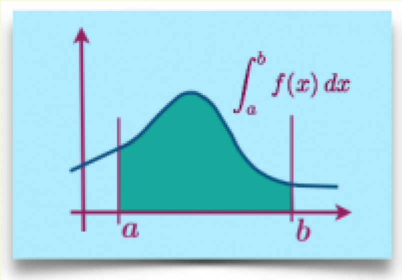
Lliurament 7.2:
Altres mètodes d'integració (AMPLIACIÓ)

Matemàtiques II

Josep Mulet Pol
Àmbit científic
IEDIB



https://iedib.net/

Edició LaTeX: ® **Josep Mulet Pol**
Versió: 20-02-2025

Índex

1. Altres mètodes d'integració

Aquesta secció es deixa com a ampliació. Això no vol dir que no es demanarà a l'examen IEDIB, però heu de saber que els continguts que s'hi expliquen poden aparèixer perfectament a l'examen de les PAU.

En el llibre d'apunts BAT_MAT2 7.1, hem après alguns mètodes bàsics per calcular primitives. Per desgràcia, no totes les primitives es poden calcular amb aquests mètodes i en necessitam d'altres que presentam en aquesta secció. En particular, veurem:

- El mètode d'integració per parts
- Integrals de funcions racionals, funcions que són quocient de dos polinomis

1.1 Integració per parts

Imaginem que volem integrar un producte de funcions $u \cdot v'$ on la funció u és fàcil de derivar i la funció v' fàcil d'integrar. En tal cas empram la regla d'integració per parts

Regla d'integració per parts

$$\int u \cdot dv = v \cdot u - \int v \cdot du \tag{1}$$

on hem expressat $du = u'dx$ i $dv = v'dx$

Una regla mnemotècnica de recordar-se'n és recitar la frase: " **S** usana, **u** n **d** ia **v** entoso, **v** ió **u** n **s** oldado **v** estido **d** e **u** niforme"

La regla d'integració per parts s'utilitza en integrals de la forma

- $\displaystyle\int x^n \cdot a^x \, dx$
- $\displaystyle\int \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ \cos x \end{array} \right\} \cdot a^x \, dx$
- $\displaystyle\int x^n \cdot \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ \cos x \end{array} \right\} dx$
- $\displaystyle\int x^n \cdot \left\{ \begin{array}{c} \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{array} \right\} dx$
- $\displaystyle\int x^n \cdot \log_b x \, dx$

En aquest vídeo s'explica la regla d'integració per parts:

Vídeo 7.2.1: *Mètode d'integració per parts*
https://www.youtube.com/watch?v=lQQvE1lux4Q

Exemple 1

Calcula $\displaystyle\int x \ln x \, dx$

En aquesta integral $\ln x$ és fàcil de derivar i x d'integrar, per tant, feim les assignacions $\displaystyle\int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{lcl} u = \ln x & \rightarrow & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx & \rightarrow & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - x^2 + C$

Exemple 2

Calcula $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

Sembla que, en aquest cas, no hi ha producte de funcions quan realment el producte es pot expressar com $\operatorname{arctg} x \cdot 1$. Feim aquesta assignació en el mètode d'integració per parts

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \cdot \underbrace{1dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{lll} u = \operatorname{arctg} x & \to & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = 1dx & \to & v = x \end{array} \right\}$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x dx = \cdots$$

Aquesta darrera integral és quasi-immediata, multiplicam i dividim entre 2

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Exercicis

1. Calculeu $\int x \cdot e^x \, dx$ utilitzant la tècnica d'integració per parts.

2. Calculeu $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$ utilitzant la tècnica d'integració per parts.

1.2 Primitives de funcions racionals

Anomenam integral racional, a la integral del quocient de dos polinomis: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Procediment:

- La primera passa és comprovar els graus del numerador i el denominador. Si grau $P(x) \geq$ grau $Q(x)$ haurem de fer la divisió de polinomis i utilitzar la següent fórmula:

$$\begin{array}{ll} P(x) & \underline{|\,Q(x)} \\ \underbrace{R(x)} & C(x) \end{array} \quad \rightarrow \quad P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x) \tag{2}$$

Si la comprovació de la divisió anterior la dividim tota entre $Q(x)$ trobam

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{3}$$

- Calculam les solucions de l'equació $Q(x) = 0$ i miram si estan repetides (arrels múltiples) o no (arrels simples).

Exemple 3

Calcula $\int \frac{x^2+1}{x+2}\,dx$

Com el el grau del numerador és més gran o igual que el denominador, efectuam la divisió de polinomis

$$\begin{array}{ll} x^2+1 & \underline{|\,x+2} \\ \underbrace{5} & x-2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x+2} = x - 2 + \frac{5}{x+2} \tag{4}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x+2} = \int (x-2)\,dx + \int \frac{5}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 5\ln|x+2| + C$$

Exemple d'arrels simples

Volem calcular $\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx$

No cal efectuar la divisió perquè el grau del denominador supera al numerador. Resolem l'equació: $x^2 + x = 0 \rightarrow x = 0, -1$. Cap d'elles està repetida i diem que són arrels simples. La factorització del denominador és $Q(x) = x(x+1) =$

Intentarem fer la descomposició següent

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \tag{5}$$

Efectuam la suma del segon membre

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \tag{6}$$

Donat que els denominadors són iguals, els numeradors també ho han d'ésser

$$x - 2 = A(x + 1) + Bx \tag{7}$$

Ara donam dos valors a x i intentam trobar que valen A i B

- Si $x = 0$: $-2 = A$
- Si $x = -1$: $-3 = -B \to B = 3$

Amb això hem aconseguit separar la integral en dues que si sabem fer:

$$\int \frac{x-2}{x^2+x} = \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx = \cdots \tag{8}$$

Cadascuna de les integrals és un logaritme Neperià

$$\cdots = -2\ln|x| + 3\ln|x+1| + C \tag{9}$$

Vídeo 7.2.2: *Integració de funcions racionals*
https://www.youtube.com/watch?v=klKHcqcA9Bw

Exemple d'arrels múltiples

Volem calcular $\displaystyle\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx$

No cal efectuar la divisió perquè el grau del denominador supera al del numerador. Resolem l'equació: $(x+3)^3 = 0 \to$ té l'arrel $x = -3$ amb multiplicitat 3 (està repetida tres vegades).

En el cas de multiplicitat major a 1, es fa la descomposició de la forma següent

$$\frac{2x+5}{(x+3)^3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{B}{(x+3)^3} \tag{10}$$

és a dir, afegim tants de termes com multiplicitat tingui l'arrel.

Efectuam la suma del segon membre

$$\frac{2x+5}{(x+3)^3} = \frac{A(x+3)^2 + B(x+3) + C}{(x+3)^3} \tag{11}$$

Donat que els denominadors són iguals, els numeradors també ho han d'ésser

$$2x + 5 = A(x+3)^2 + B(x+3) + C \tag{12}$$

Ara donam tres valors a x per determinar els paràmetres A, B i C

- Si $x = -3$: $-1 = C$
- Si $x = -2$: $1 = A + B + C \rightarrow A + B = 2$
- Si $x = -4$: $-3 = A - B + C \rightarrow A - B = -2$

Resolem el sistema d'equacions per A i B i trobam que $A = 0$ i $B = 2$. Amb això hem aconseguit separar la integral en dues integrals més senzilles:

$$\int \frac{2x+5}{(x+3)^3} = 0 + \int \frac{2}{(x+3)^2}\,dx + \int \frac{-1}{(x+3)^3}\,dx = \cdots \tag{13}$$

Cadascuna de les integrals és de tipus potència, perquè $\dfrac{1}{(x+3)^n} = (x+3)^{-n}$ i la seva integral és $\dfrac{(x+3)^{-n+1}}{-n+1}$

$$\cdots = 2\frac{(x+3)^{-1}}{-1} - 1\frac{(x+3)^{-2}}{-2} + C \tag{14}$$

la qual es pot arreglar com

$$\cdots = -\frac{2}{x+3} + \frac{1}{2(x+3)^2} + C \tag{15}$$

Exercicis

3. Calculau les següents integrals racionals:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot(x-2)}\,dx$

4. Calculau la integral $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^3+4x^2+4x}\,dx$

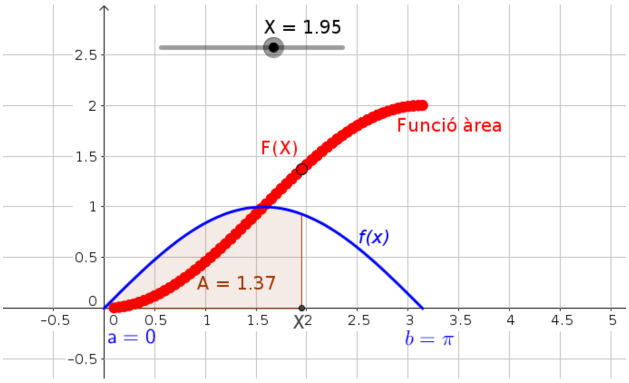
2. Teorema fonamental del càlcul

Com hem dit a la introducció hi ha una estreta relació entre integració (càlcul de l'àrea davall una corba) i la derivació.

La funció àrea

Donada una funció $f(x)$, contínua en $[a,b]$, podem calcular $\int_a^c f(x)dx$ per a tot nombre $c \in [a,b]$.

Consideram la nova funció $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ per a $x \in [a,b]$, que és l'àrea davall f entre a i x.



Simulació 3: https://www.geogebra.org/m/at39zggt : *Desplaçau el punt X per generar la funció àrea*

És fàcil comprovar que $F(a) = 0$ i $F(b)$ és la integral entre a i b. Llavors, la funció $F(x)$ diu com canvia l'àrea a mesura que augmentam l'abscissa x. Si la funció $f(x)$ és positiva, la funció àrea creix, mentre que si $f(x)$ és negativa, la funció àrea decreix. Això ens duu a pensar que la derivada de la funció àrea ha d'estar relacionada amb la $f(x)$. Aquesta relació l'expressam com un teorema.

Teorema fonamental del càlcul

> Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a,b]$, aleshores la funció
>
> $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, per a $x \in [a,b]$ és derivable i, a més, compleix $F'(x) = f(x)$.

Efectivament, comprovem que la funció $f(x) = \sin x$ per a $x \in [0,\pi]$ compleix el teorema. Per això, ens construïm la funció àrea

$$F(x) = \int_0^x \sin t dt = -\cos t]_0^x = -\cos x - (-\cos 0) = 1 - \cos x$$

Podem comprovar que $F(0) = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$ i $F(\pi) = 1 - \cos\pi = 1 - (-1) = 2$. Per qualsevol altre valor x, la funció $F(x)$ dóna l'àrea entre 0 el valor d'abscissa x.

Si derivam la funció àrea $F'(x) = -(-\sin x) = \sin x$ cosa que assegura el teorema fonamental del càlcul, ja que $F'(x) = f(x)$.

Exemple 4

Calcula els màxims i mínims de la funció $F(x) = \int_1^x (t^3 - 4t)\, dt$ definida per a $x \geq 1$.

Començam calculant una primitiva de la funció
$\int (t^3 - 4t)\, dt = \frac{t^4}{4} - 2t^2$
Calculam la funció $F(x)$:
$F(x) = \int_1^x (t^3 - t)\, dt = \left.\frac{t^4}{4} - 2t^2\right]_1^x = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 2\right) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{7}{4}$
Per calcular els extrems (màxims i mínims) de la funció necessitam calcular-ne la derivada
$F'(x) = x^3 - 4x$
Fixeu-vos que aquest resultat l'haguéssim pogut trobar més fàcilment aplicant el Teorema fonamental del càlcul $F'(x) = f(x) = x^3 - 4x$
Per trobar els extrems igualam la derivada a zero, $x^3 - 4x = 0 \to x = 0, x = \pm 2$
Calculam la segona derivada $F''(x) = 3x^2 - 4$

- $x = -2$, $x = 0$: No serveixen, queda fora del domini de la funció F
- $x = 2$: $F''(2) = 8 > 0 \to$ mínim relatiu

Per calcular l'ordenada del mínim, necessitam haver calculat la funció $F(x)$

- $x = 2$: $F(2) = \frac{-9}{4}$