



Guía para el cálculo del $T(n)$

13 de mayo de 2017

1. Ejercicio 1

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 1 \\ 27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

1.1. Resolución

El objetivo es poder reescribir el $T(n)$ eliminando la recursión.

Suponiendo $n \geq 2$

Paso 1

$$27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$$

Paso 2

$$\begin{aligned} & 27 \left[27T\left(\frac{\frac{n}{3}}{3}\right) + \left(\frac{\frac{n}{3}}{3}\right)^3 \right] + n^3 \\ & 27 \left[27T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \frac{n^3}{3^3} \right] + n^3 \\ & 27^2 T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 27 \frac{n^3}{3^3} + n^3 \end{aligned}$$

como $3^3 = 27$ se simplifican los términos

$$\begin{aligned} & 27^2 T\left(\frac{n}{3^2}\right) + n^3 + n^3 \\ & 27^2 T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 2n^3 \end{aligned}$$



Paso 3

$$27^2 \left[27T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \left(\frac{n}{3^2}\right)^3 \right] + 2n^3$$

$$27^2 \left[27T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \frac{n^3}{(3^2)^3} \right] + 2n^3$$

$$27^3 T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 27^2 \frac{n^3}{(3^2)^3} + 2n^3$$

ahora bien: $(3^2)^3 = 3^{2*3} = 3^{3*2} = (3^3)^2 = 27^2$
 acá se utiliza la propiedad nro 3 de las potencias
 del resumen de Propiedades matemáticas

$$27^3 T\left(\frac{n}{3^3}\right) + n^3 + 2n^3$$

$$27^3 T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 3n^3$$

Paso i (Paso general)

$$27^i T\left(\frac{n}{3^i}\right) + in^3$$

Caso base

$$i \frac{n}{3^i} = 1?$$

$$\frac{n}{3^i} = 1$$

$$n = 3^i$$

$$\log_3(n) = \log_3(3^i)$$

$$\log_3(n) = i$$

(1)

Se reemplaza el valor de i en el paso general

$$27^{\log_3(n)} T\left(\frac{n}{3^{\log_3(n)}}\right) + \log_3(n) n^3$$

$$27^{\log_3(n)} T(1) + \log_3(n) n^3$$

$$27^{\log_3(n)} 3 + \log_3(n) n^3$$

Ahora bien, $27^{\log_3(n)}$, se debería reescribir de otra manera, porque no queda claro que tipo de función es. Esto se puede resolver de diferentes maneras aplicando propiedades matemáticas.



■ **Forma 1**

$$\begin{aligned}
 (27)^{\log_3(n)} &= (3^3)^{\log_3(n)} \\
 &= 3^{3 * \log_3(n)} \\
 &= 3^{\log_3(n) * 3} \\
 &= (3^{\log_3(n)})^3 \\
 &= n^3
 \end{aligned}$$

■ **Forma 2**

$27 = 3^3$, entonces en el paso anterior 27^i se podría reescribir como $(3^3)^i$

$$\text{Luego } (3^3)^i = 3^{3*i} = 3^{i*3} = (3^i)^3,$$

aplicando la propiedad nro 3 de potencias del resumen de Propiedades matemáticas. Ahora bien, cuando se despejó el caso base, en una parte se obtuvo que $n = 3^i$ (1). Esta igualdad es utilizada para quitar el valor de i . Por lo que: $(3^i)^3 = n^3$

■ **Forma 3**

$$\begin{aligned}
 (27)^{\log_3(n)} &= (3^3)^{\log_3(n)} \\
 &= (3 * 3 * 3)^{\log_3(n)} \\
 &= 3^{\log_3(n)} * 3^{\log_3(n)} * 3^{\log_3(n)} \\
 &= n * n * n \\
 &= n^3
 \end{aligned} \tag{2}$$

En (2) se aplicó la propiedad nro 4 de potencias del resumen de propiedades matemáticas.

Con hacerlo con algunas de estas formas u otra diferente alcanza. Se muestran distintas maneras para familiarizarse con las propiedades.

Entonces $27^{\log_3(n)}$ es lo mismo que n^3 . Finalmente,

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 27^{\log_3(n)} 3 + \log_3(n) * n^3 \\
 T(n) &= n^3 * 3 + \log_3(n) * n^3 \\
 \boxed{T(n) &= 3 * n^3 + \log_3(n) * n^3}
 \end{aligned}$$

Al finalizar, se debe verificar que no haya quedado ninguna variable de los iteradores o del paso general (en este caso i), la única variable debe ser n .



2. Ejercicio 2

```
public static void ejercicio2 (int n) {  
  
    int i, j;  
  
    for (i = 1; i <= n; i++) {  
        j = i;  
        while (j <= Math.pow (n,3)){ // esto significa: while (j <= n^3)  
            j++;  
        }  
        System.out.println ("El indice j es: " + j);  
    }  
}
```

2.1. Resolución

Planteo inicial:

$$T(n) = c1 + \sum_{i=1}^n \left[c2 + \sum_{j=i}^{n^3} c3 \right]$$

$c1$ representaría la declaración inicial de variables y para simplificar se puede decir que $c2$ representaría la asignación de la variable, la comparación de $i \leq n$ y el incremento de i , y el costo del `println`; mientras que $c3$ representaría la comparación de $j \leq n^3$ y el incremento de j .

Se pasa a resolver...



$$\begin{aligned}
T(n) &= c1 + \sum_{i=1}^n \left[c2 + \sum_{j=i}^{n^3} c3 \right] \\
T(n) &= c1 + \sum_{i=1}^n \left[c2 + \sum_{j=1}^{n^3} c3 - \sum_{j=1}^{i-1} c3 \right] \\
T(n) &= c1 + \sum_{i=1}^n \left[c2 + n^3 c3 - (i-1)c3 \right] \\
T(n) &= c1 + \sum_{i=1}^n \left[c2 + n^3 c3 - (ic3 - c3) \right] \\
T(n) &= c1 + \sum_{i=1}^n \left[c2 + n^3 c3 - ic3 + c3 \right] \\
T(n) &= c1 + \sum_{i=1}^n c2 + \sum_{i=1}^n n^3 c3 - \sum_{i=1}^n ic3 + \sum_{i=1}^n c3 \\
T(n) &= c1 + nc2 + nn^3 c3 - c3 \sum_{i=1}^n i + nc3 \\
T(n) &= c1 + nc2 + n^4 c3 - c3 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + nc3 \\
T(n) &= c1 + nc2 + n^4 c3 - c3 \frac{(n^2 + n)}{2} + nc3 \\
T(n) &= c1 + nc2 + n^4 c3 - (c3 \frac{n^2}{2} + c3 \frac{n}{2}) + nc3 \\
T(n) &= c1 + nc2 + n^4 c3 - c3 \frac{n^2}{2} - c3 \frac{n}{2} + nc3 \\
T(n) &= c1 + nc2 + n^4 c3 - c3 \frac{n^2}{2} - c3 \frac{n}{2} + nc3
\end{aligned}$$

$$\boxed{T(n) = c1 + nc2 + n^4 c3 - n^2 \frac{c3}{2} - n \frac{c3}{2} + nc3}$$

Al finalizar, se debe verificar que no haya quedado ninguna variable de los iteradores (en este caso i o j), la única variable debe ser n .