UNIVERSIDAD POPULAR DEL CESAR

César Orlando Torres M.

Lorenzo Mattos Vasquez.

Laboratorio de Optica e Informática - LOI

TEORIA DE LOS SISTEMAS LINEALES

Valledupar 2010

César Orlando Torres Moreno

Doctor en Ciencias Física

Lorenzo Mattos Vásquez

Magister en Informática

Grupo de Optica E informática

Departamento de Física

Universidad Popular del Cesar

TEORIA DE LOS SISTEMAS LINEALES

18 de abril de 2010

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg NewYork
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona
Budapest

Dedicatoria

El autor quiere agradecer a los estudiantes de Ingeniería Electrónica por haberle permitido acceder a su formación por medio de los cursos orientados en las electivas de Optoelectrónica y que hacen parte integral del plan de estudios del programa de Ingeniería Electrónica que se ofrece en la Universidad Popular del Cesar en Valledupar (Cesar - Colombia); su participación en las actividades realizadas en el aula de clase y por fuera de ella, han enrriquecido los contenidos de este texto, del mismo modo debo resaltar la colaboración de todos los miembros del Grupo de Optica e Informática LOI de la misma Universidad por haber colaborado en las múltples tareas que implica la elaboración de un libro de esta naturaleza.

Agradezco especialmente a la Universidad Popular del Cesar el apoyo financiero brindado, a la Vicerrectoría de Investigaciones por todo el apoyo incondicional prestado, así como al personal administrativo de la misma dependencia por soportar con paciencia mis solicitudes y peticiones constantes.

Finalmente quiero agradecer a mi familia; esposa e hijos, quienes con su compañía y apoyo permanente hicieron que todo me resultara menos difícil. A ellos dedico estas notas.

Valledupar, Colombia
Marzo de 2007

César Torres M.

Prefacio

El presente libro de Teoría de Sistemas Lineales esta diseñado de tal forma que el lector pueda familiarizarse de manera rápida y sencilla con los métodos matemáticos de la descomposición de funciones aplicando las técnicas de Fourier. Por qué escribimos el libro?; existe una amplia bibliografía sobre óptica, análisis de señales y procesamiento de señales, pero a lo largo de nuestra experiencia primero como estudiantes y después como docentes en este campo nos hemos encontrado con los siguientes problemas: libros muy generales que omiten la rigurosidad matemática; textos muy específicos que solo tratan una temática; las revistas especializadas existentes solo ofrecen una información especifica que necesita ser ampliada. Estos problemas requieren de diversas fuentes bibliograficas, que no siempre son accesibles en el momento deseado y que requieren de una síntesis o fusión de ideas y enfoques. Esto nos llevo a abordar esta problemática, mediante la elaboración del presente texto.
Quién utilizara el libro?
Es un texto dirigido a un amplio sector de personas que de un modo u otro tengan algún compromiso o interés en temática, para los profesionales que desarrollan investigación en el campo de la óptica, por rigurosidad en la temática tratada. Para los docentes porque pueden utilizarlo como texto guía en campo de la óptica; Para los estudiantes de cualquier escuela, facultad, centros de estudios, grupos de investigación, donde se ventile el tema de óptica de fourier. El libro esta abierto para profesionales y docentes en las áreas de análisis y tratamiento de señales. Para una mejor comprensión del texto es indispensable una formación básica en funciones especiales en matemáticas, una formación en análisis y tratamiento de señales, aunque con dedicación e interés en el tema se puede comprender su contenido. Cuáles son los objetivos del libro?:
"Introducir al lector en los aspectos fundamentales de la óptica, con su rigurosidad matemática.
"Proporcionar una visión general de la óptica de fourier, para sus aplicaciones en ciencias e ingeniería.
Organización del libro
El texto esta dividido en 16 capítulos. Cada capitulo comienza introduciendo al lector en el contenido del mismo, se presentan ejemplos que refuerzan la teoría y el lector debe desarrollar tareas, donde aplique lo estudiado.

Valledupar, Colombia
Marzo, 2007

César Torres M.

Índice de Figuras

Índice General

1. REPRESENTACION DE CANTIDADES FISICAS

1.1 REPRESENTACION MATEMATICA DE CANTIDADES FISICAS

1.1.1 Introducción

Con el propósito de facilitar el análisis de los múltiples problemas de la ciencia y de la ingeniería es siempre necesario representar las cantidades físicas involucradas por funciones matemáticas de varios tipos. Existen muchos tipos de funciones, y la escogencia de la apropiada para una situación particular depende en gran medida de la naturaleza del problema, de su manipulación y de las características del parámetro a ser representado. En este capítulo se discutirán varias de las propiedades importantes y algunas clases de funciones; así como la forma en la cual estas serán usadas para representar las cantidades físicas. Por tanto se estudiarán los números complejos y los fasores, de tal forma que algunos de los tópicos examinados serán de corte fundamental, pero se enfatizará en los aspectos que los usuarios del presente texto deben apropiar para resolver situaciones físicas planteadas en capítulos siguientes del libro.

1.1.2 Clases y propiedades de las funciones

Existen múltiples formas en las cuales las funciones pueden ser clasificadas, y a favor de la síntesis solo se mostraran aquellas que se utilizaran en los capítulos posteriores del libro, las cuales corresponden a las utilizadas frecuentemente en el análisis de los sistemas lineales.

Una de las distinciones básicas que debe ser realizada cuando se discute la representación matemática de los fenómenos físicos es el que conduce a la separación de fenómenos deterministicos de fenómenos aleatorios. El comportamiento de un fenómeno deterministico es completamente predecible mientras que el comportamiento de un fenómeno aleatorio tiene un grado de incertidumbre asociado con él. Para hacer esta distinción un poco clara, se debe considerar la observación o la medición de algunos parámetros que varían con el tiempo en un fenómeno particular. Se debe asumir que la cantidad de interés ha sido observada durante un intervalo grande de tiempo y por tanto existe una buena información sobre su comportamiento en el pasado. Si el comportamiento pasado define y permite conocer con exactitud el comportamiento futuro del parámetro estudiado; entonces se dice que este parámetro tiene un comportamiento deterministico; en el caso en cual no se pueda predecir el comportamiento futuro con exactitud decimos que el parámetro ahora tiene comportamiento aleatorio. Sin embargo es importante aclarar que las palabras deterministico y aleatorio no son absolutas en la descripción de los fenómenos físicos, a menudo se encuentran situaciones que corresponden a ciertos grados de estos comportamientos.

Las funciones matemáticas son usadas para representar varias cantidades físicas asociadas con el fenómeno que se quiere investigar; cuando se trata de fenómenos deterministicos están funciones se expresan en términos de formulas matemáticas explícitas, como por ejemplo el caso del movimiento armónico simple en una cuerda, el cual es altamente deterministico y se describe con ayuda de una expresión matemática explícita en función del tiempo, en contraste el movimiento de las olas en el océano posee naturaleza aleatoria y no puede ser descrito explícitamente sin rasgos de incertidumbre. En el caso de los mensajes de telecomunicaciones es importante anotar que antes de ser trasmitido este posee características de fenómeno aleatorio, pero una vez enviado se convierte en deterministico, por consiguiente la noción de deterministico y aleatorio deben ser consideradas en función del momento en el cual se estudia el parámetro.

Muchas cantidades físicas pueden ser representadas por funciones escalares mientras que otras deben ser descritas por funciones vectoriales; la presión P en un gas encerrado es una cantidad escalar que depende de la temperatura T otra cantidad escalar, por tanto P puede ser descrita por una función escalar de la variable escalar T. De otro lado el campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ asociado con una onda electromagnética propagándose es una cantidad vectorial que depende de la posición $\overrightarrow{r}$ y del tiempo t; por tanto debe ser representado por una función vectorial del vector variable $\overrightarrow{r}$ y de la variable escalar t. En el estudio de los sistemas lineales es importante estudiar funciones escalares de variables escalares. Una función puede ser vista como una regla que relaciona la variable dependiente a una o más variables independientes. Si suponemos la siguiente función:

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

Donde y es la variable dependiente x es la variable independiente y f es la regla que relaciona estas dos variables, si existe un único valor de y para cada x por tanto y es llamada una función Monovaluada de x; en el caso en el que exista más de un valor y es conocida como una función multivaluada de x. Para ilustrar esta situación considere las funciones $y = x^2$ y $y = \pm\sqrt{x}$, con la restricción de que x debe ser real y positivo. La primera de estas es una función monovaluada, mientras que la segunda es doble valuada y sus gráficas se muestran en la figura 1.1 en ambos casos el rango de y incluye únicamente números reales por tanto y es conocida como una función de valor real.

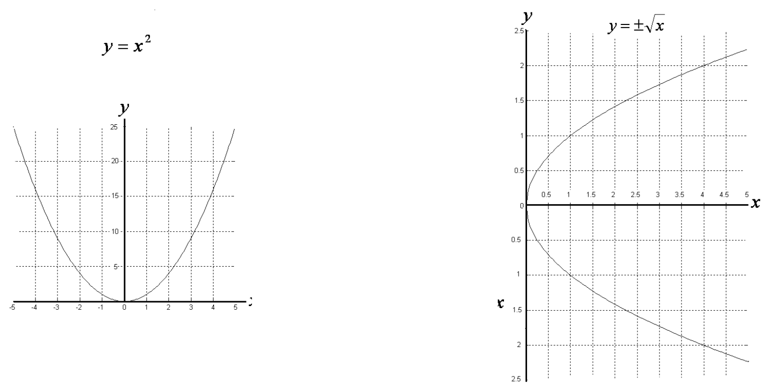

Figura 1.1. Funciones de variable real. a) Monovaluada b) Multivaluada

Si x toma tanto valores positivos como negativos esta función se llamará de valores complejos. Otra muy importante definición debe ser hecha en la clasificación de funciones periódicas y no periódicas; una función periódica $f(x)$ tiene la propiedad de que para todo x se cumple:

$$f(x) = f(x + nX) \tag{1.2}$$

Donde n es un entero y X es una constante real positiva conocida como el periodo de $f(x)$; se asume que X es el número más pequeño para el cual la ecuación 1.2 es satisfecha, de esta expresión es claro que una función periódica se repite exactamente después de intervalos fijos de nX. El inverso del periodo es llamado Frecuencia fundamental de la función. Cuando la variable independiente es una coordenada espacial tanto x como X tienen dimensiones de longitud, la frecuencia fundamental tiene dimensiones del inverso de la longitud. En este caso el símbolo ξ_0 representa la frecuencia espacial fundamental de la función periódica; es decir:

$$\xi_0 = \frac{1}{X} \tag{1.3}$$

La frecuencia fundamental espacial de una función periódica describe cuantas repeticiones la función hace por unidad de longitud y es medida en unidades de ciclos por metro. Si la variable independiente es el tiempo se tiene entonces:

$$g(t) = g(t + nT) \tag{1.4}$$

Donde T ahora es el periodo, se acostumbra utilizar el signo ν_0 para representar la frecuencia temporal fundamental de la función, es decir:

$$\nu_0 = \frac{1}{T} \tag{1.5}$$

Las unidades de ν_0 son ciclos por segundo o Hertz. La frecuencia fundamental temporal especifica el número de repeticiones hechas por la función por unidad de tiempo.

Funciones que no satisfacen las ecuaciones anteriores son llamadas no periódicas o aperiódicas. En realidad todas las funciones que representan cantidades físicas deben ser no periódicas por que para que tales funciones sean estrictamente periódicas ciertos principios físicos deben ser violados. Por ejemplo una onda de radio no puede ser verdaderamente periódica pues esto implicaría que ha existido todo el tiempo. De otro lado esta onda puede estudiarse como aproximadamente periódica. Tal vez la más común y más importante función periódica es la función sinusoidal:

$$f(x) = A \sin(2\pi\xi_0 x - \theta) \tag{1.6}$$

La gráfica de tal función es mostrada en la figura 1.2 y es fácil ver que esta función se repite exactamente después de intervalos de $nX = \frac{n}{\xi_0}$. La cantidad θ es llamada el desfasaje, es una constante arbitraria que determina la posición de la función a lo largo del eje x. La función seno es cero cuando su argumento es igual a un múltiplo entero de π, así los ceros de la función dados por la ecuación anterior suceden en los puntos $x = \frac{(n\pi+\theta)X}{2\pi}$. Otra función periódica $g(t) = g(t + nT)$ este tiempo con función de forma arbitraria es mostrado en la figura 1.3:

Un ejemplo de una función no periódica es la función Gaussiana:

$$h(x) = Ae^{-\pi\left(\frac{x}{b}\right)^2} \tag{1.7}$$

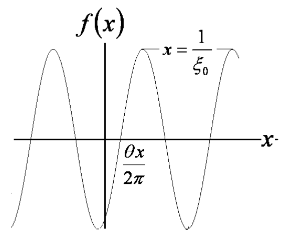

Figura 1.2. Función sinusoidal

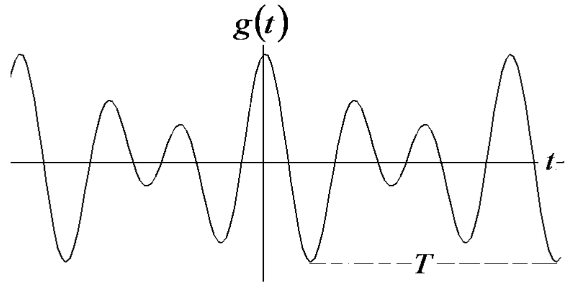

Figura 1.3. Función periódica de periódo T

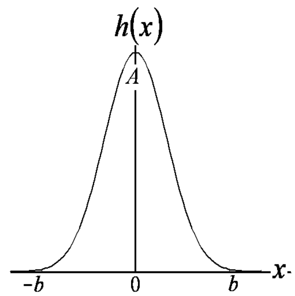

Figura 1.4. Función Gaussiana

Donde b es un número positivo real. La gráfica de esta función es mostrada en la figura 1.4:

Existe otra clase de funciones llamadas funciones cuasi periódicas; estas funciones son compuestas de la suma de dos o más funciones periódicas cuyos periodos son inconmensurables. Pata ilustrar considere las funciones periódicas $f_1(x)$ y $f_2(x)$ mostradas en la figura 1.5 con periodos X_1 y X_2 respectivamente. Si se escoge X_1 y X_2 tal que su división es un número racional, luego la suma $f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$ será periódica. Por ejemplo suponga $X_1 = 1$ y $X_2 = 2$ la razón $\frac{X_2}{X_1} = 2$ es racional y $f_3(x)$ es periódica con periodo $X_3 = 2$ como se muestra en la figura 1.6:

Si se escoge $X_1 = 1$ y $X_2 = \sqrt{3}$; $f_3(x)$ será cuasi periódica como se muestra en la figura 1.7, es decir esta función esta muy cercana de auto repetirse cuando x crece pero nunca se repetirá exactamente por que no existe un número tal que $f_3(x) = f_3(x + X_3)$

Como se mostrará más adelante funciones no periódicas pueden ser expresadas como una combinación lineal (suma) de funciones periódicas.

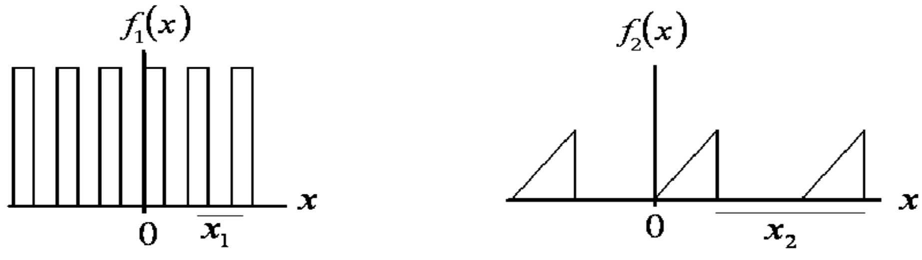

Figura 1.5. Funciones periódicas de periódo X_1 y X_2

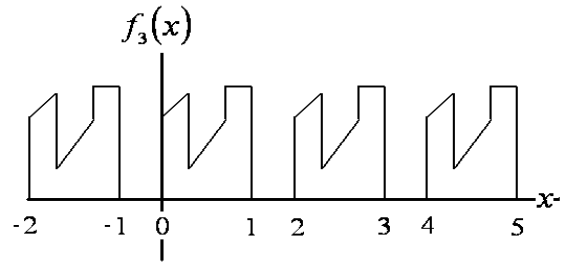

Figura 1.6. Suma de Funciones periódicas de periódo $X_1 = 1$ y $X_2 = 2$

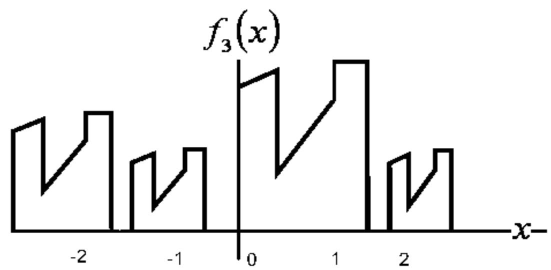

Figura 1.7. Función cuasi periódica

1.1.3 Propiedades de simetría

En el estudio de los sistemas lineales, los problemas pueden ser frecuentemente simplificados tomando en cuenta las propiedades de simetría de las funciones; por ejemplo una función $e(x)$ con la propiedad:

$$e(x) = e(-x) \tag{1.8}$$

Es llamada una función par de x; mientras que una función $o(x)$ con la propiedad:

$$o(x) = -o(-x) \tag{1.9}$$

Es llamada una función impar de x.

Como se puede observar de las anteriores ecuaciones sus respectivas gráficas mostradas en la figura 1.8 presentan simetrías con respecto a sus ejes; para la función par la curva a la izquierda del origen es simplemente la reflexión alrededor del eje vertical de la curva a la derecha del origen; para la función impar la curva a la izquierda del origen es obtenida por una primera reflexión de la curva a la derecha del origen al rededor del eje vertical, y luego una reflexión alrededor del eje horizontal (las palabras izquierda y derecha pueden ser intercambiadas) esto se puede probar físicamente con un par de espejos.

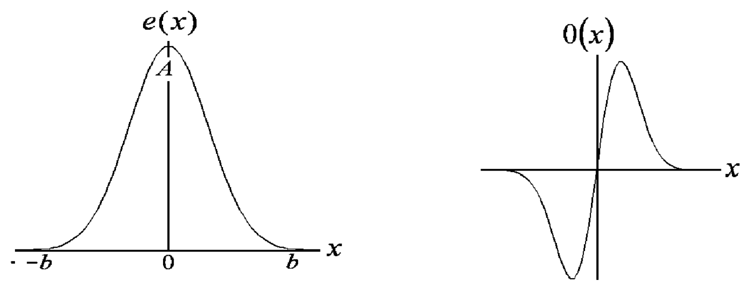

Figura 1.8. Funciones simétricas par e impar

La suma de funciones par o impar jamas será par o impar como se muestra en la figura 1.9 que corresponde a la suma de las funciones $e(x)$ y $o(x)$:

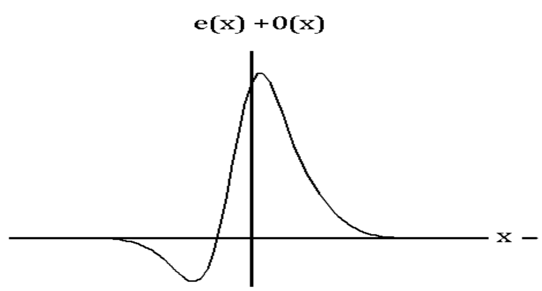

Figura 1.9. Funciones que nunca son par o impar

Es fácil mostrar que cualquier función arbitraria $f(x)$ puede ser expresada como la suma de una parte par $f_e(x)$ y una parte impar $f_o(x)$, es decir:

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x) \tag{1.10}$$

Donde:

$$f_e(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] \tag{1.11}$$

y

$$f_o(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right] \tag{1.12}$$

Otro interesante resultado partiendo de las propiedades de simetría de las funciones es el producto de dos funciones par es una función par, el producto de dos funciones impar es una función par y el producto de una función par y una función impar es impar; estos resultados pueden ser muy útiles al simplificar ciertas operaciones integrales.

Si se supone por ejemplo que se busca evaluar la integral definida de la función par $e(x)$ sobre el intervalo $(-a, a)$. Con α como variable muda de integración, se puede escribir que:

$$\int_{-a}^{a} e(\alpha)\, d\alpha = \int_{-a}^{0} e(\alpha)\, d\alpha + \int_{0}^{a} e(\alpha)\, d\alpha \tag{1.13}$$

Si se utiliza la propiedad $e(\alpha) = e(-\alpha)$ se encuentra que:

$$\int_{-a}^{a} e(\alpha)\, d\alpha = 2\int_{0}^{a} e(\alpha)\, d\alpha \tag{1.14}$$

De una forma similar se puede probar que:

$$\int_{-a}^{a} o(\alpha)\, d\alpha \equiv 0 \tag{1.15}$$

La interpretación geométrica de estos resultados se puede expresar en términos de las áreas bajo las curvas.

1.2 FUNCIONES BIDIMENSIONALES

El análisis desarrollado hasta ahora corresponde a funciones uno dimensional donde la variable independiente x es referida solo a la variable dependiente y. Una función dos dimensional o bidimensional es una regla que relaciona una variable dependiente simple con dos variables independientes; tales funciones son muy utilizadas en el análisis de los sistemas ópticos y por ello son de importancia en los preliminares de este texto. Si se supone, por ejemplo que se desea encontrar el valor de la transmitancia de una placa fotográfica, en general esta varia punto a punto en la placa y por tanto debe ser representada por una función dos dimensional de las coordenadas espaciales, en coordenadas rectangulares será:

$$t = g\left(x, y\right) \tag{1.16}$$

Donde t denota la transmitancia; x y y son las variables independientes y $g\left(..\right)$ es la regla de relación. La gráfica de una función dos dimensional debe asociarse a una superficie en el espacio; por ejemplo veamos la función Gaussiana dos dimensional (ver figura 1.10):

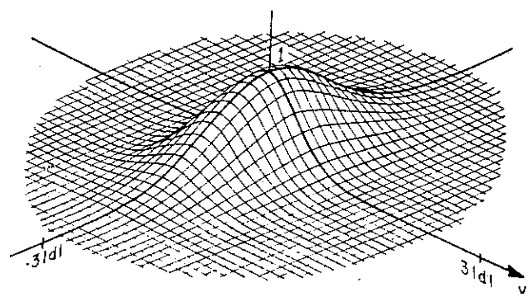

Figura 1.10. Función Gaussiana

$$f\left(x, y\right) = A\left[e^{-\pi\frac{x^2+y^2}{d^2}}\right] \tag{1.17}$$

El valor de esta función para cualquier punto (x, y) es justamente la altura de la superficie encima del plano $x - y$. En general esta altura puede ser positiva o negativa. También es posible expresar la función Gaussiana bidimensional en coordenadas polares como:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.18}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.19}$$

De donde se obtiene que:

$$g\left(r, \theta\right) = Ae^{-\pi\left(\frac{r}{d}\right)^2} \tag{1.20}$$

Una función dos dimensional se dice de variables separables en un sistema coordenado particular si se puede escribir como el producto de dos funciones uno dimensionales, cada una de las cuales depende únicamente de una de las coordenadas; así la función $f(x,y)$ es de variables separables sí:

$$f(x,y) = g(x)\, h(y) \tag{1.21}$$

Donde $g(x)$ es una función únicamente de x y $h(y)$ es una función únicamente de y. Una función dos dimensional dada puede ser de variables separables en un sistema coordenado pero en otro no cumple esta propiedad. Es importante señalar que la función Gaussiana bidimensional es una función que es de variables separables en coordenadas rectangulares y en coordenadas polares, es decir tiene una propiedad que la mayoría de funciones no posee. El volumen de la función de variables separables $f(x,y) = g(x)\, h(y)$ es simplemente el producto de las áreas de $g(x)$ y $h(y)$

1.3 NUMEROS COMPLEJOS Y FASORES

En esta sección se revisaran las principales propiedades y usos de los números complejos y fasores. Estos conceptos son de gran utilidad en ingeniería eléctrica y física.

1.3.1 números complejos

Dados dos números reales v y w se puede formar la suma:

$$u = v + iw \tag{1.22}$$

Donde $i = \sqrt{-1}$; en genral se dice que u es un número complejo, sin embargo si $w = 0$ es simplemente un número real y si $v = 0$ es un número imaginario. Por tanto podemos definir:

$$v = \Re(u) \tag{1.23}$$

y

$$w = \Im(u) \tag{1.24}$$

La representación de un número complejo puede ser realizada en el plano cartesiano correspondiendo a un punto sobre este como se indica en la figura 1.11:

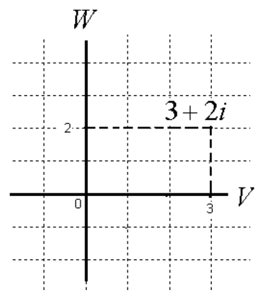

Figura 1.11. Representación compleja

Tal vez la mas útil de las representaciones de los números complejos corresponde a la forma polar; la forma polar de un número complejo $u = v + iw$ esta dada por:

$$u = re^{i\phi} \tag{1.25}$$

Donde:

$$r = \mid u \mid = \sqrt{v^2 + w^2} \tag{1.26}$$

y

$$\phi = arg(u) = \arctan\left(\frac{w}{v}\right) \tag{1.27}$$

La cantidad r es conocida como valor absoluto o modulo de u mientras que ϕ es su argumento o fase. Ambos r y ϕ son números reales y r es positivo. La representación en el plano complejo de este número es mostrada en la figura 1.12, u es interpretado como un vector cuya magnitud es dada por r y cuyo ángulo de dirección con respecto al eje v esta determinado por ϕ, Como convención se tomará ϕ en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

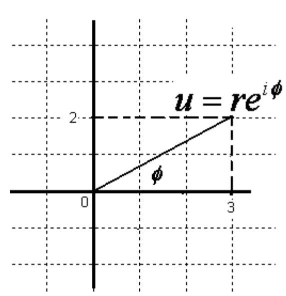

Figura 1.12. Forma polar de un número complejo

Si se toma el ejemplo anterior de $u = 3 + 2i$ en forma polar se debe hacer:

$$r =\mid u \mid= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3.61 \tag{1.28}$$

y

$$\phi = arg(u) = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33.7^0 \equiv 0.591rad \tag{1.29}$$

Por tanto en forma polar el número se escribe como:

$$u = 3.61e^{i0.591} \tag{1.30}$$

Cuando un número complejo está dado en forma polar sus componentes real e imaginario se pueden obtener utilizando la formula de Euler:

$$u = re^{i\phi} = r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right) \tag{1.31}$$

De tal forma que:

$$\Re(u) = r\cos\phi \tag{1.32}$$

y

$$\Im(u) = r\sin\phi \tag{1.33}$$

El complejo conjugado de un número complejo u se denota por u^* y se obtiene simplemente remplazando i por $-i$; por tanto el complejo conjugado de $u = v + iw$ será:

$$u^* = v - iw \tag{1.34}$$

En forma polar:

$$u^* = re^{-i\phi} \tag{1.35}$$

Algebra compleja. Se mostrarán las principales relaciones del álgebra compleja que se utilizan frecuentemente. Para las propiedades listadas se usaran los números complejos siguientes:

$$u_1 = r_1 e^{i\phi_1} = v_1 + iw_1 \tag{1.36}$$

$$u_2 = r_2 e^{i\phi_2} = v_2 + iw_2 \tag{1.37}$$

Las propiedades de adición y multiplicación son:

$$u_1 + u_2 = (v_1 + v_2) + i\,(w_1 + w_2) \tag{1.38}$$

$$u_1 u_2 = (v_1 v_2 - w_1 w_2) + i\,(v_1 w_2 + v_2 w_1) = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \tag{1.39}$$

Algunas consecuencias de estas propiedades son:

$$u_1 + u_1{}^* = 2v_1 \tag{1.40}$$

$$u_1 - u_1{}^* = i2w_1 \tag{1.41}$$

$$u_1 u_1{}^* =\mid u_1 \mid= v_1{}^2 + w_1{}^2 = r_1{}^2 \tag{1.42}$$

Las propiedades de división son un poco más complejas que la adición y la multiplicación, a menos que el dividendo y el divisor esten dados en forma polar; si estos están dados en forma rectangular, el divisor debe ser racionalizado antes que el cociente sea expresado en forma rectangular:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1 u_2{}^*}{u_2 u_2{}^*} = \frac{u_1 u_2{}^*}{\mid u_2 \mid^2} \tag{1.43}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \left(\frac{v_1 v_2 + w_1 w_2}{u_2{}^2 + w_2{}^2}\right) + i\left(\frac{v_2 w_1 - v_1 w_2}{u_2{}^2 + w_2{}^2}\right) \tag{1.44}$$

Esta operación puede ser desarrollada más fácilmente si se utiliza la forma polar como se muestra a continuación:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{r_1 e^{i\phi_1}}{r_2 e^{i\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \tag{1.45}$$

Otras relaciones muy importantes son:

$$\mid u_1 u_2 \mid = \mid u_1 \mid . \mid u_2 \mid \tag{1.46}$$

$$\mid u_1 {u_1}^* \mid = \mid u_1 \mid^2 \tag{1.47}$$

$$(u_1 + u_2)^* = u_1^* + u_2^* \tag{1.48}$$

$$(u_1 . u_2)^* = u_1^* . u_2^* \tag{1.49}$$

$$\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^* = \frac{u_1^*}{u_2^*} \tag{1.50}$$

$$\frac{1}{u_1} = \frac{u_1^*}{\mid u_1 \mid^2} \tag{1.51}$$

Se debe resaltar además que:

$$\Re(u_1 + u_2) = \Re(u_1) + \Re(u_2) \tag{1.52}$$

$$\Im(u_1 + u_2) = \Im(u_1) + \Im(u_2) \tag{1.53}$$

Pero de manera general:

$$\Re(u_1 . u_2) \neq \Re(u_1) . \Re(u_2) \tag{1.54}$$

y

$$\Im(u_1.u_2) \neq \Im(u_1).\Im(u_2) \tag{1.55}$$

Para el caso de potencias y raíces de números complejos se tiene:

$$(u_1)^n = r_1^n e^{-in\phi_1} \tag{1.56}$$

$$(u_1)^{\frac{1}{n}} = (r_1)^{\frac{1}{n}} \exp^{\left[i\left(\frac{\phi_1 + k2\pi}{n}\right)\right]} \tag{1.57}$$

Donde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5...n - 1$. es importante notar que existen n valores distintos de $(u_1)^{\frac{1}{n}}$

Las operaciones de números complejos a menudo son asociadas con operaciones de vectores como se indica en la figura 1.13:

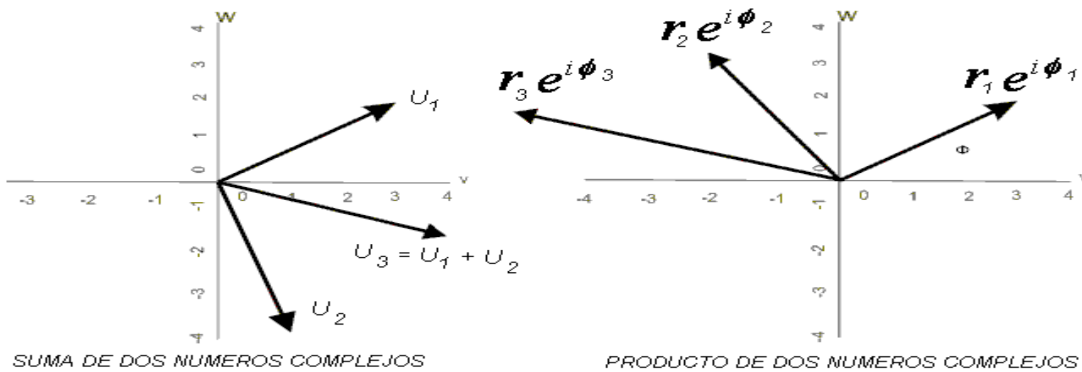

Figura 1.13. Números complejos tratados como vectores

1.3.2 Fasores

La palabra fasor es utilizada por los físicos para significar números complejos. En ingeniería se utiliza para denotar una función exponencial compleja de modulo constante y fase lineal, esto es una función con comportamiento puramente armónico; sin embargo se puede entender de manera general como una función de valor complejo de una o más variables. Si se dan dos funciones $v(x)$ y $w(x)$ la forma de la función compleja por tanto es:

$$u(x) = v(x) + iw(x) \tag{1.58}$$

Expresión conocida como fasor; esta función en forma polar se escribe como:

$$u\left(x\right)=a\left(x\right)e^{i\phi\left(x\right)} \tag{1.59}$$

Donde

$$a\left(x\right)=\mid u\left(x\right)\mid=\left[v^{2}\left(x\right)+w^{2}\left(x\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.60}$$

y

$$\phi\left(x\right)=arg[u\left(x\right)]=\arctan\left[\frac{w\left(x\right)}{v\left(x\right)}\right] \tag{1.61}$$

Son el modulo y la fase respectivamente de $u\left(x\right)$. Ambos $a\left(x\right)$ y $\phi\left(x\right)$ son funciones de valor real y $a\left(x\right)$ es positivo. Los fasores se pueden representar en el plano complejo en una forma similar a los número complejos como se ilustra en la figura 1.14:

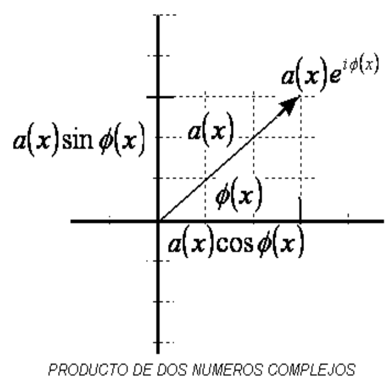

Figura 1.14. Representación en el plano complejo de un fasor

También se cumple que:

$$\Re\left\{u\left(x\right)\right\}=a\left(x\right)\cos\phi\left(x\right) \tag{1.62}$$

$$\Im\left\{u\left(x\right)\right\}=a\left(x\right)\sin\phi\left(x\right) \tag{1.63}$$

Se debe notar que si $a\left(x\right)$ y $\phi\left(x\right)$ no varían entonces $u\left(x\right)$ es una constante compleja. Si se representa el fasor como:

$$u(x) = Ae^{i2\pi\xi_0 x} \tag{1.64}$$

El cual tiene un modulo constante y fase variando linealmente, la representación compleja de este fasor es la misma que se mostró en la figura 1.14 con $a(x) = A$ y $\phi(x) = 2\pi\xi_0 x$, En una segunda representación se gráfica individualmente las componentes reales e imaginarios de $u(x)$ las cuales dan:

$$\Re\{u(x)\} = A\cos(2\pi\xi_0 x) \tag{1.65}$$

$$\Im\{u(x)\} = A\sin(2\pi\xi_0 x) \tag{1.66}$$

Las gráficas de estas funciones son mostradas en la figura 1.15:

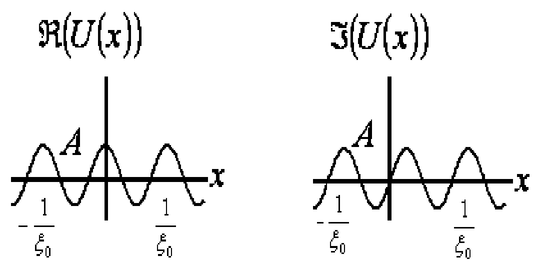

Figura 1.15. Componentes real e imaginaria del fasor $Ae^{i2\pi\xi_0 x}$

El siguiente método involucra las gráficas individuales del modulo y de la fase de $u(x)$ las cuales son especificadas como:

$$\mid u(x) \mid = a(x) = A \tag{1.67}$$

y

$$arg\{u(x)\} = \phi(x) = 2\pi\xi_0 x \tag{1.68}$$

El ultimo método referenciado esta fundamentado en un sistema coordenado rectangular tridimensional. La variable x es graficada a lo largo de un eje, y las componentes real e imaginaria del

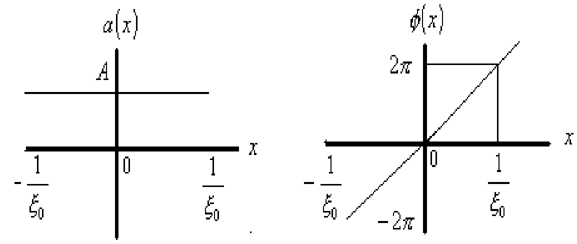

Figura 1.16. Modulo y fase de $Ae^{i2\pi\xi_0 x}$

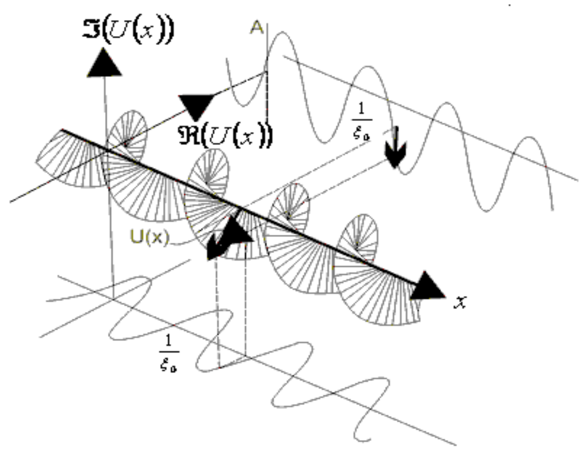

Figura 1.17. Forma de hélice del fasor

fasor son graficadas a lo largo de los otros dos. El resultado es la curva tridimensional una hélice en este caso, la cual es mostrada en la figura 1.16.

Se debe destacar es que cuando una función de valor complejo o fasor cuya parte real es una función par y cuya parte imaginaria es impar se dice que es Hermítico, mientras que un fasor cuya parte real es impar y cuya parte imaginaria es par se llama Antihermitico, lo cual conduce a ciertas propiedades particulares de la transformada de Fourier.

1.4 REPRESENTACION DE CANTIDADES FISICAS

Una de las principales representaciones de un fenómeno corresponde a aquel que posee un comportamiento sinusoidal, luego se procede a representar la amplitud y la fase de ondas moduladas y finalmente a la descripción de ondas de luz monocromáticas.

Como se puede notar la representación de cantidades físicas por fasores que son funciones de valor complejo, ofrece amplias ventajas; sin embargo a menos que la representación este perfectamente definida esto puede conducir a confusiones conceptuales, por ejemplo un voltaje que varia continuamente con el tiempo es representado por un fasor $a(t)\, e^{(i\phi(t))}$ lo cual implica que el voltaje consiste de una parte real y una parte imaginaria y esto no tiene sentido físico. Tal voltaje es mejor representado en la parte real e imaginaria por un fasor apropiado lo cual conduce a funciones de valor real.

Si se introduce la noción de señal a la cual se le da el significado de función que representa una cantidad física especifica que posee información en la cual se tiene interés. Esto no restringe su uso a las aplicaciones eléctricas convencionales tales como audio o señales de vídeo, también es útil considerar la función de transmitancia de una transparencia fotográfica al ser estudiada como una señal bidimensional para un sistema óptico coherente.

1.4.1 Señales sinusoidales

Las señales sinusoidales son de gran importancia ene el estudio de muchos problemas de ingeniería, ya que ellas describen adecuadamente el comportamiento de múltiples fenómenos, pero además son básicas; ya que otras funciones se pueden descomponer en términos de funciones sinusoidales como combinaciones lineales, en resumen las funciones sinusoidales son las funciones propias de los sistemas lineales invariantes al desplazamiento LSI.

Si se considera la función de valor real:

$$v(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t + \theta) \tag{1.69}$$

La cual puede ser usada para representar una cantidad física cuyo comportamiento es sinusoidal por ejemplo una línea de voltaje o un sistema de distribución de potencia, las oscilaciones de un péndulo, etc. Esta expresión también se puede escribir como:

$$v(t) = \Re u(t) \tag{1.70}$$

Donde:

$$u(t) = A\exp[i(2\pi\nu_0 t + \theta)] \tag{1.71}$$

Geométricamente utilizando la convención para diagramas de fasores $v(t)$ es simplemente la proyección del vector $u(t)$ sobre el eje de los reales; por tanto cualquier función cos puede ser descrita como la parte real de un fasor apropiado y en forma similar cualquier función sin puede ser escrita como la parte imaginaria de un fasor. La utilidad de la notación de fasores se entenderá mejor aun, cuando se realizan ciertas operaciones con señales sinusoidales, por ejemplo si se desea encontrar la suma de:

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) \tag{1.72}$$

De n señales cosenoidales de la forma:

$$v_i(t) = A_i \cos(2\pi\nu_i t + \theta_i) \tag{1.73}$$

Donde $i = 1, 2, 3, ...n$, A_i y θ_i son constantes reales arbitrarias. Para un gran número de términos se entiende que es bastante difícil calcular esta suma, pero con la definición de fasor:

$$u_i(t) = A_i \exp(2\pi\nu_i t + \theta_i) \tag{1.74}$$

Donde:

$$v_i(t) = \Re\{u_i(t)\} \tag{1.75}$$

Se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(t) = \Re\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i(t)\right\} \tag{1.76}$$

Así la suma de las n señales cosenoidales es igual a la parte real de la suma de los n correspondientes fasores, o en un diagrama de fasores es justamente la proyección del eje horizontal de la suma de los n correspondientes vectores. Otro concepto muy útil concerniente a la representación de señales sinusoidales es la siguiente: Suponga que se tiene una señal $A\cos(2\pi\nu_0 t)$ la cual se puede expandir utilizando la formula de Euler:

$$A\cos(2\pi\nu_0 t) = \frac{A}{2}\left[e^{2i\pi\nu_0 t} + e^{-2i\pi\nu_0 t}\right] \tag{1.77}$$

La cual es justamente la suma de dos fasores de modulo constante $\frac{A}{2}$ y fase lineal $\pm 2\pi\nu_0$. En un diagrama de fasores el primero de estos fasores rota en el sentido contrario al horario con tiempo a la velocidad de $2\pi\nu_0 \frac{rad}{seg}$, mientras que el segundo rota en el sentido horario a la misma velocidad. La parte imaginaria de estos fasores es siempre de signo opuesto, cancelado el uno al otro, pero su parte real es siempre del mismo signo esta suma produce la función de valor real $A\cos(2\pi\nu_0 t)$ como se muestra en la figura 1.17. Es también instructivo asociar el signo negativo en el exponente del segundo fasor con la frecuencia fundamental es decir:

$$A\cos(2\pi\nu_0 t) = \frac{A}{2}\left[e^{2i\pi\nu_0 t} + e^{2i\pi(-\nu_0)t}\right] \tag{1.78}$$

Por tanto se puede considerar la señal compuesta de una frecuencia positiva y una componente de frecuencia negativa que forman un fasor rotando en el sentido anti horario por tanto su frecuencia fundamenta el es positiva, y un fasor rotando en el sentido horario debido a su frecuencia fundamental negativa.

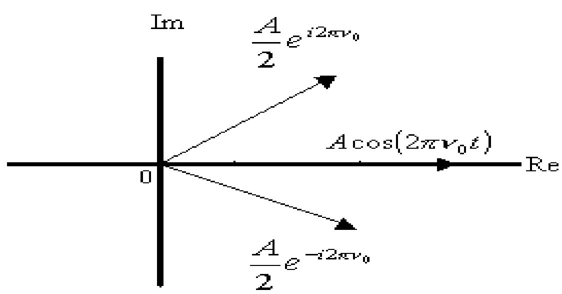

Figura 1.18. Función coseno como suma de fasores de frecuencia positiva y negativa

Ondas moduladas. La modulación es un proceso mediante el cual la señal moduladora es usada para controlar algunas propiedades de la onda portadora en una forma predeterminada, por tanto es un parte importante de todos los sistemas de comunicaciones, incluyendo radio, televisión, teléfono, etc. Sin embargo existen muchos tipos de modulación, acá solo se describirá el tipo de modulación en el cual la onda portadora describe comportamiento sinusoidal. Por tanto se estudiará la modulación temporal sin embargo los conceptos aplicados acá pueden ser utilizados en la modulación espacial. La expresión general para una onda modulada con una portadora sinusoidal esta dada por:

$$v(t) = a(t)\cos[\phi(t)] \tag{1.79}$$

Donde $a(t)$ es siempre la amplitud instantánea de la onda portadora y $\phi(t)$ es la fase instantánea. Para modulación en amplitud AM, $a(t)$ es linealmente referida a la señal moduladora $m(t)$, mientras la fase es independiente de esta señal y usualmente tiene la forma:

$$\phi(t) = 2\pi\nu_c t - \theta \tag{1.80}$$

Donde ν_c es la frecuencia fundamental de la onda portadora y θ es una constante real arbitraria. Frecuentemente $a(t)$ es escrita como:

$$a(t) = A[1 + m(t)] \tag{1.81}$$

Donde A es una constante real positiva y $m(t)$ es una función de valor real; por tanto para el caso de AM se tiene:

$$v(t) = A[1 + m(t)]\cos(2\pi\nu_c t - \theta) \tag{1.82}$$

Teniendo en cuenta el valor de $a(t)$ se obtiene:

$$m(t) \geq -1 \tag{1.83}$$

Se asume usualmente que $a(t)$ es positivo. Si $m(t)$ es una función que varia lentamente con respecto a la oscilación de la onda portadora como es generalmente el caso; $a(t)$ es llamada la envolvente de la onda modulada. En la figura 1.18 se muestra una señal modulada arbitrariamente empezando en el tiempo t_0 y la onda modulada resultante. Es también instructivo considerar el proceso de modulación desde el punto de vista de los fasores, parta hacer esto se puede escribir que:

$$v(t) = A[1 + m(t)]\Re\left\{e^{i2\pi\nu_c t}\right\} \tag{1.84}$$

$$v(t) = \Re\left\{A[1 + m(t)]e^{i2\pi\nu_c t}\right\} \tag{1.85}$$

Donde se ha omitido la constante θ para simplificar la notación; así $v(t)$ es simplemente la parte real del fasor cuyo modulo es $a(t) = A[1 + m(t)]$ y cuyo plano varia linealmente con el tiempo.

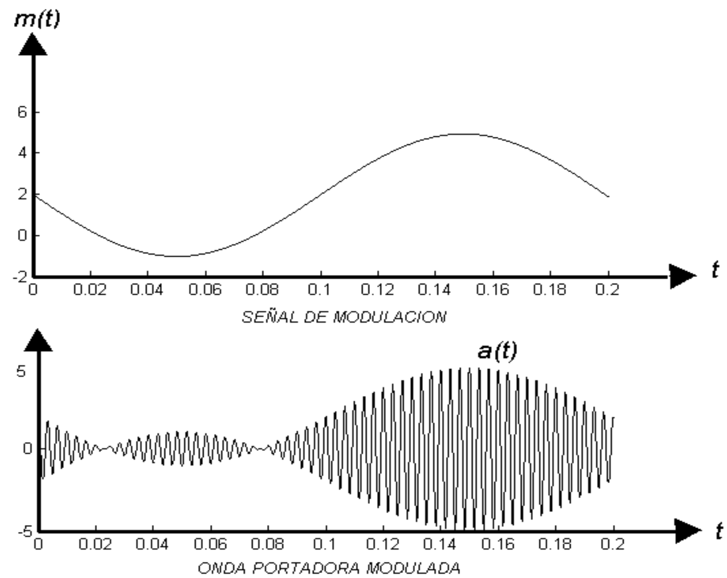

Figura 1.19. Modulación de amplitud

Para modulación de fase (FM) la amplitud instantánea $a(t)$ es constante y la fase instantánea $\phi(t)$ depende linealmente de la señal de modulación. ; esta dependencia es frecuentemente expresada como:

$$\phi(t) = 2\pi\nu_c t + \Delta\phi m(t) \tag{1.86}$$

Donde la cantidad $\Delta\phi m(t)$ es la desviación de fase instantánea y de nuevo ν_c es la frecuencia portadora; por tanto para el caso de modulación de fase se tiene:

$$v(t) = A\cos[2\pi\nu_c t + \Delta\phi m(t)] \tag{1.87}$$

Ondas de luz monocromáticas. La representación matemática de ondas de luz se incluye para familiarizar al lector con algunos de los conceptos básicos de la óptica.

En general una onda de luz puede ser representada por una función vectorial de posición y de tiempo; existen casos para los cuales tal onda puede describirse por una función escalar. Por tanto este será el tratamiento dado en este texto, además de considerar únicamente ondas de luz monocromáticas; es decir ondas que poseen una frecuencia temporal singular. Estas ondas se asumen linealmente polarizadas y serán asociadas a la función escalar que las describe con la magnitud tanto del vector campo eléctrico como del vector campo magnético, por consiguiente:

$$u(\overrightarrow{r}, t) = a(\overrightarrow{r}) \cos[2\pi\nu_0 t - \phi(\overrightarrow{r})] \tag{1.88}$$

Para representar tal onda monocromática polarizada linealmente donde $\overrightarrow{r}$ es un vector posición y ν_0 es la frecuencia temporal de la onda. La función $a(\overrightarrow{r})$ es conocida como la amplitud de la onda y el argumento de la función cos es llamada la fase. Las superficies en el espacio definidas por la ecuación son llamadas superficies cofasales o más comúnmente frentes de onda. Ambos $a(\overrightarrow{r})$ y $\phi(\overrightarrow{r})$ son funciones escalares de valor real de la posición. La función $u(\overrightarrow{r}, t)$ es la solución de la ecuación de onda escalar:

$$\nabla^2 u(r,t) - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1.89}$$

Donde n es el índice de refracción del medio en el cual la onda se está propagando c es la velocidad de la luz en el vacío y ∇^2 es el operador Laplaciano, el cual se puede escribir en coordenadas rectangulares como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.90}$$

Se asume que el medio es homogéneo y que sus propiedades son independientes del tiempo; así el índice refractivo es constante. Si se define el fasor:

$$u(r,t) = a(r)\, e^{i\phi(r)} \tag{1.91}$$

Expresión conocida en óptica como la amplitud compleja de la onda $u(r,t)$ de tal forma que:

$$u(r,t) = \Re\left\{u^*(r)\, e^{i2\pi\nu_0 t}\right\} \tag{1.92}$$

Como se nota $u(r,t)$ no solo es únicamente solución de la ecuación de onda escalar sino que la amplitud compleja $u(r)$ satisface la ecuación de Helmholz independiente del tiempo.

$$\nabla^2 u(r) + n^2 k_0^2 u(r) = 0 \tag{1.93}$$

Donde $k_0 = \frac{2\pi\nu_0}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ es el número de onda asociado con $u(r,t)$, λ_0 es la longitud de onda en el vacío. Como resultado de esto muchos problemas de interés en la óptica pueden resolverse y algunas operaciones intermedias ser simplificadas.

1.5 TALLER DE EJERCICIOS

1.1. Dada una función arbitraria $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$,donde $f_e(x)$ representa la función par y $f_o(x)$ representa la función impar; Demuestre que:

a.$f_e(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$

b.$f_o(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

1.2. Dado el número complejo $u = v + iw$, demuestre que:

a. $Re\{u\} = \frac{1}{2}(u + u^*)$

b. $Im\{u\} = \frac{1}{2i}(u - u^*)$

1.3. Dados los números complejos $u_1 = v_1 + iw_1$, y $u_2 = v_2 + iw_2$ demuestre que:

a. $Re\{u_1 + u_2\} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}(u_1 + u_2)^*$

b. $(u_1 + u_2) + (u_1 - u_2)^* = 2Re\{u_1\} + 2iIm\{u_2\}$

c. $Re\{u_1 u_2^*\} \neq Re\{u_1\} Re\{u_2^*\}$

d. $u_1 u_2^* + u_1^* u_2$ es de valor Real

e. $|u_1 + u_2|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2 + u_1 u_2^* + u_1^* u_2$

1.4. Encuentre todas las raices de las siguientes ecuaciones y muestre sus posiciones en el plano complejo:

a. $x^3 = 1$

b. $x^3 = 8e^{i\pi}$

c. $x^4 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

1.5. Calcule las siguientes sumas complejas y grafique su representación en el plano complejo:

a. $u = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b. $u = 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

c. $u = 1 + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$

1.6. Sea $u(x) = Ae^{i2\pi\xi_0 x}$ Donde A y ξ_0 son constantes reales positivas ; encuentre y grafique las siguientes funciones:

a. $\mid u(x) \mid^2$

b. $u(x) + u^*(x)$

c. $\mid u(x) + u^*(x) \mid^2$

1.6 EJERCICIOS RESUELTOS

1.6.1 Números complejos y fasores

A. Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ probar que: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$.

SOLUCION:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \tag{1.94}$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} . \frac{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \tag{1.95}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} . \frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)}{(\cos^2\theta_2 + sin^2\theta_2)} + \frac{i\,(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{(\cos^2\theta_2 + sin^2\theta_2)} \tag{1.96}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right\} \tag{1.97}$$

B. Probar la identidad $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$, utilizando notación compleja.

SOLUCION:

Utilizando el teorema de De Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{1.98}$$

De la Formula binomial:

$$(a+b)^n = a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} a^{n-r}b^r \ldots\ldots\ldots\ldots + b^n \tag{1.99}$$

De donde se puede encontrar que:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta \tag{1.100}$$

Aplicando la formula binomial:

$$\begin{aligned}\cos 5\theta + i\sin 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + \\ i\left(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\right)\end{aligned} \tag{1.101}$$

Por consiguiente:

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \tag{1.102}$$

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\left(1 - \cos^2\theta\right) + 5\cos\theta\left(1 - \cos^2\theta\right)^2 \tag{1.103}$$

Resolviendo:

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \qquad (1.104)$$

1.6.2 Representación matemática de cantidades físicas

Considere la expresión matemática $u_1(x,y) = Ae^{ik\gamma_x x}$.

A. Que clase de fenómeno físico representa esta expresión.

Solución

Representa una onda plana

B. Identifique sus principales características.

Solución

Es una onda plana de amplitudconstante A, su fase está en el origen de coordenadas; es decirt no está desfasada. El parámetro γ_x representa el angulo del coseno direcor en la dirección x

C. Sabiendo que $I(x,y) = \mid u_1(x,y) \mid^2$, encuentre este valor. Que significado físico tiene (Valor 0.40 puntos)

Solución

$$I(x,y) = \mid u_1(x,y) \mid^2 = \mid u_1(x,y) \mid\mid u_1^*(x,y) \mid \qquad (1.105)$$

Se obtiene:

$$I(x,y) = \mid u_1(x,y) u_1^*(x,y) \mid = \mid A^{ik\gamma_x x} A^{-k\gamma_x x} \mid = \mid A \mid^2 \qquad (1.106)$$

Finalmente:

$$I(x,y) = \mid A \mid^2 \qquad (1.107)$$

Cantidad que representa que la irradiancia *Cantidad de energía o de flujo radiante* de la onda plana a través del espacio, en este caso particular la Irradiancia es constante.

1.6.3 Aplicaciones de los fasores

En este caso se analizara un circuito en el cual se colocan elementos en serie con una resistencia conectados a una fuente de voltaje de AC que esta en fase con la corriente. (ver figura 1.) Asuma que el voltaje aplicado varía senosoidalmente con el tiempo mediante la expresión: $v = V\sin(wt)$ y $i = I\sin(wt - \phi)$

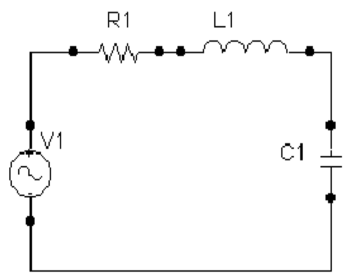

Figura 1.20. Circuito propuesto

A. Encuentre el voltaje instantáneo a través de los tres elementos.

Solución

Debido a que todos los elementos están en serie, la corriente en cualquier punto del circuito debe ser la misma en cualquier instante. Por consiguiente, el voltaje a través de cada elemento tiene diferentes amplitudes y fases. En particular, el voltaje a través de la resistencia esta en fase con la corriente, el voltaje a través del inductor adelanta la corriente 90^0, y el voltaje a través del capacitor va retrasado de la corriente en 90^0. Utilizando estas relaciones de fase, se pueden expresar las caídas de voltaje instantáneas a través de los tres elementos como:

$$V_R = IR_1\sin(wt) \tag{1.108}$$

$$V_l = IXl\sin\left(wt + 90^0\right) \tag{1.109}$$

$$V_c = IXc\sin\left(wt - 90^0\right) \tag{1.110}$$

El voltaje instantáneo a través de los tres elementos es igual a la suma:

$$V = V_R + V_l + V_c \tag{1.111}$$

B. Obtenga el diagrama de fasores resultante combinando los tres pares de fasores encontrados en el literal anterior.

Solución Debido a que la corriente en cada elemento es la misma en cualquier instante, se puede obtener el diagrama de fasores resultante combinando los tres pares de fasores mostrados. Para obtener la suma vectorial de estos voltajes, es conveniente dibujar un diagrama de fasores como se muestra en la figura 2.

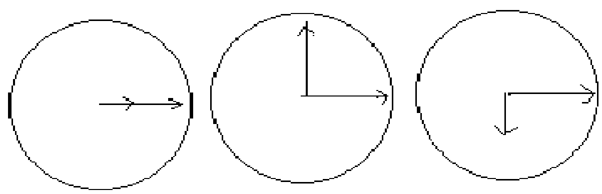

Figura 1.21. Diagrama de fasores

De acuerdo con este diagrama, la suma vectorial de las amplitudes de voltaje $V_R + V_l + V_c$ es igual a un fasor cuya longitud es le máximo voltaje aplicado V_m, donde el fasor V_m forma un ángulo ϕ con el fasor de corriente Im. Obsérvese que los fasores de voltaje están en direcciones opuestas a lo largo de la misma línea, por lo que se puede construir un fasor de diferencia $V_l - V_c$ la cual es perpendicular al fasor V_R. Según él triangulo rectángulo en la figura 2 se nota que:

$$V_m = \sqrt{V_R^2 + (V_l - V_c)^2} = \sqrt{(IR)^2 + (IXl - IXc)^2} \tag{1.112}$$

Finalmente:

$$V_m = I\sqrt{(R)^2 + (Xl - Xc)^2} \tag{1.113}$$

C. Exprese la corriente máxima y el voltaje máximo como función de la impedancia del circuito.

Solución

Por lo tanto, se puede expresar la corriente máxima como:

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{(R)^2 + (Xl - Xc)^2}} \tag{1.114}$$

Dado que la impedancia del circuito se define como:

$$Z = \sqrt{(R)^2 + (Xl - Xc)^2} \tag{1.115}$$

La impedancia esta dada en ohms por tanto, podemos escribir la ecuación la ecuación como:

$$V_m = IZ \tag{1.116}$$

1.6.4 Representación de una señal con forma de onda

A. Sea una señal periódica $f(x)$ de periodo 2π definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{Si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \\ x, & \text{Si } 0 < x \leq \pi \end{cases} \tag{1.117}$$

Realice una gráfica de la señal.

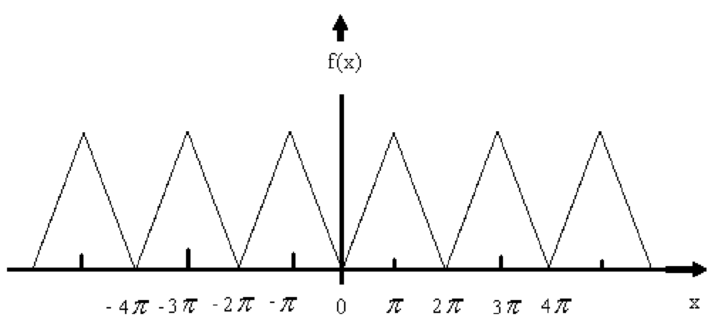

Figura 1.22. Señal del problema IV A

B. Sea una señal periódica $f(x)$ de periodo 2π definida por:

$$f(x) = x^2 \qquad Si \quad -\pi \leq x \leq \pi \tag{1.118}$$

Realice una gráfica de la señal.

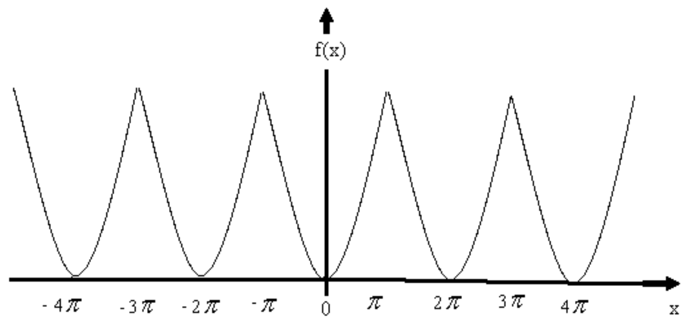

Figura 1.23. Señal del problema IV B