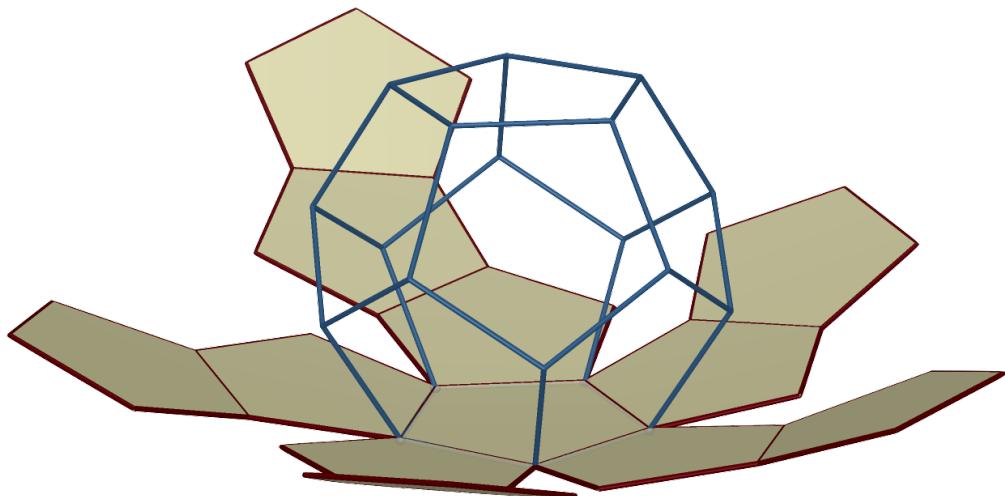


Matemàtiques 3r ESO

Sèrie Pràctica

2a Edició



IESB

www.iesbinissalem.net

Josep Mulet
Departament de Matemàtiques
IES Binissalem

Aquesta és una obra derivada de “*Matemáticas 3º de ESO. Ejercicios y problemas*” de Marea Verde de matemàtiques. Per tant, està subjecta a les mateixes condicions de llicència CREATIVE COMMONS que l'obra original.

Edició L^AT_EX: ® Josep Mulet Pol

Versió: 2017-07-16

Portada: *Desenvolupament d'un dodecaedre.*

[Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](#)



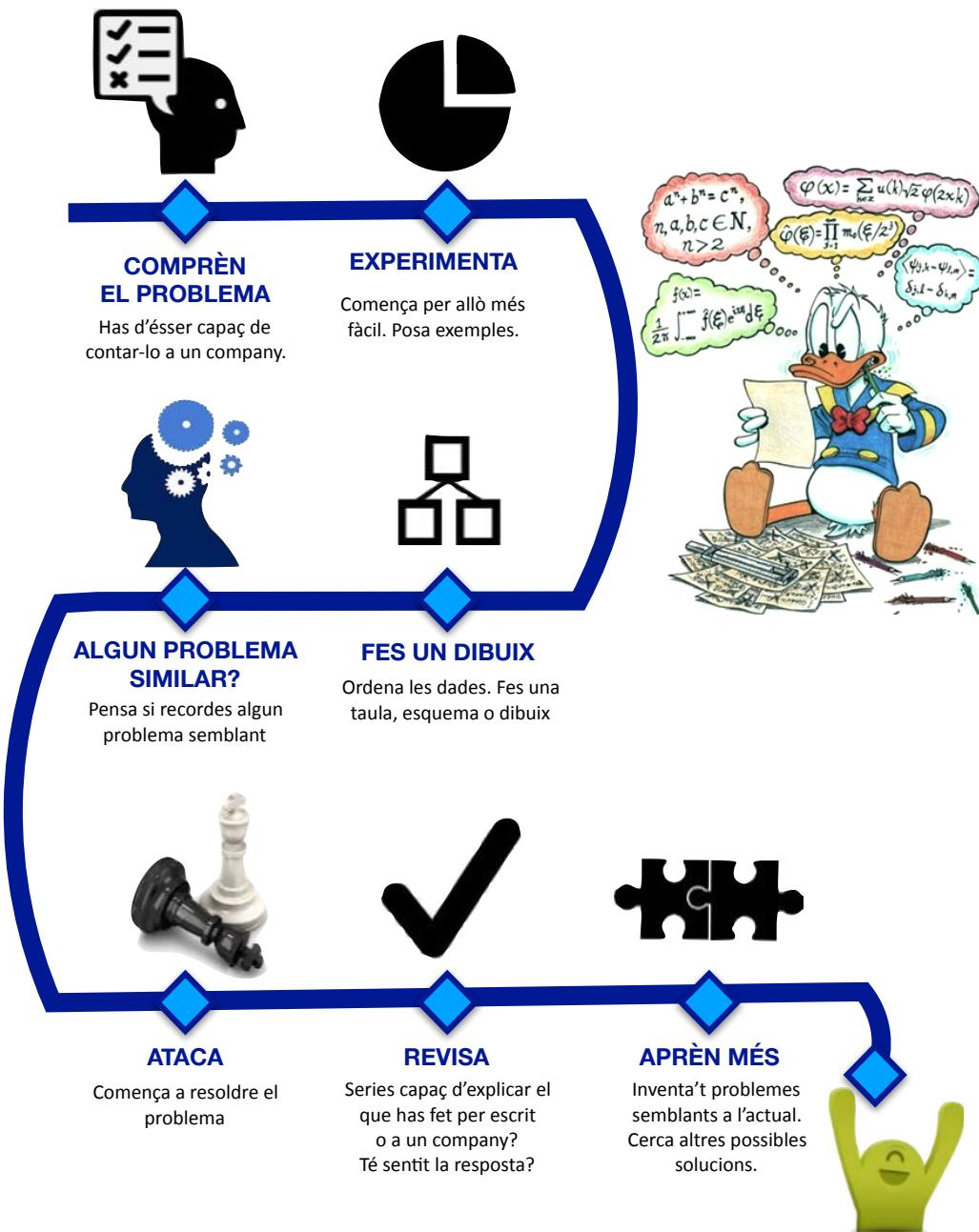
Índex

1 Nombres Racionals	8
1.1 Operacions amb nombres enters	9
1.2 Operacions amb nombres racionals	9
1.3 Representació de fraccions sobre la recta numèrica	12
1.4 Fraccions i decimals	13
1.5 Ordenar fraccions	14
1.6 Problemes de fraccions	15
1.7 Aproximacions i errors	18
2 Potències i arrels	22
2.1 Potències	23
2.2 Notació científica	25
2.3 Arrels o radicals	28
3 Successions i progressions	34
3.1 Successions	35
3.2 Progressions aritmètiques	37
3.3 Progressions geomètriques	38
3.4 Activitats	40
4 Estadística i Probabilitat	44
4.1 Fases d'un estudi estadístic	45
4.2 Representació de la informació	46
4.3 Paràmetres estadístics	47
4.4 Problemes d'estadística	49
4.5 Introducció al càlcul de probabilitats	51
4.6 Probabilitats simples (Regla de Laplace)	52
4.7 Probabilitat composta	54
4.7.1 Successos independents	55
4.7.2 Successos dependents. Diagrames d'arbre	56
5 Àlgebra: Polinomis	60
5.1 El llenguatge algebraic	61
5.2 Monomis	62
5.2.1 Operacions amb monomis	63
5.3 Operacions amb polinomis	64
5.3.1 Divisió de polinomis	66
5.4 Identitats notables	68

5.5	Introducció a les fraccions algebraiques	69
5.6	Activitats	71
6	Equacions i sistemes	76
6.1	Concepte d'equació	77
6.2	Equacions de primer grau	77
6.2.1	Problemes d'equacions de primer grau	80
6.3	Equacions de segon grau	81
6.3.1	Problemes d'equacions de segon grau	83
6.4	Equacions biquadrades i factoritzades	83
6.5	Sistemes d'equacions	84
6.5.1	Problemes de sistemes d'equacions	86
6.6	Activitats	88
7	Proporcionalitat i percentatges	92
7.1	Proporcionalitat directa i inversa simple	93
7.2	Proporcionalitat composta	94
7.3	Repartiments proporcionals	95
7.4	Percentatges	96
7.5	Interès bancari	98
7.6	Activitats	98
8	Funcions i gràfics	102
8.1	Sistemes de representació en el pla	102
8.2	Concepte de funció	103
8.3	La funció lineal i afí	104
8.3.1	Funcions lineals	104
8.3.2	Funcions afins	105
8.4	La funció quadràtica o paràbola	107
8.5	Interpretació i característiques de les funcions	109
9	Geometria en el pla	114
9.1	Semblança	115
9.2	Angles, longituds i àrees	116
9.3	Llocs geomètrics	120
9.4	Activitats	123
9.4.1	Semblança	123
9.4.2	Angles, longituds i àrees	124
9.4.3	Llocs geomètrics	125
10	Moviments en el pla i l'espai	128
10.1	Transformacions geomètriques	129
10.2	Translacions	129
10.2.1	Vectors	129
10.2.2	Translacions	131
10.3	Girs o rotacions	132
10.4	Simetries	133
10.5	Mosaics, frisos i rosasses	135
11	Geometria a l'espai	140
11.1	Perpendicularitat i paral·lelisme a l'espai	140
11.2	Poliedres	141

11.2.1 Teorema de Pitàgores a l'espai	142
11.2.2 Àrea lateral i total de poliedres	142
11.3 Cossos de revolució	143
11.4 Volum de cossos geomètrics	143
11.5 Globus terraqui	144
11.6 Activitats	144
11.6.1 Angles polièdrics. Paral·lelisme i perpendicularitat. Poliedres.	144
11.6.2 Teorema de Pitàgores en l'espai	145
11.6.3 Àrea lateral, total i volum de cossos geomètrics	146
11.6.4 Fusos horaris	150
Activitats de síntesi	156
Solucions	161

Recomanacions per RESOLDRE PROBLEMES

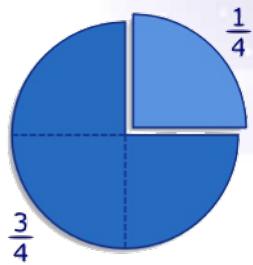


Símbols

Símbol	Significat
	Problema clau amb solució al final del llibre.
	A més de la solució, proporciona orientacions per arribar a ella.
	Problema que requereix d'investigació o recerca d'informació.
	Activitat adequada per realitzar amb el programa Geogebra.
Vídeo 132:	Explicació en vídeo dels continguts de l'apartat. El número de vídeo correspon a la numeració emprada en https://piworld.es
	Problema amb un cert grau de dificultat.
	Activitat que es pot contestar en el llibre mateix.
	Activitat que es pot resoldre mentalment o en veu alta.

Recursos

piWorld	Plataforma d'aprenentatge. Conté explicacions en vídeo i activitats interactives. Requereix usuari i contrasenya. https://piworld.es
Geogebra	Programa lliure de geometria dinàmica en dues i tres dimensions. Ideal pels temes de funcions i geometria. https://www.geogebra.org/graphing
Calculadora WIRIS	Calculadora per al càlcul simbòlic. Nova versió Web https://calcme.com/a La versió antiga la trobareu a http://www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/cas.html Atenció: requereix el plugin de Java i no funciona en dispositius mòbils.



Tema 1

Nombres Racionals

Què aprendrem?

1.1 Operacions amb nombres enteros	9
1.2 Operacions amb nombres racionals	9
1.3 Representació de fraccions sobre la recta numèrica	12
1.4 Fraccions i decimals	13
1.5 Ordenar fraccions	14
1.6 Problemes de fraccions	15
1.7 Aproximacions i errors	18

Abans de començar

Nota:

Completa:

- En una fracció $\frac{a}{b}$, a es diu i b s'anomena
- Quan una fracció no es pot simplificar més es diu
- Quant val les dues terceres parts de 24?
- Una botella de vi de $3/8$ de litre; com s'expressa com a número decimal?

Calcula i simplifica:

a) $\frac{3}{4} + \frac{7}{2} - 3 =$

b) $\frac{3}{7} \cdot \frac{28}{6} =$

c) $\frac{3}{4} : \frac{7}{2} =$

d) $\frac{3}{7}$ de 42 =

1.1 Operacions amb nombres enters

Prioritat de les operacions

- | | |
|---|---|
| 1r Efectuem els parèntesis
2n Calculam potències i arrels
3r Efectuem les multiplicacions i les divisions
4t Finalment, feim les sumes i les restes. | $3 - (-2)^2 \cdot (4 - 9)$
$3 - (-2)^2 \cdot (-5)$
$3 - 4 \cdot (-5)$
$3 + 20$
23 |
|---|---|

1. Calcula:

a) $-2 \cdot (-20 + 15) =$

b) $-20 : (10 - 2 \cdot (-20 + 15)) =$

c) $[-80 - 20 : (10 - 2 \cdot (-20 + 15))] \cdot (3 - 2 \cdot 3^2) =$

2. Calcula pas a pas: $(-5 + 4 \cdot (-2) + 7) : (7 - (3 - 4) \cdot (-1))$

3. Calcula:

a) $-10 + 20 : (-5) =$

b) $-100 : [(-20) : (-5)] =$

4. Calcula:

a) $3 - (4 \cdot 3 - 2 \cdot 5)^2 - (3 - 5)^3$

b) $5 - 3^2 - 2 \cdot (-5) - (7 - 9)^2$

c) $7 - 2 \cdot (3 - 5)^2 + 2 \cdot (-3) + 8 - (-2)^2$

d) $2 - (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4)^2 - (2 - 4)^3$

1.2 Operacions amb nombres racionals



Vídeo 117: Nombres racionals, operacions simples.



Vídeo 118: Nombres racionals, operacions combinades.

5. Calcula i simplifica.

a) $\frac{3}{2} - \frac{3}{10} - \frac{3}{5} =$

b) $\frac{7}{12} + \frac{4}{9} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{6} =$

c) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + 1 =$

d) $\frac{1}{11} - \frac{13}{22} - \frac{1}{4} + 1 =$

6. Calcula i simplifica.

EXEMPLE

a) $\frac{7}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{6} - \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6} \right) = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

a) $\frac{7}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) =$

b) $2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) =$

c) $\frac{6}{7} - \left(\frac{3}{7} - \frac{11}{14} \right) =$

d) $\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{5} \right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{6} \right) =$

e) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + 1 \right) - \left(2 - \frac{7}{5} \right) =$

f) $\left(5 - \frac{7}{2} \right) - \left(3 + \frac{1}{4} \right) + \left(2 - \frac{3}{8} \right) =$

g) $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) =$

h) $\left(\frac{11}{12} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{5}{4} \right) =$

7. Opera i simplifica.

a) $2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) =$

b) $2 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) =$

c) $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right) \cdot 5 =$

d) $\frac{3}{7} : \left(1 - \frac{1}{7} \right) =$

e) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) =$

f) $\left(1 - \frac{1}{5} \right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10} \right) =$

g) $\left(5 - \frac{1}{2} - \frac{7}{3} \right) : \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{3} \right) =$

h) $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) \cdot \left(2 - \frac{10}{13} \right) =$

i) $3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{3} \right) =$

j) $\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \right) + 2 \cdot \left(1 - \frac{3}{5} \right) =$

k) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) - 2 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \right) =$

l) $\frac{3}{4} \cdot \left[\frac{6}{5} - \frac{2}{7} \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \right) \right] =$

8. Troba la fracció inversa de $3 + \frac{4}{5} : \frac{6}{10} =$

9. Opera i simplifica: $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{7}{2} =$

10. Resol pas a pas $\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{3}{5} : \left(\frac{1}{6} - 2 \right)} =$

11. Simplifica:

a) $\frac{2 \cdot 7 \cdot 15}{21 \cdot 10} =$

b) $\frac{2 \cdot 3 + 4}{2 \cdot 5 + 10} =$

12. Calcula:

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{1}{3} \right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2} \right)^2$ b) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{3}{4} \right)^3 + \left(2 - \frac{3}{2} \right)^2$ c) $\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1 \right)^3$

1.3 Representació de fraccions sobre la recta numèrica



Vídeo 153: Representació de fraccions

Classificam les fraccions en tres tipus:

- Fraccions **pròpies** (menors que la unitat): $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \dots$

- Fraccions **iguals a la unitat**: $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \dots$

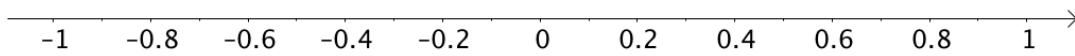
- Fraccions **impròpies** (majors que la unitat): $\frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{-49}{5}, \dots$

Les fraccions impròpies es poden expressar com un **número mixt**: $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

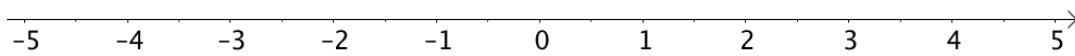
13. Passa a forma mixta les següents fraccions: $\frac{50}{7}; \frac{25}{11}; \frac{101}{6}$

14. Passa a forma mixta les fraccions $\frac{-30}{7}; \frac{-50}{13}; \frac{-100}{21}$

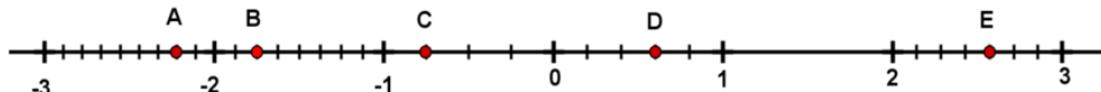
15. Representa en la recta numèrica les fraccions: $\frac{1}{5}; \frac{3}{7}; \frac{-5}{8}; \frac{-3}{4}$



16. Passa a forma mixta i representa les fraccions: $\frac{23}{8}; \frac{-23}{8}; \frac{180}{50}; \frac{-26}{6}$



17. Troba les fraccions que es corresponen amb els punts A, B, C, D i E, expressant en forma mixta i com a fracció impròpia les representades pels punts A, B i E.



A=

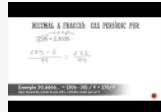
B=

C=

D=

E=

1.4 Fraccions i decimals



Vídeo 119: Nombres racionals: Relació entre fracció i decimal.

Els nombres decimals es classifiquen en:

- **Exactes:** com $1,25 = \frac{125}{100}$

- **Periòdics:** Són Fraccions

$$\textbf{Pur: } 3,626262\cdots = 3,\widehat{62} = \frac{362 - 3}{99} = \frac{359}{99}$$

$$\textbf{Mixt: } 7,19999\cdots = 7,1\widehat{9} = \frac{719 - 71}{90} = \frac{648}{90}$$

- **No periòdics:** com el número π , $\sqrt{2}, \dots$. No són fraccions.

18. Sense fer la divisió indica si les següents fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica:

a) $\frac{21}{750}$

b) $\frac{75}{21}$

c) $\frac{11}{99}$

d) $\frac{35}{56}$

Ajuda: La divisió és exacta només quan la descomposició del denominador conté únicament 2 o 5.

19. Passa a fracció i simplifica:

a) 1,4142

b) 0,125

c) 6,66

20. Passa a fracció i simplifica:

a) 1,41424142...

b) 0,125125...

c) 6,666...

21. Passa a fracció i simplifica:

a) 1,04444...

b) 0,7125125...

c) 6,7666...

22. Completa la taula següent

Decimal	Fracció	Percentatge %
0,75		
	6/4	
		68%

23. Calcula el número decimal que correspon al percentatge 130% i el percentatge que correspon a la fracció 7/25.

24. Calcula, passant prèviament a fracció cada nombre decimal:

a) 0,333... + 0,666... b) 0,888... · 2,5 c) 0,65 : 0,656565...

EXEMPLU

$$1,66666\dots - 1,0222\dots = 1,\overline{6} - 1,\overline{02} = \frac{16-1}{9} - \frac{112-10}{90} = \frac{15}{9} - \frac{102}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

25. Demostra que 4,999... = 5. Generalitza: Quant val n,999...?

26. Representa de forma exacta en la recta numèrica: $\frac{760}{240}$; 3,125; $-\frac{46}{14}$; -2,1666...

1.5 Ordenar fraccions



Vídeo 152: Nombres racionals.

Per ordenar fraccions ho podem fer de dues formes diferents:

- Reduir les fraccions a denominador comú (mín. c. m.)
- Convertir les fraccions a nombre decimal i ordenar els números decimals

27. Ordena de menor a major: $\frac{7}{12}, \frac{4}{6}, \frac{5}{9}, \frac{3}{4}, \frac{13}{18}$

Primer mètode: Reduir a denominador comú. $min.c.m(12, 6, 9, 4, 18) = 36$

$$\frac{7}{12}, \frac{4}{6}, \frac{5}{9}, \frac{3}{4}, \frac{13}{18} \rightarrow \frac{21}{36}, \frac{24}{36}, \frac{20}{36}, \frac{27}{36}, \frac{26}{36}$$

Ordenam de menor a major les fraccions originals $\frac{5}{9} < \frac{7}{12} < \frac{4}{6} < \frac{13}{18} < \frac{3}{4}$

Segon mètode: Valor decimal

$$\frac{7}{12}, \frac{4}{6}, \frac{5}{9}, \frac{3}{4}, \frac{13}{18} \rightarrow 0.8\hat{3}, 0.\hat{6}, 0.\hat{5}, 0.75, 0.7\hat{2}$$

i ordenam els nombres decimals de menor a major i trobam el mateix resultat que abans.

- 28.** Ordena de menor a major: $\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{38}{45}, \frac{77}{90}, -\frac{9}{8}$
- 29.** Ordena de menor a mayor: $\frac{11}{24}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, -\frac{5}{3}$
- 30.** Suposa que tens dues fracció a i b i vols trobar el nombre que es troba just enmig. Explica com ho faràs. Inventat un exemple i representa les tres fraccions sobre la recta numèrica.

Redacta la teva resposta 

1.6 Problemes de fraccions



Vídeo 120: Nombres racionals: Problemes tipus Part-Fracció-Total

- **Recorda l'essencial:**

$$\text{Fracció} = \frac{\text{Part}}{\text{Total}} \quad \text{Part} = \text{Fracció} \cdot \text{Total} \quad \text{Total} = \frac{\text{Part}}{\text{Fracció}}$$

- **Totes les fraccions de les parts sumen 1**



Vídeo 154: Nombres racionals: Problemes típics amb fraccions

- 31.**  Calcula les dues tercetes part de la sisena part del 80% de 900.

- 32.**  Troba el nombre tal que els seus quatre terços valen 520.

- 33.**  Quants pots de tres vuitens de litre puc omplir amb 12 litres?

- 34.** Inventat un problema on aparegui la fracció $\frac{2}{5}$ i el nombre 200. Resol aquest problema i comparteix-lo amb el teus companys.

Redacta la teva resposta 

- 35.** Si 100 polzades són 254 cm:
- Troba el llarg en centímetres d'una televisió si l'altura són 19,2 polzades i llarg/alt = 4/3
 - Igual però ara llarg/alt = 16/9
- 


16:9
4:3
- 36.** Si en una classe el 77,777... % dels alumnes aproven i hi ha més de 30 alumnes però menys de 40, quants alumnes són i quants aproven? *Ajuda: Passa 77,7 a fracció.*
- 37.** Després dels resultats de la jornada de futbol d'aquest cap de setmana, el Osasuna ha jugat 24 partits, dels quals ha guanyat 6 i ha empatat els 5/12. Quants partits ha perdut? Quin percentatge representen els 6 partits guanyats sobre el total de partits jugats?
- 
- 38.** Una fundació té un dipòsit de diners per premiar joves artistes. D'aquests diners, la meitat seran per al primer premi, la tercera part per al segon premi, la dotzena part per al tercer premi i els 2.000 € que, d'aquesta manera, sobren es reservaran per a properes edicions. Quants diners rebrà cada premiat ?
- 39.** En una escola hi ha 1800 alumnes, dels quals 860 són noies. Els 3/4 de les noies i els 2/5 dels nois practiquen natació. Quants alumnes en total practiquen natació?
- 40.** Una empresa disposa de 7.200 € de pressupost mensual, del qual tres cinquenes parts es dediquen a pagar els sous dels treballadors, una quarta part a cobrir despeses comunes, i amb la resta es fa un fons d'estalvi per possibles imprevistos.
- Quina fracció del pressupost es destina a aquest fons d'estalvi? Quin percentatge del sou mensual representa?
 - Quants diners s'han estalviat a l'acabar l'any ?
- 41.** Una mare divideix el contingut d'una caixa de llepolies entre els seus tres fills; al primer li dóna la meitat del total, al segon, dues cinquenes parts del total, i al tercer, les 6 que queden.
- Quantes llepolies conté la caixa?
 - Quantes llepolies toquen a cada un dels fills?

Entre els dos primers fills tindran $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$. Per tant, el tercer fill tindrà $1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$.

Sabem que aquesta fracció del total x correspon a 6 llepolies. $\frac{1}{10}$ de $x = 6 \rightarrow x = 60$.

Ara ja sabem que la caixa conté 60 llepolies. Sabries calcular quantes li toquen al primer i segon fill?

- 42.** Marta té 1.500 € al seu compte corrent. Gasta $\frac{1}{3}$ en una cadena musical i $\frac{2}{5}$ en una reparació del cotxe. Quants diners li queden?
- 43.** A la selecció per a un concurs televisiu, passen la primera prova $\frac{5}{12}$ dels aspirants i en la segona prova passen $\frac{4}{13}$ dels que quedaven.
- Expressa en forma de fracció els aspirants que han estat seleccionats pel concurs.
 - Si 130 aspirants van passar la primera prova, quants aspirants es van presentar inicialment?
- 44.** Per a la construcció d'un poliesportiu, l'Ajuntament aporta $\frac{1}{10}$ del cost, la Unió Europea, $\frac{1}{6}$ parts, el Govern, $\frac{4}{15}$ parts, i la resta s'aconsegueix amb un préstec.
- Calcula la fracció del cost que representa el préstec.
 - Si el Govern aporta 416.000 euros, calcula el cost total d'aquesta obra.
- 45.** Un alumne ha de llegir una novel·la en quatre setmanes. La primera setmana llegeix $\frac{5}{12}$ de la novel·la, la segona setmana llegeix $\frac{5}{24}$ i la tercera setmana llegeix $\frac{2}{8}$ de la novel·la.
- Quina fracció de la novel·la ha de llegir la quarta setmana?
 - Si la novel·la té 216 pàgines, quantes ha llegit cada setmana?
- 46.** Quantes botelles de $\frac{3}{4}$ de litre necessita per tenir la mateixa quantitat que en 60 botelles de $\frac{3}{5}$ de litre?
- 
- 47.** Troba un nombre enter de tal forma que: la seva meitat, la seva tercera part, la seva quarta part, la seva cinquena part, la seva sisena part i la seva setena part siguin nombres enters.
- 48.** A la unitat li llevo les seves dues cinquenes parts. Per quina fracció cal multiplicar el resultat per arribar una altra vegada a la unitat?
- 49.** Troba la fracció resultant:
- Llevo 1 terç del que tinc i després afegeixo 1 terç del que queda.
 - Afegeixo 1 terç del que tinc i després llevo 1 terç del resultat.
- 50.** Estàs avorrit i decideixes jugar al següent: Avances un metre en línia recta, retrocedeixes la meitat, avances la meitat del que has retrocedit en l'últim pas, retrocedeixes la meitat del que has avançat en l'últim pas, ...

Si ho fas moltes, però que moltes vegades, quant avances en total?

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots =$$

1.7 Aproximacions i errors

Si d'una quantitat sabem el valor exacte i el valor aproximat, definim

L'error absolut és $E_A = |\text{Valor exacte} - \text{Valor aproximat}|$

L'error relatiu és $E_R = E_A / \text{Valor exacte}$

Per exemple, si aproximem el número π per 3,14 els errors comesos són:

$$E_A = |\pi - 3,14| = 0,0016$$

$$E_R = 0,0016 / \pi = 0,0005 = 0,05\%$$

51. Copia aquesta taula en el teu quadern i arrodoneix amb el nombre de xifres indicat

Nombre	Xifres significatives			
	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
$1/7$				
95549	100000			
30000	$3 \cdot 10^4$			
1,9995				2,000

52. Prova que 123,45 amb $E_A = 0,005$ i 0,12345 amb $E_A = 0,000005$ tenen el mateix E_R .
53. Contesta Vertader o Fals i justifica la teva resposta:
- Per a una mateixa màquina, l'error comès és menor com més petita sigui la mesura.
 - No es poden comparar errors relatius de diferents magnituds.
 - Posar preus com 1,99 €/Kg és un intent d'engany.
 - Comprar a 1,99 €/Kg enfront de 2 €/Kg suposa un estalvi.
 - Posar moltes xifres en un resultat significa que un és un gran matemàtic.
 - La precisió es mesura pel nombre de xifres decimals.
54. Aproxima els nombres 32567 i 1,395 amb 2 xifres significatives i digues en quin es comet menor error relatiu.
55. π no pot representar-se mitjançant una fracció d'enters però, pots trobar una fracció que ho approximi amb 5 xifres significatives?
56. Aproximem π per $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$:
- Simplifica fins a una fracció impròpria irreductible.
 - Troba l'error absolut i l'error relatiu.



Autoavaluació

1. Resol pas a pas: $(-8 - 7 \cdot (-4 + 6)) : (2 + (-3)) + 5 - 42^2 \cdot (-2)$
2. Ordena de major a menor: $\frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{-7}{8}; \frac{-5}{6}; \frac{-5}{4}$
3. Representa sobre la recta numèrica: $\frac{3}{4}, \frac{17}{6}, \frac{-11}{7}, -0,125$

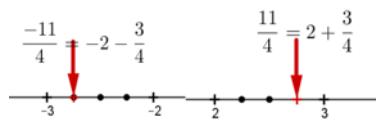
$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}}{2} : \left(2 - \frac{11}{3}\right)$$
4. Resol pas a pas i simplifica: $\frac{2}{6}$
5. a) Troba les quatre cinquenes parts dels cinc vuitens de 360.
 b) Una ampolla té plenes les seves set vuitenes parts, si conté 840 cm^3 , quant li cap plena?
6. Aproxima els nombres 9859 i 9,945 amb 2 xifres significatives i calcula els errors relatius comesos (en %), quin és menor?
7. a) Digues quins de les següents fraccions tenen expressió decimal exacta i quins peròdica: $\frac{6}{120}, \frac{5}{180}, \frac{42}{210}$
 b) Quants decimals té $\frac{1}{2^{10} \cdot 5^6}$?
 c) Quantes xifres com a màxim pot tenir el període d' $1/97$?
8. Passa a fracció i simplifica:
 a) 2,225 b) 2,2252525... c) $\frac{0,125}{0,125125125\dots}$
9. Una medusa creix cada setmana un terç del seu volum.
 a) Quantes setmanes han de passar perquè el seu volum es multipliqui per més de 3?
 b) Si el seu volum actual és de 1200 cm^3 , quin era el seu volum fa 3 setmanes?
10. A un treballador li baixen el sou la sisena part, del que li queda el 25 % es va destinat a impostos i finalment de la resta que **li queda** les dues cinquenes parts les hi gasta a pagar la hipoteca del pis. Si encara té disponibles 450 €, quant cobrava abans de la baixada de sou?, quant paga d'impostos i d'hipoteca?

Resum

Prioritat de les operacions	
1r Parèntesis interiors 2n Potències i arrels 3r Productes i divisions 4t Sumes i restes.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signe de la suma	
(+) + (+) = (+) se sumen, (-) + (-) = (-) se sumen. (+) + (-) = ? se resten i té el signe del més gran.	$-\frac{7}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{15}{3} = -5$ $-\frac{12}{5} + \frac{8}{5} = -\frac{4}{5}$
Signe del producte i la divisió	
Si tenen igual signe dóna positiu. $(+)(+)=(-)(-)=(+)$ Si tenen signe contrari dóna negatiu. $(+)\cdot(-)=(-)\cdot(+)=(-)$	$-4 \cdot (-10) = +40$ $+2 \cdot (-15) = -30$
Nombre racional	
Un nombre r és racional si pot escriure's com a $r = \frac{a}{b}$ amb a, b enters i $b \neq 0$.	2; $-\frac{7}{2}$ són racionals. També 2,6777... $\sqrt{2}$ i π no ho són.
Fracció irreductible	
S'obté dividint el numerador i el denominador pel mateix nombre. Numerador i denominador són primers entre si.	$\frac{360}{840} = \frac{3}{7}$ l'última és irreductible.
Fraccions equivalents	
Són equivalents les fraccions que tenen igual expressió decimal. Dues fraccions equivalents representen al mateix nombre racional. Els seus productes creuats valen el mateix.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20} = 0,75$ són equivalents: $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$
Ordenar fraccions	
Es passen a comú denominador o es troba el seu valor decimal o s'usa la lògica i el truc $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si $a \cdot d < b \cdot c$ per a nombres positius.	$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$ ja que $\frac{15}{20} < \frac{16}{20} < \frac{18}{20}$

Representació sobre la recta numèrica

Si és necessari es passen a forma mixta. Per a $n + a/b$ dividim la unitat que va de n a $n+1$ en b parts iguals i prenem a trossos. Per a $-n - a/b$ dividim la unitat que va de $-n$ a $-n-1$ en b parts iguals i comptem a començant en $-n$.

**Suma i resta de fraccions**

Es passen a comú denominador i se sumen (resten) els numeradors.

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{-1}{24}$$

Producte i divisió de fraccions

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{6}{5} : \frac{14}{10} = \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{14} = \frac{6}{7}$$

Fracció d'una quantitat

$$\frac{a}{b} \text{ de } x = \frac{a}{b} \cdot x = \frac{a \cdot x}{b}$$

$$\frac{3}{4} \text{ de } 60 = \frac{3}{4} \cdot 60 = 45$$

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

Errors

Error absolut:

$$E_A = |valor\ real - valor\ approximat|$$

Error relatiu: $E_R = \frac{E_A}{|Valor\ real|}$ es multiplica per 100 per obtenir-ho en %.

$$\frac{2}{3} \approx 0,7 \Rightarrow E_A \approx 0,033$$

$$\Rightarrow E_R \approx \frac{0,033}{2/3} \approx 0,050 \Rightarrow 5\%$$

Fraccions i decimals

L'expressió decimal d'una fracció sempre és exacta o periòdica. Exacta si el denominador només té com a factors primers el 2 o el 5. Peròdica en cas contrari.

$3/40 = 0,075$ exacte
 $1/3 = 0,3333\dots$ periòdic pur
 $5/12 = 0,41666\dots$ periòdic mixt

Pas de decimal a fracció

Expressió decimal exacta: es divideix el nombre sense la coma entre la unitat seguida de punts zeros com a xifres decimals.

$$3,175 = \frac{3175}{1000} = \frac{127}{40}$$

Expressió decimal periòdica: Es multiplica N per potències de 10 fins aconseguir 2 nombres amb la mateixa part decimal, es resten i s'aïlla N .

$$N = 2,033\dots \quad 100N - 10N = 183 \\ 90N = 183 \quad N = \frac{183}{90} = \frac{61}{30}$$



Tema 2

Potències i arrels

Què aprendrem?

2.1	Potències	23
2.2	Notació científica	25
2.3	Arrels o radicals	28

Abans de començar

Nota:

Completa:

- En una potència b^n , b es diu i n s'anomena
- Per multiplicar potències d'igual base, copiam la base i els exponents.
- Per dividir potències d'igual base, copiam la base i els exponents.
- Per elevar una potència a una potència, copiam la base i els exponents.

Sense emprar la calculadora, calcula el valor de:

a) $(-2)^3 =$ b) $(-2)^4 =$ c) $5^0 =$

d) $\sqrt{144} =$ e) $4^{-1} =$ f) $\sqrt[3]{8} =$

Expressa com una única potència:

g) $5^8 \cdot 5^3 \cdot 5 =$ h) $(-3)^5 : (-3)^2 =$ i) $(7^3)^5 =$

2.1 Potències



Vídeo 121: Potències.
Definició i propietats

Valor numèric de potències

Potència d'exponent natural:

Recorda que $b^0 = 1$ i $b^1 = b$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9 \quad \text{mentre que}$$

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

En general, el signe de les potències és:

b^n → Exponent
→ Base

b^n	n parell	n imparell
b positiu	+	+
b negatiu	+	-

1. Determina el signe de les potències: a) $(-1)^9$ b) $(-5)^{12}$ c) $(-12)^5$ d) $(-8)^4$
2. Calcula el valor numèric de les potències

a) $(-3)^4 =$

b) $(-2)^3 =$

c) $(-1)^{415} =$

d) $(-4)^1 =$

EXEMPLE

Potència de base racional: Com calculam la potència quan la base és una fracció?

S'eleva el numerador i el denominador a l'exponent $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

3. Calcula el valor numèric de les potències

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 =$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 =$

c) $\left(-\frac{9}{4}\right)^0 =$

d) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3 =$

Elevar un nombre a -1 : Significa calcular la inversa del nombre, per exemple

$$3^{-1} = \frac{1}{3}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$$

4. Calcula el valor numèric de les potències

a) $(-3)^{-1} =$

b) $2^{-1} =$

c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} =$

d) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} =$

Potència d'exponent negatiu: Què significa elevar a un exponent negatiu?

Primer elevam a -1 que significa fer la inversa de la base, després elevam a l'exponent positiu:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$$

5. Calcula el valor numèric de les potències

a) $(-3)^{-3} =$

b) $2^{-4} =$

c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} =$

d) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} =$

e) $\left(\frac{5}{4}\right)^3 =$

f) $-\left(\frac{2}{7}\right)^{-4} =$

g) $\left(-\frac{1}{6}\right)^4 =$

h) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2} =$

Propietats de les potències

Producte d'igual base:

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

Quocient d'igual base:

$$b^n : b^m = \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$$

Potència de potència:

$$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$$

Recorda:

$$b^0 = 1$$

$$b^1 = b$$

Operacions d'igual exponent: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n : b^n = (a : b)^n$

6. Expressa en forma d'una única potència:

a) $(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6 =$

b) $3^2 \cdot 3^7 \cdot 3 \cdot 3^4 \cdot 3^3 =$

c) $(-6)^4 \cdot 4^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4 =$

d) $(-8)^9 : (-8)^3 =$

e) $(-3)^2 : (-3)^7 =$

f) $(+75)^4 : (-3)^4 =$

g) $(-5)^8 : 8^8 =$

h) $((-2)^5)^6 =$

7. Expressa com a única potència d'exponent positiu:

a) $(-3/4)^3 \cdot (-3/4)^2 \cdot (-3/4)^{-8} =$

b) $(1/8)^{-5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{-2} =$

c) $(5/4)^6 \cdot (-2/3)^6 \cdot (-1/7)^6 =$

d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-3/8)^{-4} \cdot (-1/4)^{-4} =$

e) $(-2/5)^4 : (-2/5)^7 =$

f) $(5/8)^3 : (5/8)^{-2} =$

g) $(1/5)^{-3} : (2/9)^{-3} =$

h) $(-6)^5 : (-2/9)^5 =$

8. Expressa en forma d'única potència:

a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5 =$

b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (-1)^5 =$

c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3 =$

d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 =$

e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9 =$

f) $(-18)^4 : (-3)^4 =$

g) $6^5 : 6^2 =$

h) $(-3)^2 : (-3)^4 =$

9. Expressa en forma de potència d'exponent positiu:

a) $(-4)^{-3}$

b) 9^{-3}

c) $(-2)^5 : (-2)^9$

d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$

10. Expressa en forma d'única potència:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{-4}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

b) $\left(\frac{-1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)^4$

c) $\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^4\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^6$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3/4} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1/6}$

2.2 Notació científica



Un número escrit en notació científica és de la forma:

$$m \times 10^e$$

Vídeo 158: Potències de 10.

Un zoom còsmic.

on l'exponent e s'elegeix perquè el nombre m , en valor absolut, sigui major o igual a 1 i menor que 10.

Algunes potències de 10 importants

Distància (m)	Ordre	Símbol	Exemple
1000000000000000	10^{12}	tera (T)	Distància de Saturn al Sol
10000000000	10^9	giga (G)	Radi del Sol
1000000	10^6	mega (M)	Radi de la Lluna
1000	10^3	kilo (k)	1 km
1	10^0		1 m
0,001	10^{-3}	mil·li (m)	Gruix d'un cabell
0,000001	10^{-6}	micro (μ)	Cèl·lula
0,000000001	10^{-9}	nano (n)	Mol·lècula
0,000000000001	10^{-12}	pico (p)	Àtom

Notació científica amb la calculadora:

Per trobar el valor decimal d'una arrel necessitaràs una calculadora científica, com ara la de la figura. Tot seguit et mostrem alguns exemples

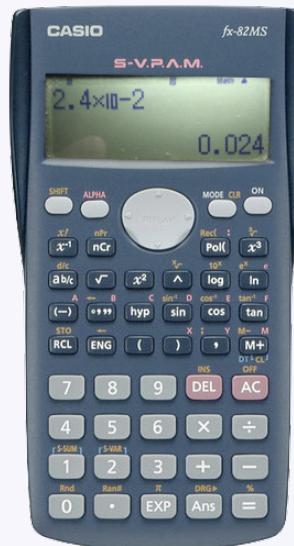
$$1,25 \cdot 10^3: \quad \boxed{1.25} \quad \boxed{\text{EXP}} \quad \boxed{3} \quad \boxed{=} \quad \boxed{1250}$$

$$2,4 \cdot 10^{-2}: \quad \boxed{2.4} \quad \boxed{\text{EXP}} \quad \boxed{-2} \quad \boxed{=} \quad \boxed{0.024}$$

La tecla **[ENG]** permet passar de notació normal a científica i viceversa, per exemple:

$$1250000: \quad \boxed{1250000} \quad \boxed{=} \quad \boxed{\text{ENG}} \quad \boxed{1.25 \times 10^6}$$

$$2,5 \cdot 10^{-3}: \quad \boxed{2.5} \quad \boxed{\text{EXP}} \quad \boxed{-3} \quad \boxed{=} \quad \boxed{0.0025 \times 10^0}$$



11. Expressa en notació científica:

a) $140000000 =$

b) $32800 =$

c) $710000000000000000 =$

d) $0,0000075 =$

e) $-18000000 =$

f) $0,0000000042 =$

g) $-0,009 =$

h) $0,0000000007 =$

12. Cerca informació expressada en notació científica sobre:

a) La distància entre la Terra i la Lluna b) Unitat de massa atòmica

c) Km que corresponen a un any llum d) Un gúgol

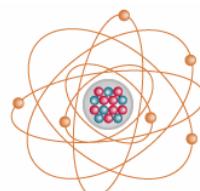
13. Realitza les operacions i expressa el resultat en notació científica:

a) $4 \cdot 10^3 + 2,4 \cdot 10^6 - 1,7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$ b) $2,3 \cdot 10^{-5} - 3,45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$

c) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 4,5 \cdot 10^2$ d) $1,8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$

14. L'estel Sirius està a uns 8,611 anys llum del nostre planeta. Expressa en metres, mitjançant notació científica la distància que recorreria una nau espacial que realitzés un trajecte d'anada i tornada a Sirius. (Recorda: Un any llum, la longitud que recorre la llum en un any, és aproximadament igual a $9,46 \times 10^{12}$ km (9 460 730 472 580,8 km amb més aproximació))

15. La massa d'un electró en repòs s'estima en $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, la d'un protó és d' $1,672 \cdot 10^{-27}$ kg, i la d'un neutró $1,64 \times 10^{-27}$ kg. Calcula la massa d'un àtom de carboni 14 (C_{14}) format per sis protons, sis electrons i $6 + 2 = 8$ neutrons. (El C_{14} és un isòtop que té dos neutrons més que el carboni normal i que s'utilitza per datar).



2.3 Arrels o radicals



Vídeo 128: Arrels: Definició



Vídeo 130: Radicals: Propietats

$$\sqrt[n]{a} = x$$

índex resultat
 radicand

- Deim que l'arrel quadrada $\sqrt{16} = 4$ perquè $4^2 = 16$
 Deim que l'arrel cúbica $\sqrt[3]{125} = 5$ perquè $5^3 = 125$
 Deim que l'arrel quarta $\sqrt[4]{16} = 2$ perquè $2^4 = 16$
 ...
 En general l'arrel enèsima $\sqrt[n]{a} = x$ perquè $x^n = a$

25. Escriu la llista dels 10 primers quadrats perfectes.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2										

26. Calcula **mentalment** les següents arrels:

- a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$

27. Calcula **mentalment** la part entera de les següents arrels:

- a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$

Arrels amb la calculadora:

Per trobar el valor decimal d'una arrel necessitaràs una calculadora científica, com ara la de la figura. Tot seguit et mostram la combinació de tecles que has d'utilitzar.

$\sqrt[3]{5}$: 1.709975947

$\sqrt[4]{3}$: 1.316074013

Les comprovacions de cada arrel són:

1.709975947³: 5

1.316074013⁴: 3



Signe de $\sqrt[n]{a}$	$a > 0$	$a < 0$
n parell	+	No existeix
n senar	+	-

28. Indica quines arrels quadrades són nombres enteros, quines nombres irracionalss i quines no existeixen:

- a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{32}$
 e) $\sqrt[5]{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt[4]{10000}$ h) $\sqrt[3]{-125}$

29. Calcula totes les solucions:

- a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[7]{1}$

Tot radical o arrel es pot expressar com a potència d'exponent una fracció: $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

i viceversa $2^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{2^5}$. Fixeu-vos que l'índex de l'arrel és el denominador de l'exponent.

30. Expressa en forma de radical:

a) $(-3)^{4/5} =$ b) $8^{1/3} =$ c) $5^{2/3} =$

31. Expressa en forma d'arrel:

a) $(-4)^{3/5} =$ b) $7^{1/6} =$ c) $21^{1/3} =$ d) $(-5)^{2/3} =$

32. Expressa en forma de potència:

a) $\sqrt[5]{6^3} =$ b) $\sqrt{(-7)^5} =$ c) $\sqrt{3^5} =$ d) $\sqrt[3]{(-30)^4} =$

33. Calcula:

a) $\sqrt{12100}$ b) $\sqrt{0,64}$ c) $\sqrt[3]{-0,008}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt{0,49}$

34. Calcula:

a) $\sqrt[4]{2,0736}$ b) $\sqrt[5]{-0,00001}$ c) $\sqrt{33640000}$ d) $\sqrt[3]{-2,7 \cdot 10^{-5}}$

Operacions amb radicals

Suma i resta: Tan sols podem sumar i restar radicals idèntics

$$2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 7\sqrt{3} = [6\sqrt{5}] - 7\sqrt{3}$$

Producte i divisió de radicals d'igual índex:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}, \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

35. Redueix:

a) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} =$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \sqrt{5} =$

c) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \frac{3}{4}\sqrt{2} =$

d) $-5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + 3\sqrt{3} =$

Extreure factors d'un radical

En principi, les arrels $\sqrt{5} + \sqrt{20}$ no es poden ajuntar en una perquè són diferents. No obstant això, podem simplificar $\sqrt{20}$ extraient factors.

El primer que feim és **descomposar** el nombre en factors primers: $20 = 2^2 \cdot 5$

$$\sqrt{20} = \sqrt{[2^2] \cdot 5} = [\boxed{2}] \sqrt{5}$$

“tot el que està elevat a 2 dins una arrel quadrada surt defora de l'arrel sense l'exponent”

Exercici Resolt

1. Extreu factors

a) $\sqrt[3]{2 \cdot 5^3}$

b) $5\sqrt{2^5 \cdot 3^2}$

c) $\sqrt[4]{162}$

d) $\sqrt[3]{32}$

a) Tot el que està elevat a 3 surt de l'arrel cúbica $\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 5\sqrt[3]{2}$

b) Tot el que està elevat a 2 surt de l'arrel quadrada. Feim “paquets” si l'exponent supera a 2: $5\sqrt{2^5 \cdot 3^2} = 5\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

c) Descomposam el radicand i treim factors $\sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[4]{2}$

d) Descomposam el radicand, feim “paquets” i treim factors $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2\sqrt[3]{2^2}$

36. Extreu els factors possibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^6 \cdot b^5}$

b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$

c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$

37. Extreu factors de cada radical:

a) $\sqrt[3]{5^7}$

b) $\sqrt{54}$

c) $\sqrt{\frac{8}{9}}$

d) $\sqrt{\frac{x^3}{y^4}}$

Arrel d'una arrel

Una forma de calcular l'arrel d'una arrel és passar-les a forma de potència i operar les potències. Per exemple:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = (5)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{5}$$

Una forma més còmoda i ràpida és simplement escriure una arrel d'índex el producte d'índexs:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$



Recorda que una arrel quadrada conté un índex 2: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

38. Expressa en forma d'única arrel:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$

39. Opera expressant prèviament en forma de potència:

a) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2^5}$

b) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt[5]{3^3}}$

40. Simplifica l'expressió (passa primer en forma de potència):

a) $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$

b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

41. Extreu tots els possibles factors d'aquests radicals:

a) $\sqrt{3^3 \cdot 10^5 \cdot 2}$

b) $\sqrt[3]{6^9 \cdot 2^5}$

c) $\sqrt[4]{x^{11} \cdot y^5}$

d) $\sqrt[3]{3^4 \cdot 5^6}$

42. Extreu els factors possibles d'aquests radicals:

a) $\sqrt[3]{a^7 \cdot b^3 \cdot c^{-6}}$

b) $\sqrt{5^{-5} \cdot 3^{-6}}$

c) $\sqrt[4]{10^5 : 6^8}$

d) $\sqrt{x^3 \cdot x^8 \cdot x}$

43. Simplifica:

a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$

b) $\sqrt[3]{\left(\frac{-4}{5}\right) \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^5}$

c) $\sqrt{\frac{x^3 \cdot y^4}{x^8 \cdot y}}$

d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^5}$

44. Expressa en forma d'única arrel:

a) $\sqrt{\sqrt{48}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{450}}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}}$

d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}}$

45. Simplifica les operacions:

a) $\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{2^4}$

b) $\left(\sqrt[3]{-27}\right) \cdot 5^{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt[5]{2^{12}} : \sqrt[5]{3^8}$

46. Simplifica les operacions:

a) $\sqrt[3]{x^5} : \sqrt[2]{x^3}$

b) $\sqrt{\sqrt{10^{12}}}$

c) $\sqrt{5 \cdot (-2)^6 \cdot (-3)^6}$

d) $\sqrt[5]{(-6)^{12}} : \sqrt[5]{(-6)^7 \cdot 3^{10}}$

Exercici Resolt

2. Operacions amb diferent índex:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$$

Passam tots els radicals en forma de potència

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{1/2} \cdot 2^{1/3}$$

tot seguit operam les potències

$$= 2^{1/2} \cdot 2^{1/3} = 2^{1/2+1/3} = 2^{5/6}$$

finalment, tornam a passar a forma d'arrel $2^{5/6} = \sqrt[6]{2^5}$

47. Opera passant prèviament en forma de potència:

a) $\sqrt{5^3} : \sqrt[3]{5} =$

b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^2} =$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\sqrt{a}} : \sqrt[3]{a} =$



Autoavaluació

1. Calcula el valor numèric: a) $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$; b) $12^7 : 12^5$
2. Expressa com una potència: a) $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot 6^4$; b) $(-8)^7 : 5^7$
3. Expressa com una potència: a) $((-2)^5)^3$; b) $((-1)^5)^7$; c) $((-5)^{2/3})^6$
4. Calcula el valor numèric: a) $(5/3)^{-1}$; b) $(-1/3)^{-2}$; c) $(-2/5)^{-3}$
5. Simplifica: $(2/3)^3 \cdot (2/3)^2 \cdot (2/3)^{-5}$
6. a) Converteix a notació habitual $3,1 \cdot 10^8$
b) Passa a notació científica 0,0000000095
7. Opera $(0,00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4,2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2,5 \cdot 10^5$
8. Aplica la definició de radical per esbrinar n : a) $\sqrt[3]{n} = -5$; b) $\sqrt[7]{64} = 8$; c) $\sqrt[5]{-32} = n$
9. Expressa en forma de radical i digues si es poden calcular o no:
a) $(-4)^{3/5}$; b) $3^{1/2}$; c) $(-5)^{3/4}$
10. Extreu factors d'aquests radicals: a) $\sqrt[3]{5^4}$; b) $\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$
11. Realitza les següents operacions: a) $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{2} + \frac{4}{3} \sqrt[3]{6}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{18}}}$

Resum

Propietats de les potències

- En el producte de potències d'igual base es sumen els exponents.
- En el quocient de potències d'igual base es resten els exponents.
- Potència de potència, multiplicam els exponents.
- Si els exponents són iguals, primer s'operen les bases i es copia el mateix exponent.

$$\begin{aligned}(-5)^4 \cdot (-5)^2 &= (-5)^6 \\3^2 : 3^7 &= 3^{-5} \\((-4)^3)^5 &= (-4)^{15} \\2^5 \cdot 7^5 &= 14^5 \\(-5)^3 : (4)^3 &= (-5/4)^3\end{aligned}$$

Potència d'exponent negatiu

a^{-1} significa fer la inversa $a^{-1} = \frac{1}{a}$

a^{-n} significa $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Per a una fracció $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

$$\begin{aligned}5^{-3} &= \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \\(\frac{2}{3})^{-2} &= (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

Notació científica

$m \cdot 10^{\pm n}$ essent $1 \leq m \leq 9$
+n per nombres grans i -n per nombres petits

$$\begin{aligned}320000000 &= 3,2 \cdot 10^8 \\0,000009 &= 9 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Radicals d'índex qualsevol

$$\sqrt[n]{a} = x \quad \text{si} \quad x^n = a$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-8} &= -2 \quad \text{perquè} \quad (-2)^3 = -8 \\\sqrt[4]{81} &= 3 \quad \text{perquè} \quad 3^4 = 81\end{aligned}$$

Potències d'exponent racional

Una potència d'exponent racional pot expressar-se en forma d'arrel.

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[8]{2^5} &= \sqrt[8]{2^5} \\\sqrt[5]{3^4} &= 3^{\frac{4}{5}}\end{aligned}$$

Operacions amb radicals

Extreure factors:

$$\text{Si } k = n \cdot c + r \text{ llavors } \sqrt[n]{a^k} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$$

$$\text{Per multiplicar o dividir: } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\text{Radical de radical } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{5^7 \cdot 2^3 \cdot 3} &= 5^2 \cdot 2 \sqrt[3]{15} \\\sqrt[3]{\sqrt{5}} &= \sqrt[6]{5}\end{aligned}$$



Tema 3

Successions i progressions

Què aprendrem?

3.1 Successions	35
3.2 Progressions aritmètiques	37
3.3 Progressions geomètriques	38
3.4 Activitats	40

Abans de començar

Nota:

Esbrina la regla que s'ha emprat i escriu tres nombres més de les llistes següents:

- a) 1, 3, 5, 7, ..., ..., ..., ...
- b) 2, -4, 8, -16, 32, ..., ..., ..., ...
- c) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ..., ..., ..., ...

Inventa't una llista semblant i passa-la al teu company perquè endevini els següents termes.

Col·loca les paraules i forma la frase

REGLA	LLISTA	SUCCESSIÓ	FIXADA	NOMBRES
-------	--------	-----------	--------	---------

“Una és una ordenada de obtinguts a partir d'una de formació”

3.1 Successions



Vídeo 134: Successions

Una **successió** és una **llista ordenada** de nombres obtinguts a partir d'una regla de formació fixada. A cadascun dels nombres s'anomenen **termes**. Per exemple, la llista de nombres senars $1, 3, 5, \dots$ té com a primer terme $a_1 = 1$, segon terme $a_2 = 3$, etc.

Una successió es pot donar de diferents formes:

- Donants els seus primers termes: $1, 2, 3, 5, \dots$
- A partir del terme general: $a_n = 2n - 1$
- A partir d'una relació de recurrència: $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = a_n + 1$

Una manera forma fàcil d'entendre què és una successió és agafar la llista de classe i escriure devora de cada número de llista, per exemple, el mes de naixement de l'alumne:

Nom	n	a_n
Amengual	1 →	2
Bibiloni	2 →	7
Cerdà	3 →	5
Deyà	4 →	11

En la successió $a_n = 2, 7, 5, 11, \dots$,
a és el valor del mes
n és el número de llista.

1. Escriu els deu primers termes de les següents successions:
 - 1, -2, -3, -4, ...
 - 1, 4, 9, 16, ...
 - 1, 3, 5, 7, ...
2. Escriu el terme que ocupa el lloc 100 de cadascuna de les successions anteriors.
3. Sabem que un cos que cau lliurement sobre la Terra té una velocitat que augmenta 9,8 m/s cada segon. Si en el primer segon la seva velocitat és de 15 m/s, escriu en el teu quadern la velocitat en els segons indicats en la taula. Observes alguna regla que et permeti conèixer la velocitat al cap de 20 segons? Representa gràficament aquesta funció.

Temps en segons	1	2	3
Velocitat en m/s	15		

Exercici Resolt

1. Troba els 5 primers termes de la successió donada en forma recurrent:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 1$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

Ens donen el primer i segon termes i la relació per trobar els següents. El tercer terme s'obté de fer el triple del segon més el doble del primer.

$$a_3 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$$

$$a_4 = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 23$$

$$a_5 = 3 \cdot 23 + 2 \cdot 7 = 83$$

...

4. Escriu els quatre primers termes de les següents successions:

$$a_n = 2n^2 + 1$$

$$b_n = \frac{4n - 1}{3n}$$

$$c_1 = 1; \quad c_n = 3c_{n-1} + 5$$

$$d_1 = 2; \quad d_2 = 5; \quad d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$$

5. Escriu l'expressió del terme general de les següents successions:

a) $\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$

b) $\{0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots\}$

c) $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

d) $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{8}, \dots \right\}$

6. En una successió el primer terme és 2 i els altres s'obtenen sumant 4 al terme anterior. Calcula els 6 primers termes de la successió.

7. Un satèl·lit artificial es va posar en òrbita a les 17:30 hores. Tarda a fer una volta completa a la seva òrbita 1:27 hores.

- a) Completa en el teu quadern la taula adjunta.

Nº d'òrbites	1	2	3	4	5	6
Hora en la qual l'ha completat						

- b) Escriu una expressió general que et permeti conèixer l'hora en què ha completat la tornada enèsima.
- c) Cerca una expressió que et permeti conèixer l'hora en funció de l'hora de l'òrbita anterior.
- d) Cerca una expressió que et permeti conèixer l'hora en funció de la primera.
- e) Quantes voltes completes haurà donat 20 dies més tard a les 14:00 hores?



3.2 Progressions aritmètiques



Vídeo 132: Progressions
aritmètiques

Les progressions aritmètiques són successions en què la diferència entre dos termes consecutius (anomenada **diferència d**) es manté constant.

Terme General: $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$

Suma dels primers N termes: $S_N = N \cdot \frac{(a_1 + a_N)}{2}$

8. Assenyala raonadament si la següent successió és una progressió aritmètica: $\{1, 10, 100, 1000, 10000, \dots\}$.
9. Calcula els tres primers termes d'una progressió aritmètica sabent que el primer és 1 i la diferència és -2 .

Exercici Resolt

2. Calcula el terme 100 d'una progressió aritmètica amb diferència 7 i $a_{15} = 165$.

Escrivim el terme general de la progressió

$$a_{15} = 165 = a_1 + 7 \cdot (15 - 1)$$

D'aquí aïllam el valor del primer terme $a_1 = 67$.

Ara cercam el terme 100: $a_{100} = 67 + 7 \cdot (100 - 1) = 760$.

10. Calcula el primer terme d'una progressió aritmètica amb diferència 2 i $a_{30} = 60$.
11. Donada una progressió aritmètica dos dels termes de la qual són: $a_3 = 4$ i $a_{10} = 18$.
 - a) Calcula la seva diferència.
 - b) Calcula el seu terme general.
12. Quin és el terme general d'una progressió aritmètica amb $a_{22} = 45$ i $d = 3$?
13. Els costats d'un pentàgon estan en progressió aritmètica de diferència 5. Sabent a més que el seu perímetre és 65, calcula el valor dels costats.
14. Calcula els 5 primers termes d'una progressió aritmètica de primer terme 2 i de diferència 3. Representa'l's gràficament. Observa que la seva representació gràfica és un conjunt de punts aïllats que estan sobre una recta.
15. Calcula l'expressió general de les progressions aritmètiques:
 - a) De diferència $d = 2.5$ i de primer terme 2.
 - b) De diferència $d = -2$ i de primer terme 0.
 - c) De diferència $d = 1/3$ i de segon terme 5.
 - d) De diferència $d = 4$ i de cinquè terme 1.

16. Quants múltiples de 7 estan compresos entre el 4 i el 893?
17. Suma els 10 primers termes de la progressió aritmètica: $\{-5, 4, 13, 22, 31, 40, \dots\}$
18. Troba la suma dels 50 primers múltiples de 3.
19. L'amo d'un pou contracta a un saurí per conèixer la profunditat a la qual es troba l'aigua i aquest dictamina que a 5 m hi ha aigua en abundància. Demana un pres-supost a un contractista, que li diu que el primer metre li costarà 50 euros i per cada mig metre més 6 euros més que pel mig metre anterior. Quant li costarà el pou si es compleixen les prediccions?
20. Antoni s'ha comprat un mòbil, però no pot pagar-ho al comptat. Paga 60 euros cada setmana, però el venedor li puja 5 euros cada setmana en concepte de pagament ajornat. Aconsegueix pagar-ho en 10 setmanes. Quant li va costar? Quant va pagar de més? Quin percentatge suposa aquest recàrrec sobre el preu de venda?
21. Un nedador s'entrena en una piscina de 50 m i vol controlar les pèrdues de velocitat per cansament. Cronometra en cinc dies consecutius els temps que triga a fer 2, 5, 8, 11, 14 llargs. Es demana:
- El terme general de la successió a_n que dóna els metres recorreguts en el dia n .
 - Quants metres haurà nedat en aquests cronometratges?

3.3 Progressions geomètriques



Vídeo 133: Progressions geomètriques

Les progressions geomètriques són successions en les quals el quocient de dos termes consecutius (anomenat **raó r**) es manté constant.

Terme general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Suma dels primers N termes: $S_N = \frac{a_1 \cdot (r^N - 1)}{r - 1}$

Suma dels infinitis termes (si $0 < r < 1$): $S_{\text{tots}} = \frac{a_1}{1 - r}$

22. Esbrina la raó d'una progressió geomètrica el segon terme de la qual és 27 i el tercer és 3.
23. El quart terme d'una progressió geomètrica és $\frac{1}{9}$ i la raó 3. Troba el primer terme.
24. Troba el sisè terme de la següent progressió geomètrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots\}$

Exercici Resolt

3. D'una progressió geomètrica sabem que $a_1 = 625$ i $a_4 = 320$. Troba la raó i el terme cinquè.

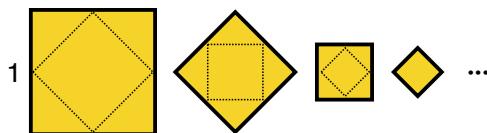
El primer és trobar la raó:

$$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \rightarrow 320 = 625 \cdot r^3 \rightarrow r^3 = 320/625 = 0,512$$

La raó és $r = \sqrt[3]{0,512} = 0,8$. Finalment trobam el terme cinquè:

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \rightarrow a_5 = 625 \cdot (0,8)^4 = 256$$

25. Donada una progressió geomètrica dos dels termes de la qual són: $a_3 = -8$ i $a_5 = -32$.
- a) Calcula la seva raó.
b) Calcula el seu terme general.
26. Calcula el producte dels 15 primers termes de la progressió: 3, 6, 12, 24, ... ;
27. Un agricultor en la seva granja té 59049 litres d'aigua per donar de beure als animals. Un dia va utilitzar la meitat del contingut, al següent la meitat del que li quedava i així successivament cada dia. Quants litres d'aigua va utilitzar fins al sisè dia?
28. Troba la suma els 15 primers termes d'una progressió geomètrica en la qual $a_1 = 5$ i $r = \frac{1}{2}$.
29. Calcula la suma dels infinitis termes de la successió: $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$
30. Tenim a la mà un quadrat d'àrea 1. Tallem les quatre cantonades pels punts mitjans dels costats. El nou quadrat, quina àrea té? Deixem les retallades damunt de la taula. Quina àrea de retallades hi ha sobre la taula? Amb el nou quadrat que tenim a la mà efectuem la mateixa operació de tallar les quatre cantonades i deixar-les sobre la taula, i així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? I les retallades que queden sobre la taula? Troba la suma de les infinites àrees de retallades així obtingudes.

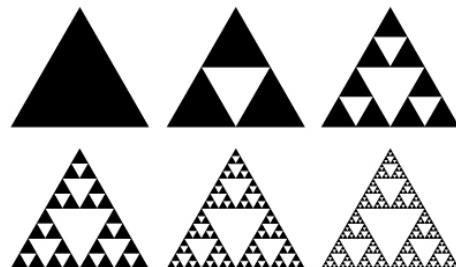


31. Calcula la fracció generatriu del número $4, \hat{5}$. Ajuda $4, \hat{5} = 4 + 5 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + \dots$
32. Un empresari acudeix a una entitat financer per informar-se sobre com invertir els 6000 € de beneficis que ha tingut en un mes. Li plantegen dues opcions.
- a) Mantenir aquest capital durant 5 anys al 3,5 % anual,
b) Rebre el 5 % del capital durant els dos primers anys i el 3 % els tres anys restants.
Quina opció li interessa més?

3.4 Activitats

- 33.** Calcula el terme 100 d'una progressió aritmètica el primer terme de la qual és 4 i la diferència és 5.
- 34.** El desè terme d'una progressió aritmètica és 45 i la diferència és 4. Troba el primer terme.
- 35.** Sabent que el primer terme d'una progressió aritmètica és 4, la diferència 7 i el terme 88, troba n .
- 36.** Troba el primer terme d'una progressió aritmètica i la diferència, sabent que $a_3 = 24$ i $a_{10} = 66$.
- 37.** El terme sisè d'una progressió aritmètica és 4 i la diferència $1/2$. Troba el terme 20.
- 38.** ★ Calcula els costats d'un triangle rectangle sabent que les seves mesures, expressades en metres, estan en progressió aritmètica de diferència 3.
- 39.** Calcula la suma dels múltiples de 59 compresos entre 1000 i 2000.
- 40.** Quants termes cal sumar de la progressió aritmètica 2, 8, 14,... per obtenir com a resultat 1064?
- 41.** ★ La suma de n nombres naturals consecutius presos a partir d'11 és 1715. Quants termes hem sumat?
- 42.** Sabent que el cinquè terme d'una progressió aritmètica és 18 i la diferència és 2, troba la suma dels nou primers termes de la successió.
- 43.** Sabent que les mesures dels tres angles d'un triangle estan en progressió aritmètica i que un d'ells mesura 100° , calcula els altres dos.
- 44.** Troba les dimensions d'un ortòedre sabent que estan en progressió aritmètica, que sumen 78 m i que el volum de l'ortòedre és de 15470 m^3 .
- 45.** Les longituds dels tres costats d'un triangle rectangle estan en progressió aritmètica i sumen 36 metres. Quant mesura cada costat?
- 46.** Un coronel ordena a 5050 soldats que formin un triangle per a una exhibició, de manera que la primera fila tingui un soldat, la segona dues, la tercera tres, etc. Quantes files han d'haver-hi?
- 47.** Pel lloguer d'una casa s'acorda pagar 800 euros al mes durant el primer any, i cada any s'augmentarà el lloguer en 50 euros mensuals. Quant es pagarà mensualment al cap de 12 anys?
- 48.** Les edats de quatre germans formen una progressió aritmètica, i la seva suma és 32 anys. El major té 6 anys més que el menor. Troba les edats dels quatre germans.
- 49.** Un esquiador comença la pretemporada d'esquí fent peses en un gimnàs durant una hora. Decideix incrementar l'entrenament 10 minuts cada dia. Quant temps haurà d'entrenar al cap de 15 dies? Quant temps en total haurà dedicat a l'entrenament al llarg de tot un mes de 30 dies?
- 50.** En una sala de cinema, la primera fila de butaques dista de la pantalla 86 dm, i la sisena, 134 dm. En quina fila estarà una persona si la seva distància a la pantalla és de 230 dm?
- 51.** Calcula el terme onzè d'una progressió geomètrica el primer terme de la qual és igual a 1 i la raó és 2.
- 52.** En una progressió geomètrica de primer terme 7 i raó 2, un cert terme és 28672. Quin lloc ocupa aquest terme?
- 53.** Sabent que el setè terme d'una progressió geomètrica és 1 i la raó $1/2$, troba el primer terme.

- 54.** Troba la suma dels deu primers termes de la progressió geomètrica 3, 6, 12, 24,...
- 55.** Troba la suma dels termes de la progressió il·limitada: 8, 4, 2, 1,...
- 56.** La suma dels set primers termes d'una progressió geomètrica de raó 3 és 7651. Troba els termes primer i setè.
- 57.** ★ Troba els quatre primers termes d'una progressió geomètrica, sabent que el segon és 20 i la suma dels quatre primers és 425.
- 58.** Les dimensions d'un ortòedre estan en progressió geomètrica. Calcula aquestes dimensions sabent que el seu perímetre és 420 m i el seu volum 8000 m³.
- 59.** La suma de tres nombres en progressió geomètrica és 248 i la diferència entre els extrems 192. Troba aquests nombres.
- 60.** Troba quatre nombres en progressió geomètrica sabent que la suma dels dos primers és 28 i la suma dels dos últims 175.
- 61.** Una progressió geomètrica té cinc termes, la raó és igual a la quarta part del primer terme i la suma dels dos primers termes és 24. Troba els cinc termes.
- 62.** A una corda de 700 m de longitud se li fan dos talls, de manera que un dels trossos extrems té una longitud de 100 m. Sabent que les longituds dels trossos estan en progressió geomètrica, determina la longitud de cada tros.
- 63.** Troba la fracció generatriu del nombre decimal 0,737373..., com suma dels termes d'una progressió geomètrica il·limitada. Ajuda: $0,737373 = 73 \cdot 100^{-1} + 73 \cdot 100^{-2} + \dots$
- 64.** Es té una bota de vi que conté 1024 litres. L'1 d'octubre es va buidar la meitat del contingut; l'endemà es va tornar a buidar la meitat del que quedava, i així successivament tots els dies. Quina quantitat de vi es va treure el dia 10 d'octubre?
- 65.** Donat un quadrat d'1 m de costat, unim dos a dos els punts mitjans dels seus costats; obtenim un nou quadrat, en el qual tornem a efectuar la mateixa operació, i així successivament. Troba la suma de les infinites àrees així obtingudes.
- 66.** Tres nombres que la seva suma és 36 estan en progressió aritmètica. Troba aquests nombres sabent que si se'ls suma 1, 4 i 43, respectivament, els resultats formen una progressió geomètrica.
- 67.** *Triangle de Sierpinski:* Anem a construir un fractal. Es parteix d'un triangle equilàter. S'uneixen els punts mitjans dels costats i es formen quatre triangles. S'elimina el triangle central. En cadascun dels altres tres triangles es repeteix el procés. I així successivament. A la figura formada per iteració infinita la hi denomina Triangle de Sierpinski, i és un fractal.



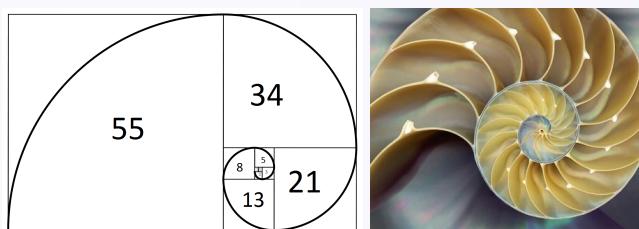
Imagina que el primer triangle té àrea A . Quan apliquem la primera iteració, l'àrea és $(3/4)A$. I en la segona? Escrui la successió de les àrees. És creixent o decreixent? Imagina ara que la longitud de cada costat del triangle inicial és L . Escrui la successió de perímetres. És creixent o decreixent?

Autoavaluació

1. Quina és la raó de la següent progressió $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$?
2. En la successió $7, 11, 15, 19, 23, \dots$, quin lloc ocupa el terme 335?
3. Què val la suma dels deu primers termes de la progressió aritmètica: 7, 13, 19, 31, ...?
4. Donada la successió $5, 15, 45, 135, 405, 1215, \dots$, digues si és una progressió i calcula la seva diferència o raó.
5. Calcula el terme general de la successió: 2, 10, 50, 250, 1250,
6. Quant sumen les potències de 2 compreses entre 2^1 i 2^{10} ?
7. Calcula el terme general de la progressió aritmètica el primer terme de la qual és 1 i la seva diferència 2.
8. Quin és el valor de la suma: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999$?
9. Maria està preparant l'examen de selectivitat. Per no deixar tota la matèria per al final ha decidit estudiar cada dia el doble de pàgines que el dia anterior. Si el primer dia va estudiar tres pàgines, quantes haurà estudiat al cap de 7 dies? Quantes pàgines haurà estudiat en total?
10. A n'en Bernat li han tocat 6000 € en la loteria i decideix dipositar-los al banc a un tipus d'interès compost del 4 %. Quants diners tindrà al cap de 5 anys?

La successió de **Fibonacci** comença amb dos uns i després cada terme s'obté de sumar els dos anteriors. Aquests són els primers termes: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Aquesta successió apareix en molts de casos en la naturalesa, especialment en estructures espirals com ara els caragols, el nombre de pètals de les margalides, els girasols, les pinyes, les galàxies, etc.



Cerca més informació sobre aquesta successió i la seva relació amb el nombre auri.

Resum

PROGRESSIÓ ARITMÈTICA	
És una successió de nombres reals en la qual la diferència entre dos termes consecutius de la successió és constant. Aquesta constant s'anomena diferència de la progressió i se sol denotar amb la lletra d .	2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
Terme general	
$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$ essent a_1 el primer terme	$a_n = 2 + 3n$
Suma dels n primers termes	
$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_8 = \frac{8 \cdot (2 + (2 + 3 \cdot 8))}{2} =$ $= 4 \cdot (4 + 24) = 4 \cdot 28 = 112$
PROGRESSIÓ GEOMÈTRICA	
És una successió de nombres reals en la qual el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. A aquesta constant es denomina raó de la progressió i se sol denotar amb la lletra r . És a dir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ sent i un nombre natural.	3, 6, 12, 24, ... 1, 1/2, 1/4, 1/8...
Terme general	
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ essent a_1 el primer terme de la successió	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ $a_n = 1 \cdot (1/2)^n$
Suma dels termes	
- Per a un <u>nombre n</u> de termes:	$S_8 = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 3(256 - 1) = 765$
- Per a $r < 1$, i una <u>quantitat il·limitada</u> de termes:	$S_{\text{tots}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$
Producte dels n primers termes	
$P_n = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$P_9 = + \sqrt{(3 \cdot (3 \cdot 2^8))^9} = (3 \cdot 2^4)^9$



Tema 4

Estadística i Probabilitat

Què aprendrem?

4.1 Fases d'un estudi estadístic	45
4.2 Representació de la informació	46
4.3 Paràmetres estadístics	47
4.4 Problemes d'estadística	49
4.5 Introducció al càlcul de probabilitats	51
4.6 Probabilitats simples (Regla de Laplace)	52
4.7 Probabilitat composta	54

Abans de començar

Nota:

- Hem tret aquestes notes d'exàmens de matemàtiques durant el curs:

4 7,5 3 6,2 5 4,75 6,4

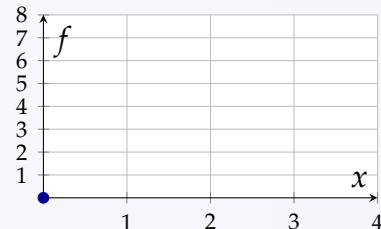
Quina és la nota mitjana dels exàmens?

- Hem demanat el nombre de televisors que tenen les famílies d'un grup de 20 persones i hem obtingut aquests resultats:

2 1 1 3 2 0 1 1 1 2 2 2 3 1 2 1 1 2 4 2

Construeix una taula de freqüències i dibuixa un diagrama de barres.

x	f
0	
1	
2	
3	
4	



- Quina és la probabilitat de treure un 5 en llançar un dau? I de treure una carta d'oros d'una baralla espanyola?

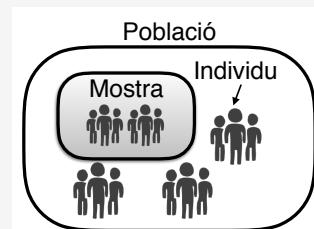
4.1 Fases d'un estudi estadístic

Definicions:

- **Individu:** Cadascun dels objectes que s'estudien.
- **Població:** Conjunt de tots els individus que s'estudien.
- **Mostra:** Part de la població de la qual es prendran dades.

Variable estadística. És l'aspecte de l'estudi i es **classifica en:**

- **Qualitativa:** Expressa una qualitat, com ara color, marca, etc.
- **Quantitativa:** S'expressa amb un nombre.
 - **Discreta** (el nombre és enter)
 - **Contínua** (el nombre pot contenir decimals).



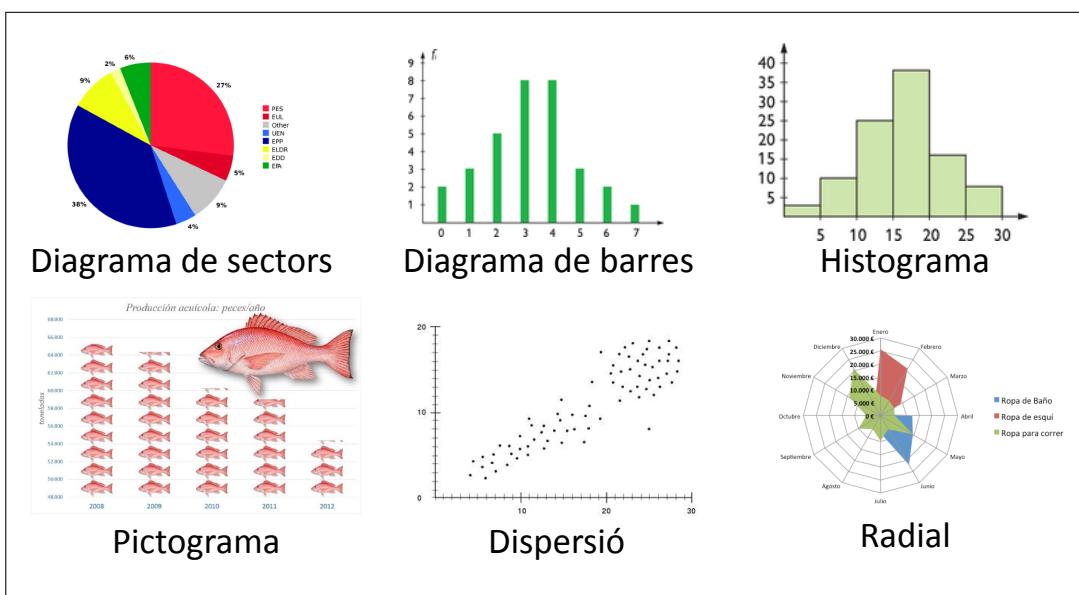
Fases d'un estudi estadístic:

1. Tenir clara la pregunta i el tipus de variable estadística que es vol estudiar.
2. Prendre una mostra representativa.
3. Recollir les dades (fent una enquesta, etc.)
4. Fer un recompte de dades, càlculs de paràmetres estadístics i gràfics.
5. Treure conclusions.

1. Volem fer un estudi de la quantitat de monedes que duen a la butxaca els estudiants de la classe. Però, per no demanar a tots triam 10 companys a l'atzar i anotam en el quadern quantes monedes duu cadascun.
 - a) Quina és la població objecte de l'estudi?
 - b) Quina és la mostra triada?
 - c) Especifica 5 individus que pertanyen a la població i no a la mostra.
2. Classifica en variables qualitatives i quantitatives. Per a les quantitatives indica si són contínues o discretes.
 - a) Quines fruites menges al llarg d'una setmana?
 - b) Quantes peces de fruita menges al dia?
 - c) Quantes monedes portes en la butxaca?
 - d) Quina és la teva altura?
 - e) Quins són les marques de xocolata que recordes?
 - f) Quants germans tens?
 - g) Quin és el teu color favorit per a un cotxe?
 - h) Quant temps passes al dia veient la televisió?
 - i) Quants seguidors tens en twitter?

3. Assenyala en quin cas és més convenient estudiar la població o una mostra:
- El diàmetre dels cargols que fabrica una màquina diàriament.
 - L'altura d'un grup de sis amics.
4. Es pot llegir el següent titular en la revista que publica el teu institut: “*La nota mitjana dels alumnes de 3r ESO és de 7,9*”. Com s’ha arribat a aquesta conclusió? S’ha estudiat a tota la població? Si haguessin seleccionat per al seu càlcul tan sols a les nines, seria representatiu el seu valor?
5. En una sèrie de televisió tenen dubtes sobre què fer amb la protagonista, si que tingui un accident o si ha de casar-se. Volen fer una consulta; a tota la població o seleccionat una mostra representativa? Raona la resposta.

4.2 Representació de la informació



6. Reuneix a 10 companys. Compta quantes monedes de cada valor (1 cèntim, 2 cèntims, 5 cèntims, ...) teniu entre tots. Representa mitjançant un gràfic adequat el nombre de monedes de cada tipus que teniu. Hi ha algun altre diagrama que et permeti veure quin tipus de monedes són més abundants en la mostra que has pres?
7. En la classe d'Educació Física el professor ha mesurat el temps que tarda cada alumne a recórrer 100 metres. Els resultats estan en aquesta taula:

14'92	13'01	12'22	16'72	12'06	10'11	10'58	18'58
20'07	13'15	20'10	12'43	17'51	11'59	11'79	16'94
16'45	10'94	16'56	14'87	17'59	13'74	19'71	18'63
19'87	11'12	12'09	14'20	18'30	17'64		

Agrupa aquests resultats en intervals començant en 10 segons i de longitud 1 segon. Realitza una taula de freqüències i representa adequadament aquestes dades.

4.3 Paràmetres estadístics

Paràmetres estadístics

Donada una variable estadística x_i amb cada valor repetit f_i vegades (freqüència), es defineixen

- **Nombre de dades:** $N = \sum_i f_i$
- **Mitjana aritmètica:** $\bar{x} = \frac{\sum_i f_i x_i}{N}$
- **Variància:** $Var = \frac{\sum_i f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$
- **Desviació típica:** $\sigma = \sqrt{Var}$
- **Coeficient de variació:** $CV = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}$
- **Moda:** El valor de x més freqüent.
- **Mediana:** Valor de x pel qual la freqüència acumulada assoleix el 50%.
- **Rang:** La diferència entre els valors major i menor de x .

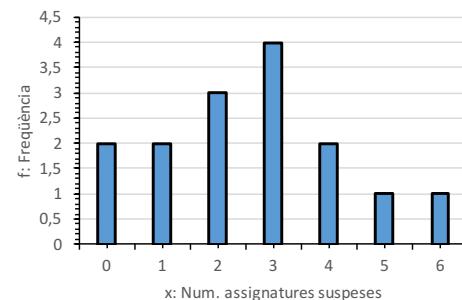
La mitjana és el centre de gravetat de la distribució i la desviació típica ens dóna la **dispersió**. És a dir, ens diu com d'allunyades estan les dades respecte de la mitjana. Podem pensar que una dada és “normal” si es troba dins l’interval de x ($\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma$).

1. Hem demanat pel nombre d’assignatures suspeses a un grup de 15 alumnes i aquestes han estat les respostes:

1	0	3	2
0	6	2	5
3	2	4	3
4	1	3	

- Fes un recompte i dibuixa un diagrama de barres.
- Calcula la mitjana i la desviació típica.

x_i	f_i
0	2
1	2
2	3
3	4
4	2
5	1
6	1



Per calcular els paràmetres estadístics necessitam calcular dues columnes més $f \cdot x$ i $f \cdot x^2$:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	2	0	0
1	2	2	2
2	3	6	12
3	4	12	36
4	2	8	32
5	1	5	25
6	1	6	36
SUMES	15	39	143

La mitjana s’obté de $\bar{x} = \frac{39}{15} = 2.6$

La desviació típica $\sigma = \sqrt{\frac{143}{15} - 2.6^2} = 1.67$

El coeficient de variació és $CV = \frac{1.67}{2.6} = 0.64$, aproximadament un 64%.

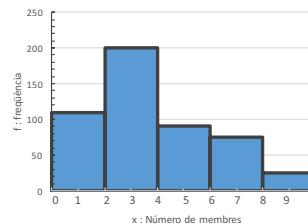
2. En un barri s'ha trobat que les famílies residents s'han distribuït, segons el número de membres, de la forma següent:

membres	nº famílies
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

- a) Representa un histograma.
- b) Calcula la mitjana i la desviació típica.

a)

Es tracta d'una variable discreta (número de membres) que s'ha agrupat en intervals. El número de famílies és la freqüència. Aleshores, el gràfic més adequat és fer un histograma.



Per calcular els paràmetres estadístics necessitam calcular **la marca de classe** que és el punt mitjà de cada interval.

$x_i : \text{marca}$	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1	110	110	110
3	200	600	1800
5	90	450	2250
7	75	525	3675
9	25	225	2025
SUMES	500	1910	9860

b)

$$\text{La mitjana s'obté de } \bar{x} = \frac{1910}{500} = 3.82$$

$$\text{La desviació típica } \sigma = \sqrt{\frac{9860}{500} - 3.82^2} = 2.26$$

El coeficient de variació és $CV = \frac{2.26}{3.82} = 0.57$, aproximadament un 60%.

8. En una excursió de muntanya participen 25 persones amb les següents edats:

8	10	10	11	12	36	37	37	38	40	42	43	43
44	45	47	48	50	52	53	55	58	61	63	67	

- a) Fes una taula de freqüències classificant les edats en 6 intervals que comencen en 7,5 i acaben en 67,5. Troba, a partir de la taula, els paràmetres \bar{x} , σ i CV .
- b) Calcula \bar{x} , σ i CV introduint els 25 dades en la calculadora, és a dir, sense agrupar-los en intervals.
- c) Prescindint dels 5 nins, obtenim un col·lectiu de 20 persones. Calcula de nou els seus paràmetres \bar{x} , σ i CV , i compara amb els obtinguts en el grup inicial.

4.4 Problemes d'estadística

- 9.** S'han recollit les dades sobre el nombre de fills que tenen 20 matrimonis. Com és la variable utilitzada? Escriu una taula de freqüències de les dades recollides i representa les dades en un diagrama de sectors:

3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3

Amb aquestes dades calcula la moda, la mitjana, la variància i la desviació típica.

- 10.** Es demana a un grup de persones pel nombre de televisors que hi ha en casa seva i els resultats han estat:

Nombre de televisors	0	1	2	3	4	5
Nombre de llars	2	27	15	4	2	1

Quin tipus de variable és? Representa les dades en la representació que et sembli més adequada. Calcula la mitjana i la desviació típica.

- 11.** En un centre escolar s'ha recollit informació sobre el nombre d'ordinadors a les cases de 100 famílies i s'han obtingut els següents resultats:

Nombre d'ordinadors	0	1	2	3	4
Nombre de famílies:	24	60	14	1	1

Representa les dades en un diagrama de barres i calcula la mitjana, la mediana i la moda.

- 12.** Amb les dades del problema anterior calcula el rang, la desviació mitjana, la variància i la desviació típica.

- 13.** Es demana a un grup de persones pel nombre de vegades que han visitat al dentista en l'últim any. Les respostes obtingudes es recullen en la següent taula:

Nombre de visites:	1	2	3	4	5
Nombre de persones:	13	18	7	5	7

- a) Representa les dades en un diagrama de sectors i calcula la mitjana, la mediana i la moda.
- b) Calcula el rang, la desviació mitjana, la variància i la desviació típica.

14. En un control de velocitat en carretera s'obtingueren les dades següents

Velocitat (km/h):	60–70	70–80	80–90	90–100	100–110	110–120
Nombre de cotxes:	5	15	27	38	23	17

- a) Calcula la mitjana i la desviació típica de la velocitat dels cotxes. Ajuda: La marca de classe de l'interval 60–70 és 65.
- b) Quin percentatge circula a més de 90 km/h?

15. La següent taula expressa les alçades, en metres, de 1000 soldats:

Talla	1,50 – 1,56	1,56 – 1,62	1,62 – 1,68	1,68 – 1,74	1,74 – 1,80	1,80– 1,92
Nº de soldats	10	140	210	340	210	90

- a) Representa les dades en un histograma.
- b) Calcula la mitjana i la desviació típica.
- c) Determina l'interval on es troba la mediana.

16. En les eleccions de 2004, 2009, 2014 al Parlament Europeu es van obtenir els següents percentatges de vots per alguns dels estats membres:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Bèlgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Quina representació de les dades et sembla més adequada? Pots calcular la mitjana o el rang? Quin tipus de variables és la de la taula? Ordena als països de major a menys percentatge de votants en les eleccions de 2014.

17. En les eleccions de 2014 al Parlament Europeu els resultats d'Espanya han estat:

Cens	Total de votants	Abstenció	Vots nuls	Vots en blanc
35.379.097	15.620.815	19.058.282	290.189	409.811

Representa en un diagrama de sectors aquestes dades. Fes una taula de percentatges: el cens és el 100 %. Determina els altres percentatges. Consideres que ha guanyat l'abstenció?

4.5 Introducció al càlcul de probabilitats



Vídeo 155: Introducció a la probabilitat

- Experiències deterministes i **aleatòries** (hi intervé l'atzar).
- **Espai Mostral E:** Conjunt de tots els possibles resultats d'un experiment aleatori.

La **probabilitat** és una mesura de quant freqüent és un **succés**. Es quantifica amb un nombre que com a mínim val 0 (succés impossible) i com a màxim 1 (succés segur).

La probabilitat (experimental) és el valor de la **freqüència relativa** (freqüència / nombre de repetitions) quan repetim l'experiment moltes vegades.

Si S' i S són **successos contraris**, es compleix que $P(S') = 1 - P(S)$.

18. Per a cadascun d'aquests experiments indica si és determinista o aleatori.

- Traiem una carta a l'atzar d'una baralla espanyola i mirem el pal.
- Traiem una bola d'una bossa que només conté boles vermelles i miram el color.
- Mesurem la quantitat de gasoil que cap en dipòsit el nostre cotxe.
- Cronometram el temps que tardam d'anar de casa al col·legi en diferents dies.
- Llancem dos daus i mirem si ha sortit igual puntuació en els dos.

19. Una baralla francesa té 52 cartes, distribuïdes en 13 cartes de piques, 13 de cors, 13 de trèvols i 13 de diamants. Les piques i els trèvols són cartes negres mentre que els cors i els diamants són cartes vermelles. Es barreja la baralla, es talla i es fa el següent experiment: agafar les dues cartes que han quedat a dalt del tot i observar de quin color són. Descriu l'espai mostral.

20. **Experiment llançament de monedes.** Agafa una moneda d'un euro per exemple. Primer de tot, decideix que banda és cara (C) i quina creu (X). Ara llança la moneda 10 vegades i compta quantes cares han sortit. Tot seguit, el professor anirà demandant a cada grup quins han estat els resultats i els apuntarem en aquesta taula



N. Tirades	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	130	140	150
N. Cares														
Freq. relativa														

En la segona fila de la taula, anirem acumulant el nombre de cares que han anat sortint a cada grup. En la tercera fila, calcularem la freqüència relativa, és a dir, el nombre de cares dividit pel nombre de tirades. Amb aquests resultats contesta:

- Quina és la probabilitat experimental d'obtenir cara? I d'obtenir creu?
- Són equiprobables els successos treure cara i treure creu? Per què?

21.  **Experiment llançament de xinxetes.** Agafa una xinxeta i fixeu-vos que pot caure de dues formes: punxa per amunt o de costat. Ara llança la xinxeta 10 vegades i compta quantes han sortit punxa per amunt. Tot seguit, el professor anirà demanant a cada grup quins han estat els resultats i els apuntarem en aquesta taula



N. Tirades	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	130	140	150
N. Amunt														
Freq. relativa														

En la segona fila de la taula, anirem acumulant el nombre de pics que cau la punxa per amunt. En la tercera fila, calcularem la freqüència relativa, és a dir, el nombre de punxes per amunt dividit pel nombre de tirades. Amb aquests resultats contesta:

- a) Quina és la probabilitat experimental de caure punxa per amunt? I de caure de costat?
- b) Són equiprobables els dos successos? Per què?
22.  En una bossa tenim 10 boles vermelles numerades de l'1 al 10. Es fan els dos experiments següents:

EXPERIMENT A: Es treu una bola de la bossa i es mira el seu color.

EXPERIMENT B: Es treu una bola de la bossa i es mira el seu nombre.

Quin d'aquests experiments no és un experiment aleatori? Per què?

Pel cas que sigui un experiment aleatori, descriu el seu espai mostra.

4.6 Probabilitats simples (Regla de Laplace)



Vídeo 156: Probabilitat:
Regla de Laplace

Si tots els possibles resultats d'un experiment aleatori tenen la mateixa probabilitat (són **equiprobables**), podem aplicar la **regla de Laplace**:

$$P(S) = \frac{\text{Nombre de casos favorables a } S}{\text{Nombre de casos totals}}$$

- 23.** Troba la probabilitat d'obtenir un 2 i la probabilitat d'obtenir un 5, en llançar un dau correcte en cada un d'aquests casos:

a) Dau cúbic (6 cares)



b) Dau tetraèdric (4 cares)



c) Dau octaèdric (8 cares)



$$P(2) = \dots\dots$$

$$P(5) = \dots\dots$$

$$P(2) = \dots\dots$$

$$P(5) = \dots\dots$$

$$P(2) = \dots\dots$$

$$P(5) = \dots\dots$$

- 24.** En una bossa hi ha 6 boles vermelles, 4 de blaves, 7 de verdes, 2 de grogues i una de negra. En treim una a l'atzar, calcula la probabilitat de que

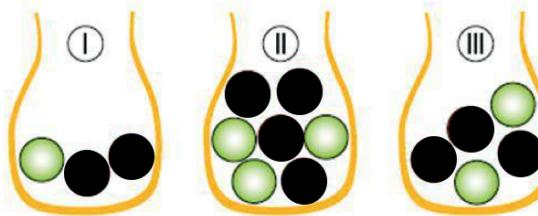
a) Sigui blava.

b) No sigui negra.

c) Sigui roja o verda.

d) No sigui groga ni negra.

- 25.** Raona de quina de les bosses següents és més probable treure una bola negra:



- 26.** Llançam un dau regular. Calcula les probabilitats que el resultat sigui:

a) Múltiple de 3

b) Múltiple de 2

c) Major que 1

d) Menor que 5

e) Menor que 1

f) Potència de 2

- 27.** Extreim una carta d'una baralla espanyola de 40 naips. Calcula la probabilitat que:

a) La carta sigui de BASTOS

b) La carta NO sigui ni AS ni FIGURA

c) La carta sigui menor que 6

d) La carta sigui d'OROS o FIGURA

- 28.** Extreim una carta d'una baralla espanyola de 40 naips. Troba la probabilitat que:

a) Sigui un CINC

b) No sigui un CAVALL

c) Sigui d'OROS o de COPES

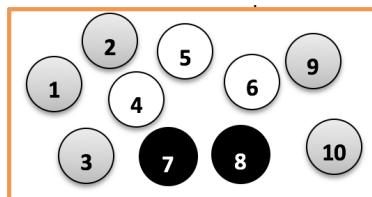
d) No sigui d'ESPASES

- 29.** En un llibre de 120 pàgines, hem comptat el nombre d'errades en cadascuna de les pàgines. Els resultats han estat:

Nº d'errades	Nº de pàgines
0	58
1	42
2	16
3	3
4	1

Si triam una pàgina a l'atzar:

- a) Quina és la probabilitat que no tingui cap errada?
 - b) Quina és la probabilitat que tingui exactament dues errades?
 - c) I la probabilitat que tingui alguna errada? I que tingui més de tres?
- 30.** D'aquesta urna extreim una bola i n'observam el nombre i el color. Calcula les probabilitats dels successos següents:



- a) Obtenir una bola blanca amb un nombre parell
 - b) Obtenir bola negra amb nombre parell
 - c) Obtenir bola grisa o negre
 - d) Obtenir una bola amb nombre més gran que 7
- 31.** D'una bossa amb 7 boles vermelles, 5 de verdes, 3 de grogues, 11 de negres i 3 de blaves, en treiem una a l'atzar. Quina és la probabilitat que
- a) Sigui vermella?
 - b) No sigui negra?

4.7 Probabilitat composta



Vídeo 157: Probabilitat successos compostos independents

Si A i B són successos independents, es compleix que $P(A \text{ i } B) = P(A) \cdot P(B)$

Per exemple: Treure dues cartes **amb reemplaçament** (les tornam a ficar).



Vídeo 159: Probabilitat successos composts dependents

Per exemple: Treure dues cartes **sense reemplaçament** (no les tornam a ficar). Utilitzam la tècnica de **diagrames d'arbre**.

Successos independents

Exercici Resolt

3.
Llançam un dau i treim una carta d'una baralla espanyola de 40 cartes. Quina és la probabilitat d'obtenir múltiple de 3 al dau i rei a la carta?

Compost independent

$$P(\boxed{3,6} \text{ i } \boxed{rei}) = P(\boxed{3,6}) \cdot P(\boxed{rei}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{30}$$

- 32.** Llançam un dau i una moneda. Calcula les probabilitats:

 - Treure un 6 i cara
 - Treure parell i creu.

33. Es considera l'experiment aleatori de tirar un dau dues vegades. Calcula les probabilitats següents:

 - Treure algun 1.
 - La suma dels díigits és 8.
 - No treure cap 2.
 - Treure algun 1 o bé no treure cap 2.

34.  Es considera l'experiment aleatori de tirar una moneda tres vegades. Calcula les probabilitats següents:

 - Treure cara en la primera tirada.
 - Treure cara en la segona tirada.
 - Treure cara en la tercera tirada.
 - Treure alguna cara.
 - No treure cap cara.
 - Treure tres cares.

35.  Es considera l'experiment aleatori treure dues cartes de la baralla espanyola amb reemplaçament. Calcula la probabilitat de:

 - Treure algun rei.
 - Obtenir almenys un basto.
 - No obtenir cap basto.
 - No obtenir el rei de bastos.
 - Treure figura: sota, cavall, rei o as.
 - No treure cap figura.

36. En llançar quatre monedes a l'aire,

- Quina és la probabilitat que les quatre siguin cares?
- Quina és la probabilitat d'obtenir com a màxim tres cares?
- Quina és la probabilitat de tenir exactament 3 cares?

37. En una urna hi ha 6 boles blanques i 14 boles negres. Es treuen dues boles amb reemplaçament. Determina la probabilitat que:

- Les dues siguin negres.
- Hi hagi almenys una negra.
- Cap sigui negra.

Successos dependents. Diagrames d'arbre

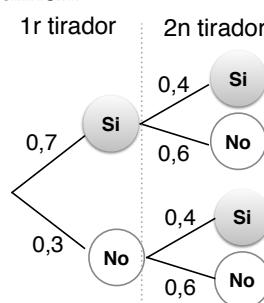
Exercici Resolt

4. Dos tiradors al plat tenen unes marques ja coneudes. El primer encerta amb una probabilitat de 0,7 i el segon de 0,4. Es llança un plat i tots dos disparen. Expressa mitjançant un diagrama d'arbre i les diferents possibilitats:

- Calcula la probabilitat que cap encerti.
- Calcula la probabilitat que els dos encertin.
- Quina probabilitat hi ha que un dels tiradors doni en el plat?

Per resoldre aquest problema, utilitzam la tècnica del diagrama d'arbre

Recorda: Les probabilitats d'un camí de l'arbre es multipliquen. Diferents camins es sumen:



- $P(No - No) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$
- $P(Si - Si) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$
- $P(Un) = P(No - Si) + P(Si - No) = 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,54$

38. En una urna hi ha 6 boles blanques i 14 boles negres. Es treuen dues boles sense reemplaçament. Determina la probabilitat que:

- Les dues siguin negres.
- Hi hagi almenys una negra.
- Cap sigui negra.
- Compara els resultats amb els de l'activitat 37.

39. Amb una baralla espanyola es fa l'experiment de treure tres cartes, amb reemplaçament, quina és la probabilitat de treure tres reis? I si l'experiment es fa sense reemplaçament, quin és ara la probabilitat de tenir 3 reis?

40. Es llança una moneda fins que aparegui cara dues vegades seguides.

- Calcula la probabilitat que l'experiment acabi en el segon llançament.
- Calcula la probabilitat que acabi en el tercer llançament.

41.  En el llançament de naus espacials s'han instal·lat tres dispositius de seguretat A, B i C. Si falla A se posa automàticament en marxa el dispositiu B, i si falla aquest, s'engega C. Se sap que la probabilitat que falli A és 0,1, la probabilitat que B funcioni és 0,98 i la probabilitat que falli C és 0,05. Calcula la probabilitat que tot funcioni bé.

42. Es fa un estudi sobre els incendis forestals d'una zona i es comprova que el 40 % són intencionats, el 50 % es deuen a negligències i el 10 % a causes naturals. S'han produït tres incendis, quina és la probabilitat que

- almenys un hagi estat intencionat?
- els tres incendis es deguin a causes naturals.
- cap incendi sigui per negligències.



43. Es llança dues vegades un dau equilibrat amb sis cares. Trobar la probabilitat que la suma dels valors que apareixen en la cara superior sigui múltiple de tres.

44.  Se sap que s'han eliminat diverses cartes d'una baralla espanyola que té quaranta. La probabilitat d'extreure un as entre les que queden és 0,12, la probabilitat que surti una copa és 0,08 i la probabilitat que no sigui ni As ni copa és 0,84.

Calculau la probabilitat que la carta sigui l'as de copes. Es pot afirmar que entre les cartes que no s'han eliminat està l'as de copes?

45.  Una persona despistada té vuit mitjons negres, sis blaus i quatre vermells, tots ells solts. Un dia amb molta pressa, tria dos mitjons a l'atzar. Trobau la probabilitat de:

- que els dos mitjons siguin negres.
- que els dos mitjons siguin del mateix color.
- que almenys un d'ells sigui vermell.
- que un sigui negre i l'altre no.



46. Tres persones viatgen en un cotxe. Si suposam que la probabilitat de néixer en un dia qualsevol de l'any és la mateixa i sabem que cap d'elles ha nascut en un any de traspàs,

- trobau la probabilitat que només una d'elles celebri el seu aniversari aquest dia.
- calculau la probabilitat que almenys dues compleixin anys aquest dia.

Autoavaluació

1. Es fa un estudi sobre el color que prefereixen els habitants d'un país per a un cotxe. La variable utilitzada és:
 - a) quantitativa
 - b) qualitativa
 - c) quantitativa discreta
 - d) quantitativa contínua

2. En un equip de futbol de 11 jugadors, la mitjana de les edats és de 28 anys. A mitjan partit, l'arbitr expulsa a un jugador i ara la mitjana és de 27 anys. Quina és l'edat d'aquest jugador?
 - a) 27
 - b) 28
 - c) 38
 - d) No es pot saber

3. Anna ha obtingut en Matemàtiques les següents notes: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 i 7. La seva nota mitjana és de:
 - a) 7,6
 - b) 8,2
 - c) 8
 - d) 9

4. En les notes anteriors d'Anna la desviació típica és:
 - a) 0,89
 - b) 1,58
 - c) 2,50
 - d) 7,64

5. En les notes anteriors d'Anna la moda és:
 - a) 10
 - b) 8
 - c) 7
 - d) 7, 8 i 10

6. L'espai mostra de successos elementals equiprobables de l'experiment "tirar dues monedes i comptar el nombre de cares" és:
 - a) {2C, 1C, 0C}
 - b) {CC, CX, XC, XX}
 - c) {XX, XC, CC}
 - d) {CC, CX, XC, CC}

7. Tirem dos daus i sumem els punts de les cares superiors. La probabilitat que la suma sigui 7 és:
 - a) 1/6
 - b) 7/36
 - c) 5/36
 - d) 3/36

8. En treure una carta d'una baralla espanyola (de 40 cartes), la probabilitat que sigui un or o bé un rei és:
 - a) 14/40
 - b) 13/40
 - c) 12/40
 - d) 15/40

9. En una bossa hi ha 7 boles vermelles, 2 negres i 1 bola blanca. Es treuen 2 boles sense reemplaçament. La probabilitat que les dues siguin vermelles és:
 - a) 49/100
 - b) 42/100
 - c) 49/90
 - d) 7/15

10. Tirem tres monedes a l'aire. La probabilitat que les tres en caure siguin cares és:
 - a) 1/5
 - b) 1/7
 - c) 1/8
 - d) 1/6

Resum

		<i>Exemples</i>
Població	Collectiu sobre el qual es fa l'estudi	<i>Estudiants de totes les Balears</i>
Mostra	Subconjunt de la població que permeti obtenir característiques de la població completa.	<i>Alumnes es 3r d'ESO seleccionats</i>
Individu	Cadascun dels elements de la població o mostra	<i>Joan Font</i>
Variables estadístiques	Quantitativa discreta Quantitativa contínua Qualitativa	NOMBRE de peu que calça Alçada Esport que pràctica
Gràfics estadístics	Diagrama de barres Histograma de freqüències Polígon de freqüències Diagrama de sectors	
Mitjana	$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$	Amb les dades: 8, 2, 5, 10 i 10 $\bar{x} = 35/5 = 7$
Moda	És el valor més freqüent	$Mo = 10$
Mediana	Queda per davall la meitat	$4 < 6 < 8 < 10 = 10$. $Me = 8$.
Rang o recorregut	És la diferència entre la dada major i la dada menor.	$10 - 2 = 8$
Desviació mitjana	És la mitjana de les distàncies de les dades a la mitjana de les dades dels quals disposem.	$DM = \frac{\sum x_i - \bar{x} }{N}$ $\begin{aligned} & 8 - 7 + 2 - 7 + \dots + 10 - 7 \\ &= \frac{5}{5} = \frac{14}{5} \end{aligned}$
Variància	És la mitjana dels quadrats de les distàncies de les dades a la mitjana: $Var = \frac{\sum f x^2}{N} - \bar{x}^2$	$\begin{aligned} Var &= \frac{1 + 25 + 4 + 9 + 9}{5} = \\ &\frac{47}{5} = 9,4 \end{aligned}$
Desviació típica	És l'arrel quadrada de la variància $\sigma = \sqrt{Var}$	Coeficient de variació (C.V.) $C.V. = \sigma/\bar{x}$
Probabilitat	Valor entre 0 i 1 que ens dóna una mesura del factible que sigui que es produeixi un determinat succeís.	$P(3) = 1/6$ en tirar un dau
Espai mostral	El conjunt de tots els casos possibles	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
Succés	Subconjunt de l'espai mostral	Treure parell: {2, 4, 6}
Llei de Laplace	$P(S) = \frac{\text{N. casos favorables a } S}{\text{N. casos totals}}$	$P(\text{parell}) = 3/6 = 1/2$.



Al Juarismi (segle IX d.C)
Pare de l'àlgebra.

Tema 5

Àlgebra: Polinomis

Què aprendrem?

5.1	El llenguatge algebraic	61
5.2	Monomis	62
5.3	Operacions amb polinomis	64
5.4	Identitats notables	68
5.5	Introducció a les fraccions algebraiques	69
5.6	Activitats	71

Abans de començar

Nota:

Classifica en vertaderes o falses les següents expressions:

$a + a = 2 a^2$	$a + a = 2 a$	$2a \cdot a = 2 a^2$	$3a \cdot 4b = 7 ab$
$a \cdot b = ab$	$3b - 2 = b$	$a + b = ab$	$a : 2 = \frac{a}{2}$
$b \cdot 3 \cdot a = 3 ab$	$3a \cdot 4b = 12 ab$	$2a + b = 2 ab$	$2 \cdot a \cdot a \cdot b = 2a^2b$
$3b - 3b = b$	$3 \cdot a \cdot a = 6 a$	$3a = 2a + a$	$2a + 1 = 3a$

5.1 El llenguatge algebraic



Vídeo 168: El llenguatge algebraic

El llenguatge algebraic es caracteritza per utilitzar **números i lletres** (indeterminades). Normalment empram x, y, \dots per a les lletres.

Si falta el signe de l'operació s'entén que hi ha una multiplicació. Primer s'escriu el número i després la lletra

SÍ ✓ 3x

NO × $x \cdot 3$

Algunes expressions habituals són:

- El doble d'un nombre: $2x$
- La meitat d'un nombre: $\frac{y}{2}$
- Un nombre augmentat en 5 unitats: $k + 5$
- La diferència dels quadrats de dos nombres: $a^2 - b^2$
- Un nombre al quadrat: x^2
- L'anterior d'un nombre: $n - 1$
- El quadrat de la diferència de dos nombres: $(a - b)^2$
- La mitjana de dues notes: $\frac{x + y}{2}$

1. Escriu les expressions algebraiques que ens proporcionen l'àrea d'un quadrat i la longitud d'una circumferència.
2. Escriu, en llenguatge algebraic, els següents enunciats, referits a dos nombres qualssevol x i y :
 - a) El triple de la seva diferència
 - b) La suma dels seus quadrats
 - c) El quadrat de la seva suma
 - d) L'invers del seu producte
 - e) La suma dels seus opositos
 - f) El producte dels seus quadrats

3. Suposem que tenim un contracte amb una companyia de telefonia mòbil pel qual paguem 5 cèntims d'euro per minut, així com 12 cèntims per establiment de cridada. A la fi de cada mes l'empresa de telefonia mòbil ens proporciona la factura mensual. En ella apareix molta informació, en particular, el nombre total de cridades realitzades (N) així com la quantitat total de minuts de conversa (M). Troba una expressió que doni l'import de les cridades efectuades segons N i M .

Redacta la teva resposta

4. Una botiga de roba anuncia en els seus aparadors que està de rebaixes i que tots els seus articles estan rebaixats un 30 % sobre el preu imprès en cada etiqueta. Escriu el que pagarem per una peça en funció del que apareix en la seva etiqueta.

5. Indica, en cada cas, el valor numèric de l'expressió $x - 2y + 3z$:

a) $x = 1, y = 2, z = 1$

Exemple: $x - 2y + 3z = 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 0$

b) $x = 2, y = 0, z = -1$

c) $x = 0, y = 1, z = 0$

6. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o els valors que s'indiquen:

a) $x^2 + 2x - 7$ quan $x = 2$

b) $\frac{a-3}{b+1}$ quan $a = -2$ i $b = 4$

c) $c^2 + 3c + 7$ quan $c = 1$

7. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o valors que s'indiquen:

a) $-3x^2 + \frac{4}{x} - 5$ quan $x = \frac{1}{2}$

b) $3b + \frac{a+b}{2-b^3} + a \cdot b^2 - 1$ quan $a = 3$ i $b = 1$

8. Llança 2 daus. El resultat de cadascun serà el valor numèric de x i y . Tot seguit, troba el valor numèric de les següents expressions amb els nombres que has obtingut:

a) $x = \square, y = \square$ per a $x + 4y =$



b) $x = \square, y = \square$ per a $(x+y)^2 - (x-y)^2 =$



c) $x = \square, y = \square$ per a $4x \cdot (1-y) =$

d) $x = \square, y = \square$ per a $-x - (x^2 + y^2) =$

Ara suma tots els resultats obtinguts i compara'l amb el teu company. Guanya la suma més gran. Quin deu ésser el valor més gran possible d'aquesta suma? Demana si algú de la classe ha obtingut aquest valor.

5.2 Monomis



Vídeo 169: Monomis.
Definició i operacions

Un **monomi** està format per un únic terme: $-5xy^2$

Coeficient: -5 , **Part literal:** xy^2 ,

Grau (és la suma d'exponents): 3

9. En cadascun dels següents monomis escriu el seu coeficient, la seva part literal i el seu grau:

Monomi	Coeficient	Part literal	Grau
$-12x^3$			
a^4b^3c			
$4xy^2$			

■ Operacions amb monomis

- **Suma o resta de monomis:** Només poden sumar o restar monomis amb la mateixa part literal. Sumam o restam els coeficients i copiam la part literal.

$$2x^2 + 5x^2 - x^2 = 6x^2 \quad \text{en canvi,} \quad 2x^2 + 5x - y \text{ no es pot efectuar.}$$

- **Producte de monomis:** “Multiplicam coeficient amb coeficient i lletres amb lletres.”

$$2x^2 \cdot 5x^3 = 2 \cdot 5 x^2 \cdot x^3 = 10 x^5$$

- **Quocient de monomis:** “Dividim coeficient amb coeficient i lletres amb lletres.”

$$4x^8 : 5x^5 = \frac{4}{5} \frac{x^8}{x^5} = \frac{4}{5} x^3$$

10. Suma i resta els monomis equivalents.

a) $3x + 5x = \boxed{8x}$

b) $11y + 21y - 7y = \boxed{25y}$

c) $5ab - 18ab + 7ab = \boxed{-6ab}$

d) $3x^5 + 7x^5 =$

e) $4z^2 + \frac{1}{2}z^2 =$

f) $-x^2 + \frac{1}{4}x^2 =$

g) $x^4y^3 + \frac{1}{2}x^4y^3 + \frac{1}{3}x^4y^3 =$

h) $a - 4a - (-8a + 3a) + 3a =$

11. Fes el producte de monomis.

a) $2x \cdot x \cdot x^2 = \boxed{2x^4}$

b) $4x^5 \cdot 2x^7 = \boxed{8x^{12}}$

c) $\frac{1}{3}y^4 \cdot \frac{2}{5}y^2 =$

d) $(-8x^2) \cdot \frac{1}{8} =$

e) $(-\frac{3}{2}x^7) \cdot (-\frac{1}{3}x^4) \cdot (-x) =$

f) $3x \cdot xy =$

g) $5xy \cdot 3y^3 \cdot x^2y^2 =$

h) $a^2b^2 \cdot ab =$

12. Fes el quocient de monomis

a) $x^2 : x = \boxed{x}$

b) $x^3 : 2x^2 = \boxed{\frac{x}{2}}$

c) $3x^5 : x^2 =$

d) $\frac{8x^7}{2x^5} =$

e) $x^3 : (2x^3) =$

f) $(-3)x^8 : (-2x^3) =$

g) $\frac{-12x^3}{4x} =$

h) $3x^7 : (-x^4) =$

i) $-9a : (3a) =$

j) $-10x^3y^2 : (x^2y) =$

k) $3x^7 : (-x^4) =$

l) $-5a^4b^3 : (2a^3b) =$

13. Fes les operacions combinades.

a) $(4x^2 : 2x) \cdot x = \boxed{2x^2}$

b) $(-2x \cdot 5x^2) : (2x) = \boxed{-5x^2}$

c) $xy \cdot (x + 3x) =$

d) $(12x^3y^3 - 7x^3y^3) : (3x^2y) =$

e) $2\frac{x^5}{x^3} + 2\frac{x^4}{x^2} + 2\frac{x^2}{x^0} =$

f) $(ab^2) \cdot a + (a^2b) \cdot (3b) =$

g) $(ab) : a - (7b^2 + b^2) : b =$

h) $\frac{\frac{x^2y^2}{xy} + \frac{3}{2}xy + \frac{7x^4y}{3x^3}}{\frac{3}{2}y} =$

5.3 Operacions amb polinomis



Vídeo 170: Polinomis: Definició. Suma i resta.



Vídeo 171: Producte de polinomis

Un **polinomi** està format per la suma o resta de **molts de monomis**.

Per exemple $9x^2 - 2x + 5$, està format per 3 termes. Té grau 2 que és el major grau dels seus monomis. El seu terme independent és 5 (correspon al terme de grau 0).

14. Completa la taula

Polinomi	N. Termes	Grau	Terme independent
$5x^4 + 7x^2$			
$6x^2 + 10 - 2x^3$			
$3x^4 - 5x^3 + x^2 + 1$			
$2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$			

15. Sigui el polinomi $P(x) = x^3 - 3x + 2$. Troba els següents valors numèrics de $P(x)$:

$$P(0) =$$

$$P(1) =$$

$$P(-1) =$$

$$P(-2) =$$

$$P(1/2) =$$

16. Realitza les següents sumes de polinomis:

$$\text{a)} \ (-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x) =$$

$$\text{b)} \ (x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2 =$$

17. Realitza les següents diferències. (Canvia tots els signes del subtrahend)

$$\text{a)} \ (5x^2 + 2) - (-2x) =$$

$$\text{b)} \ (-2x^3 + 4x) - (-2x - 1) =$$

$$\text{c)} \ (7x^2 - 2x) - (3x^3 + 4x^2 - x + 1) =$$

18. Considera els polinomis $P(x) = x^2 - x + 1$, $Q(x) = -x^3 + 2x - 3$, així com el polinomi suma $S = P + Q$. Troba els valors de cadascun d'ells per a $x = -2$, és a dir, calcula $P(-2)$, $Q(-2)$ i $S(-2)$. Investiga si existeix alguna relació entre aquests tres valors.

19. Fes aquestes multiplicacions de monomi per polinomi:

$$\text{a)} \ x \cdot (x^2 + 3x - 1) =$$

$$\text{b)} \ 3x \cdot (-2x + 5) =$$

$$\text{c)} \ -2x^2 \cdot (3x^5 - 4x^2 + 8x) =$$

$$\text{d)} \ \frac{3}{2}x^3 \cdot (6x^4 + 2) =$$

- 20.** De cadascun dels següents polinomis extreu els factors que siguin comuns als seus monomis:

a) $2x^2 + 2x + 2 = \boxed{2 \cdot (x^2 + x + 1)}$

b) $x^2 + x = \boxed{x \cdot (x + 1)}$

c) $15x^2 + 5x =$

d) $-16x^2 - 4x - 8 =$

e) $-10x^3 - 15x^2 + 20x =$

f) $30x^4 + 24x^2 =$

- 21.** Efectua els següents productes de polinomis:

a) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4) =$

b) $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5) =$

c) $(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6) =$

d) $(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9) =$

- 22.** Calcula i simplifica els següents productes:

a) $x \cdot (-2x + 4)$

b) $(2x - 3) \cdot (3x + 2)$

c) $(a - 2) \cdot (4 - 3a)$

d) $(3a - b^2) \cdot (2b - a^2)$

- 23.** Realitza els següents productes de polinomis:

a) $x \cdot (-3x^2 + 4x + 2) \cdot x^2$

b) $(-2x + 1) \cdot (5x^2 - x + 3) \cdot (-x)$

c) $(3a - 1) \cdot (2 - a) \cdot (5 - 4a)$

■ Divisió de polinomis

En una divisió de dos polinomis

$$\begin{array}{c} D(x) \\ R(x) \\ \hline Q(x) \end{array}$$

$D(x)$ s'anomena dividend, $d(x)$ divisor, $Q(x)$ quocient i $R(x)$ el residu. En el cas que el residu sigui zero, es diu que la **divisió és exacta**.

La comprovació que una divisió està ben feta és:

$$D(x) = Q(x) \cdot d(x) + R(x)$$

Si el divisor és de la forma $x - a$ o $x + a$, aleshores podem utilitzar la **regla de Ruffini**. Recorda que quan falta algun terme en el dividend cal afegir zeros quan feim Ruffini.

EXEMPLE

- Comprova que els càlculs que tens a continuació reflecteixen la divisió del polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$:

$$\begin{array}{r}
 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\
 -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\
 \hline
 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\
 -8x^3 + 4x^2 - 12x \\
 \hline
 -4x^2 - 9x - 2 \\
 4x^2 - 2x + 6 \\
 \hline
 \underbrace{-11x + 4}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{c} 2x^2 - x + 3 \\ 3x^2 + 4x - 2 \end{array} \right.$$

- Realitza aquesta divisió $(x^3 + 5x - 2) : (x - 4)$ per la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & 5 & -2 \\
 4 & & 4 & 16 & 84 \\
 \hline
 & 1 & 4 & 21 & 82
 \end{array}$$

El quocient és $Q(x) = x^2 + 4x + 21$ i el residu de la divisió $R = 82$.

24. Divideix els següents polinomis:

- a) $3x^3 + 4x^2 - 9x + 7$ entre $x^2 + 2x - 1$
- b) $-6x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ entre $3x^3 + x^2 - 2x + 1$
- c) $-6x^4 - 13x^3 - 4x^2 - 13x + 7$ entre $-3x^2 - 2x + 1$
- d) $3x^5 - 9x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 14x + 14$ entre $x^3 - 2x^2 - x + 3$
- e) $x^5 - 4x - 6$ entre $x^2 + 3$

25. Efectua les següents operacions utilitzant la regla de Ruffini i indica quines d'elles són exactes.

- a) $(3x^2 - 2x + 5) : (x + 3)$
- b) $(x^4 - 16) : (x - 2)$
- c) $(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) : (x - 1)$
- d) $(7x^5 - 4x^3 + 7x - 5) : (x + 2)$

26. Efectua les divisions de polinomis pel mètode que creus més convenient:

- a) $2x^3 + x^2 - 12x + 7$ entre $x + 3$
- b) $-4x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 21x + 8$ entre $2x^2 - 3x + 1$
- c) $-3x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 14$ entre $-x^3 - 2x + 3$

27. Troba dos polinomis tals que en dividir-los obtinguem $q(x) = x^2 - 2x - 1$ com a polinomi quotient i $r(x) = 2x^2 - 3$ com a residu.

5.4 Identitats notables



Vídeo 172: Identitats notables

Quadrat d'una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Quadrat d'una diferència: $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Suma per diferència: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

28. Desenvolupa les identitats:

a) $(1 + x)^2 =$

b) $(-x + 2)^2 =$

c) $(x - 2)^2 =$

d) $(2a - 3)^2 =$

e) $(x^2 + 1)^3 =$

f) $(2b - 4)^3 =$

29. Efectua aquests productes:

a) $(3x + 2) \cdot (3x - 2) =$

b) $(2x + 4y) \cdot (2x - 4y) =$

c) $(4x^2 + 3) \cdot (4x^2 - 3) =$

d) $(3a - 5b) \cdot (3a + 5b) =$

e) $(x^3 - 4) \cdot (x^3 + 4) =$

f) $(-x^2 + 5x) \cdot (x^2 + 5x) =$

30. Desenvolupa les següents potències:

a) $(3x - y)^2 =$

b) $\left(2a + \frac{x}{2}\right)^2 =$

c) $\left(4y - \frac{2}{y}\right)^2 =$

d) $(5a + a^2)^2 =$

e) $(-a^2 + 2b^2)^2 =$

f) $\left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{y}\right)^2 =$

31. Expressa com quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) $a^2 - 6a + 9 = (\square - \square)^2$

b) $4x^2 + 4x + 1 =$

c) $b^2 - 10b + 25 =$

d) $4y^2 - 12y + 9 =$

e) $a^4 + 2a^2 + 1 =$

f) $y^4 + 6xy^2 + 9x^2 =$

32. Expressa com suma per diferència les següents expressions

a) $9x^2 - 25 = (\square + \triangle) \cdot (\square - \triangle)$

b) $4a^4 - 81b^2 =$

c) $49 - 25x^2 =$

d) $100a^2 - 64 =$

33. Realitza les següents divisions de polinomis a partir de la conversió del dividend en la potència d'un binomi o en un producte de la forma suma per diferència:

a) $x^2 + 12x + 36$ entre $x + 6$

b) $4x^4 - 16x^2$ entre $2x^2 - 4x$

c) $9x^2 - 24x + 16$ entre $3x - 4$

d) $x^2 - 4$ entre $x + 2$

34. ★ Obté les fórmules dels quadrats dels següents trinomis:

a) $(a + b + c)^2$

b) $(a - b + c)^2$

5.5 Introducció a les fraccions algebraiques

Una fracció algebraica és el quocient de dos polinomis $\frac{D(x)}{d(x)}$

Si la divisió $D(x) : d(x)$ és exacta, la fracció serà en realitat un polinomi.

Per **sumar/restar fraccions** necessitem denominador comú:

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{3}{x+2} = \frac{2x \cdot (x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x \cdot (x+2) + 3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x^2 + 7x - 3}{x^2 + x - 2}$$

Per **multiplicar fraccions**, multiplicam “en línia”:

$$\frac{2x}{x-1} \cdot \frac{3(x+2)}{x+1} = \frac{2x \cdot 3(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{6x^2 + 12x}{x^2 - 1}$$

Per **dividir fraccions**, multiplicam “en creu”:

$$\frac{2x}{x-1} : \frac{3(x+2)}{x+1} = \frac{2x \cdot (x+1)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{2x^2 + 2x}{3x^2 + 3x - 6}$$

35. Efectua els següents càlculs:

a) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1}$

b) $\frac{x-2}{x^2-x} - \frac{5}{x}$

c) $\frac{-x+1}{x+3} \cdot \frac{3x^2}{x+1}$

d) $\frac{2+x}{x^2} : \frac{x}{x-3}$

36. Realitza les següents operacions alterant, en cada apartat, solament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

a) $\frac{-2x^2 - x + 1}{x^3} + \frac{3x + 1}{x^2}$

b) $\frac{2x - 1}{x^2 - 2x} - \frac{3}{x - 2}$

37. Calcula els següents quocients (treu factor comú del numerador):

a) $(2x^3 - 8x^2 + 6x) : 2x$

b) $(5a^3 + 60a^2 - 20) : 5$

c) $(16x^3 + 40x^2) : 8x^2$

d) $(6x^2y^3 - 4xy^2) : xy^2$

1. Simplifica la fracció algebraica

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

La primera passa consisteix en factoritzar el numerador i el denominador. Per això ens fixam si podem treure factor comú i/o identificam alguna identitat notable.

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{x \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{x}{x+2}$$

Finalment, hem eliminat els factors que estan repetits al numerador i denominador.

38. Comprova les següents identitats simplificant l'expressió del costat esquerre de cada igualtat:

a) $\frac{6a^8b^2}{2a^3b} = 3a^5b$

b) $\frac{8x^3y - 2xy^2}{4xy} = 2x^2 - \frac{1}{2}y$

c) $\frac{4x^2 + 2x}{2x - 8} = \frac{2x^2 + x}{x - 4}$

d) $\frac{6a^2b^2 - 4a^2b^3 + 4ab}{2ab^2 - 8a^2b} = \frac{3ab - 2ab^2 + 2}{b - 4a}$

39. Simplifica les següents fraccions traient factor comú:

a) $\frac{3x^2 + 6x}{9x^2 + 18}$

b) $\frac{a^3 - 7a^2}{3a^3 + 5a^2}$

c) $\frac{x^2y^2 - 7xy^2}{2xy}$

d) $\frac{a^2b^2 - ab}{a^3b + ab}$

40. En cadascuna de les següents fraccions algebraiques escriu, quan sigui possible, el polinomi numerador, o denominador, en forma de potència d'un binomi o de suma per diferència per, posteriorment, poder simplificar cada expressió:

a) $\frac{x^2 - 4}{3x + 6}$

b) $\frac{2x^2 - 16x + 32}{x^2 - 16}$

c) $\frac{6 - 4a}{4a^2 - 9}$

d) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$

5.6 Activitats

- 41.** Una empresa majorista de viatges està confeccionant una oferta per distribuir-la en diferents agències de viatges. Es tracta d'un viatge amb avió, d'anada i tornada, a Madrid el preu de la qual depèndrà del nombre final de viatgers. Les dades concretes són:

- Si no hi ha més de 100 persones interessades, el vol costarà 150 euros per persona.
- Si hi ha més de 100 persones interessades, per cada viatger que passi del centenar el preu del viatge es reduirà en 1 euro. No obstant això, el preu del vol en cap cas serà inferior a 90 euros.

Estudia i determina el preu final del vol, per persona, en funció del nombre total de viatgers. Així mateix, expressa la quantitat que ingressarà l'empresa segons el nombre de viatgers.

- 42.** En aquest exercici es mostra un *truc* mitjançant el qual anem a endevinar el nombre que resulta després de manipular repetidament un nombre desconegut. Converteix en una expressió algebraica les successives alteracions del nombre desconegut i justifica el que ocorre.

- Digues-li a un company que escrigui en un paper un nombre parell i que no ho mostri
- Que ho multipliqui per 5
- Que al resultat anterior li sumi 5
- Que multipliqui per 2 el resultat
- Que al resultat anterior li sumi 10
- Que multipliqui per 5
- Que divideixi entre 100 la darrera quantitat
- Que al resultat precedent li resti la meitat del nombre que va escriure

Independentment del nombre desconegut original quin nombre ha sorgit?

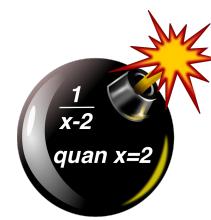
- 43.** Els responsables d'una empresa, en previsió d'uns futurs alts i baixos en les vendes dels productes que fabriquen, pensen proposar als seus treballadors a la fi de l'any 2014 el següent:

- La disminució dels sous, per al proper any 2015, en un 10%.
- Per 2016 ofereixen augmentar un 10% els salariis de 2015.
- En general, suggereixen que el sou disminueixi un 10% cada any imparell i que augmenti un 10% cada any parell.

Si finalment s'aplica aquest pla, estudia si els treballadors recuperaran l'any 2016 el salari que tenien en 2014. Analitza què ocorre amb els sous després del pas de molts anys.

- 44.** Observa si hi ha nombres pels quals les següents expressions no poden seravaluades:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{x-3}{x+1} \\ \text{b) } \frac{2x-1}{(x-5) \cdot (2x+7)} \\ \text{c) } \frac{x}{x^2-2x+1} \\ \text{d) } \frac{x+y-2}{x^2+3y^2} \end{array}$$



- 45.** Construeix un polinomi de grau 2, $P(x)$, tal que $P(-2) = 6$.

- 46.** Considera els polinomis $p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$, $q(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5$ i $r(x) = x^2 - 3x + 2$. Fes les següents operacions:

- | | |
|----------------|--------------------|
| a) $p + q + r$ | b) $p - q$ |
| c) $p \cdot r$ | d) $p \cdot r - q$ |

47. Calcula els productes:

a) $\left(\frac{3ax}{2} - \frac{y}{5}\right) \cdot \left(\frac{-by}{3}\right)$

b) $(0'1x + 0'2y) \cdot (0'3x - 0'2y)$

c) $(x - y) \cdot (y - 1) \cdot (x + a)$

48. Calcula els quocients:

a) $(4x^3) : (x^2)$

b) $(4x^3y^3z^4) : (3x^2yz^2)$

c) $(x^4 - 4x^2y + 4y^2) : (x^2 - 2y)$

49. Realitza les operacions amb les fraccions algebraiques:

a) $\frac{x-1}{x^2} + \frac{2x-1}{x}$

b) $\frac{2x+3}{x} + \frac{5}{x+1}$

c) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2-x}{x}$

d) $\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2-x}{x}$

e) $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2-x}{x}$

50. Troba un polinomi $p(x)$ tal que en dividir $p(x)$ entre $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$ s'obtingui com a residu $r(x) = -3x^2 + 1$.

51. Calcula les potències:

a) $(x + 2y - z)^2$

b) $(x - 3y)^3$

c) $\left(a + \frac{b}{3}\right)^2$

d) $(x^2 - 2z^3)^2$

52. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenvolupament de potències de binomis o d'un producte *suma per diferència*. En cas afirmatiu expressa la seva procedència.

a) $x^2 - 6x + 9$

b) $x^4 + 8x^2 + 16$

c) $x^2 - 25$

d) $x^2 + 5$

e) $5x^2 - 1$

f) $x^2 - 8y^2$

g) $x^4 - 1$

h) $x^2 - y^2$

53. Analitza si el numerador i el denominador de les següents expressions algebraiques procedeixen del desenvolupament d'un binomi, o d'un producte suma per diferència, i simplifica-les:

a) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$

c) $\frac{xy^3 - yx}{y^4 - 1}$

54. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\frac{3}{x(3-x)} - \frac{1}{2(3-x)}$

b) $3x^4 - 5x^3 + \frac{x^4 - 1}{x^3} \cdot \frac{x^5}{x^2 + 1}$

c) $\frac{x-2y}{a-b} + \frac{4x+5y}{3a-3b}$

55. Simplifica tot el possible:

a) $\left(yx^4 - \frac{y}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$

b) $\frac{b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3}{b-a} : \frac{b+a}{b-a}$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{4}{a-b}$



Autoavaluació

- 1.** Tradueix al llenguatge algebraic:
 - Sumar 5 al triple d'un nombre
 - El quadrat de la suma de dos nombres
 - La tercera part d'un nombre parell

- 2.** Expressa mitjançant una expressió algebraica el volum d'un prisma de base quadrada de costat x i d'altura 7 cm.

- 3.** Calcula el valor numèric de l'expressió $\frac{x+7}{4-2y^2} + 6xz^2 - \frac{3}{z}$ en $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

- 4.** Opera els següents monomis:

a) $(3x) \cdot (5x^2) =$	b) $(5x^2yz) : (-3xz) =$	c) $a^2b + 3a^5b : a^3 - 2ab \cdot a =$
--------------------------	--------------------------	---

- 5.** Del polinomi $5x^4 - 8x^2 - x + 9$ indica el seu grau, terme independent i els monomis que ho integren.

- 6.** Efectua les divisions de polinomis

a) $(2x^4 - x^3 + 4) : (x^2 + 2x + 2)$	b) $(3x^4 - 5x^2 + x - 2) : (x - 3)$
--	--------------------------------------

- 7.** Calcula utilitzant les identitats notables

a) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 =$	b) $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) =$
c) $(3x + 2)^2 =$	d) $(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2) - (x^2 - 1)^2 =$

- 8.** Extreu factor comú en cada expressió

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4 =$	b) $2x^3y^5 - 3x^2y^4 + 2x^7y^2 + 7x^3y^3 =$
-----------------------------	--

- 9.** Extreu factor comú i expressa com una identitat notable quan sigui possible

a) $x^3 + 2x^2 + x =$	b) $x^4 - x^2 =$	c) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2 =$
-----------------------	------------------	-----------------------------

- 10.** Opera i simplifica les fraccions algebraiques $(x + 1) : \frac{x^2 - 1}{2x} =$

- 11.** Efectua $\frac{3-x}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{x+5}{2x} =$ (*Ajudat el mcm és $2x^2$*)

FITXA DE REPÀS: OPERACIONS AMB POLINOMIS

1. Suma els polinomis següents:

a) $(4x^2 + 2x - 4) + (x^2 + 3x + 6) =$

b) $(3x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 3x + 6) =$

c) $(-3x^2 - 5) + (2x^2 + 2x + 6) =$

d) $(3x^3 + 6x - 5) + (2x^3 - x^2 + 2x - 2) =$

2. Donats els següents polinomis: $A = x^2 + 3x - 2$ i $B = -3x^2 + 5x - 1$, calcula al teu quadern.

a) $A - B,$

b) $A + B$

c) $B - A$

3. Efectua les operacions següents:

a) $3 \cdot (3x^3 + 2x + 5) =$

b) $-3 \cdot (2x^2 - 3x - 4) =$

c) $3x^2 \cdot (x^3 + 2x - 6) =$

d) $-4x^2 \cdot (6x^4 - 2x^3 - 6x) =$

4. Extreu factor comú a cada un dels polinomis següents:

a) $3x + 3y + 3z =$

b) $a^2 + 3a =$

c) $2x + 4y + 6z =$

d) $4x - 8x^2 + 12x^3 =$

e) $9a + 6a^2 + 3a^3 =$

f) $2a^2 - 5a^3 + a^4 =$

5. Realitza les multiplicacions d'aquests polinomis:

a) $(2x^2 + 3x + 1) \cdot (x - 1) =$

b) $(3x^2 + x + 2) \cdot (-7x + 2) =$

c) $(x^2 + 2x) \cdot (2x^2 - 2x - 3) =$

d) $(-2x^3 + x) \cdot (-x^2 + 3x + 1) =$

6. Simplifica les expressions següents:

a) $(x - 1) \cdot (x + 1) + (x^2 + 4) =$

b) $(x - 2)^2 - (2x^2 + 1) =$

c) $(x^2 + 2)^2 - (x + 1) \cdot (x - 1) =$

d) $3 \cdot (x + 1)^2 - (2x + 3)^2 =$

7. Descompon en factors.

a) $x^2 - 6x + 9 =$

b) $x^3 - 9x =$

c) $3x^2 + 6x + 3 =$

d) $x^4 - x^2 =$

Resum

Noció	Descripció	Exemples
Expressió algebraica	Es construeix amb nombres i les operacions matemàtiques bàsiques de suma, resta, multiplicació i/o divisió	$\frac{-3x}{2x + y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Variable, indeterminada	El no concretat en una expressió algebraica	Les variables, o indeterminades, de l'exemple anterior són x, y, z
Valor numèric d'una expressió algebraica	En fixar un valor concret per a cada indeterminada, o variable, d'una expressió algebraica s'obté un nombre, el valor numèric d'aquesta expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades.	Si feim $x = 3, y = -2, z = 1/2$, obtenim $\frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + (-2)^3} - 3 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomi	Expressió donada pel producte de nombres i indeterminades.	$-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2, 7 \cdot x^2$
Coeficient d'un monomi	El nombre que multiplica a la indeterminada, o indeterminades, del monomi	Els coeficients dels anteriors monomis són, respectivament, -5 i 7
Part literal d'un monomi	La indeterminada, o producte d'indeterminades, que multiplica al coeficient del monomi	La part literal de $-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$ és $x \cdot y^3 \cdot z^2$
Grau d'un monomi	Quan hi ha una única indeterminada és l'exponent d'aquesta indeterminada. Si apareixen diverses, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aquestes indeterminades.	Els graus dels monomis precedents són 6 i 2 , respectivament
Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis.	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grau d'un polinomi	El major grau dels seus monomis	L'anterior polinomi és de grau 3
Suma, resta i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$p \equiv x + 3, q \equiv x^2 - 2$ $p + q \equiv x^2 + x + 1$ $p - q \equiv -x^2 + x + 5$ $p \cdot q \equiv x^3 + 3x^2 - 2x - 6$
Divisió de dos polinomis	S'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quotient $Q(x)$ i residu $R(x)$, lligats als polinomis inicials: els polinomis dividend $D(x)$ i divisor $d(x)$	$D(x) = Q(x) \cdot d(x) + R(x)$

Tema 6

Equacions i sistemes d'equacions

Què aprendrem?

6.1	Concepte d'equació	77
6.2	Equacions de primer grau	77
6.3	Equacions de segon grau	81
6.4	Equacions biquadrades i factoritzades	83
6.5	Sistemes d'equacions	84
6.6	Activitats	88

Abans de començar

Nota:

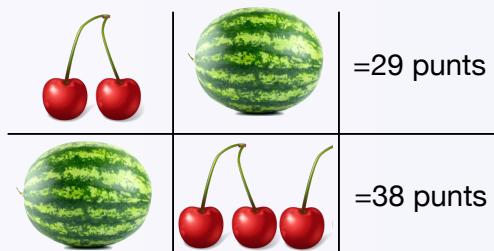
Resol les següents equacions

a) $2x + 5 = 2 - x$

b) $2(x - 1) = 3 - (1 - x)$

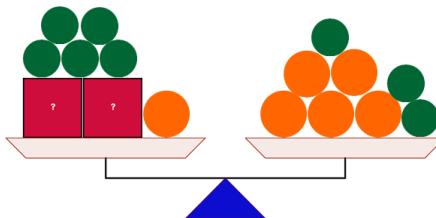
c) $x^2 + 5x + 4 = 0$

d) Què val cada fruita?



6.1 Concepte d'equació

1. La balança de la figura està equilibrada. Què pesa un quadrat si sabem que les boles grosses fan 2 kg i les petites 1 kg?



Si anomenam x al pes d'un quadrat, podries plantejar una equació per resoldre el problema?

2. Indica el nombre d'incògnites de les següents equacions:

a) $4x - 5y = 7x + 6$

b) $2x + 8y^2 = 5$

c) $3a + 6a^2 = 3$

d) $4x + 8x^2 = 12$

3. Indica el grau de les següents equacions:

a) $2x - 4 = 6x + 8$

b) $3x + 9y^2 = 12$

c) $5x + 10x^2 = 30$

d) $2x + 2xy^2 = 3$

6.2 Equacions de primer grau

Transposar termes

Si és positiu passa negatiu

$$x \boxed{+3} = 5 \rightarrow x = 5 - 3$$

Si negatiu passa positiu

$$x \boxed{-3} = 5 \rightarrow x = 5 + 3$$

Si multiplica la x passa dividint

$$\boxed{3} x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{3}$$

Si divideix la x passa multiplicant

$$\frac{x}{2} = 8 \rightarrow x = 2 \cdot 8$$

4. Resol aquestes equacions aquí.

a) $4x = 20$

b) $x + 3 = 5$

c) $x - 1 = -8$

d) $3x = 12$

e) $\frac{x}{3} = 2$

f) $x + 4 = 8$

5. Resol:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $2x - 1 = x + 2$ | b) $3x + 2 = x + 6$ |
| c) $2x + 1 = 5x - 5$ | d) $1 - x = 4 - 2x$ |
| e) $x - 6 = 5x - 2$ | f) $3 + 7x = 2x + 5$ |
| g) $6x - 2 + x = 2x + 3$ | h) $8x + 3 - 5x = 7 - 2x - 1$ |
| i) $4x + 5 + x = 7 + 3x - 3$ | j) $8 - x + 1 = 4x - 1 - 7x$ |
| k) $7x - 4 - 3x = 2 + 4x - 6$ | l) $2 + 3x - 5 = 4x - 2 - x$ |

EXEMPLE

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x - 1 &= x + 2 \\ 2x - x &= 2 + 1 \\ x &= \boxed{3} \end{aligned}$$

Si trobes $0 \cdot x = 0 \rightarrow$ Té ∞ solucions.Si trobes $0 \cdot x = 1 \rightarrow$ No té cap solució.

6. Resol en cada cas:

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $1 - 2(2x - 1) = 5x - (5 - 3x)$ | b) $x - (1 - 3x) = 8x - 1$ |
| c) $1 - (3x - 9) = 5x - 4x + 2$ | d) $13x - 15 - 6x = 1 - (7x + 9)$ |
| e) $7x - (4 + 2x) = 1 + (x - 2)$ | f) $2(3x - 1) - 5x = 5 - (3x + 11)$ |
| g) $x - 7 = 6 - (x - 3)$ | h) $7 - (2x + 9) = 11x - 5(1 - x)$ |
| i) $4(5x - 3) - 7x = 3(6x - 4) + 10$ | j) $4 - 7(2x - 3) = 3x - 4(3x - 5)$ |
| k) $16x - 7(x + 1) = 2 - 9(1 - x)$ | l) $6 - (8x + 1) = 4x - 3(2 + 4x)$ |

EXEMPLE

$$\begin{aligned} \text{a)} & \quad 1 - 2(2x - 1) = 5x - (5 - 3x) \\ \text{Eliminam parèntesis} & \quad 1 - 4x + 2 = 5x - 5 + 3x \\ \text{Transposam termes} & \quad -4x - 5x - 3x = -5 - 1 - 2 \\ \text{Simplificam} & \quad -12x = -8 \\ \text{Canviam signes} & \quad 12x = 8 \\ \text{Solució} & \quad x = \frac{8}{12} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

7. Resol al teu quadern les següents equacions amb denominadors:

- | | |
|--|---|
| a) $1 + \frac{2x}{5} = \frac{1}{5} - 2x$ | b) $\frac{2x}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$ |
| c) $4 - \frac{2x}{3} = x + \frac{2}{3}$ | d) $\frac{x}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ |
| e) $\frac{1}{4} - x = \frac{3x}{4} - 1$ | f) $\frac{3x}{2} + 5 = 2x - \frac{1}{2}$ |

EXEMPLE

a) $1 + \frac{2x}{5} = \frac{1}{5} - 2x$
 Multiplicam tot pel mcm=5 $5 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{2x}{5} = 5 \cdot \frac{1}{5} - 5 \cdot 2x$
 Eliminam denominadors $5 + 2x = 1 - 10x$
 Transposam termes $2x + 10x = 1 - 5$
 Simplificam $12x = -4$
 Solució $x = \frac{-4}{12} = \boxed{\frac{-1}{3}}$

8. Resol en cada cas:

a) $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{10} = 1$

b) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3x}{5} - \frac{1}{2}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$

d) $\frac{x}{2} - \frac{5}{6} = \frac{x}{3} - \frac{x}{5} + 1$

e) $x - \frac{3x}{4} + \frac{1}{10} = \frac{4x}{5} - \frac{x}{2}$

f) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

9. Resol les següents equacions de primer grau amb denominadors:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$

b) $\frac{x-3}{3} + \frac{-x+1}{7} = 3$

c) $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{2x-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$

f) $\frac{2x+3x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

EXEMPLE

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$
 Multiplicam tot pel mcm=6 $6 \cdot \frac{(x-1)}{2} - 6 \cdot \frac{(x+1)}{3} = 6 \cdot 10$
 Eliminam denominadors $3 \cdot (x-1) - 2 \cdot (x+1) = 60$
 Eliminam parèntesis $3x - 3 - 2x - 2 = 60$
 Transposam termes $3x - 2x = 60 + 2 + 3$
 Reduïm $x = \boxed{65}$

■ Problemes d'equacions de primer grau

10. La tercera part de la meva edat sumada a la seva meitat són 15 anys. Quina edat tinc?
11. Un empleat d'un concessionari de cotxes guanya 850 euros cada mes, més un plus de 53 euros per cada cotxe que ven. Quants cotxes ha venut si en total aquest mes ha guanyat 1.221 euros?
12. A una caminada popular hi participen 16 dones més que homes. Si en total hi han participat 204 persones, quants homes i quantes dones hi han participat?
13. El meu germà té 10 euros menys que jo, i la meva germana, el doble que el meu germà. Entre tots tenim 470 euros. Quants euros té cadascun?
14. El triple de l'edat que tenia en Jordi fa 4 anys és el doble de la que tindrà d'aquí a 8 anys. Quina és l'edat actual d'en Jordi?
15. En la primera prova d'una oposició queda eliminat el 53% dels participants. En la segona prova, s'elimina al 25% dels restants. Si el nombre total de persones suspeses és de 518, quantes persones es van presentar a l'oposició?
16. En un rectangle, un costat és quatre vegades més gran que l'altre, i el perímetre és 100 cm. Calcula les longituds de cada costat.
17. El perímetre d'un rectangle és 26 cm. Si la base mesura 3 cm més que l'altura, quines són les dimensions del rectangle?
18. Hem de repartir 152 cromos entre tres nens, de manera que el segon en tingui 8 més que el primer i que el tercer en tingui 16 més que el segon. Com ho farem?
19. Per comprar 7 discos compactes em falten 12 €, però si només compro 5, em sobren 18 €. Si tots els compactes valen igual, quant en val un?
20. En una competició d'atletisme hi ha el doble d'atletes dels EUA que d'Alemanya. Si en total hi ha 213 atletes, quants participants hi ha de cada un d'aquests dos països?
21. Una prova consta de 20 qüestions. Per cada qüestió contestada correctament, un alumne guanya 3 punts; però per cada qüestió contestada malament o no contestada, en perd 2. Si al final de la prova un alumne va aconseguir 30 punts, quantes qüestions va contestar correctament?
22. Tinc 20 monedes, unes de 0,50 euros i altres de 2 euros. Quantes monedes tinc de cada si sumen un total de 22 euros?
23. Un dromedari té un gep, i un camell en té dos. En un ramat de camells i dromedaris hem comptat 86 caps i 148 geps. Quants camells i dromedaris hi ha?
24. En arribar 32 persones a una reunió s'observa que ara el nombre d'assistents és igual al triple dels que hi havia menys 14. Quantes persones hi havia inicialment a la reunió?

6.3 Equacions de segon grau



Vídeo 26: Equacions de 2n grau completes



Vídeo 23: Equacions de 2n grau incompletes

Equació de 2n grau completa: $ax^2 + bx + c = 0$.

Fórmula:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

Discriminant $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

Si $\Delta > 0$ té dues solucions diferents. Si $\Delta = 0$ té una solució doble. Si $\Delta < 0$ no té solució.

Exemples:

L'equació $x^2 - x + 3 = 0$ té discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11$ és negatiu, aleshores no té cap solució.

L'equació $x^2 + 2x + 1 = 0$ té discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ és zero, aleshores té una solució repetida.

L'equació $x^2 - 5x + 6 = 0$ té discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$ és positiu, aleshores té dues solucions diferents.

25. Indica si són equacions de segon grau les següents equacions:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$

b) $8x^2 - 9 = 0$

c) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

d) $3xy^2 - 5 = 0$

e) $8 - 7,3x = 0$

f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

26. En les següents equacions de segon grau, indica qui són a , b i c . Calcula el discriminant i digues quantes solucions tenen.

a) $3 + 4x^2 + 5x = 0$

b) $-3x^2 + 5x = 0$

c) $2x^2 - 3 = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

EXEMPLE

a) $3 + 4x^2 + 5x = 0$ primer convé ordenar l'equació de major a menor grau:

$$4x^2 + 5x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 4, b = 5 \text{ i } c = 3.$$

El discriminant és $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -23$, negatiu llavors no té solució.

27. Esbrina quantes solucions tenen les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 + x + 4 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$

d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

28. Resol les següents equacions de 2n grau completes:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$

d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

EXAMPLE

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

Sabem que $a = 1$, $b = -7$ i $c = 10$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2} \end{cases}$$

Equacions de segon grau incompletes

Falta la b, $ax^2 + c = 0$: Aïllar la x i fer l'arrel quadrada $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Falta la c, $ax^2 + bx = 0$: Treure x factor comú. Les solucions són $x = 0$ i $x = -\frac{b}{a}$.

29. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $3x^2 + 6x = 0$

b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$

d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$

f) $5x^2 - 10x = 0$

EXAMPLE

a) $3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x \cdot (x + 2) = 0 \rightarrow x = 0$ i $x = -2$

b) $3x^2 - 27 = 0 \rightarrow x^2 = 27/3 = 9 \rightarrow x = -3$ i $x = 3$

30. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 + 6x = 0$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$

d) $x^2 - 9x + 20 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$

f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

31. El perímetre d'un rectangle mesura 16 cm i la seva àrea 15 cm^2 . Calcula les seves dimensions.

32. Si 3 és una solució de $x^2 - 5x + a = 0$, quant val a ?

■ Problemes d'equacions de segon grau

33. Quin nombre multiplicat per 3 és 40 unitats menor que el seu quadrat?
34. Calcula tres nombres consecutius tals que la suma dels seus quadrats sigui 365.
35. El triple del quadrat d'un nombre més el seu doble és 85. Quin és el nombre?
36. Un triangle isòsceles té un perímetre de 20 cm i la base mesura 4 cm, calcula els costats del triangle i la seva àrea.

6.4 Equacions biquadrades i factoritzades

Una equació factoritzada és el producte de diferents termes igualat a zero.

$$\text{(Una cosa)} \cdot \text{(Altres coses)} = 0$$

L'única possibilitat que un producte sigui zero és que algun dels termes ho sigui. Així que per resoldre aquestes equacions **igualam a zero cadascun dels parèntesis**.

EXEMPLE

Per exemple: Si volem resoldre l'equació $(x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 1) = 0$ miram per quin valor de x cada parèntesi és fa igual a zero.

Això passa per $x = 3$, $x = -2$ i $x = 1/2$. Així doncs, aquesta equació té 3 arrels o solucions.

37. Resol mentalment les equacions següents, després desenvolupa les expressions i utilitza la fórmula general per tornar a resoldre-les.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $(x - 2) \cdot (x - 6) = 0$ | b) $(x + 1) \cdot (x - 3) = 0$ |
| c) $(x - 9) \cdot (x - 3) = 0$ | d) $(x - 1) \cdot (x + 4) = 0$ |
| e) $(x + 7) \cdot (x - 2) = 0$ | f) $(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$ |

38. Resol les equacions següents:

- a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$
- b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$



Vídeo 53: Equacions biquadrades.

Les **equacions biquadrades** són de la forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Si feim el canvi de nom $t = x^2$ es transforma en una equació de segon grau: $at^2 + bt + c = 0$, que podem resoldre amb la fórmula

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}.$$

Finalment, si **feim l'arrel quadrada de les t** trobam les x : $x = \pm \sqrt{t}$.

Una equació biquadrada pot tenir 4, 2 o cap solucions.

EXEMPLU

Per exemple: Ens demanen resoldre l'equació $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

La primera passa és convertir-la en una de segon grau: $t^2 - 8t - 9 = 0$, que podem resoldre amb la fórmula:

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} t = 9 & \rightarrow x = \pm \sqrt{9} = \pm 3 \\ t = -1 & \rightarrow x = \pm \sqrt{-1} \text{ No dóna solució} \end{cases}$$

- 39.** Resol les següents equacions biquadrades:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$

- 40.** Resol les equacions biquadrades següents:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$
 c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

6.5 Sistemes d'equacions

- 41.** Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els següents sistemes:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$	d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

- 42.** Comprova si els nombres que es donen són solució del sistema d'equacions.

a) $x = 2, y = 2$	$x = 1, y = 1$	per a $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$
b) $x = 2, y = -1$	$x = 3, y = 0$	per a $\begin{cases} -5x + 3y = -13 \\ x - y = 3 \end{cases}$
c) $x = 0 \text{ i } y = -5$	$x = 5, y = -1$	per a $\begin{cases} -3x - 2y = 10 \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$

- 43.** Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

- 44.** Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Mètode de Sustitución

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + 5y = 16 \end{cases}$$

Método de Igualación

$$\begin{cases} 5x + 6y = 20 \\ 3x + 8y = 34 \end{cases}$$

Método de Eliminación

Vídeo 87: Mètode de substitució

Vídeo 88: Mètode d'igualació

Vídeo 89: Mètode de reducció

Mètode de substitució

1a equació : $x + y = 1$
 2a equació : $3x - 2y = 13$

1. Hem de triar una equació, la més senzilla possible, i triar una lletra d'aquesta.

Recomanació! Si és possible, triau la lletra que no estigui multiplicada per cap nombre. Per exemple, nosaltres triarem la y de la 1a equació.

2. Aïllam la incògnita que hem triat: $y = 1 - x$
3. **Substituïm la y dins l'altra equació.** Només ha de quedar una lletra.

$$3x - 2(1 - x) = 13$$

4. Ara queda una equació de 1r grau que s'ha de resoldre: Eliminam parèntesis i aïllam la x

$$3x - 2 + 2x = 13 \rightarrow 5x = 15 \rightarrow x = 3$$

5. Calculam la **incògnita que falta**. Del 2n pas: $y = 1 - x = 1 - 3 = -2$

6. **Comprovam la solució:** $x = 3, y = -2$ Si substituïm x i y dins el sistema inicial s'han de complir les dues equacions a l'hora.

Mètode d'igualació

1a equació : $x + y = 1$
 2a equació : $3x - 2y = 13$

1. Hem de triar de cada equació la **mateixa lletra**. Si és possible, triau la lletra que no estigui multiplicada per cap nombre. Per exemple, nosaltres triarem la y de cada equació.

2. Aïllam la incògnita que hem triat de cada equació: $\begin{cases} y = 1 - x \\ y = \frac{3x - 13}{2} \end{cases}$

3. **IGUALAM les dues y .** Ara només ha de quedar una lletra: $1 - x = \frac{3x - 13}{2}$

4. Queda una equació de 1r grau que s'ha de resoldre: Eliminam denominadors i aïllam la x

$$2 - 2x = 3x - 13 \rightarrow x = 3$$

5. Calculam la **incògnita que falta**. Del 2n pas: $y = 1 - x = 1 - 3 = -2$

6. **Comprovam la solució:** $x = 3, y = -2$ Si substituem x i y dins el sistema inicial s'han de complir les dues equacions a l'hora.

Mètode de reducció

$$\begin{array}{l} \text{1a equació : } \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x - 2y = 13 \end{array} \right. \\ \text{2a equació : } \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = 13 \end{array} \right. \end{array}$$

1. El mètode de reducció és basat en tenir dues equacions amb un terme igual però canviat de signe. Si sumem les equacions, desapareix una incògnita. Si això no passa, podem multiplicar cadascuna de les equacions per un nombre.
2. Per exemple, si multiplicam per -3 la primera se'n va la x o per 2 la primera i se'n va la y .
3. La 1a equació **per 2** i la 2a equació **igual**
4. Sumem les dues equacions i **s'en van les y** . Només ha de quedar una lletra.

$$\begin{array}{r} 2x + 2y = 2 \\ + 3x - 2y = 13 \\ \hline 5x / = 15 \end{array}$$

5. Ara queda una equació de 1r grau fàcil de resoldre: $5x = 15 \rightarrow x = 3$
6. Substituem dins una equació i aïllam l'altra incògnita: $3 + y = 1 \rightarrow y = -2$
7. **Comprovam la solució:** $x = 3, y = -2$ Si substituem x i y dins el sistema inicial s'han de complir les dues equacions a l'hora.

45. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

46. Resol gràficament els següents sistemes i classifical's:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

47. Resol de forma gràfica els següents sistemes

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 9x - 5y = 13 \\ -7x + 5y = -9 \end{cases}$

■ Problemes de sistemes d'equacions

- 48.** En un hotel hi ha 47 habitacions simples i dobles. Si en total té 57 llits, quantes habitacions són simples i quantes són dobles?
- 49.** En una granja hi ha 100 animals entre gallines i conills, i entre tots els animals sumen 280 potes. Quantes gallines hi ha en la granja?

50. La suma de les edats de Raquel i Lluís són 65 anys. L'edat de Lluís més quatre vegades l'edat de Raquel és igual a 104. Quina edat tenen cadascun?
51. La suma de les edats de Maria i Albert és 32 anys. Dins de 8 anys, l'edat de n'Albert serà dues vegades l'edat de na Maria. Quina edat té cadascun en l'actualitat?
52. Troba dos nombres la diferència dels quals sigui 24 i la seva suma sigui 123.

Mètode gràfic



$$\text{1a equació : } \begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{2a equació : } \begin{cases} 3x - 2y = 13 \end{cases}$$

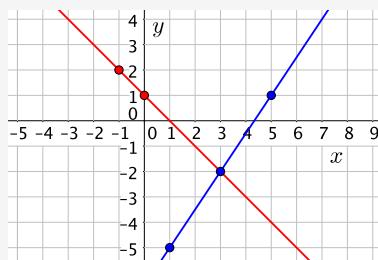
Vídeo 188: Mètode gràfic

- Hem d'aïllar la y de cada equació $y = 1 - x$ $y = \frac{3x - 13}{2}$
- Feim una **taula de valors** per a cada equació. Per a x podeu agafar els valors que vulgueu. Les y es troben a partir de cada fórmula.

x	y
-1	2
0	1
3	-2

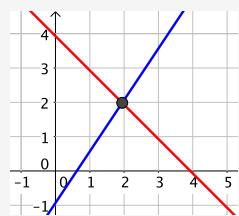
x	y
1	-5
3	-2
5	1

- Representam gràficament els punts de cada taula i dibuixam dues línies rectes. El punt on es tallen és la solució del sistema.

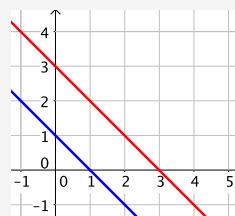


- Comprovam la solució:** $x = 3, y = -2$ Si substituïm x i y dins el sistema inicial s'han de complir les dues equacions a l'hora.

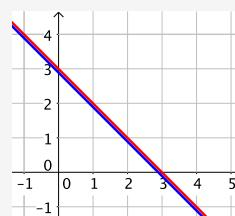
Els sistemes es classifiquen en:



1 solució - Compatible determinat



Cap solució - Incompatible



Infinites solucions - Compatible indeterminat

6.6 Activitats

53. Resol les següents equacions de 2n grau

- a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$
- b) $x(-1 + x) = 6$
- c) $7x^2 = 70x$
- d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$
- e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$
- f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$
- g) $(2x + 3) \cdot (x - 1) = -x - 3$

54. Resol les següents equacions de 2n grau amb denominadors:

- a) $\frac{x^2 - 1}{2} - \frac{x + 1}{3} = 10$
- b) $\frac{x^2 - 3}{3} + \frac{x^2 - x + 1}{7} = 3$
- c) $\frac{x^2 + 1}{5} + \frac{2x + 6}{10} = 2$
- d) $\frac{1 - x^2}{2} + \frac{3x - 1}{3} = \frac{1}{3}$
- e) $\frac{2x^2 - 8}{5} - \frac{3x - 9}{10} = x - 1$
- f) $\frac{2x + 3x^2}{5} - \frac{3x - 6}{10} = 1$

55. Resol les següents equacions de 2n grau:

- a) $x^2 - 7x + 10 = 0$
- b) $x(-1 + x) = 0$
- c) $2x^2 = 50$
- d) $x^2 - 3x - 10 = 0$
- e) $x^2 + 3x - 10 = 0$
- f) $x^2 + 7x + 10 = 0$
- g) $x^2 - 5x + 6 = 0$

56. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguin cap solució real. Ajuda: Utilitza el discriminant.

57. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

- a)
$$\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

58. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

- a)
$$\begin{cases} -2x + 3y = 13 \\ 3x - 7y = -27 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -8x + 3y = -5 \end{cases}$$

59. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

- a)
$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ -x - 6y = 7 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -7x + 5y = -2 \end{cases}$$

60. Copia en el teu quadern i completa els següents sistemes incomplets de manera que es compleixi el que es demana en cadascun:

a) Compatible indeterminat

$$\begin{cases} \square x + 3y = \square \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

b) Incompatible

$$\begin{cases} -5x + y = 2 \\ \square x + y = 6 \end{cases}$$

c) La seva solució sigui $x = 2$ i $y = 1$

$$\begin{cases} 3x - y = \square \\ \square x + y = 7 \end{cases}$$

d) Compatible indeterminat

$$\begin{cases} \square x + 6y = \square \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

- 61.** Resol els següents sistemes pel mètode que crequis més apropiat:

a) $\begin{cases} \frac{4x-1}{3} - \frac{2y+2}{5} = -1 \\ \frac{x+3}{2} + \frac{4y-1}{3} = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{y+3}{5} = -3 \\ 3x+y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y+2}{3} = 2 \\ 3x-2y = 1 \end{cases}$

- 62.** Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació i comprova la solució gràficament. De quin tipus és cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x + 6y = 13 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$

- 63.** En una botiga lloguen bicicletes i tricicles. Si tenen 51 vehicles amb un total de 133 rodes, quantes bicicletes i quants tricicles tenen?

- 64.** Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15 li falten 100 unitats per completar el seu quadrat?

- 65.** La suma dels quadrats de dos nombres imparells consecutius és 394. Determina aquests nombres.

- 66.** Van carregats un ase i un mul. L'ase es queixava del pes que portava damunt. El mul li va contestar: Si jo portés un dels teus sacs, portaria el doble de càrrega que tu, però si tu prens un dels meus, els dos portarem igual càrrega. Quants sacs porta cadascun?

- 67.** Calcula tres números consecutius que la seva suma de quadrats és 365

- 68.** Dins d'11 anys, l'edat de Mario serà la meitat del quadrat de l'edat que tenia fa 13 anys. Quina edat té Mario?

- 69.** La suma de dos nombres és 5 i el seu producte és -84. De quins nombres es tracta?

- 70.** Maria vol formar safates d'un quilogram amb massapans i polvorons. Si els polvorons li costen a 5 euros el quilo i els massapans a 7 euros el quilo, i vol que el preu de cada safata sigui de 6 euros, quina quantitat haurà de posar de cada producte? Si vol formar 25 safates, quina quantitat de polvorons i de massapans necessitarà?

- 71.** Determina els catets d'un triangle rectangle que la seva suma és 7 cm i la hipotenusa d'aquest triangle mesura 5 cm.

- 72.** El producte de dos nombres és 4 i la suma dels seus quadrats 17. Calcula aquests nombres

- 73.** En un garatge hi ha 30 vehicles entre cotxes i motos. Si en total hi ha 100 rodes, quants cotxes i motos hi ha en el garatge?

- 74.** L'edat actual d'en Pere és el doble de la de Raquel. Dintre de 10 anys, les seves edats sumaran 65. Quants anys tenen actualment en Pere i na Raquel?

- 75.** En la meva classe hi ha 35 persones. Ens han regalat a cada nena 2 bolígrafs i a cada nen 1 quadern. Si en total hi havia 55 regals. Quants nens i nines som en classe?

- 76.** Entre el meu avi i el meu germà tenen 56 anys. Si el meu avi té 50 anys més que el meu germà, quina edat té cadascun?

- 77.** Dos entrepans i un refresc costen 5€. Tres entrepans i dos refrescs costen 8€. Quin és el preu de l'entrepà i el refresc?

- 78.** En una granja hi ha pollastres i vaques.

- Si es compten els caps, són 50. Si es compten les potes, són 134. Quants pollastres i vaques hi ha en la granja?
- 79.** En una bossa hi ha monedes de 1€ i 2€. Si en total hi ha 40 monedes i 53€, quantes monedes de cada valor hi ha en la bossa?
- 80.** En una baralla entre aranyes i vespes, hi ha 70 caps i 488 potes. Sabent que una aranya té 8 potes i una vespa 6, quantes vespes i aranyes hi ha en la baralla?
- 81.** Iolanda té 6 anys més que el seu germà Pau, i la seva mare té 50 anys. Dins de 2 anys l'edat de la mare serà doble de la suma de les edats dels seus fills, Quines edats tenen?

Autoavaluació

- Resol l'equació $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$.
- Resol $156 = x(x - 1)$
- Resol l'equació $3x^2 - 14x + 15 = 0$
- Resol l'equació $(x - 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$
- Resol l'equació $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$
- Com són les rectes que formen el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 4y = 9 \end{cases}$?
- Resol el sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$
- Resol el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$
- En una granja, entre pollastres i porcs hi ha 27 animals i 76 potes. Quants pollastres i porcs hi ha en la granja?
- Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15, li falten 100 unitats per arribar al seu quadrat?

Resum

Equació de primer grau	És una equació algebraica en la qual la major potència de la incògnita és 1.	$-5x + 6 = 0$
Equació de segon grau	És una equació algebraica en la qual la major potència de la incògnita és 2. Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, on a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x - 8 = 0$
Resolució d'equacions de 2n grau completes	S'utilitza la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0:$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3, x_2 = 2$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
Nombre de solucions d'una equació de 2n grau	<p>Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, té dues solucions reals i diferents</p> <p>Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, té una solució doble.</p> <p>Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució</p>	$x^2 - 4x - 5 = 0: \Delta = 36 > 0$, té dues solucions 5 i -1. $x^2 - 2x + 1 = 0: \Delta = 0$, té una arrel doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0: \Delta = -23$. No té solució real
Resolució d'equacions de 2n grau incompltes	<p>Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, buidem la incògnita: $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$.</p> <p>Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0: x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$</p>	$2x^2 - 18 = 0: x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$.
Suma i producte d'arrels	$x_1 x_2 = \frac{c}{a}; x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$
Sistema d'equacions	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Classificació	<p>Compatible determinat: Una única solució, el punt d'intersecció. Les rectes són secants:</p> $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ <p>Compatible indeterminat: Infinites solucions, per la qual cosa les rectes són coincidents:</p> $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ <p>Incompatible: No té solució, les rectes són paral·leles:</p> $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Mètodes de resolució	<p>Substitució: aïllar una incògnita i substituir en l'altra equació.</p> <p>Igualació: aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions.</p> <p>Reducció: sumar les dues equacions, multiplicant-les per nombres adequats.</p> <p>Gràficament: representar les dues funcions lineals i determinar el punt (x, y) on es tallen</p>	

Tema 7

Proporcionalitat i percentatges

Què aprendrem?

7.1 Proporcionalitat directa i inversa simple	93
7.2 Proporcionalitat composta	94
7.3 Repartiments proporcionals	95
7.4 Percentatges	96
7.5 Interès bancari	98
7.6 Activitats	98

Abans de començar

Nota:

Resol aquests problemes de proporcionalitat:

- a) Si per 3 còmics he pagat 15 €, quant hauré de pagar per 5 còmics?

- b) Si caminant a 3 km/h tard una hora per arribar a casa, quan tardaré si vaig a 5 km/h?

Raona aquestes qüestions:

- c) Què val el 25% de 50 =

- d) Si d'una calculadora de 25 € ens fan un descompte del 10%, que haurem de pagar?



7.1 Proporcionalitat directa i inversa simple

Anomenam **raó** al quotient de dos nombres qualsevol $\frac{a}{b}$.

Dues **raons estan en proporció** si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, ho llegim com “a és a b com a' és a b'”.

Dues magnituds A i B estan relacionades amb una regla de **proporcionalitat directa** si:

- Quan es **multiplica A per un factor, B resulta multiplicat** pel mateix factor o
- Quan es **divideix A per un factor, B resulta dividit** pel mateix factor.

1. Calcula els termes que falten per completar les proporcions:

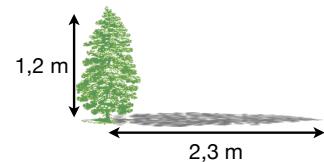
a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$

b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$

c) $\frac{3,6}{12,8} = \frac{x}{60}$

2. En una recepta ens diuen que per fer una confitura de maduixa necessitem un quilogram de sucre per cada dos quilograms de maduixes. Volem fer 5 quilograms de melmelada, quants quilograms de sucre i quants de maduixes hem de posar?

3. L'altura d'un arbre és proporcional a la seva ombra (a una mateixa hora). Un arbre que mesura 1,2 m té una ombra de 2,3 m. Quina altura tindrà un arbre l'ombra del qual mesuri 4,2 m?



4. Un llibre de 420 pàgines pesa 200 g. Quant pesarà un llibre de la mateixa col·lecció de 300 pàgines?
5. Completa la taula de proporció directa. Calcula la raó de proporcionalitat.

Litres	16	4,5		1		50
Euros	36		8,10		10	

6. Hem gastat 72 l de benzina per recórrer 960 km. Quants litres necessitarem per a una distància de 1500 km?
7. El meu cotxe gasta 6 litres de benzina cada 100 km, quants litres gastarà en un viatge de 1250 km?
8. Sis persones realitzen un viatge de vuit dies i paguen en total 40800 €. Quant pagaran 15 personnes si el seu viatge dura 5 dies?
9. La distància real entre dos pobles és 18,5 km. Si en el mapa estan a 10 cm de distància. A quina escala està dibuixat?
10. Quina altura té un edifici si la seva maqueta construïda a escala 1 : 300 presenta una altura de 12 cm?

11. Dibuixa l'escala gràfica corresponent a l'escala 1:60000.
12. Les dimensions d'una superfície rectangular en el plàtol són 6 cm i 14 cm. Si està dibuixat a escala 1 : 40, calcula les seves mesures reals.

Dues magnituds A i B estan relacionades amb una regla de **proporcionalitat inversa** si:

- Quan es **multiplica A** per un factor, **B resulta dividit** pel mateix factor o
- Quan es **divideix A** per un factor, **B resulta multiplicat** pel mateix factor.

13. Calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat inversa:

Magnitud A	36	0,09		12	
Magnitud B	0,25		6		72

14. En tallar una quantitat de fusta hem aconseguit 6 panells de 2,25 m de llarg. Quants panells aconseguirem si ara fan 1,5 m de llarg?
15. Per omplir un dipòsit s'obren tres aixetes que donen 2 litres per minut cadascuna i triguen 6 hores. Quant temps trigaran 4 aixetes similars que donen 5 litres per minut cadascun?
16. En la construcció d'un pont de 900 m s'han utilitzat 250 bigues, però l'enginyer no està segur i decideix reforçar l'obra afegint 75 bigues més. Si les bigues es col·loquen uniformement al llarg de tot el pont, a quina distància es col·locaran?

7.2 Proporcionalitat composta

17. El lloguer de 2 cotxes durant 9 dies costa 675 €. Quant costarà llogar 5 cotxes durant 7 dies?

EXEMPLU

Plantejam el problema amb les tres magnituds que apareixen "cotxes", "Dies" i "Preu". Ara ens fixam quina és la relació entre la magnitud que ens demanen "Preu" amb cadascuna de les altres. Com més cotxes, major el preu (Directa). Com més dies lloguem, major el preu (Directa).

Cotxes	Dies	Preu (€)
2	9	675
5	7	x

$$\frac{675}{x} = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{7} \rightarrow \text{Aïllam la } x \quad x = \frac{675 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 9} = 1312,50 \text{ €}$$

18. Una barra de metall de 10 m de llarg i 2 cm^2 de secció pesa 8,45 kg. Quant pesarà una barra del mateix material de 5 m de llarg i 7 cm^2 de secció.
19. Sabem que dues màquines funcionant 6 hores diàries consumeixen 1500 kW/h al dia. Durant quantes hores al dia haurien de treballar 5 màquines si volem que el consum no superi els 5000 kW/h?

- 20.** Si 12 excavadores fent feina 10 dies han remogut 360 m^3 de terra, quants de dies tardaran 8 excavadores a remoure 620 m^3 de terra?
- 21.** Tres treballadors recullen 300 kg de raïm en 2 dies. Quant tardaran 4 treballadors a recollir 500 kg del mateix raïm?

EXEMPLE

Plantejam el problema amb les tres magnituds que apareixen “Treballadors”, “Kg raïm” i “Dies”. Ara ens fixam qui na és la relació entre la magnitud que ens demanen “Dies” amb cadascuna de les altres. Com més treballadors, menys dies (Inversa). Com més Kg, més dies (Directa).

Treballadors	Kg raïm	Dies
3	300	2
4	500	x

$$\frac{2}{x} = \left[\frac{4}{3} \right] \cdot \frac{300}{500} \rightarrow \text{Aillam la } x \quad x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 500}{4 \cdot 300} = 2,5 \text{ dies}$$

- 22.** Un total de 18 operaris, fent feina 6 hores diàries, han tardat 6 dies a instal·lat 300 m de cable. Quantes hores diàries han de fer feina 24 operaris durant 14 dies per instal·lar 700 m de cable?
- 23.** L'any passat teníem un pressupost per al menjador de l'escola de 34.000 € mensuals per alimentar 262 alumnes. Si aquest any hi ha 22 alumnes més però el pressupost només ha augmentat en 1.200 € mensuals, durant quants de dies podrem oferir el servei de menjador?
- 24.** Sabem que 9 ordinadors encesos durant 10 hores diàries produueixen una despesa de 2340 € anuals. Quina seria la despesa si s'encenguessin 6 ordinadors més durant una hora menys al dia?
- 25.** Una família de sis membres consumeix 2 kg de pa cada 5 dies. Quants de dies els durarien 3 kg de pa a una família de 8 membres amb un consum similar?
- 26.** Amb quatre fotocopiadores es fan 30.000 còpies fent feina 3 hores diàries. Quantes còpies es podrien fer amb 5 fotocopiadores fent feina durant 2 hores diàries?

7.3 Repartiments proporcionals

- 27.** Cinc persones comparteixen loteria, amb 10, 6, 12, 7 i 5 participacions respectivament. Si han obtingut un premi de 18000 €. Quant correspon a cadascun?
- 28.** En el testament, l'avi estableix que vol repartir entre els seus néts 22200 €, de manera proporcional a les seves edats, 12, 15 i 18 anys, cuidant que la major quantitat sigui per als néts menors. Quant rebrà cadascun?
- 29.** Tres pagesos s'encarreguen del cultiu de la vinya. El primer va treballar 32 hores, el segon 24 i el tercer 14. Els beneficis són de 7350 €. Quant li toca a cadascun?

1. Un avi decideix repartir 6.000 € entre els seus tres néts, però en comptes de donar-los un terç a cada-cun prefereix fer-ho de forma proporcional a l'edat de cada nét, que tenen 7, 12 i 21 anys. Quant rebrà cadascun d'ells?

El total d'anys és $7+12+21 = 40$. El repartiment proporcional directe per cada nét és:

$$\text{Pel de 7 anys: } \frac{7}{40} \text{ de } 6000 = 1050 \text{ €.}$$

$$\text{Pel de 12 anys: } \frac{12}{40} \text{ de } 6000 = 1800 \text{ €.}$$

$$\text{Pel de 21 anys: } \frac{21}{40} \text{ de } 6000 = 3150 \text{ €.}$$

30. En el testament, l'avi estableix que vol repartir entre els seus néts 22200 €, de manera proporcional a les seves edats, 12, 15 i 18 anys, cuidant que la major quantitat sigui per als néts menors. Quant rebrà cadascun?
31. Tres socis han invertit 20000 €, 34000 € i 51000 € aquest any en la seva empresa. Si els beneficis a repartir a final d'any ascendeixen a 31500 €, quant correspon a cadascun?
32. Calcula el preu del quilo de barreja de dos tipus de cafè: 3,5 kg a 4,8 €/kg i 5,20 kg a 6 €/kg.
33. Quants litres de suc d'aranja de 2,40 €/l han de barrejar-se amb 4 litres de suc de taronja a 1,80 €/l per obtenir una barreja a 2,13 €/l?
34. En un concurs s'acumula puntuació de forma inversament proporcional al nombre d'errors. Els quatre finalistes, amb 6, 5, 2, i 1 error, han de repartir-se els 1400 punts. Quants punts rebrà cadascun?

7.4 Percentatges

Si tenim una quantitat total, una part i un percentatge p , aquests tres estan relacionat per:

$$\text{Percentatge: } p = \frac{\text{Part}}{\text{Total}} \cdot 100 \% \quad \text{Part: } \text{Part} = \frac{p}{100} \cdot \text{Total} \quad \text{Total: } \text{Total} = \frac{100}{p} \cdot \text{Part}$$

Si ens fan un **rebaixa** del $r \%$ damunt una quantitat, el preu final és $\text{Final} = \frac{100 - r}{100} \cdot \text{Inicial}$

Si ens fan una **pujada** del $r \%$ damunt una quantitat, el preu final és $\text{Final} = \frac{100 + r}{100} \cdot \text{Inicial}$

Al número $i = \frac{100 \pm r}{100}$ s'anomena **índex de variació**.

35. Una finca consta de dos pisos i un local. El tant per cent de propietat és del 30 %, 30 % i del 40% respectivament. a) Quina fracció de propietat correspon a cada un? b) Les despeses comuns del trimestre passat són de 448 euros. Quant li correspon pagar a cada un?

- 36.** Els preus dels articles indicats a una pàgina d'internet no tenen el IVA inclòs. Volem comprar 4 bosses de te a 4,25 € cadascuna i 6 bosses de cacau a 3,50 € cadascuna. Si l'IVA que s'aplica a aquests productes és del 15% , Quant haurem de pagar en total?
- 37.** L'any passat un club tenia 250 membres i cada membre va pagar 100 € de quota anual. Aquest any el nombre de socis ha augmentat un 4% respecte a l'any passat i la quota anual ha augmentat un 10% també respecte a l'any passat. Quants diners ingressarà aquest any el club en concepte de quotes de socis?
- 38.** Un medicament val, sense IVA, 14 €. Amb una recepta mèdica hem de pagar el 40% del preu total. Si sabem que l'IVA és del 4 %, quant haurem de pagar si duim la recepta?
- 39.** Ricard compra a la peixateria tres quarts de quilo de calamars a 8,60 € / Kg i un lluç de 650 grams a 5,80 € / Kg.
- a) Quants diners li tornaran si paga amb un bitllet de 20 € ?
- b) Si s'ha gastat el 20 % dels diners que duia, amb quants diners ha sortit de casa ?
- 40.** a) Quan a un porc, un cop sacrificat, li treuen les vísceres i els budells, queda la canal que pesa un 78 % del que pesava el porc viu. La sobrassada que s'obté de aquest animal correspon a un 52% del pes de la canal. Quants quilos de sobrassada s'obtenen d'un porc que, viu, pesava 148 kg?
- b) Per fer sobrassada es posen 21 grams de sal i 45 grams de pebre vermell per cada quilo de pasta. Quants quilos de sal i de pebre vermell es necessiten per fer la sobrassada que s'obté del porc de 148 kg?
- 41.** En un centre hi ha tres grups de 3r d'ESO. S'ajunten per fer una coral els que tenen facilitat per entonar. A 3r A hi ha 30 alumnes , en 3r B hi ha 28 , i en 3r C hi ha 32. Hi participen a la coral el 40 % dels alumnes de 3r A, el 25 % dels de 3r B, i el 75% dels de 3r C. a) Quants alumnes formen la coral? b) Els que formen el coral, quin percentatge del total d'alumnes de 3r d'ESO representen?
- 42.** L'aire és una mescla de gasos. En l'atmosfera la seva composició és aproximadament: el 78% de nitrogen, 21% d'oxigen, 0,04% de diòxid de carboni i la resta són gasos nobles.
- a) Quin és el percentatge de gasos nobles que hi ha a l'aire?
- b) Comptant que una persona adulta normal inspira 500 ml. d'aire cada vegada que respira, i suposant que respira 15 vegades per minut, calcula quants litres de cadascun dels gasos esmentats s'inspira en una hora.
- 43.** a) Una persona compra un equip de música que val a 500 €. Li fan un 20% de descompte però ha de pagar un 16 % d'IVA. Quant li costarà ?
- b) Si paga al comptat un 25 % del preu i la resta en un any sense interessos, quant haurà de pagar cada mes?

7.5 Interès bancari

Si C_i és el **capital** inicial que deixam al banc durant t anys a un **rèdit** r (%), el capital final s'obté de sumar-li els **interesos** $C_f = C_i + I$.

Si l'**interès** és **simple**, els interesos s'obtenen de la fórmula $I = \frac{r}{100} \cdot C_i \cdot t$.

Si l'**interès** és **compost**, el capital final és directament $C_f = C_i \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

44. Calcula l'interès simple que produeixen 105000 € al 4,8 % durant 750 dies.
45. Al 5 % d'interès compost durant 12 anys, quin serà el capital final que obtindrem en dipositar 39500 €? Ajuda: també pots utilitzar el full de càcul.
46. Quin capital cal dipositar a l'1,80 % durant 6 anys per obtenir un interès simple de 777,6 €?

7.6 Activitats

47. Copia en el teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat directa:

litres	6,25	0,75	1,4
euros	15	2,25	4,5

48. Amb 76 € hem pagat 12,5 m de tela, quant ens costaran 22,5 m?
49. Cada setmana paguem 82 € en transport. Quant gastarem els mesos de juny i juliol?
50. Per tapissar cinc cadires he utilitzat 2,3 m de tela, quantes cadires podré entapissar amb la peça completa de 23 m?
51. Un camió ha transportat en 3 viatges 220 sacs de patates de 24 kg cada-cun. Quants viatges seran necessaris per transportar 550 sacs de 30 kg cada-cun?
52. Una edició de 350 llibres de 210 pàgines cadascun aconsegueix un pes total de 70 kg. Quants kg pesarà una altra edició de 630 llibres de 140 pàgines cadascun?

53. Sabent que la raó de proporcionalitat directa és $\frac{A}{B} = 1,8$, copia en el teu quadern i completa la següent taula:

Magnitud A	12,6	4,14
Magnitud B	9	0,1

54. El model de telèfon mòbil que costava 285 € + IVA està ara amb un 15 % de descompte. Quin és el seu preu rebaixat? (IVA 21 %)
55. Per retardar-se dos mesos en el pagament d'un deute de 1520 €, una persona ha de pagar un recàrec del 12%, quant ha de retornar en total?
56. Quin tant per cent de descompte s'ha aplicat en una factura de 1820 € si finalment es van pagar 1274 €?
57. En comprar un televisor he obtingut un 22 % de descompte, per la qual cosa al final he pagat 483,60 €, quin era el preu del televisor sense descompte?

- 58.** Per liquidar un deute de 3500 € abans del previst, una persona paga finalment 3080 €, quin percentatge del seu deute s'ha estalviat?
- 59.** El preu d'un viatge s'anuncia a 907,50 € IVA inclòs. Quin era el preu sense IVA? (IVA 21 %)
- 60.** Quin increment percentual s'ha efectuat sobre un article que abans valia 38 € i ara es paga a 47,12 €?
- 61.** La distància entre Oviedo i La Corunya és de 340 km. Si en el mapa estan a 10 cm, quina és l'escala a la qual està dibuixat?
- 62.** Completa la següent taula:
- | Dibuix | Real | Escala |
|--------------|-------|---------|
| 24 cm × 5 cm | | 1:25000 |
| 6 cm | 15 km | |
| | 450 m | 1:30000 |
- 63.** Copia en el teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula:
- | Magnitud A | 4 | 7,5 | 3,6 | |
|------------|---|-----|------|----|
| Magnitud B | | 12 | 0,18 | 10 |
- 64.** Quina velocitat ha de portar un automòbil per recórrer en 4 hores certa distància si a 80 km/h ha trigat 5 hores i 15 minuts?
- 65.** En la granja es fa la comanda de farratge per alimentar a 240 vaques durant 9 setmanes. Si ven 60 vaques, quantes setmanes li durarà el farratge? I si en lloc de vendre, compra trenta vaques? I si decideix rebaixar la ració una quarta part amb les 240 vaques?
- 66.** Amb dotze paquets de 3,5 kg cadascun poden menjar 80 gallines diàriament. Si els paquets fossin de 2 kg, quants necessitaríem per donar de menjar a les mateixes gallines?
- 67.** Si la jornada laboral és de 8 hores necessitem a 15 operaris per realitzar un tre-

- ball. Si rebaixem la jornada en mitja hora diària, quants operaris seran necessaris per realitzar el mateix treball?
- 68.** En un magatzem es guarden reserves de menjar per 80 persones durant 15 dies amb 3 racionis diàries, quants dies duraria el mateix menjar per a 75 persones amb 4 racionis diàries?
- 69.** Deu operaris instal·len 3600 m de tanca en 6 dies. Quants dies trigaran 12 operaris a instal·lar 5040 m de tanca?
- 70.** En un concurs el premi de 168000 € es reparteix de forma directament proporcional als punts aconseguits. Els tres finalistes van aconseguir 120, 78 i 42 punts. Quants euros rebran cadascun?
- 71.** Un treball es paga a 3120 €. Tres operaris ho realitzen aportant el primer 22 jornades, el segon 16 jornades i el tercer 14 jornades. Quant rebrà cadascun?
- 72.** Cinc persones comparteixen un microbús per realitzar diferents trajectes. El cost total és de 157,5 € més 20 € de suplement per servei nocturn. Els quilòmetres recorreguts per cada passatger van ser 3, 5, 7, 8 i 12 respectivament. Quant ha d'abonar cadascun?
- 73.** S'ha decidit penalitzar a les empreses que més contaminen. Per a això es reparteixen 2350000 € per subvencionar a tres empreses que presenten un 1 %, 9 % i 15 % de grau de contaminació. Quant rebrà cadascuna?
- 74.** Barregem 3 kg d'ametlles a 14 €/kg, 1,5 kg de nous a 6 €/kg, 1,75 kg d'anacards a 18 €/kg. Calcula el preu final del paquet de 250 g de barreja de fruita seca.
- 75.** Calcula el preu del litre de suc que s'aconsegueix barrejant 8 litres de suc de pinya a 2,5 €/l, 15 litres de suc de taronja a 1,6 €/l i 5 litres de suc de raïm a 1,2 €/l. A quant ha de vendre's una ampolla de litre i mig si se li aplica un augment del 40 % sobre el preu de cost?

76. Quin capital cal dipositar al 3,5 % de rèdit en 5 anys per obtenir un interès simple de 810 €?
77. Quin és el capital final que es rebrà per dipositar 25400 € a l'1,4 % en 10 anys?
78. Quants mesos ha de dipositar-se un capital de 74500 € al 3 % per obtenir un interès de 2980€?



Autoavaluació ↗

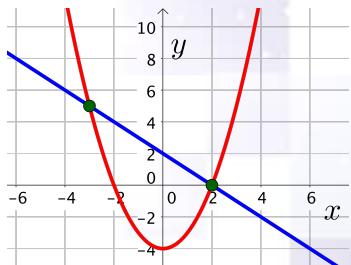
1. Completen la taula de proporcionalitat directa:

A	8	0,75		4,5	100
B		15	6		

2. Amb 450 € paguem les despeses de gas durant 8 mesos. Què pagarem en 30 mesos?
3. Un ordinador que costava 1600 € s'ha rebaixat a 1400 €. Quin és el percentatge de rebaixa aplicat?
4. Per envasar 360 litres d'aigua, quantes botelles necessitarem si volem utilitzar envasos de tres quarts de litre?
5. Tres agricultors es reparteixen els quilograms de la collita de forma proporcional a la grandària de les seves parcel·les. La major, que mesura 15 ha rep 24 tones. Què rebran la segona i la tercera si tenen una superfície de 10 ha de 8 ha respectivament?
6. A quina escala s'ha dibuixat un mapa en el qual 3,4 cm equivalen a 1,02 km?
7. Amb 4 rotllos de paper de 5 m de llarg, puc folrar 32 llibres. Quants rotllos necessitem per folrar 16 llibres si ara els rotllos de paper són de 2 m de llarg?
8. Quin és el preu final de la mescla formada per 5 kg de farina classe A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg classe B a 0,85 €/kg i 4 kg classe C a 1 €/kg?
9. Per transportar 40 tones de mercaderies en 8 dies es necessiten 24 camions. Quants de camions fan falta per transportar el doble de mercaderies en 6 dies?
10. En quant es converteixen 1400 € col·locats al 2 % d'interès simple durant 6 anys?

Resum

Proporcionalitat directa	Dues magnituds són directamente proporcionales cuando se multiplican o se dividen la primera por un número, la segunda se multiplicará o dividirá por el mismo número. La razón de proporcionalidad directa k: es el cociente de los valores de una variable entre la otra.	Para empapelar 300 m^2 hemos utilizado 24 rollos de papel, si ahora la superficie es de 104 m^2 , necesitaremos 8.32 rollos, ya que $k = 300/24 = 12.5$ y $12.5 = 104/x$ por tanto $x = 104/12.5 = 8.32$.
Proporcionalitat inversa	Dues magnituds són inversamente proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre. La raó de proporcionalitat inversa k': és el producte de cada parell de magnituds: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$	Dues persones pinten un habitatge en 4 dies treballant 9 h diàries. Per pintar el mateix habitatge, 3 persones, treballant 8 h diàries trigaran... 3 dies
Percentatges	Raó amb denominador 100.	El 87 % de 2400 és $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2088$
Escala	L'escala és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures en la realitat.	A escala 1:50000, 35 cm són 17,5 km en la realitat.
Repartiment proporcional directe	Rep més quantitat qui més parts té.	Repartir directament a 6,10 i 14, 105000 € $6 + 10 + 14 = 30; 105000 : 30 = 3500$ $6 \cdot 3500 = 21000 \text{ €};$ $10 \cdot 3500 = 35000 \text{ €}$ $14 \cdot 3500 = 49000 \text{ €}$
Repartiment proporcional Invers	Rep més quantitat qui menys parts té.	Repartir 5670 inversamente a 3, 5 i 6; $1/3 + 1/5 + 1/6 =$ $10/30 + 6/30 + 5/30$ $5670 : 21 = 270$ $270 \cdot 10 = 2700;$ $270 \cdot 6 = 1620$ $270 \cdot 5 = 1350$
Interès simple	L'interès és el benefici que s'obté en dipositar un capital en una entitat financer a un determinat tant per cent durant un temps	$C = 3600; r = 4,3\%; t = 8 \text{ anys}$ $I = \frac{3600 \cdot 4,3 \cdot 8}{100} = 1238,4 \text{ €}$



Tema 8

Funcions i gràfics

Què aprendrem?

8.1 Sistemes de representació en el pla	102
8.2 Concepte de funció	103
8.3 La funció lineal i afí	104
8.4 La funció quadràtica o paràbola	107
8.5 Interpretació i característiques de les funcions	109

8.1 Sistemes de representació en el pla

Per representar punts en el pla utilitzam un sistema d'eixos perpendiculars (**Eixos cartesianos**) que es tallen a un punt **O(0, 0)** anomenat **origen**.

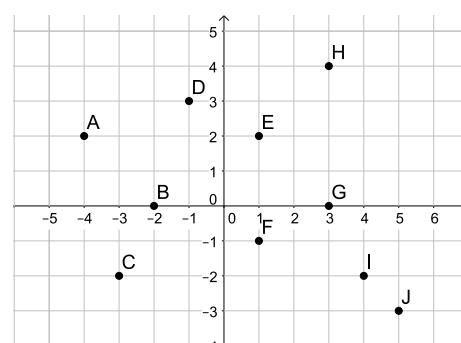
L'eix horitzontal s'anomena eix de les **abscisses** (eix **X**).

L'eix vertical és l'eix de les **ordenades** (eix **Y**).

1. a) Copia en el teu quadern i indica les coordenades de tots els punts que estan representats en el gràfic:

- b) Representa gràficament en el teu quadern els següents punts del pla:

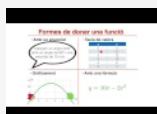
$$\begin{array}{llll} A(0,-2) & B(-2,0) & C(4,0) & D(-6,0) \\ E(0,6) & F(1,7) & G(7,1) & H(-4,8) \\ I(-1,-4) & J(-4,-1) & K(5,-3) & L(9,6) \end{array}$$



2. Representa en un gràfic els punts següents, triant una escala en els eixos que permeti dibuixar-los tots de forma còmoda: $A(5,4)$; $B(0,2)$; $C(-2,0)$; $D(3,-1.3)$; $E(1.5,0)$; $F(0,0)$; $G(-1,-2/3)$. Assenyala en cada cas a quin quadrant pertany el punt o, si escau, sobre quin eix està.

3. Situa en un sistema de referència cartesià els punts següents:
A(0, 4); B(0, 2.3); C(0, -2); D(0, -1). Què tenen en comú tots ells?
4. Digues les coordenades de tres punts situats en el tercer quadrant.
5. Digues les coordenades de tres punts de l'eix d'ordenades. Què tenen en comú?

8.2 Concepte de funció



Vídeo 190: Introducció a les funcions

Una **funció** és una **relació** entre dues variables x (variable independent) i y (variable dependent) de tal forma que per cada x trobam un **únic** valor de y .

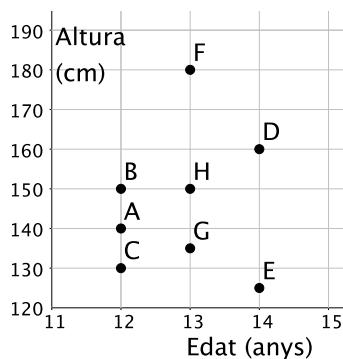
Una funció es pot donar de diverses formes:

- A través d'una gràfica
- Amb un enunciat
- Amb una taula de valors
- Amb una fórmula (expressió analítica)

6. De les següents relacions entre dues variables, raona quines són funcionals i quines no:
 - a) x : Edat i y : altura de la persona al llarg de la seva vida
 - b) x : Altura i y : edat de la persona
 - c) x : Preu de la gasolina i y : dia del mes
 - d) x : Dia del mes i y : preu de la gasolina
 - e) x : Un nombre i y : la seva cinquena part
 - f) x : Un nombre i y : el seu quadrat
 - g) x : Un nombre i y : la seva arrel quadrada
7. Realitza en el teu quadern el dibuix de dues gràfiques, una que correspongui a una funció i l'altra no. Identifica cadascuna i explica el perquè.
8. Indica quines de les següents relacions són funcions:
 - a) A cada nombre natural se li associen els seus divisors primers.
 - b) A cada circumferència del pla se li associa el seu centre.
9. Raona si els valors de la següent taula poden correspondre als d'una funció i per què:

x	-13	-7	10	-13	24
$f(x)$	-15	0	14	3	0

10. L'altura i l'edat dels components d'un equip de bàsquet estan relacionats segons mostra la següent gràfica:



- Si en Joan té 14 anys, quina pot ser la seva altura?
- Si Maria mesura 165 cm, quina pot ser la seva edat?
- La relació entre l'altura i l'edat dels diferents components de l'equip, és una relació funcional? Per què?
- I la relació entre l'edat i l'altura? Realitza una gràfica similar a l'anterior per representar aquesta situació.

8.3 La funció lineal i afí



Vídeo 191: Funcions lineals

i afins

Totes les gràfiques de les funcions $y = "Polinomi de 1r grau"$ són línies rectes.

Les funcions $y = mx$ són de **proporcionalitat directa o lineals**. m s'anomena el **pendent**.

m positiu	\rightarrow	la recta és creixent
m negatiu	\rightarrow	la recta és decreixent
$m = 0$	\rightarrow	la recta és constant o horitzontal.

El pendent d'una recta s'obté de dividir el canvi de les y entre el canvi de les x : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

■ Funcions lineals

11. Representa aquestes funcions:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & y = 2x \\ \text{b)} & y = \frac{3}{2}x \\ \text{c)} & y = -3x \\ \text{d)} & y = -\frac{4}{5}x \end{array}$$

Indica en cada cas el seu pendent.

- Escriu tres funcions que les seves gràfiques siguin tres rectes que passin per l'origen de coordenades i els seus pendents siguin 3, -2, i $1\frac{1}{2}$ respectivament.
- Representa la recta que passa pels punts següents i calcula'n el seu pendent. Escriu l'equació de cada recta.
 - $A(0, 0)$ i $B(3, 1)$
 - $A(-1, -2)$ i $B(2, 4)$
 - $A(0, 0)$ i $B(-2, 5)$
 - $A(-3, 4)$ i $B(3, -4)$
- Un metre de certa tela costa 1,35 €, quant costen 5 metres? I 10 m? I 12,5 m? Quant costen " x " metres de tela? Escriu la fórmula d'aquesta situació.

15. Si el canvi d'euros a dollars està $1 \text{ €} = 1,37\text{\$}$, completa en el teu quadern la següent taula d'equivalència entre les dues monedes:

€	2	5	10	27	60
\$					

Expressa mitjançant una fórmula la relació que existeix entre ambdues monedes. Es pot expressar de forma única aquesta relació? És una funció? Si realitzes el canvi en una oficina, et cobren una petita comissió fixa per realitzar l'operació d' $1,5 \text{ €}$. Com quedarien les fórmules en aquest cas?

16. Un fabricant vol construir tassons cilíndrics mesuradors de volums, que tinguin de radi de la base 4 cm i d'altura total del tassó 24 cm. Escriu una fórmula que indiqui com varia el volum en anar variant l'altura del líquid. Construeix una taula amb els volums corresponents a les altures preses de 3 en 3 cm. Escriu també una fórmula que permeti obtenir l'altura coneixent els volums. A quina altura caldrà col·locar la marca per tenir un decilitre?
17. La distància, d , recorreguda per un tren depèn del nombre de voltes, n , que dóna cada roda de la locomotora.
- Escriu la fórmula que permet obtenir d coneugut n , sabent que el diàmetre de les rodes de la locomotora és de 78 cm.
 - Dibuixa la gràfica.
 - Quina distància haurà recorregut el tren quan la roda hagi donat mil voltes? (pren com a valor de π el número 3,14).
 - Quantes voltes haurà donat la roda al cap de 7 km?

■ Funcions afins

Les funcions del tipus $y = mx + n$ són línies rectes. m s'anomena **pendent** i n l'**ordenada a l'origen**. L'ordenada a l'origen és el punt on la recta talla l'eix de les Y.

Les funcions $y = n$ són rectes horitzontals i s'anomenen funcions **constants**. El seu pendent és igual a 0.

18. Fes una taula de valors i representa gràficament en el teu quadern:

$$\text{a) } y = 3x + 2 \quad \text{b) } y = x - 3 \quad \text{c) } y = -2x - 1 \quad \text{d) } y = -\frac{x}{2} + 4$$

Indica en cada cas què val el pendent i l'ordenada a l'origen de cada recta.

19. Com són entre sí dues rectes d'igual pendent i diferent ordenada en l'origen?

- 20.** Dibuixa en els mateixos eixos de coordenades les rectes que passen pels següents punts:

$$A(0, 0) \text{ i } B(1, -2)$$

$$A(1, 1) \text{ i } B(0, 3)$$

$$A(-2, 0) \text{ i } B(0, -4)$$

- a) Com són les rectes?
- b) Calcula l'equació de les tres rectes de l'apartat anterior. Què tenen en comú les equacions de les rectes?

- 21.** Troba l'equació i dibuixa la gràfica de les rectes següents:

- a) El seu pendent és 2 i la seva ordenada en l'origen és 3.
- b) Passa pels punts $A(-1, 3)$ i $B(0, 4)$.
- c) La seva ordenada en l'origen és 0 i el seu pendent és 0.
- d) Passa pels punts $C(-1, 3)$ i $D(-2, 5)$.

- 22.** Dibuixa en el teu quadern i calcula l'equació de les rectes següents:

- a) De pendent 3 i ordenada en l'origen 0.
- b) Passa pels punts $A(2, 3)$ i $B(4, 1)$.
- c) El seu pendent és 2 i Passa pel punt $(4, 5)$.

- 23.** Realitza en el teu quadern una taula de valors de la funció $e(t) = 5t + 20$, representa'l s gràficament i indica la figura que determinen. Si aquesta funció representa l'espai (en quilòmetres) que recorre una persona que duu caminats 20 km i camina a una velocitat de 5 km/h, en funció del temps que triga a recórrer-ho (en hores), indica quins serien els valors que no tindria sentit donar a la variable independent i en què es tradueix això en la gràfica.

- 24.** Un globus sonda utilitzat pel Servei Meteorològic dels Pirineus per mesurar la temperatura a diferents altures duu incorporat un termòmetre. S'observa que cada 180 m d'altura la temperatura disminueix un grau. Cert dia la temperatura en la superfície és de 9°C . Determina:

- a) Quina temperatura hi haurà a 3 km d'altura?
- b) A quina altura hi haurà una temperatura de -30°C ?
- c) Escriu una fórmula que permeti calcular la temperatura T coneixent l'altura A . Confecciona una taula i dibuixa la gràfica. Quin tipus de funció és?
- d) Si la temperatura en la superfície és de 12°C , quina és llavors la fórmula? Quin tipus de funció és?



- 25.** Una empresa de lloguer de vehicles ofereix dues fórmules diferents.

Fórmula 1: Lloga per 300 euros al dia amb quilometratge il·limitat.

Fórmula 2: Lloga per 200 euros al dia i 7 euros el quilòmetre.

Volem fer un viatge de 10 dies i mil quilòmetres, quant ens costarà amb cadascuna de les fórmules? Com no sabem el quilometratge exacte que acabarem fent, ens interessa

fer un estudi per saber la fórmula més beneficiosa. Escriu les fórmules d'ambdues situacions i dibuixes les seves gràfiques. Raona, a partir d'aquestes gràfiques, quina fórmula és més rendible segons el nombre de quilòmetres que anem a fer.

- 26.**  Calcula dos punts de les rectes d'equacions: $y = 2x + 2$ i $y = -\frac{x}{2} + 2$, per dibuixar-les amb Geogebra. Indica dues propietats comunes d'ambdues gràfiques.

Representa, també, les rectes d'equacions: $y = -3x + 1$ i $y = \frac{x}{3} - 3$.

Quina condició compleixen els pendents de dues rectes perpendiculars?

- 27.** Escriu l'equació de la recta paral·lela a $y = 4x + 2$ d'ordenada en l'origen 6.
- 28.** Sense representar-los gràficament, digues si estan alineats els punts $A(3, 4)$, $B(7, 9)$ i $C(13, 15)$. *Ajuda:* Els pendents m_{AB} i m_{BC} han d'ésser iguals.

8.4 La funció quadràtica o paràbola



Vídeo 192: Funcions quadràtiques o paràboles

Tots els polinomis de segon grau com $y = ax^2 + bx + c$ són **funcions quadràtiques o paràboles**. Possiblement et recordi de la forma que té una antena parabòlica.

a controla l'obertura i la forma de la paràbola.

- Si a és positiu la paràbola és **cònica** \cup . Té un mínim.
- Si a és negatiu la paràbola és **cònica** \cap . Té un màxim.

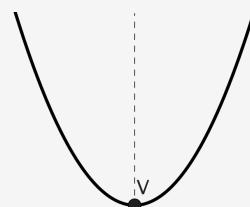
El **màxim o mínim** de la paràbola s'anomena el **vèrtex**.

En canvi, els nombres b i c controlen la **posició del vèrtex**, que podem obtenir de la fórmula:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

La y_v s'obté substituint la x_v dins de l'equació de la paràbola.

Les paràboles compleixen que són **simètriques** respecte del vèrtex.



- 29.** Dibuixa en el teu quadern les gràfiques de les paràboles:

- | | |
|---------------|------------------|
| a) $y = x^2$ | b) $y = 2x^2$ |
| c) $y = -x^2$ | d) $y = -3x^2$. |

Indica si són còncaves o convexes. Comprova que totes elles passen per l'origen.

- 30.** Fes una taula de valors i representa gràficament en el teu quadern:

- | | | |
|------------------|-------------------|-------------------------|
| a) $y = 1 - x^2$ | b) $y = 2x^2 - 8$ | c) $y = -3x^2 + 6x - 4$ |
|------------------|-------------------|-------------------------|

31. Determina el vèrtex de les següents paràboles i dibuixa la seva gràfica:

a) $y = 2x^2 + 8x + 12$

b) $y = -2x^2 + 8x - 10$

c) $y = 2x^2 - 4x + 2$

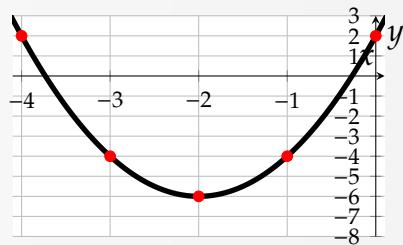
d) $y = 2x^2 + 6x$

EXEMPLU

a) $y = 2x^2 + 8x + 2$. Aquesta paràbola té $a = 2$ i $b = 8$. L'abscissa del vèrtex s'obté de $x_v = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-8}{2 \cdot 2} = -2$. La $y_v = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 2 = -6$. El vèrtex es troba en el punt $V(-2, -6)$.

Per representar la paràbola feim una taula de valors al voltant del vèrtex:

x	y
-4	2
-3	-4
-2	-6
-1	-4
0	2



32. Calcula el vèrtex, l'eix de simetria i els punts d'intersecció amb els eixos de les següents paràboles. Dibuixa les seves gràfiques.

a) $y = x^2 + 8x - 13$

b) $y = -x^2 + 8x - 13$

c) $y = x^2 - 4x + 2$

d) $y = x^2 + 6x$

33. Completa aquest resum. En la gràfica de $y = ax^2$:

a) Si $a > 0$ llavors té curvatura CÒNCAVA / CONVEXA.

b) Si $a > 1$ llavors té una obertura MENOR / MAJOR que $y = x^2$.

c) Si $a < 0$ llavors té curvatura CÒNCAVA / CONVEXA.

d) Si $-1 < a < 0$ llavors té una obertura MENOR / MAJOR que $y = x^2$.

34. El pont *Golden Gate* permet la comunicació entre els dos costats de la badia de San Francisco. Les seves torres, de 746 peus d'altura, estan separades per una distància d'uns 4200 peus. La calçada, que té una amplada de 90 peus i es troba a una altura de 220 peus sobre el nivell de l'aigua, està subjecta a les torres mitjançant dos cables, de 3 peus de diàmetre, que tenen forma de **paràbola** i que toquen la calçada en el centre del pont.



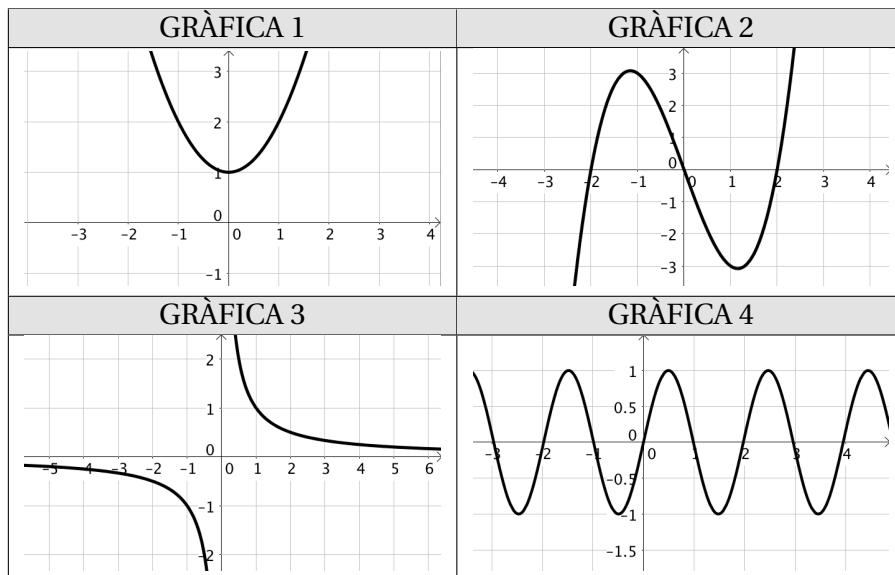
a) Determina la relació que existeix entre l'altura a la qual es troba un punt del cable i la distància de la seva projecció vertical al centre del pont.

b) Aplica aquesta fórmula per calcular l'altura d'un punt del cable que la seva vertical està a 1000 peus del centre del pont.

- 35.** Escriu l'equació d'una paràbola d'igual forma que $y = x^2$, però traslladada 5 unitats en sentit horitzontal a la dreta i 3 unitats en sentit vertical cap amunt. Quines coordenades té el seu vèrtex?
- 36.** Un rectangle té un perímetre de 100 cm. Si anomenam x a la longitud d'un dels seus costats, escriu la fórmula que dóna l'àrea en funció de x . Dibuixa la seva gràfica. Quin tipus de funció és?
- 37.** Una caixa quadrada té una altura de 20 cm. Com depèn el seu volum del costat de la base? Dibuixa la gràfica de la funció que resulta.
- 38.** Amb un full de paper de 32 cm de llarg i 22 cm d'ample es retalla un quadrat de 2 cm de costat en cadascuna de les cantonades, es doblega i es construeix una caixa. Quin és el volum de la caixa? I si es retallen quadrats de 3 cm? Quin és el volum si el costat del quadrat retallat és x ? Escriu la fórmula i dibuixa la gràfica.

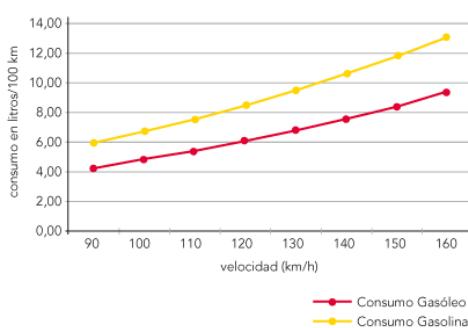
8.5 Interpretació i característiques de les funcions

- 39.** Assenyalas totes les característiques que puguis de les funcions representades mitjançant les seves gràfiques: domini i recorregut, simetria, punts d'intersecció amb els eixos de coordenades, continuïtat, creixement i decreixement, màxims i mínims, periodicitat.



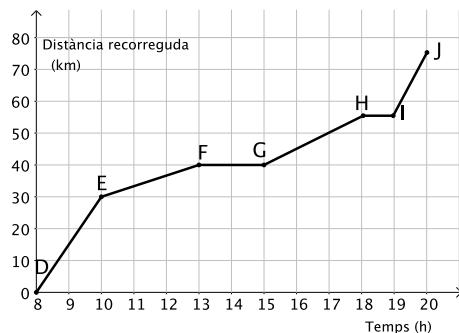
- 40.** Joaquim ha arribat a un acord amb el seu pare per rebre la seva paga. Cobrarà 20 € al mes el primer any, i 5 € més per cada any que passi. Quant li correspondrà dins de 7 anys? Fes una taula de valors i representa la seva gràfica. És contínua? Indica els punts de discontinuïtat i el seu tipus. Busca una fórmula que permeti calcular la paga quan hagin passat n anys.

41. El consum de gasolina i gasoil d'un cotxe per cada 100 km ve representat mitjançant la gràfica.



- Quina és la variable dependent?
- I la independent?
- Quin és el consum per a una velocitat de 160 km/h?
- A quina velocitat el consum és de 7 l/100 km?
- Utilitza la gràfica per explicar com varia el consum de combustible dependent de la velocitat del cotxe.

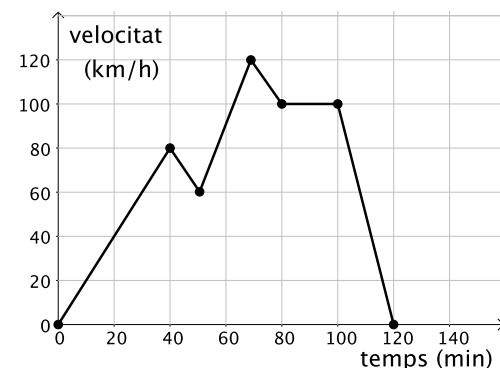
42. La següent gràfica resumeix l'excursió que hem realitzat per la serra de Tramuntana:



- Quant temps va durar l'excursió?
- Quant temps es va descansar? A quines hores?
- Quants quilòmetres es van recórrer?
- En quins intervals de temps es va anar més ràpid que entre les 11 i les 13 hores?
- Fes una breu descripció del desenvolupament de l'excursió.

43. Durant un viatge, la velocitat del cotxe varia dependent del tipus de carretera, de les condicions en què es troba, del temps meteorològic... La següent gràfica reflecteix la velocitat d'un vehicle en cada instant del trajecte que ha seguit.

- És funcional la relació de dependència entre el temps i la velocitat?
- Quina és la variable independent? I la dependent?
- A quina velocitat anava quan portava una hora de viatge? En quins moments anava a una velocitat de 40 km/h?
- Indica els intervals en els quals la velocitat ha augmentat i disminuït. Ha estat constant en algun moment? Quan? Durant quant de temps?
- Quins són els màxims i mínims relatius de la funció?



44. Una ciutat té implantada l'ordenança de regulació de l'aparcament (ORA). La norma indica que s'ha de pagar una certa quantitat per cada minut d'aparcament i que hi ha d'haver un mínim de preu. En Joan posa 1,35 € i el parquímetre indica que disposa de 45 minuts. Sara amb 0,84 € només té 28 minuts.



- Troba l'equació de la funció lineal $y = mx + n$ que relaciona el temps x amb el preu y .

- b) Quant hem de pagar per un aparcament de 55 minuts?
- c) Si hem pagam 2,40 € de quant de temps disposam?
- 45.** En estudiar el creixement d'una planta observem que durant els primers 30 dies ho fa molt de pressa, en els 15 dies següents el creixement és més lent i després es manté amb la mateixa altura. Realitza un esbós de la gràfica que relaciona el temps amb l'altura aconseguida per la planta.

Si tenim més informació podem millorar l'esbós. Per exemple, fes la taula i la gràfica en el cas que el creixement de la planta s'ajusti a les següents fòrmules (el temps s'expressa en dies i l'altura en centímetres):

a) Durant els primers 30 dies: altura = $4 \cdot \text{temp}$

b) En els dies 30 a 45: altura = $90 + \text{temp}$



Autoavaluació

- 1.** L'únic punt que té ordenada negativa i es troba al 3r quadrant és:

a) $(-1, 1)$ b) $(-1, -1)$ c) $(-1, 0)$ d) $(1, -1)$

- 2.** L'única taula que no correspon a una relació funcional és:

x	y
0	1
1	2
2	3
3	4

x	y
0	1
1	1
2	1
3	1

x	y
0	-1
1	-1
2	-2
3	-3

x	y
0	0
1	1
2	2
0	-3

- 3.** L'única funció afí que passa per l'origen de coordenades és

a) $y = -4x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = -x - 1$

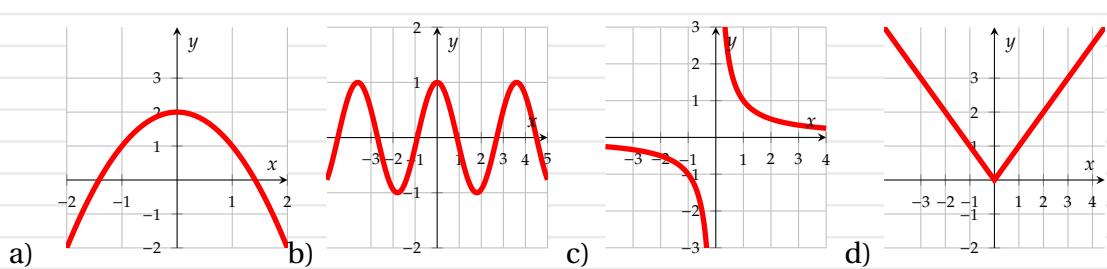
- 4.** L'única funció quadràtica és:

a) $y = -2x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -x^3 - 1$

- 5.** La funció quadràtica que té el seu vèrtex en el punt $(3, 9)$ és:

a) $y = -2x^2$ b) $y = -x^2 + 6x$ c) $y = 3x^2 - x + 1$ d) $y = -2x^2 + 3x$

- 6.** La única funció que és periòdica és:



Resum

<p>Punts</p>	
<p>Funció</p> <p>Una funció és una relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una (variable independent) li fem corresponent, com a molt, un únic valor de l'altra (variable dependent).</p>	$y = f(x) = 0,59 \cdot x$ $f(2) = 0,59 \cdot 2 = 1,18$ $f(5) = 0,59 \cdot 5 = 2,95$
<p>Gràfica d'una funció</p> <p>La gràfica d'una funció és la representació en el pla cartesià de tots els parells ordenats en els quals el primer valor correspon a un qualsevol de la variable independent i el segon al que s'obté en transformar-ho mitjançant la funció:</p> $\{(x, y) \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$	<p><i>Gràfica:</i></p> $y = f(x) = 0,59x$
<p>Funció afí, funció lineal i funció constant</p> <p>Una funció afí és aquella funció en la qual la relació entre les dues variables ve donada per un polinomi de grau menor o igual a 1:</p> $y = mx + n$ <p>La representació gràfica és una recta.</p> <p>“m” rep el nom de pendent i “n” ordenada a l'origen.</p> <p>Una funció lineal o de proporcionalitat directa és una funció afí amb ordenada en l'origen nul·la: $y = mx$ (passa per l'origen).</p> <p>Una funció constant és una funció afí amb pendent nul: $y = n$ (sempre pren el mateix valor i la seva gràfica és una recta horizontal).</p>	

Funció quadràtica

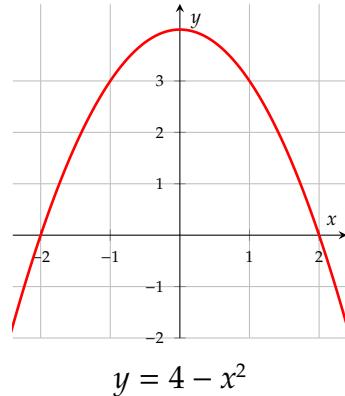
Una funció quadràtica és aquella funció en la qual la relació entre les dues variables ve donada per un polinomi de grau dos:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

La gràfica d'aquest tipus de funcions es diu paràbola.

El punt més significatiu de la paràbola és el **vèrtex** i es calcula donant-li a la variable independent el valor $x_v = -b/2a$

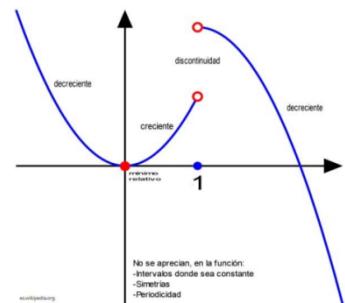
Si el coeficient de x^2 és positiu, el vèrtex és un mínim i, si és negatiu, un màxim.

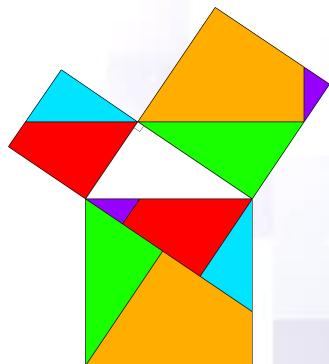


Continuïtat, Monotonia, Extrems, Simetria i Periodicitat

Una funció pot ser:

- contínua en un interval si la seva gràfica no sofreix "ruptures" (anomenades **discontinuitats**)
- **creixent (decreixent)** si el seu valor augmenta (disminueix) quan ho fa la variable independent
- **constant** quan sempre pren el mateix valor
- **parell** si la imatge de la variable independent coincideix amb el del seu oposat, **imparell** quan el valor de la funció per a l'oposat de la variable independent també és l'oposat
- **periòdica** si les imatges dels valors obtinguts en sumar una quantitat fixa (**periode**) a la variable independent coincideixen.





Demostració del teorema de Pitàgores

Tema 9

Geometria en el pla

Què aprendrem?

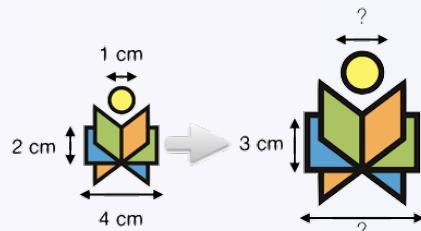
9.1 Semblança	115
9.2 Angles, longituds i àrees	116
9.3 Llocs geomètrics	120
9.4 Activitats	123

Abans de començar

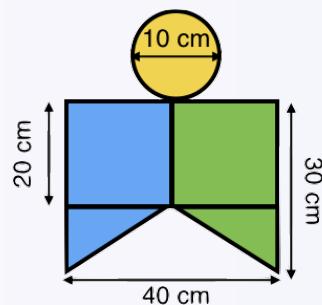
Nota:

Hem anat a la copisteria i hem fet una fotocòpia ampliada del logo del nostre centre.

- a) Quina ampliació ens han fet?
- b) Què valdran les mesures que falten?
- c) Què val l'àrea del cercle ampliat?



- d) A casa, estam dissenyant un logo similar amb les mides que apareixen en la figura. Ens agradaria saber quina quantitat de cartolina necessitam per poder fer la figura. Ens ajudes?



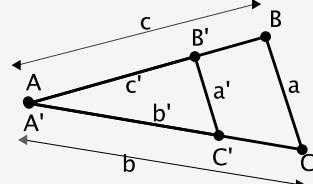
9.1 Semblança

Dues figures són semblants si són una còpia ampliada o reduïda una de l'altre (sense deformar-la).

Dues figures semblants **conserven tots els angles**. Els seus costats són tots proporcionals i la constant de proporcionalitat s'anomena **raó de la semblança r** .

Teorema de Tales: Dos triangles ABC i $A'B'C'$ són semblants si:

- Té dos angles iguals $\hat{A} = \hat{A}'$ i $\hat{B} = \hat{B}'$ o
- Els seus costats són proporcionals $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$



1. Indica si són semblants els següents parells de triangles:

- a) Un angle de 80° i un altre de 40° . Un angle de 80° i un altre de 60° .
- b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 70° . Triangle isòsceles amb angle igual de 50° .
- c) $A = 30^\circ$, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm. $A' = 30^\circ$, $b' = 3.5$ cm, $c' = 4.5$ cm
- d) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm. $a' = 10$ cm, $b' = 12.5$ cm, $c' = 24.5$ cm

2. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguin semblants:

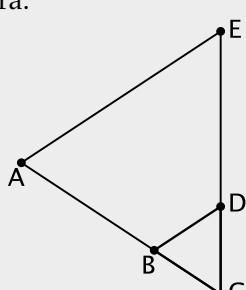
- a) $a = 9$ cm, $b = 6$ cm, $c = 12$ cm. $a' = 6$ cm, $b' = 4$ cm, $c' = ?$
- b) $A = 45^\circ$, $b = 8$ cm, $c = 4$ cm. $A' = 45^\circ$, $b' = 8$ cm, $a' = ?$

3. Na Maria mesura 160 cm i la seva ombra mesura 90 cm. En aquest mateix instant es mesura l'ombra d'un edifici i mesura 7,2 m. Quant mesura l'edifici?

4. Un triangle té costats de 6 cm, 7 cm i 7 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 60 cm. Quant mesuren els seus costats?

Exercici Resolt

1. Calcula \overline{CD} i \overline{BC} de la figura:



sabent que $\overline{AC} = 15$ cm, $\overline{CE} = 11$ cm, $\overline{BD} = 6.4$ cm i $\overline{AE} = 18$ cm.

Aplicam que els triangles \widehat{ACE} i \widehat{BCD} són semblants i, per tant, tots els seus costats són proporcionals.

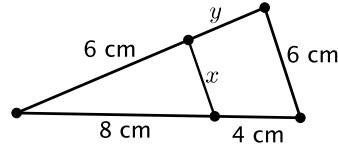
$$\frac{18}{6.4} = \frac{11}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \frac{6.4 \cdot 11}{18} = 3.9 \text{ cm}$$

i

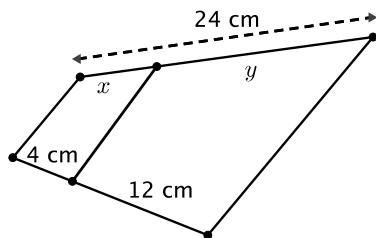
$$\frac{15}{\overline{BC}} = \frac{11}{3.9} \rightarrow \overline{BC} = \frac{15 \cdot 3.9}{11} = 5.3 \text{ cm}$$

5. Calcula els valors de x i y en les següents figures.

a)



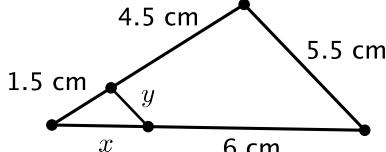
b)



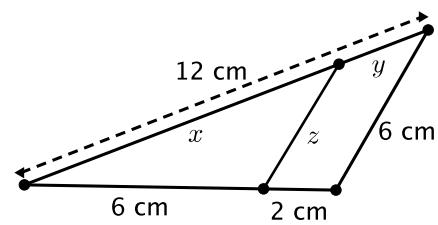
6. Un pal alt es subjecta amb cables d'acer que van del seu extrem superior al sòl. La distància de l'ancoratge d'un dels cables a la base del pal és 6 metres. Posem una barra de 120 centímetres de manera que està perpendicular al sòl i just toca el sòl i el cable. La seva distància a l'ancoratge del cable és 90 centímetres. Calcula la longitud del pal i la longitud del cable d'acer.

7. Calcula les longituds que s'indiquen:

a)



b)



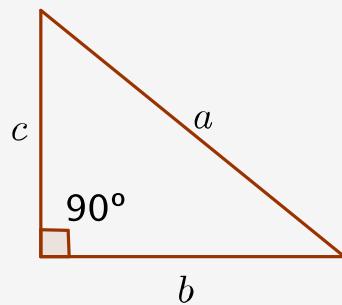
9.2 Angles, longituds i àrees

Per qualsevol triangle, la suma dels seus angles és $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Si un triangle té un angle de 90° , **triangle rectangle**, podem aplicar el **teorema de Pitàgories**:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

on a és la **hipotenusa** (el costat més llarg) i b i c els **catets**.

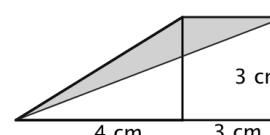


Si sabem els catets, la hipotenusa s'obté de $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Si ens falta un catet, aquest s'obté de $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ o $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

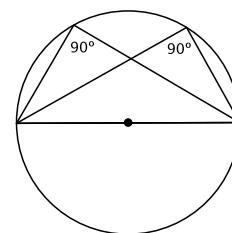
8. És possible trobar un triangle rectangle els catets del qual mesurin 5 i 12 cm i la seva hipotenusa 24 cm? Si la teva resposta és negativa, troba la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 5 i 12 cm. Utilitza calculadora per resoldre aquesta activitat si et resulta necessària.

- 9.** Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:
- 6 cm i 8 cm
 - 4 m i 3 m
 - 8 dm i 15 dm
 - 13,6 km i 21,4 km.
- 10.** Calcula la longitud del catet que falta en els següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:
- 26 cm i 10 cm
 - 17 m i 8 m
 - 37 dm i 35 dm
 - 14,7 km i 5,9 km
- 11.** ★ Calcula el costat x del quadrat de la figura següent:
-
- Fòrmules àrees**
- Trobareu un resum de les àrees de les figures planes a la pàgina 127.
- Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 9 m.
 - Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 2 cm.
 - ★ Calcula el volum d'un tetraedre regular de costat 7 dm.
 - Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 3 m.
 - Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 15 cm i altura 8 cm.
 - Una porteria de futbol mesura 7,32 m d'ample per 2,44 m d'alt. El punt de penal està a 10 metres. Calcula la distància que recorre la pilota en:
 - Un tir directe a la base del pal.
 - Un tir directe a l'esquadra.
 - Demostra que el diàmetre d'un quadrat de costat x és $d = \sqrt{2}x$.
 - Demostra que l'altura d'un triangle equilàter de costat x és $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.
 - Calcula els angles central i interior del triangle equilàter, quadrat, pentàgon regular, hexàgon regular i enneàgon regular.
 - Justifica que un hexàgon regular es pot descompondre en 6 triangles equilàters.

22. Dos angles d'un triangle isòsceles mesuren 35° i 72° , quant pot mesurar l'angle que falta?
23. Dos angles d'un trapezi isòsceles mesuren 35° i 72° , quant mesuren els angles que falten?
24. Quant mesura la suma dels angles interiors d'un decàgon irregular?
25. Calcula l'àrea i el perímetre d'un trapezi isòsceles de bases 50 cm i 26 cm i altura 5 cm.
26. Calcula l'àrea i perímetre d'un trapezi rectangle de bases 100 cm i 64 cm, i d'altura 77 cm.
27. Calcula l'àrea i el perímetre d'un trapezi isòsceles de bases 100 cm i 60 cm i costats laterals 29 cm.
28.  Utilitza el teorema de Pitàgores per determinar l'àrea i el perímetre de la zona ombrejada de la figura.

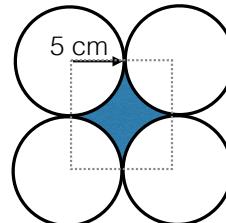
29. Tenint en compte que un hexàgon regular es pot dividir en sis triangles equilàters (l'altura de la qual és l'apotema de l'hexàgon regular), calcula l'àrea d'un hexàgon regular de 5 cm de costat.
30. Volem cobrir el pla amb polígons regulars de 100 cm^2 . Les úniques opcions possibles són el triangle equilàter, el quadrat i l'hexàgon. Calcula quina d'aquestes tres figures té menor perímetre. Quin animal aplica aquest resultat? [Utilitza la relació entre costat i altura d'un triangle equilàter obtinguda anteriorment]
31. Tales va observar que en qualsevol triangle rectangle el circumcentre sempre estava en el punt mitjà de la hipotenusa. Comprova aquest resultat.

32. Un angle inscrit en la circumferència que abasta un diàmetre és un angle recte. Per què? Raona la resposta.

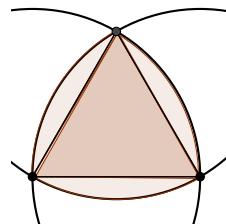


33. En quines posicions té un futbolista el mateix angle de tir que des del punt de penal?
34. La Terra és aproximadament una esfera de radi 6.379 km. Quant mesura l'Equador?
35. Antigament es definia un metre com: "*la deu milionèsima part del quadrant del meridià terrestre que passa per París*". Segons aquesta definició, quant mesura (en metres) el diàmetre terrestre?

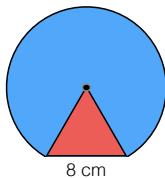
- 36.** Un far gira descriuint un arc de 170° . A una distància de 5 km, quina és la longitud de l'arc de circumferència en el qual es veu la llum?
- 37.** Determina l'àrea del triangle equilàter de 10 cm de radi.
- 38.** Calcula l'àrea tancada per una circumferència de radi 9 cm.
- 39.** Calcula l'àrea de la corona circular de radis 12 i 5 cm.
- 40.** Calcula l'àrea del sector circular i del segment circular de radi 6 cm i que forma un angle de 60° .
- 41.** Calcula l'àrea del sector de corona circular de radis 25 cm i 18 cm i que forma un angle de 60° .
- 42.**  Calcula l'àrea tancada entre aquests cercles de 5 cm de radi.



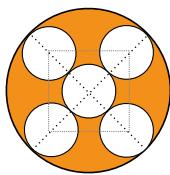
- 43.** Una figura típica de l'arquitectura gòtica es dibuixa a partir d'un triangle equilàter traçant arcs de circumferència amb centre en cadascun dels seus vèrtexs i que passen pels dos vèrtexs restants. Calcula l'àrea d'una d'aquestes figures si es construeix a partir d'un triangle equilàter de 2 metres de costat. Calcula l'àrea tancada entre aquests cercles de 5 cm de radi.



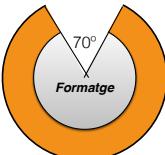
- 44.** Calcula l'àrea i el perímetre de la figura formada per un triangle equilàter de 8 cm de costat sobre el qual es construeix un sector circular.



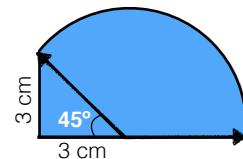
- 45.** Hi ha 5 circumferències inscrites en una circumferència de 12 cm de radi tal com indica la figura. Quant val l'àrea ombrejada?



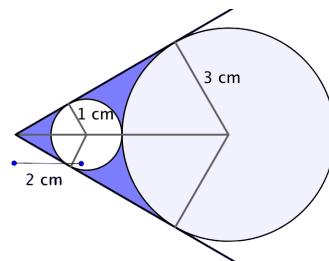
- 46.** Un formatge cilíndric té una base circular de 14 cm de diàmetre i una etiqueta circular de 8 cm de diàmetre. Es talla un tascó de 70° . Quina àrea té el tros d'etiqueta tallada?



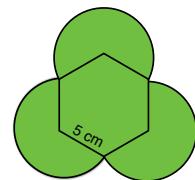
- 47.** A partir d'un triangle rectangle isòsceles de 3 cm de catet construïm un sector circular. Calcula l'àrea de la figura.



- 48.** En dues rectes que formen 60° s'inscriuen dues circumferències tangents entre si. La primera té el centre a 2 centímetres del vèrtex i el radi de 1 centímetre. La segona té de radi 3 centímetres. Quant val l'àrea ombrejada?



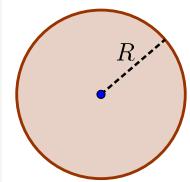
- 49.** Tracem tres arcs circulars des de tres vèrtexs d'un hexàgon de 5 cm de costat. Calcula l'àrea i el perímetre de la figura.



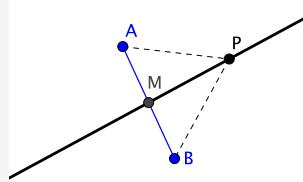
9.3 Llocs geomètrics

Un **lloc geomètric** està format per un conjunt de punts del pla que compleixen una determinada condició.

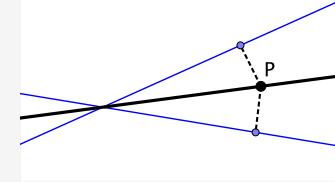
- **Circumferència:** Està format per tots els punts del pla que equidisten d'un punt anomenat centre. Aquesta distància li deim radi.
- **Mediatriu:** Conjunt de punts que equidisten dels extrems d'un segment \overline{AB} . És una recta que passa pel punt mitjà $M = \frac{A+B}{2}$ del segment i és perpendicular a ell.
- **Bisectriu:** Conjunt de punts que equidisten de dues rectes. És una recta que divideix un angle en dues parts iguals.



Circumferència



Mediatriu



Bisectriu

Considerau un triangle de vèrtexs ABC :

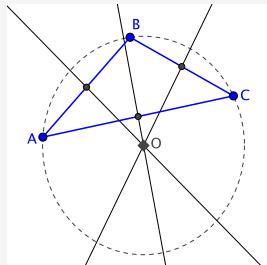
- **Mediana al costat AB** : és la recta que passa pel punt mitjà del segment \overline{AB} i pel vèrtex oposat C .
- **Altura al costat AB** : És la recta que passa pel vèrtex oposat C i és perpendicular al segment \overline{AB} .

Si en un triangle hi dibuixam les tres **mediatrius** als seus treus costats veim que es tallen en un punt anomenat **circumcentre** (O). El circumcentre és el centre de la circumferència circumscrita en el triangle.

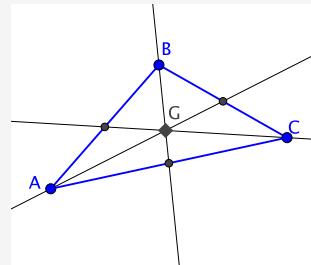
Si en un triangle hi dibuixam les tres **bisectrius** interiors als seus treus angles veim que es tallen en un punt anomenat **incentre** (I). L'incentre és el centre de la circumferència inscrita en el triangle.

Si en un triangle hi dibuixam les tres **medianes** als seus treus costats veim que es tallen en un punt anomenat **baricentre** (G). El baricentre és el centre de gravetat del triangle.

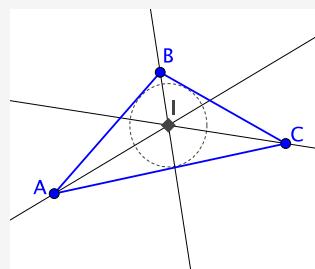
Si en un triangle hi dibuixam les tres **altures** als seus treus costats veim que es tallen en un punt anomenat **ortocentre** (H).



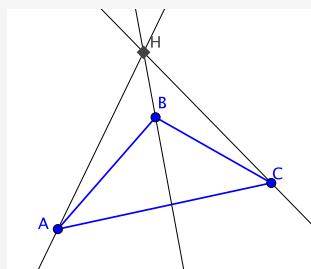
Mediatrius – Circumcentre



Medianes – Baricentre



Bisectrius – Incentre



Altures – Ortocentre

50. Dibuixa un triangle isòsceles amb l'angle desigual de 40° . Traça les rectes notables per al costat desigual i per a un dels costats iguals. Què passa?
51. Volem situar un fanal en una plaça triangular. On el posaríem?
52. Una formiga camina per una mediana d'un triangle partint del vèrtex. Quan arriba al baricentre ha recorregut 8 centímetres. Quina distància li falta per arribar al punt mitjà del costat oposat al vèrtex d'on va partir?
53. Tenim un camp triangular sense tancar i volem lligar una cabra de manera que no surti del camp però que accedeixi al màxim de pastura possible. On posaríem el pal?

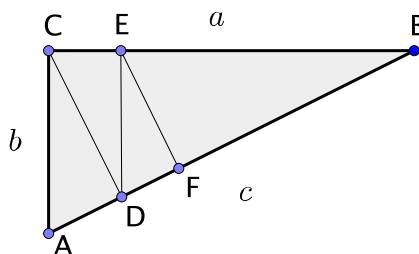
54. Na Iaissa i al seu germà Aitor els encanta el pastís. La seva mare els ha fet un triangular. Iassa l'ha de tallar però Aitor triarà primer el seu tros. Com hauria de tallar Iaissa el pastís?
55. Comprova que el circumcentre d'un triangle rectangle està sempre en el punt mitjà de la hipotenusa. On està l'ortocentre?
56. El baricentre és el centre de gravetat. Construeix un triangle de cartolina i dibuixa el seu baricentre. Si poses el triangle horitzontalment en l'aire només subjectat per la punta d'un llapis en el baricentre comprovaràs que se subjecta.
57. Calcula el costat d'un triangle equilàter inscrit en una circumferència de 10 cm de radi. [Ajuda: Aplica que en aquest cas el circumcentre coincideix amb el baricentre i que aquest últim està al doble de distància del vèrtex que del costat oposat.]
58.  El *baricentre* divideix a la mediana en dues parts, essent una part dos terços de l'altra. Comprova-ho.
59.  La recta de *Euler* passa pel *circumcentre*, el *baricentre* i l'*ortocentre*, però l'*incentre* no sempre pertany a la recta de *Euler*. Com ha de ser el triangle perquè hi pertanyi?
60. Un agricultor troba en el seu camp una bomba de la Guerra Civil. Les autoritats estableixen una distància de seguretat de 50 metres. Com s'ha d'acordonar la zona?
61. Un joc de dos participants consisteix que se situen a una distància de dos metres entre ells i es posen diverses banderes a la mateixa distància de tots dos. La primera a 5 metres, la segona a 10 metres, la tercera a 15 i així successivament. Sobre quina línia imaginària estarien situades les banderes?
62. Quan en una acampada ens seiem al voltant del foc ho fem formant un cercle. Per què?
63. Utilitza regla i compàs per dibuixar la bisectriu d'un angle i la mediatriu d'un segment.
64. Dibuixa en el teu quadern un triangle de costats 7, 6 i 4 cm. Traça en ell les circumferències inscrites i circumscrites.
65. Dibuixa en el teu quadern un triangle de costat 8 cm i angles adjacents al mateix de 40° i 30° . Troba el seu ortocentre i el seu baricentre.
66. Dibuixa en el teu quadern un triangle amb un angle de 40° comprès entre dos costats de 6 i 4 cm. Obté el seu circumcentre i el seu incentre.
67. Com són les rectes i els punts notables en un triangle equilàter?

9.4 Activitats

Semblança

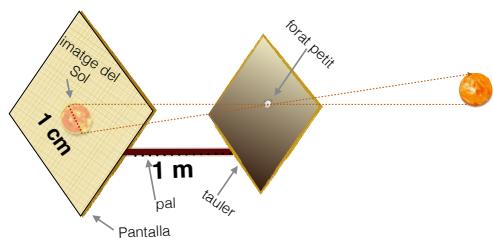
- 68.** Indica si són semblants els següents parells de triangles:
- Un angle de 70° i un altre de 20° . Un angle de 90° i un altre de 20° .
 - Triangle isòsceles amb angle desigual de 80° . Triangle isòsceles amb un angle igual de 50° .
 - $A = 40^\circ$, $b = 8 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$. $A' = 40^\circ$, $b' = 4 \text{ cm}$, $c' = 5 \text{ cm}$
 - $a = 3 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$. $a' = 9 \text{ cm}$, $b' = 12 \text{ cm}$, $c' = 19 \text{ cm}$
- 69.** Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguin semblants:
- $a = 15 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$, $c = 12 \text{ cm}$. $a' = 10 \text{ cm}$, $b' = 4 \text{ cm}$, $c' = ?$
 - $A = 50^\circ$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$. $A' = 50^\circ$, $b' = 18 \text{ cm}$, $a' = ?$
- 70.** Les longituds dels costats d'un triangle són 12 cm , 14 cm i 14 cm . Un triangle semblant a ell té un perímetre de 90 cm . Quant mesuren els seus costats?
- 71.** Dibuixa en el teu quadern un pentàgon regular. Traça les seves diagonals. El triangle format d'una banda del pentàgon i les dues diagonals del vèrtex oposat es denomina triangle auri, ja que en dividir el costat major entre el menor s'obté el nombre d'or, quant mesuren els seus angles? Cerca en la figura que has traçat altres triangles auris. Quina és la relació de proporcionalitat?
- 72.** L'ombra d'un edifici mesura 15 m , i la del primer pis 2 m . Sabem que l'alçada d'aquest primer pis és de 3 m , quant mesura l'edifici?
- 73.** En el museu de Bagdad es conserva una tauleta en la qual apareix dibuixat un triangle rectangle ABC , de costats $a = 60$, $b =$

$= 45$ i $c = 75$, subdividit en 4 triangles rectangles menors ACD , CDE , DEF i EFB , i l'escriba calcula la longitud del costat AD com 27 . Ha utilitzat la semblança de triangles? Com es podria calcular? Quines dades necessites? Calcula l'àrea del triangle ABC i del triangle ACD . Determina la longitud dels segments CD , DE i EF .



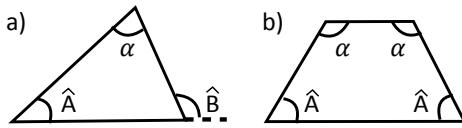
- 74.** Unint els punts mitjans dels costats d'un triangle s'obté un altre triangle. Com són? Quina relació hi ha entre els seus perímetres? I entre les seves àrees?
-
- 75.** Demostra que en dos triangles semblants les medianes són proporcionals.
- 76.** Un triangle rectangle isòsceles té un catet de longitud 7 cm , igual a la hipotenusa d'un altre triangle semblant al primer. Quant valen les àrees de tots dos triangles?
- 77.** El mapa a escala $1:3000000$ d'un poble té un àrea de 2500 cm^2 , quant mesura la superfície vertadera d'aquest poble?
- 78.** L'alçada i la base d'un triangle rectangle mesuren respectivament 4 i 7 cm ; i és semblant a un altre de base 26 cm . Calcula l'alçada del nou triangle i les àrees de tots dos.

- 79.**  Per determinar el radi del Sol realitzam el següent experiment. Dirigim l'aparell de la figura cap el Sol i mesuram la mida de la taca es forma sobre la pantalla. Sabent que la llargària de l'aparell és de 1 m i la mida de la taca és aproximadament 1 cm, troba el radi del Sol. Hauràs de menester la distància entre la Terra i el Sol 1 u.a.=150 000 000 km.



■ Angles, longituds i àrees

- 80.** Explica com es pot trobar el valor de l'angle desconegut α en cadascun dels casos següents:



Redacta la teva resposta 

- 81.** Calcula la longitud del costat d'un octògon regular inscrit en una circumferència de radi 5 cm.
- 82.** Calcula l'apotema d'un hexàgon regular costat 7 cm.
- 83.** Calcula l'àrea d'un cercle la circumferència del qual mesura 50 cm.
- 84.** Calcula la longitud d'una circumferència el cercle de la qual té una superfície de mesura 50 cm^2 .
- 85.** La Terra fa una volta cada 24 hores, a quina velocitat es mou un punt sobre l'Equador?

- 86.** ★ Quina relació hi ha entre les àrees un triangle inscrit en un cercle i la del cercle?

- 87.** En augmentar en 3 cm el costat d'un quadrat la seva àrea augmenta 32 cm^2 . Quant mesura el costat de aquests quadrats?

- 88.** Es vol cobrir un terreny circular de 25 m de diàmetre amb graveta, tirant 10 kg per cada metre quadrat. Quanta graveta es necessita?

- 89.** Una escala de 4 m de longitud està recolzada sobre una paret. El peu de l'escala dista 1,5 m de la paret. Quina altura aconsegueix l'escala sobre la paret?

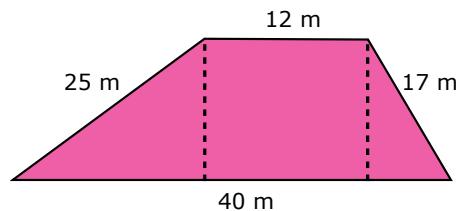
- 90.** Calcula l'àrea de la circumferència circumscrita a un rectangle de costats 7 i 9 cm.

- 91.** Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de 3 cm de costat. Allarga els costats de l'-hexàgon i dibuixa un hexàgon estrellat. Calcula la seva àrea.

- 92.** El senyal de tràfic de STOP té forma d'octògon regular. La seva altura mesura 90 cm, i el seu costat 37 cm, quant mesura la seva superfície?



- 93.** ★ Calcula l'altura del trapezi de la figura. Després calcula'n l'àrea.



- 94.** Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 10 cm.

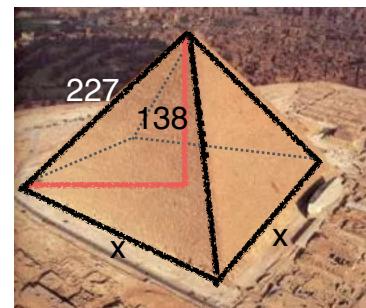
- 95.** Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de perímetre 60 cm.

- 96.** Calcula l'àrea d'un trapezi isòsceles de base menor 5 cm, costat 3 cm i altura 4 cm.

- 97.** Calcula l'àrea d'un trapezi isòsceles de bases 8 i 6 cm i costat 3 cm.
- 98.** Calcula l'àrea i el perímetre d'un rectangle de costat 4 cm i diagonal 7 cm.
- 99.** Calcula l'àrea i el perímetre d'un quadrat de diagonal 9 cm.
- 100.** Calcula l'àrea i el perímetre d'un triangle isòsceles de base 8 cm i altura 6 cm.
- 101.** Un triangle mesura d'altura π i de base $\pi + 1$. És rectangle?
- 102.** Dibuixa un triangle rectangle isòsceles de catets de longitud 1, quant mesura la hipotenusa? Prenent aquesta hipotenusa com a catet i amb l'altre catet igual a 1 dibuixa un nou triangle rectangle. Quant mesura la nova hipotenusa? Continua el procés 4 vegades, quant mesura l'última hipotenusa?
- 103.** Dibuixa un triangle rectangle de catets de longitud 1 i 2 cm, quant mesura la hipotenusa? Prenent aquesta hipotenusa com a catet i amb l'altre catet de longitud 1 cm dibuixa un nou triangle rectangle. Quant mesura la nova hipotenusa? Continua el procés 3 vegades, quant mesura la darrera hipotenusa?
- 104.** Calcula l'altura d'una piràmide regular quadrangular de costat de la base 10 m i d'aresta 15 m.
- 105.** Calcula la generatriu d'un con de radi de la base 5 m i d'altura 7 m.
- 106.** Dos ascetes hindús viuen a la part alta d'un penya-segat de 10 m d'altura el peu del qual està a 200 metres del poble més proper. Un dels ascetes baixa del penya-segat i va al poble. L'altre, que és mag,

ascendeix una distància x i viatja volant en línia recta al poble. Tots dos recorren la mateixa distància. Quant ha ascendit el mag?

- 107.** Quant mesura l'aresta de la base de la piràmide de Kheops si mesura 138 m d'altura i 227 m d'aresta?



Llocs geomètrics

- 108.** Dibuixa en el teu quadern un triangle de costats 2 cm, 3 cm i 4 cm. Traça en ell, utilitzant regla i compàs, les mediatrius i bisectrius. Determina el circumcentre i l'incentre. Traça les circumferències inscrites i circumscrites.
- 109.** Dibuixa en el teu quadern un triangle de costat 5 cm i angles adjacents al mateix de 30° i 50° . Traça en ell, utilitzant regla i compàs, les medianes i les altures. Determina el seu ortocentre i el seu baricentre.
- 110.** Dibuixa en el teu quadern un triangle amb un angle de 50° comprès entre dos costats de 5 i 8 cm. Obté el seu circumcentre i el seu incentre.
- 111.** Com són les rectes i punts notables d'un triangle rectangle?
- 112.** Com són les rectes i punts notables d'un triangle isòsceles?



Autoavaluació

1. Tots els punts que estan a la mateixa distància de dos punts donats estan en:
 a) una bisectriu b) una circumferència c) una el·lipse d) una mediatriu

2. Les tres medianes d'un triangle es tallen en el:
 a) ortocentre b) baricentre c) incentre d) circumcentre

3. El circumcentre és el centre de:
 a) gravetat del triangle b) la circumferència inscrita
 c) la circumferència circumscrita

4. Dos triangles són semblants si:
 a) tenen dos angles iguals b) tenen dos costats proporcionals
 c) tenen un angle igual d) les seves àrees són semblants

5. Sabem que els triangles ABC i $A'B'C'$ són semblants. Calcula el valor de a' i c' perquè el siguin, sabent que $a = 10$ cm, $b = 6$ cm, $b' = 3$ cm, $c = 8$ cm:
 a) $a' = 4$ cm i $c' = 6$ cm b) $a' = 5$ cm i $c' = 6$ cm
 c) $a' = 4$ cm i $c' = 4$ cm d) $a' = 5$ cm i $c' = 4$ cm

6. Si la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 7 cm i un catet mesura 3 cm, llavors l'altre catet mesura aproximadament:
 a) 6,3 cm b) 5 cm c) 5,8 cm d) 6,9 cm

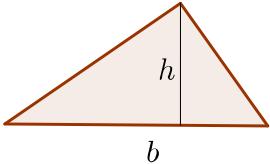
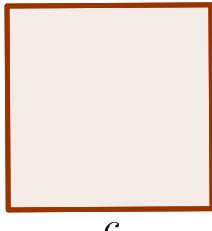
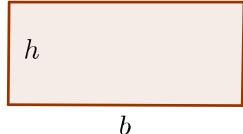
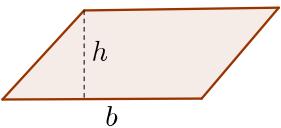
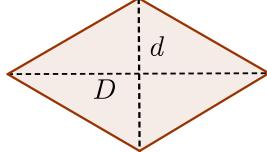
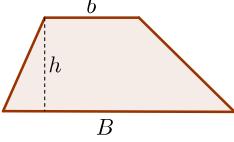
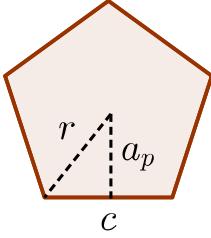
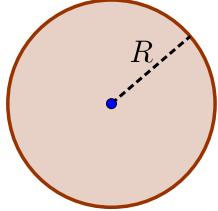
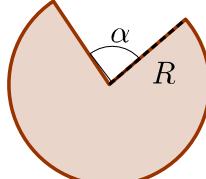
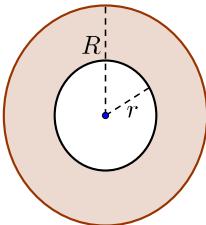
7. La suma dels angles interiors d'un polígon irregular de deu costats val:
 a) 1440° b) 1620° c) 1800° d) 1260°

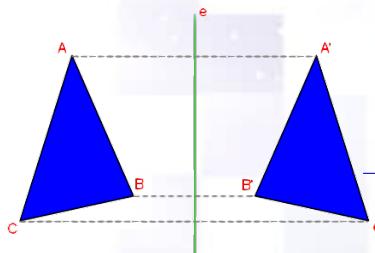
8. L'àrea d'un rombe de costat 5 cm i una diagonal de 8 cm mesura:
 a) 48 cm^2 b) $36,7 \text{ cm}^2$ c) 24 cm^2 d) $21,2 \text{ cm}^2$

9. L'angle central de l'inscrit en la circumferència que abasta un angle de 72° mesura:
 a) 720° b) 108° c) 36° d) 144°

10. La longitud de la circumferència i l'àrea del cercle de radi 3 cm són respectivament:
 a) 6π cm i 9π cm 2 b) 9π cm i 6π cm 2 c) 3π cm i 3π cm 2 d) 18 cm i 27 cm 2

Resum

Triangle	Quadrat
 $Area = \frac{b \cdot h}{2}$	 $Area = c^2$
Rectangle	Paral·lelogram
 $Area = b \cdot h$	 $Area = b \cdot h$
Rombe	Trapezi
 $Area = \frac{D \cdot d}{2}$	 $Area = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Poligon regular	Cercle
 $Area = \frac{P \cdot a_p}{2}$ P : perímetre a_p : apotema	 $Area = \pi R^2$ $L = 2\pi R$
Sector circular	Corona circular
 $Area = \pi R^2 \frac{\alpha}{360}$ $L = 2\pi R \frac{\alpha}{360}$	 $Area = \pi(R^2 - r^2)$



Tema 10

Moviments en el pla i l'espai

Simetria especular. És la imatge que forma un mirall.

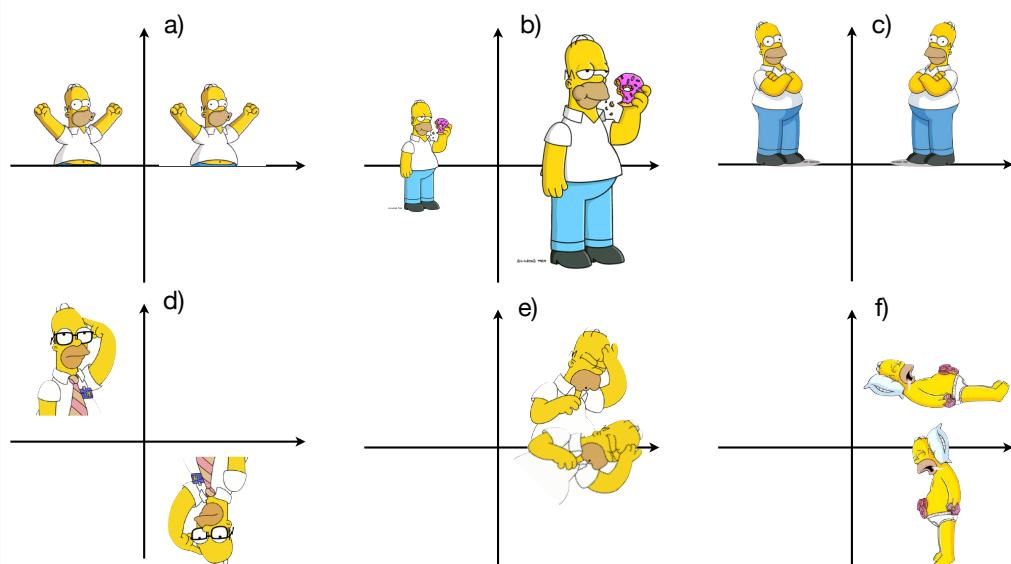
Què aprendrem?

10.1 Transformacions geomètriques	129
10.2 Translacións	129
10.3 Girs o rotacions	132
10.4 Simetries	133
10.5 Mosaics, frisos i rosasses	135

Abans de començar

Nota:

Observa les imatges. Descriu en cada cas com s'han obtingut els diferents personatges a partir de l'inicial.



Sabries col·locar el nom de cada transformació?

Homotècia, Simetria central, Translació, Simetria axial, Gir.

10.1 Transformacions geomètriques

Una **transformació geomètrica** converteix cada punt del pla en un altre punt. Una figura es transforma en una altra figura.

Les transformacions que estudiarem són: La translació, l'homotècia, la simetria axial i central i els girs o rotacions.

1. En el teu quadern dibuixa un triangle. Calca-ho i copia la figura calcada de nou en el teu quadern. Mesura tots els costats de les figures homòlogues. Mesuren el mateix? Mesura tots els seus angles. Mesuren el mateix?
2. Dibuixa en el teu quadern una lletra **B** i fes un disseny amb ella, traslladant-la, girant-la o dibuixant lletres **B** simètriques.
3. En el teu quadern dibuixa una lletra **b** minúscula, i a continuació una altra lletra **b** minúscula el doble de gran. Com són les seves longituds i els seus angles? És una semblança?
4. Dibuixa ara una lletra **d** minúscula. És semblant a la lletra **b** anterior?
5. En el teu quadern marca una trama formada per quadrats de dos quadradets de costat. En un quadradet dibuixa una taca, una poligonal, una línia corba... Dibuixa la simètrica prenent com a eix de simetria un costat del quadrat. Dibuixa la figura simètrica del conjunt obtingut prenent com a eixos sempre els costats de la trama inicial. Acoloreix la figura obtinguda. Trasllada-la horitzontal i verticalment.

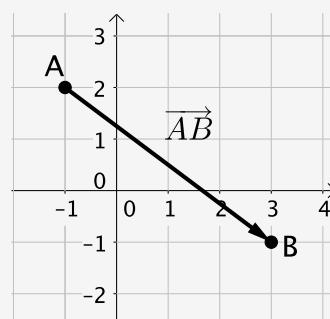
10.2 Translacions

Vectors

Donats dos punts A i B , definim el vector fix \vec{AB} com el segment orientat que els uneix. A és el punt d'**origen** i B és l'**extrem** del vector.

Per calcular el vector restam les components dels punts.

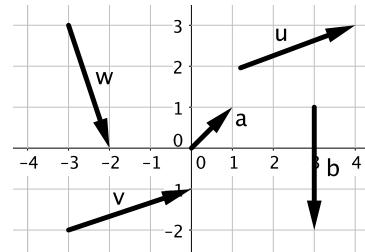
Per exemple, si $A(-1, 2)$ i $B(3, -1)$, $\vec{AB} = B - A = (3, -1) - (-1, 2) = (4, -2)$. Això significa que per anar de A cap a B avançam 4 unitats en x i baixam 2 unitats en y .



6. Dibuixa en el teu quadern els punts de coordenades $A(-5, 2)$, $B(-1, 6)$ i $C(2, -3)$. Troba les coordenades dels vectors fixos \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{BC} , \vec{CA} i \vec{CB} . Comprova en el teu dibuix que aquestes són les seves coordenades.

7. El vector fix \vec{AB} té de coordenades $(4, 2)$, calcula les coordenades del seu origen A sabent que les coordenades de la seva extrem B són $(-1, 1)$. Representa-ho gràficament.

8. Escriu les coordenades dels vectors fixos de la figura i indica quins són representants d'un mateix vector lliure.



9. Les coordenades de A són $(2, 3)$ i les del vector fix \vec{AB} són $(4, -2)$. Calcula les coordenades del punt B . Representa-ho gràficament.
10. Dibuixa en el teu quadern quatre vectors equipol·lents al vector fix amb origen en $A(-3, 4)$ i extrem $B(5, 0)$, amb orígens en els punts $C(0, 3)$, $D(5, 2)$, $E(-4, 0)$ i $F(-2, -5)$.
11. Dibuixa en el teu quadern els punts $A(-2, 2)$, $B(-3, 0)$, $C(2, 4)$, $D(6, 2)$, $E(2, 0)$, $F(6, -2)$ i $G(2, -4)$. Amb els vectors fixos d'origen i extrem en aquests punts, indica quins d'ells són equipol·lents.
12. Amb els punts de l'exercici anterior, calcula les coordenades dels vectors fixos \vec{DE} i \vec{FG} . Com són? Són dos representants d'un mateix vector lliure?
13. Dibuixa en el teu quadern un sistema de referència cartesià i assenyala en ell els punts de coordenades: $A(4, 5)$, $B(-5, 6)$ i $C(2, -5)$.
- Anomena \vec{u} al vector fix \vec{AB} i indica els seus components.
 - Anomena \vec{v} al vector fix \vec{BC} i indica els seus components.
 - Calcula les components del vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.
 - Representa en el teu quadern els vectors lliures \vec{u} i \vec{v} amb origen en l'origen de coordenades i representa també al vector suma \vec{w} . Observa que està sobre la diagonal del paral·lelogram construït sobre \vec{u} i \vec{v} .

Operacions amb vectors lliures

Donats els vectors $\vec{v} = (-2, 3)$ i $\vec{u} = (5, 4)$ podem realitzar les següents operacions

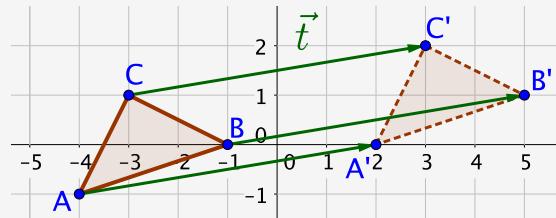
- Multiplicar un vector per un número: $5\vec{v} = 5(-2, 3) = (-10, 15)$
- Sumar dos vectors: $\vec{v} + \vec{u} = (-2, 3) + (5, 4) = (3, 7)$
- Restar dos vectors: $\vec{v} - \vec{u} = (-2, 3) - (5, 4) = (-7, -1)$
- Fer una combinació lineal: $3\vec{v} - 2\vec{u} = 3(-2, 3) - 2(5, 4) = (-6, 9) - (10, 8) = (-16, 1)$

14. Efectua les següents operacions amb els vectors $\vec{u} = (-5, 6)$, $\vec{v} = (4, -7)$ i $\vec{w} = (3, 4)$:
- $2\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w})$
 - $3\vec{w} - 2\vec{u} + \vec{v}$
 - $2(\vec{u} + \vec{v}) - 3\vec{w}$

- 15.** Dibuixa en el teu quadern el punt $A(1, 2)$, dibuixa ara el vector $\vec{u} = (2, 3)$ amb origen en A , i el vector $\vec{v} = (4, -1)$ també amb origen en A . Calcula les coordenades del vector suma $\vec{u} + \vec{v}$, i dibuixa-ho amb origen en A . El resultat coincideix amb el que has obtingut gràficament? Observa que el vector suma és la diagonal d'un paral·lelogram construït sobre \vec{u} i \vec{v} .
- 16.** Efectua les següents operacions amb vectors:
- $(5, -9) - [(6, 3) + (-4, -6)]$
 - $3 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4, 8)$
 - $5 \cdot [(-1, 0) - (-2, 3)] + (-3) \cdot [(4, -2)]$
 - $9 \cdot 3 \cdot (2, 6) + (3 \cdot 7, 5 \cdot 2)$

■ Translació

Una translació de vector \vec{t} és una transformació que fa corresponent a cada punt P de la figura inicial el nou punt $P' = P + \vec{t}$.



Si a una figura li feim una translació \vec{t}_1 seguida d'una translació \vec{t}_2 , el resultat és equivalent a fer una única translació de vector $\vec{t} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$.

- 17.** Dibuixa en el teu quadern una figura i utilitza escaire i cartabó per traslladar-la 5 centímetres cap a la dreta.
- 18.** Dibuixa en el teu quadern una figura. (Si no se t'ocorre cap altra, dibuixa la lletra G). Col-loca damunt un paper vegetal i calca-la. Desplaça en línia recta el paper vegetal i torna a calcar la figura. Les dues figures que has obtingut, tenen totes les seves mesures, tant longituds com a angles, iguals? Traça les rectes que uneixen parells de punts corresponents, com són aquestes rectes? Quina trajectòria han seguit els punts en el desplaçament?
- 19.** Trasllada una figura (per exemple una lletra L) mitjançant el vector $\vec{t}_1 = (-4, 5)$ i repeteix el procés amb la figura traslladada emprant el vector $\vec{t}_2 = (3, -6)$. Quin moviment utilitzes per anar de la primera figura a l'última? És una translació? Quin és el seu vector?
- 20.** Utilitza paper quadriculat i dibuixa en el teu quadern una lletra F de 2 quadradets d'alt i 1 quadradet d'ample. A aplica-li una translació de vector $(2, 5)$.
- 21.** Dibuixa en el teu quadern uns eixos cartesians i el triangle de vèrtexs $A(3, 1)$, $B(3, 3)$ i $C(1, 3)$. Aplica-li la translació de vector $(4, 2)$: 4 unitats a la dreta i 2 unitats cap amunt. Quins són les coordenades dels punts traslladats A' , B' i C' ?
- 22.** Representa gràficament la recta $r : y = 4x - 3$ i el vector $\vec{t}(1, 4)$. Comprova que si traslladam la recta r segons el vector \vec{t} obtenim la mateixa recta.

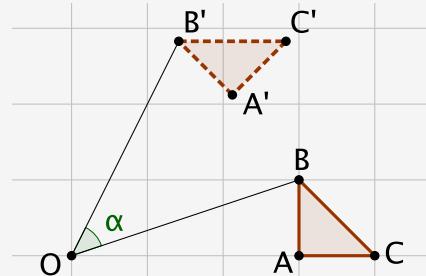
10.3 Girs o rotacions

Girs

Un gir de centre O i angle α és una transformació que fa corresponder a cada punt P de la figura inicial el nou punt P' , tal que:

$$\overline{OP} = \overline{OP'} \text{ i } \widehat{POP'} = \alpha$$

Quan l'angle és positiu, el gir és en sentit antihorari (contrari a les agulles del rellotge).

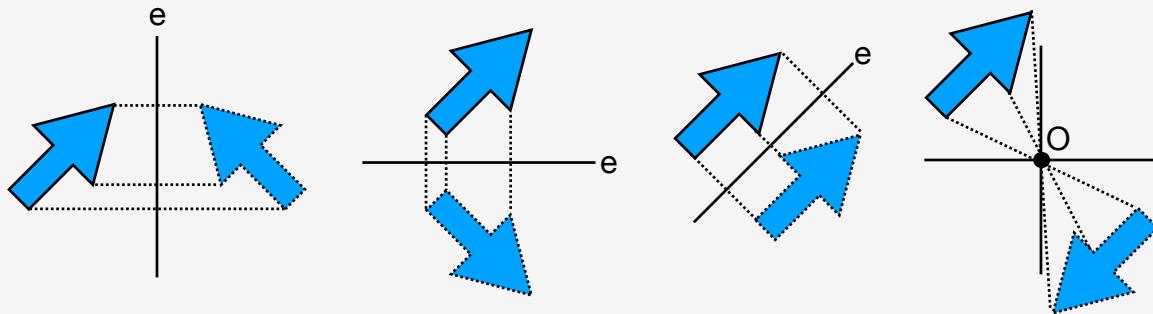


23. Dibuixa en el teu quadern un punt O i un altre punt diferent A . Gira al punt A amb centre en O un angle de 30° en sentit positiu i denomina A' el punt girat.
24. Dibuixa en el teu quadern un punt O i dos segments, un OA que passa per O , i un altre BC que no passa per O . Dibuixa els segments girats OA' i $B'C'$ del gir de centre O i angle 60° .
25. Dibuixa en el teu quadern el triangle de vèrtexs $A(4, 2)$, $B(3, -2)$ i $C(5, 0)$. Dibuixa el triangle que s'obté en girar-ho amb centre en l'origen de coordenades un angle de 90° en sentit positiu. Quines són les coordenades dels vèrtexs A' , B' i C' del triangle girat?
26. Amb ajuda de paper quadriculat, transforma mitjançant un gir, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza els resultats.
27. Dibuixa en el teu quadern dos punts qualssevol P i P' . Troba el seu centre de simetria.
28. Què ocorre en aplicar un gir de 60° a una figura? Hi ha rectes invariants? I en un gir de 180° ? Les rectes que passen pel centre de gir, en quines rectes es transformen? I amb un gir de 0° ? I amb un gir de 360° ?
29. Dibuixa un triangle ABC i el seu simètric $A'B'C'$ respecte un punt O . Com són els seus costats? Són iguals? I els seus angles? Es manté el sentit dels angles? Comprova com és l'angle ABC i l'angle $A'B'C'$. És un moviment directe?
30. Anem a analitzar les lletres majúscules. Indica quines de les següents lletres no tenen simetria central i quines si la tenen, indicant llavors el seu centre de simetria: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recorda, cerques un punt tal que la simetria central de centre en aquest punt deixi invariant a la lletra.
31. Mitjançant un gir en l'espai, en què es transforma un pla? I una esfera? I un con? I dos plans paral·lels? I dos plans ortogonals? Analitza els resultats.

10.4 Simetries

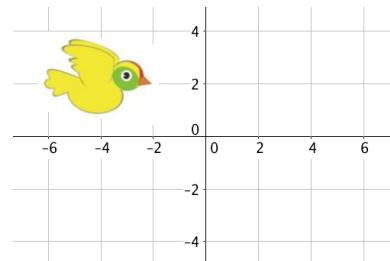
S'anomena una **simetria d'eix** e a una transformació que fa corresponent a cada punt P un altre punt P' de tal forma que la recta e és la mediatriu del segment $\overline{PP'}$.

S'anomena una **simetria central** a una transformació que fa corresponent a cada punt P un altre punt P' de tal forma que l'origen de coordenades $O(0, 0)$ és el punt mitjà del segment $\overline{PP'}$. Aquesta simetria equival a un gir de 180° respecte l'origen.



Diferent tipus de simetries: D'eix vertical, eix horitzontal, eix oblic i simetria central.

32. Dibuixa en el teu quadern un eix r de simetria oblic, i un punt P . Dibuixa el punt P' simètric respecte de r . Comprova que la recta r és la mediatriu del segment PP' . (Recorda: La mediatriu d'un segment és la perpendicular pel punt mitjà).
33. Dibuixa en el teu quadern dos punts qualssevol P i P' . Dibuixa l'eix de simetria r respecte al que són simètrics.
34. Dibuixa en paper quadriculat una lletra **L** i un eix de simetria vertical. Dibuixa una **L** simètrica respecte a aquest eix. Calca una d'elles, i mou el paper de calc per intentar fer-les coincidir. Nota que és impossible; perquè la simetria és un moviment invers.
35. Dibuixa en el teu quadern una figura. Dibuixa un eix de simetria oblic i dibuixa la figura simètrica.
36. Troba les coordenades dels vèrtexs del triangle simètric respecte de l'eix d'ordenades OY del triangle $A(3, -4)$, $B(5, 6)$ i $C(-4, 5)$. Repeteix per l'eix d'abscisses.
37. Reproduceix en el teu quadern la figura de l'ocell P del marge.
 - Dibuixa l'ocell P' simètric respecte a l'eix d'ordenades.
 - Dibuixa l'ocell P'' simètric respecte a l'eix d'abscisses.
 - Existeix alguna simetria axial que transformi P' en P'' ? Existeix alguna simetria central que transformi P' en P'' ?
 - Si el bec de l'ocell P tingués unes coordenades $(-2, 2)$, quines coordenades tindria el bec de l'ocell P' ? I el de l'ocell P'' ?



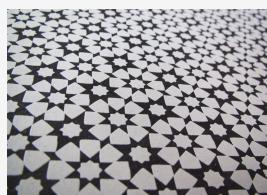
- 38.** Indica quines de les lletres majúscules són simètriques, i si ho són, indica si els seus eixos de simetria són horitzontals o verticals: A, B, D, F, K, M, N, R, T, O, V, W.
- 39.** Amb ajuda de paper quadriculat, transforma mitjançant una simetria, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza la resposta.
- 40.** Dibuixa un rectangle $ABCD$. Dibuixa l'eix de simetria que transforma AB en CD , i l'eix de simetria que transforma AD en BC .
- 41.** Dibuixa un hexàgon regular i dibuixa els seus eixos de simetria. Quants té? Fes el mateix per un pentàgon regular.
- 42.** Dibuixa en el teu quadern dos eixos de simetria paral·lels i una lletra F. Dibuixa la composició d'ambdues simetries a aquesta lletra, comprovant que la composició d'elles és una translació i determina el vector de translació.
- 43.** Dibuixa en el teu quadern dos eixos de simetria secants i una lletra F. Dibuixa la composició d'ambdues simetries a aquesta lletra, comprovant que la composició d'elles és un gir i determina el centre i l'angle de gir.
- 44.** Si apliquem una simetria a una figura, quina transformació hem d'aplicar-li per obtenir la figura inicial?
- 45.** La composició de dues simetries planes d'eixos secants és un gir. Com han de ser els eixos perquè sigui un gir de 180° (o una simetria central)?
- 46.** Escriu cinc objectes que estiguin al teu al voltant que siguin simètrics i indica el seu pla de simetria. Mira a l'aula i busca simetries. Són simètriques les cadires, el llum, la finestra, les taules...? Quin és el seu pla de simetria?
- 47.** Defineix els plans de simetria i els eixos de rotació de les següents figures:
- Un prisma recte de base quadrada. I si és oblic?
 - Una piràmide recta de base quadrada.
 - Si el prisma i la piràmide són rectes, però les seves bases són rectangles, quines simetries es mantenen?
- 48.** Determina els plans de simetria i els eixos de rotació d'aquestes figures:
- Un prisma recte la base del qual és un triangle equilàter.
 - Una piràmide recta de base un triangle equilàter. I si és obliqua?
 - Si el prisma i la piràmide són rectes però de base un triangle isòsceles, quines simetries es mantenen?
- 49.** Mitjançant una simetria especial, en què es transforma un pla? I una esfera? I un con? I dos plans paral·lels? I dos plans ortogonals? Analitza els resultats.
- 50.** Quins són els punts invariants d'una simetria axial? I les rectes invariants?

10.5 Mosaics, frisos i rosasses

Un **mosaic o teselació** és una obra composada per una sèrie de figures que s'ajusten perfectament a les seves veïnes per a cobrir completament una superfície sense deixar forats ni produir solapaments. S'obtenen a partir de translacions d'un motiu elemental.

Es diu **fris o sanefa** a un cobriment de la regió de l'espai limitada per dues rectes paral·leles. Els frisos són cobriments de regions de longitud infinita però d'amplada finita. S'obtenen a partir de translacions d'una figura elemental.

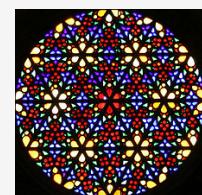
Una **rosassa o rosetó** és element decoratiu que s'utilitza majoritàriament en esglésies i catedrals. Un rosetó important és el de la seu de Mallorca. S'obtenen a partir de girs d'una figura elemental.



Mosaic



Fris



Rosetó

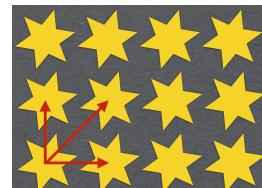
51. Observa el fris de l'imatge. És una figura que es repeteix per translació. Quina direcció té el vector de translació? D'on a on aniria?



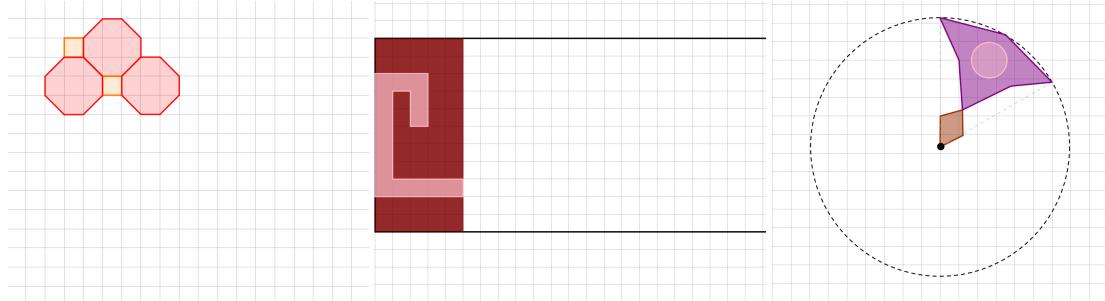
52. En la façana d'aquesta torre mudèjar de Terol podem veure diferents translacions. En la part superior hi ha dos conjunts de quatre finestres. Un és traslladat de l'altre. I cada finestreta forma a les altres quatre mitjançant una translació. Si seguim baixant, els dos arcs es traslladen formant altres dos arcs. Observa, en aquest cas totes les translacions tenen un vector de translació horitzontal. Continua descrivint les translacions que veus en el disseny d'aquesta torre.



53. El mosaic del marge està confeccionat utilitzant un motiu mínim que es desplaça per tot el mosaic. Si utilitzes com a motiu mínim l'estel de sis puntes, determina els vectors de translació de dues translacions, una horitzontal i una altra vertical, que mitjançant composicions et permetin tenir la resta del mosaic. Observa que en sumar la translació horitzontal amb la vertical obtens translacions obliques. Dibuixa en el teu quadern una figura i trasllada-la de forma similar per obtenir un mosaic.
54. En edificació s'utilitzen molt les translacions. Pensa en les finestres d'un edifici i tria una. Pots obtenir una altra diferent mitjançant translació? Fes un dibuix que representi aquesta situació.



55. Completa el següent mosaic, fris i rosetó:



56. Les puntes es dissenyen a partir d'un motiu que s'ha anat traslladant a tot el llarg. Dibuixa en el teu quadern un motiu, una flor, una V, un zig-zag... i trasllada-ho component diverses translacions d'un mateix vector de translació. Has dibuixat un fris.
57. Utilitza una trama de triangles, o dibuixa una en el teu quadern, per dissenyar un mosaic semblant a l'anterior. Marca en la trama els centres de girs de 60° , de 180° i de 30° . Dibuixa un motiu mínim senzill, per exemple una poligonal o una fulla, i mou-lo usant aquestes transformacions.
58. Generació d'un mosaic mitjançant girs i translacions. Observa com primer dibuixa una trama de quadrats, dibuixa un motiu mínim format per dos segments, després li aplica isometries a aquest motiu: girs de 90° , amb els quals dibuixa l'estel, que per simetria completa la cel·la unitat a la qual finalment la trasllada per tot el mosaic.
59. Utilitza una trama de quadrats, o dibuixa una en el teu quadern per dissenyar un mosaic. Marca en la trama els centres de girs de 90° i de 180° . Marca els eixos de simetria. Dibuixa un motiu mínim senzill, per exemple una poligonal, i mou-lo usant aquestes transformacions. Completa primer la cel·la unitat, i després trasllada-la.
60. **Anàlisi de mosaics de l'Alhambra:** Observa el mosaic del marge. Imagina que és infinit, que completa tot el pla. Pots prendre com a motiu mínim un parell de fulletes. Per passar d'un parell de fulletes a l'altre parell adjacent, quina transformació has utilitzat? És una simetria? És un gir? Hi ha centres de gir de 60° ? I d' 180° ? I de 30° ?



61. Hem format frisos utilitzant les lletres de l'alfabet. Tots ells es formen per translació. Però en ocasions hi ha altres isometries.

L1. LLLLL L2. NNNNN L3. VVVVV L4. CCCCC

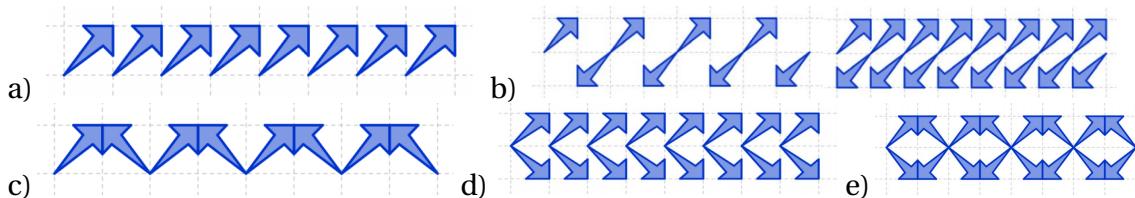
L5. HHHHH L6. pbpbpb L7. Pqdbpqdbp

- a) En quins hi ha una simetria d'eix horitzontal? I d'eix vertical?
- b) En quins hi ha girs de 180° .
- c) Hi ha simetries amb lliscament?
- d) Assenyala totes les famílies de simetries respecte a un eix, de girs i de translacions per les quals un punt del fris es transforma en un altre punt del mateix (suposat que es perllongui fins a l'infinít).

- 62.** Surt al carrer o a casa teva i busca frisos. Fotografia reixes, puntes i greques... i fes un estudi dels diferents frisos que trobis. Dibuixa en el teu quadern el seu disseny i intenta classificar-los segons l'esquema de les lletres del problema anterior, segons les transformacions que utilitzin. Per a això fes-te les següents preguntes:

- Té girs? Si la resposta és NO, llavors:
- Té simetria horitzontal? Si la resposta és SI, és un L4, que com el fris format per la lletra C o la lletra D, no té girs i si té simetria d'eix horitzontal. Si la resposta és NO, llavors:
- Té simetria vertical? Si la resposta és SI, és un L3, com el fris format per la lletra V o la lletra A, que no té ni girs, ni simetria horitzontal i si té simetria vertical. Si la resposta és NO, llavors:
- Té simetria amb lliscament? Si té és un L6, i si no és un L1. Però si té girs pot tenir també simetria horitzontal i és un L5, o tenir simetria amb lliscament i ser un L7, o només tenir el gir i ser un L2, com el fris format per la lletra N o la lletra S.

- 63.** En els frisos de la dreta assenyala totes les famílies de simetries respecte a un eix, de girs i de translacions per les quals un punt del fris es transforma en un altre punt del mateix (suposat que es perllongui fins a l'infinít).



- 64.** Anàlisi de tapaboques:



1



2



3



4



5



6

Observa els següents tapaboques. Indica, per a cadascun d'ells, les següents qüestions:

- Té simetria central?
- Té eixos de simetria axial. Quants?
- Té centre de gir, quin és el menor angle de gir que ho deixa invariant?
- Surta al carrer i fotografia o dibuixa els tapaboques que vegis i et semblin interessants. Fes un estudi d'ells.

Autoavaluació

1. Amb la translació de vector $\vec{u} = (-3, 8)$ traslladem el punt $P(5, -4)$ fins al punt P' i les coordenades de P' són:
 - a) (8, 4)
 - b) (2, 4)
 - c) (2, 12)
 - d) (6, 3)

2. En traslladar $A(-1, 8)$ fins a $A'(4, 6)$ s'utilitza el vector \vec{u} :
 - a) $\vec{u} = (3, 2)$
 - b) $\vec{u} = (3, -2)$
 - c) $\vec{u} = (5, -2)$
 - d) $\vec{u} = (5, 14)$

3. La transformació que converteix el punt $A(2, 0)$ en el punt $A'(0, 2)$ **no** pot ser:
 - a) Un gir de centre l'origen i angle 90°
 - b) Una translació de vector $\vec{u} = (2, 2)$
 - c) Un gir de centre l'origen i angle 270°
 - d) Una simetria d'eix $y = x$.

4. La transformació identitat també es diu:
 - a) Simetria central
 - b) Simetria axial
 - c) Gir de 180°
 - d) Translació de vector nul $(0, 0)$

5. Com ha de ser un triangle per tenir més de dos eixos de simetria?
 - a) rectangle
 - b) isòsceles
 - c) equilàter
 - d) rectangle isòsceles

6. La simetria central en el pla és un gir de:
 - a) 360°
 - b) 180°
 - c) 90°
 - d) 0°

7. En el pla, la composició de dues simetries d'eixos secants sempre és:
 - a) una translació
 - b) un gir
 - c) una altra simetria
 - d) la simetria central

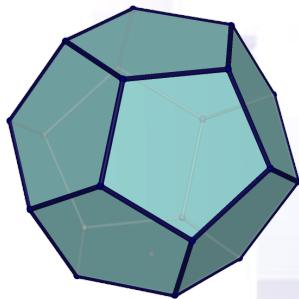
8. Les coordenades del punt simètric al punt $A(3, 7)$ respecte de l'eix d'ordenades són:
 - a) $A'(-3, 7)$
 - b) $A'(3, -7)$
 - c) $A'(-3, -7)$
 - d) $A'(7, 3)$

9. Indica quina de les següents lletres **no** té simetria central:
 - a) O
 - b) H
 - c) S
 - d) D

10. Sempre s'obté un gir fent successivament:
 - a) Dos girs de diferent centre
 - b) Dues simetries d'eixos secants
 - c) Un gir i una simetria
 - d) Dues simetries d'eixos paral·lels.

Resum

Homotècia	Transformació geomètrica que conserva els angles i les distàncies són proporcionals.	Un fotocopia reduïda
Translació	Ve determinada pel seu vector de translació. Són isometries directes. La composició de dues translacions és una translació.	El traslladat del punt P (1, 2) per la translació de vector $\vec{v} = (4, 5)$ és P' (5, 7).
Gir o rotació en el pla Gir en l'espai	Ve determinat pel centre de gir i l'angle de gir. Ve determinat per l'eix de gir i l'angle	El girat del punt P (1, 2) pel gir de centre l'origen i angle 90º és P' (2, -1)
Simetria axial Simetria espectral	Es coneix pel seu eix de simetria Es coneix pel seu pla de simetria	El simètric del punt P (1, 2) per la simetria d'eix l'eix d'ordenades és P' (-1, 2)
Isometries	Són transformacions geomètriques que conserven les distàncies i els angles.	Translació, girs i simetries
Composició d'isometries	La composició de dues isometries directes és una isometria directa. La composició de dues isometries inverses és una isometria directa. La composició d'una isometria directa amb una inversa és una isometria inversa.	
Composició d'isometries en el pla	La composició de dos girs del mateix centre és un gir del mateix centre. La composició de dues simetries és un gir o una translació.	
Elements invariants en el pla	La translació no deixa cap punt invariant. El gir deixa invariant un punt, el centre de gir. La simetria deixa invariant una recta , l'eix de simetria La identitat deixa invariant tot el pla.	
Elements invariants en l'espai	La translació no deixa cap punt invariant. La simetria central deixa invariant un únic punt, el centre de simetria. El gir deixa invariant una recta , l'eix de gir. La simetria deixa invariant el pla de simetria La identitat deixa invariant tot l'espai.	



Dodecaedre. Polígon regular de
12 cares

Tema 11

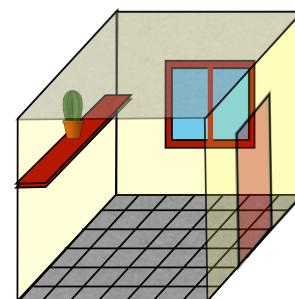
Geometria a l'espai

Què aprendrem?

11.1 Perpendicularitat i paral·lelisme a l'espai	140
11.2 Poliedres	141
11.3 Cossos de revolució	143
11.4 Volum de cossos geomètrics	143
11.5 Globus terraqui	144
11.6 Activitats	144

11.1 Perpendicularitat i paral·lelisme a l'espai

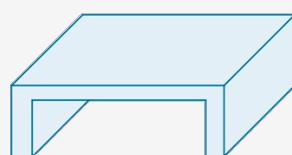
1. Cerca a l'habitació en la qual et trobes, exemples de:
 - a) Plans paral·lels i perpendiculars.
 - b) Rectes paral·leles, rectes perpendiculars i coplanàries, rectes perpendiculars i no coplanàries.
 - c) Recta paral·lela al pla, recta i plans secants, recta continguda en pla.
2. Les fulles d'una porta giratòria formen entre sí 5 angles diedres consecutius i iguals. Quant mesura cadascun d'ells?
3. Des d'un punt interior a una sala de planta hexagonal regular es traça una recta perpendicular a cada paret. Quant mesurarà l'angle que formen dues perpendiculars consecutives?
4. Dos triedres tenen les tres cares iguals, es pot assegurar que són iguals? Raona la resposta.



11.2 Poliedres

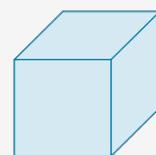
Un políedre és un cos geomètric format per cares planes. Una aresta és allà on s'ajunten dues cares. Un vèrtex és el punt on es troben duesarestes.

Políedre còncau



Algunes de les seves cares no es poden recolçar sobre un pla.

Políedre convex

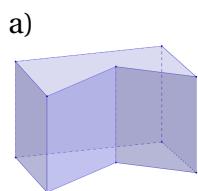


Totes les seves cares no es poden recolçar sobre un pla.

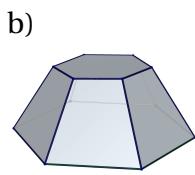
La **relació d'Euler** estableix una relació entre el nombre de cares C , arestes A i vèrtex V que pot tenir un **políedre convex**:

$$C + V = A + 2$$

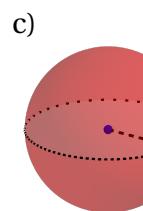
5. Investiga si els següents cossos són poliedres i, en cas afirmatiu, si compleixen el teorema de Euler. Indica també si són còncaus o convexos



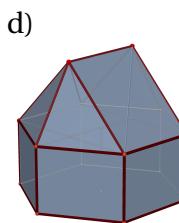
Políedre?
Convex?
 $C=$
 $V=$
 $A=$
Euler?



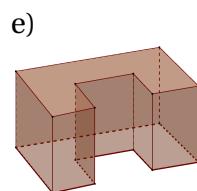
Políedre?
Convex?
 $C=$
 $V=$
 $A=$
Euler?



Políedre?
Convex?
 $C=$
 $V=$
 $A=$
Euler?



Políedre?
Convex?
 $C=$
 $V=$
 $A=$
Euler?



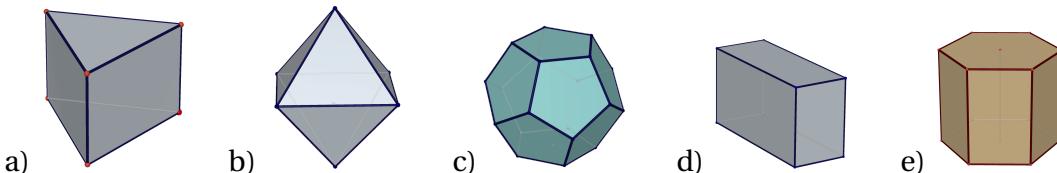
Políedre?
Convex?
 $C=$
 $V=$
 $A=$
Euler?

Un políedre és regular si totes les seves cares són igual i si a cada vèrtex hi confluix el mateix nombre cares i d'arestes.

Només existeixen 5 políedres regulars (sòlids platònics):

Tetraedre	Cub	Octaedre	Dodecaedre	Icosaedre
 4 triangles	 6 quadrats	 8 triangles	 12 pentàgons	 20 triangles

6. És suficient que un paral·lelepípede tingui dues cares rectangulars perquè sigui un prisma recte?
7. Dibuixa un prisma pentagonal regular i comprova que compleix la relació de Euler.
8. Classifica els següents poliedres convexos en regulars o irregulars



9. Dibuixa una piràmide hexagonal regular i distingeix l'apotema de la piràmide de l'apotema de la base. Dibuixa també el seu desenvolupament.

Teorema de Pitàgores a l'espaï

10. Una caixa té forma cúbica de 2 dm d'aresta. Quant mesura la seva diagonal?
11. Calcula la mesura de la diagonal d'una sala que té 10 metres de llarg, 4 metres d'ample i 3 metres d'altura.

Àrea lateral i total de poliedres

Trobareu un resum de les fórmules que heu de menester al resum de la pàgina 152.

12. Calcula les àrees lateral i total d'un prisma triangular regular sabent que les arestes de les bases mesuren 2 cm i cada aresta lateral 8 m.
13. L'àrea lateral d'un prisma regular de base quadrada és 63 m^2 i té 7 m d'altura. Calcula el perímetre de la base.
14. El costat de la base d'una piràmide hexagonal regular és de 6 cm i l'altura de la piràmide 10 cm. Calcula l'apotema de la piràmide i la seva àrea total.

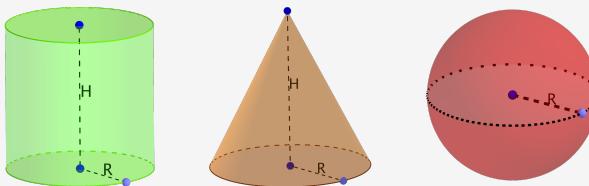
15. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide regular, sabent que les seves bases són dos octògons regulars de costats 4 i 7 dm i que l'altura de cada cara lateral és de 8 dm.



16. ★ Si l'àrea lateral d'una piràmide quadrangular regular és 104 cm^2 , calcula l'apotema de la piràmide i la seva altura.

11.3 Cossos de revolució

Els cossos de revolució són: El cilindre, el con i l'esfera. Tots ells s'obtenen de fer girar al voltant d'un eix una corba anomenada **generatriu**.



17. Una columna cilíndrica té 76 cm de diàmetre i 4 m d'altura. Quina és la seva àrea lateral?
18. El radi de la base d'un cilindre és de 38 cm i l'altura és el triple del diàmetre. Calcula la seva àrea total.
19. Calcula l'àrea lateral d'un con recte sabent que la seva generatriu mesura 50 dm i el radi de la base 30 dm.
20. La circumferència de la base d'un con mesura 6,25 m i la seva generatriu 8 m. Calcula l'àrea total.
21. Una esfera té 4 m de radi. Calcula: a) la longitud de la circumferència màxima; b) l'àrea de l'esfera.

11.4 Volum de cossos geomètrics

Trobareu un resum de les fórmules que heu de menester al resum de la pàgina 155.

22. Calcula el volum d'un prisma recte de 12 dm d'altura la base de la qual és un hexàgon de 4 dm de costat.
23. Calcula la quantitat d'aigua que hi ha en un recipient amb forma de cilindre sabent que la seva base té 12 cm de diàmetre i que l'aigua aconsegueix 1 dm d'altura.
24. El dipòsit de gasoil de la casa d'Irene és un cilindre d'1 m d'altura i 2 m de diàmetre. Irene ha cridat al subministrador de gasoil perquè en el dipòsit només hi queden 140 litres.
 - a) Quin és, en dm^3 , el volum del dipòsit? (Utilitza 3,14 com a valor de π).
 - b) Si el preu del gasoil és de 0,80 € per litre, quant haurà de pagar la mare d'Irene per omplir el dipòsit?
25. Comprova que el volum de l'esfera de radi 5 dm sumat amb el volum d'un con del mateix radi de la base i 10 dm d'altura, coincideix amb el volum d'un cilindre que té 10 dm d'altura i 5 dm de radi de la base.

11.5 Globus terraqui

26. Un avió recorre 20° en direcció Oest al llarg de l'Equador. Si arriba a un punt la longitud del qual és de 170° Est, quines són les coordenades del lloc de partida?
27. Joan surt de la seva casa i recorre 10 Km en direcció sud, 20 Km cap a l'est i 10 Km cap al nord. Si es troba de nou a casa, on està situada la seva casa?
28. En l'esfera terrestre, quin paral·lel mesura més?, quin meridià mesura més? Raona les teves respostes.
29. Busca les coordenades geogràfiques del lloc en el qual vius.



11.6 Activitats

■ Angles polièdrics. Paral·lelisme i perpendicularitat. Poliedres.

30. Si estem en una habitació sense columnes, atenent al terra i a les seves quatre parets, quants angles diedres es formen?
31. Doblega per la meitat un full de paper, construeix un angle diedre i traça el seu rectilini. Podries mesurar l'amplitud de diferents angles diedres mitjançant aquest rectilini?
32. Determina l'amplitud dels angles diedres que formen les cares laterals d'un poliedre que és un prisma recte de base un octògon regular.
33. Dues cares d'un triedre mesuren 60° i

118° , Entre quins valors pot oscil·lar l'altra?

34. Es pot formar un angle poliedre amb un angle d'un triangle equilàter, dos d'un rectangle i un d'un pentàgon regular?
35. Podrà existir un poliedre regular que les seves cares siguin hexagonals? Raona la resposta.
36. Quantes diagonals pots traçar en un cub? I en un octàedre?
37. Pots trobar dues arestes paral·leles en un tetraedre? I en cadascun dels resultants poliedres regulars?
38. Perllonga una parella d'arestes en una

piràmide pentagonal, de manera que s'obtinguin rectes no coplanàries.

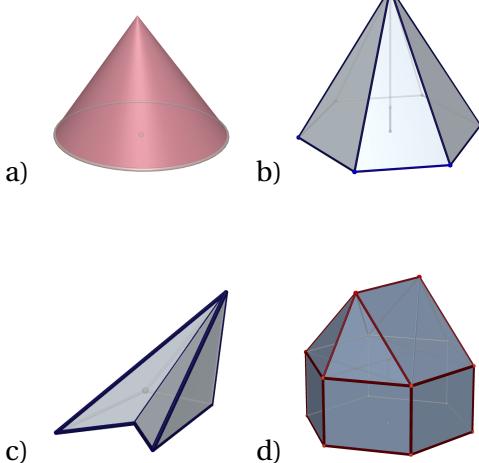
- 39.** Dibuixa un prisma regular de base quadrada i assenyalà: a) dues arestes que siguin paral·leles, b) dues arestes que siguin perpendiculars i coplanàries, c) dues arestes perpendiculars i no coplanàries, d) dues cares paral·leles, e) dues cares perpendiculars.

- 40.** Si un políedre convex té 16 vèrtexs i 24 arestes, quantes cares té? Podria ser una piràmide? I un prisma?

- 41.** Amb 12 varetas de 5 cm de llarg cada una, usant totes les varetas quins poliedres regulars es poden construir?

- 42.** D'un prisma sabem que el nombre de vèrtexs és 16 i que el nombre d'arestes és 24, quantes cares té?

- 43.** Classifica els següents cossos geomètrics i indica, quan siguin poliedres, el nombre de vèrtexs, cares i arestes que tenen. Quins compleixen el teorema de Euler?



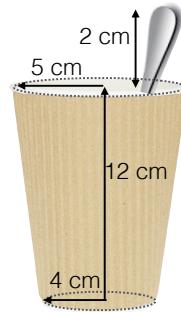
- 44.** Descriu la diferència entre un prisma recte i un prisma oblic. És suficient que un paral·lelepípede tingui dues cares paral·leles rectangulars perquè sigui un ortoedre?

■ Teorema de Pitàgories en l'espai

- 45.** Dibuixa un paral·lelepípede les arestes del qual mesurin 4 cm, 5 cm i 6 cm que no sigui un ortoedre. Dibuixa també el seu desenvolupament.

- 46.** Si el paral·lelepípede anterior fos un ortoedre, quant mesuraria la seva diagonal?

- 47.** Un tassó de 12 cm d'altura té forma de tronc de con en el qual els radis de les bases són de 5 i 4 cm. Quant ha de mesurar com a mínim una cullereta perquè sobresurti del tassó almenys 2 cm?



- 48.** És possible guardar en una caixa amb forma de ortoedre d'arestes 4 cm, 3 cm i 12 cm un bolígraf de 13 cm de longitud?

- 49.** Calcula la diagonal d'un prisma recte de base quadrada sabent que el costat de la base mesura 6 cm i l'altura del prisma 8 cm.

- 50.** Si un ascensor mesura 1 m d'ample, 1,5 m de llarg i 2,2 m d'altura, és possible introduir en ell una escala de 3 m d'altura?

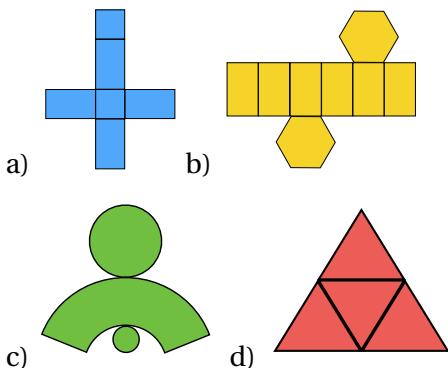
- 51.** Quin és la major distància que es pot mesurar en línia recta en una habitació que té 6 m d'ample, 8 m de llarg i 4 metres d'altura?

- 52.** Calcula la longitud de l'aresta d'un cub sabent que la seva diagonal mesura 3,46 cm.

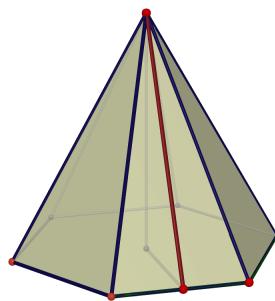
- 53.** Calcula la distància màxima entre dos punts d'un tronc de con les bases del qual tenen radis 5 cm i 2 cm, i altura 10 cm.

■ **Àrea lateral, total i volum de cosos geomètrics**

54. Identifica a quin cos geomètric pertanyen els següents desenvolupaments:



55. Un prisma de 8 dm d'altura té com a base un triangle rectangle de catets 3 dm i 4 dm. Calcula les àrees lateral i total del prisma.
56. Dibuixa un prisma hexagonal regular que tingui 4 cm d'aresta basal i 1 dm d'altura i calcula les àrees de la base i total.
57. Un prisma pentagonal regular de 12 cm d'altura té una base de 30 cm^2 d'àrea. Calcula el seu volum.
58. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de dimensions 3,5 dm, 8,2 dm i 75 cm.
59. Calcula la superfície total i el volum d'un cilindre que té 8 m d'altura i 5 cm de radi de la base.
60. Calcula l'àrea total d'una esfera de 5 cm de radi.
61. Calcula l'apotema d'una piràmide hexagonal regular sabent que el perímetre de la base és de 32 dm i l'altura de la piràmide és de 4 dm. Calcula també l'àrea total i el volum d'aquesta piràmide.
62. Calcula l'apotema d'una piràmide regular sabent que la seva àrea lateral és de 120 m^2 i la seva base és un hexàgon de 5 m de costat.



63. Un triangle rectangle de catets 12 cm i 5 cm gira al voltant d'un dels seus catets generant un con. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum.
64. Tres boles de metall de radi 12 dm, 0,3 m i 4 m es fonen en una sola. Quin serà el diàmetre de l'esfera resultant?
65. Quin és la capacitat d'un pou cilíndric d'1,20 m de diàmetre i 20 metres de profunditat?
66. Quant cartró necessitarem per construir una piràmide quadrangular regular si volem que el costat de la base mesuri 10 cm i que la seva altura sigui de 25 cm?
67. Calcula el volum d'un cilindre que té 2 cm de radi de la base i la mateixa altura que un prisma la base del qual és un quadrat de 4 cm de costat i 800 cm^3 de volum.
-
68. Quina és l'àrea de la base d'un cilindre d'1,20 m d'alt i 248 dm^3 de volum?
69. L'aigua d'una font es condueix fins a uns dipòsits cilíndrics que mesuren 12 m de radi de la base i 20 m d'altura. Després s'embotella en bidons de 2,5 litres. Quants envasos s'omplen amb cada dipòsit?

- 70.** Calcula la quantitat de cartolina necessària per construir un anell de 10 tetraedres cadascun dels quals té 2 cm d'aresta.



- 71.** En fer el desenvolupament d'un prisma triangular regular de 8 dm d'altura, va resultar un rectangle d'1 metre de diagonal com a superfície lateral. Calcula l'àrea total.

- 72.** Determina la superfície mínima de paper necessària per embolicar un prisma hexagonal regular d'1 m de costat de la base i 2 m d'altura.

- 73.** L'ajuntament ha col·locat unes jardineres de pedra als seus carrers que tenen forma de prisma hexagonal regular. La cavitat interior on es diposita la terra, té 80 cm de profunditat i el costat de l'hexàgon interior és de 60 cm. Calcula el volum de terra que ompliria una jardineria per complet.



- 74.** Una habitació té forma de ortoedre i les seves dimensions són directament proporcionals als nombres 3, 5 i 7. Calcula l'àrea total i el volum si a més se sap que la diagonal mesura 14,5 m.

- 75.** Un ortoedre té 1 dm d'altura i 6 dm² d'àrea total. La seva longitud és el doble de la seva amplària, quin és el seu volum?

- 76.** Si el volum d'un cilindre de 10 cm d'alçada és de 314 cm³, calcula el radi de la base del cilindre. (Utilitza 3,14 com a valor de π).

- 77.** Han instal·lat a casa d'en Joan un dipòsit d'aigua de forma cilíndrica. El diàmetre de la base mesura 2 metres i l'altura és de 3 metres. a) Calcula el volum del dipòsit en m³. (Prendre $\pi=3,14$). b) Quants litres d'aigua caben en el dipòsit?

- 78.** Un envàs d'un litre de llet té forma de prisma, la base és un quadrat que té 10 cm de costat. a) Quin és, en cm³, el volum de l'envàs? b) Calcula l'altura de l'envàs en cm.

- 79.** Una circumferència de longitud 2,24 cm gira al voltant d'un dels seus diàmetres generant una esfera. Calcula el seu volum. (Preneu $\pi=3,14$).

- 80.** Una porta fa 2 m d'alt, 80 cm d'ample i 4 cm d'espessor. El preu d'instal·lació és de 200 € i es cobra 6 € per m² en concepte de envernissat, a més del cost de la fusta, que és de 300 € cada m³.

- a) Calcula el volum de fusta d'una porta.
- b) El cost de la fusta d'una porta més la seva instal·lació.
- c) El cost del envernissat de cada porta, si només es cobra el envernissat de les dues cares principals.

- 81.** L'aigua continguda en un recipient cònic de 18 cm d'altura i 24 cm de diàmetre de la base s'aboca en un tassó cilíndric de 10 cm de diàmetre. Fins a quina altura arribarà l'aigua?

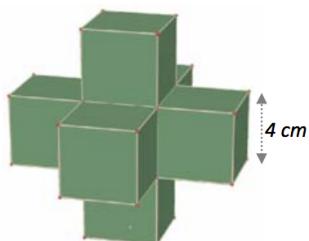
- 82.** Segons Arquimedes quines dimensions té el cilindre circumscrit a una esfera de 5 cm de radi que té la seva mateixa àrea? Calcula aquesta àrea.

- 83.** El cristall d'un fanal té forma de tronc de con de 50 cm d'altura i bases de radis 20 i 30 cm. Calcula la seva superfície.

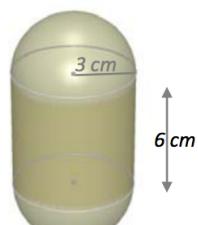
- 84.** Quin és el volum d'una esfera en la qual una circumferència màxima mesura 31,40 m?
- 85.** Calcula el radi d'una esfera que té 33,51 dm³ de volum.
- 86.** Una piscina mesura 20 m de llarg, 5 m d'ample i 2 m d'alt.

- a) Quants litres d'aigua són necessaris per omplir-la?
- b) Quant costarà recobrir el sòl i les parets amb PVC si el preu és de 20 €/m²?

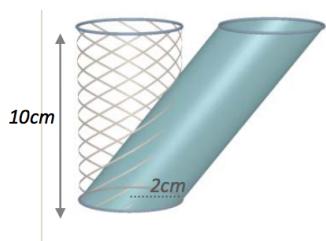
- 87.** Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



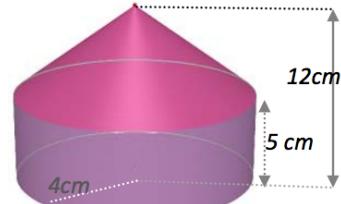
a)



b)



c)



d)

- 88.** En la construcció d'un globus aerostàtic

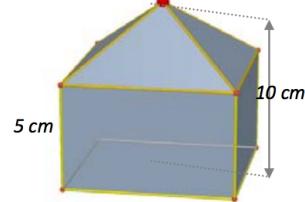
de radi de 2,5 m s'empra lona que té un cost de 300 €/m². Calcula l'import de la lona necessària per a la seva construcció.

- 89.** S'ha pintat per dins i per fora un dipòsit sense tapadora de 8 dm d'alt i 3 dm de radi. Tenint en compte que la base només es pot pintar per dins, i que s'ha utilitzat pintura de 2 €/dm², quants diners ha costat en total?

- 90.** El preu de les teules és de 14,30 €/m². Quant costarà re-teular un habitatge la teulada del qual té forma de prisma quadrangular regular de 4 metres d'altura i 8 metres de costat de la base?

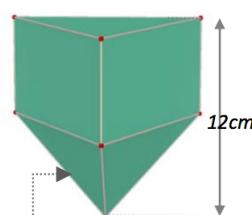
- 91.** S'enrotlla una cartolina rectangular de costats 30 cm i 25 cm de les dues formes possibles, fent coincidir costats oposats. Quin dels dos cilindres resultants té major volum?

- 92.** Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



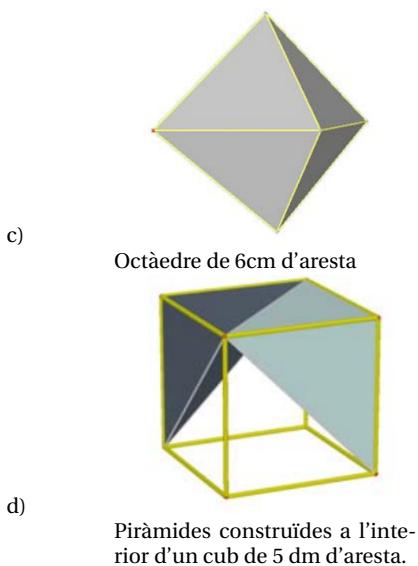
a)

La base és quadrada



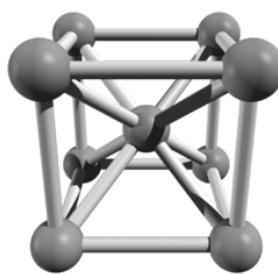
b)

Tetraedre de 5cm d'aresta

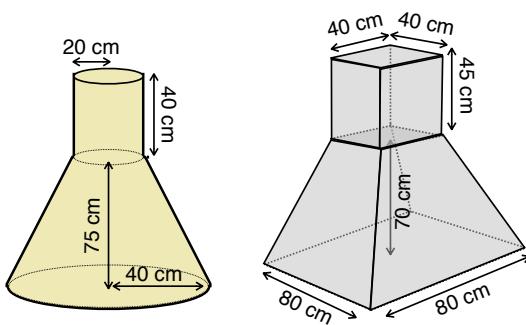


- 93.** En un recipient cilíndric de 8 dm de diàmetre i que conté aigua, s'introduceix una bola. Quin és el seu volum si després de la immersió puja 0,3 metres el nivell de l'aigua?

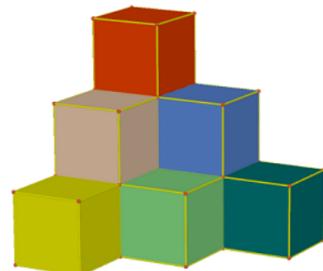
- 94.** L'*Atomium* és un monument de Brussel·les que reproduceix una molècula de ferro. Consta de 9 esferes d'acer de 18 m de diàmetre que ocupen els vèrtexs i el centre d'una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realitzada amb cilindres de 2 metres de diàmetre. Si utilitzem una escala 1:100 i tant les esferes com els cilindres són massissos, quina quantitat de material necessitarem?



- 95.** Quina de les dues campanes extractores de la figura esquerra té un cost d'acer inoxidable menor?

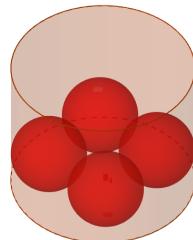


- 96.** Cadascun dels cubs de la figura té 2 cm d'aresta. Quants cal afegir per formar un cub de 216 cm^3 de volum?



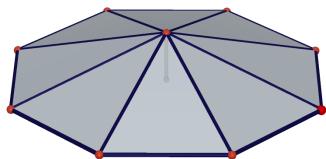
- 97.** Un tub d'assaig té forma de cilindre obert en la part superior i rematat per una semiesfera en la inferior. Si el radi de la base és d'1,5 cm i l'altura total és de 15 cm, calcula quants centilitres de líquid caben en ell.

- 98.** Un pot cilíndric de 10 cm de radi i 40 cm d'altura té en el seu interior quatre pilotes de radi 3,5 cm. Calcula l'espai lliure que hi ha en el seu interior.



- 99.** La lona d'una ombrel·la oberta té forma de piràmide octogonal regular d'1 m d'altura i 45 cm de costat de la base. Es fixa un pal en el sòl en el qual s'encaixa i el vèrtex de la piràmide queda a una distància d'1,80 m del terra. En el moment en què els ràjos de sol són

verticals, quina superfície d'ombra determina?



- 100.** Construïm un con amb cartolina retallant un sector circular de 120° i radi 20 cm. Calcula el volum del con resultant.
- 101.** Un embut cònic de 20 cm de diàmetre ha de tenir 2 litres de capacitat, quina serà la seva altura?
- 102.** En un dipòsit amb forma de cilindre de 25 cm de radi, una aixeta aboca 15 litres d'aigua cada minut. Quant augmentarà l'altura de l'aigua després d'un quart d'hora?
- 103.** Una peixera amb forma de prisma recte i base rectangular s'omple amb 56 litres d'aigua. Si té 48 cm de llarg i 36 cm d'ample, quin és la seva profunditat?
- 104.** Si s'enrotlla una cartolina rectangular de costats 30 cm i 25 cm de les dues formes possibles, quin dels dos cilindres resultants té major volum?
- 105.** Un rectangle d'1 m de base i 10 m d'alçada gira 360° al voltant d'una recta paral·lela a l'alçada, que està situada a 2 m

de distància. Calcula la superfície i el volum del cos que resulta.

- 106.** En un gelat de cucurutxo la galeta té 15 cm d'altura i 5 cm diàmetre. Quina és la seva superfície? Si el cucurutxo està completament ple de gelat i sobreusa una semiesfera perfecta, quants grams de gelat conté?

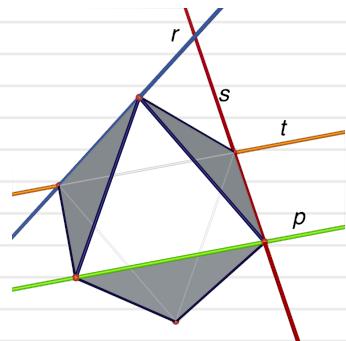
Fusos horaris

- 107.** Quina diferència de longitud existeix entre dues ciutats si la diferència horària entre ambdues és de 5 hores? Podem saber si existeix diferència entre les seves latituds?
- 108.** Un avió emprèn viatge cap a una ciutat imaginària situada a l'oest de Palma. El viatge dura 10 hores i el seu rumb manté en tot moment la latitud de partida. Si la diferència de longitud entre Palma i la ciutat d'arribada és de 45° i l'avió surt de l'aeroport Son Sant Joan a les 9 del matí. A quina hora local aterrará a la ciutat de destinació?
- 109.** La distància entre Londres i Pequín és de 8149 Km i la distància entre Londres i Sao Paulo és de 9508 Km, no obstant això a Pequín el rellotge marca 7 hores més que a Londres i en Sao Paulo 3 hores menys que a Londres. Com expliques aquesta diferència?

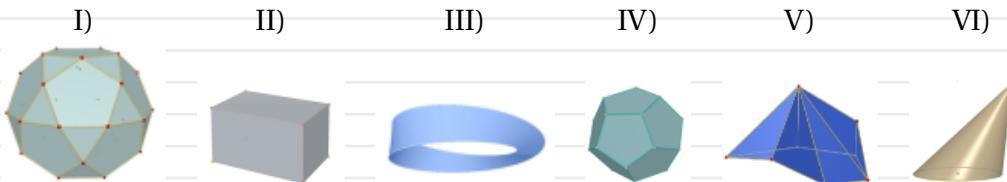
Autoavaluació

- 1.** Cadascuna de les rectes r , s , t i p passa per dos vèrtexs consecutius d'un octàedre tal com s'observa en la figura. Assenyal quina afirmació de les següents és veradera:

- a) Les rectes r i s són coplanàries i secants.
- b) Les rectes t i p no són coplanàries.
- c) Les rectes r i p es creuen.
- d) r i s contenen arestes d'una mateixa cara de l'octàedre



- 2.** Observa els següents cossos geomètrics i selecciona l'opció vertadera:



- a) Els cossos I), II), IV) i V) compleixen la relació de Euler.
- b) Hi ha dos cossos de revolució III) i VI).
- c) Són poliedres regulars II) i IV).
- d) Són còncaus I) i V).

- 3.** Si l'altura d'un prisma de base quadrada és 10 cm i el costat de la base és 4 cm, la seva àrea total és:
- a) 160 cm^2
 - b) 320 cm^2
 - c) 400 cm^2
 - d) 192 cm^2

- 4.** Un dipòsit d'aigua té forma de prisma hexagonal regular de 5 m d'altura i costat de la base 1 m. Si només conté les tres quartes parts de la seva capacitat, el nombre aproximat de litres d'aigua que hi ha en ell és:
- a) 13000 l
 - b) 9750 l
 - c) 3750 l
 - d) 3520 l

- 5.** La teulada d'una caseta té forma de piràmide quadrangular regular d'1,5 m d'altura i 80 cm de costat de la base. Si es necessiten 15 teules per metre quadrat per recobrir la teulada, en total s'utilitzaran:

- a) 38 teules
- b) 76 teules
- c) 72 teules
- d) 36 teules

- 6.** Una caixa de dimensions $30 \times 20 \times 15$ cm, està plena de cubs d'1 cm d'aresta. Si s'utilitzen tots per construir un prisma recte de base quadrada de 10 cm de costat, l'altura mesurarà:

- a) 55 cm
- b) 65 cm
- c) 75 cm
- d) 90 cm

Autoavaluació

7. El radi d'una esfera que té el mateix volum que un con de 5 dm de radi de la base i 120 cm d'altura és:
- $5\sqrt{3}$ dm
 - $\sqrt[3]{75}$ dm
 - 150 cm
 - $\sqrt[3]{2250}$ cm
8. Es distribueixen 42,39 litres de dissolvent en llaunes cilíndriques de 15 cm d'altura i 3 cm de radi de la base. El nombre d'envasos necessari és:
- 100
 - 10
 - 42
 - 45
9. L'àrea lateral d'un tronc de con que té 20 cm d'altura i bases de radis 30 i 15 cm, és:
- 2250π cm²
 - 900π cm²
 - 1125π cm²
 - 450π cm²

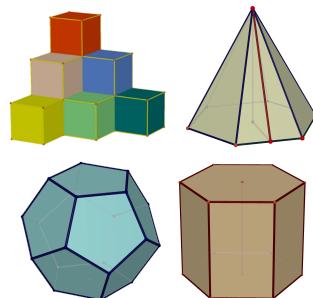
Resum

Poliedre. Elements d'un poliedre. Tipus de poliedres

Un poliedre és una regió tancada de l'espai limitada per polígons. Els seus principals elements són: cares, arestes, vèrtexs, angles diedres i poliedres, així com les diagonals.

Els poliedres poden ser còncaus i convexos depenent que alguna de les seves cares sigui un polígon còncau o cap ho sigui.

Entre els poliedres destaquen poliedres regulars, prismes i piràmides.



Teorema d'Euler

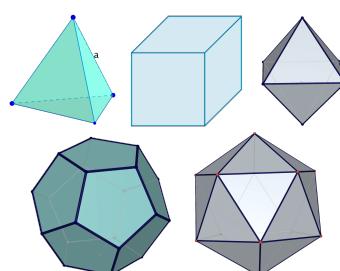
En tot poliedre convex el nombre de cares més el nombre de vèrtexs és igual al nombre d'arestes més 2.

$$C + V = A + 2$$

Poliedres regulars

Un poliedre regular és un poliedre que compleix que totes les seves cares són polígons regulars iguals i que els seus angles poliedres són iguals.

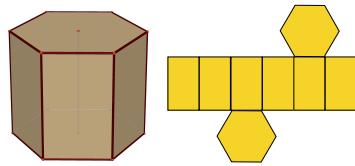
Hi ha cinc poliedres regulars: tetraedre (4 cares), cub (6 cares), octàedre (8 cares), dodecaedre (12 cares) i icosaedre (20 cares)



Prismes

Un prisma és un políedre determinat per dues cares paral·leles que són polígons iguals i tantes cares laterals com a costats tenen les bases.

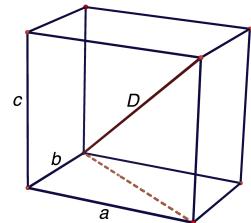
Poden ser còncaus o convexos; rectes o oblics, regulars o irregulars; triangulars, quadrangulars, pentagonal... .



Teorema de Pitàgores a l'espai

La diagonal d'un ortoedre és l'arrel quadrada de la suma dels quadrats de les sevesarestes

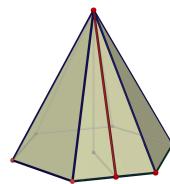
$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Piràmides

Una piràmide és un políedre determinat per una cara poligonal denominada base i tantes cares triangulars amb un vèrtex comú, com a costats té la base.

Poden ser còncaves o convexes; rectes o obliques, regulars o irregulars; triangulars, quadrangulars, pentagonal... .



Tronc de piràmide

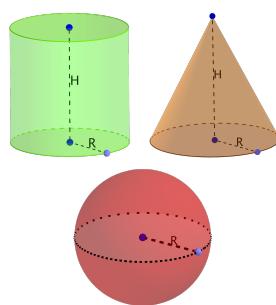
Un tronc de piràmide és el políedre resultant en tallar una piràmide per un pla paral·lel a la base. Les bases són polígons semblants i les cares laterals són trapezis.



Cossos de revolució

Els cossos de revolució són cossos geomètrics que s'obtenen en fer girar una línia al voltant d'una recta fixa denominada *eix*. La línia que gira es diu *generatriu*.

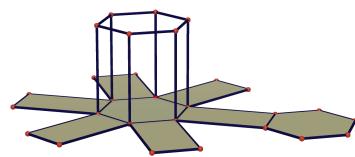
Entre els cossos de revolució destaquen cilindres, cons i esferes.



Àrees lateral i total d'un prisma

$$A_{\text{Lateral}} = \text{Perímetre}_{\text{Base}} \cdot Altura$$

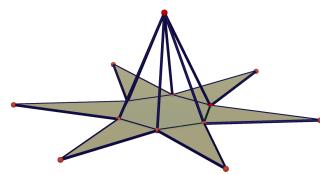
$$A_{\text{total}} = \text{Àrea}_{\text{Lateral}} + 2\text{Àrea}_{\text{Base}}$$



Àrees lateral i total d'una piràmide regular

$$A_{\text{Lateral}} = \frac{\text{Perímetre}_{\text{Base}} \cdot \text{Apotema}_{\text{piràmide}}}{2}$$

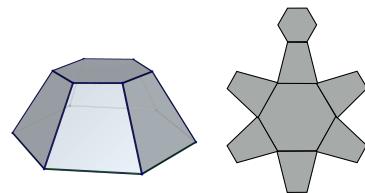
$$A_{\text{total}} = \text{Àrea}_{\text{Lateral}} + \text{Àrea}_{\text{Base}}$$



Àrees lateral i total d'un tronc de piràmide regular

$$A_{\text{Lateral}} = \frac{\text{Perímetre}_{\text{Base}} \cdot \text{Apotema}_{\text{tronc}}}{2}$$

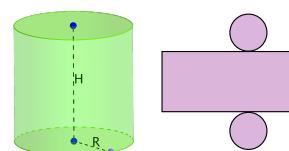
$$A_{\text{total}} = \text{Àrea}_{\text{Lateral}} + \text{Àrea}_{\text{Base} 1} + \text{Àrea}_{\text{Base} 2}$$



Àrees lateral i total d'un cilindre

$$A_{\text{Lateral}} = 2\pi R H$$

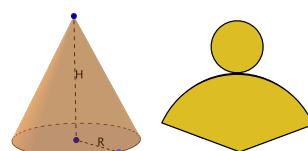
$$A_{\text{total}} = 2\pi R H + 2\pi R^2$$



Àrees lateral i total d'un con

$$A_{\text{Lateral}} = \pi R G$$

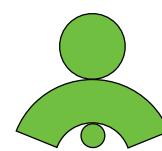
$$A_{\text{total}} = \pi R G + \pi R^2$$



Àrees lateral i total d'un tronc de con

$$A_{\text{Lateral}} = (\pi R + \pi r) G$$

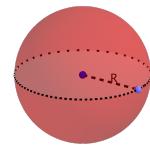
$$A_{\text{Total}} = A_{\text{Lateral}} + \pi R^2 + \pi r^2$$



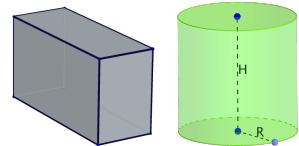
Àrea i volum d'una esfera

$$A_{total} = 4 \pi R^2$$

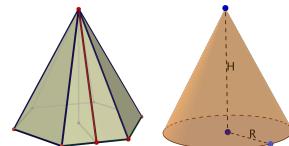
$$Volum = \frac{4}{3} \pi R^3$$

**Volum d'un prisma i d'un cilindre**

$$Volum = \text{Àrea}_{base} \cdot Altura$$

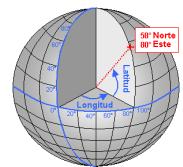
**Volum d'una piràmide i d'un con**

$$Volum = \frac{\text{Àrea}_{base} \cdot Altura}{3}$$

**Coordenades geogràfiques**

Latitud: Distància del punt geogràfic a l'Equador mesurada sobre el meridià que passa pel punt.

Longitud: Distància del punt geogràfic al meridià zero o de Greenwich, mesurada sobre el paral·lel que passa pel punt.

**Fusos horaris**

Cada **fus horari** és una zona del globus terraquí compresa entre dos meridians que es diferencien en 15° de longitud.



ACTIVITATS DE SÍNTESI

Activitats de síntesi 🔑

1. Efectua les operacions:

$$\text{a) } \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} : \frac{-3}{2} \right) =$$
$$\text{b) } \frac{\frac{2}{5} - \left(\frac{3}{2} : \frac{8}{5} \right)^{-1}}{2 - \left(\frac{2}{3} \right)^2} =$$

2. Expressa com a potència única $[5^2 \cdot 25^2]^3 : 5^{-2} =$
3. Un estudiant de 3r d'ESO es proposa el dia 1 de setembre repassar matemàtiques durant una quinzena, fent cada dia 2 exercicis més que el dia anterior. Si el primer dia va començar fent 1 exercici, quants d'exercicis va fer dia 15? Quants exercicis va fer en total?
4. El nombre de vegades que un grup d'alumnes de 3r ESO ha anat al cinema el darrer mes ve donat per la següent taula:

- (a) Completa la taula

x_i – pics al cine	f_i – n. alumnes	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	2		
1	8		
2	12		
3	3		
SUMES	N=	$\sum f_i x_i =$	$\sum f_i x_i^2 =$

- (b) Representa un diagrama de barres.
- (c) Calcula la Moda (Mo), Mitjana Aritmètica (\bar{x}) , la Desviació Típica (σ) i el coeficient de Variació (CV) de la variable.
5. Una urna té 3 bolles blanques i 7 negres. Extreim dues bolles amb reemplaçament. Fes un diagrama d'arbre. Trobau la probabilitat de treure:
- a) almenys una bolla blanca b) les dues bolles de diferent color

6. Donats els polinomis : $p(x) = 3x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 3x - 6$, $q(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x - 1$ i $r(x) = 2x + 3$, calculau:

a) $p(x) + q(x) + r(x)$ b) $p(x) - q(x)$ c) $q(x) \cdot r(x)$ d) $r(x)^2$

7. Resol les equacions:

a) $\frac{x \cdot (x + 2)}{3} = x + \frac{1}{2}$ b) $(x - 2)^2 = 9$

8. Resol el sistema pel mètode més adient: $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + 3x = -2 \end{cases}$

9. Dues màquines funcionant 6 hores consumeixen 1500 kWh. Quant consumiran 3 màquines funcionant 8 hores?

10. Pel lloguer d'un cotxe cobren 100 € diaris més 0.30 € per kilòmetre recorregut. Troba l'equació que relaciona els kilòmetres i el preu i representa-la. Si un dia s'han fet 300 km, quant s'haurà de pagar? Si un altre dia varem pagar 119,5 € quants kilòmetres varem fer?

11. Calcula el vèrtex i representa gràficament la paràbola $y = -x^2 + 5x - 2$.

12. Sabem que per trobar el nombre x que està enmig de dos donats a i b , basta calcular la seva mitjana $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$. Quin és el nombre que està en enmig de 1.8585... i 2.888.... Ajuda: Passa cada nombre a fracció i opera les fraccions.

13. A na Marta li descompten la cinquena part del sou en concepte de IRPF i la sisena part per a la Seguretat Social. Si sabem que cobra 600 € nets, quin és el seu sou brut? Ajuda: Comença comprovant que després dels descomptes només li queden les 19/30 parts del sou.

Retenciones IRPF



14. Contesta:

- La mida d'un bacteri 0,00000247 en notació científica.
- El valor decimal de $\sqrt[6]{7,2 \cdot 10^{-3}}$
- El que mesura un costat d'un cub de volum 125 cm³. Recorda $V = c^3$



15. Calcula la teva edat en segons expressada en notació científica.

16. Una nedadora va entrenar tots els dies durant tres setmanes. El primer dia va nedar 15 minuts, i cada dia nedava 5 minuts més que el dia anterior. Quant de temps va nedar l'últim dia? I durant de les tres setmanes?



17. El número d'estrelles dels hotels d'una ciutat és:

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 3, 3, 4, 3, 4 | 3, 1, 3, 4, 3 | 3, 3, 2, 1, 3 | 3, 3, 2, 3, 2 |
| 2, 3, 3, 3, 2 | 2, 2, 2, 2, 3 | 2, 1, 1, 1, 2 | 2, 4, 1 |

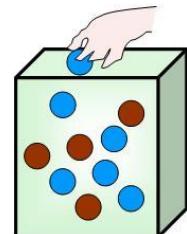


- Quants hotels té la ciutat en total?
- Construeix una taula de freqüències i un diagrama de barres.
- Calcula la mitjana, la desviació típica i el coeficient de variació de la variable.

18. Contesta:

- Quin és el grau de $-5xyz^2$?
- Simplifica $7x^2 \cdot 2x - x \cdot (2x^2 + 5x^5 : x^3) =$
- Efectua l'operació $(x - 2)^2 + (x + 2) \cdot (x - 2) =$

19. Una urna conté 6 bolles blaves i 6 de vermelles. Es mescla el seu contingut i s'extreuen dues bolles sense reemplaçament. Quina és la probabilitat que surtin dues bolles de diferent color?
Ajuda: Fes un diagrama d'arbre.



20. A l'aula de 3r A hi ha doble nombre d'alumnes que a l'aula de 3r B. A més es sap que, si es passen 8 alumnes de 3r A a 3r B, les dues aules tindran el mateix nombre d'alumnes. Quants alumnes hi ha en cadascuna d'aquestes aules? *Ajuda: Planteja i resol un sistema d'equacions*



21. Resol, si és possible, les següents equacions:

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$ c) $x^2 + 2x = 0$ d) $x^2 + 2x - 3 = 0$

22. D'aquí a 30 anys l'edat de Pere serà la cinquena part del quadrat de l'edat actual. Calcula l'edat actual d'en Pere. *Ajuda: Planteja i resol una equació de 2n grau.*

23. Nou persones han gastat en transport 630 € en 20 dies. Quant gastaran 24 personnes en 8 dies realitzant un recorregut semblant?

24. Una espelma nova mesura 12 cm. Després de 3 hores, des de que l'encenem, mesura 10 cm.

- Calcula l'equació de la funció que relaciona la longitud de l'espelma amb el temps
- Utilitza l'equació per saber quan de temps ha de passar perquè l'espelma mesuri 5 cm.

- 25.** Un agricultor contracta una persona per recollir taronges. Li paga una quantitat fixa de 600 € i una variable de 3 € per cada kg de taronges recollit.



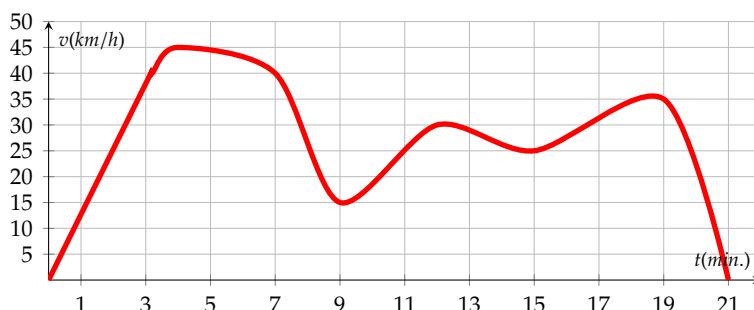
- a) Escriu la funció que relaciona el sou en € i els kg de taronges recollits
 b) Si el mes passat va cobrar 1230 € quants kg de taronges va recollir?
- 26.** Representa gràficament les funcions

a) $y = 2x$

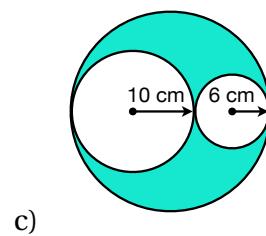
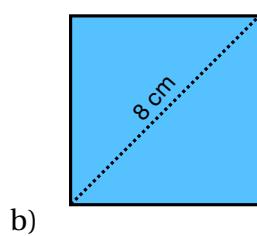
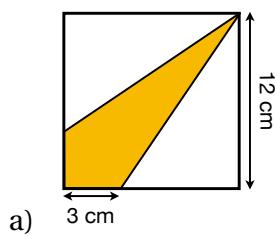
b) $y = x^2 + 1$

c) $y = -x + 3$

- 27.** El següent gràfic mostra la variació de la velocitat d'un ciclista:



- a) Indica els intervals de creixement i decreixement.
 b) En què minuts va córrer a 10 km/h?
 c) Quina va ser la velocitat màxima i en quin minut passa? I mínima en ple trajecte?
 d) Quines altres característiques pots indicar sobre el gràfic?
- 28.** Tenim una fotografia mida 10×15 que volem dibuixar sobre un quadre de mida $15P = 65 \times 50$. Justifica si serà possible encaixar tota la fotografia sense deformar-la. Si no és possible, explica quina part de la fotografia quedaria sense dibuixar.
- 29.** En un triangle de costats 4 cm, 6 cm i 8 cm, calculau l'altura sobre el costat major.
Ajuda: Aplicau el teorema de Pitàgores i plantejau una equació.
- 30.** Calcula l'àrea de la part pintada de les figures següents

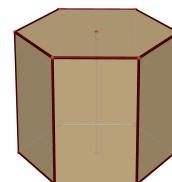


- 31.** Dibuixa en el teu quadern un triangle amb vèrtexs $A(1, 2)$, $B(2, 0)$ i $C(3, 4)$. Troba els vèrtexs de les figures segons les transformacions:

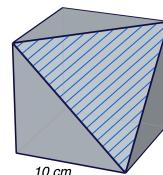
- Una translació de vector $\vec{t}(3, -2)$
- Una simetria d'eix OX
- Una rotació de centre O(0,0) i angle 90° .
- Una simetria que té per eix la recta que passa pels punts $P(3, 4)$ i $Q(7, 0)$.

- 32.** La piràmide de Kheops és una piràmide de base quadrangular de 230 m d'aresta i 147 m d'altura. Calcula l'àrea total i el volum d'aquesta piràmide. Dóna les respostes en hm^2 i hm^3 .

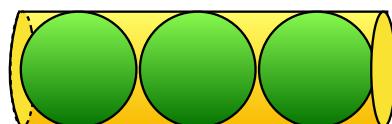
- 33.** Troba l'àrea total d'un prisma de base hexagonal de costat 6 cm i d'altura 10 cm. Calcula també el volum del prisma.



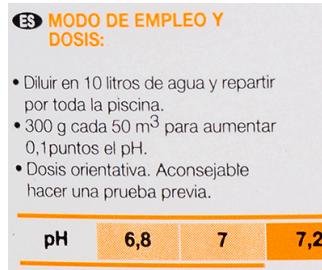
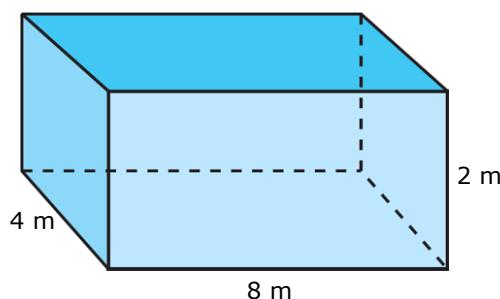
- 34.** Hem truncat un cub d'aresta 10 cm segons el pla ratllat de la figura. Calcula la superfície de la cara ratllada i el volum del cos.



- 35.** Tenim 3 pilotes de tennis dins d'una caixa cilíndrica de 6,6 cm de diàmetre en la que encaixen perfectament. Calcula el volum de la part buida.



- 36.** Una piscina té forma d'ortoedre de dimensions $8 \times 4 \times 2$ m. Hem fet una lectura del pH de l'aigua de 6.8. Les recomanacions pel bany són que el pH estigui al voltant de 7.2. Per això, haurem afegir augmentador del pH del qual mostrem l'etiqueta d'instruccions a la figura. Quina quantitat de producte haurem de posar per obtenir el pH desitjat?





SOLUCIONS

Solucions del Tema 1

Pàgina 9

4. a) 7 b) 2 c) -3 d) -26

Pàgina 10

- | | | | |
|---------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 5. a) $\frac{3}{5}$ | b) $\frac{1}{9}$ | c) $\frac{1}{12}$ | d) $\frac{1}{4}$ |
| 6. a) 1 | b) $\frac{11}{6}$ | c) $\frac{17}{14}$ | d) $\frac{7}{15}$ |
| e) $\frac{31}{20}$ | f) $-\frac{1}{8}$ | g) $\frac{1}{4}$ | h) $\frac{41}{24}$ |

Pàgina 11

- | | | |
|-----------------------|-------------------|-------------------|
| 7. a) $\frac{2}{3}$ | b) 8 | c) $\frac{1}{3}$ |
| d) $\frac{1}{2}$ | e) $\frac{1}{2}$ | f) 1 |
| g) $\frac{5}{2}$ | h) 2 | i) $-\frac{5}{6}$ |
| j) $\frac{3}{2}$ | k) $\frac{1}{3}$ | l) $\frac{3}{5}$ |
| 12. a) $\frac{67}{4}$ | b) $\frac{25}{4}$ | c) $\frac{47}{8}$ |

Pàgina 14

24. a) 1 b) $20/9$ c) $99/100$

Pàgina 19

1. 10
 2. $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > -\frac{5}{6} > -\frac{7}{8} > -\frac{5}{4}$
 4. $\frac{7}{2}$

5. a) 180 b) 960 cm^3

6. a) $9900, E_A=41, E_R=0.42\%$

- b) $9.9, E_A=0.045, E_R=0.45\%$

7. a) Són exactes $6/120$ i $42/150$. $5/180$ és decimal periòdic

- b) 10 xifres c) 96 xifres

8. $\frac{89}{40}, \frac{2203}{990}, \frac{999}{1000} = 0,999$

9. a) 4 setmanes b) 506.25 cm^3

10. Cobrava 1200 €. Ara cobra 1000 €, paga 250 € d'impostos i 300 € d'hipoteca.

Solucions del Tema 2

Pàgina 26

13. a) $2.231 \cdot 10^6$ b) $5.678 \cdot 10^{-3}$

- c) $1.35 \cdot 10^{-5}$ d) $3.6 \cdot 10^{-4}$

14. $1.629 \cdot 10^{17} \text{ m}$

15. $2.32 \cdot 10^{-26}$

Pàgina 27

17. $4 \cdot 10^{13}$ bacteris

19. $3 \cdot 10^{29}$ grans d'arena

Pàgina 30

36. a) $a \cdot b \sqrt[4]{a^2b}$ b) $6^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \sqrt[3]{3 \cdot 6^2}$

- c) $90 \sqrt{45}$

- 37.** a) $5^3 \sqrt[3]{5}$ b) $3\sqrt{6}$
 c) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ d) $\frac{x}{y^2}\sqrt{x}$

Pàgina 32

- 1.** a) $-1/6$ b) 144
2. a) 30^4 b) $(-8/5)^7$
3. a) $(-2)^{15}$ b) -1 c) $(-5)^4$
4. a) $3/5$ b) 9 c) $-125/8$
5. 1
6. a) 310000000 b) $9.5 \cdot 10^{-9}$
7. 140.75
8. a) $n = -125$ b) $n = 2$ c) $n = -2$
9. a) $\sqrt[5]{(-4)^3}$ Sí
 b) $\sqrt{3}$ Sí c) $\sqrt[4]{(-5)^3}$ No
10. a) $5\sqrt[3]{5}$ b) $50\sqrt{10}$
11. a) $\frac{7}{3}\sqrt[3]{6}$ b) $\sqrt[30]{18}$

Solucions del Tema 3**Pàgina 38**

- 17.** Sumen 355
18. Sumen 3825
19. 98 €

Pàgina 39

- 25.** raó -2, terme general $a_n = (-2)^n$
28. 163835/16384
29. 12

Pàgina 41

- 67.** a) $A_n = A \cdot (3/4)^{n-1}$ decreixent
 b) $P_n = 3L \cdot (3/2)^{n-1}$ creixent

Pàgina 42

- 1.** La raó és 3
2. Posició $n = 335$
3. Sumen 340
4. És una progressió geomètrica. La raó és 3.
5. Progressió geomètrica $a_n = 25^{n-1}$
6. Sumem 2048
7. $a_n = 2n + 1$
8. 250.000
9. 192 pàgines dia 7; 381 pàgines en total
10. 7299,92 €

Solucions del Tema 4**Pàgina 48**

- 8.** a) $\bar{x} = 40.4$; $\sigma = 16.5$; $CV = 0.407$
 b) $\bar{x} = 40.4$; $\sigma = 17.11$; $CV = 0.424$
 c) $\bar{x} = 48.6$; $\sigma = 8.77$; $CV = 0.18$

Pàgina 49

- 9.** $M_o = 1$; $\bar{x} = 1.6$; $Var = 0.84$; $\sigma = 0.92$
10. Variable quantitativa discreta; $\bar{x} = 1.6078$; $\sigma = 0.9717$
11. $\bar{x} = 0.95$; $M_e = 0.8$; $M_o = 1$

Pàgina 54

- 29.** a) 58/120 b) 16/120 c) 62/120 i 1/120

Pàgina 55

- 34.** a) 1/2 b) 1/2 c) 1/2
 d) 1- $1/8 = 7/8$ e) 1/8 f) 1/8
35. a) 0.19 b) 0.44 c) 0.56
 d) 0.95 e) 0.65 f) 0.35

Pàgina 56

- 37.** a) 49/100 b) 91/100 c) 9/100

38. a) $91/100$ b) $35/38$ c) $3/38$

Pàgina 57

41. $P = 0.9999$

45. a) $\frac{28}{153}$ b) $49/153$ c) $62/153$ d) $80/153$

Pàgina 58

- 1.** -10.: Claus de l'autoavaluació: 1b; 2c; 3c; 4b; 5d; 6a; 7a; 8b; 9d; 10c

Solucions del Tema 5

Pàgina 66

23. a) $-3x^5 + 4x^4 + 2x^3$

b) $10x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x$

c) $12a^3 - 43a^2 + 43a - 10$

Pàgina 67

24. a) $Q = 3x - 2; R = -2x + 5$

b) $Q = -2; R = 4x^2 - x + 6$

c) $Q = 2x^2 + 3x; R = -16x + 7$

d) $Q = 3x^2 - 3x + 4; R = -x + 2$

e) $Q = x^3 - 3x; R = 5x - 6$

25. a) $Q = 3x - 11; R = 38$

b) $Q = x^3 + 2x^2 + 4x + 8; R = 0$

c) $Q = x^3 + x; R = 1$

d) $Q = 7x^4 - 14x^3 + 24x^2 - 48x + 103;$
 $R = -211$

Pàgina 70

35. a) $\frac{3x+3}{x^2+x-2}$ b) $\frac{-4x+3}{x^2-x}$ c) $\frac{-3x^3+3x^2}{x^2+4x+3}$

d) $\frac{x^2-x-6}{x^3}$

36. a) $\frac{x^2+1}{x^3}$ b) $\frac{-x-1}{x^2-2x}$

40. a) $\frac{x-2}{3}$ b) $\frac{2(x-4)}{x+4}$

c) $\frac{-2}{2a+3}$

d) $\frac{x}{x-2}$

Pàgina 73

1. a) $3x + 5$ b) $(x+y)^2$ c) $\frac{2n}{3}$

2. $V = 7x^2$

3. 7

4. a) $15x^3$ b) $-\frac{5}{3}xy$ c) $2a^2b$

5. Grau 4; terme independent 9; 4 termes

6. a) $Q = 2x^2 - 5x + 6; R = -2x - 8$

b) $Q = 3x^3 + 9x^2 + 22x + 67; R = 199$

7. a) $\frac{4}{25}x^2 - \frac{4}{15}xy + \frac{y^2}{9}$

b) $x^4 - 1$ c) $9x^2 + 12x + 4$

d) $2x^2 - 5$

8. a) $5x^2 \cdot (1 - 3x + 5x^2)$

b) $x^2y^2 \cdot (2xy^3 - 3y^2 + 2x^5 + 7xy)$

9. a) $x(x+1)^2$ b) $x^2(x+1)(x-1)$

c) $3x^2(x^2 - 8x + 16)$

10. $\frac{2x}{x-1}$

11. $\frac{-x^2 - 5x + 6}{2x^2}$

Solucions del Tema 6

Pàgina 78

5. a) 3 b) 2 c) 2 d) 3
e) -1 f) 2/5 g) 1 h) 3/5

i) -1/2 j) -5 k) I.S. l) S.S.

6. a) 2/3 b) 0 c) 2 d) 1/2
e) 3/4 f) -1 g) 8 h) 1/6

i) -2 j) 1 k) I.S. l) S.S.

7. a) -1/3 b) -2 c) 2 d) 3
e) 5/7 f) 11

Pàgina 79

- 8.** a) $4/5$ b) $-1/3$ c) $-1/2$ d) 5
e) 2 f) I.S. g) S.S.

Pàgina 80

- 15.** En total 800 persones. Suspenen 424 en la primera prova i 94 en la segona.
19. cada disc 15 €; total 93 €
21. 14 bé i 6 malament
22. 12 de 0.50 € i 8 de 2 €
23. 24 dromedaris i 62 camells
24. 23 persones

Pàgina 82

- 29.** a) $x = 0$ i $x = -2$ b) $x = \pm 3$
c) $x = \pm 5$ d) $x = 0$ i $x = -1/2$
e) $x = -3/2$ f) $x = 0$ i $x = 2$

Pàgina 84

- 39.** a) $x = \pm 1$ i $x = \pm \sqrt{2}$
b) S.S.
c) $x = \pm \sqrt{6}$

Pàgina 90

- 1.** $x = 2$ i $x = -6/5$
2. $x = 13$ i $x = -12$
3. $x = 5/3$ i $x = 3$
4. $x = 24$ i $x = 8$
5. No té solució
6. Secants
7. No té solució
8. $x = 2$ i $y = -1$
9. 16 pollastres i 11 porcs
10. 20 anys

Solucions del Tema 7**Pàgina 100**

- 1.** 160; 0.3; 90; 2000
2. 1687.5 €
3. 12.5 %
4. 480 botelles
5. 16 t i 12.8 t
6. 1:30 000
7. 5 rotllos
8. 1,05 €
9. 64 camions
10. 16329,35 €

Solucions del Tema 8**Pàgina 111**

- 1.** **-6.** Autoavaluació: 1b; 2d; 3a; 4c; 5b; 6b

Solucions del Tema 9**Pàgina 116**

- 5.** a) $x = 4$ i $y = 3$ cm
b) $x = 6$ i $y = 18$ cm

Pàgina 117

- 11.** $x = 8$ cm

Pàgina 118

- 28.** $A = 4.5 \text{ cm}^2$, $P = 15.62 \text{ cm}$

Pàgina 119

- 42.** $A = 10^2 - \pi 5^2 = 21.46 \text{ cm}^2$

Pàgina 120

- 47.** $A = \frac{9}{2} + \frac{135}{360}\pi 18 = 25.71 \text{ cm}^2$
49. $P = 62.83 \text{ cm}$ i $A = 222.03 \text{ cm}^2$

Pàgina 126

- 1.** **-10.** Autoavaluació: 1d; 2b; 3c; 4a; 5d; 6a; 7a; 8c; 9d; 10a

Solucions del Tema 10**Pàgina 130**

- 14.** a) $(-17, 15)$ b) $(23, -7)$ c) $(-11, -14)$

Pàgina 131

- 19.** És una translació de vector $\vec{t}_1 + \vec{t}_2 = (-1, -1)$

Pàgina 132

- 25.** $A'(2, 4)$, $B'(-2, 3)$ i $C'(0, 5)$

- 28.** Un gir de 60° no deixa cap recta invariant. Un gir de 180° deixa invariants les rectes que passen del centre de gir. Les rotacions de 0° i 360° són la identitat, deixen la figura original.

Pàgina 133

- 36.** i) $A'(-3, -4)$, $B'(-5, 6)$ i $C'(4, 5)$;
ii) $A'(3, 4)$, $B'(5, -6)$ i $C'(-4, -5)$

Pàgina 138

- 1.** **-10.** Autoavaluació: 1b; 2c; 3b; 4d; 5c; 6b; 7b; 8b; 9d; 10b;

Solucions del Tema 11**Pàgina 142**

- 10.** Teorema de Pitàgores a l'espai:

$$D = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 3.46 \text{ dm}$$

- 11.** Teorema de Pitàgores a l'espai:

$$D = \sqrt{10^2 + 4^2 + 3^2} = 11.18 \text{ m}$$

- 15.** $A_L = 352 \text{ cm}^2$

- 16.** Totes les arestes mesuren $x = 7.75$, l'alçada d'una cara lateral $a_p = 6.71$ i l'alçada de la piràmide $H = 5.48 \text{ cm}$

Pàgina 143

- 19.** $A_L = 4712.4 \text{ dm}^2$
24. a) $V = 1000\pi = 3140 \text{ dm}^3 = \text{litres}$
b) costarà 2400 €

Pàgina 146

- 62.** Apotema piràmide 4 m

Pàgina 148

- 87.** a) $A = 480 \text{ cm}^2$ i $V = 448 \text{ cm}^3$
b) $A = 226.19 \text{ cm}^2$ i $V = 282.743 \text{ cm}^3$
c) $A = \text{depèn de l'inclinació}$ i $V = 125.66 \text{ cm}^3$
d) $A = 277.24 \text{ cm}^2$ i $V = 368.61 \text{ cm}^3$

Pàgina 151

- 1.** **-9.** Autoavaluació: 1c; 2a; 3d; 4b; 5a; 6d; 7b; 8a; 9c.

Solucions del Tema 12**Pàgina 156**

- 1.** a) $\frac{-5}{12}$; b) $\frac{-3}{7}$
2. 5^{20}
3. a) 29 exercicis dia 15;
b) 225 exercicis en total.
4. a) $N = 25$; $\sum f_i x_i = 41$; $\sum f_i x_i^2 = 83$;
c) $Mo = 2$; $\bar{x} = 1,64$; $\sigma = 0,79$; $CV = 0,48$ (48%).
5. a) 0,51; b) 0,42

Pàgina 157

- 6.** a) $3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 2x - 4$;
b) $3x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 10x - 5$;
c) $-4x^4 + 4x^3 + x^2 - 23x - 3$;
d) $4x^2 + 12x + 9$
7. a) $x = 1,82$ i $x = -0,82$;
b) $x = -1$ i $x = 5$

8. $x = -3$ i $y = 7$
9. Consumen 3000 kWh
10. $y = 0.30 \cdot x + 100$; $y = 190$ €; $x = 65$ km
11. Paràbola convexa en vèrtex al punt $x = 5/2$, $y = 17/4$
12. $1.8585\cdots = \frac{184}{99}$ i $2.888\cdots = \frac{26}{9}$. La mitjana és $x = \frac{235}{99}$.
13. 947,37 € de sou brut
14. a) $2,47 \cdot 10^{-6}$ b) $0,43943\cdots$ c) 5 cm perquè $5^3 = 125$
15. Per exemple, 17 anys = $5,36 \cdot 10^8$ s
16. El dia 21 va nadar 115 minuts; durant els 21 dies va nadar 1365 minuts.

Pàgina 158

17. a) 38 hotels; c) mitjana=2.47; desv. típica=0.88; C.V. = 0.36 (36%)
18. a) grau 4; b) $7x^3$; c) $2x^2 - 4x$
19. $P = 6/11 \approx 0,54$
20. $x = 2y$; $x - 8 = y + 8$; 3r A: $x = 32$; 3r B: $y = 16$.
21. a) No té solució; b) $x = -3$ i $x = 3$; c) $x = 0$ i $x = -2$; d) $x = 1$ i $x = -3$
22. $x + 30 = \frac{x^2}{5}$; $x^2 - 5x - 150 = 0 \rightarrow x = -10$ no val; $x = 15$ anys.
23. Gastaran 672 €
24. Ajuda: Utilitza l'equació de la funció lineal $y = mx + n$. Determina m i n. a) $y = -\frac{2}{3}x + 12$; b) $5 = -\frac{2}{3}x + 12 \rightarrow x = 10,5$ hores

Pàgina 159

25. a) $y = 3x + 600$; b) $1230 = 3x + 600 \rightarrow x = 210$ kg de tangeres
26. a) Lineal creixent; b) paràbola còncava, $V(0, 1)$; Lineal decreixent
27. a) Creix a (0, 4) i (9, 12) i (15, 19) min.; Decreix a (4, 9) i (12, 12) i (19, 21) min. b) 1 min; 20.5 min c) Màxim 45 km/h als 4 minuts i Mínima de 15 km/h als 9 min. d) És una funció contínua. El domini és (0, 21) i el recorregut (0, 45)
28. No perquè $15/10 \neq 65/60$. Només podríem dibuixar 13 cm dels 15 cm de la fotografia.
29. $h = 2,9$ cm
30. $A = 36 \text{ cm}^2$, $A = 32 \text{ cm}^2$, $A = 377 \text{ cm}^2$
- Pàgina 160**

31. a) $A'(4, 0)$ $B'(5, -2)$ $C'(6, 2)$
 b) $A'(1, -2)$ $B'(2, 0)$ $C'(3, -4)$
 c) $A'(-2, 1)$ $B'(0, 2)$ $C'(-4, 3)$
 d) $A'(5, 6)$ $B'(7, 5)$ $C'(3, 4)$
32. $A_T = 13,88 \text{ hm}^2$, $V = 2,59 \text{ hm}^3$
33. $A_T = 547,06 \text{ cm}^2$, $V = 935,3 \text{ cm}^3$
34. $A = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $V = V_{cub} - V_{piram} = 250 \text{ cm}^3$
35. $V = 338,7 \text{ cm}^3$
36. Hem de posar 1.54 kg de pH+ per augmentar 0.4 punts.