MATEMÀTIQUES II - PBAU

IEDIB

Solucions

MICROTASCA AVALUABLE PBAU_MAT2 3.1

GEOMETRIA AFÍ A L'ESPAI

Professor: *Josep Mulet*

1. Donats els punts $A(1,3,-2)$, $B(-5,4,1)$ i $C(7,2,4)$:
   a) Determina l'equació implícita de la recta r que passa per A i B.
   b) Determina l'equació general del pla π que passa pels punts A, B i C.

a) $\vec{AB} = B - A = (-5,4,1) - (1,3,-2) = (-6,1,3) = \vec{d}_r$

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{3} \rightarrow \begin{array}{l} x-1 = -6(y-3) \\ 3(y-3) = z+2 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x+6y-19=0 \\ 3y-z-11=0 \end{cases}$$

$X \quad \{\vec{AX}, \vec{AB}, \vec{AC}\}$

b) $\vec{AC} = C - A = (6,-1,6)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ -6 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 9(x-1) + 54(y-3) + 0 = 9\left[x-1+6y-18\right] = 0$$

$$\boxed{x+6y-19=0}$$

2. Troba l'equació d'una recta que complexi aquestes condicions:

I) És paral·lela a la recta $r: \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$

II) Passa pel punt d'intersecció de la recta s amb el pla π $\quad s: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+2}{3} \quad \pi: x - y + z = 7$

$$r: \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases} \rightarrow z = \lambda \quad \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 5 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \vec{d} = (-2, -3, 1)$$

Punt de tall

$$s: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

$$1 + 4t - (-3 + 2t) - 2 + 3t = 7$$

$$1 + 4t + 3 - 2t - 2 + 3t = 7$$

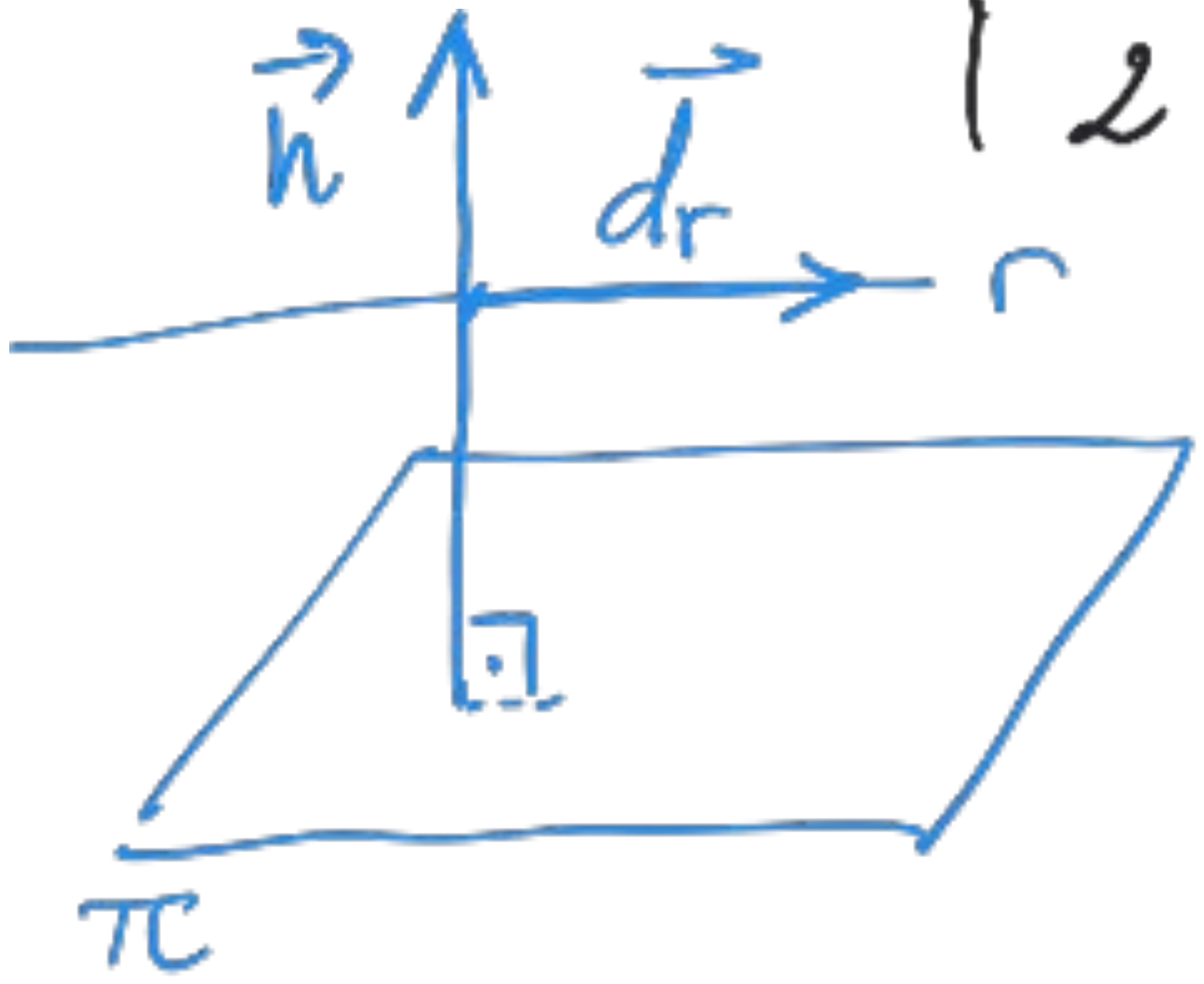
$$5t = 5 \rightarrow \boxed{t = 1} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 5 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\frac{x-5}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}}$$

3. Calcula el valor de a perquè la recta $r:\begin{cases}3x-y+z=0\\2x-z+3=0\end{cases}$ i el pla $\pi:\ ax-y+4z-2=0$ siguin paral·lels. Hi ha algun valor pel qual la recta i el pla són perpendiculars?

$\vec{n}_\pi=(a,-1,4)$ $\qquad \vec{n}_1=(3,-1,1)$ $\qquad \vec{n}_2=(2,0,-1)$

$$\vec{d}_r=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot 1-\vec{j}(-5)+\vec{k}\cdot 2=(1,5,2)$$



$\vec{n}_\pi\cdot\vec{d}_r=0 \rightarrow (a,-1,4)\cdot(1,5,2)=0$

$a-5+8=0\rightarrow \boxed{a=-3}$

$\vec{n}_\pi \parallel \vec{d}_r \qquad \frac{a}{1}=\underbrace{\frac{-1}{5}=\frac{4}{2}}$ $\qquad$ Impossible

4. Estudia la posició relativa de les rectes $r: \dfrac{x-17}{7} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-8}{2}$ i $s: \begin{cases} x = 15 + 4\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 19 + k\lambda \end{cases}$ segons el valor de k. Determina si existeix algun valor pel qual es tallin i, si escau, determina el punt de tall.

$R = (17, 1, 8)$ $\qquad S = (15, -2, 19)$ $\qquad \vec{RS} = S - R = (-2, -3, 11)$

$\vec{d}_r (7, 0, 2)$ $\qquad \vec{d}_s = (4, -1, k)$

• $\vec{d_r} \parallel \vec{d_s}$? $\qquad \underbrace{\dfrac{7}{4} = \dfrac{0}{-1}}_{} = \dfrac{2}{k}$ NO → r, s no poden esser paral·leles ni coincidents.

• Es creuen o tallen? $\quad \det(\vec{RS}, \vec{d_r}, \vec{d_s})$

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 11 \\ 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & k \end{vmatrix} = 21k - 105 = 0$$

$$\boxed{k = 5}$$

• $k = 5$ → r i s secants

• $k \neq 5$ → r i s es creuen

4. Estudia la posició relativa de les rectes $r: \dfrac{x-17}{7} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-8}{2}$ i $s: \begin{cases} x = 15 + 4\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 19 + k\lambda \end{cases}$ segons el valor de k. Determina si existeix algun valor pel qual es tallin i, si escau, determina el punt de tall.

$$r: \begin{cases} x = 17 + 7t \\ y = 1 \\ z = 8 + 2t \end{cases}$$

$\longrightarrow$ igualam incògnites

$$\left.\begin{array}{l} 17 + 7t = 15 + 4\lambda \\ 1 = -2 - \lambda \\ 8 + 2t = 19 + 5\lambda \end{array}\right\} \to \lambda = -3$$

$$t = \frac{19 - 15 - 8}{2} = -2$$

$$x = 17 - 14 = 3$$
$$y = 1$$
$$z = 8 - 4 = 4$$

$$\longrightarrow \boxed{T = (3, 1, 4)}$$