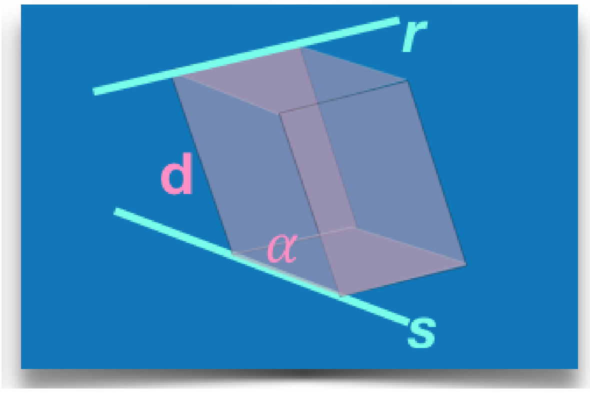
https://iedib.net/

Matemàtiques II

Lliurament 4: Geometria a l'espai: Distàncies i angles



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Edició LaTeX: ® Josep Mulet
Versió: 19-11-2020

Índex

1. Resum del lliurament

Nota: Per diferenciar entre els símbols de valor absolut d'un nombre i mòdul d'un vector, empram la següent notació $vabs(nombre)$ i $|vector|$.

Les distàncies, àrees i volums SEMPRE SÓN POSITIVES!

Distàncies

Taula 1:

Fórmula	Mètode constructiu
Entre dos punts P i Q	
$d(P,Q)=\sqrt{(Q_x-P_x)^2+(Q_y-P_y)^2+(Q_z-P_z)^2}$	• Caculam el vector $\vec{PQ}=Q-P$ • Caculam el seu mòdul $d(Q,P)=\lvert\vec{PQ}\rvert$
Entre un punt P i un pla $\pi: Ax+By+Cz+D=0$	

<table>
<tr><td>$d(P,\pi) = \dfrac{vabs(A \cdot P_x + B \cdot P_y + C \cdot P_z + D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$</td><td>• Caculam la recta r perpendicular a π que passa per P.
• Caculam el punt de tall Q de la recta r amb el pla π.
• Caculam la distància entre els punts P i Q.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entre un punt P i una recta r definida per el punt R i el vector director $\vec{d}$</td></tr>
<tr><td>$d(P,\pi) = \dfrac{\lvert\vec{RP} \times \vec{d}\rvert}{\lvert\vec{d}\rvert}$</td><td>• Caculam el pla π perpendicular a r que passa per P.
• Caculam el punt de tall Q de la recta r amb el pla π.
• Caculam la distància entre els punts P i Q.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entre la recta r i la recta s (si són paral·leles)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Es redueix al cas anterior, basta agafar com punt P un punt qualsevol S de la recta s.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entre la recta r i la recta s (si es creuen a l'espai)</td></tr>
<tr><td>$d(r,s) = \dfrac{vabs(det(\vec{RS}, \vec{d_r}, \vec{d_s}\rvert))}{\lvert\vec{d_r} \times \vec{d_s}\rvert}$</td><td>• Caculam el pla π que és paral·lel a la recta s i que conté la recta r.
• Caculam la distància d'un punt qualsevol de la recta r al pla anterior.</td></tr>
</table>

Angles

Taula 2:

Cas	Fórmula
Entre dues rectes r i s	$\alpha = \arccos \dfrac{vabs(\vec{d_r} \cdot \vec{d_s})}{\lvert\vec{d_r}\rvert\lvert\vec{d_s}\rvert}$
Entre dos plans π i σ	$\alpha = \arccos \dfrac{vabs(\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\sigma)}{\lvert\vec{n}_\pi\rvert\lvert\vec{n}_\sigma\rvert}$
Entre una recta r i un pla π	$\alpha = 90° - \arccos \dfrac{vabs(\vec{d_r} \cdot \vec{n}_\pi)}{\lvert\vec{d_r}\rvert\lvert\vec{n}_\pi\rvert}$

2. Angles entre rectes i plans

En el lliurament anterior varem veure les equacions de rectes i plans, i de la forma en què poden estar col·locats aquests objectes. Tots aquests aspectes –paral·lelisme, talls i incidència– són propietats *afins*. Aquest tema tractarà sobre relacions on hi intervenen mesures –angles, distàncies, àrees i volums– el que es coneixen com propietats *mètriques*.

Per a les mesures d'angles utilitzarem la fórmula que vàrem deduir del producte escalar de dos vectors

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} \tag{1}$$

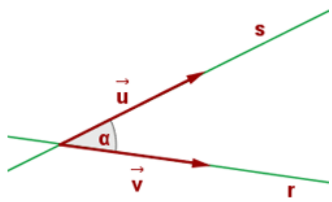
que ens donarà l'angle menor que formen els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Per caracteritzar una recta prendrem el seu vector director $\vec{d}$ i per descriure un pla treballarem amb el seu vector normal $\vec{n}$.

Angle entre dues rectes

Necessitam saber els vectors directors de cada recta $\vec{d_r}$ i $\vec{d_s}$

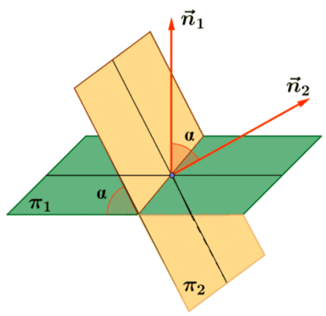
$$\cos\alpha = \frac{\vec{d_r}\cdot\vec{d_s}}{|\vec{d_r}|\,|\vec{d_s}|} \tag{2}$$



Angle entre dos plans

Necessitam saber els vectors normals de cada pla $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$. Recorda que si tenim l'equació general d'un pla $Ax + By + Cz + D = 0$, el vector normal s'obté dels coeficients $\vec{n} = (A, B, C)$

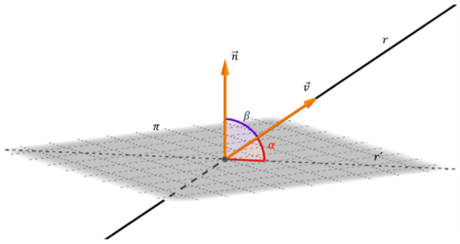
$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} \tag{3}$$



Angle entre un pla i una recta

Si el vector director de la recta és $\vec{d}$ i el vector normal del pla és $\vec{n}$, l'angle entre el pla i recta és

$$\cos\beta = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} \tag{4}$$



De l'angle que obtenim de l'arccosinus, necessitam fer-ne el complementari $\alpha = 90 - \beta$.

Vídeo 4.1: *Angle entre un pla i una recta*
https://www.youtube.com/watch?v=vqWlwRU154k

EXERCICI RESOLT 1

Troba l'angle determinat per les rectes $r: \left.\begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right\}$ i $s:$ $\dfrac{x+3}{5} = y-1 = \dfrac{z+2}{-1}$.

De les equacions deduïm fàcilment que els vectors directors de r i s són, respectivament: $\vec{u} = (-1,3,2)$ i $\vec{v} = (5,1,-1)$. Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2+3^2+2^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{v}| = \sqrt{5^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{27} \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = (-1,3,2)\cdot(5,1,-1) = -5+3-2 = -4 \\ \quad \Rightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}| = |-4| = 4 \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \frac{4}{\sqrt{378}}$$

d'aquí $\alpha(r,s) = \arccos\left(\dfrac{4}{\sqrt{378}}\right) = 78^\circ$

EXERCICI RESOLT 2

Quin angle forma la recta $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-1}{-1}$ i el pla $\pi:\ 2x-5y+7z-11=0$?

El vector director de la recta $\vec{d} = (2,5,-1)$ i el normal del pla $\vec{n} = (2,-5,7)$.

El seu producte escalar: $\vec{d}\cdot\vec{n} = -28$

Els seus mòduls $|\vec{d}| = \sqrt{30}$ i $|\vec{n}| = \sqrt{78}$

$$\cos\beta = \frac{|-28|}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{78}} = 0,5788 \tag{6}$$

d'aquí $\beta = \arccos 0,5788 = 55^\circ$. L'angle real és $\alpha = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$

3. Distància entre dos punts

La distància entre dos punts A i B en l'espai és el mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2} \tag{7}$$

EXERCICI RESOLT 3

Calcula la distància del punt $A = (2,1,-1)$ al punt $B = (-1,-2,2)$.

Trobem el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1-2, -2-1, 2-(-1)) = (-3,-3,3) \tag{8}$$

I finalment el seu mòdul

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \tag{9}$$

EXERCICI RESOLT 4

Determina les coordenades dels punts que equidisten dels punts $A(2,1,-1)$ i $B(-1,-2,2)$. *Equidisten = trobar-se a igual distància.*

Anomenam els punts de la forma $P = (x,y,z)$. Hem d'imposar que $d(A,P) = d(B,P)$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2} \tag{10}$$

Elevem al quadrat, operem i simplificam, amb el que obtenim $6x + 6y - 6z + 1 = 0$.

La solució és l'equació d'un pla. S'anomena el pla mediatriu d'un segment i és el lloc geomètric dels punts que equidisten de dos punts donats.

EXERCICI RESOLT 5

Calcula un punt R de la recta $\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ que equidisti dels punts $A = (1,0,-1)$ i $B = (2,1,1)$.

Un punt genèric de la recta r s'obté de passar l'equació a forma vectorial:

$$R = (x,y,z) = (5+t, -1+t, -2-2t) \tag{11}$$

Imposam que $d(R,A) = d(R,B)$

$$\sqrt{(5+t-1)^2 + (-1+t-0)^2 + (-2-2t+1)^2} = \sqrt{(5+t-2)^2 + (-1+t+1)^2 + (-2-2t-1)^2} \tag{12}$$

Elevem al quadrat, operem i simplificam, amb el que obtenim $4t + 4 = 0 \Rightarrow t = -1$

Per tant, el punt de la recta és $R = (4,-2,0)$.

4. Distància entre un punt i una recta

La distància d'un punt P a una recta r es defineix com la menor de les distàncies $d(P, R)$ essent R un punt qualssevol de la recta r.

Existeixen diferents mètodes per calcular la distància:

- **Mètode constructiu**

  La distància d'un punt P a una recta r és la distància del punt P a la seva projecció ortogonal (M) sobre aquesta recta.

  1. Utilitzam el mateix mètode que pel punt simètric respecte d'una recta. Trobem la projecció del punt sobre la recta, el punt M.

     Per això tenim dues possibilitats

     a) Determinem el pla π perpendicular a r que conté a P.

     b) Obtenim el punt M, intersecció de π i r.

     o be

     a) Plantejam els punts $M = (x, y, z)$ que pertanyen a r

     b) Exigim que el vector $\overrightarrow{PM}$ sigui perpendicular al vector director de la recta $\vec{d}$, és a dir, el seu producte escalar ha de ser nul $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{d} = 0$.
  2. Calculem la distància de P a M, el mòdul del vector $d(P, r) = |\overrightarrow{PM}|$.

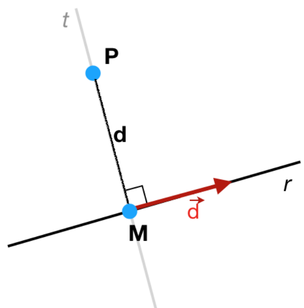


Figura 1: Distància punt-recta amb el mètode constructiu

- **Mètode del producte vectorial**

  La segona opció és aprofitar el que sabem de vectors. Aquest mètode ens allibera d'haver de calcular el punt M.

De l'equació de la recta podem obtenir un punt d'aquesta, R, i el seu vector director, $\vec{d}$.

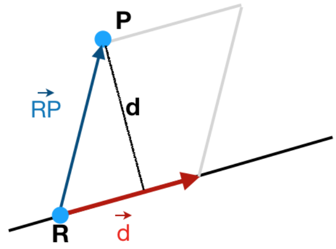


Figura 2: Distància entre punt-recta amb el producte vectorial.

De la figura, deduïm que la distancia d és l'altura del paral·lelogram format pels vectors $\vec{d}$ i $\overrightarrow{RP}$. La fórmula de l'àrea d'un paral·lelogram és $A = base \cdot h$, de la qual podem aïllar l'altura $h = \dfrac{A}{base}$. Recordem que l'àrea del paral·lelogram és igual el mòdul del producte vectorial format pels dos vectors. Trobam una fórmula compacta per calcular la distància:

$$d(P,r) = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{RP}|}{|\vec{d}|} \tag{13}$$

Vídeo 4.2: *Distància d'un punt a una recta*
https://www.youtube.com/watch?v=BAAzxvZp24k

EXERCICI RESOLT 6

Calcula la distància del punt $P = (0,1,3)$ a la recta $r: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Passam la recta r a forma paramètrica. Anomenant $z = t$, de la segona equació $y = -t$. Ho introduïm a la primera $x = 1 + 2y = 1 - 2t$

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \tag{14}$$

D'aquí podem extreure un punt $R(1,0,0)$ i un vector director $\vec{d}(-2,-1,1)$. Es construïm el vector $\overrightarrow{RP} = (-1,1,3)$ i calculam el producte vectorial $\vec{d} \times \overrightarrow{RP} = (-4,5,-3)$.

Tot seguit calculam els mòduls $|\vec{d} \times \overrightarrow{RP}| = \sqrt{50}$ i $|\vec{d}| = \sqrt{6}$. Finalment, la distància entre el punt i la recta és

$$d(P,r) = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} \approx 2,89 \tag{15}$$

Exercici Resolt 7

Calcula la distància del punt $P = (0,1,3)$ a la recta $r : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Utilitza el mètode constructiu cercant el punt M de la projecció ortogonal.

Passam la recta r a forma paramètrica (vegeu exemple anterior):

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \tag{16}$$

D'aquí podem extreure un punt $R(1,0,0)$ i un vector director $\vec{d}(-2,-1,1)$.

Cercam el pla que és perpendicular a r i passa per $P \Rightarrow -2x - y + z + D = 0$. Si substituïm el punt P, trobam que $D = -2$.

Cercam el punt de tall de la recta amb el pla. Per això substituïm les paramètriques de la recta dins l'equació del pla

$$-2(1-2t) - (-t) + t - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3} \tag{17}$$

El punt de la projecció s'obté de substituir t dins la recta $M = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

Finalment la distància entre els dos punts és

$$d(P,r) = d(P,M) = \sqrt{(-\tfrac{1}{3})^2 + (-\tfrac{2}{3} - 1)^2 + (\tfrac{2}{3} - 3)^2} = \sqrt{\frac{25}{3}} \approx 2,89 \tag{18}$$

5. Distància entre un punt i un pla

La distància d'un punt P a un pla π es defineix com la menor de les distàncies $d(P,Q)$ essent Q un punt del pla.

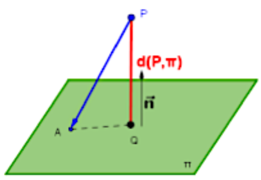


Figura 3: Distància entre un punt i un pla

Tenim dues formes per calcular la distància

1. La distància d'un punt P a un pla és la distància del punt P a la seva projecció ortogonal sobre dit pla.

- Trobam la recta r que passa per P i que és perpendicular a π
- Trobam el punt M com la intersecció de la recta amb el pla
- Cercam $d(P, M)$

2. Podem estalviar-nos el procés de calcular M perquè existeix una fórmula comodíssima per trobar la distància d'un punt a un pla

Si el punt és $P(x_0, y_0, x_0)$ i el pla té equació $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{19}$$

Important: Per utilitzar aquesta fórmula, l'equació general del pla ha d'estar igualada a zero. Si estau interessats podeu trobar una demostració d'aquesta fórmula en aquest enllaç [https://www.youtube.com/watch?v=hGOLyaxw-ic].

EXERCICI RESOLT 8

Calcula la distància del punt $P = (0, 1, 3)$ al pla $\pi: \ x - y - 2z + 3 = 0$.

Facem el càlcul ràpidament amb la fórmula

$$d(P, \pi) = \frac{|0 - 1 - 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \approx 1,63 \tag{20}$$

Vídeo 4.3: *Distància d'un punt a un pla. Mètode constructiu*
https://www.youtube.com/watch?v=SDuVwDHWcnA

EXERCICI RESOLT 9

Calcula la distància del punt $P=(0,1,3)$ al pla $\pi:\ x-y-2z+3=0$. Utilitza el mètode constructiu cercant el peu de la projecció M.

El pla té vector normal $\vec{n}=(1,-1,-2)$. Calculam la recta que té aquest vector director i passa per P

$$r:\ \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=3-2t \end{cases} \tag{21}$$

Cercam la intersecció de r amb π

$$t-(1-t)-2(3-2t)+3=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{2}{3} \tag{22}$$

El punt M es troba de substituir t dins les equacions paramètriques de la recta $M=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$.

Finalment la distància entre el punt i el pla

$$d(P,\pi)=d(P,M)= \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2+(\tfrac{1}{3}-1)^2+(\tfrac{5}{3}-3)^2}=\sqrt{\frac{8}{3}}\approx 1,63 \tag{23}$$

6. Distància entre dos plans

Donats dos plans π i σ, es poden donar els següents casos:

- Si els plans són coincidents o secants: la distància és zero.
- Si els plans són paral·lels: la distància entre ells serà la distància entre un punt qualsevol d'un dels plans a l'altre pla. Utilitzarem la fórmula de l'apartat anterior.

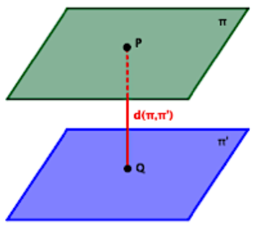


Figura 4: Distància entre dos plans

EXERCICI RESOLT 10

Calcula la distància entre els plans $\pi: \; x - y - 2z + 3 = 0$ i $\sigma: \; -3x + 3y + 6z - 1 = 0$.

En primer lloc comprovam que els dos plans són paral·lels. El vectors normals de cada pla $\vec{n}_\pi(1, -1, -2)$ i $\vec{n}_\sigma(-3, 3, 6)$ són proporcionals, i aleshores, paral·lels.

Prenem un punt qualsevol del pla π, per exemple $Q = (0, 3, 0)$ i cercam la distància d'aquest punt a l'altre pla:

$$d(\pi, \sigma) = d(Q, \sigma) = \frac{|0 + 3 \cdot 3 + 0 - 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{8}{\sqrt{54}} \approx 1,09 \tag{24}$$

7. Distància entre una recta i un pla

Donada una recta r i un pla π, es poden presentar els següents casos:

- Si la recta i el pla tenen algun punt en comú: la distància és zero.
- Si la recta i el pla són paral·lels: la distància entre ells serà la distància entre un punt qualsevol de la recta i el pla.

  Recorda: La condició que una recta sigui paral·lela a un pla és $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$

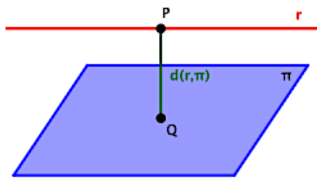


Figura 5: Distància entre una recta i un pla

EXERCICI RESOLT 11

Calcula la distància entre la recta $r: \; \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$ i el pla $\pi: \; 2x + y - z + 3 = 0$.

El vector normal del pla $\vec{n}_\pi(2, 1, -1)$ i el director de la recta $\vec{d}(1, -1, 3)$ compleixen $(2, 1, -1) \cdot (1, -1, 3) = -2 \neq 0$, i aleshores, la recta i el pla són secants. La distància és $d(r, \pi) = 0$.

EXERCICI RESOLT 12

Calcula la distància entre la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{3}$ i el pla $\pi: \ 2x + y - z + 3 = 0$.

El vector normal del pla $\vec{n}_\pi(2,1,-1)$ i el director de la recta $\vec{d}(1,1,3)$ compleixen $(2,1,-1)\cdot(1,1,3) = 0$, i aleshores, la recta i el pla són paral·lels.

Cercam un punt de la recta $R = (1,-2,0)$ i cercam la distància d'aquest punt al pla

$$d(r,\pi) = d(R,\pi) = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \approx 1,22 \tag{25}$$

8. Distància entre dues rectes

La distància entre dues rectes r i s es defineix com la menor de les distàncies $d(R,S)$, essent R i S un punt de cada recta.

Donades dues rectes r i s, es poden presentar els següents casos:

- Si les rectes són **coincidents o secants**: la distància és zero.
- Si les rectes **són paral·leles**: la distància entre elles serà la distància d'un punt de qualsevol de les rectes a l'altra recta.
- Si les rectes **es creuen**: la distància entre elles serà la distància d'una d'elles al pla paral·lel a ella que conté a l'altra recta.

Com veim, és important fer una anàlisi de les posicions relatives de les rectes abans de calcular la distància entre elles. Recordem que aquest estudi pot realitzar-se analitzant els vectors directors i els punts d'ambdues rectes.

Donades dues rectes r i s, siguin els punts R i S, i siguin, a més, $\vec{d_r}$ un vector director de r i $\vec{d_s}$ un vector director de s. Llavors, trobant el vector $\overrightarrow{RS}$:

- Si $det(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}) \neq 0$ les rectes r i s **es creuen**
- Si $det(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}) = 0$ i $\vec{d_r}, \vec{d_s}$ independents les rectes r i s **es tallen**
- Si $\vec{d_r}, \vec{d_s}$ dependents i $R \notin s$ les rectes r i s són **paral·leles**
- Si $\vec{d_r}, \vec{d_s}$ dependents i $R \in s$ les rectes r i s són **coincidents**

Llavors, una vegada que hem comprovat les posicions relatives de les rectes, procedim segons l'explicat:

Si les rectes són paral·leles trobem la distància amb la fórmula *Punt-Recta*

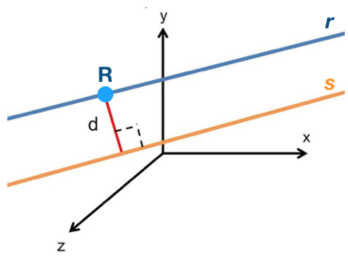


Figura 6: Distància entre rectes paral·leles.

$$r//s \quad d(r,s) = d(R,s) = \frac{|\overrightarrow{RS} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} \tag{26}$$

Vídeo 4.4: *Distància entre dues rectes paral·leles*
https://www.youtube.com/watch?v=bWxpwSXMSE4

Distància entre dues rectes que es creuen

Si les rectes es creuen podem calcula la distància de dues formes diferents:

- **Mètode del pla paral·lel:**

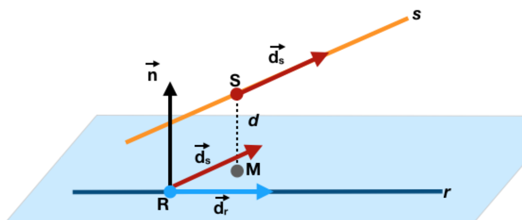


Figura 7: Distància entre rectes que es creuen. Mètode del pla paral·lel.

- Cercam un pla paral·lel a s que contengui la recta r

- Cercam la distància d'un punt qualsevol de la recta s al pla anterior.

- **Mètode del producte mixt:**

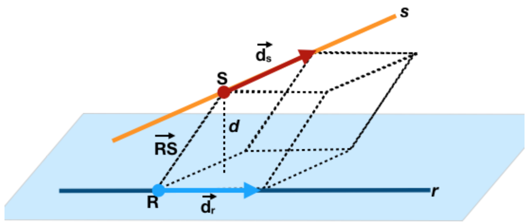


Figura 8: Distància entre rectes que es creuen.
Mètode del producte mixt.

El volum del paral·lelepípede és $V = A_{base} \cdot h$. Si aïllam l'altura $h = \dfrac{V}{A_{base}}$. L'altura correspon a la distància entre les dues rectes. El volum és igual al valor absolut del determinant format pels vectors $\overrightarrow{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s$ mentre que l'àrea de la base és l'àrea del paral·lelogram format pels vectors $\vec{d}_r, \vec{d}_s$. Amb això, la fórmula per calcular la distància entre dues rectes que es creuen és:

$$\text{Si r i s es creuen} \quad d(r,s) = \frac{vabs(det(\overrightarrow{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s))}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} \tag{27}$$

Vídeo 4.5: *Distància entre dues rectes que es creuen*
https://www.youtube.com/watch?v=3uPH-yZkTh4

EXERCICI RESOLT 13

Calcula la distància entre les rectes $r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$ i $s: \begin{cases} x = 4 + 3\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = 5 + 4\mu \end{cases}$.

Mètode del pla paral·lel

Volem construir un pla que contingui la recta r i sigui paral·lel a la recta s.

El vectors directors de les rectes són $\vec{d}_r(1,0,2)$ i $\vec{d}_s(3,-1,4)$. Un vector perpendicular a aquests dos és $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (2,2,-1)$. Aquest és el vector normal del pla π.

$$\pi: \quad 2x + 2y - z + D = 0 \tag{28}$$

Per trobar D substituïm el punt $R(5,-1,8)$ de la recta $r \Rightarrow \pi: \quad 2x+2y-z=0$

Cercam la distància d'un punt $S(4,3,5)$ de la recta s al pla π

$$d(r,s) = d(S,\pi) = \frac{|2\cdot 4 + 2\cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{9}{3} = 3 \tag{29}$$

Mètode del producte mixt

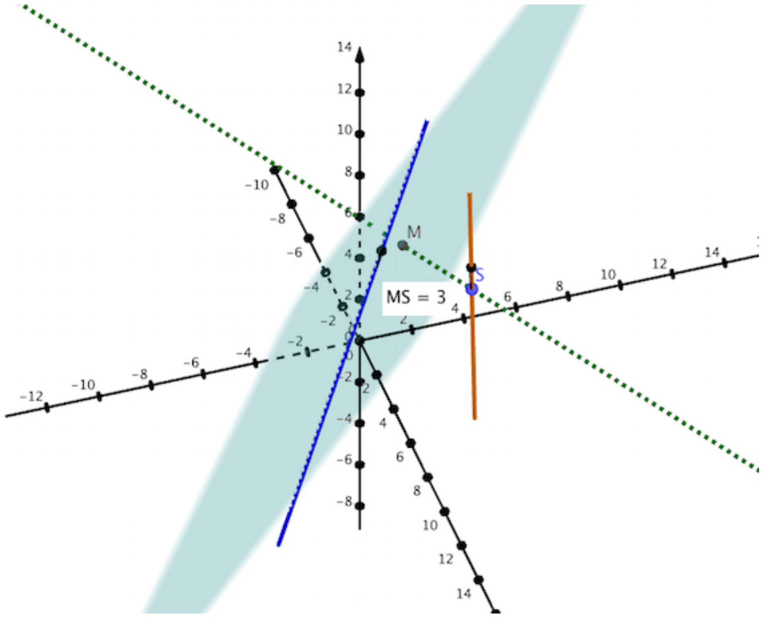
Utilitzam la fórmula $d(r,s) = \dfrac{|det(\overrightarrow{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s)|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$.

Cercam $\overrightarrow{RS} = (4,3,5) - (5,-1,8) = (-1,4,-3)$. Calculam

$$det(\overrightarrow{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \tag{30}$$

Calculam també el producte vectorial $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (2,2,-1)$ i el seu mòdul $|\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = 3$

Aplicam la fórmula $d(r,s) = \dfrac{|9|}{3} = 3$



Simulació 6: https://www.geogebra.org/m/umeea4z5 : *Mètode del pla paral·lel*

9. Punts simètrics

PBAU

Tot i que els punts simètrics no entraran a l'examen, és molt recomanable la seva lectura ja que vos ajudaran a entendre millor el càlcul de les distàncies.

Simètric d'un punt respecte d'un altre punt

El punt mitjà M d'un segment d'extrems P i P' s'obté de

$$M = \frac{P + P'}{2} = \left(\frac{P_1 + P_1'}{2}, \frac{P_2 + P_2'}{2}, \frac{P_3 + P_3'}{2} \right) \tag{31}$$

i compleix que es troba a igual distància del dos extrems.

Ara es tracta d'anar "al revés", donats un extrem i el punt mitjà, obtindrem l'altre extrem. El simètric d'un punt P respecte de M és un altre punt P' de manera que el punt M és el punt mitjà del segment $\overline{PP'}$. Si aïllam P' de l'equació (31)

$$P' = 2M - P \tag{32}$$

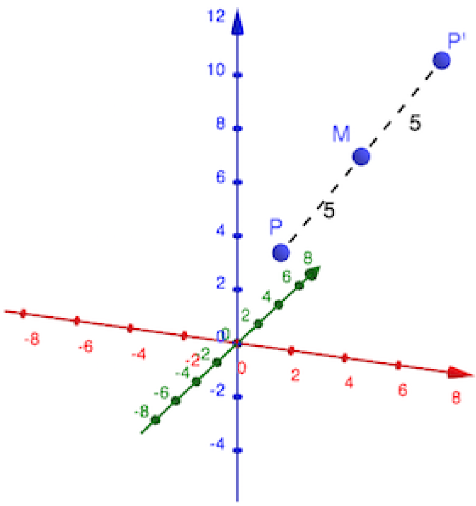
Si els punts tenen per coordenades $P = (P_1, P_2, P_3)$ i $M = (M_1, M_2, M_3)$, la següent fórmula dóna les coordenades del punt simètric P'

$$P' = (2M_1 - P_1, 2M_2 - P_2, 2M_3 - P_3) \tag{33}$$

EXERCICI RESOLT 14

Calcula el simètric del punt $P = (2, -1, 4)$ respecte del punt $M = (5, -1, 8)$.

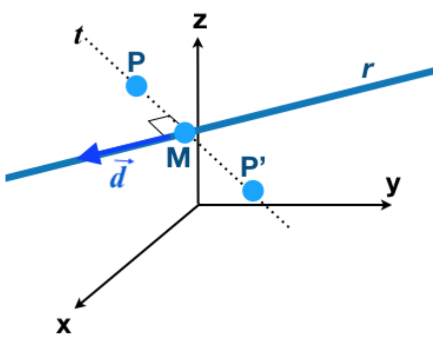
$$P' = 2M - P = 2(5, -1, 8) - (2, -1, 4) = (8, -1, 12) \quad (34)$$



Simulació 6: https://www.geogebra.org/m/undfx5ng : *Punt simètric respecte d'un punt*

Simètric d'un punt respecte d'una recta

El simètric d'un punt P respecte d'una recta r és un altre punt P' de manera que la recta t que passa pel punt mitjà del segment $\overline{PP'}$ i el vector director $\vec{d}$ són perpendiculars.



Per a trobar el simètric d'un punt respecte d'una recta donada per l'equació $r : \dfrac{x - a_1}{d_1} = \dfrac{y - a_2}{d_2} = \dfrac{z - a_3}{d_3}$ hem de seguir les passes següents:

1. Determinar la projecció del punt sobre la recta r, anomenam aquest punt M

- Pla π: Cercam el pla que passa per P i es perpendicular a r
- Punt M: El punt de la projecció s'obté del punt d'intersecció del pla π i la recta r.

2. Determinam el punt simètric de P respecte de M, com varem fer a l'apartat anterior.

Vídeo 4.6: *Punt simètric respecte d'una recta*
https://www.youtube.com/watch?v=aoDLaU2jkM8

EXERCICI RESOLT 15

Calcula el simètric del punt $P = (3, 1, -2)$ respecte de la recta $r : \dfrac{x+2}{-1} = y - 1 = \dfrac{z+1}{2}$.

En primer lloc, trobem la projecció ortogonal (M) del punt P sobre la recta r. Expressem l'equació de la recta en forma paramètrica:

$$x = -2 - t; \quad y = 1 + t; \quad z = -1 + 2t \tag{35}$$

Ara cercam el pla π perpendicular a la recta r que passa pel punt P. El vector normal de dit pla serà el vector director de la recta $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r = (-1, 1, 2)$. L'equació del pla que té aquest vector normal i que passa pel punt P és: $\pi : \ -x + y + 2z + 6 = 0$

La projecció ortogonal M és el punt d'intersecció de la recta r amb el pla π:

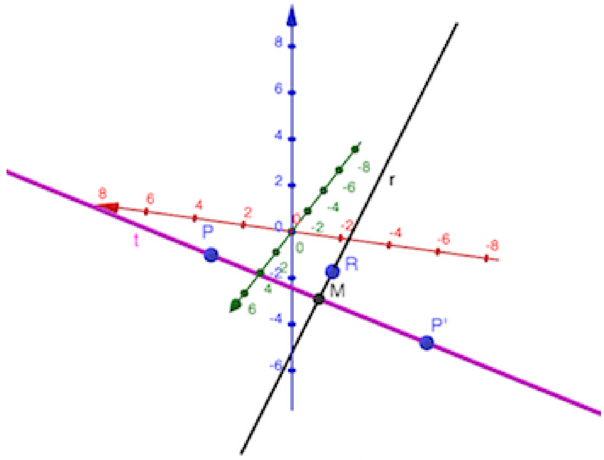
$$-(-2 - t) + (1 + t) + 2(-1 + 2t) = 0 \Rightarrow 6t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6} \tag{36}$$

Substituint el valor de t en les equacions de r , obtenim: $x = -\frac{5}{6}, y = -\frac{1}{6}, z = -\frac{10}{3}$

Així, la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r serà el punt $M = (-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{10}{3})$

Ara calculem el punt simètric de P respecte de la projecció M. Obtenim:

$$P' = 2M - P = 2\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{10}{3}\right) - (3, 1, -2) = \left(-\frac{14}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}\right) \tag{37}$$

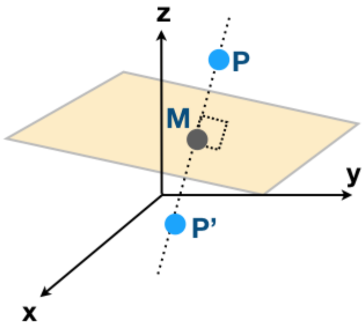


Simulació 7: https://www.geogebra.org/m/nmszbtdd : *Punt simètric respecte d'una recta*

Simètric d'un punt respecte d'un pla

El simètric d'un punt P respecte d'un pla és un altre punt P' de manera que el pla passa pel punt mitjà del segment $\overline{PP'}$ i el vector $\overrightarrow{PP'}$ és perpendicular al pla π.

Per a trobar el simètric d'un punt respecte d'un pla donat per l'equació $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ hem de seguir les passes següents:



1. Determinar la projecció del punt sobre el pla π, Anomenam a aquest punt M.
   - Cercam la recta que passa per P i es perpendicular al pla. Tindrà com a vector el vector normal del pla
   - El punt M és el punt d'intersecció de la recta amb el pla
2. Determinem el punt simètric de P respecte de M igual com varem fer en apartats anteriors.

Vídeo 4.7: *Punt simètric respecte d'un pla*
https://www.youtube.com/watch?v=1FkfFNwmT_8

EXERCICI RESOLT 16

Calcula el simètric del punt $P(2,1,-1)$ respecte del pla $\pi : x + 3y - z + 4 = 0$.

Trobam la projecció ortogonal del punt P sobre el pla π. Per a això cercam l'equació de la recta perpendicular al pla que passa pel punt P. El vector director d'aquesta recta és el vector normal del pla $\vec{d_r} = \vec{n}_\pi = (1,3,-1)$. L'equació de la recta és

$$r: \quad x = 2 + t; \;\; y = 1 + 3t; \;\; z = -1 - t \tag{38}$$

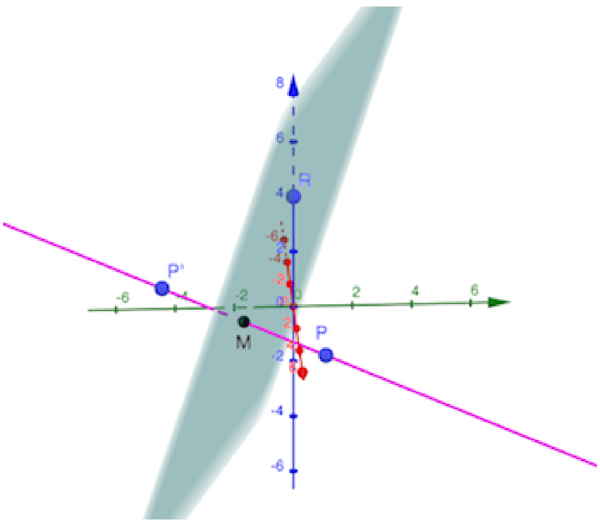
Cerquem el punt d'intersecció del pla amb la recta. Per això substituïm les equacions paramètriques de r dins l'equació del pla

$$(2+t) + 3(1+3t) - (-1-t) = 0 \Rightarrow 11t + 6 = 0 \Rightarrow t = -\frac{6}{11} \tag{39}$$

Substituint el valor trobat de t en les equacions de r , obtenim el punt $M = (\frac{12}{11}, -\frac{19}{11}, -\frac{1}{11})$.

Ara calculem el punt simètric de P respecte de la projecció M

$$P' = 2M - P = 2(\frac{12}{11}, -\frac{19}{11}, -\frac{1}{11}) - (2,1,-1) = \left(\frac{2}{11}, -\frac{49}{11}, \frac{9}{11}\right) \tag{40}$$



Simulació 8: https://www.geogebra.org/m/cmjdkmnf : *Punt simètric respecte d'un pla*