

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Siguin les matrius:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i λ un paràmetre real qualsevol.

- (a) Calculau la matriu $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$. (2 punts)
- (b) Calculau la matriu $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2$. (3 punts)
- (c) Calculau, si existeixen, els valors del paràmetre λ per als quals es satisfà la relació $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 = \mathbf{B}$. (5 punts)

2. Considerau el sistema d'equacions lineals depenent del paràmetre a ,

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x - 2y & = & 4 \\ ay & = & -3 \\ ax + 3z & = & 0 \end{array} \right\}$$

- (a) Discutiu el sistema segons el paràmetre a . (4 punts)
- (b) Per al valor del paràmetre a per al qual el sistema té solució, resoleu-lo. (6 punts)

3. Considerau la funció $f(x) = e^{3x-2}$.

- (a) Determinau les coordenades del punt en el qual la tangent a la gràfica de la funció $y = f(x)$ té pendent igual a $3/e$. Escriviu l'equació d'aquesta recta tangent. (4 punts)
- (b) Calculau el $\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$. (2 punts)
- (c) Feu un esbós de la gràfica de la funció $y = f(x)$. (2 punts)
- (d) Calculau l'àrea de la superfície fitada per la gràfica de la funció $y = f(x)$ i les rectes $x = 0$ i $y = 1$. (2 punts)

4. Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+a}{2x-4} & \text{si } x \leq 0, \\ 10x^2 + x + b & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Calculau la condició que han de complir els paràmetres a i b perquè la funció $y = f(x)$ sigui contínua. (3 punts)
- (b) Calculau $f'(x)$. (4 punts)
- (c) Trobau la condició i calculau els paràmetres a i b perquè la funció $y = f(x)$ sigui derivable. (3 punts)

5. Del paral·lelogram (quadrilàter els costats oposats del qual són paral·lels) $ABCD$, es coincideixen els vèrtexs consecutius $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ i $C(4, 3, -2)$.

- (a) Calculau el cosinus de l'angle que formen els vectors \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{AC} . (2 punts)
- (b) Calculau les coordenades del punt mitjà, M , del segment AC . (2 punts)
- (c) Calculau les coordenades del vèrtex D . (4 punts)
- (d) Calculau l'àrea del paral·lelogram $ABCD$. (2 punts)

6. Donades les rectes

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - z = 1, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -4 - \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) Calculau una equació vectorial per a la recta r . (2 punts)
- (b) Calculau la posició relativa de les rectes r i s (3 punts)
- (c) Calculau l'equació general del pla perpendicular a la recta r que passa pel punt $P(2, 0, -1)$. (2 punts)
- (d) Calculau l'equació general del pla paral·lel a la recta r que conté a la recta s . (3 punts)



7. Donats dos esdeveniments A i B , es coneixen les probabilitats següents: $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.4$ i $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.58$, on \bar{A} i \bar{B} indiquen els esdeveniments contraris (o complementaris) de A i B , respectivament. Calculeu les probabilitats següents:
- (a) $P(\bar{A})$, $P(B)$ i $P(A \cap B)$. Són A i B esdeveniments independents? (4 punts)
 - (b) $P(A \cup B)$. (1 punt)
 - (c) $P(B \cap \bar{A})$. (3 punts)
 - (d) $P(A/B)$ i $P(\bar{A}/B)$. (2 punts)
8. El temps de durada de les actualitzacions d'un cert programa antivirus segueix una distribució estadística normal de mitjana 8.8 mesos amb una desviació típica de 3 mesos.
- (a) Quin percentatge de les actualitzacions supera els 10 mesos? (3 punts)
 - (b) Quin percentatge de les actualitzacions s'ha mantingut entre 7 i 10 mesos? (3 punts)
 - (c) Per a quin valor del paràmetre c es té que l'interval $(8.8 - c, 8.8 + c)$ és l'interval de temps de durada del 98% de les actualitzacions? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$