	MOSTRA EXAMEN DE MATEMÀTIQUES I PRIMER BATXILLERAT - BAT_MAT1			DATA I HORA
NOM I COGNOMS:				NOTA
DNI:		AVALUACIÓ:	MAIG	
CENTRE:		GRUP*:	A/B/C/D	

*grup: A-arts/B-humanitats/C-ciències/D-xarxa

INSTRUCCIONS:

- Heu de fer només un dels models d'examen. No es poden intercanviar preguntes entre models.
- Totes les respostes han d'estar degudament justificades amb els càlculs pertinents.
- Es valorarà la precisió del llenguatge matemàtic i no matemàtic. Les errades de càlcul penalitzen.
- Es poden emprar calculadores sempre que no emmagatzemin informació ni la puguin transmetre.

EXAMEN NOMÉS 2A AVALUACIÓ

Feis aquest model si teniu la primera avaluació aprovada.

1. **Lliurament 5: Límits i asímptotes de funcions** (3 punts)

   Determinau **totes** les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{2x^2+6x}$. Calculau tots els límits necessaris per determinar-les. Representau gràficament com s'acosta la funció a les asímptotes. És a dir, feis el càlcul de la posició relativa de la funció respecte de les asímptotes.

2. **Lliurament 6: Derivades de funcions** (3 punts)

   Considerau la funció polinòmica $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

   a) Calculau els punts de tall amb els eixos. (1 punt)

   b) Determinau els màxims i mínims de la funció. (1 punt)

   c) Determinau les simetries i construïu la gràfica de la funció. (1 punt)

3. **Lliuraments 7 i 8: Geometria** (4 punts)

   a) Calculau l'equació **vectorial** de la recta que passa pel punt $A(3,2)$ i té pendent $m = -\dfrac{1}{2}$.
   Representau-la gràficament. (2 punts)

   b) Calculau l'equació **general** de la recta que és perpendicular a la recta de l'apartat a) i passa pel punt mitjà del segment d'extrems $A = (3,2)$ i $B = (5,0)$. (2 punts)

Examen Final: 1a + 2a Avaluació

Feis aquest model si teniu la 1a avaluació suspesa.

1. Trobau totes les solucions de l'equació trigonomètrica $\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}\, x = 0$. Donau la resposta en graus i radiants. (2 punts)

2. Una mare té el doble de la suma de les edats dels seus fills. L'edat del fill menor és la meitat de la seva germana. La suma de les edats dels nens i la mare és 45 anys. Quina edat té cadascú? Plantejau un sistema d'equacions i resoleu-lo pel mètode de Gauss (1,5 punts).

3. Determinau les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$. Representau-les gràficament (1,5 punts)

4. Considerau la funció $f(x) = \ln(x+1) \cdot \cos(x^2)$ (1,75 punts)

a) Calculau la funció derivada completament simplificada. (0,75 punts)

b) Determinau l'equació de la recta tangent en el punt $x = 0$. Justificau si la funció és creixent o decreixent en aquest punt. (1 punt)

5. Considera el triangle amb vèrtexs en els punts $A = (-3, -2)$, $B = (9, 7)$ i $C = (2, 8)$ (2 punts)

a) Calculau l'equació **general** de la recta que passa pels punts A i B. (1 punts)

b) Calculau la longitud del segment $\overline{AB}$. (0,5 punts)

c) Calculau la distància entre la recta que passa per $\overline{AB}$ i el vèrtex C. (0,5 punts)

6. S'ha determinat les despeses en publicitat (x) i les vendes aconseguides (y) en milers d'euros de 6 empreses diferents. S'han obtingut els següents paràmetres estadístics: (1,25 punts)

- Mitjanes: $\bar{x} = 3,5$ $\quad \bar{y} = 28,5$
- Desviacions típiques: $\sigma_x = 1.71$ $\quad \sigma_y = 12,45$
- Covariància: $\sigma_{xy} = 20,75$

a) Determinau el coeficient de correlació lineal i, en base a ell, explicau quin tipus de relació es dóna entre les variables. (0,75 punts)

b) Calculau l'equació de la recta de regressió lineal i estimau les vendes per una inversió en publicitat de 8 milers d'euros. (0,5 punts)

Fórmules:

- Mitjana $\bar{x} = \dfrac{\sum_i x_i}{N}$
- Desv. típica $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$
- Covariància $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum_i x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$
- Coeficient de correlació $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$
- Recta de correlació $y = \bar{y} + \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$

SOLUCIONS MOSTRA EXAMEN 2A AVALUACIÓ

1. **Lliurament 5**

Resolem l'equació $2x^2 + 6x = 0$ i trobam les solucions $x = 0$, $x = -3$. La funció pot tenir fins 2 asímptotes verticals.

Calculam els límits laterals en cada solució:

$x = -3$:

i $\lim_{x\to -3^-} \frac{5x^2+1}{2x^2+6x} = \frac{+46}{+0} = +\infty$ i $\lim_{x\to -3^+} \frac{5x^2+1}{2x^2+6x} = \frac{+46}{-0} = -\infty$

La recta $x = -3$ és una asímptota vertical.

$x = 0$:

$\lim_{x\to 0^-} \frac{5x^2+1}{2x^2+6x} = \frac{+1}{-0} = -\infty$ i $\lim_{x\to 0^+} \frac{5x^2+1}{2x^2+6x} = \frac{+1}{+0} = +\infty$

La recta $x = 0$ és una asímptota vertical.

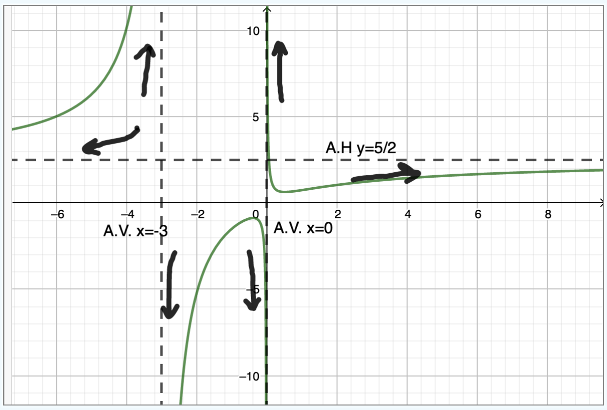
Atès que el grau del numerador és menor o igual al grau del denominador, té una asímptota horitzontal.

Calculam el límit a l'infinit: $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+1}{2x^2+6x}$ = $\frac{\infty}{\infty}$ =IND.= $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2/x^2+1/x^2}{2x^2/x^2+6x/x^2}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{5+1/x^2}{2+6/x} = \frac{5}{2}$

La recta $y = \frac{5}{2} = 2.5$ és una asímptota horitzontal. Per saber com ens acostam a l'asímptota, completam la següent taula:

x	f(x)	Asímptota	Posició
-100	2.5773	2.5	Per damunt
100	2.4272	2.5	Per davall

Amb aquesta informació podem representar les asímptotes i la forma en què la funció s'acosta a elles.



2. **Lliurament 6**

a)

- Talls amb l'eix OX: $y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 2 = 0$. Obtenim una equació biquadrada, efectuam el canvi de variables $t = x^2$; $t^2 - 8t + 2 = 0$. Resolem l'equació de segon grau $t = 0,25834$ i $t = 7,7417$.
  Desfeim el canvi $x = \pm\sqrt{t}$: $x = \pm 0,5083$; $x = \pm 2,7824$
- Talls amb l'eix OY $x = 0 \rightarrow y = 2$

b) Calculam la derivada de la funció $f'(x) = 4x^3 - 16x$ i la igualam a zero

$4x^3 - 16x = 4x \cdot (x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = \pm 2$, $x = 0$

Estudiam el signe de la derivada

$Signe\ f'$	$---$	$---$	$++$	$++$	$--$	$--$	$++$	$++$
		-3	-2	-1	0	1	2	3

La funció creix a $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

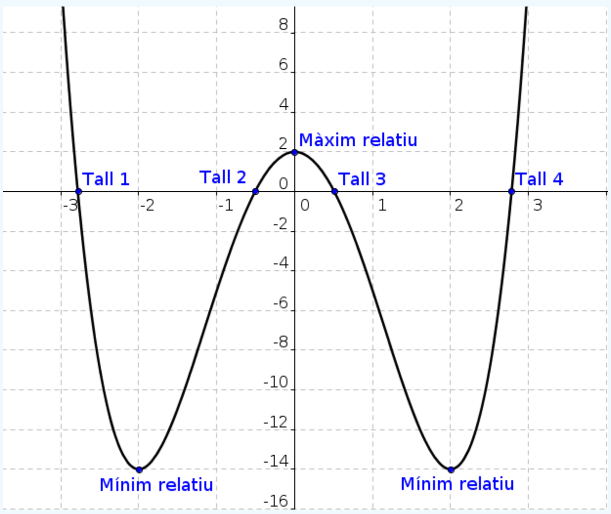
La funció decreix a $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

Sabem que tindrà un mínim a $x = -2$; $y = -14$

un màxim relatiu a $x = 0$, $y = 2$

i un altre mínim a $x = 2$, $y = -14$

c) Es tracta d'una funció simètrica parell donat que $f(-x) = f(x)$. La gràfica aproximada de la funció és:

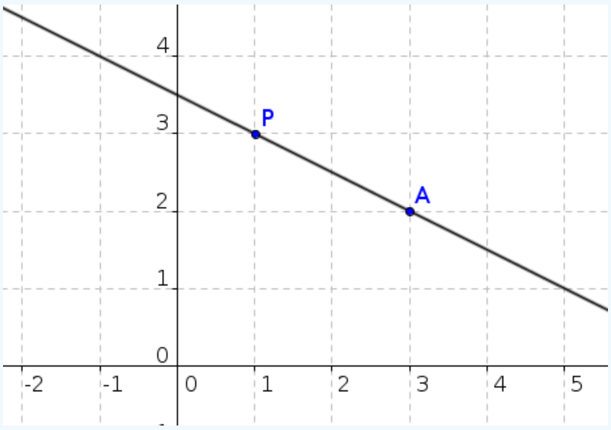


3. **Lliurament 7 i 8**

a) Ens diuen que el pendent de la recta és $-\frac{1}{2}$. Recordem la relació entre pendent i vector director $m = \frac{d_y}{d_x}$. D'aquí deduïm que el vector de la recta és $\vec{d}(2, -1)$.

Podem escriure directament l'equació vectorial com $(x, y) = (3, 2) + t(2, -1)$

Per representar-la gràficament, basta trobar un altre punt de la recta. Per trobar punts en forma vectorial, donam valors al paràmetre t. Per exemple, si feim $t = -1$ tenim $(x, y) = (1, 3)$. Dibuixam la recta que passa per dos punts



b) Si la recta anterior té vector director $\vec{d}(2, -1)$, un vector perpendicular a ell s'obté de girar les components i canviar un signe: $\vec{n} = (1, 2)$. Aquest és el vector director de la recta que ens demanen. A més, sabem que passa pel punt mitjà del segment $\bar{AB}$, $M = \dfrac{A+B}{2} = (4, 1)$

Comencem escrivint l'equació contínua $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{2}$

Efectuam els productes creuats $2(x-4) = y-1$, eliminam els parèntesis i simplificam. Arribam a l'equació general de la recta $2x - y - 7 = 0$.

SOLUCIONS MOSTRA EXAMEN FINAL

1.

Anomenam $t = x$. Aquest canvi de variables, transforma l'equació a $t^2 - 2t = 0$. Es tracta d'una equació de segon grau incompleta. Treim factor comú $t \cdot (t-2) = 0$. Obtenim dues solucions $t = 0$ i $t = 2$. Ara desfeim el canvi:

- Si $t = 0$: $\operatorname{tg} x = 0 \to x = 0 + 360n$ i $x = 180 + 360n$
- Si $t = 2$: $\operatorname{tg} x = 2 \to x = \operatorname{arctg} 2 = 63,43 + n360$.

  També trobam una altra solució al 3r quadrant, és a dir, sumam 180 graus a l'angle anterior: $x = 243,43 + n360$.

De forma més compacta, podem escriure les solucions com: $x = \left\{ \begin{array}{l} x = 0° + 180°n \\ x = 63,43° + 180°n \end{array} \right.$

Per expressar els angles en radiants, recordem que $180° = \pi$ rad. $x = \left\{ \begin{array}{l} x = 0 + n\pi \\ x = 1,107 + n\pi \end{array} \right.$ rad.

2.

Anomenam x=edat mare, y =edat germana, z=edat del fill menor

Plantejam el sistema d'equacions $\left\{ \begin{array}{rl} x = & 2(y+z) \\ z = & \dfrac{y}{2} \\ x+y+z & = 45 \end{array} \right.$

Tot seguit preparam el sistema per poder-lo resoldre per Gauss. Cal eliminar els denominadors i parèntesis

$\left\{ \begin{array}{rl} x+y+z & = 45 \\ x-2y-2z & = 0 \\ -y+2z & = 0 \end{array} \right.$. A la $[2a] \to [2a] - [1a]$ $\left\{ \begin{array}{rl} x+y+z & = 45 \\ -3y-3z & = -45 \\ -y+2z & = 0 \end{array} \right.$.

Si dividim la segona entre -3, trobam $\left\{ \begin{array}{rl} x+y+z & = 45 \\ y+z & = 15 \\ -y+2z & = 0 \end{array} \right.$. A la tercera li sumam la segona $[3a] \to [3a] + [2a]$

$\left\{ \begin{array}{rl} x+y+z & = 45 \\ y+z & = 15 \\ 3z & = 15 \end{array} \right.$. El sistema ja es escalonat i podem trobar la solució $z = 5$, $y = 10$, $x = 30$.

3.

La funció $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ anul·la el denominador quan $x^2-4=0 \to x=\pm 2$

Calculem els límits

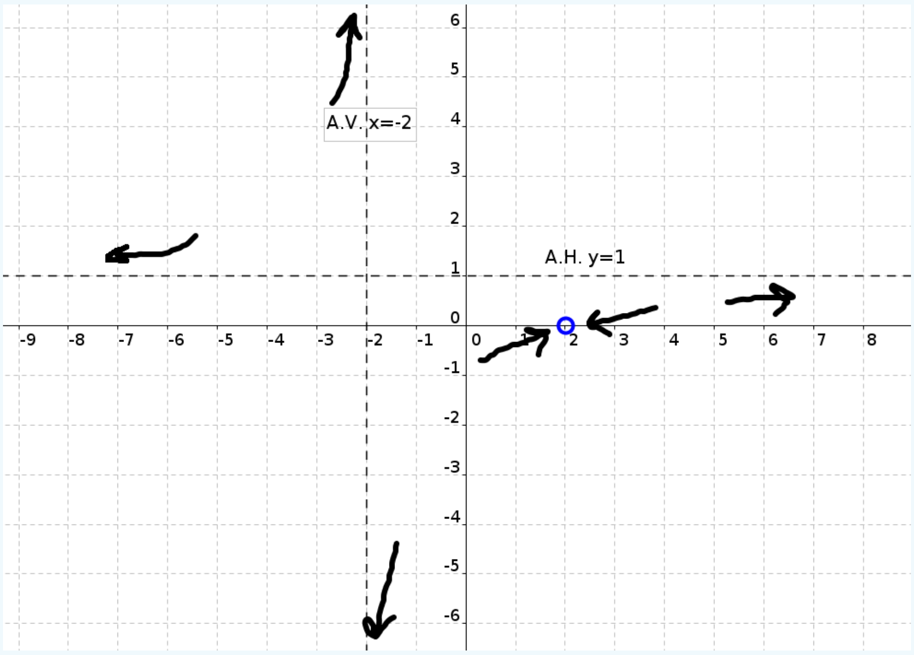
$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \dfrac{16}{0} = \pm\infty$. Segur que a $x=-2$ hi ha una asímptota vertical.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \dfrac{0}{0}$ =IND= $\lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^{\cancel{2}\,1}}{(x+2)\cdot \cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x+2} = 0$. Donat que el límit és finit, NO hi ha asímptota a $x=2$.

Finalment, calculem el límit a infinit de la funció

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \dfrac{\infty}{\infty} = IND = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+4/x+4/x^2}{1-4/x^2} = 1$. Sabem que té asímptota horitzontal a $y=1$.

La situació gràfica és la següent:



4.

a) Per derivar $f(x)=\ln(x+1)\cdot\cos(x^2)$ aplicam la regla del producte:

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}\cdot\cos(x^2) + \ln(x+1)\cdot(-\sin(x^2))\cdot 2x = \dfrac{1}{x+1}\cdot\cos(x^2) - 2x\ln(x+1)\cdot\sin(x^2)$

A més hem hagut d'aplicar la regla de la cadena.

b) Calculam $f(0)=\ln(1)\cdot\cos 0 = 0$ i el pendent de la recta $m=f'(0)=1$. Donat que el pendent és positiu, la funció creix en $x=0$.

L'equació de la recta tangent és $y=f(0)+f'(0)(x-a) \to y = 0+1(x-0)$; és a dir, $y=x$.

5.

a) Cercam el vector $\vec{d} = \vec{AB} = B - A = (9,7) - (-3,-2) = (12,9)$. El pendent és $m = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$. Escrivim l'equació punt pendent $y+2 = \frac{3}{4}(x+3)$. Operam per obtenir l'equació general $3x-4y+1 = 0$

b) La longitud del segment és la distància entre els dos punts. S'obté del mòdul del vector que els uneix $d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{12^2+9^2} = 15$

c) Ens demanen la distància entre la recta $r:\ 3x-4y+1 = 0$ i el punt $C = (2,8)$. Aplicam la fórmula: $d(r,C) = \dfrac{|3\cdot 2 - 4\cdot 8 + 1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{25}{5} = 5$. Recordam que la distància sempre és positiva i cal prendre el valor absolut.

6.

a) El coeficient de correlació lineal és $r = \dfrac{20,75}{1,71\cdot 12,45} = 0,974$. Atès que r és positiu i proper a la unitat, es dona una correlació positiva forta.

b) L'equació de la recta de regressió és $y = 28,5 + \dfrac{20,75}{1,71^2}(x-3,5)$. Si simplificam obtenim la recta: $y = 7,096\cdot x + 3,66$.

A partir de la recta de regressió podem fer l'estimació substituïnt $x = 8$; $y = 7,096\cdot 8 + 3,66 = 60,43$ milers d'euros en vendes. Aquesta extrapolació és fiable perquè $r \approx 1$ i no ens em anat massa enfora del rang de dades.