IEDIB

MATEMÀTIQUES II

Lliurament 1

Propietats dels determinants

Josep Mulet Pol

Propietats dels determinants

0a) El determinant de la matriu identitat és 1: $|I| = 1$

Exemple:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (0 \cdot 0) = 1$$

1a) El determinant d'una matriu A és igual al determinant de la seva transposada $|A^t| = |A|$:

Exemple:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (1 \cdot (-4)) = 10$$

i també

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - ((-4) \cdot 1) = 10$$

2a) Si els elements d'una fila o d'una columna es multipliquen tots per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número:

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 2k & 1 \\ -4k & 3 \end{vmatrix} = 2k \cdot 3 - (1 \cdot (-4k)) = 10k$$

$$\begin{vmatrix} 2K & K \\ -4K & 3K \end{vmatrix} = K^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot K^2$$

$$k \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot K$$

Propietats dels determinants

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-4 & 1 \\ -1-3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 19 - 9 = 10$$

4a) Si en un determinant els elements d'una línia o columna són nuls, el determinant és nul:

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - (1 \cdot 0) = 0$$

5a) Si en una matriu es permuten dues files (o dues columnes), el determinant canvia de signe.

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (2 \cdot (3)) = -10$$

6a) Si un determinant té dues files o columnes paral·leles iguals, el determinant és nul:

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (1 \cdot 3) = 0$$

Propietats dels determinants

7a) Si una matriu quadrada té dues files o dues columnes proporcionals, el seu determinant és nul.

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \cdot k \\ 3 & 3 \cdot k \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot k - (1 \cdot 3 \cdot k) = 0$$

8a) Si els elements d'una línia són combinació lineal de les restants línies paral·leles, el determinant és nul.

Exemple:

Aquesta propietat per matrius 2×2 és igual que la propietat 7a). Per això, veurem un exemple amb matrius d'ordre 3.

Si a la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 1 & ? \\ -4 & 3 & ? \\ 5 & 2 & ? \end{pmatrix}$ construïm la tercera columna com una combinació de les altre dues, per exemple: $C_3 \to C_2 - 2C_1$ trobam el determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 11 \\ 5 & 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2 \cdot 3 \cdot (-8) + (-4) \cdot 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 11 \cdot 5 \\ -5 \cdot 3 \cdot (-3) - (-4) \cdot 1 \cdot (-8) - 2 \cdot 2 \cdot 11 \end{matrix} = 0$$

que comprovam que és nul així com assegura la propietat.

9a) Si als elements d'una línia se li suma una combinació lineal de les restants línies, el determinant no varia:

Determinant del producte

10a) El determinant del producte de dues matrius quadrades és igual al producte dels determinants de les matrius:
$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ tenen determinant $|A| = 10$ i $|B| = -5$. El producte de les dues matrius és $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -23 \end{pmatrix}$ que té determinant $|A \cdot B| = -50$ que coincideix amb $|A| \cdot |B| = 10 \cdot (-5) = -50$.

Condició d'existència de la inversa

$A \cdot A^{-1} = I \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1$

Tenim el producte de dos determinant igualat a 1. Per força, cap dels dos termes pot ésser igual a zero.

Una matriu té inversa (o regular o invertible) si i només si el seu determinant diferent de zero $|A| \neq 0$.

Exemple 1

Cadascun dels següents determinants és nul

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} & \begin{matrix} [1^a] \\ [2^a] \\ [3^a] \end{matrix} \end{array}$ $[3^a] = 2 \cdot [2^a] - [1^a]$ $= 0$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \rightarrow [2^a]-[1^a] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$

Exemple 2

Sabem que les matrius 3x3, *A* i *B* tenen determinants |*A*|=2 i |*B*|=5. Què valdrà el determinant de la matriu $A^{-1} \cdot (3B)$?

$$\left| A^{-1} \cdot (3B) \right| = |A^{-1}| \cdot |3B| = \frac{1}{|A|} \cdot 3^3 \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 5 = \boxed{67{,}5}$$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$|3B| = \begin{vmatrix} 3b_{11} & 3b_{12} & 3b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ 3b_{31} & 3b_{32} & 3b_{33} \end{vmatrix} = 3^3 \cdot |B|$$

https://iedib.net

Josep Mulet Pol

(2019)