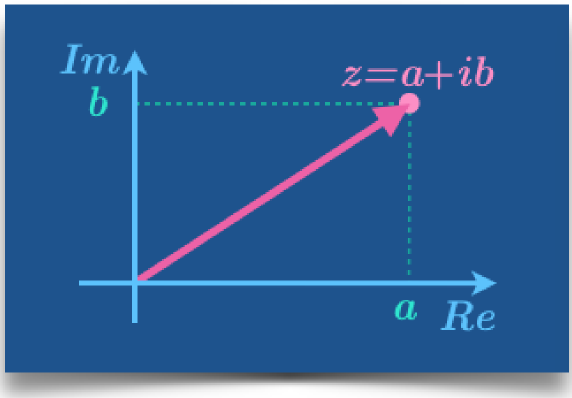
Institut d´ensenyaments a distància de les Illes Balears

https://iedib.net/

Matemàtiques I

Lliurament 1: Los nombres reales y complejos



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Índex

1. Los números reales

Conjunto de los números reales y la recta real

Los **números reales** pueden representar cualquier **medida** tal como: el precio de un producto, la duración de un evento, la altitud (positiva o negativa) de un lugar geográfico, etc. La mayor parte del tiempo, sin embargo, sólo utilizamos ciertos subconjuntos de los números reales:

- $\mathbb{N}$: los **naturales** que son los enteros positivos: $1, 2, 3, \cdots$
- $\mathbb{Z}$: los **enteros** : $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$
- $\mathbb{Q}$: los **racionales** son los que se pueden expresar con una fracción que tiene en el numerador y el denominador números enteros $\frac{a}{b}$,
  - los **decimales** , que son los racionales son exactos 0.75, periódicos puros $5.333\cdots$ o periódicos mixtos $5.12525\cdots$
- $\mathbb{I}$: los números **irracionales** tienen una representación decimal no periódica formada por infinitas cifras. Por ejemplo: $\sqrt{2}$, el número e y el número π. Los números irracionales aparecen con frecuencia en fórmulas de la ciencia e ingeniería.

El conjunto formado por todos los números racionales e irracionales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$: se llama conjunto de los **números reales** .

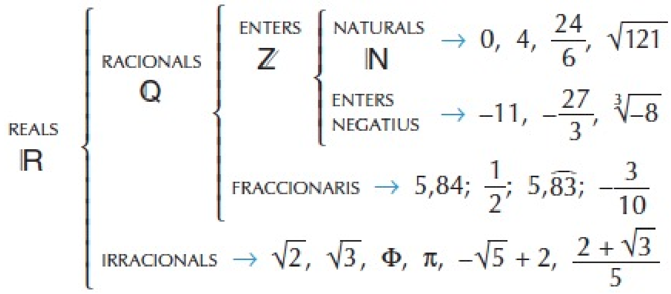


Figura 1: Conjunt dels nombres reals

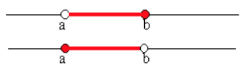
Los números reales están ordenados, es decir, podemos definir una relación de orden entre dos números cualesquiera $a < b$. Esto hace que los números reales se puedan representar sobre una línea " *uno tras otro* çon el que se conoce como **la recta real** $\mathbb{R}$.

Intervalos y semirrectas

En algunas ocasiones resulta más útil referirse a una parte de la recta real. En tal caso utilizamos intervalos y semi-rectas. Los intervalos pueden ser cerrados o abiertos según que los extremos del intervalo entren o no. Si el extremo entra utilizaremos claves **[** y si no entra un paréntesis **(** . Nos referimos a semirrectas cuando uno de los extremos del intervalo es infinito.

Utilizamos la siguiente notación para designar intervalos

Tabla 1: *Tipus d'intervals i semirectes*

Tipo	**¿Cómo se escribe?**	**Como desigualdad**	**Representación**
Intervalo abierto	(a, b)	$a < x < b$	
Intervalo cerrado	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
Intervalo semi-abierto	$(a, b]$ $[a, b)$	$a < x \leq b$ $a \leq x < b$	
Semirrecta abierta	$(-\infty, a)$ (a, ∞)	$x < a$ $x > a$	
Semirrecta cerrada	$(-\infty, a]$ $[a, \infty)$	$x \leq a$ $x \geq a$	

Cuando nos referimos a toda la recta real podemos utilizar el símbolo $\mathbb{R}$ o expresarlo como el intervalo $(-\infty, \infty)$. Recuerde que los **infinitos** siempre se escriben como un **extremo abierto** .

EXERCICI RESOLT 1

a) Expresa como un intervalo todos los números positivos que su parte entera tenga 3 cifras. b) Expresa como un intervalo $(-3,2)\cap[0,+\infty)$ c) Expresa como un intervalo todos los números que se encuentran a un distancia menor que 8 del número 5.	a) Los números que tienen 3 cifras van de 100 incluido hasta 1000 sin incluir (es decir, podríamos coger 999.9999 pero no 1000). Entonces, el intervalo es semi-abierto [100, 1000). Expresado como desigualdad tenemos $100 \le x < 1000$ b) La intersección son todos los números que tienen en común los dos intervalos. En este caso, $(-3,2)\cap[0,+\infty) = [0,2)$. c) Sabemos que un entorno es un intervalo abierto que tiene el centro en $c = 5$ y el radio $r = 8$. Entonces, el intervalo es $(c-r, c+r) = (5-8, 5+8) = (-3, 13)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Expressau como un intervalo estas situaciones:
a) Todos los números que se encuentran a una distancia menor de 2 unidades del origen.
b) El tamaño de un lado de un rectángulo sabiendo que tiene perímetro 14 cm.
c) Los valores de x por los que podemos calcular $\sqrt{3-x}$.

2. Considera los intervalos $A = [-7,4)$, $B = (-3,5)$ y $C = (-\infty,-3]$.
a) Calcula la intersección $A\cap C$, es decir, los números que tienen en común los intervalos A y C.
b) Calcula la unión $A\cup B$, es decir, todos los números que están al menos en uno de los dos intervalos.

1.1 Potències

Antes de entrar en el estudio de los radicales y los logaritmos, conviene hacer un pequeño resumen de las propiedades de las potencias. Si crees que ya tienes estos conceptos superados, intenta hacer directamente las actividades propuestas 3 y 4.

Propiedades de las potencias

Tabla 2: *Propietats de les potències*

Propiedad	Fórmula	Ejemplo
1. Cosas a recordar	Cualquier número elevado a 0 es 1 Cualquier número elevado a 1 es él mismo	$7^0 = 1$ $7^1 = 7$
2. Producto de igual base *"sumamos exponentes"*	$b^n \cdot b^m = b^{m+n}$	$3^5 \cdot 3^2 = 3^7$

3. Cociente de igual base *"restamos exponentes"*	$b^n : b^m = b^{m-n}$	$3^5 : 3^2 = 3^3$
4. Potencia de una potencia *"multiplicamos exponentes"*	$(b^n)^m = b^{n\cdot m}$	$(3^5)^2 = 3^{10}$
5. Operaciones de igual exponente	operamos las bases y elevam al mismo exponente	$3^5 \cdot 8^5 : 2^5 = (3 \cdot 8 : 2)^5 = 12^5$

Una **potencia de exponente negativo** significa **hacer la inversa** y elevar al exponente positivo. Por ejemplo:

$$2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

Una **potencia de exponente fraccionario** es un **radical** (o raíz). Por ejemplo:

$$5^{1/2} = \sqrt{5}, \quad 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}, \quad 5^{1/4} = \sqrt[4]{5}$$

En general se cumple que

RELACIÓN ENTRE POTENCIA Y RADICAL

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \tag{1}$$

EXERCICI RESOLT 2

Utiliza las propiedades para expresar la operación como una única potencia.
a) $2^4 \cdot 2 \cdot 2^3 : 4^2 =$
b) $\left(5^{\frac{7}{2}} : 5^3\right)^4 =$

a) $2^4 \cdot 2 \cdot 2^3 : 4^2 = 2^{4+1+3} : (2^2)^2 = 2^8 : 2^4 = 2^4$

b) $\left(5^{\frac{7}{2}} : 5^3\right)^4 = \left(5^{\frac{7}{2}-3}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{4\cdot\frac{1}{2}} = 5^2$

EXERCICI RESOLT 3

Opera transformando los radicales en potencia y utilizando las propiedades de las potencias.

$$\frac{a^{-2}}{a^{3/2}}\sqrt[4]{b^2}$$

Expresa la respuesta como un único radical.

$$\frac{a^{-2}}{a^{3/2}}\sqrt[4]{b^2} = a^{-7/2}b^{2/4} = \frac{b^{1/2}}{a^{7/2}} = \sqrt{\frac{b}{a^7}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Usar las propiedades de las potencias para expresar como una única potencia:
a) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 : (2^3)^2 =$
b) $(x^4 : y^2)^5 \cdot x^2 y^{11} =$
c) $3^4 \cdot 2^4 : 6^4 =$
d) $\dfrac{(a^7 \cdot a^3)^4 \cdot b^5}{ab \cdot 3ab} =$

4. Opera dejando la respuesta como una potencia de exponente positivo:
a) $a^{-2} =$
b) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} =$
c) $2^{-3} \cdot 2^{-1} : 2^{-2} =$
d) $(x^3 \cdot x^4)^{-2} \cdot x^5 =$

1.2 Radicals

En esta y la próxima sección estudiaremos cómo resolver ecuaciones de la forma

$$x^3 = 8 \quad \text{i} \quad 3^x = 8$$

Aparentemente son ecuaciones muy similares pero a la vez muy diferentes. En el primer caso, la incógnita aparece en la base de una potencia mientras que en el último aparece en el exponente. Veremos que para resolver el primer tipo de ecuaciones necesitan el **concepto de raíz** o radical mientras que el segundo se nos pide el **concepto de logaritmo** .

Definición de radical

Empezamos presentando el concepto de radical mediante el ejemplo anterior

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \text{perquè} \qquad 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{perquè} \qquad 3^4 = 81$$

$$\sqrt[5]{-100000} = -10 \qquad \text{perquè} \qquad (-10)^5 = -100000$$

En general, la definición de radical es

DEFINICIÓN DE RADICAL

$$\sqrt[n]{a} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^n = a \qquad (2)$$

[168]

Operaciones con radicales

Pasamos a enumerar una serie de propiedades de los radicales, las que provienen de las propiedades de las potencias.

Tabla 3: *Propietats del radicals*

Propiedad	**Fórmula**	**Ejemplo**
1. Producto de igual índice	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{100}=10$
2. Cociente de igual índice	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{\frac{14}{7}}=\sqrt[3]{2}$
3. Potencia de una raíz	$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^3=\sqrt[4]{5^3}$
4. Raíz de raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[12]{5}$
5. Extraer factores de la raíz	$\sqrt{a^2\cdot b}=a\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a^3\cdot b}=a\sqrt[3]{b}$	$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{7000}=\sqrt[3]{10^3\cdot 7}=10\sqrt[3]{7}$
6. Introducir factores dentro de la raíz	Consiste en el paso contrario de [5]: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$ $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3\cdot b}$	$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{75}$ $\sqrt{3\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{3^2\cdot x}}=\sqrt[4]{9x}$
7. Suma y resta. simplificar expresiones	El primer paso es factorizar los radicandos y luego extraer factores. Finalmente, podemos sumar o restar raíces iguales	$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}=$ $\sqrt[3]{3^3\cdot 2}+\sqrt[3]{2\cdot 2^3}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}$
8. Radicales equivalentes	$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot q]{a^q}$	$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[9]{2^3}=\cdots$
9. Operaciones con diferente índice	Primero hay que reducir los radicales a índice común utilizando la propiedad [8] $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[q]{a^{q/n}\cdot b^{q/m}}$ siendo $q=min.c.m(n,m)$	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}=\sqrt[12]{432}$
10. Racionalizar Y	$\frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$	$\frac{2}{\sqrt[4]{5}}=\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}}=\frac{2\sqrt[4]{5^3}}{5}$
11. Racionalizar II	multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador $\frac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\cdot\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$	$\frac{1}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\cdot\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

Vídeo 1.1: *Propietats i operacions amb radicals*
https://www.youtube.com/watch?v=Cfl8HcObbGA&start=20&end=964

EXERCICI RESOLT 4

Simplifica tanto como puedas la expresión

$$3\sqrt{8}-2\sqrt{50}+5\sqrt{18}-4\sqrt{2}$$

Empezando factorizando los radicandos

$$3\sqrt{2^3}-2\sqrt{2\cdot 5^2}+5\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}=$$

Expresamos $2^3=2\cdot 2^2$ y sacamos afuera los radicales todos los factores que aparecen elevados a 2

$$=3\cdot 2\sqrt{2}-2\cdot 5\sqrt{2}+5\cdot 3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=$$

Como sólo queda el radical $\sqrt{2}$ se pueden agrupar en un solo: $=7\sqrt{2}$

EXERCICI RESOLT 5

Efectúa y simplifica tanto como puedas

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{12}}}}{\sqrt[6]{a^5}}$$

Empezamos efectuando raíz de raíz en el numerador

$$\frac{\sqrt[15]{a^{12}}}{\sqrt[6]{a^5}}=$$

Reducimos a índice común min.c.m (15,6) = 30

$$=\frac{\sqrt[30]{a^{12\cdot 2}}}{\sqrt[30]{a^{5\cdot 5}}}=$$

Expresamos como una única raíz y simplificam las potencias de a

$$=\sqrt[30]{\frac{a^{24}}{a^{25}}}=\sqrt[30]{a^{-1}}=\sqrt[30]{\frac{1}{a}}$$

EXERCICI RESOLT 6

Calcula la razón b/a entre los números reales $a=\sqrt{5}$ y $b=\sqrt{5}+1$. Da la respuesta exacta (sin utilizar números decimales) y racionalizada.

Para racionalizar multiplicamos y dividimos por $\sqrt{5}$:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=$$

A continuación multiplicamos en línea. En el denominador aplicamos la propiedad distributiva y en denominador tenemos el cuadrado de una raíz cuadrada $(\sqrt{5})^2=5$.

$$=\frac{5+\sqrt{5}}{5}=1+\frac{\sqrt{5}}{5}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5. Opera y simplifica $(2+\sqrt{3})^2$

6. Racionaliza la expresión $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

1.3 Logaritmes

Definición de logaritmo

Si nos preguntamos 10 elevado a qué número x mujer 1000, la respuesta es fácil: $x = 3$ porque $10^3 = 1000$.

Si en cambio nos preguntamos que debe valer x en $2^x = 1000$ la respuesta no puede ser entera. Todas las ecuaciones donde la **incógnita aparece en un exponente** darán lugar a un **logaritmo** . En este ejemplo $x = \log_2 1000$, que se lee como l'logaritmo en base 2 de 1000".

Pasamos a definir qué se entiende por logaritmo:

DEFINICIÓN DE LOGARITME

$$\log_b y = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = y \tag{3}$$

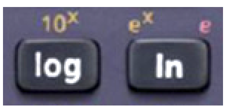
b: Base del logaritmo

b es la base del logaritmo, que debe ser positiva y diferente de 1. Si la base es 10, tenemos el **logaritmo decimal** $\log_{10} x = \log x$. Si en cambio elegimos como base el número $e = 2.7182818\cdots$, obtenemos el **logaritmo neperiano** , $\log_e x = \ln x$.

Tabla 4: *Tipus de logaritmes*

Tipo de logaritmo	Base	Notación	Significado
Binario	2	$\log_2 x$	$\log_2 x$
neperiano	e	$\ln x$	$\log_e x$
Decimal	10	$\log x$	$\log_{10} x$

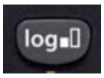
Todas las calculadoras científicas pueden calcular dos tipos de logaritmo; el decimal tecla log y el neperiano con la tecla ln



En caso de necesitar calcular un logaritmo en otra base, utilizaremos la **fórmula del cambio de**

base

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} \approx 2,322$$

Es posible que su modelo de calculadora sea más actual y dispone de la tecla , lo puede realizar el cálculo de cualquier logaritmo directamente.

> **Atención:** A un logaritmo $\log_b x$
> Tanto b como x deben ser mayores que 0. Además, la base b no puede ser igual a 1.

EXERCICI RESOLT 7

Usar la definición de logaritmo para calcular el valor de x:
a) $\log x^2 = -2$
b) $7^x = 115$
c) $\log_x 4 = -\dfrac{1}{2}$
d) $\ln x = 2$

a) Se trata de un logaritmo decimal: $\log_{10} x^2 = -2$; aplicamos la definición $10^{-2} = x^2$, tomamos la raíz cuadrada a ambos miembros $x = \pm 10^{-1} = \pm\frac{1}{10}$.

b) $7^x = 115$; por la definición, el exponente x es el logaritmo: $x = \log_7 115$

c) $\log_x 4 = -\dfrac{1}{2}$; aplicamos la definición $x^{-1/2} = 4$. Aquí hay que recordar que elevar a 1/2 es hacer la raíz cuadrada. Entonces, para eliminar la raíz cuadrada hay que elevar toda la ecuación al cuadrado. Nosotros elevaremos a -2 porque queremos eliminar también el exponente negativo de la $x \Rightarrow x = 4^{-2}$. Finalmente $x = \dfrac{1}{16}$.

d) Se trata de un logaritmo neperiano, la base es el número e. $\log_e x = 2$; aplicando la definición encontramos $x = e^2 \approx 7,389$

Vídeo 1.2: *Definició de logaritme*
https://www.youtube.com/watch?v=NmTGMGTf1x0

Propiedades de los logaritmos

Tabla 5: *Propietats dels logaritmes amb exemples*

Propiedad	**Fórmula**	**Ejemplos**
1. Logaritmo de 1 en cualquier base es 0	$\log_b 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$; $\ln 1 = 0$; $\log 1 = 0$; etc.
2. Logaritmo en base b de la base siempre es 1	$\log_b b = 1$	$\log_2 2 = 1$; $\ln e = 1$; $\log 10 = 1$; etc.

3. Logaritmo de un producto es la suma de logaritmos	$\log_b(A\cdot B)=\log_b A+\log_b B$	$\log 50=\log(5\cdot 10)=\log 5+\log 10=\log 5+1$
4. Logaritmo de una potencia, el exponente baja ante el logaritmo	$\log_b A^n=n\cdot\log_b A$	$\log 2^6=6\log 2$
5. Logaritmo de un cociente es la diferencia de logaritmos	$\log_b\left(\dfrac{A}{B}\right)=\log_b A-\log_b B$	$\log 50=\log\dfrac{100}{2}=\log 100-\log 2=2-\log 2$
6. Fórmula del cambio de base	$\log_b A=\dfrac{\log A}{\log b}$	$\log_2 5=\dfrac{\log 5}{\log 2}=\dfrac{\ln 5}{\ln 2}=\cdots$
7. El exponencial es la función inversa del logaritmo	$b^{\log_b A}=A$	$2^{\log_2 5}=5$

Vídeo 1.3: *Propietats dels logaritmes*
https://www.youtube.com/watch?v=sfe8QEeYn3U

EXERCICI RESOLT 8

Calcula x en cada caso:
a) $\log_3 x=\dfrac{1}{2}$
b) $\log_x 81=4$
c) $\ln\dfrac{3x}{2}=5$

Este problema se resuelve fácilmente aplicando la definición de logaritmo.

a) $\log_3 x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=3^{1/2}=\sqrt{3}$

b) $\log_x 81=4\Leftrightarrow x^4=81\to x=\sqrt[4]{81}=3$

c) $\ln\dfrac{3x}{2}=5\Leftrightarrow\dfrac{3x}{2}=e^5\to x=\dfrac{2e^5}{3}$

EXERCICI RESOLT 9

Calcula x en cada caso:
a) $2,5^x=0,0087$
b) $e^{-x}=425$

Este problema se resuelve fácilmente aplicando la definición de logaritmo. Alternativamente, nosotros tomaremos logaritmos en ambos miembros de la ecuación. A continuación utilizamos la propiedad [4].

a) $\log 2,5^x=\log 0,0087\Rightarrow x\cdot\log 2,5=\log 0,0087$

$$\Rightarrow x=\frac{\log 0,0087}{\log 2,5}\approx -5,178$$

b) $\ln e^{-x}=\ln 425\Rightarrow -x\cdot\ln e=\ln 425\Rightarrow x=-\ln 425\approx -6,052$

EXERCICI RESOLT 10

Utiliza las propiedades de los logaritmos para expresar como un único logaritmo:
$\log x^2 + \log 2 - \log x - \log 3$

Utilizamos las propiedades 3 y 5 al miembro de la izquierda con el fin de juntar los 4 logaritmos en un único logaritmo

$$\log x^2 + \log 2 - \log x - \log 3 =$$

$$\log \frac{x^2 \cdot 2}{3 \cdot x} = \log \frac{2x}{3}$$

Aplicaciones de los logaritmos

Las cantidades científicas menudo se expresan en **escala logarítmica** . Por ejemplo, **el decibelio (dB)** es una unidad logarítmica de medida. De hecho, 1 dB (decibelios) es 10 veces un 1 B (bel). La medida de un ruido de potencia P medida en dB se calcula a partir de $dB = 10 \log \frac{P}{P_0}$ donde P_0 es el umbral de audición. Si pasamos de 70 dB a 100 dB, se ha aumentado (100-70) / 10 = 3 B y, como que la escala es logarítmica, esto quiere decir que el ruido lleva $10^3 = 1000$ veces más energía.

Los logaritmos también se utilizan para cuantificar la pérdida de los niveles de tensión en la transmisión de señales eléctricas, para describir los niveles de potencia de los sonidos en la acústica, y la absorción de la luz en el campo de la espectrometría y la óptica. La relación señal / ruido que describe la cantidad de ruido no deseado en relación con una señal también se mide en decibelios.

La **fuerza de un terremoto** se mide tomando el logaritmo común de la energía emitida en el terremoto. Esto se utiliza en la escala de magnitud de momento o la escala de Richter. Por ejemplo, un terremoto de 5,0 libera 10 veces y el 6,0 libera 100 veces la energía de un 4,0.

Otra escala logarítmica es la **magnitud aparente** . Se mide el brillo de las estrellas logarítmicamente.

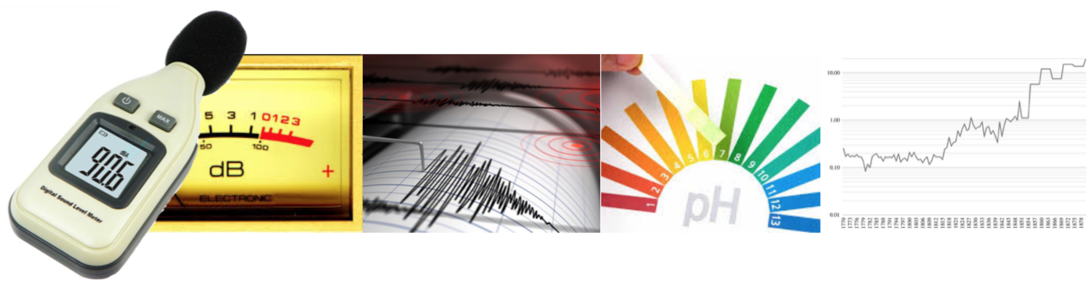


Figura 2: Aplicacions dels logaritmes

Otro ejemplo es el **pH en la química** ; pH es el negativo del logaritmo de la concentración de los iones oxonio (los iones de hidrógeno H_3O^+ que se disocian de la molécula de agua).

Gráficos semi-logarítmicos (log-lineales) utilizan el concepto de escala logarítmica para la visualización: uno de los ejes, en general la vertical, se escala logarítmica. De esta forma es posible distinguir detalles de la gráfica que sería imposible ver en escala lineal.

EJERCICIOS PROPUESTOS

7. Aplíquela las definición de radical y logaritmo para encontrar x en estas ecuaciones
a) $10^x = 5$
b) $x^5 = 2$
c) $\ln x = -3$
d) $\log_x 125 = -3$

8. Considera la expresión $F = 3\log_2 x + \log_2 1 - \log_2 10$.
a) Utilizar las propiedades para expresarla como un único logaritmo.
b) Calcular el valor de F cuando $x = 8$.
c) Sabemos que $F = 4$, aïllau el valor de x.

newpage

2. Els nombres complexos

Introducción

El hombre ha ido ampliando a lo largo del tiempo la noción de número según sus necesidades. Desde la prehistoria, los números naturales han servido para contar. Los números enteros negativos nos permiten resolver ecuaciones como $x + 5 = 1$. De forma similar los números fraccionarios permiten hacer repartos y resolver $3x = 2$. En la antigua Grecia ya se sabía que no existía ningún número racional que fuera solución de $x^2 = 2$; la diagonal de un cuadrado de 1 m. De ahí se introdujeron los números irracionales.
El conjunto formado por los números racionales e irracionales es el conjunto de los números reales. Estos son todos los números con los que, de momento, hemos trabajado.

Leonhard Euler

INTRODUCCIÓ

Ecuaciones de segundo grado

Es posible encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$?

Si utilizamos la fórmula de las ecuaciones de segundo grado, encontramos

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \tag{4}$$

Dado que $\sqrt{-36}$ no es ningún número real, decimos que la ecuación no tiene soluciones reales. Pero, si separamos $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{-1}$, vemos que el problema está en que no podemos calcular $\sqrt{-1}$.

En 1777 Leonard Euler llamó $i = \sqrt{-1}$ como la **unidad imaginaria** . De esta forma podemos escribir las soluciones como:

$$x = \frac{4 \pm 6\,i}{2} = 2 \pm 3i \tag{5}$$

Acabamos de escribir dos números complejos en forma binómica.

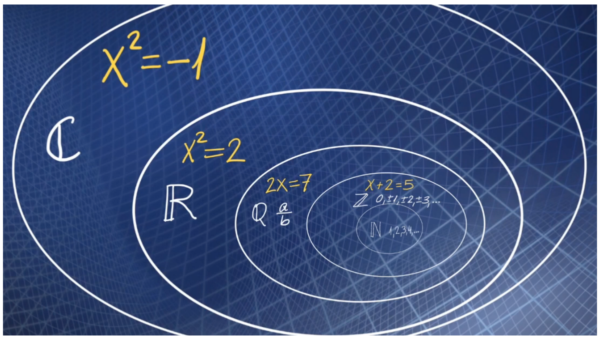


Figura 3: Conjunt dels nombres complexos: Cada conjunt permet resoldre un tipus més complicat d'equació.

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ amplía el conjunto de los números reales y permite dar un significado a las raíces cuadradas de números negativos para así poder resolver ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$.

Números complejos en forma binómica

Se define la **unidad imaginaria** i como $i = \sqrt{-1}$. Este número lo representamos sobre un eje vertical que llamamos **eje imaginario** .

Los números de la forma $2i,\ 5i,\ -\frac{3}{2}i,\ \cdots$ denominan **imaginarios puros** . Todos ellos están sobre el eje vertical.

Se cumple que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc. Gráficamente, cada vez que multiplicamos por y, el número gira $90°$ en sentido antihorario, pasando de imaginario real sucesivamente.

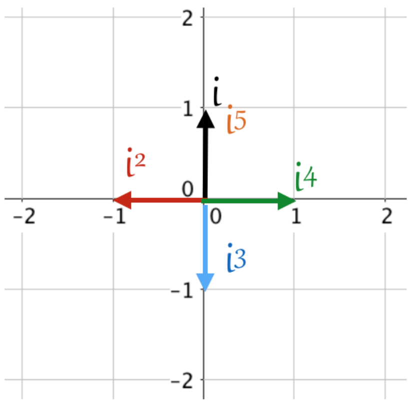


Figura 4: Potències de i.

Un **número complejo** en forma binómica expresa como $z = x + iy$, donde $x = Re(z)$ llama **parte real** y $y = Im(z)$ la **parte imaginaria** del número.

El números se representan sobre el **plano complejo** . En el eje horizontal se situamos la parte real y en el eje vertical la parte imaginaria.

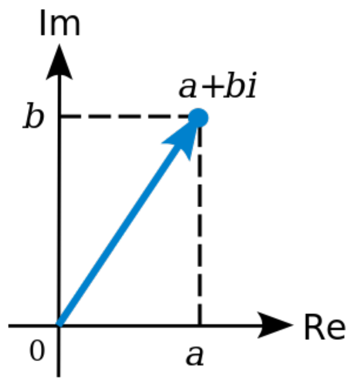


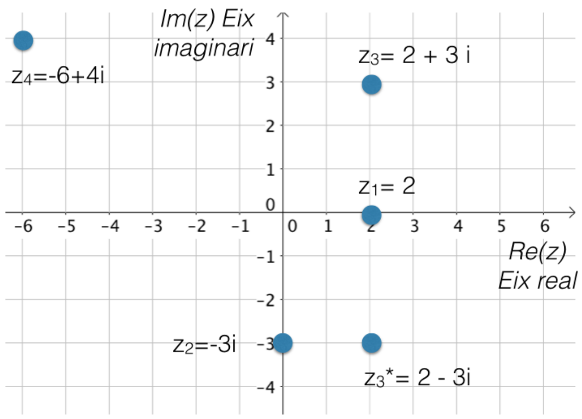
Figura 5: Representació d'un nombre en el pla complex.

El **complejo conjugado** del número se obtiene de cambiar el signo de la parte imaginaria $z^* = x - iy$.

El **módulo** de un número complejo es la longitud del número que se obtiene de $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

EXERCICI RESOLT 11

Representa sobre el plano complejo los números:
$z_1 = 2$
$z_2 = -3i$
$z_3 = 2 + 3i$
z_3*
$z_4 = -6 + 4i$



2.1 Operacions en forma binòmica

Suposau que nos dan los números complejos $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 5 + 4i$. Con estos números podemos hacer las siguientes operaciones:

- **SUMA:** Se suma la parte real con la parte real, y la parte imaginaria con imaginaria

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (5 + 4i) = 7 + i \tag{6}$$

- **DIFERENCIA:** Se resta la parte real con la parte real, y la parte imaginaria con imaginaria

$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (5 + 4i) = -3 - 7i \tag{7}$$

- **PRODUCTO:** Se aplica la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis y se recuerda que $i^2 = -1$

$$z_1 \cdot z_2 = (2-3i) \cdot (5+4i) = 10+8i-15i-12\underset{\downarrow\, -1}{i^2} = 22 - 7i \tag{8}$$

¿Nota que si multiplicamos un número complejo por su conjugado, obtenemos un número real que es igual al módulo al cuadrado del número complejo, es decir $z \cdot z^* = |z|^2$. Este resultado es fácil de demostrar; suponemos que $z = a + ib$, entonces:

$$(a+ib)\cdot(a-ib) = a^2 - i\,ab + i\,ab - bi^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \tag{9}$$

- **POTENCIA:** Se transforma la potencia como producto.

$$z_1^2 = (2-3i) \cdot (2-3i) = 4 - 6i - 6i + 9i^2 = -5 - 12i \tag{10}$$

Puede comprobar que se cumplen las fórmulas de identidades notables siempre y cuando utilizamos que $i^2 = -1$.

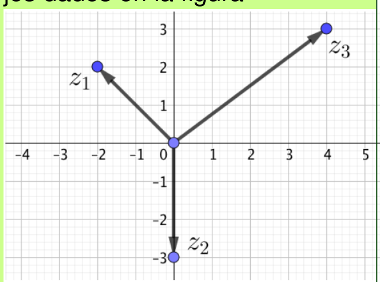
$$z_1^2 = (2-3i)^2 = 2^2 - 2\cdot 2\cdot 3i + (3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = -5 - 12i \tag{11}$$

- **COCIENTE:** Se multiplica el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador. Después se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-3i)\cdot(5-4i)}{(5+4i)\cdot(5-4i)} = \frac{-2-23i}{41} \tag{12}$$

EXERCICI RESOLT 12

Considera los números complejos dados en la figura



calcula
a) $z_1 + z_2 - z_3$
b) $z_1^* \cdot z_2$
c) $\dfrac{z_1}{z_3}$

En primer lugar, de la figura deducimos los números en forma binómica: $z_1 = -2 + 2i$; $z_2 = -3i$; $z_3 = 4 + 3i$

Las operaciones son:
a) $z_1 + z_2 - z_3 = -2 + 2i - 3i - 4 - 3i = -6 - 4i$

b) $z_1^* \cdot z_2 = (-2-2i)\cdot(-3i) = 6i + 6i^2 = - + 6i$

c) $\dfrac{z_1}{z_3} = \dfrac{-2+2i}{4+3i} =$
$\dfrac{(-2+2i)\cdot(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \dfrac{-2+14i}{25}$

Vídeo 1.4: *Introducció als nombres complexos*
https://www.youtube.com/watch?v=uhra2yk2g5Q

EJERCICIOS PROPUESTOS

9. Considere el número complejo $z = -1 + 2i$
a) Diga cuál es su parte real e imaginaria.
b) ¿Qué número es el complejo conjugado de z?.
c) Calcular $w = i\,z$. Representa en el plano complejo z y w y explique cuál es el efecto de multiplicar por i un número.

10. Considere los números $z_1 = -3 + 2i$ y $z_2 = 5 - i$.
a) Calcular z_1^2 y z_2^2.
b) Calcular $\frac{1}{z_1}$ y $\frac{1-i}{z_2}$.
Representa todos los números en el plano complejo.