UNLP. Facultad de Informática
Algoritmos y Estructuras de Datos

Tiempo de Ejecución.
Demostración del orden de ejecución.

17 de mayo de 2017

1. Ejemplo 1

Se quiere demostrar lo siguiente:

$$\boxed{T(n) = 5n + 3n^2 + 2n^2 \log_2(n) \leq O(n^2 \log_2(n))}$$

Por lo que se deben encontrar una constante $c > 0$ y n_0 tales que:

$$5n + 3n^2 + 2n^2 \log_2(n) \leq cn^2 \log_2(n), \text{ para todo } n \geq n_0$$

Una de las maneras más simples, es analizar término a término que se cumpla la desigualdad y luego juntar los resultados al final.

1.1. Análisis del primer término

$$\boxed{5n \leq c_1 n^2 \log_2(n)}$$

Es posible ver que $n^2 \log_2(n)$ crece más rápido que n. Como se puede deducir a partir de la figura 1, $n^2 \log_2(n)$ crece un poco más que n^2, y ésta última crece más rápido que n.

Ordenadas en forma creciente	Nombre
1	Constante
log n	Logaritmo
n	Lineal
n log n	n Log n
n^2	Cuadrática
n^3	Cúbica
c^n c>1	Exponencial

Figura 1: Crecimiento de funciones

Entonces:

$$n \leq n^2 \log_2(n) \tag{1}$$

Si se multiplica por 5 a ambos miembros,

$$5n \leq 5n^2 \log_2(n) \tag{2}$$

En el lado izquierdo se obtiene el primer término de $T(n)$, y del lado derecho, se encuentra un valor para c_1. Si $c_1 = 5$ es posible acotar la función. Notar que si se hubiera elegido $c_1 = 20$ también se cumple la desigualdad, ya que $5n \leq 20n \leq 20n^2 \log_2(n)$.

1.1.1. Hallar para que n_0 se cumple la desigualdad

Se tiene que

$$5n \leq 5n^2 \log_2(n)$$

Entonces si $n = 1$

$$\begin{aligned} 5(1) &\leq 5(1)^2 \log_2(1) \\ 5 &\leq 5(0) \\ 5 &\leq 0 \end{aligned}$$

no es cierta la desigualdad. La misma vale a partir de $n_0 = 2$.

Esto también se puede deducir de la siguiente manera. Cómo el objetivo es hallar un c_1 que acote el término, se puede despejar el valor de c_1 de la desigualdad:

$$\begin{aligned} 5n &\leq c_1 n^2 \log_2(n) \\ \frac{5n}{n^2 \log_2(n)} &\leq c_1 \end{aligned}$$

El denominador no puede ser 0, y esto pasa con $n = 1$, porque $\log_2(1) = 0$. Como interesa que $c_1 > 0$, el primer valor de n que hace cumplir esta condición es $n_0 = 2$, ya que $\log_2(2) = 1$ y todo el cociente queda positivo.

Observación: Si en el denominador hubiera contenido $\log_4(n)$, *ocurre lo mismo que en el ejemplo anterior porque* $\log_4(1) = 0$, *y como interesa que* $c > 0$, *esto es válido a partir de* $n_0 = 4$, *ya que* $\log_4(4) = 1$, *notar que el valor de* n *es el mismo que la base del logaritmo.*

Retomando el ejercicio...

$$5n \leq c_1 n^2 \log_2(n) \tag{3}$$

Por lo que el primer término se puede acotar con $c_1 = 5$ con $n_0 = 2$

1.2. Análisis del segundo término

$$\boxed{3n^2 \leq c_2 n^2 \log_2(n)}$$

Se realiza un análisis similar al del primer término:

$$n^2 \leq n^2 \log_2(n)$$

Se multiplica por 3 a ambos miembros

$$3n^2 \leq 3n^2 \log_2(n)$$

con que $c_2 = 3$ alcanza, y esto vale para $n \geq 2$.

Si se eligiera $n_0 = 1$ no se cumpliría, ya que la desigualdad quedaría $3 \leq 0$ y esto es falso.

1.3. Análisis del tercer término

$$\boxed{2n^2 \log_2(n) \leq c_3 n^2 \log_2(n)}$$

$$n^2 \log_2(n) \leq n^2 \log_2(n)$$
$$2n^2 \log_2(n) \leq 2n^2 \log_2(n)$$

con que $c_3 = 2$ ya alcanza, y esto vale para $n \geq 1$.

1.4. Obtención de c y n_0 para todo el $T(n)$

Para hallar el c y n_0 que permita acotar la función $T(n)$, es necesario juntar los resultados parciales obtenidos. Para ello, se deben sumar cada una de las desigualdades. Se suma todo lo del lado izquierdo por un lado, y todo lo del lado derecho por el otro:

$$\begin{aligned}
5n + 3n^2 + 2n^2 \log_2(n) &\leq c_1 n^2 \log_2(n) + c_2 n^2 \log_2(n) + c_3 n^2 \log_2(n) \\
T(n) &\leq (c_1 + c_2 + c_3) n^2 \log_2(n) \\
T(n) &\leq (5 + 3 + 2) n^2 \log_2(n) \\
T(n) &\leq (10) n^2 \log_2(n) \\
T(n) &\leq c n^2 \log_2(n)
\end{aligned}$$

Es decir que la constante c se obtiene de sumar cada una de las c_i para cada término i. Luego se elige el n_0 más restrictivo, es decir, el n_0 que cumpla para cada uno de los términos, en este caso, $n \geq 2$.

Por lo tanto:

$$T(n) \leq O(n^2 \log_2(n)), \text{ con } c = 10 \text{ para todo } n \geq n_0, \text{ con } n_0 = 2.$$

Nota: Siempre poner el c y el n_0 final para el que se cumple el $T(n)$, no alcanza con mostrarlo término a término.

2. Ejemplo 2

Se quiere demostrar lo siguiente:

$$T(n) = 5k_1 n \log_2(n) + k_2 n^2 \leq cn^2$$

En este caso, no se conocen los valores de cada una de las constantes, por lo que c no tendrá un valor concreto.

2.1. Análisis del primer término

$$\boxed{5k_1 n \log_2(n) \leq c_1 n^2}$$

Teniendo en cuenta el orden de crecimiento de las funciones

$$n \log_2(n) \leq n^2$$

Se multiplica por $5k_1$ a ambos miembros

$$5k_1 n \log_2(n) \leq 5k_1 n^2$$

con que $c_1 = 5k_1$ ya alcanza para que valga la desigualdad, y esto vale para $n \geq 1$.

2.2. Análisis del segundo término

$$\boxed{k_2 n^2 \leq c_2 n^2}$$

Teniendo en cuenta el orden de crecimiento de las funciones

$$n^2 \leq n^2$$
$$k_2 n^2 \leq k_2 n^2$$

con que $c_2 = k_2$ ya alcanza, y esto vale para $n \geq 1$.

2.3. Obtención de c y n_0 para todo el $T(n)$

$$5k_1 n \log_2(n) + k_2 n^2 \leq c_1 n^2 + c_2 n^2$$
$$5k_1 n \log_2(n) + k_2 n^2 \leq (c_1 + c_2) n^2$$
$$5k_1 n \log_2(n) + k_2 n^2 \leq (5k_1 + k_2) n^2$$

Es decir que la constante c debe valer $5k_1 + k_2$. Esta desigualdad vale pare el n_0 más restrictivo que se obtuvo, es decir: $n_0 = 1$. Por lo tanto:

$$T(n) \leq O(n^2), \text{ con } c = 5k_1 + k_2 \text{ para todo } n \geq n_0, \text{ con } n_0 = 1.$$