Lliurament 6:

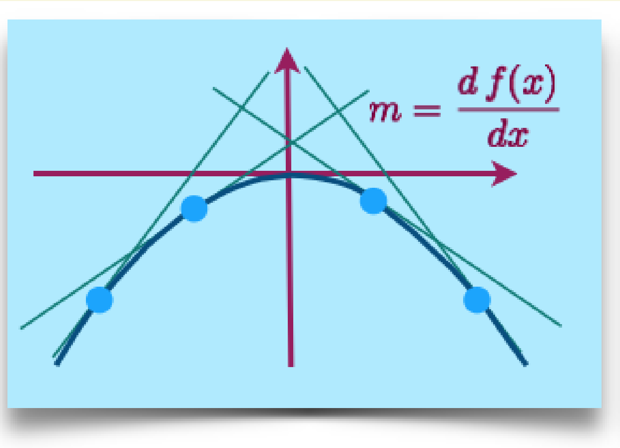
Derivades de funcions i les seves aplicacions

Matemàtiques II

Josep Mulet Pol

Àmbit científic

IEDIB



https://iedib.net/

Índex

1. Definició de derivada

En aquest lliurament ens proposam l'objectiu de mesurar el ritme de canvi d'una funció. Per exemple, si un cotxe canvia la seva posició en el temps, el ritme o taxa de canvi de la posició l'anomenam velocitat. La quantitat de càrrega que passa per unitat de temps per un conductor, l'anomenam intensitat de corrent elèctrica. La taxa de creixement d'un cultiu de bacteris és un altre exemple on apareix el canvi del nombre de bacteris en funció del temps.

En aquesta secció veurem que hi ha dues mesures de canvi: taxa mitjana de canvi i variació instantània. Precisament, aquest segon cas, serà el que ens portarà al concepte de derivada.

Taxa de variació mitjana

Es defineix la taxa de variació mitjana d'una funció en l'interval $[a, b]$ com el pendent de la **recta secant** que passa per aquells punts. El pendent d'aquesta recta s'obté de:

$$T.V.M.[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$

Si $f(x)$ dóna la posició d'un cotxe en funció del temps, la $T.V.M.[0,5]$ ens proporciona la **velocitat mitjana** del cotxe en aquest interval.

Definició de derivada en un punt

Es defineix la derivada d'una funció en un punt com el pendent de la **recta tangent** en aquell punt.

Si partim de la recta secant a l'interval $[a, b]$, podem construir la recta tangent acostant de cada vegada més el punt b cap al punt a. Aquest procés s'expressa matemàticament com un límit

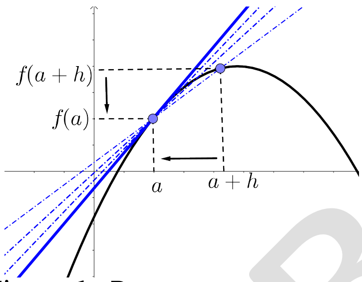


Figura 1: Recta tangent a una funció

La **derivada** d'una funció $f'(a)$ en un punt $x = a$ es defineix com:

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{2}$$

i proporciona el **pendent de la recta tangent** a la funció en els punt d'abscissa a.

Una forma més convenient d'expressar el límit és anomenar la diferència entre dos nombres $h = b - a$ i dir que de cada vegada es fa més petita

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{3}$$

Si $f(x)$ dóna la posició d'un cotxe en funció del temps, la derivada $f'(a)$ proporciona la **velocitat instantània** del cotxe just a l'instant $x = a$.

Imatge: Font de la imatge [https://www.autobild.es/practicos/pocos-saben-son-muy-utiles-funcion-rayas-rojas-cuentakilometros-1084751].

Derivades laterals

Acabam de veure que la derivada es defineix com un límit. Sabem que un límit es pot calcular per la dreta o per l'esquerra del punt (**límits laterals**). En relació a aquest fet, definim les **derivades laterals** com

Derivada en el punt $x = a$ l'esquerra

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{4}$$

Derivada en el punt $x = a$ per la dreta

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{5}$$

Per a **funcions *suaus*** , els dos límits coincideixen i basta parlar de la derivada en aquell punt. Hi ha d'altres funcions, però, que presenten punxes o ***punts angulosos*** . En un punt angulós els dos límits són diferents i deim que la funció no és derivable en aquell punt.

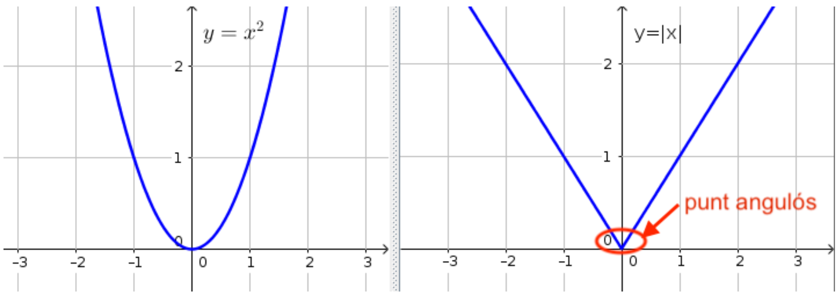


Figura 2: Esquerra: Gràfica derivable (suau). Dreta: Gràfica no derivable en x=0 perquè presenta un punt angulós.

Direm que una funció és derivable en $x = a$ si les dues derivades laterals coincideixen:

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

1.1 Taula de derivades

Com et pots imaginar, calcular derivades a partir de la definició és un procés llarg i tediós. Habitualment, les derivades de les funcions s'obtenen a partir de les anomenades " *regles de derivació* ", que permeten trobar amb comoditat i rapidesa la derivada de l'immensa majoria de funcions.

La taula següent mostra les derivades de les funcions més habituals. A la primera columna trobareu les derivades de les funcions elementals mentre que en la segona es mostra la versió corresponent a una funció composta. Més endavant, es recordarà el funcionament de la **regla de la cadena** per derivar funcions compostes.

Taula 1: *Taula de derivades*

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Funcions elementals		Funcions compostes	
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = [g(x)]^n$	$y' = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{g(x)}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$	$y = \dfrac{1}{g(x)}$	$y' = -\dfrac{1}{g^2(x)} \cdot g'(x)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin g(x)$	$y' = \cos g(x) \cdot g'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos g(x)$	$y' = -\sin g(x) \cdot g'(x)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} =$ $= 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg} g(x)$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x) =$ $= [1 + \operatorname{tg}^2 g(x)] \cdot g'(x)$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$y = \operatorname{cotg} g(x)$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 g(x)} \cdot g'(x)$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin g(x)$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x)$
$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos g(x)$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x)$

$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} g(x)$	$y' = \dfrac{1}{1+g^2(x)} \cdot g'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{g(x)}$	$y' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$y = a^x$	$y' = a^x \ \ln a$	$y = a^{g(x)}$	$y' = a^{g(x)} \ \ln a \cdot g'(x)$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln g(x)$	$y' = \dfrac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$	$y = \log_a g(x)$	$y' = \dfrac{1}{g(x)} \cdot \dfrac{1}{\ln a} \cdot g'(x)$

Una de les regles de derivació que més utilitzaràs serà derivar una potència. La regla ens diu que si tenim la potència $y = x^{12}$, *l'exponent baixa i restam 1 a l'exponent* . Llavors la derivada és $y' = 12x^{11}$.

Aquesta regla també s'aplica per derivar arrels i inverses de potències.

Exemple 1

Utilitza la fórmula per la derivada d'una potència per calcular la derivada de l'arrel $y = \sqrt[4]{x^3}$

El que hem de fer és, abans de derivar, passar l'arrel a forma de potència

$$y = \sqrt[4]{x^3} \quad \rightarrow \quad y = x^{\frac{3}{4}}$$

Ara derivam la potència

$$y' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

Finalment tornam a passar la potència a forma d'arrel

$$y' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

Exemple 2

Utilitza la fórmula per la derivada d'una potència per calcular la derivada de $y = \dfrac{-3}{x^5}$

El que hem de fer és, abans de derivar, passar la fracció a potència d'exponent negatiu

$$y = \frac{-3}{x^5} \quad \rightarrow \quad y = -3x^{-5}$$

Ara derivam la potència

$$y' = 15x^{-5-1} = 15x^{-6}$$

Finalment tornam a passar la potència a forma de fracció

$$y' = \frac{15}{x^6}$$

1.2 Regles de derivació

Derivada d'una constant per una funció

La constant es copia sense derivar i es deriva únicament la funció

$$y = k\, f(x) \quad \rightarrow \quad y' = k\, f'(x) \tag{6}$$

Exemples:

$$y = 5\sin x \quad \rightarrow \quad y' = 5\cos x$$
$$y = 4x^2 \quad \rightarrow \quad y' = 4 \cdot 2x = 8x$$

Derivada d'una suma o diferència

Es deriva cada sumand per separat. Per exemple:

$$y = f(x) \pm g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) \pm g'(x) \tag{7}$$

Aquesta regla ens permet calcular la **derivada d'un polinomi**

$$y = x^4 - 3x^2 + 5x - 7 \quad \rightarrow \quad y' = 4x^3 - 6x + 5$$

També la podem aplicar a suma o resta de funcions elementals

$$y = 5 \cdot 10^x - 2\ln x \quad \rightarrow \quad y' = 5 \cdot 10^x \cdot \ln 10 - \frac{2}{x}$$

Derivada d'una funció composta (regla de la cadena)

Si tenim una funció d'una funció, per exemple $\sin(\sqrt{x})$, primer es deriva la funció més externa (el sinus) i es multiplica per la derivada de la funció interna (l'arrel). La regla en general és:

$$y = f(g(x)) \quad \to \quad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{8}$$

Per exemple:

$$y = \text{arctg}\,(\sin x) \quad \to \quad y' = \frac{1}{1+(\sin x)^2} \cdot \cos x$$

$$y = (x^2 - \sqrt{x} + \sin x)^4 \quad \to \quad y' = 4(x^2 - \sqrt{x} + \sin x)^3 \cdot (2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos x)$$

Vídeo 6.1: *Regla de la cadena. Derivada de funcions compostes*
https://www.youtube.com/watch?v=GBYlVnh-Eh4

Derivada d'un producte

Per derivar un producte de dues funcions, es deriva la primera funció per la segona sense derivar més la primera per la derivada de la segona funció.

$$y = f(x) \cdot g(x) \quad \to \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{9}$$

Exemple:

$$y = 2x^3 \cdot \cos x \quad \to \quad y' = 6x^2 \cdot \cos x + 2x^3 \cdot (-\sin x) = 2x^2\,(3\cos x - x \sin x)$$

Fixeu-vos que com a darrera passa s'ha simplificat la derivada traient factor comú.

Vídeo 6.2: *Derivades d'un producte de funcions*
https://www.youtube.com/watch?v=xDoSIaYm47E

Derivada d'un quocient

Es fa la derivada del numerador pel denominador sense derivar menys el numerador per la derivada del denominador dividit pel denominador al quadrat. La fórmula és:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \to \quad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{10}$$

Exemple:

$$y = \frac{x^2-3}{x^2+3} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{2x\cdot(x^2-3)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$$

Recordeu que en la darrera passa és obligatori simplificar el numerador. El denominador es pot deixar indicat.

Vídeo 6.3: *Derivades d'un quocient de funcions'*
https://www.youtube.com/watch?v=h8pU_vKqdJQ

Exemple 3

Deriva i simplifica les funcions:
a) $y = (x^2+x+1)^3$
b) $y = 5\ln(2x+3)$
c) $y = x\cdot\sin x + x^2\cdot 10^x$
d) $y = \dfrac{2x+3}{x^2+5x}$

a) $y = (x^2+x+1)^3 \rightarrow$ Regla de la cadena $y' = 3(x^2+x+1)^2\cdot(2x+1)$

b) $y = 5\ln(2x+3) \rightarrow$ Regla de la cadena $y' = 5\dfrac{1}{2x+3}\cdot 2 = \dfrac{10}{2x+3}$.

c) $y = x\cdot\sin x + x^2\cdot 10^x \rightarrow$ Derivada de productes $y' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x + 2x\cdot 10^x + x^2\cdot 10^x\ln 10$. Treim factor comú l'exponencial $y' = \sin x + x\cdot\cos x + (2x + x^2\ \ln 10)\cdot 10^x$.

d) $y = \dfrac{2x+3}{x^2+5x} \rightarrow$ Derivada d'un quocient $y' = \dfrac{2\cdot(x^2+5x)-(2x+3)\cdot(2x+5)}{(x^2+5x)^2}$.
Simplificam el numerador expandint els parèntesis: $y' = \dfrac{-2x^2-6x-15}{(x^2+5x)^2}$

Exercicis

1. Calcula la derivada simplifica de les funcions:

   a) $y = \cos^5(7x^2)$

   b) $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}$

c) $y = x \cdot e^x$

d) $y = \ln \sqrt{x}$

e) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

f) $y = \sqrt{1 + x^2} \cdot \cos 2x$

g) $y = \ln \dfrac{x-2}{x+2}$

1.3 Derivades successives

Fins ara hem vist com, a partir d'una funció $f(x)$, calcular la seva derivada $f'(x)$, també és coneix com **la derivada primera** . Ara bé, donat que $f'(x)$ és una funció, aquesta es pot tornar a derivar. La derivada de la derivada s'anomena derivada segona i s'indica com $f''(x)$. Així, successivament, es defineixen $f'', f''', f^{iv}, \cdots$ (derivada segona, tercera, quarta, ...)

Si consideram un polinomi de tercer grau, per exemple, $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ les derivades successives són:

- $y' = 3x^2 - 6x + 5$
- $y'' = 6x - 6$
- $y''' = 6$
- $y^{iv} = 0$
- $\ldots$

Les derivades d'ordre superior a 3 (superior al grau del polinomi) són totes iguals a zero.

Sabies què?

A Física, si y és l'altura segons el temps, y' representa la velocitat de l'objecte i y'' la seva acceleració.

Atenció

Abans de calcular la derivada segona, cal haver simplificat tot el possible la derivada primera.

Nosaltres, en aquest curs, tan sols necessitarem calcular la primera i segona derivada.

Exemple 4

Calcula la primera i segona derivada de les funcions següents:
a) $y = x^3 - 5x^2 + x - 2$
b) $y = x \cdot \ln x$
c) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

a) $y = x^3 - 5x^2 + x - 2$

$\rightarrow y' = 3x^2 - 10x + 1$

$\rightarrow y'' = 6x - 10$

b) $y = x \cdot \ln x$

$\rightarrow y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

$\rightarrow y'' = \dfrac{1}{x}$

c) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

$\rightarrow y' = \dfrac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

$\rightarrow y'' = \dfrac{0 - (-2) \cdot 2(x-1)}{((x-1)^2)^2} = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

Exercicis

2. Calcula la derivada segona de la funció $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

2. Aplicacions de les derivades

L'obtenció de la recta tangent a una corba i el càlcul de la velocitat instantània d'un mòbil són problemes històrics que, com ja hem vist, varen donar lloc al concepte de derivada. No obstant això, varen ésser els problemes d'optimització (càlcul de màxims i mínims) que varen impulsar l'estudi de les derivades.

En aquesta secció aprendrem a utilitzar les derivades per:

- Calcular l'equació de la recta tangent en un punt
- Calcular els extrems (màxims i mínims)
- Calcular la curvatura i els punts d'inflexió
- Aplicar les derivades al càlcul de límits (Regla de l'Hôpital)
- Representar gràficament funcions
- Resoldre problemes d'optimització

2.1 Recta tangent

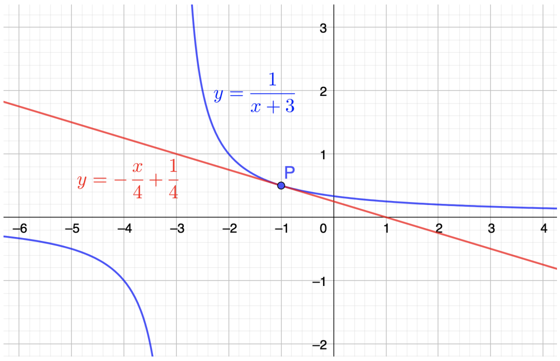
La recta tangent a una corba $y = f(x)$ en el punt $x = a$, ha de passar pel punt $(a,\ f(a))$ i ha de tenir com a pendent $m = f'(a)$. Aleshores, si escrivim l'equació punt-pendent de la recta obtenim

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \tag{11}$$

Exemple 5

Calcula l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ en el punt $x = -1$.

Primer cercam el punt per on passa la recta. $x = -1$, $y = f(-1) = \dfrac{1}{-1+3} = \dfrac{1}{2}$.
Tot seguit, el pendent de la recta en $x = -1$ que és $m = f'(-1)$. Calculam la derivada de la funció $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+3)^2}$ i calculam el seu valor a $x = -1$, $f'(-1) = \dfrac{-1}{2^2} = \dfrac{-1}{4}$.
Escrivim l'equació punt-pendent $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1}{4}(x - (-1))$ i, passant-la a forma explícita, trobam l'equació de le recta tangent que ens demanen $y = \dfrac{-1}{4}x + \dfrac{1}{4}$.



Vídeo 6.4: *Recta tangent a una funció*
https://www.youtube.com/watch?v=9NFliRWMT_s

Exercicis

3. EXAMEN Calcula l'equació de la recta tangent a la funció $y = x \cdot e^x$ en el punt $x = 0$.

2.2 Monotonia i extrems

Quan parlam a la **monotonia** d'una funció ens referim a si la funció **creix o decreix** . Els **extrems** d'una funció són els seus **màxims i mínims** . Si pensem amb la serra de Tramuntana com una gràfica, deim que una funció té un **màxim relatiu** si la gràfica mostra un cim en aquell punt. En canvi, hi haurà un **mínim relatiu** si la gràfica té una vall.

La primera derivada d'una funció ens serveix per saber si és creixent o decreixent, així com determinar els seus màxims i mínims relatius.

Si $f'(x) > 0$	La funció és creixent
Si $f'(x) < 0$	La funció és decreixent
Si la funció té un extrem (màxim o mínim)	es compleix $f'(x) = 0$ Atenció! El contrari no té perquè ésser cert. La condició $f'(x) = 0$ no ens assegura que hi hagi un extrem.

Les solucions de l'equació $f'(x) = 0$ s'anomenen **punts crítics** i són possibles màxims o mínims. La segona derivada dona una condició per saber si es tracta d'un màxim o un mínim:

$$\text{Si } f'(a) = 0 \text{ i } \quad \begin{cases} f''(a) > 0 \rightarrow & x = a \text{ minim} \\ f''(a) < 0 \rightarrow & x = a \text{ maxim} \end{cases} \tag{12}$$

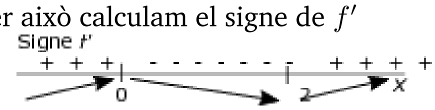
El següent exemple mostra el procediment per calcular els extrems d'una funció.

Exemple 6

Troba els extrems de $y = x^3 - 3x^2$

Calculam la derivada $y' = 3x^2 - 6x$. Resolem l'equació $3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$ i $x = 2$ són els punts singulars.

Per saber si aquests punts són màxims o mínims estudiam el creixement/decreixement. Per això calculam el signe de f'



La funció és creixent a $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ i decreixent a $(0, 2)$. Té un màxim relatiu al punt $(0, 0)$ i un mínim relatiu a $(2, -4)$.

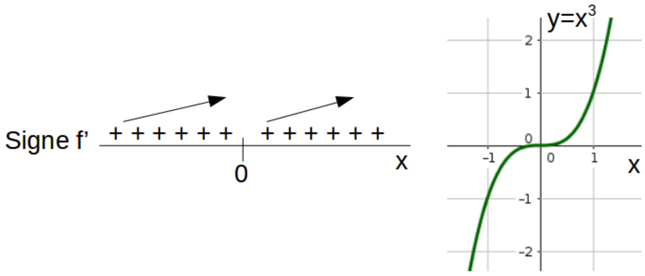
Notau que la condició $f'(x) = 0$ assegura que el pendent de la recta tangent és zero (la recta tangent és horitzontal). Però no podem concloure que hi hagi un extrem en aquell punt. Vegem-ho amb un exemple senzill

Exemple 7

Estudiau la monotonia i extrems de $y = x^3$

Seguim el mateix procediment de sempre.

1. Calculam la derivada $y' = 3x^2$
2. Igualam a zero la derivada i resolem $3x^2 = 0 \to x = 0$
3. Dibuixam les solucions sobre la recta real i estudiam el signe de la derivada



Com que la derivada sempre és positiva o zero, la funció sempre creix i per tant no té extrems. Es diu que a $x = 0$ té un **punt d'inflexió** . Aquest aspecte s'estudiarà amb més detall en el següent apartat.

Vídeo 6.5: *Monotonia i extrems d'una funció*
https://www.youtube.com/watch?v=wTla02BoC90

Exercicis

4. EXAMEN Determina el creixement/decreixement i els màxims i mínims relatius de la funció $y = \dfrac{x}{e^x}$

2.3 Curvatura

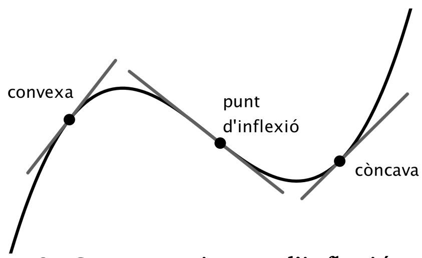


Figura 3: Curvatura i punt d'inflexió

Quant a la curvatura, diem que una funció:

- és **Còncava** si la recta tangent a un punt es troba per **davall** de la funció
- és **Convexa** si la recta tangent a un punt es troba per **damunt** de la funció
- té un **punt d'inflexió** si la recta tangent **atravessa** la funció.

La segona derivada $f''(x)$ d'una funció ens serveix per determinar la curvatura de la funció.

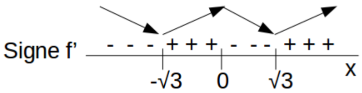
Si $f''(x) > 0$	La funció és còncava ($\cup$)
Si $f''(x) < 0$	La funció és convexa ($\cap$)
Si la funció té un punt d'inflexió	es compleix $f''(x) = 0$ Atenció! El contrari no té perquè ésser cert. La condició $f''(x) = 0$ no ens assegura que hi hagi un punt d'inflexió.

El següent exemple mostra el procediment per estudiar la curvatura d'una funció.

Exemple 8

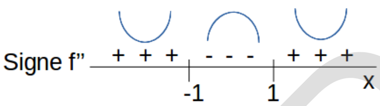
Estudia la monotonia (creixement) i la curvatura de la funció $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$.

- **Primera derivada**
  $y' = 4x^3 - 12x$. Igualam a zero la primera derivada $4x^3 - 12x = 0$; i resolem l'equació $\to 4x \cdot (x^2 - 3) = 0 \to x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. Estudiam el signe de la primera derivada sobre la recta real



  Arribam a la conclusió que la funció creix a $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ i decreix a $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. La funció té un màxim relatiu a $x = 0$ i dos mínims relatius a $x = \pm\sqrt{3}$.

- **Segona derivada**
  $y'' = 12x^2 - 12$. Igualam a zero la segona derivada $x^2 = 1$; i resolem l'equació $\to x = \pm 1$. Estudiam el signe de la segona derivada sobre la recta real



  Trobam que la funció és convexa a $(-1, 1)$ i còncava a $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ i, per tant, té dos punts d'inflexió a $x = \pm 1$.

Exercicis

5. EXAMEN Calcula l'equació de la recta tangent a la funció $y = x^3 - 6x^2 + 20$ en el punt d'inflexió de la funció.

2.4 Regla de l'Hôpital

La regla de Hôpital és una regla d'utilitat immediata al càlcul de límits en els quals apareguin indeterminacions $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Anem a veure el seu enunciat

Si $f(x), g(x)$ **són funcions derivables** en $x = a$ (on a és finit o infinit) i el límit $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ dóna lloc a les indeterminacions $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, aleshores es compleix que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13}$$

Tot i que no ho veurem aquí, aquesta mateixa regla també es pot aplicar, amb un procés una mica més elaborat a altre tipus d'indeterminacions

Atenció! Cal derivar el numerador i el denominador per separat.

NO utilitzeu la fórmula de la derivada d'un quocient.

Exemple 9

Calcula els límits següents

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + e^x}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

Aplicarem la regla de l'Hôpital per resoldre les indeterminacions

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} =_{IND}= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + e^x} = \frac{\infty}{\infty} =_{IND}$. Aplicarem la regla de l'Hôpital dues vegades.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1 + e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{0}{0} =_{IND}= \lim\limits_{x \to 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Exercicis

6. Calcula el límits $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$. Necessitaràs aplicar la regla de l'Hôpital dues vegades.

3. Representació gràfica de funcions

Propietats globals d'una funció

Per representar funcions primer feim un estudi de les seves propietats. Una vegada que hem recopilat tota la informació, la darrera passa consisteix en fer una gràfica.

La taula següent resumeix totes les propietats que podem estudiar. No vol dir que s'hagin de calcular totes; dependent del tipus de funció, algunes són més importants que les altres. L'objectiu d'aquesta secció és recordar com es representen funcions polinòmiques i racionals així com mostrar gràfiques amb exponencials i logaritmes. En cada cas, s'explicarà quines de les propietats són més importants.

> Normalment, a l'examen vos demanaran calcular només alguns dels apartats.

Taula 4: *Taula resum per a la representació de corbes y=f(x)*

1. **Domini** , $Dom\, f$	Conjunt de valors de x pels quals hi ha gràfica.
2. **Continuïtat** , $Cont\, f$	Valors del $Dom\, f$ on és contínua.
3. **Simetries** f parell $\to$ Simetria respecte l'eix OY f senar $\to$ Simetria respecte l'origen	Si $f(-x) = f(x)$ té simetria parell Si $f(-x) = -f(x)$ té simetria senar

4. **Asímptotes i branques**	Verticals: $x = a$, quan $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ Horitzontals: $y = n$, si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = n$ Obliqües: $y = mx + n$ Calculam la posició relativa de la corba respecte les asímptotes.
5. **Punts de tall amb els eixos** Eix OX Eix OY Regions o signe	Solucions de $f(x) = 0$. Pot haver-hi 0, 1 o uns quants Punt $(0, f(0))$. Pot haver-hi 0 o 1 $f(x) < 0$, $f(x) > 0$
6. **Màxims i mínims relatius** **Creixement i decreixement**	Punts crítics. Resolem $f'(x) = 0$ $f'(a) < 0 \to f$ decreixent en $x = a$ $f'(a) > 0 \to f$ creixent en $x = a$
7. **Gràfica**	Construïm la gràfica a partir de la informació anterior

Simetries

El fet que una funció sigui simètrica, simplifica considerablement la representació. Recordem que existeixen dos tipus de simetria. La simetria parell o mirall i la senar o respecte de l'origen.

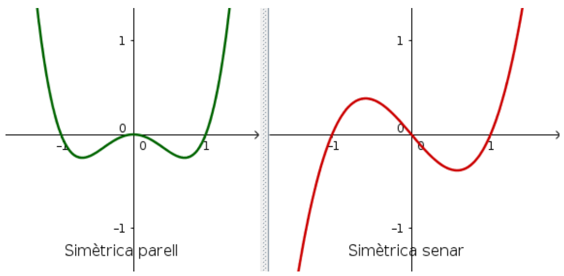


Figura 4: Funcions simètriques parell i senar

Per saber si una funció és simètrica, canviam $x \to -x$ a l'expressió de la funció. Si l'expressió queda inalterada, $f(-x) = f(x)$, aleshores la funció és simètrica parell. Si l'expressió és la mateixa però queda afectada per un signe menys global, la funció és simètrica senar $f(-x) = -f(x)$. En qualsevol altre cas, la funció no presenta simetries.

Exemple 10

Estudia les simetries de les funcions
a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
b) $f(x) = x^3 + 3x$
c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

a) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$ és simètrica parell.

b) $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -(x^3 + 3x) = -f(x)$ és simètrica senar.

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{-x+1} = \dfrac{x^2}{-x+1}$ és diferent a la funció i a menys la funció. No presenta simetries.

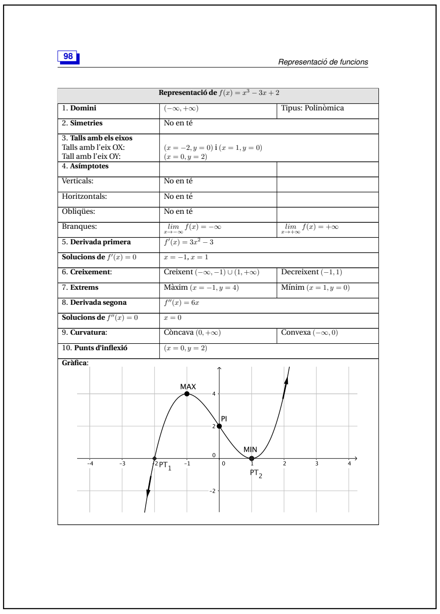
d) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3}{x^2+1} = -f(x)$ és simètrica senar.

3.1 Funcions polinòmiques

A l'hora de representar funcions polinòmiques és important calcular els punts de talls amb els eixos i els màxims i mínims relatius. Amb aquesta informació es pot construir perfectament la gràfica.

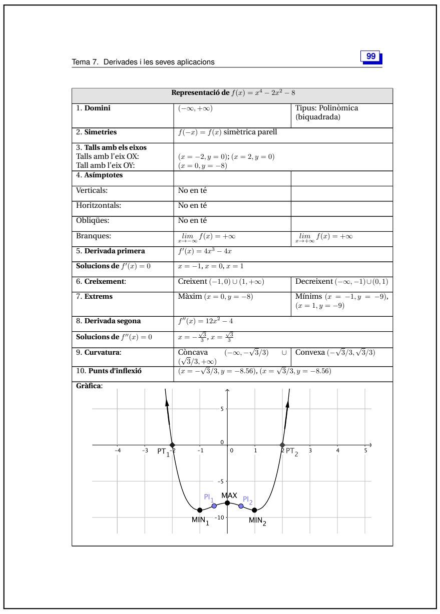
Vídeo 6.6: *Representació de funcions polinòmiques*
https://www.youtube.com/watch?v=6U-QKknM8wY

A continuació donam dos exemples de representació de funcions polinòmiques:



98 *Representació de funcions*

Representació de $f(x) = x^3 - 3x + 2$		
1. **Domini**	$(-\infty, +\infty)$	Tipus: Polinòmica
2. **Simetries**	No en té	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x = -2, y = 0)$ i $(x = 1, y = 0)$ $(x = 0, y = 2)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	No en té	
Branques:	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
5. **Derivada primera**	$f'(x) = 3x^2 - 3$	
Solucions de $f'(x) = 0$	$x = -1, x = 1$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	Decreixent $(-1, 1)$
7. **Extrems**	Màxim $(x = -1, y = 4)$	Mínim $(x = 1, y = 0)$
8. **Derivada segona**	$f''(x) = 6x$	
Solucions de $f''(x) = 0$	$x = 0$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(0, +\infty)$	Convexa $(-\infty, 0)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x = 0, y = 2)$	
Gràfica:		



Tema 7. Derivades i les seves aplicacions 99

Representació de $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$		
1. **Domini**	$(-\infty, +\infty)$	Tipus: Polinòmica (biquadrada)
2. **Simetries**	$f(-x) = f(x)$ simètrica parell	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x = -2, y = 0)$; $(x = 2, y = 0)$ $(x = 0, y = -8)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	No en té	
Branques:	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
5. **Derivada primera**	$f'(x) = 4x^3 - 4x$	
Solucions de $f'(x) = 0$	$x = -1, x = 0, x = 1$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$	Decreixent $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
7. **Extrems**	Màxim $(x = 0, y = -8)$	Mínims $(x = -1, y = -9)$, $(x = 1, y = -9)$
8. **Derivada segona**	$f''(x) = 12x^2 - 4$	
Solucions de $f''(x) = 0$	$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$	Convexa $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x = -\sqrt{3}/3, y = -8.56)$, $(x = \sqrt{3}/3, y = -8.56)$	
Gràfica:		

Exercicis

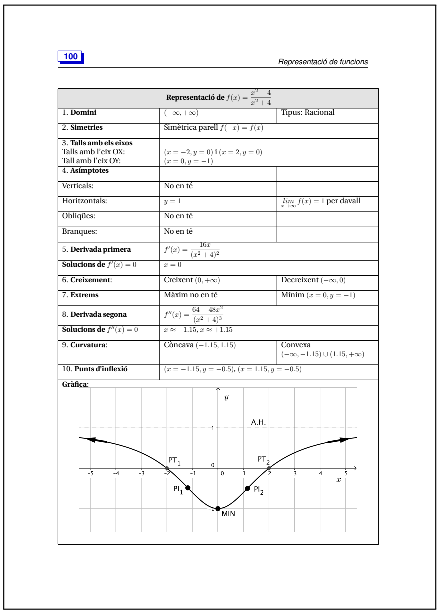
7. Sigui la funció $y = f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Calcula els punts de tall amb els eixos, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius i els límits de la funció quan $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$. Amb aquesta informació representa gràficament la funció.

3.2 Funcions racionals

A l'hora de representar funcions racionals és important calcular, a més dels mateixos apartats que les polinòmiques, les asímptotes verticals i horitzontals en cas que en tingui. En aquest document [https://ibsuite.es/iedib/pdf/ASIMPTOTES-BAT_MAT1.pdf] trobareu un repàs del càlcul d'asímptotes de 1r de Batxillerat. Moltes vegades, simplement amb el càlcul d'asímptotes tenim la major part de la gràfica completa. La resta d'informació ens ho donarà la derivada amb la posició dels extrems.

Vídeo 6.7: *Representació de funcions racionals*
https://www.youtube.com/watch?v=bsD5nvU0tsE

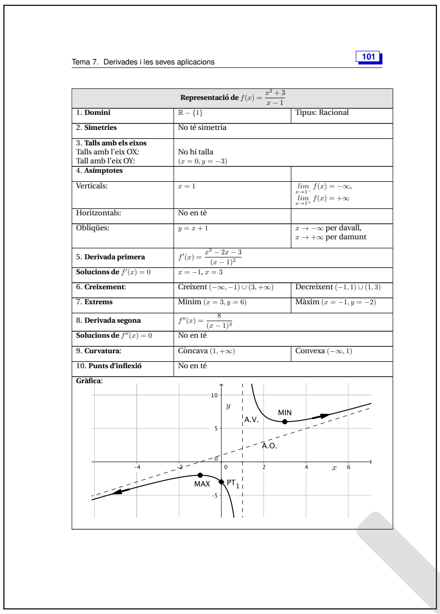
A continuació donam dos exemples de representació de funcions racionals:



100 *Representació de funcions*

Representació de $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$		
1. **Domini**	$(-\infty,+\infty)$	Tipus: Racional
2. **Simetries**	Simètrica parell $f(-x)=f(x)$	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 $(x=-2,y=0)$ i $(x=2,y=0)$ $(x=0,y=-1)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	$y=1$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ per davall
Obliqües:	No en té	
Branques:	No en té	
5. **Derivada primera**	$f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$	
Solucions de $f'(x)=0$	$x=0$	
6. **Creixement**:	Creixent $(0,+\infty)$	Decreixent $(-\infty,0)$
7. **Extrems**	Màxim no en té	Mínim $(x=0,y=-1)$
8. **Derivada segona**	$f''(x)=\frac{64-48x^2}{(x^2+4)^3}$	
Solucions de $f''(x)=0$	$x\approx-1.15, x\approx+1.15$	
9. **Curvatura**:	Còncava $(-1.15,1.15)$	Convexa $(-\infty,-1.15)\cup(1.15,+\infty)$
10. **Punts d'inflexió**	$(x=-1.15,y=-0.5)$, $(x=1.15,y=-0.5)$	

Gràfica:



Tema 7. Derivades i les seves aplicacions 101

Representació de $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$		
1. **Domini**	$\mathbb{R}-\{1\}$	Tipus: Racional
2. **Simetries**	No té simetria	
3. **Talls amb els eixos** Talls amb l'eix OX: Tall amb l'eix OY:	 No hi talla $(x=0,y=-3)$	
4. **Asímptotes**		
Verticals:	$x=1$	$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	$y=x+1$	$x\to-\infty$ per davall, $x\to+\infty$ per damunt
5. **Derivada primera**	$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$	
Solucions de $f'(x)=0$	$x=-1, x=3$	
6. **Creixement**:	Creixent $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$	Decreixent $(-1,1)\cup(1,3)$
7. **Extrems**	Mínim $(x=3,y=6)$	Màxim $(x=-1,y=-2)$
8. **Derivada segona**	$f''(x)=\frac{8}{(x-1)^3}$	
Solucions de $f''(x)=0$	No en té	
9. **Curvatura**:	Còncava $(1,+\infty)$	Convexa $(-\infty,1)$
10. **Punts d'inflexió**	No en té	

Gràfica:

3.3 Funcions exponencials i logarítmiques

Funcions exponencials

Les funcions exponencials solen tenir una asímptota horitzontal i una branca parabòlica:

Exemple 11

Representa gràficament la funció $y = x \cdot e^x$

1. **Domini** , $Dom\ f = \mathbb{R}$
2. **Continuïtat** , $Cont\ f = \mathbb{R}$
3. **Simetries** : No presenta simetries
4. **Asímptotes i branques**

   Calculam els límits quan $x \to \pm\infty$

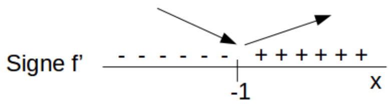
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot e^x = \infty \cdot \infty = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot e^x =$ canviam $x \to -x$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) \cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{e^x} = \dfrac{-\infty}{\infty} =$, Hôpital, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{e^x} = 0$. La funció té una asímptota horitzontal a $y = 0$ quan x tendeix cap a menys infinit.
5. **Punts de tall amb els eixos**

   Eix OX : $y = 0 \to x \cdot e^x = 0 \to x = 0$

   Eix OY : $x = 0 \to y = 0$. L'únic punt de tall és l'origen $O(0,0)$.

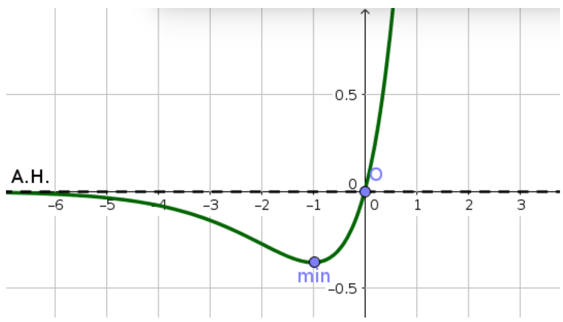
   Regions o signe: Si $x < 0 \to y < 0$ i si $x > 0 \to y > 0$.
6. **Màxims i mínims relatius**

   Calculam la derivada $y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x$

   Punts crítics. Resolem $f'(x) = 0 \to x = -1$

   f decreix en $(-\infty, -1)$; f creixent en $(-1, +\infty)$
   La funció té un mínim relatiu a $x = -1$ i $y = -e^{-1} \approx= -0,368$
7. **Gràfica**

Funcions logarítmiques

Les funcions logarítmiques solen tenir una asímptota vertical i el domini està restringit per aquells valors en què l'argument del logaritme és positiu:

Exemple 12

Representa gràficament la funció $y = \dfrac{x}{\ln x}$

1. **Domini** : D'una banda, el logaritme tan sols es pot calcular si $x > 0$, a més, com que hi ha una divisió, el denominador no pot ésser zero (cosa que passa quan $x = 1$). Aleshores $Dom\, f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$
2. **Continuïtat** , La funció és contínua en el seu domini
3. **Simetries** : No presenta simetries
4. **Asímptotes i branques**

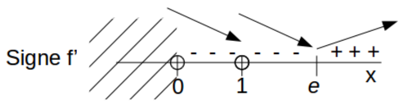
   Calculam els límits quan $x \to 1$
   - $\displaystyle \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$
   - $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$. La funció té una asímptota vertical a $x = 1$.
5. **Punts de tall amb els eixos**

   Eix OX : $y = 0 \to \dfrac{x}{\ln x} = 0 \to x = 0$ però no és del domini

   Eix OY : $x = 0$ no és del domini. Aleshores, no té punts de tall amb els eixos.

   Regions o signe: No existeix gràfica per a $x \leq 0$.
6. **Màxims i mínims relatius**

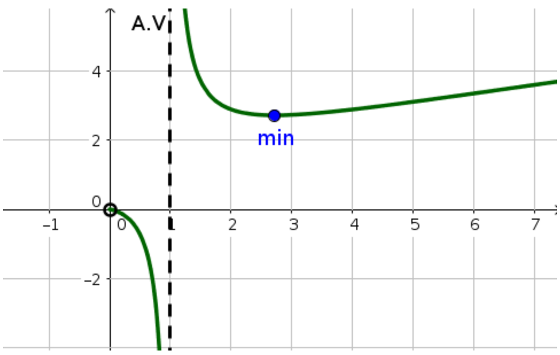
   Calculam la derivada $y' = \dfrac{1 \cdot \ln x - x\frac{1}{x}}{x^2} = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$

   Punts crítics. Resolem $f'(x) = 0 \to \ln x = 1 \to x = e$

   f decreix en $(0, 1) \cup (1, e)$; f creixent en $(e, +\infty)$

   La funció té un mínim relatiu a $x = e$ i $y = e$
7. **Gràfica**

4. Problemes d'optimització

Què significa optimitzar?

Optimitzar significa trobar les condicions per les quals una funció és màxima o mínima.

Diria que això em sona!

Efectivament, si ens demanen trobar els màxims/mínims de la funció, per exemple, $f(x) = x^3 - 3x + 1$ és tan fàcil com derivar-la, $f'(x) = 3x^2 - 3$ i igualar a zero la derivada $3x^2 - 3 = 0$. D'aquí trobam possibles extrems $x = \pm 1$.

Un màxim o un mínim?

- Estudia el creixement/decreixement al voltant de cada punt crític

Doncs, què hi ha de nou?

La diferència és que la funció que has d'optimitzar no te la donen. Tu mateix l'has de construir a partir de l'enunciat d'un problema.

Vídeo 6.8: *Problemes d'optimització (II)*
https://www.youtube.com/watch?v=pHJUTiO_dGY

A continuació mostram un exemple fàcil i un altre una mica més complicat.

Exemple 13

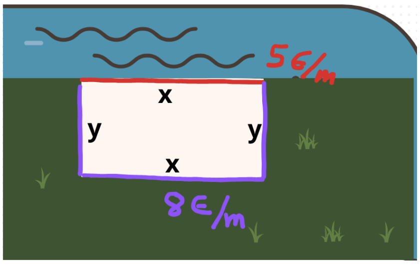
Trobau dos nombres que sumin 20 i que el seu producte sigui màxim.

1. **Identificar les incògnites:** Diem x, y als dos nombres
2. **Relació entre les incògnites:** Ens diuen que sumen 20, aleshores $x + y = 20$
3. **Funció de x,y:** El producte és $P = x \cdot y$
4. **Funció només d'una variable:** Utilitzant (2), $P(x) = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$
5. **Extrems d'una funció:** Derivada igual a zero, $P'(x) = 20 - 2x = 0$
6. Solució $x = 10$
7. **On hi ha el màxim:** Màx o Min? $P''(x = 10) = -2 < 0 \to$ màxim
8. **Què val el valor màxim:** Trobam el valor màxim $P(10) = 10 \cdot 10 = 100$

Exemple 14

Un agricultor disposa d'un pressupost de 300 € per tancar un recinte rectangular adjacent a un riu. El preu de la tanca és de 8 €/m. Decideix emprar una tanca més econòmica de 5 €/m al costat que dona al riu. Determina les dimensions del recinte d'àrea màxima i calcula el valor d'aquesta àrea.

1. Basant-nos amb l'esquema, diem x i y als costats del rectangle. [Mira l'esquema adjunt]



El pressupost s'exhaureix quan $8 \cdot (2y + x) + 5x = 300$.
L'àrea que s'ha de maximitzar és: $A = x \cdot y$
De la primera equació podem aïllar la y, $y = \dfrac{300 - 13x}{16}$ i subtituïm dins la àrea
$A = \dfrac{1}{16}(300x - 13x^2)$
Derivam $A' = \dfrac{1}{16}(300 - 26x) = 0$. Trobam el punt crític $x = \frac{300}{26} = \frac{150}{13}$.
És un Màx o Min? $A''(x = 0) = -\frac{26}{16} < 0 \rightarrow$ correspon a un màxim relatiu.
Les dimensions del tancat d'àrea màxima són $x = \frac{150}{13}$ m i $y = \frac{150}{16}$ m
Trobam el valor màxim de l'àrea $A = \frac{5625}{52} \approx 108.17$ m ^{2}

Exercicis

8. EXAMEN De tots els rectangles inscrits en una circumferència de radi 1, trobau les dimensions del que tingui perímetre màxim.

9. Es vol fabricar una llauna de conserves en forma de cilindre recte amb una àrea total de 150 cm ^{2} i un volum màxim. Troba el radi, l'altura del cilindre i el volum màxim.