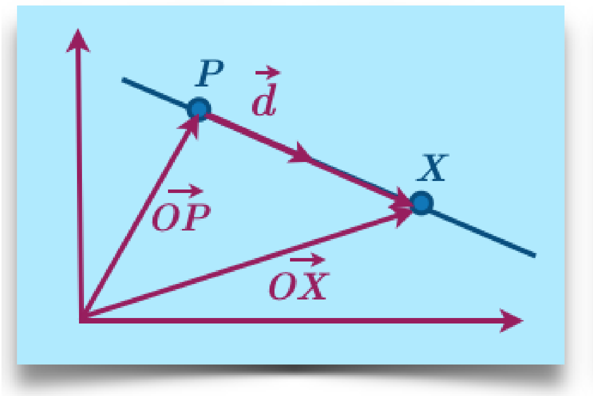
https://iedib.net/

Matemàtiques I

Lliurament 7: Vectors i rectes en el pla



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Aquesta obra està subjecta a les condicions de llicència CREATIVE COMMONS no comercial i compartir igual.
Edició LaTeX: ® Josep Mulet
Versió: 10-03-2021

Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional

Índex

1. Vectors en el pla

Les diferents magnituds en la naturalesa es classifiquen en escalars i vectorials. Una magnitud és vectorial si depèn de la direcció.

Taula 1: Tipus de magnituds

Magnituds escalars	Magnituds vectorials
Temps	Velocitat
Temperatura	Acceleració
Volum	Força
...	...

Un vector queda determinat per dos punts A **origen** i B **extrem**. El **mòdul** és la llargària del vector o la distància entre A i B. La **direcció** és la de la recta que passa per A i B. Cada direcció té dos **sentits**.

1.1 Vectors fixos i lliures

Un **sistema de referència Cartesià** està format per dos eixos, perpendiculars dos a dos, que designam com x i y. Els dos eixos es tallen en un punt que anomenam origen $O(0,0)$.

Per localitzar un punt P en el pla donam dues coordenades $P=(P_1,P_2)$ que corresponen a les projeccions sobre els eixos OX, OY respectivament.

(c) Josep Mulet (2021)

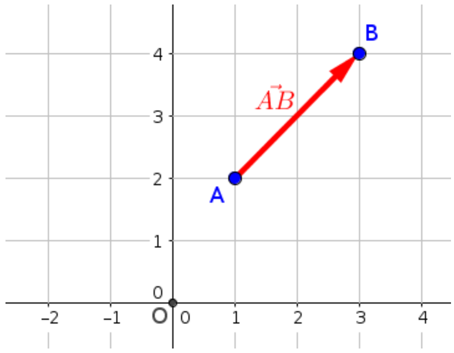


Figura 1: Els punts tenen coordenades A=(1,2) i B=(3,4) i AB indica el vector fix al pla

Definim un **vector fix** d'origen en el punt A i extrem en el punt B com el **segment orientat** que va des d' A cap a B.

Les **components del vector** s'obtenen de restar l'extrem menys l'origen

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (B_1 - A_1, B_2 - A_2) \tag{1}$$

Les components d'un vector indiquen quina distància s'avança en cada direcció mesurada des del punt d'origen.

EXERCICI RESOLT 1

Donats els punts $A = (-2, 3)$ i extrem a $B = (1, -1)$, calcula les components dels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$. Quina relació existeix entre aquests dos vectors?

$\overrightarrow{AB} = (1, -1) - (-2, 3) = (3, -4)$

Aquest vector avança 3 unitats en direcció x i retrocedeix 4 en direcció y.

$\overrightarrow{BA} = (-2, 3) - (1, -1) = (-3, 4)$

Els dos vectors tenen sentit oposat i les seves components tenen signe diferent.

Si ens donen el vector $\vec{v} = (3, -4)$, del qual desconeixem l'origen, vol dir que el podem dibuixar amb l'origen que nosaltres vulguem. Deim que es tracta d'un **vector lliure**. Generalment, resulta pràctic representar-los en origen en el punt $O(0, 0)$.

(c) Josep Mulet (2021)

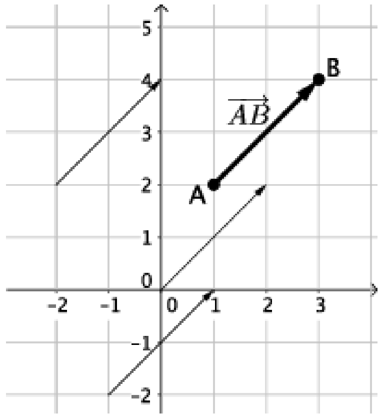
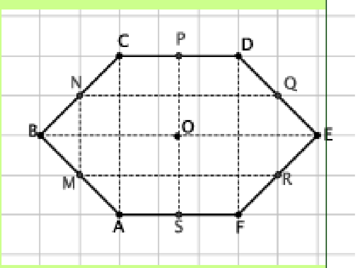


Figura 2: Concepte de vector lliure

Tots els vectors de la figura tenen igual direcció, mòdul i sentit. Les seves components també són idèntiques. L'únic que canvia és el seus punts d'origen i extrem. Diem que tots aquests vectors són **equipol·lents** entre sí.

EXERCICI RESOLT 2

La figura ABCDEF és un hexàgon. Compara el mòdul, direcció i sentit de les següents parelles de vectors.



a) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{FE}$ i $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{DE}$ d) $\overrightarrow{OS}$ i $\overrightarrow{OE}$

a) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$: Igual mòdul, direcció diferent

b) $\overrightarrow{FE}$ i $\overrightarrow{BC}$: Igual mòdul, direcció i sentit

c) $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{DE}$: El mòdul del segon vector és el doble, igual direcció i sentit

d) $\overrightarrow{OS}$ i $\overrightarrow{OE}$: Diferent mòdul i direcció

1.2 Operacions amb vectors lliures

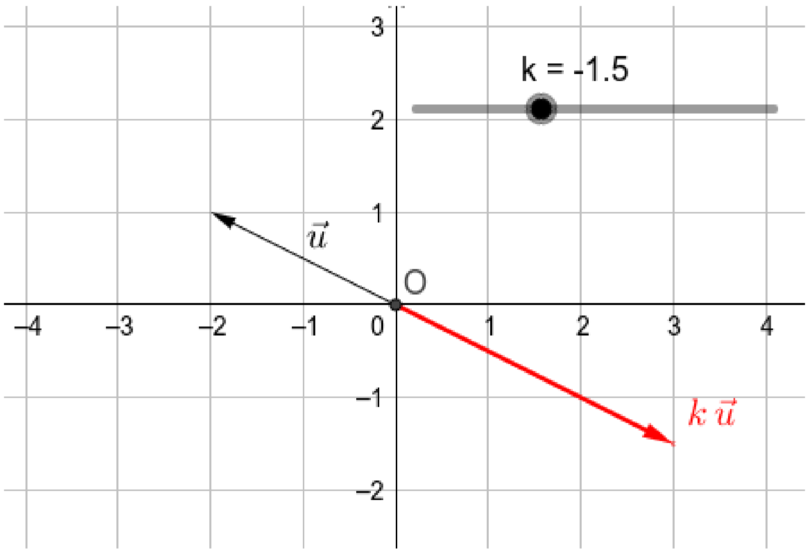
Donats dos vectors lliures, per exemple $\vec{u} = (-2, 5)$ i $\vec{v} = (3, 1)$ es poden realitzar les següents operacions, totes elles donen com a resultat un altre vector.

(c) Josep Mulet (2021)

Producte d'un vector per un escalar

Multiplicar un nombre (escalar) k per un vector $\vec{u}$ dóna un vector que té la mateixa direcció que el vector $\vec{u}$ i mòdul k vegades més llarg. El sentit del vector serà el mateix si $k > 0$ i sentit oposat si $k < 0$.

En components, es multiplica cada component per l'escalar. Per exemple: $7\,(-2, 5) = (-14, 35)$



Simulació 1: https://www.geogebra.org/m/fnfrh3rj : *Producte d'un escalar per un vector*

Si prenem $k = -1$, obtenim el **vector oposat** $-(-2, 5) = (2, -5)$

Perquè dos vectors tinguin igual direcció, un a d'ésser un múltiple de l'altre $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Diem que les seves components són proporcionals

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \tag{2}$$

Fixeu-vos que multiplicar qualsevol vector pel nombre 0 dóna el vector zero: $0\,(-2, 5) = (0, 0)$

Atenció. No confoneu el vector zero $\vec{0} = (0, 0)$ amb l'escalar 0.

(c) Josep Mulet (2021)

Suma de vectors

La suma de vectors en components es fa sumant primera amb primera i segona amb segona components: $(-2, 5) + (3, 1) = (1, 6)$
Gràficament, la suma es construeix dibuixant l'origen del segon vector a partir de l'extrem del primer. Després s'uneix l'origen del primer amb l'extrem del darrer vector. La figura mostra com es fa la mateixa suma d'abans gràficament.
Si a un vector li sumam el seu oposat, el resultat de la suma és el vector zero. $(-2, 5) + (2, -5) = (0, 0)$, o en general $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

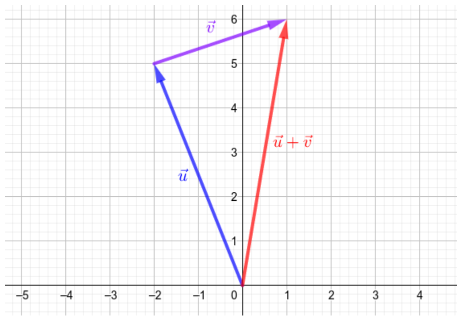


Figura 3: Suma gràfica de dos vectors. Aquesta tècnica es pot aplicar a un nombre arbitrari de vectors.

Resta de vectors

La resta de dos vectors és equivalent a sumar-li l'oposat del segon vector: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.
Les components del vector resta s'obté restant component a component: $(-2, 5) - (3, 1) = (-2 - 3, 5 - 1) = (-5, 4)$
També es pot efectuar la resta gràficament utilitzant la mateixa tècnica anterior.

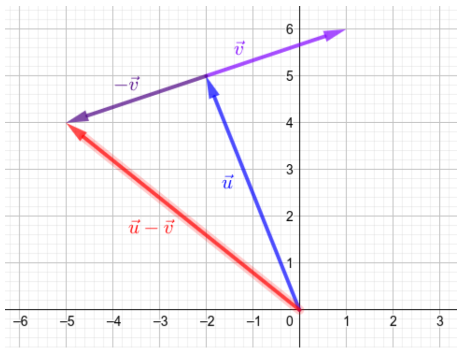
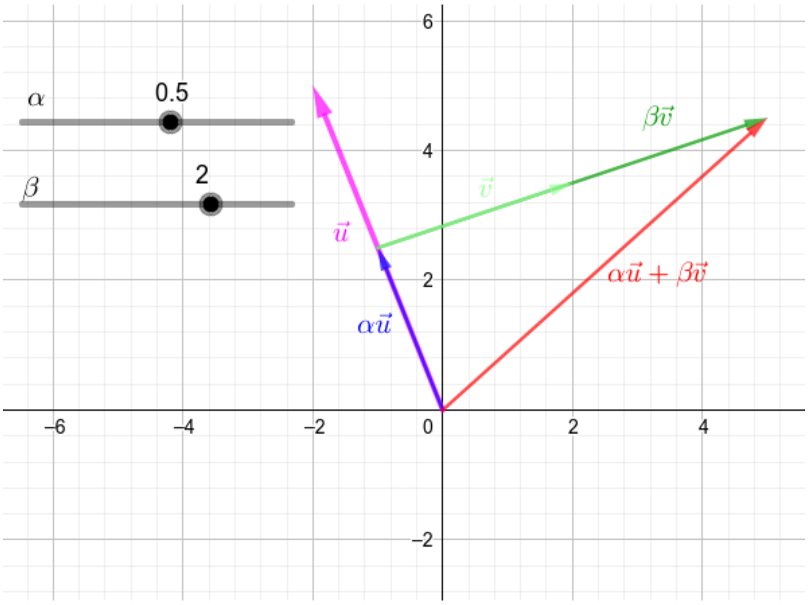


Figura 4: Resta gràfica de dos vectors. El primer vector li sumam l'oposat del segon.

Combinació lineal de vectors

Fer una combinació lineal de dos vectors significa sumar els vectors prèviament multiplicats per algun escalar. Per exemple: $5\vec{u} - 2\vec{v} = 5(-2, 5) - 2(3, 1) = (-10, 25) - (6, 2) = (-16, 23)$.

(c) Josep Mulet (2021)



Simulació 1: https://www.geogebra.org/m/pezetk5n : *Combinació lineal de dos vectors. Canvieu els coeficients i observeu com canvia el resultat de la combinació (vector vermell).*

Bases i components

Definim els vectors $\vec{i}=(1,0)$, $\vec{j}=(0,1)$ els quals tenen mòdul 1 i formen un angle de $90°$ Deim que els vectors $\vec{i}$, $\vec{j}$ formen una base que s'anomena **base canònica o ortonormal**. *Normal* significa que els vectors tenen mòdul 1 i *orto* que formen un angle de $90°$.
D'aquesta forma qualsevol altre vector $\vec{w}=(2,3)$ es pot expressar com una combinació lineal dels vectors de la base $\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}$; és a dir $(2,3)$ són les components del vector $\vec{w}$ respecte de la base canònica.

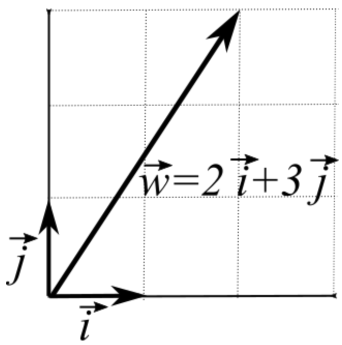


Figura 5: El vector w el podem expressar de dues formes w(2,3) o en funció de la base canònica w=2i+3j

Dues notacions equivalents

Un mateix vector es pot expressar en components $\vec{u}=(u_1,u_2)$ o en termes de la base canònica $\vec{u}=u_1\,\vec{i}+u_2\,\vec{j}$

(c) Josep Mulet (2021)

Vídeo 7.1: *Operacions amb vectors del pla*
https://www.youtube.com/watch?v=coyQn22OOl8

EXERCICIS PROPOSATS

1. Representau els vectors lliures $\vec{u} = (-2, 1)$ i $\vec{v} = (3, 2)$ amb un mateix origen i calculau gràficament la seva suma. Comproveu que obteniu el mateix resultat operant les components.
2. Donats els vectors $\vec{u} = (4, -5)$, $\vec{v} = (2, 1)$ i $\vec{w} = (0, 3)$, calculeu la combinació lineal $2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{w}$.

1.3 Producte escalar de dos vectors

Definició

Anomenam **producte escalar** de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ al resultat de la següent operació

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\alpha \tag{3}$$

és a dir, el producte dels seus mòduls multiplicat pel cosinus de l'angle que formen.

El resultat del producte escalar és un nombre (un escalar).

Propietats

De la definició (3) en deduïm les següents propietats

- El producte escalar és commutatiu: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- El producte escalar és distributiu: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- El producte escalar és associatiu: $\lambda\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\,\vec{v})$
- El producte escalar té signe
  - Si α és un angle agut, $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$
  - Si α és un angle obtús, $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$
  - Si α és un angle recte ($90°$), $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

De la darrera propietat obtenim un resultat molt important que utilitzarem en la resta dels lliuraments.

(c) Josep Mulet (2021)

Dos vectors són **perpendiculars** si i només si el seu producte escalar és igual a zero $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

EXERCICI RESOLT 3

Calcula els següents productes escalars:
$\vec{i}\cdot\vec{i}, \quad \vec{i}\cdot\vec{j}, \quad \vec{j}\cdot\vec{j}$

Utilitzam la definició de producte escalar i recordam que els vectors $\vec{i}$, $\vec{j}$ són ortonormals (mòdul 1 i formen un angle de $90°$)

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|\,|\vec{i}|\cos 0 = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\,|\vec{j}|\cos 90 = 0$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = |\vec{j}|\,|\vec{j}|\cos 0 = 1$$

Producte escalar en components

Si ens donem dos vectors expressats en components respecte de la base canònica $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j}$ i $\vec{v} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j}$, el producte escalar en components s'obté de

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 \tag{4}$$

es llegeix com primera component per primera més segona component per segona.

Vídeo 7.2: *Producte escalar de vectors per components*
https://www.youtube.com/watch?v=YHwUHbIHl4Y

AMPLIACIÓ

Demostració:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j})\cdot(v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j}) =$

Aplicam la propietat distributiva:

$= u_1\,v_1\,\overset{=1}{\vec{i}\cdot\vec{i}} + u_1\,v_2\,\overset{=0}{\cancel{\vec{i}\cdot\vec{j}}} + u_2\,v_1\,\overset{=0}{\cancel{\vec{i}\cdot\vec{j}}} + u_2\,v_2\,\overset{=1}{\vec{j}\cdot\vec{j}} =$

substituint els valors dels productes escalars dels vectors $\vec{i}$, $\vec{j}$ s'obté el resultat final

$= u_1\,v_1 + u_2\,v_2$

(c) Josep Mulet (2021)

EXERCICI RESOLT 4

Calcula els productes escalars i indica quines dels següents parelles de vectors són ortogonals? a) $\vec{u}(3,2)$ i $\vec{v}(1,3)$ b) $\vec{u}(5,-4)$ i $\vec{v}(4,5)$ c) $\vec{u}(1,2)$ i $\vec{v}(0,0)$ d) $\vec{u}(1,2)$ i $\vec{v}(-2,3)$	La condició que dos vectors siguin perpendiculars és que el seu producte escalar sigui igual a zero a) $(3,2)\cdot(1,3)=3+6=9$ no són ortogonals. b) $(5,-4)\cdot(4,5)=20-20=0$ són ortogonals. c) $(1,2)\cdot(0,0)=0$ no té sentit demanar-se per l'angle ja que el segon vector és el vector nul. d) $(1,2)\cdot(-2,3)=-2+6=4$ no són ortogonals.

EXERCICI RESOLT 5

Què ha de valer k perquè els vectors $\vec{u}(18,-6)$ i $\vec{v}(k,4)$ siguin perpendiculars?	La condició que dos vectors siguin perpendiculars és que el seu producte escalar sigui igual a zero. a) $(18,-6)\cdot(k,4)=18k-24=0 \Rightarrow k=\dfrac{24}{18}=\dfrac{4}{3}$.

EXERCICI RESOLT 6

Donats els vectors $\vec{u}(2,3)$, $\vec{v}(-3,1)$, $\vec{w}(5,2)$, calcula: a) $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{w}$ b) $\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}$ c) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$ d) $\vec{u}\,(\vec{v}\cdot\vec{v})$ Indica en cada cas si el resultat de l'operació és un vector o un escalar.	a) $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{w}$= $(3(2,3)+2(-3,1))\cdot(5,2)$= $((6,9)+(-6,2))\cdot(5,2)$= $(0,11)\cdot(5,2)=22$ és un escalar b) $\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}$= $(2,3)\cdot\vec{(5,2)}-(-3,1)\cdot(5,2)$ = $10+6-(-15+2)=16-(-13)=29$ és un escalar c) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$ = $((2,3)\cdot(-3,1))\ (5,2)$ = $-3\,(5,2)=(-15,-6)$ és un vector d) $\vec{u}\,(\vec{v}\cdot\vec{v})$ = $(2,3)\,((-3,1)\cdot(-3,1))$ = $(2,3)\,10=(20,30)$ es tracta d'un vector.

Com trobar vectors perpendiculars a un donat?

Donat un vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$ existeixen infinits vectors perpendiculars a ell.

Un d'aquests vectors en concret es troba girant l'ordre de les components i canviant un dels signes, per exemple $\vec{v}_\perp=(-v_2,v_1)$.

La resta de vectors seran múltiples d'aquest; $\lambda(-v_2,v_1)$.

(c) Josep Mulet (2021)

EXERCICIS PROPOSATS

3. Considera els vectors $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, -2)$, $\vec{w} = (-5, -2)$. Calculau les següents operacions, indicant si el resultat final és un vector o un escalar.
a) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$
b) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}$
c) $\vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

4. Calcula m perquè els vectors $\vec{u} = (6, m)$, $\vec{v} = (2, 3)$ siguin perpendiculars.

1.4 Mòdul i angle entre vectors

Mòdul d'un vector

El mòdul d'un vector de components $\vec{v}(v_1, v_2)$ s'obté de

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{5}$$

A partir de la definició de producte escalar (3), es compleix que $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Un vector és **unitari** si té mòdul 1. Per aconseguir que un vector sigui unitari basta dividir el vector entre el seu mòdul.

Angle entre dos vectors

L'angle que formen dos vectors amb components $\vec{u}(u_1, u_2)$ i $\vec{v}(v_1, v_2)$ s'obté a partir de les fórmules (3) i (4)

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \arccos \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \tag{6}$$

Dos vectors paral·lels que tenen igual sentit formen un angle de $0°$, mentre que si tenen sentit oposat formen un angle de $180°$.

Vídeo 7.3: *Vectors paral·lels, perpendiculars i angle que formen*
https://www.youtube.com/watch?v=58AdKuoda_w

EXERCICI RESOLT 7	
Calcula dos vector perpendiculars al vector $\vec{v}(4, -3)$ que siguin unitaris.	Un possible vector perpendicular és $(3, 4)$ perquè $(3, 4) \cdot (4, -3) = 12 - 12 = 0$. Calculem el seu mòdul $\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Per aconseguir un vector unitari, dividim el vector entre el seu mòdul $\frac{1}{5}(3, 4) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. L'altra resposta és l'oposat d'aquest vector $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

(c) Josep Mulet (2021)

EXERCICI RESOLT 8

Calcula l'angle que formen els vectors $\vec{u}(2,5)$ i $\vec{v}(4,-3)$.	Calculam el producte escalar $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,5)\cdot(4,-3) = 8-15 = -7$ Calculam els seus mòduls $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ Calculam l'angle $$\alpha = \arccos\frac{-7}{5\sqrt{29}} = \arccos -0,259 \approx 105,1^\circ$$

EXERCICIS PROPOSATS

5. Calculau el mòdul del vector $\vec{a} = (6,-8)$

6. Calculau l'angle que formen els vectors $\vec{a} = (6,-8)$ i $\vec{b} = (1,1)$

2. Equació de la recta en el pla

Una recta ve determinada per:

- Dos punts A i B
- Un punt i un vector A i $\vec{d}$

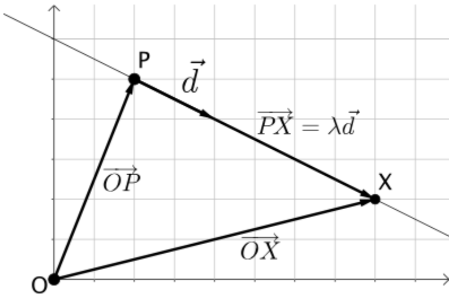
El primer cas es redueix al segon perquè sempre podem prendre com a vector $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. Aquest vector es coneix com **vector director** de la recta.

En aquest apartat aprendrem a expressar l'equació de la recta en diferents formes. Partirem de l'equació vectorial de la qual es poden deduir totes les altres.

Equació vectorial

Volem trobar l'equació de la recta que passa pel punt P i té com a vector director $\vec{d}$. Considerem un punt qualsevol X que es troba damunt la recta. S'ha de complir que el vector $\overrightarrow{PX}$ ha d'ésser un múltiple del vector director $\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{d}$.

(c) Josep Mulet (2021)



De la suma gràfica de vectors de la figura, es compleix que $\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda\vec{d}$. Aquesta equació es coneix com l'equació vectorial de la recta. Si expressam els vectors en components $P = (P_1, P_2)$ i $\vec{d}(d_1, d_2)$ trobam

Equació vectorial de la recta:

$(x, y) = (P_1, P_2) + \lambda(d_1, d_2)$

Obtenim punts donant valors al paràmetre λ.

EXERCICI RESOLT 9

Escriu l'equació vectorial de la recta que passa pels punts $A = (3, 1)$ i $B = (1, 4)$. Troba tres punts més d'aquesta recta.	Calculam el vector director de la recta $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = B-A = (1,4)-(3,1) = (-2, 3)$ i triam un punt, per exemple, A. $(x, y) = (3, 1) + \lambda(-2, 3)$ Podem trobar més punts donant valors al paràmetre: Per a $\lambda = 1$ trobam el punt $(x, y) = (1, 4)$, $\lambda = -1$ tenim $(x, y) = (5, -2)$ i $\lambda = 3$ $(x, y) = (-3, 10)$, etc.

Equacions paramètriques

De l'equació vectorial igualam les components x i y i obtenim

Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = P_1 + \lambda d_1 \\ y = P_2 + \lambda d_2 \end{cases}$$

Obtenim punts donant valors al paràmetre λ.

Cal notar que les components del vector director són els coeficients que acompanyen el paràmetre, mentre que els coeficients lliures de paràmetre són les coordenades del punt.

Així doncs, la recta $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$ tindrà com a punt $P = (0, 3)$ i vector director $\vec{d}(2, -1)$.

(c) Josep Mulet (2021)

EXERCICI RESOLT 10

Escriu les equacions paramètriques de la recta que passa pels punts $A = (3, 1)$ i $B = (1, 4)$.	Partim de l'equació vectorial obtinguda a l'exemple anterior $(x, y) = (3, 1) + \lambda(-2, 3)$ i igualam les components $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}$ Igual que abans donant punts a λ trobarem més punts de la recta.

Equació contínua

L'equació contínua s'obté d'eliminar el paràmetre λ de les equacions paramètriques.

> Forma de l'equació contínua $\dfrac{x - P_1}{d_1} = \dfrac{y - P_2}{d_2}$

Noteu que en forma contínua, les components del vector director apareixen en els denominadors i el punt en els numeradors canviat de signe.

EXERCICI RESOLT 11

Passa la recta $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}$ a forma contínua.	Aïllam λ de cada equació. $\lambda = \dfrac{x-3}{-2}$ i $\lambda = \dfrac{y-1}{3}$ Si igualam les expressions de λ obtenim l'equació contínua $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{3}$

Equació punt-pendent

Com el mateix nom indica, l'equació punt-pendent s'obté a partir d'un punt de la recta i el seu pendent. El pendent de la recta informa de la seva inclinació i està determinat pel vector director $m = \dfrac{d_2}{d_1}$.

> L'equació punt-pendent té la forma
>
> $$y - P_1 = m \cdot (x - P_2) \tag{7}$$

L'equació punt-pendent es pot obtenir a partir de l'equació contínua i passant un denominador multiplicant a l'altre membre: $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{3} \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 3)$ de la qual el pendent és $m = -\dfrac{3}{2}$ i el punt $P = (3, 1)$.

Equació implícita o general

(c) Josep Mulet (2021)

L'equació general té la forma $Ax + By + C = 0$ on els coeficients A, B són les components del vector normal $\vec{n} = (A, B)$, és a dir, d'un vector perpendicular a la recta. Si volguéssim un vector director hauríem de prendre $\vec{d} = (-B, A)$

L'equació general s'obté de la contínua efectuant els productes en creu i passant tots els termes al membre de l'esquerre.

Per trobar més punts, cal donar valors a una de les variables, per exemple x, i aïllar l'altra.

EXERCICI RESOLT 12

Troba l'equació general de la recta $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{3}$.	Multiplicam en creu les fraccions $3(x-3) = -2(y-1) \Rightarrow 3x-9 = -2y+2 \Rightarrow 3x + 2y - 11 = 0$. Podem trobar més punts donant valors a x i aïllant la y. Per exemple si $x = 1$, $y = 4$. També es pot fer a l'inrevés, donam un valor a $y = 0$ i aïllam la $x = \frac{11}{3}$.

Equació explícita

L'equació explícita de la recta s'obté aïllant la variable y i té la forma

$$y = mx + n \tag{8}$$

on m s'anomena el pendent i n l'ordenada a l'origen. Com hem dit, el pendent s'obté de $m = \frac{d_2}{d_1}$ i n indica el punt de tall de la recta amb l'eix OY.

(c) Josep Mulet (2021)

EXERCICI RESOLT 13

Donada la recta $y = \frac{1}{3}x - 5$, trobau-ne un punt i un vector director. Expresseu-la de totes les altres formes possibles.

Ens donen l'equació en forma explícita de la qual, per comparació amb (8), deduïm $m = \frac{1}{3}$, llavors un vector director és $\vec{d}(3,1)$. Si donam el valor $x = 0$ trobam $y = -5$, per tant un punt de la recta és $P = (0, -5)$.

Les altres formes s'obtenen substituint les dades dins les seves equacions característiques

- **Vectorial:** $(x, y) = (0, -5) + t(3, 1)$
- **Paramètriques:** $\begin{cases} x = 3t \\ y = -5 + t \end{cases}$
- **Contínua:** $\frac{x-0}{3} = \frac{y+5}{1}$
- **Punt-pendent:** $y + 5 = \frac{1}{3}(x + 0)$
- **General:** $-x + 3y + 15 = 0$

Vídeo 7.4: *Equacions de la recta en el pla*
https://www.youtube.com/watch?v=uLjJVbaO-ZM

Rectes horitzontals i verticals

Les rectes horitzontals o constants tenen com a vector director $\vec{d}(1, 0)$ (o múltiples) i la seva equació és de la forma $y = k$.

En canvi, les rectes verticals representen parets que tenen com a vector director $\vec{d}(0, 1)$ (o múltiples) i la seva equació és de la forma $x = k$.

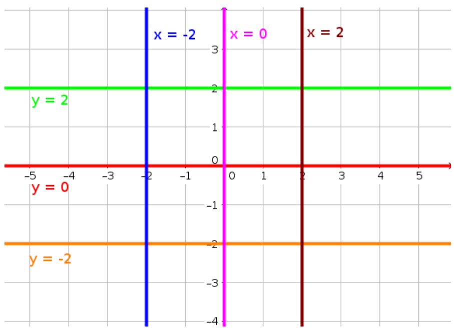


Figura 6: Rectes verticals i horitzontals

EXERCICIS PROPOSATS

7. Calcula l'equació de la recta que passa pel punt $P = (2, -1)$ i que té la direcció del vector $\vec{d} = (3, 4)$ en totes les formes possibles.

8. Donada la recta $2x - y + 7 = 0$, es demana:
a) Trobar 3 punts de la recta.
b) Calcular un vector director.
c) Escriure les equacions paramètriques de la mateixa recta.

3. Càlcul de rectes paral·leles i perpendiculars

Dues rectes són paral·leles o perpendiculars si ho són els seus vectors directors. Recordem quines són aquestes condicions:

Donats dos vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v}(v_1, v_2)$

- Són **paral·lels** si les seves components són proporcionals $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{v_2}{v_1}$ que és equivalent a dir que tenen **igual pendent**.
- Són **perpendiculars** si el seu producte escalar és zero $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Un possible vector perpendicular a un donat (u_1, u_2) és $(-u_2, u_1)$.

Recta paral·lela a una donada

EXERCICI RESOLT 14

Escriu les equacions paramètriques de la recta que passa pel punt $P(3, 4)$ i és paral·lela a la recta $r : \dfrac{x-2}{-5} = \dfrac{y-4}{2}$.

La recta que ens demanen ha d'ésser paral·lela a la recta r i per tant ha de tenir el mateix vector director. El vector director és $\vec{d} = (-5, 2)$.

La recta que ens demanen en forma paramètrica és $\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{array} \right.$.

Recta perpendicular a una donada

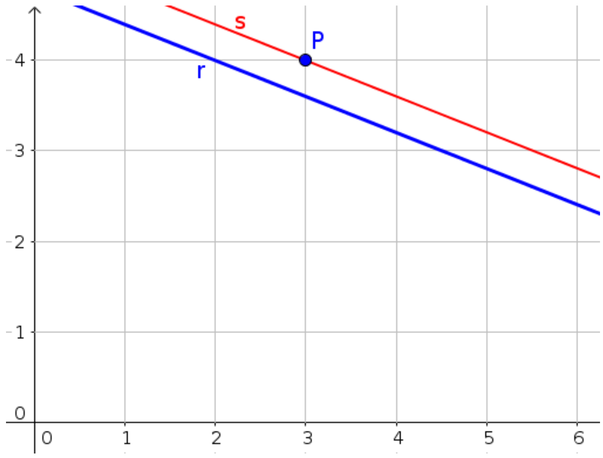
(c) Josep Mulet (2021)

EXERCICI RESOLT 15

Escriu l'equació contínua de la recta que passa pel punt $P(-3, 2)$ i és perpendicular a la recta $r:\ 5x - 2y + 3$.

La recta que ens donen està en forma general i el vector normal $\vec{n} = (5, -2)$ ja és un vector perpendicular a la recta. Aquest vector és el vector director de la recta que ens demanen $\vec{d}(5, -2)$

La recta que ens demanen en forma contínua és $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-2}{-2}$.

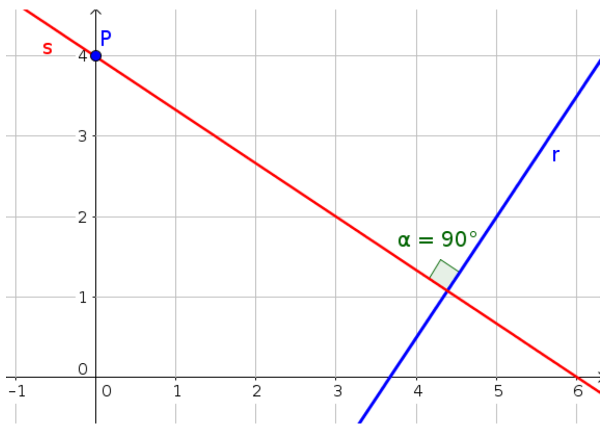


EXERCICI RESOLT 16

Troba l'equació vectorial de la recta que es perpendicular a la recta $y + 1 = \frac{3}{2}(x - 3)$ i que talla a l'eix OY en el punt d'ordenada 4.

La recta que ens donen està en forma punt-pendent de la qual en deduïm el pendent $m = \dfrac{3}{2}$ i d'aquí el vector director $\vec{d}(2, 3)$. Un vector perpendicular a aquest és $\vec{n}(-3, 2)$ i serà el vector director de la recta que ens demanen.

A més, la recta que ens demanen ha de passar pel punt de tall $P = (0, 4)$. La seva equació vectorial és $(x, y) = (0, 4) + t(-3, 2)$.



Vídeo 7.5: *Equacions de rectes paral·leles i perpendiculars*
https://www.youtube.com/watch?v=VP3_cZt79ww

EXERCICIS PROPOSATS

9. Calculau l'equació **contínua** de la recta que es paral·lela a la recta $r: y = -2x + 1$ i que passa pel punt $P(2, 1)$.

10. Calculau l'equació **general** de la recta que es perpendicular a la recta $r: \frac{x}{4} = \frac{y+2}{-3}$ i que passa pel punt $P(1, -1)$.

(c) Josep Mulet (2021)