Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes valen igual. Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Heu de justificar totes les respostes.

P1) **a)** Determinau les matrius $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que satisfan l'equació matricial $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *(3 punts)*

b) Donat el següent sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-z=0 \\ 2x+ay \quad\; =0 \\ x-2y+z=3 \end{array}\right\},$$

discutiu el seu caràcter en funció del paràmetre real a *(4 punts)*. Resoleu-lo quan $a=2$. *(3 punts)*

P2) **a)** Estudiau els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims de la funció $h(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x$. *(5 punts)*

b) Calculau l'àrea de la regió limitada per les funcions $f(x)=x^2$ i $g(x)=\sqrt{x}$. Feu un dibuix aproximat de l'àrea demanada. *(5 punts)*

P3) Se sap que un pla π és perpendicular al vector $\vec{v}=(2,3,-1)$ i que passa pel punt $(2,-1,3)$. Aleshores:

a) Determinau l'equació del pla π. *(5 punts)*

b) Determinau l'equació de la recta que és perpendicular al pla π i passa pel punt $P=(3,0,-2)$. *(5 punts)*

P4) El 70% dels clients d'una companyia d'assegurances d'automòbils té més de 25 anys. Un 5% dels clients d'aquest grup té algun accident al llarg de l'any. En el cas de clients més joves de 25 anys, aquest percentatge és del 20%.

a) Si s'escull un assegurat a l'atzar, calculau la probabilitat que tingui algun accident aquest any. *(5 punts)*
b) Si una persona va tenir algun accident, calculau la probabilitat que sigui més jove de 25 anys. *(5 punts)*

Criteris específics de correcció

Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Han d'estar justificades totes les respostes.

P1) **a)** Realització correcta del producte de matrius: **2 punts**.
Expressió correcta de la matriu A que satisfà l'equació: **1 punt**.
b) Discussió correcta del caràcter del sistema en funció de *a*: **4 punts**.
Resolució correcta del sistema quan a = 2: **3 punts**.

P2) **a)** Càlcul correcte de la derivada: **1 punt**.
Resolució correcta de l'equació f'(x) = 0: **1 punt**.
Estudi del signe de la derivada, determinació correcta del caràcter dels punts crítics, determinació dels màxims i mínims i de les regions de creixement i decreixement: **3 punts**. Si tot és correcte però **no** es donen les **coordenades dels punts** màxims i mínims, cal assignar **2 punts** a aquesta part.
b) Dibuix correcte: **1 punt**.
Expressió correcta de l'àrea com una integral: **1 punt**.
Càlcul correcte de la primitiva: **1 punt**.
Càlcul correcte de l'àrea: **2 punts**.

P3) **a)** Determinació correcta de l'equació del pla: **5 punts**.
b) Vector director de la recta: **2 punts**.
Equació de la recta de qualsevol de les formes: **3 punts**.

P4) **a)** Càlcul correcte de la probabilitat demanada amb justificació: **5 punts**. Sense cap justificació: **màxim de 2 punts**.
b) Càlcul correcte de la probabilitat demanada amb justificació: **5 punts**. Sense cap justificació: **màxim de 2 punts**.

Solucions

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes valen igual. Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Heu de justificar totes les respostes.

P1) **a)** Determinau les matrius $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que satisfan l'equació matricial $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *(3 punts)*

b) Donat el següent sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-z=0 \\ 2x+ay=0 \\ x-2y+z=3 \end{array}\right\},$$

discutiu el seu caràcter en funció del paràmetre real a *(4 punts)*. Resoleu-lo quan $a=2$. *(3 punts)*

Solució:

a) Tenim que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, *a=1*, *b=-1*, *c=1* i *d=-1*.

b) Tenim que el determinant de la matriu del sistema és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2a-2.$$

Quan $a=1$ el determinant val 0 i, per tant, el seu rang serà 2, ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-6=-5\neq 0.$$

Però el rang de la matriu ampliada, donada per $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, és 3, ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-15\neq 0.$$

Per tant, si a=1, el sistema serà incompatible, i si a és diferent d'1, el sistema serà compatible determinat.

Si ara agafam $a = 2$, tenim per l'apartat anterior que el sistema és compatible determinat, i les solucions són:

$$x = 3, y = -3, z = -6.$$

P2) a) Estudiau els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims de la funció $h(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x$. *(5 punts)*

b) Calculau l'àrea de la regió limitada per les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{x}$. Feu un dibuix aproximat de l'àrea demanada. *(5 punts)*

Solució:

a) Calculam la derivada i resolem l'equació *h'(x)=0*. S'obté que $h'(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, i *h'(x)=0* si, i només si, $(x-3)(x+1)(x-2) = 0$, i la derivada s'anul·la quan *x=3, x=-1* o *x=2*. Estudiarem ara el signe de la primera derivada per deduir el caràcter dels punts crítics de *h(x)*.

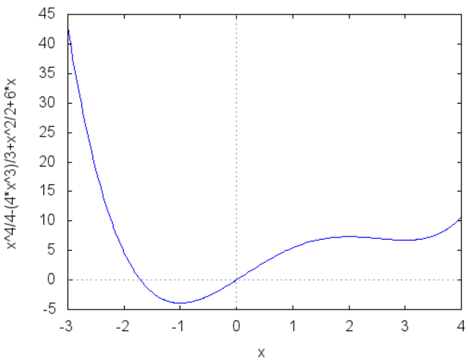
$h'(-2) = -20,$ $h'(0) = 6,$ $h'(2{,}5) = -0.875,$ $h'(4) = 10.$

$-\infty$ -1 2 3 $+\infty$

$Signe\ h'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$h(x)$		↘		↗		↘		↗	
			mínim		màxim		mínim		

Així, tenim un mínim relatiu a *(-1,h(-1)) = (-1,-47/12)* i a *(3,h(3)) = (3,27/4)*, i el màxim s'agafa al punt *h(2) = (2,22/3)*.
La funció serà creixent a la regió (-1,2)∪(3,∞) i és decreixent a la regió (-∞,-1)∪(2,3).

La figura següent ens mostra el gràfic de la funció $h(x)$.



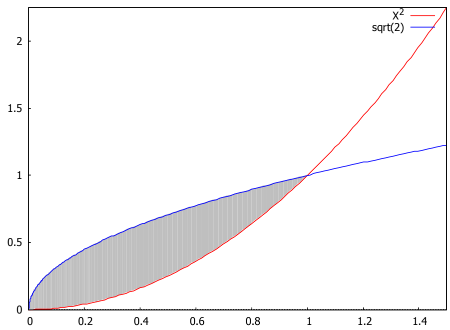
b) Primer hem d'obtenir els punts de tall d'ambdues funcions:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ (x) = \sqrt{x} \end{cases} \Longrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Longrightarrow x^4 = x \Longrightarrow x = 0, x = 1.$$

L'àrea demanada ve donada per la integral:

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}u^2.$$

El recinte del qual ens demanen l'àrea es pot veure a la figura següent:



P3) Se sap que un pla π és perpendicular al vector $\vec{v} = (2,3,-1)$ i que passa pel punt $(2,-1,3)$. Aleshores:

a) Determinau l'equació del pla π. *(5 punts)*

b) Determinau l'equació de la recta que és perpendicular al pla π i passa pel punt $P = (3,0,-2)$. *(5 punts)*

Solució:

a) Com que el pla π és perpendicular al vector $\vec{v} = (2,3,-1)$, aquest serà el seu vector director, per tant, la seva equació tindrà la forma: *2x+3y-z+D=0*. Per determinar *D* hem de tenir en compte que el pla ha de passar pel punt (2,-1,3), per tant:
4-3-3+D=0, d'on *D=2*. Per tant, el pla demanat té per equació

$$2x+3y-z+2=0.$$

b) Com que la recta és perpendicular al pla de l'apartat anterior, el seu vector director és $\vec{v} = (2,3,-1)$ i, com que passa pel punt P=(3,0,-2), les seves equacions són:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3 + 2\gamma \\ y = 3\gamma \\ z = -2 - \gamma \end{array}\right\}, \qquad \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}.$$

P4) El 70% dels clients d'una companyia d'assegurances d'automòbils té més de 25 anys. Un 5% dels clients d'aquest grup té algun accident al llarg de l'any. En el cas de clients més joves de 25 anys, aquest percentatge és del 20%.

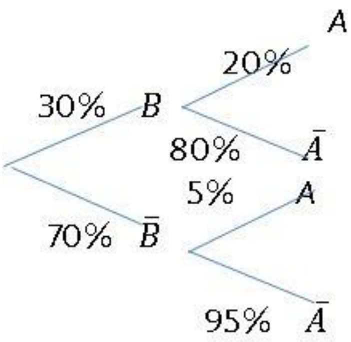
a) Si s'escull un assegurat a l'atzar, calculau la probabilitat que tingui algun accident aquest any. *(5 punts)*

b) Si una persona va tenir algun accident, calculau la probabilitat que sigui més jove de 25 anys. *(5 punts)*

Solució:

Considerem els següents successos: A = "tenir algun accident", B = "més jove de 25 anys". Amb $\bar{B}$ i $\bar{A}$ denotarem els successos complementaris de B i A, respectivament.

Per facilitar els càlculs, ordenam les dades proporcionades per l'enunciat del problema en un diagrama en arbre.



a) Aplicam el teorema de la probabilitat total:

$$p(A) = p(A/B)\,p(B) + p(A/\,\bar{B})p(\bar{B}) = 0.2 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.7 = 0.095.$$

b) Utilitzarem la fórmula de Bayes:

$$p(B/\mathrm{A}) = \frac{p(A/B)\,p(B)}{p(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.3}{0.095} = 0.63.$$

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes valen igual. Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Heu de justificar totes les respostes.

P1) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, es demana:

a) Calculau $A \cdot B$. (2 punts)
b) Calculau A^{-1} i B^{-1} . (2 punts)
c) Calculau $(A \cdot B)^{-1}$. (2 punts)
d) Calculau $A^{-1} \cdot B^{-1}$. (2 punts)
e) Quina relació hi ha entre $(A \cdot B)^{-1}$ i $B^{-1} \cdot A^{-1}$? (2 punts)

P2) a) Considerau la funció donada per $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-5x-3}{x^3-3x^2+x-3}, & x \neq 3, \\ b, & x = 3. \end{cases}$

Determinau el valor de b perquè la funció $f(x)$ sigui contínua en tot el seu domini. (4 punts)

b) Feu un dibuix aproximat de la regió limitada per la corba $y = 2x^2 - 1$ i la recta $y = x$. (2 punts)

Calculau l'àrea determinada per aquesta regió. (4 punts)

P3) a) Calculau unes equacions paramètriques del pla d'equació implícita $\pi \equiv x + y + z = 3$, i indicau un dels seus punts i dos vectors directors independents. (6 punts)

b) Donada la recta d'equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = 4 + \lambda, \\ y = 1 + 2\lambda, \\ z = -2 - 3\lambda. \end{cases}$$

Està la recta continguda en el pla d'equació $x + y + z = 3$? (4 punts)

P4) D'una baralla espanyola[1] de 48 cartes es considera l'experiment aleatori «extreure una carta». Calculau la probabilitat dels successos següents:

a) Treure una carta que sigui un nombre primer. (2 punts)
b) Que la carta que extraiem no sigui un as. (2 punts)
c) Que sigui una figura d'espases. (2 punts)
d) Treure una carta de copes. (2 punts)
e) Treure una carta que sigui una figura i que no sigui de copes. (2 punts)

[1] Una baralla espanyola de 48 cartes està formada per quatre colls de 12 cartes cada coll: oros, bastos, espases i copes. Les cartes dins de cada coll van numerades de l'1 al 12. Una figura és una carta marcada amb un 10, un 11 o un 12. Un as és una carta marcada amb un 1.

Criteris específics de correcció

Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Han d'estar justificades totes les respostes.

P1)

- **a)** Càlcul correcte de A.B: 2 punts.
- **b)** Càlcul correcte de A^{-1}: 1 punt. Càlcul correcte de B^{-1}: 1 punt.
- **c)** Càlcul correcte de $(A \cdot B)^{-1}$: 2 punts.
- **d)** Càlcul correcte de $B^{-1} \cdot A^{-1}$: 2 punts.
- **e)** Dir que les dues matrius són iguals: 2 punts.

P2)

- **a)** Determinació del límit de la funció al punt x=3: 3 punts.
  Indicar que el valor de b ha de ser 7/10 perquè la funció sigui contínua en tot el seu domini: 1 punt.
- **b)** Dibuix aproximat correcte: 2 punts.
  Expressió correcta de l'àrea com una integral: 1 punt.
  Càlcul correcte de la primitiva: 1 punt.
  Càlcul correcte de l'àrea: 2 punts.

P3)

- **a)** Determinació d'unes equacions paramètriques del pla: 3 punts.
  Determinació d'un punt del pla: 1 punt.
  Determinació de dos vectors directors: 1 punt per vector.
- **b)** Comprovar correctament que la recta satisfà l'equació del plànol: 3 punts.
  Indicar que la recta està continguda en el plànol, ja que satisfà l'equació: 1 punt.

P4) Càlcul correcte de cadascuna de les probabilitats indicades: 2 punts per probabilitat i apartat.

Solucions

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes valen igual. Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Heu de justificar totes les respostes.

P1) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, es demana:

a) Calculau $A \cdot B$. (2 punts)
b) Calculau A^{-1} i B^{-1} . (2 punts)
c) Calculau $(A \cdot B)^{-1}$. (2 punts)
d) Calculau $A^{-1} \cdot B^{-1}$. (2 punts)
e) Quina relació hi ha entre $(A \cdot B)^{-1}$ i $B^{-1} \cdot A^{-1}$? (2 punts)

Solució

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 14 & -22 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/18 & -2/9 \\ 1/18 & 1/9 \end{pmatrix}$. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 11/18 & -5/18 \\ 7/18 & -2/9 \end{pmatrix}$. $B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/18 & -5/18 \\ 7/18 & -2/9 \end{pmatrix}$.

Les dues matrius coincideixen.

P2)

a) Considerau la funció donada per $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-5x-3}{x^3-3x^2+x-3}, & x \neq 3, \\ b, & x = 3. \end{cases}$

Determinau el valor de b perquè la funció $f(x)$ sigui contínua en tot el seu domini. (4 punts)

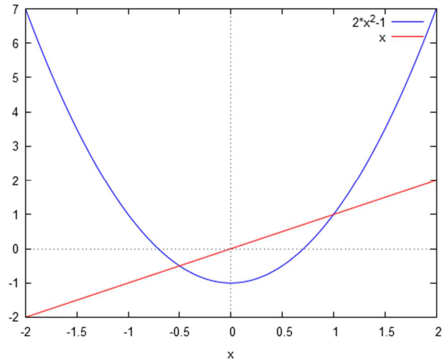
b) Feu un dibuix aproximat de la regió limitada per la corba $y = 2x^2 - 1$ i la recta $y = x$. (2 punts)

Calculau l'àrea determinada per aquesta regió. (4 punts)

Solució

a) $\lim_{x\to 3} f(X) = \lim_{x\to} \frac{2x^2-5x-3}{x^3-3x^2+x-3} = \frac{7}{10}$.
Per tant: $b = \frac{7}{10}$, i amb aquest valor la funció serà contínua en tot el seu domini.

b) Dibuix aproximat de la regió:



Els punts d'intersecció entre les dues corbes són les solucions de l'equació: $2x^2 - 1 - x = 0$, per tant: $x = 1, x = -1/2$.

L'àrea de la regió demanada ve donada per:

$\int_{-1/2}^{1}(x - (2x^2 - 1))dx = \int_{-1/2}^{1}(x - 2x^2 + 1)dx = \frac{9}{8}u^2.$

P3) a) Calculau unes equacions paramètriques del pla d'equació implícita $\pi \equiv x + y + z = 3$, i indicau un dels seus punts i dos vectors directors independents. (6 punts)

b) Donada la recta d'equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = 4 + \lambda, \\ y = 1 + 2\lambda, \\ z = -2 - 3\lambda. \end{cases}$$

Està la recta continguda en el pla d'equació $x + y + z = 3$? (4 punts)

Solució

a) $$\left.\begin{array}{r} x = \lambda, \\ y = \mu, \\ z = 3 - x - y = 3 - \lambda - \mu, \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \mu, \\ z = 3 - \lambda - \mu. \end{cases}$$

Un punt seria (0,0,3), i els vectors directors independents: (1,0,-1) i (0,1,-1).

b) Les equacions de la recta donada satisfan l'equació del pla, ja que:

$$(4 + \lambda) + (1 + 2\lambda) + (-2 - 3\lambda) = 3,$$

i, per tant, la recta està continguda en el pla.

P4) D'una baralla espanyola[1] de 48 cartes es considera l'experiment aleatori «extreure una carta». Calculau la probabilitat dels successos següents:

a) Treure una carta que sigui un nombre primer. (2 punts)
b) Que la carta que extraiem no sigui un as. (2 punts)
c) Que sigui una figura d'espases. (2 punts)
d) Treure una carta de copes. (2 punts)
e) Treure una carta que sigui una figura i que no sigui de copes. (2 punts)

Solució

a) Sigui el succés A = «treure una carta que sigui un nombre primer», aleshores

$$\text{Card(A)} = 24, \text{ i per tant, p(A)} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}.$$

b) Sigui el succés B = «la carta extreta sigui un as», aleshores

$$\text{Card(B)} = 4, \text{ per tant, Card}(\bar{B}) = 44, \text{ i per tant, p}(\bar{B}) = \frac{44}{48} = \frac{11}{12}.$$

c) Sigui el succés C = «la carta és una figura d'espases», aleshores

$$\text{Card(C)} = 3, \text{ i per tant, p(C)} = \frac{}{48}.$$

d) Sigui el succés D = «treure una carta de copes», aleshores

$$\text{Card(D)} = 12, \text{ i per tant, p(D)} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}.$$

e) Sigui el succés E = «treure una carta que sigui figura i no de copes», aleshores

$$\text{Card(E)} = 9, \text{ i per tant, p(E)} = \frac{9}{48} = \frac{}{16}.$$

[1] Una baralla espanyola de 48 cartes està formada per quatre colls de 12 cartes cada coll: oros, bastos, espases i copes. Les cartes dins de cada coll van numerades de l'1 al 12. Una figura és una carta marcada amb un 10, un 11 o un 12. Un as és una carta marcada amb un 1.

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes valen igual. Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Heu de justificar totes les respostes.

P1) a) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; calculau $(A+B)^t$ *(2 punts)* i $(A \cdot B)^{-1}$ *(3 punts)* (Nota: A^t vol dir la transposada de la matriu A)

b) Resoleu el següent sistema d'equacions: *(5 punts)*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 + x, \\ 2x - y - 3z = 4x - 2, \\ -2x + y = 6 - z. \end{cases}$$

P2) a) Donada la funció real de variable real $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, es demana:

a.1) Determinau el seu domini i els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades. *(2 punts)*

a.2) Obteniu els seus màxims i mínims i els intervals de creixement i decreixement. *(5 punts)*

b) Calculau la integral següent: *(3 punts)*

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} 3e^{4x} dx.$$

Donau el nombre enter positiu resultat de la integral anterior.

P3) a) Donat el pla $\pi \equiv x + y + z = 4$, determinau la recta *r* que passa pel punt $P = (1,2,4)$ i és perpendicular a π. *(4 punts)*

b) Calculau el punt d'intersecció de *r* amb π. *(6 punts)*

P4) Un CEO d'una empresa balear té una reunió a Madrid i ha de triar de forma equiprobable entre dues companyies aèries. La probabilitat d'arribar amb retard amb la companyia A és de 0.25 i amb la companyia B és de 0.10.

a) Triada a l'atzar una companyia, quina és la probabilitat que el CEO arribi amb retard a la reunió? *(5 punts)*

b) Si el CEO ha arribat tard a la reunió, quina és la probabilitat que hagi utilitzat la companyia A? *(5 punts)*

Criteris específics de correcció

Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Han d'estar justificades totes les respostes.

P1)

a)

- Càlcul correcte de A+B: 1 punt.
- Càlcul correcte de la transposada de A+B: 1 punt.
- Càlcul correcte del producte de les matrius: 1 punt.
- Càlcul correcte de la inversa del producte de les matrius: 2 punts.
- Qualsevol altra situació: 0 punts.

b)

- Solució correcta del sistema d'equacions: 5 punts.
- Qualsevol altra situació: 0 punts.

P2)

a)

a.1)
- Determinació correcta del domini: 1 punt.
- Indicació correcta dels punts de tall: 0.5 punts per eix coordenat.

a.2)
- Càlcul correcte de la derivada i dels punts on s'anul•la: 1 punt.
- Estudi correcte dels intervals de creixement i decreixement: 3 punts.
- Indicació dels punts on s'aconsegueixen el màxim i el mínim: 0.5 punts per al punt (1,2) i 0.5 punts per al punt (-1,-2).

b) Càlcul correcte de la integral: 2 punts. Donar el nombre enter: 1 punt.

P3)

a)
- Determinació del vector director de la recta: 2 punts.
- Determinació de l'equació de la recta: 2 punts.

b) Determinació correcta del paràmetre que determina el punt d'intersecció: 3 punts. Càlcul correcte del punt d'intersecció: 3 punts.

P4)

- **a)** Càlcul correcte de la probabilitat total demanada: 5 punts.
- **b)** Càlcul correcte de la probabilitat demanada aplicant la fórmula de la probabilitat condicionada: 5 punts.

Solucions

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes valen igual. Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Heu de justificar totes les respostes.

P1) a) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; calculau $(A+B)^t$ *(2 punts)* i $(A \cdot B)^{-1}$ *(3 punts)* (Nota: A^t vol dir la transposada de la matriu A)

b) Resoleu el següent sistema d'equacions: *(5 punts)*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 + x, \\ 2x - y - 3z = 4x - 2, \\ -2x + y = 6 - z. \end{cases}$$

Solució:

a)

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2/3 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 + x, \\ 2x - y - 3z = 4x - 2, \\ -2x + y = 6 - z. \end{cases} \Longrightarrow x = -2, \quad y = 0, \quad z = 2.$$

P2) a) Donada la funció real de variable real $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, es demana:

a.1) Determinau el seu domini i els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades. *(2 punts)*

a.2) Obteniu els seus màxims i mínims i els intervals de creixement i decreixement. *(5 punts)*

b) Calculau la integral següent: *(3 punts)*

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} 3e^{4x} dx.$$

Donau el nombre enter positiu resultat de la integral anterior.

Solució:

a) a.1) Com que $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, el numerador és un polinomi i el denominador tan sols s'anul·la a *x=0*, tenim el domini de la funció $\mathbb{R} - \{0\}$, el conjunt dels nombres reals exceptuant el zero.

Punts de tall amb l'eix OX: no n'hi ha, ja que $x^2 + 1$ mai no s'anul·la.
Punts de tall amb l'eix OY: no n'hi ha, ja que a *x=0* no està definida.
a.2) $f'(x) = \frac{x^2-1}{x}$, aleshores $f'(x) = 0$ si, i només si, *x=-1* o *x=1*. Estudiarem ara el signe de la primera derivada per deduir el caràcter dels punts crítics de *f(x)*.

$$f'(-2) = \frac{3}{4}, \qquad f'(-0.5) = -3, \quad f'(0.5) = -3, \qquad f'(2) = 3/4.$$

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$Signe\ f'(x)$		+		-		−		+	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	
			Màxim (1,f(-1))= (-1.-2)		No està definida		Mínim (1,f(1))= (1,2)		

b)

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} 3e^{4x}dx = \frac{3}{4}e^{4x}|_{\ln 2}^{\ln 4} = \frac{3}{4}(e^{4ln4} - e^{4ln2}) = \frac{3}{4}\left(e^{ln4^4} - e^{ln2^4}\right) = \frac{3}{4}(4^4 - 2^4)$$
$$= 12(2^4 - 1) = 180.$$

P3) a) Donat el pla $\pi \equiv x + y + z = 4$, determinau la recta *r* que passa pel punt $P = (1,2,4)$ i és perpendicular a π.
(4 punts)

b) Calculau el punt d'intersecció de *r* amb π. *(6 punts)*

Solució:

a) Com que la recta demanada és perpendicular al pla π, el vector normal d'aquest pla serà el vector director de la recta. Per tant, l'equació de la recta ve donada per:

$$(x, y, z) = (1,2,4) + \mu(1,1,1) = (1 + \mu, 2 + \mu, 4 + \mu).$$

b) Per calcular el punt que ens demanen hem de determinar el valor de μ. Així, substituint en l'equació del pla:

$$(1 + \mu) + (2 + \mu) + (4 + \mu) = 4 \Rightarrow 7 + 3\mu = 4 \Rightarrow 3\mu = -3 \Rightarrow \mu = -1.$$

Per tant, el punt demanat és: $(0,1,3)$.

P4) Un CEO d'una empresa balear té una reunió a Madrid i ha de triar de forma equiprobable entre dues companyies aèries. La probabilitat d'arribar amb retard amb la companyia A és de 0.25 i amb la companyia B és de 0.10.

a) Triada a l'atzar una companyia, quina és la probabilitat que el CEO arribi amb retard a la reunió? *(5 punts)*

b) Si el CEO ha arribat tard a la reunió, quina és la probabilitat que hagi utilitzat la companyia A? *(5 punts)*

Solució:

Siguin els successos: C = «arribar amb retard», A = «triar la companyia A», B = «triar la companyia B».

a) $p(C) = p(A)p\left({}^{C}/_{A}\right) + p(B)p\left({}^{C}/_{B}\right) = 0.5 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.10 = 0.175.$

b) $p\left({}^{A}/_{C}\right) = \frac{p(A)p\left({}^{C}/_{A}\right)}{p(C)} = \frac{0.5 \cdot 0.25}{0.175} = 0.71.$ *(5 punts)*

Matemàtiques (més grans de 25 anys)

Model 2

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes valen igual. Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Heu de justificar totes les respostes.

P1) **a)** Els sous del pare, la mare i un fill sumats donen 16.250 euros. La mare guanya el doble que el fill. El pare guanya 2/3 del que guanya la mare. Utilitzant un sistema d'equacions que s'ajusti al problema i resolent-lo, determinau quant guanya cadascun d'ells. *(5 punts)*

b) Determinau el conjunt de valors de x per als quals la matriu següent

$$\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

no admet inversa. Per a quins valors de x la matriu té rang 3? *(5 punts)*

P2) **a)** Calculau els nombres a, b i c tals que la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$ talli l'eix OX als punts $x_1 = 0$ i $x_2 = 5$ i, a més, posseeixi recta tangent de pendent 1 al punt $x_3 = 2$. Donau l'expressió de la funció que satisfà totes les condicions. *(6 punts)*

b) Calculau la integral següent *(4 punts)*

$$\int \frac{e^{4x} + e^{2x}}{e^{x}} dx \; .$$

P3) **a)** Determinau la intersecció de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi \equiv x - y + z = 7$ (7 punts)

b) Determinau l'equació del pla que és paral·lel al pla π i passa pel punt intersecció obtingut a l'apartat anterior. *(3 punts)*

P4) **a)** En una aula de dibuix hi ha 40 cadires, 30 amb respatller i 10 sense. Entre les cadires sense respatller n'hi ha 3 de noves, i entre les cadires amb respatller n'hi ha 7 de noves. Triada a l'atzar una cadira, quina és la probabilitat que sigui nova? *(7 punts)*

b) En un experiment se sap que $p(B) = 0.3$ i $p(A/B) = 0.1$. Determinau $p(A \cap B)$. *(3 punts)*

Matemàtiques (més grans de 25 anys)

Model 2. Criteris específics de correcció

Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les
puntuacions obtingudes en cada problema entre tres.

P1) a) • Realització correcta del producte de matrius: **2 punts**.
• Expressió correcta de la matriu A que satisfà l'equació: **1 punt**.
b) • Discussió correcta del caràcter del sistema en funció de *a*: **4 punts**.
• Resolució correcta del sistema quan $a = 2$: **3 punts**.

P2)
a) • Expressió correcta de cadascuna de les tres condicions com una equació:
1 punt per condició.
• Càlcul correcte dels valors de *a, b i c*: **2 punts**.
• Expressió correcta de la funció *f(x)*: **1 punt**.
b) Càlcul correcte de la integral: **4 punts**.

P3) a) Determinació correcta de l'equació del pla: **5 punts**.
b) • Vector director de la recta: **2 punts**.
• Equació de la recta, en qualsevol de les formes: **3 punts**.

P4) a) • Expressió correcta del teorema de la probabilitat total aplicat al problema:
2 punts.
• Càlcul correcte de la probabilitat demanada substituint els valors corresponents:
2 punts.

b) • Expressió correcta del teorema de Bayes aplicat al problema:
2 punts.
• Càlcul correcte de la probabilitat demanada substituint els valors corresponents:
2 punts.

c) Expressió i explicació correcta de cada percentatge: **1 punt per percentatge**.

Matemàtiques (més grans de 25 anys)

Model 2. Solucions

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes valen igual. Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Heu de justificar totes les respostes.

P1) a) Els sous del pare, la mare i un fill sumats donen 16.250 euros. La mare guanya el doble que el fill. El pare guanya 2/3 del que guanya la mare. Utilitzant un sistema d'equacions que s'ajusti al problema i resolent-lo, determinau quant guanya cadascun d'ells. *(5 punts)*

b) Determinau el conjunt de valors de x per als quals la matriu següent

$$\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

no admet inversa. Per a quins valors de x la matriu té rang 3? *(5 punts)*

Solució:

a) Siguin x el sou del pare, y el sou de la mare i z el sou del fill. Aleshores:

$$\begin{cases} x+y+z=16250, \\ y-2z=0, \\ 3x-2y=0. \end{cases} \Longrightarrow x=5000\text{ €}, \quad y=7500\text{ €}, \quad z=3750\text{ €}.$$

b)

$$|A|=\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(x-1)x \Longrightarrow x=0, \quad x=1.$$

Com que |A|=0 si, i només si, $x=0$, $x=1$, tenim que la matriu no admet inversa per a aquests dos valors de x. A més, com que $|A|\neq 0$ quan $x\neq 0$ i $x\neq 1$, és per a aquest conjunt de valors de x per al qual la matriu té rang 3.

P2) a) Calculau els nombres a, b i c tals que la funció $f(x)=ax^2+bx+c$ talli l'eix OX als punts $x_1=0$ i $x_2=5$ i, a més, posseeixi recta tangent de pendent 1 al punt $x_3=2$. Donau l'expressió de la funció que satisfà totes les condicions. *(6 punts)*

b) Calculau la integral següent *(4 punts)*

$$\int \frac{e^{4x}+e^{2x}}{e^{x}}\,dx\ .$$

Solució:

a) Com que $f(x) = a\,x^2 + bx + \ c$, tenim que $f'(x) = 2ax + bx$ i, per tant, les condicions que s'han de satisfer són:

Talla l'eix OX al punt *x_1=0*: $f(0) = 0$.

Talla l'eix OX al punt *x_2=5*: $f(5) = 0$.

El pendent de la recta tangent al punt *x_3=2* val 1: $f'(2) = 1$.

Per tant, hem de resoldre el sistema d'equacions: *c=0, 25a+5b=0, 4a+b=1*. Obtenim: *a= -1, b=5 i c=0*. L'expressió de la funció serà: f(x)=-x^2+5x.

b)

$$\int \frac{e^{4x} + e^{2x}}{e^{x}}\, dx = \int (e^{3x} + e^{x}) dx = \frac{e^{3x}}{3} + e^{x} + C.$$

P3) a) Determinau la intersecció de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi \equiv x - y + z = 7$.

(7 punts)

b) Determinau l'equació del pla que és paral·lel al pla π i passa pel punt intersecció obtingut a l'apartat anterior. *(3 punts)*

Solució:

a) Les equacions paramètriques de la recta són:

$$\frac{x-1}{4} = t, \frac{y+3}{2} = t, \frac{z+2}{3} = t \quad \Longrightarrow x = 1 + 4t, y = -3 + 2t, z = -2 + 3t.$$

Substituint en l'equació del pla i calculant el valor de t, tindrem el punt demanat. Així:

$$(1 + 4t) - (-3 + 2t) + (-2 + 3t) = 7 \quad \Longrightarrow t = 1.$$

El punt demanat és: $(5, -1, 1)$.

b) Com que el pla demanat és paral·lel al pla $\pi \equiv x - y + z = 7$, tenen els dos el mateix vector normal: (1,-1,1). Per tant, l'equació de qualsevol pla paral·lel a π ve donada per: $x - y + z + D = 0$. Per trobar *D*, exigirem que aquest pla passi pel punt $(5, -1, 1)$.

$$5 + 1 + 1 + D = 0 \Longrightarrow D = -7.$$

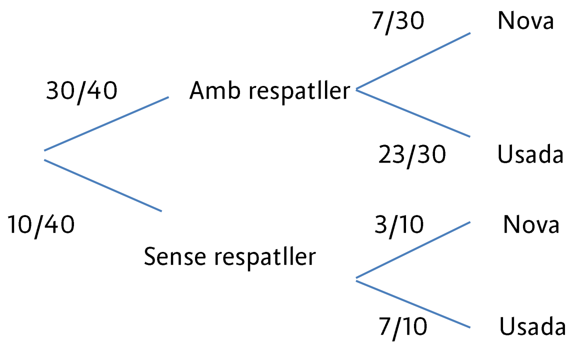
Per tant, el pla demanat és: $x - y + z - 7 = 0$.

P4) a) En una aula de dibuix hi ha 40 cadires, 30 amb respatller i 10 sense. Entre les cadires sense respatller n'hi ha 3 de noves, i entre les cadires amb respatller n'hi ha 7 de noves. Triada a l'atzar una cadira, quina és la probabilitat que sigui nova? *(7 punts)*

b) En un experiment se sap que $p(B) = 0.3$ i $p(A/B\,) = 0.1$. Determinau $p(A \cap B)$. *(3 punts)*

Solució:

a) Per facilitar els càlculs ordenam les dades proporcionades per l'enunciat del problema en un diagrama en arbre.



$$p(nova) = p(nova\ amb\ respatller) + p(nova\ sense\ respatller) = \frac{30}{40}\cdot\frac{7}{30} + \frac{10}{40}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{4}.$$

b) Per la definició de la probabilitat condicionada, tenim que:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Longrightarrow 0.1 = \frac{p(A \cap B)}{0.3} \Longrightarrow p(A \cap B) = 0.1 \cdot 0.3 = 0.03.$$

Matemàtiques (més grans de 25 anys)

Model 1

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes valen igual. Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres. Heu de justificar totes les respostes.

P1)

a) Determinau els valors de a i b per als quals la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ no admet inversa.

(5 punts)

b) Determinau si el sistema

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

és o no compatible (determinat o no) quan $a = 1$ i $a = -2.$ (5 punts)

P2)

a) Determinau el valor de p en la funció $f(x) = x^3 - px^2 + 8x$ perquè la recta tangent a aquesta funció en el punt x = 1 sigui paral·lela a la recta $y = -x$. (5 punts)

b) Calculau el valor de la integral $\int_{-1}^{0} (x^3 - 6\,x^2 + 8x)\,dx$ (5 punts)

P3)

a) Determinau el punt d'intersecció de la recta $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda, \\ y = 1 - \lambda, \\ z = 4 + 6\lambda, \end{cases}$ amb el pla $x - 3y + 5z + 11 = 0.$ (6 punts)

b) Calculau b en el punt $(5, -3, b)$ perquè sigui un punt del pla $x - 3y + 5z + 11 = 0.$

(4 punts)

P4)

Dels successos A i B se sap que:

$$p(A) = 0.4, \qquad p(B) = 0.5, \qquad p(A \cup B) = 0.7.$$

a) Calculau $p(A \cap B)$ i $p(A^c \cap B^c)$. (7 punts)

b) Són els successos A i B independents? (3 punts)

(Nota: per A^c denotam el succés complementari de A)

Matemàtiques (més grans de 25 anys)

Model 1. Criteris específics de correcció

Cada problema val deu punts, la nota final serà el resultat de dividir la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema entre tres.

P1)

a) Càlcul del determinant de A **2 punts.**
Resolució correcta de l'equació $\det(A) = 0$ **2 punts.**
Indicació dels valors per als quals no existeix inversa **1 punt.**

b) Estudi correcte per a $a = 1$ **2 punts.**
Estudi correcte per a $a = -2$ **3 punts.**

P2)

a)
- Càlcul correcte de $f'(t)$ **1 punt.**
- Càlcul correcte de $f'(1)$ **1 punt.**
- Indicació de l'equació $f'(1) = -1$ **2 punts.**
- Solució de l'equació $f'(1) = -1$ donant el valor de p **1 punt.**

b)
- Càlcul correcte de la primitiva **3 punts.**
- Aplicació de la regla de Barrow **2 punts.**

P3)

a)
- Determinació del valor de λ **3 punts.**
- Determinació del punt demanat **3 punts.**

b)
- Determinació correcta i justificada del valor de b **4 punts.**

P4)

a) Càlcul correcte de: $p(A^c \cap B^c)$: **4 punts**, $p(A \cap B)$: **3 punts.**
b) Indicar que els successos són independents **3 punts.**

Matemàtiques (més grans de 25 anys)

Model 1. Solucions

P1)

a) Tenim que

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2).$$

Per tant, la matriu *A* no admet inversa quan *a = 1* i *a = -2*.

b) Quan $a=1$ el sistema queda reduït a l'equació $x+y+z=1$ i, per tant, és compatible indeterminat.

Si ara agafam $a=-2$, tenim per l'apartat a) que el rang de la matriu *A* és menor que 2, i com que $\begin{vmatrix} -2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3\neq 0,$ el rang serà 2. Però el rang de la matriu ampliada és 3, ja que

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=9\neq 0.$$

Per tant, en aquest cas el sistema és incompatible.

P2)

a) Com que $f(x)=x^3-px^2+8x$, tenim que $f'(x)=3x^2-2px+8$ i, per tant, $f'(1)=3-2p+8$, i aquesta és el pendent de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt $x=1$.

Com que la recta tangent és paral·lela a la recta $y=-x$, les dues rectes han de tenir el mateix pendent, per tant:

$$f'(1)=-1 \Rightarrow 3-2p+8=-1\Rightarrow p=6.$$

b) Ens demanen calcular la integral $\int_{-1}^{0}(x^3-6x^2+8x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{0}(x^3-6x^2+8x)\,dx=\left.\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right|_{x=-1}^{0}=-\frac{25}{4}.$$

/

P3) **a)** Ens demanen calcular el punt de la recta $\begin{cases} x=3-2\lambda,\\ y=1-\lambda,\\ z=4+6\lambda,\end{cases}$ que satisfà l'equació del pla $x-3y+5z+11=0,$ per tant:

$$(3-2\lambda)-3(1-\lambda)+5(4+6\lambda)+11=0\Rightarrow\lambda=-1.$$

El punt serà:

$$\begin{cases} x=3-2(-1)=5,\\ y=1-(-1)=2,\\ z=4+6(-1)=-2,\end{cases}\Rightarrow (x,y,z)=(5,2,-2).$$

b) Si el punt $(5,-3,b)$ ha de pertànyer al pla donat, ha de satisfer la seva equació, per tant:

$$5-3(-3)+5b+11=0 \Rightarrow b=-5.$$

P4)

$p(A)=0.4,\qquad p(B)=0.5,\qquad p(A\cup B)=0.7.$

a)

$$p(A^c\cap B^c)=p((A\cup B)^c)=1-p(A\cup B)=1-0.7=0.3\ .$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)\Rightarrow p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=0.4+0.5-$$

b) Els successos A i B són independents si $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$

En aquest cas aquesta identitat se satisfà, ja que:

$$0.2=p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=0.4\cdot 0.5=0.2\ .$$