	MOSTRA EXAMEN DE MATEMÀTIQUES II SEGON BATXILLERAT - BAT_MAT2			**DATA I HORA** ——- ——-
NOM I COGNOMS:	————————————			**NOTA**
DNI:	——————-	**AVALUACIÓ:**	**MAIG**	——————-
CENTRE:	——————	**GRUP*:**	A/B/C/D	

*grup: A-arts/B-humanitats/C-ciències/D-xarxa

INSTRUCCIONS:

- Heu de fer només un model d'examen. No es poden mesclar preguntes entre models.
- Totes les respostes han d'estar degudament justificades amb els càlculs pertinents.
- Es valorarà la precisió del llenguatge matemàtic i no matemàtic. Les errades de càlcul penalitzen.
- Es poden emprar calculadores sempre que no emmagatzemin informació ni la puguin transmetre

☐ **EXAMEN NOMÉS 2A AVALUACIÓ**

Feis aquesta opció si teniu la 1a Avaluació aprovada

1. **Lliurament 5: Continuïtat** (2,5 punts)

   Se sap que la funció $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -2 + \sqrt{x-1} & \text{si} \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$ és contínua i derivable a l'interval $[0, 5]$. Justificau quant valen els paràmetres a i b?

2. **Lliuraments 6: Derivades** (2,5 punts)

   Considerau la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

   a) Calculau la primera derivada completament simplificada (1 punt)

   b) Donau els intervals de creixement/decreixement i la posició dels màxims/mínims. (1,5 punts)

3. **Lliuraments 7: Integrals** (2,5 punts)

   Siguin la paràbola $y = x^2 - 1$, i la recta $y = -x + 1$

   a) Representau la regió compresa entre la paràbola i la recta. (1 punts)

   b) Calculau l'àrea de la regió. (1,5 punts)

4. **Lliurament 8: Probabilitat** (2,5 punts)

   El primer any de batxillerat d'un institut està format per: 35 estudiants de la modalitat de ciències, 47 de socials i 40 d'humanístic. Se sap que la proporció d'estudiants que repeteixen primer de batxillerat és de 5%, 4% i 3%, respectivament en cada modalitat.

   a) Representau un diagrama d'arbre complet. (1 punt)

   b) Si triam un alumne de 1r de batxillerat a l'atzar, quina és la probabilitat que repetexi? (1 punt)

   c) Si sabem que un estudiant ha repetit, quina és la probabilitat que sigui de ciències? (0,5 punt)

EXAMEN FINAL: 1A + 2A AVALUACIÓ

Feis aquest model si teniu la 1a avaluació suspesa.

1. Àlgebra (2,5 punts)

Justificau per a quins valors del paràmetre a el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és compatible indeterminat.

2. Geometria (2,5 punts)

Considera el punt $P(1,0,-1)$, la recta $r : \begin{cases} x - 2y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$ i el pla $\alpha : 2x - y + z + 1 = 0$.

a) Determinau l'equació contínua de la recta paral·lela a r i que passa pel punt P. (1,25 punts)

b) L'equació del pla perpendicular al pla α i que conté la recta r. (1,25 punts)

3. Anàlisi (3 punts)

a) Calculau $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\ln(\cos x)}$. (1 punt)

b) Determinau el punt d'inflexió de la funció $f(x) = (x-2)\cdot e^x$. (1 punt)

c) Calculau la primitiva $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$. (1 punt)

4. Probabilitats (2 punts)

El primer any de batxillerat d'un institut està format per: 35 estudiants de la modalitat de ciències, 47 de socials i 40 d'humanístic. Se sap que la propoció d'estudiants que repeteixen primer de batxillerat és 5%, 4% i 3%, respectivament en cada modalitat.

a) Representau un diagrama d'arbre complet. (0,5 punts)

b) Si triam un alumne de 1r de batxillerat a l'atzar, quina és la probabilitat que repetexi? (1 punt)

c) Si sabem que un estudiant ha repetit, quina és la probabilitat que sigui de ciències? (0,5 punts)

Solucions Mostra Examen només 2a Avaluació

1. **Lliurament 5**

La funció $f(x)$ està definida a trossos. El primer tros és una funció quadràtica (paràbola) i és contínua i derivable a tot $\mathbb{R}$. El segon tros és una funció radical que també és contínua en el seu domini $[1, +\infty]$. Llavors, únicament hem d'imposar les condicions en el punt d'unió $x = 2$.

- Continuïtat:
  $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} ax + bx^2 = 2a + 4b$
  $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} -2 + \sqrt{x-1} = -2 + \sqrt{1} = -1$
  Perquè no hi hagi discontinuïtat de salt, els dos límits han de coincidir, és a dir, $2a + 4b = -1$
- Derivabilitat:
  Calculam la derivada de la funció $f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si} \quad 2 < x \le 5 \end{cases}$. Les derivades laterals són
  $f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} a + 2bx = a + 4b$
  $f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2}$
  Perquè la funció sigui derivable, les derivades laterals han de coincidir $a + 4b = \frac{1}{2}$
  Cal resoldre el sistema $\begin{cases} 2a + 4b & = -1 \\ a + 4b & = \frac{1}{2} \end{cases}$ del qual trobam $b = \dfrac{1}{2}$ i $a = -\dfrac{3}{2}$.

2. **Lliurament 6**

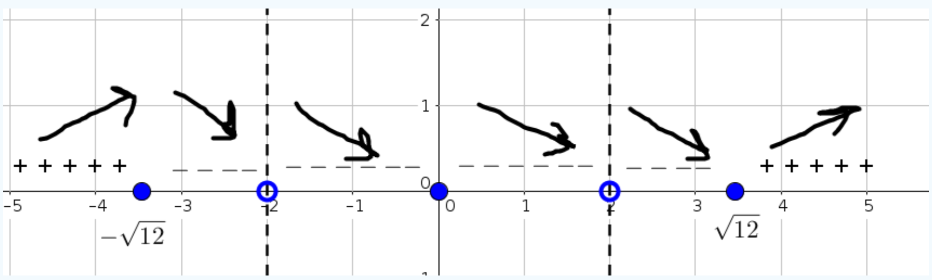
a) Aplicam la regla de la derivada d'un quocient

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \to f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 12)}{(x^2-4)^2}$$

b) Els extrems s'obtenen d'igualar a zero la primera derivada

$x^2 \cdot (x^2 - 12) = 0 \to x = 0;\ x = \pm\sqrt{12}$.

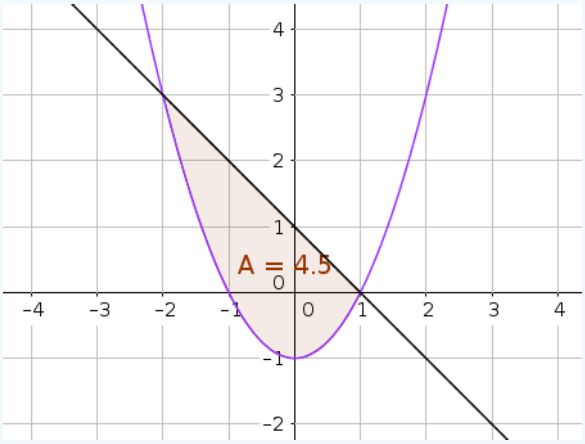
Estudiam el signe de la derivada tenint present que a $x = \pm 2$ hi ha dues asímptotes verticals



- La funció creix a $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$
- La funció decreix a $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{12})$
- Màxim relatiu a $x = -\sqrt{12}$, $y = -3\sqrt{3}$
- Mínim relatiu a $x = \sqrt{12}$, $y = 3\sqrt{3}$

3. **Lliurament 7**

a) La regió es mostra a la figura adjunta



Els extrems d'integració s'obtenen del punts de tall entre la recta i la paràbola.

$$x^2 - 1 = -x + 1 \quad \rightarrow \quad x = -2,\ x = 1$$

b) Restam la corba superior de la que es troba per davall:
$(-x+1) - (x^2 - 1) = -x^2 - x + 2$

L'àrea de la regió s'obté de la integral definida $\displaystyle\int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right)\, dx$. Cercam la primitiva i aplicam la regla de Barrow

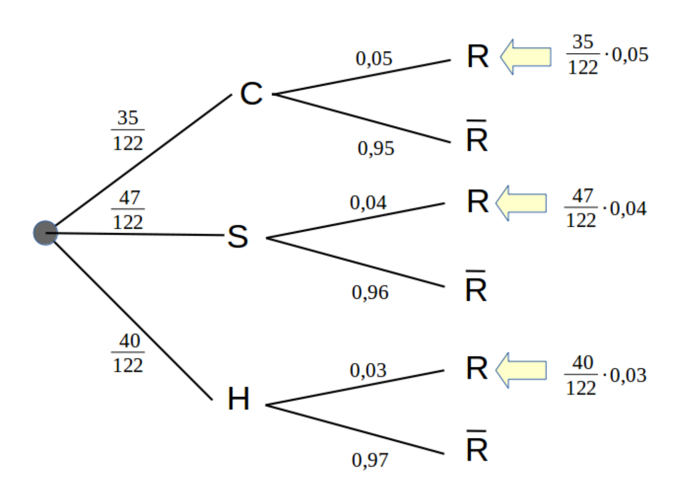
$$A = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= -\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

4. **Lliurament 8**

a) Anomenam els successos

- C = Ésser alumne de ciències
- S = Ésser alumne de socials
- H = Ésser alumne d'humanitats
- R = Repetir curs
- $\bar{R}$ = No repetir curs



En total tenim $35 + 47 + 40 = 122$ alumnes.

b) Cercam la probabilitat total de repetir curs que són tots els camins indicats amb la fletxa en el diagrama d'arbre.

$P(R) = P(C) \cdot P(R|C) + P(S) \cdot P(R|S) + P(H) \cdot P(R|H) = \frac{35}{122} \cdot 0,05 + \frac{47}{122} \cdot 0,04 + \frac{40}{122} \cdot 0,03 = 0,0396$

c) Aplicam el teorema de Bayes

La probabilitat d'ésser alumne de ciències condicionada a haver repetit curs és

$$P(C|R) = \frac{P(C \text{ i } R)}{P(R)}$$

El numerador és el camí superior del diagrama d'arbre.

$$P(C \text{ i } R) = P(C) \cdot P(R|C) = \frac{35}{122} \cdot 0,05 = 0,0143$$

El denominador és la probabilitat calculada a l'apartat b)

$$P(C|R) = \frac{0,0143}{0,0396} = 0,362$$

Solucions Examen final 1a + 2a Avaluació

1. **Àlgebra**

En primer lloc, el sistema d'equacions es pot escriure en forma habitual

$$\begin{cases} -2x - y + az &= 0 \\ ax + 3y + 4z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \end{cases}$$

En segon lloc, donat que tots els termes independents són zero, fer notar que es tracta d'un sistema homogeni.

Un sistema homogeni sempre és compatible perquè sempre té la solució trivial ($x = 0; y = 0; z = 0$). Perquè sigui compatible indeterminat hem de demanar que el rang $A < 3$. Això passarà si el determinant de la matriu del sistema sigui igual a zero $|A| = 0$.

Calculem el determinant per Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -12 - a^2 - 12 - (9a - 8 - 2a) = -a^2 - 7a + 8$$

Resolem l'equació $-a^2 - 7a + 8 = 0 \to a = -8;\ a = 1$

- Si $a = -8;\ a = 1$ Sistema compatible indeterminat. Té infinites solucions.
- Si $a \neq -8;\ a \neq 1$ Sistema compatible determinat, només té la solució trivial $x = 0; y = 0; z = 0$.

2. **Geometria**

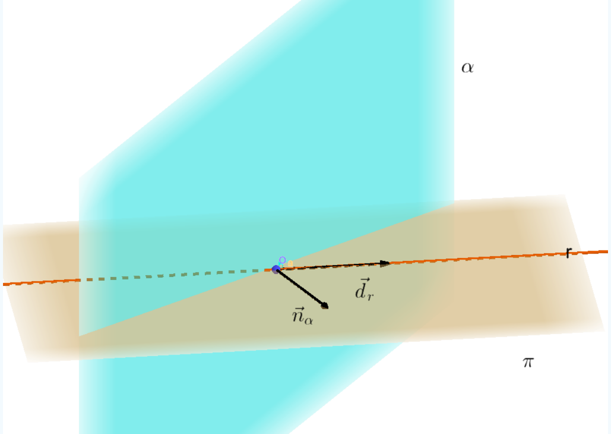
a) Per determinar l'equació contínua de la recta paral·lela a $r : \begin{cases} x - 2y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$, necessitam conèixer el seu vector director. Hem de convertir la recta de forma general a paramètrica. Això ho feim resolent el sistema d'equacions. Dient $y = t$, trobam

$$\begin{cases} x = 0 + 2 \cdot t \\ y = 0 + 1 \cdot t \\ z = 0 + 0 \cdot t \end{cases}$$

D'aquí obtenim el vector director de r, $\vec{d_r}(2, 1, 0)$. La recta que és paral·lela a aquesta ha de tenir el mateix vector director

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$$

b) El pla que és perpendicular a α i conté la recta r, tindrà com a vectors directors el vector director de la recta r $\vec{d_r}(2, 1, 0)$ i el vector normal del pla α $\vec{n}_\alpha(2, -1, 1)$



A més, donat que el pla conté la recta r, ha de passar per un punt qualsevol de la recta, per exemple $R = (0,0,0)$. Llavors, l'equació general d'un pla sabent els seus vectors directors i un punt per on passa s'obté del determinant

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y - 4z = 0$$

L'equació del pla que ens demanen és $\pi : x - 2y - 4z = 0$.

3. **Anàlisi**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\ln(\cos x)} = \dfrac{0}{0}$ indeterminació. Resoldrem la inderterminació aplicant la regla de l'Hôpital (derivam numerador i denominador per separat).

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\ln(\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)} = \dfrac{0}{0}$. Torna a quedar indeterminat, tornam a aplicar la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 2\cos x \cdot \sin x}{-\cos x} = \frac{0}{-1} = 0$$

b) Trobeu el punt d'inflexió de la funció $f(x) = (x-2)\cdot e^x$.

Derivada primera de la funció

$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-2)\cdot e^x = (x-1)\cdot e^x$

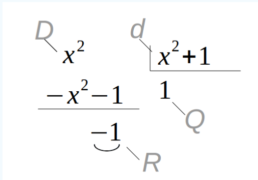
Calculam la segona derivada

$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x-1)\cdot e^x = x \cdot e^x$

Igualam a zero la segona derivada $x \cdot e^x = 0 \to x = 0$. Tenim que per a $x < 0$ $f''(x) < 0$ (convexa) i per $x > 0$ $f''(x) > 0$ (còncava). Donat que hi ha un canvi de curvatura, estam segurs que a $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió.

c) Calculau la primitiva $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$.

Donat que els graus del denominador i denominador són iguals, efectuam la divisió i expressam l'integral com $\frac{D}{d} = Q + \frac{R}{d}$



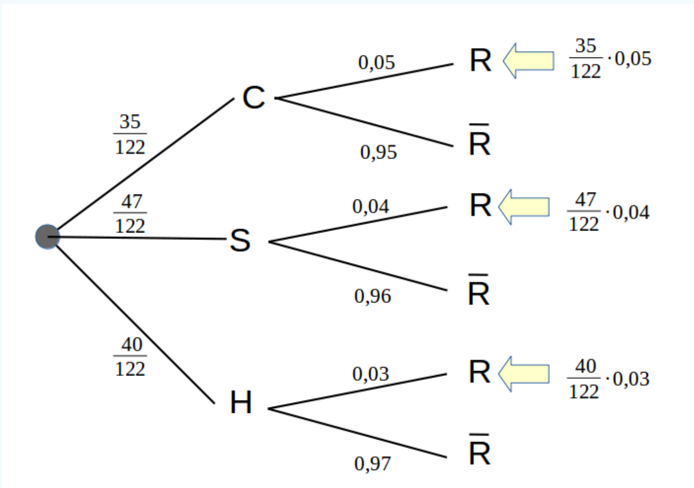
$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$. La integral es separa en dues

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \operatorname{arctg} x + C$$

4. **Probabilitats**

a) Anomenam els successos

- C = Ésser alumne de ciències
- S = Ésser alumne de socials
- H = Ésser alumne d'humanitats
- R = Repetir curs
- $\bar{R}$ = No repetir curs



En total tenim $35 + 47 + 40 = 122$ alumnes.

b) Cercam la probabilitat total de repetir curs que són tots els camins marcats amb les flextes en el diagrama d'arbre.

$P(R) = P(C) \cdot P(R|C) + P(S) \cdot P(R|S) + P(H) \cdot P(R|H) = \frac{35}{122} \cdot 0,05 + \frac{47}{122} \cdot 0,04 + \frac{40}{122} \cdot 0,03 = 0,0396$

c) Aplicam el teorema de Bayes

La probabilitat que un estudiant sigui de ciències condicionada que hagi repetit primer és

$P(C|R) = \frac{P(C \text{ i } R)}{P(R)}$

El numerador és el camí superior del diagrama d'arbre.

$P(C \text{ i } R) = P(C) \cdot P(R|C) = \dfrac{35}{122} \cdot 0,05 = 0,0143$

El denominador és la probabilitat total calculada a l'apartat b)

$P(C|R) = \dfrac{0,0143}{0,0396} = 0,362$