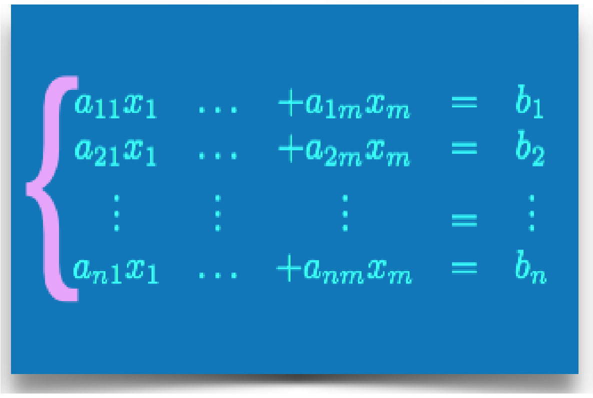
IEDIB

Institut d´ensenyaments a distància de les Illes Balears

https://iedib.net/

Matemàtiques II

Lliurament 2: Discussió i resolució de sistemes



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Índex

1. Sistemes lineals

Els sistemes lineals són de gran importància en moltíssims àmbits de la ciència i la tecnologia. Per mencionar-ne alguns, apareixen en la determinació de les intensitats i voltatges de circuïts elèctrics, en càlculs de distribució de temperatura, en l'estudi del trànsit en una ciutat, en problemes de mecànica, en les reaccions químiques, etc.

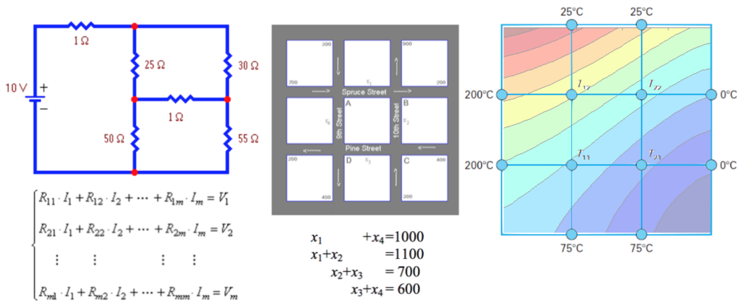


Figura 1: Alguns exemples d'aplicació dels sistemes lineals. De esquerra a dreta, circuïts elèctrics, control del trànsit de vehicles, distribució de la temperatura en una placa.

Un sistema d'equacions $n \times m$ està format per *n* equacions i *m* incògnites. El sistema es diu que és **lineal** si les incògnites apareixen sumades, restades o multiplicades per un coeficient.

Sistemes lineals 2x2

Un sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites té la forma:

$$\begin{cases} ax + by & = c \\ a'x + b'y & = c' \end{cases} \tag{1}$$

on (x, y) són les incògnites, a, b, a', b' són els coeficients i c, c' són els termes independents.

Ja vàrem aprendre a l'ESO que aquests sistemes es poden resoldre pels mètodes de substitució, igualació, reducció i gràficament [https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_ecuaciones_lineales].

- Si representem la gràfica de cada equació, obtindrem dues rectes. El punt de tall d'ambdues rectes, si existeix, serà la solució del sistema.
  Un sistema d'equacions que té **una solució** s'anomena **Compatible Determinat**.

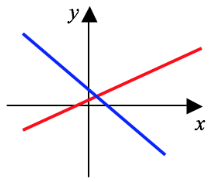


Figura 2

Per exemple, el sistema $\left\{ \begin{array}{rl} x+y & =-1 \\ x-2y & =5 \end{array} \right.$ és compatible determinat. Té una única solució que és $x=1, y=-2$

- Si quan representem la gràfica de cada equació les rectes són coincidents, trobam infinits punts de talls (tots els punts de la recta).
  Un sistema d'equacions que té **infinites solucions** es denomina **Compatible indeterminat**.

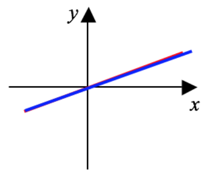


Figura 3

El sistema $\left\{ \begin{array}{rl} -3x+6y & =-15 \\ x-2y & =5 \end{array} \right.$ és compatible indeterminat. El motiu és perquè la primera equació s'obté multiplicant la segona per -3. Podem prescindir de la primera equació perquè equival a la segona. El sistema té infinites solucions, tots els punts x, y que es troben sobre la recta $x-2y=5$. Per exemple ($x=5$, $y=0$), ($x=7$, $y=1$), ($x=1$, $y=-2$), etc.

- Si quan representem la gràfica de cada equació les rectes són paral·leles, no obtindrem cap punt de tall.
  Un sistema d'equacions que **no té solució** es denomina **Incompatible**.

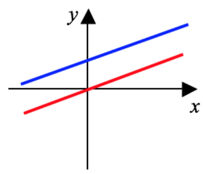


Figura 4

Per exemple, el sistema $\left\{ \begin{array}{rl} -3x+6y & =-10 \\ x-2y & =5 \end{array} \right.$ és incompatible perquè els coeficients de la primera equació s'obtenen de multiplicar la segona per -3 però el terme independent no queda multiplicat pel mateix factor. En conseqüència el sistema és incompatible i no té solució.

Discutir un sistema consisteix en analitzar quin dels casos anteriors es dóna, és a dir, saber si és compatible o incompatible.

Tot sistema de la forma $\left\{ \begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array} \right.$ es pot expressar mitjançant el producte de matrius:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

la primera matriu està formada pels coeficients i que s'anomena **matriu del sistema**: $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ és el vector columna d'incògnites i la matriu dels **termes independents** és $B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Si ajuntam les matrius A i B, obtenim **la matriu ampliada:** $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$

En aquest tema aprendrem a resoldre i discutir sistemes d'equacions a partir de les matrius associades. Per discutir sistemes, necessitam del concepte de **rang d'una matriu** que passam a estudiar a continuació.

2. Rang d'una matriu

Entre les files (i també les columnes) de les matrius hi pot haver **relacions de dependència**. El coneixement d'aquestes relacions serà de vital importància per a l'estudi del sistemes d'equacions i per la formulació de la geometria analítica a l'espai.

Per exemple:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ té les dues files independents

$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -8 & -10 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ té les dues files dependents, perquè la primera s'obté a partir de la segona $F_1 = -2F_2$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ té les tres primeres files dependents, i la darrera independent.

S'anomena rang d'una matriu al nombre de files o columnes que són linealment independents i s'indica com $rang\,(A)$

L'única matriu que té $rang\,(A) = 0$ és la matriu zero o nul·la.

En els exemples anteriors, es compleix que $rang\,(A) = 2$, $rang\,(B) = 1$ i $rang\,(C) = 2$.

Tot seguit, mostram una relació molt útil entre rang i determinants

Del lliurament 1 ...

El determinant d'una matriu quadrada és igual a zero quan les seves files o columnes són linealment dependents, és a dir, alguna línia es pot escriure com una combinació lineal de les altres.

$$|A| = 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{les files de } A \text{ son lineal. dependents} \tag{3}$$

$$|A| \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{les files de } A \text{ son lineal. independents} \tag{4}$$

Segons això, el rang d'una matriu serà igual a la mida del major determinant (diferent de zero) que puguem formar

El rang d'una matriu és l'ordre del major menor diferent de zero.
Recorda: Només existeixen determinants de matrius quadrades!

Vídeo 2.1: *Rang d'una matriu per determinants*

EXERCICI RESOLT 1

Calcula el rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

El rang pot ésser com a màxim 2, perquè és el major determinant que podem formar. Donat que podem trobar un menor d'ordre dos diferent de zero $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, arribam a la conclusió que la matriu té rang 2.

EXERCICI RESOLT 2

Calcula el rang de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

El rang pot ésser com a màxim 3, donat que és el major ordre dels determinants que podem formar.
Començam cercant un menor 2×2 diferent de zero, per exemple $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, ens assegura que com a mínim el rang és 2. La pregunta que ens feim és, podrà ésser 3?
Ara, partint d'aquest menor es tracta d'ampliar-lo, és a dir, formar menors d'ordre 3 i comprovar si són o no nuls. Cal cercar aquests menors que s'obtenen d'agafar la tercera o quarta files

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Donat que tot dos són nuls, el rang no pot ésser 3. Conclusió $rang B = 2$
Es deixa al lector que comprovi que existeixen aquestes relacions de dependència entre files, $F_3 = F_1 + F_2$ i $F_4 = F_3 + F_1 - F_2$. Per aquest motiu només la files F_1 i F_2 són independents i el rang és 2.

EXERCICI RESOLT 3

Estudia el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ segons els valors del paràmetre m.

Calculam el determinant de la matriu $|A| = m^2 + 4m + 3$. El determinant s'anul·la $m^2 + 4m + 3 = 0$ quan $m = -1$ i $m = -3$. Començam discutint el rang a partir d'aquests dos valors

- Si $m \neq -1$ i $m \neq -3$: El determinant 3x3 és no nul $\Rightarrow$ rang A = 3
- Si $m = -1$: La matriu queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la qual podem trobar un menor 2x2 no nul $\Rightarrow$ rang A = 2
- Si $m = -3$: La matriu queda $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la qual podem trobar un menor 2x2 no nul $\Rightarrow$ rang A = 2

EXERCICIS PROPOSATS

1. Determinau el rang d'aquestes matrius

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & -6 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Discutiu el rang d'aquests matrius segons els valors del seu paràmetre

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b+1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 2 \\ 0 & b & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3. Discussió de sistemes

Un sistema d'equacions lineal $n \times m$, d' n equacions i m incògnites, s'escriu com:

$$\left\{ \begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \dots & +a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & \dots & +a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right. \quad (7)$$

on $x_1, x_2, \cdots, x_m$ són les incògnites, els nombres a_{ij} són els coeficients de les incògnites i b_i són els termes independents. El conjunt de nombres reals ordenats $x_1, x_2, \cdots, x_m$ serà solució del sistema si satisfà totes i cadascuna de les equacions.

Definim la **matriu del sistema** com $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

I la **matriu ampliada** del sistema mitjançant $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$

Teorema de Rouché

El **teorema de Rouché-Fröbenius** diu: La condició necessària i suficient perquè un sistema de n equacions i m incògnites sigui compatible (tingui solució) és que el rang de la matriu dels coeficients sigui igual al rang de la matriu ampliada.

$$rangA = rangA^* \quad \leftrightarrow \quad \text{Sistema compatible} \tag{8}$$

PBAU

DEMOSTRACIÓ: La demostració del teorema de Rouché és bastant senzilla. L'equació (7) es pot reescriure d'aquesta forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

Si $x_1, x_2, \cdots, x_m$ ha d'ésser una solució del sistema, aleshores aquesta equació ens diu que el vector de de termes independents b_i ha d'ésser una combinació lineal dels vectors columna, essent x_i els coeficients de la combinació.

Quan calculam el rang de la matriu ampliada A^* resulta que tindrem la darrera columna formada pels b_i que és una combinació lineal de les altres columnes. Per aquest motiu la matriu ampliada no pot augmentar el rang i ha de passar que rang $A =$ rang A *.

A la pràctica, si estudiem els rangs de les matrius ens podem trobar amb les següents situacions:

- $rangA = rangA^* \quad \rightarrow \quad \begin{cases} rangA = rangA^* = m & \rightarrow \text{ Compatible determinat (1 sol)} \\ rangA = rangA^* < m & \rightarrow \text{ Compatible indeterminat } (\infty \text{ sol}) \end{cases}$
- $rangA \neq rangA^* \quad \rightarrow$ Sistema Incompatible (no té solució)

Vídeo 2.2: *Discussió d'un sistema d'equacions pel teorema de Rouché*
https://www.youtube.com/watch?v=qxOrXnNSGSY

EXERCICI RESOLT 4

Aplica el teorema de Rouché per determinar si el sistema

$$\begin{cases} x+y & =7 \\ 2x-3y & =4 \\ 2x+y & =0 \end{cases}$$

és compatible o incompatible

Es tracta d'un sistema de 3 equacions amb 2 incògnites. La matriu del sistema i l'ampliada són $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

El rang(A) com a màxim pot ésser 2 i, de fet, és 2 perquè podem trobar un menor d'ordre 2 no nul; p.e. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Calculem el determinant de A^*

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \tag{10}$$

Aleshores $rang A^* = 3$. Donat que els rangs de les matrius són diferents rang $A \neq$ rang A *, el sistema és incompatible (no té solució).

EXERCICI RESOLT 5

Discuteix el següent sistema

$$\begin{cases} x - y + z &= 2 \\ x + ay + z &= 8 \\ ax + y + az &= 10 \end{cases}$$

segons els valors del paràmetre a.

Es tracta d'un sistema de 3 equacions amb 3 incògnites. La matriu del sistema i l'ampliada són $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$ i $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 8 \\ a & 1 & a & 10 \end{pmatrix}$

Sabem que $|A| = 0$ perquè la matriu A té dues columnes repetides. Aleshores, el $rangA < 3$. De fet, si $a = -1 \to rangA = 1$. Si si $a \neq -1$ $\to rangA = 2$.

Anem a estudiar el rang de l'ampliada, per això agafem un menor 3x3, reemplaçant la 3a columna per la 4a $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & a & 8 \\ a & 1 & 10 \end{vmatrix} = C_1 \to C_1 + C_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ a+1 & a & 8 \\ a+1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & a & 8 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \to \\ F_2 \to F_2 - F_3 \\ \to \end{matrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & -2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = (a+1)(4-2a)$

Miram quan el determinant és igual a zero; $(a+1)(4-2a) = 0 \to a = -1$ i $a = 2$

- Si $a \neq -1$; $a \neq 2 \to$ rang $A^* = 3 \neq$ rang $A \to$ Incompatible

Ara només basta estudiar dos casos particulars:

- Si $a = -1$, la matriu queda i $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ i té rang $A^* = 3 \neq$ rang $A = 1 \to$ Incompatible
- Si $a = 2$, la matriu queda $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ resulta tenir rang $A^* = 2 =$ rang $A < 3 \to$ Compatible indeterminat

3.1 Sistemes homogenis

Sistemes homogenis

Un sistema d'equacions lineals es diu que és **homogeni** quan el terme independent de totes les equacions és igual a zero

$$\left\{\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1m}x_m & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \dots & +a_{2m}x_m & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & \dots & +a_{nm}x_m & = & 0 \end{array}\right. \tag{11}$$

Si a la matriu del sistema A, li afegim una columna de zeros per formar la matriu ampliada, això mai podrà augmentar el rang ja que un determinant amb una columna de zeros és nul. Això fa que sempre el $rangA = rangA^*$.

Si aplicam el teorema de Rouché, aquest tipus de sistema **sempre són compatibles**. Sempre tenen la **solució trivial**: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ara bé

Discussió d'un sistema homogeni:

- rang A = rang $A^* =$ num. incògnites

  Compatible determinat (només té la solució trivial)

- rang A = rang $A^* <$ num. incògnites

  Compatible indeterminat (a més de la trivial, té infinites solucions més)

Vídeo 2.3: *Discussió d'un sistema homogeni*
https://www.youtube.com/watch?v=qCafBkxIqL8

EXERCICI RESOLT 6

Discuteix el següent sistema homogeni

$$\left\{\begin{array}{llll} x & & -z & =0 \\ & ky & -3z & =0 \\ 4x & +y & +kz & =0 \end{array}\right. \quad (12)$$

segons els valors del paràmetre k.

El sistema sempre serà compatible perquè és un sistema homogeni.

Calculam el determinant del sistema $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & -3 \\ 4 & 1 & k \end{vmatrix} = C_3 \to C_3 + C_1 =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & -3 \\ 4 & 1 & k+4 \end{vmatrix} = = k(k+4)+3 = k^2+4k+3 = 0$$

El determinant és zero quan $k=-1$ i $k=-3$.

- Si $k \neq -1; k \neq -3$: rang A = rang A^* = 3 = n. incògnites. Sistema compatible determinat. Només té la solució trivial $x=y=z=0$.
- Si $k=-1$ o $k=-3$: rang A=rang A^* = 2 $<$ n. incògnites. Sistema compatible indeterminat. Té infinites solucions. A l'apartat 4 veurem com trobar-les.

EXERCICIS PROPOSATS

3. Discutiu segons els valor del paràmetre a el següent sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{llll} ax & +y & & =a \\ (a+1)x & +2y & +z & =a+3 \\ & 2y & +z & =2 \end{array}\right.$$

4. Discutiu segons els valor del paràmetre a el següent sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & =0 \\ ax & & +2z & =0 \\ 2x & -y & +az & =0 \end{array}\right.$$

4. Resolució de sistemes

En aquesta secció estudiarem com resoldre els sistemes que són compatibles. Començarem recordant el mètode de Gauss que ens servirà tant per resoldre sistemes compatibles determinants com indeterminats. Acabarem el tema presentant la regla de Cramer i la resolució matricial de sistemes compatibles.

Sistemes escalonats

Un sistema d'equacions lineal de tres equacions amb 3 incògnites s'anomena **escalonat** si en una de les equacions només apareix una incògnita i en una altra en fa falta alguna de les altres dues incògnites.

Aquesta propietat fa que aquests sistemes siguin molt fàcils de resoldre.

EXERCICI RESOLT 7

Resoleu:

$$\begin{cases} 3x & +4y & & = 0 \\ & 2y & & = -6 \\ 5x & +y & -z & = 17 \end{cases}$$

Es tracta d'un sistema escalonat
De la segona equació; $2y = -6$ deduïm que $y = -3$.
Si ara anam a la primera, $3x + 4 \cdot (-3) = 0$ trobam que $x = 4$.
Finalment, introduïm la y i la x trobades dins la tercera equació $5 \cdot 4 + (-3) - z = 17$ i aïllam la $z = 0$.
La solució és $x = 4, y = -3, z = 0$

4.1 Mètode de Gauss

Acabam de veure que els sistemes escalonats són molt senzills de resoldre. Desgraciadament no tots els sistemes són escalonats. El mètode de Gauss consisteix en transformar un sistema que no és escalonat en un que sí que ho és.
Dos sistemes amb el mateix nombre d'incògnites, encara que no tinguin el mateix nombre d'equacions, es diu que són **equivalents** si tenen les mateixes solucions, és a dir, tota solució del primer és solució del segon, i viceversa.

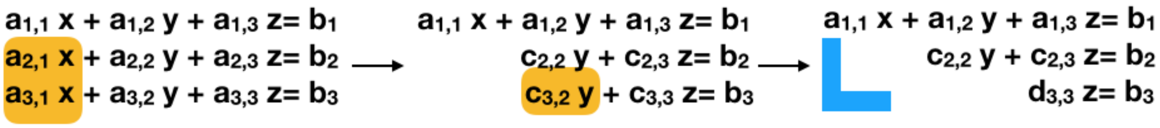
Es pot passar d'un sistema a un altre equivalent emprant les següents transformacions:

- Canviar l'ordre de les equacions del sistema.
- Multiplicar els dos membres d'una equació per un mateix número diferent de zero.
- Suprimir una equació del sistema que sigui combinació lineal de les altres.
- Substituir una equació per la suma d'ella més una altra equació multiplicada per un nombre qualsevol.
- Substituir una equació per una combinació lineal d'ella i de les restants, sempre que el coeficient de l'equació substituïda, en la combinació lineal, sigui diferent de zero.

Les transformacions les indicarem com ara $F_2 \to F_2 - 2F_1$ que es llegeix "*La segona fila, la canviam per la segona menys 2 vegades la primera.* "

Anomenam les equacions com $F_1, F_2, F_3, \cdots$. En una transformació podem modificar diferents files.
Per exemple $F_2 \to F_2 + F_1$ i $F_3 \to F_3 - F_1$ seria correcte.
El que no podem fer és utilitzar la mateixa combinació en dues files diferents,
Per exemple $F_2 \to F_2 - F_3$ i $F_3 \to F_3 - F_2$ seria **incorrecte**, perquè al cap i a la fi, $F_2 - F_3$ o $F_3 - F_2$ són, excepte un signe, la mateixa combinació.

Es tracta d'anar aplicant una seqüència de transformacions que facin desaparèixer termes (**col·loquialment, posar zeros**) fins que el sistema quedi escalonat. Si les transformacions les aplicam sense cap ordre, es comú fer-se un embolic. Per això us recomanam que seguiu la tècnica de la **L** que s'aconsegueix en 2 passes. Aquest diagrama mostra en què consisteix:



La primera passa consisteix en fer que els termes $a_{2,1}$ i $a_{3,1}$ desapareguin. En la segona passa, cal utilitzar la segona i la tercera equacions perquè alguns dels termes $c_{i,j}$ es cancel·li. La figura fa que el terme $c_{3,2}$ s'anul·li.

Recomanació: Sempre que sigui possible, col·locarem l'equació que tingui un 1 en el primer terme a dalt de tot.

EXERCICI RESOLT 8

Resoleu:
$$\begin{cases} 2x+3y &= 14 \\ x-2y+z &= -3 \\ 2x-y-z &= 9 \end{cases}$$

Començam escrivint la matriu ampliada del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 14 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 9 \end{array}\right)$$
La barra vertical separa els coeficients dels termes independents. Anomenam les equacions com F_1, F_2, F_3 i canviam l'ordre de la 1a i 2a equacions
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 14 \\ 2 & -1 & -1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \\ F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_2 \end{array}$$

Aplicam les següents transformacions, a la segona li restam el doble de la primera; a la tercera li restam la segona. Notau que la primera equació no la tocam i queda igual.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 20 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \\ \to \\ F_3 \to F_2 - 2F_3 \end{array}$$

La tercera equació la canviam per la segona menys dues vegades la tercera. Les altres equacions les deixam iguals
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 20 \\ 0 & 15 & 0 & 30 \end{array}\right)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-2y+z &= -3 \\ 7y-2z &= 20 \\ 15y &= 30 \end{cases}$$

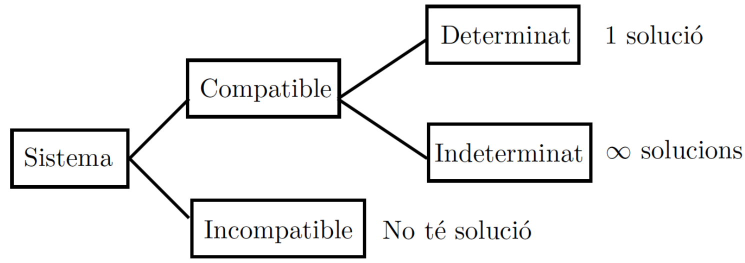
El sistema ja es escalonat, el tornam a escriure amb x, y, z i el resolem. La solució és $x=4, y=2, z=-3$

Aquest vídeo mostra com s'apliquen les transformacions amb el mètode de Gauss.

Vídeo 2.4: *Mètode de Gauss*
https://www.youtube.com/watch?v=o6DTm8A-URU

Classificació dels sistemes

Els sistemes d'equacions lineals es classifiquen segons el nombre de solucions:



En la següent explicació veurem un exemple de cada tipus així com el mètode de resolució.

Vídeo 2.5: *Classificació del sistemes d'equacions*
https://www.youtube.com/watch?v=1OLR7OCR1rE

Si quan reduïm un sistema per Gauss trobam la fila com ara:

- $(0\,0\,0 \,|\, 0)$ el sistema serà **compatible indeterminat**.
- $(0\,0\,0 \,|\, a)$ amb $a \neq 0$, el **sistema serà incompatible**.

EXERCICI RESOLT 9

Resoleu i discutiu: $\begin{cases} 3x+2y-2z &= 4 \\ 4x+y-z &= 7 \\ x+4y-4z &= 0 \end{cases}$

El sistema en forma matricial canviant l'ordre de la 1a i 3a equacions

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow \\ F_2 \rightarrow F_2 - 4F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{array} \tag{13}$$

A la segona li restam 4 vegades la primera i la tercera menys el triple de la primera

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 7 \\ 0 & -10 & 10 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow : (-2) \end{array} \tag{14}$$

Dividim la tercera equació per -2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 7 \\ 0 & 5 & 5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow \\ F_2 \rightarrow F_2 + 3F_3 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -2 \end{array}\right) \tag{15}$$

El sistema ja és escalonat. Hem arribat a una equació que ens diu $0 = 1$, cosa que és evidentment falsa. Això ens diu que el sistema no té solució. Es tracta d'un **sistema incompatible**.

EXERCICI RESOLT 10

Resoleu i discutiu:
$$\begin{cases} 3x+2y-2z &= 4 \\ 4x+y-z &= 7 \\ x+4y-4z &= -2 \end{cases}$$

El sistema és molt semblant que l'exemple anterior i seguirem les mateixes passes. Si ho feim trobam
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -15 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \\ \to (:15) \\ \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
El sistema ja és escalonat. Hem arribat a una equació que ens diu $0=0$, cosa que és certa però no ens proporciona cap informació sobre les incògnites. Quan passa això ens diu que el sistema és **compatible indeterminat**, té infinites solucions.
Per resoldre el sistema ens fan falta equacions o millor dit, ens sobren incògnites. El que podem fer es passar la z al membre de la dreta com i tractar-lo com si fos un nombre (o un paràmetre). Trobam aquest sistema d'equacions 2x2: $\begin{cases} x+4y &= 4z-2 \\ -y &= 1-z \end{cases}$
De la segona equació podem aïllar la $y=-1+z$. Si substituïm a la primera, podrem aïllar la $x=-4y+4z-2=-4(-1+z)+4z-2=2$.
En resum la solució del sistema és: $x=2; y=-1+z; z=z$
Per a cada valor de z que ens inventem, trobarem una solució diferent. Per exemple:

- si $z=0$ trobam la solució $x=2; y=-1; z=0$
- si $z=5$ trobam la solució $x=2; y=4; z=5$
- etc.

EXERCICIS PROPOSATS

5. Resoleu el sistema d'equacions lineal pel mètode de Gauss $\begin{cases} x-y+2z &= 8 \\ 3x \quad -5z &= -12 \\ 2x+y+4z &= 13 \end{cases}$. Classifiqueu-lo.

6. Resoleu el sistema d'equacions lineal pel mètode de Gauss $\begin{cases} 2x-y-z &= 2 \\ 3x-2y+3z &= 4 \\ -5x+3y+5z &= -1 \end{cases}$. Classifiqueu-lo.

4.2 Regla de Cramer

La regla de Cramer és un teorema d'utilitat immediata per la resolució de sistemes compatibles determinants (necessitam igual nombre d'equacions que incògnites i que el determinant de la matriu del sistema sigui diferent a zero).

La regla s'aplica a sistemes de qualsevol mida. Per simplicitat mostram en què consisteix pel cas d'un sistema 3x3. Considereu el sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}\right. \tag{16}$$

La solució del sistema és

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, y = \frac{|A_y|}{|A|}, z = \frac{|A_z|}{|A|} \tag{17}$$

essent $|A|$ el determinant de la matriu del sistema i

$$A_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Com veim $|A_x|$, $|A_y|$, $|A_z|$ són els determinants on hem canviat la primera, segona o tercera columna de la matriu pel vector columna de termes independents.

EXERCICI RESOLT 11

Resol el sistema $\left\{\begin{array}{llll} & y & +2z & = -3 \\ 2x & +y & & = 3 \\ x & +3y & -4z & = 3 \end{array}\right.$ per la regla de Cramer.

Començam calculant el determinant de la matriu del sistema

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 12 - (2-8) = 12 - (-6) = 12 + 6 = 18 \neq 0$$

El sistema és compatible determinat. Podem aplicar la regla de Cramer

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 36, \ |A_y| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -18, \ |A_z| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

La solució és $x = \frac{36}{18} = 2$, $y = \frac{-18}{18} = -1$, $z = \frac{-18}{18} = -1$

PBAU

La regla de Cramer és també d'utilitat quan ens demanen resoldre un sistema que conté paràmetres i estam segurs que és compatible determinat. Vegem-ho amb un exemple

Exercici Resolt 12

PBAU: Discutiu el següent sistema i resol quan sigui compatible: $\begin{cases} 2x+2y-4z &= 1 \\ mx+y+z &= 0 \\ x+y+3z &= -1 \end{cases}$

Escrivim el sistema en forma matricial:

La matriu del sistema $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i l'ampliada $M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 1 \\ m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Primer cercarem quan és que el rang M=3, això passa si —M— és diferent de zero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(m-1)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10(m-1)$$

$C_1 \to C_2 - C_2$ desenvolupam per C_1

- Si $m \neq 1$, aleshores $rang\ M = rang\ M^* = 3$ Sistema compatible determinat
- Si $m = 1$, aleshores $rang\ M = 2$ ja que hi ha menors d'ordre 2 no nuls.
  Demostrarem però que $rang\ M^* = 3$, basta considerar el menor de M^*

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$F_3 \to F_3 + F_1$ desenvolupar per C_3

Donat que $rang\ M = 2 \neq rang\ M^* = 3$ Sistema incompatible

Hem de resoldre el sistema sempre i quan $m \neq 1$. Facem-ho per la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{-4}{-10(m-1)} = \frac{2}{5(m-1)},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{m+3}{-10(m-1)} = \frac{-(m+3)}{10(m-1)},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{3m-3}{-10(m-1)} = \frac{-3}{10}$$

EXERCICIS PROPOSATS

7. Emprant la regla de Cramer, resoleu el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{ll} 3x-5y & =5 \\ 2x+3y & =16 \end{array}\right.$

8. Emprant la regla de Cramer, resoleu el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{ll} x-3y+5z & =-24 \\ 2x-y+4z & =-8 \\ x+y & =9 \end{array}\right.$

4.3 Forma matricial d'un sistema

Hem vist que un sistema d'equacions involucra tres matrius: la dels coeficients, la de les incògnites i la dels termes independents. Per exemple:

Considereu el sistema $\left\{\begin{array}{ll} 3x-2y+z & =5 \\ x-y & =0 \\ x+y-2z & =-2 \end{array}\right.$

Té com a matriu de coeficients $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, vector columna d'incògnites $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

i vector columna de termes independents $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Podeu comprovar que aquest sistema es pot expressar en forma matricial així:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

o de forma més compacta, $A \cdot X = B$

Si la matriu A té inversa, podem aïllar la incògnita X multiplicant (per l'esquerra) als dos membres per A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B \tag{19}$$

on hem emprat que $A^{-1} \cdot A = I$ i que $I \cdot X = X$.

Aleshores per resoldre el sistema (si és compatible) bastarà amb:

- cercar la inversa de A mitjançant $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}adj(A^t)$
- multiplicar les matrius $A^{-1} \cdot B$

El vector columna resultat del producte són les solucions del sistema. Apliquem aquestes passes a l'exemple anterior.

Cercam el determinant $|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=4$. És diferent de zero i podem continuar.

Calculam la matriu d'adjunts de la transposada de A

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Recordam que és indiferent transposar i cercar els adjunts que primer cercar els adjunts i després transposar.

Efectuam $X = A^{-1} \cdot B$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Trobam la solució del sistema $x = 2, y = 2, z = 3$.

Aquest mètode de resolució és molt pràctic quan necessitam resoldre molts de sistemes que tenen en comú la mateixa matriu A i l'únic que canvia són els termes independents.

EXERCICIS PROPOSATS

9. Escriviu el sistema $\left\{ \begin{array}{llll} x & -y & -z & = 1 \\ -x & & +3z & = 18 \\ -2x & +5y & -3z & = -52 \end{array} \right.$ en forma matricial i resoleu mitjançant la matriu inversa.