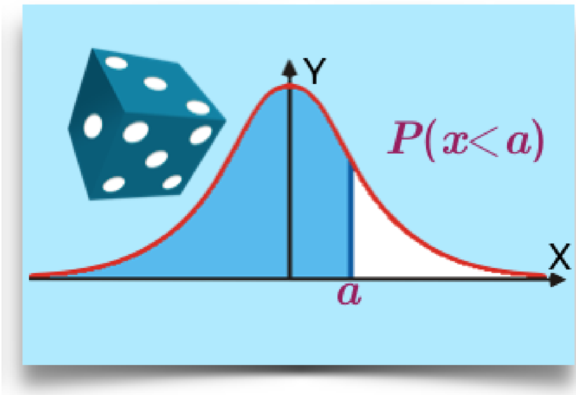
Institut d´ensenyaments a distància de les Illes Balears

https://iedib.net/

Matemàtiques II

Lliurament 8: Probabilitat i distribucions de probabilitat



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Edició LaTeX: ® Josep Mulet
Versió: 19-03-2021

Índex

1. Càlcul de probabilitats

En aquesta secció farem un resum dels conceptes bàsics de probabilitat apresos durant l'ESO.

Dos tipus d'experiències

- **Experiència aleatòria** és aquella en què hi intervé l'atzar. Per exemple:
  - Llançar una moneda i mirar si surt C o X
  - Treure una carta d'una baralla espanyola i mirar si és un rei
  - Temps que tardam en anar de casa a la feina

- **Experiència determinista** és aquella on és possible predir a priori el resultat de l'experiment.
  - Treure una bolla d'una bossa que només conté bolles vermelles i mirar quin color té (cert i segur que sortirà vermella).
  - Mesurem la quantitat d'aigua que cap en un envàs buit.

Espai mostral i successos

Anomenam **Espai Mostral** E al conjunt de tots els possibles resultats d'una experiència aleatòria

EXERCICI RESOLT 1

Escriu l'espai mostral de les experiències aleatòries:
a) llançar una moneda
b) llançar un dau
c) llançar una moneda i un dau simultàniament

a) llançar una moneda: $E = \{C, X\}$
b) llançar un dau: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
c) llançar una moneda i un dau simultàniament: $E = \{C\text{-}1, C\text{-}2, C\text{-}3, C\text{-}4, C\text{-}5, C\text{-}6, X\text{-}1, X\text{-}2, X\text{-}3, X\text{-}4, X\text{-}5, X\text{-}6\}$

Anomenam **Succés elemental** a cadascun dels elements de l'espai mostral; per exemple: "treure un 3 al dau $\{3\}$"és un succés elemental.

Anomenam **Succés** a qualsevol subconjunt de l'espai mostral; per exemple: "treure un número major que 3"al dau $\{4, 5, 6\}$ és un exemple de succés.

Anomenam **Succés Impossible** al subconjunt buit $\varnothing$; per exemple: "treure un nombre major que 6 en llançar un dau cúbic".

Anomenam **Succés Segur** al subconjunt que coincideix amb l'espai mostral E; per exemple: "treure entre 1 i 6 en llançar un dau cúbic".

1.1 Probabilitat elemental

La **probabilitat** és una mesura de quant freqüent és un succés. Es quantifica amb un nombre que com a mínim val 0 (**succés impossible**) i com a màxim 1 (**succés segur**).

$$P(\varnothing) = 0 \qquad P(E) = 1 \tag{1}$$

Si S' i S són **successos contraris**, es compleix que $P(S') = 1 - P(S)$.

Es considerà falta molt greu tot aquell qui afirmi en un examen o treball que la probabilitat és negativa o major que 1.
Si ens parlem d'una probabilitat del 70%, en realitat, cal expressar-la en tant per u, P=0,7

Si tots els possibles resultats d'un experiment aleatori (**successos elementals**) tenen la mateixa probabilitat (són **equiprobables**), podem aplicar la **regla de Laplace**:

$$P(S) = \frac{\text{Nombre de casos favorables a S}}{\text{Nombre de casos totals}} \quad (2)$$

EXERCICI RESOLT 2

Justifica si es pot aplicar la regla de Laplace i, si és possible, calcula la probabilitat de cada succés:
a) Treure creu en una moneda regular
b) Treure un número major que 4 en dau cúbic regular
c) Treure un número major que 4 en dau trucat
d) No treure As d'una baralla espanyola de 40 cartes
NOTA: Quan treballem amb baralles de cartes espanyoles, consideram que els 8 i 9 s'han eliminat i, per tant, hi ha un total de 40 cartes.

a) $P(X) = \frac{1}{2}$
b) $P(>4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
c) Si el dau està trucat no totes les cares tindran igual probabilitat de sortir i, per tant, no es pot aplicar la regla de Laplace. S'hauria d'obtenir la probabilitat experimentalment.
d) "No treure As" és el succés contrari de "treure As". Sabem que "treure As" té una probabilitat de $P(As) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$. Per tant, el succés contrari "no As" té probabilitat $P(As') = 1 - P(As) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

EXERCICIS PROPOSATS

1. En un grup hi ha 20 alumnes, dels quals 16 són dones i la resta homes. Si agafam un alumne a l'atzar, trobau la probabilitat que sigui dona i la probabilitat que sigui home.

2. Consideram l'experiment llançar un dau. Siguin els successos:

A="Treure un nombre primer"; B="Treure múltiple de 3"; C="Treure parell"

Calculau les probabilitats $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$ i $P(B \cup C)$. *Recorda: La intersecció $\cap$ significa que passin els dos successos alhora i la unió $\cup$ que passi almenys un d'ells.*

1.2 Probabilitat d'experiments composts

Entenem com **experiment compost** aquell format per dos o més experiments simples. Per exemple, si consideram els experiments simples llançar un dau i treure una carta; podríem formar els següents experiments composts:

- Llançar dos daus i sumar-ne les puntuacions

- Llançar simultàniament un dau i treure una carta
- Treure dues cartes de la baralla
- etc.

Considerem dos successos A i B. Classificam els experiments composts en:

- **Independents**: Si A i B són independents es compleix que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

El símbol $\cap$ s'anomena intersecció. $A \cap B$ vol dir que passi A i B alhora.

- **Dependents**: La probabilitat de B depèn del resultat que s'hagi obtingut d' A. En aquest cas, necessitarem introduir el concepte de **probabilitat condicionada**

EXERCICI RESOLT 3

Classifica els següents successos en independents o dependents. En el cas que siguin independents, calcula'n la probabilitat a partir de $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
a) Obtenir creu en llançar una moneda 2 vegades.
b) Obtenir dos asos en treure dues cartes amb reemplaçament (la treim, miram i la tornam a introduir a la baralla).
c) Obtenir dos asos en treure dues cartes sense reemplaçament (la treim, i no la tornam a introduir).
d) Obtenir cara en una moneda, parell a un dau i oros en extreure simultàniament una carta.

a) Els llançaments són independents. $P(C_1 \cap C_2) = P(C) \cdot P(C) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

b) Si les extraccions són amb reemplaçament, són successos independents.
$P(As_1 \cap As_2) = P(As) \cdot P(As) = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{100}$

c) Si les extraccions són sense reemplaçament, els successos són dependents. La probabilitat que la segona carta surti As depèn si la primera ha sortit As o no.

d) Els tres successos són independents.

$$P(Cara \cap Parell \cap Oros) = P(Cara) \cdot P(Parell) \cdot P(Oros) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$

Producte Cartesià

La tècnica del producte Cartesià permet escriure tots els successos d'un experiment compost. Ens construïm una taula on posam a les capçaleres de les files i columnes, els successos elementals de cada experiment simple. Vegem com s'aplica mitjançant un exemple.

EXERCICI RESOLT 4

Llançam dos daus i en sumam les puntuacions. Calculau la probabilitat que:
a) la suma sigui igual 4
b) la suma sigui major o igual a 10

Ens construïm una taula on en la fila escrivim els resultats del primer dau i, en columna, els resultats del segon dau. A aquesta taula l'anomenam producte cartesià.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ens adonam que existeixen $6 \times 6 = 36$ combinacions, totes elles amb igual probabilitat. Llavors podem aplicar la regla de Laplace:
a) $P(x = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
b) $P(x \geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

EXERCICIS PROPOSATS

3. Llançam dos daus i restam les seves puntuacions (en valor absolut). Anomenam els successos A=“la diferència és menor o igual a 3”, B=“la diferència és major o igual a 2”. Calcula la probabilitat dels successos:
a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A \cap B)$

1.3 Probabilitat condicionada

En aquesta secció considerarem extraccions sense reemplaçament; és a dir, aquelles en les quals una vegada s'extreu una carta no es torna a introduir dins la baralla. Per aquest motiu la probabilitat de la segona extracció està condicionada al resultat de la primera.

Es defineix la probabilitat del succés A condicionada que ocorri B, i ho escrivim $P(A|B)$ com

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3}$$

Considerem l'experiment "extreure dues cartes sense reemplaçament". Ens demanam: quina és la probabilitat que les dues cartes siguin un As?

Començam demanant que la primera ha d'ésser un As i, sabent que la primera ha estat un As, que també ho sigui la segona. La notació que empram per expressar-ho és

$$P(As_1 \cap As_2) = P(As_1) \cdot P(As_2|As_1) \tag{4}$$

En aquesta fórmula, $P(As_2|As_1)$ es llegeix com "probabilitat que surti As la segona carta condicionat a que la primera hagi sortit As". Donat que la primera ha sortit As, només en queden 3 d'un total de 39 cartes; aleshores, $P(As_2|As_1) = \frac{3}{39}$. Finalment, la probabilitat de dos asos és:

$$P(As_1 \cap As_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130} \tag{5}$$

Aquest tipus de problemes s'entenen més fàcilment amb l'ajuda d'un **diagrama d'arbre** en el qual descrivim tots els possibles resultats de l'experiment compost juntament amb la seva probabilitat. En l'exemple de les dues cartes obtenim:

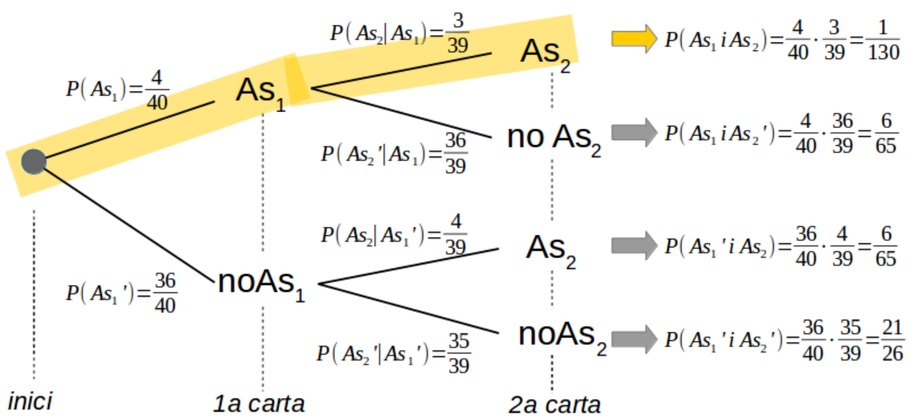


Figura 1: Diagrama d'arbre corresponent a treure dues cartes sense reemplaçament i mirar si són As o no (As')

Una vegada construït el diagrama d'arbre és molt senzill calcular-ne probabilitats. Identificam el camí o camins dels quals ens demanen la probabilitat i recordam algunes **regles mnemotècniques**:

- **En un camí multiplicam les probabilitats de cada branca.**
  - Exemple: $P(As_1 \cap As_2) = P(As_1) \cdot P(As_2|As_1)$

- **Es sumen les probabilitats de camins diferents.**
  - Exemple: $P[(As_1 \cap As_2') \cup (P(As_1' \cap As_2)] = P(As_1 \cap As_2') + P(As_1' \cap As_2)$
  - Feim l'assignació d'operacions: $i \rightarrow \cap \rightarrow \ producte$; $o \rightarrow \cup \rightarrow \ suma$

- **Totes les probabilitats que surten d'una bifurcació han de sumar 1.**
  - Exemple: $P(As_1) + P(As_1') = 1$

Probabilitat total

Suposem que ens demanen la probabilitat d'obtenir un As a la segona carta. De l'arbre és clar que existeixen dos camins que compleixen aquesta condició:

$$As_1 \cap As_2 \quad o \quad As_1' \cap As_2$$

Entenem com probabilitat total la suma d'aquestes dues probabilitats, és a dir:

$$P(As_2) = P(As_1 \cap As_2) + P(As_1' \cap As_2) \tag{6}$$

que amb la definició de probabilitat condicionada podem reescriure com

$$P(As_2) = P(As_1) \cdot P(As_2|As_1) + P(As_1') \cdot P(As_2|As_1') \tag{7}$$

i és llegeix, la probabilitat total que la segona carta siguin as és igual a la probabilitat que la primera carta sigui as per la probabilitat que la segona ho sigui condicionada a la que primera ha estat as, més, la probabilitat que la primera carta no sigui as per la probabilitat que la segona sigui as condicionada que la primera no ho hagi estat.

EXERCICI RESOLT 5

Per al diagrama d'arbre anterior es demana la probabilitat de
a) cap de les dues cartes sigui As
b) obtenir un As
c) no obtenir dos asos

a) Correspon al camí inferior del diagrama: $P(As_1' \cap As_2') = P(As_1') \cdot P(As_2'|As_1') = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{21}{26}$

b) Obtenir un as, són els dos camins intermedis del diagrama:

$$P(\text{un As}) = P(As_1) \cdot P(As_2'|As_1) + P(As_1') \cdot P(As_2|As_1') = \frac{6}{65} + \frac{6}{65} = \frac{12}{65}$$

c) No obtenir dos asos és el succés contrari d'obtenir dos asos

$$P(\text{No dos asos}) = 1 - P(\text{Dos asos}) = 1 - \frac{1}{130} = \frac{129}{130}$$

Notau que aquest resultat també s'hagués pogut obtenir sumant les probabilitats de tots els camins excepte el primer. Comprove'm-ho

$$P(\text{No dos asos}) = \frac{6}{65} + \frac{6}{65} + \frac{21}{26} = \frac{129}{130}$$

EXERCICI RESOLT 6

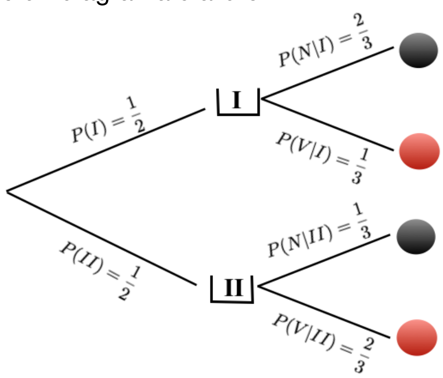
Es tenen dues caixes amb bolles: 

.

a) Triam una caixa a l'atzar i n'extreim una bolla. Calcula la probabilitat que la bolla extreta sigui vermella.

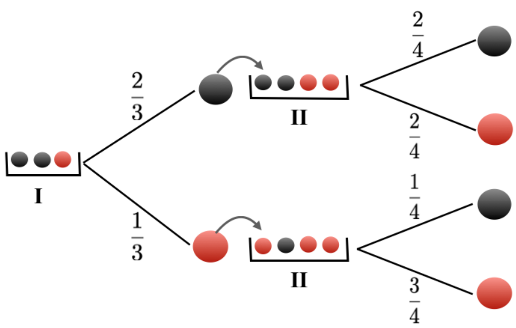
b) Extreim una bolla de la primera caixa i la introduïm dins la segona. Tot seguit extreim una bolla de la segona caixa. Calcula la probabilitat que la darrera bolla extreta sigui vermella.

a) Aquesta primera situació correspon a un experiment compost independent. No obstant això, resulta interessant construir-ne un diagrama d'arbre.



$$P(V) = P(I) \cdot P(V|I) + P(II) \cdot P(V|II) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

b) En aquest cas, l'experiment és dependent perquè la probabilitat de treure vermella la segona depèn de si la primera ha sortit vermella o no. Construïm el nou diagrama d'arbre.



$$P(V_2) = P(N_1) \cdot P(V_2|N_1) + P(V_1) \cdot P(V_2|V_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$$

Vídeo 8.1: *Probabilitat d'experiments composts dependents*
https://www.youtube.com/watch?v=3v1p6nXos_s

EXERCICIS PROPOSATS

4. S'extreuen dues cartes d'una baralla espanyola (sense reemplaçament) i es llança un dau. Quina és la probabilitat que les dues cartes siguin As i el resultat del dau sigui major que u?

5. Un estoig conté 2 llapis blaus i 3 de vermells. S'extreuen dos llapis de l'estoig. Anomenam els successos:
M="Només ha sortit un llapis vermell"
N="El segon llapis extret és blau"
a) Calcula $P(M)$ i $P(N)$
b) Són els successos M i N independents? Justifica la resposta.

1.4 Teorema de Bayes. Probabilitat a posteriori

Seguim amb l'exemple de la baralla de cartes de la qual extreim dues cartes sense reemplaçament i miram si són asos. En l'apartat anterior hem après a calcular probabilitats a partir del camins del diagrama d'arbre.

En aquest apartat aprendrem tècniques per determinar probabilitats sabent quin ha estat el resultat de la darrera extracció. Per exemple, suposem que extreim les dues cartes i només destapam la darrera que ha estat un As; ara ens demanam quina és la probabilitat que la primera també ho sigui. Ens demanen la probabilitat que la primera sigui As condicionada a que la segona ho sigui $P(As_1|As_2)$.

No us confongueu, perquè a l'apartat anterior havíem calculat $P(As_2|As_1) = \dfrac{3}{39}$ que és una probabilitat diferent a la que volem ara. Abans teníem informació de quina havia estat la primera carta; ara, en canvi, sabem la segona. Per calcular aquesta probabilitat, marcam tots els camins del diagram d'arbre que acaben a As_2 i efectuam aquesta divisió:

$$P(As_1|As_2) = \frac{P \text{ del camí que acaba a} As_2 \text{ i comença a } As_1}{\text{Suma de les } P \text{ de tots els camins que acaben a} As_2} \tag{8}$$

Substituint els valors numèrics obtenim:

$$P(As_1|As_2) = \frac{\frac{1}{130}}{\frac{1}{130} + \frac{6}{65}} = \frac{1}{13} \tag{9}$$

Aquest resultat ens diu que de totes les maneres diferents d'arribar a As_2, en promig, 1 de cada 13 parteixen de As_1.

Passam a formalitzar l'expressió del **Teorema de Bayes**

Si I_i és un succés d'inici de l'arbre i F un succés del final:

$$P(I_i|F) = \frac{P(I_i) \cdot P(F|I_i)}{P(F)} \tag{10}$$

Al denominador, hi apareix la probabilitat total que ocorri el succés F

$$P(F) = P(I_1) \cdot P(F|I_1) + \cdots + P(I_n) \cdot P(F|I_n) \tag{11}$$

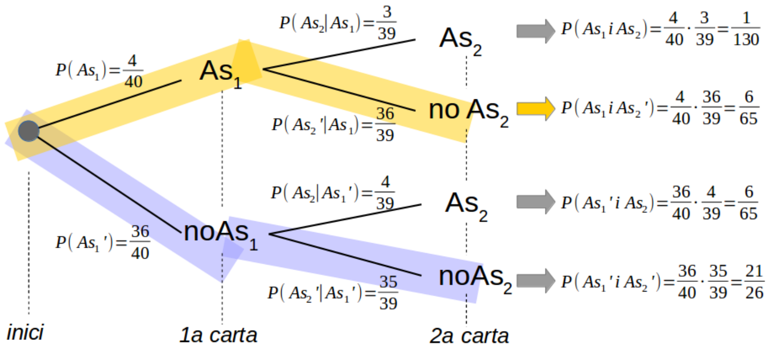
i anomenam $P(I_i)$=Probabilitat a priori, $P(I_i|F)$=Probabilitat a posteriori

Exercici Resolt 7

De l'experiència "extreure dues cartes sense reemplaçament"; sabem que la segona carta no ha estat As, quina és la probabilitat que la primera ho sigui.

Primer cercam la probabilitat de no treure as a la segona carta: tenim dos camins $As_1 \cap As_2'$ o $As_1' \cap As_2'$. La probabilitat total és

$$P(total) = P(As_1 \cap As_2') + P(As_1' \cap As_2') = \frac{6}{65} + \frac{21}{26} = \frac{9}{10} \tag{12}$$



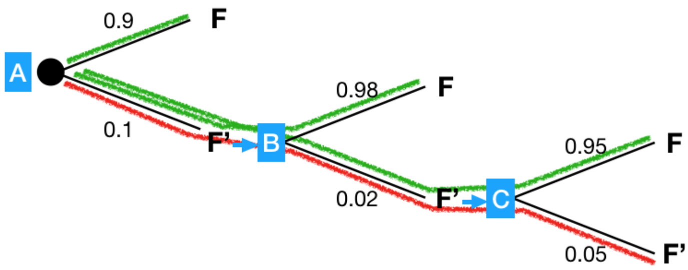
Aplicam el teorema de Bayes

$$P(As_1|As_2') = \frac{P(As_1) \cdot P(As_2'|As_1)}{P(total)} = \frac{\frac{6}{65}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{39} \tag{13}$$

EXERCICI RESOLT 8

En una aeronau s'han instal·lat tres dispositius de seguretat A, B i C. Si falla A es posa automàticament en marxa el dispositiu B, i si aquest falla, s'engega C. Se sap que la probabilitat que falli A és del 10%, la probabilitat que B funcioni correctament del 98% i la que falli C és del 5%.
a) Calculau la probabilitat que els tres mecanismes fallin.
b) Calculau la probabilitat que almenys l'aeronau funcioni.
c) Sabent que l'aeronau està funcionant, quina és la probabilitat que ho faci amb el dispositiu B

Empram la notació F: Funciona, F': No funciona.
Per aconseguir probabilitats, hem d'expressar els percentatges en tant per u: $P(F'_A) = 0.1$, $P(F_B) = 0.98$, $P(F'_C) = 0.05$. Ens construïm el diagrama d'arbre:



a) A l'ésser independents, ls probabilitat que tot falli és $P(F'_A \cap F'_B \cap F'_C) = P(F'_A) \cdot P(F'_B) \cdot P(F'_C) = 0.1 \cdot 0.02 \cdot 0.05 = 0.0001$ que correspon al camí marcat en vermell de l'arbre.

b) La probabilitat que l'aeronau no es quedi sense cap dispositiu és la suma dels 3 camins verds de l'arbre $P(funcioni) = P(F_A) + P(F'_A \cap F_B) + P(F'_A \cap F'_B \cap F_C)) = 0.9 + 0.1 \cdot 0.98 + 0.1 \cdot 0.02 \cdot 0.95 = 0.9999$

o més ràpidament, el contrari que els tres fallin: $P(funcioni) = 1 - P(F'_A \cap F'_B \cap F'_C) = 1 - 0.0001 = 0.9999$.

c) Aplicarem Bayes; és a dir, calcularem la proporció del camí que duu a B funcionant entre la probabilitat de tots els camins que acaben en F (funcionar).

$$P(B|F) = \frac{P(F'_A) \cdot P(F_B|F'_A)}{P(F)} = \frac{0.1 \cdot 0.98}{0.9999} = 0.098 \tag{14}$$

Vídeo 8.2: *Teorema de Bayes*
https://www.youtube.com/watch?v=6DW9axqqbbg

EXERCICIS PROPOSATS

6. En un centre s'ofereixen tres modalitats d'estudis A, B i C, i dos idiomes excloents anglès o francès.
La modalitat A és triada pel 80% dels alumnes, el 30% la B i 20% la C.
Se sap que han triat anglès el 80% dels alumnes de la modalitat A, el 90% de la B i el 75% de la C.
La resta d'alumnes ha triat francès.
a) Quina és la probabilitat que un alumne a l'atzar hagi triat idioma francès?
b) Sabent que un alumne ha triat francès, quina és la probabilitat que cursi la modalitat B?

1.5 Problemes PBAU probabilitat

PBAU

Si us ve de gust seguir practicant el teoremes de **probabilitat total** i de **Bayes**, aquests són alguns problemes que s'han demanat a selectivitat en els darrers anys.

EXERCICI RESOLT 9

JUNY 2017

Llançam dos daus de 6 cares no trucats i consideram els esdeveniments següents:

S_7: la suma dels resultats dels dos daus és 7.

M: el producte dels resultats dels dos daus és imparell.

a) Calculau les probabilitats que passin els esdeveniments anteriors.

b) Són independents S_7 i P?

El conjunt de resultats possibles per a l'experiment en qüestió és el següent:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

X	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

En total tenim 36 resultats possibles.

a) L'esdeveniment S_7 és el següent:

$$S_7 = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\} \tag{15}$$

En total hi ha 6 resultats. Aplicant la regla de Laplace, la probabilitat que passi S_7 serà: $P(S_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

L'esdeveniment P serà:

$$M = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\} \tag{16}$$

En total tenim 9 resultats possibles. Aplicant la regla de Laplace, la probabilitat que passi P serà: $P(M) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

b) Perquè siguin independents s'ha de satisfer $P(S_7 \cap M) = P(S_7) \cdot P(M)$. Calculem $P(S_7 \cap M)$. L'esdeveniment $S_7 \cap M$ és buit, perquè és impossible que la suma dels resultats sigui 7 i el producte, imparell. Per tant, $P(S_7 \cap M) = 0 \neq 6 = P(S_7) \cdot P(M)$. Concloem, doncs, que els successos no són independents.

EXERCICI RESOLT 10

SETEMBRE 2017

Suposem que els estudiants de la UIB només tenen dos sistemes operatius als seus telèfons mòbils: Android i IOS (el dels iPhone). El 80% dels estudiants de la UIB tenen el sistema operatiu Android. El 25% de les al·lotes estudiants de la UIB tenen IOS al seu telèfon mòbil i el 45% dels estudiants de la UIB són al·lots.

a) Calculau la probabilitat que un al·lot de la UIB tingui IOS al seu telèfon mòbil.

b) Calculau la probabilitat que un estudiant que tingui Android al telèfon mòbil sigui al·lota.

Considerem els successos següents:

D: l'estudiant és una al·lota.

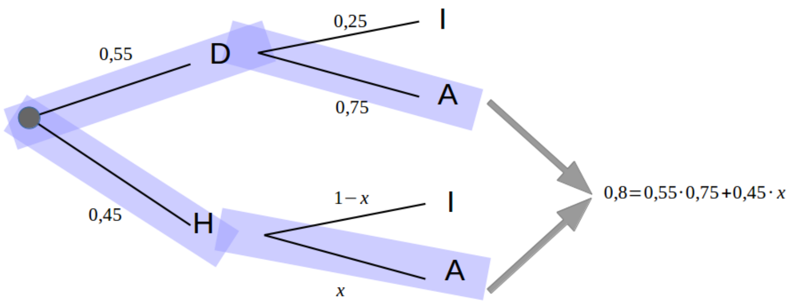
H: l'estudiant és un al·lot.

A: l'estudiant té Android al seu telèfon mòbil.

I: l'estudiant té IOS al seu telèfon mòbil.

Ens donen les probabilitats següents:

$$\begin{aligned} &P(A) = 0.8, \quad P(I|D) = 0.25, \\ &P(H) = 0.45, \quad P(D) = 0.55 \end{aligned} \tag{17}$$



Ens demanen les probabilitats següents:

a) Anomenam $P(A|H) = x$ i $P(I|H) = 1 - x$. Podem escriure la probabilitat total d'utilitzar Android $P(A)$ com:

$$\begin{aligned} P(A) = 0.8 &= P(A \cap H) + P(I \cap D) \\ &= P(H) \cdot P(A|H) + P(D) \cdot P(A|D) \\ 0.8 &= 0.55 \cdot 0.75 + 0.45x \end{aligned} \tag{18}$$

Aïllant x de l'expressió anterior, tenim:

$$x = \frac{0.8 - 0.4125}{0.45} = 0.8611 \tag{19}$$

Llavors, la probabilitat d'utilitzar IOS sabent que és home és $P(I|H) = 1 - x = 0.13889$

b) $P(D|A)$. Aplicant la regla de Bayes, tenim:

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{P(D) \cdot P(A|D)}{P(A)} = \frac{0.55 \cdot 0.75}{0.8} = 0.51562 \tag{20}$$

2. La distribució normal

Concepte de variable aleatòria

Considereu un experiment aleatori, per exemple, S=llançar una moneda a l'aire. L'espai mostral és $E = \{C, X\}$

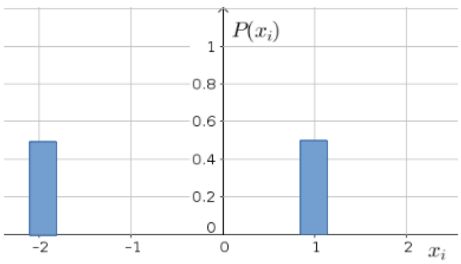
> Es defineix **variable aleatòria** a la llei (o funció) que assigna a cada resultat d'un experiment aleatori un nombre real.

Podríem definir una variable aleatòria de la següent forma; si surt cara guanyes un euro; si surt creu em pagues 2 €

$$\begin{array}{cccc} x: & E & \to & \mathbb{Z} \\ & C & \to & 1 \\ & X & \to & -2 \end{array} \tag{21}$$

En aquest joc (que no és just perquè acabes perdent diners), els valors que pren la variable x són $x_i = \{-2, 1\}$, tots dos amb igual probabilitat. Assignar probabilitats a cada valor de la variable aleatòria es coneix com construir la **distribució de probabilitat**. Aquesta es pot expressar en forma de taula o com una gràfica:

x_i	$P(x_i)$
-2	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$



En l'exemple anterior, els valors de la variable aleatòria són discrets, i per tant, diem que es tracta d'una **distribució de probabilitat discreta**.

Considerem un altre experiment S="elegir a l'atzar una persona d'una classe i mesurar-ne l'altura". La llei que associa a cada alumne la seva altura és una variable aleatòria. Ara be, la variable $x = altura$ pot prendre qualsevol valor dins d'un interval de la recta real i, per tant, l'anomenam **distribució de probabilitat contínua.**

2.1 La distribució normal

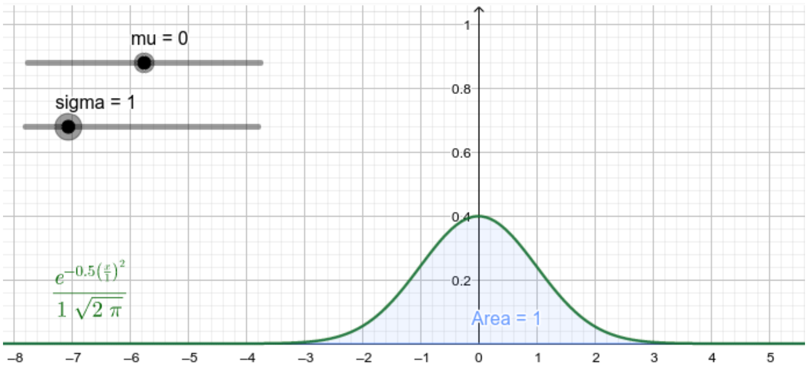
La **distribució normal** és una distribució de probabilitat contínua i s'anomena així perquè apareix en moltíssims fenòmens relacions amb psicologia, pedagogia, biologia... Tot i que no tots els fenòmens es descriuen per una normal, en bon grau s'hi aproximen a ella.

Llavors, "elegir a l'atzar una persona d'una classe i mesurar-ne l'altura" vindrà descrit per una distribució que, en bona d'aproximació, considerarem una distribució normal.

Matemàticament, aquesta distribució es descriu mitjançant una funció $N(x)$ que té forma de campana. Algunes propietats d'aquesta funció són:

- $N(x)$ sempre és positiva.
- $N(x)$ és simètrica respecte del seu màxim.
- L'àrea sota la corba $N(x)$ és igual a 1.

En realitat, no existeix una única funció normal $N(x)$ sinó una família d'elles segons la posició del màxim i la seva amplada. Definim μ (mitjana) com la posició del màxim i σ (desviació típica) al paràmetre que controlarà l'amplada. En la següent simulació podeu modificar aquests dos paràmetres i observar com canvia la corba. Recordeu, però, que l'àrea davall la corba sempre és igual a 1.



Simulació 3: https://www.geogebra.org/m/cwq3hbkd : *Modifica la mitjana i la desviació típica i observa com canvia la corba normal.*

Càlcul de probabilitats

Si ens demanen quina és la probabilitat que en triar un alumne la seva altura sigui exactament $x = 170$ cm, pot semblar una mica estrany però la resposta és zero. Si volem una altura exacta de $x = 170$ cm, hem d'aconseguir que totes les xifres decimals de la mesura siguin igual a zero, cosa que és pràcticament impossible. D'aquí trobam la primera regla:

> En una distribució contínua qualsevol, les probabilitats d'un valor en concret són zero, $P(x = a) = 0$

En realitat, estarem interessats a conèixer probabilitats d'intervals. Per exemple, la probabilitat de que l'altura estigui entre compresa entre 165 i 175 cm. Les probabilitats d'un interval es troben amb la segona regla:

> En una distribució contínua, les probabilitat en un interval $[a, b]$ s'obté de l'àrea davall la funció $N(x)$ en aquell interval.

2.2 Càlcul de probabilitats amb la distribució normal

A l'apartat anterior hem comentat les dues regles per calcular probabilitats:

- $P(x = a) = 0$
- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b N(x)\,dx$

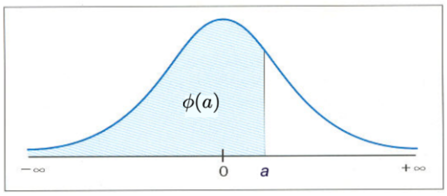
La única dificultat en aquest procès, però, és que és impossible calcular la integral de la corba normal $N(x)$ de forma analítica (no es coneix el resultat de la primitiva). Això ens obliga a seguir un altre camí; primer aprendrem a calcular probabilitats a partir d'una taula de valors i, tot seguit, generalitzarem el procés a una corba normal qualsevol.

La normal estàndard

La **normal estàndard** és aquella corba normal que té mitjana zero ($\mu = 0$) i desviació típica 1 ($\sigma = 1$). Per aquesta normal, existeix una taula que ens proporciona la probabilitat que la variable (que ara anomenarem z) sigui menor que un valor a: $P(z \leq a)$. A partir d'ara escriurem indistintament $P(z \leq a)$ o $P(z < a)$ perquè, com ja s'ha dit, la probabilitat d'un valor en concret és zero.

Per deixar clara la diferència, a les probabilitats que obtinguem a partir de la taula, les anomenarem $\phi(a) = P(z \leq a)$

$\phi(a) = P(z \leq a)$



a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Vegem exemples com s'utilitza aquesta taula

EXERCICI RESOLT 11

Cerca a la taula $P(z \leq 1.6)$ i $P(z \leq 1.97)$

El valor de les unitats i dècimes es cerca a la columna vertical. El valor de les centèsimes a la fila horitzontal. L'element de la matriu és el valor de la probabilitat.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

$P(z \leq 1.6) = 0.9452$ i $P(z \leq 1.97) = 0.9756$.
Pot passar que estiguem interessats amb un valor que no surt a la taula, com ara $P(z \leq 1.975)$. En tal cas s'agafa la mitjana entre $P(z \leq 1.97)$ i $P(z \leq 1.98)$ que sí es troben a la taula.

Per trobar la probabilitat en un interval utilitzarem el fet que les àrees són additives

$$P(a \leq z \leq b) = \phi(b) - \phi(a) \tag{22}$$

Per trobar la probabilitat que $z \geq a$, utilitzam el succés contrari

$$P(z \geq a) = 1 - \phi(a) \tag{23}$$

EXERCICI RESOLT 12

a) Cerca la probabilitat $P(1.6 \leq z \leq 1.97)$
b) Cerca la probabilitat $P(z > 1.6)$

a) A l'exemple anterior havíem trobat $P(z \leq 1.6) = \phi(1.6) = 0.9452$ i $P(z \leq 1.97) = \phi(1.97) = 0.9756$.

$$P(1.6 \leq z \leq 1.97) = \phi(1.97) - \phi(1.6) = 0.9756 - 0.9452 = 0.0304$$

b) $P(z > 1.6) = 1 - P(z < 1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0584$

Finalment, si ens donen un valor de z negatiu, ens adonam que no apareix a la taula. Aquí utilitzam el fet que la corba $N(x)$ és simètrica respecte $x = 0$

$$P(z < -a) = P(z > a) = 1 - P(z < a) \tag{24}$$

EXERCICI RESOLT 13

Cerca la probabilitat $P(z < -1.6)$

$P(z < -1.6) = 1 - P(z < 1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0584$

EXERCICIS PROPOSATS

7. Suposant que la variable aleatòria z segueix una distribució normal estàndard, calcula les següents probabilitats:
a) $P(z < 1,5)$
b) $P(z > 1,25)$
c) $P(1,3 < z > 1,37)$
d) $P(z < -0,75)$
e) $P(z \geq -1,34)$

2.3 Tipificació de la variable

En l'apartat anterior hem après a calcular probabilitats amb la normal estàndard. Tot seguit, aprendrem a calcular probabilitats amb altres corbes normals. Considerem, per tant, una normal $N_{\mu,\,\sigma}(x)$ de mitjana μ i desviació típica σ.

Tipificació de la variable

Passarem de la variable x descrita per la distribució $N_{\mu,\,\sigma}(x)$ a la variable z

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{25}$$

que segueix la normal estàndard $N_{1,\,0}(z)$ de la qual ja sabem calcular probabilitats.

Aquest exemple il·lustra els passos a seguir:

EXERCICI RESOLT 14

L'altura d'un grup d'estudiants x es modela mitjançant una normal de mitjana 165 cm i desviació 10 cm. Calcula la probabilitats:
a) $P(x < 172)$
b) $P(160 < x < 172)$

Passam a tipificar la variable x

$$x = 160 \quad \to \quad z = \frac{160 - 165}{10} = -0.5 \tag{26}$$

$$x = 172 \quad \to \quad z = \frac{172 - 165}{10} = 0.7 \tag{27}$$

Les probabilitats que ens demanen es poden expressar com

a) $P(x < 175) = P(z < 0.7) = \phi(0.7) = 0.7580$

b) $P(160 < x < 172) = P(-0.5 < z < 0.7) = P(z < 0.7) - P(z < -0.5) =$
$P(z < 0.7) - [1 - P(z < 0.5)] = \phi(0.7) + \phi(0.5) - 1 = 0.7580 + 0.6915 - 1 = 0.4495$

Vídeo 8.3: *Càlcul de probabilitats amb la distribució normal*
https://www.youtube.com/watch?v=U-zDFWH9FtQ&t=215s

Càlcul de la variable sabent la probabilitat

Seguim amb l'exemple anterior. Suposau que ara necessitam dividir els alumnes en dos grups de forma que en el primer grup hi hagui el 70% dels alumnes més baixos i a l'altre grup la resta d'alumnes. Per fer-ho, necessitam saber a partir de quina altura x^* direm que l'alumne vagi al segon grup.

Ens estam demanant per a quina x^* queda per davall el 70% de la població $P(x < x^*) = 0,7$

Si tipificam la variable, $z^* = \dfrac{x^* - 165}{10}$, volem cercar el valor de z^* en la taula de la normal estàndard que compleix $P(z < z^*) = 0,7$.

Vegem com fer-ho damunt la taula. Primer cercam la probabilitat que més s'apropi a 0,7 i després quina z li correspon. Si no trobam el valor de probabilitat $0,7$, farem una mitjana dels valors z més propers si és necessari.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

Veim que això passa per a z^* entre 0,52 i 0,53; per tant, pendrem $z^* = 0,525$. Substituint el valor de z^* trobat dins $z^* = \dfrac{x^* - 165}{10}$ i resolent l'equació

$$0,525 = \frac{x^* - 165}{10} \quad \rightarrow \quad \rightarrow x^* = 165 + 10 \cdot 0,525 = 170,25 \text{ cm} \tag{28}$$

Ara ja sabem que els alumnes més baixos que $170,25$ cm han d'anar al primer grup.

EXERCICIS PROPOSATS

8. Per a la normal de mitjana 173 i desviació típica 6, calcula les probabilitats
a) $P(x \leq 173)$
b) $P(x \leq 170)$
c) $P(x \geq 179)$
d) $P(176 \leq x \leq 179)$

9. El pes d'una població segueix una distribució normal de mitjana 70 kg i desviació típica desconeguda. La probabilitat que a l'agafar un individu a l'atzar pesi més de 85 kg és del 10%. Quina és la desviació estàndard de la distribució?

2.4 Problemes PBAU distribució normal

EXERCICI RESOLT 15

JUNY 2017

El test d'intel·ligència (CI) és una prova que en teoria mesura la intel·ligència de l'individu i dona un valor que aproximadament té de mitjana 100. És a dir, el nivell 100 se suposa que és el nivell d'intel·ligència d'una persona normal. Suposem ara que el nivell d'intel·ligència d'una determinada població segueix una distribució normal de mitjana 100 i desviació típica 10.
a) Calculau el percentatge de la població que es considera superdotada. Una persona es considera superdotada si té un nivell d'intel·ligència superior a 130.
b) Calculau el percentatge de la població amb un nivell d'intel·ligència entre 90 i 110.
c) Ens diuen que el 70% de la població té un nivell d'intel·ligència menor que un cert llindar. Calculau aquest llindar.

Sigui X la variable aleatòria que ens dona el nivell d'intel·ligència d'un individu qualsevol de la població.

a) Ens demanen $P(X \geq 130)$. Si tipificam la variable, obtenim:

$$z = \frac{130 - 100}{10} = 3 \tag{29}$$

$$P(X \geq 130) = P(z \geq 3) = 1 - P(z < 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013 \tag{30}$$

on Z és una normal estàndard.
Per tant, el 0.13% de la població és superdotada.

b) Ens demanen $P(90 \leq X \leq 110)$; tipificam la varible:

$$z = \frac{90 - 100}{10} = -1 \quad z = \frac{110 - 100}{10} = 1 \tag{31}$$

$$P(90 < X < 110) = P(-1 \leq z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) =$$
$$P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = 0.8413 - 0.1587 = 0.6827 \tag{32}$$

El percentatge serà: 68.27%.

c) Ens diuen que $P(Z \leq z) = 0.7$, on z és el llindar a calcular. Si cercam a la taula el valor de z pel qual la probabilitat és 0.7, es troba entre 0.52 i 0.53, agafam la mitjana 0.525. Tot seguit necessitam trobar la x. Escrivim la fórmula de la tipificació:
Tenim l'equació $\frac{x - 100}{10} = 0.525$, de la qual és senzill aïllar $x = 105.25$.

EXERCICI RESOLT 16

SETEMBRE 2017

El temps que un alumne pot estar concentrat i escoltar el professor en una classe de Matemàtiques es modela com una distribució normal de mitjana 15 minuts i desviació típica 5 minuts.

a) Calculau la probabilitat que un alumne estigui concentrat més de 20 minuts.

b) Calculau la probabilitat que un alumne estigui concentrat entre 10 i 30 minuts.

c) Ens diuen que la probabilitat que un alumne estigui concentrat més de x minuts val 0.75. Calculau aquest valor de x minuts.

Sigui X la variable aleatòria que ens dona el temps que està concentrat un alumne en una classe de Matemàtiques.

a) Ens demanen $P(X > 20)$. Si tipificam la variable, obtenim:

$$z = \frac{20-15}{5} = 1 \tag{33}$$

Llavors, expressam la probabilitat com

$$P(X > 20) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 \tag{34}$$

on Z és una normal estàndard

b) Ens demanen $P(10 < X < 30)$:

$$z = \frac{10-15}{5} = -1 \tag{35}$$

$$z = \frac{30-15}{5} = 3 \tag{36}$$

$$P(10 < X < 30) = P(-1 < Z < 3) = P(Z < 3) - P(Z < -1) =$$

$$P(Z < 3) - [1 - P(Z < 1)] = 0.9987 - 0.1587 = 0.84 \tag{37}$$

c) Ens diuen que $P(X > x) = 0.75$, o si es vol $P(X < x) = 1 - 0.75 = 0.25$. Cercam a la taula de la normal estàndard per a quin valor de z la probabilitat assoleix 0.25. Trobam un valor aproximat de $z = -0.675$. Tipificam:

$$-0.675 = \frac{x-15}{5} \tag{38}$$

i aïllam el valor de $x = 15 - 5 \cdot 0.675 = 11.627$.

EXERCICI RESOLT 17

JUNY 2018

Considerem la població d'estudiants que han aprovat la selectivitat en la convocatòria de juny un any determinat. Sigui X la variable aleatòria que modela la proporció d'estudiants (tant per u) de la població anterior que escull estudiar un grau d'humanitats. Aquesta variable aleatòria X es modela amb una distribució normal de mitjana 0.35 i desviació típica 0.1. Es demana:
a) Quina és la probabilitat que en un any qualsevol més del 45% dels estudiants de la població considerada estudiïn un grau d'humanitats? b) En els darrers 10 anys, en quants anys el percentatge d'estudiants de la població considerada que han escollit estudiar un grau d'humanitats no ha superat el 30%?

a) Demana calcular $P(X > 0.45)$. Tipificam

$$z = \frac{0.45 - 0.35}{0.1} = 1 \tag{39}$$

Expressam la probabilitat com

$$P(X > 0.45) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 \tag{40}$$

b) Ens demanen $P(X < 0.3)$. Tipificam

$$z = \frac{0.3 - 0.35}{0.1} = -0.5 \tag{41}$$

Expressam la probabilitat com

$$P(X < 0.3) = P(Z < -0.5) = 1 - P(Z < 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085 \tag{42}$$

o el 30.85% dels casos. En deu anys, tindrem 30.85% de $10 = 3.085$ anys. La resposta és en 3 anys es dóna la condició que la matrícula no ha superat el 30%.

EXERCICI RESOLT 18

JULIOL 2018

El nombre de passes que fa el professor *Jaimito* durant una hora de classe es modela amb una distribució normal de mitjana 100 passes i desviació típica 20.5 passes.
a) Calculau la probabilitat que el professor faci més de 125 passes durant una classe.
b) Ens diuen que en el 45% de les classes que fa el professor aquest fa menys de x passes. Trobau aquest valor x.

Sigui X la variable aleatòria que ens dóna el nombre de passes que fa el professor durant una hora de classe. Ens diuen que $X: N(\mu = 100, \sigma = 20.5)$. Ens demanen:

a) $P(X > 125) = P(Z > 1.22) = 0.1112$, on Z representa la distribució normal estàndard.

b) Sabem $P(X < x) = 0.45$. Cercam a la taula de la normal estàndard per a quin valor de z la probabilitat assoleix 0.45. Donat que no el trobam, cercarem $1 - 0.45 = 0.55$ i sabem que z serà negativa. Trobam un valor aproximat de $z = -0.125$. Tipificam:

$$-0.125 = \frac{x - 100}{20.5} \tag{43}$$

i aïllam el valor de $x = 100 - 20.5 \cdot 0.125 = 97.44$ passes.

3. La distribució binomial

PBAU

Tota la secció de la binomial es deixa com a material d'ampliació.

La distribució binomial és una distribució **discreta**, és a dir, la variable aleatòria pren valors enters. La distribució binomial s'aplica a una **experiència dicotòmiques** repetida n vegades. Vegem que significa això.

Experiència dicotòmica

Si d'una experiència només ens fixam si ocorre un succés A o que no ocorre A'; es tracta d'una experiència dicotòmica (només passen dues coses).

Direm **èxit** que passi el succés A i **fracàs** que no passi. Anomenarem p la probabilitat d'èxit i $q = 1 - p$ la probabilitat de fracàs.

Alguns exemples de variables dicotòmiques són

- Llançar una moneda i mirar si surt C:

èxit $\rightarrow$ cara, $p = 0.5$; fracàs $\rightarrow$ creu, $q = 0.5$.

- Llançar un dau i mirar si surt un sis:

  èxit $\rightarrow$ sortir un sis, $p = \frac{1}{6}$; fracàs $\rightarrow$ diferent a sis, $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

- Treure una carta i mirar si és un rei:

  èxit $\rightarrow$ sortir rei, $p = \frac{4}{40}$; fracàs $\rightarrow$ diferent a rei, $q = 1 - \frac{4}{40} = \frac{36}{40}$.

Distribució binomial

Una variable aleatòria discreta x que pren els valors $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ segueix una distribució normal si

1. està associada a una experiència dicotòmica i x és el nombre d'èxits en les n repeticions
2. l'experiència dicotòmica es repeteix n vegades
3. les repeticions són independents

Alguns exemples de variables que segueixen una distribució binomial es donen a continuació

- Llançar una moneda 5 vegades i comptar quantes cares surten:

  poden sortir $x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ cares

  èxit=Treure cara, $N = 5$ repeticions, $p = 0.5$, $q = 0.5$.

- Llançar un dau 2 vegades i mirar quants sis surten:

  poden sortir $x = \{0, 1, 2\}$ sis

  èxit=Treure sis, $N = 2$ repeticions, $p = 1/6$, $q = 5/6$.

- Treure tres carta i mirar el número de reis:

  poden sortir $x = \{0, 1, 2, 3\}$ reis

  èxit=Treure rei, $N = 3$ repeticions, $p = 1/10$, $q = 9/10$.

3.1 Probabilitats amb la binomial

En aquesta secció aprendrem a calcular probabilitats amb la distribució binomial, però, primer necessitam introduir una sèrie de conceptes.

Factorial d'un nombre

El factorial d'un nombre n positiu o zero l'escrivim com $n!$ és el producte d'ell amb tots els nombres menors a ell. Per definició $0! = 1$ i $1! = 1$. Alguns exemples són:

- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

Nombres combinatoris

El nombre combinatori $C(n,k)$ o també escrit com $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ és el nombre de maneres que es poden k èxits en repetir un experiment n vegades.

Per exemple, de quantes maneres podem treure 2 cares en llançar una moneda 3 vegades?

Escrivim els casos: CCX, CXC, XCC. Hi ha 3 maneres.

De quantes maneres podem treure 2 sis en llançar un dau 4 vegades?

Escrivim els casos: SSXX, SXSX, SXXS, XXSS, XSXS, XSSX. Hi ha 6 maneres.

En general, els nombres combinatoris ens donen la resposta més ràpidament. Aquesta és la definició:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{44}$$

Comprovem que obtenim els mateixos resultats a partir d'aquesta fórmula

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$

Com veus, és més ràpid aplicar la fórmula que no pas fer el recompte de tots els casos. De quantes maneres podem treure 4 reis extraient 10 cartes d'una baralla amb reemplaçament? Fàcil

$\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$ formes diferents.

> Amb la calculadora pots emprar la tecla **nCr** per calcular directament el combinatori. En l'exemple anterior escrivim **10 nCr 4 =** i trobam **210**.

Càlcul de probabilitats amb la binomial

Si x és una variable que segueix una binomial, amb probabilitat d'èxit p i n repeticions, la probabilitat d'obtenir k èxits és

$$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \tag{45}$$

EXERCICI RESOLT 19

Calculeu les següents probabilitats:
a) Probabilitat de treure 2 cares en llançar una moneda 3 vegades.
b) Probabilitat de treure 2 sis en llançar un dau 4 vegades.
c) Probabilitat de treure 4 reis en extreure 10 cartes amb reemplaçament.

a) Tenim que $n = 3$, $p = q = 0,5$, $P(x=2) = \binom{3}{2} 0,5^2 \cdot 0,5^{3-2} = 0,375$

b) Tenim que $n = 4$, $p = 1/6$, $q = 5/6$, $P(x=2) = \binom{4}{2} (1/6)^2 \cdot (5/6)^{4-2} = 6 \cdot (1/6)^2 \cdot (5/6)^2 = 0,1157$

c) Tenim que $n = 10$, $p = 1/10$, $q = 9/10$, $P(x=4) = \binom{10}{4} 0,1^4 \cdot 0,9^{10-4} = 210 \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^6 = 0,01116$

EXERCICI RESOLT 20

Segons les estadístiques, el 18% de les dones espanyoles són fumadores. Si ens trobam a 7 dones pel carrer, calcula:
a) La probabilitat que cap d'elles sigui fumadora.
b) La probabilitat que una sigui fumadora.
c) La probabilitat que dues siguin fumadores.
d) La probabilitat que més de dues siguin fumadores.

Ens trobam davant una experiència dicotòmica F fumadora (èxit) i F' no fumadora (fracàs). La probabilitat d'èxit la dóna l'enunciat $p = 0,18$ i, per tant, $q = 1 - 0,18 = 0,82$. L'experiment es repeteix $n = 7$ vegades. LLavors, $x =$ n. de dones fumadores, segueix una distribució binomial.

a) $P(x = 0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} 0,18^0 \cdot 0,82^7 = 1 \cdot 0,82^7 = 0,2493$

b) $P(x = 1) = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} 0,18^1 \cdot 0,82^6 = 7 \cdot 0,18 \cdot 0,82^6 = 0,38305$

c) $P(x = 2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} 0,18^2 \cdot 0,82^5 = 21 \cdot 0,18^2 \cdot 0,82^5 = 0,25225$

d) Que hi hagi més de dues fumadores s'obté de $P(x > 2) = P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6) + P(x = 7)$. Ara bé, serà més fàcil cercar el succés contrari $P(x \ > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - (P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)) = 1 - (0,2493 + 0,38305 + 0,25225) = 0,1154$

EXERCICIS PROPOSATS

10. En una distribució binomial amb paràmetres $p = 0,4$, $n = 10$, calcular: $P(x = 0)$, $P(x = 3)$ i $P(x = 9)$

11. Tiram un dau 5 vegades. Calculau la probabilitat de treure 2 sis, 3 sis i 5 sis.