IEDIB

Solucions

MICROTASCA D'APRENENTATGE BAT_MAT2 3.1

VECTORS
i
RECTES

Professor: *Josep Mulet*

1. Considerau els vectors $\vec{u} = (3, -7, 1)$ i $\vec{v} = (m, 1, 4)$

a) Troba m perquè els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ siguin ortogonals.

b) Troba un vector unitari en la direcció de $\vec{u}$.

c) Calcula m perquè $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tinguin igual mòdul.

a) Dos vectors són perpendiculars si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -7, 1) \cdot (m, 1, 4) = 3m - 7 + 4 = 3m - 3 = 0$$

$$3m = 3 \longrightarrow m = 1$$

b) Un vector és unitari si té mòdul 1 $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-7)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 49 + 1} = \sqrt{59}$$

$$\hat{\vec{u}} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{59}} (3, -7, 1) = \left(\frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{-7}{\sqrt{59}}, \frac{1}{\sqrt{59}} \right)$$

c) $$\left(\cancel{\sqrt{59}}\right)^{\cancel{2}} = \left(\cancel{\sqrt{m^2 + 1^2 + 4^2}}\right)^{\cancel{2}} \rightarrow 59 = m^2 + 17$$

$$m^2 = 42 \rightarrow m = \pm\sqrt{42}$$

2. Considerau els vectors $\vec{u} = (1, 2, -1)$ i $\vec{v} = (0, 1, 2)$

a) Calcula un vector $\vec{w}$ perperdicular a $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

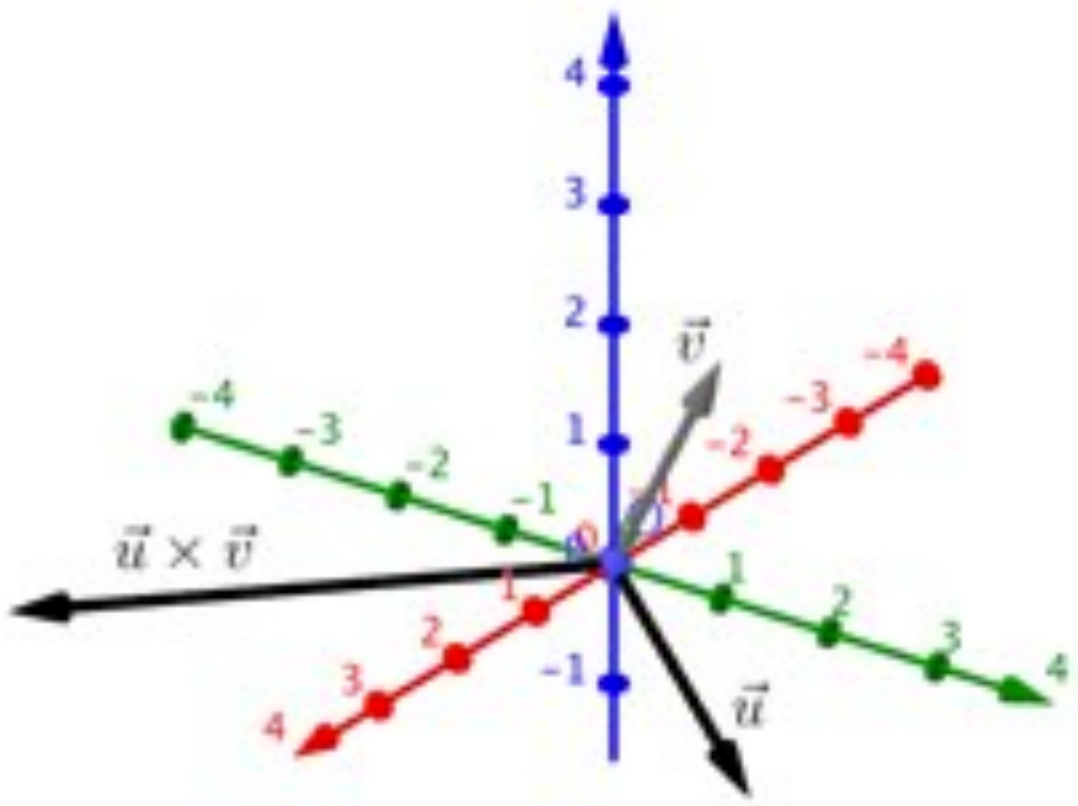
b) Un vector $\vec{w}$ que sigui coplanari amb $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

---

a) $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (5, -2, 1).$$

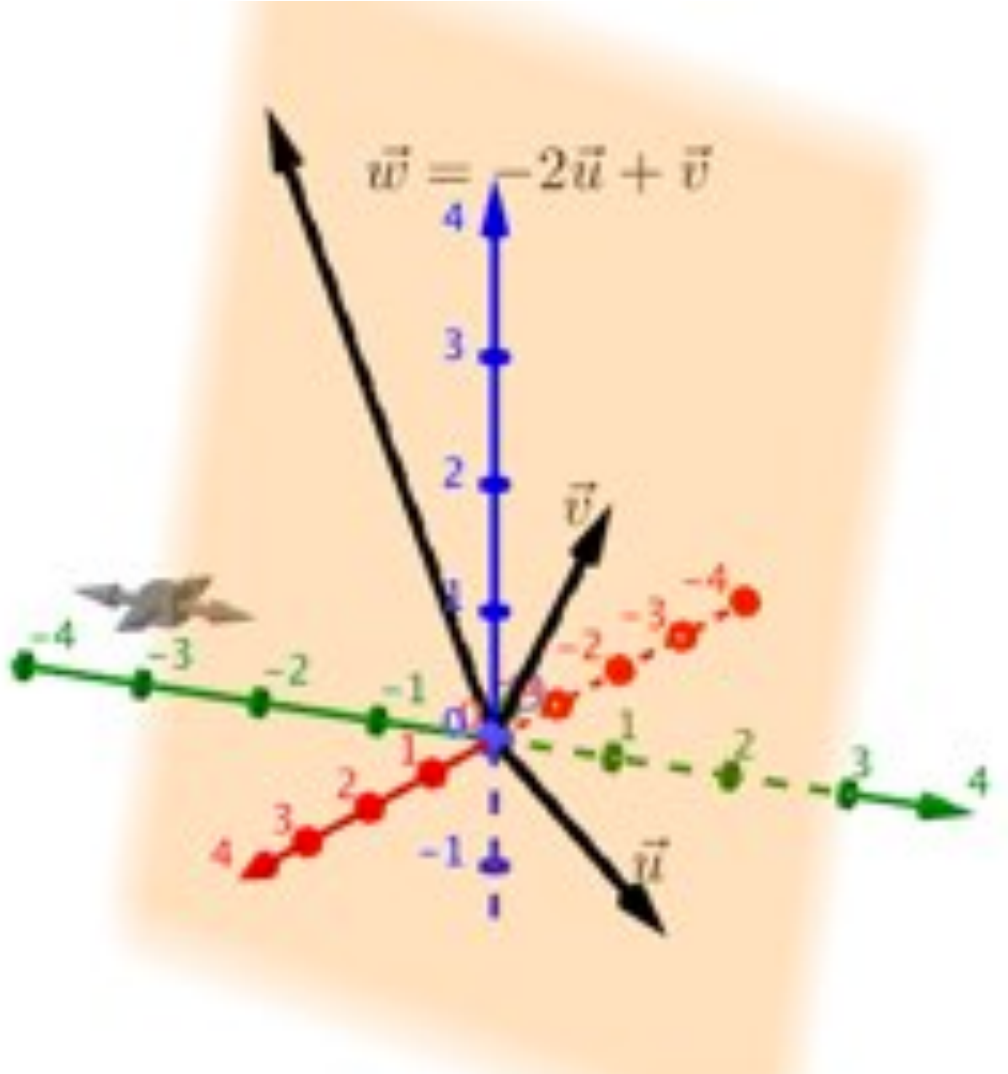
$$\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v}) = (-5, 2, -1)$$



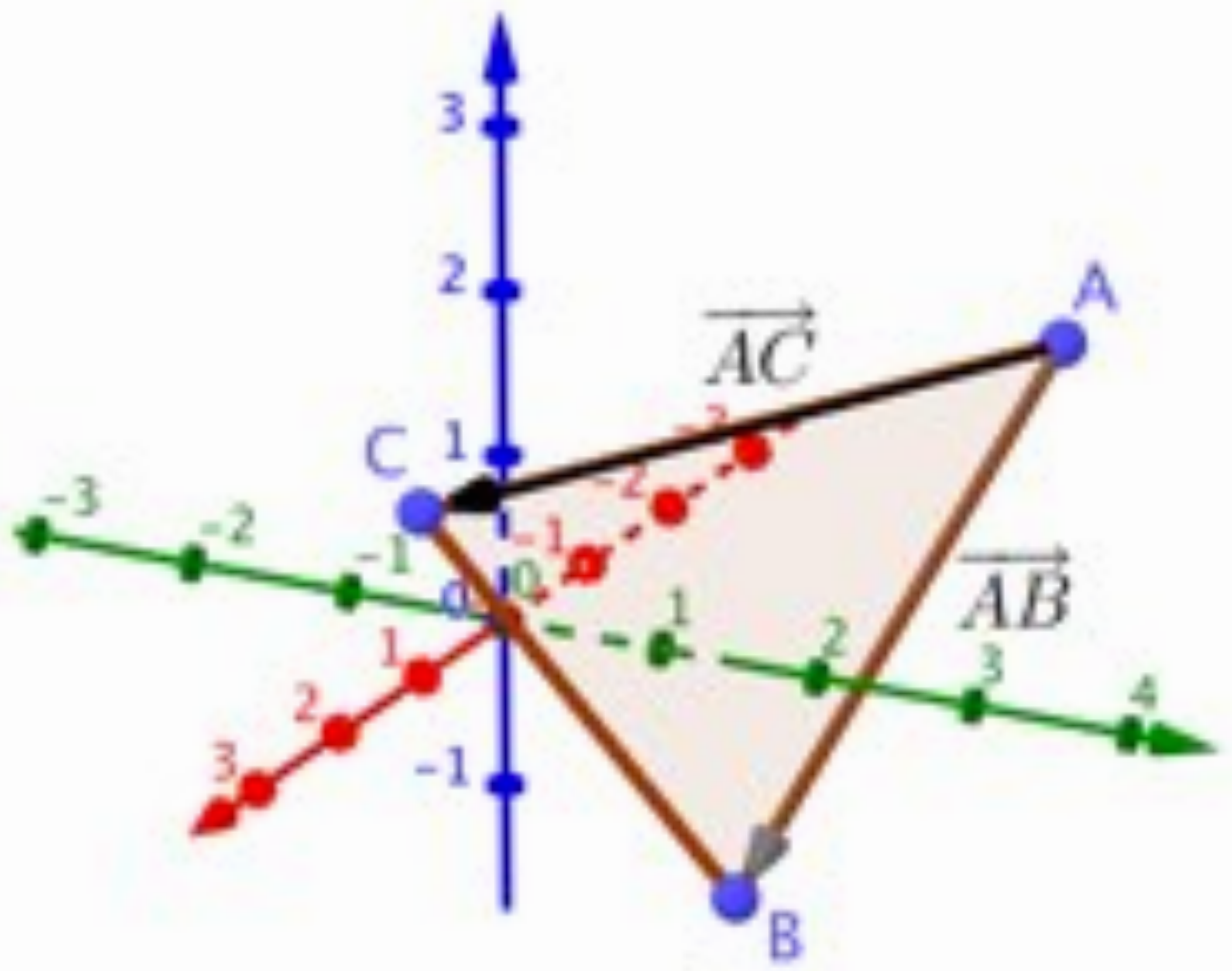
b) $$\vec{w} = \underline{\underline{\alpha}}\, \vec{u} + \underline{\underline{\beta}}\, \vec{v} = -2\vec{u} + \vec{v} :$$

$$= -2(1, 2, -1) + (0, 1, 2) =$$

$$= (-2, -3, 4)$$



3. Calcula l'àrea del triangle format pels punts $A = (-3, 2, 1)$, $B = (1, 2, -1)$ i $C = (1, 0, 1)$.



$$A_{Triangle} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$$

$$\vec{AB} = B - A = (1,2,-1) - (-3,2,1) = (4,0,-2)$$

$$\vec{AC} = C - A = (1,0,1) - (-3,2,1) = (4,-2,0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}$$

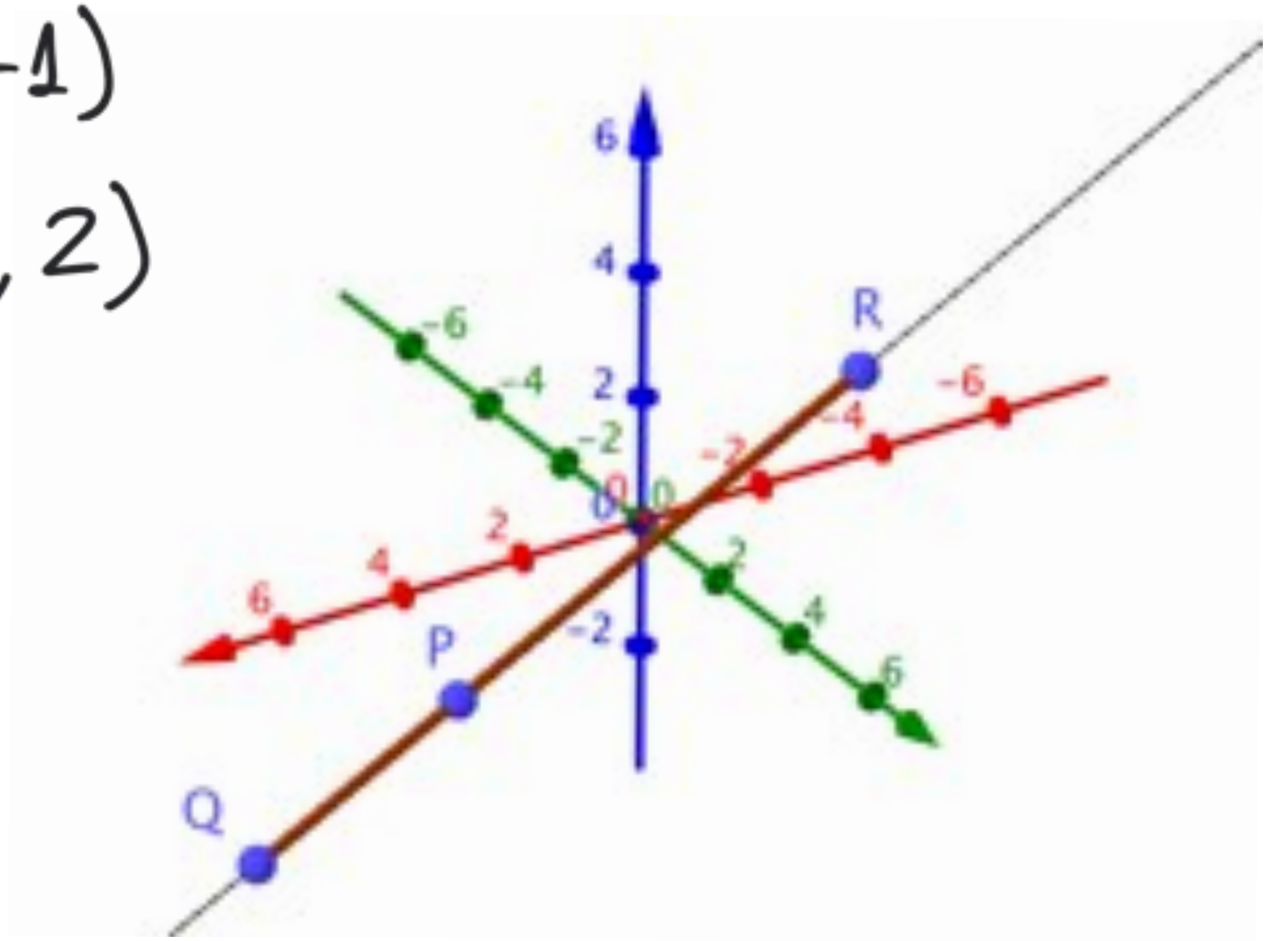
$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$\boxed{A_{Triangle} = 6 \text{ u.a.}}$$

4. Comprova si hi ha alguna recta que passi pels punts $P(5,3,0)$, $Q(9,4,-1)$ i $R(-3,1,2)$. En cas afirmatiu trobau l'equació general de la recta que passa per ells. En altre cas, trobau l'àrea del triangle que determinen.

$$\vec{PQ} = Q - P = (9,4,-1) - (5,3,0) = (4,1,-1)$$

$$\vec{PR} = R - P = (-3,1,2) - (5,3,0) = (-8,-2,2)$$



$$\vec{PR} = -2\,\vec{PQ}$$

$$\vec{PR} \parallel \vec{PQ}$$

$P(5,3,0)$ $\quad \vec{d} = (4,1,-1)$

Paramètriques

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

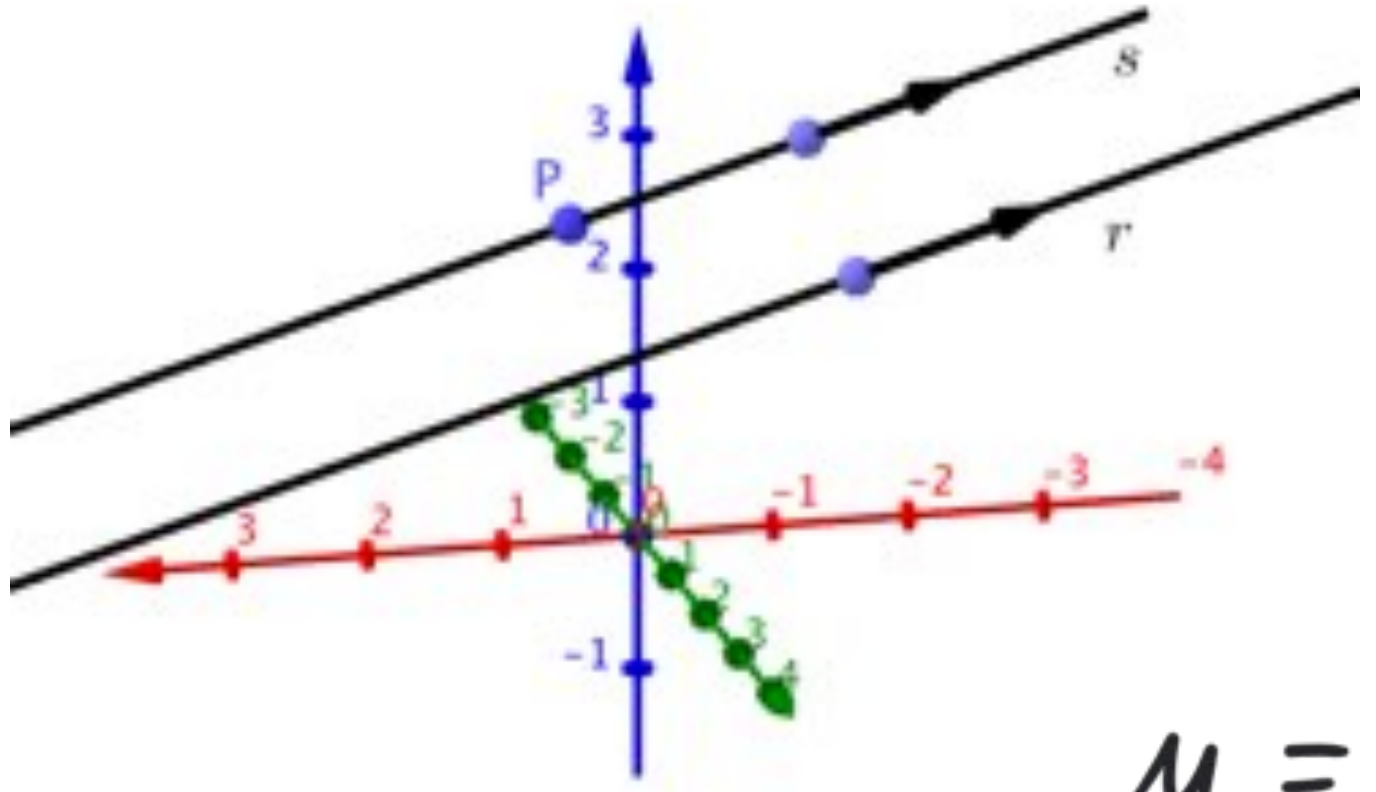
Contínua

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$$

General

$$\begin{cases} x + 4z = 5 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

5. Troba l'equació de la recta que passa pel punt $P = (1, 2, 3)$ i és paral·lela a la recta $r : \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases}$



$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 + z \\ x - y = 4 - 3z \end{cases} \xrightarrow[\cdot 3]{} \begin{cases} 2x + 3y = 1 + z \\ 3x - 3y = 12 - 9z \end{cases}$$

$$5x = 13 - 8z$$

$$x = \frac{13 - 8z}{5}$$

$$y = x - 4 + 3z = \frac{13 - 8z}{5} - 4 + 3z = \frac{13 - 8z - 20 + 15z}{5} = \frac{-7 + 7z}{5}$$

$$x = \frac{13}{5} - \frac{8z}{5}$$

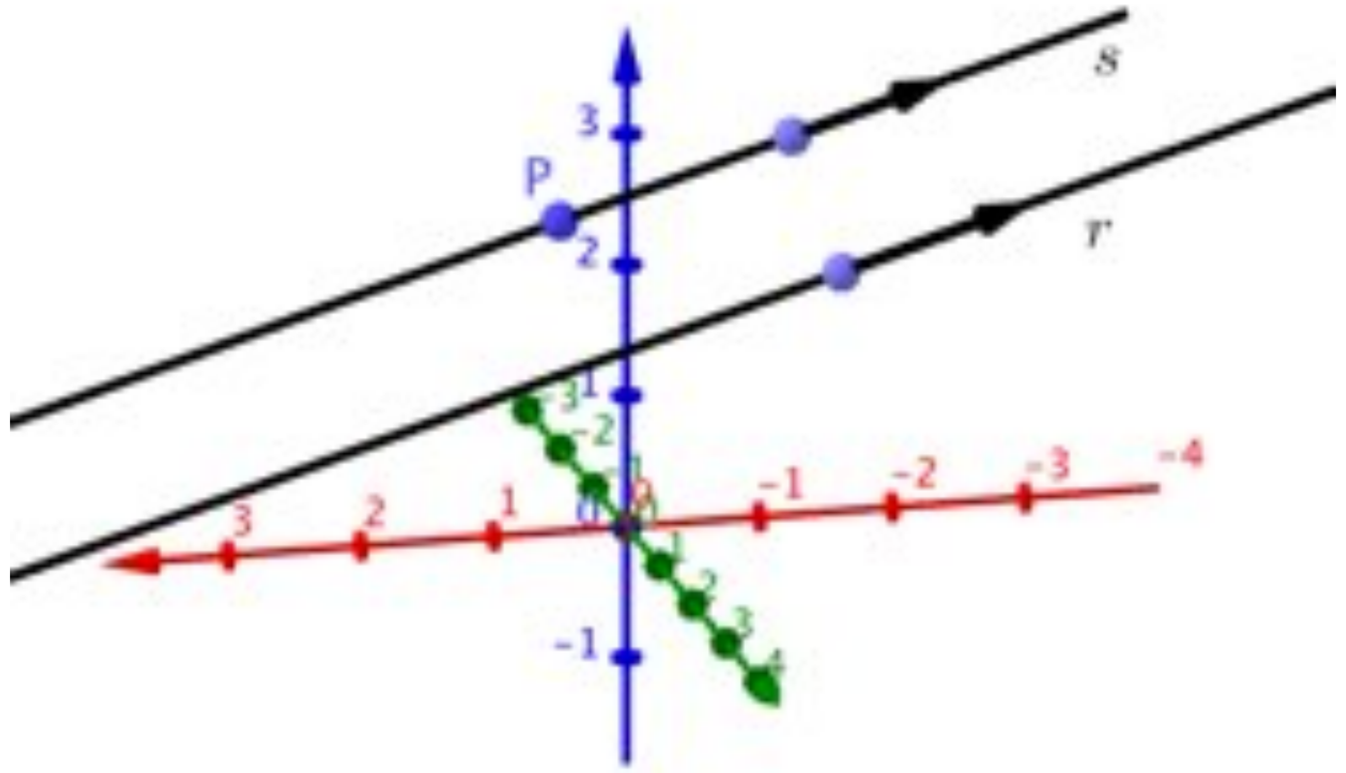
$$y = \frac{-7}{5} + \frac{7z}{5}$$

$$z = \quad z$$

$$\vec{d} = \left(-\frac{8}{5}, \frac{7}{5}, 1\right) \xrightarrow[\cdot 5]{} \vec{d}\,(-8, 7, 5)$$

$$\boxed{s: \quad \frac{x - 1}{-8} = \frac{y - 2}{7} = \frac{z - 3}{5}}$$

5. Troba l'equació de la recta que passa pel punt $P=(1,2,3)$ i és paral·lela a la recta $r:\begin{cases}2x+3y-z=1\\x-y+3z=4\end{cases}$



$\vec{n}_1=(2,3,-1)$

$\vec{n}_2=(1,-1,3)$

$$\vec{d}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&-1\\1&-1&3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3&-1\\-1&3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}$$

$$=8\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k}$$

$\vec{d}=(8,-7,-5)$

Forma alternativa de trobar el vector director de la recta r