

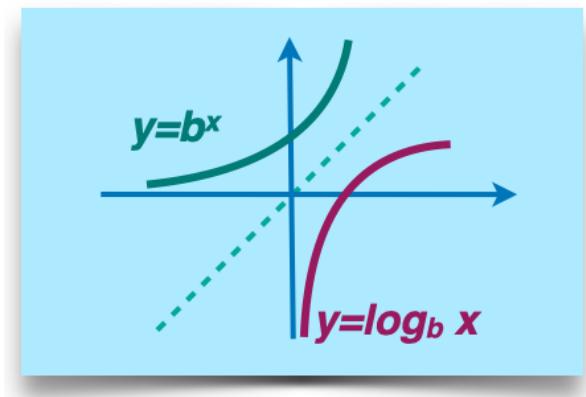


Institut d'ensenyaments a
distància de les Illes Balears

<https://iedib.net/>

Matemàtiques I

Lliurament 5: Límits i continuïtat de funcions



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Aquesta obra està subjecta a les condicions de llicència CREATIVE COMMONS no comercial i compartir igual.

Edició L^AT_EX: ® Josep Mulet

Versió: 07-01-2021

[Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](#)



Índex

1 Funcions	3
1.1 Funcions elementals	4
1.2 Operacions amb funcions	8
1.3 Funcions exponencials i logarítmiques	10
2 Límits	13
2.1 Càlcul de límits	14
2.2 Límits a un punt	16
2.3 Límits a l'infinít	18
3 Asímpotes	21
3.1 Asímpotes verticals	21
3.2 Asímpotes horitzontals	22
4 Funcions trigonomètriques	24

1. Funcions

■ Concepte de funció

A l'ESO ja vares estudiar el concepte i les característiques d'una funció.

Una **funció** és una **relació** entre dues magnituds de manera que a un valor de x (**variable independent**) li feim corresponde **un únic** valor de y (**variable dependent**). Per a indicar que la variable y depèn o és funció d'una altra, x , empram la notació $y = f(x)$, que es llegeix "y és la imatge de x mitjançant la funció f".

Aquesta relació funcional es pot establir, moltes vegades, mitjançant

- una taula de valors
- una gràfica
- un enunciat
- una expressió matemàtica o fórmula

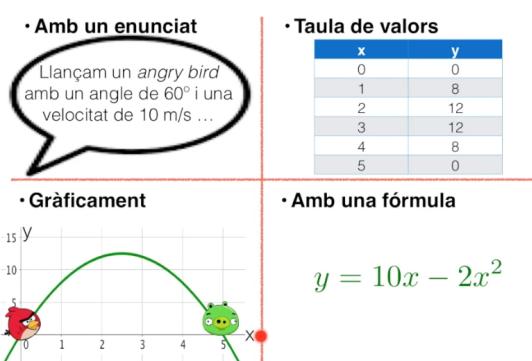
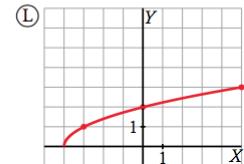
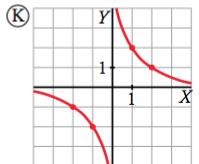
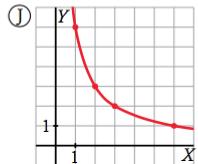
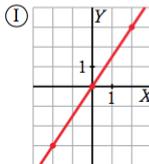
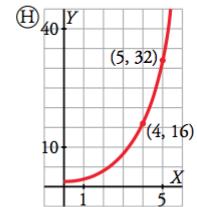
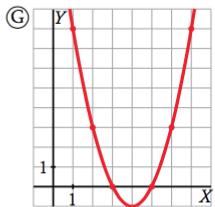
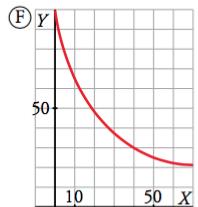
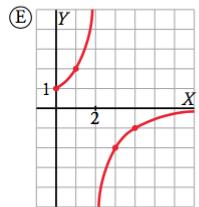
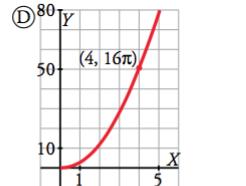
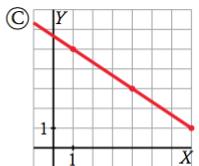
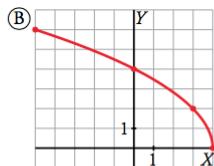
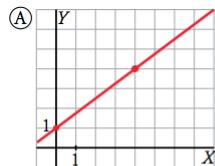


Figura 1: Formes d'expressar una funció

EXERCICI RESOLT 1

Associa cada gràfica amb el tipus (lineal, quadràtica, proporcionalitat inversa, radical, exponencial o logarítmica). Si et ve de gust, intenta també associar cada gràfica amb la seva equació. **Atenció:** sobreixen equacions.



LINEALES	CUADRÁTICAS	PROPORTINALIDAD INVERSA	RADICALES	EXPONENCIALES
L ₁ $y = \frac{3}{2}x$	C ₁ $y = x^2 - 8x + 15$	P _I ₁ $y = \frac{1}{x}$	R ₁ $y = \sqrt{2x+4}$	E ₁ $y = 2^x$
L ₂ $y = -\frac{2}{3}(x-1) + 5$	C ₂ $y = (x+3)(x+5)$	P _I ₂ $y = \frac{2}{2-x}$	R ₂ $y = \sqrt{x+4}$	E ₂ $y = 0,5^x$
L ₃ $3x + 2y = 0$	C ₃ $y = x^2, x > 0$	P _I ₃ $y = \frac{2}{x}$	R ₃ $y = 2\sqrt{4-x}$	E ₃ $y = 20 + 80 \cdot 0,95^x$
L ₄ $y = \frac{3}{4}x + 1$	C ₄ $y = \pi x^2, x > 0$	P _I ₄ $y = \frac{6}{x}, x > 0$	R ₄ $y = -\sqrt{4+x}$	E ₄ $y = 3^x$

a) L₄ b) R₃ c) L₂ d) C₄

e) P_I₂ f) E₃ g) C₁ h) E₁

i) L₁ j) P_I₄ k) P_I₃ l) R₂

No tenen gràfica associada L₃, C₂, C₃, P_I₁, R₁, R₄, E₂ i E₄.

1.1 Funcions elementals

Les funcions descriuen fenòmens quotidians, econòmics, psicològics, científics, ... Aquestes funcions s'obtenen experimentalment a través de l'observació. Després, s'idealitzen o es modelitzen

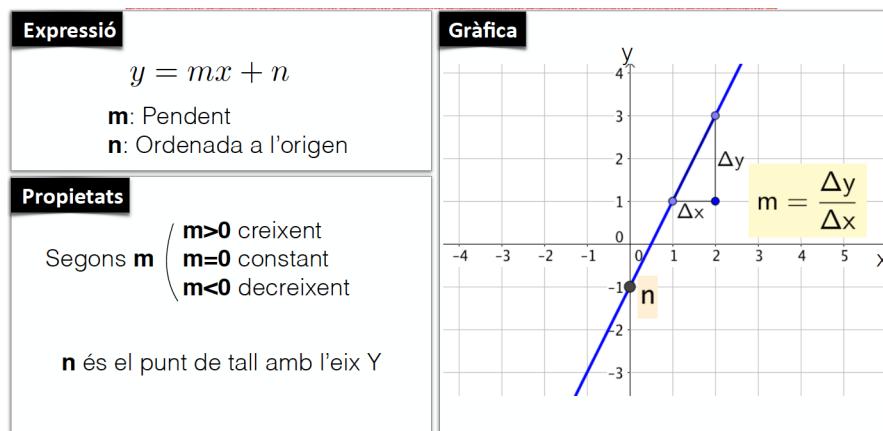
utilitzant famílies de funcions ben conegeudes que anomenam funcions elementals.

Per exemple, la funció lineal és adequada per descriure com l'allarga una molla de la qual pengem una massa petita. Les funcions quadràtiques descriuen la trajectòria que descriu un projectil. La funció de proporcionalitat inversa descriu la relació entre la pressió i el volum d'un èmbol ple de gas. Les funcions exponencials descriuen creixements de poblacions i processos de desintegració radioactiva. Les funcions logarítmiques s'empren per mesurar el nivell de renou, la brillantor dels estels i el pH d'una dissolució. Finalment, les funcions trigonomètriques apareixen en fenòmens que són periòdics (es repeteixen en el temps).

En aquest apartat s'enumeren aquestes funcions i es detallen els seus elements i propietats més importants.

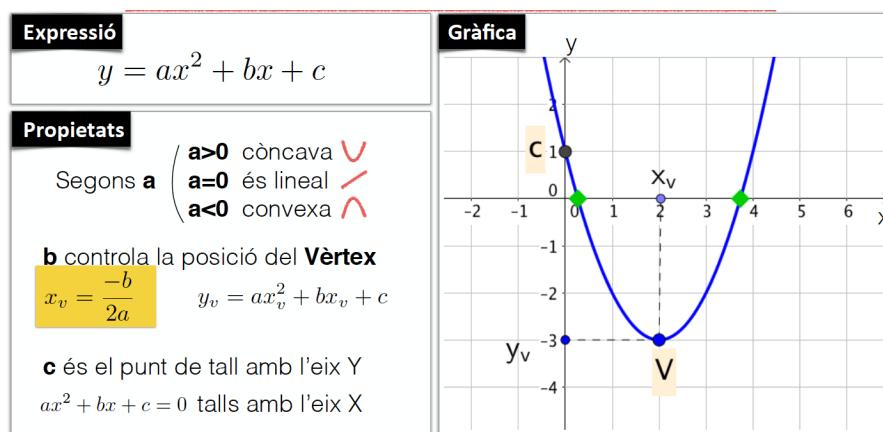
■ La funció lineal

L'expressió d'una funció lineal és $y = mx + n$, essent m el pendent i n l'ordenada a l'origen. Si $m = 0$ es diu que la funció és constant i la gràfica és una recta horitzontal.



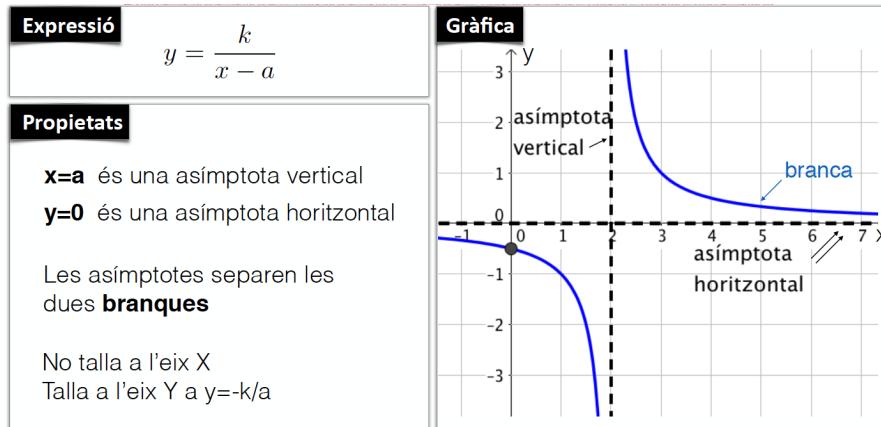
■ La funció quadràtica o paràbola

L'expressió d'una funció quadràtica és $y = ax^2 + bx + c$. Quan $a > 0$ la funció és còncava \cup i si $a < 0$ és convexa \cap . El valor de b controla la posició del vèrtex. L'abscissa del vèrtex s'obté de la fórmula $x_v = \frac{-b}{2a}$. L'ordenada del vèrtex es troba substituint x_v dins la funció.



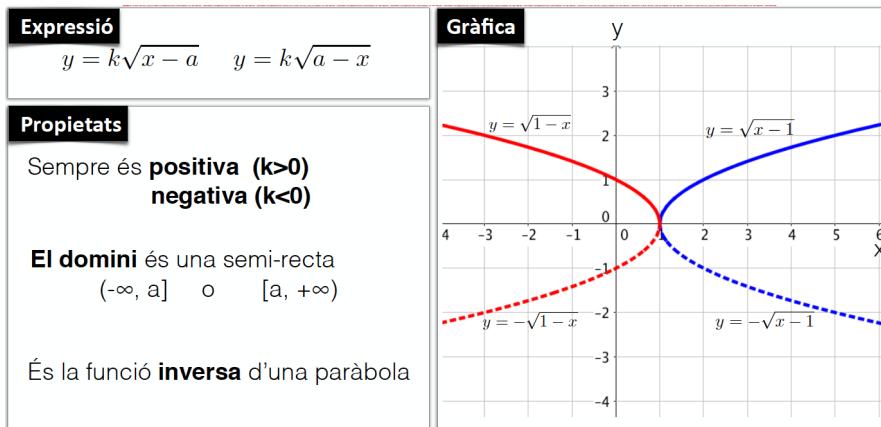
■ La funció de proporcionalitat inversa (hipèrboles)

L'expressió analítica és $y = \frac{k}{x-a} + b$. La representació gràfica són hipèrboles amb les asímptotes paral·leles als eixos de coordenades. Tenen una asímptota vertical a $x = a$ i una horitzontal a $y = b$. Les asímptotes separen la funció en dues parts, cada part s'anomena branca.



■ La funció arrel quadrada

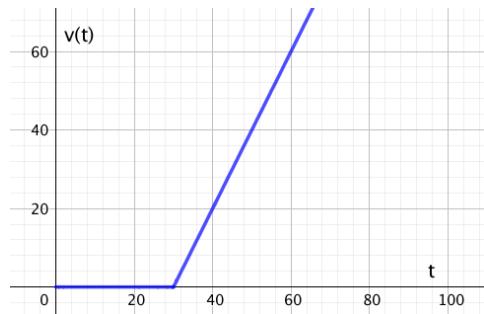
Les funcions arrel $y = k\sqrt{x-a}$ es representen com mitges paràboles amb eix paral·lel a l'eix X.



■ Funcions a trossos

Les funcions a trossos les empram per descriure situacions on hi ha canvis de comportament. Per exemple: Un cotxe està aturat a un semàfor i després accelera. La funció que descriu la velocitat presenta un canvi de comportament en el moment que el conductor pitja l'accelerador. Aquesta funció expressa com

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 30 \\ 2(t - 30) & \text{si } t > 30 \end{cases} \quad (1)$$



De 0 a 30 segons el cotxe està aturat i després dels 30 s la seva velocitat augmenta linealment.

Les funcions a trossos són fàcils de representar si sabem representar cadascun dels trams i param atenció al seu comportament en els punts d'unió.

Expressió $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$	Gràfica
Com fer la gràfica <ul style="list-style-type: none"> • Fixa't quants de trossos hi ha i on són els punts d'unió • Representa cada funció per separat. • Ressalta els trossos bons mirant les condicions dels trossos. 	

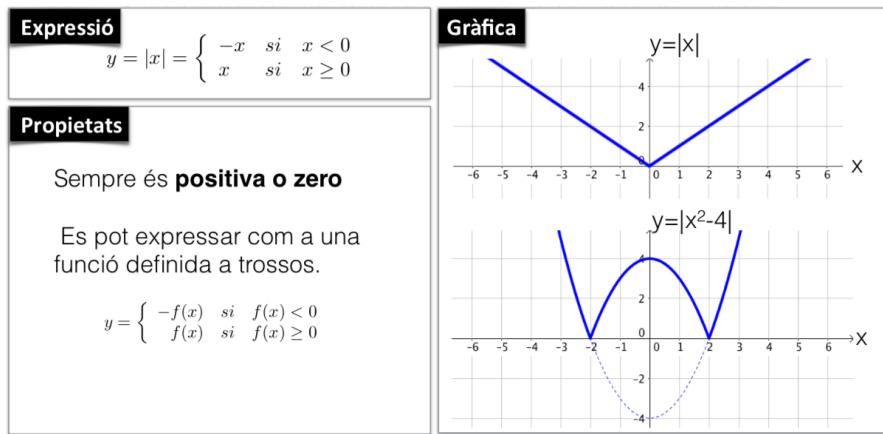
■ La funció valor absolut

Recordem que el valor absolut d'un nombre a coincideix amb el nombre a si és positiu o zero, o amb l'oposat i si és negatiu

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a \leq 0 \\ a & \text{si } a > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Amb això, una funció de valor absolut es pot expressar com una funció a trossos

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ f(x) & \text{si } f(x) > 0 \end{cases} \quad (3)$$



EXERCICIS PROPOSATS

- Representa gràficament les funcions $y = x^2 - 2x$ i $y = 3x - 1$ en la mateixa gràfica. Quin tipus de funcions obtens?
- Representau la funció a trossos $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2^x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1.2 Operacions amb funcions

A part de les operacions bàsiques de suma, diferència, producte o quocient de funcions també és possible fer la composició i la inversa d'una funció.

■ Composició de dues funcions

Considerem dues funcions $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \sin x$. La primera funció, per a cada valor de x que li donam, retorna la seva arrel quadrada. La segona funció, en canvi, retorna el sinus de x .

Què passa si aplicam una funció darrera l'altra? Això és compondre funcions. S'indica d'una aquestes formes: $f \circ g(x)$ o $f(g(x))$. Aquesta figura mostra el seu significat

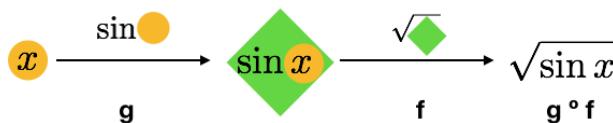


Figura 2: Composició de funcions $f(g(x))$

$f(g(x)) = \sqrt{\sin x}$, primer calculam el sinus de l'angle i al resultat li feim l'arrel quadrada.

La composició de funcions és una operació **no commutativa**. Això vol dir que l'ordre de l'operació canvia el resultat.

Efectivament $g \circ f(x) = g(f(x)) = \sin(\sqrt{x})$. Primer calculam l'arrel de l'angle i després feim el sinus.

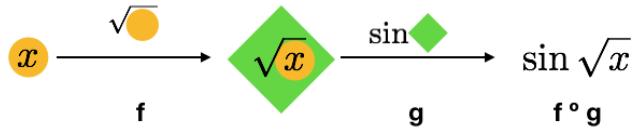


Figura 3: Composició de funcions $g(f(x))$

Si definim la funció $h(x) = \frac{1}{x+1}$ també és possible compondre les tres funcions. Vegem com fer-ho:

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f\left(g\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = \quad (4)$$

$$= f\left(\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = \sqrt{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)} \quad (5)$$

■ Funció inversa

No hem de confondre la inversa amb fer 1 dividit, són coses diferents.

Es defineix la inversa d'una funció $f(x)$ i la indicam com $f^{-1}(x)$ a aquella funció que compleix

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \quad (6)$$

No totes les funcions tenen una inversa o, millor dit, en alguns casos poden tenir-ne més d'una.

El procediment per calcular la inversa d'una funció és senzill

- Canviam el nom de les variables $x \leftrightarrow y$
- Aïllam la y
- Anomenam $y = f^{-1}(x)$, la inversa

EXERCICI RESOLT 2

Calcula la inversa de $f(x) = \frac{3}{x-2}$

Escrivim la funció com $y = \frac{3}{x-2}$, i canviam el nom de les variables

$$x = \frac{3}{y-2} \quad (7)$$

Aïllam la y , $y = \frac{3}{x} + 2$. Aleshores la funció inversa és $f^{-1}(x) = \frac{3}{x} + 2$

Podem comprovar que es compleix $f(f^{-1}(x)) = x$

$$f\left(\frac{3}{x} + 2\right) = \frac{3}{\left(\frac{3}{x} + 2\right) - 2} = x \quad (8)$$

Si representam gràficament la funció i la seva inversa, trobam una propietat curiosa de la gràfica. Si doblegarem la gràfica per una línia que es troba a 45 graus, la funció es transforma en la seva inversa. Això passa perquè quan feim aquest doblec, l'eix y passa damunt l'eix x i aquesta és precisament el canvi de variables que feim per calcular la inversa.

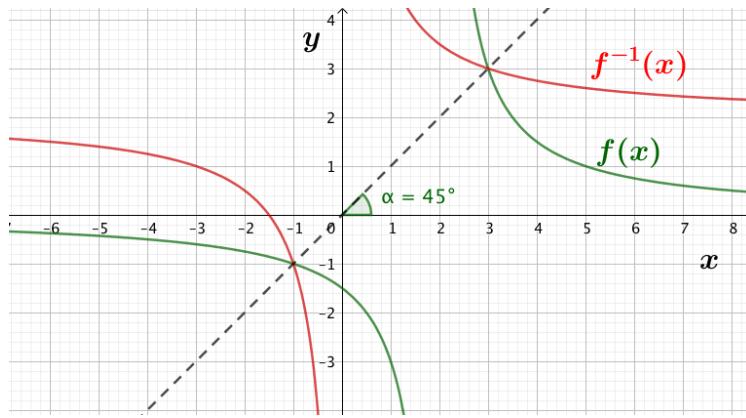


Figura 4: La funció i la seva inversa. Doblec a 45 graus.

Podeu comprovar que la funció $y = x^2$ té dues inverses que són $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$ i $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

EXERCICIS PROPOSATS

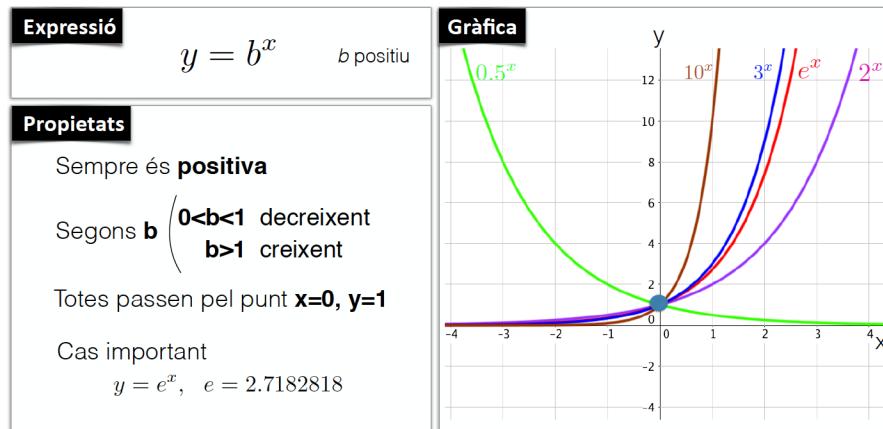
3. Considerau les funcions $f(x) = \frac{1}{x+2}$ i $g(x) = \sqrt{3x+1}$. Calculau $f^{-1}(x)$ i les composicions $f \circ g$ i $g \circ f$.

1.3 Funcions exponencials i logarítmiques

■ Funció exponencial

Les funcions **exponencials** són del tipus $y = b^x$. Si $b > 1$ són creixents i si $0 < b < 1$ són decreixents. Totes elles passen pel punt $(0, 1)$.

Un cas important és $y = e^x$ on la base és el número $e \approx 2.7182818$.



La funció exponencial es manifesta a multitud de fenòmens de creixement animal, vegetal i econòmic. A tots ells la variable independent és el temps. Vegem un exemple:

EXERCICI RESOLT 3

La temperatura d'una tassa de cafè des del moment que l'hem deixada damunt la taula d'una habitació canvia segons els temps segons l'expressió $T(t) = 52 \cdot e^{-\frac{t}{15}} + 24$ on t ve donat en minuts i T en °C.

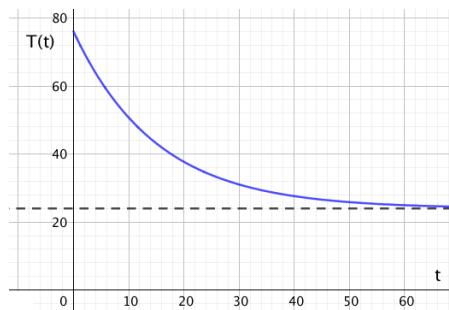
- a) Quina és la temperatura inicial de la tassa? I transcorreguts 20 minuts?
- b) Quin temps ha de transcorrer perquè la temperatura sigui 30 °C?
- c) Representa la funció gràficament.
- d) Quina és la temperatura de l'habitació?

a) Inicialment significa $t = 0$, $T(0) = 52 \cdot e^{-\frac{0}{15}} + 24 = 76^\circ\text{C}$

Passats 20 minuts $T(20) = 52 \cdot e^{-\frac{20}{15}} + 24 = 37,71^\circ\text{C}$

b) Hem de resoldre l'equació $30 = 52 \cdot e^{-\frac{t}{15}} + 24$. Aïllam l'exponencial a un membre $e^{-\frac{t}{15}} = \frac{30 - 24}{52} \rightarrow e^{-\frac{t}{15}} = \frac{6}{52}$, prenem logaritmes $-\frac{t}{15} = \ln \frac{6}{52}$ i finalment aïllam la incògnita $t = -15 \ln \frac{6}{52} \approx 32,392$ minuts.

c) Es tracta d'una exponencial decreixent que té una asímptota horitzontal a $y = 24$



d) La temperatura de l'habitació és la temperatura de la tassa passat molt de temps, és a dir, el valor de l'asímptota que hem vist a la gràfica anterior. $T_{\text{habitació}} = 24^\circ\text{C}$.

■ Funció logarítmica

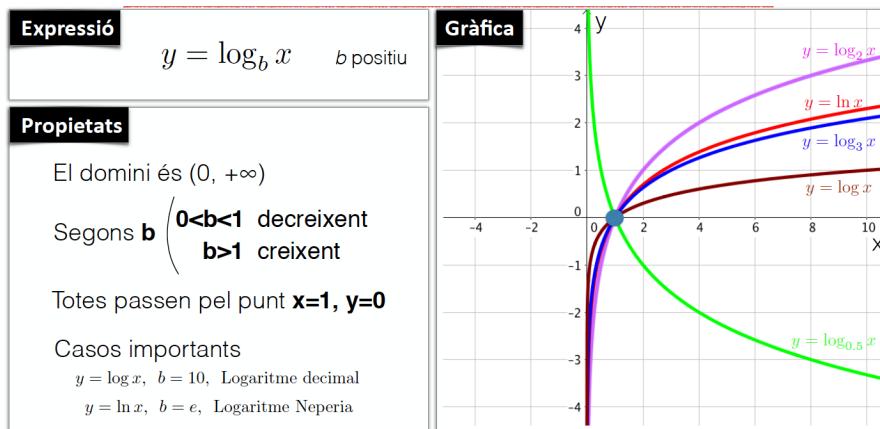
Les funcions **logarítmiques** són del tipus $y = \log_b x$. Si $b > 1$ són creixents i si $0 < b < 1$ són decreixents. Totes elles passen pel punt $(1, 0)$.

Dos casos importants són:

- **Logaritme Neperià:** $y = \ln x$ si la base és el número e
- **Logaritme decimal:** $y = \log x$ si la base és 10

Es compleix que les funcions exponencials i logarítmiques són funcions inverses una de l'altra. Per exemple, la funció inversa de $y = 2^x$ és $y = \log_2 x$ i viceversa. Aleshores presenten les propietats de les funcions inverses, és a dir, una s'obté de l'altra doblegant la gràfica per una línia a 45 graus.

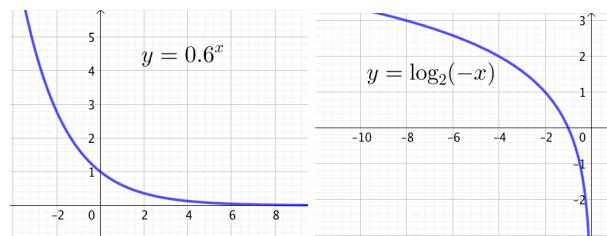
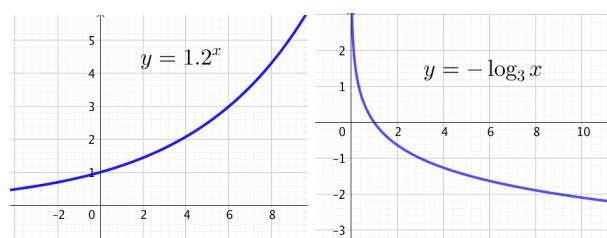
Cal recordar la definició o comprovació d'un logaritme $\log_b y = x \leftrightarrow b^x = y$.



EXERCICI RESOLT 4

Representa gràficament aquestes funcions:

- $y = 1.2^x$
- $y = -\log_3 x$
- $y = 0.6^x$
- $y = \log_2(-x)$



2. Límits

■ Concepte de límit

Comencem entenent que significa acostar-se a un nombre. Donam una sèrie de definicions:

- Direm que x **tendeix a a per la dreta** ($x \rightarrow a^+$) si x pren valors majors que a i cada vegada més propers a ell,



- Direm que x **tendeix a a per l'esquerra** ($x \rightarrow a^-$) si x pren valors menors que a i cada vegada més propers a ell,



- Direm que x **tendeix a a** ($x \rightarrow a$) si x pren valors cada vegada més propers a a , indistintament superiors o inferiors a ell,

$$x \rightarrow 3 \quad \text{si} \quad x = 3.1, 2.99, 3.001, \dots$$

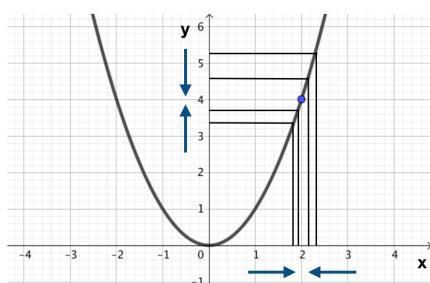
- Direm que x **tendeix a $+\infty$** ($x \rightarrow +\infty$) si x pren valors positius cada vegada més grans,

$$x \rightarrow +\infty \quad \text{si} \quad x = 10, 1000, 1000000, \dots$$

- Direm que x **tendeix a $-\infty$** ($x \rightarrow -\infty$) si x pren valors negatius cada vegada més grans,

$$x \rightarrow -\infty \quad \text{si} \quad x = -10, -1000, -1000000, \dots$$

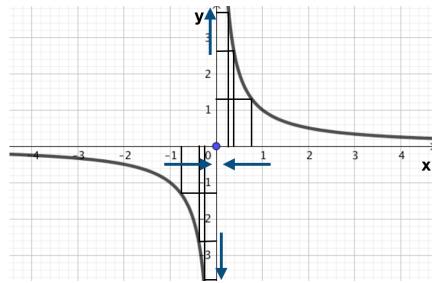
El límit ho podem definir com aquell lloc al que, si no arribem, serem capaços d'acostar-nos tot el que vulguem. En sentit matemàtic, el límit d'una funció en un punt, té sentit de l'llocçap al qual es dirigeix el valor de la funció $f(x)$ quan la variable independent (x) s'aproxima a un valor determinat.



Si prenem la funció del gràfic adjunt, quan x s'aproxima al valor 2, el valor de la funció $f(x) = x^2$ s'aproxima al valor 4. A més, en aquest cas, no solament podrem acostar-nos tot quant vulguem, sinó podrem arribar al mateix valor, ja que el valor de la funció per a $x = 2$ és $f(2) = 4$.
En forma de límit escrivim

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \tag{9}$$

i es llegeix "el límit quan x tendeix a 2 (tant per la dreta o l'esquerra) de la funció és igual a 4"



Si prenem la funció del gràfic adjunt, quan x s'aproxima al valor 0, el valor de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ s'aproxima cap a més o menys infinit. En aquest cas, necessitam especificar si ens acostam per la dreta o per l'esquerra de 0. En forma de límit escrivim

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty \quad (10)$$

Es llegeix, "el límit per l'esquerra de 0 de la funció és menys infinit i per la dreta de zero més infinit".

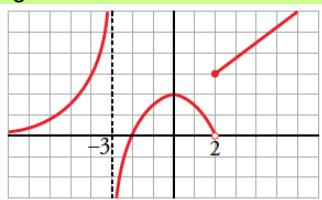
Anomenam **límits laterals** a $x = a$ als límits per l'esquerra i la dreta de a . Direm que el límit d'una funció en un punt existeix si els **dos límits laterals coincideixen**, és a dir

El límit al punt a existeix si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (11)$$

EXERCICI RESOLT 5

A partir de la gràfica de la funció següent



deduïu els límits

a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

- a) $+\infty$
- b) $-\infty$
- c) 2
- d) 0
- e) 3
- f) 0

2.1 Càlcul de límits

Límits a partir d'una taula de valors

L'apartat anterior ha introduït el concepte de límit i hem après com deduir-ne valors a partir d'una gràfica. El problema és que en moltes ocasions no tenim la gràfica o no sabem quina forma té. En aquests casos aprendrem com calcular el límit a través d'una taula de valors

Anem a calcular els límits de les funcions l'apartat anterior $f(x) = x^2$ i $f(x) = \frac{1}{x}$ mitjançant taules de valors

Taula 1: Límits a partir de taules de valors

$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2$	$\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$
$x = 1.9 \ y = 3.61$	$x = 2.1 \ y = 4.41$	$x = -0.1 \ y = -10$	$x = 0.1 \ y = 10$
$x = 1.99 \ y = 3.96$	$x = 2.01 \ y = 4.04$	$x = -0.01 \ y = -100$	$x = 0.01 \ y = 100$
$x = 1.999 \ y = 3.996$	$x = 2.001 \ y = 4.004$	$x = -0.001 \ y = -1000$	$x = 0.001 \ y = 1000$
...
$y \rightarrow 4$	$y \rightarrow 4$	$y \rightarrow -\infty$	$y \rightarrow +\infty$

A mesura que la x s'acosta al valor on demanen el límit, ens fixam cap a on s'acosta el valor de y . Aquest valor extrapolat és el valor del límit que ens demanen.

EXERCICI RESOLT 6

Calcula el límit

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

amb l'ajuda d'una taula de valors.

Donam cada vegada valors que s'apropin més a 1 per l'esquerra (és a dir, menors que 1):

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

x	y
0.9	0.270088
0.99	0.251888
0.999	0.2501876
0.9999	0.2500187

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = 0.25 = \frac{1}{4}$$

■ Tipus de límits

Podem classificar els límits en un punt en:

- **Immediats:** Només cal substituir el valor de x dins la funció.
- **Infinits:** Quan substituïm valor de x dins la funció, trobam una divisió per zero $\frac{k}{0}$. El límit pot donar $\pm\infty$. Cal calcular els dos límits laterals.
- **Indeterminats:** Una indeterminació és una expressió que no sabem el seu valor si no feim alguna cosa més. Cada tipus d'indeterminació té una tècnica per descobrir el seu valor.

Són indeterminacions expressions com ara:

$$0/0, \quad \infty/\infty, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \dots$$

La primera cosa que SEMPRE cal fer per calcular un límit és substituir el valor de x dins la funció. Si la calculadora dóna un nombre, ja haurem acabat.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4 \quad \text{Ja hem acabat!} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \text{Math Error} \quad \text{Ups! Caldrà fer alguna cosa més} \quad (13)$$

EXERCICIS PROPOSATS

- Emprant una taula de valors, esbrina el límit de la funció $f(x) = \frac{3x}{x-2}$ quan $x \rightarrow 2^-$ i $x \rightarrow 2^+$.
- Calcula els límits $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 - x + 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 + 5}$.
- Representau gràficament la funció a trossos $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x < 1 \\ 2x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$. A partir de la gràfica calculau, si existeix, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2.2 Límits a un punt

En aquesta secció aprendrem tècniques per determinar els límits del tipus $k/0$ i la indeterminació $0/0$. La següent taula mostra cada regla juntament amb un exemple:

Me demanen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$		
Quan substitueixo x per a trob	Què faré?	Exemple
Un nombre	Res. Ja he acabat!	$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$
$\frac{k}{0}$	Calcular els límits laterals per saber si val $\pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \end{cases}$
$\frac{0}{0}$ amb polinomis	Factoritzar i simplificar	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10$
$\frac{0}{0}$ amb arrels	Racionalitzar i simplificar	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3) \cdot (\sqrt{x+6}+3)}{(x-3) \cdot (\sqrt{x+6}+3)} = \dots = \frac{1}{6}$

Figura 5: Com calcular límits i no morir en el intent.

EXERCICI RESOLT 7

Calcula els límits de la funció

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2 - 9}$$

quan

a) $x \rightarrow 1$

b) $x \rightarrow 3$

c) $x \rightarrow -3$

a) Immediat: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x^2 - 9} = \frac{1+3}{1-9} = -\frac{1}{2}$

b) Infinit: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x^2 - 9} = \frac{6}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{x^2 - 9} = \frac{+6}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3}{x^2 - 9} = \frac{+6}{+0} = +\infty \end{cases}$

c) Indeterminació 0/0: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} = \text{IND} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)}{(x+3) \cdot (x-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6}$$



Vídeo 5.1: Límits de funcions racionals en un punt.

<https://www.youtube.com/watch?v=nnbRtibgETU>

EXERCICIS PROPOSATS

7. Emprant les tècniques de càlcul de límits obtenu el valor a) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2}{x^2 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x - 6}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

2.3 Límits a l'infinít

Treballar amb infinits a vegades és constraintuïtiu. Això passa perquè l'infinít no és un nombre real i les operacions són una mica especials. Us deixo en aquesta taula les operacions més habituals perquè les pugueu consultar en cas de dubte:

Operacions immediates amb infinits		
$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$k \cdot \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$
$\frac{k}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{0} = \pm\infty$	$b^\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } b > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$

Algunes operacions són indeterminades i caldrà aplicar les regles a l'hora de calcular els límits

Operacions indeterminades amb infinits		
$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	
$0 \cdot \infty$	1^∞	

La següent taula mostra els diferents casos que ens podem trobar quan calculam límits de funcions a l'infinít. Llegiu l'exemple i fixeu-vos en la tècnica heu d'aplicar en cada cas.

Me demanen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$		
Quan substitueixo x per $\pm\infty$ trob	Què faré?	Exemple
$\frac{k}{\infty}$	El límit val 0.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 0$
$\frac{\infty}{\infty}$ amb polinomis	Dividim tot per la major potència de x del denominador.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{3x^2 - 2x + 1} = \text{dividim per } x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 5/x^2}{3 - 2/x + 1/x^2} = \frac{2}{3}$
$\frac{\infty}{\infty}$ amb arrels	El mateix que abans, però ara l'exponent dins d'una arrel queda dividit entre 2.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} = \text{dividim per } x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 5/x}{\sqrt{3 - 2/x + 1/x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
$\infty - \infty$ amb polinomis	Calcular el mcm i operar les fraccions	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} - x = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1} = -1$
$\infty - \infty$ amb arrels	Racionalitzar i simplificar	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 1} - x &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} &= \dots = 0 \end{aligned}$

Figura 6: Regles per calcular límits a l'infinít



Vídeo 5.2: Límits de polinomis a l'infinít

<https://www.youtube.com/watch?v=EQxB-xFjIKc>



Vídeo 5.3: Límits de funcions racionals en l'infinít.

<https://www.youtube.com/watch?v=lZVNc19MNTc>

EXERCICI RESOLT 8

Calcula els següents límits

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 + 1$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 5}{2x^2 + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^2}{x + 3}$

a) Donat que es tracta d'un polinomi només consideram la potència de major grau

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty \quad (14)$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{\infty^2 - 1} = \frac{2}{\infty} = 0$

c) Trobam una indeterminació ∞/∞ . Cal dividir tots els termes per la major potència del denominador. En aquest cas dividim tots els termes entre x^2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 5}{2x^2 + 1} &= \frac{\infty}{\infty} = IND = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{3 + \cancel{\frac{1}{\infty}} - \cancel{\frac{5}{\infty}}}{2 + \cancel{\frac{1}{\infty}}} = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

d) Trobam una indeterminació ∞/∞ . Cal dividir tots els termes per la major potència del denominador. En aquest cas dividim tots els termes entre x

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^2}{x + 3} &= \frac{\infty}{\infty} = IND = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{x^2}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - x}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{\cancel{\frac{2}{\infty}} - \infty}{1 + \cancel{\frac{3}{\infty}}} = -\infty \end{aligned} \quad (16)$$

EXERCICIS PROPOSATS

8. Emprau les tècniques apreses per calcular els límits a l'infinit:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 2x^2 + 5x - 3$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} -2x^2 + 5x + 2$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + 3x^2 - 1}{x^3 + x^2 - x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 - 5x}{x^2 + 1}$

3. Asímptotes

Les asímptotes d'una funció, en cas d'existir, són rectes a les quals la funció s'aproxima tant com volguem. Donat que, les asímptotes són rectes, aquestes podran ser verticals, horizontals i obliques. En aquest curs només estudiarem les asímptotes verticals i horizontals.



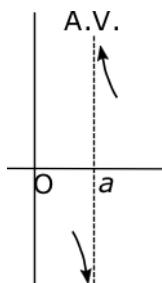
Les asímptotes verticals són parets les qual la funció no pot atravesar.

3.1 Asímptotes verticals

Per a que una funció racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ tengui una asímptota vertical, el denominador ha d'ésser igual a zero i el numerador diferent de zero. El procediment consisteix resoldre l'equació $Q(x) = 0$.



Ens hem d'assegurar-se que no tenim 0/0, perquè podria no ésser una asímptota.
Per tenir una asímptota vertical, els límits al punt han d'ésser més o menys infinit.



Per a cada valor $x = a$ tal que $Q(a) = 0$, estudiam la posició relativa calculant els dos límits laterals:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \quad (17)$$

d'aquesta forma sabem si s'acosta cap a $\pm\infty$ al voltant de l'asímptota vertical.

EXERCICI RESOLT 9

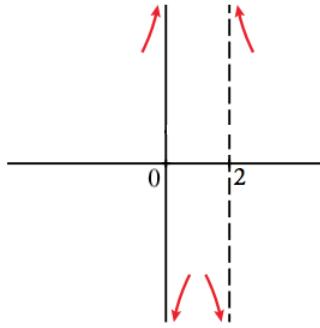
Calcula les asímptotes verticals de la funció $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

Igualam a zero del denominador de la funció $x^2 - 2x = 0$. Resolem l'equació de segon grau incompleta $x = 0; x = 2$.

Calculam els límits laterals al voltant de cada arrel.

- $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \frac{+2}{+0} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \frac{+2}{-0} = -\infty$
- $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \frac{+6}{-0} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \frac{+6}{+0} = +\infty$

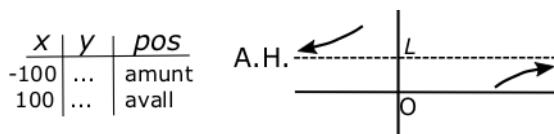
Representem gràficament les dues asímptotes verticals a $x = 0$ i $x = 2$ juntament amb els límits obtinguts:

**3.2 Asímptotes horizontals**

Per a que una funció racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ tengui una asímptota horitzontal, el grau $P \leq$ grau Q . L'asímpota és la recta horitzontal $y = L$, essent $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Nota: Quan grau $P <$ grau Q , la recta $y = 0$ és l'asímpota horitzontal.

Per saber si ens acostam per damunt o davall de l'asímpota horitzontal $y = L$ construïm una taula amb dos valors grans (un negatiu i l'altre positiu). Si la funció és més petita que l'asímpota, ens acostam per davall d'ella i sinó per damunt.



**Vídeo 5.4: Asímptotes verticals i horizontals**

<https://www.youtube.com/watch?v=tAnQoMSf5cs>

EXERCICI RESOLT 10

Calcula l'asímpota horizontal de la funció $y = \frac{x^2}{1+x^2}$

Aquesta funció no té asímpotes verticals perquè l'equació $1 + x^2 = 0$ no té solucions. Sí que tindrà una asímpota horizontal a un valor de y diferent de zero, perquè els graus del numerador i denominador són iguals.

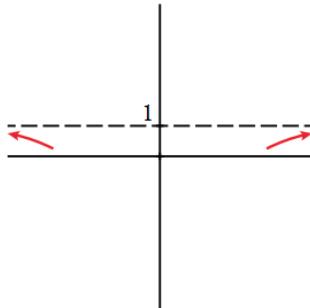
L'asímpota és el valor del límit a l'infinít

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{\infty}{\infty} = IND = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} + 1} = 1 \quad (18)$$

Per resoldre la indeterminació ∞/∞ hem dividit tot per la major potència de x del denominador. Hem trobat que la recta $y = 1$ és una asímpota horizontal.

Per saber la posició relativa (si ens acostam per damunt o davall de $y = 1$) construïm una taula amb un valor gran de x positiu i negatiu.

x	$f(x)$	Posició
-100	$0.9999 < 1$	Per davall
+100	$0.9999 < 1$	Per davall



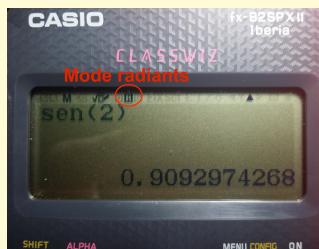
EXERCICIS PROPOSATS

9. Determinau **totes** les asímptotes de la funció $f(x) = -\frac{(4x+5)}{x-2}$. Calculau tots els límits necessaris per determinar-les. Representau gràficament com s'acosta la funció a les asímptotes.
10. Determinau **totes** les asímptotes de la funció $f(x) = \frac{3}{x^2-2x}$. Calculau tots els límits necessaris per determinar-les. Representau gràficament com s'acosta la funció a les asímptotes.

4. Funcions trigonomètriques

Quan es treballa en funcions trigonomètriques recordeu que els angles venen donats en RADIANTS.

$$\begin{array}{lll} 2\pi \text{ rad} & \Leftrightarrow & 360^\circ \\ \pi \text{ rad} & \Leftrightarrow & 180^\circ \\ \frac{\pi}{2} \text{ rad} & \Leftrightarrow & 90^\circ \\ & \dots & \end{array}$$



Vídeo que explica com canviar de la configuració de DEG a RAD i viceversa.

[https://youtu.be/nj_Q5SU-e2Y]

Les funcions trigonomètriques són $y = \sin x$, $y = \cos x$ i $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Aquestes funcions s'utilitzen per descriure fenòmens periòdics com ara oscil·lacions i la propagació d'ones. Es defineix el període d'una oscil·lació T com l'interval més petit de x pel qual es repeteix la funció.

Les funcions sinus i cosinus tenen període 2π i oscil·len entre els valors -1 i 1 .

La funció tangent, en canvi, té període π i presenta asímptotes verticals per a tots els valors en què $\cos x = 0$.

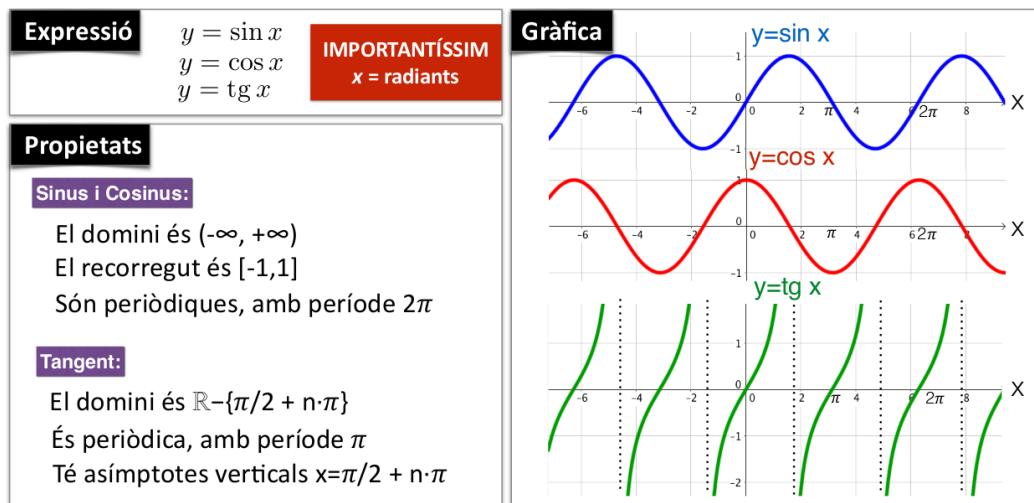


Figura 7: Gràfiques de les funcions trigonomètriques

■ Funcions trigonomètriques inverses

Les funcions trigonomètriques inverses són $\arcsin x$, $\arccos x$ i $\arctg x$. Per exemple, $\arcsin \frac{1}{2}$ dóna l'angle pel qual el seu sinus val $\frac{1}{2}$. Recordem que l'angle vindrà donat en radians i, per tant, la resposta que obtindrem serà:

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \text{ja que} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Naturalment, si a l'angle de $\frac{\pi}{6}$ (en graus 30°) li sumam voltes completes ($2\pi n$) també complirà l'equació anterior. Per aquest motiu, es diu que les funcions trigonomètriques inverses són funcions **multivaluades**. A la pràctica, per evitar aquesta situació, es decideix un interval pels angles de cada funció trigonomètrica inversa. En el cas de la funció $y = \arcsin x$ s'estableix que l'angle y estigui comprès entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, és a dir, $[-90^\circ, 90^\circ]$.

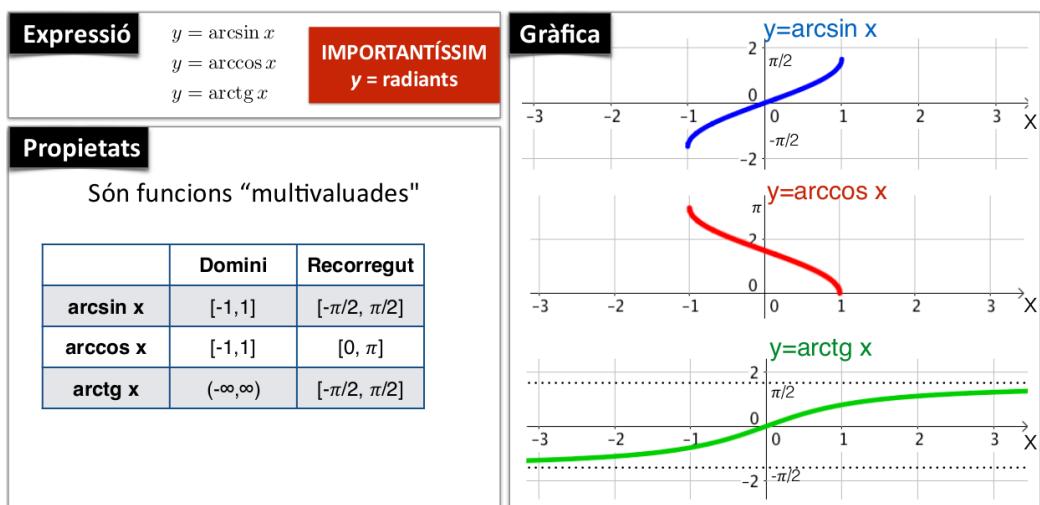


Figura 8: Gràfiques de les funcions trigonomètriques inverses