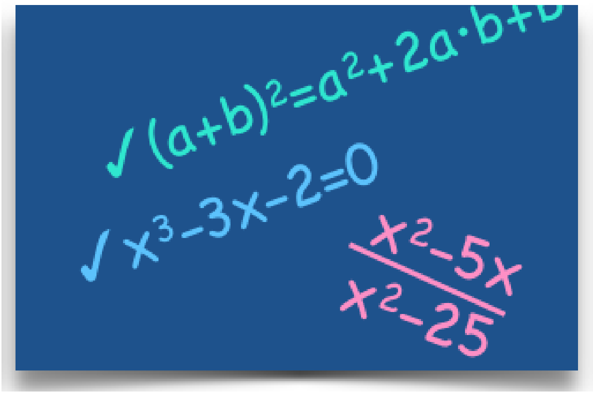
IEDIB

Institut d´ensenyaments a distància de les Illes Balears

https://iedib.net/

Matemàtiques I

Lliurament 2: Àlgebra



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Índex

1. Factorització de polinomis

La factorització de polinomis presenta molta semblança amb la descomposició factorial de nombres. A l'ESO varem aprendre que hi havia dos tipus de nombres: composts i primers. Un nombre compost es pot descompondre com a producte de nombres primers. Per exemple el nombre 30 és compost perquè és divisible entre els nombres primers 2, 3 i 5

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \tag{1}$$

En aquest apartat aprendrem a fer el mateix però amb polinomis. És a dir, si tenim un polinomi $P(x)$ el volem expressar com a producte de polinomis "primers"(millor anomenar-los irreductibles). Per fer això necessitam primer repassar la divisió de polinomis.

Divisibilitat de polinomis

En una divisió entre dos polinomis $P(x)$ (anomenat dividend) i $d(x)$ (divisor), obtenim un polinomi quocient $Q(x)$ i un residu $R(x)$.

$$\begin{array}{ll} P(x) & \underline{|\, d(x)} \\ \underbrace{R(x)} & Q(x) \end{array} \tag{2}$$

Es compleix que $P(x) = d(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Per poder fer la divisió $P(x) : d(x)$, els graus han de complir que grau $P \geq$ grau d

Per efectuar la divisió de $P(x) : (x \pm a)$ podem utilitzar la regla de Ruffini. En qualsevol altre cas hem d'utilitzar l'algoritme general. Vegem tot seguit un exemple de cada cas:

EXERCICI RESOLT 1

Comprova que els càlculs que tens a continuació reflecteixen la divisió del polinomi $P(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $Q(x) = 2x^2 - x + 3$

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x-2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ \underbrace{-11x+4} & \end{array} \tag{3}$$

El quocient és $Q(x) = 3x^2 + 4x - 2$ i el residu $R(x) = -11x + 4$.

Quan aplicam la regla de Ruffini per dividir $P(x) : (x - a)$, **cal afegir zeros** si al polinomi P li falten termes.

EXERCICI RESOLT 2

Realitza aquesta divisió $(x^3 + 5x - 2) : (x - 4)$ per la regla de Ruffini:

Veim que el polinomi dividend li falta el terme x^2, per això col·locam un zero a la caixa de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 5 & -2 \\ 4 & & 4 & 16 & 84 \\ \hline & 1 & 4 & 21 & \underline{|82} \end{array} \tag{4}$$

El quocient és $Q(x) = x^2 + 4x + 21$ i el residu de la divisió $R = 82$.

Vídeo 2.1: *Divisió per Ruffini*
https://www.youtube.com/watch?v=IrLKiZiqcaE

Si el residu de la divisió és igual a zero $R = 0$, deim que la **divisió és exacta** o que el polinomi $P(x)$ és **divisible** per $d(x)$.

Per exemple, el polinomi $P(x) = x^2 + 2x - 3$ és divisible entre $(x - 1)$. Efectivament si efectuam la divisió $(x^2 + 2x - 3) : (x - 1)$, obtenim de quocient $Q = (x + 3)$ i residu $R = 0$.

Una condició necessària i suficient perquè un polinomi $P(x)$ sigui divisible entre $(x - a)$ és que a sigui una arrel o solució de $P(x)$. És a dir $P(a) = 0$. Efectivament, podem comprovar que en l'exemple anterior $P(x) = x^2 + 2x - 3$ que compleix $P(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$.

Si el polinomi $x^2 + 2x - 3$ és divisible entre $(x - 1)$, això vol dir que és possible descompondre-lo com el producte de dos polinomis:

$$P(x) = d(x) \cdot Q(x) = (x - 1) \cdot (x + 3) \tag{5}$$

atès que el residu és $R = 0$. Això és l'essència de la **factorització** de polinomis que passarem a estudiar a continuació.

EXERCICIS PROPOSATS

1. Efectuau la divisió $(8x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 6) : (x^2 + 3x - 5)$ i digueu quin és el quocient i el residu.

2. Efectuau la divisió $(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5x - 7) : (x + 3)$ aplicant la regla de Ruffini. Deixau escrits els polinomis quocient i el residu.

1.1 Procediment per factoritzar un polinomi

Recorda: Identitats notables

Quadrat d'una suma:	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Quadrat d'una diferència:	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma per diferència:	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Vegem en quins casos sabem descompondre un polinomi en factors i quines passes hem de realitzar:

1. Sempre que sigui possible, començam traient factor comú

$$3x^2 + 21x = 3x \cdot (x + 7) \tag{6}$$

2. Identificam possibles identitats notables

$$4x^3 + 4x^2 + x = x \cdot (\underbrace{4x^2 + 4x + 1}) = x \cdot (2x + 1)^2 \tag{7}$$

En aquest exemple hem identificat el quadrat d'una suma.

3. Queda un polinomi de segon grau $P(x) = ax^2 + bx + c$? Aleshores, podem resoldre l'equació de segon grau amb la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8}$$

La factorització és $P(x) = \mathbf{a} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Atenció: No us oblideu de copiar el coeficient $\mathbf{a}$ davant de la factorització.

4. En altre cas, factoritzam utilitzant la **regla de Ruffini**.

Anem a veure un exemple en què cal aplicar la regla de Ruffini.

EXERCICI RESOLT 3

Descompon en factors el polinomi $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Cercam els divisors enters del terme independent $div(6) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Provam a fer la divisió per Ruffini per a cadascun d'ells i ens quedam pels que doni exacta

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -5 & -6 \\
-1 & & -1 & -1 & 6 \\
\hline
 & 1 & 1 & -6 & |\underline{0} \\
2 & & 2 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 3 & |\underline{0} & \\
-3 & & -3 & & \\
\hline
 & 1 & |\underline{0} & &
\end{array} \tag{9}$$

Hem pogut fer la factorització completa per Ruffini. Les arrels del polinomi són $x = -1$, $x = 2$ i $x = -3$. La factorització s'obté canviant el signe de les arrels

$P(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

La comprovació per saber si la factorització és correcte, consisteix en multiplicar els polinomis

$(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = (x^2 - x - 2)(x - 3) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ que és el polinomi que ens havien donat.

Un polinomi que no es pot descompondre més s'anomena irreductible. Són irreductibles:

- Els polinomis de primer grau $(bx + c)$
- Els polinomis de segon grau $(ax^2 + bx + c)$ que no tinguin solucions reals

EXERCICI RESOLT 4

Descompon en factors el polinomi $P(x) = x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2$.

En primer lloc cal treure factor comú la potència menor de x,
$P(x) = x^2(x^4 - 15x^2 - 42x - 40)$
El polinomi de quart grau cal factoritzar-lo per la regla de Ruffini. Per això cercam els divisors del terme independent del polinomi
div(40)=$\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20, \pm40$. I anam provant quines divisions entre $(x - a)$ són exactes. Cal seguir un ordre i intentar sempre començar per els divisors més baixos.
Comprovam que 1, -1, 2 no són arrels; és a dir, la divisió no és exacta. Tot seguit provam -2

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -15 & -42 & -40 \\ -2 & & -2 & 4 & 22 & 40 \\ \hline & 1 & -2 & -11 & -20 & |\underline{0} \end{array} \tag{10}$$

Ara basta cercar entre els divisors de 20. Provam 5

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -11 & -20 \\ 5 & & 5 & 15 & 20 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & |\underline{0} \end{array} \tag{11}$$

Donat que el quocient queda un polinomi de segon grau $x^2 + 3x + 4$ comprovam si té arrels resolent l'equació de segon grau:
$x^2+3x+4 = 0$ no té solucions reals, aleshores no es pot descompondre més i deim que és un polinomi irreductible.
Finalment, la factorització queda així

$$x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2 = x^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (x^2 + 3x + 4) \tag{12}$$

Vídeo 2.2: *Factorització de polinomis*
https://www.youtube.com/watch?v=z6HGMgTcYcM

EXERCICIS PROPOSATS

3. Factoritzau el polinomi $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ per aplicació de la regla de Ruffini.

4. Factoritzau el polinomi $P(x) = 4x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 18x$. *Ajuda: Comenceu traient factor comú, després trobeu almenys una arrel per Ruffini i finalment identifiqueu una identitat notable o resolgueu l'equació de segon grau que us quedarà.*

2. Fraccions algebraiques

S'anomena fracció algebraica al quocient de dos polinomis $\dfrac{P(x)}{d(x)}$

Són exemples de fraccions algebraiques $\dfrac{2x}{x+1}$; $\dfrac{5}{x^2-1}$; $\dfrac{x^3+2x^2+5}{x^2-2x+1}$.

En canvi, les fraccions $\dfrac{x^2+x}{x}$; $\dfrac{x^2-9}{x+3}$ són realment polinomis perquè les divisions són exactes. Podeu comprovar que aquestes divisions donen $(x+1)$ i $(x-3)$ respectivament.

Vídeo 2.3: *Fraccions algebraiques*
https://www.youtube.com/watch?v=xDfrUuPG8qY

2.1 Simplificació

Segurament recordes que, en alguns casos, les fraccions numèriques es poden simplificar. Per exemple:

$$\frac{10}{6}=\frac{\cancel{2}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot 3}=\frac{5}{3} \tag{13}$$

Les fraccions algebraiques es comporten d'una manera molt semblant a les fraccions numèriques. Per simplificar una fracció seguirem aquest procediment:

1. Factoritzarem els numeradors i denominadors.
2. Tatxam tots els factors que estan repetits al numerador i al denominador. **Per poder tatxar el factor ha d'estar multiplicant els altres factors.**
3. (Opcional) Si volem, multiplicam els factors que queden al numerador i al denominador.

EXERCICI RESOLT 5

Simplifica la fracció $\dfrac{x^2-3x}{x^3-9x}$

El numerador es factoritza fàcilment, simplement traient factor comú $x^2-3x=x(x-3)$.
Per factoritzar el denominador, primer treim factor comú $x^3-9x=x\cdot(x^2-9)$. Del polinomi de segon grau identificam una identitat notable $x\cdot(x+3)\cdot(x-3)$.

$$\frac{x^2-3x}{x^3-9x}=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x}\cdot(x+3)\cdot\cancel{(x-3)}}=\frac{1}{x+3} \tag{14}$$

Atenció: Per poder tatxar o simplificar un factor o parèntesi ha d'estar multiplicant els altres factors. Mai si apareixen sumant o restant.
Tots aquests exemples estan malament. Pots trobar on són les errades?

$$\frac{\cancel{x^2}+1}{\cancel{x^2}-2x} = \frac{1}{-2x} \tag{15}$$

$$\frac{2x+\cancel{1}}{x+\cancel{1}} = \frac{2x}{x} = 2 \tag{16}$$

2.2 Operacions

Com veurem en aquest apartat, les operacions amb fraccions algebraiques es fan de forma molt semblant que les operacions amb fraccions numèriques.

Mínim comú múltiple de polinomis

Abans de veure com es sumen i resten fraccions, necessitam reduir-les a denominador comú. Per això hem de repassar com es calcula el mínim comú múltiple (min.c.m) d'una sèrie de polinomis.

Procediment:

- Factoritzam tots els polinomis
- Multiplicam tots els factors **comuns i no comuns** que han aparegut; si estan repetits només agafam aquell que estigui elevat al major exponent

EXERCICI RESOLT 6

Cerca $min.c.m(x, x^2+x, x^2+2x+1)$

Les factoritzacions són $x = x$; $x^2+x = x\cdot(x+1)$ i $x^2+2x+1 = (x+1)^2$

$$min.c.m(x, x^2+x, x+1) = x\cdot(x+1)^2 \tag{17}$$

En general no cal efectuar la multiplicació resultant.

Suma i resta

Per sumar fraccions algebraiques, es cerca el min.c.m dels denominadors, es redueix a denominador comú i es sumen els numeradors.

La resta és una cas especial de la suma.

EXERCICI RESOLT 7

Opera:
$\frac{x+2}{x}+\frac{3}{x(x-1)}-\frac{2x+1}{x-1}=$

El $min.c.m(x, x(x-1), x-1) = x(x-1)$. Després reduïm a denominador comú i operam

$$\begin{aligned}&\frac{x+2}{x}+\frac{3}{x(x-1)}-\frac{2x+1}{x-1}=\\&=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)}+\frac{3}{x(x-1)}-\frac{x\cdot(2x+1)}{x(x-1)}=\\&\frac{(x+2)(x-1)+3-x\cdot(2x+1)}{x(x-1)}=\cdots\end{aligned} \tag{18}$$

Ara només falta operar i simplificar el numerador

$$\cdots=\frac{-(x^2-1)}{x(x-1)} \tag{19}$$

Com a tasca vos deixo comprovar que la fracció resultant es pot simplificar i trobam $\frac{-(x+1)}{x}$

Multiplicació i divisió

El **producte** de dues fraccions algebraiques és una fracció algebraica que s'obté de multiplicar els dos numeradors i els dos denominadors.

$$\frac{x^2-9}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x-3}=\frac{(x^2-9)\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-3)} \tag{20}$$

En comptes d'efectuar les multiplicacions dels numeradors i denominadors, farem tot el contrari. Intentarem factoritzar-los més per veure si podem simplificar-los

$$\frac{(x^2-9)\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-3)}=\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot\cancel{(x-3)}}=\frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+2)} \tag{21}$$

Aquesta forma és més ràpida perquè operam i simplificam a la vegada.

La **inversa d'una fracció** és una nova fracció que s'obté de canviar el numerador pel denominador.

$$\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^{-1}=\frac{x-3}{x-1} \tag{22}$$

El **quocient** de dues fraccions és igual al producte de la primera per la inversa de la segona.

Per exemple:

$$\frac{x}{x-3}:\frac{x-1}{x-3}=\frac{x}{x-3}\cdot\frac{x-3}{x-1}=\frac{x\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}} \tag{23}$$

Si simplificam tatxant factors repetits, obtenim $\frac{x}{x-1}$

3. Equacions

En aquest apartat estudiarem com resoldre diferents tipus d'equacions. És important que entenguis quin és el procediment de resolució en cada cas ja que serà la base per propers lliuraments.

Organitzam l'apartat en els casos:

- Equacions de segon grau i biquadrades
- Equacions polinòmiques
- Equacions exponencials i logarítmiques
- Sistemes d'equacions

3.1 De segon grau i biquadrades

Equacions de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$

Les solucions s'obtenen d'aplicar la fórmula següent:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{24}$$

Anomenam $\Delta = b^2 - 4a$ el **discriminant** de l'equació de segon grau.

- Si $\Delta > 0$ l'equació té dues arrels reals
- Si $\Delta = 0$ es diu que té una solució doble (o repetida)
- Si $\Delta < 0$ l 'equació no té solució real (en té dues de complexes)

Quan $b = 0$ o $c = 0$, es diu que l'equació és **incompleta** i es pot resoldre de forma senzilla.

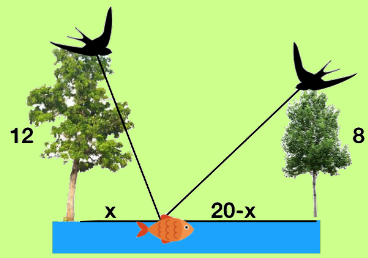
- $ax^2 + c = 0$ podem aïllar directament x^2. Les solucions són $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.
- $ax^2 + bx = 0$ treim factor comú $x\,(ax + b) = 0$. Una solució sempre és $x = 0$ i l'altra $x = -b/a$.

EXERCICI RESOLT 8

Escriu una equació de segon grau que tingui com a solucions -2 i 3	Pel que sabem de la factorització de polinomis, el polinomi $(x + 2) \cdot (x - 3)$ té com arrels (o solucions) les que demana el problema. Llavors l'equació que ens demanen és $(x + 2) \cdot (x - 3) = 0$ Efectuam la multiplicació i obtenim l'equació desitjada $x^2 - x - 6 = 0$ En general, si tenim una equació de segon grau de la forma $x^2+bx+c = 0$, les dues solucions x_1, x_2 de l'equació compleixen que $x_1 \cdot x_2 = c$ i $x_1 + x_2 = -b$. Aquestes es coneixen com les relacions de *Cardano-Vieta*.

EXERCICI RESOLT 9

A cada costat d'un riu hi ha dos arbres. Un arbre fa 12 m i l'altre de 8 m d'alt. L'amplada entre els dos arbres és de 20 m. Al cap damunt de cada arbre hi ha un ocell. En un moment donat veuen un peix que apareix a la superfície de l'aigua, entre els dos arbres. Els dos ocells es llancen i arriben al peix al mateix moment. Quina és la distància del peix a l'arbre més alt?



La distància entre cada ocell i el peix ha d'ésser igual. Aplicam el teorema de Pitàgores a cada triangle rectangle.

$$x^2 + 12^2 = (20 - x)^2 + 8^2 \tag{25}$$

Efectuam la identitat notable

$$x^2 + 144 = 400 - 40x + x^2 + 64 \tag{26}$$

i simplificam. Trobam l'equació de primer grau $40x = 320$ que té com a solució $x = 8$ m de l'arbre més alt.

Equacions biquadrades $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Les equacions biquadrades són equacions de quart grau en què falten els termes x i x^3.

Per resoldre-les, efectuam el canvi $t = x^2$, i, per tant, l'equació es transforma en una de segon grau que ja sabem resoldre.

Una equació biquadrada pot tenir 4, 2 o cap solució. Les solucions sempre apareixen en parelles $\pm x$.

EXERCICI RESOLT 10

Resol l'equació $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ Efectuam el canvi $x^2 = t$. Trobam l'equació

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \tag{27}$$

Resolem l'equació de segon grau

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases} \tag{28}$$

Finalment per obtenir la incògnita x, feim l'arrel quadrada de t (pensant que una arrel quadrada pot tenir dos signes):
$x = \pm\sqrt{-1}$ que no és possible i $x = \pm\sqrt{3}$
Aquesta equació biquadrada només té dues solucions $x = \pm\sqrt{3}$.

3.2 Polinòmiques

Equacions factoritzades

Les equacions factoritzades són de la forma

$$x \cdot (x-3) \cdot (x+4) \cdot (2x+1) = 0 \tag{29}$$

és a dir, són el producte de diversos factors **igualat a zero**.

Això fa que aquestes equacions siguin molt fàcils de resoldre. Únicament cal igualar cada factor a zero. Per a l'exemple anterior, les solucions són: $x = 0,\ x = 3,\ x = -4,\ x = -\frac{1}{2}$

Equacions polinòmiques

Una equació polinòmica és una equació de la forma $P(x) = 0$, on $P(x)$ és un polinomi de grau qualsevol.

El procediment per resoldre-les és:

1. Factoritzar el polinomi
2. Igualar la factorització a zero
3. Resoldre l'equació factoritzada

EXERCICI RESOLT 11

Resol l'equació
$6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$

Per factoritzar el polinomi cercam entre els divisors del terme independent: ± 1
Si provam -1, veim que és una arrel

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \lfloor 0 \end{array} \tag{30}$$

Per tant, $x = -1$ és una arrel i la factorització queda:

$$(x+1) \cdot (6x^2 + x - 1) = 0 \tag{31}$$

Ara resolem l'equació de segon grau $6x^2 + x - 1 = 0$ i obtenim les solucions $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}$
L'equació factoritzada és: $(x+1) \cdot 6(x - \frac{1}{3}) \cdot (x + \frac{1}{2}) = 0$
Llavors les solucions de l'equació són $x = -1; x = \dfrac{1}{3}; x = -\dfrac{1}{2}$.

Vídeo 2.4: *Equacions polinòmiques*
https://www.youtube.com/watch?v=NogJ8p4-uzk

EXERCICIS PROPOSATS

5. Resoleu $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

6. Resoleu $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$.

3.3 Exponencials i logarítmiques

Equacions exponencials

Les equacions exponencials són aquelles en què la incògnita apareix en algun exponent. Aquestes equacions es resolen a través de **logaritmes**.

En els casos més senzills, és possible resoldre l'equació per tempteig (provant). Per exemple, $2^x = 8$ té solució $x = 3$ perquè $2^3 = 8$.

En altres situacions caldrà utilitzar la definició de logaritme. Per exemple, $2^x = 10$ té solució $x = \log_2 10 \approx 3.3219$ perquè $2^{3.3219\cdots} = 8$

Recorda la definició de logaritme

$$b^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b a \tag{32}$$

Segons quines equacions, serà necessari **prendre el mateix logaritme** al dos membres de l'equació per tal d'eliminar les exponencials. Vegeu el següent exemple.

EXERCICI RESOLT 12

Resol l'equació $2^x = 10^{x+1}$

Prenem el logaritme en base deu en els dos membres

$$\log 2^x = \log 10^{(x+1)} \tag{33}$$

Aplicam les propietats del logaritmes. En primer lloc, els exponents baixen davant, multiplicant el logaritme

$$x \log 2 = (x+1) \log 10 \tag{34}$$

Recordam que $\log_{10} 10 = 1$. Ara només falta aïllar la x. Pensa que $\log 2$ és un nombre

$$x \log 2 - x = 1 \tag{35}$$

$$x \cdot (\log 2 - 1) = 1 \tag{36}$$

$$x = \frac{1}{(\log 2 - 1)} \approx -1.4307 \tag{37}$$

EXERCICI RESOLT 13

La quantitat de substància radioactiva expressada en y grams es desintegra amb el temps t, en anys transcorreguts des de 2018, segons l'expressió $y = 100\, e^{-\frac{t}{250}}$.
a) Quina és la quantitat inicial de substància?
b) Es defineix el període de semi-desintegració radioactiva com el temps que ha de transcórrer perquè la quantitat de substància es redueixi a la meitat. Quin és aquest temps? En quin any s'haurà assolit?

a) La quantitat inicial és quan $t = 0$, $y = 100e^{-\frac{0}{250}} = 100$ g

b) Hem de trobar el temps pel qual la quantitat siguin 50 g. Plantejam l'equació

$$50 = 100e^{-\frac{t}{250}} \tag{38}$$

Si aïllam l'exponencial $e^{-\frac{t}{250}} = 0,5$ i **prenem logaritmes Neperians** als dos membres

$$-\frac{t}{250} = \ln 0,5 \Rightarrow t = -250 \ln 0,5 \tag{39}$$

Amb decimals $t = -250 \ln 0,5 \approx 173,29$ anys han de passar. Serà, per tant, l'any 2191 aproximadament.

Equacions logarítmiques

Les equacions logarítmiques són aquelles en què la incògnita apareix en algun logaritme.

En els casos més senzills, és possible resoldre l'equació utilitzant la definició de logaritme. Per exemple, $\log_{10} x = -2$ té solució $x = 10^{-2} = 0.01$ per definició de logaritme.

En equacions que involucrin més d'un logaritme caldrà utilitzar les propietats dels logaritmes. Com a regla general, utilitzarem les propietats per intentar agrupar tots els logaritmes en un únic.

EXERCICI RESOLT 14

Resoleu:
a) $\log x + \log 50 = 3$
b) $5 \log_2 (x+3) = \log_2 32$
c) $2 \ln x = \ln(10 - 3x)$

a) Utilitzam que $\log x = \log_{10} x$, que $\log 1000 = 3$ i

la propietat $\log_b A + \log_b B = \log_b A \cdot B$

$$\cancel{\log}(50x) = \cancel{\log} 1000 \quad \to \quad 50x = 1000 \quad \to \quad x = 20 \tag{40}$$

b) Tenim en compte que $n \log_b A = \log_b A^n$

$$\log_2 (x+3)^5 = \log_2 32 \quad \to \quad (x+3)^5 = 32 \quad \to \tag{41}$$

$$\to \quad x + 3 = \sqrt[5]{32} \quad \to \quad x + 3 = 2 \quad \to \quad x = -1 \tag{42}$$

c) Utilitzant les propietats dels logaritmes:

$$\ln x^2 = \ln(10 - 3x) \quad \to \quad x^2 = 10 - 3x \tag{43}$$

Arribam doncs, a l'equació de segon grau $x^2 + 3x - 10 = 0$ que té com a posible solucions $x = 2, -5$. La solució -5 no és vàlida perquè no és possible calcular el logaritme d'un nombre negatiu.

EXERCICI RESOLT 15

Una unitat molt comú per mesurar la intensitat del renou són els decibels (dB). Els dB estan definits a partir de la fórmula $dB = 10 \log \dfrac{P}{P_0}$ essent P la potència del renou i P_0 el llindar d'audició $P_0 = 10^{-12}$ W/m ^{2}.
Quina és la potència P en W/m ^{2} d'un renou d'una aspiradora de 70 dB?

Plantejam l'equació $70 = 10 \log \dfrac{P}{10^{-12}}$. Aïllam el logaritme $\log_{10}\left(\dfrac{P}{10^{-12}}\right) = 7$ i aplicam la definició de logaritme $\dfrac{P}{10^{-12}} = 10^7$ i aïllam $P = 10^7 \cdot 10^{-12} = 10^{-5}$ W/m ^{2}.

Vídeo 2.5: *Equacions exponencials i logarítmiques*
https://www.youtube.com/watch?v=aMTJj3eSzWg

EXERCICIS PROPOSATS

7. Resoleu les equacions exponencials:
a) $2^{x-1} = 10$
b) $3 \cdot 5^{-x} = 5^2$

8. Resoleu les equacions logarítmiques:
a) $\log x + \log 50 = 3$
b) $2 \ln x = \ln(10 - 3x)$

4. Sistemes d'equacions lineals. Mètode de Gauss

Sistemes escalonats

Un sistema d'equacions $n \times m$ està format per *n* equacions i *m* incògnites. El sistema es diu que és **lineal** si les incògnites només apareixen sumades, restades o multiplicades per un coeficient.

Un sistema d'equacions lineal de tres equacions amb 3 incògnites s'anomena **escalonat** si en una de les equacions només apareix una incògnita i en una altra falta alguna de les altres dues incògnites.

Aquesta propietat fa que aquests sistemes siguin molt fàcils de resoldre.

EXERCICI RESOLT 16

Resoleu:
$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$$

Es tracta d'un sistema escalonat
De la segona equació; $2y = -6$ deduïm que $y = -3$.
Si ara anam a la primera, $3x + 4 \cdot (-3) = 0$ trobam que $x = 4$.
Finalment, introduïm la y i la x trobades dins la tercera equació $5 \cdot 4 + (-3) - z = 17$ i aïllam la $z = 0$.
La solució és $x = 4, y = -3, z = 0$

EXERCICI RESOLT 17

Resoleu:
$$\begin{cases} y - 2z = -4 \\ 4y = 24 \\ x - 2y + z = -5 \end{cases}$$

Es tracta d'un sistema escalonat
De la segona equació; $4y = 24$ deduïm que $y = 6$.
Si ara anam a la primera, $6 - 2z = -4$ trobam que $z = 5$.
Finalment, introduïm la y i la z trobades dins la tercera equació $x - 12 + 5 = -5$ i aïllam la $x = 2$.
La solució és $x = 2, y = 6, z = 5$

Mètode de Gauss

Acabam de veure que els sistemes escalonats són molt senzills de resoldre. Desgraciadament no tots els sistemes són escalonats. Llavors, el mètode de Gauss aconsegueix transformar un sistema que no és escalonat en un altre equivalent que sí que ho és.

Dos sistemes es diuen que són **equivalents** si tenen **les mateixes solucions**. Les transformacions que podem fer per obtenir sistemes equivalents són:

- Es pot canviar l'ordre de les equacions

- Tota equació es pot dividir o multiplicar per un nombre (diferent de zero)

- A una equació se li pot sumar o restar una altra prèviament multiplicada per un nombre. Per exemple, $F_2 \to F_2 + F_1$ es llegeix com "*La segona fila es canvia per la segona més la primera fila*".

Anomenam les equacions com $F_1, F_2, F_3, \cdots$. En una transformació podem decidir modificar més d'una fila.
Per exemple $F_2 \to F_2 + F_1$ i $F_3 \to F_3 - F_1$ seria correcte.
El que no podem fer és utilitzar la mateixa combinació en dues files diferents,
Per exemple $F_2 \to F_2 - F_3$ i $F_3 \to F_3 - F_2$ seria **incorrecte**, perquè al cap i a la fi, $F_2 - F_3$ o $F_3 - F_2$ són, excepte un signe, la mateixa combinació.

Es tracta d'anar aplicant una seqüència de transformacions que facin desaparèixer termes (**col·loquialment, posar zeros**) fins que el sistema quedi escalonat. Si les transformacions les aplicam sense cap ordre, es comú fer-se un embolic. Per això us recomanam que seguiu la tècnica de la **L** que s'aconsegueix en 2 passes. Aquest diagrama mostra en què consisteix:

$$\begin{array}{l} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z = b_1 \\ \boxed{a_{2,1}\,x} + a_{2,2}\,y + a_{2,3}\,z = b_2 \\ \boxed{a_{3,1}\,x} + a_{3,2}\,y + a_{3,3}\,z = b_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z = b_1 \\ c_{2,2}\,y + c_{2,3}\,z = b_2 \\ \boxed{c_{3,2}\,y} + c_{3,3}\,z = b_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z = b_1 \\ c_{2,2}\,y + c_{2,3}\,z = b_2 \\ d_{3,3}\,z = b_3 \end{array}$$

La primera passa consisteix en fer que els termes $a_{2,1}$ i $a_{3,1}$ desapareguin. La segona i darrera passa, cal utilitzar la segona i la tercera equacions perquè alguns dels termes $c_{i,j}$ es cancel·li. La figura fa que el terme $c_{3,2}$ s'anul·li.

Recomanació: Sempre que sigui possible col·locarem l'equació que tingui un 1 en el primer terme a dalt de tot.

Aquest vídeo mostra com s'apliquen les transformacions en el mètode de Gauss.

Vídeo 2.6: *El mètode de Gauss*
https://www.youtube.com/watch?v=o6DTm8A-URU

EXERCICI RESOLT 18

Resoleu:
$$\begin{cases} 2x+3y &= 14 \\ x-2y+z &= -3 \\ 2x-y-z &= 9 \end{cases}$$

Anomenam les equacions com F_1, F_2, F_3.
Canviam l'ordre de la 1a i 2a equacions
$$\begin{cases} x-2y+z &= -3 & \rightarrow \\ 2x+3y &= 14 & \rightarrow F_2-2F_1 \\ 2x-y-z &= 9 & \rightarrow F_3-F_2 \end{cases}$$

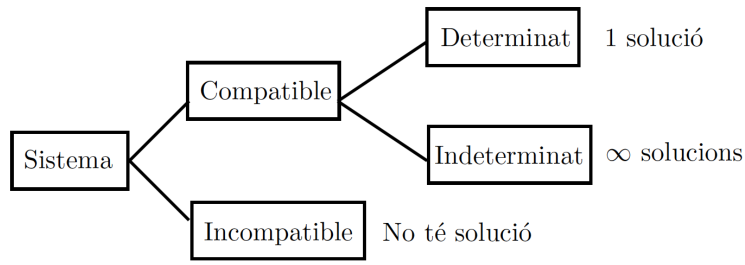
Aplicam les següents transformacions, a la segona li restam el doble de la primera; a la tercera li restam la segona. Notau que la primera equació no la tocam i queda igual. $\begin{cases} x-2y+z &= -3 & \rightarrow \\ 7y-2z &= 20 & \rightarrow \\ -4y-z &= -5 & \rightarrow F_2-2F_3 \end{cases}$

La tercera equació la canviam per la segona menys dues vegades la tercera. Les altres equacions les deixam iguals $\begin{cases} x-2y+z &= -3 \\ 7y-2z &= 20 \\ 15y &= 30 \end{cases}$

El sistema ja es escalonat i si el resolem, la solució és $x=4, y=2, z=-3$

4.1 Classificació dels sistemes

Els sistemes d'equacions lineals es classifiquen segons el nombre de solucions:



Si a l'aplicar el mètode de Gauss trobam una fila plena de zeros $0x+0y+0z=0$, aquesta equació és certa perquè $0=0$ però no ens proporciona cap informació útil. Si passa això, el sistema serà **compatible indeterminat**; tindrà infinites solucions.

En canvi, si a l'aplicar el mètode de Gauss arribam a una fila com ara $0x+0y+0z=5$, aquesta equació és **falsa** perquè $0\neq 5$. Podrem assegurar que aquest sistema no té solució (es diu **incompatible**).

En la següent explicació veurem un exemple de cada tipus així com s'aplica el mètode de resolució.

Vídeo 2.7: *Classificació de sistemes d'equacions lineals*
https://www.youtube.com/watch?v=1OLR7OCR1rE

EXERCICI RESOLT 19

Resoleu i discutiu:
$$\begin{cases} 3x+2y-2z & =4 \\ 4x+y-z & =7 \\ x+4y-4z & =0 \end{cases}$$

Anomenam les equacions com F_1, F_2, F_3.
Canviam l'ordre de la 1a i 3a equacions
$$\begin{cases} x+4y-4z & =0 & \rightarrow \\ 4x+y-z & =7 & \rightarrow F_2-4F_1 \\ 3x+2y-2z & =4 & \rightarrow F_3-3F_1 \end{cases}$$

Aplicam les següents transformacions, a la segona li restam 4 vegades la primera; a la tercera li restam 3 vegades la primera. Notau que la primera equació no la tocam i queda igual.
$$\begin{cases} x+4y-4z & =0 & \rightarrow \\ \quad 0-15y+15z & =7 & \rightarrow \\ \quad 0-10y+10z & =4 & \rightarrow: (-2) \end{cases}$$

Dividim la tercera equació per -2 $\begin{cases} x+4y-4z & =0 & \rightarrow \\ \quad 0-15y+15z & =7 & \rightarrow F_2+3F_3 \\ \quad 0+5y-5z & =-2 & \rightarrow \end{cases}$

La segona equació, li sumam el 3 vegades la tercera
$$\begin{cases} x+4y-4z & =0 \\ \quad 0x+0y+0z & =1 \\ \quad 0+5y-5z & =-2 \end{cases}$$

El sistema ja es escalonat. Hem arribat a una equació que ens diu $0=1$, cosa que és evidentment falsa. Això ens diu que el sistema no té solució. Es tracta d'un **sistema incompatible**.

EXERCICI RESOLT 20

Resoleu i discutiu:
$$\begin{cases} 3x+2y-2z &= 4 \\ 4x+y-z &= 7 \\ x+4y-4z &= -2 \end{cases}$$

Anomenam les equacions com F_1, F_2, F_3.
Canviam l'ordre de la 1a i 3a equacions
$$\begin{cases} x+4y-4z &= -2 & \to \\ 4x+y-z &= 7 & \to F_2-4F_1 \\ 3x+2y-2z &= 4 & \to F_3-3F_1 \end{cases}$$

Aplicam les següents transformacions, a la segona li restam 4 vegades la primera; a la tercera li restam 3 vegades la primera. Notau que la primera equació no la tocam i queda igual.
$$\begin{cases} x+4y-4z &= -2 & \to \\ 0-15y+15z &= 15 & \to: 15 \\ 0-10y+10z &= 10 & \to: (-2) \end{cases}$$

Dividim la segona equació per 15 i la tercera per -10
$$\begin{cases} x+4y-4z &= -2 & \to \\ 0-y+z &= 1 & \to \\ 0+y-z &= -1 & \to F_3+F_2 \end{cases}$$

La tercera equació, li sumam la segona $\begin{cases} x+4y-4z &= -2 \\ 0-y+z &= 1 \\ 0x+0y+0z &= 0 \end{cases}$

El sistema ja es escalonat. Hem arribat a una equació que ens diu $0=0$, cosa que és certa però no ens proporciona cap informació sobre les incògnites. Quan passa això ens diu que el sistema és **compatible indeterminat**, té infinites solucions.
Per resoldre el sistema ens fan falta equacions o millor dit, ens sobren incògnites. El que podem fer es passar la z al membre de la dreta com i tractar-lo com si fos un nombre (o un paràmetre). Trobam aquest sistema d'equacions 2x2: $\begin{cases} x+4y &= 4z-2 \\ -y &= 1-z \end{cases}$
De la segona equació podem aïllar la $y=-1+z$. Si substituïm a la primera, podrem aïllar la x $x=-4y+4z-2=-4(-1+z)+4z-2=2$.
En resum la solució del sistema és: $x=2; y=-1+z; z=z$
Per a cada valor de z que ens inventem, trobarem una solució diferent. Per exemple si $z=0$ trobam la solució $x=2; y=-1; z=0$; si $z=5$ trobam la solució $x=2; y=4; z=5$; etc.

EXERCICIS PROPOSATS

9. Resoleu el sistema d'equacions lineal pel mètode de Gauss $\left\{\begin{array}{ll} x-y+2z & =8 \\ 3x \quad -5z & =-12 \\ 2x+y+4z & =13 \end{array}\right.$. Classifiqueu-lo.

10. Resoleu el sistema d'equacions lineal pel mètode de Gauss $\left\{\begin{array}{ll} 2x-y-z & =2 \\ 3x-2y+3z & =4 \\ -5x+3y+5z & =-1 \end{array}\right.$. Classifiqueu-lo.