lloc: **Institut d'Ensenyaments a Distància de les Illes Balears**
Curs: **Matemàtiques II (BAT_MAT2)**
Glossari: **Formulari del curs BAT_MAT2**

LLIURAMENT1

Condició d'existència de la inversa

Una matriu té inversa (o regular o invertible) si i només si el seu determinant diferent de zero $|A| \neq 0$.

Definició de l'adjunt d'un element

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$$

Determinant 2x2

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

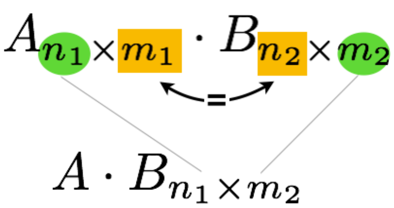
Determinant 3x3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

Determinant d'un producte

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Dimensions del producte de matrius



Condició per poder multiplicar dues matrius

Matriu identitat

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriu inversa

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Matriu inversa per determinants

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A^t$$

Matriu transposada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Producte de matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 47 & 20 \end{pmatrix}$$

Procediment per calcular el producte de dues matrius

LLIURAMENT2

Rang

El rang d'una matriu qualsevol és l'ordre major de tots els menors no nuls

Regla de Cramer

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, y = \frac{|A_y|}{|A|}, z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

Sistema homogeni

Un sistema d'equacions lineals es diu que és **homogeni** quan el terme independent de totes les equacions és igual a zero

Teorema de Rouché

$$rangA = rangA^* \quad \leftrightarrow \quad \text{Sistema compatible}$$

LLIURAMENT3

Base canònica

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Combinació lineal dels vectors u, v

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \lambda u_3 + \mu v_3)$

Components d'un vector fix

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (B_1 - A_1, B_2 - A_2, B_3 - A_3)$$

Condició de 3 vectors dependents o coplanaris

$det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Condició de vectors perpendiculars o ortogonals

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars ⇔ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Condició vectors dependents o paral·lels

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = \lambda$$

Definició de base

Les bases de l'espai estan formades per 3 vectors linealment independents. A més, qualsevol altre vector es pot escriure com a combinació lineal dels vectors de la base.

Definició de producte escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|cos\alpha$$

Diferència de vectors

$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$

Equació contínua de la recta

$$\frac{x - P_1}{d_1} = \frac{y - P_2}{d_2} = \frac{z - P_3}{d_3}$$

Equació general del pla. Vector normal n=(A, B, C)

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Equació vectorial de la recta

$$(x, y, z) = (P_1, P_2, P_3) + t\,(d_1, d_2, d_3)$$

Equació vectorial del pla

$$(x, y, z) = (P_1, P_2, P_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

Equacions general de la recta

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned}\right\}$$

Equacions paramètriques de la recta

$$\begin{cases} x = P_1 + t\,d_1 \\ y = P_2 + t\,d_2 \\ z = P_3 + t\,d_3 \end{cases}$$

Mòdul d'un vector

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Mòdul del producte vectorial

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\alpha$$

Producte d'un vector per un escalar

$\lambda\,(u_1, u_2, u_3) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$

Producte escalar en components

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Producte mixt

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Producte vectorial en components

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Suma de vectors

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

Vector oposat

$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$

LLIURAMENT4

Angle entre dos plans

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \, |\vec{n}_2|}$$

Angle entre dues rectes

$$\cos \alpha = \frac{\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s}{|\vec{d}_r| \, |\vec{d}_s|}$$

Angle entre una recta i un pla \alpha=90-\beta

$$\cos \beta = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \, |\vec{n}|}$$

Distància entre dos punts

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Distància entre dues rectes paral·leles

$$r//s \quad d(r,s) = d(R,s) = \frac{|\overrightarrow{RS} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|}$$

Distància entre dues rectes que es creuen.

$$\text{Si r i s es creuen} \quad d(r,s) = \frac{|det(\overrightarrow{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s)|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

Distància entre el punt P i la recta r

$$d(P,r) = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{RP}|}{|\vec{d}|}$$

Distància entre un punt i un pla.

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Punt mitjà d'un segment d'extrems P, P'

$$M = \frac{P + P'}{2} = \left(\frac{P_1 + P_1'}{2}, \frac{P_2 + P_2'}{2}, \frac{P_3 + P_3'}{2}\right)$$

Punt simètric de P respecte el punt M

$$P' = 2M - P$$

LLIURAMENT5.1

Deriva d'un producte

Per derivar un producte de dues funcions, es deriva la primera funció per la segona sense derivar més la primera per la derivada de la segona funció.

$$y = f(x) \cdot g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Deriva d'una constant per una funció

$$y = k\, f(x) \quad \rightarrow \quad y' = k\, f'(x)$$

Derivada d'un quocient

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Derivada d'una suma o una diferència

$$y = f(x) \pm g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) \pm g'(x)$$

Equació de la recta tangent

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Punts crítics

Les solucions de l'equació $f'(x) = 0$ s'anomenen **punts crítics** i són possibles màxims o mínims.

Simetries d'una funció

Si $f(-x) = f(x)$ té simetria parell
Si $f(-x) = -f(x)$ té simetria senar

LLIURAMENT5.2

Condició de derivabilitat

Direm que una funció és derivable en $x = a$ si les dues derivades laterals coincideixen:

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

Definició de derivada en un punt

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Derivades laterals

Derivada per l'esquerra

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada per la dreta

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Relació continuïtat-derivabilitat

Si una funció és derivable en un punt, necessàriament és contínua.

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ és una funció contínua a l'interval tancat $[a, b]$ i el signe $f(a) \neq$ signe $f(b)$, aleshores existeix almenys un $c \in (a, b)$ tal $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

TEOREMA DE ROLE

Si $f(x)$ és una funció contínua a l'interval **tancat** $[a, b]$ i derivable en l'interval (a, b) i $f(a) = f(b)$, aleshores existeix almenys un $c \in (a, b)$ tal $f'(c) = 0$.

LLIURAMENT6

Constant d'integració

Si $F(x)$ és una primitiva de la funció $f(x)$, $F(x) + C$, on C és una constant, també ho és.

Definició de primitiva o integral indefinida

$F(x)$ és una **primitiva** (o integral indefinida) d'una funció $f(x)$ si

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \textit{perquè} \quad F'(x) = f(x)$$

Fórmula d'integració per parts

$$\int u \cdot dv = v \cdot u - \int v \cdot du$$

on hem expressat $du = u'\,dx$ i $dv = v'\,dx$

Funció àrea

Consideram la nova funció $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ per a $x \in [a, b]$, que és l'àrea davall f entre a i x.

Propietats de la integral definida.

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Si $a < c < b$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Si $f(x)$ és una funció parell, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- Si $f(x)$ és una funció senar, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Regla de Barrow

Si $F(x)$ és una primitiva qualsevol de la funció $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Teorema fonamental del càlcul

Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a, b]$, aleshores la funció

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$, per a $x \in [a, b]$ és derivable i, a més, compleix $F'(x) = f(x)$.

LLIURAMENT7

Definició de probabilitat

La **probabilitat** és una mesura de quant freqüent és un succés . Es quantifica amb un nombre que com a mínim val 0 (**succés impossible**) i com a màxim 1 (**succés segur**).

$$P(\varnothing) = 0 \qquad P(E) = 1$$

Espai mostral

Anomenam **Espai Mostral** E al conjunt de tots els possibles resultats d'una experiència aleatòria

Lleis de DeMorgan

Les lleis de DeMorgan relacionen el complementari de la unió i la intersecció. Són dues:

$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$

$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$

Probabilitat de dos successos independents

Si A i B són independents es compleix que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Probabilitat de la unió

Segons l'axiomàtica de la probabilitat

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Regla de Laplace

$$P\left(S\right) = \frac{\text{Nombre de casos favorables a S}}{\text{Nombre de casos totals}}$$

Succés

Anomenam **Succés** a qualsevol subconjunt de l'espai mostral; per exemple: treure un número major que 3 al dau $\{4, 5, 6\}$ és un exemple de succés.

Succés contrari

Si $\overline{S}$ i S són **successos contraris** , es compleix que $P(\overline{S}) = 1 - P(S)$.

Succés elemental

Anomenam **Succés elemental** a cadascun dels elements de l'espai mostral; per exemple: treure un 3 al dau $\{3\}$ és un succés elemental.

Teorema de Bayes

Si I és un succés d'inici de l'arbre i F un succés del final:

$$P(I|F) = \frac{P(I) \cdot P(F|I)}{P(I_1) \cdot P(F|I_1) + \cdots + P(I_n) \cdot P(F|I_n)}$$

LLIURAMENT8

Càlcul de probabilitat a partir d'una distribució contínua

- $P(x = a) = 0$
- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b N(x)\, dx$

Concepte de variable aleatòria

Es defineix **variable aleatòria** a la llei (o funció) que assigna a cada resultat d'un experiment aleatori un nombre real.

Tipificar la variable

Passarem de la variable x descrita per la distribució $N_{\mu,\, \sigma}(x)$ a la variable z

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

que segueix la normal estàndard $N_{1,\, 0}(z)$ de la qual ja sabem calcular probabilitats.