MATEMÀTIQUES II

IEDIB

Solucions

MICROTASCA D'APRENENTATGE BAT_MAT2 1.1

MATRIUS

Professor: *Josep Mulet*

1. Realitza els productes possibles amb les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$\checkmark\ A_{3\times 3} \cdot B_{3\times 4}$

$\cancel{B_{3\times 4} \cdot A_{3\times 3}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 7 \\ 7 & -10 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 3 + 2 - 2 = 3$

$1\cdot(-6) + 2\cdot 2 + 4\cdot 1 = -6 + 2 + 4 = 0$

$1\cdot(-1) + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 = 6$

$1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 5 = 7$

2. Calcula la matriu $M = P^2 - 3P - 2I$, essent I la matriu identitat d'ordre 2 i $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Determina els valors de m per als quals $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifica l'equació $X^2 - \frac{5}{2}X + I = O$

on I és la matriu identitat i O és la matriu nul·la 2×2.

$$X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2 - \frac{5}{2}m + 1 & 0 \\ 0 & \underbrace{4 - \frac{5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \xrightarrow[\cdot 2]{} 2m^2 - 5m + 2 = 0 \dots \rightarrow m = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. Calcula les matrius X que commutin amb A, és a dir $X \cdot A = A \cdot X$ essent $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{a} = \cancel{a} + c \\ a + \cancel{b} = \cancel{b} + d \\ \cancel{c = c} \\ c + \cancel{d} = \cancel{d} \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} a &= d \\ c &= 0 \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ on } a, b \in \mathbb{R}.$$

5. Resol l'equació $MX = N$ essent $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$M_{2\times 2} \cdot X_{2\times 1} = N_{2\times 1}$$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + 2b = -2 \\ -a = 1 \end{array} \right. \longrightarrow a = -1 \qquad b = -\frac{1}{2} \qquad X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

5. Resol l'equació $MX = N$ essent $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

M^{-1}

$$\underbrace{M^{-1} \cdot M}\cdot X = M^{-1} \cdot N$$

$$\underbrace{I \cdot X} = M^{-1} \cdot N \rightarrow \boxed{X = M^{-1} \cdot N}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad M \cdot M^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c = 1 \rightarrow c = 1/2 \\ b+2d = 0 \rightarrow d = 1/2 \\ -a = 0 \rightarrow a = 0 \\ -b = 1 \rightarrow b = -1 \end{cases} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$