

Model 1

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Considerau les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda & 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculau el determinant de la matriu A . (1 punt)
 - (b) En funció del paràmetre λ , calculau el rang de la matriu A . (3 punts)
 - (c) Per al valor de $\lambda = 1$, calculau la matriu inversa de A , A^{-1} . (3 punts)
 - (d) Per al valor de $\lambda = 1$, resoleu l'equació matricial $XA = B$. (3 punts)
2. Durant un any, certa empresa ven 21000 vehicles de tres models A , B i C , al preu de 10000, 15000 i 20000 euros, respectivament. El total de les vendes és de 332 milions d'euros. S'ha observat que també s'han venut 21000 vehicles comptant només els del model B i λ vegades els del model A .
- (a) Plantejau un sistema d'equacions amb les condicions del problema, en funció del nombre de vehicles venuts de cada model. (3 punts)
 - (b) Calculau el nombre de vehicles venuts de cada model, suposant $\lambda = 3$. (3 punts)
 - (c) Determinau si existeix algun valor del paràmetre λ per al qual l'anterior situació no es pugui donar. (4 punts)
3. Donades les funcions $f(x) = x^2 - 4x$ i $g(x) = 4 - 4x$.
- (a) Representau-les gràficament en un mateix sistema de coordenades. (5 punts)
 - (b) Calculau els punts de tall d'ambdues gràfiques. (2 punts)
 - (c) Calculau l'àrea del recinte limitat per les gràfiques d'ambdues funcions. (3 punts)



4. Sigui la funció $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

- (a) Calculeu el domini i els punts de tall de la gràfica de la funció amb els eixos. (2 punts)
- (b) Calculeu la derivada de la funció i obteniu els intervals de creixement i decreixement. (2 punts)
- (c) Comproveu que $f(-1) = f(1)$ i que $f'(x)$ no és mai zero a l'interval $[-1, 1]$. Contradiu aquest fet el teorema de Rolle? (3 punts)
- (d) Feu un esbós de la gràfica de la funció $y = f(x)$. (3 punts)

5. Sigui a un paràmetre real. Considerau el pla $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$, el punt $P(1, 1, 0)$ i la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0, \\ x - az = 1. \end{cases}$$

En cada cas, si existeix, obteniu el valor del paràmetre a per al qual:

- (a) el punt P pertany a la recta r . (1 punt)
 - (b) la recta r i el pla π es tallen en un únic punt. (3 punts)
 - (c) la recta r està continguda en el pla π . (3 punts)
 - (d) la recta r és perpendicular al pla π . (3 punts)
6. Donats els punts $A(1, 1, 1)$, $B(0, 0, -2)$, $C(2, -1, 0)$, $D(-1, 2, -1)$ i $E(0, 0, 0)$.
- (a) Comproveu que els punts A , B i C determinen un únic pla, π . (2 punts)
 - (b) Esbrinau si el triangle de vèrtexs A , B i C és rectangle en el vèrtex A . (3 punts)
 - (c) Trobau l'angle que forma la recta que passa pels punts A i D amb el pla π . (3 punts)
 - (d) Calculeu el volum del tetraedre definit pels vectors \vec{AB} , \vec{AC} i \vec{AD} . (2 punts)
7. Una prova diagnòstica d'una malaltia dona resultat negatiu el 5% de les vegades que s'aplica a un individu que la pateix i dona positiu el 10% de les vegades que s'aplica a un individu que no la pateix. Les estadístiques mostren que la dita malaltia afecta 50 de cada 10000 persones. Si una persona escollida a l'atzar se sotmet a la prova diagnòstica, calculeu les probabilitats següents:
- (a) Que un individu no pateixi la malaltia. (1 punt)
 - (b) Que la prova doni resultat positiu. (3 punts)
 - (c) Que la persona no pateixi la malaltia, si el resultat de la prova és negatiu. (3 punts)
 - (d) Que el resultat de la prova sigui erroni. (3 punts)



-
8. Es tenen tres urnes A , B i C . L'urna A conté 4 bolles vermelles i 2 bolles negres. L'urna B conté 3 bolles vermelles i 3 bolles negres. L'urna C conté 6 bolles negres. S'escull una urna a l'atzar i s'extreuen dues bolles de manera consecutiva i sense reemplaçament.
- (a) Calculau la probabilitat que la primera bolla extreta sigui vermella. (3 punts)
 - (b) Calculau la probabilitat que la primera bolla extreta sigui vermella i la segona sigui negra. (3 punts)
 - (c) Sabent que la primera bolla extreta és vermella, calculau la probabilitat que la segona sigui negra. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$