.pax .pax

.pax .pax

.pax .pax

.pax .pax

.pax .pax

.pax .pax

.pax .pax

.pax .pax

.pax .pax

.pax .pax

Solucions de la pàgina 10:

1. **a)** $0.\hat{6}$ **b)** 0.75 **c)** $0.2\hat{3}$

d) 0.24 **e)** 0.875 **f)** $0.\widehat{81}$

2. **a)** $233/99$ **b)** $431821/3300$ **c)** 1

Objectius del tema:

1. Utilitzar els nombres reals, les seves operacions i propietats, per recollir, transformar i intercanviar informació, estimant, valorant i representant els resultats en contextos de resolució de problemes.

1.1. Reconeix els diferents tipus de nombres (reals i complexos) i els utilitza per representar i interpretar adequadament informació quantitativa.

1.2. Realitza operacions numèriques amb eficàcia, emprant càlcul mental, algoritmes de llapis i paper, calculadora o eines informàtiques.

1.3. Utilitza la notació numèrica més adequada a cada context i justifica la seva idoneïtat.

1.4. Obté fites d'error i estimacions en els càlculs aproximats que realitza valorant i justificant la necessitat d'estratègies adequades per minimitzar-les.

1.5. Coneix i aplica el concepte de valor absolut per calcular distàncies i tractar desigualtats.

1.6. Resol problemes en què intervenen nombres reals i la seva representació i interpretació en la recta real.

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 11:

5. **a)** 5 **b)** 5 **c)** $\sqrt{10} - \pi$

6. **a)** 4 **b)** 2.2
c) 2 **d)** 9

7. **a)** $1 \leq x < 7$ **b)** $-3 < x < 5$
c) $2 < x \leq 8$ **d)** $x < 6$

8. **a)** $(2, 5)$ **b)** $(4, +\infty)$
c) $[3, 6)$ **d)** $(-\infty, 7]$

9. **a)** $(26, 100]$ **b)** $[0, 18]$ **c)** $(2, +\infty)$
d) $[100, 1000)$ **e)** $(-\infty, 25)$ **f)** $[0, +\infty)$
g) $(1, 9)$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 12:

10. **a)** $(-4, 6)$ **b)** $(-14/3, 2/3)$ **c)** $(-10.001, -9.999)$

11. **a)** $(5.5, 1.5)$ **b)** $(-5.5, 1.5)$ **c)** $(-0.5, 2.5)$

12. **a)** $x = 5$ i –5 **b)** $x = 4$ **c)** $x =$ –10 i 4

13. **a)** $(-1, 1)$
b) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$
c) $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
d) $(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

14. -3 i 9. -5.5 i 1.5. $9 - (-5.5) = 14.5$

15. $[-3, 8)$

16. $[5, 11]$

17. **a)** $A \cap B = \emptyset$;
$A \cup B = [-11, -9] \cup (-1, 6)$;
$A - B = A$

b) $A \cap B = B$; $A \cup B = A$;
$A - B = [-5, 3] \cup [4, 5]$

18. **a)** $\sqrt[6]{5}$ **b)** $\sqrt[8]{8}$ **c)** $\sqrt[8]{x^7}$

19. **a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $9\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt[3]{6}$
d) $2\sqrt[4]{2}$ **e)** $\sqrt[3]{3}$ **f)** $\sqrt[3]{49}$
g) $\sqrt[8]{7}$ **h)** $\sqrt{2}$

20. **a)** $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9}$ **b)** $\sqrt{7} = \sqrt[16]{7^8}$
c) $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^3}$ **d)** $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{5^6} = 5^2$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 13:

21.

a) $\sqrt[3]{5/4}$ **b)** $\sqrt[12]{2^3 \cdot 3}$

c) $\sqrt[12]{5^7}$ **d)** 2^3

e) $2^4 \cdot \sqrt[5]{2^4}$ **f)** $\sqrt{5}$

g) 3 **h)** 5^2

22.

a) $15\sqrt{11}$ **b)** $6\sqrt[3]{2}$ **c)** $-\sqrt{6}/5$

d) $-14\sqrt[4]{2}/3$ **e)** $41\sqrt{3}/15$ **f)** $13\sqrt{2}/5$

23. $(2+a)^2 + 4(2+a)\sqrt{a} + 4a$

24.

a) $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{3}$ **b)** $\frac{3}{4}\sqrt[4]{2^3}$

c) $3(\sqrt{2+1})$ **d)** $3 + 2\sqrt{2}$

e) $(\sqrt{10} - \sqrt{6})/2$ **f)** $-(9 + 4\sqrt{5})$

25.

a) $3\sqrt{6}$ **b)** $\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** 35

e) $2^{-64/15}$ **f)** $33/4 - 5\sqrt{2}$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 14:

- **Autoavaluació:**

1. $x = -10$ **i** $x = 4$

2. $\sqrt[8]{x^3}$

3. $13 + 4\sqrt{3}$

4. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

5. $\frac{13}{3}\sqrt[3]{2}$

6. $\dfrac{16 - 5\sqrt{15}}{-7}$

7. $(-1, 6]$

Notes:

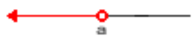
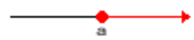
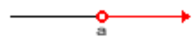
....

....

....

.pax .pax

Intervals i semirectes

INTERVALOS Y SEMIRRECTAS				
NOMBRE	**SÍMBOLO**	**EXPRESIÓN ALGEBRAICA**	**SIGNIFICADO**	**REPRESENTACIÒN**
Intervalo abierto	$(\mathbf{a},\mathbf{b})$	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$	Nº comprendidos entre **a** y **b**	
Intervalo cerrado	$[\mathbf{a},\mathbf{b}]$	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$	Nº comprendidos entre **a** y **b**, ambos incluidos	
Intervalo semiabierto	$(\mathbf{a},\mathbf{b}]$	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{a} < \mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$	Nº comprendidos entre **a** y **b**, incluido **b**	
	$[\mathbf{a},\mathbf{b})$	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{a} \le \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$	Nº comprendidos entre **a** y **b**, incluido **a**	
Semirrecta	$(-\infty,\mathbf{a})$	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{x} < \mathbf{a}\}$	Nº menores que **a**	
	$(-\infty,\mathbf{a}]$	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{x} \le \mathbf{a}\}$	Nº menores o iguales que **a**	
	$[\mathbf{a},+\infty)$	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{a} \le \mathbf{x}\}$	Nº mayores o iguales que **a**	
	$(\mathbf{a},+\infty)$	$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{a} < \mathbf{x}\}$	Nº mayores que **a**	

.pax .pax

Solucions de la pàgina 16:

1.

a) $4x^2 - 20xy + 25y^2$

b) $9x^2 + 2xy + y^2/9$

c) $625 - 250 + 25/x^2$

d) $9a^2 - 6ab + b^2$

e) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

f) $9y^2/25 - 12/5 + 4/y^2$

2.

a) $(a^2 + 3)^2$

b) $(3x - 1)^2$

c) $(b - 5)^2$

d) $(2y + 3)^2$

e) $(a^2 - 1)^2$

f) $(y^2 + 3)^2$

3.

a) $16x^4 - 9y^2$

b) $4x^4 - 64$

c) $-x^4 + 9x^2$

Objectius del tema:

4. Analitzar, representar i resoldre problemes plantejats en contextos reals, utilitzant recursos algebraics (equacions, inequacions i sistemes) i interpretant críticament els resultats.

4.1. Formula algebraicament les restriccions indicades en una situació de la vida real, estudia i classifica un sistema d'equacions lineals plantejat (com a màxim de tres equacions i tres incògnites), el resol mitjançant el mètode de Gauss, en els casos que sigui possible, i l'aplica per resoldre problemes.

4.2. Resol problemes en els quals es necessiti el plantejament i resolució d'equacions (algebraiques i no algebraiques) i inequacions (primer i segon grau), i interpreta els resultats en el context del problema.

.pax .pax

Solucions de la pàgina 17:

4.

a) $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 2;\ R(x) = -4$

b) $Q(x) = 2x + 2;\ R(x) = 2x - 1$

c) $Q(x) = a(x^3 + x^2 + x + 1);\ R(x) = a + b$

d) $Q(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1;\ R(x) = 0$

5.

a) $Q = 2x^2 - 4x - 1;\ R = 17x + 11$

b) $Q = -2;\ R = -4x^2 + x + 10$

c) $Q = -2x^2 + 2;\ R = 12x^2 - 5x - 13$

d) $Q = -2x^2 + 3;\ R = -3x^2 + 8$

e) $Q = -6x^2;\ R = 7x^2 + 1$

6.

a) $Q = -3x - 1;\ R = -1$

b) $Q = x^3 + 4x^2 + 8x + 14;\ R = 29$

c) $Q = 4x^2 - 7x + 7;\ R = -8$

d) $Q = x^2 + 3x;\ R = 1$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 18:

7. **a)** $R = 458$ **b)** $R = 32$ **c)** $R = 0$

8. Per exemple $q(x) = p - r = x^6 - 4x^4 - 4x^2 + x + 1$ que donaria quocient 1.

9. $D = d \cdot q + r$. Per exemple, si ens inventam $d = 2x + 1$, obtenim $D = 2x^3 - 4x^2 - 7x - 4$

10.
a) $(x-3)^2$
b) $(x^2+4)^2$
c) $(x+\sqrt{5}y)^2$
d) NO
e) NO
f) $(x+6)(x-6)$
g) NO
h) $(\sqrt{5}x+\sqrt{11})(\sqrt{5}x-\sqrt{11})$
i) $(x^2+\sqrt{3}y)(x^2-\sqrt{3}y)$

11.
a) $x(x-8)$
b) $(4x+3)(x-1)$
c) $x(x+2)(x-2)$
d) $x(x^2+25)$
e) $3x(x+1)^2$
f) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$
g) $(2x-1)^2$
h) $x^3(x-2)$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 19:

12.

a) $3(x+2)\cdot(x+1)$

b) $x^3\cdot(x+3)\cdot(x-3)$

c) $4(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

d) $-2(x+1)^2\cdot(x-3)$

e) $x\cdot(x^3-x^2+8x-4)$

f) $(x+1)^2\cdot(x-2)$

g) $2(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)$

h) $x^2\cdot(x+1)\cdot(x-3)$

i) $(x+4)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$

13. Per a qualsevol valor de m

14. **a)** $\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$ **b)** $\dfrac{x-1}{(x-2)(x+4)}$ **c)** Igual

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 20:

15.

a) $\dfrac{x(x+2)}{x^2+5}$ **b)** $\dfrac{a-5}{7a+4}$

c) $\dfrac{x+3y}{4}$ **d)** $\dfrac{2ab+3}{(a+1)(a-1)}$

16. **a)** $x(x+1)$ **b)** $x^2(x+1)(x-1)$ **c)** $(x-1)^2(x-2)$

17.

a) $\dfrac{x-1}{3x(x+2)}$

b) $\dfrac{2(x+5)}{(x+1)^2}$

c) $\dfrac{x-1}{x(x+2)}$

d) *No es pot*

e) $\dfrac{(x^2+x+1)(x-1)}{x}$

f) $\dfrac{1}{x+2}$

g) $\dfrac{x+2}{x-1}$

h) $\dfrac{2(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x}$

18.

a) $\dfrac{-2x+6}{3x(x-4)}$ **b)** $\dfrac{-4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+1)}$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 21:

19. **a)** $\dfrac{6x^2+2x+4}{x(x^2+1)}$ **b)** $\dfrac{4x-5}{(x-2)(x+1)}$

c) $\dfrac{-1}{(x+3)(x-1)}$ **d)** $\dfrac{x+3}{x^2+3}$

20. **a)** $-\dfrac{(4x^2+x+1)}{x^3}$ **b)** $-\dfrac{(7x+2)}{x(x+3)}$

21. **a)** $\dfrac{-4x}{(x+1)(x-1)}$ **b)** $\dfrac{-2}{x+1}$

c) $\dfrac{-1}{x-1}$ **d)** $\dfrac{-2t+3}{t(t+2)}$

e) 0 **f)** $\dfrac{1-x^2}{x^2}$

g) $\dfrac{3x^2+5}{x(x+1)^2}$

22. **a)** $\dfrac{-(a+y)(x+y)(a+x-y)}{(a-y)(x-y)(a+x+y)}$

b) $\dfrac{(2x+3y)(2y-x)}{(3x+y)(5x+3y)}$

c) $\dfrac{(x-2)(x^2+x-1)}{x^2-3x-2}$

23. a) $1,-1,2,-2$; Arrel $x=1$.

b) $1,-1,3,-3$; Arrels: -3 i -1.

c) $1,-1,3,-3,9,-9$; Arrels: 2 i 1;

d) $0,1,-1,2,-2,3,-3,6,-6$; Arrels 0 i -2.

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 22:

24.

a) $x = -\dfrac{75}{17}$ i $x = 0$

b) $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{37}}{3}$

c) $x = \pm 1$

d) $x = \pm\sqrt{\dfrac{3 \pm \sqrt{24}}{10}}$

25.

a) $x = 1,\ 2,\ -2$

b) $x = 0,\ 5,\ -5$

c) $x = 1,\ -2$

d) $x = \pm 2,\ 3,\ -1$

e) $x = 1,\ 3,\ 5,\ -4$

f) $x = 1$

g) $x = -2,\ -1,\ 2$

h) $x = -3,\ -1,\ 2$

i) $x = -2,\ 2,\ 4$

j) $x = -3,\ -2,\ 1$

k) $x = -3,\ 3,\ -2,\ 2$

l) $x = -1,\ 0,\ 5$

26. No pot tenir terme independent, és a dir, $a_0 = 0$.

27. La suma de tots els coeficients ha d'ésser zero, és a dir, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 0$.

28. El nombre és 12. $2x + 7 + 3/2x = 6x - 23$

29. Les dimensions són 30 m i 24 m. Planteig: $\dfrac{36}{54} = \dfrac{x}{36}$.

30.

a) $x = 6$

b) $x = 2$

c) $x = 3$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 23:

31.

a) $x = \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$

b) $x = 2, \frac{1}{7}$

c) $x = 2, -\frac{3}{5}$

d) $\frac{1 \pm \sqrt{41}}{4}$

32.

a) $x = -\frac{11}{17}$

b) $x = S.S.$

c) $x = S.S.$

33.

a) $x = 4$

b) $x = 4$

c) $x = 9$

d) $x = 7$

e) $x = 2$

f) $x = 38414$

g) $x = 10$

h) $x = 3$

i) $x = 11$

j) $x = 29$

k) $x = 14$

l) $x = 1$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 24:

34.

a) $x = 1;\ y = 16$ **b)** $x = 6;\ y = 8$

c) $x = 10;\ y = 2$ **d)** $x = 4;\ y = 7$

e) $x = 3;\ y = 1$ **f)** $x = -2;\ y = 8$

35.

a) $x = -1;\ y = 4$

b) $x = -\frac{3}{7};\ y = \frac{1}{7}$ **i** $x = 0;\ y = 1$

c) $x = -\frac{1}{2};\ y = -2$ **i** $x = \frac{1}{2};\ y = 2$

d) $x = 9;\ y = 4$

36.

a) $x = 7;\ y = 2;\ z = 11$

b) $x = 4;\ y = -3;\ z = 0$

c) $x = -1;\ y = 4;\ z = 4$

d) $x = 8;\ y = 4;\ z = -3$

37.

a) $x = 1;\ y = -5;\ z = 4$

b) $x = -1;\ y = -2;\ z = -2$

c) $x = 15;\ y = 2;\ z = 1$

d) $x = 3;\ y = 4;\ z = 9$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 25:

38.

a) $x = 1;\ y = -2;\ z = 3$

b) $x = 4;\ y = 2;\ z = -3$

c) $x = 1;\ y = -1;\ z = 0$

d) $x = 2;\ y = \frac{1}{5};\ z = -1$

39.

a) $x = \frac{16}{15};\ y = \frac{8}{5};\ z = \frac{39}{15}$

b) $x = 0;\ y = 0;\ z = 0$

40.

a) $x = 1;\ y = 1;\ z = 1$

b) $x = 1;\ y = 1;\ z = 1;\ t = 1$

c) $x = 1;\ y = 1;\ z = 2$

d) $x = \frac{5}{9};\ y = \frac{11}{3};\ z = \frac{31}{3}\ x = 0;\ y = 0;\ z = 1$

e) $x = 1;\ y = 1;\ z = 1;\ t = 1$

41. Sistema compatible indeterminat:

$x = \lambda;\ y = 0;\ z = \lambda - 1$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 26:

42. Els dos sistemes són incompatibles.

44. Cotxe 12000 €; Finca 48000 €; Pis 240000 €

45. $x - 2y - 2z = 0$,

$y - 2z = 0$,

$x + y + z = 45$.

Solució: $x = 30$, $y = 10$, $z = 5$ anys

46. $x + y + z = 18$,

$-99x + 99z = 594$,

$y = (x + z)/2$.

Solució: $x = 3$, $y = 6$, $z = 9$

47. $x + y + z = 100$,

$y + z + t = 73$,

$x + z + t = 74$,

$x + y + t = 98$.

Solució: $x = 42$, $y = 41$, $z = 17$ i $t = 15$ anys.

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 27:

48. **a)** $(-\infty, -1)$ **b)** $[9/4, +\infty)$ **c)** $(-\infty, x - 10/7)$

d) $[-1/9, +\infty)$ **e)** $(-7/50, +\infty)$

49. **a)** $(-\infty, -1)$ **b)** $[2, +\infty]$

c) $(-\infty, -1/7)$ **d)** $[0, +\infty)$

50. **a)** $[3/2, +\infty)$ **b)** $(-\infty, -9]$

c) $(-\infty, 2/7]$ **d)** $(-\infty, 7/2]$

51. **a)** $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

b) $\mathbb{R}$

c) $(-5, 5)$

d) $\emptyset$

e) $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

f) $\mathbb{R}$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

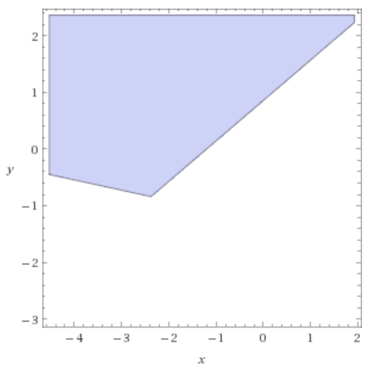
.pax .pax

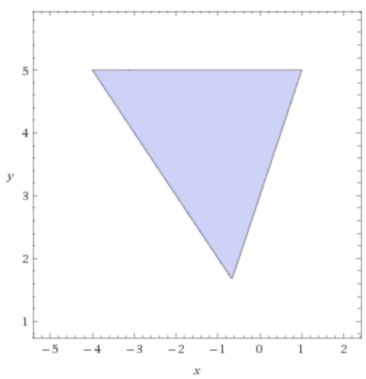
Solucions de la pàgina 28:

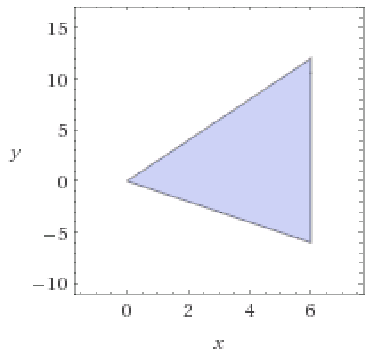
52.
- **a)** $[-1,0]$
- **b)** $(-\infty,0)\cup(5,+\infty)$
- **c)** $[0,8]$
- **d)** $[0,3]$
- **e)** $(-\infty,0)\cup(3/2,+\infty)$
- **f)** $(0,2)$

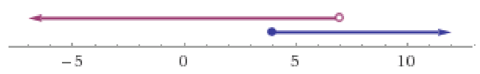
53.
- **a)** $[-1,3]$
- **b)** $[-4,2]$
- **c)** $(-\infty,-7)\cup(-2,+\infty)$
- **d)** $x=3$
- **e)** $\mathbb{R}$
- **f)** $\mathbb{R}$

54. Solució gràfica:









- **Autoavaluació:**

1. -3

2. $Q=x^3$; $R=1$

3. No, si és de grau 4 pot tenir 4 arrels, que poden esser 4 reals, o be 2 arrels reals i 2 complexes o totes 4 complexes.

4. $x\in[-2,2]$

5. $[-1,15]$

6. $x\geq 9/5$

7. $x\in(1,2)$

8. **a)** F **b)** V **c)** F **d)** F

.pax .pax

Exemples de resolució pel mètode de Gauss

Sistema Compatible determinat

En un grupo de 1.º de bachillerato todos tienen como materia de modalidad biología, dibujo o tecnología. Las matrículas en biología representan el 60 % del total. Si tres alumnos de dibujo se hubiesen matriculado en tecnología, entonces las dos asignaturas tendrían el mismo número de estudiantes. Finalmente, el doble de la diferencia del número de matriculados en biología y en dibujo es el triple de la diferencia de los matriculados en dibujo y en tecnología. Hallar el número de estudiantes matriculados en cada una de las materias.

$$\begin{cases} x - 0,6x - 0,6y - 0,6z = 0 \\ y - z = 6 \\ 2x - 2y - 3y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,4x - 0,6y - 0,6z = 0 \\ y - z = 6 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la 1.ª ecuación por 5:

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x - 3y - 3z = 0 & (1.^a) \\ y - z = 6 & (2.^a) \\ 2x - 5y + 3z = 0 & (3.^a) - (1.^a) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rl} 2x - 3y - 3z = 0 & (1.^a) \\ y - z = 6 & (2.^a) \\ -2y + 6z = 0 & (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x - 3y - 3z = 0 \\ y - z = 6 \\ 4z = 12 \end{array}\right. \rightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 9 \\ z = 3 \end{cases}$$

Solución: $x = 18$ de biología, $y = 9$ de dibujo, $z = 3$ de tecnología.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = -3 \\ 7y + 7z = 7 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 7 \cdot (2.^a) \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = -3 \\ 14z = -14 \end{array}\right\}$$

$14z = -14 \rightarrow z = -1$

$-y + z = -3 \rightarrow -y - 1 = -3 \rightarrow y = 2$

$x + 2y + 2z = 3 \rightarrow x + 4 - 2 = 3 \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$

Sistema Compatible indeterminat

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 2 \\ -x - 5z = -5 \\ -x - 5z = -5 \end{array}\right\}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función de z:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow (5 - 5z) + y = 2 - 3z \rightarrow y = 2z - 3 \\ \rightarrow x = 5 - 5z \end{array}$$

$x = 5 - 5z$, $y = 2z - 3$, $z = z$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 30:

1. Si el triangle rectangle té hipotenusa a i catets b i c. Es compleix per trigonometria que $b = a\cos\alpha$ i $c = a\sin\alpha$. Si aplicam el teorema de Pitàgores a aquest triangle $a^2 = b^2 + c^2$, trobam que $a^2 = (a\cos\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2$. Finalment, simplificam dividint entre a^2 trobam $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Raons d'angles majors que 90°

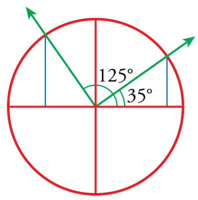
1 **Calcula las razones trigonométricas de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35°:**

$$\textbf{\textit{sen}}\ \mathbf{35° = 0{,}57;}\quad \textbf{\textit{cos}}\ \mathbf{35° = 0{,}82;}\quad \textbf{\textit{tg}}\ \mathbf{35° = 0{,}70}$$

- $55° = 90° - 35° \rightarrow$ 55° y 35° son complementarios.

$$\left.\begin{array}{l} sen\ 55° = cos\ 35° = 0{,}82 \\ cos\ 55° = sen\ 55° = 0{,}57 \end{array}\right\}\ tg\ 55° = \frac{sen\ 55°}{cos\ 55°} = \frac{0{,}82}{0{,}57} = 1{,}43 \quad \left(\text{También } tg\ 55° = \frac{1}{tg\ 35°} = \frac{1}{0{,}70} \approx 1{,}43\right)$$

- $125° = 90° + 35°$

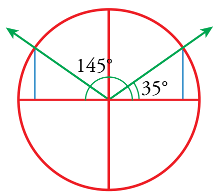


$sen\ 125° = cos\ 35° = 0{,}82$

$cos\ 125° = -sen\ 35° = -0{,}57$

$tg\ 125° = \dfrac{-1}{tg\ 35°} = \dfrac{-1}{0{,}70} = -1{,}43$

- $145° = 180° - 35° \rightarrow$ 145° y 35° son suplementarios.

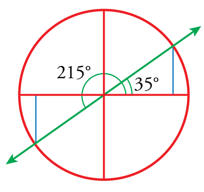


$sen\ 145° = sen\ 35° = 0{,}57$

$cos\ 145° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$tg\ 145° = -tg\ 35° = -0{,}70$

- $215° = 180° + 35°$

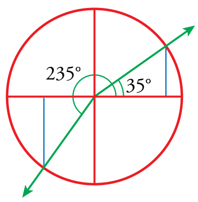


$sen\ 215° = -sen\ 35° = -0{,}57$

$cos\ 215° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$tg\ 215° = tg\ 35° = 0{,}70$

- $235° = 270° - 35°$



$sen\ 235° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$cos\ 235° = -sen\ 35° = -0{,}57$

$tg\ 235° = \dfrac{sen\ 235°}{cos\ 235°} = \dfrac{-cos\ 35°}{-sen\ 35°} = \dfrac{1}{tg\ 35°} = \dfrac{1}{0{,}70} = 1{,}43$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 31:

2. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{CO}{H}}{\frac{CC}{H}} = \dfrac{CO}{CC} = \operatorname{tg}\alpha$

3. a) Parteix de $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i divideix tot entre $\cos^2\alpha$.

b) Parteix de $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i divideix tot entre $\sin^2\alpha$

4. A 45 graus, resulta que CC=CO i per això $\sin 45 = \cos 45$.

Com que la $\operatorname{tg} 45 = \dfrac{CO}{CC} = 1$.

5. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$

6. $45°$, $120°$, $270°$, $300°$

7. Els angles d'un triangle sumen π radiants. Un angle recte són $\pi/2$ radiants.

8. $\omega = v/R = 2$ rad/s. En un minut 2 rad/s ·60s$=$ 120 rad = 19.1 voltes

---

Objectius del tema:

1. Reconèixer i treballar amb els angles en radiants tractant amb facilitat les raons trigonomètriques d'un angle, del seu doble i meitat, així com les transformacions trigonomètriques usuals.

1.1. Coneix les raons trigonomètriques d'un angle,el seu doble i meitat, així com les de l'angle suma i diferència d'uns altres dos.

2. Utilitzar els teoremes del sinus, cosinus i tangent i les fórmules trigonomètriques usuals per resoldre equacions trigonomètriques, així com aplicar-les en la resolució de triangles directament o com a conseqüència de la resolució de problemes geomètrics del món natural, geomètric o tecnològic.

2.1. Resol problemes geomètrics del món natural, geomètric o tecnològic, utilitzant els teoremes del sinus, del cosinus i de la tangent i les fórmules trigonomètriques usuals.

.pax .pax

Solucions de la pàgina 32:

9. $6\,\mathrm{m}$ i $1.5\,\mathrm{m}$

10. • **120 = 180–60**

$\sin 120 = \sin 60$

$\cos 120 = -\cos 60$

$\mathrm{tg}\, 120 = -\mathrm{tg}\, 60$

• **135 = 180–45**

$\sin 135 = \sin 45$

$\cos 135 = -\cos 45$

$\mathrm{tg}\, 135 = -\mathrm{tg}\, 45$

• **210 = 180+30**

$\sin 210 = -\sin 30$

$\cos 210 = -\cos 30$

$\mathrm{tg}\, 210 = \mathrm{tg}\, 30$

• **315= 360–45**

$\sin 315 = -\sin 45$

$\cos 315 = \cos 45$

$\mathrm{tg}\, 315 = -\mathrm{tg}\, 45$

• **390 = 30**

$\sin 390 = \sin 30$

$\cos 390 = \cos 30$

$\mathrm{tg}\, 390 = \mathrm{tg}\, 30$

• **3000 = 120**

$\sin 3000 = \sin 120$

$\cos 3000 = \cos 120$

$\mathrm{tg}\, 3000 = \mathrm{tg}\, 120$

• **–150 = 210**

$\sin -150 = \sin 210$

$\cos -150 = \cos 210$

$\mathrm{tg}\ -150 = \mathrm{tg}\, 210$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 33:

11. Una solució $\arcsin 0,6 = 36.87°$ l'altre és $180 - 36.87 = 143.13°$

12. Una solució $\text{arctg}\, 4 = 75.96°$ l'altre és $180 + 75.96 = 255.96°$

13. Una solució $\arccos 0.75 = 41.41°$ l'altre és $360 - 41.41 = 318.59°$

14.

a) $\hat{C} = 33;\ b = 26,8;\ c = 17,4$

b) $\hat{B} = 67;\ b = 66,3;\ c = 28,1$

c) $\hat{C} = 39;\ \hat{B} = 51;\ a = 396,7$

d) $\hat{B} = 58;\ b = 56,01;\ a = 66,05$

15. $a = 3,46;\ b = 1,73$

16. $\alpha = 25,5°$

17. $a = 25;\ c = 20;\ \hat{B} = 36,87°;\ \hat{C} = 53,13°$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

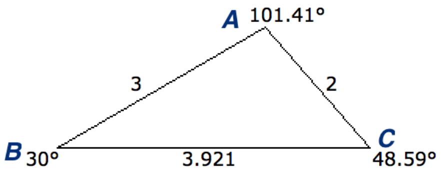
Solucions de la pàgina 34:

18. $\operatorname{tg}\alpha = 5/100$, $\alpha = 2.86°$. $s = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{100}{\operatorname{tg}2.86} = 2000$ m. Hem caminat 2 km.

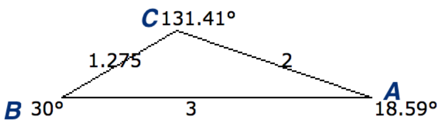
20. Costats: a = 5.22163 m b = 7.03508 m c = 8 m

Angles: A = 40 B = 60 C = 80

21. Té dues solucions:

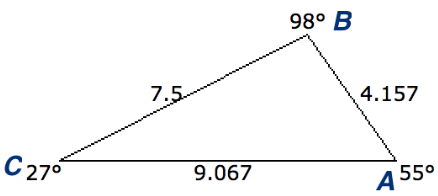


Side 1: **3** opposite angle: **48.59°**
Side 2: **2** opposite angle: **30°**
Side 3: **3.921** opposite angle: **101.41°**



Side 1: **3** opposite angle: **131.41°**
Side 2: **2** opposite angle: **30°**
Side 3: **1.275** opposite angle: **18.59°**

22. Solució única:



Side 1: **7.5** opposite angle: **55°**
Side 2: **9.067** opposite angle: **98°**
Side 3: **4.157** opposite angle: **27°**

Notes:

....

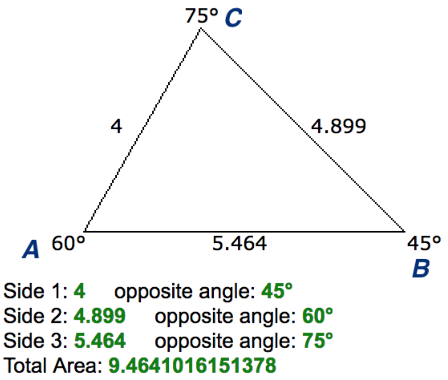
....

....

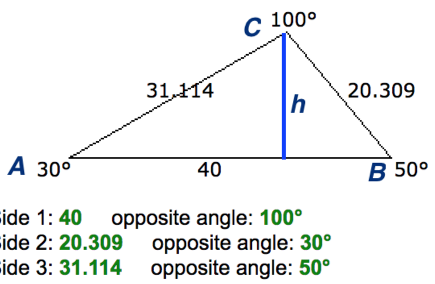
.pax .pax

Solucions de la pàgina 35:

23. En primer lloc trobam dos costats a partir del radi: $a = 4\sqrt{2}\sin 60 = 2\sqrt{6}$ i $b = 4\sqrt{2}\sin 45 = 4$.

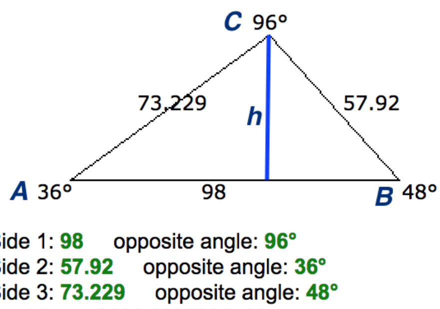


24. En primer lloc resolem el triangle:



Després calculam l'altura del triangle $h = 31.1\sin 30 = 20.31\sin 50 = 15.6$ m

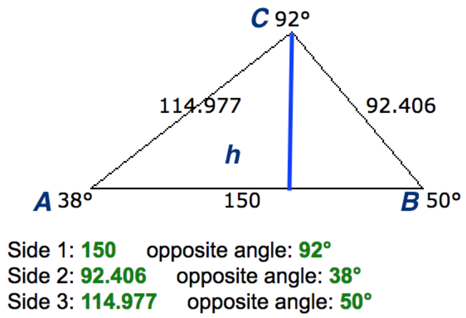
25. En primer lloc resolem el triangle:



Després calculam l'altura del triangle $h = 73.23\sin 36 = 57.92\sin 48 = 43.04$ m

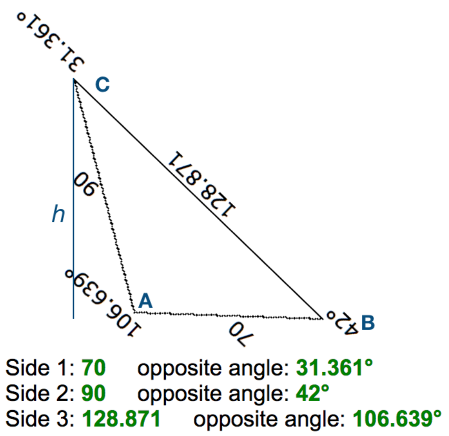
26. La tangent de l'angle es redueix a la meitat: $\operatorname{tg}\alpha' = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}42 = 0.4502$, el nou angle és $\alpha' = \operatorname{arctg}0.4502 = 24.24°$. Evidentment no és la meitat de $42°$.

27. En primer lloc resolem el triangle:



Les distàncies de cadascú a l'estel són 115 m i 92.4 m. Després l'altura del triangle $h = 114.98\sin 38 = 92.406\sin 50 = 70.79$ m

28. L'angle del triangle és $180 - 42 = 138$. En primer lloc resolem el triangle:



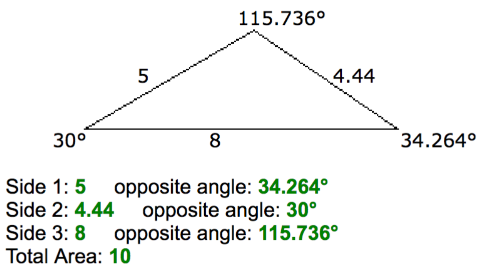
L'altre cable mesura 128.87 m. La distància del globus al terra $h = 128.87\sin 42 = 86.23$ m

.pax .pax

Solucions de la pàgina 36:

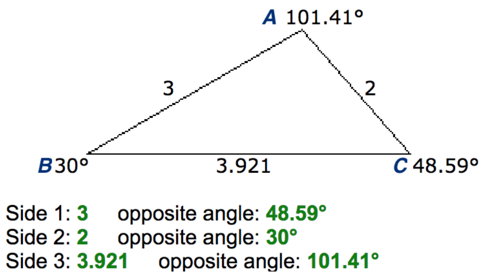
29. $\hat{A} = 28.52°$, $\hat{B} = 32.82°$, $\hat{C} = 118.66°$

30. Triangle:

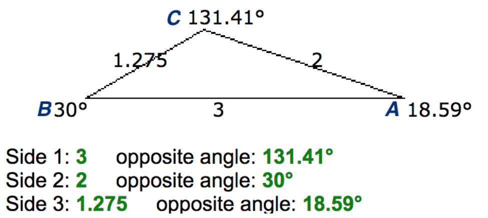


31. $\hat{A} = 21.79°$, $\hat{B} = 38.21°$, $\hat{C} = 120°$

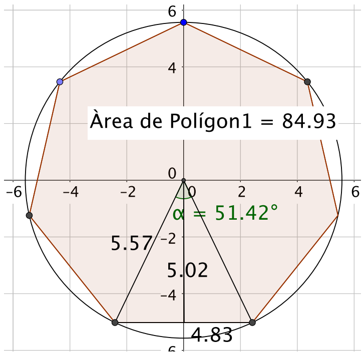
32. Solució 1:



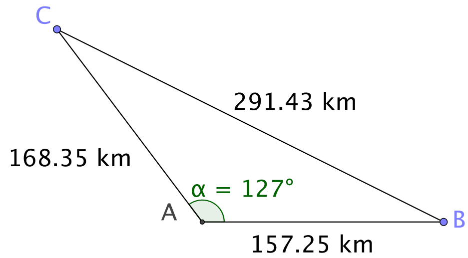
Solució 2:



33. El radi de la circumferència $R = L/2\pi = 5.57$ cm. El costat de l'heptàgon és $c = 4.83$ cm i l'apotema $a_p = 5.02$ i l'àrea $A = 84.9$ cm^2.



34. Les distàncies en km recorregudes per cada vaixell són: $15 \cdot 5\,h \cdot 1.85 = 157.25$ km i $26 \cdot 3.5\,h \cdot 1.85 = 168.35$ km. A les 15:00 es troben separats per 291.43 km que és superior a l'abast de le radi.



35.

a) $A = 24.52$; $C = 125.38$; $c = 9.78$

b) $B = 75$; $a = 14.64$; $c = 17.93$

c) No existeix cap triangle

d) $A = 77.36$; $B = C = 51.32$

e) Solució 1: $B = 62.1$; $C = 72.9$; $c = 54.1$. Solució 2: $B = 17.1$; $C = 117.9$; $c = 50$.

Notes:

. . . .

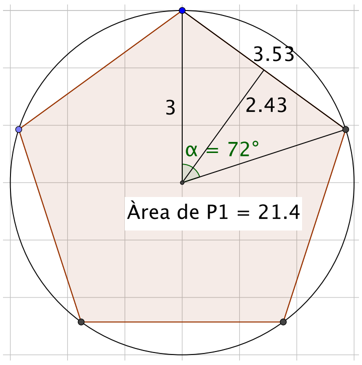
. . . .

. . . .

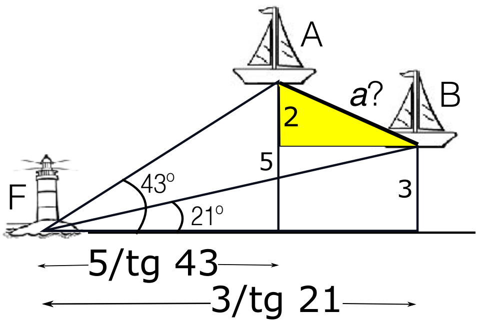
.pax .pax

Solucions de la pàgina 37:

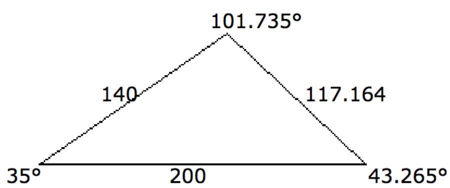
36. El costat del polígon és $c = 3.53$ cm i l'apotema $a_p = 2,43$ i l'àrea $A = 21.4$ cm^2.



37. Construïm el triangle rectangle de la figura. Té de catets $c = 5 - 3 = 2$ i $b = \dfrac{3}{\text{tg}\,21} - \dfrac{5}{\text{tg}\,43} = 2.453$. La distància és la hipotenusa del triangle $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 3.165$ km



38. Perímetre: 457.16 m. Àrea: 8030,1 m^2.



Side 1: 140 opposite angle: 43.265°
Side 2: 117.164 opposite angle: 35°
Side 3: 200 opposite angle: 101.735°
Total Area: 8030.0701089146

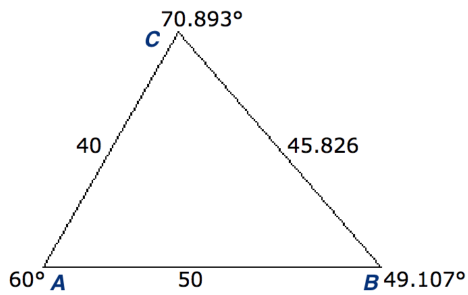
39. Del triangle rectangle d'abaix trobam la base com $b = 250 \cos 30 = 216.51$ m. Del triangle rectangle complet $\text{tg}\,40 = \dfrac{H}{216.51}$, aïllam $H = 181.67$ m.

40. **a)** 100 m **b)** 86.60 m **c)** 90°

41. Primer trobam els angles que falten. Es un triangle d'angles 80, 60, 40. Aplicam el teorema del sinus: $\dfrac{h}{\sin 80} = \dfrac{15}{\sin 40}$. Aïllam $h = 22.98$ m.

42. $d(B, E) = 67.59$; $h = 56,7135$ m

43. Des de B les altres dues ciutats es veuen amb un angle de 49.11°.



Side 1: 40 opposite angle: 49.107°
Side 2: 45.826 opposite angle: 60°
Side 3: 50 opposite angle: 70.893°

44. $d = 35,49$ km

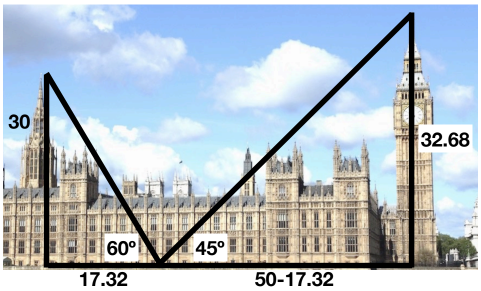
.pax .pax

Solucions de la pàgina 38:

45. Del triangle $\widehat{CAD}$ troba $\overline{AD} = 74.16$ km, del triangle $\widehat{CBD}$ troba $\overline{BD} = 52.05$ km pel teorema del sinus i finalment del triangle $\widehat{ADB}$ troba $\overline{AB} = 24$ km pel teorema del cosinus.

46. cim A=827 m, cim B=751 m, distància entre cims AB=1687.3 m

47. Es trobava a 17.32 m de l'Abadia de Westminster i a 32.68 m del Big Ben. L'altura del Big Ben és 32.68 m ja que es veu amb un angle de 45°.



Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 39:

49. 15=45-30; $\sin 15 = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15 = \cos 45 \cos 30 + \sin 43 \sin 30 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\text{tg}\, 15 = 2 - \sqrt{3}$

50. 30=90-60; $\sin 30 = \sin 90 \cos 60 - \cos 90 \sin 60 = \cos 60 = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30 = \cos 90 \cos 60 + \sin 90 \sin 60 = \sin 60 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\, 60 = \sqrt{3}$

51. $\sin(90-\alpha) = \sin 90 \cos\alpha - \cos 90 \sin\alpha = \cos\alpha$,
$\cos(90-\alpha) = \cos 90 \cos\alpha + \sin 90 \sin\alpha = \sin\alpha$ i $\text{tg}\,(90-\alpha) = 1/\text{tg}\,\alpha$

52. $22.5 = 45/2$, $\sin 22.5 = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22.5 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\text{tg}\, 22.5 = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$11.25 = 22.5/2$, $\sin 11.25 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$, $\cos 11.25 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$, $\text{tg}\, 11.25 = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2(2+\sqrt{2})}$

53. $45 = 90/2$, $\sin 45 = \sqrt{\frac{1-\cos 90}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45 = \sqrt{\frac{1+\cos 90}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\text{tg}\, 45 = \sqrt{\dfrac{1-\cos 90}{1+\cos 90}} = 1$

54. Treu factor comú $\cos\alpha$ i utilitza la relació fonamental.

55. Desenvolupa el quadrat amb la identitat notable $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Empra la relació fonamental i la fórmula de $\sin 2\alpha$.

56. Utilitza les relacions de l'angle oposat $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\text{tg}\,(-x) = -\text{tg}\, x$.

57. Expressa $\text{tg}\,\alpha$ i $\text{cotg}\,\alpha$ com a quocients de sinus i cosinus. Després realitza la suma de fraccions amb el mínim comú múltiple. Finalment utilitza la relació fonamental.

58. Escriu $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha)$. Aplica la fórmula de la suma d'angles i tot seguit les fórmules de l'angle doble. Finalment opera, simplifica i treu factor comú $\sin\alpha$.

59. Escriu $\cos(4\alpha) = \cos(2\alpha + 2\alpha)$. Aplica la fórmula de la suma d'angles i tot seguit les fórmules de l'angle doble. Finalment opera i simplifica.

.pax .pax

Solucions de la pàgina 40:

60.

a) 2 **b)** 1

c) 1 **d)** $\operatorname{cotg} x$

63.

a) $\sqrt{2}\sin a$ **b)** $-\sqrt{3}\sin a$

65.

a) $x = 120 + n \cdot 360$ i $x = 240 + n \cdot 360$

b) $x = 60 + n180$

c) $x = 225 + n \cdot 360$ i $x = 315 + n \cdot 360$

66.

a) $x = 30 + n \cdot 60$

b) $x = 67.5 + n \cdot 90$

c) $x = 67.5 + n \cdot 90$

67.

a) $x = n \cdot 60$ i $x = n \cdot 90$

b) $x = 30 + n \cdot 60$ i $x = n \cdot 180$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 41:

68. **a)** $x = 90 + n \cdot 360$ i $x = n \cdot 360$

b) $x = 90 + n \cdot 180$

c) $x = 60 + n \cdot 180$ i $x = 120 + n \cdot 180$

d) $x = 90 + n \cdot 180$ i $x = 68.53 + n \cdot 360$ i $x = 291.47 + n \cdot 360$

69. **a)** $x = 90 + n \cdot 180$ i $x = 60 + n \cdot 180$ i $x = 120 + n \cdot 180$

b) $x = n \cdot 180$ i $x = 45 + n \cdot 90$

70. **a)** Anomenam $c = \cos x$. Només si $c = 0$; dóna $x = 90 + n \cdot 180$

b) Només si $c = \pm 1/\sqrt{3}$; dóna $x = 54.73 + n \cdot 180$ i $x = 125.27 + n \cdot 180$

c) Només prové solució de $c = 0.5639$; dóna $x = 55.67 + n \cdot 360$ i $x = 304.33 + n \cdot 360$

71. **a)** $x = n \cdot 180$ i $x = 90 + n \cdot 360$

b) $x = 90 + n \cdot 180$ i $x = n \cdot 360$

c) $x = 35.26 + n \cdot 180$ i $x = 144.74 + n \cdot 180$

d) $x = 15 + n \cdot 180$ i $x = 75 + n \cdot 180$

72. **a)** Sumar les dues equacions i aplica identitat fonamental $x = 1$; $y = 90 + n \cdot 180$

b) Suma les dues i aplica sinus d'una suma. Fes el mateix restant-les

Arribes al sistema $\left\{ \begin{array}{l} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = 1/2 \end{array} \right.$.

Trobam $x = 60 + n \cdot 180$; $y = 30 + n' \cdot 180$ i $x = 120 + n \cdot 180$; $y = 150 + n' \cdot 180$

73. **a)** Substitució $x = n\pi$; $y = (n-1)\pi$

b) $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$; $y = \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}$

74. **a)** $x = 90 + (n+m) \cdot 90$; $y = (m-n) \cdot 90$

b) per a tot n i m enter.

c) No té solució perquè si elevam al quadrat i sumam $\sin^2(x-y) + \cos^2(x-y) = \frac{1}{2}$

d) quan la relació fonamental requereix que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 42:

- **Autoavaluació:**

1. **a)** $\sin(-750°) = 1/2$

b) $\operatorname{tg} 570° = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\cos 20\pi/3 = -1/2$

2. $\sin(105) = \sin(60+45) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos(75) = \sin(30+45) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3. $c = 17,32$, $\hat{B} = 90°$, $\hat{C} = 60°$

4. Sí ho aconseguirà. Estan a 105,83 m.

5. $\sin a = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos a = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

6. a) $x = \begin{cases} 120 + n360 \\ 240 + n360 \end{cases}$

b) $x = 45 + n180$

7. a) $(60 + 360k, 120–360k)$ i

$(120 + 360k, 60–360k)$;

b) $(75 + 360k, 15–360k)$ i

$(15 + 360k, 75–360k)$

8. Substituir el $\sin(2a)$ pel seu valor i aplicar que $1-\cos 2a$ és el sinus al quadrat.

9. Perímetre = $300 \cdot \sin 36° = 176,3355$ m.; Àrea = 713,292 m^2.

10. $8,63°$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

.pax .pax

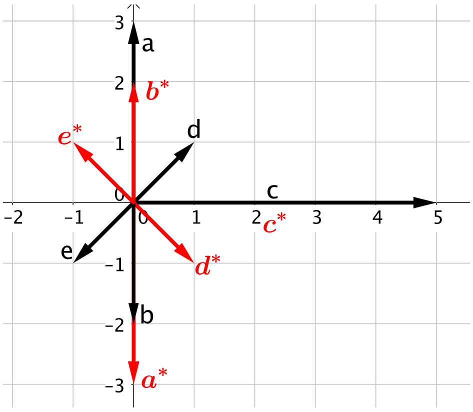
.pax .pax

.pax .pax

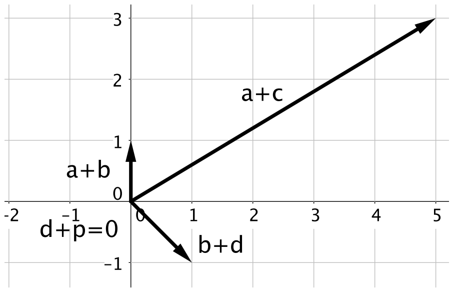
.pax .pax

Solucions de la pàgina 47:

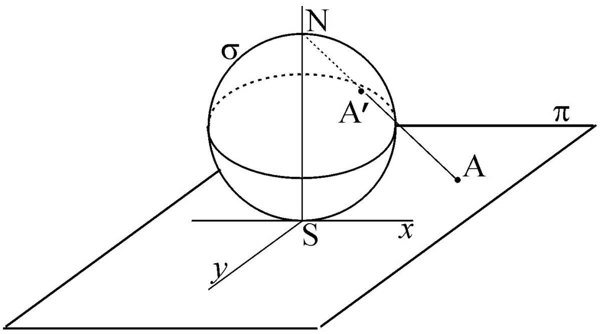
1. Nombres i conjugats:



Operacions:



Representació dels nombres complexos



Objectius del tema:

2. Conèixer els nombres complexos com a extensió dels nombres reals, utilitzant-los per obtenir solucions d'algunes equacions algebraiques.

2.1. Valora els nombres complexos com a ampliació del concepte de nombre real i els utilitza per obtenir la solució d'equacions de segon grau amb coeficients reals sense solució real.

2.2. Opera amb nombres complexos, i els representa gràficament, i utilitza la fórmula de Moivre en el cas de les potències

.pax .pax

Solucions de la pàgina 48:

2.
a) $5 - 9i$ **b)** $-6 - 15i$
c) $-13 + 11i$ **d)** 0
e) 13 **f)** $4 + 10i$
g) $2i$ **h)** -4

3.
a) $-\frac{1}{10} - \frac{7\,i}{10}$ **b)** $-\frac{11}{6} + \frac{i}{2}$
c) $\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$ **d)** $\frac{34\,i}{5}$

5. Racionalitzant el nombre s'expressa com $\dfrac{3a-1}{10} + \dfrac{a+3}{10}i$. Si igualam les parts real i imaginària, això passa si $3a - 1 = a + 3$, és a dir $a = 2$

6.
a) $|z| = 2$; $arg(z) = -30°$
b) $|z| = \sqrt{8}$; $arg(z) = 225 = -135°$
c) $|z| = 2$; $arg(z) = -60°$
d) $|z| = 4$; $arg(z) = -90°$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 49:

7. **a)** $|z| = \sqrt{18}$; $arg(z) = 135°$ **b)** $|z| = 3$; $arg(z) = 180°$

c) $|z| = 3$; $arg(z) = 270°$ **d)** $|z| = \sqrt{18}$; $arg(z) = -45°$

8. **a)** $z = \frac{3}{4}(-\sqrt{3}+i)$; $arg(z) = 150°$ **b)** $z = \frac{1}{2}(1-i)$; $arg(z) = -45°$

c) $z = [2_{-60°}]^7$; $arg(z) = -420° = -60°$

9. **a)** $1_{90°}$ **b)** $1_{270°}$ **c)** $4\sqrt{2}_{45°}$ **d)** $4_{180°}$

10. **a)** $5_{90°}$ **b)** $7_{270°}$ **c)** $5\sqrt{2}_{-45°}$ **d)** $2_{30°}$

11. **a)** $2_{\,60°} = 1 - \sqrt{3}i$ **b)** $3_{\,-45°} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

c) $1_{\,90°} = i$ **d)** $5_{\,120°} = -\frac{5}{2} + i\,\frac{5\sqrt{3}}{2}$

12. **a)** $\dfrac{\sqrt{2}i}{-2-2i} = \dfrac{\sqrt{2}_{90}}{2\sqrt{2}_{-135}} = \dfrac{1}{2}_{\,225} = \dfrac{1}{2}(\cos 225 + i\ \sin 255) = -\dfrac{1}{4}(1+i)$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30} = (1_{60°})^{30} = 1_{1800°} = 1$

13. **a)** $(\sqrt{3}+i)^{60} = (2_{30})^{60} = 2^{60}_{1800} = 2^{60}$

b) $(4-4i)^{-11} = (4\sqrt{2}_{-45°})^{-11} = \frac{1}{2^{27}\sqrt{2}}_{495} = \frac{1}{2^{27}\sqrt{2}}_{135} = \frac{1}{2^{27}\sqrt{2}}(\cos 135 + i\ \sin 135) = \frac{1}{2^{28}}(-1+i)$

c) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^{12}}{(-2-2i)^8} = \dfrac{(2_{-60°})^{12}}{(2\sqrt{2}_{-135°})^8} = \dfrac{2^{12}_{-720°}}{2^{12}_{-1080°}} = 1_{360°} = 1$

14. **a)** $\cos(-\theta) = \cos\theta$

b) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

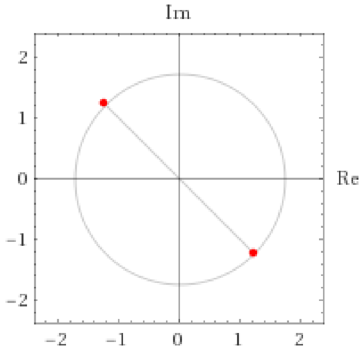
c) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$

d) $\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$

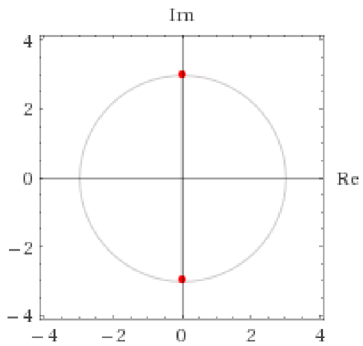
.pax .pax

Solucions de la pàgina 50:

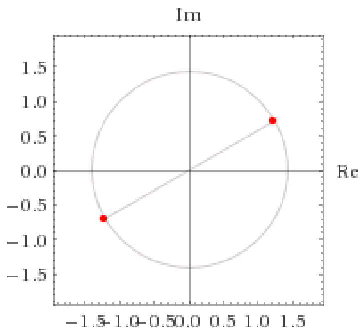
15. **a)** $\sqrt{-3i} \to z = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}(1-i)$



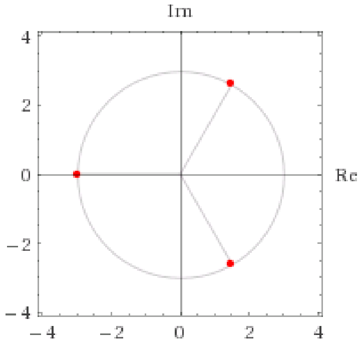
b) $\sqrt{-9} \to z = \pm 3i$



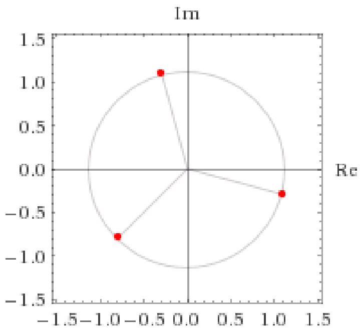
c) $\sqrt{1+\sqrt{3}\,i} \to z_1 = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2})$



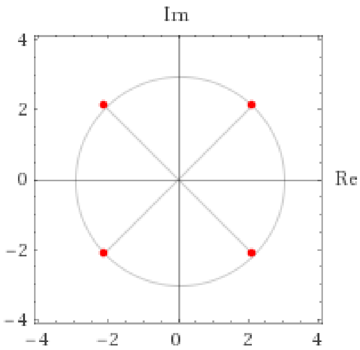
d) $\sqrt[3]{-27} \to z_1 = -3;\ z_2 = \frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3});\ z_3 = \frac{3}{2}(1 - i\sqrt{3})$



e) $\sqrt[3]{1-i} \to z_1 \approx 1.084 - 0.29i;\ z_2 \approx -0.29 + 1.084i;\ z_3 = -0.794 - 0.794i$



f) $\sqrt[4]{-81} \to z = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i);\ z = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$



Notes:

. . . .

. . . .

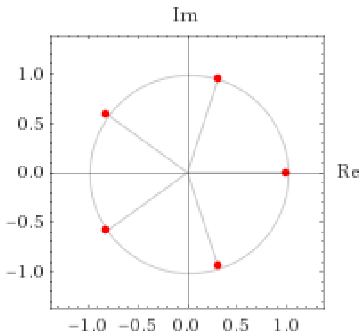
. . . .

.pax .pax

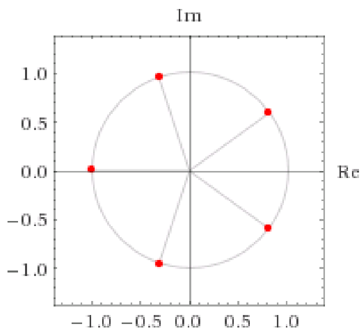
Solucions de la pàgina 51:

16.

a) $\sqrt[5]{1} \rightarrow z = 1;\ z \approx 0.309 \pm 0.9511i;\ z \approx -0.809 \pm 0.5878i$



b) $\sqrt[5]{-1} \rightarrow z = -1;\ z \approx 0.809 \pm 0.588i;\ z = -0.309 \pm 0.9511i$

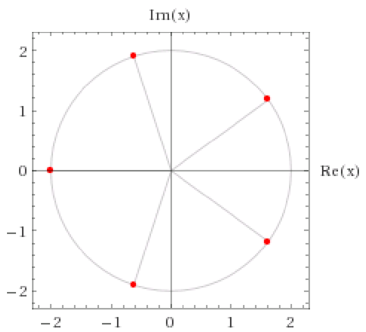


17.

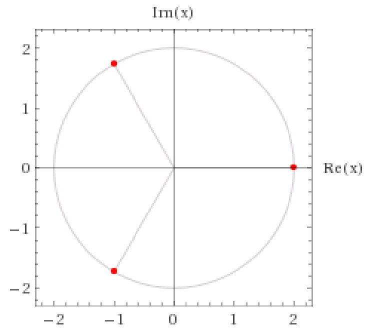
a) $x = \sqrt[3]{-27}$ exemple

b) $x = \sqrt[4]{-81}$ exercici anterior f)

c) $x = \sqrt[5]{-32} \rightarrow z = -2;\ z \approx 1.618 \pm 1.1756i;\ z = -0.618 \pm 1.9021i;$



d) $x = \sqrt[3]{8} \rightarrow z = 2;\ z = -1 \pm \sqrt{3}i;$



18.

a) $x^2 = -1 \rightarrow z = \pm i$

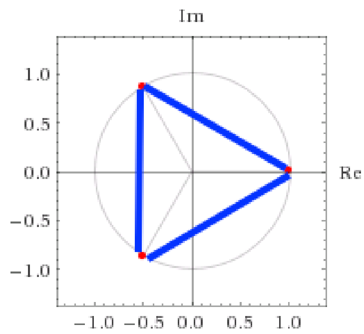
b) $x^3 = -8 \rightarrow z = -2;\ z = 1 + \sqrt{3}i;\ z = 1 - \sqrt{3}i$

c) $x^4 + 16 = 0 \rightarrow z = \pm 2;\ z = \pm 2i$

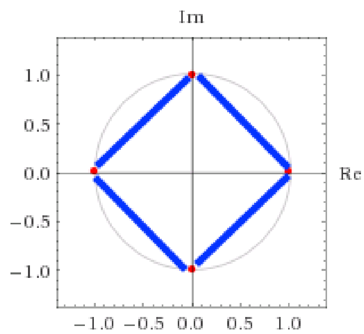
19.

a) $\sqrt{1} \rightarrow z = \pm 1$

b) $\sqrt[3]{1} \rightarrow z = 1;\ z = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$



c) $\sqrt{4} \rightarrow z = \pm 1;\ z = \pm i$



.pax .pax

Solucions de la pàgina 52:

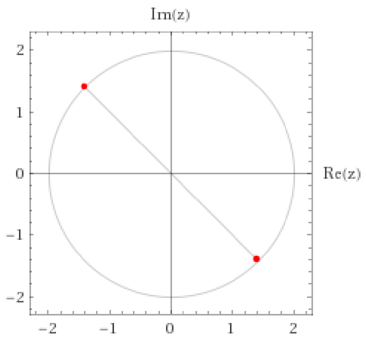
20. Dues arrels reals: $z = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

21. **a)** $z = \sqrt[6]{-64}$; $z = \pm 2i$; $z = \pm(\sqrt{3} + i)$; $z = \pm(\sqrt{3} - i)$

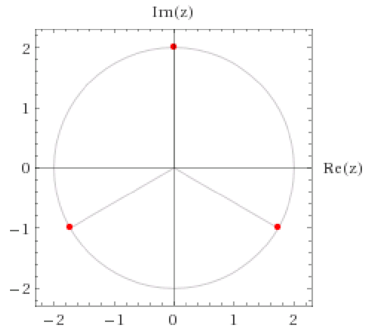
b) $-3z^4 + 10z^3 - 10z + 3 = -(z-3)(z-1)(z+1)(3z-1)$ té solucions reals $z = 3$; $z = \pm 1$; $z = 1/3$

c) Identificam una progressió geomètrica de raó z: La seva suma $\dfrac{z^7 - 1}{z - 1} = 0$ implica que $z^7 = 1$; són les arrels setenes de 1 (1 no serveix): Totes les arrels són per tant complexes: $z = -0.9 \pm 0.434i$; $z = -0.22 \pm 0.975i$; $z = 0.623 \pm 0.782$

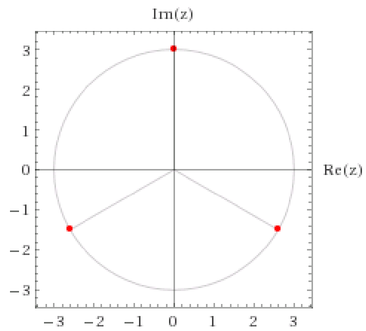
22. **a)** Veure exemple;



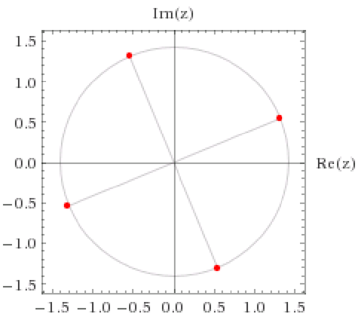
b) $z = 2i$; $z = -\sqrt{3} - i$; $z = \sqrt{3} - i$;



c) $z = 3i$; $z = -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i)$; $z = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i)$;



d) $z = \pm(1.3066 + 0.5412i)$; $z = \pm(0.5412 - 1.3055i)$;



- **Autoavaluació:**

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 53:

1. **a)** $-5-6i$ **b)** $-8-6i$

c) $10i$ **d)** $-2+i$

2. $-46+63i$

3. $z_1 = 5+2i$, $z_2 = 5-2i$

4. **a)** Real $k=-2$ **b)** Imaginari pur $k=-2$

5. $x = \pm 2$

6. $3\sqrt{2}, 3\pi/4$

7. $1+\sqrt{3}i$

8. $-8i$

9. $5(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$

10. $z_1 = 2_{110^\circ}, z_2 = 2_{230^\circ}, z_3 = 2_{350^\circ}$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 54:

1. a) $a\sqrt{a}$ b) $\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{6}$

2. a) $a\ \sqrt[20]{a}$ b) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6}{6}$

3. $x^2(x+1)(x-2)(3x-1)$

4. 2

5. $x = 3$ vàlida.

6. $x = 1$

7. $(3, +\infty)$

8. $x = 38$: be, $y = 18$: malament, $z = 4$: no contestades. Planteig: $x + y + z = 60$; $5x - 2y - z = 150$; $y + 5z = x$

9. S.C.I. $x = 1$, $y = z - 3$, $z = z$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 55:

10. Els costats són 10.49 cm i 20.25 cm, el perímetre 61.48 cm. L'àrea 83.23 cm^2.

11. Primer obtenim els costats resolent un sistema d'equacions $a = 19$, $b = 16$ i $c = 13$. Després aplicam el Teorema del Cosinus per obtenir els angles $\hat{A} = 42.54°$, $\hat{B} = 56.3°$, $\hat{C} = 81.17°$

12. Utilitzam el Teorema del Sinus. $\hat{C} = 56° \, 19' \, 31''$, $\hat{B} = 51° \, 40' \, 29''$ i $\bar{AC} = 263.96$ m.

13. $d = 3557$ km sobre la superfície de la Terra.

14. No existeix cap angle amb aquestes condicions. S'obtindria que $\cos a = 3/4$ i amb aquesta dada no es compleix que $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

15. En primer lloc trobam que $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. a) $-3/5$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ d) -3

16. a) Utilitza que $sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2$ desenvolupa el quadrat i simplifica. b) Utilitza que $\cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1+\cos\beta}{2}$

17. a) $x = 0° + n \cdot 360°$, $x = 126.87° + n \cdot 360°$. b) $x = 90° + n \cdot 180°$, $x = 60° + n \cdot 360°$, $x = 300° + n \cdot 360°$.

18. $x = 30° + n \cdot 180°$, $y = 30° + k \cdot 180°$.

19. $-\frac{19}{10} + \frac{37}{10}i$

20. i

21. $z = 5 + 2i$, $z = 5 - 2i$

22. $z^* = 3_{300°}$, $1/z = (1/3)_{300°}$, $z^2 = 9_{120°}$, $\sqrt[3]{z}$ té tres resultats = $(\sqrt{3})_{20°}$, $(\sqrt{3})_{140°}$ i $(\sqrt{3})_{260°}$.

Notes:

....

....

....

.pax .pax

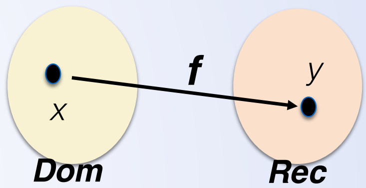
.pax .pax

.pax .pax

Funcions com una relació

f: **Dom → Rec**

x → y



Successions

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

1 → 2

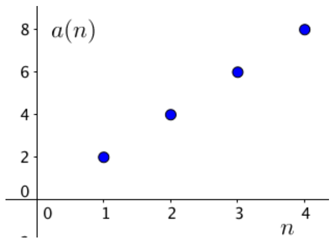
2 → 4

3 → 6

…

n → 2n

$\boxed{a(n)=2n}$



Funcions reals de variable real

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

-1 → 1

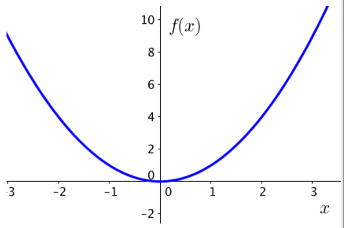
1 → 1

2 → 4

…

x → x^2

$\boxed{f(x)=x^2}$



Funcions reals de variable complexa

$g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

i → 1

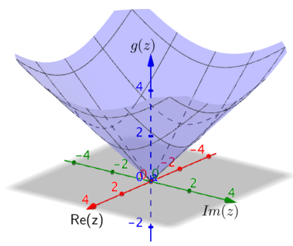
3-4i → 5

-2 → 2

…

z → |z|

$\boxed{g(z)= |z|}$



.pax .pax

Solucions de la pàgina 59:

- **Avaluació inicial**

a) L_4	b) R_3	c) L_2	d) C_4
e) PI_2	f) E_3	g) C_1	h) E_1
i) L_1	j) PI_4	k) PI_3	l) R_2

No tenen gràfica associada L_3, C_2, C_3, PI_1, R_1, R_4, E_2 i E_4.

Objectius del tema:

1. Identificar funcions elementals, donades a través d'enunciats, taules o expressions algebraiques, que descriguin una situació real, i analitzar, qualitativament i quantitativament, les seves propietats, per representar-les gràficament i extreure informació pràctica que ajudi a interpretar el fenomen de què es deriven.

1.1. Reconeix analíticament i gràficament les funcions reals de variable real elementals.

1.2. Selecciona de manera adequada i raonada eixos, unitats, domini i escales, i reconeix i identifica els errors d'interpretació derivats d'una mala elecció.

1.3. Interpreta les propietats globals i locals de les funcions, comprovant els resultats amb l'ajuda de mitjans tecnològics en activitats abstractes i problemes contextualitzats.

1.4. Extreu i identifica informacions derivades de l'estudi i anàlisi de funcions en contextos reals.

3. Valorar les aplicacions del nombre e i dels logaritmes utilitzant les seves propietats en la resolució de problemes extrets de contextos reals.

3.1. Aplica correctament les propietats per calcular logaritmes senzills en funció d'altres coneguts.

3.2. Resol problemes associats a fenòmens físics, biològics o econòmics mitjançant l'ús de logaritmes i les seves propietats.

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 60:

1. 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

2. a) $a_n = 3 + 5(n-1)$ o $a_1 = 3$ $a_n = a_{n-1} + 3$

b) $a_n = n^3$

c) $a_n = 8 \cdot (1/2)^{n-1}$ o $a_1 = 8$ $a_n = a_{n-1}/2]$

3. $a_n = 10 - 3(n-1)$ i $a_{100} = -197$

4. $d = (19 - 11)/2 = 4$ i $a_1 = 3$, $a_n = 3 + 4(n-1)$, $S_{100} = 20100$

5. $a_n = 100 \cdot (0.5)^{n-1}$, $a_{50} = 1.776 \cdot 10^{-13}$, $S_\infty = 200$

6. $r = 3$ i $a_1 = 1$, $a_n = 3^{n-1}$, $S_{30} = 1.029 \cdot 10^{14}$

7. Són funcions 2 i 4. No són funcions 1 i 3, perquè per un mateix valor de x trobam més d'un valor de y "La gràfica té plegaments".

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 61:

8.

a) $\text{Dom } f = [-4, 4]$

b) $\text{Dom } f = (-\infty, 3)]$

c) $\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ o també $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

d) $\text{Dom } f = [-2, 5]$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 62:

9. Dom $f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$,

Dom $g = (-\infty, -2/3] \cup (3, +\infty)$,

Dom $h = \mathbb{R} - \{1\}$,

Dom $i = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$,

Dom $j = (-\infty, -3] \cup (3, +\infty)$,

Dom $k = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\}$,

Dom $l = [-2, 3)$, Dom $m = \mathbb{R} - \{1\}$

10. Dom $p = \mathbb{R}$;

Dom $q = \mathbb{R}$;

Dom $r = (-\infty, -1]$;

Dom $s = \mathbb{R}$;

Dom $f = \mathbb{R} - \{-3\}$;

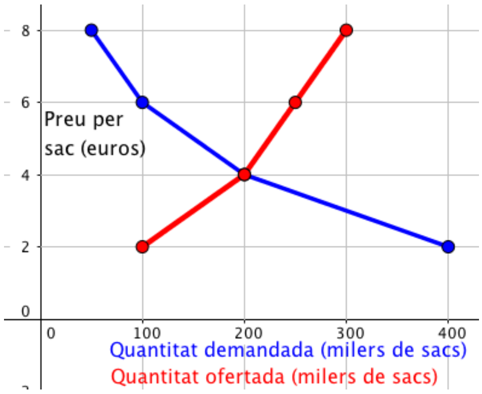
Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$;

Dom $h = \mathbb{R}$;

Dom $j = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

11. Si és senar $a = 0$ i $c = 0$. Si passa per $(1, -2)$ implica que $b = -3$

12. Gràfica:



Notes:

. . . .

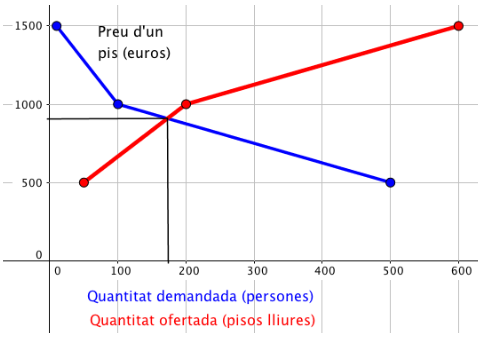
. . . .

. . . .

.pax .pax

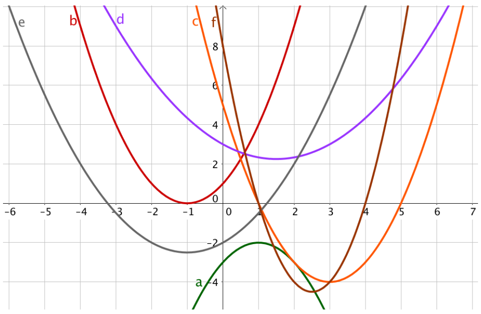
Solucions de la pàgina 63:

13. a) Gràfica:

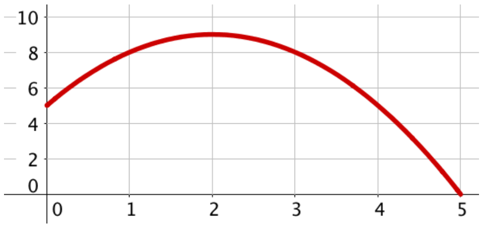


b) El punt d'equilibri és quan l'oferta iguala la demanda. Això passarà per una oferta de 175 pisos un preu per pis de 910 €.

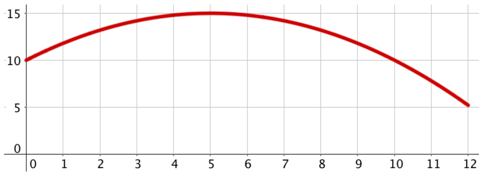
14. Gràfica:



15. L'objecte es llança des d'una altura de 5 m. Al cap d'1 s està a 8 m. Assoleix una altura màxima de 9 m als 2 s. Arriba al terra als 5 segons.

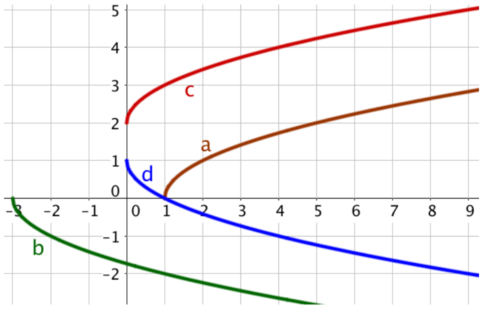


16. a)



b) $f(6) = 14.8$ i $f(12) = 5.2$ cèntims.

17.



Notes:

. . . .

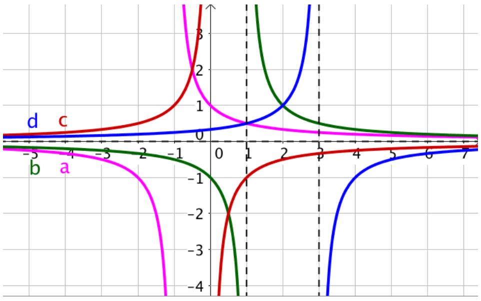
. . . .

. . . .

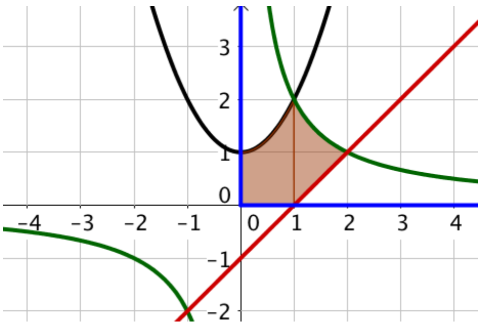
.pax .pax

Solucions de la pàgina 64:

18.



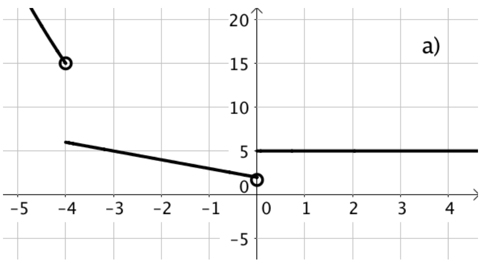
19.

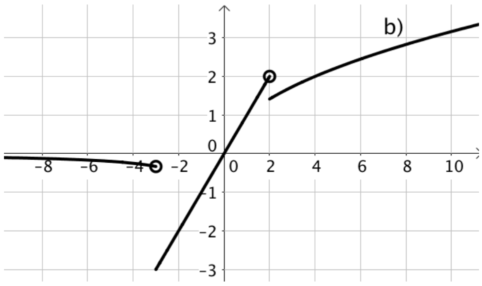


20. Dom $f = [0, +\infty]$. Tall eix OX $(2, 0)$; Tall eix OY $(0, -20)$. No presenta simetries. La funció és negativa a $[0, 2)$ i positiva a $(2, +\infty)$.

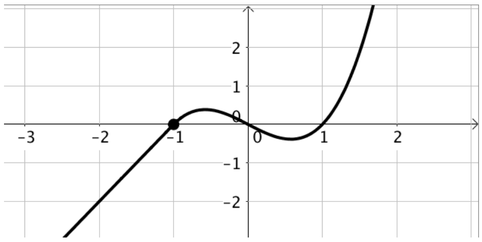
21. $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

22.

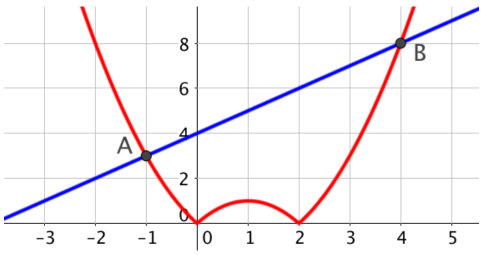




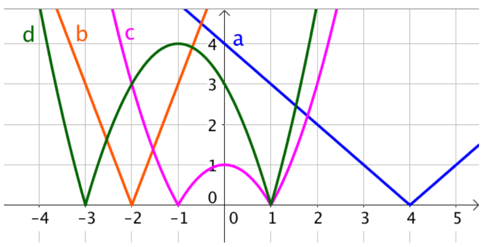
23.



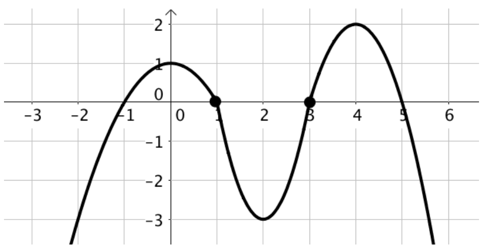
24.



25.



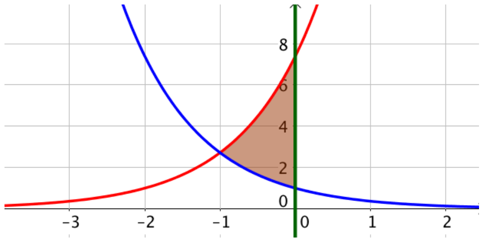
26.



.pax .pax

Solucions de la pàgina 65:

28.



29. Són simètriques respecte l'eix OY.

30. **a)**

anys	1	2	3	4	5	10
k€	5.1	5.202	5.306	5.41	5.52	6.09

b) $C = 5 \cdot 1.02^x$

31. $y = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$, x hores passades des de les 9 del matí. A les 3 del matí $y(-6) = 7290$ i a les 12 del migdia $y(3) = 0.37$ milions.

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 66:

32. **a)** $f \circ h = 2^{-3x+3} - 3\,2^{-2x+2} + 3\,2^{-x+1} - 1$;

$g \circ h = \sqrt{\frac{2^{-x+1}-2}{2^{-x+1}+7}}$;

$g \circ j = \sqrt{\frac{\ln(x^5-1)-2}{\ln(x^5-1)+7}}$;

$k \circ h = 2^{2^{-x+1}} \cdot 30^{2^{-x+1}-1}$;

$g \circ h \circ j = \sqrt{\frac{2^{-\ln(x^5-1)+1}-2}{2^{-\ln(x^5-1)+1}+7}}$;

$m \circ j = \sqrt[4]{-5 + 2\ln(x^5 - 1)}$

b) Dom $f = \mathbb{R}$; Dom $g = (-\infty, -7) \cup [2, +\infty]$; Dom $h = \mathbb{R}$; Dom $j = (1, +\infty)$; Dom $k = \mathbb{R}$; Dom $m = [5/2, +\infty]$

33. $p^{-1} = (3 - x)/5$,

$q^{-1} = \pm\sqrt{(x + 1)/2}$,

$r^{-1} = \sqrt[3]{6 - x}$, $s^{-1} = -x$,

$f^{-1} = (3x + 4)/(2 - x)$, $g^{-1} = -3/x$,

$h^{-1} = (1 \pm \sqrt{1 + 4x})/2$,

$j^{-1} = \pm\sqrt{4x/(1 + x)}$, $k^{-1} = 4 + \ln x$,

$l^{-1} = 1/\log_2 x$,

$m^{-1} = \log x/(\log 2 - \log 3)$,

$n^{-1} = \ln x/(\ln x - 1)$,

$a^{-1} = 2 + e^x$, $b^{-1} = 3 \cdot 10^x + 1$,

$c^{-1} = (1 + 4e^x)/(1 - 2e^x)$,

$d^{-1} = \sqrt[3]{1 + 10^x}$

34. La funció representada és la recta $y = -\frac{3}{5}x + 3$. La seva inversa és $y = -\frac{5}{3}x + 5$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 67:

35.

a) $x = 5$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = \frac{1}{2}$

d) $x = 4$ **e)** $x = 5$ **f)** $x = \frac{1}{16}$

36.

a) $x = \pm\frac{1}{10}$ **b)** $x = \log_7 115 \approx 2,438$ **c)** $x = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0,882$

d) $x = -2 + \log_3 172 \approx 2,685$ **e)** $x = e^2 \approx 7,389$ **f)** $x = \frac{3}{2}$

37.

a) $x = 15$ ($x = 0$ no vàlida)

b) $x = 2$

c) $x = 100$ ($x = 0$ no vàlida)

d) $x = 2/(\log 2 - 1)$

e) $x = 12/5$

f) $x = 1$ i $x = -2$

Notes:

....

....

....

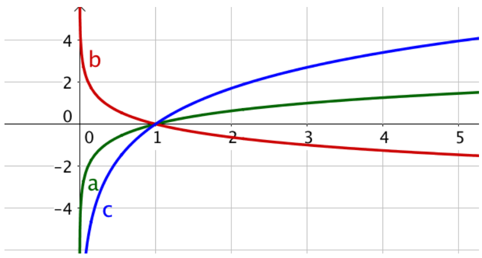
.pax .pax

Solucions de la pàgina 68:

38. **a)** $y = \log_4 x$ **b)** $y = \ln x$

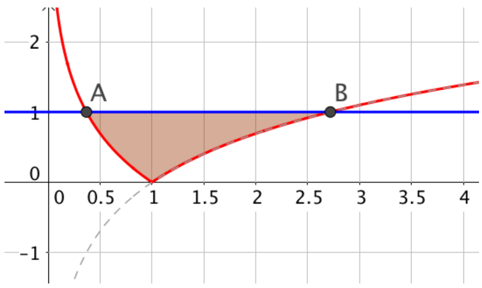
c) $y = \log_{1/4} x = -\log_4 x$ **d)** $y = \log_{1/e} x = -\ln x$

39.



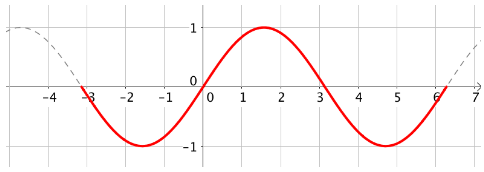
40. Dom $f = (0, +\infty)$

41. Punt de tall $A(e, 1)$ i $B(1/e, 1)$

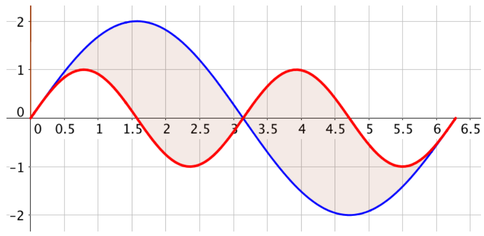


42. Dom $f = (0, +\infty)$; Dom $g = \mathbb{R}$; Dom $h = \mathbb{R}$

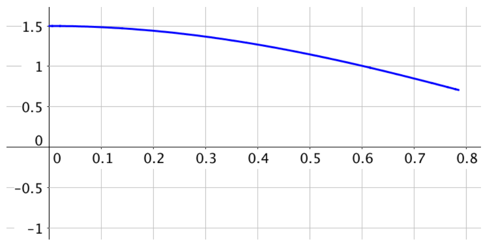
43.



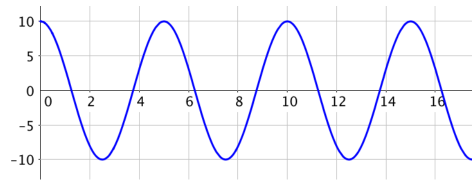
44.



45.



46.



Notes:

.pax .pax

Solucions de la pàgina 69:

- **Autoavaluació:**

1. – **10.** Autoavaluació: 1a; 2d; 3d; 4b; 5c; 6b; 7b; 8a; 9c; 10c

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

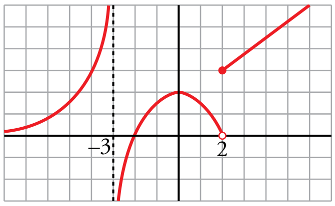
.pax .pax

.pax .pax

Concepte de límit

A partir d'una gràfica

5 **Sobre la gráfica de la siguiente función $f(x)$, halla:**



a) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

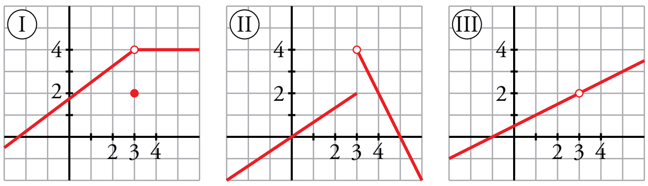
d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x \to -2} f(x)$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2

d) 0 e) 3 f) 0

6 **Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica correspondiente:**

a) $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$ b) $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$ c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe



A partir d'una taula de valors

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

x	y
0.9	0.270088
0.99	0.251888
0.999	0.2501876
0.9999	0.2500187

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = 0.25 = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x}}$$

x	y
10	6.641
1000	63.277
1000000	2000.001
100000000	20000.001

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 73:

1. $\lim\limits_{x \to 3^-} f_1(x) = -\infty$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f_1	-5	-20	-500	$-5 \cdot 10^4$	$-5 \cdot 10^6$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_2(x) = +\infty$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f_2	4	8	40	400	4000

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_3(x) = 8$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f_3	4	5,66	7,46	7,94	7,99

2. **a)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \nexists$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \nexists$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

3. **a)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f = 1/6$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f = 5/4$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 5^-} f = 10$; $\lim\limits_{x \to 5^+} f = 10$

Objectius del tema:

2. Utilitzar els conceptes de límit i continuïtat d'una funció i aplicar-los en el càlcul de límits i l'estudi de la continuïtat d'una funció en un punt o un interval.

2.1. Comprèn el concepte de límit, fa les operacions elementals per calcular-lo, i aplica els processos per resoldre indeterminacions.

2.2. Determina la continuïtat d'una funció en un punt a partir de l'estudi del seu límit i del valor de la funció, per extreure conclusions en situacions reals.

2.3. Coneix les propietats de les funcions contínues, i representa la funció en un entorn dels punts de discontinuïtat.

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 74:

4.

a) $+\infty$ **b)** $-\infty$

c) $-\infty$ **d)** $+\infty$

5.

a) $-1/6$ **b)** 0 **c)** -9

d) 1 **e)** -12 **f)** $\mp\infty$

g) $98/5$

6.

a) ∞ **b)** $-1/2$ **c)** $1/6$

d) $+\infty$ **e)** $-1/(2\sqrt{3})$ **f)** $-1/4$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Exemple càlcul de límits amb radicals

$$\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación.}$$

$$\frac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5} = \frac{(x-7)(\sqrt{3x+4}+5)}{(\sqrt{3x+4}-5)(\sqrt{3x+4}+5)} = \frac{(x-7)(\sqrt{3x+4}+5)}{3x-21} = \frac{(x-7)(\sqrt{3x+4}+5)}{3(x-7)} = \frac{\sqrt{3x+4}+5}{3}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5} = \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{3x+4}+5}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación.}$$

$$\frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5} = \frac{(\sqrt{3x-2}-5)(\sqrt{3x-2}+5)(\sqrt{2x+7}+5)}{(\sqrt{2x+5}+5)(\sqrt{3x-2}+5)(\sqrt{2x+7}+5)} = \frac{(3x-27)(\sqrt{2x+7}+5)}{(2x-18)(\sqrt{3x-2}+5)} =$$

$$= \frac{3(x-9)(\sqrt{2x+7}+5)}{2(x-9)(\sqrt{3x-2}+5)} = \frac{3(\sqrt{2x+7}+5)}{2(\sqrt{3x-2}+5)}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5} = \lim_{x \to 9} \frac{3(\sqrt{2x+7}+5)}{2(\sqrt{3x-2}+5)} = \frac{3}{2}$$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 76:

7.
a) $-\infty$ **b)** $+\infty$
c) 9 **d)** 0

8.
a) $-\infty$ **b)** $+\infty$ **c)** $+\infty$
d) 0 **e)** 0

9.
a) 1 **b)** $+\infty$
c) 0 **d)** 2

10.
a) $-\infty$ **b)** 0 **c)** -3
d) 0 **e)** -1 **f)** $-\infty$
g) 0 **h)** $-\infty$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 77:

11.

a) $+\infty$ **b)** 0 **c)** 0

d) 1 **e)** $+\infty$ **f)** e^2

g) $+\infty$

12.

a) $+\infty$ **b)** 1 **c)** 1

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 78:

13. (1) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

(2) $-3/2$ (3) $-1/4$

(4) $\lim_{x\to 1/2^-} f = -\infty$, $\lim_{x\to 1/2^+} f = +\infty$

(5) 0

(6) $\lim_{x\to 7^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 7^+} f(x) = -\infty$

(7) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

(8) $+\infty$

(9) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

(10) 10

(11) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$

(12) 6 (13) $+\infty$

(14) $-\infty$ (15) $+\infty$

(16) 0 (17) 0

(18) 0 (19) 0

(20) $2/5$ (21) $-7/3$

(22) $+\infty$ (23) $-\infty$

(24) $+\infty$ (25) -1

(26) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

(27) $-\infty$ (28) $\sqrt{3}$

(29) 1/2 (30) 0

(31) 1/5 (32) $+\infty$

(33) 3/2 (34) 2

(35) 0 (36) $+\infty$

(37) $1/4$

(38) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

(39) -4 (40) 2/3

(41) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

(42) 1/2

.pax .pax

Solucions de la pàgina 79:

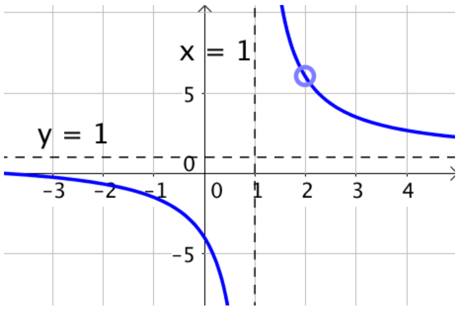
14. **a)** $x = 1$ **b)** $x = 2$; $x = 3$

c) $x = 1$ **d)** $x = 1$; $x = 3$; $x = 5$

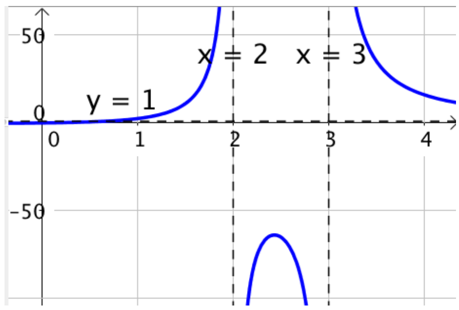
15. **a)** $y = 1$ **b)** $y = 3$

c) $y = 1$ **d)** $y = 0$

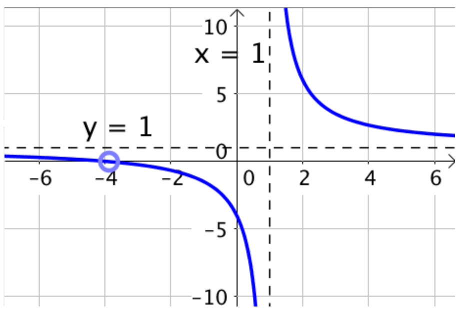
• **Gràfics Ex. 14:**



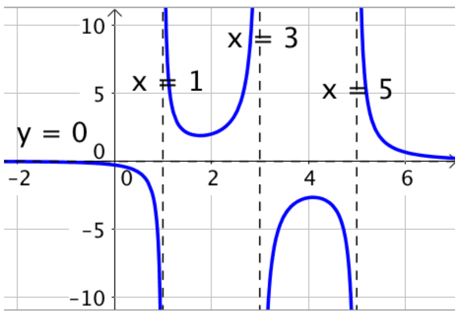
a)



b)



c)



d)

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 80:

16. **a)** A.O. $y = x + 3$ **b)** A.O. $y = 3x + 27$

c) A.O $y = \frac{x+1}{2}$ **d)** A.O. $y = 2x - 2$

17. **a)** Branques parabòliques a $+\infty$

b) Asímptota horitzontal $y = 0$

c) Branques parabòliques a $+\infty$

d) Branques parabòliques a $+\infty$

18. Asímptotes verticals: 1, 2, 4, 5, 6

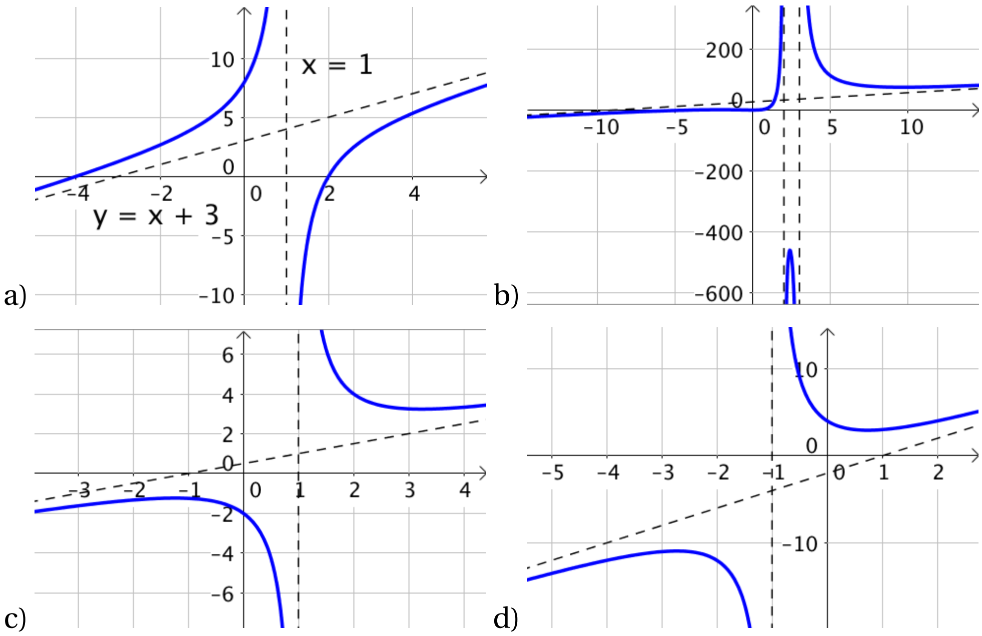
Asímptotes horitzontals: 3, 4, 6

Asímptotes obliqües: 5

Branques parabòliques: 1, 2

Solució: 1–f; 2–a; 3–d; 4–c; 5–e; 6–b

• **Gràfics Ex. 16:**



Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 81:

19.

a) AV. $x = 3$ AO. $y = x + 1$

b) AV. $x = \pm 2$ AH. $y = 0$

c) AV. $x = -2$ AH. $y = 1$

d) AV. $x = \pm 1$ AH. $y = 1$

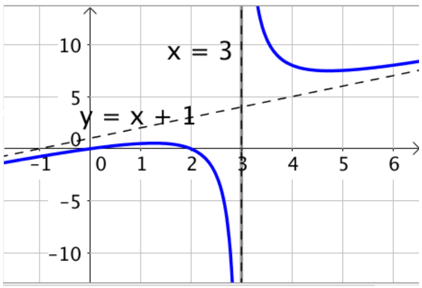
e) AV. $x = 1$ AH. $y = 0$

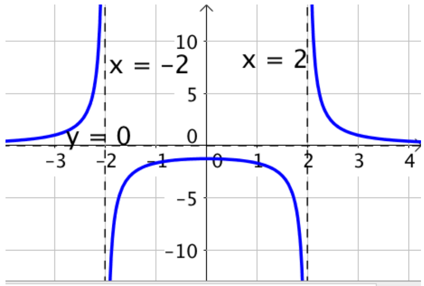
f) AV. $x = 1$ BP.

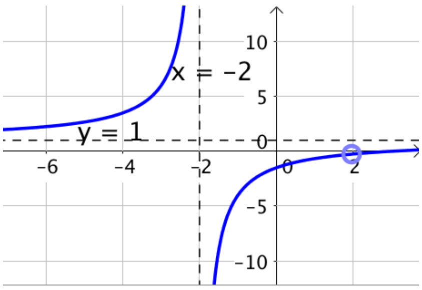
g) AV. $x = 0$ i $x = 1$ BP.

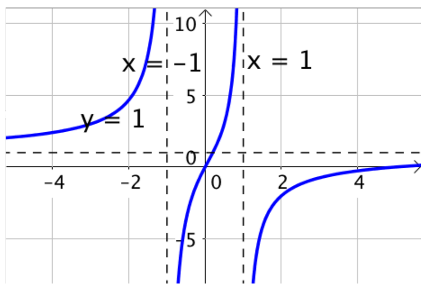
h) AV. $x = 1$ AH. $y = 0$

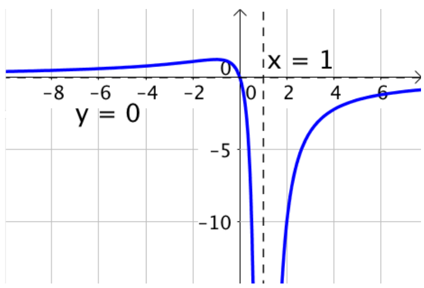
• Gràfics Ex. 19:

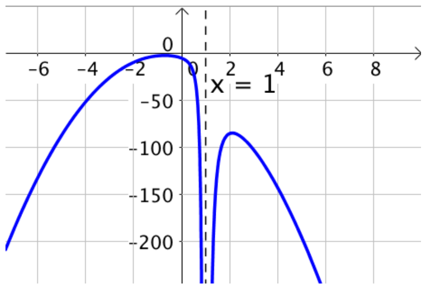
a) 

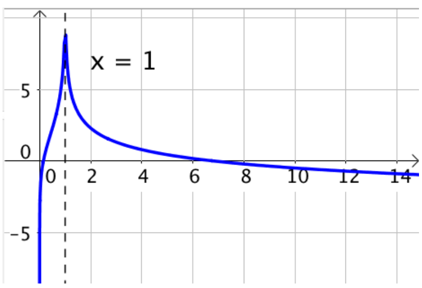
b) 

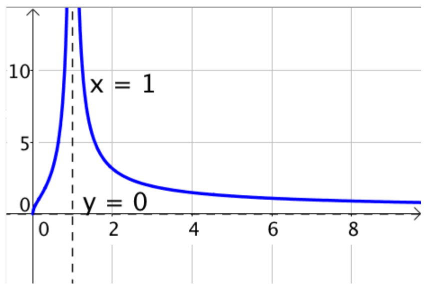
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

.pax .pax

Solucions de la pàgina 82:

20.

a) $x = -1$ li falta un punt; $x = 1$ asímptota vertical

b) És continua a $[5, +\infty)$

c) És continua a $(3, +\infty)$

d) És contínua a $\mathbb{R}$

21.

a) Té una discontinuïtat de salt finit a $x = -1$

b) És continua a $[2, +\infty)$

c) És contínua a $\mathbb{R}$

22.

a) Té discontinuïtats de salt a $x = -2$ i $x = 1$

b) Té discontinuïtat asimptòtica a $x = 0$

c) És contínua a $\mathbb{R}$

23.

a) Contínua a $\mathbb{R}$

b) Salt finit a $x = 0$

c) Té asímptota a $x = 3$

24.

a) Contínua en domini $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

b) Contínua en domini $(-\infty, -2)$; A.V. a $x = -2$

c) Contínua en domini $(-\infty, 0)$; A.V. a $x = 0$

25.

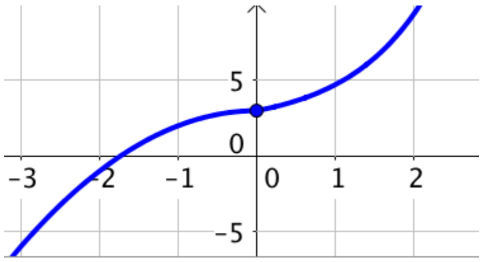
a) Domini $(4, 5)$. A.V. a $x = 4$ i $x = 5$

b) Domini $(-2, 1)$. A.V. a $x = -2$ i $x = 1$

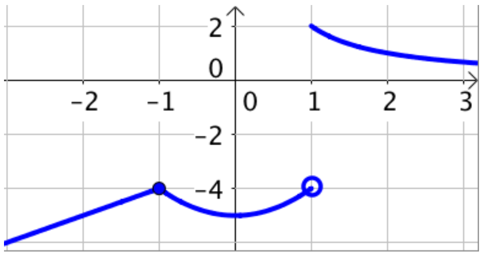
c) A.V. $x = -7$

d) Contínua a $[5, +\infty]$

26. És contínua a $\mathbb{R}$.



27. Continua excepte $x = 1$ salt finit.



Notes:

. . . .

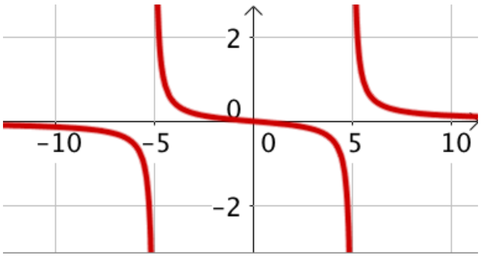
. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 83:

28. A.V. $x = \pm 5$; A.H. $y = 0$. És discontinua degut les asímptotes a $x = \pm 5$.



29. $k = -3$;

https://www.geogebra.org/m/PS5YUdBN

30. $k = 2$;

https://www.geogebra.org/m/K6YYNbCC

31. $p = -4$;

https://www.geogebra.org/m/mU2vFjBH .

No és discontínua en cap altre punt.

32. Si $a = 1$, la funció és contínua; Si $a \neq 1$, la funció presenta un salt finit a $x = 1$.

https://www.geogebra.org/m/KCtQrh29

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 84:

33. Has d'imposar les condicions de continuïtat en $x = a$; obtindràs l'equació de segon grau $a^2 - a - 2 = 0$. Per a $a = -1$ i $a = 2$ és continua; discontinuïtat de salt.

34. $a = 1$ i $b = -1$

- **Autoavaluació:**

1. $\lim\limits_{x \to 1^-} f = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f = -\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -2^-} f = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f = +\infty$

3. $-2/3$

4. $1/2$

5. a) 5, b) $+\infty$

6. ∞

7. Té un salt infinit a $x = 0$

8. Té un salt finit a $x = 2$

9. $k = 2$

Notes:
....

....

....

.pax .pax

.pax .pax

Solucions de la pàgina 86:

1.

a) TVM=3

b) TVM=-2

c) TVM=0.5

d) TVM=1

2. TVM[-3, 2]=–1, TVM[1, 5]=6 i TVM[0, 3]=3

3. TVM[-3, 2]=7, TVM[1, 5]=31, TVM[0, 3]=9

Objectius del tema:

3. Aplicar el concepte de derivada d'una funció en un punt, la seva interpretació geomètrica i el càlcul de derivades a l'estudi de fenòmens naturals, socials o tecnològics i a la resolució de problemes geomètrics.

3.1. Calcula la derivada d'una funció usant els mètodes adequats i l'empra per estudiar situacions reals i resoldre problemes.

3.2. Deriva funcions que són composició de diverses funcions elementals mitjançant la regla de la cadena.

3.3. Determina el valor de paràmetres perquè es verifiquin les condicions de continuïtat i derivabilitat d'una funció en un punt.

4. Estudiar i representar gràficament funcions obtenint informació a partir de les seves propietats i extraient informació sobre el seu comportament local o global.

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 87:

4.

a) $v_m = 24,3$ m/s

b) $v_m[0,6] = 38,3$ m/s; $v_m[2,10] = 25$ m/s; $v_m[6,14] = 13,7$ m/s

c) No és constant. La velocitat va disminuint.

5.

a) $v_m[0,40] = 18$ m/s

b) $v_m[15,25] = 14$ m/s; $v_m[20,30] = 13$ m/s. No és constant

c) 120 km/h = 33 m/s. Sembla difícil que l'hagi sobrepassat. 80 km/h = 22,2 m/s. No és possible assegurar que no hi hagi anat més depresa ja que en el primer interval la seva velocitat mitjana és de 20 m/s.

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 88:

6.

a) Solució gràfica. No té sentit per a valors negatius ni per a valors majors de 8. Només ha sentit per $0 \leq x \leq 8$

b) $v_m[0,2] = 30\,\text{m/s}$

c) $v_m[0,8] = 0\,\text{m/s}$

d) $v_m[1,4] = 15\,\text{m/s}$

e) $v_m[4,8] = -20\,\text{m/s}$

f) $v_m[1,8] = -5\,\text{m/s}$

g) c) $y(4) = 80\,\text{m}$.

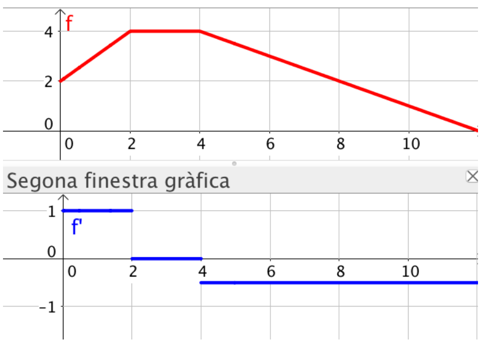
7. $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\,(h^2+6h+12)}{h} = 12$

8. $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+h}-1)\cdot(\sqrt{1+h}+1)}{h((\sqrt{1+h}+1))} = \dfrac{h}{h((\sqrt{1+h}+1))} = \frac{1}{2}$

9. $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{(4+h)^2} - \frac{1}{4^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\frac{h(h+8)}{16(h+4)^2}}{h} = -\dfrac{1}{32}$

10. Qualsevol funció que presenti punxes, per exemple la funció valor absolut $y = |x|$ no és derivable a $x = 0$.

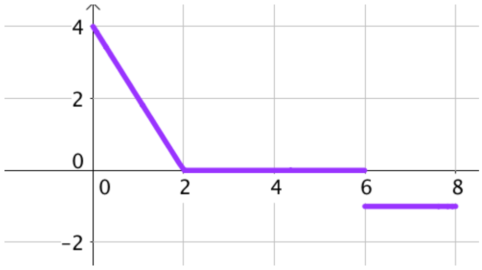
11.



.pax .pax

Solucions de la pàgina 89:

12.



13. $d' = 1,2t^3$; $v(3) = 32,4$ m/s; $v(4) = 76,8$ m/s; $v(7) = 411,6$ m/s; $v(10) = 1200$ m/s.

14. $y = f(t) = t^2$; $y' = v = 2t$; $a = y'' = 2$

16. $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^2 - (a+h) + 1 - (a^2 - a + 1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h\,(2a + h - 1)}{h} = 2a - 1$

$f'(1) = 1$, $f'(2) = 3$, $f'(12) = 23$, $f'(5.43) = 9.86$ i $f'(-7) = -15$. En general, la funció derivada, $f'(x) = 2x - 1$.

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 90:

17. $3x^2, 0, 2x, 1, 0, 2, 4x+3$

18. **a)** $f'(x) = 24x^{23}$ **b)** $g'(x) = 60x^9$ **c)** $h'(x) = 2x^{12}$

d) $j'(x) = 12x^3 - 10x$ **e)** $p'(x) = 15x^2 - 1$

19. **a)** $f'(x) = \dfrac{8}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt[4]{x}}$

c) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{6}{x^3}$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 91:

20. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. $y'(1) = \dfrac{1}{2}$; $y'(4) = \dfrac{1}{4}$; $y'(5) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$; etc. No existeix la derivada a $x = 0$ perquè valdria $+\infty$

21.
a) $y' = 3(x^2 + x + 1)^2\,(2x + 1)$

b) $y' = 10\ln^4(2x + 3)\dfrac{1}{2x + 3}$

c) $y' = 60(3x^4 + 7)^4\,x^3$

d) $y' = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 7}}$

e) $y' = -2x\,e^{-x^2}$

f) $y' = \cos(\ln x)\,\dfrac{1}{x}$

g) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x}}$

h) $y' = \dfrac{2x\,[1 + \mathrm{tg}^{\,2}(x^2 + 1)]}{\mathrm{tg}\,(x^2 + 1)}$

22.
a) $y' = 12(x^5 - 7x^3)^{11}(5x^4 - 21x^2)$ **b)** $y' = 7(3x^3 - 5x^2)^6(9x^2 - 10x)$

c) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5}} \cdot 5\,(4x^5 - 8x^3)^4 \cdot (20x^4 - 24x^2)$

d) $y' = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)} \cdot (4x + 28x^6)$

23.
a) $y' = (5x^4 - 21x^2)\cos(x^5 - 7x^3)$

b) $y' = 7\sin^6(3x^3 - 5x^2) \cdot \cos(3x^3 - 5x^2) \cdot (9x^2 - 10x)$

c) $y' = -\dfrac{4(2x^2 + 4x^7)^3(4x + 28x^6)\cos{(2x^2 + 4x^7)}^4}{\sqrt[3]{\sin^2{(2x^2 + 4x^7)}^4}}$

24.
a) $y' = -(5x^4 e^{x^5} + 12x^2)\sin(e^{x^5} + 4x^3)$

b) $y' = -4(\mathrm{cotg}\,(5x^3 - 3x^2))^3 \cdot \dfrac{15x^2 - 6x}{\sin^2(5x^3 - 3x^2)}$

c) $y' = [1 + \mathrm{tg}^{\,2}(7x^5 - 3x^3)^2] \cdot 2(7x^5 - 3x^3) \cdot (35x^4 - 9x^2)$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 92:

25.

a) $y' = (1 - x^2)\sin x + 3x\cos x$

b) $y' = \ln x + 1$

c) $y' = 3^x\,(\mathrm{tg}^2 x + \ln 3 \mathrm{tg}\, x + 1)$

d) $y' = (x+1)^2 e^x$

e) $y' = 10x \,\mathrm{arctg}\, x + \dfrac{5x^2}{1+x^2}$

f) $y' = \dfrac{\sin x^2}{x+1} + 2x \ln x \cos x^2$

26.

a) $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

b) $y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

c) $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

d) $y' = \dfrac{4x - 3\sqrt{x^3}}{2x^4}$

e) $y' = \dfrac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$

f) $y' = \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

g) $y' = \dfrac{-4\ x^2 + 20\ x - 22}{(x-3)^2(x-4)^2}$

h) $y' = \dfrac{-3\ x^2 - 6\ x - 3}{(x^3+3x^2+3x-1)^2}$

27.

a) $f' = (1 - \dfrac{2}{x^2})e^{\frac{1}{x^2}}$

b) $f' = \dfrac{(4x-1)e^{4x} - (x+1)e^{-x}}{2x^2}$

c) $f' = \dfrac{2x}{(x^2+1)(2x-1)} \cdot \dfrac{2\ln(x^2+1)}{(2x-1)^2}$

d) $f' = -4e^{-(2x+1)^2}\cos(2x) \cdot [\sin(2x) + (2x+1)\cos(2x)]$

28.

a) $y' = 48x^7 + 108x^5 - 10x$

b) $y' = 256x^6 - 20x^3 + 84x^2$

c) $y' = \frac{\sqrt{x}}{2}\,(7x^2 - 15)$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 93:

29. **a)** $y' = \dfrac{4}{(x+3)^2}$ **b)** $y' = \dfrac{-6x^2+30x-5}{2(3x^2-x)^2}$

c) $y' = \dfrac{\sqrt{x}(x+6)}{2(x+2)^2}$ **d)** $y' = \dfrac{\sqrt[6]{x}(35-11x^3)}{6(x^3+5)^2}$

e) $y' = 4x^3 \cdot x^{-3/4} + (x^4-2) \cdot (-3/4) \cdot x^{-7/4} = \dfrac{13x^4+6}{4\sqrt[4]{x^7}}$ **f)** $y' = \dfrac{\sqrt[6]{x^5}(5x+22)}{6(x+2)^2}$

30. **a)** $y' = \dfrac{12}{\ln 10(x^5-7x^3)}(5x^4-21x^2)$ **b)** $y' = \dfrac{7}{\ln 2}\dfrac{9x^2-10x}{3x^3-5x^2}$

c) $y' = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{5(20x^4-24x^2)}{4x^5-8x^3} - \dfrac{3}{3x-2}\right]$ **d)** $y' = \dfrac{8}{3(x^2+2x^7)}(x+7x^6)$

31. **a)** $y' = x^{x^5-7x^3} \cdot ((5x^4-21x^2)\ln x + x^4 - 7x^2)$

b) $y' = (x+1)^{3x^3-5x^2} \cdot \left((9x^2-10x)\ln(x+1) + \frac{3x^3-5x^2}{x+1}\right)$

c) $y' = x^{(4x^5-8x^3)^5} \cdot (4x^5-8x^3)^4 \cdot x^2 \cdot (20(5x^2-6)\ln x - 4x^2 + 8)$

32. **a)** $y' = \dfrac{(x-1)\cdot(2x-3)}{x+2}\left[\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{2x-3} - \dfrac{1}{x+2}\right]$

b) $y' = \dfrac{(3x^2+4)\cdot(4x-2)}{7x-1}\left[\dfrac{6x}{3x^2+4} + \dfrac{4}{4x-2} - \dfrac{7}{7x-1}\right]$

c) $y' = \dfrac{(x+9)\cdot(2x-3)}{(x+3)\cdot(x+2)}\left[\dfrac{1}{x+9} + \dfrac{2}{2x-3} - \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+2}\right]$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 94:

33. **a)** $y=-\frac{x}{4}-1$ **b)** $y=-\frac{x}{3}-\frac{10}{3}$

c) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{8}(\pi+4)$

d) $y=\frac{x}{e}$

34. **a)** $y=-\frac{x}{12}+\frac{49}{6}$

b) $y=3$ **c)** $y=-\frac{x}{30}+\frac{361}{10}$

d) $y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$

35. **a)** Resol $3x^2-3=0\to x=\pm 1$

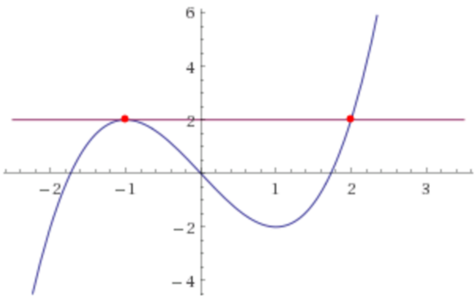
b) Resol $3x^2-3=6\to x=\pm 3$

36. $y=0$

37. Per trobar els punts en qüestió, primer resolem $12x^2-12=12$. Això passa per a $x=\pm\sqrt{2}$. L'ordenada de cada punt és $y=\mp 4\sqrt{2}$. Les rectes tangents són: r_1: $y+4\sqrt{2}=12(x-\sqrt{2})$; r_2: $y-4\sqrt{2}=12(x+\sqrt{2})$

El menor pendent que pot tenir la corba s'obté de $f''=0$ (Correspon a un punt d'inflexió), que dóna $x=\frac{1}{2}$.

38. La recta tangent és horitzontal $y=2$ perquè A és un màxim de la funció. Miram on més talla la recta resolent l'equació $x^3-3x=2$. També talla a $x=-1$



39. Plantejam un sistema. Ha de passar per A: $2=a+b+c$. Ha de passar per O: $0=c$. Ha de tenir derivada 1 a $x=0$: $b=1$. Llavors $a=1$, $b=1$, $c=0$

40. Plantejam un sistema. Les dues rectes han d'ésser secants a A: $0=1+b+c$; $0=a-1$. Ha de tenir igual derivada a $x=1$: $3+b=a-2$. Llavors $a=1$, $b=-4$, $c=3$

41. En algun punt de f el seu pendent ha de valer 1: $2x=1$. Això només passa quan $x=1/2$; $y=1/2$. Llavors, aquest punt ha d'ésser també un punt de la corba: $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+a$, llavors $a=\frac{1}{4}$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 95:

42. Només pot ésser la d) perquè la derivada s'anul·la en dos punts $x = 0$ i $x = 3$, llavors són dos punts on la recta tangent és horitzontal.

43.

a) Creix $(-\infty, 0)$
Decreix $(0, \infty)$. No té extrems

b) Sempre decreix

c) Creix $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
Decreix $(0, 2)$

d) Creix $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
Decreix $(1, 3)$

44.

a) Creix $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
Decreix $(1, 3)$.
Màx: $(1, -4)$
Min: $(3, -8)$

b) Creix $(e, +\infty)$
Decreix $(0, 1) \cup (1, e)$.
Min: (e, e)

c) Creix $(-2, 1) \cup (1, 2)$
Decreix $(-\infty, -2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$.
Màx: $(2, -1)$
Min: $(-2, -1/9)$

d) Creix $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
Decreix $(-2, 0)$.
Màx: $(-2, \frac{4}{e^2})$
Min: $(0, 0)$

e) Creix $(0, +\infty)$
Decreix $(-\infty, 0)$.
Min: $(0, 0)$

f) Màx: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
Min: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

Notes:

. . . .

. . . .

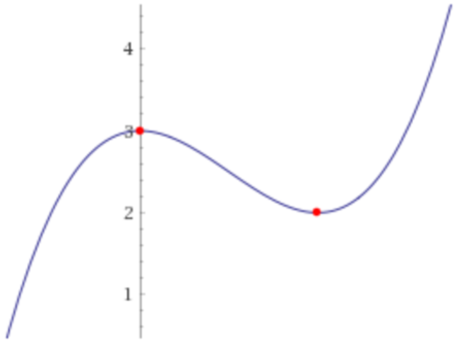
. . . .

.pax .pax

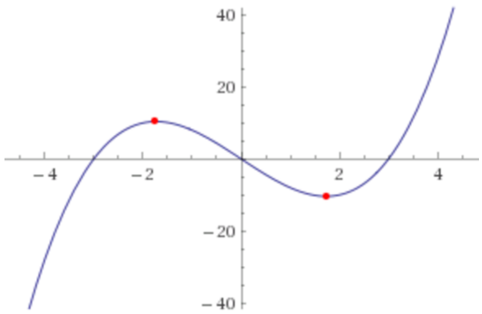
Solucions de la pàgina 96:

45. La funció $y = x^3 - 3x$ té un màxim a $(-1, 2)$ i un mínim $(1, -2)$. A $x = 0$ és decreixent. A $x = \pm 2$ és creixent. La funció $y = x^3 + 3x$ és sempre creixent; no té extrems.

46. Té un màxim a $(0, 3)$ i un mínim a $(1, 2)$. Gràfica:



47. Té un màxim a $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ i un mínim a $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$. Gràfica:



48.

a) $y'' = 6x - 6$

b) $y'' = -\sin x - \frac{1}{x^2}$

c) $y'' = \dfrac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$

d) $y'' = \dfrac{1}{x}$

e) $y'' = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

f) $y'' = 6\sin x^2 + 12x^2 \cos x^2 + 2$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 97:

49. **a)** $y'' = 6x$

Còncava: $(0, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, 0)$

P.I. $(0, 2)$

b) $y'' = 12x^2 - 12$

Còncava: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Convexa: $(-1, 1)$

P.I. $(\pm 1, -1)$

c) $y'' = \frac{2}{x^3}$

Còncava: $(0, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, 0)$

P.I. no en té

d) $y'' = \dfrac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$

Còncava: $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$

Convexa: $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$

P.I. $x = \pm\sqrt{3}/3$

e) $y'' = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

Còncava: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

P.I. $(0, 0)$; $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/4)$

f) $y'' = 4e^{-2x^2}(4x^2 - 1)$

Còncava: $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$

Convexa: $(-1/2, 1/2)$

P.I. $x = \pm\frac{1}{2}$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

.pax .pax

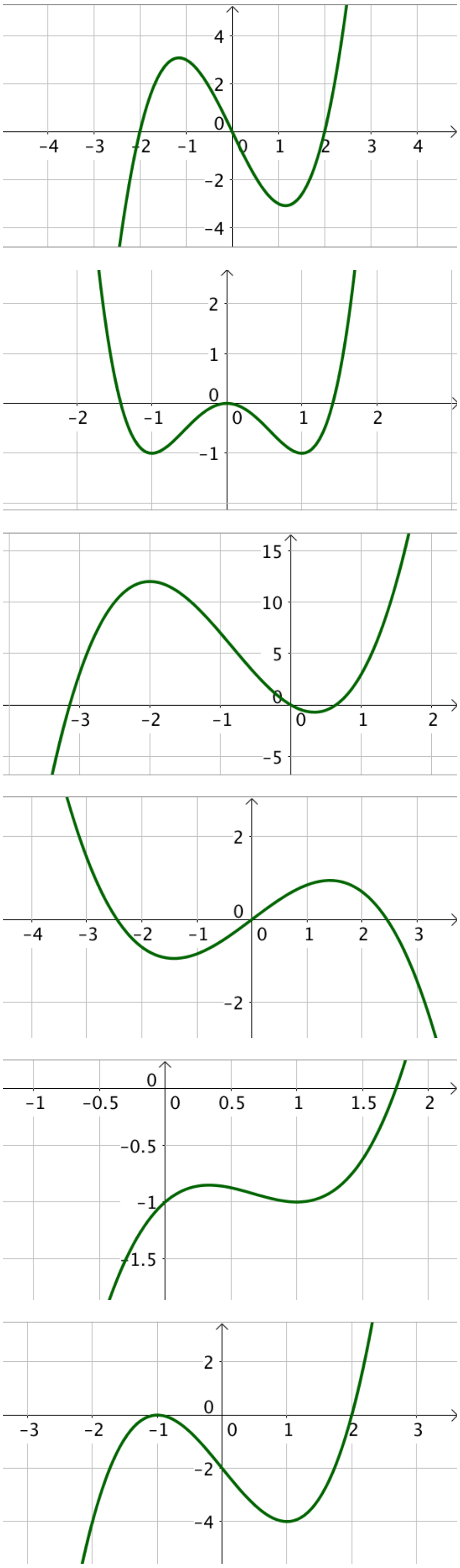
.pax .pax

.pax .pax

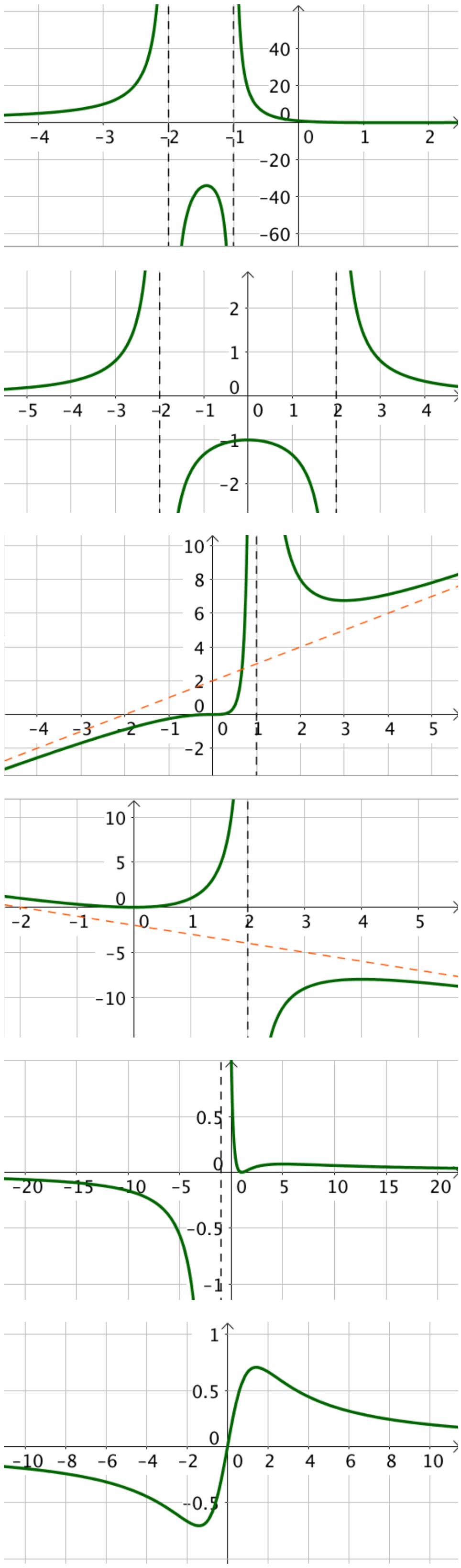
.pax .pax

Solucions de la pàgina 102:

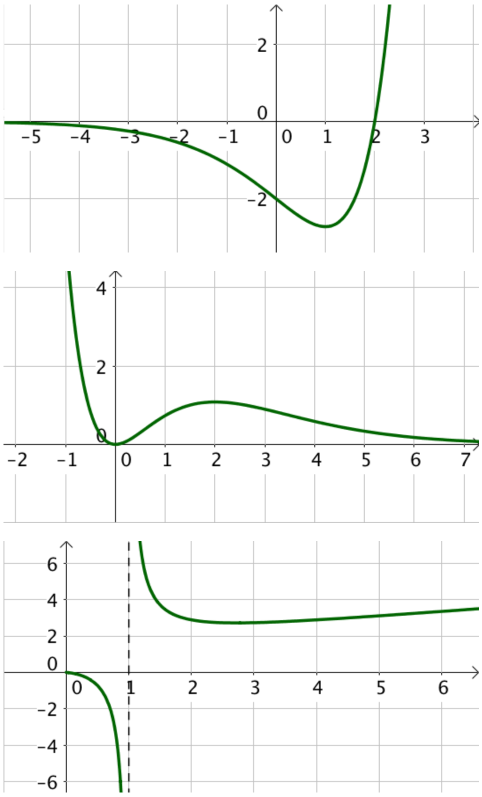
50.



51.



52.



53. Minimitzeu la funció $f(x) = 5x^2 + 6(44-x)^2$. Trobareu $x = 22$.

54. El volum de les caixes en funció de x és $V(x) = (25-2x)\cdot(20-2x)\cdot x$. El valor pel qual hi ha el màxim és $x = 3.68$ cm.

55. $V = \pi r^2 h = 150$ si les mides són $l = \sqrt[3]{dm^3}$, $h = \dfrac{150}{\pi r^2}$. L'àrea total és $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi\left(r^2 + \dfrac{150}{\pi r}\right)$. Cercam extrems $S'(r) = 0 \to r = \sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}} = 2.88$ dm; i l'altura $h = \dfrac{75}{\sqrt[3]{45\pi}} = 5.76$ dm.

Exemples de problemes d'optimització

Con 100 m de valla queremos delimitar una parcela rectangular aprovechando una pared, de modo que solo tengamos que vallar tres de sus lados. Calcula las dimensiones de la parcela de área máxima que podemos vallar.

Llamamos x a los lados del rectángulo perpendiculares a la pared e y al lado paralelo a ella.

$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$

El área del rectángulo es:

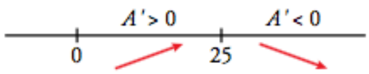
$A = xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$

Queremos hallar el valor que da lugar al área máxima:

$A' = 100 - 4x$

$A' = 0 \rightarrow 100 - 4x = 0 \rightarrow x = 25$ m

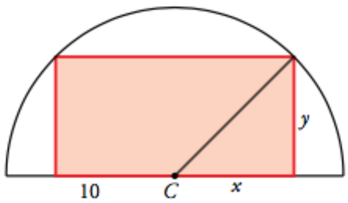
Comprobamos que es un máximo:



Por tanto, el área máxima se da si $x = 25$ m, $y = 100 - 50 = 50$ m y es $A = 25 \cdot 50 = 1\,250$ m^2.

En un semicírculo de radio 10 cm se inscribe un rectángulo. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo para que su área sea máxima.

Sean x e y la semibase y la altura del rectángulo, respectivamente.



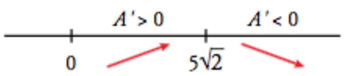
$x^2 + y^2 = 10^2 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

El área es $A = 2x\sqrt{100 - x^2}$

Hallamos el valor de x que da el área máxima:

$$A' = 2\left(\sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}}\right) = 2\frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$A' = 0 \rightarrow 2\dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \rightarrow 100 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = 5\sqrt{2}$ (el resultado negativo no tiene sentido).



Si $x = 5\sqrt{2}$ cm $\rightarrow y = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$ cm y el área máxima es $A = 50$ cm^2.

.pax .pax

Solucions de la pàgina 103:

56. El percentatge efectiu = percentatge de curacions - percentatge efectes secundaris. $h(x) = 100 - \frac{80}{x+5} - \frac{2x}{100}$, per a $x > 0$. Cercam màxim de $h(x)$ i trobam $x = 20\sqrt{10} - 5 \approx 58,25$ mg de dosi, donant una efectivitat del 97,57 %.

57. Problema semblant al dels barrils d'oli però amb diferent geometria. $V = x^2h = 1$ si les mides són dm, $h = \dfrac{1}{x^2}$. L'àrea total és $S(x) = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$. Cercam mínim, $S'(x) = 0 \rightarrow x = 1$ dm; i l'altura $h = 1$ dm; és a dir, es tracta d'un cub d'aresta 1 dm.

58. El volum d'un con és $V = \dfrac{1}{3}A_{base} \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi(R^2 - x^2) \cdot (R + x)$, minimitzam la funció $f(x) = R^3 + R^2x - Rx^2 - x^3$. Trobam $0 = 25 - 10x - 3x^2$ que té solució $x = \frac{5}{3}$ cm [Nota $x = -5$ no serveix], altura $h = \frac{20}{3}$ cm, radi $r = \frac{50\sqrt{2}}{3}$ cm.

59. La velocitat de variació d'una funció és la seva derivada.

La **temperatura** varia com $T' = \frac{500}{t^2}$; els canvi als 30 segons és $T'(30\text{ s}) = 0,555\,°\text{C/s}$, als 90 segons és $T'(90\text{ s}) = 0,0617\,°\text{C/s}$.

El **radi** varia segons $r'(t) = 0,001T' = \frac{0,5}{t^2}$. Els canvis són $r'(10\,\text{s}) = 0,005$ mm/s; $r'(30\,\text{s}) = 0,000555$ mm/s; $r'(90\,\text{s}) = 0,000062$ mm/s

Per trobar la variació del radi segons la temperatura, millor expressar en funció de la temperatura $r'(T) = \frac{(200-T)^2}{500000}$; els canvis són $r'(50\,°\text{C}) = 0,045$ mm/s; $r'(75\,°\text{C}) = 0,0313$ mm/s; $r'(100\,°\text{C}) = 0,02$ mm/s

- **Autoavaluació:**

1. $f'(1) = 1$

2. $m = f'(2) = -16/121$

3. $y' = 2x \cdot 2^{x^2+3} \ln 2$

4. $y' = -6x^2 \cos x^3 \sin x^3$

5. $y = 2x + 6$

6. $y = 0$

7. $x < 0$, creixent; $0 < x < 4$, decreixent; $x > 4$, creixent

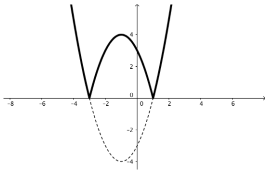
8. $(0, 0)$ mínim i $(1, 1)$ màxim relatius

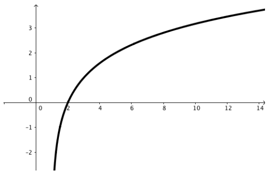
9. Punt d'inflexió $(3, -45)$; recta tangent $y = -24x + 27$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 104:

1. a) $\mathbb{R} - \{0, -5\}$, b) $(-\infty, 5/2]$

2. a) 

b) 

3. $g(h(x)) = \sin\sqrt{x}$, $f(g(x)) = e^{\sin x}$, $h(f(x)) = \sqrt{e^x}$. $h(f(x))^{-1} = \ln x^2$.

4. a) 4, b) $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = -\infty$, c) $-\infty$

5. a) $b = 1$, b) f és discontínua a $x = 2$ per punt desplaçat.

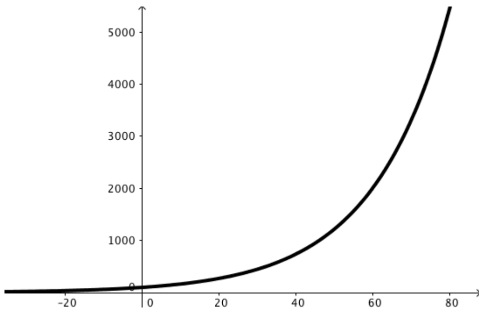
6. $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3(3+h)^2-10(3+h)-(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{8h+3h^2}{h} = 8.$

7. a) $y(0) = 100$ bacteris,

$y(30) = 100 \cdot e^{0.05\cdot 30} \approx 448$;

b) $5000 = 100 \cdot e^{0.05\cdot t} \to 0.05 \cdot t = \ln(5000/100) \to t = \ln(50)/0.05 \approx 78,2$ min

c) Gràfica



8. $y = -\frac{2}{3} + \frac{5}{9}(x-1)$ o $y = \frac{5x}{9} - \frac{11}{9}$.

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 105:

9. a) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{\cos(5x^4+2x^3)}} \cdot \sin(5x^4 + 2x^3) \cdot (20x^3 + 6x^2)$

b) $y' = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

c) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(3x^5-6x^2)^2}} \cdot (15x^4 - 12x)$

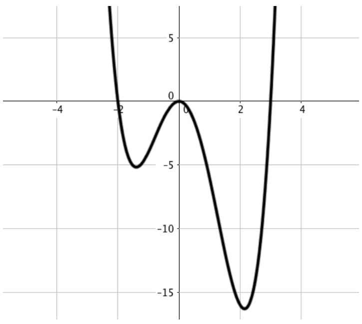
d) $y' = (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2}$

e) $y' = -85\left(\frac{2x+5}{3x-1}\right)^4 \cdot \frac{1}{(3x-1)^2}$

f) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$

10. a) Creixent: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; Decreixent $(-2, 2)$; Màxims: $(x = -2,\ y = 16)$; Mínims: $(x = 2, y = -16)$. b)Sempre és creixent. No té extrems.

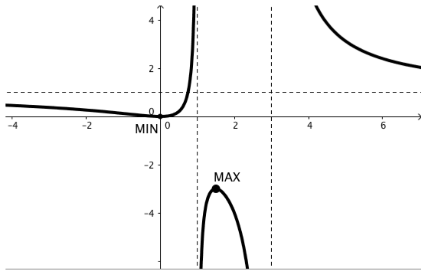
11. Punts de tall amb l'eix OX: $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, i amb l'eix OY $(0, 0)$. Té un màxim a (0,0) i té dos mínims a $x = 2.15$, $y = -16.3$ i a $x = -1.4$, $y = -5.2$ La gràfica de la funció és:



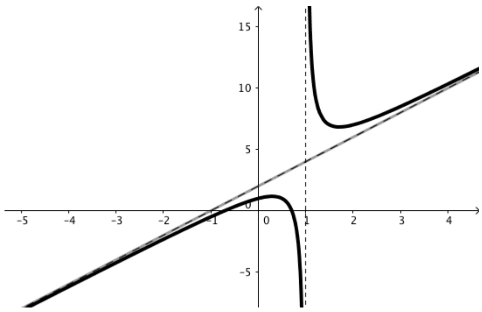
12. a) $y = 1$ asímptota horitzontal; $x = 1$ i $x = 3$ asímptotes verticals. La posició relativa és: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ per damunt; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ per davall. $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$.

b) La funció té un mínim relatiu a $x = 0$, $y = 0$ i un màxim relatiu a $x = 3/2$, $y = -3$

c) Gràfica:



13. L'única funció que presenta asímptota obliqua és c). L'asímptota obliqua és $y = 2x + 2$ i també té una asímptota vertical a $x = 1$. La gràfica és la següent:



14. $k = 1/2$. La primera derivada $y' = (2x^2 + 2x + 1)/(x + 1/2)^2$ mai és zero. Sempre creix i per tant no té extrems.

15. $a = -6$ i $b = 17$.

.pax .pax

.pax .pax

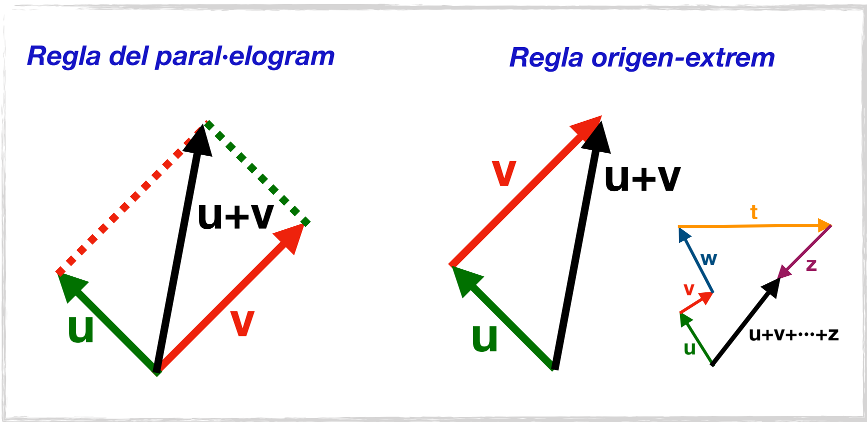
.pax .pax

.pax .pax

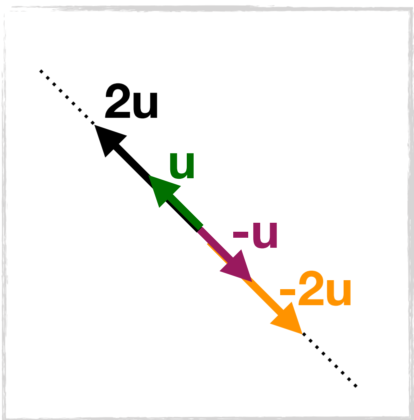
.pax .pax

Operacions amb vectors gràficament

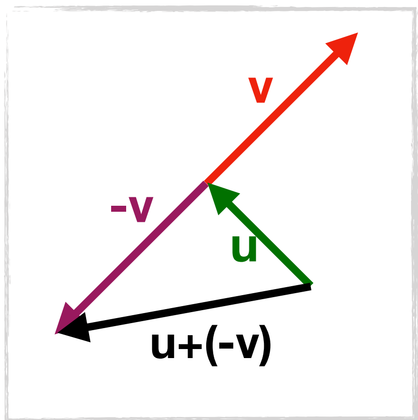
Suma de vectors



Vector per escalar



Resta de vectors



Objectius del tema:

3. Fer servir l'operació del producte escalar i les seves conseqüències. Entendre els conceptes de base ortogonal i ortonormal. Distingir i manejar-se amb precisió en el pla euclidià i en el pla mètric, utilitzant en ambdós casos les seves eines i propietats.

3.1. Empra amb assiduïtat les conseqüències de la definició de producte escalar per normalitzar vectors, calcular el cosinus d'un angle, estudiar l'ortogonalitat de dos vectors o la projecció d'un vector sobre un altre.

3.2. Calcula l'expressió analítica del producte escalar, del mòdul i del cosinus de l'angle.

.pax .pax

Solucions de la pàgina 111:

1.
a) Igual mòdul
b) Igual mòdul; direcció i sentit
c) Mòdul doble; igual direcció i sentit
d) Tot diferent

2.
a) $(1, 2)$
b) $(-1, -2)$
c) $(-3, 3)$
d) $(4, -1)$

3.
a) $(-3, 6)$
b) $(-3, 9)$
c) $(-\frac{17}{3}, \frac{41}{3})$
d) $(-1, \frac{11}{2})$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 112:

5. $\vec{x} = 6\vec{b} - 2\vec{a} = (-20, 22)$

6.

a) $\frac{2}{-10} \neq \frac{2/5}{-9}$ No

b) $\frac{-2}{3} \neq \frac{-3}{2}$ No

c) $\frac{-6}{8} = \frac{8}{-12}$ Sí perquè $\vec{v} = -\frac{4}{3}\vec{u}$

7. $\frac{18}{k} = \frac{-6}{4} \rightarrow k = -12.$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

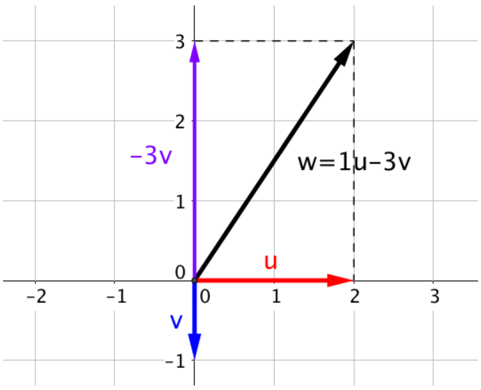
Solucions de la pàgina 113:

8. a), b) són linealment independents i formen base. c), d) són dependents i no formen base.

9. Resolem el sistema $\begin{cases} -3 = \lambda + 5\mu \\ -8 = -3\lambda + 2\mu \end{cases}$.
Trobam $\lambda = 2$ i $\mu = -1$.

10. Mètode algebraic: $\begin{cases} 2 = 2\lambda + 0\mu \\ 3 = 0\lambda - 1\mu \end{cases}$.
Trobam $\lambda = 1$ i $\mu = -3$; té components $(1, -3)$.

Mètode gràfic:



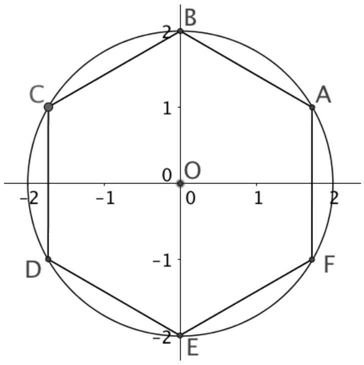
11. Mètode algebraic: $\begin{cases} -4 = 1\lambda - 1\mu \\ 5 = 1\lambda + 1\mu \end{cases}$.
Trobam $\lambda = 1/2$ i $\mu = 9/2$; té components $(1/2, 9/2)$.

12. a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -2$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} = 2$

d) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} = -4$



13.

a) 4	**b)** 0	**c)** 0
d) 9	**e)** 36	**f)** 0

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 114:

14.

a) 22 un escalar

b) $= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = 29$ un escalar

c) $(-15, -6)$ un vector

d) $(20, 30)$ un vector

16. $k = \dfrac{4}{3}$

17. Per exemple el vector $(-4, 1)$ o qualsevol paral·lel a ell: $(-1, 4)$, $(-12, 3)$, etc.

18. $(3/5, -4/5)$ i $(4/5, 3/5)$.

19.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{13}$

c) $|\vec{w}| = 1$ és unitari

20. $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

21.

a) $105.07°$

b) $180°$

22. $x = -1, \alpha = 57.53°$

23. Tenim que $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$, llavors $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha} = 2.522$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 115:

24. $\vec{x} = \dfrac{(1,-5)+2(0,-1)}{7} = (\frac{1}{7},-1)$ i
$\vec{y} = \dfrac{3(1,-5)-(0,-1)}{7} = (\frac{3}{7},-2)$

25. Queda un sistema $\left.\begin{array}{l} 2x+y=1 \\ 6x+2y=0 \end{array}\right\}$. Té solució $x=-1$ i $y=3$

26. Hi ha dues possibilitats: $k=8$ i $h=4$ o $k=-8$ i $k=-4$.

27. Un vector perpendicular a $\vec{v}$ és $\vec{u} = (3,2)$. Ara només cal normalitzar els dos vectors dividint pel seu mòdul. La base en qüestió és $\hat{\vec{v}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \ \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ i $\hat{\vec{u}} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \ \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

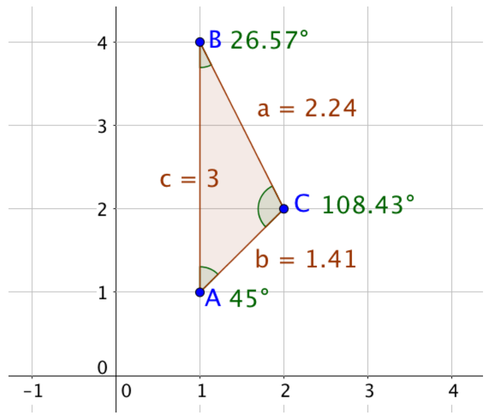
28. Primer cercam un vector perpendicular qualsevol $(2,1)$. Tot seguit el normalitzam dividint pel mòdul $(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$. Finalment multiplicam per 4 per tenir mòdul 4. Resposta: $(\frac{8}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}})$.

29. Primer cercam un vector perpendicular qualsevol $(2,-1)$. Tot seguit el normalitzam dividint pel mòdul $(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$. Finalment multiplicam per 3 per tenir mòdul 3. Resposta: $(\frac{6}{\sqrt{5}},-\frac{3}{\sqrt{5}})$.

30.
- **a)** Sí. És la canònica
- **b)** No. No tenen mòdul 1
- **c)** No. No tenen mòdul 1
- **d)** Sí. Són perpendiculars i tenen mòdul 1.

31. El problema té 4 solucions, segons quins sentits agafem pel vector $\vec{v}$ i pel perpendicular seu.
$\hat{\vec{v}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ o $\hat{\vec{v}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ juntament amb un de $\hat{\vec{u}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ o $\hat{\vec{u}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

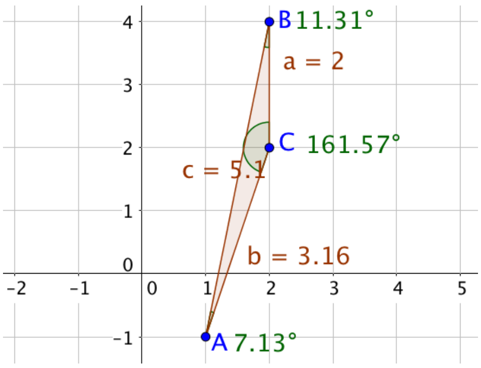
32.



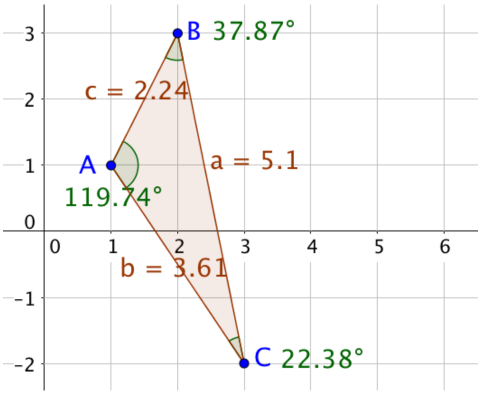
.pax .pax

Solucions de la pàgina 116:

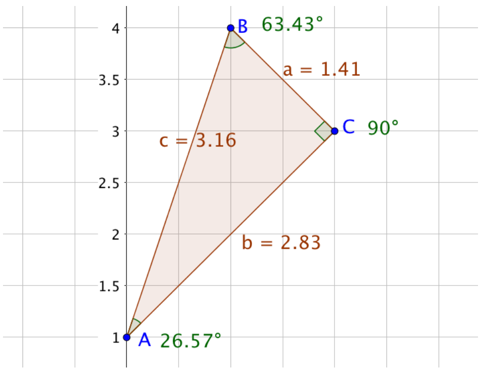
33.



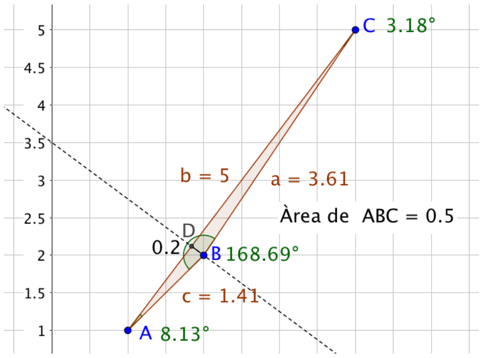
34.



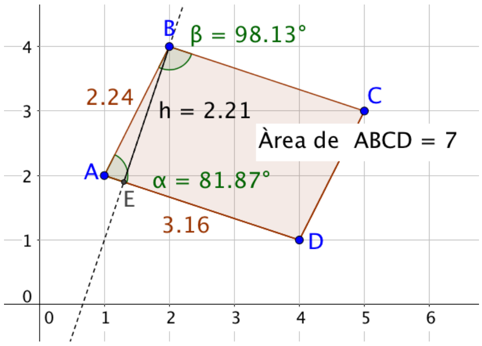
35.



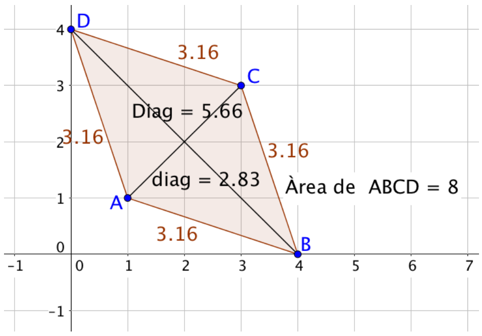
36.



37.



38.

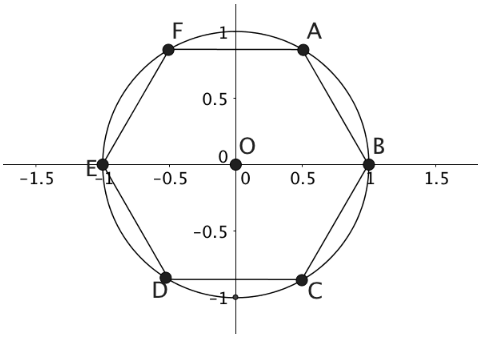


39. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Els vectors unitaris són $(\pm\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

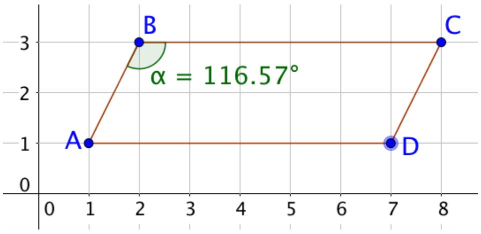
.pax .pax

Solucions de la pàgina 117:

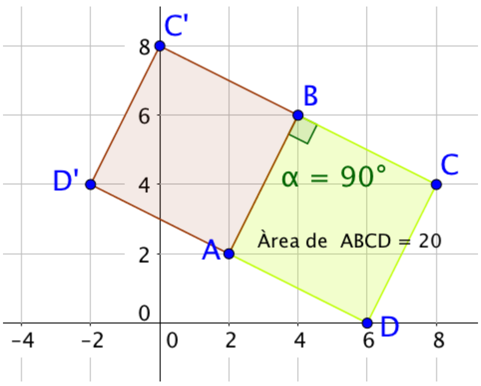
40. Sabem que el radi és 1 perquè $d(OB) = 1$. El punt $A = (\cos 60, \sin 60) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ i el punt $C = (\cos 60, -\sin 60) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. L'angle de l'hexàgon és $60°$.



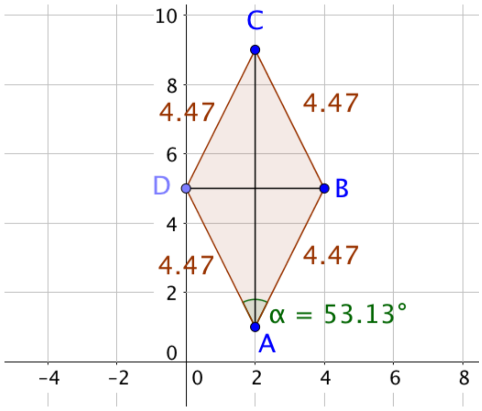
41.



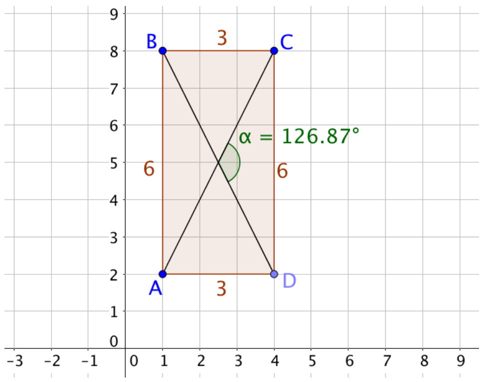
42.



43.



44.



45. Semblant a **??**. $C(4,2)$ i $D(3,0)$ o $C'(0,4)$ i $D'(-1,2)$

46. $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{(3,-1)\cdot(2,1)}{|(2,1)|} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

- **Autoavaluació:**

1. a) Punt final $(-3,2)$. b) Vector suma $\vec{v} + \vec{w} = (-2,3)$.

2. **a)** -3 **b)** -11

3. a) $2\sqrt{3}$. b) Els dos tenen mòdul 2. c) angle $30°$

4. a) $k = -2$. b) $k = \pm 4$. c) $k = -\sqrt{3}$

5. $(3/5, 4/5)$ o $(-3/5, -4/5)$

.pax .pax

.pax .pax

.pax .pax

Solucions de la pàgina 120:

1. **a)** $\overrightarrow{AB} = (-4, 2)$ i $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, 4) + (-2, 1) = (-1, 5)$ **b)** $M = \frac{A+B}{2} = \frac{(-2,10)}{2} = (-1, 5)$

2. $\overrightarrow{PQ} = (9, 3)$ i $X_1 = P + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = (-2, 1) + (3, 1) = (1, 2)$; $X_2 = P + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} = (-2, 1) + (6, 2) = (4, 3)$.

3. $\overrightarrow{AB} = (-4, -3)$; $\overrightarrow{AC} = (k - 1, -2)$; $\frac{-4}{k-1} = \frac{-3}{-2} \to k = -5/3$.

4. **a)** $M(\frac{11}{2}, 4)$ **b)** $P'(13, -11)$ **c)** $Q'(-2, 19)$

Objectius del tema:

4. Interpretar analíticament diferents situacions de la geometria plana elemental, obtenint les equacions de rectes i utilitzar-les, per resoldre problemes d'incidència i càlcul de distàncies.

4.1. Calcula distàncies entre punts i d'un punt a una recta, així com angles entre dues rectes.

4.2. Obté l'equació d'una recta en les seves diverses formes, identificant en cada cas els seus elements característics.

4.3. Reconeix i diferencia analíticament les posicions relatives de les rectes.

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 121:

5. Vectorial: $(x, y) = (1, -2) + \lambda(2, 7)$

Paramètriques: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 7\lambda \end{array} \right.$

Contínua: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{7}$

Punt-pendent $y + 2 = \frac{7}{2}(x - 1)$

General: $7x - 2y - 11 = 0$

Explícita: $y = \frac{7}{2}x - \frac{11}{2}$

6. **a)** $P(0, -1)$; $\vec{d}(3, -2)$ **b)** $P(-7, 2)$; $\vec{d}(1, 4)$

c) $P(0, 2)$; $\vec{d}(-1, 1)$ **d)** $P(2, 2)$; $\vec{d}(-3, 0)$

7. $P(0, 5)$; $\vec{d}(1, 2)$

Vectorial: $(x, y) = (0, 5) + \lambda(1, 2)$

Paramètriques: $\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{array} \right.$

Contínua: $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{2}$

Punt-pendent $y - 5 = 2(x - 0)$

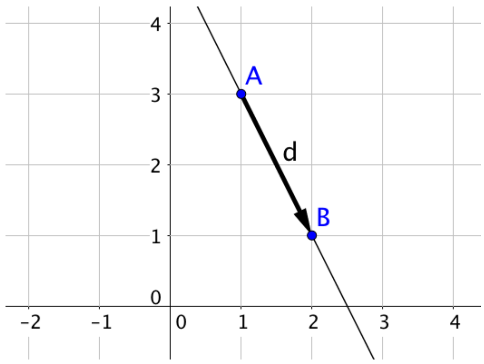
General: $2x - y + 5 = 0$

8. **a)** $\vec{d} = (1, -2)$; $m = -2$

b) $(2, 2) \notin r$; $(2, 2) \notin r$

c) $(2, 1)$; $(3, -1)$; $(0, 5)$

d)



Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 122:

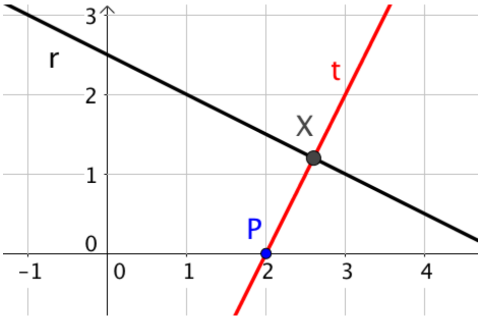
9. $\frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{3}$; $3x - 2y + 2 = 0$; $y = \frac{3}{2}x + 1$

10. $2x - 3y + C = 0$ essent $C = 6 - 2 = 4$; $(x, y) = (1, 2) + \lambda(3, 2)$; $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2}$

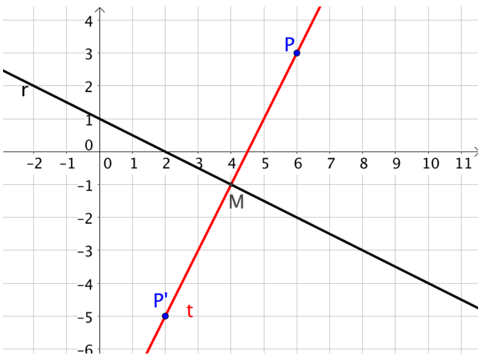
11. $y = -\frac{1}{2}x + n$ essent $n = 0$; En forma paramètrica: $\begin{cases} y = 2 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$

12. $y = -\frac{3}{2}x$ passa per $(0, 0)$

13. $t: \ 2x - y - 4 = 0$; $X(\frac{13}{5}, \frac{6}{5})$



14. $M(4, -1)$; $P' = 2M - P = 2(4, -1) - (6, 3) = (2, -5)$



Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 123:

15. $\vec{d_r} = (1, -2)$; $\vec{d_s} = (1, -2)$; $R(2, 1)$; vectors paral·lels i $R \notin s$ llavors són paral·leles.

16. $\vec{d_r} = (-1, 2)$; $\vec{d_s} = (1, -1)$; vectors independents són secants. Punt de tall $1 - \lambda + 1 + 2\lambda = 3$ trobam $\lambda = 1$ i el punt de tall $X(0, 3)$

17. $\vec{d_r} = (1, 4)$; $\vec{d_s} = (1, 4)$; $R(0, -2)$; vectors paral·lels i $R \in s$. Són coincidents. Hi ha infinits punts de tall (tots els de la recta)

18. $\vec{d_r} = (3, -2)$ i $\vec{d_s} = (-6, k)$. Volem que siguin paral·leles $\frac{3}{-6} = \frac{-2}{k}$, trobam $k = 4$. Comprovam que efectivament són paral·leles ja que $R(2, 0)$ no pertany a la recta s.

19. Per exemple si agafam el punt $S(k, 2)$ de la recta s i l'introduïm a la recta r trobam $2k + 6 + 5 = 0$, aleshores $k = -11/2$. Comprovam que efectivament són coincidents ja que els vectors directors $\vec{d_r} = (3, -2)$ i $\vec{d_s} = (-6, 4)$ són paral·lels.

20. La bisectriu del segon quadrant és $y = -x$, té pendent $m = -1$ o vector director $\vec{d_s}(1, -1)$. D'altra banda, la recta r té vector $\vec{d_r}(3, k)$. Imposam que siguin paral·lels, $\frac{1}{3} = \frac{-1}{k}$ i trobam $k = -3$

Notes:

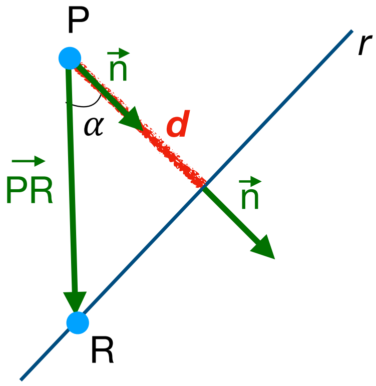
....

....

....

.pax .pax

Demostració fórmula distància punt – recta



Suposem que la recta r vengui donada en forma general $Ax+By+C=0$. Recordem que el vector normal a la recta és $\vec{n}=(A,B)$.

Si R és un punt qualsevol de la recta i $\vec{n}$ és el seu vector normal, observam de l'esquema de la figura que la distància s'obté per trigonometria

$$d=|\overrightarrow{PR}|\cos\alpha$$

Per definició de producte escalar:

$$\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}=|\overrightarrow{PR}|\,|\vec{n}|\,\cos\alpha$$

Si aïllam $\cos\alpha$ i ho reemplaçam en la fórmula anterior, trobam:

$$d=\frac{\overrightarrow{PR}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{(R_x-P_x,R_y-P_y)\cdot(A,B)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Si desenvolupam $(R_x-P_x,R_y-P_y)\cdot(A,B)=AR_x+BR_y-(AP_x+BP_y)=-C-(AP_x+BP_y)$. Aquí hem utilitzat el fet que el punt R pertany a la recta i, per tant, compleix la seva equació $AR_x+BR_y+C=0$.

Finalment

$$d=\frac{|AP_x+BP_y+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

el valor absolut | | és per assegurar que les distàncies surtin positives.

.pax .pax

Solucions de la pàgina 125:

21. **a)** $r:\ x+3y-4=0;\ d=\frac{3}{\sqrt{10}}$

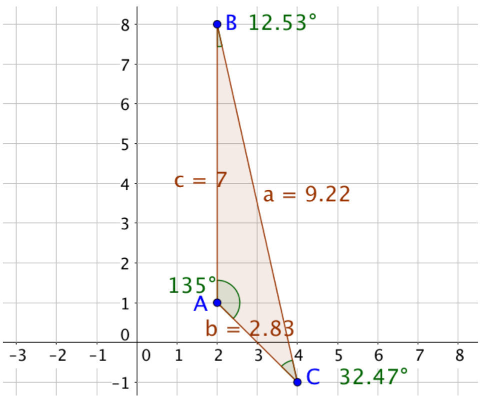
b) $r:\ 2x+y-4=0;\ d=0$

c) $r:\ x+2y-7=0;\ d=\frac{3}{\sqrt{5}}$

d) $r:\ 4x-y+6=0;\ d=0$

22. $\vec{d_r}=(-1,-1);\ \vec{d_s}=(1,1);\ S(1,-2);$ vectors paral·lels i $S\in s$. Formen un angle de $0°$

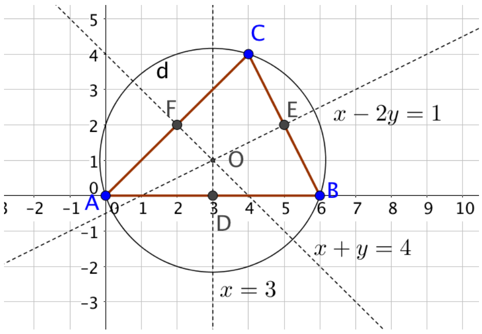
23.

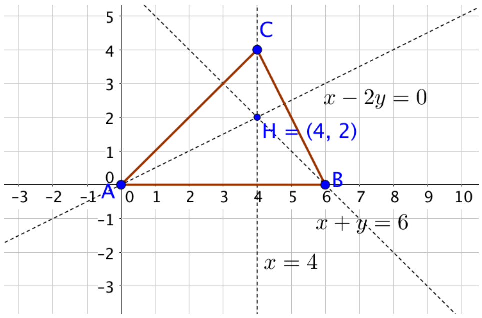


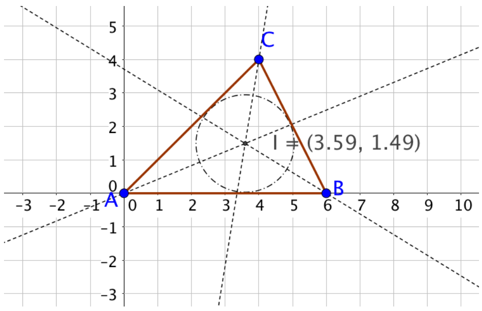
24. La recta en forma vectorial $X:(x,y)=(0,2)+t(4,3)$. Imposam que les distàncies $A--X$ i $B--X$ siguin iguals: $(4t+6)^2+(2+3t)^2=(4t)^2+(3t+8)^2$. Té solució única $t=2$. Llavors el punt $X(8,8)$.

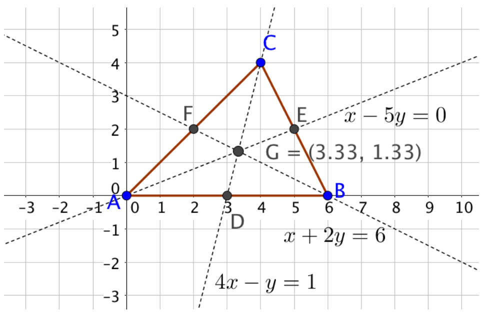
25. El feix de rectes és $r: y-2=m(x-1)$. Passa-la a forma general i aplica que $d(r,O)=1$.

26.









.pax .pax

Solucions de la pàgina 126:

27. **a)** $m = -3$

b) $(0,5) \in r$; $(1,3) \notin r$

c) $(x,y) = (1,2) + \lambda(-1,3)$

d) Gràfic

28. **a)** $\overrightarrow{AB} = (2,-2)$

b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2}$

c) $(2,1) \in r$; $(3,1) \notin r$

29. **a)** $m = 2$; $\vec{d} = (1,2)$ **b)** $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1}$

30. **a)** $y = -x + 3$ **b)** $y = x + 4$

31. Són secants formen un angle de $90°$. Es tallen al punt $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

32. Si la distància $d(r,P) = 0$ vol dir que el punt P pertany a la recta r.

Donat que $P(2,3)$ pertany a $2x - y - 1 = 0$, podem comprovar que $d(P,r) = \frac{|2\cdot 2-3-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 0$

33. **a)** $y = x$

b) $d = \dfrac{|2-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

34. **a)** $2x + y + 3 = 0$ **b)** $x - 2y + 2 = 0$

35. **a)** $C(3,8)$

b) $\overrightarrow{BC} = (3,1)$ i $\overrightarrow{BA} = (2,-6)$. Es compleix que $(3,1)\cdot(2,-6) = 0$ són perpendiculars

c) $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$; $\overline{BD} = 5\sqrt{2}$; $\overline{CD} = \overline{AB} = 2\sqrt{10}$

36. Són paral·leles, formen un angle de $0°$

37. $M = (2,1)$; $y = -\frac{1}{2}x + 2$

38.

a) $d(O,r)=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **b)** $d(O,r)=0$ **c)** $d(O,r)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

39. La distància és zero, perquè el punt pertany a la recta.

40. **a)** $r:\ x+y-1=0$; $d(P,r)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $d(P,r)=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

41. $d(P,r)=\sqrt{2}$

42. Escriu el feix de rectes com $y=1-m(x-3)$, troba els punts de tall amb els eixos i comprova que l'àrea és $A=\frac{1}{2}(1+3m)(3+\frac{1}{m})=6$. Resol l'equació i troba $m=1/3$.

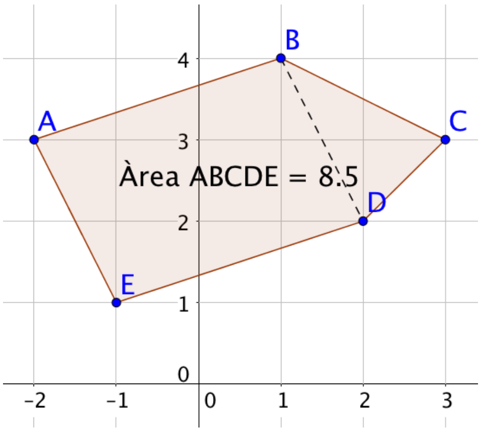
.pax .pax

.pax .pax

Solucions de la pàgina 128:

43. Gràficament $A'(1,4)$

44.



45. Troba el peu de la perpendicular de r pel punt A: $B=(0,3)$, $C=(1,4)$ i $D=(2,3)$

46. **a)** $y=5$ **b)** $x=\frac{9}{2}$ **c)** $y=x$

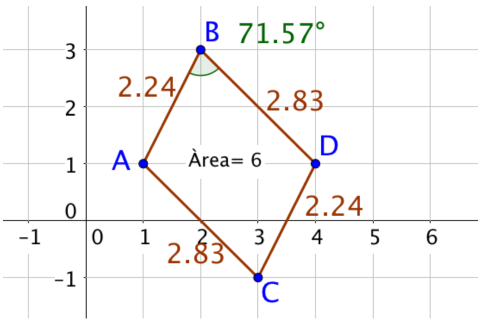
47. **a)** $y=-3x+13$ i $y=\frac{1}{3}x-1$

b) $y=-42.02x+18.93$ i $y=0.02x+0.12$

c) $y=x$ i $y=-x$ **d)** $x=0$ i $y=0$

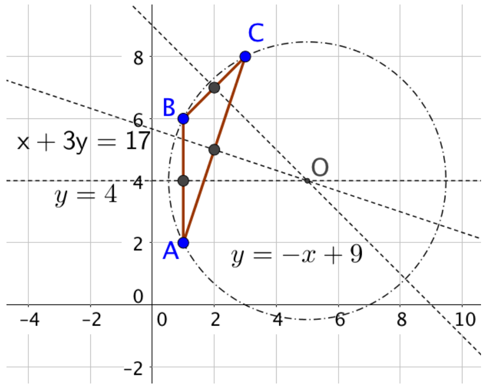
48. La perpendicular $2x-y=1$, $Q(1,1)$ i el simètric $A'(0,-1)$

49. Perímetre: 10.14

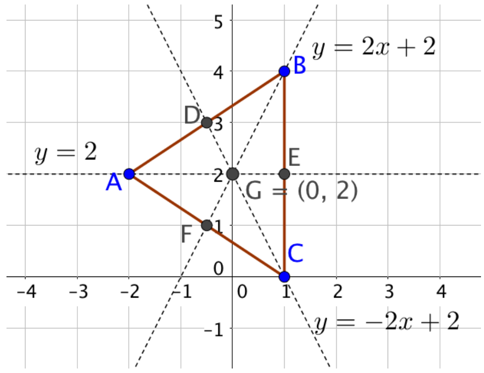


50. L'altre extrem del segment és el simètric de O respecte r. $O'(\frac{16}{5},\frac{8}{5})$

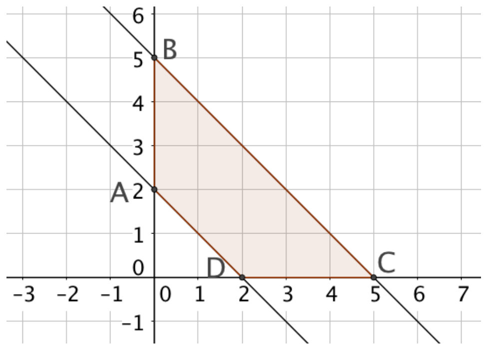
51.



52.



53. $A=\frac{21}{2}$.



54. El punt és $X(x,0)$. S'ha de complir que $\dfrac{|4x+6|}{5}=\dfrac{3x-9}{5}$. Trobam dues equacions $4x+6=\pm(3x-9)$. Té dues solucions $x=-15$ i $x=\frac{3}{7}$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 129:

- **Autoavaluació:**

1. a) $k=-7$, b) $k=-7$

2. Contínua $\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{1}$, general $x-5y+7=0$.

3. a) $(x,y)=(2,-3)+\lambda(2,5)$, b) $2x+3y-6=0$.

4. Si $k=-9/5$ són paral·leles, en altre cas són secants.

5. $k=\pm\sqrt{3}$.

6. $x=-3, y=-5$ i $x=17/5$ i $y=39/5$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 130:

1. $d(A,X) = d(B,X)$.

$(x-5)^2 + (y+3)^2 = (x-2)^2 + y^2$

$y = x - 5$ és la mediatriu del segment AB

2. $d^2(X,A) - d^2(X,B) = 15$.

$x^2 + y^2 - ((x-6)^2 + (y-3)^2) = 15$. És la recta $y = -2x + 10$.

3. $d(X,r) = d(X,s)$.

$\dfrac{|4x-3y+8|}{5} = \dfrac{|12x+5y-7|}{13}$, dóna dues equacions $13(4x-3y+8) = \pm 5(12x + 5y - 7)$

Per cadascun dels signes, trobam una rectes com a lloc geomètric: $8x + 64y - 139 = 0$ i $112x - 14y + 69 = 0$

Corresponen a les dues bisectrius de les dues rectes.

https://www.geogebra.org/m/vpkYZGqu

Objectius del tema:

5. Tractar el concepte de lloc geomètric en el pla. Identificar les formes corresponents a alguns llocs geomètrics usuals, estudiant les seves equacions reduïdes i analitzant les seves propietats mètriques.

5.1. Coneix el significat de lloc geomètric, identificant els llocs més usuals en geometria plana així com les seves característiques.

5.2. Fa investigacions utilitzant programes informàtics específics en els quals cal seleccionar, estudiar posicions relatives i fer interseccions entre rectes i les diferents còniques estudiades.

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Mètode de completar quadrats

Quan tenim una identitat notable és evident que

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Però, que passaria si només tinguessim $x^2 - 2x$?

$$x^2 - 2x = \underbrace{x^2 - 2x + \mathbf{1}}\, \mathbf{-1} = (x-1)^2 - 1$$

Com veim acabam de completar el quadrat de l'expressió.

Aplicació a la circumferència

Ens donen l'equació general de la circumferència $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$ i en volem saber el centre i el radi. Per això, és convenient passar l'equació a forma canònica. Com ho feim? Completam quadrats!

Primer ajuntam les x i els termes amb y

$$\underbrace{x^2 - 4x} + \underbrace{y^2 + 6y} = 3$$

Completam quadrats de cada part

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4}\, -4 + \underbrace{y^2 + 6y + 9}\, -9 = 3$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 = 3$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

D'aquí fàcilment identificam el centre $O = (2, -3)$ i el radi $R = \sqrt{16} = 4$.

.pax .pax

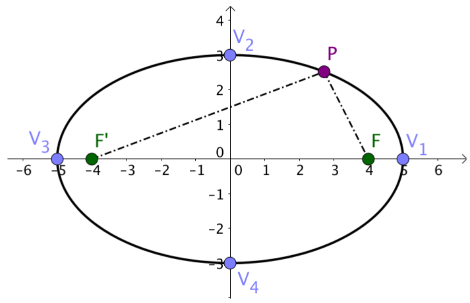
Solucions de la pàgina 132:

4. Radi $\sqrt{8}$, $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8$

5. Centre $O(1,0)$, radi $R = 1$

Exemple construcció el·lipse

DADES: Volem trobar l'equació de l'el·lipse que té focus a $F(4,0)$ i $F'(-4,0)$ i té semieix major $a = 5$.



https://www.geogebra.org/m/yEZzBKCS

El semieix menor es troba de $b = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Per a qualsevol punt $P(x,y)$ sobre l'el·lipse, es compleix que

$$d(P,F) + d(P,F') = 2a = 10$$

Expressam les distàncies en components

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$$

Aïllam la primera arrel i elevam al quadrat els dos membres

$$(x-4)^2 + y^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

Tornam a aïllar l'arrel i elevam al quadrat un altre pic

$$-16x - 100 = -20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$256x^2 + 3200x + 10000 = 400\left((x+4)^2 + y^2\right)$$

Simplificant els quadrats d'aquesta expressió trobam $144x^2 + 400y^2 = 3600$, que si dividim tot entre 3600 arribam a

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 133:

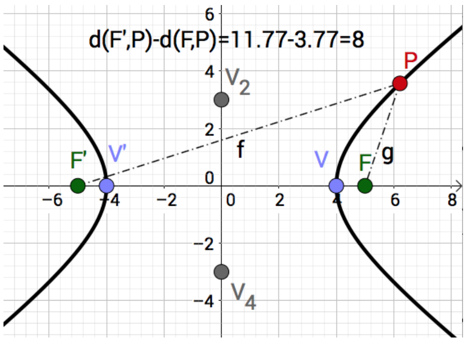
6. Centre $O(-1,1)$, semi-eixos $a=3$, $b=2$, focus $F'(-1-\sqrt{5},1)$ i $F'(-1+\sqrt{5},1)$. Excentricitat $e=0.745$

7. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ $e=2/3$

8. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{96}=1$

Exemple construcció hipèrbola

DADES: Volem trobar l'equació de la hipèrbola que té focus a $F(5,0)$ i $F'(-5,0)$ i té semieix major $a=4$.



https://www.geogebra.org/m/CdRCjv8S

El semieix menor es troba de $b=\sqrt{5^2-4^2}=3$.
Per a qualsevol punt $P(x,y)$ sobre la hipèrbola, es compleix que

$$d(P,F)-d(P,F')=\pm 2a=\pm 8$$

Expressam les distàncies en components

$$\sqrt{(x-5)^2+y^2}-\sqrt{(x+5)^2+y^2}=\pm 8$$

Aïllam la primera arrel i elevam al quadrat els dos membres

$$(x-5)^2+y^2=64+(x+5)^2+y^2+16\sqrt{(x+5)^2+y^2}$$

Tornam a aïllar l'arrel i elevam al quadrat un altre pic

$$-20x-64=16\sqrt{(x+5)^2+y^2}$$

$$400x^2+2560x+4096=256\left((x+5)^2+y^2\right)$$

Simplificant els quadrats d'aquesta expressió trobam $144x^2-256y^2=2304$, que si dividim tot entre 2304 arribam a

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 134:

9. $O(1,0)$, $a=4$, $b=3$, $F'(-4,0)$ i $F(6,0)$, asímptotes $y=\pm 3(x-1)/4$, $e=5/4$.

10. $a=b=1/\sqrt{2}$, $2x^2-2(y-2)^2=1$, $e=\sqrt{2}$.

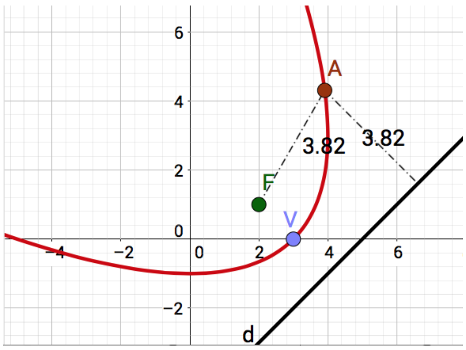
11. $x=\frac{1}{12}y^2$

12. $V(3,0)$, $F(0,1)$, $d: y=-1$

13. És una hipèrbola. $d=c-a=0.75a$

Exemple construcció paràbola obliqua

DADES: Volem trobar l'equació de la paràbola que té focus a $F(2,1)$ i recta directriu $r:\ y=x-5$.



https://www.geogebra.org/m/b6JmdezZ

Per a qualsevol punt $A(x,y)$ sobre la paràbola, es compleix que

$$d(A,F)=d(A,r)$$

Expressam les distàncies en components

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\frac{|x-y-5|}{\sqrt{2}}$$

Elevam al quadrat

$$(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{(x-y-5)^2}{2}$$

Multiplicam per tot i desenvolupam els quadrats:

$$2\left[x^2-2x+4+y^2-2y+1\right]=x^2+y^2-2xy-10x+10y+25$$

Simplificant, arribam a l'equació de la paràbola obliqua:

$$x^2+y^2+2xy+2x-14y-15=0$$

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Solucions de la pàgina 135:

14. **a)** Centre $(2,-1)$; Semieix major $a = 3$; Semieix menor $b = 2$; Semi-distància focal $c = \sqrt{5}$; excentricitat $e = 0.745$; Focus $F'(2-\sqrt{5},-1)$ i $F'(2+\sqrt{5},-1)$; Vèrtexs $V_1(5,-1)$ $V_2(-1,1)$ $V_3(2,1)$ $V_4(2,-3)$

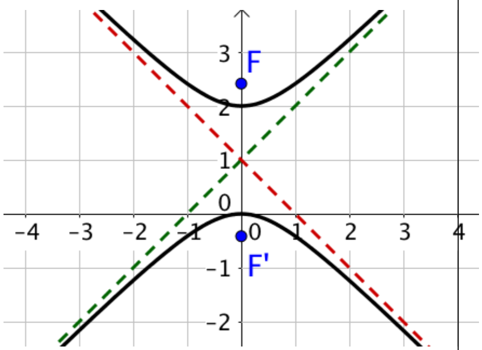
b) Primer passam a canònica $\dfrac{(x-1)^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{4/9} = 1$

Centre $(1,0)$; Semieix major $a = 1$; Semieix menor $b = 2/3$; Semi-distància focal $c = \sqrt{5}/3$; excentricitat $e = 0.745$; Focus $F'(1-\sqrt{5}/3,0)$ i $F'(1+\sqrt{5}/3,0)$; Vèrtexs $V_1(2,0)$ $V_2(0,0)$ $V_3(1,2/3)$ $V_4(1,-2/3)$

15. **a)** $\dfrac{(y-1)^2}{1^2} - \dfrac{x^2}{1^2} = 1$

b) Es tracta d'una hipèrbola vertical (canviam els papers de x, y) equilàtera. Centre $(0,1)$.

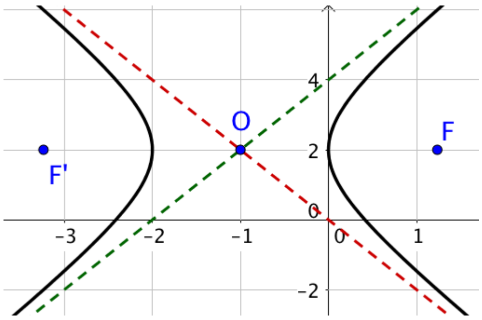
Els semieixos són 1 i la semi-distància focal $c = \sqrt{2}$. Els focus $F(0, 1+\sqrt{2})$ i $F(0, 1-\sqrt{2})$.



c) Transformam l'equació com suma per diferència $((y-1)+x) \cdot ((y-1)-x) = 1$. Les asímptotes són $y = -x+1$ i $y = x+1$

16. **a)** Centre $(-1,2)$; Semieix major $a = 1$; Semieix menor $b = 2$;

Semi-distància focal $c = \sqrt{5}$; excentricitat $e = 2.236$; Focus $F'(-1-\sqrt{5},2)$ i $F'(-1+\sqrt{5},2)$; Vèrtexs $V_1(0,2)$ $V_2(-2,2)$; Asímptotes: $y = -2x$ i $y = 2x+4$

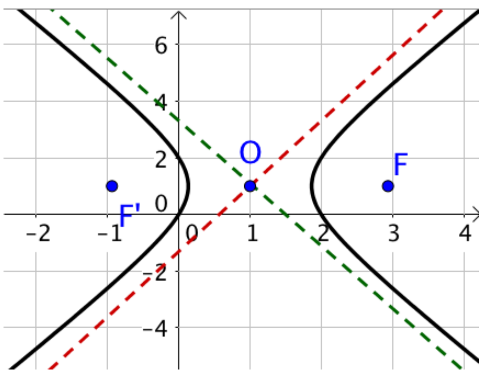


b) Primer passam a canònica $\dfrac{(x-1)^2}{3/4} + \dfrac{(y-1)^2}{3} = 1$

Centre $(1,1)$; Semieix major $a = \sqrt{3}/2$; Semieix menor $b = \sqrt{3}$;

Semi-distància focal $c = \sqrt{15}/2$; excentricitat $e = 2.236$; Focus $F'(1-\sqrt{15}/2,1)$ i $F'(1+\sqrt{15}/2,1)$; Vèrtexs $V_1(1+\sqrt{3}/2,1)$ $V_2(1-\sqrt{3}/2,1)$;

Asímptotes: $y = -2.209x + 3.309$ i $y = 2.309x - 1.309$



.pax .pax

Solucions de la pàgina 136:

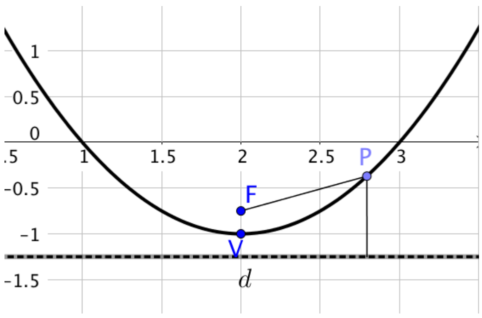
17. Com que $O(1,2)$ i $V(4,2)$; el semi-eix major $a = d(V,O) = 3$. Com que $e = c/a = 2$, la semi-distància focal $c = 6$.

El semieix menor $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{27}$.

L'equació canònica $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{27} = 1$.

18. L'equació d'una paràbola vertical per amunt en centre $(2,-1)$ és de la forma $y + 1 = k(x-2)^2$. Substituïm el punt $(1,0)$ per trobar $k = 1$.

Aleshores, $y + 1 = (x-2)^2$. Sabem $\dfrac{1}{2p} = 1$, per tant $p = \frac{1}{2}$. El Focus és a $F(1, -\frac{3}{4})$ i la directriu $y = -\frac{5}{4}$.



19. **a)** Canònica: $x = -\frac{1}{3/2}y^2$. Paràbola horitzontal cap a l'esquerra centrada $(0,0)$. $p = 3/4$;

El Focus $(-3/4, 0)$ i la directriu $x = 3/4$

b) Hipèrbola centre a $(-1,1)$ i focus $F(-1+\sqrt{13}, 1)$ i $F'(-1-\sqrt{13}, 1)$;

Les asímptotes: $y = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$ i $y = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$

https://www.geogebra.org/m/mKY89SzR

20. Totes són hipèrboles obliqües excepte b) que és una paràbola també obliqua.

https://www.geogebra.org/m/tzkCVusA

21. **a)** El centre es $O = \frac{F+F'}{2} = (2,2)$; La semidistància focal $c = dist(OF) = \sqrt{2}$; mirant el dibuix $P = (0,0)$ es troba sobre el semi-eix menor $b = d(PO) = 2\sqrt{2}$; el semieix major $a = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{10}$ excentricitat $e = 0.447$

https://www.geogebra.org/m/zf9ZxYWn

b) El centre es $O = \frac{F+F'}{2} = (-3,1)$; La semidistància focal $c = dist(OF) = \sqrt{5}$; mirant el dibuix sabem que $d(F_1,P) + d(F_2,P) = 2a$ es troba sobre el semieix major $a = 6/2 = 3$; el semieix menor $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2$; excentricitat $e = 0.745$

https://www.geogebra.org/m/VAX9PeVf

22.

https://www.geogebra.org/m/VJGVSq6z

23. **a)** $d(X,d) = d(X,F)$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 12y + 20 = 0$$

L'eix simetria passa per focus i és perpendicular directriu $y = -x + 4$

b) $d(X,d)=d(X,F)$

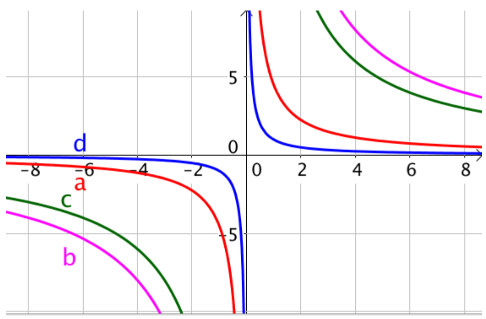
$(x+1)^2+(y-1)^2=\left(\frac{|3x+y-4|}{\sqrt{10}}\right)^2$

$x^2+9y^2-6xy+44x-12y+4=0$

L'eix simetria passa per focus i és perpendicular directriu $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

https://www.geogebra.org/m/CxZaNSBY

24.



25. **a)** És una hipèrbola amb centre $O(1,-1)$ i semieixos 2 i 3

b) És una el·lipse amb centre $O(2,1)$ i semieixos 3 i 2

c) És una paràbola horitzontal cap a la dreta centrada a l'origen. El focus es troba a $F(1/2,0)$

26. $x^2+y^2+Ax+By+C=0$. Plantejam i resolem un sistema 3×3.

$$\begin{cases} A+4B+C=-17 \\ 3A+4B+C=-25 \\ 5A+5B+C=-50 \end{cases};$$

Trobam $A=-4$; $B=-17$; $C=55$. L'equació de la circumferència és $x^2+y^2-4x-17y+55=0$. En forma canònica: $(x-2)^2+(y-\frac{17}{2})^2=\frac{85}{4}$

Solució alternativa: Calcula el circumcentre del triangle ABC.

27. $\frac{(x+1)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$

28. **a)** E·lipse centrada a l'origen; $F(\sqrt{3},0)$ i $F'(-\sqrt{3},0)$

b) Paràbola horitzontal cap a la dreta centrada a l'origen; $F(\frac{1}{2},0)$

c) Hipèrbola centrada a $(3,0)$; $F(3+\sqrt{13},0)$ i $F'(3-\sqrt{13},0)$

d) El·lipse vertical centrada a $(1,-1)$; $F(1,-1+\sqrt{5})$ i $F'(1,-1-\sqrt{5})$

29. **a)** Completam quadrats: $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$; és una el·lipse horitzontal en centre a $(2,0)$ i semieixos 2 i $\sqrt{2}$

b) Completam quadrats: $-x^2+(y-1)^2=1$; és una hipèrbola equilàtera vertical amb centre $(0,1)$. El seu focus es troben a $F(0,1+\sqrt{2})$ i $F'(0,1-\sqrt{2})$

30. $O=\frac{A+B}{2}=(2,5)$; això implica que AB és una diagonal del la circumferència. El radi és $R=d(OA)=\sqrt{2}$. L'equació: $(x-2)^2+(y-5)^2=2$ o en general $x^2+y^2-4x-10y+27=0$

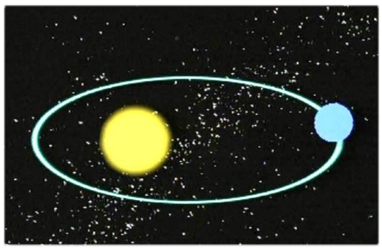
32. Centre $O(5/2,1)$; $c=3/2$; $a=5/2$; $b=2$; $\frac{(x-5/2)^2}{25/4}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$; $e=3/5=0.6$

33. Dels dos punts que ens donen deduïm els semieixos major 4 i menor 2. L'equació és $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$, $c=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$; Focus a $F(1+2\sqrt{3},-1)$ i $F(1-2\sqrt{3},-1)$; excentricitat $e=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$

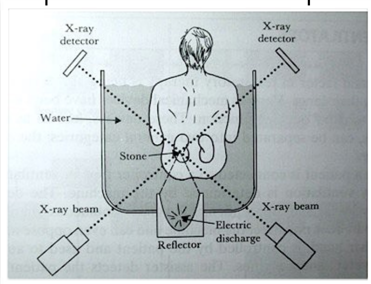
Aplicacions de les còniques

L'el·lipse

Òrbites planetes i estels

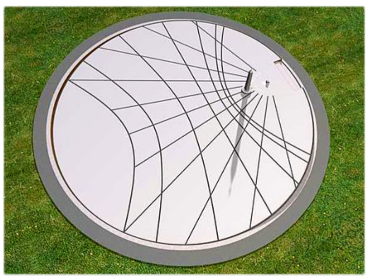


Aplicacions mèdiques



La hipèrbola

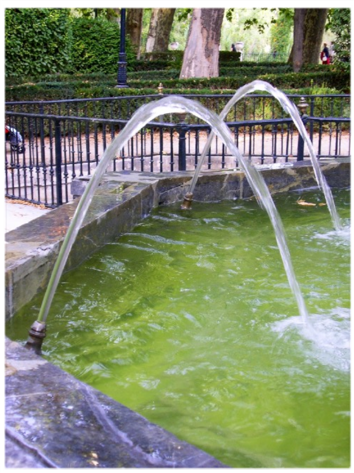
Ombres del sol al llarg del dia



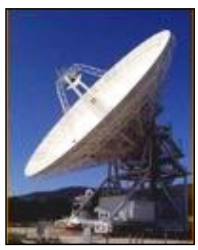
Construccions

La paràbola

Tir parabòlic



Antenes i fars



.pax .pax

Solucions de la pàgina 137:

34. Si és equilàtera horitzontal i centrada a l'origen, serà de la forma $x^2-y^2=a^2$. Substituint el punt $1^2-3^2=a^2$, això no és possible.

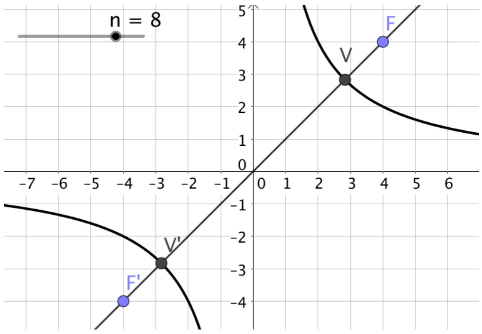
Aleshores, la hipèrbola ha d'ésser vertical $-x^2+y^2=8$. essent $a=b=2\sqrt{2}$; $c=4$ i els focus són als punts $F(0,4)$ i $F'(0,-4)$

35. Com que les asímptotes es tallen al (0,0) aquest és el centre de la hipèbola. És a dir, està centrada a l'origen. $y=\pm\frac{b}{a}x$; aleshores sabem que $b=2a$. L'equació és $\dfrac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$. Si hi substituïm el punt (2,0) trobam que $a=\sqrt{2}$ i $b=2\sqrt{2}$.

L'equació és $\dfrac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$

36. En general $x\cdot y=k$ amb $k>0$; tindrà els vèrtex sobre la recta $y=x$ i seran $V(\pm\sqrt{k},\pm\sqrt{k})$. El semieix major per Pitàgores $a=\sqrt{2k}$. Com que és equilàtera $a=b=\sqrt{2k}$.

Trobam la semi-distància $c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{k}$ sobre la recta $y=x$, per trigonometria podem localitzar els vèrtexs (projectam l'angle de $45°$) $F(\sqrt{k},\sqrt{k})$ i $F(-\sqrt{2k},-\sqrt{2k})$.



Pel nostre cas $k=8$ i els focus són a $F(4,4)$ i $F(-4,-4)$.

- **Autoavaluació:**

1. $x^2+y^2-2x-2y-23=0$ o $(x-1)^2+(y-1)^2=25$. Té centre $O(1,1)$ i radi $R=5$.

2. $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$. La semi-distància focal $c=4$, els focus són $F'(-5,3)$ i $F(3,3)$, i l'excentricitat $e=0.8$.

3. Semi-eixos: $a=2$, $b=\sqrt{2}$, les asímptotes $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$, semi-distància focal: $c=\sqrt{6}$ i l'excentricitat $e=1.225$.

4. La distància focus-directriu és $p=1/6$, l'equació $y-2=3(x-1)^2$, la directriu és la recta $y=23/12$ i la posició del focus $F(1,25/12)$.

5. a) El·lipse de centre $(1,0)$ i semi-eixos $a=2$, $b=1$. b) Circumferència de centre $(1,2)$ i radi 2. c) Paràbola vertical de vèrtex $(0,-2)$ i distància Focus-directriu $p=3/2$.

.pax .pax

Solucions de la pàgina 138:

1. a) $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ b) $-2\vec{u} + 3\vec{v} = (-5, -4)$ c) $2\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 6$

2. $a = -2$

3. a) $m = -1, n = 3$ b) $116.57°$

4. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

5. $y = -8$

6. Paramètriques $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 + 1t \\ y = 3 + 2t \end{array} \right.$. General $2x - y - 3 = 0$.

7. a) $k = -2$. b) $k = -4$

8. $A'(2, 2)$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 139:

9. El punt d'intersecció és $I(5, 11)$ i el pendent de la recta $m' = 1/3$. La recta és $y - 11 = \frac{1}{3}(x - 5)$.

10. $P(\pm 5, 0)$

11. $Area = 5$

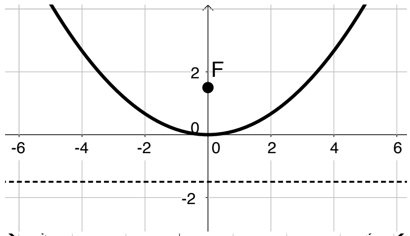
12. Mediatriu AC: $x - 2y + 1 = 0$, Mediatriu AB: $14x - 4y + 21 = 0$, Circumcentre $O(-19/12, -7/24)$

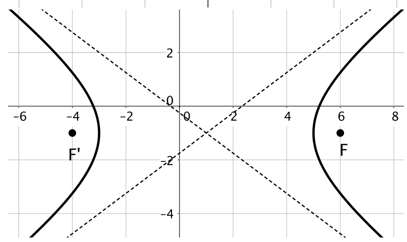
13. Centre $O(1, -3)$ i radi $R = 2$.

14. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 0$

15. a) Paràbola vertical amb vèrtex $V(0, 0)$, $p = 3$, focus $F(0, 3/2)$ i directriu la recta $y = -3/2$.

b) Hipèrbola de centre $O(1, -1)$, semi-eixos $a = 4, b = 3$, semi-distància focal $c = 5$. Excentricitat $e = 1.25$. Focus a $F'(-4, -1)$, $F(6, -1)$. Asímptotes $y + 1 = \pm\frac{3}{4}(x - 1)$.





16. $a = 39.3$ ua, $c = 9.8$ ua, $b = 38.06$ ua.
$$\frac{x^2}{39.3^2} + \frac{y^2}{38.06^2} = 1$$

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

.pax .pax

.pax .pax

Distribucions marginals

2. Tabla de doble entrada

Una compañía discográfica ha recopilado en la tabla de la derecha la siguiente información sobre el número de conciertos dados por 15 grupos musicales durante un verano, y las ventas de discos de estos grupos (en miles).

CONC. (y) / DISCOS (x)	10 - 30	30 - 40	40 - 80
1 - 5	3	0	0
5 - 10	1	4	1
10 - 20	0	1	5

a) Calcular el número medio de discos vendidos.

b) ¿Cuál es el coeficiente de correlación?

c) Obtener la recta de regresión de Y sobre X.

d) Si un grupo musical vende 18 000 discos, ¿qué número de conciertos se prevé para él?

a)

DISCOS (x_i) / CONC. (y_i)	20	35	60	
2,5	3	0	0	3
7,5	1	4	1	6
15	0	1	5	6
	4	5	6	

b)

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
2,5	3	7,5	6,25	18,75
7,5	6	45	56,25	337,5
15	6	90	225	1 350
	15	142,5		1 706,25

$$\bar{x} = \frac{142,5}{15} = 9,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1\,706,25}{15} - 9,5^2} = 4,85$$

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
20	4	80	400	1 600
35	5	175	1 225	6 125
60	6	360	3 600	21 600
	15	615		29 325

$$\bar{y} = \frac{615}{15} = 41$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{29\,325}{15} - 41^2} = 16,55$$

$$\Sigma x \cdot y \cdot f = 6\,825$$

$$\sigma_{xy} = \frac{6\,825}{15} - 9,5 \cdot 41 = 65,5$$

$$r = \frac{65,5}{4,85 \cdot 16,55} = 0,81$$

c) $m_{yx} = \dfrac{65,5}{4,85^2} = 2,78$

Recta de regresión de Y sobre X

$y - 41 = 2,78(x - 9,5)$

d) $\hat{y}(18) = 2,78(18 - 9,5) = 23,63$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 143:

1.

a) Qualitativa

b) Quantitativa discreta

c) Quantitativa discreta

d) Quantitativa contínua

e) Qualitativa

f) Quantitativa discreta

g) Quantitativa contínua

h) Quantitativa contínua

2.

x	0	1	2	3	4	5	6
f	2	4	21	15	6	1	1

c) $\bar{x} = 2.52$ i $\sigma = 0.496$ fills.

Objectius del tema:

1. Descriure i comparar conjunts de dades de distribucions bidimensionals

1.1. Elabora taules bidimensionals de freqüències a partir de les dades d'un estudi estadístic, amb variables discretes i contínues.

1.2. Calcula i interpreta els paràmetres estadístics més usuals en variables bidimensionals.

1.3. Calcula les distribucions marginals i diferents distribucions condicionades a partir d'una taula de contingència, així com els seus paràmetres (mitjana, variància i desviació típica).

1.4. Decideix si dues variables estadístiques són o no dependents a partir de les seves distribucions condicionades i marginals.

1.5. Usa adequadament mitjans tecnològics per organitzar i analitzar dades des del punt de vista estadístic, calcular paràmetres i generar gràfics estadístics.

2. Interpretar la possible relació entre dues variables i quantificar la relació lineal.

2.1. Distingeix la dependència funcional de la dependència estadística i estima si dues variables són o no estadísticament dependents mitjançant la representació del núvol de punts.

2.2. Quantifica el grau i sentit de la dependència lineal entre dues variables mitjançant el càlcul i interpretació del coeficient de correlació lineal.

2.3. Calcula les rectes de regressió de dues variables i obté prediccions a partir d'elles.

2.4. Avalua la fiabilitat de les prediccions obtingudes a partir de la recta de regressió mitjançant el coeficient de correlació lineal.

.pax .pax

Solucions de la pàgina 144:

3.

x	2.5-3	3-3.5	3.5-4	4-4.5	4.5-5
f	6	10	11	8	5

c) $\bar{x} = 3.7$ i $\sigma = 0.62$ kg.

4.

a) Funcional $D = 2R$

b) Correlació negativa

c) Correlació positiva

d) Correlació positiva

e) Correlació positiva

f) Correlació positiva

Notes:

....

....

....

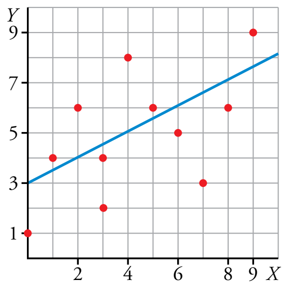
.pax .pax

Núvols de punts

4 **Representa la nube de puntos de esta distribución y estima cuál de estos tres puede ser el coeficiente de correlación:**

a) $r = 0{,}98$ **b)** $r = -0{,}87$ **c)** $r = 0{,}58$

x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

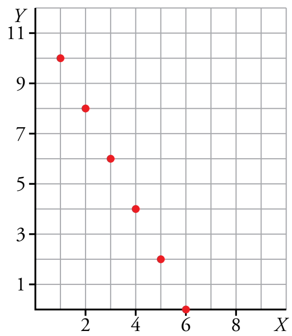


c) $r = 0{,}58$

5 **Representa sobre papel cuadriculado la nube de puntos correspondiente a esta distribución:**

x	1	2	3	4	5	6
y	10	8	6	4	2	0

¿Cuál crees que es el coeficiente de correlación?



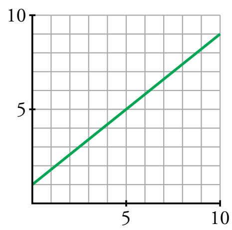
$r = -1$ porque están alineados.

6 **a) En tu cuaderno, en una cuadrícula como esta, sitúa diez puntos de modo que estimes que su correlación sea 0,9 y una de sus rectas de regresión sea la que ves.**

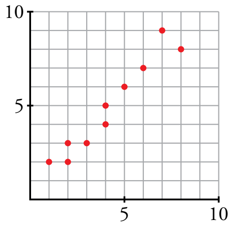
b) Repite la experiencia para conseguir un coeficiente de correlación de 0,6.

c) Haz lo mismo para un coeficiente de 0,3.

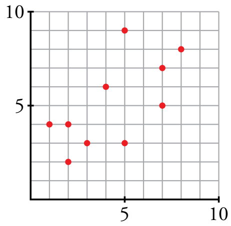
* ***Atención: se pide estimar, pero no calcular.***



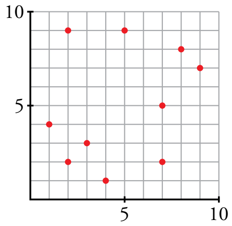
a) $r = 0{,}9$



b) $r = 0{,}6$



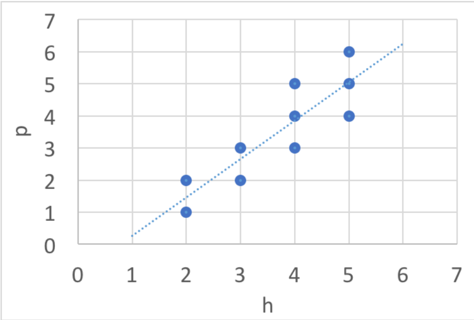
c) $r = 0{,}3$



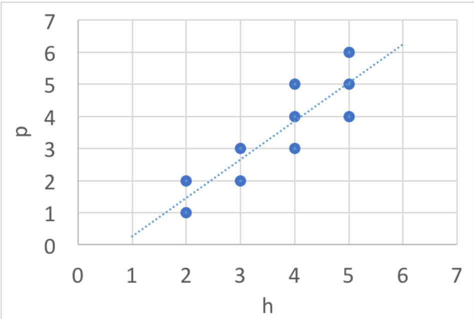
.pax .pax

Solucions de la pàgina 146:

5. Existeix una correlació positiva forta entre el nombre d'habitacions i les persones que hi viuen.



6. Existeix una correlació positiva feble entre les variables.



7. **a)** Solució gràfica

b) Correlació +: B); D) aquesta darrera és quasi nul·la. Correlació –: A); C)

c) A) és funcional $y = -2x + 12$

d) Correlacions: -1=A) $<$ C) $<$ D) $<$ B)

Notes:

....

....

....

.pax .pax

Càlcul de r amb dades agrupades

2. Tabla de doble entrada

Una compañía discográfica ha recopilado en la tabla de la derecha la siguiente información sobre el número de conciertos dados por 15 grupos musicales durante un verano, y las ventas de discos de estos grupos (en miles).

CONC. (y) / DISCOS (x)	10 - 30	30 - 40	40 - 80
1 - 5	3	0	0
5 - 10	1	4	1
10 - 20	0	1	5

a) Calcular el número medio de discos vendidos.

b) ¿Cuál es el coeficiente de correlación?

c) Obtener la recta de regresión de Y sobre X.

d) Si un grupo musical vende 18 000 discos, ¿qué número de conciertos se prevé para él?

a)

DISCOS (x_i) / CONC. (y_i)	20	35	60	
2,5	3	0	0	3
7,5	1	4	1	6
15	0	1	5	6
	4	5	6	

b)

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
2,5	3	7,5	6,25	18,75
7,5	6	45	56,25	337,5
15	6	90	225	1 350
	15	142,5		1 706,25

$$\bar{x} = \frac{142,5}{15} = 9,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1\,706,25}{15} - 9,5^2} = 4,85$$

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
20	4	80	400	1 600
35	5	175	1 225	6 125
60	6	360	3 600	21 600
	15	615		29 325

$$\bar{y} = \frac{615}{15} = 41$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{29\,325}{15} - 41^2} = 16,55$$

$$\Sigma x \cdot y \cdot f = 6\,825$$

$$\sigma_{xy} = \frac{6\,825}{15} - 9,5 \cdot 41 = 65,5$$

$$r = \frac{65,5}{4,85 \cdot 16,55} = 0,81$$

c) $m_{yx} = \dfrac{65,5}{4,85^2} = 2,78$

Recta de regresión de Y sobre X

$y - 41 = 2,78(x - 9,5)$

d) $\hat{y}(18) = 2,78(18 - 9,5) = 23,63$

.pax .pax

Solucions de la pàgina 148:

8. **a)**

https://goo.gl/hpSTWs

b) $r = -0,24$

c) Pràcticament no existeix cap correlació entre les variables i per tant no té sentit estimar la taxa a partir de l'IPC.

9. $y = 1.194 + 4.78(x - 0.232)$, el pendent és la constant elàstica $k = 4.78$ N/m. L'allargament per a $y = 2$ N és $x = 40$ cm. És bastant fiable ja que $r = 0,998$.

10. **a)** $y = 6,743x + 19,81$

https://goo.gl/ExXjiX

b) quan $x = 6$ estimam que $y = 60,3$ gèrmens/cm^3. La predicció és molt bona perquè tenim una correlació forta amb $r = 0,99894$.

Recta X sobre Y

Si volem fer una predicció conegut el valor de y trobar el valor de x, podem utilitzar l'equació de la recta de regressió $y = \bar{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$ i aïllar el valor de x.

El més lògic, però és utilitzar la recta de regressió X sobre Y

$$x = \bar{x} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y})$$

que ja ens proporcionarà directament el valor de x conegut y.

Cal assenyalar que quan $|r| \to 1$, les dues prediccions seran pràcticament iguals. Per correlacions febles, obtindrem valors molt distints, cosa que indica que la predicció és poc fiable.

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 149:

11. a) $r = -0.997$ correlació negativa forta; b) Recta de regressió $y = -0.2632x + 10.37$, altura $y = 8.84$ m. c) $x = 66$ hores

12.

a) El coeficient de regressió $r = 0,9857$ és una correlació positiva forta

https://goo.gl/5nRcAv

b) La recta de regressió lineal $y = 0,9319x - 16,509$ estimam el valor de y quan $x = 24$ i trobam $y = 5,857$. Segons la wikipèdia té una densitat de 7,140 g/cm^3.

https://es.wikipedia.org/wiki/Cromo

Notes:

. . . .

. . . .

. . . .

.pax .pax

Solucions de la pàgina 150:

13. **a)** La recta de regressió és $y = 3,9585x - 0,014$. Tenim una correlació positiva forta.

https://goo.gl/cY7x1L

b) Segons la teoria el pendent de la recta de regressió ha d'esser igual a $3,9585 = \frac{4\pi^2}{g}$; d'aquí podem aïllar $g = 9,973$ m/s^2 que s'assembla bastant al $9,8$ del llibres de text.

Amb la recta de regressió estimam la y quan $x = 0.75$ m; $y = 2,9548$ s^2; el període és l'arrel quadrada d'aquest nombre $T = 1,719$ s.

14. $N = \sum_i f_i = 200$; llavors $a + b + 135 = 200$. Després la mitjana

$$\frac{a + 2 \cdot 32 + 3 \cdot 35 + 4 \cdot 33 + 5b + 6 \cdot 35}{200} = 3.6 \rightarrow 511 + a + 5b = 720.$$

Resolem el sistema d'equacions i trobam $a = 29$ i $b = 36$.

La moda és $Mo = 5$; la mediana és $Me = 4$

15.

x	y
$[30,\ 40)$	1
$[40,\ 50)$	3
$[50,\ 60)$	5
$[60,\ 70)$	11
$[70,\ 80)$	12
$[80,\ 90)$	4

$N = 36$; $\sum f \cdot x = 2400$; $\sum f \cdot x^2 = 165300$

$\bar{x} = 66.67$; Var$= 147.22$; $\sigma = 12.13$; C.V.= 0.18

16.

x	y
$[2,\ 4)$	11
$[4,\ 6)$	19
$[6,\ 8)$	4
$[8,\ 10)$	1

$N = 35$; $\sum f \cdot x = 165$; $\sum f \cdot x^2 = 851$

$\bar{x} = 4.71$; Var$= 2.09$; $\sigma = 1.45$; C.V.= 0.31

https://goo.gl/Q6BEy9

.pax .pax

Solucions de la pàgina 151:

17.

a) El 88 % obté més de 5 en ambdues assignatures; El 88 % en matemàtiques i el 92 % en llengua

b) Estan fortament relacionades

c) Gràfic

d) Coeficient de correlació = 0,87 positiu i molt alt

18.

a) $y = 3,2564x + 15,0807$

b) $x = 0,155828 - 1,35257$

c) Si utilitzam la recta Y sobre X: $x = 2,77$

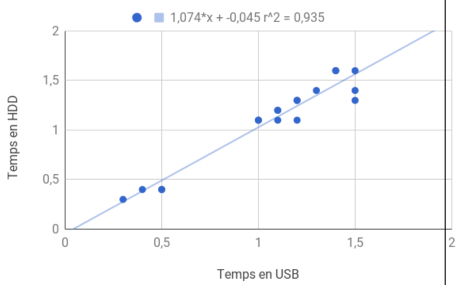
Si utilitzam la recta Y sobre X: $x = 2,40$

d) La predicció és acceptable tenint present que $r = 0,7123$. A major valor de r menor la diferència entre les dues prediccions anteriors.

https://goo.gl/c1dcec

19.

a) Hi ha una correlació positiva forta



https://goo.gl/3AMzyc

b) La recta de regressió és $y = 1,0736x - 0,04522$. L'estimació $y(x = 0,8) = 0,8137$.

L'estimació és bastant fiable ja que el coeficient de correlació és alt $r = 0,967$.

20.

a)

x	f
0	45
1	36
2	14
3	16
4	6

y	f
0	31
1	35
2	23
3	16
4	12

b)

$x \mid y < 2$	f
0	35
1	25
2	3
3	3
4	0

c) $r = 0.6743$ és una correlació positiva moderada

https://goo.gl/qdmVsS

21.

a)

x	f
1	6
2	12
3	18
4	28

y	f
1	44
2	15
3	5

b)

$y \mid x = 2$	f
1	10
2	2
3	0

c) $r = 0,31$ és una correlació molt feble

https://goo.gl/SqBxFB

22.

a) Utilitzam la relació $n = \bar{y} - m\bar{x}$:

resolem $-3 = \bar{y} - 1.6 \cdot 10$. Trobam que $\bar{y} = 13$

b) $y(12) = 16.2$ és una estimació acceptable perquè el coeficient és mitjanament alt.