Introducción

Capítulo 1

Definiciones

Una *gráfica dirigida*, o *digráfica*, D consiste de un conjunto de vértices no vacío y de un conjunto de parejas ordenadas de vértices distintos llamadas flechas. Usaremos la siguiente notación:
Sea $D = (V, A)$ una digráfica. V denota el conjunto de vértices y A el de flechas de D.

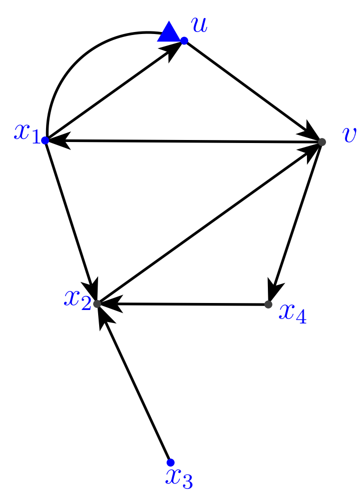

Figura 1.1 Una digráfica.

El *orden* de D es el número de vértices en D, es decir, la cardinalidad de D. Por ejemplo, el orden de la digráfica en la figura 1.1 es 6.
Para una flecha (u, v), decimos que u es in-vecino de v, o que u es ex-vecino de v. Si (u, v) es una flecha también decimos que v *absorbe* a u, y que u *domina* a v.

Sea D una digráfica. Una flecha $(u, v) \in A(D)$ es *simétrica* si existe $(v, u) \in A(D)$. Si *todas* las flechas de una digráfica D son simétricas, decimos que D es *simétrica.* Si *ninguna* flecha de D es simétrica entonces decimos que D es *asimétrica.*
Vamos a utilizar la notación $[u, v] \in A(D)$ para denotar que $(u, v) \in A(D)$ o que $(v, u) \in A(D)$.

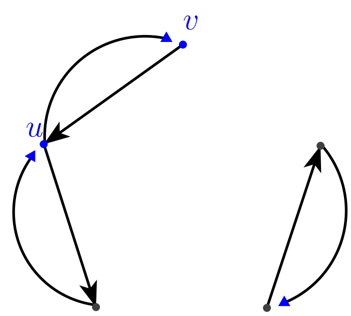

Figura 1.2 Una digráfica simétrica.

Dada una digráfica D, una *subdigráfica* de D es la digráfica que se forma si tomamos un subconjunto de vértices de D y tomamos todas las flechas que tienen como vértices iniciales o terminales uno de esos vértices.
Por ejemplo, la digráfica de la Figura 1.3 es subdigráfica de la de la Figura 1.2
. Una *digráfica inducida* por un conjunto de vértices $V' \subseteq V$, denotada por $D[V']$, es la digráfica que tiene como conjunto de vértices a V' y que contiene a todos las flechas que contiene A sobre ese conjunto de vértices.

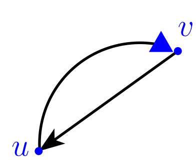

Figura 1.3 Una subgráfica inducida por un conjunto de vértices.

Una gráfica es *completa* si para todo par de vértices u, v existe $(u, v) \in A(D)$.
La *gráfica subyacente* de una digráfica $D = (V, A)$, es la gráfica que tiene como conjunto de vértices a V, y u y v son adyacentes, si y solo si, $(u, v) \in A(D)$ o $(v, u) \in A(D)$.
Una digráfica es *semicompleta* si su gráfica subyacente es completa.

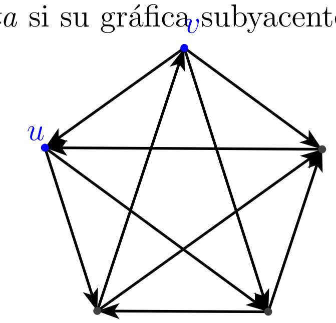

Figura 1.4 Un torneo.

Un *torneo* es una gráfica dirigida obtenida al asignar una dirección a cada arista en una gráfica completa.
Una digráfica D es *m-coloreable* si las flechas de D son coloreadas por m colores. Una

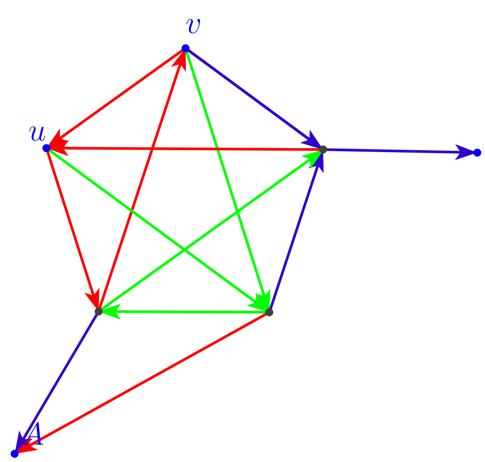

Figura 1.5 Una digráfica 3-coloreable.

trayectoria dirigida en D es una secuencia alternante $W = x_1 a_1 x_2 a_2 \ldots x_{k-1} a_{k-1} x_k$

de vértices x_i y flechas a_j en D tales que para todo i, a_i sale de x_i y llega a x_{i+1}.
A una trayectoria de u a v le podemos asignar el nombre de *uv-trayectoria*. Una $uv-$trayectoria la vamos a denotar también por $u \rightsquigarrow v$
Si en una uv-trayectoria todas las flechas tienen el mismo color decimos que es una trayectoria monocromática. Vamos a representar una $uv-$trayectoria monocromática como $u \rightsquigarrow_m v$
Sea D una digráfica. Decimos que C_k es un *cíclo* en D si C_k es una trayectoria que inicia y termina en el mismo vértice. $C_k = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$.
Vamos a denotar al cíclo de tres vértices por C_3 y al torneo transtivo de tres vértices por TT_3. Los vamos a llamar indistintamente *triángulos*.
Una digráfica es *quasi-transitiva* si siempre que existen vértices distintos u, v, w

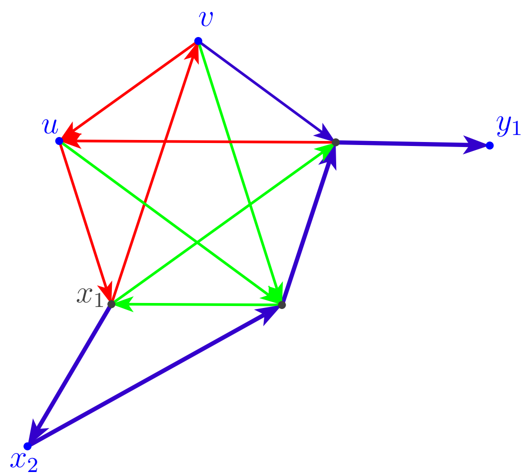

Figura 1.6 Una x_1y_1 trayectoria monocromática en una digráfica 3-coloreada.

tales que $(u, v), (v, w) \in A(D)$, entonces $\exists(u, w)$ or (w, u)

Proposición 1.1. *Sea D una digráfica cuasi-transitiva. Supongamos que $P = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ es una trayectoria dirigida minimal. Entonces $D[V(P)]$ es una digráfica semicompleta y $(x_j, x_i) \in A(D)$ para todo $j > i + 1$, excepto cuando $k = 4$. En ese caso la flecha entre x_1 y x_k puede no existir.*

Demostración. Por inducción.
Supongamos que $k = 5$, $x_1 \rightsquigarrow x_5$ es una trayectoria de longitud 4. Tenemos en la digráfica las trayectorias de longitud 2 (x_1, x_2x_3), (x_2, x_3, x_4), (x_3, x_4, x_5). Recordemos que D es cuasi-transitiva y que, como la trayectoria $x_1 \rightsquigarrow x_5$ es minimal, no

podemos tener una trayectoria más corta. Entonces $(x_3, x_1), (x_4, x_2), (x_5, x_2) \in A(D)$. (Supongamos que, por ejemplo, $(x_1, x_3) \in A(D)$, entonces tenemos una trayectoria más corta de x_1 a x_5: (x_1, x_3, x_4, x_5), una contradicción). Ahora Garantizaremos la existencia de estas flechas en la digráfica, las que sus subíndices van de mayor a menor.
La trayectoria de longitud 2 (x_5, x_3, x_1) da lugar a la flecha $(x_5, x_1) \in A(D)$, no puede

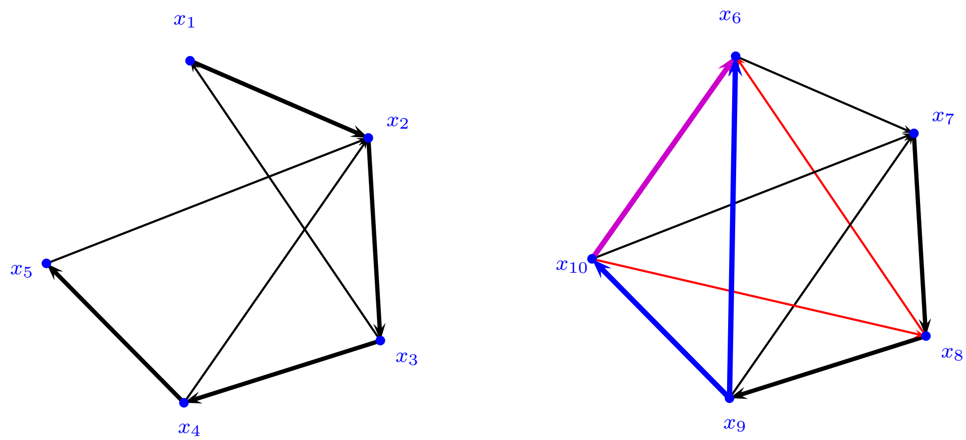

Figura 1.7 Una $x_1 y_1$ trayectoria monocromática en una digráfica 3-coloreada.

ser en el sentido opuesto porque tendríamos la trayectoria de longitud 1 (x_1, x_5). Análogamente, la trayectoria (x_5, x_1, x_2) da lugar a la flecha (x_5, x_2), la (x_5, x_2, x_3) a la flecha (x_5, x_3) y finalmente (x_4, x_5, x_1) induce $(x_4, x_1) \in A(D)$.
Por lo tanto el resultado es válido para $k = 5$.
Supongamos que el resultado se cumple para una digráfica con $k \geq 5$ vértices.
Supongamos ahora que P es una $x_1 x_{k+1}$ trayectoria minimal, con $k + 1$ vértices.
Sabemos que la subdigráfica inducida por los primero k vértices de P es semi-completa debido a la hipótesis de inducción, y que $(x_j, x_i) \in A(D)$ para todo $j > i + 1$.
x_k es adyacente a x_{k+1}. Como la trayectoria $x_1 \rightsquigarrow x_{k+1}$ es minimal, y D es cuasi-transitiva, la trayectoria (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) induce la flecha $(x_{k+1}, x_{k-1}) \in A(D)$. Ahora se forma la trayectoria (x_{k+1}, x_{k-1}, x_1) y por lo tanto $(x_{k+1}, x_1) \in A(D)$. Ahora que x_{k+1} es invecino a x_1, existe una trayectoria de x_{k+1} a x_2 pasando por x_1, entonces $(x_{k+1}, x_2) \in A(D)$, análogamente (x_{k+1}) es invecino a cada uno de los x_i, con $i < k$. Es así como garantizamos la existencia de las flechas que nos faltaban para que la digráfica inducida por P sea semicompleta.
Supongamos que $k = 4$, $P = (x_1, u, v, x_2)$ la trayectoria. Supongamos que existen las flechas (u, x_2) y $(v, x_1) \in A(D)$. Notemos que no existe $[x_1, x_2] \in A(D)$, por lo que

la gráfica subyacente de D no es completa.

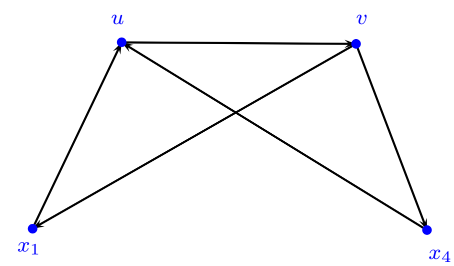

Figura 1.8 Una x_1y_1 trayectoria monocromática en una digráfica 3-coloreada.

□

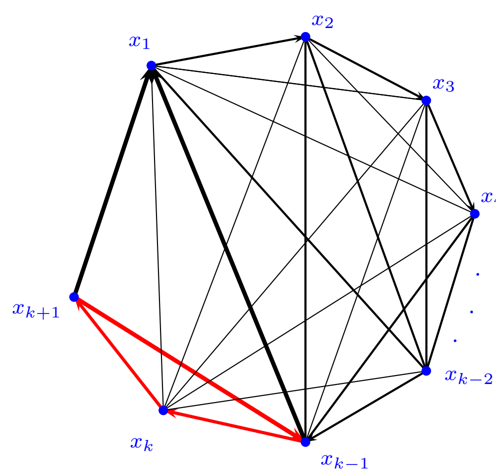

Figura 1.9 Una x_1y_1 trayectoria monocromática en una digráfica 3-coloreada.

Proposición 1.2. *Si una digráfica cuasi-transitiva D tiene una trayectoria dirigida $x \rightsquigarrow y$ pero $(x, y) \notin A(D)$, entonces o bien $(y, x) \in A(D)$ o existen vértices $u, v \in V(D) \setminus \{x, y\}$ tales que (x, u, v, y) y (y, u, v, x) son trayectorias dirigidas en D.*

Demostración. Supongamos que D tiene una trayectoria xy-trayectoria. Supongamos también que (x, y) no es flecha en D. Si (y, x) no está en $A(D)$, la digráfica inducida por $x \rightsquigarrow y$ no es semicompletaa. Entonces, por la Proposición semicompleta, $k = 4$, osea, tenemos que la trayectoria es de longitud 3 y existen vértices $v, u \in V(D)\setminus\{x, y\}$ tales que (x, u, v, y) y (y, u, v, x) son dos trayectorias dirigidas en D.

□

Ver Figura.

Proposición 1.3. *Si una digráfica cuasi-transitiva D tiene una trayectoria $x \rightsquigarrow y$ pero no existe $y \rightsquigarrow x \in D$, entonces $(x, y) \in A(D)$.*

Demostración. Supongamos que existe una trayectoria monocromática en D $x \rightsquigarrow y$ pero no existe ninguna trayectoria de regreso $y \rightsquigarrow_x$. Tomemos una xy-trayectoria minimal P' (P' puede ser P). Como no hay yx-trayectoria, entonces P' no tiene orden 4. Por lo tanto, $D[P]$ es semicompleta, luego $[x, y] \in A(D)$, pero como $(y, x) \notin A(D)$, entonces $(x, y) \in A(D)$. (de hecho $P' = (x, y)$). □

Decimos que un ciclo dirigido $C_k = (u_0, u_1, \ldots, u_k, u_0)$ de D es *cuasi-transitivo en el borde* si para cada $i = (0, 1, 2, \ldots, k)$ existe la flecha $(u_i, u_{i+2}) \in A(D)$ o la flecha $(u_{i+2}, u_i) \in A(D)$.

Una digráfica D es *fuertemente conexa* si para todo par de vértices distintos x y y en D, existen las xy-trayectoria y yx-trayectoria en D.

Una *componente conexa* de una digráfica D es una subdigráfica inducida maximal de D que es fuertemente conexa.

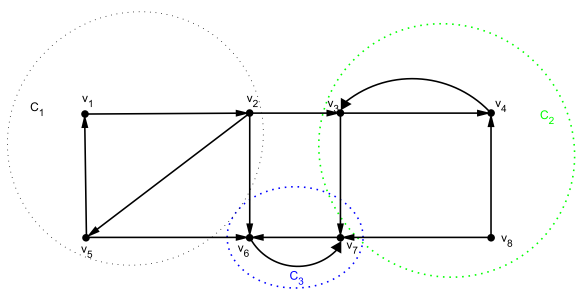

Figura 1.10 C_1, C_2 y C_3 son componentes conexas de D

Capítulo 2

Generalizaciones de núcleos en digráficas m-coloreadas con clases cromáticas cuasi-transitivas

2.1. La cerradura de una digráfica

Sea $D = (V, A)$ una digráfica m-coloreada. Definamos por $\mathcal{C}(D)$ a la digráfica cerradura de D. $\mathcal{C}(D)$ es tal que su conjunto de vértices es el mismo que el de D y tal que su conjunto de flechas, además de contener las mismas flecahs que D, por cada trayectoria monocromática en D existe una flecha en $\mathcal{C}(D)$.

Lema 2.1. *Sea D una digráfica m-coloreada. Supongamos que cada clase cromática en D es cuasi-transitiva. Si C_k es un ciclo dirigido en $Asym(\mathcal{C}(D)$, entonces C_k es un ciclo dirigido en* Asym(D)*.*

Demostración. Sea $C_k = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ un ciclo dirigido asimétrico en la cerradura de D. Notemos primero que, para que C_k sea asimétrico, es necesario que exista al menos una flecha en C_k que sea de distinto color que las demás. Supongamos que el ciclo es monocromático. Para cualquier flecha del ciclo, por ejemplo para (u_1, u_2), la u_2u_1-trayectoria $(u_2, u_3, \ldots, u_{k-1}, u_k, u_1)$ está en D. Entonces la flecha (u_2, u_1) está en $\mathcal{C}(D)$, lo que contradice que C_k es asimétrico

Tomemos una de las flechas de C_k, digamos $a = (x_i, x_{i+1})$. El caso en el que todas las flechas de C_k están en D no necesita explicación, así que consideremos el caso en el que a no es flecha de D. Si a no es flecha de D, debe existir en D una $x_ix_{i+1}-$trayectoria monocromática. Recordemos que esta flecha es asimétrica ya que

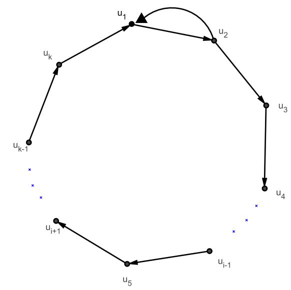

Figura 2.1 C_k está en D

C_k es un ciclo asimétrico.

Sea P la $x_i x_{i+1}$-trayectoria monocromática en D que da lugar a la existencia de a en $\mathcal{C}(D)$. Supongamos que P es minimal. Por hipótesis, cada clase cromática en D es cuasi-transitiva, y como P es monocromática, podemos utilizar el resultado de la Proposición 1.1. Notemos que, aunque a es una flecha en $\mathcal{C}(D)$, hemos supuesto que a no es una flecha de D. Así que descartamos el caso en el que la gráfica inducida de P es semi-completa, ya que por ser C_k un ciclo asimétrico, y a una flecha en C_k, es imposible que exista la flecha $a' = (x_{i+1}, x_i)$ en D, porque existiría en $\mathcal{C}(D)$, haciendo simétrica a a.

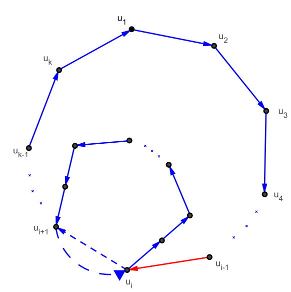

Figura 2.2 C_k está en D

Entonces el orden de P debe ser 4. Deben existir, dos vértices v_1, v_2, distintos de x_i y x_{i+1} en D, tales que (x_{i+1}, v, u, x_i) es una trayectoria monocromática del mismo color que P. La trayectoria (x_{i+1}, v_2, v_1, x_i) de longitud 2 está en D, así que existe en $\mathcal{C}(D)$ la flecha $a' = (x_{i+1}, x_i)$. Esto hace a la flecha a, que pertenece al ciclo asimétrico C_k, simétrica, lo cual es imposible.

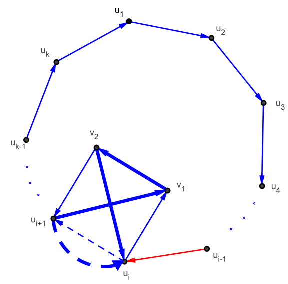

Figura 2.3 C_k está en D

Por lo tanto, no es posible que exista una flecha en C_k que no esté en D como queríamos probar.

□

2.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas

En la sección anterior presentamos los conceptos de independencia y dominación de un conjunto de vértices de una digráfica. Ahora vamos a dar una generalización deestos conceptos, utilizando como criterio la existencia de trayectorias monocromáticas en lugar de flechas entre dos vértices.

Sea $D = (V, A)$ una digráfica. Sea $K \subset V$. Decimos que K es un *conjunto independiente* de V, si para cualesquiera $u, v \in K$ no existe ni (u, v) ni $(v, u) \in A$. Si cada vértice que no está en K es absorbido por un vértice en K decimos que K es un *conjunto absorbente* de vértices. Si K es independiente y dominante decimos que K es un *núcleo* de D.

Teorema 2.2. *Si cada ciclo dirigido de una digráfica D tiene una flecha simétrica, entonces D es kernel-pefecta.*

Corolario 2.3. *D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas si y solo si $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo.*

Demostración. Sea K un núcleo por trayectorias monocromáticas de D.
K es independiente por trayectorias monocromáticas, entonces para cualesquiera dos vértices u, v, no existe una uv-trayectoria, luego $(u, v) \notin A(D)$. Por lo tanto K es independiente. K es dominante por trayectorias monocromáticas. Sea $u \in K$, para

cierto vértice $x \notin K$ existe la trayectoria $u \rightsquigarrow_m x \in D$. Luego la flecha (u, x) está en $\mathcal{C}(D)$. Por lo tanto K es dominante en $\mathcal{C}(D)$.
Por lo tanto, K es un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.
Sea K un núcleo de $\mathcal{C}(D)$.
K es independiente en $\mathcal{C}(D)$. Para todo par de vértices $u, v \in K$ no existe una flecha $(u, v) \in A(\mathcal{C}(D))$. Luego no existe una $uv-$trayectoria monocromática. Por lo tanto K es independiente por trayectorias monocromáticas en D. K es dominante en $\mathcal{C}(D)$. Para todo vértice x $\notin K$, existe un vértice $v \in K$ tal que $(v, u) \in A(\mathcal{C}(D))$, entonces existe una vu-trayectoria en D, luego K es dominante por trayectorias monocromáticas.
Por lo tanto K es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D. $\square$

2.3. Resultados

Teorema 2.4. *Sea $D = (V, F)$ una digráfica m-coloreada sin triángulos policromáticos. Supongamos que cada ciclo $C_k \in D$ es cuasi-transitivo en el borde y que cada clase cromática es cuasi-transitiva.*

Sea $C_k = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_0)$ un cíclo asimétrico dirigido en $\mathcal{C}(D)$ de longitud mínima. Supongamos que C_k es monocromático. Debido al Lema 2.1, sabemos que como C_k es un cíclo asimétrico en $\mathcal{C}(D)$, y cada clase cromática en D es cuasi-transitiva, entonces C_k es un ciclo en D.
La u_2u_1-trayectoria monocromática $M = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_1)$ está en D ya que todas sus aristas están en C_k. La existencia de M en D nos garantiza que la flecha (u_2, u_1) está en $\mathcal{C}(D)$. Sin embargo, sabemos que la flecha (u_1, u_2) en C_k está en D. Por lo tanto la flecha $[u_i, u_2]$ es simétrica. Esto es imposible, C_k es asim'etrico y por lo tanto todas sus flechas debe ser asimétricas. Así que existe un vértice en C_k, digamos u_i, tal que el ciclo cambia de color, digamos de Azul a Rojo. Es decir, las flechas distintas a (u_i, u_{i+1}) en C_k son de color Azul, y la flecha (u_i, u_{i+1}) es de color Rojo.
Recordemos que D es cuas-itransitiva en el borde. La trayectoria de longitud dos (u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) en C_k induce la existencia de una (y solo una) de las flechas (u_{i-1}, u_{i+1}) y $((u_{i+1}, u_{i-1})$ en D. Sin embargo, el hecho de que C_k sea asimétrico y cuasi-transitivo, junto con el cambio de color de las flechas en u_i impide la existencia de (u_{i+1}, u_{i-1}) en $\mathcal{C}(D)$. Analicemos los casos posibles.
El Lema 2.1 nos garantiza que el ciclo C_k está en $Asym(D)$, osea que todas sus flechas son asimétricas.. Supongamos que (u_{i+1}, u_{i-1}) está en D. Se forma el ciclo

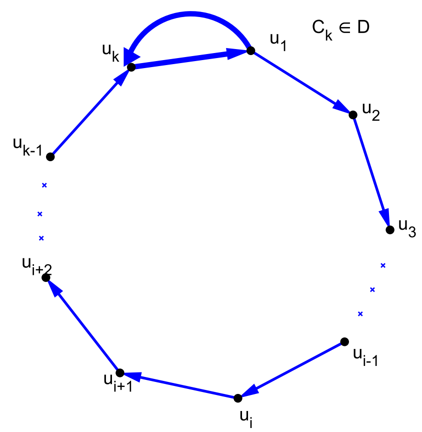

Figura 2.4 C_k está en D

(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) en D que por hipóstesis no puede ser policromático, así que esta flecha no puede ser Verde.
Si (u_{i+1}, u_{i-1}) fuera de color Azul, la trayectoria monocromática (u_{i+1}, u_{i-1}, u_i), induce la existencia de (u_{i+1}, u_i) en $\mathcal{C}(D)$, ya que todas las clases cromáticas son cuasi-transitivas y la flecha entre u_i y u_{i+1} es simétrica. Esto es imposible ya que C_k es asimétrico.

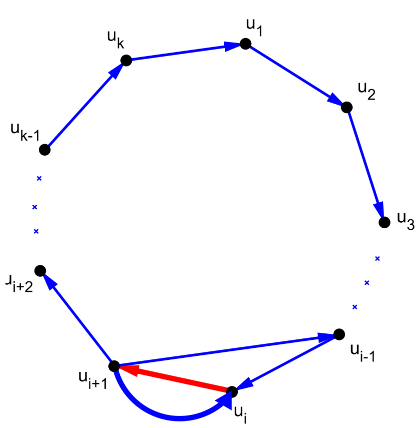

Figura 2.5 La flecha entre u_{i-1} y (u_{i+1}) es simétrica en D

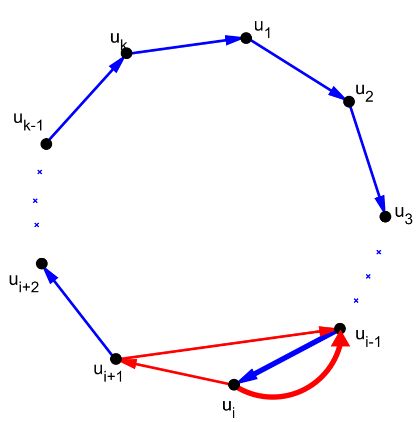

Figura 2.6 La flecha entre u_{i+1} y (u_i) es simétrica en D

Análogamente, si (u_{i+1}, u_{i-1}) fuera de color Rojo, tenemos la trayectoria de longitud monocromática (u_{i-1}, u_{i+1}, u_i), entonces (u_{i-1}, u_i) está en $\mathcal{C}(D)$, haciendo simétrica la flecha entre u_{i-1} y u_i, ambos vértices en el ciclo asimétrico C_k, esto también es una contradicción.

Hemos probado que la flecha (u_{i+1}, u_{i-1}) no puede ser de color Azul ni Rojo ni de ningún otro color distinto a estos dos, entonces esta flecha no puede estar en D.Por lo tanto, (u_{i-1}, u_{i+1}) está en D. C_k es un ciclo asimétrico de longitud mínima. Probamos que (u_{i-1}, u_{i+1}) es una flecha en D y por lo tanto una flecha en $\mathcal{C}(D)$. Con esta flecha podríamos formar un ciclo nuevo en $\mathcal{C}(D)$ que no pasara por u_i, y por consecuencia, sería de menor longitud. Esto evidentemente contradice nuestra hipótesis de minimalidad sobre C_k. Sea $C' = (u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{k-1}, u_k)$ un ciclo en $\mathcal{C}(D)$. Todas las flechas en C'_k, salvo (u_{i-1}, u_{i+1}) son flechas también en C_k, y por ende son asimétricas. Si (u_{i-1}, u_{i+1}) fuera también asimétrica, C' sería un ciclo de longitud menor que C_k en $Asym(\mathcal{C}(D)$. Esto es imposible, por lo tanto, la flecha entre $(u_{i-1}$ y $u_{i+1})$ debe ser simétrica, osea (u_{i+1}, u_{i-1}) es una flecha en $\mathcal{C}(D)$. Como acabamos de probar que esta flecha no está en D, tiene que existir como consecuencia de la existencia de una trayectoria monocromática en D, recordemos que, en $\mathcal{C}(D)$ están todas las flechas de D y además hay una flecha por cada trayectoria monocromática en D de ese color.
Llamemos P a esta trayectoria. P es del mismo color que (u_{i+1}, u_{i-1}) y tiene que ser distinto de Rojo o Azul:

- Si (u_{i+1}, u_{i-1}) fuera Azul, la $u_{i-1}u_i$-trayectoria Azul se forma en D, y por ende la flecha (u_{i+1}, u_i) está en $\mathcal{C}(D)$, ya que cada clase cromática es cuasi-transitiva. La flecha (u_i, u_{i+1}) también está en $\mathcal{C}(D)$ pues es una flecha de C_k. Por lo tanto la flecha entre u_i y u_{i+1} es simétrica, pero esto es imposible ya que supusimos que (u_i, u_{i+1}) está en C_k, un ciclo asimétrico

- Si esta flecha fuera Roja, haciendo un análisis similar al anterior, tendríamos la trayectoria monocromática $(u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{i-1})$ de color Rojo, luego, (u_i, u_{i-1}) es una flecha en $\mathcal{C}(D)$, entonces la flecha entre u_{i-1} y u_i, ambos vértices en C_k, es simétrica en $\mathcal{C}(D)$, lo que contradice la asimetricidad de C_k

Entonces P es una trayectoria monocromática Verde en D. Supongamos que el vértice en C_k u_i está en P. Entonces la $u_{i+1}u_i$-trayectoria monocromática en D garantiza la existencia de la flecha (u_{i+1}, u_i) en $\mathcal{C}(D)$, haciendo simétrica a la flecha entre u_i y u_{i+1}), que es una flecha en C_k un ciclo asimétrico, esto nos lleva a una contradicción. Por lo tanto u_i no es uno de los vértices en P.
A continuación vamos a probar uqe dada una digráfica D sin triángulos

policromáticos, y con todos sus ciclos cuasi-transitivos y cada clase cromática cuasi-transitiva, cada ciclo dirigido en $\mathcal{C}(D)$ tiene una flecha simétrica. Si sucede esto sabemos, debido a Teorema 2.2, que $\mathcal{C}(D)$ es kernel-perfecta. Debido al Corolario 2.3 sabremos que D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Teorema 2.5. *Sea $D = (V, F)$ una digráfica m-coloreada sin triángulos policromáticos. Supongamos que cada ciclo C_k en D es cuasi-transitivo en el borde, y que cada clase cromática es cuasi-transitiva. Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Sea $C_k = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_0)$ un ciclo dirigido en $Asym(\mathcal{C}(D)$. Por hipótesis no existen triángulos policromáticos en D, esto evidentemente incluye a los ciclos de longitud 3, siendo así, se cumplen las hipótesis del Teorema 2.5 y podemos afirmar lo siguiente:

- Existe un vértice u_i en C_k, tal que todas las flechas en el ciclo son de color Azul y (u_i, u_{i+1}) es de color Rojo
- (u_{i-1}, u_{i+1}) está en D
- (u_{i+1}, u_{i-1}) no es una flecha en D, (u_{i+1}, u_{i-1}) si una flecha en $\mathcal{C}(D)$, y por lo tanto existe P, una $u_{i+1}u_{i-1}-$trayectoria en D, de color Verde
- u_i no es un vértice de P

Supongamos sin pérdida de generalidad que P es de longitud mínima. La clase cromática verde es cuasi-transitiva por hipótesis. La flecha (u_{i-1}, u_{i+1}) no está en la clase cromática del Verde pues D no contiene triángulos policromáticos, recordemos que P es Verde. Se cumplen las hipótesis que nos garantizan en virtud de la Proposición 1.2, que la longitud de la trayectoria debe ser 4 y que existen vértices v_1, v_2 en D distintos a u_{i+1} y a u_{i-1}) tales que las trayectorias dirigidas $(u_{i+1}, v_2, v_1, u_{i-1})$ y $(u_{i-1}, v_1, v_2, u_{i+1})$ están en D. Con estas aristas podemos formar el ciclo $(u_i, u_{i+1}, v_1, v_2, u_{i-1}, u_i)$. Como todos los ciclos en D, es cuasi-trasntivio en el borde por hipótesis, así que debe existir una flecha entre u_i y v_2 en D, como consecuencia de que la trayectoria de longitud dos (u_i, u_{i+1}, v_1) está en D.
Supongamos que (u_i, v_1) es una flecha de D. Si fuera Verde la flecha entre u_{i-1} y u_i estaría en $\mathcal{C}(D)$ contradiciendo la asimetricidad de C_k.
Si esta flecha fuera de un color distinto, tendríamos los triángulos policromáticos (u_i, v_1, u_{i+1}) o (u_i, v_1, u_{i-1}) en D lo cual también contradice nuestras hipótesis.
En resumen, Si C_k fuera un ciclo asimétrico en $\mathcal{C}(D)$, C_k tendría una flecha simétrica,

y por lo tanto D sería kernel perfecta y debido al Teorema 2.2, sabemos que D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.