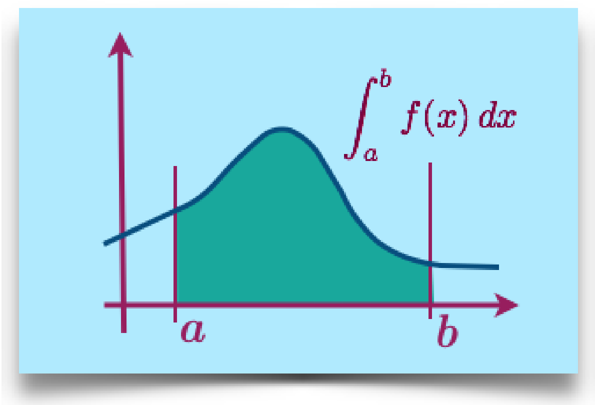
https://iedib.net/

Matemàtiques II

Lliurament 7: Integrals de funcions i les seves aplicacions



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Índex

1. Primitives o integral indefinida

Concepte de primitiva

En el lliurament anterior varem aprendre a derivar funcions. Ja saps que la derivada de x^2 és $2x$ i ho escrivim com $(x^2)' = 2x$.

Ara volem expressar-ho a l'inrevés, deim que la primitiva de $2x$ és x^2 i ho expressam amb la notació

$$\int 2x\,dx = x^2 \tag{1}$$

i es llegeix com: "*Integral de $2x$ diferencial d' x és igual a x^2*". La primitiva respon a la pregunta: "*Quina funció derivada dóna $2x$?*"

Més exemple són:

$$\begin{array}{lll}
\int 1\,dx = x & \text{perquè} & (x)' = 1 \\
\int 3x^2\,dx = x^3 & \text{perquè} & (x^3)' = 3x^2 \\
\int \cos x\,dx = \sin x & \text{perquè} & (\sin x)' = \cos x \\
\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x & \text{perquè} & (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{2}$$

A partir d'aquests exemples, podem deduir la definició de la primitiva d'una funció

> $F(x)$ és una **primitiva** (o integral indefinida) d'una funció $f(x)$ si
>
> $$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{perquè} \quad F'(x) = f(x) \tag{3}$$

Constant d'integració

Si $F(x)$ és una primitiva de la funció $f(x)$, $F(x)+C$, on C és una constant, també ho és.

Per aquest motiu quan calculam primitives, hem de recordar afegir la **constant d'integració** al final. Els exemples anteriors els podrem escriure com

$$\begin{array}{lll} \int 1\,dx = x+C & \textit{perquè} & (x+C)' = 1 \\ \int 3x^2\,dx = x^3+C & \textit{perquè} & (x^3+C)' = 3x^2 \\ \int \cos x\,dx = \sin x + C & \textit{perquè} & (\sin x + C)' = \cos x \\ \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C & \textit{perquè} & (\ln x + C)' = \frac{1}{x} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \tag{4}$$

Propietats de les primitives

- La integral d'una suma és la suma d'integrals: $\int (f(x)+g(x))\;dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)dx$

  Exemple: $\int \left(\frac{1}{x}+4x^3\right)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int 4x^3\,dx = \ln x + x^4 + C$

  Fixeu-vos que no cal escriure dues constants d'integració.

- La integral d'una constant per una funció, la constant surt defora de la integral: $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

  Exemple: $\int 3\cos x\,dx = 3\int \cos x\,dx = 3\sin x + C$

1.1 Taula de primitives

La primera passa que cal fer a l'hora de calcular una primitiva és comprovar si es tracta d'una funció elemental coneguda. La primera columna de la taula següent resumeix les anomenades **integrals immediates**, les quals es poden escriure directament sense necessitat de fer cap càlcul. Observeu que s'obtenen a partir del procés "contrari" de derivar.

Taula 1: *Integrals immediates*

Funcions elementals	Funcions compostes
$\int dx = x + C$	$\int g'(x)dx = g(x) + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$	$\int [g(x)]^n\,g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{g(x)}\,g'(x)dx = \ln\lvert g(x)\rvert + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \sin g(x)\,g'(x)dx = -\cos g(x) + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \cos g(x)\,g'(x)dx = \sin g(x) + C$

$\int [1+\operatorname{tg}^2 x]\,dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int [1+\operatorname{tg}^2 g(x)]\,g'(x)dx = \operatorname{tg} g(x) + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int e^{g(x)}\,g'(x)dx = e^{g(x)} + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{g(x)}\,g'(x)dx = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}\,g'(x)dx = \arcsin g(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \frac{1}{1+[g(x)]^2}\,g'(x)dx = \operatorname{arctg} g(x) + C$

EXERCICI RESOLT 1

Utilitza la taula d'integrals immediates per calcular

a) $\int \left(\frac{4}{1+x^2} - \frac{5}{x}\right)\,dx$

b) $\int (2e^x + \sin x)\,dx$

c) $\int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx$

d) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

a) $\int (\frac{4}{1+x^2} - \frac{5}{x})\,dx = 4\operatorname{arctg} x - 5\ln|x| + C$

b) $\int (2e^x + \sin x)\,dx = 2e^x - \cos x + C$

c) $\int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$

d) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

En aquest cas hem utilitzat la fórmula de la integral d'una potència

La segona columna de la taula anterior s'anomenen **integrals quasi-immediates** i es caracteritzen pel fet que apareix la derivada de la funció t acompanyant el dx. Aquestes integrals provenen de la derivada d'una funció composta (regla de la cadena)

Exemples:

- $\int \cos(\underbrace{x^2+x+1}_{g}) \cdot (\underbrace{2x+1}_{g'})\,dx = \sin(\underbrace{x^2+x+1}_{g}) + C$
- $\int \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\,dx = \ln|\sin x| + C$
- $\int \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x\,dx = \operatorname{arctg} e^x + C$

Provau de derivar els membres de la dreta, aplicant la regla de la cadena, i comprovau que obteniu la funció inicial.

No us preocupeu si no sou capaços d'identificar aquest tipus d'integrals perquè tot seguit veurem un mètode més general (**integració per substitució**) per resoldre-les.

EXERCICIS PROPOSATS

1. Calculau la primitiva $\int \sqrt[5]{\frac{1}{x}}$. Indicació: Expressa la funció com una potència i integra la potència.

2. Calculau la primitiva $\int \left(2^x - 5\cos x + \frac{3}{x}\right) dx$.

1.2 Primitives per substitució

Imaginem que ens demanen fer la integral $\int \sin(\underbrace{5x^2+1}_{t})\, x\, dx$. En color blau hem marcat la funció composta t i, en vermell, una funció que és semblant a la derivada de t.

Per fer aquesta integral farem un **canvi de variables**. Visualitzeu el següent vídeo on s'explica el mètode.

Vídeo 7.1: *Integrals per substitució*
https://www.youtube.com/watch?v=Q6i-b7HSAX4

Resum de passes a seguir: $\int \sin(5x^2+1) \cdot x\, dx$

1. Anomenarem $t = 5x^2 + 1$
2. Derivam els dos membres i multiplicam pel diferencial corresponent a la variable que derivam: $1dt = 10xdx$. D'aquí deduïm que $x\, dx = \frac{1}{10}\, dt$ i ho substituïm dins la integral

$$\int \sin(t)\, \frac{1}{10}\, dt = \frac{1}{10} \int \sin(t)\, dt = \cdots$$

   IMPORTANT: Per saber si hem fet be el canvi de variables al final ha de quedar una integral que sapiguem fer. Així mateix, només ens pot quedar la variable t; la x ha de desaparèixer completament.

3. La darrera integral és immediata i val

$$\cdots = \frac{1}{10} \int \sin t\, dt = -\frac{1}{10} \cos t + C$$

4. Finalment, desfeim el canviant la variable t per la seva expressió:

$$= -\frac{1}{10} \cos(5x^2+1) + C$$

5. Feim la comprovació: $\left(-\frac{1}{10}\cos(5x^2+1) + C\right)' = \sin(5x^2+1) \cdot x$

EXERCICIS PROPOSATS

3. Calculau les primitives de les següents funcions, aplicant el canvi de variables que s'indica en cada cas.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-3}\,dx$ fent el canvi $t = 2x - 3$

b) $\displaystyle\int x e^{-x^2}\,dx$ fent el canvi $t = -x^2$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ fent el canvi $t = \sin x$

1.3 Integració per parts

Imaginem que volem integrar un producte de funcions $u \cdot v'$ on la funció u és fàcil de derivar i la funció v' fàcil d'integrar. En tal cas empram la regla d'integració per parts

Regla d'integració per parts

$$\int u \cdot dv = v \cdot u - \int v \cdot du \tag{5}$$

on hem expressat $du = u'dx$ i $dv = v'dx$

Una regla mnemotècnica de recordar-se'n és recitar la frase: "**S**usana, **u**n **d**ia **v**entoso, **v**ió **u**n **s**oldado **v**estido **d**e **u**niforme"

La regla d'integració per parts s'utilitza en integrals de la forma

- $\displaystyle\int x^n \cdot a^x\,dx$
- $\displaystyle\int \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ \cos x \end{array} \right\} \cdot a^x\,dx$
- $\displaystyle\int x^n \cdot \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ \cos x \end{array} \right\} dx$
- $\displaystyle\int x^n \cdot \left\{ \begin{array}{c} \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{array} \right\} dx$
- $\displaystyle\int x^n \cdot \log_b x\,dx$

En aquest vídeo s'explica la regla d'integració per parts:

Vídeo 7.2: *Mètode d'integració per parts*
https://www.youtube.com/watch?v=lQQvE1lux4Q

EXERCICI RESOLT 2

Calcula $\int x \ln x \, dx$

En aquesta integral $\ln x$ és fàcil de derivar i x d'integrar, per tant, feim les assignacions $\int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{lll} u = \ln x & \rightarrow & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx & \rightarrow & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - x^2 + C$

EXERCICI RESOLT 3

Calcula $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

Sembla que, en aquest cas, no hi ha producte de funcions quan realment el producte es pot expressar com $\operatorname{arctg} x \cdot 1$. Feim aquesta assignació en el mètode d'integració per parts

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \cdot \underbrace{1 dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{lll} u = \operatorname{arctg} x & \rightarrow & du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = 1 dx & \rightarrow & v = x \end{array} \right\}$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x dx = \cdots$$

Aquesta darrera integral és quasi-immediata, multiplicam i dividim entre 2

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

EXERCICIS PROPOSATS

4. Calculeu $\int x \cdot e^x \, dx$ utilitzant la tècnica d'integració per parts.

1.4 Primitives de funcions racionals

Anomenam integral racional, a la integral del quocient de dos polinomis: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Procediment:

- La primera passa és comprovar els graus del numerador i el denominador. Si grau $P(x) \geq$

grau $Q(x)$ haurem de fer la divisió de polinomis i utilitzar la següent fórmula:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} \underbrace{R(x)} & C(x) \end{array} \quad \rightarrow \quad P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x) \tag{6}$$

Si la comprovació de la divisió anterior la dividim tota entre $Q(x)$ trobam

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{7}$$

- Calculam les solucions de l'equació $Q(x) = 0$ i miram si estan repetides (arrels múltiples) o no (arrels simples).

EXERCICI RESOLT 4

Calcula $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x+2}\,dx$

Com el el grau del numerador és més gran o igual que el denominador, efectuam la divisió de polinomis

$$\begin{array}{l|l} x^2+1 & x+2 \\ \cline{2-2} \underbrace{5} & x-2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x+2} = x - 2 + \frac{5}{x+2} \tag{8}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x+2} = \int (x-2)\,dx + \int \frac{5}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 5\ln|x+2| + C$$

Exemple d'arrels simples

Volem calcular $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx$

No cal efectuar la divisió perquè el grau del denominador supera al numerador. Resolem l'equació: $x^2 + x = 0 \rightarrow x = 0, -1$. Cap d'elles està repetida i diem que són arrels simples. La factorització del denominador és $Q(x) = x(x+1) =$

Intentarem fer la descomposició següent

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \tag{9}$$

Efectuam la suma del segon membre

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \tag{10}$$

Donat que els denominadors són iguals, els numeradors també ho han d'ésser

$$x - 2 = A(x+1) + Bx \tag{11}$$

Ara donam dos valors a x i intentam trobar que valen A i B

- Si $x = 0$: $-2 = A$

- Si $x = -1$: $-3 = -B \rightarrow B = 3$

Amb això hem aconseguit separar la integral en dues que si sabem fer:

$$\int \frac{x-2}{x^2+x} = \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx = \cdots \tag{12}$$

Cadascuna de les integrals és un logaritme Neperià

$$\cdots = -2\ln|x| + 3\ln|x+1| + C \tag{13}$$

Vídeo 7.3: *Integració de funcions racionals*
https://www.youtube.com/watch?v=klKHcqcA9Bw

Vídeo 7.4: *Integrals tipus arc tangent*
https://www.youtube.com/watch?v=7cXfAgA9Vqs

Exemple d'arrels múltiples

PBAU

El cas d'arrels múltiples es deixa com ampliació.

Volem calcular $\displaystyle\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx$

No cal efectuar la divisió perquè el grau del denominador supera al del numerador. Resolem l'equació: $(x+3)^3 = 0 \rightarrow$ té l'arrel $x = 3$ amb multiplicitat 3 (està repetida tres vegades).

En el cas de multiplicitat major a 1, es fa la descomposició de la forma següent

$$\frac{2x+5}{(x+3)^3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{B}{(x+3)^3} \tag{14}$$

és a dir, afegim tants de termes com multiplicitat tingui l'arrel.

Efectuam la suma del segon membre

$$\frac{2x+5}{(x+3)^3} = \frac{A(x+3)^2 + B(x+3) + C}{(x+3)^3} \tag{15}$$

Donat que els denominadors són iguals, els numeradors també ho han d'ésser

$$2x + 5 = A(x+3)^2 + B(x+3) + C \tag{16}$$

Ara donam tres valors a x per determinar els paràmetres A, B i C

- Si $x = -3$: $-1 = C$
- Si $x = -2$: $1 = A + B + C \to A + B = 2$
- Si $x = -4$: $-3 = A - B + C \to A - B = -2$

Resolem el sistema d'equacions per A i B i trobam que $A = 0$ i $B = 2$. Amb això hem aconseguit separar la integral en dues integrals més senzilles:

$$\int \frac{2x+5}{(x+3)^3} = 0 + \int \frac{2}{(x+3)^2}\,dx + \int \frac{-1}{(x+3)^3}\,dx = \cdots \tag{17}$$

Cadascuna de les integrals és de tipus potència, perquè $\dfrac{1}{(x+3)^n} = (x+3)^{-n}$ i la seva integral és $\dfrac{(x+3)^{-n+1}}{-n+1}$

$$\cdots = 2\frac{(x+3)^{-1}}{-1} - 1\frac{(x+3)^{-2}}{-2} + C \tag{18}$$

la qual es pot arreglar com

$$\cdots = -\frac{2}{x+3} + \frac{1}{2(x+3)^2} + C \tag{19}$$

EXERCICIS PROPOSATS

5. Calculau les següents integrals racionals:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot(x-2)}\,dx$

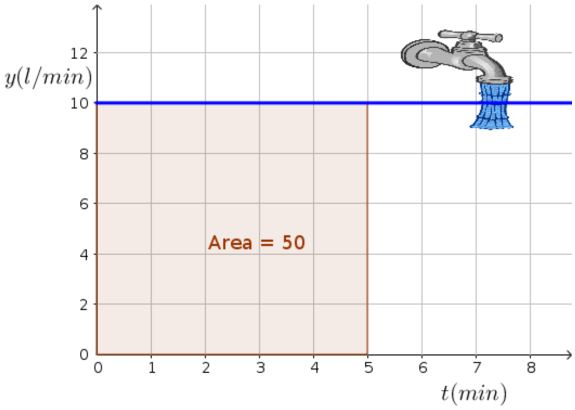
2. La integral definida

Introducció

Hi ha infinitat de funcions extretes del món real (científic, econòmic, ...) per a les quals té especial importància l'**àrea davall del seu gràfic**. En aquesta secció veurem com la integral definida proporciona aquesta àrea.

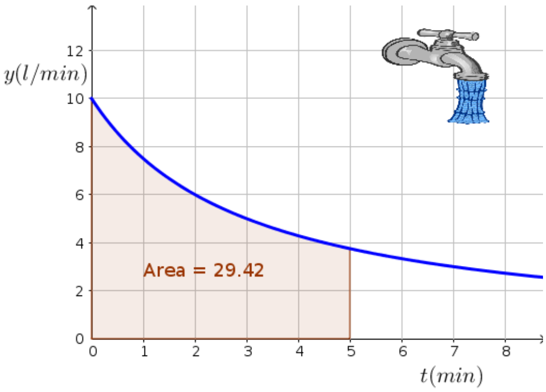
Problema de l'àrea sota una funció

Considerem una aixeta que té un cabal de 10 litres/minut. Quants de litres haurà tret al cap de 5 minuts? La resposta és tan fàcil com dir $10\,\dfrac{l}{min}\cdot 5\,\mathrm{min} = 50\,l$. Intentem, però, entendre aquest resultat gràficament representant la funció $y = 10$ a l'interval $t \in [0, 5]$.



Comprovam que l'àrea que queda davall la funció correspon al volum d'aigua extret.

Suposem ara que la aixeta perd pressió i el seu cabal disminueix amb el temps segons la funció $y = \dfrac{30}{t+3}$ litres/minut. Fixeu-vos que quan $t = 0$, el cabal és de 10 l/min com abans, però passats $t = 3$ minuts, el cabal s'ha reduït a la meitat. Ens feim la mateixa pregunta que abans, quants de litres haurà tret al cap de 5 minuts? La solució ja no és tan evident com abans perquè la funció no és constant. No obstant això, sabem que el volum d'aigua correspon a l'àrea que queda per davall de la funció.



Llavors, com podem calcular l'àrea que queda per davall d'una funció qualsevol? La resposta ens la proporciona la **integral definida**.

Si $f(x) \geq 0$ l'àrea que queda per davall de la funció s'indica com

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{20}$$

i es llegeix com *integral definida entre a i b*. a i b també s'anomenen **extrems d'integració**.

La integral definida d'una funció és **un nombre real**.

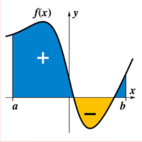
Regla de Barrow

Si $F(x)$ és una primitiva qualsevol de la funció $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{21}$$

A la pràctica, per calcular una integral definida, primer calculam la primitiva i després l'avaluam als extrems d'integració i restam els dos resultats. Donat que restam els dos resultats, no cal afegir la constant d'integració a la primitiva.

Atenció: La integral definida té signe depenent del signe que tengui la funció en aquell interval.



EXERCICI RESOLT 5

Calcula:

a) $\int_2^5 (3x^2 - 2x + 3)dx$

b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

c) $\int_0^\pi \sin x dx$

a) $\int_2^5 (3x^2 - 2x + 3)dx = F(5) - F(2) = 115 - 10 = 105$

$F(x) = \int (3x^2 - 2x + 3)dx = x^3 - x^2 + 3x$

$F(5) = 5^3 - 5^2 + 3 \cdot 5 = 115$

$F(2) = 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$

b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx = F(e) - F(1) = 1 - 0 = 1$

$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$

$F(e) = \ln e = 1$

$F(1) = \ln 1 = 0$

c) $\int_0^\pi \sin x dx = F(\pi) - F(0) = 1 - (-1) = 2$

$F(x) = \int \sin x dx = -\cos x$

$F(\pi) = -\cos \pi = -(-1) = 1$

$F(0) = -\cos 0 = -1$

D'aquesta regla se'n deriven una sèrie de propietats

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Si $a < c < b$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Si $f(x)$ és una funció parell, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- Si $f(x)$ és una funció senar, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

2.1 Àrea sota una funció

Per calcular l'àrea que queda compresa entre una funció $f(x)$ i l'eix OX entre les abscisses $x = a$ i $x = b$, necessitam saber si la funció presenta canvis de signe. Resulta molt útil fer una gràfica de la funció en l'interval que demanen.

1. Resolem l'equació $f(x) = 0$. Suposem que trobam les arrels $x_1, x_2, x_3, \cdots$
2. Representam gràficament la funció i el recinte
3. Calculam el signe de la funció dins cada interval (x_i, x_{i+1})
4. Cercam la primitiva de $f(x)$
5. Cercam la integral definida dins cada interval
   - Si el resultat de la integral és negatiu, prenen el valor absolut de la integral
6. Sumam les àrees dels diferents intervals

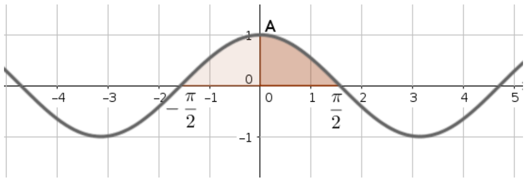
Vídeo 7.5: *Àrea davall d'una funció*
https://www.youtube.com/watch?v=xgIXBzAHKWo

Tot seguit mostram com s'aplica aquest procediment exemples

EXERCICI RESOLT 6

Calcula l'àrea compresa entre la funció $f(x) = \cos x$, l'eix OX i les rectes verticals $x = -\pi/2$ i $x = \pi/2$.

Dibuixam el recinte del qual volem l'àrea



La funció sempre és positiva a l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Una primitiva de la funció és $\int \cos x \, dx = \sin x$

Calculam la integral definida:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = F(\pi/2) - F(-\pi/2) = 1 - (-1) = 2$$

$F(x) = \int \cos x dx = \sin x$

$F(\pi/2) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$F(-\pi/2) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$

Noteu que donat que l'interval i la funció són simètrics, també haguéssim pogut calcular l'àrea com

$$A = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2(1 - 0) = 2$$

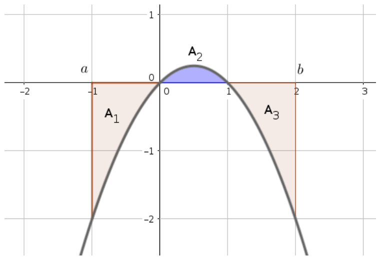
EXERCICI RESOLT 7

Calcula l'àrea compresa entre la funció $f(x) = -x^2 + x$, l'eix OX i les rectes verticals $x = -1$ i $x = 2$.

Començam cercant el punts de tall de la funció amb l'eix OX

$$-x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \tag{22}$$

Dibuixam el recinte del qual volem l'àrea



Donat que la funció presenta canvis de signe, necessitam separar l'àrea en 3 parts: A_1, A_2 i A_3. En el primer i darrer interval la funció és negativa i, per tant, l'àrea serà la integral canviada de signe.

Una primitiva de la funció és $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$

Calculam la integral definida a cada interval per separat:

- $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx = F(0) - F(-1) = 0 - \frac{5}{6} = -\frac{5}{6}$
- $I_2 = \displaystyle\int_{0}^{1} f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$
- $I_3 = \displaystyle\int_{1}^{2} f(x)dx = F(2) - F(1) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}$

Els valors de la primitiva que em emprat són:

$$F(-1) = -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} = \frac{5}{6}$$

$$F(0) = -\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} = 0$$

$$F(1) = -\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} = \frac{1}{6}$$

$$F(2) = -\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} = -\frac{2}{3}$$

L'àrea total és $A_T = A_1 + A_2 + A_3$= $-I_1 + I_2 - I_3 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$

Comprovau que l'àrea sempre vos doni un nombre positiu!

EXERCICIS PROPOSATS

6. Calculau l'àrea davall la funció $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, l'eix OX i les rectes $x = 1$, $x = 9$.

7. Calculau l'àrea davall la funció $y = x^2 - 4$, l'eix OX i les rectes $x = -1$, $x = 2$. Representau gràficament el recinte.

2.2 Àrea entre dues funcions

Per calcular l'àrea compresa entre dues funcions $f(x)$ i $g(x)$, seguirem el següent procediment

1. Cercam els punts on les dues funcions es tallen $f(x) = g(x)$
2. Representam gràficament les funcions $f(x)$ i $g(x)$ i el recinte del qual volem calcular l'àrea
3. Calculam la primitiva de $f(x) - g(x)$
4. Calculam les integrals $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - g(x)|\, dx$. El valor absolut fa que el resultat final sempre sigui positiu.
5. Escrivim l'àrea total com la suma de les integrals del pas anterior

Vídeo 7.6: *Àrea entre dues funcions*
https://www.youtube.com/watch?v=0BhTptZv5PQ

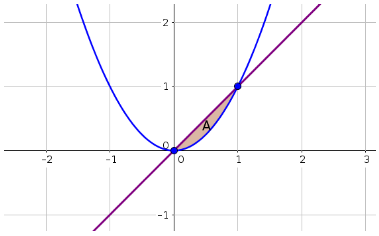
EXERCICI RESOLT 8

Calcula l'àrea compresa entre les funcions $f(x) = x$ i $g(x) = x^2$

Començam trobant els punts de tall

$$x = x^2 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right. \tag{23}$$

Dibuixam el recinte format per la recta i la paràbola



Cercam la primitiva $F(x) = \displaystyle\int (x - x^2)dx = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}$

Finalment, cercam la integral definida

$A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$

$$F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1^3}{3} = \frac{1}{6}$$

$$F(0) = 0$$

Com que l'integral ja dona un nombre positiu, no cal canviar-ne el signe.

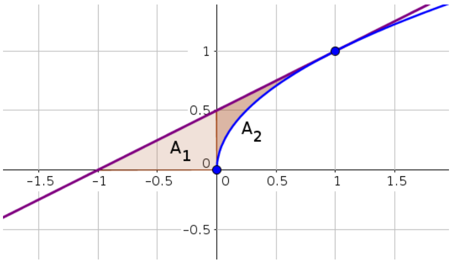
EXERCICI RESOLT 9

Calcula l'àrea compresa entre les funcions $f(x)=\sqrt{x}$ i $g(x)=\dfrac{x+1}{2}$ i l'eix OX.

Començam trobant els punts de tall

$$\sqrt{x}=\frac{x+1}{2}\to x=\frac{(x+1)^2}{4}\to x=1 \qquad (24)$$

Dibuixam el recinte format per la funció radical, la recta i l'eix OX



Cercam l'àrea de cada regió per separat

$A_1=\int_{-1}^{0}\dfrac{x+1}{2}\,dx=F_1(0)-F_1(-1)=0-(-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$

$$F_1(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}$$

$$F_1(0)=0$$

$$F_1(-1)=\frac{(-1)^2}{4}+\frac{-1}{2}=\frac{-1}{4}$$

$A_2=\int_0^1\left(\dfrac{x+1}{2}-\sqrt{x}\right)dx=F_2(1)-F_2(0)=\frac{1}{12}-0=\frac{1}{12}$

$$F_2(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

$$F_2(1)=\frac{1^2}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{1^3}=\frac{1}{12}$$

$$F_2(0)=0$$

Finalment, l'àrea total és $A=A_1+A_2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$

EXERCICIS PROPOSATS

8. Calculau l'àrea compresa entre les funcions $y=x^2$ i $y=x+2$. Representau el recinte gràficament.

2.3 Teorema fonamental del càlcul

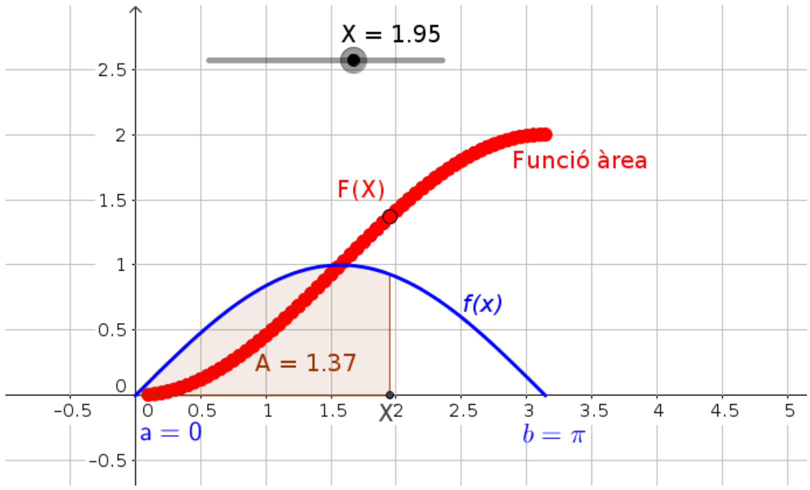
PBAU

La secció del teorema fonamental del càlcul vos la deixo com ampliació

Com hem dit a la introducció hi ha una estreta relació entre integració (càlcul de l'àrea davall una corba) i la derivació.

La funció àrea

Donada una funció $f(x)$, contínua en $[a,b]$, podem calcular $\int_a^c f(x)dx$ per a tot nombre $c \in [a,b]$.
Consideram la nova funció $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ per a $x \in [a,b]$, que és l'àrea davall f entre a i x.



Simulació 7: https://www.geogebra.org/m/at39zggt : *Desplaçau el punt X per generar la funció àrea*

És fàcil comprovar que $F(a) = 0$ i $F(b)$ és la integral entre a i b. Llavors, la funció $F(x)$ diu com canvia l'àrea a mesura que augmentam l'abscissa x. Si la funció $f(x)$ és positiva, la funció àrea creix, mentre que si $f(x)$ és negativa, la funció àrea decreix. Això ens duu a pensar que la derivada de la funció àrea ha d'estar relacionada amb la $f(x)$. Aquesta relació l'expressam com un teorema.

Teorema fonamental del càlcul

Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a,b]$, aleshores la funció $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, per a $x \in [a,b]$ és derivable i, a més, compleix $F'(x) = f(x)$.

Efectivament, comprovem que la funció $f(x) = \sin x$ per a $x \in [0,\pi]$ compleix el teorema. Per això, ens construïm la funció àrea

$$F(x) = \int_0^x \sin t dt = -\cos t]_0^x = -\cos x - (-\cos 0) = 1 - \cos x$$

Podem comprovar que $F(0) = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$ i $F(\pi) = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$. Per qualsevol altre valor x, la funció $F(x)$ dóna l'àrea entre 0 el valor d'abscissa x.

Si derivam la funció àrea $F'(x) = -(-\sin x) = \sin x$ cosa que assegura el teorema fonamental del càlcul, ja que $F'(x) = f(x)$.

EXERCICI RESOLT 10

Calcula els màxims i mínims de la funció $F(x) = \int_1^x (t^3 - 4t)\, dt$ definida per a $x \geq 1$.

Començam calculant una primitiva de la funció

$$\int (t^3 - 4t)\, dt = \frac{t^4}{4} - 2t^2$$

Calculam la funció $F(x)$:

$$F(x) = \int_1^x (t^3 - t)\, dt = \left.\frac{t^4}{4} - 2t^2\right]_1^x = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 2\right) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{7}{4}$$

Per calcular els extrems (màxims i mínims) de la funció necessitam calcular-ne la derivada

$F'(x) = x^3 - 4x$

Fixeu-vos que aquest resultat l'haguéssim pogut trobar més fàcilment aplicant el Teorema fonamental del càlcul $F'(x) = f(x) = x^3 - 4x$

Per trobar els extrems igualam la derivada a zero, $x^3 - 4x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 2$

Calculam la segona derivada $F''(x) = 3x^2 - 4$

- $x = -2$, $x = 0$: No serveixen, queda fora del domini de la funció F
- $x = 2$: $F''(2) = 8 > 0 \rightarrow$ mínim relatiu

Per calcular l'ordenada del mínim, necessitam haver calculat la funció $F(x)$

- $x = 2$: $F(2) = \dfrac{-9}{4}$

IEDIB