IEDIB

PBAU MATEMÀTIQUES II

EXAMEN PBAU

Convocatòria Setembre 2020

Opció B

Josep Mulet Pol

PBAU MATEMÀTIQUES II

Aquest vídeo és una proposta de resolució de l'examen PBAU.

Trobareu les solucions oficials a la pàgina de la UIB

https://estudis.uib.cat/grau/acces/batxiller/

Problema 1a

1. Donades les matrius A i B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A \cdot B$ i $(A \cdot B)^t$, on la "t" indica matriu transposada.

b) És possible calcular B^2? Si ho és, calcula-la.

c) Per als diferents valors de x, calcula el rang de la matriu A.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+x & 7 \\ 12 & 14 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3 \times 3}{} \quad = \quad \underset{3 \times 2}{} \qquad 3 \times 2$$

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 2+x & 12 & 18 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Problema 1b

1. Donades les matrius A i B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A{\cdot}B$ i $(A{\cdot}B)^t$, on la “t” indica matriu transposada.

b) És possible calcular B^2? Si ho és, calcula-la.

c) Per als diferents valors de x, calcula el rang de la matriu A.

$B_{3\times 2}$ no és quadrada

No té sentit B^2

Problema 1c

1. Donades les matrius A i B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A \cdot B$ i $(A \cdot B)^t$, on la "t" indica matriu transposada.

b) És possible calcular B^2? Si ho és, calcula-la.

c) Per als diferents valors de x, calcula el rang de la matriu A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} 3 & x \\ 6 & 8 \end{matrix}} \\ 4 & \\ 6 & 9 \quad 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to F_1 \\ \to F_2 \\ \to F_3 \end{matrix}$$

$$3 \cdot F_2 = 2 \cdot F_3$$

$$\text{rang } A \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 6x = 0 \to x = 4$$

- Si $x \neq 4$ rang $A = 2$
- Si $x = 4$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} F_2 = 2F_1 \\ F_3 = 3F_1 \end{matrix}$ rang $A = 1$

Problema 2a

2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons una funció del temps $t \rightarrow P(t)$

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$$

on la variable t, que és un nombre real major o igual a zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1de gener de 2000 i $P(t)$ indica el nombre d'individus, en milers, en l'instant t. Segons el model calcula:

a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurà a la fi de l'any 2020.

b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini.

c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurà.

d) Fes un esbós de la gràfica de l'evolució poblacional $t \rightarrow P(t)$

- Inici de 2000 $\rightarrow t = 0$

$P(0) = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$ miler $= 1000$ individus

- Acabament de 2020 $\rightarrow t = 20$

$P(20) = \sqrt{21} - \sqrt{20} = 0{,}1104$ milers $=$

$= 110{,}4$

~ 110 individus

Problema 2b

2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons una funció del temps $t \to P(t)$

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$$

on la variable t, que és un nombre real major o igual a zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1de gener de 2000 i $P(t)$ indica el nombre d'individus, en milers, en l'instant t. Segons el model calcula:

a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurà a la fi de l'any 2020.

b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini.

c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurà.

d) Fes un esbós de la gràfica de l'evolució poblacional $t \to P(t)$

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \sqrt{\infty+1} - \sqrt{\infty} = \boxed{\infty - \infty}$$

IND.

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\sqrt{t+1} - \sqrt{t}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{t+1} + \sqrt{t}\right)}{\left(\sqrt{t+1} + \sqrt{t}\right)} =$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\left(\cancel{\sqrt{t+1}}\right)^{\cancel{2}} - \left(\cancel{\sqrt{t}}\right)^{\cancel{2}}}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

Problema 2c

2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons una funció del temps $t \to P(t)$

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$$

on la variable t, que és un nombre real major o igual a zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1de gener de 2000 i $P(t)$ indica el nombre d'individus, en milers, en l'instant t. Segons el model calcula:

a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurà a la fi de l'any 2020.

b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini.

c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurà.

d) Fes un esbós de la gràfica de l'evolució poblacional $t \to P(t)$

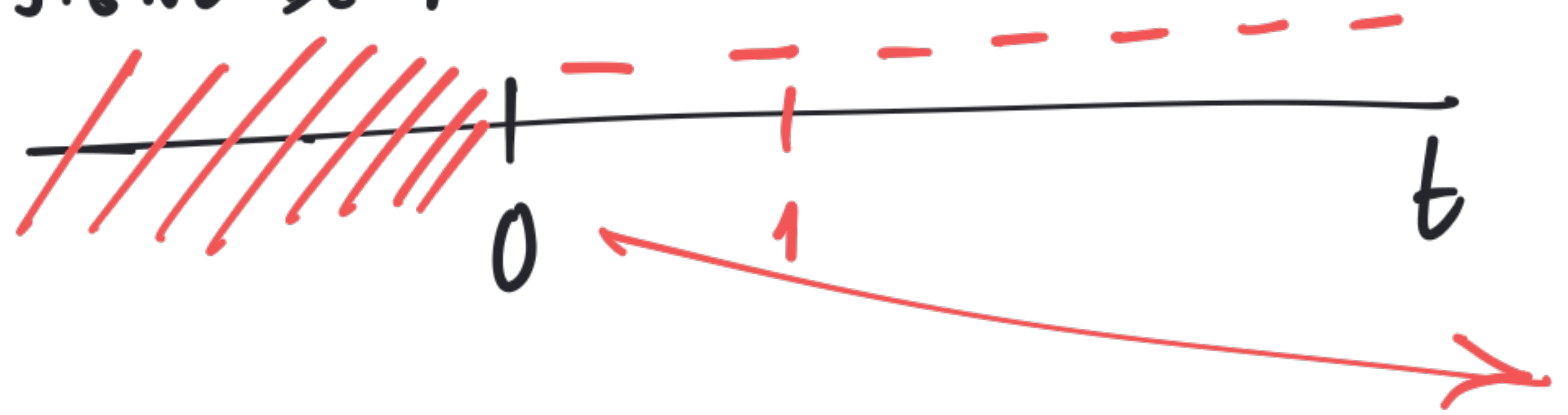
$$P'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \cdot 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} = 0$$

$$\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t+1}} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t}} \to \sqrt{t} = \sqrt{t+1}$$

$$t = t+1 \to 1 = 0$$

Impossible.

SIGNE DE P'



P és decreixent $(0, +\infty)$

No té extrems.

Problema 2d

2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons una funció del temps $t \to P(t)$

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$$

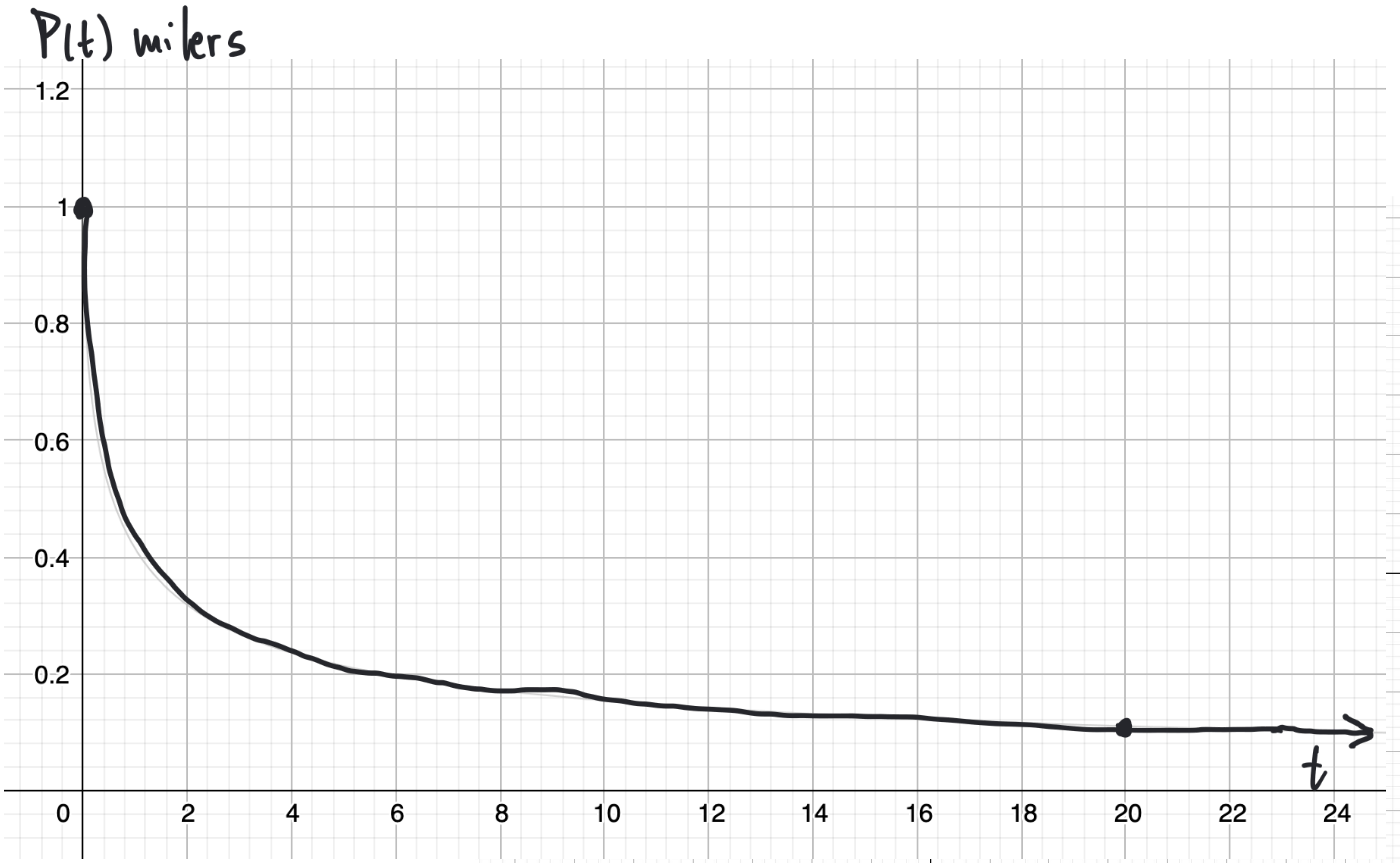
on la variable t, que és un nombre real major o igual a zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1de gener de 2000 i $P(t)$ indica el nombre d'individus, en milers, en l'instant t. Segons el model calcula:

a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurà a la fi de l'any 2020.

b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini.

c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurà.

d) Fes un esbós de la gràfica de l'evolució poblacional $t \to P(t)$



Problema 3a

3. Donats els plans

$$\text{(I)}\ 3x - ay + 2z - (a-1) = 0,$$
$$\text{(II)}\ 2x - 5y + 3z - 1 = 0,$$
$$\text{(III)}\ x + 3y - (a-1)z = 0,$$

a) Demostrar que, per a qualsevol valor del paràmetre a, no hi cap parell de plans que siguin paral·lels.

b) Estudia la seva posició relativa segons els diferents valors del paràmetre a.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \vec{n} = (A, B, C)$$

$$\vec{n}_{I} = (3, -a, 2)$$
$$\vec{n}_{II} = (2, -5, 3)$$
$$\vec{n}_{III} = (1, 3, -a+1)$$

$$\vec{n}_{I} \parallel \vec{n}_{II} \qquad \frac{3}{2} = \frac{-a}{-5} = \frac{2}{3}$$

$$\vec{n}_{II} \parallel \vec{n}_{III} \qquad \frac{2}{1} = \frac{-5}{3} = \frac{3}{-a+1}$$

$$\vec{n}_{I} \parallel \vec{n}_{III} \qquad \frac{3}{1} = \frac{-a}{3} = \frac{2}{-a+1}$$

CONCLUSIÓ

ELS PLANS MAI SÓN PARAL·LELS DOS A DOS.

Problema 3b

3. Donats els plans

$$\begin{aligned}
&\textbf{(I)}\ 3x - ay + 2z - (a-1) = 0, && a-1\\
&\textbf{(II)}\ 2x - 5y + 3z - 1 = 0, && 1\\
&\textbf{(III)}\ x + 3y - (a-1)z = 0, && 0
\end{aligned}$$

a) Demostrar que, per a qualsevol valor del paràmetre a, no hi cap parell de plans que siguin paral·lels.

b) Estudia la seva posició relativa segons els diferents valors del paràmetre a.

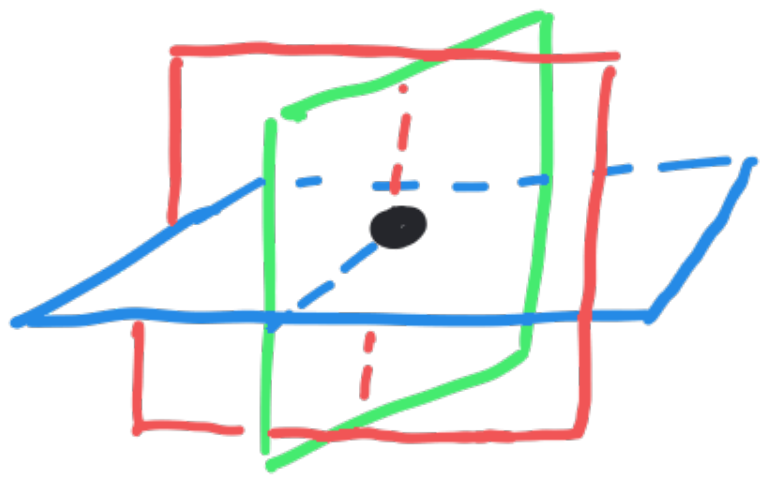
ESTUDIAM EL RANG DE LA MATRIU SEGONS a

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -a+1 \end{pmatrix}$$

$|M| = -2a^2 + 14a - 20 = 0 \to a = 2,\ a = 5$

... SARRUS

• Si $a \neq 2$ i $a \neq 5$ rang $M = 3 \to$ Plans secants

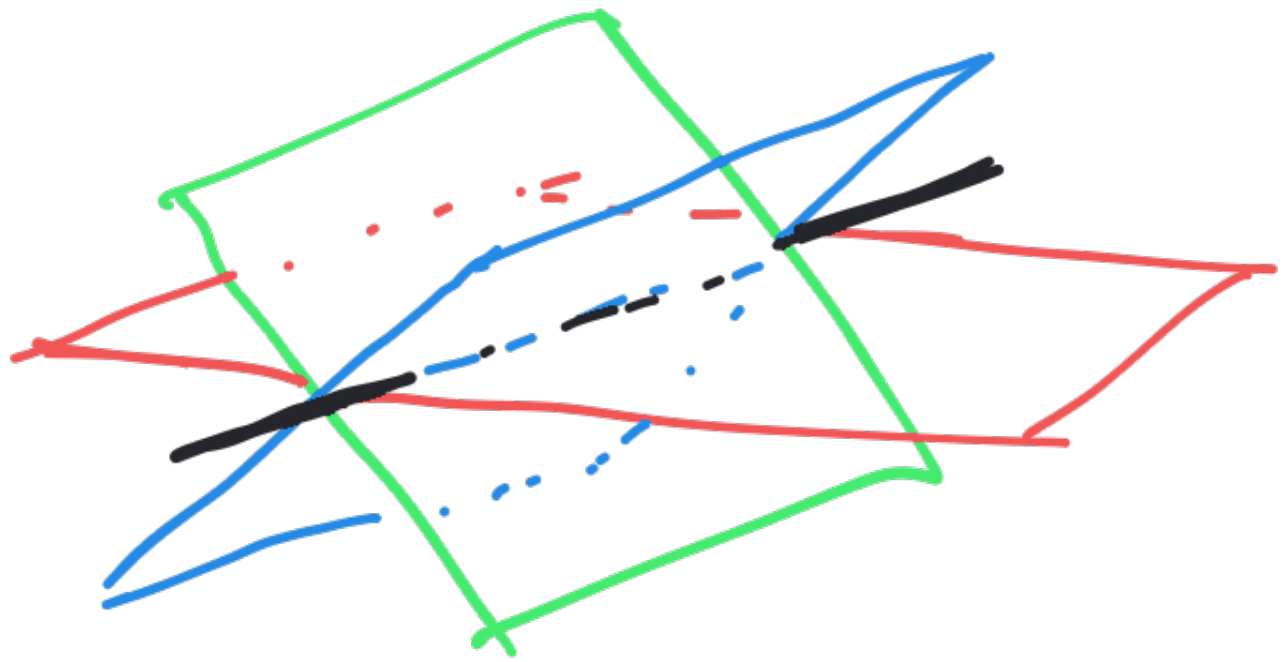


• Si $a = 2$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \text{rang } M = 2 = \text{rang } M^* < 3$$

S.C.I

Es tallen formant una recta



Problema 3b

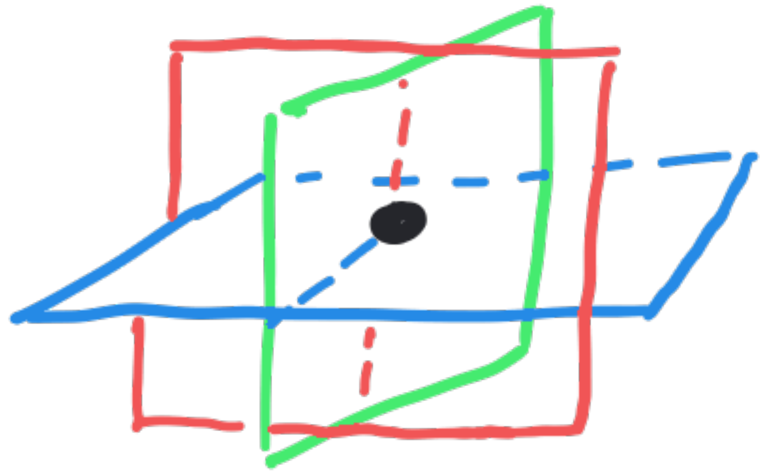
3. Donats els plans

$$\begin{array}{ll}\textbf{(I)} & 3x - ay + 2z - (a-1) = 0, \quad a-1 \\ \textbf{(II)} & 2x - 5y + 3z - 1 = 0, \quad 1 \\ \textbf{(III)} & x + 3y - (a-1)z = 0, \quad 0\end{array}$$

a) Demostrar que, per a qualsevol valor del paràmetre a, no hi cap parell de plans que siguin paral·lels.

b) Estudia la seva posició relativa segons els diferents valors del paràmetre a.

• Si $a \neq 2$ i $a \neq 5$ $\text{rang } M = 3 \rightarrow$ Plans secants

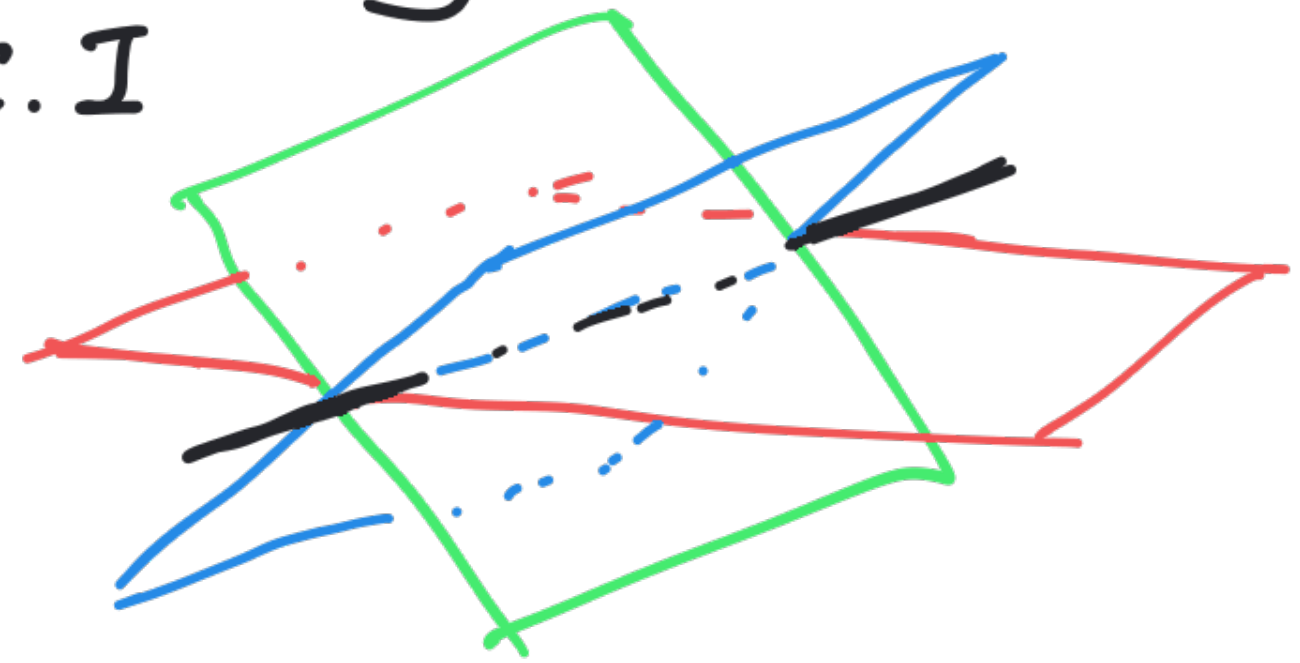


• Si $a = 2$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{rang } M = 2 = \text{rang } M^* < 3$$

S.C.I

Es tallen formant una recta

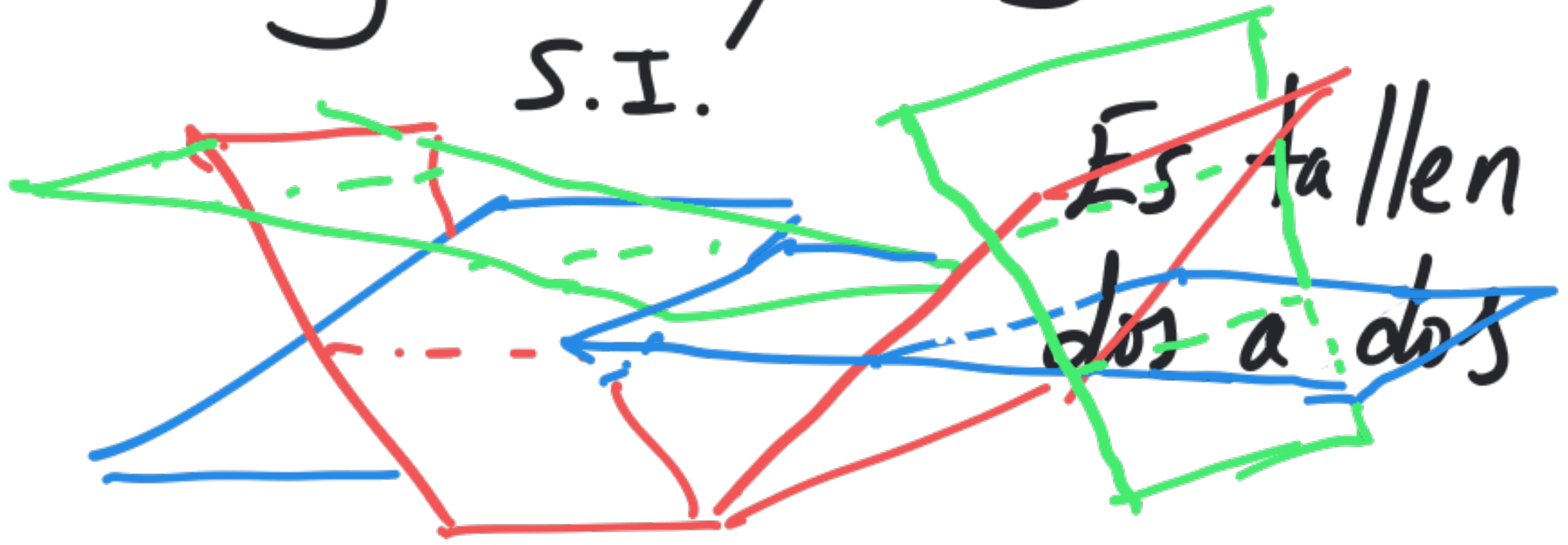


• Si $a = 5$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{rang } M = 2 \neq \text{rang } M^* = 3$$

$\neq 0$

S.I.



Problema 4a

4. El pes d'un grup de persones segueix una distribució normal de mitjana 54,3 kg i desviació típica de 6,5 kg.

a) Quin és el percentatge de persones amb pes superior a 57 kg?

b) Quin és el percentatge de persones que pesen entre 50 i 57 kg?

c) Si s'escull una persona a l'atzar que està dins del 70% de les persones que menys pesen, com a màxim, quants quilos hauria de pesar?

$X = \text{Pes Kg}$ $\qquad Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$P(X>57) = P\left(Z > \frac{57-54{,}3}{6{,}5}\right) = P(Z>0{,}415)$$

$$= 1 - P(Z<0{,}415) = 1 - \frac{0{,}6591 + 0{,}6628}{2}$$

$$= 0{,}339 \qquad 33{,}9\,\%$$

$\sim 34\,\%$ pes superior a 57 Kg

Problema 4b

4. El pes d'un grup de persones segueix una distribució normal de mitjana 54,3 kg i desviació típica de 6,5 kg.

a) Quin és el percentatge de persones amb pes superior a 57 kg?

b) Quin és el percentatge de persones que pesen entre 50 i 57 kg?

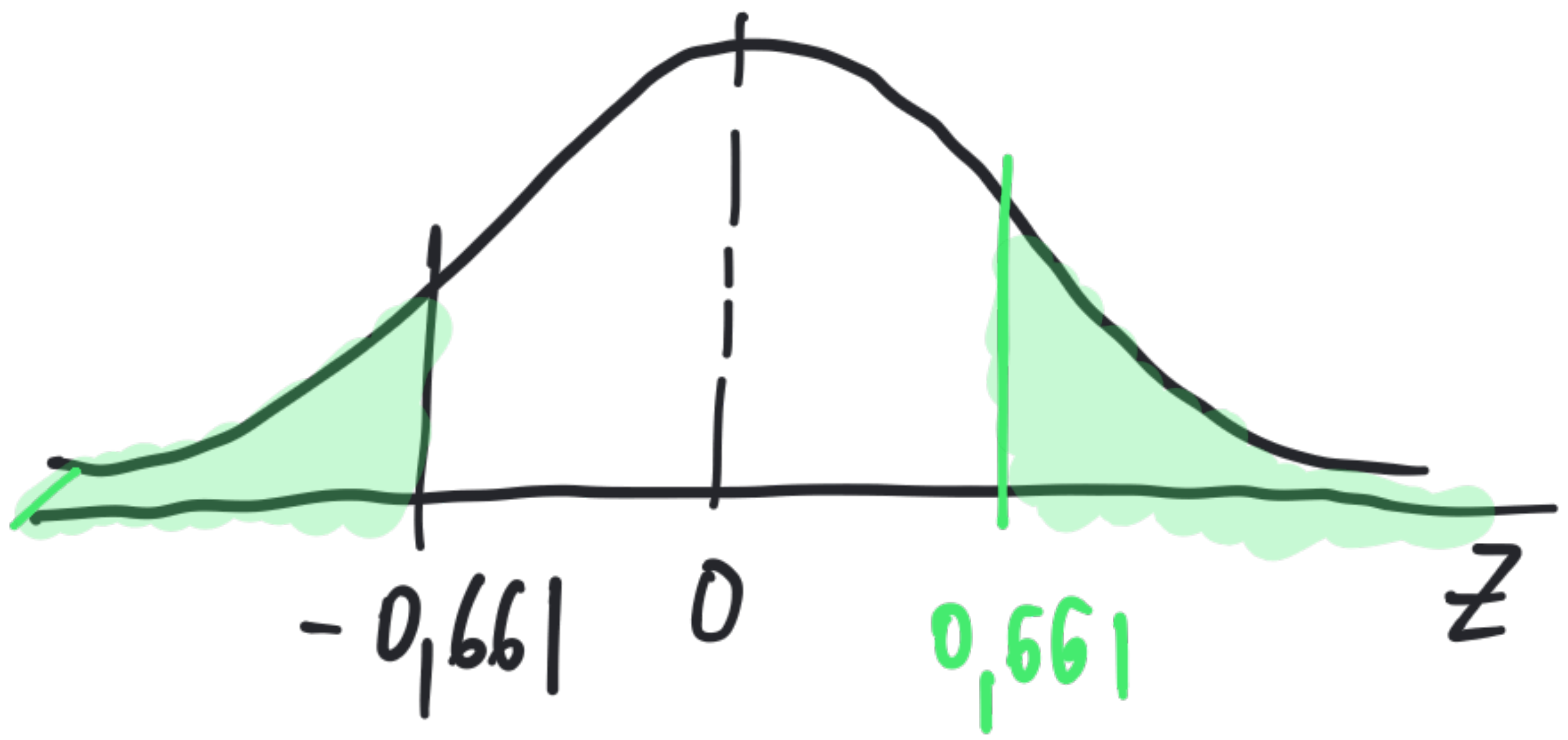
c) Si s'escull una persona a l'atzar que està dins del 70% de les persones que menys pesen, com a màxim, quants quilos hauria de pesar?

$$P(50<x<57)=P\left(\frac{50-54,3}{6,5}<Z<\frac{57-54,3}{6,5}\right)$$

$$=P(-0,661<Z<0,415)=P(Z<0,415)-P(Z<-0,661)$$

$$P(Z>0,661)$$

$$1-P(Z<0,661)$$



$$=P(Z<0,415)-(1-P(Z<0,661))=$$

$$=P(Z<0,415)+P(Z<0,661)-1=$$

$$=0,661+0,7454-1=0,4064 \quad \sim 40,6\%$$

Problema 4c

4. El pes d'un grup de persones segueix una distribució normal de mitjana 54,3 kg i desviació típica de 6,5 kg.

a) Quin és el percentatge de persones amb pes superior a 57 kg?

b) Quin és el percentatge de persones que pesen entre 50 i 57 kg?

c) Si s'escull una persona a l'atzar que està dins del 70% de les persones que menys pesen, com a màxim, quants quilos hauria de pesar?

https://iedib.net

Josep Mulet Pol

(2021)