

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Justificau les respostes usant llenguatge matemàtic i/o no matemàtic, segons correspongui. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Siguin les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) **[3 punts]** Calcula la matriu $M = A^T A - B B^T$, on A^T i B^T representen les matrius transposades de A i B respectivament.
- (b) **[3 punts]** Justifica si M és o no invertible. En cas afirmatiu, resol els sistemes d'equacions

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per tal de calcular la inversa de la matriu M . Comprova que la matriu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

per als valors de a, b, c i d calculat, és la matriu inversa de M .

- (c) **[4 punts]** Calcula la matriu X que compleix la igualtat $XM + A = C$.

P2. — Sigui I_3 la matriu identitat d'ordre 3×3 i A la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) **[4 punts]** Calcula la matriu $B = 3A - kI_3$, indicant la seva expressió en funció del paràmetre real k .
- (b) **[4 punts]** Discuteix el rang de la matriu B segons el paràmetre k .
- (c) **[2 punts]** Per a quins valors de k es pot calcular la inversa de B ? Justifica la resposta.

P3. — Siguin $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (7, 1, 7)$ i $R = (-4, 1, 5)$ punts de \mathbb{R}^3 .

- (a) **[3 punts]** Demuestra que els tres punts formen un triangle rectangle. Indica quin dels 3 angles és recte.
- (b) **[3 punts]** Es podria construir un quadrat afegint un únic nou vèrtex? Justifica la resposta.
- (c) **[4 punts]** Prova que, per a qualsevol valor de a real, el punt $S = (a, 1, 0)$ és coplanari amb P , Q i R .

P4. — Siguin les rectes

$$r : \begin{cases} x + 2y = -1, \\ z = 1, \end{cases} \quad \text{i} \quad s : x + 1 = \frac{y-1}{2} = z.$$

Calcula:

- (a) **[5 punts]** La posició relativa de les dues rectes. És a dir, si són coincidents, paral·leles, es tallen, o s'encreuen. En els darrers dos casos, especifica si ho fan perpendicularment.
- (b) **[5 punts]** L'equació del pla que és paral·lel a les dues rectes r i s , i passa pel punt $A = (2, 2, 1)$.

P5. — Resol els següents apartats:

- (a) **[5 punts]** Donada la funció $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina els valors de a i b sabent que $f(x)$ assoleix el seu màxim a $x = 100$ i que passa pel punt $(49, 91)$.
- (b) **[5 punts]** Donada la funció

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

indica quin és el seu domini. És $g(x)$ una funció contínua en el seu domini? Justifica la resposta i, en cas negatiu, indica quin tipus de discontinuïtat presenta.

P6. — **[10 punts]** Calcula l'àrea de la superfície compresa entre les corbes $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ i els seus punts de tall.

P7. — El 38% dels habitants d'un poble afirmen que el seu esport preferit és la natació, mentre que el 21% prefereixen el ciclisme i la resta s'inclinen més per altres esports. Si s'escull a l'atzar una persona i, tot seguit una de diferent, calcula la probabilitat dels següents successos:

- (a) **[3 punts]** Que les dues persones siguin aficionades a la natació.
- (b) **[3 punts]** Que una de les dues persones sigui aficionada al ciclisme i l'altra a la natació.
- (c) **[4 punts]** Sabent que la primera prefereix el ciclisme, que la segona no prefereixi aquest esport.

P8. — El pes, en grams, de les mongetes en llauna es distribueix normalment amb mitjana μ i desviació típica 7.8. Atès que el 10% d'aquestes llaunes contenen menys de 200 g, calcula:

- (a) **[6 punts]** El valor de la mitjana μ arrodonint-la a les unitats.
- (b) **[2 punts]** El percentatge de llaunes que contenen més de 225 g de mongetes. Nota: empra la mitjana arrodonida a les unitats.
- (c) **[2 punts]** El percentatge de llaunes que contenen entre 190 g i 225 g de mongetes. Nota: empra la mitjana arrodonida a les unitats.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.1 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.