

## 2. MATEMATICAS ESPECIALES DE LA OPTICA

### 2.1 FUNCIONES BASICAS

#### 2.1.1 Funciones unidimensionales

Función	Definición
step	$step\left(\frac{x-x_0}{b}\right) = \begin{cases} 0, & \text{Si } \frac{X}{b} < \frac{X_0}{b} \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } \frac{X}{b} = \frac{X_0}{b} \\ 1, & \text{Si } \frac{X}{b} > \frac{X_0}{b} \end{cases}$
signo	$sgn\left(\frac{x-x_0}{b}\right) = \begin{cases} -1, & \text{Si } \frac{X}{b} < \frac{X_0}{b} \\ 0, & \text{Si } \frac{X}{b} = \frac{X_0}{b} \\ 1, & \text{Si } \frac{X}{b} > \frac{X_0}{b} \end{cases}$
Rectangulo	$rect\left(\frac{x-x_0}{b}\right) = \begin{cases} 0, & \text{Si } \left \frac{X-X_0}{b}\right  > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } \left \frac{X-X_0}{b}\right  = \frac{1}{2} \\ 1, & \text{Si } \left \frac{X-X_0}{b}\right  < \frac{1}{2} \end{cases}$
rampa	$ramp\left(\frac{x-x_0}{b}\right) = \begin{cases} 0, & \text{Si } \frac{X}{b} \leq \frac{X_0}{b} \\ \left \frac{X-X_0}{b}\right , & \text{Si } \frac{X}{b} > \frac{X_0}{b} \end{cases}$
triangulo	$tri\left(\frac{x-x_0}{b}\right) = \begin{cases} 0, & \text{Si } \left \frac{X-X_0}{b}\right  \geq 1 \\ 1 - \left \frac{X-X_0}{b}\right , & \text{Si } \left \frac{X-X_0}{b}\right  < 1 \end{cases}$
sinc	$sinc\left(\frac{x-x_0}{b}\right) = \frac{\sin\pi\left(\frac{x-x_0}{b}\right)}{\pi\left(\frac{x-x_0}{b}\right)}$
$sinc^2$	$\left  sinc\left(\frac{x-x_0}{b}\right) = \frac{\sin\pi\left(\frac{x-x_0}{b}\right)}{\pi\left(\frac{x-x_0}{b}\right)} \right ^2$
Gaussiana	$Gaus\left(\frac{x-x_0}{b}\right) = \exp\left[-\pi\left(\frac{x-x_0}{b}\right)^2\right]$
Impulso	$\delta(x) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{b} Gaus\left(\frac{x}{b}\right)$

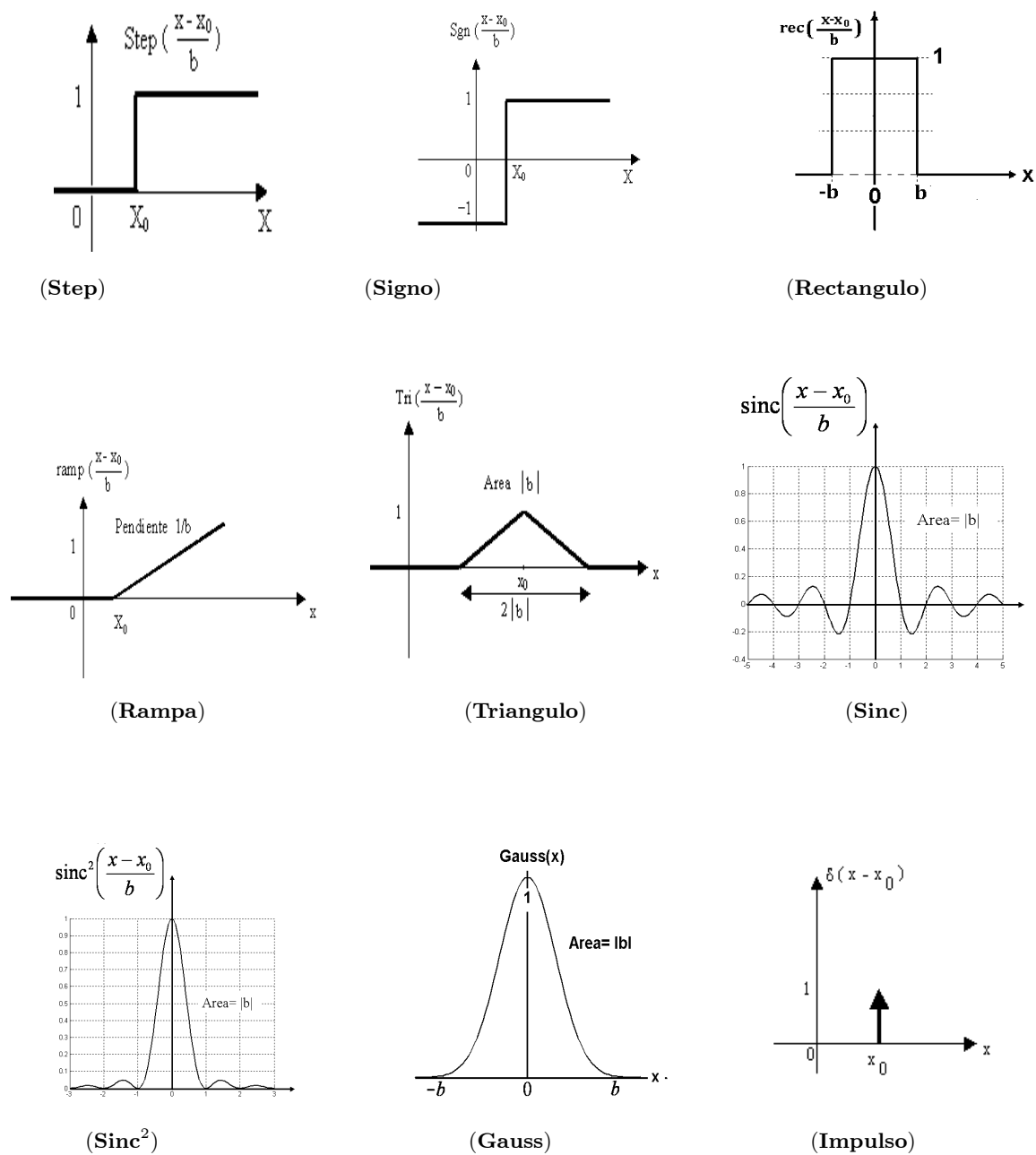


Figura 2.1. Funciones especiales unidimensionales

Propiedades de la función impulso:

$$\delta(x - x_0) = 0, \quad \text{si } x \neq x_0 \quad (2.1)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\alpha) \delta(\alpha - x_0) d\alpha = f(x_0), \quad x_1 < x_0 < x_2 \quad (2.2)$$

Propiedades de escalamiento

$$\delta\left(\frac{x - x_0}{b}\right) = |b| \delta(x - x_0) \quad (2.3)$$

$$\delta(ax - x_0) = \frac{1}{|a|} \delta\left(x - \frac{x_0}{a}\right) \quad (2.4)$$

$$\delta(-x + x_0) = \delta(x - x_0) \quad (2.5)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (2.6)$$

Propiedades en productos

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0) \quad (2.7)$$

$$x \delta(x - x_0) = x_0 \delta(x - x_0) \quad (2.8)$$

$$\delta(x) \delta(x - x_0) = 0, \quad \text{Si } x_0 \neq 0 \quad (2.9)$$

$$\delta(x - x_0) \delta(x - x_0) = \text{indefinido} \quad (2.10)$$

Propiedades en integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \delta(\alpha - x_0) d\alpha = A \quad (2.11)$$

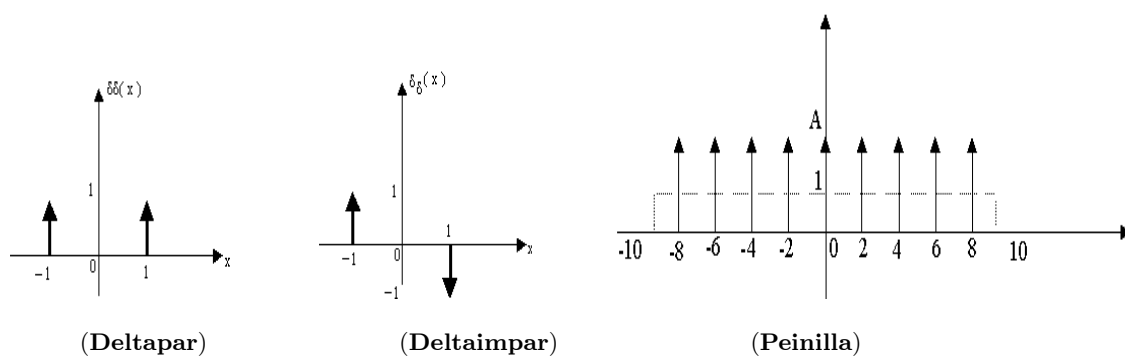
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - x_0) d\alpha = 1 \quad (2.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - x_0) \delta(x - \alpha) d\alpha = \delta(x - x_0) \quad (2.13)$$

Función Impulso par e impar

$$\delta_{\delta}(x) = [\delta(x + 1) + \delta(x - 1)] \quad (2.14)$$

$$\delta_{\delta}(x) = [\delta(x + 1) - \delta(x - 1)] \quad (2.15)$$



**Figura 2.2. Funciones especiales de la función impulso**

Función peinilla de Dirac

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \quad (2.16)$$

$$\text{comb}\left(\frac{x-x_0}{b}\right) = |b| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0-nb) \quad (2.17)$$

**Taller de funciones básicas unidimensionales.** En la solución de problemas científicos y de ingeniería se encuentran situaciones las cuales no se pueden plantear con expresiones algebraicas simples, es necesario entonces introducir funciones específicas que nos representen parámetros físicos.

Dado que  $f(x) = \text{rect}(x+2) + \text{rect}(x-2)$ , dibuje las siguientes funciones:

- a.  $f(x)$
- b.  $g(x) = f(x-1)$
- c.  $h(x) = f(x) \text{sgn}(x)$
- d.  $p(x) = h(x-1)$

Funciones compuestas

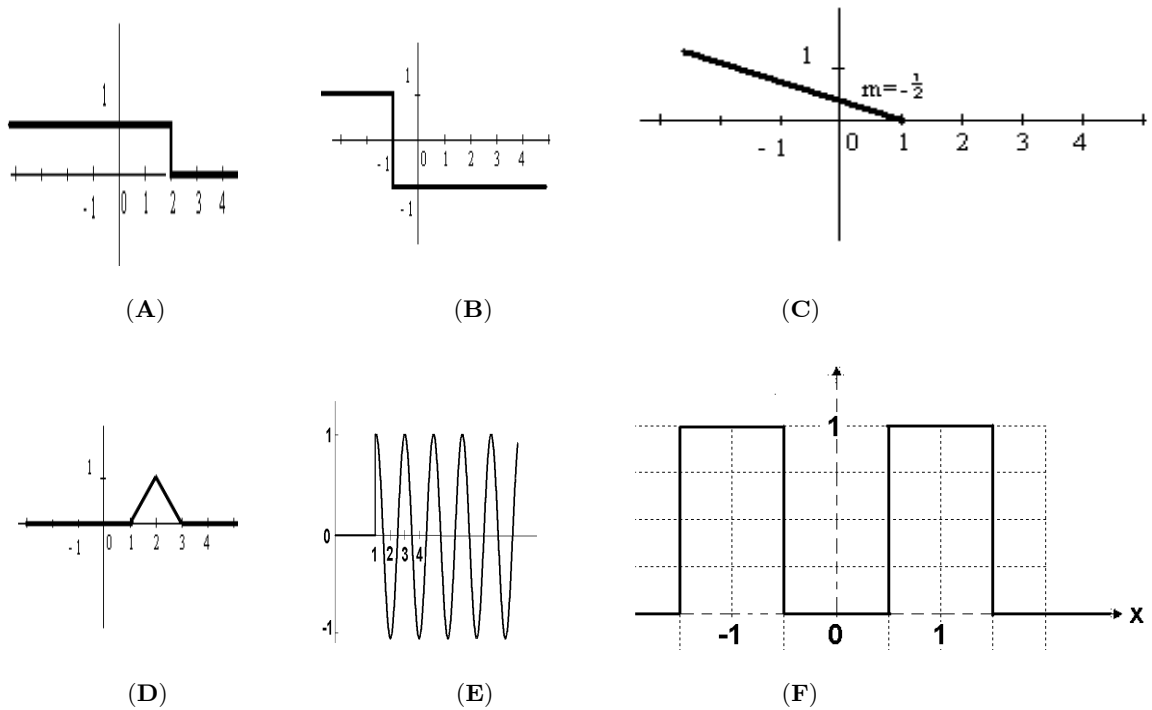
- a.  $f(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{4}\right) - \text{rect}\left(\frac{x}{2}\right)$
- b.  $g(x) = 2\text{tri}\left(\frac{x}{2}\right) - \text{tri}(x)$
- c.  $h(x) = 2\text{tri}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\text{tri}(x)$
- d.  $p(x) = \left[\text{rect}\left(\frac{x}{4}\right) - \text{tri}\left(\frac{x}{2}\right)\right] \text{sgn}(x)$

Dadas las constantes reales positivas  $b$  y  $x_0$  y la función  $f(x) = \text{tri}(x) \text{step}(x)$  dibuje lo siguiente:

- a.  $f(x)$
- b.  $f\left(\frac{x}{b}\right)$
- c.  $f(x-x_0)$

Análisis gráfico

Dadas las gráficas unidimensionales de la figura 2.3 escribir su ecuación en términos de las funciones estudiadas en clase:



**Figura 2.3.** Gráficas de las funciones propuestas

Para cada una de las funciones especiales definidas en el numeral anterior encontrar su gráfica correspondiente y determinar analíticamente el valor de su área.

Realizar un gráfico comparativo de las funciones  $tri(x)$ ,  $sinc(x)$ ,  $sinc^2(x)$  y  $Gauss(x)$

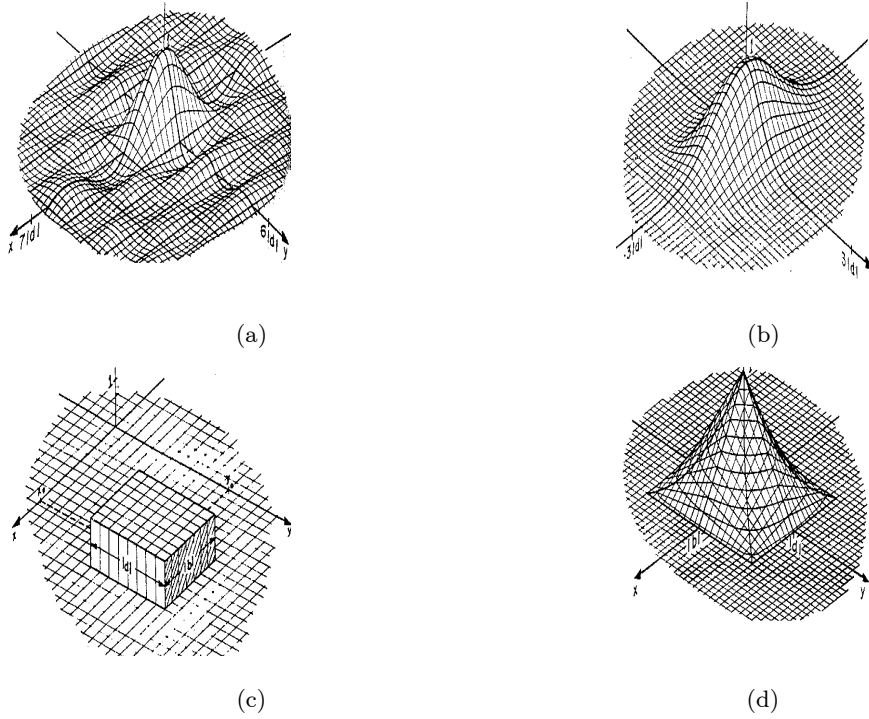
### 2.1.2 Funciones bidimensionales

#### Coordenadas rectangulares:

Las funciones dos dimensionales que se utilizan en los problemas de óptica normalmente cumplen con la propiedad de separación de variables; por tanto se pueden escribir de manera general como el producto de dos funciones unidimensionales en las dos variables; es decir:

$$f(x, y) = g(x)h(y) \quad (2.18)$$

**Taller de funciones básicas bidimensionales.** Dadas las gráficas bidimensionales de la figura 2.4 escribir su ecuación en términos de las funciones estudiadas en clase:



**Figura 2.4. Gráficas propuestas**

### Coordenadas polares:

En la mayoría de los sistemas ópticos los elementos utilizados poseen simetría radial cerca del eje óptico en una primera aproximación; por tanto en muchos casos es conveniente utilizar geometría polar para describir estos elementos.

Definición de Funciones:

a.) Función *cilindro*

$$cyl\left(\frac{r}{d}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < \frac{d}{2} \\ \frac{1}{2}, & r = \frac{d}{2} \\ 0, & r > \frac{d}{2} \end{cases}$$

b.) Función *sombrero*

$$somb\left(\frac{r}{d}\right) = \frac{2J_1\left(\pi\frac{r}{d}\right)}{\left(\pi\frac{r}{d}\right)} \quad (2.19)$$

Donde  $J_1$  es la función de Bessel de orden 1.

c.) Función *Gaussiana*

$$Gauss\left(\frac{r}{d}\right) = \exp\left[-\pi\left(\frac{r}{d}\right)^2\right] \quad (2.20)$$

**Taller gráfica de funciones.** b.) Encontrar el volumen de cada una de las funciones definidas en los literales anteriores.

c.) Graficar en detalle cada una de las funciones definidas en literales anteriores.

## 2.2 ANALISIS ARMONICO

### 2.2.1 Ortogonalidad de funciones

En este ítem se presentan los conceptos fundamentales sobre los cuales se soporta la descomposición de funciones.

### 2.2.2 Conceptos básicos

Dada la función  $\psi_n(t)$  la cual forma un completo conjunto ortogonal en el intervalo  $(t_1, t_2)$ ; casi cualquier función arbitraria  $f(t)$  puede ser expandida en este intervalo de acuerdo a :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(t) \quad (2.21)$$

La condición de ortogonalidad permite calcular los coeficientes  $c_n$  y además se debe cumplir que:

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt < \infty \quad (2.22)$$

Donde  $f(t)$  es diferente de cero en el intervalo  $(t_1 \leq t \leq t_2)$ .



En el caso de tener una serie infinita; la función debe ser aproximada por una función truncada la cual contiene solo un número finito de términos y se deberá buscar la mejor aproximación, por tanto se debe emplear el concepto de integral de error cuadrático medio:

$$\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - f'(t)]^2 dt = \text{minimo} \quad (2.23)$$

Donde  $f'(t)$  es la versión truncada de  $f(t)$ .

### 2.2.3 Funciones complejas

En el estudio de los sistemas lineales estas funciones son importantes:

$$\psi_n(t) = \exp(in2\pi\nu_0 t) \quad (2.24)$$

Con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Estas funciones forman la base de la expansión en series de Fourier son ortogonales sobre cualquier intervalo igual a un número entero de periodos del término de primer orden o Componente fundamental esto es:

$$t_1 - t_2 = k \left( \frac{1}{\nu_0} \right) \quad (2.25)$$

Con  $k = 1, 2, 3, \dots$

### 2.2.4 Series de Fourier

Partimos de la expansión en serie de Fourier para llegar a la integral de Fourier

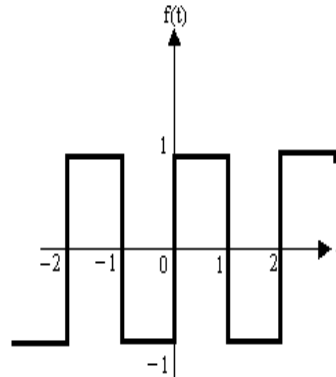
Consideremos expansión de funciones periódicas. La función  $f(t)$  es periódica con el periodo  $T = \nu_0^{-1}$  Puede ser representada por una serie de Fourier si satisface las condiciones de Dirichlet.

En un intervalo infinito ( $t_1 \leq t \leq t_2$ )  $f(t)$  debe ser:

1. Monovaluada
2. Tiene un número finito de máximos y mínimos
3. No tiene discontinuidades
4. Es absolutamente integrable

### 2.2.5 Análisis gráfico

Dada la gráfica de la fig 2.5 expandir en serie de Fourier tanto analíticamente como gráficamente.



**Figura 2.5.** Curva propuesta

Dada la función  $\text{rec}_{\frac{t}{T}}$  expandir en serie de Fourier tanto analíticamente como gráficamente.

### 2.2.6 Aproximación de polinomio a una señal con forma de onda

En el presente laboratorio hipotético se pretende mostrar como se puede aproximar un polinomio a una señal.

El fundamento teórico se encuentra soportado en la aproximación que utiliza la forma general de la serie de Taylor a una función  $f(t)$  en la región del punto  $t = a$

### 2.2.7 Tarea

El polinomio

$$f_1(t) = a + bt + ct^2 \quad (2.26)$$

Se quiere aproximar a la función:

$$f_2(t) = \exp(t) \quad (2.27)$$

En los instantes  $t = 0$ ,  $t = 1$  y  $t = 2$ . Encuentre los valores requeridos de  $a$ ,  $b$  y  $c$  que realicen la mejor aproximación.

**Utilización del valor mínimo del error cuadrático medio en la aproximación de una función  $f_1(t)$  a otra  $f_2(t)$ .** En el presente laboratorio hipotético se pretende mostrar como se puede aproximar un polinomio a otro mediante la ayuda del valor mínimo del error cuadrático medio.

La idea básica es comparar dos señales sobre un intervalo definido  $t_1 < t < t_2$  es decir:

$$f_2(t) \approx C_{12} \cdot f_1(t) \quad (2.28)$$

Y por tanto se desea escoger  $C_{12}$  de tal forma que se logre la mejor aproximación; para ello se debe tener en cuenta la función error:

$$f_e(t) = f_1(t) - C_{12} \cdot f_2(t) \quad (2.29)$$

**Tarea.** La función

$$f_1(t) = \exp(t) - 1 \quad (2.30)$$

Puede ser aproximada a la función rampa:

$$f_2(t) = At \quad (2.31)$$

En el intervalo  $0 < t < 1$ : Encuentre el valor de la constante  $A$  el cual da el mínimo valor del error cuadrático medio entre las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ .

Los llamados polinomios de Legendre forman un conjunto de funciones mutuamente ortogonales en el intervalo  $-1 < t < 1$  y son definidos por la formula:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (2.32)$$

Probar que los dos polinomios de Legendre  $P_0(t)$  y  $P_2(t)$  Son ortogonales. Mostrar esta situación analíticamente y gráficamente.

## 2.3 LA SERIE DE FOURIER

### 2.3.1 Generalidades

El procedimiento es partir de la serie de Fourier para poder obtener la integral de Fourier; se presume que los estudiantes están familiarizados con la serie de Fourier.

La serie de Fourier es una expansión dada por:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(t) \quad (2.33)$$

Es utilizada principalmente para representar funciones periódicas; sin embargo se podrá utilizar en el caso de funciones no periódicas; las funciones base de esta serie son:

$$\psi_n(t) = \exp(in2\pi\nu_0 t) \quad (2.34)$$

Con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

O las funciones:

$$\psi_n(t) = \sin(2n\pi\nu_0 t) \quad (2.35)$$

y

$$\psi_n(t) = \cos(2n\pi\nu_0 t) \quad (2.36)$$

Considerando la expansión de funciones periódicas. Sea  $f(t)$  una función periódica con periodo  $T = \nu_0^{-1}$  puede ser representada por una serie de Fourier si cumple con las condiciones de Dirichlet en el intervalo finito  $t_1 \leq t \leq t_2$ :

- 1) Es monovaluada
- 2) Tiene un número finito de máximos y mínimos

- 3) Tiene un número finito de discontinuidades  
 4) Es absolutamente integrable:

$$\int_{t_1}^{t_2} |f(\alpha)| d\alpha < \infty \quad (2.37)$$

Si las condiciones anteriores son satisfechas entonces la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp(in2\pi\nu_0 t) \quad (2.38)$$

Converge uniformemente a  $f(t)$ ; es importante puntualizar que cualquier función que represente una variable física real debe satisfacer las condiciones de Dirichlet.

La serie de Fourier descompone la función en una combinación lineal de exponenciales complejas con coeficientes que determinan el peso de la contribución de cada una de ellas: Por tanto  $f(t)$  está compuesta de un gran número de componentes sinusoidales que tiene frecuencias relacionadas armónicamente.

Los coeficientes se pueden calcular a partir de :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} f(\alpha) \exp(-in2\pi\nu_0\alpha) d\alpha \quad (2.39)$$

Donde la integración es tomada sobre el período  $T = \nu_0^{-1}$  para  $n$  suficientemente grande.

Considerese la serie de Fourier truncada. Si una función  $f(t)$  es aproximada únicamente por unos pocos términos es de esperar que la reconstrucción no sea la más adecuada; se espera que entre más términos se utilicen la reconstrucción sea mejor sin embargo esto no es cierto en la vecindad de una discontinuidad.

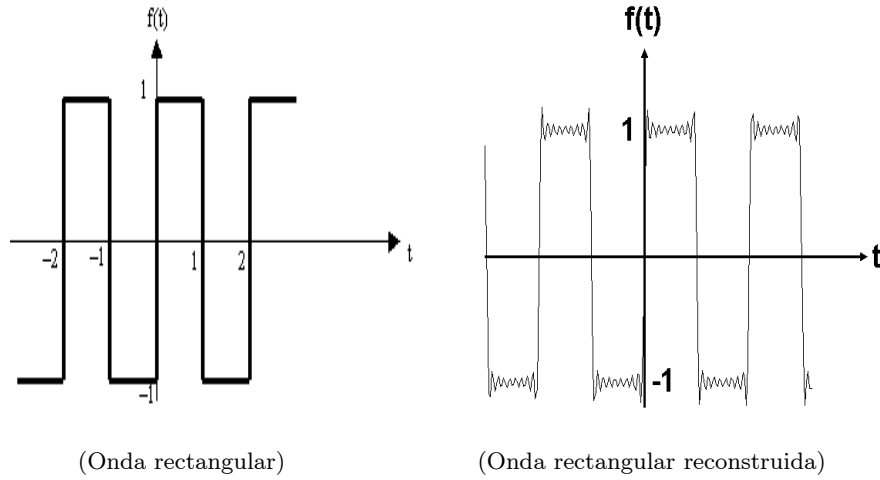
Veamos el caso de una función de onda rectangular (ver fig 2.6):

Este comportamiento es conocido como el fenómeno de Gibbs.

### 2.3.2 Funciones no periódicas

Ahora utilizemos la serie de Fourier para representar una función no periódica (ver fig 2.7):

Considere la función no periódica:



**Figura 2.6. Onda rectangular y onda rectangular reconstruida**

$$g(t) = \text{tri}\left(\frac{t - t_0}{b}\right) \quad (2.40)$$

Para representar esta función como una serie de Fourier se debe primero formar la función periódica  $g'(t)$  con período  $T \geq 2b$

$$g(t) = g'(t) \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right) \quad (2.41)$$

Se debe encontrar la serie de Fourier para  $g'(t)$  únicamente en el intervalo  $t_0 - b \leq t \leq t_0 + b$ . Fuera de este intervalo la serie representa a  $g'(t)$  y no a  $g(t)$ .

$$g'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{tri}\left(\frac{t - t_0 - nT}{b}\right) \quad (2.42)$$

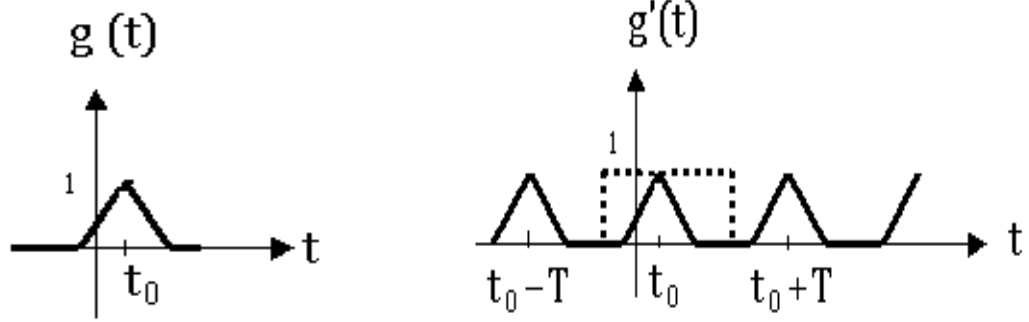
La serie de Fourier de  $g'(t)$  es:

$$g'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n \exp(in2\pi\nu_0 t) \quad (2.43)$$

Donde  $T = \nu_0^{-1}$  con los coeficientes dados por:

$$c'_n = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} g'(\alpha) \exp(-in2\pi\nu_0 \alpha) d\alpha \quad (2.44)$$

para obtener finalmente:



Función Triangulo

Función Triangulo como serie de Fourier

Figura 2.7. Función aperiódica

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n \exp(in2\pi\nu_0 t) \quad (2.45)$$

para el intervalo  $t_0 - b \leq t \leq t_0 + b$  y:

$$g(t) = 0 \quad (2.46)$$

para fuera de este intervalo.

### 2.3.3 La integral de Fourier

**Generalidades.** la integral de Fourier permite descomponer una función en una combinación lineal de exponenciales complejos de la forma  $\psi_n(t) = \exp(in2\pi\nu_0 t)$ . si  $g(t)$  satisface las condiciones de Dirichlet se puede por tanto escribir la integral:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad (2.47)$$

Donde:

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{-i2\pi\nu\alpha} d\alpha \quad (2.48)$$

Se nota la similaridad entre las dos integrales; a estas expresiones se les llama *integrales de Fourier*,  $G(\nu)$  se llama *transformada de Fourier* de  $g(t)$  que es una representación de dominio temporal de alguna cantidad mientras que  $G(\nu)$  representa en el dominio frecuencial temporal y

por lo tanto es conocida como *espectro de frecuencia temporal compleja* o simplemente *espectro de frecuencias*, se conoce a  $g(t)$  como la *transformada de Fourier inversa de  $G(\nu)$*

Si ahora se representa una función periódica por su serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in2\pi\nu_0 t} \quad (2.49)$$

Donde  $\nu_0$  es la frecuencia fundamental de  $f(t)$ ; la transformada de Fourier de  $f(t)$  la cual se designa por  $F(\nu)$  puede ser escrita como:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in2\pi\nu_0 \alpha} \right) e^{-i2\pi\nu\alpha} d\alpha \quad (2.50)$$

Lo cual se puede reescribir como:

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\nu-n\nu_0)\alpha} d\alpha \right) \quad (2.51)$$

Utilizando la ortogonalidad de los exponenciales complejos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\nu-n\nu_0)\alpha} d\alpha = \delta(\nu - n\nu_0) \quad (2.52)$$

Con lo cual se obtiene el resultado final:

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\nu - n\nu_0) \quad (2.53)$$

Por tanto la transformada de Fourier de una función periódica consiste de un arreglo de funciones delta separados por intervalos frecuenciales iguales a la frecuencia fundamental  $\nu_0$  en otras palabras funciones periódicas tienen espectros discretos algunas veces llamados *espectros de línea*. en contraste los espectros de las funciones no periódicas son no discretos.

El espectro de frecuencias de una función arbitraria  $f(t)$  es en general de valor complejo por lo tanto es conveniente escribirlo en la forma:

$$F(\nu) = A(\nu) e^{-i2\phi(\nu)} \quad (2.54)$$

Donde  $A(\nu)$  es conocido como la *amplitud del espectro* de  $F(\nu)$  y  $\phi(\nu)$  es la *fase del espectro*



### 2.3.4 Espectro de algunas funciones simples

**Funciones sinusoidales (ver fig 2.8 y 2.9).**

$$f(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t) \quad (2.55)$$

primero se calculan los coeficientes y luego se encuentra el espectro  $F(\nu)$  con  $T = \nu_0^{-1}$

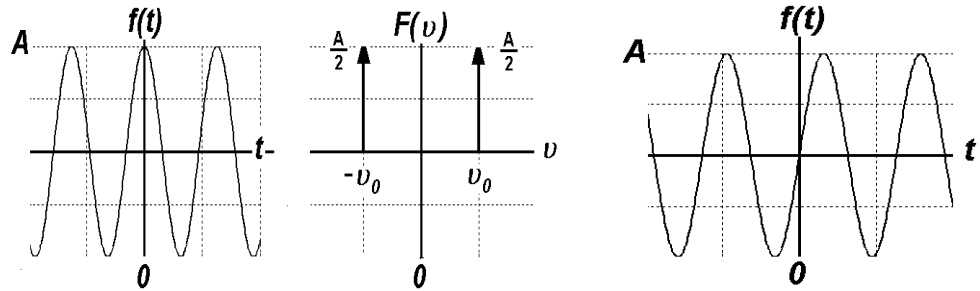
$$c_n = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} A \cos(2\pi\nu_0 \alpha) e^{(-in2\pi\nu_0 \alpha)} d\alpha \quad (2.56)$$

Con ayuda de la formula de Euler:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} \frac{A}{2} \left( e^{(i2\pi\nu_0 \alpha)} + e^{(-i2\pi\nu_0 \alpha)} \right) e^{(-in2\pi\nu_0 \alpha)} d\alpha \quad (2.57)$$

Utilizando la ortogonalidad entre exponenciales complejos se obtiene:

$$c_n = \begin{cases} \frac{A}{2}, & \text{if } n = \pm 1 \\ 0, & \text{if } n \neq \pm 1 \end{cases}$$



**Función coseno y Espectro de la Función coseno**

**Función coseno desfasada**

**Figura 2.8. Función coseno**

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\nu - n\nu_0) \quad (2.58)$$

$$F(\nu) = \frac{A}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)] \quad (2.59)$$

$$F(\nu) = \frac{A}{2\nu_0} \delta\delta\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) \quad (2.60)$$

se puede verificar este resultado en el sentido inverso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{(i2\pi\nu t)} d\nu \quad (2.61)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{(i2\pi\nu t)} d\nu = \frac{A}{2} \left( e^{(i2\pi\nu_0 t)} + e^{(-i2\pi\nu_0 t)} \right) \quad (2.62)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{(i2\pi\nu t)} d\nu = A \cos(2\pi\nu_0 t) \quad (2.63)$$

### 2.3.5 Relación entre una función y su espectro de fase

Considerese la función:

$$f(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t - \theta_0) = A \cos 2\pi\nu_0 (t - t_0) \quad (2.64)$$

Los coeficientes son:

$$c_n = \begin{cases} \frac{A}{2} e^{\mp\theta_0}, & \text{if } n = \pm 1 \\ 0, & \text{if } n \neq \pm 1 \end{cases}$$

De tal forma que:

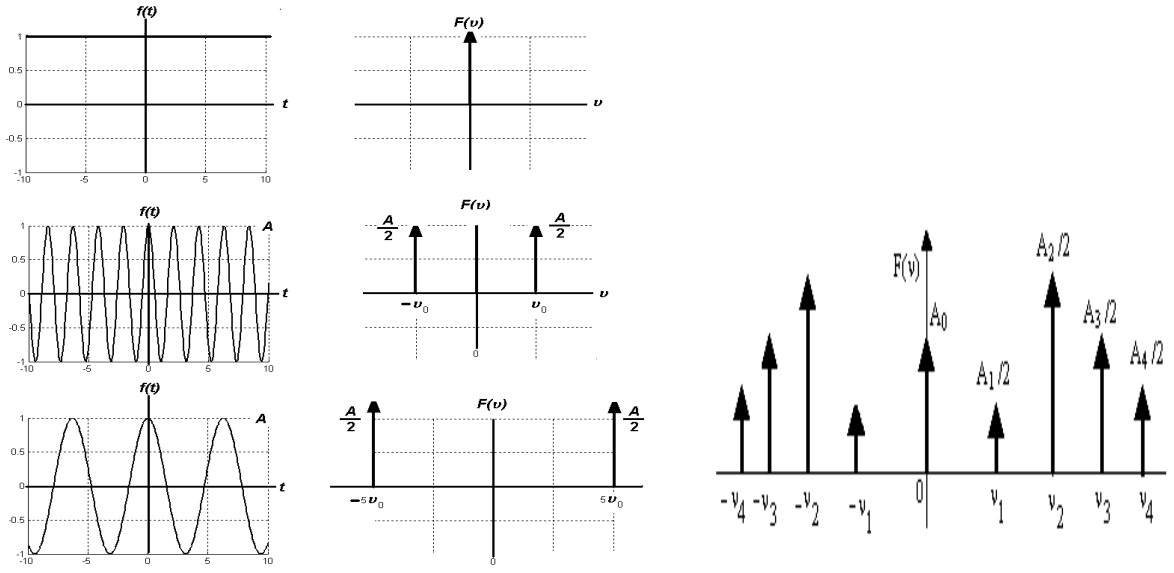
$$F(\nu) = \frac{A}{2\nu_0} \delta\delta\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) e^{-i2\pi\nu t_0} \quad (2.65)$$

Se observa que la amplitud del espectro es la misma que para el caso de una función no desplazada, mientras que la fase del espectro es ahora dada por:

$$\phi(\nu) = 2\pi\nu t_0 = \frac{\theta_0\nu}{\nu_0} \quad (2.66)$$

Considerese la función (ver fig 2.10):

$$\begin{aligned} f(t) = & A_0 + A_1 \cos(2\pi\nu_1 t) + A_2 \cos(2\pi\nu_2 t) \\ & + A_3 \cos(2\pi\nu_3 t) + A_4 \cos(2\pi\nu_4 t) \end{aligned} \quad (2.67)$$



Frecuencias de una función coseno y su espectro

Espectro de la suma de funciones coseno

Figura 2.9. Funciones coseno y su espectro

Su espectro es:

$$F(\nu) = A_0 \delta(\nu) + \frac{A_1}{2\nu_1} \delta\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right) + \frac{A_2}{2\nu_2} \delta\left(\frac{\nu}{\nu_2}\right) + \frac{A_3}{2\nu_3} \delta\left(\frac{\nu}{\nu_3}\right) + \frac{A_4}{2\nu_4} \delta\left(\frac{\nu}{\nu_4}\right) \quad (2.68)$$

Considerese la función:

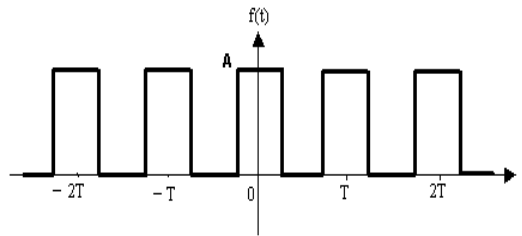


Figura 2.10. Función considerada

$$f(t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) * A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.69)$$

Por tanto se obtiene:

$$F(\nu) = \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n\nu_0) \quad (2.70)$$

Finalmente:

$$F(\nu) = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \delta(\nu - n\nu_0) \quad (2.71)$$

Donde  $\nu_0$  es la frecuencia fundamental de  $f(t)$

**Tarea.** Graficar la función  $F(\nu)$  detalladamente.

### 2.3.6 Propiedades de la transformada de Fourier

**Propiedad de linealidad.** Sea  $f(x)$  una función con transformada de Fourier  $F(\xi)$  y sea  $h(x)$  una función con transformada de Fourier  $H(\xi)$  entonces se tiene que:

$$\mathcal{F}(A_1 f(x) + A_2 h(x)) = A_1 F(\xi) + A_2 H(\xi) \quad (2.72)$$

LA TRANSFORMADA DE UNA SUMA DE DOS FUNCIONES ES IGUAL A LA SUMA DE SUS TRANSFORMADAS INDIVIDUALES.

**La ordenada central.** Teniendo en cuenta que:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-i2\pi\xi\alpha} d\alpha \quad (2.73)$$

Se evalua para el caso  $\xi = 0$  entonces:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \quad (2.74)$$

Así: EL ÁREA DE UNA FUNCIÓN ES IGUAL AL ORDEN CENTRAL DE SU TRANSFORMADA DE FOURIER; es fácil probar que:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta) d\beta \quad (2.75)$$

**Propiedad de escalamiento.** Sea  $f(x)$  una función con transformada de Fourier  $F(\xi)$  y sea  $b$  una constante real y diferente de cero entonces:

$$\mathcal{F}\left\{f\left(\frac{x}{b}\right)\right\} = |b| F(b\xi) \quad (2.76)$$

Por tanto UNA COMPRESIÓN DE COORDENADAS EN UNA REPRESENTACIÓN CORRESPONDE A UNA DILATACIÓN EN LA REPRESENTACIÓN INVERSA; un resultado interesante es cuando  $b = -1$ :

$$\mathcal{F}\{f(-x)\} = F(-\xi) \quad (2.77)$$

**Propiedad de desplazamiento.** Sea  $f(x)$  una función con transformada de Fourier  $F(\xi)$  y sea  $x_0$  una constante real entonces:

$$\mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = e^{-i2\pi\xi x_0} F(\xi) \quad (2.78)$$

Así: LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN DESPLAZADA ES SIMPLEMENTE LA TRANSFORMADA DE LA FUNCIÓN NO DESPLAZADA POR UN FACTOR EXPONENCIAL TENIENDO FASE LINEAL en el caso que  $F(\xi) = A(\xi) e^{-i\Phi(\xi)}$

$$\mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = A(\xi) e^{-i(\Phi(\xi) + 2\pi\xi x_0)} \quad (2.79)$$

**Transformada de una conjugada.** Sea  $f(x)$  una función con transformada de Fourier  $F(\xi)$  la transformada de Fourier de  $f^*(x)$  es:

$$\mathcal{F}\{f^*(x)\} = F^*(-\xi) \quad (2.80)$$

**Transformada de una Transformada.** Sea  $f(x)$  una función con transformada de Fourier  $F(\xi)$  la transformada de Fourier de  $F(x)$  es:

$$\mathcal{F}\{F(x)\} = f(-\xi) \quad (2.81)$$

LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA TRANSFORMADA DE FOURIER ES SIMPLEMENTE LA FUNCIÓN

**Transformada de una Convolución.** Sea  $g(x) = f(x) * h(x)$ ,  $g(x)$  una función con transformada de Fourier  $G(\xi)$ ,  $f(x)$  una función con transformada de Fourier  $F(\xi)$  y  $h(x)$  una función con transformada de Fourier  $H(\xi)$  entonces:

$$G(\xi) = \mathcal{F}\{f(x) * h(x)\} = F(\xi) H(\xi) \quad (2.82)$$

LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA CONVOLUCIÓN ES SIMPLEMENTE EL PRODUCTO DE LAS TRANSFORMADAS DE LAS FUNCIONES INDIVIDUALES

**Transformada de un producto.**

$$\mathcal{F}\{f(x) h(x)\} = F(\xi) * H(\xi) \quad (2.83)$$

**Transformada de una derivada.**

$$\mathcal{F}\{f^k(x)\} = (i2\pi\xi)^k F(\xi) \quad (2.84)$$

También se obtiene que:

$$\mathcal{F}\{(-i2\pi x)^k f(x)\} = F^k(\xi) \quad (2.85)$$

**Transformada de una integral.**

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^x (\alpha) d\alpha\right\} = \frac{1}{i2\pi\xi} F(\xi) + \frac{F(0)}{2} \delta(\xi) \quad (2.86)$$

## 2.3.7 Pares de transformadas de Fourier elementales

<i>FUNCION</i>	<i>TRANSFORMADA</i>
1	$\delta(\xi)$
$\delta(x)$	1
$\delta(x \pm x_0)$	$e^{\pm i2\pi x_0 \xi}$
$e^{\pm i2\pi x \xi_0}$	$\delta(\xi \pm \xi_0)$
$\cos(2\pi \xi_0 x)$	$\frac{1}{2 \xi_0 } \delta\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)$
$\sin(2\pi \xi_0 x)$	$\frac{i}{2 \xi_0 } \delta\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)$
$\frac{1}{2 x_0 } \delta\left(\frac{x}{x_0}\right)$	$\cos(2\pi \xi x_0)$
$\frac{i}{2 x_0 } \delta\left(\frac{x}{x_0}\right)$	$-\sin(2\pi \xi x_0)$
$rect(x)$	$sinc(\xi)$
$sinc(x)$	$rect(\xi)$
$tri(x)$	$sinc^2(\xi)$
$sinc^2(x)$	$tri(\xi)$
$sgn(x)$	$\frac{1}{i\pi\xi}$
$\frac{1}{i\pi x}$	$-sgn(\xi)$
$step(x)$	$\frac{1}{2} \delta(\xi) + \frac{1}{i2\pi\xi}$
$ramp(x)$	$\frac{1}{4\pi^2} \left( i\pi \delta^{(1)}(\xi) - \frac{1}{\xi^2} \right)$
$e^{- x }$	$\frac{2}{1+(2\pi\xi)^2}$
$comb(x)$	$comb(\xi)$
$Gaus(x)$	$Gaus(\xi)$

**Pulso rectangular (ver fig 2.11).** Sea la función:

$$g(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\frac{T}{2}}\right) \quad (2.87)$$

Su espectro es:

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{-i2\pi\nu\alpha} d\alpha \quad (2.88)$$

$$G(\nu) = A \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-i2\pi\nu\alpha} d\alpha \quad (2.89)$$

$$G(\nu) = \frac{A}{-i2\pi\nu} \left[ e^{-i\pi\nu\frac{T}{2}} - e^{i\pi\nu\frac{T}{2}} \right] \quad (2.90)$$

$$G(\nu) = \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}\left(\nu\frac{T}{2}\right) \quad (2.91)$$

Si ahora se considera la función:

$$g(t - t_0) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - t_0}{\frac{T}{2}}\right) \quad (2.92)$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento, el espectro es:

$$\mathcal{F}\{g(t - t_0)\} = e^{-i2\pi\nu t_0} F(\nu) \quad (2.93)$$

Reemplazando:

$$\mathcal{F}\left\{A \operatorname{rect}\left(\frac{t - t_0}{\frac{T}{2}}\right)\right\} = e^{-i2\pi\nu t_0} \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}\left(\nu\frac{T}{2}\right) \quad (2.94)$$

El espectro ahora tiene la misma amplitud pero ha sido modificado por un factor de fase.



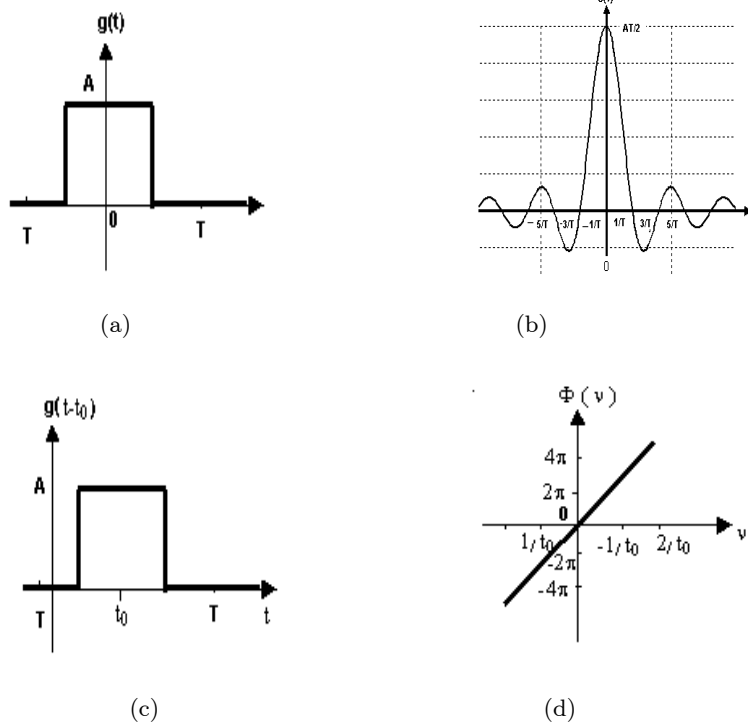


Figura 2.11. Pulso rectangular y espectro (a)No desplazado (b)espectro;(c)desplazado;(d)fase.

## 2.4 OPERADORES MATEMATICOS Y SISTEMAS FISICOS

### 2.4.1 Introducción

Un sistema físico es considerado como un dispositivo que muestra algún tipo de respuesta cuando un estímulo es aplicado. Este estímulo es frecuentemente llamado la *entrada del sistema* mientras que la respuesta es conocida como la *salida del sistema*.

### 2.4.2 Representación de sistemas por operadores matemáticos

Se debe encontrar un modelo matemático que sirva para describir un sistema físico; es decir el modelamiento de sistemas es frecuentemente discutido en términos de los *operadores matemáticos*.

Considerese el conjunto de funciones  $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$  de acuerdo a una regla que se puede especificar se le asigna a todos los elementos de ese primer conjunto los elementos de un segundo conjunto de funciones  $\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\}$ . Denotando el operador  $\mathcal{H}$  se puede establecer la regla entre los elementos de los dos conjuntos de funciones:

$$\mathcal{H}\{f_i(x)\} = g_i(x) \quad (2.95)$$

Para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  y se puede decir que el priemr conjunto de funciones transformado en el segundo conjunto de funciones por medio del operador  $\mathcal{H}$ . La regla que gobierna la transformación puede ser una ecuación diferencial, una ecuación integral, una gráfica o una tabla de datos, etc. Este estudio se centrará en los sistemas para los cuales una entrada produce una única salida.

### 2.4.3 Tipos de sistemas importantes

Solo se estudiaran los sitemas más relevantes en el campo del tratamiento de señales.

**Sistemas lineales.** Considerese un sitema caracterizado por el operador  $\mathcal{H}$  tal que se cumple que:

$$\mathcal{H}\{f_1(x)\} = g_1(x) \quad (2.96)$$

$$\mathcal{H}\{f_2(x)\} = g_2(x) \quad (2.97)$$

Luego para dos constantes complejas arbitrarias  $a_1$  y  $a_2$  el sistema se dice que es lineal si se cumple:

$$\mathcal{H}\{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\} = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) \quad (2.98)$$

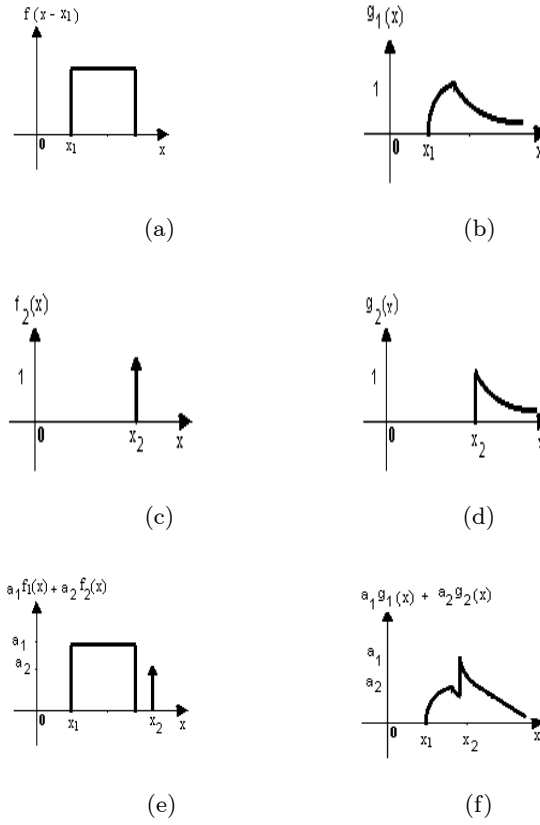
Lo cual no es otra cosa que el **principio de superposición** (ver fig 2.12)

**Sistemas invariantes a desplazamiento.** También se les llama fijo, estacionario, invariante (ver fig 2.13) en el tiempo, invariante espacial o isoplanatico si a un cambio en la posición de entrada solo se produce un desplazamiento igual en la salida; es decir si se cumple:

$$\mathcal{H}\{f(x)\} = g(x) \quad (2.99)$$

Entonces:

$$\mathcal{H}\{f(x - x_0)\} = g(x - x_0) \quad (2.100)$$



**Figura 2.12.** Principio de superposición aplicado a los sistemas lineales

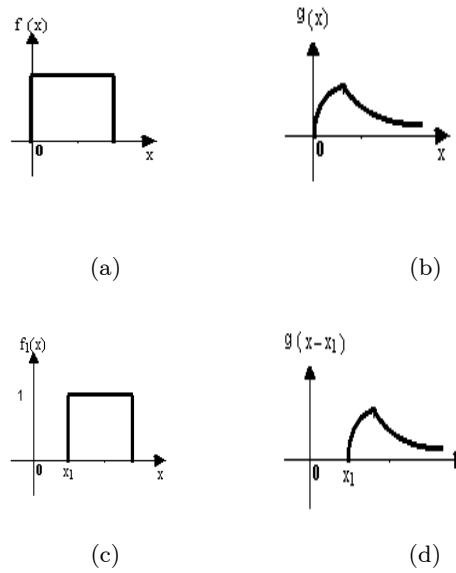
Donde  $x_0$  es una constante real así la magnitud y la forma de la salida no son cambiadas si se desplaza la entrada en el factor  $x_0$ .

A los sistemas lineales e invariantes a desplazamiento se les conoce como *LSI* y se denotan generalmente por el operador  $\mathcal{L}$  de tal manera que combinando la dos propiedades se tiene que:

$$\mathcal{L} \{a_1 f_1(x - x_1) + a_2 f_2(x - x_2)\} = a_1 g_1(x - x_1) + a_2 g_2(x - x_2) \quad (2.101)$$

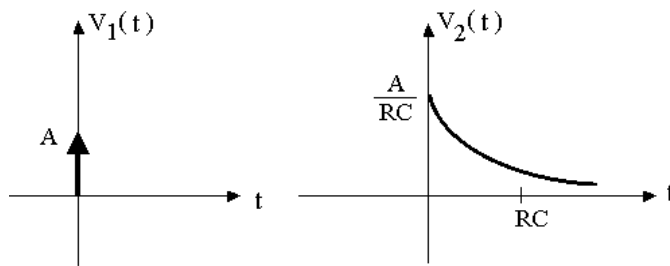
Donde  $x_1$  y  $x_2$  son constantes reales

**Sistemas causales.** Se considera que un sistema es causal si el valor de la salida a cualquier punto no depende de valores futuros de la entrada. Consideremos un sistema para el cual la entrada y la salida son funciones temporales, puede ser el caso de un circuito *RC* si se escoge como voltaje de entrada una función delta no desplazada temporalmente. Asumiendo que no existen



**Figura 2.13. Relación de entrada y salida de un sistema lineal invariante a desplazamiento**

entradas previas de voltaje y la energía está almacenada en el condensador, el voltaje de salida se determinará de acuerdo con la figura 2.14 donde se observa que al aplicar el voltaje de entrada; el voltaje de salida toma abruptamente el valor de  $\left(\frac{A}{RC}\right)$  y posteriormente decae hacia cero a medida que transcurre el tiempo. De tal forma que a que en cualquier instante, el valor de la salida es completamente determinado por valores pasados de la entrada y no depende del comportamiento futuro de la entrada. Es decir el sistema no puede responder a estímulos después que la señal de entrada ha sido aplicada.



**Figura 2.14. Relaciones de entrada y salida para sistemas causales**

Si se considera en contraste el sistema mostrado en la figura 2.15 asumiendo que la rendija es localizada en el punto  $x = 0$ , y es suficientemente angosta para ser considerada una fuente lineal es decir una función delta en una dimensión, la salida tiene un comportamiento similar al observado en la figura 2.15, de esta figura se puede ver que la salida no es cero únicamente en el origen y

que influencia la salida para ambos valores positivos y negativos de  $x$ , lo cual quiere decir que el sistema describe un comportamiento antes que el estímulo de entrada sea aplicado, sin embargo el misterio desaparece cuando se entiende que el término antes es impropiamente utilizado aquí. Estrechamente asociado con el concepto de causalidad es la consideración de condiciones iniciales es decir las consideraciones de almacenamiento de energía dentro de un sistema cuando la entrada es aplicada.

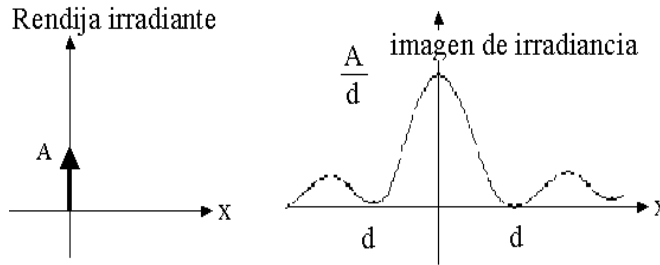


Figura 2.15. Relaciones de entrada y salida para sistemas no causales

**Sistemas con memoria.** Un sistema se dice que tiene memoria; si en lugar de ser una función de la entrada, la salida es un funcional de la entrada, tales sistemas también son llamados sistemas dinámicos. o instantáneos o de memoria cero, en ese caso la salida es una función de la entrada. Vamos a considerar ejemplos de cada clase de sistemas. Para un sistema con memoria, la salida esta relacionada con la entrada por la expresión operacional:

$$g(x) = \mathcal{S}\{f(x)\} \quad (2.102)$$

El valor en cualquier punto  $x = x_1$  es dependiente de los valores de  $f(x)$  sobre un ancho de rango de  $x$ . La operación denotada por  $\mathcal{S}\{\}$  debe ser primero realizada y luego el resultado evaluado en el punto  $x = x_1$

$$g(x_1) = \mathcal{S}\{f(x)\} |_{x=x_1} \quad (2.103)$$

Suponga por ejemplo que  $\mathcal{S}\{\} = \frac{d}{dx}$  y  $f(x)$  la salida estará dada por:

$$g(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} \quad (2.104)$$

Y en el punto  $x = x_1$ :

$$g(x_1) = -2\pi x_1 e^{-\pi x_1^2} \quad (2.105)$$

Obviamente, se encontrará un resultado incorrecto, si primero se sustituye  $x_1$  en  $f(x)$  y luego se toma la derivada de  $f(x_1)$ . de otro manera la salida de un sistema sin memoria puede ser escrita como:

$$g(x) = u[f(x); x] \quad (2.106)$$

Donde  $u[\ ]$  denota una función. La salida de este sistema en el punto  $x = x_1$  depende únicamente del valor de la entrada en ese punto y posiblemente del mismo  $x_1$  pero no recuerda el comportamiento de la entrada y desconoce el futuro esto es:

$$g(x_1) = u[f(x_1); x_1] \quad (2.107)$$

Para demostrar esta situación; considérese la función:

$$u[f(x); x] = a(x) f(x) \quad (2.108)$$

Donde  $a$  es cualquier función arbitraria, la salida es por consiguiente:

$$g(x) = a(x) f(x) \quad (2.109)$$

Y en el punto  $x = x_1$  toma el valor:

$$g(x_1) = a(x_1) f(x_1) \quad (2.110)$$

Del análisis anterior se observa que un sistema sin memoria mapea el valor de la entrada en un punto singular en el valor de la salida en ese punto, mientras un sistema con memoria mapea el valor de la entrada a varios puntos en el valor de la salida de un punto singular; esta es la diferencia básica entre una función y un funcional.

## 2.5 RESPUESTA IMPULSIONAL

Cuando la entrada a un sistema es una simple función delta, la salida es llamada la respuesta impulsional del sistema (también conocida como función de Green). Para un sistema general la respuesta impulsional depende el punto al cual la función delta es aplicada; es decir para un impulso localizado en  $x = x_0$  la respuesta impulsional es denotada por  $h(x; x_0)$ , en otras palabras si el sistema está caracterizado por:

$$\mathcal{S}\{f(x)\} = g(x) \quad (2.111)$$

Se representa la salida por  $g(x) = h(x; x_0)$  cuando  $f(x) = \delta(x - x_0)$ . Por tanto:

$$\mathcal{S}\{\delta(x - x_0)\} = h(x; x_0) \quad (2.112)$$

Si ahora se considera un sistema LSI caracterizado por el operador  $\mathcal{L}\{\}$  se nota que para una entrada impulsiva aplicada en el origen; la salida es:

$$\mathcal{L}\{\delta(x)\} = h(x; 0) \quad (2.113)$$

Mientras que para el caso  $x = x_0$  la salida es descrita por:

$$\mathcal{L}\{\delta(x - x_0)\} = h(x; x_0) \quad (2.114)$$

Debido a que el sistema es invariante a desplazamiento, la segunda respuesta debe ser idéntica a la primera, excepto que es desplazada por una cantidad  $x_0$  a lo largo del eje  $x$ ; por consiguiente:

$$\mathcal{L}\{\delta(x - x_0)\} = h(x - x_0; 0) \quad (2.115)$$

De donde se obtiene que:

$$h(x; x_0) = h(x - x_0; 0) \quad (2.116)$$

Es aparente de esta expresión que la respuesta impulsional de un sistema invariante a desplazamiento depende únicamente de la separación del punto de observación  $x$  y del punto  $x_0$  al cual la

entrada es aplicada, y no del valor de ambos. Cambiando la notación para la respuesta impulsional de tal sistema a una forma mas concisa se encuentra que:

$$\mathcal{L}\{\delta(x-x_0)\} = h(x-x_0) \quad (2.117)$$

Como resultado importante, cuando la entrada es aplicada en el origen, la respuesta impulsional se reduce a:

$$\mathcal{L}\{\delta(x)\} = h(x) \quad (2.118)$$

Por tanto los sistemas LSI son totalmente caracterizados por su respuesta impulsional. Esta es una propiedad muy importante de estos sistemas, y es de gran aplicación. Las figuras 2.14 y 2.15 muestran algunas respuestas impulsionales típicas. Es importante anotar que la respuesta impulsional de un sistema LSI cuando a la entrada se tiene una función delta; no es otra función delta.

## 2.6 EXPONENCIALES COMPLEJOS, FUNCIONES PROPIAS DE LOS SISTEMAS LSI

Cuando la entrada a un sistema está descrita por una función propia del sistema, la salida es simplemente el producto de la entrada y una constante compleja de proporcionalidad. Para expresar esta situación matemáticamente, sea  $\psi(x; \xi_0)$  la función propia del sistema LSI  $\mathcal{L}\{\}$ , donde  $\xi_0$  es una constante real arbitraria. Luego, si  $\psi(x; \xi_0)$  es la entrada del sistema la salida esta dada por:

$$\mathcal{L}\{\psi(x; \xi_0)\} = H(\xi_0) \psi(x; \xi_0) \quad (2.119)$$

La constante de proporcionalidad de valor complejo  $H(\xi_0)$  es llamada el valor propio asociado con la función propia  $\psi(x; \xi_0)$ , y depende del valor de la constante  $\xi_0$ . Si se escribe:

$$H(\xi_0) = A(\xi_0) e^{-i\phi(\xi_0)} \quad (2.120)$$

Donde  $A(\xi_0)$  describe la atenuación o ganancia de  $H(\xi_0)$ , y  $\phi(\xi_0)$  es la fase por consiguiente se puede escribir:



$$\mathcal{L}\{\psi(x; \xi_0)\} = A(\xi_0) e^{-i\phi(\xi_0)} \psi(x; \xi_0) \quad (2.121)$$

Lo cual conduce a una conclusión extremadamente importante: Cuando pasa a través del sistema una función propia, esta puede ser atenuada o amplificada y su fase puede ser desplazada; pero la entrada permanece invariante en forma. El exponencial complejo  $e^{i2\pi\xi_0 x}$  es una función propia de cualquier sistema LSI, con  $e^{i2\pi\xi_0 x}$  de entrada a este tipo de sistema; la salida debe ser escrita como:

$$\mathcal{L}\{e^{i2\pi\xi_0 x}\} = g(x; \xi_0) \quad (2.122)$$

Supóngase que una versión desplazada de este exponencial es aplicada al sistema; la entrada ahora es  $e^{i2\pi\xi_0(x-x_0)}$  donde  $x_0$  es también una constante real. Luego por la propiedad de linealidad:

$$\mathcal{L}\{e^{i2\pi\xi_0(x-x_0)}\} = \mathcal{L}\{e^{i2\pi\xi_0 x} e^{-i2\pi\xi_0 x_0}\} = \quad (2.123)$$

$$\mathcal{L}\{e^{i2\pi\xi_0(x-x_0)}\} = e^{-i2\pi\xi_0 x_0} \mathcal{L}\{e^{i2\pi\xi_0 x}\} \quad (2.124)$$

$$\mathcal{L}\{e^{i2\pi\xi_0(x-x_0)}\} = e^{-i2\pi\xi_0 x_0} g(x; \xi_0) \quad (2.125)$$

Aplicando la invarianza a desplazamiento:

$$\mathcal{L}\{e^{i2\pi\xi_0(x-x_0)}\} = g(x - x_0; \xi_0) \quad (2.126)$$

Recombinando las ecuaciones se obtiene:

$$g(x - x_0; \xi_0) = e^{-i2\pi\xi_0 x_0} g(x; \xi_0) \quad (2.127)$$

De esta forma de relación puede ser visto que  $g(x; \xi_0)$  debe ser de la forma:

$$g(x; \xi_0) = H(\xi_0) e^{i2\pi\xi_0 x} \quad (2.128)$$

Donde  $H(\xi_0)$  representa una constante de valor complejo; luego:

$$\mathcal{L}\{e^{i2\pi\xi_0x}\} = H(\xi_0)e^{i2\pi\xi_0x} \quad (2.129)$$

Se encuentra que el exponencial complejo  $e^{i2\pi\xi_0x}$  corresponde a una función propia de un sistema LSI. Con  $H(\xi_0)$  el valor propio asociado; es interesante ver que el valor de  $H(\xi_0)$  puede ser encontrado reemplazando  $x = 0$  en la ecuación 2.128, esto es:

$$H(\xi_0) = g(0; \xi_0) \quad (2.130)$$

Este resultado pone en evidencia que  $H(\xi_0)$  tiene un valor igual que el de la salida en el origen, si se asume una entrada de la forma  $e^{i2\pi\xi_0x}$ .

En el análisis anterior obviamente el valor propio  $H(\xi_0)$  es una función de  $\xi_0$ , la frecuencia de la función propia de entrada, pero el valor de  $\xi_0$  es completamente arbitrario; denotado de esta manera  $H(\xi_0)$  es frecuentemente llamado la función de transferencia (respuesta frecuencial) del sistema y se demostrará que corresponde a la transformada de Fourier de la respuesta impulsional  $h(x)$ ; la cual describe la atenuación y la fase experimentada por una función propia exponencial que pasa a través del sistema y es una función de la frecuencia de esta función propia.

Se ha visto que sucede cuando la entrada a cualquier sistema LSI es un exponencial complejo de la forma  $e^{i2\pi\xi_0x}$ ; si ahora se considera un sistema especial LSI, el cual tiene una respuesta impulsiva de valor real; tal sistema transforma una entrada de valor real y es por tanto la clase de sistema mas comúnmente encontrado en la práctica. La función de transferencia  $H(\xi_0)$  de esta clase de sistema es Hermítica, es decir la parte real de  $H(\xi_0)$  es par y la parte imaginaria es impar, propiedad que puede ser expresada como:

$$H(\xi_0) = H^*(-\xi_0) \quad (2.131)$$

En realidad hasta ahora se conoce que clase de salida tendrá el sistema cuando la entrada es  $e^{i2\pi\xi_0x}$ ; ahora se debe encontrar lo que sucede con la salida cuando la entrada es una función coseno o seno; es decir para una entrada de la forma  $\cos(2\pi\xi_0x)$  la salida es:

$$\mathcal{L}\{\cos(2\pi\xi_0 x)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}[e^{i2\pi\xi_0 x} + e^{-i2\pi\xi_0 x}]\right\} \quad (2.132)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(2\pi\xi_0 x)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{i2\pi\xi_0 x}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{i2\pi(-\xi_0)x}\} \quad (2.133)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(2\pi\xi_0 x)\} = \frac{1}{2}H(\xi_0)e^{i2\pi\xi_0 x} + \frac{1}{2}H(-\xi_0)e^{i2\pi\xi_0 x} \quad (2.134)$$

Si se tiene en cuenta la propiedad  $H(\xi_0) = H^*(-\xi_0)$ :

$$\mathcal{L}\{\cos(2\pi\xi_0 x)\} = \frac{1}{2}[H(\xi_0)e^{i2\pi\xi_0 x}] + \frac{1}{2}[H(\xi_0)e^{i2\pi\xi_0 x}]^* \quad (2.135)$$

Lo que conduce a :

$$\mathcal{L}\{\cos(2\pi\xi_0 x)\} = \text{Re}\{H(\xi_0)e^{i2\pi\xi_0 x}\} \quad (2.136)$$

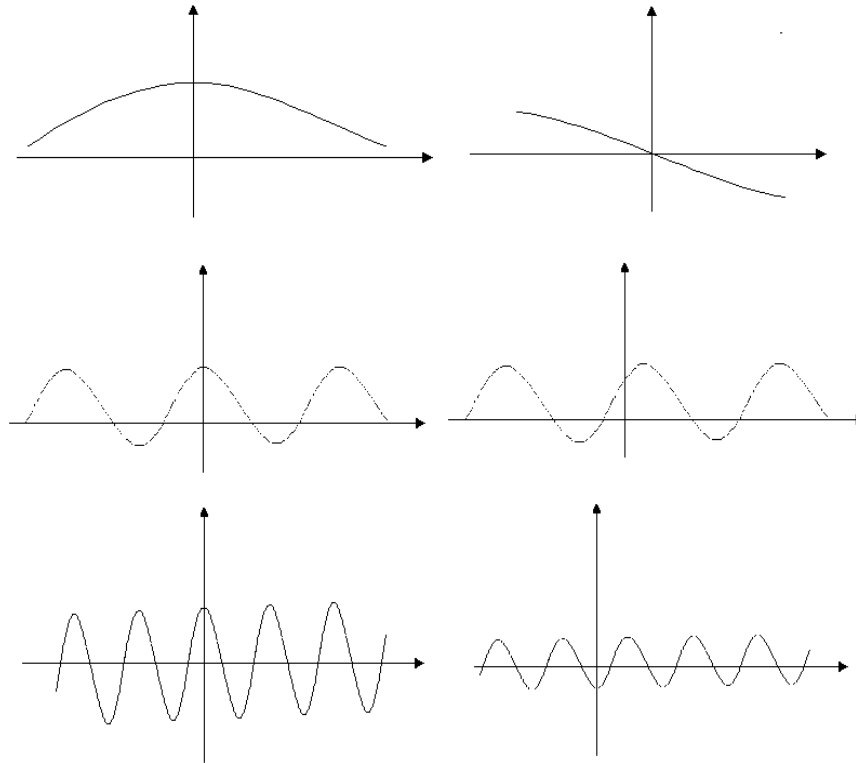
Si se tiene en cuenta que  $H(\xi_0) = A(\xi_0)e^{-i\Phi(\xi_0)}$ :

$$\mathcal{L}\{\cos(2\pi\xi_0 x)\} = A(\xi_0)\cos[2\pi\xi_0 x - \Phi(\xi_0)] \quad (2.137)$$

Y puede ser visto que para esta clase sistemas especiales LSI una entrada coseno produce una salida coseno, posiblemente atenuada y desplazada, donde se cumple que:

$$\mathcal{L}\{\text{Re}\{e^{i2\pi\xi_0 x}\}\} = \text{Re}\{\mathcal{L}\{e^{i2\pi\xi_0 x}\}\} \quad (2.138)$$

Este resultado se muestra en la figura 2.16.



**Figura 2.16.** Efectos de la función de transferencia sobre la amplitud y la fase de señales cosenoidales

Por ahora se debe empezar a comprender las razones para la discusión de los tópicos de la descomposición de Fourier, superposición, funciones propias, etc. Para destacar la importancia de esta comprensión, considere el problema de encontrar la salida de un sistema LSI para una señal de entrada arbitraria, se muestra aparentemente que se puede descomponer esta señal de entrada en sus componentes de Fourier las cuales son exponenciales complejos de la forma  $e^{i2\pi\xi x}$ , pero se conoce que estos exponenciales son funciones propias de los sistemas LSI; por tanto si es conocida la función de transferencia del sistema se puede determinar cuantas de esas componentes de Fourier son atenuadas y desplazadas en fase al pasar a través del sistema. Luego aplicando el principio de superposición la respuesta total puede ser encontrada adicionando todas estas componentes atenuadas y desplazadas en fase, este hecho justifica el estudio de este tópico para el desarrollo de sistemas ópticos.

## 2.7 CONVOLUCION MATEMATICA

### 2.7.1 Definición de la operación convolución

**Formulismo matemático.** La convolucion de dos funciones de valores reales  $f(x)$  y  $h(x)$ , para las cuales se utiliza la notación  $f(x) * h(x)$  es definida por la integral:

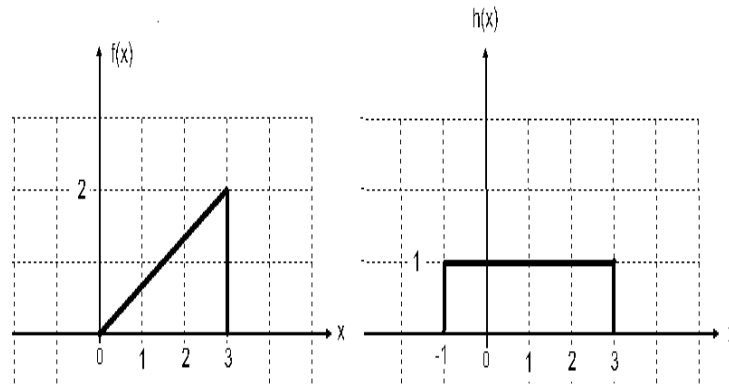
$$f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) h(x - \alpha) d\alpha \quad (2.139)$$

Esta integral es claramente una función de la variable independiente  $x$ , y por tanto se puede representar por una tercera función:

$$f(x) * h(x) = g(x) \quad (2.140)$$

La operación convolución puede ser vista simplemente como el proceso de encontrar el área del producto de  $f(\alpha)$  y  $h(x - \alpha)$ . El propósito de este taller es aprender a realizar la operación convolución gráfica y matemáticamente.

**Funciones utilizadas para la operación convolución.** Considere las siguientes funciones (ver fig 2.17) para la realización del taller:



**Figura 2.17.** Funciones a convolucionar  $f(x)$  y  $h(x)$

**Procedimiento gráfico para la convolución.** a.) Graficar las funciones con la variable  $\alpha$  en el eje horizontal

b.) Graficar la función  $h(-\alpha)$  la cual es simplemente una imagen de espejo de la función  $h(\alpha)$

c.) El producto  $f(\alpha) h(x - \alpha) = f(\alpha) h(-\alpha)$  es encontrado y graficado.

d.) El área de este producto es calculado y corresponde al sobrelapamiento de las dos áreas de las funciones a convolucionar, para el caso  $x = 0$  es :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) h(-\alpha) d\alpha = g(0) \quad (2.141)$$

- e.) Se retoma el paso b.) y un nuevo valor para  $x = 1$ ; se realiza todo el procedimiento anterior.  
 f.) La operación finaliza cuando ya no exista sobrelapamiento entre las gráficas de las dos funciones.  
 g.) Luego se realiza una gráfica de  $g(x)$  contra  $x$

**Convolución por integración directa.**

$$f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) h(x - \alpha) d\alpha \quad (2.142)$$

El principal problema se presenta en la definición de los límites de integración. Para un mejor entendimiento se ha dividido el problema en los siguientes intervalos de integración:

- a.)  $x \leq -1$  El producto  $f(\alpha) h(x - \alpha)$  es igual a cero en este intervalo. ; por tanto  $g(x) = 0$   
 b.)  $-1 < x \leq 2$  en este intervalo se tiene que:

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) h(x - \alpha) d\alpha \quad (2.143)$$

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_0^3 \frac{2}{3} \alpha h(x - \alpha) d\alpha = \frac{2}{3} \int_0^{x+1} \alpha d\alpha = \frac{(x+1)^2}{3} \quad (2.144)$$

- c.)  $2 < x \leq 3$  el límite de integración superior es constante y por tanto:

$$g(x) = \frac{2}{3} \int_0^3 \alpha d\alpha = 3 \quad (2.145)$$

- d.)  $3 < x \leq 6$  La integral toma la forma:

$$g(x) = \frac{2}{3} \int_{x-3}^3 \alpha d\alpha = 3 - \frac{(x-3)^2}{3} \quad (2.146)$$

- e.)  $x > 6$  El producto  $f(\alpha) h(x - \alpha) = 0$  , en todo el intervalo; por tanto  $g(x) = 0$   
 f.) Finalmente se define explícitamente la función  $g(x)$

## 2.8 CONVOLUCION DE VARIAS FUNCIONES

$$f(x) = v(x) * w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\beta) w(x - \beta) d\beta \quad (2.147)$$

La Convolución de  $f(x) * h(x)$  será:

$$\begin{aligned} g(x) = [v(x) * w(x)] * h(x) &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v(\beta) w(x - \beta) d\beta \right] h(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v(\beta) w(x - \beta) d\beta \right] h(x - \alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (2.148)$$

## 2.9 CONDICIONES DE EXISTENCIA DE LA CONVOLUCION

Si  $f(x)$  y  $h(x)$  son monovaluadas se debe cumplir una de las siguientes condiciones:

1. Si  $f(x)$  y  $h(x)$  son absolutamente integrables sobre el intervalo semi-infinito  $(-\infty, 0)$ .
2. Si  $f(x)$  y  $h(x)$  son absolutamente integrables sobre el intervalo semi-infinito  $(0, \infty)$ .
3. Si  $f(x)$  o  $h(x)$ , o ambas son absolutamente integrables sobre el intervalo infinito  $(-\infty, \infty)$ .

Ejemplos:

EXISTE LA CONVOLUCIÓN	NO EXISTE LA CONVOLUCIÓN
$step(x) * step(x)$	$step(x) * step(-x)$
$1 * rect(x)$	$1 * step(x)$
$tri(x) * sgn(x)$	$ramp(x) * sgn(x)$
$rect(x) * cos(2\pi\xi_0 x)$	$cos(2\pi\xi_0 x) * cos(2\pi\xi_0 x)$

## 2.10 PROPIEDADES DE LA CONVOLUCION

1. CONMUTATIVA:

$$g(x) = f(x) * h(x) = h(x) * f(x) \quad (2.149)$$

2. DISTRIBUTIVA:

$$[av(x) * bw(x)] * h(x) = a[v(x) * h(x)] + b[w(x) * h(x)] \quad (2.150)$$

## 3. INVARIANZA A DESPLAZAMIENTO:

$$g(x - x_0) = f(x - x_0) * h(x) \quad (2.151)$$

$$g(x - x_0) = f(x) * h(x - x_0) \quad (2.152)$$

## 4. ASOCIATIVA:

$$[v(x) * w(x)] * h(x) = v(x) * w(x) * h(x) = v(x) * h(x) * w(x) = h(x) * v(x) * w(x) \quad (2.153)$$

## 5. EN FUNCIONES DELTA:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \delta(\alpha - x) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \delta(x - \alpha) d\alpha = f(x) \quad (2.154)$$

$$f(x) * \delta(x - \alpha) = f(x) \quad (2.155)$$

**2.11 CONVOLUCION Y SISTEMAS LSI**

Sea un sistema LSI caracterizado por su operador  $\mathcal{L}\{\}$  teniendo una respuesta impulsional  $h(x)$ .

Para una entrada  $f(x)$  la salida es dada por:

$$g(x) = \mathcal{L}\{f(x)\} \quad (2.156)$$

Se ha probado que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \delta(x - \alpha) d\alpha = f(x) \quad (2.157)$$

Por consiguiente:

$$g(x) = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \delta(x - \alpha) d\alpha\right\} \quad (2.158)$$

Utilizando la propiedad de linealidad del sistema LSI:



$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\mathcal{L}\{\delta(x - \alpha)\} \quad (2.159)$$

Pero  $\mathcal{L}\{\delta(x - \alpha)\}$  es la respuesta impulsional del sistema. Finalmente se demuestra que:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) h(x - \alpha) d\alpha \quad (2.160)$$

Por tanto *la salida de un sistema LSI es dada por la Convolución de la entrada con la respuesta impulsional del sistema.*

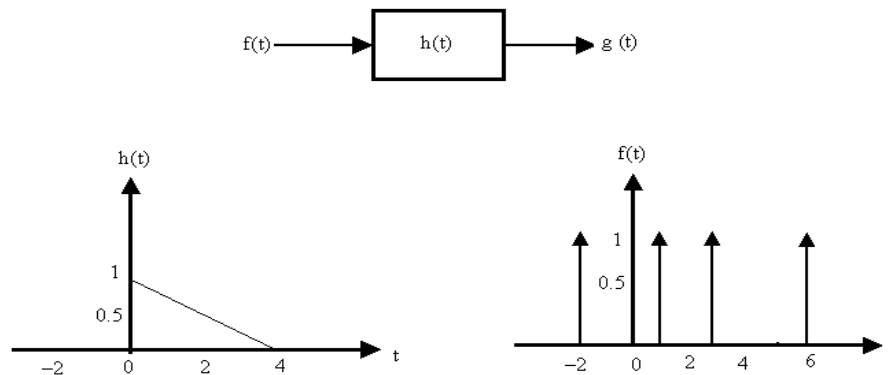
## 2.12 EJERCICIOS RESUELTOS

### 2.12.1 Transformación de una señal de entrada en una señal de salida

Para visualizar esta situación se ha escogido como ejemplo un sistema que tiene como respuesta impulsional idealizada la mostrada en la figura 2.18 y para la cual la entrada es una señal variando temporalmente consistiendo de cuatro funciones delta.

$$f(t) = \delta(t + 2) + \delta(t - 1) + \delta(t - 3) + \delta(t - 6) \quad (2.161)$$

La cual también es mostrada en la figura 2.18; por tanto la salida es dada por:



**Figura 2.18. Sistemas LSI**

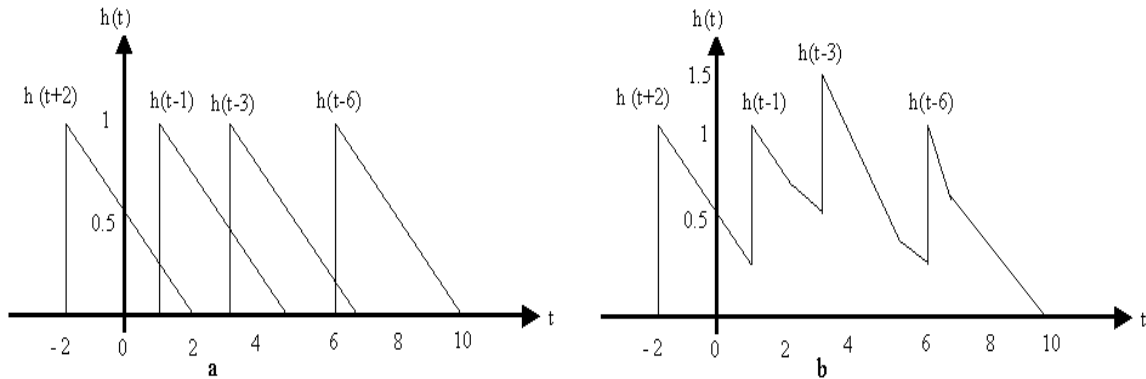
$$g(t) = f(t) * h(t) \quad (2.162)$$

$$g(t) = [\delta(t+2) + \delta(t-1) + \delta(t-3) + \delta(t-6)] * h(t) \quad (2.163)$$

$$g(t) = h(t+2) + h(t-1) + h(t-3) + h(t-6) \quad (2.164)$$

Es aparente que cada término de esta expresión representa la respuesta a una componente de función delta individual, mientras que la suma de los términos representa la respuesta a la entrada total. Ambas las repuestas individuales y la respuesta total son mostradas en la figura 2.19, note que la respuesta total tiene esmoteado y es más ancha que la señal de entrada  $f(t)$ .

En la discusión precedente se toma el punto de vista de que cada parte de la entrada produce una versión pesada y desplazada de  $h(t)$  la suma de lo cual produce la salida  $g(t)$ ; Ahora se busca un segundo pero equivalente punto de vista. Cuando un sistema tiene una respuesta impulsional similar al que se muestra en la figura 2.18 aparecerá un rizado abrupto en los máximos el cual decaerá a cero, debe ser claro que la más reciente porción de ocurrencia de la entrada tendrá la más grande influencia sobre el valor de la salida y cualquier tiempo de observación particular. De otro lado puede ser confuso como una operación convolución puede producir este comportamiento.



**Figura 2.19. Salida del sistema. a. Respuesta a salida deltas individuales. b. Respuesta total**

Para entender esto considere la salida:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.165)$$

Lo cual muestra que la salida tiene un valor igual al área bajo el producto de  $f(\tau)h(t-\tau)$ . Así la función es una versión reflejada y desfasada de la respuesta impulsional y se ve que juega el papel de factor de peso dependiente del tiempo, el efecto de, lo cual es pesar cada parte de la señal de entrada de acuerdo al intervalo entre el tiempo de ocurrencia y el tiempo en el cual la medición es hecha.

### 2.12.2 Correlación cruzada y autocorrelación

Dadas dos funciones de valor complejo  $f(x)$  y  $g(x)$  se define la correlación cruzada de  $f(x)$  con  $g(x)$  como:

$$f(x) \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(\alpha - x) d\alpha \quad (2.166)$$

Esta operación es similar a la convolución, pero existe una diferencia importante, la función  $g(x)$  no es vista como en el caso de la convolución; si se hace el cambio de variable  $\beta = \alpha - x$  la ecuación anterior se convierte en:

$$f(x) \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta + x) g(\beta) d\beta \quad (2.167)$$

Lo cual permite la conclusión de que en general:

$$f(x) \star g(x) \neq f(x) \star g(x) \quad (2.168)$$

Así; a diferencia del caso de la convolución la operación correlación cruzada no es conmutativa, sin embargo puede ser expresada en términos de la convolución como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(\alpha - x) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g\left(\frac{x - \alpha}{-1}\right) d\alpha = f(x) \star g\left(\frac{x}{-1}\right) = f(x) \star g(-x) \quad (2.169)$$

Luego se muestra que:

$$f(x) \star g(x) = f(x) \star g(-x) \quad (2.170)$$

Las condiciones para la existencia de esta operación son las mismas que para la convolución. Pero ellas pueden ser ahora aplicadas directamente. Si  $f(x) = g(x)$  entonces se define esta operación como la operación autocorrelación.

### 2.12.3 Represetación matemática de un objeto bidimensional

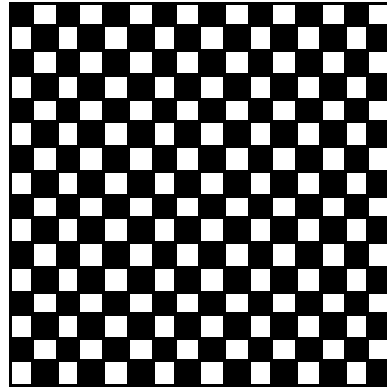
A. Encuentre explícitamente la ecuación matemática que describe la geometría del objeto que se encuentra en el plano  $U_A(x, y)$  de la figura 2.20, la cual consiste de una cuadrícula de lado  $l$  que ocupa todo el plano.

De la gráfica se observa que el ancho de cada cuadrícula de la figura de difracción tiene dimensiones  $l$  por tanto la solución en el eje de las  $X$  se obtiene como una convolución de (ver figura 2.21) :

$$\text{rect}\left(\frac{x}{\frac{l}{2}}\right) \quad (2.171)$$

Con una peinilla de Dirac de la forma:

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nl) \quad (2.172)$$



**Figura 2.20. Objeto propuesto**

De donde se obtiene que:

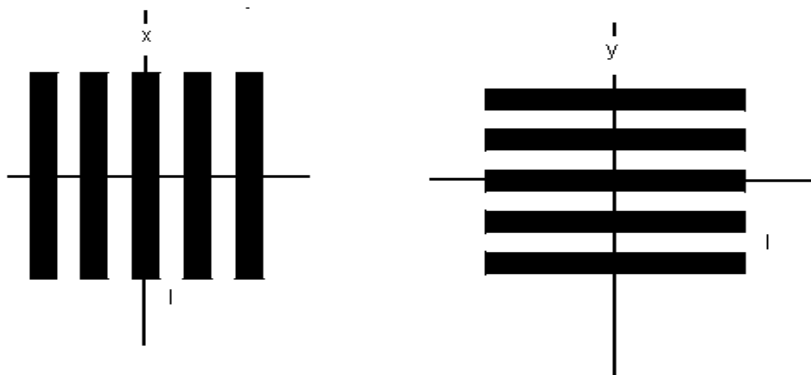
$$\text{rect}\left(\frac{x}{\frac{l}{2}}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nl) \quad (2.173)$$

Situación análoga para el caso del eje  $Y$

$$\text{rect}\left(\frac{y}{\frac{l}{2}}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - 2nl) \quad (2.174)$$

La expresión buscada es por consiguiente:

$$U_A(x, y) = \begin{bmatrix} \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nl) \\ \text{rect}\left(\frac{y}{l}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - 2nl) \end{bmatrix} \quad (2.175)$$



**Figura 2.21. Descomposición del objeto propuesto**

B. Demuestre matemáticamente la siguiente propiedad ( $f(x)$ , es una función arbitraria).

$$\begin{aligned} f(x) \left[ \text{comb}\left(\frac{x - x_0}{b}\right) \right] &= |b| \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_0 + nb) \delta(x - x_0 - nb) & \end{aligned} \quad (2.176)$$

De las propiedades de la función peinilla de Dirac se tiene que:

$$\frac{1}{|b|} \left[ \text{comb}\left(\frac{x}{b}\right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nb) \quad (2.177)$$

Para una función desfasada:

$$\frac{1}{|b|} \left[ \text{comb}\left(\frac{x - x_0}{b}\right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0 - nb) \quad (2.178)$$

Introduciendo la función:

$$f(x) \frac{1}{|b|} \left[ \text{comb} \left( \frac{x-x_0}{b} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_0 + nb) \delta(x - x_0 - nb) \quad (2.179)$$

Para introducir la función dentro de la sumatoria se debe cumplir la propiedad de la función delta de Dirac:

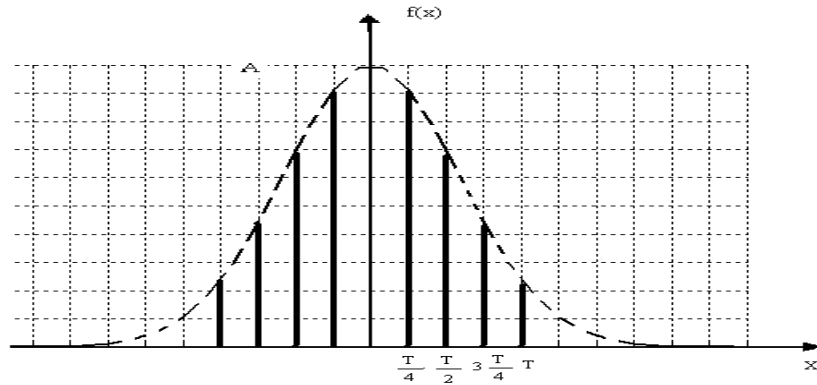
$$f(x) \frac{1}{|b|} \left[ \text{comb} \left( \frac{x-x_0}{b} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_0 + nb) \delta(x - x_0 - nb) \quad (2.180)$$

Lo cual finalmente se puede escribir como:

$$f(x) \left[ \text{comb} \left( \frac{x-x_0}{b} \right) \right] = |b| \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_0 + nb) \delta(x - x_0 - nb) \quad (2.181)$$

C. Realice una gráfica detallada para el caso en el cual  $x_0 = 0$ ,  $b = \frac{T}{4}$  y  $f(x) = Ae^{-\pi(\frac{x}{T})^2}$ .

La solución gráfica se encuentra en la figura 2.22.



**Figura 2.22. Gaussiana muestreada**

### 2.12.4 Transformada de Fourier y propiedades

A. Teniendo en cuenta la expresión matemática obtenida en el literal A del numeral I; encuentre explícitamente su transformada de Fourier.

$$\mathfrak{F}[U_A(x, y)] \quad (2.182)$$

Debido a la simetría en las dos componentes ya que  $U_A(x, y)$  es una función de variables separables, la solución se puede plantear de la siguiente forma:

$$\mathfrak{F}[U_A(x, y)] = \mathfrak{F}[V_A(x) W_A(y)] \quad (2.183)$$

Por propiedad de las funciones de variables separables:

$$\mathfrak{F}[U_A(x, y)] = \mathfrak{F}[V_A(x)] \mathfrak{F}[W_A(y)] \quad (2.184)$$

donde:

$$V_A(x) = \left[ \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nl) \right] \quad (2.185)$$

$$W_A(y) = \left[ \text{rect}\left(\frac{y}{l}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - 2nl) \right] \quad (2.186)$$

En el eje de las  $x$ :

$$\mathfrak{F}[V_A(x)] = \mathfrak{F}\left[\left[\text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nl)\right]\right] \quad (2.187)$$

Por propiedades de la transformada de Fourier:

$$\mathfrak{F}[V_A(x)] = \mathfrak{F}\left[\left[\text{rect}\left(\frac{x}{l}\right)\right]\right] \mathfrak{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nl)\right] \quad (2.188)$$

De donde se obtiene que:

$$\mathfrak{F} \left[ \text{rect} \left( \frac{x}{l} \right) \right] = \frac{l}{2} \text{sinc} \left( \frac{l}{2} \xi \right) \quad (2.189)$$

$$\mathfrak{F} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nl) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( \xi - \frac{n}{2l} \right) \quad (2.190)$$

Resultado similar se obtiene en el eje de las  $y$  por consiguiente el resultado final buscado es:

$$U_A(\xi, \eta) = \frac{l^2}{4} \text{sinc} \left( \frac{l}{2} \xi \right) \text{sinc} \left( \frac{l}{2} \eta \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( \xi - \frac{n}{2l} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( \eta - \frac{n}{2l} \right) \quad (2.191)$$

Utilizando propiedades de la función delta de Dirac:

$$U_A(\xi, \eta) = \frac{l^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left( \frac{n}{4} \right) \delta \left( \xi - \frac{n}{2l} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left( \frac{n}{4} \right) \delta \left( \eta - \frac{n}{2l} \right) \quad (2.192)$$

B. Demuestre explícitamente una de las propiedades de la transformada de Fourier que haya utilizado en la solución del literal A numeral III.

Solución Libre.

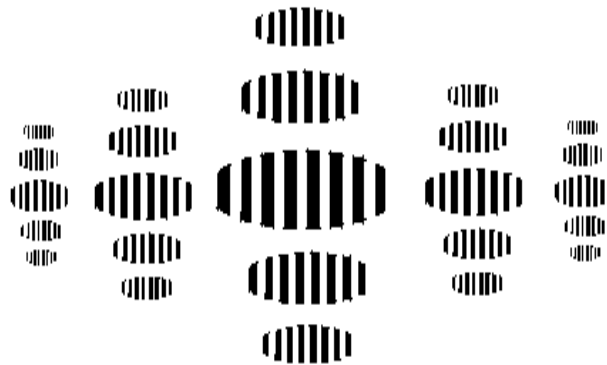


Figura 2.23. Cuadrado de la transformada de Fourier



### 2.12.5 Aplicación

Realice una gráfica del cuadrado de la transformada de Fourier obtenida en el literal A del numeral III del presente examen. La solución gráfica se encuentra en la figura 2.23.

### 2.12.6 Representación matemática de un objeto bidimensional



**Figura 2.24. Objeto propuesto**

A. Encuentre explícitamente la ecuación matemática que describe la geometría del objeto que se encuentra en el plano  $U_A(x, y)$  de la figura 1; el cual consiste de dos rejillas de anchura  $D$  y altura  $H$  separadas una distancia  $L$ .

#### **SOLUCION:**

De la figura 1 y aplicando la noción de variables separables  $U_A(x, y) = U_A(x) U_A(y)$ . En el eje de las  $y$  la figura es la convolución de un delta par con un rectángulo de altura  $D$  en el eje  $y$  es decir:

$$U_A(y) = \delta(y) * \left[ \text{Rect} \left( \frac{y}{H} \right) \right] \quad (2.193)$$

La figura anterior se puede ventanear por la figura en el eje  $x$ :

$$U_A(x) = \text{rect} \left( \frac{x}{D} \right) \quad (2.194)$$

De la definición del delta par y de la figura se requiere además la condición:  $H = 1$  para que la figura se corresponda; es decir:

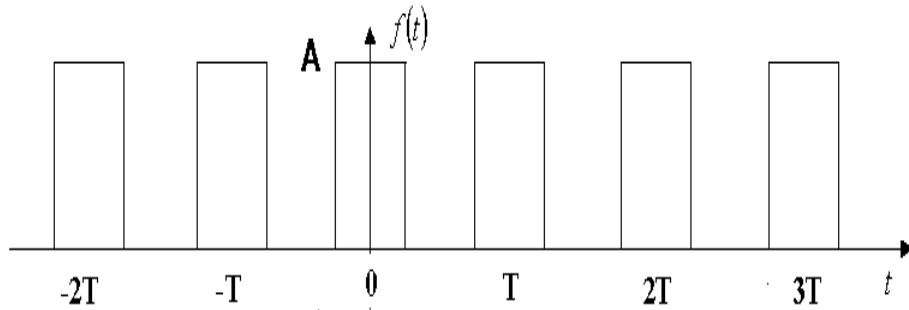
$$U_A(y) = \delta\delta(y) * [Direct(y)] \quad (2.195)$$

Finalmente se obtiene la expresión:

$$U_A(x, y) = rect\left(\frac{x}{D}\right) [\delta\delta(y) * [Direct(y)]] \quad (2.196)$$

### 2.12.7 Ejercicios prácticos

Considere la señal mostrada en la figura 5.



**Figura 2.25. Señal propuesta**

A. Utilizando las propiedades de la convolución encuentre explícitamente la expresión matemática que la describe  $f(t)$ .

**SOLUCION:**

La señal corresponde a la convolución de un rect con una comb; es decir:

$$f(t) = Arect\left(\frac{2t}{T}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.197)$$

B. Encuentre explícitamente el espectro de esta señal y realice una gráfica. (Valor 0.6 puntos)

**SOLUCION:**

De la teoría de Fourier se conoce que:

$$F(\nu) = \mathfrak{F}[f(t)] \quad (2.198)$$

De donde se obtiene que:

$$F(\nu) = \mathfrak{F}\left[Arect\left(\frac{2t}{T}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right] \quad (2.199)$$

Aplicando propiedades de la transformación de Fourier:

$$F(\nu) = \mathfrak{F}\left[Arect\left(\frac{2t}{T}\right)\right] \mathfrak{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right] \quad (2.200)$$

De donde se obtiene:

$$F(\nu) = A \frac{T}{2} \text{sinc}\left(\frac{\nu T}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \quad (2.201)$$

Si se tiene en cuenta que  $\nu_0 = \frac{1}{T}$

$$F(\nu) = \frac{A}{2} \text{sinc}\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n\nu_0) \quad (2.202)$$

Para introducir el sinc dentro de la función comb se debe cumplir que  $\nu = n\nu_0$ ; es decir, se obtiene finalmente:

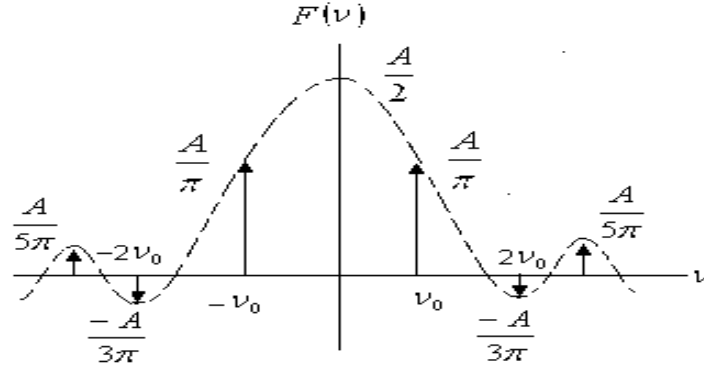
$$F(\nu) = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \delta(\nu - n\nu_0) \quad (2.203)$$

La grafica del espectro esta dada por la figura 6.

### 2.12.8 Transformada de Fourier y propiedades

A. Teniendo en cuenta la expresión matemática obtenida en el literal A del numeral I; encuentre explícitamente su transformada de Fourier.

**SOLUCION:**



**Figura 2.26. Espectro de la señal**

$$U_A(x, y) = \left[ \delta\delta(y) * \left[ \text{Direct}(y) \text{rect}\left(\frac{x}{D}\right) \right] \right] \quad (2.204)$$

$$U_A(\xi, \eta) = \Im[U_A(x, y)] \quad (2.205)$$

Reemplazando:

$$U_A(\xi, \eta) = \Im \left[ \delta\delta(y) * \left[ \text{Direct}(y) \text{rect}\left(\frac{x}{D}\right) \right] \right] \quad (2.206)$$

Por propiedades de la transformación de Fourier:

$$U_A(\xi, \eta) = \Im[\delta\delta(y)] \Im \left[ \text{Direct}(y) \text{rect}\left(\frac{x}{D}\right) \right] \quad (2.207)$$

De donde se obtiene:

$$U_A(\xi, \eta) = [\cos(2\pi\eta)] [D^2 \text{sinc}(\xi D) \text{sinc}(\eta)] \quad (2.208)$$

Finalmente se obtiene:

$$U_A(\xi, \eta) = D^2 \text{sinc}(\xi D) \text{sinc}(\eta) \cos(2\pi\eta) \quad (2.209)$$

B. Demuestre explícitamente una de las propiedades de la transformada de Fourier que haya utilizado en la solución del literal A numeral III.

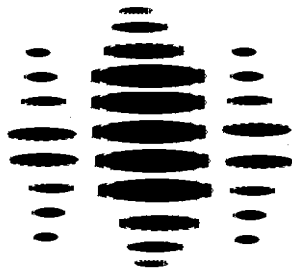
**SOLUCION:**

La propiedad utilizada corresponde a la transformada de una convolución

Sea  $g(x) = f(x) * h(x)$ ,  $g(x)$  una función con transformada de Fourier  $G(\xi)$ ,  $f(x)$  una función con transformada de Fourier  $F(\xi)$  y  $h(x)$  una función con transformada de Fourier  $H(\xi)$  entonces:

$$G(\xi) = \mathcal{F}\{f(x) * h(x)\} = F(\xi) H(\xi) \quad (2.210)$$

LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA CONVOLUCIÓN ES SIMPLEMENTE EL PRODUCTO DE LAS TRANSFORMADAS DE LAS FUNCIONES INDIVIDUALES



**Figura 2.27.** Cuadrado de la transformada de Fourier

**2.12.9 Aplicación**

Realice una gráfica del cuadrado de la transformada de Fourier obtenida en el literal A del numeral III del presente exámen.

**SOLUCION:**

La gráfica del cuadrado de la transformada de Fourier esta dada por la figura 7.