Lliurament 1:
Nombres reals i complexos

Com percebem la magnitud dels estímuls els humans?

Matemàtiques I

Josep Mulet Pol
Àmbit científic
IEDIB

https://iedib.net/

Índex

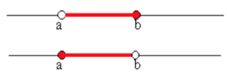
1. Els nombres reals

Intervals i semirectes

Com hem vist amb l'exemple de les dimensions d'un mòbil, a vegades resulta més útil referir-se a un conjunt de nombres.Per referir-nos a una part de la recta real utilitzam intervals i semi-rectes.Els intervals poden ésser tancats o oberts segons que els extrems de l'interval entrin o no.Si l'extrem entra utilitzarem claus **[** i si no entra un parèntesi **(** .Ens referim a semirectes quan un dels extrems de l'interval és infinit.

Utilitzam la següent notació per designar intervals

Taula 1: *Tipus d'intervals i semirectes*

Tipus	**Com s'escriu?**	**Com a desigualtat**	**Representació**
Interval obert	(a, b)	$a < x < b$	
Interval tancat	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
Interval semi-obert	$(a, b]$ $[a, b)$	$a < x \leq b$ $a \leq x < b$	
Semirecta oberta	$(-\infty, a)$ (a, ∞)	$x < a$ $x > a$	

Semirecta tancada	$(-\infty, a]$ $[a, \infty)$	$x \leq a$ $x \geq a$	

Quan ens referim a tota la recta real podem utilitzar el símbol $\mathbb{R}$ o expressar-ho com l'interval $(-\infty, \infty)$. Recordau que els **infinits** sempre s'escriuen com un **extrem obert** per posar de manifest que "mai hi arribarem".

Exemple 1

a) Expressa com un interval tots els nombres positius que la seva part entera tingui 3 xifres.
b) Expressa com un interval $(-3, 2) \cap [0, +\infty)$
c) Expressa com un interval tots els nombres que es troben a un distància menor que 8 del nombre 5.

a) Els nombres que tenen 3 xifres van de 100 inclòs fins a 1000 sense incloure (és a dir, podríem agafar999,9999 però no 1000).
Aleshores, l'interval és semi-obert [100, 1000). Expressat com a desigualtat tenim $100 \leq x < 1000$

b) La intersecció són tots els nombres que tenen en comú els dos intervals. En aquest cas, $(-3, 2) \cap [0, +\infty) = [0, 2)$.

c) Sabem que un entorn és un interval obert que té el centre a $c = 5$ i el radi $r = 8$. Llavors, l'interval és $(c - r, c + r) = (5 - 8, 5 + 8) = (-3, 13)$.

Aproximacions i errors

Si feis la divisió $2/3$ amb la calculadora, trobareu un valor de $0.666\cdots$, és a dir, una expressiódecimal periòdica. Si cercam el valor de $\pi = 3.14159\cdots$ trobam una expressió decimal no periòdicaatès que es tracta d'un nombre irracional.

És molt habitual treballar amb expressions aproximades dels nombres. De fet, així treballen internamentaparells com la calculadora i el mòbil. Aproximen els nombres a representacions decimals fins a una certa precisió.Quan es treballa amb una expressió aproximada es comet un error que caldrà tenir en compte.

Hi ha diferents formes d'aproximar un nombre

- **Per truncament** : Si volem aproximar $\frac{2}{3}$ a les centèsimes per truncament agafarem dues xifres decimals ieliminat totes les següents. Llavors, l'aproximació és $\frac{2}{3} \approx 0.66$.El símbol $\approx$ significa aproximadament igual.
- **Per arrodoniment** : Si volem aproximar $\frac{2}{3}$ a les centèsimes per arrodoniment agafarem dues xifres decimals imiram la que ocupa posició de les mil·lèsimes. Atès que a les mil·lèsimes hi ha una xifra que és 5 o més,s'augmenta en 1 la xifra de les centèsimes. Llavors, l'aproximació és $\frac{2}{3} \approx 0.67$.

El nombre π truncat a les centèsimes és 3.14 i l'aproximació per arrodoniment també és 3.14 perquè el dígit que segueix és menor a 5.

Existeixen dues formes de mesurar l'error

- **Error absolut** : $E_a = |\text{Valor real} - \text{Valor aproximat}|$. Tingues en compte que $|x|$ significa el valor absolut del nombre x i és el mateix nombre sense signe.
- **Error relatiu** : $E_r = \frac{E_a}{\text{Valor real}}$. És habitual expressar l'error relatiu comun percentatge.

Si aproximam $\pi \approx 3.14$, estam cometent un error absolut de $E_a = |3.14159\cdots - 3.14| \approx 0.00159$ i un error relatiu de $E_r = \dfrac{0.00159}{\pi} = 0.0005$, o en percentatge 0.05 %.

Exercicis

1. La velocitat de la CPU d'un mòbil és 1.85 ± 0.10 GHz. El trobam a la vendaper un preu de 750 ± 15 €. Expressa les dues mesures com intervals i determinal'error relatiu comès en cada cas. Raona en quin cas es comet un menor error.

2. Completa la taula següent

Frase	Interval i representació	Desigualtat

Tots els nombres que són menors de 7.8 i majors o iguals que 7		
	$(-3, +\infty)$	
		$x < -5$

3. Els preus d'un mòbil en *A.com* van desde 450 fins 515 €. El preu del mateix mòbilen *B.com* està comprès de 435 a 500 €. Es demana:

a) Calcula la intersecció $A \cap B$, és a dir, els preus que tenen en comú els intervals A i B.

b) Calcula la unió $A \cup B$, és a dir, tots els nombres que estan almenys en un dels dos intervals.

Raona quina operació amb intervals et dona el rang de preu de tot el mercat.

Per exemple, el meu dispositiu fa 7.7 cm d'ample i 16.4 cm d'alt.

Podem afirmar amb tota certesa que aquestes mides són exactes?

La regla que he emprat per mesurar el mòbil téuna precisió de 1 mm (és la divisió més petita representada). Llavors,no és cert que tingui una amplada de 7.7 cm perquè hi ha uncert error de mesura.

L'amplada estarà a interval $[7.6, 7.8]$ i l'altura a $[16.3, 16.5]$. Entre quins valors estarà compresa la superfície de la pantalla?

1.1 Potències

Abans d'entrar en l'estudi dels radicals i els logaritmes, resultarà molt útilfer un petit resum de les propietats de les potències.

Propietats de les potències

Taula 4: *Propietats de les potències*

Propietat	Fórmula	Exemple
1. Coses a recordar	Qualsevol número elevat a 0 és 1 Qualsevol número elevat a 1 és ell mateix	$7^0 = 1$ $7^1 = 7$
2. Producte d'igual base *"sumam exponents"*	$b^n \cdot b^m = b^{m+n}$	$3^5 \cdot 3^2 = 3^7$
3. Quocient d'igual base *"restam exponents"*	$b^n : b^m = b^{m-n}$	$3^5 : 3^2 = 3^3$
4. Potència d'una potència *"multiplicam exponents"*	$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$	$(3^5)^2 = 3^{10}$
5. Operacions d'igual exponent	Operam les bases i elevam al mateix exponent	$3^5 \cdot 8^5 : 2^5 = (3 \cdot 8 : 2)^5 = 12^5$

Una **potència d'exponent negatiu** significa **fer la inversa** i elevar a l'exponent positiu.Per exemple:

$$2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

Una **potència d'exponent fraccionari** és un **radical** (o arrel). Per exemple:

$$5^{1/2} = \sqrt{5}, \quad 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}, \quad 5^{1/4} = \sqrt[4]{5}$$

En general es compleix que

Relació entre potència i radical

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \qquad (1)$$

Vídeo 1.1: *Introducció als radicals*
https://www.youtube.com/watch?v=yatz5fvqhSk

Exemple 2

Considera els nombres en notació científica $a = 2 \cdot 10^{-31}$ i $c = 3 \cdot 10^{8}$. Calcula
a) $a \cdot c =$
b) $a \cdot c^2 =$
c) $\frac{c}{a} =$
Dona la resposta també en notació científica.

Substituïm els valors i aplicam les propietats de les potències
a) $a \cdot c = 2 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^{8} = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{8} = 6 \cdot 10^{-31+8} = 6 \cdot 10^{-23}$
b) $a \cdot c^2 = 2 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^{8})^2 = 2 \cdot 10^{-31} \cdot (9 \cdot 10^{8 \cdot 2}) = 2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{16} = 18 \cdot 10^{-31+16} = 18 \cdot 10^{-15} = 1.8 \cdot 10^{-14}$
c) $\frac{c}{a} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{2 \cdot 10^{-31}} = (3/2) \cdot 10^{8-(-31)} = 1.5 \cdot 10^{39}$

Exemple 3

Opera transformant els radicals a potència i utilitzant les propietats de les potències.

$$\frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^2}}{a^2}$$

Expressa la resposta com un únic radical.

$$\frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^2}}{a^2} = \frac{a^{5/3} \cdot a^{2/4}}{a^2} = a^{5/3+2/4-2} = a^{1/6} = \sqrt[6]{a}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{4} - 2 = \frac{20}{12} + \frac{6}{12} - \frac{24}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Exercicis

4. Utilitza les propietats de les potències per expressar com una única potència:

a) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 : (2^3)^2 =$

b) $(20^4 : 2^4)^5 \cdot 10^{-10} \cdot 10^6 =$

c) $5^4 \cdot 2^4 : 10^3 =$

d) $\frac{(a^7 \cdot a^3)^4 \cdot b^5}{ab \cdot 3ab} =$

5. Opera deixant la resposta com una potència d'exponent positiu:

a) $a^{-2} =$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} =$

c) $2^{-3} \cdot 2^{-1} : 2^{-2} =$

d) $(x^3 \cdot x^4)^{-2} \cdot x^5 =$

Les potències de 2 s'empren a la informàtica per representar els nombres mitjançant zeros i uns (bits).

Resulta que el nombre màxim de mots que podem formar emprant 32zeros o uns ($101001\cdots$) és $2^{32} = 4.294.967.296 = 4$ GB. Cadascun d'aquests motsés una adreça de la memòria RAM.

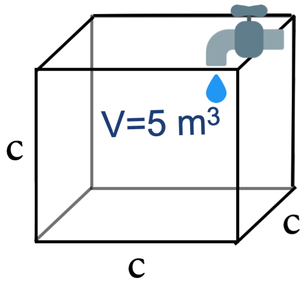
Quantes adreces tens disponibles al teu ordinador de 64 bits? Quanta memòria RAM podria admetre?

Contínuament empram potències de 10 per expressar nombres en notació científica: la càrrega de l'electró $1.6 \cdot 10^{-19}$ C, la massa del Sol $1.98 \cdot 10^{30}$ kg, etc.Has pensat perquè alguns nombres tenen exponent positiu i d'altres negatiu?

10^3	kilo (k)
10^6	mega (M)
10^9	giga (G)
10^{12}	tera (T)
10^{15}	peta (P)
10^{18}	exa (E)

1.2 Radicals

Els radicals apareixen en situacions relacionades amb la mesura d'àrea i volum. Sabries dir que mesuren els costats de les figures a partir de la informació proporcionada?



Atès que el volum d'un cub és $V = c^3$, hem de resoldre l'equació $c^3 = 5$ que té com a solució $c = \sqrt[3]{5}$.Com veim hem trobat una arrel cúbica o d'índex 3.

Al tractar-se d'un nombre irracional, una representació decimal aproximada és $c \approx 1.71$. Quin errorestam cometent?

En aquesta i la propera secció estudiarem com resoldre equacions de la forma

$$x^3 = 8 \quad \text{i} \quad 3^x = 8$$

Aparentment són equacions molt semblants però alhora molt diferents.En el primer cas, la incògnita apareix en la base d'una potència mentre que en el darrer apareix a l'exponent.Veurem que per resoldre el primer tipus d'equacions necessitam el **concepte d'arrel** o **radical** mentre que pel segon haurem d'introduir el **concepte de logaritme** .

Definició de radical

Començam presentant el concepte de radical mitjançant una sèrie d'exemples

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{8} = 2 &\quad \text{perquè} \quad 2^3 = 8 \\
\sqrt[4]{81} = 3 &\quad \text{perquè} \quad 3^4 = 81 \\
\sqrt[5]{-100000} = -10 &\quad \text{perquè} \quad (-10)^5 = -100000
\end{aligned}$$

En general, la definició de radical és

Definició de radical

$$\sqrt[n]{a} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^n = a \tag{2}$$

n: Índex, a: Radicand

Exemple 4

Una malaltia s'estén per un territori de forma que a cada hora, el nombred'infectats es multiplica per un factor b. Sabent que inicialment hi havia una personacontagiada i que passades 20 hores n'hi ha 56.297, calcula quin és el factord'expansió b. Quants afectats hi haurà a les 40 hores?

Segons l'enunciat el model d'expansió de la malaltia és $C(n) = b^n$. Aquesta equaciócompleix que $C(0) = b^0 = 1$, és a dir, hi ha inicialment un cas. Necessitam imposarque $b^{20} = 56.297$. Atès que la incògnita apareix en la base de l'equació hem deprendre l'arrel d'índex 20. Trobam doncs que $b = \sqrt[20]{56.297} = 1,728$.
A les 40 hores hi haurà $(1,728)^{40} = 3.175.042.374$. És a dir, devers 3 bil·lions de malalts.

Operacions amb radicals

Passam a mostrar com operar amb radicals, aprofitant les propietats de les potències que hem estudiat a la secció anterior. L'alumne interessat trobarà a l'annex A una llista més detallada de propietats dels radicals.

Una forma molt senzilla de treballar amb radicals consisteix en convertir-los a potència d'exponent fraccionari i fer les operacions amb les potències. Una vegada tenim la resposta, la tornam a expressar en forma de radical. Per exemple, considera un cub que tengui volum $\sqrt{2}$ unitats. Què val el costat? Doncs, caldrà calcular $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$, és a dir, hem de calcular una arrel d'una arrel. Vegem com fer-ho:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$$

Vegem ara com multiplicar radicals d'índex diferent. Per exemple, volem calcular l'àrea d'un rectangle de costats $a = \sqrt[4]{2^3}$ i $b = \sqrt[6]{5}$.

$$A = \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[6]{5} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{9}{12}} \cdot 5^{\frac{2}{12}} = \left(2^9 \cdot 5^2\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2^9 \cdot 5^2}$$

Fixeu-vos que, com a passa intermèdia, hem hagut de reduir les fraccions $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{6}$ a denominador comú.

Vídeo 1.2: *Propietats dels radicals (Ampliació)*
https://www.youtube.com/watch?v=-GM22qbIOL0

Exemple 5

Efectua i simplifica tant com puguis

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{12}}}}{\sqrt[6]{a^5}}$$

Començam efectuant arrel d'arrel al numerador

$$\frac{\sqrt[15]{a^{12}}}{\sqrt[6]{a^5}} =$$

Reduïm a índex comú min.c.m(15,6)=30

$$= \frac{\sqrt[30]{a^{12\cdot 2}}}{\sqrt[30]{a^{5\cdot 5}}} =$$

Expressam com una única arrel i simplificam les potències de a

$$= \sqrt[30]{\frac{a^{24}}{a^{25}}} = \sqrt[30]{a^{-1}} = \sqrt[30]{\frac{1}{a}}$$

Exercicis

6. Un microxip té forma de quadrat amb costat $2+\sqrt{3}$ cm. Quina és l'àrea exacta? Quin error relatiu es comet si aproximam l'àrea per 13.7 cm ^{2}?

7. En cada rebot, una pilota assoleix una fracció de l'altura anterior. Sabent que s'ha amollat inicialment des de 4 m i queal rebot 5è ha arribat a una altura de 60 cm. Determina el factor en què es redueix l'altura en cada rebot.

8. El nombre auri o proporció divina $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ és present enmoltes proporcions del cos humà. Potser la més coneguda és l'altura dividit entre la distància dels peusa la guixa. Calcula una expressió simplificada del quadrat del nombre auri i comprova que $\Phi^2 = \Phi + 1$.

1.3 Logaritmes

Els logaritmes s'empren en la mesura de la intensitat del so, els terratrèmols, el pH d'una dissolució, la intensitat dels estels, etc. Investiga quines són aquestes aplicacions.

Definició de Logaritme

Si ens demanam 10 elevat a quin nombre x dona 1000, la resposta és fàcil: $x = 3$ perquè $10^3 = 1000$.

Si en canvi ens demanam que ha de valer x en $2^x = 1000$ la resposta no pot ésser entera.Totes les equacions on la **incògnita apareix a un exponent** donaran lloc a un **logaritme** .En aquest exemple $x = \log_2 1000$, que es llegeix com l'logaritme en base 2 de 1000".

Passem a definir què s'entén per logaritme:

Definició de Logaritme

$$\log_b y = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = y \tag{3}$$

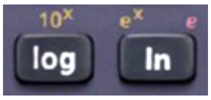
b: Base del logaritme

b és la base del logaritme, que ha d'ésser positiva i diferent de 1. Si la base és 10, tenim el **logaritme decimal** $\log_{10} x = \log x$. Si en canvi triam com a base el número $e = 2.7182818\cdots$, obtenim el **logaritme Neperià** , que escrivim com $\log_e x = \ln x$.

Taula 6: *Tipus de logaritmes*

Tipus de logaritme	**Base**	**Notació**	**Significat**
Binari	2	$\log_2 x$	$\log_2 x$
Neperià	e	$\ln x$	$\log_e x$
Decimal	10	$\log x$	$\log_{10} x$

Totes les calculadores científiques poden calcular dos tipus de logaritme; el decimal tecla $\boxed{\log}$ i el Neperià amb la tecla $\boxed{\ln}$

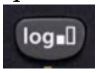


En cas que necessiteu calcular un logaritme en una altra base, utilitzarem la **fórmula del canvi de base**

$$\log_{\color{red}2} {\color{blue}5} = \frac{\log {\color{blue}5}}{\log {\color{red}2}} \approx 2,322$$

A un logaritme $\log_b x$ ...

tant b com x han d'ésser majors que 0. A més a més, la base b no pot ésser igual a 1.

És possible que el vostre model de calculadora sigui més actual i disposeu de la tecla  , la qual pot realitzar el càlcul de qualsevol logaritme directament.

Exemple 6

El nombre de bacteris en un cultiu es duplica cada hora.Sabent que inicialment hi havia 1 miler de bacteris, quantes hores han de passarperquè el nombre de bacteris sigui 60.000 milers?

Segons l'enunciat el model d'expansió de la malaltia és $C(n) = 2^n$. Aquesta equaciócompleix que $C(0) = 2^0 = 1$, és a dir, hi ha inicialment un miler de casos. Necessitam imposarque $2^n = 60.000$. Atès que la incògnita apareix en l'exponent de l'equació, hem decalcular un logaritme en base 2. Trobam doncs que $n = \log_2 60.000 = 15,87$ hores.
Passades 15 hores i 52 minuts, hi haurà el nombre de bacteris demanat.

Exemple 7

Utilitza la definició de logaritme per calcular el valor de x:
a) $\log x^2 = -2$
b) $7^x = 115$
c) $\log_x 4 = -\dfrac{1}{2}$
d) $\ln x = 2$

a) Es tracta d'un logaritme decimal: $\log_{10} x^2 = -2$; aplicam la definició $10^{-2} = x^2$, prenem l'arrel quadrada a ambdós membres $x = \pm 10^{-1} = \pm \frac{1}{10}$.

b) $7^x = 115$; per la definició, l'exponent x és el logaritme: $x = \log_7 115$

c) $\log_x 4 = -\dfrac{1}{2}$; aplicam la definició $x^{-1/2} = 4$ .Aquí cal recordar que elevar a 1/2 és fer l'arrel quadrada.Llavors, per eliminar l'arrel quadrada cal elevar tota l'equació al quadrat. Nosaltres elevarem a -2 perquè volem eliminar també l'exponent negatiu de la $x \Rightarrow x = 4^{-2}$. Finalment $x = \dfrac{1}{16}$.

d) Es tracta d'un logaritme Neperià, la base és el número e. $\log_e x = 2$; aplicant la definició trobam $x = e^2 \approx 7,389$

Vídeo 1.3: *Definició de logaritme*
https://www.youtube.com/watch?v=NmTGMGTf1x0

Propietats dels logaritmes

Taula 7: *Propietats dels logaritmes amb exemples*

Propietat	Fórmula	Exemples
1. Logaritme de 1 en qualsevol base és 0	$\log_b 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$; $\ln 1 = 0$; $\log 1 = 0$; etc.
2. Logaritme en base b de la base sempre és 1	$\log_b b = 1$	$\log_2 2 = 1$; $\ln e = 1$; $\log 10 = 1$; etc.

3. Logaritme d'un producte és la suma de logaritmes	$\log_b(A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$	$\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$
4. Logaritme d'una potència, l'exponent baixa davant el logaritme	$\log_b A^n = n \cdot \log_b A$	$\log 2^6 = 6 \log 2$
5. Logaritme d'un quocient és la diferència de logaritmes	$\log_b \left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$	$\log 50 = \log \dfrac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - \log 2$
6. Fórmula del canvi de base	$\log_b A = \dfrac{\log A}{\log b}$	$\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} = \cdots$
7. L'exponencial és la funció inversa del logaritme	$b^{\log_b A} = A$	$2^{\log_2 5} = 5$

Vídeo 1.4: *Propietats dels logaritmes*
https://www.youtube.com/watch?v=sfe8QEeYn3U

Exemple 8

Calcula x en cada cas:
a) $2,5^x = 0,0087$
b) $e^{-x} = 425$

Aquest problema es resol fàcilment aplicant la definició de logaritme. Alternativament, nosaltresprendrem logaritmes al dos membres de l'equació. Tot seguit empram la propietat [4].

a) $\log 2,5^x = \log 0,0087 \Rightarrow x \cdot \log 2,5 = \log 0,0087$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 0,0087}{\log 2,5} \approx -5,178$$

b) $\ln e^{-x} = \ln 425 \Rightarrow -x \cdot \ln e = \ln 425 \Rightarrow x = -\ln 425 \approx -6,052$

Exemple 9

Utilitza les propietats dels logaritmes per expressar com un únic logaritme:
$\log x^2 + \log 2 - \log x - \log 3$

Utilitzam les propietats 3 i 5 al membre de l'esquerra per tal d'ajuntar els 4 logaritmes en un únic logaritme

$$\log x^2 + \log 2 - \log x - \log 3 =$$

$$\log \frac{x^2 \cdot 2}{3 \cdot x} = \log \frac{2x}{3}$$

Exercicis

9. Aplicau les definició de radical i logaritme per trobar x en aquestes equacions

a) $10^x = 5$

b) $x^5 = 2$

c) $\ln x = -3$

d) $\log_x 125 = -3$

10. Considerau l'expressió $M = \log 108 + 3 \log t - \log 0.2$ que proporciona la magnitud d'un terratrèmolconegut el temps t (en segons) entre l'ona primària i secundària.

a) Utilitzau les propietats per expressar-la com un únic logaritme.

b) Calculau la magnitud quan $t = 3$ s.

c) Sabem que hi ha hagut un terratrèmol fort de $M = 6$, aïllau el valor de t.

2. Els nombres complexos

Si aïllam la x^2, arribam a l'equació $x^2 = -4$. Ara prenem l'arrel quadrada alsdos membres de l'equació

$$x = \pm\sqrt{-4} \tag{4}$$

Donat que $\sqrt{-4}$ no és cap nombre real, deim que l'equació no té solucions reals.Però, si separem $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$,veim que el problema es redueix a que no podem calcular $\sqrt{-1}$.

En 1777, Leonard Euler va anomenar $i = \sqrt{-1}$ com la **unitat imaginària** .D'aquesta forma podem escriure les solucions com:

$$x = \pm 2i \tag{5}$$

Acabam d'escriure dos nombres imaginaris. A continuació aprendrem a representar-los.

El conjunt dels nombres complexos $\mathbb{C}$ amplia el conjunt dels nombres reals i permet donar un significat a les arrels quadrades de nombres negatius per així poder resoldre equacions com $x^2 + 1 = 0$.

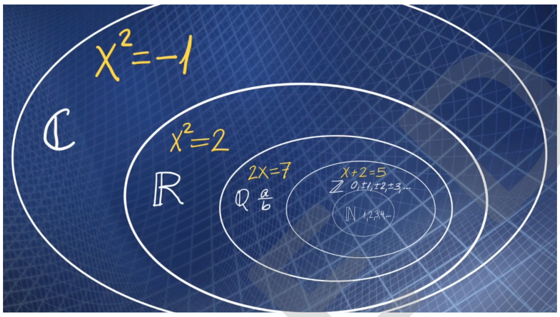


Figura 1: Conjunt dels nombres complexos: Cada conjunt permet resoldre un tipus d'equació més sofisticada.

Vídeo 1.5: *Introducció als nombres complexos*
https://www.youtube.com/watch?v=uhra2yk2g5Q

Nombres complexos en forma binòmica

Es defineix la **unitat imaginària** i com $i = \sqrt{-1}$.Aquest nombre el representam sobre un eix vertical que anomenam **eix imaginari** .

Els nombres de la forma $2i$, $5i$, $-\frac{3}{2}i$, $\cdots$ s'anomenen **imaginaris purs** . Tots ells estan sobre l'eix vertical.

Es compleix que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc. Gràficament,cada pic que multiplicam per i, el nombre gira $90°$ en sentit antihorari, passant de imaginari a real succesivament.

Un **nombre complex** en forma binòmica s'expressa com $z = x + iy$, on $x = Re(z)$s'anomena **part real** i $y = Im(z)$ la **part imaginària** del nombre.

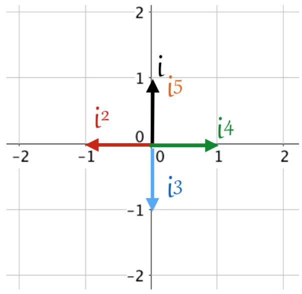


Figura 2: Potències de i.

El nombres es representen sobre el **pla complex** .A l'eix horitzontal hi situam la part real i a l'eix vertical la part imaginària.

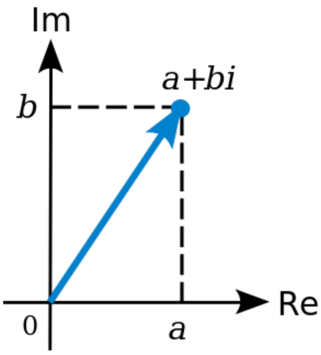


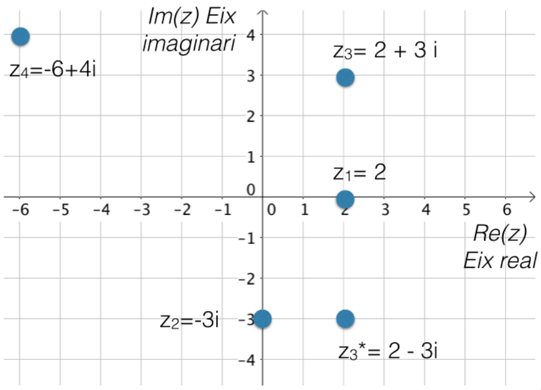
Figura 3: Representació d'un nombre en el pla complex.

El **complex conjugat** del nombre s'obté de canviar el signe de la part imaginària $z^* = x - iy$.

El **mòdul** d'un nombre complex és la longitud del nombreque s'obté de $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple 10

Representa sobre el pla complex els nombres:
$z_1 = 2$
$z_2 = -3i$
$z_3 = 2 + 3i$
z_3^*
$z_4 = -6 + 4i$



- ***Totes les equacions de segon grau tenen exactament 2 solucions complexes.***

Exemple 11

Resol l'equació $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Si utilitzam la fórmula de les equacions de segon grau, trobam

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \tag{6}$$

Donat que $\sqrt{-36}$ no és cap nombre real, deim que l'equació no té solucions reals.Però, si separem $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{-1}$,veim que el problema està en que no podem calcular $\sqrt{-1}$.

Atès que $i = \sqrt{-1}$ és la **unitat imaginària** ,les solucions s'expressen com:

$$x = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i \tag{7}$$

Acabam d'escriure dos nombres complexos en forma binòmica.

2.1 Operacions en forma binòmica

Suposau que ens donen els nombres complexos $z_1 = 2-3i$ i $z_2 = 5+4i$.Amb aquests nombres podem fer les següents operacions:

- **SUMA:** Es suma la part real amb la part real,i la part imaginària amb imaginària
$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (5 + 4i) = 7 + i \tag{8}$$
- **DIFERÈNCIA:** Es resta la part real amb la part real,i la part imaginària amb imaginària
$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (5 + 4i) = -3 - 7i \tag{9}$$
- **PRODUCTE:** S'aplica la propietat distributiva per eliminarels parèntesis i es recorda que $i^2 = -1$
$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (5 + 4i) = 10 + 8i - 15i - 12 \underset{\downarrow -1}{i^2} = 22 - 7i \tag{10}$$
Notau que si multiplicam un nombre complex pel seu conjugat, obtenim un nombre real que és igualal mòdul al quadrat del nombre complex, és a dir $z \cdot z^* = |z|^2$.Aquest resultat és fàcil de demostrar; suposem que $z = a + ib$, aleshores:
$$(a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 - i\,ab + i\,ab - bi^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \tag{11}$$

- **POTÈNCIA:** Es transforma la potència com a producte.

$$z_1^2 = (2-3i)\cdot(2-3i) = 4-6i-6i+9i^2 = -5-12i \tag{12}$$

Podeu comprovar que es compleixen les fórmules d'identitats notables semprei quan utilitzem que $i^2 = -1$.

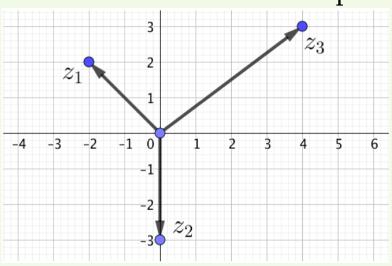
$$z_1^2 = (2-3i)^2 = 2^2 - 2\cdot 2\cdot 3i + (3i)^2 = 4-12i+9i^2 = -5-12i \tag{13}$$

- **QUOCIENT:** Es multiplica el numerador i el denominador pel complex conjugat del denominador.Després es multiplica numerador amb numerador i denominador amb denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-3i)\cdot(5-4i)}{(5+4i)\cdot(5-4i)} = \frac{-2-23i}{41} \tag{14}$$

Exemple 12

Considera els nombres complexos donats a la figura



calcula
a) $z_1 + z_2 - z_3$
b) $z_1^* \cdot z_2$
c) $\dfrac{z_1}{z_3}$

En primer lloc, de la figura deduïm els nombres en forma binòmica:
$z_1 = -2+2i$; $z_2 = -3i$; $z_3 = 4+3i$

Les operacions són:
a) $z_1 + z_2 - z_3 = -2+2i-3i-4-3i = -6-4i$

b) $z_1^* \cdot z_2 = (-2-2i)\cdot(-3i) = 6i+6i^2 = -6+6i$

c) $\dfrac{z_1}{z_3} = \dfrac{-2+2i}{4+3i} = \dfrac{(-2+2i)\cdot(4-3i)}{(4+3i)\cdot(4-3i)} = \dfrac{-2+14i}{25}$

Exercicis

11. Considereu el nombre complex $z = -1 + 2i$

a) Digueu quina és la seva part real i imaginària.

b) Quin nombre és el complex conjugat de z?.

c) Calculau $i\,z$. Representeu en el pla complex z i $i\,z$ i expliqueu quin és l'efecte de multiplicar per i un nombre.

12. Considereu els nombres $z_1 = -3 + 2i$ i $z_2 = 5 - i$. Calculau:

a) $z_1^2 =$

b) $z_1 \cdot z_2 =$

c) $\dfrac{1}{z_1} =$

d) $\dfrac{1-i}{z_2} =$

Representeu tots els nombres en el pla complex.

Igual que amb els nombres reals, els nombres complexos també es poden operar.

Una aplicació de les operacions amb complexos és la transformació de figures.Consideram una figura formada per diversos nombres complexos. Si a tots els nombres d'aquestafigura li aplicam la mateixa operació, arribam a una figura transformada.

En efecte, sumar un nombre complex a una figura produeix una translació.

Simulació 6: https://www.geogebra.org/m/j5kpvqjk

L'efecte de multiplicar un nombre complex a una figura és un canvi d'escala i una rotació.Comprovau-ho:

Simulació 6: https://www.geogebra.org/m/bef2bqcj

En aquest vídeo [https://www.youtube.com/watch?v=EM-Dg8xt_b8] pots trobar algunes altres transformacions interessants.

3. Annex A

Propietats dels radicals

No memoritzeu aquesta taula. Emprau-la simplement com a material de consulta en cas de necessitar saber alguna propietat dels radicals.

Taula 8: *Propietats del radicals*

Propietat	**Exemple**
1. Producte d'igual índex	
$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{100}=10$
2. Quocient d'igual índex	
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{\dfrac{14}{7}}=\sqrt[3]{2}$
3. Potència d'una arrel	
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^3=\sqrt[4]{5^3}$
4. Arrel d'arrel	
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[12]{5}$
5. Extreure factors de l'arrel	
$\sqrt{a^2\cdot b}=a\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a^3\cdot b}=a\sqrt[3]{b}$	$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{7000}=\sqrt[3]{10^3\cdot 7}=10\sqrt[3]{7}$
6. Introduir factors dins l'arrel	
Consisteix en el pas contrari de [5]: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$ $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3\cdot b}$	$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{75}$ $\sqrt{3\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{3^2\cdot x}}=\sqrt[4]{9x}$
7. Suma i resta. Simplificar expressions	

El primer pas és factoritzar els radicands i després extreure factors. Finalment, podem sumar o restar arrels iguals	$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}=$ $\sqrt[3]{3^3\cdot 2}+\sqrt[3]{2\cdot 2^3}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}$ $=5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}$
8. Radicals equivalents	
$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot q]{a^q}$	$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[9]{2^3}=\cdots$
9. Operacions amb diferent índex	
Primer cal reduir els radicals a índex comú utilitzant la propietat [8] $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[q]{a^{q/n}\cdot b^{q/m}}$ essent $q=min.c.m(n,m)$	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}=\sqrt[12]{432}$
10. Racionalitzar I	
$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}\cdot\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}}=\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$	$\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}}=\dfrac{2\sqrt[4]{5^3}}{5}$
11. Racionalitzar II	
Multiplicam i dividim pel conjugat del denominador $\dfrac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\cdot\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\cdot\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$