

### 3. FILTROS LINEALES Y SISTEMAS *LSI*

#### 3.1 CARACTERISTICAS Y APLICACIONES DE LOS FILTROS LINEALES

Se conoce que la salida de un sistema LSI puede ser calculada directamente en el dominio de la entrada por la convolución de la entrada con la respuesta impulsional del sistema; por tanto la salida se puede ver como una versión esmoteada de la entrada.

La salida también puede ser calculada en el dominio frecuencial, donde el concepto de filtro es encontrado adecuado, es decir el espectro de salida es una versión filtrada del espectro de entrada. En este seminario estudiaremos el concepto de filtrado, estudiaremos la aplicación de varios tipos de filtros lineales y se introduciría el concepto de muestreo y recuperación de una señal.

##### 3.1.1 Sistemas lineales como filtros

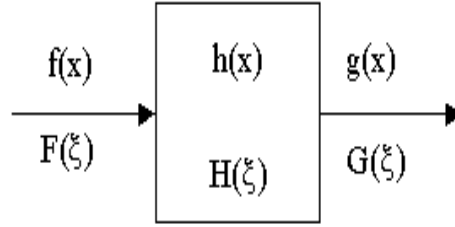
Si se considera un sistema LSI (ver figura 3.1) El cual se caracteriza por su respuesta impulsional  $h(x)$  y su función de transferencia  $H(\xi)$ . A este sistema se le aplica una señal de entrada  $f(x)$  con espectro  $F(\xi)$ , entonces se obtiene la señal de salida  $G(\xi)$  respectivamente. En el curso de Optica Física se demostró que el espectro de salida puede ser calculado por:

$$G(\xi) = F(\xi) H(\xi) \quad (3.1)$$

Se pretende determinar como  $G(\xi)$  es afectada por  $H(\xi)$ ; para ello la función de transferencia se puede escribir como:

$$H(\xi) = A_H(\xi) e^{-i\Phi_H(\xi)} \quad (3.2)$$

Donde ambas  $A_H(\xi)$  y  $\Phi_H(\xi)$  son funciones bipolares de valor real, a los cuales se les llama *amplitud de la función de transferencia del sistema* y *fase de la función de transferencia del sistema*

**Figura 3.1. Sistema LSI**

respectivamente.

En la representación frecuencial:

$$F(\xi) = A_F(\xi) e^{-i\Phi_F(\xi)} \quad (3.3)$$

$$G(\xi) = A_G(\xi) e^{-i\Phi_G(\xi)} \quad (3.4)$$

La salida puede ser expresada como:

$$A_G(\xi) e^{-i\Phi_G(\xi)} = A_F(\xi) A_H(\xi) e^{-i(\Phi_F(\xi) + \Phi_H(\xi))} \quad (3.5)$$

Claramente la amplitud del espectro de salida es justamente el producto de la amplitud del espectro de entrada y la amplitud de la función de transferencia; mientras que la fase del espectro de salida es simplemente la suma de los espectros de la fase de entrada y de la fase de la función de transferencia:

$$A_G(\xi) = A_F(\xi) A_H(\xi) \quad (3.6)$$

$$\Phi_G(\xi) = (\Phi_F(\xi) + \Phi_H(\xi)) \quad (3.7)$$

Por tanto ahora se puede expresar la señal de salida en términos de  $A_F(\xi)$ ,  $\Phi_F(\xi)$ ,  $A_H(\xi)$  y  $\Phi_H(\xi)$ ; es decir:

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1} [G(\xi)] \quad (3.8)$$

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[ A_F(\xi) A_H(\xi) e^{-i(\Phi_F(\xi) + \Phi_H(\xi))} \right] \quad (3.9)$$

De tal forma que solo necesitamos determinar los efectos de la amplitud y de la fase de la función de transferencia sobre la amplitud y la fase del espectro de entrada. Es conveniente considerar separadamente los efectos de tal forma que si un sistema es tal que  $e^{-i\Phi_H(\xi)} = 1$  para todo  $\xi$  se denomina *filtro de amplitud* y si se trata de un sistema donde  $A_H(\xi) = 1$  para todo  $\xi$  el sistema es un *filtro de solo fase*. En la realidad siempre nos encontraremos con una combinación de los dos; sin embargo uno de ellos predominará sobre el otro, por tanto los estudiaremos separadamente y luego en combinación.

Consideremos un sistema con función de transferencia bipolar de valor real  $A_H(\xi)$ , este sistema se puede mirar como un filtro de amplitud con  $n$  entero:

$$A_H(\xi) = H(\xi) \quad (3.10)$$

$$\Phi_H(\xi) = n2\pi \quad (3.11)$$

O un filtro combinado con:

$$A_H(\xi) = |H(\xi)| \quad (3.12)$$

$$\Phi_H(\xi) = \begin{pmatrix} n2\pi & H(\xi) > 0 \\ (2n+1)\pi & H(\xi) < 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Además si  $|H(\xi)| = 1$  el sistema es un filtro de pura fase.

### 3.1.2 Filtros de amplitud

Con la condición que  $e^{-i\Phi_H(\xi)} = 1$  para filtros de amplitud se tiene entonces que:

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[ A_F(\xi) A_H(\xi) e^{-i(\Phi_F(\xi))} \right] \quad (3.14)$$

La amplitud del espectro de entrada es modificada por  $A_H(\xi)$  pero la fase del espectro es inalterada; la naturaleza exacta de los cambios en la amplitud de la señal depende de los parámetros del sistema, pero en general la amplifica o la atenúa, en el caso de sistemas pasivos se asume que el único efecto es la atenuación y por simplicidad se tiene entonces que:  $|A_H(\xi)| \leq 1$  y  $\Phi_H(\xi) = 0$

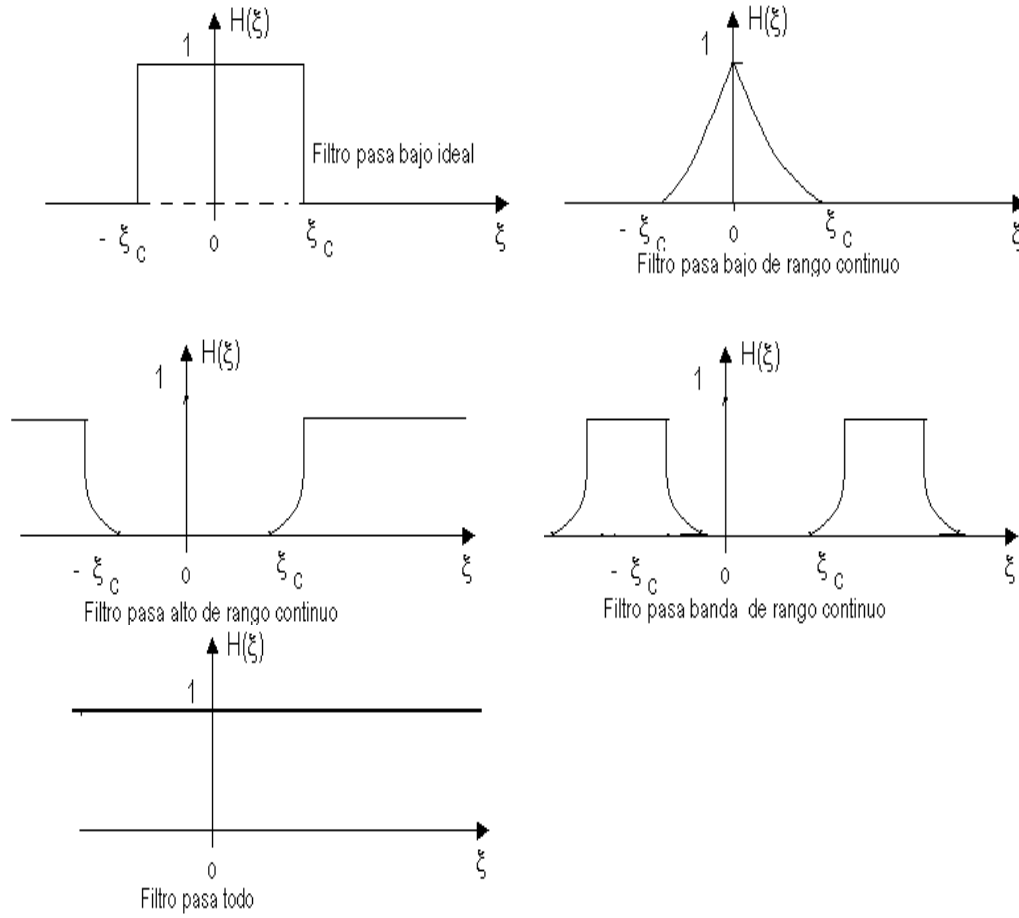
Si se consideran la clase de sistemas para los cuales  $A_H(\xi)$  es una constante es decir  $A_H(\xi) = A$  donde  $|A| \leq 1$  por tanto la salida es simplemente una versión atenuada no distorsionada de la entrada, en ese caso nos encontramos ante los llamados filtros de amplitud no distorsionadores; Si  $A_H(\xi)$  es variable el sistema introduce una distorsión en la amplitud y por tanto la salida no tendrá la misma forma que la entrada; los filtros de amplitud no distorsionadores son una forma de filtros pasa todo.

Uno de los más simples tipos de filtros de amplitud son los filtros de amplitud binaria, también conocidos como filtros ideales, la función de transferencia de tal filtro puede únicamente tomar valores de cero o uno, lo cual significa que las componentes de Fourier de la entrada son pasados todos por el sistema sin alteración o que ellos son completamente atenuados.

Filtros binarios verdaderos son usualmente considerados no realizables físicamente, pero son obtenidos bajo ciertas condiciones ópticas. Los Filtros de amplitud continua tiene la flexibilidad adicional que pueden causar que varias componentes de Fourier de la entrada sean atenuadas en algún grado no todas o ninguna como ocurre con los filtros binarios, además filtros de amplitud continua son mas frecuentemente encontrados en la practica que los filtros binarios. Funciones de transferencia típicas para estos dos tipos de filtros de amplitud son mostrados en la figura 3.2

Las dos primeras figuras son ilustrativas de filtros pasa bajo, tales filtros pasan sin atenuación todas las componentes de Fourier para las cuales  $\xi$  es menor que la frecuencia de corte  $\xi_c$  mientras que atenúan todas las componentes para las cuales  $|\xi| > \xi_c$ . Se debe notar que cuando una señal de banda limitada pasa a través de un filtro ideal pasa bajo no debe aparecer distorsión en la amplitud así como que la frecuencia de corte del filtro es más grande que la del espectro de la señal, esto es debido a que la cantidad debe corresponder con la frecuencia de corte de un filtro pasa bajo ideal.

Los filtros pasa alto efectivamente pasan todas las componentes espectrales para las cuales  $|\xi|$  es mas grande que algún valor especificado y elimina esas componentes para las cuales  $|\xi|$  es



**Figura 3.2. Filtros de amplitud**

menor que ese valor. Filtros que pasan únicamente las componentes de Fourier dentro de bandas de frecuencia específicas mientras que bloquean otras cuyas frecuencias están por fuera de estas bandas son llamados filtros pasa banda, las funciones de transferencia para filtros pasa banda y pasa alto se muestran en la figura 3.2.

**Ejemplo.** Con el propósito de observar los efectos producidos por los filtros de amplitud, vamos a considerar un ejemplo simple; por conveniencia se ha escogido un filtro de amplitud binario pasa bajo, cuya función de transferencia tiene la forma general siguiente

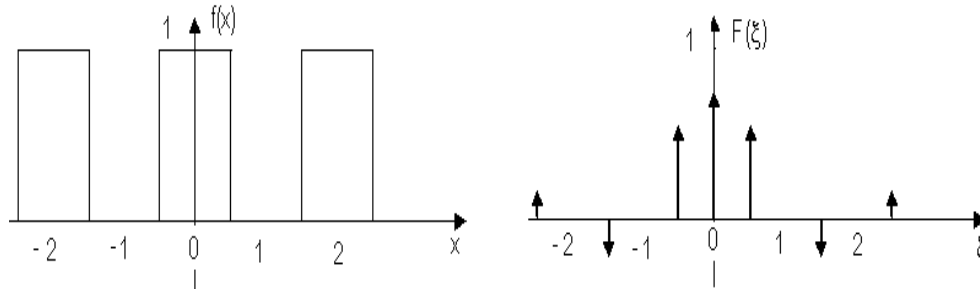
$$H(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_c}\right) \quad (3.15)$$

La señal de entrada es una función de onda rectangular:

$$f(x) = \text{rect}(x) * \frac{1}{2} \text{comb}\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3.16)$$

Con espectro dado por:

$$F(\xi) = \text{sinc}(\xi) \text{comb}(2\xi) \quad (3.17)$$



**Figura 3.3.** Función de onda rectangular usada como ejemplo para filtros de amplitud y su espectro

Como se muestra en la figura 3.3 el espectro de la salida puede ser expresado como:

$$G(\xi) = \text{sinc}(\xi) \text{comb}(2\xi) \text{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_c}\right) \quad (3.18)$$

Debido a que el valor de la frecuencia de corte  $\xi_c$  gobierna el ancho de la función de transferencia y este a su vez determina como algunas de las componentes espectrales aparecen a la salida, el espectro de salida y por tanto la misma salida depende fuertemente del valor de  $\xi_c$ . La respuesta impulsional de este sistema por tanto es:

$$h(x) = 2\xi_c \text{sinc}(2\xi_c x) \quad (3.19)$$

La forma de la convolución de la salida es por tanto:

$$g(x) = \left[ \text{rect}(x) * \frac{1}{2} \text{comb}\left(\frac{x}{2}\right) \right] * [2\xi_c \text{sinc}(2\xi_c x)] \quad (3.20)$$

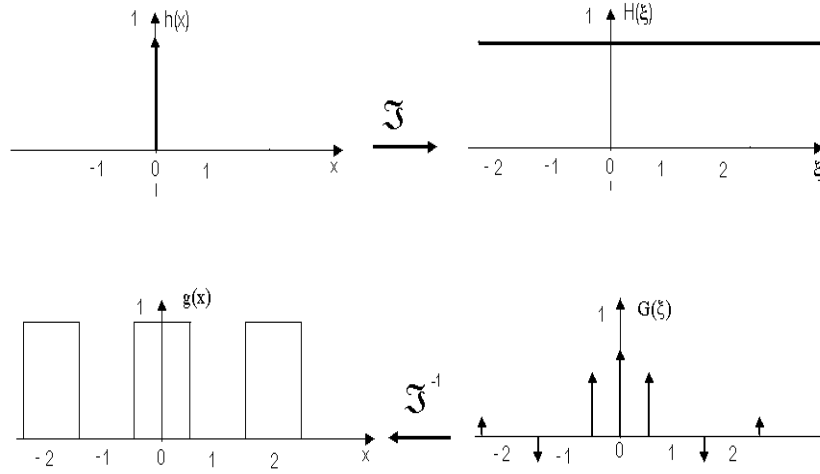
Donde se observa que la ecuación anterior es conveniente para determinar los efectos del sistema de una manera cualitativa; pero no es muy útil para obtener resultados cuantitativos. Ahora

procederemos a calcular la salida para varios valores de la frecuencia de corte.

1. Si la frecuencia de corte es  $\xi_c = \infty$ . La función de transferencia es la unidad para todo  $\xi$ ; no existe acción de filtrado producido por el sistema y todas las componentes de Fourier de la entrada son pasadas sin atenuación o desfase. El espectro de salida es exactamente el mismo que el espectro de entrada por tanto las señales de salida y entrada son iguales; por tanto:

$$g(x) = f(x) \quad (3.21)$$

Si se observa esta situación en el dominio de la señal de entrada, la respuesta impulsional llega a ser la función delta y se conoce que la convolución con esta función no produce esmoteado de la señal de entrada. (ver fig. 3.4).



**Figura 3.4. Efecto de un filtro pasa todo sobre la entrada de onda rectangular**

2. Si  $\xi_c = 2$  La función de transferencia llega a ser una función rectángulo cuyo ancho es cuatro unidades como se muestra en la figura 3.5. Como resultado la frecuencia fundamental cero y los tres armónicos componentes de la entrada son pasados inalteradamente, pero todas las componentes de alta frecuencia son filtradas a la salida; por tanto el espectro de salida es:

$$G(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{4}\right) \text{sinc}(\xi) \text{comb}(2\xi) \quad (3.22)$$

$$G(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{4}\right) \text{sinc}(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta\left(\xi - \frac{n}{2}\right) \quad (3.23)$$

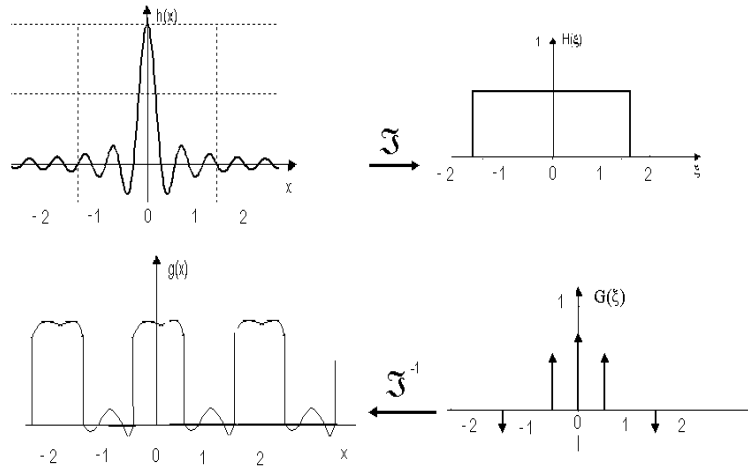
$$G(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{4}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \delta\left(\xi - \frac{n}{2}\right) \quad (3.24)$$

$$G(\xi) = \frac{1}{2} \delta(\xi) + \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{\pi} \delta\left(\xi - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \delta\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{-2}{3\pi} \delta\left(\xi - \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3\pi} \delta\left(\xi + \frac{3}{2}\right) \right] \quad (3.25)$$

$$G(\xi) = \frac{1}{2} \delta(\xi) + \frac{2}{\pi} \delta\delta(2\xi) - \frac{2}{9\pi} \delta\delta\left(\frac{2\xi}{3}\right) \quad (3.26)$$

Por consiguiente la salida es obtenida como:

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\pi x) \quad (3.27)$$



**Figura 3.5.** Efecto de un filtro ideal pasa bajo sobre la entrada de onda rectangular para  $\xi_c = 2$

3. Si  $\xi_c = 1$  la función de transferencia es ahora una función rectángulo de ancho dos y el espectro de salida es encontrado como:

$$G(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \delta\left(\xi - \frac{n}{2}\right) \quad (3.28)$$



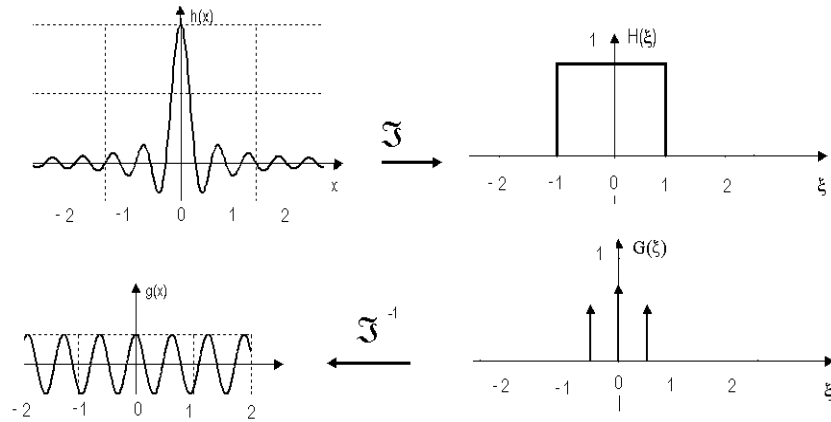
$$G(\xi) = \frac{1}{2}\delta(\xi) + \frac{2}{\pi}\delta\delta(2\xi) \quad (3.29)$$

Por consiguiente la salida es obtenida como:

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\pi x) \quad (3.30)$$

Lo cual significa que la señal de salida contiene únicamente la frecuencia cero y las componentes fundamentales de la entrada. Todas las componentes con frecuencia más alta que la fundamental son filtradas. (Ver figura 3.6). Es interesante mostrar que la salida será escasamente descrita para el rango  $0.5 < \xi_c < 1.5$ .

Desde el punto de vista de la convolución. La respuesta impulsional ahora tiene un ancho de aproximadamente el periodo de  $f(x)$  como se muestra en la figura 3.6 y el esmoteado resultante es mayor que en los anteriores filtrados. Se debe puntualizar que es muy difícil determinar la forma exacta de la salida por el método de convolución.



**Figura 3.6.** Efecto de un filtro ideal pasa bajo sobre la entrada de onda rectangular para  $\xi_c = 1$

4. Si  $\xi_c = 0.25$ ; se tiene que  $H(\xi) = \text{rect}(2\xi)$ ; así que:

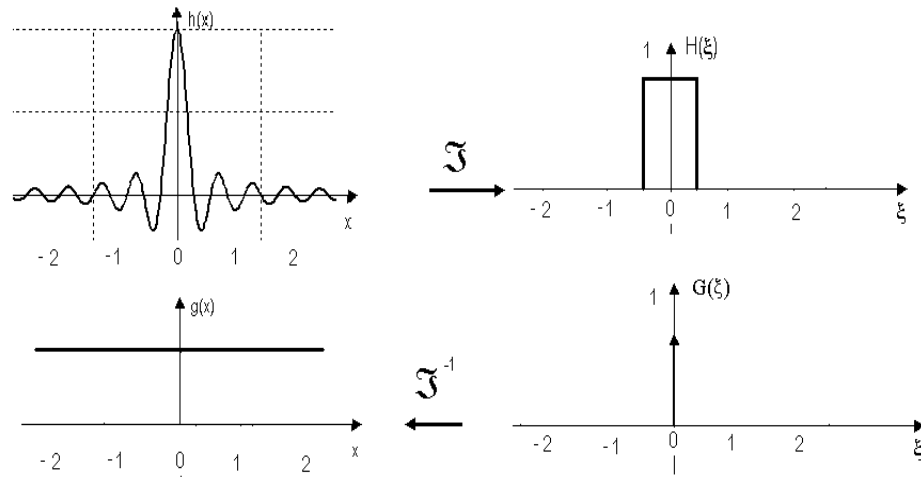
$$G(\xi) = \text{rect}(2\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \delta\left(\xi - \frac{n}{2}\right) \quad (3.31)$$

$$G(\xi) = \frac{1}{2}\delta(\xi) \quad (3.32)$$

Así, la componente fundamental de Fourier, y todos los armónicos altos ahora han sido eliminados por el sistema y la salida simplemente llega a ser una constante como se muestra en la figura 3.7.

$$g(x) = \frac{1}{2} \quad (3.33)$$

De nuevo es interesante notar que tan grande como es  $0 < \xi_c < 0.5$  la salida tendrá el valor constante de 0.5. Viendo la salida una vez mas como una convolución, la respuesta impulsional es tan ancha que esmotea completamente todas las variaciones en la entrada.



**Figura 3.7.** Efecto de un filtro ideal pasa bajo sobre la entrada de onda rectangular para  $\xi_c = 0.25$

En este ejemplo de filtro de amplitud binario se ha visto que el ancho de la función de transferencia influye en la salida del sistema: entre más ancha la función de transferencia mas parecida es la señal de salida a la señal de entrada y entre menos ancha la función de transferencia menos parecidas las dos señales.

En la figura 3.8 se ilustra la función de transferencia y la respuesta impulsional para varios diferentes filtros de amplitud. En resumen se debe indicar el comportamiento de estos sistemas mostrando la salida cuando la entrada es de la forma como el ejemplo anterior.

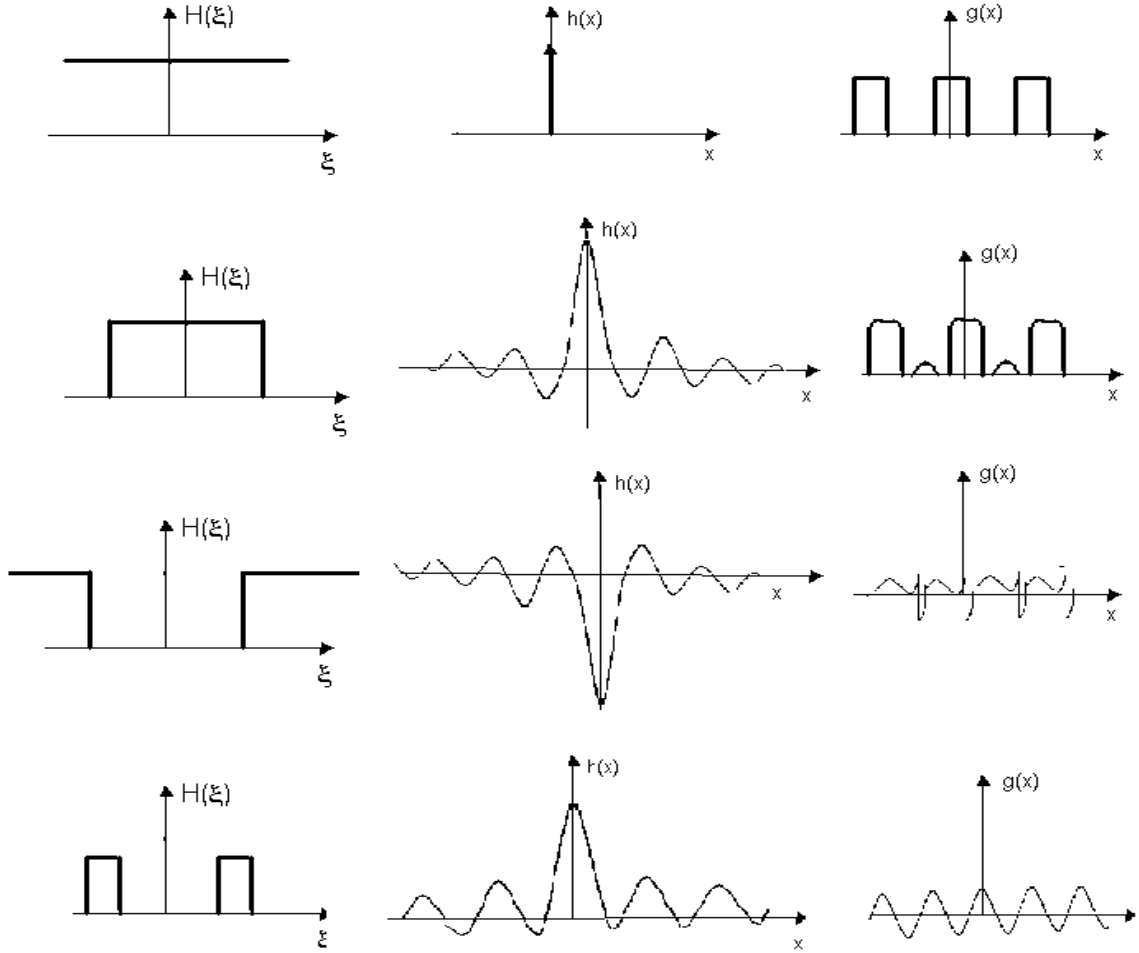


Figura 3.8. Funciones de transferencia, respuesta impulsional para diferentes filtros de amplitud

### 3.1.3 Filtros de Fase

Un filtro de fase es un sistema que causa que el espectro de la fase de la señal de entrada sea alterado de alguna forma; mientras el espectro de amplitud de la señal de entrada permanezca inalterado. Debe ser notado sin embargo que un filtro de fase verdadero es simplemente un caso especial de filtro pasa todo y es por tanto físicamente irrealizable. Con la consideración que  $A_H(\xi) = 1$  para los filtros de fase, se tiene:

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[ A_F(\xi) e^{-i(\Phi_F(\xi) + \Phi_H(\xi))} \right] \quad (3.34)$$

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[ F(\xi) e^{-i\Phi_H(\xi)} \right] \quad (3.35)$$

Todas las componentes de Fourier de la entrada son pasadas por el sistema sin atenuación, pero la fase de estas componentes puede ser desplazada; como resultado todas las componentes de la entrada estarán a la salida pero sus posiciones relativas han sido modificadas a tal grado que la salida es severamente distorsionada.

Se comenzará el análisis de los filtros de fase considerando el caso para el cual la función  $\Phi_H(\xi)$  varia linealmente con  $\xi$  es decir un filtro con fase lineal, específicamente el caso es:

$$\Phi_H(\xi) = 2\pi x_0 \xi \quad (3.36)$$

Donde  $x_0$  es una constante real, por tanto el espectro de salida es:

$$G(\xi) = F(\xi)e^{-i2\pi x_0 \xi} \quad (3.37)$$

$$G(\xi) = A_F(\xi)e^{-i(\Phi_F(\xi)+2\pi x_0 \xi)} \quad (3.38)$$

Y se puede ver que mientras todas las componentes de la entrada están presentes en la salida, ellas tienen un desfase de  $2\pi x_0 \xi$ . La salida por tanto es:

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1} [F(\xi)e^{-i2\pi x_0 \xi}] \quad (3.39)$$

De donde se obtiene que:

$$g(x) = f(x - x_0) \quad (3.40)$$

Se puede observar que un filtro de fase lineal simplemente causa que la salida sea una versión desfasada de la señal de entrada. Se debe notar que la cantidad de desfase introducido por el filtro de fase lineal es igual a la pendiente de  $\Phi_H(\xi)$  dividida por  $2\pi$ , es decir:

$$shift = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\xi} (2\pi x_0 \xi) = x_0 \quad (3.41)$$

La respuesta impulsional de este filtro lineal es dada por:

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1} [e^{-i2\pi x_0 \xi}] \quad (3.42)$$

$$h(x) = \delta(x - x_0) \quad (3.43)$$

Y de la expresión anterior es fácil observar que la señal de salida es una versión desfasada de la señal de entrada

$$g(x) = f(x) * h(x) \quad (3.44)$$

$$g(x) = f(x) * \delta(x - x_0) \quad (3.45)$$

$$g(x) = f(x - x_0) \quad (3.46)$$

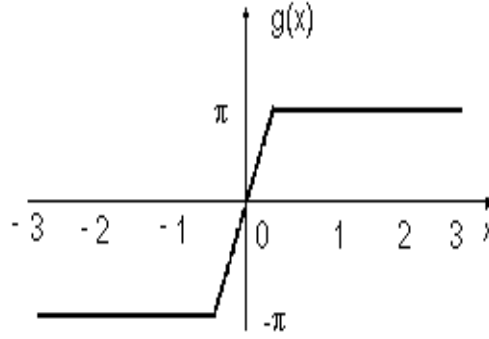
Como la salida no se deteriora, este filtro se denomina filtro de fase no distorsionador. Si la función de transferencia no es una función lineal de  $\xi$  el sistema normalmente introducirá una distorsión en la fase; sin embargo para el caso especial donde  $\Phi_H(\xi)$  es constante esta afirmación es falsa. Por tanto si  $\Phi_H(\xi) = B$  donde  $B$  es una constante real la salida es exactamente la entrada multiplicada por  $e^{-iB}$ , es decir  $g(x) = f(x) e^{-iB}$ .

**Ejemplo.** Se considera ahora un ejemplo en el cual distorsión de fase es encontrada. De nuevo la entrada es una función de onda rectangular y la función de transferencia de fase es:

$$\Phi_H(\xi) = \pi \xi \operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \pi \operatorname{sgn}(\xi) \left[1 - \operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right] \quad (3.47)$$

Como se muestra en la figura 3.9 es aparente que todas las componentes espectrales para las cuales  $|\xi| > 1$  serán desplazadas en fase por  $\pm\pi$  radianes lo cual únicamente introduce un signo inverso, mientras que las componentes para las cuales  $|\xi| \leq 1$  caerán en un desfase que es proporcional a  $\xi$ . Expresando la entrada por una expansión en series de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\pi x) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\pi x) \quad (3.48)$$



**Figura 3.9.** Función de transferencia de un filtro de fase que produce distorsión de fase

Se nota que el efecto de  $\Phi_H(\xi)$  es llevar a la frecuencia cero componentes no desfasadas, desplazar las componentes fundamentales por  $\frac{\pi}{2}$  y revertir los signos de todas las componentes del tercer armónico hacia arriba, de tal forma que la salida puede ser escrita como:

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \pi \left( x - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3\pi} \cos(3\pi x) - \frac{2}{5\pi} \cos(5\pi x) + \dots \quad (3.49)$$

Será ahora conveniente adicionar y restar la cantidad  $\left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \pi(x) \right]$  al lado derecho de la ecuación (49) es decir:

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \pi \left( x - \frac{1}{2} \right) + \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \pi(x) \right] - \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \pi(x) \right] + \frac{2}{3\pi} \cos(3\pi x) - \frac{2}{5\pi} \cos(5\pi x) + \dots \quad (3.50)$$

Debido a este desarrollo  $g(x)$  se puede expresar como:

$$g(x) = 1 - f(x) + \frac{2}{\pi} \left[ \cos \pi \left( x - \frac{1}{2} \right) + \cos \pi(x) \right] \quad (3.51)$$

$$g(x) = 1 - f(x) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \pi \left( x - \frac{1}{4} \right) \quad (3.52)$$

Será muy instructivo encontrar la respuesta impulsional para este sistema; La función de transferencia tiene la forma:

$$H(\xi) = e^{-i\pi(\xi \text{rect}(\frac{\xi}{2}) + \text{sgn}(\xi)[1 - \text{rect}(\frac{\xi}{2})])} \quad (3.53)$$

Después de algunas manipulaciones de la ecuación anterior se obtiene:

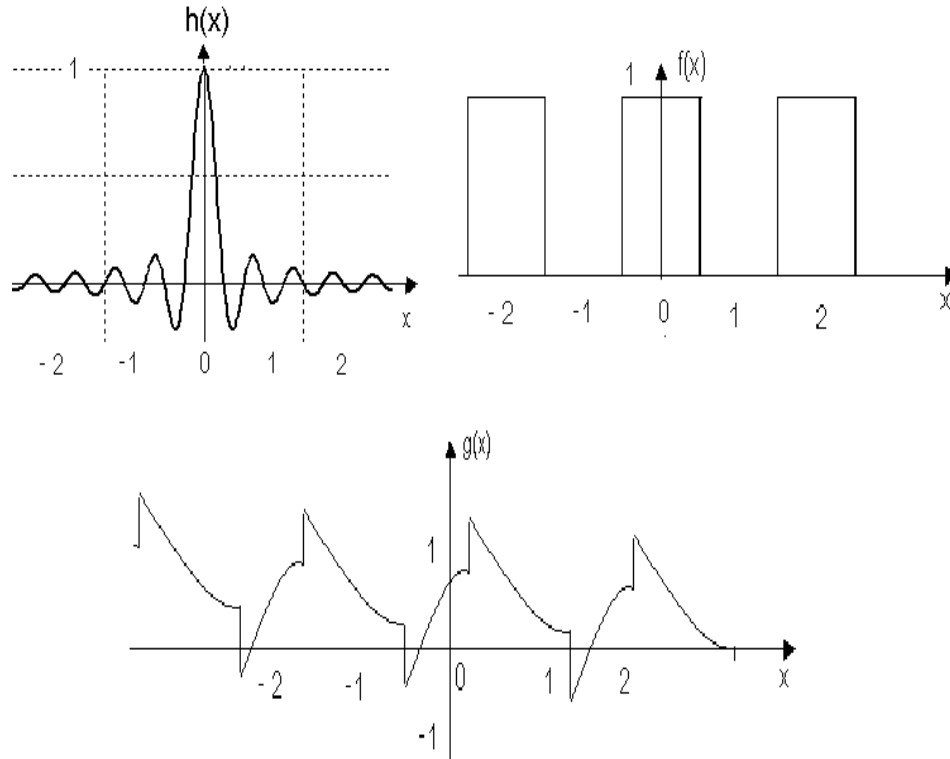
$$H(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{2}\right) [1 + e^{-i\pi\xi}] - 1 \quad (3.54)$$

Y la respuesta impulsional por tanto es:

$$h(x) = 2\text{sinc}(2x) * [\delta(x - 0.5) + \delta(x)] - \delta(x) \quad (3.55)$$

$$h(x) = 2\text{sinc}(2(x - 0.5)) + 2\text{sinc}(2x) - \delta(x) \quad (3.56)$$

Tanto  $g(x)$  como  $h(x)$  son graficadas en la figura 3.10 donde se observa la señal de entrada, la respuesta impulsional y la distorsión notoria en la señal de salida



**Figura 3.10. a.) Respuesta impulsional. b) señal de entrada c) señal de salida**

Todos estos filtros investigados son llamados *filtros de fase continua* por el rango de continuidad de los valores permitidos para  $\Phi_H(\xi)$ . Se puede observar que la función de transferencia de estos

filtros es en general de valor complejo y se puede asumir que cualquier valor se encuentra dentro de un círculo unitario tal que  $|H(\xi)| = 1$ . Un *filtro de base binario* de otro lado tiene una función de transferencia de fase que es limitada justo a dos valores, otra vez la función de transferencia es generalmente de valor complejo con  $|H(\xi)| = 1$  pero es ahora limitada únicamente a dos valores en el círculo unitario.

## 3.2 EJERCICIOS RESUELTOS

### 3.2.1 Filtros lineales

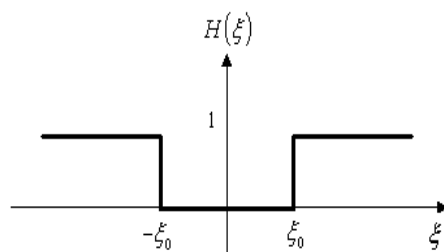
Se tiene un filtro cuya función de transferencia está dada por:

$$H(\xi) = -\text{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_0}\right) + 1 \quad (3.57)$$

A. Graficar la función de transferencia.

**SOLUCION:**

La solución está graficada en la figura 1.



**Figura 3.11. Función de transferencia**

B. Encontrar analíticamente la respuesta impulsional.

**SOLUCION:**



$$h(x) = \Im[H(\xi)] = \Im \left[ -\text{rect} \left( \frac{\xi}{2\xi_0} \right) + 1 \right] = \Im \left[ -\text{rect} \left( \frac{\xi}{2\xi_0} \right) \right] \Im[1] \quad (3.58)$$

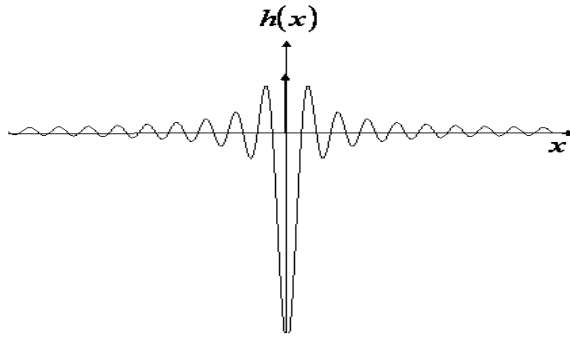
De donde se obtiene:

$$h(x) = 2\xi_0 \text{sinc}(2\xi_0 x) + \delta(x) \quad (3.59)$$

C. Graficar la respuesta impulsional.

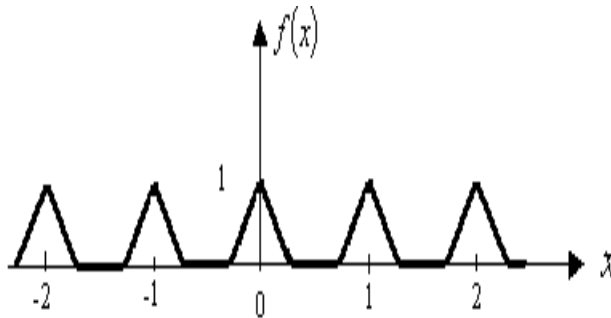
**SOLUCION:**

La solución está graficada en la figura 2.



**Figura 3.12. Respuesta impulsional**

D. Se considera una señal de entrada como la mostrada en la figura 3. Encuentre explícitamente la ecuación matemática que la representa (Asuma una señal infinita).



**Figura 3.13. Señal de entrada**

**SOLUCION:**

La señal corresponde a la convolución de un tri con una comb; es decir:

$$f(x) = \text{tri}(4x) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \quad (3.60)$$

E. Encuentre la señal de salida y concluya que clase de filtro es.

**SOLUCION:**

La salida por tanto la convolución de la señal de entrada con la respuesta impulsional del sistema; es decir:

$$g(x) = \left[ \text{tri}(4x) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \right] * [2\xi_0 \text{sinc}(2\xi_0 x) + \delta(x)] \quad (3.61)$$

Se obtiene un filtro ideal pasa alto

### 3.2.2 Sistemas *LSI*

Considere un sistema *LSI* cuya respuesta impulsional tiene la forma:

$$h(x) = \left| \frac{1}{b} \right| \text{sinc}^2\left(\frac{x}{b}\right) \quad (3.62)$$

Al cual se le aplica una señal de entrada de la forma:

$$f(x) = A \cos(2\pi\xi_0 x) \quad (3.63)$$

A. Encontrar analíticamente y graficar la función de transferencia.

**SOLUCION:**

$$H(\xi) = \mathfrak{F}[h(x)] = \mathfrak{F}\left[\left|\frac{1}{b}\right| \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{b}\right)\right] = \quad (3.64)$$

De donde se obtiene: Grafica de la función de transferencia

$$H(\xi) = \operatorname{tri}(b\xi) \quad (3.65)$$

La solución está graficada en la figura 4.

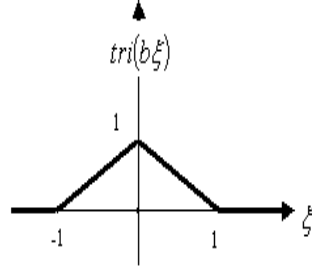


Figura 3.14. Grafica de la función de transferencia

B. Encuentre la señal de salida.

**SOLUCION:**

En la representación frecuencial se tiene que:

$$G(\xi) = H(\xi) F(\xi) \quad (3.66)$$

Se sabe que:

$$F(\xi) = \mathfrak{F}[f(x)] = \mathfrak{F}[A \cos(2\pi\xi_0 x)] \quad (3.67)$$

Por consiguiente:

$$F(\xi) = \frac{A}{2|\xi_0|} \delta\delta\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \quad (3.68)$$

Reemplazando:

$$G(\xi) = \operatorname{tri}(b\xi_0) \frac{A}{2|\xi_0|} \delta\delta\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \quad (3.69)$$

Pero:

$$g(x) = \Im^{-1} \left[ tri(b\xi_0) \frac{A}{2|\xi_0|} \delta\delta\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \right] \quad (3.70)$$

Resolviendo:

$$g(x) = tri(b\xi_0) \Im^{-1} \left[ \frac{A}{2|\xi_0|} \delta\delta\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) \right] \quad (3.71)$$

Finalmente:

$$g(x) = tri(b\xi_0) A \cos(2\pi\xi_0 x) \quad (3.72)$$

Por consiguiente:

$$g(x) = tri(b\xi_0) f(x) \quad (3.73)$$

C. Cómo es la señal de salida respecto de la señal de entrada?.

**SOLUCION:**

La señal de salida es exactamente igual a la señal de entrada y la magnitud es determinada por el valor de  $tri(b\xi_0)$ .

D. Qué valor toma la magnitud de la señal de salida si  $|b\xi_0| > 1$ .

**SOLUCION:**

Cuando  $|b\xi_0| > 1$  se tiene que  $g(x) = 0$