3. Asímptotes

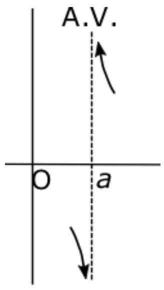
Les asímptotes d'una funció, en cas d'existir, són rectes a les quals la funció s'aproxima tant com volguem però sense arribar a tocar-les. Donat que, les asímptotes són rectes, aquestes podran ser verticals, horitzontals i obliqües.

> Les asímptotes verticals són parets les qual la funció no pot atravessar.

3.1 Asímptotes verticals

Perquè una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tengui una asímptota vertical, el denominador ha d'ésser igual a zero i el numerador diferent de zero. El procediment consisteix resoldre l'equació $Q(x) = 0$.

> Ens hem d'assegurar que no tenim 0/0, perquè podria no ésser una asímptota. Per tenir una asímptota vertical, els límits al punt han d'ésser més o menys infinit.



Per a cada valor $x = a$ tal que $Q(a) = 0$, estudiam la posició relativa calculant els dos límits laterals:

$$\lim_{x\to a^-} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \tag{16}$$

d'aquesta forma sabem si s'acosta cap a $\pm\infty$ al voltant de l'asímptota vertical.

Exemple 9

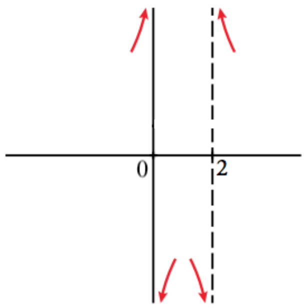
Calcula les asímptotes verticals de la funció $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

Igualam a zero del denominador de la funció $x^2 - 2x = 0$. Resolem l'equació de segon grau incompleta $x = 0$; $x = 2$.

Calculam els límits laterals al voltant de cada arrel.

- $x = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \dfrac{+2}{+0} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \dfrac{+2}{-0} = -\infty$
- $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \dfrac{+6}{-0} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \dfrac{+6}{+0} = +\infty$

Representam gràficament les dues asímptotes verticals a $x = 0$ i $x = 2$ juntament amb els límits obtinguts:



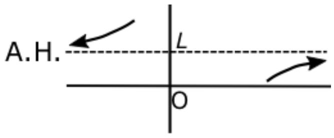
3.2 Asímptotes horitzontals

Perquè una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tengui una asímptota horitzontal, el grau $P \leq$grau Q. L'asímptota és la recta horitzontal $y = L$, essent $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Nota: Quan grau $P < grauQ$, la recta $y = 0$ és l'asímptota horitzontal.

Per saber si ens acostam per damunt o davall de l'asímptota horitzontal $y = L$ construïm una taula amb dos valors grans (un negatiu i l'altre positiu). Si la funció és més petita que l'asímptota, ens acostam per davall d'ella i sinó per damunt.

x	y	*pos*
-100	...	amunt
100	...	avall



Vídeo 5.7: *Asímptotes verticals i horitzontals*
https://www.youtube.com/watch?v=2ZDHcJOBI6E

Exemple 10

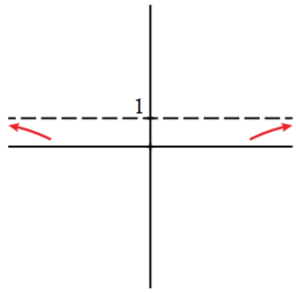
Calcula l'asímptota horitzontal de la funció $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

Aquesta funció no té asímptotes verticals perquè l'equació $1+x^2 = 0$ no té solucions. Sí que tindrà una asímptota horitzontal a un valor de y diferent de zero, perquè els graus del numerador i denominador són iguals.
L'asímptota és el valor del límit a l'infinit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{\infty}{\infty} = IND = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}+1} = 1 \quad (17)$$

Per resoldre la indeterminació ∞/∞ hem dividit tot per la major potència de x del denominador. Hem trobat que la recta $y = 1$ és una asímptota horitzontal.
Per saber la posició relativa (si ens acostam per damunt o davall de $y = 1$) construïm una taula amb un valor gran de x positiu i negatiu.

x	$f(x)$	Posició
-100	$0.9999 < 1$	Per davall
$+100$	$0.9999 < 1$	Per davall



Exercicis

10. Determinau **totes** les asímptotes de la funció $f(x) = -\dfrac{(4x+5)}{x-2}$. Calculau tots els límits necessaris per determinar-les. Representau gràficament com s'acosta la funció a les asímptotes.

11. Determinau **totes** les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 2x}$. Calculau tots els límits necessaris per determinar-les. Representau gràficament com s'acosta la funció a les asímptotes.

3.3 Asímptotes obliqües

Una funció racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ té una asímptota obliqua si el grau del numerador és igual el grau del denominador més u, grau P =grau $Q + 1$. L'asímptota és una recta de la forma $y = mx + n$.

> Si una funció té una asímptota obliqua no en tindrà d'horitzontal. Ara bé, potser que en tingui de verticals i caldrà calcular-les.

Per determinar l'asímptota obliqua feim la divisió $P(x) : Q(x)$. Del quocient de la divisió podem obtenir l'expressió de l'asímptota. Per exemple, donada la funció $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 1}{x^2 + 2x}$, veim que té una asímptota obliqua perquè el grau del numerador és 3 i el denominador és un menys (2). Realitzam la divisió de polinomis

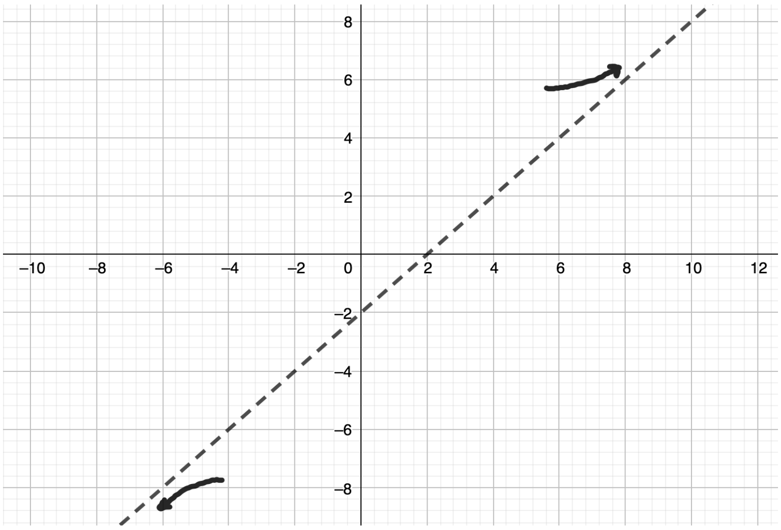
$$
\begin{array}{lll}
x^3 \qquad + 5x + 1 & & \underline{|\; x^2 + 2x \quad} \\
\underline{-x^3 - 2x^2} & & x - 2 \\
\qquad -2x^2 + 5x + 1 & & \\
\qquad \underline{2x^2 + 4x} & & \\
\qquad\qquad \underbrace{9x + 1} & &
\end{array}
\tag{18}
$$

Atès que la divisió té quocient $x - 2$, l'equació de l'asímptota obliqua és la recta $y = x - 2$.

Per saber si ens acostam per damunt o davall de l'asímptota obliqua construïm una taula amb dos valors grans (un negatiu i l'altre positiu). Si la funció és més petita que l'asímptota, ens acostam per davall d'ella i sinó per damunt. Anem a fer els càlculs.

x	$y = x - 2$	$f(x)$	Posició
-100	-102	-102.91	f és més negativa que l'asímptota. f s'acosta per davall
$+100$	98	98.0883	f és més gran que l'asímptota. f s'acosta per damunt

La situació gràfica es mostra a la figura següent



Vídeo 5.8: *Càlcul d'asímptotes obliqües.*
https://www.youtube.com/watch?v=728vYN49NJ0

Exercicis

12. Acabau de calcular la resta d'asímptotes que té la funció que s'ha explicat en aquest apartat $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 1}{x^2 + 2x}$ i feu una gràfica on apareguin totes elles i així com s'acosta la funció a aquestes.

13. Digues quina/es d'aquestes funcions té una asímptota horitzontal i quina/es obliqua. En cas afirmatiu, calcula l'equació de l'asímptota i representa de forma qualitativa com s'acosta la funció a l'asímptota.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+4}$ c) $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2+4}$ d) $f(x) = \dfrac{4x^4}{x^2+4}$