Buena colocación local de la ecuación de Schrödinger no lineal

Juan Diego Murcia Porras jmurciap@unal.edu.co
Carlos Enrique Nosa Guzmán cnosa@unal.edu.co
Iván Felipe Salamanca Medina isalamancam@unal.edu.co

Resumen

Este trabajo estudia la ecuación de Schrödinger no lineal, un modelo clave en la mecánica cuántica, utilizando series de Fourier y espacios de Sobolev. El enfoque se centra en demostrar la buena colocación local del problema de Cauchy en espacios de Sobolev periódicos $H^s(\mathbb{T}^n)$ con $s > \frac{n}{2}$. Se comienza con una revisión de la teoría de Fourier y los espacios de Sobolev, estableciendo las herramientas fundamentales para el análisis de la ecuación. A través de un argumento de punto fijo, se demuestra la existencia, unicidad y dependencia continua de las soluciones respecto a los datos iniciales. El análisis subraya los retos que presenta la no linealidad $u^2 - u^4$ y explora su impacto en el comportamiento dinámico de las soluciones.

Palabras clave: Ecuación de Schrödinger no lineal, series de Fourier, espacios de Sobolev, problema de Cauchy, buena colocación local, teorema del punto fijo, condiciones de frontera periódicas.

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) juegan un papel fundamental en la descripción de fenómenos físicos, desde la dinámica de fluidos hasta la propagación de ondas. Entre las herramientas matemáticas más poderosas para su estudio se encuentran las series de Fourier y los espacios de Sobolev, que permiten analizar estas ecuaciones en dominios multidimensionales y proporcionar soluciones enmarcadas en un contexto más amplio de regularidad y periodicidad.
El presente trabajo se centra en la ecuación de Schrödinger no lineal, un modelo clave en la mecánica cuántica que describe la evolución temporal de sistemas cuánticos. A través del uso de la transformada de Fourier y la teoría de Sobolev, se explorarán los aspectos matemáticos fundamentales para demostrar la buena colocación local del siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + u^2 - u^4 = 0, & \text{para } (x,t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in (-\pi,\pi)^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{para todo } x \in [-\pi,\pi]^n, \end{cases} \tag{1}$$

sobre espacios de Sobolev periódicos $H^s(\mathbb{T}^n)$, con $s > \frac{n}{2}$. Este estudio no solo refuerza los conceptos teóricos vistos, sino que también extiende la aplicación de las series de Fourier al análisis de ecuaciones en dimensiones superiores, abriendo nuevas perspectivas en el tratamiento de problemas de valor inicial y frontera.
La ecuación de Schrödinger no lineal (NLS, por sus siglas en inglés) ha sido objeto de intensa investigación debido a su relevancia tanto en la teoría cuántica como en aplicaciones más amplias, como en la óptica no lineal y la física de condensados de Bose-Einstein. El término no lineal que aparece en la ecuación introduce desafíos adicionales en comparación con la ecuación de Schrödinger lineal clásica, lo que requiere técnicas más sofisticadas para su análisis, en particular cuando se trabaja con dominios periódicos y funciones con regularidad limitada.
El enfoque de este trabajo está motivado por la necesidad de garantizar la existencia, unicidad y continuidad de las soluciones en los espacios de Sobolev periódicos. En este sentido, la buena colocación local implica que para condiciones iniciales suficientemente regulares en un espacio de Sobolev adecuado, existe una solución única que depende continuamente de los datos iniciales en un intervalo de tiempo corto. Para este propósito, las series de Fourier juegan un papel crucial en la descomposición de las soluciones y en la transformación del problema diferencial en uno algebraico, facilitando su análisis.
Además, se discutirá cómo la no linealidad del término $u^2 - u^4$ afecta la estructura de las soluciones, conduciendo a una rica variedad de comportamientos dinámicos. Este tipo de análisis no solo tiene implicaciones en la comprensión fundamental de las soluciones de la NLS, sino que también proporciona herramientas para abordar problemas similares en otros contextos de EDP no lineales.
Este documento tiene como punto de partida la definición de conceptos relevantes y la demostración de resultados preliminares que sientan las bases teóricas necesarias para abordar el problema de Cauchy. En particular, en la sección 2 se desarrollan dos pilares fundamentales: la teoría de Fourier y los espacios de Sobolev. Se comienza con una revisión exhaustiva de las series de Fourier, su convergencia en diversos espacios de funciones, y cómo se pueden utilizar para representar funciones periódicas en un dominio acotado. A partir de estas ideas, se introduce la transformada de Fourier en contextos más generales, adaptándola para trabajar en espacios funcionales adecuados.
Paralelamente, se expone la teoría de los espacios de Sobolev, los cuales son esenciales para el análisis de ecuaciones diferenciales parciales en dominios multidimensionales. En particular, se estudian las propiedades de suavidad y regularidad que ofrecen estos espacios, junto con su importancia en la definición de soluciones débiles a problemas de Cauchy. Además, se presenta la inmersión de los espacios de Sobolev en otros espacios funcionales, lo que proporciona

una comprensión más profunda de la regularidad de las soluciones. Los resultados presentados en esta sección son clave para la posterior aplicación de la teoría de puntos fijos y la demostración de la buena colocación local del problema de Schrödinger no lineal.
En la sección 3, se aplica la maquinaria desarrollada en la sección anterior para abordar el problema de existencia, unicidad y dependencia continua de las soluciones del problema de Cauchy (1). El análisis se centra en demostrar que, para datos iniciales en un espacio de Sobolev adecuado, el problema está bien planteado en el sentido de Hadamard, es decir, que existe una solución única que depende de manera continua de los datos iniciales. Para ello, se utiliza un argumento de punto fijo basado en el teorema de Banach, el cual permite asegurar la existencia de soluciones.

2. Preliminares

En esta sección se plantearán definiciones y resultados importantes acerca de la teoría de Fourier para su posterior uso en la demostración del buen planteamiento de la ecuación de Schrödinger no lineal. Se definirá la sucesión de coeficientes de Fourier y la serie de Fourier de una función, y se mostrará la identidad de Bessel. Asumiendo como cierta la identidad de Parseval, se mostrará que la transformada de Fourier genera un isomorfismo en L^2. Finalmente, se dará una introducción a los espacios de Sobolev con el objetivo de fundamentar la definición de buen planteamiento de un problema de Cauchy en estos espacios.
Dado $n \geq 1$ un número entero, se define $l^2(\mathbb{Z}^n)$ como el espacio de sucesiones descritas sobre $\mathbb{Z}^n$, dadas por $\alpha : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ con $\alpha(k) := \alpha_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, tales que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\alpha_k|^2 < \infty$. Sobre este espacio se puede definir el producto punto

$$(\alpha|\beta) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \alpha_k \overline{\beta_k}, \quad \text{para } \alpha, \beta \in l^2(\mathbb{Z}^n),$$

que induce a la vez una norma

$$\|\alpha\|_2 := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{para } \alpha \in l^2(\mathbb{Z}^n).$$

Se puede demostrar (y es un hecho que se asumirá en este trabajo) que el espacio $(l^2(\mathbb{Z}^n), \|\cdot\|_2)$ es un espacio completo. Se denota $\mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n$. Para $l \geq 0$ entero, se define el espacio $C^l(\mathbb{T}^n)$ como el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de clase C^l tales que, si $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ y $m = (m_1, ..., m_n)$ es un multi-índice con $|m| = m_1 + \cdots + m_n \leq l$, se tiene

$$\partial^m f(x + 2\pi k) = \partial^m f(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

En otras palabras, el espacio $C^l(\mathbb{T}^n)$ está compuesto por las funciones de clase C^l en $\mathbb{R}^n$ tales que todas sus derivadas hasta orden l son periódicas, de periodo 2π, en cada variable. Definimos el espacio $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ como

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) := \bigcap_{j=0}^{\infty} C^l(\mathbb{T}^n).$$

Al espacio $C(\mathbb{T}^n)$ se le puede asociar el producto interno

$$(f|g) := \int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad \text{para } f, g \in C(\mathbb{T}^n),$$

que induce a la vez la norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para } f \in C(\mathbb{T}^n).$$

El espacio normado $(C(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_2)$ no es completo y por lo tanto, naturalmente, se considera la completación de tal espacio a la que se denomina $L^2(\mathbb{T}^n)$, así, todos los elementos $[f] \in L^2(\mathbb{T}^n)$ son una clase de todas las sucesiónes de Cauchy $\{f_n\} \subseteq C(\mathbb{T}^n)$ en la norma $\|\cdot\|_2$ que convergen a f. Con el objetivo de simplificar la notación se relajará el hecho de que $L^2(\mathbb{T}^n)$ es un espacio de clases de sucesiones de Cauchy, y se tomará como un espacio de funciones donde cada clase se representa por la función límite de las sucesiones de Cauchy. Se puede afirmar (y es un hecho que se asumirá en este trabajo) que el espacio $L^2(\mathbb{T}^n) = L^2([-\pi, \pi]^n)$ se puede identificar como todas las funciones $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ medibles en el sentido de Lebesgue tales que $\|f\|_2^2 := \int_{[-\pi,\pi]^n} |f(x)|^2 dx < \infty$; esta, precisamente, será la norma natural

con la que se trabajará sobre este espacio[1]. Siguiendo las definiciones anteriormente planteadas, resulta que el espacio $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{T}^n)$, que es a su vez un espacio de Hilbert con la norma $\|\cdot\|_2$.
Para empezar, es de suma importancia destacar la ortogonalidad del conjunto de funciones $\{\Phi_k(x) = e^{ik\cdot x}\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \subseteq \mathbb{C}^{(\mathbb{T}^n)}$ con las que se desarrollará la teoría de Fourier. Este resultado se demuestra en el teorema a continuación.

Teorema 2.0.1. *Si $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, se define*

$$\Phi_k(x) := e^{ik\cdot x},$$

donde $k \cdot x = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = \sum_{j=1}^{n} k_jx_j$.
Sean $k = (k_1, ..., k_n)$ y $m = (m_1, ..., m_n)$ en $\mathbb{Z}^n$, entonces

$$(\Phi_k|\Phi_m) = \int_{[-\pi,\pi]^n} \Phi_k(x)\overline{\Phi_m(x)}\,dx = \begin{cases} (2\pi)^n & si\ k = m \\ 0 & si\ k \neq m \end{cases}$$

Demostración.
Por definición, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi,\pi]^n} \Phi_k(x)\overline{\Phi_m(x)}\,dx &= \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{ik\cdot x}\overline{e^{im\cdot x}}\,dx \\ &= \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{ik\cdot x}e^{-im\cdot x}\,dx \\ &= \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{i(k-m)\cdot x}\,dx. \end{aligned}$$

A continuación, se distinguen los dos casos

- Si $k = m$, entonces $k - m = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{Z}^n$ y por tanto $(k - m) \cdot x = 0$, de esta manera

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi,\pi]^n} \Phi_k(x)\overline{\Phi_m(x)}\,dx &= \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{i(k-m)\cdot x}\,dx \\ &= \int_{[-\pi,\pi]^n} dx = (2\pi)^n. \end{aligned}$$

  Esto último se da porque esta integral es la medida de Lebesgue del conjunto $[-\pi, \pi]^n$ en $\mathbb{R}^n$.

- Si $k \neq m$, note que

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi,\pi]^n} \Phi_k(x)\overline{\Phi_m(x)}\,dx &= \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{i(k-m)\cdot x}\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_1-m_1)x_1}e^{i(k_2-m_2)x_2}\cdots e^{i(k_n-m_n)x_n}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n. \end{aligned}$$

  Note que $[-\pi, \pi]^n$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ y además, la función $e^{i(k-m)x}$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}^n$, en particular, en $[-\pi, \pi]^n$. De esta manera, $e^{i(k-m)x} \in L^1([-\pi, \pi]^n)$ y por tanto, se puede recurrir al Teorema de Fubini. Así,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_1-m_1)x_1}e^{i(k_2-m_2)x_2}\cdots e^{i(k_n-m_n)x_n}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n = \prod_{j=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j-m_j)x_j}\,dx_j\right),$$

[1]Tanto para la construcción como límite de funciones en $C(\mathbb{T}^n)$ como para aquella realizada mediante las funciones cuadrado integrables, $L^2(\mathbb{T}^n)$ no es propiamente estos espacios. En realidad, con el fin de que $\|f\|_2$ sea una norma en $L^2(\mathbb{T}^n)$, y en específico cumpla que $\|f\|_2 = 0$ si y solo si $f \equiv 0$, $L^2(\mathbb{T}^n)$ debe pasar por un “segundo proceso de refinado” definido como el cociente de cada uno de estos conjuntos entre la relación de equivalencia descrita por “diferir por un conjunto de medida nula”. Dado el objetivo de este trabajo, se omitirá este detalle a lo largo del artículo.

como $k \neq m$, existe l con $1 \leq l \leq n$ tal que $k_l \neq m_l$, es decir, $k_l - m_l \neq 0$. En particular, se estudiará la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_l - m_l)x_l}\, dx_l.$$

Usando el Teorema de De Moivre, nótese que

$$e^{i(k_j - m_j)x_j} = cos((k_j - m_j)x_j) + isen((k_j - m_j)x_j),$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_l - m_l)x_l}\, dx_l &= \int_{-\pi}^{\pi} (cos((k_l - m_l)x_l) + isen((k_l - m_l)x_l))\, dx_l \\
&= \left(\frac{1}{k_l - m_l} sen((k_l - m_l)x_l) - \frac{i}{k_l - m_j} cos((k_l - m_l)x_l) \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \left(\frac{1}{k_l - m_l} sen((k_l - m_l)x_l) \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \left(\frac{i}{k_l - m_j} cos((k_l - m_l)x_l) \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi}.
\end{aligned}$$

Para el primer término su cumple

$$\left(\frac{1}{k_l - m_l} sen((k_l - m_l)x_l) \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k_l - m_l} sen((k_l - m_j)\pi) - \frac{1}{k_l - m_l} sen((k_l - m_l)(-\pi)).$$

Como $(k_l - m_l)\pi$ y $(k_l - m_l)(-\pi)$ son un múltiplos enteros de π, entonces

$$\begin{aligned}
sen((k_l - m_j)\pi) &= 0 \\
sen((k_l - m_l)(-\pi)) &= 0,
\end{aligned}$$

luego

$$\left(\frac{1}{k_l - m_l} sen((k_l - m_l)x_l) \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k_l - m_l} sen((k_l - m_j)\pi) - \frac{1}{k_l - m_l} sen((k_l - m_l)(-\pi)) = 0.$$

Ahora, para el segundo término

$$\left(\frac{i}{k_l - m_j} cos((k_l - m_l)x_l) \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{i}{k_l - m_l} cos((k_l - m_l)\pi) - \frac{i}{k_l - m_l} cos((k_l - m_l)(-\pi)).$$

Como la función coseno es par, entonces $cos((k_l - m_l)\pi) = cos((k_l - m_l)(-\pi))$, y por tanto

$$\left(\frac{i}{k_l - m_j} cos((k_l - m_l)x_l) \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{i}{k_l - m_l} cos((k_l - m_l)\pi) - \frac{i}{k_l - m_l} cos((k_l - m_l)(-\pi)) = 0.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_l - m_l)x_l}\, dx_l &= \left(\frac{1}{k_l - m_l} sen((k_l - m_l)x_l) \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \left(\frac{i}{k_l - m_j} cos((k_l - m_l)x_l) \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

En conclusión,

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi,\pi]^n} \Phi_k(x)\overline{\Phi_m(x)}\, dx &= \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - m_j)x_j}\, dx_j \right) \\
&= \prod_{j=1, j\neq l}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - m_j)x_j}\, dx_j \right) \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_l - m_l)x_l}\, dx_l \right) \\
&= \prod_{j=1, j\neq l}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - m_j)x_j}\, dx_j \right) \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

completando así la demostración.

□

Teniendo en cuenta el anterior resultado es posible enunciar la siguiente definición.

Definición 2.0.1. *Dada una función $f \in C(\mathbb{T}^n)$, la sucesión de números complejos $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ indexada por $\mathbb{Z}^n$ se denomina transformada de Fourier de f y se define como*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)e^{-ik\cdot x}dx, \tag{2}$$

para $k \in \mathbb{Z}^n$. Al número complejo $\widehat{f}(k)$ se le llama el coeficiente de Fourier. Por último, se define formalmente la serie (puede ser o no convergente) de Fourier como

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}. \tag{3}$$

Es inmediato de la definición que la tranformada de Fourier es una función lineal. A continuación, se muestran otras propiedades interesantes de la transformada de Fourier.

Teorema 2.0.2. *Con las definiciones dadas más arriba,*

(i) Si $f \in C(\mathbb{T}^n)$ entonces vale la identidad de Bessel:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n}||f||_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} |f(x)|^2dx.$$

(ii) Si $f \in C^l(\mathbb{T}^n)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es un multi-índice de orden l, es decir, $|\beta| = \sum_{\ell=1}^n |\beta_\ell| = l$, entonces $\widehat{\partial^\beta f}(k) = i^{|\beta|}k^\beta \widehat{f}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$.

Demostración.

(i) Recordando la definición dada para la norma $\|\cdot\|_2$ en $L^2(\mathbb{T}^n)$, para un entero $N > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\left| f - \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \widehat{f}(k)\Phi_k \right|\right|_2^2 &= \left(f - \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \widehat{f}(k)\Phi_k \,\middle|\, f - \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \widehat{f}(k)\Phi_k \right) \\
&= ||f||_2^2 - \left(f \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \widehat{f}(k)\Phi_k \right) - \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \widehat{f}(k)\Phi_k \,\middle|\, f \right) \\
&+ \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \widehat{f}(k)\Phi_k \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \widehat{f}(k)\Phi_k \right). && \text{(Linealidad)}
\end{aligned}$$

A continuación se analizan los términos de la parte derecha de la ecuación.

- Para el término $\left(f \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \widehat{f}(k)\Phi_k \right)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left(f \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \widehat{f}(k)\Phi_k \right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \overline{\widehat{f}(k)}(f|\Phi_k) && \text{(Sesquilinealidad)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \overline{\widehat{f}(k)} \int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)\overline{e^{ik\cdot x}}dx && \text{(Definición de } (\cdot|\cdot) \text{ y } \Phi_k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \overline{\widehat{f}(k)} \int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)e^{-ik\cdot x}dx \\
&= (2\pi)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} \overline{\widehat{f}(k)}\widehat{f}(k) && \text{(Definición de coeficiente de Fourier)} \\
&= (2\pi)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N} |\widehat{f}(k)|^2.
\end{aligned}$$

- Para el término $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\Phi_k\middle|f\right)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\Phi_k\middle|f\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)(\Phi_k|f) && \text{(Linealidad)}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\int_{[-\pi,\pi]^n} e^{ik\cdot x}\overline{f(x)}dx && \text{(Definición de } (\cdot|\cdot) \text{ y } \Phi_k)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\int_{[-\pi,\pi]^n}\overline{f(x)e^{-ik\cdot x}}dx\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\overline{\int_{[-\pi,\pi]^n}f(x)e^{-ik\cdot x}dx}\\
&= (2\pi)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(k)} && \text{(Definición de coeficiente de Fourier)}\\
&= (2\pi)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}|\widehat{f}(k)|^2.
\end{aligned}$$

- Para el término $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\Phi_k\middle|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\Phi_k\right)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\Phi_k\middle|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\Phi_k\right) &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\Phi_k\middle|\sum_{l\in\mathbb{Z}^n,\ |l|_\infty\leq N}\widehat{f}(l)\Phi_l\right)\\
&= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N\\ l\in\mathbb{Z}^n,\ |l|_\infty\leq N}}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(l)}(\Phi_l|\Phi_k) && \text{((Sesqui)linealidad)}\\
&= (2\pi)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(k)} && \text{(Ortogonalidad)}\\
&= (2\pi)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}|\widehat{f}(k)|^2.
\end{aligned}$$

Por ende, se concluye que

$$\left|\left|f-\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\Phi_k\right|\right|_2^2 = ||f||_2^2-(2\pi)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}|\widehat{f}(k)|^2,$$

y teniendo en cuenta que $\left|\left|f-\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}\widehat{f}(k)\Phi_k\right|\right|_2^2\geq 0$, lo anterior implica que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|_\infty\leq N}|\widehat{f}(k)|^2\leq\frac{1}{(2\pi)^n}||f||_2^2.$$

Nótese que la parte derecha de la anterior desigualdad no depende del valor de N, por lo tanto, tomando el límite cuando N va para infinito se obtiene que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\widehat{f}(k)|^2\leq\frac{1}{(2\pi)^n}||f||_2^2,$$

concluyendo la *identidad de Bessel*.

(ii) Para este enunciado es necesario demostrar que $\int_{\partial[-\pi,\pi]^n} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x) = 0$ para $n \geq 2$ donde $\eta_j(x)$ es la componente j-ésima del vector unitario normal a la superficie $\partial[-\pi,\pi]^n$ en el punto $x \in \partial[-\pi,\pi]^n$. En efecto, el conjunto $\partial[-\pi,\pi]^n$ se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\partial[-\pi,\pi]^n = \bigcup_{\ell=1}^{n}(\mathcal{A}_\ell \cup \mathcal{B}_\ell),$$

donde $\mathcal{A}_\ell := \{x \in \mathbb{R}^n : x_\ell = \pi,\ x_i \in [-\pi,\pi] \text{ con } i \in \{1,\ldots,n\} - \{\ell\}\}$ y $\mathcal{B}_\ell := \{x \in \mathbb{R}^n : x_\ell = -\pi,\ x_i \in [-\pi,\pi] \text{ con } i \in \{1,\ldots,n\} - \{\ell\}\}$. Nótese que, para $\ell_1 \neq \ell_2$, se tiene que el interior relativo de $\mathcal{A}_{\ell_1} \cup \mathcal{B}_{\ell_1}$ intersectado con el interior relativo de $\mathcal{A}_{\ell_2} \cup \mathcal{B}_{\ell_2}$ es vacío; además $\mathcal{A}_{\ell_1} \cap \mathcal{B}_{\ell_1}$ es el conjunto vacío para todo $\ell = 1,\ldots,n$. Teniendo en cuenta lo anterior, la integral en cuestión se puede expresar como

$$\begin{aligned}\int_{\partial[-\pi,\pi]^n} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x) &= \sum_{\ell=1}^{n}\int_{\mathcal{A}_\ell\cup\mathcal{B}_\ell} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x)\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\int_{\mathcal{A}_\ell} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x) + \int_{\mathcal{B}_\ell} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x).\end{aligned}$$

Es sencillo imaginar la estructura de 'cubo hueco' que tiene el conjunto $\partial[-\pi,\pi]^n$, donde sus ejes están alineados con los ejes del espacio $\mathbb{R}^n$, por ende, dependiendo del punto $x \in \partial[-\pi,\pi]^n$ el vector unitario normal a la superficie $\partial[-\pi,\pi]^n$ será alguno de los de la base canónica del espacio $\mathbb{R}^n$, esto implica que

$$\eta_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathcal{A}_j,\\ -1, & \text{si } x \in \mathcal{B}_j,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\partial[-\pi,\pi]^n} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x) &= \sum_{\ell=1}^{n}\int_{\mathcal{A}_\ell} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x) + \int_{\mathcal{B}_\ell} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x)\\ &= \int_{\mathcal{A}_j} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x) + \int_{\mathcal{B}_j} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x),\\ &= \int_{\mathcal{A}_j} f(x)e^{-ik\cdot x}dS(x) - \int_{\mathcal{B}_j} f(x)e^{-ik\cdot x}dS(x),\end{aligned}$$

para la última expresión se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}_j} f(x)e^{-ik\cdot x}dS(x) &= \int_{\mathcal{A}_j} f(x)e^{-ik\cdot x}dS(x),\\ &= \int_{\substack{x_j=\pi\\ x_i\in[-\pi,\pi],\ i\neq\ell}} f((x_1,\ldots,x_{j-1},\pi,x_{j+1},\ldots,x_n)^T)e^{-i(k_1x_1+\ldots+k_{j-1}x_{j-1}+k_j\pi+k_{j+1}x_{j+1}+\ldots k_nx_n)}dS(x)\\ &= \int_{x_i\in[-\pi,\pi],\ i\neq\ell} f((x_1,\ldots,x_{j-1},-\pi,x_{j+1},\ldots,x_n)^T)e^{-i(k_1x_1+\ldots+k_{j-1}x_{j-1}+k_j(-\pi)+k_{j+1}x_{j+1}+\ldots k_nx_n)}dS(x)\\ &= \int_{\substack{x_j=-\pi\\ x_i\in[-\pi,\pi],\ i\neq\ell}} f((x_1,\ldots,x_{j-1},-\pi,x_{j+1},\ldots,x_n)^T)e^{-i(k_1x_1+\ldots+k_{j-1}x_{j-1}+k_j(-\pi)+k_{j+1}x_{j+1}+\ldots k_nx_n)}dS(x)\\ &= \int_{\mathcal{B}_j} f(x)e^{-ik\cdot x}dS(x),\end{aligned}$$

puesto que f tiene periodo 2π y $e^{-ik_j(\pi)} = e^{-ik_j(-\pi)}$. De lo anterior se concluye que

$$\int_{\partial[-\pi,\pi]^n} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x) = \int_{\mathcal{A}_j} f(x)e^{-ik\cdot x}dS(x) - \int_{\mathcal{B}_j} f(x)e^{-ik\cdot x}dS(x) = 0,$$

como se quería probar.

Ahora, se procede a hacer la demostración de que $\widehat{\partial^\beta f}(k) = i^{|\beta|}k^\beta \widehat{f}(k)$ para el caso en que $|\beta| = l = 1$. Dado que $|\beta| = l = 1$ existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\beta_j = 1$, por tanto, para $k \in \mathbb{Z}^n$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\beta f}(k) &= \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(k) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-ik\cdot x}dx && \text{(Definición de coeficiente de Fourier)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\left[\int_{\partial[-\pi,\pi]^n} f(x)e^{-ik\cdot x}\eta_j(x)dS(x) - \int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(e^{-ik\cdot x})dx\right] && \text{(Integración por partes)} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(e^{-ik\cdot x})dx \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)(-ik_j)e^{-ik\cdot x}dx, \\
&= ik_j\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)e^{-ik\cdot x}dx \\
&= i^{|\beta|}k^\beta\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)e^{-ik\cdot x}dx \\
&= i^{|\beta|}k^\beta\widehat{f}(k),
\end{aligned}$$

demostrando lo requerido.

Ahora, considere el caso en que $l > 1$, así, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\beta_j > 0$, con esto definase el multi-índice $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \beta_j - 1, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n)$, de esta forma, como $f \in C^l(\mathbb{T}^n)$, se tiene que $\partial^\beta f = \frac{\partial}{\partial x_j}\partial^\alpha f$. Para utilizar inducción, se supone que para el índice α con $|\alpha| = l - 1$ se cumple que $\widehat{\partial^\alpha f}(k) = i^{|\alpha|}k^\alpha \widehat{f}(k)$, por lo tanto, para $k \in \mathbb{Z}^n$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\beta f}(k) &= \widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}\partial^\alpha f}(k) \\
&= ik_j\widehat{\partial^\alpha f}(k), && \text{(Caso } l = 1 \text{ con } \partial^\alpha f \in C(\mathbb{T}^n)) \\
&= ik_j i^{|\alpha|}k^\alpha \widehat{f}(k) && \text{(Paso inductivo)} \\
&= i^{|\beta|}k^\beta \widehat{f}(k), && \text{(Definición de } \alpha)
\end{aligned}$$

demostrando el caso general.

□

En el teorema anterior se dedujo la *identidad de Bessel*, la cual indica una desigualdad entre la norma en $l^2(\mathbb{Z}^n)$ de la sucesión de coeficientes de Fourier de una función y de la norma cuadrática de la función sobre el conjunto $[-\pi, \pi]^n$. Suponiendo que $m > \frac{n}{2}$ con $m \in \mathbb{Z}^+$, para una función $f \in C^m(\mathbb{T}^n)$ la serie de Fourier de la función f converge absoluta y uniformemente a la función; además, se tiene que $\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)}$ y la *identidad de Bessel* se transforma en una igualdad:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}||f||_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} |f(x)|^2dx, \tag{4}$$

o, de manera general para $f, g \in C^m(\mathbb{T}^n)$,

$$\left(\widehat{f} \mid \widehat{g}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(f \mid g\right), \tag{5}$$

obteniendo la denominada *identidad de Parseval*. Esta identidad se asumirá válida de ahora en adelante en este trabajo.

El comportamiento de la transformada de Fourier es muy bueno sobre el espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$; esto se verá reflejado en el siguiente resultado.

Teorema 2.0.3. *La transformada de Fourier*

$$\wedge : L^2(\mathbb{T}^n) \to l^2(\mathbb{T}^n)$$

es un isomorfismo. Además, vale la identidad de Parseval (4) y (5) para funciones en $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Demostración. Sea $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Al ser $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ denso en $L^2(\mathbb{T}^n)$, existe una sucesión $\{f_m\} \subseteq C^\infty[\mathbb{T}^n]$ de forma que $f_m \to f$ con $n \to \infty$ en el sentido de L^2. Es claro que la definición de tranformada de Fourier se puede extender para este espacio. Teniendo esto en cuenta, se verá primero que $\widehat{f} \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, es decir, que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Para ello, note que, como la sucesión $\{f_m\}$ converge a f en $L^2(\mathbb{T}^n)$, ella es de Cauchy. Así, se debe cumplir que

$$\|f_{m_1} - f_{m_2}\|_2^2 \to 0, \quad \text{con } m_1, m_2 \to \infty. \tag{6}$$

Además, como ella está contenida en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, luego, para cualesquiera $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{m_1} - f_{m_2}\|_2^2 = (2\pi)^n \left\|\widehat{f}_{m_1} - \widehat{f}_{m_2}\right\|_2^2.$$

Tomando límite con $m_1, m_2 \to \infty$ a ambos lados de esta igualdad, y teniendo en cuenta (6), se concluye que

$$\left\|\widehat{f}_{m_1} - \widehat{f}_{m_2}\right\|_2 \to 0, \quad \text{con } m_1, m_2 \to \infty,$$

es decir, $\{\widehat{f}_m(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ es una sucesión de Cauchy en $l^2(\mathbb{Z}^n)$. Al ser este último espacio completo, existe $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ límite de esta última sucesión. Se demostrará que $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k)\} = \{\alpha_k\}$. Para $k \in \mathbb{Z}^n$ fijo, note que se cumple

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_m(k) - \alpha_k|^2 &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}_m(k) - \alpha_k|^2 \\ &= \left\|\widehat{f}_m - \{\alpha_k\}\right\|_2^2 \to 0, \text{ cuando } m \to \infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Además, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada sobre $L^2(\mathbb{T}^n)$,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_m(k) - \widehat{f}(k))| &= \frac{1}{(2\pi)^n}\left|\int_{[-\pi,\pi]^n} (f_m(x) - f(x))e^{-ikx}dx\right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}(f_m - f \mid e^{ikx})_{L^2} \\ &\le \frac{1}{(2\pi)^n}\left\|f_m - \widehat{f}\right\|_2 \|e^{ikx}\|_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\|f_m - f\|_2 (2\pi)^{n/2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|f_m - f\|_2 \to 0, \quad \text{cuando } m \to \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

En la penúltima igualdad, se ha usado que, para cualquier $k \in \mathbb{Z}^n$,

$$\|e^{ikx}\|_2 = \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} |e^{ikx}|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_{[-\pi,\pi]^n} dx\right)^{1/2} = (2\pi)^{n/2}.$$

Por lo tanto, de (7) y (8) se deduce que

$$|\widehat{f}_m(k) - \alpha_k| \to 0 \ \text{ y } \ |\widehat{f}_m(k) - f(k)| \to 0, \text{ con } m \to \infty. \tag{9}$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Por los anteriores límites, existe $N \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $m \geq N$,

$$|\widehat{f}_m(k) - \alpha_k| < \epsilon/2 \ \text{ y } \ |\widehat{f}_m(k) - f(k)| < \epsilon/2.$$

Luego, gracias a la desigualdad triangular,

$$|\widehat{f}(k) - \alpha_k| \leq |\widehat{f}(k) - \widehat{f}_m(k)| + |\widehat{f}_m(k) - \alpha_k| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \tag{10}$$

Como lo anterior se cumple para todo $\epsilon > 0$, se concluye que $\widehat{f}(k) = \alpha_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. Se ha demostrado así que $\widehat{f} = \{\alpha_k\}$. Note que cada función en $\{f_m\} \subseteq C^\infty(\mathbb{T}^n)$ satisface la identidad de Parseval

$$\|f_m\|_2^2 = (2\pi)^n ||\widehat{f}_m||_2^2.$$

Por hipótesis, $\{f_m\} \to f$ en $L^2(\mathbb{T}^n)$, lo cual implica que $\|f_m\|_2 \to \|f\|_2$ con $m \to \infty$. Tomando entonces $m \to \infty$ en la anterior ecuación, y teniendo en cuenta que $\{\widehat{f}_m(k)\} \to \{\alpha_k\} = \widehat{f}$ en $l^2(\mathbb{Z}^n)$, se deduce que

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^n ||\widehat{f}||_2^2.$$

Es decir, la identidad de Parseval (4) se satisface para $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$. La identidad (5) se deriva trivialmente de (4) gracias a las identidades de polarización

$$(f|g) = \frac{1}{4}\left[\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2\right] \ \text{ para } f, g \in L^2(\mathbb{T}^n),$$

y

$$\left(\widehat{f}|\widehat{g}\right) = \frac{1}{4}\left[\left\|\widehat{f}+\widehat{g}\right\|_2^2 - \left\|\widehat{f}-\widehat{g}\right\|_2^2 - i\left\|\widehat{f}-i\widehat{g}\right\|_2^2 + i\left\|\widehat{f}+i\widehat{g}\right\|_2^2\right] \ \text{ para } \widehat{f}, \widehat{g} \in l^2(\mathbb{Z}^n).$$

La identidad de Parseval en L^2 permite demostrar que la transformada de Fourier es una tranformación inyectiva, dado que si $h \in L^2(\mathbb{T}^n)$ es tal que $\widehat{h} = \{0\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, entonces, se debe tener que

$$\|h\|_2^2 = (2\pi)^n \|\{0\}\|_2^2 = 0,$$

concluyendo que $h \equiv 0$; como la transformada de Fourier es lineal, se concluye que ella es inyectiva. Resta entonces ver que la transformada de Fourier es sobreyectiva como funcional desde $L^2(\mathbb{T}^n)$ hacia $l^2(\mathbb{Z}^n)$. Para ello, tome $\{\alpha_k\} \in l^2(\mathbb{Z}^n)$. Dado un entero $m \geq 0$, se define

$$f_m(x) := \sum_{|k|_\infty \leq m} \alpha_k \Phi_k, \ \text{ donde } |k|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |k_j|.$$

Es claro que, al ser las Φ_k funciones suaves, $\{f_m\} \subseteq C^\infty_{per}(\mathbb{T}^n)$. Adicionalmente, gracias a la relación de ortogonalidad entre los Φ_k, si se supone sin pérdida de generalidad que $0 \leq m_1 \leq m_2$ con m_1, m_2 enteros, entonces

$$\|f_{m_1} - f_{m_2}\|_2^2 = \left\|\sum_{m_1+1\leq|k|_\infty\leq m_2} \alpha_k\Phi_k\right\|_2^2 = (2\pi)^n\left(\sum_{m_1+1\leq|k|_\infty\leq m_2}|\alpha_k|^2\right) \leq (2\pi)^n\left(\sum_{m_1+1\leq|k|_\infty}|\alpha_k|^2\right).$$

En lo anterior, la penúltima suma se toma como cero en caso de que $m_1 = m_2$. Como $\{\alpha_k\} \in l^2(\mathbb{Z}^n)$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\alpha_k| = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{|k|_\infty=j}|\alpha_k|^2\right) := \sum_{j=0}^{\infty} b_j < \infty.$$

Esta suma converge, y así,

$$\sum_{m_1\leq|k|_\infty} |\alpha_k|^2 = \sum_{j=m_1}^{\infty} b_j \to 0, \quad \text{con } m_1 \to \infty.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{f_m\}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{T}^n)$. Al ser $L^2(\mathbb{T}^n)$ un espacio completo, existe $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ límite de la sucesión $\{f_m\}$. Resta entonces ver que $\widehat{f} = \{\alpha_k\}$. En efecto, note que, fijando $k \in \mathbb{Z}^n$, para $m \geq |k|_\infty$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_m(k) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} f_m(x)\Phi_{-k}(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n}\left(\sum_{|j|_\infty\leq m}\alpha_j\Phi_j(x)\right)\overline{\Phi_k(x)}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|j|\leq m}\alpha_j(\Phi_j|\Phi_k) = \alpha_k,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se satisface teniendo en cuenta el Teorema 2.0.1 y que el término correpondiente a $j = k$ está dentro de la suma. Por consiguiente, $\widehat{f}_m(k) \to \alpha_k$ para $m \to \infty$. Así, se acaba de demostrar el primer límite de (9) para las definiciones dadas sobre esta parte de sobreyectividad. Como, por como se definió f, $f_m \to f$ en L^2, el segundo límite de (9) se puede probar de manera análoga a como se hizo en (8). Por ende, por el mismo argumento realizado en (10), se concluye que $\widehat{f}(k) = \alpha_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, o, dicho de otra forma, $\widehat{f} = \{\alpha_k\}$, demostrando así la sobreyectividad de la transformada de Fourier.

□

Observación. *Al ser la transformada de Fourier un isomorfismo desde $L^2(\mathbb{T}^n)$ hacia $l^2(\mathbb{Z}^n)$, es válido definir la transformada inversa de Fourier como la función*

$$\vee : l^2(\mathbb{Z}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n),$$

que toma $\{\alpha_k\} \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, y la transforma en

$$(\{\alpha_k\})^\vee := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_k \phi_k,$$

siendo esta última suma definida en el sentido de L^2, es decir, como el límite de la sucesión de sumas parciales $\sum_{|k|_\infty = m} \alpha_k \Phi_k$. Al ser la transformada de Fourier (y por tanto su inversa) una transformación lineal, y cumplirse la identidad de Parseval, tanto $\wedge$ como $\vee$ son funciones continuas.

A continuación, se definirán los espacios de Sobolev, que generalizan la noción de derivada para funciones en L^2 y resultan de utilidad a la hora de estudiar ecuaciones diferenciales parciales.

Definición 2.0.2. *Para $s \geq 0$, se define el espacio de Sobolev periódico de orden s como*

$$H^s(\mathbb{T}^n) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}^n) : \{\langle k \rangle^s \widehat{f}(k)\} \in l^2(\mathbb{Z}^n) \right\}$$

donde para cada $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\langle k \rangle = (1 + |k|^2)^{1/2}$ con $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + \cdots k_n^2$. Este espacio tiene un producto interno inducido por $l^2(\mathbb{Z}^n)$ dado por

$$(f|g)_{H^s} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)},$$

para $f, g \in H^s(\mathbb{T}^n)$, e induce la norma

$$||f||_{H^s}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Con estas consideraciones, $H^s(\mathbb{T}^n)$ es, en particular, un espacio métrico. Es natural preguntarse si este espacio métrico es completo. Dado que su métrica es inducida por una norma que, a su vez, es inducida por un producto interno, probar la completitud del espacio es equivalente a demostrar que tiene estructura de espacio de Hilbert.

Teorema 2.0.4. *Sea $s \geq 0$. El espacio $H^s(\mathbb{T}^n)$ con el producto interno $(\cdot|\cdot)_{H^s}$ es un espacio de Hilbert (esto es, un espacio vectorial con producto interno que es completo).*

Demostración. Sea $\{f_j\}$ una sucesión de Cauchy en $H^s(\mathbb{T}^n)$, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $m_1, m_2 > N$, entonces

$$||f_{m_1} - f_{m_2}||_{H^s} < \epsilon,$$

y así

$$||f_{m_1} - f_{m_2}||_{H^s}^2 < \epsilon^2.$$

Por definición,

$$\begin{aligned}
||f_{m_1} - f_{m_2}||_{H^s}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} |(\widehat{f_{m_1} - f_{m_2}})(k)|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} |\widehat{f_{m_1}}(k) - \widehat{f_{m_2}}(k)|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\langle k \rangle^s \widehat{f_{m_1}}(k) - \langle k \rangle^s \widehat{f_{m_2}}(k)|^2 \\
&= ||\langle k \rangle^s \widehat{f_{m_1}}(k) - \langle k \rangle^s \widehat{f_{m_2}}(k))||_{l^2}^2,
\end{aligned}$$

es decir, si $\{f_j\}$ es una sucesión de Cauchy en $H^s(\mathbb{T}^n)$, entonces $\left\{\langle k\rangle^s \widehat{f}_j(k)\right\}$ es una sucesión de Cauchy en $l^2(\mathbb{Z}^n)$ y como este espacio es completo, existe $\beta = \{\beta_k\} \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ tal que $\langle k\rangle^s \widehat{f}_j(k) \to \beta_k$ en $l^2(\mathbb{Z}^n)$. Si se define $\alpha = \{\alpha_k\} \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ como

$$\alpha_k := \langle k\rangle^{-s}\beta_k,$$

es claro que, como $\langle k\rangle^{-s} \leq 1$ para todo $s \geq 0$ y $\beta \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, $\alpha \in l^2(\mathbb{Z}^n)$. Por el teorema 2.0.3, existe $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que $\widehat{f}(k) = \alpha_k$; se demostrará a continuación que $f \in H^s(\mathbb{T}^n)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{f}(k)|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s}|\alpha_k|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s}|\langle k\rangle^{-s}\beta_k|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\beta_k|^2 = ||\beta||_{l^2}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Adicionalmente, por la definición de α y el teorema 2.0.3,

$$\begin{aligned}
||f - f_j||_{H^s}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{f}(k) - \widehat{f}_j(k)|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s}|\alpha_k - \widehat{f}_j(k)|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s}|\langle k\rangle^{-s}\beta_k - \widehat{f}_j(k)|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\beta_k - \langle k\rangle^{s}\widehat{f}_j(k)|^2 \\
&= ||\{\beta_k - \langle k\rangle^{s}\widehat{f}_j(k)\}||_2^2.
\end{aligned}$$

Entonces, $||f - f_j||_{H^s} = ||\{\beta_k - \langle k\rangle^s \widehat{f}_j(k)\}||_2$. Recuerde que $\langle k\rangle^s \widehat{f}_j(k) \to \beta_k$ cuando $j \to \infty$ en $l^2(\mathbb{Z}^n)$; es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $j > N$, entonces $||\{\beta_k - \langle k\rangle^s \widehat{f}_j(k)\}||_2 < \epsilon$, y como $||f - f_j||_{H^s} = ||\{\beta_k - \langle k\rangle^s \widehat{f}_j(k)\}||_2$, se tiene que $||f - f_j||_{H^s} < \epsilon$, es decir, $f_j \to f$ en el sentido de $H^s(\mathbb{T}^n)$. Así, se completa la demostración.

□

El siguiente teorema corresponde al *encajamiento de Sobolev*, el cual es un resultado fundamental en esta teoría, y establece relaciones importantes entre los espacios de Sobolev y los espacios de funciones continuas. Los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$ son espacios de funciones que poseen cierta regularidad medida en términos de la sucesión de coeficientes de Fourier; el teorema asegura que, bajo ciertas condiciones sobre el parámetro s, cualquier función que pertenezca a un espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$ puede considerarse como una función continua en el toro $\mathbb{T}^n$, y además, sus coeficientes de Fourier pertenecen a $l^1(\mathbb{Z}^n)$. Este resultado es clave para estudiar propiedades de suavidad de funciones, estableciendo también que el espacio $H^s(\mathbb{T}^n)$ forma un álgebra de Banach bajo el producto puntual de funciones, lo que permite controlar el comportamiento de productos de funciones en estos espacios.
Antes de demostrar este teorema es importante tener en cuenta que para dos sucesiones $\alpha = \{\alpha_k\} \in l^p(\mathbb{Z}^n)$ y $\beta = \{\beta_k\} \in l^q(\mathbb{Z}^n)$, la sucesión convolución $\alpha * \beta = \left\{(\alpha*\beta)_k = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \alpha_\ell\beta_{k-\ell}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ pertenece a $l^r(\mathbb{Z}^n)$ donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ con $1 \leq p, q, r \leq \infty$, y además, $\|\alpha * \beta\|_r \leq \|\alpha\|_p\|\beta\|_q$. Este resultado es conocido como *desigualdad de Young para convoluciones*, y se asumirá como verdadero para la demostración del siguiente resultado.

Teorema 2.0.5. ***(Encajamiento de Sobolev)****. Sea $s > \frac{n}{2}$, entonces si $f \in H^s(\mathbb{T}^n)$ se tiene que f se puede considerar como un elemento de $C(\mathbb{T}^n)$ y $\hat{f} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$. Más precisamente, la aplicación*

$$f \in H^s(\mathbb{T}^n) \mapsto f \in C(\mathbb{T}^n)$$

es continua y existe una constante universal $C_0 > 0$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_1 \leq C_0\|f\|_{H^s}.$$

Más aún, el espacio $H^s(\mathbb{T}^n)$ define una álgebra de Banach, esto es, existe $C_s > 0$ tal que para todo $f, g \in H^s(\mathbb{T}^n)$, se tiene que el producto $fg \in H^s(\mathbb{T}^n)$ y

$$\|fg\|_{H^s} \leq C_s\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}.$$

Demostración. Esta prueba se dividirá en varias secciones con el fin de presentar la demostración de manera organizada.

a. *Para* $s > \frac{n}{2}$ *la serie* $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{-2s}$ *converge*: En esta parte se asume sin demostración que $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{\rho}}$ converge cuando $\rho > 1$. Nótese lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\ |k|_\infty\le N}} \langle k\rangle^{-2s} &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\ |k|_\infty\le N}} \frac{1}{(1+|k|^2)^s}\\
&\le \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\ |k|_\infty\le N}} \left(\prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(1+|k_\ell|^2)^{\frac{s}{n}}}\right) && \left((1+|k_\ell|^2)^{\frac{s}{n}} \le (1+|k|^2)^{\frac{s}{n}} \text{ para } \ell = 1,\dots,n\right)\\
&= \sum_{k_1=-N}^{N}\sum_{k_2=-N}^{N}\cdots\sum_{k_n=-N}^{N} \left(\prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(1+|k_\ell|^2)^{\frac{s}{n}}}\right)\\
&= \prod_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k_\ell=-N}^{N} \frac{1}{(1+|k_\ell|^2)^{\frac{s}{n}}}\right),\\
&= \left(\sum_{j=-N}^{N} \frac{1}{(1+|j|^2)^{\frac{s}{n}}}\right)^n\\
&= \left(1+2\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(1+j^2)^{\frac{s}{n}}}\right)^n\\
&\le \left(1+2\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{\frac{2s}{n}}}\right)^n. && \left(\frac{1}{(1+j^2)^{\frac{s}{n}}} \le \frac{1}{j^{\frac{2s}{n}}} \text{ para } j\ge 1\right)
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando N va para infinito, se obtiene que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{-2s} \le \left(1+2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{2s}{n}}}\right)^n.$$

La suma de la derecha es un valor finito solamente si $\frac{2s}{n} > 1$, o equivalentemente, $s > \frac{n}{2}$, lo cual se cumple por hipótesis. Así, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{-2s}$ es un valor finito, es decir, la serie converge.

b. *Si* $f \in H^s(\mathbb{T}^n)$ *con* $s > \frac{n}{2}$, *entonces* $\widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$: Considere un entero $N \ge 1$, entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\ |k|_\infty\le N}} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\ |k|_\infty\le N}} \langle k\rangle^{-s}\langle k\rangle^{s}|\widehat{f}(k)|\\
&\le \left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\ |k|_\infty\le N}} \langle k\rangle^{-2s}\right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\ |k|_\infty\le N}} \langle k\rangle^{2s}|\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2}. && \left(\text{Desigualdad de Cauchy-Schwarz en } \mathbb{R}^{(2N+1)^n}\right)
\end{aligned}$$

Tomando $N \to \infty$ en la anterior desigualdad, se deduce que

$$||\widehat{f}||_1 \le C_0 ||f||_{H^s},$$

donde $C_0 := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{-2s} < \infty$.

c. *La aplicación* $f \in H^s(\mathbb{T}^n) \overset{in}{\mapsto} f \in C(\mathbb{T}^n)$ *está bien definida y es continua*: Ya se probó que si $f \in H^s(\mathbb{T}^n)$ entonces $\widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$, esto implica que la serie de Fourier $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}$ converge absoluta y uniformemente, sin embargo, dado que esta serie también converge en $L^2(\mathbb{T}^n)$ a f casi en toda parte, entonces, por unicidad del límite en este espacio, se tiene que $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}$ en casi toda parte. Por tanto, f es una función continua sobre $\mathbb{T}^n$. La continuidad de la aplicación *in* se deduce fácilmente de la desigualdad $||\widehat{f}||_1 \leq C_0||f||_{H^s}$ para toda $f \in H^s(\mathbb{T}^n)$.

d. $\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_1 \leq C\|f\|_{H^s}$: De las deducciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}\right| \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)| \\ &= \|\widehat{f}\|_1 \\ &\leq C_0\|f\|_{H^s},\end{aligned}$$

tomando el supremo sobre $x \in [-\pi,\pi]^n$ se infiere que $\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_1 \leq C_0\|f\|_{H^s}$.

e. *Para todo $k, \ell \in \mathbb{Z}^n$ se cumple $\langle k\rangle^s \leq C\langle k-\ell\rangle^s + C\langle \ell\rangle^s$ donde $C > 0$ es una constante que solo depende de s*: En efecto,

$$\begin{aligned}\langle k\rangle^s &= (1+|k|^2)^{s/2}, \\ &\leq (2+|k|^2)^{s/2} \\ &= (2+|k-\ell+\ell|^2)^{s/2}, \\ &= (2+|k-\ell|^2+|\ell|^2+2(k-\ell)\cdot\ell)^{s/2} \\ &= ((1+|k-\ell|^2)+(1+|\ell|^2)+2(k-\ell)\cdot\ell)^{s/2} \\ &\leq T_s\left[(1+|k-\ell|^2)^{s/2}+(1+|\ell|^2)^{s/2}+2^{s/2}(|(k-\ell)\cdot\ell|)^{s/2}\right] && \text{(Subaditividad)} \\ &= T_s\left[\langle k-\ell\rangle^s+\langle\ell\rangle^s+2^{s/2}(|(k-\ell)\cdot\ell|)^{s/2}\right] \\ &\leq T_s\left[\langle k-\ell\rangle^s+\langle\ell\rangle^s+2^{s/2}(|k-\ell||\ell|)^{s/2}\right] && \text{(Desigualdad de Cauchy Schwarz)} \\ &= T_s\left[\langle k-\ell\rangle^s+\langle\ell\rangle^s+2^{s/2}(|k-\ell|^2|\ell|^2)^{s/4}\right] \\ &\leq T_s\left[]\langle k-\ell\rangle^s+\langle\ell\rangle^s+2^{s/2}((|k-\ell|^2+1)^{1/2}(|\ell|^2+1)^{1/2})^{s/2}\right] \\ &= T_s\left[\langle k-\ell\rangle^s+\langle\ell\rangle^s+2^{s/2}\langle k-\ell\rangle^{s/2}\langle\ell\rangle^{s/2}\right] \\ &\leq T_s\left[\langle k-\ell\rangle^s+\langle\ell\rangle^s+2^{s/2}\frac{\langle k-\ell\rangle^s+\langle\ell\rangle^s}{2}\right] && \left(ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}\right) \\ &= T_s(2^{s/2-1}+1)[\langle k-\ell\rangle^s+\langle\ell\rangle^s].\end{aligned}$$

Definiendo $C := T_s(2^{s/2-1}+1)$, se concluye la desigualdad requerida.

f. *Si $f, g \in H^s(\mathbb{T}^n)$ entonces $fg \in H^s(\mathbb{T}^n)$*: Sean $f, g \in H^s(\mathbb{T}^n)$, por lo anteriormente encontrado se tiene que $f(x) = \sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k_1)e^{ik_1\cdot x}$ y $g(x) = \sum_{k_2\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k_2)e^{ik_2\cdot x}$, para casi todo $x \in [-\pi,\pi]^n$. Para $k \in \mathbb{Z}^n$,

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} f(x)g(x)e^{-ik\cdot x}dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k_1)\widehat{g}(k_2)\int_{[-\pi,\pi]^n} e^{ik_1\cdot x}e^{ik_2\cdot x}e^{-ik\cdot x}dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k_1)\widehat{g}(k_2)\int_{[-\pi,\pi]^n} e^{ik_1\cdot x}e^{-i(k-k_2)\cdot x}dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\ell)\widehat{g}(k-\ell)(2\pi)^n && \text{(Ortogonalidad : } \ell := k_1 = k-k_2) \\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\ell)\widehat{g}(k-\ell) \\ &= (\widehat{f} * \widehat{g})(k),\end{aligned}$$

es decir, el elemento k de $\widehat{fg}$ correponde al elemento k de $\widehat{f} * \widehat{g}$. Dado que $\widehat{f}, \widehat{g} \in l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n)$[2] entonces $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g} \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ por la desigualdad de Young para convoluciones ($\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - 1$). Lo anterior implica que la función fg pertenece al espacio $H^s(\mathbb{T}^n)$.

g. $H^s(\mathbb{T}^n)$ *define un álgebra de Banach*: Si $f, g \in H^s(\mathbb{T}^n)$ entonces

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{H^s} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} \left| (\widehat{f} * \widehat{g})(k) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\ell) \widehat{g}(k-\ell) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s} \widehat{f}(\ell) \widehat{g}(k-\ell) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

usando el hecho de que $\langle k \rangle^s \leq C_s(\langle \ell \rangle^s + \langle k-\ell \rangle^s)$,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{H^s} &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} C_s(\langle \ell \rangle^s + \langle k-\ell \rangle^s) \widehat{f}(\ell) \widehat{g}(k-\ell) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| (\langle \cdot \rangle^s \widehat{f} * \widehat{g})(k) + (\widehat{f} * \langle \cdot \rangle^s \widehat{g})(k) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} && \text{(Definición de convolución)} \\
&= C \| \langle \cdot \rangle^s \widehat{f} * \widehat{g} + \widehat{f} * \langle \cdot \rangle^s \widehat{g} \|_2 \\
&\leq C(\| \langle \cdot \rangle^s \widehat{f} * \widehat{g} \|_2 + \| \widehat{f} * \langle \cdot \rangle^s \widehat{g} \|_2) && \text{(Desigualdad triangular)} \\
&\leq C(\| \langle \cdot \rangle^s \widehat{f} \|_2 \| \widehat{g} \|_1 + \| \widehat{f} \|_1 \| \langle \cdot \rangle^s \widehat{g} \|_2) && \text{(Desigualdad de Young)} \\
&\leq CC_0(\| \langle \cdot \rangle^s \widehat{f} \|_2 \| \widehat{g} \|_{H^s} + \| \widehat{f} \|_{H^s} \| \langle \cdot \rangle^s \widehat{g} \|_2) && \text{(Item d)} \\
&= CC_0(\| \widehat{f} \|_{H^s} \| \widehat{g} \|_{H^s} + \| \widehat{f} \|_{H^s} \| \widehat{g} \|_{H^s}) && \text{(Norma en el espacio } H^s(\mathbb{T}^n)) \\
&= C_s \| \widehat{f} \|_{H^s} \| \widehat{g} \|_{H^s}, && (C_s := 2C_0C)
\end{aligned}$$

en conclusión $\|fg\|_{H^s} \leq C_s \|\widehat{f}\|_{H^s} \|\widehat{g}\|_{H^s}$ donde $C_s = T_s(2^{\frac{s}{2}} + 2) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{-2s}$.

□

3. Resultados de buen planteamiento

En esta sección se tiene como objetivo demostrar que el problema de Cauchy (1) está localmente bien planteado. El buen planteamiento del problema se basa en tres aspectos: existencia de una solución, unicidad de la solución y dependencia continua respecto a los datos de partida; la definición formal se dará más adelante. Este resultado no se demuestra directamente sobre el problema de Cauchy, sino que se realiza sobre la formulación integral del problema de (1).
Para comenzar, cabe recordar el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + u^2 - u^4 = 0, & (x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t) \in (-\pi, \pi)^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [-\pi, \pi]^n, \end{cases}$$

donde el dato inicial es $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$ con $s \geq 0$ dado. Más adelante, se procederá formalmente para ver que, a partir de (1), se llega a que una solución *u lo suficientemente bien comportada* satisface la *fórmula integral* o *fórmula de Duhamel*:

$$u(x,t) = U(t)u_0(x) + i \int_0^t U(t-t')(u^2 - u^4)(x,t')dt', \tag{11}$$

[2] $\widehat{f}, \widehat{g}$ pertenecen a $l^2(\mathbb{Z}^n)$ puesto que la aplicación transformada de Fourier $\wedge : L^2(\mathbb{T}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ define un isomorfismo.

donde $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es la familia de operadores definida (formalmente) para una función g como

$$U(t)g(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{-i|k|^2t+ik\cdot x}\widehat{g}(k),$$

para $k=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$ y $|k|^2=\sum_{j=1}^n k_j^2$. Esta familia de operadores satisface interesantes propiedades que serán de utilidad en la demostración de buen planteamiento, y se enuncian en la siguiente proposición.

Proposición 3.0.1. *La familia de operadores $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ satisface lo siguiente para $g,h\in H^s(\mathbb{T}^n)$ con $s\geq 0$ dado y $\lambda\in\mathbb{C}$:*

(i) $U(t)g$ pertenece a $H^s(\mathbb{T}^n)$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

(ii) $U(t+t')g=U(t)\circ U(t')g$ para todo $t,t'\in\mathbb{R}$.

(iii) Para todo $t\in\mathbb{R}$ se cumple que $\|U(t)g\|_{H^s}=\|g\|_{H^s}$.

(iv) $\lim_{t'\to t}\|U(t)g-U(t')g\|_{H^s}=0$.

(v) $U(t)(g+\lambda h)=U(t)g+\lambda U(t)h$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

(vi) Sea $s>n/2$ y $f\in C([a,b]\,;H^s(\mathbb{T}^n))$; es decir, f asigna a cada valor en $\tau\in[a,b]$ una función $f(\tau)\in H^s(\mathbb{T}^n)$ de manera que para cada $\tau_0\in[a,b]$,

$$\|f(\tau)-f(\tau_0)\|_{H^s}\to 0, \text{ cuando } \tau\to\tau_0.$$

Entonces, $\int_a^b f(\tau)d\tau\in H^s(\mathbb{T}^n)$, y

$$\int_a^b U(t)f(\tau)d\tau = U(t)\int_a^b f(\tau)d\tau$$

.

Demostración.

(i) Sea $g\in H^s(\mathbb{T}^n)$, esto significa que $\|g\|_{H^s}^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{2s}|\widehat{g}(k)|^2$ es finita. Se recuerda que

$$U(t)g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{-i|k|^2t+ik\cdot x}\widehat{g}(k)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(e^{-i|k|^2t}\ \widehat{g}(k)\right)e^{ik\cdot x}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(e^{-i|k|^2t}\ \widehat{g}(k)\right)\Phi_k(x),$$

y por la relación de ortogonalidad que se demostró para la famila de funciones $\{\Phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ se puede deducir que $\widehat{U(t)g}(k)=e^{-i|k|^2t}\ \widehat{g}(k)$ para todo $k\in\mathbb{Z}^n$. En efecto, la anterior identidad es válida dado que $|\left(e^{-i|k|^2t}\ \widehat{g}(k)\right)\Phi_k(x)|\leq|\widehat{g}(k)|$ para todo $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{T}^n$ y $k\in\mathbb{Z}^n$. Lo anterior puede ser usado con el criterio M de Weierstrass para concluir que la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(e^{-i|k|^2t}\ \widehat{g}(k)\right)\Phi_k(x)$ converge absoluta y uniformemente y poder realizar correctamente lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\widehat{U(t)g}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}\left(\left(e^{-i|\ell|^2t}\ \widehat{g}(\ell)\right)\Phi_\ell(x)\right)\overline{\Phi_k(x)}dx \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}\left(e^{-i|\ell|^2t}\ \widehat{g}(\ell)\right)\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n}\Phi_\ell(x)\overline{\Phi_k(x)}dx && \text{(Convergencia absoluta y uniforme)} \\
&= e^{-i|k|^2t}\ \widehat{g}(k), && \text{(Ortogonalidad)}
\end{aligned}$$

por tanto $\|U(t)g\|_{H^s}^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{2s}|\widehat{U(t)g}(k)|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{2s}|e^{-i|k|^2t}\ \widehat{g}(k)|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{2s}|\widehat{g}(k)|^2$. Por tanto, $\|U(t)g\|_{H^s}$ es finita y así $U(t)g\in H^s(\mathbb{T}^n)$.

(ii) Para $g \in H^s(\mathbb{T}^n)$ nótese que

$$\begin{aligned}
U(t) \circ U(t')g &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(e^{-i|k|^2 t} \, \widehat{U(t')g}(k) \right) \Phi_k(x) \right) \\
&= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(e^{-i|k|^2 t} e^{-i|k|^2 t'} \, \widehat{g}(k) \right) \Phi_k(x) \right) \\
&= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(e^{-i|k|^2 (t+t')} \, \widehat{g}(k) \right) \Phi_k(x) \right) \\
&= U(t+t')g,
\end{aligned}$$

concluyendo que $U(t+t')g = U(t) \circ U(t')g$ para todo $t, t' \in \mathbb{R}$.

(iii) En la demostración del primer enunciado se obtuvo que $\|U(t)g\|_{H^s} = \|g\|_{H^s}$.

(iv) Sea $g \in H^s(\mathbb{T}^n)$, así,

$$\begin{aligned}
\|U(t)g - U(t')g\|_{H^s}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} \left| (\widehat{U(t)g} - \widehat{U(t')g})(k) \right|^2 && \text{(Linealidad de } \wedge\text{)} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} \left| (e^{-i|k|^2 t} - e^{-i|k|^2 t'}) \widehat{g}(k) \right|^2 \\
&\leq 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} \left| \widehat{g}(k) \right|^2,
\end{aligned}$$

lo que indica que la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} \left| (\widehat{U(t)g} - \widehat{U(t')g})(k) \right|^2$ converge absoluta y uniformemente independientemente de $t, t' \in \mathbb{R}$, por tanto

$$\lim_{t' \to t} \|U(t)g - U(t')g\|_{H^s}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} \left| \widehat{g}(k) \right|^2 \left(\lim_{t' \to t} e^{-i|k|^2 t} - e^{-i|k|^2 t'} \right)^2,$$

el límite $\lim_{t' \to t} e^{-i|k|^2 t} - e^{-i|k|^2 t'}$ es igual a cero debido a la continuidad de la función $e^{-i|k|^2 \cdot}$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$.

(v) Sean $g, h \in H^s(\mathbb{T}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, por tanto,

$$\begin{aligned}
U(t)(g + \lambda h)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-i|k|^2 t + ik \cdot x} \widehat{g + \lambda h}(k) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-i|k|^2 t + ik \cdot x} (\widehat{g}(k) + \lambda \widehat{h}(k)) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-i|k|^2 t + ik \cdot x} \widehat{g}(k) + \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-i|k|^2 t + ik \cdot x} \widehat{h}(k) \\
&= U(t)g + \lambda U(t)h,
\end{aligned}$$

concluyendo la linealidad de $U(t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$ teniendo como base la linealidad de la transformada de Fourier.

(vi) Un sencillo cáculo permite ver que

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\int_a^b f(\tau)d\tau}\right)(k) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n}\left[\left(\int_a^b f(\tau)d\tau\right)(x)\right]e^{-ikx}dx\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n}\int_a^b (f(\tau)(x))\, e^{-ikx}d\tau dx\\ &= \int_a^b\left[\int_{[-\pi,\pi]^n}\frac{1}{(2\pi)^n}(f(\tau)(x))\, e^{-ikx}dx\right]d\tau\\ &= \int_a^b \widehat{f(\tau)}(k)d\tau,\end{aligned}$$

donde se ha usado el Teorema de Fubini en la tercera igualdad. Note que, para h arbitraria, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada con h y $g=1$, se cumple que

$$(h|g) = \int_a^b h(\tau)d\tau \leq \left(\int_a^b d\tau\right)^{1/2}\left(\int_a^b |h(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} = |a-b|^{1/2}\left(\int_a^b |h(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}.$$

Elevando al cuadrado, se deduce que

$$\left(\int_a^b h(\tau)d\tau\right)^2 \leq |a-b|\left(\int_a^b |h(\tau)|^2 d\tau\right).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{2s}\left|\widehat{\int_a^b f(\tau)d\tau}\right|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{2s}\left|\int_a^b \widehat{f(\tau)}(k)d\tau\right|^2\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|a-b|\langle k\rangle^{2s}\left(\int_a^b\left|\widehat{f(\tau)}(k)\right|^2 d\tau\right)\\ &\leq |a-b|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_a^b\langle k\rangle^{2s}\left|\widehat{f(\tau)}(k)\right|^2 d\tau. \end{aligned}\tag{12}$$

Se quiere usar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue para ingresar el límite asociado a la anterior serie dentro de la integral. Nótese que, por definición, para todo $m\in\mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{|k|_\infty\leq m}\langle k\rangle^{2s}\left|\widehat{f(\tau)}(k)\right|^2\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{2s}\left|\widehat{f(\tau)}(k)\right|^2 = \|f(\tau)\|_{H^s}^2.$$

Por ende, si se define $g(\tau)=\|f(\tau)\|_{H^s}^2$, entonces, por la desigualdad [3]

$$|\|f(\tau)\|_{H^s} - \|f(\tau_0)\|_{H^s}| \leq \|f(\tau)-f(\tau_0)\|,\ \text{para } \tau,\tau_0\in[a,b],$$

se concluye que g es continua sobre $[a,b]$, y por consiguiente es integrable sobre este dominio. Por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue aplicado en 12, se deduce que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{2s}\left|\widehat{\int_a^b f(\tau)d\tau}\right|^2 \leq |a-b|\int_a^b\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{2s}\left|\widehat{f(\tau)}(k)\right|^2\right)d\tau \leq |a-b|\int_a^b\|f(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau < \infty.$$

Adicionalmente,

$$U(t)\int_a^b f(\tau)d\tau = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}e^{-i|k|^2t+ikx}\left(\widehat{\int_a^b f(\tau)d\tau}\right)(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_a^b e^{-i|k|^2t+ikx}\widehat{f(\tau)}(k)d\tau\right).\tag{13}$$

[3]Esta desigualdad se deriva de la desigualdad triangular sobre $\|\cdot\|_{H^s}$.

Se quiere utilizar de nuevo el Criterio de la Convergencia Dominada de Lebesgue para ingresar el límite asociado a la serie dentro de la integral. Para ello, nótese que, si $m \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{|k|_\infty \leq m} e^{-i|k|^2 t + ikx} \widehat{f(\tau)}(k) \right| \leq \sum_{|k|_\infty \leq m} |\widehat{f(\tau)}(k)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f(\tau)}(k)| = \left\| \widehat{f(\tau)} \right\|_1 .$$

Si se define $g(\tau) = ||\widehat{f(\tau)}||_1$, se garantiza que $g(\tau)$ es finito gracias al *encajamiento de Sobolev* (teorema 2.0.5). Es más, gracias a que $||\widehat{f(\tau)}||_1 \leq C||f(k)||_{H^s}$, donde la constante C viene dada en el teorema 2.0.5, se tiene que

$$\left| \left\| \widehat{f(\tau)} \right\|_1 - \left\| \widehat{f(\tau_0)} \right\|_1 \right| \leq \left\| \widehat{f(\tau)} - \widehat{f(\tau_0)} \right\|_1 \leq C \|f(\tau) - f(\tau_0)\|_{H^s}, \text{ para } \tau, \tau_0 \in [a, b] ,$$

es decir, g es continua y, en particular, integrable sobre el dominio $[a, b]$. Usando el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, se concluye que el límite asociado a la serie en (13) se puede intercambiar con la integral, y, de esta forma,

$$U(t) \int_a^b f(\tau) d\tau = \int_a^b \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-i|k|^2 t + ikx} \widehat{f(\tau)}(k) \right] d\tau = \int_0^t U(t) f(\tau) d\tau.$$

□

El anterior teorema dice que $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un grupo unitario fuertemente continuo en el parámetro t con identidad $U(0)$. En lo que sigue se va a denotar la composición sin el símbolo $\circ$, es decir, $U(t)U(t') := U(t) \circ U(t')$ para $t, t' \in \mathbb{R}$. El primer enunciado de la proposición anterior permite definir correctamente $U(t) : H^s(\mathbb{T}^n) \to H^s(\mathbb{T}^n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ahora, si se toma la transformada de Fourier espacial en (1), nótese que, si u fuera solución, para cada $k \in \mathbb{Z}^n$ fijo se debería cumplir que

$$i\widehat{u}_t(k, t) + \sum_{j=1}^n \widehat{\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u}(k, t) + \widehat{u^2}(k, t) - \widehat{u^4}(k, t) = 0.$$

Generalizando la noción de derivada mediante lo visto en la segunda parte de 2.0.2, se puede deducir que

$$\widehat{\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u}(k, t) = (i^2) k^{2e_j} \widehat{u}(k, t) = -k_j^2 \widehat{u}(k, t).$$

Por ende,

$$i\widehat{u}_t(k, t) - \sum_{j=1}^n k_j^2 \widehat{u}(k, t) + \widehat{u^2}(k, t) - \widehat{u^4}(k, t) = 0.$$

Multiplicando por $-i$, y recordando cómo se definió $|k|^2$, se llega a que

$$u_t(k, t) + i|k|^2 \widehat{u}(k, t) = i \left(\widehat{u^2}(k, t) - \widehat{u^4}(k, t) \right) .$$

Esta es una ecuación diferencial lineal no homogénea en t. Note que, tomando factor integrante sobre esta ecuación,

$$\frac{d}{dt} \left(e^{i|k|^2 t} \widehat{u}(k, t) \right) = i e^{i|k|^2 t} \left(\widehat{u^2}(k, t) - \widehat{u^4}(k, t) \right) .$$

Entonces, integrando entre 0 y t, y recordando que $u(x, 0) = u_0$ implica que $\widehat{u}(k, 0) = \widehat{u_0}(k)$,

$$e^{i|k|^2 t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u_0}(k) = i \int_0^t e^{i|k|^2 t'} \left(\widehat{u^2} - \widehat{u^4} \right) (k, t') \, dt'.$$

Es decir,

$$\widehat{u}(k, t) = e^{-i|k|^2 t} \widehat{u_0}(k) + i \int_0^t e^{-i|k|^2 (t - t')} \left(\widehat{u^2} - \widehat{u^4} \right) (k, t') \, dt'.$$

Como lo anterior se debería cumplir para cada $k \in \mathbb{Z}^n$, tomando transformada inversa de Fourier a ambos lados de la igualdad anterior, y suponiendo que esta conmuta con la integral de la derecha, se concluye que

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-i|k|^2 t + ikx} \widehat{u_0}(k) + i \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-i|k|^2 (t - t')} \left(\widehat{u^2} - \widehat{u^4} \right) (k, t') \, dt'.$$

Recordando la definición de $U(t)$, se deduce que, formalmente, u satisface (11). Una vez encontrada la formulación integral del problema de Cauchy, se da la definición de *buen planteamiento* basada en tal fórmula:

Definición 3.0.1. *Dado $s \geq 0$, se dirá que el problema de Cauchy (1) está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T}^n)$ si:*

- ***Existencia y unicidad.*** *Dado $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$, existe $T > 0$ y una única solución de la fórmula integral (11) con dato inicial u_0 en el espacio $C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$.*
- ***Dependencia continua.*** *Dado $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$, existe una vecindad V de u_0 en $H^s(\mathbb{T}^n)$ y $T > 0$ tal que la aplicación 'dato inicial - solución' $v_0 \in H^s(\mathbb{T}^n) \mapsto v \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$ es continua.*

Con la anterior definición, el objetivo está en demostrar el teorema a continuación, que representa el objetivo principal del presente trabajo.

Teorema 3.0.1. *Para cualquier $n \geq 1$ fijo, el problema de Cauchy (1) está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{T}^n)$ para $s > \frac{n}{2}$.*

La demostración del anterior teorema se divirá en tres partes: existencia, unicidad y dependencia continua; y se presentará en la siguientes subsecciones.

3.1. Existencia

Para demostrar la existencia de soluciones se usará el *teorema de punto fijo de Banach* el cuál afirma que para un espacio métrico (M, d) completo toda contracción tiene un punto fijo. Una *contracción* es una función $\Psi : M \to M$ sobre un espacio métrico (M, d) que satisface que $d(\Psi(x), \Psi(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in M$ tal que $0 < L < 1$. Por otra parte, un *punto fijo* de una aplicación $\Psi : M \to M$ es un punto $x \in M$ tal que $\Psi(x) = x$.
Considere el dato inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$ con $s > \frac{n}{2}$ fijo y arbitrario. Si u_0 es la función nula entonces $u \equiv 0$ es una solución del problema (11), trivialmente. Así, se asumirá que $u_0 \not\equiv 0$ de tal manera que $\|u_0\|_{H^s} \neq 0$. Con el objetivo de definir el espacio métrico adecuado, considere el siguiente conjunto

$$X_T^s(a) = \left\{ v \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n)) : \sup_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_{H^s} \leq a \right\},$$

para parámetros $a > 0$ y $T > 0$ que se establecerán posteriormente. Para $u \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$ la función $\|\cdot\|_{\infty,s} : C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n)) \to [0, \infty)$ definida por $\|u\|_{\infty,s} := \sup\limits_{t \in [-T,T]} \|u(t)\|_{H^s}$ induce una norma.

Proposición 3.1.1. *La tupla $(C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n)), \|\cdot\|_{\infty,s})$ es un espacio normado.*

Demostración. Para $u, v \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$ y $\lambda \in \mathbb{C}$:

- Dado que $\|\cdot\|_{H^s}$ es una norma entonces $\|u(t)\|_{H^s} \geq 0$ para todo $t \in [-T,T]$, por lo que $\|u\|_{\infty,s} := \sup_{t \in [-T,T]} \|u(t)\|_{H^s} \geq 0$. Además, si $\|u\|_{\infty,s} = 0$ entonces $\sup\limits_{t \in [-T,T]} \|u(t)\|_{H^s} = 0$, lo cual implica que $\|u(t)\|_{H^s} = 0$ para todo $t \in [-T,T]$ luego, $u(t) \equiv 0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$ para todo $t \in [-T,T]$, esto significa que $u \equiv 0 \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$.
- Como $\|\cdot\|_{H^s}$ es una norma, entonces $\|\lambda u(t)\|_{H^s} = |\lambda| \|u(t)\|_{H^s}$ para todo $t \in [-T,T]$, y por tanto, $\|\lambda u\|_{\infty,s} = |\lambda| \|u\|_{\infty,s}$.
- Por desigualdad triangular de la norma $\|\cdot\|_{H^s}$, se tiene que $\|u(t) + v(t)\|_{H^s} \leq \|u(t)\|_{H^s} + \|v(t)\|_{H^s}$ para todo $t \in [-T,T]$; tomando supremo sobre t en la anterior inecuación y teniendo en cuenta que para $A, B \subset \mathbb{R}$ se cumple que $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$ donde $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, se concluye que

$$\|u + v\|_{\infty,s} \leq \|u\|_{\infty,s} + \|v\|_{\infty,s}.$$

□

De la anterior proposición se puede deducir fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 3.1.2. *La tupla $(C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n)), d_{\infty,s})$ es un espacio métrico donde $d_{\infty,s} : C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n)) \times C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n)) \to [0, \infty)$ es la función definida por $d_{\infty,s}(u, v) := \|u - v\|_{\infty,s}$ para todo $u, v, \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$.*

Para aplicar correctamente el *teorema de punto fijo de Banach*, es necesario probar que el espacio $(C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n)), d_{\infty,s})$ es completo. Para ello, si X es un espacio métrico, y $\mathbb{K}$ es un espacio métrico completo, se denotará por $\mathcal{C}(X; \mathbb{K})$ al espacio de funciones continuas y acotadas con dominio en X y rango $\mathbb{K}$. Para $f \in \mathcal{C}(X; \mathbb{K})$, se asocia la *norma del supremo*

$$\|f\|_{\infty,\mathbb{K}} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_{\mathbb{K}}.$$

Note que, para X compacto, la condición sobre la acotación de las funciones es redundante; este es el caso del espacio de interés de este trabajo (con $X = [-T, T]$). Note igualmente que la norma $\|u\|_{\infty,s}$ es un caso especial de esta norma más general. Así, toda proposición que se pruebe sobre $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ aplica para el espacio de interés. En este sentido, se omitirá la prueba de que $\|f\|_{\infty,\mathbb{K}}$ es en efecto una norma, dado que consiste en generalizar lo probado en la Proposición 3.1.1. De manera análoga a como se hizo en la Proposición 3.1.2, se denotará por $d_{\infty,\mathbb{K}}$ a la métrica asociada a $\|\cdot\|_{\infty,\mathbb{K}}$.

Proposición 3.1.3. *Como se definió más arriba,* $(\mathcal{C}(X;\mathbb{K}), d_{\infty,\mathbb{K}})$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$. Esto significa que para $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\|f_{m_1} - f_{m_2}\|_{\infty,\mathbb{K}} < \epsilon, \quad \text{para } m_1, m_2 \geq N. \tag{14}$$

Por la definición de $\|\cdot\|_{\infty,\mathbb{K}}$, ello implica que, para cada $x \in X$, la sucesión $\{f_m(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$. Es decir,

$$\|f_{m_1}(x) - f_{m_2}(x)\|_{\mathbb{K}} < \epsilon, \quad \text{para } m_1, m_2 \geq N. \tag{15}$$

Al ser $\mathbb{K}$ completo, la sucesión converge a un único límite que se denotará por $f(x)$. Así, se define $f : X \to \mathbb{K}$ como la función que envía x en $f(x)$. Para $\epsilon > 0$, tome N tal que (14) se cumple. Para $x \in X$ fijo existe $m_2(x)$ (que, como se está notando, puede depender de x) tal que

$$\left\|f_{m_2(x)}(x) - f(x)\right\|_{\mathbb{K}} < \epsilon.$$

Se puede asumir sin problema que $m_2(x) \geq N$; así,

$$\|f_{m_1}(x) - f(x)\|_{\mathbb{K}} \leq \|f_{m_1}(x) - f_{m_2(x)}(x)\|_{\mathbb{K}} + \|f_{m_2(x)}(x) - f(x)\|_{\mathbb{K}} < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon,$$

para todo $m_1 \geq N$. Note que la cota $N \in \mathbb{N}$ para el valor de m_1 no depende de x, y por consiguiente $\{f_m\} \to f$ de manera uniforme. Lo anterior implica que f es acotada, dado que existe m_1 de manera que para todo $x \in X$,

$$\|f(x)\|_{\mathbb{K}} - \|f_{m1}(x)\|_{\mathbb{K}} \leq \|f(x) - f_{m1}(x)\|_{\mathbb{K}} \leq 1.$$

Resta ver que f es una función continua. Para ello, sea $x_0 \in X$, y $\epsilon > 0$. Por lo que se acaba de demostrar, existe N tal que para todo $x \in X$,

$$\|f_N(x) - f(x)\|_{\mathbb{K}} < \epsilon. \tag{16}$$

Adicionalmente, como f_N es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x_0 - x\|_X < \delta$, entonces

$$\|f_N(x_0) - f_N(x)\|_{\mathbb{K}} < \epsilon. \tag{17}$$

Por lo tanto, si $\|x - x_0\|_X < \delta$,

$$\|f(x_0) - f(x)\|_{\mathbb{K}} \leq \|f(x_0) - f_N(x_0)\|_{\mathbb{K}} + \|f_N(x_0) - f_N(x)\|_{\mathbb{K}} + \|f_N(x) - f(x)\|_{\mathbb{K}} < 3\epsilon,$$

donde se ha usado (16) para el primer y tercer término de la suma del medio, y (17) para el segundo término.

□

Colorario 3.1.0.1. $(C([-T, T]; H^s(\mathbb{T}^n)), d_{\infty,s})$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración. Es trivial, teniendo en cuenta que se acaba de demostrar de manera más general.

□

Proposición 3.1.4. $(X_T^s(a), d_{\infty,s}|_{X_T^s(a)})$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración La desigualdad triangular sobre $\|\cdot\|_{\infty,s}$ implica que, para $v_1, v_2 \in C([-T, T]\,; H^s(\mathbb{T}^n))$,

$$\left|\|v_1\|_{\infty,s} - \|v_2\|_{\infty,s}\right| \leq \|v_1 - v_2\|_{\infty,s}.$$

Ello, a su vez, implica que la función norma $H(v) = \|v\|_{\infty,s}$ es una función continua sobre este espacio. Como $X_T^s(a) = H^{-1}\left[[0, a]\right]$ es la preimagen de esta función sobre un cerrado, se concluye que $X_T^s(a)$ es cerrado en $C([-T, T]\,, d_{\infty,s})$. Al ser este un subconjunto cerrado de un espacio completo, el mismo espacio $X_T^s(a)$ con la métrica inducida es completo.

□

Una vez se está trabajando sobre un espacio métrico completo es posible considerar la aplicación $\Psi : X_T^s(a) \to X_T^s(a)$ definida por:

$$\Psi(v)(t) = U(t)u_0 + i\int_0^t U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau)d\tau,$$

para todo $v \in X_T^s(a)$.

Proposición 3.1.5. Ψ *es una aplicación* ***bien definida****, esto es, para todo* $v \in X_T^s(a)$*,* $\Psi(v)$ *pertenece a* $X_T^s(a)$*.*

Demostración. Sea $v \in X_T^s(a)$. En primer lugar, para simplificar la notación defina $\xi(t) := i\int_0^t U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau)d\tau$ para todo $t \in [-T, T]$.

- *Para todo* $t \in [-T, T]$ *fijo,* $\xi(t) \in H^s(\mathbb{T}^n)$: Sea $t \in [-T, T]$ fijo. Se mostró anteriormente que para todo $\tau \in [-T, T]$ se cumple que $U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau)$ pertenece al espacio $H^s(\mathbb{T}^n)$ puesto que v^2 y v^4 están en $H^s(\mathbb{T}^n)$ por ser un álgebra de Banach. Para mostrar que $\xi(t) \in H^s(\mathbb{T}^n)$ se debe probar que $\|\xi(t)\|_{H^s}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} |\widehat{\xi(t)}(k)|^2$ es un valor finito. El coeficiente $k \in \mathbb{Z}^n$ de Fourier de $\xi(t)$ es

$$\begin{aligned}
\widehat{\xi(t)}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} \xi(t)(x)\overline{\Phi_k(x)}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} \left(i\int_0^t U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau)(x)d\tau \right) \overline{\Phi_k(x)}dx \\
&= i\int_0^t \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau)(x)\overline{\Phi_k(x)}dxd\tau && \text{(Teorema de Fubini)} \\
&= i\int_0^t (U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau))^\wedge(k)d\tau. && \text{(Definición de coeficiente de Fourier)}
\end{aligned}$$

El teorema de Fubini es válido en el anterior argumento dado que la función $|U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau)(x)\overline{\Phi_k(x)}|$ es integrable para $(\tau, x) \in [0, t] \times [-\pi, \pi]^n$ por la continuidad del operador $U(t-\tau)$ en τ, la continuidad de $U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau)(x) \in H^s(\mathbb{T}^n)$ y la continuidad de $\Phi_k(x)$ en $[-\pi, \pi]^n$, y por la compacidad del conjunto $[0, t] \times [-\pi, \pi]^n$.

Ahora, es posible acotar la norma de $\xi(t)$ en $H^s(\mathbb{T}^n)$, en efecto[4],

$$\begin{aligned}
\|\xi(t)\|_{H^s}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} |\widehat{\xi(t)}(k)|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} \left| i\int_0^t (U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau))^\wedge(k)d\tau \right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} \left| \int_0^t (U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau))^\wedge(k)d\tau \right|^2 \\
&\leq |t| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} \int_0^t |(U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau))^\wedge(k)|^2 d\tau \\
&= |t| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_0^t |\langle k\rangle^s (U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau))^\wedge(k)|^2 d\tau \\
&= |t| \int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle k\rangle^s (U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau))^\wedge(k)|^2 d\tau,
\end{aligned}$$

el cambio entre la integral sobre la variable τ y la serie en la última igualdad se tiene dado que para todo τ fijo la serie $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle k\rangle^s (U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau))^\wedge(k)|^2 = \|U(t-\tau)(v^2 - v^4)(\tau)\|_{H^s}^2$ converge absoluta y uniformemente dado

[4]Se usa que para $a, b \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ se cumple que $a^k + b^k \leq (a+b)^k \leq 2^{k-1}(a^k + b^k)$ para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$. Este hecho también se usa, de manera general, en series e integrales.

que $U(t-\tau)(v^2-v^4)(\tau)\in H^s(\mathbb{T}^n)$, por ende,

$$\begin{aligned}
\|\xi(t)\|_{H^s}^2 &\leq |t|\int_0^t \|U(t-\tau)(v^2-v^4)(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau\\
&\leq |t|\int_0^t \|(v^2-v^4)(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau\\
&\leq |t|\int_0^t (\|(v^2)(\tau)\|_{H^s}+\|(v^4)(\tau)\|_{H^s})^2 d\tau \qquad \text{(Desigualdad triangular)}\\
&\leq 2|t|\int_0^t \|(v^2)(\tau)\|_{H^s}^2+\|(v^4)(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $H^s(\mathbb{T}^n)$ es un álgebra de Banach,

$$\begin{aligned}
\|\xi(t)\|_{H^s}^2 &\leq 2|t|\int_0^t \|(v^2)(\tau)\|_{H^s}^2+\|(v^4)(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau\\
&\leq 2|t|\int_0^t C_s^2\|v(\tau)\|_{H^s}^4+C_s^6\|v(\tau)\|_{H^s}^8 d\tau\\
&\leq 2|t|C_s^2\int_0^t \|v(\tau)\|_{H^s}^4 d\tau+2tC_s^6\int_0^t \|v(\tau)\|_{H^s}^8 d\tau,
\end{aligned}$$

dado que $\tau\in[0,t]\to\|v(\tau)\|_{H^s}\in[0,\infty)$ es una función continua y su dominio es compacto entonces$\int_0^t \|v(\tau)\|_{H^s}^k d\tau$ es un valor finito, por ende, $\|\xi(t)\|_{H^s}^2 \leq 2|t|C_s^2\int_0^t \|v(\tau)\|_{H^s}^4 d\tau+2|t|C_s^6\int_0^t \|v(\tau)\|_{H^s}^8 d\tau$ es un valor finito y esto implica que $\xi(t)\in H^s(\mathbb{T}^n)$. Otra forma de acotar es recordando que $v\in X_T^s(a)$, así, $\|v(\tau)\|_{H^s}\leq a$ para todo τ, por ende,

$$\|\xi(t)\|_{H^s}^2 \leq 2|t|C_s^2\int_0^t \|v(\tau)\|_{H^s}^4 d\tau+2|t|C_s^6\int_0^t \|v(\tau)\|_{H^s}^8 d\tau \leq 2C_s^2T^2a^4+2C_s^6T^2a^8$$

Nótese que, para cada $t\in[-T,T]$, la norma de $\Psi(v)(t)$ en $H^s(\mathbb{T}^n)$ está acotada por lo siguiente,

$$\|\Psi(v)(t)\|_{H^s}\leq\|U(t)u_0\|_{H^s}+\|\xi(t)\|_{H^s},$$

y dado que $U(t)u_0$ y $\xi(t)$ pertenecen a $H^s(\mathbb{T}^n)$ entonces $\Psi(v)(t)$ pertenece a $H^s(\mathbb{T}^n)$, y esto significa que la aplicación $\Psi(v)$ toma elementos de $[-T,T]$ y los envía a $H^s(\mathbb{T}^n)$. Hace falta demostrar que esta aplicación es continua.

- *Para todo $t\in[-T,T]$, $\Psi(v)$ es continua en t*: La prueba de este enunciado se reduce a mostrar el siguiente límite:

  $$\lim_{t'\to t}\|\Psi(v)(t)-\Psi(v)(t')\|_{H^s}=0,$$

  donde se sobreentenderá que el límite es lateral en el caso $t\in\{-T,T\}$. Obsérvese que,

  $$\|\Psi(v)(t)-\Psi(v)(t')\|_{H^s}\leq\|U(t)u_0-U(t')u_0\|_{H^s}+\left\|\int_0^t U(t-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau-\int_0^{t'} U(t'-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau\right\|_{H^s},$$

  la primera parte $\|U(t)u_0-U(t')u_0\|_{H^s}$ no genera problema dado que se conoce que el operador U es continuo en t, para la segunda parte se reescribe de la siguiente manera,

  $$\begin{aligned}
  &\int_0^t U(t-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau-\int_0^{t'} U(t'-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau\\
  &=\int_0^t (U(t-\tau)-U(t'-\tau))(v^2-v^4)(\tau)d\tau-\int_t^{t'} U(t'-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau,
  \end{aligned}$$

donde $(U(t-\tau)-U(t'-\tau))(v^2-v^4)(\tau) := U(t-\tau)(v^2-v^4)(\tau)-U(t'-\tau)(v^2-v^4)(\tau)$. Para la primera integral de la parte derecha de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned}\int_0^t (U(t-\tau)-U(t'-\tau))(v^2-v^4)(\tau)d\tau &= \int_0^t (U(t)-U(t'))U(-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau \\ &= (U(t)-U(t'))\int_0^t U(-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por la propiedad (vi) de la proposición 3.0.1. Dado que para cualquier $t\in[-T,T]$, $\int_0^t U(-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau$ está en $H^s(\mathbb{T}^n)$ entonces, por la propiedad (iv) de la proposición 3.0.1,

$$\begin{aligned}\lim_{t'\to t}\|U(t)u_0-U(t')u_0\|_{H^s} &= 0,\\ \lim_{t'\to t}\left\|(U(t)-U(t'))\int_0^t U(-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau\right\|_{H^s} &= 0.\end{aligned}$$

Por otra parte, debido a que $U(t'-\tau)(v^2-v^4)(\tau)\in H^s(\mathbb{T}^n)$ es una función continua para cualquier $\tau\in[-T,T]$ gracias al *encajamiento de Sobolev* entonces $\int_t^{t'} U(t'-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau = 0$ cuando $t'\to t$ debido a que se está integrando una función continua sobre un conjunto cuya medida de Lebesgue tiende a cero. En conclusión, $\lim_{t'\to t}\|\Psi(v)(t)-\Psi(v)(t')\|_{H^s}=0$.

Con la anterior prueba se demuestra que la aplicación $\Psi(v):[-T,T]\to H^s(\mathbb{T}^n)$ es continua, o sea, $\Psi(v)\in C([-T,T];H^s(\mathbb{T}^n))$. Por último falta ver que, en efecto, el codominio de $\Psi(v)$ es el conjunto $X_T^s(a)$.

- $\Psi(v)$ *pertenece a* $X_T^s(a)$: Para todo $t\in[-T,T]$, la norma de la función $\Psi(v)(t)$ en $H^s(\mathbb{T}^n)$ se puede controlar por

$$\begin{aligned}\|\Psi(v)(t)\|_{H^s} &\leq \|U(t)u_0\|_{H^s} + \left\|\int_0^t U(t-\tau)(v^2-v^4)(\tau)d\tau\right\|_{H^s}\\ &\leq \|U(t)u_0\|_{H^s} + \int_0^t \|U(t-\tau)(v^2-v^4)(\tau)\|_{H^s}d\tau && \text{(Desigualdad triangular)}\\ &\leq \|u_0\|_{H^s} + \int_0^t \|(v^2-v^4)(\tau)\|_{H^s}d\tau && (U(t)\text{ es unitario})\\ &\leq \|u_0\|_{H^s} + \int_0^t (\|v^2(\tau)\|_{H^s}+\|v^4(\tau)\|_{H^s})d\tau && \text{(Desigualdad triangular)}\\ &\leq \|u_0\|_{H^s} + \int_0^t (C_s\|v(\tau)\|_{H^s}^2+C_s^3\|v(\tau)\|_{H^s}^4)d\tau && \text{(Álgebra de Banach)}\\ &\leq \|u_0\|_{H^s} + (C_s\|v\|_{\infty,s}^2+C_s^3\|v\|_{\infty,s}^4)\int_0^t d\tau\\ &\leq \|u_0\|_{H^s} + T(C_sa^2+C_s^3a^4), && (v\in X_T^s(a),\ t\in[-T,T])\end{aligned}$$

por tanto, $\|\Psi(v)\|_{\infty,s}\leq \|u_0\|_{H^s}+T(C_sa^2+C_s^3a^4)$. Tomando

$$\begin{cases} a := 2\|u_0\|_{H^s},\\ 0\leq T\leq \frac{a}{2C_sa^2+4C_s^3a^4} = \frac{1}{2C_sa+4C_s^3a^3},\end{cases}$$

se obtiene que $\|\Psi(v)\|_{\infty,s}\leq a$, pues

$$\|\Psi(v)\|_{\infty,s}\leq \|u_0\|_{H^s}+T(C_sa^2+C_s^3a^4)\leq \|u_0\|_{H^s}+\frac{a}{2}=a,$$

así, $\Psi(v)$ pertenece a $X_T^s(a)$.

$\square$

Proposición 3.1.6. *Ψ es una* ***contracción****, es decir, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $0 < L < 1$ y para cualesquiera $u, v \in X_T^s(a)$ se cumple que*

$$d_{\infty,s}(\Psi(u), \Psi(v)) \leq L \cdot d_{\infty,s}(u, v).$$

Demostración. Tome las constantes a y T como fueron definidas en la anterior proposición. Dados $u, v \in X_T^s(a)$ se cumple

$$\begin{aligned} d_{\infty,s}(\Psi(u), \Psi(v)) &= \int_0^t \|U(t-\tau)((u^2 - v^2) - (u^4 - v^4))(\tau)\|_{H^s} d\tau \\ &= \int_0^t \|((u^2 - v^2) - (u^4 - v^4))(\tau)\|_{H^s} d\tau \\ &= \int_0^t \|(u^2 - v^2)(\tau)\|_{H^s} + \|(u^4 - v^4)(\tau)\|_{H^s} d\tau. \end{aligned}$$

Cabe recordar que al lado derecho de la inecuación se requiere que aparezca la distancia $d_{\infty,s}(u, v)$, por tanto, escribiendo $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ y $u^4 - v^4 = (u - v)(u + v)(u^2 + v^2)$, y usando que $H^s(\mathbb{T}^n)$ es un álgebra de Banach se obtiene que

$$\begin{aligned} d_{\infty,s}(\Psi(u), \Psi(v)) &\leq \int_0^t C_s\|(u-v)(\tau)\|_{H^s}\|(u+v)(\tau)\|_{H^s} + C_s^2\|(u-v)(\tau)\|_{H^s}\|(u+v)(\tau)\|_{H^s}\|(u^2+v^2)(\tau)\|_{H^s} d\tau \\ &\leq \int_0^t C_s\|(u-v)(\tau)\|_{H^s}(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s}) + C_s^3\|(u-v)(\tau)\|_{H^s}(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s})(\|u\|_{H^s}^2 + \|v\|_{H^s}^2) d\tau \\ &\leq T[C_s\|u-v\|_{\infty,s}(\|u\|_{\infty,s} + \|v\|_{\infty,s}) + C_s^3\|u-v\|_{\infty,s}(\|u\|_{\infty,s} + \|v\|_{\infty,s})(\|u\|_{\infty,s}^2 + \|v\|_{\infty,s}^2)] \\ &\leq T[C_s\|u-v\|_{\infty,s}2a + C_s^3\|u-v\|_{\infty,s}4a^3] \\ &= T(2aC_s + 4a^3C_s^3)\|u-v\|_{\infty,s}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene de que $u, v \in X_T^s(a)$. Como $0 < T < \frac{1}{2aC_s + 4a^3C_s^3}$ entonces $0 < T(2aC_s + 4a^3C_s^3) < 1$. Definiendo $L := T(2aC_s + 4a^3C_s^3)$ se tiene que

$$d_{\infty,s}(\Psi(u), \Psi(v)) \leq L \cdot d_{\infty,s}(u, v),$$

con $0 < L < 1$, por tanto Ψ es una contracción en el espacio $X_T^s(a)$.

$\square$

Utilizando el *teorema de punto fijo de Banach* sobre la contracción $\Psi : X_T^s(a) \to X_T^s(a)$ existe un punto fijo de la contracción, es decir, existe $u \in X_T^s(a) \subset C([-T, T]; H^s(\mathbb{T}^n))$ tal que $u = \Psi(u)$, esto significa que existe al menos una solución para el problema (11) en la formulación integral.

3.2. Unicidad

En la presente sección se pretende demostrar que, sobre el intervalo $[-T, T]$ en el que se demostró la existencia de soluciones para el problema (11), la solución es única. Nótese que, aunque el *teorema de punto fijo de Banach* implica unicidad sobre el anterior dominio $X_T^s(a)$, se quiere ver que en realidad la solución es única sobre todo $C([-T, T], H^s(\mathbb{T}^n))$. Recuerde que, como se demostró en el apartado de existencia, el intervalo de existencia $[-T, T]$ depende de la norma del dato inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$. Sean $u, v \in C([-T, T], H^s(\mathbb{T}^n)))$ soluciones de la fórmula integral (11) (con $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$ fijo). Existe una constante M tal que

$$0 \leq \|u\|_{\infty,s} + \|v\|_{\infty,s} \leq M.$$

Note que lo anterior implica que

$$\|u\|_{\infty,s}^2 + \|v\|_{\infty,s}^2 \leq (\|u\|_{\infty,s} + \|v\|_{\infty,s})^2 \leq M^2.$$

Para $0 \leq T_1 \leq T$, se define

$$\|u\|_{\infty,s}^{T_1} := \sup_{t \in [-T_1, T_1]} \|u(t)\|_{H^s}.$$

Note que $\|u\|_{\infty,s}^{T} = \|u\|_{\infty,s}$. Entonces, para $t \in [-T_1, T_1]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u(t)-v(t)\|_{H^s} &\leq \int_0^t \left\|U(t-t')((u^2-v^2)-(u^4-v^4))(t')\right\|_{H^s} dt' \\
&= \int_0^t \left\|((u^2-v^2)-(u^4-v^4))(t')\right\|_{H^s} dt' \\
&\leq \int_0^t \left(\|(u-v)(u+v)(t')\|_{H^s} + \left\|(u-v)(u+v)(u^2+v^2)(t')\right\|_{H^s}\right) dt' \\
&\leq \int_0^t \left(C_s\|(u-v)(t')\|_{H^s}\|(u+v)(t')\|_{H^s} + C^2\|(u-v)(t')\|_{H^s}\|(u+v)(t')\|_{H^s}\left\|(u^2+v^2)(t')\right\|_{H^s}\right) dt' \\
&\leq \int_0^t \|(u-v)(t')\|_{H^s}\left[C_s\left(\|u(t')\|_{H^s}+\|v(t')\|_{H^s}\right) + C_s^2\left(\|u(t')\|_{H^s}+\|v(t')\|_{H^s}\right)\left(\left\|u^2(t')\right\|_{H^s}+\left\|v^2(t')\right\|_{H^s}\right)\right] dt' \\
&\leq \int_0^t \|(u-v)(t')\|_{H^s}\left[C_sM + C_s^2M\left(\left\|u^2(t')\right\|_{H^s}+\left\|v^2(t')\right\|_{H^s}\right)\right] dt' \\
&\leq \int_0^t \|(u-v)(t')\|_{H^s}\left[C_sM + C_s^3M\left(\|u(t')\|_{H^s}^2+\|v(t')\|_{H^s}^2\right)\right] dt' \\
&\leq \int_0^t \|(u-v)(t')\|_{H^s}\left[C_sM + C_s^3M^3\right] dt' \\
&\leq \left[C_sM + C_s^3M^3\right]|t|\left(\sup_{t\in[-T_1,T_1]}\|(u-v)(t)\|_{H^s}\right) \\
&\leq \left[C_sM + C_s^3M^3\right]T_1\|u-v\|_{\infty,s}^{T_1}. \qquad (18)
\end{aligned}$$

En conclusión,

$$\|u-v\|_{\infty,s}^{T_1} \leq \left[C_sM + C_s^3M^3\right]T_1\|u-v\|_{s,\infty}^{T_1}.$$

Es decir, si se toma $T_1 = \min\{T, \frac{1}{2(C_sM+C_s^3M^3)}\}$, que

$$\|u-v\|_{\infty,s}^{T_1} \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_{\infty,s}^{T_1}.$$

Al ser $\|u-v\|_{\infty,s}^{T_1}$ un número no negativo, esto se da si y solo si $\|u-v\|_{\infty,s}^{T_1} = 0$, o, dicho de otra forma,

$$u(t) = v(t), \text{ para todo } t \in [-T_1, T_1].$$

En caso de que $T_1 = T$, se concluye la demostración. Se verá a continuación que, en caso de que $T_1 < T$, este argumento se puede extender para los intervalos $[-T_2, -T_1]$ y $[T_1, T_2]$, donde $T_2 = \min\{2T_1, T\}$. En primera instancia, se desea usar lo que se demostró en la parte (vi) de la proposición 3.0.1 para ver que, para $w \in C([-T,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$,

$$\int_0^{T_1} U(t-T_1)U(t-t')(w^2-w^4)(t')dt' = U(t-T_1)\int_0^{T_1} U(t-t')(w^2-w^4)(t')dt'. \qquad (19)$$

Para ello, defina f por

$$f(t') = U(t-t')(w^2-w^4)(t').$$

Como $w(t') \in H^s(\mathbb{T}^n)$ para todo $t' \in \mathbb{R}$ y $H^s(\mathbb{T}^n)$ es un álgebra de Banach, por la propiedad (i) de la proposición 3.0.1 se cumple que la imagen de f está contenida en $H^s(\mathbb{T}^n)$. Adicionalmente, U es continuo respecto a t gracias la propiedad (iv) de la proposición 3.0.1, y $w^2 - w^4$ también lo es, al serlo w; de esta forma, $f \in C([-T,T]\,; H^s(\mathbb{T}^n))$. Por ende, aplicando la propiedad (vi) de la proposición en cuestión, la fórmula (19) es válida. Utilizando otras propiedades mencionadas en esta proposición, se tiene para $T_1 < t < T$ y $w \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^n))$ que satisface (11) que

$$\begin{aligned}
w(t) &= U(t)u_0 + i\int_0^t U(t-t')(w^2-w^4)(t')dt' \\
&= U(t-T_1+T_1)u_0 + i\int_0^{T_1} U(t-T_1+T_1-t')(w^2-w^4)(t')dt' + i\int_{T_1}^t U(t-t')(w^2-w^4)(t')dt' \\
&= U(t-T_1)\left[U(T_1)u_0 + i\int_0^{T_1} U(T_1-t')(w^2-w^4)(t')dt'\right] + i\int_{T_1}^t U(t-t')(w^2-w^4)(t')dt' \\
&= U(t-T_1)w(T_1) + i\int_{T_1}^t U(t-t')(w^2-w^4)(t')dt'.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, como ya se mostró que $u(T_1) = v(T_1)$, para $T_1 < t \leq T_2$ se cumple que

$$(u-v)(t) = i\int_{T_1}^{t} U(t-t')((u^2-v^2)-(u^4-v^4))(t')dt',$$

y, haciendo un argumento análogo a lo realizado en (18), se encuentra que para $T_1 < t \leq T_2$,

$$\|(u-v)(t)\|_{H^s} \leq \left[C_sM + C_s^3M^3\right]|t-T_1|\left(\sup_{t\in[T_1,T_2]}\|(u-v)(t)\|\right) \leq \left[C_sM + C_s^3M^3\right]T_1\left(\sup_{T_1<|t|\leq T_2}\|(u-v)(t)\|\right). \quad (20)$$

Para $-T \leq t < -T_1$ y $w \in C([0,T]; H^s)$ que satisface (11), argumentando de manera análoga a como se acaba de realizar más arriba, se tiene que

$$\begin{aligned}
w(t) &= U(t)u_0 + i\int_0^t U(t-t')(w^2-w^4)(t')dt' \\
&= U(t+T_1-T_1)u_0 + i\int_0^{-T_1} U(t+T_1-T_1-t')(w^2-w^4)(t')dt' + i\int_{-T_1}^{t} U(t-t')(w^2-w^4)(t')dt' \\
&= U(t+T_1)\left[U(-T_1)u_0 + i\int_0^{-T_1} U(-T_1-t')(w^2-w^4)(t')dt'\right] + i\int_{-T_1}^{t} U(t-t')(w^2-w^4)(t')dt' \\
&= U(t+T_1)w(-T_1) + i\int_{-T_1}^{t} U(t-t')(w^2-w^4)(t')dt'.
\end{aligned}$$

Como ya se demostró que $u(-T_1) = v(-T_1)$, entonces, para $-T_2 \leq t < T_1$ se debe dar que

$$(u-v)(t) = i\int_{-T_1}^{t} U(t-t')((u^2-v^2)-(u^4-v^4))(t')dt'.$$

Haciendo un argumento análogo a lo hecho en (18), se concluye que para $-T_2 \leq t < T_1$,

$$\|(u-v)(t)\|_{H^s} \leq \left[C_sM + C_s^3M^3\right]|t+T_1|\left(\sup_{t\in[-T_2,-T_1]}\|(u-v)(t)\|\right) \leq \left[C_sM + C_s^3M^3\right]T_1\left(\sup_{T_1<|t|\leq T_2}\|(u-v)(t)\|\right). \quad (21)$$

Juntando (20) y (21),

$$\sup_{T_1<|t|\leq T_2}\|(u-v)(t)\| \leq \left[C_sM + C_s^3M^3\right]T_1\left(\sup_{T_1<|t|\leq T_2}\|(u-v)(t)\|\right) \leq \frac{1}{2}\left(\sup_{T_1<|t|\leq T_2}\|(u-v)(t)\|\right).$$

Se concluye así que $u(t) = v(t)$ para todo $t \in [-T, T]$ con $T_1 < |t| \leq T_2$. De manera inductiva, un argumento análogo al anterior se usa para demostrar que $u(t) = v(t)$ para $(m-1)T_1 < |t| < T_m$, donde $T_m = \text{mín}\{T, mT_1\}$, para cualquier $m \geq 2$ entero. Gracias a la propiedad arquimediana de los números reales, este proceso iterativo se detiene en algún entero m, para el que $mT_1 \geq T$, concluyendo así la unicidad en todo el intervalo $[-T, T]$. Note que, al no haber usado el valor a definido para la demostración anterior de existencia, esta misma demostración funciona para cuando $u_0 \equiv 0$.

3.3. Dependencia Continua

En esta sección, se mostrará que, realmente, datos iniciales "cercanos"producen soluciones "cercanas". Para esto, se considera $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$ con $||u_0||_{H^s} \neq 0$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < ||u_0||_{H^s}$. Se define la vecindad alrededor de u_0

$$V = \{v_0 \in H^s(\mathbb{T}^n) : ||u_0 - v_0||_{H^s} < \epsilon\}.$$

Note que si $v_0 \in V$, entonces

$$||v_0||_{H^s} - ||u_0||_{H^s} \leq ||v_0 - u_0||_{H^s} < \epsilon < ||u_0||_{H^s}.$$

Ello implica que $||v_0||_{H^s} \leq 2||u_0||_{H^s}$. Por lo hecho anteriormente, dado un dato inicial $v_0 \in H^s(\mathbb{T}^n)$, existen un tiempo T para el cuál existe una única solución v del problema (11). Sin embargo, este tiempo depende del dato inicial, entonces para mostrar que la aplicación dato inicial-solución está bien definida, se quiere ver que en una vecindad de cada dato inicial, existe un tiempo T tal que para toda v_0 en la vecindad, existe una única solución v del problema (11),

$v \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{T}^n))$, es por esto que se define la vecindad anterior, siguiendo con la noción de buen plantemiento. Siguiendo lo hecho anteriormente, si se toma $v_0 \in V$, para ciertas constantes $a, T > 0$, se define la aplicación

$$\Psi_{v_0}(w)(t) = U(t)v_0 + i\int_0^t U(t-\tau)(w^2 - w^4)(\tau)d\tau, \tag{22}$$

con $w \in X_T^s(a)$. Tomando las constantes

$$\begin{cases} \widetilde{a} := 4||u_0||_{H^s} \\ 0 < T \leq \frac{1}{2(2\widetilde{a}C_s + 4C_s^3\widetilde{a}^3)}, \end{cases}$$

y recordando la notación $||\cdot||_{\infty,s} = \sup\limits_{t\in[-T,T]} ||\cdot(t)||_{H^s}$, para $v_0 \in V$ y $w \in X_T^s(\widetilde{a})$ se cumple que

$$\begin{aligned} ||\Psi_{v_0}(w)(t)||_{H^s} &\leq ||U(t)v_0||_{H^s} + \int_0^t ||U(t-\tau)(w^2 - w^4)(\tau)||_{H^s}\, d\tau \\ &\leq ||v_0||_{H^s} + \int_0^t (||w^2(\tau)||_{H^s} + ||w^4(\tau)||_{H^s})\, d\tau \\ &\leq ||v_0||_{H^s} + \int_0^t (C_s||w(\tau)||_{H^s}^2 + C_s^3||w(\tau)||_{H^s}^4)\, d\tau \\ &\leq ||v_0||_{H^s} + \int_0^t (C_s||w||_{\infty,s}^2 + C_s^3||w||_{\infty,s}^4)\, d\tau \\ &\leq ||v_0||_{H^s} + T(C_s||w||_{\infty,s}^2 + C_s^3||w||_{\infty,s}^4) \\ &\leq ||v_0||_{H^s} + T(C_s\widetilde{a}^2 + C_s^3\widetilde{a}^4). \end{aligned}$$

Como $T \leq \dfrac{1}{2(2\widetilde{a}C_s + 4C_s^3\widetilde{a}^3)}$, se tiene que

$$T(C_s\widetilde{a}^2 + C_s^3\widetilde{a}^4) \leq \frac{(C_s\widetilde{a}^2 + C_s^3\widetilde{a}^4)}{2(2\widetilde{a}C_s + 4C_s^3\widetilde{a}^3)} = \frac{C_s\widetilde{a} + C_s^3\widetilde{a}^3}{2(2C_s + 4C_s^3\widetilde{a}^2)} = \frac{\widetilde{a}}{2}\cdot\frac{C_s + C_s^3\widetilde{a}^2}{2C_s + 4C_s^3\widetilde{a}^2} \leq \frac{\widetilde{a}}{2},$$

done la última desigualdad es debido a que $C_s + C_s^3\widetilde{a}^2 \leq 2C_s + 4C_s^3\widetilde{a}^2$. Además, como $||v_0||_{H^s} \leq 2||u_0||_{H^s} = \dfrac{\widetilde{a}}{2}$,

$$||\Psi_{v_0}(w)||_{\infty,s} \leq ||v_0||_{H^s} + T(C_s\widetilde{a}^2 + C_s^3\widetilde{a}^4) \leq \frac{\widetilde{a}}{2} + \frac{\widetilde{a}}{2} = \widetilde{a},$$

es decir, la aplicación $\Psi : X_T^s(\widetilde{a}) \to X_T^s(\widetilde{a})$ está bien definida en este espacio. Ahora, igual que antes, se verificará que esta aplicación es una contracción en $X_T^s(\widetilde{a})$. Sean $v, w \in X_T^s(\widetilde{a})$ y $v_0 \in V$, luego

$$\begin{aligned} ||\Psi_{v_0}(v)(t) - \Psi_{v_0}(w)(t)||_{H^s} &\leq \int_0^t ||U(t-\tau)((v^2 - w^2)(\tau) - (v^4 - w^4)(\tau))||_{H^s}\, d\tau \\ &= \int_0^t ||(v^2 - w^2)(\tau) - (v^4 - w^4)(\tau)||_{H^s}\, d\tau \\ &\leq \int_0^t ||(v^2 - w^2)(\tau)||_{H^s} + ||(v^4 - w^4)(\tau)||_{H^s}\, d\tau \\ &\leq \int_0^t (C_s||(v-w)(\tau)||_{H^s}||(v+w)(\tau)||_{H^s} + C_s^2||(v-w)(\tau)||_{H^s}||(v+w)(\tau)||_{H^s}||(v^2+w^2)(\tau)||_{H^s})\, d\tau \\ &\leq \int_0^t (C_s||v-w||_{\infty,s}||v+w||_{\infty,s} + C_s^2||v-w||_{\infty,s}||v+w||_{\infty,s}||v^2+w^2||_{\infty,s})\, d\tau \\ &\leq |t|(C_s||v-w||_{\infty,s}(||v||_{\infty,s} + ||w||_{\infty,s}) + C_s^2||v-w||_{\infty,s}(||v||_{\infty,s} + ||w||_{\infty,s})(||v^2||_{\infty,s} + ||w^2||_{\infty,s})) \\ &\leq T(C_s||v-w||_{\infty,s}(||v||_{\infty,s} + ||w||_{\infty,s}) + C_s^3||v-w||_{\infty,s}(||v||_{\infty,s} + ||w||_{\infty,s})(||v||_{\infty,s}^2 + ||w||_{\infty,s}^2)) \\ &\leq ||v-w||_{\infty,s}T(2C_s\widetilde{a} + 4C_s^3\widetilde{a}^3). \end{aligned}$$

Como $T \leq \dfrac{1}{2(2C_s\widetilde{a} + 4C_s^3\widetilde{a}^3)}$, entonces $T(2C_s\widetilde{a} + 4C_s^3\widetilde{a}^3) \leq \dfrac{1}{2}$. De esta manera

$$||\Psi_{v_0}(v) - \Psi_{v_0}(w)||_{\infty,s} \leq \frac{1}{2}||v-w||_{\infty,s},$$

es decir, Ψ_{v_0}, en efecto, define una contracción en $X_T^s(\widetilde{a})$ y así por el teorema de contracción de Banach, existe un único punto fijo de Ψ_{v_0}, es decir, una solución del problema (11). La demostración de unicidad de la **sección 3.2** aplica exactamente igual para estas soluciones. De esta manera, la aplicación dato-solución

$$H^s(\mathbb{T}^n) \supset V \ni v_0 \longmapsto v \in X_T^s(\widetilde{a}) \subset C([-T,T] : H^s(\mathbb{T}^n))$$

está bien definida.
Ahora, es necesario ver que que esta aplicación, en efecto, es continua en V. Dadas w, v soluciones del problema (11) con datos iniciales w_0 y v_0, respectivamente, y $w_0, v_0 \in V$,

$$\begin{aligned}
||\Psi_{w_0}(w)(t) - \Psi_{v_0}(v)(t)||_{H^s} &\leq ||U(t)(w_0 - v_0)||_{H^s} + \int_0^t ||U(t-\tau)((w^2 - v^2) - (w^4 - v^4))(\tau)||_{H^s}\, d\tau \\
&= ||w_0 - v_0||_{H^s} + \int_0^t ||((w^2 - v^2)(\tau) - (w^4 - v^4))(\tau)||_{H^s}\, d\tau \\
&\leq ||w_0 - v_0||_{H^s} + \int_0^t (||(w^2 - v^2)||_{\infty,s} + ||(w^4 - v^4)||_{\infty,s})\, d\tau \\
&\leq ||w_0 - v_0||_{H^s} + |t|(||w^2 - v^2||_{\infty,s} + ||w^4 - v^4||_{\infty,s}) \\
&\leq ||w_0 - v_0||_{H^s} + T(C_s||w - v||_{\infty,s}||w + v||_{\infty,s} + C_s^2||w - v||_{\infty,s}||w + v||_{\infty,s}||w^2 + v^2||_{\infty,s}) \\
&\leq ||w_0 - v_0||_{H^s} + T||w - v||_{H^s}(C_s(||w||_{\infty,s} + ||v||_{\infty,s}) + C_s^3(||w||_{\infty,s} + ||v||_{\infty,s})(||w||_{\infty,s}^2 + ||v||_{\infty,s}^2)) \\
&\leq ||w_0 - v_0||_{H^s} + T||w - v||_{\infty,s}(2C_s\widetilde{a} + 4C_s^3\widetilde{a}^3).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $T \leq \dfrac{1}{2(2\widetilde{a}C_s + 4C_s^3\widetilde{a}^3)}$, entonces $T(2C_s\widetilde{a} + 4C_s^3\widetilde{a}^3) \leq \dfrac{1}{2}$, y por tanto

$$||\Psi_{w_0}(w)(t) - \Psi_{v_0}(v)(t)||_{H^s} \leq ||w_0 - v_0||_{H^s} + \frac{1}{2} \sup_{t\in[-T,T]} ||w - v||_{H^s}.$$

Dado que $w = \Psi_{w_0}(w)$ y $v = \Psi_{v_0}(v)$, se tiene

$$\sup_{t\in[-T,T]} ||w - v||_{H^s} \leq ||w_0 - v_0||_{H^s} + \frac{1}{2} \sup_{t\in[-T,T]} ||w(t) - v(t)||_{H^s},$$

es decir,

$$\sup_{t\in[-T,T]} ||w - v||_{H^s} \leq 2||w_0 - v_0||_{H^s}.$$

De esta manera, se obtiene la continuidad de la aplicación dato-solución en V.

Para el caso en que $||u_0||_{H^s} = 0$ (es decir $u_0 \equiv 0$), sean $\epsilon > 0$ arbitrario y la vecindad

$$V = \{v_0 \in H^s(\mathbb{T}^n) : ||v_0||_{H^s} < \epsilon\}.$$

Realizando el mismo proceso, con la misma aplicación definida en (22), con las constantes

$$\begin{cases} \widetilde{a} = 2\epsilon \\ 0 < T \leq \frac{1}{2(2C_s\widetilde{a} + 4C_s^3\widetilde{a}^3)}, \end{cases}$$

se obtiene el resultado.

4. Bibliografía

- Iorio, J., Rafael José, & Iorio, V. de M. (2001). Fourier analysis and partial differential equations. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511623745
- Kenig, C. E., Ponce, G., & Vega, L. (1993). The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices. Duke Mathematical Journal, 71(1), 1–21. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-93-07101-3
- Riaño, O. (2024). Notas de clase: Series de Fourier.