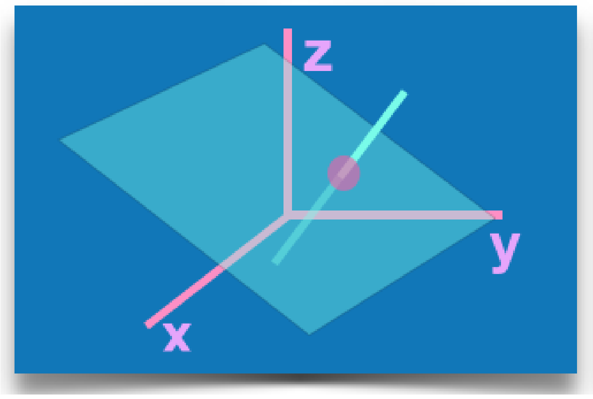
Institut d´ensenyaments a distància de les Illes Balears

https://iedib.net/

Matemàtiques II

Lliurament 3: Geometria afí a l'espai



Josep Mulet
Àmbit Científic
IEDIB

Índex

1. Vectors a l'espai

Les diferents magnituds de la naturalesa es classifiquen en escalars i vectorials. Una magnitud és vectorial si depèn de la direcció.

Taula 1: *Tipus de magnituds*

Magnituds escalars	Magnituds vectorials
Temps	Velocitat
Temperatura	Acceleració
Volum	Força
...	...

Un vector queda determinat per dos punts A **origen** i B **extrem**. El **mòdul** és la llargària del vector o la distància entre A i B. La **direcció** és la de la recta que passa per A i B. Cada direcció té dos **sentits**.

Vectors fix i lliure

Un **sistema de referència Cartesià** està format per 3 eixos perpendiculars dos a dos que anomenam x, y, z. Els tres eixos es tallen en un punt que anomenam origen $O(0,0,0)$.

Per localitzar un punt P a l'espai donam tres coordenades $P=(P_1,P_2,P_3)$ que corresponen a les projeccions sobre els eixos OX, OY i OZ respectivament.

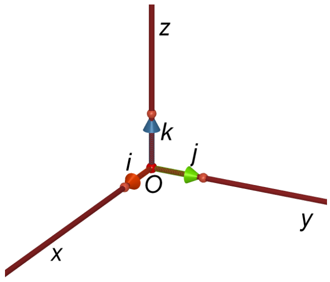


Figura 1: Sistema de referència Cartesià

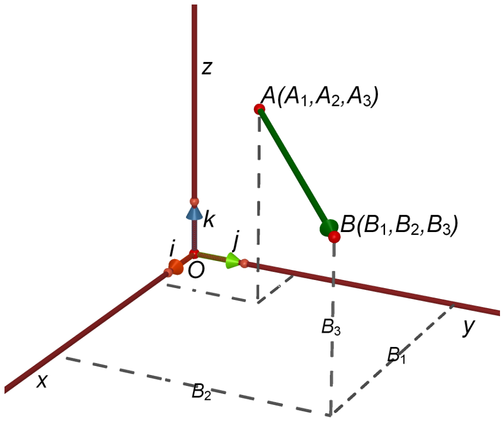


Figura 2: Punts i vector fix a l'espai

Definim un **vector fix** d'origen en el punt A i extrem en el punt B com el **segment orientat** que va des de A (origen) a B (extrem).

Les **components del vector** s'obtenen de "extrem-origen"

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (B_1 - A_1, B_2 - A_2, B_3 - A_3) \tag{1}$$

EXERCICI RESOLT 1

Calcula les components del vector amb origen en $A = (-2,3,5)$ i extrem a $B = (1,-1,2)$	$\overrightarrow{AB} = (1,-1,2) - (-2,3,5) = (3,-4,-3)$ Aquest vector avança 3 unitats en direcció x, retrocedeix 4 en direcció y i baixa 3 en z.

Si ens donen el vector $\vec{v} = (3,-4,-3)$, del qual desconeixem l'origen, vol dir que el podem dibuixar amb l'origen que nosaltres vulguem. Deim que es tracta d'un **vector lliure**. Generalment, resulta pràctic representar-los en origen en el punt $O(0,0,0)$.
Tots els vectors de la figura tenen igual direcció, mòdul i sentit. Les seves components també són idèntiques. L'únic que canvia és el seus punts d'origen i extrem. Diem que tots aquests vectors són **equipol·lents** entre sí.

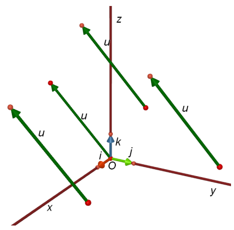


Figura 3: Concepte de vector lliure

Vídeo 3.1: *Vectors a l'espai*
https://www.youtube.com/watch?v=YVjTH2B7PYs

1.1 Operacions amb vectors lliures

A partir d'ara parlarem de **vectors** i **d'escalars**. De forma molt simplificada, podeu pensar que els vectors són aquells objectes que tenen una direcció (porten fletxa) mentre que els escalars són simplement nombres reals.

Anem a veure quines són les operacions que es poden fer amb vectors lliures:

- **Producte per un escalar**: Si un vector $\vec{u}$ el multiplicam per un escalar λ, obtenim un vector $\lambda\vec{u}$ que té igual direcció. El mòdul queda multiplicat pel nombre λ. A més, si $\lambda > 0$, els vectors tenen igual sentit. Si $\lambda < 0$, el vector resultant té sentit oposat.

  En components: $\lambda\,(u_1, u_2, u_3) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$

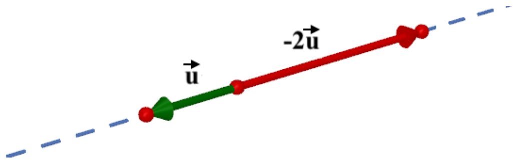


Figura 4: Producte d'un vector per un escalar

  Propietats:

  - $0\vec{u} = \vec{0}$ Si multiplicam un vector per 0 obtenim el vector $\vec{0} = (0, 0, 0)$.
  - $1\vec{u} = \vec{u}$ Si multiplicam un vector per 1 obtenim el mateix vector.
  - $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ Si multiplicam un vector per -1 obtenim el vector oposat.

Al vector $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$ l'anomenam **vector oposat** de $\vec{u}$. Té igual direcció i mòdul que $\vec{u}$ però sentit contrari.

- **Suma:** La suma de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és un altre vector $\vec{u} + \vec{v}$. La suma es fa component a component

  En components: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

  Propietats:

  - $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$. Si sumam el vector zero, obtenim el mateix vector $\vec{u}$.
  - $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$. La suma és commutativa.
  - $(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$. La suma és associativa
  - $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$. Distributiva

  Per construir la suma $\vec{u}+\vec{v}$ gràficament, dibuixam per l'extrem del vector $\vec{u}$ el vector $\vec{v}$. Unim l'origen del primer vector amb l'extrem del darrer i així obtenim el vector suma. (Vegeu la figura)

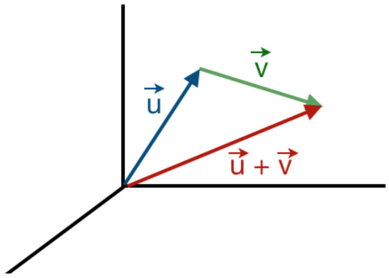


Figura 5: Suma gràfica de vectors

- **Resta:** La diferència de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és un altre vector $\vec{u} - \vec{v}$. La resta és equivalent a sumar l'oposat del segon vector $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. La resta es fa component a component:

  $\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$

  Propietats:

  – $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$. Si restam els mateixos vectors trobam el vector zero.

- **Combinació lineal:** Una combinació lineal de dos o més vectors és una operació de la forma $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ on λ, μ són escalars.

  En components: $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, \lambda u_3 + \mu v_3)$

Exercici Resolt 2	
Siguin $\vec{u}(-2, 1, -4)$ i $\vec{v}(0, -3, 5)$, calcula la combinació lineal $3\vec{u} - 2\vec{v}$	$3\vec{u} - 2\vec{v} = 3(-2, 1, -4) - 2(0, -3, 5) = (-6, 3, -12) + (0, 6, -10) = (-6, 9, -22)$

1.2 Dependència de vectors

Gràficament, dos vectors són linealment dependents (paral·lels) si tenen la mateixa direcció (no necessàriament el mateix sentit):

Del que hem vist del producte d'un nombre per un vector, dos vectors són paral·lels si un vector és un múltiple de l'altre:

$$\text{Existeix } \lambda \text{ tal que } \vec{u} = \lambda\vec{v} \qquad (2)$$

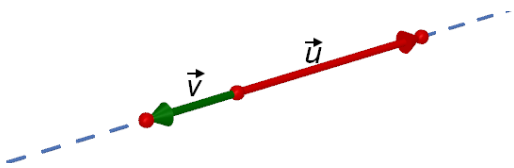


Figura 6: Vectors linealment dependents

Si expressam aquesta equació en components, trobam $(u_1, u_2, u_3) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$. A més, dos vectors són iguals si ho són totes les seves components, és a dir, $u_1 = \lambda v_1$, $u_2 = \lambda v_2$ i $u_3 = \lambda v_3$. Si aïllam λ de cadascuna de les igualtats i feim igualació, trobam la condició

Dos $\vec{u}$, $\vec{v}$ són linealment dependents si tenen les components proporcionals

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = \lambda \tag{3}$$

EXERCICI RESOLT 3

Estudia la dependència lineal dels vectors:
a) $\vec{u}$=(6, -18, 54), $\vec{v}$=(-5, 15, -45)
b) $\vec{u}$=(2, 0, -1), $\vec{v}$=(1, -3, 2), $\vec{w}$=(7, -9, 4)
c) $\vec{u}$=(2, 0, -1), $\vec{v}$=(1, -3, 2), $\vec{w}$=(7, 1, 4)

a) Comprovam si les components són proporcionals

$$\frac{6}{-5} = \frac{-18}{15} = \frac{54}{-45} = \lambda = -1.2$$

Són linealment dependents i tenen igual direcció en sentit contrari. El vector $\vec{u}$ és 1.2 vegades més llarg que $\vec{v}$. La relació entre ells és $\vec{u} = \frac{-6}{5}\vec{v}$

b) Calculam el rang de $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Comprovam que el seu determinant és nul $|M| = 0$ (el rang no pot ésser 3). Però, podem trobar un menor d'ordre dos $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ no nul, aleshores el rang $M = 2$. Els tres vectors són linealment dependents (són coplanaris).

Existeix, per tant, una relació de dependència entre els tres vectors. Podeu comprovar que es compleix $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

c) Calculam el determinant $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -50 \neq 0$. Donat que el determinant 3x3 no és zero, el rang M =3. Els tres vectors són linealment independents (es diu que formen una base).

Bases i components

Les bases de l'espai estan formades per 3 vectors linealment independents. A més, qualsevol altre vector es pot escriure com a combinació lineal dels vectors de la base.

La base canònica està formada pels tres vectors

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1) \tag{4}$$

perpendiculars dos a dos i de longitud (mòdul) 1. Aquesta és la base més freqüent, tot i que n'hi ha d'altres.

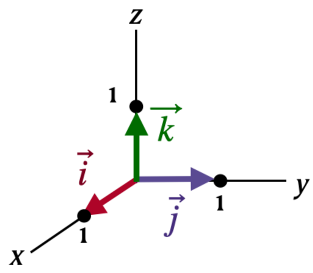


Figura 7: Vectors de la base canònica.

Qualsevol vector es pot escriure com combinació lineal dels vectors de la base. Un vector qualsevol $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es pot escriure com combinació lineal dels vectors de la base $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$. Als nombres (u_1, u_2, u_3) se'ls anomena **components** respecte de la base.

EXERCICIS PROPOSATS

1. Considera els punts $A = (3, -1, 0)$, $B = (2, 2, 2)$, $C = (-5, 4, 4)$, $D = (-3, -2, 0)$. Calcula els vectors $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$. Digues quina relació de dependència existeix entre els dos vectors.

2. Calcula x i y perquè el vector $\vec{u}(1, -1, 1)$ tingui igual direcció amb el vector que uneix els punts $A = (x, 4, 3)$ i $B = (2, y, 0)$.

1.3 Producte escalar

El producte escalar de dos vectors ($\vec{u} \cdot \vec{v}$) és un escalar (un nombre) que es defineix com

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha \tag{5}$$

és a dir, s'obté del producte dels mòduls dels vectors pel cosinus de l'angle que formen.

Depenent de l'angle que formen podem deduir que:

- $\alpha = 0°$: Si tenen igual direcció i sentit, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$
- $\alpha < 90°$: Si l'angle és agut, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$
- $\alpha = 90°$: Si són perpendiculars, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\alpha > 90°$: Si formen un angle obtús, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$
- $\alpha = 180°$: Si tenen igual direcció i sentit contrari, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}||\vec{v}|$

Condició de vectors perpendiculars

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Si disposam de les components respecte la base canònica dels dos vectors, el producte escalar en components és:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3 \tag{6}$$

Si feim el producte escalar d'un vector per ell mateix (formen $0°$), $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$. D'aquí obtenim una expressió pel **mòdul** $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$. El mòdul d'un vector en components es calcula:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \tag{7}$$

Un vector és diu **unitari** si té mòdul 1. Si un vector no nul el dividim pel seu mòdul, sempre serà unitari.

Vídeo 3.2: *Producte escalar de vectors*
https://www.youtube.com/watch?v=GF-fnNw-NWY

EXERCICI RESOLT 4

Els vectors $\vec{u} = (3,-9,m)$ i $\vec{v} = (-2,6,-16)$ per a quin valor de m són perpendiculars?

Aplicam que dos vectors són perpendiculars si el seu producte escalar és igual a zero.

$$(3,-9,m)\cdot(-2,6,-16) = -6-54-16m = -60-16m \tag{8}$$

Igual a zero, $-60-16m = 0 \quad\rightarrow\quad m = -\dfrac{15}{4}$

EXERCICI RESOLT 5

Calcula un vector oposat a i $\vec{v} = (1,2,-2)$ i que tingui mòdul 5.

Calculam el mòdul del vector $|\vec{v}| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = 3$. Podem assegurar que el vector $\dfrac{1}{3}\vec{v} = \dfrac{1}{3}(1,2,-2) = (\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3})$ és unitari (té mòdul 1)

Si un vector unitari el multiplicam per 5 tindrà mòdul 5. Però ens demanen que tingui sentit oposat, per tant haurem de multiplicar per -5.

La resposta és el vector $\dfrac{-5}{3}\vec{v} = \dfrac{-5}{3}(1,2,-2) = (\dfrac{-5}{3},\dfrac{-10}{3},\dfrac{10}{3})$

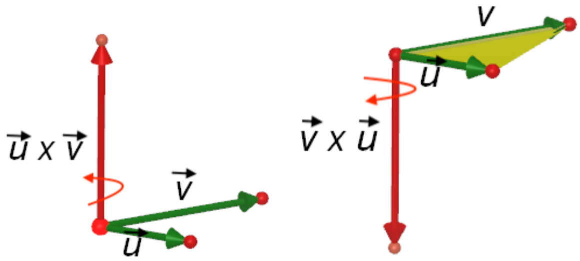
EXERCICIS PROPOSATS

3. Donats els vectors $\vec{u}(6,-3,9)$, $\vec{v}(-4,2,-6)$ i $\vec{w}(1,-1,-1)$, calcula $\vec{u}\cdot\vec{u}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$ i $\vec{v}\cdot\vec{w}$ i digues si alguns d'ells són perpendicular entre si.

4. Calcula x perquè el vector $\vec{a}(x,4,0)$ sigui perpendicular al vector $\vec{b}(-2,6,x)$

1.4 Producte vectorial

El **producte vectorial** de dos vectors és un vector que té direcció perpendicular al pla que defineixen els vectors, i sentit donat per la regla de la ma dreta o del tornavís.



Fixa't que $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$. El **mòdul** del producte vectorial es defineix com

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha \tag{9}$$

el mòdul del primer vector pel mòdul del segon pel sinus de l'angle que formen. D'aquí deduïm que dos vectors paral·lels tenen producte vectorial igual a zero ($\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$)

Vector perpendicular a dos donats

Si ens donen dos vectors linealment independents, podem trobar un vector perpendicular a ells dos fent el producte vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$

El producte vectorial a partir de les components dels vectors es pot trobar desenvolupant el determinant:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \tag{10}$$

El mòdul del producte vectorial de dos vectors dóna l'àrea del paral·lelogram definit pels vectors $A_{paral.lelogram} = |\vec{u} \times \vec{v}|$. L'àrea del triangle definit pels vectors és la meitat: $A_{triangle} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

Vídeo 3.3: *Producte vectorial de vectors*
https://www.youtube.com/watch?v=FaqqYMoV1Rw

EXERCICI RESOLT 6

Calcula $\vec{u} \times \vec{v}$ amb els vectors $\vec{u} = (3, -1, 2)$ i $\vec{v} = (1, 0, -4)$

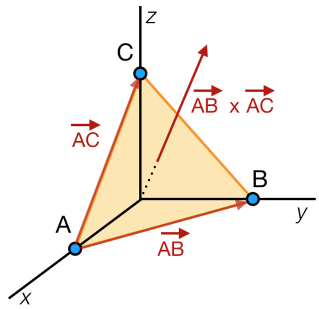
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= 4\vec{i} + 14\vec{j} + \vec{k} = (4, 14, 1) \tag{11}$$

EXERCICI RESOLT 7

Troba l'àrea del triangle que passa pels punts $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ i $C = (0, 0, 1)$. Troba un vector perpendicular al triangle.

Construïm els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$ i $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$. Tot seguit calculam el seu producte vectorial



$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = (1, 1, 1)$$

Un vector perpendicular al triangle és $(1, 1, 1)$ i l'àrea del triangle s'obté de

$$A_{triangle} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}|(1, 1, 1)| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

EXERCICIS PROPOSATS

5. Calcula $\vec{u}\times\vec{v}$ amb els vectors $\vec{u}=(1,0,-2)$ i $\vec{v}=(3,2,1)$. Què val $\vec{v}\times\vec{u}$? I $\vec{u}\times\vec{u}$?

6. Troba l'àrea del triangle format pels vectors $\vec{a}(1,1,0)$, $\vec{b}(0,1,-1)$. Troba un vector perpendicular al triangle.

1.5 Producte mixt

El **producte mixt** de tres vectors és un escalar i s'obté de fer el producte escalar del primer vector amb el producte vectorial dels altres dos: $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$.

Es pot demostrar que el producte mixt de tres vectors equival al determinant dels tres vectors col·locats en el mateix ordre:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \tag{12}$$

Per aquest motiu, les propietats del producte mixt es deriven de les propietats dels determinants.

- Si hi ha dos vectors proporcionals, el producte mixt és zero: $\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})=0$
- Si canviam l'ordre de 2 vectors, el producte mixt canvia de signe: $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = -\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})$

Tres vectors no coplanaris (*no estan en el mateix pla*) defineixen un paral·lelepípede a l'espai. El seu volum és: $V_{paral.lelepipede} = vabs\{\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})\}$, aquí $vabs$ significa el valor absolut del nombre. S'utilitza aquesta notació per distingir-la del mòdul del vector.

El volum del tetraedre definit per tres vectors és $V_{tetraedre} = \dfrac{1}{6}vabs\{\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})\}$, perquè dins d'un paral·lelepípede hi caben 6 tetraedres iguals.

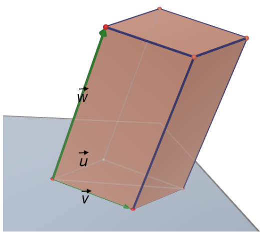


Figura 8: Paral·lelepípede

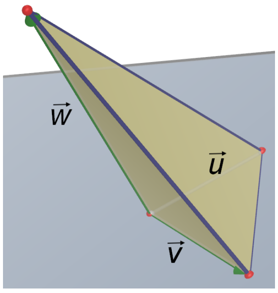


Figura 9: Tetraedre

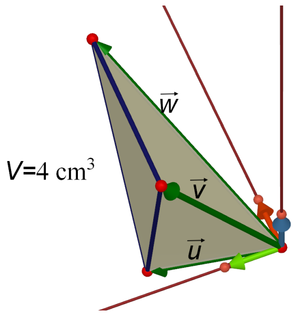
La interpretació geomètrica del producte mixt ens permet entendre millor la condició de vectors coplanaris. Si tres vectors són coplanaris (es troben continguts dins un pla) vol dir que l'altura del paral·lelepípede és zero i per tant no té volum. Això passa si $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$ que és la mateixa condició que havíem trobat quan estudiarem la dependència lineal de tres vectors.

Vídeo 3.4: *Producte mixt de vectors*
https://www.youtube.com/watch?v=t8c8RKKKNVo

EXERCICI RESOLT 8

Són coplanaris els vectors $\vec{u}(1,2,-1)$, $\vec{v}(0,2,3)$, $\vec{w}(3,2,3)$? En cas contrari troba el volum del tetraedre que defineixen.

Calculam el producte mixt (o més ràpidament el determinant) dels tres vectors



$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 24 \quad (13)$$

donat que és diferent de zero, els vectors no són coplanaris i defineixen un paral·lelepípede a l'espai. El volum del tetraedre és

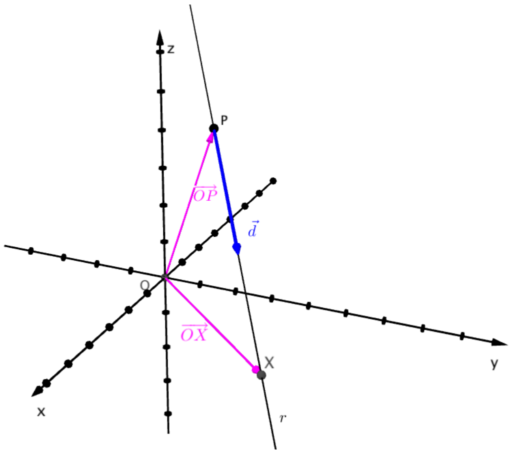
$$V_{\text{tetraedre}} = \frac{1}{6} vabs\{\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\} = \frac{24}{6} = 4 \quad (14)$$

2. Rectes a l'espai

Una recta r a l'espai ve determinada per un punt P i un vector $\vec{d}$.

- El vector $\overrightarrow{OP}$ es denomina **vector de posició** del punt.
- El vector $\vec{d}$ es denomina **vector director**, i la seva direcció és paral·lela a la de la recta.

Alternativament, una recta ve definida per dos punts P i Q ja que sempre podem determinar el vector director com el vector que uneix els dos punts $\vec{d} = \overrightarrow{PQ}$.



Si situam un punt X qualsevol sobre la recta, observam que el vector de posició d'aquest punt $\overrightarrow{OX}$ és la suma gràfica del vector $\overrightarrow{OP}$ i el vector $\overrightarrow{PX}$, el qual és un múltiple del vector director ($\overrightarrow{PX} = t\vec{d}$). És a dir,

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{d} \tag{15}$$

o si l'expressam amb components

Equació vectorial

$$(x, y, z) = (P_1, P_2, P_3) + t\,(d_1, d_2, d_3) \tag{16}$$

Aquesta es coneix com **l'equació vectorial** de la recta. Per a cada nombre real t trobam un punt diferent de la recta. Cal remarcar que en aquesta equació el punt apareix sense multiplicar pel paràmetre t mentre que el vector director apareix multiplicat per t.

Exercici Resolt 9

Donada la recta $(x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(3, 0, -2)$ troba tres punts i un vector director.

Per trobar punts donam valors a t

- Si $t = 0$: $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$
- Si $t = 1$: $(x, y, z) = (2, 1, -2)$
- Si $t = -5$: $(x, y, z) = (-16, 1, 10)$
- etc.

El vector director és el que multiplica a t, $\vec{d} = (3, 0, -2)$ o qualsevol múltiple seu.

EXERCICI RESOLT 10

Calcula l'equació vectorial de la recta que passa per $A=(2,3,1)$ i $B=(-1,4,-2)$.	Cercam un vector director $\vec{d}=\overrightarrow{AB}=B-A=(-1,4,-2)-(2,3,1)=(-3,1,-3)$. Si volguéssim també podríem utilitzar com a vector director l'oposat del que hem obtingut, per exemple $(3,-1,3)$. Triam un dels dos punts i escrivim l'equació vectorial $(x,y,z)=(2,3,1)+t(-3,1,-3)$ Com sempre podem trobar més punts de la recta donant valors a t. Si $t=2$: (-4, 5, -5), si $t=-1$: (5, 2, 4), etc.

2.1 Equacions de la recta

A la secció anterior hem vist l'equació vectorial de la recta a partir d'un punt i un vector director $(x,y,z)=(P_1,P_2,P_3)+t\,(d_1,d_2,d_3)$. En aquest apartat veurem altres formes (equivalents) de donar una recta a l'espai.

Equacions paramètriques

Si de l'equació vectorial igualam coordenada a coordenada, obtenim les equacions paramètriques de la recta:

$$\begin{cases} x = P_1 + t\,d_1 \\ y = P_2 + t\,d_2 \\ z = P_3 + t\,d_3 \end{cases} \tag{17}$$

En aquestes equacions podem identificar les components del vector director perquè estan multiplicades pel paràmetre. Les coordenades del punt apareixen sense el paràmetre.

EXERCICI RESOLT 11

Troba un punt i un vector de la recta $\begin{cases} x=2t \\ y=3 \\ z=1-t \end{cases}$	Per comparació amb l'equació (17), el punt és $P=(0,3,1)$ i un vector director $\vec{d}(2,0,-1)$.

Equació contínua

Si de les equacions contínues (17) aïllam el paràmetre t de cada equació

$$t=\frac{x-P_1}{d_1};\quad t=\frac{y-P_2}{d_2};\quad t=\frac{z-P_3}{d_3}; \tag{18}$$

igualam aquestes tres expressions equivalents i trobam l'equació contínua de la recta

$$\frac{x-P_1}{d_1}=\frac{y-P_2}{d_2}=\frac{z-P_3}{d_3} \tag{19}$$

És important que us fixeu que, en l'equació contínua, les components del vector director apareixen en els denominadors. Les coordenades del punt apareixen canviades de signe en els numeradors. D'altra banda, ja no apareix el paràmetre t. Si volem trobar més punts haurem de donar un valor a una de les variables (per exemple x) i aïllar les altres dues.

Equacions generals o implícites

A partir de l'equació contínua (19), separant les igualtats i agrupant tots els termes en un membre, obtenim les equacions implícites de la recta: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-P_1}{d_1}=\dfrac{y-P_2}{d_2} \\ \dfrac{x-P_1}{d_1}=\dfrac{z-P_3}{d_3} \end{array}\right\} \Rightarrow$ multiplicam en creu

$\left.\begin{array}{l} d_2(x-P_1)=d_1(y-P_2) \\ d_3(x-P_1)=d_1(z-P_3) \end{array}\right\} \Rightarrow$ i eliminam els parèntesi i passam tots els termes al membre de l'esquerra $\left.\begin{array}{l} d_2x-d_1y+d_1P_2-d_2P_1=0 \\ d_3x-d_1z+d_1P_3-d_3P_1=0 \end{array}\right\}$

Aquestes equacions tenen la forma

$$\left.\begin{array}{r} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\} \tag{20}$$

Aquestes es coneixen com les **equacions general o implícites** de la recta.

Podem trobar un punt i un vector de la recta resolent el sistema d'equacions, el qual sempre serà compatible indeterminat. D'aquesta forma passarem a les equacions paramètriques de les quals és fàcil identificar el punt i el vector director. Vegem-ho en un exemple en concret.

EXERCICI RESOLT 12

Troba un punt i un vector director de la recta $r:\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ -x+y+3z+2=0 \end{cases}$

Per resoldre el sistema passam la z al terme de la dreta i la tractam com si fos un paràmetre. Ens queda el sistema

$$\begin{cases} x+y=2-z \\ -x+y=-2-3z \end{cases} \tag{21}$$

Resolem el sistema 2x2 per reducció. Per exemple, si sumam les equacions trobam $2y=-4z$ i si les restam $2x=4+2z$. Aïllam les incògnites: $x=2+z$; $y=-2z$. Si anomenam $z=t$, trobam la solució del sistema:

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=0-2t \\ z=0+t \end{cases} \tag{22}$$

Això és equivalent a les equacions paramètriques de la recta, de les quals deduïm el punt $P=(2,0,0)$ i el vector director $\vec{d}(1,-2,1)$

EXERCICI RESOLT 13

Determina les equacions de la recta que passa pels punts $A = (1, 1, 1)$ i $B = (2, 1, 2)$ de totes les formes diferents.

Consideram el punt A i el vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, 1)$. L'equació vectorial és:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 0, 1) \tag{23}$$

Les equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \tag{24}$$

L'equació contínua

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1} \tag{25}$$

Fent el producte en creu del primer i segon terme arribam a $y - 1 = 0$. Si agafam el primer i tercer termes $x - 1 = z - 1$. L'equació general és

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Vídeo 3.5: *Equacions de la recta*
https://www.youtube.com/watch?v=hnOdl7T7PSs

EXERCICIS PROPOSATS

7. Donada l'equació de la recta $\frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{1}$, determina'n un punt i un vector director. Expressa la mateixa recta en forma vectorial i en forma general.

8. Troba un punt i un vector director de la recta $r : \begin{cases} x + y - z + 1 & = 0 \\ 2x - y + 2z & = 0 \end{cases}$ i escriu les seves equacions paramètriques.

3. Equacions del pla

Un pla π a l'espai ve determinat per un punt P i dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ independents.

- El vector $\overrightarrow{OP}$ es denomina **vector de posició**.
- Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ s'anomenen **vectors directors del pla**.

El vector $\overrightarrow{OX}$ és un vector que té el seu origen en O i que el seu extrem és un punt qualsevol X del pla π donat.

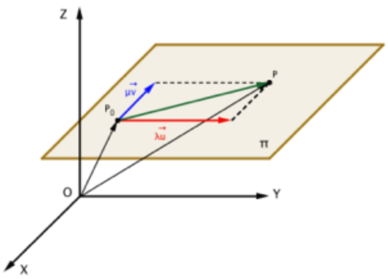


Figura 10: Construcció d'un pla

Es diu equació vectorial del pla l'expressió: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ on $X = (x, y, z)$ és un punt genèric del pla, $\overrightarrow{OP} = (P_1, P_2, P_3)$ és el vector de posició del punt P, i $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ són els vectors directors del pla i λ i μ són dos nombres reals qualssevol.

Aquesta equació s'obté imposant que els vectors $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ han d'ésser coplanaris (linealment dependents). Per això un d'ells es pot escriure com a combinació lineal dels altres dos.

Si expressam aquesta equació en components

Equació vectorial del pla

$$(x, y, z) = (P_1, P_2, P_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3) \tag{27}$$

Equacions paramètriques del pla

Si igualam component a component l'equació vectorial del pla trobam

$$\begin{cases} x = P_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = P_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = P_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \tag{28}$$

Aquestes són les **equacions paramètriques** del pla. Si d'aquesta equació eliminam els paràmetres λ i μ, trobam una expressió de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{29}$$

que es coneix com **l'equació general del pla**. En aquesta equació els coeficients A, B, C són les components del vector normal (perpendicular) al pla $\vec{n} = (A, B, C)$.

Una forma ràpida de trobar l'equació general del pla és imposar que els vectors $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$ i $\vec{v}$ siguin coplanaris; és a dir, que el seu determinant sigui igual a zero.

$$\begin{vmatrix} x - P_1 & y - P_2 & z - P_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{30}$$

EXERCICI RESOLT 14

Calcula, en totes les formes estudiades, les equacions del pla que passa pel punt $A = (1, -2, 3)$ i té per vectors directors $\vec{u}(1, 2, 3)$ i $\vec{v}(-5, 4, 2)$.

Equació vectorial

$$(x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda(1, 2, 3) + \mu(-5, 4, 2) \tag{31}$$

Equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda - 5\mu \\ y = -2 + 2\lambda + 4\mu \\ z = 3 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \tag{32}$$

Equació general (desenvolupant per la primera fila)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \tag{33}$$

$$= (x-1)\cdot(-8) - (y+2)\cdot(17) + (z-3)\cdot(14) = 0$$

eliminam parèntesis i reduïm trobam l'equació general $8x + 17y - 14z + 68 = 0$

Equació del pla a partir d'un punt i un vector normal

Hem vist que en l'equació general del pla $Ax + By + Cz + D = 0$, els coeficients són el vector normal (perpendicular) al pla $\vec{n} = (A, B, C)$.

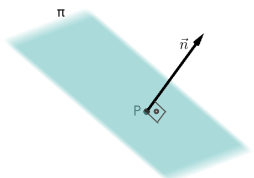


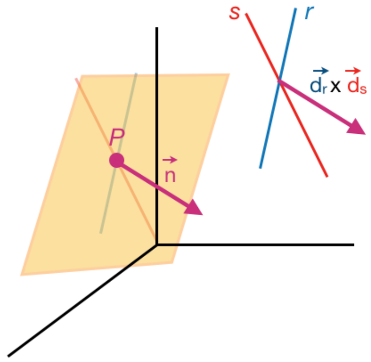
Figura 11: Vector normal a un pla.

EXERCICI RESOLT 15

Calcula l'equació del pla que conté a les rectes
$$r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

i $s : (x, y, z) = (1, 0, 5) + t(-1, 2, 5)$ i que passa pel punt $P(1, 2, 3)$.

Agafam de cada recta el seu vector director $\vec{d_r}(-3, 5, 1)$ i $\vec{d_s}(-1, 2, 5)$. Per cercar un vector perpendicular a ells dos calculam el seu producte vectorial (aquest serà el vector normal al pla):



$$\vec{d_r} \times \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 23\vec{i} + 14\vec{j} - \vec{k} \quad (34)$$

Tenim ara el vector normal $\vec{n} = (23, 14, -1)$, substituïm a l'equació general $23x + 14y - z + D = 0$. Podem determinar D substituint el punt P dins l'equació: $23 \cdot 1 + 14 \cdot 2 - 3 + D = 0 \quad \Rightarrow D = -48$.

L'equació del pla és $23x + 14y - z - 48 = 0$.

Equació del pla que passa per 3 punts

Per 3 punts qualssevol **no alineats** hi passa un únic pla.

EXERCICI RESOLT 16

Calcula l'equació del pla que conté als punts $A = (2, 3, 5)$, $B = (1, 1, 2)$ i $C = (3, 6, 10)$. Determina k perquè el punt $D = (3, 0, k)$ pertanyi al pla.

Els vectors $\overrightarrow{AB} = (-1, -2, -3)$ i $\overrightarrow{AC} = (1, 3, 5)$ són paral·lels al pla i els prenem com a vectors directors.

Equació general (desenvolupant per la primera fila)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (x-2)\cdot(-1) - (y-3)\cdot(-2) + (z-5)\cdot(-1) = 0$$

Desenvolupant i simplificant trobam l'equació del pla $-x + 2y - z + 1 = 0$.

Perquè el punt D pertanyi al pla ha de verificar la seva equació. Per això substituïm les coordenades del punt D dins l'equació anterior $-3 + 2 \cdot 0 - k + 1 = 0$ i aïllam $k = -2$.

Condició perquè 4 punts siguin coplanaris

Una forma de plantejar aquest problema seria agafar 3 punts i determinar l'equació del pla que els conté. Tot seguit comprovaríem si el quart punt pertany o no al pla trobat. Evidentment, hi ha una forma més ràpida de trobar la condició: utilitzar determinants.

EXERCICI RESOLT 17

Calcula k perquè els punts $A = (2,3,5)$, $B = (1,1,2)$, $C = (3,6,10)$ i $D = (3,0,k)$ siguin coplanaris.

Ens calculam els vectors $\overrightarrow{AB} = (-1,-2,-3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,3,5)$ i $\overrightarrow{AD} = (1,-3,k-5)$. Perquè els punts siguin coplanaris, els tres vectors han d'ésser linealment dependents i el seu determinant ha d'ésser igual a zero.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & k-5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \to \\ F_2 \to F_2+F_1 \\ F_3 \to F_3+F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & k-8 \end{vmatrix} = -(k-8+10) = -(k+2)$$

Igualam a zero el determinant $k+2=0 \Rightarrow k=-2$.

Vídeo 3.6: *Equacions del pla*
https://www.youtube.com/watch?v=Jnq2p0TddMs

EXERCICIS PROPOSATS

9. Considera el pla $\begin{cases} x = & 3 & -5\lambda & +\mu \\ y = & 1 & -\lambda & \\ z = & & & \mu \end{cases}$

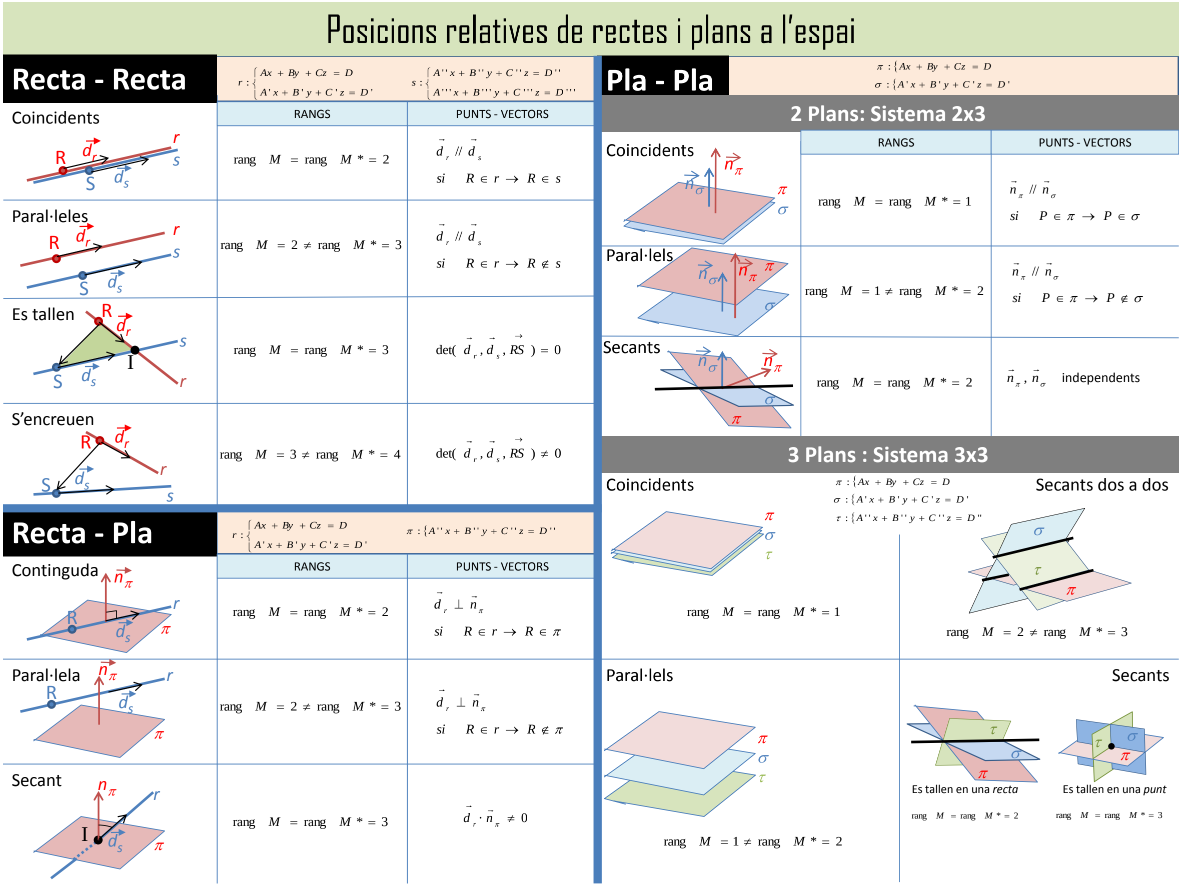
a) Identifica un punt i dos vectors directors del pla.
b) Escriu l'equació general del pla. Determina k perquè el punt $Q(k,1,-3)$ pertanyi al pla.
c) Calcula un vector perpendicular al pla.

4. Posició relativa

En aquest apartat s'estudia com poden estar situats rectes i plans. És el que es coneix com l'estudi de les posicions relatives. En particular, estudiarem els següents casos:

- Entre dues rectes
- Entre a recta i un pla
- Entre 2 i 3 plans

A forma de resum vos deixo aquesta infografia on teniu resumit tot l'estudi de posicions relatives de plans i rectes

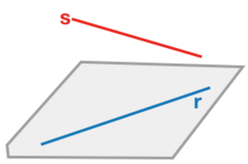
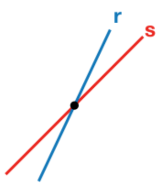
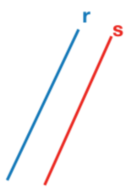


4.1 Posició relativa entre dues rectes

Dues rectes a l'espai poden estar situades una respecte l'altra de 4 formes diferents: es creuen a l'espai, es tallen a un punt (secants), són paral·leles i coincidents (són la mateixa recta).

La discussió de la posició relativa es pot fer a partir de punts i vectors o analitzant rangs. Comencem estudiant la primera forma.

Taula 2:

Es creuen	Secants	Paral·leles	Coincidents
			
$\vec{d}_r, \vec{d}_s$ independents	$\vec{d}_r, \vec{d}_s$ independents	$\vec{d}_r // \vec{d}_s$	$\vec{d}_r // \vec{d}_s$

$det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{RS}) \neq 0$	$det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{RS}) = 0$	$R \notin s$	$R \in s$

Primer estudiam els vectors directors de les dues rectes. Si els vectors directors són:

- $\vec{d}_r, \vec{d}_s$ **Linealment Independents**: Les rectes poden ésser secants o es creuen.

  Prenem un punt R i S de cadascuna de les rectes. Estudiam com són els vectors $\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{RS}$

  – $det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{RS}) \neq 0$: Els vectors no són coplanaris. Aleshores les rectes es creuen

  – $det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{RS}) = 0$: Els vectors són coplanaris. Aleshores les rectes són secants i es tallen en un punt

- $\vec{d}_r, \vec{d}_s$ **Linealment Dependents**: Les rectes poden ésser paral·leles o coincidents.

  Tot seguit agafam un punt de la recta R i substituïm dins la recta S

  – Si R no és un punt de s: Les rectes són paral·leles

  – Si R és un punt de s: Les rectes són coincidents

EXERCICI RESOLT 18

Estudia la posició relativa de les rectes $r : (x, y, z) = (2, 3, 0) + \lambda(-3, 5, 1)$ i $s : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-5}{0}$. Trobau, si escau, el punt de tall entre elles.

De les rectes deduïm els punts i els vectors directors: $R = (2, 3, 0)$, $\vec{d}_r(-3, 5, 1)$ i $S = (1, 0, 5)$, $\vec{d}_s(-1, 1, 0)$

Comprovam que els dos vectors no són proporcionals, llavors tenen diferent direcció

De moment, sabem que les rectes poden creuar-se o ésser secants. Per decidir-ho calculam el vector $\overrightarrow{RS} = S - R = (-1, -3, 5)$ i cercam el determinant format per $\overrightarrow{RS}$, $\vec{d}_r$ i $\vec{d}_s$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \quad (35)$$

Donat que el determinant és diferent de zero, els tres vectors no són coplanaris i per tant les rectes es creuen. No existeix punt de tall.

Una altra forma d'estudiar la posició relativa de dues rectes expressades en forma general, és a través dels rangs. Suposem que l'equació de la recta r i s siguin $r : \left.\begin{array}{c} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$ $s : \left.\begin{array}{c} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{array}\right\}$

Es tracta d'estudiar el sistema d'equacions format per les 4 equacions. Per això estudiam els rangs de les matrius M i M^* i aplicam el teorema de Rouché.

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix} \tag{36}$$

- rang $M = 3 \neq$ rang $M^* = 4$: Si El sistema no té solució. Els seus vectors directors no són proporcionals. Les dues **rectes es creuen.**
- rang $M =$ rang $M^* = 3$: Si El sistema té solució única que és el punt de tall de les dues rectes. Les dues **rectes són secants.**
- rang $M = 2 \neq$rang $M^* = 3$: El sistema no té solució. Té els seus vectors proporcionals. Les dues **rectes paral·leles.**
- rang $M =$ rang $M^* = 2$: El sistema té infinites solucions. Té els seus vectors proporcionals. Les dues **rectes coincidents.**

EXERCICI RESOLT 19

Estudia la posició relativa de les rectes $r: \left.\begin{array}{r} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{array}\right\}$ $s: \left.\begin{array}{r} x+2y+2=0 \\ x-z+3=0 \end{array}\right\}$

Estudiam els rangs de les matrius M i M^* i aplicam el teorema de Rouché.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Veim que la matriu M té dues files iguals. Intentam cercar el determinant amb les files 1a, 2a, 4a. Aquest determinant és no nul, aleshores rang $M = 3$.

Intentem calcular el determinant de M^*. Com a ajuda resteu a la tercera fila la 1a i desenvolupeu per la 3a fila. Trobam un determinant no nul, aleshores rang $M = 4$. En conclusió el sistema no té solució i les rectes es creuen.

Vídeo 3.7: *Posició relativa de dues rectes (https://www.geogebra.org/m/ubvucnrx)*
https://www.youtube.com/watch?v=zeMKYypZr-E

EXERCICIS PROPOSATS

10. Calcula la posició relativa entre les rectes $r:\ (x,y,z)=(2,0,1)+\lambda(1,-1,-3)$ i $s:\ \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-6}{-2}$.

11. Siguin les rectes $r:\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ i $s:\ \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$

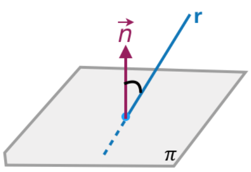
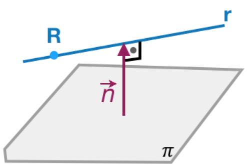
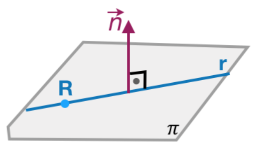
a) Per cada recta, obteniu un punt i un vector director.
b) Calculau el determinant format pels vectors $\vec{RS}$, $\vec{d_r}$ i $\vec{d_s}$.
c) A partir del resultat anterior, determinau la posició relativa de les dues rectes.

4.2 Posició relativa entre plans i rectes

Una recta r i un pla π a l'espai poden estar situats un respecte l'altre de 3 formes diferents: secants, paral·lels i contingut (la recta pertany al pla).

La discussió de la posició relativa es pot fer a partir de punts i vectors o analitzant rangs. Comencem estudiant la primera forma. Anomenam R al punt de la recta, $\vec{d_r}$ al vector de la recta i $\vec{n}$ al vector normal del pla

Taula 3:

Secants	Paral·lels	Contingut
		
$\vec{d_r}\cdot\vec{n}\neq 0$	$\vec{d_r}\cdot\vec{n}=0$	$\vec{d_r}\cdot\vec{n}=0$
Segur que són secants	$R\notin P$	$R\in P$

Començam calculant el producte escalar del vector normal del pla amb el vector director de la recta $\vec{d_r}\cdot\vec{n}$

- El producte escalar no és zero: La recta és secant amb el pla i existeix un punt de tall.
- El producte és igual a zero: la recta podria ésser paral·lela o continguda en el pla. Necessitam substituir el punt R dins l'equació del pla π.
  - El punt R no pertany al pla π: La recta és paral·lela al pla
  - El punt R pertany al pla π: La recta està continguda dins el pla

EXERCICI RESOLT 20

Estudia la posició relativa de la recta $r: \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 4+6\lambda \end{cases}$ i el pla $\pi: x-3y+5z+11=0$. Calcula, si escau, el punt de tall.

El vector director de la recta $\vec{d_r}(-2,1,6)$ i el vector normal del pla $\vec{n}(1,-3,5)$ tenen producte escalar $\vec{d_r}\cdot\vec{n} = (-2,1,6)\cdot(1,-3,5) = 25 \neq 0$ no nul. Podem assegurar que la recta i el pla són secants.

Per trobar el punt de tall, substituïm les coordenades x, y, z de les equacions paramètriques de la recta dins l'equació general del pla

$$2-2\lambda-3(1-\lambda)+5(4+6\lambda)+11=0 \tag{38}$$

La solució d'aquesta equació és $\lambda = -1$. Introduïm aquest valor dins l'equació de la recta i trobam el punt de tall

$$\left.\begin{array}{l} x = 3-2\cdot(-1) = 5 \\ y = 1-(-1) = 2 \\ z = 4+6\cdot(-1) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow (5,2,-2) \tag{39}$$

L'altra forma d'estudiar la posició relativa és mitjançant el càlcul de rangs. Suposem que l'equació de la recta vengui donada en forma general $r: \left.\begin{array}{r} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$ i el pla també $\pi: A''x+B''y+C''z+D''=0$. Consideram les matrius M i M^*

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} \tag{40}$$

- Si rang M=3, per força el rang $M^*=3$ i el sistema és compatible determinant. La recta i el pla són secants
- Si rang M=2 i rang $M^*=3$ i el sistema és incompatible. La recta i el pla són paral·lels
- Si rang M= rang $M^*=2$ i el sistema és compatible indeterminat. La recta està continguda dins del pla.

Finalment notau que no és possible que rang M=1, ja que per força una recta ha de tenir rang 2.

EXERCICI RESOLT 21

Estudia la posició relativa de la recta $r: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-y-z-5=0 \end{cases}$ i el pla $\pi: x-y+z-3=0$. Calcula, si escau, el punt de tall.

Construïm les matrius

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Donat que $|M| = -4 \neq 0$, sabem que rang $M=3$ i també rang $M^*=3$. La recta és secant al pla.

Si resolem el sistema d'equacions, trobam el punt de tall $(2,-2,-1)$

EXERCICIS PROPOSATS

12. Considerem el pla $\pi:\ ax - y + 4z - 2 = 0$ i la recta $r:\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-3}{2}$
a) Calculeu, si és possible, el valor de a perquè la recta i el pla siguin paral·lels.
b) Calculeu, si és possible, el valor de a perquè la recta i el pla siguin perpendiculars.
c) Calculeu, si és possible, el punt de tall entre la recta i el pla quan $a = 4$.

4.3 Posició relativa entre plans

PBAU

> **Ampliació**: Aquesta secció vos la deixo per aquells que vulgueu presentar-vos a les PBAU.

Entre dos plans

Dos plans poden ésser coincidents, paral·lels i secants (tallant-se en una recta). Aquesta infografia mostra les condicions segons els rangs i els punts i vectors.

Per estudiar la posició relativa de dos plans necessitam analitzar la compatibilitat del sistema

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1:\ Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2:\ A'x + B'y + C'z + D' = 0\end{array}\right\} \tag{42}$$

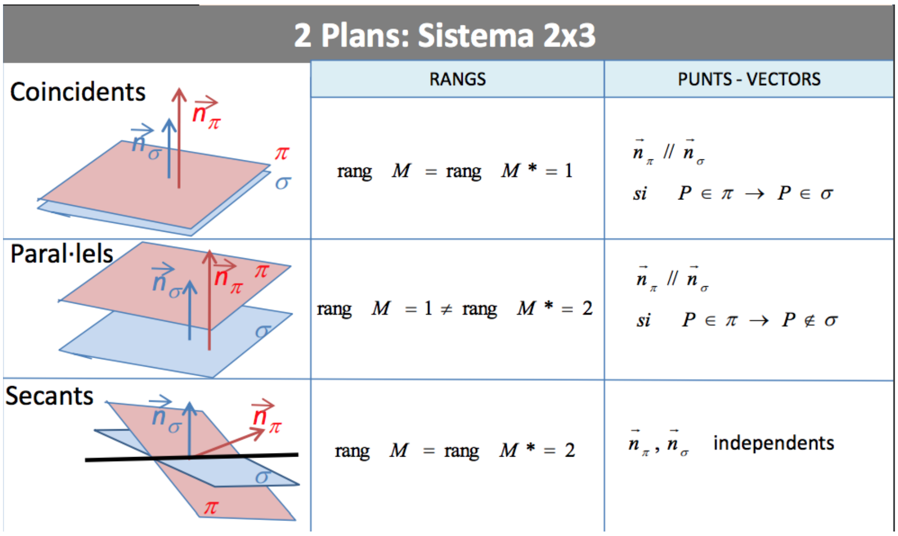


Figura 12: Posició relativa de 2 plans

Entre tres plans

Tres plans poden ésser els tres coincidents, paral·lels i secants dos a dos (tallant-se en 3 rectes) i secants (tallant-se en una recta). Aquesta infografia mostra les condicions segons els rangs i els punts i vectors.

Per estudiar la posició relativa de tres plans necessitam analitzar la compatibilitat del sistema

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1: \ Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi_2: \ A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ \pi_3: \ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{array}\right\} \tag{43}$$

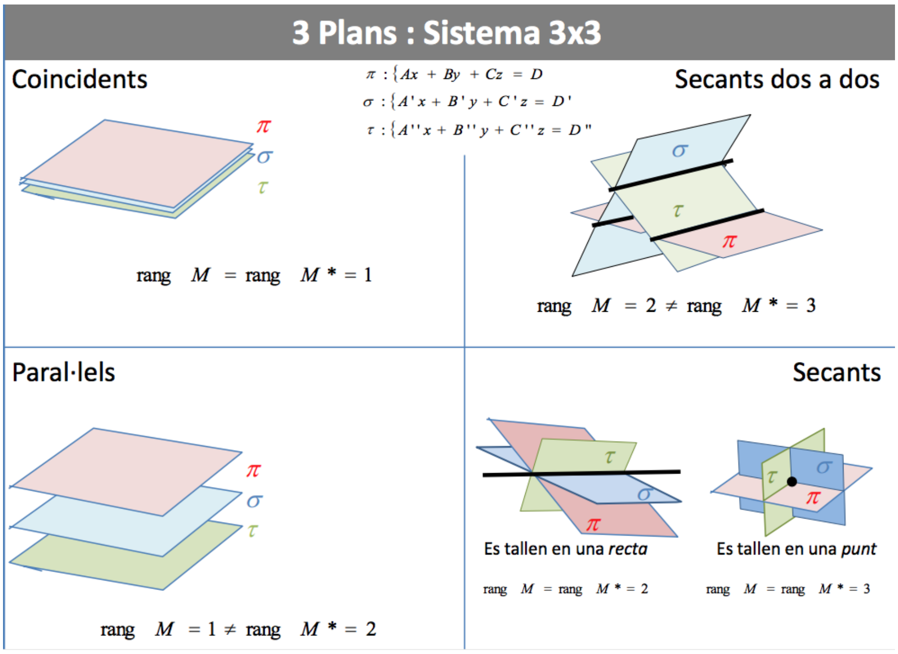


Figura 13: Posició relativa de 3 plans

EXERCICI RESOLT 22

Estudia la posició relativa dels plans $\pi_1: \ x-3y+4z-11=0$ i $\pi_2: \ 4x-12y+16z+40=0$

Els vectors normals $\vec{n}_1(1,-3,4)$ i $\vec{n}_2(4,-12,16)$ són paral·lels perquè les seves components són proporcionals

$$\frac{4}{1}=\frac{-12}{-3}=\frac{16}{4}=4 \tag{44}$$

Amb això els plans poden ésser paral·lels o coincidents. Agafam un punt de π_1, per exemple $P=(11,0,0)$ i substituïm a l'altre pla $4\cdot 11-12\cdot 0+16\cdot 0+40\neq 0$. Donat que no compleix l'equació no pertany al pla π_2 i això ens assegura que són paral·lels.

EXERCICI RESOLT 23

Estudia la posició relativa dels plans $\pi_1 : x+y+z = a-1$, $\pi_2 : 2x+y+az = a$ i $\pi_3 : x+ay+z = 1$ segons els valors del paràmetre a.

Construïm les matrius M i M^*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Començam calculant el determinant de M per saber el seu rang

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 \tag{46}$$

$|M| = 0; -a^2 + 3a - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1, a = 2$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$: rang M = rang M^* =3. Els plans es tallen en un punt. Aquest punt és la solució del sistema d'equacions.
- Si $a = 1$: El pla π_1 és paral·lel al π_3. El pla π_2 és secant als altres dos. En termes de rangs: rang $M = 2$ i rang $M^* = 3$.
- Si $a = 2$: rang M = rang M^* =2. Els tres plans es tallen formant una recta.

Vídeo 3.8: *Posició relativa de tres plans (https://www.geogebra.org/m/rbmukkzu)*
https://www.youtube.com/watch?v=tWGtKWLdzFc