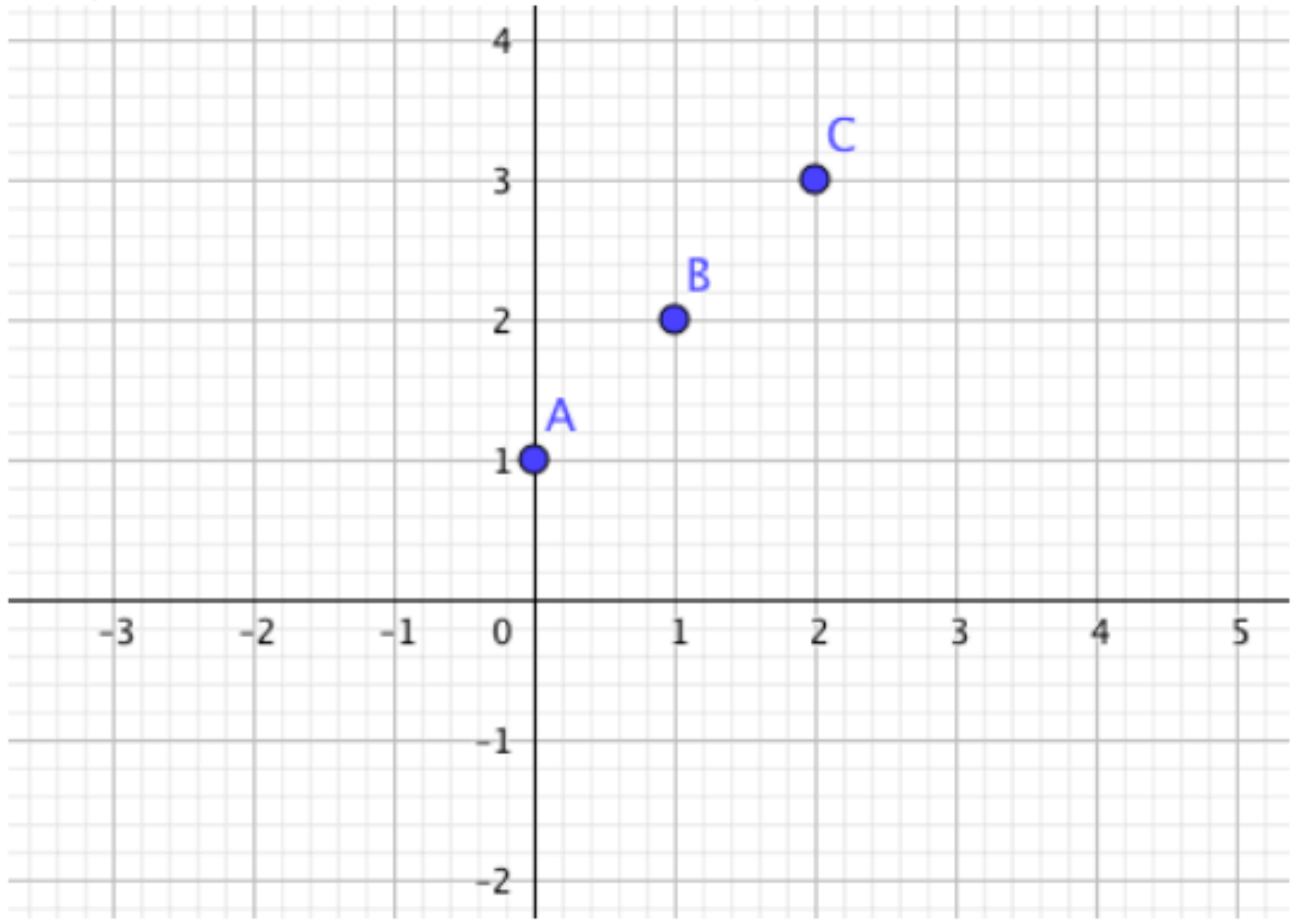
Solucions

MICROTASCA D'APRENENTATGE MATI 1.2

NOMBRES COMPLEXOS

PROFESSOR: Josep Mulet

1. Una aplicació dels nombres complexos és el tractament digital d'imatges. Cada pixel d'una imatge és considerat un nombre en el pla complex. Per transformar la imatge feim operacions amb els nombres complexos fent que cada pixel es transformi en un nou pixel. Com es transformen els punts de la imatge si la transformació és $z \to z^2$?

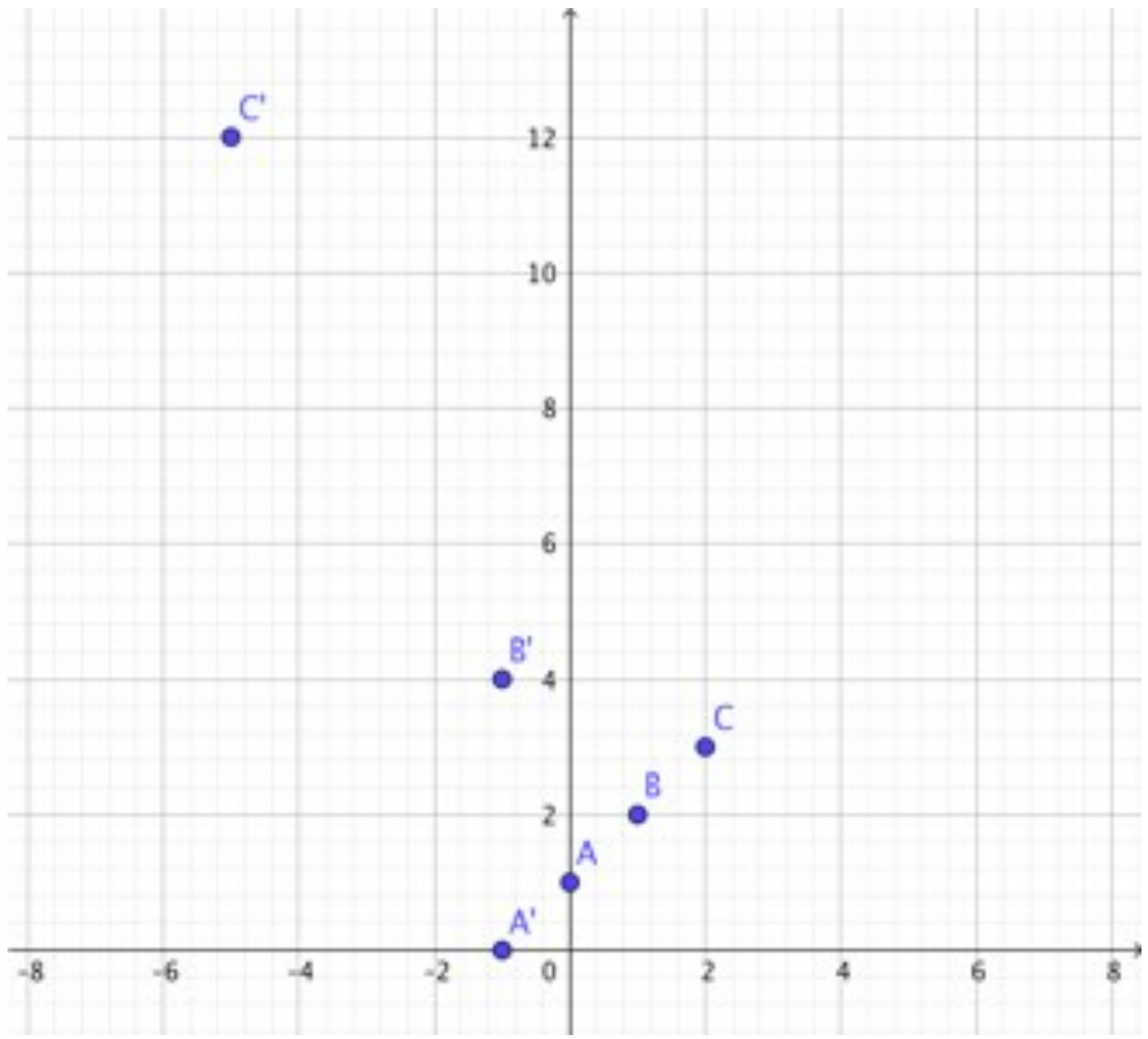


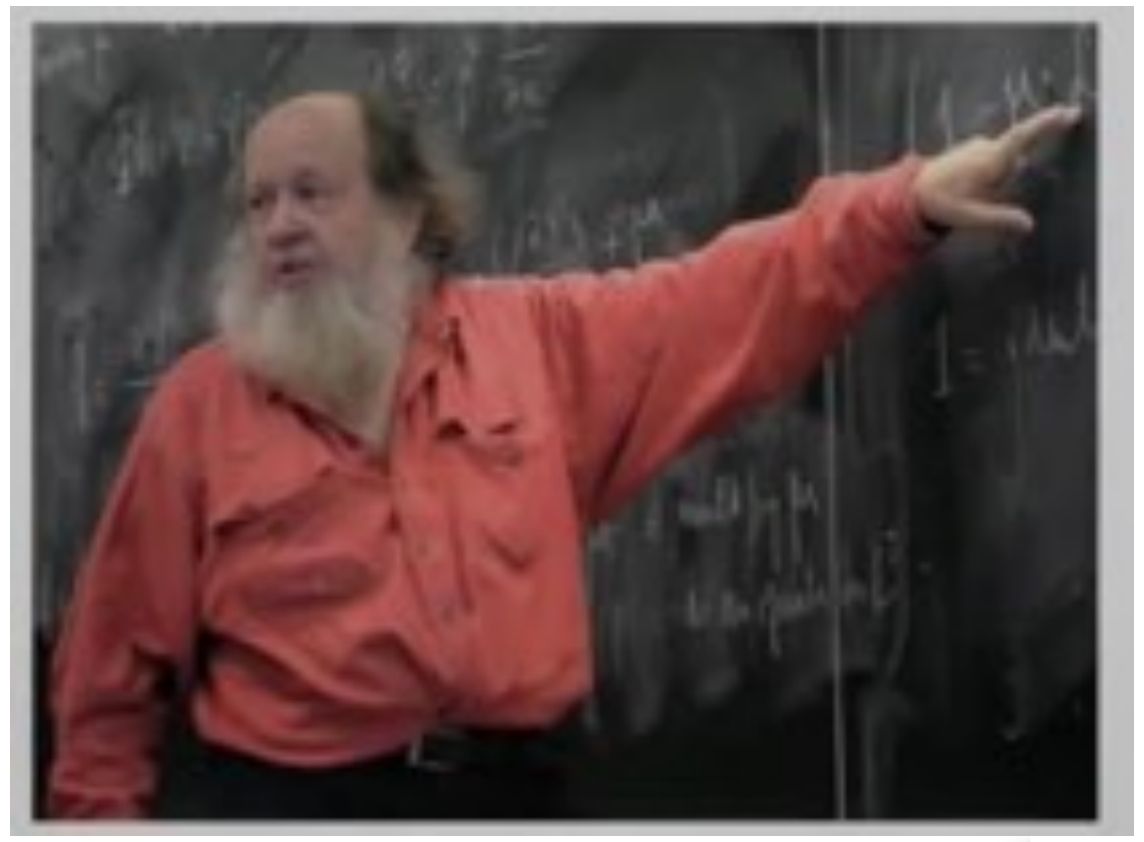
$A = i \longrightarrow A^2 = i^2 = -1$

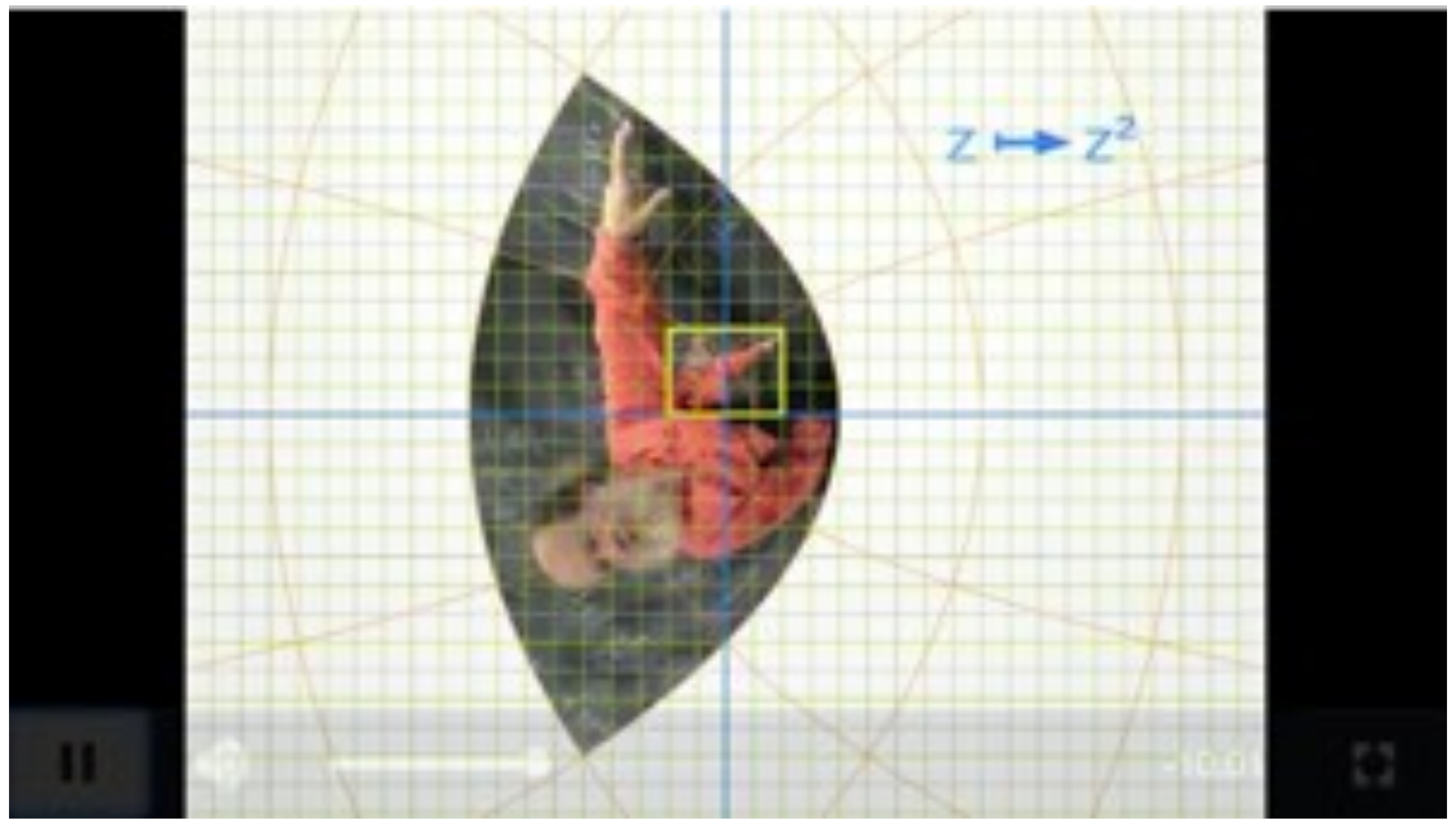
$B = 1+2i \longrightarrow B^2 = (1+2i)^2 = 1 + 4i + (2i)^2 = -3+4i$

$C = 2+3i \longrightarrow C^2 = -5+12i$

1. Una aplicació dels nombres complexos és el tractament digital d'imatges. Cada pixel d'una imatge és considerat un nombre en el pla complex. Per transformar la imatge feim operacions amb els nombres complexos fent que cada pixel es transformi en un nou pixel. Com es transformen els punts de la imatge si la transformació és $z \to z^2$?







2. Opera, passant prèviament els nombres a forma polar.

a) $(3-3i)^{10} =$

b) $\dfrac{1+i}{3+4i} =$

c) $\sqrt{\sqrt{3}+i} =$

Forma Polar $z = r_\theta$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

$3-3i = \sqrt{18}_{-45°}$

$1+i = \sqrt{2}_{45°}$

$3+4i = 5_{53{,}13°}$

$\sqrt{3}+i = 2_{30°}$

a) $(3-3i)^{10} = \left(\sqrt{18}_{-45°}\right)^{10} = \sqrt{18}^{10}_{\underbrace{-450°}_{+360°}} = 18^5_{-90°} = -18^5 \cdot i$

b) $\dfrac{\sqrt{2}_{45°}}{5_{53{,}13°}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)_{-8{,}13°}$

c) $\sqrt{2_{30°}} = \begin{cases} \sqrt{2}_{\frac{30}{2}} = \sqrt{2}_{15°} \\ \sqrt{2}_{\frac{30+360}{2}} = \sqrt{2}_{195°} \end{cases}$

3. Troba totes les solucions de l'equació $z^2 - 2i\,z + 1 = 0$. Expressa les solucions en forma binòmica. *Indicació:* $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$z = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2i \pm \sqrt{-4-4}}{2} =$$

$$= \frac{2i \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{(2 \pm \sqrt{8})\,i}{2} = \boxed{(1 \pm \sqrt{2})\,i}$$

$$\sqrt{-8} = \sqrt{8}\,\sqrt{-1} = \sqrt{8}\,i$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$8 = 2^3$$

4. Que ha de valer b per què el nombre sigui $\frac{(5+2i)}{(3-bi)}$ real. *Ajuda: Realitza la divisió i imposa que la part imaginària sigui igual a zero.*

$$\frac{5+2i}{3-bi} = \frac{(5+2i)}{(3-bi)} \cdot \frac{(3+bi)}{(3+bi)} = \frac{15+5bi+6i+2bi^2}{3^2+b^2}$$

$i^2 = -1$

$$= \frac{15-2b + i(5b+6)}{9+b^2}$$

$$5b+6=0$$

$$5b=-6$$

$$\boxed{b=\frac{-6}{5}}$$