Introducción

Capítulo 1

Definiciones

Una *gráfica dirigida*, o *digráfica*, D consiste de un conjunto de vértices no vacío y de un conjunto de parejas ordenadas de vértices distintos llamadas flechas. Usaremos la siguiente notación:
Sea $D = (V, A)$ una digráfica. V denota el conjunto de vértices y A el de flechas de D.

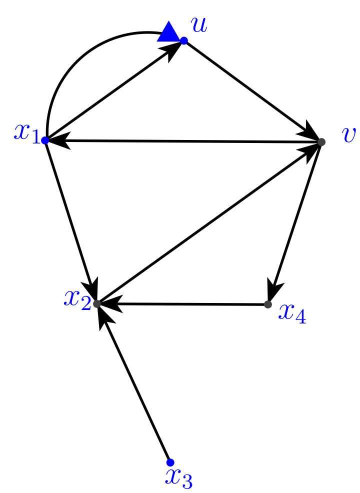

Figura 1.1 Una digráfica.

El *orden* de D es el número de vértices en D, es decir, la cardinalidad de D. Por ejemplo, el orden de la digráfica en la figura 1.1 es 6.
Para una flecha (u, v), decimos que u es in-vecino de v, o que u es ex-vecino de v. Si (u, v) es una flecha también decimos que v *absorbe* a u, y que u *domina* a v.

Sea D una digráfica. Una flecha $(u,v) \in A(D)$ es *simétrica* si existe $(v,u) \in A(D)$. Si *todas* las flechas de una digráfica D son simétricas, decimos que D es *simétrica*. Si *ninguna* flecha de D es simétrica entonces decimos que D es *asimétrica*.
Vamos a utilizar la notación $[u,v] \in A(D)$ para denotar que $(u,v) \in A(D)$ o que $(v,u) \in A(D)$.

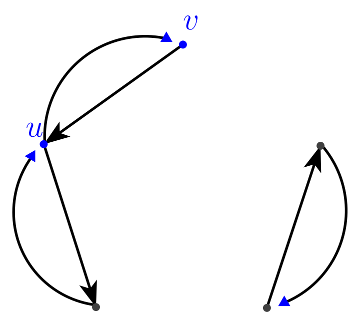

Figura 1.2 Una digráfica simétrica.

Dada una digráfica D, una *subdigráfica* de D es la digráfica que se forma si tomamos un subconjunto de vértices de D y tomamos todas las flechas que tienen como vértices iniciales o terminales uno de esos vértices.
Por ejemplo, la digráfica de la Figura 1.3 es subdigráfica de la de la Figura 1.2
. Una *digráfica inducida* por un conjunto de vértices $V' \subseteq V$, denotada por $D[V']$, es la digráfica que tiene como conjunto de vértices a V' y que contiene a todos las flechas que contiene A sobre ese conjunto de vértices.

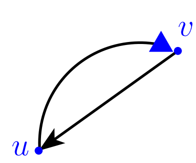

Figura 1.3 Una subgráfica inducida por un conjunto de vértices.

Una gráfica es *completeta* si para todo par de vértices u, v existe $(u, v) \in A(D)$.
La *gráfica subyacente* de una digráfica $D = (V, A)$, es la gráfica que tiene como conjunto de vértices a V, y u y v son adyacentes, si y solo si, $(u, v) \in A(D)$ o $(v, u) \in A(D)$.
Una digráfica es *semicompleta* si su gráfica subyacente es completa.

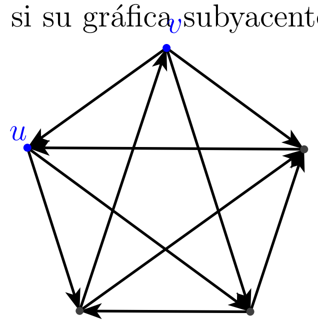

Figura 1.4 Un torneo.

Un *torneo* es una gráfica dirigida obtenida al asignar una dirección a cada arista en una gráfica completa.
Una digráfica D es *m-coloreable* si las flechas de D son coloreadas por m colores. Una

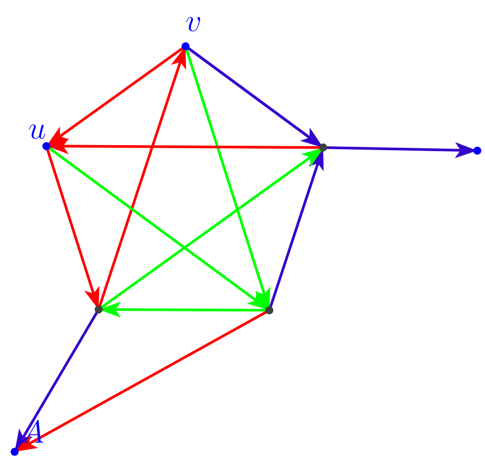

Figura 1.5 Una digráfica 3-coloreable.

trayectoria dirigida en D es una secuencia alternante $W = x_1 a_1 x_2 a_2 \ldots x_{k-1} a_{k-1} x_k$

de vértices x_i y flechas a_j en D tales que para todo i, a_i sale de x_i y llega a x_{i+1}.
A una trayectoria de u a v le podemos asignar el nombre de *uv-trayectoria*. Una $uv-$trayectoria la vamos a denotar también por $u \rightsquigarrow v$
Si en una uv-trayectoria todas las flechas tienen el mismo color decimos que es una trayectoria monocromática. Vamos a representar una $uv-$trayectoria monocromática como $u \rightsquigarrow_m v$
Sea D una digráfica. Decimos que C_k es un *cíclo* en D si C_k es una trayectoria que inicia y termina en el mismo vértice. $C_k = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$.
Vamos a denotar al cíclo de tres vértices por C_3 y al torneo transtivo de tres vértices por TT_3. Los vamos a llamar indistintamente *triángulos*.
Una digráfica es *quasi-transitiva* si siempre que existen vértices distintos u, v, w

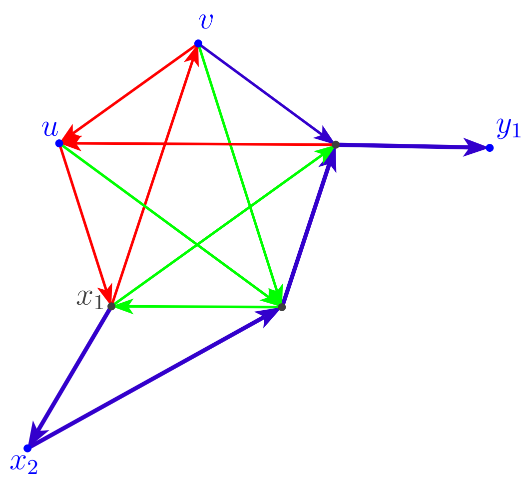

Figura 1.6 Una x_1y_1 trayectoria monocromática en una digráfica 3-coloreada.

tales que $(u, v), (v, w) \in A(D)$, entonces $\exists (u, w)$ or (w, u)

Proposición 1.1. *Sea D una digráfica cuasi-transitiva. Supongamos que $P = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ es una trayectoria dirigida minimal. Entonces $D[V(P)]$ es una digráfica semicompleta y $(x_j, x_i) \in A(D)$ para todo $j > i + 1$, excepto cuando $k = 4$. En ese caso la flecha entre x_1 y x_k puede no existir.*

Demostración. Por inducción.
Supongamos que $k = 5$, $x_1 \rightsquigarrow x_5$ es una trayectoria de longitud 4. Tenemos en la digráfica las trayectorias de longitud 2 (x_1, x_2x_3), (x_2, x_3, x_4), (x_3, x_4, x_5). Recordemos que D es cuasi-transitiva y que, como la trayectoria $x_1 \rightsquigarrow x_5$ es minimal, no

podemos tener una trayectoria más corta. Entonces $(x_3, x_1), (x_4, x_2), (x_5, x_2) \in A(D)$. (Supongamos que, por ejemplo, $(x_1, x_3) \in A(D)$, entonces tenemos una trayectoria más corta de x_1 a x_5: (x_1, x_3, x_4, x_5), una contradicción). Ahora Garantizaremos la existencia de estas flechas en la digráfica, las que sus subíndices van de mayor a menor.
La trayectoria de longitud 2 (x_5, x_3, x_1) da lugar a la flecha $(x_5, x_1) \in A(D)$, no puede

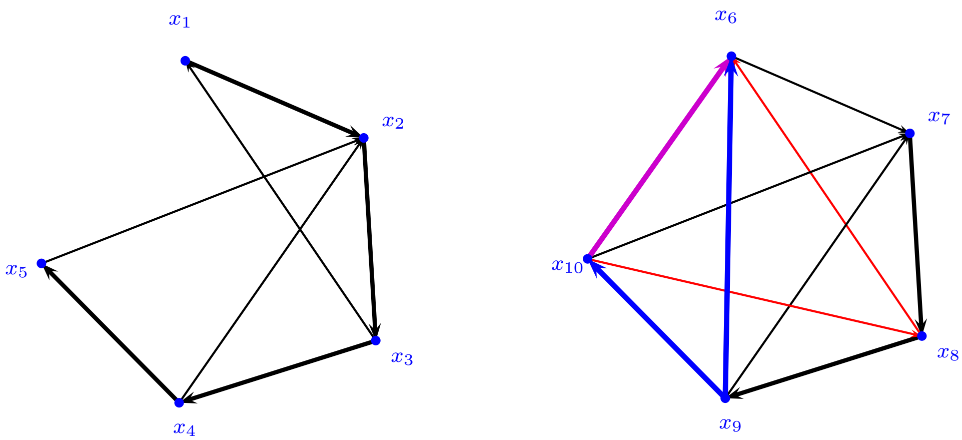

Figura 1.7 Una x_1y_1 trayectoria monocromática en una digráfica 3-coloreada.

ser en el sentido opuesto porque tendríamos la trayectoria de longitud 1 (x_1, x_5). Análogamente, la trayectoria (x_5, x_1, x_2) da lugar a la flecha (x_5, x_2), la (x_5, x_2, x_3) a la flecha (x_5, x_3) y finalmente (x_4, x_5, x_1) induce $(x_4, x_1) \in A(D)$.
Por lo tanto el resultado es válido para $k = 5$.
Supongamos que el resultado se cumple para una digráfica con $k \geq 5$ vértices.
Supongamos ahora que P es una x_1x_{k+1} trayectoria minimal, con $k+1$ vértices.
Sabemos que la subdigráfica inducida por los primero k vértices de P es semi-completa debido a la hipótesis de inducción, y que $(x_j, x_i) \in A(D)$ para todo $j > i + 1$.
x_k es adyacente a x_{k+1}. Como la trayectoria $x_1 \rightsquigarrow x_{k+1}$ es minimal, y D es cuasi-transitiva, la trayectoria (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) induce la flecha $(x_{k+1}, x_{k-1}) \in A(D)$. Ahora se forma la trayectoria (x_{k+1}, x_{k-1}, x_1) y por lo tanto $(x_{k+1}, x_1) \in A(D)$. Ahora que x_{k+1} es invecino a x_1, existe una trayectoria de x_{k+1} a x_2 pasando por x_1, entonces $(x_{k+1}, x_2) \in A(D)$, análogamente (x_{k+1}) es invecino a cada uno de los x_i, con $i < k$. Es así como garantizamos la existencia de las flechas que nos faltaban para que la digráfica inducida por P sea semicompleta.
Supongamos que $k = 4$, $P = (x_1, u, v, x_2)$ la trayectoria. Supongamos que existen las flechas (u, x_2) y $(v, x_1) \in A(D)$. Notemos que no existe $[x_1, x_2] \in A(D)$, por lo que

la gráfica subyacente de D no es completa.

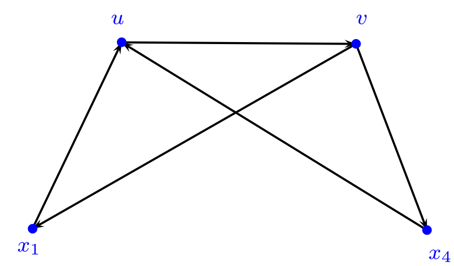

Figura 1.8 Una x_1y_1 trayectoria monocromática en una digráfica 3-coloreada.

□

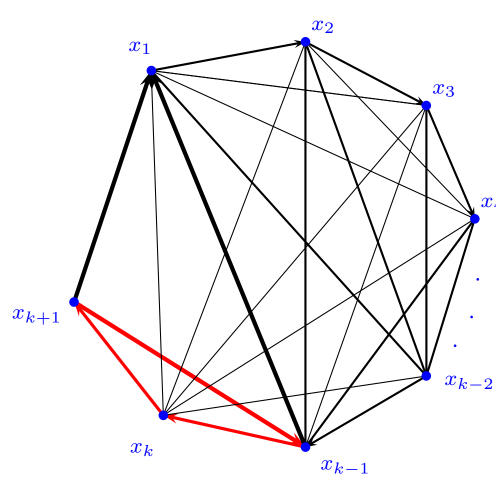

Figura 1.9 Una x_1y_1 trayectoria monocromática en una digráfica 3-coloreada.

Proposición 1.2. *Si una digráfica cuasi-transitiva D tiene una trayectoria dirigida $x \rightsquigarrow y$ pero $(x, y) \notin A(D)$, entonces o bien $(y, x) \in A(D)$ o existen vértices $u, v \in V(D) \setminus \{x, y\}$ tales que (x, u, v, y) y (y, u, v, x) son trayectorias dirigidas en D.*

Demostración. Supongamos que D tiene una trayectoria xy-trayectoria. Supongamos también que (x, y) no es flecha en D. Si (y, x) no está en $A(D)$, la digráfica inducida por $x \rightsquigarrow y$ no es semicompletaa. Entonces, por la Proposición semicompleta, $k = 4$, osea, tenemos que la trayectoria es de longitud 3 y existen vértices $v, u \in V(D)\setminus\{x, y\}$ tales que (x, u, v, y) y (y, u, v, x) son dos trayectorias dirigidas en D.

□

Ver Figura.

Proposición 1.3. *Si una digráfica cuasi-transitiva D tiene una trayectoria $x \rightsquigarrow y$ pero no existe $y \rightsquigarrow x \in D$, entonces $(x, y) \in A(D)$.*

Demostración. Supongamos que existe una trayectoria monocromática en D $x \rightsquigarrow y$ pero no existe ninguna trayectoria de regreso $y \rightsquigarrow_x$. Tomemos una xy-trayectoria minimal P' (P' puede ser P). Como no hay yx-trayectoria, entonces P' no tiene orden 4. Por lo tanto, $D[P]$ es semicompleta, luego $[x, y] \in A(D)$, pero como $(y, x) \notin A(D)$, entonces $(x, y) \in A(D)$. (de hecho $P' = (x, y)$). □

Decimos que un ciclo dirigido $C_k = (u_0, u_1, \ldots, u_k, u_0)$ de D es *cuasi-transitivo en el borde* si para cada $i = (0, 1, 2, \ldots, k)$ existe la flecha $(u_i, u_{i+2}) \in A(D)$ o la flecha $(u_{i+2}, u_i) \in A(D)$.

Capítulo 2

Generalizaciones de núcleos en digráficas m-coloreadas con clases cromáticas cuasi-transitivas

2.1. La cerradura de una digráfica

Sea $D = (V, A)$ una digráfica m-coloreada. Definamos por $\mathcal{C}(D)$ a la digráfica cerradura de D. $\mathcal{C}(D)$ es tal que su conjunto de vértices es el mismo que el de D y tal que su conjunto de flechas, además de contener las mismas flecahs que D, por cada trayectoria monocromática en D existe una flecha en $\mathcal{C}(D)$.

Lema 2.1. *Sea D una digráfica m-coloreada. Supongamos que cada clase cromática en D es cuasi-transitiva. Si C_k es un ciclo dirigido en $Asym(\mathcal{C}(D)$, entonces C_k es un ciclo dirigido en* Asym(D).

Demostración. Sea $C_k = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ un ciclo dirigido asimétrico en la cerradura de D. Tomemos una de las flechas de C_k, digamos $a = (x_i, x_{i+1})$. El caso en el que todas las flechas de C_k están en D no necesita explicación, así que consideremos el caso en el que a no es flecha de D. Si a no es flecha de D, debe existir en D una $x_i x_{i+1}-$trayectoria monocromática. Recordemos que esta flecha es asimétrica ya que C_k es un ciclo asimétrico.

Sea P la $x_i x_{i+1}$-trayectoria monocromática, supongamos que es minimal y de color verde. Si P tiene orden distinto de 4, entonces, en virtud de la Proposición 1.1, $D[P]$ es semicompleta.

Entonces $[x_1, x_2] \in A(D)$, pero $(x_1, x_2) \notin A(D)$, entonces $(x_2, x_1) \in A(D)$. Así que $(x_2, x_1) \in \mathcal{C}(D)$ y $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}(D)$ (ya que $(x_1, x_2) \in C_k$ que es un cíclo en $Asym(\mathcal{C}(D))$, esto contradice la asimetricidad de C_k. Entonces la gráfica inducida por P no es semicompleta.
En virtud de la Proposición 1.2, y como $(x_1, x_2) \notin A(D)$ por hipótesis, P tiene orden 4. Existen $u, v \in V(D) \setminus \{x, y\}$, tales que (x_2, v, u, x_1) es una trayectoria monocromática, de color verde, y $(x_2, x_1) \in A(\mathcal{C}(D))$, lo que contradice que C_k sea un cíclo asimétrico (ya que $(x_1, x_2) \in C_k$). □

2.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas

En la sección anterior presentamos los conceptos de independencia y dominación de un conjunto de vértices de una digráfica. Ahora vamos a dar una generalización deestos conceptos, utilizando como criterio la existencia de trayectorias monocromáticas en lugar de flechas entre dos vï¿½ertices. Sea $D = (V, A)$ una digráfica. Sea $K \subset V$. Decimos que K es un *conjunto independiente* de V, si para cualesquiera $u, v \in K$ no existe ni (u, v) ni $(v, u) \in A$. Si cada vértice que no está en K es absorbido por un vértice en K decimos que K es un *conjunto absorbente* de vértices. Si K es independiente y dominante decimos que K es un *núcleo* de D.

Teorema 2.2. *Si cada ciclo dirigido de una digráfica D tiene una flecha simétrica, entonces D es kernel-pefecta.*

Corolario 2.3. *D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas si y solo si $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo.*

Demostración. Sea K un núcleo por trayectorias monocromáticas de D.
K es independiente por trayectorias monocromáticas, entonces para cualesquiera dos vértices u, v, no existe una uv-trayectoria, luego $(u, v) \notin A(D)$. Por lo tanto K es independiente. K es dominante por trayectorias monocromáticas. Sea $u \in K$, para cierto vértice $x \notin K$ existe la trayectoria $u \rightsquigarrow_m x \in D$. Luego la flecha (u, x) está en $\mathcal{C}(D)$. Por lo tanto K es dominante en $\mathcal{C}(D)$.
Por lo tanto, K es un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.
Sea K un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.
K es independiente en $\mathcal{C}(D)$. Para todo par de vértices $u, v \in K$ no existe una flecha $(u, v) \in A(\mathcal{C}(D))$. Luego no existe una $uv-$trayectoria monocromática. Por lo tanto K es independiente por trayectorias monocromáticas en D. K es dominante en

$\mathcal{C}(D)$. Para todo vértice x $\notin K$, existe un vértice $v \in K$ tal que $(v, u) \in A(\mathcal{C}(D))$, entonces existe una vu-trayectoria en D, luego K es dominante por trayectorias monocromáticas.
Por lo tanto K es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D. □

2.3. Resultados

Teorema 2.4. *Sea $D = (V, F)$ una digráfica m-coloreada sin triángulos policromáticos. Supongamos que cada ciclo $C_k \in D$ es cuasi-transitivo en el borde y que cada clase cromática es cuasi-transitiva.*

Sea $C_k = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_0)$ un cíclo asimétrico dirigido en $\mathcal{C}(D)$ de longitud mínima. Supongamos que C_k es monocromático. Debido al Lema 2.1, sabemos que como C_k es un cíclo asimétrico en $\mathcal{C}(D)$, y cada clase cromática en D es cuasi-transitiva, entonces C_k es un ciclo en D.
La u_2u_1-trayectoria monocromática $M = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_1)$ está en D ya que

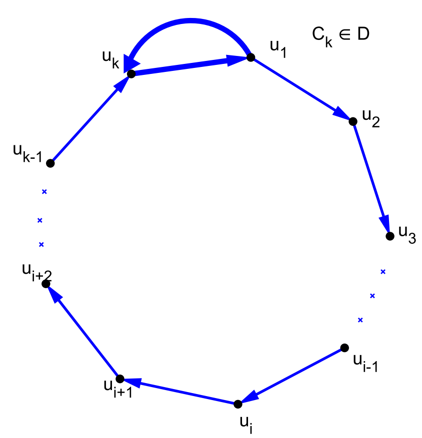

Figura 2.1 C_k está en D

todas sus aristas están en C_k. La existencia de M en D nos garantiza que la flecha (u_2, u_1) está en $\mathcal{C}(D)$. Sin embargo, sabemos que la flecha (u_1, u_2) en C_k está en D. Por lo tanto la flecha $[u_i, u_2]$ es simétrica. Esto es imposible, C_k es asim'etrico y por lo tanto todas sus flechas debe ser asimétricas. Así que existe un vértice en C_k, digamos u_i, tal que el ciclo cambia de color, digamos de Azul a Rojo. Es decir, las flechas distintas a (u_i, u_{i+1}) en C_k son de color Azul, y la flecha (u_i, u_{i+1}) es de color

Rojo.
Recordemos que D es cuas-itransitiva en el borde. La trayectoria de longitud dos (u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) en C_k induce la existencia de una (y solo una) de las flechas (u_{i-1}, u_{i+1}) y $((u_{i+1}, u_{i-1})$ en D. Sin embargo, el hecho de que C_k sea asimétrico y cuasi-transitivo, junto con el cambio de color de las flechas en u_i impide la existencia de (u_{i+1}, u_{i-1}) en $\mathcal{C}(D)$. Analicemos los casos posibles.
El Lema 2.1 nos garantiza que el ciclo C_k está en $Asym(D)$, osea que todas sus flechas son asimétricas.. Supongamos que (u_{i+1}, u_{i-1}) está en D. Se forma el ciclo (u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) en D que por hipóstesis no puede ser policromático, así que esta flecha no puede ser Verde.
Si (u_{i+1}, u_{i-1}) fuera de color Azul, la trayectoria monocromática (u_{i+1}, u_{i-1}, u_i), induce la existencia de (u_{i+1}, u_i) en $\mathcal{C}(D)$, ya que todas las clases cromáticas son cuasi-transitivas y la flecha entre u_i y u_{i+1} es simétrica. Esto es imposible ya que C_k es asimétrico.

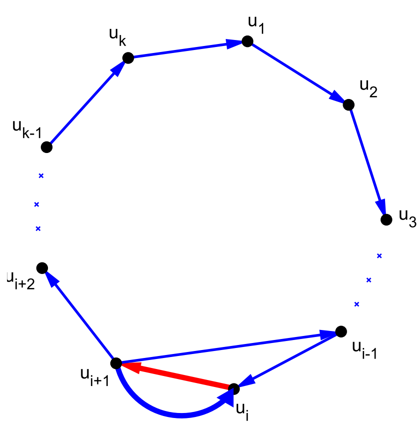

Figura 2.2 La flecha entre u_{i-1} y (u_{i+1}) es simétrica en D

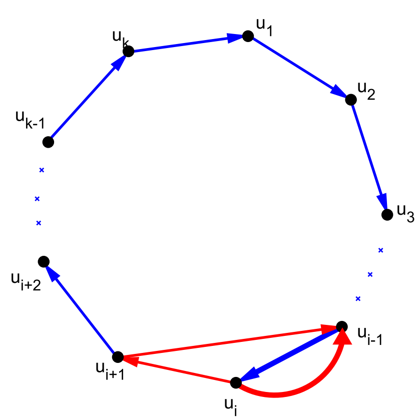

Figura 2.3 La flecha entre u_{i+1} y (u_i) es simétrica en D

Análogamente, si (u_{i+1}, u_{i-1}) fuera de color Rojo, tenemos la trayectoria de longitud monocromática (u_{i-1}, u_{i+1}, u_i), entonces (u_{i-1}, u_i) está en $\mathcal{C}(D)$, haciendo simétrica la flecha entre u_{i-1} y u_i, ambos vértices en el ciclo asimétrico C_k, esto también es una contradicción.

Hemos probado que la flecha (u_{i+1}, u_{i-1}) no puede ser de color Azul ni Rojo ni de ningún otro color distinto a estos dos, entonces esta flecha no puede estar en D.Por lo tanto, (u_{i-1}, u_{i+1}) está en D. C_k es un ciclo asimétrico de longitud mínima.

Probamos que (u_{i-1}, u_{i+1}) es una flecha en D y por lo tanto una flecha en $\mathcal{C}(D)$. Con esta flecha podríamos formar un ciclo nuevo en $\mathcal{C}(D)$ que no pasara por u_i, y por consecuencia, sería de menor longitud. Esto evidentemente contradice nuestra hipótesis de minimalidad sobre C_k. Sea $C' = (u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{k-1}, u_k)$ un ciclo en $\mathcal{C}(D)$. Todas las flechas en C'_k, salvo (u_{i-1}, u_{i+1}) son flechas también en C_k, y por ende son asimétricas. Si (u_{i-1}, u_{i+1}) fuera también asimétrica, C' sería un ciclo de longitud menor que C_k en $Asym(\mathcal{C}(D)$. Esto es imposible, por lo tanto, la flecha entre $(u_{i-1}$ y $u_{i+1})$ debe ser simétrica, osea (u_{i+1}, u_{i-1}) es una flecha en $\mathcal{C}(D)$. Como acabamos de probar que esta flecha no está en D, tiene que existir como consecuencia de la existencia de una trayectoria monocromática en D, recordemos que, en $\mathcal{C}(D)$ están todas las flechas de D y además hay una flecha por cada trayectoria monocromática en D de ese color.
Llamemos P a esta trayectoria. P es del mismo color que (u_{i+1}, u_{i-1}) y tiene que ser distinto de Rojo o Azul:

- Si (u_{i+1}, u_{i-1}) fuera Azul, la $u_{i-1}u_i$-trayectoria Azul se forma en D, y por ende la flecha (u_{i+1}, u_i) está en $\mathcal{C}(D)$, ya que cada clase cromática es cuasi-transitiva. La flecha (u_i, u_{i+1}) también está en $\mathcal{C}(D)$ pues es una flecha de C_k. Por lo tanto la flecha entre u_i y u_{i+1} es simétrica, pero esto es imposible ya que supusimos que (u_i, u_{i+1}) está en C_k, un ciclo asimétrico

- Si esta flecha fuera Roja, haciendo un análisis similar al anterior, tendríamos la trayectoria monocromática $(u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i-1})$ de color Rojo, luego, (u_i, u_{i-1}) es una flecha en $\mathcal{C}(D)$, entonces la flecha entre u_{i-1} y u_i, ambos vértices en C_k, es simétrica en $\mathcal{C}(D)$, lo que contradice la asimetricidad de C_k

Entonces P es una trayectoria monocromática Verde en D. Supongamos que el vértice en C_k u_i está en P. Entonces la $u_{i+1}u_i$-trayectoria monocromática en D garantiza la existencia de la flecha (u_{i+1}, u_i) en $\mathcal{C}(D)$, haciendo simétrica a la flecha entre u_i y $u_{i+1})$, que es una flecha en C_k un ciclo asimétrico, esto nos lleva a una contradicción. Por lo tanto u_i no es uno de los vértices en P.
A continuación vamos a probar uqe dada una digráfica D sin triángulos policromáticos, y con todos sus ciclos cuasi-transitivos y cada clase cromática cuasi-transitiva, cada ciclo dirigido en $\mathcal{C}(D)$ tiene una flecha simétrica. Si sucede esto sabemos, debido a Teorema 2.2, que $\mathcal{C}(D)$ es kernel-perfecta. Debido al Corolario 2.3 sabremos que D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Teorema 2.5. *Sea $D = (V, F)$ una digráfica m-coloreada sin triángulos policromáticos. Supongamos que cada ciclo C_k en D es cuasi-transitivo en el borde,* *y que cada clase cromática es cuasi-transitiva. Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Sea $C_k = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_0)$ un ciclo dirigido en $Asym(\mathcal{C}(D)$. Por hipótesis no existen triángulos policromáticos en D, esto evidentemente incluye a los ciclos de longitud 3, siendo así, se cumplen las hipótesis del Teorema 2.5 y podemos afirmar lo siguiente:

- Existe un vértice u_i en C_k, tal que todas las flechas en el ciclo son de color Azul y (u_i, u_{i+1}) es de color Rojo
- (u_{i-1}, u_{i+1}) está en D
- (u_{i+1}, u_{i-1}) no es una flecha en D, (u_{i+1}, u_{i-1}) si una flecha en $\mathcal{C}(D)$, y por lo tanto existe P, una $u_{i+1}u_{i-1}-$trayectoria en D, de color Verde
- u_i no es un vértice de P

Supongamos sin pérdida de generalidad que P es de longitud mínima. La clase cromática verde es cuasi-transitiva por hipótesis. La flecha (u_{i-1}, u_{i+1}) no está en la clase cromática del Verde pues D no contiene triángulos policromáticos, recordemos que P es Verde. Se cumplen las hipótesis que nos garantizan en virtud de la Proposición 1.2, que la longitud de la trayectoria debe ser 4 y que existen vértices v_1, v_2 en D distintos a u_{i+1} y a u_{i-1}) tales que las trayectorias dirigidas $(u_{i+1}, v_2, v_1, u_{i-1})$ y $(u_{i-1}, v_1, v_2, u_{i+1})$ están en D. Con estas aristas podemos formar el ciclo $(u_i, u_{i+1}, v_1, v_2, u_{i-1}, u_i)$. Como todos los ciclos en D, es cuasi-trasntivio en el borde por hipótesis, así que debe existir una flecha entre u_i y v_2 en D, como consecuencia de que la trayectoria de longitud dos (u_i, u_{i+1}, v_1) está en D.
Supongamos que (u_i, v_1) es una flecha de D. Si fuera Verde la flecha entre u_{i-1} y u_i estaría en $\mathcal{C}(D)$ contradiciendo la asimetricidad de C_k.
Si esta flecha fuera de un color distinto, tendríamos los triángulos policromáticos (u_i, v_1, u_{i+1}) o (u_i, v_1, u_{i-1}) en D lo cual también contradice nuestras hipótesis.
En resumen, Si C_k fuera un ciclo asimétrico en $\mathcal{C}(D)$, C_k tendría una flecha simétrica, y por lo tanto D sería kernel perfecta y debido al Teorema 2.2, sabemos que D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Teorema 2.6. *Sea T un torneo m-coloreado sin triángulos policormáticos tal que cada ciclo es cuasi-transitivo en e lborde y cada clase cromática es cuasi-transitiva. Entonces T tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas*

En la deomstración del Teorema 2.4, supusimos que la digráfica D no contiene triángulos policromáticos. Esto incluye tanto a torneos TT_3 como a C_3, ciclos de tamaño 3. En el siguiente Teorema vamos a cambiar esta hipótesis por una más fuerte, permitiendo la existencia de torneos de 3 vértices policromáticos. En el caso de los ciclos de longitud 3, vamos a limitar la cantidad de aristas de distinto color a 2, permitiendo triángulos casi-monocromáticos pero no policromáticos.

Teorema 2.7. *Sea D una digráfica m-coloreada tal que cada ciclo es cuasi-transitivo en el borde y cada una de sus clases cromáticas es cuasi-transitiva. Si existen enteros $4 \leq k$ y $3 \leq l \leq k-1$ tales que cada ciclo C_k es casi-monocromático y cada C_l no es policromático, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración. Sea $C_k = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}, u_{k-1}, u_L)$ un ciclo dirigido *asimétrico* de longitud mínima en $\mathcal{C}(D)$. Por hipótesis sabemos que cada C_l no es policromático para $3 \leq l$, así que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.4 y podemos afirmar lo siguiente:

- Existe un vértice u_i en C_k en donde hay un cambio de color, (u_{i-1}, u_i) es de color Azul y (u_i, u_{i+1}) es de color Rojo
- (u_{i-1}, u_{i+1}) está en D
- (u_{i+1}, u_{i-1}) no está en D pero si está en $\mathcal{C}(D)$, y debido a esto, existe P una $u_{i+1}u_{i-1}-$trayectoria en D
- u_i no está en P

Al igual que en el Teorema anterior vamos a analizar a la trayectoria P que pertenece a la clase cromática del Verde. Supongamos que $u_{i-1}, u_{i+1})$ no es Verde. En este caso podemos usar el resultado probado en la Proposición 1.3, al igual que en la demostración anterior, y concluimos que P es de orden 4. Sea v_1, v_2 dos vértices en D distintos a u_{i+1} y u_{i-1} que forman parte de las trayectorias $(u_{i+1}, v_1, v_2, u_{i-1})$ y $(u_{i-1}, v_2, v_1, u_{i+1})$. En este caso, por hipótesis D si admite TT_3 policromáticos, por lo que la demostración anterior no nos va a llevar a la misma contradicción.
Vale la pena repasar en este punto la diferencia entre un ciclo policrmáticos, y uno casi-monocromático. El ciclo $C' = (u_i, u_{i+1}, v_1, v_2, u_{i-1}, u_i)$ es policromático y tiene longitud 5. Por hipótesis *todos* los ciclos de longitud menor que k no son policromáticos,

- si k fuera mayor que 5, llegamos a una contradicción: $(u_i, u_{i+1}, v_1, v_2, u_{i-1}, u_i)$ es policromático y de longitud menor que k (supusimos $k > 5$)

- si k es igual a 5, el ciclo $(u_i, u_{i+1}, v_1, v_2, u_{i-1}, u_i)$ no es casi-monocromático
- si k es menor que 5, debe ser igual a 4. Como cada ciclo es cuasi-transitivo en el borde por hipótesis, la flecha entre u_i y v_1 debe estar en D. Supongamos que (u_i, v_1) está en D. Como cada C_k es casi-monocromático, (u_i, v_1) debe ser Verde, de otra forma tendríamos mas de una flecha de color distinto de Verde. Se forma entonces la trayectoria monocromática (u_i, v_1, v_2, u_{i-1}) en D, lo que garantiza la existencia de (u_i, u_{i-1}) en $\mathcal{C}(D)$, entonces, la flecha netre u_i y u_{i+1}, que forma parte de C_k es simétrica en $\mathcal{C}(D)$, esto es una contradicción.
  Si (v_1, u_i) estuviera en D y fuera de color Azul, (u_i, u_{i+1}, v_1) sería un ciclo policromático de longitud 3 menor a k, lo que sería una contradicción. Si fuera de color Verde, la $u_{i+1}u_i$-trayectoria verde da lugar a la flecha (u_{i+1}, u_i), haciendo la flecha entre estos dos vértices simétrica, lo que es imposible. Por lo tanto (v_1, u_i) es de color Rojo.
  Ahora supongamos que (v_2, u_i) está en D. Esta flecha solo puede ser Verde para que el ciclo de longitud 4 $(u_i, u_{i+1}, v1, v2, u_i)$ sea casi-monocromático. La flecha (u_{i+1}, u_i) está en D como consecuencia de la $u_{i+1}u_i$-trayectoria monocromática Verde en D, haciendo simétrica la flecha entre estos vértices.
  Por lo tanto, (u_i, v_2) debe estar en D. No puede ser Verde, porque la flecha entre u_{i-1} y u_i sería simétrica, como consecuencia de la existencia de la trayectoria verde (u_i, v_2, u_{i-1}). Si fuera de color Rojo, el ciclo de orden 3 $(u_{i-1}, u_i, v_2, u_{i-1})$ sería policromático, otra vez una contradicción.

******************* Por lo tanto (u_{i-1}, u_{i+1}) es Verde.

En este caso, la flecha (u_{i-1}, u_{i+1}) podría ser de color Verde sin contradecir nuestras hipótesis sobre la coloración de D, ya que D admite torneos TT_3 policromáticos.

$(u_{i-1}, u_{i+1}) \in A(D)$ es Verde. En este caso, la longitud de P es mayor que 4. Podemos acotar aún más la longitud de t con respecto a k. El cíclo $C_{t+3} = (u_i, u_{i+1}, v_1, v_2, \ldots, v_t, u_{i-1}, u_i)$ no es cuasi monocromático. Por hipótesis, existe un número m mayor a 4, tal que todos los cíclos de longitud m deben ser casi-monocromáticos. Es claro que C_{t+3} no cumple con esta característica ya que tiene dos flechas de color distinto a Verde (de hecho es un ciclo policromático). Siendo así, $m \neq t + 3$. Además m no puede ser más grande que $t + 3$, porque por hipótesis, todos los cíclos de longitud l, para $l \leq k - 1$ no son policromáticos. Por lo tanto, $k \leq t + 2$. En esta demostración por contradicción, nuestro objetivo es encontrar un ciclo de longitud k que no sea casi monocromático. Podemos reducir el tamaño del ciclo C_{t+3} a k vértices partiendo de esta relación entre la longitud de P y k.

Las trayectorias monocromáticas (v_t, u_{i-1}, u_i) y (u_i, u_{i+1}, v_1) están en el ciclo cuasi-transitivo en el borde C_{t+3}. Este hecho induce la existencia de las flechas entre los vértices u_i, v_1 y v_t, u_i en D. Si no hay flechas de u_i a ningún vértice de P, (v_t, u_i) está en D. Se forma así La trayectoria (v_{t-1}, v_t, u_i) en D, lo que a su vez garantiza la existencia de (v_{t-1}, u_i) en D. Podemos seguir este procedimiento hasta llegar a que la flecha (v_1, u_i) está en D. Notemos que ninguna de estas flechas es Verde: si alguna fuera de este color tendríamos una $u_{i-1}v_j$-trayectoria monocromática, para cierto j, lo que haría a la flecha (u_i, u_{i-1}) simétrica en $\mathcal{C}(D)$, llegando a una contradicción. Todos los vértices de en P son antecesores a u_i, en particular v_{k-2}. Pasando por este vértice, podemos formar al ciclo $C' = (u_{i+1}, v_1, v_2, \ldots, v_{k-2}, u_i, u_{i+1})$ que es de longitud k. Este ciclo no es cuasi-monocromático, la flecha (u_i, u_{i+1}) es de color azul, las flechas en P son verdes, y como ya vimos, la flecha (v_{k-2}, u_i) no es Verde. Con esto llegamos a una contradicción.

Ahora supongamos que no hay flechas de ningún vértice v_j en P a u_i. Análogamente al caso anterior, la trayectoria Verde de longitud 3 en el ciclo C_k hace que la flecha (u_i, v_t) esté en D. Esto da lugar a la trayectoria (u_i, v_1, v_2), que hace que la flecha (u_i, v_2) esté en D. Así sucesivamente, vemos que todas las flechas (u_i, v_n) desde $n = 1$ hasta que $n = t$ están en D. El vértice $v_{t-(k-3)}$ está en P, ya que sabemos que su longitud, t, es mayor o igual que $k-2$, (osea $t > k-3$). Entonces la $v_{t-(k-3)}v_t$-trayectoria Verde tiene longitud $k-2$. El ciclo $C'_k = (u_i, v_{t-(k-3)}, \ldots, v_t, u_{i-1}, u_i)$ es de longitud k. Hemos visto que la flecha $(u_i, v_{t-(k-3)})$ no puede ser de color verde. La flecha (u_{i-1}, u_i) no es tampoco verde, por lo tanto, C' no es casi-monocromático, y es de longitud k, lo que es una contradicción.

Si pudieramos tener flechas desde u_i a vértices de P y viceversa, tenemos que considerar varios casos. Digamos que v_α es el vértice en P con subíndice menor tal que (v_α, u_i) es una arista de D. Como es el menor, todos los vértices anteriores en P cumplen que $(u_i, v_{\alpha-m})$ es una arista de D. α no puede ser muy grande con respecto a k. Observemos que si $\alpha \geq k-2$, $(u_i, v_{\alpha-(k-2)})$ es una arista de D, el ciclo $(u_i, v_{\alpha-(k-2)}, v_{\alpha-(k-2)+1}, \ldots, v_{\alpha-(k-2)+(k-2)}, u_i)$ es de longitud k y no es casi-monocromático. Por lo tanto $\alpha < k-2$.

Ahora digamos que β es el vértice sucesor de u_i en P con subíndice más grande, es decir, para todos los vértices sucesores a v_β en P existe la flecha $(v_{\beta+m}, u_i)$ en D. Supongamos que $\beta \leq t-(k-3)$, osea, $\beta = t-(k-3)-i$, con $i \geq 0$. El vértice

$b_{\beta+k-2}$ está en P, efectivamente,

$$\beta - k - 2 \leq t$$

$$\Leftrightarrow t - (k-3) - i + k - 2 \leq t$$

$$\Leftrightarrow -k + 3 - i + k - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -i + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow i \leq 1.$$

Si $\beta = t - (k-3)$, $\beta + k - 2 = t - (k-3) + k - 2 = t + 1$.

Supongamos que $\alpha < \beta$. Si existieran vértices v_x entre v_α y v_β, las flechas entre u_i y estos vértices tienen que ser de la forma (u_i, v_x), ya que, como hemos visto, para todos los vértices $v_{\alpha-n}$, las flechas $(u_i, v_{\alpha-n})$ están en D, por ser α mínimo. Pero esto no es posible ya que todos los vértices $v_{\alpha+m}$, las flechas $(v_{\alpha+m}, u_i)$ están en D por ser β máximo. Por lo tanto $\beta = \alpha + 1$. Podemos encontrar vértices v_δ y v_γ, en P tales que $\delta - \gamma = k - 2$, debido a que sabemos que $t \geq k - 2$. Además podemos elegir a δ y γ tales que $\gamma < \beta$ y $\alpha < \delta$ (y por lo tanto con las flecha (u_i, v_γ) y (v_δ, u_i) en D). El cíclo $(u_i, v_\gamma, \ldots, v_\beta, v_\alpha, \ldots, v_\delta, u_i$ es de longitud k y tiene al menos dos flechas de distinto color a Verde, así que no es casi-monocromático, esto es imposible.

Si $\alpha > \beta$. Recordemos que hay cuando mas de $k - 2$ vértices en P. Tenemos dos subcasos que considerar.

- Cuando hay más de $k - 2$ vértices entre v_β y v_α en P. La flecha (u_i, v_β) está en D, como $\beta - \alpha \geq k - 2$, el vértice $v_{\beta-(k-3)}$ está la trayectoria P:

$$\beta - \alpha \geq k - 2$$

$$\Leftrightarrow \beta \geq k - 2 + \alpha \geq k - 2 > k$$

. La trayectoria $K = (v_\beta, \ldots, v_{\beta-(k-3}, v_{\beta-(k-2)}, \ldots, v_{\beta-1})$ es de longitud $k - 2$. Como $D[V(P)]$ es semicompleta, $(v_{\beta-1}, v_\alpha)$ está en D. Con esta arista y con K, podemos formar el ciclo de longitud k $C'_k = (u_i, v_\beta, v_{\beta-(k-3)}, v_{\beta-(k-2)}, \ldots, v_{\beta-1}, v_\alpha, u_i)$. Este ciclo no es casi monocromático, las aristas (u_i, v_β) y (v_α, u_i) no pueden ser verdes. Esto es una contradicción

- Supongamos que hay menos de $k - 2$ vértices entre v_β y v_α en P. Sabemos que la longitud de P, t es mayor o igual a $k - 2$, así que, en ete caso, podemos encontrar en P dos vértices v_γ y v_δ tales que $\delta - \gamma = k - 2$

con $\gamma < \alpha$ y $\delta > \beta$. Como $\gamma < \alpha$, (u_i, v_γ) está en D, y como $\delta > \beta$, (v_β, u_i) está también está en D. Estas flechas no pueden ser verdes como ya sabemos, para evitar que se formen flechas simétricas en C_k, un cíclo por construcción asimétrico. Entonces podemos formar un ciclo de longitud k, con estas dos flechas de color distinto de Verde, osea un ciclo que no es casi-monocromático $(u_i, v_\gamma, v_{\gamma+1}, \ldots, v_\alpha, \ldots, v_\beta, v_{\beta+1}, \ldots, v_\delta, u_i)$, lo que contradice nuestras hipótesis iniciales.

$\square$