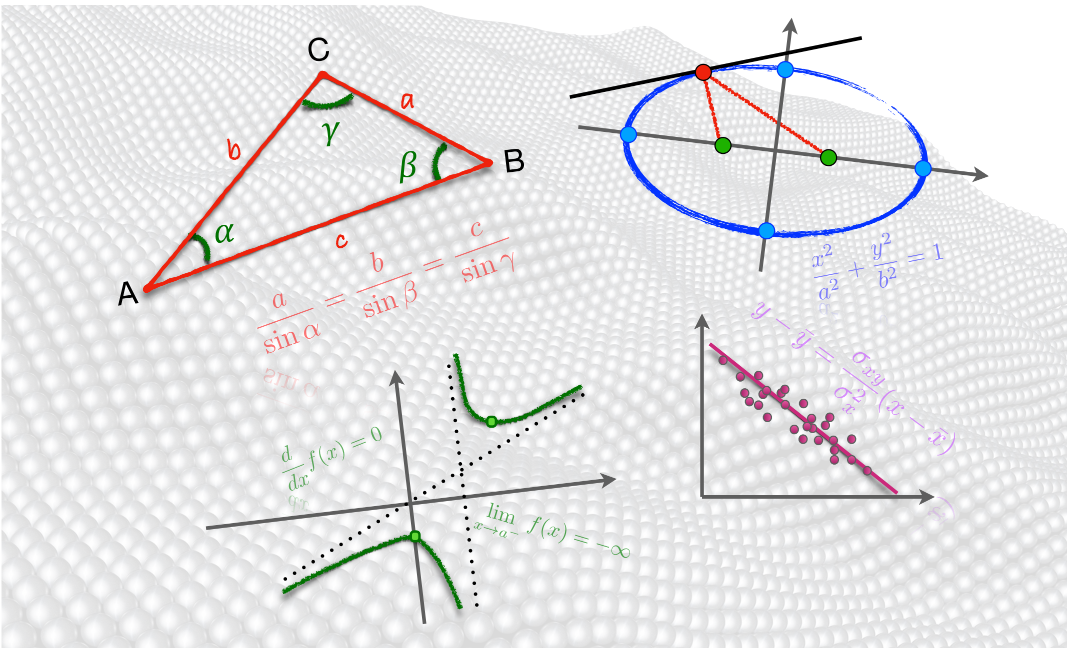
Matemàtiques I

1r Batxillerat de ciències

Sèrie Pràctica

3a Edició



IESB

www.iesbinissalem.net

Josep Mulet

Departament de Matemàtiques

IES Binissalem

Edició LaTeX: ® Josep Mulet Pol
Versió: 2018-06-29
Portada: *Fractal de Julia.*

Índex

Currículum LOMCE

Extret de http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/batxillerat_lomce/matematiques_batx.pdf

<table>
<tr><th>BLOC: Nombres i Àlgebra</th><th>BLOC: Geometria</th></tr>
<tr><td>
Nombres reals: necessitat del seu estudi per a la comprensió de la realitat.
Valor absolut. Desigualtats. Distàncies en la recta real. Intervals i entorns.
Aproximació i errors. Notació científica.
Nombres complexos. Forma binomial i polar. Representacions gràfiques. Operacions elementals. Fórmula de Moivre.
Successions numèriques: terme general, monotonia i acotació. El nombre e.
Logaritmes decimals i neperians. Equacions logarítmiques i exponencials.
Plantejament i resolució de problemes de la vida quotidiana mitjançant equacions i inequacions. Interpretació gràfica.
Resolució d’equacions no algebraiques senzilles. Mètode de Gauss per a la resolució i interpretació de sistemes d’equacions lineals.
</td><td>
Mesura d’un angle en radiants.
Raons trigonomètriques d’un angle qualsevol. Raons trigonomètriques dels angles suma i diferència d’altres dos, doble i meitat. Fórmules de transformacions trigonomètriques.
Teoremes. Resolució d’equacions trigonomètriques senzilles.
Resolució de triangles. Resolució de problemes geomètrics diversos.
Vectors lliures en el pla. Operacions geomètriques.
Producte escalar. Mòdul d’un vector. Angle de dos vectors.
Bases ortogonals i ortonormals.
Geometria mètrica plana. Equacions de la recta. Posicions relatives de rectes. Distàncies i angles. Resolució de problemes.
Llocs geomètrics en el pla.
Còniques. Circumferència, el·lipse, hipèrbola i paràbola. Equació i elements.
</td></tr>
<tr><th>BLOC: Anàlisi</th><th>BLOC: Estadística i probabilitat</th></tr>
<tr><td>
Funcions reals de variable real.
Funcions elementals: polinòmiques, racionals senzilles, valor absolut, arrel, trigonomètriques i les seves inverses, exponencials, logarítmiques i funcions definides a trossos.
Operacions i composició de funcions. Funció inversa. Funcions d’oferta i demanda.
Concepte de límit d’una funció en un punt i en l’infinit. Càlcul de límits. Límits laterals. Indeterminacions.
Continuïtat d’una funció. Estudi de discontinuïtats.
Derivada d’una funció en un punt. Interpretació geomètrica de la derivada de la funció en un punt. Recta tangent i normal.
Funció derivada. Càlcul de funcions derivades. Regla de la cadena.
Representació gràfica de funcions.
</td><td>
Estadística descriptiva bidimensional: Taules de contingència.
Distribució conjunta i distribucions marginals.
Mitjanes i desviacions típiques marginals.
Distribucions condicionades.
Independència de variables estadístiques.
Estudi de la dependència de dues variables estadístiques.
Representació gràfica: Núvol de punts.
Dependència lineal de dues variables estadístiques.
Covariància i correlació: Càlcul i interpretació del coeficient de correlació lineal.
Regressió lineal. Estimació. Prediccions estadístiques i fiabilitat de les mateixes.
</td></tr>
</table>

Símbols

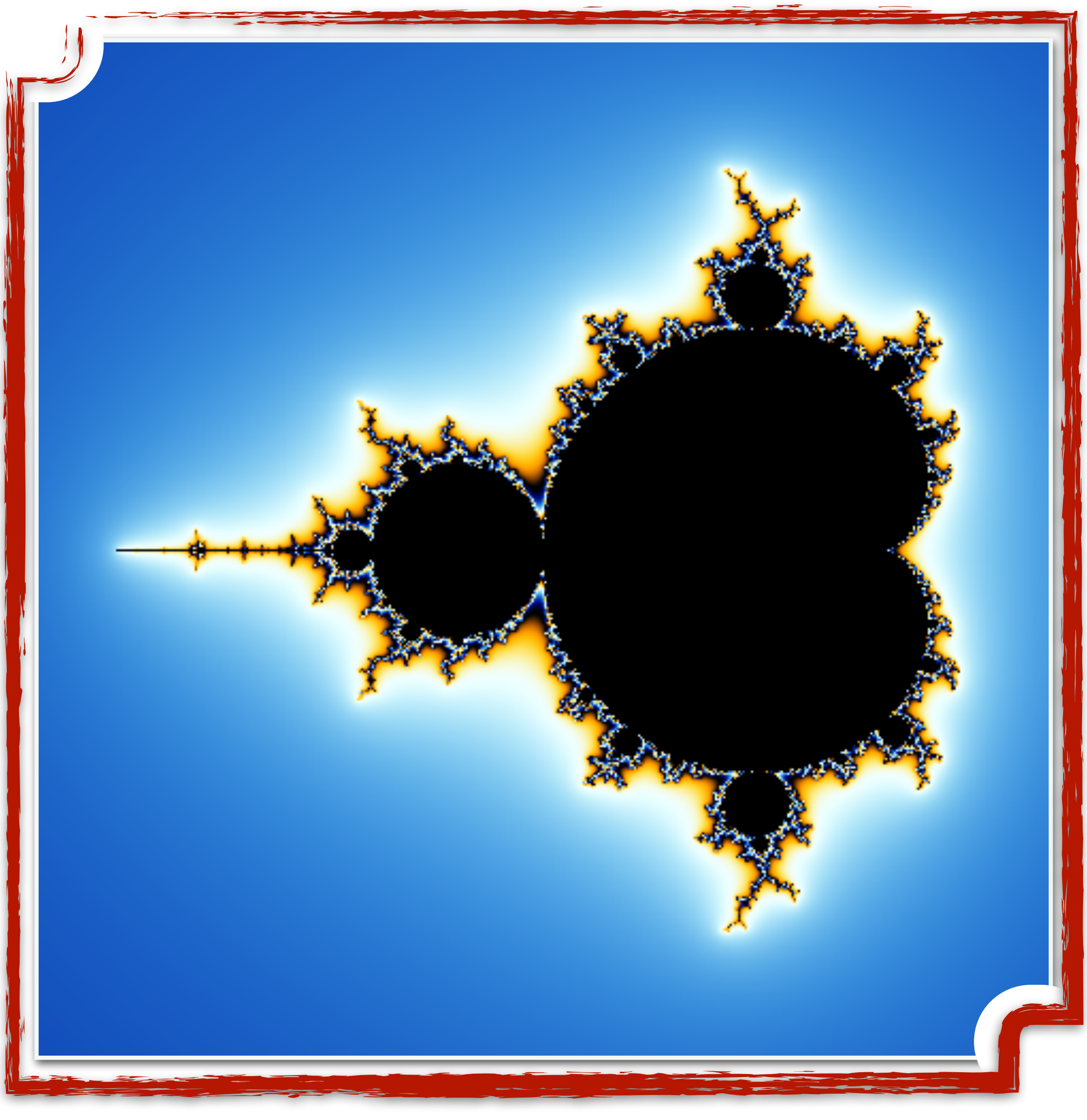
Símbol	Significat
	Problema clau amb solució al final del llibre.
	A més de la solució, proporciona orientacions per arribar a ella.
	Problema que requereix d'investigació o recerca d'informació.
	Activitat adequada per realitzar amb el programa Geogebra.
Vídeo 132:	Explicació en vídeo dels continguts de l'apartat. El número de vídeo correspon a la numeració emprada en https://piworld.es
★ ★	Problema amb un cert grau de dificultat.
	Activitat que es pot contestar en el llibre mateix.
	Activitat que es pot resoldre mentalment o en veu alta.

Recursos

piWorld	Plataforma d'aprenentatge. Conté explicacions en vídeo i activitats interactives. Requereix usuari i contrasenya. https://piworld.es
Geogebra	Programa lliure de geometria dinàmica en dues i tres dimensions. Ideal pels temes de funcions i geometria. https://www.geogebra.org/graphing
Calculadora WIRIS	Calculadora per al càlcul simbòlic. Nova versió Web https://calcme.com/a La versió antiga la trobareu a http://www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/cas.html Atenció: requereix el plugin de Java i no funciona en dispositius mòbils.

Part I

ARITMÈTICA, ÀLGEBRA I TRIGONOMETRIA



Fractal de Mandelbrot. La bellesa dels nombres complexos.

Leonardo de Pisa

(1180-1250)

També conegut com *Fibonacci*, introdueix el sistema de numeració decimal que havia après dels àrabs.

François Viète

(1540-1603)

Fou un precursor de l'àlgebra. Són famoses les relacions de *Cardano-Viète* per a les equacions de 2n grau. Són importants les seves contribucions a la trigonometria de l'època.

Paolo Ruffini

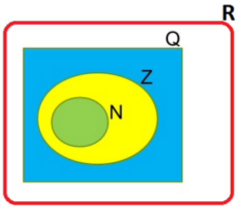
(1765-1822)

Conegut per la regla de divisió de polinomis, va ser dels primers de mostrar la impossibilitat de resoldre equacions de grau superior a 4 mitjançant radicals.

Carl F. Gauss

(1777-1855)

També conegut com el "*príncep de les matemàtiques*". De les seves immenses contribucions destacam: els nombres complexos i la resolució de sistemes d'equacions.



Tema 1

Nombres reals

Índex

1.1 La recta real

Recorda

Els nombres reals es classifiquen en: Naturals $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$,

Enters $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, Racionals $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b},\ a \text{ i } b \neq 0 \text{ enters }\}$,

Irracionals $\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \pi, e, \cdots\}$ i els nombres reals $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

El **valor absolut** d'un nombre és $|a| = a$ si $a \geq 0$, $|a| = -a$ si $a < 0$.

La **distància** entre dos nombres es troba mitjançant $\text{Dist}(a, b) = |b - a|$.

1. ✎Troba l'expressió decimal de les fraccions

a) $\dfrac{2}{3} =$ b) $\dfrac{3}{4} =$ c) $\dfrac{7}{30} =$

d) $\dfrac{6}{25} =$ e) $\dfrac{7}{8} =$ f) $\dfrac{9}{11} =$

2. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, redueix-les i comprova que està bé:

a) $2,353535\cdots$ b) $87,23656565\cdots$ c) $0,9999\cdots$ d) $26,5735735735\cdots$

3. Representa a la recta numèrica els següents nombres racionals:

a) $\dfrac{9}{5}$ b) $\dfrac{-13}{4}$ c) 1,342 d) −2,555555...

4. Representa a la recta numèrica els nombres irracionals:

a) $\sqrt{10}$ b) $-\sqrt{6}$ c) $\sqrt{27}$ d) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

5. ✎Escriu el valor absolut dels següents nombres:

a) $|5| =$ b) $|-5| =$ c) $|\pi - \sqrt{10}| =$

6. Representa a la recta real i calcula la distància entre els nombres reals següents:

a) Dist(5 , 9) b) Dist(−2.3 , −4.5)

c) Dist(−1/5 , 9/5) d) Dist(−3.272727.... , 6.27272727....)

1.2 Intervals i entorns

7. Escriu els següents intervals mitjançant conjunts i representa'ls a la recta real:

a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty, 6)$

8. Representa a la recta real i escriu en forma d'interval:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \leq 7$

9. ✎Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (emprant desigualtats) i representa'ls gràficament:

a) Un percentatge superior al 26 % ....

b) Edat inferior o igual a 18 anys ....

c) Nombres, el cub dels quals, sigui superior a 8 ....

d) Nombres positius la part entera dels quals té 3 xifres ....

e) Temperatura inferior a 25 ºC ....

f) Nombres pels quals existeix la seva arrel quadrada ....

g) Nombres que estiguin de 5 a una distància inferior a 4 ....

Entorn obert

Es defineix l'entorn obert de centre a i radi r, i s'escriu $E(a,\ r)$, com l'interval $(a - r, a + r)$

1. Expressa l'interval $(-1, 5)$ com un entorn.	El centre es troba al punt mitjà $a = 2$ i el radi és $r = 3$, és a dir $(-1, 5) = E(2,\ 3)$

10. Expressa en forma d'interval els següents entorns:

a) $E(1,5)$ b) $E(-2, \frac{8}{3})$ c) $E(-10, 0.001)$

11. Expressa en forma d'entorn els següents intervals:

a) $(4,\ 7)$ b) $(-7,\ -4)$ c) $(-3,\ 2)$

12. Calcula x en les següents equacions: (pista: x pot tenir dos valors)

a) $|x| = 5$ b) $|x-4| = 0$ c) $|3x+9| = 21$

13. Representa a la recta real els nombres que verifiquen les següents relacions:

a) $|x| < 1$ b) $|x| \leq 1$ c) $|x-3| > 1$ d) $|x-3| \geq 1$

14. Troba dos nombres que distin 6 unitats de 3, i altres dos que distin 3,5 unitats de -2, calcula després la diferència entre el major i el menor de tots aquests nombres.

15. Escriu l'interval $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

16. Escriu l'interval format pels nombres reals x que compleixen $|x-8| \leq 3$.

17. Determina els conjunts A ∩ B, A ∪ B, A − B i −A en els casos següents:

a) A = [−11, −9]; B = (−1, 6) b) A = [−5, 5]; B = (3, 4)

1.3 Radicals

Trobareu un resum de les propietats dels radicals a la pàgina 15.

18. Expressa com un sol radical:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} =$ b) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}=$ c) $\sqrt{\sqrt{x^3\sqrt{x}}}=$

19. Simplifica, extraient tots els factors que puguis del radical:

a) $\sqrt[4]{64}=$ b) $\sqrt{243}=$ c) $\sqrt[9]{216}=$ d) $\sqrt[8]{1024}=$

e) $\sqrt[15]{243}=$ f) $\sqrt[6]{2401}=$ g) $\sqrt[16]{49}=$ h) $\sqrt[14]{128}=$

20. Redueix el radical a l'índex indicat:

a) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^{--}}$ b) $\sqrt{7} = \sqrt[16]{7^{--}}$ c) $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^{--}}$ d) $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{5^{---}}$

21. Expressa com un sol radical (redueix, primer de tot, els radicals a índex comú i simplifica si pots):

a) $\dfrac{\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt{8}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{6}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{5}}$ d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{24}}}}$

e) $\left(\sqrt[5]{64}\right)^4$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{5^9}}}$

g) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3^2}}}$ h) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{125}}\right)^4$

EXEMPLE

a) $\dfrac{\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[6]{25^2}}{\sqrt[6]{8^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\cdot 5^4}{2^9}}=\sqrt[6]{\dfrac{5^4}{2^4}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}$

22. Calcula, extraient primer factors fora dels radicals:

a) $\sqrt{1331}$ - $\sqrt{44}$ + 2 $\sqrt{99}$= b) $\sqrt[3]{16}$ + $\sqrt[3]{686}$ - 3 $\sqrt[3]{2}$=

c) 2 $\sqrt{54}$ - $\sqrt{216}$ - $\sqrt{\frac{6}{25}}$= d) $\sqrt[4]{32}$ + $\sqrt[4]{\frac{2}{81}}$ - 7 $\sqrt[4]{2}$=

e) 2 $\sqrt{3}$ - $\frac{1}{5}$ $\sqrt{27}$ + $\frac{2}{3}$ $\sqrt{12}$= f) $\sqrt{32}$ - $\sqrt{18}$ + $\frac{1}{5}$ $\sqrt{128}$=

EXEMPLE

a) $\sqrt{1331}-\sqrt{44}+2\sqrt{99}=\sqrt{11^3}-\sqrt{2^2\cdot 11}+2\sqrt{3^2\cdot 11}=$

$=11\sqrt{11}-2\sqrt{11}+2\cdot 3\sqrt{11}=15\sqrt{11}$

23. Desenvolupa $\left(1+(1+\sqrt{a})^2\right)^2=$

24. Racionalitza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}=$ b) $\dfrac{3}{2\sqrt[4]{2}}$= c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$=

d) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$= f) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$=

EXEMPLE

d) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)}\cdot\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2}=3+2\sqrt{2}$

25. Opera, racionalitza i simplifica

a) $\dfrac{\sqrt{48}}{\frac{\sqrt{8}}{3}}=$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}}=$

c) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=$ d) $(4\sqrt{5}+3\sqrt{5})\cdot(4\sqrt{5}-3\sqrt{5})$=

e) $2^{-5}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2^5}=$ f) $\left(\frac{5}{2}-\sqrt{2}\right)^2=$

Autoavaluació

1. Resol l'equació $|3x+9|=21$.
2. Expressa $\sqrt[4]{x\sqrt{x}}$ com una única arrel.
3. Simplifica l'expressió $(2\sqrt{3}+1)^2$.
4. Racionalitza l'expressió $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.
5. Simplifica l'expressió $\sqrt[3]{54}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{16}$.
6. Racionalitza l'expressió $\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$.
7. Donats els intervals $A=[-11,6]$ i $B=(-1,9)$, calcula $A\cap B$.

Resum

Apartat	Resum
Nombres reals	Està format per la unió dels nombres racionals i els nombres irracionals 5, −4, 2/3, 7.5, π, e, Φ ...
Valor absolut	$\lvert x\rvert = \begin{cases} -x & si\ x<0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad \lvert -32\rvert = 32$
Distància a la recta real	Dist(x, y) = |x − y| Dist(3, 8) = |8 − 3| = 5. Dist(−2, −9) = |−9 − (−2)| = |−9 + 2)| = |−7| = 7
Intervals	Obert : (a , b) = {x ∈ ℝ| a < x < b} Tancat: [a , b] = {x ∈ ℝ| a ≤ x≤ b} Semiobert (esq): (a , b] = {x ∈ ℝ| a < x ≤ b} Semiobert (dreta): [a , b) = {x ∈ ℝ| a ≤ x < b}
Radicals	Permeten donar solució a l'equació $x^n=a\rightarrow x=\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$. Si $a>0$, l'arrel existeix sempre. Si $a<0$, només quan l'índex n és senar. $x^3=8\leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$

Propietats dels radicals

Propietat	Exemple
1. Producte d'igual índex $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{100}=10$
2. Quocient d'igual índex $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{\dfrac{14}{7}}=\sqrt[3]{2}$
3. Potència d'una arrel $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^3=\sqrt[4]{5^3}$
4. Arrel d'arrel $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[12]{5}$
5. Extreure factors $\sqrt{a^2\cdot b}=a\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a^3\cdot b}=a\sqrt[3]{b}$,	$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{7000}=\sqrt[3]{10^3\cdot 7}=10\sqrt[3]{7}$,
6. Introduir factors Consisteix en el pas contrari que el pas [5] $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$, $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3\cdot b}$.	$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{75}$ $\sqrt{3\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{3^2\cdot x}}=\sqrt[4]{9x}$,
7. Suma i resta. Simplificar expressions El primer pas és factoritzar els radicands i després extreure factors. Finalment, podem sumar o restar arrels iguals	$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}+\sqrt[3]{2\cdot 2^3}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}$
8. Radicals equivalents $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot q]{a^q}$	$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[9]{2^3}=\cdots$
9. Operacions amb diferent índex Primer cal reduir els radicals a índex comú utilitzant la propietat [8] $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[q]{a^{q/n}\cdot b^{q/m}}$ essent $q=min.c.m(n,m)$	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}=\sqrt[12]{432}$
10. Racionalitzar I $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}\cdot\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}}=\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$	$\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}}=\dfrac{2\sqrt[4]{5^3}}{5}$
11. Racionalitzar II Multiplicam i dividim pel conjugat del denominador $\dfrac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\cdot\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

Al Khwarizmi (780-850)

Tema 2

Àlgebra

Índex

2.1 Operacions amb polinomis

Identitats notables

Quadrat d'una suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Quadrat d'una diferència: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma per diferència: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
Quadrat d'un trinomi: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

1. Desenvolupa les següents potències:

a) $(2x-5y)^2$ b) $\left(3x+\frac{y}{3}\right)^2$ c) $\left(5^2-\frac{5}{x}\right)^2$

d) $(3a-b)^2$ e) $(a^2+b^2)^2$ f) $\left(\frac{3y}{5}-\frac{2}{y}\right)^2$

2. Expressa com el quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) a^4+6a^2+9 b) $9x^2-6x+1$ c) $b^2-10b+25$

d) $4y^2+12y+9$ e) a^4-2a^2+1 f) y^4+6y^2+9

3. Efectua aquests productes:

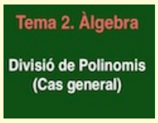
a) $(4x^2+3y)\cdot(4x^2-3y)$ b) $(2x^2+8)\cdot(2x^2-8)$ c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

Divisió de polinomis

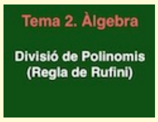
Per poder dividir $D(x) : d(x)$ necessitam que el grau(D)≥grau(d).
Comprovació: Si dividim el dividend $D(x)$ entre el divisor $d(x)$, i obtenim el quocient $q(x)$ i el residu $r(x)$, s'ha de complir que

$$D(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$$

Si $d(x) = x \pm a$ podem emprar la regla de **Ruffini**, sinó hem de fer la divisió en general.



Vídeo 46: Divisió general



Vídeo 47: Divisió Ruffini

Exercici Resolt

1. $(x^4+3x^3-4x+5) : (x+2)$

Feim la divisió per la regla de Ruffini, recordant a posar 0 si falten potències de x.

	1	3	0	-4	5
-2		-2	-2	4	0
	1	1	-2	0	$\boxed{5}$

Llavors, el quocient és $q(x) = x^3 + x^2 - 2x$ i el residu $r = 5$.

4. Efectua les divisions de polinomis indicant quin és el quocient i residu.

a) $6x^5 - x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 8x$ entre $2x^2 - 3x + 2$

b) $2x^3 + 2x + 1$ entre $x^2 - x + 1$

c) $ax^4 + b$ entre $x - 1$

d) $x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ entre $x - 1$

5. Divideix els següents polinomis:

a) $2x^4 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 + 2x + 4$.

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

c) $4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^3 + x + 3$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$

6. Utilitza la regla de *Ruffini* per realitzar les següents divisions de polinomis:

a) $-3x^2 + x + 1$ entre $x - 1$

b) $x^4 + 2x^3 - 2x + 1$ entre $x - 2$

c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x + 1$

d) $x^3 - 9x + 1$ entre $x - 3$

Teorema del residu

El residu de la divisió $P(x) : (x - a)$ coincideix amb el valor numèric del polinomi $P(a)$.

EXEMPLE

Donat el polinomi $P(x) = x^2 + 2x + 1$ es fàcil comprovar que $P(-1) = (-1)^2 - 2 + 1 = 0$. Aleshores, asseguram que la divisió $(x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$ és exacta, té residu zero.

7. Aplica el teorema del residu per saber si les següents divisions són exactes o no:

a) $\dfrac{x^5 + 7x^4 - 13x^3 + 5x^2 - 17x + 5}{x - 3}$ b) $\dfrac{x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

c) $\dfrac{9x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 17x - 1}{x - 1}$

8. Troba un polinomi $q(x)$ tal que en dividir $p(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ entre $q(x)$ s'obtingui com a polinomi residu $r(x) = 5x^4 + 5x^2 + 1$.

9. Troba dos polinomis tals que en dividir-los obtinguem $q(x) = x^2 - x - 3$ com a polinomi quocient i $r(x) = -3x^2 - 1$ com a residu.

Factorització de polinomis

10. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenvolupament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte *suma per diferència.* En cas afirmatiu expressa la seva procedència.

a) $x^2 - 6x + 9$ b) $x^4 + 8x^2 + 16$ c) $x^2 + \sqrt{20}\,xy + 5y^2$

d) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ f) $x^2 - 36$

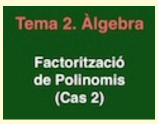
g) $5x^2 + 1$ h) $5x^2 - 11$ i) $x^4 - 3y^2$

11. Factoritza els següents polinomis. Ajuda't traient factor comú i identificant possibles identitats notables.

a) $x^2 - 8x$ b) $4x^2 - x - 3$ c) $x^3 - 4x$ d) $x^3 + 25x$

e) $3x^3 + 6x^2 + 3x$ f) $x^4 - 16$ g) $4x^2 - 4x + 1$ h) $x^4 - 2x^3$

Procediment per factoritzar un polinomi:



Vídeo 50: Factoritzar polinomis

1r Puc treure factor comú alguna cosa?

2n Puc identificar alguna identitat notable?

3r Queda un polinomi de segon grau $P(x) = ax^2 + bx + c$? $\to$ Resoldre l'equació de 2n grau amb la fórmula

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. La factorització és $P(x) = \mathbf{a} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

No us oblideu de copiar el coeficient $\mathbf{a}$ davant de la factorització.

4t En altre cas, factoritzar utilitzant la regla de **Ruffini**.

12. Factoritza els polinomis fent servir la regla de Ruffini (pensa a extreure factor comú quan sigui necessari).

a) $p(x) = 3x^2 + 9x + 6$=

b) $p(x) = x^5 - 9x^3$=

c) $p(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12$=

d) $p(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6$=

e) $p(x) = x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x$=

f) $p(x) = x^3 - 3x - 2$=

g) $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 6x + 20$=

h) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$=

i) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$=

EXEMPLE

a) Resolem l'equació $3x^2 + 9x + 6 = 0$, trobam solucions $x = -1$ i $x = -2$. Aleshores, la factorització és $p(x) = 3 \cdot (x+1) \cdot (x+2)$

b) Treim factor comú x^3, $p(x) = x^3 \cdot (x^2 - 9)$, identificam una identitat notable (suma $\times$ diferència) i trobam la factorització $p(x) = x^3 \cdot (x+3) \cdot (x-3)$

2.2 Fraccions algebraiques

Simplificar fraccions

Per simplificar una fracció algebraica:

1r Factoritzam el numerador i el denominador

2n Tatxam tots els factors (que es troben multiplicant) repetits en el numerador i el numerador.

NO $\times$ $\dfrac{\cancel{x^2} - 1}{\cancel{x^2} + 2x + 1} \cancel{=} \dfrac{-1}{2x+1}$

SÍ ✓ $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{\cancel{(x+1)} \cdot (x-1)}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \dfrac{x-1}{x+1}$

Vídeo 51: Fraccions algebraiques

13. Calcula què ha de valer m perquè el valor numèric de l'expressió algebraica següent sigui -2 per a $x = 0$.

$$\frac{x^3 - mx + 4}{(x^4 - 1)(mx + 2)}$$

14. Simplifica, si és possible, les següents expressions:

a) $\dfrac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$

b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$

c) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$

15. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$

c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

Operar fraccions

Procediment per calcular el min.c.m de polinomis:

1r Factoritzam tots els polinomis.

2n Multiplicam factors comuns i no comuns amb el major exponent.

Per exemple min.c.m $[x^2+2x, x^2, x+2] =$ min.c.m $[x(x+2), x^2, x+2] = x^2\cdot(x+2)$

16. Calcula el mín.c.m dels següents polinomis

a) mín.c.m$[x, x(x+1), x+1] =$ b) mín.c.m$[x^2, x^3-x, x^2-1] =$

c) mín.c.m$[x-2, x^2-2x+1, x^2-3x+2] =$

17. Opera i simplifica les fraccions algebraiques

a) $\dfrac{x}{3x+3}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^3+2x^2} =$ b) $\dfrac{2x}{x+1} : \dfrac{x^2+x}{x+5} =$

c) $\dfrac{x}{x+1} : \dfrac{x^2+2x^2}{x^2-1} =$ d) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{3x+1}{x^2+3} =$

e) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1} : \dfrac{x}{x^2-1} =$ f) $\dfrac{1}{x^2-4} : \dfrac{1}{2-x}$

g) $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x}$ h) $\dfrac{2x}{x-1} : \dfrac{x^3}{x^5-1}$

18. Realitza les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:

a) $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

EXEMPLE

a) Factoritzam els denominadors $-3x+12=-3(x-4)$, $x^2-4x=x(x-4)$, el mím.c.m=$3\cdot x\cdot(x-4)$ que és el denominador comú.

$$\frac{5}{-3(x-4)}+\frac{x+2}{x(x-4)}=\frac{-5x}{3\cdot x\cdot(x-4)}+\frac{3(x+2)}{3\cdot x\cdot(x-4)}$$

finalment, operam i simplificam el numerador $=\dfrac{-5x+3x+6}{3\cdot x\cdot(x-4)}=\dfrac{-2x+6}{3\cdot x\cdot(x-4)}$

19. Efectua els següents càlculs:

a) $\dfrac{2x+1}{x^2+1}+\dfrac{4}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+1}$

c) $\dfrac{-x}{x^2+3x}\cdot\dfrac{1}{x-1}$ d) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}:\dfrac{x-2}{x+3}$

20. Realitza les següents operacions modificant, a cada apartat, únicament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

a) $\dfrac{-x^2+x-1}{x^3}-\dfrac{3x+2}{x^2}$ b) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}-\dfrac{8}{x+3}$

21. Opera les fraccions algebraiques (*ajuda: cercau el m.c.m. i reduïu a denominador comú*)

a) $\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}=$ b) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=$

c) $\dfrac{2(x-3)}{x^2+2x-3}-\dfrac{3}{x+3}=$ d) $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1-t}{t^2+2t}-\dfrac{2}{t+2}=$

e) $\dfrac{2x+6}{x}-\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2-x}=$ f) $x^4-(1-x^2)^2-2x^2+\dfrac{1}{x^2}=$

g) $\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\dfrac{4}{(1+x)^2}-\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}\right)=$

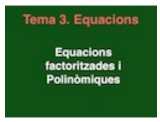
22. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a-y}}$ b) $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}}\cdot\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}$

c) $\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$

2.3 Equacions

Equacions polinòmiques



Vídeo 52:

23. Per a cadascun dels següents polinomis assenyala, en primer lloc, quins nombres enters són candidats a ésser arrels seves i, després, determina quins són:

a) x^3-x^2+2x-2 b) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$

c) $2x^3+x^2-18x-9$ d) $x^4+2x^3+3x^2+6x$

24. Resoleu:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{(x+3)^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} = 1 + \frac{3/4x}{9}$

c) $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$ d) $80x^4 - 48x^2 - 12 = 0$

Ajuda: Els apartats c) i d) són **equacions biquadrades**; és a dir, fent el canvi $x^2 = t$ es transforma en una equació de 2n grau.

25. Resol les equacions traient factor comú i factoritzant el polinomi

a) $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$ b) $3x^3 - 75x = 0$

c) $x(x+1) = 2$ d) $x^3 + 6 = \frac{4x^3+7x^2-2x}{x+2}$

e) $x(x^2 - 5x - 13) + 77 = \frac{60}{x}$ f) $x^3 - 1 = 0$

g) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ h) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$

i) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$ j) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12 = 0$

k) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ l) $x^2(x-4) = 5x$

26. Conjectura, i després demostra, una llei que ens permeti saber quan un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

admet el nombre 0 com arrel.

27. Troba una regla que demostri quan un polinomi qualsevol $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ admet al número 1 com a arrel.

28. Sumant set unitats al doble d'un nombre més els 3/2 del mateix obtenim com resultat el sèxtuple d'aquest nombre menys 23. De quin nombre es tracta?

29. Les dimensions d'un rectangle són 54 i 36 m. Traça una paral·lela al costat que mesura 36 m de manera que es formi un rectangle semblant al primer. Quines són les longituds dels segments en què aquesta paral·lela divideix al costat de 54 m?

Equacions amb denominadors

Procediment per eliminar els denominadors:

1r Factoritzam tots els denominadors i cerca el seu min.c.m.

2n Multiplicam tots els termes de l'equació pel min.c.m i simplificam.

30. Resol

a) $\dfrac{2x-4}{3x-2} = \dfrac{4}{7}$ b) $\dfrac{x+8}{x-1} - \dfrac{x+4}{x+1} = \dfrac{12x}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3(2x+1)}{4} - \dfrac{5x+3}{6} + 4x + \dfrac{x+1}{3} = x + \dfrac{151}{12}$

31. Resol

a) $\dfrac{1-x}{6}+\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{2x^2-1}{2}$ b) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13x+1}{3x}$

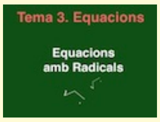
c) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{6}$ d) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}=3$

32. Resoleu les equacions següents:

a) $\dfrac{3x-1}{2x-4}=\dfrac{5}{9}$ b) $\dfrac{x}{2}+5=\dfrac{3x}{6}-7$ c) $\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{5x}{x-1}-2$

Equacions amb arrels quadrades

Procediment per resoldre equacions amb arrels quadrades:



Vídeo 54:

1r Aïllam una de les arrels a un membre de l'equació.

2n Elevam cada membre al quadrat (anant en compte amb les identitats notables).

El procés 1-2 elimina només **una** arrel. Hem de repetir el procés tantes vegades com arrels tingui l'equació.

IMPORTANT: Cal sempre comprovar les solucions

33. Resol les següents equacions i comprova les solucions:

a) $\sqrt{x}+1=3$ b) $x=\sqrt{x}+2$

c) $\sqrt{x+4}=3$ d) $\sqrt{x+2}+4=x$

e) $\sqrt{x+2}=x$ f) $\sqrt{\sqrt{x+2}}=14$

g) $\sqrt{\sqrt{x-1}+1}=2$ h) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3$

i) $\sqrt{x-2}=\sqrt{x+5}-1$ j) $\sqrt{x+7}-1=\sqrt{x-4}$

k) $\sqrt{x+2}=x-\sqrt{x+86}$ l) $\sqrt{10-x}-\sqrt{x+3}=x$

EXEMPLE

d) $\sqrt{x+2}+4=x$.

Aïllam l'arrel $\sqrt{x+2}=x-4$, elevam al quadrat els dos membres

$(\sqrt{x+2})^2=(x-4)^2$, desenvolupam $x+2=x^2-8x+16$ i arreglam l'equació de segon grau $x^2-9x+14=0$. Resolem l'equació de 2n grau amb la fórmula i obtenim $x=2$ i $x=7$. Si comprovam les solucions dins l'equació original veim que només $x=7$ és vàlida.

Sistemes d'equacions

34. Resol els sistemes lineals

a) $\begin{cases} 5y - 3x = 72 + 5x \\ 15x = y - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 22 \\ 5(x-5) = y - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x+y) - 1 = 5x - 4y \\ 2x + 3(y+1) = x + 3(x+y-1) \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4(x-1) - 3(y+2) = -5y + x \\ 5(x+3) = 2y - 3(y+x) + 7 \end{cases}$

35. Resol els sistemes no lineals

a) $\begin{cases} x + y - xy = 7 \\ x - y - xy = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 + 3xy = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x^2+1)\,y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \end{cases}$

2.4 Sistemes d'equacions lineals $n \times n$

Sistemes escalonats

Un sistema 3×3 és **escalonat** si una equació conté només una incògnita, i en una altra en falta alguna de les altres dues incògnites.

Això fa que el sistemes escalonats siguin molt fàcils de resoldre.

36. Reconeix com sistemes escalonats i resol:

a) $\begin{cases} x & & & = 7 \\ 2x & -3y & & = 8 \\ 3x & +y & -z & = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x & +4y & & = 0 \\ & 2y & & = -6 \\ 5x & +y & -z & = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x & & & = -3 \\ & 5y & & = 20 \\ 2x & +y & -z & = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} & y & & = 4 \\ x & & -z & = 11 \\ & y & -z & = 7 \end{cases}$

37. Resol els següents sistemes escalonats:

a) $\begin{cases} & y & & = -5 \\ & & 2z & = 8 \\ 3x & & & = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x & +2y & -z & = -3 \\ 3x & +y & & = -5 \\ & 5y & & = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x & -5y & +3z & = 8 \\ & 3y & -z & = 5 \\ & & 4z & = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x & +y & -z & = 7 \\ & 2y & & = 8 \\ 3x & & & = 9 \end{cases}$

Mètode de Gauss

El mètode de Gauss aconsegueix transformar un sistema que no és **escalonat** en un equivalent i que sí ho és. Les transformacions permeses són:

- Canviar l'ordre de les equacions
- Multiplicar o dividir tota l'equació per un nombre.
- A una equació sumar-li una altra prèviament multiplicada per un nombre.

Vídeo 136: Resolució de sistemes pel mètode de Gauss

Vídeo 137: Classificació de sistemes 3x3 per Gauss

38. Resol pel mètode de Gauss

a) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+z & =2 \\ x-y+z & =6 \\ x-y-z & =0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{ll} 2x+3y & =14 \\ x-2y+z & =-3 \\ 2x-y-z & =9 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{ll} 5x-4y+3z & =9 \\ 2x+y-2z & =1 \\ 4x+3y+4z & =1 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{llll} 2x-5y & +4z & =-1 \\ 4x-5y & +4z & =3 \\ 5x & -3z & =13 \end{array}\right.$

39. Resoleu pel mètode de Gauss els sistemes:

a) $\left\{\begin{array}{rl} 4x+2y-z & =5 \\ 5x-3y+z & =3 \\ 2x-y+z & =3 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & =0 \\ 7x+2y-z & =0 \\ 3x+5y+4z & =0 \end{array}\right.$

40. Resol els següents sistemes pel mètode de Gauss i discuteix el resultat:

a) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+2z & =4 \\ x+y & =2 \\ y+z & =2 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rl} x+y+t & =3 \\ x+z-t & =1 \\ y+z+t & =3 \\ x-y+z & =1 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{rl} x-y+2z & =4 \\ 2x+y+5z & =13 \\ x+y-4z & =-6 \end{array}\right.$

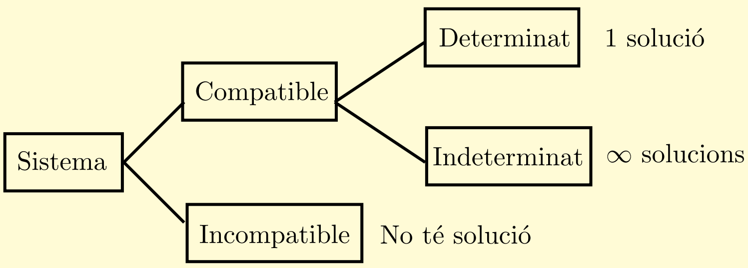
d) $\left\{\begin{array}{rl} 3x+4y-z & =6 \\ 6x-6y+2z & =2 \\ x-y+2x & =-2 \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{rl} x+4y-8z & =-8 \\ 4x+8y-2z & =-2 \\ 8x-y-4z & =-4 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rl} x-2y+3z+4t & =6 \\ 2x-y+z-t & =1 \\ x-y+3z+2t & =5 \\ 3x-y+2z-3t & =1 \end{array}\right.$

41. Discuteix i resol, si és possible, el següent sistema: $\left\{\begin{array}{ll} x+2y-z & =1 \\ 2x+y-2z & =2 \\ x-y-z & =1 \end{array}\right.$

42. Discuteix i resol, quan sigui possible, els següents sistemes lineals d'equacions.

a) $\begin{cases} x - 6y - 4z &= -7 \\ x + 8y + 4z &= 6 \\ x + y &= 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - 6z - 4t &= 6 \\ 3x + 2y - 3z + 8t &= -7 \\ 3x - y - 6z - 4t &= 2 \\ 4x - y + 3z + 12t &= 0 \end{cases}$

Els sistemes es classifiquen segons el nombre de solucions en:



Si en aplicar el mètode de Gauss obtenim una fila de zeros $(000|0)$, el sistema serà compatible indeterminat (SCI). Si obtenim una fila com $(000|a)$ serà incompatible (S.I.).

43. Resol pel mètode de Gauss i classifica en compatible determinat, compatible indeterminat o incompatible.

a) $\begin{cases} x - y &= 1 \\ 2x + 6y - 5z &= -4 \\ x + y - z &= 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z &= 3 \\ x - 2y + 5z &= 5 \\ 5x + 22y + 17z &= 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 3z &= 2 \\ 2x + 3y + 4z &= 1 \\ -2x - y - 8z &= -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - z &= 2 \\ 3x - 2y - 2z &= 2 \\ -5x + 3y + 5z &= -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ -x + 2y + z &= 5 \\ x + 4y + 3z &= 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x + y + z &= 1 \\ 3x + 2y - z &= 0 \\ -x + 4y + z &= 2 \end{cases}$

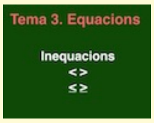
44. Desitgem vendre un cotxe, un pis i una finca per un total de 300000€. Si la finca val 4 vegades més que el cotxe i el pis cinc vegades més que la finca. Què val cada cosa?

45. Una mare té el doble de la suma de les edats dels seus fills. L'edat del fill menor és la meitat de la seva germana. La suma de les edats dels nens i la de la mare és 45 anys. Quines edats tenen?

46. Les tres xifres d'un nombre sumen 18. Si a aquest nombre se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 594; la xifra de les desenes és mitja aritmètica entre les altres dues. Troba aquest nombre.

47. Volem esbrinar les edats d'una família formada pels pares i els dos fills. Si sumam les seves edats de tres en tres, obtenim 100, 73, 74 i 98 anys, respectivament. Quina és l'edat de cadascun d'ells?

2.5 Inequacions



Vídeo 61:

La solució d'una inequació es dóna en forma d'INTERVAL.

Recorda: Quan canviam els signes d'una inequació el sentit de la desigualtat canvia.

Per exemple $-4x+1>9$, aïllam $-4x>9-1$, i canviam els signes i el símbol $4x<-8$, que ens duu a $x<-2$, és a dir la semi-recta $x\in(-\infty,-2)$.

48. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

a) $5+3x<2x+4$ b) $3+4x\leq 8x+6$

c) $4(3+2x)<-(6x+8)$ d) $7(2+3x)\leq 5(6x+3)$

e) $9(2+4x)+4(5x-2)>3(2x+1)$

49. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

a) $6+3x<x/3+1$ b) $5+5x/2\leq 9x/2+1$

c) $(2+5x)/3>4x+1$ d) $(1+5x)/2+1\geq(3x+6)/4$

50. Calcula els valors de x perquè sigui possible calcular les següents arrels:

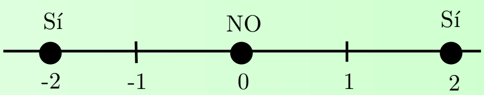
a) $\sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{-x-9}$

c) $\sqrt{2-7x}$ d) $\sqrt{-2x+7}$

EXEMPLE

Inequacions de segon grau

$x^2-1\geq 0$. Per resoldre una inequació de 2n grau, primer resoldrem l'equació canviant la desigualtat per un igual. $x^2-1=0$ té dues solucions $x=-1, x=1$.



La recta real ens queda divida en 3 trossos: $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$. Agafam un nombre qualsevol de cadascun dels intervals i comprovam si verifica l'inequació original $x^2-1\geq 0$. Veim que el primer i darrer trossos són vàlids i el del mig no serveix.

La solució és $[-\infty,-1]\cup[1,+\infty]$. Hem escrit interval tancat perquè la desigualtat és major o igual.

51. Resol les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2-9>0$ b) $x^2+4\geq 0$ c) $2x^2-50<0$

d) $3x^2+12\leq 0$ e) $5x^2-45>0$ f) $x^2+1\geq 0$

52. Resol les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$

d) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ e) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$ f) $x^2 + 9x + 14 > 0$

53. Per a quins valors de x és possible obtenir les següents arrels?

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

54. Resol gràficament els següents sistemes d'inequacions:

a) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{x-2y+3}{3} \geq \frac{x-y+1}{2} \\ 1 - \frac{2x-4-y}{3} + \frac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{array} \right.$ b) $\left\{ \begin{array}{c} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{c} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{array} \right.$ d) $\left\{ \begin{array}{l} (x+1) \cdot 10 + x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x) - 6x \end{array} \right.$

Autoavaluació

1. Quin és el valor numèric de l'expressió $\dfrac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \dfrac{6}{z}$

en $x = 2,\ y = -1,\ z = -1$?

2. Divideix el polinomi $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 1$ entre $q(x) = x^2 + x + 1$.

3. És possible que un polinomi, amb coeficients enters, de grau quatre tingui exactament tres arrels reals, ja siguin diferents o amb alguna múltiple?

4. Resol la inequació $x^2 \leq 4$

5. Resol la inequació $|-x + 7| \leq 8$

6. Resol $\sqrt{5x - 9}$

7. Resol la inequació $\frac{2x-3}{x-2} < 1$

8. Justifica la veracitat o falsedat de cadascuna de les següents frases:

a) La regla de Ruffini serveix per dividir dos polinomis qualssevol.

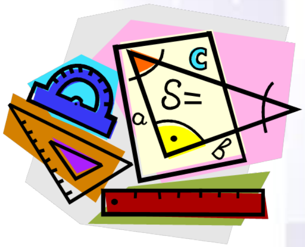
b) La regla de Ruffini permet dictaminar si un nombre és arrel o no d'un polinomi.

c) La regla de Ruffini únicament és vàlida per a polinomis amb coeficients enters.

d) La regla de Ruffini és un algorisme que ens proporciona totes les arrels d'un polinomi.

Resum

Apartat	Resum
Divisió de dos polinomis	S'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient (c(x)) i residu (r(x)), lligats als polinomis inicials, els polinomis dividend (p(x)) i divisor (q(x)) $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$
Regla de Ruffini	Ens pot ajudar a l'hora de factorizar un polinomi i conèixer les seves arrels
Teorema del residu	El valor numèric que adopta un polinomi $p(x)$ al particularitzar-lo en $x = \alpha$ coincideix amb el residu que apareix en dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$.
Arrel d'un polinomi	Un nombre real concret α és **una arrel**, o **un zero**, del polinomi p, si en avaluar p en $x = \alpha$ obtenim el número 0, és a dir, si $p(\alpha) = 0$ 2 és arrel de $-3x + 6$. Les arrels de $x^2 + 2x - 3$ són 1 i -3
Factorització de polinomis	Consisteix a expressar-ho com a producte d'altres polinomis de menor grau $x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 = (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 1)$
Fraccions algebraiques	És una fracció d'expressions polinòmiques $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$
Equacions de 2n grau	Igualtats algebraiques amb una sola incògnita i elevada al quadrat. $-x^2 + 4x + 5$ La solució del qual és: $x_1 = -1$ i $x_2 = 5$.
Equacions biquadrades	És una equació del tipus $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Si es fa el canvi $t = x^2$, l'equació anterior es tranforma en una de segon grau $at^2 + bt + c = 0$. Les solucions es troben fent $x = \pm\sqrt{t}$
Sistemes d'equacions lineals. Gauss	Resolució pel mètode de Gauss. $\begin{cases} x + 4y + 3z & = & -1 \\ 2x - 3y - 2z & = & 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$
Inequacions de 1r grau	Desigualtats algebraiques amb una sola incògnita de grau 1. La solució expressa en forma d'una semi-recta. $\frac{x-3}{3} - \frac{(x-7)}{6} > \frac{4-x}{2}$, té solució $x > \frac{11}{4}$ o $(\frac{11}{4}, +\infty)$.
Inequacions de 2n grau	Desigualtats algebraiques amb una sola incògnita, elevades al quadrat. La solució expressa en forma d'interval. $x^2 - 6x + 5 > 0$ la seva solució és l'interval $(1, 5)$.



Tema 3

Trigonometria

Índex

3.1 Raons trigonomètriques

Raons trigonomètriques d'angle agut

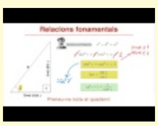
Definim les raons trigonomètriques d'un angle agut d'un **triangle rectangle** com

$$\textbf{sinus}: \sin\alpha = \frac{C.O.}{H}, \ \textbf{cosinus}: \cos\alpha = \frac{C.C.}{H} \text{ i } \textbf{tangent}: \operatorname{tg}\alpha = \frac{C.O.}{C.C.}$$

essent H la hipotenusa, $C.O.$ el catet oposat a l'angle i $C.C.$ el catet contigu.

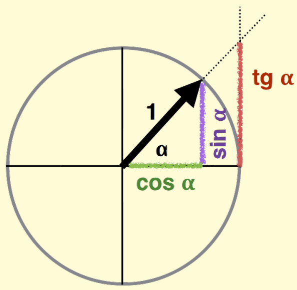
També definim les raons recíproques com

$$\textbf{cosecant}: \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \ \textbf{secant}: \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \text{ i } \textbf{cotangent}: \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$



Vídeo 122: Raons d'un angle agut

Representació de les raons trigonomètriques per un angle agut. Les raons no depenen de la mida del triangle; només de l'angle.



1. A partir d'un triangle rectangle i aplicant el teorema de *Pitàgores*, demostra la primera relació fonamental de la trigonometria $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

2. Utilitzant les definicions de les raons trigonomètriques, demostra la segona relació fonamental $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

3. Utilitzant la definició de les raons, demostra les identitats:

a) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$ b) $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$

Comprova les anteriors relacions a partir dels angles de 30° i 60 °.

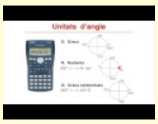
4. Explica, a partir del vist en aquest apartat, perquè el sinus i el cosinus de 45° són iguals, i perquè la tangent val la unitat.

Raons d'angles notables aguts

Vídeo 124: Trigonometria: Demostració de les raons dels angles notables 0, 30, 45, 60 i 90 graus

Angle α (°)	Angle α (rad)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$--$

Angles i raons trigonomètriques inverses



Vídeo 123:

Radiant

Un angle de 1 rad $\approx 57,3°$. A la pràctica utilitzam el factor de conversió

$$2\pi \text{ rad} = 360°.$$

5. Expressa en radiants els angles següents: 60°, 120°, 225°, 330°.

$$60° \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{60}{180}\pi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

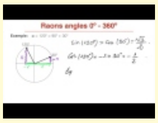
6. Expressa en graus sexagesimals: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ i $\frac{10\pi}{6}$ radiants.

7. Quant sumen (en radiants) els angles d'un triangle? Quant mesura un angle recte en radiants?

8. Per veure la utilitat dels radiants, suposem un mòbil que es mou en una circumferència de dos metres de radi amb una velocitat de 4 m/s. Calcula la seva velocitat en rad/s i en graus per segon. Quantes voltes dóna per minut?

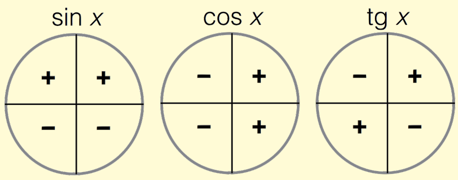
9. Un mòbil ha recorregut un angle de 3 rad en una circumferència de radi 2 m. Quant espai ha recorregut? I si la circumferència tingués radi 0'5 m? *Recorda*: L'arc de circumferència s és $s = \alpha \cdot R$ si l'angle α ve en radiants.

Raons trigonomètriques d'angles qualssevol



Vídeo 125: Raons trigonomètriques d'angles qualssevol

Signe de les raons trigonomètriques segons el quadrant:



La calculadora té dos modes per manejar angles, **DEG** graus i **RAD** radiants. Per aquesta activitat assegura't que el tens en mode **DEG**.

Les funcions trigonomètriques inverses de la calculadora donen només un dels possibles possibles de l'angle. Aquest angle es troba entre:

$\arcsin x$	$-90°$ a $90°$
$\arccos x$	$0°$ a $180°$
$\text{arctg}\, x$	$-90°$ a $90°$

L'altre angle l'has d'obtenir raonant amb l'ajuda de la circumferència goniomètrica.

Quins angles tenen per sinus 0,5?

Una resposta l'obtenim de la calculadora SHIFT sin 0,5 = 30 .

L'altre angle es troba al segon quadrant, i l'obtenim fent $180° - 30° = 150°$

Quins angles tenen per tangent -2?

Una resposta l'obtenim de la calculadora SHIFT tan -2 = -63.4349... . Aquest angle es troba al quart quadrant i en realitat és l'angle $360 - 63,4349 = 296.5651$.

L'altre angle s'ha de trobar al segon quadrant, on també la tangent és negativa. El trobam fent $180° - 63,3349° = 116,5651°$

10. Copia en el teu quadern, i situa en el quadrant que correspongui i expressa en funció d'un angle agut les raons trigonomètriques dels següents angles:

Angle	Sinus	Cosinus	Tangent	Secant	Cosecant	Cotangent
$120°$						
$135°$						
$210°$						
$315°$						
$390°$						
$3000°$						
$-150°$						

11. Utilitza la calculadora i l'après en aquest apartat per trobar tots els angles positius menors que 360° el sinus dels quals és de 0'6.

12. Troba tots el angle compresos entre 0 i $360°$ la tangent dels quals val 4.

13. Troba tots el angle compresos entre 0 i $360°$ el cosinus dels quals val 0'75.

3.2 Resolució de triangles

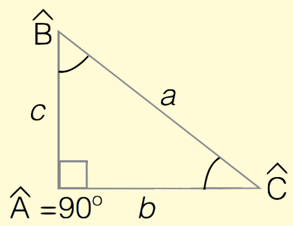
Triangles rectangles

En un triangle rectangle, sempre utilitzarem el següent conveni per anomenar els costats i angles. L'angle recte és $\hat{A} = 90°$.

Podrem utilitzar les següents relacions

$$\hat{B} = 90 - C, \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$b = a\cos\hat{C}, \quad c = a\sin\hat{C}, \quad \operatorname{tg}\hat{C} = \frac{c}{b}$$



Exercici Resolt

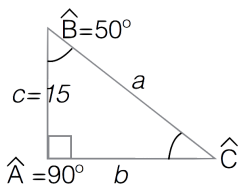
1. Resol el triangle rectangle del qual sabem que $\hat{B} = 50°$ i el catet $c = 15$ cm.

L'angle $\hat{C}$ s'obté de $\hat{C} = 90 - 50 = 40°$. Tot seguit, utilitzam la raó trigonomètrica

$\operatorname{tg} 40 = \frac{15}{b} \to b = \frac{15}{\operatorname{tg} 40} = 17,87.$

Del teorema de Pitàgores, $a^2 = b^2 + c^2$,

$a = \sqrt{15^2 + 17,87^2} = 23,34$



14. Resol el triangle ABC (calcula els elements que falten), essent A l'angle recte

a) a=32 cm, B=57°

b) a=72 cm, C=23°

c) c=250 m, b=308 m

d) c=35 m, C=32°

15. Per arribar a una alçada de 3 m, recolçam una escala formant un angle de 60° amb el terra. Troba la longitud de l'escala i la distància des de la base fins a la paret.

16. L'estatura d'una persona és 1,78 m i projecta al terra una ombra de 85 cm. Quin angle formen els rajos del sol amb l'horitzontal del terra?

17. Calcula els costats i els angles del triangle *ABC*, rectangle en A, del que coneixem el catet *AC* = 15cm i l'altura relativa a la hipotenusa *AD* = 12cm.

18. En un tram de carretera la inclinació és del 5 % (puja 5 m en 100 m). Calcular l'angle que forma amb l'horitzontal la carretera. Sabem que hem pujat 100 m, quant hem caminat per la carretera?

19. ★ Una estàtua de 2,5 m d'altura està col·locada sobre una peanya. Des d'un punt del terra es veu la peanya amb un angle de 15° i l'estàtua, sobre un angle de 40°. Quina és l'altura de la peanya?

Teorema del sinus

Vídeo 127: Trigonometria: Teorema del sinus

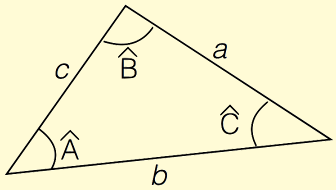
Sempre utilitzarem el següent conveni per anomenar els costats i angles.

D'una banda sabem que els angles compleixen $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$. El teorema del sinus diu que

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

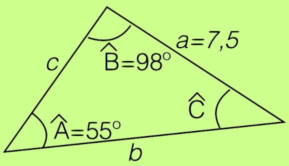
on R és el radi de la circumferència circumscrita en el triangle.

De vegades, a l'aplicar el teorema del sinus, poden aparèixer dues solucions.



Exercici Resolt

2. En un triangle coneixem dos dels seus angles i un costat: A=55°, B=98°, a=7,5 cm. Resol el triangle.



L'angle $\hat{C}=180-(55+98)=27°$
Amb el teorema del sinus trobam els costats que falten

$$\frac{b}{\sin 98}=\frac{7,5}{\sin 55}\rightarrow b=\frac{7,5\sin 98}{\sin 55}=9,1\,\text{cm}$$
$$\frac{c}{\sin 27}=\frac{7,5}{\sin 55}\rightarrow c=\frac{7,5\sin 27}{\sin 55}=4,2\,\text{cm}$$

20. Un triangle té dos angles que valen 40 i 60 graus respectivament. El costat entre ells és de 8 cm. Calcula tots els seus angles i costats.

21. En un triangle *ABC*, els costats *AB i AC* mesuren 3 i 2 cm respectivament. L'angle corresponent al vèrtex *B* mesura 30 graus. Resol el triangle.

a) Utilitza el teorema del sinus per calcular l'altre angle. Hi ha dues solucions perquè hi ha dos angles amb el mateix sinus. Calcula els dos.

b) Les dues solucions es deuen al fet que existeixen dos triangles, series capaç de dibuixar-los?

22. En un triangle coneixem dos dels seus angles i un costat: A=55°, B=98°, a=7'5 cm. Resol-ho.

23. El radi de la circumferència circumscrita al triangle ABC mesura $2\sqrt{2}$ i dos dels seus angles fan 60° i 45°. Resol el triangle i troba'n l'àrea.

24. Un globus està en la vertical entre dos observadors separats per 40 m. El primer ho veu amb un angle de 30 graus i el segon amb un angle de 50 graus, a quina altura està el globus?

25. Una antena de radi està subjecta al terra amb dos cables, que formen amb l'antena angles de 36° i 48°. Els punts de subjecció dels cables estan alineats amb el peu de l'antena i disten entre sí 98 metres. Calcula l'altura de l'antena.

26. Des d'un cert punt del terra es veu un arbre sota un angle de 42°. Baix quin angle es veu col·locant-se al doble de distància?

27. Dos amics estan en una platja a 150 m de distància i en el mateix plà vertical que un estel que es troba volant entre tots dos. En un moment donat, un el veu amb un angle d'elevació de 50° i l'altre amb un angle de 38°. Quina distància hi ha des de cadascun d'ells a l'estel? A quina altura vola l'estel?

28. Un globus aerostàtic es troba subjecte al terra mitjançant dos cables d'acer, en dos punts que disten 70 metres. El cable més curt mesura 90 metres i l'angle que forma l'altre cable amb el terra és de 42°. Calcula:

a) La mesura de l'altre cable.

b) La distància del globus al terra.

Teorema del cosinus

Vídeo 129: Trigonometria: Teorema del cosinus

El teorema del cosinus s'aplica quan no tenim cap angle o quan tenim dos costats i l'angle que formen. El teorema es pot formular en tres versions diferents:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cdot c\cdot\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a\cdot c\cdot\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a\cdot b\cdot\cos\hat{C}$$

Exercici Resolt

3. En un triangle coneixem dos costats i l'angle comprès entre ells $\hat{A}$=35°, b=20 cm, c=14 cm. Resol-ho.

Aplicam el teorema del cosinus per trobar el costat oposat a l'angle A que ens donen. $a^2 = 20^2 + 14^2 - 2\cdot 20\cdot 14\cos 35^\circ$. D'aquí aïllam el costat $a = 11,72$ cm.
Tornam a aplicar el teorema del cosinus ara pel costat b.
$20^2 = 11,72^2 + 14^2 - 2\cdot 11,72\cdot 14\cos\hat{B}$. D'aquesta fórmula cal aïllar el $\cos\hat{B}$,

$$\cos\hat{B} = \frac{20^2 - 11,72^2 - 14^2}{-2\cdot 11,72\cdot 14} = -0,203$$

L'angle $\hat{B} = \arccos -0,203 = 101,7^\circ$, i finalment l'angle $\hat{C} = 180 - 35 - 101,7 = 43,28^\circ$.

4. Si els braços d'un compàs fan 12 cm de llarg i formen un angle de 60°, calcula el radi de la circumferència que podem traçar amb el compàs.	Aplicam el teorema el cosinus $$a^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos 60°$$ D'aquí s'obté que el costat oposat a l'angle de 60° és de $a = 12$, que correspon al radi de la circumferència que podem dibuixar. Es tracta d'un triangle isòsceles.

29. Troba els angles d'un triangle del que es coneixen els tres costats: *a*= 37 cm, *b* = 42 cm, *c* = 68 cm.

30. Dibuixa un triangle amb b=5, c = 8 i l'angle entre ells de 30° (usa una regla i un transportador). Calcula l'altre costat amb el teorema del cosinus i comprova que coincideix amb el resultat mesurat. No et sortirà exactament per l'arrodoniment i l'error de mesurament però hauria de ser molt similar.

31. Un triangle té de costats 3, 5 i 7. Calcula els seus angles.

32. En un triangle *ABC*, els costats *AB* i*AC* mesuren 3 i 2 cm respectivament. L'angle corresponent al vèrtex *B* mesura 30 graus.

a) Utilitza el teorema del cosinus per calcular l'altre costat. Obtindràs dues solucions.

b) Les dues solucions es deuen al fet que hi ha dos triangles series capaç de dibuixar-los?

33. Calcula l'àrea d'un heptàgon regular inscrit en una circumferència de 35 cm de perímetre.

34. Dos vaixells parteixen d'un port amb rumbs diferents que formen un angle de 127°. El primer surt a les 10 h del matí amb una velocitat de 17 nusos, i el segon surt a les 11 h 30 min, amb una velocitat de 26 nusos. Si l'abast dels seus equips de radi és de 150 km. Podran posar-se en contacte a les 3 de la tarda? (nus=milla/hora; milla=1850 m).

Resolució de triangles en general

35. Resol els següents triangles:

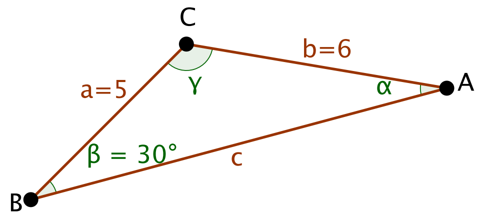
a) B=30°, *a*=5 cm, $b = 6$ cm

b) A=45°, C=60°, $b = 20$ m

c) C = 45° , *b* =10 m, *c* = 6 m;

d) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 4$ cm

e) A=45°, $b = 50$ m, *a*=40 m

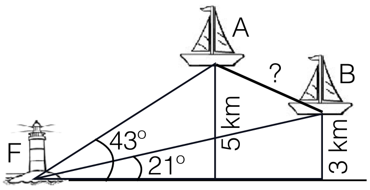


x

a) Representa els triangles deixant clares les dades i les incògnites.

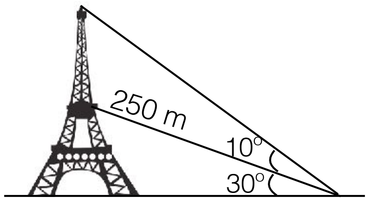
36. Calcula l'àrea i el perímetre d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 3 cm.

37. Des d'un far *F* es veu un vaixell A amb angle de 43° amb la costa, i el vaixell B amb 21°. El vaixell *B* està a 3 km de la costa i el A a 5 km. Calcula distància entre els vaixells.



38. Una finca té forma triangular. Dos dels seus costats mesuren 140 m i 200 m respectivament, i l'angle comprès entre tots dos és de 35°. Calcula el perímetre i la superfície de la finca.

39. Calcula l'altura de la torre:



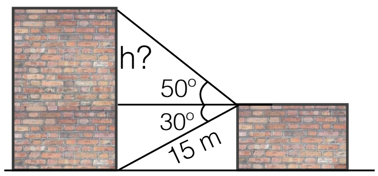
40. Dues persones *A i B* disten entre sí 200 m i veuen un globus que està situat entre ambdues. La primera persona ho veu amb un angle de 30° i la segona amb un angle de 60°.

a) A quina distància està *B* del globus?

b) A quina altura està el globus?

c) Una persona que estigui situada dins del globus, amb quin angle veu a *A* i *B*?

41. Calcula l'altura de la torre gran a partir del següent dibuix.

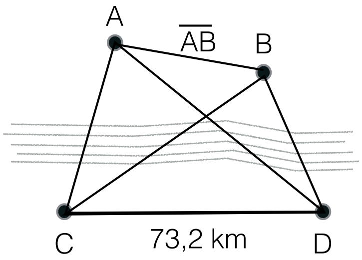


42. Desitgem mesurar l'altura d'un edifici. Si ho observem des d'un punt *A* ho veiem amb un angle de 50°. Ara bé, si ho contemplem des de 20 m més lluny *B*, l'angle és de 40°. Quina és l'altura de l'edifici? A quina distància està el punt *B* d'aquest edifici?

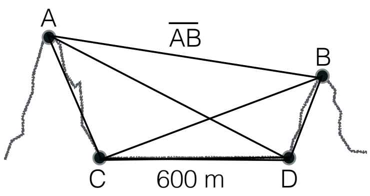
43. Comencem en una ciutat *A* i observem un cartell. La ciutat *B* està a 50 Km i la ciutat *C* a 40 Km. Mesurem l'angle que formen les dues carreteres i resulta ser de 60°. A quina distància està *B* de C ? Des de la ciutat *B*, amb quin angle es veuen les altres dues ciutats? [En altres paraules: si considerem el triangle *ABC*, què val l'angle que correspon al vèrtex *B*?]

44. Per determinar l'amplada d'un riu ens fixam amb un arbre que està situat en un punt C de la vorera. Arran de l'altra vorera hi ha dues cases A i B separades 30 m. Des de la casa A, l'arbre i la casa B formen un angle de 60°. Des de la casa B, l'angle que forma l'arbre i la casa A és de 75°. Calcula l'amplada del riu.

45. ★ A i B són dues ciutats situades a l'altra banda d'un riu de pas inaccessible. Aquestes ciutats, però, són visibles des d'altres punts accessibles C i D, separats per una distància de 73,2 km. Sabent els angles $\widehat{ACD} = 80,2°$, $\widehat{BCD} = 43,5°$, $\widehat{ADC} = 23,23°$, $\widehat{BDC} = 32°$, determina la distància entre les dues ciutats AB.



46. ★ Dos muntanyistes que han pujat en caps de setmana successius a dos cims veïns volen saber quina és la distància entre aquests dos cims. Per això, han mesurat des del peu del cim A els angles d'elevació dels cims A i B que són 65° i 30°, respectivament.



Després han caminat fins el peu del cim B i han mesurat els angles d'elevació dels cims A i B de 40° i 47°, respectivament. La distància entre els dos peus dels cims és de 600 m. Què val la distància entre els dos cims?

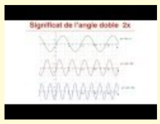
47. En un viatge d'alumnes de 4t d'ESO a Londres, alguns dels viatgers van fer pràctiques de trigonometria. En conèixer que l'Abadia de Westminster té una altura de 30 metres, van decidir aprofitar els seus coneixements per calcular l'altura de la famosa torre Big Ben. Des d'un punt situat entre els dos edificis s'observa el punt més alt de l'Abadia amb angle de 60°, i el Big Ben amb un angle de 45°. Si la distància entre les bases de les torres dels dos edificis és de 50 metres, quin va ser el resultat dels seus càlculs?, a quina distància es trobava de cada edifici?

3.3 Identitats trigonomètriques

Trobareu un resum de les identitats trigonomètriques a la pàgina 45.

Vídeo 145: Identitats 1: Suma d'angles

Vídeo 146: Identitats 2: Diferència d'angles



Vídeo 148: Identitats 3: Angle doble

Vídeo 147: Identitats 4: Relació de l'angle meitat

48. Calcula a partir de les raons trigonomètriques de 30°, 45°, 60° i 90°, les raons trigonomètriques de 75°, 120°, 150°, 105° i 135°

Per exemple, si utilitzam la relació de la suma d'angles i expressam $75° = 45° + 30°$

$\sin(75°) = \sin(45°+30°) = \sin(45°)\cdot\cos(30°)+\cos(45°)\cdot\sin(30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

De forma similar, podem obtenir el cosinus

$\cos(75°) = \cos(45°+30°) = \cos(45°)\cdot\cos(30°)-\sin(45°)\cdot\sin(30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

i finalment, la tangent

$$\mathrm{tg}\,(75°) = \mathrm{tg}\,(45° + 30°) = \frac{\mathrm{tg}\,45° + \mathrm{tg}\,30°}{1 - \mathrm{tg}\,45° \cdot \mathrm{tg}\,30°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

49. Calcula a partir de les raons trigonomètriques de 30°, 45°, 60° i 90°, les raons trigonomètriques de 15°

50. Comprova que les raons trigonomètriques de 30° es poden obtenir a partir de les raons trigonomètriques de 90°, i de 60°.

51. Demostra les fórmules d'angles complementaris $(90 - \alpha)$ emprant les fórmules de la diferència: $\sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$ i $\mathrm{tg}\,(90 - \alpha) = 1/\mathrm{tg}\,\alpha$.

52. Calcula les raons trigonomètriques de 22'5° i 11'25° a partir de les raons trigonomètriques de 45°.

53. Comprova que les raons trigonomètriques de 45° es poden obtenir a partir de les raons trigonomètriques de 90°.

54. ⊕ Demostra $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha = \cos\alpha$.

Exemple

Per fer una demostració d'una identitat cal partir del terme de l'esquerre i, aplicant altres relacions que sabem que són certes, arribar al terme de la dreta que volem demostrar.

Així doncs, en aquest exemple partirem de $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha$ i treurem factor comú $\cos\alpha$, obtenint

$\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha = \cos\alpha \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$ ara utilitzam la relació fonamental que diu que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, aleshores trobam $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha = \cos\alpha$ que era el resultat que voliem demostrar (**c.v.d.**).

55. ⊕ Demostra $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$.

56. ⊕ Demostra $2\sin x + \cos(-x) - \sin(-x) - \cos x = 3\sin x$.

57. ⊕ Demostra $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha = \sec\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\alpha$.

58. ⊕ Demostra $\sin 3\alpha = \sin\alpha \cdot \left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$.

59. ⊕ Demostra $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

60. Simplifica les següents expressions:

a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

b) $\dfrac{\sin(2a) \cdot \cos a}{\sin a \cdot (1 + \cos(2a))}$

c) $\dfrac{\sin^3 x + \sin x \cdot \cos^2 x}{\sin x}$

d) $\dfrac{\sin(x-y) - \sin(x+y)}{\cos(x+y) - \cos(x-y)}$

61. Demostra que són certes les següents igualtats:

a) $\dfrac{2\sin x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

b) $\dfrac{1 - \sin^4 x}{\cos^2 x} = 2 - \cos^2 x$

62. Comprova que són certes les següents igualtats:

a) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$

b) $\dfrac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = 1 - \sin \alpha$

63. Utilitza les transformacions de sumes en productes per posar en funció del sinus i cosinus de l'angle a:

a) $\sin(45 + a) + \sin(45 - a)$

b) $\cos(120 + a) + \cos(60 + a)$

64. Demostra les següents identitats:

a) $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$

b) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

c) $1 + \cos 2x = \dfrac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

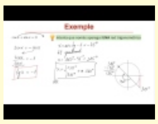
d) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \cdot \cos 2x = 1 + \sin 2x$

3.4 Equacions i sistemes trigonomètrics

Identitat: $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
És certa sempre, per qualsevol x

Equació: $x^2 - x = 2$
Volem trobar els valors de x pels quals es compleix $=$

Vídeo 138: Equacions trigonomètriques nivell 1



Vídeo 139: Equacions trigonomètriques nivell 2

Vídeo 140: Equacions trigonomètriques nivell 3

65. Resol les següents equacions trigonomètriques

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$

b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\operatorname{tg} x = -1$

e) $\operatorname{cosec} x = 4$

f) $\cos x = \frac{1}{3}$

g) $\sin x = \cos x$

h) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$

i) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

66. Calcula les solucions de les següents equacions trigonomètriques

a) $\cos(3x) = 0$ b) $\text{tg}\,(2x) = -1$ c) $\sin(4x) = -1$

Expressa en radiants les solucions anteriors.

67. Calcula les solucions de les següents equacions trigonomètriques:

a) $\cos(5x) - \cos x = 0$ b) $\sin(2x) - \sin(4x) = 0$

Ajuda: Utilitza les relacions:

$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ i $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$.

68. Calcula les solucions de les següents equacions trigonomètriques:

a) $\sin x + \cos x = 1$ b) $\sin(2x) = 2\cos x$

c) $\sin^2 x - \cos^2 x - \cos(2x) = 1$

69. Resol les següents equacions trigonomètriques:

a) $\cos x \cdot \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ b) $\text{tg}\, x - \sin 2x = 0$

70. Resol les equacions trigonomètriques següents donant totes les solucions possibles.

a) $\cos 2x + 1 = 4\cos x$ b) $\dfrac{\sin(2x)}{\text{tg}\, x} + \cos^2 x = 1$

c) $\cos 2x + \cos x = 0,2$

71. Resol les següents equacions

a) $\sin^2 x - \sin x = 0$ b) $\cos x + \sin^2 x = 1$

c) $3\text{tg}^2 x = \sec^2 x$ d) $\sin 2x = 0,5$

72. Resol els següents sistemes:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + \sin^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} \sin x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

73. Resol els següents sistemes:

a) $\left\{\begin{array}{l} \sin x - \sin y = 0 \\ x - y = \pi \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

74. Resol els següents sistemes:

a) $\left\{\begin{array}{l} \cos(x - y) = 0 \\ \cos(x + y) = 0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} \sin(x - y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Autoavaluació

1. Calcula les següents raons trigonomètriques sense fer ús de la calculadora.

a) $\sin(-750°)$ b) $\operatorname{tg} 570°$ c) $\cos(2\pi/3)$

2. A partir de les raons trigonomètriques de la suma d'angles, calcula exactament les següents raons trigonomètriques:

a) $\sin 105°$ b) $\cos 75°$

3. Sigui un triangle del que coneixem les següents dades a = 10 cm, b = 20 cm, = 30°. Calcula les altres dades del triangle. Calcula l'àrea del triangle

4. Un voltor vola a 120 m d'altura i formant un angle amb l'horitzontal respecte de nosaltres de 60°. En la mateixa direcció però formant un angle de 30 ° vola una perdiu a 100 m d'altura. Si el voltor vol menjar-se la perdiu, però només ho aconsegueix si la distància entre tots dos és menor de 150 m, pot el voltor caçar a la perdiu? A quina distància estan?

5. Calcula sense utilitzar la calculadora la resta de raons trigonomètriques (sinus, cosinus) de α , sabent que $\operatorname{tg} \alpha = 1/2$ i α pertany al 3r quadrant.

6. Resol les següents equacions:

a) $6\cos^2(x/2) + \cos x = 1$ b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

7. Resol els següents sistemes:

a) $\begin{cases} \sin x + \sin y & = 1 \\ x + y & = \pi \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x + \sin y & = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sin x - \sin y & = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$

8. Demostra la identitat $\dfrac{\sin^2 2a}{(1-\cos^2 a)\cdot \cos a} = 4\cos a$

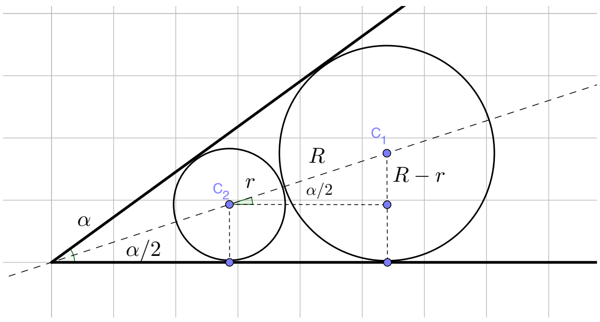
9. Calcula el perímetre d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de 30 cm de radi. Calcula la seva àrea

10. En els senyals de trànsit que indiquen el pendent de la carretera la informació que ens donen és el percentatge de pujada en funció de l'avanç del cotxe. Calcula l'angle per a un pendent del 15 %.

Aplica el que has après

Una barrera conflictiva

Un dia que anava passejant em vaig trobar la barrera de la imatge. Sembla com si el ferrer hagués tingut alguns problemes a l'hora de construir-la. Com pots veure, va començar amb cercles i al final va intentar acabar-la amb alguna cosa semblant a el·lipses. Això passa, perquè el ferrer va col·locar les divisions verticals a igual distància.



Em demano com hauria d'haver estat el disseny perquè es pogués fer únicament amb cercles tangents entre sí i tangents amb les barres horitzontals (vegeu esquema de la dreta). En particular, quina hauria d'ésser la relació entre els radis de dos cercles consecutius $\frac{r}{R}$ sabent que les dues barres horitzontals formen un angle α?

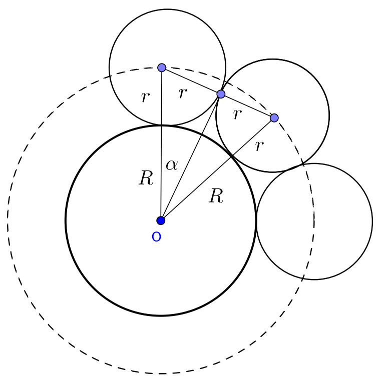
Encerclant l'euro

No us ha passat mai que estau avorrits i començau a jugar amb el primer que teniu a ma? Un dia tenia moltes monedes dins la butxaca i vaig començar a encerclar 1 € amb monedes de cèntim. Em demanava si era possible trobar alguna combinació de monedes de forma que la corona de monedes es pugues fer de la forma més exacta possible; és a dir, que totes les monedes fossin tangents entre si.

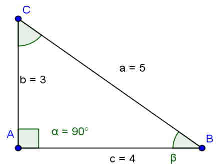
Potser et sigui d'utilitat disposar dels radis de les monedes d'euro:

Moneda	0.01 €	0.02 €	0.05 €	0.10 €	0.20 €	0.50 €	1 €	2 €
Diametre (mm)	16.25	18.75	21.25	19.75	22.25	24.25	23.25	25.75

Començau l'anàlisi a partir de l'esquema de la dreta. Si es possible enrevoltar el cercle gran amb els petits, voldrà dir que l'angle α serà una part de $360°$; és a dir, $\alpha = 360/n$ per algun $n = 3, 4, 5, \cdots$. A partir de trigonometria en un dels triangles, trobau una relació entre els radis de les monedes R/r perquè l'encerclament sigui perfecte.



Resum

Apartat	Resum
Radiant	És un angle tal que qualsevol arc que se li associï mesura exactament el mateix que el radi utilitzat per traçar-ho. Es denota per rad. $360° = 2\pi$ rad $180°$ són π rad, $90°$ són $\pi/2$ rad, ...
Raons d'un angle agut	$\sin\ \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$ $\cos\ \alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \frac{b}{c}$  $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\text{tg}\,\beta = \frac{3}{4}$
Teorema del sinus	En un triangle $\widehat{ABC}$ qualsevol: $$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$ on R és el radi de la circumferència circumscrita en el triangle. Si $b = 5$ i $a = 3,01$ i $\hat{B} = 30°$, l'angle $\hat{A}$ compleix $\frac{3{,}01}{\sin\hat{A}} = \frac{5}{\sin 30}$ i dóna $\hat{A} = 17'52°$
Teorema del cosinus	En un triangle ABC qualsevol: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$ $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$ $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$ Si b = 5, c = 6 i l'angle entre ells és 30 graus, el costat a és $a^2 = 5^2 + 6^2 - 60\cos 30$= 9,04 $\rightarrow a = 3,01$
Resolució general de triangles	En general, qualsevol triangle es pot resoldre si coneixem tres de les sis dades (hi ha tres costats i tres angles). Almenys necessitam conéixer un costat. S'apliquen els teoremes del sinus i del cosinus i que la suma dels seus angles són 180 graus. Si les dades originals són b=5, c = 6 i $\hat{A} = 30$ el teorema del cosinus ens dóna a = 3'01, el teorema del sinus $\hat{A} = 17'52°$ i $\hat{B} = 132'48°$.

Resum d'identitats trigonomètriques

Relacions fonamentals:

[1] $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ [2] $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ [3] $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha}$

Angle oposat:

[4] $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Suma d'angles:

[5] $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

[6] $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

[7] $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$

Diferència d'angles:

[8] $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

[9] $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

[10] $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$

Angle doble:

[11] $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

[12] $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

[13] $tg\,2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

Angle meitat:

[14] $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

[15] $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ signe $\pm$ segons quadrant de $\alpha/2$

[16] $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Sumes i diferències a productes:

[17] $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

[18] $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

[19] $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

[20] $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Carl F. Gauss (1777-1855)

Tema 4

Nombres complexos

Índex

L'home ha anat ampliant al llarg del temps la noció de nombre segons les seves necessitats.

Des de la prehistòria, els nombres naturals han servit per comptar. Els nombres enters negatius ens permeten resoldre equacions com $x + 5 = 1$. De forma similar els nombres fraccionaris permeten resoldre $3x = 2$. En l'antiga Grècia ja es sabia que no existia cap nombre racional que fos solució de $x^2 = 2$; D'aquí s'introduïren els nombres irracionals.

El conjunt format pels nombres racionals i irracionals és el conjunt dels nombres reals. Aquests són tots els nombres amb els quals, de moment, hem treballat.

Equacions de segon grau

És possible trobar les solucions de l'equació $x^2 - 4x + 13 = 0$?

Si utilitzam la fórmula de les equacions de segon grau, trobam

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

Donat que $\sqrt{-36}$ no és cap nombre real, deim que l'equació no té solucions reals. Però, separem $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{-1}$. Veim que el problema està en que no podem calcular $\sqrt{-1}$.

En 1777 Leonard Euler va anomenar $i = \sqrt{-1}$ com la unitat imaginària. D'aquesta forma podem escriure les solucions com:

$$x = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Acabam d'escriure dos nombre complexos en forma binòmica.

4.1 Nombres complexos en forma binòmica

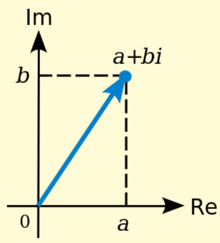
Vídeo 164: Introducció als nombres complexos

Es defineix la **unitat imaginària** i com $i = \sqrt{-1}$. Es compleix que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc.

Els nombres de la forma $2i$, $5i$, $-\frac{3}{2}i$, $\cdots$ s'anomenen **imaginaris purs**.

Un **nombre complex** en forma binòmica s'expressa com $z = x + iy$, on x s'anomena **part real** i y la **part imaginària** del nombre.

El nombres es representen sobre el **pla complex**. A l'eix horitzontal hi situam la part real i a l'eix vertical la part imaginària.



El **complex conjugat** del nombre s'obté de canviar el signe de la part imaginària $z^* = x - iy$. El **mòdul** d'un nombre complex és la longitud del nombre i s'obté de $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es compleix que $z \cdot z^* = |z|^2$.

Operacions en forma binòmica

Suposau que es donen els nombres complexos $z_1 = 2 - 3i$ i $z_2 = 5 + 4i$. Amb aquests nombres podem fer les següents operacions:

- **Suma**:
$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (5 + 4i) = 7 + i$$
- **Resta**:
$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (5 + 4i) = -3 - 7i$$
- **Producte**:
$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (5 + 4i) = 10 + 8i - 15i - 12\underset{\downarrow -1}{i^2} = 22 - 7i$$
- **Divisió**:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 - 3i) \cdot (5 - 4i)}{(5 + 4i) \cdot (5 - 4i)} = \frac{-2 - 23i}{41}$$

1. Donats els següents nombres complexos:

$$a = 3i, \quad b = -2i, \quad c = 5, \quad d = 1 + i, \quad p = -1 - i$$

a) Representa'ls gràficament sobre el pla complex. Representa els seus conjugats.

b) Representa gràficament les sumes: $a + b$, $\quad a + c$, $\quad b + d$, $\quad d + p$

c) Representa gràficament els productes: $a \cdot i$, $\quad b \cdot i$, $\quad c \cdot i$, $\quad d \cdot i$, $\quad p \cdot i$. Comprova que multiplicar per i equival a girar el nombre complex 90º.

2. Calcula

a) $7-3i-(2+6i)$

b) $(5-2i)\cdot(-3i)$

c) $(7+3i)\cdot(-1+2i)$

d) $(2+i)-i(1-2i)$

e) $(3-2i)\cdot(3+2i)$

f) $(3+2i)-(1-i)\cdot(4-5i)$

g) $(1+i)^2$

h) $(1-i)^4$

f

3. Realitza les següents operacions amb nombres complexos:

a) $\dfrac{2-i}{1+3i}$

b) $\dfrac{5+10i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{i}$

c) $\dfrac{2+i}{4-3i}+\dfrac{3+i}{5i}$

d) $\dfrac{68}{(1-i)\cdot(2-i)\cdot(3-i)}$

EXEMPLE

a) Per dividir dos nombres complexos, multiplicam i dividim pel complex conjugat del denominador.

$$\frac{2-i}{1+3i}=\frac{(2-i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)}=\frac{2-6i-i-3}{10}=\frac{-1-7i}{10}$$

4. Comprova les següents fórmules:

a) $(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$

b) $(x+iy)\cdot(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$

5. Calcula a perquè el nombre complex $\dfrac{a+i}{3-i}$ tingui la seva part real igual a la seva part imaginària.

4.2 Nombres complexos en forma polar

Vídeo 165: Operacions en forma polar

Un nombre complex $z=x+iy$ es pot expressar en forma polar donant el seu **mòdul** i l'angle que forma amb l'eix real. Aquest angle s'anomena **l'argument** del nombre complex. El nombre en **forma polar** s'expressa com $\mathbf{r}_\theta$ on

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Donat que hi ha infinits angles que tenen per tangent y/x, es defineix **l'argument principal** del nombre complex com un angle comprès entre $-\pi<\theta\leq\pi \quad (-180^\circ<\theta\leq 180^\circ)$.

De forma anàloga, es pot passar un nombre en forma polar a forma binòmica mitjançant

$$z=r\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$$

Aquesta forma també es coneix com **forma trigonomètrica**.

6. Calcula el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\sqrt{3}-i$ b) $-2-2i$ c) $1-\sqrt{3}i$ d) $-4i$

EXEMPLE

a) Donat $z=\sqrt{3}-i$, calculam el seu mòdul fent $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$. L'argument el trobam de $\theta=\operatorname{arctg}(-1/\sqrt{3})=-30°$. El nombre és $z=2_{-30°}$

7. Calcula el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $-3+3i$ b) -3 c) $-3i$ d) $3-3i$

8. Calcula l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\dfrac{-3}{\sqrt{3}+i}$ b) $\dfrac{-i}{1-i}$ c) $(1-i\sqrt{3})^7$

9. Expressa en forma polar els següents nombres complexos:

a) i b) $-i$ c) $4+4i$ d) -4

10. Expressa en forma polar els següents nombres complexos:

a) $5i$ b) $-7i$ c) $5-5i$ d) $\sqrt{3}+i$

11. Expressa en forma binòmica els següents nombres complexos donats en forma polar:

a) De mòdul 2 i argument $\dfrac{\pi}{3}$ b) De mòdul 3 i argument $-\dfrac{\pi}{4}$

c) De mòdul 1 i argument $\dfrac{\pi}{2}$ d) De mòdul 5 i argument $\dfrac{2\pi}{3}$

Operacions en forma polar

L'avantatge de la forma polar és que les operacions es realitzen molt més ràpid.

Si ens donen dos nombres en forma polar r_θ i $r'_{\theta'}$,

Producte: $r_\theta \cdot r'_{\theta'}=(r\cdot r')_{\theta+\theta'}$, multiplicam els mòduls i sumam els arguments.

Quocient: $r_\theta : r'_{\theta'}=(r:r')_{\theta-\theta'}$, dividim els mòduls i restam els arguments.

Potència: $(r_\theta)^n=(r^n)_{n\cdot\theta}$, elevam el mòdul i multiplicam l'argument per l'exponent.

Exercici Resolt

1. Passa a forma polar, opera i comprova $(1+i)^{16}=2^8=256$.	En forma polar el nombre és $1+i=\sqrt{2}_{45°}$. Per elevar el nombre a 16, elevam el mòdul i multiplicam l'argument per 16. $$(1+i)^{16}=(\sqrt{2}^{16})_{16\cdot 45°}=2^8_{720°}=2^8$$ On hem utilitzat que $720°$ són dues voltes completes.

12. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma polar:

a) $\dfrac{\sqrt{2}i}{-2-2i}$ b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}$

13. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma polar:

a) $(\sqrt{3}+i)^{60}$ b) $(4-4i)^{-11}$ c) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^{12}}{(-2-2i)^{8}}$

Fórmula de Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

EXEMPLE

Si utilitzam $n=2$ en la fórmula de Moivre: $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

Desenvolupam el quadrat del membre de l'esquerre:

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

Si igualam les part reals i imaginàries trobam:

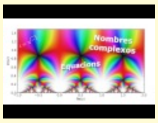
$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

que són les relacions de l'angle doble vistes en el tema 3.

14. Utilitza la fórmula de Moivre per expressar en funció de $\sin\theta$ i $\cos\theta$:

a) $\cos(-\theta)$ b) $\sin(-\theta)$ c) $\cos 3\theta$ d) $\sin 3\theta$

4.3 Resolució d'equacions en el pla complex



Vídeo 166: Resolució d'equacions

Tot nombre complex té n arrels enèsimes. Si ve expressat en forma polar r_θ, les arrels són

$$\sqrt[n]{r_\theta} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\theta+k\cdot 360}{n}}$$

essent $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

15. Calcula les arrels i representa-les en el pla complex

a) $\sqrt{-3i}$ b) $\sqrt{-9}$ c) $\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}$

d) $\sqrt[3]{-27}$ e) $\sqrt[3]{1-i}$ f) $\sqrt[4]{-81}$

EXEMPLE

a) Primer expressam el nombre $z = -3i$ en forma polar. Sabem que té mòdul 3 i argument 270º. Tenim dos possibles resultats de l'arrel quadrada

$$\sqrt{3_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{3}_{270/2} = \sqrt{3}_{135^\circ} \\ \sqrt{3}_{(270+360)/2} = \sqrt{3}_{315^\circ} \end{cases}$$

16. Calcula les arrels cinquenes de la unitat i representa-les en el pla complex. Calcula també totes les arrels cinquenes de -1 i representa-les.

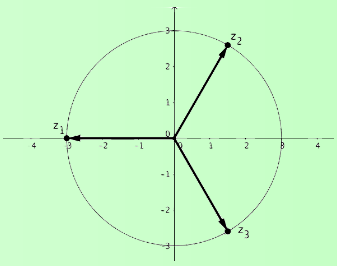
17. Resol les equacions:

a) $x^3 = -27$ b) $x^4 = -81$ c) $x^5 + 32 = 0$ d) $x^3 - 8 = 0$

EXEMPLE

a) $x^3 = -27$ implica que $x = \sqrt[3]{-27}$ que evidentment té una solució real $x = -3$. Per trobar les altres dues arrels expressam el nombre en forma polar $-27 = 27_{180^\circ}$ i en feim l'arrel cúbica.

$$\sqrt[3]{27_{180^\circ}} = \begin{cases} 3_{180/3} = 3_{60^\circ} \\ 3_{(180+360)/3} = 3_{180^\circ} \\ 3_{(180+2\cdot 360)/3} = 3_{300^\circ} \end{cases}$$



Si finalment passam les tres arrels a forma binòmica trobam $x = -3$, $x = 3(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$, $x = 3(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Si representam aquests tres nombres sobre el pla complex veim que formen els vèrtexs d'un triangle equilàter.

18. Resol les equacions, obtenint les arrels reals i complexes:

a) $x^2 = -1$ b) $x^3 = -8$ c) $x^4 + 16 = 0$

19. Calcula les arrels enèsimes de la unitat, per a n = 2, 3 i 4. Representar-les gràficament, i comprova que estan sobre la circumferència de radi 1, i són els vèrtexs d'un polígon regular.

20. Resol l'equació $z^2 + 3z - 1 = 0$.

21. Calcula tots els nombres complexos z pels quals:

a) $z^6 + 64 = 0$ b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$

c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

22. Resol aquestes equacions en el pla complex. Representa les solucions gràficament.

a) $z^2 + 4i = 0$ b) $z^3 + 8i = 0$

c) $iz^3 - 27 = 0$ d) $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^2 + 4i = 0$

Començant aïllant la incògnita $z = \sqrt{-4i}$. Tot seguit hem de calcular totes les arrels (complexes) del nombre $-4i$. Per això, l'expressam en forma polar $-4i = 4_{270^\circ}$.

$$\sqrt{4_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{4}_{\frac{270^\circ}{2}} = 2_{135^\circ} \\ \sqrt{4}_{\frac{270^\circ+360^\circ}{2}} = 2_{315^\circ} \end{cases}$$

Finalment, podem expressar les dues arrels en forma binòmica:

$$\begin{cases} 2_{135^\circ} = 2(\cos 135 + i \sin 135) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ 2_{315^\circ} = 2(\cos 315 + i \sin 315) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$$

23. Calcula les quatre arrels de $z^4 + 9 = 0$ i utilitza-les per factoritzar $z^4 + 9$ amb dos polinomis de segon grau amb coeficients reals.

Autoavaluació

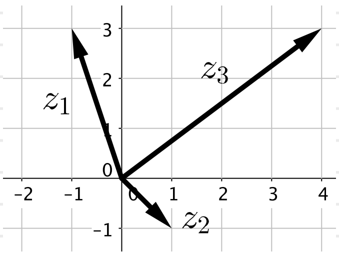
1. Donats els nombres complexos de la figura es demana calcular:

a) $z_1^* - z_3$

b) z_1^2

c) $|z_3|(z_1 + z_2)$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$



2. Calcula $\dfrac{(3+2i)\cdot(3-2i)}{(2+3i)^3}$

3. Resol l'equació: $z^2 - 10z + 29 = 0$

4. Donada l'expressió $\dfrac{1-i}{2-ki}$, troba els valors de k pels quals l'expressió és:

a) Real

b) Imaginari pur.

5. Calcula el valor que ha de prendre x per què el mòdul de $\dfrac{x+2i}{1-i}$ sigui igual a 2.

6. Calcula el mòdul i l'argument principal del següent nombre complex $-3+3i$:

7. Expressa en forma binòmica el nombre complex de mòdul 2 i argument $\pi/3$

8. Calcula $(1+i)^6$ passant prèviament a forma polar.

9. Expressa en forma trigonomètrica el següent nombre complex $5i$.

10. Calcula les arrels cúbiques de $4\sqrt{3} - 4i$. Representa-les gràficament.

Resum

Apartat	Resum
Unitat imaginària	$i^2 = -1 \leftrightarrow i = \sqrt{-1}$
Nombre en forma binòmica	$z = x + iy$ $z = 2 + 3i$, té part real 2 i part imaginària 3
Complex conjugat	$z^* = x - iy$ $\bar{z} = 2 - 3i$
Suma de complexos	$(x + iy) + (o + iv) = (x + o) + i(y + v)$ $(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$
Producte de complexos	$(x + iy) \cdot (o + iv) = (x \cdot o - y \cdot v) + i(x \cdot v + y \cdot o)$ $(2 + 3i) \cdot (4 + 5i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 4 + 3i$
Divisió de complexos	Es multiplica numerador i denominador pel complex conjugat del denominador. Així s'aconsegueix un denominador real. $\frac{2}{1+i} = \frac{2\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{2\cdot(1-i)}{2} = 1 - i$
Forma polar	r_θ amb $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $\theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$ $z = 2 + 3i$, $r = \sqrt{13}$, $\theta = \text{arctg}\,\frac{3}{2}$
Forma trigonomètrica	$z = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$ Si tenim $z = 2_{30^\circ}$, $z = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
Producte en forma polar	$z = r_\theta$ i $z' = r'_\alpha$, aleshores $z \cdot z' = (r \cdot r')_{\theta+\alpha}$. Multiplicam els mòduls i sumam els arguments. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i $z' = 3_{50^\circ}$, $z \cdot z' = (2 \cdot 3)_{30+50^\circ} = 6_{80^\circ}$
Divisió en forma polar	$z = r_\theta$ i $z' = r'_\alpha$, aleshores $z/z' = (r/r')_{\theta-\alpha}$. Dividim els mòduls i restam els arguments. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i $z' = 3_{50^\circ}$, $z/z' = (2/3)_{30-50^\circ} = (2/3)_{340^\circ}$
Potència en forma polar	$z = r_\theta$, aleshores $z^n = (r^n)_{n\cdot\theta}$. Elevam el mòdul i multiplicam l'argument per n. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i volem calcular $z^3 = (2^3)_{3\cdot 30^\circ} = 8_{90^\circ}$

SÍNTESI DE LA PART I

Aritmètica, Àlgebra i Trigonometria

1. Efectua les operacions següents i simplifica:

a) $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^2} + 3a\sqrt[6]{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{2}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}} - \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. Efectua les operacions següents i simplifica:

a) $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right) : \sqrt{a}$

b) $\dfrac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \dfrac{2}{3-\sqrt{3}}$

3. Factoritza el polinomi $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2$

4. Opera i simplifica $\left(\dfrac{x^2-4}{x+1} : \dfrac{x^2+2x}{x^3-x}\right) - (x^2-3x)$

5. Resol l'equació $\sqrt{2x+3} - 2x = x - 6$

6. Resol l'equació $\dfrac{7-x}{x^2+4x+4} + \dfrac{x}{x+2} = 1$

7. Resol el sistema d'inequacions $\left\{\begin{array}{l} x+1-3(x-1) < 1-x \\ x^2-x-6 \geq 0 \end{array}\right.$

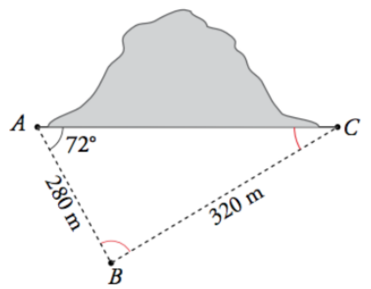
8. Un examen consisteix en un test de 60 preguntes. Per cada encert obtens 5 punts, per cada errada et lleven 2 punts i per cada pregunta no contestada resta 1 punt. Quantes preguntes bé, malament i en blanc va contestar un alumne sabent que va obtenir 150 punts i que el nombre d'errades més el quíntuple de les no contestades va ésser igual al nombre d'encerts?

9. Resol pel mètode de Gauss i classifica el sistema $\left\{\begin{array}{ll} 2x+y-z & = -1 \\ x-y+z & = 4 \\ 4x-y+z & = 7 \end{array}\right.$

10. Les diagonals d'un paral·lelogram mesuren 16 cm i 28 cm i formen un angle de 48º. Calcula el perímetre i l'àrea d'aquest paral·lelogram.

11. Tenim un triangle de perímetre 48 cm. Sabent que el costat major supera en 6 unitats el menor i que l'altre costat és la mitjana aritmètica del major i del menor, calcula els angles d'aquest triangle.

12. Per construir un túnel entre dues ciutats A i C necessitam saber la seva longitud i direcció. Per això, fixam un punt B i prenem les mesures indicades en la figura. Calcula $\bar{AC}$ i els angles $\hat{B}$ i $\hat{C}$.



13. Una nau espacial es troba sobrevolant el pol nord de la Terra a una certa distància d de la seva superfície. Si volem veure els continents fins a una latitud de $40°$ nord, quina és l'altura mínima ha de volar la nau? Preneu radi de la Terra $R = 6400$ km.

14. Justifica si existeix algun angle a pel qual $\operatorname{tg} a = \frac{2}{3}$ i $\sin a = \frac{1}{2}$.

15. Sabent que $\operatorname{tg}\alpha = 2$ i que $\cos\alpha > 0$, troba:

a) $\cos 2\alpha$ b) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ c) $\sin\frac{\alpha}{2}$ d) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \alpha)$

16. Demostra les següents identitats trigonomètriques

a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

b) $2\operatorname{tg}\beta \cdot \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin\beta = \operatorname{tg}\beta$

17. Resol aquestes equacions trigonomètriques

a) $2\sin x + \cos x = 1$

b) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$

18. Resol $\left\{\begin{array}{l} \sin 3x + \sin y = \frac{3}{2} \\ \cos\left(\frac{3x-y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

19. Efectua $\dfrac{(3-2i)^2 - (1+i)(2-i)}{-3+i}$

20. Simplifica $\dfrac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}}$. *Ajuda: Recorda quines són les potències de* i.

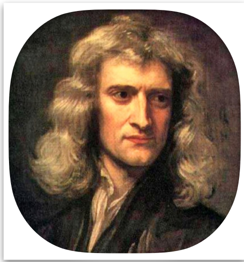
21. Resol l'equació en el conjunt dels nombres complexos $z^2 - 10z + 29 = 0$.

22. Donat el nombre complex $z = 3_{60°}$, expressa en forma polar z^*, $1/z$, z^2, $\sqrt[3]{z}$.

Part II

ANÀLISI DE FUNCIONS

L'anàlisi de sèries temporals és cabdal en la vida quotidiana.



Sir Isaac Newton

(1642-1727)

Juntament amb el seu competidor, *Gottfried Leibniz*, varen ésser els fundadors del càlcul diferencial.

Johann Bernoulli

(1667-1748)

Un dels molts matemàtics de la família dels Bernoulli. Ell va ésser un defensor de *Leibniz* i es va centrar en el càlcul infinitesimal.

Leonard Euler

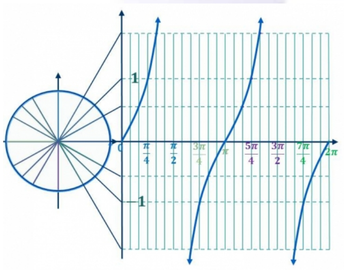
(1707-1783)

Era gran amic dels *Bernoulli*. De l'extensa contribució a les matemàtiques destacam: el número d'Euler e=2.71828··· i les sèries de potències.

Augustin L. Cauchy

(1789-1857)

Va ésser un pioner en el camp de l'ànalisi. Precisa els conceptes de límit, continuïtat i derivada quasi com els entenem avui en dia.



Tema 5

Funcions elementals

Índex

Una breu història

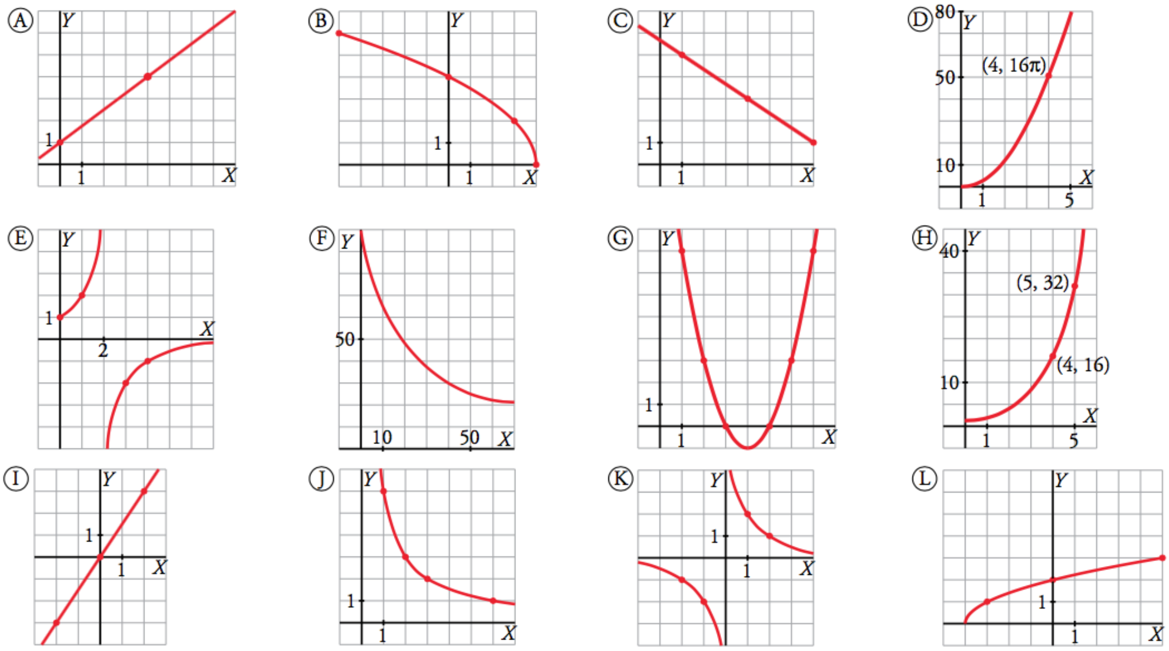
El concepte de funció com el coneixem avui en dia, va aparèixer amb als inicis del càlcul en el segle XVII. René Descartes, Isaac Newton i Gottfried Leibniz van establir la idea de funció com la dependència entre dues quantitats. Leibniz, en particular, va introduir els termes ≪Funció≫, ≪variables≫, ≪constant≫ i ≪paràmetre≫. La notació $f(x)$ va ser utilitzada per primera vegada per A.C. Clairaut i per Leonhard Euler en la seva obra *Commentarii de Sant Petersburg* en 1736.

Inicialment, una funció f s'identificava a efectes pràctics amb una expressió analítica que permetia calcular els seus valors. No obstant això, aquesta definició tenia algunes limitacions: Expressions analítiques diferents podien donar lloc a valors numèrics iguals. En 1837, Dirichlet va proposar la definició moderna de funció com una correspondència entre dos conjunts de nombres, que associa a cada nombre del conjunt de sortida un únic nombre del conjunt d'arribada.

Gottfried Leibniz va introduir el terme ≪funció≫ en el segle XVII.

Prova inicial

Associa a cada gràfica una equació de les que es presenten a continuació.



LINEALES	CUADRÁTICAS	PROPORCIONALIDAD INVERSA	RADICALES	EXPONENCIALES
L₁ $y=\frac{3}{2}x$	C₁ $y=x^2-8x+15$	PI₁ $y=\frac{1}{x}$	R₁ $y=\sqrt{2x+4}$	E₁ $y=2^x$
L₂ $y=-\frac{2}{3}(x-1)+5$	C₂ $y=(x+3)(x+5)$	PI₂ $y=\frac{2}{2-x}$	R₂ $y=\sqrt{x+4}$	E₂ $y=0{,}5^x$
L₃ $3x+2y=0$	C₃ $y=x^2,\ x>0$	PI₃ $y=\frac{2}{x}$	R₃ $y=2\sqrt{4-x}$	E₃ $y=20+80\cdot 0{,}95^x$
L₄ $y=\frac{3}{4}x+1$	C₄ $y=\pi x^2,\ x>0$	PI₄ $y=\frac{6}{x},\ x>0$	R₄ $y=-\sqrt{4+x}$	E₄ $y=3^x$

5.1 Concepte de funció

$f : Dom \to Rec$ és una funció si per a cada x del domini Dom associa **un únic** valor y del recorregut Rec. S'anomena $y = f(x)$, la imatge de x per la funció f.

Si $Dom\ f$ són els nombres naturals, parlam de **successions**.

Si $Dom\ f$ és el conjunt dels nombres reals, parlam de **funcions de variable real**.

Per representar funcions utilitzam uns eixos cartesians on col·locam x sobre l'eix horitzontal (**abscisses**) i y sobre l'eix vertical (**ordenades**).

Successions

Una successió és una llista ordenada de nombres reals que anomenam termes:

$$a_n : a_1, a_2, a_3, \cdots$$

Una successió es pot expressar:

- Donant els primers termes: $1, 3, 5, 7, \cdots$
- Donant el terme general: $a_n = 2n - 1$
- Donant una relació de recurrència: $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = a_n + 2$

1. Troba els 7 primers termes de la successió $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

2. Dóna el terme general o la relació de recurrència de les successions:

a) $3, 8, 13, 18, 23, \cdots$

b) $1, 8, 27, 64, 125, \cdots$

c) $8, 4, 2, 1, \cdots$

Progressions aritmètiques

Una progressió aritmètica és una successió en la qual la diferència d entre dos termes consecutius es manté constant.

El terme general és: $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$.

La suma dels N primers termes és: $S_N = \dfrac{a_1 + a_N}{2} \cdot N$

Progressions geomètriques

Una progressió geomètrica és una successió en la qual el quocient (anomenat raó r) entre dos termes consecutius es manté constant.

El terme general és: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

La suma dels N primers termes és: $S_N = a_1 \dfrac{r^N - 1}{r - 1}$

Si $|r| < 1$, la progressió és decreixent i la suma dels infinits termes és: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r}$

3. Troba el terme 100 de la progressió $10, 7, 4, 1, -2, \cdots$.

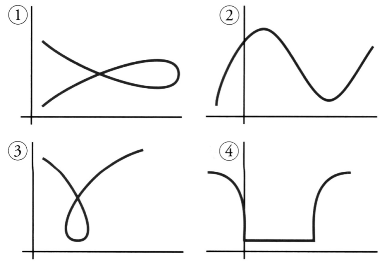
4. D'una progressió aritmètica coneixem $a_3 = 11$ i $a_5 = 19$. Calcula el terme general i la suma dels 100 primers termes.

5. Troba el terme 50 de la progressió $100, 50, 25, 12.5, \cdots$. Troba la suma dels infinits termes.

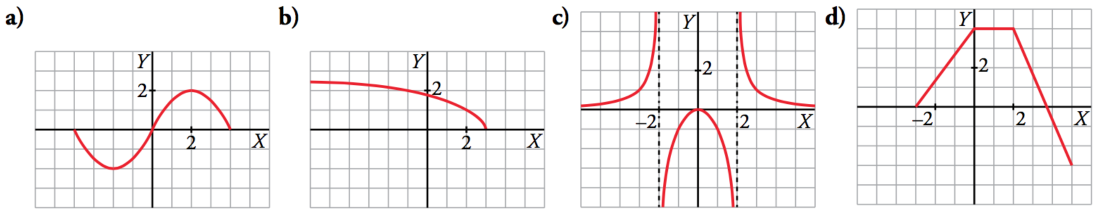
6. Calcula la suma dels 30 primers termes d'una progressió geomètrica amb termes $a_2 = 3$ i $a_5 = 81$.

Funcions de variable real

7. Quines d'aquestes gràfiques representen funció i quines no? Explica per què?



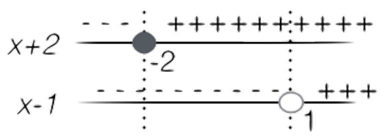
8. Observa les gràfiques d'aquestes funcions i indica quin és el seu domini de definició i el seu recorregut:



Totes les funcions polinòmiques tenen com $Dom f = \mathbb{R}$. Però, hi ha situacions en què el domini es troba limitat perquè és impossible calcular la funció.

- No és possible dividir entre zero.
- No es pot calcular l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.
- No existeix el logaritme de zero ni d'un nombre negatiu.
- No té sentit físic; per exemple no existeixen àrees negatives.

Exercici Resolt

1. Calcula el domini de $y = \dfrac{x}{x^2-4}$	El denominador és igual a zero quan $x = \pm 2$, el domini són tots els nombres reals excepte aquests dos: $Dom\, f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
2. Calcula el domini de $y = \sqrt{3-x}$	El radicand ha d'esser major o igual a zero $3 - x \geq 0$. La solució d'aquesta inequació és $x \leq 3$ o en forma d'interval $Dom\, f = (-\infty, 3]$
3. Calcula el domini de $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$	En primer lloc el denominador no pot ésser zero; llavors $x = 1$ queda descartat. En segon lloc, el radicand ha d'esser major o igual a zero. Per això analitzam els signes del numerador i denominador:  El signe de la divisió ha de donar positiu o zero, aleshores $Dom f = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

9. Calcula en el teu quadern el domini de les següents funcions:

Funció		**Domini**	**Funció**		**Domini**
f	$\dfrac{5x^2+1}{x^2-4}$		j	$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$	
g	$\sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}$		k	$\dfrac{2x^2-1}{x^2-3}$	
h	$\dfrac{x+1}{x-1}$		l	$\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$	
i	$\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$		m	$\dfrac{x+1}{x-1}$	

10. Calcula en el teu quadern el domini de cadascuna de les següents funcions:

$$p(x) = -5x+3; \quad q(x) = \sqrt{2x^2-x+7} \quad ; r(x) = \sqrt[4]{-x^3-1}$$
$$s(x) = \sqrt[3]{3x^2-x}; \quad f(x) = \frac{2x-4}{x+3}; \quad g(x) = \frac{-3}{x}$$
$$h(x) = \frac{x+1}{x^2+1}; \quad j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

Funció	Domini	Funció	Domini
$p(x)$		$q(x)$	
$r(x)$		$s(x)$	
$f(x)$		$g(x)$	
$h(x)$		$j(x)$	

11. Sigui la funció donada per $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b i c sabent que la funció té simetria senar i que passa pel punt $(1, -2)$.

12. Les dades de la taula indiquen en la primera fila, els preus, en euros, per sac de taronges, en la segona fila, les quantitats demandades de taronges per setmanes, i en la tercera fila, les quantitats ofertes:

Preu per sac (euros)	8	6	4	2
Quantitat demandada (milers de sacs per setmana)	50	100	200	400
Quantitat oferta (milers de sacs per setmana)	300	250	200	100

Dibuixa una gràfica amb les dades d'aquesta taula, representant en l'eix vertical els preus, i en l'eix horitzontal les quantitats demandades i ofertes. Uneix amb un traç continu ambdues corbes.

13. Les dades de la taula indiquen en la primera fila, els preus, en euros, del lloguer d'un pis de 70 m^2, en la segona fila, la quantitat de persones que desitgen llogar un pis, i en la tercera fila, els pisos buits en una determinada ciutat:

Preu d'un pis (euros)	1500	1000	500
Quantitat demandada (persones que desitgen llogar)	10	100	500
Quantitat oferta (pisos lliures)	600	200	50

a) Dibuixa una gràfica de les corbes d'oferta i demanda.

b) Determina de forma aproximada el punt d'equilibri

5.2 Funcions elementals

Lineals i Quadràtiques

Funció lineal

L'expressió d'una funció lineal és $y = mx + n$, essent m el pendent i n l'ordenada a l'origen. Si $m = 0$ es diu que la funció és constant i la gràfica és una recta horitzontal.

Funció quadràtica o paràbola

L'expressió d'una funció quadràtica és $y = ax^2 + bx + c$. Quan $a > 0$ la funció és còncava $\cup$ i si $a < 0$ és convexa $\cap$. El valor de b controla la posició del vèrtex. L'abscissa del vèrtex s'obté de la fórmula $x_v = \dfrac{-b}{2a}$. L'ordenada del vèrtex es troba substituïnt x_v dins la funció.

14. Calcula el vèrtex i punts de talls amb els eixos de les següents paràboles. Representa-les gràficament:

a) $y = -x^2 + 2x - 3$ b) $y = x^2 + 2x + 1$ c) $y = x^2 - 6x + 5$

d) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ e) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ f) $y = 2x^2 - 10x + 8$

15. Un objecte es llança verticalment cap amunt des d'un determinat punt. L'altura en metres aconseguida al cap de t segons, ve donada per $h(t) = 5 + 4t - t^2$. Calcula l'altura des de la qual es llança l'objecte i a la qual es troba després d'1 segon. Determina en quin instant aconseguirà l'altura màxima i quina és. Finalment, calcula l'instant en què caurà al terra i representa gràficament la situació amb les dades obtingudes anteriorment.

16. La despesa pel consum de llum (en cèntims d'euro) d'un habitatge, en funció del temps transcorregut (en hores), ens ve donada per l'expressió $f(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 10$ per a $0 \leq t \leq 12$.

a) Representa gràficament la funció.

b) Quin és el consum a les 6 hores? I després de 12 hores?

Funcions arrel

17. Representa gràficament les funcions:

a) $y = \sqrt{x-1}$ b) $y = -\sqrt{x+3}$ c) $y = 2 + \sqrt{x}$ d) $y = 1 - \sqrt{x}$

Proporcionalitat inversa (Hipèrboles)

18. Representa gràficament les funcions:

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ b) $y = \dfrac{1}{x-1}$ c) $y = \dfrac{-1}{x}$ d) $y = \dfrac{-1}{x-3}$

19. Dibuixa el recinte limitat pels semieixos positius de coordenades i les corbes $y = x^2+1,\ y = \dfrac{2}{x}$ i $y = x - 1$.

20. Els beneficis d'una empresa, en milers d'euros, s'ajusten a la funció $f(x) = \dfrac{50x - 100}{2x+5}$, on x representa els anys de vida de l'empresa, essent $x \geq 0$. Calcula el domini, tall amb els eixos, signe i simetries d'aquesta funció.

Funció a trossos i valor absolut

21. Representa gràficament la funció valor absolut $y = |x|$. Expressa-la com una funció a trossos.

22. Representa les següents funcions a trossos.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \ \ x < -4 \\ -x+2 & si \ \ -4 \leq x < 0 \\ 5 & si \ \ 0 \leq x \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \ \ x < -3 \\ x & si \ \ -3 \leq x < 2 \\ \sqrt{x} & si \ \ 2 \leq x \end{cases}$

23. Esbossa la gràfica de la funció $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } \ x \leq -1, \\ x^3 - x & \text{si } \ x > -1. \end{cases}$

24. Siguin les funcions definides mitjançant $f(x) = |x\,(x-2)|$ i $g(x) = x + 4$. Representa les gràfiques de f i g sobre els mateixos eixos i calcula els punts de tall entre ambdues.

25. Representa les següents funcions i defineix-les com a funcions a trossos:

a) $y = |4 - x|$ b) $y = |3x+6|$ c) $y = |x^2 - 1|$ d) $y = |x^2{+}2x{-}3|$

26. Sigui la funció $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} & x \leq 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si} & 1 < x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si} & x > 3 \end{cases}$. Dibuixa la seva gràfica i, a partir d'ella, indica el seu domini, els punts de tall amb els eixos i el seu signe.

Funció exponencial

Les funcions exponencials són del tipus $y = a^x$. Si $a > 1$ són creixents i si $0 < a < 1$ són decreixents. Totes elles passen pel punt $(0, 1)$.

Un cas important és $y = e^x$ on la base és el número $e \simeq 2.7182818$.

27. En el teu quadern, representa conjuntament les gràfiques de $y = f(x) = x^2$ (funció potencial) i $f(x) = 2^x$ (funció exponencial), amb valors de "x" entre 0 i 5. Observa la diferència quantitativa entre el creixement potencial i el creixement exponencial.

28. Dibuixa el recinte limitat per les corbes $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ i $x = 0$.

29. Utilitzant la calculadora, fes en el teu quadern una taula de valors i representa les funcions $f(x) = e^x$ i $g(x) = e^{-x}$.

30. Una persona ha ingressat una quantitat de 5.000 euros a interès del 2 % en un banc, de manera que cada any la seva capital es multiplica per 1'02.

a) Escriu en el teu quadern una taula de valors amb els diners que tindrà aquesta persona al cap d'1, 2, 3, 4, 5 i 10 anys.

b) Indica la fórmula de la funció que expressa el capital en funció del nombre d'anys.

c) Representa en el teu quadern gràficament aquesta funció. Pensa bé quines unitats hauràs d'utilitzar en els eixos.

31. Un determinat antibiòtic fa que la quantitat de certs bacteris es multipliqui per 1/3 cada hora. Si la quantitat a les 9 del matí és de 10 milions de bacteris:

a) Fes una taula calculant el nombre de bacteris que hi ha cada hora, des de les 3 del matí a les 12 de migdia (observa que has de calcular també "cap a enrere").

b) Representa gràficament aquestes dades.

5.3 Composició de funcions. Funció inversa.

EXEMPLE

Donades les funcions $f(x) = e^x$ i $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, demanen calcular les composicions $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$:

La composició $f \circ g = f[g(x)] = f\left[\frac{1}{\cos x}\right] = e^{\frac{1}{\cos x}}$.

En canvi, la composició $g \circ f = g[f(x)] = g\left[e^x\right] = \dfrac{1}{\cos(e^x)}$.

Procediment per calcular $f^{-1}(x)$

Les funcions f i f^{-1} són inversa una de l'altre si es compleixen les composicions

$$f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$$

Si ens donen la funció $y = \dfrac{2x}{x+1}$ i volem calcular la seva funció inversa, començam canviant el nom de les variables $x \leftrightarrows y$.

Ara hem d'aïllar y de l'expressió $x = \dfrac{2y}{y+1}$. Trobam $y = \dfrac{x}{2-x}$ i aquesta és la funció inversa $f^{-1}(x)$.

32. Considerem les següents funcions:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	$g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+7}}$	$h(x) = 2^{-x+1}$
$j(x) = \ln\left(x^5 - 1\right)$	$k(x) = 2^x \cdot 30^{x-1}$	$m(x) = \sqrt[4]{-5+2x}$

a) Calcula les següents composicions: $f \circ h$; $g \circ h$; $g \circ j$; $k \circ h$; $g \circ h \circ j$; $m \circ j$

b) Calcula $f^{-1}(x)$, $h^{-1}(x)$, $k^{-1}(x)$, $j^{-1}(x)$ i verificar que són les inverses de $f(x)$, $h(x)$, $k(x)$, $j(x)$.

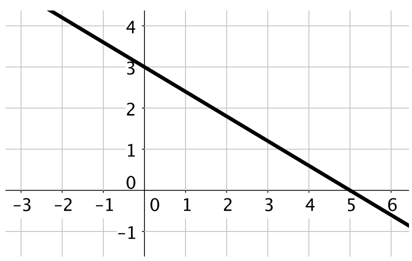
c) Calcula tots els dominis.

d) Calcula els punts de tall amb els eixos de totes les funcions.

33. Calcula en el teu quadern les inverses (que existeixin) de les funcions següents:

$p(x) = -5x + 3$	$q(x) = 2x^2 - 1$	$r(x) = -x^3 + 6$	$s(x) = -x$
$f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$	$g(x) = \frac{-3}{x}$	$h(x) = \frac{x+1}{x^2}$	$j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$
$k(x) = e^{x-4}$	$l(x) = 2^{\frac{1}{x}}$	$m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$	$n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$
$a(x) = \ln(x-2)$	$b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right)$	$c(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x+4}\right)$	$d(x) = \log\left(x^3 - 1\right)$

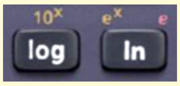
34. Calcula la funció inversa de la funció lineal representada:



5.4 Logaritmes

Definició de logaritme

$$\log_b y = x \quad \leftrightarrow \quad b^x = y$$



b és la base del logaritme, que ha d'ésser positiva i diferent de 1. Si la base és 10, tenim el logaritme decimal $\log_{10} x = \log x$. Si en canvi triam com a base el número $e = 2.7182818\cdots$, obtenim el logaritme Neperià, $\log_e x = \ln x$

35. Calcula la base d'aquests logaritmes:

a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$ c) $\log_x \frac{1}{4} = 2$

d) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ e) $\log_x 0,04 = -2$ f) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$

36. Calcula el valor de x:

a) $\log x^2 = -2$ b) $7^x = 115$ c) $\log_7 3x = 0,5$

d) $3^{2+x} = 172$ e) $\ln x = 2$ f) $\log_2 \sqrt{8} = x$

Propietats dels logaritmes

37. Utilitza les propietats dels logaritmes per resoldre aquestes equacions:

a) $\log x^2 + \log 2 - \log x - \log 3 = 1$ b) $(2^{x+1})^2 = 64$

c) $2\log x = 3 + \log \frac{x}{10}$ d) $2^x = 10^{x+2}$

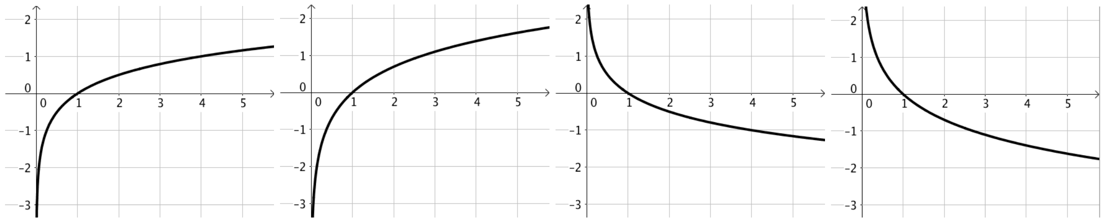
e) $\dfrac{\ln(16 - x^2)}{\ln(3x - 4)} = 2$ f) $9^{x+1} + 3 = 28 \cdot 3^x$

Propietats dels logaritmes

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b(A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$
4. $\log_b A^n = n \log_b A$
5. $\log_b \left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$
6. $\log_b A = \dfrac{\log A}{\log b}$ Fórmula del canvi de base

La funció logarítmica

38. Identifica les fórmules de les següents funcions a partir de les seves gràfiques, sabent que són funcions logarítmiques:



39. Representa en el teu quadern, mitjançant taules de valors, les gràfiques de les següents funcions:

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{1/3} x$ c) $f(x) = \log_{1,5} x$

Comprova que en tots els casos passen pels punts (1, 0), (*b*, 1) i (1/*b*, -1), on *b* és la base.

40. Considera la funció definida per $f(x) = \dfrac{2\log x}{x^2}$. Calcula el seu domini.

41. Considera la funció definida per $g(x) = |\ln(x)|$ (on ln denota el logaritme neperià). Esbossa el recinte limitat per la gràfica de g i la recta $y = 1$. Calcula els punts de tall entre elles.

42. Calcula el domini de les següents funcions: $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $g(x) = (1 - x^3)\cos x$ i $h(x) = 4x^3 - 5x + \frac{1}{e^x}$.

5.5 Funcions trigonomètriques

Les funcions $y = \sin x$, $y = \cos x$ i $y = \operatorname{tg} x$ són funcions periòdiques o circulars de període 2π, 2π i π respectivament.

Recorda que la x ve donat en radiants en les funcions trigonomètriques.

43. Representa la funció $f(x) = \sin x$ entre $x = -\pi$ i $x = 2\pi$.

44. Considera les funcions f, g: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$ i $g(x) = \sin(2x)$. Dibuixa la regió del pla limitada per les gràfiques de f i g.

45. Representa la funció $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$ entre $x = 0$ i $x = \pi/4$.

46. La posició d'una bolla que es troba enganxada a l'extrem d'una molla, oscil·la d'acord amb l'equació $x = 10\sin\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$. Construeix una taula de valors i representa la funció $x(t)$.

Autoavaluació

1. L'expressió de la composició $f \circ g$ de les funcions $f(x) = 2x - 1$ i $g(x) = -x^2 + 2$ és:

a) $-2x^2 + 3$ b) $2x^2 - 3$ c) $-4x^2 + 4x + 1$ d) $4x^2 - 4x - 1$

2. La funció inversa de $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ és:

a) $\frac{x+2}{x-1}$ b) $\frac{-x+1}{x+2}$ c) $\frac{2x+1}{x-1}$ d) $\frac{-2x-1}{x-1}$

3. La funció inversa de $f(x) = 2 + \ln x$ és:

a) $\frac{1}{2+\ln x}$ b) $2 + \ln(-x)$ c) $e^x + 2$ d) e^{x-2}

4. La paràbola $y = -x^2 + 2x + 3$ és:

a) Convexa i té un màxim a $(0, 3)$ b) Convexa i té un màxim a $(1, 4)$

c) Còncava i té un mínim a $(1, 4)$ d) Còncava i té un mínim a $(0, 3)$

5. El domini de la funció $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ és:

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} - \{1\}$ c) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ d) $\mathbb{R} - \{0\}$

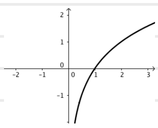
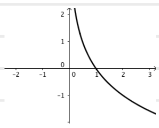
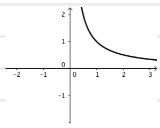
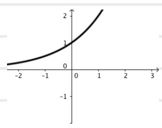
6. El domini de la funció $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ és:

a) $(-1, 1)$ b) $[-1, 1]$ c) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ d) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

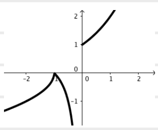
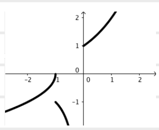
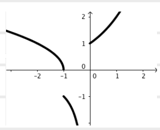
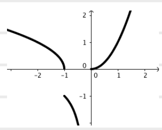
7. Els punts de tall de la funció $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$ amb l'eix de les abscisses són:

a) No en té b) (1, 0); (2, 0) c) (-1, 0); (2, 0) d) (0, $\ln 3$)

8. La gràfica de la funció $y = \log_2 x$ és:

a)  b)  c)  d) 

9. La gràfica de la funció $y = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x < -1 \\ \frac{1}{x} & -1 \le x < 0 \\ 2^x & x \ge 0 \end{cases}$ és:

a)  b)  c)  d) 

10. L'única funció NO periòdica de les següents és:

a) $y = \sin x$ b) $y = \operatorname{tg} x$ c) $y = \cos(e^x)$ d) $y = e^{\cos x}$

Resum

La funció lineal

Expressió

$y = mx + n$

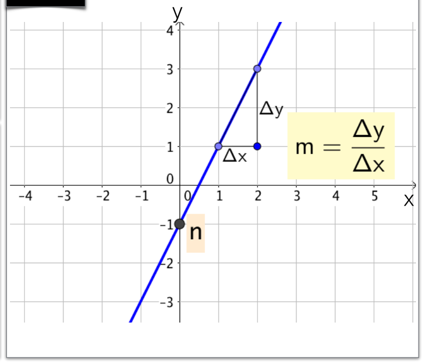
m: Pendent
n: Ordenada a l'origen

Propietats

Segons **m** $\left(\right.$ **m>0** creixent, **m=0** constant, **m<0** decreixent

n és el punt de tall amb l'eix Y

Gràfica



Proporcionalitat inversa

Expressió

$y = \dfrac{k}{x-a}$

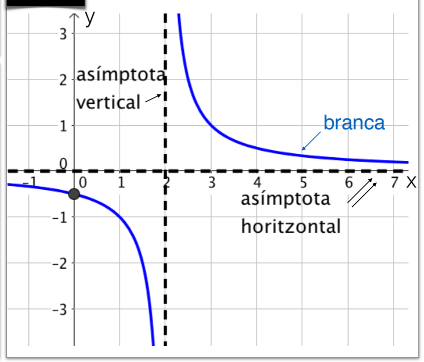
Propietats

x=a és una asímptota vertical
y=0 és una asímptota horitzontal

Les asímptotes separen les dues **branques**

No talla a l'eix X
Talla a l'eix Y a y=-k/a

Gràfica



La funció quadràtica

Expressió

$y = ax^2 + bx + c$

Propietats

Segons **a** $\left(\right.$ **a>0** còncava, **a=0** és lineal, **a<0** convexa

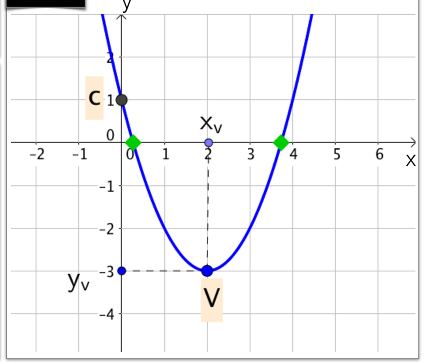
b controla la posició del **Vèrtex**

$x_v = \dfrac{-b}{2a}$ $\quad y_v = ax_v^2 + bx_v + c$

c és el punt de tall amb l'eix Y

$ax^2 + bx + c = 0$ talls amb l'eix X

Gràfica



Arrel quadrada

Expressió

$y = k\sqrt{x-a}$ $\quad y = k\sqrt{a-x}$

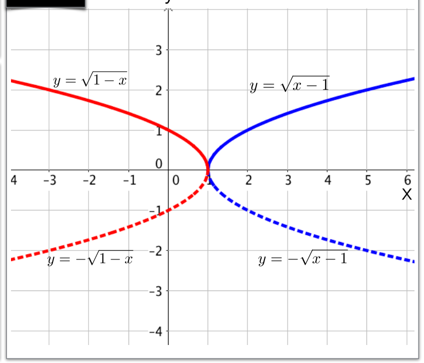
Propietats

Sempre és **positiva (k>0)**
negativa (k<0)

El domini és una semi-recta
(-∞, a] o [a, +∞)

És la funció **inversa** d'una paràbola

Gràfica



Funcions exponencials

Expressió

$y = b^x$ *b* positiu

Propietats

Sempre és **positiva**

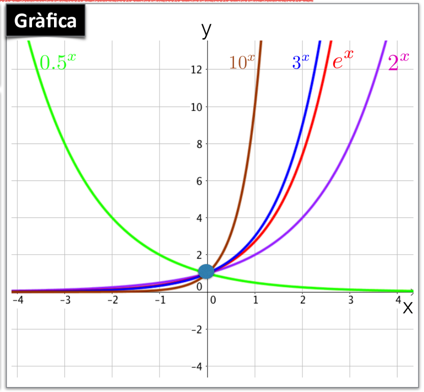
Segons **b** **0<b<1** decreixent; **b>1** creixent

Totes passen pel punt **x=0, y=1**

Cas important

$y = e^x, \quad e = 2.7182818$

Gràfica



Funcions trigonomètriques

Expressió

$y = \sin x$
$y = \cos x$
$y = \operatorname{tg} x$

IMPORTANTÍSSIM *x* = radiants

Propietats

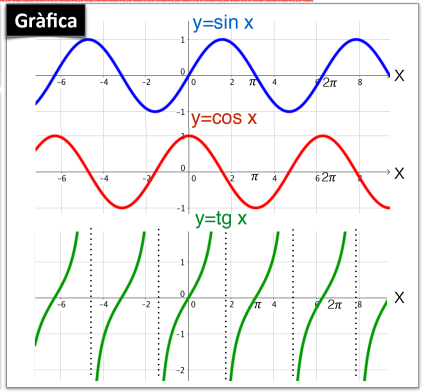
Sinus i Cosinus:

El domini és (-∞, +∞)
El recorregut és [-1,1]
Són periòdiques, amb període 2π

Tangent:

El domini és $\mathbb{R}-\{\pi/2 + n\cdot\pi\}$
És periòdica, amb període π
Té asímptotes verticals $x=\pi/2 + n\cdot\pi$

Gràfica



Funcions logarítmiques

Expressió

$y = \log_b x$ *b* positiu

Propietats

El domini és (0, +∞)

Segons **b** **0<b<1** decreixent; **b>1** creixent

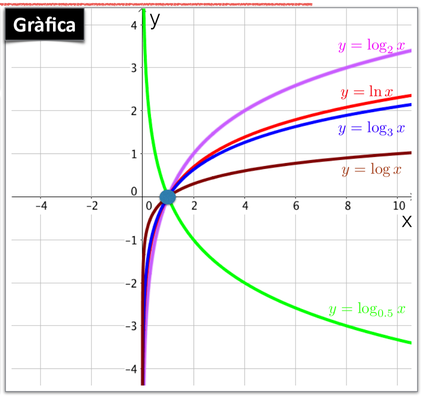
Totes passen pel punt **x=1, y=0**

Casos importants

$y = \log x, \quad b = 10,$ Logaritme decimal

$y = \ln x, \quad b = e,$ Logaritme Neperia

Gràfica



Funcions trigonomètriques inverses

Expressió

$y = \arcsin x$
$y = \arccos x$
$y = \operatorname{arctg} x$

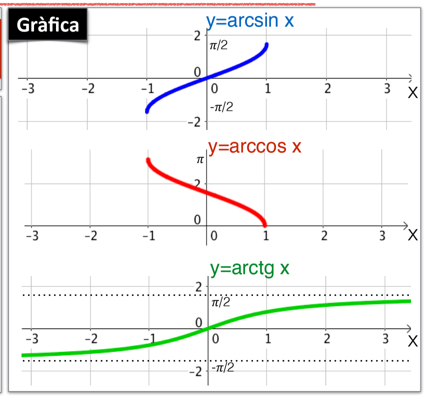
IMPORTANTÍSSIM *y* = radiants

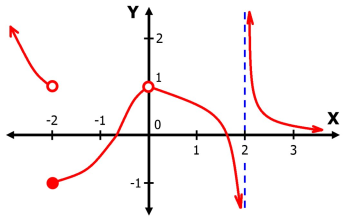
Propietats

Són funcions "multivaluades"

	Domini	Recorregut
arcsin x	[-1,1]	[-π/2, π/2]
arccos x	[-1,1]	[0, π]
arctg x	(-∞,∞)	[-π/2, π/2]

Gràfica





Tema 6

Límits i continuïtat

Índex

6.1 Concepte de límit

- Direm que x **tendeix a** a **per la dreta** ($x \to a^+$) si x pren valors majors que a i cada vegada més propers a ell,

  $x \to 3^+$ si $x =$3.1, 3.01, 3.001, $\cdots$.

- Direm que x **tendeix a** a **per l'esquerra** ($x \to a^-$) si x pren valors menors que a i cada vegada més propers a ell,

  $x \to 3^-$ si $x =$2.9, 2.99, 2.999, $\cdots$.

- Direm que x **tendeix a** a ($x \to a$) si x pren valors cada vegada més propers a a,

  $x \to 3$ si $x =$3.1, 2.99, 3.001, $\cdots$.

- Direm que x **tendeix a** $+\infty$ ($x \to +\infty$) si x pren valors positius cada vegada més grans,

  $x \to +\infty$ si $x =$10, 1000, 1000000, $\cdots$.

- Direm que x **tendeix a** $-\infty$ ($x \to -\infty$) si x pren valors negatius cada vegada més grans,

  $x \to -\infty$ si $x = -10, -1000, -1000000, \cdots$.

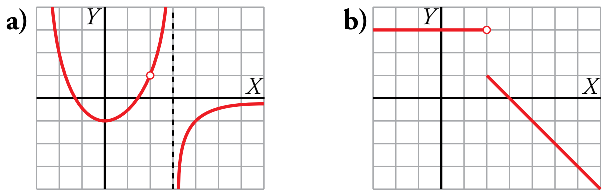
Direm que el límit d'una funció en un punt existeix si els dos **límits laterals coincideixen**, és a dir

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

1. Per a cadascuna de les funcions següents $f_1(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$, $f_2(x) = \dfrac{4}{3-x}$, $f_3(x) = 2^x$, completa en el teu quadern la taula adjunta, amb l'ajuda de la calculadora, i estima el valor de $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
$f(x)$					

2. Observant cadascuna de les gràfiques següents



troba $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

3. Calcula els límits laterals i determina si existeix el límit en les funcions següents definides a trossos, en els punts en els quals s'uneixen dues branques:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si\ x < 1 \\ 3x-2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x+3}{x+5} & si\ x < 1 \\ \dfrac{5x^2}{x+3} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & si\ x < 5 \\ x+5 & si\ x \geq 5 \end{cases}$

6.2 Càlcul de límits

Recorda: Podem classificar els límits en un punt en:

- **Immediats:** Només cal substituir el valor de x dins la funció.
- **Infinits:** Quan substituïm valor de x dins la funció, trobam una divisió per zero $\dfrac{k}{0}$. El límit pot donar $\pm\infty$. Cal calcular els dos límits laterals.
- **Indeterminats:** Una indeterminació és una expressió que no sabem el seu valor si no feim alguna cosa més. Cada tipus d'indeterminació té una tècnica per descobrir el seu valor.

  Són indeterminacions expressions com ara:

  $$0/0, \quad \infty/\infty, \quad \infty - \infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 1^\infty, ...$$

Límits a un punt

Vídeo 173: Límits de funcions racionals en un punt.

Exercici Resolt

1. Calcula els límits de la funció

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$$

quan

a) $x\to 1$
b) $x\to 3$
c) $x\to -3$

a) Immediat: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{1+3}{1-9}=-\frac{1}{2}$

b) Infinit: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{6}{0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{+6}{-0}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{+6}{+0}=+\infty\end{cases}$

c) Indeterminació 0/0: $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{0}{0}=\text{IND}=$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{6}$$

4. Calcula els següents límits, indicant el signe:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{5}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{5}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{-5}{x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{-5}{x-3}$

5. Calcula els límits següents

a) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2+3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{-x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

6. Calcula els límits següents

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3-4x^2+4}{(x-1)^2}\right)$ e) $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{3-h}-\sqrt{3}}{h}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2-\sqrt{2+x}}{x-2}\right)$

Regles bàsiques pel càlcul de límits

Me demanen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$		
Quan substutueixo x per a trob	*Què faré?*	*Exemple*
Un nombre	Res. Ja he acabat!	$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$
$\frac{k}{0}$	Calcular els límits laterals per saber si val $\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \end{cases}$
$\frac{0}{0}$ amb polinomis	Factoritzar i simplificar	$\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5}(x+5) = 10$
$\frac{0}{0}$ amb arrels	Racionalitzar i simplificar	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)} = \cdots = \frac{1}{6}$

Me demanen $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$		
Quan substitueixo x per $\pm\infty$ trob	*Què faré?*	*Exemple*
$\frac{k}{\infty}$	El límit val 0.	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = 0$
$\frac{\infty}{\infty}$ amb polinomis	Dividim tot per la major potència de x del denominador.	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2-2x+1} =$ dividim per x^2 $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+5/x^2}{3-2/x+1/x^2} = \frac{2}{3}$
$\frac{\infty}{\infty}$ amb arrels	El mateix que abans, però ara l'exponent dins d'una arrel queda dividit entre 2.	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2-2x+1}} =$ dividim per x $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+5/x}{\sqrt{3-2/x+1/x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
$\infty-\infty$ amb polinomis	Calcular el mcm i operar les fraccions	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} - x = \cdots = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$
$\infty-\infty$ amb arrels	Racionalitzar i simplificar	$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1} - x = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1}-x)\frac{(\sqrt{x^2-1}+x)}{(\sqrt{x^2-1}+x)} = \cdots = 0$

Límits a l'infinit

Vídeo 174: Com calcular límits de polinomis a l'infinit?

Vídeo 175: Com calcular límits de funcions racionals a l'infinit?

7. Classifica els següents límits en finits o infinits, i calcula'ls:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} -x^2$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} +x^2$ c) $\lim\limits_{x\to 3} x^2$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}$

8. Calcula els següents límits, indicant el signe:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3+2x^2+5$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3-7x+5$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2+x-4$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2-5x+4}$

Els límits de les funcions racionals a l'infinit segons els grau del numerador $D(x)$ i denominador $d(x)$ poden valer:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{D(x)}{d(x)} = \begin{cases} 0 & \text{grau } D < \text{grau } d \\ L & \text{grau } D = \text{grau } d \\ \pm\infty & \text{grau } D > \text{grau } d \end{cases}$$

9. Escriu, sense necessitat de fer càlculs, el valor dels límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+3}{5x^2+2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^5+3}{5x^2+2x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+3}{5x^7+2x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x}$

10. Calcula els límits següents

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+8}{-x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+8}{-x^5-2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+8}{-x^3-2}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{2}{x+2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{x-3}{x+2}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}}\right)$

El número e s'obté del límit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.718281828459045$$

Totes les indeterminacions del tipus 1^∞ estan relacionades amb el número e.

Els límits de les funcions exponencials a l'infinit segons la base, quan l'exponent $h(x) \to +\infty$ poden valer:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} < 1 \\ e^{\lim_{x\to\infty} h(x)\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)} & \text{si } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ \infty & \text{si } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} > 1 \end{cases}$$

11. Determina els límits següents:

a) $\lim_{x\to+\infty} 2^x$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $\lim_{x\to+\infty} 2^{-x}$ d) $\lim_{x\to+\infty} 10^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x\to+\infty} 10^{\frac{x^2+1}{x}}$ f) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2x-1}{x+1}}$ g) $\lim_{x\to+\infty} 5^{2x^2-1}$

12. Determina els límits següents:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+5}\right)^{3x^2}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$

Fitxa de límits

13. Calcula els següents límits utilitzant les tècniques adequades en cada cas

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x^2}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2}{2x^2}$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}$ (4) $\lim_{x\to 1/2}\frac{x+1}{2x-1}$

(5) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$ (6) $\lim_{x\to -7}\frac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$

(7) $\lim_{x\to -2}\frac{x-3}{x^2-4}$ (8) $\lim_{x\to 4}\frac{2x-3}{(x-4)^2}$

(9) $\lim_{x\to 1}\frac{3x}{x-1}$ (10) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$

(11) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$ (12) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x^3-3x^2+11x-6}{x^3-4x^2+5x-2}$

(13) $\lim_{x\to+\infty} (3x-5)$

(14) $\lim_{x\to+\infty} (-3x+7)$

(15) $\lim_{x\to-\infty} (6x^2-10x+17)$

(16) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$

(17) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-14}{x^2}$

(18) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x-5}$

(19) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x^2-4x+1}$

(20) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1}$

(21) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-7x^2+3x}{3x^2-4x+1}$

(22) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{2x+7}$

(23) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+8x}{x-4}$

(24) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+8x}{x-4}$

(25) $\lim_{x\to 3\pi/2} \sin x$

(26) $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x$

(27) $\lim_{x\to 0^+} \log_2 x$

(28) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x+1}}$

(29) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1}$

(30) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x}$

(31) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+5x^3-x+3}$

(32) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11}$

(33) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - \frac{2x^2-3x+1}{2(x-2)}\right)$

(34) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+1}}$

(35) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{2x^3-4x}}$

(36) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^3+2x}}$

(37) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-4}}$

(38) $\lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{x}}{2x-4}$

(39) $\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{\sqrt{2-\sqrt{2x}}}$

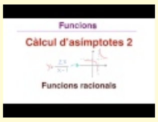
(40) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-x}{3-x}$

(41) $\lim_{x\to 3} \frac{2x-\sqrt{4x-3}}{x^2-9}$

(42) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right)$

6.3 Asímptotes

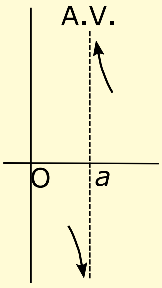
Asímptotes verticals



Vídeo 177: Asímptotes verticals i horitzontals

Perquè una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tingui una asímptota vertical, el denominador ha d'ésser igual a zero i el numerador diferent de zero. El procediment consisteix resoldre l'equació $Q(x) = 0$.

⚠ Cal assegurar-se que no tenim 0/0, ja que no té perquè ésser una asímptota.



Per a cada valor $x = a$ tal que $Q(a) = 0$, estudiam la posició relativa calculant els dos límits laterals:

$$\lim_{x\to a^-} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$$

d'aquesta forma sabem si s'acosta cap a $\pm\infty$ al voltant de l'asímptota vertical.

14. Determina les asímptotes verticals de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)}$

b) $f(x) = \dfrac{x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

c) $f(x) = \dfrac{(x+4)^2}{(x-1)\cdot(x+4)}$

d) $f(x) = \dfrac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)}$

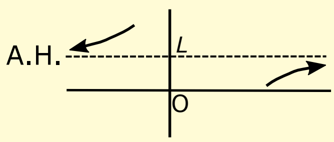
Asímptotes horitzontals

Perquè una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tingui una asímptota horitzontal, el grau $P \leq$grau Q. L'asímptota és la recta horitzontal $y = L$, essent $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Nota: Quan grau $P <$ grau Q, la recta $y = 0$ és l'asímptota horitzontal.

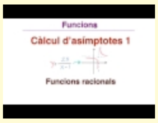
Per saber si ens acostam per damunt o davall de l'asímptota horitzontal $y = L$ construïm una taula amb dos valors grans (un negatiu i l'altre positiu).

x	y	pos
-100	...	amunt
100	...	avall



15. Determina les asímptotes horitzontals de les funcions de l'exercici 14.

Asímptotes obliqües i branques parabòliques



Vídeo 176: Asímptotes obliqües

Perquè una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tingui una asímptota obliqua, el graus han de complir grau $P(x)$ =grau $Q(x) + 1$. L'equació de l'asímptota obliqua s'obté del quocient de la divisió de $P(x) : Q(x)$.

Si es compleix que grau $P(x)$ >grau $Q(x)+1$, aleshores la funció creix més ràpidament que una recta, es diu que té branques parabòliques.

16. Determina l'asímptota obliqua, si existeix, de cadascuna de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}$ b) $f(x) = \dfrac{3x^2\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

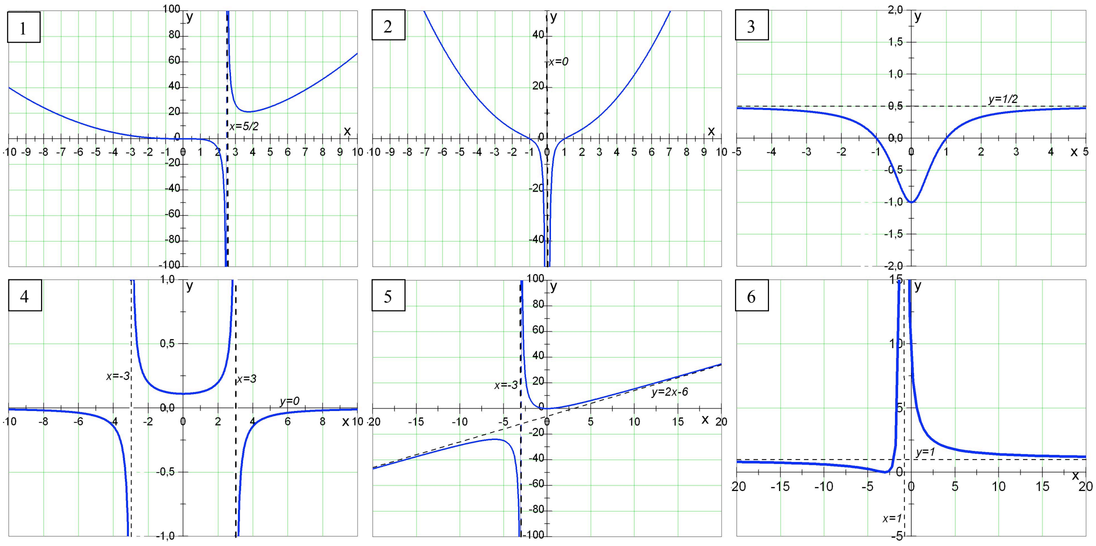
c) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2(x-1)}$ d) $f(x) = \dfrac{2x^2+4}{x+1}$

17. Analitza el comportament a l'infinit de cadascuna de les funcions següents:

a) $f(x) = (x+4)^2$ b) $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$

Calcul d'asímptotes i representació gràfica

18. Identifica el tipus d'asímptota i associa cada gràfic amb la seva expressió analítica:



a) $y = \dfrac{x^4-1}{x^2}$ b) $y = \dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$ c) $y = \dfrac{1}{9-x^2}$

d) $y = \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$ e) $y = \dfrac{2x^2}{x+3}$ f) $y = \dfrac{x^3}{2x-5}$

19. Determina les asímptotes i representa la posició relativa de la funció respecte de les asímptotes:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 3}$

b) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{-5x}{(x-1)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{-5x^4 - 5}{(x-1)^2}$

g) $f(x) = \ln \dfrac{5x}{(x-1)^2}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x}{(x-1)^2}}$

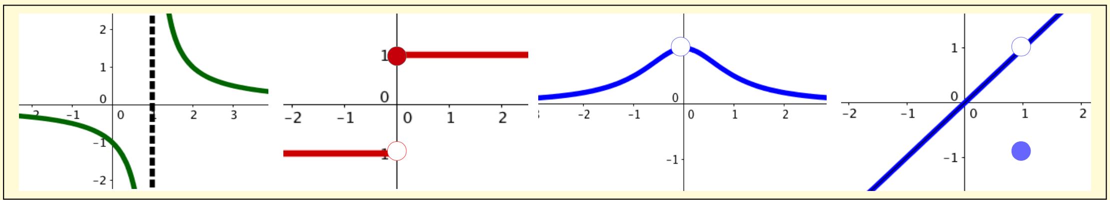
6.4 Continuïtat de funcions

Tipus de discontinuïtats

Existeixen 4 motius pels quals una funció pot ser discontínua en un punt $x = a$:

1. **Salt infinit o discontinuïtat asimptòtica:** La funció presenta una asímptota en $x = a$
2. **De salt finit:** La funció presenta un bot
3. **Li falta un punt:** No es pot calcular el valor de la funció a $x = a$
4. **Punt desplaçat:** Aquest cas, el punt existeix però es troba a una altura incorrecta.

Els casos 3, 4 s'anomenen **discontinuïtats evitables.**



Funció contínua en un punt

Per a que una funció sigui contínua en un punt $x = a$ s'ha de complir:

1. Els límits $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x)$ han d'ésser finits (Evitam asímptotes)
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (Evitam salts)
3. Existeix $f(a)$] (Evitam li falta un punt)
4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (Evitam punt desplaçat)

Una funció és diu que és contínua si és contínua en tots els punts del seu domini.

20. Estudia la continuïtat de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x-5}$

c) $f(x) = \log_2(x-3)$

d) $f(x) = \begin{cases} 2+x^2 & si\ x \leq 0 \\ 1+e^x & si\ x > 0 \end{cases}$

21. Estudia la continuïtat de les funcions següents:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si & x < -1 \\ 2+x^2 & si & -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{3}{x} & si & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = x - \sqrt{x-2}$

c) $f(x) = |x-3| - 1$

22. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat. Representa-les gràficament.

a) $f(x) = \begin{cases} 3^x & x < -2 \\ 4-x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ \log_2 x & x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ x^2-3x & 0 \leq x < 3 \\ \sqrt{x-3} & x \geq 3 \end{cases}$

c) $h(x) = |x^2 - 5x|$

23. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a) $f(x) = |x^2 - 25|$

b) $g(x) = 2 - \dfrac{|x|}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2|x|}{x-3}$

24. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a) $f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$

b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-4}}$

c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{x^2-3x}}$

25. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{4-x}{x-5}\right)$

b) $g(x) = \ln(-x^2 - x + 2)$

c) $h(x) = e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$

d) $i(x) = e^{\sqrt{x-5}}$

26. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 0 \\ 2+e^x & x \geq 0 \end{cases}$. a) Estudia la seva continuïtat. b) Representa la seva gràfica.

27. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x-3 & x<-1 \\ x^2-5 & -1 \le x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$. a) Estudia la seva continuïtat. b) Representa la seva gràfica.

28. Esbossa la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2-25}$ indicant les seves asímptotes i els seus punts de discontinuïtat.

Discussió de la continuïtat en funció d'un paràmetre

Exercici Resolt

2. Determina el valor de k perquè la funció $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & si\ x \le 1 \\ k+x & si\ x>1 \end{cases}$ sigui contínua en tota la recta real.

Donat que el primer tros és una paràbola i el segon tros una línia recta, cada funció per separat és contínua. L'únic que hem d'imposar és que sigui contínua en el punt d'unió $x=1$ de la funció a trossos.

Estudiam la continuïtat en el punt $x=1$:

1. Els límits laterals són finits; no té asímptotes
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2-x^2 = 2-1^2 = 1$ i

   $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} k+x = k+1$.

   Si imposam que els dos límits laterals siguin iguals, $1 = 1+k$ ens duu al resultat $k=0$.
3. Existeix $f(1)=1$
4. També es compleix que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$.

La resposta és que $k=0$.

29. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x<2 \\ k+x & x \geq 2 \end{cases}$. a) Determina el valor de k perquè la funció sigui contínua en tota la recta real. b) Representa la seva gràfica

30. Calcula k perquè la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x=1 \end{cases}$ sigui contínua.

31. En la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{px+1}{x-4} & x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-x} & x>1 \end{cases}$ a) Troba el valor de p perquè sigui contínua en $x=1$. b) Hi ha algun altre punt en què sigui discontínua?

32. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} 3-ax^2 & x \le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & x>1 \end{cases}$ segons el valor del paràmetre a.

33. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq a \\ a+2 & x > a \end{cases}$ segons el valor del paràmetre a.

34. Determina a i b perquè la funció $f(x) = \begin{cases} \ln x & 0 < x \leq 1 \\ ax^2 + b & x > 1 \end{cases}$ sigui contínua i compleixi que $f(2) = 3$.

Autoavaluació

1. Calcula el límit $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$.

2. Calcula el límit $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - x - 2) \cdot \left(\frac{1}{x + 2} \right)$.

3. Calcula el límit $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} \right)$.

4. Calcula el límit $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{2 + x} - 1}{x + 1}$

5. Calcula els límits a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3 + 7x - 4}{x^3 + 3}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3 + 7x - 4}{x^2 + 3}$

6. Calcula el límit $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x - 2} \right)^{2x^2 + 1}$

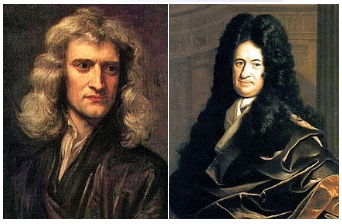
7. Estudia la continuïtat de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3}{x} & si\ x < 0 \\ 3x + 2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

8. Estudia la continuïtat de $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & si\ x < 2 \\ 3x + 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.

9. Troba el valor de k perquè $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x + k & si\ x > 2 \end{cases}$ sigui contínua en $x = 2$.

Resum

Apartat	Resum
Límit lateral per la dreta	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ tendeix a L quan x tendeix a a, sempre que es compleixi $x > a$ La funció $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ té lateral per la dreta 8, ja que $\lim\limits_{x\to x\to 2^+} x^3 = 2^3 = 8$
Límit lateral per l'esquerra	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ si el valor $f(x)$ tendeix a L quan x tendeix a a, sempre que es compleixi la condició $x < a$.
Existència del límit	El límit existeix si els dos límits laterals són iguals $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$
Asímptotes	Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = K$ hi ha una asímptota horitzontal $y = K$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ hi ha una asímptota vertical a $x = a$. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ té asímptota horitzontal $y = 2$ i asímptota vertical $x = 1$.
Continuïtat d'una funció en un punt	Una funció $f(x)$ és contínua en el punt $x = a$, si es compleixen: 1. Els límits $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x)$ són finits 2. Existeix el límit $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. 3. Existeix $f(a)$ 4. El límit i la funció coincideixen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ La condició 1. assegura que no hi ha asímptotes verticals. La condició 2. significa que no hi ha salts finits. La condició 3. vol dir que no falten punts i finalment 4. assegura que no hi ha punts desplaçats.
Tipus de discontinuïtats	Asímptòtica o salt infinit; De salt finit; Evitables: Li falta un punt, i té un punt desplaçat. $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x > 2 \end{cases}$ evitable (li falta un punt) en x = 2 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ té un salt infinit en $x = 0$



Isaac Newton (1643-1727) i
Gottfried Leibniz (1646-1716)

Tema 7

Derivades i aplicacions

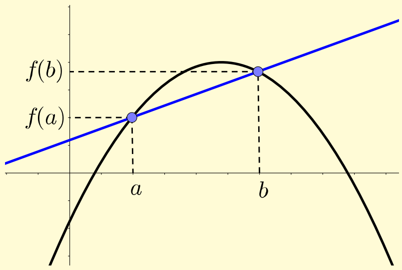
Índex

7.1 Concepte de derivada

La **taxa de variació mitjana** (TVM) d'una funció en un interval $[a,\ b]$ es defineix com:

$$TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

i correspon al **pendent de la recta secant** a la funció en els punts d'abscisses a i b.



1. Troba la taxa de variació mitjana en els intervals [-3, 2], [1, 5] i [0, 3] de les funcions següents:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista del que has obtingut, creus que la taxa de variació mitjana de les funcions polinòmiques de primer grau és sempre constant i igual al pendent de la recta que la representa?

2. Troba la taxa de variació mitjana de la funció $y = x^2 - 1$ en els intervals [-3, 2], [1, 5] i [0, 3]. És ara constant?

3. Troba la taxa de variació mitjana de la funció $y = x^3 + 1$ en els intervals [-3, 2], [1, 5] i [0, 3]. Hauràs comprovat que en els dos últims exercicis la taxa de variació mitjana no és constant.

4. En fer un estudi sobre l'aterratge d'avions es grava una pel·lícula des del moment en què l'avió toca terra fins que es para, i es mesuren els temps i les distàncies recorregudes:

Temps (t) en segons	0	2	4	6	8	10	12	14
Distància (d) en metres	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocitat mitjana de l'avió.

b) Calcula la velocitat mitjana en els intervals: [0, 6], [2, 10] i [6, 14].

c) És constant?

5. S'estudia la posició d'un cotxe respecte de la sortida d'un túnel i s'obtenen les dades següents:

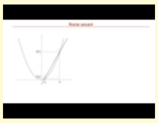
Temps (segons)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distància (metres)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocitat mitjana del cotxe en l'interval [0, 40].

b) Calcula la velocitat mitjana en els intervals [15, 25] i [20, 30]. És constant?

c) Si la velocitat màxima permesa és de 120 km/h, consideres que ha pogut sobrepassar-la en algun moment? I si la velocitat màxima anés de 80 km/h?

Derivada en un punt

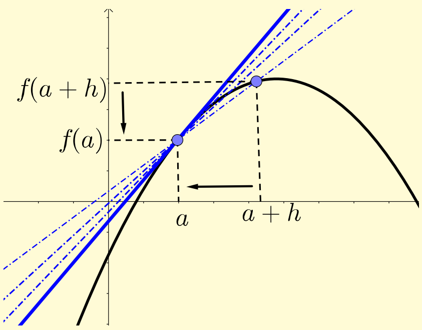


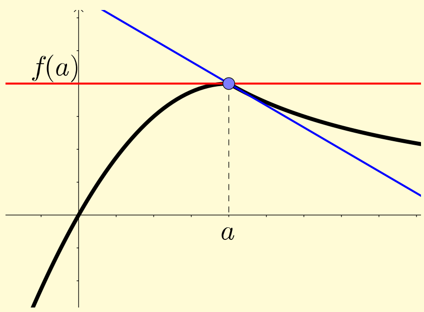
Vídeo 183: Definició de derivada

La **derivada d'una funció** $f'(a)$ en un punt $x = a$ es defineix com:

$$f'(a) = \lim_{a \to b} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{7.1}$$

i proporciona el **pendent de la recta tangent** a la funció en els punt d'abscissa a.





Per a que una funció sigui derivable, ha d'existir el límit anterior. Això passa si la funció és suau o arrodonida, és a dir, no presenta punts angulosos com ara la figura de la dreta.

1. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ en el punt d'abscissa $x = 1$.	Utilitzam la definició de derivada Eq. (7.1) quan $a = 1$: $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$ Necessitam calcular $f(1) = 0$, $f(1+h) = 3(1+h)^2 - 5(1+h) + 2$; si substituïm, el límit ens queda: $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h)^2 - 5(1+h) + 2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + 3h^2}{h} = 1$$ on hem simplificat el numerador i resolt la indeterminació $0/0$.

6. En llançar un objecte verticalment cap amunt l'altura (en metres) y, que aconsegueix als x segons ve donada per la funció: $y = 40x - 5x^2$

a) Escriu una taula de valors i dibuixa la gràfica de la funció. Té sentit per a valors de x menors que 0? I majors a 8?

b) Calcula la velocitat mitjana en els intervals: [0, 2], [0, 8], [1, 4], [4, 8] i [1, 8].

c) Quina és l'altura màxima aconseguida per l'objecte?

7. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = x^3$ en el punt $x = 2$.

8. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.

9. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = \dfrac{1}{x^2}$ en $x = 4$.

10. Dóna un exemple de funció no derivable i que sí sigui contínua.

Funció derivada

Hem vist que la derivada en un punt $f'(a)$ és un nombre que proporciona el pendent de la recta tangent.

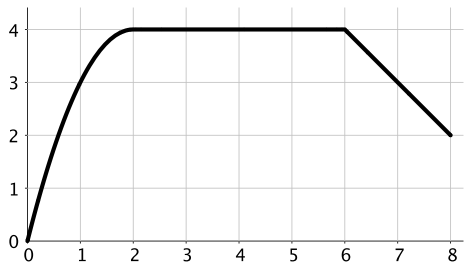
La funció derivada $f'(x)$ dóna el valor de la derivada per un punt x qualsevol. Per exemple:

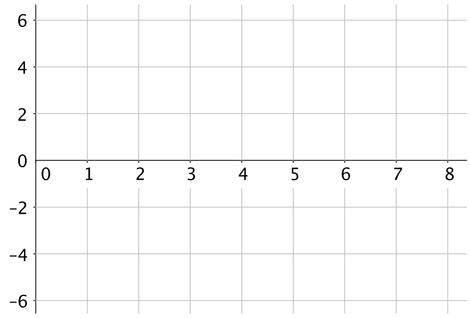
Si ens diuen que la funció derivada $f'(x) = 2x$, aleshores tenim una "regla" per trobar tots els pendents. Si volem el pendent per a $x = 0$ $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$, el pendent per a $x = -3$ $f'(0) = 2 \cdot (-3) = -6$, etc.

$f'(x)$ és pot obtenir a través de la definició 7.1 tot i que, com veurem, serà més còmode a partir de les regles de derivació.

11. Representa gràficament la funció $y = \begin{cases} x+2 & 0 \le x < 2 \\ 4 & 2 \le x < 4 \\ -\frac{x}{2} + 6 & x \ge 4 \end{cases}$. En una altra gràfica representa la seva funció derivada.

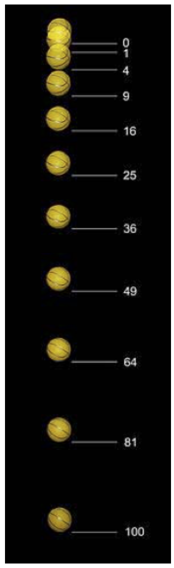
12. Sobre la funció $y = f(x)$ de la figura dibuixa la recta tangent en els punts $x = 1,\ 1.5,\ 4,\ 5,\ 7$. En els eixos de la dreta esbossa la gràfica aproximada de la seva funció derivada.





13. Des d'un avió nodrissa es deixa anar un avió experimental que el seu impulsor s'encén a la màxima potència i roman encès 20 segons. La distància que separa a l'avió experimental de l'avió nodrissa ve donada per $d = 0'3t^4$. Calcula la velocitat de l'avió experimental als 3, 4, 7 i 10 segons d'haver estat deixat anar.

14. Caiguda lliure d'una pilota. En la figura es mostren, mitjançant fotografia estroboscòpica[a], les posicions de la pilota a intervals regulars de temps: per a t = 1, 2, 3, 4, 5, ..., l'espai recorregut és proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la funció de posició $y = f(t)$, i calcula la velocitat i l'acceleració derivant la funció de posició.



[a] Un llum estroboscòpica és un instrument que il·lumina una escena durant intervals regulars de temps. Si utilitzem aquest tipus de llum sobre un moviment repetitiu, com la rotació d'una roda, i l'interval coincideix amb un període complet de moviment, l'objecte semblarà estàtic a l'observador.

15. Dibuixa una funció qualsevol i un punt qualsevol sobre la funció $f(a)$. Dibuixa també un segment sobre l'eix d'abscisses amb origen en a i longitud h. Interpreta de nou la definició de derivada en un punt basant-te en aquesta figura.

16. Calcula la derivada de la funció $y = x^2 - x + 1$ en el punt $x = 1$ mitjançant la definició amb límit. Repeteix el càlcul per un punt arbitrari $x = a$. Calcula mitjançant l'expressió resultant $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(12)$, $f'(5.43)$ i $f'(-7)$.

7.2 Regles de derivació

Vídeo 184: Taula de derivades

Vídeo 185: Regla de la cadena

Vídeo 186: Producte i quocient de funcions

Taula de derivades

Funcions elementals		*Funcions compostes*	
$y=f(x)$	$y'=f'(x)$	$y=f(g(x))$	$y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
$y=k$	$y'=0$		
$y=x$	$y'=1$		
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$y=[g(x)]^n$	$y'=n[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{g(x)}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$y=\sin g(x)$	$y'=\cos g(x)\cdot g'(x)$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$y=\cos g(x)$	$y'=-\sin g(x)\cdot g'(x)$
$y=\operatorname{tg} x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=$ $=1+\operatorname{tg}^2 x$	$y=\operatorname{tg} g(x)$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 g(x)}\cdot g'(x)=$ $=[1+\operatorname{tg}^2 g(x)]\cdot g'(x)$
$y=\operatorname{cotg} x$	$y'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$y=\operatorname{cotg} g(x)$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 g(x)}\cdot g'(x)$
$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arcsin g(x)$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\cdot g'(x)$
$y=\arccos x$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arccos g(x)$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\cdot g'(x)$
$y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$y=\operatorname{arctg} g(x)$	$y'=\dfrac{1}{1+g^2(x)}\cdot g'(x)$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{g(x)}$	$y'=e^{g(x)}\cdot g'(x)$
$y=a^x$	$y'=a^x\ \ln a$	$y=a^{g(x)}$	$y'=a^{g(x)}\ \ln a\cdot g'(x)$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\ln g(x)$	$y'=\dfrac{1}{g(x)}\cdot g'(x)$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a}$	$y=\ln g(x)$	$y'=\dfrac{1}{g(x)}\cdot\dfrac{1}{\ln a}\cdot g'(x)$

Regles de derivació:

- Derivada de constant per funció: $y=k\,f(x)\to y'=k\,f'(x)$
- Derivada de sumes / restes: $y=f(x)+g(x)\to y'=f'(x)+g'(x)$
- Regla de la cadena: $y=f(g(x))\to y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$y=\ln(\operatorname{tg} x)\to y'=\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

- Derivada d'un producte: $y=f(x)\cdot g(x)\to y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

$$y=x^2\sin x\to y'=2x\sin x+x^2\cos x=x(2\sin x+x\cos x)$$

- Derivada d'un quocient: $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}\to y'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$$y=\frac{x^2}{x^3-4}\to y'=\frac{2x\cdot(x^3-4)-x^2\cdot(3x^2)}{(x^3-4)^2}=\frac{-x^4-8x}{(x^3-4)^2}$$

17. ✎Completa en el teu quadern la següent taula amb les derivades:

Funció $f(x)$	x^3	2	x^2	x	k	$2x+3$	$2x^2+3x$
Derivada $f'(x)$	$3x^2$						

18. Escriu les funcions derivades de les funcions següents:

a) $f(x) = x^{24}$ b) $g(x) = 6x^{10}$ c) $h(x) = \frac{2}{13}x^{13}$

d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ e) $p(x) = 5x^3 - x$

19. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{x\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x}}$ c) $f(x) = 5\sqrt{x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$

20. Ja hem obtingut la derivada de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Utilitza-la per obtenir la derivada en x = 1, 4, 5... Pots obtenir la derivada en x = 0? Raona la resposta.

21. Calcula les derivades simplificades utilitzant la regla de la cadena per funcions compostes

a) $f(x) = (x^2 + x + 1)^3$ b) $f(x) = (\ln(2x+3))^5$

c) $f(x) = (3x^4 + 7)^5$ d) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 7}$

e) $f(x) = e^{-x^2}$ f) $f(x) = \sin(\ln x)$

g) $f(x) = \ln(\sin\sqrt{x})$ h) $f(x) = \ln(\text{tg}(x^2+1))$

EXEMPLE

a) $f(x) = (x^2 + x + 1)^3 \quad \rightarrow$

$$f'(x) = 3(x^2 + x + 1)^2 \cdot (2x + 1 + 0) = 3(2x+1)(x^2 + x + 1)^2$$

b) $f(x) = (\ln(2x+3))^5 \quad \rightarrow$

$$f'(x) = 5(\ln(2x+3))^4 \cdot \frac{1}{2x+3} \cdot 2 = 10\ln^4(2x+3)\frac{1}{2x+3}$$

22. Calcula les derivades simplificades de les següents funcions:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12}$ b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7$

c) $y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

23. Calcula les derivades simplificades de les següents funcions:

a) $y = \sin(x^5 - 7x^3)$ b) $y = \sin^7(3x^3 - 5x^2)$ c) $y = \sqrt[3]{\sin(2x^2 + 4x^7)^4}$

24. Calcula les derivades simplificades de les següents funcions:

a) $y = \cos(e^{x^5} + 4x^3)$ b) $y = (\operatorname{cotg}(5x^3 - 3x^2))^4$ c) $y = \operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2$

25. Calcula les derivades simplificades utilitzant la regla del producte

a) $f(x) = x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$ b) $f(x) = x \cdot \ln x$

c) $f(x) = 3^x \cdot \operatorname{tg} x$ d) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$

e) $f(x) = 5x^2 \cdot \operatorname{arctg} x$ f) $f(x) = \ln(x + 1) \cdot \sin x^2$

EXEMPLE

a) $f(x) = x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x \quad \rightarrow$

$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = (1 - x^2)\sin x + 3x \cos x$

26. Calcula les derivades simplificades utilitzant la regla del quocient

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \dfrac{(x - 1) \cdot (x - 2)}{(x - 3) \cdot (x - 4)}$ h) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}$

EXEMPLE

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

27. Calcula les derivades utilitzant les regles de derivació

a) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$ b) $f(x) = \dfrac{e^{4x} + e^{-x}}{2x}$

c) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{2x - 1}$ d) $f(x) = (\cos(2x))^2 \cdot e^{-(2x+1)^2}$

28. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$ b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$

c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$

29. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ b) $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{x+2}$ d) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3 + 5}$

e) $y = \dfrac{(x^4 - 2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$ f) $y = \dfrac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2}$

• Derivades amb logaritmes:

En comptes de derivar directament la funció $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x+5}$, resulta més senzill aplicar les propietats dels logaritmes de la pàgina 67. Separam la funció en diferents logaritmes:

$$y = \ln \sqrt{x^2+1} - \ln(3x+5) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \ln(3x+5)$$

ara derivam la darrera expressió fàcilment:

$$y' = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+5}$$

• Derivació logarítmica:

Ens adonam que la funció $y = x^x$ no és ni potència ni exponencial i, per tant, no tenim cap fórmula per derivar-la. El que feim és prendre logaritmes als dos membres, aplicam les propietats i derivam aplicant la regla de la cadena

$$\ln y = \mathbf{x} \cdot \ln x \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{y} y' = \ln x + x \frac{1}{x}$$

finalment, aïllam la derivada $y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$.

30. Calcula les derivades (Utilitza les propietats dels logaritmes pàg. 67):

a) $y = \log(x^5 - 7x^3)^{12}$ b) $y = \log_2(3x^3 - 5x^2)^7$

c) $y = \ln \sqrt{\frac{(4x^5-8x^3)^5}{3x-2}}$ d) $y = \ln \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

31. Utilitza derivació logarítmica per calcular les derivades de les següents funcions:

a) $y = x^{x^5 - 7x^3}$ b) $y = (x+1)^{3x^3 - 5x^2}$ c) $y = x^{(4x^5 - 8x^3)^5}$

32. Utilitza derivació logarítmica per calcular les derivades de les següents funcions:

a) $y = \dfrac{(x-1) \cdot (2x-3)}{x+2}$ b) $y = \dfrac{(3x^2+4) \cdot (4x-2)}{7x-1}$ c) $y = \dfrac{(x+9) \cdot (2x-3)}{(x+3) \cdot (x+2)}$

7.3 Càlcul de la recta tangent i normal

La recta tangent a una corba $y = f(x)$ en el punt $x = a$, ha de passar pel punt $(a,\ f(a))$ i ha de tenir com a pendent $m = f'(a)$. Aleshores, si escrivim l'equació punt-pendent de la recta obtenim

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

La recta **normal** és perpendicular a la recta tangent i, per tant, té pendent $m_{\perp} = -1/f'(a)$.

Exercici Resolt

2. Calcula l'equació de la recta tangent a la funció $$y = x^3 - 3x$$ en $x = 2$.	Primer cercam el punt per on passa la recta. $x = 2$, $y = 2$. El pendent de la recta en $x = 2$ és $m = f'(2)$. Calculam la derivada de la funció $f'(x) = 3x^2 - 3$ i l'avaluam a $x = 2$, $f'(2) = 9$. Escrivim l'equació punt-pendent $y - 2 = 9(x - 2)$ o $y = 9x - 16$.

33. Calcula l'equació de la recta tangent en cadascuna de les funcions següents en el punt que s'indica

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = -2$

b) $y = \sqrt{10 - x^2}$ en $x = 1$

c) $y = \cos x$ en $x = \frac{\pi}{4}$

d) $y = \ln x$ en $x = e$

34. Calcula les rectes normals de les gràfiques de les funcions següents en els punts indicats:

a) $y = x^3$ en $x = 2$

b) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x = 0$

c) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$

d) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$

35. Determina les coordenades dels punts de la gràfica $y = x^3 - 3x + 2$ en els quals la seva tangent sigui paral·lela: a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 6x$.

36. Determina la recta tangent de la gràfica de la funció $y = \sqrt[2]{x^3}$ en $x = 0$.

37. Determina les rectes tangents a la funció $f(x) = 4x^3 - 12x$ en els punts en els quals el pendent és 12. Quin és el menor valor que pot tenir el pendent a aquesta corba? En quins punts s'aconsegueix?

38. Determina la recta tangent a la funció $f(x) = x^3 - 3x$ en el punt $A(-1, 2)$. En quin un altre punt talla la recta tangent a la funció?

39. Determina els coeficients a , b i c de la funció $f(x) = ax^3 + bx + c$, que passa pel punt $A(1, 2)$ i és tangent a la recta $y = x$ en el punt $O(0, 0)$.

40. Determina els coeficients a, b i c perquè les funcions $f(x) = x^3 + bx + c$ i $g(x) = ax - x^2$ tinguin la mateixa recta tangent en el punt $A(1, 0)$.

41. Determina el coeficient a, perquè la funció $f(x) = x^2 + a$, sigui tangent a la recta $y = x$.

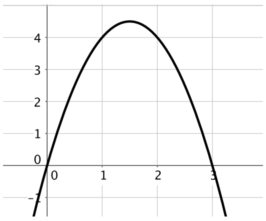
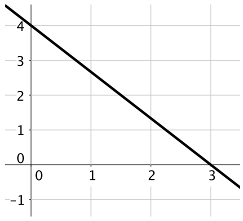
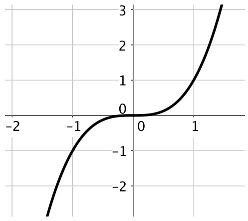
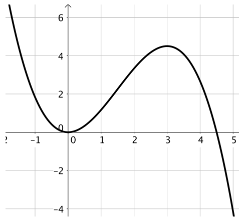
7.4 Monotonia i extrems d'una funció

La primera derivada d'una funció ens serveix per saber si és creixent o decreixent, així com determinar els seus màxims i mínims relatius.

Si $f'(x) > 0$	La funció és creixent
Si $f'(x) < 0$	La funció és decreixent
Si la funció té un extrem (màxim o mínim)	es compleix $f'(x) = 0$

Les solucions de l'equació $f'(x) = 0$ s'anomenen **punts crítics** i són possibles màxims o mínims.

42. Si $f'(x) = x \cdot (3 - x)$, quina de les següents gràfiques podria ser la de $f(x)$?

43. Determina els intervals de creixement i decreixement de

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

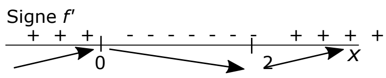
c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$

3. Troba els extrems de $y = x^3 - 3x^2$

Calculam la derivada $y' = 3x^2 - 6x$. Resolem l'equació $3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$ i $x = 2$ són els punts singulars.

Per saber si aquests punts són màxims o mínims estudiam el creixement/decreixement. Per això calculam el signe de f'



La funció és creixent a $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ i decreixent a $(0, 2)$. Té un màxim al punt $(0, 0)$ i un mínim relatiu a $(2, -4)$.

44. Determina els intervals de creixement, decreixement, els màxims i mínims de les funcions següents

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$

d) $f(x) = x^2 e^x$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$

f) $f(x) = x + 5 - 2 \sin x$

45. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció: $y = x^3 - 3x$. Com és en $x = 0$? I en $x = 2$? I en $x = -2$? Repeteix l'activitat per a la funció $y = x^3 + 3x$.

46. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.

47. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.

7.5 Curvatura i punts d'inflexió

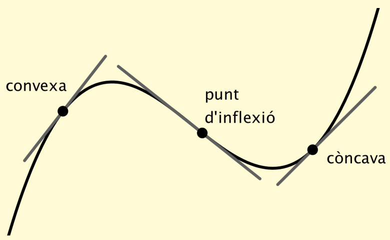
Derivades successives:

Donat que la derivada d'una funció és una altra funció, aquesta es pot tornar a derivar obtenint així la derivada segona. Si derivam la derivada segona obtenim la derivada tercera i així successivament.

Per exemple, $y = x^4 - 5x^2 - 3$
Té derivada primera $y' = 4x^3 - 10x$
Derivada segona $y'' = 12x^2 - 10$
Derivada tercera $y''' = 24x$
Derivada quarta $y^{iv} = 24$
i les demés derivades són zero.

48. Calcula la derivada segona de les següents funcions

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$
b) $f(x) = \sin x + \ln x$
c) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$
d) $f(x) = x \cdot \ln x$
e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$
f) $f(x) = x^2 - 3\cos x^2$



- Una funció és **convexa** si la recta tangent es troba per damunt d'ella.
- Una funció és **còncava** si la recta tangent es troba per davall d'ella.
- Una funció té un **punt d'inflexió** si la recta tangent l'atravessa.

La segona derivada d'una funció ens serveix per determinar la seva curvatura i els punts d'inflexió.

Si $f''(x) > 0$	La funció és còncava $\cup$
Si $f''(x) < 0$	La funció és convexa $\cap$
Si la funció té un punt d'inflexió	es compleix $f''(x) = 0$

A més, existeix una condició entre els extrems i la segona derivada:

Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$	$x = a$ és un mínim relatiu
Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$	$x = a$ és un màxim relatiu

49. Determina la curvatura i els punts d'inflexió de les funcions següents

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

f) $f(x) = e^{-2x^2}$

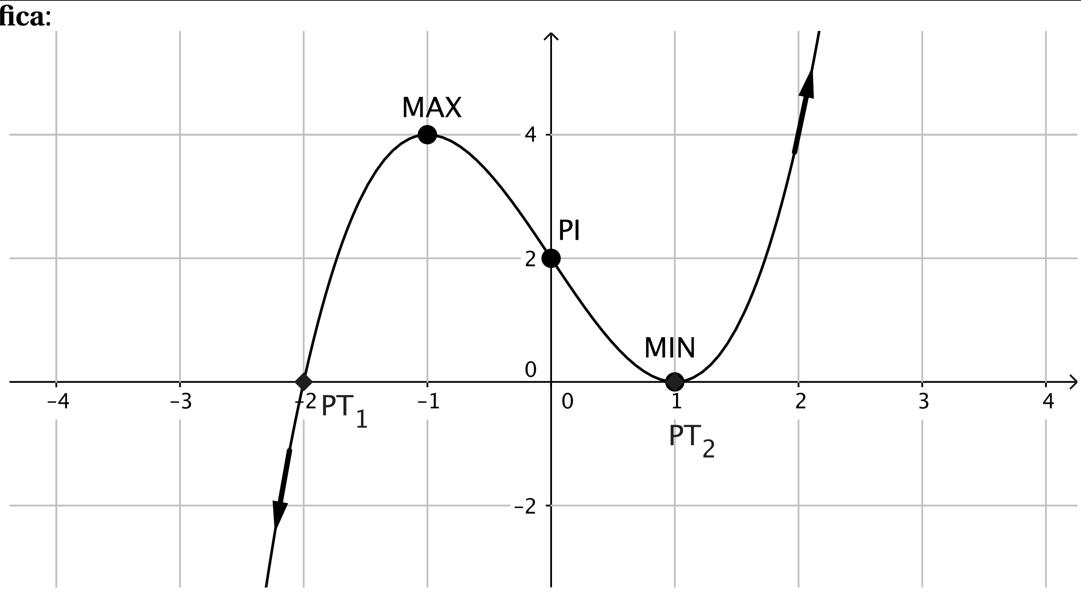
7.6 Representació de funcions

Taula resum per a la representació de corbes $y = f(x)$

1. **Domini**, $Dom\ f$	Conjunt de valors de x pels quals hi ha gràfica.
2. **Continuïtat**	Valors del $Dom\ f$ on és contínua.
3. **Periodicitat**	Si escau, determinar el període T; el valor mínim pel qual $f(x) = f(x+T)$.
4. **Simetries** f parell $\rightarrow$ Simetria respecte l'eix OY f senar $\rightarrow$ Simetria respecte l'origen	Cacularem l'expressió de $f(-x)$: Si $f(-x) = f(x)$ té simetria parell Si $f(-x) = -f(x)$ té simetria senar
5. **Asímptotes** Verticals: $x = a$ Horitzontals: $y = n$ Obliqües: $y = mx + n$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$ Calculam la posició relativa de la corba respecte les asímptotes.
6. **Punts de tall amb els eixos** Eix OX Eix OY Regions o signe	 Solucions de $f(x) = 0$. Pot haver-hi 0, 1 o uns quants Punt $(0, f(0))$. Pot haver-hi 0 o 1 $f(x) < 0$, $f(x) > 0$
7. **Màxims i mínims relatius** **Creixement i decreixement**	Punts crítics. Resolem $f'(x) = 0$ $f''(a) < 0 \rightarrow x = a$ un màxim relatiu $f''(a) > 0 \rightarrow x = a$ un mínim relatiu $f'(a) < 0 \rightarrow f$ decreixent en $x = a$ $f'(a) > 0 \rightarrow f$ creixent en $x = a$
8. **Punts d'inflexió** **Curvatura**	Resolem $f''(x) = 0$ i comprovam $f'''(x) \neq 0$ $f''(a) < 0 \rightarrow f$ Convexa $\cap$ en $x = a$ $f''(a) > 0 \rightarrow f$ Còncava $\cup$ en $x = a$
9. **Gràfica**	Fer el dibuix a partir de la informació anterior

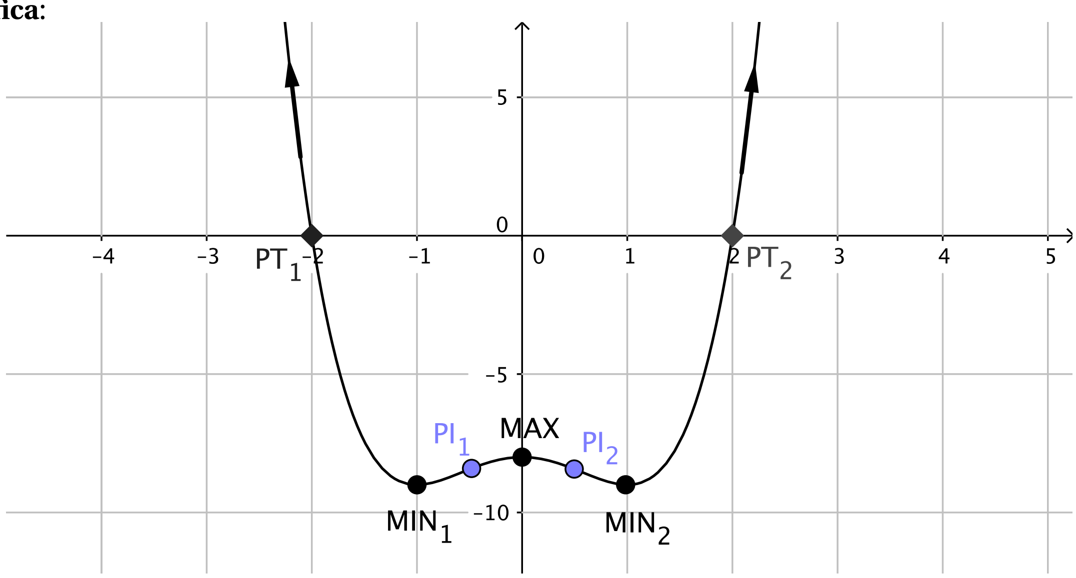
Representació de $f(x) = x^3 - 3x + 2$		
1. **Domini**	$(-\infty, +\infty)$	Tipus: Polinòmica
2. **Simetries**	No en té	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x = -2, y = 0)$ i $(x = 1, y = 0)$ $(x = 0, y = 2)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	No en té	
Branques:	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
5. **Derivada primera**	$f'(x) = 3x^2 - 3$	
Solucions de $f'(x) = 0$	$x = -1$, $x = 1$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	Decreixent $(-1, 1)$
7. **Extrems**	Màxim $(x = -1, y = 4)$	Mínim $(x = 1, y = 0)$
8. **Derivada segona**	$f''(x) = 6x$	
Solucions de $f''(x) = 0$	$x = 0$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(0, +\infty)$	Convexa $(-\infty, 0)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x = 0, y = 2)$	

Gràfica:



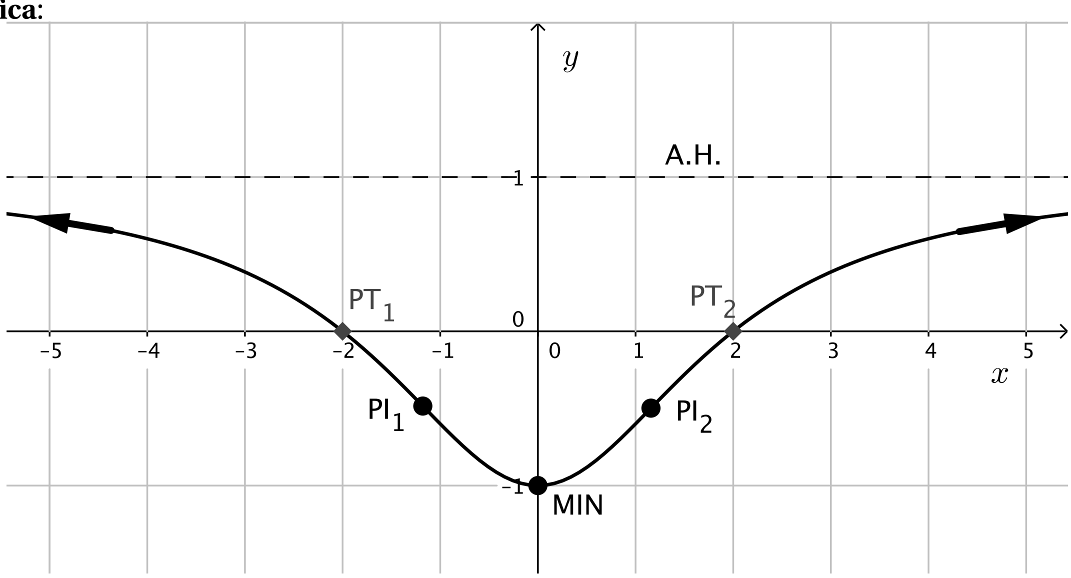
Representació de $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$		
1. **Domini**	$(-\infty, +\infty)$	Tipus: Polinòmica (biquadrada)
2. **Simetries**	$f(-x) = f(x)$ simètrica parell	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x = -2, y = 0)$; $(x = 2, y = 0)$ $(x = 0, y = -8)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	No en té	
Branques:	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
5. **Derivada primera**	$f'(x) = 4x^3 - 4x$	
Solucions de $f'(x) = 0$	$x = -1, x = 0, x = 1$	
6. **Creixement:**	Creixent $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$	Decreixent $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
7. **Extrems**	Màxim $(x = 0, y = -8)$	Mínims $(x = -1, y = -9)$, $(x = 1, y = -9)$
8. **Derivada segona**	$f''(x) = 12x^2 - 4$	
Solucions de $f''(x) = 0$	$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	
9. **Curvatura:**	Còncava $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$	Convexa $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x = -\sqrt{3}/3, y = -8.56)$, $(x = \sqrt{3}/3, y = -8.56)$	

Gràfica:



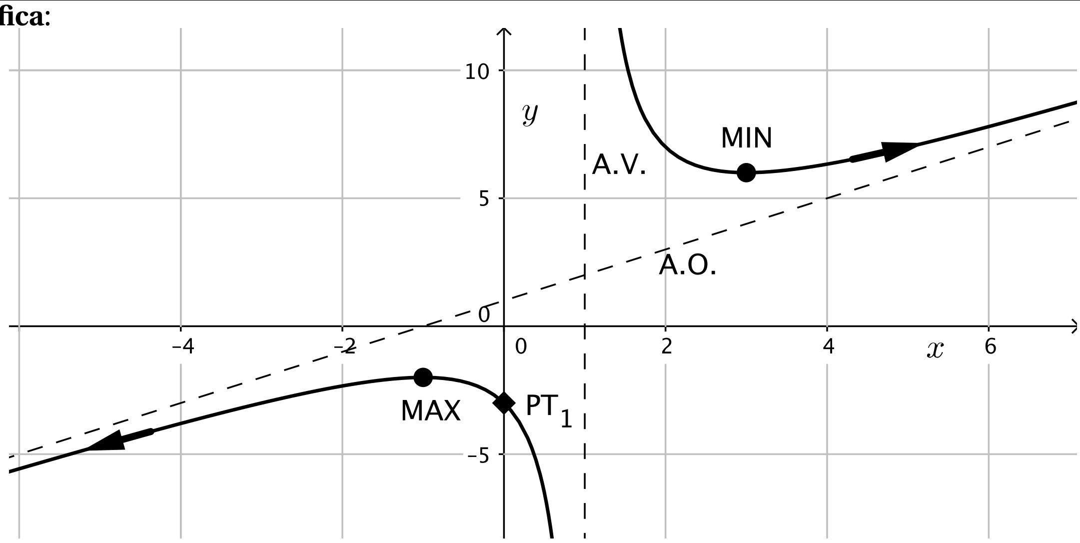
Representació de $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$		
1. **Domini**	$(-\infty, +\infty)$	Tipus: Racional
2. **Simetries**	Simètrica parell $f(-x) = f(x)$	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x=-2, y=0)$ i $(x=2, y=0)$ $(x=0, y=-1)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	$y = 1$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ per davall
Obliqües:	No en té	
Branques:	No en té	
5. **Derivada primera**	$f'(x) = \dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$	
Solucions de $f'(x) = 0$	$x = 0$	
6. **Creixement**:	Creixent $(0, +\infty)$	Decreixent $(-\infty, 0)$
7. **Extrems**	Màxim no en té	Mínim $(x=0, y=-1)$
8. **Derivada segona**	$f''(x) = \dfrac{64-48x^2}{(x^2+4)^3}$	
Solucions de $f''(x) = 0$	$x \approx -1.15$, $x \approx +1.15$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(-1.15, 1.15)$	Convexa $(-\infty, -1.15) \cup (1.15, +\infty)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x=-1.15, y=-0.5)$, $(x=1.15, y=-0.5)$	

Gràfica:



Representació de $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$		
1. **Domini**	$\mathbb{R}-\{1\}$	Tipus: Racional
2. **Simetries**	No té simetria	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	No hi talla $(x=0, y=-3)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	$x=1$	$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	$y=x+1$	$x\to-\infty$ per davall, $x\to+\infty$ per damunt
5. **Derivada primera**	$f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$	
Solucions de $f'(x)=0$	$x=-1$, $x=3$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$	Decreixent $(-1,1)\cup(1,3)$
7. **Extrems**	Mínim $(x=3, y=6)$	Màxim $(x=-1, y=-2)$
8. **Derivada segona**	$f''(x)=\dfrac{8}{(x-1)^3}$	
Solucions de $f''(x)=0$	No en té	
9. **Curvatura**:	Còncava $(1,+\infty)$	Convexa $(-\infty,1)$
10. **Punts d'inflexió**	No en té	

Gràfica:



50. Representa gràficament les següents funcions polinòmiques:

a) $y = x(x+2)(x-2)$ b) $y = x^4 - 2x^2$ c) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$

d) $y = -\dfrac{x^3}{6} + x$ e) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ f) $y = (x+1)^2(x-2)$

51. Representa gràficament les següents funcions racionals:

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ b) $y = \dfrac{4}{x^2 - 4}$ c) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

d) $y = \dfrac{x^2}{2 - x}$ e) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ f) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$

52. Representa gràficament les següents funcions:

a) $y = (x-2)e^x$ b) $y = 2x^2 e^{-x}$ c) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

7.7 Problemes d'optimització

Fins ara t'han donat l'expressió d'una funció $y = f(x)$ i has estat capaç de calcular-ne els màxims i mínims a través de la derivada.

Un problema d'optimització és en essència una situació similar, amb una diferència, ara la funció $y = f(x)$ no te la donen; l'hauràs de construir tú a partir d'un enunciat.

Exercici Resolt

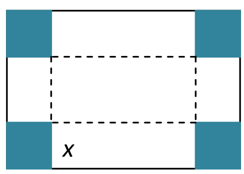
4. Expressa el nombre 60 com la suma de dos nombres tals que el seu producte sigui màxim.

Si el primer nombre l'anomenam x, el segon nombre serà $60 - x$. Ens interessa maximitzar la funció producte: $P(x) = x \cdot (60 - x) = 60x - x^2$. Aquesta és la funció que hem d'estudiar.

Calculam la derivada $P'(x) = 60 - 2x = 0$ i trobam $x = 30$. Com que $P''(x) = -2$ és negatiu i concluïm que $x = 30$ és un màxim de la funció. Llavors, la solució òptima és $60 = 30 + 30$.

53. Descomposau el nombre 44 en dos sumands tals que el quíntuple del quadrat del primer més el sèxtuple del quadrat del segon sigui mínim.

54. Volem construir caixes usant cartolines rectangulars de 20 cm $\times$ 25 cm. Per a això es talla en cada cantonada un quadrat de costat x, i es doblega. Quin valor ha de tenir el costat del quadrat, x, retallat perquè les caixes continguin un volum màxim?



55. Uns barrils per emmagatzemar oli són cilíndrics i tenen una capacitat de 150 litres. Si es desitja construir-los de manera que la seva superfície total sigui mínima, quant ha de mesurar la seva altura i el radi de la seva base?

56. En fer les proves d'un nou medicament es comprova que segons la dosi, x, en mil·ligrams, que s'administri, el percentatge de curacions, i, ve donada per: $y = 100 - \frac{80}{x+5}$. No obstant això el medicament té efectes secundaris ja que perjudica al ronyó. El nombre de malalts als quals el tractament produeix efectes secundaris augmenta un 2% per cada mil·ligram que s'augmenta la dosi. Podries ajudar a determinar la dosi de medicament adequada? Raona la resposta.

57. Es desitja fabricar envasos amb forma de prisma recte quadrangular de base quadrada de manera que el volum sigui d'un litre i la superfície emprada sigui mínima.

58. Determina les dimensions d'un con de volum mínim inscrit en una esfera de radi $R = 5$ cm. (*Ajuda*: L'altura del con és igual a $R + x$, i el radi de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

59. La temperatura, T, en graus, d'una bola de ferro que s'està escalfant ve donada per $T = 200 - 500/t$, on t és el temps en segons. El radi, r, en mm, de la bola quan la temperatura és de T graus ve donat per $r = 40 + 0'001T$. A quina velocitat varia el radi quan la temperatura és de 50ºC, 75ºC, 100ºC? A quina velocitat varia la temperatura als 30 segons? I per a $t = 90$ segons? A quina velocitat varia el radi als 10 segons, als 30 segons i als 90 segons?

Autoavaluació

1. Calcula la derivada de $y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ en $x = 1$ és:

2. Calcula el pendent de la recta tangent a $y = \frac{x^2+1}{x^3+3}$ en $x = 2$.

3. Deriva la funció $y = 2^{x^2+3}$.

4. Deriva la funció $y = \cos^2 x^3$.

5. Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$.

6. Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$.

7. Si la derivada d'una certa funció és $y' = (x - 4) \cdot x$ llavors, quins són els intervals de creixement i decreixement d'aquesta funció?

8. Troba els extrems de la funció $y = 3x^2 - 2x^3$.

9. Calcula l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3 - 9x^2 - 3x$ en el seu punt d'inflexió.

SÍNTESI DE LA PART II

Anàlisi de funcions

1. Calcula el domini de les següents funcions

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x}$

b) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$

2. Representa gràficament les següents funcions:

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$

b) $y = \log_2(x - 1)$

3. Siguin les funcions $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \sqrt{x}$. Calcula les següents composicions: $g(h(x))$, $f(g(x))$, $h(f(x))$. Troba la funció inversa de $h(f(x))$.

4. Calcula els següents límits:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to -5} \frac{x^2 + 5}{x^2 + 7x + 10}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 5x^3}{1 + x^2}$

5. Donada la funció a trossos $f(x) = \begin{cases} 3x - b & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ -2x + 9 & x > 2 \end{cases}$

a) Determina b perquè existeixi el límit de la funció a $x = 2$.

b) Després, determina si la funció és contínua o no indicant, si escau, el tipus de discontinuïtat.

6. Calcula, a partir de la definició, la derivada de la funció $f(x) = 3x^2 - 10x$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

7. Un cultiu de bacteris ve donat per l'expressió $y = 100 \cdot e^{0.05 \cdot t}$ on y són el nombre de cèl·lules i t el temps donat en minuts.

a) Calcula el nombre de bacteris inicial ($t = 0$) i passat mitja hora.

b) El temps que tardarien ha arribar a 5000 bacteris.

c) Fes una gràfica de la funció.

8. Escriu l'equació de la recta tangent a la corba $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

9. Calcula la funció derivada de les següents funcions:

a) $y = \sqrt{\cos(5x^4 + 2x^3)}$

b) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

c) $y = \arcsin(3x^5 - 6x^2)$

d) $y = x \cdot e^{-x^2}$

e) $y = \left(\frac{2x+5}{3x-1}\right)^5$

f) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

10. Determina els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims de les funcions:

a) $y = x^3 - 12x$

b) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

11. Es considera la funció $y = x^4 - x^3 - 6x^2$. Es demana:

a) Trobau els punts de tall amb els eixos

b) Calculau els extrems relatius

c) Feu una gràfica de la funció

12. Donada la funció $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$, calcula:

a) Les asímptotes i la posició relativa de la corba respecte d'elles

b) Els màxims i mínims relatius

c) Representa la gràfica

13. Quina d'aquestes funcions té una asímptota obliqua?

a) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

b) $y = \dfrac{4 + 2x^3}{x}$

c) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x - 1}$

Calcula i representa totes les seves asímptotes.

14. Trobau què ha de valer k perquè la funció $y = 2x - 1$ sigui una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+k}$. En tal cas, determinau, si escau, els extrems relatius.

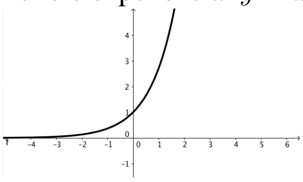
15. Calcula a i b perquè la funció $y = x^3 + ax^2 + b$ tingui un punt d'inflexió en el punt $P(2, 1)$.

DEFINICIÓ DE FUNCIÓ

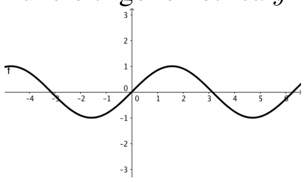
$f(x)$: Domini $f \subset \mathbb{R} \rightarrow$ Recorregut $f \subset \mathbb{R}$, és una funció si per a cada valor de x del domini s'assigna un únic valor de y del recorregut. $y = f(x)$ "y (ordenada) és la imatge de x (abscissa) per la funció f.

ALGUNES FUNCIONS ELEMENTALS

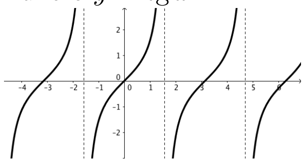
Funció exponencial $y = a^x$, e^x



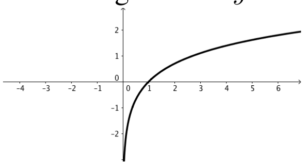
Funció trigonomètrica $y = \sin x$



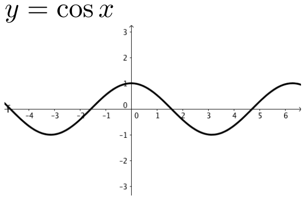
Funció $y = \operatorname{tg} x$



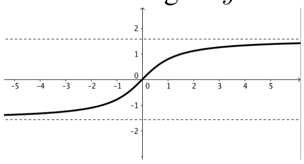
Funció logarítmica $y = \log_b x$



$y = \cos x$

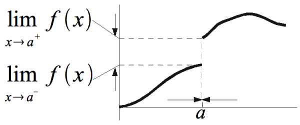


Funció arctangent $y = \operatorname{arctg} x$

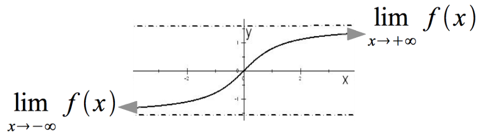


CÀLCUL DE LÍMITS

Límits Laterals: El límit existeix si els dos límits laterals coincideixen.



Límits a l'infinit



Límits immediats: $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$; $\lim\limits_{x\to\pi/4} \operatorname{tg} x = tg\frac{\pi}{4} = 1$; etc.

Indeterminacions:

- $\frac{0}{0}$: Factoritzar (o racionalitzar) i simplificar
  $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(x-3)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}(x-3) = -3$; $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \cdots = 1/4$
- $\frac{\infty}{\infty}$: Dividir tots els termes per la major potència de x del denominador
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+1/x^2}{3+1/x+1/x^2} = \frac{2}{3}$;
- $0 \cdot \infty$: Es redueix al cas ∞/∞
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \cdot (x^3 - 2x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x+1}{x^2} = +\infty$;
- $\infty - \infty$: Reduir a denominador comú i simplificar (racionalitzar si hi arrels)
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - \frac{2x^3-3x+1}{2(x-2)}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-(2x^2-3x+1)}{2(x-2))} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{2x-4} = 3/2$;

FUNCIÓ CONTÍNUA

$f(x)$ és contínua en $x = a$ si

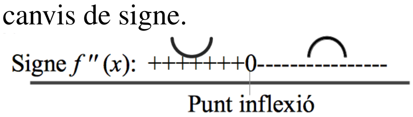
1. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$
2. Existeix $f(a)$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

TIPUS DE DISCONTINUÏTATS

1. Asimptòtica. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
2. Salt finit. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
3. Evitable-Li falta un punt. No existeix $f(a)$
4. Evitable-Punt desplaçat. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

ASÍMPTOTES		
Asímptotes Verticals $x = a$ és una asímptota vertical de $f(x) = \frac{D(x)}{d(x)}$ si s'anul·la el denominador $d(a) = 0$. Per representar-la calculam els límits laterals $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$	**Asímptotes Horitzontals** $y = L$ és una asímptota horitzontal de $f(x)$ si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$. Cal comprovar si la funció s'acosta per damunt o per davall de l'asímptota.	**Asímptotes Obliqües** $y = mx + n$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \frac{D(x)}{d(x)}$ si és el quocient de la divisió $D(x) : d(x)$. Cal comprovar si la funció s'acosta per damunt o per davall de l'asímptota.

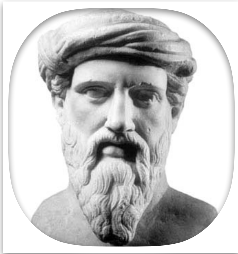
DERIVADES	
Definició de derivada en un punt És un nombre que dóna el pendent de la recta tangent a la funció en el punt d'abscissa $x = a$ $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	**Definició de funció derivada** $f'(x)$ és una funció que proporciona tots els pendents de la recta tangent a $f(x)$ per a qualsevol x. A la pràctica, $f'(x)$ s'obté aplicant les regles de derivació.
Taula de derivades (Algunes) • $y = x^n \to y' = nx^{n-1}$ • $y = e^x \to y' = e^x$;$y = a^x \to y' = a^x \cdot \ln a$; • $y = \ln x \to y' = \frac{1}{x}$; $y = \log_a x \to y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$ • $y = \sin x \to y' = \cos x$ • $y = \cos x \to y' = -\sin x$ • $y = \operatorname{tg} x \to y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	**Regles de derivació** • Regla de la cadena $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Ex: $[\sin^5(x^3+x)]' = 5\sin^4(x^3+x)\cdot(3x^2+1)$ • Producte: $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$ • Quocient: $[\frac{u}{v}]' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

APLICACIONS DE LES DERIVADES	
Equació de la recta tangent L'equació de la recta tangent a la funció $y = f(x)$ en el punt $x = a$, $y = f(a)$ és $$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$	**Monotonia i extrems** • $f'(x) > 0$ funció creixent • $f'(x) < 0$ funció decreixent • $f'(x) = 0$ Punt crític. Potser màxim o mínim. Cal construir taula de f' i comprovar si hi ha canvis de signe.
Curvatura i punts d'inflexió • $f''(x) > 0$ funció còncava • $f''(x) < 0$ funció convexa • $f''(x) = 0$ Possible punt d'inflexió. Cal construir taula de f'' i comprovar si hi ha canvis de signe.  	**Representació gràfica** • Funcions polinòmiques – Talls amb eixos – Màxims i mínims – Branques parabòliques • Funcions racionals – Talls amb eixos – Màxims i mínims – Asímptotes

Part III

GEOMETRIA EN EL PLA

La naturalesa està escrita en llenguatge matemàtic. –Galileo Galilei–



Pitàgores

(569-475 a. C.)

Famós per la relació entre els costats d'un triangle rectangle. Juntament amb *Euclides* i *Arquimedes* assentaren les bases de la geometria plana.

René Descartes

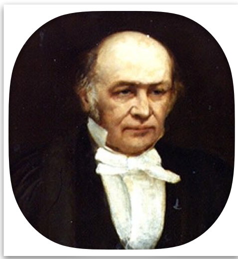
(1596-1650)

Filòsof i matemàtic famós per la frase cèlebre "pens, llavors existesc". Es considerat el creador de la geometria analítica.

Pierre Fermat

(1601-1665)

Juntament amb *Descartes* van ésser els pares de la geometria analítica. Aconseguiren transformar problemes geomètrics en equacions de l'àlgebra.



William Hamilton

(1805-1865)

Matemàtic irlandès, considerat el creador del concepte de vector que més endavant seria formalitzat pel matemàtic nord-americà *J. Gibbs*.

William Rowan Hamilton,
matemàtic Irlandès (1805-1865)

Tema 8

Vectors en el pla

Índex

Les diferents magnituds en la naturalesa es classifiquen en escalars i vectorials. Una magnitud és vectorial si depèn de la direcció.

Magnituds escalars	**Magnituds vectorials**
Temps	Velocitat
Temperatura	Acceleració
Volum	Força
...	...

Un vector queda determinat per dos punts A **origen** i B l'**extrem**. El **mòdul** és la llargària del vector o la distància entre A i B. La **direcció** és la de la recta que passa per A i B. Cada direcció té dos **sentits**.

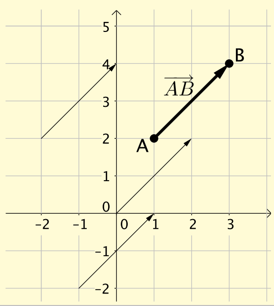
8.1 Vectors fix i lliure

Per localitzar un punt P donam dues coordenades (P_x, P_y) que corresponen a les projeccions sobre els eixos OX, OY respectivament.

Definim un **vector fix** d'origen en el punt A i extrem en el punt B com el segment orientat que va de A a B.

Les components del vector s'obtenen de "extrem-origen"

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (B_x - A_x, B_y - A_y)$$

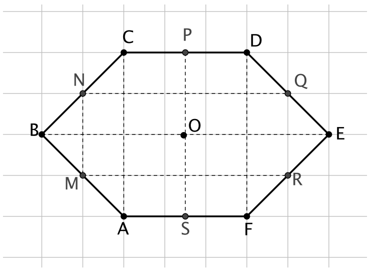


Vector lliure

Si ens donen les components d'un vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$, sense especificar-ne l'origen, vol dir que el podem dibuixar amb l'origen que nosaltres vulguem. El consideram un **vector lliure**.

1. La figura ABCDEF és un hexàgon. Compara el mòdul, la direcció i el sentit dels següents parells de vectors.

a) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{FE}$ i $\overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{DE}$
d) $\overrightarrow{OS}$ i $\overrightarrow{OE}$



2. Donats els punts $P = (2,\ 2)$, $Q = (1,\ 0)$ i $R = (-2,\ 3)$ calcula els vectors

a) $\overrightarrow{QP}$ b) $\overrightarrow{PQ}$ c) $\overrightarrow{QR}$ d) $\overrightarrow{RP}$

Quina relació existeix entre els vectors $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{PQ}$?

8.2 Operacions amb vectors lliures

Donats els vectors $\vec{u} = (-2, 5)$ i $\vec{v} = (3, 1)$ es poden realitzar les següents operacions:

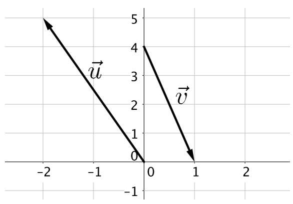
- **Multiplicar per un escalar:** $7\vec{u} = 7(-2, 5) = (-14, 35)$. És un vector que té igual direcció que $\vec{u}$, mòdul 7 vegades més llarg i igual sentit. Si multiplicam per -7, el sentit és l'oposat.
- **Sumar:** $\vec{u} + \vec{v} = (-2, 5) + (3, 1) = (1, 6)$
- **Restar:** $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (-2, 5) - (3, 1) = (-5, 4)$
- **Fer una combinació lineal:** $5\vec{u} - 2\vec{v} = 5(-2, 5) - 2(3, 1) = (-10, 25) - (6, 2) = (-16, 23)$

Si tenim un vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$, definim el **vector oposat** com $-\vec{v} = (-v_x, -v_y)$. L'oposat compleix que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$, on hem definit el **vector zero** com $\vec{0} = (0, 0)$.

No confondre amb el vector zero $\vec{0} = (0, 0)$ amb el nombre 0.

3. Donats els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ de la figura, calcula:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$
b) $\vec{u} - \vec{v}$
c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$
d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$



4. Donats tres punts genèrics, $P = (p_1,\ p_2)$, $Q = (q_1,\ q_2)$ i $R = (r_1,\ r_2)$, demostra:

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ b) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

c) $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{0}$ d) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$

5. Troba el vector $\vec{x}$ tal que $\vec{a} = 3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{x}$, essent $\vec{a} = (7, -2)$ i $\vec{b} = (-1, 3)$.

8.3 Bases i components

Dependència lineal

Dos vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ són **linealment dependents** si tenen la mateixa direcció. Això passa si existeix un escalar λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (un vector és múltiple de l'altre). Una condició més pràctica és que les seves components siguin proporcionals

$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} \tag{8.1}$$

Dos vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ són **linealment independents** si tenen la diferent direcció.

6. Determina si són dependents o independents les següents parelles de vectors:

a) $\vec{u}\left(2, \frac{2}{5}\right)$ i $\vec{v}(-10, -9)$ b) $\vec{u}\,(-2, 3)$ i $\vec{v}(-3, 2)$ c) $\vec{u}\,(-6, 9)$ i $\vec{v}(8, -12)$

7. Què ha de valer k perquè els vectors $\vec{u}(18, -6)$ i $\vec{v}(k, 4)$ tinguin igual direcció?

Definició de base

Dos vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ són **una base** del pla si:

1. Són linealment independents
2. Tot vector $\vec{w}$, es pot expressar com combinació lineal dels altres dos $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Al parell de nombres (λ, μ) s'anomenen components del vector $\vec{w}$ respecte de la base $\mathcal{B}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

1. Troba les components del vector $\vec{w}(-3, -8)$ respecte la base formada pels vectors $\vec{a}(1, -3)$ i $\vec{b}(5, 2)$

Es tracta d'expressar el vector $\vec{w}$ com a combinació lineal dels vectors de la base:

$$\vec{w} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

Substituint les components
$(-3, -8) = m(1, -3) + n(5, 2)$
$(-3, -8) = (m, -3m) + (5n, 2n)$
$(-3, -8) = (m + 5n, -3m + 2n)$
Igualam component a component i trobam el sistema d'equacions

$$\begin{cases} m & +5n & = -3 \\ -3m & +2n & = -8 \end{cases}$$

Resolent el sistema anterior, arribam a $m = 2$, $n = -1$. Les components del vector $\vec{w}$ són $(2, -1)$.

8. Formen els següents parells de vectors una base? Justifica la resposta.

a) $(1,\ 2)$ i $(1,\ -2)$

b) $(1,\ -2)$ i $(2,\ 1)$

c) $(9,\ -15)$ i $(-12,\ 20)$

d) $(1,\ 0)$ i $(0,\ 0)$

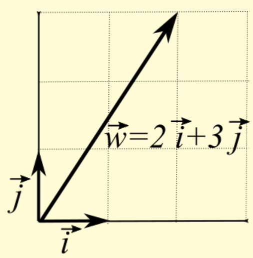
9. Calcula λ i μ de manera que es compleixi $\vec{w} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, essent els vectors $\vec{a}(1,-3)$, $\vec{b}(5,2)$ i $\vec{w}(-3,-8)$.

10. Troba les components del vector $\vec{w} = (2,3)$ respecte de la base $\mathcal{B}\{(2,0),(0,-1)\}$. Fes un dibuix aclaridor.

11. Troba les components del vector $\vec{w} = (-4,5)$ respecte de la base $\mathcal{B}\{(1,1),(-1,1)\}$. Ajuda: Planteja un sistema d'equacions per trobar les components λ, μ.

Base ortonormal o canònica

Si prenem com a vectors $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$ es fàcil comprovar que formen una base. Aquesta base s'anomena la base canònica o ortonormal. Ortonormal significa que els vectors tenen mòdul 1 i formen un angle de $90°$.
D'aquesta forma qualsevol vector $\vec{w} = (2,3)$ es pot expressar com $\vec{w} = 2\vec{i}+3\vec{j}$; és a dir $(2,3)$ són les components del vector $\vec{w}$ respecte de la base canònica.



8.4 Producte escalar

Definició

Es defineix el producte escalar de dos vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ com

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\alpha \tag{8.2}$$

on α és l'angle que formen els vectors. **El producte escalar de dos vectors és un nombre.**

Depenent de l'angle α tenim $\begin{cases} \alpha < 90° & \vec{u}\cdot\vec{v} > 0 \\ \alpha = 90° & \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \\ \alpha > 90° & \vec{u}\cdot\vec{v} < 0 \end{cases}$

Un resultat molt important és que dos vectors són **perpendiculars** si el seu **producte escalar és igual a zero**.

12. En una circumferència de centre O i de radi 2 cm, s'inscriu un hexàgon regular de vèrtexs A, B, C, D, E, F. Calcula els productes:

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED}$

d) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}$

13. Calcula el producte escalar dels següents vectors.

a) $(1,\ 2)\cdot(-2,\ 3)$ b) $(1,\ 2)\cdot(0,\ 0)$ c) $(1,\ 2)\cdot(-2,\ 1)$
d) $(3,\ 2)\cdot(1,\ 3)$ e) $(5,\ -4)\cdot(4,\ -4)$ f) $(3,\ 4)\cdot(-4,\ 3)$

En base canònica

Si disposam de les components de $\vec{u}$, $\vec{v}$ respecte la base canònica, el producte escalar és

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x\,v_x + u_y\,v_y \tag{8.3}$$

Propietats del producte escalar:

1. Commutatiu: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. Distributiu: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3. Associatiu: $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Exercici Resolt

2. Obté un vector ortogonal a $\vec{v}(8,6)$ i el mòdul del qual sigui igual a 4.

El vector que cercam serà de la forma (x,y) i ha d'ésser perpendicular a $\vec{v}$. Això passa si el producte escalar és igual a 0:

$$(8,6)\cdot(x,y)=8x+6y=0$$

Una possible solució és $x=-6$ i $y=8$ però evidentment no té el mòdul adequat.
Aquest vector té mòdul $|\vec{x}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$. Això vol dir que el vector $\frac{1}{10}(-6,8)$ és unitari i, per tant, $\frac{4}{10}(-6,8)=(-\frac{12}{5},\frac{16}{5})$ tindrà mòdul 4.

14. Donats $\vec{u}=(2,3)$, $\vec{v}(-3,1)$ i $\vec{w}(5,2)$, calcula:

a) $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{w}$ b) $\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}$

c) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$ d) $\vec{u}(\vec{v}\cdot\vec{v})$

Indica en cada cas si el resultat de l'operació és un vector o un escalar.

15. Considera tres vectors genèrics $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\vec{v}=(v_1,v_2)$ i $\vec{w}=(w_1,w_2)$ així com un escalar genèric λ. Demostra les propietats 1 a 3 del producte escalar.

16. Què ha de valer k perquè els vectors $\vec{u}(18,-6)$ i $\vec{v}(k,4)$ siguin perpendiculars?

17. Calcula un vector que formi amb $(1,\ 4)$ una base ortogonal.

18. Troba una base ortonormal que contingui al vector paral·lel a $(3,\ -4)$.

8.5 Mòdul i angles

El mòdul d'un vector s'obté de l'equació (8.2) fent que $\vec{u}=\vec{v}$. Es compleix que $|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ i si utilitzam la base canònica $|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$.

Un vector és **unitari** si té mòdul 1. Per aconseguir que un vector sigui unitari basta dividir-lo pel seu mòdul.

L'angle que formen dos vectors s'obté aïllant-lo de l'equació (8.2):

$$\alpha=\arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}=\arccos\frac{u_x\,v_x+u_y\,v_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}\,\sqrt{v_x^2+v_y^2}} \tag{8.4}$$

Exercici Resolt

3. Calcula k perquè els vectors $\vec{u}(1,k)$ i $\vec{v}(3,-2)$

a) formin un angle de $90°$

b) tinguin el mateix mòdul

c) formin un angle de $60°$

a) Els dos vectors formaran un angle de $90°$ si són perpendiculars. Això passa si el seu producte escalar és igual a 0. $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,k)\cdot(3,-2)=3-2k=0$, d'on deduim que $k=3/2$.

b) Perquè tinguin el mateix mòdul

$$\sqrt{1+k^2}=\sqrt{9+4}$$

Elevam al quadrat, $1+k^2=13$ i d'aquí $k=\pm\sqrt{12}$

c) Perquè formin un angle de $60°$ els dos vectors

$$\cos 60°=\frac{3-2k}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{9+4}}$$

Si elevam al quadrat l'equació i multiplicam en creu trobam $13(1+k^2)=4(3-2k)^2$. Si resolem aquesta equació de segon grau trobam: $k\approx 0.494$ i $k\approx 15.51$

19. Calcula el mòdul dels vectors:

a) $\vec{u}(3,2)$ b) $\vec{v}(-2,3)$ c) $\vec{w}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

20. Troba un vector unitari que tingui sentit contrari a $(-3,4)$.

21. Calcula l'angle que formen els vectors:

a) $\vec{u}(2,5)$ i $\vec{v}(4,-3)$ b) $\vec{u}(1,6)$ i $\vec{v}\left(-\frac{1}{2},-3\right)$

22. Calcula x per a que el producte escalar dels vectors $\vec{u}(3,-5)$ i $\vec{v}(x,-2)$ sigui igual a 7. Troba l'angle de formen en tal cas.

23. Dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ sabem que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=5$ i que formen un angle de $30°$. Calcula $|\vec{u}-\vec{v}|$.

8.6 Activitats

24. Determina els vectors $\vec{x}$ i $\vec{y}$ que verifiquen el sistema d'equacions $\begin{cases} \vec{x}+2\vec{y} & = & (1,-5) \\ 3\vec{x}-\vec{y} & = & (0,-1) \end{cases}$

25. Donats els vectors $\vec{a} = (2,1)$ i $\vec{b} = (6,2)$, troba les components dels vector $\vec{v}(x,y)$ tal que $\vec{v}\cdot\vec{a} = 1$ i $\vec{v}\perp\vec{b}$

26. Donats els vectors $\vec{u}(k,-6)$ i $\vec{v}(3,h)$, calcula k i h de tal forma que $|\vec{u}| = 10$ i $\vec{u}\perp\vec{v}$.

27. Calcula una base ortonormal que contingui un vector paral·lel a $\vec{v} = (-2,\ 3)$

28. Calcula un vector perpendicular a $(1,\ -2)$ i que tingui mòdul 4. [*Pista*: calcula un vector perpendicular qualsevol. En dividir pel seu mòdul tindrà mòdul 1. Bastarà multiplicar per 4].

29. Calcula un vector perpendicular a $(1,\ 2)$ que tingui mòdul 3

30. Formen els següents parells de vectors una base ortonormal? Justifica la resposta.

a) $(1,\ 0)$ i $(0,\ 1)$

b) $(1,\ -2)$ i $(2,\ 1)$

c) $(0,\ 1)$ i $(100,\ 0)$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,\ 1)$

31. Donat el vector $\vec{v} = (1,\ -2)$ calcula una base ortonormal que contingui a un múltiple seu. Hi ha més d'una solució al problema anterior? En cas afirmatiu, calculau-les totes.

32. Siguin $A = (1,\ 1)$, $B = (1,\ 4)$, $C = (2,\ 2)$ els vèrtexs d'un triangle. Calcula els tres costats i després empra la trigonometria per determinar els angles.

33. Siguin $A = (1,\ -1)$, $B = (2,\ 4)$, $C = (2,\ 2)$ els vèrtexs d'un triangle. Calcula els costats a i c i l'angle β i després empra la trigonometria per acabar de resoldre el triangle.

34. Donat el triangle de vèrtexs $A = (1,\ 1)$, $B = (2,\ 3)$, $C = (3,\ -2)$, calcula el costat a i els angles β i γ i després empra trigonometria.

35. Donats els vèrtexs $A = (0,\ 1)$, $B = (1,\ 4)$, $C = (2,\ 3)$ d'un triangle, calcula tres dades qualssevol (els que siguin, tres costats, dos angles i un costat...) i després empra trigonometria.

36. Calcula l'àrea del triangle de vèrtexs $A(1,1)$, $B(2,2)$ i $C(4,5)$. [*Pista*: Pots calcular tots els costats i angles. L'altura es calcula per trigonometria].

37. Calcula l'àrea del quadrilater *ABCD* amb $A = (1,2)$, $B = (2,4)$, $C = (5,3)$ i $D = (4,1)$

38. Calcula l'àrea del rombe *ABCD* amb $A = (1,1)$, $B = (4,0)$, $C = (3,3)$ i $D = (0,4)$.

39. Calcula un vector que formi $60°$ amb el vector $(1,\ 0)$. Per a això, suposa que el vector sigui de la forma $(x,\ 1)$ i planteja l'equació

$$\cos 60° = \frac{(x,1)\cdot(1,0)}{\|(x,1)\|\ \|(1,0)\|}$$

Resol i aïlla x. Series capaç de calcular un vector unitari (de mòdul 1) que formi un angle de $60°$ amb el vector $(1,\ 0)$?

40. Considera un hexàgon regular *ABCDEF* de centre l'origen. Si el punt *B* és el $(1,\ 0)$, quines són les coordenades dels punts *A* i *C*? Calcula l'angle de l'hexàgon.

41. A=(1,1), B = (2,3) i C = (2,8) són vèrtexs (consecutius) d'un paral·lelogram $ABCD$. Calcula el vèrtex D i l'angle ABC.

42. Siguin A = (2,2) i B = (4,6) dos vèrtexs d'un quadrat. Calcula els altres dos vèrtexs i l'àrea del quadrat. (*Ajuda*: Hi ha dues solucions, les dues amb la mateixa àrea).

43. Tres punts d'un rombe $ABCD$ són $A = (2,1)$, $B = (4,5)$ i $C = (2,9)$. Calcula:

a) L'angle que correspon al vèrtex A.

b) El perímetre (suma de costats) del rombe.

c) El punt D.

44. Calcula l'angle que formen les diagonals del rectangle $ABCD$ sent $A = (1,2)$, $B = (1,8)$, $C = (4,8)$. [El punt D pots calcular-ho].

45. Si $A = (1,1)$ i $B = (2,3)$ són dos vèrtexs d'un quadrat, calcula els altres dos vèrtexs i l'àrea del quadrat (*Atenció*: hi ha dues solucions, les dues amb la mateixa àrea).

46. Calcula la projecció del vector $\vec{v}(3,-1)$ sobre la direcció del vector $\vec{u}(2,1)$. Utilitza que $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}$.

Autoavaluació

1. Comencem en el punt $P(1,1)$ i ens desplacem primer amb el vector $\vec{v}(1,-3)$ i després amb el vector $\vec{w}(-4,5)$.

a) Quina és la posició final?

b) Si volguéssim fer els dos passos en un, quin vector seguiríem?

2. Realitza les següents operacions:

a) $(1,2)\cdot(1,-2)$

b) $(2,-3)\cdot[(0,2)-(1,-1)]$

3. Considera els vectors $\vec{u}(0,2)$ i $\vec{v}(1,\sqrt{3})$. Calcula:

a) El seu producte escalar.

b) El mòdul d'ambdós vectors.

c) L'angle que formen.

4. Sigui el vector $\vec{u}(-3,k)$, calcula k perquè

a) sigui ortogonal a $\vec{v}(4,-6)$

b) Tingui mòdul 5.

c) Formi un angle de 30° amb l'eix OX.

5. Troba un vector unitari que sigui ortogonal a $(8,-6)$.

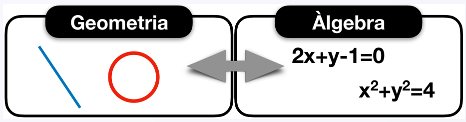
René Descartes (1596-1650)

Tema 9

Geometria analítica plana

Índex

La geometria analítica permet representar figures geomètriques mitjançant fórmules. Va ser inventada per René Descartes i per Pierre Fermat a principis del segle XVII. A més, Descartes i Fermat van observar que les equacions algebraiques corresponen amb figures geomètriques. Això vol dir que les línies i certes figures geomètriques es poden expressar com equacions i, al seu torn, les equacions poden dibuixar-se com línies o figures geomètriques.



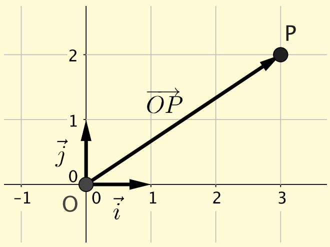
9.1 Punts en el pla

Sistema de referència Cartesià

Per localitzar punts en el pla utilitzam un sistema de referencia Cartesià (en honor a René Descartes) format per:

- Un punt O anomenat origen
- Una base de vectors ortonormals $\vec{i}$, $\vec{j}$

Qualsevol punt P queda determinat mitjançant el **vector de posició** $\overrightarrow{OP}$.



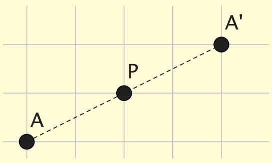
Punt mitjà d'un segment

Les coordenades del punt mitjà, M, d'un segment d'extrems $A(A_x, A_y)$ i $B(B_x, B_y)$ són:

$$M = \frac{A+B}{2} \quad o \quad M\left(\frac{A_x+B_x}{2}, \frac{A_y+B_y}{2}\right) \tag{9.1}$$

Punt simètric respecte d'un punt

Si volem calcular el punt simètric A' del punt A respecte del punt P raonam de la següent forma: El punt P ha d'ésser el punt mitjà de l'interval $A'A$ amb la qual cosa es compleix que $P = \frac{A+A'}{2}$. Si aïllam A' obtenim

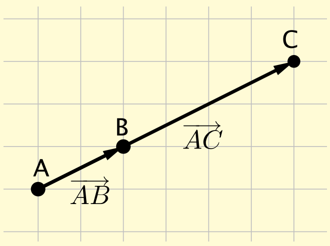


$$A' = 2P - A \quad o \quad A'\left(2P_x - A_x, 2P_y - A_y\right)$$

Condició d'alineament de 3 punts

Tres punts $A(A_x, A_y)$, $B(B_x, B_y)$, $C(C_x, C_y)$ estan alineats si un parell de vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ tenen igual direcció [Veure equació (8.1)]. En components, això passa si

$$\frac{B_x - A_x}{C_x - A_x} = \frac{B_y - A_y}{C_y - A_y} \tag{9.2}$$



Exercici Resolt

1. Troba les coordenades dels punts que divideixen el segment $A(-2, 5)$, $B(4, -1)$ en tres parts iguals.	Calculam el vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (6, -6)$. Els punts seran: $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-2, 5) + (2, -2) = (0, 3)$ i $A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (-2, 5) + (4, -4) = (2, 1)$.
2. Troba el punt simètric de $A(2, -1)$ respecte del punt $P(-3, 5)$	El simètric s'obté de $A' = 2P - A = 2(-3, 5) - (2, -1) = (-8, 11)$. Podeu comprovar que el punt mitjà de A i A' és P.
3. Calcula el valor de k perquè els punts $A(0, 3)$, $B(-2, 5)$ i $C(4, k)$ estiguin alineats.	Calculam els vectors $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 2)$ i $\overrightarrow{AC} = C - A = (4, k - 3)$. Ara imposam que aquests dos vectors tinguin igual direcció; les components han d'ésser proporcionals. $$\frac{-2}{4} = \frac{2}{k-3}$$ Multiplicant en creu $-2(k - 3) = 8$ i d'aquí trobam que $k = -1$.

1. Donats els punts $A = (1, 4)$ i $B = (-3, 6)$ calcula el seu punt mitjà: a) Construint el vector que els uneix. b) Amb la fórmula. Comprova que surt el mateix.

2. Considera el segment d'extrems $P = (-2, 1)$ i $Q = (7, 4)$. Calcula els punts sobre aquest segment que el divideixen en 3 parts iguals.

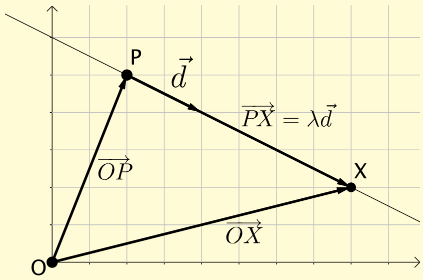
3. Calcula el valor de k perquè els punts $A(1, 7)$, $B(-3, 4)$ i $C(k, 5)$ estiguin alineats.

4. Donats els punts $P(3, 9)$ i $Q(8, -1)$ troba: a) el punt mitjà, b) el simètric de P respecte Q i c) el simètric de Q respecte P.

9.2 Les equacions de la recta en el pla

Vídeo 189: Equació de la recta en el pla

L'equació de la recta que passa pel punt $P(P_x, P_y)$ i té vector director $\vec{d} = (d_x, d_y)$ es pot expressar de diferents formes:



Vectorial: $(x, y) = (P_x, P_y) + \lambda(d_x, d_y)$

Paramètriques: $\left\{ \begin{array}{l} x = P_x + \lambda d_x \\ y = P_y + \lambda d_y \end{array} \right.$

Contínua: $\dfrac{x - P_x}{d_x} = \dfrac{y - P_y}{d_y}$

Punt-pendent: $y - P_y = m(x - P_x)$, essent $\boxed{m = \frac{d_y}{d_x}}$ el pendent de la recta.

Implícita o general: $Ax + By + C = 0$, essent (A, B) el vector normal de la recta. $(-B, A)$ seria un vector director.

Explícita: $y = mx + n$, essent m el pendent i n l'ordenada a l'origen.

4. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(3, 1)$ i $B(1, 4)$ de totes les formes possibles.

Primer calculam el vector director de la recta $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (-2, 3)$ i triam un dels punts, per exemple A.

L'equació vectorial és $(x, y) = (3, 1) + \lambda(-2, 3)$

Les paramètriques són $\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{array} \right.$

L'equació contínua $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{3}$

La punt-pendent $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 3)$

La general $3x + 2y - 11 = 0$

L'explícita $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$

5. Escriu l'equació de la recta que passa pel punts $A(1,-2)$ i $B(3,5)$ de totes les formes possibles.

6. Obté un punt i un vector director de cadascuna d'aquestes rectes:

a) $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}$

b) $y-2=4(x+7)$

c) $x+y-2=0$

d) $\begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=2 \end{cases}$

7. Obté un punt i un vector director de la recta $y=2x+5$ i expressa-la de totes les altres formes possibles.

8. Considerem la recta $r:\ (x,y)=(1,3)+\lambda\,(1,-2)$.

a) Calcula el seu pendent.

b) Pertany el punt $(2,\ 2)$ a la recta? I el punt $(0,-2)$?

c) Dóna almenys tres punts de la recta.

d) Dibuixa la recta.

9.3 Recta paral·lela i perpendicular a una donada

Segons vectors

Si ens donen una recta que té vector director $\vec{d}(d_x,d_y)$, per calcular

- una recta **paral·lela** a ella, utilitzam el **mateix vector** director (o proporcional).
- una recta **perpendicular** a ella, utilitzam el **vector normal** $\vec{n}(-d_y,d_x)$.

Segons pendents

Si ens donen una recta que té pendent m, per calcular

- una recta **paral·lela** a ella, utilitzam el **mateix pendent**.
- una recta **perpendicular** a ella, utilitzam el pendent $m'=-\frac{1}{m}$.

Exercici Resolt

5. Calcula l'equació general de la recta perpendicular a

$$r:\ \frac{x}{-2}=\frac{y+2}{1}$$

que passa pel punt $P(1,1)$

La recta r té com a vector director $\vec{d_r}=(-2,1)$. El seu vector normal és $\vec{n}=(1,2)$. L'equació de la recta que ens demanen en forma contínua

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}$$

Si la multiplicam en creu la passam a forma general $2x-y-1=0$.

6. Calcula l'equació general de la recta paral·lela a

$$r:\ y-5=\frac{1}{2}(x+1)$$

que passa per l'origen de coordenades.

La recta r té com a pendent $m=1/2$, i la recta paral·lela tindrà el mateix pendent. L'únic que hem de fer és canviar el punt per l'origen $(0,0)$. L'equació punt-pendent serà:

$$y-0=\frac{1}{2}(x-0)$$

Si passam a forma general trobam $x-2y=0$.

9. Calculau la recta que és paral·lela a r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}$ i passa pel punt $P\,(0,\ 1)$. Expressa-la almenys en tres formes i dibuixa-les.

10. Calculau la recta que és paral·lela a r: $2x-3y=0$ i passa pel punt $P\,(1,\ 2)$. Expressa-la en forma contínua i dibuixa-les.

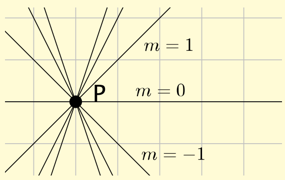
11. Calculau una recta perpendicular a $r:y=2x-1$ que passi per $P\,(2,\ -1)$. Expressa-la en forma paramètrica i dibuixa-la.

12. D'una recta r coneixem el seu pendent $m=\frac{2}{3}$. Troba la recta s que es perpendicular a r i que conté l'origen de coordenades.

13. Calculau una recta perpendicular a $r:x+2y=5$ que passi per $P\,(2,\ 0)$. Troba el punt d'intersecció entre les dues rectes.

14. Calculau el punt simètric de $P(6,3)$ respecte la recta $r:x+2y-2=0$.

Feix de rectes



Podem expressar totes les rectes que passen per un punt $P(2,3)$ fàcilment en forma punt-pendent. En tal cas, consideram m com un paràmetre.

$$y=3+m(x-2)$$

9.4 Posició relativa de dues rectes

Segons punts i vectors

Ens donen dues rectes en el pla r i s de les quals sabem un punt i un vector director. La posició relativa es determina de la següent forma:

$$\vec{d}_r,\ \vec{d}_s:\left\{\begin{array}{l}\text{Diferent direcció}\longrightarrow\text{Secants}\\ \text{Igual direcció}:\left\{\begin{array}{l}R\in s\longrightarrow\text{Coincidents}\\ R\notin s\longrightarrow\text{Paral·leles}\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{9.3}$$

Exercici Resolt

7. Determina la posició relativa de les rectes i el punt de tall si existeix. $$r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\y=14-\lambda\end{array}\right.$$ $$s:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-5}$$	Els vectors directors de les rectes $\vec{d_r}=(2,-1)$ i $\vec{d_s}=(1,-5)$ tenen clarament diferent direcció, aleshores les rectes són secants. Per trobar el punt de tall, passam la recta s a forma general $5x+y-10=0$. Tot seguit hi substituïm la x i la y de la recta r $$5(1+2\lambda)+(14-\lambda)-10=0$$ Resolem aquesta equació de 1r grau i obtenim $\lambda=-1$. Si substituïm aquest valor dins la recta r, trobam el punt de tall $(-1,15)$.
8. Per a quin valor de k les rectes $$r:2x+ky-1=0$$ $$s:3x-y+5=0$$ seran paral·leles? Hi ha algun valor pel qual siguin coincidents?	Els vectors normals de les rectes són $\vec{n_r}=(2,k)$ i $\vec{n_s}=(3,-1)$. Perquè les rectes siguin paral·leles també ho han d'ésser els seus vectors normals. Aleshores $$\frac{2}{3}=\frac{k}{-1}$$ Aïllam k de l'equació i obtenim $k=-\frac{2}{3}$. Donat que $$\frac{2}{3}\neq\frac{-1}{5}$$ les rectes mai seran coincidents.

15. Siguin les rectes $r:\left\{\begin{array}{l}x=2+\lambda\\y=1-2\lambda\end{array}\right.$ i $s:\ 2x+y=2$. Estudia la seva posició relativa i calcula els seus punts de tall si els hi hagués.

16. Siguin les rectes $r:\ (x,y)=(1,\ 1)+\lambda\,(-1,\ 2)$ i $s:\ x+y=3$. Estudia la seva posició relativa i calcula els seus punts de tall si els hi hagués.

17. Siguin les rectes $r:\ (x,y)=(0,\ -2)+\lambda\ (1,\ 4)$ i $s:\ 4x-y-2=0$. Estudia la seva posició relativa i calcula els seus punts de tall si els hi hagués.

18. Troba k perquè les rectes r i s siguin paral·leles.

$$r:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}\qquad s:\ \frac{x+5}{-6}=\frac{y-1}{k}$$

19. Per a qui valor de k les rectes r i s són coincidents?

$$r:\ 2x+3y+5=0\qquad s:\left\{\begin{array}{l}x=-6t+k\\y=4t+2\end{array}\right.$$

20. Donada la recta $r:\left\{\begin{array}{l}x=-1+3t\\y=2+kt\end{array}\right.$, troba el valor de k per a què sigui paral·lela a la bisectriu del segon quadrant.

9.5 Distàncies

Distància entre dos punts: És igual al mòdul del vector que els uneix

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$$

Distància entre un punt i una recta: Si el punt pertany a la recta la distància és zero. En cas contrari, suposem que la recta ve donada en forma general $Ax + By + C = 0$. Aleshores, la distància s'obté de:

$$d(P,r) = \frac{|A\,P_x + B\,P_y + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distància entre dues rectes: Si les dues rectes són secants o coincidents la distància és zero. Si les rectes són paral·leles basta en calcular la distància d'un punt qualsevol de la recta s a la recta r.

Angle entre rectes

Per calcular l'angle que formen dues rectes r i s basta calcular l'angle que formen els seus vectors directors (o vectors normals). Per això utilitzam l'equació (8.4)

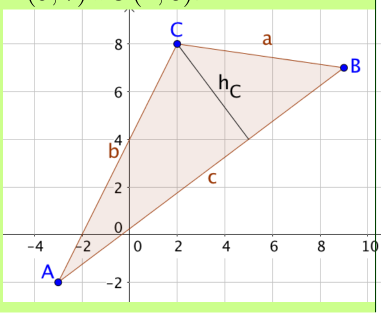
$$\alpha = \arccos \frac{\vec{d_r} \cdot \vec{d_s}}{|\vec{d_r}|\,|\vec{d_s}|}$$

Exercici Resolt

9. Per a quins valors de k els punts $P(10,4)$ i $Q(1,k)$ es troben a distància 15 unitats?	La fórmula de la distància entre dos punts $$dist(P,Q) = \sqrt{(1-10)^2 + (k-4)^2} = 15$$ Si elevam al quadrat per eliminar l'arrel, arribam a l'equació de segon grau $81 + (k-4)^2 = 225$ que té com a solucions $k = -8$ i $k = 16$.

10. Calcula el punts sobre la recta $y = 2x$ que distin 1 del punt $P(1,1)$.	Passam la recta a forma vectorial $(x,y) = (\lambda, 2\lambda)$. La fórmula de la distància entre dos punts $$dist(X,P) = \sqrt{(\lambda-1)^2 + (2\lambda-1)^2} = 1$$ Elevam al quadrat l'equació arribam a $5\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$. Aquesta equació de segon grau té dues solucions $\lambda = 1$ i $\lambda = 1/5$. Substituint cada valor de λ dins la forma vectorial, trobam els punts de la recta $X_1 = (1,2)$ i $X_2 = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.

11. Calcula l'àrea del triangle de vèrtexs $A(-3,-2)$, $B(9,7)$ i $C(2,8)$.



Necessitam calcular l'altura h_C. Per això, hem d'obtenir l'equació de la recta que passa per A i B:

Pendent: $m = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \to y+2 = \frac{3}{4}(x+3) \to \boxed{3x-4y+1=0}$

Altura: $h_c = dist(C, r_{AB}) = \dfrac{|3\cdot 2 - 4\cdot 8 + 1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{25}{5} = 5.$

La base $c = dist(AB) = \sqrt{(9+3)^2+(7+2)^2} = 15$

Àrea del triangle: $A = \dfrac{15\cdot 5}{2} = 37.5\,u^2$

12. Troba un punt de l'eix de les abscisses que equidisti de les rectes $4x+3y+6=0$ i $3x+4y-9=0$.

Si el punt es troba l'eix de les abscisses serà de la forma $P(x,0)$.

Distància de P a la 1a recta: $d_1 = \dfrac{|4x+6|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

Distància de P a la 2a recta: $d_2 = \dfrac{|3x-9|}{\sqrt{3^2+2^2}}$

Igualam les distàncies: $\dfrac{|4x+6|}{5} = \dfrac{|3x-9|}{5}$

Aquesta equació amb valors absoluts té dues posibilitats $4x+6 = 3x-9$ o $4x+6 = -(3x-9)$. Cada cas dóna una solució $x=-15$ i $x=3/7$.

21. Calcula la distància del punt (1, 2) a les rectes que s'indiquen.

a) $x+3y=4$

b) $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+2\lambda \end{cases}$

c) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1}$

d) $y-2 = 4\,(x+1)$

22. Troba la posició relativa de les rectes $r\colon \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+3}{-1}$ i $s\colon (x,y) = (1,\ -2) + \lambda\,(1,1)$ així com l'angle que formen.

23. Tres punts d'un triangle són $A = (1, 1)$, $B = (2, 8)$ i $C = (4, -1)$. Calculau els seus costats, angles i l'àrea del triangle.

24. Determina el punt de la recta $3x-4y+8=0$ que equidista de $A(-6,0)$ i $B(0,-6)$.

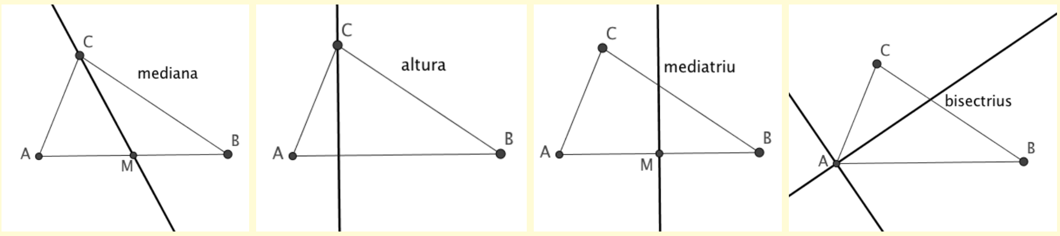
25. ✪ De totes les rectes que passen pel punt $A(1,2)$ troba el pendent d'aquella que dista 1 de l'origen.

Rectes i punts notables d'un triangle

Considerau el costat AB d'un triangle de vèrtexs ABC:

- **Mediana**: És la recta que passa pel punt mitjà $M = \frac{A+B}{2}$ del segment i que passa pel vèrtex oposat C.
- **Altura**: És la recta que passa pel vèrtex oposat C i que és perpendicular al segment AB.
- **Mediatriu**: És la recta que passa pel punt mitjà de AB i que és perpendicular a ell.
- **Bisectriu**: Si r_{AB} és la recta que passa per AB i r_{AC} la recta que passa per AC, la bisectriu és el lloc geomètric de tots els punts $X(x, y)$ que equidisten de les dues rectes.

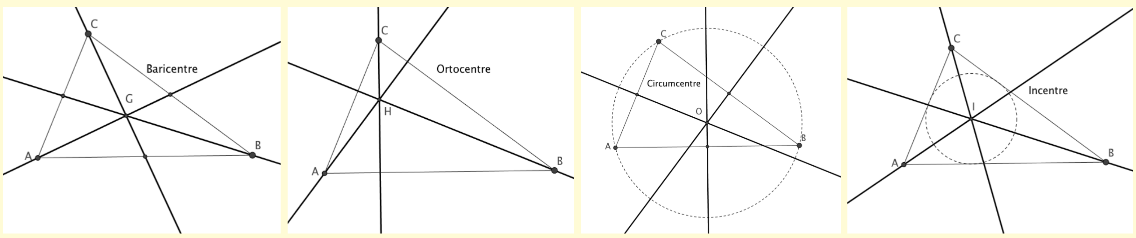
$$dist(X, r_{AB}) = dist(X, r_{AC})$$



Punts notables

Considerau un triangle de vèrtexs ABC:

- **Baricentre (G)**: és el punt on es tallen les medianes. Representa el centre de gravetat del triangle.
- **Ortocentre (H)**: és el punt on es tallen les altures.
- **Circumcentre (O)**: és el punt on es tallen les mediatrius. És el centre de la circumferència circumscrita en el triangle.
- **Incentre (I)**: és el punt on es tallen les bisectrius. És el centre de la circumferència inscrita en el triangle.



26. ★ Donat el triangle de vèrtexs *ABC*, essent $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$ i $C = (4, 4)$, determina les equacions de:

a) Les seves mediatrius i les coordenades del circumcentre

b) Les seves bisectrius i les coordenades de l'incentre

c) Les seves altures i les coordenades de l'ortocentre

d) Les seves medianes i les coordenades del baricentre

9.6 Activitats

27. Considerem la recta $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3}$.

a) Calcula el seu pendent.

b) Pertany el punt $(0,\ 5)$ a la recta? I el $(1,\ 3)$?

c) Dóna almenys tres punts de la recta.

d) Dibuixa la recta.

28. Siguin els punts *A*= (1, 2) i *B* = (3, 0)

a) Calcula el vector que els uneix.

b) Calcula l'equació general de la recta que passa per tots dos.

c) Pertany el punt (2, 1) a la recta?, i el (3, 1)?

29. Considerem la recta $y - 2x = 1$

a) Calculau el seu pendent i vector director.

b) Donau una recta perpendicular a ella que passi per (1, 2). Expressa-la almenys de quatre formes.

30. Sigui la recta $r: \ y = x - 2$.

a) Calcula una recta perpendicular a ella i passi per (2, 1).

b) Calcula una recta que passi per (–1, 3) i sigui paral·lela a r.

31. Troba la posició relativa de les rectes $x + y = 0$ i $s: \ (x, y) = (1,\ 2) + \lambda\,(1,\ 1)$ així com l'angle que formen.

32. Suposa que la distància d'un punt a una recta és 0. Què significa aquest resultat? Aplica-ho a la recta $2x - y = 1$ i el punt (2, 3).

33. Sigui la recta $s: \ x + y = 4$.

a) Calcula una recta perpendicular amb ella i passi per (1, 1).

b) Calcula la distància d'aquesta recta al punt (2, 3).

34. Sigui la recta $s: \ x - 2y + 1 = 0$

a) Calcula una recta que sigui perpendicular a ella i passi per (1, 1).

b) Calcula una recta que passi per (0, 1) i sigui paral·lela a s.

35. Tres punts d'un rectangle *ABCD* són *A* = (2, 1), *B*= (0, 7) i *D* = (5, 2). Es demana:

a) Calcular el punt *C*.

b) Comprovar que l'angle *B* és de 90º.

c) Calcular les longituds dels costats *AB*, *BD* i *CD* del rectangle.

36. Troba la posició relativa de les rectes $r: \ 3x + y = 5$ i $s: \ (x, y) = (1, -2) + \lambda\,(-1, 3)$ així com l'angle que formen.

37. Calcula la recta perpendicular a $y = 2x - 4$ que passi pel punt mitjà de *A* = (1, 3) i *B* = (3,-1)

38. Calcula la distància a l'origen de les rectes que s'indiquen.

a) $2x + y = 3$ b) $y = \dfrac{x}{2}$

c) $(x, y) = (1,\ -2) + \lambda(1, 1)$

39. Calcula la distància del punt (2, –1) a la recta $y + x = 1$.

40. Calcula la distància al punt (1, –2) de les següents rectes.

a) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$ b) $2x + y = 3$

41. Calcula la distància del punt (1, 4) a la recta $y - x = 1$

42. Una recta passa pel punt (3, 1) i forma amb els semieixos positius un triangle d'àrea 6 unitats. Calcula l'equació d'aquesta recta.

43. Calcula el punt simètric de $A = (1, 2)$ respecte de la recta $y = x - 3$.

44. Considerem un pentàgon irregular *ABCDE* format pels punts $A = (-2, 3)$, $B = (1, 4)$, $C = (3,3)$, $D = (2, 2)$ i $E = (-1, 1)$. Dibuixa-ho i calcula la seva àrea. Et recomanem dividir-ho en figures més manejables.

45. Considerem un quadrat *ABCD*. El punt A és (1, 2) i els punts B i C estan sobre la recta $r : y - x = 3$. Calcula els quatre vèrtexs del quadrat i la seva àrea.

46. Determina les mediatrius dels segments d'extrems A i B. Representa-ho gràficament.

a) $A = (0, 7)$ i $B = (0, 3)$

b) $A = (-3, 0)$ i $B = (6, 0)$

c) $A = (-5, 0)$ i $B = (0, -5)$

47. Determina les bisectrius de les rectes r i s per cada un dels casos següents. Representa-ho gràficament.

a) $r : x + 2y - 5 = 0$ i

$s : 2x - y - 8 = 0$

b) $r : 3x + 5y - 2 = 0$ i

$s : 4x - 6y - 1 = 0$

c) $r : x = 0$ i $s : y = 0$

d) $r : x + y = 0$ i $s : x - y = 0$

48. Considera la recta $x + 2y = 3$ i el punt $A(2, 3)$. Calcula el punt Q de mínima distància i el simètric de A respecte de la recta.

49. En un paral·lelogram *ABCD*, els vèrtexs venen donats per $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ i $C = (3, -1)$.

a) Calcula l'angle $\hat{B}$ (entre els costats *BA* i *BC*).

b) Calcula l'equació de la recta que passa per A i C (la diagonal del paral·lelogram).

c) Calcula el perímetre de la figura.

d) Calcula el punt D.

50. La recta $2x + y - 4 = 0$ és la mediatriu d'un segment que té un extrem al punt (0, 0). Troba les coordenades de l'altre extrem.

51. Recordem que el circumcentre d'un triangle és el punt de tall de les mediatrius dels seus costats. Calcula el circumcentre del triangle $A = (1, 2)$, $B = (1, 6)$ i $C = (3, 8)$ escrivint les equacions de les tres mediatrius.

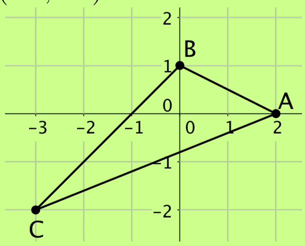
52. El baricentre d'un triangle és el punt d'intersecció de les medianes (la mitjana és la recta que va des d'un vèrtex al punt mitjà del costat oposat). Sabent això, calcula el baricentre del triangle $A = (-2, 2)$, $B = (1, 4)$ i $C = (1, 0)$, escrivint les equacions de les tres medianes.

53. La recta $x + y - 2 = 0$ i una recta paral·lela a ella que passa pel punt (0, 5) determinen, juntament amb els eixos de coordenades, un trapezi isòsceles. Troba'n l'àrea.

54. Troba el punt de l'eix de les abscisses que equidisti de les rectes $r : 4x + 3y + 6 = 0$ i $s : 3x + 4y - 9 = 0$.

Exercici Resolt

13. Troba el les altures i l'ortocentre del triangle amb vèrtexs $A(2,0)$, $B(0,1)$ i $C(-3,-2)$.



h_C: Altura que parteix de C i es perpendicular a AB

$m_{AB} = -\frac{1}{2}$; $m_{h_C} = 2$: $y = -2 + 3(x+3) \;\rightarrow\; 2x - y + 4 = 0$

h_B: Altura que parteix de B i es perpendicular a AC

$m_{AC} = \frac{2}{5}$; $m_{h_C} = -\frac{5}{2}$: $y = 1 - \frac{5}{2}x \;\rightarrow\; 5x + 2y - 2 = 0$

L'ortocentre s'obté del punt d'intersecció de les altures

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 4 = 0 \\ 5x + 2y - 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{H = \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)}$$

Autoavaluació

1. Es consideren els punts $A(0,1)$, $B(4,9)$ i $C(-4,k)$. Troba k perquè

a) Els punts estiguin alineats.

b) Perquè el punt C sigui el punt simètric de B respecte A.

2. Calcula l'equació de les rectes:

a) Que passa per $A(3,2)$ i $B(-2,1)$ en forma contínua i general.

b) Que passa per $A(1,1)$ i té pendent -3 en forma punt-pendent i general.

3. Calcula l'equació de les rectes:

a) Passa per $P(2,-3)$ i és perpendicular a $(x,y) = (0,1) + t(5,-2)$.

b) És paral·lela a $2x + 3y + 1 = 0$ i passa pel punt $(0,2)$.

4. Estudia la posició relativa de les rectes r i s segons els valors del paràmetre k $r: \; 3x + ky - 34 = 0$ i $s: \; y = \frac{5}{3}x$.

5. Calcula k perquè les rectes $y = 3$ i $y = kx + 1$ formin un angle de $60°$.

6. Troba tots els punts situats sobre la recta $y = 2x + 1$ que es troben a distància $\sqrt{52}$ del punt $A(1,1)$.

Tema 10

Còniques i llocs geomètrics

Índex

10.1 Concepte de lloc geomètric

Un lloc geomètric és un conjunt de punts (x, y) del pla que compleixen una certa condició.

Per exemple, el conjunt $\{(x, y)$ tals que $y = x\}$ és una forma d'expressar tots els punts que es troben sobre la recta $y = x$.

La bisectriu de costats les rectes r_1, r_2 és el lloc geomètric

$$\{X(x, y) \text{ tals que } dist(X, r_1) = dist(X, r_2)\}$$

Una circumferència de centre O i radi R són tots els punts de

$$\{X(x, y) \text{ tals que } dist(X, O) = R\}$$

1. Troba el lloc geomètric dels punts que equidisten de $A(5, -3)$ i $B(2, 0)$.

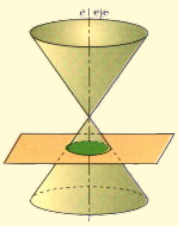
2. Calcula el lloc geomètric dels punts (x, y) tals que la diferència dels quadrats de les distàncies als punts $A(0, 0)$ i $B(6, 3)$ sigui igual a 15. Quina figura obtens?

3. Troba tots els punts del pla que equidisten de les rectes

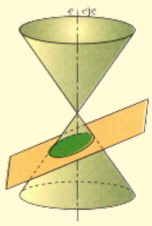
$$r :\ 4x - 3y + 8 = 0 \ \text{ i } \ s :\ 12x + 5y - 7 = 0$$

10.2 Les còniques com a seccions d'una superfície cònica

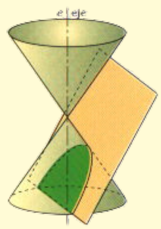
Si el pla que talla a la superfície cònica és perpendicular a l'eix, la secció és una **circumferència**.



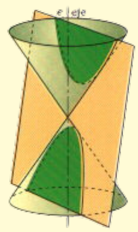
Si inclinam el pla de manera que sigui oblic amb l'eix i talli a totes les generatrius, la secció és una **el·lipse**.



Si continuam inclinant el pla de manera que sigui paral·lel a una generatriu, resulta una **paràbola**.



Finalment, si inclinam encara més el pla, obtenim una figura amb dues branques que s'anomena **hipèrbola**.



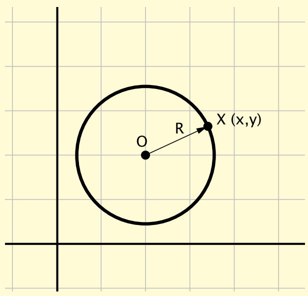
10.3 La circumferència

Vídeo 194: La circumferència

És defineix una circumferència com el lloc geomètric de tots els punts del pla que equidisten d'un punt anomenat centre.

L'equació canònica d'una circumferència de radi R i centre el punt $O(x_0, y_0)$ és:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{10.1}$$



Si efectuam els quadrats en l'equació (10.1) obtindrem l'expressió general de la circumferència:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{10.2}$$

essent $A = -2x_0$, $B = -2y_0$, $C = x_0^2 + y_0^2 - R^2$. És important notar que només serà possible formar una circumferència si $x_0^2 + y_0^2 - C > 0$.

Exercici Resolt

1. Calcula l'equació canònica i general de la circumferència de centre $O(3, 0)$ i que passa pel punt $P(5, 2)$.

En primer lloc calculam el radi

$$R = dist(O, P) = \sqrt{(5-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$$

L'equació canònica és $(x - 3)^2 + (y - 0)^2 = 8$. Si efectuam els quadrats, trobam l'equació general: $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$.

2. Donada la circumferència d'equació $x^2+y^2+4x-10y+13=0$ troba el seu centre i radi.	De l'equació general identificam els coeficients $A=4$, $B=-10$ i $C=13$. Si utilitzam les relacions: $4=-2x_0$, $-10=-2y_0$ automàticament tenim el centre $x_0=-2$ i $y_0=5$. Per trobar el radi utilitzam la darrera relació: $13=(-2)^2+5^2-R^2$. Si d'aquí aïllam R trobam $R=4$. Aquesta circumferència té d'equació canònica $(x+2)^2+(y-5)^2=4^2$.

4. Calcula l'equació de la circumferència que passa pel punt $A=(1,1)$ i té per centre a $O=(-1,3)$.

5. Comprova que $x^2-2x+y^2=0$ és l'equació d'una circumferència. Troba'n el centre i el radi. Dibuixa-la.

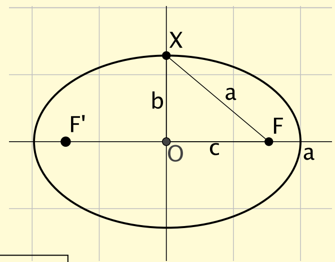
10.4 L'el·lipse

Vídeo 195: L'el·lipse

És defineix l'el·lipse com el lloc geomètric de tots els punts del pla tals que la *suma de les distàncies* a dos punts fixos anomenats focus es manté constant.

L'equació canònica d'una el·lipse de semieixos a i b i centre el punt $O(x_0,y_0)$ és:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \tag{10.3}$$



Quan els semieixos d'una el·lipse són iguals $a=b=R$, trobam l'equació (10.1) de la circumferència.

Els vèrtexs estan situats en els punts (x_0-a,y_0), (x_0+a,y_0), (x_0,y_0-b), (x_0,y_0+b). Els focus els trobam en els punts $F(x_0+c,y_0)$ i $F'(x_0-c,y_0)$.

Definim c com la semi-distància focal. A qualsevol el·lipse $\boxed{a^2=b^2+c^2}$.

Una mesura de quan estirada és una el·lipse ens ho dóna l'excentricitat $e=\frac{c}{a}$. Per una el·lipse es compleix que $0<e<1$. Quan $e\to 0$ és pràcticament una circumferència i $e\to 1$ s'assembla a un "espagueti".

Exercici Resolt

3. Calcula l'equació de l'el·lipse sabent que té centre a $O(0,0)$, té semieix major 8 i que un dels focus és al punt $F(3,0)$. Calcula la seva excentricitat.	Si el centre és $(0,0)$, l'equació canònica es redueix a $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Una de les dades és que el semieix major val $a=8$ i que la semi-distància focal és $c=3$. Falta trobar $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{55}$. L'equació és: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{55}=1$. L'excentricitat és $e=c/a=3/8=0.375$, òbviament menor que 1.

4. Donada l'equació de l'el·lipse $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, troba la posició dels seus focus i dels vèrtexs. Troba la seva excentricitat.

En primer lloc veim que el centre és el punt $(0, 0)$. El semieix major val $a = \sqrt{9} = 3$ i el semi-eix menor $b = 1$. La semi-distància focal es troba de $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8}$.

Els vèrtexs estan a $(-3, 0)$; $(3, 0)$; $(0, 1)$; $(0, -1)$. Els dos focus es troben a $F'(-\sqrt{8}, 0)$ i $F(\sqrt{8}, 0)$.

L'excentricitat és $e = c/a = \sqrt{8}/3 = 0.943$ propera a 1, cosa que ens indica que és bastant allargada.

6. Calcula el centre, semi-eixos, focus i excentricitat de l'el·lipse $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

7. Una el·lipse té focus en $(-2, 0)$ i en $(2, 0)$ i passa pel punt $(3, 0)$. Calcula la seva equació i dibuixa-la. Quant val l'excentricitat?

8. Calcula l'equació d'una el·lipse centrada a l'origen en vèrtex en el punt $V(10, 0)$ i excentricitat $e = 0.2$.

10.5 La hipèrbola

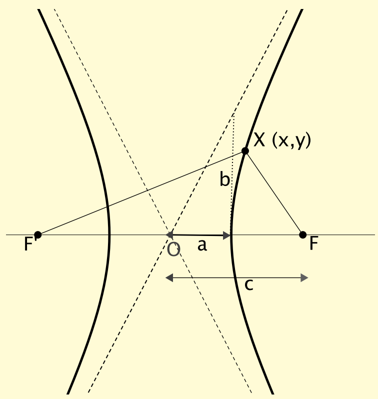
Vídeo 196: La hipèrbola

És defineix la hipèrbola com el lloc geomètric de tots els punts del pla tals que la *diferència de les distàncies* a dos punts fixos anomenats focus es manté constant.

L'equació canònica d'una hipèrbola de semieixos a i b i centre el punt (x_0, y_0) és:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{10.4}$$

Els vèrtexs estan situats en els punts $(x_0 - a, y_0)$, $(x_0 + a, y_0)$. Els focus els trobam en els punts $F(x_0 + c, y_0)$ i $F'(x_0 - c, y_0)$.

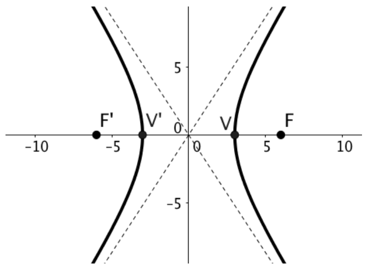


Definim c com la semi-distància focal. A qualsevol hipèrbola es compleix que $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$. L'excentricitat $e = \frac{c}{a}$ per una hipèrbola compleix que $e > 1$.

Les dues branques d'una hipèrbola s'acosten a dues asímptotes obliqües que tenen com equacions $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$.

Si $a = b$, es diu **hipèrbola equilàtera** i es compleix que les dues asímptotes formen un angle recte. Si prenem les asímptotes com a eixos, l'equació de la hipèrbola equilàtera es trasforma en $xy = k$.

Exercici Resolt

5. Calcula l'equació de la hipèrbola sabent que té centre a $O(0,0)$, semi-distància focal 6 i excentricitat 2. Calcula les seves asímptotes. Representa-ho tot gràficament.	Si el centre és $(0,0)$, l'equació canònica es redueix a $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Una de les dades és que el semi-distància focal val $c=6$ i que l'excentricitat és $e=2$. Sabem que $e=c/a$, i d'aquí aïllam el semieix major $a=c/e=6/2=3$. Falta trobar el semi-eix menor $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{27}$. L'equació és: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$. Les asímptotes són $y=\pm\frac{\sqrt{27}}{6}x$. 
6. Donada l'equació de la hipèrbola $x^2-y^2=9$, troba la posició dels seus focus i dels vèrtexs. Calcula la seva excentricitat.	Es tracta d'una hipèrbola equilàtera $a=b=3$. El centre és el punt $(0,0)$. La semi-distància focal es troba de $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Els vèrtexs estan a $(-3,0)$; $(3,0)$. Els dos focus es troben a $F'(-3\sqrt{2},0)$ i $F(3\sqrt{2},0)$. L'excentricitat és $e=c/a=3\sqrt{2}/3=\sqrt{2}\approx 1.41$.

9. Donada la hipèrbola $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$, calcula el centre, els seus focus, asímptotes i la seva excentricitat.

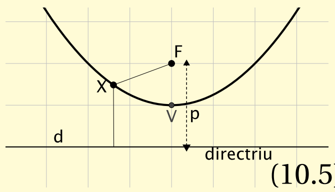
10. Calcula l'equació de la hipèrbola equilàtera que té per focus $(2,\ 2)$ i $(-2,\ \ 2)$, així com els seus paràmetres *a* i *b* i la seva excentricitat. Dibuixa-la.

10.6 La paràbola

Vídeo 197: La paràbola

És defineix la paràbola com el lloc geomètric de tots els punts del pla tals que la distància a un punt fix anomenat *focus* és igual a la distància a una recta anomenada *directriu*.

Si anomenam p la distància entre el Focus i la directriu, i suposam que la directriu és la recta horitzontal $y=-p/2$ i el focus és al punt $F(0,p/2)$, trobam la paràbola vertical:



$$y=\frac{1}{2p}x^2 \tag{10.5}$$

Aquesta paràbola té el vèrtex en $V(0,0)$. Si desplaçam el vèrtex al punt $V(x_0,y_0)$, l'equació canviaria a $y-y_0=\dfrac{1}{2p}(x-x_0)^2$.

Si la directriu és la recta horitzontal $x = -p/2$ i el focus és al punt $F(p/2, 0)$, trobam la paràbola horitzontal:

$$x = \frac{1}{2p}y^2 \tag{10.6}$$

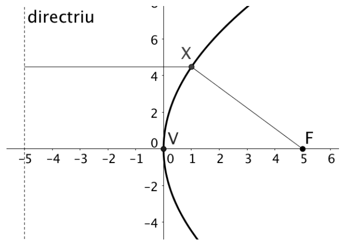
Aquesta paràbola també té el vèrtex en $V(0, 0)$.

Totes les paràboles tenen excentricitat $e = 1$.

Exercici Resolt

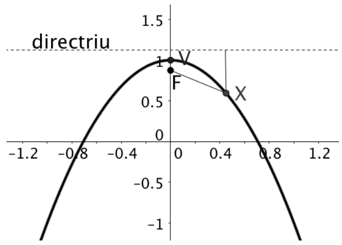
7. Calcula l'equació de la paràbola que té el focus al punt $F(5, 0)$ i com directriu la recta $x = -5$. Representa-la gràficament.

Es tracta d'una paràbola horitzontal amb $p = 10$. El vèrtex és el punt $(0, 0)$. L'equació és $x = \frac{1}{20}y^2$.



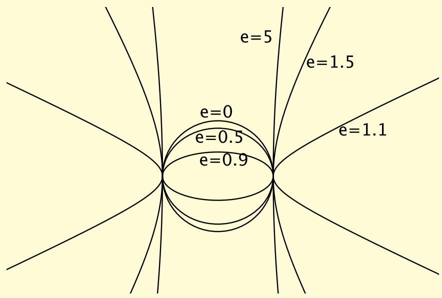
8. Considera la paràbola $y = -2x^2 + 1$, troba la posició del seu focus, el vèrtex i l'equació de la directriu. Representa gràficament la situació.

Es tracta d'una paràbola vertical. El vèrtex és el punt $V(0, 1)$. La distància entre el focus i la directriu és $-2 = \frac{1}{2p}$, és a dir, $p = -1/4$. El signe negatiu significa que la directriu està per damunt el focus, és a dir, la paràbola és convexa. La directriu és la recta horitzontal $y = 1 + 1/8 = 9/8$ i el focus es troba a $F(0, 7/8)$.



Excentricitat de les còniques

La figura següent mostra com canvia la forma de la cònica quan anam augmentant l'excentricitat des de 0 (circumferència), passant per 1 (paràbola) fins a valors majors que 1 (hipèrbola).



11. Calcula l'equació de la paràbola amb focus $F(3, 0)$ i directriu la recta $x = -3$.

12. Calcula el vèrtex, focus i directriu de la paràbola $4y = (x - 3)^2$.

13. L'òrbita d'un cometa té una excentricitat 1.75. De quina cònica es tracta? Quina és la distància més propera al focus?

10.7 Activitats

14. Calcula tots els elements de les el·lipses següents i dibuixa-les.

a) $\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

b) $4x^2+9y^2-8x=0$

15. Considera la hipèrbola $x^2-y^2+2y=0$. Calcula:

(a) La seva equació canònica.

(b) El seu centre i focus.

(c) Les seves asímptotes.

16. Calcula tots els elements de les hipèrboles següents i dibuixa-les.

a) $(x+1)^2-\frac{(y-2)^2}{4}=1$

b) $4x^2-y^2-8x+2y=0$

17. Una hipèrbola horitzontal té centre en el (1, 2) i excentricitat 2. Sabent que passa pel punt (4, 2), quina és la seva equació? [*Pista*: el paràmetre *a* el pots treure simplement del dibuix].

18. El vèrtex d'una paràbola vertical amb les branques cap amunt és el punt (2, −1). Sabent que passa pel punt (1, 0) escriu l'equació de la paràbola, dibuixa-la i calcula el seu focus.

19. Identifica les figures, dibuixa-les i calcula els seus focus.

a) $2y^2+3x=0$

b) $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$

20. Dibuixa amb *Geogebra* o qualsevol programa equivalent les següents còniques. Classifica-les en el·lipses, paràboles o hipèrboles.

a) $x^2+3xy=3$

b) $x^2+2xy+y^2-3y=0$

c) $x^2-2xy-y^2+4=0$

d) $2x^2+4xy+y^2=1$

21. Dibuixa les següents el·lipses i calcula els seus eixos major i menor. Series capaç de calcular la seva excentricitat? [*Pista*: fes-ho amb l'ordinador, tallant l'el·lipse amb la recta focal].

(a) Una el·lipse amb focus en (1, 3) i en (3, 1), que passa per l'origen.

(b) Una el·lipse amb focus en (−1, 0) i en (−5, 2) que passa pel $(-1,2)$.

22. Dibuixa, amb *Geogebra* o un programa equivalent les següents hipèrboles i calcula els seus eixos major i menor.

(a) Una hipèrbola amb focus en (1, 3) i en (3, 1) que passa pel (2, 0).

(b) Una hipèrbola amb focus en $(-1,0)$ i en $(-5,2)$ que passa pel $(-1,2)$.

23. Dibuixa les següents paràboles i calcula el seu eix de simetria i el seu vèrtex.

(a) Una paràbola amb focus en (1, 3) i recta directriu $y=x$.

(b) Una paràbola amb focus en (−1, 1) i recta directriu $3x+y=4$.

24. Calcula els focus i els paràmetres *a*, *b* i *c* de les següents hipèrboles equilàteres i dibuixa-les:

a) $xy=\frac{9}{2}$

b) $xy=32$

c) $xy=24$

d) $xy=1$

25. Identifica les figures i dibuixa-les

a) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$

b) $\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$

c) $y^2-2x=0$

26. Calculau la circumferència que passa pels punts A=(1, 4), B=(3, 4) i C=(5, 5).

27. Calculau l'equació d'una hipèrbola amb centre $O(-1,1)$ i semi-eixos 8 i 5. Dibuixa-la.

28. Identifica les figures i dibuixa-les. Calcula els focus.

a) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

b) $y^2-2x=1$

c) $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

d) $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

29. Identifica les figures i dibuixa-les.

a) $x^2+2y^2-4x=0$

b) $x^2-y^2+2y=0$

30. Calcula la circumferència que passa per A=(1, 4), B = (3, 6) i el centre de la qual és el punt mitjà de $\overline{AB}$.

31. Considera la hipèrbola equilàtera $xy=50$. Calcula els seus focus, excentricitat i asímptotes i dibuixa-la.

32. Una el·lipse té focus en (1, 1) i en (4, 1) i passa pel punt (0, 1). Calcula la seva equació i dibuixa-la. Quant val la seva excentricitat?

33. Una el·lipse té centre al punt (1, −1) i passa pels punts (5, −1) i (1, 1). Sabent que el semi-eix major és 4, a) Dóna la seva equació i dibuixa l'el·lipse, b) Calcula els seus focus i l'excentricitat.

34. Una hipèrbola equilàtera amb centre a l'origen i passa pel punt (1, 3). Calcula els seus focus i dibuixa-la.

35. Sabent que les asímptotes d'una hipèrbola són $y=2x$ i $y=-2x$ i que passa pel punt (2,0), calcula la seva equació.

36. Una hipèrbola equilàtera té com a equació $xy=8$. Calcula els seus focus.

Autoavaluació

1. Calcula l'equació de la circumferència que passa pels punts $P(4,5)$, $Q(-3,4)$ i $R=(6,1)$. Suposa que l'equació és de la forma $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ i planteja un sistema d'equacions per trobar A, B i C.

2. Calcula l'equació de l'el·lipse horitzontal amb centre en $O(-1,3)$ i semi-eixos 5 i 3. Calcula els seus focus i dibuixa-la. Què val l'excentricitat?

3. Dibuixa la hipèrbola $x^2-2y^2=4$ i les seves asímptotes. Calcula els seus focus i l'excentricitat.

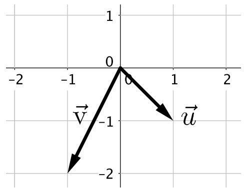
4. Una paràbola vertical té el vèrtex en $V(1,2)$ i les branques cap amunt. Si sabem que passa pel punt $P(0,5)$, calcula la seva equació, l'equació de la directriu i la posició del focus.

5. Identifica les còniques i dibuixa-les:

a) $\frac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$ b) $x^2-2x+y^2-4y+1=0$ c) $x^2-3y=6$

SÍNTESI DE LA PART III

Geometria en el pla



1. Donats els vectors de la figura calcula:
a) $|\vec{u}|$ b) $-2\vec{u}+3\vec{v}$ c) $2\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

2. Determina el valor de a perquè els vectors $(1,3)$ i $(6,a)$ siguin ortogonals.

3. Donats els vectors $\vec{u}(-1,0)$ i $\vec{v}(1,2)$

a) Expressa el vector $\vec{w}(4,6)$ com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Recorda: $\vec{w}=m\vec{u}+n\vec{v}$.

b) Calcula l'angle que formen $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

4. Determina les components d'un vector (x,y) sabent que és unitari i que forma un angle de $60°$ amb el vector $(2,0)$.

5. Determina el valor de y perquè els punts $A(0,1)$, $B(-1,4)$ i $C(3,y)$ estiguin alineats.

6. Troba en forma paramètrica i general l'equació de la recta que passa per $P(0,3)$ i és perpendicular a la recta $s: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}$.

7. Es consideren les rectes $r: 2x+y-1=0$ i $s: kx-y+5=0$. Determina k per a cadascun dels casos següents:

a) r i s siguin paral·leles.

b) r i s es tallin en el punt $P(2,-3)$.

8. Troba el punt simètric de $A(0,0)$ respecte de la recta $r: x+y-2=0$.

9. Troba l'equació de la recta que passa pel punt d'intersecció de les rectes:

$r:\ 2x-y+1=0$ i $s:\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}$ i forma un angle de $45°$ amb la recta r.

10. Troba els punts de la recta $y=0$ que disten 3 unitats de la recta $3x-4y=0$.

11. Calcula l'àrea del triangle de vèrtexs $A(1,2)$, $B(-1,-2)$ i $C(2,-1)$.

12. Calcula les mediatrius i les coordenades del circumcentre d'un triangle amb vèrtexs als punts $A(2,-1)$, $B(-5,1)$ i $C(0,3)$.

13. Troba el centre i el radi de la circumferència $x^2+y^2-2x+6y+6=0$.

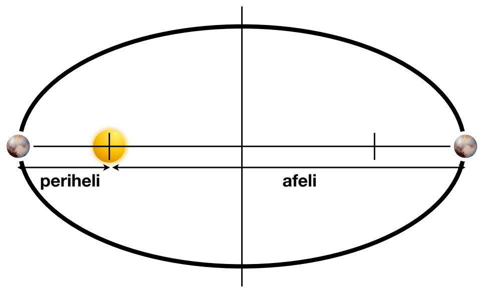
14. Escriu l'equació de l'el·lipse horitzontal de centre $(0,0)$, sabent que l'excentricitat és $e=4/5$ i que un dels focus és a $F(8,0)$.

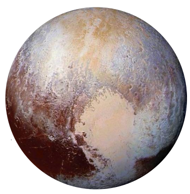
15. Identifica les còniques, calcula'n els seus elements i dibuixa-les:

a) $2y^2-12x=0$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

16. Es defineixen l'afeli (periheli) com el punt de l'òrbita d'un planeta que es troba a la màxima (mínima) distància del Sol. Plutó té periheli 29.5 i afeli 49.1 unitats astronòmiques (u.a.), on 1 u.a.=150 milions de quilòmetres. Calcula l'equació de l'òrbita el·líptica i la seva excentricitat. Recorda que el Sol es troba en un dels focus de l'el·lipse.





Imatge de Plutó per la sonda "*New Horizons*" Juliol 2015

Part IV

ESTADÍSTICA I PROBABILITAT

(...) Aconseguírem obtenir així la fórmula estadística per conèixer la posició d'un electró. Però, personalment, no crec que Déu jugui als daus. –Albert Einstein–

Pierre Laplace

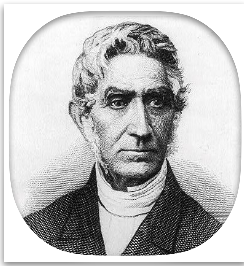
(1749-1827)

Juntament amb *J. Bernoulli* van desenvolupar de la teoria de la probabilitat. És famosa la seva regla per successos equiprobables.

Adrien Legendre

(1752-1833)

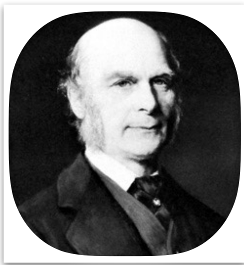
Va fer importants contribucions al camp de l'estadística. En particular, va ésser qui va desenvolupar el mètode dels mínims quadrats per a la regressió lineal.



Adolphe Quetelet

(1796-1874)

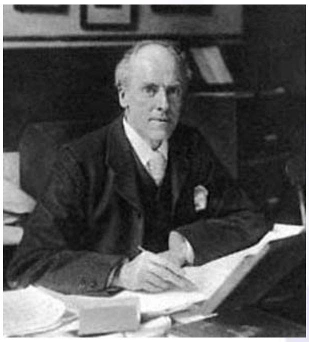
Va assentar les bases del futur treball estadístic mitjançant conceptes com ara desviació, valor mitjà, corba normal, …



Francis Galton

(1822-1911)

Com estadista va estudiar la correlació i la regressió, la desviació estàndard i es conegut com l'inventor de la màquina de *Galton*.



Karl Pearson (1857-1936)

Tema 11

Estadística bidimensional

Índex

11.1 Estadística descriptiva univariant

Paràmetres estadístics

Donada una variable estadística x_i amb cada valor repetit f_i vegades (freqüència), es defineixen

- **Nombre de dades:** $N = \sum_i f_i$
- **Mitjana aritmètica:** $\bar{x} = \dfrac{\sum_i f_i x_i}{N}$
- **Variància:** $Var = \dfrac{\sum_i f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$
- **Desviació típica:** $\sigma = \sqrt{Var}$
- **Coeficient de variació:** $CV = \dfrac{\sigma_x}{\bar{x}}$
- **Moda:** El valor de x més freqüent.
- **Mediana:** Valor de x pel qual la *freqüència acumulada* assoleix el 50%.
- **Rang:** La diferència entre els valors major i menor de x.

La mitjana és el centre de gravetat de la distribució i la desviació típica ens dóna la **dispersió**. És a dir, ens diu com d'allunyades estan les dades respecte de la mitjana. Podem pensar que una dada és "normal" si es troba dins l'interval de x $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$.

1. Classifica les següents variables com a qualitatives o quantitatives, i aquestes últimes com a contínues o discretes.

a) Intenció de vot d'un partit. ....

b) Nombre de correus electrònics que reps en un mes. ....

c) Número de calçat. ....

d) Nombre de quilòmetres recorreguts en cap de setmana. ....

e) Marques de cervesa. ....

f) Nombre d'empleats d'una empresa. ....

g) Altura d'una persona. ....

h) Temperatura d'un malalt. ....

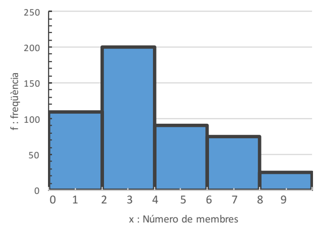
Exercici Resolt

1. En un barri s'ha trobat que les famílies residents s'han distribuït, segons el número de membres, de la forma següent:

membres	*nº famílies*
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

a) Representa un histograma.
b) Calcula la mitjana i la desviació típica.

Es tracta d'una variable discreta (número de membres) que s'ha agrupat en intervals. El número de famílies és la freqüència. Aleshores, el gràfic més adequat és fer un histograma.



Per calcular els paràmetres estadístics necessitam calcular **la marca de classe** que és el punt mitjà de cada interval.

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1	110	110	110
3	200	600	1800
5	90	450	2250
7	75	525	3675
9	25	225	2025
SUMES	500	1910	9860

La mitjana s'obté de $\bar{x} = \dfrac{1910}{500} = 3.82$

La desviació típica $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{9860}{500} - 3.82^2} = 2.26$

El coeficient de variació és $CV = \dfrac{2.26}{3.82} = 0.57$, aproximadament un 60%.

2. El govern desitja saber si el nombre de fills per família ha descendit respecte a la dècada anterior. Per a això s'ha demanant a 50 famílies pel nombre de fills i s'ha obtingut les dades següents.

2 4 2 3 1   2 4 2 3 0   2 2 2 3 2   6 2 3 2 2   3 2 3 3 4

3 3 4 5 2   0 3 2 1 2   3 2 2 3 1   4 2 3 2 4   3 3 2 2 1

a) Construeix la taula de freqüències amb aquestes dades.

b) Construeix el gràfic que consideris més adequat amb les freqüències.

c) Calcula la mitjana i desviació típica del nombre de fills.

3. En un hospital es desitja fer un estudi sobre els pesos dels nounats. Per a això es recullen les dades de 40 nadons:

3.2	3.7	4.2	4.6	3.7	3.0	2.9	3.1	3.0	4.5
4.1	3.8	3.9	3.6	3.2	3.5	3.0	2.5	2.7	2.8
3.0	4.0	4.5	3.5	3.5	3.6	2.9	3.2	4.2	4.3
4.1	4.6	4.2	4.5	4.3	3.2	3.7	2.9	3.1	3.5

a) Construeix la taula de freqüències agrupant les dades en 5 intervals iguals.

b) Representa un histograma.

c) Calcula la mitjana i desviació típica.

11.2 Estadística bidimensional

En nombroses ocasions ens interessa estudiar simultàniament dos o més caràcters de la població. En particular, volem saber quina relació existeix entre les variables. Aquest és l'objecte d'estudi de l'estadística bidimensional.

Existeixen dos tipus de relació entre variables $\{x_i, y_i\}$:

- **Dependència funcional**: Existeix una llei funcional que relaciona les dues variables $y_i = f(x_i)$. A major pressió exercida, menor volum $V = \frac{k}{P}$.
- **Correlació estadística**: No existeix cap llei exacta sinó que vindrà donada per una tendència. Per exemple, si els pares són alts, el normal és que els fills també ho siguin.

Hi ha diversos tipus de correlació estadística:

- **Correlació positiva**: Quan x_i augmenta, també ho fa y_i. Per exemple, les notes de l'examen de física i les notes de l'examen de matemàtiques.
- **Correlació negativa**: Quan x_i augmenta, y_i disminueix. Per exemple, a major distància de la cistella de basquet, menor el nombre d'encerts.

Cadascuna d'elles pot ésser correlació **forta** o correlació **feble**. Començarem l'estudi mesurant de forma qualitativa aquesta correlació. A mesura que avancem en el tema, però, aprendrem com descriure-la de forma quantitativa.

4. Per a cadascun dels casos següents analitza quin és el tipus de relació entre les variables (funcional o correlació). En cas de correlació indica si és positiva o negativa.

a) El radi d'una esfera – el costat d'aquesta

b) El nombre d'encerts d'un jugador de basquet – La distància a la cistella.

c) Les notes de l'examen de matemàtiques – Notes de l'examen de física.

d) La distància d'un trajecte en tren – El preu el bitllet.

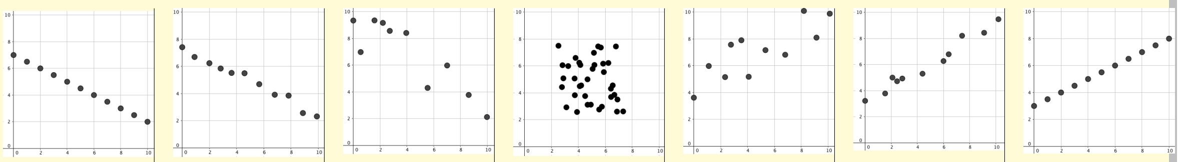
e) El pes dels alumnes de 1r de batxillerat – La seva altura.

f) El nombre de membres de la família – El preu del rebut d'aigua mensual.

Núvol de punts

Un núvol de punts s'obté de dibuixar els punts corresponents als parells (x_i, y_i).

Aquest núvol ens ajuda a identificar el tipus de relació entre les variables:



Funcional negativa	Correlació negativa forta	Correlació negativa feble	Sense correlació	Correlació positiva feble	Correlació positiva forta	Funcional positiva

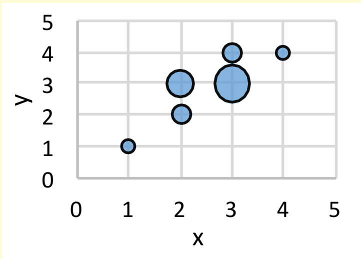
Com més condensats estiguin els punts al voltant d'una línia recta diem que major és la correlació. Aquesta línia s'anomena **recta de regressió**. Si aquesta recta és creixent es diu que la correlació és positiva, mentres que si és decreixent la correlació és negativa.

El **centre de gravetat** del núvol és a les mitjanes de les variables $G(\bar{x}, \bar{y})$. Es compleix que la recta de regressió passa sempre pel centre de gravetat.

Núvol de bimbolles

Quan els punts (x_i, y_i) venen agrupats en taula de doble entrada, en comptes de dibuixar un punt a (x_i, y_i), hi dibuixam una bimbolla amb radi proporcional a la freqüència del punt f_i.

x_i \ y_i	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	2	4	0
3	0	0	6	2
4	0	0	0	1



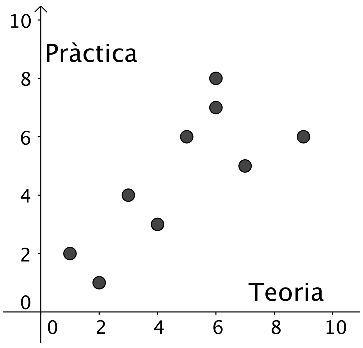
Exercici Resolt

2. En l'examen d'una assignatura que consta de part teòrica i part pràctica, les qualificacions van ser:

Teoria	Pràctica
5	6
7	5
6	8
9	6
3	4
1	2
2	1
4	3
6	7

Dibuixa el núvol de punts i indica el tipus de relació.

Del núvol es dedueix que la dependència entre les variables és una correlació positiva d'intensitat moderada.



5. En una zona residencial s'ha estudiat el nombre d'habitacions que té cada pis (h) i el nombre de persones que hi viuen (p). Aquests són els resultats

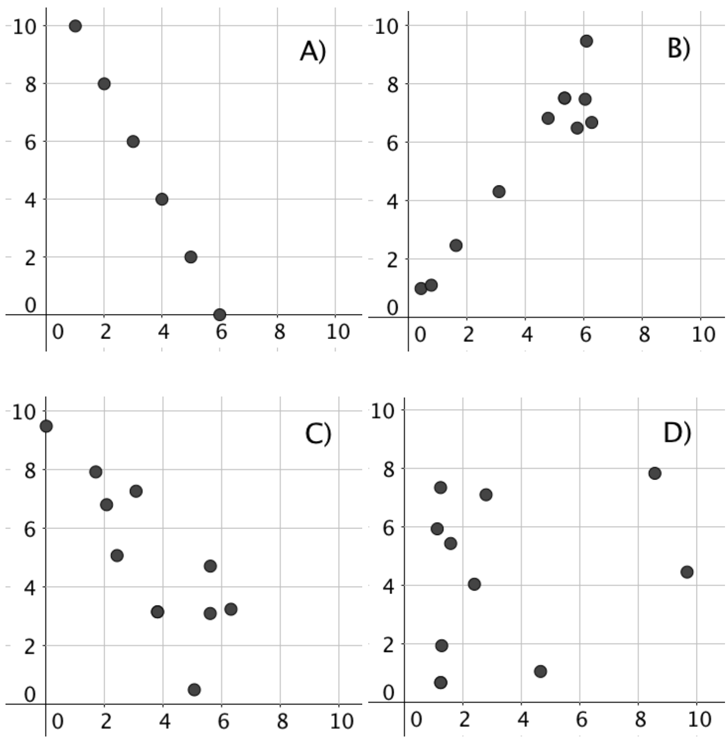
h	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5
p	1	2	2	3	3	4	5	4	5	6

Representa'ls mitjançant un núvol de punts i interpreta'l.

6. En una mostra de 64 famílies s'ha estudiat el nombre de membres en edat laboral (x) i el nombre d'ells que es troben en actiu (y). Els resultats són a la taula. Representa un núvol.

y \ x	1	2	3	4
1	6	10	12	16
2	0	2	5	8
3	0	0	1	4

7. a) Traça a ull la recta de regressió per a cadascun dels casos següents



b) Quin cas té correlació positiva i quin negativa?

c) Un cas és una relació funcional, quin? Troba la funció que relacionen les dues variables.

d) Ordena de menor a major les correlacions.

Covariància. Coeficient de regressió

A l'apartat anterior, el núvol de punts ens proporciona una forma de classificar la correlació entre les variables $\{x_i, y_i\}$ de forma qualitativa.

Anomenam **covariància** al paràmetre estadístic que relaciona quantitativament la relació entre les variables:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_i x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} \tag{11.1}$$

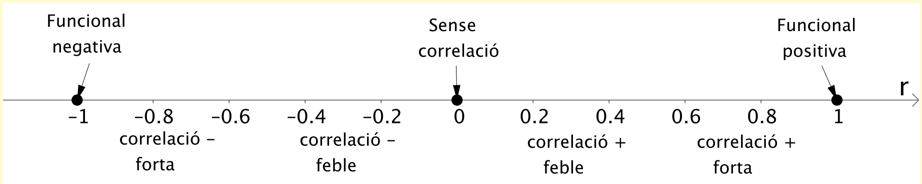
on N és el nombre de punts (x_i, y_i) i $\bar{x}$, $\bar{y}$ les mitjanes de cada variable.

La covariància pot ésser negativa, zero o positiva segons els tipus de correlació que existeixi.

Per poder quantificar millor l'intensitat de la correlació empram el **coeficient de correlació lineal o de Pearson** definit mitjançant

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \tag{11.2}$$

Es compleix que $-1 \leq r \leq 1$.



3. Calcula el coeficient de correlació entre les variables x: despeses en publicitat (milers d'euros) i y: vendes aconseguides (milers d'eurors)

x_i	y_i
1	10
2	17
3	30
4	28
5	39
6	47

Realitzam els càlculs de variància i covariància:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	10	1	100	10
2	17	4	289	34
3	30	9	900	90
4	28	16	784	112
5	39	25	1521	195
6	47	36	2209	282
21	171	91	5803	723

Les mitjanes són: $\bar{x} = \frac{21}{6} = 3.5$, $\bar{y} = \frac{171}{6} = 28.5$.

Les desviacions típiques són:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{91}{6} - 3.5^2} = 1.71, \; \sigma_y = \sqrt{\frac{5803}{6} - 28.5^2} = 12.45$$

La covariància és $\sigma_{xy} = \frac{723}{6} - 3.5 \cdot 28.5 = 20.75$

El coeficient de correlació $r = \frac{20.75}{1.71 \cdot 12.45} = 0.97$. És una correlació molt forta positiva ja que és proper a 1.

8. L'evolució de l'IPC (índex de preus al consum) i la taxa d'inflació en els mesos indicats d'un determinat any, va ser:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny
IPC	0.7	1.1	1.7	2	1.9	1.9
Taxa inflació	6	6	6.3	6.2	5.8	4.9

a) Representa el núvol de punts.

b) Calcula el coeficient de correlació entre l'IPC i la taxa d'inflació.

c) Es pot estimar la taxa de inflació a partir de l'IPC?

Rectes de regressió

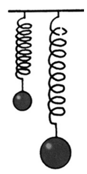
Com hem dit, la recta de regressió passa pel **centre de gravetat** del núvol de punts $(\bar{x}, \bar{y})$ i és la recta que "millor ajusta". L'equació punt-pendent d'aquesta recta serà de la forma $y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$ on m és el pendent de la recta. El criteri que s'utilitza per determinar el pendent que millor ajusta s'anomena el **mètode dels mínims quadrats**. Aquest mètode es basa en imposar que la suma de les distàncies al quadrat de cadascun dels punts a la recta sigui mínima. El resultat que s'obté és:

$$y = \bar{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \tag{11.3}$$

S'anomena la recta de regressió de Y sobre X.

La recta de regressió s'utilitza per fer prediccions d'una variable coneguda l'altra. La predicció serà més bona o fiable com més s'apropi a ± 1 el coeficient de correlació r.

9. La *Llei de Hooke* relaciona l'allargament d'una molla amb la força que hi aplicam $F = kx$ on k és la constant d'elàstica. Hem anant penjat a la molla pesos de diferent valors i hem anotat l'allargament



Allargament x (m)	0	0.06	0.2	0.3	0.6
Pes F (N)	0	0.45	1.1	1.47	2.95

a) Calcula la recta de regressió i estima el valor de la constant elàstica de la molla.

b) Estima l'allargament que produiria un pes de 2 N.

10. La taula següent mostra el nombre de gèrmens patògens per centímetre cúbic d'un determinat cultiu segons el temps transcorregut.

Nombre d'hores	0	1	2	3	4	5
Nombre de gèrmens	20	26	33	41	47	53

a) Calcula la recta de regressió del nombre de gèrmens en funció del temps.

b) Quina quantitat de gèrmens per centímetre cúbic és previsible trobar quan transcorrin 6 hores? És bona aquesta predicció?

11. En un dipòsit cilíndric, l'altura de l'aigua que conté varia a mesura que passa el temps segons les dades recollides en la taula:

Temps: *h*	8	22	27	33	50
Altura: *m*	17	14	12	11	6

a) Troba el coeficient correlació entre el temps i l'altura. Interpreta'l.

b) Quina altura s'aconsegueix transcorregudes 40 hores?

c) Quan l'altura assoleix 2 m, sona una alarma. Quant de temps ha de transcórrer perquè soni l'alarma?

12. La taula següent relaciona el nombre atòmic de diversos metalls amb la seva densitat

Element	K	Ca	Ti	V	Mn	Fe	Co	Ni
N. atòmic	19	20	22	23	25	26	27	28
Densitat	0.86	1.54	4.50	5.60	7.11	7.88	8.70	8.80

a) Representa els punts i troba el coeficient de regressió.

b) Mitjançant la recta de regressió, estima la densitat del crom amb nombre atòmic 24.

Exercici Resolt

4. En l'examen d'una assignatura que consta de part teòrica i part pràctica, les qualificacions de nou alumnes van ser:

Teoria	**Pràctica**
5	6
7	5
6	8
9	6
3	4
1	2
2	1
4	3
6	7

Calcula la recta de regressió Pràctica en funció de Teoria. Utilitza-la per predir la nota de pràctica d'un alumne que obtingués 4.75 en teoria. Quan de fiable és la predicció?

Realitzam els càlculs de variància i covariància:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
5	6	25	36	30
7	5	49	25	35
6	8	36	64	48
9	6	81	36	54
3	4	9	16	12
1	2	1	4	2
2	1	4	1	2
4	3	16	9	12
6	7	36	49	42
43	42	257	240	237

Les mitjanes són: $\bar{x} = \frac{43}{9} = 4.78$, $\bar{y} = \frac{42}{9} = 4.67$.

Les desviacions típiques són:

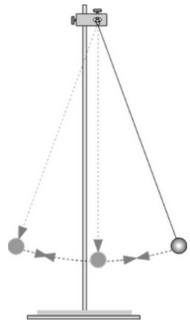
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{257}{9} - 4.78^2} = 2.39, \sigma_y = \sqrt{\frac{240}{9} - 4.67^2} = 2.21$$

La covariància és $\sigma_{xy} = \frac{237}{9} - 4.78 \cdot 4.67 = 4.04$

El coeficient de correlació $r = \frac{4.04}{2.39 \cdot 2.21} = 0.763$

La recta de regressió $y = 4.67 + 0.705 \cdot (x - 4.78)$.

La predicció sabent que $x = 4.75$ és $y = 4.67 + 0.705 \cdot (4.75 - 4.78) = 4.65$. És poc fiable donat que el coeficient de correlació és menor que 0.9.



13. Per *trobar la gravetat de la Terra* podem utilitzar un pèndol format per una massa penjada a l'extrem d'un fil prim de longitud l. Mesuram el període d'oscil·lació en funció de la longitud de la corda

Longitud (m) x	0.10	0.20	0.30	0.3	0.4
Període^2 **(s**^{2}**)** T^2	0.386	0.80	1.1	1.19	1.60

a) Calcula la recta de regressió i estima el valor de la acceleració de la gravetat g sabent que $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$.

b) Estima el període d'un pèndol de longitud 0.75 m.

11.3 Activitats

14. En llançar 200 vegades un dau es va obtenir la següent distribució de freqüències.

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	a	32	35	33	b	35

Troba la mediana i la moda de la distribució, sabent que la mitjana aritmètica és 3.6.

15. Les següents dades són mesures de la capacitat cranial d'un grup d'homínids:

84, 49,61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.

a) Agrupa les dades en 6 intervals iguals de 30 fins 90.

b) Calcula la mitjana.

c) Calcula la variància i la desviació estàndard de la mostra.

16. Les següents dades procedeixen d'un estudi de contaminació de l'aire.

6.5	2.1	4.4	4.7	5.3	2.6	4.7
3.0	4.9	8.6	5.0	4.9	4.0	3.4
5.6	4.7	2.7	2.4	2.7	2.2	5.2
5.3	4.7	6.8	4.1	5.3	7.6	2.4
2.1	4.6	4.3	3.0	4.1	6.1	4.2

a) Agrupa les dades en 4 intervals iguals de 2 fins 10.

b) Construeix un histograma.

c) Calcula la mitjana i la desviació típica.

17. Les dades següents són les qualificacions obtingudes pels 24 estudiants d'un grup de 1r de batxillerat en les assignatures de Matemàtiques i Llengua.

Mat	4	5	5	6	7	7	7	7
Llen	3	5	6	7	7	7	7	8
Mat	8	8	8	8	9	9	9	9
Llen	8	8	8	8	8	8	8	10
Mat	7	7	8	8	10	10	9	9
Llen	8	8	7	7	9	10	9	8

a) Proporció d'estudiants que obté més d'un cinc en ambdues assignatures, proporció d'estudiants que obté més d'un cinc en Matemàtiques, proporció estudiants que obté més d'un cinc en Llengua.

b) Són independents les qualificacions de Matemàtiques i Llengua?

c) Representa gràficament.

d) Calcula el coeficient correlació.

18. El volum d'estalvi i la renda del sector famílies en milions d'euros per al període 2005-2012 van ser:

Anys	05	06	07	08	09	10	11	12
Estalvi	1'9	1'8	2'0	2'1	1'9	2'0	2'2	2'3
Renta	20'5	20'8	21'2	21'7	22'1	22'3	22'2	22'6

a) Recta regressió de l'estalvi sobre la renta.

b) Recta de regressió de la renta sobre l'estalvi.

c) Per a l'any 2015 se suposa que la renta era de 24.1 milions d'euros. Quin serà l'estalvi esperat per a l'any 2015?

d) Estudiar la fiabilitat de la predicció anterior.

19. Es va mesurar el temps en segons que van trigar a gravar-se els mateixos 18 fitxers en un llapis USB X i en un disc dur exterior Y.

X	1'2	1	1'1	0'5	1'1	1'5	1	1'4	1'4
Y	1'3	1'1	1'2	0'4	1'2	1'4	1'1	1'6	1'6

X	0'3	1'5	1'4	1'1	1'2	1'2	0'4	0'5	1'3
Y	0'3	1'6	1'3	1'1	1'3	1'1	0'4	0'4	1'4

a) Representa gràficament les dades i comenta el resultat obtingut.

b) Si un fitxer triga 0'8 segons a gravar-se en el primer tipus de memòria, quants segons trigaria a gravar-se en el segon tipus? Donar una mesura de fiabilitat.

20. S'han estudiat els errors comesos per un grup de 117 persones en dues proves: d'ortografia x i de càlcul numèric y. Els resultats són els de la taula de doble entrada següent

y_i \ x_i	0	1	2	3	4
0	24	6	1	0	0
1	11	19	2	3	0
2	7	8	6	2	0
3	2	3	3	7	1
4	1	0	2	4	5

a) Troba les distribucions marginals de x i y

b) Troba la distribució de x condicionada a $y < 2$.

c) Calcula el coeficient de correlació lineal

21. En una mostra de 64 famílies, s'han estudiat el nombre de membres en edat laboral, x, i el nombre d'ells que estan en actiu, y. Els resultats són a la taula adjunta:

x_i \ y_i	1	2	3
1	6	0	0
2	10	2	0
3	12	5	1
4	16	8	4

a) Troba les distribucions marginals de x i y.

b) Troba la distribució de y condicionada a $x = 2$.

c) Calcula el coeficient de correlació lineal.

22. La recta de regressió d'una distribució bidimensional és $y = 1.6x - 3$. Sabem que $\bar{x} = 10$ i $r = 0.8$.

a) Calcula $\bar{y}$.

b) Estima el valor de y per a $x = 12$. Com de fiable és la estimació?

23. L'estatura mitjana de 100 escolars d'un curs d'ESO és de 155 cm amb una desviació típica de 15.5 cm.

La recta de regressió de l'estatura y (cm) respecte del pes x (kg) és $y = 80 + 1.5x$.

a) Quin és el pes mitjà d'aquests escolars?

b) Quin és el signe del coeficient de correlació lineal?

Autoavaluació

1. Realitzem una prova a 16 aspirants consistent en un dictat amb cert temps de durada (en minuts) i després de comptar el nombre d'errors comesos en transcriure-ho a ordinador, els resultats van ser:

Temps	7	6	5	4	5	8	7	8	9	6	5	8	6	8	7	8
Errors	8	7	6	6	7	10	9	9	10	8	6	10	8	9	8	8

a) Representa un núvol de punts. Explica la dependència o independència de les variables.

b) Calcula la recta de regressió lineal. Estima el nombre d'errors en un dictat de 3 minuts.

2. La següent taula mostra la talla de calçat i els pesos de 15 estudiants.

Talla	39	40	40	40	41	41	41	41	42	42	42	42	43	43	44
Pes	55	60	65	70	60	65	70	85	65	70	75	80	65	75	85

Són independents el pes i la talla? Calcula la covariància i la recta de regressió.

3. Els preus diaris de les accions X i Y varien, de manera que s'estudien conjuntament aquestes dues variables durant 10 dies, i es calculen la covariància 0.95 i els paràmetres estadístics

	Mitjana	**Desviació típica**
X	15.7	3.1
Y	8.2	1.9

a) Si coneixem el valor de l'acció X amb anterioritat al valor d'Y , calcula la recta de regressió que permeti obtenir una estimació del preu *d'Y*, una vegada conegut el valor de X.

b) Seria útil usar aquest cas concret de regressió lineal per predir el valor d'Y i aprofitar la predicció per prendre decisions? Per què?

SOLUCIONS

Solucions del Tema 1

Pàgina 12

18. a) $\sqrt[6]{5}$ b) $\sqrt[8]{8}$ c) $\sqrt[8]{x^7}$

19. a) $2\sqrt{2}$ b) $9\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{6}$

d) $2\sqrt[4]{2}$ e) $\sqrt[3]{3}$ f) $\sqrt[3]{49}$

g) $\sqrt[8]{7}$ h) $\sqrt{2}$

20. a) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9}$

b) $\sqrt{7} = \sqrt[16]{7^8}$

c) $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^3}$

d) $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{5^6} = 5^2$

Pàgina 13

21. a) $\sqrt[3]{5/4}$ b) $\sqrt[12]{2^3 \cdot 3}$

c) $\sqrt[12]{5^7}$ d) 2^3

e) $2^4 \cdot \sqrt[5]{2^4}$ f) $\sqrt{5}$

g) 3 h) 5^2

22. a) $15\sqrt{11}$ b) $6\sqrt[3]{2}$ c) $-\sqrt{6}/5$

d) $-14\sqrt[4]{2}/3$ e) $41\sqrt{3}/15$ f) $13\sqrt{2}/5$

23. $(2+a)^2 + 4(2+a)\sqrt{a} + 4a$

24. a) $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{3}$ b) $\frac{3}{4}\sqrt[4]{2^3}$

c) $3(\sqrt{2}+1)$ d) $3+2\sqrt{2}$

e) $(\sqrt{10}-\sqrt{6})/2$ f) $-(9+4\sqrt{5})$

25. a) $3\sqrt{6}$ b) $\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 35

e) $2^{-64/15}$ f) $33/4 - 5\sqrt{2}$

Pàgina 14

1. $x = -10$ i $x = 4$

2. $\sqrt[8]{x^3}$

3. $13 + 4\sqrt{3}$

4. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

5. $\frac{13}{3}\sqrt[3]{2}$

6. $\dfrac{16 - 5\sqrt{15}}{-7}$

7. $(-1, 6]$

Solucions del Tema 2

Pàgina 17

4. a) $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 2$; $R(x) = -4$

b) $Q(x) = 2x + 2$; $R(x) = 2x - 1$

c) $Q(x) = a(x^3 + x^2 + x + 1)$; $R(x) = a + b$

d) $Q(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$; $R(x) = 0$

Pàgina 19

12. a) $3(x+2)\cdot(x+1)$

b) $x^3\cdot(x+3)\cdot(x-3)$

c) $4(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

d) $-2(x+1)^2\cdot(x-3)$

e) $x\cdot(x^3-x^2+8x-4)$

f) $(x+1)^2\cdot(x-2)$

g) $2(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)$

h) $x^2\cdot(x+1)\cdot(x-3)$

i) $(x+4)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$

Pàgina 20

17. a) $\dfrac{x-1}{3x(x+2)}$

b) $\dfrac{2(x+5)}{(x+1)^2}$

c) $\dfrac{x-1}{x(x+2)}$

d) *No es pot*

e) $\dfrac{(x^2+x+1)(x-1)}{x}$

f) $\dfrac{1}{x+2}$

g) $\dfrac{x+2}{x-1}$

h) $\dfrac{2(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x}$

Pàgina 21

21. a) $\dfrac{-4x}{(x+1)(x-1)}$ b) $\dfrac{-2}{x+1}$

c) $\dfrac{-1}{x-1}$ d) $\dfrac{-2t+3}{t(t+2)}$

e) 0 f) $\dfrac{1-x^2}{x^2}$

g) $\dfrac{3x^2+5}{x(x+1)^2}$

Pàgina 22

25. a) $x=1,\ 2,\ -2$ b) $x=0,\ 5,\ -5$

c) $x=1,\ -2$ d) $x=\pm2,\ 3,\ -1$

e) $x=1,\ 3,\ 5,\ -4$ f) $x=1$

g) $x=-2,\ -1,\ 2$ h) $x=-3,\ -1,\ 2$

i) $x=-2,\ 2,\ 4$ j) $x=-3,\ -2,\ 1$

k) $x=-3,\ 3,\ -2,\ 2$ l) $x=-1,\ 0,\ 5$

Pàgina 23

31. a) $x=\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{2}$ b) $x=2,\ \dfrac{1}{7}$

c) $x=2,\ -\dfrac{3}{5}$ d) $\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{4}$

33. a) $x=4$ b) $x=4$

c) $x=9$ d) $x=7$

e) $x=2$ f) $x=38414$

g) $x=10$ h) $x=3$

i) $x=11$ j) $x=29$

k) $x=14$ l) $x=1$

Pàgina 24

34. a) $x=1;y=16$ b) $x=6;y=8$

c) $x=10;y=2$ d) $x=4;y=7$

e) $x=3;y=1$ f) $x=-2;y=8$

36. a) $x=7;y=2;z=11$

b) $x=4;y=-3;z=0$

c) $x=-1;y=4;z=4$

d) $x=8;y=4;z=-3$

37. a) $x=1;y=-5;z=4$

b) $x=-1;y=-2;z=-2$

c) $x=15;y=2;z=1$

d) $x=3;y=4;z=9$

Pàgina 25

38. a) $x=1;y=-2;z=3$

b) $x=4;y=2;z=-3$

c) $x=1;y=-1;z=0$

d) $x=2;y=\dfrac{1}{5};z=-1$

Pàgina 28

1. -3
2. $Q = x^3$; $R = 1$
3. No, si és de grau 4 pot tenir 4 arrels, que poden esser 4 reals, o be 2 arrels reals i 2 complexes o totes 4 complexes.
4. $x \in [-2, 2]$
5. $[-1, 15]$
6. $x \geq 9/5$
7. $x \in (1, 2)$
8. a) F b) V c) F d) F

Solucions del Tema 3

Pàgina 33

14. a) $\hat{C} = 33$; $b = 26,8$; $c = 17,4$

    b) $\hat{B} = 67$; $b = 66,3$; $c = 28,1$

    c) $\hat{C} = 39$; $\hat{B} = 51$; $a = 396,7$

    d) $\hat{B} = 58$; $b = 56,01$; $a = 66,05$
15. $a = 3,46$; $b = 1,73$
16. $\alpha = 25,5°$
17. $a = 25$; $c = 20$; $\hat{B} = 36,87°$; $\hat{C} = 53,13°$

Pàgina 37

44. $d = 35,49$ m

Pàgina 38

45. Del triangle $\widehat{CAD}$ troba $\overline{AD} = 74.16$ km, del triangle $\widehat{CBD}$ troba $\overline{BD} = 52.05$ km pel teorema del sinus i finalment del triangle $\widehat{ADB}$ troba $\overline{AB} = 24$ km pel teorema del cosinus.
46. cim A=827 m, cim B=751 m, distància entre cims AB=1687.2 m

Pàgina 39

54. Treu factor comú $\cos\alpha$ i utilitza la relació fonamental.
55. Desenvolupa el quadrat amb la identitat notable $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. Empra la relació fonamental i la fórmula de $\sin 2\alpha$.
56. Utilitza les relacions de l'angle oposat $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\text{tg}\,(-x) = -\text{tg}\, x$.
57. Expressa $\text{tg}\,\alpha$ i $\text{cotg}\,\alpha$ com a quocients de sinus i cosinus. Després realitza la suma de fraccions amb el mínim comú múltiple. Finalment utilitza la relació fonamental.
58. Escriu $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha)$. Aplica la fórmula de la suma d'angles i tot seguit les fórmules de l'angle doble. Finalment opera, simplifica i treu factor comú $\sin\alpha$.
59. Escriu $\cos(4\alpha) = \cos(2\alpha + 2\alpha)$. Aplica la fórmula de la suma d'angles i tot seguit les fórmules de l'angle doble. Finalment opera i simplifica.

Pàgina 42

1. a) $\sin(-750°) = 1/2$

   b) $\text{tg}\, 570° = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

   c) $\cos 20\pi/3 = -1/2$
2. $\sin(105) = \sin(60+45) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

   $\cos(75) = \sin(30+45) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
3. $c = 17,32$, $\hat{B} = 90°$, $\hat{C} = 60°$
4. Sí ho aconseguirà. Estan a 105,83 m.
5. $\sin a = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

   $\cos a = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$;
6. a) $x = \begin{cases} 120 + n360 \\ 240 + n360 \end{cases}$

   b) $x = 45 + n180$
7. a) $(60 + 360k, 120–360k)$ i

   $(120 + 360k, 60–360k)$;

   b) $(75 + 360k, 15–360k)$ i

   $(15 + 360k, 75–360k)$
8. Substituir el $\sin(2a)$ pel seu valor i aplicar que $1-\cos 2a$ és el sinus al quadrat.

9. Perímetre = $5 \cdot 35.267 = 176,3355$ m; Apotema $a_p = 30\cos 36 = 24.27$; Àrea = 2139.83 m^2.

10. $8,63°$

10. $z_1 = 2_{110°}$, $z_2 = 2_{230°}$, $z_3 = 2_{350°}$

Solucions del Tema 4

Pàgina 48

2. a) $5-9i$ b) $-6-15i$
c) $-13+11i$ d) 0
e) 13 f) $4+11i$
g) $2i$ h) -4

3. a) $-\frac{1}{10}-\frac{7\,i}{10}$ b) -2
c) $\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$ d) $\frac{34\,i}{5}$

6. a) $|z|=2$; $arg(z)=-30°$
b) $|z|=\sqrt{8}$; $arg(z)=225=-135°$
c) $|z|=2$; $arg(z)=-60°$
d) $|z|=4$; $arg(z)=-90°$

Pàgina 49

11. a) $2_{\,60°}=1+\sqrt{3}i$
b) $3_{\,-45°}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$
c) $1_{\,90°}=i$
d) $5_{\,120°}=-\frac{5}{2}+i\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Pàgina 52

1. a) $-5-6i$ b) $-8-6i$
c) $10i$ d) $-2+i$

2. $-46+63i$

3. $z_1=5+2i$, $z_2=5-2i$

4. a) Real $k=-2$ b) Imaginari pur $k=-2$

5. $x=\pm 2$

6. $3\sqrt{2}$, $3\pi/4$

7. $1+\sqrt{3}i$

8. $-8i$

9. $5(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$

Solucions del Bloc I

Pàgina 54

1. a) $a\sqrt{a}$ b) $\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{6}$

2. a) $a\ \sqrt[20]{a}$ b) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6}{6}$

3. $x^2(x+1)(x-2)(3x-1)$

4. 2

5. $x=3$ vàlida.

6. $x=1$

7. $(3,+\infty)$

8. $x=38$: be, $y=18$: malament, $z=4$: no contestades. Planteig: $x+y+z=60$; $5x-2y-z=150$; $y+5z=x$

9. S.C.I. $x=1$, $y=z-3$, $z=z$

Pàgina 55

10. Els costats són 10.49 cm i 20.25 cm, el perímetre 61.48 cm. L'àrea 83.23 cm^2.

11. Primer obtenim els costats resolent un sistema d'equacions $a=19$, $b=16$ i $c=13$. Després aplicam el Teorema del Cosinus per obtenir els angles $\hat{A}=42.54°$, $\hat{B}=56.3°$, $\hat{C}=81.17°$

12. Utilitzam el Teorema del Sinus. $\hat{C}=56°\,19'\,31''$, $\hat{B}=51°\,40'\,29''$ i $\bar{AC}=263.96$ m.

13. $d=3557$ km sobre la superfície de la Terra.

14. No existeix cap angle amb aquestes condicions. S'obtindria que $\cos a=3/4$ i amb aquesta dada no es compleix que $\sin^2 a+\cos^2 a=1$.

15. En primer lloc trobam que $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$. a) $-3/5$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ d) -3

16. a) Utilitza que $sin^4x=(1-\cos^2 x)^2$ desenvolupa el quadrat i simplifica. b) Utilitza que $\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{1+\cos\beta}{2}$

17. a) $x = 0° + n \cdot 360°$, $x = 126.87° + n \cdot 360°$. b) $x = 90° + n \cdot 180°$, $x = 60° + n \cdot 360°$, $x = 300° + n \cdot 360°$.

18. $x = 30° + n \cdot 180°$, $y = 30° + k \cdot 180°$.

19. $-\frac{19}{10} + \frac{37}{10}i$

20. i

21. $z = 5 + 2i$, $z = 5 - 2i$

22. $z^* = 3_{300°}$, $1/z = (1/3)_{300°}$, $z^2 = 9_{120°}$, $\sqrt[3]{z}$ té tres resultats = $(\sqrt{3})_{20°}$, $(\sqrt{3})_{140°}$ i $(\sqrt{3})_{260°}$.

Solucions del Tema 5

Pàgina 60

1. 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

2. a) $a_n = 3+5(n-1)$ o $a_1 = 3$ $a_n = a_{n-1}+3$

b) $a_n = n^3$

c) $a_n = 8 \cdot (1/2)^{n-1}$ o $a_1 = 8$ $a_n = a_{n-1}/2]$

3. $a_n = 10 - 3(n-1)$ i $a_{100} = -197$

4. $d = (19 - 11)/2 = 4$ i $a_1 = 3$, $a_n = 3 + 4(n-1)$, $S_{100} = 20100$

5. $a_n = 100 \cdot (0.5)^{n-1}$, $a_{50} = 1.776 \cdot 10^{-13}$, $S_\infty = 200$

6. $r = 3$ i $a_1 = 1$, $a_n = 3^{n-1}$, $S_{30} = 1.029 \cdot 10^{14}$

Pàgina 62

9. Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$,

Dom $g = (-\infty, -2/3] \cup (3, +\infty)$,

Dom $h = \mathbb{R} - \{1\}$,

Dom $i = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$,

Dom $j = (-\infty, -3] \cup (3, +\infty)$,

Dom $k = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\}$,

Dom $l = [-2, 3)$, Dom $m = \mathbb{R} - \{1\}$

Pàgina 66

33. $p^{-1} = (3-x)/5$,

$q^{-1} = \pm\sqrt{(x+1)/2}$,

$r^{-1} = \sqrt[3]{6-x}$, $s^{-1} = -x$,

$f^{-1} = (3x+4)/(2-x)$, $g^{-1} = -3/x$,

$h^{-1} = (1 \pm \sqrt{1+4x})/2$,

$j^{-1} = \pm\sqrt{4x/(1+x)}$, $k^{-1} = 4 + \ln x$,

$l^{-1} = 1/\log_2 x$,

$m^{-1} = \log x/(\log 2 - \log 3)$,

$n^{-1} = \ln x/(\ln x - 1)$,

$a^{-1} = 2 + e^x$, $b^{-1} = 3 \cdot 10^x + 1$,

$c^{-1} = (1+4e^x)/(1-2e^x)$,

$d^{-1} = \sqrt[3]{1+10^x}$

Pàgina 67

37. a) $x = 15$ ($x = 0$ no vàlida)

b) $x = 2$

c) $x = 100$ ($x = 0$ no vàlida)

d) $x = 2/(\log 2 - 1)$

e) $x = 12/5$

f) $x = 1$ i $x = -2$

Pàgina 69

1. – 10. Autoavaluació: 1a; 2d; 3d; 4b; 5c; 6b; 7b; 8a; 9c; 10c

Solucions del Tema 6

Pàgina 74

5. a) –1/6 b) 0 c) –9

d) 1 e) –12 f) $\mp\infty$

g) 98/5

6. a) ∞ b) –1/2 c) 1/6

d) $+\infty$ e) $-1/(2\sqrt{3})$ f) –1/4

Pàgina 76

10. a) $-\infty$ b) 0 c) -3 d) 0 e) -1 f) $-\infty$ g) 0 h) $-\infty$

Pàgina 78

13. (1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

(2) $-3/2$ (3) $-1/4$

(4) $\lim\limits_{x\to 1/2^-} f = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 1/2^+} f = +\infty$

(5) 0

(6) $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = -\infty$

(7) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

(8) $+\infty$

(9) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

(10) 10

(11) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$

(12) 6 (13) $+\infty$

(14) $-\infty$ (15) $+\infty$

(16) 0 (17) 0

(18) 0 (19) 0

(20) $2/5$ (21) $-7/3$

(22) $+\infty$ (23) $-\infty$

(24) $+\infty$ (25) -1

(26) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

(27) $-\infty$ (28) $\sqrt{3}$

(29) 1/2 (30) 0

(31) 1/5 (32) $+\infty$

(33) 3/2 (34) 2

(35) 0 (36) $+\infty$

(37) $1/4$

(38) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

(39) -4 (40) 2/3

(41) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

(42) 1/2

Pàgina 81

19. a) AV. $x = 3$ AO. $y = x + 1$

b) AV. $x = \pm 2$ AH. $y = 0$

c) AV. $x = -2$ AH. $y = 1$

d) AV. $x = \pm 1$ AH. $y = 1$

e) AV. $x = 1$ AH. $y = 0$

f) AV. $x = 1$ BP.

g) AV. $x = 0$ i $x = 1$ BP.

h) AV. $x = 1$ AH. $y = 0$

Pàgina 84

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to -2^-} f = -\infty,\ \lim\limits_{x\to -2^+} f = +\infty$

3. $-2/3$

4. $1/2$

5. a) 5, b) $+\infty$

6. ∞

7. Té un salt infinit a $x = 0$

8. Té un salt finit a $x = 2$

9. $k = 2$

33. Has d'imposar les condicions de continuïtat en $x = a$; obtindràs l'equació de segon grau $a^2 - a - 2 = 0$. Per a $a = -1$ i $a = 2$ és continua; discontinuïtat de salt.

Solucions del Tema 7

Pàgina 91

21. a) $y' = 3(x^2+x+1)^2\,(2x+1)$

b) $y' = 10\ln^4(2x+3)\dfrac{1}{2x+3}$

c) $y' = 60(3x^4+7)^4\,x^3$

d) $y' = \dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+7}}$

e) $y' = -2x\,e^{-x^2}$

f) $y' = \cos(\ln x)\,\dfrac{1}{x}$

g) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x}}$

h) $y' = \dfrac{2x\left[1+\mathrm{tg}^{\,2}(x^2+1)\right]}{\mathrm{tg}\,(x^2+1)}$

Pàgina 92

25. a) $y' = (1-x^2)\sin x + 3x\cos x$

b) $y' = \ln x + 1$

c) $y' = 3^x\left(\mathrm{tg}^{\,2}x + \ln 3\mathrm{tg}\,x + 1\right)$

d) $y' = (x+1)^2 e^x$

e) $y' = 10x\,\mathrm{arctg}\,x + \dfrac{5x^2}{1+x^2}$

f) $y' = \dfrac{\sin x^2}{x+1} + 2x\ln x\cos x^2$

26. a) $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$

b) $y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

c) $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$

d) $y' = \frac{4x-3\sqrt{x^3}}{2x^4}$

e) $y' = \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$

f) $y' = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

g) $y' = \frac{-4\,x^2+20\,x-22}{(x-3)^2(x-4)^2}$

h) $y' = \frac{-3\,x^2-6\,x-3}{(x^3+3x^2+3x-1)^2}$

Pàgina 102

53. Minimitzeu la funció $f(x) = 5x^2+6(44-x)^2$. Trobareu $x=22$.

54. $V(x) = (25-2x)\cdot(20-2x)\cdot x$. Màxim és $x=3.68$ cm, $V=820.53$ cm^3.

Pàgina 103

1. $f'(1) = 1$

2. $m = f'(2) = -16/121$

3. $y' = 2x\cdot 2^{x^2+3}\,\ln 2$

4. $y' = -6x^2\cos x^3\,\sin x^3$

5. $y = 2x+6$

6. $y = 0$

7. $x<0$, creixent; $0<x<4$, decreixent; $x>4$, creixent

8. $(0,0)$ mínim i $(1,1)$ màxim relatius

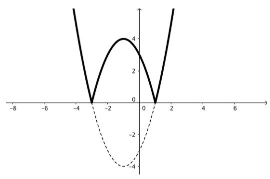
9. Punt d'inflexió $(3,-45)$; recta tangent $y=-24x+27$

Solucions del Bloc II

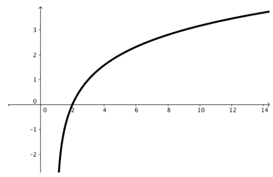
Pàgina 104

1. a) $\mathbb{R}-\{0,-5\}$, b) $(-\infty, 5/2]$

2. a)



b)



3. $g(h(x)) = \sin\sqrt{x}$, $f(g(x)) = e^{\sin x}$, $h(f(x)) = \sqrt{e^x}$. $h(f(x))^{-1} = \ln x^2$.

4. a) 4, b) $\displaystyle\lim_{x\to -5^-} f(x) = +\infty$ i $\displaystyle\lim_{x\to -5^+} f(x) = -\infty$, c) $-\infty$

5. a) $b=1$, b) f és discontínua a $x=2$ per punt desplaçat.

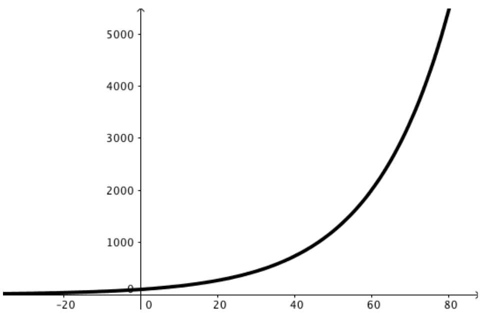
6. $f'(3) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(3+h)^2-10(3+h)-(-3)}{h} = 8.$

7. a) $y(0) = 100$ bacteris,

$y(30) = 100 \cdot e^{0.05 \cdot 30} \approx 448$;

b) $5000 = 100 \cdot e^{0.05 \cdot t} \to 0.05 \cdot t = \ln(5000/100) \to t = \ln(50)/0.05 \approx 78,2$

c) Gràfica



Pàgina 105

8. $y = -\frac{2}{3} + \frac{5}{9}(x-1)$ o $y = \frac{5x}{9} - \frac{11}{9}$.

9.
a) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{\cos(5x^4+2x^3)}} \cdot \sin(5x^4+2x^3) \cdot (20x^3 + 6x^2)$

b) $y' = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

c) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(3x^5-6x^2)^2}} \cdot (15x^4 - 12x)$

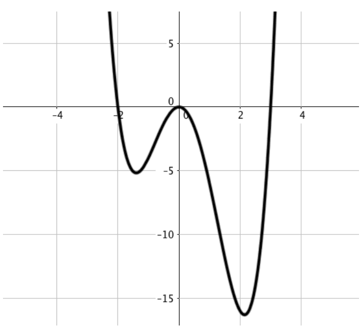
d) $y' = (1-2x^2) \cdot e^{-x^2}$

e) $y' = -85\left(\frac{2x+5}{3x-1}\right)^4 \cdot \frac{1}{(3x-1)^2}$

f) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$

10. a) Creixent: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; Decreixent $(-2, 2)$; Màxims: $(x = -2, y = 16)$; Mínims: $(x = 2, y = -16)$. b)Sempre és creixent. No té extrems.

11. Punts de tall amb l'eix OX: $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, i amb l'eix OY $(0, 0)$. Té un màxim a (0,0) i té dos mínims a $x = 2.15$, $y = -16.3$ i a $x = -1.4$, $y = -5.2$ La gràfica de la funció és:

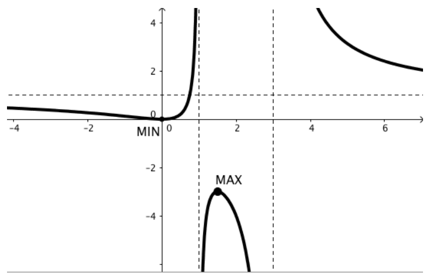


12.

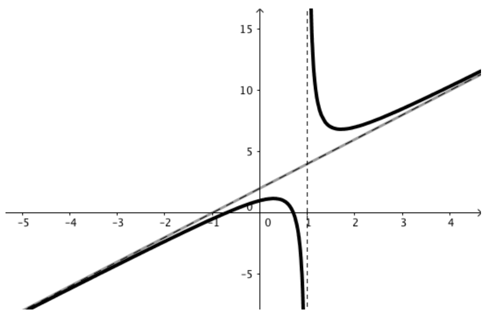
a) $y = 1$ asímptota horitzontal; $x = 1$ i $x = 3$ asímptotes verticals. La posició relativa és: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ per damunt; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ per davall. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.

b) La funció té un mínim relatiu a $x = 0$, $y = 0$ i un màxim relatiu a $x = 3/2$, $y = -3$

c) Gràfica:



13. L'única funció que presenta asímptota obliqua és c). L'asímptota obliqua és $y = 2x + 2$ i també té una asímptota vertical a $x = 1$. La gràfica és la següent:



14. $k = 1/2$. La primera derivada $y' = (2x^2 + 2x + 1)/(x + 1/2)^2$ mai és zero. Sempre creix i per tant no té extrems.

15. $a = -6$ i $b = 17$.

Solucions del Tema 8

Pàgina 114

18. $(3/5, -4/5)$ i $(4/5, 3/5)$.

Pàgina 115

21. a) $105.07°$ b) $180°$

22. $x = -1$, $\alpha = 57.53°$

Pàgina 117

1. a) Punt final $(-2,3)$. b) Vector suma $\vec{v} + \vec{w} = (-2,3)$.
2. a) -3 b) -11
3. a) $2\sqrt{3}$. b) Els dos tenen mòdul 2. c) angle $30°$
4. a) $k = -2$. b) $k = \pm 4$. c) $k = -\sqrt{3}$
5. $(3/5, 4/5)$ o $(-3/5, -4/5)$

Solucions del Tema 9

Pàgina 125

25. El feix de rectes és $r : y - 2 = m(x - 1)$. Passa-la a forma general i aplica que $d(r, O) = 1$.

Pàgina 127

42. Escriu el feix de rectes com $y = 1 - m(x - 3)$, troba els punts de tall amb els eixos i comprova que l'àrea és $A = \frac{1}{2}(1 + 3m)(3 + \frac{1}{m}) = 6$. Resol l'equació i troba $m = 1/3$.

Pàgina 128

45. Troba el peu de la perpendicular de r pel punt A: $B = (0,3)$, $C = (1,4)$ i $D = (2,3)$

Pàgina 129

1. a) $k = -7$, b) $k = -7$
2. Contínua $\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{1}$, general $x - 5y + 7 = 0$.
3. a) $(x, y) = (2, -3) + \lambda(2,5)$, b) $2x + 3y - 6 = 0$.
4. Si $k = -9/5$ són paral·leles, en altre cas són secants.
5. $k = \pm\sqrt{3}$.
6. $x = -3$, $y = -5$ i $x = 17/5$ i $y = 39/5$

Solucions del Tema 10

Pàgina 132

4. Radi $\sqrt{8}$, $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$
5. Centre $O(1,0)$, radi $R = 1$

Pàgina 133

6. Centre $O(-1,1)$, semi-eixos $a = 3$, $b = 2$, focus $F'(-1-\sqrt{5}, 1)$ i $F'(-1+\sqrt{5}, 1)$. Excentricitat $e = 0.745$
7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ $e = 2/3$
8. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{96} = 1$

Pàgina 134

9. $O(1,0)$, $a = 4$, $b = 3$, $F'(-4,0)$ i $F(6,0)$, asímptotes $y = \pm 3(x - 1)/4$, $e = 5/4$.
10. $a = b = 1/\sqrt{2}$, $2x^2 - 2(y-2)^2 = 1$, $e = \sqrt{2}$.

Pàgina 135

11. $x = \frac{1}{12}y^2$
12. $V(3,0)$, $F(0,1)$, $d : y = -1$
13. És una hipèrbola. $d = c - a = 0.75a$

Pàgina 137

1. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ o $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$. Té centre $O(1,1)$ i radi $R = 5$.
2. $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. La semi-distància focal $c = 4$, els focus són $F'(-5,3)$ i $F(3,3)$, i l'excentricitat $e = 0.8$.
3. Semi-eixos: $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, les asímptotes $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$, semi-distància focal: $c = \sqrt{6}$ i l'excentricitat $e = 1.225$.
4. La distància focus-directriu és $p = 1/6$, l'equació $y - 2 = 3(x - 1)^2$, la directriu és la recta $y = 23/12$ i la posició del focus $F(1, 25/12)$.
5. a) El·lipse de centre $(1,0)$ i semi-eixos $a = 2$, $b = 1$. b) Circumferència de centre $(1,2)$ i radi 2. c) Paràbola vertical de vèrtex $(0,-2)$ i distància Focus-directriu $p = 3/2$.

Solucions del Bloc III

Pàgina 138

1. a) $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ b) $-2\vec{u} + 3\vec{v} = (-5, -4)$ c) $2\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 6$

2. $a = -2$

3. a) $m = -1, n = 3$ b) $116.57°$

4. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

5. $y = -8$

6. Paramètriques $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$. General $2x - y + 3 = 0$.

7. a) $k = -2$. b) $k = -4$

8. $A'(2, 2)$

Pàgina 139

9. El punt d'intersecció és $I(5, 11)$ i el pendent de la recta $m' = 1/3$. La recta és $y - 11 = \frac{1}{3}(x - 5)$.

10. $P(\pm 5, 0)$

11. $Area = 5$

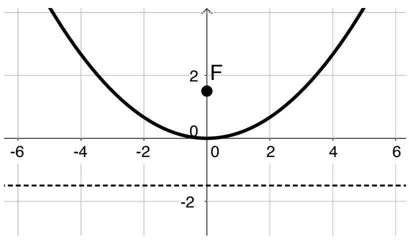
12. Mediatriu AC: $x - 2y + 1 = 0$, Mediatriu AB: $14x - 4y + 21 = 0$, Circumcentre $O(-19/12, -7/24)$

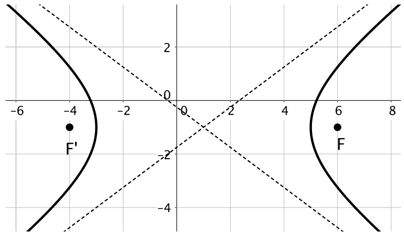
13. Centre $O(1, -3)$ i radi $R = 2$.

14. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

15. a) Paràbola vertical amb vèrtex $V(0, 0)$, $p = 3$, focus $F(0, 3/2)$ i directriu la recta $y = -3/2$.

b) Hipèrbola de centre $O(1, -1)$, semieixos $a = 4$, $b = 3$, semi-distància focal $c = 5$. Excentricitat $e = 1.25$. Focus a $F'(-4, -1)$, $F(6, -1)$. Asímptotes $y + 1 = \pm\frac{3}{4}(x - 1)$.





16. $a = 39.3$ ua, $c = 9.8$ ua, $b = 38.06$ ua. $\frac{x^2}{39.3^2} + \frac{y^2}{38.06^2} = 1$

Solucions del Tema 11

Pàgina 143

2.

x	0	1	2	3	4	5	6
f	2	4	21	15	6	1	1

c) $\bar{x} = 2.52$ i $\sigma = 0.496$ fills.

Pàgina 144

3.

x	2.5-3	3-3.5	3.5-4	4-4.5	4.5-5
f	6	10	11	8	5

c) $\bar{x} = 3.7$ i $\sigma = 0.62$ kg.

Pàgina 148

9. $y = 1.194 + 4.78(x - 0.232)$, el pendent és la constant elàstica $k = 4.78$ N/m. L'allargament per a $y = 2$ N és $x = 40$ cm. És bastant fiable ja que $r = 0,998$.

Pàgina 149

11. a) $r = -0.997$ correlació negativa forta; b) Recta de regressió $y = -0.2632x + 10.37$, altura $y = 8.84$ m. c) $x = 66$ hores

Pàgina 152

1. a) Hi ha una correlació lineal positiva forta $\sigma_{xy} = 1.71$ i $r = 0.91$

b) $y = 0.87x + 2.25$. Es cometen 4.86 errors.

2. Hi ha una correlació positiva molt feble. $\sigma_{xy} = 6.8$, $r = 0.60$, $y = 4x - 95.3$

3. a) $y = 0.1x + 6.65$ b) No seria gens fiable fer prediccions en aquest cas ja que $r = 0.16$ és molt inferior a 1.