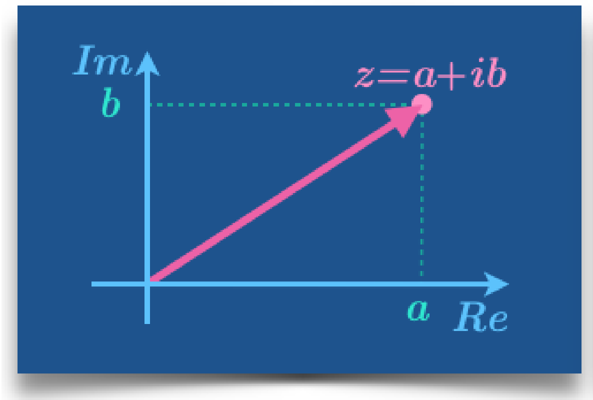
https://iedib.net/

Matemàtiques I

Lliurament 1: Els nombres reals i complexos



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Aquesta obra està subjecta a les condicions de llicència CREATIVE COMMONS no comercial i compartir igual.
Edició LaTeX: ® Josep Mulet
Versió: 05-10-2020

Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional

Índex

1. Els nombres reals

Conjunt dels nombres reals i la recta real

Els **nombres reals** poden representar qualsevol **mesura** tal com: el preu d'un producte, la duració d'un esdeveniment, l'altitud (positiva o negativa) d'un indret geogràfic, etc. La major part del temps, però, només utilitzam certs subconjunts dels nombres reals:

- $\mathbb{N}$: els **naturals** que són els enters positius: $1, 2, 3, \cdots$
- $\mathbb{Z}$: els **enters**: $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$
- $\mathbb{Q}$:els **racionals** són els que es poden expressar amb una fracció que té en el numerador i el denominador nombres enters $\frac{a}{b}$,
  - els **decimals**, que són els racionals són exactes 0.75, periòdics purs $5.333\cdots$ o periòdics mixts $5.12525\cdots$
- $\mathbb{I}$: els nombres **irracionals** tenen una representació decimal no periòdica formada per infinites xifres. Per exemple: $\sqrt{2}$, el nombre e i el nombre π. Els nombres irracionals apareixen amb freqüència en fórmules de la ciència i enginyeria.

El conjunt format per tots els nombres racionals i irracionals $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$: s'anomena conjunt dels **nombres reals**.

(c) Josep Mulet (2020)

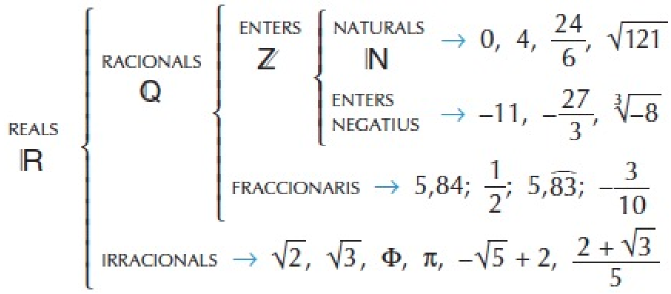


Figura 1: Conjunt dels nombres reals

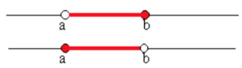
Els nombres reals estan ordenats, és a dir, podem definir una relació d'ordre entre dos nombres qualssevol $a < b$. Això fa que els nombres reals es pugin representar sobre una línia "*un darrera l'altre*"amb el que es coneix com **la recta real** $\mathbb{R}$.

Intervals i semirectes

En algunes ocasions resulta més útil referir-se a una part de la recta real. En tal cas utilitzam intervals i semi-rectes. Els intervals poden ésser tancats o oberts segons que els extrems de l'interval entrin o no. Si l'extrem entra utilitzarem claus **[** i si no entra un parèntesi **(**. Ens referim a semirectes quan un dels extrems de l'interval és infinit.

Utilitzam la següent notació per designar intervals

Taula 1: *Tipus d'intervals i semirectes*

Tipus	**Com s'escriu?**	**Com a desigualtat**	**Representació**
Interval obert	(a, b)	$a < x < b$	
Interval tancat	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
Interval semi-obert	$(a, b]$ $[a, b)$	$a < x \leq b$ $a \leq x < b$	
Semirecta oberta	$(-\infty, a)$ (a, ∞)	$x < a$ $x > a$	
Semirecta tancada	$(-\infty, a]$ $[a, \infty)$	$x \leq a$ $x \geq a$	

Quan ens referim a tota la recta real podem utilitzar el símbol $\mathbb{R}$ o expressar-ho com l'interval $(-\infty, \infty)$. Recordau que els **infinits** sempre s'escriuen com un **extrem obert**.

(c) Josep Mulet (2020)

IEDIB

EXERCICI RESOLT 1

a) Expressa com un interval tots els nombres positius que la seva part entera tingui 3 xifres.
b) Expressa com un interval $(-3,2) \cap [0,+\infty)$
c) Expressa com un interval tots els nombres que es troben a un distància menor que 8 del nombre 5.

a) Els nombres que tenen 3 xifres van de 1000 inclòs fins a 10000 sense incloure (és a dir, podríem agafar 9999,99999 però no 10000). Aleshores, l'interval és semi-obert [1000, 10000). Expressat com a desigualtat tenim $1000 \leq x < 10000$

b) La intersecció són tots els nombres que tenen en comú els dos intervals. En aquest cas, $(-3,2) \cap [0,+\infty) = [0,2)$.

c) Sabem que un entorn és un interval obert que té el centre a $c = 5$ i el radi $r = 8$. Llavors, l'interval és $(c-r, c+r) = (5-8, 5+8) = (-3, 13)$.

EXERCICIS PROPOSATS

1. Expressau com un interval aquestes situacions:
a) Tots els nombres que es troben a una distància menor de 2 unitats de l'origen.
b) La mida d'un costat d'un rectangle sabent que té perímetre 14 cm.
c) Els valors de x pels quals podem calcular $\sqrt{3-x}$.

2. Considera els intervals $A = [-7,4)$, $B = (-3,5)$ i $C = (-\infty,-3]$.
a) Calcula la intersecció $A \cap C$, és a dir, els nombres que tenen en comú els intervals A i C.
b) Calcula la unió $A \cup B$, és a dir, tots els nombres que estan almenys en un dels dos intervals.

1.1 Potències

Abans d'entrar en l'estudi dels radicals i els logaritmes, convé fer un petit resum de les propietats de les potències. Si creus que ja tens aquests conceptes superats, intenta fer directament les activitats proposades 3 i 4.

Propietats de les potències

Taula 2: *Propietats de les potències*

Propietat	Fórmula	Exemple
1. Coses a recordar	Qualsevol número elevat a 0 és 1 Qualsevol número elevat a 1 és ell mateix	$7^0 = 1$ $7^1 = 7$
2. Producte d'igual base *"sumam exponents"*	$b^n \cdot b^m = b^{m+n}$	$3^5 \cdot 3^2 = 3^7$

(c) Josep Mulet (2020)

3. Quocient d'igual base *"restam exponents"*	$b^n : b^m = b^{m-n}$	$3^5 : 3^2 = 3^3$
4. Potència d'una potència *"multiplicam exponents"*	$(b^n)^m = b^{n\cdot m}$	$(3^5)^2 = 3^{10}$
5. Operacions d'igual exponent	Operam les bases i elevam al mateix exponent	$3^5 \cdot 8^5 : 2^5 = (3 \cdot 8 : 2)^5 = 12^5$

Una **potència d'exponent negatiu** significa **fer la inversa** i elevar a l'exponent positiu. Per exemple:

$$2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \frac{125}{8}$$

Una **potència d'exponent fraccionari** és un **radical** (o arrel). Per exemple:

$$5^{1/2} = \sqrt{5}, \quad 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}, \quad 5^{1/4} = \sqrt[4]{5}$$

En general es compleix que

RELACIÓ ENTRE POTÈNCIA I RADICAL

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \tag{1}$$

EXERCICI RESOLT 2

Utilitza les propietats per expressar l'operació com una única potència.

a) $2^4 \cdot 2 \cdot 2^3 : 4^2 =$

b) $\left(5^{\frac{7}{2}} : 5^3\right)^4 =$

a) $2^4 \cdot 2 \cdot 2^3 : 4^2 = 2^{4+1+3} : (2^2)^2 = 2^8 : 2^4 = 2^4$

b) $\left(5^{\frac{7}{2}} : 5^3\right)^4 = \left(5^{\frac{7}{2}-3}\right)^4 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{4\cdot\frac{1}{2}} = 5^2$

EXERCICI RESOLT 3

Opera transformant els radicals a potència i utilitzant les propietats de les potències.

$$\frac{a^{-2}}{a^{3/2}}\sqrt[4]{b^2}$$

Expressa la resposta com un únic radical.

$$\frac{a^{-2}}{a^{3/2}}\sqrt[4]{b^2} = a^{-7/2}b^{2/4} = \frac{b^{1/2}}{a^{7/2}} = \sqrt{\frac{b}{a^7}}$$

(c) Josep Mulet (2020)

IEDIB

EXERCICIS PROPOSATS

3. Utilitza les propietats de les potències per expressar com una única potència:
a) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 : (2^3)^2 =$
b) $(x^4 : y^2)^5 \cdot x^2 y^{11} =$
c) $3^4 \cdot 2^4 : 6^4 =$
d) $\dfrac{(a^7 \cdot a^3)^4 \cdot b^5}{ab \cdot 3ab} =$

4. Opera deixant la resposta com una potència d'exponent positiu:
a) $a^{-2} =$
b) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} =$
c) $2^{-3} \cdot 2^{-1} : 2^{-2} =$
d) $(x^3 \cdot x^4)^{-2} \cdot x^5 =$

1.2 Radicals

En aquesta i la propera secció estudiarem com resoldre equacions de la forma

$$x^3 = 8 \quad \text{i} \quad 3^x = 8$$

Aparentment són equacions molt semblants però alhora molt diferents. En el primer cas, la incògnita apareix en la base d'una potència mentre que en el darrer apareix a l'exponent. Veurem que per resoldre el primer tipus d'equacions necessitam el **concepte d'arrel** o radical mentre que pel segon haurem d'introduir el **concepte de logaritme**.

Definició de radical

Començam presentant el concepte de radical mitjançant l'exemple anterior

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \text{perquè} \qquad 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{perquè} \qquad 3^4 = 81$$

$$\sqrt[5]{-100000} = -10 \qquad \text{perquè} \qquad (-10)^5 = -100000$$

En general, la definició de radical és

DEFINICIÓ DE RADICAL

$$\sqrt[n]{a} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^n = a \tag{2}$$

n: Índex, a: Radicand

Operacions amb radicals

Passam a enumerar una sèrie de propietats dels radicals, les quals provenen de les propietats de les potències.

Taula 3: *Propietats del radicals*

(c) Josep Mulet (2020)

Propietat	Fórmula	Exemple
1. Producte d'igual índex	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{100}=10$
2. Quocient d'igual índex	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{\dfrac{14}{7}}=\sqrt[3]{2}$
3. Potència d'una arrel	$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^3=\sqrt[4]{5^3}$
4. Arrel d'arrel	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[12]{5}$
5. Extreure factors de l'arrel	$\sqrt{a^2\cdot b}=a\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a^3\cdot b}=a\sqrt[3]{b}$	$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{7000}=\sqrt[3]{10^3\cdot 7}=10\sqrt[3]{7}$
6. Introduir factors dins l'arrel	Consisteix en el pas contrari de [5]: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$ $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3\cdot b}$	$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{75}$ $\sqrt{3\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{3^2\cdot x}}=\sqrt[4]{9x}$
7. Suma i resta. Simplificar expressions	El primer pas és factoritzar els radicands i després extreure factors. Finalment, podem sumar o restar arrels iguals	$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}=$ $\sqrt[3]{3^3\cdot 2}+\sqrt[3]{2\cdot 2^3}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}$
8. Radicals equivalents	$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot q]{a^q}$	$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[9]{2^3}=\cdots$
9. Operacions amb diferent índex	Primer cal reduir els radicals a índex comú utilitzant la propietat [8] $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[q]{a^{q/n}\cdot b^{q/m}}$ essent $q=min.c.m(n,m)$	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}=\sqrt[12]{432}$
10. Racionalitzar I	$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}\cdot\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}}=\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$	$\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}}=\dfrac{2\sqrt[4]{5^3}}{5}$
11. Racionalitzar II	Multiplicam i dividim pel conjugat del denominador $\dfrac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\cdot\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\cdot\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

(c) Josep Mulet (2020)

Vídeo 1.1: *Propietats i operacions amb radicals*
https://www.youtube.com/watch?v=Cfl8HcObbGA&start=20&end=964

EXERCICI RESOLT 4

Simplifica tant com puguis l'expressió

$$3\sqrt{8} - 2\sqrt{50} + 5\sqrt{18} - 4\sqrt{2}$$

Començant factoritzant els radicands

$$3\sqrt{2^3} - 2\sqrt{2\cdot 5^2} + 5\sqrt{2\cdot 3^2} - 4\sqrt{2} =$$

Expressam $2^3 = 2 \cdot 2^2$ i treim defora els radicals tots els factors que apareixen elevats a 2

$$= 3\cdot 2\sqrt{2} - 2\cdot 5\sqrt{2} + 5\cdot 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} =$$

Com que només queda el radical $\sqrt{2}$ els podem agrupar en un sol: $= 7\sqrt{2}$

EXERCICI RESOLT 5

Efectua i simplifica tant com puguis

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{12}}}}{\sqrt[6]{a^5}}$$

Començam efectuant arrel d'arrel al numerador

$$\frac{\sqrt[15]{a^{12}}}{\sqrt[6]{a^5}} =$$

Reduïm a índex comú min.c.m(15,6)=30

$$= \frac{\sqrt[30]{a^{12\cdot 2}}}{\sqrt[30]{a^{5\cdot 5}}} =$$

Expressam com una única arrel i simplificam les potències de a

$$= \sqrt[30]{\frac{a^{24}}{a^{25}}} = \sqrt[30]{a^{-1}} = \sqrt[30]{\frac{1}{a}}$$

EXERCICI RESOLT 6

Calcula la raó b/a entre els nombres reals $a = \sqrt{5}$ i $b = \sqrt{5}+1$. Dóna la resposta exacta (sense utilitzar nombres decimals) i racionalitzada.

Per racionalitzar multiplicam i dividim per $\sqrt{5}$:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}\sqrt{5}} =$$

Tot seguit multiplicam en línia. En el denominador aplicam la propietat distributiva i en denominador tenim el quadrat d'una arrel quadrada $(\sqrt{5})^2 = 5$.

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{5} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}$$

EXERCICIS PROPOSATS

5. Opera i simplifica $(2+\sqrt{3})^2$

6. Racionalitza l'expressió $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

1.3 Logaritmes

Definició de logaritme

Si ens demanam 10 elevat a quin nombre x dona 1000, la resposta és fàcil: $x=3$ perquè $10^3 = 1000$.

Si en canvi ens demanam que ha de valer x en $2^x = 1000$ la resposta no pot ésser entera. Totes les equacions on la **incògnita apareix a un exponent** donaran lloc a un **logaritme**. En aquest exemple $x = \log_2 1000$, que es llegeix com l'logaritme en base 2 de 1000".

Passem a definir què s'entén per logaritme:

DEFINICIÓ DE LOGARITME

$$\log_b y = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = y \tag{3}$$

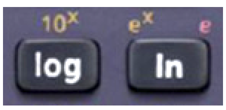
b: Base del logaritme

b és la base del logaritme, que ha d'ésser positiva i diferent de 1. Si la base és 10, tenim el **logaritme decimal** $\log_{10} x = \log x$. Si en canvi triam com a base el número $e = 2.7182818\cdots$, obtenim el **logaritme Neperià**, $\log_e x = \ln x$.

Taula 4: *Tipus de logaritmes*

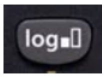
Tipus de logaritme	Base	Notació	Significat
Binari	2	$\log_2 x$	$\log_2 x$
Neperià	e	$\ln x$	$\log_e x$
Decimal	10	$\log x$	$\log_{10} x$

Totes les calculadores científiques poden calcular dos tipus de logaritme; el decimal tecla log i el Neperià amb la tecla ln



En cas que necessiteu calcular un logaritme en una altra base, utilitzarem la **fórmula del canvi de base**

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} \approx 2,322$$

És possible que el vostre model de calculadora sigui més actual i disposeu de la tecla , la qual pot realitzar el càlcul de qualsevol logaritme directament.

Atenció: A un logaritme $\log_b x$
Tant b com x han d'ésser majors que 0. A més a més, la base b no pot ésser igual a 1.

EXERCICI RESOLT 7

Utilitza la definició de logaritme per calcular el valor de x:
a) $\log x^2 = -2$
b) $7^x = 115$
c) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$
d) $\ln x = 2$

a) Es tracta d'un logaritme decimal: $\log_{10} x^2 = -2$; aplicam la definició $10^{-2} = x^2$, prenem l'arrel quadrada a ambdós membres $x = \pm 10^{-1} = \pm\frac{1}{10}$.

b) $7^x = 115$; per la definició, l'exponent x és el logaritme: $x = \log_7 115$

c) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$; aplicam la definició $x^{-1/2} = 4$. Aquí cal recordar que elevar a 1/2 és fer l'arrel quadrada. Llavors, per eliminar l'arrel quadrada cal elevar tota l'equació al quadrat. Nosaltres elevarem a -2 perquè volem eliminar també l'exponent negatiu de la $x \Rightarrow x = 4^{-2}$. Finalment $x = \frac{1}{16}$.

d) Es tracta d'un logaritme Neperià, la base és el número e. $\log_e x = 2$; aplicant la definició trobam $x = e^2 \approx 7,389$

Vídeo 1.2: *Definició de logaritme*
https://www.youtube.com/watch?v=NmTGMGTf1x0

Propietats dels logaritmes

Taula 5: *Propietats dels logaritmes amb exemples*

Propietat	Fórmula	Exemples
1. Logaritme de 1 en qualsevol base és 0	$\log_b 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$; $\ln 1 = 0$; $\log 1 = 0$; etc.
2. Logaritme en base b de la base sempre és 1	$\log_b b = 1$	$\log_2 2 = 1$; $\ln e = 1$; $\log 10 = 1$; etc.

(c) Josep Mulet (2020)

3. Logaritme d'un producte és la suma de logaritmes	$\log_b(A\cdot B)=\log_b A+\log_b B$	$\log 50=\log(5\cdot 10)=\log 5+\log 10=\log 5+1$
4. Logaritme d'una potència, l'exponent baixa davant el logaritme	$\log_b A^n=n\cdot\log_b A$	$\log 2^6=6\log 2$
5. Logaritme d'un quocient és la diferència de logaritmes	$\log_b\left(\dfrac{A}{B}\right)=\log_b A-\log_b B$	$\log 50=\log\dfrac{100}{2}=\log 100-\log 2=2-\log 2$
6. Fórmula del canvi de base	$\log_b A=\dfrac{\log A}{\log b}$	$\log_2 5=\dfrac{\log 5}{\log 2}=\dfrac{\ln 5}{\ln 2}=\cdots$
7. L'exponencial és la funció inversa del logaritme	$b^{\log_b A}=A$	$2^{\log_2 5}=5$

Vídeo 1.3: *Propietats dels logaritmes*
https://www.youtube.com/watch?v=sfe8QEeYn3U

EXERCICI RESOLT 8

Calcula x en cada cas:
a) $\log_3 x=\dfrac{1}{2}$
b) $\log_x 81=4$
c) $\ln\dfrac{3x}{2}=5$

Aquest problema es resol fàcilment aplicant la definició de logaritme.

a) $\log_3 x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=3^{1/2}=\sqrt{3}$

b) $\log_x 81=4\Leftrightarrow x^4=81\rightarrow x=\sqrt[4]{81}=3$

c) $\ln\dfrac{3x}{2}=5\Leftrightarrow\dfrac{3x}{2}=e^5\rightarrow x=\dfrac{2e^5}{3}$

EXERCICI RESOLT 9

Calcula x en cada cas:
a) $2,5^x=0,0087$
b) $e^{-x}=425$

Aquest problema es resol fàcilment aplicant la definició de logaritme. Alternativament, nosaltres prendrem logaritmes al dos membres de l'equació. Tot seguit empram la propietat [4].

a) $\log 2,5^x=\log 0,0087\Rightarrow x\cdot\log 2,5=\log 0,0087$

$$\Rightarrow x=\frac{\log 0,0087}{\log 2,5}\approx -5,178$$

b) $\ln e^{-x}=\ln 425\Rightarrow -x\cdot\ln e=\ln 425\Rightarrow x=-\ln 425\approx -6,052$

(c) Josep Mulet (2020)

EXERCICI RESOLT 10

Utilitza les propietats dels logaritmes per expressar com un únic logaritme:
$\log x^2 + \log 2 - \log x - \log 3$

Utilitzam les propietats 3 i 5 al membre de l'esquerra per tal d'ajuntar els 4 logaritmes en un únic logaritme

$$\log x^2 + \log 2 - \log x - \log 3 =$$

$$\log \frac{x^2 \cdot 2}{3 \cdot x} = \log \frac{2x}{3}$$

Aplicacions dels logaritmes

Les quantitats científiques sovint s'expressen en **escala logarítmica**. Per exemple, **el decibel (dB)** és una unitat logarítmica de mesura. De fet, 1 dB (decibeli) és 10 vegades un 1 B (bel). La mesura d'un renou de potència P mesurada en dB es calcula a partir de $dB = 10 \log \frac{P}{P_0}$ on P_0 és el llindar d'audició. Si passam de 70 dB a 100 dB, s'ha augmentat (100-70)/10 = 3 B i, com que l'escala és logarítmica, això vol dir que el renou duu $10^3 = 1000$ vegades més energia.

Els logaritmes també s'utilitzen per a quantificar la pèrdua dels nivells de tensió en la transmissió de senyals elèctrics, per descriure els nivells de potència dels sons en l'acústica, i l'absorció de la llum en el camp de l'espectrometria i l'òptica. La relació senyal/soroll que descriu la quantitat de renou no desitjat en relació amb un senyal també es mesura en decibels.

La **força d'un terratrèmol** es mesura prenent el logaritme comú de l'energia emesa en el terratrèmol. Això s'utilitza en l'escala de magnitud de moment o l'escala de Richter. Per exemple, un terratrèmol de 5,0 allibera 10 vegades i el 6,0 allibera 100 vegades l'energia d'un 4,0.

Una altra escala logarítmica és la **magnitud aparent**. Es mesura la brillantor de les estrelles logarítmicament.

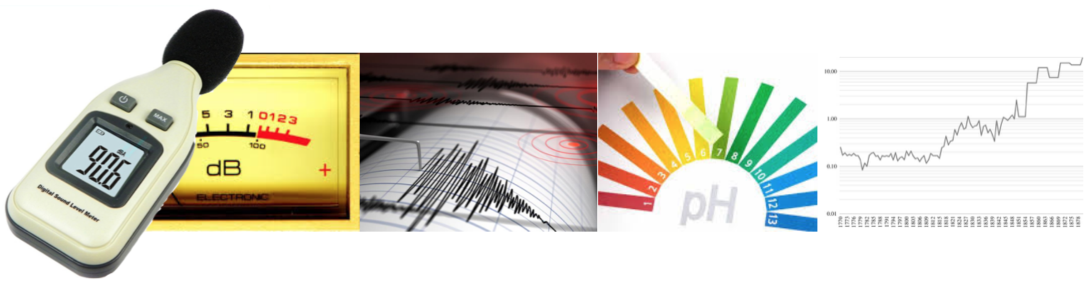


Figura 2: Aplicacions dels logaritmes

Un altre exemple és el **pH en la química**; pH és el negatiu del logaritme de la concentració dels ions oxoni (els ions d'hidrogen H_3O^+ que es dissocien de la mol·lècula d'aigua).

Gràfics semi-logarítmics (log-lineals) utilitzen el concepte d'escala logarítmica per a la visualització: un dels eixos, en general la vertical, es escala logarítmica. D'aquesta forma es possible distingir detalls de la gràfica que seria impossible veure en escala lineal.

EXERCICIS PROPOSATS

7. Aplicau les definició de radical i logaritme per trobar x en aquestes equacions
a) $10^x = 5$
b) $x^5 = 2$
c) $\ln x = -3$
d) $\log_x 125 = -3$

8. Considerau l'expressió $F = 3\log_2 x + \log_2 1 - \log_2 10$.
a) Utilitzau les propietats per expressar-la com un únic logaritme.
b) Calculau el valor de F quan $x = 8$.
c) Sabem que $F = 4$, aïllau el valor de x.

2. Els nombres complexos

Introducció


Leonhard Euler

L'home ha anat ampliant al llarg del temps la noció de nombre segons les seves necessitats. Des de la prehistòria, els nombres naturals han servit per comptar. Els nombres enters negatius ens permeten resoldre equacions com $x + 5 = 1$. De forma similar els nombres fraccionaris permeten fer repartiments i resoldre $3x = 2$. En l'antiga Grècia ja es sabia que no existia cap nombre racional que fos solució de $x^2 = 2$; la diagonal d'un quadrat d'1 m. D'aquí s'introduïren els nombres irracionals.
El conjunt format pels nombres racionals i irracionals és el conjunt dels nombres reals. Aquests són tots els nombres amb els quals, de moment, hem treballat.

INTRODUCCIÓ

Equacions de segon grau

És possible trobar les solucions de l'equació $x^2 - 4x + 13 = 0$?

Si utilitzam la fórmula de les equacions de segon grau, trobam

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \tag{4}$$

Donat que $\sqrt{-36}$ no és cap nombre real, deim que l'equació no té solucions reals. Però, si separem $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{-1}$, veim que el problema està en que no podem calcular $\sqrt{-1}$.

En 1777 Leonard Euler va anomenar $i = \sqrt{-1}$ com la **unitat imaginària**. D'aquesta forma podem escriure les solucions com:

$$x = \frac{4 \pm 6\,i}{2} = 2 \pm 3i \tag{5}$$

Acabam d'escriure dos nombres complexos en forma binòmica.

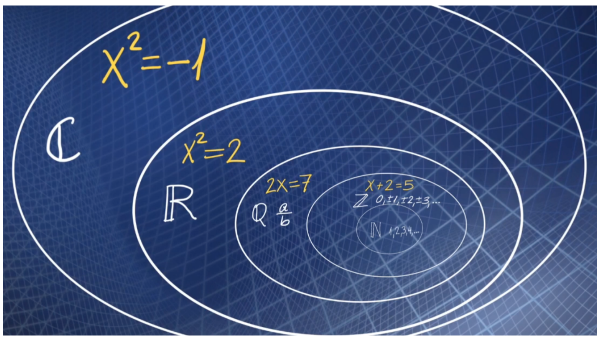


Figura 3: Conjunt dels nombres complexos: Cada conjunt permet resoldre un tipus més complicat d'equació.

El conjunt dels nombres complexos $\mathbb{C}$ amplia el conjunt dels nombres reals i permet donar un

(c) Josep Mulet (2020)

significat a les arrels quadrades de nombres negatius per així poder resoldre equacions com $x^2+1=0$.

Nombres complexos en forma binòmica

Es defineix la **unitat imaginària** i com $i=\sqrt{-1}$. Aquest nombre el representam sobre un eix vertical que anomenam **eix imaginari**.

Els nombres de la forma $2i$, $5i$, $-\frac{3}{2}i$, $\cdots$ s'anomenen **imaginaris purs**. Tots ells estan sobre l'eix vertical.

Es compleix que $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, etc. Gràficament, cada pic que multiplicam per i, el nombre gira $90°$ en sentit antihorari, passant de imaginari a real succesivament.

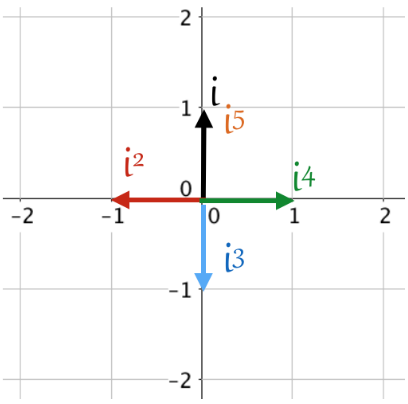


Figura 4: Potències de i.

Un **nombre complex** en forma binòmica s'expressa com $z=x+iy$, on $x=Re(z)$ s'anomena **part real** i $y=Im(z)$ la **part imaginària** del nombre.

El nombres es representen sobre el **pla complex**. A l'eix horitzontal hi situam la part real i a l'eix vertical la part imaginària.

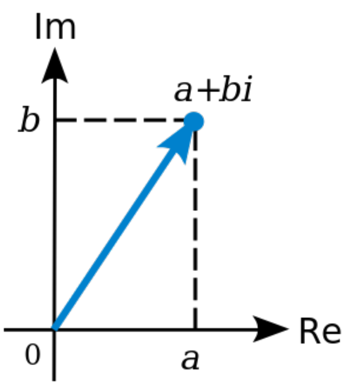


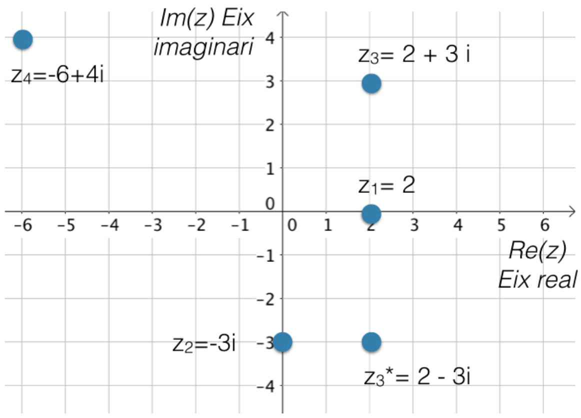
Figura 5: Representació d'un nombre en el pla complex.

El **complex conjugat** del nombre s'obté de canviar el signe de la part imaginària $z^*=x-iy$.

El **mòdul** d'un nombre complex és la longitud del nombre que s'obté de $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

EXERCICI RESOLT 11

Representa sobre el pla complex els nombres:
$z_1 = 2$
$z_2 = -3i$
$z_3 = 2 + 3i$
z_3*
$z_4 = -6 + 4i$



2.1 Operacions en forma binòmica

Suposau que ens donen els nombres complexos $z_1 = 2 - 3i$ i $z_2 = 5 + 4i$. Amb aquests nombres podem fer les següents operacions:

- **SUMA:** Es suma la part real amb la part real, i la part imaginària amb imaginària

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (5 + 4i) = 7 + i \tag{6}$$

- **DIFERÈNCIA:** Es resta la part real amb la part real, i la part imaginària amb imaginària

$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (5 + 4i) = -3 - 7i \tag{7}$$

- **PRODUCTE:** S'aplica la propietat distributiva per eliminar els parèntesis i es recorda que $i^2 = -1$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (5 + 4i) = 10 + 8i - 15i - 12 \underset{\downarrow -1}{i^2} = 22 - 7i \tag{8}$$

  Notau que si multiplicam un nombre complex pel seu conjugat, obtenim un nombre real que és igual al mòdul al quadrat del nombre complex, és a dir $z \cdot z^* = |z|^2$. Aquest resultat és fàcil de demostrar; suposem que $z = a + ib$, aleshores:

$$(a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 - i\,ab + i\,ab - bi^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \tag{9}$$

- **POTÈNCIA:** Es transforma la potència com a producte.

$$z_1^2 = (2 - 3i) \cdot (2 - 3i) = 4 - 6i - 6i + 9i^2 = -5 - 12i \tag{10}$$

(c) Josep Mulet (2020)

Podeu comprovar que es compleixen les fórmules d'identitats notables sempre i quan utilitzem que $i^2 = -1$.

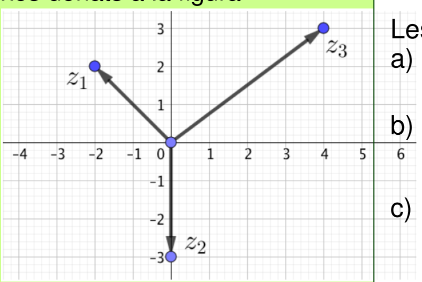
$$z_1^2 = (2-3i)^2 = 2^2 - 2\cdot 2\cdot 3i + \ (3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = -5 - 12i \tag{11}$$

- **QUOCIENT:** Es multiplica el numerador i el denominador pel complex conjugat del denominador. Després es multiplica numerador amb numerador i denominador amb denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-3i)\cdot(5-4i)}{(5+4i)\cdot(5-4i)} = \frac{-2-23i}{41} \tag{12}$$

EXERCICI RESOLT 12

Considera els nombres complexos donats a la figura



calcula
a) $z_1 + z_2 - z_3$
b) $z_1^* \cdot z_2$
c) $\dfrac{z_1}{z_3}$

En primer lloc, de la figura deduïm els nombres en forma binòmica:
$z_1 = -2 + 2i;\ \ z_2 = -3i;\ z_3 = 4 + 3i$

Les operacions són:
a) $z_1 + z_2 - z_3 = -2 + 2i - 3i - 4 - 3i = -6 - 4i$

b) $z_1^* \cdot z_2 = (-2-2i)\cdot(-3i) = 6i + 6i^2 = - + 6i$

c) $\dfrac{z_1}{z_3} = \dfrac{-2+2i}{4+3i} = \dfrac{(-2+2i)\cdot(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \dfrac{-2+14i}{25}$

Vídeo 1.4: *Introducció als nombres complexos*
https://www.youtube.com/watch?v=uhra2yk2g5Q

EXERCICIS PROPOSATS

9. Considereu el nombre complex $z = -1 + 2i$
a) Digueu quina és la seva part real i imaginària.
b) Quin nombre és el complex conjugat de z?.
c) Calculau $w = i\,z$. Representeu en el pla complex z i w i expliqueu quin és l'efecte de multiplicar per i un nombre.

10. Considereu els nombres $z_1 = -3 + 2i$ i $z_2 = 5 - i$.
a) Calculau z_1^2 i z_2^2.
b) Calculau $\dfrac{1}{z_1}$ i $\dfrac{1-i}{z_2}$.
Representeu tots els nombres en el pla complex.

(c) Josep Mulet (2020)