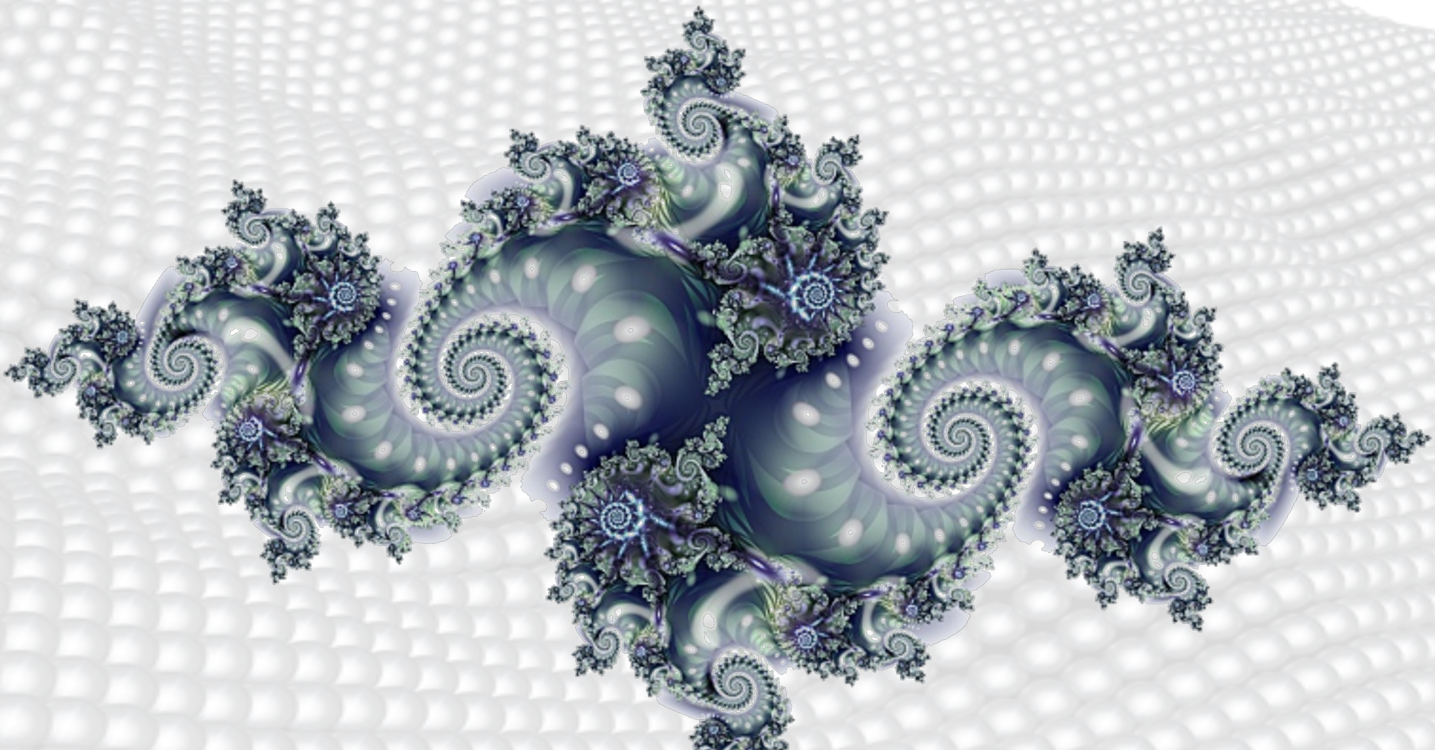
1 Matemàtiques I

Batxillerat de Ciències



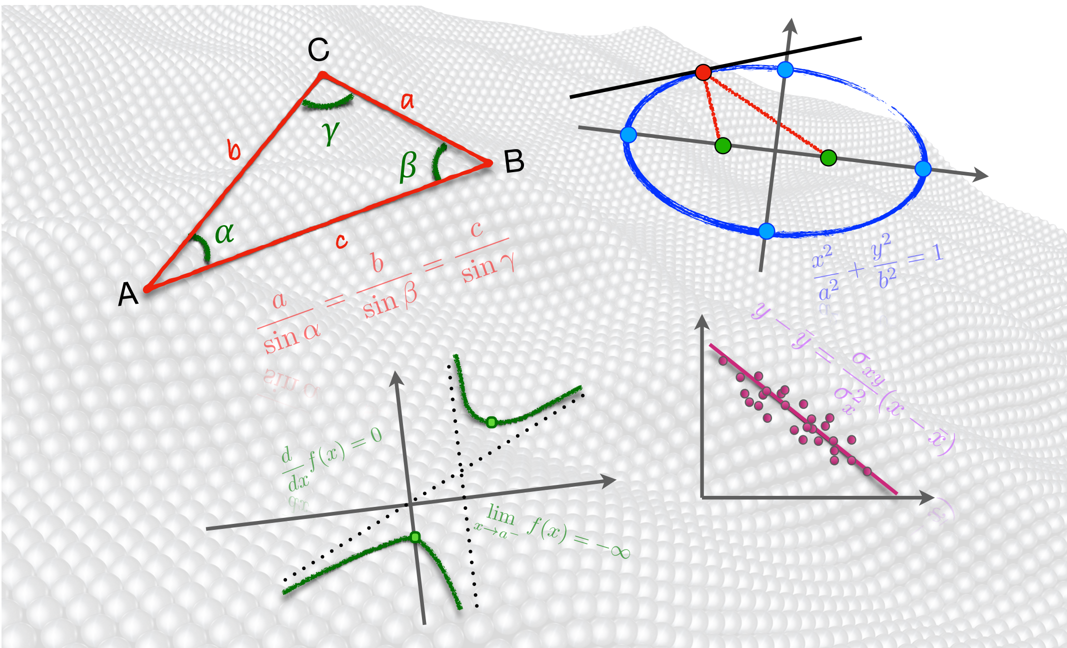
Josep Mulet

Matemàtiques I

1r Batxillerat de ciències

Sèrie Pràctica

2a Edició



IESB

www.iesbinissalem.net

Josep Mulet
Departament de Matemàtiques
IES Binissalem

Edició LaTeX: ® Josep Mulet Pol
Versió: 2017-07-31
Portada: *Fractal de Julia.*

Índex

Currículum LOMCE

Extret de http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/batxillerat_lomce/matematiques_batx.pdf

BLOC: Nombres i Àlgebra	BLOC: Geometria
• Nombres reals: necessitat del seu estudi per a la comprensió de la realitat. • Valor absolut. Desigualtats. Distàncies en la recta real. Intervals i entorns. • Aproximació i errors. Notació científica. • Nombres complexos. Forma binomial i polar. Representacions gràfiques. Operacions elementals. Fórmula de Moivre. • Successions numèriques: terme general, monotonia i acotació. El nombre e. • Logaritmes decimals i neperians. Equacions logarítmiques i exponencials. • Plantejament i resolució de problemes de la vida quotidiana mitjançant equacions i inequacions. Interpretació gràfica. • Resolució d'equacions no algebraiques senzilles. Mètode de Gauss per a la resolució i interpretació de sistemes d'equacions lineals.	• Mesura d'un angle en radiants. • Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol. Raons trigonomètriques dels angles suma i diferència d'altres dos, doble i meitat. Fórmules de transformacions trigonomètriques. • Teoremes. Resolució d'equacions trigonomètriques senzilles. • Resolució de triangles. Resolució de problemes geomètrics diversos. • Vectors lliures en el pla. Operacions geomètriques. • Producte escalar. Mòdul d'un vector. Angle de dos vectors. • Bases ortogonals i ortonormals. • Geometria mètrica plana. Equacions de la recta. Posicions relatives de rectes. Distàncies i angles. Resolució de problemes. • Llocs geomètrics en el pla. • Còniques. Circumferència, el·lipse, hipèrbola i paràbola. Equació i elements.
BLOC: Anàlisi	**BLOC: Estadística i probabilitat**
• Funcions reals de variable real. • Funcions elementals: polinòmiques, racionals senzilles, valor absolut, arrel, trigonomètriques i les seves inverses, exponencials, logarítmiques i funcions definides a trossos. • Operacions i composició de funcions. Funció inversa. Funcions d'oferta i demanda. • Concepte de límit d'una funció en un punt i en l'infinit. Càlcul de límits. Límits laterals. Indeterminacions. • Continuïtat d'una funció. Estudi de discontinuïtats. • Derivada d'una funció en un punt. Interpretació geomètrica de la derivada de la funció en un punt. Recta tangent i normal. • Funció derivada. Càlcul de funcions derivades. Regla de la cadena. • Representació gràfica de funcions.	• Estadística descriptiva bidimensional: Taules de contingència. • Distribució conjunta i distribucions marginals. • Mitjanes i desviacions típiques marginals. • Distribucions condicionades. • Independència de variables estadístiques. • Estudi de la dependència de dues variables estadístiques. • Representació gràfica: Núvol de punts. • Dependència lineal de dues variables estadístiques. • Covariància i correlació: Càlcul i interpretació del coeficient de correlació lineal. • Regressió lineal. Estimació. Prediccions estadístiques i fiabilitat de les mateixes.

Símbols

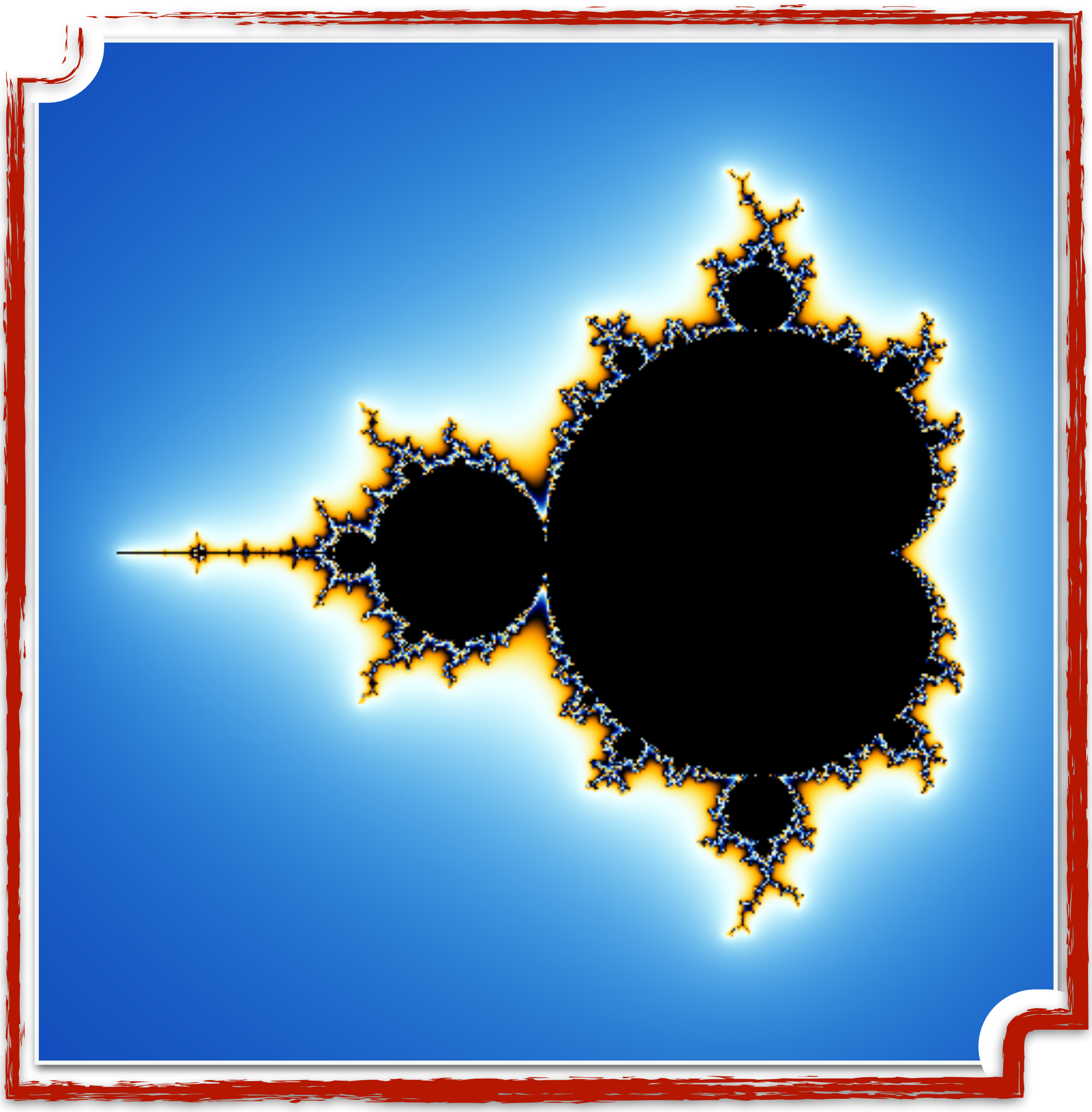
Símbol	Significat
	Problema clau amb solució al final del llibre.
	A més de la solució, proporciona orientacions per arribar a ella.
	Problema que requereix d'investigació o recerca d'informació.
	Activitat adequada per realitzar amb el programa Geogebra.
Vídeo 132:	Explicació en vídeo dels continguts de l'apartat. El número de vídeo correspon a la numeració emprada en https://piworld.es
★ ★	Problema amb un cert grau de dificultat.
	Activitat que es pot contestar en el llibre mateix.
	Activitat que es pot resoldre mentalment o en veu alta.

Recursos

piWorld	Plataforma d'aprenentatge. Conté explicacions en vídeo i activitats interactives. Requereix usuari i contrasenya. https://piworld.es
Geogebra	Programa lliure de geometria dinàmica en dues i tres dimensions. Ideal pels temes de funcions i geometria. https://www.geogebra.org/graphing
Calculadora WIRIS	Calculadora per al càlcul simbòlic. Nova versió Web https://calcme.com/a La versió antiga la trobareu a http://www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/cas.html Atenció: requereix el plugin de Java i no funciona en dispositius mòbils.

Part I

ARITMÈTICA, ÀLGEBRA I TRIGONOMETRIA



Fractal de Mandelbrot. La bellesa dels nombres complexos.

Leonardo de Pisa

(1180-1250)

També conegut com *Fibonacci*, introdueix el sistema de numeració decimal que havia après dels àrabs.

François Viète

(1540-1603)

Fou un precursor de l'àlgebra. Són famoses les relacions de *Cardano-Viète* per a les equacions de 2n grau. Són importants les seves contribucions a la trigonometria de l'època.

Paolo Ruffini

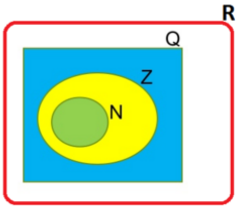
(1765-1822)

Conegut per la regla de divisió de polinomis, va ser dels primers de mostrar la impossibilitat de resoldre equacions de grau superior a 4 mitjançant radicals.

Carl F. Gauss

(1777-1855)

També conegut com el *"príncep de les matemàtiques"*. De les seves immenses contribucions destacam: els nombres complexos i la resolució de sistemes d'equacions.



Tema 1

Nombres reals

Índex

1.1 La recta real

Recorda

Els nombres reals es classifiquen en: Naturals $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$,

Enters $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, Racionals $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b},\ a$ i $b \neq 0$ enters $\}$,

Irracionals $\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \pi, e, \cdots\}$ i els nombres reals $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

El **valor absolut** d'un nombre és $|a| = a$ si $a \geq 0$, $|a| = -a$ si $a < 0$.

La **distància** entre dos nombres es troba mitjançant $\text{Dist}(a, b) = |b - a|$.

1. ✎Troba l'expressió decimal de les fraccions

a) $\dfrac{2}{3} =$ b) $\dfrac{3}{4} =$ c) $\dfrac{7}{30} =$

d) $\dfrac{6}{25} =$ e) $\dfrac{7}{8} =$ f) $\dfrac{9}{11} =$

2. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, redueix-les i comprova que està bé:

a) $2,353535\cdots$ b) $87,23656565\cdots$ c) $0,9999\cdots$ d) $26,5735735735\cdots$

3. Representa a la recta numèrica els següents nombres racionals:

a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{-13}{4}$ c) 1,342 d) −2,555555...

4. Representa a la recta numèrica els nombres irracionals:

a) $\sqrt{10}$ b) $-\sqrt{6}$ c) $\sqrt{27}$ d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

5. ✎Escriu el valor absolut dels següents nombres:

a) $|5| =$ b) $|-5| =$ c) $|\pi - \sqrt{10}| =$

6. Representa a la recta real i calcula la distància entre els nombres reals següents:

a) Dist(5 , 9) b) Dist(−2.3 , −4.5)

c) Dist(−1/5 , 9/5) d) Dist(−3.272727.... , 6.27272727....)

1.2 Intervals i entorns

7. Escriu els següents intervals mitjançant conjunts i representa'ls a la recta real:

a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty$, 6)

8. Representa a la recta real i escriu en forma d'interval:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \le x < 6$ d) $x \le 7$

9. ✎Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (emprant desigualtats) i representa'ls gràficament:

a) Un percentatge superior al 26 % ....

b) Edat inferior o igual a 18 anys ....

c) Nombres, el cub dels quals, sigui superior a 8 ....

d) Nombres positius la part entera dels quals té 3 xifres ....

e) Temperatura inferior a 25 ºC ....

f) Nombres pels quals existeix la seva arrel quadrada ....

g) Nombres que estiguin de 5 a una distància inferior a 4 ....

Entorn obert

Es defineix l'entorn obert de centre a i radi r, i s'escriu $E(a, r)$, com l'interval $(a - r, a + r)$

1. Expressa l'interval $(-1, 5)$ com un entorn.	El centre es troba al punt mitjà $a = 2$ i el radi és $r = 3$, és a dir $(-1, 5) = E(2, 3)$

10. Expressa en forma d'interval els següents entorns:

a) $E(1, 5)$ b) $E(-2, \frac{8}{3})$ c) $E(-10, 0.001)$

11. Expressa en forma d'entorn els següents intervals:

a) $(4,\ 7)$ b) $(-7,\ -4)$ c) $(-3,\ 2)$

12. Calcula x en les següents equacions: (pista: x pot tenir dos valors)

a) $|x| = 5$ b) $|x-4| = 0$ c) $|3x+9| = 21$

13. Representa a la recta real els nombres que verifiquen les següents relacions:

a) $|x| < 1$ b) $|x| \leq 1$ c) $|x-3| > 1$ d) $|x-3| \geq 1$

14. Troba dos nombres que distin 6 unitats de 3, i altres dos que distin 3,5 unitats de -2, calcula després la diferència entre el major i el menor de tots aquests nombres.

15. Escriu l'interval $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

16. Escriu l'interval format pels nombres reals x que compleixen $|x-8| \leq 3$.

17. Determina els conjunts $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ i $-A$ en els casos següents:

a) $A = [-11, -9]$; $B = (-1, 6)$ b) $A = [-5, 5]$; $B = (3, 4)$

1.3 Radicals

Trobareu un resum de les propietats dels radicals a la pàgina 15.

18. Expressa com un sol radical:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} =$ b) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}=$ c) $\sqrt{\sqrt{x^3\sqrt{x}}}=$

19. Simplifica, extraient tots els factors que puguis del radical:

a) $\sqrt[4]{64}=$ b) $\sqrt{243}=$ c) $\sqrt[9]{216}=$ d) $\sqrt[8]{1024}=$

e) $\sqrt[15]{243}=$ f) $\sqrt[6]{2401}=$ g) $\sqrt[16]{49}=$ h) $\sqrt[14]{128}=$

20. Redueix el radical a l'índex indicat:

a) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^{--}}$ b) $\sqrt{7} = \sqrt[16]{7^{--}}$ c) $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^{--}}$ d) $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{5^{---}}$

21. Expressa com un sol radical (redueix, primer de tot, els radicals a índex comú i simplifica si pots):

a) $\dfrac{\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt{8}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{6}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{5}}$

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{24}}}}$

e) $\left(\sqrt[5]{64}\right)^4$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{5^9}}}$

g) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3^2}}}$

h) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{125}}\right)^4$

EXEMPLE

a) $\dfrac{\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[6]{25^2}}{\sqrt[6]{8^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^5\cdot 5^4}{2^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{5^4}{2^4}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}$

22. Calcula, extraient primer factors fora dels radicals:

a) $\sqrt{1331} - \sqrt{44} + 2\sqrt{99} =$

b) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{686} - 3\sqrt[3]{2} =$

c) $2\sqrt{54} - \sqrt{216} - \sqrt{\frac{6}{25}} =$

d) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{\frac{2}{81}} - 7\sqrt[4]{2} =$

e) $2\sqrt{3} - \frac{1}{5}\sqrt{27} + \frac{2}{3}\sqrt{12} =$

f) $\sqrt{32} - \sqrt{18} + \frac{1}{5}\sqrt{128} =$

EXEMPLE

a) $\sqrt{1331} - \sqrt{44} + 2\sqrt{99} = \sqrt{11^3} - \sqrt{2^2\cdot 11} + 2\sqrt{3^2\cdot 11} =$

$= 11\sqrt{11} - 2\sqrt{11} + 2\cdot 3\sqrt{11} = 15\sqrt{11}$

23. Desenvolupa $\left(1 + (1+\sqrt{a})^2\right)^2 =$

24. Racionalitza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} =$

b) $\dfrac{3}{2\sqrt[4]{2}} =$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1} =$

d) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$

f) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} =$

EXEMPLE

d) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)}\cdot\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2} = 3+2\sqrt{2}$

25. Opera, racionalitza i simplifica

a) $\dfrac{\sqrt{48}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} =$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} =$

c) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$

d) $(4\sqrt{5}+3\sqrt{5})\cdot(4\sqrt{5}-3\sqrt{5}) =$

e) $2^{-5}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2^5} =$

f) $\left(\frac{5}{2}-\sqrt{2}\right)^2 =$

Autoavaluació

1. Resol l'equació $|3x+9| = 21$.
2. Expressa $\sqrt[4]{x\sqrt{x}}$ com una única arrel.
3. Simplifica l'expressió $(2\sqrt{3}+1)^2$.
4. Racionalitza l'expressió $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.
5. Simplifica l'expressió $\sqrt[3]{54} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{16}$.
6. Racionalitza l'expressió $\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$.
7. Donats els intervals $A = [-11, 6]$ i $B = (-1, 9)$, calcula $A \cap B$.

Resum

Apartat	Resum
Nombres reals	Està format per la unió dels nombres racionals i els nombres irracionals 5, −4, 2/3, 7.5, π, e, Φ . . .
Valor absolut	$\|x\| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad \|-32\| = 32$
Distància a la recta real	Dist(x, y) = |x − y| Dist(3, 8) = |8 − 3| = 5. Dist(−2, −9) = |−9 − (−2)| = |−9 + 2)| = |−7| = 7
Intervals	Obert : (a , b) = {x ∈ ℝ| a < x < b} Tancat: [a , b] = {x ∈ ℝ| a ≤ x≤ b} Semiobert (esq): (a , b] = {x ∈ ℝ| a < x ≤ b} Semiobert (dreta): [a , b) = {x ∈ ℝ| a ≤ x < b}
Radicals	Permeten donar solució a l'equació $x^n = a \rightarrow x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Si $a > 0$, l'arrel existeix sempre. Si $a < 0$, només quan l'índex n és senar. $x^3 = 8 \leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

Propietats dels radicals

Propietat	**Exemple**
1. Producte d'igual índex $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{100} = 10$
2. Quocient d'igual índex $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\dfrac{14}{7}} = \sqrt[3]{2}$
3. Potència d'una arrel $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^3 = \sqrt[4]{5^3}$
4. Arrel d'arrel $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$
5. Extreure factors $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a^3 \cdot b} = a\sqrt[3]{b}$,	$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{7000} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 7} = 10\sqrt[3]{7}$,
6. Introduir factors Consisteix en el pas contrari que el pas [5] $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$, $\quad a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b}$.	$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$ $\sqrt{3\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{3^2 \cdot x}} = \sqrt[4]{9x}$,
7. Suma i resta. Simplificar expressions El primer pas és factoritzar els radicands i després extreure factors. Finalment, podem sumar o restar arrels iguals	$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2 \cdot 2^3} + \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3}$
8. Radicals equivalents $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot q]{a^q}$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[9]{2^3} = \cdots$
9. Operacions amb diferent índex Primer cal reduir els radicals a índex comú utilitzant la propietat [8] $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[q]{a^{q/n} \cdot b^{q/m}}$ essent $q = min.c.m(n, m)$	$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{432}$
10. Racionalitzar I $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}} \cdot \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$	$\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \dfrac{2\sqrt[4]{5^3}}{5}$
11. Racionalitzar II Multiplicam i dividim pel conjugat del denominador $\dfrac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \cdot \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$	$\dfrac{1}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})} \cdot \dfrac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}$

Carl F. Gauss (1777-1855)

Tema 4

Nombres complexos

Índex

L'home ha anat ampliant al llarg del temps la noció de nombre segons les seves necessitats.

Des de la prehistòria, els nombres naturals han servit per comptar. Els nombres enters negatius ens permeten resoldre equacions com $x + 5 = 1$. De forma similar els nombres fraccionaris permeten resoldre $3x = 2$. En l'antiga Grècia ja es sabia que no existia cap nombre racional que fos solució de $x^2 = 2$; D'aquí s'introduïren els nombres irracionals.

El conjunt format pels nombres racionals i irracionals és el conjunt dels nombres reals. Aquests són tots els nombres amb els quals, de moment, hem treballat.

Equacions de segon grau

És possible trobar les solucions de l'equació $x^2 - 4x + 13 = 0$?

Si utilitzam la fórmula de les equacions de segon grau, trobam

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

Donat que $\sqrt{-36}$ no és cap nombre real, deim que l'equació no té solucions reals. Però, separem $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{-1}$. Veim que el problema està en que no podem calcular $\sqrt{-1}$.

En 1777 Leonard Euler va anomenar $i = \sqrt{-1}$ com la unitat imaginària. D'aquesta forma podem escriure les solucions com:

$$x = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Acabam d'escriure dos nombre complexos en forma binòmica.

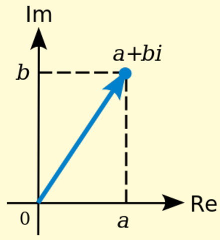
4.1 Nombres complexos en forma binòmica

Vídeo 164: Introducció als nombres complexos

Es defineix la **unitat imaginària** i com $i = \sqrt{-1}$. Es compleix que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc.

Els nombres de la forma $2i$, $5i$, $-\frac{3}{2}i$, $\cdots$ s'anomenen **imaginaris purs**.

Un **nombre complex** en forma binòmica s'expressa com $z = x + iy$, on x s'anomena **part real** i y la **part imaginària** del nombre.



El nombres es representen sobre el **pla complex**. A l'eix horitzontal hi situam la part real i a l'eix vertical la part imaginària.

El **complex conjugat** del nombre s'obté de canviar el signe de la part imaginària $z^* = x - iy$. El **mòdul** d'un nombre complex és la longitud del nombre i s'obté de $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es compleix que $z \cdot z^* = |z|^2$.

Operacions en forma binòmica

Suposau que es donen els nombres complexos $z_1 = 2 - 3i$ i $z_2 = 5 + 4i$. Amb aquests nombres podem fer les següents operacions:

- **Suma**:
$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (5 + 4i) = 7 + i$$
- **Resta**:
$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (5 + 4i) = -3 - 7i$$
- **Producte**:
$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (5 + 4i) = 10 + 8i - 15i - 12 \underset{\downarrow -1}{i^2} = 22 - 7i$$
- **Divisió**:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 - 3i) \cdot (5 - 4i)}{(5 + 4i) \cdot (5 - 4i)} = \frac{-2 - 23i}{41}$$

1. Donats els següents nombres complexos:

$$a = 3i, \quad b = -2i, \quad c = 5, \quad d = 1 + i, \quad p = -1 - i$$

a) Representa'ls gràficament sobre el pla complex. Representa els seus conjugats.

b) Representa gràficament les sumes: $a + b, \quad a + c, \quad b + d, \quad d + p$

c) Representa gràficament els productes: $a \cdot i, \quad b \cdot i, \quad c \cdot i, \quad d \cdot i, \quad p \cdot i$. Comprova que multiplicar per i equival a girar el nombre complex 90º.

2. Calcula

a) $7 - 3i - (2 + 6i)$ b) $(5 - 2i) \cdot (-3i)$

c) $(7 + 3i) \cdot (-1 + 2i)$ d) $(2 + i) - i(1 - 2i)$

e) $(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)$ f) $(3 + 2i) - (1 - i) \cdot (4 - 5i)$

g) $(1 + i)^2$ h) $(1 - i)^4$

3. Realitza les següents operacions amb nombres complexos:

a) $\dfrac{2 - i}{1 + 3i}$ b) $\dfrac{5 + 10i}{3 - 4i} + \dfrac{2 - i}{i}$

c) $\dfrac{2 + i}{4 - 3i} + \dfrac{3 + i}{5i}$ d) $\dfrac{68}{(1 - i) \cdot (2 - i) \cdot (3 - i)}$

EXEMPLE

a) Per dividir dos nombres complexos, multiplicam i dividim pel complex conjugat del denominador.

$$\frac{2 - i}{1 + 3i} = \frac{(2 - i) \cdot (1 - 3i)}{(1 + 3i) \cdot (1 - 3i)} = \frac{2 - 6i - i - 3}{10} = \frac{-1 - 7i}{10}$$

4. Comprova les següents fórmules:

a) $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ b) $(x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

5. Calcula a perquè el nombre complex $\dfrac{a + i}{3 - i}$ tingui la seva part real igual a la seva part imaginària.

4.2 Nombres complexos en forma polar

Vídeo 165: Operacions en forma polar

Un nombre complex $z = x + iy$ es pot expressar en forma polar donant el seu **mòdul** i l'angle que forma amb l'eix real. Aquest angle s'anomena **l'argument** del nombre complex. El nombre en **forma polar** s'expressa com $\mathbf{r}_\theta$ on

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Donat que hi ha infinits angles que tenen per tangent y/x, es defineix **l'argument principal** del nombre complex com un angle comprès entre $-\pi < \theta \leq \pi \quad (-180° < \theta \leq 180°)$.

De forma anàloga, es pot passar un nombre en forma polar a forma binòmica mitjançant

$$z = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$$

Aquesta forma també es coneix com **forma trigonomètrica**.

6. Calcula el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\sqrt{3} - i$ b) $-2 - 2i$ c) $1 - \sqrt{3}i$ d) $-4i$

EXEMPLE

a) Donat $z = \sqrt{3} - i$, calculam el seu mòdul fent $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$. L'argument el trobam de $\theta = \text{arctg}\,(-1/\sqrt{3}) = -30°$. El nombre és $z = 2_{-30°}$

7. Calcula el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $-3+3i$ b) -3 c) $-3i$ d) $3-3i$

8. Calcula l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\dfrac{-3}{\sqrt{3}+i}$ b) $\dfrac{-i}{1-i}$ c) $(1-i\sqrt{3})^7$

9. Expressa en forma polar els següents nombres complexos:

a) i b) $-i$ c) $4+4i$ d) -4

10. Expressa en forma polar els següents nombres complexos:

a) $5i$ b) $-7i$ c) $5-5i$ d) $\sqrt{3}+i$

11. Expressa en forma binòmica els següents nombres complexos donats en forma polar:

a) De mòdul 2 i argument $\dfrac{\pi}{3}$ b) De mòdul 3 i argument $-\dfrac{\pi}{4}$

c) De mòdul 1 i argument $\dfrac{\pi}{2}$ d) De mòdul 5 i argument $\dfrac{2\pi}{3}$

Operacions en forma polar

L'avantatge de la forma polar és que les operacions es realitzen molt més ràpid.

Si ens donen dos nombres en forma polar r_θ i $r'_{\theta'}$,

Producte: $r_\theta \cdot r'_{\theta'} = (r \cdot r')_{\theta+\theta'}$, multiplicam els mòduls i sumam els arguments.

Quocient: $r_\theta : r'_{\theta'} = (r : r')_{\theta-\theta'}$, dividim els mòduls i restam els arguments.

Potència: $(r_\theta)^n = (r^n)_{n\cdot\theta}$, elevam el mòdul i multiplicam l'argument per l'exponent.

Exercici Resolt

1. Passa a forma polar, opera i comprova $(1+i)^{16} = 2^8 = 256$.	En forma polar el nombre és $1+i = \sqrt{2}_{45°}$. Per elevar el nombre a 16, elevam el mòdul i multiplicam l'argument per 16. $$(1+i)^{16} = (\sqrt{2}^{16})_{16\cdot 45°} = 2^8_{720°} = 2^8$$ On hem utilitzat que 720° són dues voltes completes.

12. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma polar:

a) $\dfrac{\sqrt{2}i}{-2-2i}$ b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}$

13. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma polar:

a) $(\sqrt{3}+i)^{60}$ b) $(4-4i)^{-11}$ c) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^{12}}{(-2-2i)^8}$

Fórmula de Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

EXEMPLE

Si utilitzam $n = 2$ en la fórmula de Moivre: $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

Desenvolupam el quadrat del membre de l'esquerre:

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

Si igualam les part reals i imaginàries trobam:

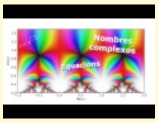
$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

que són les relacions de l'angle doble vistes en el tema 3.

14. Utilitza la fórmula de Moivre per expressar en funció de $\sin\theta$ i $\cos\theta$:

a) $\cos(-\theta)$ b) $\sin(-\theta)$ c) $\cos 3\theta$ d) $\sin 3\theta$

4.3 Resolució d'equacions en el pla complex



Vídeo 166: Resolució d'equacions

Tot nombre complex té n arrels enèsimes. Si ve expressat en forma polar r_θ, les arrels són

$$\sqrt[n]{r_\theta} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\theta+k\cdot 360}{n}}$$

essent $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

15. Calcula les arrels i representa-les en el pla complex

a) $\sqrt{-3i}$ b) $\sqrt{-9}$ c) $\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}$

d) $\sqrt[3]{-27}$ e) $\sqrt[3]{1-i}$ f) $\sqrt[4]{-81}$

MPLE

a) Primer expressam el nombre $z = -3i$ en forma polar. Sabem que té mòdul 3 i argument 270º.

Tenim dos possibles resultats de l'arrel quadrada

$$\sqrt{3_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{3}_{270/2} = \sqrt{3}_{135^\circ} \\ \sqrt{3}_{(270+360)/2} = \sqrt{3}_{315^\circ} \end{cases}$$

16. Calcula les arrels cinquenes de la unitat i representa-les en el pla complex. Calcula també totes les arrels cinquenes de -1 i representa-les.

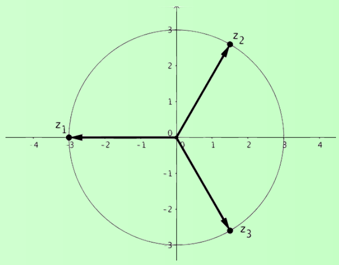
17. Resol les equacions:

a) $x^3 = -27$ b) $x^4 = -81$ c) $x^5 + 32 = 0$ d) $x^3 - 8 = 0$

EXEMPLE

a) $x^3 = -27$ implica que $x = \sqrt[3]{-27}$ que evidentment té una solució real $x = -3$. Per trobar les altres dues arrels expressam el nombre en forma polar $-27 = 27_{180^\circ}$ i en feim l'arrel cúbica.

$$\sqrt[3]{27_{180^\circ}} = \begin{cases} 3_{180/3} = 3_{60^\circ} \\ 3_{(180+360)/3} = 3_{180^\circ} \\ 3_{(180+2\cdot 360)/3} = 3_{300^\circ} \end{cases}$$



Si finalment passam les tres arrels a forma binòmica trobam $x = -3$, $x = 3(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$, $x = 3(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Si representam aquests tres nombres sobre el pla complex veim que formen els vèrtexs d'un triangle equilàter.

18. Resol les equacions, obtenint les arrels reals i complexes:

a) $x^2 = -1$ b) $x^3 = -8$ c) $x^4 + 16 = 0$

19. Calcula les arrels enèsimes de la unitat, per a n = 2, 3 i 4. Representar-les gràficament, i comprova que estan sobre la circumferència de radi 1, i són els vèrtexs d'un polígon regular.

20. Resol l'equació $z^2 + 3z - 1 = 0$.

21. Calcula tots els nombres complexos z pels quals:

a) $z^6 + 64 = 0$ b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$

c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

22. Resol aquestes equacions en el pla complex. Representa les solucions gràficament.

a) $z^2 + 4i = 0$ b) $z^3 + 8i = 0$

c) $iz^3 - 27 = 0$ d) $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^2 + 4i = 0$

Començant aïllant la incògnita $z = \sqrt{-4i}$. Tot seguit hem de calcular totes les arrels (complexes) del nombre $-4i$. Per això, l'expressam en forma polar $-4i = 4_{270^\circ}$.

$$\sqrt{4_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{4}_{\frac{270^\circ}{2}} = 2_{135^\circ} \\ \sqrt{4}_{\frac{270^\circ+360^\circ}{2}} = 2_{315^\circ} \end{cases}$$

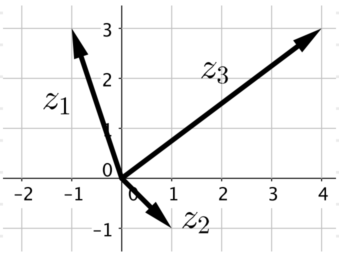
Finalment, podem expressar les dues arrels en forma binòmica:

$$\begin{cases} 2_{135^\circ} = 2(\cos 135 + i \sin 135) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ 2_{315^\circ} = 2(\cos 315 + i \sin 315) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$$

23. Calcula les quatre arrels de $z^4 + 9 = 0$ i utilitza-les per factoritzar $z^4 + 9$ amb dos polinomis de segon grau amb coeficients reals.

Autoavaluació

1. Donats els nombres complexos de la figura es demana calcular:



a) $z_1^* - z_3$

b) z_1^2

c) $|z_3|(z_1 + z_2)$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

2. Calcula $\dfrac{(3+2i)\cdot(3-2i)}{(2+3i)^3}$

3. Resol l'equació: $z^2 - 10z + 29 = 0$

4. Donada l'expressió $\dfrac{1-i}{2-ki}$, troba els valors de k pels quals l'expressió és:

a) Real

b) Imaginari pur.

5. Calcula el valor que ha de prendre x per què el mòdul de $\dfrac{x+2i}{1-i}$ sigui igual a 2.

6. Calcula el mòdul i l'argument principal del següent nombre complex $-3+3i$:

7. Expressa en forma binòmica el nombre complex de mòdul 2 i argument $\pi/3$

8. Calcula $(1+i)^6$ passant prèviament a forma polar.

9. Expressa en forma trigonomètrica el següent nombre complex $5i$.

10. Calcula les arrels cúbiques de $4\sqrt{3} - 4i$. Representa-les gràficament.

Resum

Apartat	Resum
Unitat imaginària	$i^2 = -1 \leftrightarrow i = \sqrt{-1}$
Nombre en forma binòmica	$z = x + iy$ $z = 2 + 3i$, té part real 2 i part imaginària 3
Complex conjugat	$z^* = x - iy$ $\bar{z} = 2 - 3i$
Suma de complexos	$(x + iy) + (o + iv) = (x + o) + i(y + v)$ $(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$
Producte de complexos	$(x + iy) \cdot (o + iv) = (x \cdot o - y \cdot v) + i(x \cdot v + y \cdot o)$ $(2 + 3i) \cdot (4 + 5i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 4 + 3i$
Divisió de complexos	Es multiplica numerador i denominador pel complex conjugat del denominador. Així s'aconsegueix un denominador real. $\frac{2}{1+i} = \frac{2\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{2\cdot(1-i)}{2} = 1 - i$
Forma polar	r_θ amb $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $\theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$ $z = 2 + 3i$, $r = \sqrt{13}$, $\theta = \text{arctg}\,\frac{3}{2}$
Forma trigonomètrica	$z = r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ Si tenim $z = 2_{30^\circ}$, $z = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
Producte en forma polar	$z = r_\theta$ i $z' = r'_\alpha$, aleshores $z \cdot z' = (r \cdot r')_{\theta+\alpha}$. Multiplicam els mòduls i sumam els arguments. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i $z' = 3_{50^\circ}$, $z \cdot z' = (2 \cdot 3)_{30+50^\circ} = 6_{80^\circ}$
Divisió en forma polar	$z = r_\theta$ i $z' = r'_\alpha$, aleshores $z/z' = (r/r')_{\theta-\alpha}$. Dividim els mòduls i restam els arguments. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i $z' = 3_{50^\circ}$, $z/z' = (2/3)_{30-50^\circ} = (2/3)_{340^\circ}$
Potència en forma polar	$z = r_\theta$, aleshores $z^n = (r^n)_{n\cdot\theta}$. Elevam el mòdul i multiplicam l'argument per n. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i volem calcular $z^3 = (2^3)_{3\cdot 30^\circ} = 8_{90^\circ}$

SÍNTESI DE LA PART I

Aritmètica, Àlgebra i Trigonometria

1. Efectua les operacions següents i simplifica:

a) $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^2} + 3a\sqrt[6]{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$

b) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{2}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}} - \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. Efectua les operacions següents i simplifica:

a) $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right) : \sqrt{a}$

b) $\dfrac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \dfrac{2}{3-\sqrt{3}}$

3. Factoritza el polinomi $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2$

4. Opera i simplifica $\left(\dfrac{x^2-4}{x+1} : \dfrac{x^2+2x}{x^3-x}\right) - (x^2-3x)$

5. Resol l'equació $\sqrt{2x+3} - 2x = x - 6$

6. Resol l'equació $\dfrac{7-x}{x^2+4x+4} + \dfrac{x}{x+2} = 1$

7. Resol el sistema d'inequacions $\left\{\begin{array}{l} x+1-3(x-1) < 1-x \\ x^2-x-6 \geq 0 \end{array}\right.$

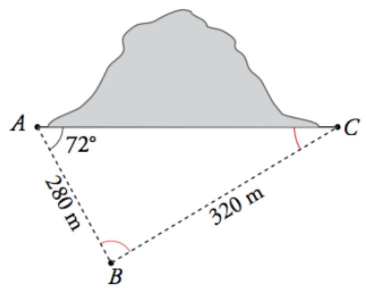
8. Un examen consisteix en un test de 60 preguntes. Per cada encert obtens 5 punts, per cada errada et lleven 2 punts i per cada pregunta no contestada resta 1 punt. Quantes preguntes bé, malament i en blanc va contestar un alumne sabent que va obtenir 150 punts i que el nombre d'errades més el quíntuple de les no contestades va ésser igual al nombre d'encerts?

9. Resol pel mètode de Gauss i classifica el sistema $\left\{\begin{array}{ll} 2x+y-z & = -1 \\ x-y+z & = 4 \\ 4x-y+z & = 7 \end{array}\right.$

10. Les diagonals d'un paral·lelogram mesuren 16 cm i 28 cm i formen un angle de 48º. Calcula el perímetre i l'àrea d'aquest paral·lelogram.

11. Tenim un triangle de perímetre 48 cm. Sabent que el costat major supera en 6 unitats el menor i que l'altre costat és la mitjana aritmètica del major i del menor, calcula els angles d'aquest triangle.

12. Per construir un túnel entre dues ciutats A i C necessitam saber la seva longitud i direcció. Per això, fixam un punt B i prenem les mesures indicades en la figura. Calcula $\bar{AC}$ i els angles $\hat{B}$ i $\hat{C}$.



13. Una nau espacial es troba sobrevolant el pol nord de la Terra a una certa distància d de la seva superfície. Si volem veure els continents fins a una latitud de $40°$ nord, quina és l'altura mínima ha de volar la nau? Preneu radi de la Terra $R = 6400$ km.

14. Justifica si existeix algun angle a pel qual $\operatorname{tg} a = \frac{2}{3}$ i $\sin a = \frac{1}{2}$.

15. Sabent que $\operatorname{tg} \alpha = 2$ i que $\cos \alpha > 0$, troba:

a) $\cos 2\alpha$ b) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ c) $\sin \frac{\alpha}{2}$ d) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \alpha)$

16. Demostra les següents identitats trigonomètriques

a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

b) $2\operatorname{tg} \beta \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin \beta = \operatorname{tg} \beta$

17. Resol aquestes equacions trigonomètriques

a) $2\sin x + \cos x = 1$

b) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$

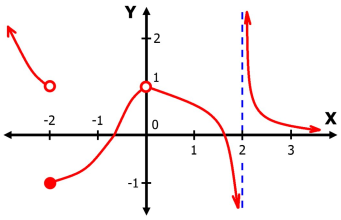
18. Resol $\begin{cases} \sin 3x + \sin y = \frac{3}{2} \\ \cos\left(\frac{3x-y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

19. Efectua $\dfrac{(3-2i)^2 - (1+i)(2-i)}{-3+i}$

20. Simplifica $\dfrac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}}$. *Ajuda: Recorda quines són les potències de i.*

21. Resol l'equació en el conjunt dels nombres complexos $z^2 - 10z + 29 = 0$.

22. Donat el nombre complex $z = 3_{60°}$, expressa en forma polar z^*, $1/z$, z^2, $\sqrt[3]{z}$.



Tema 6

Límits i continuïtat

Índex

6.1 Concepte de límit

- Direm que x **tendeix a** a **per la dreta** ($x \to a^+$) si x pren valors majors que a i cada vegada més propers a ell,

  $x \to 3^+$ si $x = 3.1, 3.01, 3.001, \cdots$.

- Direm que x **tendeix a** a **per l'esquerra** ($x \to a^-$) si x pren valors menors que a i cada vegada més propers a ell,

  $x \to 3^-$ si $x = 2.9, 2.99, 2.999, \cdots$.

- Direm que x **tendeix a** a ($x \to a$) si x pren valors cada vegada més propers a a,

  $x \to 3$ si $x = 3.1, 2.99, 3.001, \cdots$.

- Direm que x **tendeix a** $+\infty$ ($x \to +\infty$) si x pren valors positius cada vegada més grans,

  $x \to +\infty$ si $x = 10, 1000, 1000000, \cdots$.

- Direm que x **tendeix a** $-\infty$ ($x \to -\infty$) si x pren valors negatius cada vegada més grans,

  $x \to -\infty$ si $x = -10, -1000, -1000000, \cdots$.

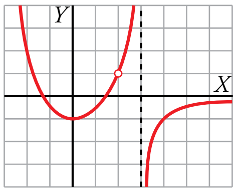
Direm que el límit d'una funció en un punt existeix si els dos **límits laterals coincideixen**, és a dir

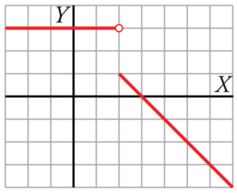
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

1. Per a cadascuna de les funcions següents $f_1(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$, $f_2(x) = \dfrac{4}{3-x}$, $f_3(x) = 2^x$, completa en el teu quadern la taula adjunta, amb l'ajuda de la calculadora, i estima el valor de $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
$f(x)$					

2. Observant cadascuna de les gràfiques següents

a) 

b) 

troba $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

3. Calcula els límits laterals i determina si existeix el límit en les funcions següents definides a trossos, en els punts en els quals s'uneixen dues branques:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si\ x < 1 \\ 3x-2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x+3}{x+5} & si\ x < 1 \\ \dfrac{5x^2}{x+3} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & si\ x < 5 \\ x+5 & si\ x \geq 5 \end{cases}$

6.2 Càlcul de límits

Recorda: Podem classificar els límits en un punt en:

- **Immediats:** Només cal substituir el valor de x dins la funció.
- **Infinits:** Quan substituïm valor de x dins la funció, trobam una divisió per zero $\dfrac{k}{0}$. El límit pot donar $\pm\infty$. Cal calcular els dos límits laterals.
- **Indeterminats:** Una indeterminació és una expressió que no sabem el seu valor si no feim alguna cosa més. Cada tipus d'indeterminació té una tècnica per descobrir el seu valor.

  Són indeterminacions expressions com ara:

$$0/0, \quad \infty/\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 1^\infty, \ldots$$

Límits a un punt

Vídeo 173: Límits de funcions racionals en un punt.

Exercici Resolt

1. Calcula els límits de la funció

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$$

quan

a) $x\to 1$
b) $x\to 3$
c) $x\to -3$

a) Immediat: $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{1+3}{1-9}=-\frac{1}{2}$

b) Infinit: $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{6}{0}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{+6}{-0}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{+6}{+0}=+\infty\end{cases}$

c) Indeterminació 0/0: $\displaystyle \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{0}{0}=\text{IND}=$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{6}$$

4. Calcula els següents límits, indicant el signe:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1^+}\frac{5}{x-1}$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 1^-}\frac{5}{x-1}$ c) $\displaystyle \lim_{x\to 3^+}\frac{-5}{x-3}$ d) $\displaystyle \lim_{x\to 3^-}\frac{-5}{x-3}$

5. Calcula els límits següents

a) $\displaystyle \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}$ b) $\displaystyle \lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x-3}$ c) $\displaystyle \lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2+3x}$ d) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e) $\displaystyle \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{-x-2}$ f) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$ g) $\displaystyle \lim_{x\to -4}\frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

6. Calcula els límits següents

a) $\displaystyle \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ c) $\displaystyle \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right)$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-4x^2+4}{(x-1)^2}\right)$ e) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{3-h}-\sqrt{3}}{h}\right)$ f) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\left(\frac{2-\sqrt{2+x}}{x-2}\right)$

Regles bàsiques pel càlcul de límits

Me demanen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$		
Quan substutueixo x per a trob	*Què faré?*	*Exemple*
Un nombre	Res. Ja he acabat!	$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$
$\frac{k}{0}$	Calcular els límits laterals per saber si val $\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \end{cases}$
$\frac{0}{0}$ amb polinomis	Factoritzar i simplificar	$\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5}(x+5) = 10$
$\frac{0}{0}$ amb arrels	Racionalitzar i simplificar	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)} = \cdots = \frac{1}{6}$

Me demanen $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$		
Quan substitueixo x per $\pm\infty$ trob	*Què faré?*	*Exemple*
$\frac{k}{\infty}$	El límit val 0.	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = 0$
$\frac{\infty}{\infty}$ amb polinomis	Dividim tot per la major potència de x del denominador.	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2-2x+1} =$ dividim per x^2 $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+5/x^2}{3-2/x+1/x^2} = \frac{2}{3}$
$\frac{\infty}{\infty}$ amb arrels	El mateix que abans, però ara l'exponent dins d'una arrel queda dividit entre 2.	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2-2x+1}} =$ dividim per x $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+5/x}{\sqrt{3-2/x+1/x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
$\infty-\infty$ amb polinomis	Calcular el mcm i operar les fraccions	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} - x = \cdots = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$
$\infty-\infty$ amb arrels	Racionalitzar i simplificar	$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1} - x = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1}-x)\frac{(\sqrt{x^2-1}+x)}{(\sqrt{x^2-1}+x)} = \cdots = 0$

Límits a l'infinit

Vídeo 174: Com calcular límits de polinomis a l'infinit?

Vídeo 175: Com calcular límits de funcions racionals a l'infinit?

7. Classifica els següents límits en finits o infinits, i calcula'ls:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} -x^2$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} +x^2$ c) $\lim\limits_{x\to 3} x^2$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}$

8. Calcula els següents límits, indicant el signe:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3+2x^2+5$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3-7x+5$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2+x-4$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2-5x+4}$

Els límits de les funcions racionals a l'infinit segons els grau del numerador $D(x)$ i denominador $d(x)$ poden valer:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{D(x)}{d(x)} = \begin{cases} 0 & \text{grau } D < \text{grau } d \\ L & \text{grau } D = \text{grau } d \\ \pm\infty & \text{grau } D > \text{grau } d \end{cases}$$

9. Escriu, sense necessitat de fer càlculs, el valor dels límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+3}{5x^2+2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^5+3}{5x^2+2x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+3}{5x^7+2x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x}$

10. Calcula els límits següents

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+8}{-x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+8}{-x^5-2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+8}{-x^3-2}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{2}{x+2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{x-3}{x+2}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}}\right)$

El número e s'obté del límit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.718281828459045$$

Totes les indeterminacions del tipus 1^∞ estan relacionades amb el número e.

Els límits de les funcions exponencials a l'infinit segons la base, quan l'exponent $h(x) \to +\infty$ poden valer:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} < 1 \\ e^{\lim\limits_{x\to\infty} h(x)\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)} & \text{si } \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ \infty & \text{si } \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} > 1 \end{cases}$$

11. Determina els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 10^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 10^{\frac{x^2+1}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2x-1}{x+1}}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^{2x^2-1}$

12. Determina els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+5}\right)^{3x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$

Fitxa de límits

13. Calcula els següents límits utilitzant les tècniques adequades en cada cas

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x^2}{2x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x^2-4}$ (4) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{x+1}{2x-1}$

(5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$ (6) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$

(7) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-3}{x^2-4}$ (8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-3}{(x-4)^2}$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{x-1}$ (10) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

(11) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-10x+25}$ (12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^3-3x^2+11x-6}{x^3-4x^2+5x-2}$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-5)$

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+7)$

(15) $\lim\limits_{x\to-\infty}(6x^2-10x+17)$

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}$

(17) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-14}{x^2}$

(18) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x-5}$

(19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x^2-4x+1}$

(20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1}$

(21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x^2+3x}{3x^2-4x+1}$

(22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x}{2x+7}$

(23) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+8x}{x-4}$

(24) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2+8x}{x-4}$

(25) $\lim\limits_{x\to3\pi/2}\sin x$

(26) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\operatorname{tg} x$

(27) $\lim\limits_{x\to0^+}\log_2 x$

(28) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}}$

(29) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1}$

(30) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x}$

(31) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+5x^3-x+3}$

(32) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11}$

(33) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2}-\dfrac{2x^2-3x+1}{2(x-2)}\right)$

(34) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+1}}$

(35) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-4}{\sqrt{2x^3-4x}}$

(36) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^3+2x}}$

(37) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-4}}$

(38) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x-4}$

(39) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x-4}{\sqrt{2-\sqrt{2x}}}$

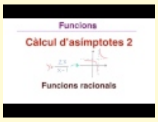
(40) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{3-x}$

(41) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-\sqrt{4x-3}}{x^2-9}$

(42) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-\sqrt{4x^2-3}\right)$

6.3 Asímptotes

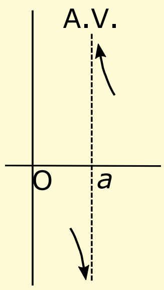
Asímptotes verticals



Vídeo 177: Asímptotes verticals i horitzontals

Perquè una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tingui una asímptota vertical, el denominador ha d'ésser igual a zero i el numerador diferent de zero. El procediment consisteix resoldre l'equació $Q(x) = 0$.

⚠ Cal assegurar-se que no tenim 0/0, ja que no té perquè ésser una asímptota.



Per a cada valor $x = a$ tal que $Q(a) = 0$, estudiam la posició relativa calculant els dos límits laterals:

$$\lim_{x\to a^-} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$$

d'aquesta forma sabem si s'acosta cap a $\pm\infty$ al voltant de l'asímptota vertical.

14. Determina les asímptotes verticals de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)}$

b) $f(x) = \dfrac{x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

c) $f(x) = \dfrac{(x+4)^2}{(x-1)\cdot(x+4)}$

d) $f(x) = \dfrac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)}$

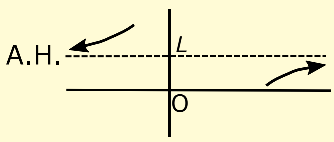
Asímptotes horitzontals

Perquè una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tingui una asímptota horitzontal, el grau $P \leq$grau Q. L'asímptota és la recta horitzontal $y = L$, essent $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Nota: Quan grau $P <$ grau Q, la recta $y = 0$ és l'asímptota horitzontal.

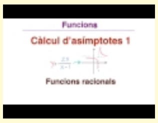
Per saber si ens acostam per damunt o davall de l'asímptota horitzontal $y = L$ construïm una taula amb dos valors grans (un negatiu i l'altre positiu).

x	y	pos
-100	...	amunt
100	...	avall



15. Determina les asímptotes horitzontals de les funcions de l'exercici 14.

Asímptotes obliqües i branques parabòliques



Vídeo 176: Asímptotes obliqües

Perquè una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tingui una asímptota obliqua, el graus han de complir grau $P(x)$ =grau $Q(x) + 1$. L'equació de l'asímptota obliqua s'obté del quocient de la divisió de $P(x) : Q(x)$.

Si es compleix que grau $P(x)$ >grau $Q(x)+1$, aleshores la funció creix més ràpidament que una recta, es diu que té branques parabòliques.

16. Determina l'asímptota obliqua, si existeix, de cadascuna de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}$ b) $f(x) = \dfrac{3x^2\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

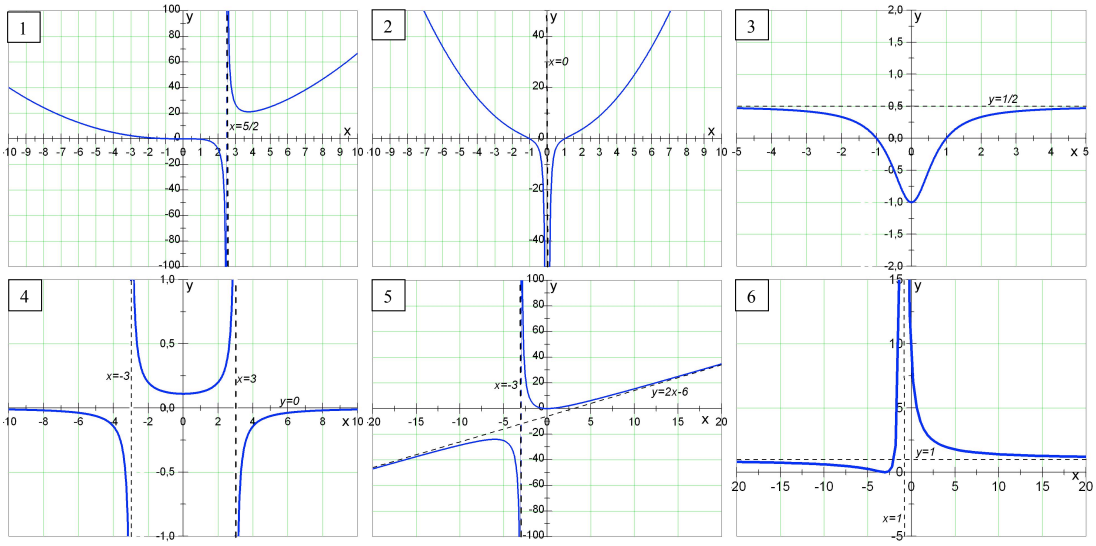
c) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2(x-1)}$ d) $f(x) = \dfrac{2x^2+4}{x+1}$

17. Analitza el comportament a l'infinit de cadascuna de les funcions següents:

a) $f(x) = (x+4)^2$ b) $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$

Calcul d'asímptotes i representació gràfica

18. Identifica el tipus d'asímptota i associa cada gràfic amb la seva expressió analítica:



a) $y = \dfrac{x^4-1}{x^2}$ b) $y = \dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$ c) $y = \dfrac{1}{9-x^2}$

d) $y = \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$ e) $y = \dfrac{2x^2}{x+3}$ f) $y = \dfrac{x^3}{2x-5}$

19. Determina les asímptotes i representa la posició relativa de la funció respecte de les asímptotes:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 3}$

b) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{-5x}{(x - 1)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{-5x^4 - 5}{(x - 1)^2}$

g) $f(x) = \ln \dfrac{5x}{(x - 1)^2}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x}{(x - 1)^2}}$

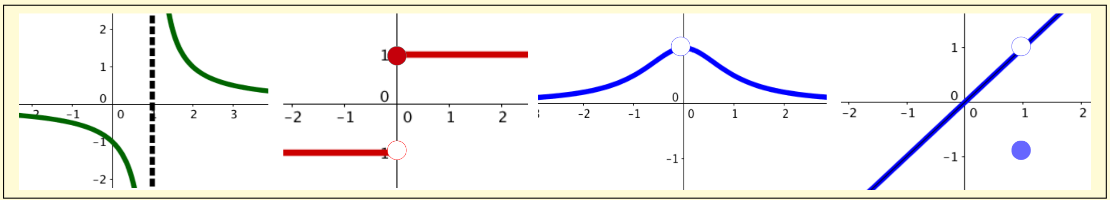
6.4 Continuïtat de funcions

Tipus de discontinuïtats

Existeixen 4 motius pels quals una funció pot ser discontínua en un punt $x = a$:

1. **Salt infinit o discontinuïtat asimptòtica:** La funció presenta una asímptota en $x = a$
2. **De salt finit:** La funció presenta un bot
3. **Li falta un punt:** No es pot calcular el valor de la funció a $x = a$
4. **Punt desplaçat:** Aquest cas, el punt existeix però es troba a una altura incorrecta.

Els casos 3, 4 s'anomenen **discontinuïtats evitables.**



Funció contínua en un punt

Per a que una funció sigui contínua en un punt $x = a$ s'ha de complir:

1. Els límits $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x)$ han d'ésser finits (Evitam asímptotes)
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (Evitam salts)
3. Existeix $f(a)$] (Evitam li falta un punt)
4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (Evitam punt desplaçat)

Una funció és diu que és contínua si és contínua en tots els punts del seu domini.

20. Estudia la continuïtat de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x-5}$

c) $f(x) = \log_2(x-3)$ d) $f(x) = \begin{cases} 2+x^2 & si\ x \leq 0 \\ 1+e^x & si\ x > 0 \end{cases}$

21. Estudia la continuïtat de les funcions següents:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si & x < -1 \\ 2+x^2 & si & -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{3}{x} & si & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = x - \sqrt{x-2}$ c) $f(x) = |x-3| - 1$

22. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat. Representa-les gràficament.

a) $f(x) = \begin{cases} 3^x & x < -2 \\ 4-x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ \log_2 x & x > 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ x^2-3x & 0 \leq x < 3 \\ \sqrt{x-3} & x \geq 3 \end{cases}$

c) $h(x) = |x^2 - 5x|$

23. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a) $f(x) = |x^2 - 25|$ b) $g(x) = 2 - \dfrac{|x|}{x}$ c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2|x|}{x-3}$

24. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a) $f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$ b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-4}}$ c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{x^2-3x}}$

25. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{4-x}{x-5}\right)$ b) $g(x) = \ln(-x^2-x+2)$

c) $h(x) = e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$ d) $i(x) = e^{\sqrt{x-5}}$

26. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 0 \\ 2+e^x & x \geq 0 \end{cases}$. a) Estudia la seva continuïtat. b) Representa la seva gràfica.

27. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x-3 & x < -1 \\ x^2-5 & -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$. a) Estudia la seva continuïtat. b) Representa la seva gràfica.

28. Esbossa la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2-25}$ indicant les seves asímptotes i els seus punts de discontinuïtat.

Discussió de la continuïtat en funció d'un paràmetre

Exercici Resolt

2. Determina el valor de k perquè la funció $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & si\ x \leq 1 \\ k+x & si\ x > 1 \end{cases}$ sigui contínua en tota la recta real.	Donat que el primer tros és una paràbola i el segon tros una línia recta, cada funció per separat és contínua. L'únic que hem d'imposar és que sigui contínua en el punt d'unió $x = 1$ de la funció a trossos. Estudiam la continuïtat en el punt $x = 1$: 1. Els límits laterals són finits; no té asímptotes 2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2-x^2 = 2-1^2 = 1$ i $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} k+x = k+1$. Si imposam que els dos límits laterals siguin iguals, $1 = 1+k$ ens duu al resultat $k = 0$. 3. Existeix $f(1) = 1$ 4. També es compleix que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$. La resposta és que $k = 0$.

29. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 2 \\ k+x & x \geq 2 \end{cases}$. a) Determina el valor de k perquè la funció sigui contínua en tota la recta real. b) Representa la seva gràfica

30. Calcula k perquè la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$ sigui contínua.

31. En la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{px+1}{x-4} & x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-x} & x > 1 \end{cases}$ a) Troba el valor de p perquè sigui contínua en $x = 1$. b) Hi ha algun altre punt en què sigui discontínua?

32. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} 3-ax^2 & x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & x > 1 \end{cases}$ segons el valor del paràmetre a.

33. Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq a \\ a+2 & x > a \end{cases}$ segons el valor del paràmetre a.

34. Determina a i b perquè la funció $f(x) = \begin{cases} \ln x & 0 < x \leq 1 \\ ax^2 + b & x > 1 \end{cases}$ sigui contínua i compleixi que $f(2) = 3$.

Autoavaluació

1. Calcula el límit $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$.

2. Calcula el límit $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - x - 2) \cdot \left(\dfrac{1}{x + 2} \right)$.

3. Calcula el límit $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} \right)$.

4. Calcula el límit $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{2 + x} - 1}{x + 1}$

5. Calcula els límits a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 + 7x - 4}{x^3 + 3}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 + 7x - 4}{x^2 + 3}$

6. Calcula el límit $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x + 1}{3x - 2} \right)^{2x^2 + 1}$

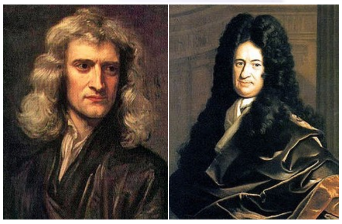
7. Estudia la continuïtat de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3}{x} & si\ x < 0 \\ 3x + 2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

8. Estudia la continuïtat de $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & si\ x < 2 \\ 3x + 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.

9. Troba el valor de k perquè $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x + k & si\ x > 2 \end{cases}$ sigui contínua en $x = 2$.

Resum

Apartat	Resum
Límit lateral per la dreta	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ tendeix a L quan x tendeix a a, sempre que es compleixi $x > a$ La funció $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ té lateral per la dreta 8, ja que $\underset{x\to x\to 2^+}{lim} x^3 = 2^3 = 8$
Límit lateral per l'esquerra	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ si el valor $f(x)$ tendeix a L quan x tendeix a a, sempre que es compleixi la condició $x < a$.
Existència del límit	El límit existeix si els dos límits laterals són iguals $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$
Asímptotes	Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = K$ hi ha una asímptota horitzontal $y = K$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ hi ha una asímptota vertical a $x = a$. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ té asímptota horitzontal $y = 2$ i asímptota vertical $x = 1$.
Continuïtat d'una funció en un punt	Una funció $f(x)$ és contínua en el punt $x = a$, si es compleixen: 1. Els límits $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x)$ són finits 2. Existeix el límit $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. 3. Existeix $f(a)$ 4. El límit i la funció coincideixen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ La condició 1. assegura que no hi ha asímptotes verticals. La condició 2. significa que no hi ha salts finits. La condició 3. vol dir que no falten punts i finalment 4. assegura que no hi ha punts desplaçats.
Tipus de discontinuïtats	Asímptòtica o salt infinit; De salt finit; Evitables: Li falta un punt, i té un punt desplaçat. $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x > 2 \end{cases}$ evitable (li falta un punt) en x = 2 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ té un salt infinit en $x = 0$



Isaac Newton (1643-1727) i Gottfried Leibniz (1646-1716)

Tema 7

Derivades i aplicacions

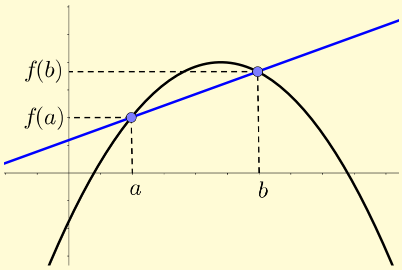
Índex

7.1 Concepte de derivada

La **taxa de variació mitjana** (TVM) d'una funció en un interval $[a,\ b]$ es defineix com:

$$TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

i correspon al **pendent de la recta secant** a la funció en els punts d'abscisses a i b.



1. Troba la taxa de variació mitjana en els intervals [-3, 2], [1, 5] i [0, 3] de les funcions següents:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista del que has obtingut, creus que la taxa de variació mitjana de les funcions polinòmiques de primer grau és sempre constant i igual al pendent de la recta que la representa?

2. Troba la taxa de variació mitjana de la funció $y = x^2 - 1$ en els intervals [-3, 2], [1, 5] i [0, 3]. És ara constant?

3. Troba la taxa de variació mitjana de la funció $y = x^3 + 1$ en els intervals [-3, 2], [1, 5] i [0, 3]. Hauràs comprovat que en els dos últims exercicis la taxa de variació mitjana no és constant.

4. En fer un estudi sobre l'aterratge d'avions es grava una pel·lícula des del moment en què l'avió toca terra fins que es para, i es mesuren els temps i les distàncies recorregudes:

Temps (t) en segons	0	2	4	6	8	10	12	14
Distància (d) en metres	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocitat mitjana de l'avió.

b) Calcula la velocitat mitjana en els intervals: [0, 6], [2, 10] i [6, 14].

c) És constant?

5. S'estudia la posició d'un cotxe respecte de la sortida d'un túnel i s'obtenen les dades següents:

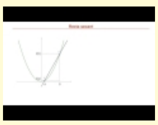
Temps (segons)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distància (metres)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocitat mitjana del cotxe en l'interval [0, 40].

b) Calcula la velocitat mitjana en els intervals [15, 25] i [20, 30]. És constant?

c) Si la velocitat màxima permesa és de 120 km/h, consideres que ha pogut sobrepassar-la en algun moment? I si la velocitat màxima anés de 80 km/h?

Derivada en un punt

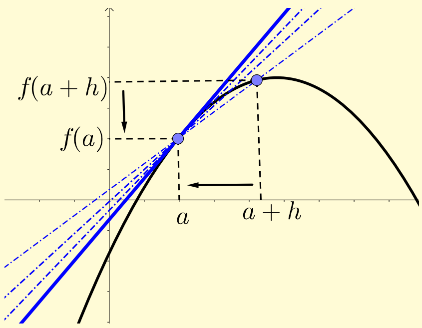


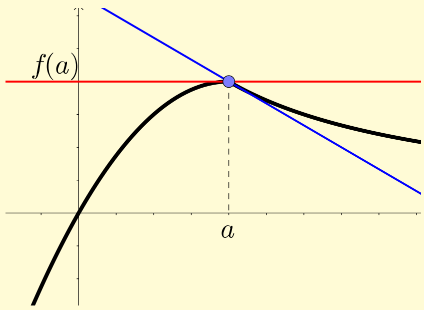
Vídeo 183: Definició de derivada

La **derivada d'una funció** $f'(a)$ en un punt $x = a$ es defineix com:

$$f'(a) = \lim_{a \to b} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{7.1}$$

i proporciona el **pendent de la recta tangent** a la funció en els punt d'abscissa a.





Per a que una funció sigui derivable, ha d'existir el límit anterior. Això passa si la funció és suau o arrodonida, és a dir, no presenta punts angulosos com ara la figura de la dreta.

1. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ en el punt d'abscissa $x = 1$.	Utilitzam la definició de derivada Eq. (7.1) quan $a = 1$: $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$ Necessitam calcular $f(1) = 0$, $f(1+h) = 3(1+h)^2 - 5(1+h) + 2$; si substituïm, el límit ens queda: $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h)^2 - 5(1+h) + 2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + 3h^2}{h} = 1$$ on hem simplificat el numerador i resolt la indeterminació $0/0$.

6. En llançar un objecte verticalment cap amunt l'altura (en metres) y, que aconsegueix als x segons ve donada per la funció: $y = 40x - 5x^2$

a) Escriu una taula de valors i dibuixa la gràfica de la funció. Té sentit per a valors de x menors que 0? I majors a 8?

b) Calcula la velocitat mitjana en els intervals: [0, 2], [0, 8], [1, 4], [4, 8] i [1, 8].

c) Quina és l'altura màxima aconseguida per l'objecte?

7. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = x^3$ en el punt $x = 2$.

8. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.

9. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = \dfrac{1}{x^2}$ en $x = 4$.

10. Dóna un exemple de funció no derivable i que sí sigui contínua.

Funció derivada

Hem vist que la derivada en un punt $f'(a)$ és un nombre que proporciona el pendent de la recta tangent.

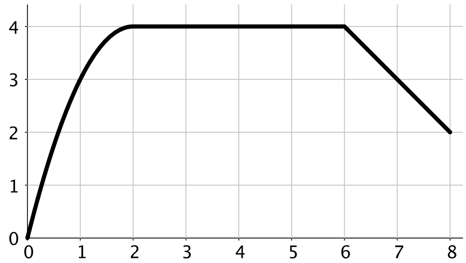
La funció derivada $f'(x)$ dóna el valor de la derivada per un punt x qualsevol. Per exemple:

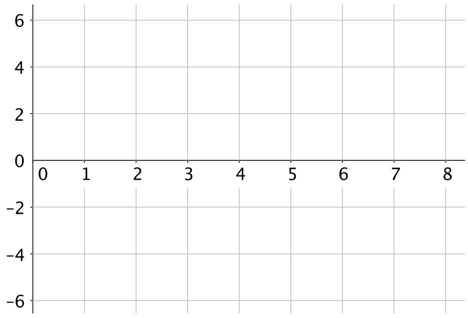
Si ens diuen que la funció derivada $f'(x) = 2x$, aleshores tenim una "regla" per trobar tots els pendents. Si volem el pendent per a $x = 0$ $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$, el pendent per a $x = -3$ $f'(0) = 2 \cdot (-3) = -6$, etc.

$f'(x)$ és pot obtenir a través de la definició 7.1 tot i que, com veurem, serà més còmode a partir de les regles de derivació.

11. Representa gràficament la funció $y = \begin{cases} x+2 & 0 \le x < 2 \\ 4 & 2 \le x < 4 \\ -\frac{x}{2} + 6 & x \ge 4 \end{cases}$. En una altra gràfica representa la seva funció derivada.

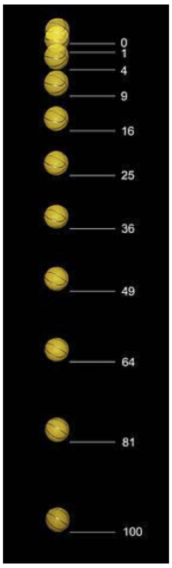
12. Sobre la funció $y = f(x)$ de la figura dibuixa la recta tangent en els punts $x = 1,\ 1.5,\ 4,\ 5,\ 7$. En els eixos de la dreta esbossa la gràfica aproximada de la seva funció derivada.





13. Des d'un avió nodrissa es deixa anar un avió experimental que el seu impulsor s'encén a la màxima potència i roman encès 20 segons. La distància que separa a l'avió experimental de l'avió nodrissa ve donada per $d = 0'3t^4$. Calcula la velocitat de l'avió experimental als 3, 4, 7 i 10 segons d'haver estat deixat anar.

14. Caiguda lliure d'una pilota. En la figura es mostren, mitjançant fotografia estroboscòpica[a], les posicions de la pilota a intervals regulars de temps: per a t = 1, 2, 3, 4, 5, ..., l'espai recorregut és proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la funció de posició $y = f(t)$, i calcula la velocitat i l'acceleració derivant la funció de posició.



[a] Un llum estroboscòpica és un instrument que il·lumina una escena durant intervals regulars de temps. Si utilitzem aquest tipus de llum sobre un moviment repetitiu, com la rotació d'una roda, i l'interval coincideix amb un període complet de moviment, l'objecte semblarà estàtic a l'observador.

15. Dibuixa una funció qualsevol i un punt qualsevol sobre la funció $f(a)$. Dibuixa també un segment sobre l'eix d'abscisses amb origen en a i longitud h. Interpreta de nou la definició de derivada en un punt basant-te en aquesta figura.

16. Calcula la derivada mitjançant el límit de la funció $y = x^2 - x + 1$ en el punt $x = 1$. Repeteix el càlcul per un punt arbitrari $x = a$. Calcula mitjançant l'expressió resultant $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(12)$, $f'(5.43)$ i $f'(-7)$.

7.2 Regles de derivació

Vídeo 184: Taula de derivades

Vídeo 185: Regla de la cadena

Vídeo 186: Producte i quocient de funcions

Taula de derivades

Funcions elementals		*Funcions compostes*	
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = [g(x)]^n$	$y' = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{g(x)}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin g(x)$	$y' = \cos g(x) \cdot g'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos g(x)$	$y' = -\sin g(x) \cdot g'(x)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} =$ $= 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg} g(x)$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x) =$ $= [1 + \operatorname{tg}^2 g(x)] \cdot g'(x)$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$y = \operatorname{cotg} g(x)$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 g(x)} \cdot g'(x)$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin g(x)$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x)$
$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos g(x)$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x)$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} g(x)$	$y' = \dfrac{1}{1+g^2(x)} \cdot g'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{g(x)}$	$y' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$y = a^x$	$y' = a^x \ \ln a$	$y = a^{g(x)}$	$y' = a^{g(x)} \ \ln a \cdot g'(x)$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln g(x)$	$y' = \dfrac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$	$y = \ln g(x)$	$y' = \dfrac{1}{g(x)} \cdot \dfrac{1}{\ln a} \cdot g'(x)$

Regles de derivació:

- Derivada de constant per funció: $y = k\, f(x) \to y' = k\, f'(x)$
- Derivada de sumes / restes: $y = f(x) + g(x) \to y' = f'(x) + g'(x)$
- Regla de la cadena: $y = f(g(x)) \to y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$y = \ln(\operatorname{tg} x) \to y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

- Derivada d'un producte: $y = f(x) \cdot g(x) \to y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$y = x^2 \sin x \to y' = 2x \sin x + x^2 \cos x = x(2 \sin x + x \cos x)$$

- Derivada d'un quocient: $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \to y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$$y = \frac{x^2}{x^3 - 4} \to y' = \frac{2x \cdot (x^3 - 4) - x^2 \cdot (3x^2)}{(x^3 - 4)^2} = \frac{-x^4 - 8x}{(x^3 - 4)^2}$$

17. ✎Completa en el teu quadern la següent taula amb les derivades:

Funció $f(x)$	x^3	2	x^2	x	k	$2x+3$	$2x^2+3x$
Derivada $f'(x)$	$3x^2$						

18. Escriu les funcions derivades de les funcions següents:

a) $f(x) = x^{24}$ b) $g(x) = 6x^{10}$ c) $h(x) = \frac{2}{13}x^{13}$

d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ e) $p(x) = 5x^3 - x$

19. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{x\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x}}$ c) $f(x) = 5\sqrt{x} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$

20. Ja hem obtingut la derivada de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Utilitza-la per obtenir la derivada en x = 1, 4, 5... Pots obtenir la derivada en x = 0? Raona la resposta.

21. Calcula les derivades simplificades utilitzant la regla de la cadena per funcions compostes

a) $f(x) = (x^2 + x + 1)^3$ b) $f(x) = (\ln(2x+3))^5$

c) $f(x) = (3x^4 + 7)^5$ d) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 7}$

e) $f(x) = e^{-x^2}$ f) $f(x) = \sin(\ln x)$

g) $f(x) = \ln(\sin\sqrt{x})$ h) $f(x) = \ln(\text{tg}(x^2+1))$

EXEMPLE

a) $f(x) = (x^2 + x + 1)^3 \quad \rightarrow$

$$f'(x) = 3(x^2 + x + 1)^2 \cdot (2x + 1 + 0) = 3(2x+1)(x^2 + x + 1)^2$$

b) $f(x) = (\ln(2x+3))^5 \quad \rightarrow$

$$f'(x) = 5(\ln(2x+3))^4 \cdot \tfrac{1}{2x+3} \cdot 2 = 10\ln^4(2x+3)\frac{1}{2x+3}$$

22. Calcula les derivades simplificades de les següents funcions:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12}$ b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7$

c) $y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

23. Calcula les derivades simplificades de les següents funcions:

a) $y = \sin(x^5 - 7x^3)$ b) $y = \sin^7(3x^3 - 5x^2)$ c) $y = \sqrt[3]{\sin(2x^2 + 4x^7)^4}$

24. Calcula les derivades simplificades de les següents funcions:

a) $y = \cos(e^{x^5} + 4x^3)$ b) $y = (\text{cotg}\,(5x^3 - 3x^2))^4$ c) $y = \text{tg}\,(7x^5 - 3x^3)^2$

25. Calcula les derivades simplificades utilitzant la regla del producte

a) $f(x) = x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$ b) $f(x) = x \cdot \ln x$

c) $f(x) = 3^x \cdot \text{tg}\, x$ d) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$

e) $f(x) = 5x^2 \cdot \text{arctg}\, x$ f) $f(x) = \ln(x + 1) \cdot \sin x^2$

EXEMPLE

a) $f(x) = x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x \quad \rightarrow$

$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = (1 - x^2)\sin x + 3x \cos x$

26. Calcula les derivades simplificades utilitzant la regla del quocient

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \dfrac{(x - 1) \cdot (x - 2)}{(x - 3) \cdot (x - 4)}$ h) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}$

EXEMPLE

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

27. Calcula les derivades utilitzant les regles de derivació

a) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$ b) $f(x) = \dfrac{e^{4x} + e^{-x}}{2x}$

c) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{2x - 1}$ d) $f(x) = (\cos(2x))^2 \cdot e^{-(2x+1)^2}$

28. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$ b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$

c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$

29. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ b) $y = \dfrac{2x^3-5x^2}{6x^4-2x^3}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{x+2}$ d) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}}{x^3+5}$

e) $y = \dfrac{(x^4-2)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$ f) $y = \dfrac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2}$

• **Derivades amb logaritmes:**

En comptes de derivar directament la funció $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x+5}$, resulta més senzill aplicar les propietats dels logaritmes de la pàgina 67. Separam la funció en diferents logaritmes:

$$y = \ln\sqrt{x^2+1} - \ln(3x+5) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln(3x+5)$$

ara derivam la darrera expressió fàcilment:

$$y' = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+5}$$

• **Derivació logarítmica:**

Ens adonam que la funció $y = x^x$ no és ni potència ni exponencial i, per tant, no tenim cap fórmula per derivar-la. El que feim és prendre logaritmes als dos membres, aplicam les propietats i derivam aplicant la regla de la cadena

$$\ln y = \mathbf{x}\cdot\ln x \qquad \to \qquad \frac{1}{y}y' = \ln x + x\frac{1}{x}$$

finalment, aïllam la derivada $y' = x^x\cdot(\ln x+1)$.

30. Calcula les derivades (Utilitza les propietats dels logaritmes pàg. 67):

a) $y = \log(x^5-7x^3)^{12}$ b) $y = \log_2(3x^3-5x^2)^7$

c) $y = \ln\sqrt{\frac{(4x^5-8x^3)^5}{3x-2}}$ d) $y = \ln\sqrt[3]{(2x^2+4x^7)^4}$

31. Utilitza derivació logarítmica per calcular les derivades de les següents funcions:

a) $y = x^{x^5-7x^3}$ b) $y = (x+1)^{3x^3-5x^2}$ c) $y = x^{(4x^5-8x^3)^5}$

32. Utilitza derivació logarítmica per calcular les derivades de les següents funcions:

a) $y = \dfrac{(x-1)\cdot(2x-3)}{x+2}$ b) $y = \dfrac{(3x^2+4)\cdot(4x-2)}{7x-1}$ c) $y = \dfrac{(x+9)\cdot(2x-3)}{(x+3)\cdot(x+2)}$

7.3 Càlcul de la recta tangent i normal

La recta tangent a una corba $y = f(x)$ en el punt $x = a$, ha de passar pel punt $(a,\ f(a))$ i ha de tenir com a pendent $m = f'(a)$. Aleshores, si escrivim l'equació punt-pendent de la recta obtenim

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

La recta **normal** és perpendicular a la recta tangent i, per tant, té pendent $m_\perp = -1/f'(a)$.

Exercici Resolt

2. Calcula l'equació de la recta tangent a la funció

$$y = x^3 - 3x$$

en $x = 2$.

Primer cercam el punt per on passa la recta. $x = 2$, $y = 2$.

El pendent de la recta en $x = 2$ és $m = f'(2)$. Calculam la derivada de la funció $f'(x) = 3x^2 - 3$ i l'avaluam a $x = 2$, $f'(2) = 9$.

Escrivim l'equació punt-pendent $y - 2 = 9(x - 2)$ o $y = 9x - 16$.

33. Calcula l'equació de la recta tangent en cadascuna de les funcions següents en el punt que s'indica

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = -2$

b) $y = \sqrt{10 - x^2}$ en $x = 1$

c) $y = \cos x$ en $x = \frac{\pi}{4}$

d) $y = \ln x$ en $x = e$

34. Calcula les rectes normals de les gràfiques de les funcions següents en els punts indicats:

a) $y = x^3$ en $x = 2$

b) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x = 0$

c) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$

d) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$

35. Determina les coordenades dels punts de la gràfica $y = x^3 - 3x + 2$ en els quals la seva tangent sigui paral·lela: a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 6x$.

36. Determina la recta tangent de la gràfica de la funció $y = \sqrt[2]{x^3}$ en $x = 0$.

37. Determina les rectes tangents a la funció $f(x) = 4x^3 - 12x$ en els punts en els quals el pendent és 12. Quin és el menor valor que pot tenir el pendent a aquesta corba? En quins punts s'aconsegueix?

38. Determina la recta tangent a la funció $f(x) = x^3 - 3x$ en el punt $A(-1, 2)$. En quin un altre punt talla la recta tangent a la funció?

39. Determina els coeficients a , b i c de la funció $f(x) = ax^3 + bx + c$, que passa pel punt $A(1, 2)$ i és tangent a la recta $y = x$ en el punt $O(0, 0)$.

40. Determina els coeficients a, b i c perquè les funcions $f(x) = x^3 + bx + c$ i $g(x) = ax - x^2$ tinguin la mateixa recta tangent en el punt $A(1, 0)$.

41. Determina el coeficient a, perquè la funció $f(x) = x^2 + a$, sigui tangent a la recta $y = x$.

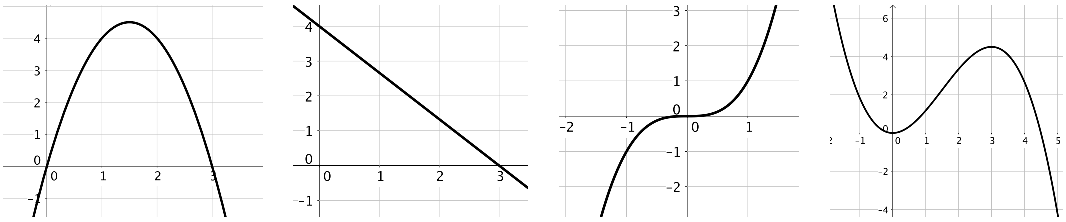
7.4 Monotonia i extrems d'una funció

La primera derivada d'una funció ens serveix per saber si és creixent o decreixent, així com determinar els seus màxims i mínims relatius.

Si $f'(x) > 0$	La funció és creixent
Si $f'(x) < 0$	La funció és decreixent
Si la funció té un extrem (màxim o mínim)	es compleix $f'(x) = 0$

Les solucions de l'equació $f'(x) = 0$ s'anomenen **punts crítics** i són possibles màxims o mínims.

42. Si $f'(x) = x \cdot (3 - x)$, quina de les següents gràfiques podria ser la de $f(x)$?



43. Determina els intervals de creixement i decreixement de

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

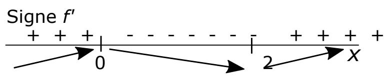
c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$

3. Troba els extrems de $y = x^3 - 3x^2$

Calculam la derivada $y' = 3x^2 - 6x$. Resolem l'equació $3x^2 - 6x = 0 \to x = 0$ i $x = 2$ són els punts singulars.

Per saber si aquests punts són màxims o mínims estudiam el creixement/decreixement. Per això calculam el signe de f'



La funció és creixent a $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ i decreixent a $(0, 2)$. Té un màxim al punt $(0, 0)$ i un mínim relatiu a $(2, -4)$.

44. Determina els intervals de creixement, decreixement, els màxims i mínims de les funcions següents

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$

d) $f(x) = x^2 e^x$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$

f) $f(x) = x + 5 - 2 \sin x$

45. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció: $y = x^3 - 3x$. Com és en $x = 0$? I en $x = 2$? I en $x = -2$? Repeteix l'activitat per a la funció $y = x^3 + 3x$.

46. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.

47. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.

7.5 Curvatura i punts d'inflexió

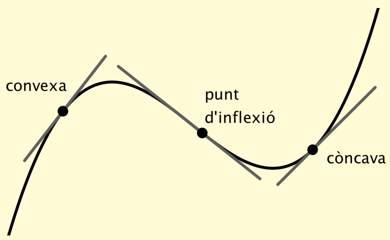
Derivades successives:

Donat que la derivada d'una funció és una altra funció, aquesta es pot tornar a derivar obtenint així la derivada segona. Si derivam la derivada segona obtenim la derivada tercera i així successivament.

Per exemple, $y = x^4 - 5x^2 - 3$
Té derivada primera $y' = 4x^3 - 10x$
Derivada segona $y'' = 12x^2 - 10$
Derivada tercera $y''' = 24x$
Derivada quarta $y^{iv} = 24$
i les demés derivades són zero.

48. Calcula la derivada segona de les següents funcions

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$
b) $f(x) = \sin x + \ln x$
c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
d) $f(x) = x \cdot \ln x$
e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
f) $f(x) = x^2 - 3\cos x^2$



- Una funció és **convexa** si la recta tangent es troba per damunt d'ella.
- Una funció és **còncava** si la recta tangent es troba per davall d'ella.
- Una funció té un **punt d'inflexió** si la recta tangent l'atravessa.

La segona derivada d'una funció ens serveix per determinar la seva curvatura i els punts d'inflexió.

Si $f''(x) > 0$	La funció és còncava $\cup$
Si $f''(x) < 0$	La funció és convexa $\cap$
Si la funció té un punt d'inflexió	es compleix $f''(x) = 0$

A més, existeix una condició entre els extrems i la segona derivada:

Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$	$x = a$ és un mínim relatiu
Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$	$x = a$ és un màxim relatiu

49. Determina la curvatura i els punts d'inflexió de les funcions següents

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

f) $f(x) = e^{-2x^2}$

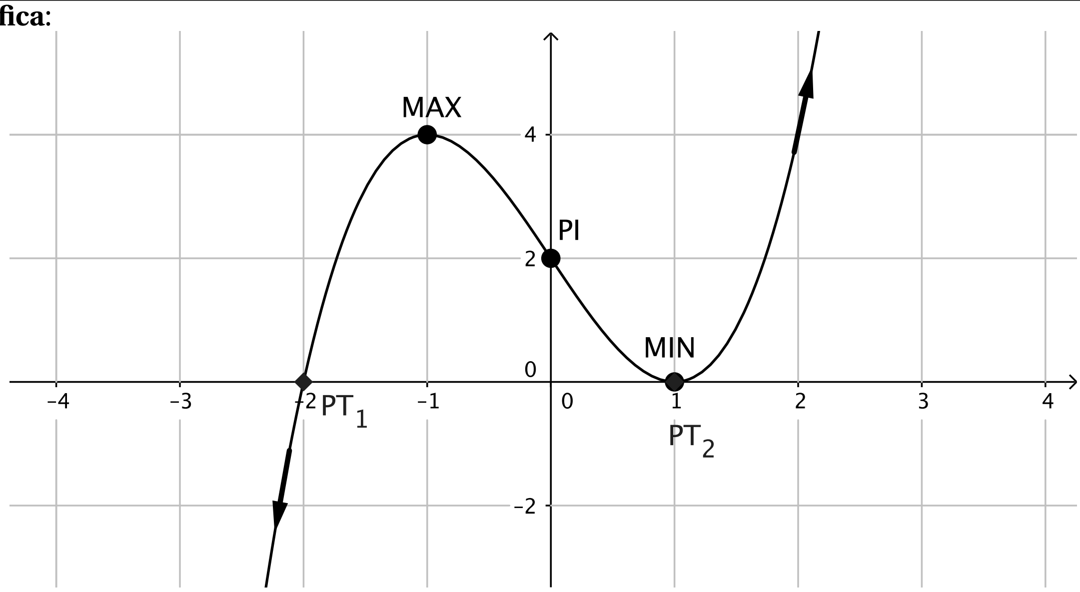
7.6 Representació de funcions

Taula resum per a la representació de corbes $y = f(x)$

1. **Domini**, $Dom\ f$	Conjunt de valors de x pels quals hi ha gràfica.
2. **Continuïtat**	Valors del $Dom\ f$ on és contínua.
3. **Periodicitat**	Si escau, determinar el període T; el valor mínim pel qual $f(x) = f(x+T)$.
4. **Simetries** f parell $\to$ Simetria respecte l'eix OY f senar $\to$ Simetria respecte l'origen	Cacularem l'expressió de $f(-x)$: Si $f(-x) = f(x)$ té simetria parell Si $f(-x) = -f(x)$ té simetria senar
5. **Asímptotes** Verticals: $x = a$ Horitzontals: $y = n$ Obliqües: $y = mx + n$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$ Calculam la posició relativa de la corba respecte les asímptotes.
6. **Punts de tall amb els eixos** Eix OX Eix OY Regions o signe	 Solucions de $f(x) = 0$. Pot haver-hi 0, 1 o uns quants Punt $(0, f(0))$. Pot haver-hi 0 o 1 $f(x) < 0$, $f(x) > 0$
7. **Màxims i mínims relatius** **Creixement i decreixement**	Punts crítics. Resolem $f'(x) = 0$ $f''(a) < 0 \to x = a$ un màxim relatiu $f''(a) > 0 \to x = a$ un mínim relatiu $f'(a) < 0 \to f$ decreixent en $x = a$ $f'(a) > 0 \to f$ creixent en $x = a$
8. **Punts d'inflexió** **Curvatura**	Resolem $f''(x) = 0$ i comprovam $f'''(x) \neq 0$ $f''(a) < 0 \to f$ Convexa $\cap$ en $x = a$ $f''(a) > 0 \to f$ Còncava $\cup$ en $x = a$
9. **Gràfica**	Fer el dibuix a partir de la informació anterior

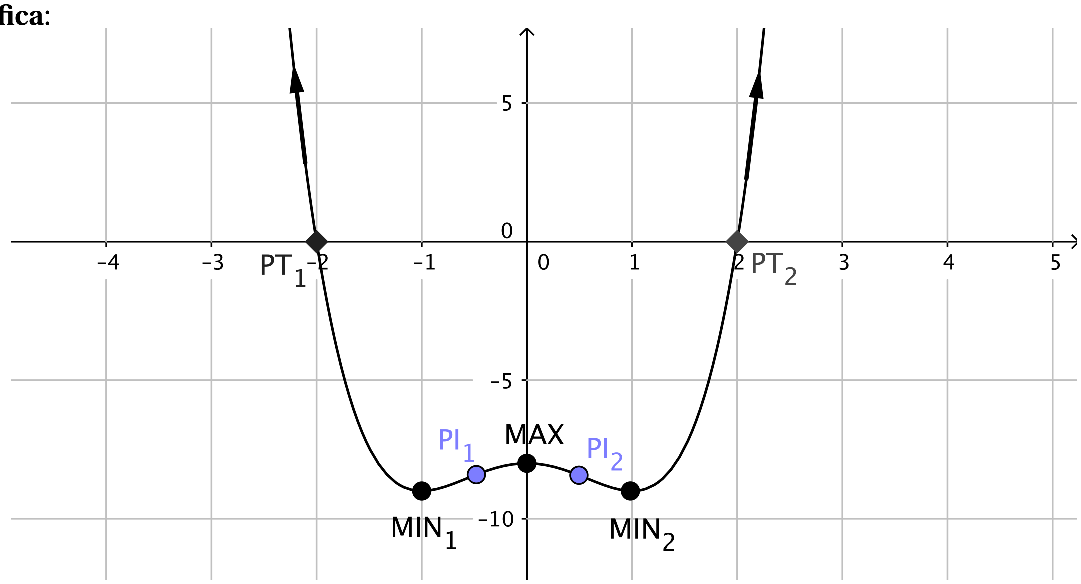
Representació de $f(x)=x^3-3x+2$		
1. **Domini**	$(-\infty,+\infty)$	Tipus: Polinòmica
2. **Simetries**	No en té	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x=-2,y=0)$ i $(x=1,y=0)$ $(x=0,y=2)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	No en té	
Branques:	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
5. **Derivada primera**	$f'(x)=3x^2-3$	
Solucions de $f'(x)=0$	$x=-1$, $x=1$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$	Decreixent $(-1,1)$
7. **Extrems**	Màxim $(x=-1,y=4)$	Mínim $(x=1,y=0)$
8. **Derivada segona**	$f''(x)=6x$	
Solucions de $f''(x)=0$	$x=0$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(0,+\infty)$	Convexa $(-\infty,0)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x=0,y=2)$	

Gràfica:



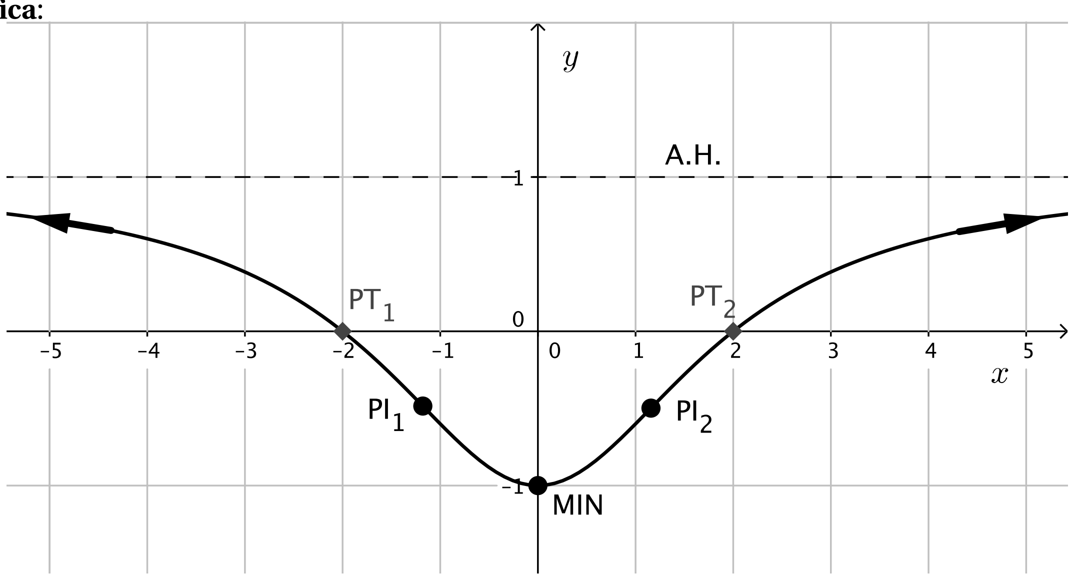
Representació de $f(x)=x^4-2x^2-8$		
1. **Domini**	$(-\infty,+\infty)$	Tipus: Polinòmica (biquadrada)
2. **Simetries**	$f(-x)=f(x)$ simètrica parell	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x=-2,y=0)$; $(x=2,y=0)$ $(x=0,y=-8)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	No en té	
Branques:	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
5. **Derivada primera**	$f'(x)=4x^3-4x$	
Solucions de $f'(x)=0$	$x=-1$, $x=0$, $x=1$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-1,0)\cup(1,+\infty)$	Decreixent $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
7. **Extrems**	Màxim $(x=0,y=-8)$	Mínims $(x=-1,y=-9)$, $(x=1,y=-9)$
8. **Derivada segona**	$f''(x)=12x^2-2$	
Solucions de $f''(x)=0$	$x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(-\infty,-1/2)\cup(1/2,+\infty)$	Convexa $(-1/2,1/2)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x=-1/2,y=-135/16\approx-8.43)$, $(x=1/2,y=-135/16\approx-8.43)$	

Gràfica:



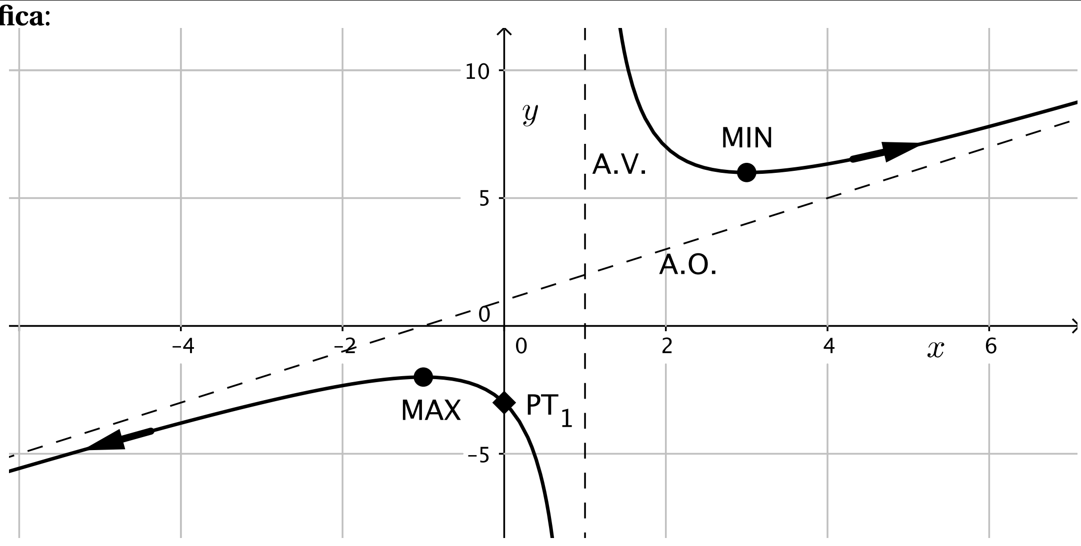
Representació de $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$		
1. **Domini**	$(-\infty,+\infty)$	Tipus: Racional
2. **Simetries**	Simètrica parell $f(-x)=f(x)$	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x=-2,y=0)$ i $(x=2,y=0)$ $(x=0,y=-1)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	$y=1$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ per davall
Obliqües:	No en té	
Branques:	No en té	
5. **Derivada primera**	$f'(x)=\dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$	
Solucions de $f'(x)=0$	$x=0$	
6. **Creixement**:	Creixent $(0,+\infty)$	Decreixent $(-\infty,0)$
7. **Extrems**	Màxim no en té	Mínim $(x=0,y=-1)$
8. **Derivada segona**	$f''(x)=\dfrac{64-48x^2}{(x^2+4)^3}$	
Solucions de $f''(x)=0$	$x\approx-1.15$, $x\approx+1.15$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(-1.15,1.15)$	Convexa $(-\infty,-1.15)\cup(1.15,+\infty)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x=-1.15,y=-0.5)$, $(x=1.15,y=-0.5)$	

Gràfica:



Representació de $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$		
1. **Domini**	$\mathbb{R} - \{1\}$	Tipus: Racional
2. **Simetries**	No té simetria	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	No hi talla $(x = 0, y = -3)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	$x = 1$	$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	$y = x + 1$	$x \to -\infty$ per davall, $x \to +\infty$ per damunt
5. **Derivada primera**	$f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$	
Solucions de $f'(x) = 0$	$x = -1, x = 3$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$	Decreixent $(-1, 1) \cup (1, 3)$
7. **Extrems**	Màxim $(x = 3, y = 6)$	Mínim $(x = -1, y = -2)$
8. **Derivada segona**	$f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}$	
Solucions de $f''(x) = 0$	No en té	
9. **Curvatura**:	Còncava $(1, +\infty)$	Convexa $(-\infty, 1)$
10. **Punts d'inflexió**	No en té	

Gràfica:



50. Representa gràficament les següents funcions polinòmiques:

a) $y = x(x+2)(x-2)$ b) $y = x^4 - 2x^2$ c) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$

d) $y = -\dfrac{x^3}{6} + x$ e) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ f) $y = (x+1)^2(x-2)$

51. Representa gràficament les següents funcions racionals:

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ b) $y = \dfrac{4}{x^2 - 4}$ c) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

d) $y = \dfrac{x^2}{2 - x}$ e) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ f) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$

52. Representa gràficament les següents funcions:

a) $y = (x-2)e^x$ b) $y = 2x^2e^{-x}$ c) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

7.7 Problemes d'optimització

Fins ara t'han donat l'expressió d'una funció $y = f(x)$ i has estat capaç de calcular-ne els màxims i mínims a través de la derivada.

Un problema d'optimització és en essència una situació similar, amb una diferència, ara la funció $y = f(x)$ no te la donen; l'hauràs de construir tú a partir d'un enunciat.

Exercici Resolt

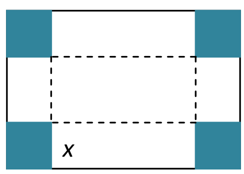
4. Expressa el nombre 60 com la suma de dos nombres tals que el seu producte sigui màxim.

Si el primer nombre l'anomenam x, el segon nombre serà $60 - x$. Ens interessa maximitzar la funció producte: $P(x) = x \cdot (60 - x) = 60x - x^2$. Aquesta és la funció que hem d'estudiar.

Calculam la derivada $P'(x) = 60 - 2x = 0$ i trobam $x = 30$. Com que $P''(x) = -2$ és negatiu i concluïm que $x = 30$ és un màxim de la funció. Llavors, la solució òptima és $60 = 30 + 30$.

53. Descomposau el nombre 44 en dos sumands tals que el quíntuple del quadrat del primer més el sèxtuple del quadrat del segon sigui mínim.

54. Volem construir caixes usant cartolines rectangulars de 20 cm × 25 cm. Per a això es talla en cada cantonada un quadrat de costat x, i es doblega. Quin valor ha de tenir el costat del quadrat, x, retallat perquè les caixes continguin un volum màxim?



55. Uns barrils per emmagatzemar oli són cilíndrics i tenen una capacitat de 150 litres. Si es desitja construir-los de manera que la seva superfície total sigui mínima, quant ha de mesurar la seva altura i el radi de la seva base?

56. En fer les proves d'un nou medicament es comprova que segons la dosi, x, en mil·ligrams, que s'administri, el percentatge de curacions, i, ve donada per: $y = 100 - \frac{80}{x+5}$. No obstant això el medicament té efectes secundaris ja que perjudica al ronyó. El nombre de malalts als quals el tractament produeix efectes secundaris augmenta un 2% per cada mil·ligram que s'augmenta la dosi. Podries ajudar a determinar la dosi de medicament adequada? Raona la resposta.

57. Es desitja fabricar envasos amb forma de prisma recte quadrangular de base quadrada de manera que el volum sigui d'un litre i la superfície emprada sigui mínima.

58. Determina les dimensions d'un con de volum mínim inscrit en una esfera de radi $R = 5$ cm. (*Ajuda*: L'altura del con és igual a $R + x$, i el radi de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

59. La temperatura, T, en graus, d'una bola de ferro que s'està escalfant ve donada per $T = 200 - 500/t$, on t és el temps en segons. El radi, r, en mm, de la bola quan la temperatura és de T graus ve donat per $r = 40 + 0'001T$. A quina velocitat varia el radi quan la temperatura és de 50ºC, 75ºC, 100ºC? A quina velocitat varia la temperatura als 30 segons? I per a $t = 90$ segons? A quina velocitat varia el radi als 10 segons, als 30 segons i als 90 segons?

Autoavaluació

1. Calcula la derivada de $y = \sqrt{x} \cdot (x-1)$ en $x = 1$ és:

2. Calcula el pendent de la recta tangent a $y = \frac{x^2+1}{x^3+3}$ en $x = 2$.

3. Deriva la funció $y = 2^{x^2+3}$.

4. Deriva la funció $y = \cos^2 x^3$.

5. Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$.

6. Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$.

7. Si la derivada d'una certa funció és $y' = (x-4) \cdot x$ llavors, quins són els intervals de creixement i decreixement d'aquesta funció?

8. Troba els extrems de la funció $y = 3x^2 - 2x^3$.

9. Calcula l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3 - 9x^2 - 3x$ en el seu punt d'inflexió.

SÍNTESI DE LA PART II

Anàlisi de funcions 🔑

1. Calcula el domini de les següents funcions

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x}$ b) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$

2. Representa gràficament les següents funcions:

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$ b) $y = \log_2(x - 1)$

3. Siguin les funcions $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \sqrt{x}$. Calcula les següents composicions: $g(h(x))$, $f(g(x))$, $h(f(x))$. Troba la funció inversa de $h(f(x))$.

4. Calcula els següents límits:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 5}{x^2 + 7x + 10}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 5x^3}{1 + x^2}$

5. Donada la funció a trossos $f(x) = \begin{cases} 3x - b & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ -2x + 9 & x > 2 \end{cases}$

a) Determina b perquè existeixi el límit de la funció a $x = 2$.

b) Després, determina si la funció és contínua o no indicant, si escau, el tipus de discontinuïtat.

6. Calcula, a partir de la definició, la derivada de la funció $f(x) = 3x^2 - 10x$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

7. Un cultiu de bacteris ve donat per l'expressió $y = 100 \cdot e^{0.05 \cdot t}$ on y són el nombre de cèl·lules i t el temps donat en minuts.

a) Calcula el nombre de bacteris inicial ($t = 0$) i passat mitja hora.

b) El temps que tardarien ha arribar a 5000 bacteris.

c) Fes una gràfica de la funció.

8. Escriu l'equació de la recta tangent a la corba $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

9. Calcula la funció derivada de les següents funcions:

a) $y = \sqrt{\cos(5x^4 + 2x^3)}$

b) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

c) $y = \arcsin(3x^5 - 6x^2)$

d) $y = x \cdot e^{-x^2}$

e) $y = \left(\frac{2x+5}{3x-1}\right)^5$

f) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

10. Determina els intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims de les funcions:

a) $y = x^3 - 12x$

b) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

11. Es considera la funció $y = x^4 - x^3 - 6x^2$. Es demana:

a) Trobau els punts de tall amb els eixos

b) Calculau els extrems relatius

c) Feu una gràfica de la funció

12. Donada la funció $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$, calcula:

a) Les asímptotes i la posició relativa de la corba respecte d'elles

b) Els màxims i mínims relatius

c) Representa la gràfica

13. Quina d'aquestes funcions té una asímptota obliqua?

a) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

b) $y = \dfrac{4 + 2x^3}{x}$

c) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x - 1}$

Calcula i representa totes les seves asímptotes.

14. Trobau què ha de valer k perquè la funció $y = 2x - 1$ sigui una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+k}$. En tal cas, determinau, si escau, els extrems relatius.

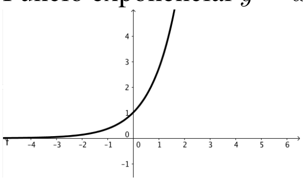
15. Calcula a i b perquè la funció $y = x^3 + ax^2 + b$ tingui un punt d'inflexió en el punt $P(2, 1)$.

DEFINICIÓ DE FUNCIÓ

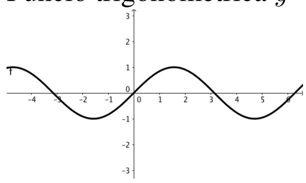
$f(x)$: Domini $f \subset \mathbb{R} \rightarrow$ Recorregut $f \subset \mathbb{R}$, és una funció si per a cada valor de x del domini s'assigna un únic valor de y del recorregut. $y = f(x)$ "y (ordenada) és la imatge de x (abscissa) per la funció f.

ALGUNES FUNCIONS ELEMENTALS

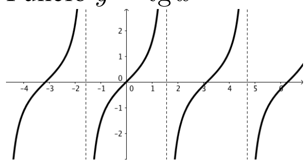
Funció exponencial $y = a^x$, e^x



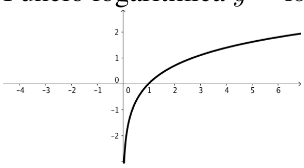
Funció trigonomètrica $y = \sin x$



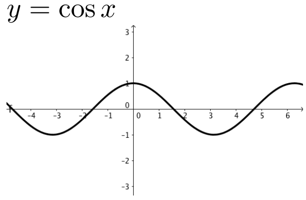
Funció $y = \operatorname{tg} x$



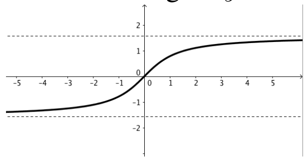
Funció logarítmica $y = \log_b x$



$y = \cos x$

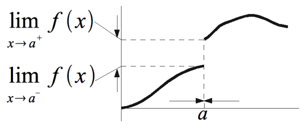


Funció arctangent $y = \operatorname{arctg} x$

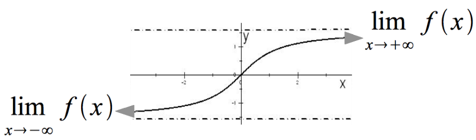


CÀLCUL DE LÍMITS

Límits Laterals: El límit existeix si els dos límits laterals coincideixen.



Límits a l'infinit



Límits immediats: $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$; $\lim\limits_{x\to \pi/4} \operatorname{tg} x = tg\frac{\pi}{4} = 1$; etc.

Indeterminacions:

- $\frac{0}{0}$: Factoritzar (o racionalitzar) i simplificar
  $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(x-3)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}(x-3) = -3$; $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \cdots = 1/4$
- $\frac{\infty}{\infty}$: Dividir tots els termes per la major potència de x del denominador
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+1/x^2}{3+1/x+1/x^2} = \frac{2}{3}$;
- $0\cdot\infty$: Es redueix al cas ∞/∞
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\cdot(x^3-2x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x+1}{x^2} = +\infty$;
- $\infty-\infty$: Reduir a denominador comú i simplificar (racionalitzar si hi arrels)
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - \frac{2x^3-3x+1}{2(x-2)}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-(2x^2-3x+1)}{2(x-2))} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{2x-4} = 3/2$;

FUNCIÓ CONTÍNUA	TIPUS DE DISCONTINUÏTATS
$f(x)$ és contínua en $x = a$ si 1. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ 2. Existeix $f(a)$ 3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$	1. Asimptòtica. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ 2. Salt finit. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 3. Evitable-Li falta un punt. No existeix $f(a)$ 4. Evitable-Punt desplaçat. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

ASÍMPTOTES

Asímptotes Verticals

$x = a$ és una asímptota vertical de $f(x) = \frac{D(x)}{d(x)}$ si s'anul·la el denominador $d(a) = 0$. Per representar-la calculam els límits laterals $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

Asímptotes Horitzontals

$y = L$ és una asímptota horitzontal de $f(x)$ si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$. Cal comprovar si la funció s'acosta per damunt o per davall de l'asímptota.

Asímptotes Obliqües

$y = mx + n$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \frac{D(x)}{d(x)}$ si és el quocient de la divisió $D(x) : d(x)$. Cal comprovar si la funció s'acosta per damunt o per davall de l'asímptota.

DERIVADES

Definició de derivada en un punt

És un nombre que dóna el pendent de la recta tangent a la funció en el punt d'abscissa $x = a$
$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Definició de funció derivada

$f'(x)$ és una funció que proporciona tots els pendents de la recta tangent a $f(x)$ per a qualsevol x. A la pràctica, $f'(x)$ s'obté aplicant les regles de derivació.

Taula de derivades (Algunes)

- $y = x^n \to y' = nx^{n-1}$
- $y = e^x \to y' = e^x$;$y = a^x \to y' = a^x \cdot \ln a$;
- $y = \ln x \to y' = \frac{1}{x}$; $y = \log_a x \to y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$
- $y = \sin x \to y' = \cos x$
- $y = \cos x \to y' = -\sin x$
- $y = \operatorname{tg} x \to y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

Regles de derivació

- Regla de la cadena
  $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
  Ex: $[\sin^5(x^3+x)]' = 5\sin^4(x^3+x)\cdot(3x^2+1)$
- Producte: $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- Quocient: $[\frac{u}{v}]' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

APLICACIONS DE LES DERIVADES

Equació de la recta tangent

L'equació de la recta tangent a la funció $y = f(x)$ en el punt $x = a$, $y = f(a)$ és

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Monotonia i extrems

- $f'(x) > 0$ funció creixent
- $f'(x) < 0$ funció decreixent
- $f'(x) = 0$ Punt crític. Potser màxim o mínim. Cal construir taula de f' i comprovar si hi ha canvis de signe.

Curvatura i punts d'inflexió

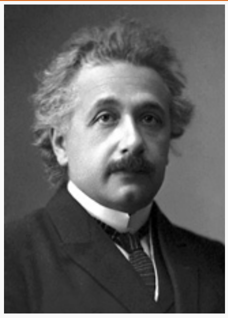
- $f''(x) > 0$ funció còncava
- $f''(x) < 0$ funció convexa
- $f''(x) = 0$ Possible punt d'inflexió. Cal construir taula de f'' i comprovar si hi ha canvis de signe.

Signe $f''(x)$: ++++++0---------------

Punt inflexió

Representació gràfica

- Funcions polinòmiques
  - Talls amb eixos
  - Màxims i mínims
  - Branques parabòliques
- Funcions racionals
  - Talls amb eixos
  - Màxims i mínims
  - Asímptotes



"És increïble que la matemàtica, havent estat creada per la ment humana, aconsegueixi descriure la naturalesa amb tanta precisió."

- *Albert Einstein*

IESB

IES Binissalem

C/ Andreu Pol 'Niuer' Batle, s/n
07350 Binissalem
Tel. 971 88 66 12 - Fax. 971 51 22 06
iesbinissalem@educaib.eu