ARISTOTLE UNIVERSITY OF THESSALONIKI

DEPARTMENT OF THEORETICAL PHYSICS

Quantum hadrodynamics and applications to nuclear matter.

Author
STEFANOPOULOS
DIMITRIOS

Supervisor
GAITANOS
THEODOROS

October 3, 2017

Περίληψη

Αυτή η εργασία αφορά την κανονική κβάντωση στην κβαντική θεωρία πεδίων και στην εφαρμογή της στο μοντέλο QHD-I που περιγράφει την πυρηνική ύλη. Αρχικά μιλάμε γενικά για την πυρηνική ύλη αναφερόμενοι στο μοντέλο της υγρής σταγόνας. Στην συνέχεια εισάγουμε την κλασσική θεωρία πεδίων και όλα τα απαραίτητα εργαλεία της (όπως οι συμμετρίες). Στο τρίτο κεφάλαιο αναφερόμαστε πλέον στην σχετικιστική κβαντομηχανική και την κβαντική θεωρία πεδίων. Συγκεκριμένα, αφού εισάγουμε τις εξισώσεις Dirac και Klein-Gordon χρησιμοποιούμε την διαδικασία κανονικής κβάντωσης για να κβαντώσουμε τα πεδία Dirac,Klein-Gordon,Maxwell. Στο τέταρτο κεφάλαιο εισάγουμε τελικά την Λαγκραντζιανή του μοντέλου QHD-I και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της σχετικιστικής θεωρίας μέσου πεδίου υπολογίζουμε διάφορες αναμενόμενες τιμές της πυρηνικής ύλης.

Abstract

This thesis is a review of the canonical quantization procedure for quantum field theory leading to the application of QHD-I for the description of nuclear matter. Firstly, we talk about hadron matter in general, referring to the liquid drop model. After that, we introduce classical field theory and all the important tools(like symmetries) that comes with it. In the third chapter we finally introduce relativistic quantum mechanics and quantum field theory to establish the framework in which we 'll talk about hadron matter. Specifically, after introducing the Dirac and the Klein Gordon equations we use canonical quantization to quantize these fields, as long as the classical electromagnetic field. In the forth chapter we start by introducing the lagrangian of the QHD-I model and we use the relativistic mean field approximation to evaluate different expectation values regarding nuclear matter.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η Φυσική

Η φυσική, είναι η επιστήμη που μελετά την φύση. Αυτός είναι ίσως και ο πιο ακριβής ορισμός που δεν περιορίζει της ισχύ της. Ιστορικά, τα πρώτα βήματα αλλά ακόμη και η ιδέα της μελέτης της φύσης ως αναπόσπαστο κομμάτι της ανθρώπινης σκέψης, μπορούν σε μεγάλο βαθμό να αποδοθούν στους αρχαίους Έλληνες φιλόσοφους(με πρωταγωνιστές τους συνήθεις ύποπτους: Αριστοτέλη κλπ), καθώς επίσης και στους υπόλοιπους αρχαίους λαούς(Αίγυπτος, Μεσοποταμία) ως ένα βαθμό κυρίως στην αστρονομία. Τα μεγάλα άλματα γνώσης όμως άργησαν πολύ και στην φυσική αλλά και στην επιστήμη γενικότερα. Ήρθαν λίγο πριν τον Διαφωτισμό με την εργασία του Newton που θεμελίωσε την Κλασσική Μηχανική(και τον απειροστικό λογισμό μαζί με τον Leibniz), και την δουλειά του Bacon και άλλων πάνω στην επιστημονική μεθοδολογία. Όλα αυτά μέχρι τον 17ο αιώνα, από τον οποίο και έπειτα έχουμε την συστηματική μελέτη της Θερμοδυναμικής, του Ηλεκτρισμού και του Μαγνητισμού οδηγώντας την ανθρωπότητα στην βιομηχανική επανάσταση των αρχών του 19ου αιώνα. Καθώς λοιπόν οι πρακτικές εφαρμογές της φυσικής γίνονται ολοένα και πιο χρήσιμες (έως και αναπόφευκτες) ο Maxwell στα μέσα του 19ου αιώνα με την ενοποιημένη διατύπωση του ηλεκτρομαγνητισμού έκανε ένα τεράστιο βήμα στην σκέψη μας για την φύση, ως ένα σύνολο συνεπών μαθηματικά αρχών που περιγράφουν ένα τεράστιο εύρος φυσικών φαινομένων. Επίσης, πλέον ήταν ξεκάθαρο(υπήρχαν ενδείξεις και νωρίτερα λόγω Newton, Lagrange, Hamilton) ότι η μαθηματική και θεωρητική φυσική είχε έρθει για να μείνει καθώς ανιχνεύοντας μία μαθηματική ασυνέπεια στους διάφορους νόμους του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού ο Maxwell, κατάφερε να θεμελιώσει μία εκ των πλέον σημαντικότερων θεωριών που έχουμε για την περιγραφή της φύσης η οποία μάλιστα ήταν υπεύθυνη για την αρχή της τεχνολογικής επανάστασης του 20ου αιώνα.

Η συνέχεια για την φυσική ήταν έως και δραματική. Από τις αρχές του 20ου αιώνα υπήρχαν δύο μεγάλες επαναστάσεις στις ιδέες της φυσικής, μία της Θεωρίας της Σχετικότητας και μία της Κβαντικής Θεωρίας. Αρχικά, η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας το 1905 και δέκα χρόνια μετά η Γενική Θεωρία, εξήγησαν φαινόμενα σχετικά με την βαρύτητα και την ταχύτητα του φωτός με ακρίβεια ασύγκριτα καλύτερη από αυτή της Νευτώνιας θεωρίας. Όσον αφορά την ΓΘΣ μέχρι και σήμερα συνεχίζει να κάνει προβλέψεις φαινομένων που επιβεβαιώνονται πειραματικά με πιο πρόσφατη αυτή των βαρυτικών κυμάτων, ενώ ταυτόχρονα παίζει καίριο ρόλο σε ότι σύστημα υπάρχει ισχυρό πεδίο βαρύτητας(Μεγάλη Έκρηξη, Μαύρες τρύπες κλπ). Από την μεριά της Κβαντομηχανικής Θεωρίας η επανάσταση ήταν ακόμη μεγαλύτερη. Πέραν των διαισθητικά ασυνήθιστων φαινομένων που εισήγαγε(δυϊσμός φωτός, αβεβαιότητα κλπ), όλη η σύγχρονη τεχνολογία αργά η γρήγορα περνά από τον υπολογισμό ενός κβαντικού συστήματος και καταλήγει στο τρανζίστορ, την ανανεώσιμη ενέργεια, την σύγχρονη μετρολογία και πολλά άλλα. Η κβαντομηχανική άλλαξε τον τρόπο σκέψης μας κατά την μελέτη μικροσκοπικών συστημάτων αλλά και για την δομή του κόσμου μας γενικότερα.

Κατά την ίδια χρονική περίοδο, μαζί με τον πειραματικό έλεγχο των φυσικών θεωριών άρχισαν πλέον να εδραιώνονται στον επιστημονικό κόσμο οι φιλοσοφικές ιδέες του εμπειρισμού και του σκεπτικισμού. Εκείνη την εποχή μετά από την δουλειά των γνωστών φιλοσόφων(Descartes,Kant,Bacon) καθώς επίσης και με την εμπειρία πλέον των επιστημόνων στο θέμα του πότε θα έπρεπε μία θεωρία να θεωρείται αληθής και πότε όχι, ο Popper(κυρίως) διατύπωσε σε διάφορες μορφές τα κριτήρια κάτω από τα οποία θα πρέπει να ελέγχουμε αν μία θεωρία είναι καλή η όχι. Συγκεκριμένα, μία πολύ καίρια ιδέα ήταν το κριτήριο διαψευσιμότητας το οποίο λέει ότι μία θεωρία θα πρέπει εύκολα να αποδεικνύεται λανθασμένη. Όλες αυτές οι ιδέες επηρέασαν το πώς λαμβάνει χώρα η επιστήμη σε όλα τα πεδία μελέτης και άλλαξαν για πάντα την ροή της ιστορίας δημιουργώντας την γνωστή σήμερα ως επιστημονική μεθοδολογία.

Συνεχίζοντας λοιπόν το λογικό πλέον βήμα είναι να βρεθούν τρόποι να συνδυάσουμε τις δύο θεωρίες και να είναι μαθηματικά συνεπής. Αυτό κάνει η κβαντική θεωρία πεδίου με την οποία και θα ασχοληθούμε. Η ΚΘΠ είναι η ενοποιημένη θεωρία της κβαντομηχανικής και της θεωρίας πεδίων (πεδίο με την έννοια που εισήχθηκε στον ηλεκτρομαγνητισμό) η οποία στην σχετικιστική της μορφή είναι συνεπής με την ειδική θεωρία της σχετικότητας και το πεπερασμένο της ταχύτητας του φωτός. Όσον αφορά τον συνδυασμό της γενικής θεωρίας της σχετικότητας και της κβαντομηχανικής πρόκειται για το άγιο δισκοπότηρο της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής και βρίσκεται ακόμη προς αναζήτηση.

Η κβαντική θεωρία πεδίων λοιπόν είναι η θεωρία στην οποία στηριζόμαστε προκειμένου να εξηγήσουμε φαινόμενα σε συστήματα πολλών σωματιδίων για ενέργειες που υπάρχουν στα απλά υλικά και στα άτομα μέχρι τις πολύ υψηλές ενέργειες που υπήρχαν λίγο μετά την αρχή του σύμπαντος. Πιο συγκεκριμένα φανταστείτε ότι παίρνουμε άτομα και τα συμπιέζουμε, οι αρχικές ενέργειες είναι οι ενέργειες που αφορούν την Φυσική της Συμπυκνωμένης Ύλης και συχνά τις συμπεριφερόμαστε μη σχετικιστικά. Συνεχίζοντας την συμπίεση το άτομο αρχίζει να διασπάτε έχοντας πλέον πυρήνες και ηλεκτρόνια σε μορφή πλάσματος. Με την ίδια λογική κάθε σκαλοπάτι ενεργειών αρκετά μεγάλο, αποτελεί ουσιαστικά διαφορετικό πεδίο μελέτης. Σε αρκετά υψηλές ενέργειες πλέον θα μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τα σωματίδια όπως στην Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων με τις θεμελιώδης αλληλεπιδράσεις. Κάπου μεταξύ της Φυσικής Στοιχειωδών Σωματιδίων και της Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης βρίσκεται και η Πυρηνική Φυσική στην οποία και θα επικεντρωθούμε.

1.2 Η Πυρηνική Φυσική

Αυτό που θα επιχειρήσουμε λοιπόν, είναι να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο που να μπορεί επαρκώς να περιγράψει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των αδρονίων και κατ᾽ επέκταση την ύλη των πυρήνων, την ύλη των αστέρων νετρονίων κλπ. Σε τέτοια πυκνή ύλη όπως είναι η πυρηνική μπορούμε να υπολογίσουμε περίπου την ενέργεια που έχει το σωματίδιο βλέποντας πως αυτή είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με αυτή που έχει σε ηρεμία(λόγω μάζας ηρεμίας). Αυτό σημαίνει πως πρέπει να λάβουμε υπ΄ όψιν τυχόν σχετικιστικά φαινόμενα επομένως η Κβαντική Θεωρία Πεδίου αποτελεί πολύ βολικός δρόμος για να το πετύχουμε αυτό.

Μία από τις θεμελιώδης θεωρίες της Φυσικής Στοιχειωδών Σωματιδίων είναι αυτή που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των κουάρκ με την ανταλλαγή γκλουονίων(Κβαντική Χρωμοδυναμική). Προφανώς αυτή η θεωρία είναι ο βασικός υποψήφιος για την περιγραφή πυκνών συστημάτων όπως η πυρηνική ύλη όμως έχει πάρα πολλές υπολογιστικές δυσκολίες στις ζητούμενες κλίμακες. Στα πειράματα με αδρόνια έτσι κι αλλιώς δεν παρατηρούνται βαθμοί ελευθερίας των κουάρκ αλλά των αδρονίων σαν ξεχωριστές διακριτές οντότητες. Τα βαρυόνια είναι αδρόνια τα οποία αποτελούνται από τρία κουάρκ(πρωτόνια/νετρόνια) ενώ τα μεσόνια είναι αδρόνια που αποτελούνται από ένα κουάρκ και ένα αντικουάρκ. Την ιδέα της περιγραφής της αλληλεπίδρασης δύο νουκλεονίων με την ανταλλαγή μεσονίων εισήγαγε για πρώτη φορά ο Yukawa το 1935. Γενικά στις θεωρίες των στοιχειωδών σωματιδίων αλλά και των αδρονίων έχουμε τους μποζονικούς διαδότες που μεταδίδουν την αλληλεπίδραση. Συγκεκριμένα στο μοντέλο που θα περιγράψουμε, όπως τα αδρόνια είναι παράγωγα των κουάρκ έτσι και τα μεσόνια-διαδότες είναι παράγωγα κουαρκ και [1]γκλουονίων.

Ένας λοιπόν τρόπος για την περιγραφή αυτής της αλληλεπίδρασης των αδρονίων είναι ο φορμαλισμός της μέσω μίας Κβαντικής Θεωρίας Πεδίων που πρότεινε ο Walecka το 1974 και την καλούμε Κβαντική Αδρομηχανικη. Δεν πρόκειται για μία θεμελιώδη θεωρία όπως η Χρωμοδυναμική αλλά για μία παράγωγηeffective Θεωρία μιας και τα αδρόνια δεν είναι θεμελιώδη σωματίδια. Η θεωρία αυτή και πάλι έχει πολλές υπολογιστικές δυσκολίες όμως εδώ μπορούμε να κάνουμε κάποιες προσεγγίσεις υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Οι προσεγγίσεις αυτές περιλαμβάνονται στην Σχετικιστική Θεωρία Μέσου Πεδίου.

1.3 Μοντελοποίηση

Το αρχικό μοντέλο με το οποίο συζητάμε για την πυρηνική ύλη είναι το μοντέλο της υγρής σταγόνας. Σε αυτό το μοντέλο υπάρχουν και οι παρακάτω έννοιες από τις οποίες

[1]Κάτι ανάλογο με τις μοριακές δυνάμεις van der Waals.

εξάγουμε στοιχεία για την πυρηνική ύλη γενικά, μέσω συγκεκριμένων πυρήνων. Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές (θα θεωρηθούν γνωστές) μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε πολλές τιμές άλλων παραμέτρων όπως δείχνουμε στο τελευταίο κεφάλαιο.

1.3.1 Πυκνότητα Κορεσμού

Ως γνωστόν η ισχυρή πυρηνική δύναμη(από την οποία προέρχεται και η παράγωγη πυρηνική όπως είπαμε) έχει μικρή ενεργή εμβέλεια, και είναι ελκτική κατά βάση, όμως γίνεται απωστική στις πολύ μικρές αποστάσεις($< 0.4fm$). Μιας και έχουμε μικρή εμβέλεια η αλληλεπίδραση αφορά μόνο τα γειτονικά σωμάτια του συστήματος. Συνεπώς υπάρχει μία συγκεκριμένη κεντρική πυκνότητα πάνω από την οποία δεν μπορεί να αυξηθεί άλλο όσα νουκλεόνια και να προστεθούν. Αυτή είναι και η πυκνότητα κορεσμού. Στην πυκνότητα κορεσμού η πίεση του συστήματος είναι μηδέν και το σύστημα βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση.

1.3.2 Ενέργεια Σύνδεσης

Γενικά η ενέργεια σύνδεσης είναι η ενέργεια που χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε για να αποδεσμεύσουμε το σύστημα από την κατάσταση που βρίσκεται. Η ενέργεια σύνδεσης των σταθερών συστημάτων θεωρείται προφανώς αρνητική αφού πρέπει να δώσουμε ενέργεια για να υπάρξουν ελεύθερα τα υποσυστήματα που το αποτελούν. Προφανώς στην πυκνότητα κορεσμού η ενέργεια σύνδεσης θα βρίσκεται στο ελάχιστο μιας και το σύστημα βρίσκεται στην σταθερότερη δυνατή κατάσταση.

1.3.3 Ενέργεια Συμμετρίας

Στις μικρές τιμές ατομικών αριθμών στους πυρήνες ο αριθμός των νετρονίων είναι περίπου ίσως γιατί ευνοείται έτσι η σταθερότητά τους. Σε υψηλότερους ατομικούς αριθμούς η άπωση Coulomp των πρωτονίων αυξάνεται επομένως χρειάζεται μεγαλύτερος αριθμός νετρονίων από ότι πρωτονίων προκειμένου να βρίσκεται ο πυρήνας στην σταθερή κατάσταση. Στο μοντέλο της υγρής σταγόνας αυτή η ιδιαιτερότητα περιγράφεται από τον παράγοντα a_4 που επηρεάζει την ενέργεια σύνδεσης και δίνεται από:

$$a_4 = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\epsilon}{\rho}\Big)_{t=0} \quad \Big(t = \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho}\Big) \tag{1.1}$$

όπου τα ρ είναι αριθμητικές πυκνότητες.

Κεφάλαιο 2

Κλασσική Θεωρία Πεδίου

Η κλασσική θεωρία πεδίων αποτελεί μία γενίκευση ή αναδιατύπωση της γνωστής μηχανικής σωματίων μετατρέποντας τον πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας ενός συστήματος σωματίων σε συνεχές πλήθος βαθμών ελευθερίας, όπου πλέον οι δυναμικές μεταβλητές της θεωρίας είναι οι τιμές του πεδίου $\phi(x)$ σε κάθε σημείο του χώρου. Μας ενδιαφέρει ο χωροχρόνος της ειδικής σχετικότητας γι΄ αυτό και θα περιοριστούμε μόνο στις υποπεριπτώσεις του γενικού φορμαλισμού που τον αφορούν (δηλαδή θα ασχοληθούμε με Λαγκραντζιανές αναλλοίωτες υπό μετασχηματισμούς Lorentz). Ας ξεκινήσουμε με μια υπενθύμιση της μηχανικής σωματιδίων.

2.1 Κλασσική μηχανική σωματίων

Από την γνωστή μας Νευτώνια μηχανική αξιωματικά μέσω του δεύτερου νόμου ξέρουμε πως η περιγραφή της κίνησης ενός σωματιδίου που κινείται με n βαθμούς ελευθερίας σε ένα δυναμικό $V(q_1, ..., q_n, t)$ υπακούει στις εξισώσεις:

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i},\ i = 1, ...n \tag{2.1}$$

Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται με γνώση δύο συνθηκών όπως $q(t_0)$ και $\dot{q}(t_0)$. Οι q_i αποτελούν τις γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος ενώ η τελεία πάνω από το q

υποδηλώνει την χρονική παράγωγο. Τα V και q ανάλογα το σύστημα που μελετάμε μπορεί να έχουν διάφορες φυσικές ερμηνείες οπότε είναι πιο βολικό να τις χειριζόμαστε όσο πιο αφηρημένα γίνεται. Παρ΄ όλα αυτά για τον σκοπό μας το V θα είναι μία κλασσική συνάρτηση δυναμικού στον χώρο (π.χ. δυναμικό Coulomb). Αναλυτική παρουσίαση της μηχανικής σημειακών σωματίων υπάρχει στις [13], [4] .

2.1.1 Λαγκραντζιανός Φορμαλισμός

Η πιο σύγχρονη νοοτροπία στην μηχανική κωδικοποιεί κάθε πληροφορία που απαιτείται για το σύστημα στην *συνάρτηση Lagrange*:

$$L(q_1, ..., q_n, \dot{q_1}, ..., \dot{q_n}, t) = T - V \tag{2.2}$$

όπου

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{q_i}^2 \tag{2.3}$$

είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος και $V = V(q_1, ..., q_n, t)$ η δυναμική του ενέργεια. Έχουμε δηλαδή μία συνάρτηση που εξαρτάται από τις γενικευμένες συντεταγμένες, τις γενικευμένες ταχύτητες και τον χρόνο. Στην [13] αποδεικνύεται πως οι εξισώσεις (2.1) μπορούν να διατυπωθούν ως μία πολύ βασική αρχή της φυσικής,*την αρχή της στάσιμης δράσης του Hamilton*:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{2.4}$$

όπου πρόκειται για ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2. Κρατάμε υπ΄ όψιν πως προφανώς οι γενικευμένες συντεταγμένες και ταχύτητες πρόκειται για συναρτήσεις του χρόνου. Στο παράρτημα A αποδεικνύουμε το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού μεταβολών και την εξίσωση Euler-Lagrange, που πρέπει να υπακούει η συνάρτηση Lagrange προκειμένου να ισχύει η (2.4). Οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} = 0,\ i = 1, ...n \tag{2.5}$$

Επίσης από τις παραπάνω εξισώσεις είναι προφανές ότι η γενικευμένες ορμές θα δίνονται ως:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}. \tag{2.6}$$

Διαισθητικά η συνάρτηση Lagrange αποτελεί μία συνάρτηση ενέργειας και αυτό είναι φανερό από τον ορισμό της.

2.1.2 Χαμιλτονιανός Φορμαλισμός

Ο χαμιλτονιανός φορμαλισμός εκμεταλλεύεται τον ορισμό (2.6) της ορμής και δημιουργεί μία νέα συνάρτηση ενέργειας, την Χαμιλτονιανή του συστήματος:

$$H(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t)=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L(q_1,...,q_n,\dot{q}_1,...,\dot{q}_n)=T+V. \tag{2.7}$$

όπου $\dot{q}_i=\dot{q}_i(p_i)$. Ουσιαστικά πρόκειται για ένα μετασχηματισμό Legendre στην L προκειμένου να εκφραστεί μία ενέργεια συναρτήσει των γενικευμένων ορμών και συντεταγμένων. Αυτή είναι μάλιστα και η βασική διαφορά της H με την L. Κάποιος με λίγη εμπειρία στην κβαντομηχανική μπορεί άμεσα να αντιληφθεί τον λόγο που αυτός ο φορμαλισμός θα φανεί χρήσιμος στην συνέχεια.

Εδώ η περιγραφή της κίνησης του σωματίου γίνεται με τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\ \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ i=1,...n \tag{2.8}$$

ενώ επίσης θα ισχύει:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{2.9}$$

Και οι τρεις φορμαλισμοί που διατυπώθηκαν είναι απολύτως ισοδύναμοι και οδηγούν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο στις εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου.

Τέλος έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες βαθμωτές συναρτήσεις A,B των q_i και p_i του συστήματος. Η αγκύλη Poisson ορίζεται:

$$\{A,B\}=\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \tag{2.10}$$

Αν $A=A(q_i,p_i,t)$ αποδεικνύεται εύκολα με χρήση των (2.8) ότι:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\{A,H\} \tag{2.11}$$

Λεπτομερέστερη περιγραφή στην [14]. Τώρα ας μεταπηδήσουμε από τα σωματίδια στα πεδία κάνοντας τους βαθμούς ελευθερίας από n σε άπειρους χρησιμοποιώντας συνεχής μεταβλητή.

2.2 Θεωρία πεδίου

Ένα πεδίο ορίζεται ως ένα σύνολο από μία οι περισσότερες συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου. Καλύτερα, πλέον αντί να χειριζόμαστε ως δυναμική μεταβλητή τις γενικευμένες συντεταγμένες $q_a(t)$ όπου $a = 1, 2, ...n$ η δεικτοδότηση (ουσιαστικά ο αριθμός των ανεξάρτητων συντεταγμένων), ενδιαφερόμαστε για την δυναμική του πεδίου:

$$\phi_a(\vec{x}, t) = \phi_a(x, y, z, t) = \phi_a(x^\mu) \tag{2.12}$$

όπου $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ κατά τα γνωστά, αφού τα πεδία που μας ενδιαφέρουν εδώ θα ανήκουν στον χώρο Minkowski. Στην αλλαγή αυτή, πλέον η θέση στον χωροχρόνο γίνεται ελεύθερος δείκτης-παράμετρος που δίνει την τιμή στο πεδίο. Επομένως η θέση στην θεωρία πεδίου είναι αυτή που εξασφαλίζει τον άπειρο αριθμό βαθμών ελευθερίας αφού πρόκειται για συνεχή μεταβλητή.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ακριβώς όπως περιγράφεται στο παράρτημα Β είτε ως $E(\vec{x}, t)$ και $B(\vec{x}, t)$, είτε στην διατύπωση μέσω δυναμικών ως $A^\mu(\vec{x}, t) = (\phi, \vec{A})$.

Μεταφέρουμε τώρα τον φορμαλισμό την Λαγκραντζιανής μηχανικής σωματίων στην θεωρία πεδίου. Η δυναμική ενός πεδίου περιγράφεται από την Lagrangian η οποία είναι συνάρτηση των $\phi_a(\vec{x},t)$ και των παραγώγων τους $\dot{\phi}_a(\vec{x},t)$, $\nabla\phi_a(\vec{x},t)$:

$$\begin{aligned} L(t) &= \int d^3x\mathcal{L} \\ &= \int d^3x\mathcal{L}\Big(\phi_a(\vec{x},t), \frac{d\phi_a(\vec{x},t)}{dt}, \frac{d\phi_a(\vec{x},t)}{d\vec{x}}\Big) \\ &= \int d^3x\mathcal{L}\Big(\phi_a(\vec{x},t), \dot{\phi}_a(\vec{x},t), \nabla\phi_a(\vec{x},t)\Big) \\ &= \int d^3x\mathcal{L}(\phi_a(x^\mu), \frac{\partial\phi_a(x^\mu)}{\partial x^\nu}) \\ &= \int d^3x\mathcal{L}(\phi_a(x^\mu), \partial_\nu\phi_a(x^\mu)) \end{aligned} \tag{2.13}$$

όπου το $\mathcal{L}$ ονομάζεται Λαγκραντζιανή πυκνότητα αλλά συχνά αναφέρεται απλά ως Λαγκραντζιανή.

Εδώ εύλογα, προκύπτει το ερώτημα γιατί περιοριστήκαμε στην Λαγκραντζιανή ως συνάρτηση μόνο του πεδίου και της πρώτης παραγώγου και όχι μεγαλύτερων τάξεων παραγώγους, η ακόμα και του x^μ. Μαθηματικά δεν υπάρχει κανένας απολύτως περιορισμός, υπάρχουν όμως σε βάθος φυσικοί λόγοι οι οποίοι αποτρέπουν διαφορετικού τύπου Λαγκραντζιανές στις κύριες αλληλεπιδράσεις της φύσης και τις εφαρμογές της παρούσης εργασίας, οι οποίοι έχουν να κάνουν κυρίως με τις διάφορες συμμετρίες που πρέπει να πληρούνται.

Στην αναφορά [4] βλέπουμε ότι η αρχή του Hamilton της στάσιμης δράσης γενικεύεται και στην περίπτωση των πεδίων. Αυτή την φορά η δράση θα είναι:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dtL(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x\mathcal{L} = \int d^4x\mathcal{L} \tag{2.14}$$

Απαιτώντας $\delta S = 0$ αναλογικά με το παράρτημα Α καταλήγουμε στις:

$$\partial_\nu\bigg(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_a)}\bigg) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} = 0 \tag{2.15}$$

όπου είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange στην θεωρία πεδίου.

Αναλογικά επίσης, ορίζουμε την ορμή ως:

$$\pi^a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_a} \tag{2.16}$$

και την Χαμιλτονιανή του πεδίου:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\mathcal{H} \\ &= \int d^3x\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_a}\dot{\phi}_a - \mathcal{L}\Big) \\ &= \int d^3x\Big(\pi^a\dot{\phi}_a - \mathcal{L}\Big) \end{aligned} \tag{2.17}$$

όπου το $\mathcal{H}$ αποτελεί την Χαμιλτονιανή πυκνότητα:

$$\mathcal{H} = \pi^a\dot{\phi}_a - \mathcal{L} \tag{2.18}$$

Μια δεύτερη εύλογη ερώτηση όσον αφορά την αρχή του Hamilton, είναι αν η εξίσωση (2.15) που καταλήγουμε μηδενίζοντας την μεταβολή της δράσης, προέρχεται από μόλις μία Λαγκραντζιανή $\mathcal{L}$. Με λίγη εμπειρία είναι φανερό πως αυτό δεν είναι ιδιαίτερα πιθανό γιατί η τελική μας εξίσωση είναι διαφορική, υπάρχουν δηλαδή σταθεροί όροι που θα μπορούσανε να αναιρούνται με τις διάφορες παραγωγίσεις της $\mathcal{L}$. Όντως εύκολα επιβεβαιώνει κανείς πως ο μετασχηματισμός:

$$\mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu \tag{2.19}$$

αφήνει αναλλοίωτες τις (2.15), όπου $F^\mu(\phi)$ κάποιες συναρτήσεις του πεδίου.

2.3 Θεώρημα Noether

Το θεώρημα Noether είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της φυσικής, καθώς συνδέει τους μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτη την (2.15) ενός συστήματος με την διατήρηση κάποιας ποσότητας. Η ποσότητα αυτή συχνά λέγεται ρεύμα ή ροή. Οι μετασχηματισμοί μπορεί να είναι διάφορων τύπων. Προκειμένου να αποδείξουμε το θεώρημα υποθέτουμε μία απειροστή μεταβολή στο πεδίο από το οποίο εξαρτάται η Λαγκραντζιανή. Εφόσον μιλάμε για συνεχείς μετασχηματισμούς θα δουλέψουμε με απειροστές μεταβολές του πεδίου:

$$\phi_a(x) \to \phi'_a(x') = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x). \tag{2.20}$$

όπου συμβολίζουμε διαφορετικά ως:

$$\delta\phi_a(x) = X_a(\phi) \tag{2.21}$$

Αυτή η μεταβολή θα είναι συμμετρία[1] αν η μεταβολή της Λαγκραντζιανής είναι:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \tag{2.22}$$

όπως φαίνεται στην (2.19).

Κατά τα γνωστά παίρνουμε την πρώτη μεταβολή στην Λαγκραντζιανή για την δεδομένη μεταβολή του πεδίου:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\mu(\delta\phi_a) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right]\delta\phi_a + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

όπου χρησιμοποίησα τον ορισμό της παραγώγου γινομένου:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right)\delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\mu(\delta\phi_a) \tag{2.24}$$

Ο πρώτος όρος στην (2.23) μηδενίζεται λόγω της (2.15), άρα έχουμε:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right) \tag{2.25}$$

Από τις (2.22) και (2.21) ολοκληρώνοντας παρουσιάζεται μία σταθερά j^μ όπου:

$$\partial_\mu j^\mu = 0,\ j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}X_a(\phi) - F^\mu(\phi) \tag{2.26}$$

Αυτή την σταθερή ποσότητα αποκαλούμε γενικά ως ρεύμα όπου προφανώς η:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial j^0}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \tag{2.27}$$

πρόκειται για την γενική εξίσωση συνέχειας.

Προφανώς από εδώ σε πλήρη αναλογία με τον ηλεκτρομαγνητισμό μπορούμε να ορίσουμε την διατήρηση ενός φορτίου:

$$Q = \int d^3x j^0 \tag{2.28}$$

όπου αν παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο εύκολα δείχνεται ότι ισούται με το 0.

[1] Ο ορισμός των μετασχηματισμών συμμετρίας σε αυτά τα συστήματα είναι να αφήνουν αναλλοίωτες τις εξισώσεις Euler Lagrange.

Βλέπουμε λοιπόν πως η εξίσωση συνέχειας πρόκειται για την διατήρηση μίας τετρανυσματικής ποσότητας η οποία προκύπτει άμεσα όταν ένα σύστημα έχει κάποια συνεχή συμμετρία. Η αξία όμως του θεωρήματος Noether φαίνεται αν αντιληφθεί κανείς την γενικότητα του. Εφαρμόζεται σχεδόν σε κάθε θεωρία της φυσικής, το συναντάμε από την μηχανική ρευστών(διατήρηση μάζας) και τον ηλεκτρομαγνητισμό(διατήρηση φορτίου) μέχρι την κβαντομηχανική(διατήρηση πυκνότητας πιθανότητας) και την Φυσική Στοιχειωδών σωματιδίων (π.χ. διατήρηση χρωματικού φορτίου στην QCD). Ας ασχοληθούμε λοιπόν με την εφαρμογή που μας ενδιαφέρει άμεσα: την διατήρηση του τανυστή ενέργειας-ορμής.

2.4 Τανυστής Ενέργειας-Ορμής

Μία συνήθης (και ίσως η σημαντικότερη) συμμετρία μίας Λαγκραντζιανής πυκνότητας είναι η μεταφορική συμμετρία [2]:

$$x^\nu \to x'^\nu = x^\nu + \epsilon^\nu \tag{2.29}$$

Η ύπαρξη αυτής της συμμετρίας δηλώνει πως η Λαγκραντζιανή πυκνότητα του συστήματος είναι ανεξάρτητη της χρονικής και της χωρικής προέλευσης του συστήματος, δηλαδή όποτε και όπου υπάρχει κάποιο σύστημα με αυτή την $\mathcal{L}$ θα υπακούει στην ίδια εξίσωση. Το κίνητρο για να ψάξουμε για μία τέτοιου είδους συμμετρία είναι η ομογένεια του χώρου Minkowski.

Επομένως από την (2.29) για το πεδίο θα ισχύει:

$$\phi_a(x) \to \phi'_a(x') = \phi_a(x) + \epsilon^\nu \partial_\nu \phi_a. \tag{2.30}$$

Άρα για την $\mathcal{L}$ θα ισχύει:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \epsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L} \tag{2.31}$$

όπου εξαρτάται από τις γνωστές ποσότητες όπως φαίνεται στην (2.13). Εφόσον η μεταβολή στην Λαγκραντζιανή είναι της μορφής (2.22) μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα

[2] Το «μεταφορικός» εδώ χρησιμοποιείται ως μετάφραση του όρου translational. Στην κυριολεξία, ο μετασχηματισμός δεν είναι απλά μεταφορικός χωρικά στις 3 διαστάσεις αλλά και στον χρόνο όπως φαίνεται και από τον ορισμό του.

Noether. Θα έχουμε[3]

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\epsilon^\nu \partial_\nu \phi_a - \epsilon^\nu \mathcal{L} \\ &= \epsilon^\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\partial_\nu \phi_a - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right] \cdot \\ &= \epsilon^\nu T^\mu_\nu \end{aligned} \tag{2.32}$$

Αφού το ϵ^ν είναι μια απειροστή ελεύθερη παράμετρος αλλά όχι μηδενική, η ποσότητα που θα παραμένει σταθερή είναι η:

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0. \tag{2.33}$$

Ουσιαστικά πρόκειται για 4 διατηρήσιμα τετραρεύματα Noether ένα για κάθε ϵ^ν με $\nu = 0, 1, 2, 3$. Ο λόγος που η διατηρήσιμη ποσότητα είναι τανυστής δεύτερης τάξης προκύπτει από το γεγονός ότι όλη η διαδικασία αποτελείται από δύο συστατικά βήματα. Αν και η Λαγκραντζιανή μεταβάλλεται κατά τον καθιερωμένο τρόπο (δηλαδή λόγω της μεταβολής του πεδίου), η μεταβολή του πεδίου οφείλεται σε μια δεύτερη μεταβολή, την (2.29). Σαν παράδειγμα φανταστείτε ένα πεδίο που αλλάζει κατεύθυνση αν περιστραφεί το σύστημα αναφοράς. Τέλος ξαναγράφουμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής σε μία πιο προσιτή μορφή:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\partial^\nu \phi_a - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{2.34}$$

Η εξίσωση $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ υποδηλώνει τις γνωστές αρχές, διατήρησης της ορμής:

$$P^i = \int d^3x T^{0i} \tag{2.35}$$

και της ενέργειας:

$$E = \int d^3x T^{00} \tag{2.36}$$

που γνωρίζουμε από την κλασσική μηχανική.

Σημειώνουμε τέλος πως στην περίπτωση που τα πεδία είναι τελεστές[4], οι αναμενόμενη τιμή της θεμελιώδους κατάστασης λαμβάνεται ως :

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\partial^\nu \phi_a - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \right\rangle \\ &= -P\eta^{\mu\nu} + (P+\epsilon)u^\mu u^\nu \end{aligned} \tag{2.37}$$

όπου προφανώς δανειστήκαμε την εξίσωση του κλασσικού ρευστού.

[3]Προφανώς στην περίπτωσή μας: $X_a(\phi_a) = \epsilon^\nu \partial_\nu \phi_a$ και $F^\mu = \epsilon^\nu \mathcal{L}$ όπως φαίνεται στις (2.21), (2.22), (2.31).

[4]Το πως ακριβώς έπεται.

Στην περίπτωση που υποθέτουμε στατικό, σφαιρικά συμμετρικό και σε ηρεμία ιδανικό υγρό (χωρίς τριβή ή θερμική αγωγιμότητα)[7]:

$$\epsilon = \langle T^{00} \rangle \tag{2.38}$$

$$P = \frac{1}{3}\langle T^{ii} \rangle. \tag{2.39}$$

Κεφάλαιο 3

Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Φτάσαμε τώρα στο σημείο να εισάγουμε την Κβαντική Θεωρία Πεδίου ή QFT. Η QFT αποτελεί την μεγαλύτερη πειραματικά επιβεβαιωμένη σύνθεση δύο θεωριών σε ολόκληρη την ιστορία της Φυσικής. Πρόκειται για την σύνθεση της Ειδικής Σχετικότητας και της Κβαντικής Θεωρίας, δύο εκ των σημαντικότερων θεωριών.

3.1 Μη-Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Ας ξεκινήσουμε με μία γρήγορη υπενθύμιση της βασικής κβαντομηχανικής. Πρόκειται προφανώς όπως και στην κλασσική περίπτωση για κβαντομηχανική σωματιδίων. Η κβαντική Θεωρεία βασίζεται σε 5 αξιωματικές προτάσεις (ή και παραπάνω ανάλογα την διατύπωση), οι οποίες περιγράφονται αναλυτικά στην [16]. Από αυτά τα αξιώματα άμεσα θα μας απασχολήσουν τα δύο παρακάτω:

- Κάθε φυσικό μέγεθος A που αφορά το σωματίδιο, αντιπροσωπεύεται από έναν ερμιτιανό τελεστή $\hat{A}$ ο οποίος προκύπτει από την κλασική έκφραση του μεγέθους συναρτήσει της θέσης και της ορμής, $A = A(\vec{r}, \vec{p})$, με την αντικατάσταση:

$$\vec{r} \to \vec{r}, \quad \vec{p} \to -i\hbar\nabla. \tag{3.1}$$

- Η χρονική εξέλιξη της κατάστασης ενός κβαντικού σωματιδίου περιγράφεται από τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση εξίσωση Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \tag{3.2}$$

όπου $\hat{H}$ ο χαμιλτονιανός τελεστής του προβλήματος και $\psi = \psi(t, x, y, z)$.

Για τα υπόλοιπα αξιώματα, το πρώτο υποδηλώνει πως η κυματοσυνάρτηση $\psi(\vec{r}, t)$ περιέχει κάθε πληροφορία για το σύστημα, το τρίτο εξηγεί την στατιστική ερμηνεία της κβαντομηχανικής (δηλαδή το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές των κβαντομηχανικών τελεστών έχουν συγκεκριμένη πιθανότητα να εμφανιστούν και σε άπειρο πλήθος επαναλήψεων του πειράματος ο μέσος όρος τους τείνει στην μέση τιμή), το τέταρτο αφορά την επίδραση της μέτρησης στο σύστημα, ενώ κάποιοι κατηγοριοποιούν και την αρχή του Pauli ως αξίωμα [1]. Αναλυτική περιγραφή της κβαντομηχανικής θεωρίας σωματίων υπάρχει στις: [18],[16].

Κατά την κβαντική θεώρηση τα κβαντομηχανικά σημειακά σωμάτια δεν βρίσκονται τέλεια εντοπισμένα στο χώρο (μη τοπικότητα) αλλά υπάρχει μία κατανομή πιθανότητας της θέσης του σωματίου. Κάθε σύστημα με κυματοσυνάρτηση ανήκει σε έναν χώρο Hilbert στον οποίο δρουν και όλοι οι τελεστές (θέσης και ορμής) [8].

Όσον αφορά την εξίσωση Schrödinger φαίνεται εύκολα πως:

$$\hat{H} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{3.3}$$

όπου όπως γνωρίζουμε από την κλασσική μηχανική είναι η ενέργεια του συστήματος δηλαδή το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Όπως προείπαμε όμως κάθε τελεστής πρέπει να εκφραστεί συναρτήσει των τελεστών της ορμής και της θέσης.

Για παράδειγμα στην μη σχετικιστική μηχανική ενός σωματιδίου σε δυναμικό:

$$\begin{aligned} H &= T + V \\ &= \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) \\ &= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

[1] Αυτό συμβαίνει γιατί η συμμετρικότητα/αντισυμμετρικότητα στις κυματοσυναρτήσεις πολλών σωματίων χρειάζεται πεδία για να μην εισαχθεί ως ad hoc.

Έτσι η εξίσωση Schrödinger παίρνει την μορφή:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,\vec{r})}{\partial t} = \frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(t,\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(t,\vec{r}) \tag{3.5}$$

και η ελεύθερη χρονοεξαρτημένη περίπτωση:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,\vec{r})}{\partial t} = \frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(t,\vec{r}) \tag{3.6}$$

Η ελεύθερη εξίσωση επιδέχεται ως γενικές λύσεις επίπεδα κύματα της μορφής:

$$\psi(t,\vec{r}) = Ne^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{3.7}$$

Η ειδική σχετικότητα υποχρεώνει τις εξισώσεις κίνησης να είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Γι΄ αυτό και αυτή η εξίσωση Schrödinger δεν αποτελεί κατάλληλη για μια σχετικιστική κβαντική θεωρία.

3.2 Εξίσωση Klein Gordon

Στην αναζήτηση μας για μία κβαντική θεωρία σχετικιστικών σωματιδίων θα πάμε να εφαρμόσουμε στην εξίσωση Schrödinger μία χαμιλτονιανή κατασκευασμένη σύμφωνα με την ενέργεια (Β΄.21) όπως αποδείξαμε ότι ισχύει για τα σχετικιστικά σωμάτια. Η ενέργεια είναι είδη γραμμένη συναρτήσει της ορμής της, το πρόβλημα που γεννάτε όμως είναι προφανώς η δεύτερη δύναμη της ενέργειας. Δεν φαίνεται απλό το να έχουμε κάτω από ένα ριζικό έναν τελεστή και δεν υπάρχει κάποιος προφανής τρόπος για να τον χειριστούμε :

$$\hat{E} = \pm\sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^2} \tag{3.8}$$

Ένας απλός τρόπος για να το αποφύγουμε αυτό είναι να υψώσουμε και τα δύο μέλη της Schrödinger στο τετράγωνο οπότε θα έχουμε:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x^\mu) = (-\nabla^2 + m^2)\phi(x^\mu) \tag{3.9}$$

όπου $\phi(x^\mu)$ μία συνάρτηση που εξαρτάται από το τετράνυσμα $x^\mu = (t, x, y, z)^2$.

Σε συναλλοίωτη μορφή:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x^\nu) = 0 \tag{3.10}$$

αφού

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{3.11}$$

Η εξίσωση (3.10) ονομάζεται εξίσωση Klein-Gordon και όπως θα δούμε παρακάτω αφορά μποζόνια μηδενικού σπιν. Επιδέχεται όπως εύκολα φαίνεται λύσεις της μορφής:

$$\phi(x^\mu) = N e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = N e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} = N e^{-ip_\mu x^\mu} \tag{3.12}$$

όπου αντικατέστησα σε φυσικές μονάδες $\vec{k} = \hbar\vec{p} = \vec{p}$ και $E = \hbar\omega = \omega$. Τονίζω εδώ πως πρόκειται για ελεύθερη εξίσωση(χωρίς εξωτερικό δυναμικό).

Ένα επιπλέον πρόβλημα όπως φάνηκε και νωρίτερα είναι πως η ενέργεια μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την αντικατάσταση της (3.12) στην (3.10). Μια επίπτωση αυτού είναι πω αν υπολογίσουμε την ροή της πυκνότητας πιθανότητας όπως συνηθίζουμε στην κβαντομηχανική ως:

$$j^\mu(x) = i[\phi^*(x)\partial^\mu \phi(x) - \big(\partial^\mu \phi^*(x)\big)\phi(x)] \tag{3.13}$$

βρίσκουμε $J^0 = \rho = 2|N|^2 E$. Μέχρι τώρα στις λύσεις της εξίσωσης Schrödinger ερμηνεύαμε την χρονική συνιστώσα της ροής ως πυκνότητα πιθανότητας. Πως όμως θα γίνει το ίδιο εδώ όπου το ρ παίρνει και αρνητικές τιμές; Η επίλυση του προβλήματος συζητιέται αργότερα.

3.3 Εξίσωση Dirac

Σε μία προσπάθεια να διορθώσει όλα τα παραπάνω προβλήματα ο Dirac παρήγαγε την ομώνυμη εξίσωση χρησιμοποιώντας έξυπνες μαθηματικές τεχνικές και φυσική διαίσθηση.

[2] Χρησιμοποιώ φυσικές μονάδες $c = \hbar = 1$.

Αρχικά χρησιμοποιώντας την (Β′.21) επιλέγουμε την θετική τιμή της ενέργειας (αφού κλασσικά δεν υπάρχει λόγος να σκεφτούμε ότι υπάρχουν αρνητικές ενέργειες) και την εισάγουμε στην (3.2):

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{p^2+m^2}\psi(x) \tag{3.14}$$

Το πρόβλημα του τελεστή της ορμής κάτω από την ρίζα διορθώνεται με την απαίτηση:

$$\sqrt{p^2+m^2} \to \mathbf{a}\cdot\mathbf{p} + \beta m \tag{3.15}$$

όπου $\mathbf{p} = -i\nabla$ ο γνωστός τελεστής της ορμής και m η μάζα. Αυτό γίνεται στην προσπάθεια να υπάρξει κάποιου είδους γραμμική σχέση ώστε να μπορέσουν να εφαρμοσθούν οι τελεστές στην συνάρτηση $\psi(x)$. Εδώ να τονισθεί ότι προς το παρόν, η μόνη απαίτηση που έχουμε για τα $\mathbf{a}$ και β είναι ότι το πρώτο είναι διανυσματικό ενώ το δεύτερο βαθμωτό ενώ και τα δύο πρόκειται για σταθερές ποσότητες ανεξάρτητες του χώρου και του χρόνου (θα ήταν υπερβολή να απαιτήσουμε συγκεκριμένη εξάρτηση καθώς δεν υπάρχει τρόπος να ξέρουμε πιθανές καλές επιλογές).

Αν τώρα δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε τα $\mathbf{a}$ και β απλά υψώνοντας στο τετράγωνο την (3.15) βρίσκουμε μία μακροσκελή σχέση που μοιάζει με(όπως είναι προφανώς συνεχίζουμε με φυσικές μονάδες):

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2+m^2 \\ &= p_x^2+p_y^2+p_z^2+m^2 \\ &= (a_xp_x+a_yp_y+a_zp_z)(a_xp_x+a_yp_y+a_zp_z) \\ &= a_x^2p_x^2+a_y^2p_y^2+a_z^2p_z^2+\beta^2m^2+a_xa_yp_xp_y+a_ya_xp_yp_x+\kappa.o.\kappa \end{aligned} \tag{3.16}$$

Προφανώς οι σταθερές ποσότητες a βγαίνουν από την παραγώγιση των τελεστών της ορμής αφού δεν έχουν χωρική εξάρτηση όμως δεν υποθέτουμε ότι η συνιστώσες είναι αριθμοί που αντιμετατίθενται, και όπως θα δούμε ο χειρισμός αυτός θα αποδειχθεί ασφαλέστερος. Παρατηρούμε λοιπόν πως αν εξισώσουμε τους αντίστοιχους όρους προκειμένου να ισχύει η ισότητα και λαμβάνοντας υπ′ όψιν την αντιμεταθετικότητα των τελεστών της ορμής καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις για τα $\mathbf{a}$ και β:

$$\begin{aligned} \{a_i, \beta\} &= 0 \qquad i = 1,2,3 \\ \{a_i, a_j\} &= 2\delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,3 \end{aligned} \tag{3.17}$$

όπου $\{A, B\} = AB + BA$.

Προκειμένου να ισχύουν όμως για κάποια στοιχεία αυτές οι συνθήκες ταυτόχρονα ο Dirac ανακάλυψε ότι τα $\mathbf{a}$ και β πρέπει να είναι πίνακες. Δοκιμάζοντας διάφορες αλγεβρικές δομές και με την υπόθεση ότι αυτοί οι πίνακες $\mathbf{a}$ και β πρέπει να είναι ερμιτιανοί (αφού και η χαμιλτονιανή στην οποία ανήκουν πρέπει να είναι και αυτή ερμιτιανή) βρίσκουμε ότι οι πίνακες πρέπει να είναι τετραγωνικοί, το λιγότερο τεσσάρων διαστάσεων και μία τους μορφή είναι το σύνολο Pauli-Dirac:

$$a_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

όπου

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Το γεγονός λοιπόν ότι οι σταθερές μας πρέπει να είναι πίνακες 4Χ4 για να λειτουργήσει η μέθοδος μας, μας υποχρεώνει σε ένα δεύτερο διαισθητικό ορισμό. Προκειμένου να μπορούν να εκτελεσθούν αλγεβρικές πράξεις στην εξίσωση Dirac θα πρέπει η κυματοσυνάρτηση να έχει την μορφή:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

γνωστή και ως Dirac Spinor. Μπορούμε ανάλογα με προηγούμενες ¨μαντεψιές' να υποθέσουμε τώρα την λύση:

$$\psi(x) = \omega e^{-ip^\mu x_\mu} \tag{3.21}$$

όπου ω είναι το στηλοτετράνυσμα:

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

με τα ϕ_1 και ϕ_2 να είναι σπίνορ δύο συνιστωσών(τα γράφουμε σε συμπυκνωμένη μορφή για πρακτικούς λόγους).

Επιστρέφουμε τώρα στην (3.14) και αντικαθιστώντας την λύση μας στην εξίσωση ιδιοτιμών:

$$E \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mI & \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} & -mI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

όπου βρίσκουμε τις παρακάτω εξισώσεις σπίνορ:

$$\begin{aligned} (E-m)\phi_1 &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}\phi_2 \\ (E+m)\phi_2 &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}\phi_1 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Από εδώ είναι προφανές πως η (3.22) γίνεται:

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{E+m}\phi_1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

καθώς και:

$$(E-m)(E+m)\phi_1 = \boldsymbol{p}^2\phi_1 \tag{3.26}$$

αφού $\sigma_i^2 = I$. Βλέπουμε λοιπόν ότι και εδώ η εξίσωση Dirac επιδέχεται αρνητικές ενέργειες:

$$E = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}. \tag{3.27}$$

Προς το παρόν λοιπόν το ένα εκ των δύο προβλημάτων που είχαμε δεν φαίνεται να επιλύεται. Προτού όμως μιλήσουμε για το δεύτερο ας γράψουμε την εξίσωση σε συναλλοίωτη μορφή.

Ορίζουμε τους πίνακες γ ως:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta \\ \gamma^i &= \beta a^i = \gamma^0 a^i \end{aligned} \tag{3.28}$$

Άμεσα μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2\eta^{\mu\nu} I \\ (\gamma^i)^2 &= -I \\ (\gamma^0)^2 &= I \\ (\gamma^\mu)^\dagger &= \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\mu \end{aligned} \tag{3.29}$$

με $i = 1, 2, 3$ και $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Έτσι αν αντικαταστήσουμε στην (3.15) τα γ και την εισάγουμε στην (3.14) μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με γ^0 και να καταλήξουμε στην:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{3.30}$$

που είναι και η συνοπτική μορφή της εξίσωσης Dirac.

Επιπλέον ορίζουμε την *συζηγή Dirac* την κυματοσυνάρτησης μας ως:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger(x)\gamma^0. \tag{3.31}$$

Αυτός εδώ ο ορισμός γίνεται προκειμένου να έχουμε ορθογώνια σπίνορ με τον ίδιο τρόπο που έχουν ορθογώνιες καταστάσεις στην απλή κβαντομηχανική. Αλλιώς, θα πρέπει ο συζηγής του σπίνορ να είναι αναλλοίωτος κατά Lorentz [3] Η συμμετρία φάσης του σπίνορ τώρα $\psi \to e^{-ia}\psi$ δίνει το διατηρήσιμο ρεύμα :

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{3.32}$$

του οποίου η χρονοειδής συνιστώσα είναι:

$$\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi > 0. \tag{3.33}$$

[3] Γενικότερα υπάρχει πάρα πού θεωρία πίσω από τον τον ορισμό αυτό, καθώς επίσης και από τον ορισμό των πινάκων Lorentz.Μία ιδιαίτερα αναλυτική περιγραφή δίνεται στην [11].

Λύσαμε το πρόβλημα των αρνητικών πιθανοτήτων καθώς τώρα η παραπάνω ποσότητα μπορεί να ερμηνευθεί ανάλογα με την μη σχετικιστική περίπτωση. Παρ΄ όλα αυτά οι αρνητικές ενέργειες παραμένουν.

3.4 Ερμηνεία των Αρνητικών Ενεργειών

Όπως είδαμε οι αρνητικές ενέργειες δεν εξαφανίζονται με διαφορετική χρήση της εξίσωσης Schrödinger για τις σχετικιστικές ενέργειες. Αυτό οδήγησε τον Dirac να προσπαθήσει να ερμηνεύσει αυτές τις τιμές αναγκάζοντας τον να προβλέψει την ύπαρξη του ποζιτρονίου. Ο Dirac είδε πως η ομώνυμη εξίσωση δίνει σε ένα σωματίδιο με 1/2 σπιν την επιλογή αρνητικών και θετικών ενεργειών οι οποίες βρίσκονται συμμετρικά απλωμένες γύρω από το μηδέν. Αν υπήρχε ένα σωματίδιο με θετική ενέργεια θα υπήρχε τότε περίπτωση να πέσει σε αυτές τις αρνητικές ενέργειες αυθόρμητα, δεν παρατηρούμε όμως κάτι τέτοιο στην φύση. Ο Dirac λοιπόν είπε πως αυτό που λέμε κενό είναι οι γεμάτες με ηλεκτρόνια αρνητικές στάθμες ενέργειας, και αφού τα σωματίδια με 1/2 σπιν πρέπει να υπακούν στην αρχή Pauli δεν ¨χωράει' άλλο ηλεκτρόνιο από τις θετικές ενέργειας να πάει αυθόρμητα στις αρνητικές. Αυτή την θάλασσα ηλεκτρονίων αρνητικών ενεργειών την ονομάζουμε *Θάλασσα Dirac.*

Έτσι αν ένα ηλεκτρόνιο από τις κατειλημμένες στάθμες ανέβει στις θετικές (πχ διάσπαση φωτονίου σε ποζιτρόνιο και ηλεκτρόνιο) τότε αφήνει μία θέση ανοιχτή στην θάλασσα Dirac. Η θέση αυτή είναι το ποζιτρόνιο και συμπεριφέρεται σαν θετικά φορτισμένο σωματίδιο.

Αργότερα ο Feynman ερμήνευσε τις αρνητικές ενέργειες σαν σωματίδια θετικής ενέργειας που ταξιδεύουν αντίστροφα στον χρόνο ή σαν αντισωματίδια που κινούνται κανονικά στον χρόνο. Με αυτήν την προοπτική μπορούμε πλέον να μιλήσουμε και για μποζόνια σε αντίθεση με προηγουμένως που η εξήγηση αφορούσε μόνο φερμιόνια.

3.5 Η Κανονική Κβάντωση των Πεδίων

Η κβαντική θεωρία πεδίου δεν είναι τίποτα άλλο παρά η εφαρμογή της κβαντομηχανικής στα πεδία. Υπάρχουν πάρα πολύ λόγοι που κάνουμε αυτή την κίνηση(Αρχή αιτιότητας,αρνητικές ενέργειες,συστήματα πολλών σωματίων και λοιπά)

Μία από της διαδικασίες κβάντωσης στην QFT είναι η λεγόμενη Κανονική Κβάντωση. Η διαδικασία αυτή είναι όμοια με αυτή της γνωστής κβαντομηχανικής με την διαφορά ότι οι τελεστές θέσης και ορμής δίνουν την θέση τους σε τελεστές πεδίων [5].

Αρχικά αντικαθιστούμε τα κλασσικά πεδία με τελεστές:

$$\begin{aligned} \phi_r &\longrightarrow \hat{\phi}_r \\ \pi_s &\longrightarrow \hat{\pi}_s \end{aligned} \tag{3.34}$$

Με αυτούς τους τελεστές εργαζόμαστε στην εικόνα Heisenberg και πρέπει να υπακούν στην εξίσωση:

$$i\hbar\frac{d\mathcal{O}(t)}{dt} = [\mathcal{O}(t), H] \tag{3.35}$$

Επίσης ανάλογα με την συνθήκη $[x,p] = i\hbar$ κάθε ζευγάρι πεδιακών τελεστών πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες οι οποίες επιβάλουν την αρχή της αιτιότητας καθώς και την σωστή σχέση σπιν-στατιστικής που χρειάζονται τα σωματίδια που περιγράφει το πεδίο [5].

Στην συνέχεια εκφράζουμε σαν άθροισμα Fourier σαν:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_r(t,\boldsymbol{x}) &= \sum_i \hat{a}_{ri}(t)u_{ri}(\boldsymbol{x}) \\ \hat{\phi}_r^\dagger(t,\boldsymbol{x}) &= \sum_i \hat{a}_{ri}^\dagger(t)u_{ri}^*(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{3.36}$$

Ουσιαστικά αν αυτοί οι τελεστές δράσουν σε μία κατάσταση και π.χ. ο $\phi^\dagger$ δημιουργεί ένα σωματίδιο στην θέση (x), με ορμή στην στάθμη p_i. Γενικά καθ΄ όλη την διάρκεια της κβάντωσης από εδώ και πέρα χρησιμοποιείται η [5] στην οποία εξηγούνται και τα πάντα με λεπτομέρεια. Διατηρούμε τους συμβολισμούς που δίνονται εκεί.

3.6 Βαθμωτά Πεδία

Τα βαθμωτά μποζόνια (σπιν=1) με μάζα περιγράφονται από την εξίσωση Klein-Gordon. Η Λανγκραντζιανή πυκνότητα που περιγράφει το πραγματικό βαθμωτό $\phi(x) = \phi(x^\nu)$ πεδίο μάζας m σε φυσικές πάντα μονάδες είναι:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi(x)\partial_\mu \phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2 \tag{3.37}$$

από την εξίσωση Euler-Lagrange κατευθείαν:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0. \tag{3.38}$$

Όπως ακριβώς εξηγήσαμε στην Κλασσική Θεωρία Πεδίου το συζυγές πεδίο είναι:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \tag{3.39}$$

και μας επιτρέπεται έτσι να γράψουμε την Χαμιλτονιανή Πυκνότητα ως:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\Big) \end{aligned} \tag{3.40}$$

3.6.1 Κβάντωση

Στην κανονική κβάντωση λοιπόν αντικαθιστούμε:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \hat{\phi}(x) \\ \pi(x) &\longrightarrow \hat{\pi}(x) \end{aligned} \tag{3.41}$$

ενώ οι τελεστές πρέπει να υπακούν στους παρακάτω μεταθέτες ίσου χρόνου:

$$\begin{aligned} \Big[\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x}), \hat{\pi}(t,\boldsymbol{x'})\Big] &= i\delta(\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{x'}) \\ \Big[\hat{\phi}(t,\boldsymbol{x}), \hat{\phi}(t,\boldsymbol{x'})\Big] &= [\hat{\pi}(t,\boldsymbol{x}), \hat{\pi}(t,\boldsymbol{x'})] = 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Η κβαντωμένη Χαμιλτονιανή είναι:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{p}\big(\hat{\pi}^2 + (\nabla\hat{\phi})^2 + m^2\hat{\phi}^2\big) \tag{3.43}$$

3.6.2 Τελεστές πεδίου

Η εξίσωση κίνησης του $\hat{\phi}(x)$ ακολουθεί την (3.35) (όπου από την (3.39) έχουμε $\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}$):

$$\ddot{\hat{\phi}}(t, \boldsymbol{x}) = (\nabla^2 - m^2)\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x}) \tag{3.44}$$

όπου είναι η εξίσωση Klein-Gordon ουσιαστικά. Από την (3.12) έχουμε:

$$u_{\boldsymbol{p}}(t, \boldsymbol{x}) = N_p e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3.45}$$

όπου N_p η σταθερά κανονικοποίησης. Άρα

$$\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{p} \; N_p \; e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \; \hat{a}_{\boldsymbol{p}}(t). \tag{3.46}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.44) βρίσκουμε:

$$\ddot{\hat{a}}_{\boldsymbol{p}}(t) = -(\boldsymbol{p}^2 + m^2)\hat{a}_{\boldsymbol{p}}(t) \tag{3.47}$$

το οποίο σημαίνει προφανώς

$$\hat{a}_{\boldsymbol{p}}(t) = \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{(1)} e^{-i\omega_p t} + \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{(2)} e^{+i\omega_p t}, \tag{3.48}$$

με $\omega_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$.

Αν υποθέσουμε ότι το αρχικό πεδίο είναι πραγματικό θα πρέπει να ισχύει $\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}$ έτσι άμεσα από τις παραπάνω σχέσεις:

$$\left(\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{(1)}\right)^\dagger = \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{(2)}. \tag{3.49}$$

Συνεπώς η λύση για το ελεύθερο σωμάτιο στο κβαντισμένο βαθμωτό πραγματικό πεδίο είναι:

$$\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{p} \; N_p \; \left(\hat{a}_{\boldsymbol{p}} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - \omega_p t)} + \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^\dagger e^{-i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - \omega_p t)}\right) \tag{3.50}$$

ενώ όπως είδαμε για την ορμή $\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}$:

$$\hat{\pi}(t, \boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{p} \; N_p \; (-i\omega_p) \; \left(\hat{a}_{\boldsymbol{p}} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - \omega_p t)} - \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^\dagger e^{-i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - \omega_p t)}\right). \tag{3.51}$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν στις (3.42) και βρίσκουμε εύκολα ότι:

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}_{\boldsymbol{p}}, \hat{a}_{\boldsymbol{p'}}^\dagger\right] &= i\delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p'}) \\ \left[\hat{a}_{\boldsymbol{p}}, \hat{a}_{\boldsymbol{p'}}\right] &= \left[\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^\dagger, \hat{a}_{\boldsymbol{p'}}^\dagger\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Αυτές οι σχέσεις που ικανοποιούν οι $\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$ και $\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}}$ είναι αυτές που ικανοποιούν οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής των βαθμωτών μποζονίων. Τονίζεται εδώ ότι είναι προφανές πλέον ότι οι βαθμωτές μποζονικές καταστάσεις είναι συμμετρικές αφού $\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{q}}\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}}|\Phi\rangle = \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}}\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{q}}|\Phi\rangle$.

Από την (3.43) αντικαθιστώντας όλες τις σχέσεις βρίσκουμε τον Χαμιλτονιανό Τελεστή:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{p}\ \omega_p \left(\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}}\hat{a}_{\boldsymbol{p}} + \hat{a}_{\boldsymbol{p}}\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{p}\ \omega_p \left(2\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}}\hat{a}_{\boldsymbol{p}} + \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p'})\right) \\ &= \int d\boldsymbol{p}\ \omega_p \left(\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}}\hat{a}_{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{2}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p'})\right) \end{aligned} \tag{3.53}$$

Ένα πρόβλημα που έχουμε τώρα είναι πως ο ένας όρος απειρίζεται. Αυτό διορθώνεται με την ερμηνεία του όρου αυτού σαν την αρνητική ενέργεια του κενού και μάλιστα άπειρη. Υπάρχουν πολλά κίνητρα πίσω από αυτή την ερμηνεία (ένα εξ΄ αυτών είναι η ερμηνεία της ενέργειας της θεμελιώδους κατάστασης του αρμονικού ταλαντωτή) τα οποία εξηγούνται στην [5] αναλυτικά. Με κάποια μαθηματικά τρικ επαναπροσδιορίζουμε(renormalization) την ενέργεια κενού στο μηδέν ώστε πλέον η ενέργεια που θα υπολογίζει ο Χαμιλτονιανός Τελεστής να είναι η διαφορά που έχει από το μηδέν. Το αποτέλεσμα αυτού είναι:

$$\hat{H} = \int d\boldsymbol{p}\ \omega_p \left(\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}}\hat{a}_{\boldsymbol{p}}\right) \tag{3.54}$$

3.7 Πεδία Dirac

Εισάγουμε τώρα την Λανγκραντζιανή πυκνότητα που θα μας δώσει την εξίσωση Dirac και περιγράφει σωματίδια με σπίν 1/2 :

$$\mathcal{L} = i\psi^{\dagger}(x)\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) + i\psi^{\dagger}(x)a\cdot\nabla\psi(x) - m\psi^{\dagger}(x)\beta\psi(x), \tag{3.55}$$

όπου $\psi(x)$ και $\psi^{\dagger}(x)$ είναι τα κλασσικά πεδία που περιγράφουν τα σωματίδια Dirac μάζας m όπως είπαμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο. Με λίγη άλγεβρα και τις συναλλοίωτες μορφές που εξηγήσαμε νωρίτερα βλέπει κανείς εύκολα ότι :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m]\psi(x). \tag{3.56}$$

Στην συνέχεια όπως ακριβώς κάναμε και στο βαθμωτό πεδίο σύμφωνα με τους κανόνες της κανονικής κβάντωσης, χρησιμοποιώντας την εξίσωση Euler-Lagrange έχουμε:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi(x) = 0 \tag{3.57}$$

Το συζηγές πεδίο από την (3.39) θα είναι:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger \tag{3.58}$$

ενώ η Χαμιλτονιανή Πυκνότητα εξ ορισμού:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \psi^\dagger(-i\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nabla}) + \beta m)\psi. \end{aligned} \tag{3.59}$$

3.7.1 Κβάντωση

Συνεχίζουμε την πορεία μας στην κανονική κβάντωση του Πεδίου Dirac αντικαθιστώντας τα σπίνορ με πεδιακούς τελεστές:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \hat{\psi}(x) \\ \psi^\dagger(x) &\longrightarrow \hat{\psi}^\dagger(x), \end{aligned} \tag{3.60}$$

Σε αυτή την περίπτωση τα πεδία πρέπει να ακολουθούν τις αντιμεταθετικές σχέσεις ίσου χρόνου ώστε να εξασφαλισθεί η ισχύς της στατιστικής Fermi-Dirac:

$$\begin{aligned} \left\{\hat{\psi}_a(t,\boldsymbol{x}), \hat{\psi}_b^\dagger(t,\boldsymbol{x'})\right\} &= \delta_{ab}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \\ \left\{\hat{\psi}_a(t,\boldsymbol{x}), \hat{\psi}_b(t,\boldsymbol{x'})\right\} &= \left\{\hat{\psi}_a^\dagger(t,\boldsymbol{x}), \hat{\psi}_b^\dagger(t,\boldsymbol{x'})\right\} = 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

3.7.2 Τελεστές Πεδίου

Πάμε τώρα όπως και πριν να εκφράσουμε τους τελεστές του πεδίου Dirac σε κατάλληλη μορφή ώστε να μπορούμε να τους διαχειριστούμε αλγεβρικά και να δράσουμε σε καταστάσεις. Γράφουμε τον τελεστή Dirac χρησιμοποιώντας την λύση της εξίσωσης Dirac ελεύθερου σωματίου:

$$\psi_{\boldsymbol{p}}^{(r)}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{\omega_p}}w_r(\boldsymbol{p})e^{-i\epsilon_r(\omega_p t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}, \tag{3.62}$$

όπου $r = 1, 2, 3, 4$. Οι τιμές 1,2 αφορούν τις θετικές ενέργειες ($E = \omega_p = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$) ενώ οι 3 και 4 τις αρνητικές ($E = -\omega_p$). Έτσι βάλλαμε ως παράγων το $\epsilon_r = \pm 1$ για τα κατάλληλα r κάθε φορά και το χειριζόμαστε σαν ελεύθερη παράμετρο. Τα $w_r(\boldsymbol{p})$ είναι τα Dirac σπίνορ όπως φαίνεται και από το κεφάλαιο της ομώνυμης εξίσωσης, και υπακούν στις παρακάτω σχέσεις ορθογωνιότητας:

$$\begin{aligned} w^\dagger_{r'}(\epsilon_{r'}\boldsymbol{p})w_r(\epsilon_r\boldsymbol{p}) &= \frac{\omega_p}{m}\delta_{rr'}, \\ \bar{w}_{r'}(\boldsymbol{p})w_r(\boldsymbol{p}) &= \epsilon_r\delta_{rr'}, \\ \sum_{r=1}^{4} w_{ra}(\epsilon_r\boldsymbol{p})w^\dagger_{rb}(\epsilon_r\boldsymbol{p}) &= \frac{\omega_p}{m}\delta_{ab}, \\ \sum_{r=1}^{4} \epsilon_r w_{ra}(\boldsymbol{p})\bar{w}_{rb}(\boldsymbol{p}) &= \delta_{ab}. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Μπορούμε επομένως πλέον να γράψουμε τους τελεστές όπως εξηγήσαμε στην (3.36)(με χρήση των παραπάνω σχέσεων) ως:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(t, \boldsymbol{x}) &= \sum_{r=1}^{4} \int d\boldsymbol{p}\ \hat{a}(\boldsymbol{p}, r)\ \psi^{(r)}_{\boldsymbol{p}}(t, \boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{r=1}^{4} \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}}\ \hat{a}(\boldsymbol{p}, r)\ w_r(\boldsymbol{p})\gamma^0 e^{-i\epsilon_r \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}, \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^\dagger(t, \boldsymbol{x}) &= \sum_{r=1}^{4} \int d\boldsymbol{p}\ \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}, r)\ \psi^{(r)\dagger}_{\boldsymbol{p}}(t, \boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{r=1}^{4} \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}}\ \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}, r)\ \bar{w}_r(\boldsymbol{p})\gamma^0 e^{+i\epsilon_r \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

από τις παραπάνω σχέσεις μπορεί να δειχθεί [5] ότι:

$$\begin{aligned} \left\{\hat{a}(\boldsymbol{p}, r), \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p'}, r')\right\} &= \delta(p - p')\delta_{rr'} \\ \left\{\hat{a}(\boldsymbol{p}, r), \hat{a}(\boldsymbol{p'}, r')\right\} &= \left\{\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}, r), \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p'}, r')\right\} = 0 \end{aligned}. \tag{3.66}$$

Φαίνεται εύκολα ότι ισχύει $\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{q}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}}\left|\Phi\right\rangle = -\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{q}}\left|\Phi\right\rangle$. Δηλαδή, αντισυμμετρικές καταστάσεις που αφορούν ως γνωστόν φερμιόνια!

Με λίγες πράξεις μπορούμε να βρούμε και τον Χαμιλτονιανό τελεστή του Πεδίου Dirac:

$$\hat{H} = \int d\boldsymbol{p} \left(\sum_{r=1}^{2} \omega_p\ \hat{a}^\dagger\ (\boldsymbol{p}, r)\hat{a}(\boldsymbol{p}, r) - \sum_{r=3}^{4} \omega_p\ \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}, r)\hat{a}(\boldsymbol{p}, r) \right) \tag{3.67}$$

Ο τελευταίος όρος και πάλι έχει άπειρη αρνητική συνεισφορά αφού προσθέτει όλες τις αρνητικές ενέργειες επομένως θα πρέπει να αφαιρεθεί όπως κάναμε και προηγουμένως.

Άρα:

$$\hat{H} = \int d\boldsymbol{p} \left[\sum_{r=1}^{2} \omega_p \ \hat{a}^\dagger \ (\boldsymbol{p}, r) \hat{a}(\boldsymbol{p}, r) + \sum_{r=3}^{4} \omega_p \ \hat{a}(\boldsymbol{p}, r) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p}, r) \right]. \tag{3.68}$$

Ξαναγράφουμε πλέον τα σπίνορ με την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} w_1(\boldsymbol{p}) &= u(p, +s), \\ w_2(\boldsymbol{p}) &= u(p, -s), \\ w_3(\boldsymbol{p}) &= v(p, -s), \\ w_4(\boldsymbol{p}) &= v(p, +s) \end{aligned} \tag{3.69}$$

όπου το s είναι το σπιν, και τους τελεστές:

$$\begin{aligned} \hat{a}(\boldsymbol{p}, 1) &= \hat{b}(p, +s), \\ \hat{a}(\boldsymbol{p}, 2) &= \hat{b}(p, -s), \\ \hat{a}(\boldsymbol{p}, 3) &= \hat{d}^\dagger(p, -s), \\ \hat{a}(\boldsymbol{p}, 4) &= \hat{d}^\dagger(p, +s) \end{aligned} \tag{3.70}$$

Επομένως η έκφραση Fourier του τελεστή πεδίου θα είναι:

$$\hat{\psi}(t, \boldsymbol{x}) = \sum_s \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} \left(\hat{b}(p, s) \ u(p, s) \ e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{d}^\dagger(p, s) \ v(p, s) \ e^{+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \right) \tag{3.71}$$

και

$$\hat{\psi}^\dagger(t, \boldsymbol{x}) = \sum_s \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_p}} \left(\hat{b}^\dagger(p, s) \ \bar{u}(p, s) \ e^{+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{d}(p, s) \ \bar{v}(p, s) \ e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \right). \tag{3.72}$$

3.8 Ανυσματικά Μποζονικά Πεδία

Τα ανυσματικά μποζόνια είναι τα μποζόνια με σπιν-1. Τα πιο γνωστά είναι αυτά των ασθενών αλληλεπιδράσεων καθώς φυσικά και το φωτόνιο. Το ω μεσόνιο που θα συζητήσουμε αργότερα εντάσσεται σε αυτή την κατηγορία. Θα μελετήσουμε πρώτα την κβάντωση του φωτονίου(άμαζο μποζόνιο με σπιν 1) στην οποία βασίζονται τα μποζόνια με μάζα και στην συνέχεια θα γενικεύσουμε.

3.8.1 Φωτονικό Πεδίο

Έχουμε είδη μιλήσει για αυτό το πεδίο στο Β′ ακόμα και αν δεν ήταν φανερό αλλά παράγαμε τον τανυστή του πεδίου (Β′.27) ο οποίος συμπυκνώνει τις εξισώσεις Maxwell ως:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \\ \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} &= 0 \end{aligned} \tag{3.73}$$

όπου προφανώς $j^\nu = (\rho, \boldsymbol{j})$ είναι το τετράνυσμα του ρεύματος. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την (Β′.30) γράφουμε την εξίσωση πεδίου:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu(x)) = j^\nu(x) \tag{3.74}$$

όπου φαίνεται εύκολα και η διατήρηση του ρεύματος $\partial_\nu j^\nu(x) = 0$[4].

Εδώ παρατηρούμε πως η εξίσωση πεδίου είναι αναλλοίωτη κάτω από τους λεγόμενους μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^{mu}\Lambda(x) \tag{3.75}$$

με $\Lambda(x)$ τυχαία βαθμωτή συνάρτηση του χωροχρονικού τετρανύσματος.

Το γεγονός ότι ο Ηλεκτρομαγνητισμός είναι η απλούστερη θεωρία βαθμίδας έχει διάφορες επιπλοκές αφού πρέπει να συμπεριληφθεί αυτή η ιδιότητα κατά τους υπολογισμούς μας. Το πρόβλημα είναι αυτή η επιπλέον ελευθερία που υπάρχει στην επιλογή του Λ που υποδηλώνει μία άπειρη συμμετρία πολλών Λαγκραντζιανών για την ίδια θεωρία. Θέτουμε λοιπόν μία από τις πολλές πιθανές συνθήκες που ονομάζεται συνθήκη Lorentz[5]:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3.76}$$

Η Λαγκραντζιανή του πεδίου φωτονίων είναι:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - j_\mu A^\mu \tag{3.77}$$

ενώ το συζηγές πεδίο:

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = -\partial^0 A_\mu \tag{3.78}$$

[4] Εδώ το x προφανώς αφορά και τις τέσσερις συνιστώσες.

[5] Υπ′ όψιν πως αυτό ρίχνει κατά έναν τους 4 βαθμούς ελευθερίας που είχε μέχρι στιγμής το πεδίο μας.

3.8.2 Κβάντωση

Βάζουμε και πάλι ως συνθήκη τις μεταθετικές σχέσεις ίσου χρόνου:

$$\left.\begin{array}{rcl}\left[\hat{A}^{\mu}(t,\boldsymbol{x}),\hat{\pi}^{\nu}(t,\boldsymbol{x'})\right] & = & i\eta^{\mu\nu}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \\ \left[\hat{A}^{\mu}(t,\boldsymbol{x}),\hat{A}^{\nu}(t,\boldsymbol{x'})\right] & = & \left[\hat{\pi}^{\mu}(t,\boldsymbol{x}),\hat{\pi}^{\nu}(t,\boldsymbol{x'})\right]\end{array}\right. = 0 \tag{3.79}$$

όπου $\eta^{\mu nu}$ είναι η μετρική της ειδικής σχετικότητας όπως ορίστηκε στο Β′. Τώρα από την (3.78) εύκολα φαίνεται:

$$\left[\hat{A}^{\mu}(t,\boldsymbol{x}),\partial^{0}\hat{A}^{\nu}(t,\boldsymbol{x'})\right] = -i\eta^{\mu\nu}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}). \tag{3.80}$$

Τώρα με χρήση των (3.79) και (3.80):

$$\left[\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}(t,\boldsymbol{x}),\hat{A}^{\nu}(t,\boldsymbol{x'})\right] = i\eta^{\nu 0}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \neq 0 \tag{3.81}$$

Αμέσως είναι εμφανές ένα πρόβλημα. Ισχύει $\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu} \neq 0$ και επομένως η κανονική κβάντωση και η συνθήκη Lorentz δεν λειτουργούν μαζί. Ένας τρόπος διόρθωσης αυτού είναι η μέθοδος Gupta-Bleuler που υποχρεώνει να ισχύει η σχέση:

$$\langle\Phi|\,\partial^{\mu}\hat{A}_{\mu}\,|\Phi\rangle = 0$$

για τα επιτρεπτά διανύσματα του χώρου Hilbert. Είναι λογικό να μειώνεται κατά έναν ακόμη βαθμό ελευθερίας η θεωρία για τα φωτόνια καθώς έχουμε δύο μόλις διαφορετικές πολώσεις φωτός ως παρατηρήσιμες ποσότητες.

3.8.3 Μποζόνια με μάζα

Ένα πεδίο με ουδέτερα ανυσματικά μποζόνια με σπίν ένα($A^{\mu}(x)$ με το x πάλι να αφορά όλες τις συνιστώσες) περιγράφεται από την Λαγκραντζιανή πυκνότητα:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^{2}A_{\mu}A^{\mu} - j_{\mu}A^{\mu} \tag{3.82}$$

όπου με την χρήση της εξίσωσης Euler-Lagrange καταλήγουμε στην γνωστή και ως εξίσωση Proca:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} + m^{2}A^{\nu} - j^{\nu} = 0 \tag{3.83}$$

Παραγωγίζοντας χωροχρονικά:

$$\partial_\nu A^\nu = \frac{1}{m^2}\partial_\nu j^\nu \tag{3.84}$$

Αν κάποιος υποθέσει είτε ότι $\partial_\nu j^\nu = 0$(δηλαδή διατήρηση του ρεύματος), είτε ότι $j^\nu = 0$(απουσία πηγών) τότε η εξίσωση Proca αυτόματα ικανοποιεί την συνθήκη Lorentz αφού η παραπάνω εξίσωση θα κατέληγε στην:

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \tag{3.85}$$

Συνεπώς αν ικανοποιούνται οι συνθήκες που αναφέρθηκαν τότε η εξίσωση Proca γίνεται:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + m^2 A^\nu = j^\nu \tag{3.86}$$

όπου αντικαταστήσαμε την (Β΄.30). Το συζυγές πεδίο κατά τα γνωστά βρίσκεται:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu}. \tag{3.87}$$

Έτσι εύκολα βλέπουμε ότι $\pi^0 = 0$ και $\pi^i = E^i$. Αυτό υποδηλώνει ότι η χρονική συνιστώσα του πεδίου είναι εξαρτημένη μεταβλητή και μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$A^0 = -\frac{1}{m^2}\nabla \cdot \boldsymbol{E} \tag{3.88}$$

3.8.4 Κβάντωση

Όσον αφορά την κανονική κβάντωση οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται είναι:

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}^i(t,\boldsymbol{x}), \hat{E}^j(t,\boldsymbol{x'})\right] &= -i\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \\ \left[\hat{A}^i(t,\boldsymbol{x}), \hat{A}^j(t,\boldsymbol{x'})\right] &= \left[\hat{E}^i(t,\boldsymbol{x}), \hat{E}^j(t,\boldsymbol{x'})\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.89}$$

βλέπουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}(t,\boldsymbol{x}), \hat{A}^0(t,\boldsymbol{x'})\right] &= i\frac{1}{m^2}\nabla\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \\ \left[\hat{A}^0(t,\boldsymbol{x}), \hat{A}^0(t,\boldsymbol{x'})\right] &= 0 \end{aligned} . \tag{3.90}$$

Κεφάλαιο 4

Κβαντική Αδρομηχανική

Φτάσαμε στο σημείο της εφαρμογής μας. Ουσιαστικά σε αυτό το σημείο δημιουργούμε μία κβαντική θεωρία πεδίου (effective) για να περιγράψουμε ένα φυσικό σύστημα. Όπως πάντα στις θεωρίες πεδίου η Λαγκραντζιανή της θεωρίας είναι η υπόθεση. Ξεκινάμε με την συνάρτηση $\mathcal{L}$, κάνουμε πειραματικές προβλέψεις, και επιβεβαιώνουμε την καλή ή κακή προσέγγιση του μοντέλου. Το μοντέλο που θα ξεκινήσουμε τώρα να μελετάμε είναι το επονομαζόμενο ως QHD που εισήχθη απο τον Walecka πρώτη φορά το 1974 και βελτιώνεται από τότε. Προσπαθεί να περιγράψει τους πυρήνες και την πυρηνική ύλη βάσει της εικόνας ανταλλαγής μεσονίου (αλληλεπίδραση).

Ας ξεκαθαρίσουμε ότι μιας και οι πυρήνες είναι πολύπλοκα συστήματα πολλών σωματιδίων, υπάρχουν πολλά μοντέλα που δοκιμάζουν να τους περιγράψουν με διάφορες παραμέτρους και διαφορετικά αναδυόμενα φαινόμενα και ιδιαιτερότητες. Η Quantum Hadrodynamics είναι ένα από αυτά. Όλα τα μοντέλα χρειάζονται κάποια σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα για να εκτιμήσουμε διάφορες παραμέτρους που θα συγκεκριμενοποιήσουν τις αριθμητικές προβλέψεις. Στην περίπτωση της QHD η παράμετροι αυτοί είναι οι σταθερές σύζευξης μεταξύ των διαφόρων μεσονικών και πυρηνικών πεδίων στην Λαγκραντζιανή πυκνότητα. Ακόμη και στο ίδιο το μοντέλο μας, διάφοροι επιστήμονες έκαναν διαφορετικά fitting στις παραμέτρους, με ποικίλους τρόπους. Εμείς θα ξεκινήσουμε με το αρχικό σύνολο παραμέτρων του Walecka ή QHD-I.

4.1 Φορμαλισμός του QHD-I

Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό και ως $\sigma - \omega$ και αποτελεί το πρώτο και πιο απλό σύνολο παραμέτρων/υποθέσεων της γενικής θεωρίας. Η εικόνα της πυρηνικής αλληλεπίδρασης πρόκειται για την ανταλλαγή ουδέτερων βαθμωτών μεσονίων-σ και ουδέτερων ανυσματικών μεσονίων-ω. Έχει διαπιστωθεί ότι είναι τα σημαντικότερα στην περιγραφή της πυρηνικής ύλης και προφανώς τα βαρυόνια της θεωρίας μας είναι τα πρωτόνια και τα νετρόνια.

Το βαθμωτό μεσόνιο έχει ως αποτέλεσμα μία ισχυρή ελκτική κεντρική δύναμη και μία σύζευξη ιδιοστροφορμής-τροχιάς για τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ νουκλεονίων, ενώ το ανυσματικό μεσόνιο δίνει μία απωστική κεντρική δύναμη και άλλη μία σύζευξη ιδιοστροφορμής-τροχιάς όμοια(ίδιο πρόσημο) με αυτή του σ. Συνολικά δηλαδή η πυρηνική αλληλεπίδραση νουκλεονίου-νουκλεονίου θα περιγράφεται -προς το παρόν- από τρία πεδία, το βαρυονικό, το βαθμωτό μεσονίου και το ανυσματικό μεσονίου.

Σημειώνουμε εδώ κάποιες επιπλέον υποθέσεις:

- Δεν παίρνουμε υπ΄ όψιν φορτία στα μεσόνια(άρα ούτε στα βαρυόνια).
- Οι μάζες του πρωτονίου και του νετρονίου λαμβάνονται ίσες.
- Τα βαθμωτά μεσόνια βρίσκονται σε σύζευξη με την βαθμωτή πυκνότητα του βαρυονικού πεδίου και τα ανυσματικά μεσόνια συζευγνύονται με το διατηρήσιμο ρεύμα βαρυονίων(για να εξασφαλισθεί η αλληλεπίδραση).

Κατασκευάζουμε δηλαδή την Λαγκραντζιανή πυκνότητα QHD-I:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \bar{\psi}(x)\Big[\gamma_\mu\Big(i\partial^\mu - g_v V^\mu(x)\Big) - \Big(M - g_s\phi(x)\Big)\Big]\psi(x) \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - m_s^2\phi^2(x)\Big) - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_w^2 V_\mu(x)V^\mu(x)\end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου

- V^μ είναι το ανυσματικό πεδίο.
- ϕ είναι το βαθμωτό πεδίο.
- m_w, m_s είναι οι μάζες των μεσονίων μας ενώ M των νουκλεονίων.
- g_s,g_v είναι η βαθμωτή και η ανυσματική σταθερά σύζευξης αντίστοιχα.
- $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu(x) - \partial_\nu V_\mu(x)$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (2.15) για κάθε πεδίο καταλήγουμε στις τρεις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + m_s^2 \phi(x) &= g_s \bar{\psi}(x)\psi(x) \qquad (4.2)\\
\partial_\mu V^{\mu\nu} + m_w^2 V^\nu(x) &= g_v \bar{\psi}(x)\gamma^\nu \psi(x) \qquad (4.3)\\
\Big[\gamma_\mu\big(i\partial^\mu - g_v V^\mu(x)\big) - \big(M - g_s\phi(x)\big)\Big]\psi(x) &= 0 \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Όπου η (4.2) είναι σαν μία μη ομογενή εξίσωση Klein-Gordon του βαθμωτού μεσονίου η οποία στο δεξί μέλος έχει την βαθμωτή πυκνότητα του βαρυονικού πεδίου. Η (4.3) είναι το ανάλογο της εξίσωσης Proca με την σύζευξη του ανυσματικού μεσονίου και του βαρυονικού ρεύματος. Τέλος η (4.4) είναι μία τροποποιημένη εξίσωση Dirac που περιγράφει το πεδίο των βαρυονίων. Τροποποιημένη έτσι ώστε να περιλαμβάνει την διαφορά στην μάζα λόγω του βαθμωτού πεδίου και την αλληλεπίδραση με το ανυσματικό δυναμικό.

Το σύνολο των εξισώσεων μας το πρέπει να λυθεί. Το μαθηματικό πρόβλημα από μόνο του είναι από δύσκολο έως και άλυτο αναλυτικά, αφού πρόκειται και συζευγμένες εξισώσεις (δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους) και μάλιστα μη γραμμικές. Για να προσεγγίσουμε παρατηρήσιμες τιμές θα χρησιμοποιήσουμε Σχετικιστική Θεωρία Μέσου Πεδίου.

4.2 Προσέγγιση Σχετικιστικού Μέσου Πεδίου

Γενικά στις λοιπές κβαντωμένες θεωρίες (π.χ. QCD), χρησιμοποιείται η γραφή των σταθερών σύζευξης ως διαταραγμένες ποσότητες (ουσιαστικά ως πολυώνυμα όλων των δυνάμεων έτοιμα για fitting) προκειμένου να γίνουν οι απαραίτητες προσεγγίσεις για να πάρουμε χρήσιμες πληροφορίες από τις εξισώσεις τους. Παρόλα αυτά στην δική μας θεωρία οι μεγάλοι όροι του πολυωνύμου θα αποκλίνουν, κάνοντας δύσκολη την προσέγγιση με αυτόν τον τρόπο. Στην QHD χρειαζόμαστε μία προσέγγιση που γίνεται όλο και καλύτερη με την αύξηση της πυκνότητας μιας και μιλάμε για ¨πυκνά' πυρηνικά συστήματα. Στην σχετικιστική θεωρία μέσου πεδίου (RMF) αντικαθιστούμε τους τελεστές των μεσονικών πεδίων με τις αναμενόμενες τιμές τους για την θεμελιώδη κατάσταση ($|0\rangle$), πρόκειται δηλαδή για κλασσικά πεδία:

$$\phi \mapsto \langle 0|\phi|0\rangle = \langle \phi \rangle = \phi_0 \tag{4.5}$$

$$V_\mu \mapsto \langle 0|V_\mu|0\rangle = \langle V_\mu \rangle = \delta_{\mu 0} V_0 \tag{4.6}$$

Αυτό που κάναμε ουσιαστικά είναι η ¨σταθεροποίηση' των κβαντικών πεδίων (με ένα απλό mapping) της αλληλεπίδρασης στην θεμελιώδη του στάθμη χωρίς κβαντικές διακυμάνσεις στις τιμές τους. Αυτή η προσέγγιση έχει νόημα αν έχουμε σύστημα N σωματιδίων σε ηρεμία και σε θερμοκρασία 0 μέσα σε ένα κουτί όγκου V. Εφόσον πρόκειται για στατικό σύστημα η ροή των βαρυονίων $\left(\bar{\psi}(x)\gamma^i\psi(x), \text{ i=1,2,3}\right)$ θα είναι μηδέν. Αν η πυκνότητα των βαρυωνίων N/V αυξηθεί, το δεξί μέλος των εξισώσεων (4.2) και (4.3) θα αυξηθεί και αυτό. Αν οι όροι αυτοί γίνουν αρκετά μεγάλοι οι τελεστές του μεσονικού πεδίου μπορούν να αντικατασταθούν με τις αναμενόμενες τιμές της θεμελιώδης κατάστασής τους. Για ένα τέτοιο σύστημα το ϕ_0 και V_0 θα είναι σταθερές, ανεξάρτητες του χώρου και του χρόνου.

Παρατηρήσατε εδώ πως αφήσαμε τους τελεστές του πεδίου νουκλεονίων ως έχουν. Αφού οι μόνες τιμές του μεσονικού πεδίου που λαμβάνονται υπ΄ όψιν είναι αυτές της θεμελιώδους κατάστασης, τους βαρυονικούς τελεστές(αυτούς που βρίσκονται σε σύζευξη με τα μεσόνια) θα τους υπολογίσουμε στην ίδια κατάσταση μόνο[1] :

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \mapsto \langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(x)|0\rangle = \langle \bar{\psi}\psi \rangle \tag{4.7}$$

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \mapsto \langle 0|\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)|0\rangle = \langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle \tag{4.8}$$

[1] Η επιλογή της σειράς $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ και όχι $\psi(x)\bar{\psi}(x)$ ονομάζεται κανονική διάταξη και έχει σε βάθος λόγους για τους οποίους υιοθετείται συνήθως. Εν΄ συντομία εξασφαλίζει ότι η ενέργεια κενού είναι μηδέν πάντα(no sea approximation), η καλύτερα, την χειριζόμαστε σαν μηδέν καθώς σε αντίθετη περίπτωση εμφανίζονται απειρισμοί λόγω της αρνητικής ενέργειας που έχει το κενό. Κοινώς λαμβάνουμε υπ΄ όψιν θετικές ενέργειες στις καταστάσεις των βαρυονίων

Γράφουμε ξανά τις απλοποιημένες μας εξισώσεις σύμφωνα με όλα τα παραπάνω:

$$\begin{aligned} m_s^2\phi_0 &= g_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle && (4.9)\\ m_w^2 V_0 &= g_v\langle\bar{\psi}\gamma_0\psi\rangle && (4.10)\\ \Big[i\gamma_\mu\partial^\mu - g_v\gamma_0 V_0 - \big(M - g_s\phi_0\big)\Big]\psi &= 0 && (4.11) \end{aligned}$$

Η Λανγκραντζιανή μας τελικά είναι:

$$\mathcal{L}_{RMF} = \bar{\psi}\big[i\gamma_\mu\partial^\mu - g_v\gamma^0 V_0 - (M - g_s\phi_0)\big]\psi = \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}m_w^2 V_0^2 \tag{4.12}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.34) προκύπτει ο τανυστής ενέργειας ορμής :

$$(T^{\mu\nu})_{RMF} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\nu\psi - \eta^{\mu\nu}(-\frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}m_w^2 V_0^2). \tag{4.13}$$

Κατ΄ αναλογία με την περίπτωση του ρευστού, υπολογίζουμε την ενεργειακή πυκνότητα και την πίεση (2.39):

$$\begin{aligned} \epsilon &= \langle T^{00}\rangle \\ &= \Big\langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi - (-\tfrac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \tfrac{1}{2}m_w^2 V_0^2)\Big\rangle \\ &= \langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi\rangle + \tfrac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 - \tfrac{1}{2}m_w^2 V_0^2, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{3}\langle T^{ii}\rangle \\ &= \tfrac{1}{3}\Big\langle i\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi + (-\tfrac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \tfrac{1}{2}m_w^2 V_0^2)\Big\rangle \\ &= \tfrac{1}{3}\langle i\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi\rangle - \tfrac{1}{6}m_s^2\phi_0^2 + \tfrac{1}{6}m_w^2 V_0^2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.3 Εκτίμηση των αναμενόμενων τιμών

Μιας και τα ψ και $\bar{\psi}$(οι βαρυονικοί τελεστές) είναι ακόμα τελεστές πρέπει να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες τιμές τους για αποσπάσουμε πληροφορίες για το σύστημά μας. Όπως αναφέρθηκε και πριν πρέπει να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες τιμές του βαρυονικού πεδίου στην θεμελειώδη κατάσταση. Στην RMF έχουμε στατικό πεδίο επομένως αναπτύσσουμε το ψ συναρτήσει των ιδιοκαταστάσεων της ορμής. Η ορμή συνδέεται με το κυματάνυσμα ως:

$$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k} \tag{4.16}$$

όμως σε φυσικές μονάδες το $\hbar = 1$ συνεπώς η ορμή και το κυματάνυσμα είναι ισοδύναμα. Συνεπώς η λύσεις του τελεστή πεδίου βαρυονίων είναι όπως στο πεδίο Dirac:

$$\psi(x) = \psi(\boldsymbol{k}, s)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - ie(\boldsymbol{k})t}, \tag{4.17}$$

όπου $\psi(\boldsymbol{k}, s)$ είναι οι τέσσερις συνιστώσες του Dirac σπινορ,και $e(\boldsymbol{k})$ η ενέργεια για ορμή $\boldsymbol{k}$. Αντικαθιστώντας στην (4.11) βρίσκουμε:

$$\Big(- \gamma_i k^i + \gamma_0 e(\boldsymbol{k}) - g_v \gamma_0 V_0 - \big(M - g_s\phi_0\big)\Big)\psi(\boldsymbol{k}, s) = 0 \tag{4.18}$$

τώρα πολλαπλασιάζοντας με γ_0 και γυρνώντας στους συμβολισμούς των πινάκων $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$:

$$\Big(\beta^2\big(e(\boldsymbol{k}) - g_v V_0\big)\Big)\psi(\boldsymbol{k}, s) = \Big(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{k} + \beta m^*\Big)\psi(\boldsymbol{k}, s) \tag{4.19}$$

με $m^* = M - g_s\phi_0$ η μειωμένη μάζα νουκλεονίου[2]. Τετραγωνίζοντας τώρα και τις δύο μεριές της εξίσωσης βρίσκουμε:

$$e^{\pm}(\boldsymbol{k}) = g_v V_0 \pm \sqrt{m^{*2} + \boldsymbol{k}^2} \tag{4.20}$$

Έχουμε δηλαδή ενέργειες συμμετρικές γύρω από το $g_v V_0$. Ορίζουμε τώρα θετικά και αρνητικά σπίνορ $u(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{s})$ και $v(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{s})$ που ικανοποιούν τις συνθήκες κανονικοποίησης,ορθογωνιότητας όπως και στο πεδίο Dirac:

$$u^\dagger(\boldsymbol{k}, s)u(\boldsymbol{k}, s') = v^\dagger(\boldsymbol{k}, s)v(\boldsymbol{k}, s') = \delta_{ss'} \tag{4.21}$$

ενώ το ανάπτυγμα Fourier του βαρυονικού τελεστή θα είναι αντίστοιχα με το πεδίο Dirac:

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_s \int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{3/2}}\big(\hat{b}(k, s)u(k, s)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - ie^{(+)}(k)t} + \hat{d}^\dagger(k, s)v(k, s)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - ie^{(-)}(k)t}\big). \tag{4.22}$$

και προφανώς:

$$\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x}, t) = \sum_s \int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{3/2}}\big(\hat{b}^\dagger(k, s)\bar{u}(k, s)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - ie^{(+)}(k)t} + \hat{d}(k, s)\bar{v}(k, s)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - ie^{(-)}(k)t}\big). \tag{4.23}$$

Έχοντας τώρα τον τελεστή του πεδίου μας μπορούμε να ξεκινήσουμε τους υπολογισμούς των αναμενόμενων τιμών μας.

[2] Παρατηρήστε ότι το βαθμωτό μεσονικό πεδίο επηρεάζει την μάζα των νουκλεονίων.

Η θεμελιώδης κατάσταση $|0\rangle$ ορίζεται από τον κυματάριθμο Fermi k_F. Ο κυματάριθμος Fermi δηλώνει την ανώτερη κατειλημμένη στάθμη θετικών ενεργειών. Είναι προφανές ότι η θεμελιώδης στάθμη στην προσέγγιση της μη θάλασσας θα είναι:

$$\begin{aligned}
\hat{d}(\boldsymbol{k}, s)\,|0\rangle &= 0 \quad ,\forall|\boldsymbol{k}| \\
\hat{b}^{\dagger}(\boldsymbol{k}, s)\,|0\rangle &= 0 \quad ,\forall|\boldsymbol{k}| < k_F \\
\hat{b}(\boldsymbol{k}, s)\,|0\rangle &= 0 \quad ,\forall|\boldsymbol{k}| > k_F
\end{aligned} \tag{4.24}$$

εύκολα λοιπόν με σχετικά απλή άλγεβρα μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\left\langle \psi^{\dagger}\psi \right\rangle = \rho = \frac{\lambda}{6\pi^2} k_F^3, \tag{4.25}$$

$$\left\langle \bar{\psi}\psi \right\rangle = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \; \frac{k^2 m^*}{\sqrt{k^2 + m^{*2}}} \tag{4.26}$$

όπου θα τα βάλουμε στις εξισώσεις (4.9),(4.10). Και:

$$\left\langle \psi^{\dagger}(-i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta m^* + g_v V_0)\psi \right\rangle = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d\boldsymbol{k} \; \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^{*2}} + g_v V_0 \rho, \tag{4.27}$$

$$\left\langle \psi^{\dagger}(-i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi \right\rangle = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d\boldsymbol{k} \; \frac{\boldsymbol{k}^2}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^{*2}}} \tag{4.28}$$

όπου θα τις αντικαταστήσουμε στις (4.14) και (4.15). Είναι φανερό ότι οι ολοκληρώσεις έγιναν μέχρι την k_F καθώς για $T = 0$ εκείνες είναι οι μόνες γεμάτες καταστάσεις(θυμίζω και την προσέγγιση της μη θάλασσας ότι μιλάμε για θετικές καταστάσεις). Τονίζω εδώ ότι το λ είναι ο εκφυλισμός του σπιν του νουκλεονίου.

Να σημειώσω εδώ πως στην αναφορά [3] υπάρχει και ένας τρόπος πιο κομψός για τον υπολογισμό των αναμενόμενων τιμών αλλά δεν εξηγήθηκε καθώς θα υποχρέωνε την εισαγωγή κατανομών (μία βηματική συνάρτηση) στα ολοκληρώματα το οποίο θα είχε α-χρείαστες επιπλοκές.

4.4 Καταστατική Εξίσωση

Έχουμε λοιπόν τις εξισώσεις μας και τις αναμενόμενες τιμές. Μπορούμε πλέον να τις γράψουμε ως:

$$\phi_0 = \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{g_s}{m_s^2} \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \; \frac{k^2 m^*}{\sqrt{k^2 + m^{*2}}} \tag{4.29}$$

και
$$V_0 = \frac{g_v}{m_w^2}\langle\psi^\dagger\psi\rangle = \frac{g_v}{m_w^2}\rho \tag{4.30}$$
Για να απλοποιήσουμε τις (4.14) και (4.15) απλώς αντικαθιστούμε:
$$\epsilon = \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}m_w^2 V_0^2 + \frac{\lambda}{(2\pi)^3}\int_0^{k_F} d\boldsymbol{k}\ \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^{*2}} \tag{4.31}$$
όμοια και για την πίεση:
$$P = -\frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}m_w^2 V_0^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{\lambda}{(2\pi)^3}\int_0^{k_F} d\boldsymbol{k}\ \frac{\boldsymbol{k}^2}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^{*2}}}\Big) \tag{4.32}$$
όπου θυμίζω $m^* = M - g_s\phi_0$.

Με την σφαιρική συμμετρία στον χώρο των ορμών καταλήγουμε στις:
$$\epsilon = \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}m_w^2 V_0^2 + \frac{\lambda}{2\pi^2}\int_0^{k_F} dk\ k^2\ \sqrt{k^2 + m^{*2}} \tag{4.33}$$
όμοια:
$$P = -\frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}m_w^2 V_0^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{\lambda}{2\pi^2}\int_0^{k_F} dk\ \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^{*2}}}\Big) \tag{4.34}$$
Ουσιαστικά αυτές οι δύο σχέσεις είναι η εξίσωση κατάστασης της πυρηνικής ύλης!

4.5 Ενέργεια Συμμετρίας

Πάμε λοιπόν να συνδέσουμε τώρα τα παραπάνω με την εξ΄ υποθέσεως γνωστή ενέργεια συμμετρίας. Είναι προφανές από την (1.1) για να γίνει ο υπολογισμός απαιτείται να γράψουμε την ενεργειακή πυκνότητα συναρτήσει το t. Αυτό γίνεται αν συμπεριλάβουμε υπ΄ όψιν μας τα πρωτόνια και τα νετρόνια ως διακριτά σωματίδια και υπολογίσουμε τις ξεχωριστές αριθμητικές πυκνότητες:
$$\rho_p = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{k_p} dk\ k^2 = \frac{k_p^3}{3\pi^2} \tag{4.35}$$
$$\rho_n = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{k_n} dk\ k^2 = \frac{k_n^3}{3\pi^2} \tag{4.36}$$
$$\rho = \rho_p + \rho_n \tag{4.37}$$

Στην περίπτωση λοιπόν της συμμετρικής ύλης όπου $t = 0$, θα είναι $k_p = k_n = k_F$ και προφανώς η βαρυονική πυκνότητα γίνεται:

$$\rho_0 = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{k_F} dk\ k^2 = \frac{2k_F^3}{3\pi^2} \tag{4.38}$$

Οι μόνοι όροι της ενεργειακής πυκνότητας που παίζουν ρόλο είναι αυτοί των ολοκληρωμάτων στις γεμάτες βαρυονικές σχέσεις. Έτσι το μέρος της ενέργειας που εξαρτάται από το ισοσπίν είναι:

$$\epsilon_s = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{k_n} dk\ k^2\ \sqrt{k^2 + m^{*2}} + \frac{1}{\pi^2}\int_0^{k_p} dk\ k^2\ \sqrt{k^2 + m^{*2}} \tag{4.39}$$

όπου το $\lambda = 2$ για κάθε βαρυόνιο. Επομένως η a_4 τώρα είναι:

$$a_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{1}{\rho}\frac{1}{\pi^2}\int_0^{k_n} dk\ k^2\ \sqrt{k^2 + m^{*2}} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{\pi^2}\int_0^{k_p} dk\ k^2\ \sqrt{k^2 + m^{*2}}\Big)\Big|_{t=0} \tag{4.40}$$

πριν τον τελικό υπολογισμό το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να γράψουμε τις ορμές Fermi συναρτήσει του t:

$$k_n = \Big[\frac{k_p^3 + k_n^3}{2}(1+t)\Big]^1/3 \tag{4.41}$$

$$k_p = \Big[\frac{k_p^3 + k_n^3}{2}(1-t)\Big]^1/3 \tag{4.42}$$

μετά την αντικατάσταση, λίγο άλγεβρα και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι για $t = 0$ ισχύει $k_p = k_n$ βρίσκουμε:

$$a_4 = \frac{k_F^2}{6\sqrt{k_F^2 + m^{*2}}} \tag{4.43}$$

.

4.6 Συνέχεια

Αυτή η θεωρία είναι και η βασικές ιδέες, όσον αφορά την περιγραφή της πυρηνικής ύλης με χρήση της κβαντικής αδρομηχανικής. Από εδώ και πέρα υπάρχουν διάφορα σετ παραμέτρων που περιπλέκουν τα πράγματα. Αυτό συμβαίνει γιατί πρέπει να ληφθούν υπόψη βαθμοί ελευθερίας όπως: φορτία, ισοσπίν, διάφορετικές εκδοχές αλληλεπιδράσεων. Ενδεικτικά αναφέρω πως η πιο γενική Λαγκραντζιανή που έχει κατασκευασθεί είναι δέκα μακροσκελής όροι και είναι και το πλέον state of the art μοντέλο της Πυρηνικής Φυσικής.

Παράρτημα Α′

Μαθηματικό Παράρτημα

Σε αυτό το παράρτημα παραθέτεται ο μαθηματικός φορμαλισμός και κάποιοι βασικοί τεχνικοί όροι ή συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται.

Α′.1 Τανυστές και Γεωμετρία

Στον κλασικό χειρισμό της μηχανικής χρησιμοποιείται η ιδέα του διανύσματος θέσης σημείου, δηλαδή ενός διανύσματος με αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας το δεδομένο σημείο. Η ιδέα αυτή απαιτείται να αλλάξει όταν η γεωμετρία του χωροχρόνου διαφέρει από την Ευκλείδια. Αντιμετωπίζουμε πλέον όλες τις μαθηματικές δομές σαν σύνολα συντεταγμένων και τα δεικτοδοτούμε κατάλληλα χρησιμοποιώντας μία γενική μαθηματική έννοια που ονομάζεται *τανυστής*. Η πραγματική αξία μιας μαθηματικής οντότητας σαν αυτή είναι το γεγονός ότι μπορούμε να χειριστούμε τα σύνολα αυτών των συντεταγμένων χωρίς να εισάγουμε συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων (π.χ. είτε είναι xyz είτε $r\theta\phi$ κλπ).

Σε έναν n-διάστατο χώρο:

- Ένας τανυστής μηδενικής τάξης προσδιορίζεται από $n^0 = 1$ συνιστώσες(όπως ένα βαθμωτό μέγεθος π.χ. θερμοκρασία).

- Ένας τανυστής πρώτης τάξης προσδιορίζεται από $n^1 = n$ συνιστώσες(όπως ένα διανυσματικό μέγεθος π.χ. δύναμη).
- Ένας τανυστής δεύτερης τάξης προσδιορίζεται από n^2 συνιστώσες(π.χ. τανυστής τάσης).

Ο μετρικός τανυστής g_{ab} είναι ένας $n \times n$ πίνακας που περιέχει τις πληροφορίες για την γεωμετρία του χώρου και ως

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = \sum_{a,b=1}^{n} g_{ab}dx^a dx^b \tag{A'.1}$$

ορίζεται το *γραμμικό στοιχείο* η αλλιώς η *μετρική* του χώρου.

π.χ. στον Ευκλείδιο χώρο:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

και

$$g_{ab} = \delta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Για ένα $\overrightarrow{v}$ οι συντεταγμένες συμβολίζονται είτε v^a είτε v_a όπου $a = 1, 2...n$.

v_a:συναλλοίωτο διάνυσμα

v^a:ανταλλοίωτο διάνυσμα

Αυτά, είναι διαφορετική μορφή του ίδιου διανύσματος και μπορούμε να πάρουμε την μία από την άλλη (καταβίβαση,ανύψωση δείκτη) με χρήση του μετρικού τανυστή.

$$v^a = g^{ab}v_b = \sum_{b=1}^{n} g^{ab}v_b \tag{A'.2}$$

Υιοθετούμε τη αθροιστική σύμβαση Einstein για τους άνω και κάτω δείκτες όπως φαίνεται στην (A′.1) και στην (A′.2). Στην (A′.2) ο άνω κάτω δείκτης b είναι αυτός που αθροίζεται και ονομάζεται βουβός, ενώ ο a είναι ο ελεύθερος δείκτης που αφορά τις συντεταγμένες του διανύσματος.

Όμοια:

$$v_a = g_{ab} v^b$$

$$F_a{}^b = g_{ac} F^{cb}$$

$$\partial_a = g_{ab} \partial^b$$

κ.ο.κ όπου F_{ab} τυχαίος τανυστής.

Α΄.2 Λογισμός Μεταβολών

Ο λογισμός μεταβολών είναι ο τομέας της μαθηματικής ανάλυσης ο οποίος μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το μέγιστο ή ελάχιστο συναρτησοειδών (δηλαδή την στάσιμη τιμή τους).

Α΄.2.1 Εισαγωγή

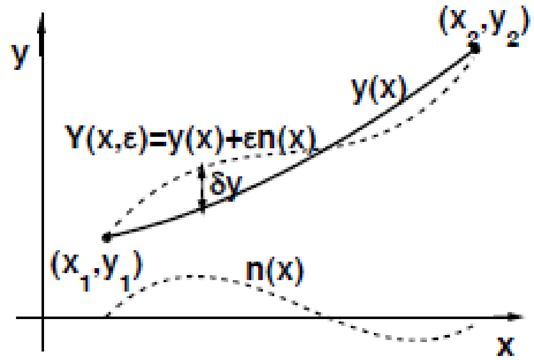
Ένα συναρτησοειδές είναι μία απεικόνιση κατά την οποία σε κάποια συνάρτηση αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό και το συμβολίζουμε με $J[y(x)]$. Ψάχνουμε λοιπόν την ακρότατη τιμή του παρακάτω συναρτησοειδούς:

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) \tag{Α΄.3}$$

δηλαδή την $y(x)$ για την οποία το ολοκλήρωμα αυτής της f μεταξύ των x_1 και x_2 ελαχιστοποιείται. Θεωρούμε τώρα την παρακάτω μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών $Y(x, \varepsilon)$ και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα πρέπει:

- $Y(x_1, \varepsilon) = y_1,\ Y(x_2, \varepsilon) = y_2$.
- $Y(x, 0) = y(x)$.

- Η $Y(x,\varepsilon)$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $U(x,\varepsilon) = Y(x,0) + \varepsilon n(x)$.
- $n(x)$ τυχαία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $n(x_1) = n(x_2) = 0$.



Αν αντικαταστήσουμε στην (Α΄.3) έχουμε:

$$J[\varepsilon] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y(x,\varepsilon), Y'(x,\varepsilon)) \tag{Α΄.4}$$

και χρησιμοποιώντας την συνθήκη της ακρότατης τιμής $J'(\varepsilon = 0) = 0$ βρίσκουμε την ζητούμενη διαφορική που θα χρειαστεί να λύσουμε ώστε να προσδιορίσουμε την $y(x)$.

Πολύ συχνά χρησιμοποιούμε το σύμβολο δ για να δηλώσουμε την μεταβολή ενός συναρτησοειδούς ή μίας συνάρτησης, όπως φαίνεται στο σχήμα:

$$\delta y = Y(x,\varepsilon) - y(x) = \varepsilon n(x) \tag{Α΄.5}$$

και

$$\delta J = J[x, Y(x,\varepsilon), Y'(x,\varepsilon)] - J[x, y(x), y'(x)] = J[x, y + \delta y, y' + \delta y'] - J[x, y, y'] \tag{Α΄.6}$$

Αναπτύσσουμε κατά Taylor:

$$\delta J(\varepsilon) = \delta J(\varepsilon = 0) + \frac{1}{1!}\varepsilon J'(\varepsilon = 0) + ... \tag{Α΄.7}$$

και κρατώντας πρώτης τάξης όρους αποδεικνύουμε πως η συνθήκη $J'(\varepsilon = 0)$ είναι ισοδύναμη με τον μηδενισμό της μεταβολής του συναρτησοειδούς. Επίσης από τα παραπάνω εύκολα δείχνεται ότι:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\delta y \tag{Α΄.8}$$

Α′.2.2 Εξίσωση Euler-Lagrange

Αναζητούμε την διαφορική:

$$\begin{aligned}\delta J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x,y,y')dx &= \int_{x_1}^{x_2} [\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y']dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y]dx \\ &= \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}]\delta y\ dx = 0\end{aligned}$$

άρα η

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{Α′.9}$$

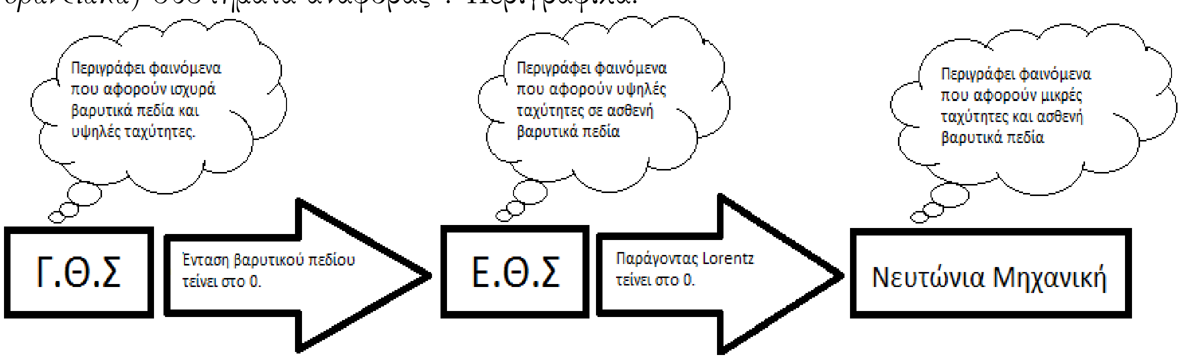
αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το συναρτησοειδές να παίρνει στάσιμη τιμή.

Παράρτημα Β΄

Ειδική σχετικότητα

Στο παράρτημα αυτό παρατίθεται μια σύντομη ανασκόπηση όλων των προαπαιτούμενων γνώσεων που αφορούν την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

Η Ε.Θ.Σ. είναι η γενίκευση της Νευτώνιας Θεωρίας για σώματα που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες, συγκρίσιμες με αυτή του φωτός, κατά την απουσία βαρυτικού πεδίου. Καλύτερα, η Ε.Θ.Σ αφορά *αδρανειακά συστήματα αναφοράς*(δηλαδή συστήματα συντεταγμένων η αλλιώς παρατηρητές, που δεν επιταχύνονται) και αποτελεί ειδική περίπτωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας η οποία συμπεριλαμβάνει και τα επιταχυνόμενα(*μη αδρανειακά*) συστήματα αναφοράς[1]. Περιγραφικά:



[1]Στην Σχετικότητα δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ ομοιόμορφου βαρυτικού πεδίου και ομαλής επιτάχυνσης.

Β΄.1 Αξιώματα

Κατά τον συνήθη τρόπο παρουσίασής της η Ε.Θ.Σ βασίζεται εξ΄ ολοκλήρου σε 2 μόλις αξιώματα:

1. **Αρχή της Σχετικότητας.**Όμοια πειράματα που διεξάγονται σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς παράγουν όμοια αποτελέσματα.

2. **Παγκοσμιότητα της ταχύτητας του φωτός.**Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι η ίδια για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

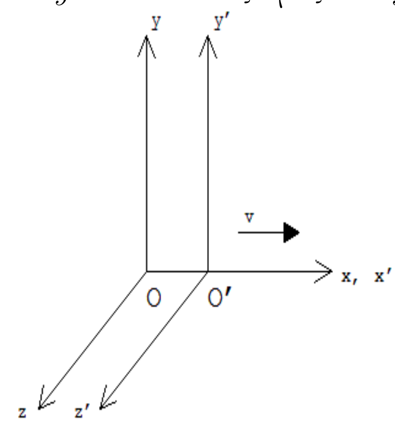
Όσον αφορά το πρώτο αξίωμα άμεση συνέπεια είναι πως ένας αδρανειακός παρατηρητής δεν μπορεί να εκτελέσει πείραμα το οποίο θα προσδιορίσει το αν ο ίδιος κινείται η όχι. Το συμπέρασμα αυτό το συναντάμε καθημερινά στην ζωή μας. Φανταστείτε δύο παρατηρητές, ο Α μέσα σε ένα λεωφορείο που κινείται με σταθερή ταχύτητα και ο Β στο πεζοδρόμιο ακίνητος. Εάν και οι δύο αφήσουν ένα αντικείμενο από ύψος h να εκτελέσει ελεύθερη πτώση, όλες οι πειραματικά μετρήσιμες ποσότητες (όπως ο χρόνος πτώσης) θα συμπίπτουν.

Φαίνεται λοιπόν πόσο εύλογα η σχετικότητα στην κίνηση περιλαμβάνεται στην πρώτη Αρχή. Φανταστείτε τώρα δύο μόνο αδρανειακούς παρατηρητές Α και Β στο σύμπαν, ως προς τον Α θα κινείται ο Β ενώ ως προς τον Β θα κινείται ο Α. Δεν υπάρχει απόλυτα σταθερός παρατηρητής γι΄ αυτό και πάντα τα φαινόμενα προσδιορίζονται ως προς ένα συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς και όχι αυθαίρετα. Το πρώτο αξίωμα λοιπόν είναι αρκετά γενικό και όπως θα δούμε περιλαμβάνει και όλα τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα.

Από την παραπάνω συζήτηση είναι φανερό ότι προκειμένου να μελετηθούν φαινόμενα σε τέτοια σχετικά συστήματα ένα πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι το πώς θα ¨μεταφερθούμε' από ένα αδρανειακό σύστημα σε ένα άλλο, δηλαδή να κάνουμε την λεγόμενη *αλλαγή συστήματος αναφοράς*. Το πρόβλημα αυτό υπάρχει από την αρχή της θεωρητικής φυσικής και αρχικά αντιμετωπίστηκε στην Νευτώνια μηχανική με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

Β΄.1.1 Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου

Υπενθυμίζεται ο Νευτώνιος χωροχρόνος.Έστω τα δύο παρακάτω αδρανειακά συστήματα αναφοράς xyz και $x'y'z'$.Το $x'y'z'$ κινείται ως προς το xyz με σταθερή ταχύτητα v.



Ο χρόνος εδώ είναι απόλυτος, δηλαδή αν οι δύο παρατηρητές συγχρονίσουν τα ρολόγια τους πριν την σχετική τους κίνηση και ελέγξουν τα ρολόγια τους στο τέλος της κίνησής τους, θα έχουν μετρήσει το ίδιο ακριβώς χρονικό διάστημα (πράγμα που δεν ισχύει γενικά στην σχετικότητα). Επομένως πάντα $t' = t$. Επίσης στο συγκεκριμένο πρόβλημα θέσαμε τους x, x' να ταυτίζονται για απλότητα, άρα $y' = y$ και $z' = z$. Στην συνέχεια βλέπουμε ότι με την θεώρηση πως το O' κινείται ως προς το O, οι συντεταγμένες ενός σημείου στα δύο συστήματα θα έχουν μία διαφορά d, δηλαδή $x = x' + d$, όπου d είναι η απόσταση του O' από το O. Επομένως $d = vt$.

Το σύνολο όλων αυτών των σχέσεων μεταξύ των τεσσάρων συντεταγμένων[2] των δύο συστημάτων αναφοράς ονομάζονται μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}} \tag{Β΄.1}$$

Είναι εύκολο κανείς να ελέγξει πως οι παραπάνω μετασχηματισμοί αφήνουν αναλλοίωτη

[2] Όπως είναι φανερό είδη σκεπτόμαστε τον χώρο και τον χρόνο σαν μία οντότητα.

την:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{Β΄.2}$$

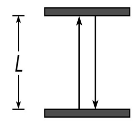
η οποία αποτελεί την μετρική του Ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου.Σημειώνεται εδώ ότι η επιλογή της συγκεκριμένης μετρικής δεν είναι τυχαία αλλά αποδεικνύεται ότι είναι η μόνη μετρική που ικανοποιεί τους μετασχηματισμούς αυτούς.

Το ds^2 αποτελεί την αναλλοίωτη ποσότητα κατά την αλλαγή του συστήματος αναφοράς. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο παρατηρητές θα συμφωνούν απόλυτα στην τιμή αυτής της ποσότητας, η οποία στην προκειμένη περίπτωση αφορά την Ευκλείδεια απόσταση που αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά, όταν χρησιμοποιούμε μία μεζούρα. Αν λοιπόν ο παρατηρητής στο πεζοδρόμιο και ο παρατηρητής στο λεωφορείο μετρήσουν το μήκος ενός συγκεκριμένου αυτοκινήτου το οποίο και αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα, θα συμφωνήσουν απόλυτα στην τιμή του (πράγμα που επίσης δεν ισχύει γενικά στην σχετικότητα).

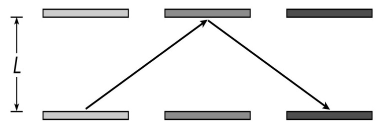
Β΄.1.2 Προωθήσεις Lorentz

Με την ίδια λογική τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο Αξίωμα προκειμένου να χτίσουμε τον χωροχρόνο,τα αναλλοίωτα και τους μετασχηματισμούς της Ειδικής Σχετικότητας.

Σχεδιάζουμε το παρακάτω νοητικό πείραμα. Έχουμε δύο καθρέπτες σε απόσταση L και εγκλωβίζουμε ενδιάμεσα τους ένα φωτόνιο. Οι δυο καθρέπτες και το φωτόνιο αποτελούν ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Στο σχήμα (α) υποθέτουμε πως το σύστημα είναι ακίνητο ως προς τον εξωτερικό παρατηρητή ενώ στο (β) θεωρούμε πως το σύστημα έχει μία σταθερή ταχύτητα ως προς αυτόν. Προφανώς το σύστημα καθρέπτες-φωτόνιο είναι αδρανειακό ενώ το ίδιο ισχύει εξ΄ ορισμού και για τον εξωτερικό παρατηρητή.



(a)



(b)

Προκειμένου να υπάρξει διαίσθηση για την κίνηση του φωτονίου μεταξύ των δύο κατόπτρων, φανταστείτε δύο παιδιά στα πίσω καθίσματα ενός κινούμενου αυτοκινήτου να παίζουν με ένα τόπι. Αν ο εξωτερικός παρατηρητής βρίσκεται μέσα στο αυτοκίνητο έχουμε την περίπτωση (α). Αντίθετα αν ο παρατηρητής βρίσκεται εκτός του αυτοκινήτου ακίνητος ως προς την γη, θα παρατηρήσει την τροχιά της μπάλας όπως φαίνεται στο σχήμα (β).Ο λόγος που στο νοητικό πείραμα αντί για τόπι χρησιμοποιούμε φωτόνιο είναι γιατί στην αξιωματική θεμελίωση της σχετικότητας, το φως είναι αυτό που απαιτείται να έχει την ίδια ταχύτητα για όλους τους παρατηρητές και όχι οποιαδήποτε άλλη μικρότερη η μεγαλύτερη ταχύτητα.

Υποθέτοντας όπως και ο Einstein την δεύτερη αρχή στο (α) έχουμε:

$$\Delta t = \tfrac{2L}{c}, \quad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \tag{B$'$.3}$$

ενώ στο (β):

$$\Delta t' = \tfrac{2}{c}\sqrt{L^2 + (\tfrac{\Delta x'}{2})^2}, \quad \Delta x' = V\Delta t', \quad \Delta y' = \Delta z' = 0 \tag{B$'$.4}$$

όπου $\Delta t, \Delta t'$ είναι τα χρονικά διαστήματα και στις δύο περιπτώσεις που έκανε το φως να επανέλθει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε και V η ταχύτητα του (β) συστήματος ως προς τον εξωτερικό παρατηρητή. Προφανώς ο άξονας x είναι παράλληλος στα κάτοπτρα με τον θετικό ημιάξονα προς τα δεξιά.

Από τις (B′.3) και (B′.4) έχουμε:

$$-(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -4[L^2 + (\Delta x'/2)^2] + (\Delta x')^2 = -4L^2 = -(c\Delta t)^2 \tag{B$'$.5}$$

άρα

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (c\Delta x)^2 + (c\Delta y)^2 + (c\Delta z)^2 = -(c\Delta t')^2 + (c\Delta x')^2 + (c\Delta y')^2 + (c\Delta z')^2 \tag{B'.6}$$

Αυτό το μήκος αποτελεί όπως φαίνεται το αναλλοίωτο μέγεθος κατά την αλλαγή του συστήματος αναφοράς στον χωροχρόνο της Ειδικής Σχετικότητας. Ανάλογα με την Νευτώνια λογική ορίζουμε τώρα την μετρική του *επίπεδου χωροχρόνου* ή *χωροχρόνου Minkowski* ως:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{B'.7}$$

Θα μπορούσαμε να έχουμε αντίθετα τα πρόσημα στο δεύτερο μέλος της (Β΄.7) αλλά επιλέγουμε την παραπάνω μορφή. Αποδεικνύεται[3] ότι οι μετασχηματισμοί που αφήνουν αναλλοίωτη αυτή την μετρική είναι οι μετασχηματισμοί Lorentz:

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx/c^2) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}} \tag{B'.8}$$

όπου γ ο παράγοντας Lorentz με $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$,και v η σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων. Από τον παράγοντα Lorentz φαίνεται μάλιστα ότι ένα σώμα δεν μπορεί ποτέ να φτάσει την ταχύτητα του φωτός αφού για $v = c$ απειρίζεται ο παρονομαστής.

Έχουμε πλέον την δυνατότητα γνωρίζοντας τις συντεταγμένες ενός σημείου στο σύστημα αναφοράς μας $(xyzt)$, και την ταχύτητα ενός άλλου κινούμενου συστήματος αναφοράς, να μετατρέψουμε τις συντεταγμένες του και να εκφράσουμε την θέση του μέσω του νέου αυτού συστήματος$(x'y'z't')$.

[3] Η απόδειξη βρίσκεται στην [7],κεφ4.

Β′.2 Χωροχρόνος της Σχετικότητας

Θέτουμε τώρα $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$(και στα δύο συστήματα) και $\beta = v/c$ προκειμένου να δημιουργήσουμε έναν πιο εύχρηστο φορμαλισμό.

$$\boxed{\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}} \tag{Β′.9}$$

η σε μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{Β′.10}$$

όπου $\Lambda^\mu{}_\nu$ ο πίνακας των *μετασχηματισμών Lorentz.* Οι δείκτες παίρνουν τιμές από 0 έως 3 επομένως τελικά έχουμε:

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{Β′.11}$$

όπου το μ αφορά την στήλη και το ν την γραμμή. Έχουμε τώρα μια συστηματική μεθοδολογία για να μετατρέψουμε ένα διάνυσμα έτσι ώστε να είναι εκφρασμένο στο νέο σύστημα αναφοράς. Παρόλο που για να παράγουμε την (Β′.11) υποθέσαμε πως οι άξονες x και x' ταυτίζονται η εξίσωση αυτή ισχύει σε κάθε περίπτωση με μόνη διαφορά την προσθήκη κάποιων όρων στον πίνακα $\Lambda^\mu{}_\nu$ για να λάβουμε υπ′ όψιν και τις άλλες δύο χωρικές διευθύνσεις.

Ορίζουμε τώρα γενικά το *τετράνυσμα* το οποίο είναι το σύνολο των τεσσάρων συνιστωσών και μετασχηματίζεται σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες:

$$a'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \tag{Β′.12}$$

Επανερχόμαστε τώρα στην μετρική μας (Β′.7) και στην δομή του χωροχρόνου της σχετικότητας. Από αυτή την μετρική καταλήγουμε άμεσα στο συμπέρασμα ότι ο μετρικός τανυστής αυτού του 4-διάστατου χώρου θα είναι:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{B′.13}$$

ενώ το εσωτερικό γινόμενο:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= a^t b^t - a^x b^x - a^y b^y - a^z b^z \\ &= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \\ &= a^t b^t - \vec{a}\cdot\vec{b} \end{aligned}$$

αφού στον χώρο Minkowski για οποιοδήποτε τετράνυσμα ισχύει $b^\mu = \eta^{\mu\nu} b_\nu$.

B′.3 Ενέργεια

Μια από τις σημαντικότερες συνέπειες της ειδικής σχετικότητας είναι η διασημότερη εξίσωση της Φυσικής που τονίζει την σχέση μεταξύ μάζας και ενέργειας στην φύση.

B′.3.1 Κινηματικη

Ορίζουμε εδώ την τετραταχύτητα κατά τα γνωστά ως:

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau} \tag{B′.14}$$

όπου αποτελεί την παράγωγο των συντεταγμένων (ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς) προς την παράμετρο του ιδιόχρονου. Ο ιδιόχρονος αποτελεί τον χρόνο που μετρά ο κινούμενος παρατηρητής για τον εαυτό του δηλαδή είναι:

$$dt = \gamma d\tau \Leftrightarrow d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2}\, dt \tag{B′.15}$$

και παίζει τον ρόλο που παίζει ο χρόνος στην νευτώνια μηχανική δηλαδή αυτόν της ελεύθερης παραμέτρου. Άρα η u^a είναι μία υβριδική ποσότητα καθώς ο αριθμητής αφορά τον ακίνητο παρατηρητή ενώ ο παρονομαστής τον παρατηρητή εν κινήσει. Επομένως κατά την πτήση μας σε ένα αεροπλάνο αν θέλουμε να γνωρίζουμε αν θα φτάσουμε έγκαιρα για το ραντεβού μας στην γη πρέπει να ελέγξουμε την απόσταση που διανύουμε ανά dt, ενώ αν θέλουμε να γνωρίζουμε αν θα πεινάμε στο τέλος του ταξιδιού πρέπει να ελέγξουμε την ίδια απόσταση ανά $d\tau$.

Β΄.3.2 Ορμή και Ενέργεια

Τώρα ορίζουμε την τετραορμή ανάλογα με την κλασική μηχανική ως:

$$p^a = mu^a \tag{Β΄.16}$$

όπου m είναι η μάζα του σώματος στην ακινησία. για α=0 η χρονική συνιστώσα είναι:

$$p^0 = mu^0 \frac{dx^0}{dt} = \frac{mc}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma mc = m_{\sigma\chi\epsilon\tau} c \tag{Β΄.17}$$

αυτή η ποσότητα πολλαπλασιασμένη με c έχει μονάδες ενέργειας και αποτελεί την συνολική ενέργεια (ηρεμίας+κινητική) του σώματος. Άρα

$$E = m_{\sigma\chi\epsilon\tau} c^2 = \gamma mc^2 \tag{Β΄.18}$$

ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες της ορμής(σχετικιστικής) είναι:

$$p^\mu = \frac{mu^\mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \mu = 1, 2, 3 \tag{Β΄.19}$$

Το τετράνυσμα αυτό που περιέχει την ενέργεια και την ορμή στις συντεταγμένες του το ονομάζουμε *τετράνυσμα ενέργειας-ορμής*. Το βαθμωτό γινόμενο αυτού του τετρανύσματος με τον εαυτό του μας δίνει την σημαντικότερη σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε για να παράγουμε τις σχετικιστικές εξισώσεις της κβαντομηχανικής:

$$p^a p_a = (p^0)^2 - p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \tag{Β΄.20}$$

η οποία καταλήγει στην:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4. \tag{Β΄.21}$$

Β΄.4 Σχετικότητα και Ηλεκροδυναμική

Ιστορικά η ηλεκτρομαγνητική θεωρία έπαιξε τεράστιο ρόλο στην διατύπωση της Ε.Θ.Σ. Στα μέσα του 19ου αιώνα είχαν διατυπωθεί οι νόμοι του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού ως δυο ξεχωριστές κατηγορίες φαινομένων, από δύο εξισώσεις η καθεμία. Ο Maxwell λίγο αργότερα αντιλήφθηκε την σύνδεση μεταξύ τους και διόρθωσε την εξίσωση του Ampere[4] δημιουργώντας το περίφημο σύστημα εξισώσεων του Maxwell σε διαφορική μορφή:

$$\boxed{\begin{array}{cc} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} & \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0 \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} & \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \end{array}} \tag{Β΄.22}$$

Όταν ο Maxwell έθεσε $\rho = 0$ άρα και $J = 0$ δηλαδή σε απουσία φορτίου, στο κλασσικό κενό, συνδυάζοντας τις εξισώσεις κατέληξε στην παρακάτω κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{Β΄.23}$$

στην οποία η ταχύτητα του κύματος φαίνεται να είναι

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Τα μ_0 και ε_0 όμως ήταν είδη υπολογισμένα από πειράματα. Βάζοντας λοιπόν τα νούμερα βρήκε ότι $c \simeq 3\cdot 10^8 m/s$ όπου ήταν η ταχύτητα του φωτός που επίσης είχε μετρηθεί από πειράματα νωρίτερα τον 19ο αιώνα.

Έχουμε λοιπόν την σύνδεση μεταξύ εννοιών όπως το ηλεκτρικό,το μαγνητικό πεδίο και το φως. Υπήρχε ένα ακόμη πρόβλημα όμως. Σύμφωνα με όσα ξέραμε από την κλασσική μηχανική κάθε ταχύτητα πρέπει να ορίζεται ως προς κάποιον αδρανειακό παρατηρητή, όμως η εξισώσεις δεν είχαν εμφανίσει κάποια ένδειξη για κάτι τέτοιο. Εδώ είναι ένα πρώτο δείγμα της ιδιοφυίας του Einstein διατυπώνοντας το δεύτερο αξίωμα της σχετικότητας και λύνοντας το προαναφερθέν πρόβλημα με όλες τις προφανείς επιπτώσεις. Αξίζει να σημειωθεί πως ο Lorentz είχε είδη ανακαλύψει τις συμμετρίες της ειδικής σχετικότητας μέσω των εξισώσεων Maxwell το οποίο ήταν μία επιπλέον ένδειξη ότι η γεωμετρία και το φως είχαν μία ανεξήγητη μέχρι τότε σύνδεση.

[4]Την διόρθωσε έτσι ώστε συνολικά στο σύστημα να ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας του φορτίου.

Από εκείνο το σημείο και μετά, ο ηλεκτρομαγνητισμός και η ειδική σχετικότητα είναι δύο αντικείμενα άμεσα συνδεδεμένα και σχηματίζουν την πιο επίσημη διατύπωση της ηλεκτροδυναμικής.

Β′.4.1 Τανυστής πεδίου

Στην αναφορά [6] κεφ.12.3.2 αποδεικνύεται αναλυτικά πως ο μετασχηματισμός των πεδίων μεταξύ δύο ανδρανειακών συστημάτων είναι:

$$\boxed{\begin{array}{lll} E'_x = E_x, & E'_y = \gamma(E_y - vB_z), & E'_z = \gamma(E_z + vBz), \\ B'_x = B_x, & B'_y = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), & B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y.) \end{array}} \tag{Β′.24}$$

και μπορεί να επιβεβαιωθεί άμεσα με αντικατάστασή τους στις εξισώσεις Maxwell (προφανώς η παράλληλη προς την κίνηση συνιστώσα είναι η x).

Ο σκοπός, τώρα είναι να ενοποιήσουμε όλες τις συντεταγμένες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε μία μαθηματική οντότητα όπως κάναμε και με το τετράνυσμα ενέργειας ορμής. Το πρόβλημα εδώ είναι πως το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει 6 «βαθμούς ελευθερίας» και όχι 4 (3 συνιστώσες ανά πεδίο). Αναζητούμε λοιπόν ένα μαθηματικό αντικείμενο το οποίο θα είναι τεσσάρων διαστάσεων,θα έχει 6 βαθμούς ελευθερίας και θα υπακούει στους μετασχηματισμούς Lorentz κατά την αλλαγή συστήματος αναφοράς. Αυτές τις προϋποθέσεις ικανοποιεί ένας αντισυμμετρικός τανυστής 4×4.[5] Απαιτούμε λοιπόν για αυτόν τον τανυστή να ισχύει:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\lambda\sigma},\ F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \tag{Β′.25}$$

θα έχει δηλαδή την μορφή:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ -F^{01} & 0 & F^{12} & F^{13} \\ -F^{02} & -F^{12} & 0 & F^{23} \\ -F^{03} & -F^{13} & -F^{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{Β′.26}$$

Υπολογίζοντας τις 6 συνιστώσες και συγκρίνοντας άμεσα με την (Β′.24) καταλήγουμε

[5] Φυσικά αυτό δεν αποτελεί αυστηρή απόδειξη αλλά για αυτήν απαιτούνται γνώσεις θεωρίας συνεχών ομάδων.

στην τελική μορφή:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{Β′.27}$$

Β′.4.2 Διατύπωση μέσω δυναμικών

Από την θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού ξέρουμε πως το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο εκφράζεται μέσω ενός βαθμωτού V και ενός διανυσματικού δυναμικού $\boldsymbol{A}$ ως:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{Β′.28}$$

όπου $\boldsymbol{A}$,V τυχαία. Όπως και στην περίπτωση του τετρανύσματος ενέργειας ορμής, έτσι και εδώ θα θέσουμε την βαθμωτή ποσότητα ως χρονική συνιστώσα (αντίστοιχα με την ενέργεια) και την διανυσματική ποσότητα προφανώς ως χωρικές συνιστώσες (αντίστοιχα με την σχετικιστική ορμή). Το τετρανυσματικό δυναμικό ορίζεται:

$$A^\mu = (V/c, A_x, A_y, A_z). \tag{Β′.29}$$

Εύκολα ελέγχεται πως ο τανυστής του πεδίου παράγεται ως:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{Β′.30}$$

Βιβλιογραφία

[1] Sean M Carroll. “Lecture notes on general relativity”. In: *arXiv preprint gr-qc/9712019* (1997).

[2] Jacobus Petrus Willem Diener. “Relativistic mean-field theory applied to the study of neutron star properties”. In: *arXiv preprint arXiv:0806.0747* (2008).

[3] Norman K. Glendenning. *Compact Stars*. Springer, 2000.

[4] Herbert Goldstein. *Classical mechanics*. Pearson Education India, 1965.

[5] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.

[6] David Jeffrey Griffiths and Reed College. *Introduction to electrodynamics*. Vol. 3. prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1999.

[7] James B Hartle. *Gravity: an introduction to Einstein’s general relativity*. 2003.

[8] Michael Reed and Barry Simon. *Functional Analysis, vol. I*. 1980.

[9] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.

[10] B Serot and J Walecka. “Adv Nucl Phys 16: 1”. In: *Bender M, Heenen P, Reinhard P (2003) Rev Mod Phys* 75 (1986), p. 121.

[11] David Tong. “Lectures on quantum field theory”. In: *Part III Cambridge University Mathematics Tripos, Michaelmas* (2006).

[12] JD Walecka. “A theory of highly condensed matter”. In: *Annals of Physics* 83.2 (1974), pp. 491–529.

[13] Ι.Χατζηδημητρίου. *Θεωρητική Μηχανική*.

[14] Σ.Ιχτιάρογλου. *Εισαγωγή στην Μηχανική Ηαμιλτον*.

[15] Σ.Μάσσεν. *Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής-Τόμος 2*.

[16] Σ.Τραχανάς. *Κβαντομηχανική 2*.

[17] Σ.Τραχανάς. *Σχετικιστική Κβαντομηχανική*.

[18] Ταμβάκης. *Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική.*

[19] Χρήστος Γ. Τσάγκας. *Στοιχεία Τανυστικής Ανάλυσης και Γεωμετρίας Riemman.*