

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Justificau les respostes usant llenguatge matemàtic i/o no matemàtic, segons correspongui. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

**P1.** — Una fàbrica de vi de Mallorca produeix 3 tipus de vi: negre, blanc i rosat. Amb la finalitat de saber el preu de cada tipus de vi, hem comprat vi, el mateix dia i a la fàbrica mateixa, de 4 maneres diferents:

- comprant 3 botelles de vi negre i 2 de vi blanc hem pagat 67 €,
  - comprant 2 botelles de vi negre, 4 de vi blanc i 1 de rosat hem pagat 85 €,
  - comprant 1 botella de vi negre i 1 de vi rosat hem pagat 21 €, i finalment,
  - comprant 4 botelles de vi blanc i 5 de vi rosat hem pagat 85 €.
- (a) **[3 punts]** Escriu, en forma matricial, el sistema d'equacions lineals que s'hauria de resoldre per poder descobrir el preu de cada tipus de vi.
- (b) **[2 punts]** És necessari tenir les dades de les 4 compres per saber el preu de cada tipus de vi? Justifica la resposta.
- (c) **[5 punts]** Calcula quin és el preu de cada tipus de vi.

**P2.** — Considerem les matrius  $A$  de dimensió  $3 \times 3$  que satisfan que  $3A + I = A^2$ , on  $I$  és la matriu identitat de dimensió  $3 \times 3$ .

- (a) **[3 punts]** Calcula l'expressió de la matriu inversa de  $A$ .
- (b) **[3 punts]** Donada l'equació matricial

$$A + 3AX = 5I,$$

on  $A$  és una de les matrius de l'enunciat. Calcula, en funció només de la matriu  $A$  (no de la seva inversa) i de la identitat  $I$ , la matriu  $X$ . Quina dimensió té la matriu  $X$ ? Justifica la resposta.

- (c) **[4 punts]** Calcula totes les matrius de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

que satisfan les condicions de l'enunciat.

**P3.** — Considerem els punts  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (2, -1, 3)$  i  $C = (-1, 2, 1)$ .

- (a) **[3 punts]** Calcula el punt  $D$  tal que  $ABDC$  sigui un paral·lelogram.
- (b) **[4 punts]** Calcula un dels punts  $E$  de l'espai de tal manera que la recta  $AE$  sigui perpendicular al pla  $ABC$  i que la distància entre els punts  $A$  i  $E$  sigui 1.
- (c) **[3 punts]** Escriu l'equació d'un dels plans paral·lels al pla  $ABC$  que dista una unitat d'aquest.

**P4.** — (a) [5 punts] Discuteix, segons els valors de  $a$  i  $b$  (paràmetres reals), la posició relativa dels plans

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \quad \text{i} \quad \pi_2 : 6x + y - 2z = b.$$

És a dir, si són coincidents, paral·lels o es tallen. En el darrer cas, especifica si ho fan perpendicularment.

(b) [5 punts] Calcula l'equació de la recta perpendicular al pla  $\pi$  i que passa pel punt de tall entre la recta  $s$  i el mateix pla  $\pi$ , sent

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta, \\ y = 3\beta, \\ z = 1 + \alpha, \end{cases} \quad \text{i} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1},$$

per a  $\alpha$  i  $\beta$  valors reals qualssevol.

**P5.** — [10 punts] Volem fer una tanca en un camp rectangular emprant diferents materials a cada costat. Començant pel fons del camp i movent-nos al voltant d'aquest en el sentit contrari a les agulles del rellotge, el cost del material per a cada costat és de 6 €/m, 9 €/m, 12 €/m i 14 €/m, respectivament. Si hem de gastar exactament 1000 € per comprar el material de tancament, determina les dimensions del camp que maximitzaran l'àrea tancada.

**P6.** — Sigui la funció

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1, & x \leq 0, \\ ax^2 + b(x+3), & 0 < x \leq 1, \\ a \cos(\pi x) + 7bx, & x > 1. \end{cases}$$

(a) [5 punts] Calcula els valors de  $a$  i  $b$  per als quals la funció  $f(x)$  és contínua.

(b) [5 punts] Siguin  $a = 3$  i  $b = 2$ , calcula l'àrea compresa entre  $x = -1$ ,  $x = 0$  i l'eix  $OX$ .

**P7.** — Siguin  $A$  i  $B$  dos successos d'un mateix espai mostral tals que satisfan que  $P(A \cup B) = 0.7$ ,  $P(A \cap B) = 0.1$  i  $P(A \cap B^c) = 0.35$  (sent  $B^c$  el succés complementari de  $B$ ), calcula:

(a) [3 punts]  $P(A)$ .

(b) [3 punts]  $P(B)$ .

(c) [2 punts]  $P(A^c \cup B^c)$ .

(d) [2 punts] Són  $A$  i  $B$  successos independents?

**P8.** — La durada dels embarassos humans des de la concepció fins al naixement s'aproxima a una distribució normal amb una mitjana de 266 dies i una desviació típica de 16 dies.

(a) [4 punts] Quina proporció de tots els embarassos durarà entre 240 i 270 dies (aproximadament entre 8 i 9 mesos)?

(b) [6 punts] Si ens fixam en el 70% dels embarassos que més duren, quina és la seva durada?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal  $\mathcal{N}(0, 1)$ .