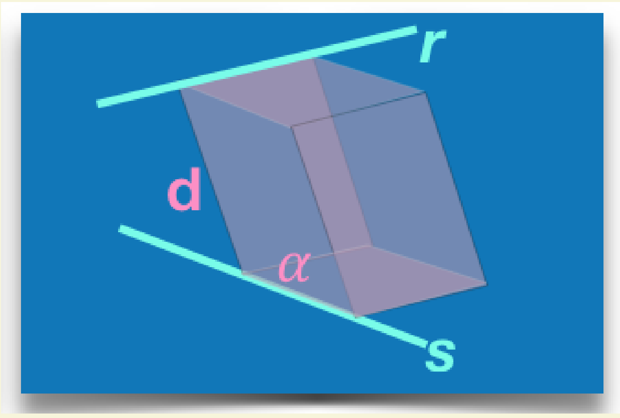
Lliurament 4:
Geometria a l'espai: Distàncies i angles

Matemàtiques II

Josep Mulet Pol
Àmbit científic
IEDIB



IEDIB

https://iedib.net/

Índex

1. Angles entre rectes i plans

En el lliurament anterior varem estudiar les equacions de rectes i plans, i de la forma en què poden estar col·locats aquests objectes. Tots aquests aspectes –paral·lelisme, talls i incidència– són propietats *afins* . Aquest tema tractarà sobre relacions on hi intervenen mesures –angles, distàncies, àrees i volums–, les quals es coneixen com propietats *mètriques* .

Per a les mesures d'angles utilitzarem la fórmula que vàrem deduir (en el lliurament 3) del producte escalar de dos vectors

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \tag{1}$$

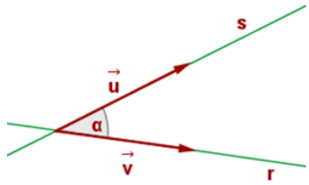
que ens donarà l'angle que formen els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Per caracteritzar una recta prendrem el seu vector director $\vec{d}$ i per descriure un pla treballarem amb el seu vector normal $\vec{n}$.

Angle entre dues rectes

Necessitam saber els vectors directors de cada recta $\vec{d}_r$ i $\vec{d}_s$

$$\cos\alpha = \frac{vabs(\vec{d_r}\cdot\vec{d_s})}{|\vec{d_r}|\,|\vec{d_s}|} \qquad (2)$$

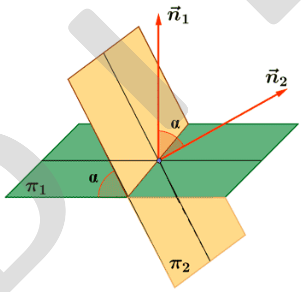


Notau que la notació $vabs(...)$ indica el valor absolut d'un nombre. D'aquesta forma no es confon amb el símbol del mòdul d'un vector $|\cdots|$. Escrivim el valor absolut perquè ens interessa el menor angle (agut) que formen les rectes.

Angle entre dos plans

Necessitam saber els vectors normals de cada pla $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$. Recorda que si tenim l'equació general d'un pla $Ax+By+Cz+D=0$, el vector normal s'obté dels coeficients $\vec{n}=(A,B,C)$

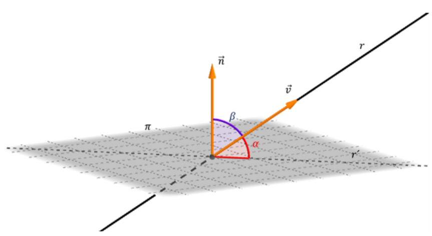
$$\cos\alpha = \frac{vabs(\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} \qquad (3)$$



Angle entre un pla i una recta

Si el vector director de la recta és $\vec{d}$ i el vector normal del pla és $\vec{n}$, l'angle entre el pla i recta és

$$\cos\beta = \frac{vabs(\vec{d}\cdot\vec{n})}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} \qquad (4)$$



De l'angle que obtenim de l'arccosinus, necessitam fer-ne el complementari

$\alpha = 90 - \beta$.

Vídeo 4.1: *Angle entre plans i rectes*
https://www.youtube.com/watch?v=CFbPqlMDKaM

Exemple 1

Troba l'angle determinat per les rectes $r: \left.\begin{array}{c} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right\}$ i $s: \dfrac{x+3}{5} = y - 1 = \dfrac{z+2}{-1}$.

De les equacions deduïm fàcilment que els vectors directors de r i s són, respectivament: $\vec{u} = (-1, 3, 2)$ i $\vec{v} = (5, 1, -1)$. Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{27} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 3, 2) \cdot (5, 1, -1) = -5 + 3 - 2 = -4 \\ \quad \Rightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = |-4| = 4 \end{array}\right\} \tag{5}$$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{27}} = \dfrac{4}{\sqrt{378}}$

d'aquí $\alpha(r, s) = \arccos\left(\dfrac{4}{\sqrt{378}}\right) = 78°$

Exemple 2

La trajectòria d'una bala ve donada per $r:\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$. La bala incideix sobre la superfície plana $\pi:\ \ 2x-5y+7z-11=0$. Amb quin angle hi incideix?

El vector director de la recta $\vec{d}=(2,5,-1)$ i el normal del pla $\vec{n}=(2,-5,7)$.

El seu producte escalar: $\vec{d}\cdot\vec{n}=-28$
Els seus mòduls $|\vec{d}|=\sqrt{30}$ i $|\vec{n}|=\sqrt{78}$

$$\cos\beta=\frac{|-28|}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{78}}=0,5788 \tag{6}$$

d'aquí $\beta=\arccos 0,5788=55°$. L'angle real és $\alpha=90°-55°=35°$

Exercicis

1. Calcula l'angle que formen les rectes $r: \begin{cases} x &= 2-t \\ y &= -3t \\ z &= -1+4t \end{cases}$ i $s: \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2y+z+1 &= 0 \end{cases}$

2. Dues façanes d'un edifici estan descrites pels plans $\pi_1 : (x,y,z) = (2,1,0) + \lambda(1,0,1) + \mu(-1,1,0)$ i $\pi_2 : 4x - z + 1 = 0$. Calcula l'angle que formen.

2. Distància entre dos punts

La distància entre dos punts $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$ en l'espai és el mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \tag{7}$$

Exemple 3

Un ocell vola entre els punts $A = (2,1,-1)$ i $B = (-1,-2,2)$. Calcula la distància mínima recorreguda.

Trobem el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1-2, -2-1, 2-(-1)) = (-3,-3,3) \tag{8}$$

I finalment el seu mòdul

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \tag{9}$$

Exemple 4

Considera dues torres de telecomunicacions situades en els punts $A(2,1,-1)$ i $B(-1,-2,2)$. Determina les coordenades dels punts que equidisten de les dues torres. Justifica quin tipus de lloc geomètric formen aquests punts.
Equidisten = trobar-se a igual distància.

Anomenam els punts de la forma $P=(x,y,z)$. Hem d'imposar que $d(A,P) = d(B,P)$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2} \tag{10}$$

Elevem al quadrat, operem i simplificam, amb el que obtenim $6x+6y-6z+1=0$.

La solució és l'equació d'un pla. S'anomena el pla mediatriu d'un segment i és el lloc geomètric dels punts que equidisten de dos punts donats.

Exercicis

3. Considera el conjunt de punts de la forma $P = (2 - a, 1, a)$ on a és un nombre enter qualsevol. Podem afirmar que els punts formen una recta? Quina és la mínima distància entre dos punts d'aquest conjunt?

3. Distància entre un punt i una recta

La distància d'un punt P a una recta r es defineix com la menor de les distàncies $d(P, R)$ essent R un punt qualssevol de la recta r.

Existeixen diferents mètodes per calcular la distància:

Mètode constructiu

La distància d'un punt P a una recta r és la distància del punt P a la seva projecció ortogonal (M) sobre aquesta recta.

1. Hem de començar trobant la projecció del punt sobre la recta, el punt M.

   a) Determinem el pla π perpendicular a r que conté a P.

   b) Obtenim el punt M, intersecció de π i r.

2. Calculem la distància de P a M, que és el mòdul del vector $d(P, r) = |\overrightarrow{PM}|$.

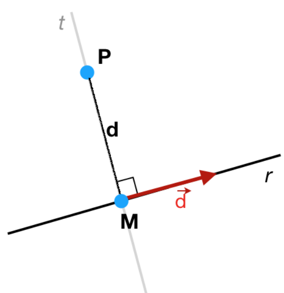


Figura 1: Distància punt-recta amb el mètode constructiu

Mètode del producte vectorial

La segona opció és aprofitar el que sabem de vectors. Aquest mètode ens allibera d'haver de calcular el punt M.

De l'equació de la recta podem obtenir un punt qualsevol d'aquesta, R, i el seu vector director, $\vec{d}$.

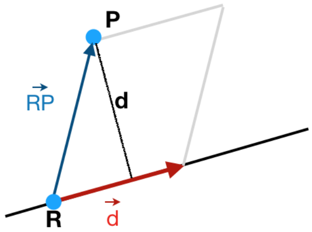


Figura 2: Distància entre punt-recta amb el producte vectorial.

De la figura, deduïm que la distancia d és l'altura del paral·lelogram format pels vectors $\vec{d}$ i $\overrightarrow{RP}$. La fórmula de l'àrea d'un paral·lelogram és $A = base \cdot h$, de la qual podem aïllar l'altura $h = \dfrac{A}{base}$. Recordem que l'àrea del paral·lelogram és igual el mòdul del producte vectorial format pels dos vectors. Trobam una fórmula compacta per calcular la distància:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{RP}|}{|\vec{d}|} \tag{11}$$

Vídeo 4.2: *Distància d'un punt a una recta*
https://www.youtube.com/watch?v=ibi0imntGVs

Exemple 5

Calcula la distància del punt $P = (0, 1, 3)$ a la recta $r : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Passam la recta r a forma paramètrica. Anomenant $z = t$, de la segona equació $y = -t$. Ho introduïm a la primera $x = 1 + 2y = 1 - 2t$

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \tag{12}$$

D'aquí podem extreure un punt $R(1, 0, 0)$ i un vector director $\vec{d}(-2, -1, 1)$. Ens construïm el vector $\overrightarrow{RP} = (-1, 1, 3)$ i calculam el producte vectorial $\vec{d} \times \overrightarrow{RP} = (-4, 5, -3)$.
Tot seguit calculam els mòduls $|\vec{d} \times \overrightarrow{RP}| = \sqrt{50}$ i $|\vec{d}| = \sqrt{6}$. Finalment, la distància entre el punt i la recta és

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} \approx 2,89 \tag{13}$$

Exemple 6

Calcula la distància del punt $P = (0, 1, 3)$ a la recta $r : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Utilitza el mètode constructiu cercant el punt M de la projecció ortogonal.

Passam la recta r a forma paramètrica (vegeu exemple anterior):

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \tag{14}$$

D'aquí podem extreure un punt $R(1, 0, 0)$ i un vector director $\vec{d}(-2, -1, 1)$.
Cercam el pla que és perpendicular a r i passa per $P \Rightarrow -2x - y + z + D = 0$. Si substituïm el punt P, trobam que $D = -2$.

Cercam el punt de tall de la recta amb el pla. Per això substituïm les paramètriques de la recta dins l'equació del pla

$$-2(1 - 2t) - (-t) + t - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3} \tag{15}$$

El punt de la projecció s'obté de substituir t dins la recta $M = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
Finalment la distància entre els dos punts és

$$\begin{aligned} & d(P, r) = d(P, M) = \\ & \sqrt{(-\tfrac{1}{3})^2 + (-\tfrac{2}{3} - 1)^2 + (\tfrac{2}{3} - 3)^2} = \sqrt{\frac{25}{3}} \approx 2,89 \end{aligned} \tag{16}$$

Exercicis

4. Donat el punt $P = (0, -4, -9)$ i la recta $r : \dfrac{x+9}{-1} = \dfrac{y+7}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$

a) Calculau l'equació del pla que passa per i és perpendicular a la recta r.

b) Calculau el punt d'intersecció Q del pla anterior amb la recta r.

c) Calculau la distància entre els punts P i Q.

d) Comprovau que obteniu la mateixa distància amb la fórmula $d(P,r) = \dfrac{|\vec{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$ on R és un punt qualsevol de la recta.

4. Distància entre un punt i un pla

La distància d'un punt P a un pla π es defineix com la menor de les distàncies $d(P,Q)$ essent Q un punt del pla.

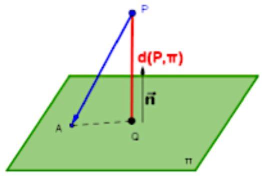


Figura 3: Distància entre un punt i un pla

Tenim dues formes per calcular la distància

Mètode constructiu

La distància d'un punt P a un pla és la distància del punt P a la seva projecció ortogonal sobre dit pla.

1. Trobam la recta r que passa per P i que és perpendicular a π
2. Trobam el punt Q com la intersecció de la recta amb el pla
3. Cercam $d(P,Q)$

Amb una fórmula

Podem estalviar-nos el procés de calcular M perquè existeix una fórmula comodíssima per trobar la distància d'un punt a un pla

Si sabem un punt A quasevol del pla i el seu vector normal $\vec{n}$, tenim

$$d(P,\pi) = \frac{vabs(\vec{PA} \cdot \vec{n})}{|\vec{n}|} \qquad (17)$$

Si el punt és $P(x_0, y_0, x_0)$ i el pla té equació $Ax + By + Cz + D = 0$, la fórmula anterior equival a

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{18}$$

Important: Per utilitzar la fórmula [18], l'equació general del pla ha d'estar igualada a zero. En canvi, la fórmula [17] és més general perquè serveix per a qualsevol forma en què ens donin el pla.

Vídeo 4.3: *Distància d'un punt a un pla.*
https://www.youtube.com/watch?v=Fvf97iBHvQQ

Exemple 7

Un dron es troba volant en el punt $P = (0, 1, 3)$ per sobre una façana d'un edifici descrita pel pla $\pi: \ x - y - 2z + 3 = 0.$. A quina distància es troba el dron de la façana?

Facem el càlcul ràpidament amb la fórmula

$$d(P,\pi) = \frac{|0 - 1 - 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \approx 1,63 \tag{19}$$

Exemple 8

Calcula la distància del punt $P = (0, 1, 3)$ al pla $\pi :\ x - y - 2z + 3 = 0$. Utilitza el mètode constructiu cercant el peu de la projecció M.

El pla té vector normal $\vec{n} = (1, -1, -2)$. Calculam la recta que té aquest vector director i passa per P

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \tag{20}$$

Cercam la intersecció de r amb π

$$t - (1 - t) - 2(3 - 2t) + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3} \tag{21}$$

El punt M es troba de substituir t dins les equacions paramètriques de la recta $M = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.

Finalment la distància entre el punt i el pla

$$\begin{gathered} d(P, \pi) = d(P, M) = \\ \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{1}{3} - 1)^2 + (\tfrac{5}{3} - 3)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1,63 \end{gathered} \tag{22}$$

Exercicis

5. Considerau el pla $\pi :\ 2x - y + z - 3 = 0$ i el punt $P = (7, -6, 1)$

a) Determinau el punt Q del pla π que es troba a menor distància del punt P

b) Calculau la distància $d(P, Q)$

c) Comprovau que obteniu el mateix resultat si aplicau la fórmula (18) per calcular la distància entre un punt i un pla.

5. Distància entre pla-pla i recta-pla

Distància pla-pla

Donats dos plans π i σ, es poden donar els següents casos:

- Si els plans són coincidents o secants: la distància és zero.
- Si els plans són paral·lels: la distància entre ells serà la distància entre un punt qualsevol d'un dels plans a l'altre pla. Utilitzarem la fórmula de l'apartat anterior.

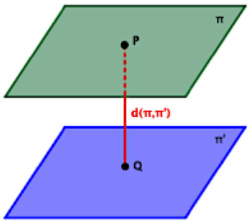


Figura 4: Distància entre dos plans

Exemple 9

Calcula la distància entre els plans $\pi: \; x-y-2z+3=0$ i $\sigma: \; -3x+3y+6z-1=0$.

En primer lloc comprovam que els dos plans són paral·lels. El vectors normals de cada pla $\vec{n}_\pi(1,-1,-2)$ i $\vec{n}_\sigma(-3,3,6)$ són proporcionals, i aleshores, paral·lels.

Prenem un punt qualsevol del pla π, per exemple $Q=(0,3,0)$ i cercam la distància d'aquest punt a l'altre pla:

$$d(\pi,\sigma)=d(Q,\sigma)=\frac{|0+3\cdot 3+0-1|}{\sqrt{(-3)^2+3^2+6^2}}=\frac{8}{\sqrt{54}}\approx 1,09 \qquad (23)$$

Distància recta-pla

Donada una recta r i un pla π, es poden presentar els següents casos:

- Si la recta i el pla tenen algun punt en comú (secants o coincidents: la distància és zero.
- Si la recta i el pla són paral·lels: la distància entre ells serà la distància entre un punt qualsevol de la recta i el pla.

Recorda: La condició que una recta sigui paral·lela a un pla és $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$

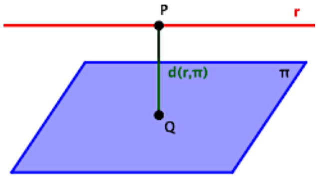


Figura 5: Distància entre una recta i un pla

Vídeo 4.4: *Distància entre pla-pla recta-pla*
https://www.youtube.com/watch?v=a3XBA01-zaU

Exemple 10

Calcula la distància entre la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}$ i el pla $\pi: \ 2x+y-z+3 = 0$.

El vector normal del pla $\vec{n}_\pi(2,1,-1)$ i el director de la recta $\vec{d}(1,-1,3)$ compleixen $(2,1,-1)\cdot(1,-1,3) = -2 \neq 0$, i aleshores, la recta i el pla són secants. La distància és $d(r,\pi) = 0$.

Exemple 11

Calcula la distància entre la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{3}$ i el pla $\pi: \ 2x+y-z+3 = 0$.

El vector normal del pla $\vec{n}_\pi(2,1,-1)$ i el director de la recta $\vec{d}(1,1,3)$ compleixen $(2,1,-1)\cdot(1,1,3) = 0$, i aleshores, la recta i el pla són paral·lels.
Cercam un punt de la recta $R = (1,-2,0)$ i cercam la distància d'aquest punt al pla

$$d(r,\pi) = d(R,\pi) = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 0 + 3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \approx 1,22 \tag{24}$$

6. Distància entre dues rectes

La distància entre dues rectes r i s es defineix com la menor de les distàncies $d(R, S)$, essent R i S un punt de cada recta.

Donades dues rectes r i s, es poden presentar els següents casos:

- Si les rectes són **coincidents o secants** : la distància és zero.
- Si les rectes **són paral·leles** : la distància entre elles serà la distància d'un punt de qualsevol de les rectes a l'altra recta.
- Si les rectes **es creuen** : la distància entre elles serà la distància d'una d'elles al pla paral·lel a ella que conté a l'altra recta.

Com veim, és important fer una anàlisi de les posicions relatives de les rectes abans de calcular la distància entre elles. Recordem que aquest estudi pot realitzar-se analitzant els vectors directors i els punts d'ambdues rectes.

Donades dues rectes r i s, siguin els punts R i S, i siguin, a més, $\vec{d_r}$ un vector director de r i $\vec{d_s}$ un vector director de s. Llavors, trobant el vector $\overrightarrow{RS}$:

- Si $det(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}) \neq 0$ les rectes r i s **es creuen**
- Si $det(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}) = 0$ i $\vec{d_r}, \vec{d_s}$ independents les rectes r i s **es tallen**
- Si $\vec{d_r}, \vec{d_s}$ dependents i $R \notin s$ les rectes r i s són **paral·leles**
- Si $\vec{d_r}, \vec{d_s}$ dependents i $R \in s$ les rectes r i s són **coincidents**

Llavors, una vegada que hem comprovat les posicions relatives de les rectes, procedim segons l'explicat:

Si les rectes són paral·leles trobem la distància amb la fórmula *Punt-Recta*

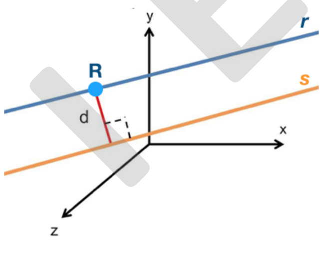


Figura 6: Distància entre rectes paral·leles.

$$r//s \quad d(r, s) = d(R, s) = \frac{|\overrightarrow{RS} \times \vec{d_s}|}{|\vec{d_s}|} \tag{25}$$

Distància entre dues rectes que es creuen

Si les rectes es creuen podem calcula la distància de dues formes diferents:

- **Mètode del pla paral·lel:**

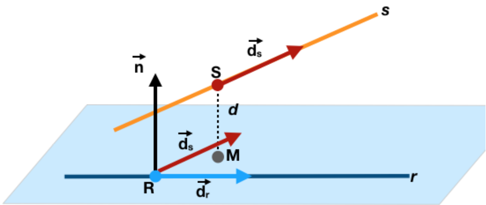


Figura 7: Distància entre rectes que es creuen. Mètode del pla paral·lel.

- Cercam un pla paral·lel a s que contengui la recta r

- Cercam la distància d'un punt qualsevol de la recta s al pla anterior.

- **Mètode del producte mixt:**

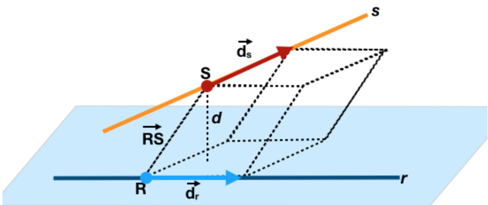


Figura 8: Distància entre rectes que es creuen. Mètode del producte mixt.

El volum del paral·lelepípede és $V = A_{base} \cdot h$. Si aïllam l'altura $h = \dfrac{V}{A_{base}}$. L'altura correspon a la distància entre les dues rectes. El volum és igual al valor absolut del determinant format pels vectors $\overrightarrow{RS}, \vec{d_r}, \vec{d_s}$ mentre que l'àrea de la base és l'àrea del paral·lelogram format pels vectors $\vec{d_r}, \vec{d_s}$. Amb això, la fórmula per calcular la distància entre dues rectes que es creuen és:

$$\text{Si r i s es creuen} \quad d(r,s) = \frac{vabs(det(\overrightarrow{RS}, \vec{d_r}, \vec{d_s}))}{|\vec{d_r} \times \vec{d_s}|} \tag{26}$$

Vídeo 4.5: *Distància entre dues rectes*
https://www.youtube.com/watch?v=TimuQmbUDSY

Exemple 12

Calcula la distància entre les rectes $r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$ i $s: \begin{cases} x = 4 + 3\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = 5 + 4\mu \end{cases}$.

Mètode del pla paral·lel

Volem construir un pla que contingui la recta r i sigui paral·lel a la recta s.

El vectors directors de les rectes són $\vec{d_r}(1, 0, 2)$ i $\vec{d_s}(3, -1, 4)$. Un vector perpendicular a aquests dos és $\vec{n} = \vec{d_r} \times \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (2, 2, -1)$. Aquest és el vector normal del pla π.

$$\pi: \quad 2x + 2y - z + D = 0 \tag{27}$$

Per trobar D substituïm el punt $R(5, -1, 8)$ de la recta $r \Rightarrow \pi: \quad 2x + 2y - z = 0$

Cercam la distància d'un punt $S(4, 3, 5)$ de la recta s al pla π

$$d(r, s) = d(S, \pi) = \frac{|2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{3} = 3 \tag{28}$$

Mètode del producte mixt

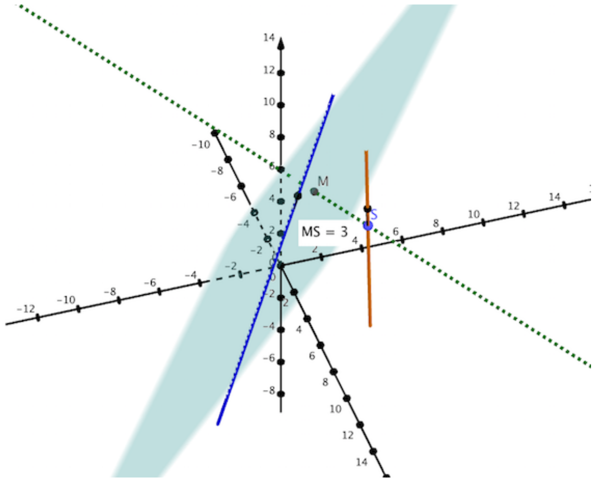
Utilitzam la fórmula $d(r, s) = \dfrac{|det(\overrightarrow{RS}, \vec{d_r}, \vec{d_s})|}{|\vec{d_r} \times \vec{d_s}|}$.

Cercam $\overrightarrow{RS} = (4, 3, 5) - (5, -1, 8) = (-1, 4, -3)$. Calculam

$$det(\overrightarrow{RS}, \vec{d_r}, \vec{d_s}) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \tag{29}$$

Calculam també el producte vectorial $\vec{d_r} \times \vec{d_s} = (2, 2, -1)$ i el seu mòdul $|\vec{d_r} \times \vec{d_s}| = 3$

Aplicam la fórmula $d(r, s) = \dfrac{|9|}{3} = 3$



Simulació 6: https://www.geogebra.org/m/umeea4z5 : *Mètode del pla paral·lel*

Exercicis

6. **a)** Determinau la posició relativa de les rectes $r : \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = -8 + 7t \\ z = -18 + 11t \end{cases}$ i $s : \begin{cases} x = 11 + 8t \\ y = 16 + 14t \\ z = 19 + 22t \end{cases}$.

b) Calculau la distància entre r i s emprant la fórmula necessària.

7. **a)** Determinau la posició relativa de les rectes $r : \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 11 - 4t \\ z = 4 - t \end{cases}$ i $s : \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 7 + 5t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

b) Calculau la distància entre r i s emprant la fórmula adient.

c) Calculau l'equació del pla que conté la recta s i és paral·lel a la recta r.

d) Calculau la distància del punt $R = (-5, 11, 4)$ al pla anterior. Comprovau que obteniu la mateixa resposta que en l'apartat b).

7. Problemes aplicats

> A l'examen IEDIB i de les PBAU hi haurà un problema d'opció única sobre geometria i que tindrà un caire competencial. L'objectiu d'aquesta secció és mostrar-vos exemples de com pot ésser aquest tipus de problema.

Vídeo 4.6: *Palau de congressos de Palma*
https://www.youtube.com/watch?v=gCqVsXG1Mq0

Exemple 13

Un ocell es troba sobre el punt més alt de la Catedral de Palma i es disposa a volar fins a un arbre que es troba als seus voltants passant, però, abans, per beure al brollador d'aigua que es troba situat dins el llac.
a) Indica com calcularies la distància mínima del recorregut.
b) Sabent que les coordenades de la catedral, l'arbre i el brollador són $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 1, 1)$ i $C = (1, 1, 1)$ respecte un sistema de referència ortonormal, calcula la distància mínima del recorregut.
c) Un cop l'ocell ha arribat a l'arbre, cerca un nou destí de manera que la trajectòria Çatedral - brollador - arbre - nou punt - Catedral"formi un quadrat. És possible? En cas afirmatiu, troba'l. En cas negatiu, justifica per què no.

a)

1. Calculam els vectors $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$
2. Calculam la distància entre els punts $d(A, B)$ i $d(B, C)$ fent els mòduls dels vectors anteriors.
3. Sumam els dos resultats

b)

1. $\vec{AB} = B - A = (1, -1, 2)$ i $\vec{BC} = C - B = (-1, 0, 0)$
2. $d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ i $d(B, C) = |\vec{BC}| = \sqrt{1^2} = 1$.
3. La distància del recorregut és $1 + \sqrt{6}$

c) No és possible perquè ja tenim dos costats que no són iguals $|\vec{AB}| \neq |\vec{BC}|$.

Exemple 14

Un avió es troba en el punt $A = (4, 5, 0)$ quan comença l'enlariament seguint la direcció del seu vector velocitat $\vec{v} = (1, b, 5)$ en unitats de km/h. Sabem que en aquests moments, la trajectòria de l'avió forma un angle de $30°$ amb el pla horitzontal de la pista.
a) Determina que val b.
b) Quina serà la posició de l'avió després de recórrer 50 km?

a) Es tracta de calcular l'angle que forma la recta de la trajectòria amb el pla $z = 0$. Necessitam el vector normal del pla $\vec{n} = (0, 0, 1)$ i el vector director de la recta $\vec{v} = (1, b, 5)$ Empram la fórmula

$$\cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|} \tag{30}$$

Substituim valors

$$\cos(90 - 30) = \frac{|(1, b, 5) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{1^2 + b^2 + 5^2}\sqrt{1^2}} \tag{31}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{\sqrt{26 + b^2}} \tag{32}$$

Elevam al quadrat cada membre per eliminar les arrels quadrades

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{26 + b^2} \tag{33}$$

i aïllam la incògnita $b = \pm\sqrt{74}$

b) La trajectòria de l'avió segueix una de les rectes

$$(x, y, z) = (4, 5, 0) + t(1, \pm\sqrt{74}, 5) \tag{34}$$

L'espai recorregut és $t\sqrt{1^2 + \sqrt{74}^2 + 5^2} = 50$, és a dir, $100t = 50$ i d'aquí deduïm que $t = 1/2$ (mitja hora).
Substituim la t dins l'equació de la recta i trobam el punt final

$$(x, y, z) = (4, 5, 0) + \frac{1}{2}(1, \pm\sqrt{74}, 5) \tag{35}$$

Com veim tenim dues possibles solucions

$$B = \left(\frac{9}{2}, \frac{10 \pm \sqrt{4}}{2}, \frac{5}{2}\right) \tag{36}$$

8. Resum del lliurament

Nota : Per diferenciar entre els símbols de valor absolut d'un nombre i mòdul d'un vector, empram la següent notació $vabs(nombre)$ i $|vector|$.

Les distàncies, àrees i volums SEMPRE SÓN POSITIVES!

No n'escriviu mai un valor negatiu a un treball o examen sense explicar que, per algun motiu, està malament.

Angles

Cas	Fórmula
Entre dues rectes r i s	$\alpha = \arccos \dfrac{vabs(\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s)}{\lvert\vec{d}_r\rvert\lvert\vec{d}_s\rvert}$
Entre dos plans π i σ	$\alpha = \arccos \dfrac{vabs(\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\sigma)}{\lvert\vec{n}_\pi\rvert\lvert\vec{n}_\sigma\rvert}$
Entre una recta r i un pla π	$\alpha = 90° - \arccos \dfrac{vabs(\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi)}{\lvert\vec{d}_r\rvert\lvert\vec{n}_\pi\rvert}$

Distàncies

Fórmula	Mètode constructiu
Entre dos punts P i Q	
$d(P,Q)=\sqrt{(Q_x-P_x)^2+(Q_y-P_y)^2+(Q_z-P_z)^2}$	• Caculam el vector $\vec{PQ}=Q-P$ • Caculam el seu mòdul $d(Q,P)=\lvert\vec{PQ}\rvert$ Veure construcció [https://www.geogebra.org/m/avfmub9g]
Entre un punt P i un pla que passa per A i té vector normal $\vec{n}$	
$d(P,\pi)=\dfrac{vabs(\vec{PA}\cdot\vec{n})}{\lvert\vec{n}\rvert}$ Si el pla ve donat en forma general $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, la fórmula anterior equival a $d(P,\pi)=\dfrac{vabs(A\cdot P_x+B\cdot P_y+C\cdot P_z+D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	• Caculam la recta r perpendicular a π que passa per P. • Caculam el punt de tall Q de la recta r amb el pla π. • Caculam la distància entre els punts P i Q. Veure construcció [https://www.geogebra.org/m/qqbfwkqn]
Entre un punt P i una recta r definida per el punt R i el vector director $\vec{d}$	
$d(P,r)=\dfrac{\lvert\vec{RP}\times\vec{d}\rvert}{\lvert\vec{d}\rvert}$	• Caculam el pla π perpendicular a r que passa per P. • Caculam el punt de tall Q de la recta r amb el pla π. • Caculam la distància entre els punts P i Q. Veure construcció [https://www.geogebra.org/m/wn3hz6at]
Entre la recta r i la recta s (si són paral·leles)	
Es redueix al cas anterior, basta agafar com punt P un punt qualsevol S de la recta s.	

Entre la recta r i la recta s (si es creuen a l'espai)

$d(r,s) = \frac{vabs(det(\vec{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s))}{\lvert \vec{d}_r \times \vec{d}_s \rvert}$	• Caculam el pla π que és paral·lel a la recta s i que conté la recta r. • Caculam la distància d'un punt qualsevol de la recta r al pla anterior. Veure construcció [https://www.geogebra.org/m/e8xqhahh]