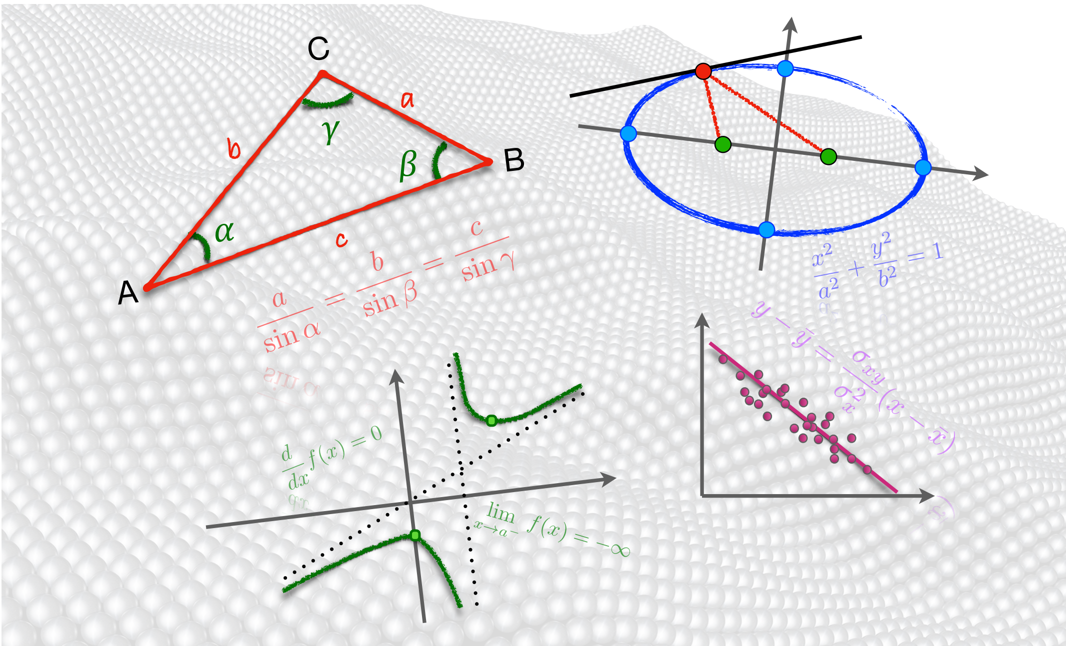
Matemàtiques I

1r Batxillerat de ciències

Sèrie Pràctica

3a Edició



IESB

www.iesbinissalem.net

Josep Mulet
Departament de Matemàtiques
IES Binissalem

Edició LaTeX: ® Josep Mulet Pol
Versió: 2018-06-29
Portada: *Fractal de Julia.*

Índex

Currículum LOMCE

Extret de http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/batxillerat_lomce/matematiques_batx.pdf

BLOC: Nombres i Àlgebra	BLOC: Geometria
• Nombres reals: necessitat del seu estudi per a la comprensió de la realitat. • Valor absolut. Desigualtats. Distàncies en la recta real. Intervals i entorns. • Aproximació i errors. Notació científica. • Nombres complexos. Forma binomial i polar. Representacions gràfiques. Operacions elementals. Fórmula de Moivre. • Successions numèriques: terme general, monotonia i acotació. El nombre e. • Logaritmes decimals i neperians. Equacions logarítmiques i exponencials. • Plantejament i resolució de problemes de la vida quotidiana mitjançant equacions i inequacions. Interpretació gràfica. • Resolució d'equacions no algebraiques senzilles. Mètode de Gauss per a la resolució i interpretació de sistemes d'equacions lineals.	• Mesura d'un angle en radiants. • Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol. Raons trigonomètriques dels angles suma i diferència d'altres dos, doble i meitat. Fórmules de transformacions trigonomètriques. • Teoremes. Resolució d'equacions trigonomètriques senzilles. • Resolució de triangles. Resolució de problemes geomètrics diversos. • Vectors lliures en el pla. Operacions geomètriques. • Producte escalar. Mòdul d'un vector. Angle de dos vectors. • Bases ortogonals i ortonormals. • Geometria mètrica plana. Equacions de la recta. Posicions relatives de rectes. Distàncies i angles. Resolució de problemes. • Llocs geomètrics en el pla. • Còniques. Circumferència, el·lipse, hipèrbola i paràbola. Equació i elements.
BLOC: Anàlisi	**BLOC: Estadística i probabilitat**
• Funcions reals de variable real. • Funcions elementals: polinòmiques, racionals senzilles, valor absolut, arrel, trigonomètriques i les seves inverses, exponencials, logarítmiques i funcions definides a trossos. • Operacions i composició de funcions. Funció inversa. Funcions d'oferta i demanda. • Concepte de límit d'una funció en un punt i en l'infinit. Càlcul de límits. Límits laterals. Indeterminacions. • Continuïtat d'una funció. Estudi de discontinuïtats. • Derivada d'una funció en un punt. Interpretació geomètrica de la derivada de la funció en un punt. Recta tangent i normal. • Funció derivada. Càlcul de funcions derivades. Regla de la cadena. • Representació gràfica de funcions.	• Estadística descriptiva bidimensional: Taules de contingència. • Distribució conjunta i distribucions marginals. • Mitjanes i desviacions típiques marginals. • Distribucions condicionades. • Independència de variables estadístiques. • Estudi de la dependència de dues variables estadístiques. • Representació gràfica: Núvol de punts. • Dependència lineal de dues variables estadístiques. • Covariància i correlació: Càlcul i interpretació del coeficient de correlació lineal. • Regressió lineal. Estimació. Prediccions estadístiques i fiabilitat de les mateixes.

Símbols

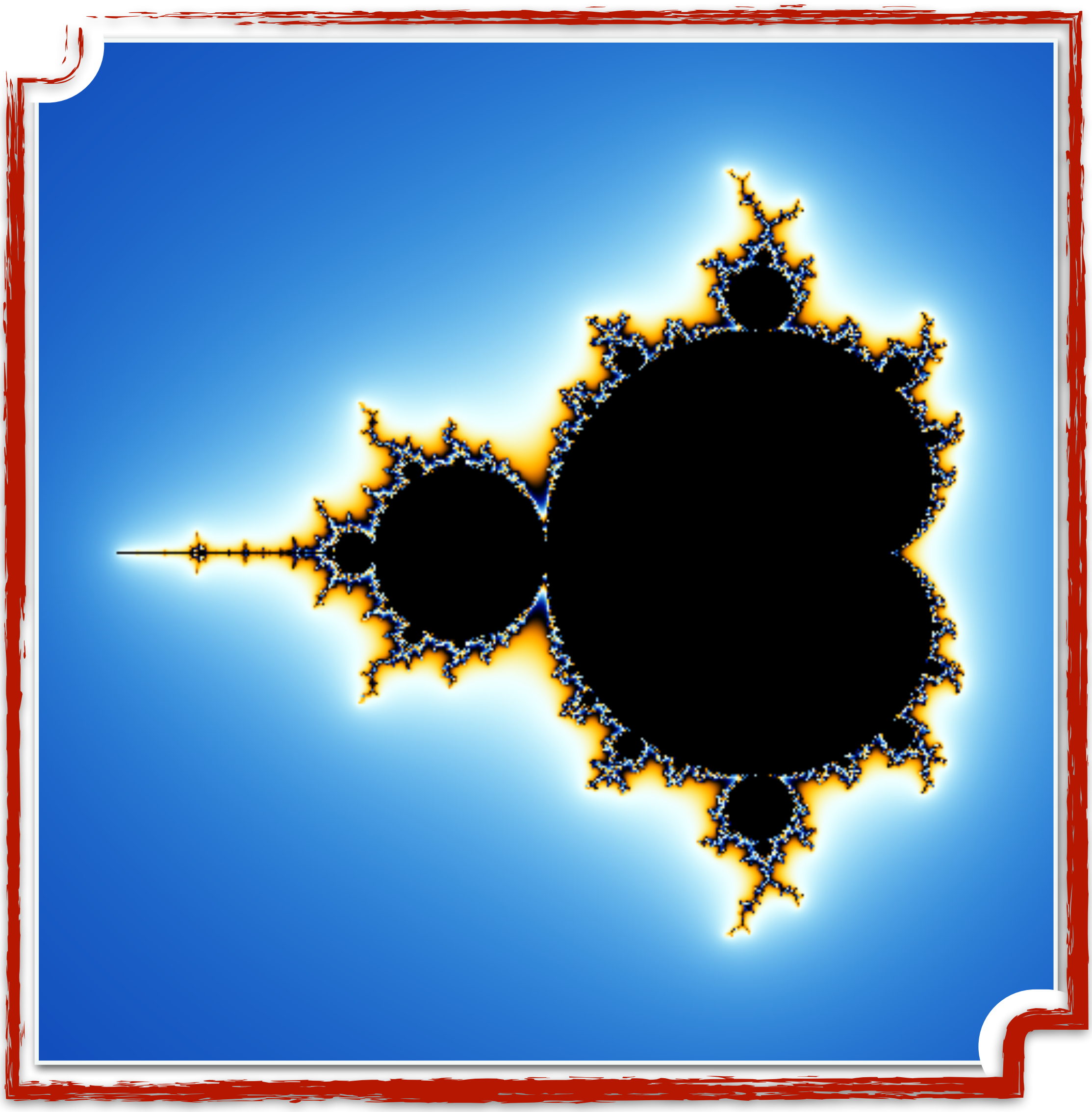
Símbol	Significat
	Problema clau amb solució al final del llibre.
	A més de la solució, proporciona orientacions per arribar a ella.
	Problema que requereix d'investigació o recerca d'informació.
	Activitat adequada per realitzar amb el programa Geogebra.
 Vídeo 132:	Explicació en vídeo dels continguts de l'apartat. El número de vídeo correspon a la numeració emprada en https://piworld.es
★ ★	Problema amb un cert grau de dificultat.
	Activitat que es pot contestar en el llibre mateix.
	Activitat que es pot resoldre mentalment o en veu alta.

Recursos

piWorld	Plataforma d'aprenentatge. Conté explicacions en vídeo i activitats interactives. Requereix usuari i contrasenya. https://piworld.es
Geogebra	Programa lliure de geometria dinàmica en dues i tres dimensions. Ideal pels temes de funcions i geometria. https://www.geogebra.org/graphing
Calculadora WIRIS	Calculadora per al càlcul simbòlic. Nova versió Web https://calcme.com/a La versió antiga la trobareu a http://www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/cas.html Atenció: requereix el plugin de Java i no funciona en dispositius mòbils.

Part I

ARITMÈTICA, ÀLGEBRA I TRIGONOMETRIA



Fractal de Mandelbrot. La bellesa dels nombres complexos.

Leonardo de Pisa

(1180-1250)

També conegut com *Fibonacci*, introdueix el sistema de numeració decimal que havia après dels àrabs.

François Viète

(1540-1603)

Fou un precursor de l'àlgebra. Són famoses les relacions de *Cardano-Viète* per a les equacions de 2n grau. Són importants les seves contribucions a la trigonometria de l'època.

Paolo Ruffini

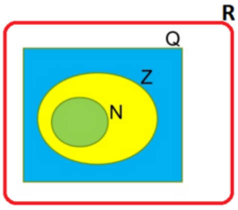
(1765-1822)

Conegut per la regla de divisió de polinomis, va ser dels primers de mostrar la impossibilitat de resoldre equacions de grau superior a 4 mitjançant radicals.

Carl F. Gauss

(1777-1855)

També conegut com el "*príncep de les matemàtiques*". De les seves immenses contribucions destacam: els nombres complexos i la resolució de sistemes d'equacions.



Tema 1

Nombres reals

Índex

1.1 La recta real

Recorda

Els nombres reals es classifiquen en: Naturals $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$,

Enters $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, Racionals $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b},\ a \text{ i } b \neq 0 \text{ enters }\}$,

Irracionals $\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \pi, e, \cdots\}$ i els nombres reals $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

El **valor absolut** d'un nombre és $|a| = a$ si $a \geq 0$, $|a| = -a$ si $a < 0$.

La **distància** entre dos nombres es troba mitjançant $\text{Dist}(a, b) = |b - a|$.

1. ✎ Troba l'expressió decimal de les fraccions

a) $\dfrac{2}{3} =$ b) $\dfrac{3}{4} =$ c) $\dfrac{7}{30} =$

d) $\dfrac{6}{25} =$ e) $\dfrac{7}{8} =$ f) $\dfrac{9}{11} =$

2. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, redueix-les i comprova que està bé:

a) $2,353535\cdots$ b) $87,23656565\cdots$ c) $0,9999\cdots$ d) $26,5735735735\cdots$

3. Representa a la recta numèrica els següents nombres racionals:

a) $\dfrac{9}{5}$ b) $\dfrac{-13}{4}$ c) 1,342 d) −2,555555...

4. Representa a la recta numèrica els nombres irracionals:

a) $\sqrt{10}$ b) $-\sqrt{6}$ c) $\sqrt{27}$ d) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

5. ✎Escriu el valor absolut dels següents nombres:

a) $|5| =$ b) $|-5| =$ c) $|\pi - \sqrt{10}| =$

6. Representa a la recta real i calcula la distància entre els nombres reals següents:

a) Dist(5 , 9) b) Dist(−2.3 , −4.5)

c) Dist(−1/5 , 9/5) d) Dist(−3.272727.... , 6.27272727....)

1.2 Intervals i entorns

7. Escriu els següents intervals mitjançant conjunts i representa'ls a la recta real:

a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty, 6)$

8. Representa a la recta real i escriu en forma d'interval:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \leq 7$

9. ✎Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (emprant desigualtats) i representa'ls gràficament:

a) Un percentatge superior al 26 % ....

b) Edat inferior o igual a 18 anys ....

c) Nombres, el cub dels quals, sigui superior a 8 ....

d) Nombres positius la part entera dels quals té 3 xifres ....

e) Temperatura inferior a 25 ºC ....

f) Nombres pels quals existeix la seva arrel quadrada ....

g) Nombres que estiguin de 5 a una distància inferior a 4 ....

Entorn obert

Es defineix l'entorn obert de centre a i radi r, i s'escriu $E(a, r)$, com l'interval $(a-r, a+r)$

1. Expressa l'interval $(-1, 5)$ com un entorn.	El centre es troba al punt mitjà $a = 2$ i el radi és $r = 3$, és a dir $(-1, 5) = E(2, 3)$

10. Expressa en forma d'interval els següents entorns:

a) $E(1,5)$ b) $E(-2,\frac{8}{3})$ c) $E(-10, 0.001)$

11. Expressa en forma d'entorn els següents intervals:

a) $(4,\ 7)$ b) $(-7,\ -4)$ c) $(-3,\ 2)$

12. Calcula x en les següents equacions: (pista: x pot tenir dos valors)

a) $|x| = 5$ b) $|x-4| = 0$ c) $|3x+9| = 21$

13. Representa a la recta real els nombres que verifiquen les següents relacions:

a) $|x| < 1$ b) $|x| \leq 1$ c) $|x-3| > 1$ d) $|x-3| \geq 1$

14. Troba dos nombres que distin 6 unitats de 3, i altres dos que distin 3,5 unitats de -2, calcula després la diferència entre el major i el menor de tots aquests nombres.

15. Escriu l'interval $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

16. Escriu l'interval format pels nombres reals x que compleixen $|x-8| \leq 3$.

17. Determina els conjunts A ∩ B, A ∪ B, A − B i −A en els casos següents:

a) A = [−11, −9]; B = (−1, 6) b) A = [−5, 5]; B = (3, 4)

1.3 Radicals

Trobareu un resum de les propietats dels radicals a la pàgina 15.

18. Expressa com un sol radical:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} =$ b) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}=$ c) $\sqrt{\sqrt{x^3\sqrt{x}}}=$

19. Simplifica, extraient tots els factors que puguis del radical:

a) $\sqrt[4]{64}=$ b) $\sqrt{243}=$ c) $\sqrt[9]{216}=$ d) $\sqrt[8]{1024}=$

e) $\sqrt[15]{243}=$ f) $\sqrt[6]{2401}=$ g) $\sqrt[16]{49}=$ h) $\sqrt[14]{128}=$

20. Redueix el radical a l'índex indicat:

a) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^{--}}$ b) $\sqrt{7} = \sqrt[16]{7^{--}}$ c) $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^{--}}$ d) $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{5^{---}}$

21. Expressa com un sol radical (redueix, primer de tot, els radicals a índex comú i simplifica si pots):

a) $\dfrac{\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt{8}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{6}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{5}}$ d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{24}}}}$

e) $\left(\sqrt[5]{64}\right)^4$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{5^9}}}$

g) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3^2}}}$ h) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{125}}\right)^4$

EXEMPLE

a) $\dfrac{\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[6]{25^2}}{\sqrt[6]{8^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^5\cdot 5^4}{2^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{5^4}{2^4}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}$

22. Calcula, extraient primer factors fora dels radicals:

a) $\sqrt{1331} - \sqrt{44} + 2\sqrt{99} =$ b) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{686} - 3\sqrt[3]{2} =$

c) $2\sqrt{54} - \sqrt{216} - \sqrt{\frac{6}{25}} =$ d) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{\frac{2}{81}} - 7\sqrt[4]{2} =$

e) $2\sqrt{3} - \frac{1}{5}\sqrt{27} + \frac{2}{3}\sqrt{12} =$ f) $\sqrt{32} - \sqrt{18} + \frac{1}{5}\sqrt{128} =$

EXEMPLE

a) $\sqrt{1331} - \sqrt{44} + 2\sqrt{99} = \sqrt{11^3} - \sqrt{2^2\cdot 11} + 2\sqrt{3^2\cdot 11} =$

$= 11\sqrt{11} - 2\sqrt{11} + 2\cdot 3\sqrt{11} = 15\sqrt{11}$

23. Desenvolupa $\left(1 + (1+\sqrt{a})^2\right)^2 =$

24. Racionalitza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} =$ b) $\dfrac{3}{2\sqrt[4]{2}} =$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1} =$

d) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$ f) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} =$

EXEMPLE

d) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)}\cdot\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2} = 3+2\sqrt{2}$

25. Opera, racionalitza i simplifica

a) $\dfrac{\sqrt{48}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} =$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} =$

c) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$ d) $(4\sqrt{5}+3\sqrt{5})\cdot(4\sqrt{5}-3\sqrt{5}) =$

e) $2^{-5}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2^5} =$ f) $\left(\frac{5}{2}-\sqrt{2}\right)^2 =$

Autoavaluació

1. Resol l'equació $|3x+9| = 21$.

2. Expressa $\sqrt[4]{x\sqrt{x}}$ com una única arrel.

3. Simplifica l'expressió $(2\sqrt{3}+1)^2$.

4. Racionalitza l'expressió $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

5. Simplifica l'expressió $\sqrt[3]{54} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{16}$.

6. Racionalitza l'expressió $\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$.

7. Donats els intervals $A = [-11, 6]$ i $B = (-1, 9)$, calcula $A \cap B$.

Resum

Apartat	Resum
Nombres reals	Està format per la unió dels nombres racionals i els nombres irracionals 5, −4, 2/3, 7.5, π, e, Φ ...
Valor absolut	$\lvert x\rvert = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$ $\lvert -32\rvert = 32$
Distància a la recta real	Dist(x, y) = |x − y| Dist(3, 8) = |8 − 3| = 5. Dist(−2, −9) = |−9 − (−2)| = |−9 + 2)| = |−7| = 7
Intervals	Obert : (a , b) = {x ∈ ℝ| a < x < b} Tancat: [a , b] = {x ∈ ℝ| a ≤ x≤ b} Semiobert (esq): (a , b] = {x ∈ ℝ| a < x ≤ b} Semiobert (dreta): [a , b) = {x ∈ ℝ| a ≤ x < b}
Radicals	Permeten donar solució a l'equació $x^n = a \to x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Si $a > 0$, l'arrel existeix sempre. Si $a < 0$, només quan l'índex n és senar. $x^3 = 8 \leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

Propietats dels radicals

Propietat	**Exemple**
1. Producte d'igual índex $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{100}=10$
2. Quocient d'igual índex $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{\dfrac{14}{7}}=\sqrt[3]{2}$
3. Potència d'una arrel $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^3=\sqrt[4]{5^3}$
4. Arrel d'arrel $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[12]{5}$
5. Extreure factors $\sqrt{a^2\cdot b}=a\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a^3\cdot b}=a\sqrt[3]{b}$,	$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{7000}=\sqrt[3]{10^3\cdot 7}=10\sqrt[3]{7}$,
6. Introduir factors Consisteix en el pas contrari que el pas [5] $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$, $\quad a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3\cdot b}$.	$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{75}$ $\sqrt{3\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{3^2\cdot x}}=\sqrt[4]{9x}$,
7. Suma i resta. Simplificar expressions El primer pas és factoritzar els radicands i després extreure factors. Finalment, podem sumar o restar arrels iguals	$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}+\sqrt[3]{2\cdot 2^3}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}$
8. Radicals equivalents $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot q]{a^q}$	$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[9]{2^3}=\cdots$
9. Operacions amb diferent índex Primer cal reduir els radicals a índex comú utilitzant la propietat [8] $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[q]{a^{q/n}\cdot b^{q/m}}$ essent $q=min.c.m(n,m)$	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}=\sqrt[12]{432}$
10. Racionalitzar I $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}\cdot\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}}=\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$	$\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}}=\dfrac{2\sqrt[4]{5^3}}{5}$
11. Racionalitzar II Multiplicam i dividim pel conjugat del denominador $\dfrac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\cdot\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

Al Khwarizmi (780-850)

Tema 2

Àlgebra

Índex

2.1 Operacions amb polinomis

Identitats notables

Quadrat d'una suma:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Quadrat d'una diferència:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma per diferència:	$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
Quadrat d'un trinomi:	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

1. Desenvolupa les següents potències:

a) $(2x-5y)^2$ b) $\left(3x+\frac{y}{3}\right)^2$ c) $\left(5^2-\frac{5}{x}\right)^2$

d) $(3a-b)^2$ e) $(a^2+b^2)^2$ f) $\left(\frac{3y}{5}-\frac{2}{y}\right)^2$

2. Expressa com el quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) a^4+6a^2+9 b) $9x^2-6x+1$ c) $b^2-10b+25$

d) $4y^2+12y+9$ e) a^4-2a^2+1 f) y^4+6y^2+9

3. Efectua aquests productes:

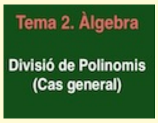
a) $(4x^2+3y)\cdot(4x^2-3y)$ b) $(2x^2+8)\cdot(2x^2-8)$ c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

Divisió de polinomis

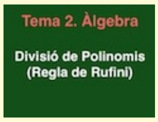
Per poder dividir $D(x) : d(x)$ necessitam que el grau(D)≥grau(d).
Comprovació: Si dividim el dividend $D(x)$ entre el divisor $d(x)$, i obtenim el quocient $q(x)$ i el residu $r(x)$, s'ha de complir que

$$D(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$$

Si $d(x) = x \pm a$ podem emprar la regla de **Ruffini**, sinó hem de fer la divisió en general.



Vídeo 46: Divisió general



Vídeo 47: Divisió Ruffini

Exercici Resolt

1. $(x^4+3x^3-4x+5) : (x+2)$

Feim la divisió per la regla de Ruffini, recordant a posar 0 si falten potències de x.

	1	3	0	-4	5
-2		-2	-2	4	0
	1	1	-2	0	$\boxed{5}$

Llavors, el quocient és $q(x) = x^3 + x^2 - 2x$ i el residu $r = 5$.

4. Efectua les divisions de polinomis indicant quin és el quocient i residu.

a) $6x^5 - x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 8x$ entre $2x^2 - 3x + 2$

b) $2x^3 + 2x + 1$ entre $x^2 - x + 1$

c) $ax^4 + b$ entre $x - 1$

d) $x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ entre $x - 1$

5. Divideix els següents polinomis:

a) $2x^4 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 + 2x + 4$.

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

c) $4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^3 + x + 3$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$

6. Utilitza la regla de *Ruffini* per realitzar les següents divisions de polinomis:

a) $-3x^2 + x + 1$ entre $x - 1$

b) $x^4 + 2x^3 - 2x + 1$ entre $x - 2$

c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x + 1$

d) $x^3 - 9x + 1$ entre $x - 3$

Teorema del residu

El residu de la divisió $P(x) : (x - a)$ coincideix amb el valor numèric del polinomi $P(a)$.

EXEMPLE Donat el polinomi $P(x) = x^2 + 2x + 1$ es fàcil comprovar que $P(-1) = (-1)^2 - 2 + 1 = 0$. Aleshores, asseguram que la divisió $(x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$ és exacta, té residu zero.

7. Aplica el teorema del residu per saber si les següents divisions són exactes o no:

a) $\dfrac{x^5 + 7x^4 - 13x^3 + 5x^2 - 17x + 5}{x - 3}$ b) $\dfrac{x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

c) $\dfrac{9x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 17x - 1}{x - 1}$

8. Troba un polinomi $q(x)$ tal que en dividir $p(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ entre $q(x)$ s'obtingui com a polinomi residu $r(x) = 5x^4 + 5x^2 + 1$.

9. Troba dos polinomis tals que en dividir-los obtinguem $q(x) = x^2 - x - 3$ com a polinomi quocient i $r(x) = -3x^2 - 1$ com a residu.

Factorització de polinomis

10. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenvolupament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte *suma per diferència*. En cas afirmatiu expressa la seva procedència.

a) $x^2 - 6x + 9$ b) $x^4 + 8x^2 + 16$ c) $x^2 + \sqrt{20}\,xy + 5y^2$

d) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ f) $x^2 - 36$

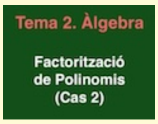
g) $5x^2 + 1$ h) $5x^2 - 11$ i) $x^4 - 3y^2$

11. Factoritza els següents polinomis. Ajuda't traient factor comú i identificant possibles identitats notables.

a) $x^2 - 8x$ b) $4x^2 - x - 3$ c) $x^3 - 4x$ d) $x^3 + 25x$

e) $3x^3 + 6x^2 + 3x$ f) $x^4 - 16$ g) $4x^2 - 4x + 1$ h) $x^4 - 2x^3$

Procediment per factoritzar un polinomi:



Vídeo 50: Factoritzar polinomis

1r Puc treure factor comú alguna cosa?

2n Puc identificar alguna identitat notable?

3r Queda un polinomi de segon grau $P(x) = ax^2 + bx + c$? $\rightarrow$ Resoldre l'equació de 2n grau amb la fórmula

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. La factorització és $P(x) = \mathbf{a} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

⚠ No us oblideu de copiar el coeficient **a** davant de la factorització.

4t En altre cas, factoritzar utilitzant la regla de **Ruffini**.

12. Factoritza els polinomis fent servir la regla de Ruffini (pensa a extreure factor comú quan sigui necessari).

a) $p(x) = 3x^2 + 9x + 6=$

b) $p(x) = x^5 - 9x^3=$

c) $p(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12=$

d) $p(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6=$

e) $p(x) = x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x=$

f) $p(x) = x^3 - 3x - 2=$

g) $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 6x + 20=$

h) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2=$

i) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8=$

EXEMPLE

a) Resolem l'equació $3x^2 + 9x + 6 = 0$, trobam solucions $x = -1$ i $x = -2$. Aleshores, la factorització és $p(x) = 3 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$

b) Treim factor comú x^3, $p(x) = x^3 \cdot (x^2 - 9)$, identificam una identitat notable (suma × diferència) i trobam la factorització $p(x) = x^3 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

2.2 Fraccions algebraiques

Simplificar fraccions

Per simplificar una fracció algebraica:

1r Factoritzam el numerador i el denominador

2n Tatxam tots els factors (que es troben multiplicant) repetits en el numerador i el numerador.

NO × $\dfrac{\cancel{x^2} - 1}{\cancel{x^2} + 2x + 1} \cancel{=} \dfrac{-1}{2x + 1}$

SÍ ✓ $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{\cancel{(x + 1)} \cdot (x - 1)}{(x + 1)^{\cancel{2}}} = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

Vídeo 51: Fraccions algebraiques

13. Calcula què ha de valer m perquè el valor numèric de l'expressió algebraica següent sigui -2 per a $x = 0$.

$$\frac{x^3 - mx + 4}{(x^4 - 1)(mx + 2)}$$

14. Simplifica, si és possible, les següents expressions:

a) $\dfrac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$

b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$

c) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$

15. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$

c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

Operar fraccions

Procediment per calcular el min.c.m de polinomis:

1r Factoritzam tots els polinomis.

2n Multiplicam factors comuns i no comuns amb el major exponent.

Per exemple min.c.m $[x^2+2x, x^2, x+2] =$ min.c.m $[x(x+2), x^2, x+2] = x^2\cdot(x+2)$

16. Calcula el mín.c.m dels següents polinomis

a) mín.c.m$[x, x(x+1), x+1]$ = b) mín.c.m$[x^2, x^3-x, x^2-1]$ =

c) mín.c.m$[x-2, x^2-2x+1, x^2-3x+2]$ =

17. Opera i simplifica les fraccions algebraiques

a) $\dfrac{x}{3x+3}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^3+2x^2}=$ b) $\dfrac{2x}{x+1}:\dfrac{x^2+x}{x+5}=$

c) $\dfrac{x}{x+1}:\dfrac{x^2+2x^2}{x^2-1}=$ d) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{3x+1}{x^2+3}=$

e) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}:\dfrac{x}{x^2-1}=$ f) $\dfrac{1}{x^2-4}:\dfrac{1}{2-x}$

g) $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x}$ h) $\dfrac{2x}{x-1}:\dfrac{x^3}{x^5-1}$

18. Realitza les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:

a) $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

EXEMPLE

a) Factoritzam els denominadors $-3x+12=-3(x-4)$, $x^2-4x=x(x-4)$, el mím.c.m=$3\cdot x\cdot(x-4)$ que és el denominador comú.

$$\frac{5}{-3(x-4)}+\frac{x+2}{x(x-4)}=\frac{-5x}{3\cdot x\cdot(x-4)}+\frac{3(x+2)}{3\cdot x\cdot(x-4)}$$

finalment, operam i simplificam el numerador $=\dfrac{-5x+3x+6}{3\cdot x\cdot(x-4)}=\dfrac{-2x+6}{3\cdot x\cdot(x-4)}$

19. Efectua els següents càlculs:

a) $\dfrac{2x+1}{x^2+1}+\dfrac{4}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+1}$

c) $\dfrac{-x}{x^2+3x}\cdot\dfrac{1}{x-1}$ d) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}:\dfrac{x-2}{x+3}$

20. Realitza les següents operacions modificant, a cada apartat, únicament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

a) $\dfrac{-x^2+x-1}{x^3}-\dfrac{3x+2}{x^2}$ b) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}-\dfrac{8}{x+3}$

21. Opera les fraccions algebraiques (*ajuda: cercau el m.c.m. i reduïu a denominador comú*)

a) $\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}=$ b) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=$

c) $\dfrac{2(x-3)}{x^2+2x-3}-\dfrac{3}{x+3}=$ d) $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1-t}{t^2+2t}-\dfrac{2}{t+2}=$

e) $\dfrac{2x+6}{x}-\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2-x}=$ f) $x^4-(1-x^2)^2-2x^2+\dfrac{1}{x^2}=$

g) $\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\dfrac{4}{(1+x)^2}-\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}\right)=$

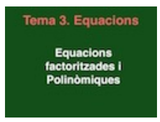
22. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x+y}}:\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a-y}}$ b) $\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}}$

c) $\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$

2.3 Equacions

Equacions polinòmiques



Vídeo 52:

23. Per a cadascun dels següents polinomis assenyala, en primer lloc, quins nombres enters són candidats a ésser arrels seves i, després, determina quins són:

a) x^3-x^2+2x-2 b) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$

c) $2x^3+x^2-18x-9$ d) $x^4+2x^3+3x^2+6x$

24. Resoleu:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{(x+3)^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} = 1 + \frac{3/4x}{9}$

c) $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$ d) $80x^4 - 48x^2 - 12 = 0$

Ajuda: Els apartats c) i d) són **equacions biquadrades**; és a dir, fent el canvi $x^2 = t$ es transforma en una equació de 2n grau.

25. Resol les equacions traient factor comú i factoritzant el polinomi

a) $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$ b) $3x^3 - 75x = 0$

c) $x(x+1) = 2$ d) $x^3 + 6 = \frac{4x^3+7x^2-2x}{x+2}$

e) $x(x^2 - 5x - 13) + 77 = \frac{60}{x}$ f) $x^3 - 1 = 0$

g) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ h) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$

i) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$ j) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12 = 0$

k) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ l) $x^2(x-4) = 5x$

26. Conjectura, i després demostra, una llei que ens permeti saber quan un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

admet el nombre 0 com arrel.

27. Troba una regla que demostri quan un polinomi qualsevol $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ admet al número 1 com a arrel.

28. Sumant set unitats al doble d'un nombre més els 3/2 del mateix obtenim com resultat el sèxtuple d'aquest nombre menys 23. De quin nombre es tracta?

29. Les dimensions d'un rectangle són 54 i 36 m. Traça una paral·lela al costat que mesura 36 m de manera que es formi un rectangle semblant al primer. Quines són les longituds dels segments en què aquesta paral·lela divideix al costat de 54 m?

Equacions amb denominadors

Procediment per eliminar els denominadors:

1r Factoritzam tots els denominadors i cerca el seu min.c.m.

2n Multiplicam tots els termes de l'equació pel min.c.m i simplificam.

30. Resol

a) $\dfrac{2x-4}{3x-2} = \dfrac{4}{7}$ b) $\dfrac{x+8}{x-1} - \dfrac{x+4}{x+1} = \dfrac{12x}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3(2x+1)}{4} - \dfrac{5x+3}{6} + 4x + \dfrac{x+1}{3} = x + \dfrac{151}{12}$

31. Resol

a) $\dfrac{1-x}{6}+\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{2x^2-1}{2}$

b) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13x+1}{3x}$

c) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{6}$

d) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}=3$

32. Resoleu les equacions següents:

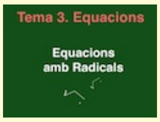
a) $\dfrac{3x-1}{2x-4}=\dfrac{5}{9}$

b) $\dfrac{x}{2}+5=\dfrac{3x}{6}-7$

c) $\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{5x}{x-1}-2$

Equacions amb arrels quadrades

Procediment per resoldre equacions amb arrels quadrades:



Vídeo 54:

1r Aïllam una de les arrels a un membre de l'equació.

2n Elevam cada membre al quadrat (anant en compte amb les identitats notables).

El procés 1-2 elimina només **una** arrel. Hem de repetir el procés tantes vegades com arrels tingui l'equació.

IMPORTANT: Cal sempre comprovar les solucions

33. Resol les següents equacions i comprova les solucions:

a) $\sqrt{x}+1=3$

b) $x=\sqrt{x}+2$

c) $\sqrt{x+4}=3$

d) $\sqrt{x+2}+4=x$

e) $\sqrt{x+2}=x$

f) $\sqrt{\sqrt{x+2}}=14$

g) $\sqrt{\sqrt{x-1}+1}=2$

h) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3$

i) $\sqrt{x-2}=\sqrt{x+5}-1$

j) $\sqrt{x+7}-1=\sqrt{x-4}$

k) $\sqrt{x+2}=x-\sqrt{x+86}$

l) $\sqrt{10-x}-\sqrt{x+3}=x$

EXEMPLE

d) $\sqrt{x+2}+4=x$.

Aïllam l'arrel $\sqrt{x+2}=x-4$, elevam al quadrat els dos membres

$(\sqrt{x+2})^2=(x-4)^2$, desenvolupam $x+2=x^2-8x+16$ i arreglam l'equació de segon grau $x^2-9x+14=0$. Resolem l'equació de 2n grau amb la fórmula i obtenim $x=2$ i $x=7$. Si comprovam les solucions dins l'equació original veim que només $x=7$ és vàlida.

Sistemes d'equacions

34. Resol els sistemes lineals

a) $\begin{cases} 5y - 3x = 72 + 5x \\ 15x = y - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 22 \\ 5(x-5) = y - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x+y) - 1 = 5x - 4y \\ 2x + 3(y+1) = x + 3(x+y-1) \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4(x-1) - 3(y+2) = -5y + x \\ 5(x+3) = 2y - 3(y+x) + 7 \end{cases}$

35. Resol els sistemes no lineals

a) $\begin{cases} x + y - xy = 7 \\ x - y - xy = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 + 3xy = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x^2+1)\, y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \end{cases}$

2.4 Sistemes d'equacions lineals $n \times n$

Sistemes escalonats

Un sistema 3×3 és **escalonat** si una equació conté només una incògnita, i en una altra en falta alguna de les altres dues incògnites.

Això fa que el sistemes escalonats siguin molt fàcils de resoldre.

36. Reconeix com sistemes escalonats i resol:

a) $\begin{cases} x & & & = 7 \\ 2x & -3y & & = 8 \\ 3x & +y & -z & = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x & +4y & & = 0 \\ & 2y & & = -6 \\ 5x & +y & -z & = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x & & & = -3 \\ & 5y & & = 20 \\ 2x & +y & -z & = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} & y & & = 4 \\ x & & -z & = 11 \\ & y & -z & = 7 \end{cases}$

37. Resol els següents sistemes escalonats:

a) $\begin{cases} & y & & = -5 \\ & & 2z & = 8 \\ 3x & & & = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x & +2y & -z & = -3 \\ 3x & +y & & = -5 \\ & 5y & & = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x & -5y & +3z & = 8 \\ & 3y & -z & = 5 \\ & & 4z & = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x & +y & -z & = 7 \\ & 2y & & = 8 \\ 3x & & & = 9 \end{cases}$

Mètode de Gauss

El mètode de Gauss aconsegueix transformar un sistema que no és **escalonat** en un equivalent i que sí ho és. Les transformacions permeses són:

- Canviar l'ordre de les equacions
- Multiplicar o dividir tota l'equació per un nombre.
- A una equació sumar-li una altra prèviament multiplicada per un nombre.

Vídeo 136: Resolució de sistemes pel mètode de Gauss

Vídeo 137: Classificació de sistemes 3x3 per Gauss

38. Resol pel mètode de Gauss

a) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+z & =2 \\ x-y+z & =6 \\ x-y-z & =0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{ll} 2x+3y & =14 \\ x-2y+z & =-3 \\ 2x-y-z & =9 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{ll} 5x-4y+3z & =9 \\ 2x+y-2z & =1 \\ 4x+3y+4z & =1 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{llll} 2x-5y & +4z & =-1 \\ 4x-5y & +4z & =3 \\ 5x & -3z & =13 \end{array}\right.$

39. Resoleu pel mètode de Gauss els sistemes:

a) $\left\{\begin{array}{rl} 4x+2y-z & =5 \\ 5x-3y+z & =3 \\ 2x-y+z & =3 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & =0 \\ 7x+2y-z & =0 \\ 3x+5y+4z & =0 \end{array}\right.$

40. Resol els següents sistemes pel mètode de Gauss i discuteix el resultat:

a) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+2z & =4 \\ x+y & =2 \\ y+z & =2 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+t & =3 \\ x+z-t & =1 \\ y+z+t & =3 \\ x-y+z & =1 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{rl} x-y+2z & =4 \\ 2x+y+5z & =13 \\ x+y-4z & =-6 \end{array}\right.$

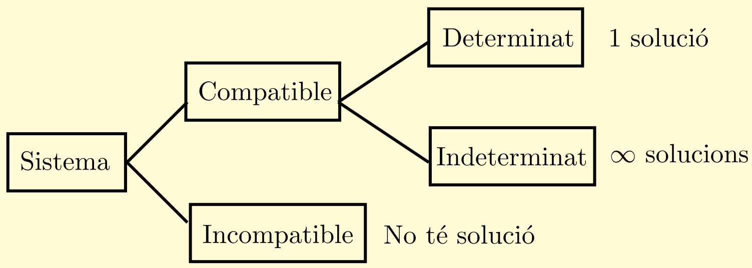
d) $\left\{\begin{array}{rl} 3x+4y-z & =6 \\ 6x-6y+2z & =2 \\ x-y+2x & =-2 \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{rl} x+4y-8z & =-8 \\ 4x+8y-2z & =-2 \\ 8x-y-4z & =-4 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rl} x-2y+3z+4t & =6 \\ 2x-y+z-t & =1 \\ x-y+3z+2t & =5 \\ 3x-y+2z-3t & =1 \end{array}\right.$

41. Discuteix i resol, si és possible, el següent sistema: $\left\{\begin{array}{ll} x+2y-z & =1 \\ 2x+y-2z & =2 \\ x-y-z & =1 \end{array}\right.$

42. Discuteix i resol, quan sigui possible, els següents sistemes lineals d'equacions.

a) $\left\{\begin{array}{ll} x-6y-4z & =-7 \\ x+8y+4z & =6 \\ x+y & =1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{ll} x+y-6z-4t & =6 \\ 3x+2y-3z+8t & =-7 \\ 3x-y-6z-4t & =2 \\ 4x-y+3z+12t & =0 \end{array}\right.$

Els sistemes es classifiquen segons el nombre de solucions en:



Si en aplicar el mètode de Gauss obtenim una fila de zeros $(000|0)$, el sistema serà compatible indeterminat (SCI). Si obtenim una fila com $(000|a)$ serà incompatible (S.I.).

43. Resol pel mètode de Gauss i classifica en compatible determinat, compatible indeterminat o incompatible.

a) $\left\{\begin{array}{ll} x-y & =1 \\ 2x+6y-5z & =-4 \\ x+y-z & =0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{ll} x+2y+z & =3 \\ x-2y+5z & =5 \\ 5x+22y+17z & =1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+3z & =2 \\ 2x+3y+4z & =1 \\ -2x-y-8z & =-7 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{ll} 2x-y-z & =2 \\ 3x-2y-2z & =2 \\ -5x+3y+5z & =-1 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{ll} x+y+z & =3 \\ -x+2y+z & =5 \\ x+4y+3z & =1 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{ll} -2x+y+z & =1 \\ 3x+2y-z & =0 \\ -x+4y+z & =2 \end{array}\right.$

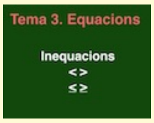
44. Desitgem vendre un cotxe, un pis i una finca per un total de 300000€. Si la finca val 4 vegades més que el cotxe i el pis cinc vegades més que la finca. Què val cada cosa?

45. Una mare té el doble de la suma de les edats dels seus fills. L'edat del fill menor és la meitat de la seva germana. La suma de les edats dels nens i la de la mare és 45 anys. Quines edats tenen?

46. Les tres xifres d'un nombre sumen 18. Si a aquest nombre se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 594; la xifra de les desenes és mitja aritmètica entre les altres dues. Troba aquest nombre.

47. Volem esbrinar les edats d'una família formada pels pares i els dos fills. Si sumam les seves edats de tres en tres, obtenim 100, 73, 74 i 98 anys, respectivament. Quina és l'edat de cadascun d'ells?

2.5 Inequacions



Vídeo 61:

La solució d'una inequació es dóna en forma d'INTERVAL.

Recorda: Quan canviam els signes d'una inequació el sentit de la desigualtat canvia.

Per exemple $-4x + 1 > 9$, aïllam $-4x > 9 - 1$, i canviam els signes i el símbol $4x < -8$, que ens duu a $x < -2$, és a dir la semi-recta $x \in (-\infty, -2)$.

48. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

a) $5 + 3x < 2x + 4$ b) $3 + 4x \leq 8x + 6$

c) $4(3 + 2x) < -(6x + 8)$ d) $7(2 + 3x) \leq 5(6x + 3)$

e) $9(2 + 4x) + 4(5x - 2) > 3(2x + 1)$

49. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

a) $6 + 3x < x/3 + 1$ b) $5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1$

c) $(2 + 5x)/3 > 4x + 1$ d) $(1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$

50. Calcula els valors de x perquè sigui possible calcular les següents arrels:

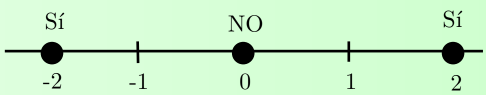
a) $\sqrt{2x - 3}$ b) $\sqrt{-x - 9}$

c) $\sqrt{2 - 7x}$ d) $\sqrt{-2x + 7}$

EXEMPLE

Inequacions de segon grau

$x^2 - 1 \geq 0$. Per resoldre una inequació de 2n grau, primer resoldrem l'equació canviant la desigualtat per un igual. $x^2 - 1 = 0$ té dues solucions $x = -1, x = 1$.



La recta real ens queda divida en 3 trossos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Agafam un nombre qualsevol de cadascun dels intervals i comprovam si verifica l'inequació original $x^2 - 1 \geq 0$. Veim que el primer i darrer trossos són vàlids i el del mig no serveix.

La solució és $[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$. Hem escrit interval tancat perquè la desigualtat és major o igual.

51. Resol les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2 - 9 > 0$ b) $x^2 + 4 \geq 0$ c) $2x^2 - 50 < 0$

d) $3x^2 + 12 \leq 0$ e) $5x^2 - 45 > 0$ f) $x^2 + 1 \geq 0$

52. Resol les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$

d) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ e) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$ f) $x^2 + 9x + 14 > 0$

53. Per a quins valors de x és possible obtenir les següents arrels?

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

54. Resol gràficament els següents sistemes d'inequacions:

a) $\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x-2y+3}{3} \geq \frac{x-y+1}{2} \\ 1 - \frac{2x-4-y}{3} + \frac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+1) \cdot 10 + x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x) - 6x \end{cases}$

Autoavaluació

1. Quin és el valor numèric de l'expressió $\dfrac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \dfrac{6}{z}$

en $x = 2,\ y = -1,\ z = -1$?

2. Divideix el polinomi $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 1$ entre $q(x) = x^2 + x + 1$.

3. És possible que un polinomi, amb coeficients enters, de grau quatre tingui exactament tres arrels reals, ja siguin diferents o amb alguna múltiple?

4. Resol la inequació $x^2 \leq 4$

5. Resol la inequació $|-x + 7| \leq 8$

6. Resol $\sqrt{5x - 9}$

7. Resol la inequació $\frac{2x-3}{x-2} < 1$

8. Justifica la veracitat o falsedat de cadascuna de les següents frases:

a) La regla de Ruffini serveix per dividir dos polinomis qualssevol.

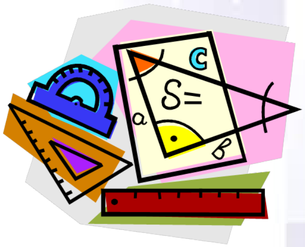
b) La regla de Ruffini permet dictaminar si un nombre és arrel o no d'un polinomi.

c) La regla de Ruffini únicament és vàlida per a polinomis amb coeficients enters.

d) La regla de Ruffini és un algorisme que ens proporciona totes les arrels d'un polinomi.

Resum

Apartat	Resum
Divisió de dos polinomis	S'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient (c(x)) i residu (r(x)), lligats als polinomis inicials, els polinomis dividend (p(x)) i divisor (q(x)) $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$
Regla de Ruffini	Ens pot ajudar a l'hora de factorizar un polinomi i conèixer les seves arrels
Teorema del residu	El valor numèric que adopta un polinomi $p(x)$ al particularitzar-lo en $x = \alpha$ coincideix amb el residu que apareix en dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$.
Arrel d'un polinomi	Un nombre real concret α és **una arrel**, o **un zero**, del polinomi p, si en avaluar p en $x = \alpha$ obtenim el número 0, és a dir, si $p(\alpha) = 0$ 2 és arrel de $-3x + 6$. Les arrels de $x^2 + 2x - 3$ són 1 i -3
Factorització de polinomis	Consisteix a expressar-ho com a producte d'altres polinomis de menor grau $x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 = (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 1)$
Fraccions algebraiques	És una fracció d'expressions polinòmiques $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$
Equacions de 2n grau	Igualtats algebraiques amb una sola incògnita i elevada al quadrat. $-x^2 + 4x + 5$ La solució del qual és: $x_1 = -1$ i $x_2 = 5$.
Equacions biquadrades	És una equació del tipus $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Si es fa el canvi $t = x^2$, l'equació anterior es tranforma en una de segon grau $at^2 + bt + c = 0$. Les solucions es troben fent $x = \pm\sqrt{t}$
Sistemes d'equacions lineals. Gauss	Resolució pel mètode de Gauss. $\left\{\begin{array}{lll} x + 4y + 3z & = & -1 \\ 2x - 3y - 2z & = & 1 \\ x + 2y + 4z = 2 & & \end{array}\right.$
Inequacions de 1r grau	Desigualtats algebraiques amb una sola incògnita de grau 1. La solució expressa en forma d'una semi-recta. $\frac{x-3}{3} - \frac{(x-7)}{6} > \frac{4-x}{2}$, té solució $x > \frac{11}{4}$ o $(\frac{11}{4}, +\infty)$.
Inequacions de 2n grau	Desigualtats algebraiques amb una sola incògnita, elevades al quadrat. La solució expressa en forma d'interval. $x^2 - 6x + 5 > 0$ la seva solució és l'interval $(1, 5)$.



Tema 3

Trigonometria

Índex

3.1 Raons trigonomètriques

Raons trigonomètriques d'angle agut

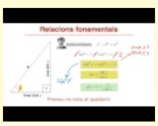
Definim les raons trigonomètriques d'un angle agut d'un **triangle rectangle** com

$$\textbf{sinus}\text{: } \sin\alpha = \frac{C.O.}{H}, \ \textbf{cosinus}\text{: } \cos\alpha = \frac{C.C.}{H} \ \text{ i } \textbf{tangent}\text{: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{C.O.}{C.C.}$$

essent H la hipotenusa, $C.O.$ el catet oposat a l'angle i $C.C.$ el catet contigu.

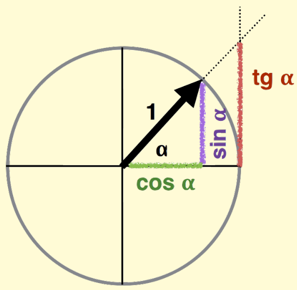
També definim les raons recíproques com

$$\textbf{cosecant}\text{: } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \ \textbf{secant}\text{: } \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \ \text{ i } \textbf{cotangent}\text{: } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$



Vídeo 122: Raons d'un angle agut

Representació de les raons trigonomètriques per un angle agut. Les raons no depenen de la mida del triangle; només de l'angle.



1. A partir d'un triangle rectangle i aplicant el teorema de *Pitàgores*, demostra la primera relació fonamental de la trigonometria $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

2. Utilitzant les definicions de les raons trigonomètriques, demostra la segona relació fonamental $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

3. Utilitzant la definició de les raons, demostra les identitats:

a) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$ b) $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$

Comprova les anteriors relacions a partir dels angles de 30° i 60 °.

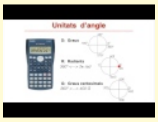
4. Explica, a partir del vist en aquest apartat, perquè el sinus i el cosinus de 45° són iguals, i perquè la tangent val la unitat.

Raons d'angles notables aguts

Vídeo 124: Trigonometria: Demostració de les raons dels angles notables 0, 30, 45, 60 i 90 graus

Angle α (°)	Angle α (rad)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$--$

Angles i raons trigonomètriques inverses



Vídeo 123:

Radiant

Un angle de 1 rad $\approx 57,3°$. A la pràctica utilitzam el factor de conversió

$$2\pi \text{ rad} = 360°.$$

5. Expressa en radiants els angles següents: 60°, 120°, 225°, 330°.

$$60° \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{60}{180}\pi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

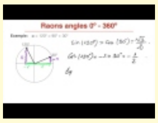
6. Expressa en graus sexagesimals: $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ i $\frac{10\pi}{6}$ radiants.

7. Quant sumen (en radiants) els angles d'un triangle? Quant mesura un angle recte en radiants?

8. Per veure la utilitat dels radiants, suposem un mòbil que es mou en una circumferència de dos metres de radi amb una velocitat de 4 m/s. Calcula la seva velocitat en rad/s i en graus per segon. Quantes voltes dóna per minut?

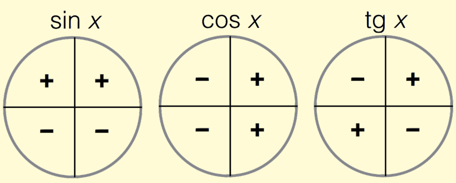
9. Un mòbil ha recorregut un angle de 3 rad en una circumferència de radi 2 m. Quant espai ha recorregut? I si la circumferència tingués radi 0'5 m? *Recorda*: L'arc de circumferència s és $s = \alpha \cdot R$ si l'angle α ve en radiants.

Raons trigonomètriques d'angles qualssevol



Vídeo 125: Raons trigonomètriques d'angles qualssevol

Signe de les raons trigonomètriques segons el quadrant:



La calculadora té dos modes per manejar angles, **DEG** graus i **RAD** radiants. Per aquesta activitat assegura't que el tens en mode **DEG**.

Les funcions trigonomètriques inverses de la calculadora donen només un dels possibles possibles de l'angle. Aquest angle es troba entre:

$\arcsin x$	$-90°$ a $90°$
$\arccos x$	$0°$ a $180°$
$\text{arctg}\, x$	$-90°$ a $90°$

L'altre angle l'has d'obtenir raonant amb l'ajuda de la circumferència goniomètrica.

Quins angles tenen per sinus 0,5?

Una resposta l'obtenim de la calculadora SHIFT sin 0,5 = 30 .

L'altre angle es troba al segon quadrant, i l'obtenim fent $180° - 30° = 150°$

Quins angles tenen per tangent -2?

Una resposta l'obtenim de la calculadora SHIFT tan -2 = -63.4349... . Aquest angle es troba al quart quadrant i en realitat és l'angle $360 - 63,4349 = 296.5651$.

L'altre angle s'ha de trobar al segon quadrant, on també la tangent és negativa. El trobam fent $180° - 63,3349° = 116,5651°$

10. Copia en el teu quadern, i situa en el quadrant que correspongui i expressa en funció d'un angle agut les raons trigonomètriques dels següents angles:

Angle	Sinus	Cosinus	Tangent	Secant	Cosecant	Cotangent
120°						
135°						
210°						
315°						
390°						
3000°						
$-150°$						

11. Utilitza la calculadora i l'après en aquest apartat per trobar tots els angles positius menors que 360° el sinus dels quals és de 0'6.

12. Troba tots el angle compresos entre 0 i $360°$ la tangent dels quals val 4.

13. Troba tots el angle compresos entre 0 i $360°$ el cosinus dels quals val 0'75.

3.2 Resolució de triangles

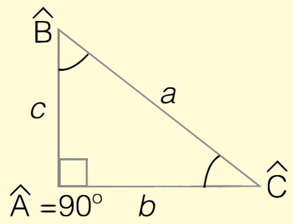
Triangles rectangles

En un triangle rectangle, sempre utilitzarem el següent conveni per anomenar els costats i angles. L'angle recte és $\hat{A} = 90°$.

Podrem utilitzar les següents relacions

$$\hat{B} = 90 - C, \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$b = a\cos\hat{C}, \quad c = a\sin\hat{C}, \quad \mathrm{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b}$$



Exercici Resolt

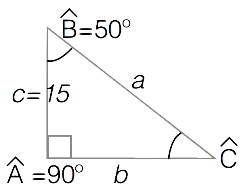
1. Resol el triangle rectangle del qual sabem que $\hat{B} = 50°$ i el catet $c = 15$ cm.

L'angle $\hat{C}$ s'obté de $\hat{C} = 90 - 50 = 40°$. Tot seguit, utilitzam la raó trigonomètrica

$\mathrm{tg}\,40 = \dfrac{15}{b} \to b = \dfrac{15}{\mathrm{tg}\,40} = 17,87.$

Del teorema de Pitàgores, $a^2 = b^2 + c^2$,

$a = \sqrt{15^2 + 17,87^2} = 23,34$



14. Resol el triangle ABC (calcula els elements que falten), essent A l'angle recte

a) a=32 cm, B=57°

b) a=72 cm, C=23°

c) c=250 m, b=308 m

d) c=35 m, C=32°

15. Per arribar a una alçada de 3 m, recolçam una escala formant un angle de 60° amb el terra. Troba la longitud de l'escala i la distància des de la base fins a la paret.

16. L'estatura d'una persona és 1,78 m i projecta al terra una ombra de 85 cm. Quin angle formen els rajos del sol amb l'horitzontal del terra?

17. Calcula els costats i els angles del triangle *ABC*, rectangle en A, del que coneixem el catet *AC* = 15cm i l'altura relativa a la hipotenusa *AD* = 12cm.

18. En un tram de carretera la inclinació és del 5 % (puja 5 m en 100 m). Calcular l'angle que forma amb l'horitzontal la carretera. Sabem que hem pujat 100 m, quant hem caminat per la carretera?

19. ★ Una estàtua de 2,5 m d'altura està col·locada sobre una peanya. Des d'un punt del terra es veu la peanya amb un angle de 15° i l'estàtua, sobre un angle de 40°. Quina és l'altura de la peanya?

Teorema del sinus

Vídeo 127: Trigonometria: Teorema del sinus

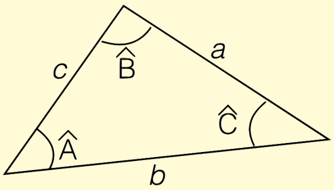
Sempre utilitzarem el següent conveni per anomenar els costats i angles.

D'una banda sabem que els angles compleixen $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$. El teorema del sinus diu que

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

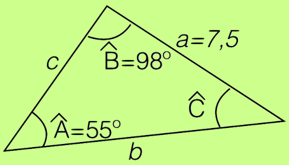
on R és el radi de la circumferència circumscrita en el triangle.

De vegades, a l'aplicar el teorema del sinus, poden aparèixer dues solucions.



Exercici Resolt

2. En un triangle coneixem dos dels seus angles i un costat: A=55°, B=98°, a=7,5 cm. Resol el triangle.



L'angle $\hat{C}=180-(55+98)=27°$
Amb el teorema del sinus trobam els costats que falten

$$\frac{b}{\sin 98}=\frac{7,5}{\sin 55}\ \rightarrow\ b=\frac{7,5\sin 98}{\sin 55}=9,1\,\mathrm{cm}$$
$$\frac{c}{\sin 27}=\frac{7,5}{\sin 55}\ \rightarrow\ c=\frac{7,5\sin 27}{\sin 55}=4,2\,\mathrm{cm}$$

20. Un triangle té dos angles que valen 40 i 60 graus respectivament. El costat entre ells és de 8 cm. Calcula tots els seus angles i costats.

21. En un triangle *ABC*, els costats *AB i AC* mesuren 3 i 2 cm respectivament. L'angle corresponent al vèrtex *B* mesura 30 graus. Resol el triangle.

a) Utilitza el teorema del sinus per calcular l'altre angle. Hi ha dues solucions perquè hi ha dos angles amb el mateix sinus. Calcula els dos.

b) Les dues solucions es deuen al fet que existeixen dos triangles, series capaç de dibuixar-los?

22. En un triangle coneixem dos dels seus angles i un costat: A=55°, B=98°, a=7'5 cm. Resol-ho.

23. El radi de la circumferència circumscrita al triangle ABC mesura $2\sqrt{2}$ i dos dels seus angles fan 60° i 45°. Resol el triangle i troba'n l'àrea.

24. Un globus està en la vertical entre dos observadors separats per 40 m. El primer ho veu amb un angle de 30 graus i el segon amb un angle de 50 graus, a quina altura està el globus?

25. Una antena de radi està subjecta al terra amb dos cables, que formen amb l'antena angles de 36° i 48°. Els punts de subjecció dels cables estan alineats amb el peu de l'antena i disten entre sí 98 metres. Calcula l'altura de l'antena.

26. Des d'un cert punt del terra es veu un arbre sota un angle de 42°. Baix quin angle es veu col·locant-se al doble de distància?

27. Dos amics estan en una platja a 150 m de distància i en el mateix plà vertical que un estel que es troba volant entre tots dos. En un moment donat, un el veu amb un angle d'elevació de 50° i l'altre amb un angle de 38°. Quina distància hi ha des de cadascun d'ells a l'estel? A quina altura vola l'estel?

28. Un globus aerostàtic es troba subjecte al terra mitjançant dos cables d'acer, en dos punts que disten 70 metres. El cable més curt mesura 90 metres i l'angle que forma l'altre cable amb el terra és de 42°. Calcula:

a) La mesura de l'altre cable.

b) La distància del globus al terra.

Teorema del cosinus

Vídeo 129: Trigonometria: Teorema del cosinus

El teorema del cosinus s'aplica quan no tenim cap angle o quan tenim dos costats i l'angle que formen. El teorema es pot formular en tres versions diferents:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Exercici Resolt

3. En un triangle coneixem dos costats i l'angle comprès entre ells $\hat{A}$=35°, b=20 cm, c=14 cm. Resol-ho.

Aplicam el teorema del cosinus per trobar el costat oposat a l'angle A que ens donen. $a^2 = 20^2 + 14^2 - 2 \cdot 20 \cdot 14 \cos 35°$. D'aquí aïllam el costat $a = 11,72$ cm.
Tornam a aplicar el teorema del cosinus ara pel costat b.
$20^2 = 11,72^2 + 14^2 - 2 \cdot 11,72 \cdot 14 \cos \hat{B}$. D'aquesta fórmula cal aïllar el $\cos \hat{B}$,

$$\cos \hat{B} = \frac{20^2 - 11,72^2 - 14^2}{-2 \cdot 11,72 \cdot 14} = -0,203$$

L'angle $\hat{B} = \arccos -0,203 = 101,7°$, i finalment l'angle $\hat{C} = 180 - 35 - 101,7 = 43,28°$.

4. Si els braços d'un compàs fan 12 cm de llarg i formen un angle de 60°, calcula el radi de la circumferència que podem traçar amb el compàs.	Aplicam el teorema el cosinus $$a^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos 60°$$ D'aquí s'obté que el costat oposat a l'angle de 60° és de $a = 12$, que correspon al radi de la circumferència que podem dibuixar. Es tracta d'un triangle isòsceles.

29. Troba els angles d'un triangle del que es coneixen els tres costats: a= 37 cm, b = 42 cm, c = 68 cm.

30. Dibuixa un triangle amb b=5, c = 8 i l'angle entre ells de 30° (usa una regla i un transportador). Calcula l'altre costat amb el teorema del cosinus i comprova que coincideix amb el resultat mesurat. No et sortirà exactament per l'arrodoniment i l'error de mesurament però hauria de ser molt similar.

31. Un triangle té de costats 3, 5 i 7. Calcula els seus angles.

32. En un triangle *ABC*, els costats *AB* i*AC* mesuren 3 i 2 cm respectivament. L'angle corresponent al vèrtex *B* mesura 30 graus.

a) Utilitza el teorema del cosinus per calcular l'altre costat. Obtindràs dues solucions.

b) Les dues solucions es deuen al fet que hi ha dos triangles series capaç de dibuixar-los?

33. Calcula l'àrea d'un heptàgon regular inscrit en una circumferència de 35 cm de perímetre.

34. Dos vaixells parteixen d'un port amb rumbs diferents que formen un angle de 127°. El primer surt a les 10 h del matí amb una velocitat de 17 nusos, i el segon surt a les 11 h 30 min, amb una velocitat de 26 nusos. Si l'abast dels seus equips de radi és de 150 km. Podran posar-se en contacte a les 3 de la tarda? (nus=milla/hora; milla=1850 m).

Resolució de triangles en general

35. Resol els següents triangles:

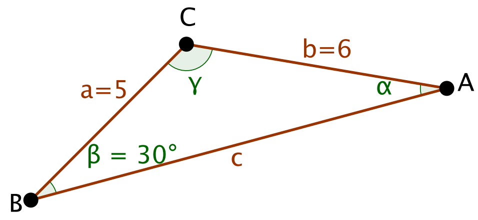
a) B=30°, a=5 cm, b = 6 cm

b) A=45°, C=60°, b = 20 m

c) C = 45° , b =10 m, c = 6 m;

d) a = 5 cm, b = 4 cm, c = 4 cm

e) A=45°, b = 50 m, a=40 m

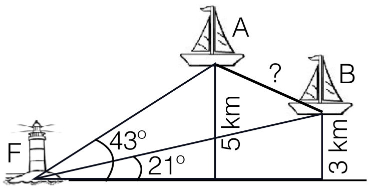


x

a) Representa els triangles deixant clares les dades i les incògnites.

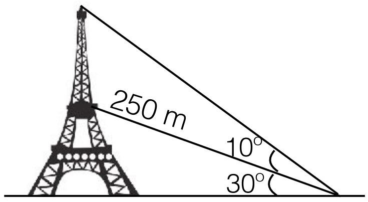
36. Calcula l'àrea i el perímetre d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 3 cm.

37. Des d'un far *F* es veu un vaixell A amb angle de 43° amb la costa, i el vaixell B amb 21°. El vaixell *B* està a 3 km de la costa i el A a 5 km. Calcula distància entre els vaixells.



38. Una finca té forma triangular. Dos dels seus costats mesuren 140 m i 200 m respectivament, i l'angle comprès entre tots dos és de 35°. Calcula el perímetre i la superfície de la finca.

39. Calcula l'altura de la torre:



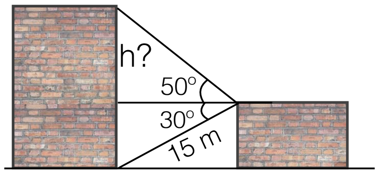
40. Dues persones *A i B* disten entre sí 200 m i veuen un globus que està situat entre ambdues. La primera persona ho veu amb un angle de 30° i la segona amb un angle de 60°.

a) A quina distància està *B* del globus?

b) A quina altura està el globus?

c) Una persona que estigui situada dins del globus, amb quin angle veu a *A* i *B*?

41. Calcula l'altura de la torre gran a partir del següent dibuix.

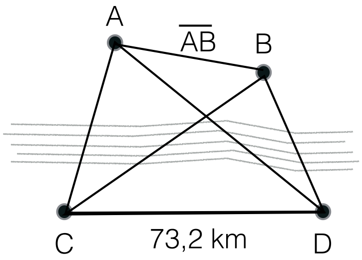


42. Desitgem mesurar l'altura d'un edifici. Si ho observem des d'un punt *A* ho veiem amb un angle de 50°. Ara bé, si ho contemplem des de 20 m més lluny *B*, l'angle és de 40°. Quina és l'altura de l'edifici? A quina distància està el punt *B* d'aquest edifici?

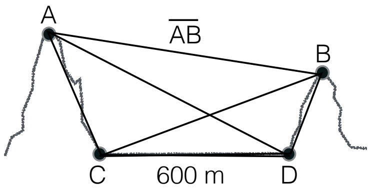
43. Comencem en una ciutat *A* i observem un cartell. La ciutat *B* està a 50 Km i la ciutat *C* a 40 Km. Mesurem l'angle que formen les dues carreteres i resulta ser de 60°. A quina distància està *B* de C ? Des de la ciutat *B*, amb quin angle es veuen les altres dues ciutats? [En altres paraules: si considerem el triangle *ABC*, què val l'angle que correspon al vèrtex *B*?]

44. Per determinar l'amplada d'un riu ens fixam amb un arbre que està situat en un punt C de la vorera. Arran de l'altra vorera hi ha dues cases A i B separades 30 m. Des de la casa A, l'arbre i la casa B formen un angle de 60°. Des de la casa B, l'angle que forma l'arbre i la casa A és de 75°. Calcula l'amplada del riu.

45. ★ A i B són dues ciutats situades a l'altra banda d'un riu de pas inaccessible. Aquestes ciutats, però, són visibles des d'altres punts accessibles C i D, separats per una distància de 73,2 km. Sabent els angles $\widehat{ACD} = 80,2°$, $\widehat{BCD} = 43,5°$, $\widehat{ADC} = 23,23°$, $\widehat{BDC} = 32°$, determina la distància entre les dues ciutats AB.



46. ★ Dos muntanyistes que han pujat en caps de setmana successius a dos cims veïns volen saber quina és la distància entre aquests dos cims. Per això, han mesurat des del peu del cim A els angles d'elevació dels cims A i B que són 65° i 30°, respectivament.



Després han caminat fins el peu del cim B i han mesurat els angles d'elevació dels cims A i B de 40° i 47°, respectivament. La distància entre els dos peus dels cims és de 600 m. Què val la distància entre els dos cims?

47. En un viatge d'alumnes de 4t d'ESO a Londres, alguns dels viatgers van fer pràctiques de trigonometria. En conèixer que l'Abadia de Westminster té una altura de 30 metres, van decidir aprofitar els seus coneixements per calcular l'altura de la famosa torre Big Ben. Des d'un punt situat entre els dos edificis s'observa el punt més alt de l'Abadia amb angle de 60°, i el Big Ben amb un angle de 45°. Si la distància entre les bases de les torres dels dos edificis és de 50 metres, quin va ser el resultat dels seus càlculs?, a quina distància es trobava de cada edifici?

3.3 Identitats trigonomètriques

Trobareu un resum de les identitats trigonomètriques a la pàgina 45.

Vídeo 145: Identitats 1: Suma d'angles

Vídeo 146: Identitats 2: Diferència d'angles

Vídeo 148: Identitats 3: Angle doble

Vídeo 147: Identitats 4: Relació de l'angle meitat

48. Calcula a partir de les raons trigonomètriques de 30°, 45°, 60° i 90°, les raons trigonomètriques de 75°, 120°, 150°, 105° i 135°

Per exemple, si utilitzam la relació de la suma d'angles i expressam $75° = 45° + 30°$

$\sin(75°) = \sin(45°+30°) = \sin(45°)\cdot\cos(30°)+\cos(45°)\cdot\sin(30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

De forma similar, podem obtenir el cosinus

$\cos(75°) = \cos(45°+30°) = \cos(45°)\cdot\cos(30°)-\sin(45°)\cdot\sin(30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

i finalment, la tangent

$$\mathrm{tg}\,(75°) = \mathrm{tg}\,(45° + 30°) = \frac{\mathrm{tg}\,45° + \mathrm{tg}\,30°}{1 - \mathrm{tg}\,45° \cdot \mathrm{tg}\,30°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

49. Calcula a partir de les raons trigonomètriques de 30°, 45°, 60° i 90°, les raons trigonomètriques de 15°

50. Comprova que les raons trigonomètriques de 30° es poden obtenir a partir de les raons trigonomètriques de 90°, i de 60°.

51. Demostra les fórmules d'angles complementaris $(90-\alpha)$ emprant les fórmules de la diferència: $\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$ i $\mathrm{tg}\,(90-\alpha) = 1/\mathrm{tg}\,\alpha$.

52. Calcula les raons trigonomètriques de 22'5° i 11'25° a partir de les raons trigonomètriques de 45°.

53. Comprova que les raons trigonomètriques de 45° es poden obtenir a partir de les raons trigonomètriques de 90°.

54. ⊕ Demostra $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha = \cos\alpha$.

EXEMPLE

Per fer una demostració d'una identitat cal partir del terme de l'esquerre i, aplicant altres relacions que sabem que són certes, arribar al terme de la dreta que volem demostrar.

Així doncs, en aquest exemple partirem de $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha$ i treurem factor comú $\cos\alpha$, obtenint

$\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha = \cos\alpha \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$ ara utilitzam la relació fonamental que diu que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, aleshores trobam $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha = \cos\alpha$ que era el resultat que voliem demostrar (**c.v.d.**).

55. ⊕ Demostra $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$.

56. ⊕ Demostra $2\sin x + \cos(-x) - \sin(-x) - \cos x = 3\sin x$.

57. ⊕ Demostra $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha = \sec\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\alpha$.

58. ⊕ Demostra $\sin 3\alpha = \sin\alpha \cdot \left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$.

59. ⊕ Demostra $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

60. Simplifica les següents expressions:

a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

b) $\dfrac{\sin(2a) \cdot \cos a}{\sin a \cdot (1 + \cos(2a))}$

c) $\dfrac{\sin^3 x + \sin x \cdot \cos^2 x}{\sin x}$

d) $\dfrac{\sin(x - y) - \sin(x + y)}{\cos(x + y) - \cos(x - y)}$

61. Demostra que són certes les següents igualtats:

a) $\dfrac{2 \sin x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

b) $\dfrac{1 - \sin^4 x}{\cos^2 x} = 2 - \cos^2 x$

62. Comprova que són certes les següents igualtats:

a) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$

b) $\dfrac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = 1 - \sin \alpha$

63. Utilitza les transformacions de sumes en productes per posar en funció del sinus i cosinus de l'angle a:

a) $\sin(45 + a) + \sin(45 - a)$

b) $\cos(120 + a) + \cos(60 + a)$

64. Demostra les següents identitats:

a) $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$

b) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

c) $1 + \cos 2x = \dfrac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

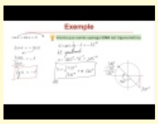
d) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \cdot \cos 2x = 1 + \sin 2x$

3.4 Equacions i sistemes trigonomètrics

Identitat: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
És certa sempre, per qualsevol x

Equació: $x^2 - x = 2$
Volem trobar els valors de x pels quals es compleix =

Vídeo 138: Equacions trigonomètriques nivell 1



Vídeo 139: Equacions trigonomètriques nivell 2

Vídeo 140: Equacions trigonomètriques nivell 3

65. Resol les següents equacions trigonomètriques

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$

b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\operatorname{tg} x = -1$

e) $\operatorname{cosec} x = 4$

f) $\cos x = \frac{1}{3}$

g) $\sin x = \cos x$

h) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$

i) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

66. Calcula les solucions de les següents equacions trigonomètriques

a) $\cos(3x) = 0$ b) $\mathrm{tg}\,(2x) = -1$ c) $\sin(4x) = -1$

Expressa en radiants les solucions anteriors.

67. Calcula les solucions de les següents equacions trigonomètriques:

a) $\cos(5x) - \cos x = 0$ b) $\sin(2x) - \sin(4x) = 0$

Ajuda: Utilitza les relacions:

$$\cos a - \cos b = -2\sin\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{a-b}{2} \quad \text{i} \quad \sin a - \sin b = 2\cos\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{a-b}{2}.$$

68. Calcula les solucions de les següents equacions trigonomètriques:

a) $\sin x + \cos x = 1$ b) $\sin(2x) = 2\cos x$

c) $\sin^2 x - \cos^2 x - \cos(2x) = 1$

69. Resol les següents equacions trigonomètriques:

a) $\cos x \cdot \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ b) $\mathrm{tg}\, x - \sin 2x = 0$

70. Resol les equacions trigonomètriques següents donant totes les solucions possibles.

a) $\cos 2x + 1 = 4\cos x$ b) $\dfrac{\sin(2x)}{\mathrm{tg}\, x} + \cos^2 x = 1$

c) $\cos 2x + \cos x = 0,2$

71. Resol les següents equacions

a) $\sin^2 x - \sin x = 0$ b) $\cos x + \sin^2 x = 1$

c) $3\mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x$ d) $\sin 2x = 0,5$

72. Resol els següents sistemes:

a) $\begin{cases} x + \sin^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \end{cases}$

73. Resol els següents sistemes:

a) $\begin{cases} \sin x - \sin y = 0 \\ x - y = \pi \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

74. Resol els següents sistemes:

a) $\begin{cases} \cos(x - y) = 0 \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin(x - y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Autoavaluació

1. Calcula les següents raons trigonomètriques sense fer ús de la calculadora.

a) $\sin(-750°)$ b) $\mathrm{tg}\, 570°$ c) $\cos(2\pi/3)$

2. A partir de les raons trigonomètriques de la suma d'angles, calcula exactament les següents raons trigonomètriques:

a) $\sin 105°$ b) $\cos 75°$

3. Sigui un triangle del que coneixem les següents dades a = 10 cm, b = 20 cm, = 30°. Calcula les altres dades del triangle. Calcula l'àrea del triangle

4. Un voltor vola a 120 m d'altura i formant un angle amb l'horitzontal respecte de nosaltres de 60°. En la mateixa direcció però formant un angle de 30 ° vola una perdiu a 100 m d'altura. Si el voltor vol menjar-se la perdiu, però només ho aconsegueix si la distància entre tots dos és menor de 150 m, pot el voltor caçar a la perdiu? A quina distància estan?

5. Calcula sense utilitzar la calculadora la resta de raons trigonomètriques (sinus, cosinus) de α , sabent que $\mathrm{tg}\, \alpha = 1/2$ i α pertany al 3r quadrant.

6. Resol les següents equacions:

a) $6\cos^2(x/2) + \cos x = 1$ b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

7. Resol els següents sistemes:

a) $\begin{cases} \sin x + \sin y &= 1 \\ x + y &= \pi \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x + \sin y &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sin x - \sin y &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$

8. Demostra la identitat $\dfrac{\sin^2 2a}{(1-\cos^2 a)\cdot \cos a} = 4\cos a$

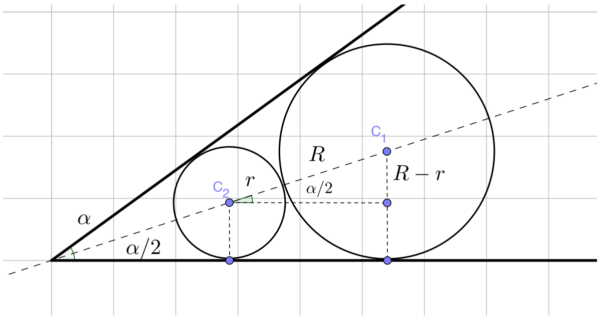
9. Calcula el perímetre d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de 30 cm de radi. Calcula la seva àrea

10. En els senyals de trànsit que indiquen el pendent de la carretera la informació que ens donen és el percentatge de pujada en funció de l'avanç del cotxe. Calcula l'angle per a un pendent del 15 %.

Aplica el que has après

Una barrera conflictiva

Un dia que anava passejant em vaig trobar la barrera de la imatge. Sembla com si el ferrer hagués tingut alguns problemes a l'hora de construir-la. Com pots veure, va començar amb cercles i al final va intentar acabar-la amb alguna cosa semblant a el·lipses. Això passa, perquè el ferrer va col·locar les divisions verticals a igual distància.



Em demano com hauria d'haver estat el disseny perquè es pogués fer únicament amb cercles tangents entre sí i tangents amb les barres horitzontals (vegeu esquema de la dreta). En particular, quina hauria d'ésser la relació entre els radis de dos cercles consecutius $\frac{r}{R}$ sabent que les dues barres horitzontals formen un angle α?

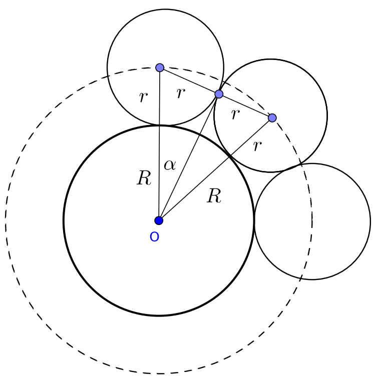
Encerclant l'euro

No us ha passat mai que estau avorrits i començau a jugar amb el primer que teniu a ma? Un dia tenia moltes monedes dins la butxaca i vaig començar a encerclar 1 € amb monedes de cèntim. Em demanava si era possible trobar alguna combinació de monedes de forma que la corona de monedes es pugues fer de la forma més exacta possible; és a dir, que totes les monedes fossin tangents entre si.

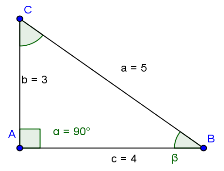
Potser et sigui d'utilitat disposar dels radis de les monedes d'euro:

Moneda	0.01 €	0.02 €	0.05 €	0.10 €	0.20 €	0.50 €	1 €	2 €
Diametre (mm)	16.25	18.75	21.25	19.75	22.25	24.25	23.25	25.75

Començau l'anàlisi a partir de l'esquema de la dreta. Si es possible enrevoltar el cercle gran amb els petits, voldrà dir que l'angle α serà una part de $360°$; és a dir, $\alpha = 360/n$ per algun $n = 3, 4, 5, \cdots$. A partir de trigonometria en un dels triangles, trobau una relació entre els radis de les monedes R/r perquè l'encerclament sigui perfecte.



Resum

Apartat	Resum
Radiant	És un angle tal que qualsevol arc que se li associï mesura exactament el mateix que el radi utilitzat per traçar-ho. Es denota per rad. $360° = 2\pi$ rad $180°$ són π rad, $90°$ són $\pi/2$ rad, ...
Raons d'un angle agut	$\sin\ \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$ $\cos\ \alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \frac{b}{c}$  $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\text{tg}\,\beta = \frac{3}{4}$
Teorema del sinus	En un triangle $\widehat{ABC}$ qualsevol: $$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$ on R és el radi de la circumferència circumscrita en el triangle. Si $b = 5$ i $a = 3,01$ i $\hat{B} = 30°$, l'angle $\hat{A}$ compleix $\frac{3{,}01}{\sin\hat{A}} = \frac{5}{\sin 30}$ i dóna $\hat{A} = 17'52°$
Teorema del cosinus	En un triangle ABC qualsevol: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$ $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$ $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$ Si b = 5, c = 6 i l'angle entre ells és 30 graus, el costat a és $a^2 = 5^2 + 6^2 - 60\cos 30$= 9,04 $\rightarrow a = 3,01$
Resolució general de triangles	En general, qualsevol triangle es pot resoldre si coneixem tres de les sis dades (hi ha tres costats i tres angles). Almenys necessitam conéixer un costat. S'apliquen els teoremes del sinus i del cosinus i que la suma dels seus angles són 180 graus. Si les dades originals són b=5, c = 6 i $\hat{A} = 30$ el teorema del cosinus ens dóna a = 3'01, el teorema del sinus $\hat{A} = 17'52°$ i $\hat{B} = 132'48°$.

Resum d'identitats trigonomètriques

Relacions fonamentals:

[1] $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ [2] $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ [3] $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha}$

Angle oposat:

[4] $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Suma d'angles:

[5] $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

[6] $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

[7] $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$

Diferència d'angles:

[8] $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

[9] $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

[10] $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$

Angle doble:

[11] $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

[12] $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

[13] $tg\,2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

Angle meitat:

[14] $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

[15] $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ signe $\pm$ segons quadrant de $\alpha/2$

[16] $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Sumes i diferències a productes:

[17] $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

[18] $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

[19] $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

[20] $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Carl F. Gauss (1777-1855)

Tema 4

Nombres complexos

Índex

L'home ha anat ampliant al llarg del temps la noció de nombre segons les seves necessitats.

Des de la prehistòria, els nombres naturals han servit per comptar. Els nombres enters negatius ens permeten resoldre equacions com $x + 5 = 1$. De forma similar els nombres fraccionaris permeten resoldre $3x = 2$. En l'antiga Grècia ja es sabia que no existia cap nombre racional que fos solució de $x^2 = 2$; D'aquí s'introduïren els nombres irracionals.

El conjunt format pels nombres racionals i irracionals és el conjunt dels nombres reals. Aquests són tots els nombres amb els quals, de moment, hem treballat.

Equacions de segon grau

És possible trobar les solucions de l'equació $x^2 - 4x + 13 = 0$?

Si utilitzam la fórmula de les equacions de segon grau, trobam

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

Donat que $\sqrt{-36}$ no és cap nombre real, deim que l'equació no té solucions reals. Però, separem $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{-1}$. Veim que el problema està en que no podem calcular $\sqrt{-1}$.

En 1777 Leonard Euler va anomenar $i = \sqrt{-1}$ com la unitat imaginària. D'aquesta forma podem escriure les solucions com:

$$x = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Acabam d'escriure dos nombre complexos en forma binòmica.

4.1 Nombres complexos en forma binòmica

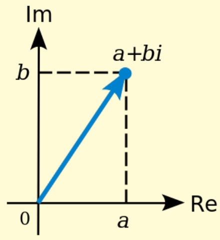
Vídeo 164: Introducció als nombres complexos

Es defineix la **unitat imaginària** i com $i = \sqrt{-1}$. Es compleix que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc.

Els nombres de la forma $2i$, $5i$, $-\frac{3}{2}i$, $\cdots$ s'anomenen **imaginaris purs**.

Un **nombre complex** en forma binòmica s'expressa com $z = x + iy$, on x s'anomena **part real** i y la **part imaginària** del nombre.

El nombres es representen sobre el **pla complex**. A l'eix horitzontal hi situam la part real i a l'eix vertical la part imaginària.



El **complex conjugat** del nombre s'obté de canviar el signe de la part imaginària $z^* = x - iy$. El **mòdul** d'un nombre complex és la longitud del nombre i s'obté de $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es compleix que $z \cdot z^* = |z|^2$.

Operacions en forma binòmica

Suposau que es donen els nombres complexos $z_1 = 2 - 3i$ i $z_2 = 5 + 4i$. Amb aquests nombres podem fer les següents operacions:

- **Suma**:
$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (5 + 4i) = 7 + i$$
- **Resta**:
$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (5 + 4i) = -3 - 7i$$
- **Producte**:
$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (5 + 4i) = 10 + 8i - 15i - 12\,\underset{\downarrow -1}{i^2} = 22 - 7i$$
- **Divisió**:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 - 3i) \cdot (5 - 4i)}{(5 + 4i) \cdot (5 - 4i)} = \frac{-2 - 23i}{41}$$

1. Donats els següents nombres complexos:

$$a = 3i, \quad b = -2i, \quad c = 5, \quad d = 1 + i, \quad p = -1 - i$$

a) Representa'ls gràficament sobre el pla complex. Representa els seus conjugats.

b) Representa gràficament les sumes: $a + b, \quad a + c, \quad b + d, \quad d + p$

c) Representa gràficament els productes: $a \cdot i, \quad b \cdot i, \quad c \cdot i, \quad d \cdot i, \quad p \cdot i$. Comprova que multiplicar per i equival a girar el nombre complex 90º.

2. Calcula

a) $7 - 3i - (2 + 6i)$

b) $(5 - 2i) \cdot (-3i)$

c) $(7 + 3i) \cdot (-1 + 2i)$

d) $(2 + i) - i(1 - 2i)$

e) $(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)$

f) $(3 + 2i) - (1 - i) \cdot (4 - 5i)$

g) $(1 + i)^2$

h) $(1 - i)^4$

f

3. Realitza les següents operacions amb nombres complexos:

a) $\dfrac{2 - i}{1 + 3i}$

b) $\dfrac{5 + 10i}{3 - 4i} + \dfrac{2 - i}{i}$

c) $\dfrac{2 + i}{4 - 3i} + \dfrac{3 + i}{5i}$

d) $\dfrac{68}{(1 - i) \cdot (2 - i) \cdot (3 - i)}$

EXEMPLE

a) Per dividir dos nombres complexos, multiplicam i dividim pel complex conjugat del denominador.
$$\frac{2 - i}{1 + 3i} = \frac{(2 - i) \cdot (1 - 3i)}{(1 + 3i) \cdot (1 - 3i)} = \frac{2 - 6i - i - 3}{10} = \frac{-1 - 7i}{10}$$

4. Comprova les següents fórmules:

a) $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

b) $(x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

5. Calcula a perquè el nombre complex $\dfrac{a + i}{3 - i}$ tingui la seva part real igual a la seva part imaginària.

4.2 Nombres complexos en forma polar

Vídeo 165: Operacions en forma polar

Un nombre complex $z = x + iy$ es pot expressar en forma polar donant el seu **mòdul** i l'angle que forma amb l'eix real. Aquest angle s'anomena **l'argument** del nombre complex. El nombre en **forma polar** s'expressa com $\mathbf{r}_\theta$ on
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Donat que hi ha infinits angles que tenen per tangent y/x, es defineix **l'argument principal** del nombre complex com un angle comprès entre $-\pi < \theta \leq \pi \quad (-180° < \theta \leq 180°)$.

De forma anàloga, es pot passar un nombre en forma polar a forma binòmica mitjançant
$$z = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$$

Aquesta forma també es coneix com **forma trigonomètrica**.

6. Calcula el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\sqrt{3}-i$ b) $-2-2i$ c) $1-\sqrt{3}i$ d) $-4i$

EXEMPLE

a) Donat $z=\sqrt{3}-i$, calculam el seu mòdul fent $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$. L'argument el trobam de $\theta=\operatorname{arctg}(-1/\sqrt{3})=-30°$. El nombre és $z=2_{-30°}$

7. Calcula el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $-3+3i$ b) -3 c) $-3i$ d) $3-3i$

8. Calcula l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\dfrac{-3}{\sqrt{3}+i}$ b) $\dfrac{-i}{1-i}$ c) $(1-i\sqrt{3})^7$

9. Expressa en forma polar els següents nombres complexos:

a) i b) $-i$ c) $4+4i$ d) -4

10. Expressa en forma polar els següents nombres complexos:

a) $5i$ b) $-7i$ c) $5-5i$ d) $\sqrt{3}+i$

11. Expressa en forma binòmica els següents nombres complexos donats en forma polar:

a) De mòdul 2 i argument $\dfrac{\pi}{3}$ b) De mòdul 3 i argument $-\dfrac{\pi}{4}$

c) De mòdul 1 i argument $\dfrac{\pi}{2}$ d) De mòdul 5 i argument $\dfrac{2\pi}{3}$

Operacions en forma polar

L'avantatge de la forma polar és que les operacions es realitzen molt més ràpid.

Si ens donen dos nombres en forma polar r_θ i $r'_{\theta'}$,

Producte: $r_\theta \cdot r'_{\theta'}=(r\cdot r')_{\theta+\theta'}$, multiplicam els mòduls i sumam els arguments.

Quocient: $r_\theta : r'_{\theta'}=(r : r')_{\theta-\theta'}$, dividim els mòduls i restam els arguments.

Potència: $(r_\theta)^n=(r^n)_{n\cdot\theta}$, elevam el mòdul i multiplicam l'argument per l'exponent.

Exercici Resolt

1. Passa a forma polar, opera i comprova $(1+i)^{16}=2^8=256$.

En forma polar el nombre és $1+i=\sqrt{2}_{45°}$. Per elevar el nombre a 16, elevam el mòdul i multiplicam l'argument per 16.

$$(1+i)^{16}=(\sqrt{2}^{16})_{16\cdot 45°}=2^8_{720°}=2^8$$

On hem utilitzat que $720°$ són dues voltes completes.

12. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma polar:

a) $\dfrac{\sqrt{2}i}{-2-2i}$ b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}$

13. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma polar:

a) $(\sqrt{3}+i)^{60}$ b) $(4-4i)^{-11}$ c) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^{12}}{(-2-2i)^{8}}$

Fórmula de Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

EXEMPLE

Si utilitzam $n = 2$ en la fórmula de Moivre: $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

Desenvolupam el quadrat del membre de l'esquerre:

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

Si igualam les part reals i imaginàries trobam:

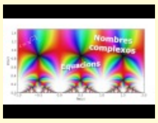
$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

que són les relacions de l'angle doble vistes en el tema 3.

14. Utilitza la fórmula de Moivre per expressar en funció de $\sin\theta$ i $\cos\theta$:

a) $\cos(-\theta)$ b) $\sin(-\theta)$ c) $\cos 3\theta$ d) $\sin 3\theta$

4.3 Resolució d'equacions en el pla complex



Vídeo 166: Resolució d'equacions

Tot nombre complex té n arrels enèsimes. Si ve expressat en forma polar r_θ, les arrels són

$$\sqrt[n]{r_\theta} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\theta+k\cdot 360}{n}}$$

essent $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

15. Calcula les arrels i representa-les en el pla complex

a) $\sqrt{-3i}$ b) $\sqrt{-9}$ c) $\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}$

d) $\sqrt[3]{-27}$ e) $\sqrt[3]{1-i}$ f) $\sqrt[4]{-81}$

EXEMPLE

a) Primer expressam el nombre $z = -3i$ en forma polar. Sabem que té mòdul 3 i argument 270º. Tenim dos possibles resultats de l'arrel quadrada

$$\sqrt{3_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{3}_{270/2} = \sqrt{3}_{135^\circ} \\ \sqrt{3}_{(270+360)/2} = \sqrt{3}_{315^\circ} \end{cases}$$

16. Calcula les arrels cinquenes de la unitat i representa-les en el pla complex. Calcula també totes les arrels cinquenes de -1 i representa-les.

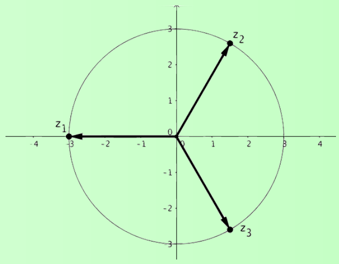
17. Resol les equacions:

a) $x^3 = -27$ b) $x^4 = -81$ c) $x^5 + 32 = 0$ d) $x^3 - 8 = 0$

EXEMPLE

a) $x^3 = -27$ implica que $x = \sqrt[3]{-27}$ que evidentment té una solució real $x = -3$. Per trobar les altres dues arrels expressam el nombre en forma polar $-27 = 27_{180^\circ}$ i en feim l'arrel cúbica.

$$\sqrt[3]{27_{180^\circ}} = \begin{cases} 3_{180/3} = 3_{60^\circ} \\ 3_{(180+360)/3} = 3_{180^\circ} \\ 3_{(180+2\cdot360)/3} = 3_{300^\circ} \end{cases}$$



Si finalment passam les tres arrels a forma binòmica trobam $x = -3$, $x = 3(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$, $x = 3(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Si representam aquests tres nombres sobre el pla complex veim que formen els vèrtexs d'un triangle equilàter.

18. Resol les equacions, obtenint les arrels reals i complexes:

a) $x^2 = -1$ b) $x^3 = -8$ c) $x^4 + 16 = 0$

19. Calcula les arrels enèsimes de la unitat, per a n = 2, 3 i 4. Representar-les gràficament, i comprova que estan sobre la circumferència de radi 1, i són els vèrtexs d'un polígon regular.

20. Resol l'equació $z^2 + 3z - 1 = 0$.

21. Calcula tots els nombres complexos z pels quals:

a) $z^6 + 64 = 0$ b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$

c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

22. Resol aquestes equacions en el pla complex. Representa les solucions gràficament.

a) $z^2 + 4i = 0$ b) $z^3 + 8i = 0$

c) $iz^3 - 27 = 0$ d) $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^2 + 4i = 0$

Començant aïllant la incògnita $z = \sqrt{-4i}$. Tot seguit hem de calcular totes les arrels (complexes) del nombre $-4i$. Per això, l'expressam en forma polar $-4i = 4_{270^\circ}$.

$$\sqrt{4_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{4}_{\frac{270^\circ}{2}} = 2_{135^\circ} \\ \sqrt{4}_{\frac{270^\circ+360^\circ}{2}} = 2_{315^\circ} \end{cases}$$

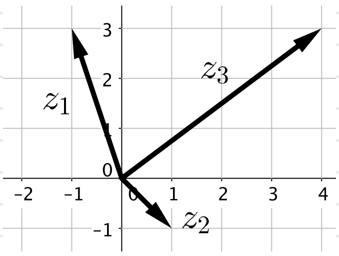
Finalment, podem expressar les dues arrels en forma binòmica:

$$\begin{cases} 2_{135^\circ} = 2(\cos 135 + i \sin 135) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ 2_{315^\circ} = 2(\cos 315 + i \sin 315) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$$

23. Calcula les quatre arrels de $z^4 + 9 = 0$ i utilitza-les per factoritzar $z^4 + 9$ amb dos polinomis de segon grau amb coeficients reals.

Autoavaluació

1. Donats els nombres complexos de la figura es demana calcular:



a) $z_1^* - z_3$

b) z_1^2

c) $|z_3|(z_1 + z_2)$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

2. Calcula $\dfrac{(3+2i)\cdot(3-2i)}{(2+3i)^3}$

3. Resol l'equació: $z^2 - 10z + 29 = 0$

4. Donada l'expressió $\dfrac{1-i}{2-ki}$, troba els valors de k pels quals l'expressió és:

a) Real

b) Imaginari pur.

5. Calcula el valor que ha de prendre x per què el mòdul de $\dfrac{x+2i}{1-i}$ sigui igual a 2.

6. Calcula el mòdul i l'argument principal del següent nombre complex $-3+3i$:

7. Expressa en forma binòmica el nombre complex de mòdul 2 i argument $\pi/3$

8. Calcula $(1+i)^6$ passant prèviament a forma polar.

9. Expressa en forma trigonomètrica el següent nombre complex $5i$.

10. Calcula les arrels cúbiques de $4\sqrt{3} - 4i$. Representa-les gràficament.

Resum

Apartat	Resum
Unitat imaginària	$i^2 = -1 \leftrightarrow i = \sqrt{-1}$
Nombre en forma binòmica	$z = x + iy$ $z = 2 + 3i$, té part real 2 i part imaginària 3
Complex conjugat	$z^* = x - iy$ $\bar{z} = 2 - 3i$
Suma de complexos	$(x + iy) + (o + iv) = (x + o) + i(y + v)$ $(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$
Producte de complexos	$(x + iy) \cdot (o + iv) = (x \cdot o - y \cdot v) + i(x \cdot v + y \cdot o)$ $(2 + 3i) \cdot (4 + 5i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 4 + 3i$
Divisió de complexos	Es multiplica numerador i denominador pel complex conjugat del denominador. Així s'aconsegueix un denominador real. $\frac{2}{1+i} = \frac{2\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{2\cdot(1-i)}{2} = 1 - i$
Forma polar	r_θ amb $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ $z = 2 + 3i$, $r = \sqrt{13}$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$
Forma trigonomètrica	$z = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$ Si tenim $z = 2_{30^\circ}$, $z = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
Producte en forma polar	$z = r_\theta$ i $z' = r'_\alpha$, aleshores $z \cdot z' = (r \cdot r')_{\theta+\alpha}$. Multiplicam els mòduls i sumam els arguments. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i $z' = 3_{50^\circ}$, $z \cdot z' = (2 \cdot 3)_{30+50^\circ} = 6_{80^\circ}$
Divisió en forma polar	$z = r_\theta$ i $z' = r'_\alpha$, aleshores $z/z' = (r/r')_{\theta-\alpha}$. Dividim els mòduls i restam els arguments. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i $z' = 3_{50^\circ}$, $z/z' = (2/3)_{30-50^\circ} = (2/3)_{340^\circ}$
Potència en forma polar	$z = r_\theta$, aleshores $z^n = (r^n)_{n\cdot\theta}$. Elevam el mòdul i multiplicam l'argument per n. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i volem calcular $z^3 = (2^3)_{3\cdot30^\circ} = 8_{90^\circ}$