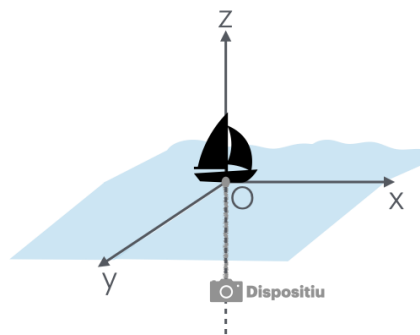


La prova consta de quatre parts: la primera no té diferents opcions, i les altres tres tenen dos possibles problemes, a contestar-ne un. En cas de contestar dos problemes d'una mateixa part, només s'avaluarà el primer.

Justifiqui les respostes usant llenguatge matemàtic i/o no matemàtic, segons correspongui. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica, però NO es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació. Es poden usar regles i bolígrafs de colors (excepte vermell i verd).

Part A. Contestau l'únic problema d'aquesta part (total 2.5 pt).

Problema A1. — Un grup d'investigació de l'Escola Politècnica Superior de la UIB va participar el desembre del 2023 en un estudi de les profunditats marines. L'equip va desplegar diverses tecnologies marines avançades amb la finalitat d'explorar i recollir dades d'hàbitats marins a una profunditat de 350 m. Per aquest motiu, una embarcació amb l'equip d'investigació es va dirigir cap a unes coordenades marines específiques.



- a) [1 punt] Un cop arribats al punt desitjat de la superfície del mar, diguem-li O , varen submergir un dispositiu verticalment 315 m (vegeu la figura). Tot seguit, aquest es va desplaçar 37 m sobre la recta

$$\begin{cases} x = 0, \\ 35y + 12z = -3780, \end{cases}$$

fins assolir la profunditat desitjada. Calcula el punt on es va situar el dispositiu després d'aquest moviment considerant el punt O el centre de referència (l'origen de coordenades).

- b) [0.5 punts] Si volem mantenir la profunditat desitjada (350 m), sobre quin pla s'ha de desplaçar el dispositiu?
- c) [1 punt] Es deixa que el dispositiu es desplaci lliurement sobre el pla calculat a l'apartat b) i es va monitorant des del vaixell. Amb un GPS s'ha detectat, des del vaixell, la presència d'un objecte (possiblement un peix) que es desplaça en línia recta sobre la trajectòria

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda, \\ y = 10 + \lambda, \\ z = -380 + 10\lambda. \end{cases}$$

Si el dit objecte no canvia la seva trajectòria, podria xocar contra el dispositiu? En cas afirmatiu, a quin punt podria ocórrer la col·lisió?

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 2.5 pt).

Problema B1. — Una empresa de construcció necessita comprar diferents matèries primeres per elaborar els seus productes. Es construeixen 4 productes diferents, els quals requereixen una certa quantitat de fusta (que té un cost de x €/kg), de ferro (que té un cost de y €/kg) i de plàstic (que té un cost de z €/kg). Per a l'elaboració dels diferents productes s'ha recopilat la següent informació sobre el cost en matèries primeres:

$$\text{Producte 1: } 2x + y - z = 40 \text{ €},$$

$$\text{Producte 2: } x - y + 2z = 90 \text{ €},$$

$$\text{Producte 3: } x + 2y = 70 \text{ €},$$

$$\text{Producte 4: } x - y + z = 50 \text{ €}.$$

- (a) [0.5 punts] Descriu què significa l'equació del producte 1.
- (b) [2 punts] Amb les dades de què disposem, és possible calcular el preu del kg de cada matèria primera? És a dir, calcular x , y , z ? Justifica la teva resposta.

Problema B2. — Siguin A i B dues matrius 3×3 tals que A és invertible. Sigui I la matriu identitat de dimensió 3×3 .

- (a) [1 punt] Sabent que $AB + I = A$, calcula la inversa de A en funció de I i B .
- (b) [1.5 punts] Sabent que A i la seva inversa A^{-1} són tals que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

calcula la matriu B que satisfà la igualtat $AB + I = A$. És B invertible? Justifica la resposta.

Part C. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 2.5 pt).

Problema C1. — La funció que descriu l'altitud A d'un terreny (en metres) sobre un tram de 500 metres és

$$A(x) = -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200,$$

on $x \in [0, 500]$ és la distància recorreguda horitzontalment, mesurada en metres.

- (a) [1.5 punts] Demostra que existeix almenys un punt x on l'altitud és 0 dins del tram considerat. *Indicació: es pot fer ús del teorema de Bolzano.*
- (b) [1 punt] Estudia els punts crítics de la funció i el seu creixement/decreixement per concloure si aquest punt és únic o no. Ho és? Justifica la resposta.

Problema C2. — Donada la funció

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(2x),$$

- (a) [**1 punt**] Determina el domini de la funció i el comportament de la funció als extrems del seu domini.
- (b) [**1.5 punts**] Calcula l'àrea compresa entre $f(x)$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = \frac{1}{2}$ i $x = 5$.

Part D. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 2.5 pt).

Problema D1. — Suposem que la probabilitat de tenir tuberculosi és de 0.0005. Sabent que la probabilitat que la prova doni positiu sabent que la malaltia és present és del 99% i la probabilitat que doni negatiu quan no ho és també és del 99%, contesta:

- (a) [**1.25 punts**] Quina és la probabilitat que el test doni positiu si la persona no té la malaltia?
- (b) [**1.25 punts**] Quina és la probabilitat de tenir tuberculosi si el resultat de la prova és negatiu?

Problema D2. — En una universitat espanyola, el 55% de l'alumnat són dones i el 45% són homes. En aquesta universitat, el 13% de les dones estudien una carrera STEM, mentre que el 37% dels homes també n'estudien una. Si escollim un estudiant a l'atzar:

- (a) [**0.75 punts**] Quina és la probabilitat que l'estudiant escollit estudiï STEM?
- (b) [**1 punt**] Sabent que l'estudiant escollit estudia STEM, quina és la probabilitat que sigui dona?
- (c) [**0.75 punts**] Sabent que l'estudiant escollit NO estudia STEM, quina és la probabilitat que sigui dona?