Lliurament 2:
Àlgebra. Equacions i sistemes d'equacions

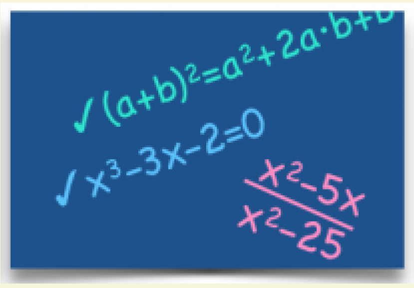
Per a què serveixen els sistemes d'equacions?

Matemàtiques I

Josep Mulet Pol

Àmbit científic

IEDIB



IEDIB

https://iedib.net/

Edició LaTeX: ® Josep Mulet Pol

Versió: 11-09-2024

Índex

1. Sistemes d'equacions lineals

Els sistemes lineals són de gran importància en moltíssims àmbits de la ciència i la tecnologia. Per mencionar-ne alguns, apareixen en la determinació de les intensitats i voltatges de circuïts elèctrics, en càlculs de distribució de temperatura, en l'estudi del trànsit en una ciutat, en problemes de mecànica, en les reaccions químiques, etc.

En aquesta secció aprendrem a resoldre situacions plantejant i resolent sistemes d'equacions.

Sistemes d'equacions 2x2

En el minicurs en obert "Taller d'àlgebra" trobareu un repàs dels mètodes clàssics (substitució, igualació i reducció) dels sistemes d'equacions 2x2 (2 equacions i 2 incògnites). L'objectiu d'aquest lliurament és aprendre un mètode general, el mètode de Gauss, que està basat en el mètode de reducció i que es pot aplicar a sistemes de qualsevol nombre d'incògnites i d'equacions.

Sistemes escalonats

Un sistema d'equacions $n \times m$ està format per n equacions i m incògnites. El sistema es diu que és **lineal** si les incògnites només apareixen sumades, restades o multiplicades per un coeficient.

Un sistema d'equacions lineal de tres equacions amb 3 incògnites s'anomena **escalonat** si en una de les equacions només apareix una incògnita i en una altra falta alguna de les altres dues incògnites.

Aquesta propietat fa que aquests sistemes siguin molt fàcils de resoldre. Vegem perquè amb uns exemples.

Exemple 1

Resoleu: $\begin{cases} 3x & +4y & & = 0 \\ & 2y & & = -6 \\ 5x & +y & -z & = 17 \end{cases}$

Es tracta d'un sistema escalonat

De la segona equació; $2y = -6$ deduïm que $y = -3$.

Si ara anam a la primera, $3x + 4 \cdot (-3) = 0$ trobam que $x = 4$.

Finalment, introduïm la y i la x trobades dins la tercera equació $5 \cdot 4 + (-3) - z = 17$ iaïllam la $z = 0$.

La solució és $x = 4, y = -3, z = 0$

Exemple 2

Resoleu: $\begin{cases} & y & -2z & = -4 \\ & 4y & & = 24 \\ x & -2y & +z & = -5 \end{cases}$

Es tracta d'un sistema escalonat

De la segona equació; $4y = 24$ deduïm que $y = 6$.

Si ara anam a la primera, $6 - 2z = -4$ trobam que $z = 5$.

Finalment, introduïm la y i la z trobades dins la tercera equació $x - 12 + 5 = -5$ iaïllam la $x = 2$.

La solució és $x = 2, y = 6, z = 5$

Exercicis

1. Si compram un gelat de xocolata, un de vainilla i un de fresa ens costa

6,50 €.En canvi, si compram un gelat de xocolata i dos de vainilla costa 5 €. També hemvist que 5 gelats de xocolata costen 10 €. Quin és el preu de cada tipus de gelat?

1.1 Mètode de Gauss

Acabam de veure que els sistemes escalonats són molt senzills de resoldre. Però, desgraciadament, no tots els sistemes són escalonats. El mètode de Gauss aconsegueix transformar un sistema que no és escalonat en un altre equivalent que sí que ho és.

Karl F. Gauss. Font de la imatge Viquidèpia.

Dos sistemes es diuen que són **equivalents** si tenen **les mateixes solucions** .Les transformacions que podem fer per obtenir sistemes equivalents són:

- Es pot canviar l'ordre de les equacions
- Tota equació es pot dividir o multiplicar per un nombre (diferent de zero)
- A una equació se li pot sumar o restar una altra prèviament multiplicada per un nombre. Per exemple, $F_2 \to F_2 + F_1$ es llegeix com "*La segona fila es canvia per la segona més la primera fila* ".

Anomenam les equacions com $F_1, F_2, F_3, \cdots$. En una transformació podem decidir modificar més d'una fila.

Per exemple $F_2 \to F_2 + F_1$ i $F_3 \to F_3 - F_1$ seria correcte.

El que no podem fer és utilitzar la mateixa combinació en dues files diferents,

Per exemple $F_2 \to F_2 - F_3$ i $F_3 \to F_3 - F_2$ seria **incorrecte** , perquè al cap i a la fi, $F_2 - F_3$ i $F_3 - F_2$són, excepte un signe, la mateixa combinació.

Es tracta d'anar aplicant una seqüència de transformacions que facin desaparèixer termes(col·loquialment, en diem posar zeros) fins que el sistema quedi escalonat.Si les transformacions les aplicam sense cap ordre, es comú fer-se un embolic.Per això us recomanam que seguiu la tècnica de la **L** que s'aconsegueix en 2 passes.Aquest diagrama mostra l'algoritme:

$$\begin{array}{r} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z = b_1 \\ a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y + a_{2,3}\,z = b_2 \\ a_{3,1}\,x + a_{3,2}\,y + a_{3,3}\,z = b_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z = b_1 \\ c_{2,2}\,y + c_{2,3}\,z = b_2 \\ c_{3,2}\,y + c_{3,3}\,z = b_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z = b_1 \\ c_{2,2}\,y + c_{2,3}\,z = b_2 \\ d_{3,3}\,z = b_3 \end{array}$$

La primera passa consisteix en fer que els termes $a_{2,1}$ i $a_{3,1}$ desapareguin. La segona i darrera passa, cal utilitzar la segona i la tercera equacions perquè alguns dels termes $c_{i,j}$ es cancel·li. La figura fa que el terme $c_{3,2}$ s'anul·li.

> **Recomanació:** Sempre que sigui possible col·locarem l'equació que tingui un 1 en el primer terme a dalt de tot.

Aquest vídeo mostra com s'apliquen les transformacions en el mètode de Gauss.

Vídeo 2.1: *El mètode de Gauss*
https://www.youtube.com/watch?v=o6DTm8A-URU

Exemple 3

Resoleu: $\begin{cases} 2x+3y &= 14 \\ x-2y+z &= -3 \\ 2x-y-z &= 9 \end{cases}$

Anomenam les equacions com F_1, F_2, F_3.

Canviam l'ordre de la 1a i 2a equacions $\begin{cases} x-2y+z &= -3 & \rightarrow \\ 2x+3y &= 14 & \rightarrow F_2-2F_1 \\ 2x-y-z &= 9 & \rightarrow F_3-F_2 \end{cases}$

Aplicam les següents transformacions, a la segona li restam el doble de la primera; a la tercera li restam la segona. Notau que la primera equació no la tocam i queda igual. $\begin{cases} x-2y+z &= -3 & \rightarrow \\ 7y-2z &= 20 & \rightarrow \\ -4y-z &= -5 & \rightarrow F_2-2F_3 \end{cases}$

La tercera equació la canviam per la segona menys dues vegades la tercera. Les altres equacions les deixam iguals $\begin{cases} x-2y+z &= -3 \\ 7y-2z &= 20 \\ 15y &= 30 \end{cases}$

El sistema ja es escalonat i si el resolem, la solució és $x=4, y=2, z=-3$

Problemes de planteig

Per resoldre un problema de planteig, cal seguir les següents recomanacions:

- Llegir diverses vegades l'enunciat fins que estiguem segurs que l'hem entès.
- Identificar què demana el problema (les incògnites) i donar-li un nom x, y, etc.
- Escriure un sistema d'equacions lineal.
- A continuació, utilitzam el mètode de Gauss per resoldre el sistema.

- Finalment, hem de comprovar i donar la solució al problema.

Vegem un exemple:

Exemple 4

Volem repartir 330 euros entre tres persones de manera que la primera rebi 20 euros més que la segona ila tercera la meitat del que han rebut les altres dues. Com ho feim?

Anomenam x els euros per a la primera, y la segona i z la tercera persona.
En total hem de repartir 330 euros $x + y + z = 330$
La primera reb 20 més que la segona $x = y + 20$
La tercera li toca la meitat del que han rebut les altres $z = \dfrac{x+y}{2}$
Si arreglam les equacions ens queda el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + z & = 330 \\ x - y & = 20 \\ -x - y + 2z & = 0 \end{cases}$$

Per aconseguir que sigui escalonat feim les següents transformacions $F_1 \to F_1 + F_3$ i $F_2 \to F_2 + F_3$

$$\begin{cases} 3z & = 330 \\ -2y + 2z & = 20 \\ -x - y + 2z & = 0 \end{cases}$$

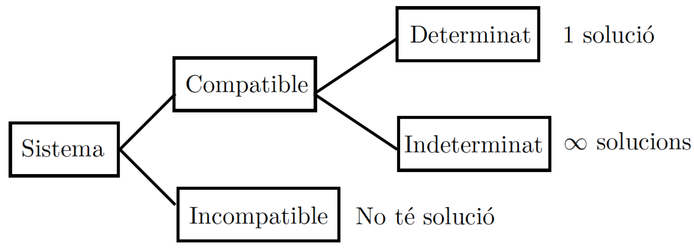
El sistema ja és escalonat. De la primera equació $z = 110$, ho introduïm a la segona $y = 100$ i anant a la tercera $x = 120$ euros.
Comprovam la solució substituint els valors de les incògnites dins les equacions originals i veient que escompleixen totes alhora.

Exercicis

2. Una botiga ven gelats de vainilla, iogurt i xocolata. Si compram un gelat de vainilla i 3 de iogurt ens costa8,38 euros. Si compram 2 de iogurt i un de xocolata ens costa 6,80 euros.Sabem que el preu de la vainilla és un 15% més barat que el preu de la xocolata.Quin és el preu de cada gelat? Nota: Plantejau un sistema d'equacions i resoleu-lo pel mètode de Gauss.

1.2 Classificació dels sistemes

Els sistemes d'equacions lineals es classifiquen segons el nombre de solucions:



Si a l'aplicar el mètode de Gauss trobam una fila plena de zeros $0x + 0y + 0z = 0$, aquesta equació és certa perquè $0 = 0$ però no ens proporciona cap informació útil. Si passa això, el sistema serà **compatible indeterminat** ; tindrà infinites solucions.

En canvi, si a l'aplicar el mètode de Gauss arribam a una fila com ara $0x + 0y + 0z = 5$, aquesta equació és **falsa** perquè $0 \neq 5$. Podrem assegurar que aquest sistema no té solució (es diu **incompatible**).

En la següent explicació veurem un exemple de cada tipus i com s'aplica el mètode de Gauss en cada cas.

Vídeo 2.2: *Classificació de sistemes d'equacions lineals*
https://www.youtube.com/watch?v=1OLR7OCR1rE

Exemple 5

Resoleu i discutiu: $\begin{cases} 3x+2y-2z &= 4 \\ 4x+y-z &= 7 \\ x+4y-4z &= 0 \end{cases}$

Anomenam les equacions com F_1, F_2, F_3.

Canviam l'ordre de la 1a i 3a equacions $\begin{cases} x+4y-4z &= 0 & \rightarrow \\ 4x+y-z &= 7 & \rightarrow F_2-4F_1 \\ 3x+2y-2z &= 4 & \rightarrow F_3-3F_1 \end{cases}$

Aplicam les següents transformacions, a la segona li restam 4 vegades la primera; a la tercera li restam 3 vegades la primera.Notau que la primera equació no la tocam i queda igual. $\begin{cases} x+4y-4z &= 0 & \rightarrow \\ 0-15y+15z &= 7 & \rightarrow \\ 0-10y+10z &= 4 & \rightarrow: (-2) \end{cases}$

Dividim la tercera equació per -2 $\begin{cases} x+4y-4z &= 0 & \rightarrow \\ 0-15y+15z &= 7 & \rightarrow F_2+3F_3 \\ 0+5y-5z &= -2 & \rightarrow \end{cases}$

La segona equació, li sumam el 3 vegades la tercera $\begin{cases} x+4y-4z &= 0 \\ 0x+0y+0z &= 1 \\ 0+5y-5z &= -2 \end{cases}$

El sistema ja es escalonat. Hem arribat a una equació que ens diu $0 = 1$, cosa que és evidentment falsa. Això ens diu que el sistema no té solució.Es tracta d'un **sistema incompatible** .

Exemple 6

Resoleu i discutiu: $\begin{cases} 3x+2y-2z &= 4 \\ 4x+y-z &= 7 \\ x+4y-4z &= -2 \end{cases}$

Anomenam les equacions com F_1, F_2, F_3.

Canviam l'ordre de la 1a i 3a equacions $\begin{cases} x+4y-4z &= -2 & \rightarrow \\ 4x+y-z &= 7 & \rightarrow F_2-4F_1 \\ 3x+2y-2z &= 4 & \rightarrow F_3-3F_1 \end{cases}$

Aplicam les següents transformacions, a la segona li restam 4 vegades la primera; a la tercera li restam 3 vegades la primera.Notau que la primera equació no la tocam i queda igual. $\begin{cases} x+4y-4z &= -2 & \rightarrow \\ 0-15y+15z &= 15 & \rightarrow: 15 \\ 0-10y+10z &= 10 & \rightarrow: (-10) \end{cases}$

Dividim la segona equació per 15 i la tercera per -10 $\begin{cases} x+4y-4z &= -2 & \rightarrow \\ 0-y+z &= 1 & \rightarrow \\ 0+y-z &= -1 & \rightarrow F_3+F_2 \end{cases}$

La tercera equació, li sumam la segona $\begin{cases} x+4y-4z &= -2 \\ 0-y+z &= 1 \\ 0x+0y+0z &= 0 \end{cases}$

El sistema ja es escalonat. Hem arribat a una equació que ens diu $0=0$, cosa que és certa, però no ens proporciona cap informació sobre les incògnites. Quan passa això ens diu que el sistema és **compatible indeterminat** , té infinites solucions.

Per resoldre el sistema ens fan falta equacions o millor dit, ens sobren incògnites. El que podem fer es passar la z al membre de la dreta com i tractar-lo com si fos un nombre (o un paràmetre). Trobam aquest sistema d'equacions 2x2: $\begin{cases} x+4y &= 4z-2 \\ -y &= 1-z \end{cases}$

De la segona equació podem aïllar la $y=-1+z$. Si substituïm a la primera, podrem aïllar la x $x=-4y+4z-2=-4(-1+z)+4z-2=2$.

En resum la solució del sistema és: $x=2; y=-1+z; z=z$

Exercicis

3. Resoleu el sistema d'equacions lineal pel mètode de Gauss $\begin{cases} x - y + 2z &= 8 \\ 3x \quad - 5z &= -12 \\ 2x + y + 4z &= 13 \end{cases}$.

Classifiqueu-lo.

4. Resoleu el sistema d'equacions lineal pel mètode de Gauss $\begin{cases} 2x - y - z &= 2 \\ 3x - 2y + 3z &= 4 \\ -5x + 3y + 5z &= -1 \end{cases}$.

Classifiqueu-lo.

2. Equacions

En aquest apartat estudiarem com resoldre diferents tipus d'equacions. És important que entenguis quin és el procediment de resolució en cada cas perquè ens serà útil en propers lliuraments.

Organitzam l'apartat en els casos:

- Equacions de segon grau i biquadrades.
- Equacions factoritzades i polinòmiques.
- Equacions exponencials i logarítmiques.

2.1 De segon grau i biquadrades

Sabies que les equacions de 2n grau apareixen en problemes del moviment rectilini uniformement accelerat (MRUA)?

Si la posició d'un cotxe en funció del temps és $x = 30t + 5t^2$, a quin instant la seva posició serà 369 m?

Es tracta de resoldre l'equació de segon grau

$$369 = 30t + 5t^2$$

per tal de conèixer els valors de t. Sila resoleu, trobareu dues solucions $t_1 = -12.1$ s i $t_2 = 6.1$ s de les quals només la darrera té sentit físic (el temps ha d'ésser positiu).

Font de la imatge: URL [https://www.electricridecolorado.com/]

Equacions de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$

Les solucions s'obtenen d'aplicar la fórmula següent:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

Anomenam $\Delta = b^2 - 4a$ el **discriminant** de l'equació de segon grau.

- Si $\Delta > 0$ l'equació té dues arrels reals
- Si $\Delta = 0$ es diu que té una solució doble (o repetida)
- Si $\Delta < 0$ l 'equació no té solució real (en té dues de complexes)

Quan $b = 0$ o $c = 0$, es diu que l'equació és **incompleta** i es pot resoldre de forma senzilla.

- $ax^2 + c = 0$ podem aïllar directament x^2. Les solucions són $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.
- $ax^2 + bx = 0$ treim factor comú $x \cdot (ax + b) = 0$. Una solució sempre és $x = 0$ i l'altra $x = -b/a$.

Exemple 7

A cada costat d'un riu hi ha dos arbres. Un arbre fa 12 m i l'altre de 8 m d'alt. L'amplada entre els dos arbres és de20 m. Al cap damunt de cada arbre hi ha un ocell. En un moment donat veuen un peix que apareix a la superfície de l'aigua, entreels dos arbres. Els dos ocells es llancen i arriben al peix al mateix moment. Quina és la distància del peix a l'arbre més alt?

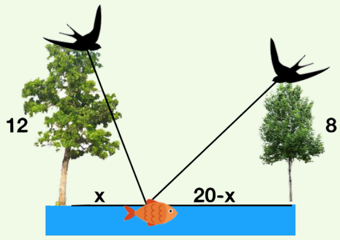


Figura: producció pròpia.

La distància entre cada ocell i el peix ha d'ésser igual. Aplicam el teorema de Pitàgores a cada triangle rectangle.

$$x^2 + 12^2 = (20 - x)^2 + 8^2 \tag{2}$$

Efectuam la identitat notable

$$x^2 + 144 = 400 - 40x + x^2 + 64 \tag{3}$$

i simplificam. Trobam l'equació de primer grau $40x = 320$ que té com a solució $x = 8$ m de l'arbre més alt.

Equacions biquadrades $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Les equacions biquadrades són equacions de quart grau en què falten els termes x i x^3.

Per resoldre-les, efectuam el canvi $t = x^2$, i, per tant, l'equació es transforma en una de segon grau que jasabem resoldre.

Una equació biquadrada pot tenir 4, 2 o cap solució. Les solucions sempre apareixen en parelles $\pm x$.

Exemple 8

Resol l'equació $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ Efectuam el canvi $x^2 = t$. Trobam l'equació

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \tag{4}$$

Resolem l'equació de segon grau

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

Finalment per obtenir la incògnita x, feim l'arrel quadrada de t (pensant que una arrel quadrada pot tenirdos signes):
$x = \pm\sqrt{-1}$ que no és possible i $x = \pm\sqrt{3}$
Aquesta equació biquadrada només té dues solucions $x = \pm\sqrt{3}$.

2.2 Polinòmiques

Equacions factoritzades

Les equacions factoritzades són de la forma

$$x \cdot (x-3) \cdot (x+4) \cdot (2x+1) = 0 \tag{5}$$

és a dir, són el producte de diversos factors **igualat a zero** .

Atenció: Si l'equació no està igualada a zero, per exemple $(x+2) \cdot x = 5$, no està factoritzada, i res del que direm és aplicable.

Això fa que aquestes equacions siguin molt fàcils de resoldre. Únicament cal igualar cada factor a zero.Per a l'exemple anterior, les solucions són: $x = 0,\ x = 3,\ x = -4,\ x = -\frac{1}{2}$

Equacions polinòmiques

Una equació polinòmica és una equació de la forma $P(x) = 0$, on $P(x)$ és un polinomi de grau qualsevol.

El procediment per resoldre-les és:

1. Factoritzar el polinomi. *Consultau l' **annex A** per recordar com es factoritzen polinomis i s'aplica la regla de divisió de Ruffini.*

2. Igualar la factorització a zero

3. Resoldre l'equació factoritzada

Exemple 9

Resol l'equació
$2x^3 - 2x^2 = 4x$

En primer lloc, passam tots els termes al membre de l'esquerra perquè l'equació estigui igualada a zero

$$2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

Ens fixam que podem treure factor comú $2x$ de tots els termes

$$2x \cdot (x^2 - x - 2) = 0$$

El polinomi de segon grau $x^2 - x - 2$ el factoritzant resolent l'equació de segon grau $x^2 - x - 2 = 0$.Aquesta equació té solucions $x = -1$ i $x = 2$.
La factoritza del polinomi és

$$2x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) = 0$$

Ara ja es tracta d'una equació totalment factoritzada i sabem que les seves solucions són $x = 0$, $x = -1$ i $x = 2$.

Exemple 10

Resol l'equació
$6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$

Per factoritzar el polinomi cercam entre els divisors del terme independent: ± 1
Si provam -1, veim que és una arrel

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & |\underline{0} \end{array} \tag{6}$$

Per tant, $x = -1$ és una arrel i la factorització queda:

$$(x+1)\cdot(6x^2 + x - 1) = 0 \tag{7}$$

Ara resolem l'equació de segon grau $6x^2 + x - 1 = 0$ i obtenim les solucions $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}$
L'equació factoritzada és: $(x+1)\cdot 6(x-\frac{1}{3})\cdot(x+\frac{1}{2}) = 0$
Llavors les solucions de l'equació són $x = -1; x = \dfrac{1}{3}; x = -\dfrac{1}{2}$.

Vídeo 2.3: *Equacions polinòmiques*
https://www.youtube.com/watch?v=NogJ8p4-uzk

Exercicis

5. Resoleu $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

6. Resoleu $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$.

2.3 Exponencials i logarítmiques

Equacions exponencials

Les equacions exponencials són aquelles en què la incògnita apareix en algun exponent.Aquestes equacions es resolen a través de **logaritmes** .

En els casos més senzills, és possible resoldre l'equació per tempteig (provant).Per exemple, $2^x = 8$ té solució $x = 3$ perquè $2^3 = 8$.

En altres situacions caldrà utilitzar la definició de logaritme.Per exemple, $2^x = 10$ té solució $x = \log_2 10 \approx 3.3219$ perquè $2^{3.3219\cdots} = 10$

Recorda la definició de logaritme

$$b^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b a \tag{8}$$

Segons quines equacions, serà necessari **prendre el mateix logaritme** al dos membres de l'equació pertal d'eliminar les exponencials. Vegeu el següent exemple.

Exemple 11

Resol l'equació $2^x = 10^{x+1}$

Prenem el logaritme en base deu en els dos membres

$$\log 2^x = \log 10^{(x+1)} \tag{9}$$

Aplicam les propietats del logaritmes. En primer lloc, els exponents baixen davant, multiplicant el logaritme

$$x \log 2 = (x+1) \log 10 \tag{10}$$

Recordam que $\log_{10} 10 = 1$. Ara només falta aïllar la x. Pensa que $\log 2$ és un nombre

$$x \log 2 - x = 1 \tag{11}$$

$$x \cdot (\log 2 - 1) = 1 \tag{12}$$

$$x = \frac{1}{(\log 2 - 1)} \approx -1.4307 \tag{13}$$

Exemple 12

La quantitat de substància radioactiva expressada en y grams es desintegra amb el temps t, en anys transcorregutsdes de 2018, segons l'expressió $y = 100\,e^{-\frac{t}{250}}$.
a) Quina és la quantitat inicial de substància?
b) Es defineix el període de semi-desintegració radioactiva com el temps que ha de transcórrer perquè la quantitatde substància es redueixi a la meitat. Quin és aquest temps? En quin any s'haurà assolit?

Font de la imatge: URL [https://sano-y-salvo.blogspot.com/2012/08/riesgo-de-cancer-asociado-al-uso-de-la_23.html]

a) La quantitat inicial és quan $t = 0$, $y = 100e^{-\frac{0}{250}} = 100$ g

b) Hem de trobar el temps pel qual la quantitat siguin 50 g. Plantejam l'equació

$$50 = 100e^{-\frac{t}{250}} \tag{14}$$

Si aïllam l'exponencial $e^{-\frac{t}{250}} = 0,5$ i **prenem logaritmes Neperians** als dos membres

$$-\frac{t}{250} = \ln 0,5 \Rightarrow t = -250 \ln 0,5 \tag{15}$$

Amb decimals $t = -250 \ln 0,5 \approx 173,29$ anys han de passar. Serà, per tant, l'any 2191 aproximadament.

Equacions logarítmiques

Les equacions logarítmiques són aquelles en què la incògnita apareix en algun logaritme.

En els casos més senzills, és possible resoldre l'equació utilitzant la definició de logaritme.Per exemple, $\log_{10} x = -2$ té solució $x = 10^{-2} = 0.01$ per definició de logaritme.

En equacions que involucrin més d'un logaritme caldrà utilitzar les propietats dels logaritmes. Com a regla general,utilitzarem les propietats per intentar agrupar tots els logaritmes en un únic.

Exemple 13

Resoleu:
a) $\log x + \log 50 = 3$
b) $5\log_2(x+3) = \log_2 32$
c) $2\ln x = \ln(10-3x)$

a) Utilitzam que $\log x = \log_{10} x$, que $\log 1000 = 3$ i

la propietat $\log_b A + \log_b B = \log_b A \cdot B$

$$\cancel{\log}(50x) = \cancel{\log}1000 \quad \rightarrow \quad 50x = 1000 \quad \rightarrow \quad x = 20 \tag{16}$$

b) Tenim en compte que $n\log_b A = \log_b A^n$

$$\log_2(x+3)^5 = \log_2 32 \quad \rightarrow \quad (x+3)^5 = 32 \quad \rightarrow \tag{17}$$

$$\rightarrow \quad x+3 = \sqrt[5]{32} \quad \rightarrow \quad x+3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = -1 \tag{18}$$

c) Utilitzant les propietats dels logaritmes:

$$\ln x^2 = \ln(10-3x) \quad \rightarrow \quad x^2 = 10-3x \tag{19}$$

Arribam doncs, a l'equació de segon grau $x^2 + 3x - 10 = 0$ que té com a posible solucions $x = 2, -5$.La solució -5 no és vàlida perquè no és possible calcular el logaritme d'un nombre negatiu.

Exemple 14

Una unitat molt comú per mesurar la intensitat del renou són els decibels (dB). Els dB estan definitsa partir de la fórmula $dB = 10\log\frac{P}{P_0}$ essent P la potència del renou i P_0 el llindard'audició $P_0 = 10^{-12}$ W/m ^{2}.
Quina és la potència P en W/m ^{2} d'un renou d'una aspiradora de 70 dB?

Plantejam l'equació $70 = 10\log\frac{P}{10^{-12}}$. Aïllam el logaritme
$\log_{10}\left(\frac{P}{10^{-12}}\right) = 7$ i aplicam la definició de logaritme
$\frac{P}{10^{-12}} = 10^7$ i aïllam $P = 10^7 \cdot 10^{-12} = 10^{-5}$ W/m ^{2}.

Vídeo 2.4: *Equacions exponencials i logarítmiques*
https://www.youtube.com/watch?v=aMTJj3eSzWg

Exercicis

7. Resoleu les equacions exponencials:

a) $2^{x-1} = 10$

b) $3 \cdot 5^{-x} = 5^2$

8. Resoleu les equacions logarítmiques:

a) $\log_2 x - \log_2 5 = 4$

b) $\ln x = 2\ln(x-2)$

3. Inequacions

Sovint empram inequacions sense adonar-nos-en.

Si l'entrada a un parc d'atraccions costa 37 € i el pas anual 139 €,quantes vegades com a mínim hem d'anar al parc perquè el pas surti rendible?

Si anomenam x el nombre mínim de vegades que hem d'anar al parc, aleshoress'ha de complir que

$$37x \geq 139$$

Aquesta inequació és certa per a nombres naturals tals que $x \geq 4$, és a dir, 4 o més visites al parc.

Font de la imatge: URL [https://www.campingplayayfiesta.com/es/que-hacer-tarragona-costa-daurada/parques-tematicos]

Una inequació és una equació en la qual hem canviat el signe igual per una desigualtat. Les desigualtats són:

- $<$ menor $\leq$ menor o igual
- $>$ major $\geq$ major o igual

Resoldre una **inequació** significa trobar tots els valors de la incògnita que compleix la desigualtat. Habitualment, hi haurà **infinites solucions** que s'expressen en forma d' **interval** .

Inequacions de 1r grau

Són inequacions de primer grau per exemple $2x + 1 < 7$ o també $8 - x \geq 2(x - 1)$.

> Quan canviam el signe d'una inequació es gira el sentit de la desigualtat. Per exemple:
>
> $$1 - x < 2 \quad \Rightarrow \quad -1 + x > -2 \tag{20}$$

Exemple 15

Resol $-2x + 1 < 7$

Canviam el signe $2x - 1 > -7$ i aïllam x com si fos una equació de primer grau. $2x > -7 + 1 \Rightarrow 2x > -6 \Rightarrow x > -3$. Els nombres majors que -3, en forma d'interval $(-\infty, -3)$.

Inequacions de 2n grau

Les inequacions quadràtiques són de la forma $ax^2 + bx + c < 0$. Seguim el següent procediment per resoldre-les:

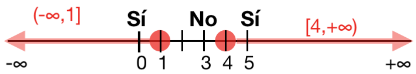
- Resolem primer l'equació igualada a zero. Trobam dues solucions que suposem que estan ordenades x_1, x_2
- Triam 3 nombres, un abans de x_1, un després de x_2 i el tercer entre ells dos.
- Comprovam si es compleix la inequació per cadascun d'aquests nombres.Si no es compleix descartam l'interval en què es troba el nombre.

Vegem-ho millor amb un exemple:

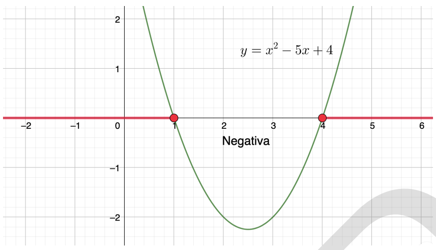
Exemple 16

Resol $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

Primer resolem l'equació de segon grau $x^2 - 5x + 4 = 0$. Té dues solucions $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$.
Triam tres valors, per exemple $x = 0$, 3 i 5 i comprovam si es compleix la inequació $x^2 - 5x + 4 \geq 0$. Anotam els resultats sobre la recta real



En conclusió, la solució és la unió de dos intervals $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$. Els intervals són semitancats perquè el símbol de la desigualtat és major o igual.
Alternativament, es pot resoldre gràficament aquesta inequació si representam la gràfica de la paràbola $y = x^2 - 5x + 4$ i observam els intervals en què la gràfica és major o igual a zero.



Exercicis

9. Se sap que una fotocopiadora produeix una còpia al preu de 5cèntims d'euro. Si s'utilitza una multicopista, cal enregistrarun clixé electrònic que costa 57 cèntims d'euro, sortintaleshores cada còpia al preu d'1 cèntim. A partir de quinnombre de còpies resulta rendible l'ús de la multicopista?

10. Una finca té forma de triangle rectangle on un dels catets és 10 m més curt que l'altre.A partir de quina mida del catet més llarg, l'àrea del terreny serà superior a 300 m 2 ?

3.1 Sistemes d'inequacions

Sistemes d'inequacions amb una incògnita

Per resoldre un sistema d'inequacions amb una incògnita seguim aquestes passes:

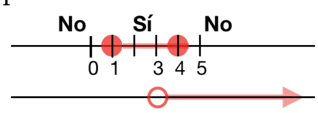
- Resolem cada inequació per separat
- Cercam la **intersecció dels intervals** (els nombres que tenen en comú) perquè la solució complexi a l'hora totes les desigualtats.

Vídeo 2.5: *Situacions amb inequacions*
https://www.youtube.com/watch?v=JRm9hNFaHPE

Exemple 17

Resol $\begin{cases} x^2-5x+4\leq 0 \\ 3x-8>1 \end{cases}$

Resolem la primera inequació $x^2-5x+4\leq 0$ que és de segon grau. Seguim el mateix procediment queen darrer exemple i trobam l'interval $[1,4]$.
Ara resolem l'altra inequació que és de primer grau $3x-8>1 \Rightarrow 3x>9 \Rightarrow x>3$. Trobam la semirecta $(3,+\infty)$.
Representam els dos intervals i calculam la seva intersecció, és a dir, trobar tots aquells nombres queestan repetits en els dos intervals.



La solució és $(3,4]$, tots els nombres compresos entre 3 i 4, el 3 exclòs.

Exemple 18

Un cotxe de benzina es ven per 15.000 € i té un cost de consum de 0,20 €/km.Un cotxe de gasoil costa 20.000 € i consumeix 0,14 €/km.Un cotxe elèctric 30.000 € i té un cost de 0,03 €/km.
A partir de quants km recorreguts, surt més rentable el cotxe elèctric?

Font de la imatge: URL [https://amiitel.org/plan-renove-de-vehiculos-2020/]

Hem d'imposar que el cost del cotxe benzina sigui superior a l'elèctric i tambéel cost de gasoil sigui superior a l'elèctric. Trobam un sistema d'inequacionsque resoldrem pel mètode que hem vist abans

$$15000 + 0,20x > 30000 + 0,03x$$

$$20000 + 0,14x > 30000 + 0,03x$$

De la primera inequació deduïm que $0,17x > 15000$, $x > 88236$ km.
De la segona inequació deduïm que $0,11x > 10000$, $x > 90910$ km.
La solució del sistema és $x > 90910$ km, és a dir, a partir de 90910 km, surt mésa compte la compra del cotxe elèctric.

4. Annex A: Factorització de polinomis

Recorda: Identitats notables

Quadrat d'una suma:	$(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$
Quadrat d'una diferència:	$(a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$
Suma per diferència:	$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Vegem en quins casos sabem descompondre un polinomi en factors i quines passes hem de realitzar:

1. Sempre que sigui possible, començam traient factor comú. Recorda

que es pot treure factor comú la potència més petita de x si el polinomi no té terme independent.

$$3x^2 + 21x = 3x \cdot (x + 7) \tag{21}$$

2. Identificam possibles identitats notables

$$4x^3 + 4x^2 + x = x \cdot (\underbrace{4x^2 + 4x + 1}) = x \cdot (2x + 1)^2 \tag{22}$$

   En aquest exemple hem identificat el quadrat d'una suma.

3. Queda un polinomi de segon grau $P(x) = ax^2 + bx + c$? Aleshores, podem resoldre l'equació de segon grau ambla fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{23}$$

   La factorització és $P(x) = \mathbf{a} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

   Atenció: No us oblideu de copiar el coeficient **a** davant de la factorització.

4. En altre cas, factoritzam utilitzant la **regla de Ruffini** .

Anem a veure un exemple en què cal aplicar la regla de Ruffini.

Exemple 19

Descompon en factors el polinomi $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Cercam els divisors enters del terme independent $div(6) = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Provam a fer ladivisió per Ruffini per a cadascun d'ells i ens quedam amb aquells que doni exacta

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -5 & -6 \\
-1 & & -1 & -1 & 6 \\
\hline
 & 1 & 1 & -6 & |\underline{0} \\
2 & & 2 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 3 & |\underline{0} & \\
-3 & & -3 & & \\
\hline
 & 1 & |\underline{0} & &
\end{array}$$

Hem pogut fer la factorització completa per Ruffini. Les arrels del polinomi són $x = -1$, $x = 2$ i $x = -3$.La factorització s'obté canviant el signe de les arrels
$P(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$
La comprovació per saber si la factorització és correcte, consisteix en multiplicar els polinomis
$(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = (x^2 - x - 2)(x + 3) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ que és el polinomi que ens havien donat.

Un polinomi que no es pot descompondre més s'anomena irreductible. Són irreductibles:

- Els polinomis de primer grau $(bx + c)$
- Els polinomis de segon grau $(ax^2 + bx + c)$ que no tinguin solucions reals

Exemple 20

Descompon en factors el polinomi $P(x) = x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2$.

En primer lloc cal treure factor comú la potència menor de x,
$P(x) = x^2(x^4 - 15x^2 - 42x - 40)$
El polinomi de quart grau cal factoritzar-lo per la regla de Ruffini. Per això cercam els divisors delterme independent del polinomi
div(40)= $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20, \pm40$. I anam provant quines divisions entre $(x - a)$ són exactes. Cal seguir un ordre i intentar sempre començar per els divisors més baixos.
Comprovam que 1, -1, 2 no són arrels; és a dir, la divisió no és exacta. Tot seguit provam -2

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -15 & -42 & -40 \\ -2 & & -2 & 4 & 22 & 40 \\ \hline & 1 & -2 & -11 & -20 & |\underline{0} \end{array} \tag{24}$$

Ara basta cercar entre els divisors de 20. Provam 5

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -11 & -20 \\ 5 & & 5 & 15 & 20 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & |\underline{0} \end{array} \tag{25}$$

Donat que el quocient queda un polinomi de segon grau $x^2 + 3x + 4$ comprovam si té arrels resolent l'equació desegon grau:
$x^2 + 3x + 4 = 0$ no té solucions reals, aleshores no es pot descompondre més i deim que és un polinomiirreductible.
Finalment, la factorització queda així

$$x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2 = x^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (x^2 + 3x + 4) \tag{26}$$

Vídeo 2.6: *Divisió per Ruffini*
https://www.youtube.com/watch?v=IrLKiZiqcaE

Vídeo 2.7: *Factorització de polinomis*
https://www.youtube.com/watch?v=z6HGMgTcYcM

Exercicis

11. Factoritzau el polinomi $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ per aplicació de la regla de Ruffini.

12. Factoritzau el polinomi $P(x) = 4x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 18x$. *Ajuda: Comenceutraient factor comú, després trobeu almenys una arrel per Ruffini i finalment identifiqueu una identitat notable oresolgueu l'equació de segon grau que us quedarà.*