IEDIB	**MOSTRA EXAMEN DE MATEMÀTIQUES I** PRIMER BATXILLERAT - BAT_MAT1			**DATA I HORA** ____ ____
NOM I COGNOMS:	__________________________________			**NOTA**
DNI:	________________________	**AVALUACIÓ:**	**MAIG**	________
CENTRE:	________________________	**GRUP*:**	A/B/C/D	

*grup: A-arts/B-humanitats/C-ciències/D-xarxa

INSTRUCCIONS:
- Heu de triar una de les dues opcions d'examen. No es poden intercanviar preguntes entre les opcions.
- Totes les respostes han d'estar degudament justificades amb els càlculs pertinents.
- Es valorarà la precisió del llenguatge matemàtic i no matemàtic. Les errades de càlcul penalitzen.
- Es poden emprar calculadores sempre que no emmagatzemin informació ni la puguin transmetre.

☐ **EXAMEN NOMÉS 2A AVALUACIÓ**

Si teniu **menys de 3,5 de l'examen de la 1a avaluació** heu de fer l'examen final que trobareu al revers d'aquest full.

1. **Lliurament 5: Derivades de funcions** (3 punts)

   Considerau la funció polinòmica $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

   a) Calculau els punts de tall amb els eixos. (1 punt)

   b) Determinau els màxims i mínims de la funció. (1 punt)

   c) Determinau les simetries i construïu la gràfica de la funció. (1 punt)

2. **Lliuraments 6 i 7: Geometria** (4 punts)

   a) Calculau l'equació **vectorial** de la recta que passa pel punt $A(3, 2)$ i té pendent $m = -\frac{1}{2}$. Representau-la gràficament. (2 punts)

   b) Calculau l'equació **general** de la recta que és perpendicular a la recta de l'apartat a) i passa pel punt mitjà del segment d'extrems $A = (3, 2)$ i $B = (5, 0)$. (2 punts)

3. **Lliurament 8: Estadística** (3 punts)

   S'han recollit dades de l'índex de massa corporal (x) i la concentració de colesterol HDL (y) de 5 pacients.

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
	20	1,4			
	24	1,3			
	28	0.9			
	32	0.7			
	36	0.7			
Sumes					

   a) Completau la taula anterior i representau el núvol de punts. (1 punt)

   b) Calculau el coeficient de correlació lineal. Explicau el tipus de relació que existeix entre les variables. (1 punt)

   c) Trobeu l'equació de la recta de regressió lineal i, en base a ella, estimeu la concentració de colesterol d'un pacient amb un índex de massa corporal de $x = 30$. (1 punt)

Fórmules:
- Mitjana $\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N}$
- Desv. típica $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$
- Covariancia $\sigma_{xy} = \frac{\sum_i x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$
- Coeficient de correlació $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

☐ **EXAMEN FINAL: 1A + 2A AVALUACIÓ**

Feis aquesta opció si necessitau recuperar la 1a avaluació o voleu pujar nota.

1. Trobau totes les solucions de l'equació trigonomètrica $\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}\, x = 0$. Donau la resposta en graus i radiants. (2 punts)

2. Una mare té el doble de la suma de les edats dels seus fills. L'edat del fill menor és la meitat de la seva germana. La suma de les edats dels nens i la mare és 45 anys. Quina edat té cadascú? Plantejau un sistema d'equacions i resoleu-lo pel mètode de Gauss (1,5 punts).

3. Determinau les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$. Representau-les gràficament (1,5 punts)

4. Considerau la funció $f(x) = \ln(x+1) \cdot \cos(x^2)$ (1,75 punts)

a) Calculau la funció derivada completament simplificada. (0,75 punts)

b) Determinau l'equació de la recta tangent en el punt $x = 0$. Justificau si la funció és creixent o decreixent en aquest punt. (1 punt)

5. Considera el triangle amb vèrtexs en els punts $A = (-3, -2)$, $B = (9, 7)$ i $C = (2, 8)$ (2 punts)

a) Calculau l'equació **general** de la recta que passa pels punts A i B. (1 punts)

b) Calculau la longitud del segment $\overline{AB}$. (0,5 punts)

c) Calculau la distància entre la recta que passa per $\overline{AB}$ i el vèrtex C. (0,5 punts)

6. S'ha determinat les despeses en publicitat (x) i les vendes aconseguides (y) en milers d'euros de 6 empreses diferents. S'han obtingut els següents paràmetres estadístics: (1,25 punts)

- Mitjanes: $\bar{x} = 3,5$ $\bar{y} = 28,5$
- Desviacions típiques: $\sigma_x = 1.71$ $\sigma_y = 12,45$
- Covariància: $\sigma_{xy} = 20,75$

a) Determinau el coeficient de correlació lineal i, en base a ell, explicau quin tipus de relació es dóna entre les variables. (0,75 punts)

b) Calculau l'equació de la recta de regressió lineal i estimau les vendes per una inversió en publicitat de 8 milers d'euros. (0,5 punts)

Fórmules:

- Mitjana $\bar{x} = \dfrac{\sum_i x_i}{N}$
- Desv. típica $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$
- Covariancia $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum_i x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$
- Coeficient de correlació $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$
- Recta de correlació $y = \bar{y} + \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$

SOLUCIONS MOSTRA EXAMEN 2A AVALUACIÓ

1. **Lliurament 5**

a)

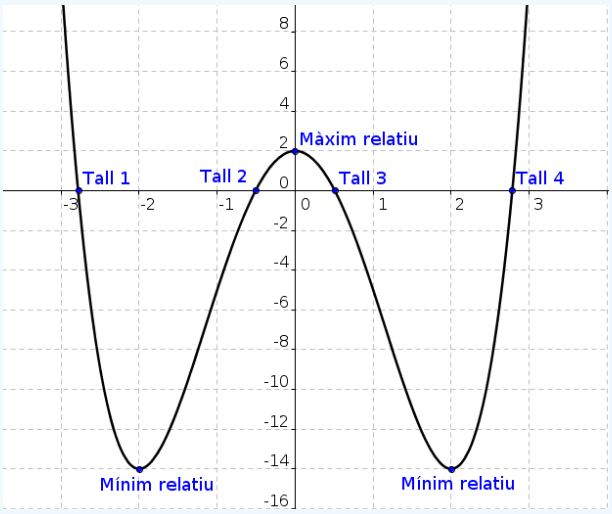
- Talls amb l'eix OX: $y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 2 = 0$. Obtenim una equació biquadrada, efectuam el canvi de variables $t = x^2$; $t^2 - 8t + 2 = 0$. Resolem l'equació de segon grau $t = 0,25834$ i $t = 7,7417$. Desfeim el canvi $x = \pm\sqrt{t}$: $x = \pm 0,5083$; $x = \pm 2,7824$
- Talls amb l'eix OY $x = 0 \rightarrow y = 2$

b) Calculam la derivada de la funció $f'(x) = 4x^3 - 16x$ i la igualam a zero
$4x^3 - 16x = 4x \cdot (x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = \pm 2$, $x = 0$
Estudiam el signe de la derivada

$Signe\ f'$	$---$	$---$	$++$	$++$	$--$	$--$	$++$	$++$
		$.$ -3	o -2	$.$ -1	o 0	$.$ 1	o 2	$.$ 3

La funció creix a $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
La funció decreix a $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
Sabem que tindrà un mínim a $x = -2$; $y = -14$
un màxim relatiu a $x = 0$, $y = 2$
i un altre mínim a $x = 2$, $y = -14$

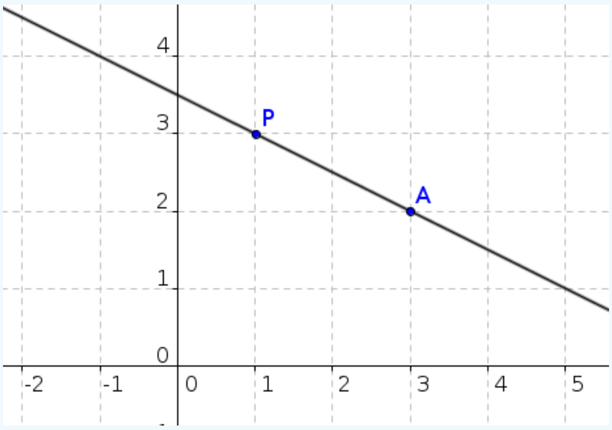
c) Es tracta d'una funció simètrica parell donat que $f(-x) = f(x)$. La gràfica aproximada de la funció és:



2. **Lliurament 6 i 7**

a) Ens diuen que el pendent de la recta és $-\frac{1}{2}$. Recordem la relació entre pendent i vector director $m = \frac{d_y}{d_x}$. D'aquí deduïm que el vector de la recta és $\vec{d}(2, -1)$.
Podem escriure directament l'equació vectorial com $(x, y) = (3, 2) + t(2, -1)$

Per representar-la gràficament, basta trobar un altre punt de la recta. Per trobar punts en forma vectorial, donam valors al paràmetre t. Per exemple, si feim $t = -1$ tenim $(x, y) = (1, 3)$. Dibuixam la recta que passa per dos punts



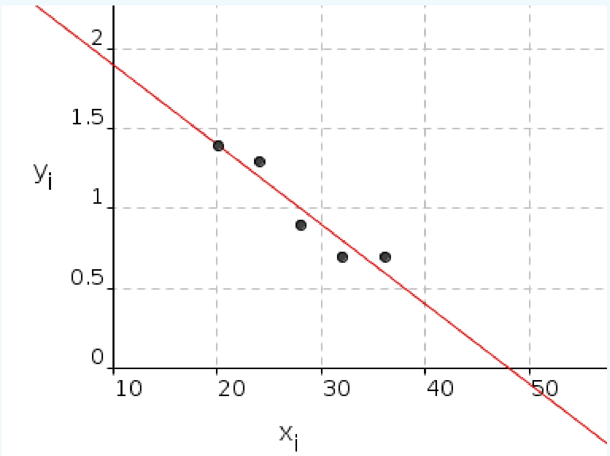
b) Si la recta anterior té vector director $\vec{d}(2, -1)$, un vector perpendicular a ell s'obté de girar les components i canviar un signe: $\vec{n} = (1, 2)$. Aquest és el vector director de la recta que ens demanen. A més, sabem que passa pel punt mitjà del segment $\bar{AB}$, $M = \dfrac{A+B}{2} = (4, 1)$

Comencem escrivint l'equació contínua $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{2}$

Efectuam els productes creuats $2(x-4) = y-1$, eliminam els parèntesis i simplificam. Arribam a l'equació general de la recta $2x - y - 7 = 0$.

3. **Lliurament 8**

a) El diagrama de dispersió o núvol de punts és:



b) Completam els càlculs de la taula de l'examen i cercam les diferents sumes

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
	20	1,4	400	1,96	28
	24	1,3	576	1,69	31,2
	28	0,9	784	0,81	25,2
	32	0,7	1024	0,49	22,4
	36	0,7	1296	5,44	132
Sumes	140	5	4080	5,44	132

De la taula hem obtingut les següents sumes $\sum x_i = 140$,$\sum y_i = 5$, $\sum x_i^2 = 4080$, $\sum y_i^2 = 5,44$, $\sum x_i \cdot y_i = 132$. A més sabem que tenim $N = 5$ parelles de dades.

Anam a calcular els diferents paràmetres univariants:

- Mitjanes $x_i = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{140}{5} = 28$; $y_i = \dfrac{\sum y_i}{N} = \dfrac{5}{5} = 1$
- Variancies $Var(x) = \dfrac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \dfrac{4080}{5} - 28^2 = 32$; $Var(y) = \dfrac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \dfrac{5.44}{5} - 1^2 = 0.088$
- Desviacions típiques $\sigma_x = \sqrt{32} = 5,66$; $\sigma_y = \sqrt{0,088} = 0,297$

Tot seguit calculam el grau de relació entre les variables mitjançant la covariància i el coeficient de correlació lineal

- Covariància $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \dfrac{132}{5} - 28 \cdot 1 = -1.6$
- Coeficient de correlació $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{-1.6}{5.66 \cdot 0.297} = -0.9518$

Atès que r és negatiu, existeix una correlació negativa entre les dues variables. A més, ja que $|r|$ s'aproxima a 1, la correlació és forta.

c) Recordem que l'equació de la recta de regressió és $y = \bar{y} + \dfrac{\sigma_x y}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$. Subtituïm valors

$y = 1 + \dfrac{-1.6}{5,66^2}(x - 28) = 1 - 0.05 \cdot (x - 28)$

Si eliminam el parèntesi, trobam l'equació explícita de la recta $y = -0.05x + 2.4$

A partir de la recta de regressió podem estimar la concentració de colesterol d'un pacient amb índex de massa corporal 30, substituïm x=30 dins l'equació de la recta i obtenim $y = -0.05 \cdot 30 + 2.4 = 0.9$. Donat que el coeficient de correlació és proper a 1, podem confiar d'aquesta estimació.

SOLUCIONS MOSTRA EXAMEN FINAL

1.

Anomenam $t = x$. Aquest canvi de variables, transforma l'equació a $t^2 - 2t = 0$. Es tracta d'una equació de segon grau incompleta. Treim factor comú $t \cdot (t-2) = 0$. Obtenim dues solucions $t = 0$ i $t = 2$. Ara desfeim el canvi:

- Si $t = 0$: $\operatorname{tg} x = 0 \to x = 0 + 360n$ i $x = 180 + 360n$
- Si $t = 2$: $\operatorname{tg} x = 2 \to x = \operatorname{arctg} 2 = 63,43 + n360$.

  També trobam una altra solució al 3r quadrant, és a dir, sumam 180 graus a l'angle anterior: $x = 243,43 + n360$.

De forma més compacta, podem escriure les solucions com: $x = \begin{cases} x = 0° + 180°n \\ x = 63,43° + 180°n \end{cases}$

Per expressar els angles en radiants, recordem que $180° = \pi$ rad. $x = \begin{cases} x = 0 + n\pi \\ x = 1,107 + n\pi \end{cases}$ rad.

2.

Anomenam x=edat mare, y =edat germana, z=edat del fill menor

Plantejam el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{rl} x = & 2(y+z) \\ z = & \dfrac{y}{2} \\ x+y+z & = 45 \end{array}\right.$

Tot seguit preparam el sistema per poder-lo resoldre per Gauss. Cal eliminar els denominadors i parèntesis

$\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & = 45 \\ x-2y-2z & = 0 \\ -y+2z & = 0 \end{array}\right.$. A la $[2a] \to [2a]-[1a]$ $\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & = 45 \\ -3y-3z & = -45 \\ -y+2z & = 0 \end{array}\right.$.

Si dividim la segona entre -3, trobam $\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & = 45 \\ y+z & = 15 \\ -y+2z & = 0 \end{array}\right.$. A la tercera li sumam la segona $[3a] \to [3a]+[2a]$

$\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & = 45 \\ y+z & = 15 \\ 3z & = 15 \end{array}\right.$. El sistema ja es escalonat i podem trobar la solució $z = 5$, $y = 10$, $x = 30$.

3.

La funció $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ anul·la el denominador quan $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$

Calculem els límits

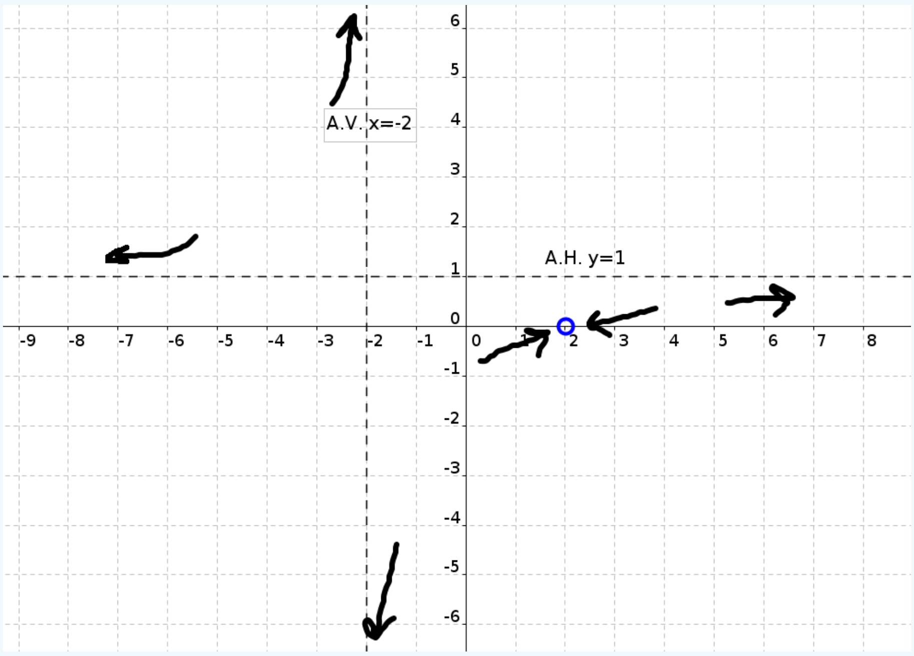
$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \dfrac{16}{0} = \pm\infty$. Segur que a $x=-2$ hi ha una asímptota vertical.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \dfrac{0}{0}$ =IND= $\lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^{\cancel{2}}}{(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x+2} = 0$. Donat que el límit és finit, NO hi ha asímptota a $x=2$.

Finalment, calculem el límit a infinit de la funció

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \dfrac{\infty}{\infty} = IND = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+4/x+4/x^2}{1-4/x^2} = 1$. Sabem que té asímptota horitzontal a $y=1$.

La situació gràfica és la següent:



4.

a) Per derivar $f(x) = \ln(x+1)\cdot\cos(x^2)$ aplicam la regla del producte:

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}\cdot\cos(x^2) + \ln(x+1)\cdot(-\sin(x^2))\cdot 2x = \dfrac{1}{x+1}\cdot\cos(x^2) - 2x\ln(x+1)\cdot\sin(x^2)$

A més hem hagut d'aplicar la regla de la cadena.

b) Calculam $f(0) = \ln(1)\cdot\cos 0 = 0$ i el pendent de la recta $m = f'(0) = 1$. Donat que el pendent és positiu, la funció creix en $x=0$.

L'equació de la recta tangent és $y = f(0) + f'(0)(x-a) \rightarrow y = 0 + 1(x-0)$; és a dir, $y = x$.

5.

a) Cercam el vector $\vec{d} = \vec{AB} = B - A = (9,7) - (-3,-2) = (12,9)$. El pendent és $m = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$. Escrivim l'equació punt pendent $y + 2 = \frac{3}{4}(x+3)$. Operam per obtenir l'equació general $3x - 4y + 1 = 0$

b) La longitud del segment és la distància entre els dos punts. S'obté del mòdul del vector que els uneix $d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

c) Ens demanen la distància entre la recta $r:\ 3x - 4y + 1 = 0$ i el punt $C = (2,8)$. Aplicam la fórmula: $d(r,C) = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 8 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{25}{5} = 5$. Recordam que la distància sempre és positiva i cal prendre el valor absolut.

6.

a) El coeficient de correlació lineal és $r = \dfrac{20,75}{1,71 \cdot 12,45} = 0,974$. Atès que r és positiu i proper a la unitat, es dona una correlació positiva forta.

b) L'equació de la recta de regressió és $y = 28,5 + \dfrac{20,75}{1,71^2}(x - 3,5)$. Si simplificam obtenim la recta: $y = 7,096 \cdot x + 3,66$.

A partir de la recta de regressió podem fer l'estimació substituïnt $x = 8$; $y = 7,096 \cdot 8 + 3,66 = 60,43$ milers d'euros en vendes. Aquesta extrapolació és fiable perquè $r \approx 1$ i no ens em anat massa enfora del rang de dades.