INTRODUCTION

Introducción

Capítulo 1

Definiciones

Sea D una digráfica y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sus vértices. Sean $G_1, G_2, \ldots, G_n$ digráficas tales que, para cualquier par de ellas, sus conjuntos de vértices son disjuntos.

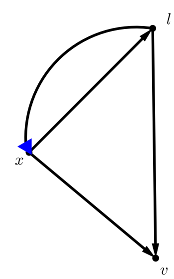

Figura 1.1 D

Figura 1.2 G_x

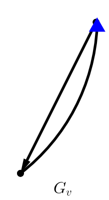

Figura 1.3 G_v

Figura 1.4 G_l

La *composición* de las digráficas $G_1, G_2, \ldots, G_n$, (con respecto a D), $D[G_1, G_2, \ldots, G_n]$, tiene como conjunto de vértices la unión de los conjuntos de vértices de cada G_i. Su conjunto de flechas contiene a los conjuntos de aristas de cada G_i y además si (v_i, v_j) es una flecha en D, entonces de cada vértice de G_i sale una flecha a todos los vértices de G_j.

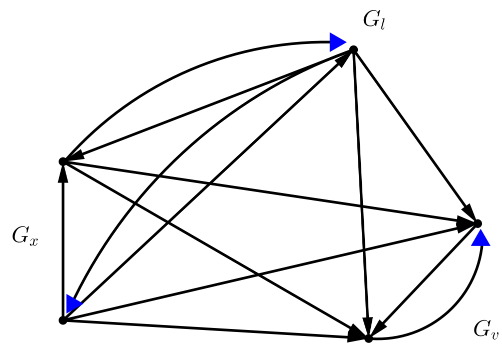

Figura 1.5 $D[G_x, G_l, G_v]$

1.1. Resultados

Lema 1.1. *Sea D una digráfica cuasi-transitiva y A y B dos componentes conexas distintas en D. Si existe una $xy-$trayectoria de longitud mínima, P, para ciertos vértices x en A y y en B, entonces la flecha (x, y) está en D.*

Demostración. Como D es cuasi-transitiva, en virtud de la proposición 1.1, si (x, y) no está en D, entonces (y, x) está en D o el orden de P es cuatro y existen vértices u, v tales que (y, u, v, x) y (x, u, v, y) son trayectorias en P. Notemos que no puede existir en D ninguna $yx-$trayectoria. De

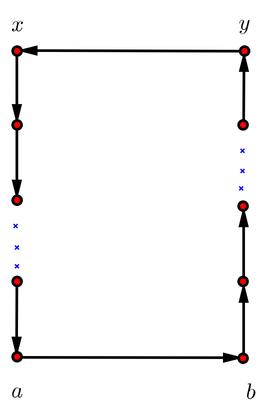

Figura 1.6 Si (y, x) está en D entonces A y B no son distintas componentes conexas

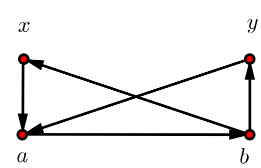

Figura 1.7 Si P tiene orden 4, existe una yx-trayectoria en D

lo contrario, existirían $xy-$ y $yx-$ trayectorias dirgidas en D y por ende x y y estarían en la misma componente conexa contradiciendo la hipótesis de que están en distintas componentes conexas.

Entonces (x, y) debe ser una flecha en D. □

Lema 1.2. *Sean A y B dos componentes fuertemente conexas distintas de una digráfica cuasi-transitiva D con al menos una flecha de A a B. Entonces $A \mapsto B$*

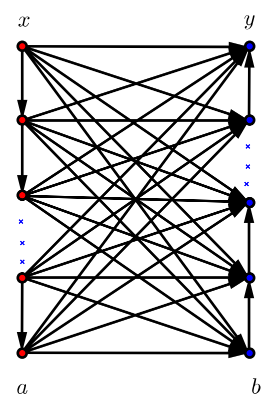

Figura 1.8 $A \mapsto B$

Demostración. Llamemos (a, b) a la flecha de A a B que existe en D por hipótesis. Sean x cualquier vértice en A y y cualquier vértice en B. Por ser A y B subdigráficas fuertemente conexas de D, existen una xa-trayectoria y una by-trayectoria en D. Entonces $(x, \ldots, a, b, \ldots, y)$ es una $xy-$trayectoria en D.

Debido al resultado probado en el lema anterior sabemos que (x, y) es una flecha de D. Como esto se cumple para cualesquiera vértices x, y y en A y B, $A \mapsto B$. □

Lema 1.3. *Sea D una digráfica cuasi-transitiva no conexa. Si $S = (N_0, N_1, N_2, \ldots, N_k)$ es una trayectoria en $SC(D)$ entonces N_0 domina a N_i para i mayor que 0 y menor o igual que k y N_k es dominado por N_j para todo j mayor o igual a 0 y menor que k.*

Demostración. Sean N_{l-1}, N_l y N_{l+1} tres componentes fuertemente conexas en S. Existen vértices n, n' y n'' en N_{l-1}, N_l y N_{l+1} respectivamente tales que (n, n') y (n', n'') son flechas de D. En virtud del lema 4.8.3, como D es cuasi-transitiva, N_{l-1} domina a N_l y N_l domina a N_{l+1}.

Sea v un vértice en N_{l+1}. Existen vértices v' en N_l y v'' en N_{l-1} tales que (v', v) y (v'', v') son flechas en D. La trayectoria (v'', v', v) está en D, y como esta es una digráfica cuasi-transitiva por hipótesis n'' y n son adyacentes en D. Recordemos que en $SC(D)$ no existen flechas de N_{l+1} a N_{l-1}, entonces la flecha (v'', v) está en D. Por lo tanto N_{l-1} domina a N_{l+1}.

En particular N_0 domina a N_2, y haciendo un razonamiento similar si N_0 domina a N_k y como N_k domina a N_{k+1}, N_0 domina a N_{k+1}.

□

Lema 1.4. *Sea D una digráfica cuasi-transitiva y fuertemente conexa con al menos dos vértices. Entonces $\overline{UG(D)}$ es disconexa.*

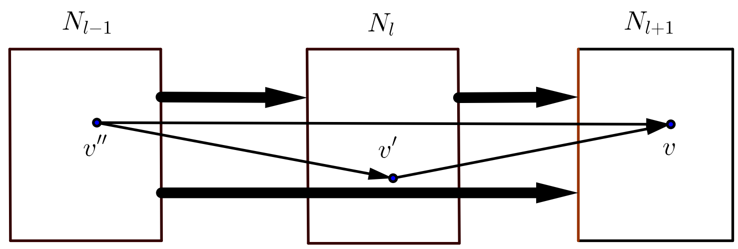

Figura 1.9 $N_{l-1} \mapsto N_{l+1}$

Demostración. La demostración se va a realizar por inducción sobre el número de vértices de V.

Sea D una digráfica con 2 vértices v_1 y v_2. Como D es fuertemente conexa su conjunto de aristas contiene solamente a la flecha (v_1, v_2) o a la flecha (v_2, v_1). Entonces $UG(D)$ contiene solamente a la arista (v_1, v_2) y por lo tanto $\overline{(UG(D))}$ no contiene a ninguna arista. Así que v_1 y v_2 son componentes conexas de $\overline{(UG(D))}$.

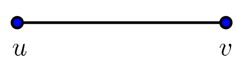

Figura 1.10 $UG(D)$

Figura 1.11 $\overline{UG(D)}$

Por hipótesis de inducción supongamos que $\overline{UG(D)}$ es disconexa para digráficas de orden $n-1$. Existen dos casos:

Caso 1. Supongamos que existe un vértice z tal que $D - z$ no es fuertemente conexa. Sea v un vértice cualquiera y sea C_v la componente conexa de $D - z$ que contiene a v. En la digráfica de componentes conexas, $SC(D - z)$, existe una trayectoria $(N_0, N_1, \dots N_k, N_{k+1}, \dots, C)$, con N_0 alguna componente inicial de $SC(D - z)$.

No existen flechas hacia vértice de N_0 desde ninguna otra componente conexa de $D - z$ ya que D_0 tiene ingrado 0 en $SC(D)$. Sin embargo, D es fuertemente conexa y debe existir una trayectoria desde z a cualquier vértice en N_0. Entonces existe un vértice n_0 en N_0 tal que (z, n_0) es una flecha en D.

En virtud del lema 1.3, N_0 domina a C, y existe una flecha (n_0, v) en D. Entonces la trayectoria (z, n_0, v) está en D, y D es cuasi-transitva por hipótesis haciendo a z adyacente a v. z es adyacente a cualquier vértice de $D - z$ y por lo tanto en $\overline{UG(D)}$ z no es adyacente a ningún vértice de $D - z$. Entonces, z es una componente conexa de $\overline{UG(D)}$.

Caso 2. Supongamos que existe un vértice z tal que $D - z$ es fuertemente conexa. D también es fuerte, así que existe al menos un vértice w en $D - z$ tal que (z, w) es una flecha en D. Por hipótesis de inducción $\overline{UG(D - z)}$ es disconexa. Sean S y S' componentes conexas de $\overline{UG(D - z)}$

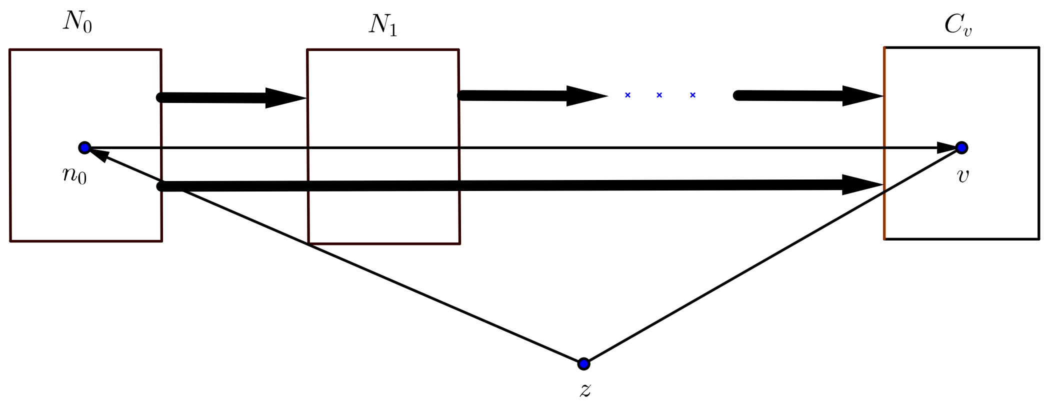

Figura 1.12 z es adyacente a v

tales que que S contenga a w. Sea s' cualquier vértice en S'. Debido al lema x.x, S domina a S' (S' no domina a S completamente ya que (z, w) es una flecha en D), entonces (w, s') es una flecha en D al igual que (z, w), y (z, w, s') es una trayectoria en D, que por hipótesis es una digráfica cuasi-trasntivia. Por lo tanto z es adyacente a s'. Como z es adyacente a todos los vértices de S' en D, z no es adyacente a ningún vértice de S' en $\overline{UG(D)}$, y por lo tanto S' es una componente conexa de $\overline{UG(D)}$.

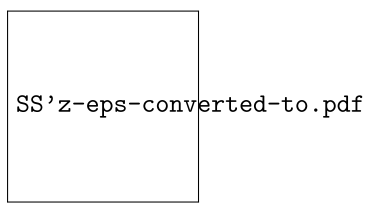

Figura 1.13 S y S' son componentes conexas de $\overline{UG(D-z)}$, z es adyacente a s'

$\square$

Lema 1.5. *Sea D una digráfica cuasi-transitiva y fuertemente conexa. Sean S y S' dos subdigráficas de D tales que $\overline{UG(S)}$ y $\overline{UG(S')}$ son componenetex conexas de $\overline{UG(D)}$. Si $P = (x = p_0, p_1, \ldots, p_n = y)$ es una xy-trayectoria en $\overline{UG(S)}$, entonces para todo $0 \leq i \leq n-1$, (p_i, p_{i+1}) no es una arista de $E(UG(D))$.*

Demostración. Supongamos que (p_i, p_{i+1}) es una arista en $E(UG(D)$. Por definición, (p_i, p_{i+1}) no puede ser arista de $\overline{E(UG(D)}$.

Por lo tanto (p_i, p_{i+1}) no puede ser arista tampoco de ninguna subgráfica de $\overline{UG(D)}$. En particular no podría serlo de $\overline{UG(S)}$.

Pero esto contradice la hipótesis de que P es una trayectoria en $\overline{UG(S)}$. Por lo tanto (p_i, p_{i+1}) no es un arista en $E(UG(D))$.

$\square$

Proposición 1.6. *Sea D una digráfica cuasi-transitiva con al menos dos vértices. Si S y S' son dos subdigraáficas de D tales que $\overline{UG(S)}$ y $\overline{UG(S')}$ son componentes conexas distintas de $\overline{UG(D)}$, entonces $S \mapsto S'$ o $S' \mapsto S$, o $S \mapsto S'$ y $S' \mapsto S$ en caso de que $|V(S)| = |V(S')| = 1$.*

Demostración. Sea x un vértice en S'. Como S' es una componente conexa en $\overline{UG(D)}$, existe un vértice y tal que $Q = (q_0 = y, q_1, \ldots, q_n = x)$ es una trayectoria en $\overline{UG(S')}$ (si S' contiene solo un vértice la trayectoria es de longitud 1). Sea u un vértice en S. u es adyacente a todos los vértices de Q como consecuencia de que S y S' son completamente adyacentes en $UG(D)$ ya que son componentes distintas de $\overline{UG(D)}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que (u, q_0) es flecha de D. Sabemos que la arista (u, q_1) está en $UG(D)$, así que la flecha (u, q_1), o la flecha (q_1, u) o ambas están en D. Sabemos por el Lema 4.1 que q_1 y q_2 no son adyacentes en D. Debido a este resultado (q_1, u) no es una flecha de D, de lo contrario q_1 y q_2 serían adyacentes debido a la existencia dela trayectoria de longitud 3 (q_1, u, q_0) en D. Así que (u, q_1) está en D. Análogamente, si (u, q_l) es una flecha de D, (q_{l+1}, u) no puede ser flecha en D, y por ende la arista (u, q_{l+1}) está en D.

`SdominaS'-eps-converted-to.pdf`

Figura 1.14 S y S' son componentes conexas de $\overline{UG(D - z)}$, z es adyacente a s'

Entonces u domina a x y no existen flechas desde P a u, para ningún u en S'. Notemos que x es cualquier vértice en S', así que $u \mapsto S'$ para todo u en S. Por lo tanto $S \to S'$.

(Como S' es conexa en $\overline{UG(D)}$, si v es cualquier vértice distinto de u en S' existe una uv-trayectoria $P = (u = p_0, p_1, \ldots, p_m = v)$ en $\overline{(UG(S)}$. Las flechas (p_i, q_j) están en D en esa dirección para evitar trayectorias del tipo $(p_j, q$

$\square$

-

Capítulo 2

Descomposición canónica de una digráfica cuasi-transitiva