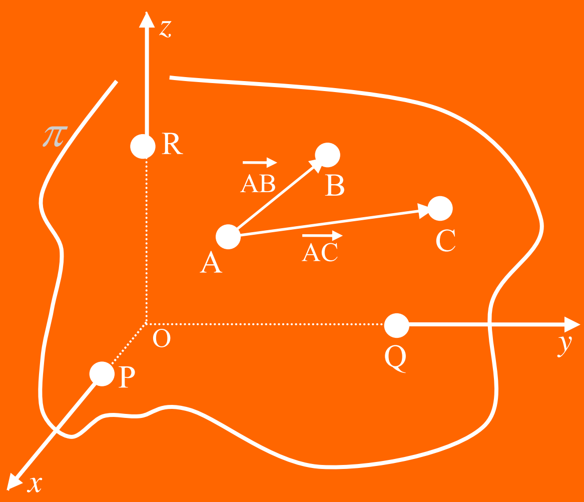
PROBLEMES DE SELECTIVITAT

ILLES BALEARS

Matemàtiques II
2n de Batxillerat

Proves

2005 ~ 2010



Departament de Matemàtiques

IES Alcúdia

Nota de l'autor

En aquest dossier hi trobareu resoltes les proves de selectivitat de l'assignatura **Matemàtiques II** que han tingut lloc durant els darrers cinc anys a les Illes Balears.

El model original de les proves és públic i accessible des de l'adreça http://www.uib.es/ca/infsobre/estudis/acces/pau/materies_pau/index.htm.
És recomanable que llegiu el sistema de puntuació, els criteris de qualificació i la puntuació parcial dels problemes.

Aquest dossier és fruit del treball directe amb l'alumnat de 2n de Batxillerat de ciències. La intenció primera d'aquest material és la d'ajudar al nostre alumnat a superar amb èxit la prova de selectivitat de **Matemàtiques II**.

Les solucions presentades s'han d'entendre com una proposta de resolució i mai com un model tancat per afrontar el problema. Per aquest motiu, s'ha intentat presentar solucions alternatives perquè l'alumne pugui valorar els diferents procediments. En alguns casos, es plantegen qüestions d'ampliació perquè l'alumnat interessat pugui aprofundir en la resolució de problemes.

Per tal que l'alumnat pugui aprofundir en l'estudi de la geometria a l'espai, els problemes de geometria venen acompanyats amb vistes 3D amb les quals pot interactuar, experimentar i fer conjectures. Aquestes vistes són accessibles des de la pàgina
https://sites.google.com/site/matalcudia/recursos/geometria-dinamica

Hi ha dues formes diferents d'utilitzar aquest material. Durant el curs, es poden anar seleccionant els problemes per temes (pàg. 7); o bé a final de curs, utilitzar-lo com a activitats de síntesi.

Referent a la numeració dels problemes, 07S-B(3), per exemple, fa referència a l'any 2007, convocatòria de setembre, opció B, problema n. 3.

En l'elaboració d'aquest material, vull agrair especialment als meus companys de departament pels seus comentaris i lectura crítica del dossier. Així mateix, vull donar les gràcies als meus alumnes els quals m'han motivat a realitzar aquest treball, ajudat a millorar-ne la qualitat i corregir algunes errades.

Juny 2010

Josep Mulet Pol
Departament de Matemàtiques
IES Alcúdia

Índex de continguts per any

Selectivitat 2005 — Pàg.

Prova de juny (opció A) 9
Prova de juny (opció B) 13
Prova de setembre (opció A) 17
Prova de setembre (opció B) 21

Selectivitat 2006

Prova de juny (opció A) 26
Prova de juny (opció B) 30
Prova de setembre (opció A) 35
Prova de setembre (opció B) 40

Selectivitat 2007

Prova de juny (opció A) 44
Prova de juny (opció B) 48
Prova de setembre (opció A) 52
Prova de setembre (opció B) 55

Selectivitat 2008

Prova de juny (opció A) 59
Prova de juny (opció B) 63
Prova de setembre (opció A) 68
Prova de setembre (opció B) 72

Selectivitat 2009

Prova de juny (opció A).. 76
Prova de juny (opció B).. 80
Prova de setembre (opció A)... 84
Prova de setembre (opció B)... 87

Selectivitat 2010

Prova de juny (opció A).. 92
Prova de juny (opció B).. 95

Índex de continguts per tema

Tema 1: Sistemes d'equacions. Mètode de Gauss

Sistemes d'equacions lineals (Gauss)............. 07J-B(1)

Tema 2: Àlgebra de matrius

Àlgebra de matrius.. 05S-B(1), 07S-A(1), 08S-A(1)
Equacions amb matrius.................................... 06S-A(1), 09S-A(1), 10J-B(1)

Tema 3: Determinants. Resolució de sistemes mitjançant determinants

Propietats dels determinants....................... 08S-B(1)
Rang d'una matriu.. 07J-B(1), 09S-B(1), 10J-A(1)
Discussió d'un sistema................................ 05J-A(3), 05S-A(1), 06J-A(1), 06J-B(4), 06S-B(1), 07J-A(1), 07S-B(1), 08J-B(1), 09J-B(1)
Regla de Cramer.. 06J-B(4), 08J-B(1)
Càlcul de la matriu inversa.......................... 05J-B(4), 05S-B(1), 06S-A(1), 07S-A(1), 08J-A(1), 09J-A(1)

Tema 4: Geometria afí

Equació de la recta...................................... 05S-A(2), 06J-B(2), 07J-B(2), 07S-A(2), 09J-B(2)
Posició relativa de rectes............................. 06S-A(2), 08J-A(2)
Posició relativa de plans……………………. 05S-B(2), 09S-A(2)
Equació del pla... 05J-A(2), 06S-B(2), 07S-A(2), 07J-B(2), 08J-B(2), 09S-B(2), 10J-B(2)
Producte vectorial... 08J-A(2)
Vectors coplanaris. Producte mixt.............. 09J-A(2)

Tema 5: Geometria mètrica

Distància entre dues rectes......................... 06J-A(2), 10J-A(2)
Distància entre un pla i un punt................... 06S-B(2), 07S-B(2), 08S-A(2), 09J-A(2)
Distància entre una recta i un punt…........... 05J-B(3), 08S-B(2)

Tema 6: Límits i continuïtat de funcions

Estudi de la continuïtat d'una funció............ 09J-A(3), 09S-B(4)
Teoremes de Bolzano i Rolle...................... 05J-A(4), 05S-A(4), 06S-A(3), 07S-B(4), 09J-B(3), 09S-A(4)
Asímptotes.. 07S-B(3), 09J-A(4)
Càlcul de límits.. 09S-A(3)

Tema 7: Derivades. Representació de funcions

Càlcul de la recta tangent a una corba......... 06J-A(3), 07J-A(3), 08S-B(4), 09S-B(3), 10J-A(3)
Estudi i gràfica d'una funció......................... 05J-A(1), 05S-A(3), 05S-B(3), 06J-A(4), 07S-A(3), 08J-A(3), 08J-B(3), 08S-A(3), 08S-B(3), 10J-B(3)
Càlcul d'extrems d'una funció...................... 05J-B(2), 06J-B(1), 06S-A(4), 06S-B(3), 07J-B(3), 09S-A(3)

Tema 8: Càlcul de primitives

Càlcul d'una primitiva................................. 07J-A(4)

Tema 9: La integral definida

Càlcul de l'àrea d'un recinte........................ 05J-B(1), 05S-B(4), 06S-B(4), 07J-B(4), 08J-B(4), 08S-B(4), 09J-B(4), 09S-B(4) 10J-A(4)
Funció àrea…………………….................... 08J-A(4), 10J-B(4)

EXAMEN 2005-Juny-Opció A

05J-A(1). Es considera la funció $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-4}$. Es demana:

a) Trobar els intervals on la funció és creixent i on és decreixent.
b) Calcular les asímptotes.
c) Fer una gràfica de la funció.

Solució:

a) Per trobar els intervals de creixement i decreixement necessitam la primera derivada

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-4)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}=0$$

La derivada s'anul·la a x=0.
Estudiem el signe de la primera derivada:

Signe de f'(x) ++++++?+++*0*------?-------------------- *?=f' no existeix*

-2 0 2 *x*

Hem de tenir en compte que x=-2 i x=2 no són del domini i no existeix *f* '(x).

La funció és decreixent (0, 2) ∪ (2,+∞)

La funció és creixent (-∞,-2) ∪ (-2,0)

Hi ha un màxim relatiu a x=0, y=3/4.

b) Aquesta funció racional té dues asímptotes verticals a x=-2 i x=2.

Per determinar la posició relativa, hem de calcular els límits

$\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2-3}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ i $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-3}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

A més, té una asímptota horitzontal y=1, ja que

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-3}{x^2-4}=1^+$, és a dir, la funció s'acosta a y=1 per damunt

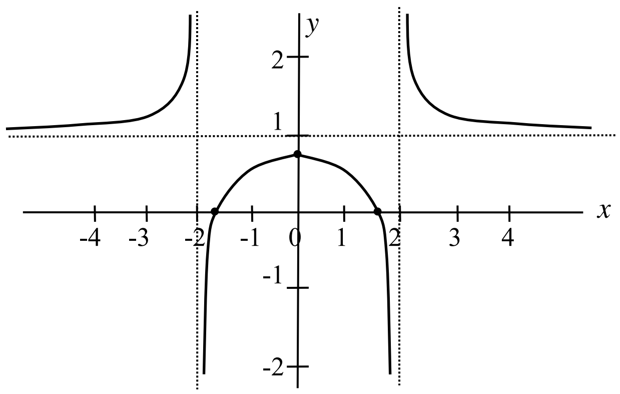
$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-3}{x^2-4}=1^+$, és a dir, la funció s'acosta a y=1 per damunt

c) Amb la informació que hem recopilat i amb la següent podem dibuixar la funció

- Domini f(x)=R - {-2,2}
- Talls amb l'eix X (y=0) : $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73$
- Tall amb l'eix Y (x=0) : y=3/4=0.75
- La funció és simètrica parell, *f(-x)=f(x)*
- La funció no té punts d'inflexió ja que la segona derivada mai es fa zero

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-4)^2 + 2x \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{6x^2+8}{(x^2-4)^3}$$

- Estudiant el signe de f''(x) trobam la curvatura
  f(x) és cóncava a (-∞,-2) ∪ (2,+∞)
  f(x) és convexa a (-2, 2)



05J-A(2). Es consideren els punts A(3,0,0), B(0,2,0) i C(0,0,1). Es demana:

a) Trobar l'equació general del pla π que els conté.
b) Trobar l'equació de la recta perpendicular a π i que passa per l'origen de coordenades. Trobau també el punt d'intersecció de la recta amb el pla.

Solució:

a) És evident que A, B, C no estan alineats (estan damunt els eixos de coordenades) i per tant determinen un pla. Necessitam dos vectors directors, per exemple, $\vec{AB} = (-3,2,0)$ i $\vec{AC} = (-3,0,1)$. L'equació vectorial del pla π és:

$$\pi: \quad (x,y,z) = (3,0,0) + \lambda(-3,2,0) + \mu(-3,0,1)$$

L'equació paramètrica és: $\pi: \begin{cases} x = 3 - 3\lambda - 3\mu \\ y = 2\lambda \\ z = \mu \end{cases}$.

Aïllant el paràmetre λ de la [2a] i μ de la [3a] i introduint-los en la [1a], trobam l'equació general del pla $\pi: \quad 2x + 3y + 6z - 6 = 0$.

a) **Solució alternativa :**

Si diem $P(x,y,z)$ un punt genèric del pla, aleshores els vectors $\vec{AB},\vec{AC},\vec{AP}$ són linealment dependents i el seu determinant és zero

$$\begin{vmatrix} x-3 & -3 & -3 \\ y-0 & 2 & 0 \\ z-0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x+3y+6z-6=0.$$

b) De l'equació general del pla, deduïm el vector normal $\vec{n}(2,3,6)$. La recta normal al pla i que passa per O(0,0,0) és

r: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}$, fent productes creuats $\begin{cases} 3x=2y \\ 2z=6x \end{cases}$

La intersecció del pla amb la recta, s'obté de resoldre el sistema 3x3

$\begin{cases} 2x+3y+6z-6=0 \\ 3x=2y \\ 2z=6x \end{cases}$ la solució és $x=\frac{12}{49}, y=\frac{18}{49}, z=\frac{36}{49}$ que és el punt de tall.

05J-A(3). Resoleu el següent sistema d'equacions quan sigui compatible determinat

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ kx+10y+4z=11 \end{cases}$$

Solució:

Perquè el sistema 3x3 sigui compatible determinat, $rang\, M = rang\, \overline{M} = 3$.
Si rang *M*=3, vol dir que el determinant de la matriu del sistema ha d'ésser diferent de zero,

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ k-4 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k-4 & 6 \end{vmatrix} = 6-2(k-4) = -2k+14 = 0$$

[1ªcol]→[1ªcol] - [3ªcol]
[2ªcol]→[2ªcol] - [3ªcol]

El determinant s'anul·la quan *k*=7.

- Si $k \neq 7$: el sistema és compatible determinat, resolem per la regla de Cramer

$$x = \frac{1}{|M|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix} = \frac{0}{-2k+14} = 0;$$

$$y=\frac{1}{|M|}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ k & 11 & 4\end{vmatrix}=\frac{-k+7}{-2k+14}=\frac{1}{2};$$

$$z=\frac{1}{|M|}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 3\\ k & 10 & 11\end{vmatrix}=\frac{-3k+21}{-2k+14}=\frac{3}{2}.$$

Solució (0, 1/2, 3/2).

- Si $k=7$: $rang\ M = rang\ \overline{M}=2$, el sistema és compatible indeterminat.
  Podem prescindir d'una de les equacions

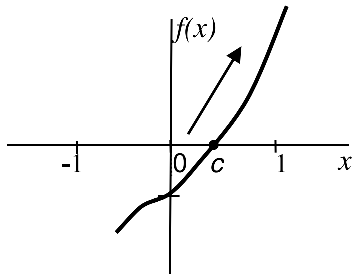
$$\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+3y+z=3\\ \cancel{7x+10y+4z=11}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+3y+z=3\end{cases}\rightarrow \text{diem } z=\lambda \rightarrow\begin{cases}x+y=2-\lambda\\ 2x+3y=3-\lambda\end{cases}$$

La solució és: $x=3-2\lambda,\ y=-1+\lambda,\ z=\lambda$, per a tot λ real.

05J-A(4). Demostrau que l'equació $x^3+x^2+x-1=0$ té una única arrel real.

Solució:

Considerem la funció $f(x)=x^3+x^2+x-1$.



f(x) és contínua, *f*(0)=-1<0 i *f*(1)=2>0 → el teorema de Bolzano assegura que existeix almenys un *c* de (0,1) tal que *f(c)*=0.

Per demostrar que l'arrel és única necessitam estudiar el creixement de la funció i utilitzar el següent resultat que s'obté dels teoremes de Bolzano i Rolle:

*Si una funció f(x) verifica el teorema de Bolzano a l'interval [a,b], és derivable a l'interval (a,b), i a més, és creixent (o decreixent) dins tot l'interval, aleshores existeix **un únic** c de l'interval (a,b) tal que f(c)=0.*

$f'(x)=3x^2+2x+1=0$ → no té solució. És a dir, la funció no té extrems (màxims o mínims). La funció és sempre creixent. Això ens assegura que només hi ha un tall amb l'eix X i que aquest es troba acotat a l'interval (0,1).

Podem acotar la solució mirant canvis de signes

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
f(x)	-1	-0,89	-0,75	-0,58	-0,37	-0,12	0,17	0,53	0,95	1,43

La solució està entre 0,5 i 0,6.

X	0,50	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	….		
f(x)	-0,12	-0,1	-0,07	-0,04	-0,01	0,02	0,04	….		

La solució està entre 0,54 i 0,55.

EXAMEN 2005-Juny-Opció B

05J-B(1). Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba d'equació $y = x^2 + x + 1$ i la recta d'equació $y = x + 2$. Representau el recinte.

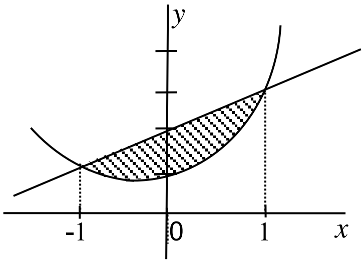
Solució:

El recinte està delimitat per una paràbola i una recta. La paràbola té el vèrtex a x_v=-1/2, y_v=3/4. Els punts de tall entre les dues corbes

$$y = x^2 + x + 1 = x + 2$$

$$x^2 = 1$$

Té com a solucions els punts de tall (x=-1,y=1) i (x=1,y=3). El dibuix mostra la regió i es comprova que la línia recta és per sobre de la paràbola en la regió d'interès.



$$A = \int_{-1}^{1} \left(x + 2 - \left(x^2 + x + 1\right)\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1\right) dx = -\frac{x^3}{3} + x \Bigg]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} + 1 - (\frac{1}{3} - 1) = \frac{4}{3} u.a.$$

05J-B(2). Trobau els extrems relatius de la funció $f(x) = x^3 e^{-x}$. Calculau també $\underset{x\to+\infty}{lím} f(x)$ i $\underset{x\to-\infty}{lím} f(x)$.

Solució:

Per trobar els extrems relatius, calcularem la primera derivada de la funció:

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = (3x^2 - x^3) e^{-x}$$

La condició $f'(x) = 0$ s'obté quan $3x^2 - x^3 = 0$, ja que e^{-x} mai potser zero. Obtenim les solucions x=0, x=3.

Mirem el signe de la derivada primera per estudiar el creixement (s'ha de tenir en compte que e^{-x} és sempre positiva)

Signe de f'(x) ++++++ 0++++++ 0------------------

0 3 *x*

La funció és decreixent (3,+∞)

La funció és creixent (-∞,-3)

Hi ha un màxim relatiu a x=3, y=27 e^{-3}≈1.34.

Notau que tot i que f'(0)=0, x=0 no és un extrem ja que la segona derivada també es fa zero. Comprovem-ho:

$$f''(x) = (6x - 3x^2) e^{-x} - (3x^2 - x^3) e^{-x} = (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x}$$

efectivament *f* ''(0)=0 (ens diu que *x*=0 hi ha un punt d'inflexió) i *f* ''(3)<0 (ens diu que *x*=0 hi ha un màxim).

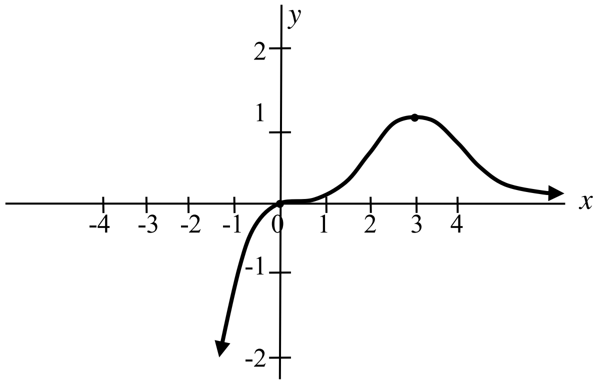
A la segona part del problema hem de calcular els límits:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = (Hôpital) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x} = \frac{6}{+\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3e^{-x} = (-\infty)^3e^{+\infty} = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty$$

Amb la informació que hem recopilat i amb la següent podem dibuixar la funció

- Domini f(x)=R
- Talls amb els eixos → (x=0, y=0), l'origen de coordenades
- La funció no és simètrica.
- Regions: Si x>0, y>0 i si x<0, y<0



05J-B(3). Calcula la distància del punt P(-1,4,1) a la recta determinada per la intersecció dels plans $x-2y+z-1=0$ i $2x+y-3z-2=0$.

Solució:

Comencem expressant la recta intersecció de dos plans en forma vectorial. Cal resoldre el sistema següent dient *z*=λ

$$\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x+y-3z-2=0 \end{cases} \to z=\lambda: \begin{cases} x-2y=1-\lambda \\ 2x+y=2+3\lambda \end{cases} \to solució: \begin{matrix} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}$$

Un punt genèric de la recta *r* és R($1+\lambda, \lambda, \lambda$). Construïm el vector $\vec{PR} = R-P = (1+\lambda,\lambda,\lambda)-(-1,4,1) = (2+\lambda,-4+\lambda,-1+\lambda)$. En el moment que el vector director de la recta *r*, $\vec{d_r}=(1,1,1)$ sigui perpendicular al vector $\vec{PR}$ tindrem la distància mínima. Si dos vectors són perpendiculars el seu producte escalar és zero

$$\vec{PR}\cdot\vec{d_r}=0 \;\to\; (2+\lambda,-4+\lambda,-1+\lambda)\cdot(1,1,1)=0 \;\to\; 2+\lambda-4+\lambda-1+\lambda=0,$$

solució $\lambda=1$.

Quan $\lambda = 1$, el vector és $\overrightarrow{PR} = (3,-3,0)$ i el seu mòdul $\left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ que és la distància entre el punt P i la recta intersecció dels dos plans.

Solució alternativa:

La distància d'un punt a una recta es pot obtenir directament de la fórmula

$d(P,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{d}_r\right|}{\left|\vec{d}_r\right|}$ amb *A* un punt qualsevol de la recta *r i* d_r un vector director.

Prenem com a valors: $\overrightarrow{AP} = (-1,4,1) - (1,0,0) = (-2,4,1)$ i $\overrightarrow{d_r} = (1,1,1)$.

Producte vectorial: $\overrightarrow{AP} \wedge \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k} = (3,3,-6)$

Mòdul del p.v.: $\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{d}_r\right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{54}$

Mòdul del v.d.: $\left|\overrightarrow{d_r}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$d(P,r) = \dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{2}$.

05J-B(4). Comprovau que la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Utilitzau-la per resoldre el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solució:

Calcularem la matriu inversa a partir de determinants $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj\, A^t$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

[2ªcol]→[2ªcol] + [1ªcol]
[3ªcol]→[3ªcol] – 2·[1ªcol]

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Sabem que un sistema A·X=B es pot resoldre matricialment amb la matriu inversa, $X=A^{-1}\cdot B$, aleshores

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solució del sistema és x=2, y=1, z=0.

Nota:
El sistema d'equacions escrit en la forma usual és:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2y + z &= 2 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

EXAMEN 2005-*Setembre-Opció A*

05S-A(1). Estudiau el sistema segons els valors de *m* i resoleu-lo per a *m*=-1.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{cases}$$

Solució:

Expressam el sistema en forma matricial $\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{array}\right)$.

Calculem el determinant de *M*

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}=m^2-m=m(m-1)$$

[2ªcol]→[2ªcol]–[1ªcol]

El determinant s'anul·la quan m=0, m=1.

- Si $m\neq 0,\ m\neq 1$, aleshores $rang\ M=rang\ \overline{M}=3$ (compatible determinat)

- Si $m=0$, aleshores $rang\ M=rang\ \overline{M}=2$ (compatible indeterminat)

$$\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{array}\right) \to \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases} \to \text{diem } y=\lambda \to \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

- Si $m=1$, aleshores $rang\ M=2\neq rang\ \overline{M}=3$ (incompatible)

$$\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

[3ªfil] → [3ªfil]–[1ªfil]-[2ªfil]

Queda resoldre el sistema pel cas m=-1. Aplicarem el mètode de Gauss

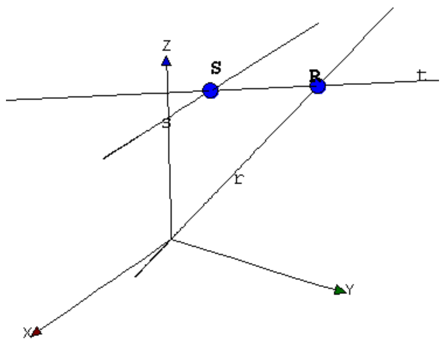
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to escalonat \quad \left\{ x=y=z=\frac{1}{2} \right.$$

[3ªfil] → [3ªfil]+[1ªfil]+[2ªfil]

05S-A(2). Trobau l'equació de la recta que talla perpendicularment les rectes r: $x = y = z$ i s: $x = y + 1 = 2z - 2$.

Solució:

Expressem les dues rectes en forma vectorial



r: $(x, y, z) = \lambda(1,1,1)$: *punt R*
s: $(x, y, z) = (0,-1,1) + \mu(2,2,1)$: *punt S*

les quals donen les coordenades d'un punt genèric de cada recta R i S. Considerem el vector

$$\vec{SR} = S - R = (2\mu, -1 + 2\mu, 1 + \mu) - \lambda(1,1,1) =$$
$$= (2\mu - \lambda, -1 + 2\mu - \lambda, 1 + \mu - \lambda)$$

En el moment que el tall amb les rectes sigui perpendicular, aquest vector $\vec{SR}$ ha d'ésser perpendicular al vectors director de la recta r, $\vec{d_r} = (1,1,1)$ i també amb el de la recta s, $\vec{d_s} = (2,2,1)$. Dos vectors són perpendiculars si el seu producte escalar és zero

$$\vec{SR} \cdot \vec{d_r} = (2\mu - \lambda, -1 + 2\mu - \lambda, 1 + \mu - \lambda) \cdot (1,1,1) = 0 \rightarrow 5\mu - 3\lambda = 0$$
$$\vec{SR} \cdot \vec{d_s} = (2\mu - \lambda, -1 + 2\mu - \lambda, 1 + \mu - \lambda) \cdot (2,2,1) = 0 \rightarrow 9\mu - 5\lambda = 1$$

Obtenim un sistema del qual resolem els valors de λ i μ

$$\mu = \frac{3}{2} \quad , \quad \lambda = \frac{5}{2}$$

Substituint aquests valors, trobam

Punt R : $R = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

Punt S : $S = (3, 2, \frac{5}{2})$

Vector $\vec{SR}$: $\vec{SR} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

Llavors, la recta que ens demanen passa per R i S i té la direcció de $\vec{SR}$*:*

$$\textit{Forma contínua:} \quad \frac{x - \frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{z - \frac{5}{2}}{0}$$

$$\textit{Forma general:} \quad \begin{cases} y = -x + 5 \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Es tracta d'una recta continguda en el pla horitzontal *z*=5/2, per això cal especificar el valor de *z* per separat.

05S-A(3). Es considera la funció $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^n}$, on *n* és un enter positiu.

Es demana:

a) Trobar els extrems relatius d'aquesta funció

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

c) Fer una gràfica de la funció en el cas *n*=2

Solució:

a) Hem de cercar la primera derivada de la funció

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^n-\ln x\cdot n\cdot x^{n-1}}{(x^n)^2}=\frac{x^{n-1}(1-n\cdot\ln x)}{x^{2n}}=\frac{1-n\cdot\ln x}{x^{n+1}}$$

La condició f'(x)=0 es compleix quan $\ln x=1/n$, és a dir x=$e^{1/n}$

Per estudiar el creixement, hem de tenir en compte que el domini és (0,+∞). Estudiem doncs, el signe de f'(x)

Signe de f'(x) ++++ *0*-----------------

0 $e^{1/n}$ *x*

La funció és creixent a (0, $e^{1/n}$) i decreixent de ($e^{1/n}$,+∞).
Hi ha un màxim relatiu a x= $e^{1/n}$, y=1 / (*n*·e).

b) Hem de calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^n}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty\,,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\frac{+\infty}{+\infty}=(Hôpital)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{nx^n}=\frac{1}{\infty}=0$$

c) Pel cas *n*=2, el màxim es troba a ($e^{1/2}$, 1/(2e)) ≈ (1.648, 0.184)

Podem estudiar la curvatura i mirar si hi ha punts d'inflexió. Sabem f''(x) per a *n*=2

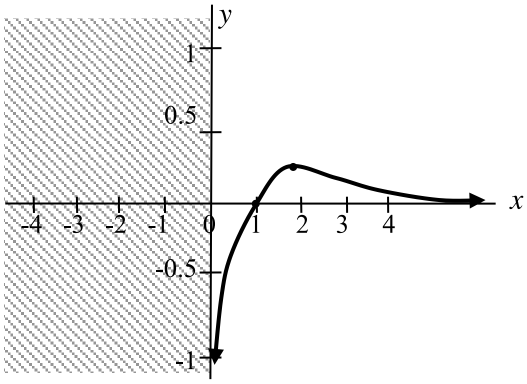
$$f'(x)=\frac{1-2\cdot\ln x}{x^3}\ \to\ f''(x)=\frac{\frac{-2}{x}x^3-(1-2\ln x)3x^2}{x^6}=\frac{6\ln x-5}{x^4}$$

La condició f''(x)=0 es compleix quan $6\ln x-5=0$, es a dir quan x=$e^{5/6}$=2.3

Signe de f''(x)------------- *0*+++++++

0 2.3 *x*

La funció és convexa a (0, 2.3) i concava a (2.3, +∞). Hi ha un punt d'inflexió a x=2.3, y=0.157



05S-A(4). Enuncia el teorema de Rolle. Demostrau que la funció $f(x)=x^3-x+a$ compleix la hipòtesi d'aquest teorema a l'interval [0,1] qualsevol que sigui el valor de *a*. Trobau el punt en el qual es compleix la tesi.

Solució:

Teorema de Rolle:
« Sigui f(x) una funció contínua a l'interval [a,b] i derivable a l'interval (a,b) tal que f(a)=f(b), aleshores existeix almenys un c de l'interval (a,b) tal que *f* '(c)=0. »

La funció $f(x)=x^3-x+a$ és una funció polinòmica, contínua i derivable a l'interval [0,1].

f(0)=0-0+a=a
f(1)=1-1+a=a $\rightarrow$ f(0)=f(1), per tant, existeix almenys un *c* de (0,1) tal que f'(c)=0.

Anem a veure quin és el *c* que compleix la tesi.

$f'(x)=3x^2-1=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{3}/3$.

Donat que ens interessa un c entre 0 i 1, la resposta és c= $\sqrt{3}/3$.

EXAMEN 2005-Setembre-Opció B

05S-B(1). Una matriu quadrada es diu ortogonal si la seva inversa coincideix amb la transposada. Es demana:

a) Demostrar que una matriu de la forma $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in R$, és ortogonal.

b) Calcular x i y de manera que la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ sigui ortogonal.

Solució:

a) Anomenam $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, hem de provar que $A^{-1} = A^t$.

La matriu transposada és $A^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. La inversa es calcula de:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A^t = \frac{1}{|A|} adj \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = A^t$$

on el determinant de A és

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

b) Anomenam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ i la transposada $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$

El determinant de A val |A|=*y*. Si A ha de tenir inversa cal que $y \neq 0$. En tal cas, la inversa de A és

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A^t = \frac{1}{y} adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y \end{pmatrix} = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x/y \\ 0 & 0 & 1/y \end{pmatrix}$$

Imposant que $A^{-1} = A^t$, trobam x=0 i *y*=1/*y*. Aquesta darrera equació dóna dues posibilitats, (*x*=0, *y*=1) i (*x*=0, *y*= -1).

05S-B(2). Estudia la posició relativa dels plans següents segons els valors de *k*:

$\pi_1: \ (k-2)x+y+(2k+1)z=1$ i $\pi_2: \ 2x+(k-1)y-z=0$.

Trobau l'equació continua de la recta d'intersecció dels plans en el cas *k*=-1.

Solució:

Per estudiar la posició relativa dels dos plans cal estudiar el sistema aplicant el teorema de Rouché

$$\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} k-2 & 1 & 2k+1 & 1 \\ 2 & k-1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Considerem el menor 2x2

$$\begin{vmatrix} k-2 & 1 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix}=(k-2)\cdot(k-1)-2=k(k-3)=0 \rightarrow \text{k=0 i k=3.}$$

- Si k=0

$$\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$rang\ M=1 \neq rang\ \overline{M}=2$$ Sistema incompatible (plans paral·lels)

- Si k=3

$$\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$rang\ M=2=rang\ \overline{M}=2$$ Sistema compatible indeterminat (plans secants)

- Si k≠0 i k≠3

$$rang\ M=2=rang\ \overline{M}=2$$ Sistema compatible indeterminat (plans secants)

La segona part del problema ens demanen en trobem la recta intersecció quan *k*=-1. En tal cas, els plans són:

$$\begin{array}{l} -3x+y-z=1 \\ 2x-2y-z=0 \end{array} \text{ diem z=}\lambda \rightarrow \begin{array}{l} -3x+y=1+\lambda \\ 2x-2y=\lambda \end{array} \text{ solució} \rightarrow \begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\lambda \\ y=-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\lambda \\ z=\lambda \end{array}$$

Aquesta darrera, és la recta intersecció en forma paramètrica. La mateixa recta en forma contínua és:

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}}=\frac{y+\frac{1}{2}}{-\frac{5}{4}}=\frac{z}{1}.$$

Solució alternativa a la 1a part:

Obtenim fàcilment els vectors normals de cada pla:

$$\vec{n}_1=(k-2,1,2k+1)$$
$$\vec{n}_2=(2,k-1,-1)$$

Estudiem quan els vectors normals són paral·lels (dos vectors són paral·lels si tenen les seves components proporcionals). Ha de passar

$$\frac{k-2}{2}=\frac{1}{k-1}=\frac{2k+1}{-1}$$

Fent els productes creuats

$$-(k-2)=2(2k+1)$$
$$(k-2)(k-1)=2$$

Té com a solució *k*=0. Per *k*=0 els plans poden ser paral·lels o coincidents. Per a *k*=0, els plans són:

$$-2x+y+z=1$$
$$2x-y-z=0$$

doncs, els plans són paral·lels per a *k*=0. Si *k* és diferent de zero, els plans es tallen definint una recta.

05S-B(3). Es considera la funció $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$, es demana:

a) Trobar els extrems relatius d'aquesta funció
b) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
c) Fer una gràfica de la funció

Solució:

a) Hem de cercar la primera derivada de la funció

$$f'(x)=\frac{2x\,\cancel{e^x}-x^2\,\cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}}}=\frac{x(2-x)}{e^x}$$

La condició *f'*(*x*)=0 es compleix quan $x=0$ i quan $x=2$.

Per estudiar el creixement, estudiem el signe de *f'*(*x*)

Signe de f'(x) ------------- 0++++0-----------------
0 2 *x*

La funció és creixent a (0,2) i decreixent de (-∞, 0) ∪ (2,+∞). Hi ha un màxim relatiu a x=2, y=4/e^2≈0.54 i un mínim relatiu a x=0, y=0.

b) Hem de calcular

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty \quad ,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}=\text{"}H\hat{o}pital\text{"}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

c) Podem estudiar la curvatura i mirar si hi ha punts d'inflexió. Necessitam f''(x)

$$f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} \rightarrow f''(x) = \frac{(2-2x)e^x - (2x - x^2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x}$$

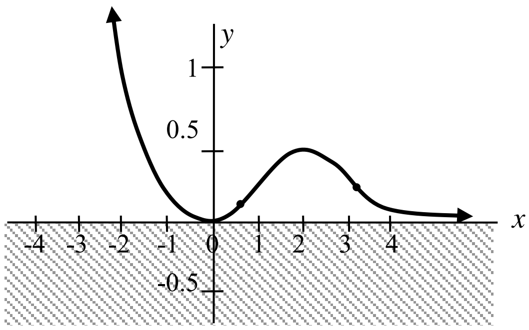
La condició f''(x)=0 es compleix quan $x^2 - 4x + 2 = 0$, es a dir quan x=0.586 i x=3.414

Signe de f''(x) +++++++++ *0* ------------*0*+++++

0.586 3.414 x

La funció és convexa $(0.586, 3.414)$ a i cóncava a $(-\infty, 0.586) \cup (3.414, +\infty)$. Hi ha dos punts d'inflexió a (x=0.586, y=0.191) i (x=3.414, y=0.384)

- Domini f = R
- La funció sempre és positiva y>0



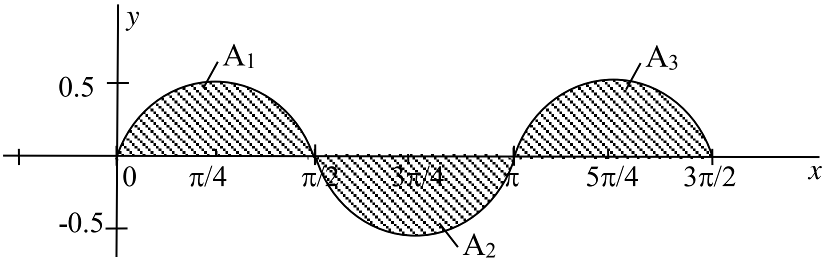
05S-B(4). Feu un dibuix de la regió limitada per la corba $y = \sin x \cdot \cos x$ i les rectes *x*=0, *x*=3π/2, *y*=0. Calculau-ne l'àrea.

Solució:

El problema es simplifica notablement si ens adonem de la igualtat trigonomètrica

$$f(x) = \frac{1}{2} 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

Es tracta de la funció sinus d'angle doble que oscil·la el doble de ràpid que la funció sinus. L'amplitud de l'oscil·lació és ½. La seva gràfica ve donada pel següent dibuix.



Podem distingir 3 regions dues amb integral positiva i una negativa. Llavors,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} f(x)\,dx$$

Donat que, en valor absolut, cada regió té igual àrea, l'àrea total és igual a 3 vegades l'àrea de la primera regió

$$A = 3A_1 = 3\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{-3}{4}(-1-1) = \frac{3}{2}\ u.a.$$

EXAMEN 2006-Juny-Opció A

06J-A(1). Digueu per a quins valors de k el següent sistema és compatible indeterminat i resoleu-lo en aquest cas.

$$kx + (1-k)y + (2-k)z = 0$$
$$x + y + z = 0$$
$$kx + y + kz = 0$$

Solució:

Es tracta d'un sistema homogeni. Expressem-lo el sistema en forma matricial

$$M = \begin{pmatrix} k & 1-k & 2-k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix} \text{ i la matriu ampliada } \overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1-k & 2-k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & k & 0 \end{array}\right)$$

Quan el determinant de M és diferent de zero la solució és la trivial, x=0, y=0, z=0.

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 1-k & 2-k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k-2 & 1-k & 2-k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k-2 & 1-k & 2-k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = 2(k-1)^2$$

[1ªcol]→[1ªcol]−[3ªcol] [3ªfila]→[3ªfila]→[2ªfila]

- Si $k \neq 1$, sistema compatible determinat. Solució trivial, x=0, y=0, z=0.
- Si $k = 1$, tenim que $rang\, M = 2 = rang\, \overline{M} < 3$; el sistema és compatible indeterminat

$$\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right) \text{ prescindim de la [3a]} \rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Solució: $x = -\lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$ per a tot λ real.

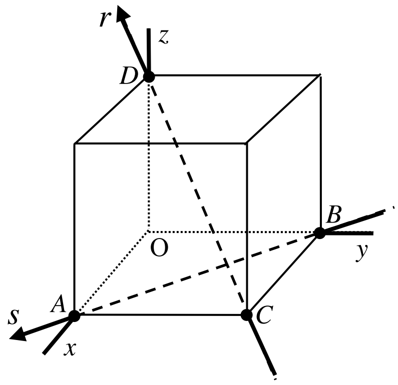
06J-A(2). Donat un cub (hexàedre regular) de costat 1 dm, es considera una de les seves diagonals i la diagonal d'una de les cares de manera que no tinguin (les dues diagonals) cap punt en comú. Calcula la distància entre les diagonals. Indicació: dibuixau el cub amb un vèrtex a l'origen de coordenades i els vèrtexs contigus sobre els eixos de coordenades.

Solució:

Es tracta de cercar la distància entre dues rectes que es creuen. En primer lloc hem de trobar els vectors directors de les dues rectes

recta *r*: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$

recta *s*: $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = D - C = (0,0,1) - (1,1,0) = (-1,-1,1)$



Anomenam π_s al pla que conté la recta s i és paral·lel a la recta *r*. L'equació vectorial d'aquest pla és

π_s: $(x, y, z) = (1,0,0) + a\,(-1,1,0) + b\,(-1,-1,1)$

Eliminant *a* i *b,* obtenim el pla en forma general o implícita

$$\pi_s: \quad x + y + 2z - 1 = 0$$

La distància entre les dues rectes és igual a la distància entre el pla i la recta *r*. Ja que són paral·lels, és el mateix que calcular la distància entre el pla i un punt qualsevol de la recta *r*

$$d(r,s) = d(r,\pi_s) = d(D \in r, \pi_s) = \frac{|0+0+2\cdot 1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0{,}408$$

Solució alternativa:

La distància entre dues rectes a partir d'un punt i un vector director de cada recta s'obté directament de la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{AD}\cdot(\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}$$

producte mixt: $\overrightarrow{AD}\cdot(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

[1ªcol]→[1ªcol]+[2ªcol]+ [3ªcol]

producte vectorial: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k} \;\rightarrow\; |\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$

Llavors, la distància és $d(r,s) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

06J-A(3). Demostrau que la corba d'equació $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no té cap punt d'inflexió. Cercau l'equació de la recta tangent a la corba en el punt (x_0,y_0) on x_0 és el valor de *x* que fa mínima *y”*.

Solució:

Per estudiar la curvatura necessitam calcular la derivada segona de la funció

$$y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \rightarrow y' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \rightarrow y'' = 12x^2 - 6x + 2$$

Els punts d'inflexió es troben quan la segona derivada es zero

$$12x^2 - 6x + 2 = 0$$

però aquesta equació de segon grau no té solució perquè el discriminant és negatiu $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2 = -60 < 0$. No hi ha punts d'inflexió.

Per fer la segona part del problema necessitam el punt (x_0,y_0) on x_0 és el valor de *x* que fa mínima *y''*. Donat que $y'' = 12x^2 - 6x + 2$ és una paràbola, x_0 correspon al seu vèrtex $x_0 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

El valor de y_0 es troba substituint x_0 a la funció

$$y_0 = \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right) + 1 = \tfrac{205}{256}$$

i el valor del pendent substituint x_0 a la derivada

$$m = y'(x_0) = 4\left(\tfrac{1}{4}\right)^3 - 3\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\tfrac{1}{4}\right) - 1 = \tfrac{-5}{8}$$

L'equació *punt-pendent* de la recta tangent és

$$y - \tfrac{205}{256} = -\tfrac{5}{8}\left(x - \tfrac{1}{4}\right).$$

Finalment, l'equació *explícita* de la recta és

$$y = -\tfrac{5}{8}x + \tfrac{245}{256}.$$

06J-A(4). Considera la funció $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$. Calculau $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Trobau-li els extrems locals i els punts d'inflexió. Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció.

Solució:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} \underset{\substack{\infty/\infty \\ \text{Hôpital}}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2(x+1)}{e^x} \underset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \frac{\infty}{0^+} = +\infty$$

Per trobar els extrems relatius, necessitam la primera derivada

$$f'(x) = \frac{2(x+1)\cancel{e^x} - (x+1)^2\cancel{e^x}}{\left(e^x\right)^{\cancel{2}}} = \frac{1-x^2}{e^x}$$

La primera derivada s'anul·la a x=-1 i x=1. Estudiam el signe de *f'(x)*

Signe de f'(x)-----0++++++++++ 0---------

-1 1 *x*

f(x) és creixent a (-1,1), *f(x)* és decreixent a $(-\infty,-1)\cap(1,+\infty)$

Tenim un mínim relatiu a x=-1, y=0
Tenim un màxim relatiu a x=1, y=4/e=1,47

Per estudiar la curvatura, hem de calcular la segona derivada:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\cancel{e^x}-(1-x^2)\cdot\cancel{e^x}}{\left(e^x\right)^{\cancel{2}}}=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$$

Els punts d'inflexió s'obtenen quan la segona derivada s'anul·la

$$x^2-2x-1=0 \rightarrow \begin{array}{l} x=1+\sqrt{2}\approx 2{,}41 \\ x=1-\sqrt{2}\approx -0{,}41 \end{array}$$

Estudiam el signe de *f''(x)*

Signe de f''(x) ---------0+++++++++++ 0------------------

-0,41 2,41 *x*

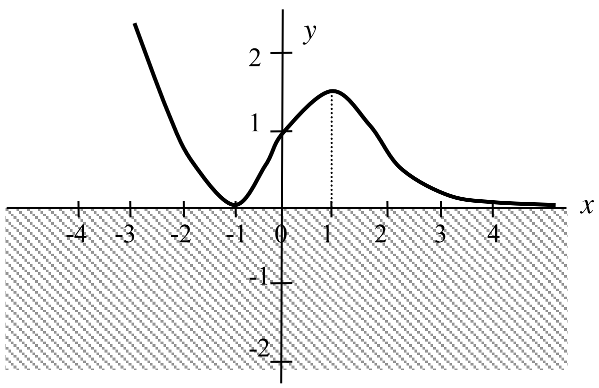
f(x) és convexa a (-0.41, 2.41), *f(x)* és cóncava a $(-\infty,-0.41)\cup(2.41,+\infty)$

Talls amb els eixos:
- Talls amb OX: y=0 , x=-1, P(-1,0)
- Talls amb OY: x=0 , y=1, P(0,1)

Regions:
- La gràfica només abarca la part positiva de l'eix Y ja que *f*(x)$\geq$0

Domini:
- El domini de la funció és tot R, no té asímptotes verticals.

Gràfica:



EXAMEN 2006-*Juny-Opció B*

06J-B(1). Es considera la funció $f(x) = a\,e^{x^2+bx+c}$ amb *a*>0. Calculau els paràmetres *a*, *b*, *c* sabent que la funció té un mínim relatiu en el punt (1,*a*) i *f*(0)=1.

Solució:

Amb la informació que tenim, sabem que els punts (1,*a*) i (0,1) han de ser punts de la funció

$$a = a\,e^{1+b+c} \quad \to 1+b+c=0$$
$$1 = a\,e^{0+0+c} \quad \to \quad a\,e^{c} = 1$$

D'altra banda, si hi ha un mínim relatiu a x=1, la derivada s'ha d'anul·lar

$$f'(x) = a(2x+b)\,e^{x^2+bx+c}$$
$$f'(1) = a(2+b)\,e^{1+b+c} = 0 \quad \to b=-2$$

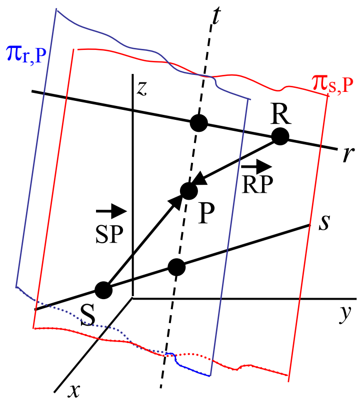
Substituint dins la primera equació que hem trobat $1-2+c=0$ $\to$ *c*=1
Substituint dins la segona equació $a{\cdot}e=1$ $\to$ *a*=1/*e*

En conclusió, la funció que satisfà les condicions és $f(x) = \frac{1}{e}e^{x^2-2x+1} = e^{x^2-2x}$.

06J-B(2). De totes les rectes que passen pel punt P(0,2,-1), cercau la que talla les rectes *r*: $(x,y,z)=(1,1,2)+t(2,-1,0)$ i *s*: $(x,y,z)=(0,1,1)+s(-3,1,2)$.

Solució:

Calcularem el pla que conté la recta *r* i passa pel punt P ($\pi_{r,P}$). De la mateixa manera el pla que conté la recta *s* i passa pel punt P ($\pi_{s,P}$). La intersecció d'aquests dos plans és la recta cercam [vegeu línia punteja en el dibuix].



Siguin R(1,1,2) un punt de *r* i S(0,1,1) un punt de *s*. Calculem els vectors:

$\vec{SP} = (0,1,-2)$ i $\vec{RP} = (-1,1,-3)$

El pla ($\pi_{r,P}$): $(x,y,z) = (1,1,2) + t(2,-1,0) + \lambda(-1,1,-3)$
El pla ($\pi_{s,P}$): $(x,y,z) = (0,1,1) + \alpha(-3,1,2) + \beta(0,1,-2)$

Per cercar la intersecció, necessitam cada pla en forma implícita o general

El pla ($\pi_{r,P}$): $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z-2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3x+6y+z-11=0$

El pla ($\pi_{s,P}$): $\begin{vmatrix} x-0 & -3 & 0 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4x+6y+3z-9=0$

La recta intersecció dels dos plans expressada en forma general és

$$t: \begin{cases} 3x+6y+z-11=0 \\ 4x+6y+3z-9=0 \end{cases}$$

Si volem la forma paramètrica, necessitam resoldre el sistema deixant $z=\lambda$ com a un paràmetre lliure

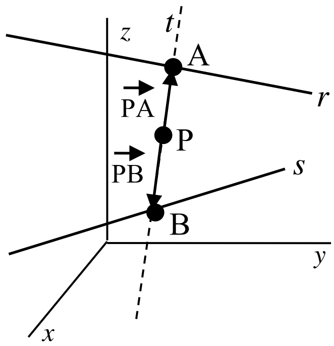
$$\text{Recta } t: \begin{cases} x=-2-2\lambda \\ y=\dfrac{17}{6}+\dfrac{5}{6}\lambda \\ z=0+1\,\lambda \end{cases}$$

Aquesta recta té com a vector director $\left(-2,\frac{5}{6},1\right)$ o be, multiplicant per -6, $\vec{d}\left(12,-5,-6\right)$. Un punt de la recta és $\left(-2,\frac{17}{6},0\right)$.

Solució alternativa:

Anomenem *A* un punt genèric de la recta *r*, aleshores les components del punt són *A*(1+2*t*, 1-*t*, 2). Igualment, un punt de la recta *s*, *B*(-3*s*, 1+*s*, 1+2*s*)

En el moment que estiguem sobre la recta que talla *r* i *s*, els punts A, B, P estaran alineats [vegeu dibuix]. La condició d'alineament és que els vectors



$$\overrightarrow{PA} = A-P = (1+2t, 1-t, 2)-(0,2,-1) = (2t+1, -t-1, 3)$$
$$\overrightarrow{PB} = B-P = (-3s, 1+s, 1+2s)-(0,2,-1) = (-3s, s-1, 2s+2)$$

siguin linealment dependents (mateixa direcció). En tal cas, les components són proporcionals:

$$\frac{-3s}{2t+1} = \frac{s-1}{-t-1} = \frac{2s+2}{3}$$

Fent productes creuats, arribam al sistema d'equacions per a trobar *s* i *t*

$$\begin{cases} -9s = (2t+1)\cdot(2s+2) \\ 3s-3 = -(t+1)\cdot(2s+2) \end{cases}$$

Fent els productes i simplificant

$$\begin{cases} 4t\cdot s+4t+11s+2=0 \\ 2t\cdot s+2t+5s-3=0 \end{cases}$$

Fent reducció (la primera – 2·la segona), s'obté la solució $s=-4$, $t=-7/2$.

Substituïnt aquests valors dins els A, B trobam els dos punts de tall

$A(12,-3,-7)$ i $B(-6,\frac{9}{2},2)$

D'altra banda, substituint dins els vectors directors

$\overrightarrow{PA}=(-6,\frac{5}{2},3)$ i $\overrightarrow{PB}=(12,-5,-6)$ que són, efectivament, proporcionals.

La recta que ens demana el problema, agafant $\overrightarrow{PB}$ com a vector director i P com a punt és

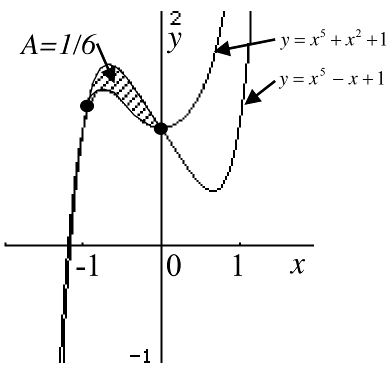
Recta t: $\dfrac{x-0}{12}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+1}{-6}$.

Comprovam que el punt $\left(-2,\frac{17}{6},0\right)$ pertany a la recta.

06J-B(3). Calcula l'àrea de la regió limitada per les corbes $y=x^5+x^2+1$ i $y=x^5-x+1$.

Solució:

Per trobar d'on a on s'estén la regió hem de trobar els punts d'intersecció entre les dues corbes



$$x^5+x^2+1=x^5-x+1$$

simplificant

$x^2+x=0 \rightarrow$ solucions x=-1 i x=0

L'àrea de la regió compresa entre les dues corbes és

$$A=\int_{-1}^{0}|f(x)-g(x)|\,dx.$$

Hem de fer la integral del valor absolut de la diferència. Per això, convé agafar la diferència entre la corba superior – corba inferior i així ens asseguram que la diferència és positiva en aquest interval:

$$f(x)-g(x)=x^5-x+1-(x^5+x^2+1)=-(x^2+x)$$

Signe de f(x)-g(x) ------------0++++++++0--------------------

-1 0 *x*

$$A=\int_{-1}^{0}-\left(x^2+x\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-0+\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\ \textit{u.a.}$$

06J-B(4). Discutiu el rang de la matriu $A=\begin{pmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & 2 & k\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$ segons el valor de *k*.

Resoleu el sistema $AX=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ quan sigui compatible determinat.

Solució:

Si el determinant de *A* no és zero el rang és 3. Calculem el determinant de *A*

$$|A|=\begin{vmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & 2 & k\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}-k\begin{vmatrix}k & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=5-k(3k+1)=-3k^2-k+5$$

Mirem per a quins valors de *k* s'anul·la el determinant

$$3k^2+k-5=0 \;\rightarrow\; \begin{array}{l} k=\dfrac{\sqrt{61}-1}{6} \\ k=\dfrac{-\sqrt{61}-1}{6}\end{array}$$

- Si k és diferent d'aquests dos valors, aleshores *rang A*=3
- Si k és igual a algun d'aquests valors, aleshores *rang A*=2, ja que existeix un menor d'ordre 2 no nul, per exemple: $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0$

El cas compatible determinat correspon al cas $rang\ A = rang\ \overline{A} = 3$. El sistema és resoluble per la regla de Cramer

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ *(un determinat amb 2 columnes iguals és zero)*

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}|A| = 1$$

$$z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$ *(un determinat amb 2 columnes iguals és zero)*

- Solució (0,1,0) per a qualsevol valor de *k*.

EXAMEN 2006-Setembre-Opció A

06S-A(1). Es consideren les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Calcula la matriu X que verifica AX+B=I, on I representa la matriu identitat.

Solució:

Hem d'aïllar la matriu X de l'equació matricial AX+B=I. Passam B restant a l'altra membre, AX=I–B, i multiplicam cada membre (per l'esquerra) per la inversa de A

$$A^{-1}AX=A^{-1}(I-B)$$

Tenint en compte que $A^{-1}A=I$, i que $IX=X$, ja tenim X aïllada

$$X=A^{-1}(I-B)$$

Per calcular el seu valor necessitam saber A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\,A^t=\frac{1}{|A|}adj\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

on el determinant de A és $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3$

D'altra banda

$$I-B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

finalment

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & 1 & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

06S-A(2). Estudiau, segons els valors del paràmetre *k*, la posició relativa de les rectes *r*: $x-k=\frac{y+1}{2k-1}=\frac{z}{2}$ i *s*: $\frac{x}{k+1}=\frac{y-2}{-1}=z+2$.

Solució:

Siguin R(k,-1,0), $\vec{u}$ (1,2k-1,2), S(0,2,-2) i $\vec{v}$ (k+1,-1,1) un punt i un vector director de cada recta.

Cercarem si hi ha algun valor de k pel quals els vectors són paral·lels

$$\frac{1}{k+1}=\frac{2k-1}{-1}=\frac{2}{1}$$

fent productes en creu

$$\begin{matrix} 2(k+1)=1 \\ 2k-1=-2 \end{matrix} \rightarrow \quad k=-\frac{1}{2}$$

- Si $k=-1/2$ les rectes són paral·leles o coincidents. En aquest cas les rectes són

$$r\text{:}\ \frac{x+\frac{1}{2}}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2} \quad \text{i} \quad s\text{:}\ \frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{1}$$

Basta comprovar si el punt (0,2,-2) de la recta s pertany o no a la recta r. Per força, les rectes són **paral·leles**.

Ara consideram el vector $\vec{RS}=S-R=(-k,3,-2)$, juntament amb els vectors directors de les dues rectes $\vec{u}$ (1,2k-1,2) i $\vec{v}$ (k +1,-1,1), i analitzam el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & -k \\ 2k-1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \underset{[3^a\text{col}]\rightarrow[3^a\text{col}]+[1^a\text{col}]}{\begin{vmatrix} 1 & k+1 & -k+1 \\ 2k-1 & -1 & 2k+2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \underset{[1^a\text{col}]\rightarrow[1^a\text{col}]-2[2^a\text{col}]}{\begin{vmatrix} -2k-1 & k+1 & -k+1 \\ 2k+1 & -1 & 2k+2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \underset{[2^a\text{fila}]\rightarrow[2^a\text{fila}]+[1^a\text{fila}]}{\begin{vmatrix} -2k-1 & k+1 & -k+1 \\ 0 & k & k+3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}} =$$

$$=(2k+1)\cdot(k+3)$$

El determinant és fa zero quan k=-1/2 i k=-3.

- El cas k=-1/2 l'hem discutit abans; hem vist que les rectes són paral·leles
- El cas k=-3, correspon al cas de rectes secants; es tallen en un punt
- Finalment, si $k\neq-1/2$ i $k\neq-3$ les rectes es creuen sense tallar-se.

Aprofundeix:

Et proposem que trobis el punt d'intersecció de les rectes quan k=-3.

En primer lloc, cal expressar les rectes en forma general (fent productes creuats) i discutir un sistema d'equacions

$$r\text{:}\ \begin{cases} 2x-z=2k \\ 2y-(2k-1)z=-2 \end{cases} \qquad s\text{:}\ \begin{cases} x-(k+1)z=2(k+1) \\ y+z=0 \end{cases}$$

Cal discutir el sistema format per les 4 equacions en funció del paràmetre k. Expressem-lo en forma matricial (per a k=-3)

$$\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-6} \\ 0 & 2 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Eliminam una equació ja que, en aquest, cas és supèrflua. Ara el sistema és resoluble per la regla de Cramer

$$x=\frac{1}{|M|}\begin{vmatrix} -2 & 2 & 7 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{-16}{5}$$

$$y=\frac{1}{|M|}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{2}{5} \qquad \text{on} \qquad |M|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5$$

$$z=\frac{1}{|M|}\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{-2}{5}$$

Punt d’intersecció (-16/5, 2/5, -2/5).

06S-A(3). Demostrau raonadament que l’equació $x^2 = x\sin x + \cos x$ té exactament dues arrels dins l’interval [-π, π].

Solució:

Definim la funció $g(x)=x^2-(x\sin x+\cos x)$. El problema és equivalent a cercar els zeros de la funció $g(x)$.

Resulta que $g(x)$ és una funció contínua de [-π, π] i presenta els següents canvis de signe. Pel teorema de Bolzano:

$$\left.\begin{array}{l} g(-\pi)=\pi^2-(-\pi\sin(-\pi)+\cos(-\pi))=\pi^2+1>0 \\ g(0)=0^2-(0\sin 0+\cos 0)=-1<0 \end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l} \text{Existeix almanco un } c\in(-\pi,0) \\ \text{tal que } g(c)=0 \end{array}$$

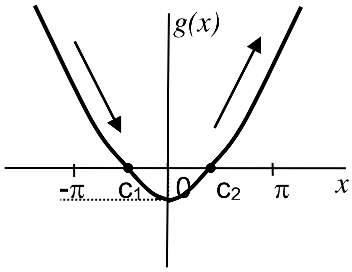
$$\left.\begin{array}{l} g(0)=0^2-(0\sin 0+\cos 0)=-1<0 \\ g(\pi)=\pi^2-(\pi\sin\pi+\cos\pi)=\pi^2+1>0 \end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l} \text{Existeix almanco un } c\in(0,\pi) \\ \text{tal que } g(c)=0 \end{array}$$

Per demostrar que hi ha exactament una única solució dins cada subinterval (-π,0) i (π,0) utilitzarem el següent teorema que es dedueix del teorema de Rolle

Si una funció g(x) verifica el teorema de Bolzano a l'interval [a,b], és derivable a l'interval (a,b), i a més, és creixent (o decreixent) dins tot l'interval, aleshores existeix ***un únic*** *c de l'interval (a,b) tal que g(c)=0.*

La derivada de *g(x)* és $g'(x) = 2x - (\sin x + x\cos x - \sin x) = 2x - x\cos x = x(2 - \cos x)$
Donat que 2 - cos *x* és sempre positiu, el signe de *g'*(*x*) és

- $g'(x) < 0$ a $x \in (-\infty, 0)$: sempre decreix
- $g'(x) > 0$ a $x \in (0, +\infty)$: sempre creix



Donat que la funció es sempre creixent o decreixent dins cada interval, l'equació té exactament dues arrels. És més, una arrel a l'interval (-π,0) i l'altra a (π,0). Donat que la funció és parell *g*(-*x*)=g(*x*), les solucions seran de la forma *c*, -*c*.

Aprofundeix:

Et proposam que, mitjançant el teorema de Bolzano, vagis acotant l'arrel positiva.

IMPORTANT: Quan treballis amb funcions trigonomètriques recorda que has de tenir la calculadora en mode RAD.

X	0	1	2	3	...
g(x)	-1	-0,38	2,59	9,56	...

→ *c* entre 1 i 2

X	1,1	1,2	1,3	1,4	...
g(x)	-0,22	-0,041	0,169	0,41	...

→ *c* entre 1,2 i 1,3

X	1,21	1,22	1,23	1,24	...
g(x)	-0,021	-0,0009	0,019	0,040	...

→ *c* entre 1,22 i 1,23

La solució amb una precisió fins els centèsims és *c*=1,22. Per simetria *c*=-1,22 també és una altra solució.

06S-A(4). Una funció polinòmica de tercer grau, quants de extrems relatius pot tenir com a màxim? Què podem dir dels punts d'inflexió? Raonau les respostes i donau exemples aclaridors.

Solució:

Considerem una funció polinòmica de tercer grau (*funció cúbica*) general

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

on *a, b,c,d* són nombres reals, i *a* és diferent de zero.

Una condició necessària per l'existència d'extrems relatius és que la derivada s'anul·li

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

Trobam una equació de segon grau que pot tenir com a màxim dues solucions, per tant, com a màxim una funció cúbica té 2 extrems.

Una condició necessària per trobar punts d'inflexió és que la segona derivada s'anul·li

$$y'' = 6ax + 2b = 0$$

Veim que aquesta equació de primer grau sempre té una solució, aleshores, una funció cúbica sempre té exactament un punt d'inflexió.

EXAMEN 2006-*Setembre-Opció B*

06S-B(1). Calculau *m* de manera que el sistema homogeni

$$\begin{cases} 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ mx - y + 13z = 0 \end{cases}$$

tingui solucions diferents de la trivial i resoleu-lo en aquest cas.

Solució:

Un sistema homogeni té solucions diferents a la trivial si el determinant del sistema és zero, i per tant, el sistema compatible indeterminat.

$$|M| = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ m & -1 & 13 \end{vmatrix}}_{[1^a\text{col}]\to[1^a\text{col}]-[2^a\text{col}]} = \underbrace{\begin{vmatrix} 2+m & -m & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ m+1 & -1 & 13 \end{vmatrix}}_{\text{Desenvolupa } 1^a \text{ col en menors}} = (2+m)\cdot 20 + (m+1)(-7m-4) = -7m^2 + 9m + 36$$

L'equació $-7m^2 + 9m + 36 = 0$ té dues solucions $\begin{cases} m = -\dfrac{12}{7} \\ m = 3 \end{cases}$.

Amb això ja podem discutir i resoldre el sistema

- Si $m \neq 3$ i $m \neq -\frac{12}{7}$; sistema compatible determinat, solució trivial x=y=z=0
- Si $m = 3$; sistema compatible indeterminat (podem eliminar una equació)

  $\begin{cases} \cancel{2x - 3y + 4z = 0} \\ x + y + 7z = 0 \\ 3x - y + 13z = 0 \end{cases}$ → diem *z*=λ → $\begin{cases} x + y = -7\lambda \\ 3x - y = -13\lambda \end{cases}$ →solució: $\begin{cases} x = -5\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

- Si $m = -\frac{12}{7}$; sistema compatible indeterminat (podem eliminar una equació)

  $\begin{cases} \cancel{2x + \frac{12}{7}y + 4z = 0} \\ x + y + 7z = 0 \\ -\frac{12}{7}x - y + 13z = 0 \end{cases}$ → diem *z*=λ → $\begin{cases} x + y = -7\lambda \\ 12x + 7y = 91\lambda \end{cases}$ → solució: $\begin{cases} x = 28\lambda \\ y = -35\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

  per a qualsevol valor del paràmetre real λ.

06S-B(2). Cercau l'equació implícita (o general) del pla que conté la recta $(x, y, z) = (1,2-1) + k(-1,1,2)$ i és paral·lel a la recta que passa pels punts A=(0,1,2) i B(1,-1,1). Calculau la distància de l'origen de coordenades a aquest pla.

Solució:

El pla que ens demanen passa pel punt P(1,2,-1) i té com a vectors directors (-1,1,2) i el vector $\vec{AB} = B - A = (1,-1,1) - (0,1,2) = (1,-2,-1)$.

L'equació vectorial del pla és: $(x, y, z) = (1,2-1) + \lambda(-1,1,2) + \mu(1,-2,-1)$

L'equació paramètrica del pla és: $\begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda - 2\mu \\ z = -1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$

l'equació general o implícita del pla: $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-2 & 1 & -2 \\ z+1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3x + y + z - 4 = 0$.

Amb aquesta equació, calcular la distància del pla a l'origen O(0,0,0) és fàcil

$$d(\pi, O) = \frac{|3 \cdot 0 + 0 + 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{11}}{11}.$$

06S-B(3). Es considera la funció $f(x) = e^x(x-k)$. Demostrau que per a qualsevol valor del paràmetre *k*, la funció presenta un únic extrem relatiu. Feu una gràfica de la funció si sabem que $f(0) = 1$.

Solució:

Per demostrar que la funció presenta un únic extrem relatiu, necessitam calcular la derivada primera, i mirar que s'anul·la per un valor de x

$$f(x) = e^x(x-k) \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^x(x-k) + e^x \cdot 1 = e^x(x+1-k) = 0,$$

donat que e^x no pot ser mai zero, veim que $x + 1 - k = 0$, i per tant, $x = k - 1$ és un extrem relatiu. Per saber si és un màxim o mínim, calculam la segona derivada

$$f''(x) = e^x(x+1-k) + e^x \cdot 1 = e^x(x+2-k)$$

Si calculam la segona derivada a l'extrem $f''(k-1)=e^{k-1}(k-1+2-k)=e^{k-1}>0$, la segona derivada és positiva, aleshores es tracta sempre d'un **mínim**.

La signe de la segona derivada ens dóna la curvatura.

$$f''(x)=e^{x}(x+2-k)=0 \;\rightarrow\; x=k-2 \text{ és un punt d'inflexió}$$

Estudiem el signe de *f''(x)*

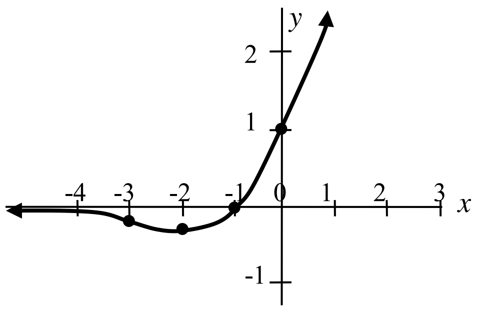
Signe de f''(x) ------------ *0* +++++++++

k-2 *x*

f(x) és convexa a $(-\infty, k-2)$ i *f(x)* és còncava a $(k-2, +\infty)$

La segona part del problema ens demana representar la funció si sabem que *f*(0)=1. Si $f(0)=e^{0}(0-k)=-k=1$, vol dir que k=-1. Si particularitzam el que hem trobat per aquest valor de *k*

- Mínim relatiu a (-2,-e^{-2}) ≈ (-2, -0.14)
- Punt d'inflexió a (-3,-2e^{-3}) ≈ (-3, -0.1)
- Tall amb l'eix OX (y=0) → *x*=-1
- Tall amb l'eix OY (x=0) → *y*=1
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^{-}$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



06S-B(4). Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba $y=x(x-1)(x-2)$ i la recta y=0. Feu un dibuix d'aquesta regió.

Solució:

Comencem fent un dibuix aproximat d'aquesta regió. Hem de representar la funció $y=x(x-1)(x-2)$ o, el que és el mateix, $y=x^{3}-3x^{2}+2x$.

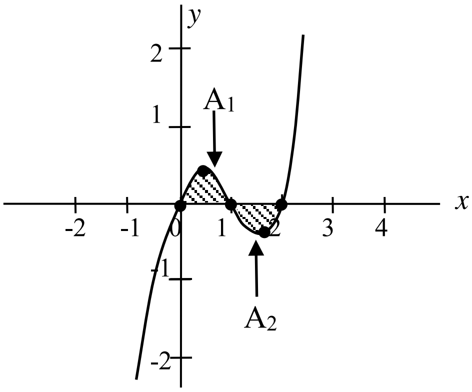
- Talls amb l'eix OX (y=0): $x(x-1)(x-2)=0 \;\rightarrow x=0,\ x=1,\ x=2$
- Talls amb l'eix OY (x=0) → y=0
- Signe de la funció en cada interval

Signe f(x) ---------*0* +++ *0* ------- *0* +++++

0 *1* *2* *x*

- Extrems. La derivada s'anul·la quan $y'=3x^{2}-6x+2=0$ → *x*≈0.42 i *x*≈1.57
  Màxim (0.42, 0.385) Mínim (1.57, -0.385)

Amb la informació que tenim podem dibuixar la regió. Veim que consta de dues parts A_1 i A_2



$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = -\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = -\left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{4}$$

sumant les dues regions

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

EXAMEN 2007-*Juny-Opció A*

07J-A(1). Discutiu el següent sistema segons els valors del paràmetre *k* i resoleu-lo quan *k*=-1

$$\begin{cases} x+y+z=k \\ (1+k)x+y+z=2k \\ x+(1+k)y+z=1 \end{cases}$$

Solució:

Expressam el sistema en forma matricial

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{pmatrix} \text{ i la matriu ampliada } \overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1+k & 1 & 1 & 2k \\ 1 & 1+k & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calculem el determinant de *M*

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=k^2$$

[1ªcol]→[1ªcol]-[3ªcol]
[2ªcol]→[2ªcol]-[3ªcol]

- Si $k \neq 0$, $rang\, M = rang\, \overline{M} = 3$. Sistema compatible determinant

- Si $k=0$, el sistema queda:

$$\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ el $rang\, M = 1 \neq rang\, \overline{M} = 2$. Sistema incompatible

- Hem de resoldre pel cas *k*=-1, el sistema és resoluble pel mètode de Gauss

$$\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

[3ªfila]→[3ªfila]-[1ªfila] [3ªfila]→[3ªfila]+[2ªfila]

El sistema escalonat té solució: x=1, y=-2, z=0.

Aprofundeix:
Et proposam que resolguis el sistema en general, per a qualsevol $k \neq 0$, utilitzant la regla de Cramer. Comprova les teves solucions:

$$x=1, \quad y=-\frac{(k-1)}{k}, \quad z=\frac{(k-1)(k+1)}{k}.$$

07J-A(2). Es considera el triangle de vèrtexs A(0,0,1), B(2,0,0), C(1,1,1). Quina és la intersecció dels (tres) plans que passant per cada vèrtex són perpendiculars a la recta determinada pels altres dos?

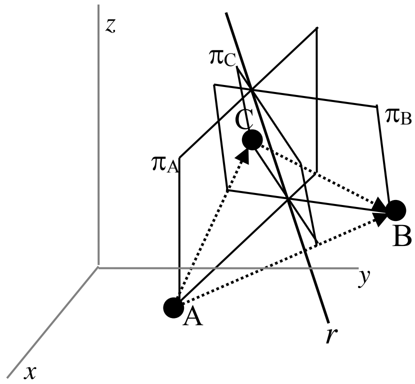
Solució:

Donats els tres punts A, B, C, calculem els vectors

$$\vec{AB} = B - A = (2, 0, -1)$$

$$\vec{AC} = C - A = (1, 1, 0)$$

$$\vec{CB} = B - C = (1, -1, -1)$$



Anomenem π_A al pla que passa per A i és perpendicular al vector $\vec{CB}$. Llavors $\vec{CB}$ és el vector normal del pla, la qual cosa vol dir que el pla π_A es pot escriure com

$$\pi_A: \; 1\cdot x - 1\cdot y - 1\cdot z + D = 0$$

Per trobar D, imposam que el pla passi per A(0,0,1). Substituint el punt dins el pla

$$1\cdot 0 - 1\cdot 0 - 1\cdot 1 + D = 0$$

trobam D=1, aleshores

$$\pi_A: \; x - y - z + 1 = 0$$

De manera semblant trobam el pla que passa per B i es perpendicular a $\vec{AC}$

$$\pi_B: \; x + y - 2 = 0$$

i el pla que passa per C i es perpendicular a $\vec{AB}$

$$\pi_C: \; 2x - z - 1 = 0$$

Per trobar la intersecció dels tres plans hem de resoldre el sistema

$$\begin{array}{l} \pi_A: \\ \pi_B: \\ \pi_C: \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{array}\right)$$ El sistema és compatible indeterminat

[2ªfila]→[2ªfila]-[1ªfila]
[3ªfila]→[3ªfila]-2[1ªfila]

Els tres plans es tallen format en una recta

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ \quad 2y - z = 3 \end{cases} \rightarrow \text{diem } y=\lambda \rightarrow \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

L'equació vectorial d'aquesta recta és:

$$r: \; (x, y, z) = (2,0,3) + \lambda(-1, 1 - 2) \,.$$

Aprofundeix:
Troba el punt de tall de la recta amb el triangle.

El triangle està contingut dins del pla que passa per A, B i C. L'equació d'aquest pla és

$$\pi_{A,B,C}:\quad (x, y, z) = (2,0,0) + t(2,0,-1) + s(1,1,0)$$

i, en el punt de tall, ha d'ésser igual a l'equació de la recta

$$(x, y, z) = (2,0,3) + \lambda(-1, 1-2) = (2,0,0) + t(2,0,-1) + s(1,1,0)$$

Iguala component a component i troba els valors dels paràmetres. Comprova que t=-1, s=1, λ=1. Llavors, el punt de tall és (1,1,1), és a dir el punt C que ens donaven.

Si observes l'esquema de la pàgina anterior, la recta *r* passa pel punt on es tallen les tres altures del triangle, és a dir, el punt C és l'ortocentre del triangle ABC.

07J-A(3). Demostrau que la corba $f(x) = x - 2\cos x$ té un punt d'inflexió a l'interior de l'interval [0, π] i trobau l'equació de la recta tangent a la corba en aquest punt. Feu un dibuix en un entorn del mateix punt.

Solució:

Necessitam calcular les derivades de la funció:

$$f(x) = x - 2\cos x \;\rightarrow\; f'(x) = 1 + 2\sin x \;\rightarrow\; f''(x) = 2\cos x$$

- Per saber el creixement, estudiem el signe de *f '(x)*

  signe de f'(x) :+++++++++++++++

  0 π/2 π *x*

  La funció és creixent a tot l'interval [0, π].

- Per trobar el punt d'inflexió, miram quan s'anul·la la derivada segona $2\cos x = 0$ $\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2}$, dins l'interval [0, π]. Per saber la curvatura, estudiem el signe de *f "(x)*

  signe de f''(x):+++++++*0*-------------

  0 π/2 π *x*

  La funció és còncava a (0, π/2) i convexa a (π/2, π). Hi ha un punt d'inflexió a *x*= π/2.

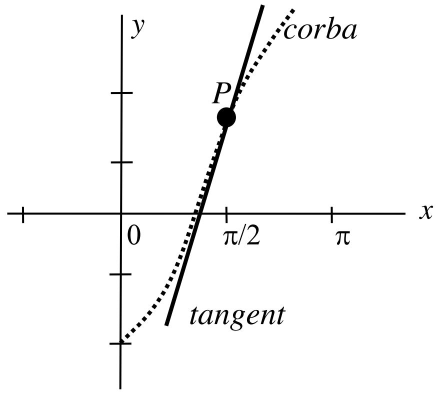
Amb aquesta informació podem fer un dibuix aproximat de la funció i passar a calcular la recta tangent en el punt d'inflexió.

- El punt de la recta (punt d'inflexió) és:
  x = π/2, y = π/2

- El pendent de la recta tangent és
  m = y'(π/2)=3

-L'equació *punt-pendent* de la recta tangent és

$$y-\frac{\pi}{2}=3(x-\frac{\pi}{2}) .$$



En el dibuix observam un fet conegut, la recta tangent atravessa la funció en un punt d'inflexió.

07J-A(4). D'una funció $y=f(x)$, amb *x*>-1, sabem que té per derivada $y'=\frac{a}{1+x}$, on *a* és una constant. Determina la funció si, a més, sabem que $f(0)=1$ i $f(1)=-1$. Feu una gràfica aproximada.

Solució:

La *primitiva* o *integral indefinida* ens dóna la funció coneguda la derivada.

$$f(x)=y=\int\frac{a}{1+x}dx=a\ln(1+x)+K$$

Per trobar les constants *a* i *K*, hem d'imposar les condicions

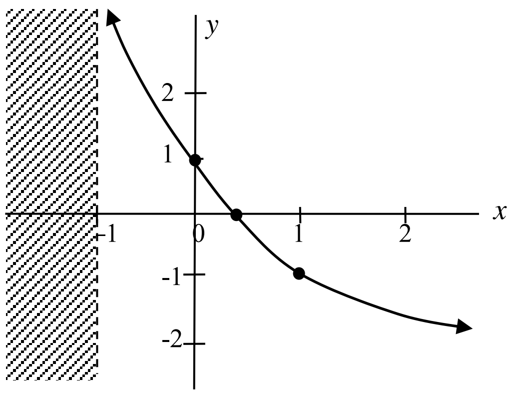
$$f(0)=1 \ \rightarrow \ a\ln(1)+K=1 \qquad \rightarrow K=1$$

$$f(1)=-1 \ \rightarrow \ a\ln(2)+K=-1 \qquad \rightarrow a=-2/\ln 2$$

Amb això, la funció que ens demanen és: $f(x)=\frac{-2}{\ln 2}\ln(1+x)+1$

Per representar la funció, recopilam informació necessària:

- $Dom\ f(x)=(-1,+\infty)$
- Tall eix OY (x=0, y=1)
- Tall eix OX (y=0, $x=\sqrt{2}-1$)
- y'<0 → *f(x)* és sempre decreixent
- $\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$



EXAMEN 2007-*Juny-Opció B*

07J-B(1). Discutiu el rang de la matriu següent segons els valors del paràmetre *k*

$A=\begin{pmatrix}1 & k & k^2\\ 1 & k & k\\ 1 & k^2 & k^2\end{pmatrix}$. Resoleu el sistema $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ en el cas *k*=-1.

Solució:

Per discutir el rang d'una matriu calculam primer el seu determinant

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & k & k^2\\ 1 & k & k\\ 1 & k^2 & k^2\end{vmatrix}=k^2\begin{vmatrix}1 & 1 & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & k & k\end{vmatrix}=k^2\begin{vmatrix}1 & 1 & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & k & k\end{vmatrix}=k^2\begin{vmatrix}0 & 1 & k\\ 0 & 1 & 1\\ 1-k & k & k\end{vmatrix}=k^2(1-k)^2$$

Treim de la [2ªcol] i [3ªcol] un factor *k* [1ªcol] → [1ªcol]- [2ªcol]

Casos:

- Si $k\neq 0$ i $k\neq 1$: rang A=3
- Si *k*=0: rang A=1
- Si *k*=1: rang A=1

Hem de resoldre el sistema pel cas *k*=-1. Estam el cas $rang\ A = rang\ \overline{A}=3$, és a dir, compatible determinat. Podem resoldre el sistema pel mètode de Gauss o Cramer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & a\\ 1 & -1 & -1 & b\\ 1 & 1 & 1 & c\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & a\\ 0 & 0 & -2 & b-a\\ 0 & 2 & 0 & c-a\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{l}x=(c+b)/2\\ z=(a-b)/2\\ y=(c-a)/2\end{array}$$

[2ªfila] → [2ªfila] - [1ªfila]
[3ªfila] → [3ªfila] - [1ªfila] sistema escalonat

Solució alternativa per Cramer:

$$\det M=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=4$$

$$x=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}a & -1 & 1\\ b & -1 & -1\\ c & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{2b+2c}{4}=\frac{b+c}{2}$$

$$y=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & b & -1\\ 1 & c & 1\end{vmatrix}=\frac{2c-2a}{4}=\frac{c-a}{2}$$

$$z=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 1 & -1 & b\\ 1 & 1 & c\end{vmatrix}=\frac{2a-2b}{4}=\frac{a-b}{2}$$

07J-B(2). Siguin les rectes *r*: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ i la determinada per la intersecció dels plans *s*: $x+y-z=1$ i $2x-y+z=2$. Calculau l'equació del pla π que passa per l'origen i és paral·lel a les dues rectes. Calculau també l'equació de la recta *t* que passa per (1,1,1) i és perpendicular al pla trobat.

Solució:

Per determinar el pla π, necessitam un punt O(0,0,0) i dos vectors directors, un de cada recta. El vector de la recta *r* és $\vec{u}(2,1,3)$.

Per trobar l'altre vector necessitam expressar la recta *s* en forma vectorial

s: $\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x-y+z=2\end{cases}$ → sumant les dues equacions, 3*x*=3 → x=1

s: $\begin{cases}1+y-z=1\\ 2-y+z=2\end{cases}\to\begin{cases}y-z=0\\ -y+z=0\end{cases}$ → y = z, i diem, z=λ.

La recta *s*: en forma vectorial és (x,y,z)=(1,0,0)+ λ(0,1,1). Per tant el seu vector director és $\vec{v}(0,1,1)$.

L'equació vectorial π: (*x,y,z*)=(0,0,0)+*m*(2,1,3)+*n*(0,1,1)

L'equació paramètrica π: $\begin{cases}x=2m\\ y=m+n\\ z=3m+n\end{cases}$

Eliminant *m* i *n*, l'equació implícita del pla π: $x+y-z=0$.

Aquest pla té vector normal $\vec{n}(1,1,-1)$, llavors la recta que té la direcció perpendicular al pla i passa per P(1,1,1) és:

t: $(x,y,z)=(1,1,1)+\mu(1,1,-1)$.

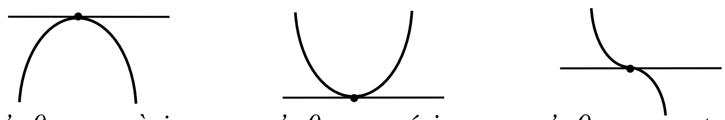
Nota: Un altre vector perpendicular al pla es pot obtenir del producte vectorial $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.

07J-B(3). L'anul·lació de la primera derivada és una condició necessària perquè una funció (derivable) presenti un extrem local. Aquesta condició, però, no és suficient. Demostrau amb un exemple la segona afirmació. En aquest mateix context, què podem dir sobre l'existència d'un punt d'inflexió?

Solució:

Considerem una funció *y=f(x)* derivable, almenys, tres vegades.

La condició d'extrem *f'(x)*=0, prové que en un màxim o mínim la recta tangent a la corba és horitzontal. Però aquesta mateixa situació pot passar en un punt d'inflexió [veugeu el dibuix següent].



y'=0 a un màxim *y'=0 a un mínim* *y'=0 a un punt d'inflexió*

Un exemple de la darrera situació és la funció y=x^3. La primera derivada s'anul·la a *x*=0, però a *x*=0 no hi ha ni màxim ni mínim, hi ha un punt d'inflexió.

Per tant, una condició suficient perquè hi hagi un extrem local és

$x = a$ és un extrem si $f'(a) = 0$ i $f''(a) \neq 0$.

De la mateixa manera una funció presenta un punt d'inflexió si

$x = a$ és un punt d'inflexió si $f''(a) = 0$ i $f'''(a) \neq 0$.

07J-B(4). Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = x - 2\sin x$ i les rectes $y = 0$, $x = -\pi/3$ i $x = \pi/3$. Feu un dibuix aproximat del recinte.

Solució:

Comencen fent un dibuix del recinte. Hem de dibuixar la funció $f(x) = x - 2\sin x$ entre $x = -\pi/3$ i $x = \pi/3$. Recopilam alguna informació necessària

- La funció és simètrica senar $f(-x) = -x - 2\sin(-x) = -f(x)$
- Valor a l'extrem de l'interval $f(\pi/3) = \pi/3 - 2\sin(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3} \approx -0{,}68$
- Tall amb els eixos x=0, y=0 (l'origen de coordenades)
- Extrems i Creixement:
  $f'(x) = 1 - 2\cos x = 0$ → la derivada s'anul·la quan $\cos x = \frac{1}{2}$ → coincideix just amb els extrems de l'interval $[-\pi/3, \pi/3]$. Mirem el signe de f'(x)

  signe de f'(x) :++ 0----------------------------0+++

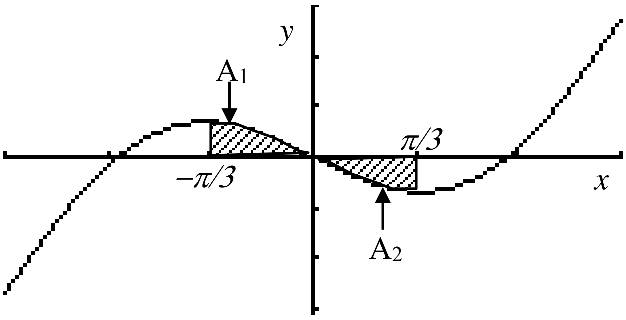
  $-\pi/3$ 0 $\pi/3$ x

  La funció és decreixent en tot l'interval $[-\pi/3, \pi/3]$. Té un màxim a $x = -\pi/3$ i un mínim a $x = \pi/3$.

Veim que la regió consta de dues parts A$_1$ i A$_2$, les dues d'igual àrea (excepte signe):

$$A = A_1 + A_2 = 2A_1 = 2\int_{-\pi/3}^{0} f(x)\, dx = 2\int_{-\pi/3}^{0} (x - 2\sin x)\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2} + 2\cos x\right]_{-\pi/3}^{0} =$$

$$= 2\left[0 + 2\cos 0 - \left(\pi^2/18 + 2\cos(-\pi/3)\right)\right] = 2 - \frac{\pi^2}{9} \approx 0{,}9034 \text{ u.a.}$$



EXAMEN 2007-Setembre-Opció A

07S-A(1). A cada matriu real $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ li associam el polinomi $p(x) \;=\; x^2-(a+d)x+|A|$, on $|A|$ indica el determinant de *A*. Direm que *p(x)* és el polinomi característic de la matriu *A*. Es demana:

a) Trobar una matriu que tingui com a polinomi característic $p(x) \;=\; x^2+x+1$.
Quantes matrius hi ha amb aquest mateix polinomi característic?

b) Si *A* té inversa, demostrau que el polinomi característic de la inversa, A^{-1}, és $p(x) \;=\; x^2-\dfrac{a+d}{|A|}x+\dfrac{1}{|A|}$.

Solució:

a) Dos polinomis són iguals si ho són els seus termes

$$p(x) \;=\; x^2-(a+d)x+|A| = \; x^2+x+1$$

D'aquí deduïm

$$\left.\begin{array}{l}(a+d)=-1\\ |A|=1\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}(a+d)=-1\\ |A|=1\end{array}\right\}$$

Aquest sistema d'equacions és indeterminat ja que tenim 2 equacions i 4 incògnites. Hem de considerar-ne dues com a paràmetres lliures, per exemple, *d* i *c*, i hem d'aïllar les que queden *a* i *b:*

$$a=-(d+1)$$

$$b=\frac{-(d^2+d+1)}{c},\quad \mathrm{c}\neq 0$$

Hi ha infinites matrius que tenen el polinomi característic de l'enunciat. Per trobar-ne una basta donar un valor a *d* i un a *c*, diferent de zero. Per exemple si diem *d*=0 i *c*=1, trobam la matriu

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Anem a calcular la inversa de la matriu *A* mitjançant

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t=\frac{1}{|A|}adj\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{pmatrix}$$

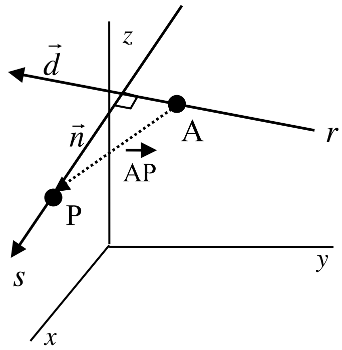
Sabem que sempre es compleix que $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ i que la suma dels termes de la diagonal de A^{-1} és $(a+d)/|A|$. Aleshores el polinomi característic de A^{-1} és:

$$p(x) \;=\; x^2-\frac{a+d}{|A|}x+\frac{1}{|A|}.$$

07S-A(2). Calcula l'equació de la recta que passa pel punt P(2,-1,1) i talla perpendicularment la recta.

$$r\!: \ \frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}$$

Solució:



Expressam la recta *r* en forma vectorial

$$r\!: \ (x,y,z)=(3,-1,0)+t(3,1,2)$$

on $\vec{d}=(3,1,2)$ és el vector director de la recta. L'equació anterior dóna les coordenades d'un punt qualsevol de la recta *r*, que anomenam $A(3+3t,-1+t,\,2t)$ *[Observau el dibuix]*.

Ara ens construim el vector $\vec{AP}$ que té components

$$\vec{AP}=P-A=(2,-1,1)-(3+3t,-1+t,\,2t)=(-1-3t,-t,1-2t)$$

En el moment que estiguem sobre la direcció perpendicular de *r*, els vectors $\vec{AP}$ i $\vec{d}$ seran perpendiculars i per tant el seu producte escalar zero. Aleshores

$$\vec{AP}\cdot\vec{d}=(-1-3t,-t,1-2t)\cdot(3,1,2)=-1-14t=0 \ \Rightarrow \qquad t=-\frac{1}{14}$$

Substituint el valor de *t* trobam el vector perpendicular a *r*

$$\vec{AP}=(-11/14,\ 1/14,\ 16/14)$$

Per comoditat utilitzarem un vector 14 vegades més llarg com a vector normal $\vec{n}=14\,\vec{AP}=(-11,\ 1,\ 16)$. L'equació de la recta que passa per *P* i té la direcció de $\vec{n}$ és

$$s: \ \frac{x-2}{-11}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{16}.$$

Aprofundeix:

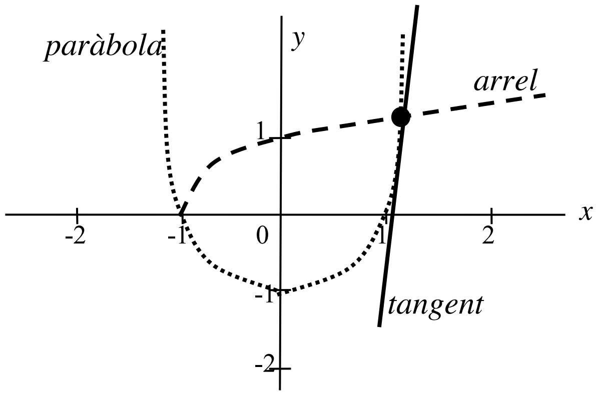
Et proposam que calculis la distància entre el pla π determinat per les rectes *r*, *s* i l'origen de coordenades O.
L'equació general o implícita del pla π que has d'obtenir és $x-5y+z-8=0$
La distància a l'origen de $d(\pi,O)=8\sqrt{27}/27$.

07S-A(3). Considera la funció $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$. Calculau $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Trobau-li els extrems locals i els punts d'inflexió. Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció.

Solució: Vegeu problema resolt 06J-A(4).

07S-A(4). Es consideren les corbes $y = x^2 - 1$ i $y = \sqrt{x+1}$. Trobau l'equació de la recta tangent a la primera corba en el punt de tall amb l'altra, d'abscissa positiva.

Solució:



Facem primer una gràfica de les corbes per tal d'entendre la situació.

Ens demanen la recta tangent a la primera corba, és a dir, la recta tangent a la paràbola. En el punt d'abscissa positiva on la paràbola talla l'arrel quadrada.

Primer hem de trobar el punt de tall *P*, resolent l'equació

$x^2 - 1 = \sqrt{x+1}$, elevam al quadrat els dos membres $x^4 - 2x^2 + 1 = x + 1$. Simplificam i treim factor comú *x*, $x \cdot (x^3 - 2x - 1) = 0$. Factoritzant obtenim $x \cdot (x+1) \cdot (x^2 - x - 1) = 0$.

La única solució *x* positiva prové de l'equació de segon grau i és $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

S'ha de substituir *x* per conèixer y, d'on trobam el punt P és $P(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$.

Tingues en compte que si diem $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ al nombre auri, es compleix que $x^2 - 1 = x$.

El pendent de la recta tangent s'obté de la derivada $y' = 2x \rightarrow m = 1 + \sqrt{5}$.

Finalment, l'equació *punt-pendent* de la recta tangent és

$$y - \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} = (1+\sqrt{5})\left(x - \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\right).$$

EXAMEN 2007-Setembre-Opció B

07S-B(1). Discutiu el sistema següent i resoleu-lo en el cas k=1.

$x + ky + 2z = 1$
$x + (2k–1)y + 3z = 1$
$x + ky + (k+3)z = 2k–1$

Solució:

En primer lloc, expressam el sistema en forma matricial

$M = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2k-1 & 3 \\ 1 & k & k+3 \end{pmatrix}$ i la matriu ampliada $\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & 2k-1 & 3 & 1 \\ 1 & k & k+3 & 2k-1 \end{array}\right)$

Calculem el determinant de M

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2k-1 & 3 \\ 1 & k & k+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = (k-1)\cdot(k+1)$$

[2ª]→ [2ª]–[1ª]
[3ª]→ [3ª]–[1ª]

- Si $k \neq 1$ i $k \neq -1$ aleshores $rang\, M = 3 = rang\, \overline{M} = n$ i, segons el teorema de Rouché-Frobenhius, el sistema és compatible determinat. Té solució única.

- Considerem el cas $k = -1$, el sistema queda

$$\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow rang\, M = 2 \neq rang\, \overline{M} = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- El cas que falta, $k = 1$, el sistema queda

$$\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow rang\, M = 2 = rang\, \overline{M} < 3 \rightarrow \text{Compatible indeterminat}$$

Per resoldre el sistema en aquest cas, sabem que podem prescindir d'una de les equacions. Eliminant la darrera ens queda:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \rightarrow \text{restant les dues} \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 0 + 0 + z = 0 \end{cases} \rightarrow z=0 \text{ i } x = 1 - y$$

Solució: $x = 1 - \lambda$, $y = \lambda$, $z = 0$, per a tot λ real.

07S-B(2). Calcula els punts de la recta *r*: $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ que estan a distància 1 del pla π: $x+y+z=0$.

Solució:

Tot i que no ens ho demanen, cercarem la posició relativa de la recta respecte del pla. D'aquesta manera ens podrem fer una idea gràfica de la situació.

En primer lloc passam la recta a forma general o implícita $r:\begin{cases} x+3y=-2 \\ 2y+z=0 \end{cases}$.

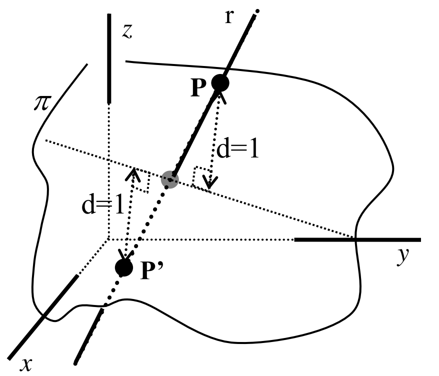
Consideram el sistema format per les tres equacions:

$$\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Donat que el determinant de *M* és diferent de zero , $rang\, M=3=rang\, \overline{M}=n$ i, el sistema és compatible determinat. La recta i el pla es tallen en un punt.

Les coordenades d'un punt *P* qualsevol de la recta *r* s'obtenen passant la recta a forma vectorial

$$P=(x,y,z)=(-2,0,0)+t\cdot(3,-1,2)=(-2+3t\,,-t,\,2t)$$



Ara cercam la distància del punt *P* al pla π, mitjançant la fórmula

$$d(P,\pi)=\frac{|P_x+P_y+P_z|}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}$$

on n el vector normal del pla és $\vec{n}=(1,1,1)$.

$$d(P,\pi)=\frac{|-2+3t+(-t)+2t|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|4t-2|}{\sqrt{3}}=1$$

Per acabar hem de resoldre l'equació $|4t-2|=\sqrt{3}$ que té dues possibilitats:

$$4t-2=+\sqrt{3}\ \rightarrow\ t=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \qquad \text{i} \qquad 4t-2=-\sqrt{3}\ \rightarrow\ t=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Per tant, per cada valor de t, trobam un punt que es troba a distància 1 del pla:

$$P\left(\frac{-2+3\sqrt{3}}{4},\frac{-2-\sqrt{3}}{4},\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$P'\left(\frac{-2-3\sqrt{3}}{4},\frac{-2+\sqrt{3}}{4},\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$$

07S-B(3). La recta $y = 2x - 1$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + k}$. Trobau el valor de *k*, i, si escau, els extrems locals.

Solució:

Expressem la funció d'una altra forma, realitzant la divisió dels polinomis

$$\begin{array}{lll|l} 2x^2 & & -1 & x + k \\ \hline \underline{-2x^2} & \underline{-2kx} & & 2x - 2k \\ & -2kx & -1 & \\ & \underline{2kx} & \underline{+2k^2} & \\ & & 2k^2-1 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + k} = \underbrace{2x - 2k}_{\text{asímptota obliqua}} + \frac{2k^2 - 1}{x + k}$$

Comparant amb l'asímptota que dóna l'enunciat $y = 2x - 1$, veim que $k = 1/2$.

Per determinar els extrems, hem de calcular la derivada de la funció

$$f'(x) = \frac{4x\,(x + k) - (2x^2 - 1)\cdot 1}{(x + k)^2} = \frac{2x^2 + 4k\cdot x + 1}{(x + k)^2}$$

Si substituïm $k = 1/2$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{(x + \frac{1}{2})^2} = 0$$

La funció no té extrems ja que $2x^2 + 2x + 1 = 0$ no té solucions. Es pot comprovar que la derivada és sempre positiva, la funció sempre creix.

07S-B(4). Utilitzant els teoremes de Bolzano i Rolle, demostrau que les corbes $y = \cos x$ i $y = \sqrt{x}$ es tallen en un únic punt.

Solució:

Abans de començar hem d'acotar l'interval on és possible trobar solucions. Donat que $y = \cos x$ pren valors entre -1 i 1 i $y = \sqrt{x}$ és sempre positiva, ens podem limitar a cercar solucions a l'interval de x [0,1].

Ens construïm la funció $g(x) = \cos x - \sqrt{x}$. Els punts de tall de les dues corbes són les arrels de la funció $g(x) = 0$.

Es compleix que

1) la funció $g(x)$ és contínua en [0,1]

2) $g(0) = \cos 0 - \sqrt{0} = 1 > 0$ i $g(1) = \cos 1_{rad} - \sqrt{1} = -0{,}459 < 0$

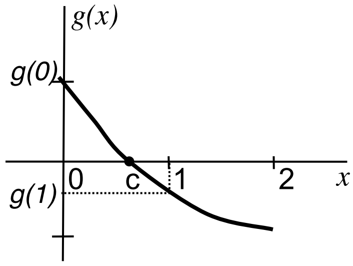
Llavors, segons el teorema de Bolzano: existeix **almenys un** *c* de l'interval (0,1) tal que *g*(*c*)=0.

Per comprovar que només existeix un únic punt de tall a l'interval (0,1) utilitzam un resultat que es dedueix del teorema de Rolle:

Si una funció g(x) verifica el teorema de Bolzano a l'interval [a,b], és derivable a l'interval (a,b), i a més, és creixent (o decreixent) dins tot l'interval, aleshores existeix ***un únic*** *c de l'interval (a,b) tal que g(c)=0.*

Segons aquest resultat hem de comprovar el creixement de $g(x)=\cos x-\sqrt{x} \rightarrow g'(x)=-\sin x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Aquesta derivada és sempre negativa per *x* entre (0,1) i, aleshores, existeix un únic punt de tall *c* que es troba entre x=0 i x=1.



Aprofundeix:

Et proposam que mitjançant el teorema de Bolzano acotis el punt de tall fins als centèsims.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
g(x)	1	0,67	0,53	0,407	0,288	0,17	0,050	-0,07	-0,19	-0,33

La solució està entre 0,6 i 0,7.

x	0,6	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69
g(x)	0,05	0,038	0,026	0,014	0,002	-0,01	-0,02	-0,03	-0,05	-0,06

La solució està entre 0,64 i 0,65.

EXAMEN 2008-*Juny-Opció A*

***08J-A*(1).** Què és la inversa d'una matriu quadrada? Calculau, si escau, la inversa de la matriu:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució:

Direm que A^{-1} és la matriu inversa de A si es compleix $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = \mathrm{I}$, on I és la matriu identitat. Cal recordar que perquè una matriu tengui inversa cal que el seu determinant sigui no nul, és a dir, $|A| \neq 0$.

Efectivament, si calculam el determinant de *A*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2\cdot 4 = 6 \neq 0$$

desenvolupa en menors

aleshores, la matriu A té inversa. Cercarem la matriu inversa calculant la matriu d'adjunts de la transposta.

$$A^{-1} = \frac{adj\ A^t}{|A|} = \frac{1}{|A|} adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Recorda que per calcular l'adjunt, per exemple, Adj A_{23}, has de calcular el determinant que resulta d'eliminar la fila 2 i columna 3 de la matriu *A* i afegir-li un signe -.

Naturalment, pots fer la comprovació i veuràs que $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = \mathrm{I}$. Per exemple:

$$A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

08J-A(2). Es consideren les rectes:

r: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{3}=z-2$ $\qquad$ s: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{-3}$

a) Demostra que es creuen

b) Determina un vector de la recta perpendicular comuna a les dues rectes.

Solució:

a) Per demostrar que dues rectes es creuen basta comprovar que els seus vectors directors $\vec{d}_r=(3,3,1)$, $\vec{d}_s=(3,4,-3)$ i el vector format per un punt de cada recta $\overrightarrow{RS}=S-R=(-1,0,1)-(1,-2,2)=(-2,\,2,-1)$ són linealment independents. Llavors, el determinant d'aquests tres vectors és diferent de zero.

$$\begin{vmatrix}3&3&-2\\3&4&2\\1&-3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&-2\\-1&4&2\\4&-3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&-2\\-1&4&2\\0&13&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-2\\13&7\end{vmatrix}=47\neq 0$$

[1ªcol]→[1ªcol]–[2ªcol] $\qquad$ [3ªfila]→[3ªfila]+4[2ªfila]

aleshores, les rectes es creuen.

b) Els vectors directors de cada recta són:

recta r: $\vec{d}_1=(3,3,1)$

recta s: $\vec{d}_2=(3,4,-3)$ ens demanen un vector que sigui perpendicular a l'hora a $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$. Aquest vector és el producte vectorial

$$\vec{n}=\vec{d}_2\wedge\vec{d}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&4&-3\\3&3&1\end{vmatrix}=13\vec{i}-12\vec{j}-3\vec{k}=(13,-12,-3)$$

Pots comprovar que d'aquesta manera $\vec{d}_1\cdot\vec{n}=\vec{d}_2\cdot\vec{n}=0$.

Aprofundeix:

Et proposam que trobis l'equació de la recta que ens demanen. Ja tens el vector director, ara et falta un punt. El punt ha d'ésser un dels punts de tall amb les rectes *r* i *s*.

Expressa les rectes en forma paramètrica. Digues *A* un punt qualsevol de la recta *r*, i B un punt de la recta *s*. Construeix-te el vector $\overrightarrow{AB}$, i imposa que aquest vector sigui paral·lel amb el vector $\vec{n}$ que has trobat.

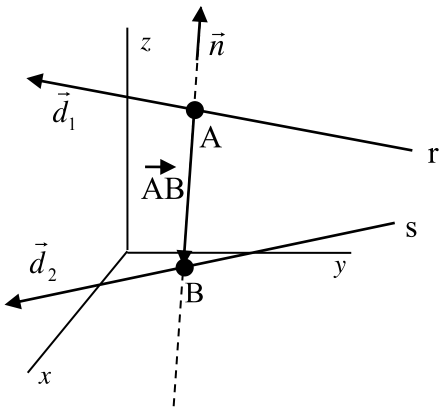
D'aquí trobaràs els punts de tall de la perpendicular amb les rectes *r* i *s*:

$A\left(\frac{-25}{161},\frac{-508}{161},\frac{260}{161}\right)$

$B\left(\frac{-661}{322},\frac{-226}{161},\frac{661}{322}\right)$

La recta que ens demanen:

$$(x,y,z)=\left(\frac{-25}{161},\frac{-508}{161},\frac{260}{161}\right)+t\ (13,-12,-3)$$



08J-A(3). Es considera la funció $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$

a) Calculau $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$

b) Demostra que la funció és creixent a l'interval obert (-1,1)

c) Determinau els extrems relatius

d) Feu un dibuix de la funció

Solució:

a) $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$, és a dir, els dos límits laterals coincideixen.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=0^+$, és a dir, m'acosto a zero per damunt.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=0^-$, és a dir, m'acosto a zero per davall.

Amb això podem assegurar que x=1 és una asímptota vertical i que y=0 és una asímptota horitzontal de la funció.

b) Per estudiar el creixement, primer calculam la derivada

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)^2-x\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{1-x^2}{(x-1)^4}$$

Estudiam el signe de *f'(x)*

Signe de f'(x) ------------- 0+++++++++?-------------- *x*

-1 0 1

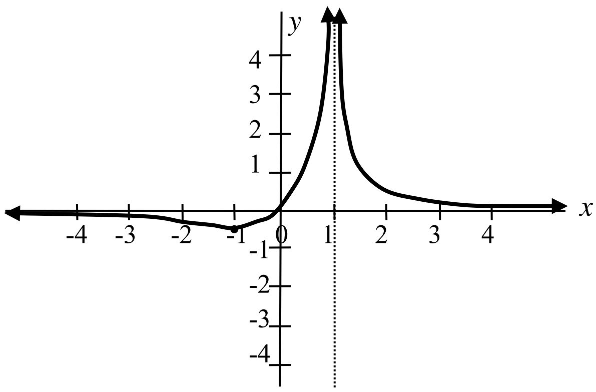
Donat que la derivada és positiva a l'interval (-1,1) obert, *f(x)* és creixent.

c) En els extrems relatius la derivada s'anul·la $f'(x)=0\ \to$

a x=-1 y=-1/4 es tracta d'un mínim relatiu

a x=1 no hi ha extrem ja que no és un punt del domini

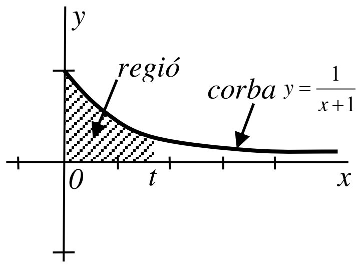
d) Per fer un gràfic aproximat utilitzam la informació que hem recopilat



08J-A(4). Es considera la funció $A(t)=\int_0^t \frac{1}{x+1}\,dx$, amb $t>0$. Feu una interpretació geomètrica (en termes d'àrea) d'aquesta funció. Calculau una fórmula més explícita per a la funció A(t) i representau-la gràficament.

Solució:

Aquesta funció *A(t)* representa l'àrea del recinte que delimita la corba de la funció $f(x)=\frac{1}{x+1}$, i les rectes *y=0, x=0, x=t*, en funció del paràmetre *t*. La gràfica d'aquesta regió és la següent:

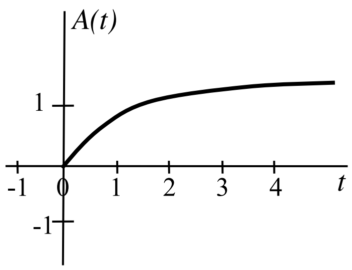


Per trobar una fórmula més explícita per *A(t)*, hem de calcular la integral definida

$$A(t)=\int_0^t \frac{1}{x+1}\,dx=\ln(x+1)\Big|_0^t=\ln(t+1)-\ln 1=\ln(t+1)$$

amb t >-1.

La gràfica de A(t) és la gràfica d'un logaritme Neperià.



EXAMEN 2008-*Juny-Opció B*

08J-B(1). Discutiu el següent sistema i resoleu-lo quan sigui compatible:

$2x + 2y - 4z = 1$
$mx + y + z = 0$
$x + y + 3z = -1$

Solució:

Escrivim el sistema en forma matricial:

La matriu del sistema $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i la matriu ampliada $\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 1 \\ m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$.

Primer cercarem quan és que el rang *M*=3, això passa si |*M*| és diferent de zero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(m-1)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10(m-1)$$

[1ªcol] → [1ªcol]–[2ªcol] *Desenvolupar la 1ª col en menors*

- Si $m \neq 1$, aleshores $rang\ M = rang\ \overline{M} = 3$ → Sistema compatible determinat
- Si $m = 1$, aleshores $rang\ M = 2$ ja que hi ha menors d'ordre 2 no nuls. Demostrarem però que $rang\ \overline{M} = 3$, basta considerar el menor de $\overline{M}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

[3ªfil] → [3ªfil]+[1ªfil] *Desenvolupar la 3ª col en menors*

Donat que $rang\ M = 2 \neq rang\ \overline{M} = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

Hem de resoldre el sistema sempre i quan $m \neq 1$. Facem-ho per la **regla de Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{-4}{-10(m-1)} = \frac{2}{5(m-1)},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{m+3}{-10(m-1)} = \frac{-(m+3)}{10(m-1)},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&2&1\\m&1&0\\1&1&-1\end{vmatrix}}{|M|}=\frac{3m-3}{-10(m-1)}=\frac{-3}{10}$$

08J-B(2). Es consideren els punts $A=(1,-1,1)$, $B=(2,3,1)$ i $C=(1,2,0)$. Es demana:

a) Demostrar que determinen un triangle
b) Determinar els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades del pla determinat per aquest triangle.

Solució:

a) Per demostrar que tres punts a l'espai *A*, *B*, *C* determinen un triangle, basta demostrar que els punts no estan alineats. Això és el mateix que demanar que els vectors $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ tenen diferent direcció (són linealment independents),

$$\vec{AB}=(2,3,1)-(1,-1,1)=(1,4,0)$$

$$\vec{AC}=(1,2,0)-(1,-1,1)=(0,3,-1)$$

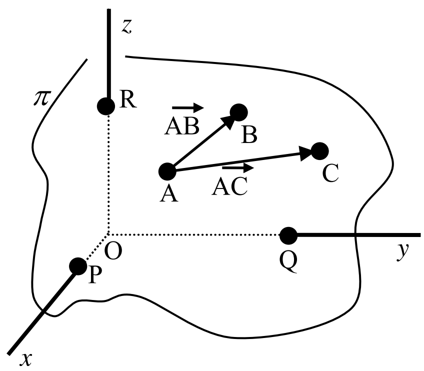
Els vectors són linealment independents ja que les components no són proporcionals

$$\frac{1}{0}\neq\frac{4}{3}\neq\frac{0}{-1}$$

Aleshores, els tres punts formen un triangle.

b) El pla que conté el triangle és el que passa pel punt *A* i té com a vectors directors $\vec{AB}$, $\vec{AC}$. L'equació vectorial del pla és per tant

$$\pi:\quad (x,y,z)=(1,-1,1)+\lambda(1,4,0)+\mu(0,3,-1)$$



El pla en forma paramètrica:

$$\pi:\quad\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-1+4\lambda+3\mu\\ z=1-\mu\end{cases}$$

Si eliminam λ i μ del sistema, obtenim l'equació general o implícita del pla

$$\pi:\quad 4x-y-3z-2=0$$

Ara només cal substituir dins aquesta equació:

- Tall amb l'eix **X** (*quan y=0 i z=0*), aleshores *x*=1/2. El punt és P(1/2, 0, 0).
- Tall amb l'eix **Y** (*quan x=0 i z=0*), aleshores *y*=-2. El punt és Q(0, -2, 0).
- Tall amb l'eix **Z** (*quan x=0 i y=0*), aleshores *z*=-2/3. El punt és R(0, 0, -2/3).

Aprofundeix:

- Calcula la distància del pla π a l'origen de coordenades O. Comprova que la distància que obtens és $d(\pi,O)=\sqrt{26}/13$.
- Ara calcula l'àrea del triangle PQR, utilitzant $A=\frac{1}{2}\left|\vec{PQ}\wedge\vec{PR}\right|$. Comprova que l'àrea és $A=\sqrt{26}/6$.
- Amb els dos resultats que has trobat, comprova que el volum del tetràedre de vèrtexs P,Q,R,O és $V=1/9$. (Recorda $V=\frac{1}{3}A_{base}\cdot altura$)

08J-B(3). Es considera la funció $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

a) Calculau $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

b) Demostrau que no té extrems relatius

c) Demostrau que té un punt d'inflexió a x=0

d) Feu un dibuix de la funció

Solució:

a) En els punts x=-1 i x=1, cal fer els límits laterals, ja que no coincideixen

Límits laterals a x=-1: $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$

Límits laterals a x=1 : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0^+$, és a dir, m'acosto a zero per damunt.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0^-$, és a dir, m'acosto a zero per davall.

Amb això podem assegurar que *x*=-1 i *x*=1 són dues asímptotes verticals i que y=0 és una asímptota horitzontal de la funció.

b) Per demostrar que no té extrems relatius hem de veure que la primera derivada no es fa zero mai. Per això calculam la derivada

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}=-\frac{(1+x^2)}{(x^2-1)^2}<0$$

Efectivament, la derivada és sempre negativa. La funció sempre decreix i, llavors, no té extrems.

c) Per estudiar els punts d'inflexió, necessitam calcular la segona derivada

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2-1)^{\cancel{2}}+(1+x^2)\cdot 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0$$

La segona derivada s'anul·la a *x*=0. Hem de tenir en compte que , *x*=-1 i *x*=1 no són punts d'inflexió ja que no pertanyen al domini.

Estudiem la curvatura mirant el signe de *f*’(x)

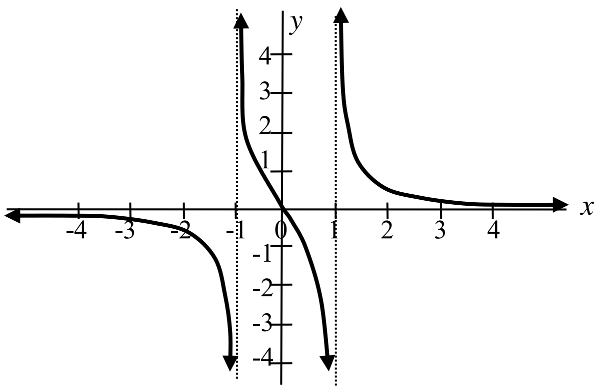
Signe de f’’(x) -------------- ¿++++0--------?+++++++++ *x*

-1 0 1

La funció és convexa a $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
La funció és còncava a $(-1,0)\cup(0,+\infty)$

d) Per fer un gràfic aproximat utilitzam la informació que hem recopilat, a més:

- El Dom *f* =(-∞,-1)∪(-1, 1) ∪(1,+∞)
- La funció és simètrica senar *f(-x)= - f(x).*
- L’únic tall amb els eixos és x=0, y=0. L’origen de coordenades.



08J-B(4). Calculau l’àrea del recinte limitat per la corba $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ i les rectes *y*=0, *x*=-1, *x*=1. Feu un dibuix aproximat del recinte.

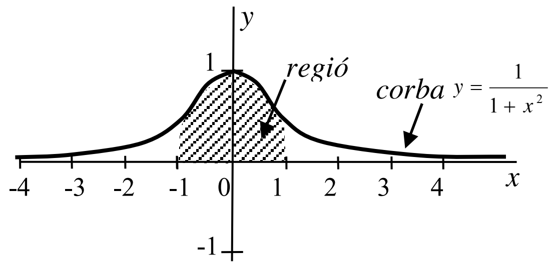
Solució:

L’àrea s’obté a partir de la integral definida de la funció entre *x*=-1 i *x*=1.

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=arctg\ x\Big|_{-1}^{1}=arctg\ 1-arctg\ (-1)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}\ \text{u.a.}$$

Atenció! Si calcules un *arctg* amb la calculadora, assegura’t de tenir-la en mode **RAD**.

El dibuix aproximat del recinte és:



EXAMEN 2008*-Setembre-Opció A*

08S-A(1). Determinau totes les matrius de la forma $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ que commuten (**X·A = A·X**) amb la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solució:

Facem els dos productes de matrius:

$$X\cdot A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z & 2z \end{pmatrix}$$

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2z & y \\ 3x+4z & 3y \end{pmatrix}$$

Si les matrius commuten, les dos productes han d'ésser iguals. Si dues matrius són iguals, ho són terme a terme, aleshores

$$\begin{cases} x+3y=x+2z \\ 2x+4y=y \\ z=3x+4z \\ 2z=3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y-2z=0 \\ 2x+3y=0 \\ 3x+3z=0 \\ \cancel{3y-2z=0} \end{cases}$$

La [3a] és la mateixa que la [1a] i prescindim d'ella

Es tracta d'un sistema homogeni que resoldrem pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{[3^a\text{fil}]\to[3^a\text{fil}]/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{[2^a]\to[2^a]-2[3^a]} \left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La [1a] és la mateixa que la [2a] i prescindim d'ella

El sistema queda compatible indeterminat

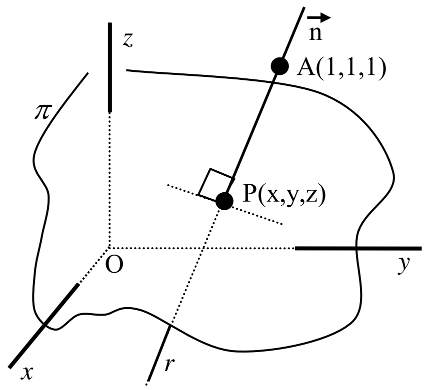
$$\begin{cases} 3y-2z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \rightarrow \text{diem } z=3\lambda \rightarrow \begin{cases} y=2\lambda \\ x=-3\lambda \end{cases}$$ per a tot λ real.

Per tant, les matrius han d'ésser de la forma $X=\begin{pmatrix} -3\lambda & 2\lambda \\ 3\lambda & 0 \end{pmatrix}$ per a tot λ real.

08S-A(2). Determinau el punt del pla $2x - y + z = 0$ més pròxim al punt (1,1,1).

Solució:

L'esquema ens dóna el mètode per determinar el punt del pla més pròxim a A(1,1,1).
El que hem de fer primer és cercar la recta que normal al pla que passa per A.
Després, hem de cercar la intersecció d'aquesta recta amb el pla i ja tenim la resposta.



Un vector normal al pla és $\vec{n} = (2,-1,1)$.
La recta normal en forma contínua és:

$$r\text{: } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

Fent dos productes creuats, trobam l'equació general de la mateixa recta

$$r\text{: } \begin{cases} x - 2z = -1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Ara ens queda trobar el punt d'intersecció, resolent el sistema $\begin{cases} x - 2z = -1 \\ y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ que obtindrem pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{[3^a]\to[3^a]-2[1^a]}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \underset{[3^a]\to[3^a]+[2^a]}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{\text{Sistema escalonat}}{\longrightarrow} \begin{cases} x \quad - 2z = -1 \\ \quad y + z = 2 \\ \qquad 6z = 4 \end{cases}$$

La solució del sistema és el punt P: $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{4}{3},\ z = \frac{2}{3}$.

Aprofundeix:

Calcula la distància mínima de dues maneres diferents; i) calculant la distància entre els punts A i P; ii) utilitzant la fórmula que dóna la distància d'un punt a un pla. Compara els resultats.

Efectivament, la distància entre A i P és $d(A,P) = \sqrt{(1-\frac{1}{3})^2 + (1-\frac{4}{3})^2 + (1-\frac{2}{3})^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Si aplicant la fórmula $d(A,\pi) = \dfrac{|2{\cdot}1 - 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Naturalment, els dos resultats coincideixen.

08S-A(3). Es considera la funció $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

a) Calculau $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calcula els extrems relatius

c) Feu un dibuix de la funció

Solució:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=0^+$$, és a dir, m'acosto a y=0 per damunt.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=0^-$$, és a dir, m'acosto a y=0 per davall.

Amb això podem assegurar que *y=0* és una asímptota horitzontal de la funció. Aquesta funció no té asímptotes verticals perquè el denominador no s'anul·la mai.

b) Per trobar els extrems relatius hem de calcular la primera derivada i veure on s'anul·la

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0$$

La derivada s'anul·la quan $1-x^2=0$, és a dir, quan x=-1 i x=1.

Signe de f'(x) -------------- 0+++++++++0----------------- *x*

-1 0 1

f(x) creixent a (-1,1) *f(x)* decreixent a (-∞,-1)∪(1, +∞)

mínim relatiu x=-1, y=-1/2

màxim relatiu x=1, y=1/2

Per estudiar els punts d'inflexió, necessitam calcular la segona derivada

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^{\cancel{2}}-(1-x^2)\cdot 2\cancel{(x^2+1)}\cdot 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{2x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=0$$

La segona derivada s'anul·la a $x=0,\ x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$ que són 3 punts d'inflexió.

Estudiem la curvatura mirant el signe de *f''*(x)

Signe de f''(x) -------------- 0++++0--------0++++++++

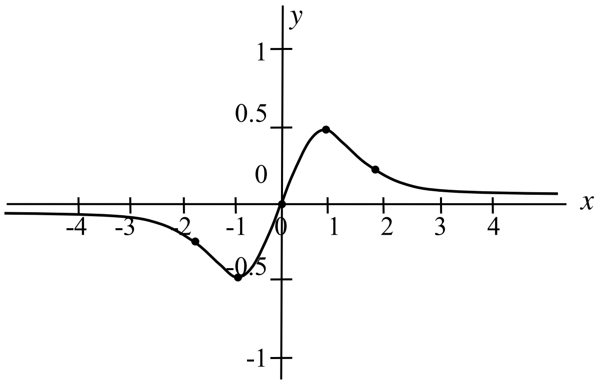
$-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$

La funció és convexa a $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$

La funció és còncava a $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$

d) Per fer un gràfic aproximat utilitzam la informació que hem recopilat, a més:

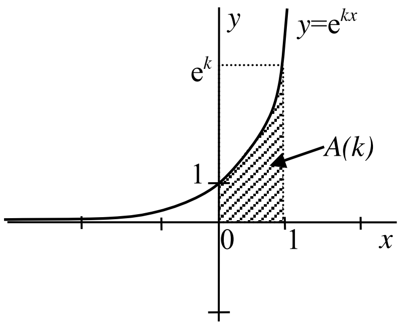
- El Dom f =(-∞,+∞)
- La funció és simètrica senar $f(-x)= - f(x)$.
- L'únic tall amb els eixos és x=0, y=0. L'origen de coordenades.



08S-A(4). Es considera la corba $y = e^{k\,x}$, k>0. Escriviu l'equació de la funció $A(k)$ que ens dóna l'àrea de la regió limitada per aquesta corba i les rectes y=0, x=0, x=1. Calculau $\lim\limits_{k \to 0} A(k)$. Feu un dibuix aclaridor.

Solució:

Donat que la corba és una exponencial (creixent ja que k>0) i és sempre positiva, no cal preocupar-nos pel signe de la integral que ens dóna l'àrea.



La gràfica mostra el recinte per un valor genèric de k. Calculem una expressió explícita de la funció A(k) fent la integral definida de la funció entre x=0 i x=1

$$A(k) = \int_0^1 e^{k\,x} dx = \frac{1}{k} e^{k\,x}\Big|_0^1 = \frac{e^k - 1}{k}$$

El límit que ens demanen

$$\lim_{k \to 0} A(k) = \lim_{k \to 0} \frac{e^k - 1}{k} = \frac{0}{0} = (Hôpital) = \lim_{k \to 0} \frac{e^k}{1} = 1 \quad \text{u.a.}$$

Efectivament, si k=0 la funció és y=1 el recinte queda un quadrat de costat 1, per tant l'àrea és 1 u.a.

EXAMEN 2008*-Setembre-Opció B*

08S-B(1). Demostrau, per a matrius 2x2 que «el determinant d'un producte és el producte de determinants». És cert que «el determinant d'una suma és la suma de determinants»?

Solució:

Considerem dues matrius 2x2 genèriques $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

D'una banda, el producte de determinants és $|A|\,|B|=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\cdot(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})$

D'altra banda, el producte de matrius és

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

El seu determinant es calcula utilitzant la propietat que si una columna és la suma de dues, el determinant es pot descompondre en la suma de dos determinants

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=b_{11}b_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}+b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}+b_{21}b_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=b_{11}b_{12}\cdot 0+b_{11}b_{22}|A|+b_{21}b_{12}\cdot(-|A|)+b_{21}b_{22}\cdot 0=$$

$$=|A|\cdot(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})=|A|\cdot|B|$$

Amb això podem concloure que la propietat $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ és certa per matrius 2x2. La demostració per matrius *n*x*n* és pot fer de manera anàloga.

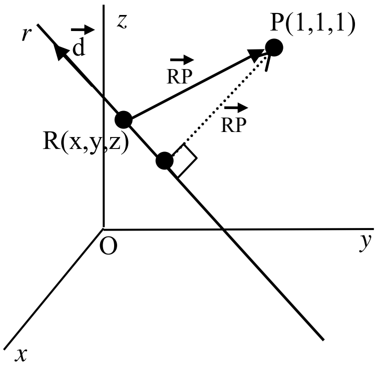
L'afirmació «el determinant d'una suma és la suma de determinants» és falsa. Basta mostrar un cas on no és certa. Per exemple:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|A|+|B|=1+1=2$ però $|A+B|=|O|=0$, on *O*=matriu zero.

08S-B(2). Determinau el punt de la recta (x,y,z)=(0,1,-1)+t(1,2,3) més pròxim al punt P(1,1,1).

Solució:



Hem de seguir el mateix procediment que el que utilitzam per calcular la distància d'un punt a una recta.

i) Agafam un punt genèric de la recta R(t, 1+2t, -1+3t)

ii) Calculam el vector

$$\vec{RP} = P - R = (1,1,1) - (t, 1+2t, -1+3t) = (1-t, -2t, 2-3t)$$

iii) en el moment que la distància sigui mínima, estam sobre la perpendicular de la recta que passa per P, aleshores, el vector $\vec{RP}$ i el vector director de la recta $\vec{d} = (1,2,3)$ són perpendiculars. Això vol dir, el seu producte escalar és zero

$$\vec{RP} \cdot \vec{d} = (1-t, -2t, 2-3t) \cdot (1,2,3) = 1 - t - 4t + 6 - 9t = 0$$

solució $t = \frac{1}{2}$. El punt de la recta que ens interessa és *R(t, 1+2t, -1+3t)*= $(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2})$.

Aprofundeix:

Calcula la distància que ens demanen de dues formes diferents; i) calculant la distància entre els punts R i P; ii) utilitzant la fórmula amb productes vectorials. Compara els resultats.

Efectivament, la distància entre R i P és $d(R,P) = \sqrt{(1-\frac{1}{2})^2 + (1-2)^2 + (1-\frac{1}{2})^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Si aplicant la fórmula $d(A,\pi) = \dfrac{|\vec{RP} \wedge \vec{d}|}{|\vec{d}|}$ amb R(0,1,-1) un punt qualsevol de la recta i RP=(1,0,2).

$$d(A,\pi) = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\right|}{|(1,2,3)|} = \frac{|(-4,-1,2)|}{|(1,2,3)|} = \frac{\sqrt{4^2+1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Naturalment, els dos resultats coincideixen.

08S-B(3). Es considera la funció $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

d) Calculau $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

e) Calcula els extrems relatius

f) Feu un dibuix de la funció

Solució:

a) El límit $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existeix, només els límits laterals

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{-x-1}=-\infty$

Amb això podem assegurar que *x=1* és una asímptota vertical. A més, aquesta funció té asímptotes una asímptota obliqua

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}=(x+1)+\frac{1}{x-1}$$

L'equació de l'asímptota és y=x+1.

b) Per trobar els extrems relatius hem de calcular la primera derivada i mirar on s'anul·la

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$$

La derivada s'anul·la quan $x^2-2x=0$, és a dir, quan x=0 i x=2.

Signe de f'(x) +++++++ 0--------¿--------0+++++++++

0 1 2 *x*

f(x) creixent a (-∞,0) ∩ (2, +∞) *f(x)* decreixent a (0,1) ∪ (1,2)

màxim relatiu x=0, y=0

mínim relatiu x=2, y=4

Per estudiar els punts d'inflexió, necessitam calcular la segona derivada

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^{\cancel{2}}-(x^2-2x)\cdot 2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{2}{(x-1)^3}=0$$

La segona derivada no s'anul·la mai. No hi ha punts d'inflexió.

Estudiem la curvatura mirant el signe de $f''(x)$

Signe de f''(x) --------------------------------¿++++++++

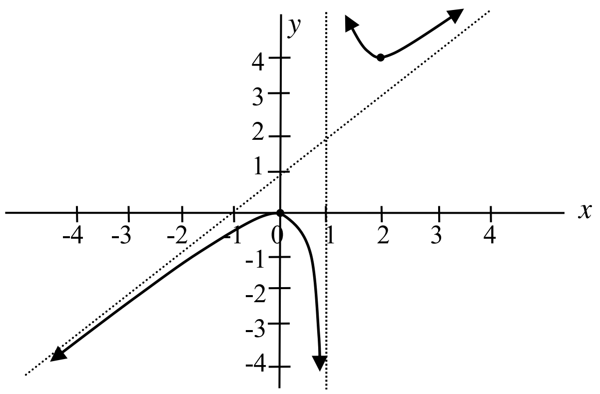
0 1 x

La funció és convexa a $(-\infty,1)$

La funció és còncava a $(1,+\infty)$

d) Per fer un gràfic aproximat utilitzam la informació que hem recopilat, a més:

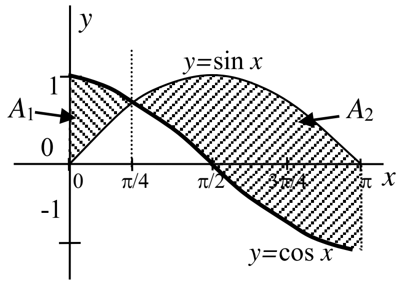
- El Dom f=R-{1}
- La funció no és simètrica.
- L'únic tall amb els eixos és x=0, y=0. L'origen de coordenades.



08S-B(4). Dibuixa la regió limitada per les corbes $y=\sin x$, $y=\cos x$, i les rectes $x=0$, $x=\pi$. Calculau-ne l'àrea.

Solució:

En primer lloc, representarem les corbes per tenir una idea de la regió que limiten. Veim que les corbes es tallen a $x=\pi/4$, per tant, haurem de considerar dues sub-regions A_1 (0, $\pi/4$) i A_2 ($\pi/4$,π).



L'àrea entre les dues funcions dins el primer interval és

$$A_1=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi/4}=\sin\tfrac{\pi}{4}+\cos\tfrac{\pi}{4}-(\sin 0+\cos 0)=\sqrt{2}-1$$

i l'àrea en el segon interval

$$A_2=\int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=(-\cos x-\sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi}=-\cos\pi-\sin\pi+(\cos\tfrac{\pi}{4}+\sin\tfrac{\pi}{4})=1+\sqrt{2}$$

Finalment, l'àrea total és $A=A_1+A_2=(\sqrt{2}-1)+(1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ u.a.

EXAMEN 2009-*Juny-Opció A*

09J-A(1). Es consideren les matrius de la forma $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos x & -\sin x\\ 0 & \sin x & \cos x\end{pmatrix}$, $x\in R$. Es demana:

i) Calcular *A*(0), *A*(π/2), *A*(-π/2), *A*(π), *A*(-π)

ii) Demostrar que *A*(x) té inversa qualsevol que sigui x. Calcula la inversa.

iii) Calcular els valors de x tals que A(x)=I (matriu identitat). És cert que $A(x)\neq A(y)$ sempre que $x\neq y$?

Solució:

i) Per a calcular les matrius basta substituir els valors de x que ens donen (recordant que venen donats amb radiants):

$$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I,\ A(\pi/2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},A(-\pi/2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$A(\pi)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad A(-\pi)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

ii) Una matriu té inversa si el seu determinant és diferent de zero

$$\det A(x)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&\cos x&-\sin x\\0&\sin x&\cos x\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}\cos x&-\sin x\\ \sin x&\cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1\neq 0$$

La matriu A té inversa. La calculam tot seguit

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos x&-\sin x\\0&\sin x&\cos x\end{pmatrix}^t=adj\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos x&\sin x\\0&-\sin x&\cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos x&\sin x\\0&-\sin x&\cos x\end{pmatrix}$$

Aquesta és una matriu que en diem ortogonal ja que compleix $A^{-1}=A^t$.

iii) La matriu A(x) és la matriu identitat quan x=2πn, donat que cos(2πn)=1 i sin(2πn)=0.

L'afirmació $A(x)\neq A(y)$ sempre que $x\neq y$ és falsa. Basta mostrar-ho amb un exemple de l'apartat i). Si agafam *x=π* i *y=−π* tenim $x\neq y$, però $A(x)=A(y)$.

09J-A(2). Demostrau que el punt A=(-1,1,0) no és coplanari amb els punts B=(0,0,0), C=(0,1,0) i D(1,2,1). Calcula la distància de A al pla determinat per B, C, D.

Solució:

Donats els punts considerem els vectors següents (vegeu dibuix):

$$\vec{BA} = A - B = (-1,1,0)$$

$$\vec{BC} = C - B = (0,1,0)$$

$$\vec{BD} = D - B = (1,2,1)$$

Els punts no són coplanaris si el producte mixt dels vectors anteriors és diferent de zero. Comprovem-ho:

$$\vec{BA} \cdot \left(\vec{BC} \wedge \vec{BD} \right) = \det(\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

En conclusió els punts no són coplanaris i el volum del paral·lelepípede que defineixen val |-1|=1.

Hem de calcular la distància del punt A al pla determinant per B, C, D:

- **Primer mètode:**
  L'altura del paral·lelepípede és la distància que ens demanen

$$d(\pi, A) = h = \frac{volum}{area\,base} = \frac{|\det(\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD})|}{|\vec{BC} \wedge \vec{BD}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

  on el producte vectorial és

$$\vec{BC} \wedge \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k} = (1,0,-1)$$

- **Segon mètode:**
  Calculam l'equació vectorial del pla que passa pels tres punts B,C,D

$$\pi:\ (x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(1,2,1)$$

  la passam a forma paramètrica

$$\begin{aligned} x &= \mu \\ y &= \lambda + 2\mu \\ z &= \mu \end{aligned}$$

  I ara a forma general

  $x - z = 0$ (amb *y* un nombre qualsevol)

  i aplicam la fórmula

$$d(\pi, A) = \frac{|-1-0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

09J-A(3). Es considera la funció $y = f(x)$ definida a l'interval [0,π], de la forma següent:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{\sin x} & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

i) Estudiau-ne la continuïtat
ii) Dibuixau la funció en un entorn de x=0 i de x=π.

Solució:

i) Recordem les condicions que s'han de complir perquè una funció sigui contínua a *x=a*:

1) Existeix el límit quan x→a, $\exists \; \lim\limits_{x \to a} f(x)$
2) Existeix la imatge de la funció *f(a)*
3) El límit coincideix amb la imatge, és a dir, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Donat que la funció $y = \dfrac{x^2 - x}{\sin x}$ és contínua a l'interval obert (0, π), només cal estudiar la continuïtat als extrems de l'interval. Donat que la funció només està definida dins l'interval tancat [0,π], no pot prendre valors negatius ni superiors a π. Llavors només podrem calcular alguns límits laterals.

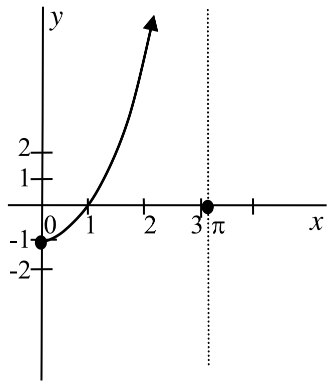
- **Continuïtat a x=0**
  1) existeix $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - x}{\sin x} = \dfrac{0}{0} = Hôpital = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x - 1}{\cos x} = -1$
  2) existeix f(0)=-1
  3) els dos resultats coincideixen $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = -1$

  Conclusió: La funció és contínua a x=0.

- **Continuïtat a x=π**
  1) No existeix $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\pi^2 - \pi}{\sin \pi^-} = \dfrac{6{,}73}{0^+} = +\infty$
  2) existeix f(π)=0
  3) els dos resultats no coincideixen $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) \neq f(\pi)$

  Conclusió: La funció no és contínua a x=π. (Discontinuïtat asímptòtica)

ii) Per fer un dibuix qualitatiu de la funció en un entorn de x=0 i x= π hem de reflectir el que hem trobat. La funció s'acosta contínuament a y=-1 quan x→0. A mesura que x→π, y→+∞. Si a més ens adonam que la funció talla l'eix X a x=1, la gràfica de la funció és la següent:



09J-A(4). La recta $y = 2x - 2$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+k}$. Calculau el valor de k i els extrems relatius d'aquesta funció.

Vegeu també problema: 07S-B(3)

Solució:

Expressem la funció d'una altra forma, realitzant la divisió dels polinomis

$$
\begin{array}{lll|l}
2x^2 & & +1 & x+k \\ \cline{4-4}
\underline{-2x^2} & \underline{-2kx} & & 2x-2k \\
 & -2kx & +1 & \\
 & \underline{2kx} & \underline{+2k^2} & \\
 & & 2k^2+1 &
\end{array}
$$

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+k} = \underbrace{2x-2k}_{\text{asímptota obliqua}} + \frac{2k^2+1}{x+k}$$

Comparant amb l'asímptota que dóna l'enunciat $y = 2x - 2$, veim que $k = 1$.

Per determinar els extrems, hem de calcular la derivada de la funció

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+1} \rightarrow f'(x) = \frac{4x\,(x+1)-(2x^2+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}$$

La funció té extrems relatius quan $2x^2+4x-1=0$, quan x=-2,22 i x=0,22. Per saber el creixement estudiam el signe de la primera derivada

Signe de f'(x) ++++++0--------- ¿ ---------0++++++++

-2,22 -1 0,22 *x*

La funció és creixent a $(-\infty, -2.22) \cup (0.22, +\infty)$

La funció és decreixent $(-2.22, -1) \cup (-1, 0.22)$

Hi ha un màxim relatiu a (x=-2.22, y=-8.9)

Hi ha un mínim relatiu a (x=0.22, y=0.89)

EXAMEN 2009-*Juny-Opció B*

09J-B(1). Per a quins valors de *k* té el següent sistema alguna solució distinta a la trivial (0,0,0)?

$$\begin{cases} kx - y + z = 2x \\ x + 2ky - kz = y \\ x + ky - z = 0 \end{cases}$$

Resoleu-lo en el cas *k*=2.

Solució:

En primer lloc, escrivim el sistema transposant els termes de membre de la dreta:

$$\begin{cases} (k-2)x - y + z = 0 \\ x + (2k-1)y - kz = 0 \\ x + ky - z = 0 \end{cases}$$

Es tracta d'un sistema homogeni, els termes independents són zero. Un sistema homogeni te alguna solució diferent a la trivial (0,0,0) si el determinant de la matriu del sistema és zero, i, per tant, el sistema compatible indeterminat.

Calculem el determinant del sistema:

$$\begin{vmatrix} k-2 & -1 & 1 \\ 1 & 2k-1 & -k \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-2 & -1 & 0 \\ 1 & 2k-1 & k-1 \\ 1 & k & k-1 \end{vmatrix} = (k-1)\begin{vmatrix} k-2 & -1 & 0 \\ 1 & 2k-1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} =$$

[3ªcol]→[3ªcol] + [2ªcol] extreure factor (*k*-1)

$$= (k-1)\begin{vmatrix} k-2 & -1 & 0 \\ 0 & 2k-1 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = (k-1)\cdot(k-2)\begin{vmatrix} 2k-1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = (k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-1)$$

[1ªcol]→[1ªcol] - [3ªcol]

El determinant és zero quan *k*=1 o *k*=2.

La segona part del problema demana resoldre el sistema quan *k*=2, que correspon a un sistema compatible indeterminat. Substituint *k*=2, el sistema queda

$$\begin{cases} -y + z = 0 \quad \to z = y \\ x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + 3y - 2y = 0 \\ x + 2y - y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 0 \\ \cancel{x + y = 0} \end{cases} \to \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ amb } \lambda \in R$$

09J-B(2). Calculau l'equació contínua de la recta que passa pel punt P(2,1,5) i és perpendicular a les rectes *r*: $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{4}$, *s*: $\frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

Solució:

Per trobar la recta perpendicular a es dues donades, necessitam un punt i un vector director. El punt ja el tenim, i el vector director es pot obtenir del producte vectorial del vector director de la recta r, $\vec{d_r}=(-1,0,4)$ amb el de la recta s, $\vec{d_s}=(-5,3,-1)$.

$$\vec{n}=\vec{d_s}\wedge\vec{d_r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & 3 & -1\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix}=12\vec{i}+21\vec{j}+3\vec{k}=(12,21,3)\quad //\quad(4,7,1)$$

Llavors, la recta en forma contínua és

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-5}{1}.$$

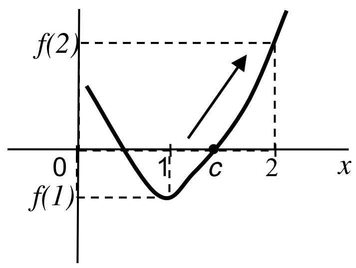
Comentari:

Comparau aquest problema amb els 05S-A(2), 06J-B(2), 07S-A(2) en què demanaven trobar la recta que talla perpendicularment dues donades. En aquest problema la recta que hem trobat és certament perpendicular a les donades però no té perquè tallar-les.

09J-B(3). Provau raonadament que l'equació $x^3-3x+1=0$ té una única solució dins l'interval obert (1, 2). Calculau-la amb un error menor que una dècima.

Solució:

Considerem la funció $f(x)=x^3-3x+1$.



f(x) és contínua, *f*(1)=-1<0 i *f*(2)=3>0 → el teorema de Bolzano assegura que existeix almenys un *c* a l'interval (1,2) tal que *f(c)*=0.

Per demostrar que l'arrel és única necessitam estudiar el creixement de la funció i utilitzar el següent resultat que s'obté dels teoremes de Bolzano i Rolle:

Si una funció f(x) verifica el teorema de Bolzano a l'interval [a,b], és derivable a l'interval (a,b), i a més, és creixent (o decreixent) dins tot l'interval, aleshores existeix ***un únic*** *c de l'interval (a,b) tal que f(c)=0.*

$f'(x)=3x^2-3=0 \rightarrow$ té dues solucions x=-1 i x=1. Estudiem el creixement mirant el signe de la derivada

Signe de f'(x) ++++++0------------------- 0++++++++

-1 0 1 2 *x*

És a dir, la funció és creixent a tot l'interval (1, 2). Això ens assegura que només hi ha un tall amb l'eix X dins aquest interval.

Podem acotar la solució mirant canvis de signes

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
f(x)	-1	-0,97	-0,87	-0,7	-0,45	-0,12	0,29	0,81	1,43	2,16

La solució està entre c= 1,5 i 1,6.

x	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,56	····		
f(x)	-0,12	-0,08	-0,05	-0,008	0,032	0,074	0,116	····		

La solució està entre c= 1,53 i 1,54.

09J-B(4). Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba $y=\frac{1}{1+x^2}$ i les rectes *y=0, x=a, x=b,* on *a* i *b* són les abscisses dels punts d'inflexió de la corba. Feu un dibuix de la regió.

Solució:

En primer lloc hem de determinar els punts d'inflexió imposant que y''=0

$$y=\frac{1}{1+x^2} \rightarrow y'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y''=\frac{-2(1+x^2)^2-(-2x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-2(1+x^2)-(-2x)2\cdot 2x}{(1+x^2)^3}=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

La condició y''=0 es compleix quan $6x^2-2=0$, quan $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $b=+\frac{\sqrt{3}}{3}$

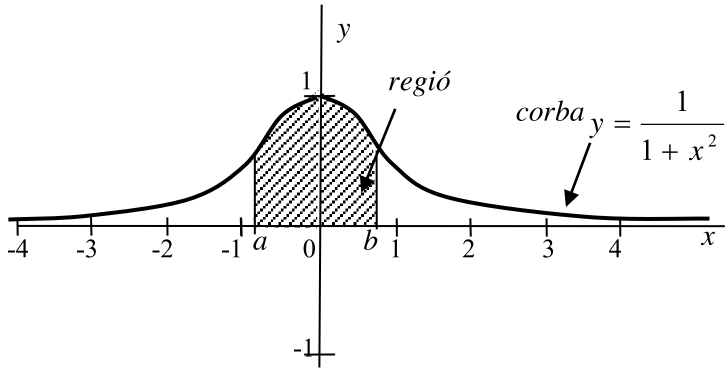
L'àrea s'obté a partir de la integral definida de la funció a [a,b]

$$A=\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx=2\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx=2arctg\ x\Big|_0^b=2\left(arctg\ \frac{\sqrt{3}}{3}-arctg\ 0\right)=2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3} \text{ u.a.}$$

S'ha tengut en compte que la figura és simètrica respecte l'eix Y.

Atenció! Si calcules un *arctg* amb la calculadora, assegura't de tenir-la en mode **RAD**.

El dibuix aproximat del recinte és:



EXAMEN 2009-*Setembre-Opció A*

09S-A(1). Demostra que les matrius X reals, 2x2, tals que $X.X^T=I$ són precisament les que tenen la forma $X=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ o bé $X=\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$ amb $x^2+y^2=1$. (X^T indica la transposada de la matriu X. I indica la matriu identitat).

Solució:

Considerem una matriu 2x2 genèrica $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ amb *a, b, c, d* nombres reals. Imposem la condició $X.X^T=I$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuem la multiplicació de les matrius

$$\begin{pmatrix} a^2+c^2 & a\cdot b+c\cdot d \\ b\cdot a+d\cdot c & b^2+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dues matrius són iguals, igualam els seus elements dos a dos. Arribam al sistema:

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 & [\text{Eq.1}] \\ a\cdot b+c\cdot d=0 & [\text{Eq.2}] \\ \cancel{b\cdot a+d\cdot c=0} & [\text{Eq.3}] \\ b^2+d^2=1 & [\text{Eq.4}] \end{cases}$$

Veim que la segona i tercera equacions són de fet la mateixa. Agafam [Eq. 2]

$$a\cdot b=-c\cdot d \qquad [\text{Eq. 5}]$$

elevant al quadrat

$$a^2\cdot b^2=c^2\cdot d^2$$

aïllant *b* de [Eq. 4] i la introduïm a l'anterior

$$a^2\cdot(1-d^2)=c^2\cdot d^2$$

operant i utilitzant [Eq. 1]

$$a^2=(a^2+c^2)\cdot d^2 \;\rightarrow\; a^2=d^2 \rightarrow \boxed{d=\pm a}$$

Introduint això dins [Eq. 5]

Si d=a: $a\cdot b=-c\cdot a \;\rightarrow\; \boxed{b=-c}$

Si d=-a: $a\cdot b=-c\cdot(-a) \rightarrow \boxed{b=c}$

En resum, les matrius han d'ésser del tipus

$$X=\begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ o bé } X=\begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ amb } a^2+c^2=1.$$

Nota: Per obtenir les matrius de l'enunciat del problema basta assignar a=x i c=±y

09S-A(2). Estudiau la posició relativa dels plans següents segons els valors de *m*
x+y=1
my+z=0
x+(1+m)y+mz=m+1

Solució:

Hem de discutir el sistema d'equacions $\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m+1 \end{array}\right)$ segons els valors de *m*. Per això utilitzam el teorema de Rouché. Començam cercant el rang de la matriu del sistema M

$$\det M=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{vmatrix}=m(m-1)=0$$, té dues solucions m=0, m=1

Casos:

- Si m≠0, m≠1 aleshores $rang\ M=rang\ \overline{M}$ =3=nº incògnites: Sistema compatible determinat. Solució única. Aleshores els tres plans són secants en un punt.

- Si m=0, la matriu del sistema queda:
  $\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ i com que hi ha dos vectors fila repetits, tenim que
  $rang\ M=rang\ \overline{M}$ =2 < nº d'incògnites: Sistema compatible indeterminat. Infinites solucions. Els tres plans es tallen formant una recta. Els plans 1 i 3 coincideixen i són secants amb el 2.

- Si m=1, la matriu del sistema queda:
  $\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$. Tenim que rang M=2, però rang $\overline{M}$ =3 ja que podem trobar el menor d'ordre 3 no nul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$. Aleshores el sistema és incompatible. No hi solució i per tant els tres plans no tenen cap punt en comú. Els plans es tallen dos a dos.

09S-A(3). Es considera la funció $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$. Es demana:

i) Trobar els extrems relatius

ii) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$

Solució:

i) Abans de començar comprovam que el domini d'aquesta funció són tots els nombres reals perquè el radicand és sempre positiu, $1+x+x^2>0$.

Els extrems relatius es determinen de la condició f'(x)=0
Calculem la primera derivada de la funció

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x+x^2}}\cdot(1+2x)=0$$, té com a única solució x=-1/2

Per saber el creixement estudiam el signe de la primera derivada

Signe de f'(x) ---------------------*0*+++++++++++++++

-1/2 x

Aleshores la funció decreix $(-\infty,-1/2)$ a i creix a $(-1/2,+\infty)$. El punt x=-1/2; y= $\sqrt{3}/2$ és un mínim de la funció. És l'únic extrem de la funció.

ii) Ens demanen que trobem els límits següents:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{+x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-x+(-x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-x+x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1+2x}{x}}{\frac{2}{x}\sqrt{1+x+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x+2}{2\sqrt{1/x^2+1/x+1}}=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{2\sqrt{1-x+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-2x}{x}}{\frac{2}{x}\sqrt{1-x+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x-2}{2\sqrt{1/x^2+1/x+1}}=\frac{-2}{2}=-1$$

09S-A(4). Utilitzant els teoremes de Bolzano i Rolle, demostrau que l'equació $x^2=x\sin x+\cos x$ té exactament dues solucions dins l'interval [-π,π].

Solució:

Problema resolt **06S-A(3)**.

EXAMEN 2009-Setembre-Opció B

09S-B(1). Trobau el rang de la matriu $A=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$ segons els valors de a.

Resoleu el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en el cas a=0.

Solució:

Cercam el rang per determinants. Comencem cercant el determinant de la matriu A

$$\det A=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 \\ a+3 & 2 & a \\ a+3 & a & 2 \end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$=(a+3)\cdot a\cdot(2-a)=0$

que té solucions a=0, a=2, a=-3

Casos:

- Si a≠0, a≠2, a≠-3, aleshores rang A =3
- Si a=0, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$, hi ha almenys un menor 2x2 no nul, rang A=2
- Si a=2, $A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & 2 \end{pmatrix}$, hi ha almenys un menor 2x2 no nul, rang A=2
- Si a=-3, $A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -3 \end{matrix} & 2 \end{pmatrix}$, hi ha almenys un menor 2x2 no nul, rang A=2

El cas a=0, correspon a un sistema homogeni rang A= rang A'=2< 3 compatible indeterminat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ \cancel{x+2y=0} \\ x+2z=0 \end{cases}$$

anomenam $z=-\lambda$.

Solució: $x=2\lambda$, $y=-\lambda$, $z=-\lambda$ per a tot $\lambda\in R$.

09S-B(2). Sigui *r* la recta intersecció dels dos plans π_1: ax+by+cz+d=0 i π_2: a'x+b'y+c'z+d'=0. Es considera la família de plans de la forma ax+by+cz+d + *k*· (a'x+b'y+c'z+d')=0 on k és un paràmetre real. Es demana:

i) Demostrar que *r* està continguda en tots els plans de la família
ii)Trobar els plans de la família 2x– y+z +1+ k· (x+y+z-2)=0 que es troben a distància 1 de l'origen de coordenades.

Solució:

i) La recta r s'obté de la intersecció dels plans π_1 i π_2. Aleshores l'equació de la recta en forma implícita o general és:

$$r:\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

Si aquesta recta pertany a la família de plans ax+by+cz+d + *k*· (a'x+b'y+c'z+d')=0 s'ha de complir que el sistema d'equacions format per

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ ax+by+cz+d+k(a'x+b'y+c'z+d')=0 \end{cases}$$

sigui compatible indeterminat, ja que tots els punts de la recta són del pla. En forma matricial el sistema és

$$M'=\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \\ a+ka' & b+kb' & c+kc' & -(d+kd') \end{array}\right)$$

La tercera fila és combinació lineal de les dues primeres files i per tant rang M=rang M'=2. El sistema és per tant compatible indeterminat.

ii) Els plans de la família 2x - y +z +1 + k· (x+y+z-2)=0 els podem escriure com:
(2+k) x +(-1+k) y + (1+k)z + 1-2k =0

El vector normal d'aquest pla és (2+k, -1+k, 1+k)

La distància d'aquest pla a l'origen de coordenades (punt (0,0,0)) és troba a partir de la fórmula:

$$d(\pi,O)=\frac{|(2+k)\cdot 0+(-1+k)\cdot 0+(1+k)\cdot 0+1-2k|}{\sqrt{(2+k)^2+(-1+k)^2+(1+k)^2}}=1$$

simplificant

$$d(\pi,O)=\frac{|1-2k|}{\sqrt{6+4k+3k^2}}=1$$

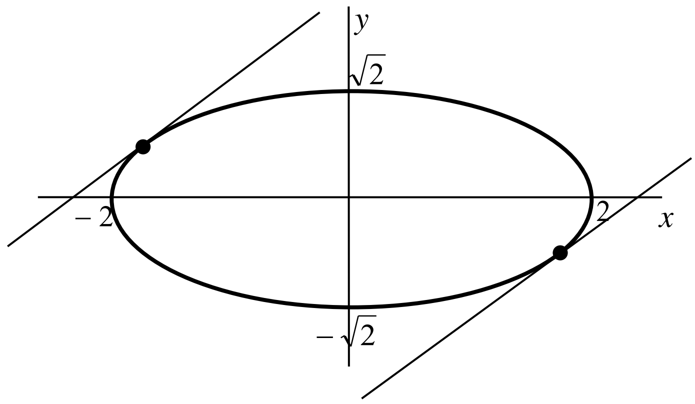
$|1-2k|=\sqrt{6+4k+3k^2}$, elevam al quadrat $(1-2k)^2=6+4k+3k^2$ i simplificam trobam l'equació de segon grau $k^2-8k-5=0$ que té com a solucions:

$$k=\frac{8\pm\sqrt{84}}{2}=4\pm\sqrt{21}.$$

09S-B(3). Trobau els punts de la corba $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ en els quals el pendent de la recta tangent és 1.

Solució:

La corba en qüestió és una el·lipse de semieixos 2 i $\sqrt{2}$. En els punts on el pendent de la recta tangent és 1 tenim que la derivada y'=1. Per trobar la derivada tenim dues opcions, aïllar la y i derivar explícitament o bé fer la derivada implícita:



Mètode 1: Derivada implícita (*recomanat*)

Derivam repecte x, implicitament l'equació $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

$$\frac{2x}{4}+\frac{2y}{2}\cdot y'=0$$

Ens diuen que y'=1. Aleshores $\frac{x}{2}+y=0$, o el que és el mateix $x=-2y$. Substituint dins la corba $\frac{4y^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. D'aquí trobam $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Els dos punts són $\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ i $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Mètode 2: Derivada explícita

Aïllam y de la corba; $y=\pm\sqrt{2(1-\frac{x^2}{4})}=\pm\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}$

Derivam i igualam a 1: $y'=\frac{\pm 1}{2\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}}\cdot(-x)=1 \rightarrow \mp x=2\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}$,

Elevam al quadrat $\rightarrow$ $x^2=4\left(2-\frac{x^2}{2}\right)\rightarrow$ $x^2=8-2x^2 \rightarrow$ $x=\pm\sqrt{\frac{8}{3}}=\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

Cada valor de x hi ha dos valors de y: $y=\pm\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Els dos punts són $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ i $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Cal comprovar en cada cas que la derivada és +1.

09S-B(4). Donada la funció $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x=0 \\ x\cdot Lx & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ (L=log$_e$) es demana:

i) Estudiau-ne la continuïtat

ii) Calcular l'àrea de la regió limitada per la corba y=f(x) i les rectes y=0, x=k, x=1 on k és l'abcissa del mínim de la funció. Feu un dibuix de la regió.

Solució:

i) Per estudiar la continuïtat de la funció, primer ens adonam que el domini de defició és Dom f=[0,+∞]. Donat que x·Lx és una funció contínua per a tot x>0, només falta comprovar la continuïtat a x=0

Anam comprovant les condicions perquè f(x) sigui contínua a x=0:

1a) Existeix $f(0)=0$

2a) Existeix $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Naturalment només el podrem calcular per la dreta de 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = 0\cdot(-\infty) =$ indeterminat

Passem x dividint i apliquem la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = (Hôpital) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

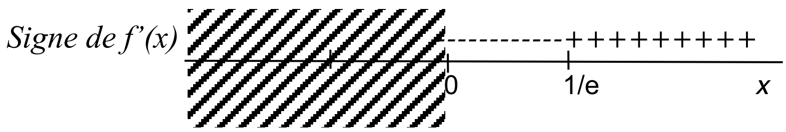
3a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Aleshores la funció és contínua a x=0 i a la resta del seu domini de definició

ii) Calcular l'àrea de la regió limitada per la corba y=f(x) i les rectes y=0, x=k, x=1 on k és l'abcissa del mínim de la funció. Feu un dibuix de la regió.

Necessitam trobar el mínim de la funció. Per això calcularem la derivada

$$y = x\cdot \ln x\,, \quad y' = \ln x + x\frac{1}{x} = 0\,, \quad \ln x = -1\,, \quad x = e^{-1} = 1/e$$

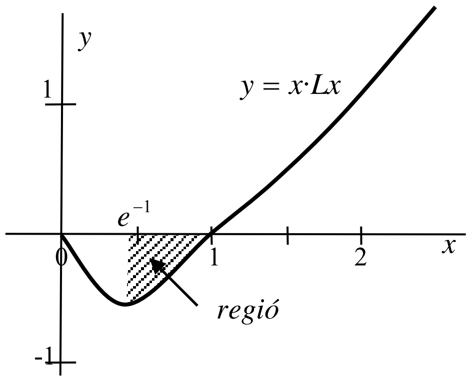
Amb el signe de la derivada analitzam el creixement de la funció



L'ordenada del mínim és f(1/e)=-1/e. El mínim es troba a (1/e, -1/e)

Els punts de tall amb els eixos són, d'una banda (0,0) i d'altra banda quan x·ln x=0, és a dir (1,0).

Un dibuix aproximat de la regió és:



Donat que en la regió la funció sempre és negativa l'àrea és la integral definida en valor absolut

$$A=\left|\int_{1/e}^{1} x\ln x dx\right|$$

Per trobar la primitiva feim integració per parts

$$\int x\ln x dx=\begin{Bmatrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx & v=x^2/2 \end{Bmatrix}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+K$$

L'àrea és, segons la regla de Barrow

$$A=\left|\int_{1/e}^{1} x\ln x dx\right|=\left.\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right|_{1/e}^{1}=\left|-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2e^2}\ln\frac{1}{e}-\frac{1}{4e^2}\right)\right|=\frac{e^2-3}{4e^2}\approx 0{,}15\ \ u.a.$$

EXAMEN 2010-*Juny-Opció A*

10J-A(1). Determinau segons els valors de m, el rang de $A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En el cas m=1, calculau les solucions del sistema homogeni $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solució:

Començam calculant el determinant de la matriu A

$$\det(A)=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ m-1 & m-1 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix}=(m-1)\begin{vmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix}=(m-1)(3m-4)=0$$

[2ªfila]→[2ªfila] + [1ªfila]

- Si $m\neq 1$ i $m\neq 4/3$, aleshores rang A =3
- Si $m=1$, aleshores $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i per tant rang A =2
- Si $m=4/3$, aleshores $A=\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -1 \\ 0 & -2/3 & 1 \\ 4/3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i per tant rang A =2

La segona part del problema ens demana resoldre el sistema homogeni per m=1. Donat que det(A)=0, el sitema que obtenim és compatible indeterminat. Vegem-ho.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases} y-z=0 \\ \cancel{-y+z=0} \\ x+2z=0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

10J-A(2). Calculau el valor de k per al qual les rectes següents són paral·leles

$$r:\frac{x-1}{k}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{k} \quad \text{i} \quad s:\frac{x+1}{2k}=\frac{y}{k+3}=\frac{z-2}{2}$$

Calculau, en aquest cas, la distància entre les rectes.

Solució:

Les rectes venen donades en forma contínua cosa que facilita la identificació dels vectors directors:

$$\vec{d}_r(k,2,k) \text{ i } \vec{d}_s(2k,k+3,2)$$

Si les rectes són paral·leles, aleshores els vectors són paral·lels i per tant les components proporcionals:

$$\frac{k}{2k}=\frac{2}{k+3}=\frac{k}{2}$$

Es fàcil veure que aquesta equació només es satisfà per a k=1.

La segona part del problema demana calcular la distància quan k=1. En aquest cas, necessitam un punt de cada recta i el seu vector director

$$\begin{matrix} R(1,0,-3) \\ \vec{d}_r(1,2,1) \end{matrix} \quad \text{i} \quad \begin{matrix} S(-1,0,2) \\ \vec{d}_s(2,4,2)\ //\ (1,2,1) \end{matrix}$$

La distància entre dues rectes paral·les es pot obtenir de la fórmula

$$d(r,s)=d(r,S)=\frac{|\overrightarrow{RS}\times\vec{d}_r|}{\left|\vec{d}_r\right|}$$

producte vectorial: $\overrightarrow{RS}\times\vec{d}_r=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-10,7,-4)$

mòdul del producte vectorial: $\left|\overrightarrow{RS}\times\vec{d}_r\right|=\sqrt{10^2+7^2+4^2}=\sqrt{165}$

mòdul vector director: $\left|\vec{d}_r\right|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

distància: $d(r,s)=\frac{|\sqrt{165}}{\sqrt{6}}\approx 5{,}24$

10J-A(3). Calculau el punt a la corba $y=\frac{1}{1+x^2}$ en el qual el pendent de la recta tangent sigui màxim. Feu un dibuix on aparegui la corba, el punt i la recta tangent.

Solució:

El pendent a una corba a un punt és el valor de la derivada en aquell punt. El pendent és:

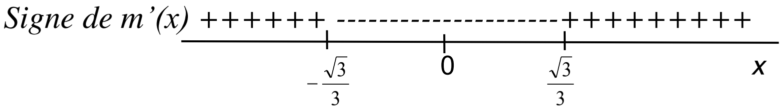
$$m=y'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Per trobar el pendent màxim, hem de trobar el màxim de la funció m(x). Els extrems d'una funció es troben a partir de m'(x)=0.

$$m'=y''=\frac{-2(1+x^2)^2+2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\ldots=\frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}=0$$

L'equació $-2+6x^2=0$ té dues solucions, $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Notau que aquestes són les solucions de y''=0, és a dir, són els punts d'inflexió de la corba.

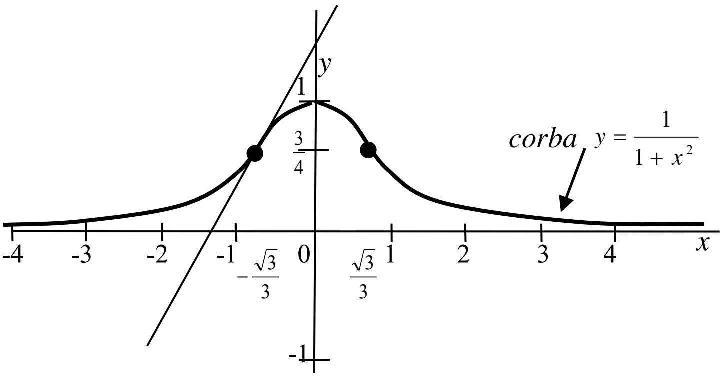
Per saber si donen un màxim o un mínim del pendent, estudiam el signe de la derivada m'(x)



Per tant el màxim de pendent es troba a

$$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\text{, i } y=\frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

El dibuix de la situació és

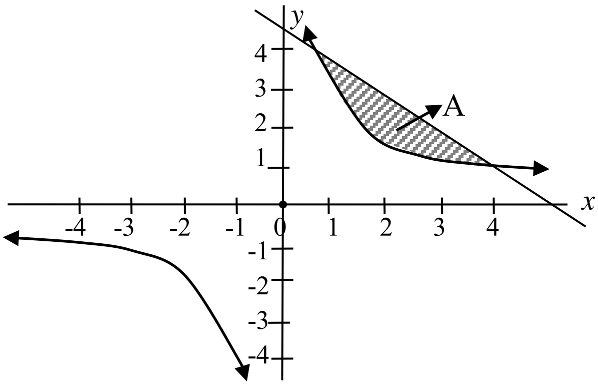


10J-A(4). Calculau l'àrea de la regió limitada per la hipèrbola $xy=4$ i la recta que la talla en els punts d'abcisses x=1, x=4. Feu un dibuix de la regió.

Solució:

La hipèrbola és una funció de proporcionalitat inversa $y=\frac{4}{x}$

La gràfica de la regió és:



El pendent de la recta que passa per (1,4) i (4,1) és m=-1. L'equació de la recta és $y=-x+5$ o simplificant $y-4=-1\cdot(x-1)$

L'àrea és:

$$A=\int_1^4(-x+5-\frac{4}{x})dx=\left[-\frac{x^2}{2}+5x-4\ln x\right]_1^4=-8+20-4\ln 4-\left(-\frac{1}{2}+5-4\ln 1\right)=$$

$$=\frac{15}{2}-4\ln 4\approx 1{,}955\,u.a.$$

EXAMEN 2010-*Juny-Opció B*

10J-B(1). Es consideren les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Calcula la matriu X que verifica: X A + I = B, on I representa la matriu identitat.

Solució:

Començam aïllant la matriu X de l'equació X A + I = B,

$$XA = B - I$$
$$XA \cdot A^{-1} = (B - I)\cdot A^{-1}$$
$$X = (B - I)\cdot A^{-1}$$

Necessitam calcular la inversa de la matriu A, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}adj\,A^t$

Determinant de A: $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1+2=3$

$$A^t\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\to adj\,A^t\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & -1\\ -2/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

La matriu X s'obté del producte matricial

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & -1\\ -2/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3 & -1/3 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ -1/3 & 2/3 & -1\end{pmatrix}$$

10J-B(2). Siguin $P(a_1,b_1,c_1)$ i $Q(a_2,b_2,c_2)$ dos punts del pla Ax + By + Cz + D = 0. Demostrau que el vector $\overrightarrow{PQ}$ és perpendicular al vector normal (A,B,C). Aplicar-ho per calcular l'equació general del pla que conté els punts P(1,2,3), Q(-1,0,2) i R(1,1,1).

Solució:

Donat que els punts $P(a_1,b_1,c_1)$ i $Q(a_2,b_2,c_2)$ pertanyen al pla Ax + By + Cz + D = 0, satisfan les equacions

$$A\cdot a_1 + B\cdot b_1 + C\cdot c_1 + D = 0 \qquad [1a]$$

$$A\cdot a_2 + B\cdot b_2 + C\cdot c_2 + D = 0 \qquad [2a]$$

Calculem ara el vector $\vec{PQ} = Q - P = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$

Calculem ara el producte escalar $\vec{PQ} \cdot \vec{n}$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{n} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)\cdot(A,B,C) = A(a_2 - a_1) + B(b_2 - b_1) + C(c_2 - c_1) =$$
$$= Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 - \left(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1\right)$$

Utilitzam les equacions [1a] i [2a]

$$\vec{PQ} \cdot \vec{n} = Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 - \left(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1\right) = -D - (-D) = 0$$

En conclusió, acabam de demostrar que els vectors $\vec{PQ} \perp \vec{n}$ són perpendiculars.

La segona part del problema demana calcular el pla que passa pels punts P(1,2,3), Q(-1,0,2) i R(1,1,1). Calculem els vectors

$$\vec{PQ} = (-2, -2, -1), \ \vec{PR} = (0, -1, -2)$$

vector normal al pla: $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (3,-4,2)$

Equació normal del pla: $3\cdot(x-1) - 4\cdot(y-2) + 3\cdot(x-2) = 0$

$$\boxed{3x - 4y + 3z - 1 = 0}$$

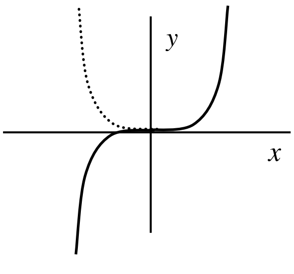
10J-B(3). Es considera la funció $f(x) = x\,|x|$. Calculau les equacions i els dominis de les funcions f(x), f'(x), f''(x), f'''(x). Representau-les gràficament.

Solució:

Per començar, necessitam expressar la funció valor absolut com una funció definida a trossos

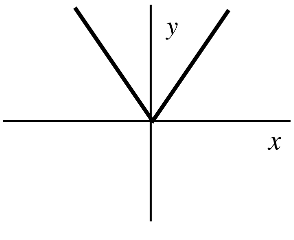
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x < 0 \\ x^2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Dom f(x)=R

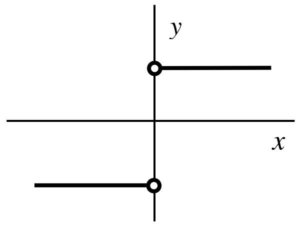


$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \quad x < 0 \\ 2x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Dom f'(x)=R

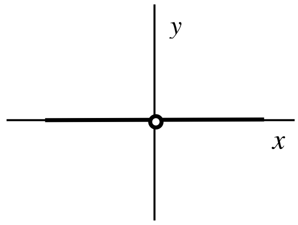


$$f''(x)=\begin{cases}-2 & si \quad x<0\\ 2 & si \quad x>0\end{cases}$$



Dom f''(x)=R-{0}

$$f'''(x)=0 \quad si \quad x\neq 0$$



Dom f'''(x)=R-{0}

Per el darrer cas cal recordar que si una funció és derivable en un punt ha d'ésser contínua; i el contrari no té perquè ésser cert. Llavors, donat que f''(x) no és contínua a x=0, f'''(x) no pot estar definida a x=0.

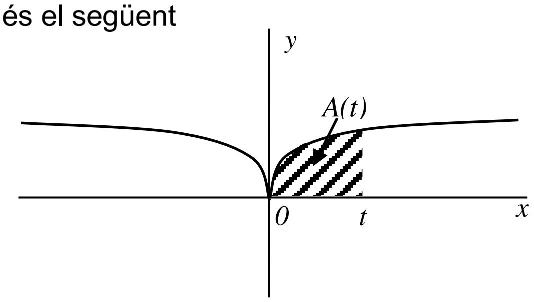
10J-B(4). Sigui A(t), t>0, l'àrea de la regió limitada per la corba $y=\sqrt[3]{x^2}$ i les rectes y=0, x=t. Representau gràficament aquesta regió i calculau el valor de t per al qual A(t)=1.

Solució:

Per representar la funció $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3}$, recopilam informació important

- Dom f= R. La funció és sempre positiva.
- La derivada és $y'=\frac{2}{3}x^{-1/3}$; no està definida a x=0.
- y és creixent per a x>0
- y és decreixent per a x<0

El dibuix de la regió és el següent



La funció A(*t*) queda definida per la integral definida

$$A(t)=\int_0^t x^{2/3}dx=\left.\frac{x^{5/3}}{5/3}\right|_0^t=\frac{3}{5}t^{5/3}=\frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5}=\frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5}$$

Ens demanen quan és que A(t)=1?

$$\frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5}=1 \;\rightarrow\; t^{5/3}=\frac{5}{3} \;\rightarrow\; t=\left(\frac{5}{3}\right)^{3/5}\approx 1{,}3586...$$