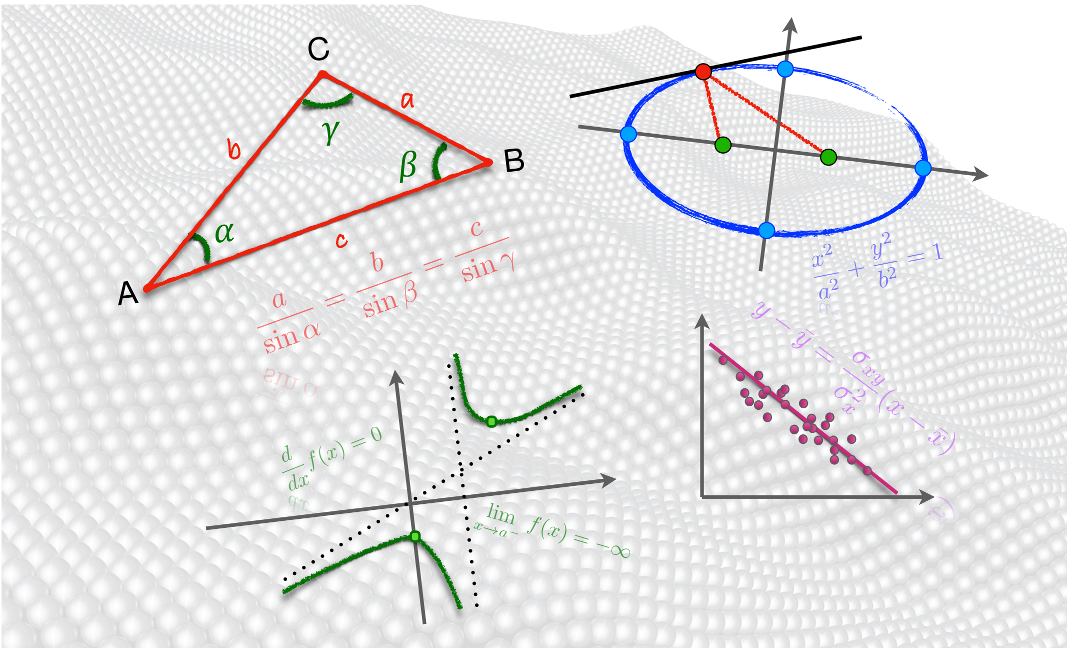
Matemàtiques I

1r de Batxillerat de ciències

Sèrie Pràctica ***3a Edició***

SOLUCIONARI



IESB

www.iesbinissalem.net

Josep Mulet

Departament de Matemàtiques

IES Binissalem

Índex

Solucions del Tema 1 5
Solucions del Tema 2 6
Solucions del Tema 3 11
Solucions del Tema 4 17
Solucions del Bloc I 21
Solucions del Tema 5 22
Solucions del Tema 6 27
Solucions del Tema 7 30
Solucions del Bloc II 40
Solucions del Tema 8 42
Solucions del Tema 9 46
Solucions del Tema 10 51
Solucions del Bloc III 55
Solucions del Tema 11 56

Solucions del Tema 1

Pàgina 10

1. a) $0.\hat{6}$ b) 0.75
c) $0.2\hat{3}$ d) 0.24
e) 0.875 f) $0.\widehat{81}$

2. a) $233/99$ b) $431821/3300$
c) 1

Pàgina 11

5. a) 5 b) 5 c) $\sqrt{10} - \pi$

6. a) 4 b) 2.2
c) 2 d) 9

7. a) $1 \leq x < 7$ b) $-3 < x < 5$
c) $2 < x \leq 8$ d) $x < 6$

8. a) $(2, 5)$ b) $(4, +\infty)$
c) $[3, 6)$ d) $(-\infty, 7]$

9. a) $(26, 100]$ b) $[0, 18]$
c) $(2, +\infty)$ d) $[100, 1000)$
e) $(-\infty, 25)$ f) $[0, +\infty)$
g) $(1, 9)$

Pàgina 12

10. a) $(-4, 6)$ b) $(-14/3, 2/3)$
c) $(-10.001, -9.999)$

11. a) $(5.5, 1.5)$ b) $(-5.5, 1.5)$
c) $(-0.5, 2.5)$

12. a) $x = 5$ i -5 b) $x = 4$
c) $x = -10$ i 4

13. a) $(-1, 1)$
b) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$
c) $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
d) $(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

14. -3 i 9. -5.5 i 1.5. $9 - (-5.5) = 14.5$

15. $[-3, 8)$

16. $[5, 11]$

17. a) $A \cap B = \emptyset$;
$A \cup B = [-11, -9] \cup (-1, 6)$;
$A - B = A$
b) $A \cap B = B$; $A \cup B = A$;
$A - B = [-5, 3] \cup [4, 5]$

18.
a) $\sqrt[6]{5}$ b) $\sqrt[8]{8}$ c) $\sqrt[8]{x^7}$

19.
a) $2\sqrt{2}$ b) $9\sqrt{3}$
c) $\sqrt[3]{6}$ d) $2\sqrt[4]{2}$
e) $\sqrt[3]{3}$ f) $\sqrt[3]{49}$
g) $\sqrt[8]{7}$ h) $\sqrt{2}$

20.
a) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9}$
b) $\sqrt{7} = \sqrt[16]{7^8}$
c) $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^3}$
d) $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{5^6} = 5^2$

Pàgina 13

21.
a) $\sqrt[3]{5/4}$ b) $\sqrt[12]{2^3 \cdot 3}$
c) $\sqrt[12]{5^7}$ d) 2^3
e) $2^4 \cdot \sqrt[5]{2^4}$ f) $\sqrt{5}$
g) 3 h) 5^2

22.

a) $15\sqrt{11}$ b) $6\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{6}/5$ d) $-14\sqrt[4]{2}/3$

e) $41\sqrt{3}/15$ f) $13\sqrt{2}/5$

23. $(2+a)^2+4(2+a)\sqrt{a}+4a$

24.

a) $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{3}$ b) $\frac{3}{4}\sqrt[4]{2^3}$

c) $3(\sqrt{2}+1)$ d) $3+2\sqrt{2}$

e) $(\sqrt{10}-\sqrt{6})/2$ f) $-(9+4\sqrt{5})$

25.

a) $3\sqrt{6}$ b) $\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 35

e) $2^{-64/15}$ f) $33/4-5\sqrt{2}$

Pàgina 14

- **Autoavaluació:.**

1. $x=-10$ i $x=4$

2. $\sqrt[8]{x^3}$

3. $13+4\sqrt{3}$

4. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

5. $\frac{13}{3}\sqrt[3]{2}$

6. $\dfrac{16-5\sqrt{15}}{-7}$

7. $(-1,\,6]$

Solucions del Tema 2

Pàgina 16

1. a) $4x^2-20xy+25y^2$

b) $9x^2+2xy+y^2/9$

c) $625-250+25/x^2$

d) $9a^2-6ab+b^2$

e) $a^4+2a^2b^2+b^4$

f) $9y^2/25-12/5+4/y^2$

2. a) $(a^2+3)^2$

b) $(3x-1)^2$

c) $(b-5)^2$

d) $(2y+3)^2$

e) $(a^2-1)^2$

f) $(y^2+3)^2$

3. a) $16x^4-9y^2$ b) $4x^4-64$

c) $-x^4+9x^2$

Pàgina 17

4.

a) $Q(x)=3x^3+4x^2-x+2$; $R(x)=-4$

b) $Q(x)=2x+2$; $R(x)=2x-1$

c) $Q(x)=a(x^3+x^2+x+1)$; $R(x)=a+b$

d) $Q(x)=x^8+x^6+x^4+x^2+1$; $R(x)=0$

5. a) $Q=2x^2-4x-1$; $R=17x+11$

b) $Q=-2$; $R=-4x^2+x+10$

c) $Q=-2x^2+2$; $R=12x^2-5x-13$

d) $Q=-2x^2+3$; $R=-3x^2+8$

e) $Q=-6x^2$; $R=7x^2+1$

6. a) $Q = -3x - 1$; $R = -1$

b) $Q = x^3 + 4x^2 + 8x + 14$; $R = 29$

c) $Q = 4x^2 - 7x + 7$; $R = -8$

d) $Q = x^2 + 3x$; $R = 1$

Pàgina 18

7. a) $R = 458$ b) $R = 32$

c) $R = 0$

8. Per exemple $q(x) = p - r = x^6 - 4x^4 - 4x^2 + x + 1$ que donaria quocient 1.

9. $D = d{\cdot}q{+}r$. Per exemple, si ens inventam $d = 2x{+}1$, obtenim $D = 2x^3 - 4x^2 - 7x - 4$

10. a) $(x - 3)^2$

b) $(x^2 + 4)^2$

c) $(x + \sqrt{5}y)^2$

d) NO

e) NO

f) $(x + 6)(x - 6)$

g) NO

h) $(\sqrt{5}x + \sqrt{11})(\sqrt{5}x - \sqrt{11})$

i) $(x^2 + \sqrt{3}y)(x^2 - \sqrt{3}y)$

11. a) $x(x - 8)$

b) $(4x + 3)(x - 1)$

c) $x(x + 2)(x - 2)$

d) $x(x^2 + 25)$

e) $3x(x + 1)^2$

f) $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$

g) $(2x - 1)^2$

h) $x^3(x - 2)$

Pàgina 19

12.

a) $3(x + 2) \cdot (x + 1)$

b) $x^3 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

c) $4(x + 3) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

d) $-2(x + 1)^2 \cdot (x - 3)$

e) $x \cdot (x^3 - x^2 + 8x - 4)$

f) $(x + 1)^2 \cdot (x - 2)$

g) $2(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 5)$

h) $x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$

i) $(x + 4) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

13. Per a qualsevol valor de m

14. a) $\dfrac{x}{(x + 1)(x - 2)}$ b) $\dfrac{x - 1}{(x - 2)(x + 4)}$

c) Igual

Pàgina 20

15. a) $\dfrac{x(x + 2)}{x^2 + 5}$ b) $\dfrac{a - 5}{7a + 4}$

c) $\dfrac{x + 3y}{4}$ d) $\dfrac{2ab + 3}{(a + 1)(a - 1)}$

16. a) $x(x + 1)$ b) $x^2(x + 1)(x - 1)$

c) $(x - 1)^2(x - 2)$

17.

a) $\dfrac{x - 1}{3x(x + 2)}$

b) $\dfrac{2(x + 5)}{(x + 1)^2}$

c) $\dfrac{x - 1}{x(x + 2)}$

d) *No es pot*

e) $\dfrac{(x^2 + x + 1)(x - 1)}{x}$

f) $\dfrac{1}{x + 2}$

g) $\dfrac{x + 2}{x - 1}$

h) $\dfrac{2(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{x}$

18. a) $\dfrac{-2x+6}{3x(x-4)}$ b) $\dfrac{-4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+1)}$

Pàgina 21

19. a) $\dfrac{6x^2+2x+4}{x(x^2+1)}$ b) $\dfrac{4x-5}{(x-2)(x+1)}$

c) $\dfrac{-1}{(x+3)(x-1)}$ d) $\dfrac{x+3}{x^2+3}$

20. a) $-\dfrac{(4x^2+x+1)}{x^3}$ b) $-\dfrac{(7x+2)}{x(x+3)}$

21.

a) $\dfrac{-4x}{(x+1)(x-1)}$ b) $\dfrac{-2}{x+1}$

c) $\dfrac{-1}{x-1}$ d) $\dfrac{-2t+3}{t(t+2)}$

e) 0 f) $\dfrac{1-x^2}{x^2}$

g) $\dfrac{3x^2+5}{x(x+1)^2}$

22. a) $\dfrac{-(a+y)(x+y)(a+x-y)}{(a-y)(x-y)(a+x+y)}$

b) $\dfrac{(2x+3y)(2y-x)}{(3x+y)(5x+3y)}$

c) $\dfrac{(x-2)(x^2+x-1)}{x^2-3x-2}$

23. a) 1, –1, 2, –2; Arrel $x = 1$.

b) 1, –1, 3, –3; Arrels: –3 i –1.

c) 1, –1, 3, –3, 9, –9; Arrels: 2 i 1;

d) 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6, –6; Arrels 0 i –2.

Pàgina 22

24. a) $x = -\dfrac{75}{17}$ i $x = 0$

b) $x = \frac{2\pm2\sqrt{37}}{3}$

c) $x = \pm1$

d) $x = \pm\sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{24}}{10}}$

25.

a) $x = 1,\ 2,\ -2$ b) $x = 0,\ 5,\ -5$

c) $x = 1,\ -2$ d) $x = \pm2,\ 3,\ -1$

e) $x = 1,\ 3,\ 5,\ -4$ f) $x = 1$

g) $x = -2,\ -1,\ 2$ h) $x = -3,\ -1,\ 2$

i) $x = -2,\ 2,\ 4$ j) $x = -3,\ -2,\ 1$

k) $x = -3,\ 3,\ -2,\ 2$ l) $x = -1,\ 0,\ 5$

26. No pot tenir terme independent, és a dir, $a_0 = 0$.

27. La suma de tots els coeficients ha d'ésser zero, és a dir, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 0$.

28. El nombre és 12. $2x + 7 + 3/2x = 6x - 23$

29. Les dimensions són 30 m i 24 m. Plan- teig: $\dfrac{36}{54} = \dfrac{x}{36}$.

30. a) $x = 6$ b) $x = 2$

c) $x = 3$

Pàgina 23

31.

a) $x = \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{2}$ b) $x = 2,\ \dfrac{1}{7}$

c) $x = 2,\ -\dfrac{3}{5}$ d) $\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{4}$

32. a) $x = -\dfrac{11}{17}$ b) $x = S.S.$

c) $x = S.S.$

33.

a) $x = 4$ b) $x = 4$

c) $x = 9$ d) $x = 7$

e) $x = 2$ f) $x = 38414$

g) $x = 10$ h) $x = 3$

i) $x = 11$ j) $x = 29$

k) $x = 14$ l) $x = 1$

Pàgina 24

34.

a) $x = 1; y = 16$ b) $x = 6; y = 8$

c) $x = 10; y = 2$ d) $x = 4; y = 7$

e) $x = 3; y = 1$ f) $x = -2; y = 8$

35. a) $x = -1; y = 4$

b) $x = -\dfrac{3}{7}; y = \dfrac{1}{7}$ i $x = 0; y = 1$

c) $x = -\dfrac{1}{2}; y = -2$ i $x = \dfrac{1}{2}; y = 2$

d) $x = 9; y = 4$

36.

a) $x = 7; y = 2; z = 11$

b) $x = 4; y = -3; z = 0$

c) $x = -1; y = 4; z = 4$

d) $x = 8; y = 4; z = -3$

37.

a) $x = 1; y = -5; z = 4$

b) $x = -1; y = -2; z = -2$

c) $x = 15; y = 2; z = 1$

d) $x = 3; y = 4; z = 9$

Pàgina 25

38.

a) $x = 1; y = -2; z = 3$

b) $x = 4; y = 2; z = -3$

c) $x = 1; y = -1; z = 0$

d) $x = 2; y = \dfrac{1}{5}; z = -1$

39. a) $x = \dfrac{16}{15}; y = \dfrac{8}{5}; z = \dfrac{39}{15}$

b) $x = 0; y = 0; z = 0$

40. a) $x = 1; y = 1; z = 1$

b) $x = 1; y = 1; z = 1; t = 1$

c) $x = 1; y = 1; z = 2$

d) $x = \dfrac{5}{9}; y = \dfrac{11}{3}; z = \dfrac{31}{3}$

e) $x = 0; y = 0; z = 1$

f) $x = 1; y = 1; z = 1; t = 1$

41. Sistema compatible indeterminat:

$x = \lambda; y = 0; z = \lambda - 1$

Pàgina 26

42. Els dos sistemes són incompatibles.

43. a) $x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = 2$ S.C.D.

b) $x = 5,\ y = \frac{-5}{6},\ z = \frac{-1}{3}$ S.C.D.

c) $x = 5 - 5z,\ y = -3 - 2z,\ z = z$ S.C.I.

d) $x = 2,\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{3}{2}$ S.C.D.

e) S.I. no té solució

f) $x = x,\ y = \frac{1-x}{3},\ z = \frac{7x+2}{3}$ S.C.I.

44. Cotxe 12000 €; Finca 48000 €; Pis 240000 €

45. $x - 2y - 2z = 0,$

$y - 2z = 0,$

$x + y + z = 45.$

Solució: $x = 30,\ y = 10,\ z = 5$ anys

46. $x + y + z = 18,$

$99x - 99z = 594,$

$y = (x + z)/2.$

Solució: $x = 9,\ y = 6,\ z = 3$

47. $x + y + z = 100,$

$y + z + t = 73,$

$x + z + t = 74,$

$x + y + t = 98.$

Solució: $x = 42,\ y = 41,\ z = 17$ i $t = 15$ anys.

Pàgina 27

48. a) $(-\infty,-1)$ b) $[9/4,+\infty)$

c) $(-\infty,x-10/7)$ d) $[-1/9,+\infty)$

e) $(-7/50,+\infty)$

49. a) $(-\infty,-1)$ b) $[2,+\infty]$

c) $(-\infty,-1/7)$ d) $[0,+\infty)$

50. a) $[3/2,+\infty)$ b) $(-\infty,-9]$

c) $(-\infty,2/7]$ d) $(-\infty,7/2]$

51. a) $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

b) $\mathbb{R}$

c) $(-5,5)$

d) $\emptyset$

e) $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

f) $\mathbb{R}$

Pàgina 28

52. a) $[-1,0]$ b) $(-\infty,0)\cup(5,+\infty)$

c) $[0,8]$ d) $[0,3]$

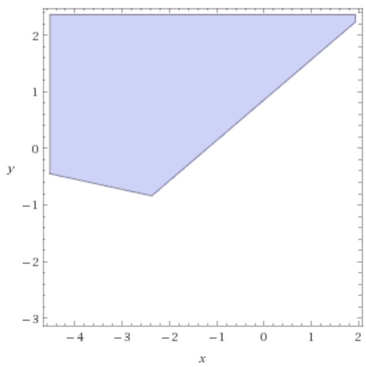
e) $(-\infty,0)\cup(3/2,+\infty)$ f) $(0,2)$

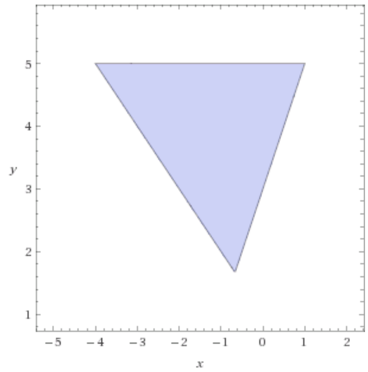
53. a) $[-1,3]$ b) $[-4,2]$

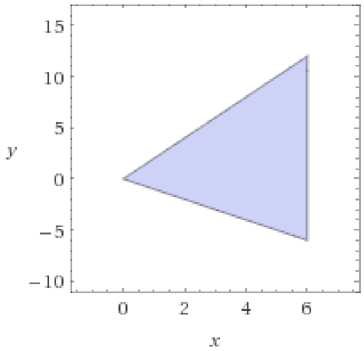
c) $(-\infty,-7)\cup(-2,+\infty)$ d) $x=3$

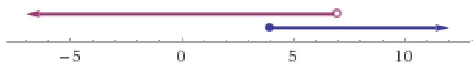
e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{R}$

54. Solució gràfica:









- **Autoavaluació:.**

1. -3

2. $Q=x^3$; $R=1$

3. No, si és de grau 4 pot tenir 4 arrels, que poden esser 4 reals, o be 2 arrels reals i 2 complexes o totes 4 complexes.

4. $x\in[-2,2]$

5. $[-1,15]$

6. $x\geq 9/5$

7. $x\in(1,2)$

8.

a) F b) V c) F d) F

Solucions del Tema 3

Pàgina 30

1. Si el triangle rectangle té hipotenusa a i catets b i c. Es compleix per trigonometria que $b = a\cos\alpha$ i $c = a\sin\alpha$. Si aplicam el teorema de Pitàgores a aquest triangle $a^2 = b^2 + c^2$, trobam que $a^2 = (a\cos\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2$. Finalment, simplificam dividint entre a^2 trobam $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Pàgina 31

2. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{CO}{H}}{\frac{CC}{H}} = \dfrac{CO}{CC} = \mathrm{tg}\,\alpha$

3. a) Parteix de $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i divideix tot entre $\cos^2\alpha$.

b) Parteix de $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i divideix tot entre $\sin^2\alpha$

4. A 45 graus, resulta que CC=CO i per això $\sin 45 = \cos 45$.

Com que la $\mathrm{tg}\,45 = \dfrac{CO}{CC} = 1$.

5. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$

6. $45°$, $120°$, $270°$, $300°$

7. Els angles d'un triangle sumen π radiants. Un angle recte són $\pi/2$ radiants.

8. $\omega = v/R = 2$ rad/s. En un minut 2 rad/s ·60s= 120 rad = 19.1 voltes

Pàgina 32

9. 6 m i 1.5 m

10. • **120 = 180–60**

$\sin 120 = \sin 60$

$\cos 120 = -\cos 60$

$\mathrm{tg}\,120 = -\mathrm{tg}\,60$

• **135 = 180–45**

$\sin 135 = \sin 45$

$\cos 135 = -\cos 45$

$\mathrm{tg}\,135 = -\mathrm{tg}\,45$

• **210 = 180+30**

$\sin 210 = -\sin 30$

$\cos 210 = -\cos 30$

$\mathrm{tg}\,210 = \mathrm{tg}\,30$

• **315= 360–45**

$\sin 315 = -\sin 45$

$\cos 315 = \cos 45$

$\mathrm{tg}\,315 = -\mathrm{tg}\,45$

• **390 = 30**

$\sin 390 = \sin 30$

$\cos 390 = \cos 30$

$\mathrm{tg}\,390 = \mathrm{tg}\,30$

• **3000 = 120**

$\sin 3000 = \sin 120$

$\cos 3000 = \cos 120$

$\mathrm{tg}\,3000 = \mathrm{tg}\,120$

• **–150 = 210**

$\sin -150 = \sin 210$

$\cos -150 = \cos 210$

$\mathrm{tg}\,-150 = \mathrm{tg}\,210$

Pàgina 33

11. Una solució $\arcsin 0,6 = 36.87°$ l'altre és $180 - 36.87 = 143.13°$

12. Una solució $\mathrm{arctg}\,4 = 75.96°$ l'altre és $180 + 75.96 = 255.96°$

13. Una solució $\arccos 0.75 = 41.41°$ l'altre és $360 - 41.41 = 318.59°$

14.

a) $\hat{C} = 33$; $b = 26,8$; $c = 17,4$

b) $\hat{B} = 67$; $b = 66,3$; $c = 28,1$

c) $\hat{C} = 39$; $\hat{B} = 51$; $a = 396,7$

d) $\hat{B} = 58; b = 56,01; a = 66,05$

15. $a = 3,46; b = 1,73$

16. $\alpha = 25,5°$

17. $a = 25; c = 20; \hat{B} = 36,87°; \hat{C} = 53,13°$

Pàgina 34

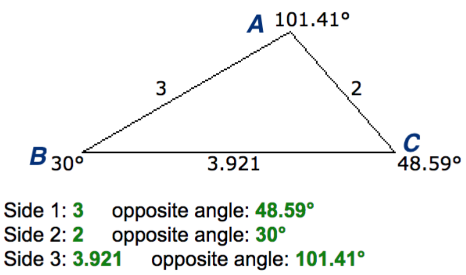
18. $\mathrm{tg}\,\alpha = 5/100$, $\alpha = 2.86°$. $s = \frac{h}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{100}{\mathrm{tg}\,2.86} = 2000$ m. Hem caminat 2 km.

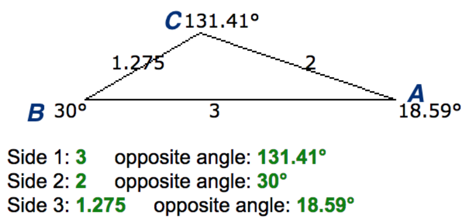
19. $x = \dfrac{2.5}{\mathrm{tg}\,40 - \mathrm{tg}\,15} = 4.377$ m; $y = x\mathrm{tg}\,15 = 1.173$ m

20. Costats: a = 5.22163 m b = 7.03508 m c = 8 m

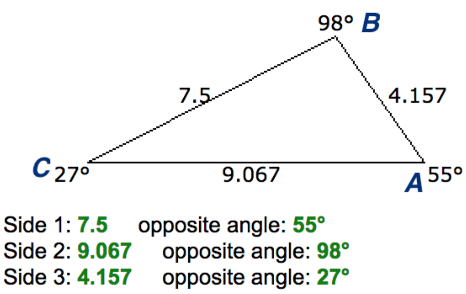
Angles: A = 40 B = 60 C = 80

21. Té dues solucions:



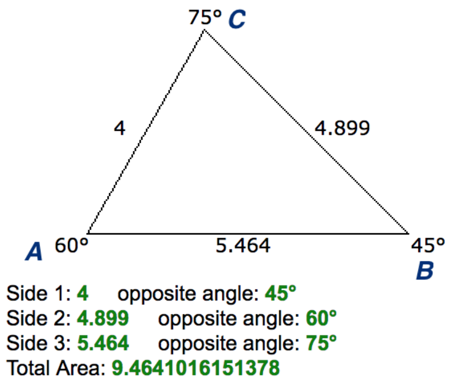


22. Solució única:

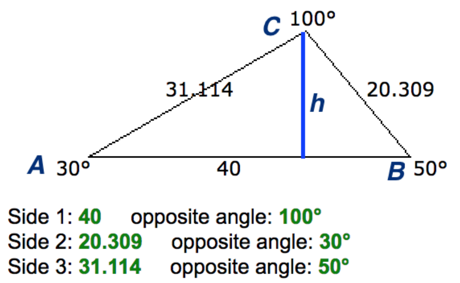


Pàgina 35

23. En primer lloc trobam dos costats a partir del radi: $a = 4\sqrt{2}\sin 60 = 2\sqrt{6}$ i $b = 4\sqrt{2}\sin 45 = 4$.

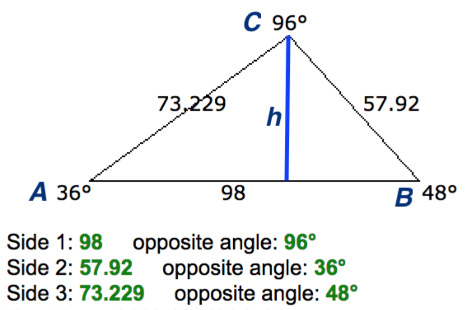


24. En primer lloc resolem el triangle:



Després calculam l'altura del triangle $h = 31.1\sin 30 = 20.31\sin 50 = 15.6$ m

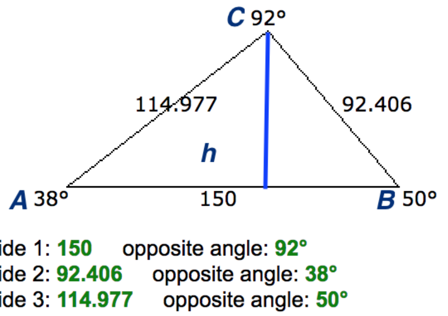
25. En primer lloc resolem el triangle:



Després calculam l'altura del triangle $h = 73.23\sin 36 = 57.92\sin 48 = 43.04$ m

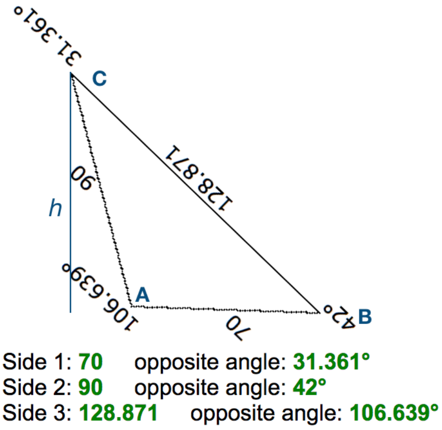
26. La tangent de l'angle es redueix a la meitat: $\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,42 = 0.4502$, el nou angle és $\alpha' = \mathrm{arctg}\,0.4502 = 24.24°$. Evidentment no és la meitat de $42°$.

27. En primer lloc resolem el triangle:



Les distàncies de cadascú a l'estel són 115 m i 92.4 m. Després l'altura del triangle $h = 114.98 \sin 38 = 92.406 \sin 50 = 70.79$ m

28. L'angle del triangle és $180 - 42 = 138$. En primer lloc resolem el triangle:

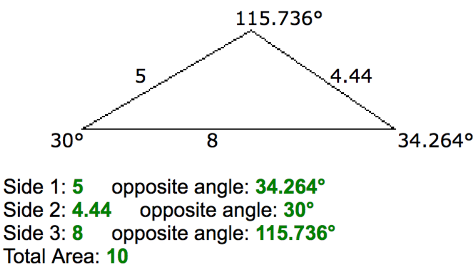


L'altre cable mesura 128.87 m. La distància del globus al terra $h = 128.87 \sin 42 = 86.23$ m

Pàgina 36

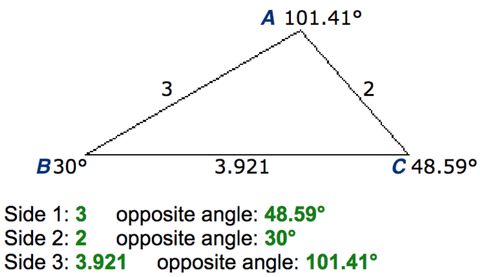
29. $\hat{A} = 28.52°$, $\hat{B} = 32.82°$, $\hat{C} = 118.66°$

30. Triangle:

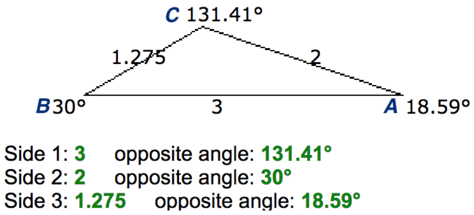


31. $\hat{A} = 21.79°$, $\hat{B} = 38.21°$, $\hat{C} = 120°$

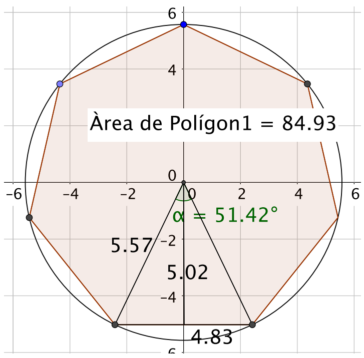
32. Solució 1:



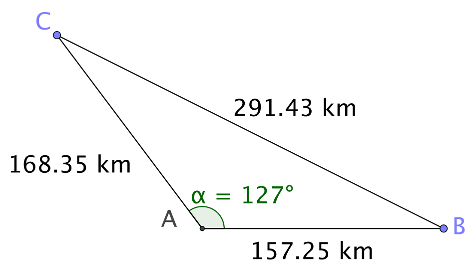
Solució 2:



33. El radi de la circumferència $R = L/2\pi = 5.57$ cm. El costat de l'heptàgon és $c = 4.83$ cm i l'apotema $a_p = 5.02$ i l'àrea $A = 84.9$ cm^2.



34. Les distàncies en km recorregudes per cada vaixell són: $15 \cdot 5\, h \cdot 1.85 = 157.25$ km i $26 \cdot 3.5\, h \cdot 1.85 = 168.35$ km. A les 15:00 es troben separats per 291.43 km que és superior a l'abast de le radi.



35. a) $A = 24.52$; $C = 125.38$; $c = 9.78$

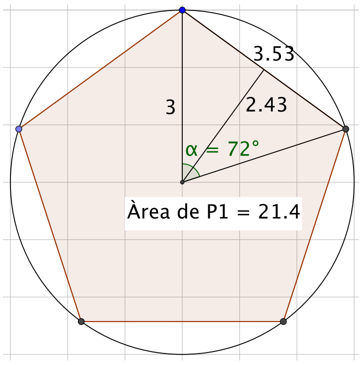
b) $B = 75$; $a = 14.64$; $c = 17.93$

c) No existeix cap triangle

d) $A = 77.36$; $B = C = 51.32$

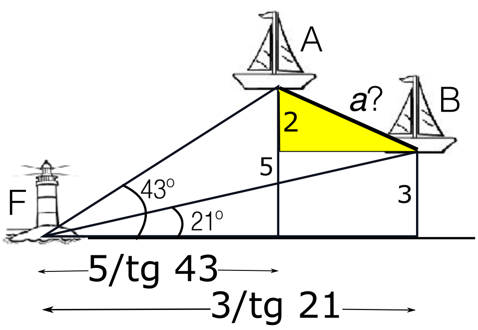
e) Solució 1: $B = 62.1$; $C = 72.9$; $c = 54.1$. Solució 2: $B = 117.9$; $C = 17.1$; $c = 16.64$.

36. El costat del polígon és $c = 3.53$ cm i l'apotema $a_p = 2,43$ i l'àrea $A = 21.4$ cm^2.

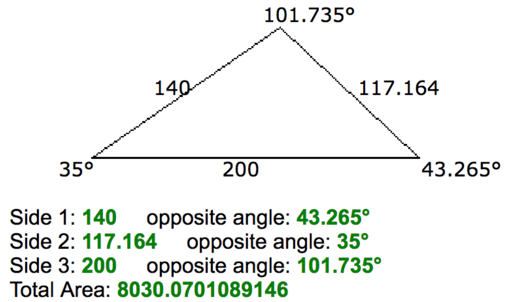


Pàgina 37

37. Construïm el triangle rectangle de la figura. Té de catets $c = 5 - 3 = 2$ i $b = \dfrac{3}{\text{tg}\, 21} - \dfrac{5}{\text{tg}\, 43} = 2.453$. La distància és la hipotenusa del triangle $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 3.165$ km



38. Perímetre: 457.16 m. Àrea: 8030,1 m^2.



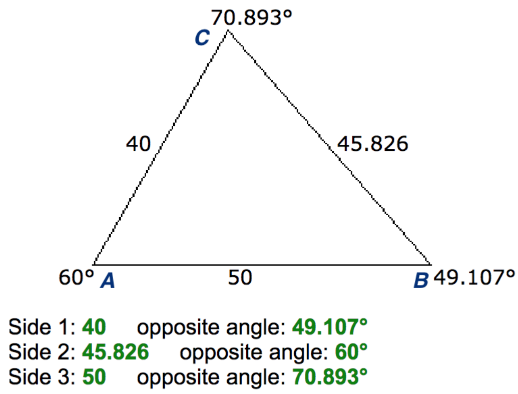
39. Del triangle rectangle d'abaix trobam la base com $b = 250 \cos 30 = 216.51$ m. Del triangle rectangle complet $\text{tg}\, 40 = \dfrac{H}{216.51}$, aïllam $H = 181.67$ m.

40. a) 100 m b) 86.60 m c) 90°

41. Primer trobam els angles que falten. Es un triangle d'angles 80, 60, 40. Aplicam el teorema del sinus: $\dfrac{h}{\sin 80} = \dfrac{15}{\sin 40}$. Aïllam $h = 22.98$ m.

42. $d(B, E) = 67.59$; $h = 56,7135$ m

43. Des de B les altres dues ciutats es veuen amb un angle de 49.11°.



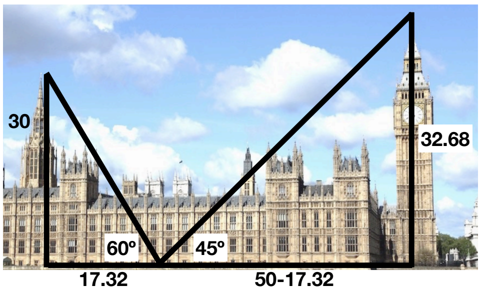
44. 🔑 $d = 35,49$ m

Pàgina 38

45. ⊛ Del triangle $\widehat{CAD}$ troba $\overline{AD} = 74.16$ km, del triangle $\widehat{CBD}$ troba $\overline{BD} = 52.05$ km pel teorema del sinus i finalment del triangle $\widehat{ADB}$ troba $\overline{AB} = 24$ km pel teorema del cosinus.

46. 🔑 cim A=827 m, cim B=751 m, distància entre cims AB=1687.2 m

47. Es trobava a 17.32 m de l'Abadia de Westminster i a 32.68 m del Big Ben. L'altura del Big Ben és 32.68 m ja que es veu amb un angle de 45°.



Pàgina 39

49. 15=45-30; $\sin 15 = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15 = \cos 45 \cos 30 + \sin 43 \sin 30 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{tg} 15 = 2 - \sqrt{3}$

50. 30=90-60; $\sin 30 = \sin 90 \cos 60 - \cos 90 \sin 60 = \cos 60 = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30 = \cos 90 \cos 60 + \sin 90 \sin 60 = \sin 60 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 60 = \sqrt{3}$

51. $\sin(90-\alpha) = \sin 90 \cos\alpha - \cos 90 \sin\alpha = \cos\alpha$,

$\cos(90-\alpha) = \cos 90 \cos\alpha + \sin 90 \sin\alpha = \sin\alpha$ i $\operatorname{tg}(90-\alpha) = 1/\operatorname{tg}\alpha$

52. $22.5 = 45/2$, $\sin 22.5 = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22.5 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\operatorname{tg} 22.5 = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$11.25 = 22.5/2$, $\sin 11.25 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$, $\cos 11.25 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$, $\operatorname{tg} 11.25 = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2(2+\sqrt{2})}$

53. $45 = 90/2$, $\sin 45 = \sqrt{\frac{1-\cos 90}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45 = \sqrt{\frac{1+\cos 90}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\operatorname{tg} 45 = \sqrt{\dfrac{1-\cos 90}{1+\cos 90}} = 1$

54. ⊕ Treu factor comú $\cos\alpha$ i utilitza la relació fonamental.

55. ⊕ Desenvolupa el quadrat amb la identitat notable $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Empra la relació fonamental i la fórmula de $\sin 2\alpha$.

56. ⊕ Utilitza les relacions de l'angle oposat $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

57. ⊕ Expressa $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{cotg}\alpha$ com a quocients de sinus i cosinus. Després realitza la suma de fraccions amb el mínim comú múltiple. Finalment utilitza la relació fonamental.

58. ⊕ Escriu $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha)$. Aplica la fórmula de la suma d'angles i tot seguit les fórmules de l'angle doble. Finalment opera, simplifica i treu factor comú $\sin\alpha$.

59. ⊕ Escriu $\cos(4\alpha) = \cos(2\alpha + 2\alpha)$. Aplica la fórmula de la suma d'angles i tot seguit les fórmules de l'angle doble. Finalment opera i simplifica.

Pàgina 40

60. a) 2 b) 1 c) 1 d) $\operatorname{cotg} x$

63. a) $\sqrt{2}\sin a$ b) $-\sqrt{3}\sin a$

65. a) $x = 120 + n\cdot 360$ i $x = 240 + n\cdot 360$

b) $x = 60 + n180$

c) $x = 225 + n\cdot 360$ i $x = 315 + n\cdot 360$

d) $x = 135 + n\cdot 360$

e) $x = 14.48 + n\cdot 360$ i $x = 165.52 + n\cdot 360$

f) $x = 70.53 + n\cdot 360$ i $x = 289.47 + n\cdot 360$

g) $x = 45 + n\cdot 360$

h) $x = 30,\ 150,\ 210,\ 330 + n\cdot 360$

i) $x = 45,\ 135,\ 225,\ 315 + n\cdot 360$

Pàgina 41

66. a) $x = 30 + n\cdot 60$

b) $x = 67.5 + n\cdot 90$

c) $x = 67.5 + n\cdot 90$

67. a) $x = n\cdot 60$ i $x = n\cdot 90$

b) $x = 30 + n\cdot 60$ i $x = n\cdot 180$

68. a) Elevau al quadrat i comprovau les solucions: $x = 90 + n\cdot 360$ i $x = n\cdot 360$

b) $x = 90 + n\cdot 180$

c) $x = 60 + n\cdot 180$ i $x = 120 + n\cdot 180$

69. a) $x = 90 + n\cdot 180$ i $x = 68.53 + n\cdot 360$ i $x = 291.47 + n\cdot 360$

b) $x = n\cdot 180$ i $x = 45 + n\cdot 90$

70. a) Anomenam $c = \cos x$. Només si $c = 0$; dóna $x = 90 + n\cdot 180$

b) Només si $c = \pm 1/\sqrt{3}$; dóna $x = 54.73 + n\cdot 180$ i $x = 125.27 + n\cdot 180$

c) Només prové solució de $c = 0.5639$; dóna $x = 55.67 + n\cdot 360$ i $x = 304.33 + n\cdot 360$

71. a) $x = n\cdot 180$ i $x = 90 + n\cdot 360$

b) $x = 90 + n\cdot 180$ i $x = n\cdot 360$

c) $x = 35.26 + n\cdot 180$ i $x = 144.74 + n\cdot 180$

d) $x = 15 + n\cdot 180$ i $x = 75 + n\cdot 180$

72. a) Sumar les dues equacions i aplica identitat fonamental $x = 1$; $y = 90 + n\cdot 180$

b) Suma les dues i aplica sinus d'una suma. Fes el mateix restant-les

Arribes al sistema $\left\{\begin{array}{l}\sin(x+y) = 1\\ \sin(x-y) = 1/2\end{array}\right.$.

Trobam $x = 60 + n\cdot 180$; $y = 30 + n'\cdot 180$ i $x = 120 + n\cdot 180$; $y = 150 + n'\cdot 180$

73. a) Substitució $x = n\pi$; $y = (n-1)\pi$

b) $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$; $y = \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}$

74. a) $x = 90 + (n+m)\cdot 90$; $y = (m-n)\cdot 90$

b) per a tot n i m enter.

c) No té solució perquè si elevam al quadrat i sumam $\sin^2(x-y) + \cos^2(x-y) = \frac{1}{2}$

d) quan la relació fonamental requereix que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Pàgina 42

- **Autoavaluació:**.

1.

a) $\sin(-750°) = 1/2$

b) $\mathrm{tg}\, 570° = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\cos 20\pi/3 = -1/2$

2. $\sin(105) = \sin(60+45) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos(75) = \sin(30+45) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3. $c = 17,32$, $\hat{B} = 90°$, $\hat{C} = 60°$

4. Sí ho aconseguirà. Estan a 105,83 m.

5. $\sin a = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos a = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

6. a) $x = \left\{\begin{array}{l}120 + n360\\ 240 + n360\end{array}\right.$

b) $x = 45 + n180$

7. a) $(60 + 360k, 120–360k)$ i

$(120 + 360k, 60–360k)$;

b) $(75 + 360k, 15–360k)$ i

$(15 + 360k, 75–360k)$

8. Substituir el $\sin(2a)$ pel seu valor i aplicar que $1-\cos 2a$ és el sinus al quadrat.

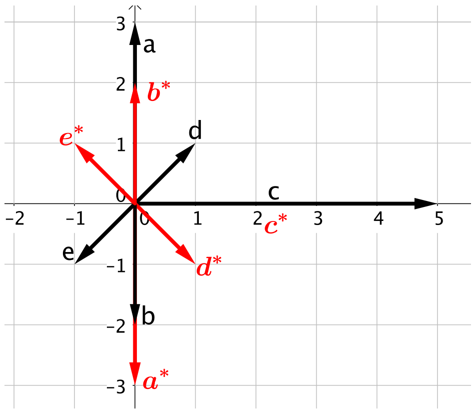
9. Perímetre = $5\cdot 35.267 = 176,3355$ m; Apotema $a_p = 30\cos 36 = 24.27$; Àrea = 2139.83 m^2.

10. $8,63°$

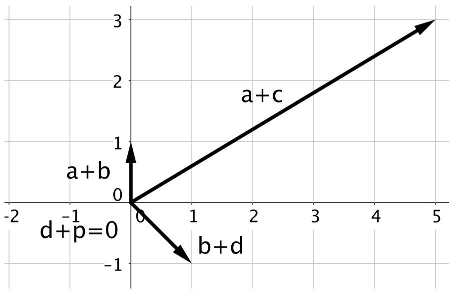
Solucions del Tema 4

Pàgina 47

1. Nombres i conjugats:



Operacions:



Pàgina 48

2.

a) $5-9i$ b) $-6-15i$

c) $-13+11i$ d) 0

e) 13 f) $4+11i$

g) $2i$ h) -4

3.

a) $-\frac{1}{10}-\frac{7\,i}{10}$ b) -2

c) $\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$ d) $\frac{34\,i}{5}$

5. Racionalitzant el nombre s'expressa com $\dfrac{3a-1}{10}+\dfrac{a+3}{10}i$. Si igualam les parts real i imaginària, això passa si $3a-1=a+3$, és a dir $a=2$

6.

a) $|z|=2; arg(z)=-30°$

b) $|z|=\sqrt{8}; arg(z)=225=-135°$

c) $|z|=2; arg(z)=-60°$

d) $|z|=4; arg(z)=-90°$

Pàgina 49

7. a) $|z|=\sqrt{18}; arg(z)=135°$

b) $|z|=3; arg(z)=180°$

c) $|z|=3; arg(z)=270°$

d) $|z|=\sqrt{18}; arg(z)=-45°$

8. a) $z=\frac{3}{4}(-\sqrt{3}+i); arg(z)=150°$

b) $z=\frac{1}{2}(1-i); arg(z)=-45°$

c) $z=[2_{-60°}]^7; arg(z)=-420°=-60°$

9. a) $1_{90°}$ b) $1_{270°}$

c) $4\sqrt{2}_{45°}$ d) $4_{180°}$

10. a) $5_{90°}$ b) $7_{270°}$

c) $5\sqrt{2}_{-45°}$ d) $2_{30°}$

11.

a) $2_{\,60°}=1+\sqrt{3}i$

b) $3_{\,-45°}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

c) $1_{\,90°}=i$

d) $5_{\,120°}=-\frac{5}{2}+i\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Pàgina 50

12. a) $\dfrac{\sqrt{2}i}{-2-2i}=\dfrac{\sqrt{2}_{90}}{2\sqrt{2}_{-135}}=\dfrac{1}{2_{225}}=\dfrac{1}{2}(\cos 225+i\sin 255)=-\dfrac{1}{4}(1+i)$

b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}=(1_{60°})^{30}=1_{1800°}=1$

13. a) $(\sqrt{3}+i)^{60} = (2_{30})^{60} = 2^{60}_{1800} = 2^{60}$

b) $(4-4i)^{-11} = (4\sqrt{2}_{-45^\circ})^{-11} = \frac{1}{2^{27}\sqrt{2}_{495}} = \frac{1}{2^{27}\sqrt{2}_{135}} = \frac{1}{2^{27}\sqrt{2}}(\cos 135 + i\sin 135) = \frac{1}{2^{28}}(-1+i)$

c) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^{12}}{(-2-2i)^{8}} = \dfrac{(2_{-60^\circ})^{12}}{(2\sqrt{2}_{-135^\circ})^{8}} = \dfrac{2^{12}_{-720^\circ}}{2^{12}_{-1080^\circ}} = 1_{360^\circ} = 1$

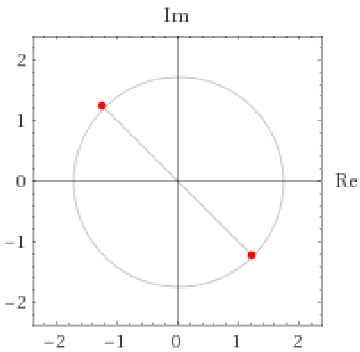
14. a) $\cos(-\theta) = \cos\theta$

b) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

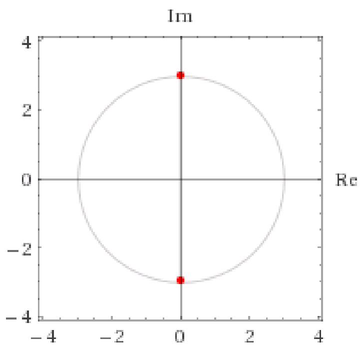
c) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$

d) $\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$

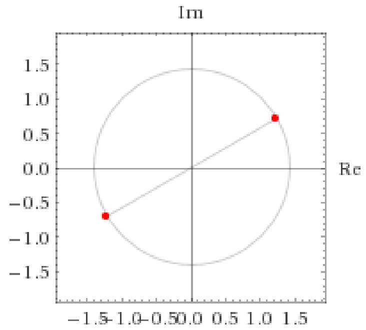
15. a) $\sqrt{-3i} \to z = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}(1-i)$



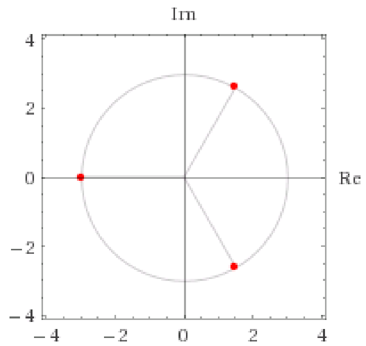
b) $\sqrt{-9} \to z = \pm 3i$



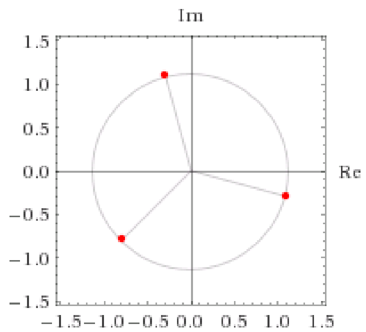
c) $\sqrt{1+\sqrt{3}\,i} \to z_1 = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})$



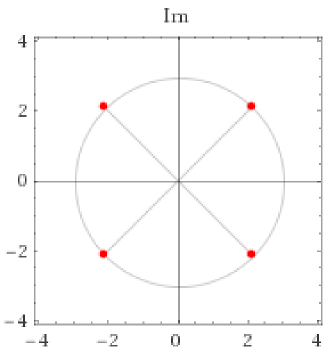
d) $\sqrt[3]{-27} \to z_1 = -3$; $z_2 = \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})$; $z_3 = \frac{3}{2}(1-i\sqrt{3})$



e) $\sqrt[3]{1-i} \to z_1 \approx 1.084 - 0.29i$; $z_2 \approx -0.29 + 1.084i$; $z_3 = -0.794 - 0.794i$

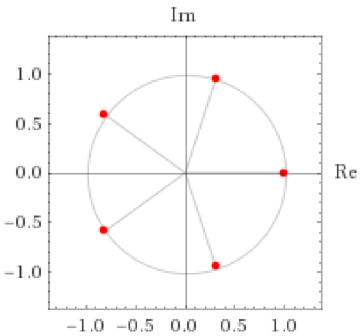


f) $\sqrt[4]{-81} \to z = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $z = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$

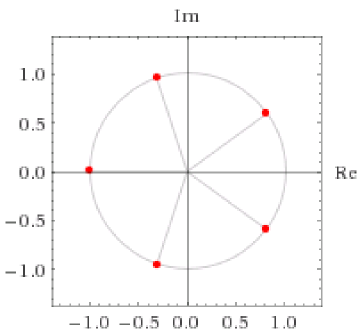


Pàgina 51

16. a) $\sqrt[5]{1} \to z = 1$; $z \approx 0.309 \pm 0.9511i$; $z \approx -0.809 \pm 0.5878i$



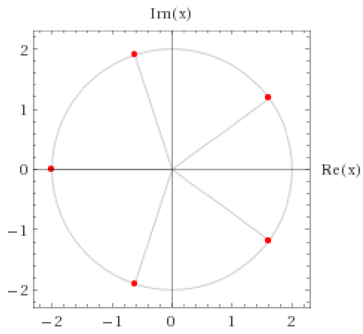
b) $\sqrt[5]{-1} \to z = -1$; $z \approx 0.809 \pm 0.588i$; $z = -0.309 \pm 0.9511i$



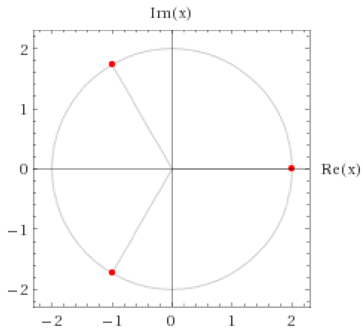
17. a) $x = \sqrt[3]{-27}$ exemple

b) $x = \sqrt[4]{-81}$ exercici anterior f)

c) $x = \sqrt[5]{-32} \to z = -2$; $z \approx 1.618 \pm 1.1756i$; $z = -0.618 \pm 1.9021i$;



d) $x = \sqrt[3]{8} \to z = 2$; $z = -1 \pm \sqrt{3}i$;



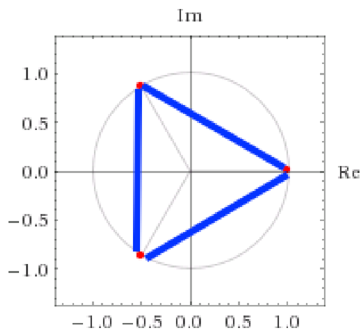
18. a) $x^2 = -1 \to z = \pm i$

b) $x^3 = -8 \to z = -2$; $z = 1 + \sqrt{3}i$; $z = 1 - \sqrt{3}i$

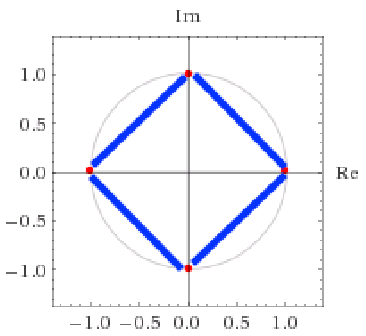
c) $x^4 + 16 = 0 \to z = \pm 2$; $z = \pm 2i$

19. a) $\sqrt{1} \to z = \pm 1$

b) $\sqrt[3]{1} \to z = 1$; $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$



c) $\sqrt{4} \to z = \pm 1; z = \pm i$



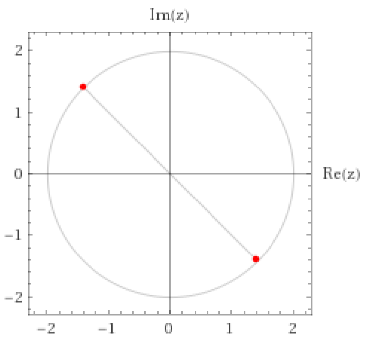
20. Dues arrels reals: $z = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

21. a) $z = \sqrt[6]{-64}$; $z = \pm 2i$; $z = \pm(\sqrt{3} + i)$; $z = \pm(\sqrt{3} - i)$

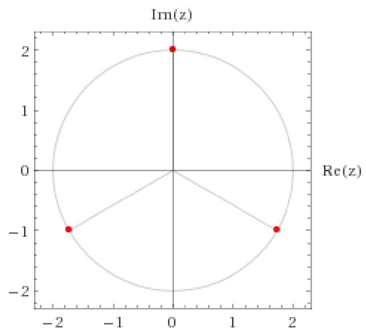
b) $-3z^4 + 10z^3 - 10z + 3 = -(z-3)(z-1)(z+1)(3z-1)$ té solucions reals $z = 3$; $z = \pm 1$; $z = 1/3$

c) Identificam una progressió geomètrica de raó z: La seva suma $\dfrac{z^7 - 1}{z - 1} = 0$ implica que $z^7 = 1$; són les arrels setenes de 1 (1 no serveix): Totes les arrels són per tant complexes: $z = -0.9 \pm 0.434i$; $z = -0.22 \pm 0.975i$; $z = 0.623 \pm 0.782$

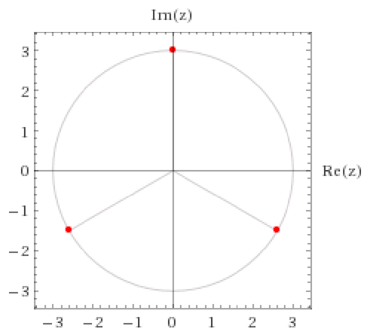
22. a) Veure exemple;



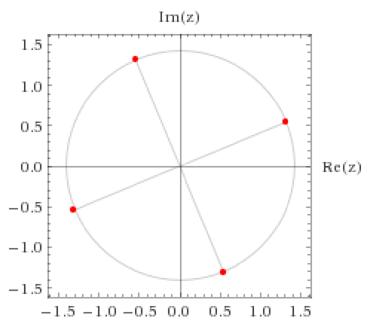
b) $z = 2i$; $z = -\sqrt{3} - i$; $z = \sqrt{3} - i$;



c) $z = 3i$; $z = -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i)$; $z = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i)$;



d) $z = \pm(1.3066 + 0.5412i)$; $z = \pm(0.5412 - 1.3055i)$;



Pàgina 52

- **Autoavaluació:.**

1.

a) $-5 - 6i$ b) $-8 - 6i$

c) $10i$ d) $-2 + i$

2. $-46 + 63i$

3. $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 5 - 2i$

4. a) Real $k=-2$ b) Imaginari pur $k=-2$

5. $x=\pm 2$

6. $3\sqrt{2}, 3\pi/4$

7. $1+\sqrt{3}i$

8. $-8i$

9. $5(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$

10. $z_1=2_{110^\circ}, z_2=2_{230^\circ}, z_3=2_{350^\circ}$

Solucions del Bloc I

Pàgina 54

1. a) $a\sqrt{a}$ b) $\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{6}$

2. a) $a\sqrt[20]{a}$ b) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6}{6}$

3. $x^2(x+1)(x-2)(3x-1)$

4. 2

5. $x=3$ vàlida.

6. $x=1$

7. $(3,+\infty)$

8. $x=38$: be, $y=18$: malament, $z=4$: no contestades. Planteig: $x+y+z=60$; $5x-2y-z=150$; $y+5z=x$

9. S.C.I. $x=1$, $y=z-3$, $z=z$

Pàgina 55

10. Els costats són 10.49 cm i 20.25 cm, el perímetre 61.48 cm. L'àrea 83.23 cm^2.

11. Primer obtenim els costats resolent un sistema d'equacions $a=19$, $b=16$ i $c=13$. Després aplicam el Teorema del Cosinus per obtenir els angles $\hat{A}=42.54°$, $\hat{B}=56.3°$, $\hat{C}=81.17°$

12. Utilitzam el Teorema del Sinus. $\hat{C}=56°\,19'\,31''$, $\hat{B}=51°\,40'\,29''$ i $\bar{AC}=263.96$ m.

13. $d=3557$ km sobre la superfície de la Terra.

14. No existeix cap angle amb aquestes condicions. S'obtindria que $\cos a=3/4$ i amb aquesta dada no es compleix que $\sin^2 a+\cos^2 a=1$.

15. En primer lloc trobam que $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. a) $-3/5$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ d) -3

16. a) Utilitza que $sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2$ desenvolupa el quadrat i simplifica. b) Utilitza que $\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{1+\cos\beta}{2}$

17. a) $x = 0°+n\cdot 360°$, $x = 126.87°+n\cdot 360°$. b) $x = 90° + n\cdot 180°$, $x = 60° + n\cdot 360°$, $x = 300° + n\cdot 360°$.

18. $x = 30° + n\cdot 180°$, $y = 30° + k\cdot 180°$.

19. $-\frac{19}{10} + \frac{37}{10}i$

20. i

21. $z = 5+2i$, $z = 5-2i$

22. $z^* = 3_{\,300°}$, $1/z = (1/3)_{\,300°}$, $z^2 = 9_{\,120°}$, $\sqrt[3]{z}$ té tres resultats = $(\sqrt{3})_{\,20°}$, $(\sqrt{3})_{\,140°}$ i $(\sqrt{3})_{\,260°}$.

Solucions del Tema 5

Pàgina 59

- **Avaluació inicial.**

a) L_4	b) R_3	c) L_2	d) C_4
e) PI_2	f) E_3	g) C_1	h) E_1
i) L_1	j) PI_4	k) PI_3	l) R_2

No tenen gràfica associada L_3, C_2, C_3, PI_1, R_1, R_4, E_2 i E_4.

Pàgina 60

1. 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

2. a) $a_n = 3+5(n-1)$ o $a_1 = 3$ $a_n = a_{n-1}+3$

b) $a_n = n^3$

c) $a_n = 8\cdot(1/2)^{n-1}$ o $a_1 = 8$ $a_n = a_{n-1}/2]$

3. $a_n = 10-3(n-1)$ i $a_{100} = -197$

4. $d = (19-11)/2 = 4$ i $a_1 = 3$, $a_n = 3+4(n-1)$, $S_{100} = 20100$

5. $a_n = 100\cdot(0.5)^{n-1}$, $a_{50} = 1.776\cdot 10^{-13}$, $S_\infty = 200$

6. $r = 3$ i $a_1 = 1$, $a_n = 3^{n-1}$, $S_{30} = 1.029\cdot 10^{14}$

7. Són funcions 2 i 4. No són funcions 1 i 3, perquè per un mateix valor de x trobam més d'un valor de y “La gràfica té plegaments”.

Pàgina 61

8. a) Dom $f = [-4,4]$

b) Dom $f = (-\infty,3)]$

c) Dom $f = (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$ o també Dom $f = \mathbb{R}-\{-2,2\}$

d) Dom $f = [-2,5]$

Pàgina 62

9. Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$,

Dom $g = (-\infty, -2/3] \cup (3, +\infty)$,

Dom $h = \mathbb{R} - \{1\}$,

Dom $i = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$,

Dom $j = (-\infty, -3] \cup (3, +\infty)$,

Dom $k = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\}$,

Dom $l = [-2, 3)$, Dom $m = \mathbb{R} - \{1\}$

10. Dom $p = \mathbb{R}$;

Dom $q = \mathbb{R}$;

Dom $r = (-\infty, -1]$;

Dom $s = \mathbb{R}$;

Dom $f = \mathbb{R} - \{-3\}$;

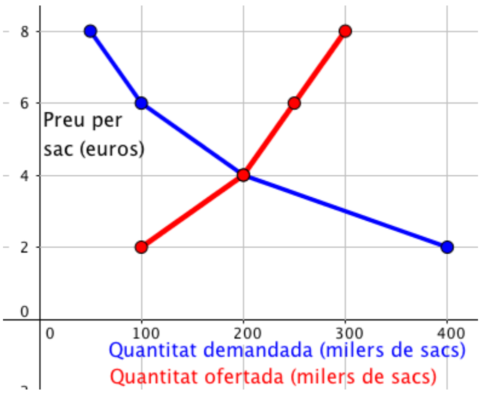
Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$;

Dom $h = \mathbb{R}$;

Dom $j = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

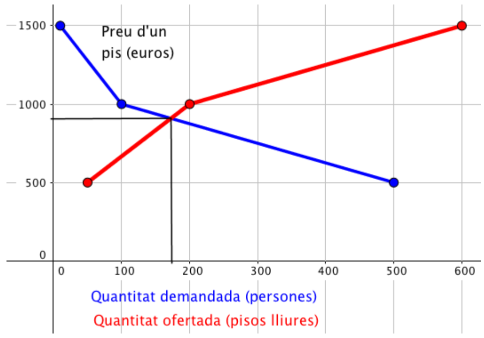
11. Si és senar $a = 0$ i $c = 0$. Si passa per $(1, -2)$ implica que $b = -3$

12. Gràfica:



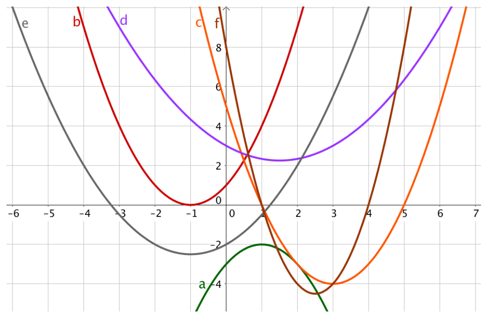
Pàgina 63

13. a) Gràfica:

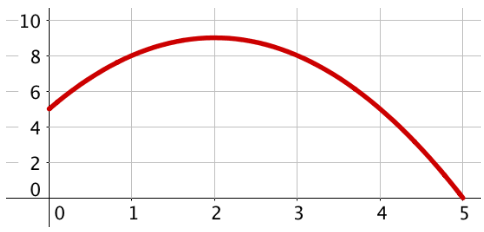


b) El punt d'equilibri és quan l'oferta iguala la demanda. Això passarà per una oferta de 175 pisos un preu per pis de 910 €.

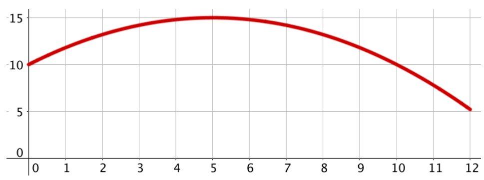
14. Gràfica:



15. L'objecte es llança des d'una altura de 5 m. Al cap d'1 s està a 8 m. Assoleix una altura màxima de 9 m als 2 s. Arriba al terra als 5 segons.

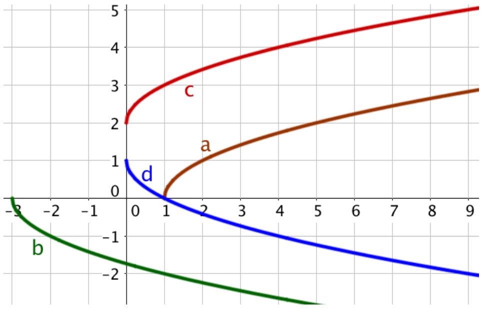


16. a)



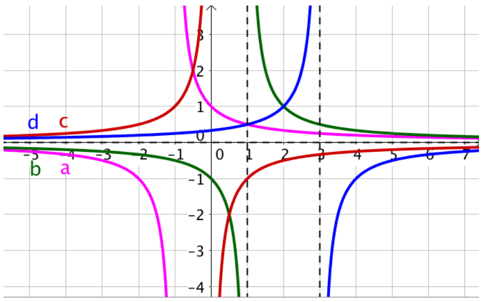
b) $f(6) = 14.8$ i $f(12) = 5.2$ cèntims.

17.

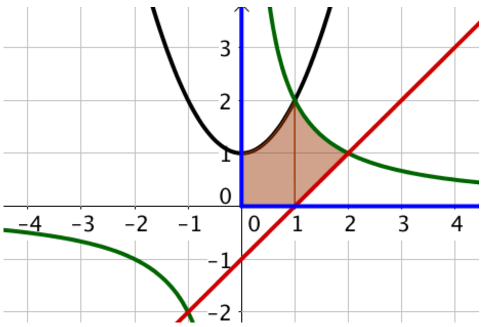


Pàgina 64

18.



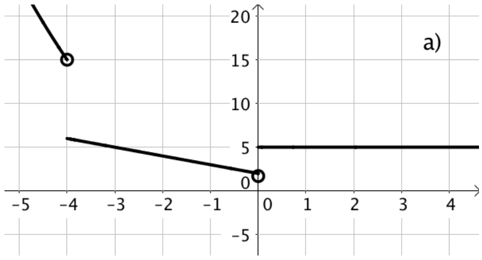
19.

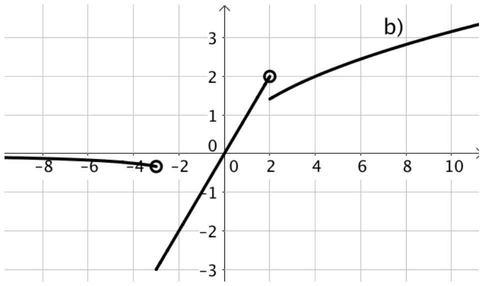


20. Dom $f = [0, +\infty]$. Tall eix OX $(2, 0)$; Tall eix OY $(0, -20)$. No presenta simetries. La funció és negativa a $[0, 2)$ i positiva a $(2, +\infty)$.

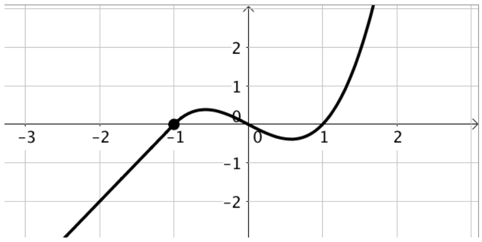
21. $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

22.

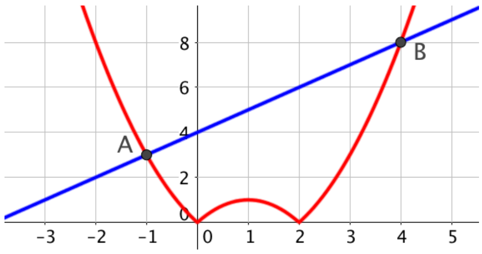




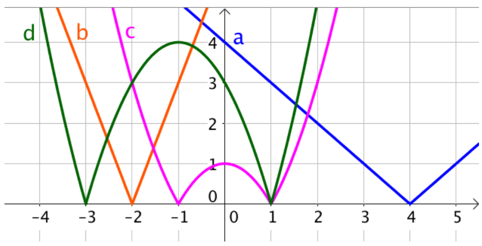
23.



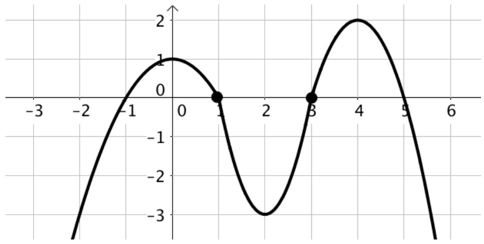
24.



25.

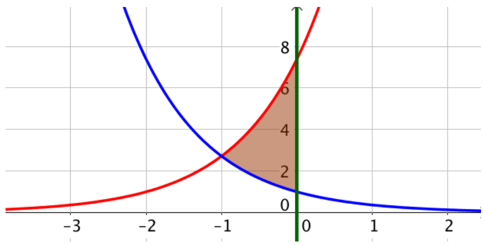


26.



Pàgina 65

28.



29. Són simètriques respecte l'eix OY.

30. a)

anys	1	2	3	4	5	10
k€	5.1	5.202	5.306	5.41	5.52	6.09

b) $C = 5 \cdot 1.02^x$

31. $y = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$, x hores passades des de les 9 del matí. A les 3 del matí $y(-6) = 7290$ i a les 12 del migdia $y(3) = 0.37$ milions.

Pàgina 66

32. a) $f \circ h = 2^{-3x+3} - 3\,2^{-2x+2} + 3\,2^{-x+1} - 1$;

$g \circ h = \sqrt{\frac{2^{-x+1}-2}{2^{-x+1}+7}}$;

$g \circ j = \sqrt{\frac{\ln(x^5-1)-2}{\ln(x^5-1)+7}}$;

$k \circ h = 2^{2^{-x+1}} \cdot 30^{2^{-x+1}-1}$;

$g \circ h \circ j = \sqrt{\frac{2^{-\ln(x^5-1)+1}-2}{2^{-\ln(x^5-1)+1}+7}}$;

$m \circ j = \sqrt[4]{-5 + 2\ln(x^5-1)}$

b) Dom $f = \mathbb{R}$; Dom $g = (-\infty, -7) \cup [2, +\infty]$; Dom $h = \mathbb{R}$; Dom $j = (1, +\infty)$; Dom $k = \mathbb{R}$; Dom $m = [5/2, +\infty]$

33. 🔑 $p^{-1} = (3-x)/5$,

$q^{-1} = \pm\sqrt{(x+1)/2}$,

$r^{-1} = \sqrt[3]{6-x}$, $s^{-1} = -x$,

$f^{-1} = (3x+4)/(2-x)$, $g^{-1} = -3/x$,

$h^{-1} = (1 \pm \sqrt{1+4x})/2$,

$j^{-1} = \pm\sqrt{4x/(1+x)}$, $k^{-1} = 4 + \ln x$,

$l^{-1} = 1/\log_2 x$,

$m^{-1} = \log x/(\log 2 - \log 3)$,

$n^{-1} = \ln x/(\ln x - 1)$,

$a^{-1} = 2 + e^x$, $b^{-1} = 3 \cdot 10^x + 1$,

$c^{-1} = (1+4e^x)/(1-2e^x)$,

$d^{-1} = \sqrt[3]{1+10^x}$

34. La funció representada és la recta $y = -\frac{3}{5}x + 3$. La seva inversa és $y = -\frac{5}{3}x + 5$

Pàgina 67

35. a) $x = 5$ b) $x = 3$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = 4$ e) $x = 5$ f) $x = \frac{1}{16}$

36. a) $x = \pm\frac{1}{10}$ b) $x = \log_7 115 \approx 2,438$

c) $x = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0,882$

d) $x = -2 + \log_3 172 \approx 2,685$

e) $x = e^2 \approx 7,389$ f) $x = \frac{3}{2}$

37. 🔑

a) $x = 15$ ($x = 0$ no vàlida)

b) $x = 2$

c) $x = 100$ ($x = 0$ no vàlida)

d) $x = 2/(\log 2 - 1)$

e) $x = 12/5$

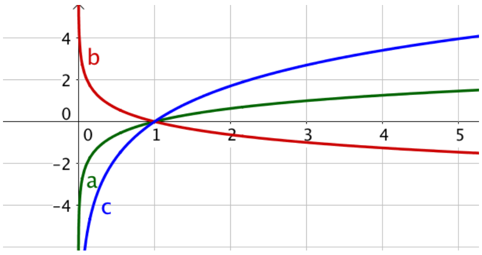
f) $x = 1$ i $x = -2$

Pàgina 68

38. a) $y = \log_4 x$ b) $y = \ln x$

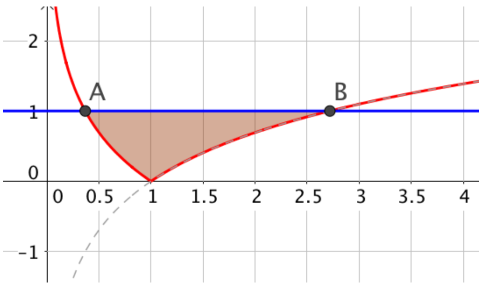
c) $y = \log_{1/4} x = -\log_4 x$ d) $y = \log_{1/e} x = -\ln x$

39.



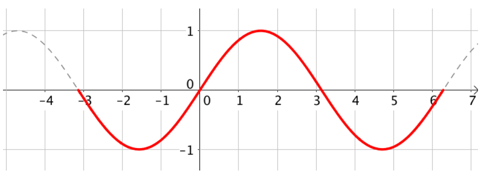
40. Dom $f = (0, +\infty)$

41. Punt de tall $A(e, 1)$ i $B(1/e, 1)$

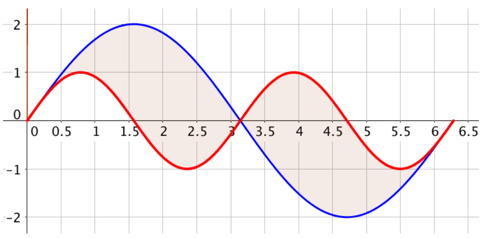


42. Dom $f = (0, +\infty)$; Dom $g = \mathbb{R}$; Dom $h = \mathbb{R}$

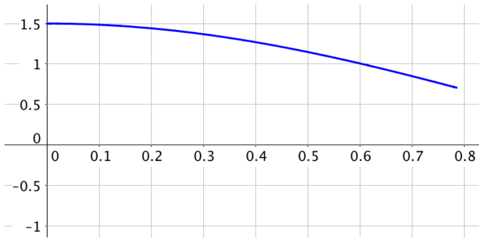
43.



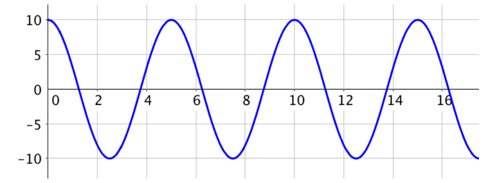
44.



45.



46.



Pàgina 69

- **Autoavaluació:.**

1. – **10.** Autoavaluació: 1a; 2d; 3d; 4b; 5c; 6b; 7b; 8a; 9c; 10c

Solucions del Tema 6

Pàgina 73

1. $\lim\limits_{x\to 3^-} f_1(x) = -\infty$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f_1	-5	-20	-500	$-5\cdot 10^4$	$-5\cdot 10^6$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f_2(x) = +\infty$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f_2	4	8	40	400	4000

$\lim\limits_{x\to 3^-} f_3(x) = 8$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f_3	4	5,66	7,46	7,94	7,99

2. a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \nexists$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^-$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \nexists$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$

3. a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f = 1/6$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f = 5/4$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 5^-} f = 10$; $\lim\limits_{x\to 5^+} f = 10$

Pàgina 74

4. a) $+\infty$ b) $-\infty$
c) $-\infty$ d) $+\infty$

5. 🔑

a) –1/6 b) 0
c) –9 d) 1
e) –12 f) $\mp\infty$
g) 98/5

6. 🔑

a) ∞ b) –1/2
c) 1/6 d) $+\infty$
e) $-1/(2\sqrt{3})$ f) –1/4

Pàgina 76

7. a) $-\infty$ b) $+\infty$
c) 9 d) 0

8. a) $-\infty$ b) $+\infty$
c) $+\infty$ d) 0
e) 0

9. a) 1 b) $+\infty$
c) 0 d) 2

10. 🔑

a) $-\infty$ b) 0
c) -3 d) 0
e) -1 f) $-\infty$
g) 0 h) $-\infty$

Pàgina 77

11. a) $+\infty$ b) 0
c) 0 d) 1
e) $+\infty$ f) e^2
g) $+\infty$

12. a) $+\infty$ b) 1
c) 1

Pàgina 78

13. 🔑

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

(2) $-3/2$ (3) $-1/4$

(4) $\lim\limits_{x\to 1/2^-} f = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1/2^+} f = +\infty$

(5) 0

(6) $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = -\infty$

(7) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

(8) $+\infty$

(9) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

(10) 10

(11) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$

(12) 6 (13) $+\infty$

(14) $-\infty$ (15) $+\infty$

(16) 0 (17) 0

(18) 0 (19) 0

(20) $2/5$ (21) $-7/3$

(22) $+\infty$ (23) $-\infty$

(24) $+\infty$ (25) -1

(26) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

(27) $-\infty$ (28) $\sqrt{3}$

(29) 1/2 (30) 0

(31) 1/5 (32) $+\infty$

(33) 3/2 (34) 2

(35) 0 (36) $+\infty$

(37) $1/4$

(38) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

(39) -4 (40) 2/3

(41) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

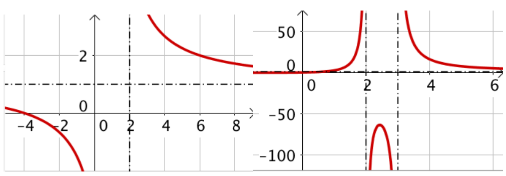
(42) 1/2

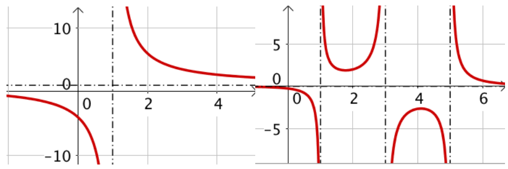
Pàgina 79

14. a) $x = 1$ b) $x = 2; x = 3$

c) $x = 1$ d) $x = 1;\ x = 3;\ x = 5$

.





15. a) $y = 1$ b) $y = 3$

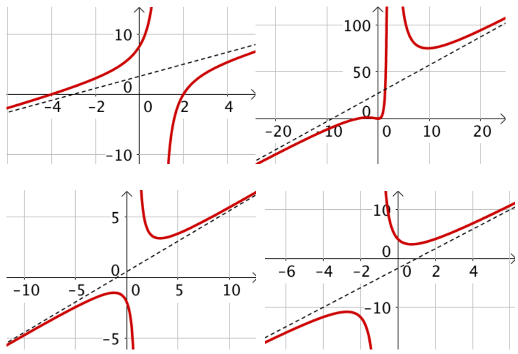
c) $y = 1$ d) $y = 0$

Pàgina 80

16. a) A.O. $y = x + 3$ b) A.O. $y = 3x + 27$

c) A.O $y = \frac{x+1}{2}$ d) A.O. $y = 2x - 2$

.



17. a) Branques paràbòliques a $+\infty$

b) Asímptota horitzontal $y = 0$

c) Branques paràbòliques a $+\infty$

d) Branques paràbòliques a $+\infty$

18. Asímptotes verticals: 1, 2, 4, 5, 6

Asímptotes horitzontals: 3, 4, 6

Asímptotes obliqües: 5

Branques paràbòliques: 1, 2

Solució: 1–f; 2–a; 3–d; 4–c; 5–e; 6–b

Pàgina 81

19.

a) AV. $x = 3$ AO. $y = x + 1$

b) AV. $x = \pm 2$ AH. $y = 0$

c) AV. $x = -2$ AH. $y = 1$

d) AV. $x = \pm 1$ AH. $y = 1$

e) AV. $x = 1$ AH. $y = 0$

f) AV. $x = 1$ BP.

g) AV. $x = 0$ i $x = 1$ BP.

h) AV. $x = 1$ AH. $y = 0$

Pàgina 82

20. a) $x = -1$ li falta un punt; $x = 1$ asímptota vertical

b) És continua a $[5, +\infty)$

c) És continua a $(3, +\infty)$

d) És contínua a $\mathbb{R}$

21. a) Té una discontinuïtat de salt finit a $x = -1$

b) És continua a $[2, +\infty)$

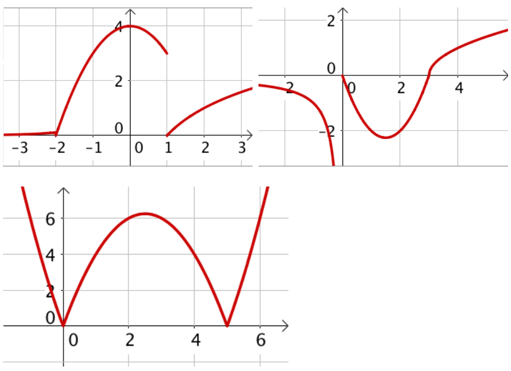
c) És contínua a $\mathbb{R}$

22. a) Té discontinuïtats de salt a $x = -2$ i $x = 1$

b) Té discontinuïtat asimptòtica a $x = 0$

c) És contínua a $\mathbb{R}$

.



23. a) Contínua a $\mathbb{R}$

b) Salt finit a $x = 0$

c) Té asímptota a $x = 3$

24. a) Contínua en domini $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

b) Contínua en domini $(-\infty, -2)$; A.V. a $x = -2$

c) Contínua en domini $(-\infty, 0)$; A.V. a $x = 0$

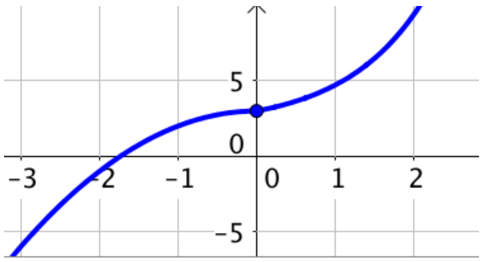
25. a) Domini $(4, 5)$. A.V. a $x = 4$ i $x = 5$

b) Domini $(-2, 1)$. A.V. a $x = -2$ i $x = 1$

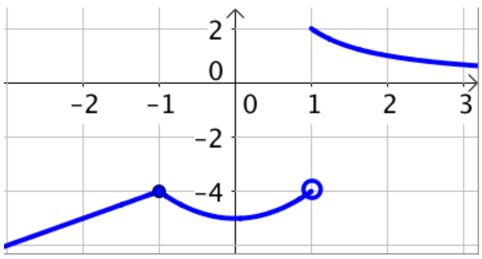
c) A.V. $x = -7$

d) Contínua a $[5, +\infty]$

26. És contínua a $\mathbb{R}$.

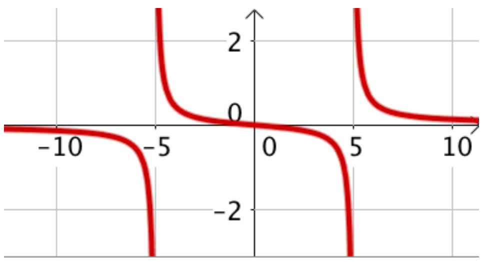


27. Continua excepte $x = 1$ salt finit.



Pàgina 83

28. A.V. $x = \pm 5$; A.H. $y = 0$. És discontinua degut les asímptotes a $x = \pm 5$.



29. $k = -3$;

https://www.geogebra.org/m/PS5YUdBN

30. $k = 2$;

https://www.geogebra.org/m/K6YYNbCC

31. $p = -4$;

https://www.geogebra.org/m/mU2vFjBH .

No és discontínua en cap altre punt.

32. Si $a = 1$, la funció és contínua; Si $a \neq 1$, la funció presenta un salt finit a $x = 1$.

https://www.geogebra.org/m/KCtQrh29

Pàgina 84

33. Has d'imposar les condicions de continuïtat en $x = a$; obtindràs l'equació de segon grau $a^2 - a - 2 = 0$. Per a $a = -1$ i $a = 2$ és continua; discontinuïtat de salt.

. https://www.geogebra.org/m/n5pZEvVR

34. $a = 1$ i $b = -1$

- **Autoavaluació:.**

1. $\lim_{x\to 1^-} f = +\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f = -\infty$

2. $\lim_{x\to -2^-} f = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} f = +\infty$

3. $-2/3$

4. $1/2$

5. a) 5, b) $+\infty$

6. ∞

7. Té un salt infinit a $x = 0$

8. Té un salt finit a $x = 2$

9. $k = 2$

Solucions del Tema 7

Pàgina 86

1. a) TVM=3 b) TVM=-2

c) TVM=0.5 d) TVM=1

2. TVM[-3, 2]=–1, TVM[1, 5]=6 i TVM[0, 3]=3

3. TVM[-3, 2]=7, TVM[1, 5]=31, TVM[0, 3]=9

Pàgina 87

4. a) $v_m = 24,3$ m/s b) $v_m[0,6] = 38,3$ m/s; $v_m[2,10] = 25$ m/s; $v_m[6,14] = 13,7$ m/s

c) No és constant. La velocitat va disminuint.

5. a) $v_m[0,40] = 18$ m/s b) $v_m[15,25] = 14$ m/s; $v_m[20,30] = 13$ m/s. No és constant

c) 120 km/h = 33 m/s. Sembla difícil que l'hagi sobrepassat. 80 km/h = 22,2 m/s. No és possible assegurar que no hi hagi anat més depresa ja que en el primer interval la seva velocitat mitjana és de 20 m/s.

Pàgina 88

6. a) Solució gràfica. No té sentit per a valors negatius ni per a valors majors de 8. Només ha sentit per $0 \le x \le 8$

b) $v_m[0,2] = 30\ \mathrm{m/s}$

c) $v_m[0,8] = 0\ \mathrm{m/s}$

d) $v_m[1,4] = 15\ \mathrm{m/s}$

e) $v_m[4,8] = -20\ \mathrm{m/s}$

f) $v_m[1,8] = -5\ \mathrm{m/s}$

g) c) $y(4) = 80$ m.

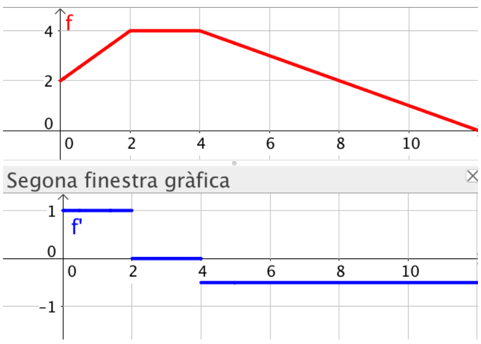
7. $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\,(h^2+6h+12)}{h} = 12$

8. $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+h}-1)\cdot(\sqrt{1+h}+1)}{h((\sqrt{1+h}+1))} = \dfrac{h}{h((\sqrt{1+h}+1))} = \frac{1}{2}$

9. $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{(4+h)^2} - \frac{1}{4^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\frac{h(h+8)}{16(h+4)^2}}{h} = -\dfrac{1}{32}$

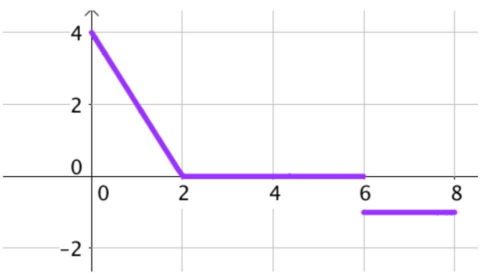
10. Qualsevol funció que presenti punxes, per exemple la funció valor absolut $y = |x|$ no és derivable a $x = 0$.

11.



Pàgina 89

12.



13. $d' = 1,2t^3$; $v(3) = 32,4\ \mathrm{m/s}$; $v(4) = 76,8\ \mathrm{m/s}$; $v(7) = 411,6\ \mathrm{m/s}$; $v(10) = 1200\ \mathrm{m/s}$.

14. $y = f(t) = t^2$; $y' = v = 2t$; $a = y'' = 2$

16. $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^2-(a+h)+1-(a^2-a+1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\,(2a+h-1)}{h} = 2a-1$

$f'(1)=1$, $f'(2)=3$, $f'(12)=23$, $f'(5.43)=9.86$ i $f'(-7)=-15$. En general, la funció derivada, $f'(x)=2x-1$.

Pàgina 91

17. $3x^2$, 0, $2x$, 1, 0, 2, $4x+3$

18. a) $f'(x)=24x^{23}$ b) $g'(x)=60x^9$

c) $h'(x)=2x^{12}$ d) $j'(x)=12x^3-10x$

e) $p'(x)=15x^2-1$

19. a) $f'(x)=\dfrac{8}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ b) $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt[4]{x}}$

c) $f'(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}$

20. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. $y'(1)=\dfrac{1}{2}$; $y'(4)=\dfrac{1}{4}$; $y'(5)=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$; etc. No existeix la derivada a $x=0$ perquè valdria $+\infty$

21.

a) $y'=3(x^2+x+1)^2\,(2x+1)$

b) $y'=10\ln^4(2x+3)\dfrac{1}{2x+3}$

c) $y'=60(3x^4+7)^4\,x^3$

d) $y'=\dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+7}}$

e) $y'=-2x\,e^{-x^2}$

f) $y'=\cos(\ln x)\,\dfrac{1}{x}$

g) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x}}$

h) $y'=\dfrac{2x\left[1+\mathrm{tg}^2(x^2+1)\right]}{\mathrm{tg}\,(x^2+1)}$

22. a) $y'=12(x^5-7x^3)^{11}(5x^4-21x^2)$

b) $y'=7(3x^3-5x^2)^6(9x^2-10x)$

c) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{(4x^5-8x^3)^5}}\cdot 5\left(4x^5-8x^3\right)^4\cdot(20x^4-24x^2)$

d) $y'=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{(2x^2+4x^7)}\cdot(4x+28x^6)$

23. a) $y' = (5x^4 - 21x^2)\cos(x^5 - 7x^3)$

b) $y' = 7\sin^6(3x^3 - 5x^2)\cdot\cos(3x^3 - 5x^2)\cdot(9x^2 - 10x)$

c) $y' = -\dfrac{4(2x^2+4x^7)^3(4x+28x^6)\cos\left(2x^2+4x^7\right)^4}{\sqrt[3]{\sin^2\left(2x^2+4x^7\right)^4}}$

24. a) $y' = -(5x^4e^{x^5} + 12x^2)\sin(e^{x^5} + 4x^3)$

b) $y' = -4(\operatorname{cotg}(5x^3 - 3x^2))^3\cdot\dfrac{15x^2 - 6x}{\sin^2(5x^3 - 3x^2)}$

c) $y' = \left[1 + \operatorname{tg}^2(7x^5 - 3x^3)^2\right]\cdot 2(7x^5 - 3x^3)\cdot(35x^4 - 9x^2)$

Pàgina 92

25.

a) $y' = (1 - x^2)\sin x + 3x\cos x$

b) $y' = \ln x + 1$

c) $y' = 3^x\left(\operatorname{tg}^2 x + \ln 3\operatorname{tg} x + 1\right)$

d) $y' = (x+1)^2e^x$

e) $y' = 10x\operatorname{arctg} x + \dfrac{5x^2}{1+x^2}$

f) $y' = \dfrac{\sin x^2}{x+1} + 2x\ln x\cos x^2$

26.

a) $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

b) $y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

c) $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

d) $y' = \dfrac{4x - 3\sqrt{x^3}}{2x^4}$

e) $y' = \dfrac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$

f) $y' = \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

g) $y' = \dfrac{-4\,x^2 + 20\,x - 22}{(x-3)^2(x-4)^2}$

h) $y' = \dfrac{-3\,x^2 - 6\,x - 3}{(x^3+3x^2+3x-1)^2}$

27. a) $f' = (1 - \dfrac{2}{x^2})e^{\frac{1}{x^2}}$

b) $f' = \dfrac{(4x-1)e^{4x} - (x+1)e^{-x}}{2x^2}$

c) $f' = \dfrac{2x}{(x^2+1)(2x-1)}\cdot\dfrac{2\ln(x^2+1)}{(2x-1)^2}$

d) $f' = -4e^{-(2x+1)^2}\cos(2x)\cdot[\sin(2x) + (2x+1)\cos(2x)]$

28. a) $y' = 48x^7 + 108x^5 - 10x$

b) $y' = 256x^6 - 20x^3 + 84x^2$

c) $y' = \frac{\sqrt{x}}{2}\,(7x^2 - 15)$

Pàgina 93

29. a) $y' = \dfrac{4}{(x+3)^2}$ b) $y' = \dfrac{-6x^2+30x-5}{2(3x^2-x)^2}$

c) $y' = \dfrac{\sqrt{x}(x+6)}{2(x+2)^2}$

d) $y' = \dfrac{\sqrt[6]{x}(35-11x^3)}{6(x^3+5)^2}$

e) $y' = 4x^3 \cdot x^{-3/4} + (x^4-2)\cdot(-3/4)\cdot x^{-7/4} = \dfrac{13x^4+6}{4\sqrt[4]{x^7}}$

f) $y' = \dfrac{\sqrt[6]{x^5}(5x+22)}{6(x+2)^2}$

30. a) $y' = \dfrac{12}{\ln 10(x^5-7x^3)}(5x^4-21x^2)$ b) $y' = \dfrac{7}{\ln 2}\dfrac{9x^2-10x}{3x^3-5x^2}$

c) $y' = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{5(20x^4-24x^2)}{4x^5-8x^3} - \dfrac{3}{3x-2}\right]$ d) $y' = \dfrac{8}{3(x^2+2x^7)}(x+7x^6)$

31. a) $y' = x^{x^5-7x^3}\cdot\left((5x^4-21x^2)\ln x + x^4 - 7x^2\right)$

b) $y' = (x+1)^{3x^3-5x^2}\cdot\left((9x^2-10x)\ln(x+1) + \frac{3x^3-5x^2}{x+1}\right)$

c) $y' = x^{(4x^5-8x^3)^5}\cdot(4x^5-8x^3)^4\cdot x^2\cdot\left(20(5x^2-6)\ln x - 4x^2 + 8\right)$

32. a) $y' = \dfrac{(x-1)\cdot(2x-3)}{x+2}\left[\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{2x-3} - \dfrac{1}{x+2}\right]$

b) $y' = \dfrac{(3x^2+4)\cdot(4x-2)}{7x-1}\left[\dfrac{6x}{3x^2+4} + \dfrac{4}{4x-2} - \dfrac{7}{7x-1}\right]$

c) $y' = \dfrac{(x+9)\cdot(2x-3)}{(x+3)\cdot(x+2)}\left[\dfrac{1}{x+9} + \dfrac{2}{2x-3} - \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+2}\right]$

Pàgina 94

33. a) $y = -\frac{x}{4} - 1$ b) $y = -\frac{x}{3} - \frac{10}{3}$

c) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{8}(\pi+4)$ d) $y = \frac{x}{e}$

34. a) $y = -\frac{x}{12} + \frac{49}{6}$ b) $y = 3$

c) $y = -\frac{x}{30} + \frac{361}{10}$ d) $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

35. a) Resol $3x^2 - 3 = 0 \to x = \pm 1$

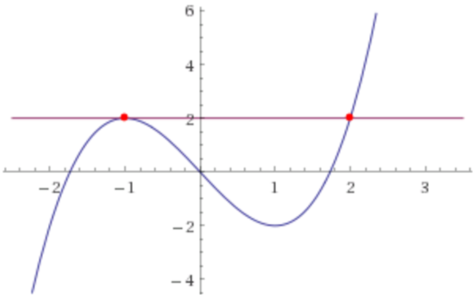
b) Resol $3x^2 - 3 = 6 \to x = \pm 3$

36. $y = 0$

37. Per trobar els punts en qüestió, primer resolem $12x^2 - 12 = 12$. Això passa per a $x = \pm\sqrt{2}$. L'ordenada de cada punt és $y = \mp 4\sqrt{2}$. Les rectes tangents són: r_1: $y + 4\sqrt{2} = 12(x - \sqrt{2})$; r_2: $y - 4\sqrt{2} = 12(x + \sqrt{2})$

El menor pendent que pot tenir la corba s'obté de $f'' = 0$ (Correspon a un punt d'inflexió), que dóna $x = \frac{1}{2}$.

38. La recta tangent és horitzontal $y = 2$ perquè A és un màxim de la funció. Miram on més talla la recta resolent l'equació $x^3 - 3x = 2$. També talla a $x = -1$



39. Plantejam un sistema. Ha de passar per A: $2 = a + b + c$. Ha de passar per O: $0 = c$. Ha de tenir derivada 1 a $x = 0$: $b = 1$. Llavors $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$

40. Plantejam un sistema. Les dues rectes han d'ésser secants a A: $0 = 1 + b + c$; $0 = a - 1$. Ha de tenir igual derivada a $x = 1$: $3 + b = a - 2$. Llavors $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$

41. En algun punt de f el seu pendent ha de valer 1: $2x = 1$. Això només passa quan $x = 1/2$; $y = 1/2$. Llavors, aquest punt ha d'ésser també un punt de la corba: $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + a$, llavors $a = \frac{1}{4}$

Pàgina 95

42. Només pot ésser la d) perquè la derivada s'anul·la en dos punts $x = 0$ i $x = 3$, llavors són dos punts on la recta tangent és horitzontal.

43. a) Creix $(-\infty, 0)$

Decreix $(0, \infty)$. No té extrems

b) Sempre decreix

c) Creix $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreix $(0, 2)$

d) Creix $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Decreix $(1, 3)$

44. a) Creix $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Decreix $(1, 3)$.

Màx: $(1, -4)$

Min: $(3, -8)$

b) Creix $(e, +\infty)$

Decreix $(0, 1) \cup (1, e)$.

Min: (e, e)

c) Creix $(-2, 1) \cup (1, 2)$

Decreix $(-\infty, -2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$.

Màx: $(2, -1)$

Min: $(-2, -1/9)$

d) Creix $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Decreix $(-2, 0)$.

Màx: $(-2, \frac{4}{e^2})$

Min: $(0, 0)$

e) Creix $(0, +\infty)$

Decreix $(-\infty, 0)$.

Min: $(0, 0)$

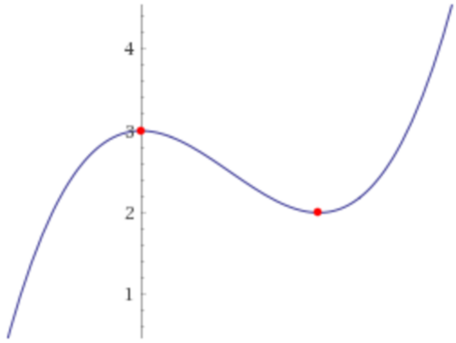
f) Màx: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$

Min: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

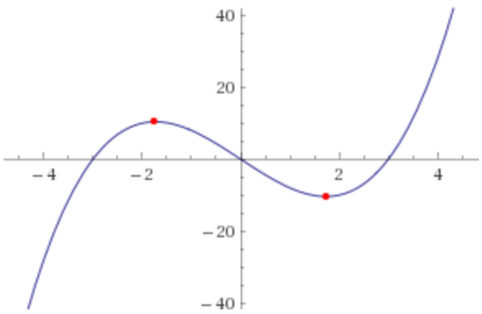
Pàgina 96

45. La funció $y = x^3 - 3x$ té un màxim a $(-1, 2)$ i un mínim $(1, -2)$. A $x = 0$ és decreixent. A $x = \pm 2$ és creixent. La funció $y = x^3 + 3x$ és sempre creixent; no té extrems.

46. Té un màxim a $(0, 3)$ i un mínim a $(1, 2)$. Gràfica:



47. Té un màxim a $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ i un mínim a $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$. Gràfica:



48. a) $y'' = 6x - 6$

b) $y'' = -\sin x - \frac{1}{x^2}$

c) $y'' = \dfrac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$

d) $y'' = \dfrac{1}{x}$

e) $y'' = \dfrac{4}{(x - 1)^3}$

f) $y'' = 6 \sin x^2 + 12x^2 \cos x^2 + 2$

Pàgina 97

49. a) $y'' = 6x$

Còncava: $(0, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, 0)$

P.I. $(0, 2)$

b) $y'' = 12x^2 - 12$

Còncava: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Convexa: $(-1, 1)$

P.I. $(\pm 1, -1)$

c) $y'' = \frac{2}{x^3}$

Còncava: $(0, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, 0)$

P.I. no en té

d) $y'' = \dfrac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$

Còncava: $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$

Convexa: $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$

P.I. $x = \pm\sqrt{3}/3$

e) $y'' = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

Còncava: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

P.I. $(0,0)$; $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/4)$

f) $y'' = 4e^{-2x^2}(4x^2-1)$

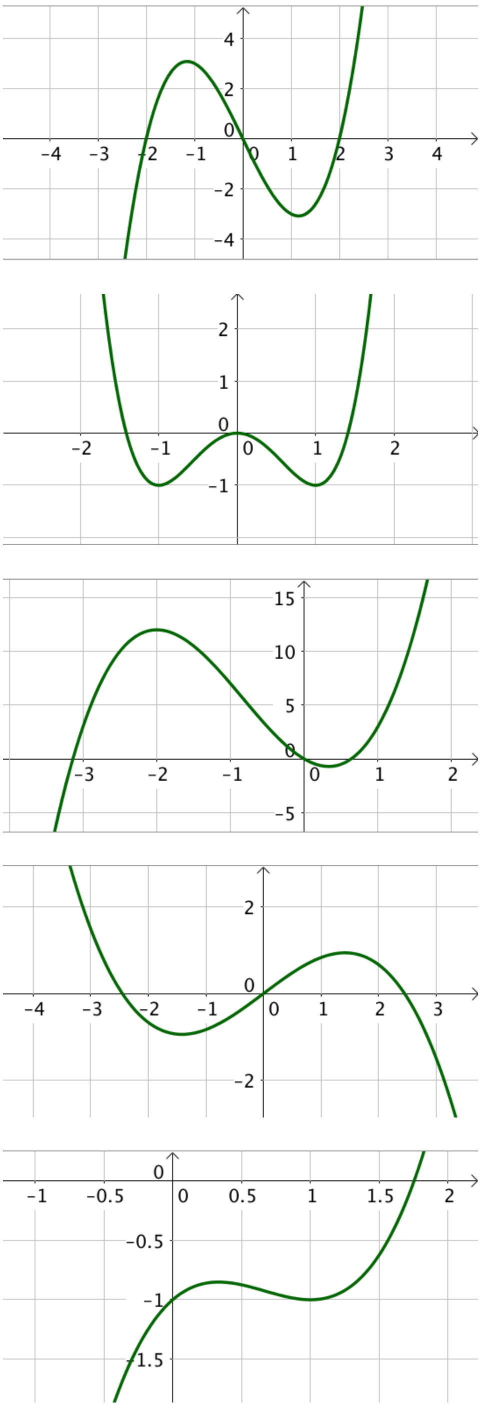
Còncava: $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$

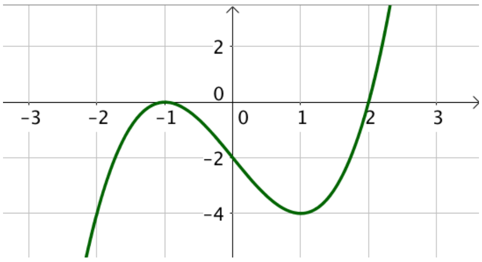
Convexa: $(-1/2, 1/2)$

P.I. $x = \pm\frac{1}{2}$

Pàgina 102

50.





a) Màx $(-1.155, 3.079)$; Mín. $(1.1547, -3.079)$

b) Màx $(0, 0)$; Mín. $(-1, -1)$ i $(1, -1)$

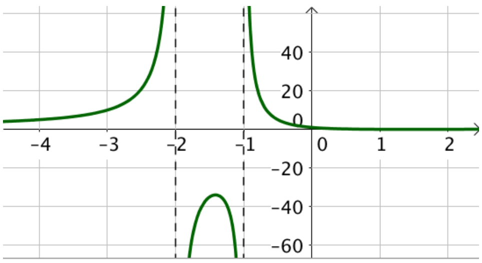
c) Màx $(-2, 12)$; Mín. $(\frac{1/3}{3}, -\frac{19}{27})$

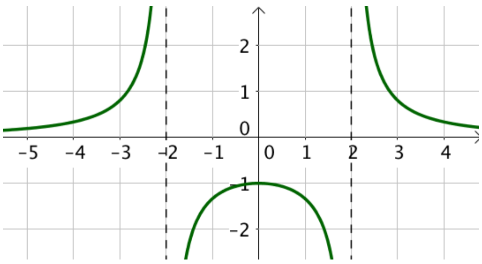
d) Màx $(\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$; Mín. $(-\sqrt{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{3})$

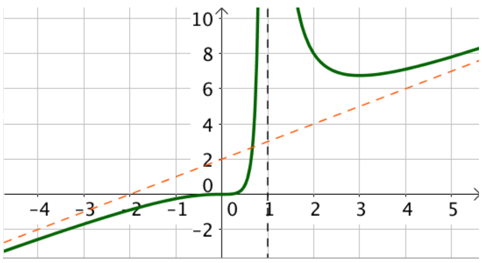
e) Màx $(\frac{1}{3}, -\frac{23}{27})$; Mín. $(1, -1)$

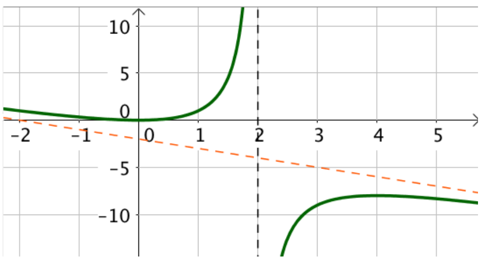
f) Màx $(-1, 0)$; Mín. $(1, -4)$

51.

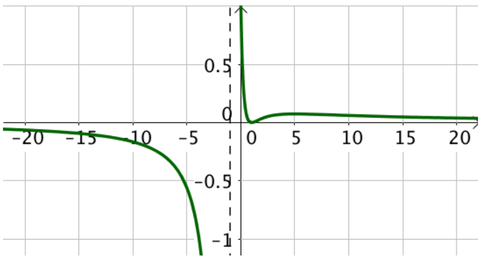


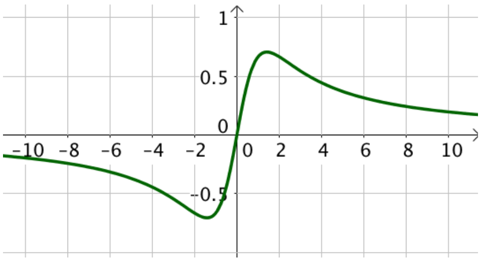


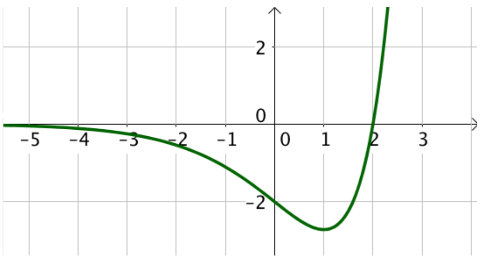


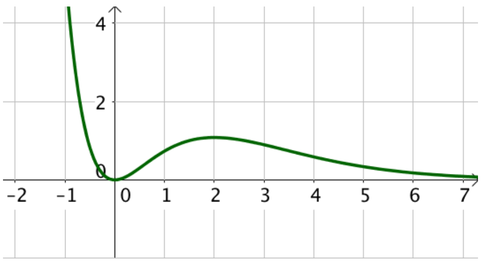


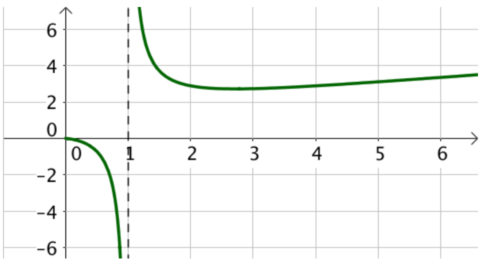
52.











53. ⊛ Minimitzeu la funció $f(x) = 5x^2 + 6(44 - x)^2$. Trobareu $x = 22$.

54. ⊛ $V(x) = (25 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x$. Màxim és $x = 3.68$ cm, $V = 820.53$ cm^3.

55. $V = \pi r^2 h = 150$ si les mides són $l = \sqrt[3]{dm^3}$, $h = \dfrac{150}{\pi r^2}$. L'àrea total és $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi\left(r^2 + \dfrac{150}{\pi r}\right)$. Cercam extrems $S'(r) = 0 \to r = \sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}} = 2.88$ dm; i l'altura $h = \dfrac{75}{\sqrt[3]{45\pi}} = 5.76$ dm.

Pàgina 103

56. El percentatge efectiu = percentatge de curacions - percentatge efectes secundaris. $h(x) = 100 - \frac{80}{x+5} - \frac{2x}{100}$, per a $x > 0$. Cercam màxim de $h(x)$ i trobam $x = 20\sqrt{10} - 5 \approx 58,25$ mg de dosi, donant una efectivitat del 97,57 %.

57. Problema semblant al dels barrils d'oli però amb diferent geometria. $V = x^2h = 1$ si les mides són dm, $h = \dfrac{1}{x^2}$. L'àrea total és $S(x) = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$. Cercam mínim, $S'(x) = 0 \to x = 1$ dm; i l'altura $h = 1$ dm; és a dir, es tracta d'un cub d'aresta 1 dm.

58. El volum d'un con és $V = \dfrac{1}{3}A_{base} \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi(R^2 - x^2) \cdot (R + x)$, minimitzam la funció $f(x) = R^3 + R^2x - Rx^2 - x^3$. Trobam $0 = 25 - 10x - 3x^2$ que té solució $x = \frac{5}{3}$ cm [Nota $x = -5$ no serveix], altura $h = \frac{20}{3}$ cm, radi $r = \frac{50\sqrt{2}}{3}$ cm.

59. La velocitat de variació d'una funció és la seva derivada.

La **temperatura** varia com $T' = \frac{500}{t^2}$; els canvi als 30 segons és $T'(30\text{ s}) = 0,555\,°\text{C/s}$, als 90 segons és $T'(90\text{ s}) = 0,0617\,°\text{C/s}$.

El **radi** varia segons $r'(t) = 0,001T' = \frac{0,5}{t^2}$. Els canvis són $r'(10\,\text{s}) = 0,005$ mm/s; $r'(30\,\text{s}) = 0,000555$ mm/s; $r'(90\,\text{s}) = 0,000062$ mm/s

Per trobar la variació del radi segons la temperatura, millor expressar en funció de la temperatura $r'(T) = \frac{(200-T)^2}{500000}$; els canvis són $r'(50\,°\text{C}) = 0,045$ mm/s; $r'(75\,°\text{C}) = 0,0313$ mm/s; $r'(100\,°\text{C}) = 0,02$ mm/s

- **Autoavaluació:.**

1. $f'(1) = 1$

2. $m = f'(2) = -16/121$

3. $y' = 2x \cdot 2^{x^2+3} \ln 2$

4. $y' = -6x^2 \cos x^3 \sin x^3$

5. $y = 2x + 6$

6. $y = 0$

7. $x < 0$, creixent; $0 < x < 4$, decreixent; $x > 4$, creixent

8. $(0,0)$ mínim i $(1,1)$ màxim relatius

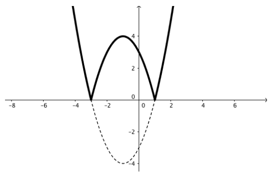
9. Punt d'inflexió $(3, -45)$; recta tangent $y = -24x + 27$

Solucions del Bloc II

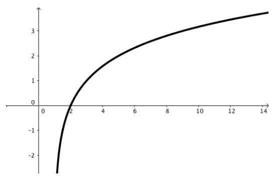
Pàgina 104

1. a) $\mathbb{R}-\{0,-5\}$, b) $(-\infty, 5/2]$

2. a)



b)



3. $g(h(x)) = \sin\sqrt{x}$, $f(g(x)) = e^{\sin x}$, $h(f(x)) = \sqrt{e^x}$. $h(f(x))^{-1} = \ln x^2$.

4. a) 4, b) $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = -\infty$, c) $-\infty$

5. a) $b = 1$, b) f és discontínua a $x = 2$ per punt desplaçat.

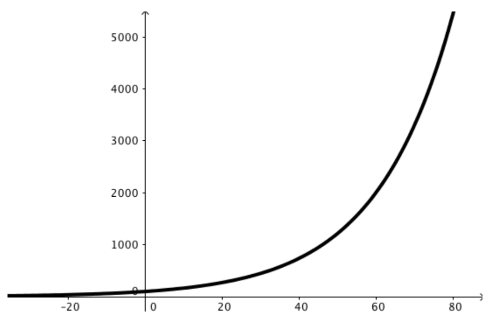
6. $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3(3+h)^2-10(3+h)-(-3)}{h} = 8.$

7. a) $y(0) = 100$ bacteris,

$y(30) = 100 \cdot e^{0.05\cdot 30} \approx 448$;

b) $5000 = 100 \cdot e^{0.05\cdot t} \to 0.05 \cdot t = \ln(5000/100) \to t = \ln(50)/0.05 \approx 78,2$

c) Gràfica



Pàgina 105

8. $y = -\frac{2}{3} + \frac{5}{9}(x-1)$ o $y = \frac{5x}{9} - \frac{11}{9}$.

9.

a) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{\cos(5x^4+2x^3)}} \cdot \sin(5x^4+2x^3) \cdot (20x^3+6x^2)$

b) $y' = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

c) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(3x^5-6x^2)^2}} \cdot (15x^4 - 12x)$

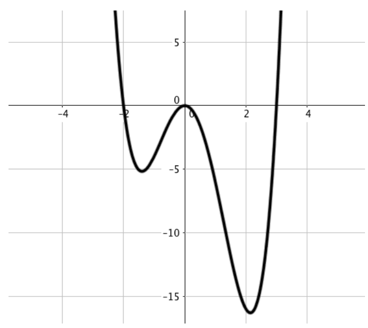
d) $y' = (1-2x^2)\cdot e^{-x^2}$

e) $y' = -85\left(\frac{2x+5}{3x-1}\right)^4 \cdot \frac{1}{(3x-1)^2}$

f) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$

10. a) Creixent: $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; Decreixent $(-2,2)$; Màxims: $(x=-2, y=16)$; Mínims: $(x=2, y=-16)$. b)Sempre és creixent. No té extrems.

11. Punts de tall amb l'eix OX: $x=-2$, $x=0$, $x=3$, i amb l'eix OY $(0,0)$. Té un màxim a (0,0) i té dos mínims a $x=2.15$, $y=-16.3$ i a $x=-1.4$, $y=-5.2$ La gràfica de la funció és:

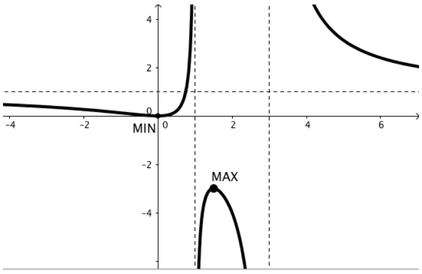


12.

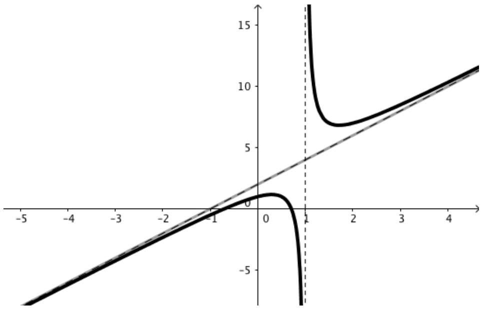
a) $y=1$ asímptota horitzontal; $x=1$ i $x=3$ asímptotes verticals. La posició relativa és: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ per damunt; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ per davall. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$.

b) La funció té un mínim relatiu a $x=0$, $y=0$ i un màxim relatiu a $x=3/2$, $y=-3$

c) Gràfica:



13. L'única funció que presenta asímptota obliqua és c). L'asímptota obliqua és $y = 2x + 2$ i també té una asímptota vertical a $x = 1$. La gràfica és la següent:



14. $k = 1/2$. La primera derivada $y' = (2x^2+2x+1)/(x+1/2)^2$ mai és zero. Sempre creix i per tant no té extrems.

15. $a = -6$ i $b = 17$.

Solucions del Tema 8

Pàgina 111

1. a) Igual mòdul
b) Igual mòdul; direcció i sentit
c) Mòdul doble; igual direcció i sentit
d) Tot diferent

2. a) $(1, 2)$
b) $(-1, -2)$
c) $(-3, 3)$
d) $(4, -1)$

. Els vectors $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{PQ}$ són oposats $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

3. a) $(-3, 6)$
b) $(-3, 9)$
c) $(-\frac{17}{3}, \frac{41}{3})$
d) $(-1, \frac{11}{2})$

Pàgina 112

5. $\vec{x} = 6\vec{b} - 2\vec{a} = (-20, 22)$

6. a) $\frac{2}{-10} \neq \frac{2/5}{-9}$ No

b) $\frac{-2}{3} \neq \frac{-3}{2}$ No

c) $\frac{-6}{8} = \frac{8}{-12}$ Sí perquè $\vec{v} = -\frac{4}{3}\vec{u}$

7. $\frac{18}{k} = \frac{-6}{4} \to k = -12$.

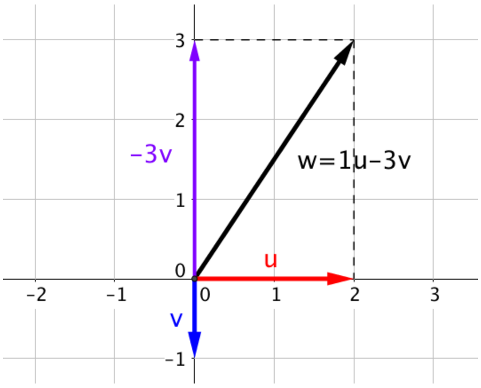
Pàgina 113

8. a), b) són linealment independents i formen base. c), d) són dependents i no formen base.

9. Resolem el sistema $\left\{\begin{array}{l} -3 = \lambda + 5\mu \\ -8 = -3\lambda + 2\mu \end{array}\right.$. Trobam $\lambda = 2$ i $\mu = -1$.

10. Mètode algebraic: $\left\{\begin{array}{l} 2 = 2\lambda + 0\mu \\ 3 = 0\lambda - 1\mu \end{array}\right.$. Trobam $\lambda = 1$ i $\mu = -3$; té components $(1, -3)$.

Mètode gràfic:



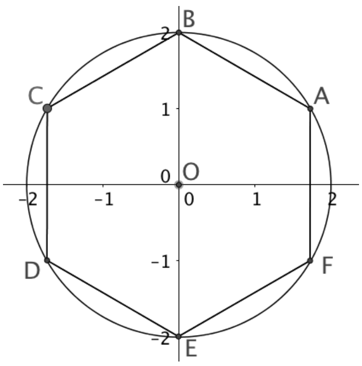
11. Mètode algebraic: $\begin{cases} -4 = 1\lambda - 1\mu \\ 5 = 1\lambda + 1\mu \end{cases}$. Trobam $\lambda = 1/2$ i $\mu = 9/2$; té components $(1/2, 9/2)$.

12. a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -2$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} = 4$

d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} = -4$



13. a) 4 b) 0

c) 0 d) 9

e) 36 f) 0

Pàgina 114

14. a) 22 un escalar

b) $= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = 29$ un escalar

c) $(-15, -6)$ un vector

d) $(20, 30)$ un vector

16. $k = \dfrac{4}{3}$

17. Per exemple el vector $(-4, 1)$ o qualsevol paral·lel a ell: $(-1, 4)$, $(-12, 3)$, etc.

18. $(3/5, -4/5)$ i $(4/5, 3/5)$.

Pàgina 115

19. a) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$ b) $|\vec{v}| = \sqrt{13}$

c) $|\vec{w}| = 1$ és unitari

20. $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

21.

a) $105.07°$ b) $180°$

22. $x = -1$, $\alpha = 57.53°$

23. Tenim que $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$, llavors $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha} = 2.522$

Pàgina 116

24. $\vec{x} = \dfrac{(1,-5) + 2(0,-1)}{7} = (\frac{1}{7}, -1)$ i $\vec{y} = \dfrac{3(1,-5) - (0,-1)}{7} = (\frac{3}{7}, -2)$

25. Queda un sistema $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 6x + 2y = 0 \end{array}\right\}$. Té solució $x = -1$ i $y = 3$

26. Hi ha dues possibilitats: $k = 8$ i $h = 4$ o $k = -8$ i $k = -4$.

27. Un vector perpendicular a $\vec{v}$ és $\vec{u} = (3, 2)$. Ara només cal normalitzar els dos vectors dividint pel seu mòdul. La base en qüestió és $\hat{\vec{v}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ i $\hat{\vec{u}} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

28. Primer cercam un vector perpendicular qualsevol $(2, 1)$. Tot seguit el normalitzam dividint pel mòdul $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$. Finalment multiplicam per 4 per tenir mòdul 4. Resposta: $(\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$.

29. Primer cercam un vector perpendicular qualsevol $(2, -1)$. Tot seguit el normalitzam dividint pel mòdul $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$.

Finalment multiplicam per 3 per tenir mòdul 3. Resposta: $(\frac{6}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}})$.

30. a) Sí. És la canònica

b) No. No tenen mòdul 1

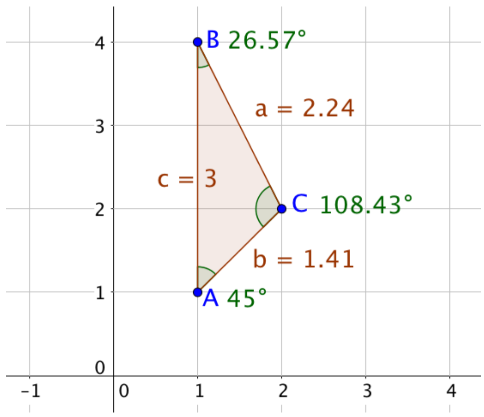
c) No. No tenen mòdul 1

d) Sí. Són perpendiculars i tenen mòdul 1.

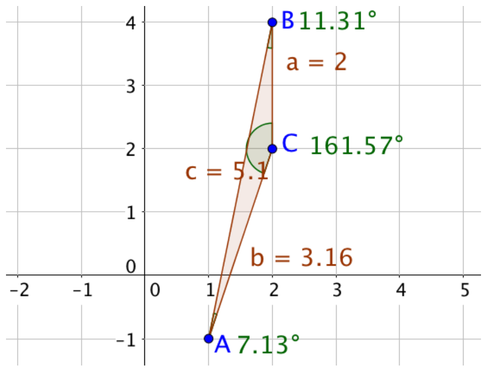
31. El problema té 4 solucions, segons quins sentits agafem pel vector $\vec{v}$ i pel perpendicular seu.

$\hat{\vec{v}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ o $\hat{\vec{v}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ juntament amb un de $\hat{\vec{u}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ o $\hat{\vec{u}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

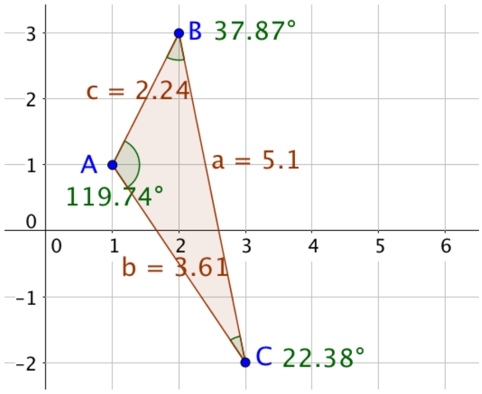
32.



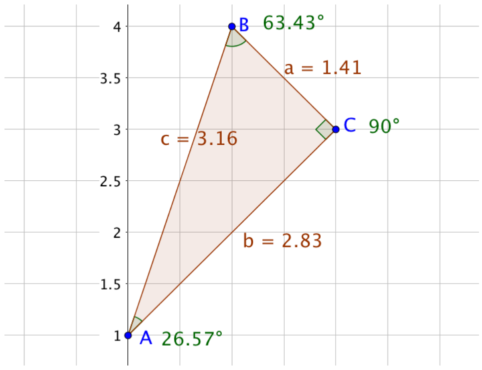
33.



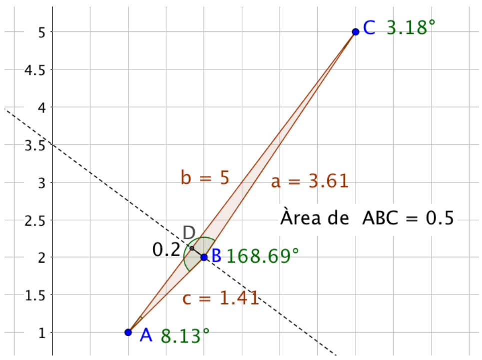
34.



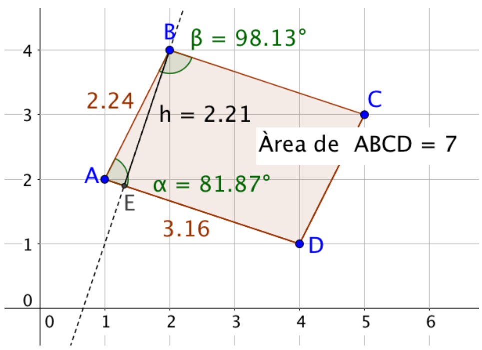
35.



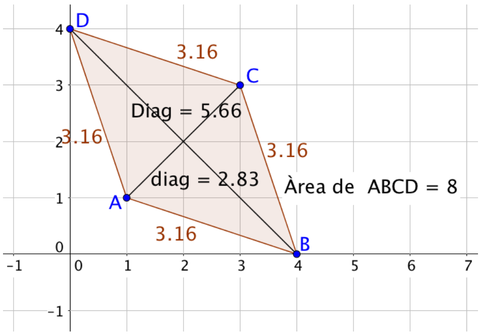
36.



37.

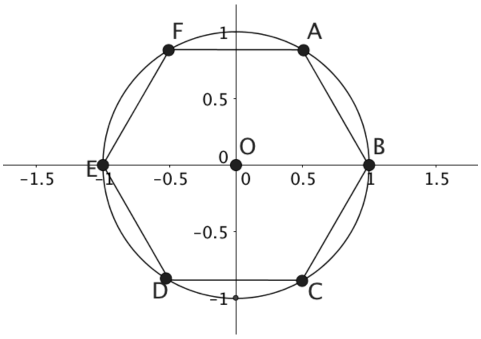


38.

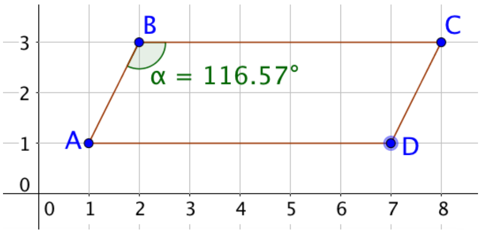


39. $\frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Els vectors unitaris són $(\pm\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

40. Sabem que el radi és 1 perquè $d(OB) = 1$. El punt $A = (\cos 60, \sin 60) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ i el punt $C = (\cos 60, -\sin 60) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. L'angle de l'hexàgon és $60°$.

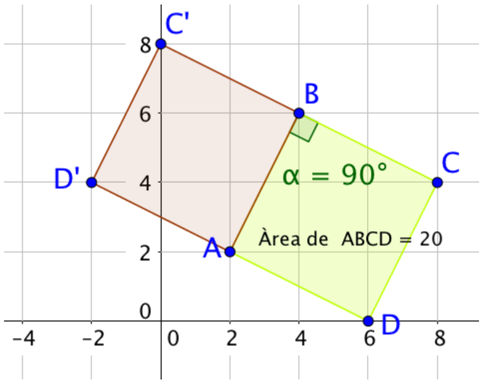


41.

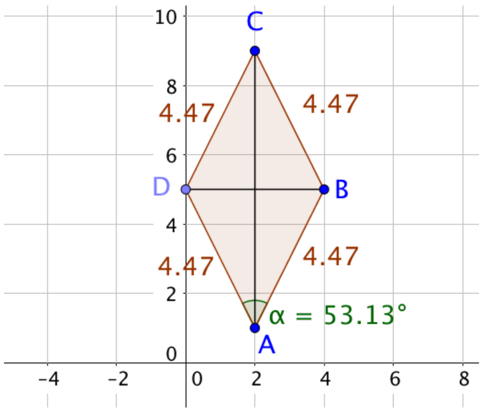


Pàgina 117

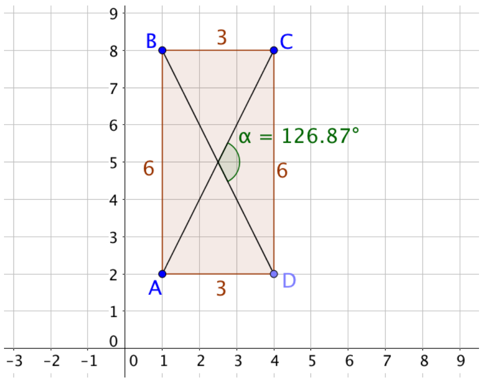
42.



43.



44.



45. Semblant a **??**. $C(4,2)$ i $D(3,0)$ o $C'(0,4)$ i $D'(-1,2)$

46. $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{(3,-1)\cdot(2,1)}{|(2,1)|} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

- **Autoavaluació:.**

1. 🔑 a) Punt final $(-2,3)$. b) Vector suma $\vec{v}+\vec{w}=(-2,3)$.

2. 🔑

a) -3 b) -11

3. 🔑 a) $2\sqrt{3}$. b) Els dos tenen mòdul 2. c) angle $30°$

4. 🔑 a) $k=-2$. b) $k=\pm 4$. c) $k=-\sqrt{3}$

5. 🔑 $(3/5,4/5)$ o $(-3/5,-4/5)$

Solucions del Tema 9

Pàgina 120

1. a) $\overrightarrow{AB}=(-4,2)$ i $M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1,4)+(-2,1)=(-1,5)$

   b) $M=\frac{A+B}{2}=\frac{(-2,10)}{2}=(-1,5)$

2. $\overrightarrow{PQ}=(9,3)$ i $X_1=P+\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}=(-2,1)+(3,1)=(1,2)$; $X_2=P+\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}=(-2,1)+(6,2)=(4,3)$.

3. $\overrightarrow{AB}=(-4,-3)$; $\overrightarrow{AC}=(k-1,-2)$; $\frac{-4}{k-1}=\frac{-3}{-2}\rightarrow k=-5/3$.

4. a) $M(\frac{11}{2},4)$ b) $P'(13,-11)$

   c) $Q'(-2,19)$

Pàgina 121

5. Vectorial: $(x,y)=(1,-2)+\lambda(2,7)$

   Paramètriques: $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-2+7\lambda \end{cases}$

   Contínua: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{7}$

   Punt-pendent $y+2=\frac{7}{2}(x-1)$

   General: $7x-2y-11=0$

   Explícita: $y=\frac{7}{2}x-\frac{11}{2}$

6. a) $P(0,-1)$; $\vec{d}(3,-2)$ b) $P(-7,2)$; $\vec{d}(1,4)$

   c) $P(0,2)$; $\vec{d}(-1,1)$ d) $P(2,2)$; $\vec{d}(-3,0)$

7. $P(0,5)$; $\vec{d}(1,2)$

   Vectorial: $(x,y)=(0,5)+\lambda(1,2)$

   Paramètriques: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=5+2\lambda \end{cases}$

   Contínua: $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{2}$

   Punt-pendent $y-5=2(x-0)$

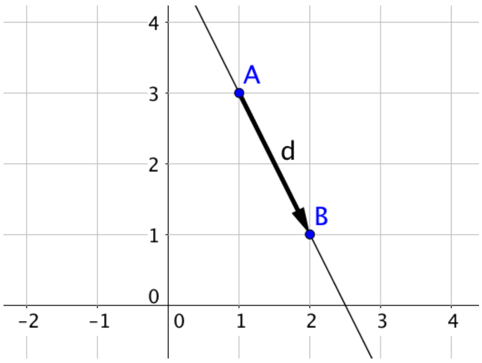
   General: $2x-y+5=0$

8. a) $\vec{d} = (1, -2)$; $m = -2$

b) $(2, 2) \notin r$; $(2, 2) \notin r$

c) $(2, 1)$; $(3, -1)$; $(0, 5)$

d)



Pàgina 122

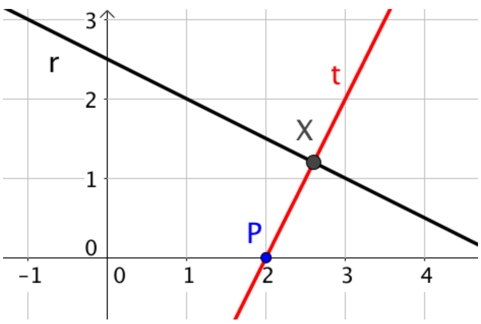
9. $\frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{3}$; $3x - 2y + 2 = 0$; $y = \frac{3}{2}x + 1$

10. $2x - 3y + C = 0$ essent $C = 6 - 2 = 4$; $(x, y) = (1, 2) + \lambda(3, 2)$; $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2}$

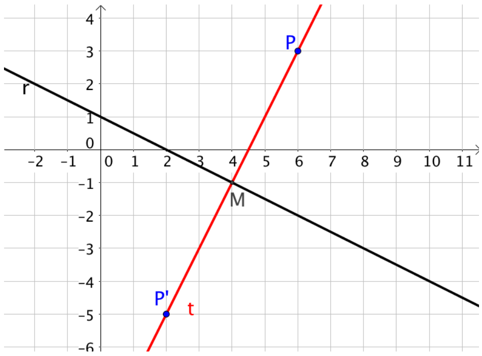
11. $y = -\frac{1}{2}x + n$ essent $n = 0$; En forma paramètrica: $\begin{cases} y = 2 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$

12. $y = -\frac{3}{2}x$ passa per $(0, 0)$

13. $t:\ 2x - y - 4 = 0$; $X(\frac{13}{5}, \frac{6}{5})$



14. $M(4, -1)$; $P' = 2M - P = 2(4, -1) - (6, 3) = (2, -5)$



Pàgina 123

15. $\vec{d_r} = (1, -2)$; $\vec{d_s} = (1, -2)$; $R(2, 1)$; vectors paral·lels i $R \notin s$ llavors són paral·leles.

16. $\vec{d_r} = (-1, 2)$; $\vec{d_s} = (1, -1)$; vectors independents són secants. Punt de tall $1 - \lambda + 1 + 2\lambda = 3$ trobam $\lambda = 1$ i el punt de tall $X(0, 3)$

17. $\vec{d_r} = (1, 4)$; $\vec{d_s} = (1, 4)$; $R(0, -2)$; vectors paral·lels i $R \in s$. Són coincidents. Hi ha infinits punts de tall (tots els de la recta)

18. $\vec{d_r} = (3, -2)$ i $\vec{d_s} = (-6, k)$. Volem que siguin paral·leles $\frac{3}{-6} = \frac{-2}{k}$, trobam $k = 4$. Comprovam que efectivament són paral·leles ja que $R(2, 0)$ no pertany a la recta s.

19. Per exemple si agafam el punt $S(k, 2)$ de la recta s i l'introduïm a la recta r trobam $2k + 6 + 5 = 0$, aleshores $k = -11/2$. Comprovam que efectivament són coincidents ja que els vectors directors $\vec{d_r} = (3, -2)$ i $\vec{d_s} = (-6, 4)$ són paral·lels.

20. La bisectriu del segon quadrant és $y = -x$, té pendent $m = -1$ o vector director $\vec{d_s}(1, -1)$. D'altra banda, la recta r té vector $\vec{d_r}(3, k)$. Imposam que siguin paral·lels, $\frac{1}{3} = \frac{-1}{k}$ i trobam $k = -3$

Pàgina 125

21. a) $r:\ x + 3y - 4 = 0$; $d = \frac{3}{\sqrt{10}}$

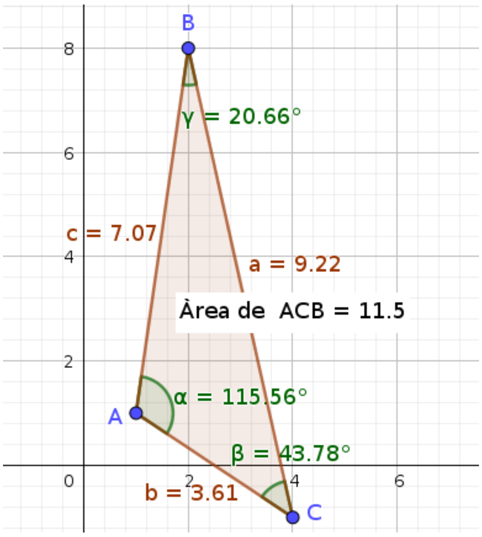
b) $r:\ 2x + y - 4 = 0$; $d = 0$

c) $r:\ x + 2y - 7 = 0$; $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

d) $r: 4x - y + 6 = 0$; $d = \frac{8\sqrt{17}}{17}$

22. $\vec{d_r} = (-1,-1)$; $\vec{d_s} = (1,1)$; $S(1,-2)$; vectors paral·lels i $S \in s$. Formen un angle de $0°$

23.

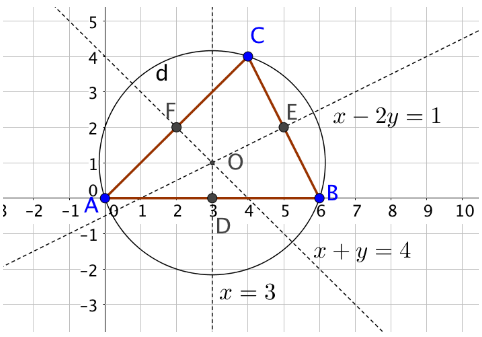


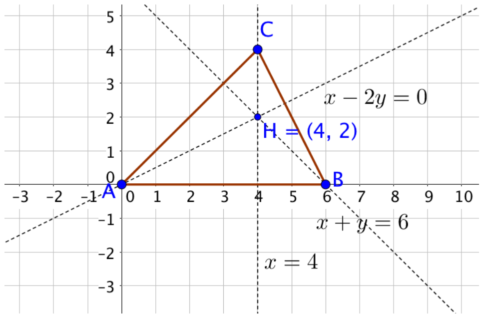
24. La recta en forma vectorial $X: (x,y) = (0,2) + t(4,3)$. Imposam que les distàncies $A--X$ i $B--X$ siguin iguals: $(4t+6)^2 + (2+3t)^2 = (4t)^2 + (3t+8)^2$. Té solució única $t = 2$. Llavors el punt $X(8,8)$.

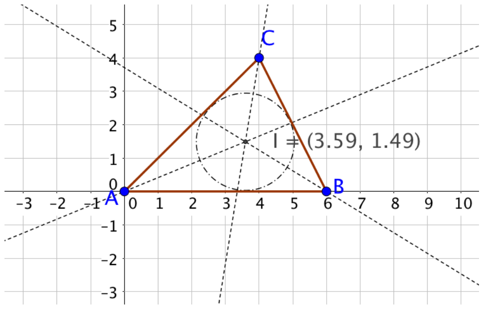
25. ⊛ El feix de rectes és $r: y - 2 = m(x-1)$. Passa-la a forma general i aplica que $d(r,O) = 1$.

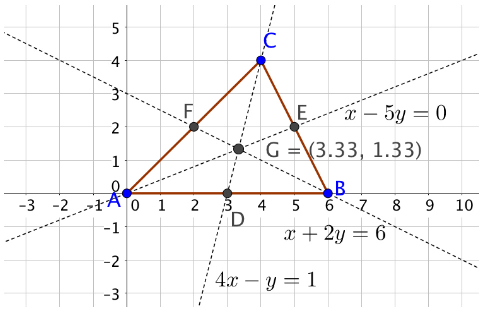
Pàgina 126

26.









Pàgina 127

27. a) $m = -3$

b) $(0,5) \in r$; $(1,3) \notin r$

c) $(x,y) = (1,2) + \lambda(-1,3)$

d) Gràfic

28. a) $\overrightarrow{AB} = (2,-2)$ b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2}$

c) $(2,1) \in r$; $(3,1) \notin r$

29. a) $m = 2$; $\vec{d} = (1,2)$ b) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1}$

30. a) $y = -x + 3$ b) $y = x + 4$

31. Són secants formen un angle de $90°$. Es tallen al punt $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

32. Si la distància $d(r,P) = 0$ vol dir que el punt P pertany a la recta r.

Donat que $P(2,3)$ pertany a $2x-y-1=0$, podem comprovar que $d(P,r) = \frac{|2\cdot 2-3-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 0$

33. a) $y = x$

b) $d = \dfrac{|2-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

34. a) $2x+y+3=0$ b) $x-2y+2=0$

35. a) $C(3,8)$

b) $\overrightarrow{BC} = (3,1)$ i $\overrightarrow{BA} = (2,-6)$. Es compleix que $(3,1)\cdot(2,-6) = 0$ són perpendiculars

c) $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$; $\overline{BD} = 5\sqrt{2}$; $\overline{CD} = \overline{AB} = 2\sqrt{10}$

36. Són paral·leles, formen un angle de $0°$

37. $M = (2,1)$; $y = -\frac{1}{2}x+2$

38. a) $d(O,r) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ b) $d(O,r) = 0$

c) $d(O,r) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

39. La distància és zero, perquè el punt pertany a la recta.

40. a) $r:\ x+y-1=0$; $d(P,r) = sqrt2$

b) $d(P,r) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

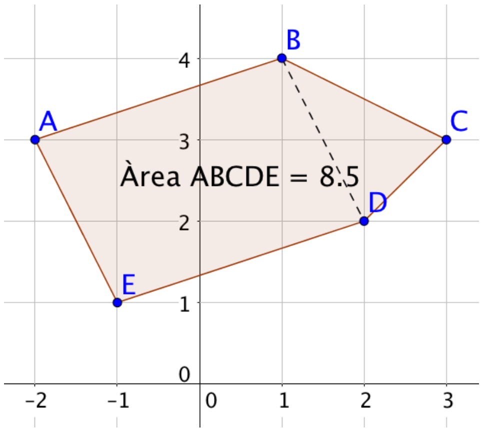
41. $d(P,r) = \sqrt{2}$

42. ⎈ Escriu el feix de rectes com $y = 1-m(x-3)$, troba els punts de tall amb els eixos i comprova que l'àrea és $A = \frac{1}{2}(1+3m)(3+\frac{1}{m}) = 6$. Resol l'equació i troba $m = 1/3$.

Pàgina 128

43. Peu de la perpendicular $M = (3,0)$ $A' = (5,-2)$

44.



45. ⎈ Troba el peu de la perpendicular de r pel punt A: $B = (0,3)$, $C = (1,4)$ i $D = (2,3)$

46. a) $y = 5$ b) $x = \frac{9}{2}$

c) $y = x$

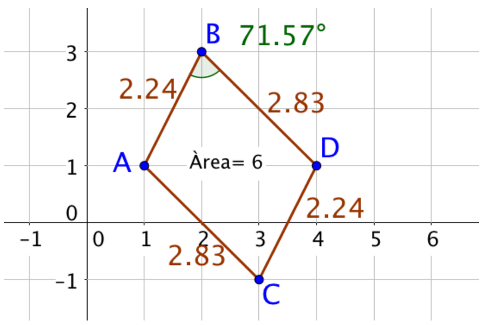
47. a) $y = -3x+13$ i $y = \frac{1}{3}x - 1$

b) $y = -42.02x + 18.93$ i $y = 0.02x + 0.12$

c) $y = x$ i $y = -x$ d) $x = 0$ i $y = 0$

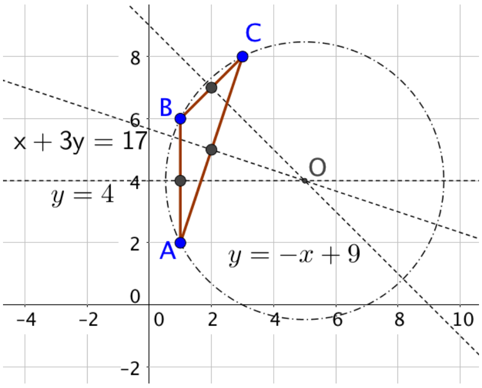
48. La perpendicular $2x-y=1$, $Q(1,1)$ i el simètric $A'(0,-1)$

49. Perímetre: 10.14

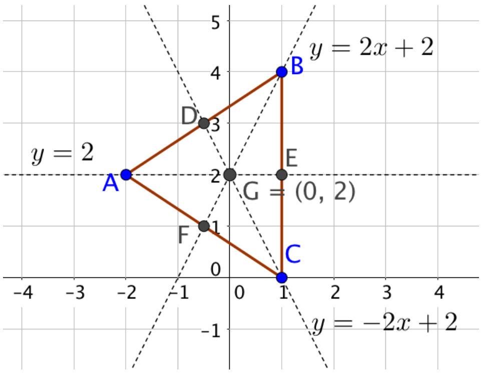


50. L'altre extrem del segment és el simètric de O respecte r. $O'(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$

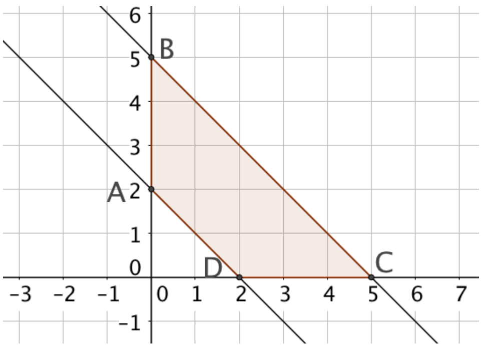
51.



52.



53. $A = \frac{21}{2}$.



54. El punt és $X(x, 0)$. S'ha de complir que $\frac{|4x+6|}{5} = \frac{3x-9}{5}$. Trobam dues equacions $4x+6 = \pm(3x-9)$. Té dues solucions $x = -15$ i $x = \frac{3}{7}$

Pàgina 129

- **Autoavaluació:.**

1. a) $k = -7$, b) $k = -7$

2. Contínua $\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{1}$, general $x - 5y + 7 = 0$.

3. a) $(x, y) = (2, -3) + \lambda(2, 5)$, b) $2x + 3y - 6 = 0$.

4. Si $k = -9/5$ són paral·leles, en altre cas són secants.

5. $k = \pm\sqrt{3}$.

6. $x = -3$, $y = -5$ i $x = 17/5$ i $y = 39/5$

Solucions del Tema 10

Pàgina 130

1. $d(A,X) = d(B,X)$.

$(x-5)^2 + (y+3)^2 = (x-2)^2 + y^2$

$y = x - 5$ és la mediatriu del segment AB

2. $d^2(X,A) - d^2(X,B) = 15$.

$x^2 + y^2 - \left((x-6)^2 + (y-3)^2\right) = 15$. És la recta $y = -2x + 10$.

3. $d(X,r) = d(X,s)$.

$\dfrac{|4x-3y+8|}{5} = \dfrac{|12x+5y-7|}{13}$, dóna dues equacions $13(4x-3y+8) = \pm 5(12x+5y-7)$

Per cadascun dels signes, trobam una rectes com a lloc geomètric: $8x + 64y - 139 = 0$ i $112x - 14y + 69 = 0$

Corresponen a les dues bisectrius de les dues rectes.

https://www.geogebra.org/m/vpkYZGqu

Pàgina 132

4. Radi $\sqrt{8}$, $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8$

5. Centre $O(1,0)$, radi $R = 1$

Pàgina 133

6. Centre $O(-1,1)$, semi-eixos $a = 3$, $b = 2$, focus $F'(-1-\sqrt{5},1)$ i $F'(-1+\sqrt{5},1)$. Excentricitat $e = 0.745$

7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ $e = 2/3$

8. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{96} = 1$

Pàgina 134

9. $O(1,0)$, $a = 4$, $b = 3$, $F'(-4,0)$ i $F(6,0)$, asímptotes $y = \pm 3(x-1)/4$, $e = 5/4$.

10. $a = b = 1/\sqrt{2}$, $2x^2 - 2(y-2)^2 = 1$, $e = \sqrt{2}$.

Pàgina 135

11. $x = \frac{1}{12}y^2$

12. $V(3,0)$, $F(0,1)$, $d: y = -1$

13. És una hipèrbola. $d = c - a = 0.75a$

Pàgina 136

14. a) Centre $(2,-1)$; Semieix major $a = 3$; Semieix menor $b = 2$; Semi-distància focal $c = \sqrt{5}$; excentricitat $e = 0.745$; Focus $F'(2-\sqrt{5},-1)$ i $F'(2+\sqrt{5},-1)$; Vèrtexs $V_1(5,-1)$ $V_2(-1,1)$ $V_3(2,1)$ $V_4(2,-3)$

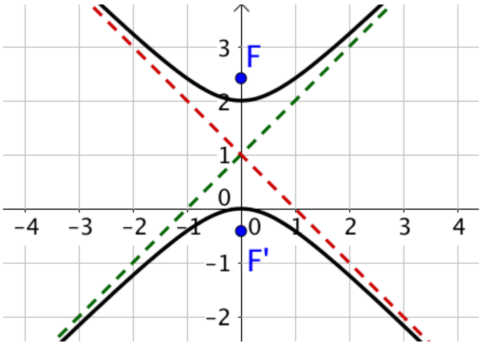
b) Primer passam a canònica $\dfrac{(x-1)^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{4/9} = 1$

Centre $(1,0)$; Semieix major $a = 1$; Semieix menor $b = 2/3$; Semi-distància focal $c = \sqrt{5}/3$; excentricitat $e = 0.745$; Focus $F'(1-\sqrt{5}/3,0)$ i $F'(1+\sqrt{5}/3,0)$; Vèrtexs $V_1(2,0)$ $V_2(0,0)$ $V_3(1,2/3)$ $V_4(1,-2/3)$

15. a) $\dfrac{(y-1)^2}{1^2} - \dfrac{x^2}{1^2} = 1$

b) Es tracta d'una hipèrbola vertical (canviam els papers de x, y) equilàtera. Centre $(0,1)$.

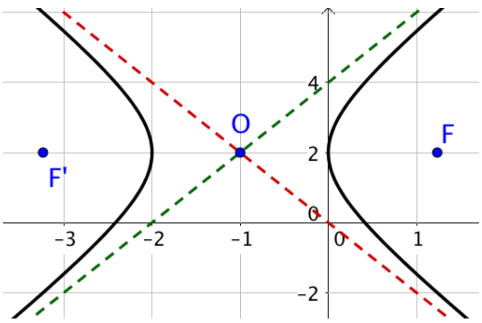
Els semieixos són 1 i la semi-distància focal $c = \sqrt{2}$. Els focus $F(0, 1+\sqrt{2})$ i $F(0, 1-\sqrt{2})$.



c) Transformam l'equació com suma per diferència $((y-1)+x) \cdot ((y-1)-x) = 1$. Les asímptotes són $y = -x+1$ i $y = x+1$

16. a) Centre $(-1, 2)$; Semieix major $a = 1$; Semieix menor $b = 2$;

Semi-distància focal $c = \sqrt{5}$; excentricitat $e = 2.236$; Focus $F'(-1-\sqrt{5}, 2)$ i $F'(-1+\sqrt{5}, 2)$; Vèrtexs $V_1(0,2)$ $V_2(-2,2)$; Asímptotes: $y = -2x$ i $y = 2x+4$

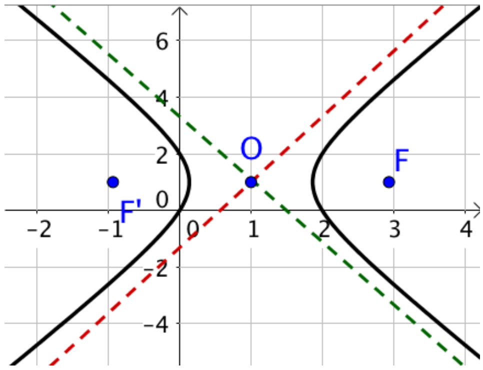


b) Primer passam a canònica $\dfrac{(x-1)^2}{3/4} + \dfrac{(y-1)^2}{3} = 1$

Centre $(1,1)$; Semieix major $a = \sqrt{3}/2$; Semieix menor $b = \sqrt{3}$;

Semi-distància focal $c = \sqrt{15}/2$; excentricitat $e = 2.236$; Focus $F'(1-\sqrt{15}/2, 1)$ i $F'(1+\sqrt{15}/2, 1)$; Vèrtexs $V_1(1+\sqrt{3}/2, 1)$ $V_2(1-\sqrt{3}/2, 1)$;

Asímptotes: $y = -2.209x + 3.309$ i $y = 2.309x - 1.309$



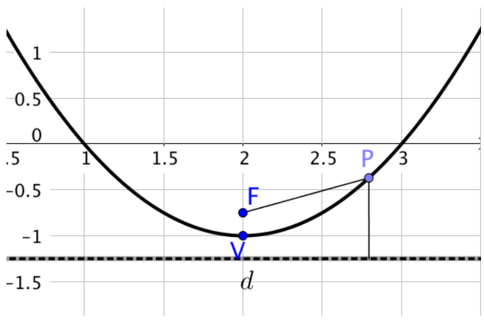
17. Com que $O(1,2)$ i $V(4,2)$; el semieix major $a = d(V,O) = 3$. Com que $e = c/a = 2$, la semi-distància focal $c = 6$.

El semieix menor $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{27}$.

L'equació canònica $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{27} = 1$.

18. L'equació d'una paràbola vertical per amunt en centre $(2,-1)$ és de la forma $y+1 = k(x-2)^2$. Substituïm el punt $(1,0)$ per trobar $k = 1$.

Aleshores, $y+1 = (x-2)^2$. Sabem $\dfrac{1}{2p} = 1$, per tant $p = \frac{1}{2}$. El Focus és a $F(1, -\frac{3}{4})$ i la directriu $y = -\frac{5}{4}$.



19. a) Canònica: $x = -\frac{1}{3/2}y^2$. Paràbola horitzontal cap a l'esquerra centrada $(0,0)$. $p = 3/4$;

El Focus $(-3/4, 0)$ i la directriu $x = 3/4$

b) Hipèrbola centre a $(-1,1)$ i focus $F(-1+\sqrt{13}, 1)$ i $F'(-1-\sqrt{13}, 1)$;

Les asímptotes: $y = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$ i $y = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$

https://www.geogebra.org/m/mKY89SzR

20. Totes són hipèrboles obliqües excepte b) que és una paràbola també obliqua.

https://www.geogebra.org/m/tzkCVusA

21. a) El centre es $O = \frac{F+F'}{2} = (2,2)$; La semidistància focal $c = dist(OF) = \sqrt{2}$; mirant el dibuix $P = (0,0)$ es troba sobre el semieix menor $b = d(PO) = 2\sqrt{2}$; el semieix major $a = \sqrt{c^2+b^2} = \sqrt{10}$ excentricitat $e = 0.447$

https://www.geogebra.org/m/zf9ZxYWn

b) El centre es $O = \frac{F+F'}{2} = (-3,1)$; La semidistància focal $c = dist(OF) = \sqrt{5}$; mirant el dibuix sabem que $d(F_1,P) + d(F_2,P) = 2a$ es troba sobre el semieix major $a = 6/2 = 3$; el semieix menor $b = \sqrt{a^2-c^2} = 2$; excentricitat $e = 0.745$

https://www.geogebra.org/m/VAX9PeVf

22.

https://www.geogebra.org/m/VJGVSq6z

23. a) $d(X,d) = d(X,F)$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 12y + 20 = 0$$

L'eix simetria passa per focus i és perpendicular directriu $y = -x + 4$

b) $d(X,d) = d(X,F)$

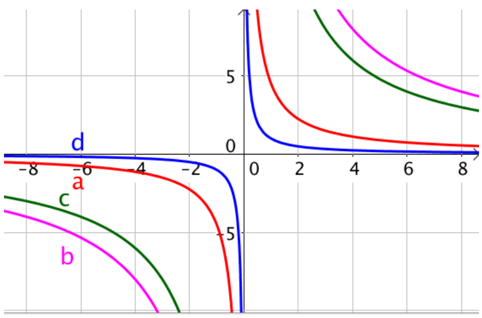
$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{|3x+y-4|}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$x^2 + 9y^2 - 6xy + 44x - 12y + 4 = 0$$

L'eix simetria passa per focus i és perpendicular directriu $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

https://www.geogebra.org/m/CxZaNSBY

24.



25. a) És una hipèrbola amb centre $O(1,-1)$ i semieixos 2 i 3

b) És una el·lipse amb centre $O(2,1)$ i semieixos 3 i 2

c) És una paràbola horitzontal cap a la dreta centrada a l'origen. El focus es troba a $F(1/2, 0)$

26. $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Plantejam i resolem un sistema 3×3.

$$\begin{cases} A + 4B + C = -17 \\ 3A + 4B + C = -25 \\ 5A + 5B + C = -50 \end{cases};$$

Trobam $A = -4$; $B = -17$; $C = 55$. L'equació de la circumferència és $x^2 + y^2 - 4x - 17y + 55 = 0$. En forma canònica: $(x-2)^2 + (y - \frac{17}{2})^2 = \frac{85}{4}$

Solució alternativa: Calcula el circumcentre del triangle ABC.

Pàgina 137

27. $\dfrac{(x+1)^2}{64} - \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$

28. a) E·lipse centrada a l'origen; $F(\sqrt{3}, 0)$ i $F'(-\sqrt{3}, 0)$

b) Paràbola horitzontal cap a la dreta centrada a l'origen; $F(\frac{1}{2}, 0)$

c) Hipèrbola centrada a $(3, 0)$; $F(3 + \sqrt{13}, 0)$ i $F'(3 - \sqrt{13}, 0)$

d) El·lipse vertical centrada a $(1, -1)$; $F(1, -1 + \sqrt{5})$ i $F'(1, -1 - \sqrt{5})$

29. a) Completam quadrats: $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$; és una el·lipse horitzontal en centre a $(2, 0)$ i semieixos 2 i $\sqrt{2}$

b) Completam quadrats: $-x^2 + (y-1)^2 = 1$; és una hipèrbola equilàtera vertical amb centre $(0, 1)$. El seu focus es troben a $F(0, 1 + \sqrt{2})$ i $F'(0, 1 - \sqrt{2})$

30. $O = \frac{A+B}{2} = (2, 5)$; això implica que AB és una diagonal del la circumferència. El radi és $R = d(OA) = \sqrt{2}$. L'equació: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 2$ o en general $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 27 = 0$

32. Centre $O(5/2, 1)$; $c = 3/2$; $a = 5/2$; $b = 2$; $\dfrac{(x-5/2)^2}{25/4} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$; $e = 3/5 = 0.6$

33. Dels dos punts que ens donen deduïm els semieixos major 4 i menor 2. L'equació és $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$, $c = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$; Focus a $F(1 + 2\sqrt{3}, -1)$ i $F(1 - 2\sqrt{3}, -1)$; excentricitat $e = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

34. Si és equilàtera horitzontal i centrada a l'origen, serà de la forma $x^2 - y^2 = a^2$. Substituint el punt $1^2 - 3^2 = a^2$, això no és possible.

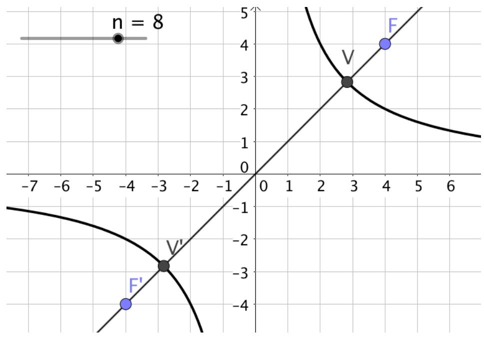
Aleshores, la hipèrbola ha d'ésser vertical $-x^2 + y^2 = 8$. essent $a = b = 2\sqrt{2}$; $c = 4$ i els focus són als punts $F(0, 4)$ i $F'(0, -4)$

35. Com que les asímptotes es tallen al (0,0) aquest és el centre de la hipèbola. És a dir, està centrada a l'origen. $y = \pm\frac{b}{a}x$; aleshores sabem que $b = 2a$. L'equació és $\dfrac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$. Si hi substituïm el punt (2,0) trobam que $a = \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{2}$.

L'equació és $\dfrac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$

36. En general $x \cdot y = k$ amb $k > 0$; tindrà els vèrtex sobre la recta $y = x$ i seran $V(\pm\sqrt{k}, \pm\sqrt{k})$. El semieix major per Pitàgores $a = \sqrt{2k}$. Com que és equilàtera $a = b = \sqrt{2k}$.

Trobam la semi-distància $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{k}$ sobre la recta $y = x$, per trigonometria podem localitzar els vèrtexs (projectam l'angle de $45°$) $F(\sqrt{k}, \sqrt{k})$ i $F(-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$.



Pel nostre cas $k = 8$ i els focus són a $F(4, 4)$ i $F(-4, -4)$.

- **Autoavaluació:.**

1. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ o $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$. Té centre $O(1, 1)$ i radi $R = 5$.

2. $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. La semi-distància focal $c = 4$, els focus són $F'(-5, 3)$ i $F(3, 3)$, i l'excentricitat $e = 0.8$.

3. Semi-eixos: $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, les asímptotes $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$, semi-distància focal: $c = \sqrt{6}$ i l'excentricitat $e = 1.225$.

4. La distància focus-directriu és $p = 1/6$, l'equació $y - 2 = 3(x-1)^2$, la directriu és la recta $y = 23/12$ i la posició del focus $F(1, 25/12)$.

5. a) El·lipse de centre $(1,0)$ i semi-eixos $a=2$, $b=1$. b) Circumferència de centre $(1,2)$ i radi 2. c) Paràbola vertical de vèrtex $(0,-2)$ i distància Focus-directriu $p=3/2$.

Solucions del Bloc III

Pàgina 138

1. a) $|\vec{u}|=\sqrt{2}$ b) $-2\vec{u}+3\vec{v}=(-5,-4)$ c) $2\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=6$

2. $a=-2$

3. a) $m=-1$, $n=3$ b) $116.57°$

4. $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

5. $y=-8$

6. Paramètriques $\left\{\begin{array}{l} x=0+1t \\ y=3+2t \end{array}\right.$. General $2x-y+3=0$.

7. a) $k=-2$. b) $k=-4$

8. $A'(2,2)$

Pàgina 139

9. El punt d'intersecció és $I(5,11)$ i el pendent de la recta $m'=1/3$. La recta és $y-11=\frac{1}{3}(x-5)$.

10. $P(\pm 5,0)$

11. $Area=5$

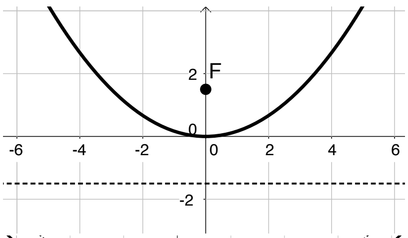
12. Mediatriu AC: $x-2y+1=0$, Mediatriu AB: $14x-4y+21=0$, Circumcentre $O(-19/12,-7/24)$

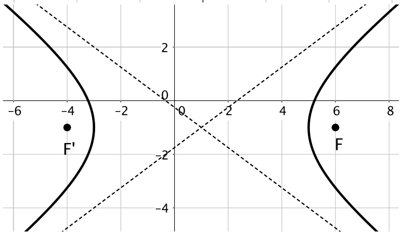
13. Centre $O(1,-3)$ i radi $R=2$.

14. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

15. a) Paràbola vertical amb vèrtex $V(0,0)$, $p=3$, focus $F(0,3/2)$ i directriu la recta $y=-3/2$.

b) Hipèrbola de centre $O(1,-1)$, semi-eixos $a=4$, $b=3$, semi-distància focal $c=5$. Excentricitat $e=1.25$. Focus a $F'(-4,-1)$, $F(6,-1)$. Asímptotes $y+1=\pm\frac{3}{4}(x-1)$.





16. 🔑 $a=39.3$ ua, $c=9.8$ ua, $b=38.06$ ua. $\dfrac{x^2}{39.3^2}+\dfrac{y^2}{38.06^2}=1$

Solucions del Tema 11

Pàgina 143

1. a) Qualitativa b) Quantitativa discreta

c) Quantitativa discreta d) Quantitativa contínua

e) Qualitativa f) Quantitativa discreta

g) Quantitativa contínua h) Quantitativa contínua

2. 🔑

x	0	1	2	3	4	5	6
f	2	4	21	15	6	1	1

c) $\bar{x}=2.52$ i $\sigma=0.496$ fills.

Pàgina 144

3. 🔑

x	2.5-3	3-3.5	3.5-4	4-4.5	4.5-5
f	6	10	11	8	5

c) $\bar{x}=3.7$ i $\sigma=0.62$ kg.

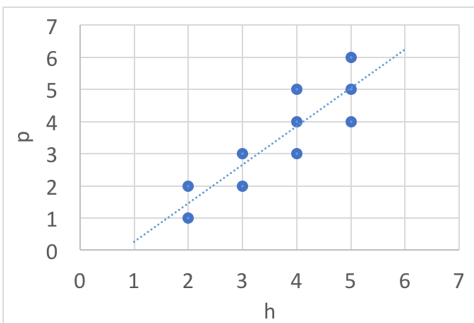
4. a) Funcional $D=2R$ b) Correlació negativa

c) Correlació positiva d) Correlació positiva

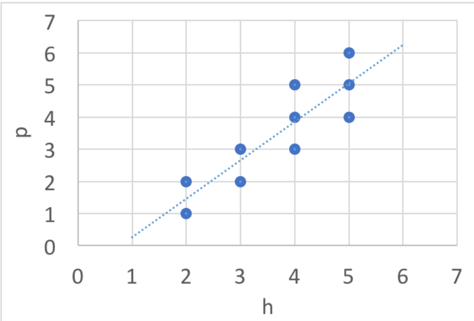
e) Correlació positiva f) Correlació positiva

Pàgina 146

5. Existeix una correlació positiva forta entre el nombre d'habitacions i les persones que hi viuen.



6. Existeix una correlació positiva feble entre les variables.



7. a) Solució gràfica

b) Correlació +: B); D) aquesta darrera és quasi nul·la. Correlació –: A); C)

c) A) és funcional $y = -2x + 12$

d) Correlacions: -1=A) < C) < D) < B)

Pàgina 148

8. a)

https://goo.gl/hpSTWs

b) $r = -0,24$

c) Pràcticament no existeix cap correlació entre les variables i per tant no té sentit estimar la taxa a partir de l'IPC.

9. $y = 1.194 + 4.78(x - 0.232)$, el pendent és la constant elàstica $k = 4.78$ N/m. L'allargament per a $y = 2$ N és $x = 40$ cm. És bastant fiable ja que $r = 0,998$.

10. a) $y = 6,743x + 19,81$

https://goo.gl/ExXjiX

b) quan $x = 6$ estimam que $y = 60,3$ gèrmens/cm^3. La predicció és molt bona perquè tenim una correlació forta amb $r = 0,99894$.

Pàgina 149

11. a) $r = -0.997$ correlació negativa forta; b) Recta de regressió $y = -0.2632x + 10.37$, altura $y = 8.84$ m. c) $x = 66$ hores

12. a) El coeficient de regressió $r = 0,9857$ és una correlació positiva forta

https://goo.gl/5nRcAv

b) La recta de regressió lineal $y = 0,9319x - 16,509$ estimam el valor de y quan $x = 24$ i trobam $y = 5,857$. Segons la wikipèdia té una densitat de 7,140 g/cm^3.

https://es.wikipedia.org/wiki/Cromo

Pàgina 150

13. a) La recta de regressió és $y = 3,9585x - 0,014$. Tenim una correlació positiva forta.

https://goo.gl/cY7x1L

b) Segons la teoria el pendent de la recta de regressió ha d'esser igual a $3,9585 = \frac{4\pi^2}{g}$; d'aquí podem aïllar $g = 9,973$ m/s^2 que s'assembla bastant al $9,8$ del llibres de text.

Amb la recta de regressió estimam la y quan $x = 0.75$ m; $y = 2,9548$ s^2; el període és l'arrel quadrada d'aquest nombre $T = 1,719$ s.

14. $N = \sum_i f_i = 200$; llavors $a+b+135 = 200$. Després la mitjana

$$\frac{a + 2\cdot 32 + 3\cdot 35 + 4\cdot 33 + 5b + 6\cdot 35}{200} = 3.6 \to 511 + a + 5b = 720.$$

Resolem el sistema d'equacions i trobam $a = 29$ i $b = 36$.

La moda és $Mo = 5$; la mediana és $Me = 4$

15.

x	y
$[30,\ 40)$	1
$[40,\ 50)$	3
$[50,\ 60)$	5
$[60,\ 70)$	11
$[70,\ 80)$	12
$[80,\ 90)$	4

$N = 36$; $\sum f\cdot x = 2400$; $\sum f \cdot x^2 = 165300$

$\bar{x} = 66.67$; Var$= 147.22$; $\sigma = 12.13$; C.V.$=$ 0.18

16.

x	y
$[2,\ 4)$	11
$[4,\ 6)$	19
$[6,\ 8)$	4
$[8,\ 10)$	1

$N = 35$; $\sum f \cdot x = 165$; $\sum f \cdot x^2 = 851$

$\bar{x} = 4.71$; Var$= 2.09$; $\sigma = 1.45$; C.V.$= 0.31$

https://goo.gl/Q6BEy9

Pàgina 151

17. a) El 88 % obté més de 5 en ambdues assignatures; El 88 % en matemàtiques i el 92 % en llengua

b) Estan fortament relacionades

c) Gràfic

d) Coeficient de correlació = 0,87 positiu i molt alt

18. a) $y = 3,2564x + 15,0807$

b) $x = 0,155828 - 1,35257$

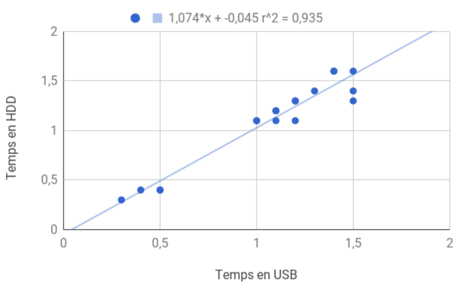
c) Si utilitzam la recta Y sobre X: $x = 2,77$

Si utilitzam la recta Y sobre X: $x = 2,40$

d) La predicció és acceptable tenint present que $r = 0,7123$. A major valor de r menor la diferència entre les dues prediccions anteriors.

https://goo.gl/c1dcec

19. a) Hi ha una correlació positiva forta



https://goo.gl/3AMzyc

b) La recta de regressió és $y = 1,0736x - 0,04522$. L'estimació $y(x = 0,8) = 0,8137$.

L'estimació és bastant fiable ja que el coeficient de correlació és alt $r = 0,967$.

20. a)

x	f
0	45
1	36
2	14
3	16
4	6

y	f
0	31
1	35
2	23
3	16
4	12

b)

$x\|y < 2$	f
0	35
1	25
2	3
3	3
4	0

c) $r = 0.6743$ és una correlació positiva moderada

https://goo.gl/qdmVsS

21. a)

x	f
1	6
2	12
3	18
4	28

y	f
1	44
2	15
3	5

b)

$y\|x = 2$	f
1	10
2	2
3	0

c) $r = 0,31$ és una correlació molt feble

https://goo.gl/SqBxFB

22. a) Utilitzam la relació $n = \bar{y} - m\bar{x}$:

resolem $-3 = \bar{y} - 1.6 \cdot 10$. Trobam que $\bar{y} = 13$

b) $y(12) = 16.2$ és una estimació acceptable perquè el coeficient és mitjanament alt.

Pàgina 152

23. a) La recta de regressió $y = mx + n$ on $m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ i $n = \bar{y} - m\bar{x}$.

De la darrera relació tenim que $80 = 155 - 1.5 \cdot \bar{x}$. Aïllam la mitjana del pes $\bar{x} = 50$ kg

b) Sabem que $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = m\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$. Donat que σ_x i σ_y són sempre positius; el signe del pendent de la recta de regressió coincideix amb el signe del coeficient de correlació.

Aleshores

c) la correlació és positiva. No el podem calcular perquè no sabem σ_y.

- **Autoavaluació:**.

1. a) Hi ha una correlació lineal positiva forta $\sigma_{xy} = 1.71$ i $r = 0.91$

b) $y = 0.87x + 2.25$. Es cometen 4.86 errors.

2. Hi ha una correlació positiva molt feble. $\sigma_{xy} = 6.8$, $r = 0.60$, $y = 4x - 95.3$

3. a) $y = 0.1x + 6.65$ b) No seria gens fiable fer prediccions en aquest cas ja que $r = 0.16$ és molt inferior a 1.