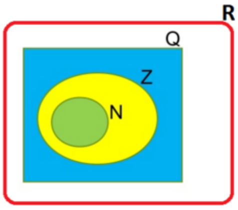


Tema 1

Nombres reals

Índex

1.1 La recta real

Recorda

Els nombres reals es classifiquen en: Naturals $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$,

Enters $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, Racionals $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b},\ a \text{ i } b \neq 0 \text{ enters }\}$,

Irracionals $\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \pi, e, \cdots\}$ i els nombres reals $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

El **valor absolut** d'un nombre és $|a| = a$ si $a \geq 0$, $|a| = -a$ si $a < 0$.

La **distància** entre dos nombres es troba mitjançant $\text{Dist}(a, b) = |b - a|$.

1. ✎ Troba l'expressió decimal de les fraccions

a) $\dfrac{2}{3} =$ b) $\dfrac{3}{4} =$ c) $\dfrac{7}{30} =$

d) $\dfrac{6}{25} =$ e) $\dfrac{7}{8} =$ f) $\dfrac{9}{11} =$

2. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, redueix-les i comprova que està bé:

a) $2,353535\cdots$ b) $87,23656565\cdots$ c) $0,9999\cdots$ d) $26,5735735735\cdots$

3. Representa a la recta numèrica els següents nombres racionals:

a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{-13}{4}$ c) 1,342 d) −2,555555...

4. Representa a la recta numèrica els nombres irracionals:

a) $\sqrt{10}$ b) $-\sqrt{6}$ c) $\sqrt{27}$ d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

5. ✎Escriu el valor absolut dels següents nombres:

a) $|5| =$ b) $|-5| =$ c) $|\pi - \sqrt{10}| =$

6. Representa a la recta real i calcula la distància entre els nombres reals següents:

a) Dist(5 , 9) b) Dist(−2.3 , −4.5)

c) Dist(−1/5 , 9/5) d) Dist(−3.272727.... , 6.27272727....)

1.2 Intervals i entorns

7. Escriu els següents intervals mitjançant conjunts i representa'ls a la recta real:

a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty, 6)$

8. Representa a la recta real i escriu en forma d'interval:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \leq 7$

9. ✎Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (emprant desigualtats) i representa'ls gràficament:

a) Un percentatge superior al 26 % ....

b) Edat inferior o igual a 18 anys ....

c) Nombres, el cub dels quals, sigui superior a 8 ....

d) Nombres positius la part entera dels quals té 3 xifres ....

e) Temperatura inferior a 25 ºC ....

f) Nombres pels quals existeix la seva arrel quadrada ....

g) Nombres que estiguin de 5 a una distància inferior a 4 ....

Entorn obert

Es defineix l'entorn obert de centre a i radi r, i s'escriu $E(a,\, r)$, com l'interval $(a - r, a + r)$

1. Expressa l'interval $(-1, 5)$ com un entorn.	El centre es troba al punt mitjà $a = 2$ i el radi és $r = 3$, és a dir $(-1, 5) = E(2,\, 3)$

10. Expressa en forma d'interval els següents entorns:

a) $E(1, 5)$ b) $E(-2, \frac{8}{3})$ c) $E(-10, 0.001)$

11. Expressa en forma d'entorn els següents intervals:

a) $(4,\ 7)$ b) $(-7,\ -4)$ c) $(-3,\ 2)$

12. Calcula x en les següents equacions: (pista: x pot tenir dos valors)

a) $|x| = 5$ b) $|x-4| = 0$ c) $|3x+9| = 21$

13. Representa a la recta real els nombres que verifiquen les següents relacions:

a) $|x| < 1$ b) $|x| \leq 1$ c) $|x-3| > 1$ d) $|x-3| \geq 1$

14. Troba dos nombres que distin 6 unitats de 3, i altres dos que distin 3,5 unitats de -2, calcula després la diferència entre el major i el menor de tots aquests nombres.

15. Escriu l'interval $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

16. Escriu l'interval format pels nombres reals x que compleixen $|x-8| \leq 3$.

17. Determina els conjunts $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ i $-A$ en els casos següents:

a) $A = [-11, -9]$; $B = (-1, 6)$ b) $A = [-5, 5]$; $B = (3, 4)$

1.3 Radicals

Trobareu un resum de les propietats dels radicals a la pàgina 7.

18. Expressa com un sol radical:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} =$ b) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}=$ c) $\sqrt{\sqrt{x^3\sqrt{x}}}=$

19. Simplifica, extraient tots els factors que puguis del radical:

a) $\sqrt[4]{64}=$ b) $\sqrt{243}=$ c) $\sqrt[9]{216}=$ d) $\sqrt[8]{1024}=$

e) $\sqrt[15]{243}=$ f) $\sqrt[6]{2401}=$ g) $\sqrt[16]{49}=$ h) $\sqrt[14]{128}=$

20. Redueix el radical a l'índex indicat:

a) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^{--}}$ b) $\sqrt{7} = \sqrt[16]{7^{--}}$ c) $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^{--}}$ d) $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{5^{---}}$

21. Expressa com un sol radical (redueix, primer de tot, els radicals a índex comú i simplifica si pots):

a) $\dfrac{\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt{8}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{6}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{5}}$

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{24}}}}$

e) $\left(\sqrt[5]{64}\right)^4$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{5^9}}}$

g) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3^2}}}$

h) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{125}}\right)^4$

Exemple

a) $\dfrac{\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[6]{25^2}}{\sqrt[6]{8^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^5\cdot 5^4}{2^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{5^4}{2^4}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}$

22. Calcula, extraient primer factors fora dels radicals:

a) $\sqrt{1331}$ - $\sqrt{44}$ + 2 $\sqrt{99}$=

b) $\sqrt[3]{16}$ + $\sqrt[3]{686}$ - 3 $\sqrt[3]{2}$=

c) 2 $\sqrt{54}$ - $\sqrt{216}$ - $\sqrt{\frac{6}{25}}$=

d) $\sqrt[4]{32}$ + $\sqrt[4]{\frac{2}{81}}$ - 7 $\sqrt[4]{2}$=

e) 2 $\sqrt{3}$ - $\frac{1}{5}$ $\sqrt{27}$ + $\frac{2}{3}$ $\sqrt{12}$=

f) $\sqrt{32}$ - $\sqrt{18}$ + $\frac{1}{5}$ $\sqrt{128}$=

Exemple

a) $\sqrt{1331} - \sqrt{44} + 2\sqrt{99} = \sqrt{11^3} - \sqrt{2^2\cdot 11} + 2\sqrt{3^2\cdot 11} =$

$= 11\sqrt{11} - 2\sqrt{11} + 2\cdot 3\sqrt{11} = 15\sqrt{11}$

23. Desenvolupa $\left(1 + (1+\sqrt{a})^2\right)^2 =$

24. Racionalitza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} =$

b) $\dfrac{3}{2\sqrt[4]{2}}$=

c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$=

d) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$=

f) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$=

Exemple

d) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)}\cdot\dfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2} = 3+2\sqrt{2}$

25. Opera, racionalitza i simplifica

a) $\dfrac{\sqrt{48}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} =$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} =$

c) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$

d) $(4\sqrt{5}+3\sqrt{5})\cdot(4\sqrt{5}-3\sqrt{5})$=

e) $2^{-5}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2^5} =$

f) $\left(\frac{5}{2}-\sqrt{2}\right)^2 =$

Autoavaluació

1. Resol l'equació $|3x + 9| = 21$.

2. Expressa $\sqrt[4]{x\sqrt{x}}$ com una única arrel.

3. Simplifica l'expressió $(2\sqrt{3} + 1)^2$.

4. Racionalitza l'expressió $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

5. Simplifica l'expressió $\sqrt[3]{54} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{16}$.

6. Racionalitza l'expressió $\dfrac{2\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}}$.

7. Donats els intervals $A = [-11, 6]$ i $B = (-1, 9)$, calcula $A \cap B$.

Resum

Apartat	Resum
Nombres reals	Està format per la unió dels nombres racionals i els nombres irracionals 5, −4, 2/3, 7.5, π, e, Φ ...
Valor absolut	$\|x\| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$ $\|-32\| = 32$
Distància a la recta real	Dist(x, y) = |x − y| Dist(3, 8) = |8 − 3| = 5. Dist(−2, −9) = |−9 − (−2)| = |−9 + 2)| = |−7| = 7
Intervals	Obert : (a , b) = {x ∈ ℝ| a < x < b} Tancat: [a , b] = {x ∈ ℝ| a ≤ x≤ b} Semiobert (esq): (a , b] = {x ∈ ℝ| a < x ≤ b} Semiobert (dreta): [a , b) = {x ∈ ℝ| a ≤ x < b}
Radicals	Permeten donar solució a l'equació $x^n = a \to x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Si $a > 0$, l'arrel existeix sempre. Si $a < 0$, només quan l'índex n és senar. $x^3 = 8 \leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

Propietats dels radicals

Propietat	Exemple
1. Producte d'igual índex $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{100}=10$
2. Quocient d'igual índex $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{\dfrac{14}{7}}=\sqrt[3]{2}$
3. Potència d'una arrel $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^3=\sqrt[4]{5^3}$
4. Arrel d'arrel $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[12]{5}$
5. Extreure factors $\sqrt{a^2\cdot b}=a\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a^3\cdot b}=a\sqrt[3]{b}$,	$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{7000}=\sqrt[3]{10^3\cdot 7}=10\sqrt[3]{7}$,
6. Introduir factors Consisteix en el pas contrari que el pas [5] $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$, $\quad a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3\cdot b}$.	$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{75}$ $\sqrt{3\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt{3^2\cdot x}}=\sqrt[4]{9x}$,
7. Suma i resta. Simplificar expressions El primer pas és factoritzar els radicands i després extreure factors. Finalment, podem sumar o restar arrels iguals	$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}+\sqrt[3]{2\cdot 2^3}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}$
8. Radicals equivalents $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot q]{a^q}$	$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[9]{2^3}=\cdots$
9. Operacions amb diferent índex Primer cal reduir els radicals a índex comú utilitzant la propietat [8] $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[q]{a^{q/n}\cdot b^{q/m}}$ essent $q=min.c.m(n,m)$	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}=\sqrt[12]{432}$
10. Racionalitzar I $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}\cdot\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}}=\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$	$\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}}=\dfrac{2\sqrt[4]{5^3}}{5}$
11. Racionalitzar II Multiplicam i dividim pel conjugat del denominador $\dfrac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\cdot\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

Carl F. Gauss (1777-1855)

Tema 2

Nombres complexos

Índex

L'home ha anat ampliant al llarg del temps la noció de nombre segons les seves necessitats.

Des de la prehistòria, els nombres naturals han servit per comptar. Els nombres enters negatius ens permeten resoldre equacions com $x + 5 = 1$. De forma similar els nombres fraccionaris permeten resoldre $3x = 2$. En l'antiga Grècia ja es sabia que no existia cap nombre racional que fos solució de $x^2 = 2$; D'aquí s'introduïren els nombres irracionals.

El conjunt format pels nombres racionals i irracionals és el conjunt dels nombres reals. Aquests són tots els nombres amb els quals, de moment, hem treballat.

Equacions de segon grau

És possible trobar les solucions de l'equació $x^2 - 4x + 13 = 0$?

Si utilitzam la fórmula de les equacions de segon grau, trobam

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

Donat que $\sqrt{-36}$ no és cap nombre real, deim que l'equació no té solucions reals. Però, separem $\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6\sqrt{-1}$. Veim que el problema està en que no podem calcular $\sqrt{-1}$.

En 1777 Leonard Euler va anomenar $i = \sqrt{-1}$ com la unitat imaginària. D'aquesta forma podem escriure les solucions com:

$$x = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Acabam d'escriure dos nombre complexos en forma binòmica.

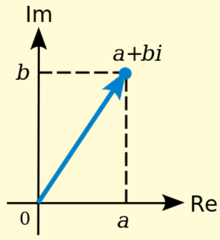
2.1 Nombres complexos en forma binòmica

Vídeo 164: Introducció als nombres complexos

Es defineix la **unitat imaginària** i com $i = \sqrt{-1}$. Es compleix que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc.

Els nombres de la forma $2i$, $5i$, $-\frac{3}{2}i$, $\cdots$ s'anomenen **imaginaris purs**.

Un **nombre complex** en forma binòmica s'expressa com $z = x + iy$, on x s'anomena **part real** i y la **part imaginària** del nombre.



El nombres es representen sobre el **pla complex**. A l'eix horitzontal hi situam la part real i a l'eix vertical la part imaginària.

El **complex conjugat** del nombre s'obté de canviar el signe de la part imaginària $z^* = x - iy$. El **mòdul** d'un nombre complex és la longitud del nombre i s'obté de $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es compleix que $z \cdot z^* = |z|^2$.

Operacions en forma binòmica

Suposau que es donen els nombres complexos $z_1 = 2 - 3i$ i $z_2 = 5 + 4i$. Amb aquests nombres podem fer les següents operacions:

- **Suma**:
$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (5 + 4i) = 7 + i$$
- **Resta**:
$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (5 + 4i) = -3 - 7i$$
- **Producte**:
$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (5 + 4i) = 10 + 8i - 15i - 12\, \underset{\downarrow -1}{i^2} = 22 - 7i$$
- **Divisió**:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 - 3i) \cdot (5 - 4i)}{(5 + 4i) \cdot (5 - 4i)} = \frac{-2 - 23i}{41}$$

1. Donats els següents nombres complexos:

$$a = 3i, \quad b = -2i, \quad c = 5, \quad d = 1 + i, \quad p = -1 - i$$

a) Representa'ls gràficament sobre el pla complex. Representa els seus conjugats.

b) Representa gràficament les sumes: $a + b, \quad a + c, \quad b + d, \quad d + p$

c) Representa gràficament els productes: $a \cdot i, \quad b \cdot i, \quad c \cdot i, \quad d \cdot i, \quad p \cdot i$. Comprova que multiplicar per i equival a girar el nombre complex 90º.

2. Calcula

a) $7 - 3i - (2 + 6i)$
b) $(5 - 2i) \cdot (-3i)$
c) $(7 + 3i) \cdot (-1 + 2i)$
d) $(2 + i) - i(1 - 2i)$
e) $(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)$
f) $(3 + 2i) - (1 - i) \cdot (4 - 5i)$
g) $(1 + i)^2$
h) $(1 - i)^4$

3. Realitza les següents operacions amb nombres complexos:

a) $\dfrac{2 - i}{1 + 3i}$
b) $\dfrac{5 + 10i}{3 - 4i} + \dfrac{2 - i}{i}$
c) $\dfrac{2 + i}{4 - 3i} + \dfrac{3 + i}{5i}$
d) $\dfrac{68}{(1 - i) \cdot (2 - i) \cdot (3 - i)}$

EXEMPLE

a) Per dividir dos nombres complexos, multiplicam i dividim pel complex conjugat del denominador.

$$\frac{2 - i}{1 + 3i} = \frac{(2 - i) \cdot (1 - 3i)}{(1 + 3i) \cdot (1 - 3i)} = \frac{2 - 6i - i - 3}{10} = \frac{-1 - 7i}{10}$$

4. Comprova les següents fórmules:

a) $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$
b) $(x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

5. Calcula a perquè el nombre complex $\dfrac{a + i}{3 - i}$ tingui la seva part real igual a la seva part imaginària.

2.2 Nombres complexos en forma polar

Vídeo 165: Operacions en forma polar

Un nombre complex $z = x + iy$ es pot expressar en forma polar donant el seu **mòdul** i l'angle que forma amb l'eix real. Aquest angle s'anomena **l'argument** del nombre complex. El nombre en **forma polar** s'expressa com $\mathbf{r}_\theta$ on

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

Donat que hi ha infinits angles que tenen per tangent y/x, es defineix **l'argument principal** del nombre complex com un angle comprès entre $-\pi < \theta \leq \pi \quad (-180° < \theta \leq 180°)$.

De forma anàloga, es pot passar un nombre en forma polar a forma binòmica mitjançant

$$z = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$$

Aquesta forma també es coneix com **forma trigonomètrica**.

6. Calcula el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\sqrt{3} - i$
b) $-2 - 2i$
c) $1 - \sqrt{3}i$
d) $-4i$

EXEMPLE

a) Donat $z = \sqrt{3} - i$, calculam el seu mòdul fent $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$. L'argument el trobam de $\theta = \text{arctg}\,(-1/\sqrt{3}) = -30°$. El nombre és $z = 2_{-30°}$

7. Calcula el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $-3+3i$ b) -3 c) $-3i$ d) $3-3i$

8. Calcula l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\dfrac{-3}{\sqrt{3}+i}$ b) $\dfrac{-i}{1-i}$ c) $(1-i\sqrt{3})^7$

9. Expressa en forma polar els següents nombres complexos:

a) i b) $-i$ c) $4+4i$ d) -4

10. Expressa en forma polar els següents nombres complexos:

a) $5i$ b) $-7i$ c) $5-5i$ d) $\sqrt{3}+i$

11. Expressa en forma binòmica els següents nombres complexos donats en forma polar:

a) De mòdul 2 i argument $\dfrac{\pi}{3}$ b) De mòdul 3 i argument $-\dfrac{\pi}{4}$

c) De mòdul 1 i argument $\dfrac{\pi}{2}$ d) De mòdul 5 i argument $\dfrac{2\pi}{3}$

Operacions en forma polar

L'avantatge de la forma polar és que les operacions es realitzen molt més ràpid.

Si ens donen dos nombres en forma polar r_θ i $r'_{\theta'}$,

Producte: $r_\theta \cdot r'_{\theta'} = (r \cdot r')_{\theta+\theta'}$, multiplicam els mòduls i sumam els arguments.

Quocient: $r_\theta : r'_{\theta'} = (r : r')_{\theta-\theta'}$, dividim els mòduls i restam els arguments.

Potència: $(r_\theta)^n = (r^n)_{n\cdot\theta}$, elevam el mòdul i multiplicam l'argument per l'exponent.

Exercici Resolt

1. Passa a forma polar, opera i comprova $(1+i)^{16} = 2^8 = 256$.

En forma polar el nombre és $1+i = \sqrt{2}_{45°}$. Per elevar el nombre a 16, elevam el mòdul i multiplicam l'argument per 16.

$$(1+i)^{16} = (\sqrt{2}^{16})_{16\cdot 45°} = 2^8_{720°} = 2^8$$

On hem utilitzat que 720° són dues voltes completes.

12. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma polar:

a) $\dfrac{\sqrt{2}i}{-2-2i}$ b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}$

13. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma polar:

a) $(\sqrt{3}+i)^{60}$ b) $(4-4i)^{-11}$ c) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^{12}}{(-2-2i)^{8}}$

Fórmula de Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

EXEMPLE

Si utilitzam $n=2$ en la fórmula de Moivre: $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

Desenvolupam el quadrat del membre de l'esquerre:

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

Si igualam les part reals i imaginàries trobam:

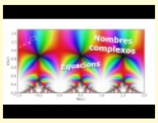
$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

que són les relacions de l'angle doble vistes en el tema **??**.

14. Utilitza la fórmula de Moivre per expressar en funció de $\sin\theta$ i $\cos\theta$:

a) $\cos(-\theta)$ b) $\sin(-\theta)$ c) $\cos 3\theta$ d) $\sin 3\theta$

2.3 Resolució d'equacions en el pla complex



Vídeo 166: Resolució d'equacions

Tot nombre complex té n arrels enèsimes. Si ve expressat en forma polar r_θ, les arrels són

$$\sqrt[n]{r_\theta} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\theta+k\cdot 360}{n}}$$

essent $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

15. Calcula les arrels i representa-les en el pla complex

a) $\sqrt{-3i}$ b) $\sqrt{-9}$ c) $\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}$

d) $\sqrt[3]{-27}$ e) $\sqrt[3]{1-i}$ f) $\sqrt[4]{-81}$

EMPLE

a) Primer expressam el nombre $z=-3i$ en forma polar. Sabem que té mòdul 3 i argument 270º.

Tenim dos possibles resultats de l'arrel quadrada

$$\sqrt{3_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{3}_{270/2} = \sqrt{3}_{135^\circ} \\ \sqrt{3}_{(270+360)/2} = \sqrt{3}_{315^\circ} \end{cases}$$

16. Calcula les arrels cinquenes de la unitat i representa-les en el pla complex. Calcula també totes les arrels cinquenes de -1 i representa-les.

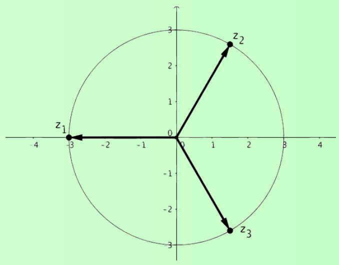
17. Resol les equacions:

a) $x^3 = -27$ b) $x^4 = -81$ c) $x^5 + 32 = 0$ d) $x^3 - 8 = 0$

EXEMPLE

a) $x^3 = -27$ implica que $x = \sqrt[3]{-27}$ que evidentment té una solució real $x = -3$. Per trobar les altres dues arrels expressam el nombre en forma polar $-27 = 27_{180^\circ}$ i en feim l'arrel cúbica.

$$\sqrt[3]{27_{180^\circ}} = \begin{cases} 3_{180/3} = 3_{60^\circ} \\ 3_{(180+360)/3} = 3_{180^\circ} \\ 3_{(180+2\cdot 360)/3} = 3_{300^\circ} \end{cases}$$



Si finalment passam les tres arrels a forma binòmica trobam $x = -3$, $x = 3(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$, $x = 3(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Si representam aquests tres nombres sobre el pla complex veim que formen els vèrtexs d'un triangle equilàter.

18. Resol les equacions, obtenint les arrels reals i complexes:

a) $x^2 = -1$ b) $x^3 = -8$ c) $x^4 + 16 = 0$

19. Calcula les arrels enèsimes de la unitat, per a n = 2, 3 i 4. Representar-les gràficament, i comprova que estan sobre la circumferència de radi 1, i són els vèrtexs d'un polígon regular.

20. Resol l'equació $z^2 + 3z - 1 = 0$.

21. Calcula tots els nombres complexos z pels quals:

a) $z^6 + 64 = 0$ b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$

c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

22. Resol aquestes equacions en el pla complex. Representa les solucions gràficament.

a) $z^2 + 4i = 0$ b) $z^3 + 8i = 0$

c) $iz^3 - 27 = 0$ d) $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^2 + 4i = 0$

Començant aïllant la incògnita $z = \sqrt{-4i}$. Tot seguit hem de calcular totes les arrels (complexes) del nombre $-4i$. Per això, l'expressam en forma polar $-4i = 4_{270^\circ}$.

$$\sqrt{4_{270^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{4}_{\frac{270^\circ}{2}} = 2_{135^\circ} \\ \sqrt{4}_{\frac{270^\circ+360^\circ}{2}} = 2_{315^\circ} \end{cases}$$

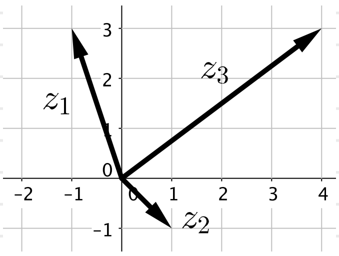
Finalment, podem expressar les dues arrels en forma binòmica:

$$\begin{cases} 2_{135^\circ} = 2(\cos 135 + i \sin 135) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ 2_{315^\circ} = 2(\cos 315 + i \sin 315) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$$

23. Calcula les quatre arrels de $z^4 + 9 = 0$ i utilitza-les per factoritzar $z^4 + 9$ amb dos polinomis de segon grau amb coeficients reals.

Autoavaluació

1. Donats els nombres complexos de la figura es demana calcular:



a) $z_1^* - z_3$

b) z_1^2

c) $|z_3|(z_1 + z_2)$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

2. Calcula $\dfrac{(3+2i)\cdot(3-2i)}{(2+3i)^3}$

3. Resol l'equació: $z^2 - 10z + 29 = 0$

4. Donada l'expressió $\dfrac{1-i}{2-ki}$, troba els valors de k pels quals l'expressió és:

a) Real

b) Imaginari pur.

5. Calcula el valor que ha de prendre x per què el mòdul de $\dfrac{x+2i}{1-i}$ sigui igual a 2.

6. Calcula el mòdul i l'argument principal del següent nombre complex $-3+3i$:

7. Expressa en forma binòmica el nombre complex de mòdul 2 i argument $\pi/3$

8. Calcula $(1+i)^6$ passant prèviament a forma polar.

9. Expressa en forma trigonomètrica el següent nombre complex $5i$.

10. Calcula les arrels cúbiques de $4\sqrt{3} - 4i$. Representa-les gràficament.

Resum

Apartat	Resum
Unitat imaginària	$i^2 = -1 \leftrightarrow i = \sqrt{-1}$
Nombre en forma binòmica	$z = x + iy$ $z = 2 + 3i$, té part real 2 i part imaginària 3
Complex conjugat	$z^* = x - iy$ $\bar{z} = 2 - 3i$
Suma de complexos	$(x + iy) + (o + iv) = (x + o) + i(y + v)$ $(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$
Producte de complexos	$(x + iy) \cdot (o + iv) = (x \cdot o - y \cdot v) + i(x \cdot v + y \cdot o)$ $(2 + 3i) \cdot (4 + 5i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 4 + 3i$
Divisió de complexos	Es multiplica numerador i denominador pel complex conjugat del denominador. Així s'aconsegueix un denominador real. $\frac{2}{1+i} = \frac{2\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{2\cdot(1-i)}{2} = 1 - i$
Forma polar	r_θ amb $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $\theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$ $z = 2 + 3i$, $r = \sqrt{13}$, $\theta = \text{arctg}\,\frac{3}{2}$
Forma trigonomètrica	$z = r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ Si tenim $z = 2_{30^\circ}$, $z = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
Producte en forma polar	$z = r_\theta$ i $z' = r'_\alpha$, aleshores $z \cdot z' = (r \cdot r')_{\theta+\alpha}$. Multiplicam els mòduls i sumam els arguments. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i $z' = 3_{50^\circ}$, $z \cdot z' = (2 \cdot 3)_{30+50^\circ} = 6_{80^\circ}$
Divisió en forma polar	$z = r_\theta$ i $z' = r'_\alpha$, aleshores $z/z' = (r/r')_{\theta-\alpha}$. Dividim els mòduls i restam els arguments. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i $z' = 3_{50^\circ}$, $z/z' = (2/3)_{30-50^\circ} = (2/3)_{340^\circ}$
Potència en forma polar	$z = r_\theta$, aleshores $z^n = (r^n)_{n\cdot\theta}$. Elevam el mòdul i multiplicam l'argument per n. Si tenim $z = 2_{30^\circ}$ i volem calcular $z^3 = (2^3)_{3\cdot 30^\circ} = 8_{90^\circ}$