

# Introducción a optimización topológica

*Juan Diego Murcia Porras* jmurciap@unal.edu.co

*Carlos Enrique Nosa Guzmán* cnosa@unal.edu.co

*Jaime Andres Zamora Avilez* jzamora@unal.edu.co

## Resumen

Palabras clave:

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Mecánica Continua</b>	<b>4</b>
2.1. Tensores . . . . .	4
2.1.1. Tensores de orden $n$ . . . . .	4
2.2. Cinemática del continuo . . . . .	6
2.2.1. Descripción material y descripción espacial . . . . .	6
2.2.2. Vector de desplazamiento . . . . .	7
2.2.3. Deformación infinitesimal . . . . .	7
2.2.4. Tensor de tensión infinitesimal . . . . .	9
2.2.5. Notación de Voigt para el tensor de tensión infinitesimal . . . . .	10
2.3. Esfuerzo . . . . .	10
2.3.1. Vector de esfuerzo . . . . .	10
2.3.2. Tensor de esfuerzo . . . . .	11
2.3.3. Notación de Voigt para el tensor de esfuerzo . . . . .	11
2.4. Sólidos elásticos . . . . .	12
2.4.1. Propiedades mecánicas . . . . .	12
2.4.2. Materiales linealmente elásticos . . . . .	13
2.4.3. Notación de Voigt para el tensor de rigidez . . . . .	14
2.5. Ecuaciones de equilibrio dinámicas . . . . .	15
2.5.1. Forma débil de las ecuaciones de equilibrio elásticas (caso estático) . . . . .	17
2.6. Algunas consideraciones para el caso bidimensional . . . . .	19
2.6.1. Ley de Hooke para el caso bidimensional . . . . .	20
2.6.2. Ecuaciones de equilibrio dinámicas para el caso bidimensional . . . . .	20
<b>3. Método de los Elementos Finitos</b>	<b>22</b>
3.1. El método . . . . .	22
3.1.1. Modelamiento . . . . .	22
3.1.2. Simulación . . . . .	22
3.1.3. Visualización . . . . .	22
3.2. Fundamentos de FEM . . . . .	23
3.2.1. Formas débiles y fuertes . . . . .	23
3.2.2. Principio de Hamilton . . . . .	23
3.2.3. Procedimiento del FEM . . . . .	24
<b>4. Optimización topológica</b>	<b>27</b>
4.1. Introducción de la función de densidad . . . . .	28
4.1.1. Estudio del problema discreto desde el punto de optimización convexa . . . . .	29
4.2. Métodos de solución . . . . .	30
4.2.1. Método de criterio de optimalidad (OC) . . . . .	30
4.2.2. Método de asíntotas móviles (MMA) . . . . .	31
<b>5. Implementación Algorítmica</b>	<b>32</b>
5.1. Problema de optimización topológica . . . . .	32
5.2. Método de criterios de optimización . . . . .	33

5.3. Filtrado . . . . .	33
5.4. Función top88 . . . . .	33
5.4.1. Propiedades del material (líneas 7-9) . . . . .	34
5.4.2. Preparación del análisis de elementos finitos (líneas 10-22) . . . . .	34
5.4.3. Definir cargas y soportes: mitad viga-MBB (líneas 23-28) . . . . .	35
5.4.4. Preparación de filtro (líneas 29-50) . . . . .	36
5.4.5. Inicialización de iteracion (líneas 51-54) . . . . .	37
5.4.6. Comienzo de iteración (líneas 55-106) . . . . .	37
5.4.7. Graficar resultados (línea 107) . . . . .	39
<b>6. Conclusiones</b>	<b>40</b>

## 1. Introducción

## 2. Mecánica Continua

En la presente sección, se introducirá el tema de mecánica continua con el fin de comprender posteriormente las ecuaciones que corresponden a la optimización topológica. Es importante aclarar que la mecánica continua es un campo extenso del que hay numerosa bibliografía disponible. Se intentarán cubrir únicamente aquellas definiciones que se utilizarán más adelante. Los tensores de tensión y de esfuerzo se introducirán como tensores de orden 2 para facilitar su comprensión. Posteriormente, se definirá la notación de Voigt, que será de utilidad a la hora de realizar el método de elementos finitos. Esta sección toma, casi literalmente, las definiciones y comentarios dados en [W Michael et al., 2010], [G.R. and S. S., 2013] y la introducción de [Serrano, sf].

La materia está constituida de moléculas, que a su vez están compuestas por átomos y partículas. Por ende, la materia no es continua. Sin embargo, hay varios fenómenos, como la deflección de una estructura bajo cargas, en la que ignorar este hecho es bastante útil. La teoría que busca describir las relaciones entre fenómenos a grande escala, ignorando la estructura de la materia a pequeña escala, se denomina *teoría continua*. La justificación de su uso es más de tipo experimental y filosófico. Al final, es suficiente decir que más de 200 años de experiencia son suficientes para justificar esta teoría en una gran variedad de situaciones. Ver [W Michael et al., 2010].

La *mecánica continua* estudia la respuesta de diversos materiales a distintas condiciones de carga. Las ecuaciones que constituyen esta teoría se dividen en dos: (1) las ecuaciones de campo, formuladas para un volumen diferencial de material en cada punto del dominio, y (2) la forma integral (o forma débil), formulada para un volumen finito de materia continua. Se introducirá la primera forma para un mayor entendimiento, recomendada generalmente para principiantes; posteriormente, se derivarán las ecuaciones en su forma “débil”, que son aquellas que se utilizarán en las siguientes secciones.

### 2.1. Tensores

Introduciremos los tensores como una generalización de las transformaciones lineales. Si  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una transformación lineal dada por  $a \mapsto \mathbf{T}a$ , diremos que  $\mathbf{T}$  es un *tensor de orden 2* o simplemente *tensor*. Si  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , entonces existen escalares  $T_{ij} := e_i \cdot \mathbf{T}e_j^1$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) de manera que

$$\mathbf{T}e_k = T_{1k}e_1 + T_{2k}e_2 + T_{3k}e_3, \text{ para } k = 1, 2, 3.$$

Los escalares  $T_{ij}$  son definidos como las componentes del tensor  $\mathbf{T}$ , y pueden ser dispuestos en una matriz como

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix},$$

a la cual se le denomina la matriz de  $\mathbf{T}$  con respecto a la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Las nociones de tensor identidad, tensor inverso, tensor transpuesto, y suma y multiplicación de tensores se definen de manera análoga a como se definen para una transformación lineal.

#### 2.1.1. Tensores de orden $n$

Suponga que  $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$  y  $\beta = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$  son dos bases ortonormales de  $\mathbb{R}^3$ . Sabemos que existe un tensor ortonormal  $Q$  de manera que  $Qe_k = \sum_{i=1}^3 Q_{ik}e_i = e'_k$  para  $k = 1, 2, 3$ . Por ende, si sabemos las componentes de  $\mathbf{T}$  respecto a la base  $\alpha$ , podemos derivar sus componentes respecto a la base  $\beta$  como

$$T'_{ij} = e'_i \cdot \mathbf{T}e'_j = Qe_i \cdot \mathbf{T}Qe_j = \sum_{m,n=1}^3 Q_{mi}T_{mn}Q_{nj},$$

o, en forma matricial,

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}].$$

Dado que  $\mathbf{Q}$  es ortonormal (y por ende  $[Q]$  también), podemos expresar

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{Q}] [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}]^T.$$

<sup>1</sup>. representará en este documento el producto interno usual.

Es decir, un tensor está únicamente determinado por sus componentes respecto a alguna base, y, decímos por ejemplo *el tensor*  $T_{ij}$  es correcto, en el sentido de que se interprete como las componentes de tal tensor respecto a la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Esta noción de transformación entre bases nos permite generalizar el concepto de tensor a más dimensiones usando las reglas utilizadas para realizar un cambio de base. Restringiéndonos a bases ortonormales, definiremos las componentes de tensores de orden mayor por medio de sus reglas de transformación, recordando que las cantidades sin prima se refieren a las componentes respecto a una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  y las cantidades primadas se refieren a sus componentes respecto a otra base ortonormal  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , relacionadas mediante  $e'_k = Qe_k$  para  $k = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \text{ tensor de orden cero (o escalar),} \\ a'_i &= \sum_{m=1}^3 Q_{mi} a_m \text{ tensor de orden uno (o vector),} \\ T'_{ij} &= \sum_{m,n=1}^3 Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \text{ tensor de orden dos (o tensor),} \\ S'_{ijk} &= \sum_{m,n,r=1}^3 Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} S_{ijk} \text{ tensor de orden tres,} \\ C'_{ijkl} &= \sum_{m,n,r,s=1}^3 Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} C_{ijkl} \text{ tensor de orden cuatro,} \end{aligned}$$

y de manera análoga se puede describir un tensor de orden  $n$ . A partir de allí, se derivan ciertas reglas, cuyas ideas de demostración se pueden encontrar en [W Michael et al., 2010].

- Regla de la suma.* Si  $T_{i_1\dots i_n}$  y  $S_{i_1\dots i_n}$  son componentes de tensores de orden  $n$ , entonces  $T_{i_1\dots i_n} + S_{i_1\dots i_n}$  son componentes de un tensor de orden  $n$ .
- Regla de la multiplicación.* Sean  $T_{i_1\dots i_n}$  las componentes de un tensor de orden  $n$  y  $S_{j_1\dots j_m}$  las componentes de un tensor de orden  $m$ . Entonces,  $T_{i_1\dots i_n} S_{j_1\dots j_m}$  son las componentes de un tensor de orden  $m+n$ , donde todos los índices en la expresión son libres.

Además, demostraremos un caso especial de la *regla del cociente*, que nos será útil más adelante.

**Proposición.** Si  $\sigma_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}$  son componentes de tensores arbitrarios de orden 2,  $\sigma$  y  $\varepsilon$ , y

$$\sigma_{ij} = \sum_{m,n=1}^3 E_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad (1)$$

para todas las coordenadas, luego  $E_{ijmn}$  es un tensor de orden cuatro.

**Solución.** Dado que  $\sigma$  y  $\varepsilon$  son tensores de orden 2, luego

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{r,s=1}^3 Q_{ir} Q_{js} \varepsilon'_{rs}$$

y

$$\sigma_{ij} = \sum_{m,n=1}^3 Q_{im} Q_{jn} \sigma'_{mn}.$$

Reemplazando en (1), obtenemos que

$$\sum_{m,n=1}^3 Q_{im} Q_{jn} \sigma'_{mn} = \sum_{m,n,r,s=1}^3 C_{ijmn} Q_{mr} Q_{ns} \varepsilon'_{rs}.$$

Pero, como (1) es válida para cualesquiera coordenadas, luego

$$\sigma'_{mn} = \sum_{r,s=1}^3 E'_{mnrs} \varepsilon'_{rs},$$

y así,

$$\sum_{m,n,r,s=1}^3 C'_{mnrs} Q_{im} Q_{jn} \varepsilon'_{rs} = \sum_{m,n,r,s=1}^3 E_{ijmn} Q_{mr} Q_{ns} \varepsilon'_{rs}. \quad (i,j = 1, 2, 3)$$

Multiplicando cada una de estas ecuaciones por  $Q_{ik} Q_{jl}$ , sumando sobre  $i$  y  $j$ , y recordando que  $\sum_{i=1}^3 Q_{ik} Q_{im} = \delta_{km}$ , obtenemos que

$$\sum_{m,n,r,s=1}^3 E'_{mnrs} \delta_{km} \delta_{ln} \varepsilon'_{rs} = \sum_{i,j,m,n,r,s=1}^3 E_{ijmn} Q_{ik} Q_{jl} Q_{mr} Q_{ns} \varepsilon'_{rs},$$

o, de otra forma,

$$\sum_{r,s=1}^3 E'_{klrs} \varepsilon'_{rs} = \sum_{i,j,m,n,r,s=1}^3 E_{ijmn} Q_{ik} Q_{jl} Q_{mr} Q_{ns} \varepsilon'_{rs}.$$

Es decir,

$$\sum_{r,s=1}^3 \left( E'_{klrs} - \sum_{i,j,m,n=1}^3 Q_{ik} Q_{jl} Q_{mr} Q_{ns} E_{ijmn} \right) \varepsilon'_{rs} = 0.$$

Dado que esta ecuación debe ser cierta para cualquier tensor  $\varepsilon$ , concluimos que

$$E'_{klrs} = \sum_{i,j,m,n=1}^3 Q_{ik} Q_{jl} Q_{mr} Q_{ns} E_{ijmn},$$

concluyendo así lo pedido. □

## 2.2. Cinemática del continuo

Para una partícula, el movimiento está descrito por  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + x_3(t)e_3$ , donde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Para el continuo, sin embargo, hay un número infinito de partículas. Por ello debemos agregar un nuevo argumento que identifique la partícula del cuerpo a la que nos referimos mediante su posición en un tiempo de referencia  $t_0$ . Es decir, si una partícula  $P$  está en la posición  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  en el tiempo  $t_0$ , su movimiento puede ser descrito mediante

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \text{ con } \mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0).$$

En general,  $\mathbf{x} : \Omega \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  describe el movimiento de un cuerpo, donde  $\Omega$  es el dominio que ocupa el cuerpo en el tiempo  $t_0$ . A la tripla  $(X_1, X_2, X_3)$  que ayuda a identificar la partícula a la que nos referimos se le denomina *coordenadas materiales*.

### 2.2.1. Descripción material y descripción espacial

Para definir cualquier campo escalar o vectorial  $\Theta$  sobre un cuerpo en movimiento (por ejemplo, un tensor de orden dos o la temperatura), se pueden usar dos enfoques.

1. Sobre las partículas, i.e., como función de las coordenadas materiales  $(X_1, X_2, X_3)$  y el tiempo como

$$\Theta = \Theta(X_1, X_2, X_3, t).$$

A esta descripción se le denomina *descripción material* del campo. Otros nombres para ella son *descripción de Lagrange* o *descripción de referencia*. Note que se describe el cambio del campo sobre cierta partícula a través del tiempo.

2. Observando cambios en lugares fijos, i.e., como función de las coordenadas espaciales  $(x_1, x_2, x_3)$  y el tiempo como

$$\Theta = \Theta(x_1, x_2, x_3, t).$$

A esta descripción se le denomina *descripción espacial* o *descripción lagrangiana*. Note que, bajo este enfoque, lo que es medido es el cambio del campo en puntos fijos, que pueden ser ocupados por distintas partículas a través del tiempo.

Suponiendo que la descripción del movimiento de un cuerpo es inyectiva, podemos obtener la descripción espacial de cierto campo a partir de su descripción material y viceversa, como se observa en el siguiente ejemplo, tomado de [W Michael et al., 2010].

**Ejemplo.** El movimiento de un cuerpo está dado por

$$x_1 = X_1 + ktX_2, \quad x_2 = (1 + kt)X_2, \quad x_3 = X_3.$$

Su temperatura está dada por la descripción espacial

$$\Theta = \alpha(x_1 + x_2).$$

Encuentre (a) la descripción material de la temperatura, y (b) exprese la velocidad y el ritmo de cambio en la temperatura para una partícula fija arbitraria usando ambas descripciones.

**Solución.** Para resolver (a), basta con reemplazar  $x_1$  y  $x_2$  según las ecuaciones de movimiento dadas. Así,

$$\Theta = \alpha(X_1 + ktX_2 + (1 + kt)X_2) = \alpha(X_1 + (1 + 2kt)X_2).$$

Para resolver (b), derivamos la descripción del movimiento respecto al tiempo para obtener

$$\mathbf{v}(X_1, X_2, X_3, t) = \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \Big|_{X_i \text{ fijo}} = (kX_2, kX_2, 0).$$

Para obtener su descripción espacial, note que

$$X_2 = \frac{x_2}{1 + kt}. \tag{2}$$

Por ende,

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \left( \frac{kx_2}{1 + kt}, \frac{kx_2}{1 + kt}, 0 \right).$$

Para hallar el cambio en la temperatura para una partícula fija, derivamos la expresión obtenida en el literal (a) respecto al tiempo para obtener

$$\left( \frac{d\Theta}{dt} \right) \Big|_{X_i \text{ fijo}} = 2\alpha kX_2.$$

Para describir este cambio espacialmente, usamos de nuevo la ecuación (2) para obtener que

$$\left( \frac{d\Theta}{dt} \right) \Big|_{X_i \text{ fijo}} = \frac{2\alpha kx_2}{1 + kt}.$$

Nótese que, aunque la temperatura no varía con el tiempo en cada punto fijo  $(x_1, x_2, x_3)$  del espacio, cada partícula que pasa por  $(x_1, x_2, x_3)$  experimenta cambios en su temperatura a través del tiempo, como se evidencia en la anterior ecuación.  $\triangle$

### 2.2.2. Vector de desplazamiento

El *vector desplazamiento* de cierta partícula en el continuo (identificada mediante sus coordenadas materiales  $\mathbf{X}$ ) desde su punto de referencia  $P(t_0)$  a su posición actual  $P(t)$  está dada por el vector desde  $P(t_0)$  hacia  $P(t)$ , y es denotado por  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ . Esto es,

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = (u_1, u_2, u_3) := \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X},$$

como se muestra en la figura 1.

### 2.2.3. Deformación infinitesimal

Analizaremos cómo podemos describir la deformación de un cuerpo a través del tiempo mediante tensores. Considere un cuerpo que comienza con una configuración particular en un tiempo  $t_0$ , y cambia a otra configuración en un tiempo  $t$ . Una partícula  $P$  con coordenadas materiales  $\mathbf{X}$  llega a una posición

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \tag{3}$$

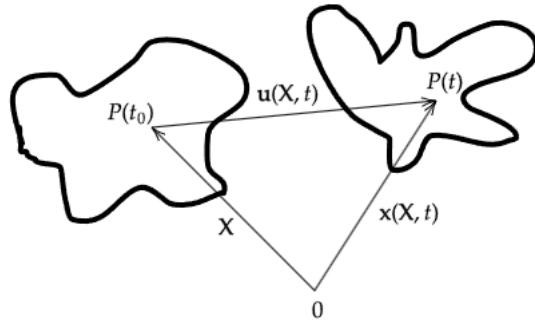


Figura 1: Descripción del vector de desplazamiento

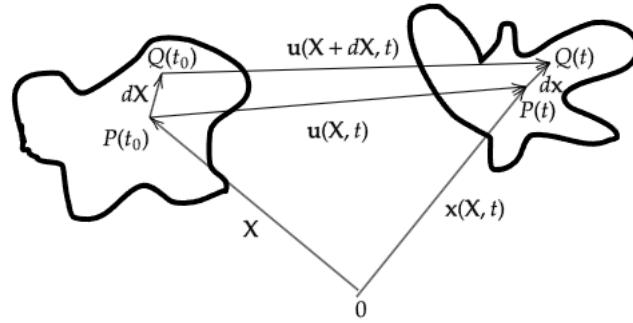


Figura 2: Deformación infinitesimal de un cuerpo

Una partícula  $Q$  cercana (hablando de manera diferencial) a  $P$  dada por  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  llega a una posición  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ , que está relacionada con  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  (ver Figura 2) por

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) \quad (4)$$

Restando (3) de (4), obtenemos que

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (5)$$

Recordando que

$$\mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = (\nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X},$$

obtenemos que

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X}, \quad (6)$$

donde  $\mathbf{I}$  representa el tensor identidad, y  $\nabla \mathbf{u}$  es el tensor llamado *gradiente de desplazamiento*, cuya matriz asociada está dada por

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}.$$

Concluimos entonces que  $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$ , donde  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$  es llamado el *gradiente de deformación*. Para ver cómo varían las longitudes de los diferenciales  $d\mathbf{x}$  (que llamaremos  $ds$ ) y  $d\mathbf{X}$  (que llamaremos  $dS$ ), notamos que

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) d\mathbf{X}, \quad (7)$$

esto es,  $ds^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}$ , donde  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  es llamado el *tensor de Cauchy-Green a la derecha*. Note que

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \mathbf{u}).$$

Así, podemos escribir

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + 2\varepsilon^*,$$

donde

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T + (\nabla u)^T (\nabla u))$$

es llamado el *tensor de tensión de Lagrange*. Este tensor representa los cambios en la longitud de los diferenciales debidos al desplazamiento. Si consideramos que tanto el desplazamiento como sus derivadas parciales son pequeñas, luego el aporte de  $(\nabla u)^T (\nabla u)$  será despreciable y podemos aproximar

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{I} + 2\varepsilon, \quad (8)$$

donde

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) = \text{"parte simétrica de } \nabla u\text{"}$$

es llamado el *tensor de tensión infinitesimal*. Este tensor lo estaremos usando durante el resto del presente trabajo. Sus componentes serán dadas por

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}.$$

#### 2.2.4. Tensor de tensión infinitesimal

Considere el elemento diferencial de material  $d\mathbf{X} = dS\mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario. Usando las ecuaciones (7) y (8), sabemos que

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot (I + 2\varepsilon)d\mathbf{X} = dS^2(\mathbf{n} \cdot (I + 2\varepsilon)\mathbf{n}) = dS^2(1 + 2\mathbf{n} \cdot \varepsilon\mathbf{n})$$

Por ende,

$$\frac{ds^2 - dS^2}{2dS^2} = \mathbf{n} \cdot \varepsilon\mathbf{n}.$$

Para pequeñas deformaciones,  $ds^2 - dS^2 = (ds - dS)(ds + dS) \approx 2dS(ds - dS)$ . Por lo tanto,

$$\frac{ds - dS}{dS} \approx \mathbf{n} \cdot \varepsilon\mathbf{n}.$$

Esto quiere decir que la elongación unitaria (i.e., aumento en la longitud por unidad original) en dirección  $\mathbf{n}$  es representada mediante  $\mathbf{n} \cdot \varepsilon\mathbf{n}$ . En particular tomando  $\mathbf{n} \in \{e_1, e_2, e_3\}$ , obtenemos que

- $\varepsilon_{11}$  representa la elongación unitaria en la dirección de  $e_1$ .
- $\varepsilon_{22}$  representa la elongación unitaria en la dirección de  $e_2$ .
- $\varepsilon_{33}$  representa la elongación unitaria en la dirección de  $e_3$ .

Estas componentes en la diagonal de  $\varepsilon$  son llamadas las tensiones normales de  $\varepsilon$ .

Ahora, considere dos elementos  $d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1\mathbf{n}$  y  $d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2\mathbf{m}$ , donde  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{n}$  son vectores unitarios perpendiculares entre ellos. Debido al desplazamiento,  $d\mathbf{X}^{(1)}$  pasa a ser  $d\mathbf{x}^{(1)}$ , con longitud  $ds_1$  y  $d\mathbf{X}^{(2)}$  pasa a ser  $d\mathbf{x}^{(2)}$ , con longitud  $ds_2$ . Denotemos el ángulo entre estos dos vectores por  $\theta$ . Entonces, se tiene que

$$ds_1 ds_2 \cos \theta = d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(1)} = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} + 2d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \varepsilon d\mathbf{X}^{(2)} = dS_1 dS_2 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + 2\mathbf{m} \cdot \varepsilon\mathbf{n}) = 2dS_1 dS_2 \mathbf{m} \cdot \varepsilon\mathbf{n}.$$

Así,

$$\mathbf{m} \cdot \varepsilon\mathbf{n} = 2 \frac{ds_1}{dS_1} \frac{ds_2}{dS_2} \cos(\theta) \quad (9)$$

Si tomamos  $\gamma = \pi/2 - \theta$ , luego  $\gamma$  representa la disminución del ángulo entre  $d\mathbf{X}^{(1)}$  y  $d\mathbf{X}^{(2)}$  (conocida como *tensión de corte*) debido a la deformación. Dado que

$$\cos(\theta) = \sin(\pi/2 - \theta) = \sin(\gamma),$$

para una pequeña deformación se tiene que

$$\sin(\gamma) \approx \gamma, \quad \frac{ds_1}{dS_1} \approx 1, \quad \frac{ds_2}{dS_2} \approx 1.$$

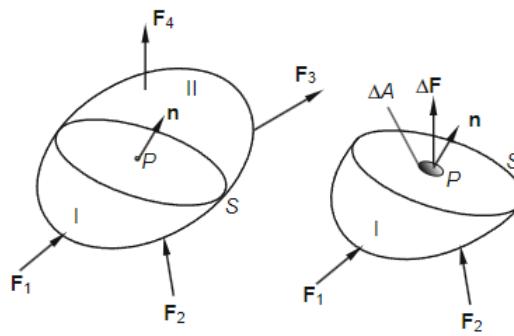


Figura 3: Vector de esfuerzo sobre un cuerpo arbitrario.  $S$  es un plano con vector normal  $\mathbf{n}$ , que divide al cuerpo en dos partes, denotadas por  $I$  y  $II$ . Imagen tomada de [W Michael et al., 2010].

Por ende, (9) pasa a ser

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} = 2\gamma.$$

Tomando  $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \{e_1, e_2, e_3\}$ , concluimos que

- $2\varepsilon_{12}$  representa la disminución del ángulo entre dos elementos inicialmente orientados hacia  $e_1$  y  $e_2$ .
- $2\varepsilon_{13}$  representa la disminución del ángulo entre dos elementos inicialmente orientados hacia  $e_1$  y  $e_3$ .
- $2\varepsilon_{23}$  representa la disminución del ángulo entre dos elementos inicialmente orientados hacia  $e_2$  y  $e_3$ .

Note que, al ser el tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  simétrico, él es diagonalizable con sus vectores propios ortogonales. Por ende, siempre existe una base ortonormal que permanece perpendicular después de cualquier deformación. Ver [W Michael et al., 2010].

### 2.2.5. Notación de Voigt para el tensor de tensión infinitesimal

Al ser el tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  simétrico, éste se puede representar mediante un vector de seis componentes independientes como

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12}]^T.$$

## 2.3. Esfuerzo

Después de haber visto cómo describir el movimiento y deformación de un cuerpo, en esta sección veremos cómo se describen las fuerzas en un cuerpo idealizado como continuo.

### 2.3.1. Vector de esfuerzo

Considere un cuerpo como el que se visualiza en la Figura 3. Sea  $P$  un punto arbitrario del cuerpo, y  $S$  un plano con vector normal  $n$  que divide al cuerpo en dos: la sección I y la sección II. Considerando la sección I como un cuerpo libre, habrá una fuerza resultante  $\Delta\mathbf{F}$  actuando sobre un pequeño trozo de área  $\Delta A$  contenida en  $S$  que encierra a  $P$ . Definimos el vector de esfuerzo en el punto  $P$  sobre el plano  $S$  (con vector normal  $n$ ) como

$$\mathbf{t}_n := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Nótese que, por la tercera ley de Newton, se debe cumplir que  $\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{-n}$ .

También podemos considerar el vector de esfuerzo definido sobre una superficie cualquiera  $S$  (no necesariamente un plano). Podemos tomar la fuerza  $\Delta\mathbf{F}$  que se ejerce sobre una porción  $\Delta S$  de la superficie que contiene a  $P$ , y definir el vector de esfuerzo en  $P$  sobre la superficie  $S$  como

$$\mathbf{t}_S := \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta S}.$$

El *Principio de esfuerzo de Cauchy* enuncia que, para cualquier tiempo y espacio dados, el vector de esfuerzo es igual para todas las superficies que tengan el mismo plano tangente en  $P$  con la misma orientación. Ello implica que basta quedarnos con la primera definición.

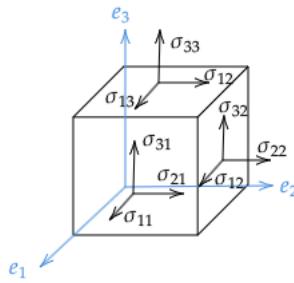


Figura 4: Descripción gráfica del tensor de esfuerzo sobre un cubo infinitesimal. Las coordenadas sobre cada cara del cubo infinitesimal son aquellas del vector de estrés definido para el vector normal correspondiente

### 2.3.2. Tensor de esfuerzo

Sea  $\sigma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación dada por

$$\mathbf{t}_n = \sigma \mathbf{n}$$

para todo vector normal  $\mathbf{n}$ , que se extiende a  $\mathbb{R}^3$  como  $\sigma \lambda \mathbf{n} = \lambda \sigma \mathbf{n}$ . En [W Michael et al., 2010] se demuestra que esta transformación es lineal, y por ende,  $\sigma$  es un tensor. A este tensor se le denomina el *tensor de esfuerzo* o *tensor de esfuerzo de Cauchy*. Las coordenadas de  $\sigma$  serán denotadas por

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{e_1} &= \sigma e_1 = \sigma_{11} e_1 + \sigma_{21} e_2 + \sigma_{31} e_3, \\ \mathbf{t}_{e_2} &= \sigma e_2 = \sigma_{12} e_1 + \sigma_{22} e_2 + \sigma_{32} e_3, \\ \mathbf{t}_{e_3} &= \sigma e_3 = \sigma_{13} e_1 + \sigma_{23} e_2 + \sigma_{33} e_3. \end{aligned}$$

Una representación gráfica de tales valores está dada en la Figura 4. Nótese que la segunda componente del subíndice indica el plano sobre el cual se está tomando el vector de esfuerzo, mientras su primera componente indica la coordenada que se está tomando de tal vector. Las componentes de la forma  $\sigma_{ii}$  son llamadas esfuerzos normales, mientras que las componentes  $\sigma_{ij}$  con  $i \neq j$  son llamadas *esfuerzos tangenciales*, o *esfuerzos de corte*. El esfuerzo de corte resultante sobre el plano normal a  $e_1$  se define como

$$\tau_1 = \sigma_{21} e_2 + \sigma_{31} e_3,$$

y su magnitud es

$$|\tau_1| = \sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{31}^2}.$$

Se definen de manera análoga las tensiones resultantes de corte y sus magnitudes para los planos definidos por  $e_2$  y  $e_3$ .

En [W Michael et al., 2010], se demuestra que  $\sigma$  es un tensor simétrico, tomando momentos de fuerza de alrededor de los ejes centrales del cubo mostrado en la Figura 4. Esto implica que  $\sigma$  es un tensor diagonalizable. Existe entonces una base ortonormal de autovectores de  $\sigma$ , para los que el esfuerzo ejercido sobre sus planos normales tiene únicamente componente normal. A tales planos se les denomina *planos principales*. Los valores de tales esfuerzos normales son llamados *esfuerzos principales*.

### 2.3.3. Notación de Voigt para el tensor de esfuerzo

Al ser el tensor  $\sigma$  simétrico, éste se puede representar mediante un vector de seis componentes independientes como

$$\hat{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}]^T.$$

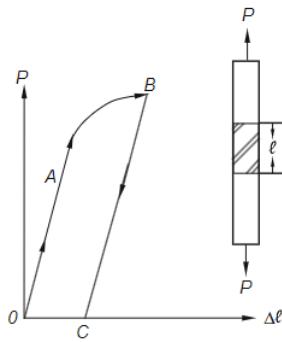


Figura 5: Gráfica común del cambio en la longitud de un cilindro de material  $\Delta\ell$  contra la presión ejercida axialmente  $P$ . Después de llegar al punto  $A$ , se producen deformaciones irreversibles en el material. Imagen tomada de [W Michael et al., 2010]

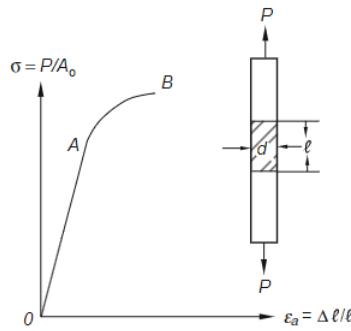


Figura 6: Variación del esfuerzo axial  $\sigma_a$  versus la tensión axial  $\varepsilon_a$  para un material. Imagen tomada de [W Michael et al., 2010].

## 2.4. Sólidos elásticos

Por experiencia, sabemos que la respuesta de un cuerpo a distintas cargas que se ejercen sobre él dependen del tipo de material del que esté constituido. Es más, a veces ésta depende de la intensidad de las fuerzas que se ejercen. Por ejemplo, si se aplican ciertas cargas moderadas sobre un sólido de acero, la deformación del cuerpo desaparecerá tan pronto se remuevan las cargas (el sólido se restaurará a su posición original). A este comportamiento se le conoce como *elasticidad*. No obstante, con cargas de mayor tamaño, puede que se presenten deformaciones o incluso fracturas irreversibles en el sólido. En la presente sección se introducirán los sólidos isotrópicos linealmente elásticos, que son aquellos con los que es más sencillo trabajar.

### 2.4.1. Propiedades mecánicas

Suponga que de un material se toma un cilindro delgado de área transversal  $A$  y longitud  $\ell$ , y que la barra se tensa por una carga aplicada axialmente  $P$  hacia afuera, produciendo un cambio en la longitud del cilindro  $\Delta\ell$ . Una gráfica común del comportamiento de  $\Delta\ell$  contra la carga aplicada  $P$  se muestra en la Figura 5.

En el segmento  $OA$ , la relación entre ambas es lineal, y una remoción de la carga revierte la deformación producida en el cilindro, i.e., el material exhibe *elasticidad*. No obstante, en  $AB$ , la relación deja de ser lineal, y la deformación deja de ser reversible, dejando una deformación  $OC$  después de la deformación de las cargas. Para el comportamiento elástico inicial sobre  $OA$ , podemos pensar en una constante que nos indique la pendiente de tal segmento. No obstante, con el fin de evitar dependencia sobre el tamaño del cilindro, se relacionan el esfuerzo axial  $\sigma = P/A_0$  (distinto al tensor de esfuerzo), donde  $A_0$  es el área transversal inicial, con la tensión axial  $\varepsilon_a = \Delta\ell/\ell$ , como se muestra en la Figura 6. En este caso, la pendiente del segmento  $OA$  será llamada el *Módulo de Young M* del material, definido por

$$M := \frac{\sigma}{\varepsilon_a}.$$

En el experimento que se acaba de mencionar, también se pueden los cambios laterales sobre el cilindro. Si inicialmente

el cilindro tiene un diámetro transversal  $d$ , para un material ideal la sección transversal permanecerá circular y más pequeña a mediada que aumenta la presión ejercida. Si llamamos  $\varepsilon_d$  a la tensión lateral (igual a  $\Delta d/d$ ), podemos encontrar que la razón  $\varepsilon_a/\varepsilon_d$  es constante si las tensiones son pequeñas. Llamamos a esta constante la *razón de Poisson*, y la denotaremos por  $v$ .

Hasta ahora, hemos realizado nuestro experimento tomando un cilindro arbitrario del material. Hay casos en los que tanto  $M$  como  $v$  varían dependiendo de la orientación de la muestra tomada respecto al material (como por ejemplo sucede con la madera). A estos materiales se les denomina *anisotrópicos*. Si, en cambio, la orientación de la muestra suficientemente pequeña alrededor de un punto no influye en el comportamiento del diagrama mostrado en la Figura 6, diremos que el material es *isotrópico*.

Otro aspecto que debemos considerar es que el comportamiento de estas estructuras puede variar según la vecindad que estemos tomando. En este caso, el material es llamado *inhomogéneo*. En caso de lo contrario, diremos que el material es homogéneo.

#### 2.4.2. Materiales linealmente elásticos

Los experimentos formulados anteriormente nos permiten definir un material ideal, al que llamaremos un material *linealmente elástico*. Estos materiales serán aquellos que satisfacen la *Ley de Hooke*, la cual enuncia que las componentes de los tensores de tensión y de esfuerzo se relacionan de manera lineal para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  como

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 E_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (10)$$

Por la proposición demostrada en el capítulo 2.1. del presente trabajo, podemos concluir que  $E_{ijkl}$  es un tensor de orden 4, el cual es conocido como el *tensor de rigidez*  $\mathbf{E}$ . Nótese que, si el material es homogéneo, las componentes de  $E_{ijkl}$  son independientes del punto donde se tomen.

Inicialmente, el tensor de rigidez tiene  $3^4 = 81$  componentes. No obstante, si asumimos que el material es isotrópico, veremos que podemos hallar sus componentes de manera muy sencilla. En efecto, que el material sea isotrópico implica que, independiente de la base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  que se esté tomando, la relación entre la tensión y el esfuerzo no varía. Es decir, si  $E_{ijkl}$  son las componentes del tensor de rigidez respecto a cualquier base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , y  $E'_{ijkl}$  sus componentes respecto a cualquier otra base  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  entonces se debe cumplir que

$$E_{ijkl} = E'_{ijkl}.$$

A este tipo de tensores se les denomina tensores *isotrópicos*. Por ejemplo, un tensor isotrópico de orden 2 es la identidad  $\mathbf{I}$ , con componentes  $\delta_{ij}$  (de hecho, es el único, salvo multiplicación por escalar). Es más, se puede demostrar (ver [W Michael et al., 2010]) que  $E_{ijkl}$  debe ser combinación lineal de los tensores  $\delta_{ij}\delta_{kl}$ ,  $\delta_{ik}\delta_{jl}$  y  $\delta_{il}\delta_{jk}$ , que son aquellos que se pueden formar como productos del tensor identidad. Es decir, existen constantes  $\alpha, \beta, \lambda$  tal que

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \alpha\delta_{ik}\delta_{jl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk}.$$

Reemplazando en la ecuación (10), obtenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_{k,l=1}^3 (\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \alpha\delta_{ik}\delta_{jl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl} \\ &= \lambda\delta_{ij} \left( \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \right) + (\alpha + \beta)\varepsilon_{ij}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deriva de la simetría de  $\varepsilon$ . Si llamamos  $2\mu := \alpha + \beta$ , entonces concluimos que

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (11)$$

A  $\lambda$  y  $\mu$  se les conoce como constantes de Lamé, que tienen unidades iguales al tensor de esfuerzo de fuerza por unidad

de área. Juntando las ecuaciones (10) y (11) obtenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}, \\ \sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}.\end{aligned}$$

Nótese que, a partir de las anteriores ecuaciones, podemos hallar las componentes de  $\varepsilon$  a partir de las de  $\sigma$  como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \left( \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} \right) \right] =: \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (12)$$

donde

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2\mu} \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right].$$

Las componentes  $C_{ijkl}$  constituyen un tensor **C** de orden 4, al que denominaremos *tensor de compliancia*, también llamado *tensor de distensibilidad*.

Si el estado de esfuerzo es tal que solo una componente normal del mismo es no nula, diremos que se está sobre un estado de *esfuerzo uniaxial*. Resulta una buena aproximación asumir que, en el experimento descrito en la sección anterior sobre un cilindro, se está bajo este estado. Si asumimos que tal componente no nula está en la dirección  $e_1$ , entonces se cumple que  $\sigma_{ij} = 0$  para  $i \neq 1$  o  $j \neq 1$ , y  $\sigma_{11} \neq 0$ . Usando la ecuación (12), obtenemos que,

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \right] = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{2\mu} \left[ 0 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \right] = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (14)$$

y

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

El cociente  $\sigma_{11}/\varepsilon_{11}$  es análogo al cociente  $\sigma/\varepsilon_a$  presentado en la sección anterior. Por ende, teniendo en cuenta la ecuación 13,

$$M = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Por otra parte, el cociente  $-\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{33}/\varepsilon_{11}$  corresponde al cociente  $\varepsilon_d/\varepsilon_a$  descrito en la anterior sección, y así

$$v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Invirtiendo las relaciones anteriormente encontradas, encontramos que

$$\lambda = \frac{vM}{(1+v)(1-2v)}, \quad \mu = \frac{M}{2(1+v)}. \quad (15)$$

Las ecuaciones 11 y 15 resumen que se puede describir la relación entre la tensión y el esfuerzo ejercidos sobre un material linealmente elástico e isotrópico a partir de dos constantes independientes. Aunque se pueden definir más constantes físicas para estos materiales, bastará con contar con dos de ellas para describir la mecánica del material (Ver [W Michael et al., 2010]).

#### 2.4.3. Notación de Voigt para el tensor de rigidez

Al representar  $\sigma$  y  $\varepsilon$  como vectores, el tensor de rigidez se puede representar como una matriz  $\hat{\mathbf{E}}$ , que cumple

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{E}} \hat{\varepsilon},$$

$ij$ ( o $kl$ )	$I$ ( o $J$ )
11	1
22	2
33	3
23,32	4
13,31	5
12,21	6

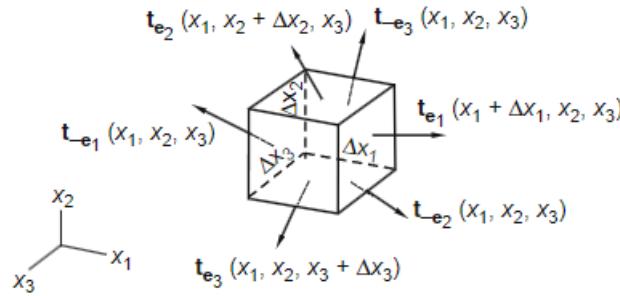
Cuadro 1: Tabla de correspondencia entre las componentes del tensor de rigidez  $\mathbf{E}$  y la matriz  $\hat{\mathbf{E}}$  para sólidos.

Figura 7: Cubo infinitesimal de material del que se deriva las ecuaciones dinámicas de equilibrio. Imágen tomada de [W Michael et al., 2010]

cuyas componentes vienen dadas por  $E_{IJ}$  definidas por la correspondencia definida en el Cuadro 1. Por ejemplo, bajo esta correspondencia, la componente  $E_{2312}$  de  $\mathbf{E}$  pasa a ser la componente  $E_{46}$  de  $\hat{\mathbf{E}}$ , ya que la pareja 23 está asociada a 4, y la pareja 12, a 6. Para materiales linealmente elásticos e isotrópicos,

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{12} & E_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{11} - E_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{11} - E_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{11} - E_{12} \end{pmatrix},$$

donde  $E_{33} = 2\mu + \lambda$  y  $E_{12} = \lambda$ . De manera similar, y con la misma correspondencia del Cuadro 1, se puede representar el tensor de compliencia como una matriz  $\hat{\mathbf{C}}$  que satisface

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\sigma}.$$

Para materiales isotrópicos linealmente elásticos,

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} \end{pmatrix},$$

donde  $C_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$  y  $C_{12} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$ .

## 2.5. Ecuaciones de equilibrio dinámicas

Considere un paralelepípedo de tamaño infinitesimal alrededor de un punto  $x_i$ , como el considerado en la Figura 23. Sean  $\mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 B_i e_i$  las fuerzas que actúan sobre el cuerpo por unidad de masa,  $\rho$  la densidad del cuerpo en  $x_i$ , y  $\mathbf{a}$  la aceleración de la partícula que está en la posición  $x_i$ . Gracias a la segunda Ley de Newton, debe existir el equilibrio de fuerzas, i.e.,

$$\{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) + \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3)\}(\Delta x_2 \Delta x_3) + \{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) + \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_2}(x_1, x_2, x_3)\}(\Delta x_1 \Delta x_3) + \{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) + \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3)\}(\Delta x_1 \Delta x_2) + \rho \mathbf{B} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = (\rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3) \mathbf{a}. \quad (16)$$

Dado que  $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1} = -\mathbf{t}_{-\mathbf{e}_1}$ ,

$$\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) + \mathbf{t}_{-\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3) = \left[ \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \right] \Delta x_1.$$

Realizando un proceso análogo al anterior para  $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}$  y  $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}$ , y cancelando el elemento de volumen  $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ , concluimos que la ecuación (23) pasa a ser

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \right] + \left[ \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2} \right] \\ & + \left[ \frac{\mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3} \right] + \rho \mathbf{B} = \rho \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (17)$$

Tomando  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , (17) pasa a ser

$$\frac{\partial \mathbf{t}_{\mathbf{e}_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{t}_{\mathbf{e}_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{t}_{\mathbf{e}_3}}{\partial x_3} + \rho \mathbf{B} = \rho \mathbf{a}. \quad (18)$$

Dado que  $\mathbf{t}_{\mathbf{e}_i} = \sigma e_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} e_j$  para  $i = 1, 2, 3$ , entonces, en cada dirección  $e_i$  se debe cumplir que

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} e_i + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} e_i + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} e_i + \rho \mathbf{B} e_i = \rho \mathbf{a} e_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

o, de otra forma,

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + \rho B_i = \rho a_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (19)$$

A partir de ahora, escribiremos  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{B}$  como la fuerza externa *distribuida* alrededor del cuerpo. En este caso, se escribe

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + f_i = \rho a_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (20)$$

Otra forma de escribir (20) es en su *forma invariante* como

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} = \rho \mathbf{a}, \quad (21)$$

donde  $\operatorname{div} \sigma$  se refiere a la divergencia de un campo tensorial (ver [W Michael et al., 2010]). A estas ecuaciones se les denomina las *ecuaciones de movimiento de Cauchy*. En el presente trabajo, únicamente nos interesarán el caso en el que el movimiento sea pequeño, es decir,  $x_i \approx X_i$ . Una de las consecuencias inmediatas de este hecho es que se puede tomar

$$\rho \mathbf{a} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}},$$

donde  $\rho_0$  es una constante (Ver [W Michael et al., 2010]). Nótese que, si el sólido se asume estático, el término de la aceleración se elimina, y por ende,

$$\operatorname{div} \sigma = -\mathbf{f}. \quad (22)$$

**Ejemplo.** Para un sólido linealmente elástico e isotrópico, si asumimos, como ya se mencionó, que el movimiento es pequeño ( $X_i \approx x_i$ ), entonces podemos aproximar  $\varepsilon_{ij}$  como

$$\varepsilon_{ij} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

y también, al ser linealmente elástico,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}, \\ \sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right).$$

Por ende, una ecuación que debe satisfacer un cuerpo de este estilo debe ser

$$\mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + f_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

De manera similar, se debe cumplir que

$$\mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + f_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

y que

$$\mu(\Delta u) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + f_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

donde el laplaciano se toma de manera espacial.  $\triangle$

### 2.5.1. Forma débil de las ecuaciones de equilibrio elásticas (caso estático)

En el método de elementos finitos, presentado en la siguiente sección, es necesario trabajar con lo que regularmente se denomina la *forma débil* o *variacional* de las ecuaciones diferenciales presentadas anteriormente. A manera de introducción, considere el siguiente ejemplo, tomado de [Girotti, 2009].

**Ejemplo.** Dada una función  $f \in C^0([a, b])$ , encuentre una función  $u \in [a, b]$  que satisfaga

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ en } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Una *solución clásica* de este problema (también llamada *solución fuerte*) es una función  $u \in C^2([a, b])$  que se anula en los extremos y satisface  $-u''(x) + u(x) = f(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ . Ahora bien, si multiplicamos la anterior ecuación diferencial por una función arbitraria  $\phi \in C([a, b])$  con  $\phi(a) = \phi(b) = 0$  e integramos sobre el intervalo  $[a, b]$ ,

$$-\int_a^b u''(x)\phi(x)dx + \int_a^b u(x)\phi(x)dx = \int_a^b f(x)\phi(x)dx.$$

Integrando por partes el primer término a la derecha de la igualdad, obtenemos (recuerde que tanto  $u$  como  $\phi$  se anulan en los extremos)

$$\int_a^b u'(x)\phi'(x) + \int_a^b u(x)\phi(x)dx = \int_a^b f(x)\phi(x)dx, \text{ para toda } \phi \in C^1([a, b]), \phi(a) = \phi(b) = 0.$$

Note que, para que  $u$  satisfaga a anterior ecuación, basta con que  $u \in C^1([a, b])$ . Es decir, se han relajado las condiciones sobre  $u$ . Dieremos que una función  $u$  con  $u(a) = u(b) = 0$  es una *solución débil* del problema anterior si satisface la anterior ecuación. Es más, bastará con que  $u, u' \in L^1(a, b)$  para que  $u$  sea una solución débil de la ecuación anterior. No obstante, para lograr esto, tendríamos que extender los conceptos de derivada y evaluación en un conjunto de medida cero (puntos extremos) para una función en  $L^1(a, b)$ .

Introducir soluciones débiles de ecuaciones es una estrategia que se inspira en el lema fundamental del cálculo de variaciones, que presentamos a continuación.

**Lema.** Si  $\beta(x)$  es una función continua sobre un dominio cerrado  $\Omega$ , la integral

$$\int_{\Omega} \beta(x)v(x)dV$$

se anula para cualquier función  $v \in C^2(\Omega)$  y  $\beta$  se anula sobre el borde  $\partial\Omega$ , luego  $\beta(x) = 0$  para todo  $x \in \Omega$ . La función  $v$  es llamada función de prueba, y generalmente se toma de manera que se anula en el borde de  $\Omega$ .

Como se dijo en el ejemplo anterior, la aparición de soluciones débiles requiere extender la definición de derivada y de la extensión continua a los extremos de una función  $p$ -integrable. Esto motiva la definición de los *espacios de Sobolev*  $W^{k,p}(\Omega)$ , sobre los que se extienden estos conceptos. Un tipo específico de espacios de Sobolev son  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ , que son espacios de Hilbert. Sobre este tema no se profundizará, y el lector interesado puede consultar [Girotti, 2009] o [Gockenbach, 2006] para introducirse en el tema.

**Ejemplo.** Vimos que los sólidos linealmente elásticos y estáticos son gobernados por las ecuaciones

$$-\nabla \cdot \sigma_u = \mathbf{f}, \quad (23)$$

$$\sigma = \mathbf{E}\varepsilon_u, \quad (24)$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (25)$$

Suponga que tenemos un sólido de este estilo definido sobre un dominio  $\Omega$ , sobre el cuál actúan fuerzas globales  $f_V$ . Para resolver este tipo de problemas, generalmente se toman condiciones iniciales sobre la frontera de  $\Omega$ ; estas pueden ser condiciones de Dirichlet o de Neumann. Tomaremos estas condiciones de manera general como arbitrarias. Es decir, tomaremos una partición  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , donde

$$u(x) = g(x), \text{ para } x \in \Gamma_1$$

y

$$\sigma_u \cdot \eta = h(x) \text{ para } x \in \Gamma_2.$$

A  $h$  se le suele denominar la *tracción* sobre la superficie del cuerpo. Definimos ahora

$$U := \{v \in (H^1(\Omega))^2 : v = 0 \text{ en } \Gamma_1\}, \text{ con } (H^1(\Omega))^2 := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : v_1, v_2 \in H^1(\Omega)\}.$$

Si se realiza el producto punto de ambos costados de la igualdad (23) con  $v \in U$  arbitraria e integramos sobre  $\Omega$ , obtenemos que

$$-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_u) \cdot v \, dV = \int_{\Omega} f_V \cdot v \, dV \quad (26)$$

Analizaremos la integral de la izquierda. Para ello, primero notamos que

$$\nabla \cdot (\sigma_u v) = (\nabla \cdot \sigma_u^T) \cdot v + \sigma \cdot \nabla v^T. \quad (27)$$

En efecto, si

$$\sigma_u = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma_u v) &= \nabla \cdot \left( \begin{bmatrix} \sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3 \\ \sigma_{21} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{23} v_3 \\ \sigma_{31} v_1 + \sigma_{32} v_2 + \sigma_{33} v_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial x_3} \right) v_i + \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ &= (\nabla \cdot \sigma_u^T) \cdot v + \sigma_u \cdot \nabla v^T. \end{aligned}$$

Como  $\sigma_u$  es un tensor simétrico, entonces

$$\nabla \cdot \sigma_u^T = \nabla \cdot \sigma_u$$

y

$$\sigma_u \cdot \nabla v^T = \sigma_u^T \cdot \nabla v = \sigma_u \cdot \nabla v = \sigma_u \cdot \varepsilon_v$$

donde

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T).$$

Por lo tanto,

$$\nabla \cdot \sigma_u v = (\nabla \cdot \sigma_u) \cdot v + \sigma_u \cdot \varepsilon_v. \quad (28)$$

Intregrando esta ecuación sobre  $\Omega$  y usando el Teorema de Green para la integral de la izquierda, se obtiene que

$$\int_{\partial\Omega} (\sigma_u v) \cdot \eta \, dS = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_u) \cdot v \, dV + \int_{\Omega} \sigma_u \cdot \varepsilon_v \, dV.$$

Por lo tanto, recordando que  $\sigma_u = \mathbf{E}\varepsilon_u$ ,

$$-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_u) \cdot v \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{E}\varepsilon_u \cdot \varepsilon_v \, dV - \int_{\partial\Omega} (\sigma_u v) \cdot \eta \, dS. \quad (29)$$

Nótese que al tenerse  $v = 0$  sobre  $\Gamma_1$ , la última integral de la derecha se puede realizar únicamente sobre  $\Gamma_2$ . Adicionalmente, al ser  $\sigma_u$  simétrico,

$$(\sigma_u v) \cdot \eta = (\sigma_u \eta) \cdot v = h \cdot v, \text{ sobre } \Gamma_2.$$

Entonces, la ecuación (29) pasa a ser

$$-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma_u) \cdot v \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{E}\varepsilon_u \cdot \varepsilon_v \, dV - \int_{\Gamma_2} h \cdot v \, dS. \quad (30)$$

Por lo tanto, juntando (30) con (26), concluimos que

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}\varepsilon_u \cdot \varepsilon_v \, dV = \int_{\Omega} f_V \cdot v \, dV + \int_{\Gamma_2} h \cdot v \, dS, \text{ para todo } v \in U. \quad (31)$$

A esta se le denomina la *forma débil* o *forma variacional* de la ecuación de equilibrio para sólidos linealmente elásticos. Al término de la izquierda se le asocia con el trabajo  $l(u)$  ejercido por las fuerzas externas para un desplazamiento  $v$ . Si se define la forma bilineal

$$a_E(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{E}\varepsilon_u \cdot \varepsilon_v \, dV \quad (32)$$

y el trabajo ejercido por las fuerzas externas como una forma lineal

$$l(u) = \int_{\Omega} f_V \cdot u \, dV + \int_{\Gamma_2} h \cdot u \, dS, \quad (33)$$

entonces (31) toma la forma

$$a_E(u, v) = l(v), \text{ para todo } v \in V.$$

## 2.6. Algunas consideraciones para el caso bidimensional

La mecánica continua suele ser estudiada en el caso 3-dimensional (3D), pero puede ser simplificada drásticamente si los problemas son tratados de manera 2-dimensional (2D). Para ello, es necesario asumir que las fuerzas externas y demás variables son independientes de una dirección (usualmente en dirección  $e_3$ ). Hay dos tipos de sólidos que se pueden representar de esta manera: los sólidos de esfuerzo plano, y los sólidos de tensión plana (*plane stress* y *plane strain* en inglés).

Los sólidos de esfuerzo plano son aquellos cuyo grosor en la dirección  $e_3$  es mucho menor que sus dimensiones en las direcciones  $e_1$  e  $e_2$ ; las fuerzas son aplicadas en el plano formado por  $e_1$  y  $e_2$ . Por ende, los esfuerzos en dirección  $e_3$  ( $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  y  $\sigma_{33}$ ) son todos nulos. En cambio, los sólidos de tensión plana son aquellos cuyo grosor en la dirección  $e_3$  es mucho mayor comparado con las direcciones  $e_1$  e  $e_2$  y tienen sección transversal uniforme; las fuerzas son aplicadas de manera uniforme respecto al eje en dirección  $e_3$  y el movimiento respecto a este eje está restringido. En este caso, las componentes de tensión  $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$  y  $\varepsilon_{33}$  son todas nulas. Una ilustración de ambos tipos de sólidos se puede encontrar en la Figura 8. Para los sólidos de esfuerzo plano, tanto  $\varepsilon_{13}$  como  $\varepsilon_{23}$  son cero; sin embargo,  $\varepsilon_{33}$  no es necesariamente nulo. De manera análoga, para los sólidos de tensión plana, tanto  $\sigma_{13}$  como  $\sigma_{23}$  son nulos, pero  $\sigma_{33}$  no necesariamente lo es. Para el caso linealmente elástico, es sencillo encontrar cada una de estas componentes a partir de las otras con la ecuaciones (10) y (12) (Ver [G.R. and S. S., 2013]).

Debido a lo anteriormente expuesto, podemos representar para este caso bidimensional la tesisón y el esfuerzo como tensores simétricos

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \text{ y } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix},$$

donde cada una de estas componentes se definen de manera análoga a como se expuso anteriormente. En notación de Voigt,

$$\hat{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12}]^T \text{ y } \hat{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T.$$

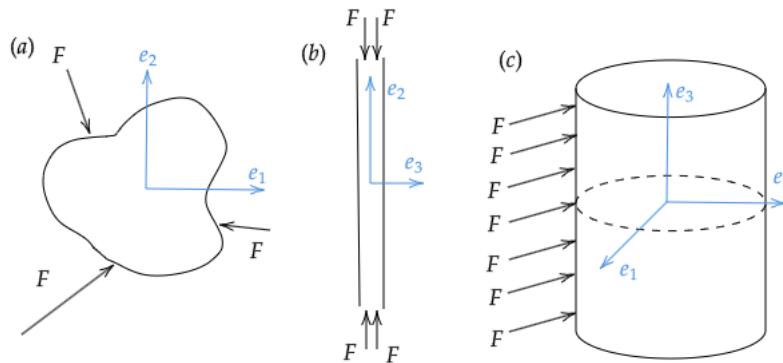


Figura 8: Las figuras (a) y (b) representan un sólido tensión plana proyectado de manera perpendicular a los ejes  $e_3$  y  $e_1$ , respectivamente. La figura (c) muestra un sólido de esfuerzo plano.

$ij$ ( o $kl$ )	$I$ ( o $J$ )
11	1
22	2
12,21	3

Cuadro 2: Tabla de correspondencia entre las componentes del tensor de rigidez  $\mathbf{E}$  y la matriz  $\hat{\mathbf{E}}$  para el caso bidimensional.

### 2.6.1. Ley de Hooke para el caso bidimensional

Para el caso bidimensional, la Ley de Hooke para sólidos linealmente elásticos se escribe

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (i,j = 1, 2), \quad (34)$$

donde  $\mathbf{E} = [E_{ij}]$  es un tensor de rigidez de orden 4. De manera similar, existe un tensor  $\mathbf{C} = [C_{ijkl}]$  de orden 4 (tensor de compliancia) de manera que

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 C_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (35)$$

Estos tensores se escriben en notación de Voigt como matrices  $\hat{\mathbf{E}}$  y  $\hat{\mathbf{C}}$  de orden 3, con sus índices en correspondencia según el Cuadro 2. Para los sólidos de esfuerzo plano,

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{M}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-v)/2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Para los sólidos de tensión plana,

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{M(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Recuerde que  $M$  y  $v$  representan, respectivamente, el módulo de Young y la razón de Poisson del material.

### 2.6.2. Ecuaciones de equilibrio dinámicas para el caso bidimensional

Las ecuaciones dinámicas para el caso bidimensional se obtienen de eliminar los términos respectivos a  $e_3$  de la ecuación (20), obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 &= \rho a_1, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 &= \rho a_2. \end{aligned}$$

Otra forma de representar estas ecuaciones es como

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{a}}.$$

Para el caso estático,

$$\operatorname{div} \sigma = -\mathbf{f}.$$

La formulación débil de las ecuaciones realizada en la anterior sección se puede extender a cuando trabajamos con  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

### 3. Método de los Elementos Finitos

En esta sección trataremos el método de elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés). Primero daremos una descripción general del método, y después nos detendremos en algunos detalles del método que nos permiten estudiar nuestro caso de optimización.

#### 3.1. El método

Esta sección es tomada siguiendo el libro [G.R. and S. S., 2013].

El método de los elementos finitos lo usamos para resolver problemas mecánicos gobernados por un conjunto de ecuaciones diferenciales, discretizando primero el dominio del problema en “elementos” pequeños, de los cuales se asume un perfil de desplazamiento sencillo obteniendo así ecuaciones de los elementos. Estas ecuaciones posteriormente se ensamblan para elementos adyacentes para formar el dominio del problema global. Estas ecuaciones globales pueden luego solucionarse para el campo de desplazamiento total.

Cuando hablamos de implementar computacionalmente el procedimiento descrito, podemos pensarlo segmentado en estas etapas:

##### 3.1.1. Modelamiento

El comportamiento de distintos fenómenos depende de factores como la geometría del sistema, u otras cosas como los materiales o condiciones iniciales. Estos aspectos suelen ser complicados de estudiar, por lo que resolver problemas de manera analítica puede ser complejo. Por lo cual, el uso de métodos numéricos como aquellos de discretización de dominios (FEM por ejemplo) son de los más comunes por ser prácticos y versátiles. El modelado computacional usando FEM, consiste, a grandes rasgos, de 4 pasos:

- Modelado de la geometría.
- Enmallado (discretización).
- Especificación de las propiedades del material.
- Especificación de condiciones de frontera o iniciales.

##### 3.1.2. Simulación

Basados en el enmallado generado, distintos conjuntos de ecuaciones del sistema pueden ser formulados, y para estos distintos conjuntos de ecuaciones pueden haber distintos enfoques. Algunos de estos son

- Enfoques basados en principios de energía como el principio de Hamilton, el principio de la energía potencial mínima, entre otras,
- el método del residuos ponderados, el cual se usa para muchos problemas físicos como problemas de transferencia de calor,
- otro método está basado en Series de Taylor, lo que lleva a la formación del método de diferencias finitas (FDM por sus siglas en inglés),

entre otros métodos. Cabe mencionar que la base de estos métodos es el método de los residuos. La escogencia apropiada de funciones de ensayo y error en el método de los residuos puede llevar a trabajar bajo alguno u otro de los enfoques anteriores.

Una vez formulado el modelo computacional, este se debe de dar como *input* a algún *solver* para resolver el problema discretizado. Este es el proceso más demandante computacionalmente. Para resolverlos se usan principalmente dos métodos: los métodos directos o los métodos iterativos... (COMPLETAR)

##### 3.1.3. Visualización

Los datos obtenidos de la solución del sistema de ecuaciones usualmente son una gran cantidad y pueden ser usados para distintas visualizaciones. Esto se hace con paquetes de software que vienen usualmente integrados con las demás herramientas de modelado y solución.

### 3.2. Fundamentos de FEM

Anteriormente vimos la descripción a grandes rasgos del FEM. Este proceso aunque en principio puede sonar sencillo, surge la duda de cómo, o si se puede si quiera, asumir dicho perfil de desplazamiento sencillo, y si este satisface las ecuaciones del problema original. En el estudio que veremos a continuación, observaremos que esto se puede hacer siguiendo un principio y obtener una solución que satisface el sistema lo mejor posible bajo ciertas condiciones.

#### 3.2.1. Formas débiles y fuertes

Un sistema de ecuaciones diferenciales se dice que puede estar en forma fuerte o débil. La diferencia entre estas dos es que la forma fuerte requiere continuidad fuerte en las variables del campo dependientes. Todas las funciones que definen estas variables deben de ser diferenciables hasta el orden en de la ecuación diferencial que exista en forma fuerte en el sistema de ecuaciones. El FEM puede ser usado para resolver ecuaciones en forma fuerte para obtener soluciones aproximadas. Sin embargo, el método usualmente funciona bien para problemas con condiciones de frontera o geometrías sencillas.

Una forma débil del sistema de ecuaciones usualmente se obtiene usando alguno de estos métodos:

- Principios de energía
- método de los residuos ponderados.

Los principios de energía es una forma del principio variacional que usualmente se ajusta a problemas de mecánica de sólidos y estructuras. El método de los residuos ponderados es una herramienta matemática más general aplicable a todo tipo de ecuaciones diferenciales.

La forma débil usualmente es una forma integral la cual requiere continuidad débil en las variables del campo, lo cual permite producir un sistema de ecuaciones discretizadas que dan resultados mucho más precisos, especialmente para problemas de geometría compleja.

A continuación presentamos el Principio de Hamilton, el cual se introduce para la formulación de problemas de mecánica de sólidos y estructuras. Este es simple y se puede usar para problemas dinámicos.

#### 3.2.2. Principio de Hamilton

El principio de Hamilton establece que *de todas las funciones admisibles de desplazamiento en el tiempo, la solución más acertada minimiza el funcional del Lagrangiano*.

Un desplazamiento admisible debe satisfacer:

- las ecuaciones de compatibilidad,
- las condiciones cinemáticas de frontera, y
- las condiciones en el tiempo  $t_1$  y  $t_2$ .

La primera condición garantiza que los desplazamientos son continuos en el dominio del problema, ya que puede haber incompatibilidad en los bordes entre elementos. La segunda condición garantiza que las restricciones de desplazamiento se satisfagan, y la última condición pide que la historia de desplazamiento satisfaga las restricciones al principio y al final.

Matemáticamente, el principio establece que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

El funcional del Lagrangiano  $L$  se obtiene usando un conjunto de historias de tiempo de desplazamiento admisibles, el cual consiste de

$$L = T - \Pi + W_f,$$

donde  $T$  es la energía cinética,  $\Pi$  es la energía potencial, y  $W_f$  es el trabajo realizado por fuerzas externas. La energía cinética del dominio entero del problema se define en la forma integral

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} dV,$$

donde  $V$  representa el volumen completo del sólido, y  $\mathbf{U}$  es el conjunto de historias de tiempo admisibles del desplazamiento.

La energía de deformación en todo el dominio de sólidos elásticos y estructuras pueden ser expresadas como

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T c \varepsilon dV,$$

donde  $\varepsilon$  son las deformaciones obtenidas usando el conjunto de historias de tiempo admisibles del desplazamiento. El trabajo realizado por las fuerzas externas sobre el conjunto de historias de tiempo admisibles del desplazamiento puede obtenerse por

$$W_f = \int_V U^T f_b dV + \int_{S_f} U^T f_s dS_f,$$

donde  $S_f$  representa la superficie del sólido sobre el cual las fuerzas superficiales son prescritas.

El principio de Hamilton nos permite simplemente asumir cualquier conjunto de desplazamientos, siempre que satisfagan las tres condiciones admisibles.

A continuación vemos cómo las ecuaciones del FEM pueden ser establecidas usando el principio de Hamilton y otras operaciones simples.

### 3.2.3. Procedimiento del FEM

El procedimiento estándar se puede resumir brevemente de la siguiente manera:

#### a. Discretización de dominio

El cuerpo sólido se divide en  $N_e$  elementos, y esto se conoce como engrillado (meshing en inglés), como se observa en la figura 9. El pre-procesador genera números únicos para todos los elementos y nodos para el sólido o la estructura de manera adecuada. Un elemento se conforma al conectar sus nodos en una manera consistente predefinida para crear la conectividad del elemento. Todos los elementos juntos forman el dominio del problema sin tener espacios o sobreposiciones. Es posible que el dominio consista de diferentes tipos de elementos con distintos tipos de nodos siempre que no haya espacios o sobreposiciones.

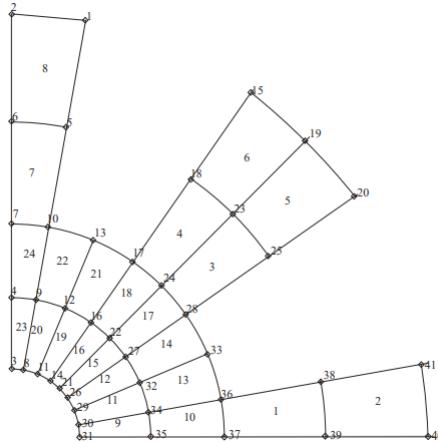


Figura 9: Ejemplo de enmallado de una estructura

Tenemos entonces que el enmallado usualmente no es uniforme. El propósito de la discretización del dominio es hacer más fácil la tarea de asumir el patrón del campo de desplazamiento.

#### b. Interpolación del desplazamiento

La formulación del FEM debe basarse en un sistema de coordenadas, el cual usualmente se define localmente para un elemento en referencia al sistema de coordenadas global que se define para la estructura entera. Basándonos en esto, el desplazamiento en un elemento se asume por interpolación polinómica usando los desplazamientos en los nodos como

$$U^h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x, y, z) d_i = N(x, y, z) d_e, \quad (38)$$

donde el superíndice  $h$  es la aproximación,  $n_d$  es el número de nodos del elemento y  $d_i$  es el desplazamiento nodal en el nodo  $i$ -ésimo, el cual es la incógnita que se quiere computar. Por ejemplo, para sólidos en 3D, donde tenemos 3 grados de libertad, tenemos que  $d_i = (u_i, v_i, w_i)$ , en donde las componentes representan respectivamente el desplazamiento en las direcciones  $x, y$  y  $z$ . Tenga en cuenta que estos desplazamientos también pueden consistir de rotaciones en algunos tipos de estructuras. El vector  $d_e$  en la ecuación 38 es el vector de desplazamiento para el elemento completo y tiene la forma  $d_e = (d_1, d_2, \dots, d_{n_d})$ , donde cada  $d_i$  representa el desplazamiento en el nodo  $i$ , de tal manera que la cantidad total de grados de libertad son  $n_d \times n_f$ , donde  $n_f$  son la cantidad de grados de libertad en el nodo (número de coordenadas + rotaciones).

Además, en la ecuación 38  $N$  es una matriz de funciones de forma para los nodos en el elemento, las cuales son predefinidas de tal manera que asuman las formas de las variaciones en los desplazamientos con respecto a las coordenadas. Tiene la forma general

$$N(x, y, z) = [N_1((x, y, z) \quad N_2(x, y, z) \quad \dots \quad N_{n_d}(x, y, z)] ,$$

donde  $N_i$  es una submatriz de funciones de forma para las componentes de desplazamiento, la cual estructura así:

$$\begin{bmatrix} N_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_{in_f} \end{bmatrix},$$

donde  $N_{ik}$  es la función de forma del  $k$ -ésimo componente de desplazamiento en el  $i$ -ésimo nodo. Para sólidos 3D,  $n_f = 3$  y usualmente  $N_{i1} = N_{i2} = N_{i3} = N_i$ . Note que no es necesario usar la misma función de forma para todos los componentes de desplazamiento en un nodo. Por ejemplo, usualmente usamos diferentes funciones de forma para desplazamientos rotacionales y traslacionales. Este método de asumir los desplazamientos se llama el método del desplazamiento.

### c. Construcción de las funciones de forma

Dado un elemento con  $n_d$  nodos en  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n_d\}$ . Deberíamos tener en principio  $n_d$  funciones de forma para cada componente de desplazamiento en un elemento. A continuación consideraremos tan solo una componente de desplazamiento para la construcción de funciones de forma: en primer lugar, la componente de desplazamiento se aproxima como una combinación lineal de  $n_d$  funciones base  $p_i(x)$  linealmente independientes, esto es

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n_d} p_i(x) \alpha_i = p^T(x) \alpha \quad (39)$$

en donde  $u^h$  es la aproximación de la componente del desplazamiento,  $p_i(x)$  es la función base de monomios en el espacio de coordenadas  $x$ , y  $\alpha_i$  es el coeficiente de monomio  $p_i(x)$ . El vector  $\alpha$  es definido como

$$\alpha^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_d}\}.$$

El término  $p_i(x)$  en ecuación 39 se construye con  $n_d$  términos de monomios 1-dimensionales; basado en el triángulo de Pascal como en la figura 10 para problemas bidimensionales, y en la pirámide de Pascal como en la figura 11 para problemas tridimensionales.

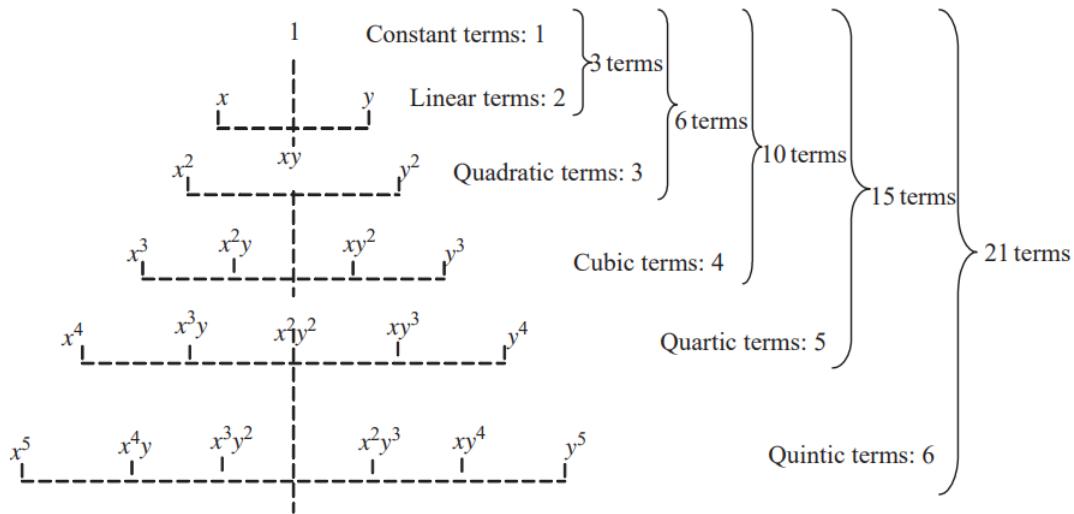


Figura 10: Triángulo de Pascal para monomios (caso bidimensional).

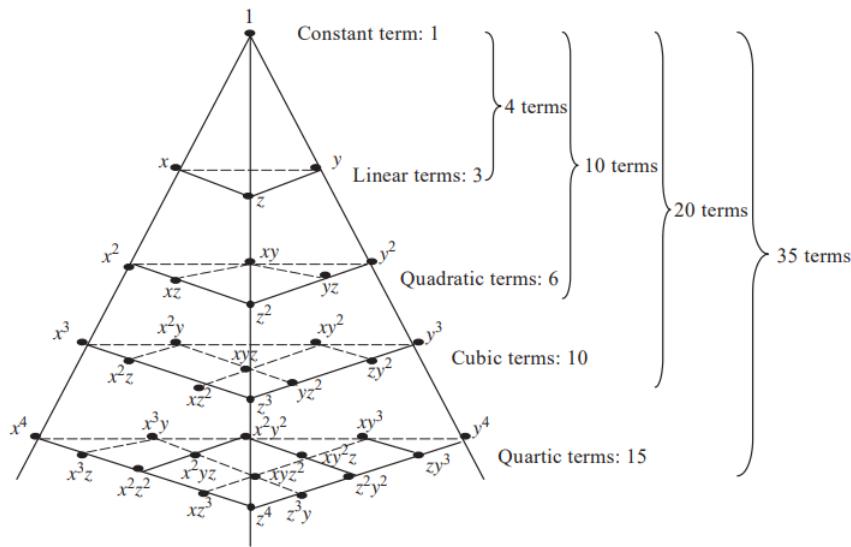


Figura 11: Pirámide de Pascal para monomios (caso tridimensional).

Una base de orden completo de  $p$  en el dominio 1-dimensional tiene la forma

$$p^T(x) = \{1, x, x^2, \dots, x^p\},$$

en el caso bidimensional tiene la forma

$$p^T(x) = p^T(x, y) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^p, y^p\}$$

y que en el caso del dominio tridimensional puede ser escrito como

$$p^T(x) = p^T(x, y, z) = \{1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2, \dots, x^p, y^p, z^p\}.$$

Como regla general, los  $n_d$  términos de  $p_i(x)$  usados en la base deberían ser seleccionados desde el término constante hasta ordenes más altos simétricamente del triángulo de Pascal mostrado en las figuras 11 o 10.

#### d. Formulación de las ecuaciones en el sistema de coordenadas local

## 4. Optimización topológica

La optimización estructural se encarga de estudiar la mejor forma en la que una estructura puede crearse para cumplir con ciertas funciones. Ejemplos de sus aplicaciones se encuentran en las industrias aeroespacial y automotriz. Existen varios tipos de optimización estructural, como se evidencia en la Figura 12.

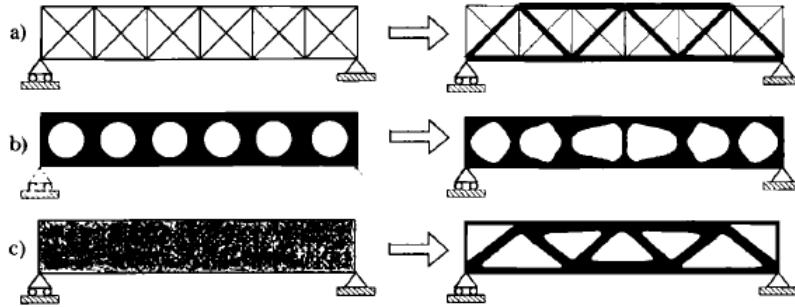


Figura 12: La optimización estructural se divide en 3: (a) optimización de tamaño (en este caso de vigas), (b) optimización de forma y (c) optimización topológica. Imagen tomada de [Bendsøe, 2003]

En un problema de optimización de tamaño, la meta puede ser encontrar la distribución óptima del grosor de una placa linealmente elástica o las áreas óptimas de una estructura de vigas. Su principal característica es que el dominio del modelo y las variables de estado y de diseño<sup>2</sup> son conocidas *a priori* y son fijas durante el proceso de optimización. En la optimización de forma, el objetivo es encontrar la forma óptima de este dominio (variable de diseño). La optimización topológica, en cambio, involucra la optimización de variables como el número, lugar y forma de huecos en el dominio y su conectividad. Ver [Bendsøe, 2003].

En esta sección, se introducirá el tema de optimización topológica, basándose en el capítulo uno de [Bendsøe, 2003] y en la introducción de [Serrano, sf].

Los problemas de optimización topológica tienen formas variadas. En esta sección, nos enfocaremos en los problemas denominados de *compliancia mínima* (*minimum compliance* en inglés) bajo restricciones simples. La compliancia es una característica de los sólidos que mide la facilidad con la que este se puede deformar; entre menor es la compliancia, más “resistente” es el sólido.

Considere un elemento mecánico considerado como un cuerpo ocupando un dominio  $\Omega_{mat}$ , que es parte de un dominio más grande  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ . Sobre el dominio  $\Omega$  se aplican ciertas fuerzas u otras condiciones de frontera. Nótese que, para un sólido linealmente elástico, podemos definir el problema de optimización topológica como escoger el tensor de rigidez óptimo  $\mathbf{E}$  sobre el dominio, que minimiza la compliancia del sólido, que se representa matemáticamente igual al trabajo que realizan las fuerzas externas sobre el sólido. Recordemos que en la sección de mecánica continua se definió el trabajo ejercido por las fuerzas externas ( $f_V$  fuerzas globales y  $h$  la tracción aplicada sobre un conjunto  $\Gamma_2 \subseteq \Omega$ ) como

$$l(u) = \int_{\Omega} f_V \cdot u \, dV + \int_{\Gamma_2} h \cdot u \, dS,$$

la forma bilineal

$$a_E(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{E} \varepsilon_u \cdot \varepsilon_v \, dV$$

y la ecuación de equilibrio dinámica (en su forma variacional)

$$a_E(u, v) = l(v), \text{ para todo } v \in U.$$

Teniendo en cuenta esta notación, podemos definir el problema de compliancia mínima (rigidez máxima) como

$$\begin{aligned} & \min_{u \in U, \mathbf{E}} l(u) \\ \text{s.t. } & a_E(u, v) = l(v), \text{ para todo } v \in U \\ & \mathbf{E} \in E_{ad} \end{aligned} \tag{40}$$

<sup>2</sup>En un sistema dinámico, las variables de estado corresponden a aquellas que contienen información suficiente para determinar el comportamiento futuro del cuerpo en ausencia de fuerzas (e.g. la posición). Un ejemplo de variable de diseño es la posición de las vigas en la Figura 12 (a).

En este caso,  $U$  se tomará como el conjunto de desplazamientos admitidos, mientras que  $E_{ad}$  denota el conjunto de tensores de rigidez admisibles en nuestro problema. En el diseño topológico,  $E_{ad}$  podría ser, por ejemplo, los tensores que satisfacen las condiciones de un tensor de rigidez isotrópico sobre un dominio (desconocido)  $\Omega_{mat}$ , y son nulos en el resto del dominio, debiéndose cumplir también una restricción de recursos que tomaremos como  $\int_{\Omega_{mat}} 1 \, dV \leq V$ , donde  $V$  es el volumen máximo admitido.

Para resolver estos problemas de forma computacional, es natural pensar en discretizar este problema mediante el método de elementos finitos. Es importante notar que, en la ecuación (40), nos interesa minimizar el funcional  $l(u)$  teniendo en cuenta tanto  $\mathbf{E}$  como  $u$ . Si utilizamos el método de elementos finitos para discretizar el dominio como una malla para ambos campos, y discretizamos  $\mathbf{E}$  como constante en cada elemento, podemos escribir (40) como

$$\begin{aligned} & \min_{u, E_e} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s.t. } & \mathbf{K}(E_u) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ & E_e \in E_{ad}. \end{aligned} \tag{41}$$

Aquí,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{f}$  son los vectores de desplazamiento y de cargas, respectivamente, y  $\mathbf{K}$  representa la matriz de rigidez global, que, como vimos, puede ser escrita como

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_e(E_e),$$

donde  $\mathbf{K}_e$  es la matriz de rigidez (global) en cada elemento.

Asumiendo la matriz de rigidez global invertible, nótese que el anterior problema se puede traducir a minimizar

$$l(u) = \mathbf{u}^T \mathbf{f} = \mathbf{u}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_e \right)^{-1} \mathbf{u}.$$

Con el fin de diseñar la estructura topológica que minimiza el problema recién definido para materiales isotrópicos y linealmente elásticos, podemos pensar en determinar cuáles puntos del dominio deberían ser de material y cuáles de vacío (no material). Bajo este enfoque, nuestro problema se reduce a encontrar el subconjunto  $\Omega_{mat}$  óptimo, donde tomamos

$$\mathbf{E} = 1_{\Omega_{mat}} \mathbf{E}^0, \text{ donde } 1_{\Omega_{mat}} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \Omega_{mat}, \\ 0, & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_{mat}, \end{cases}$$

y

$$\int_{\Omega_{mat}} 1 \, dV \leq V.$$

Nótese que tal expresión para el tensor de rigidez se toma con  $\mathbf{E}^0$  fijo, que representa las propiedades del material. Con este enfoque, el problema de optimización se convierte en discreto. Un enfoque usual (no el único) para resolver con mayor facilidad este problema es resolver un problema continuo análogo en el que se introduce una penalidad que obliga soluciones de tipo discreto, como se verá a continuación.

#### 4.1. Introducción de la función de densidad

El anterior problema se puede describir mejor si se introduce lo que llamaremos la función de densidad  $\rho$ , cuya idea es representar la ausencia o presencia de material. Inicialmente, podemos pensar en que, siguiendo el problema anterior,  $\rho(x) \in \{0, 1\}$ . No obstante, con el objetivo de que en el problema discreto la matriz de rigidez global sea invertible, se toma  $\rho \in [\rho_{min}, 1]$ , siendo  $\rho_{min}$  un valor positivo muy cercano a cero. El principal problema de este método es que la búsqueda de tal óptimo requiere un costo computacional del orden  $2^{mn}$ , donde la malla del FEM es de tamaño  $m \times n$ .

Para sobrellevar esta dificultad, tomaremos  $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ . El problema anterior se redefine de manera que el tensor de rigidez depende continuamente de la densidad del material, transformando así a  $\rho$  en la variable de diseño. Bajo este

enfoque, el problema se redefiniría para el FEM como

$$\begin{aligned} & \min_{\rho} \mathbf{u}^T(\rho) \mathbf{f}, \\ & \text{s.t. } \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N \rho_e \leq V, \quad 0 < \rho_{\min} < \rho_e \leq 1, e = 1, \dots, N. \\ & \mathbf{K}(\rho) \mathbf{u} = \sum_{e=1}^N \rho_e \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_e = \mathbf{f}, \quad \rho_e \in [\rho_{\min}, 1]. \end{aligned} \quad (42)$$

De manera similar, este problema anterior se puede reformular en minimizar

$$l(u) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = f^T \left( \sum_{e=1}^N \rho_e \mathbf{K}_e^0 \right)^{-1} \mathbf{f}.$$

Si se desea resolver el problema para sólidos isotrópicos bajo este enfoque, buscamos que un argumento óptimo del problema se aproxime a una solución discreta. Esto implica que los valores intermedios de la función de densidad sean penalizados. Una posibilidad que ha tomado bastante popularidad y se considera bastante eficiente es el modelo SIMP (por sus siglas en inglés *Solid Isotropic Material with Penalization*), definido como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \rho(x)^p \mathbf{E}^0, \quad p > 1 \\ \int_{\Omega} \rho(d) dV &\leq V, \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (43)$$

Nos referimos a  $\rho$  como la densidad del material dada la expresión integral para expresar el volumen. Nótese que

$$\mathbf{E}(x) \Big|_{\rho=0} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}(x) \Big|_{\rho=1} = \mathbf{E}^0.$$

Por ende, una solución en la que  $\rho$  se aproxime a una función discreta con valores 0 y 1 tendría un sentido físico, y sería una aproximación considerable del problema planteado inicialmente. En el modelo SIMP, se escoge  $p > 1$  con el fin de que las densidades intermedias generen pequeños cambios en el tensor de rigidez con respecto al costo que estas generan en la restricción volumétrica. De esta forma, tomar densidades intermedias se considera poco favorable. En la práctica, con el fin de obtener densidades (casi) discretas, se suele tomar  $p \geq 3$ .

#### 4.1.1. Estudio del problema discreto desde el punto de optimización convexa

Es importante recordar que el problema de optimización puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} c(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{f}, \\ & \text{s.t. } \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \\ & \quad 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \end{aligned}$$

Para probar o refutar la convexidad del problema obsérvese lo siguiente:

- **Lema.** La función  $X \in S_{++}^n \rightarrow w^T X^{-1} w \in \mathbb{R}$  es convexa para un vector  $w \in \mathbb{R}^n$  fijo.

**Demostración.** Considere  $Y \in S^n$  y defina la función  $g(t) = w^T (X + tY)^{-1} w$  donde  $t \in \text{dom}(g) = \{\tau \in [-\epsilon, \epsilon] \subseteq \mathbb{R} : X + \tau Y \in S_{++}^n\}$ . Derivando esta función una vez se obtiene lo siguiente:

$$g'(t) = w^T \frac{d}{dt} (X + tY)^{-1} w = -w^T (X + tY)^{-1} Y (X + tY)^{-1} w,$$

derivando una segunda vez:

$$g''(t) = 2w^T (X + tY)^{-1} Y (X + tY)^{-1} Y (X + tY)^{-1} w.$$

Dado que  $X + tY$  es una matriz definida positiva entonces es fácil ver que si  $z := Y(X + tY)^{-1} w$  entonces  $g''(t) = z^T (X + tY)^{-1} z$  y por lo tanto  $g''(t) \geq 0$  para todo  $t \in \text{dom}(g)$ .

Como  $X \in S_{++}^n \rightarrow w^T X^{-1} w \in \mathbb{R}$  es una función convexa para cualquier línea que cruce su dominio entonces es globalmente convexa.

- Se tiene que  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^N x_\ell^\rho \mathbf{K}_{0,\ell}$  donde  $\rho$  representa la penalización y  $\mathbf{K}_{0,\ell}$  es la matriz con modulo de Young unitario que ubica los grados de libertad locales del elemento indexado con  $\ell$  en la matriz global de grados de libertad; cabe aclarar que tal matriz no depende de la densidad  $\mathbf{x}_\ell$ , solamente del índice del elemento  $\ell$ , además, que para todos los elementos, las matrices  $\mathbf{K}_{0,\ell}$  son semidefinidas positivas. Considerese cuando la penalización  $\rho$  es igual a 1 y cuando  $\rho$  es mayor o igual a 2:

- Si  $\rho = 1$  entonces  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^N x_\ell \mathbf{K}_{0,\ell}$ , por ende, esta función es afín y por lo tanto la función  $c(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{f}$  es convexa usando el lema del ítem anterior.
- Cuando  $p \geq 2$  la función  $c(\mathbf{x})$

## 4.2. Métodos de solución



Figura 13: Resultados para  $60 \times 20$  elementos.



Figura 14: Resultados para  $120 \times 40$  elementos.



Figura 15: Resultados para  $240 \times 80$  elementos.

### 4.2.1. Método de criterio de optimalidad (OC)

El método de criterio de optimalidad (*Optimality Criteria: OC*) se basa en multiplicadores de Lagrange aplicado a optimización topológica. Para el problema discreto:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} c(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{f}, \\ \text{s.t. } \sum_{e=1}^N x_e &= Nf \\ 0 < \mathbf{x} &\leq 1. \end{aligned}$$

El lagrangiano puede ser escrito como:

$$L(\rho) = c(\mathbf{x}) + \lambda \left( \sum_{e=1}^N x_e - Nf \right)$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange. Cuando se deriva  $L$  respecto a cada densidad por elemento  $\mathbf{x}_e$  y se iguala a cero se encuentra el óptimo, es decir, cuando

$$\frac{\partial L}{\partial x_e} = 0 \quad \text{para } e = 1, \dots, N,$$

también se debe satisfacer que  $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{e=1}^N x_e - Nf = 0$ .  
 Nótese que para todo  $e = 1, \dots, N$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial x_e} = \frac{\partial c}{\partial x_e} + \lambda \frac{\partial(\mathbf{x} - Nf)}{\partial x_e} = -\mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} + \lambda = 0,$$

dado que  $x_e > 0$  entonces  $\frac{\partial L}{\partial x_e} = 0$  es equivalente a afirmar que

$$B_e := \frac{-\frac{\partial c}{\partial x_e}}{\lambda \frac{\partial(\mathbf{x} - Nf)}{\partial x_e}} = 1.$$

La idea de este método es considerar a  $B_e$  como un cambio relativo que debe cumplir cada densidad  $x_e$ , por lo tanto, se propone realizar un método iterativo en donde en cada paso se actualice  $x_e$  siendo reemplazado por  $x_e B_e^\eta$  con  $\eta$  un coeficiente de amortiguación numérica; esta sucesión de valores de densidades  $x_e$  se controla por un máximo cambio absoluto y también por las condiciones que se debe satisfacer con el dominio de la función objetivo, es decir,  $0 < x_e \leq 1$  para todo elemento  $e$ . Además de esto,  $\lambda$  se escoge de tal manera que se cumpla la condición de volumen  $\sum_{e=1}^N x_e - Nf = 0$ .

#### 4.2.2. Método de asíntotas móviles (MMA)

## 5. Implementación Algorítmica

En esta sección se explicará a profundidad el código utilizado para el problema *viga de Messerschmitt-Bölkow-Blohm (MBB beam)* en el artículo [Andreassen et al., 2011]. La implementación se hará en el lenguaje Julia y estará disponible en el [repositorio](#) asociado a este proyecto. El objetivo de esta sección es mostrar la discretización del problema y los retos computacionales que tiene su implementación.

### 5.1. Problema de optimización topológica

El problema de optimización implementado corresponde a media viga MBB dada a la simetría del problema, como lo muestra la figura a continuación.

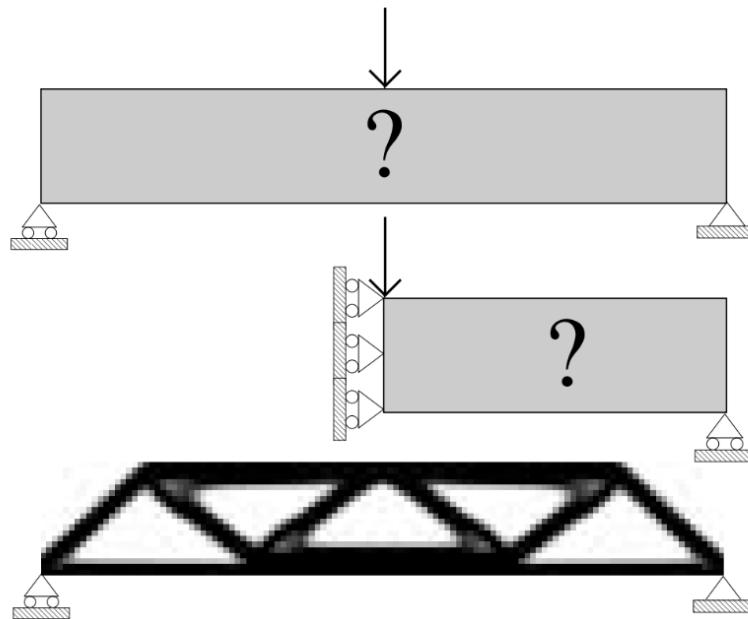


Figura 16: Visualización del dominio de diseño para el problema de optimización topológica. Imagen tomada de [Sigmund, 2001].

En la anterior figura se muestra de arriba a abajo el dominio completo del problema de optimización con la flecha indicando la influencia de las fuerzas externas y con los triángulos indicando los soportes fijos de la viga, en la segunda figura se muestra la fuerza externa sobre la mitad de la viga con las condiciones de frontera ligeramente cambiadas por un argumento de simetría, proponiendo nuevos nodos en el costado lateral de la mitad de la viga; por último, se muestra el resultado de la optimización topológica para el dominio completo y las condiciones de frontera.

El problema de optimización desde el punto de vista discreto queda planteado de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } c(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N E_e(x_e) u_e^T k_0 u_e$$

sujeto a  $V(\mathbf{x})/V_0 = f$ ,  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}$ , donde:

- $E_e = E_{min} + x_e^p(E_0 - E_{min})$  es el módulo de Young.
- $\mathbf{U}$  es el vector de desplazamiento global.
- $\mathbf{F}$  es el vector global de fuerzas externas.
- $k_0$  es la matriz de rigidez para un elemento con módulo de Young unitario.
- $\mathbf{x}$  es el vector de variables de diseño.
- $N$  es el número de elementos para discretizar el dominio.
- $V(\mathbf{x})$  y  $V_0$  son el volumen del material y el volumen dominio de diseño.

- $f$  es la fracción de volumen preescrita.

## 5.2. Método de criterios de optimización

Como se habló en la sección 4 la optimización topológica, el método o proceso a seguir para buscar una densidad que cumpla la condición de optimalidad se explica a continuación.

Para cada elemento  $e$  la variable de diseño  $x_e$  es actualizada a  $x_e^{new}$  siguiendo el siguiente esquema:

$$x_e^{new} = \begin{cases} \max(0, x_e - m) & \text{si } x_e B_e^\eta \leq \max(0, x_e - m) \\ \min(1, x_e + m) & \text{si } x_e B_e^\eta \geq \min(1, x_e + m) \\ x_e B_e^\eta & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $\eta = 1/2$  es un coeficiente de amortiguación numérico, y  $B_e$  es obtenido de la condición de optimalidad,

$$B_e = \frac{-\frac{\partial c}{\partial x_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial x_e}}$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange, este valor debe ser escogido de tal manera que la restricción de volumen debe satisfacerse; el valor apropiado se encuentra por medio del método de bisección. La sensibilidad de la función objetivo  $c$  y del volumen del material  $V$  respecto a la densidad del elemento  $x_e$  son dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial x_e} &= -px_e^{p-1}(E_0 - E_{min})u_e^T k_0 u_e \\ \frac{\partial V}{\partial x_e} &= 1 \end{aligned}$$

La última ecuación se deduce de que cada elemento tiene volumen unitario.

## 5.3. Filtrado

El filtrado sobre las densidades se hace con el fin de generar densidades uniformes y coherentes de un elemento con las densidades de sus elementos alrededor, como se explicó en la sección 3.

El filtro de sensibilidad modifica las sensibilidades  $\frac{\partial c}{\partial x_e}$  de la siguiente manera

$$\hat{\frac{\partial c}{\partial x_e}} = \frac{1}{\max(\gamma, x_e) \sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i \frac{\partial c}{\partial x_i}$$

donde:

- $N_e$  es el conjunto de elementos  $i$  que están a una distancia  $\Delta(e, i)$  del elemento  $e$  menor a  $r_{min}$ .
- $\gamma$  es una constante que asegura la no división entre cero.

## 5.4. Función top88

El código presentado a continuación está basado en [Andreassen et al., 2011] escrito originalmente en el lenguaje de programación Matlab, en este proyecto el lenguaje de programación escogido fue Julia. Originalmente el código está escrito como una función llamada `top88`, en la implementación usada en este proyecto se propone separar en varios fragmentos de código para hacer más sencilla su legibilidad y comprensión.

Las siguientes variables corresponden a los parámetros acerca del número de elementos en la malla, la fracción de volumen de interés, el coefficiente de penalización en el modulo de Young y constantes que afectan el filtrado.

- **nelx**: Es un entero que representa el número de elementos finitos en la dirección  $x$ .
- **nely**: Es un entero que representa el número de elementos finitos en la dirección  $y$ .
- **volfrac**: Es un número flotante que indica el volumen fraccional deseado en la topología optimizada.
- **penal**: Es un número flotante que se utiliza en el cálculo de la penalización para suavizar la función objetivo.
- **rmin**: Es un número flotante que se utiliza como radio mínimo para el filtro.
- **ft**: Es un entero que indica el tipo de filtro utilizado en el proceso de optimización.

Estos parámetros se pasan a la función `top88` para controlar diversos aspectos del proceso de optimización topológica.

```

1 nelx = 60
2 nely = 20
3 volfrac = 0.5
4 penal = 3
5 rmin = 1.5
6 ft = 1

```

#### 5.4.1. Propiedades del material (líneas 7-9)

- **E0:** Es el módulo de elasticidad del material en su estado no penalizado. Representa la rigidez del material en su forma original. Este parámetro afecta la rigidez estructural del diseño final.
- **Emin:** Es el módulo de elasticidad mínimo permitido para evitar que los elementos tengan una rigidez excesivamente baja. Es esencialmente un límite inferior en el módulo de elasticidad. Emin se utiliza para suavizar la función objetivo y evitar la aparición de elementos con una rigidez demasiado baja.
- **nu:** Es el coeficiente de Poisson, que representa la relación entre las deformaciones transversales y longitudinales de un material cuando se aplica una carga. Se utiliza en el cálculo del tensor de elasticidad para tener en cuenta el comportamiento del material bajo carga.

Estas constantes influyen en el comportamiento y la calidad del diseño obtenido mediante la optimización topológica.

```

7 E0 = 1
8 Emin = 1e-9
9 nu = 0.3

```

#### 5.4.2. Preparación del análisis de elementos finitos (líneas 10-22)

- Matriz de elementos finitos:  $A_{11} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -6 & -3 \\ 3 & 12 & 3 & 0 \\ -6 & 3 & 12 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}$
- Matriz de elementos finitos:  $A_{12} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & -6 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 3 & -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$
- Matriz de elementos finitos:  $B_{11} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 9 \\ 3 & -4 & -9 & 4 \\ -2 & -9 & -4 & -3 \\ 9 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
- Matriz de elementos finitos:  $B_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -9 \\ -3 & 2 & 9 & -2 \\ 4 & 9 & 2 & 3 \\ -9 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- Matriz de rigidez  $k_0$  para un elemento con módulo de Young unitario:  $KE = \frac{1}{24(1-\nu^2)} \left( \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{12}^T & A_{11} \end{array} \right) + \nu \left( \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{12}^T & B_{11} \end{array} \right)$
- **nodenrs:** Esta variable (matriz) se utiliza para asignar números de nodo a los nodos de la malla de elementos finitos. En este código, `nodenrs` se genera mediante la función `reshape` en la línea 17. La forma de ‘nodenrs’ será una matriz con `(nelx + 1) * (nely + 1)` filas y una columna.

- **edofVec:** Esta variable (vector) representa el vector de grados de libertad (DOF) para cada elemento finito. Es una lista de los DOF asociados con cada nodo de cada elemento finito. La forma de **edofVec** será una matriz con **nelx \* nely** filas y una columna. Los DOF se enumeran en este vector de manera que cada fila corresponde a un elemento finito y contiene los índices de los DOF asociados con ese elemento.
- **edofMat:** Esta variable es una matriz que indica cómo se ensamblan los grados de libertad (DOF) de los elementos finitos en la matriz global de rigidez. La forma de **edofMat** es una matriz con **nelx \* nely** filas y 8 columnas, donde cada fila corresponde a un elemento finito y cada columna contiene el índice de un DOF asociado con ese elemento. Las primeras cuatro columnas de **edofMat** representan los DOF de desplazamiento en  $x$  e  $y$  para los cuatro nodos del elemento, y las últimas cuatro columnas representan los DOF de desplazamiento en  $x$  e  $y$  para los cuatro nodos de la esquina del elemento.
- **iK:** Contiene las coordenadas de fila de los elementos no nulos en la matriz **K**. Estas coordenadas están relacionadas con los DOF de los nodos de los elementos finitos.
- **jK:** Contiene las coordenadas de columna de los elementos no nulos en la matriz **K**. Al igual que **iK**, estas coordenadas también están relacionadas con los DOF de los nodos de los elementos finitos.

Los vectores resultantes  $iK$  y  $jK$  están estructurados de manera que los índices  $iK(k)$  y  $jK(k)$  corresponden a la entrada  $(i, j)$ -ésima de la matriz de rigidez para el elemento  $e$ , donde  $k = i + 8(j - 1) + 64(e - 1)$ .

```

10 A11 = [12 3 -6 -3; 3 12 3 0; -6 3 12 -3; -3 0 -3 12]
11 A12 = [-6 -3 0 3; -3 -6 -3 -6; 0 -3 -6 3; 3 -6 3 -6]
12 B11 = [-4 3 -2 9; 3 -4 -9 4; -2 -9 -4 -3; 9 4 -3 -4]
13 B12 = [2 -3 4 -9; -3 2 9 -2; 4 9 2 3; -9 -2 3 2]
14
15 KE = 1/(1-nu^2)/24 * ([A11 A12; A12' A11] + nu * [B11 B12; B12' B11])
16
17 nodenrs = reshape(collect(1:(1+nelx)*(1+nely)), (1+nely, 1+nelx))
18 edofVec = reshape(2*nodenrs[1:end-1, 1:end-1] .+ 1, nelx*nely, 1)
19 edofMat = repeat(edofVec, 1, 8) .+ repeat([0 1 2*nely+2 2*nely+3 2*nely+0 2*nely+1 -2 -1], nelx*nely, 1)
20
21 iK = reshape(transpose(kron(edofMat, ones(8,1))), 64*nelx*nely, 1)
22 jK = reshape(transpose(kron(edofMat, ones(1,8))), 64*nelx*nely, 1);

```

#### 5.4.3. Definir cargas y soportes: mitad viga-MBB (líneas 23-28)

- **F:** Este es un vector de tamaño  $2*(nely+1)*(nelx+1)$  que se inicializa como un vector de ceros y al nodo  $(1, 0)$  se le asigna el valor  $-1$ . Este vector representa las fuerzas aplicadas a los nodos del sistema.
- **U:** **U** se inicializa como un vector de ceros con una longitud igual al número total de grados de libertad en el sistema de elementos finitos. Cada elemento de **U** corresponde a un grado de libertad particular y representa el desplazamiento en esa dirección para el nodo asociado. Como el tamaño de **U** es de  $2*(nely+1)*(nelx+1)$  el modelo tiene dos grados de libertad por nodo que representan los desplazamientos en  $x$  e  $y$ .
- **fixeddofs:** Índices de los grados de libertad de frontera.
- **alldofs:** Todos los índices de los grados de libertad.
- **freedofs:** Índices de los grados de libertad en el interior.

```

23 F = zeros(2*(nely+1)*(nelx+1), 1)
24 F[2,1] = -1
25 U = zeros(size(F))
26 fixeddofs = union(1:2:2*(nely+1), [2*(nelx+1)*(nely+1)])
27 alldofs = 1:2*(nely+1)*(nelx+1)
28 freedofs = setdiff(alldofs, fixeddofs);

```

#### 5.4.4. Preparación de filtro (líneas 29-50)

- **iH:** Índices de las filas de la matriz H.
- **jH:** Índices de las columnas de la matriz H.
- **sH:** Valores de las entradas de la matriz H en la posición determinada por cada entrada de iH y jH. Los valores de este vector corresponden a valores de sensibilidad de los vecinos de cada elemento.
- **k:** Índice que modifica iH, jH y sH. El valor máximo de este índice depende del valor de **rmin**.
- **H:** Esta matriz se construye como un matriz esparsa usando iH, jH y sH; la dimensión de esta matriz es de  $(\text{nelx} \times \text{nely}) \times (2 * (\text{ceil}(\text{rmin}) - 1) + 1)^2$ . La matriz H se utiliza para "promediar" la sensibilidad de la función objetivo en un vecindario de cada elemento. Esto ayuda a eliminar pequeñas estructuras irregulares y a obtener diseños con características más robustas y de mayor tamaño. Nótese que para cada elemento e1, habrá  $(2 * (\text{ceil}(\text{rmin}) - 1) + 1)^2$  elementos vecinos.
- **Hs:** Este es un vector que contiene la suma por filas de la matriz H. Este vector se utiliza para normalizar cada fila de la matriz H. Tal normalización asegura que la suma de los pesos de cada elemento en la operación de filtrado sea igual a 1. La normalización con Hs evita sesgos en la operación de filtrado y asegura que la sensibilidad de cada elemento se vea afectada de manera uniforme por sus vecinos.

Los ciclos **for** anidados realizan lo siguiente:

Ciclo exterior (líneas 34-36):

- Recorre cada elemento e1 en la malla.

Ciclo interior (líneas 37-45):

- Para cada elemento e1, recorre los elementos vecinos e2 dentro del radio de filtro **rmin**.
- Se calcula la distancia entre e1 y e2.
- Si la distancia está dentro del radio **rmin**, se calcula un valor de filtro sH basado en la distancia.
- Se añaden los índices de e1 y e2 a las matrices iH y jH, respectivamente.
- Se añade el valor sH a la matriz Hs.

```

29 iH = ones(Int(nelx*nely*(2*(ceil(rmin)-1)+1)^2))
30 jH = ones(size(iH))
31 sH = zeros(size(iH))

32
33 k = 0
34 for i1 = 1:nelx
35     for j1 = 1:nely
36         e1 = (i1-1)*nely+j1
37         for i2 = max(i1-(ceil(rmin)-1),1):min(i1+(ceil(rmin)-1),nelx)
38             for j2 = max(j1-(ceil(rmin)-1),1):min(j1+(ceil(rmin)-1),nely)
39                 e2 = (i2-1)*nely+j2
40                 k += 1
41                 iH[k] = e1
42                 jH[k] = e2
43                 sH[k] = max(0,rmin-sqrt((i1-i2)^2+(j1-j2)^2))
44             end
45         end
46     end
47 end

48
49 H = sparse(iH, jH, sH)
50 Hs = sum(H, dims=2);

```

#### 5.4.5. Inicialización de iteración (líneas 51-54)

Las líneas 51 a 54 se encargan de inicializar las variables de diseño y densidad física.

- **x**: Se crea una matriz **x** con el valor **volfrac** (fracción de volumen) para cada elemento. Esto representa la densidad de diseño inicial.
- **xPhys**: Se crea una matriz **xPhys** con el mismo tamaño que **x**. Se utiliza para almacenar la densidad física que se utiliza en el análisis por elementos finitos (FEA).
- **loop**: Contador de iteraciones.
- **change**: Variable que controla la convergencia del algoritmo.

```

51 x = fill(volfrac, nely, nelx)
52 xPhys = copy(x)
53 loop = 0
54 change = 1

```

#### 5.4.6. Comienzo de iteración (líneas 55-106)

##### a. Análisis de elementos finitos (líneas 55-65)

- **sK**: La matriz de rigidez elemental **KE** se escala por la densidad elemental **xPhys** para obtener **sK**. En este caso, esta variable se representa como un vector de tamaño **64\*nelx\*nely**.
- **K**: Se calcula la matriz de rigidez global **K** a partir de la densidad física actual **xPhys** y las propiedades del material.
- **U**: Se aplica la fuerza **F** al sistema y se resuelve el sistema de ecuaciones lineales para obtener los desplazamientos **U**. Cabe recordar la restricción **KU = F**.

##### b. Función objetivo y análisis de sensibilidad (líneas 67-71)

- **ce**: Se calcula la energía de deformación (compliance) **ce** a partir de los desplazamientos **U**.
- **c**: Se calcula la función objetivo **c** como la suma de la energía de deformación **ce** y un término de penalización que regulariza la densidad.
- **dc**: Se calcula la sensibilidad **dc** de la función objetivo con respecto a la densidad de diseño **x**.
- **dv**: Esta variable representa la actualización de la densidad de diseño en cada iteración.

##### c. Modificación de sensibilidades (líneas 73-79). Se aplica un filtro a la sensibilidad **dc** para eliminar las estructuras irregulares y promover características de tamaño mínimo. La elección del filtro depende del tipo de optimización que se desea realizar (por ejemplo, optimización de estructuras, optimización de fluidos).

##### d. Actualización de criterio óptimo de las variables de diseño y las densidades físicas (líneas 81-102)

- **l1**: Variable auxiliar del método de bisección.
- **l2**: Variable auxiliar del método de bisección.
- **move**: Tamaño de movimiento en cada una de las densidades de los elementos.
- **xnew**: Se actualiza la densidad física **xPhys** para el siguiente análisis por elementos finitos (FEA). El cálculo se hace de la siguiente manera:

$$x_{new,i} = \begin{cases} x_i \sqrt{\frac{-dc_i}{dv_il_{mid}}} & \text{si } \max(0, x_i - move) \leq x_i \sqrt{\frac{-dc_i}{dv_il_{mid}}} \leq \min(x_i + move, 1) \end{cases}$$

La idea es que cada entrada de **xnew** este en  $[0, 1]$ , que el cambio respecto a cada entrada de **x** sea menor a **move** y que a su vez dependa de la sensibilidad de la función objetivo en esta instancia.

- **lmid**: Se utiliza un método de búsqueda de línea para encontrar un valor de paso **lmid** que garantice que la densidad de diseño actualizada satisfaga la restricción de volumen.
- **change**: Es la norma del máximo entre ‘**xnew**’ y ‘**x**’, o sea, **change** =  $\|x_{new} - x\|_\infty = \max_\ell |x_{new,\ell} - x_\ell|$ .

Luego de aplicar el filtro se actualiza la densidad de diseño  $x$  utilizando la sensibilidad filtrada  $dc$  y el valor de paso  $lmid$ . Si el cambio es menor que un valor de tolerancia, el algoritmo converge y se detiene.

- e. **Imprimir resultados** (líneas 104-105). Se imprime información sobre la iteración actual, la función objetivo, el volumen y el cambio en la densidad. Finalmente, se visualiza la densidad de diseño actual.

```

55 sK = reshape(KE[:] * (Emin .+ xPhys[:,].^penal .* (E0 - Emin)), 64*nelx*nely)
56 K = sparse(reshape(Int.(iK),64*nelx*nely), reshape(Int.(jK),64*nelx*nely), reshape(sK,64*nelx*nely));
57
58 # START ITERATION
59 while change > 0.01
60   loop += 1
61
62   # FE-ANALYSIS
63   sK = reshape(KE[:] * (Emin .+ xPhys[:,].^penal .* (E0 - Emin)), 64*nelx*nely)
64   K = sparse(reshape(Int.(iK),64*nelx*nely), reshape(Int.(jK),64*nelx*nely), reshape(sK,64*nelx*nely))
65   K = (K + K') / 2
66   U[freedofs] .= K[freedofs, freedofs] \ F[freedofs]
67
68   # OBJECTIVE FUNCTION AND SENSITIVITY ANALYSIS
69   ce = reshape(sum((U[edofMat] * KE) .* U[edofMat], dims=2), nely, nelx)
70   c = sum(sum((Emin .+ xPhys.^penal .* (E0 - Emin)) .* ce))
71   dc = -penal * (E0 - Emin) .* xPhys.^ (penal - 1) .* ce
72   dv = ones(nely, nelx)
73
74   # FILTERING/MODIFICATION OF SENSITIVITIES
75   if ft == 1
76     dc[:] = H * (x[:] .* dc[:]) ./ Hs ./ max.(1e-3, x[:])
77   elseif ft == 2
78     dc[:] = H * (dc[:] ./ Hs)
79     dv[:] = H * (dv[:] ./ Hs)
80   end
81
82   # OPTIMALITY CRITERIA UPDATE OF DESIGN VARIABLES AND PHYSICAL DENSITIES
83   l1 = 0
84   l2 = 1e9
85   move = 0.2
86   xnew = 0
87   while (l2 - l1) / (l1 + l2) > 1e-3
88     lmid = 0.5 * (l2 + l1)
89     xnew = max.(0, max.(x .- move, min.(1, min.(x .+ move, x .* sqrt.(-dc ./ dv ./ lmid)))))
```

- if ft == 1
 

```

90       xPhys .= xnew
91     elseif ft == 2
92       xPhys[:] = (H * xnew[:]) ./ Hs
93     end
94     if sum(xPhys[:]) > volfrac * nelx * nely
95       l1 = lmid
96     else
97       l2 = lmid
98     end
99   end
```
- change = maximum(abs.(xnew[:] .- x[:]))
 

```

100 x .= xnew
101
102 # PRINT RESULTS
```

```

105     println("Iteration: ", loop, " Obj: ", c, " Vol: ", mean(xPhys[:,]), " ch: ", change)
106 end

```

Algunos de los resultados del anterior fragmento de código se muestran en la siguiente tabla:

Iteración	Función objetivo	Volumen total	Cambio máximo de las densidades
1	1782.112	0.500087775	0.2
2	960.319	0.499777779	0.2000000000001
3	628.144	0.500193030	0.2000000000001
4	487.700	0.500124942	0.2000000000001
:	:	:	:
47	345.137	0.500018778	0.046713300495
48	345.102	0.499997340	0.046453740984
49	345.080	0.499978821	0.045039762650
:	:	:	:
97	343.588	0.500016309	0.011245196502
98	343.566	0.499997113	0.011799240347
99	343.566	0.500013497	0.009924588060

Cuadro 3: Algunos valores de la ejecución de la optimización topológica al problema de media viga MBB.

Es notable que el algoritmo tiene como prioridad preservar la restricción sobre el volumen a lo largo de todas sus iteraciones. Además de esto, el código va disminuyendo correctamente el valor de la función objetivo a medida que aumentan las iteraciones, el cambio máximo de las densidades de todos los elementos de la malla es tomado de tal manera que tenga una cota superior y se usa también como criterio de parada indicando la convergencia del algoritmo en la optimización topológica.

#### 5.4.7. Graficar resultados (línea 107)

```

107 heatmap(1 .- xPhys[nely:-1:1, :], c=:grays, clim=(0, 1), aspect_ratio=:equal, axis=false)

```

El resultado obtenido para esta cantidad de elementos finitos, restringido a la mitad de volumen total y usando el método de filtrado, se obtiene lo siguiente

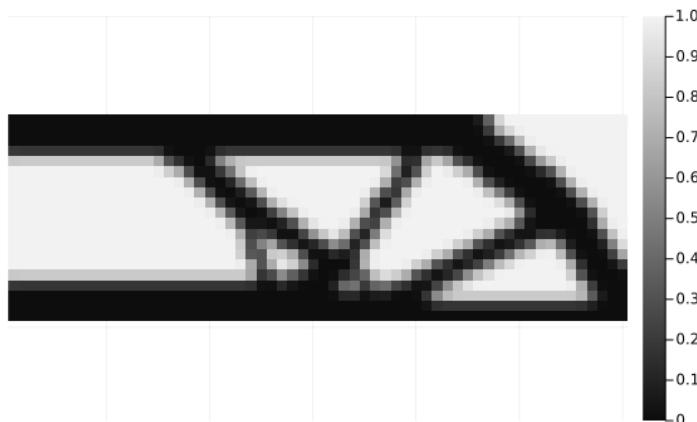


Figura 17: Resultado del algoritmo `top88` con una cuadrícula de  $60 \times 20$  elementos.

## 6. Conclusiones

## Referencias

- [Andreassen et al., 2011] Andreassen, E., Clausen, A., Schevenels, M., Lazarov, B., and Sigmund, O. (2011). Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(1):1–16.
- [Bendsøe, 2003] Bendsøe, M. P. (2003). *Topology optimization : theory, methods, and applications / M.P. Bendsøe, O. Sigmund*. Springer, 2nd ed. edition.
- [Girotti, 2009] Girotti, M. (2009). A variational formulation of pde's.
- [Gockenbach, 2006] Gockenbach, M. S. (2006). *Understanding and implementing the finite element method / Mark S. Gockenbach*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [G.R. and S. S., 2013] G.R., L. and S. S., Q. (2013). *The Finite Element Method : A Practical Course.*, volume Second edition. Butterworth-Heinemann.
- [Serrano, sf] Serrano, S. (s.f.). Topology optimization for the elasticity problem.
- [Sigmund, 2001] Sigmund, O. (2001). A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2):120–127.
- [W Michael et al., 2010] W Michael, L., David, R., and Erhard, K. (2010). *Introduction to Continuum Mechanics.*, volume 4th ed. Butterworth-Heinemann.