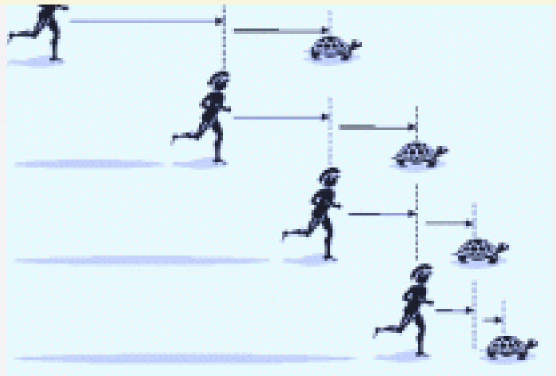
Lliurament 5:
Límits i asímptotes de funcions

Coneixes la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga?

Matemàtiques I

Josep Mulet Pol
Àmbit científic
IEDIB



https://iedib.net/

Índex

1. Funcions

Concepte de funció

A l'ESO ja vares estudiar el concepte i les característiques d'una funció.

> Una **funció** és una **relació** entre dues magnituds de manera que a cada valor de x (**variable independent**) li feim correspondre **un únic** valor de y (**variable dependent**). Per a indicar que la variable y depèn o és funció d'una altra, x, empram la notació $y = f(x)$, que es llegeix "y és la imatge de x mitjançant la funció f".

Aquesta relació funcional es pot expressar mitjançant

- un enunciat
- una taula de valors
- una gràfica
- una expressió matemàtica o fórmula

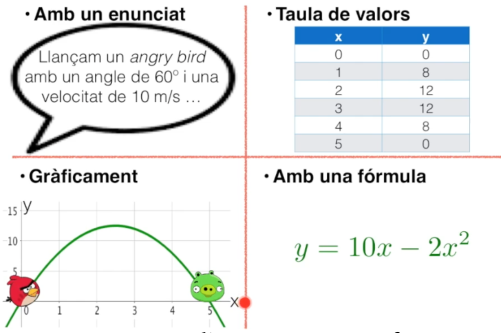
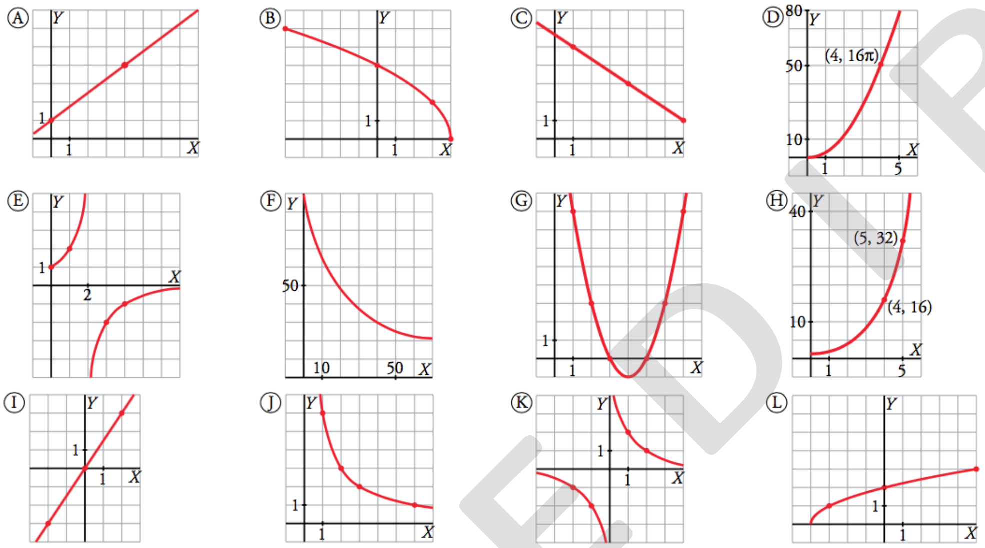


Figura 1: Formes d'expressar una funció

Exemple 1

Associa cada gràfica amb el tipus (lineal, quadràtica, proporcionalitat inversa, radical, exponencial o logarítmica). Si et ve de gust, intenta també associar cada gràfica amb la seva equació. **Atenció** : sobren equacions.



LINEALES	CUADRÁTICAS	PROPORCIONALIDAD INVERSA	RADICALES	EXPONENCIALES
L_1 $y = \frac{3}{2}x$	C_1 $y = x^2 - 8x + 15$	PI_1 $y = \frac{1}{x}$	R_1 $y = \sqrt{2x+4}$	E_1 $y = 2^x$
L_2 $y = -\frac{2}{3}(x-1) + 5$	C_2 $y = (x+3)(x+5)$	PI_2 $y = \frac{2}{2-x}$	R_2 $y = \sqrt{x+4}$	E_2 $y = 0{,}5^x$
L_3 $3x + 2y = 0$	C_3 $y = x^2,\ x > 0$	PI_3 $y = \frac{2}{x}$	R_3 $y = 2\sqrt{4-x}$	E_3 $y = 20 + 80 \cdot 0{,}95^x$
L_4 $y = \frac{3}{4}x + 1$	C_4 $y = \pi x^2,\ x > 0$	PI_4 $y = \frac{6}{x},\ x > 0$	R_4 $y = -\sqrt{4+x}$	E_4 $y = 3^x$

a) L_4	b) R_3	c) L_2	d) C_4
e) PI_2	f) E_3	g) C_1	h) E_1
i) L_1	j) PI_4	k) PI_3	l) R_2

No tenen gràfica associada L_3, C_2, C_3, PI_1, R_1, R_4, E_2 i E_4.

1.1 Funcions elementals

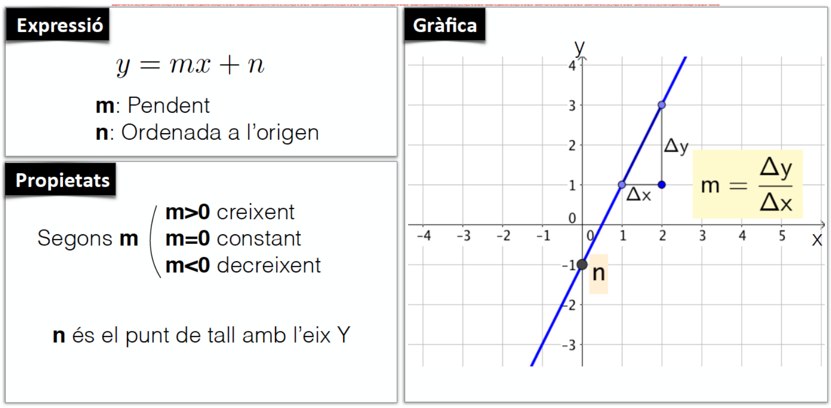
Les funcions descriuen fenòmens quotidians, econòmics, psicològics, científics, ... Aquestes funcions s'obtenen experimentalment a través de l'observació. Després, s'idealitzen o es modelitzen utilitzant famílies de funcions ben conegudes que anomenam **funcions elementals** .

Per exemple, la funció lineal és adequada per descriure com s'allarga una molla de la qual pengem una massa petita. Les funcions quadràtiques descriuen la trajectòria que descriu un projectil. La funció de proporcionalitat inversa descriu la relació entre la pressió i el volum d'un èmbol ple de gas. Les funcions exponencials descriuen creixements de poblacions i com canvia la quantitat de substància radioactiva en el temps. Les funcions logarítmiques s'empren per mesurar el nivell de renou, la brillantor dels estels i el pH d'una dissolució. Finalment, les funcions trigonomètriques apareixen en fenòmens que són periòdics (es repeteixen en el temps).

En aquest apartat s'enumeren aquestes funcions i es detallen els seus elements i propietats més importants.

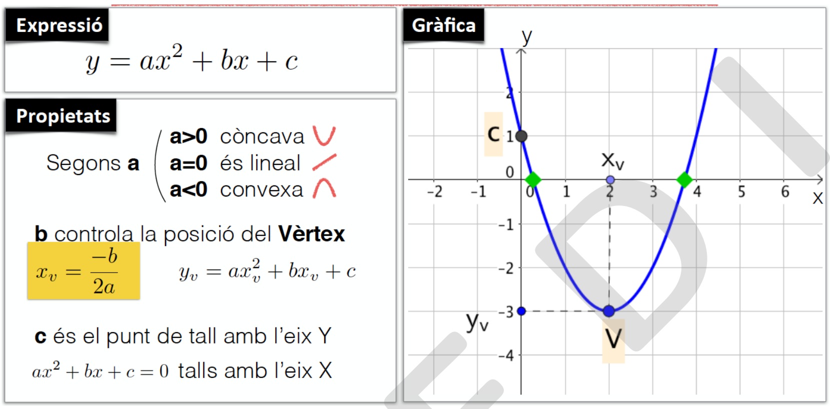
La funció lineal

L'expressió d'una funció lineal és $y = mx + n$, essent m el pendent i n l'ordenada a l'origen. Si $m = 0$ es diu que la funció és constant i la gràfica és una recta horitzontal.



La funció quadràtica o paràbola

L'expressió d'una funció quadràtica és $y = ax^2 + bx + c$. Quan $a > 0$ la funció és còncava $\cup$ i si $a < 0$ és convexa $\cap$. El valor de b controla la posició del vèrtex (el màxim o mínim). L'abscissa del vèrtex s'obté de la fórmula $x_v = \dfrac{-b}{2a}$. L'ordenada del vèrtex es troba substituint x_v dins la funció.



La funció de proporcionalitat inversa (hipèrboles)

L'expressió analítica és $y = \dfrac{k}{x-a} + b$. La representació gràfica són hipèrboles amb les asímptotes paral·leles als eixos de coordenades. Tenen una asímptota vertical a $x = a$ i una horitzontal a $y = b$. Les asímptotes separen la funció en dues parts, cada part s'anomena branca. La funció de proporcionalitat inversa té la forma $y = \dfrac{k}{x}$.

Expressió

$$y = \frac{k}{x-a}$$

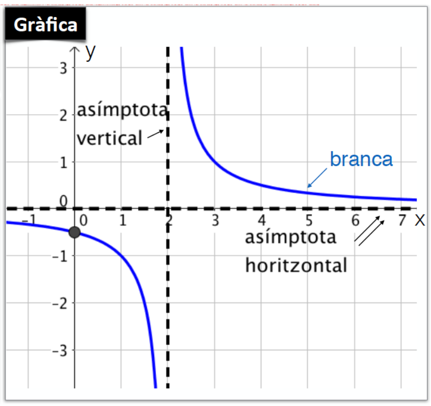
Propietats

x=a és una asímptota vertical
y=0 és una asímptota horitzontal

Les asímptotes separen les dues **branques**

No talla a l'eix X
Talla a l'eix Y a y=-k/a

Gràfica



La funció arrel quadrada

Les funcions arrel $y = k\sqrt{x-a}$ es representen com mitges paràboles amb eix paral·lel a l'eix X.

Expressió

$$y = k\sqrt{x-a} \qquad y = k\sqrt{a-x}$$

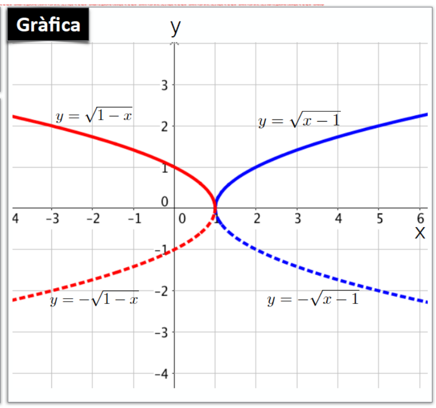
Propietats

Sempre és **positiva (k>0)**
negativa (k<0)

El domini és una semi-recta
(-∞, a] o [a, +∞)

És la funció **inversa** d'una paràbola

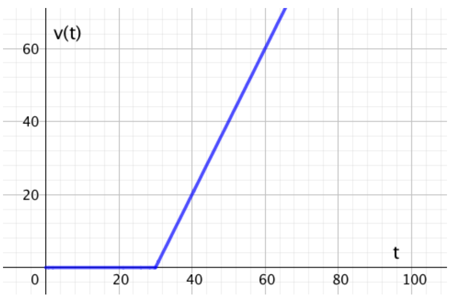
Gràfica



Funcions a trossos

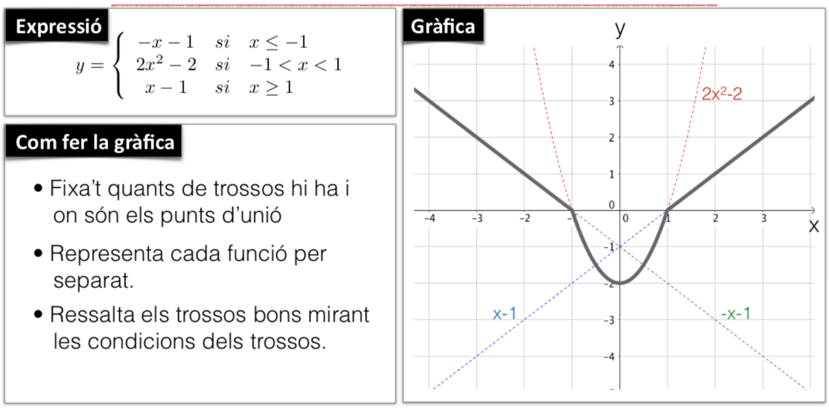
Les funcions a trossos les empram per descriure situacions on hi ha canvis de comportament. Per exemple: Un cotxe està aturat a un semàfor i després accelera. La funció que descriu la velocitat presenta un canvi de comportament en el moment que el conductor pitja l'accelerador. Aquesta funció expressa com

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \le t \le 30 \\ 2(t-30) & \text{si } \ t > 30 \end{cases}$$



De 0 a 30 segons la velocitat val zero i, després dels 30 s, la seva velocitat augmenta linealment.

Les funcions a trossos són fàcils de representar si sabem representar cadascun dels trams i param atenció al seu comportament en els punts d'unió.



Vídeo 5.1: *Representació de funcions a trossos*
https://www.youtube.com/watch?v=f7gOmTYV86U

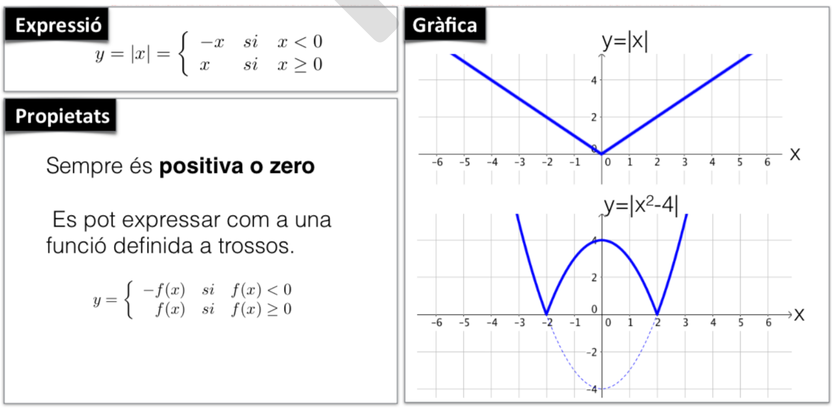
La funció valor absolut

Recordem que el valor absolut d'un nombre a coincideix amb el nombre a si és positiu o zero, o amb l'oposat i si és negatiu

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si} \;\; a \le 0 \\ a & \text{si} \;\; a > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Amb això, una funció de valor absolut es pot expressar com una funció a trossos

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{si} \;\; f(x) \le 0 \\ f(x) & \text{si} \;\; f(x) > 0 \end{cases} \tag{2}$$



Exercicis

1. Representa gràficament les funcions $y = x^2 - 2x$ i $y = 3x - 1$ en la mateixa gràfica. Quin tipus de funcions obtens?

2. Representa la funció a trossos $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2^x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1.2 Operacions amb funcions

A part de les operacions bàsiques de suma, diferència, producte o quocient de funcions també és possible fer la composició i la inversa d'una funció.

Composició de dues funcions

Considerem dues funcions $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \sin x$. La primera funció, per a cada valor de x que li donam, retorna la seva arrel quadrada. La segona funció, en canvi, retorna el sinus de x.

Què passa si aplicam una funció darrera l'altra? Això és composar funcions. S'indica d'una aquestes formes: $f \circ g(x)$ o $f(g(x))$. Aquesta figura mostra el seu significat

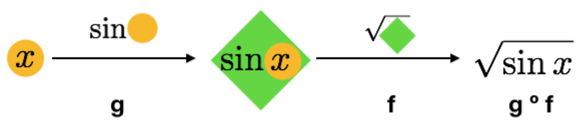


Figura 2: Composició de funcions f(g(x))

$f(g(x)) = \sqrt{\sin x}$, primer calculam el sinus de l'angle i al resultat li feim l'arrel quadrada.

La composició de funcions és una operació **no commutativa** . Això vol dir que l'ordre de l'operació canvia el resultat.

Efectivament $g \circ f(x) = g(f(x)) = \sin(\sqrt{x})$. Primer calculam l'arrel de l'angle i després feim el sinus.

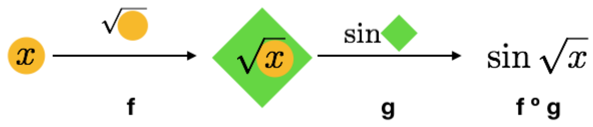


Figura 3: Composició de funcions g(f(x))

Si definim la funció $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ també és possible composar les tres funcions. Vegem com fer-ho:

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(\frac{1}{x+1})) = \tag{3}$$

$$= f(\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)) = \sqrt{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)} \tag{4}$$

Funció inversa

No hem de confondre la inversa amb fer 1 dividit, són coses diferents.

Es defineix la inversa d'una funció $f(x)$ i la indicam com $f^{-1}(x)$ a aquella funció que compleix

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \tag{5}$$

No totes les funcions tenen una inversa o, millor dit, en alguns casos poden tenir-ne més d'una.

El procediment per calcular la inversa d'una funció és senzill

- Canviam el nom de les variables $x \leftrightarrow y$
- Aïllam la y
- Anomenam $y = f^{-1}(x)$, la inversa

Exemple 2

Calcula la inversa de $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

Escrivim la funció com $y = \dfrac{3}{x-2}$, i canviam el nom de les variables

$$x = \frac{3}{y-2} \tag{6}$$

Aïllam la y, $y = \dfrac{3}{x} + 2$. Aleshores la funció inversa és $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x} + 2$

Podem comprovar que es compleix $f(f^{-1}(x)) = x$

$$f(\frac{3}{x} + 2) = \frac{3}{\left(\frac{3}{x} + 2\right) - 2} = x \tag{7}$$

Si representam gràficament la funció i la seva inversa, trobam una propietat curiosa de la gràfica. Si doblegam la gràfica per una línia que es troba a 45 graus, la funció es transforma en la seva inversa. Això passa perquè quan feim aquest doblec, l'eix y passa damunt l'eix x i aquesta és precisament el canvi de variables que feim per calcular la inversa.

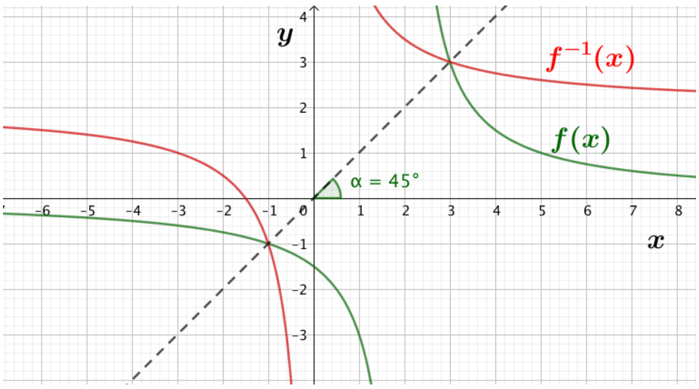


Figura 4: La funció i la seva inversa. Doblec a 45 graus.

Podeu comprovar que la funció $y = x^2$ té dues inverses que són $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$ i $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

Exercicis

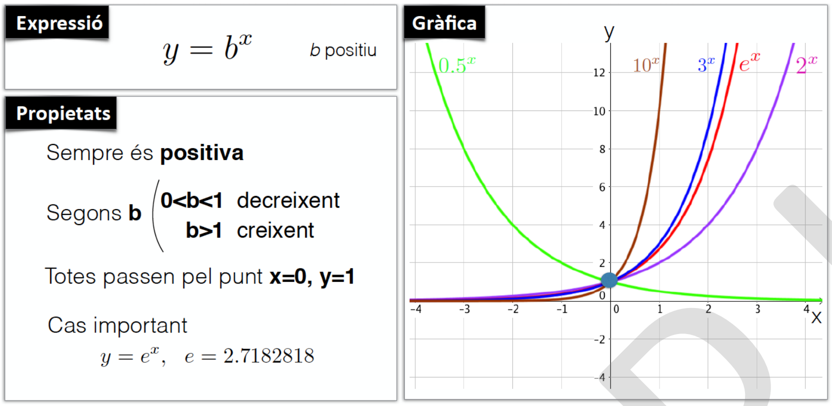
3. Considerau les funcions $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ i $g(x) = \sqrt{3x+1}$. Calculau $f^{-1}(x)$ i les composicions $f \circ g$ i $g \circ f$.

1.3 Funcions exponencials i logarítmiques

Funció exponencial

Les funcions **exponencials** són del tipus $y = b^x$. Si $b > 1$ són creixents i si $0 < b < 1$ són decreixents. Totes elles passen pel punt $(0, 1)$.

Un cas important és $y = e^x$ on la base és el número $e \simeq 2.7182818$.



La funció exponencial es manifesta a multitud de fenòmens de creixement animal, vegetal i econòmic. A tots ells la variable independent és el temps. Vegem un exemple:

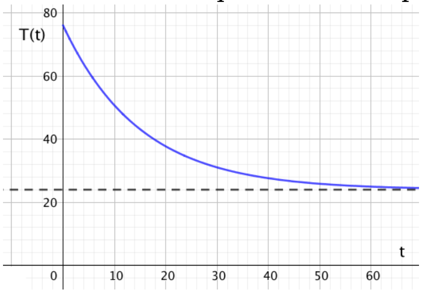
Exemple 3

La temperatura d'una tassa de cafè des del moment que l'hem deixada damunt la taula d'una habitació canvia segons els temps segons l'expressió $T(t) = 52 \cdot e^{-\frac{t}{15}} + 24$ on t ve donat en minuts i T en °C.
a) Quina és la temperatura inicial de la tassa? I transcorreguts 20 minuts?
b) Quin temps ha de transcórrer perquè la temperatura sigui 30 °C?
c) Representa la funció gràficament.
d) Quina és la temperatura de l'habitació?

a) Inicialment significa $t = 0$, $T(0) = 52 \cdot e^{-\frac{0}{15}} + 24 = 76°\text{C}$
Passats 20 minuts $T(20) = 52 \cdot e^{-\frac{20}{15}} + 24 = 37,71°\text{C}$

b) Hem de resoldre l'equació $30 = 52 \cdot e^{-\frac{t}{15}} + 24$. Aïllam l'exponencial a un membre $e^{-\frac{t}{15}} = \dfrac{30-24}{52} \to e^{-\frac{t}{15}} = \dfrac{6}{52}$, prenem logaritmes $-\frac{t}{15} = \ln\dfrac{6}{52}$ i finalment aïllam la incògnita $t = -15\ln\dfrac{6}{52} \approx 32,392$ minuts.

c) Es tracta d'una exponencial decreixent que té una asímptota horitzontal a $y = 24$



d) La temperatura de l'habitació és la temperatura de la tassa passat molt de temps, és a dir, el valor de l'asímptota que hem vist a la gràfica anterior. $T_{\text{habitacio}} = 24°\text{C}$.

Funció logarítmica

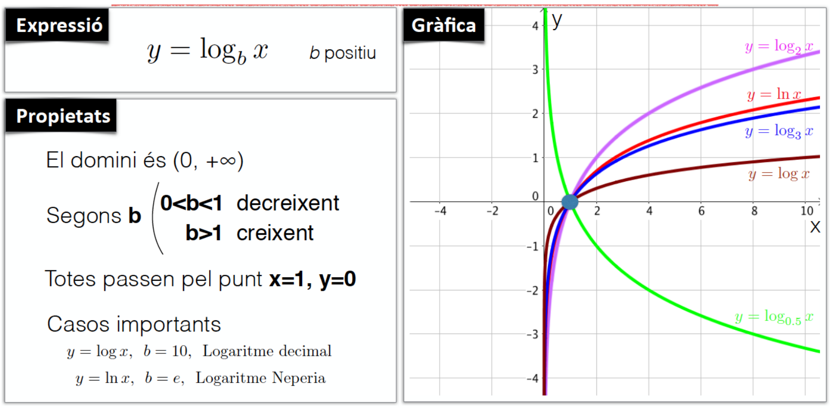
Les funcions **logarítmiques** són del tipus $y = \log_b x$. Si $b > 1$ són creixents i si $0 < b < 1$ són decreixents. Totes elles passen pel punt $(1, 0)$.

Dos casos importants són:

- **Logaritme Neperià:** $y = \ln x$ si la base és el número e
- **Logaritme decimal:** $y = \log x$ si la base és 10

Es compleix que les funcions exponencials i logarítmiques són funcions inverses una de l'altra. Per exemple, la funció inversa de $y = 2^x$ és $y = \log_2 x$ i viceversa. Aleshores presenten les propietats de les funcions inverses, és a dir, una s'obté de l'altra doblegant la gràfica per una línia a 45 graus.

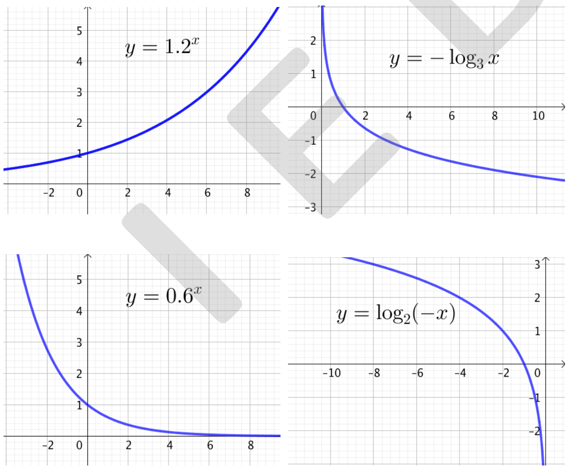
Cal recordar la definició o comprovació d'un logaritme $\log_b y = x \quad \leftrightarrow b^x = y$.



Vídeo 5.2: *Funcions exponencial i logarítmica*
https://www.youtube.com/watch?v=oxxt7O8PFxE

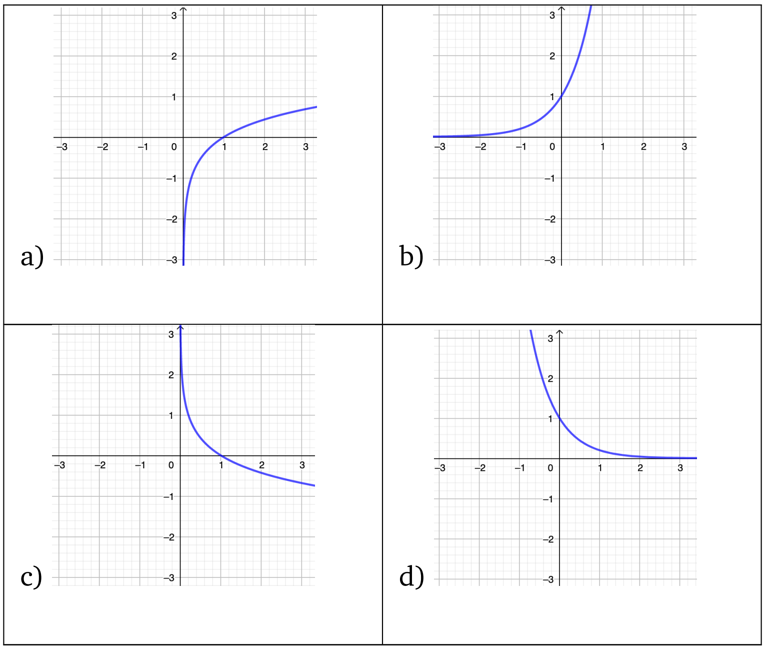
Exemple 4

Representa gràficament aquestes funcions:
a) $y = 1,2^x$
b) $y = -\log_3 x$
c) $y = 0,6^x$
d) $y = \log_2(-x)$



Exercicis

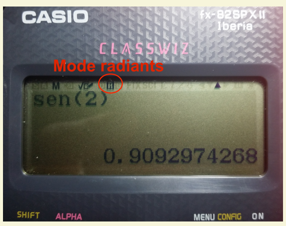
4. Associa cada gràfica amb la seva expressió analítica.



1.4 Funcions trigonomètriques

Quan es treballa en funcions trigonomètriques recordeu que els angles venen donats en RADIANTS.

$$\begin{array}{ccc} 2\pi \text{ rad} & \Leftrightarrow & 360^\circ \\ \pi \text{ rad} & \Leftrightarrow & 180^\circ \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ rad} & \Leftrightarrow & 90^\circ \\ & \ldots & \end{array}$$



> Vídeo que explica com canviar de la configuració de DEG a RAD i viceversa. [https://youtu.be/nj_Q5SU-e2Y]

Les funcions trigonomètriques són $y = \sin x$, $y = \cos x$ i $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Aquestes funcions s'utilitzen per descriure fenòmens periòdics com ara oscil·lacions i la propagació d'ones. Es defineix el període d'una oscil·lació T com l'interval més petit de x pel qual es repeteix la funció.

Les funcions sinus i cosinus tenen període 2π i oscil·len entre els valors -1 i 1.

La funció tangent, en canvi, té període π i presenta asímptotes verticals per a tots els valors en què $\cos x = 0$.

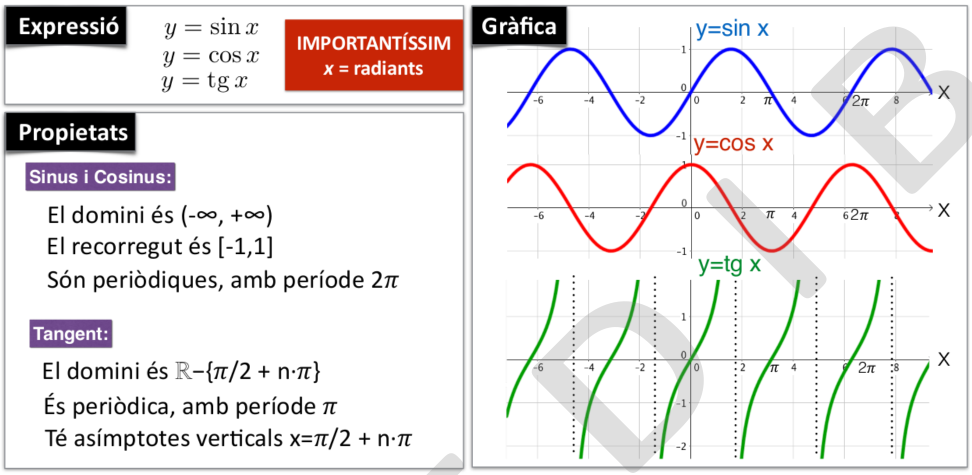


Figura 5: Gràfiques de les funcions trigonomètriques

Funcions trigonomètriques inverses

Les funcions trigonomètriques inverses són $\arcsin x$, $\arccos x$ i $\operatorname{arctg} x$. Per exemple, $\arcsin \frac{1}{2}$ dóna l'angle pel qual el seu sinus val $\frac{1}{2}$. Recordem que l'angle vindrà donat en radiants i, per tant, la resposta que obtindrem serà:

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \text{ja que} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Naturalment, si a l'angle de $\frac{\pi}{6}$ (en graus $30°$) li sumam voltes completes ($2\pi\, n$) també complirà l'equació anterior. Per aquest motiu, es diu que les funcions trigonomètriques inverses són funcions **multivaluades** . A la pràctica, per evitar aquesta situació, es decideix un interval pels angles de cada funció trigonomètrica inversa. En el cas de la funció $y = \arcsin x$ s'estableix que l'angle y estigui comprès entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, és a dir, $[-90°, 90°]$.

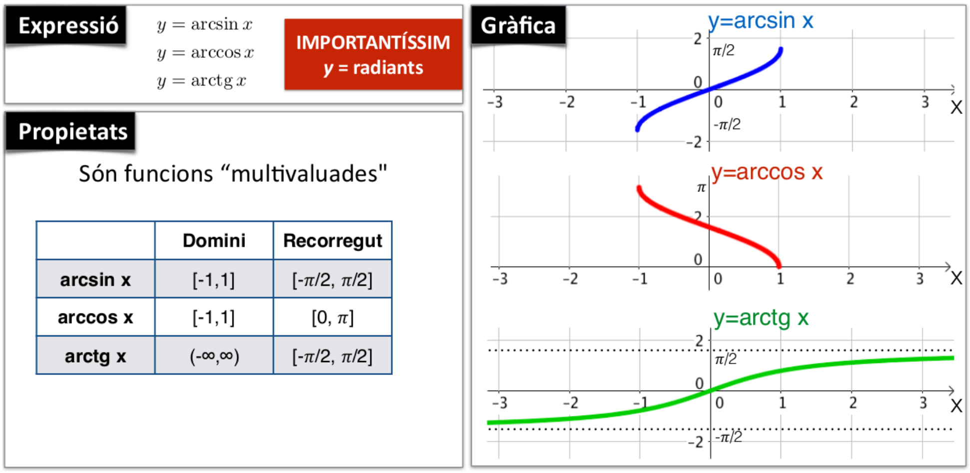


Figura 6: Gràfiques de les funcions trigonomètriques inverses

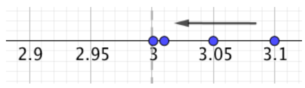
2. Límits

Concepte de límit

Comencem aprenent que significa acostar-se a un nombre. Donam una sèrie de definicions:

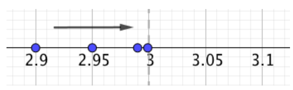
- Direm que x **tendeix a** a **per la dreta** ($x \to a^+$) si x pren valors majors que a i cada vegada més propers a ell,

  $x \to 3^+$ si $x = 3.1, 3.01, 3.001, \cdots$.

- Direm que x **tendeix a** a **per l'esquerra** ($x \to a^-$) si x pren valors menors que a i cada vegada més propers a ell,

  $x \to 3^-$ si $x = 2.9, 2.99, 2.999, \cdots$.

- Direm que x **tendeix a** a ($x \to a$) si x pren valors cada vegada més propers a a, indistintament superiors o inferiors a ell,

  $x \to 3$ si $x = 3.1, 2.99, 3.001, \cdots$

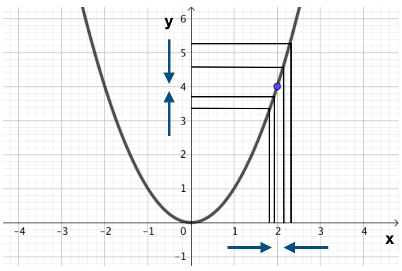
- Direm que x tendeix a $+\infty$ ($x \to +\infty$) si x pren valors positius cada vegada més grans,

  $x \to +\infty \quad$ si $\quad x = 10, 1000, 1000000, \cdots.$

- Direm que x tendeix a $-\infty$ ($x \to -\infty$) si x pren valors negatius cada vegada més grans,

  $x \to -\infty \quad$ si $\quad x = -10, -1000, -1000000, \cdots.$

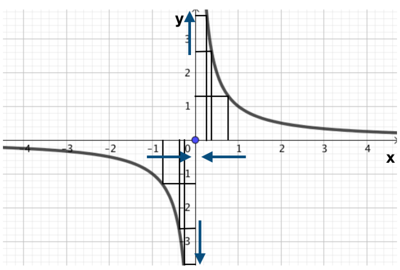
El límit ho podem definir com aquell lloc al qual, si no arribam, serem capaços d'acostar-nos tot el que vulguem. En sentit matemàtic, el límit d'una funció en un punt, és el valor de la funció $f(x)$ al que s'acosta quan la variable independent (x) s'aproxima a un valor determinat. Llavors, important: el límit d'una funció és un **valor de la variable y** .



Si prenem la funció del gràfic adjunt, quan x s'aproxima al valor 2, el valor de la funció $f(x) = x^2$ s'aproxima al valor 4. A més, en aquest cas, no solament podrem acostar-nos tot quant vulguem, sinó podem arribar al mateix valor, ja que el valor de la funció per a $x = 2$ és $f(2) = 4$.
En forma de límit escrivim

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \tag{8}$$

i es llegeix "el límit quan x tendeix a 2 (tant per la dreta o l'esquerra) de la funció és igual a 4"



Si prenem la funció del gràfic adjunt, quan x s'aproxima al valor 0, el valor de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ s'aproxima cap a més o menys infinit. En aquest cas, necessitam especificar si ens acostam per la dreta o per l'esquerra de 0.
En forma de límit escrivim

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty \tag{9}$$

Es llegeix, "el límit per l'esquerra de 0 de la funció és menys infinit i per la dreta de zero és més infinit".

s

Anomenam **límits laterals** a $x = a$ als límits per l'esquerra i la dreta de a. Direm que el límit d'una funció en un punt existeix si els **dos límits laterals coincideixen** , és a dir

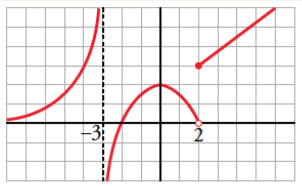
El límit al punt a existeix si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) \tag{10}$$

Vídeo 5.3: *Concepte de límit*
https://www.youtube.com/watch?v=vu_OtuvGb8U

Exemple 5

A partir de la gràfica de la funció següent



deduïu els límits

a) $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x\to -2} f(x)$

- a) $+\infty$
- b) $-\infty$
- c) 2
- d) 0
- e) 3
- f) 0

2.1 Càlcul de límits

Límits a partir d'una taula de valors

L'apartat anterior ha introduït el concepte de límit i hem après com deduir-ne valors a partir d'una gràfica. El problema és que en moltes ocasions no tenim la gràfica o no sabem quina forma té. Per això, aprendrem com calcular el límit a través d'una taula de valors.

Anem a calcular els límits de les funcions de l'apartat anterior $f(x) = x^2$ i $f(x) = \frac{1}{x}$ mitjançant taules de valors.

Taula 2: *Límits a partir de taules de valors*

$\lim\limits_{x\to 2^-} x^2$	$\lim\limits_{x\to 2^+} x^2$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$
$x = 1.9$ $y = 3.61$	$x = 2.1$ $y = 4.41$	$x = -0.1$ $y = -10$	$x = 0.1$ $y = 10$
$x = 1.99$ $y = 3.96$	$x = 2.01$ $y = 4.04$	$x = -0.01$ $y = -100$	$x = 0.01$ $y = 100$
$x = 1.999$ $y = 3.996$	$x = 2.001$ $y = 4.004$	$x = -0.001$ $y = -1000$	$x = 0.001$ $y = 1000$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y \to 4$	$y \to 4$	$y \to -\infty$	$y \to +\infty$

A mesura que la x s'acosta al valor on demanen el límit, ens fixam cap a on s'acosta el valor de y. Aquest valor extrapolat és el valor del límit que ens demanen.

Exemple 6

Calcula el límit

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

amb l'ajuda d'una taula de valors.

Donam cada vegada valors que s'apropin més a 1 per l'esquerra (és a dir, menors que 1):

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

x	y
0.9	0.270088
0.99	0.251888
0.999	0.2501876
0.9999	0.2500187

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = 0.25 = \frac{1}{4}$$

Tipus de límits

Podem classificar els límits en un punt en:

- **Immediats:** Només cal substituir el valor de x dins la funció.
- **Infinits:** Quan substituïm valor de x dins la funció, trobam una divisió per zero $\frac{k}{0}$. El límit pot donar $\pm\infty$. Cal calcular els dos límits laterals.
- **Indeterminats:** Una indeterminació és una expressió que no sabem el seu valor si no feim alguna cosa més. Cada tipus d'indeterminació té una tècnica per descobrir el seu valor. Són indeterminacions expressions com ara:

$$0/0, \quad \infty/\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 1^{\infty}, \ldots$$

La primera cosa que SEMPRE cal fer per calcular un límit és substituir el valor de x dins la funció. Si la calculadora dóna un nombre, ja haurem acabat.

$$\mathop{lim}_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4 \qquad \text{Ja hem acabat!} \tag{11}$$

$$\mathop{lim}_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \text{Math Error} \qquad \text{Ups! Caldrà fer alguna cosa més} \tag{12}$$

Vídeo 5.4: *Tècniques de càlcul de límits en un punt*
https://www.youtube.com/watch?v=J00v4WNh5mo

Exercicis

5. Emprant una taula de valors, esbrina el límit de la funció $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$ quan $x \to 2^-$ i $x \to 2^+$.

6. Calcula els límits $\mathop{lim}_{x\to 3} 2x^2 - x + 1$, $\mathop{lim}_{x\to 0} \frac{1}{x-1}$, $\mathop{lim}_{x\to -2} \sqrt{x^2+5}$.

7. Representau gràficament la funció a trossos $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x < 1 \\ 2x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$. A partir de la gràfica calculau, si existeix, $\lim_{x\to 1} f(x)$

2.2 Límits en un punt

En aquesta secció aprendrem tècniques per determinar els límits del tipus $k/0$ i la indeterminació $0/0$. La següent taula mostra cada regla juntament amb un exemple:

Vull calcular $\lim_{x\to a} f(x)$

Taula 4: *Com calcular límits i no morir en el intent.*

Quan substitueixo x per a trobo...	Què he de fer?	Exemple
Un nombre	Res. Ja has acabat!	$\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$
$\frac{k}{0}$	Has de calcular els límits laterals per saber si són $-\infty$ o $+\infty$	$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \end{cases}$
$\frac{0}{0}$ amb polinomis	Has de factoritzar i simplificar la fracció.	$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)\cdot(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 10$
$\frac{0}{0}$ amb arrels	Heu de racionalitzar la fracció i simplificar	$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)} \cdots = \frac{1}{6}$

Exemple 7

Calcula els límits de la funció

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$$

quan

a) $x \to 1$

b) $x \to 3$

c) $x \to -3$

a) Immediat: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{1+3}{1-9} = -\frac{1}{2}$

b) Infinit: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{6}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{+6}{-0} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{+6}{+0} = +\infty \end{cases}$

c) Indeterminació 0/0: $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{0}{0} = \text{IND} =$

$= \lim\limits_{x\to -3} \frac{(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6}$

Exercicis

8. Emprant les tècniques de càlcul de límits obteniu el valor

a) $\lim\limits_{x\to 0} e^x + 1$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x-2}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x-6}$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

2.3 Límits a l'infinit

Treballar amb infinits a vegades és contraintuïtiu. Això passa perquè l'infinit no és un nombre real i les operacions són una mica especials. Us deixo en aquesta taula les operacions més habituals perquè les pugueu consultar en cas de dubte:

Operacions immediates amb infinits
$\infty+\infty=\infty \qquad \infty\cdot\infty=\infty \qquad k\cdot\infty=\begin{cases}+\infty & \text{si } k>0\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases}$
$\dfrac{k}{\infty}=0 \qquad \dfrac{\infty}{0}=\pm\infty \qquad b^{\infty}=\begin{cases}+\infty & \text{si } b>1\\ 0 & \text{si } 0<b<1\end{cases}$

Algunes operacions són indeterminades i caldrà aplicar les regles a l'hora de calcular els límits

Operacions indeterminades amb infinits
$\infty-\infty \qquad \dfrac{\infty}{\infty}$
$0\cdot\infty \qquad 1^{\infty}$

Vídeo 5.5: *Límits de funcions polinòmiques a l'infinit.*
https://www.youtube.com/watch?v=ShgWrtj_fRo

Vídeo 5.6: *Límits de funcions racionals quan a l'infinit.*
https://www.youtube.com/watch?v=td1hggLeImo

La següent taula mostra els diferents casos que ens podem trobar quan calculam límits de funcions a l'infinit. Llegiu l'exemple i fixeu-vos en la tècnica que heu d'aplicar en cada cas.

Vull calcular $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

Taula 8: *Regles per calcular límits a l'infinit*

Quan substitueixo x per $\pm\infty$ trobo...	Què he de fer?	Exemple
$\frac{k}{\pm\infty}$	El límit val zero.	$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=\frac{5}{\infty}=0$
$\frac{\infty}{\infty}$ amb polinomis	Cal dividir tots els termes del numerador i denominador per la major potència de x del denominador.	$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2-2x+1}=$ dividim per x^2 $\lim_{x\to\infty}\frac{2+5/x^2}{3-2/x+1/x^2}=\frac{2}{3}$
$\frac{\infty}{\infty}$ amb arrels	Igual que abans però tenint en compte que el major exponent del denominador queda dividit per 2 degut a l'arrel quadrada.	$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{3x^2+1}}=$ dividim per x $\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{3+1/x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\infty-\infty$ amb polinomis	Cal calcular el mín.c.m, i efectuar la resta	$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}-x=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$

Exemple 8

Calcula els següents límits

a) $\underset{x\to-\infty}{lim}\ x^3-2x^2+1$

b) $\underset{x\to+\infty}{lim}\ \dfrac{2}{x^2-1}$

c) $\underset{x\to+\infty}{lim}\ \dfrac{3x^2+x-5}{2x^2+1}$

d) $\underset{x\to+\infty}{lim}\ \dfrac{2-x^2}{x+3}$

a) Donat que es tracta d'un polinomi només consideram la potència de major grau

$$\underset{x\to-\infty}{lim}\ x^3-2x^2+1=\underset{x\to-\infty}{lim}\ x^3=(-\infty)^3=-\infty \tag{13}$$

b) $\underset{x\to+\infty}{lim}\ \dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{2}{\infty^2-1}=\dfrac{2}{\infty}=0$

c) Trobam una indeterminació ∞/∞. Cal dividir tots els termes per la major potència del denominador. En aquest cas dividim tots els termes entre x^2

$$\underset{x\to+\infty}{lim}\ \frac{3x^2+x-5}{2x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=IND=\underset{x\to+\infty}{lim}\ \frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$
$$\underset{x\to+\infty}{lim}\ \frac{3+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{3+\cancel{\frac{1}{\infty}}-\cancel{\frac{5}{\infty}}}{2+\cancel{\frac{1}{\infty}}}=\frac{3}{2} \tag{14}$$

d) Trobam una indeterminació ∞/∞. Cal dividir tots els termes per la major potència del denominador. En aquest cas dividim tots els termes entre x

$$\underset{x\to+\infty}{lim}\ \frac{2-x^2}{x+3}=\frac{\infty}{\infty}=IND=\underset{x\to+\infty}{lim}\ \frac{\frac{2}{x}-\frac{x^2}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}=$$
$$\underset{x\to+\infty}{lim}\ \frac{\frac{2}{x}-x}{1+\frac{3}{x}}=\frac{\cancel{\frac{2}{\infty}}-\infty}{1+\cancel{\frac{3}{\infty}}}=-\infty \tag{15}$$

Exercicis

9. Emprau les tècniques apreses per calcular els límits a l'infinit:

a) $\underset{x\to-\infty}{lim}\ x^4-2x^2+5x-3$

b) $\lim_{x\to\infty} -2x^2+5x+2$

c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x-2}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3+3x^2-1}{x^3+x^2-x+1}$

e) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-x^2-5x}{x^2+1}$

3. Asímptotes

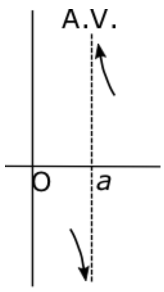
Les asímptotes d'una funció, en cas d'existir, són rectes a les quals la funció s'aproxima tant com volguem però sense arribar a tocar-les. Donat que, les asímptotes són rectes, aquestes podran ser verticals, horitzontals i obliqües.

> Les asímptotes verticals són parets les qual la funció no pot atravessar.

3.1 Asímptotes verticals

Perquè una funció racional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tengui una asímptota vertical, el denominador ha d'ésser igual a zero i el numerador diferent de zero. El procediment consisteix resoldre l'equació $Q(x)=0$.

> Ens hem d'assegurar que no tenim 0/0, perquè podria no ésser una asímptota. Per tenir una asímptota vertical, els límits al punt han d'ésser més o menys infinit.



Per a cada valor $x=a$ tal que $Q(a)=0$, estudiam la posició relativa calculant els dos límits laterals:

$$\lim_{x\to a^-} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \tag{16}$$

d'aquesta forma sabem si s'acosta cap a $\pm\infty$ al voltant de l'asímptota vertical.

Exemple 9

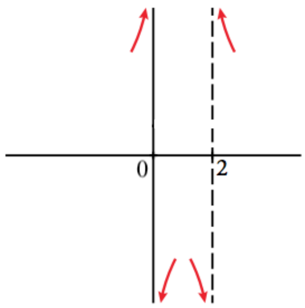
Calcula les asímptotes verticals de la funció $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

Igualam a zero del denominador de la funció $x^2 - 2x = 0$. Resolem l'equació de segon grau incompleta $x = 0$; $x = 2$.

Calculam els límits laterals al voltant de cada arrel.

- $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \dfrac{+2}{+0} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \dfrac{+2}{-0} = -\infty$
- $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \dfrac{+6}{-0} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \dfrac{+6}{+0} = +\infty$

Representam gràficament les dues asímptotes verticals a $x = 0$ i $x = 2$ juntament amb els límits obtinguts:



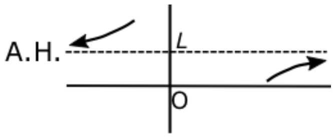
3.2 Asímptotes horitzontals

Perquè una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tengui una asímptota horitzontal, el grau $P \leq$grau Q. L'asímptota és la recta horitzontal $y = L$, essent $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Nota: Quan grau $P < grauQ$, la recta $y = 0$ és l'asímptota horitzontal.

Per saber si ens acostam per damunt o davall de l'asímptota horitzontal $y = L$ construïm una taula amb dos valors grans (un negatiu i l'altre positiu). Si la funció és més petita que l'asímptota, ens acostam per davall d'ella i sinó per damunt.

x	y	pos
-100	...	amunt
100	...	avall



Vídeo 5.7: *Asímptotes verticals i horitzontals*
https://www.youtube.com/watch?v=2ZDHcJOBI6E

Exemple 10

Calcula l'asímptota horitzontal de la funció $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

Aquesta funció no té asímptotes verticals perquè l'equació $1+x^2 = 0$ no té solucions. Sí que tindrà una asímptota horitzontal a un valor de y diferent de zero, perquè els graus del numerador i denominador són iguals.

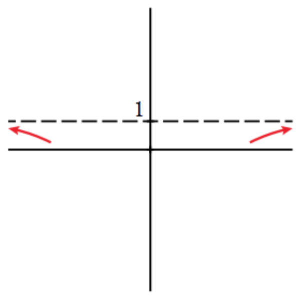
L'asímptota és el valor del límit a l'infinit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{\infty}{\infty} = IND = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}+1} = 1 \quad (17)$$

Per resoldre la indeterminació ∞/∞ hem dividit tot per la major potència de x del denominador. Hem trobat que la recta $y = 1$ és una asímptota horitzontal.

Per saber la posició relativa (si ens acostam per damunt o davall de $y = 1$) construïm una taula amb un valor gran de x positiu i negatiu.

x	$f(x)$	Posició
-100	$0.9999 < 1$	Per davall
$+100$	$0.9999 < 1$	Per davall



Exercicis

10. Determinau **totes** les asímptotes de la funció $f(x) = -\dfrac{(4x+5)}{x-2}$. Calculau tots els límits necessaris per determinar-les. Representau gràficament com s'acosta la funció a les asímptotes.

11. Determinau **totes** les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 2x}$. Calculau tots els límits necessaris per determinar-les. Representau gràficament com s'acosta la funció a les asímptotes.

3.3 Asímptotes obliqües

Una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ té una asímptota obliqua si el grau del numerador és igual el grau del denominador més u, grau P =grau $Q + 1$. L'asímptota és una recta de la forma $y = mx + n$.

> Si una funció té una asímptota obliqua no en tindrà d'horitzontal. Ara bé, potser que en tingui de verticals i caldrà calcular-les.

Per determinar l'asímptota obliqua feim la divisió $P(x) : Q(x)$. Del quocient de la divisió podem obtenir l'expressió de l'asímptota. Per exemple, donada la funció $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 1}{x^2 + 2x}$, veim que té una asímptota obliqua perquè el grau del numerador és 3 i el denominador és un menys (2). Realitzam la divisió de polinomis

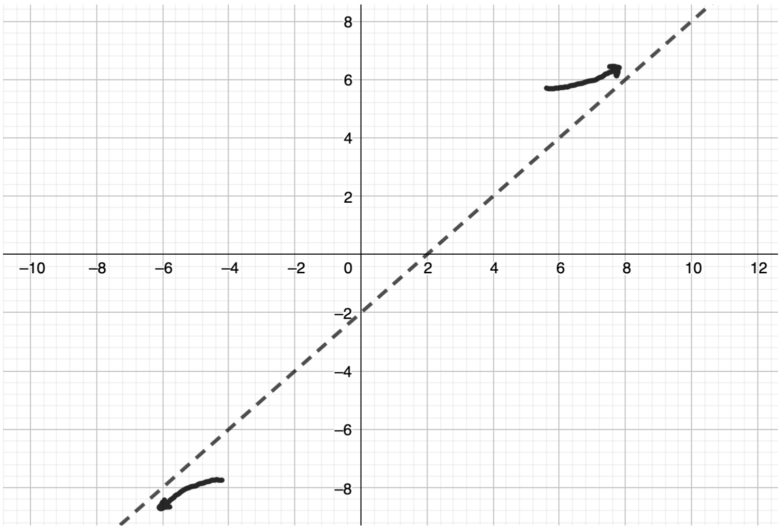
$$\begin{array}{llll} x^3 & & +5x+1 & \underline{|\ \ x^2+2x\ \ } \\ \underline{-x^3-2x^2} & & & x-2 \\ & -2x^2 & +5x+1 & \\ & \underline{2x^2} & \underline{+4x} & \\ & & \underbrace{9x+1} & \end{array} \tag{18}$$

Atès que la divisió té quocient $x - 2$, l'equació de l'asímptota obliqua és la recta $y = x - 2$.

Per saber si ens acostam per damunt o davall de l'asímptota obliqua construïm una taula amb dos valors grans (un negatiu i l'altre positiu). Si la funció és més petita que l'asímptota, ens acostam per davall d'ella i sinó per damunt. Anem a fer els càlculs.

x	$y = x - 2$	$f(x)$	Posició
-100	-102	-102.91	f és més negativa que l'asímptota. f s'acosta per davall
$+100$	98	98.0883	f és més gran que l'asímptota. f s'acosta per damunt

La situació gràfica es mostra a la figura següent



Vídeo 5.8: *Càlcul d'asímptotes obliqües.*
https://www.youtube.com/watch?v=728vYN49NJ0

Exercicis

12. Acabau de calcular la resta d'asímptotes que té la funció que s'ha explicat en aquest apartat $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 1}{x^2 + 2x}$ i feu una gràfica on apareguin totes elles i així com s'acosta la funció a aquestes.

13. Digues quina/es d'aquestes funcions té una asímptota horitzontal i quina/es obliqua. En cas afirmatiu, calcula l'equació de l'asímptota i representa de forma qualitativa com s'acosta la funció a l'asímptota.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+4}$ c) $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2+4}$ d) $f(x) = \dfrac{4x^4}{x^2+4}$