MATEMÀTIQUES II

Lliurament 1

Inversa d’una matriu per determinants

$$|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{|A|} adj(A^t)$$

Josep Mulet Pol

Matriu inversa

En dos vídeos anteriors varem veure que ...

Si A^{-1} és la inversa de A, aleshores

$$A \cdot A^{-1} = I$$
$$A^{-1} \cdot A = I$$

A té inversa $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

Inversa per adjunts

Definim la inversa d'una matriu quadrada A com la matriu d'adjunts de la transposada de A dividit pel determinant de A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A^t$$

Inversa per adjunts

Definim la inversa d'una matriu quadrada A com la matriu d'adjunts de la transposada de A dividit pel determinant de A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A^t$$

→ Calculam $|A|$

- $|A| = 0 \rightarrow$ Ja hem acabat. A no té inversa
- $|A| \neq 0 \rightarrow A^t \rightarrow adj\,(A^t) \rightarrow$ dividim tot per $|A|$

Exemple 1

Calculau la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[:|A|]{} \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}}$$

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$$

Comprovació

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \quad \checkmark$$

Exemple 2

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$ determina per a quins valors de del paràmetre *m* existeix la inversa. Calculau A^{-1} per a *m*=2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ m & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 3 + 4 \cdot m = m^2 + 4m - 3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16+12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} =$$

$$m = -2 \pm \sqrt{7}$$

- Si $m \neq -2+\sqrt{7}$ i $m \neq -2-\sqrt{7} \rightarrow$ A té inversa

Exemple 2

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$ determina per a quins valors de del paràmetre *m* existeix la inversa. Calculau A^{-1} per a m=2. $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A^t$$

$$|A| = m^2 + 4m - 3$$
$$= 4 + 8 - 3 = 9$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{menors}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -12 & 6 & 3 \\ -8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{adj}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 6 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[:9]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{12}{9} & \frac{6}{9} & \frac{-3}{9} \\ \frac{-8}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

https://iedib.net

Josep Mulet Pol

(2019)