

PBAU MATEMÀTIQUES II

EXAMEN PBAU

Convocatòria Setembre 2020

Opció A

Josep Mulet Pol



PBAU MATEMÀTIQUES II



**Aquest vídeo és una proposta de resolució de l'examen
PBAU.**

**Trobareu les solucions oficials a la pàgina de la UIB
<https://estudis.uib.cat/grau/acces/batxiller/>**

Problema 1a

1. Donada l'equació matricial

$$M \cdot X + N = P$$

on X és la matriu incògnita i

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Per a quins valors del paràmetre a existeix la matriu inversa de M ?

b) Calcula la matriu inversa de M .

c) Per a $a=2$, resol l'equació matricial si és possible.

d) Per als valors de a pels quals existeix la inversa de M , resol l'equació matricial.

M té inversa si $|M| \neq 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & a \end{vmatrix} = -a - a^2 = -a \cdot (1+a)$$

$$-a \cdot (1+a) = 0 \quad \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ i $a \neq -1$ M té inversa
 M és regular

M és ⁰ invertible .

Problema 1b

1. Donada l'equació matricial

$$M \cdot X + N = P$$

on X és la matriu incògnita i

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Per a quins valors del paràmetre a existeix la matriu inversa de M ?

b) Calcula la matriu inversa de M .

- c) Per a $a=2$, resol l'equació matricial si és possible.

- d) Per als valors de a pels quals existeix la inversa de M , resol l'equació matricial.

- Si $a \neq 0, a \neq -1$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \text{adj } M^t$$

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menors}} \begin{pmatrix} a & a \\ a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{\text{adj}} \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{|M|} M^{-1} = \frac{1}{-a(a+1)} \cdot \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|M| = -a \cdot (a+1)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a(a+1)} \end{pmatrix}$$

Problema 1c

1. Donada l'equació matricial

$$M \cdot X + N \xrightarrow{P} P$$

on X és la matriu incògnita i

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Per a quins valors del paràmetre a existeix la matriu inversa de M ?
- b) Calcula la matriu inversa de M .
- c) Per a $a=2$, resol l'equació matricial si és possible.**
- d) Per als valors de a pels quals existeix la inversa de M , resol l'equació matricial.

$$\begin{aligned} M \cdot X &= P - N \\ \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{\text{II} \cdot X} \cdot X &= M^{-1} \cdot (P - N) \\ X &= M^{-1} \cdot (P - N) \end{aligned}$$

$$a=2$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Problema 1d

1. Donada l'equació matricial

$$M \cdot X + N = P$$

on X és la matriu incògnita i

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Per a quins valors del paràmetre a existeix la matriu inversa de M ?
- b) Calcula la matriu inversa de M .
- c) Per a $a=2$, resol l'equació matricial si és possible.
- d) Per als valors de a pels quals existeix la inversa de M , resol l'equació matricial.**

$$X = M^{-1} \cdot (P - N)$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a(a+1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2}{a+1} & \frac{-2}{a+1} \\ \frac{2}{a+1} & \frac{2}{a+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problema 2a

2. Considera la funció

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x^2-9}$$

a) Determina: el domini, els intervals de creixement i decreixement, les coordenades dels màxims i mínims i el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

b) Fes un esbós de la gràfica.

c) Obté els valors de A i B per als quals $f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$

d) Calcula l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x=-2$ i $x=2$.

- Domini

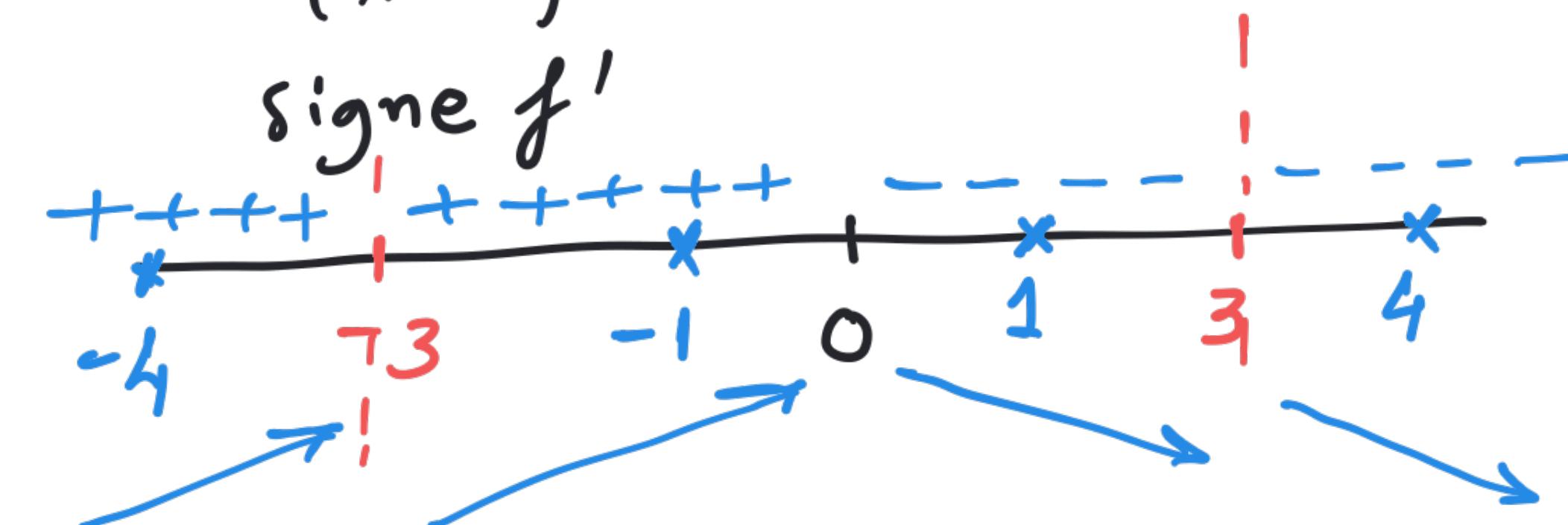
$$(x-3) \cdot (x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

$$\text{Dom } f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

- Monotonia i extreus

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$



f creixent $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$
 f decreixent $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

$x=0, y = -\frac{1}{9}$
 Màxim relatiu

Problema 2a

2. Considera la funció

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x^2-9}$$

a) Determina: el domini, els intervals de creixement i decreixement, les coordenades dels màxims i mínims i el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

b) Fes un esbós de la gràfica.

c) Obté els valors de A i B per als quals $f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$

d) Calcula l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x=-2$ i $x=2$.

- Domini $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$
- Monotonia
 - creix $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$
 - decreix $(0, 3) \cup (3, +\infty)$
 - Màxim relatiu $x=0; y=\frac{1}{9}$

- Límits a l'infinít

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(\pm\infty)^2-9} = \frac{1}{\infty-9} = \frac{1}{\infty} = 0$$

A. H.
 $y=0$
 eix OX

Problema 2b

2. Considera la funció

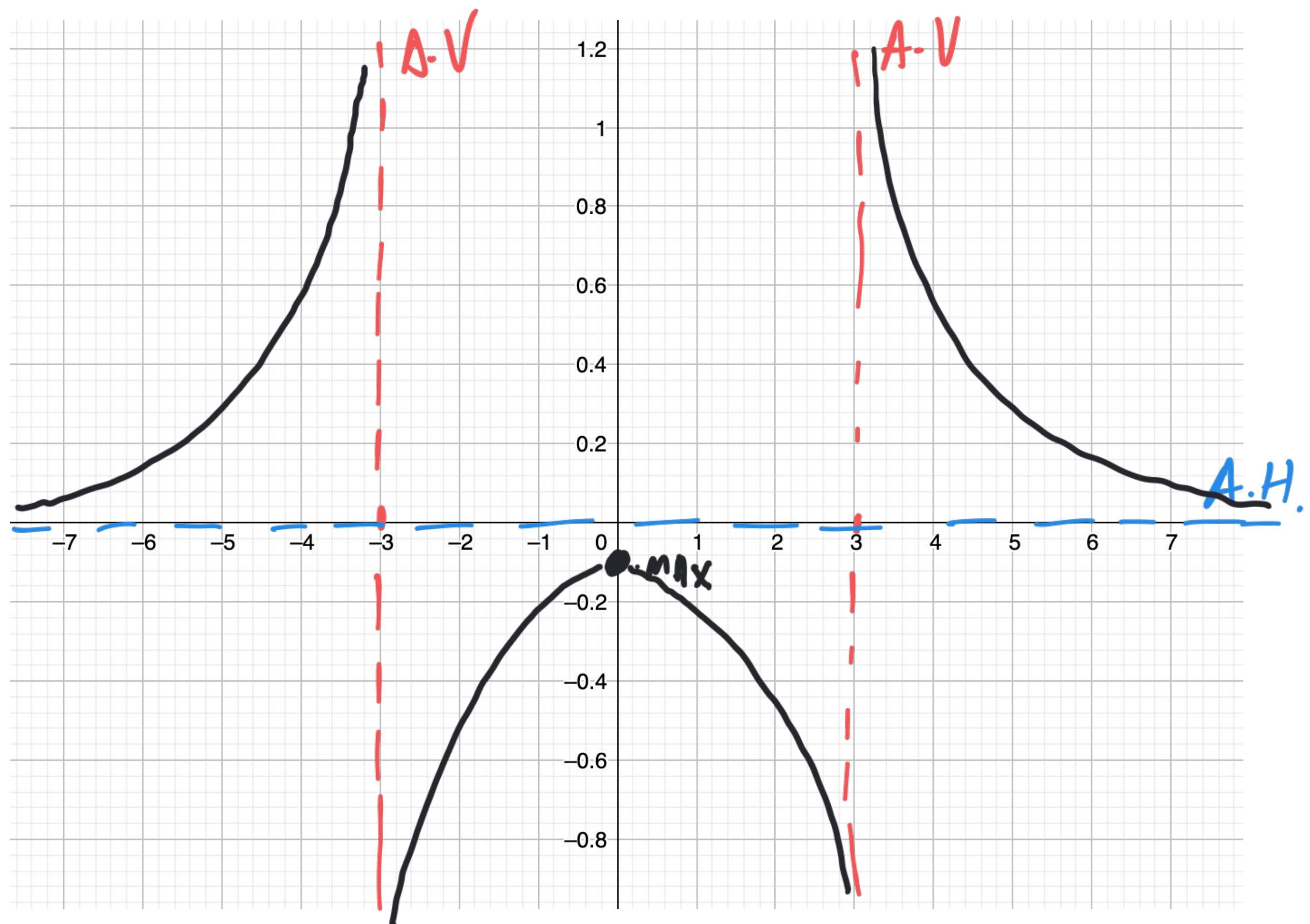
$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x^2 - 9}$$

a) Determina: el domini, els intervals de creixement i decreixement, les coordenades dels màxims i mínims i el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

b) Fes un esbós de la gràfica.

c) Obté els valors de A i B per als quals $f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$

d) Calcula l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x=-2$ i $x=2$.



Problema 2c

2. Considera la funció

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

a) Determina: el domini, els intervals de creixement i decreixement, les coordenades dels màxims i mínims i el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

b) Fes un esbós de la gràfica.

c) Obté els valors de A i B per als quals $f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$

d) Calcula l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x=-2$ i $x=2$.

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \underbrace{\frac{A}{x-3}}_{+} + \underbrace{\frac{B}{x+3}}_{=} = \frac{(x+3)A + (x-3)B}{(x-3)(x+3)}$$

$$1 = (x+3) \cdot A + (x-3) \cdot B$$

$$x=3 \quad 1 = 6 \cdot A \quad \cancel{+ 0 \cdot B} \rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$x=-3 \quad 1 = \cancel{0 \cdot A} - 6B \rightarrow B = -\frac{1}{6}$$

Problema 2d

PBAU_MAT2

2. Considera la funció

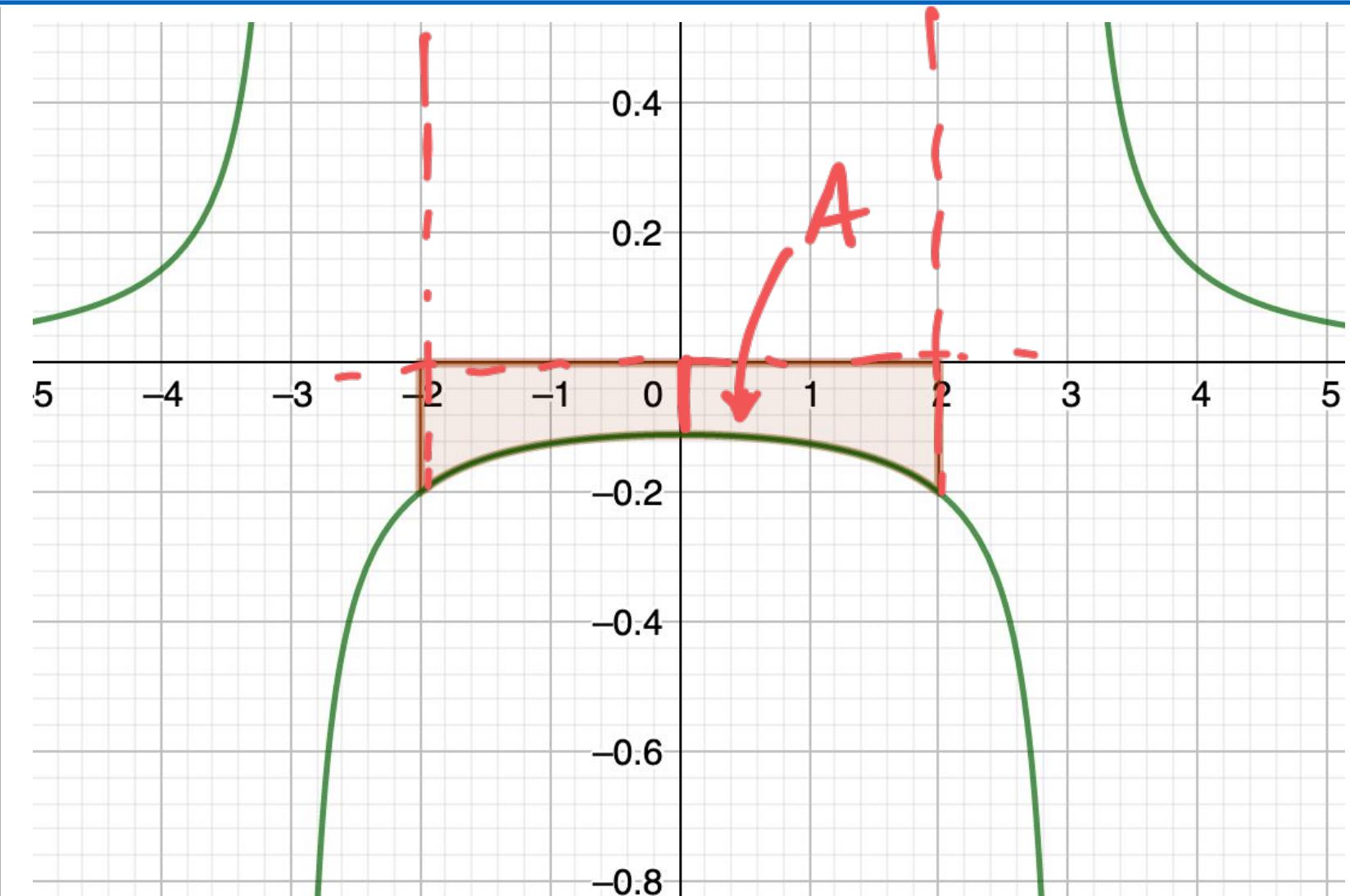
$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

a) Determina: el domini, els intervals de creixement i decreixement, les coordenades dels màxims i mínims i el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

b) Fes un esbós de la gràfica.

c) Obté els valors de A i B per als quals $f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$

d) Calcula l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x=-2$ i $x=2$.



$$A = \left| \int_{-2}^2 f(x) dx \right|$$

$$= 2 \left| \int_0^2 f(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{(x-3)(x+3)} dx = \int \left(\frac{1}{6} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{6} \frac{1}{x+3} \right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| \end{aligned}$$

$A = 2 \left| F(2) - F(0) \right|$
 $= 2 \cdot \frac{1}{6} \ln 5 = \frac{\ln 5}{3}$

Problema 3a

3. Donades les rectes

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

a) calcula un vector de posició i un vector director de cada una.

b) Calcula l'equació vectorial de cada una.

c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferència dels dos vectors de posició obtinguts.

d) Del rang anterior, dedueix la posició relativa de les dues rectes.

$$\text{I}) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 12} \begin{cases} 15x + 12y = -17 + 14z \\ 96x - 12y = 276 + 60z \end{cases} \quad \begin{matrix} 15x + 12y = -17 + 14z \\ 96x - 12y = 276 + 60z \\ \hline 111x = 259 + 74z \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} y &= 8x - 23 - 5z \\ &= 8 \cdot \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}z \right) - 23 - 5z \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}z \\ y = -\frac{13}{3} + \frac{1}{3}z \\ z = 1z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\vec{d}_I = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \quad // \quad \vec{d}'_I = (2, 1, 3)$$

$$z=1 \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=1 \end{cases}$$

$$P_I = (3, -4, 1)$$

Problema 3a

3. Donades les rectes

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

a) calcula un vector de posició i un vector director de cada una.

b) Calcula l'equació vectorial de cada una.

c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferència dels dos vectors de posició obtinguts.

d) Del rang anterior, dedueix la posició relativa de les dues rectes.

$$\text{II}) \quad \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \uparrow = \end{array} \quad \begin{array}{l} 18x + 10y = 10 + 4z \\ 120x - 10y = 335 + 65z \\ \hline 138x = 345 + 69z \end{array}$$

$$24\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}z\right) - 2y - 13z = 67$$

$$60 + 12z - 2y = 67 + 13z$$

$$-7 - z = 2y$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}z \\ y = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}z \\ z = 1z \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \parallel \vec{d}_{II} (1, -1, 2)$$

$$z = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} x \\ \quad \end{array} \right.$$

Problema 3b

3. Donades les rectes

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

a) calcula un vector de posició i un vector director de cada una.

b) Calcula l'equació vectorial de cada una.

c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferència dels dos vectors de posició obtinguts.

d) Del rang anterior, dedueix la posició relativa de les dues rectes.

I) $\vec{d}_I (2, 1, 3)$

$P_I (3, -4, 1)$

$$(x, y, z) = (3, -4, 1) + \lambda (2, 1, 3)$$

II) $\vec{d}_{II} (1, -1, 2)$

$P_{II} (3, -4, 1)$

$$(x, y, z) = (3, -4, 1) + t (1, -1, 2)$$

Problema 3c

3. Donades les rectes

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

a) calcula un vector de posició i un vector director de cada una.

b) Calcula l'equació vectorial de cada una.

c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferència dels dos vectors de posició obtinguts.

d) Del rang anterior, dedueix la posició relativa de les dues rectes.

$$\vec{d}_I = (2, 1, 3) \quad \vec{d}_{II} = (1, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{P_{II}P_I} = \vec{P}_I - \vec{P}_{II} = (3, -4, 1) - (3, -4, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{rang } M = 2$$

Problema 3d

3. Donades les rectes

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

a) calcula un vector de posició i un vector director de cada una.

b) Calcula l'equació vectorial de cada una.

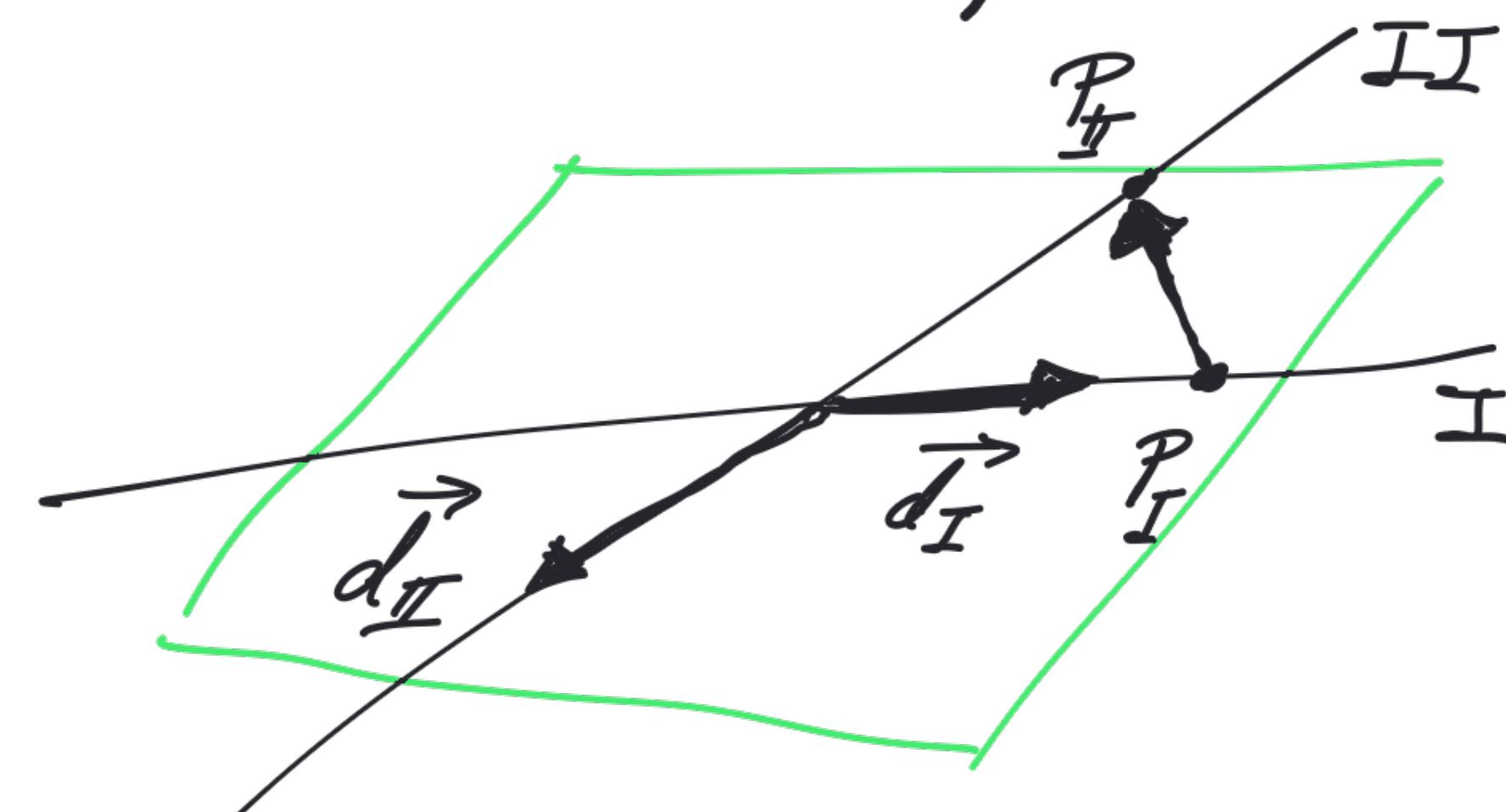
c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferència dels dos vectors de posició obtinguts.

d) Del rang anterior, dedueix la posició relativa de les dues rectes.

$$\vec{d}_I = (2, 1, 3) \quad \vec{d}_{II} = (1, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{P_{II} P_I} = \vec{P_I} - \vec{P_{II}} = (3, -4, 1) - (3, -4, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{rang } M = 2$$



Les rectes I, II
es tallen en el
punt $(3, -4, 1)$

Problema 4a

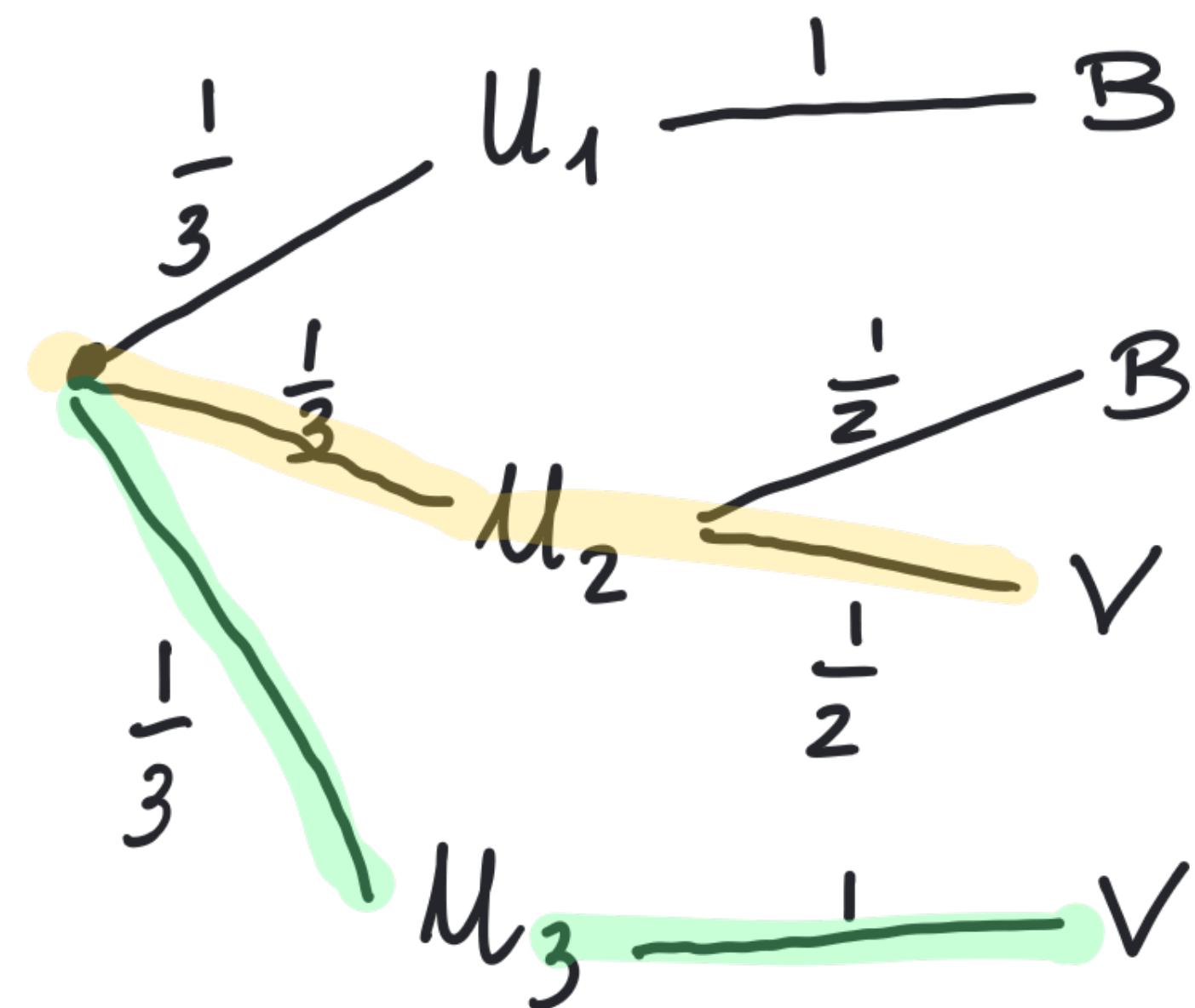
4. Tenim tres urnes, la primera conté 2 bolles blaves; la segona, 1 bolla blava i 1 de vermella; la tercera, 2 bolles vermelles. Feim l'experiment aleatori

"Triam una urna a l'atzar i extraiem una bolla"

Suposa que totes les urnes tenen la mateixa probabilitat d'ésser escollides.

a) Calcula la probabilitat del succés R = "bolla extreta vermella"

b) Si la bolla extreta resulta que és vermella, quina és la probabilitat que l'urna escollida hagi estat la tercera?



$$P(V) = P(U_2) \cdot P(V|U_2) + P(U_3) \cdot P(V|U_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Problema 4b

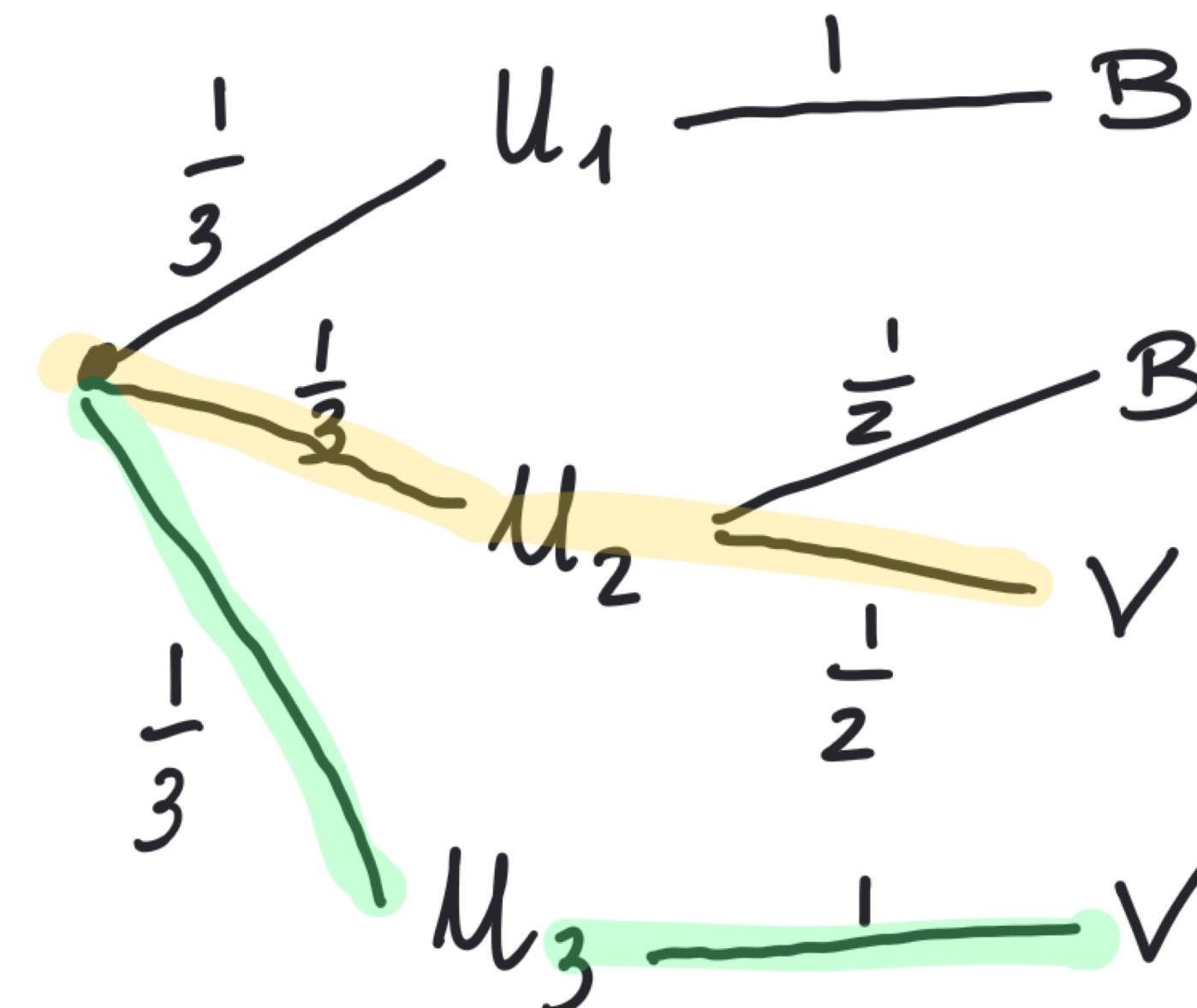
4. Tenim tres urnes, la primera conté 2 bolles blaves; la segona, 1 bolla blava i 1 de vermella; la tercera, 2 bolles vermelles. Feim l'experiment aleatori

"Triam una urna a l'atzar i extraiem una bolla"

Suposa que totes les urnes tenen la mateixa probabilitat d'ésser escollides.

a) Calcula la probabilitat del succès
 $R = \text{"bolla extreta vermella"}$

b) Si la bolla extreta resulta que és vermella, quina és la probabilitat que l'urna escollida hagi estat la tercera?



Teorema Bayes

$$\begin{aligned}
 P(U_3 | V) &= \frac{P(V | U_3) \cdot P(U_3)}{P(V)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$



<https://iedib.net>

Josep Mulet Pol
(2021)

