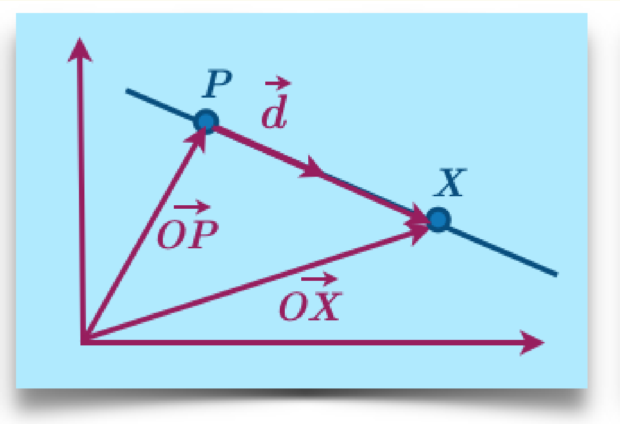
Entrega 7: Vectores y rectas en el plano

Matemáticas I

Josep Mulet Pol
Ámbito Científico
IEDIB



https://iedib.net/

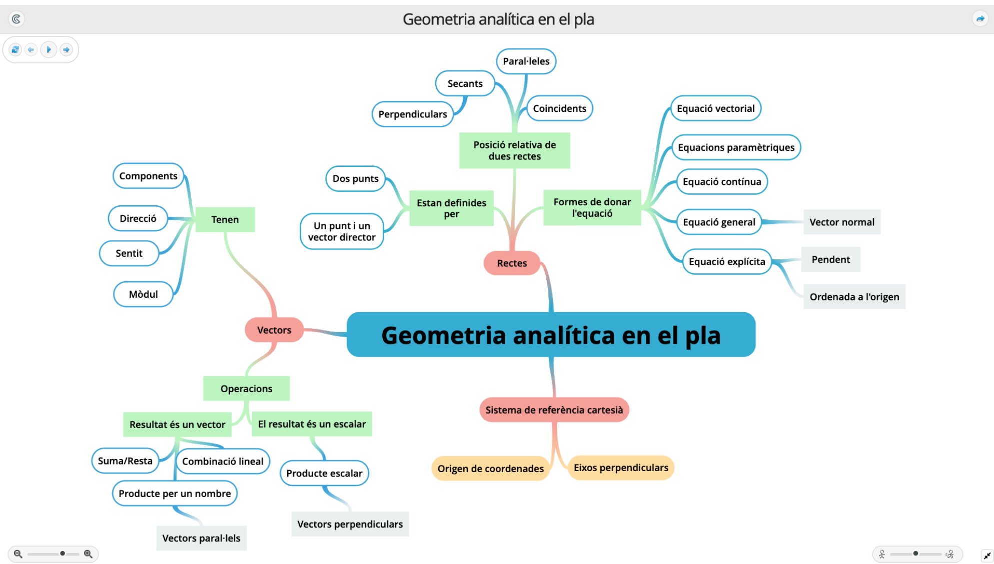
Nota al lector:

Este documento ha sido traducido semi-automaticamente de la versión original en catalán. Aunque ha sido revisado, es posible que pueda contener algunas erratas o falten algunas partes sin traducir.

Índice

1. Introducción a la geometría analítica

Esquema de la entrega



Mapa conceptual creado con GoConqr por Josep Mulet.

2. Vectores en el plano

Las magnitudes físicas se clasifican en escalares y vectoriales. Una magnitud escalar es aquella que queda completamente determinada con un número y las unidades correspondientes. En cambio, una magnitud vectorial es aquella que, además de un valor numérico y sus unidades (módulo), debe especificarse su dirección y sentido.

Tabla 1: *Tipo de magnitudes*

Magnitudes vectoriales	Magnitudes escalares
Tiempo	Velocidad
Temperatura	Aceleración
Volumen	Fuerza
...	...

Uno **vector fijo** queda determinado por dos puntos A **origen** y B **extremo** . El **módulo** es la longitud del vector o la distancia entre A y B . La **dirección** es la de la recta que pasa por A y B . Cada dirección tiene dos **sentidos** .

¡No te confundas! Escalares y vectores.

En esta entrega, debe entenderse el vocabulario que utilizaremos. En particular, es necesario tener clara la diferencia entre los números reales, que llamaremos **escalares** , y los **vectores** . De una forma poco rigurosa, puedes pensar que los vectores *llevan flecha* y los escalares no.

A la estructura algebraica formada por escalares y vectores, junto con las operaciones que veremos a continuación, se le llama **espacio vectorial** .

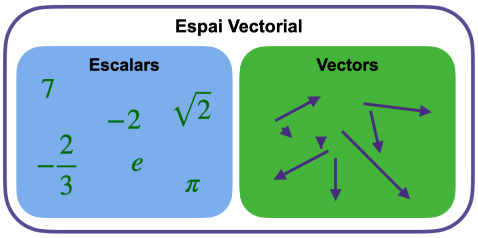


Figura 1: Caracterización de un espacio vectorial. Imagen de elaboración propia.

2.1 Vectores fijos y libres

Un **sistema de referencia Cartesiano** está formado por dos ejes, perpendiculares entre si, que designan como OX y OY . Los dos ejes se cortan en un punto que llamamos origen $O(0,0)$.

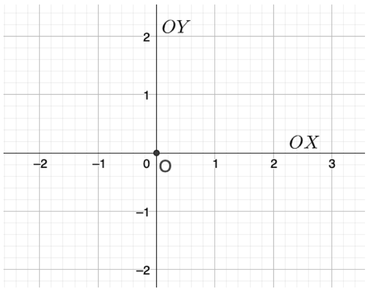


Figura 2: Sistema de referencia cartesiano. Elaboración propia.

Para localizar un punto P en el plano damos dos coordenadas $P=(P_1,P_2)$ que corresponden a las proyecciones sobre los ejes OX , OY respectivamente.

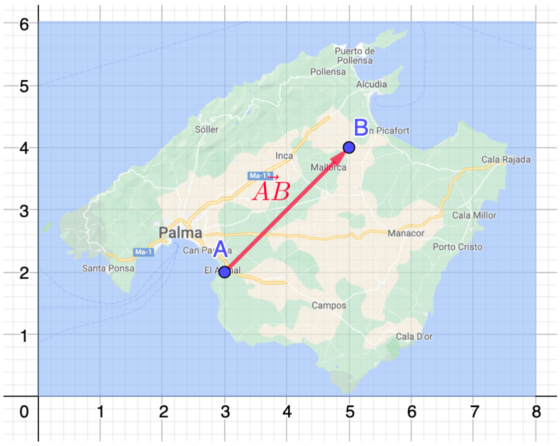


Figura 3: Las coordenadas de los municipios son A=(3,2) y B=(5,4) y AB indica el vector fijo. Elaboración propia.

Definimos un **vector fijo** de origen en el punto A y extremo en el punto B como el **segmento orientado** que va desde A hacia B . La flecha del vector se dibuja hacia el punto extremo.

Las **componentes del vector** se obtienen de restar los puntos extremo menos origen

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(B_1-A_1,B_2-A_2) \tag{1}$$

Las componentes de un vector indican qué distancia se avanza en cada dirección medida desde su origen.

Ejemplo 1

Dados los puntos $A = (-2, 3)$ y extremo a $B = (1, -1)$, calcula los componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. ¿Qué relación existe entre estos dos vectores?

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1) - (-2, 3) = \ (3, -4)$
Este vector avanza 3 unidades en dirección x y baja 4 en dirección y .

$\overrightarrow{BA} = (-2, 3) - (1, -1) = (-3, 4)$

Los dos vectores tienen sentido opuesto y sus componentes tienen signo distinto.

Si nos dan el vector $\vec{v} = (2, 2)$, del que desconocemos el origen, significa que podemos dibujarlo con el origen que nosotros queramos. Decimos que se trata de un **vector libre** . Generalmente, resulta práctico representarlos en origen en el punto $O(0, 0)$.

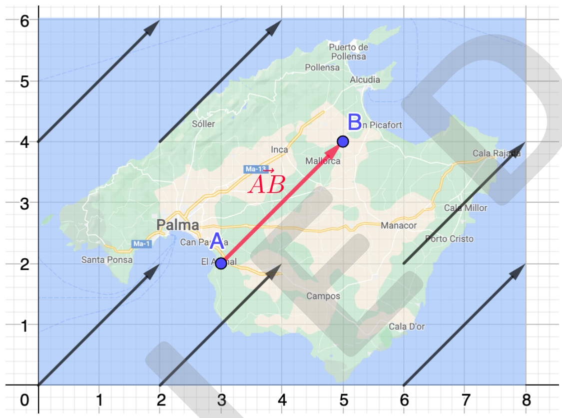


Figura 4: Concepto de vector libre. Elaboración propia.

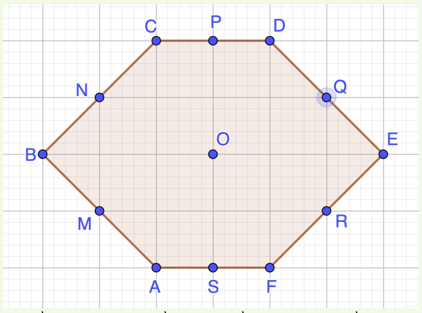
Todos los vectores de la figura tienen igual dirección, módulo y sentido. Sus componentes también son idénticas. Lo único que cambia son los puntos de origen y extremo. Diremos que todos estos vectores son **equipolentes** entre si.

> El vector que va desde el origen de coordenadas $O = (0, 0)$ al punto $P = (P_1, P_2)$ se llama **vector de posición** del punto P y tiene por componentes las mismas coordenadas del punto $\vec{OP} = P - O =$

$P = (P_1, P_2)$.

Ejemplo 2

La figura ABCDEF es un hexágono. Compara el módulo, dirección y sentido de las siguientes parejas de vectores.



a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{BM}$ y $\overrightarrow{DE}$ d) $\overrightarrow{OS}$ y $\overrightarrow{OE}$

a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$: Igual módulo, dirección diferente
b) $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{BC}$: Igual módulo, dirección y sentido
c) $\overrightarrow{BM}$ y $\overrightarrow{DE}$: El módulo del segundo vector es el doble, igual dirección y sentido
d) $\overrightarrow{OS}$ y $\overrightarrow{OE}$: Diferente módulo y dirección

Componentes de un vector

Otra forma de proporcionar un vector, que utilizarás mucho a física, consiste en dar su módulo y el ángulo que forma con el eje horizontal. Por trigonometría, podemos calcular fácilmente sus componentes $\vec{v} = (|\vec{v}| \cos\alpha, |\vec{v}| \sin\alpha)$.

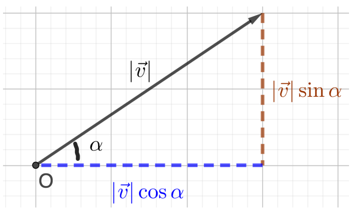


Figura 5: Componentes de un vector. Elaboración propia.

Ejemplo 3

El agua sale de una manga a una velocidad de 10 m/s y formando un ángulo de 30° respecto el eje horizontal. Calcula las componentes del vector velocidad.

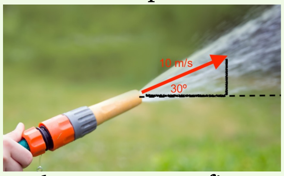


Figura 6: Imagen Trafico MZG≫

Las componentes del vector velocidad se obtienen de proyectar el módulo sobre cada uno de los ejes de coordenadas OX y OY .

$$\vec{v} = 10\,(\cos 30°, \sin 30°) = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (5\sqrt{3}, 5)\ \text{m/s} \tag{2}$$

2.2 Operaciones con vectores libres

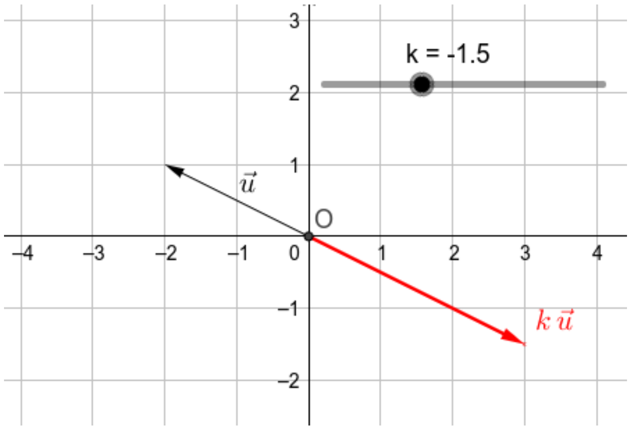
Dados dos vectores libres, por ejemplo $\vec{u} = (-2, 5)$ y $\vec{v} = (3, 1)$, se pueden realizar las siguientes operaciones; todas ellas dan como resultado otro vector.

Producto de un vector por un escalar

Multiplicar un número (escalar) k por un vector $\vec{u}$ da un vector que tiene la misma dirección que el vector $\vec{u}$ y módulo k veces más largo. El sentido del vector será el mismo si $k > 0$ y sentido opuesto si $k < 0$.

En componentes, se multiplica cada componente para escalar. Por ejemplo: $7\,(-2, 5) = (-14, 35)$.

En la siguiente simulación modifica el valor de k arrastrando el control y observa qué efecto tiene sobre el vector $k\vec{u}$. ¿Qué conclusiones sacas?



Simulación 1: https://www.geogebra.org/m/fnfrh3rj : *Producto de un escalar por un vector.*

Si tomamos $k=-1$, obtenemos el **vector opuesto** $-(-2,5)=(2,-5)$

Para que dos vectores tengan igual dirección, uno debe ser un múltiplo del otro $\vec{u}=\lambda\vec{v}$. Diremos que sus sus componentes son proporcionales

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2} \tag{3}$$

Fíjese que multiplicar cualquier vector por el número 0 da el vector cero: $0\,(-2,5)=(0,0)$

Atención. No confundas el vector cero $\vec{0}=(0,0)$ con el escalar 0 .

Suma de vectores

¿Sabías que cuando dos o más fuerzas actúan sobre un cuerpo, se obtiene la fuerza resultado mediante la suma de los vectores? El cuerpo permanecerá en equilibrio si la fuerza resultante es nula (vector $\vec{0}$). De lo contrario, el cuerpo se moverá con una aceleración en la dirección de la fuerza resultante.

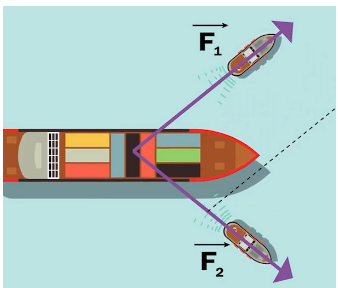


Figura 7: Imagen Infobae≫

La suma de vectores empleando componentes se hace sumando primera con primera y segunda con segunda componentes: $(-2,5)+(3,1)=(-2+3,5+1)=(1,6)$

Gráficamente, la suma se puede construir dibujando el origen del segundo vector a partir del extremo del primero. Después se une el origen del primero con el extremo del último vector. La figura muestra cómo se hace la misma suma de antes gráficamente. Esta técnica puede aplicarse a un número arbitrario de vectores.

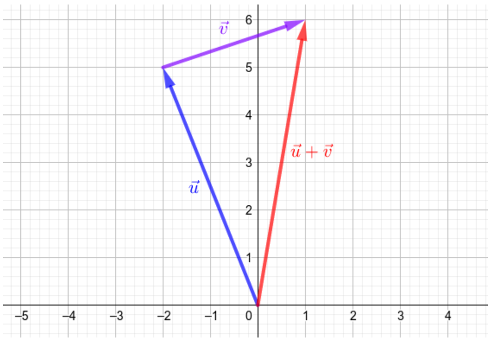


Figura 8: Suma gráfica de dos vectores. Elaboración propia.

Si a un vector le sumamos su opuesto, el resultado de la suma es el vector cero. $(-2,5)+(2,-5)=(0,0)$, o en general $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

Resta de vectores

La resta de dos vectores es equivalente a sumarle el opuesto del segundo vector: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

Las componentes del vector resta se obtiene restando componente a componente: $(-2,5)-(3,1)=(-2-3,5-1)=(-5,4)$

También se puede efectuar la resta gráficamente utilizando la misma técnica anterior. Al primer vector si le debe sumar el opuesto del segundo vector.

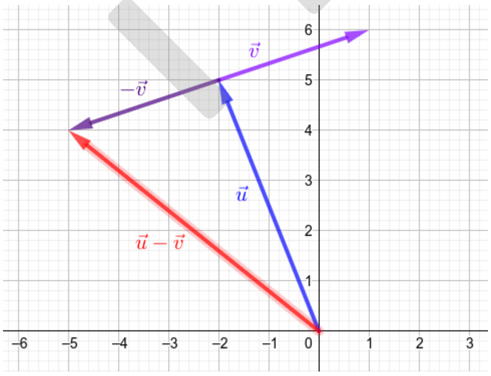


Figura 9: Resta gráfica de dos vectores. Al primer vector le sumamos el opuesto del segundo. Elaboración propia.

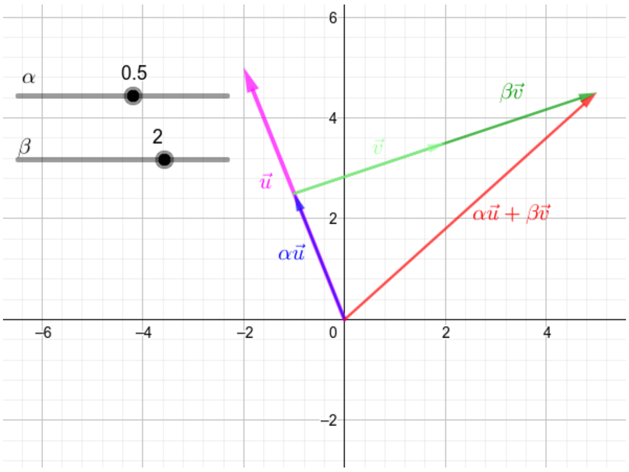
Combinación lineal de vectores

Una combinación lineal de dos vectores consiste en sumar los vectores previamente multiplicados por algún escalar.

Por ejemplo: $5\vec{u} - 2\vec{v} = 5(-2,5) - 2(3,1) = (-10,25) - (6,2) = (-16,23)$

.

Cambia los coeficientes α , β y analiza cómo cambia el resultado de la combinación (vector rojo).



Simulación 1: https://www.geogebra.org/m/pezetk5n : *Combinación lineal de dos vectores. Elaboración propia.*

Vídeo 7.1: *Introducción a los vectores en el plano*
https://www.youtube.com/watch?v=dyG6xjZ4jwo

EJERCICIOS

1. Representa los vectores libres $\vec{u} = (-2,1)$ y $\vec{v} = (3,2)$ con un mismo origen y calcula gráficamente su suma. Comprueba que obtienes el mismo resultado operando las componentes.

2. Dados los vectores $\vec{u} = (4,-5)$, $\vec{v} = (2,1)$ y $\vec{w} = (0,3)$, calcula la combinación lineal $2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{w}$. ¿Te atreves a realizar la operación gráficamente?

2.3 Dependencia lineal y bases

Comenzaremos dando dos definiciones que nos servirán para entender el concepto de base de vectores.

> Diremos que dos vectores son **linealmente dependientes** si tienen la misma dirección (no es necesario que tengan igual sentido).
>
> Diremos que dos vectores son **linealmente independientes** si tienen diferente dirección.

En el apartado de operaciones hemos visto cómo generar vectores dependientes. Basta multiplicar un vector por un número y obtenemos un vector dependiente al primero. Por tanto, para que dos vectores $\vec{u}\,(u_1, u_2)$ y $\vec{v}\,(v_1, v_2)$ sean dependientes, necesariamente uno debe ser un múltiplo del otro. Es decir, existirá un número λ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Si expresamos esta relación en componentes, llegamos a la conclusión

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} \tag{4}$$

En otras palabras, dos vectores son paralelos o dependientes si sus componentes son proporcionales.

Condición de alineamiento de 3 puntos

En el plano, tres puntos A , B , C pueden estar alineados o formar un triángulo. La condición para que estén alineados es que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ sean linealmente dependientes.

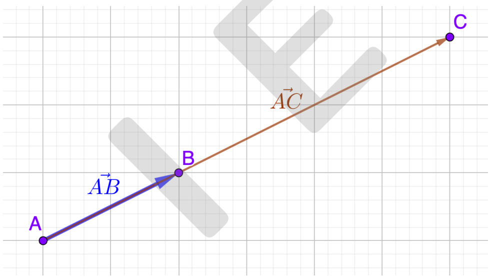


Figura 10: Condición de 3 puntos alineados. Elaboración propia.

Ejemplo 4

Calcula qué debe valer la coordenada k para que los puntos $A=(-1,2)$, $B=(k,3)$, $C=(4,5)$ estén alineados.

Calculamos los vectores $\vec{AB}=B-A=(k,3)-(-1,2)=(k+1,1)$ y $\vec{AC}=C-A=(4,5)-(-1,2)=(5,3)$
Estos dos vectores deben ser linealmente dependientes; sus componentes son proporcionales:

$$\frac{k+1}{5}=\frac{1}{3}$$

Resolvemos la ecuación y determinamos que $k=\frac{2}{3}$ para que los puntos estén alineados.

Bases y componentes

Definimos los vectores de la **base canónica u ortonormal** cómo $\vec{i}=(1,0)$, $\vec{j}=(0,1)$. Estos vectores tienen módulo 1 y forman un ángulo de $90°$. En la palabra ortonormal, *"orto"* significa que forman un ángulo de $90°$ y *"normal"* que los vectores tienen módulo 1. De esta forma cualquier otro vector, por ejemplo $\vec{w}=(2,3)$, se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base $\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}$; es a decir $(2,3)$ son las componentes del vector $\vec{w}$ respecto de la base canónica.

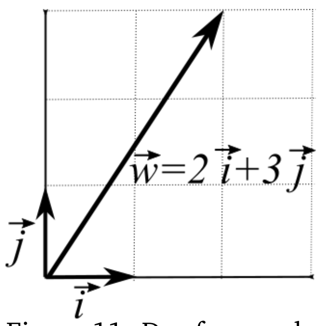


Figura 11: Dos formas de expresar un vector, w(2,3) o w=2i+3j. Elaboración propia.

Dos notaciones equivalentes

Un mismo vector se puede expresar en componentes $\vec{u}=(u_1,u_2)$ o en términos de la base canónica $\vec{u}=u_1\,\vec{i}+u_2\,\vec{j}$

En general, para que dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ formen una base del plano, se debe cumplir que tengan diferente dirección (deben ser linealmente independientes). En tal caso, cualquier vector del plano puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de la base

$$\vec{w}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \tag{5}$$

Al par de números (α, β) se llaman componentes del vector $\vec{w}$ respecto de la base $\mathcal{B}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

AMPLIACIÓN

Considera los vectores $\vec{a}(2,0)$, $\vec{b}(0,-1)$ de la figura. Dado que son linealmente independientes, forman una base del plano.

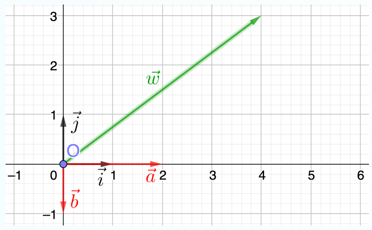


Figura 12: Ejemplo de base en el plano. Elaboración propia.

Ahora nos dan el vector que tiene de componentes respecto a la base ortonormal $\vec{w} = (4,3) = 4\vec{i} + 3\vec{j}$. Este mismo vector, se puede expresar como $\vec{w} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ y, por tanto, las componentes son $(2,-3)$ respecto de la base $\mathcal{B}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

¡No te confundas! Aunque un vector siempre es un mismo objeto, hemos descubierto que sus componentes dependen de la base que utilicemos para expresarlo.

EJERCICIOS

3. Justifica cuáles de estos pares de vectores forman una base del plano.

- $\{\vec{a}(1,-1), \vec{b}(-1,1)\}$
- $\{\vec{a}(1,-1), \vec{b}(1,1)\}$
- $\{\vec{a}(8,-6), \vec{b}(-12,9)\}$

2.4 Producto escalar de dos vectores

Definición

Llamamos **producto escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al resultado de la siguiente operación

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\alpha \tag{6}$$

es decir, el producto de sus módulos multiplicado por el coseno del ángulo que forman.

El resultado del producto escalar es un número (un escalar). Nunca des como respuesta un vector.

Interpretación geométrica

El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se puede interpretar como la proyección (o la sombra) del vector $\vec{u}$ sobre la dirección dada por el vector $\vec{v}$

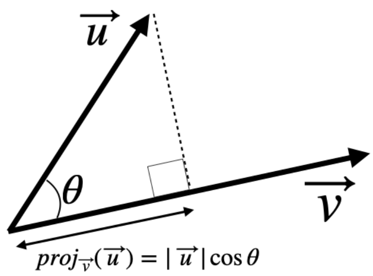


Figura 13: Interpretación geométrica del producto escalar. Elaboración propia.

De la figura anterior se obtiene la proyección por aplicación de la trigonometría en el triángulo rectángulo. Podemos definir la proyección del vector $\vec{u}$ sobre la dirección del vector $\vec{v}$ como

$$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{7}$$

Propiedades del producto escalar

De la definición (6) deducimos las siguientes propiedades

- El producto escalar es conmutativo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- El producto escalar es distributivo: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

- El producto escalar es asociativo: $\lambda\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\,\vec{v})$
- El producto escalar tiene signo
  - Si α es un ángulo agudo, $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} > 0$
  - Si α es un ángulo obtuso, $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} < 0$
  - Si α es un ángulo recto (90°), $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

De la última propiedad obtenemos un resultado muy importante que utilizaremos en el resto de las entregas.

> Dos vectores son **perpendiculares** si y sólo si su producto escalar es igual a cero $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Ejemplo 5

Calcula los siguientes productos escalares:
$\vec{i}\cdot\vec{i}\,,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}\,,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}$

Utilizamos la definición de producto escalar y recordamos que los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ son ortonormales (módulo 1 y forman un ángulo de 90°)

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|\,|\vec{i}|\cos 0^\circ = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\,|\vec{j}|\cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = |\vec{j}|\,|\vec{j}|\cos 0^\circ = 1$$

Producto escalar en componentes

> Si nos dan dos vectores expresados en componentes respecto de la base canónica $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j}$ y $\vec{v} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j}$, el producto escalar en componentes se obtiene de
>
> $$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 \qquad (8)$$
>
> se lee como: primera componente por primera más segunda componente por segunda .

AMPLIACIÓN

Demostración:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}) =$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$= u_1 v_1 \overset{=1}{\vec{i} \cdot \vec{i}} + u_1 v_2 \overset{=0}{\cancel{\vec{i} \cdot \vec{j}}} + u_2 v_1 \overset{=0}{\cancel{\vec{i} \cdot \vec{j}}} + u_2 v_2 \overset{=1}{\vec{j} \cdot \vec{j}} =$

sustituyendo los valores de los productos escalares de los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ se obtiene el resultado final

$= u_1 v_1 + u_2 v_2$

Vídeo 7.2: *Producto escalar de vectores por componentes*
https://www.youtube.com/watch?v=LBz-TrTqCDc

Ejemplo 6

Calcula los productos escalares e indica cuáles de las siguientes parejas de vectores son ortogonales.
a) $\vec{u}(3, 2)$ y $\vec{v}(1, 3)$
b) $\vec{u}(5, -4)$ y $\vec{v}(4, 5)$
c) $\vec{u}(1, 2)$ y $\vec{v}(0, 0)$
d) $\vec{u}(1, 2)$ y $\vec{v}(-2, 3)$

La condición para que dos vectores sean perpendiculares es que su producto escalar sea igual a cero

a) $(3, 2) \cdot (1, 3) = 3 + 6 = 9$ no son ortogonales.

b) $(5, -4) \cdot (4, 5) = 20 - 20 = 0$ son ortogonales.

c) $(1, 2) \cdot (0, 0) = 0$ no tiene sentido pedirse por el ángulo ya que el segundo vector es el vector nulo.

d) $(1, 2) \cdot (-2, 3) = -2 + 6 = 4$ no son ortogonales.

Ejemplo 7

¿Qué debe valer k para que los vectores $\vec{u}(18,-6)$ y $\vec{v}(k,4)$ sean perpendiculares?

La condición de que dos vectores sean perpendiculares es que su producto escalar sea igual a cero.
$(18,-6)\cdot(k,4)=18k-24=0 \Rightarrow k=\dfrac{24}{18}=\dfrac{4}{3}$.

Ejemplo 8

Dados los vectores $\vec{u}(2,3)$, $\vec{v}(-3,1)$, $\vec{w}(5,2)$, calcula:
a) $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{w}$
b) $\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}$
c) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$
d) $\vec{u}\,(\vec{v}\cdot\vec{v})$
Indica en cada caso si el resultado de la operación es un vector o un escalar.

a) $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{w}=(3(2,3)+2(-3,1))\cdot(5,2)=((6,9)+(-6,2))\cdot(5,2)=(0,11)\cdot(5,2)=22$ es un escalar

b) $\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}=(2,3)\cdot(5,2)-(-3,1)\cdot(5,2)=10+6-(-15+2)=16-(-13)=29$ es un escalar

c) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}=((2,3)\cdot(-3,1))\;(5,2)=-3\,(5,2)=(-15,-6)$ es un vector

d) $\vec{u}\,(\vec{v}\cdot\vec{v})=(2,3)\,((-3,1)\cdot(-3,1))=(2,3)\,10=(20,30)$ se trata de un vector.

¿Cómo encontrar vectores perpendiculares a un dado?

Dado un vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$ existen infinitos vectores perpendiculares a él.

Uno de estos vectores en concreto se encuentra girando el orden de las componentes y cambiando uno de los signos, por ejemplo $\vec{v}_\perp=(-v_2,v_1)$.

El resto de vectores serán múltiples de éste; $\lambda(-v_2,v_1)$.

EJERCICIOS

4. Considera los vectores $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (1,-2)$, $\vec{w} = (-5,-2)$. Calcula las siguientes operaciones, indicando si el resultado final es un vector o un escalar.

a) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$

b) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$

c) $\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

5. Calcula m para que los vectores $\vec{u} = (6,m)$, $\vec{v} = (2,3)$ sean perpendiculares.

2.5 Módulo y ángulo entre vectores

Módulo de un vector

El módulo de un vector de componentes $\vec{v}(v_1,v_2)$ se obtiene de

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2} \tag{9}$$

A partir de la definición de producto escalar (6), se cumple que $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

Un vector es **unitario** si tiene módulo 1. Para conseguir que un vector sea unitario basta dividir el vector entre su módulo. Lo indicamos de la siguiente forma $\hat{\vec{u}} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

Ángulo entre dos vectores

El ángulo que forman dos vectores con componentes $\vec{u}(u_1,u_2)$ y $\vec{v}(v_1,v_2)$ se obtiene a partir de las fórmulas (6) y (8)

$$\alpha = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \arccos\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \tag{10}$$

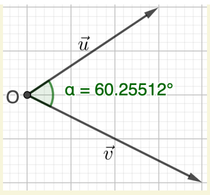


Figura 14: Ángulo entre vectores. Elaboración propia.

Dos vectores paralelos que tienen igual sentido forman un ángulo de $0°$, mientras que si tienen sentido opuesto forman un ángulo de $180°$.

Vídeo 7.3: *Aplicaciones del producto escalar*
https://www.youtube.com/watch?v=lO_XyatSQrc

Ejemplo 9

Calcula dos vectores perpendiculares al vector $\vec{v}(4,-3)$ que sean unitarios.

Un posible vector perpendicular es $(3,4)$ porque $(3,4)\cdot(4,-3)=12-12=0$. Calculamos su módulo $|(3,4)|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. Para conseguir un vector unitario, dividimos el vector entre su módulo $\frac{1}{5}(3,4)=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$. La otra respuesta es el opuesto de este vector $(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$.

Ejemplo 10

Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}(2,5)$ y $\vec{v}(4,-3)$.

Calculamos el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,5)\cdot(4,-3)=8-15=-7$
Calculamos sus módulos $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$, $|\vec{v}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$
Calculamos el ángulo

$$\alpha=\arccos\frac{-7}{5\sqrt{29}}=\arccos -0,259\approx 105,1°$$

EJERCICIOS

6. Calcula el módulo del vector $\vec{a} = (6, -8)$

7. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{a} = (6, -8)$ y $\vec{b} = (1, 1)$

3. La recta en el plano

Existen dos formas (equivalentes) de expresar una recta:

- Por dos puntos A y B pasa una única recta
- Proporcionado un punto A y un vector director $\vec{d}$

El primer caso se reduce al segundo porque siempre podemos tomar como vector $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. Este vector se conoce como **vector director** de la recta.

En este apartado aprenderemos a expresar la ecuación de la recta en diferentes formas equivalentes entre sí. Partiremos de la ecuación vectorial de la que se pueden deducir todas las demás.

Ecuación vectorial

Queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene como vector director $\vec{d}$. Consideramos un punto cualquiera X que se encuentra sobre la recta. Se debe cumplir que el vector $\overrightarrow{PX}$ debe ser un múltiplo del vector director $\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{d}$.

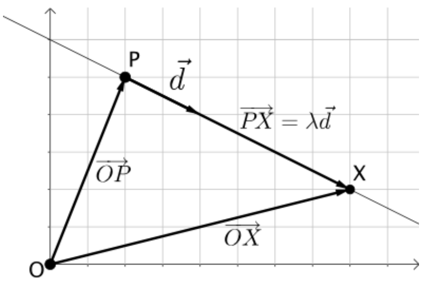


Figura 15: Construcción de la ecuación vectorial. Elaboración propia.

De la suma gráfica de vectores de la figura, se cumple que $\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda\vec{d}$. Esta ecuación se conoce como la ecuación vectorial de la recta. Si expresamos los vectores en componentes $P = (P_1, P_2)$ y $\vec{d}(d_1, d_2)$ encontramos

Ecuación vectorial de la recta:

$(x, y) = (P_1, P_2) + \lambda(d_1, d_2)$

Obtenemos puntos dando valores al parámetro λ .

Ejemplo 11

Escribe la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $A = (3, 1)$ y $B = (1, 4)$. Encuentra tres puntos más de esta recta.

Calculamos el vector director de la recta $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 4) - (3, 1) = (-2, 3)$ y elegimos un punto, por ejemplo, A .

$(x, y) = (3, 1) + \lambda(-2, 3)$

Podemos encontrar más puntos dando valores al parámetro: Para $\lambda = 1$ encontramos el punto $(x, y) = (1, 4)$, $\lambda = -1$ tenemos $(x, y) = (5, -2)$ y $\lambda = 3$ $(x, y) = (-3, 10)$, etc.

Ecuaciones paramétricas

De la ecuación vectorial igualamos las componentes x y y y obtenemos

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = P_1 + \lambda d_1 \\ y = P_2 + \lambda d_2 \end{cases}$$

Obtenemos puntos dando valores al parámetro λ .

Hay que notar que las componentes del vector director son los coeficientes que acompañan al parámetro, mientras que los coeficientes libres de parámetro son las coordenadas del punto.

Así pues, la recta $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$ tendrá como punto $P = (0, 3)$ y vector director $\vec{d}(2, -1)$.

Ejemplo 12

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A = (3,1)$ y $B = (1,4)$.

Partimos de la ecuación vectorial obtenida en el ejemplo anterior $(x,y) = (3,1) + \lambda(-2,3)$ operamos el miembro de la derecha

$(x,y) = (3-2\lambda, 1+3\lambda)$ y igualamos componente a componente $\begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = 1+3\lambda \end{cases}$

Al igual que antes dando valores a λ encontraremos más puntos de la recta.

Ecuación continua

La ecuación continua se obtiene de eliminar el parámetro λ de las ecuaciones paramétricas.

> Forma de la ecuación continua $\dfrac{x-P_1}{d_1} = \dfrac{y-P_2}{d_2}$

Nótese que en forma continua, las componentes del vector director aparecen en los denominadores y el punto en los numeradores cambiado de signo.

Ejemplo 13

Pasa la recta $\begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = 1+3\lambda \end{cases}$ a forma continua.

Despejamos λ de cada ecuación. $\lambda = \dfrac{x-3}{-2}$ y $\lambda = \dfrac{y-1}{3}$

Si igualamos las expresiones de λ obtenemos la ecuación continua $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{3}$

Ecuación punto-pendiente

Como el mismo nombre indica, la ecuación punto-pendiente se obtiene a partir de un punto de la recta y la su pendiente. La pendiente de la recta informa de su inclinación y está determinada por el vector director $m = \dfrac{d_2}{d_1}$.

La ecuación punto-pendiente tiene la forma

$$y - P_1 = m \cdot (x - P_2) \tag{11}$$

La ecuación punto-pendiente se puede obtener a partir de la ecuación continua y pasando un denominador multiplicando al otro miembro: $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{3} \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2}(x-3)$ de la cual la pendiente es $m = -\dfrac{3}{2}$ y el punto $P = (3,1)$.

Ecuación implícita o general

La ecuación general tiene la forma $Ax + By + C = 0$ donde los coeficientes A, B son las componentes del vector normal $\vec{n} = (A, B)$, es decir, de un vector perpendicular a la recta. Si quisiéramos un vector director deberíamos tomar $\vec{d} = (-B, A)$

La ecuación general se obtiene de la continua efectuando los productos en cruz y pasando todos los términos en el miembro de la izquierda.

Para encontrar más puntos, es necesario dar valores a una de las variables, por ejemplo x , y despejar a la otra.

Ejemplo 14

Encuentra la ecuación general de la recta $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{3}$.

Multiplicam en cruz las fracciones $3(x-3) = -2(y-1) \Rightarrow 3x - 9 = -2y + 2 \Rightarrow 3x + 2y - 11 = 0$.
Podemos encontrar más puntos dando valores a x y despejando la y . Por ejemplo si $x = 1$, $y = 4$. También se puede hacer al revés, damos un valor a $y = 0$ y despejamos la $x = \dfrac{11}{3}$.

Ecuación explícita

La ecuación explícita de la recta se obtiene despejando la variable y y tiene la forma

$$y = mx + n \tag{12}$$

donde m se llama la pendiente y n la ordenada en el origen. Como hemos dicho, la pendiente se obtiene de $m = \dfrac{d_2}{d_1}$ y n indica el punto de corte de la recta con el eje OY.

Ejemplo 15

Dada la recta $y = \frac{1}{3}x - 5$, encuentra un punto y un vector director. Exprésela de todas las demás formas posibles.

Nos dan la ecuación en forma explícita de la cual, por comparación con (12), deducimos $m = \frac{1}{3}$, entonces un vector director es $\vec{d}(3,1)$. Si damos el valor $x = 0$ encontramos $y = -5$, luego un punto de la recta es $P = (0, -5)$.
Las otras formas se obtienen sustituyendo los datos dentro de sus ecuaciones características

- **Vectorial:** $(x, y) = (0, -5) + t(3, 1)$
- **Paramétricas:** $\begin{cases} x = 3t \\ y = -5 + t \end{cases}$
- **Continua:** $\dfrac{x-0}{3} = \dfrac{y+5}{1}$
- **Punto-pendiente:** $y + 5 = \frac{1}{3}(x + 0)$
- **General:** $-x + 3y + 15 = 0$

Vídeo 7.4: *Ecuaciones de la recta en el plano*
https://www.youtube.com/watch?v=TK3-oeJrffE

EJERCICIOS

8. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (2, -1)$ y que tiene la dirección del vector $\vec{d} = (3, 4)$ en todas las formas posibles.

9. Dada la recta $2x - y + 7 = 0$, se pide:

a) Encontrar 3 puntos de la recta.

b) Calcular un vector director.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la misma recta. *Emplea t como parámetro.*

3.1 Rectas horizontales y verticales

Las rectas horizontales o constantes tienen como vector director $\vec{d}(1,0)$ (o múltiplos de él) y su ecuación es de la forma $y=k$.

En cambio, las rectas verticales representan paredes que tienen como vector director $\vec{d}(0,1)$ (o múltiples) y su ecuación es de la forma $x=k$.

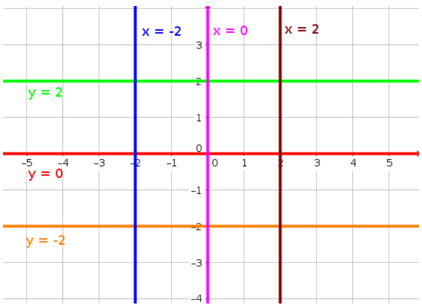


Figura 16: Rectas verticales y horizontales. Elaboración propia.

Ejemplo 16

La siguiente fotografía muestra una de las fachadas del palacio de congresos de Palma.

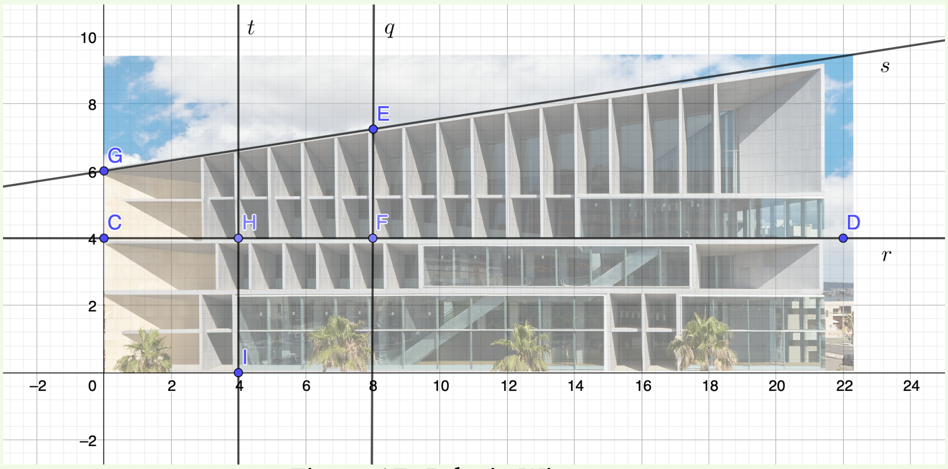


Figura 17: Palacio Wicona ≫

Escribe las ecuaciones de las rectas r, s, t, q que están representadas.

Identificamos la recta horizontal $r : y = 4$ y las dos rectas verticales $t : x = 4$ y $q : x = 8$.

Queda por determinar la recta que pasa por los puntos $G = (0, 6)$ y $E = (7, 8)$. El vector director es $\vec{GE} = E - G = (7, 2)$ y la pendiente $m = \frac{2}{7}$. La ordenada en el origen es precisamente el punto G , y por tanto, $n = 6$. En definitiva, la ecuación explícita es $s : y = \frac{2}{7}x + 6$.

3.2 Posición relativa de dos rectas

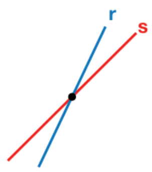
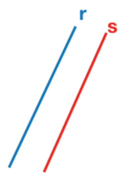
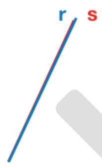
Dos rectas en el plano pueden estar situadas una respecto a la otra de 3 formas diferentes:

- se cortan en un punto (secantes),
- son paralelas o,
- son coincidentes (son la misma recta).

La posición relativa se puede determinar mediante diversas técnicas y la forma más rápida dependerá de cómo vengan dadas las ecuaciones de las rectas. Empezamos analizando el caso a partir de puntos y vectores directores.

A partir de puntos y vectores

- Si los vectores directores de las rectas son independientes, entonces las rectas son secantes.
- Si los vectores directores de las rectas son dependientes, entonces hay que tomar un punto R de la recta r hacer lo siguiente:
  - Si el punto R no pertenece a la recta s , entonces las rectas son paralelas.
  - Si el punto R también por cerro en la recta s , entonces son coincidentes.

Secantes	Paralelas	Coincidentes
		
$\vec{d_r}, \vec{d_s}$ independientes	$\vec{d_r}, \vec{d_s}$ dependientes	$\vec{d_r}, \vec{d_s}$ dependientes
	R no pertenece a s	R pertenece a s

A partir de las ecuaciones generales

La otra forma de determinar la posición relativa es útil si se tiene las ecuaciones en forma general. En este caso, cada recta tendrá una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} r:\ & Ax + By + C = 0 \\ s:\ & A'x + B'y + C' = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

La posición se hace comprobando las relaciones entre coeficientes

- Si $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$: Las rectas son secantes.
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$: Las rectas son paralelas.

- Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$: Las rectas son coincidentes.

A partir de las ecuaciones explícitas

Por último, también se puede razonar en términos de la pendiente y la ordenada en el origen de la ecuación explícita $y = mx + n$. Si dos rectas tienen diferente pendiente m , a la fuerza son secantes. Si tienen igual pendiente pero diferente ordenada en el origen n serán paralelas. En otro caso, serán coincidentes.

EJERCICIOS

10. Determina la posición relativa entre los pares de rectas:

- **a)** $r:\ y = 3x - 2$ y $s:\ y = 3x + 1$
- **b)** $r:\ (x, y) = (0, 1) + t(-6, 2)$ y $s:\ \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-1}$
- **c)** $r:\ 3x - 2y + 5 = 0$ y $s:\ -6x + 4y + 10 = 0$
- **d)** $r:\ 3x - 2y + 5 = 0$ y $s:\ 2x + 3y - 5 = 0$

3.3 Cálculo de rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas son paralelas o perpendiculares si lo son sus vectores directores. Recordemos cuáles son estas condiciones:

> Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v}(v_1, v_2)$
>
> - Son **paralelos** si sus componentes son proporcionales $\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1}$ que es equivalente a decir que tienen **igual pendiente** .
> - Son **perpendiculares** si su producto escalar es cero $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Un posible vector perpendicular a (u_1, u_2) es $(-u_2, u_1)$.

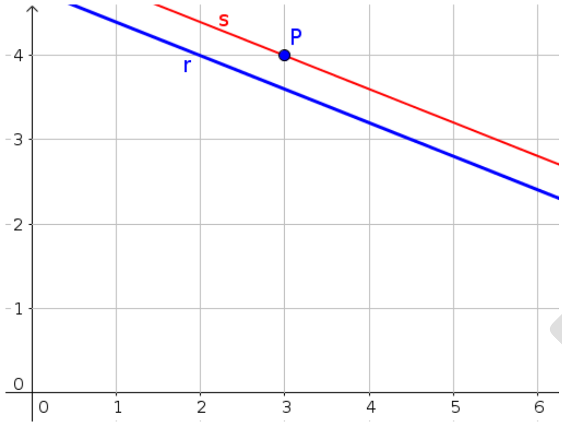
Recta paralela a una dada

Ejemplo 17

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P = (3, 4)$ y es paralela a la recta $r : \dfrac{x-2}{-5} = \dfrac{y-4}{2}$.

La recta que nos piden debe ser paralela a la recta r y por tanto debe tener el mismo vector director. El vector director es $\vec{d} = (-5, 2)$.

La recta que nos piden en forma paramétrica es $\begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}$.



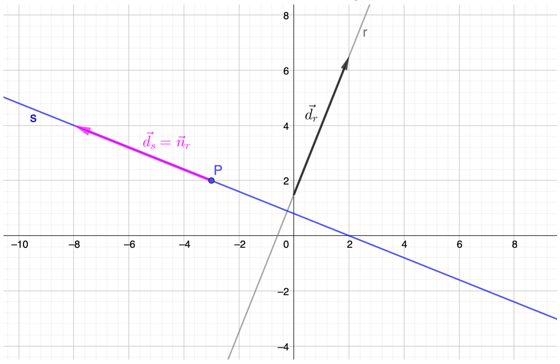
Recta perpendicular a una dada

Ejemplo 18

Escribe la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P = (-3, 2)$ y es perpendicular a la recta $r:\ 5x - 2y + 3 = 0$.

La recta que nos dan está en forma general y el vector normal $\vec{n}_r = (5, -2)$ ya es un vector perpendicular a la recta. Este vector es el vector director de la recta que nos piden $\vec{d}_s = \vec{n}_r = (5, -2)$

La recta que nos piden en forma continua es $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-2}{-2}$.

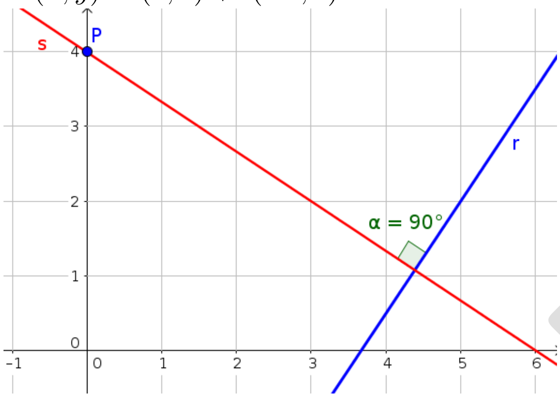


Ejemplo 19

Halla la ecuación vectorial de la recta que se perpendicular a la recta $y+1 = \frac{3}{2}(x-3)$ y que corta al eje OY en el punto de ordenada 4.

La recta que nos dan está en forma punto-pendiente de la que deducimos la pendiente $m = \dfrac{3}{2}$ y de ahí el vector director $\vec{d}(2,3)$. Un vector perpendicular a este es $\vec{n}(-3,2)$ y será el vector director de la recta que nos pidan.

A más, la recta que nos piden debe pasar por el punto de corte $P = (0,4)$. Su ecuación vectorial es $(x,y) = (0,4) + t(-3,2)$.



Vídeo 7.5: *Ecuaciones de rectas paralelas y perpendiculares*
https://www.youtube.com/watch?v=VCHth-TPOxk

EJERCICIOS

11. Calcula la ecuación **continua** de la recta que se paralela a la recta $r: y = -2x+1$ y que pasa por el punto $P(2,1)$.

12. Calcula la ecuación **general** de la recta que se perpendicular a la recta $r: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y+2}{-3}$ y que pasa por el punto $P = (1,-1)$.