		Convocatòria
IEDIB	**EXAMEN DE MATEMÀTIQUES I** PRIMER BATXILLERAT / BAT_MAT1	**Maig**

Solucions a l'examen model de maig: 2a Avaluació

1. **Lliurament 5**

Resolem l'equació $2x^2 + 6x = 0$ i trobam les solucions $x = 0$, $x = -3$. La funció pot tenir fins 2 asímptotes verticals.

Calculam els límits laterals en cada solució:

$x = -3$:

i $\lim_{x\to -3^-} \frac{5x^2+1}{2x^2+6x} = \frac{+46}{+0} = +\infty$ i $\lim_{x\to -3^+} \frac{5x^2+1}{2x^2+6x} = \frac{+46}{-0} = -\infty$

La recta $x = -3$ és una asímptota vertical.

$x = 0$:

$\lim_{x\to 0^-} \frac{5x^2+1}{2x^2+6x} = \frac{+1}{-0} = -\infty$ i $\lim_{x\to 0^+} \frac{5x^2+1}{2x^2+6x} = \frac{+1}{+0} = +\infty$

La recta $x = 0$ és una asímptota vertical.

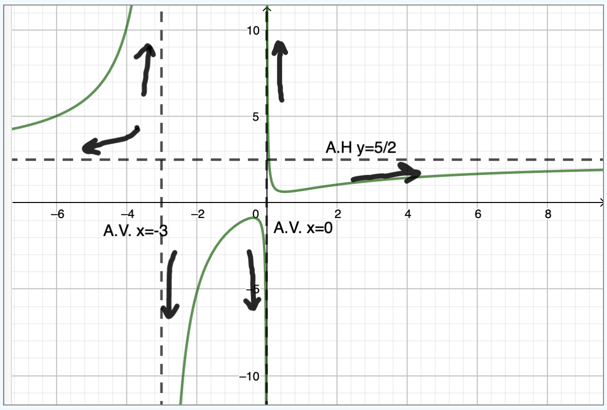
Atès que el grau del numerador és menor o igual al grau del denominador, té una asímptota horitzontal.

Calculam el límit a l'infinit: $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+1}{2x^2+6x}$ = $\frac{\infty}{\infty}$ =IND.= $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2/x^2+1/x^2}{2x^2/x^2+6x/x^2}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{5+1/x^2}{2+6/x} = \frac{5}{2}$

La recta $y = \frac{5}{2} = 2.5$ és una asímptota horitzontal. Per saber com ens acostam a l'asímptota, completam la següent taula:

x	f(x)	Asímptota	Posició
-100	2.5773	2.5	Per damunt
100	2.4272	2.5	Per davall

Amb aquesta informació podem representar les asímptotes i la forma en què la funció s'acosta a elles.



2. **Lliurament 6**

a)

- Talls amb l'eix OX: $y = 0 \to x^4 - 8x^2 + 2 = 0$. Obtenim una equació biquadrada, efectuam el canvi de variables $t = x^2$; $t^2 - 8t + 2 = 0$. Resolem l'equació de segon grau $t = 0,25834$ i $t = 7,7417$.
  Desfeim el canvi $x = \pm\sqrt{t}$: $x = \pm 0,5083$; $x = \pm 2,7824$
- Talls amb l'eix OY $x = 0 \to y = 2$

b) Calculam la derivada de la funció $f'(x) = 4x^3 - 16x$ i la igualam a zero

$4x^3 - 16x = 4x \cdot (x^2 - 4) = 0 \to x = \pm 2,\ x = 0$

Estudiam el signe de la derivada

$Signe\, f'$	$---$		$---$		$++$		$++$		$--$		$--$		$++$		$++$
		$.$		o		$.$		o		$.$		o		$.$	
		-3		-2		-1		0		1		2		3	

La funció creix a $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

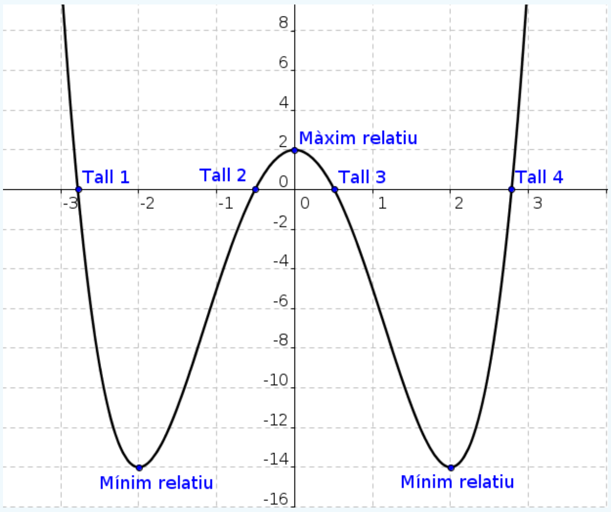
La funció decreix a $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

Sabem que tindrà un mínim a $x = -2$; $y = -14$

un màxim relatiu a $x = 0$, $y = 2$

i un altre mínim a $x = 2$, $y = -14$

c) Es tracta d'una funció simètrica parell donat que $f(-x) = f(x)$. La gràfica aproximada de la funció és:

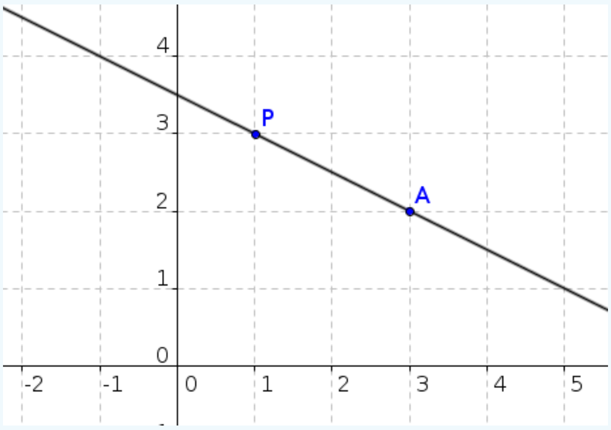


3. **Lliurament 7 i 8**

a) Ens diuen que el pendent de la recta és $-\frac{1}{2}$. Recordem la relació entre pendent i vector director $m = \frac{d_y}{d_x}$. D'aquí deduïm que el vector de la recta és $\vec{d}(2, -1)$.

Podem escriure directament l'equació vectorial com $(x, y) = (3, 2) + t(2, -1)$

Per representar-la gràficament, basta trobar un altre punt de la recta. Per trobar punts en forma vectorial, donam valors al paràmetre t. Per exemple, si feim $t = -1$ tenim $(x, y) = (1, 3)$. Dibuixam la recta que passa per dos punts



b) Si la recta anterior té vector director $\vec{d}(2, -1)$, un vector perpendicular a ell s'obté de girar les components i canviar un signe: $\vec{n} = (1, 2)$. Aquest és el vector director de la recta que ens demanen. A més, sabem que passa pel punt mitjà del segment $\bar{AB}$, $M = \dfrac{A+B}{2} = (4, 1)$

Comencem escrivint l'equació contínua $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{2}$

Efectuam els productes creuats $2(x-4) = y-1$, eliminam els parèntesis i simplificam. Arribam a l'equació general de la recta $2x - y - 7 = 0$.

IEDIB	**EXAMEN DE MATEMÀTIQUES I** PRIMER BATXILLERAT / BAT_MAT1	**Convocatòria** **Maig**

Solucions a l'examen model de maig: Examen final

1.

Anomenam $t = \ x$. Aquest canvi de variables, transforma l'equació a $t^2 - 2t = 0$. Es tracta d'una equació de segon grau incompleta. Treim factor comú $t \cdot (t-2) = 0$. Obtenim dues solucions $t = 0$ i $t = 2$. Ara desfeim el canvi:

- Si $t = 0$: $\operatorname{tg} x = 0 \to x = 0 + 360n$ i $x = 180 + 360n$
- Si $t = 2$: $\operatorname{tg} x = 2 \to x = \operatorname{arctg} 2 = 63,43 + n360$.

  També trobam una altra solució al 3r quadrant, és a dir, sumam 180 graus a l'angle anterior: $x = 243,43 + n360$.

De forma més compacta, podem escriure les solucions com: $x = \begin{cases} x = 0° + 180°n \\ x = 63,43° + 180°n \end{cases}$

Per expressar els angles en radiants, recordem que $180° = \pi$ rad. $x = \begin{cases} x = 0 + n\pi \\ x = 1,107 + n\pi \end{cases}$ rad.

2.

Anomenam x=edat mare, y =edat germana, z=edat del fill menor

Plantejam el sistema d'equacions $\begin{cases} x = & 2(y+z) \\ z = & \dfrac{y}{2} \\ x+y+z & = 45 \end{cases}$

Tot seguit preparam el sistema per poder-lo resoldre per Gauss. Cal eliminar els denominadors i parèntesis

$\begin{cases} x+y+z & = 45 \\ x-2y-2z & = 0 \\ -y+2z & = 0 \end{cases}$. A la $[2a] \to [2a] - [1a]$ $\begin{cases} x+y+z & = 45 \\ -3y-3z & = -45 \\ -y+2z & = 0 \end{cases}$.

Si dividim la segona entre -3, trobam $\begin{cases} x+y+z & = 45 \\ y+z & = 15 \\ -y+2z & = 0 \end{cases}$. A la tercera li sumam la segona $[3a] \to [3a] + [2a]$

$\begin{cases} x+y+z & = 45 \\ y+z & = 15 \\ 3z & = 15 \end{cases}$. El sistema ja es escalonat i podem trobar la solució $z = 5$, $y = 10$, $x = 30$.

3.

La funció $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ anul·la el denominador quan $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$

Calculem els límits

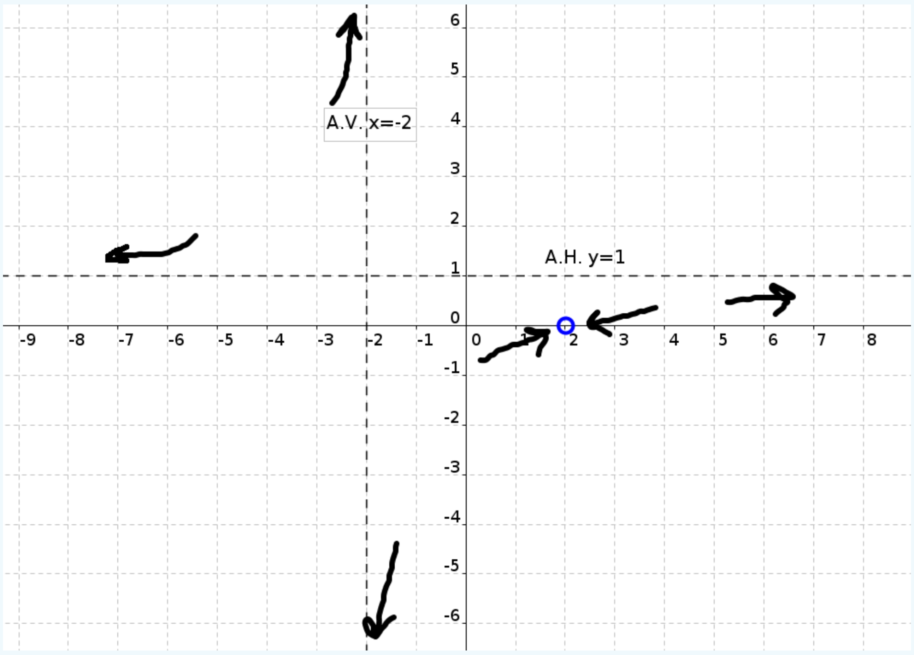
$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \dfrac{16}{0} = \pm\infty$. Segur que a $x=-2$ hi ha una asímptota vertical.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \dfrac{0}{0}$ =IND= $\lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^{\cancel{2}}}{(x+2)\cdot \cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x+2} = 0$. Donat que el límit és finit, NO hi ha asímptota a $x=2$.

Finalment, calculem el límit a infinit de la funció

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \dfrac{\infty}{\infty} = IND = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+4/x+4/x^2}{1-4/x^2} = 1$. Sabem que té asímptota horitzontal a $y=1$.

La situació gràfica és la següent:



4.

a) Per derivar $f(x) = \ln(x+1)\cdot\cos(x^2)$ aplicam la regla del producte:

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}\cdot\cos(x^2) + \ln(x+1)\cdot(-\sin(x^2))\cdot 2x = \dfrac{1}{x+1}\cdot\cos(x^2) - 2x\ln(x+1)\cdot\sin(x^2)$

A més hem hagut d'aplicar la regla de la cadena.

b) Calculam $f(0) = \ln(1)\cdot\cos 0 = 0$ i el pendent de la recta $m = f'(0) = 1$. Donat que el pendent és positiu, la funció creix en $x=0$.

L'equació de la recta tangent és $y = f(0) + f'(0)(x-a) \rightarrow y = 0 + 1(x-0)$; és a dir, $y = x$.

5.

a) Cercam el vector $\vec{d} = \vec{AB} = B - A = (9,7) - (-3,-2) = (12,9)$. El pendent és $m = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$. Escrivim l'equació punt pendent $y+2 = \frac{3}{4}(x+3)$. Operam per obtenir l'equació general $3x-4y+1 = 0$

b) La longitud del segment és la distància entre els dos punts. S'obté del mòdul del vector que els uneix $d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{12^2+9^2} = 15$

c) Ens demanen la distància entre la recta $r:\ 3x-4y+1 = 0$ i el punt $C = (2,8)$. Aplicam la fórmula: $d(r,C) = \dfrac{|3\cdot 2 - 4\cdot 8 + 1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{25}{5} = 5$. Recordam que la distància sempre és positiva i cal prendre el valor absolut.

6.

a) El coeficient de correlació lineal és $r = \dfrac{20,75}{1,71\cdot 12,45} = 0,974$. Atès que r és positiu i proper a la unitat, es dona una correlació positiva forta.

b) L'equació de la recta de regressió és $y = 28,5 + \dfrac{20,75}{1,71^2}(x - 3,5)$. Si simplificam obtenim la recta: $y = 7,096\cdot x + 3,66$.

A partir de la recta de regressió podem fer l'estimació substituïnt $x = 8$; $y = 7,096\cdot 8 + 3,66 = 60,43$ milers d'euros en vendes. Aquesta extrapolació és fiable perquè $r \approx 1$ i no ens em anat massa enfora del rang de dades.