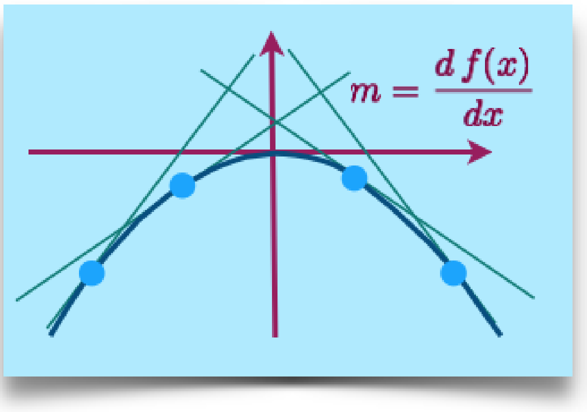
IEDIB
Institut d´ensenyaments a distància de les Illes Balears

https://iedib.net/

Matemàtiques I

Lliurament 6: Derivades de funcions i les seves aplicacions



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Edició LaTeX: ® Josep Mulet
Versió: 04-02-2021

Índex

1. Introducció

El concepte de derivada va sorgir com a resultat de segles d'esforç per resoldre dos problemes: determinar la recta tangent a una corba i trobar les velocitats instantànies en moviments no uniformes.

El concepte de derivada s'aplica als casos on es necessari mesurar la rapidesa amb què es produeix el canvi d'una situació. Les derivades ens permeten descriure el ritme de canvi de magnituds tan diverses com la velocitat instantània d'un cotxe, els ritmes de creixement i decreixement d'una població, etc. Per això és una eina de càlcul fonamental en els estudis de física, química, economia, etc.

La derivació constitueix una de les operacions amb funcions de més importància. Ens indica la taxa de variació de la funció en un instant determinat.

L'object d'aquest lliurament és doble: d'una banda aprendre a calcular derivades de funcions i de l'altre aplicar les derivades per resoldre problemes d'optimització. Les derivades permeten determinar quan una funció és màxima o mínima (per exemple: màxim rendiment, mínim cost, màxim benefici, mínima acceleració, mínima distància, etc.).

Recta secant i tangent

Una recta és **secant** si talla a la funció en dos punts. En canvi, una recta és **tangent** si talla la funció en un únic punt. Les gràfiques següents mostren un exemple de recta secant i tangent a una paràbola.

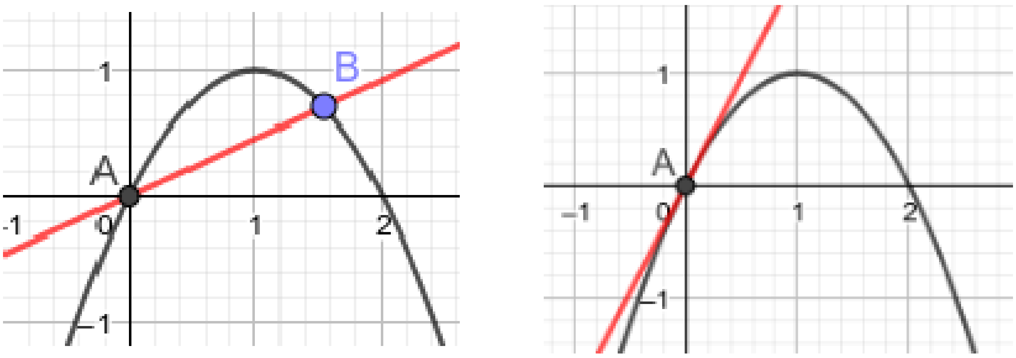
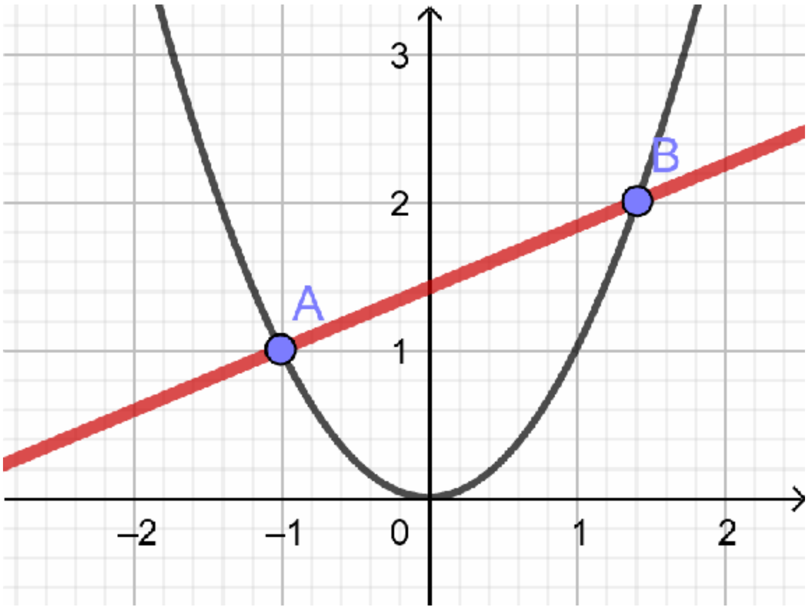


Figura 1: Recta secant i tangent a una corba.

Si partim d'una recta que es secant podem construir la recta tangent de la forma següent. En la simulació que tens a sota, desplaça el punt B cap al punt A. Què observes?



Simulació 1: https://www.geogebra.org/m/zabkbw6k : *Desplaça el punt B cap a A i observa com la recta secant s'aproxima a tangent*

Efectivament, quan el punt A s'acosta molt al punt B, la recta secant passa a tallar únicament la paràbola en un punt. Obtenim la recta tangent.

Concepte de derivada en un punt

El pendent o inclinació de la recta tangent representa la rapidesa de canvi instantani. Així, quant major és la inclinació de la recta tangent en un punt, major és la rapidesa del canvi de la funció.

El **pendent de la recta tangent** l'anomenam **derivada** de la funció en el punt i ho indicam com $m = f'(a)$.

Com que el pendent és un nombre, la derivada d'una funció en un punt és un nombre.

NOTACIÓ PER INDICAR DERIVADA

Si ens donen la funció y=f(x), podem indicar la seva derivada com

$$y' \quad f'(x) \quad \frac{d\,f(x)}{dx} \quad D\,f(x) \tag{1}$$

Nosaltres emprarem les dues primeres notacions.

Comencem a veure una sèrie d'exemples ordenats de menor a major complexitat.

Funció constant

Una funció constant és de la forma $y = k$ on k és un nombre. Donat que la recta és horitzontal, té pendent zero i, llavors, la derivada és sempre zero.

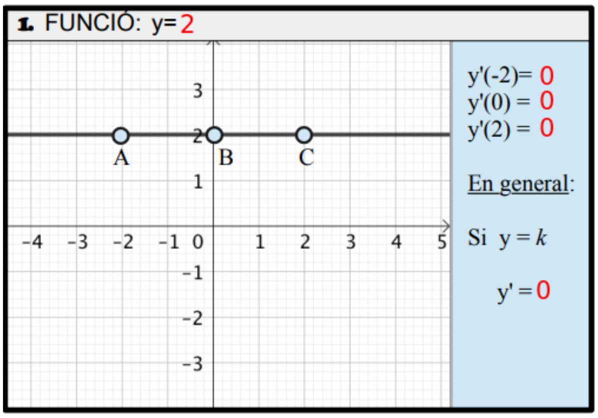


Figura 2: La derivada d'una constant sempre és zero

Funció lineal

Una funció lineal és de la forma $y = mx + n$ on m és el pendent de la recta i n l'ordenada a l'origen. Recorda que el pendent d'una recta és el canvi de y entre el canvi de x, $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Donat que la recta té un únic pendent, la derivada sempre és igual al pendent de la recta m.

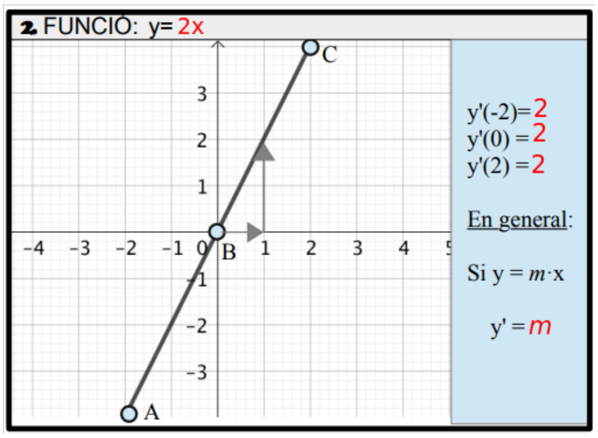


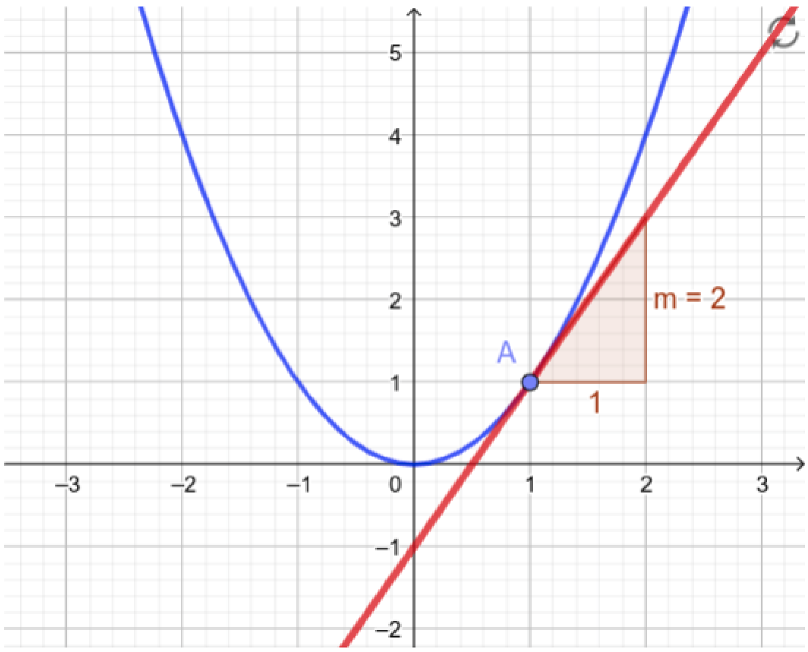
Figura 3: La derivada d'una funció lineal sempre és igual al seu pendent

Funció quadràtica (paràbola)

Per a funcions més complicades que les lineals, el pendent de la recta tangent anirà canviant segons el punt on ens trobem.

Considerem la paràbola $y = x^2$. Per valors de x negatius, la recta tangent decreix i el seu pendent és negatiu. En canvi, per valors de x positius, la recta tangent creix i el seu pendent és positiu. Just per a $x = 0$, la recta tangent és horitzontal i el pendent és zero.

Tots aquests resultats els pots anar comprovant a la simulació de sota. Quan desplacis el punt A observa com canvia la inclinació recta tangent i, per tant, el valor de la derivada. Després contesta l'exemple resolt.



Simulació 1: https://www.geogebra.org/m/wsw3kemm : *La recta tangent a diferents punts de la paràbola.*

EXERCICI RESOLT 1

A partir de la simulació anterior digues que val la derivada de la funció $f(x) = x^2$ en els punts: a) $f'(-2)$; b) $f'(-1)$; c) $f'(0)$; d) $f'(1)$; e) $f'(2)$

a) $f'(-2) = -4$; b) $f'(-1) = -2$; c) $f'(0) = 0$; d) $f'(1) = 2$; e) $f'(2) = 4$

Concepte de funció derivada

A l'exemple anterior hem calculat la derivada de la funció $y = x^2$ en diferents punts $x = a$. Els resultats es poden expressar en forma de taula:

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	-4	-2	0	2	4

Si representam aquesta taula en una gràfica trobam una recta que té d'equació $y = 2x$. Aquesta és la **funció derivada** i l'expressam com $f'(x) = 2x$. Podem pensar la funció derivada com una "regla"que ens permet trobar totes les derivades que volguem. Per exemple, si necessitam saber la derivada quan $x = -3$, substituïm i trobam $f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$, etc. Aquest és el pendent de la recta tangent a la paràbola quan $x = -3$.

La gràfica de sota mostra una funció a trossos. Cada tros és lineal, de forma que la derivada sempre valdrà el mateix valor. Llavors, la funció derivada que resulta també és una funció a trossos. En cada tros, la funció derivada val el pendent de la recta corresponent.

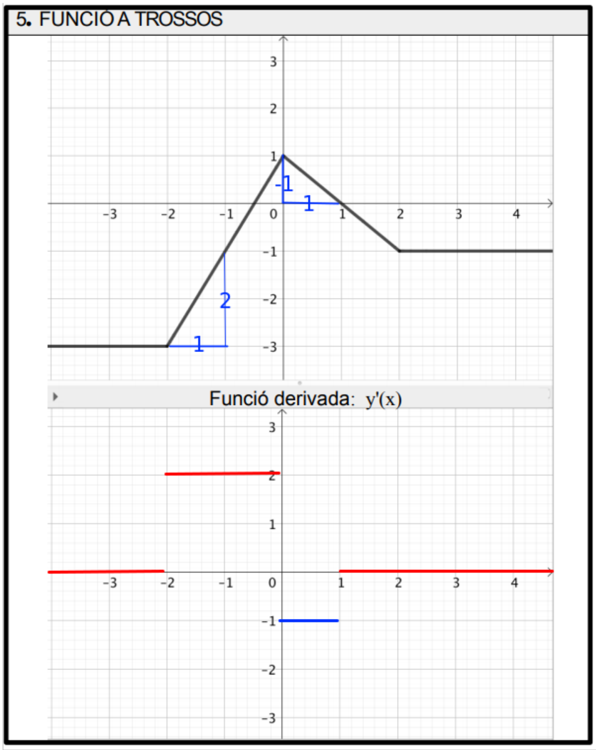
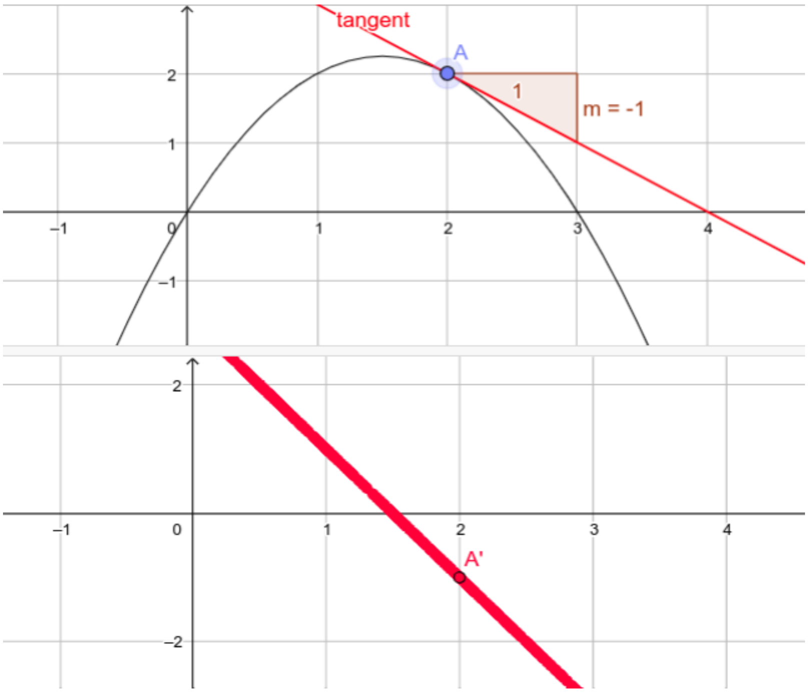


Figura 4: Les gràfiques mostren la funció derivada d'una funció a trossos

En aquesta simulació següent pots anar construint la funció derivada de $y = 3x - x^2$. A mesura que desplacis el punt A sobre la gràfica superior, s'anirà dibuixant la funció derivada a la gràfica inferior. Cada punt que es dibuixa és el pendent que té la recta tangent en aquell punt.



Simulació 1: https://www.geogebra.org/m/v3edzvyj : *Construcció interactiva de la funció derivada*

Un altre aspecte interessant que hem descobert és que la derivada d'una funció quadràtica és una funció lineal. En aquest exemple en concret $y' = 3 - 2x$.

2. Definició de derivada

A la secció anterior hem après la noció de derivada però, de moment, no tenim cap forma sistemàtica per fer-ne el càlcul. En aquest apartat aprendrem quina és la definició matemàtica de derivada. Veurem que, tot i que sempre és possible calcular les derivades amb la definició, aquest procés és molt llarg i feixuc. Per això, aprendràs les **regles de derivació** com una forma molt més ràpida de fer derivades.

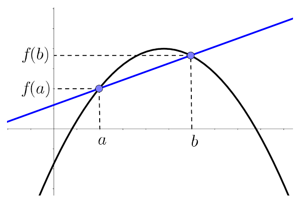
La derivada com un límit

Hem vist que la derivada d'una funció en un punt és un nombre que dóna el pendent de la recta tangent. També hem après, que la recta tangent es pot obtenir a partir de la recta secant amb el procés d'acostar un punt sobre l'altre.

Comencem calculant el pendent de la recta secant que passa per dos punts

$$m_{\text{secant}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{2}$$

A aquest nombre s'anomena **taxa de variació mitjana**.



Per aconseguir la derivada, és a dir, el pendent de la recta tangent hem d'acostar el punt b cap a a. Matemàticament això s'expressa com un límit:

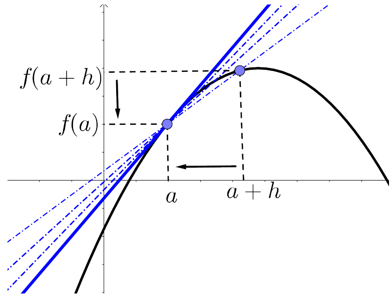


Figura 5: Recta tangent a una funció

La **derivada** d'una funció $f'(a)$ en un punt $x = a$ es defineix com:

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3}$$

i proporciona el **pendent de la recta tangent** a la funció en els punt d'abscissa a.

Una forma més convenient d'expressar el límit és anomenar la diferència entre dos nombres $h = b - a$ i dir que de cada vegada es fa més petita

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{4}$$

Vídeo 6.1: *Definició de derivada*
https://www.youtube.com/watch?v=12KOYhFOC7U

Funció derivada

Hem vist que la **derivada en un punt** $f'(a)$ és **un nombre** que proporciona el pendent de la recta tangent.

La **funció derivada** $f'(x)$, **és una funció** que proporciona el valor de la derivada per un punt x qualsevol.

La **funció derivada** d'una funció $f'(x)$ es defineix com:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{5}$$

Per exemple, si ens diuen que la funció derivada $f'(x) = 2x$, aleshores tenim una *regla* per trobar tots els pendents que volguem. Si volem el pendent per a $x = 0$; $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$, el pendent per a $x = -3$ $f'(0) = 2 \cdot (-3) = -6$, etc.

Tot i que sempre és possible utilitzar la definició (5), com veurem, serà molt més ràpid i fàcil calcular funcions derivades a partir de les **regles de derivació**.

3. Taula de derivades

A la secció anterior, hem vist que calcular la derivada aplicant directament la definició és un procés és llarg i pesat. No obstant això, existeixen unes regles senzilles (**regles de derivació**) amb les quals es poden calcular les derivades de funcions elementals.

Totes aquestes regles es poden demostrar a partir de la definició, però aquí ens limitarem a donar les regles i entendre com s'apliquen. La taula següent mostra les derivades de les funcions elementals més comuns:

Taula 2: *Taula de derivades*

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = k$ on $k = cte.$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} =$ $= 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$

Vídeo 6.2: *Taula de derivades*
https://www.youtube.com/watch?v=ZJ5xAQt2LYE

Una de les regles de derivació que més utilitzaràs serà derivar una potència. La regla ens diu que si tenim la potència $y = x^{12}$, *l'exponent baixa i restam 1 a l'exponent*. Llavors la derivada és $y' = 12x^{11}$.

Anem a veure dos exemples de com podem aplicar aquesta regla per derivar arrels i inverses de potències.

EXERCICI RESOLT 2

Utilitza la fórmula per la derivada d'una potència per calcular la derivada de l'arrel $y = \sqrt[4]{x^3}$

El que hem de fer és, abans de derivar, passar l'arrel a forma de potència

$$y = \sqrt[4]{x^3} \quad \rightarrow \quad y = x^{\frac{3}{4}}$$

Ara derivam la potència

$$y' = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}$$

Finalment tornam a passar la potència a forma d'arrel

$$y' = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

EXERCICI RESOLT 3

Utilitza la fórmula per la derivada d'una potència per calcular la derivada de $y = \dfrac{1}{x^3}$

El que hem de fer és, abans de derivar, passar la fracció a potència d'exponent negatiu

$$y = \frac{1}{x^3} \quad \rightarrow \quad y = x^{-3}$$

Ara derivam la potència

$$y' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$$

Finalment tornam a passar la potència a forma de fracció

$$y' = \frac{-3}{x^4}$$

4. Regles de derivació

Derivada d'una constant per una funció

La constant es copia sense derivar i es deriva únicament la funció

$$y = k\, f(x) \quad \rightarrow \quad y' = k\, f'(x) \tag{6}$$

Exemples:

$$y = 5\sin x \quad \to \quad y' = 5\cos x$$
$$y = 4x^2 \quad \to \quad y' = 4 \cdot 2x = 8x$$

Derivada d'una suma o diferència

Es deriva cada sumand per separat. Per exemple:

$$y = f(x) \pm g(x) \quad \to \quad y' = f'(x) \pm g'(x) \tag{7}$$

Aquesta regla ens permet calcular la **derivada d'un polinomi**

$$y = x^4 - 3x^2 + 5x - 7 \quad \to \quad y' = 4x^3 - 6x + 5$$

També la podem aplicar a suma o resta de funcions elementals

$$y = 5e^x - 2\ln x \quad \to \quad y' = 5e^x - \frac{2}{x}$$

Derivada d'una funció composta (regla de la cadena)

Si tenim una funció d'una funció, per exemple $\sin(\sqrt{x})$, primer es deriva la funció més externa (el sinus) i es multiplica per la derivada de la funció interna (l'arrel). La regla en general és:

$$y = f(g(x)) \quad \to \quad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{8}$$

Per exemple:

$$y = \sin(\sqrt{x}) \quad \to \quad y' = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$y = \ln(\operatorname{tg} x) \quad \to \quad y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Vídeo 6.3: *Regla de la cadena*
https://www.youtube.com/watch?v=1wW-58AE6TU

Derivada d'un producte

La derivada del producte de dues funcions és igual a la derivada de la primera funció per la segona sense derivar més la primera per la derivada de la segona funció.

$$y = f(x) \cdot g(x) \quad \to \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{9}$$

Exemple:

$$y = x^2 \sin x \quad \to \quad y' = 2x\sin x + x^2\cos x = x(2\sin x + x\cos x)$$

Derivada d'un quocient

La derivada d'un quocient de dues funcions s'obté fent la derivada del numerador pel denominador sense derivar menys el numerador per la derivada del denominador dividit pel denominador al quadrat. La fórmula és:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{10}$$

Exemple:

$$y=\frac{x^2}{x^3-4} \quad \rightarrow \quad y'=\frac{2x\cdot(x^3-4)-x^2\cdot(3x^2)}{(x^3-4)^2}=\frac{-x^4-8x}{(x^3-4)^2}$$

Vídeo 6.4: *Derivades de productes i quocients*
https://www.youtube.com/watch?v=2dIj0KXCj2g

EXERCICI RESOLT 4

Deriva i simplifica les funcions:

a) $y=(x^2+x+1)^3$
b) $y=5\ln(2x+3)$
c) $y=x\cdot\sin x+x^2\cdot 2^x$
d) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+5x}$

a) $y=(x^2+x+1)^3 \rightarrow$ Regla de la cadena $y'=3(x^2+x+1)^2\cdot(2x+1)$

b) $y=5\ln(2x+3) \rightarrow$ Regla de la cadena $y'=5\dfrac{1}{2x+3}\cdot 2$= $\dfrac{10}{2x+3}$.

c) $y=x\cdot\sin x+x^2\cdot 10^x \rightarrow$ Derivada de productes $y'=1\cdot\sin x+x\cdot\cos x+2x\cdot 10^x+x^2\cdot 10^x\ln 10$. Treim factor comú l'exponencial $y'=\sin x+x\cdot\cos x+(2x+x^2\ \ln 10)\cdot 10^x$.

d) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+5x} \rightarrow$ Derivada d'un quocient $y'=\dfrac{2\cdot(x^2+5x)-(2x+3)\cdot(2x+5)}{(x^2+5x)^2}$. Simplificam el numerador expandint els parèntesis: $y'=\dfrac{-2x^2-6x-15}{(x^2+5x)^2}$

EXERCICI RESOLT 5

Deriva i simplifica les funcions:
a) $y = \cos x^2$
b) $y = \mathrm{tg}\,(2x+\pi)$
c) $y = x \cdot e^x$
d) $y = \ln\sqrt{x}$
e) $y = \dfrac{\log x}{x}$
f) $y = \sin x\,\cos x$
g) $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

a) $y = \cos x^2 \to$ Regla de la cadena $y' = (-\sin x^2)\cdot 2x = -2x\sin x^2$

b) $y = \mathrm{tg}\,(2x+\pi) \to$ Regla de la cadena $y' = (1+\mathrm{tg}^2(2x+\pi))\cdot 2$. Recorda que π és una constant i la seva derivada és zero.

c) $y = x\cdot e^x \to$ Derivada d'un producte $y' = 1\cdot e^x + x\cdot e^x$. Treim factor comú $y' = (1+x)\cdot e^x$.

d) $y = \ln\sqrt{x} \to$ Regla de la cadena $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Simplificam la fracció $y' = \dfrac{1}{2x}$.

e) $y = \dfrac{\log x}{x} \to$ Derivada d'un quocient $y' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot x - \log x\cdot 1}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{\ln 10} - \log x}{x^2}$.

f) $y = \sin x\cos x \to$ Derivada d'un producte $y' = \cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

g) $y = \dfrac{\cos x}{\sin x} \to$ Derivada d'un quocient $y' = \dfrac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$. En la darrera passa hem emprat la relació fonamental de la trigonometria $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

EXERCICIS PROPOSATS

1. Calculau la funció derivada de les funcions seguents. Simplifiqueu la resposta quan sigui possible.

a) $y = 3\sqrt{x} + 7x^2 - 2\cos x$

b) $y = \sqrt{7x^3 - 2x + 5}$

c) $y = 5\,e^{-x^2+1}$

d) $y = x^2 \cdot \operatorname{arctg} x$

e) $y = \cos x \cdot \ln(2x+1)$

f) $y = \dfrac{2x^2 - 4}{x^3 + x}$

g) $y = \dfrac{3\ln x}{x^2}$

h) $y = \dfrac{4}{x^3}$

i) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[5]{x^2}}$

5. Aplicacions de les derivades

Monotonia i extrems

Quan parlam de **monotonia** ens referim a si la funció **creix o decreix**. Els **extrems** d'una funció són els seus **màxims i mínims**. Si pensem amb la serra de Tramuntana com una gràfica, deim que una funció té un **màxim relatiu** si la gràfica mostra un cim en aquell punt. En canvi, hi haurà un **mínim relatiu** si la gràfica té una vall.

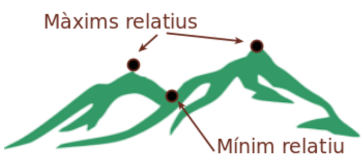


Figura 6: Significat dels màxims i mínims relatius.

La primera derivada d'una funció ens serveix per saber si és creixent o decreixent, així com determinar els seus màxims i mínims relatius.

Derivada positiva Si $f'(x) > 0$	La funció és creixent
Derivada negativa Si $f'(x) < 0$	La funció és decreixent

Si la funció té un extrem (màxim o mínim)	es compleix $f'(x) = 0$ Atenció! El contrari no té perquè ésser cert. La condició $f'(x) = 0$ no ens assegura que hi hagi un extrem.

Les solucions de l'equació $f'(x) = 0$ s'anomenen **punts crítics** i són possibles màxims o mínims. El següent exemple mostra el procediment per calcular els extrems d'una funció.

EXERCICI RESOLT 6

Troba els extrems de $y = x^3 - 3x^2$	Calculam la derivada $y' = 3x^2 - 6x$. Resolem l'equació $3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$ i $x = 2$ són els punts singulars. Per saber si aquests punts són màxims o mínims estudiam el creixement/decreixement. Per això calculam el signe de f'  La funció és creixent a $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ i decreixent a $(0, 2)$. Té un màxim relatiu al punt $x = 0; y = 0)$ i un mínim relatiu a $x = 2; y = -4$.

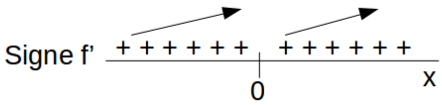
És important remarcar que la condició $f'(x) = 0$ assegura que el pendent de la recta tangent és zero (la recta tangent és horitzontal), però no podem concloure que hi hagi un extrem en aquell punt. Vegem-ho amb un exemple senzill

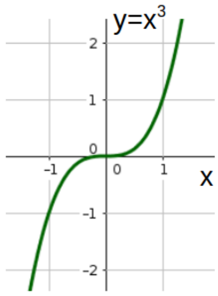
EXERCICI RESOLT 7

Estudiau la monotonia i extrems de $y = x^3$

Seguim el mateix procediment de sempre.

1. Calculam la derivada $y' = 3x^2$
2. Igualam a zero la derivada i resolem $3x^2 = 0 \to x = 0$
3. Dibuixam les solucions sobre la recta real i estudiam el signe de la derivada





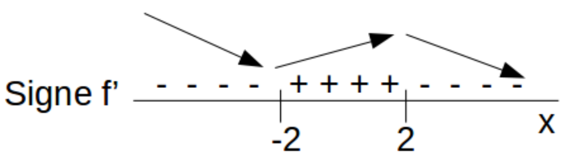
Com que la derivada sempre és positiva o zero, la funció sempre creix i per tant no té extrems. Es diu que a $x = 0$ té un **punt d'inflexió**. Aquest aspecte s'estudiarà amb més detall en el proper curs.

EXERCICI RESOLT 8

Estudiau la monotonia i extrems de $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$

Seguim el mateix procediment.

1. Calculam la derivada $y' = \dfrac{1 \cdot (x^2 - 5x + 4) - x \cdot (2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2}$
2. Simplificam el numerador $y' = \dfrac{-x^2 + 4}{(x^2 - 5x + 4)^2}$
3. Igualam a zero la derivada. Perquè una fracció sigui igual a zero, el numerador ha d'ésser igual a zero. $-x^2 + 4 = 0$.
4. Resolem l'equació $-x^2 + 4 = 0 \to x = \pm 2$
5. Dibuixam les solucions sobre la recta real i estudiam el signe de la derivada



La funció decreix $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ i creix $(-2, 2)$. Té un mínim relatiu a $x = -2$ i un màxim a $x = 2$.

Càlcul de la recta tangent

La recta tangent a una corba $y = f(x)$ en el punt $x = a$, ha de passar pel punt $(a,\ f(a))$ i ha de tenir com a pendent $m = f'(a)$. Aleshores, si escrivim l'equació punt-pendent de la recta obtenim

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \tag{11}$$

EXERCICI RESOLT 9

Calcula l'equació de la recta tangent a la funció $y = x^3 - 3x$ en el punt $x = 2$.	Primer cercam el punt per on passa la recta. $x = 2$, $y = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$. El pendent de la recta en $x = 2$ és $m = f'(2)$. Calculam la derivada de la funció $f'(x) = 3x^2 - 3$ i calculam el seu valor a $x = 2$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$. Escrivim l'equació punt-pendent $y - 2 = 9(x - 2)$ i simplificant trobam l'equació de le recta tangent que ens demanen $y = 9x - 16$.

EXERCICIS PROPOSATS

2. Calcula els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims relatius de les funcions:
a) $y = 3x^5 - 5x^3$
b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$
c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$

3. Calcula l'equació de la recta tangent a les següents funcions en el punt on s'indica. Representa gràficament la funció i la recta tangent.
a) $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 1$
b) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$

6. Representació gràfica de funcions

Propietats globals d'una funció

Per representar funcions primer feim un estudi de les seves propietats. Una vegada que hem recopilat tota la informació, la darrera passa consisteix en fer una gràfica.

La taula següent resumeix totes les propietats que podem estudiar. No vol dir que s'hagin de calcular totes; algunes són més útils que les altres. L'objectiu d'aquesta secció és aprendre a representar gràficament **funcions polinòmiques i racionals**. En cada cas, s'explicarà quines de les propietats són més importants.

Taula 4: *Taula resum per a la representació de corbes y=f(x)*

1. **Domini**, $Dom\ f$	Conjunt de valors de x pels quals hi ha gràfica.

2. **Continuïtat**, $Dom\, f$	Valors del $Dom\, f$ on és contínua.
3. **Simetries** f parell $\rightarrow$ Simetria respecte l'eix OY f senar $\rightarrow$ Simetria respecte l'origen	Si $f(-x) = f(x)$ té simetria parell Si $f(-x) = -f(x)$ té simetria senar
4. **Asímptotes i branques**	Verticals: $x = a$, quan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ Horitzontals: $y = n$, si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = n$ Obliqües: $y = mx + n$ Calculam la posició relativa de la corba respecte les asímptotes.
5. **Punts de tall amb els eixos** Eix OX Eix OY Regions o signe	Solucions de $f(x) = 0$. Pot haver-hi 0, 1 o uns quants Punt $(0, f(0))$. Pot haver-hi 0 o 1 $f(x) < 0$, $f(x) > 0$
6. **Màxims i mínims relatius** **Creixement i decreixement**	Punts crítics. Resolem $f'(x) = 0$ $f'(a) < 0 \rightarrow f$ decreixent en $x = a$ $f'(a) > 0 \rightarrow f$ creixent en $x = a$
7. **Gràfica**	Construïm la gràfica a partir de la informació anterior

Simetries

En els casos que la funció sigui simètrica també ens simplifica la representació. Recordem que existeixen dos tipus de simetria. La simetria parell o mirall i la senar o respecte de l'origen.

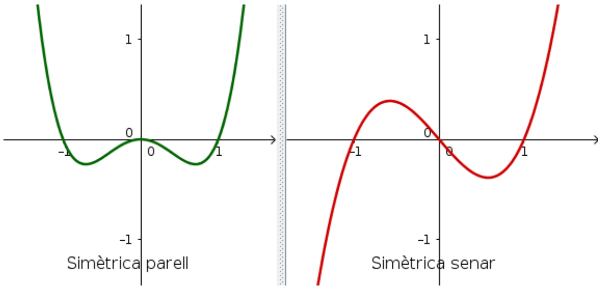


Figura 7: Funcions simètriques parell i senar

Per saber si una funció és simètrica, canviam $x \to -x$ a l'expressió de la funció. Si l'expressió queda inalterada, $f(-x) = f(x)$, aleshores la funció és simètrica parell. Si l'expressió és la mateixa però queda afectada per un signe menys global, la funció és simètrica senar $f(-x) = -f(x)$. En qualsevol altre cas, la funció no presenta simetries.

EXERCICI RESOLT 10

Estudia les simetries de les funcions

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

b) $f(x) = x^3 + 3x$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

a) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$ és simètrica parell.

b) $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -(x^3 + 3x) = -f(x)$ és simètrica senar.

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{-x+1} = \dfrac{x^2}{-x+1}$ és diferent a la funció i a menys la funció. No presenta simetries.

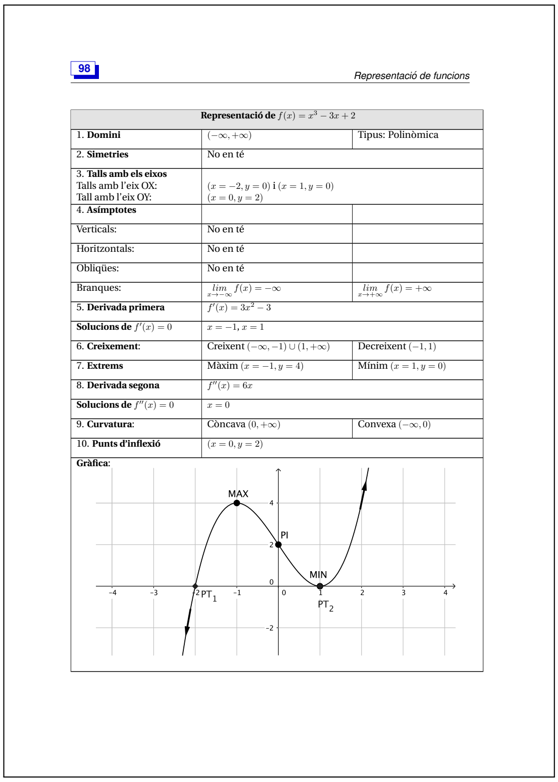
d) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3}{x^2+1} = -f(x)$ és simètrica senar.

Funcions polinòmiques

A l'hora de representar funcions polinòmiques és important calcular els punts de talls amb els eixos i els màxims i mínims relatius. Amb aquesta informació es pot construir perfectament la gràfica.

Vídeo 6.5: *Representació de funcions polinòmiques*
https://www.youtube.com/watch?v=gUUFJS_njjw

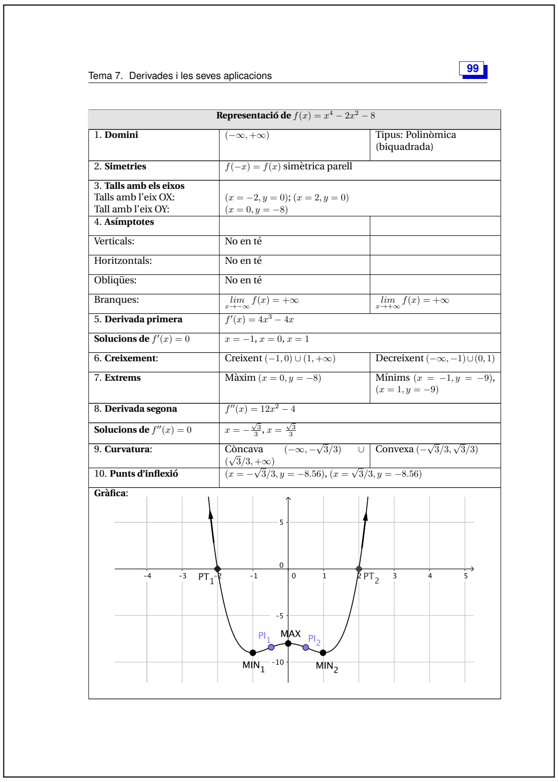
A continuació donam dos exemples de representació de funcions polinòmiques:



98 *Representació de funcions*

Representació de $f(x)=x^3-3x+2$		
1. **Domini**	$(-\infty,+\infty)$	Tipus: Polinòmica
2. **Simetries**	No en té	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x=-2,y=0)$ i $(x=1,y=0)$ $(x=0,y=2)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	No en té	
Branques:	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
5. **Derivada primera**	$f'(x)=3x^2-3$	
Solucions de $f'(x)=0$	$x=-1, x=1$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$	Decreixent $(-1,1)$
7. **Extrems**	Màxim $(x=-1,y=4)$	Mínim $(x=1,y=0)$
8. **Derivada segona**	$f''(x)=6x$	
Solucions de $f''(x)=0$	$x=0$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(0,+\infty)$	Convexa $(-\infty,0)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x=0,y=2)$	

Gràfica:



Tema 7. Derivades i les seves aplicacions 99

Representació de $f(x)=x^4-2x^2-8$		
1. **Domini**	$(-\infty,+\infty)$	Tipus: Polinòmica (biquadrada)
2. **Simetries**	$f(-x)=f(x)$ simètrica parell	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x=-2,y=0)$; $(x=2,y=0)$ $(x=0,y=-8)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	No en té	
Branques:	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
5. **Derivada primera**	$f'(x)=4x^3-4x$	
Solucions de $f'(x)=0$	$x=-1, x=0, x=1$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-1,0)\cup(1,+\infty)$	Decreixent $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
7. **Extrems**	Màxim $(x=0,y=-8)$	Mínims $(x=-1,y=-9)$, $(x=1,y=-9)$
8. **Derivada segona**	$f''(x)=12x^2-4$	
Solucions de $f''(x)=0$	$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}, x=\frac{\sqrt{3}}{3}$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(-\infty,-\sqrt{3}/3)\cup(\sqrt{3}/3,+\infty)$	Convexa $(-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x=-\sqrt{3}/3,y=-8.56)$, $(x=\sqrt{3}/3,y=-8.56)$	

Gràfica:

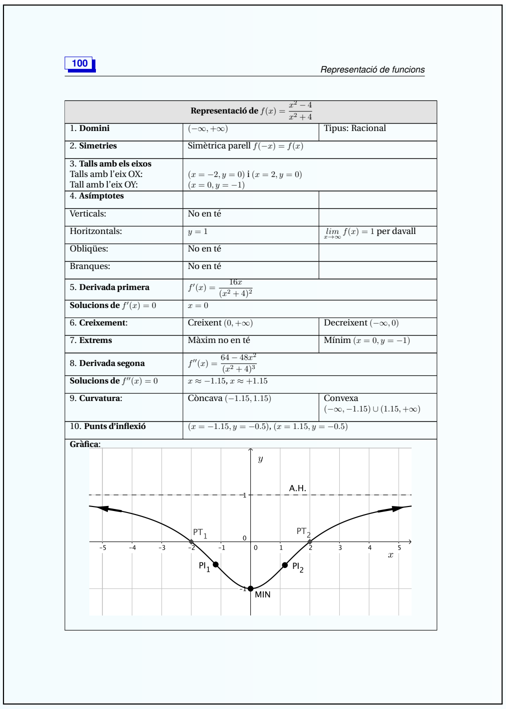
AMPLIACIÓ

Funcions racionals

A l'hora de representar funcions racionals és important calcular, a més dels mateixos apartats que les polinòmiques, les asímptotes verticals i horitzontals en cas que en tingui. Moltes vegades, simplement amb el càlcul d'asímptotes tenim la major part de la gràfica completa. La resta d'informació ens ho donarà la derivada amb la posició dels extrems.

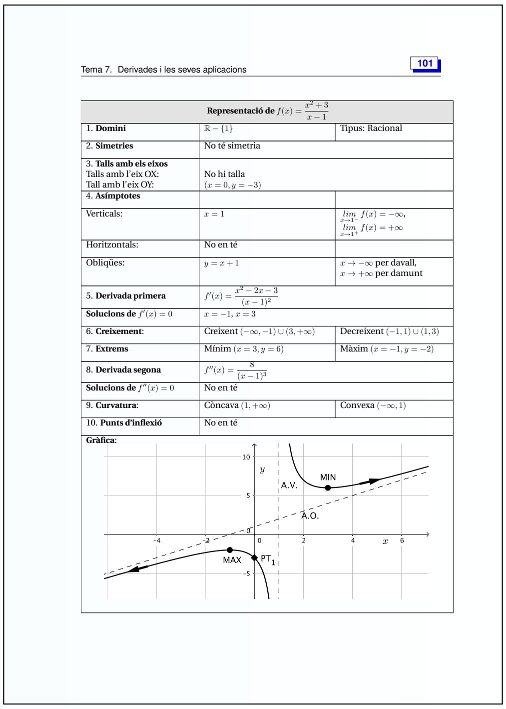
Vídeo 6.6: Representació de funcions racionals
https://www.youtube.com/watch?v=KtoD6ZFwwLM

A continuació donam dos exemples de representació de funcions racionals:



Representació de $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$		
1. **Domini**	$(-\infty,+\infty)$	Tipus: Racional
2. **Simetries**	Simètrica parell $f(-x)=f(x)$	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x=-2,y=0)$ i $(x=2,y=0)$ $(x=0,y=-1)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	$y=1$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ per davall
Obliqües:	No en té	
Branques:	No en té	
5. **Derivada primera**	$f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$	
Solucions de $f'(x)=0$	$x=0$	
6. **Creixement**:	Creixent $(0,+\infty)$	Decreixent $(-\infty,0)$
7. **Extrems**	Màxim no en té	Mínim $(x=0,y=-1)$
8. **Derivada segona**	$f''(x)=\frac{64-48x^2}{(x^2+4)^3}$	
Solucions de $f''(x)=0$	$x\approx-1.15$, $x\approx+1.15$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(-1.15,1.15)$	Convexa $(-\infty,-1.15)\cup(1.15,+\infty)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x=-1.15,y=-0.5)$, $(x=1.15,y=-0.5)$	

Gràfica:



Representació de $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$		
1. **Domini**	$\mathbb{R}-\{1\}$	Tipus: Racional
2. **Simetries**	No té simetria	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 No hi talla $(x=0,y=-3)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	$x=1$	$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	$y=x+1$	$x\to-\infty$ per davall, $x\to+\infty$ per damunt
5. **Derivada primera**	$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$	
Solucions de $f'(x)=0$	$x=-1$, $x=3$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$	Decreixent $(-1,1)\cup(1,3)$
7. **Extrems**	Mínim $(x=3,y=6)$	Màxim $(x=-1,y=-2)$
8. **Derivada segona**	$f''(x)=\frac{8}{(x-1)^3}$	
Solucions de $f''(x)=0$	No en té	
9. **Curvatura**:	Còncava $(1,+\infty)$	Convexa $(-\infty,1)$
10. **Punts d'inflexió**	No en té	

Gràfica:

EXERCICIS PROPOSATS

4. Calcula els punts de tall amb els eixos, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius i els límits de la funció quan $x\to+\infty$ i $x\to-\infty$ Amb aquesta informació representa gràficament la funció $y=x^3-6x^2+9x$

5. Calcula els punts de tall amb els eixos, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius i els límits de la funció quan $x\to+\infty$ i $x\to-\infty$ Amb aquesta informació representa gràficament la funció $y=x^4-5x^2+4$