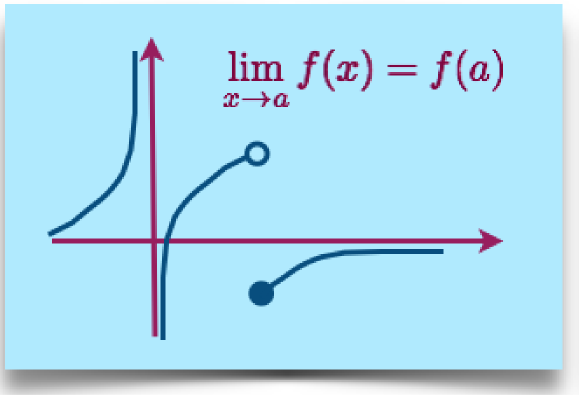
Institut d´ensenyaments a distància de les Illes Balears

https://iedib.net/

# Matemàtiques II

## Lliurament 5: Continuïtat i derivabilitat de funcions




**Josep Mulet**
*Àmbit Científic*
IEDIB

# Índex



# 1. Introducció

La majoria de fenòmens de la naturalesa venen descrits per funcions contínues. És per això que si ens trobam amb afirmacions com ara

- L'ascensor va de primera planta a la tercera sense passar per la segona.
- La nau va passar de 0 a 100 km/h instantàniament

ens puguin semblar allunyades de la realitat. Efectivament

- Si un ascensor parteix de la primera planta i arriba a la tercera, obligatòriament ha de passar per la segona ja que la seva trajectòria és una funció contínua.
- És impossible que una nau passi de 0 a 100 km/h instantàniament. Pot accelerar molt aviat, això sí, però instantàniament no és permès ja que requeriria una acceleració infinita. Per això, els canvis de les magnituds associades a un fenomen també són contínues i conseqüentment la funció que descriu aquest fenomen, a més de continua, ha d'ésser derivable.

Els objectius d'aquest lliurament són:

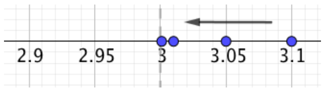
1. Conèixer el concepte de límit i la seva aplicació en l'anàlisi de la continuïtat i derivabilitat de funcions.
2. Dominar les tècniques de càlcul de límits i indeterminacions.
3. Identificar les causes per les quals una funció pot ésser discontínua.
4. Conèixer i aplicar les condicions perquè una funció sigui contínua.

5. Saber les conseqüències associades a les funcions contínues (**Teorema de Bolzano**).
6. Entendre el significat de derivada i saber aplicar la seva definició.
7. Conèixer i aplicar les condicions perquè una funció sigui derivable.
8. Aplicar les propietats de les funcions derivables (**Teorema de Rolle**).

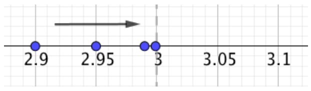
## 2. Concepte de límit

Començarem aprenent que significa acostar-se a un nombre donant una sèrie de definicions:

- Direm que $x$ **tendeix a** $a$ **per la dreta** ( $x \to a^+$) si $x$ pren valors majors que $a$ i cada vegada més propers a ell,

  $x \to 3^+$ si $x = 3.1, 3.01, 3.001, \cdots$. 
  

- Direm que $x$ **tendeix a** $a$ **per l'esquerra** ( $x \to a^-$) si $x$ pren valors menors que $a$ i cada vegada més propers a ell,

  $x \to 3^-$ si $x = 2.9, 2.99, 2.999, \cdots$. 
  

- Direm que $x$ **tendeix a** $a$ ( $x \to a$) si $x$ pren valors cada vegada més propers a $a$, indistintament superiors o inferiors a ell,

  $x \to 3$ si $x = 3.1, 2.99, 3.001, \cdots$

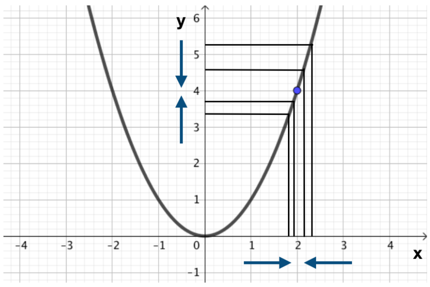
- Direm que $x$ tendeix a $+\infty$ ( $x \to +\infty$) si $x$ pren valors positius cada vegada més grans,

  $x \to +\infty$ si $x = 10, 1000, 1000000, \cdots$.

- Direm que $x$ tendeix a $-\infty$ ( $x \to -\infty$) si $x$ pren valors negatius cada vegada més grans,

  $x \to -\infty$ si $x = -10, -1000, -1000000, \cdots$.

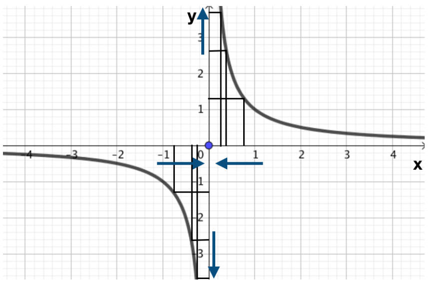
El límit ho podem definir com aquell lloc al que, si no arribem, serem capaços d'acostar-nos tot el que vulguem. En sentit matemàtic, el límit d'una funció en un punt, té sentit de *lloc* cap al qual es dirigeix el valor de la funció $f(x)$ quan la variable independent ( $x$) s'aproxima a un valor determinat.




Si prenem la funció del gràfic adjunt, quan $x$ s'aproxima a 2, el valor de la funció $f(x) = x^2$ s'aproxima al valor 4. A més, en aquest cas, no solament podrem acostar-nos tot quant vulguem, sinó que arribem al mateix valor de la funció en $x = 2$; és a dir, $f(2) = 4$.
En forma de límit escrivim

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \qquad (1)$$

i es llegeix *el límit quan x tendeix a 2 (tant per la dreta o l'esquerra) de la funció és igual a 4*.




En aquest altre gràfic, quan $x$ s'aproxima a 0, el valor de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ s'aproxima cap a més o menys infinit. En aquest cas, necessitam especificar si ens acostam per la dreta o per l'esquerra de 0.
En forma de límit escrivim

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad (2)$$

Es llegeix, *el límit per l'esquerra de 0 de la funció és menys infinit i per la dreta de zero és més infinit*.

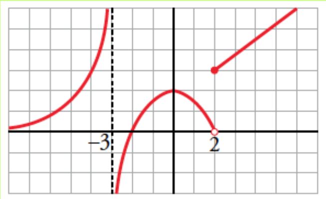
Anomenam **límits laterals** a $x = a$ als límits per l'esquerra i la dreta de $a$. Direm que el límit d'una funció en un punt existeix si els **dos límits laterals coincideixen** , és a dir

El límit al punt $a$ existeix si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) \qquad (3)$$

**EXERCICI RESOLT 1**

A partir de la gràfica de la funció següent




deduïu els límits

a) $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x\to -2} f(x)$

- a) $+\infty$
- b) $-\infty$
- c) 2
- d) 0
- e) 3
- f) 0

### Límits a partir d'una taula de valors

L'apartat anterior ha introduït el concepte de límit i hem après com deduir-ne valors a partir d'una gràfica. El problema és que en moltes ocasions no disposam de la gràfica o no sabem quina forma té. En aquests casos, aprendrem altres tècniques per calcular límits.

Anem a calcular els límits de les funcions l'apartat anterior, $f(x) = x^2$ i $f(x) = \dfrac{1}{x}$, mitjançant taules de valors

Taula 1: *Límits a partir de taules de valors*

| $\lim_{x\to 2^-} x^2$ | $\lim_{x\to 2^+} x^2$ | $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ | $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ |
|---|---|---|---|
| $x = 1.9; y = 3.61$ | $x = 2.1; y = 4.41$ | $x = -0.1; y = -10$ | $x = 0.1; y = 10$ |
| $x = 1.99; y = 3.96$ | $x = 2.01; y = 4.04$ | $x = -0.01; y = -100$ | $x = 0.01; y = 100$ |
| $x = 1.999; y = 3.996$ | $x = 2.001; y = 4.004$ | $x = -0.001; y = -1000$ | $x = 0.001; y = 1000$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $y \to 4$ | $y \to 4$ | $y \to -\infty$ | $y \to +\infty$ |

A mesura que la $x$ s'acosta al valor on demanen el límit, ens fixam cap a on s'acosta el valor de $y$. Aquest valor extrapolat és el valor del límit que ens demanen.

**EXERCICI RESOLT 2**

Calcula el límit

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

amb l'ajuda d'una taula de valors.

Donam cada vegada valors que s'apropin més a 1 per l'esquerra (és a dir, menors que 1):

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0.9 | 0.270088 |
| 0.99 | 0.251888 |
| 0.999 | 0.2501876 |
| 0.9999 | 0.2500187 |

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = 0.25 = \frac{1}{4}$$

## 3. Càlcul de límits

Podem classificar els límits en un punt en:

- **Immediats:** Només cal substituir el valor de $x$ dins la funció.
- **Infinits:** Quan substituïm valor de $x$ dins la funció, trobam una divisió per zero $\frac{k}{0}$. El límit pot donar $\pm\infty$. Caldrà calcular els dos límits laterals.
- **Indeterminats:** Una indeterminació és una expressió de la qual no sabem el seu valor si no feim alguna cosa més. Cada tipus d'indeterminació té una tècnica per descobrir el seu valor.

  Són indeterminacions expressions com ara:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty-\infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 1^{\infty}$$

El carnaval i les indeterminacions

Imagineu que us trobau a una festa de carnaval on tots els vostres amics porten una màscara a sobre. Sabeu que darrera la màscara hi ha algú conegut però fins que no es llevi la màscara no teniu forma de saber de qui es tracta.
Aquest símil us pot servir per entendre que és una indeterminació: una màscara que fins que no facem alguna cosa no tenim forma de saber què val.

La primera cosa que SEMPRE cal fer per calcular un límit és substituir el valor de $x$ dins la funció. Si la calculadora dóna un nombre, ja haurem acabat.

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4 \qquad \text{Ja hem acabat!} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \text{Math Error} \qquad \text{Ups! Caldrà fer alguna cosa més} \tag{5}$$

## 3.1 Límits a un punt

En aquesta secció aprendrem tècniques per determinar els límits infinits del tipus $\frac{k}{0}$ i la indeterminació $\frac{0}{0}$. La següent taula mostra cada regla juntament amb un exemple:

| Me demanen $\lim_{x\to a} f(x)$ | | |
|---|---|---|
| *Quan substutueixo $x$ per $a$ trob* | *Què faré?* | *Exemple* |
| Un nombre | Res. Ja he acabat! | $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$ |
| $\frac{k}{0}$ | Calcular els límits laterals per saber si val $\pm\infty$ | $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \end{cases}$ |
| $\frac{0}{0}$ amb polinomis | Factoritzar i simplificar | $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 10$ |
| $\frac{0}{0}$ amb arrels | Racionalitzar i simplificar | $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)} = \cdots = \frac{1}{6}$ |

Figura 1: Com calcular límits i no morir en el intent.



IEDIB

**EXERCICI RESOLT 3**

Calcula els límits de la funció $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ quan **a)** $x \to 1$, **b)** $x \to 3$, **c)** $x \to -3$

a) Immediat: $\lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{1+3}{1-9} = -\frac{1}{2}$

b) Infinit: $\lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{6}{0} = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{+6}{-0} = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{+6}{+0} = +\infty \end{cases}$

c) Indeterminació 0/0: $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{0}{0} = \text{IND} =$

$= \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)} = \lim_{x\to -3} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6}$

**Vídeo 5.1**: *Límits de funcions racionals en un punt.*
https://www.youtube.com/watch?v=nnbRtibgETU

## *3.2 Límits a l'infinit*

Treballar amb infinits a vegades és contraintuïtiu. Això passa perquè l'infinit no és un nombre real i les operacions són una mica especials. Us deixo en aquesta taula les operacions més habituals perquè les pugueu consultar en cas de dubte:

**Operacions immediates amb infinits**

$$\infty + \infty = \infty \qquad \infty \cdot \infty = \infty \qquad k \cdot \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

$$\frac{k}{\infty} = 0 \qquad \frac{\infty}{0} = \pm\infty \qquad b^{\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } b > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Algunes operacions són indeterminades i caldrà aplicar les regles a l'hora de calcular els límits

| Operacions indeterminades amb infinits |
|---|
| $$\infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0 \cdot \infty \qquad 1^{\infty} \tag{6}$$ |

La següent taula mostra els diferents casos que ens podem trobar quan calculam límits de funcions a l'infinit. Llegiu l'exemple i fixeu-vos en la tècnica heu d'aplicar en cada cas.

| Me demanen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ | | |
|---|---|---|
| *Quan substitueixo $x$ per $\pm\infty$ trob* | *Què faré?* | *Exemple* |
| $\frac{k}{\infty}$ | El límit val 0. | $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ |
| $\frac{\infty}{\infty}$ amb polinomis | Dividim tot per la major potència de $x$ del denominador. | $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2-2x+1}$ = dividim per $x^2$ = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+5/x^2}{3-2/x+1/x^2} = \frac{2}{3}$ |
| $\frac{\infty}{\infty}$ amb arrels | El mateix que abans, però ara l'exponent dins d'una arrel queda dividit entre 2. | $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$ = dividim per $x$ = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+5/x}{\sqrt{3-2/x+1/x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ |
| $\infty-\infty$ amb polinomis | Calcular el mcm i operar les fraccions | $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} - x = \cdots = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$ |
| $\infty-\infty$ amb arrels | Racionalitzar i simplificar | $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1} - x =$ $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1}-x)\frac{(\sqrt{x^2-1}+x)}{(\sqrt{x^2-1}+x)} = \cdots = 0$ |

Figura 2: Regles per calcular límits a l'infinit

**Vídeo 5.2**: *Límits de polinomis a l'infinit*
https://www.youtube.com/watch?v=EQxB-xFjIKc

**Vídeo 5.3**: *Límits de funcions racionals en l'infinit.*
https://www.youtube.com/watch?v=lZVNc19MNTc

## Exercici Resolt 4

Calcula els següents límits

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-2x^2+1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+x-5}{2x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x^2}{x+3}$

a) Donat que es tracta d'un polinomi només consideram la potència de major grau

$$\lim_{x\to-\infty} x^3-2x^2+1 = \lim_{x\to-\infty} (-\infty)^3 = -\infty \qquad (7)$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{2}{\infty^2-1} = \dfrac{2}{\infty} = 0$

c) Trobam una indeterminació $\infty/\infty$. Cal dividir tots els termes per la major potència del denominador. En aquest cas dividim tots els termes entre $x^2$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x-5}{2x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = IND = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{3+\cancel{\frac{1}{\infty}}-\cancel{\frac{5}{\infty}}}{2+\cancel{\frac{1}{\infty}}} = \frac{3}{2} \qquad (8)$$

d) Trobam una indeterminació $\infty/\infty$. Cal dividir tots els termes per la major potència del denominador. En aquest cas dividim tots els termes entre $x$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{x+3} = \frac{\infty}{\infty} = IND = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{x^2}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}-x}{1+\frac{3}{x}} = \frac{\cancel{\frac{2}{\infty}}-\infty}{1+\cancel{\frac{3}{\infty}}} = -\infty \qquad (9)$$

## EXERCICIS PROPOSATS

**1.** Calculau els límits aplicant les regles donades en els apartats anteriors.

**a)** $\lim\limits_{x \to 2} x \cdot e^{-x^2}$

**b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x-2}{x^2-1}$

**c)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-3x^2}{x^2-x-6}$

**d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 - 2x^2 + 5x - 3$

**e)** $\lim\limits_{x \to \infty} -2x^2 + 5x + 2$

**f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{x-2}$

**g)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^3+3x^2-1}{x^3+x^2-x+1}$

**h)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-x^2-5x}{x^2+1}$

**2.** Calculau, si existeix, el límit $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ essent $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Calculau també els límits $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

**3.** Calculau, si existeix, el límit $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ essent $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9} & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

# 4. Continuïtat

l'ESO has après el concepte intuïtiu de funció contínua. Una funció és contínua si podem dibuixar-la en tot el seu recorregut sense necessitat d'aixecar el llapis del paper. En aquesta secció intentarem donar una definició més precisa de funció contínua a partir del concepte de límit que hem treballat. Començarem, però, analitzant els motius pels quals una funció pot ésser discontínua.

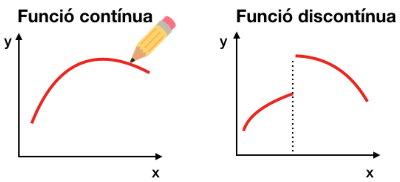



Figura 3: Concepte intuïtiu de funció continua

### *Tipus de discontinuïtats*

Existeixen **4 motius** pels quals una funció pot ésser discontínua en un punt $x = a$:

1. **Salt infinit o discontinuïtat asimptòtica**: La funció presenta una asímptota vertical en $x = a$

Totes les funcions racionals que tinguin asímptotes verticals presentaran aquest tipus de discontinuïtat. Per exemple: $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{x^2+3}{x^2-x}$, etc. En tots aquests casos, el denominador s'anul·la i el numerador no. Tenim expressions del tipus $\dfrac{k}{0}$.

2. **De salt finit**: La funció presenta un bot.

   Normalment, les funcions definides a trossos poden presentar aquest tipus de discontinuïtat si els diferents trams de la funció no s'uneixen adequadament. Per exemple:

   $y = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Té un salt finit de 5 unitats a $x = 0$.

3. **Li falta un punt**: No es pot calcular el valor de la funció en $x = a$.

   Exemples són les funcions a trossos en les quals no s'inclou el punt d'unió (falta el símbol = en la desigualtat). Per exemple $y = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ li falta el punt a $x = 0$.

   Aquesta discontinuïtat també apareix en funcions racionals que presentin una indeterminació $0/0$ i el límit sigui finit. Un exemple és la funció $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ que li falta un punt a $x = 1$.

4. **Punt desplaçat**: En aquest cas, el punt existeix però es troba a una altura incorrecta.

   Un exemple d'aquest tipus de discontinuïtat és una funció definida a trossos

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

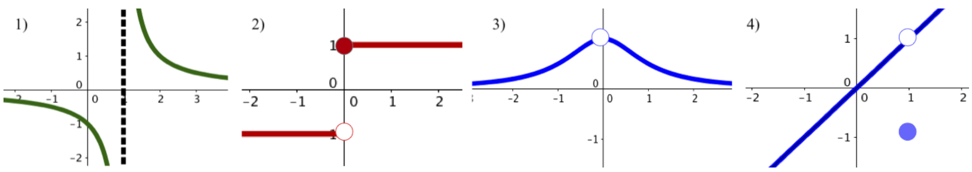



Figura 4: Els quatre tipus de discontinuïtats

Els casos 3, 4 s'anomenen **discontinuïtats evitables**. Evitable significa que es pot modificar lleugerament la funció perquè sigui contínua. Aquest procés s'anomena **redefinir la funció**.

La funció $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ es pot redefinir com $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ i ja és contínua. És a dir, hem afegit manualment el punt $f(1) = 2$ que faltava.

La funció $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ es pot redefinit com $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ i passa a ser contínua. És a dir, hem mogut el punt de $f(1) = 3$ a $f(1) = 2$.

## 4.1 Condició de continuïtat

Perquè una funció sigui contínua en un punt $x = a$ ha de complir:

1. Els límits $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x)$ han d'ésser finits (Evitam asímptotes verticals)
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (Evitam salts)
3. Existeix $f(a)$ (Evitam li falta un punt)
4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (Evitam punt desplaçat)

Una funció es diu que és **contínua en un interval** si és contínua en cada punt d'aquest interval.

Com a regla general totes les funcions polinòmiques són contínues a tot $\mathbb{R}$. La resta de funcions elementals - sinus, cosinus, tangent, logaritme, ... - són contínues a tots els punts del seu domini (allà on estan definides). Les funcions definides a trossos caldrà analitzar cada tros per separat i, sobretot, la continuïtat en els punts d'unió.

**EXERCICI RESOLT 5**

Analitza la continuïtat de les funcions següents i indica, si escau, la causa de discontinuïtat.

a) $y = x^3 - 2x + 1$

b) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \log x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $y = \dfrac{x^2 + x}{x}$

d) $y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

e) $y = \dfrac{1}{x+2}$

a) $y = x^3 - 2x + 1$

Els polinomis són continus a tota la recta real.

b) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \log x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Aquesta funció no està definida a $x = 0$, per tant li falta un punt. A més, el logaritme té una asímptota vertical a $x = 0$, llavors també té una discontinuïtat asimptòtica a $x = 0$.

c) $y = \dfrac{x^2 + x}{x}$

A $x = 0$, l'expressió queda indeterminada $0/0$ i $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ (és finit). Això ens indica que és discontínua perquè li falta un punt a $x = 0$.

d) $y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Té un punt desplaçat a $x = 1$ perquè la funció hauria de valer $2^1 = 2$ i veim que val $f(1) = 3$.

e) $y = \dfrac{1}{x+2}$

Té una asímptota vertical a $x = -2$ perquè el denominador s'anul·la. Llavors, presenta una discontinuïtat asimptòtica a $x = -2$.

### *Discussió segons un paràmetre*

En aquests exemples discutim la continuïtat segons els valors d'un paràmetre. S'ha de veure primer en quins punts s'ha d'estudiar la continuïtat i, tot seguit, comprovar, una a una, les 4 condicions de continuïtat.

**EXERCICI RESOLT 6**

Determina el valor de $k$ perquè la funció $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ k + x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sigui contínua en tota la recta real.

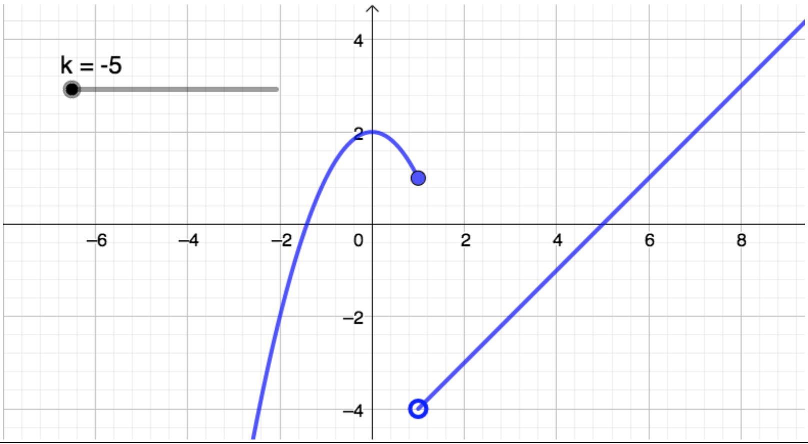
Donat que el primer tros és una paràbola i el segon tros una línia recta, cada funció per separat és contínua. L'únic que hem d'imposar és que sigui contínua en el punt d'unió $x = 1$.
Estudiam la continuïtat en el punt $x = 1$:

1. Els límits laterals són finits; no té asímptotes
2. Els límits laterals valen

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2 - x^2 = 2 - 1^2 = 1$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} k + x = k + 1.$$

   Si imposam que els dos límits laterals siguin iguals, trobam l'equació $1 = 1 + k$. La seva solució és $k = 0$.
3. Existeix $f(1) = 1$
4. També es compleix que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$.

La resposta és la funció serà contínua a tot $\mathbb{R}$ per a $k = 0$.




Simulació 4: https://www.geogebra.org/m/k85pwhbk : *Canvia k i analitza la continuïtat*

**EXERCICI RESOLT 7**

Determina el valor de $k$ perquè la funció $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+6x}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases}$ sigui contínua a $x = -2$.

Aquí els trossos estan donats de forma diferent que l'exemple anterior. La primera línia ens diu quina funció hem d'agafar sempre que $x$ sigui diferent a $-2$. Aquesta és la funció que agafarem per calcular els límits.

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^3+6x}{x+2} = \frac{0}{0} IND = \lim_{x\to -2} \frac{3x(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x\to -2} 3x = -6 \tag{10}$$

Estudiam la continuïtat en el punt $x = -2$:

1. Els límits laterals són finits (valen -6); No té asímptotes
2. Els límits laterals coincideixen i valen $\lim_{x\to -2} f(x) = -6$ (No té salts)
3. Existeix $f(-2) = k$ (No té forats)
4. Imposam que $\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) \quad \to -6 = k$.

La resposta és que si $k = -6$, la funció serà contínua a $x = -2$.

**Vídeo 5.4**: *Estudi de la continuïtat de funcions*
https://www.youtube.com/watch?v=Hry5tLRgu0w

## EXERCICIS PROPOSATS

**4.** Determina els valors de $m$ i $n$ perquè la funció $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 0 \\ m \operatorname{tg} x + n & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ e^x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$ sigui contínua en tota la recta real.

## *4.2 Teoremes de funcions contínues*

### *Teorema de Bolzano*

Si una funció és contínua en un interval tancat i pren valors de signe diferent en els seus extrems, aleshores, amb seguretat, la gràfica talla a l'eix de les $X$ en aquest interval. Això ho expressam en forma de teorema:

TEOREMA DE BOLZANO

Si $f(x)$ és una funció contínua a l'interval tancat $[a, b]$ i el signe $f(a) \neq$ signe $f(b)$, aleshores existeix almenys un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

$\in$**: pertany a**

Atenció! El contrari no és cert.
Podem trobar funcions que tinguin talls amb l'eix X ( $f(c) = 0$) que o be no són contínues o no presenten canvi de signe a l'interval $[a, b]$

Aquest teorema s'utilitza per resoldre equacions de forma numèrica. El teorema de Bolzano ens assegura que existeix almenys una arrel però n'hi pot haver més d'una. A la pràctica, el procediment consisteix en acotar l'arrel. És a dir, anam fent la longitud l'interval $[a, b]$ de cada vegada més petita fins trobar l'estimació de l'arrel amb l'error desitjat.

**EXERCICI RESOLT 8**

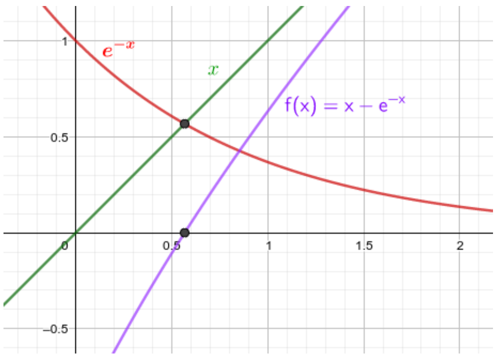
Prova que l'equació $x = e^{-x}$ té almenys una solució real. Aproxima el seu valor fins a les dècimes.

Com que volem aplicar el teorema de Bolzano, necessitam una funció que es faci zero. Reescriurem l'equació passant tots els termes a un membre $x - e^{-x} = 0$.
Ens construïm la funció $f(x) = x - e^{-x}$. Sabem que aquesta funció és contínua a tot $\mathbb{R}$. Considerem l'interval $[0, 1]$ i calculam $f(0) = 0 - e^0 = -1 < 0$ i $f(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,632 > 0$. Per tant hi ha un canvi de signe, aleshores, existeix un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. Amb altres paraules, existeix almenys una arrel entre 0 i 1.
La següent passa consisteix en acotar més l'arrel. Dividim l'interval $[0, 1]$ per la meitat $[0, 0.5]$ i $[0.5, 1]$. Calculam $f(0.5) = -0,10 < 0$. Ens quedam amb l'interval $[0.5, 1]$ perquè és el que presenta canvi de signe. Es repeteix el procediment; dividim el darrer interval en $[0.5, 0.75]$ i $[0.75, 1]$ i tornam a analitzar els signes.
El procés es mostra resumit en aquesta taula

| 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | | | | | | | | | | + |
| - | | | | | - | | | | | + |
| - | | | | | - | | + | | | + |
| - | | | | | - | + | | | | + |

| 0,5 | 0,51 | 0,52 | 0,53 | 0,54 | 0,55 | 0,56 | 0,57 | 0,58 | 0,59 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | | | | | - | | | | | + |
| - | | | | | - | | + | | | + |
| - | | | | | - | - | + | | | + |

Podem aproximar la solució de l'equació entre $x \approx 0,56$ a $0,57$. Estam segurs que la xifra de les dècimes és un 5.



**EXERCICI RESOLT 9**

La funció $f(x) = \frac{1}{x}$ és tal que signe $f(-1) \neq$ signe $f(1)$ però l'equació $f(x) = \frac{1}{x} = 0$ no té cap solució. Contradiu això el teorema de Bolzano?

Per poder aplicar el teorema de Bolzano hem de comprovar que es compleixen totes les hipòtesis del teorema.

Considerem l'interval $[-1, 1]$. L'enunciat del problema ens diu que la funció pren signes diferents als extrems de l'interval: $f(-1) = -1 < 0$ i $f(1) = 1 > 0$.

Però no es compleix que la funció sigui contínua dins aquest interval. Sabem que la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ presenta una discontinuïtat asimptòtica a $x = 0$.

Donat que no es compleixen les hipòtesis del teorema no podem assegurar res. En particular, no podem assegurar que existeixi $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Aleshores, no. No contradiu el teorema perquè simplement no compleix les seves hipòtesis.

**Vídeo 5.5**: *Aplicació del teorema de Bolzano*
https://www.youtube.com/watch?v=lwJ8GaueP40

## EXERCICIS PROPOSATS

**5.** Demostrau que l'equació $\ln x = 2 - x$ té almenys una arrel a l'interval $(1, 2)$. Creis que pot tenir més d'una solució?

# 5. Derivabilitat

Fins ara hem après a determinar si una funció és contínua i quines conseqüències té. En aquesta secció estudiarem la derivabilitat de les funcions i veurem la seva relació amb la continuïtat. Ja avançam que, perquè una funció sigui derivable, obligatòriament ha d'ésser contínua.

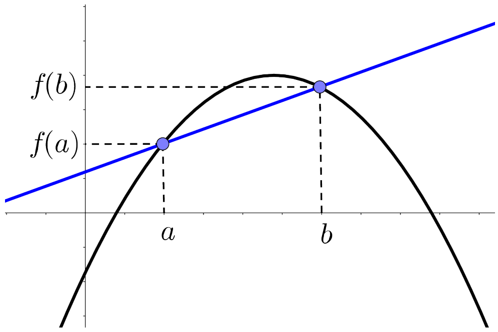
Començarem refrescant el concepte de derivada d'una funció en un punt i tot seguit en donarem la seva definició.

### *Taxa de variació mitjana*

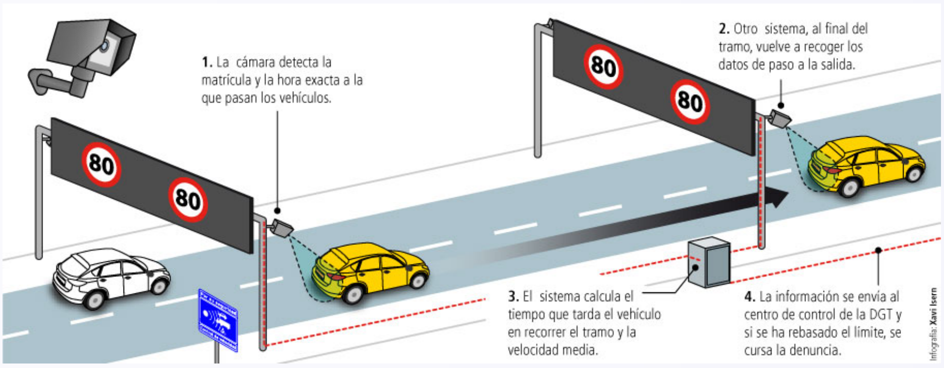
Definim la taxa de variació mitjana d'una funció $f(x)$ en l'interval $[a, b]$ com

$$T.V.M.[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{11}$$

Aquest nombre proporciona el pendent (ïnclinació") de la **recta secant**.




Si $f(x)$ dóna la posició d'un cotxe en funció del temps, la taxa de variació mitjana $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ proporciona la **velocitat mitjana** del cotxe entre els dos instants $a$ i $b$.




**EXERCICI RESOLT 10**

Calcula la velocitat mitjana d'un paracaigudista sabent que la seva posició canvia en altura del temps segons $y(t) = 1000 - 5t^2$ entre $t = 5$ i $t = 10$ segons.

El problema demana calcular la taxa de variació mitjana

$$TVM[5,10] = \frac{y(10)-y(5)}{10-5} = \frac{500-875}{10-5} = -75 \text{ m/s} \qquad (12)$$

### Definició de derivada en un punt

Es defineix la derivada d'una funció en un punt com el pendent de la **recta tangent** en aquell punt.

Si partim de la recta secant a l'interval $[a, b]$, podem construir la recta tangent acostant de cada vegada més el punt $b$ cap al punt $a$. Aquest procés s'expressa matemàticament com un límit

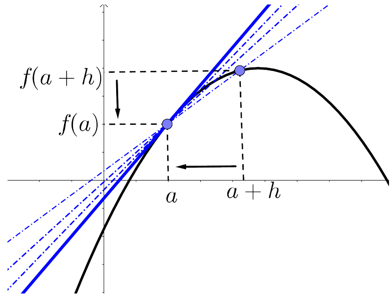



Figura 5: Recta tangent a una funció

La **derivada** d'una funció $f'(a)$ en un punt $x = a$ es defineix com:

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{13}$$

i proporciona el **pendent de la recta tangent** a la funció en els punt d'abscissa $a$.

Una forma més convenient d'expressar el límit és anomenar la diferència entre dos nombres $h = b - a$ i dir que de cada vegada es fa més petita

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{14}$$

Si $f(x)$ dóna la posició d'un cotxe en funció del temps, la derivada $f'(a)$ proporciona la **velocitat instantània** del cotxe just a l'instant $x = a$.

**EXERCICI RESOLT 11**

Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

Utilitzam la definició de derivada Eq. 14 quan $a = 1$:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Necessitam calcular $f(1) = 1$, $f(1+h) = 3(1+h)^2 - 4(1+h) + 2$; si substituïm aquestes expressions dins el límit, trobam:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h)^2 - 4(1+h) + 2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h + 3h^2}{h} = 2$$

En la darrera passa hem simplificat el numerador i resolt la indeterminació $0/0$.

Recordem que el resultat $f'(1) = 2$ significa que el pendent de la recta tangent a la funció quan $x = 1$ val 2.

### *Derivades laterals*

Acabam de veure que la derivada es defineix com un límit. Sabem que un límit es pot calcular per la dreta o per l'esquerra del punt (**límits laterals**). En relació a aquest fet, definim les **derivades laterals** com

**Derivada en el punt $x = a$ l'esquerra**

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{15}$$

**Derivada en el punt $x = a$ per la dreta**

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{16}$$

Per a **funcions *suaus***, els dos límits coincideixen i basta parlar de la derivada en aquell punt. Hi ha d'altres funcions, però, que presenten punxes o ***punts angulosos***. En un punt angulós els dos límits són diferents i deim que la funció no és derivable en aquell punt.

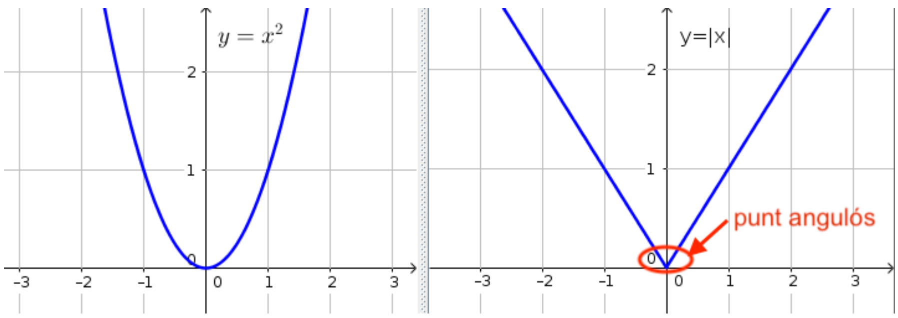



Figura 6: Esquerra: Gràfica derivable (suau). Dreta: Gràfica no derivable en x=0 perquè presenta un punt angulós.

Direm que una funció és derivable en $x = a$ si les dues derivades laterals coincideixen:

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

## 5.1 Càlcul de derivades

A la pràctica, a l'hora de calcular derivades no cal utilitzar la definició perquè podem fer servir les regles de derivació.

En aquest lliurament bastarà que recordeu les derivades de les funcions elementals (resumides en la taula següent) i com es deriven polinomis senzills. En el proper lliurament, a tindrem ocasió de repassar el càlcul de derivades amb més profunditat.

Taula 4: *Taula de derivades*

| $y = f(x)$ | $y' = f'(x)$ |
|---|---|
| $y = k$ | $y' = 0$ |
| $y = x$ | $y' = 1$ |
| $y = x^n$ | $y' = nx^{n-1}$ |
| $y = \sqrt{x}$ | $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ |
| $y = \operatorname{tg} x$ | $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ |
| $y = \operatorname{cotg} x$ | $y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$ |
| $y = \arcsin x$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = \arccos x$ | $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = \operatorname{arctg} x$ | $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| $y = a^x$ | $y' = a^x \ \ln a$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \dfrac{1}{x}$ |
| $y = \log_a x$ | $y' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$ |

## *5.2 Funcions contínues i derivables*

Una funció pot ésser contínua i no derivable. Això passa quan la gràfica de la funció presenta punts angulosos (punxes). En aquests punts existeixen dues rectes tangents segons els acostem per la dreta o l'esquerra del punt. Com a conseqüència, les derivades laterals són diferents i deim que la funció no és derivable en aquell punt.

RELACIÓ CONTINUÏTAT-DERIVABILITAT

Si una funció és derivable en un punt, necessàriament és contínua.

**Vídeo 5.6**: *Funcions contínues i derivables*
https://www.youtube.com/watch?v=yAzGhv0ciUg

**EXERCICI RESOLT 12**

Analitza la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en el punt $x = 2$.

Per analitzar la **continuïtat** a $x = 2$ necessitam calcular els **límits laterals**. Donat que ens donen una funció a trossos, el límit per l'esquerra de 2 s'obté a partir del primer tram i per la dreta utilitzarem el segon tram.

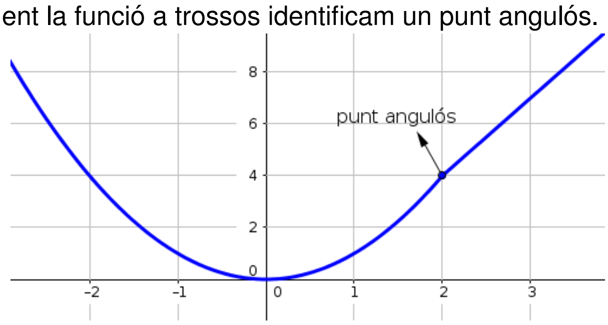
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} 3x - 2 = 4 \end{aligned} \tag{17}$$

Els limits laterals coincideixen. Per tant $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$
La imatge de la funció $f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$. Es compleix que $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ cosa que assegura que la funció és contínua a $x = 2$.

Per analitzar la **derivabilitat** a $x = 2$ necessitam calcular les **derivades laterals**. La derivada per l'esquerra de 2 s'obté del primer tram i la derivada per la dreta utilitzarem el segon tram. Calculam la derivada
$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ i l'evaluam a cada tram

$$f'(2^-) = 4 \qquad f'(2^+) = 3 \tag{18}$$

En conclusió, les derivades laterals són diferents i per tant la funció no és derivable a $x = 2$. Si representam gràficament la funció a trossos identificam un punt angulós.



**EXERCICI RESOLT 13**

Determina els valors de $m$ i $n$ perquè la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sigui contínua i derivable en el punt $x = 1$.

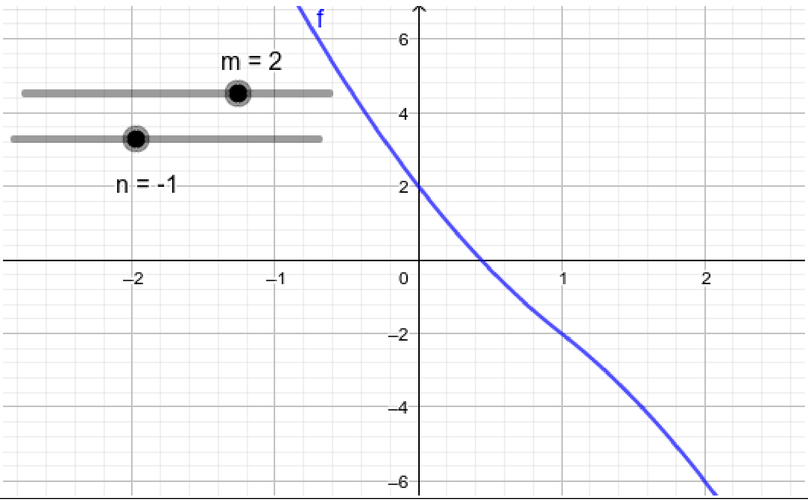
Per analitzar la continuïtat a $x = 1$ necessitam calcular els **límits laterals**. Donat que ens donen una funció a trossos, el límit per l'esquerra de 1 s'obté a partir del primer tram i per la dreta utilitzarem el segon tram.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2 - 5x + m = 1^2 - 5 + m = -4 + m \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} -x^2 + nx = -1^2 + n \cdot 1 = -1 + n \end{aligned} \tag{19}$$

Hem d'imposar que els limits laterals coincideixin. Arribam a la condició $-4 + m = -1 + n$.
La funció serà derivable en $x = 1$ si les dues **derivades laterals** en aquell punt coincideixen.
$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$f'(1^-) = 2 - 5 = -3 \qquad f'(1^+) = -2 + n \tag{20}$$

Imposam que les dues derivades laterals coincideixen i arribam a $-3 = -2 + n$. D'aquesta equació trobam que $n = -1$ i substituint a $-4 + m = -1 + n$, trobam $m = 2$. Per aquests valors, la derivada existeix i val $f'(1) = -3$.




Simulació 7: https://www.geogebra.org/m/rykqmvua : *Canvia els valors de m i n per comprovar com canvia la derivabilitat i continuïtat de la funció*

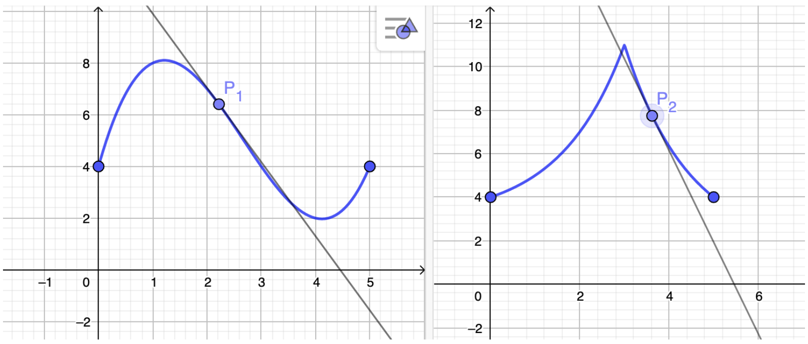
## EXERCICIS PROPOSATS

**6.** Determina els valors de $a$, $b$ i $c$ perquè la funció $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ sigui contínua i derivable a tota la recta real i compleixi $f(10) = 5$.

## *5.3 Teoremes de les funcions derivables*

Considerem una corba contínua i suau que pren els mateixos valors als extrems d'un interval. Necessàriament existirà algun punt on la recta tangent és horitzontal. En canvi, si la funció no és derivable, si presenta punts angulosos, no podem garantir res.

Abans d'enunciar el **teorema de Rolle** vos proposo que experimenteu una mica amb aquesta idea. Aquí a sota teniu dues simulacions. A l'esquerra trobareu una funció suau i a la dreta una no derivable. Moveu en punt $P$ sobre les corbes i cerqueu els punts on la recta tangent és horitzontal.




Simulació 7: https://www.geogebra.org/m/j8asgdpd : *Cerca els punts P on la recta tangent sigui horitzontal*

Segur que heu trobat algun punt a la primera gràfica i cap a la segona. No és així? Per què creus que a la segona simulació el pendent no es fa zero? Té punts angulosos?

Anem a expressar aquestes idees en forma de teorema

TEOREMA DE ROLLE

Si $f(x)$ és una funció contínua a l'interval **tancat** $[a, b]$ i derivable en l'interval $(a, b)$ i $f(a) = f(b)$, aleshores existeix almenys un $c \in (a, b)$ tal $f'(c) = 0$.

El contrari no és cert. Cal aplicar el teorema en la direcció correcta.

**EXERCICI RESOLT 14**

Comprova que la funció $y = x^3 - 4x + 3$ compleix les hipòtesis del teorema de Rolle a l'interval $[0,2]$. Calcula el punt $c$ on es compleix la tesi del teorema.

- La funció és derivable (i per tant contínua) a tot $\mathbb{R}$.
- La funció pren el mateix valor en els extrems dels intervals $f(0) = f(2) = 3$.

Segons el teorema de Rolle, ha d'existir almenys un $c \in (0,2)$ tal que $f'(c) = 0$.

Per cercar el punt $c$ on es compleix el teorema, calculem la derivada de la funció i la igualam a zero. $y' = 3x^2 - 4 \to 3x^2 - 4 = 0 \to x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$. La solució que ens interessa és la positiva ja que només estam treballant a l'interval $(0,2)$. La solució és $c = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

### EXERCICI RESOLT 15

Calcula $p$, $m$ i $n$ perquè la funció $f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ mx + n & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$ compleixi les hipòtesis del teorema de Rolle a l'interval $[-1, 5]$. On compleix la tesi? Representa-la gràficament.

La funció ha d'ésser derivable (i per tant contínua) a l'interval $[-1, 5]$

- **Continuïtat a** $x = 3$
  Els límits a $x = 3$ han de coincidir

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} -x^2 + px = -9 + 3p \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} mx + n = 3m + n \end{array} \right\} \Rightarrow -9 + 3p = 3m + n \tag{21}$$

- **Derivabilitat a** $x = 3$
  Calculam la derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + p & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ m & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases} \tag{22}$$

  Les derivades laterals a $x = 3$ han de coincidir

$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = -6 + p \\ f'(3^+) = m \end{array} \right\} \Rightarrow -6 + p = m \tag{23}$$

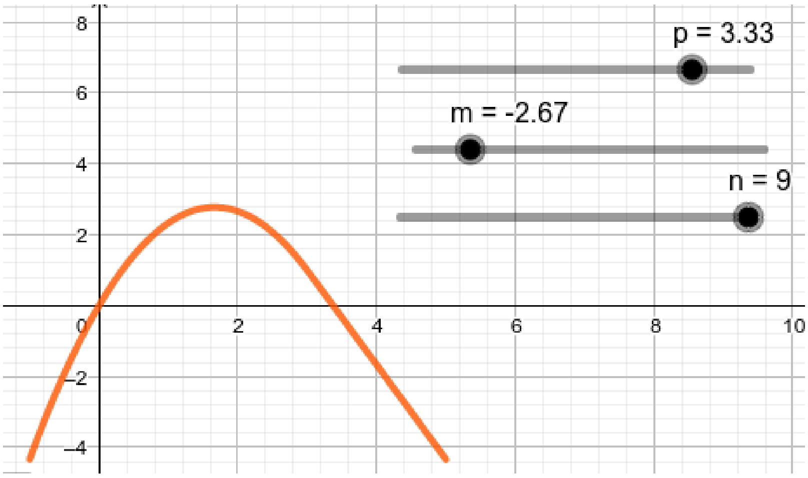
- **Pren el mateix valor als extrems** $-1$ **i** $5$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -1 - p \\ f(5) = 5m + n \end{array} \right\} \Rightarrow -1 - p = 5m + n \tag{24}$$

Hem arribat al sistema d'equacions per determinar els paràmetres

$$\begin{cases} -9 + 3p & = 3m + n \\ -6 + p & = m \\ -1 - p & = 5m + n \end{cases} \tag{25}$$

Si resolem el sistema per Gauss, trobam $p = \dfrac{10}{3}$, $m = -\dfrac{8}{3}$, $n = 9$




Simulació 7: https://www.geogebra.org/m/chx4vqek : *Paràmetres pels quals es verifica el teorema de Rolle*

### *Existència i unicitat de les solucions d'una equació*

Una de les aplicacions que més ha aparegut en els exàmens de selectivitat consisteix en aplicar el Teorema de Rolle per demostrar que una equació té exactament una única solució.

Aquest tipus de problema es resol en dues passes

1. S'aplica el teorema de Bolzano per demostrar que existeix una o més solucions en un interval.
2. S'aplica el teorema de Rolle per demostrar que no en pot tenir més d'una.

En el pas 2. s'aplica la tècnica anomenada **reducció a l'absurd** que consisteix en suposar just el contrari del que es vol demostrar per així arribar a una contradicció o un absurd. En l'àmbit del problema seria

1. Suposar que l'equació té dues (o més) solucions
2. Comprovar que aquesta suposició, aplicant el teorema de Rolle, dóna un resultat absurd o contradictori.

A continuació es mostra un exemple d'aquest tipus de problema

**EXERCICI RESOLT 16**

Demostrau que l'equació $x^3 - 2x - 3 = 0$ té exactament una solució a l'interval [1,2].

Considerem la funció $f(x) = x^3 - 2x - 3$ que és contínua i derivable a tot $\mathbb{R}$ pel fet d'ésser un polinomi. Calculam la funció als extrems de l'interval $f(1) = -4$ i $f(2) = 1$.

- **Existència:**
  La funció $f(x)$ és contínua a $[1, 2]$, i signe $f(1) \neq$ signe $f(2) \rightarrow$ pel teorema de Bolzano, existeix un o més $c \in (1, 2)$ tals que $f(c) = 0$. Existeix una o més arrels.
- **Unicitat:**
  Suposem que existeixen dues arrels dins l'interval $(1, 2)$. Això vol dir que existeixen $c_1$ i $c_2$ d'aquest interval tals que $f(c_1) = f(c_2) = 0$. A més sabem que la funció és contínua i derivable $\rightarrow$ pel teorema de Rolle, existeix un $c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$.
  La suposició que hem fet implica que $f'(c) = 0$, la derivada s'ha d'anul·lar en algun punt de l'interval $(1, 2)$. Anem a comprovar que això és impossible. Calculam la derivada $f'(x) = 3x^2 - 2 \rightarrow 3x^2 - 2 = 0 \rightarrow x \approx \pm 0,8165$. Arribam a una contradicció, la derivada no s'anul·la a l'interval $(1, 2)$ i això ens diu que l'equació no pot tenir dues arrels.
  El teorema de Bolzano assegura que hi ha una o més arrels mentre que el teorema de Rolle ens diu que no hi pot haver-hi dues o més arrels. En conclusió, l'equació té una única solució a l'interval $(1, 2)$.