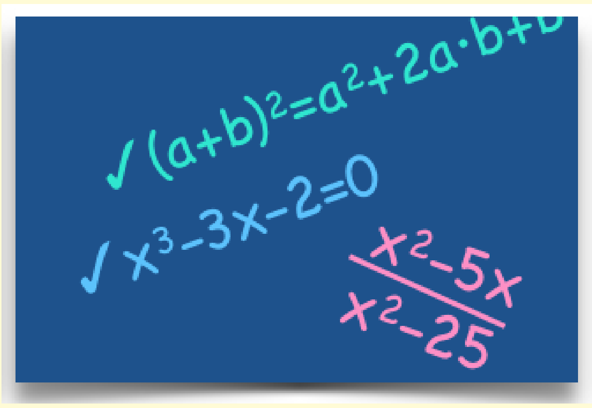
https://iedib.net/

Matemáticas I

Entrega 2: Álgebra



Josep Mulet
Ámbito Científico
IEDIB

Atención:

Estimado lector,

Este documento ha sido traducido semi-automaticamente de la versión original en catalán. Por este motivo, es posible que contenga errores o falten partes sin traducir. No obstante, se ha comprobado que las fórmulas se renderizan correctamente.

Por ello, se recomienda, siempre que sea posible, trabajar directamente con la versión en catalán.

Índice

1. Factorización de polinomios

La factorización de polinomios presenta mucha semejanza con la descomposición factorial de números. En la ESO aprendimos que había dos tipos de números: compuestos y primos. Un número compuesto se puede descomponer como producto de números primos. Por ejemplo el número 30 es compuesto porque es divisible entre los números primos 2, 3 y 5

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \tag{1}$$

En este apartado aprenderemos a hacer lo mismo pero con polinomios. Es decir, si tenemos un polinomio $P(x)$ queremos expresar como producto de polinomios 'primos' (mejor llamarlos irreducibles). Para hacer esto necesitamos primero repasar la división de polinomios.

Divisibilidad de polinomios

En una división entre dos polinomios $P(x)$ (llamado dividendo) y $d(x)$ (divisor), obtenemos un polinomio cociente $Q(x)$ y un residuo $R(x)$.

$$\begin{array}{ll} P(x) & \underline{|\, d(x)} \\ \underbrace{R(x)} & Q(x) \end{array} \tag{2}$$

Se cumple que $P(x) = d(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Para poder hacer la división $P(x) : d(x)$, los grados deben cumplir que grado $P \geq$ grado d

Para efectuar la división de $P(x) : (x \pm a)$ podemos utilizar la regla de Ruffini. En cualquier otro caso tenemos que utilizar el algoritmo general. Veamos a continuación un ejemplo de cada caso:

EJERCICIO RESUELTO 1

Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan la división del polinomio $P(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $Q(x) = 2x^2 - x + 3$

$$\begin{array}{r|l}
6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \underline{\;2x^2 - x + 3\;} \\
\underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \phantom{{}+3x-2} & 3x^2 + 4x - 2 \\
8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
\underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \phantom{{}-2} & \\
-4x^2 - 9x - 2 & \\
\underline{4x^2 - 2x + 6} & \\
\underbrace{-11x + 4} &
\end{array} \tag{3}$$

El cociente es $Q(x) = 3x^2 + 4x - 2$ y el residuo $R(x) = -11x + 4$.

Cuando aplicamos la regla de Ruffini para dividir $P(x) : (x - a)$, **hay que añadir ceros** si el polinomio P le faltan términos.

EJERCICIO RESUELTO 2

Realiza esta división $(x^3 + 5x - 2) : (x - 4)$ por la regla de Ruffini:

Vemos que el polinomio dividendo le falta el término x^2, por eso escribimos un cero a la caja de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & 5 & -2 \\
4 & & 4 & 16 & 84 \\
\hline
 & 1 & 4 & 21 & \underline{|82}
\end{array} \tag{4}$$

El cociente es $Q(x) = x^2 + 4x + 21$ y el resto de la división $R = 82$.

Vídeo 2.1: *División por Ruffini*
https://www.youtube.com/watch?v=IrLKiZiqcaE

Si el resto de la división es igual a cero $R = 0$, decimos que la **división es exacta** o que el polinomio $P(x)$ es **divisible** entre $d(x)$.

Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^2+2x-3$ es divisible entre $(x-1)$. Efectivamente si efectuamos la división $(x^2 + 2x - 3) : (x - 1)$, obtenemos de cociente $Q = (x + 3)$ y residuo $R = 0$.

Una condición necesaria y suficiente para que un polinomio $P(x)$ sea divisible entre $(x - a)$ es que a sea una raíz o solución de $P(x)$. Es decir $P(a) = 0$. Efectivamente, podemos comprobar que en el ejemplo anterior $P(x) = x^2 + 2x - 3$ que cumple $P(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$.

Si el polinomio $x^2 + 2x - 3$ es divisible entre $(x - 1)$, esto quiere decir que es posible descomponerla como el producto de dos polinomios:

$$P(x) = d(x) \cdot Q(x) = (x - 1) \cdot (x + 3) \tag{5}$$

dado que el residuo es $R = 0$. Esto es la esencia de la **factorización** de polinomios que pasaremos a estudiar a continuación.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Efectúa la división $(8x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 6) : (x^2 + 3x - 5)$ y diga cuál es el cociente y el resto.

2. Efectúa la división $(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5x - 7) : (x + 3)$ aplicando la regla de Ruffini. Dejar escritos los polinomios cociente y el resto.

1.1 Procedimiento para factorizar un polinomio

Recuerda: Identidades notables

Cuadrado de una suma:	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Cuadrado de una diferencia:	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma por diferencia:	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Veamos en qué casos sabemos descomponer un polinomio en factores y qué pasos debemos realizar:

1. Siempre que sea posible, empezamos sacando factor común

$$3x^2 + 21x = 3x \cdot (x + 7) \tag{6}$$

2. identificamos posibles identidades notables

$$4x^3 + 4x^2 + x = x \cdot (\underbrace{4x^2 + 4x + 1}) = x \cdot (2x + 1)^2 \tag{7}$$

En este ejemplo hemos identificado el cuadrado de una suma.

3. Queda un polinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$? Entonces, podemos resolver la ecuación de segundo grado con la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8}$$

La factorización es $P(x) = \mathbf{a} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Atención: No se olvide de copiar el coeficiente $\mathbf{a}$ delante de la factorización.

4. En otro caso, factorizamos utilizando la **regla de Ruffini**.

Vamos a ver un ejemplo en el que hay que aplicar la regla de Ruffini.

EJERCICIO RESUELTO 3

Descompone en factores el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Buscamos los divisores enteros del término independiente $div(6) = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Probamos a hacer la división por Ruffini para cada uno de ellos y nos quedamos con los que dé exacta

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \underline{|0} \\ 2 & & 2 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & \underline{|0} & \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & \underline{|0} & & \end{array} \tag{9}$$

Hemos podido hacer la factorización completa por Ruffini. Las raíces del polinomio son $x = -1$, $x = 2$ y $x = -3$. La factorización se obtiene cambiando el signo de las raíces

$P(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

La comprobación para saber si la factorización es correcta, consiste en multiplicar los polinomios

$(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = (x^2 - x - 2)(x - 3) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ que es el polinomio que nos habían dado.

Un polinomio que no se puede descomponer más se llama irreducible. Son irreducibles:

- Los polinomios de primer grado $(bx + c)$

- Los polinomios de segundo grado $(ax^2 + bx + c)$ que no tengan soluciones reales

EJERCICIO RESUELTO 4

Descompone en factores el polinomio $P(x) = x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2$.

En primer lugar hay que sacar factor común la potencia menor de x,

$P(x) = x^2(x^4 - 15x^2 - 42x - 40)$

El polinomio de cuarto grado hay factorizarlo por la regla de Ruffini. Por eso buscamos los divisores del término independiente del polinomio

div (40) = $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20, \pm40$. Y vamos probando qué divisiones entre $(x - a)$ son exactos. Hay que seguir un orden e intentar siempre empezar por los divisores más bajos.

Comprobamos que 1, -1, 2 no son raíces; es decir, la división no es exacta. A continuación probamos -2

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -15 & -42 & -40 \\ -2 & & -2 & 4 & 22 & 40 \\ \hline & 1 & -2 & -11 & -20 & \underline{|0} \end{array} \quad (10)$$

Ahora basta buscar entre los divisores de 20. probamos 5

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -11 & -20 \\ 5 & & 5 & 15 & 20 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & \underline{|0} \end{array} \quad (11)$$

Dado que el cociente queda un polinomio de segundo grado $x^2 + 3x + 4$ comprobamos si tiene raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$x^2 + 3x + 4 = 0$ no tiene soluciones reales, entonces no se puede descomponer más y decimos que es un polinomio irreducible.

Finalmente, la factorización queda así

$$x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2 = x^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (x^2 + 3x + 4) \quad (12)$$

Vídeo 2.2: *Factorización de polinomios*
https://www.youtube.com/watch?v=z6HGMgTcYcM

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Factorizad el polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ por aplicación de la regla de Ruffini.

4. Factorizad el polinomio $P(x) = 4x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 18x$. *Ayuda: Comience sacando factor común, después encuentra al menos una raíz por Ruffini y finalmente identifique una identidad notable o resuelva la ecuación de segundo grado que le quedará.*

2. Fracciones algebraicas

Se denomina fracción algebraica al cociente de dos polinomios $\frac{P(x)}{d(x)}$

Son ejemplos de fracciones algebraicas $\frac{2x}{x+1}; \frac{5}{x^2-1}; \frac{x^3+2x^2+5}{x^2-2x+1}$.

En cambio, las fracciones $\frac{x^2+x}{x}; \frac{x^2-9}{x+3}$ son realmente polinomios que las divisiones son exactas. Puede comprobar que estas divisiones dan $(x+1)$ y $(x-3)$ respectivamente.

Vídeo 2.3: *Fracciones algebraicas*
https://www.youtube.com/watch?v=xDfrUuPG8qY

2.1 Simplificación

Seguramente recuerdas que, en algunos casos, las fracciones numéricas se pueden simplificar. Por ejemplo:

$$\frac{10}{6} = \frac{\cancel{2}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot 3} = \frac{5}{3} \tag{13}$$

Las fracciones algebraicas se comportan de una manera muy parecida a las fracciones numéricas. Para simplificar una fracción seguiremos este procedimiento:

1. factorizar los numeradores y denominadores.
2. Cancelamos todos los factores que están repetidos en el numerador y el denominador. **Para poder tachar el factor debe estar multiplicando los otros factores.**
3. (Opcional) Si queremos, multiplicamos los factores que quedan en el numerador y el denominador.

EJERCICIO RESUELTO 5

Simplifica la fracción $\dfrac{x^2-3x}{x^3-9x}$

El numerador se factoriza fácilmente, simplemente sacando factor común $x^2-3x=x(x-3)$.

Para factorizar el denominador, primero sacamos factor común $x^3-9x=x\cdot(x^2-9)$. Del polinomio de segundo grado identificamos una identidad notable $x\cdot(x+3)\cdot(x-3)$.

$$\frac{x^2-3x}{x^3-9x}=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x}\cdot(x+3)\cdot\cancel{(x-3)}}=\frac{1}{x+3} \qquad (14)$$

Atención: Para poder tachar o simplificar un factor o paréntesis debe estar multiplicando los otros factores. Nunca si aparecen sumando o restando.

Todos estos ejemplos están mal. Puedes encontrar dónde están los errores?

$$\frac{\cancel{x^2}+1}{\cancel{x^2}-2x}=\frac{1}{-2x} \qquad (15)$$

$$\frac{2x+\cancel{1}}{x+\cancel{1}}=\frac{2x}{x}=2 \qquad (16)$$

2.2 Operaciones

Como veremos en este apartado, las operaciones con fracciones algebraicas se hacen de forma muy parecida que las operaciones con fracciones numéricas.

Mínimo común múltiplo de polinomios

Antes de ver cómo se suman y restan fracciones, necesitamos reducirlas a denominador común. Por eso hemos de repasar cómo se calcula el mínimo común múltiplo (min.c.m) de una serie de polinomios.

Procedimiento:

- Factorizamos todos los polinomios
- multiplicamos todos los factores **comunes y no comunes** que han aparecido; si están repetidos sólo cogemos aquel que esté elevado al mayor exponente

EJERCICIO RESUELTO 6

Calcula
$min.c.m(x, x^2+x, x^2+2x+1)$

Las factorizaciones son $x = x$; $x^2+x = x\cdot(x+1)$ y $x^2+2x+1 = (x+1)^2$

$$min.c.m(x, x^2+x, x+1) = x\cdot(x+1)^2 \tag{17}$$

En general no es necesario efectuar la multiplicación resultante.

Suma y resta

Para sumar fracciones algebraicas, se busca el min.c.m los denominadores, se reduce a denominador común y se suman los numeradores.

La resta es una caso especial de la suma.

EJERCICIO RESUELTO 7

Opera:
$\frac{x+2}{x} + \frac{3}{x(x-1)} - \frac{2x+1}{x-1} =$

El $min.c.m(x, x(x-1), x-1) = x(x-1)$. Después reducimos denominador común y operamos

$$\begin{aligned} &\frac{x+2}{x} + \frac{3}{x(x-1)} - \frac{2x+1}{x-1} = \\ &= \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{3}{x(x-1)} - \frac{x\cdot(2x+1)}{x(x-1)} = \\ &\frac{(x+2)(x-1)+3-x\cdot(2x+1)}{x(x-1)} = \cdots \end{aligned} \tag{18}$$

Ahora sólo falta operar y simplificar el numerador

$$\cdots = \frac{-(x^2-1)}{x(x-1)} \tag{19}$$

Como tarea os dejo comprobar que la fracción resultante se puede simplificar y encontramos $\frac{-(x+1)}{x}$

Multiplicación y división

El **producto** de dos fracciones algebraicas es una fracción algebraica que se obtiene de multiplicar los dos numeradores y los dos denominadores.

$$\frac{x^2-9}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x-3} = \frac{(x^2-9)\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-3)} \tag{20}$$

En vez de efectuar las multiplicaciones de los numeradores y denominadores, haremos todo lo contrario. Intentaremos factorizarlos más para ver si podemos simplificarlos

$$\frac{(x^2-9)\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-3)} = \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot\cancel{(x-3)}} = \frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+2)} \tag{21}$$

Esta forma es más rápida porque operamos y simplificam a la vez.

La **inversa de una fracción** es una nueva fracción que se obtiene de cambiar el numerador por el denominador.

$$\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^{-1} = \frac{x-3}{x-1} \tag{22}$$

El **cociente** de dos fracciones es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

Por ejemplo:

$$\frac{x}{x-3} : \frac{x-1}{x-3} = \frac{x}{x-3}\cdot\frac{x-3}{x-1} = \frac{x\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}} \tag{23}$$

Si simplificamos tachando factores repetidos, obtenemos $\frac{x}{x-1}$

3. Ecuaciones

En este apartado estudiaremos cómo resolver diferentes tipos de ecuaciones. Es importante que entiendas cuál es el procedimiento de resolución en cada caso ya que será la base para próximas entregas.

Organizamos el apartado en los casos:

- Ecuaciones de segundo grado y bicuadradas
- Ecuaciones polinómicas
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas
- Sistemas de ecuaciones

3.1 De segundo grado y bicuadradas

- ***Ecuaciones de segundo grado*** $ax^2+bx+c=0$

Las soluciones se obtienen de aplicar la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{24}$$

Llamamos $\Delta = b^2 - 4a$ el **discriminante** de la ecuación de segundo grado.

- Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales
- Si $\Delta = 0$ se dice que tiene una solución doble (o repetida)
- Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene solución real (tiene dos de complejas)

Cuando $b = 0$ o $c = 0$, se dice que la ecuación es **incompleta** y se puede resolver de forma sencilla.

- $ax^2 + c = 0$ podemos aislar directamente x^2. Las soluciones son $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$.
- $ax^2 + bx = 0$ sacamos factor común $x\,(ax + b) = 0$. Una solución siempre es $x = 0$ y la otra $x = -b/a$.

EJERCICIO RESUELTO 8

Escribir una ecuación de segundo grado que tenga como soluciones -2 y 3

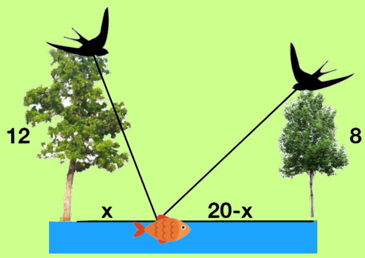
Por lo que sabemos de la factorización de polinomios, el polinomio $(x+2)\cdot(x-3)$ tiene como raíces (o soluciones) las que pide el problema. Entonces la ecuación que nos piden es $(x+2)\cdot(x-3) = 0$

efectuamos la multiplicación y la ecuación deseada $x^2 - x - 6 = 0$

En general, si tenemos una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$, las dos soluciones x_1, x_2 de la ecuación cumplen que $x_1 \cdot x_2 = c$ y $x_1 + x_2 = -b$. Estas se conocen como las relaciones de *Cardano-Vieta*.

EJERCICIO RESUELTO 9

A cada lado de un río hay dos árboles. Un árbol hace 12 m y el otro de 8 m de alto. La anchura entre los dos árboles es de 20 m. Al cabo sobre cada árbol hay un pájaro. En un momento dado ven un pez que aparece en la superficie del agua, entre los dos árboles. Los dos pájaros se lanzan y llegan al pescado al mismo momento. ¿Cuál es la distancia del pescado al árbol más alto?



La distancia entre cada pájaro y el pez ha de ser igual. Aplicamos el teorema de Pitágoras cada triángulo rectángulo.

$$x^2 + 12^2 = (20 - x)^2 + 8^2 \tag{25}$$

efectuamos la identidad notable

$$x^2 + 144 = 400 - 40x + x^2 + 64 \tag{26}$$

y simplificam. Encontramos la ecuación de primer grado $40x = 320$ que tiene como solución $x = 8$ m del árbol más alto.

Ecuaciones bicuadradas $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Las ecuaciones bicuadradas son ecuaciones de cuarto grado en que faltan los términos x y x^3.

Para resolverlas, efectuamos el cambio $t = x^2$, y, por tanto, la ecuación se transforma en una de segundo grado que ya sabemos resolver.

Una ecuación bicuadrada puede tener 4, 2 o ninguna solución. Las soluciones siempre aparecen en parejas $\pm x$.

EJERCICIO RESUELTO 10

Resuelve la ecuación
$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ efectuamos el cambio $x^2 = t$. Encontramos la ecuación

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \tag{27}$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases} \tag{28}$$

Finalmente para obtener la incógnita x, hacemos la raíz cuadrada de t (pensando que una raíz cuadrada puede tener dos signos):

$x = \pm\sqrt{-1}$ que no es posible y $x = \pm\sqrt{3}$

Esta ecuación bicuadrada sólo tiene dos soluciones $x = \pm\sqrt{3}$.

3.2 Polinómicas

Ecuaciones factorizadas

Las ecuaciones factorizadas son de la forma

$$x \cdot (x-3) \cdot (x+4) \cdot (2x+1) = 0 \tag{29}$$

es decir, son el producto de varios factores **igualado a cero**.

Esto hace que estas ecuaciones sean muy fáciles de resolver. Únicamente hay que igualar cada factor a cero. Para el ejemplo anterior, las soluciones son: $x = 0,\ x = 3,\ x = -4,\ x = -\frac{1}{2}$

Ecuaciones polinómicas

Una ecuación polinómica es una ecuación de la forma $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado cualquiera.

El procedimiento para resolverlas es:

1. Factorizar el polinomio
2. Igualar la factorización a cero
3. Resolver la ecuación factorizadas

EJERCICIO RESUELTO 11

Enunciado	Solución
Resuelve la ecuación $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$	Para factorizar el polinomio buscamos entre los divisores del término independiente: ± 1 Si probamos -1, vemos que es una raíz $$\begin{array}{r\|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \underline{\|0} \end{array} \quad (30)$$ Por lo tanto, $x = -1$ es una raíz y la factorización queda: $$(x+1)\cdot(6x^2+x-1) = 0 \quad (31)$$ Ahora resolvemos la ecuación de segundo grado $6x^2 + x - 1 = 0$ y obtenemos las soluciones $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$ La ecuación factorizadas es: $(x+1)\cdot 6(x-\frac{1}{3})\cdot(x+\frac{1}{2}) = 0$ Entonces las soluciones de la ecuación son $x = -1; x = \frac{1}{3}; x = -\frac{1}{2}$.

Vídeo 2.4: *Ecuaciones polinómicas*
https://www.youtube.com/watch?v=NogJ8p4-uzk

EJERCICIOS PROPUESTOS

5. Resuelva $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

6. Resuelva $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$.

3.3 Exponenciales y logarítmicas

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en que la incógnita aparece en algún exponente. Estas ecuaciones se resuelven a través de **logaritmos**.

En los casos más sencillos, es posible resolver la ecuación por tanteo (probando). Por ejemplo, $2^x = 8$ tiene solución $x = 3$ porque $2^3 = 8$.

En otras situaciones habrá que utilizar la definición de logaritmo. Por ejemplo, $2^x = 10$ tiene solución $x = \log_2 10 \approx 3{,}3219$ porque $2^{3{,}3219\cdots} = 8$

Recuerda la definición de logaritmo

$$b^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b a \tag{32}$$

Según qué ecuaciones, será necesario **tomar el mismo logaritmo** en dos miembros de la ecuación para eliminar las exponenciales. Véase el siguiente ejemplo.

EJERCICIO RESUELTO 12

Resuelve la ecuación
$2^x = 10^{x+1}$

Tomamos el logaritmo en base diez en los dos miembros

$$\log 2^x = \log 10^{(x+1)} \tag{33}$$

Aplicamos las propiedades del logaritmos. En primer lugar, los exponentes bajan delante, multiplicando el logaritmo

$$x \log 2 = (x+1) \log 10 \tag{34}$$

Recordamos que $\log_{10} 10 = 1$. Ahora sólo falta aislar la x. Piensa que $\log 2$ es un número

$$x \log 2 - x = 1 \tag{35}$$

$$x \cdot (\log 2 - 1) = 1 \tag{36}$$

$$x = \frac{1}{(\log 2 - 1)} \approx -1{,}4307 \tag{37}$$

EJERCICIO RESUELTO 13

La cantidad de sustancia radiactiva expresada en y gramos se desintegra con el tiempo t, en años transcurridos desde 2018, según la expresión $y = 100\, e^{-\frac{t}{250}}$.
a) ¿Cuál es la cantidad inicial de sustancia?
b) Se define el período de semi-desintegración radiactiva como el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad de sustancia se reduzca a la mitad. ¿Cuál es este tiempo? ¿En qué año se habrá alcanzado?

a) La cantidad inicial es cuando $t = 0$, $y = 100e^{-\frac{0}{250}} = 100$ g

b) Debemos encontrar el tiempo por el que la cantidad sean 50 g. Planteamos la ecuación

$$50 = 100e^{-\frac{t}{250}} \tag{38}$$

Si despejando del exponencial $e^{-\frac{t}{250}} = 0,5$ y **tomamos logaritmos neperianos** los dos miembros

$$-\frac{t}{250} = \ln 0,5 \Rightarrow t = -250 \ln 0,5 \tag{39}$$

Con decimales $t = -250 \ln 0,5 \approx 173,29$ años han de pasar. Será, por tanto, en el año 2191 aproximadamente.

Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en que la incógnita aparece en algún logaritmo.

En los casos más sencillos, es posible resolver la ecuación utilizando la definición de logaritmo. Por ejemplo, $\log_{10} x = -2$ tiene solución $x = 10^{-2} = 0{,}01$ por definición de logaritmo.

En ecuaciones que involucren más de un logaritmo habrá que utilizar las propiedades de los logaritmos. Como regla general, utilizaremos las propiedades para intentar agrupar todos los logaritmos en uno solo.

EJERCICIO RESUELTO 14

Resuelve:
a) $\log x + \log 50 = 3$
b) $5 \log_2(x+3) = \log_2 32$
c) $2 \ln x = \ln(10 - 3x)$

a) Utilizamos que $\log x = \log_{10} x$, que $\log 1000 = 3$ y

la propiedad $\log_b A + \log_b B = \log_b A \cdot B$

$$\cancel{\log}(50x) = \cancel{\log}1000 \quad \rightarrow \quad 50x = 1000 \quad \rightarrow \quad x = 20 \tag{40}$$

b) Tenemos en cuenta que $n \log_b A = \log_b A^n$

$$\log_2(x+3)^5 = \log_2 32 \quad \rightarrow \quad (x+3)^5 = 32 \quad \rightarrow \tag{41}$$

$$\rightarrow \quad x+3 = \sqrt[5]{32} \quad \rightarrow \quad x+3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = -1 \tag{42}$$

c) Utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$\ln x^2 = \ln(10 - 3x) \quad \rightarrow \quad x^2 = 10 - 3x \tag{43}$$

Llegamos pues, a la ecuación de segundo grado $x^2 + 3x - 10 = 0$ que tiene como posible soluciones $x = 2, -5$. La solución -5 no es válida porque no es posible calcular el logaritmo de un número negativo.

EJERCICIO RESUELTO 15

Una unidad muy común para medir la intensidad del ruido son los decibelios (dB). Los dB están definidos a partir de la fórmula $dB = 10 \log \dfrac{P}{P_0}$ siendo P la potencia del ruido y P_0 el umbral de audición $P_0 = 10^{-12}$ W / m ^{2}.
¿Cuál es la potencia P en W / m ^{2} de un ruido de una aspiradora de 70 dB?

Planteamos la ecuación $70 = 10 \log \dfrac{P}{10^{-12}}$. Despejando el logaritmo

$\log_{10}\left(\dfrac{P}{10^{-12}}\right) = 7$ y aplicamos la definición de logaritmo

$\dfrac{P}{10^{-12}} = 10^7$ y despejando $P = 10^7 \cdot 10^{-12} = 10^{-5}$ W / m ^{2}.

Vídeo 2.5: *Ecuaciones exponenciales y logarítmicas*
https://www.youtube.com/watch?v=aMTJj3eSzWg

EJERCICIOS PROPUESTOS

7. Resuelve las ecuaciones exponenciales:
a) $2^{x-1} = 10$
b) $3 \cdot 5^{-x} = 5^2$

8. Resuelve las ecuaciones logarítmicas:
a) $\log x + \log 50 = 3$
b) $2 \ln x = \ln(10 - 3x)$

4. Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

Sistemas escalonados

Un sistema de ecuaciones $n \times m$ está formado por$n$ ecuaciones y m incógnitas. El sistema se dice que es **lineal** si las incógnitas sólo aparecen sumadas, restadas o multiplicadas por un coeficiente.

Un sistema de ecuaciones lineal de tres ecuaciones con 3 incógnitas llama **escalonado** si en una de las ecuaciones sólo aparece una incógnita y en otra falta alguna de las otras dos incógnitas.

Esta propiedad hace que estos sistemas sean muy fáciles de resolver.

EJERCICIO RESUELTO 16

Resuelve:
$$\begin{cases} 3x & +4y & & = 0 \\ & 2y & & = -6 \\ 5x & +y & -z & = 17 \end{cases}$$

Se trata de un sistema escalonado

De la segunda ecuación; $2y = -6$ deducimos que $y = -3$.

Si ahora vamos a la primera, $3x + 4 \cdot (-3) = 0$ encontramos que $x = 4$.

Finalmente, introducimos la y y la x encontradas en la tercera ecuación $5 \cdot 4 + (-3) - z = 17$ y despejando la $z = 0$.

La solución es $x = 4, y = -3, z = 0$

EJERCICIO RESUELTO 17

Resuelve:
$$\begin{cases} \quad y \quad -2z = -4 \\ \quad 4y \quad = 24 \\ x \quad -2y \quad +z = -5 \end{cases}$$

Se trata de un sistema escalonado

De la segunda ecuación; $4y = 24$ deducimos que $y = 6$.

Si ahora vamos a la primera, $6 - 2z = -4$ encontramos que $z = 5$.

Finalmente, introducimos la y y la z encontradas en la tercera ecuación $x - 12 + 5 = -5$ y despejando la $x = 2$.

La solución es $x = 2, y = 6, z = 5$

Método de Gauss

Acabamos de ver que los sistemas escalonados son muy sencillos de resolver. Desgraciadamente no todos los sistemas son escalonados. Entonces, el método de Gauss consigue transformar un sistema que no es escalonado en otro equivalente que sí lo es.

Dos sistemas se dicen que son **equivalentes** si tienen **las mismas soluciones**. Las transformaciones que podemos hacer para obtener sistemas equivalentes son:

- Se puede cambiar el orden de las ecuaciones
- Toda ecuación se puede dividir o multiplicar por un número (diferente de cero)
- A una ecuación se le puede sumar o restar otra previamente multiplicada por un número. Por ejemplo, $F_2 \to F_2 + F_1$ se lee como " *La segunda fila se cambia por la segunda más la primera fila* ".

Llamamos las ecuaciones como $F_1, F_2, F_3, \cdots$. En una transformación podemos decidir modificar más de una fila.
Por ejemplo $F_2 \to F_2 + F_1$ y $F_3 \to F_3 - F_1$ sería correcto.
Lo que no podemos hacer es utilizar la misma combinación en dos filas diferentes, Por ejemplo $F_2 \to F_2 - F_3$ y $F_3 \to F_3 - F_2$ sería **incorrecto**, porque al fin y al cabo, $F_2 - F_3$ o $F_3 - F_2$ son, excepto un signo, la misma combinación.

Se trata de ir aplicando una secuencia de transformaciones que hagan desaparecer términos (**coloquialmente, poner ceros**) hasta que el sistema quede escalonado. Si las transformaciones las aplicamos sin ningún orden, es común hacerse un lío. Por eso le recomendamos que siga la técnica de la **L** que se consigue en 2 pasos. Este diagrama muestra en qué consiste:

$$\begin{matrix} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z = b_1 \\ a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y + a_{2,3}\,z = b_2 \\ a_{3,1}\,x + a_{3,2}\,y + a_{3,3}\,z = b_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z = b_1 \\ c_{2,2}\,y + c_{2,3}\,z = b_2 \\ c_{3,2}\,y + c_{3,3}\,z = b_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z = b_1 \\ c_{2,2}\,y + c_{2,3}\,z = b_2 \\ d_{3,3}\,z = b_3 \end{matrix}$$

El primer paso consiste en hacer que los términos $a_{2,1}$ y $a_{3,1}$ desaparezcan. En el segundo (y último paso) hay que utilizar la segunda y la tercera ecuaciones para que algunos de los términos $c_{i,j}$ se cancele. La figura hace que el término $c_{3,2}$ anule.

> **Recomendación:** Siempre que sea posible colocaremos la ecuación que tenga un 1 en el primer término en lo más alto.

Este vídeo muestra cómo se aplican las transformaciones en el método de Gauss.

Vídeo 2.6: *El método de Gauss*
https://www.youtube.com/watch?v=o6DTm8A-URU

Ejercicio Resuelto 18

Resuelve:
$$\begin{cases} 2x+3y &= 14 \\ x-2y+z &= -3 \\ 2x-y-z &= 9 \end{cases}$$

Llamamos las ecuaciones como F_1, F_2, F_3.

Cambiamos el orden de la 1ª y 2ª ecuaciones
$$\begin{cases} x-2y+z &= -3 & \to \\ 2x+3y &= 14 & \to F_2-2F_1 \\ 2x-y-z &= 9 & \to F_3-F_2 \end{cases}$$

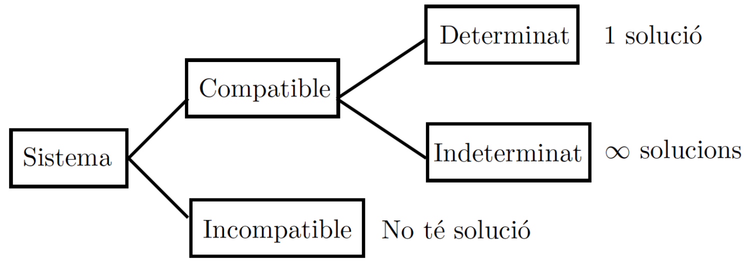
Aplicamos las siguientes transformaciones, en la segunda le restamos el doble de la primera; a la tercera le restamos la segunda. Nota que la primera ecuación no la tocamos y queda igual.
$$\begin{cases} x-2y+z &= -3 & \to \\ 7y-2z &= 20 & \to \\ -4y-z &= -5 & \to F_2-2F_3 \end{cases}$$

La tercera ecuación la cambiamos por la segunda menos dos veces la tercera. Las otras ecuaciones las dejamos iguales
$$\begin{cases} x-2y+z &= -3 \\ 7y-2z &= 20 \\ 15y &= 30 \end{cases}$$

El sistema ya se escalonado y si lo resolvemos, la solución es $x = 4, y = 2, z = -3$

4.1 Clasificación de los sistemas

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican según el número de soluciones:



Si al aplicar el método de Gauss encontramos una fila llena de ceros $0x + 0y + 0z = 0$, esta ecuación es cierta porque $0 = 0$ pero no nos proporciona ninguna información útil. Si sucede esto, el sistema será **compatible indeterminado**; tendrá infinitas soluciones.

En cambio, si al aplicar el método de Gauss llegamos a una fila como $0x + 0y + 0z = 5$, esta ecuación es **falsa** porque $0 \neq 5$. Podremos asegurar que este sistema no tiene solución (se dice **incompatible**).

En la siguiente explicación veremos un ejemplo de cada tipo así como se aplica el método de resolución.

Vídeo 2.7: *Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales*
https://www.youtube.com/watch?v=1OLR7OCR1rE

EJERCICIO RESUELTO 19

Resuelve y discuta:

$$\begin{cases} 3x+2y-2z & =4 \\ 4x+y-z & =7 \\ x+4y-4z & =0 \end{cases}$$

Llamamos las ecuaciones como F_1, F_2, F_3.

Cambiamos el orden de la 1ª y 3ª ecuaciones

$$\begin{cases} x+4y-4z & =0 & \rightarrow \\ 4x+y-z & =7 & \rightarrow F_2-4F_1 \\ 3x+2y-2z & =4 & \rightarrow F_3-3F_1 \end{cases}$$

Aplicamos las siguientes transformaciones, en la segunda le restamos 4 veces la primera; a la tercera le restamos 3 veces la primera. ¿Nota que la primera ecuación no la tocamos y queda igual.

$$\begin{cases} x+4y-4z & =0 & \rightarrow \\ 0-15y+15z & =7 & \rightarrow \\ 0-10y+10z & =4 & \rightarrow: (-2) \end{cases}$$

Dividimos la tercera ecuación por -2

$$\begin{cases} x+4y-4z & =0 & \rightarrow \\ 0-15y+15z & =7 & \rightarrow F_2+3F_3 \\ 0+5y-5z & =-2 & \rightarrow \end{cases}$$

La segunda ecuación, le sumamos el 3 veces la tercera

$$\begin{cases} x+4y-4z & =0 \\ 0x+0y+0z & =1 \\ 0+5y-5z & =-2 \end{cases}$$

El sistema ya se escalonado. Hemos llegado a una ecuación que nos dice $0=1$, lo que es evidentemente falsa. Esto nos dice que el sistema no tiene solución. Se trata de un **sistema incompatible**.

EJERCICIO RESUELTO 20

Resuelve y discuta:
$$\begin{cases} 3x+2y-2z &= 4 \\ 4x+y-z &= 7 \\ x+4y-4z &= -2 \end{cases}$$

Llamamos las ecuaciones como F_1, F_2, F_3.

Cambiamos el orden de la 1ª y 3ª ecuaciones
$$\begin{cases} x+4y-4z &= -2 & \rightarrow \\ 4x+y-z &= 7 & \rightarrow F_2-4F_1 \\ 3x+2y-2z &= 4 & \rightarrow F_3-3F_1 \end{cases}$$

Aplicamos las siguientes transformaciones, en la segunda le restamos 4 veces la primera; a la tercera le restamos 3 veces la primera. Nota que la primera ecuación no la modificamos y queda igual.
$$\begin{cases} x+4y-4z &= -2 & \rightarrow \\ 0-15y+15z &= 15 & \rightarrow: 15 \\ 0-10y+10z &= 10 & \rightarrow: (-10) \end{cases}$$

Dividimos la segunda ecuación por 15 y la tercera por -10
$$\begin{cases} x+4y-4z &= -2 & \rightarrow \\ 0-y+z &= 1 & \rightarrow \\ 0+y-z &= -1 & \rightarrow F_3+F_2 \end{cases}$$

La tercera ecuación, le sumamos la segunda

$$\begin{cases} x+4y-4z &= -2 \\ 0-y+z &= 1 \\ 0x+0y+0z &= 0 \end{cases}$$

El sistema ya se escalonado. Hemos llegado a una ecuación que nos dice $0=0$, lo cual es cierto pero no nos proporciona ninguna información sobre las incógnitas. Cuando sucede esto nos dice que el sistema es **compatible indeterminado**, tiene infinitas soluciones.

Para resolver el sistema nos hacen falta ecuaciones o mejor dicho, nos sobran incógnitas. Lo que podemos hacer es pasar la z al miembro de la derecha y tratarlo como si fuera un número (o un parámetro). Encontramos este sistema de ecuaciones 2x2: $\begin{cases} x+4y &= 4z-2 \\ -y &= 1-z \end{cases}$

De la segunda ecuación podemos despejar la $y=-1+z$. Sustituyendo en la primera, podremos depejar $x=-4y+4z-2=-4(-1+z)+4z-2=2$.

En resumen la solución del sistema es: $x=2; y=-1+z; z=z$

Para cada valor de z que nos inventamos, encontraremos una solución diferente. Por ejemplo si $z=0$ encontramos la solución $x=2; y=-1; z=0$; si $z=5$ encontramos la solución $x=2; y=4; z=5$; etc.

EJERCICIOS PROPUESTOS

9. Resolver el sistema de ecuaciones lineal por el método de Gauss $\begin{cases} x - y + 2z &= 8 \\ 3x \quad\; - 5z &= -12 \\ 2x + y + 4z &= 13 \end{cases}$. Clasifícalo.

10. Resolver el sistema de ecuaciones lineal por el método de Gauss $\begin{cases} 2x - y - z &= 2 \\ 3x - 2y + 3z &= 4 \\ -5x + 3y + 5z &= -1 \end{cases}$. Clasifícalo.