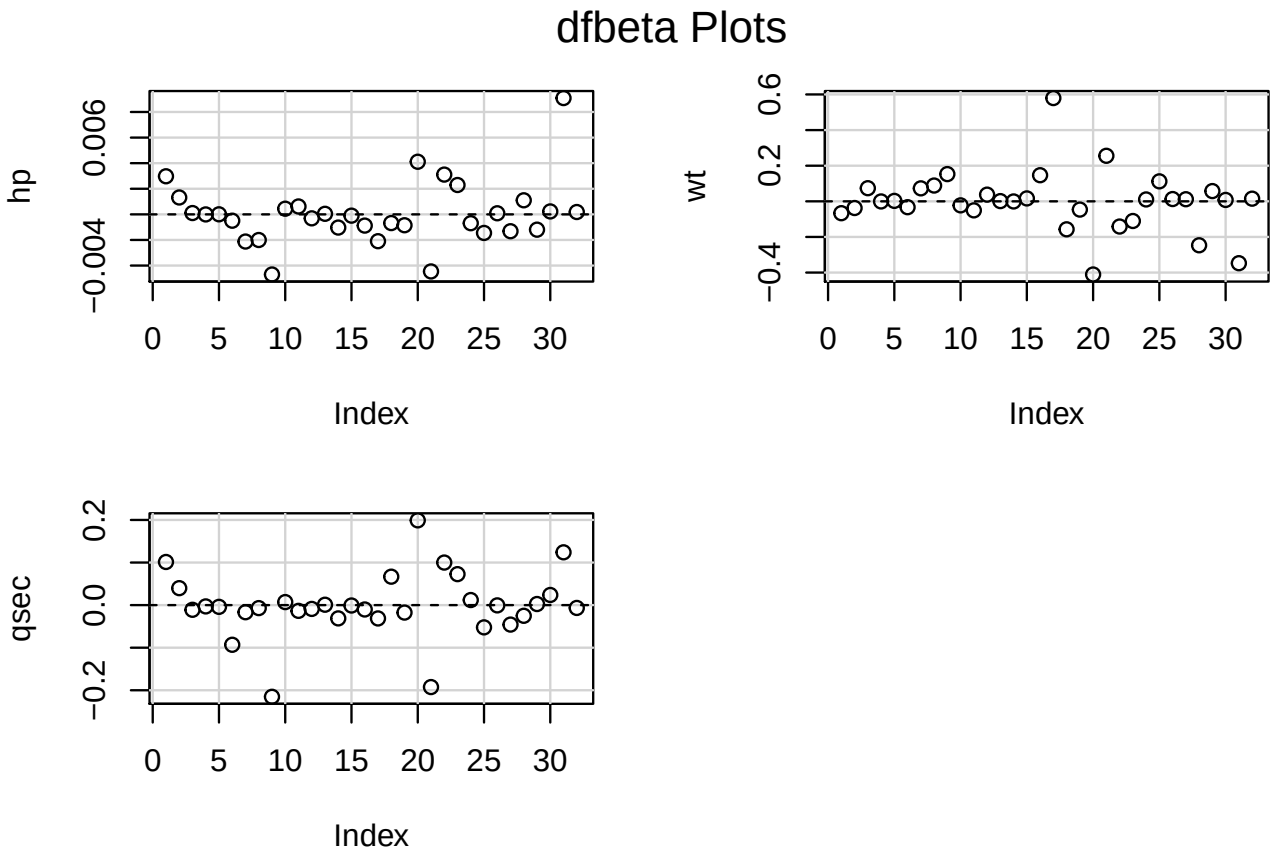
```
> plot(mtcars01, which=4)
```



Ejemplo: mtcars 1

Gráfico de dfbeta

```
> library(car)
> dfbetaPlots(mtcars01)
```



Introducción a la regresión lineal

Análisis de residuos y valores atípicos

Multicolinealidad

Variables categóricas

Regresión jerárquica

Análisis de mediación y moderación

Multicolinealidad

Hay multicolinealidad si algunas de las variables independientes x_j están muy correlacionadas
Tenemos multicolinealidad si al añadir variables al modelo:

- El coeficiente de determinación ajustado $R^2_{aj.}$ disminuye
- La varianza de los coeficientes de regresión aumenta
- Un coeficiente de regresión deja de ser significativo

Diagnósticos de multicolinealidad

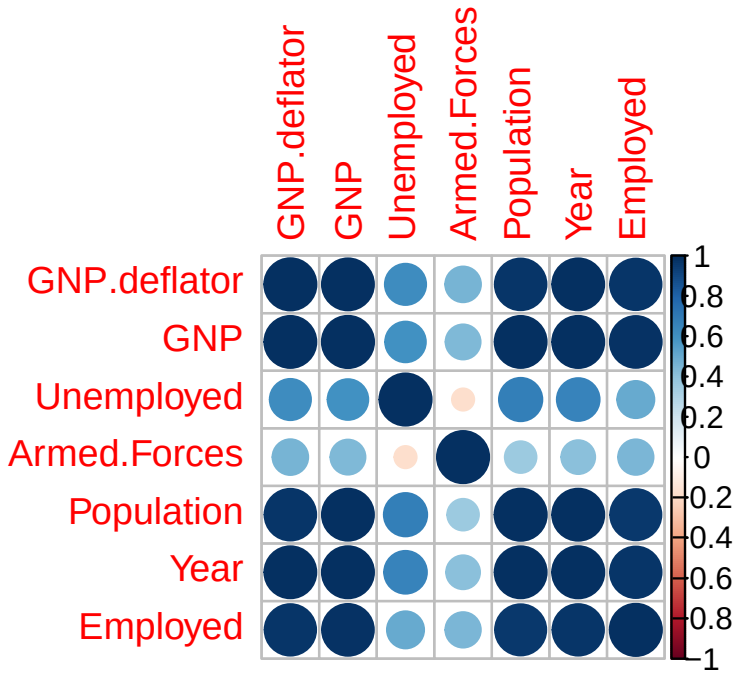
Se obtienen diagnósticos de multicolinealidad (MC) mediante R_j^2, el coeficiente de determinación de la regresión de x_j respecto del resto de variables independientes

- La tolerancia de x_j es $1 - R_j^2$ (valores altos si no hay multicolinealidad)
- El factor de inflación de la varianza es el inverso de la tolerancia (bajo si no hay multicolinealidad)

Ejemplo: Longley

`longley` es un conjunto de datos macroeconómicos que se utliza como ejemplo de regresión con multicolinealidad

```
> library(corrplot)
> corrplot(cor(longley), method="circle")
```



Ejemplo: Longley

Cálculo de los factores de inflación de la varianza

Evaluamos dos modelos:

```
> longley01 <- lm(Employed ~ ., data=longley)
> library(car)
> vif(longley01)
```

```
GNP.deflator          GNP   Unemployed Armed.Forces   Population         Year
   135.53244   1788.51348     33.61889      3.58893    399.15102    758.98060
```

```
> longley02 <- lm(Employed ~ GNP + Armed.Forces, data=longley)
> vif(longley02)
```

```
      GNP Armed.Forces
 1.248916     1.248916
```

Ejemplo: Longley

coeficientes de regresión de los dos modelos


```
> coef(summary(longley01))
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-3.482259e+03	8.904204e+02	-3.9108029	0.0035604037
GNP.deflator	1.506187e-02	8.491493e-02	0.1773760	0.8631408328
GNP	-3.581918e-02	3.349101e-02	-1.0695163	0.3126810611
Unemployed	-2.020230e-02	4.883997e-03	-4.1364274	0.0025350917
Armed.Forces	-1.033227e-02	2.142742e-03	-4.8219853	0.0009443668
Population	-5.110411e-02	2.260732e-01	-0.2260511	0.8262117958
Year	1.829151e+00	4.554785e-01	4.0158898	0.0030368033

```
> coef(summary(longley02))
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	51.683468731	0.804340962	64.2556716	1.164460e-17
GNP	0.034393472	0.001965575	17.4979215	2.036369e-10
Armed.Forces	0.001147955	0.002807338	0.4089122	6.892606e-01

Introducción a la regresión lineal

Análisis de residuos y valores atípicos

Multicolinealidad

Variables categóricas

Regresión jerárquica

Análisis de mediación y moderación

Variables categóricas

En una regresión lineal podemos introducir como variables dependientes variables categóricas, que representan niveles de un determinado factor:

- género (masculino, femenino)
- sector indutrial (energía, farmacia, TIC, ...)

Una variable categórica de k niveles se puede representar usando $k-1$ variables dummy (binarias)

Sector	d_1	d_2	d_3
Energía (base level)	0	0	0
Farmacia	1	0	0
TIC	0	1	0
Construcción	0	0	1

Si la variable categórica se codifica como factor, **R** genera las variables dummy automáticamente
Los coeficientes de regresión de las variables dummy representan la diferencia de valor de la variable dependiente entre el nivel definido por la dummy y en nivel base

Ejemplo: mtcars 2


```
> levels(as.factor(mtcars$gear))

[1] "3" "4" "5"

> mtcars02 <- lm(mpg ~ wt + hp + factor(gear), data=mtcars)
> coef(summary(mtcars02))

                Estimate Std. Error    t value     Pr(>|t|)
(Intercept)   34.87245123 2.58015801 13.5156262 1.558098e-13
wt            -3.23852439 0.87781636 -3.6892960 1.000770e-03
hp            -0.03497069 0.01260201 -2.7750090 9.897557e-03
factor(gear)4  1.26489784 1.34083819  0.9433635 3.538604e-01
factor(gear)5  1.87355541 1.86661986  1.0037156 3.244269e-01
```

En este modelo, el número de marchas gears no influye en el consumo de combustible

Introducción a la regresión lineal

Análisis de residuos y valores atípicos

Multicolinealidad

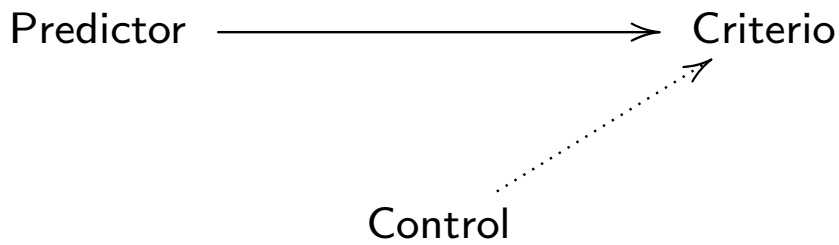
Variables categóricas

Regresión jerárquica

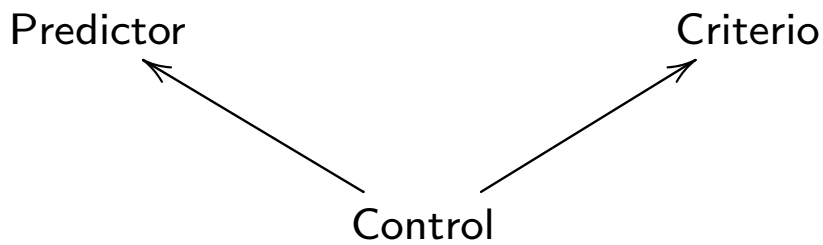
Análisis de mediación y moderación

Regresión jerárquica

Cuando estudiamos la relación entre una variable predictora y una variable criterio, queremos estar seguros de controlar fuentes de variabilidad común (variables de control):
Relación no espúrea



Relación espúrea



Regresión jerárquica

En la regresión jerárquica las variables se entran en dos pasos:

- Variables de control: fuentes de variabilidad no relacionadas con el fenómeno a analizar (e.g. demográficas)
- Variables predictoras: variables cuya dependencia de la variable criterio o dependiente queremos examinar

Regresión jerárquica

condiciones de la regresión jerárquica

- El modelo con todas las variables ha de explicar más variabilidad que el modelo que sólo tiene las variables de control (F-test)
- Los coeficientes de regresión de las variables de control no han de experimentar cambios significativos cuando se introducen las variables predictoras

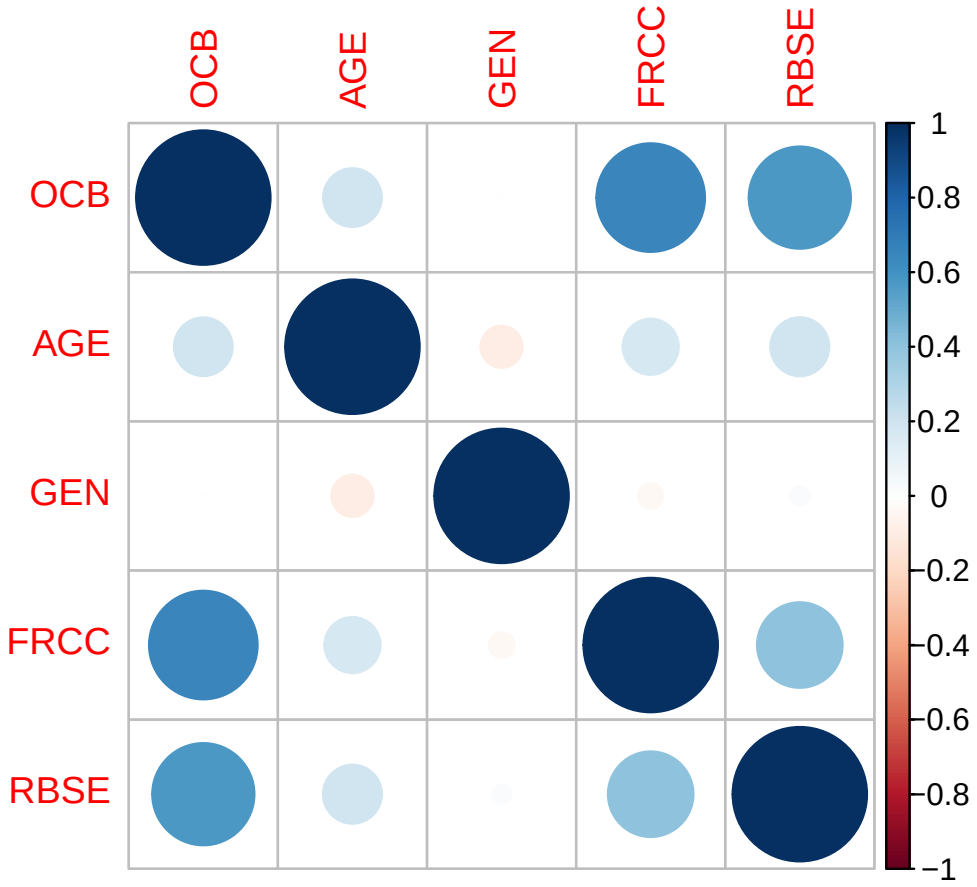
ejemplo: OCB

Base de datos con 602 observaciones de un estudio de campo:

- Criterio: comportamiento ciudadano (OCB)
- Control: edad (AGE) y género (GEN)
- Predictor: Responsabilidad de cambio constructivo (FRCC), eficacia percibida en el rol (RBSE)

Ejemplo: OCB

Correlograma de variables



	Dependent variable:	
	OCB	
	(1)	(2)
AGE	0.015***	0.003
	(0.003)	(0.002)
factor(GEN)1	0.028	0.020
	(0.063)	(0.044)
FRCC		0.128***
		(0.008)
RBSE		0.390***
		(0.032)
Constant	3.151***	0.287*
	(0.141)	(0.151)
Observations	602	602
R2	0.036	0.544
Adjusted R2	0.033	0.541
Residual Std. Error	0.772 (df = 599)	0.531 (df = 597)
F Statistic	11.331*** (df = 2; 599)	178.267*** (df = 4; 597)
Note:		*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Introducción a la regresión lineal

Análisis de residuos y valores atípicos

Multicolinealidad

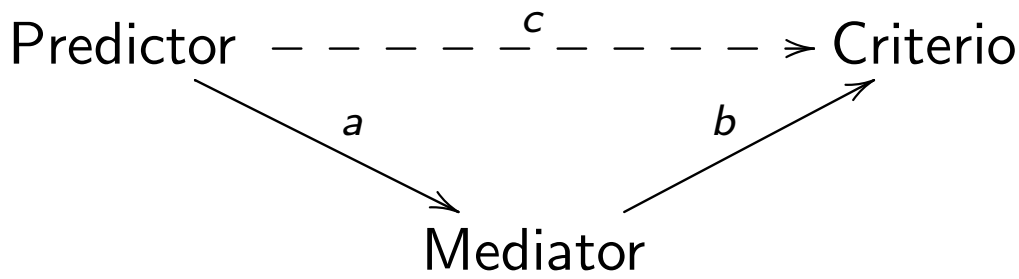
Variables categóricas

Regresión jerárquica

Análisis de mediación y moderación

Mediación

Un mediador es una variable que actúa como intermediaria entre la relación entre predictor y criterio:



Mediation

Criterios de Baron y Kenny

Existe mediación si:

- variaciones de nivel de la variable independiente explican variaciones de la candidata a mediadora (camino a)
- variaciones en el mediador explican variaciones de la variable dependiente (camino b)
- cuando los caminos a y b están controlados, deja de ser significativa una relación entre variable dependiente e independiente (path c) que previamente lo era

Mediación

Simulando una relación mediada

```
> set.seed(3333)
> pred <- rnorm(100, 2, 1)
> med <- 3 + 2*pred + rnorm(100, sd=0.3)
> cri <- 2 + med + rnorm(100, sd=0.2)
> bk01 <- lm(med ~ pred)
> bk02 <- lm(cri ~ pred)
> bk03 <- lm(cri ~ pred + med)
```

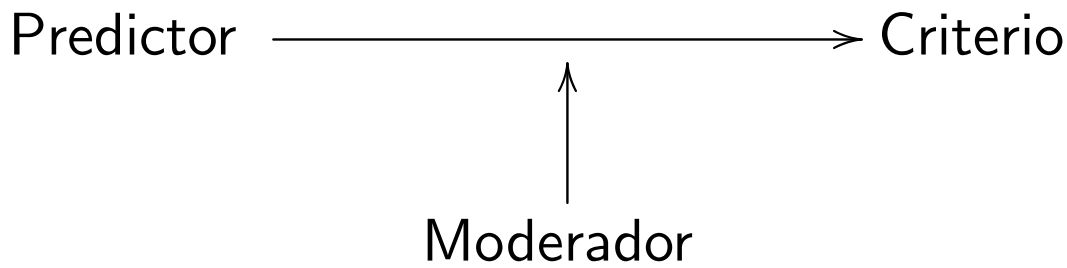
Mediación

Simulando una relación mediada

```
> coef(summary(bk01))

            Estimate Std. Error  t value     Pr(>|t|)
(Intercept) 3.018608 0.07659320 39.41092 6.544253e-62
pred        2.006344 0.03358632 59.73696 6.803052e-79

> coef(summary(bk02))

            Estimate Std. Error  t value     Pr(>|t|)
(Intercept) 5.010529 0.09142991 54.80186 2.493842e-75
pred        2.006993 0.04009225 50.05938 1.310783e-71

> coef(summary(bk03))

              Estimate Std. Error    t value     Pr(>|t|)
(Intercept) 2.10701046 0.22339750  9.4316652 2.264074e-15
pred        0.07714424 0.14597351  0.5284811 5.983726e-01
med         0.96187320 0.07177705 13.4008470 8.487747e-24
```

Moderación

Un moderator es una variable que afecta la dirección o intensidad de la relación entre las variables predictora y criterio



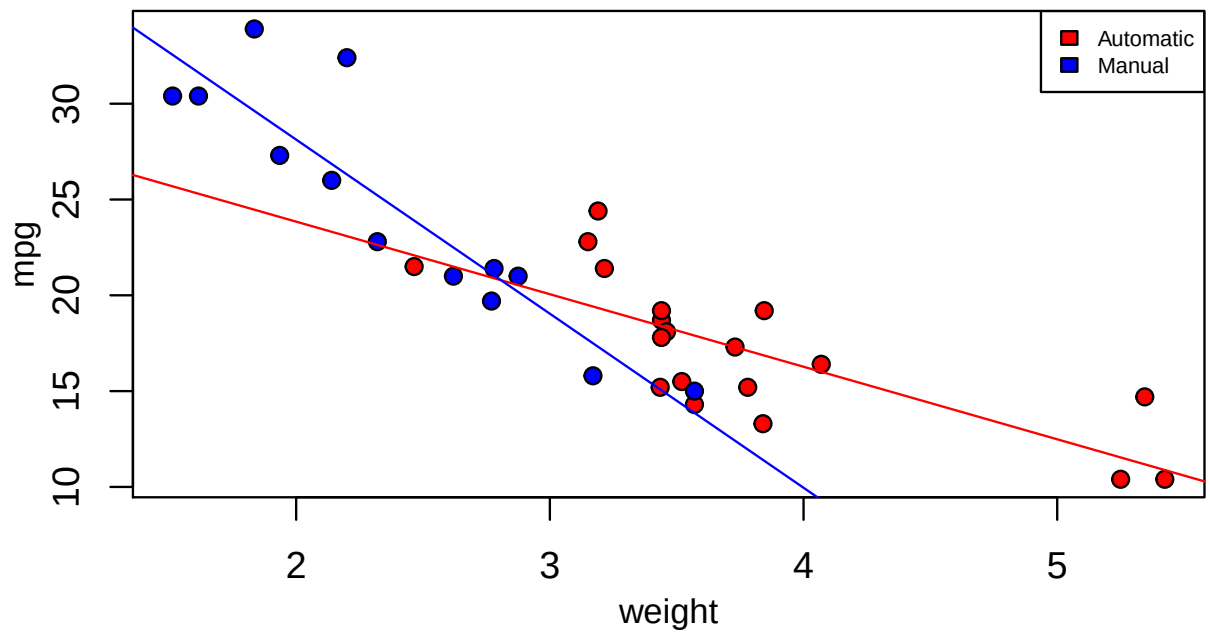
Hay moderación cuando el coeficiente del término de interacción term (producto de predictor y moderador) es significativo

Ejemplo: mtcars 3

¿La relación entre consumo de combustible mpg y peso wt depende del tipo de transimisión am (0 automática, 1 manual)?

```
> summary(lm(mpg ~ am*wt, mtcars))

Call:
lm(formula = mpg ~ am * wt, data = mtcars)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.6004 -1.5446 -0.5325  0.9012  6.0909

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  31.4161     3.0201  10.402 4.00e-11 ***
am           14.8784     4.2640   3.489  0.00162 **
wt           -3.7859     0.7856  -4.819 4.55e-05 ***
am:wt        -5.2984     1.4447  -3.667  0.00102 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.591 on 28 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.833,        Adjusted R-squared:  0.8151
F-statistic: 46.57 on 3 and 28 DF,  p-value: 5.209e-11
```

Ejemplo: mtcars 3



Las millas por galón decrecen más lentamente con el peso cuando se usa transmisión automática

Conclusiones

- Los modelos de regresión lineal permiten evaluar la existencia de relaciones entre una variable **dependiente** y variables **independientes**
- Pueden usarse **variables categóricas** como variables independientes. Si son variables dependientes deben usarse otros modelos (regresión logística)
- Puede evaluarse el impacto de **variables de control** usando **regresión jerárquica**
- También pueden estimarse modelos de **mediación** y **moderación**