Lliurament 7: Vectors i rectes en el pla

Com ajuda l'àlgebra a resoldre situacions geomètriques?

Matemàtiques I

Josep Mulet Pol
Àmbit científic
IEDIB

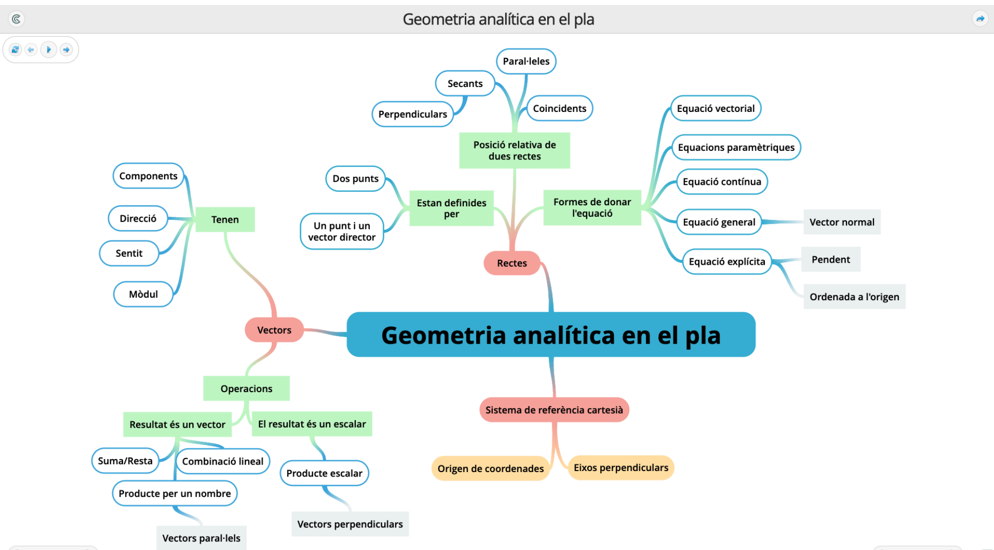
https://iedib.net/

Edició LaTeX: ® **Josep Mulet Pol**
Versió: 19-02-2025

Índex

1. Introducció a la geometria analítica

Esquema del lliurament



Mapa conceptual creat amb GoConqr per Josep Mulet.

2. Vectors en el pla

Les magnituds físiques es classifiquen en escalars i vectorials. Una magnitud escalar és aquella que queda completament determinada amb un nombre i les unitats corresponents. En canvi, una magnitud vectorial és aquella que, a més d'un valor numèric i les seves unitats (mòdul), cal especificar-ne la direcció i el sentit.

Taula 1: *Tipus de magnituds*

Magnituds vectorials	Magnituds escalars
Temps	Velocitat
Temperatura	Acceleració
Volum	Força
...	...

Un **vector fix** queda determinat per dos punts A **origen** i B **extrem** . El **mòdul** és la llargària del vector o la distància entre A i B. La **direcció** és la de la recta que passa per A i B. Cada direcció té dos **sentits** .

No et confonguis! Escalars i vectors.

En aquest lliurament, s'ha d'entendre el vocabulari que farem servir. En particular, cal tenir clara la diferència entre els nombres reals, que anomenarem **escalars** , i els **vectors** . D'una forma poc rigorosa, pots pensar que els vectors ”porten fletxaï els escalars no.

A l'estructura algebraica formada per escalars i vectors, juntament amb les operacions que veurem a continuació, se l'anomena **espai vectorial** .

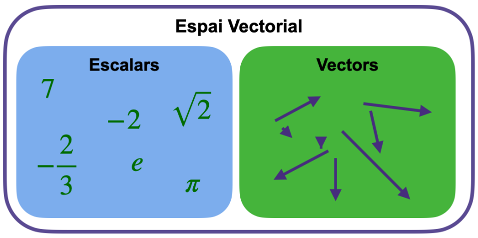


Figura 1: Caracterització d'un espai vectorial. Imatge d'elaboració pròpia.

2.1 Vectors fixos i lliures

Un **sistema de referència Cartesià** està format per dos eixos, perpendiculars dos a dos, que designam com OX i OY. Els dos eixos es tallen en un punt que anomenam origen $O(0,0)$.

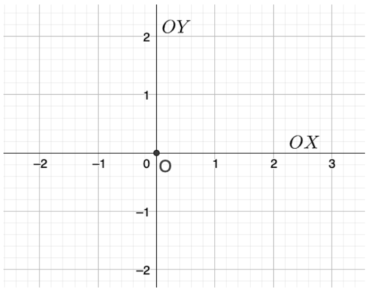


Figura 2: Sistema de referència cartesià. Elaboració pròpia.

Per localitzar un punt P en el pla donam dues coordenades $P = (P_1, P_2)$ que corresponen a les projeccions sobre els eixos OX, OY respectivament.

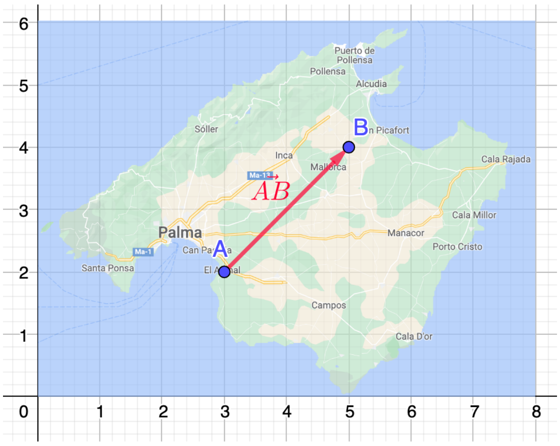


Figura 3: Les coordenades dels municipis són A=(3,2) i B=(5,4) i AB indica el vector fix. Elaboració pròpia.

Definim un **vector fix** d'origen en el punt A i extrem en el punt B com el **segment orientat** que va des d' A cap a B. La fletxa del vector es dibuixa cap al punt extrem.

Les **components del vector** s'obtenen de restar els punts extrem menys origen

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (B_1 - A_1, B_2 - A_2) \tag{1}$$

Les components d'un vector indiquen quina distància s'avança en cada direcció mesurada des del seu origen.

Exemple 1

Donats els punts $A = (-2, 3)$ i extrem a $B = (1, -1)$, calcula les components dels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$. Quina relació existeix entre aquests dos vectors?

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1) - (-2, 3) = \ (3, -4)$
Aquest vector avança 3 unitats en direcció x i baixa 4 en direcció y.

$\overrightarrow{BA} = (-2, 3) - (1, -1) = (-3, 4)$

Els dos vectors tenen sentit oposat i les seves components tenen signe diferent.

Si ens donen el vector $\vec{v} = (2, 2)$, del qual desconeixem l'origen, vol dir que el podem dibuixar amb l'origen que nosaltres vulguem. Deim que es tracta d'un **vector lliure** . Generalment, resulta pràctic representar-los en origen en el punt $O(0, 0)$.

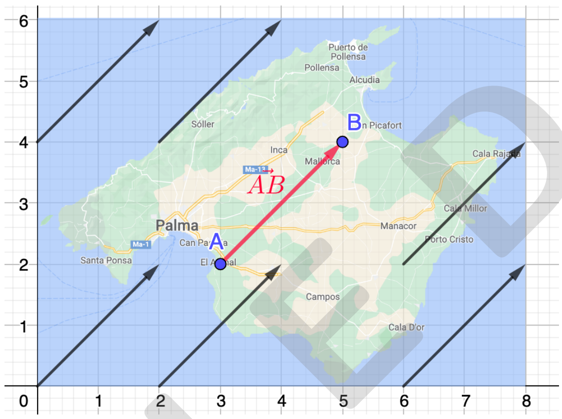


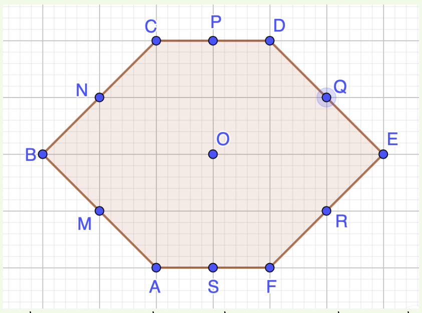
Figura 4: Concepte de vector lliure. Elaboració pròpia.

Tots els vectors de la figura tenen igual direcció, mòdul i sentit. Les seves components també són idèntiques. L'únic que canvia són els punts d'origen i extrem. Direm que tots aquests vectors són **equipol·lents** entre si.

El vector que va des de l'origen de coordenades $O = (0, 0)$ al punt $P = (P_1, P_2)$ s'anomena **vector de posició** del punt P i té per components les mateixes coordenades del punt $\vec{OP} = P - O = P = (P_1, P_2)$.

Exemple 2

La figura ABCDEF és un hexàgon. Compara el mòdul, direcció i sentit de les següents parelles de vectors.



a) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{FE}$ i $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{DE}$ d) $\overrightarrow{OS}$ i $\overrightarrow{OE}$

a) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$: Igual mòdul, direcció diferent
b) $\overrightarrow{FE}$ i $\overrightarrow{BC}$: Igual mòdul, direcció i sentit
c) $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{DE}$: El mòdul del segon vector és el doble, igual direcció i sentit
d) $\overrightarrow{OS}$ i $\overrightarrow{OE}$: Diferent mòdul i direcció

Components d'un vector

Una altra forma proporcionar un vector, que empraràs molt a física, consisteix en donar el seu mòdul i l'angle que forma amb l'eix horitzontal. Per trigonometria, podem calcular fàcilment les seves components $\vec{v} = (|\vec{v}|\cos\alpha, |\vec{v}|\sin\alpha)$.

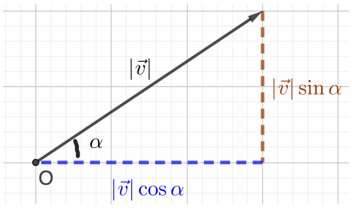


Figura 5: Components d'un vector. Elaboració pròpia.

Exemple 3

L'aigua surt d'una mànega a una velocitat de 10 m/s i formant un angle de 30° respecte l'eix horitzontal. Calcula les components del vector velocitat.

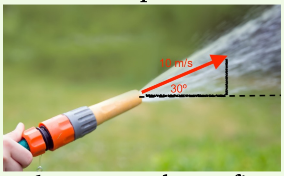


Figura 6: Imatge de Trafico MZG

Les components del vector velocitat s'obtenen de projectar el mòdul sobre cadascun dels eixos de coordenades OX i OY.

$$\vec{v} = 10\,(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (5\sqrt{3}, 5)\ \text{m/s} \tag{2}$$

2.2 Operacions amb vectors lliures

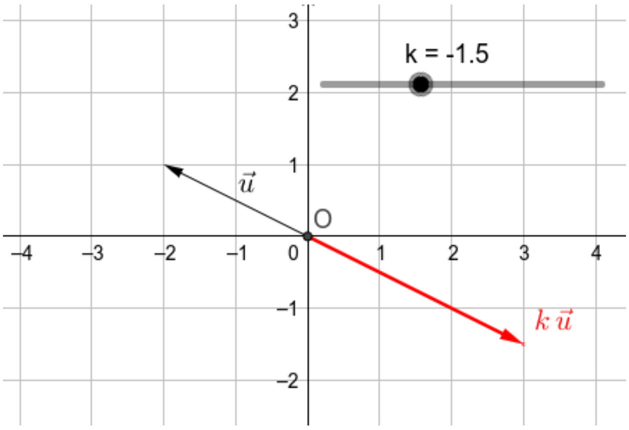
Donats dos vectors lliures, per exemple $\vec{u} = (-2, 5)$ i $\vec{v} = (3, 1)$, es poden realitzar les següents operacions; totes elles donen com a resultat un altre vector.

Producte d'un vector per un escalar

Multiplicar un nombre (escalar) k per un vector $\vec{u}$ dona un vector que té la mateixa direcció que el vector $\vec{u}$ i mòdul k vegades més llarg. El sentit del vector serà el mateix si $k > 0$ i sentit oposat si $k < 0$.

En components, es multiplica cada component per l'escalar. Per exemple: $7\,(-2, 5) = (-14, 35)$.

En la simulació següent modifica el valor de k arrossegant el control i observa quin efecte té sobre el vector $k\vec{u}$. Quines conclusions en treus?



Simulació 1: https://www.geogebra.org/m/fnfrh3rj : *Producte d'un escalar per un vector.*

Si prenem $k=-1$, obtenim el **vector oposat** $-(-2,5)=(2,-5)$

Perquè dos vectors tinguin igual direcció, un a d'ésser un múltiple de l'altre $\vec{u}=\lambda\vec{v}$. Direm que les seves components són proporcionals

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2} \tag{3}$$

Fixeu-vos que multiplicar qualsevol vector pel nombre 0 dóna el vector zero: $0\,(-2,5)=(0,0)$

Atenció. No confoneu el vector zero $\vec{0}=(0,0)$ amb l'escalar 0.

Suma de vectors

Sabies que quan dues o més forces actuen sobre un cos, s'obté la força resultat mitjançant la suma dels vectors? El cos romandrà en equilibri si la força resultant és nul·la (vector $\vec{0}$). En cas contrari, el cos es mourà amb una acceleració en la direcció de la força resultant.

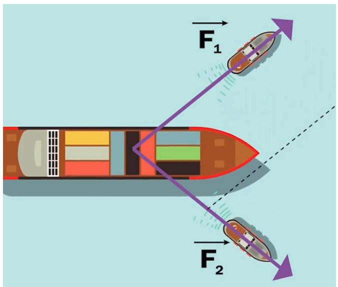


Figura 7: Imatge d'elaboració pròpia a partir de Infobae

La suma de vectors emprant components es fa sumant primera amb primera i segona amb segona components: $(-2,5)+(3,1)=(-2+3,5+1)=(1,6)$

Gràficament, la suma es pot construir dibuixant l'origen del segon vector a partir de l'extrem del primer. Després s'uneix l'origen del primer amb l'extrem del darrer vector. La figura mostra com es fa la mateixa suma d'abans gràficament. Aquesta tècnica es pot aplicar a un nombre arbitrari de vectors.

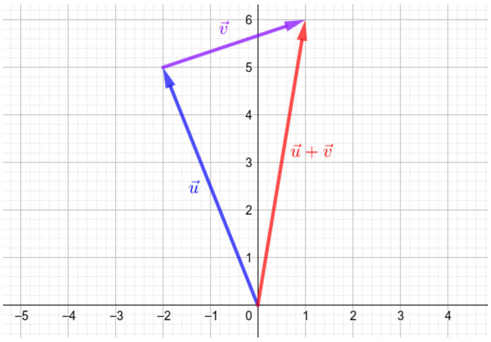


Figura 8: Suma gràfica de dos vectors. Elaboració pròpia.

Si a un vector li sumam el seu oposat, el resultat de la suma és el vector zero. $(-2,5)+(2,-5)=(0,0)$, o en general $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

Resta de vectors

La resta de dos vectors és equivalent a sumar-li l'oposat del segon vector: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

Les components del vector resta s'obté restant component a component: $(-2,5)-(3,1)=(-2-3,5-1)=(-5,4)$

També es pot efectuar la resta gràficament utilitzant la mateixa tècnica anterior. Al primer vector si li ha de sumar l'oposat del segon vector.

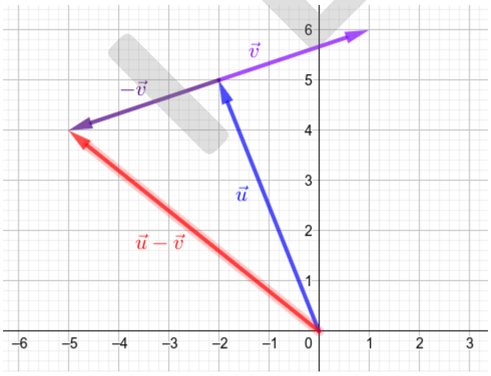


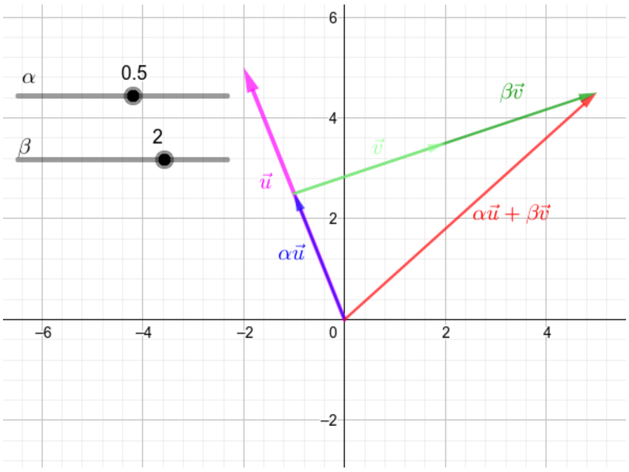
Figura 9: Resta gràfica de dos vectors. El primer vector li sumam l'oposat del segon. Elaboració pròpia.

Combinació lineal de vectors

Una combinació lineal de dos vectors consisteix en sumar els vectors prèviament multiplicats per algun escalar.

Per exemple: $5\vec{u} - 2\vec{v} = 5(-2,5) - 2(3,1) = (-10,25) - (6,2) = (-16,23)$.

Canvia els coeficients α, β i analitza com canvia el resultat de la combinació (vector vermell).



Simulació 1: https://www.geogebra.org/m/pezetk5n : *Combinació lineal de dos vectors. Elaboració pròpia.*

Vídeo 7.1: *Introducció als vectors en el pla*
https://www.youtube.com/watch?v=dyG6xjZ4jwo

Exercicis

1. Representau els vectors lliures $\vec{u} = (-2,1)$ i $\vec{v} = (3,2)$ amb un mateix origen i calculau gràficament la seva suma. Comprovau que obteniu el mateix resultat operant les components.

2. Donats els vectors $\vec{u} = (4,-5)$, $\vec{v} = (2,1)$ i $\vec{w} = (0,3)$, calculau la combinació lineal $2\vec{u}+\vec{v}-3\vec{w}$. T'atreveixes a fer l'operació gràficament?

2.3 Dependència lineal i bases

Començarem donant dues definicions que ens serviran per entendre el concepte de base de vectors.

> Direm que dos vectors són **linealment dependents** si tenen la mateixa direcció (no cal que tenguin igual sentit).
>
> Direm que dos vectors són **linealment independents** si tenen diferent direcció.

En l'apartat d'operacions hem vist com generar vectors dependents. Basta multiplicar un vector per un nombre i obtenim un vector dependent al primer. Per tant, perquè dos vectors $\vec{u}\,(u_1, u_2)$ i $\vec{v}\,(v_1, v_2)$ siguin dependents, necessàriament un ha de ser un múltiple de l'altre. És a dir, existirà un nombre λ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Si expressam aquesta relació en components, arribam a la conclusió

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} \tag{4}$$

En altres paraules, dos vectors són paral·lels o dependents si les seves components són proporcionals.

Condició d'alineament de 3 punts

En el pla, tres punts A, B, C poden estar alineats o formar un triangle. La condició perquè estiguin alineats és que els vectors $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ siguin linealment dependents.

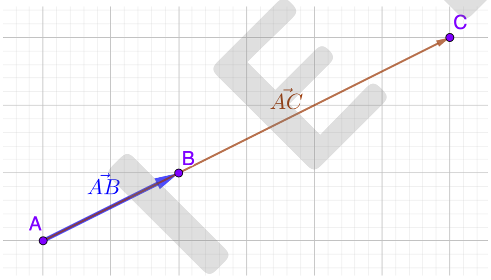


Figura 10: Condició de 3 punts alineats. Elaboració pròpia.

Exemple 4

Calcula què ha de valer la coordenada k perquè els punts $A = (-1, 2)$, $B = (k, 3)$, $C = (4, 5)$ estiguin alineats.

Calculam els vectors $\vec{AB} = B - A = (k, 3) - (-1, 2) = (k + 1, 1)$ i $\vec{AC} = C - A = (4, 5) - (-1, 2) = (5, 3)$
Aquests dos vectors han de ser linealment dependents; les seves components són proporcionals:

$$\frac{k+1}{5} = \frac{1}{3}$$

Resolem l'equació i determinam que $k = \frac{2}{3}$ perquè els punts estiguin alineats.

Bases i components

Definim els vectors de la **base canònica o ortonormal** com $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$. Aquests vectors tenen mòdul 1 i formen un angle de $90°$. En el mot ortonormal, *"orto"* significa que formen un angle de $90°$ i *"normal"* que els vectors tenen mòdul 1.
D'aquesta forma qualsevol altre vector, per exemple $\vec{w} = (2, 3)$, es pot expressar com una combinació lineal dels vectors de la base $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; és a dir $(2, 3)$ són les components del vector $\vec{w}$ respecte de la base canònica.

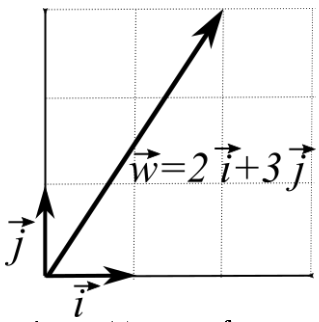


Figura 11: Dues formes d'expressar un vector, w(2,3) o w=2i+3j. Elaboració pròpia.

Dues notacions equivalents

Un mateix vector es pot expressar en components $\vec{u} = (u_1, u_2)$ o en termes de la base canònica $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j}$

En general, perquè dos vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ formin una base del pla, s'ha de complir que tenguin diferent direcció (han de ser linealment independents). En tal cas, qualsevol vector del pla es pot expressar com una combinació lineal dels vectors de la base

$$\vec{w} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \tag{5}$$

Al parell de nombres (α, β) s'anomenen components del vector $\vec{w}$ respecte de la base $\mathcal{B}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

AMPLIACIÓ

Considera els vectors $\vec{a}(2,0)$, $\vec{b}(0,-1)$ de la figura. Atès que són linealment independents, formen una base del pla.

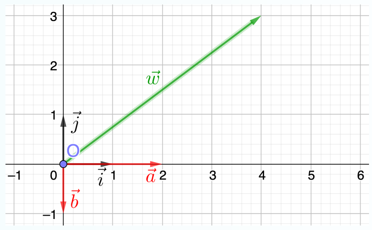


Figura 12: Exemple de base en el pla. Elaboració pròpia.

Ara ens donen el vector que té de components respecte la base ortonormal $\vec{w} = (4,3) = 4\vec{i} + 3\vec{j}$. Aquest mateix vector, es pot expressar com $\vec{w} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ i, per tant, les components són $(2,-3)$ respecte de la base $\mathcal{B}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

No et confonguis! Tot i que un vector sempre és un mateix objecte, hem descobert que les seves components depenen de la base que emprem per expressa-lo.

Exercicis

3. Justifica quins d'aquests parells de vectors formen una base del pla.

- $\{\vec{a}(1,-1), \vec{b}(-1,1)\}$
- $\{\vec{a}(1,-1), \vec{b}(1,1)\}$
- $\{\vec{a}(8,-6), \vec{b}(-12,9)\}$

2.4 Producte escalar de dos vectors

Definició

Anomenam **producte escalar** de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ al resultat de la següent operació

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\alpha \tag{6}$$

és a dir, el producte dels seus mòduls multiplicat pel cosinus de l'angle que formen.

El resultat del producte escalar és un nombre (un escalar). No doneu mai com a resposta un vector.

Interpretació geomètrica

El producte escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ es pot interpretar com la projecció (o l'ombra) del vector $\vec{u}$ sobre la direcció donada pel vector $\vec{v}$

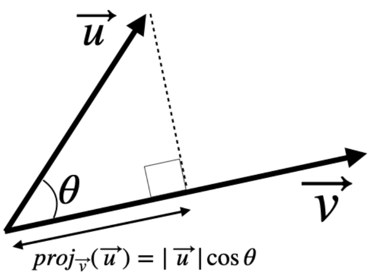


Figura 13: Interpretació geomètrica del producte escalar. Elaboració pròpia.

De la figura anterior s'obté la projecció per aplicació de la trigonometria en el triangle rectangle. Podem definir la projecció del vector $\vec{u}$ sobre la direcció del vector $\vec{v}$ com

$$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{7}$$

Propietats del producte escalar

De la definició (6) en deduïm les següents propietats

- El producte escalar és commutatiu: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- El producte escalar és distributiu: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- El producte escalar és associatiu: $\lambda\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\,\vec{v})$

- El producte escalar té signe
  - Si α és un angle agut, $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} > 0$
  - Si α és un angle obtús, $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} < 0$
  - Si α és un angle recte ($90°$), $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

De la darrera propietat obtenim un resultat molt important que utilitzarem en la resta dels lliuraments.

> Dos vectors són **perpendiculars** si i només si el seu producte escalar és igual a zero $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Exemple 5

Calcula els següents productes escalars:
$\vec{i}\cdot\vec{i}, \quad \vec{i}\cdot\vec{j}, \quad \vec{j}\cdot\vec{j}$

Utilitzam la definició de producte escalar i recordam que els vectors $\vec{i}$, $\vec{j}$ són ortonormals (mòdul 1 i formen un angle de $90°$)

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|\,|\vec{i}|\cos 0° = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\,|\vec{j}|\cos 90° = 0$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = |\vec{j}|\,|\vec{j}|\cos 0° = 1$$

Producte escalar en components

> Si ens donem dos vectors expressats en components respecte de la base canònica $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j}$ i $\vec{v} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j}$, el producte escalar en components s'obté de
>
> $$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 \tag{8}$$
>
> es llegeix com primera component per primera més segona component per segona .

AMPLIACIÓ

Demostració:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j})\cdot(v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j}) =$

Aplicam la propietat distributiva:

$= u_1\,v_1\,\overset{=1}{\vec{i}\cdot\vec{i}} + u_1\,v_2\,\overset{=0}{\cancel{\vec{i}\cdot\vec{j}}} + u_2\,v_1\,\overset{=0}{\cancel{\vec{i}\cdot\vec{j}}} + u_2\,v_2\,\overset{=1}{\vec{j}\cdot\vec{j}} =$

substituint els valors dels productes escalars dels vectors $\vec{i}$, $\vec{j}$ s'obté el resultat final

$= u_1\,v_1 + u_2\,v_2$

Vídeo 7.2: *Producte escalar de vectors per components*
https://www.youtube.com/watch?v=LBz-TrTqCDc

Exemple 6

Calcula els productes escalars i indica quines dels següents parelles de vectors són ortogonals.
a) $\vec{u}(3,2)$ i $\vec{v}(1,3)$
b) $\vec{u}(5,-4)$ i $\vec{v}(4,5)$
c) $\vec{u}(1,2)$ i $\vec{v}(0,0)$
d) $\vec{u}(1,2)$ i $\vec{v}(-2,3)$

La condició que dos vectors siguin perpendiculars és que el seu producte escalar sigui igual a zero

a) $(3,2)\cdot(1,3) = 3+6 = 9$ no són ortogonals.

b) $(5,-4)\cdot(4,5) = 20-20 = 0$ són ortogonals.

c) $(1,2)\cdot(0,0) = 0$ no té sentit demanar-se per l'angle ja que el segon vector és el vector nul.

d) $(1,2)\cdot(-2,3) = -2+6 = 4$ no són ortogonals.

Exemple 7

Què ha de valer k perquè els vectors $\vec{u}(18,-6)$ i $\vec{v}(k,4)$ siguin perpendiculars?

La condició que dos vectors siguin perpendiculars és que el seu producte escalar sigui igual a zero.
$(18,-6)\cdot(k,4) = 18k - 24 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{24}{18} = \dfrac{4}{3}$.

Exemple 8

Donats els vectors $\vec{u}(2,3)$, $\vec{v}(-3,1)$, $\vec{w}(5,2)$, calcula:
a) $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{w}$
b) $\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}$
c) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$
d) $\vec{u}\,(\vec{v}\cdot\vec{v})$
Indica en cada cas si el resultat de l'operació és un vector o un escalar.

a) $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{w}$= $(3(2,3)+2(-3,1))\cdot(5,2)$= $((6,9)+(-6,2))\cdot(5,2)$= $(0,11)\cdot(5,2) = 22$ és un escalar

b) $\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}$= $(2,3)\cdot(5,2)-(-3,1)\cdot(5,2) = 10+6-(-15+2) = 16-(-13) = 29$ és un escalar

c) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w} = ((2,3)\cdot(-3,1))\;(5,2) = -3\,(5,2) = (-15,-6)$ és un vector

d) $\vec{u}\,(\vec{v}\cdot\vec{v}) = (2,3)\,((-3,1)\cdot(-3,1)) = (2,3)\,10 = (20,30)$ es tracta d'un vector.

Com trobar vectors perpendiculars a un donat?

Donat un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ existeixen infinits vectors perpendiculars a ell.

Un d'aquests vectors en concret es troba girant l'ordre de les components i canviant un dels signes, per exemple $\vec{v}_\perp = (-v_2, v_1)$.

La resta de vectors seran múltiples d'aquest; $\lambda(-v_2, v_1)$.

Exercicis

4. Considera els vectors $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, -2)$, $\vec{w} = (-5, -2)$. Calculau les següents operacions, indicant si el resultat final és un vector o un escalar.

a) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$

b) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}$

c) $\vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

5. Calcula m perquè els vectors $\vec{u} = (6, m)$, $\vec{v} = (2, 3)$ siguin perpendiculars.

2.5 Mòdul i angle entre vectors

Mòdul d'un vector

El mòdul d'un vector de components $\vec{v}(v_1, v_2)$ s'obté de

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{9}$$

A partir de la definició de producte escalar (6), es compleix que $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Un vector és **unitari** si té mòdul 1. Per aconseguir que un vector sigui unitari basta dividir el vector entre el seu mòdul. Ho indicam de la següent forma $\hat{\vec{u}} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

Angle entre dos vectors

L'angle que formen dos vectors amb components $\vec{u}(u_1, u_2)$ i $\vec{v}(v_1, v_2)$ s'obté a partir de les fórmules (6) i (8)

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \arccos \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \tag{10}$$

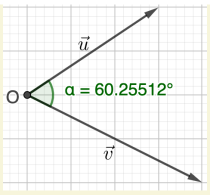


Figura 14: Angle entre vectors. Elaboració pròpia.

Dos vectors paral·lels que tenen igual sentit formen un angle de $0°$, mentre que si tenen sentit oposat formen un angle de $180°$.

Vídeo 7.3: *Aplicacions del producte escalar*
https://www.youtube.com/watch?v=lO_XyatSQrc

Exemple 9

Calcula dos vector perpendiculars al vector $\vec{v}(4,-3)$ que siguin unitaris.

Un possible vector perpendicular és $(3,4)$ perquè $(3,4)\cdot(4,-3) = 12-12 = 0$. Calculem el seu mòdul $|(3,4)| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. Per aconseguir un vector unitari, dividim el vector entre el seu mòdul $\frac{1}{5}(3,4) = (\frac{3}{5},\frac{4}{5})$. L'altra resposta és l'oposat d'aquest vector $(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$.

Exemple 10

Calcula l'angle que formen els vectors $\vec{u}(2,5)$ i $\vec{v}(4,-3)$.

Calculam el producte escalar $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,5)\cdot(4,-3) = 8-15 = -7$
Calculam els seus mòduls $|\vec{u}| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$, $|\vec{v}| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$
Calculam l'angle

$$\alpha = \arccos\frac{-7}{5\sqrt{29}} = \arccos -0,259 \approx 105,1°$$

Exercicis

6. Calculau el mòdul del vector $\vec{a} = (6, -8)$

7. Calculau l'angle que formen els vectors $\vec{a} = (6, -8)$ i $\vec{b} = (1, 1)$

3. La recta en el pla

Existeixen dues formes (equivalents) d'expressar una recta:

- Per dos punts A i B hi passa una única recta
- Proporcionat un punt A i un vector director $\vec{d}$

El primer cas es redueix al segon perquè sempre podem prendre com a vector $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. Aquest vector es coneix com **vector director** de la recta.

En aquest apartat aprendrem a expressar l'equació de la recta en diferents formes equivalents entre si. Partirem de l'equació vectorial de la qual es poden deduir totes les altres.

Equació vectorial

Volem trobar l'equació de la recta que passa pel punt P i té com a vector director $\vec{d}$. Considerem un punt qualsevol X que es troba damunt la recta. S'ha de complir que el vector $\overrightarrow{PX}$ ha d'ésser un múltiple del vector director $\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{d}$.

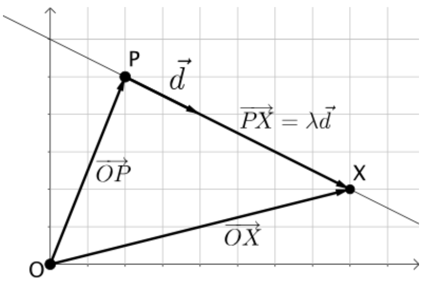


Figura 15: Construcció de l'equació vectorial. Elaboració pròpia.

De la suma gràfica de vectors de la figura, es compleix que $\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda\vec{d}$. Aquesta equació es coneix com l'equació vectorial de la recta. Si expressam els vectors en components $P = (P_1, P_2)$ i $\vec{d}(d_1, d_2)$ trobam

Equació vectorial de la recta:

$(x, y) = (P_1, P_2) + \lambda(d_1, d_2)$

Obtenim punts donant valors al paràmetre λ.

Exemple 11

Escriu l'equació vectorial de la recta que passa pels punts $A = (3, 1)$ i $B = (1, 4)$. Troba tres punts més d'aquesta recta.

Calculam el vector director de la recta $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 4) - (3, 1) = (-2, 3)$ i triam un punt, per exemple, A.

$(x, y) = (3, 1) + \lambda(-2, 3)$

Podem trobar més punts donant valors al paràmetre: Per a $\lambda = 1$ trobam el punt $(x, y) = (1, 4)$, $\lambda = -1$ tenim $(x, y) = (5, -2)$ i $\lambda = 3$ $(x, y) = (-3, 10)$, etc.

Equacions paramètriques

De l'equació vectorial igualam les components x i y i obtenim

Equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = P_1 + \lambda d_1 \\ y = P_2 + \lambda d_2 \end{cases}$$

Obtenim punts donant valors al paràmetre λ.

Cal notar que les components del vector director són els coeficients que acompanyen el paràmetre, mentre que els coeficients lliures de paràmetre són les coordenades del punt.

Així doncs, la recta $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$ tindrà com a punt $P = (0, 3)$ i vector director $\vec{d}(2, -1)$.

Exemple 12

Escriu les equacions paramètriques de la recta que passa pels punts $A = (3, 1)$ i $B = (1, 4)$.

Partim de l'equació vectorial obtinguda a l'exemple anterior $(x, y) = (3, 1) + \lambda(-2, 3)$ operam el membre de la dreta

$(x, y) = (3 - 2\lambda, 1 + 3\lambda)$ i igualam component a component $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}$

Igual que abans donant punts a λ trobarem més punts de la recta.

Equació contínua

L'equació contínua s'obté d'eliminar el paràmetre λ de les equacions paramètriques.

Forma de l'equació contínua $\dfrac{x - P_1}{d_1} = \dfrac{y - P_2}{d_2}$

Noteu que en forma contínua, les components del vector director apareixen en els denominadors i el punt en els numeradors canviat de signe.

Exemple 13

Passa la recta $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}$ a forma contínua.

Aïllam λ de cada equació. $\lambda = \dfrac{x - 3}{-2}$ i $\lambda = \dfrac{y - 1}{3}$

Si igualam les expressions de λ obtenim l'equació contínua $\dfrac{x - 3}{-2} = \dfrac{y - 1}{3}$

Equació punt-pendent

Com el mateix nom indica, l'equació punt-pendent s'obté a partir d'un punt de la recta i el seu pendent. El pendent de la recta informa de la seva inclinació i està determinat pel vector director $m = \dfrac{d_2}{d_1}$.

L'equació punt-pendent té la forma

$$y - P_1 = m \cdot (x - P_2) \tag{11}$$

L'equació punt-pendent es pot obtenir a partir de l'equació contínua i passant un denominador multiplicant a l'altre membre: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2}(x-3)$ de la qual el pendent és $m = -\frac{3}{2}$ i el punt $P = (3, 1)$.

Equació implícita o general

L'equació general té la forma $Ax + By + C = 0$ on els coeficients A, B són les components del vector normal $\vec{n} = (A, B)$, és a dir, d'un vector perpendicular a la recta. Si volguéssim un vector director hauríem de prendre $\vec{d} = (-B, A)$

L'equació general s'obté de la contínua efectuant els productes en creu i passant tots els termes al membre de l'esquerre.

Per trobar més punts, cal donar valors a una de les variables, per exemple x, i aïllar l'altra.

Exemple 14

Troba l'equació general de la recta $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{3}$.

Multiplicam en creu les fraccions $3(x-3) = -2(y-1) \Rightarrow 3x - 9 = -2y + 2 \Rightarrow 3x + 2y - 11 = 0$.
Podem trobar més punts donant valors a x i aïllant la y. Per exemple si $x = 1, y = 4$.
També es pot fer a l'inrevés, donam un valor a $y = 0$ i aïllam la $x = \frac{11}{3}$.

Equació explícita

L'equació explícita de la recta s'obté aïllant la variable y i té la forma

$$y = mx + n \tag{12}$$

on m s'anomena el pendent i n l'ordenada a l'origen. Com hem dit, el pendent s'obté de $m = \frac{d_2}{d_1}$ i n indica el punt de tall de la recta amb l'eix OY.

Exemple 15

Donada la recta $y = \frac{1}{3}x - 5$, trobau-ne un punt i un vector director. Expresseu-la de totes les altres formes possibles.

Ens donen l'equació en forma explícita de la qual, per comparació amb (12), deduïm $m = \frac{1}{3}$, llavors un vector director és $\vec{d}(3, 1)$. Si donam el valor $x = 0$ trobam $y = -5$, per tant un punt de la recta és $P = (0, -5)$.
Les altres formes s'obtenen substituint les dades dins les seves equacions característiques

- **Vectorial:** $(x, y) = (0, -5) + t(3, 1)$
- **Paramètriques:** $\begin{cases} x = 3t \\ y = -5 + t \end{cases}$
- **Contínua:** $\dfrac{x-0}{3} = \dfrac{y+5}{1}$
- **Punt-pendent:** $y + 5 = \frac{1}{3}(x + 0)$
- **General:** $-x + 3y + 15 = 0$

Vídeo 7.4: *Equacions de la recta en el pla*
https://www.youtube.com/watch?v=TK3-oeJrffE

Exercicis

8. Calcula l'equació de la recta que passa pel punt $P = (2, -1)$ i que té la direcció del vector $\vec{d} = (3, 4)$ en totes les formes possibles.

9. Donada la recta $2x - y + 7 = 0$, es demana:

a) Trobar 3 punts de la recta.

b) Calcular un vector director.

c) Escriure les equacions paramètriques de la mateixa recta. *Empra* t

com a paràmetre.

3.1 Rectes horitzontals i verticals

Les rectes horitzontals o constants tenen com a vector director $\vec{d}(1,0)$ (o múltiples d'ell) i la seva equació és de la forma $y = k$.

En canvi, les rectes verticals representen parets que tenen com a vector director $\vec{d}(0,1)$ (o múltiples) i la seva equació és de la forma $x = k$.

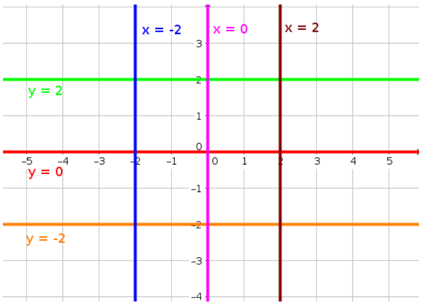


Figura 16: Rectes verticals i horitzontals. Elaboració pròpia.

Exemple 16

La fotografia següent mostra una de les façanes del palau de congresos de Palma.

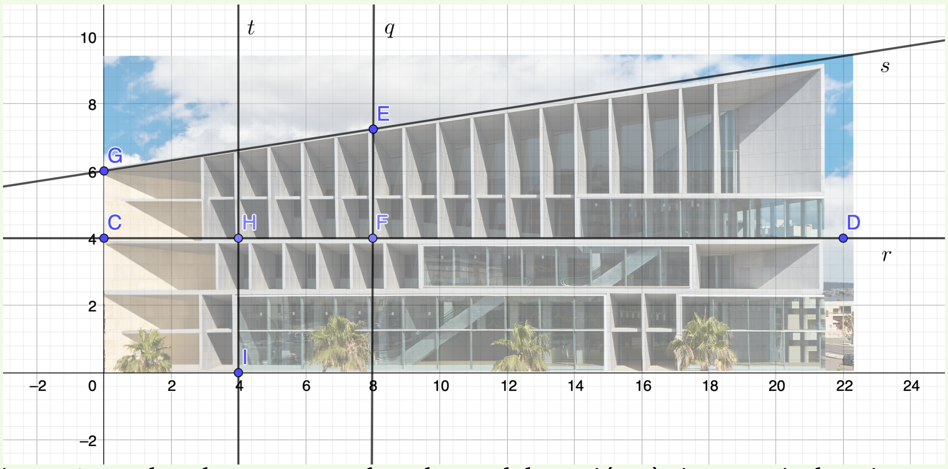


Figura 17: Palau de congresos de Palma. Elaboració pròpia a partir de Wicona

Escriu les equacions de les rectes r, s, t, q que hi estan representades.

Indentificam la recta horitzontal $r : y = 4$ i les dues rectes verticals $t : x = 4$ i $q : x = 8$.
Queda per determinar la recta que passa pels punts $G = (0, 6)$ i $E = (7, 8)$. El vector director és $\vec{GE} = E - G = (7, 2)$ i el pendent $m = \frac{2}{7}$. L'ordenada a l'origen és precisament el punt G, i per tant, $n = 6$. En definitiva, l'equació explícita és $s : y = \frac{2}{7}x + 6$.

3.2 Posició relativa de dues rectes

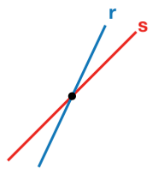
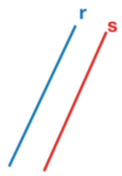
Dues rectes en el pla poden estar situades una respecte l'altra de 3 formes diferents:

- es tallen a un punt (secants),
- són paral·leles o,
- són coincidents (són la mateixa recta).

La posició relativa es pot determinar mitjançant diverses tècniques i la forma més ràpida dependrà de com venguin donades les equacions de les rectes. Comencem analitzant el cas a partir de punts i vectors directors.

A partir de punts i vectors

- Si els vectors directors de les rectes són independents, aleshores les rectes són secants.
- Si els vectors directors de les rectes són dependents, aleshores cal agafar un punt R de la recta r fer el següent:
  - Si el punt R no pertany a la recta s, aleshores les rectes són paral·leles.
  - Si el punt R també pertany a la recta s, aleshores són coincidents.

Secants	Paral·leles	Coincidents
		
$\vec{d}_r, \vec{d}_s$ independents	$\vec{d}_r, \vec{d}_s$ dependents	$\vec{d}_r, \vec{d}_s$ dependents
	R no pertany a s	R pertany a s

A partir de les equacions generals

L'altre forma de determinar la posició relativa és útil si es té les equacions en forma general. En aquest cas, cada recta tindrà una equació de la forma

$$\begin{aligned} r: \; & Ax + By + C = 0 \\ s: \; & A'x + B'y + C' = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

La posició es fa comprovant les relacions entre coeficients

- Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$: Les rectes són secants.
- Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$: Les rectes són paral·leles.
- Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$: Les rectes són coincidents.

A partir de les equacions explícites

Finalment, també es pot raonar en termes del pendent i l'ordenada a l'origen de l'equació explícita $y = mx + n$. Si dues rectes tenen diferent pendent m, per força són secants. Si tenen igual pendent però diferent ordenada a l'origen n seran paral·leles. En altre cas, seran coincidents.

Exercicis

10. Determina la posició relativa entre els parells de rectes:

- **a)** $r:\ y = 3x - 2$ i $s:\ y = 3x + 1$
- **b)** $r:\ (x, y) = (0, 1) + t(-6, 2)$ i $s:\ \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-1}$
- **c)** $r:\ 3x - 2y + 5 = 0$ i $s:\ -6x + 4y + 10 = 0$
- **d)** $r:\ 3x - 2y + 5 = 0$ i $s:\ 2x + 3y - 5 = 0$

3.3 Càlcul de rectes paral·leles i perpendiculars

Dues rectes són paral·leles o perpendiculars si ho són els seus vectors directors. Recordem quines són aquestes condicions:

> Donats dos vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v}(v_1, v_2)$
>
> - Són **paral·lels** si les seves components són proporcionals $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{v_2}{v_1}$ que és equivalent a dir que tenen **igual pendent** .
> - Són **perpendiculars** si el seu producte escalar és zero $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Un possible vector perpendicular a un donat (u_1, u_2) és $(-u_2, u_1)$.

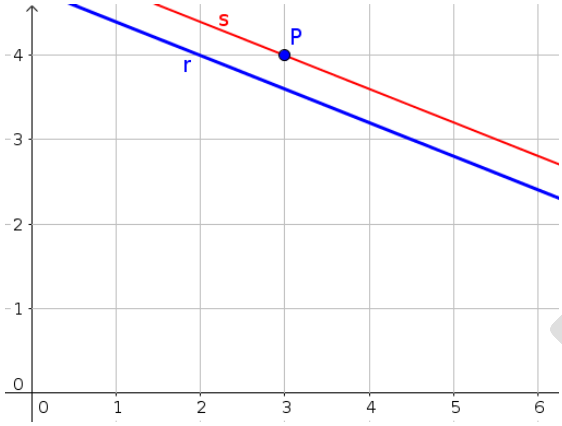
Recta paral·lela a una donada

Exemple 17

Escriu les equacions paramètriques de la recta que passa pel punt $P = (3,4)$ i és paral·lela a la recta $r : \dfrac{x-2}{-5} = \dfrac{y-4}{2}$.

La recta que ens demanen ha d'ésser paral·lela a la recta r i per tant ha de tenir el mateix vector director. El vector director és $\vec{d} = (-5,2)$.

La recta que ens demanen en forma paramètrica és $\begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}$.



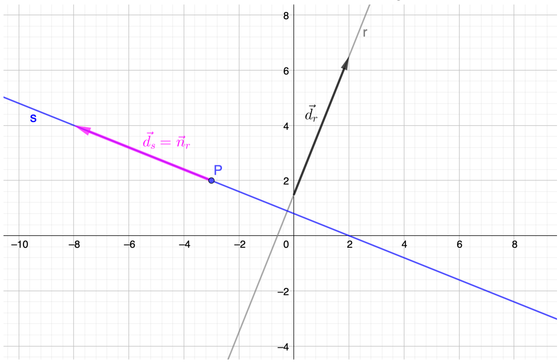
Recta perpendicular a una donada

Exemple 18

Escriu l'equació contínua de la recta que passa pel punt $P = (-3, 2)$ i és perpendicular a la recta $r :\ 5x - 2y + 3 = 0$.

La recta que ens donen està en forma general i el vector normal $\vec{n}_r = (5, -2)$ ja és un vector perpendicular a la recta. Aquest vector és el vector director de la recta que ens demanen $\vec{d}_s = \vec{n}_r = (5, -2)$

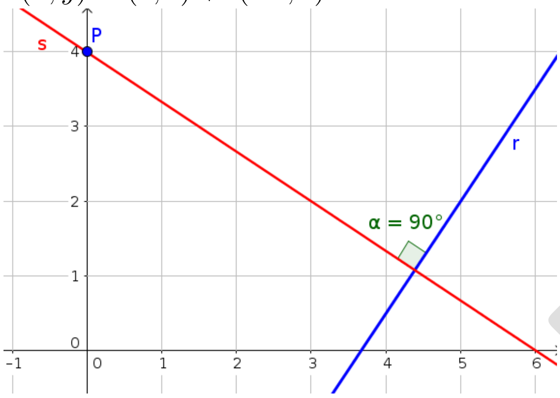
La recta que ens demanen en forma contínua és $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-2}{-2}$.



Exemple 19

Troba l'equació vectorial de la recta que es perpendicular a la recta $y+1=\frac{3}{2}(x-3)$ i que talla a l'eix OY en el punt d'ordenada 4.

La recta que ens donen està en forma punt-pendent de la qual en deduïm el pendent $m=\dfrac{3}{2}$ i d'aquí el vector director $\vec{d}(2,3)$. Un vector perpendicular a aquest és $\vec{n}(-3,2)$ i serà el vector director de la recta que ens demanen.
A més, la recta que ens demanen ha de passar pel punt de tall $P=(0,4)$. La seva equació vectorial és $(x,y)=(0,4)+t(-3,2)$.



Vídeo 7.5: *Equacions de rectes paral·leles i perpendiculars*
https://www.youtube.com/watch?v=VCHth-TPOxk

Exercicis

11. Calculau l'equació **contínua** de la recta que es paral·lela a la recta $r: y=-2x+1$ i que passa pel punt $P(2,1)$.

12. Calculau l'equació **general** de la recta que es perpendicular a la recta $r: \dfrac{x}{4}=\dfrac{y+2}{-3}$ i que passa pel punt $P=(1,-1)$.