

# 基于Hellinger-Reissner原理的 变分一致型伽辽金无网格法

汇报人：吴新瑜

指导教师：赵珧冰 吴俊超

汇报日期：2023年10月11日

# 提纲

- 开题内容
- 完成情况
- 后续安排

# 提纲

- 开题内容
- 完成情况
- 后续安排

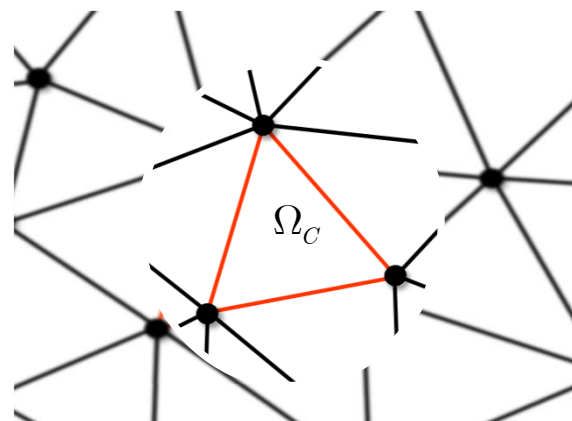
# 变分一致型的伽辽金无网格法

假定应变理论

$$\sigma_{ij}^h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_{ij}^T \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$$

满足积分约束条件的数值积分方案

- 稳定节点积分法(Chen et al, 2001, 2002)
- 变分一致积分法(Chen et al, 2013)
- 一致性积分法(Duan et al, 2012)
- 嵌套子域积分法(Wu and Wang, 2016)
- **再生光滑梯度积分法**(Wu and Wang, 2019)
- 一致投影积分法(Wang and Ren, 2023)



背景积分域

**再生光滑梯度缺乏一个完备的变分理论基础**

# 变分一致性的本质边界条件施加方案

本质边界条件施加方案	变分一致性	消除人工参数依赖性	避免高阶梯度计算
罚函数法(Penalty)	✗	✗	✓
拉格朗日乘子法(LM)	✗	✓	✓
Nitsche法	✓	✗	✗

缺乏一种高效鲁棒的变分一致性本质边界条件施加方案

# 基于Hellinger-Reissner原理的变分一致型伽辽金无网格法

Hellinger-Reissner变分原理



位移离散:  $u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\mathbf{x}) d_{iI}$

应力离散:  $\sigma_{ij}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \mathbf{a}_{ij}^T(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}), \quad \text{in } \Omega_C$

$$\bar{\Pi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} d\Omega - \int_{\Gamma_g} \sigma_{ij} n_j g_i d\Gamma - \int_{\Gamma^t} u_i (\sigma_{ij} n_j - t_i) d\Gamma + \int_{\Omega} u_i (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Gamma$$

✓ 再生光滑梯度缺乏一个完备的变分理论基础

满足变分一致性

✓ 缺乏一种高效鲁棒的变分一致性本质边界条件施加方案

消除人工参数依赖性

# 提纲

- 开题内容
- 完成情况
- 后续安排

# 进度安排

时间	研究内容	进度情况
2022.1-2022.6	建立基于Hellinger-Reissner原理的变分一致型伽辽金无网格法	●
2022.7-2022.12	弹性力学问题的Hellinger-Reissner变分原理本质边界条件施加方案	●
2023.1-2023.6	薄板问题的Hellinger-Reissner变分原理本质边界条件施加方案	●
2023.7-2023.12	Hellinger-Reissner变分原理在薄板结构动力分析中的应用，整理成果并完成论文初稿撰写	○
2024.1-2024.3	进一步修改完善论文，形成并提交论文终稿	

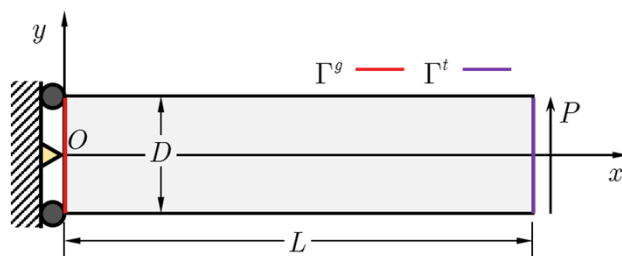
●已完成 ○正在进行

• 吴俊超, 吴新瑜, 赵珏冰, 王东东. 基于赫林格-赖斯纳变分原理的一致高效无网格本质边界条件施加方法. 力学学报, 2022, 54(9): 1-14 doi: 10.6052/0459-1879-22-151

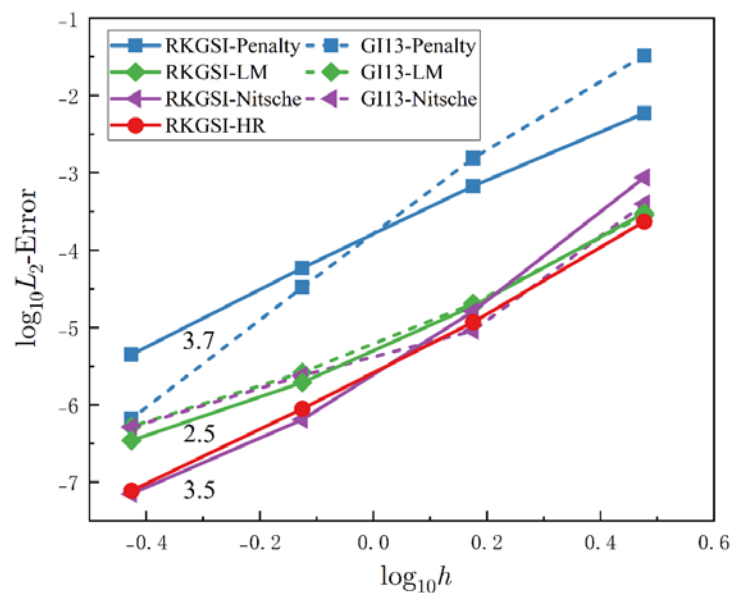
• Junchao Wu , Xinyu Wu , Yaobing Zhao , Dongdong Wang . 《A rotation-free Hellinger-Reissner meshfree thin plate formulation naturally accommodating essential boundary conditions》. Engineering Analysis with Boundary Elements 154(2023) 122-140



# 悬臂梁问题

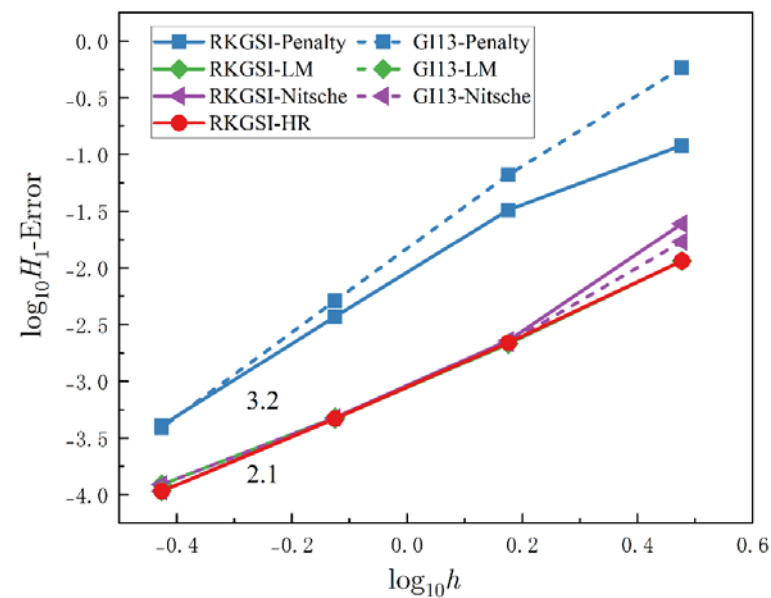


悬臂梁模型



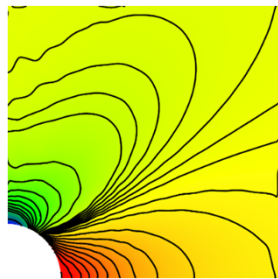
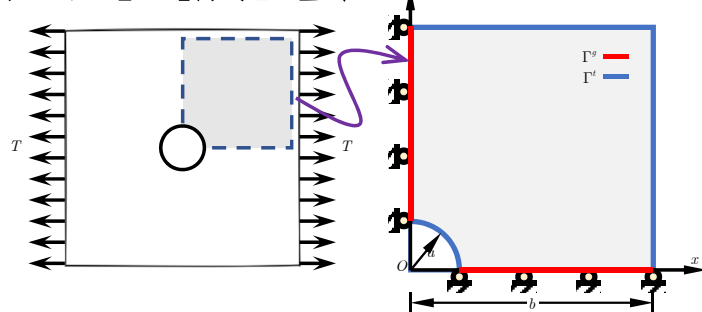
位移误差收敛图

理论误差收敛率：位移：3.0；能量：2.0

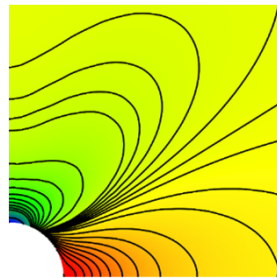


能量误差收敛图

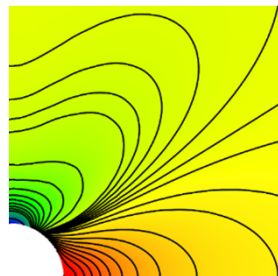
# 无限大平板问题



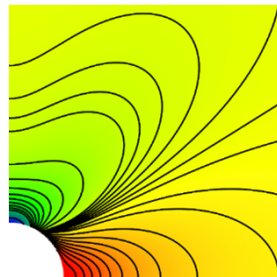
RKGSi-Penalty



RKGSi-Nitsche

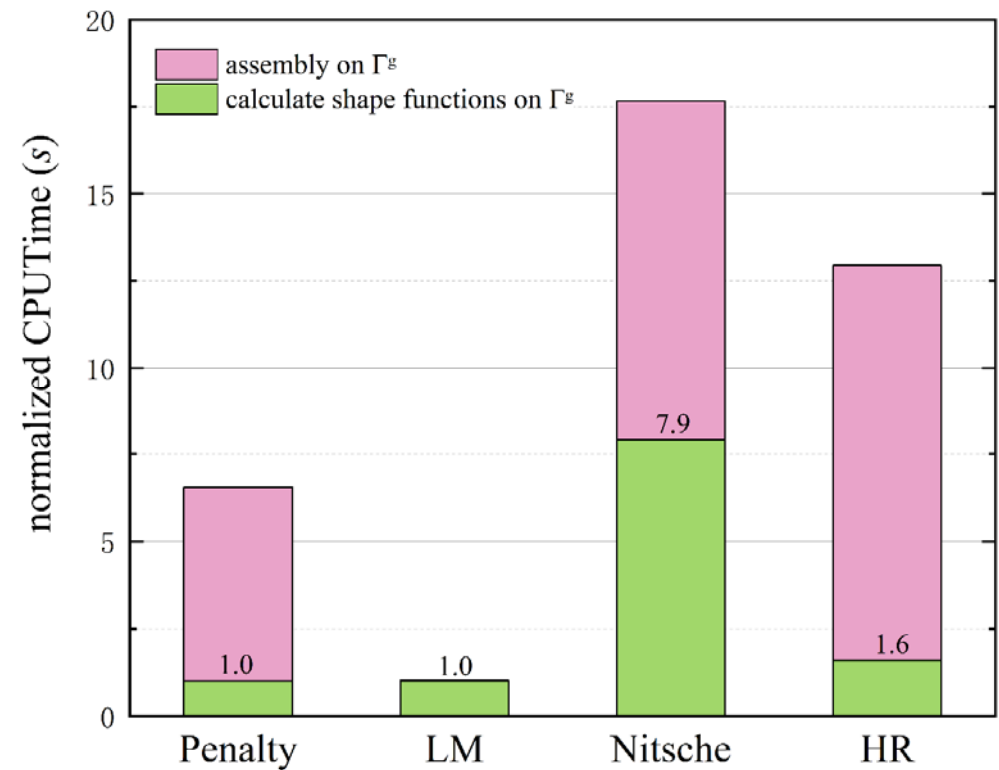


RKGSi-HR



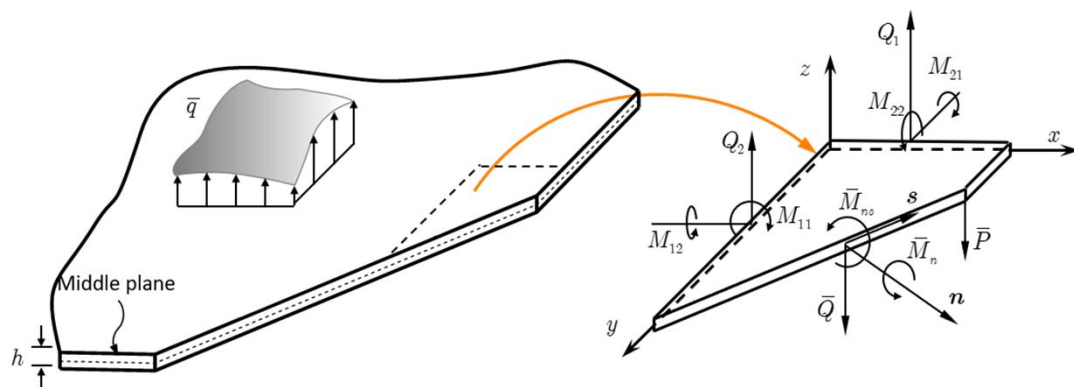
Exact Solution

无限大平板模型及应力云图



本质边界条件施加效率对比

# 薄板问题

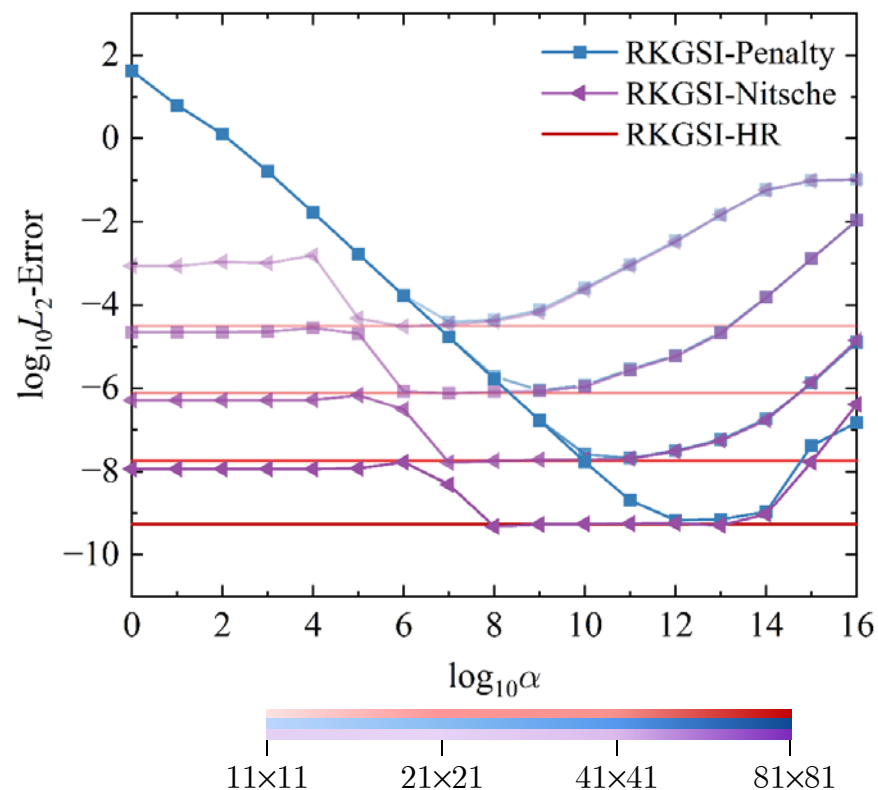


薄板模型

$$w = \bar{w} \quad \text{on } \Gamma_w, \text{ at } c_w \quad \theta_n = \bar{\theta}_n \quad \text{on } \Gamma_\theta$$

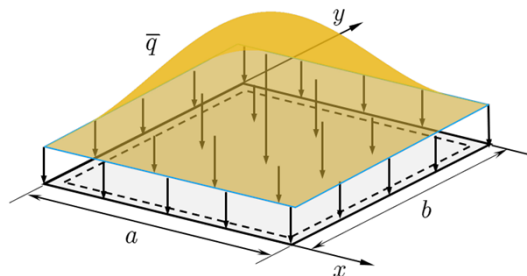
Nitsche法:

- 稳定项中需要**人工参数**
- 一致项需要**计算形函数高阶梯度**



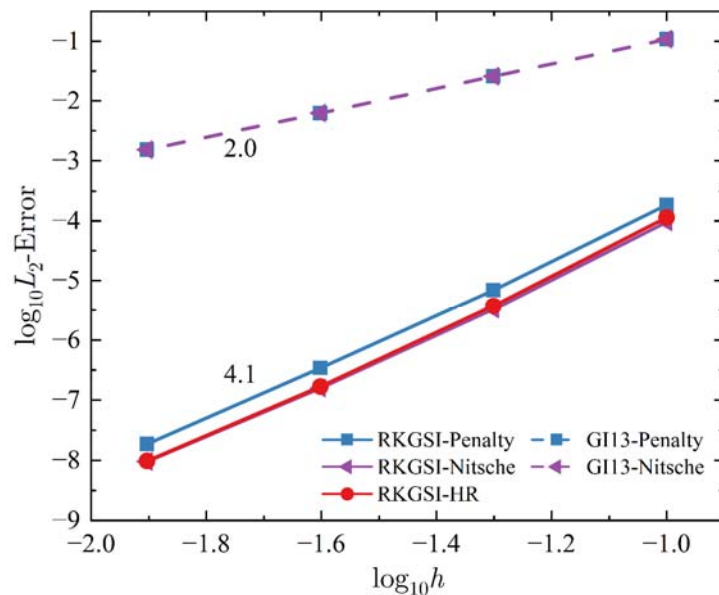
人工参数敏感性分析

# 简支方板问题

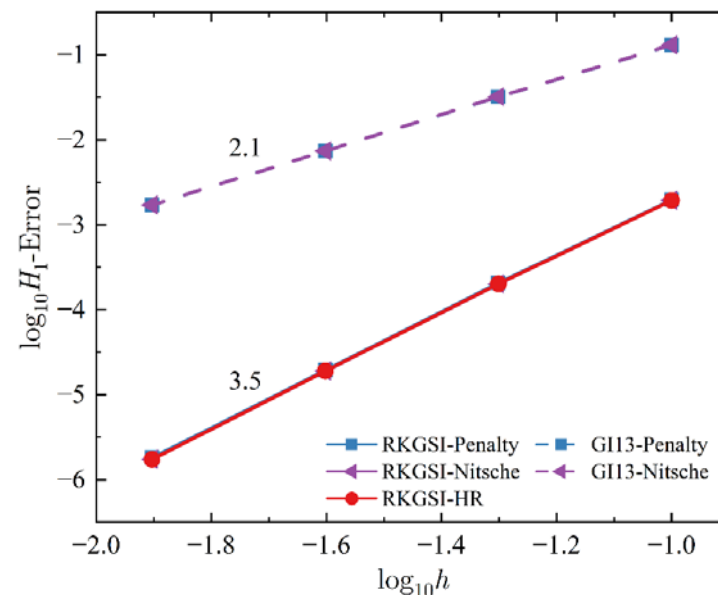


简支方板问题模型

理论误差收敛率：位移：4.0；能量：3.0

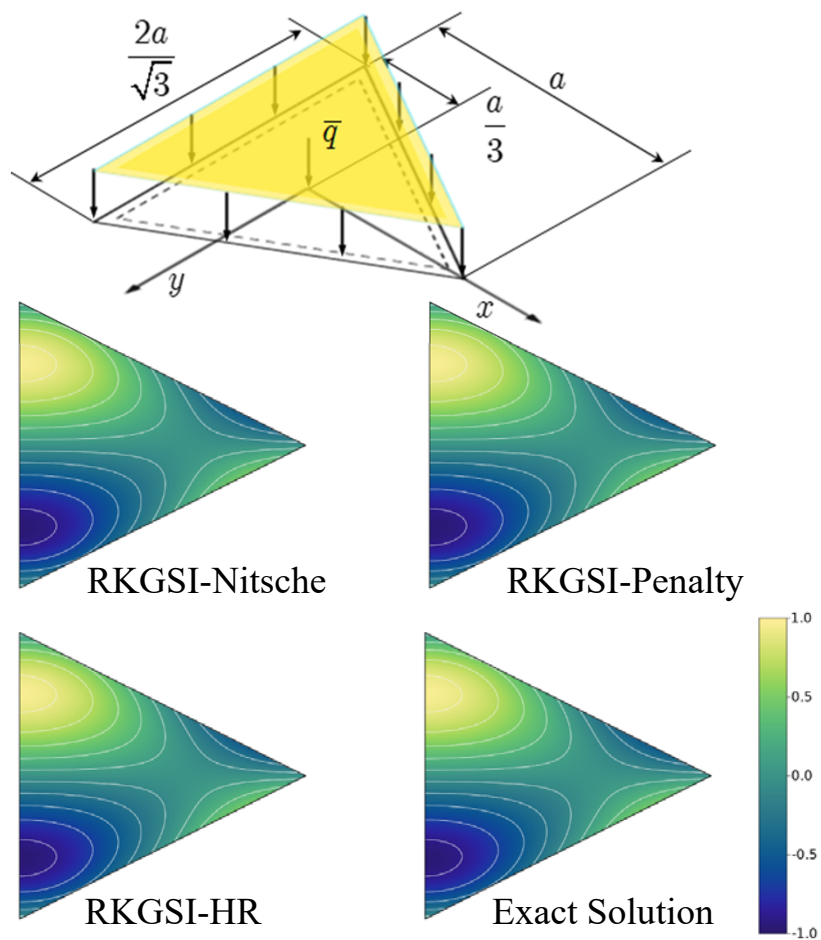


位移误差收敛图

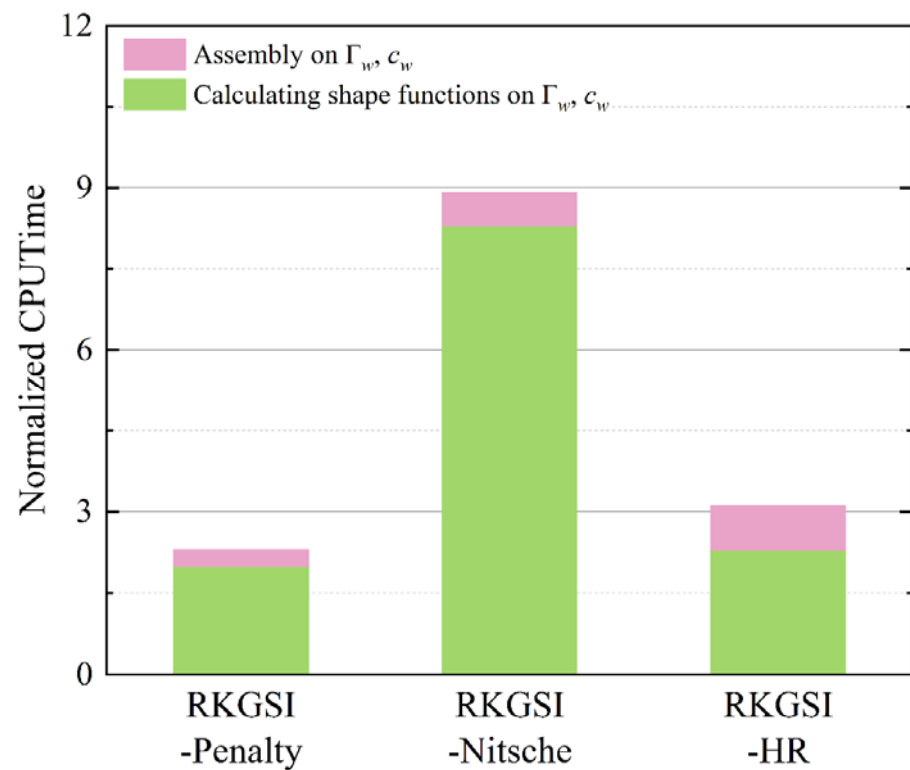


能量误差收敛图

# 简支等边三角形板问题



简支等边三角形板模型及弯矩云图

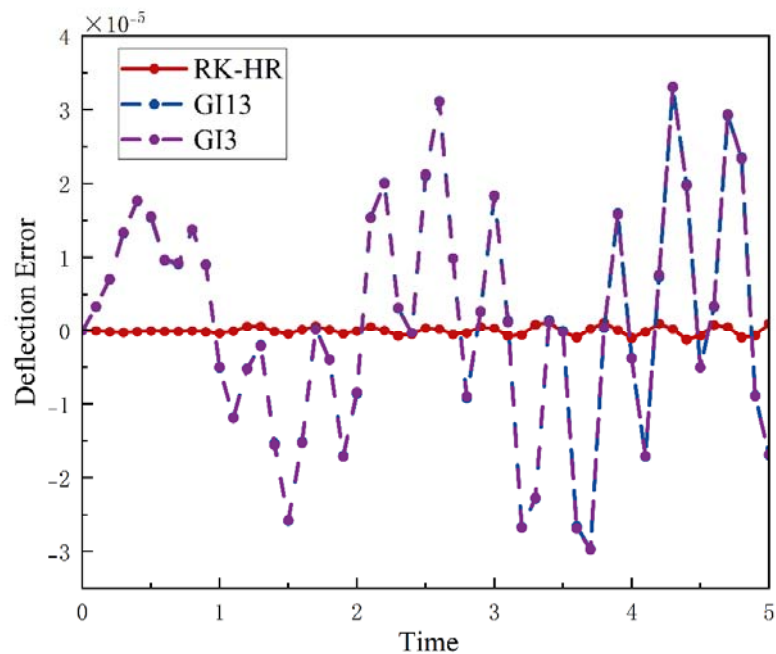


本质边界条件施加效率对比

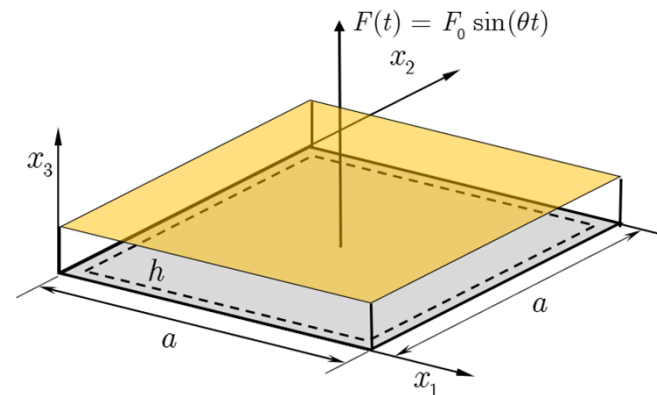
# 提纲

- 开题内容
- 完成情况
- 后续安排

# 薄板问题动力分析



中心挠度误差对比图



薄板动力问题模型

## 目前存在问题:

所提方法在薄板结构动力分析中的结果出现不稳定的现象, 和预期结果不符。

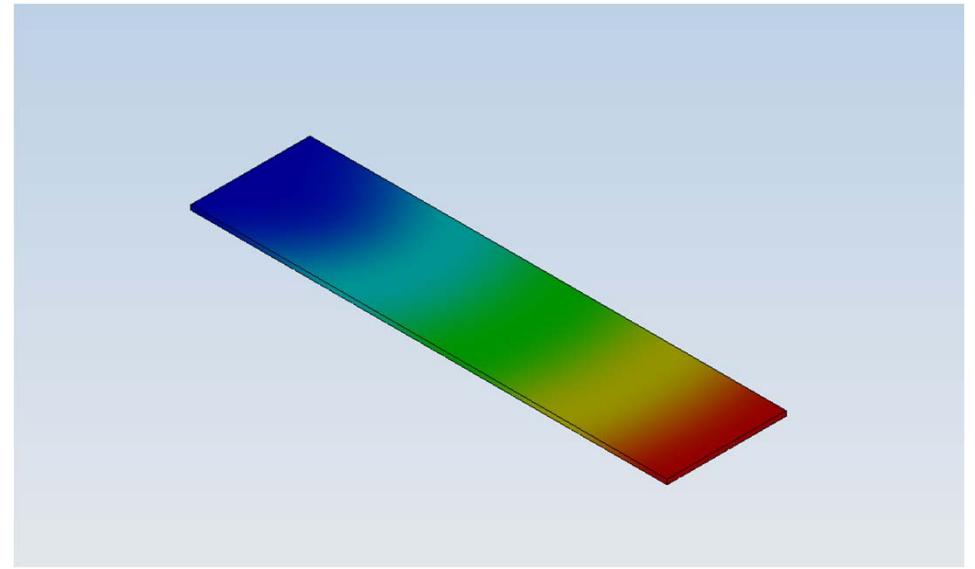
## 拟采用解决方案:

- 对所提方法进行频谱分析, 预测动力分析过程计算精度和稳定性
- 在时域积分采用保辛算法提高稳定性

# 实际工程算例



薄板



数值分析



# 后续安排

时间	研究内容	进度情况
2023.09	撰写弹性力学问题HR弱形式方面的毕业论文内容	●
2023.10	撰写薄板问题HR弱形式方面的毕业论文内容	○
2023.11	撰写伽辽金无网格法及本质边界条件施加方案的毕业论文内容	
2023.12	撰写薄板问题+动力分析的毕业论文内容	
2024.01	撰写工程实践问题+引言+结论的毕业论文的内容	
●已完成 ○正在进行		

**恳请各位老师批评指正**