土木工程学院2021级开题汇报

基于Hellinger-Reissner原理的变分一致型伽辽金无网格法

汇报人：吴新瑜
指导教师：赵珧冰 吴俊超
汇报日期：2022年12月2日

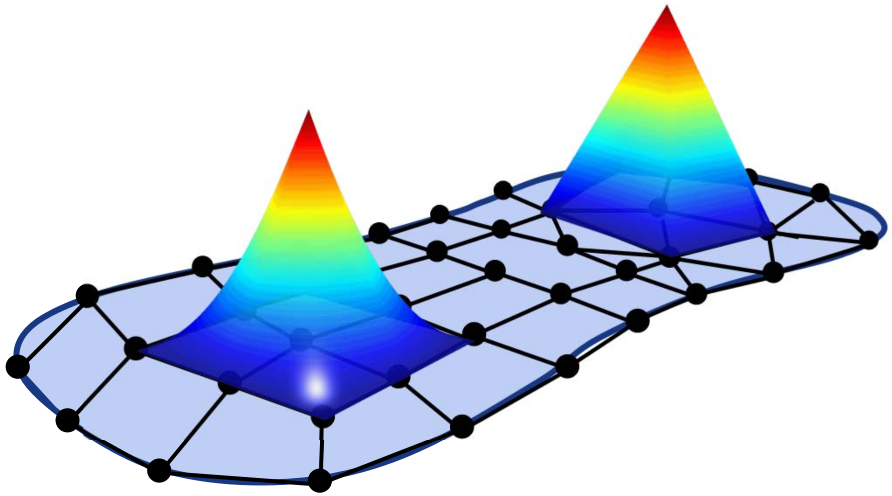
提纲

- 研究背景
- 研究方案
- 进度安排

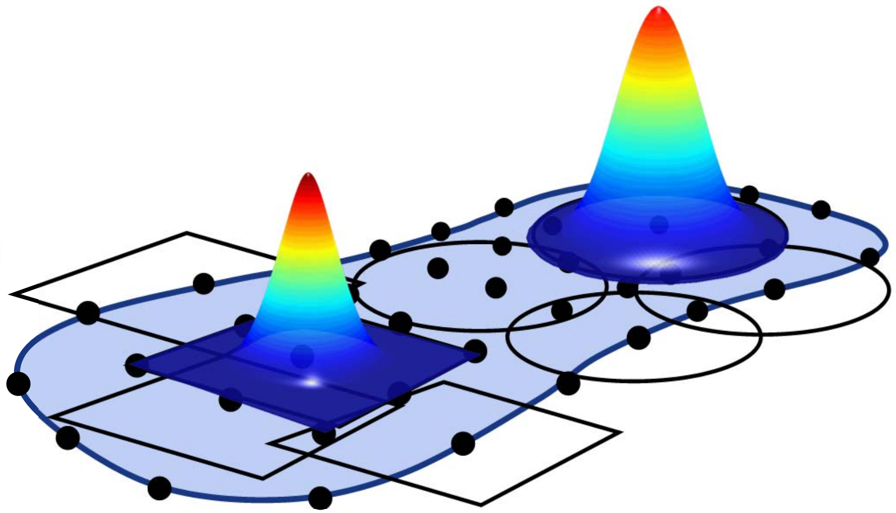
提纲

- 研究背景
- 研究方案
- 进度安排

伽辽金无网格法



有限元法



无网格法

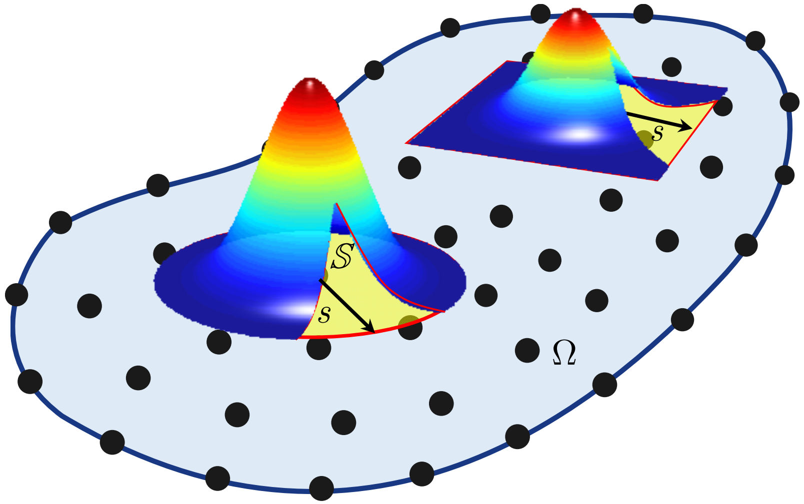
伽辽金无网格法=无网格形函数+伽辽金弱形式

再生核近似

无网格形函数

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\boldsymbol{x}) d_I$$

$$\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{[p]T}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})$$



无网格离散

一致性条件(再生条件)

$$\sum_{I=1}^{n_p} \Psi_I(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{p}^{[p]}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{[p]}(\boldsymbol{0})$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0})$$

$$\boldsymbol{p}^{[p]}(\boldsymbol{x}) = \{1, x, y, x^2, \cdots, y^p\}^T$$

$$\boxed{\Psi_I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{[p]T}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}^{[p]}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})}$$

无网格形函数通常为有理式

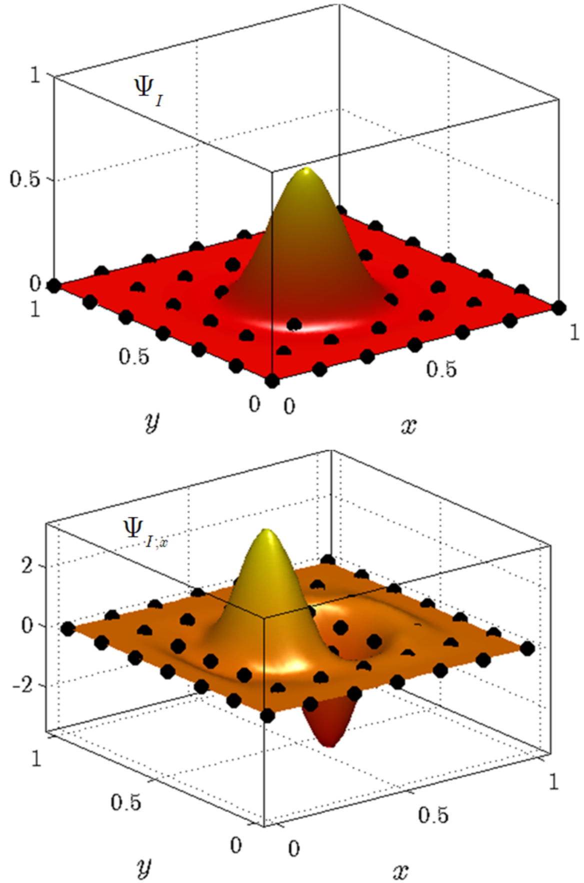
无网格形函数梯度

无网格形函数一阶梯度

$$\Psi_{I,i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{0}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{,i}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \\ +\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}_{,i}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \\ +\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi_{,i}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

无网格形函数二阶梯度

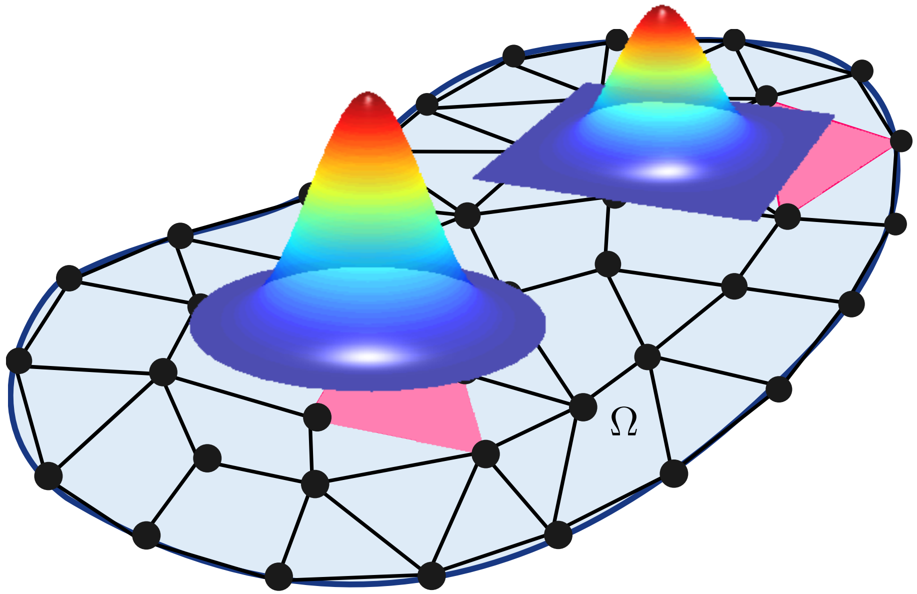
$$\Psi_{I,ij}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{0}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}_{,ij}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \\ +\boldsymbol{M}_{,j}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}_{,i}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \\ +\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}_{,i}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi_{,j}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \\ +\boldsymbol{M}_{,ij}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \\ +\boldsymbol{M}_{,i}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}_{,j}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \\ +\boldsymbol{M}_{,i}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi_{,j}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \\ +\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi_{,ij}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \\ +\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}_{,j}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi_{,i}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \\ +\boldsymbol{M}_{,j}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x})\phi_{,i}(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$



无网格形函数及其梯度

无网格形函数梯度计算复杂耗时

变分一致型的伽辽金无网格法



高斯积分法

积分约束条件

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\Omega$$

$$\sigma_{ij} = \boldsymbol{a}_{ij}^T \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \{1, x, y, x^2, \cdots, y^{p-1}\}^T$$

⇓

$$\int_{\Omega}^{*} \Psi_{I,i} \boldsymbol{q} d\Omega \neq \int_{\partial\Omega}^{*} \Psi_I n_i \boldsymbol{q} d\Gamma - \int_{\Omega}^{*} \Psi_I \boldsymbol{q}_{,i} d\Omega = \boldsymbol{g}_{iI}$$

满足积分约束条件的数值积分方案

- 稳定节点积分法(Chen et al, 2001, 2002)
- 变分一致积分法(Chen et al, 2013)
- 一致性积分法(Duan et al, 2012)
- 嵌套子域积分法(Wu and Wang, 2016)
- 再生光滑梯度积分法(Wu and Wang, 2019)

再生光滑梯度积分法(RKGSI)

假定应变理论

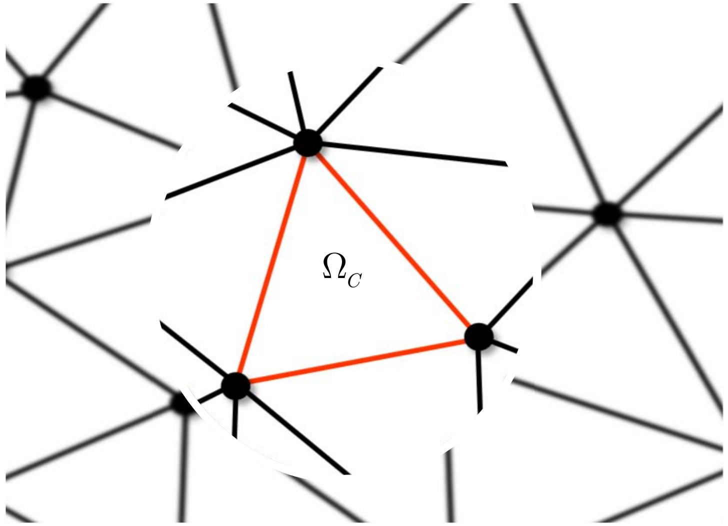
$$u_{i,j}^h = \sum_{I=1}^{n_p} \tilde{\Psi}_{I,j} d_{iI} = \boldsymbol{a}_{ij}^T \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$$

$$\int_{\Omega_C}^{*} \tilde{\Psi}_{I,i} \boldsymbol{q} d\Omega = \int_{\partial\Omega_C}^{*} \Psi_I n_i \boldsymbol{q} d\Gamma - \int_{\Omega_C}^{*} \Psi_I \boldsymbol{q}_{,i} d\Omega = \boldsymbol{g}_{iI}$$

$$\tilde{\Psi}_{I,i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{G}^{-1} \boldsymbol{g}_{iI}, \qquad \boldsymbol{G} = \int_{\Omega_C} \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{q} d\Omega$$

$$\int_{\Omega}^{*} \Psi_{I,i} \boldsymbol{q} d\Omega \neq \int_{\partial\Omega}^{*} \Psi_I n_i \boldsymbol{q} d\Gamma - \int_{\Omega}^{*} \Psi_I \boldsymbol{q}_{,i} d\Omega = \boldsymbol{g}_{iI}$$

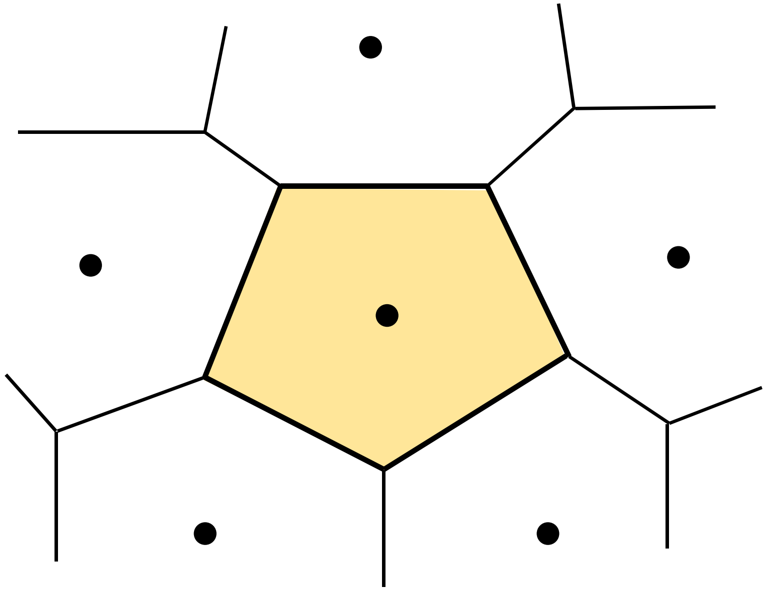
$$\boxed{\tilde{\Psi}_{I,i}(\boldsymbol{x}) \neq \Psi_{I,i}(\boldsymbol{x})}$$



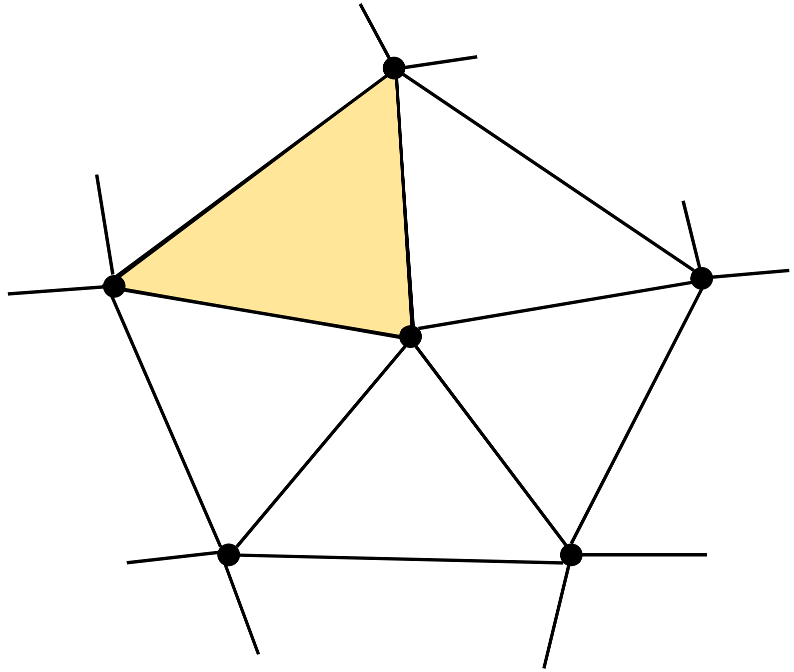
背景积分域

问题1：再生光滑梯度积分法缺乏一个完备的变分理论基础

无网格节点积分域



沃罗诺依图背景积分域

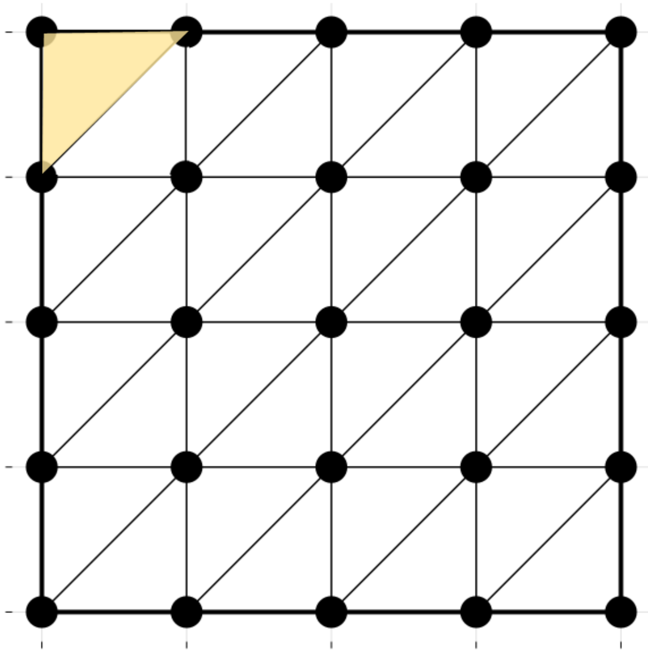


三角形背景积分域

- 简洁，计算效率高
- 容易产生不稳定的问题

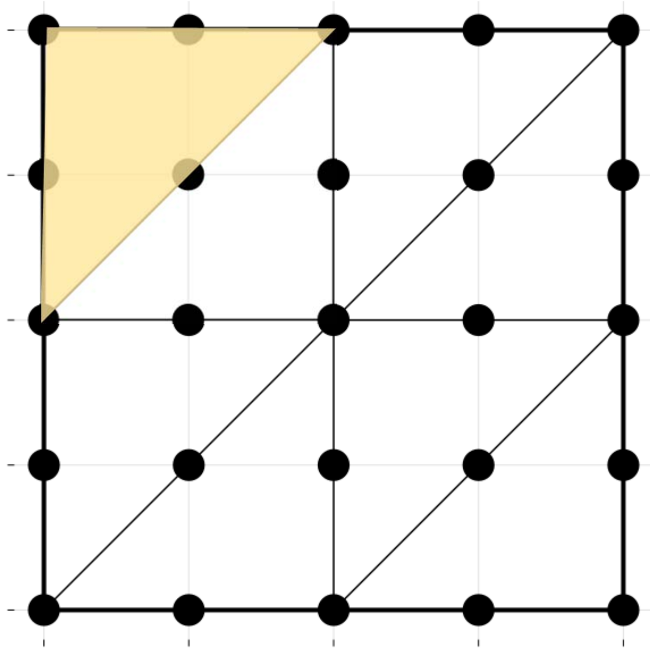
- 稳定性高
- 需要较多的积分域

无网格节点积分域



背景积分域
4X4X2

位移误差:2.65e-5



背景积分域
2X2X2

位移误差：5.77e-5

问题2：缺乏一套优化的积分域方案，提高整体伽辽金无网格法的计算效率

变分一致性的本质边界条件施加方案

满足积分约束条件的无网格数值积分方案需要配合具有变分一致性的本质边界条件施加方案进行求解

- **罚函数法(Zhu T et al,1998)**

$$\delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) = \delta\Pi(\boldsymbol{u}) + \alpha\int_{\Gamma^g}\delta u_i u_i d\Gamma - \alpha\int_{\Gamma^g}\delta u_i g_i d\Gamma$$

特点：数值实现简洁，计算高效；需要额外的人工参数，不具有变分一致性

- **拉格朗日乘子法(Belytschko T et al,2000)**

$$\delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}) = \delta\Pi(\boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma^g}\delta\lambda_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma^g}\lambda_i\delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma^g}\delta\lambda_i g_i d\Gamma$$

特点：无需人工参数；需要额外增加自由度，不具有高阶的变分一致性

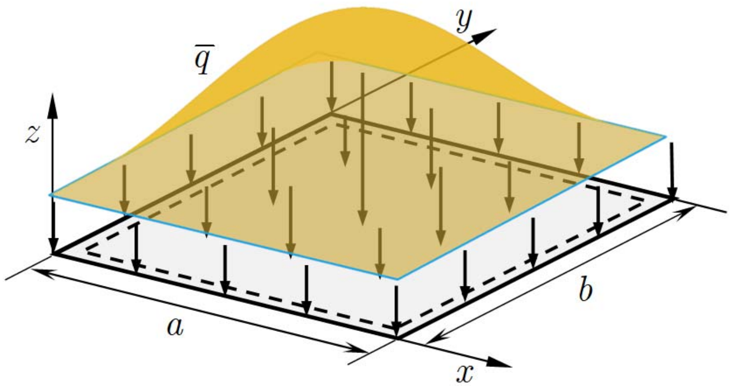
- **Nitsche 法(Fernández-Méndez S et al ,2004)**

$$\delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{u}) = \delta\Pi(\boldsymbol{u}) - \int_{\Gamma^g}\underbrace{\delta\sigma_{ij}n_j}_{\delta\lambda_i} u_i d\Gamma - \int_{\Gamma^g}\delta u_i \underbrace{\sigma_{ij}n_j}_{\lambda_i} d\Gamma + \int_{\Gamma^g}\underbrace{\delta\sigma_{ij}n_j}_{\delta\lambda_i} g_i d\Gamma$$

$$+\alpha\int_{\Gamma^g}\delta u_i u_i d\Gamma + \alpha\int_{\Gamma^g}\delta u_i g_i d\Gamma$$

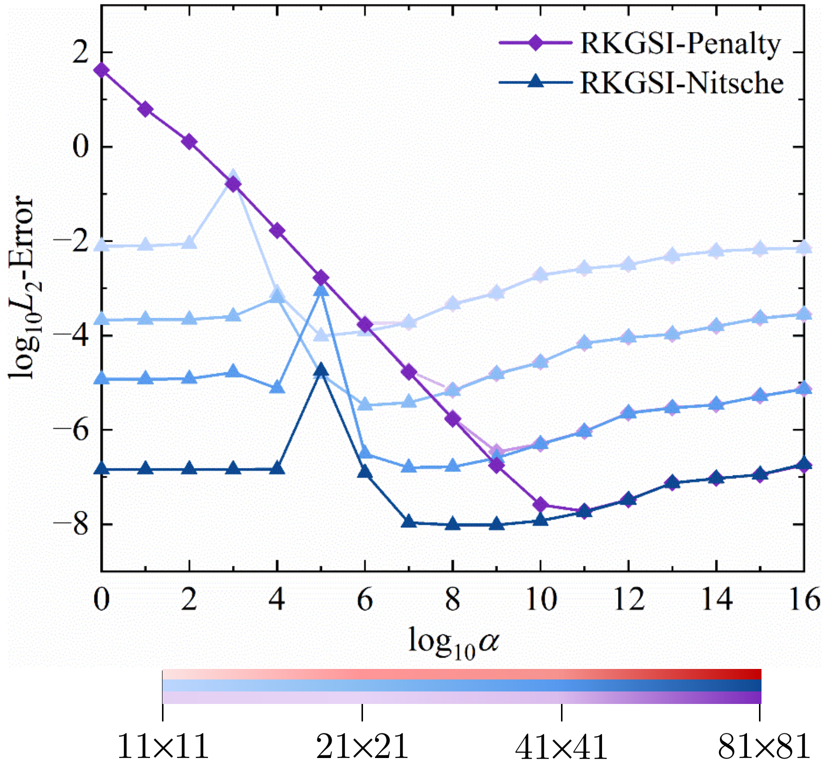
特点：具有变分一致性；需要无网格形函数梯度；需要额外的人工参数

变分一致的本质边界条件施加方案



薄方板问题

几何参数	$a=1, b=1$
抗弯刚度	$D=1$
荷载	$\bar{q}=\sin\pi x\sin\pi y$



人工参数敏感性分析

问题3：缺少一种高效鲁棒的变分一致性本质边界条件施加方案

提纲

- 研究背景
- 研究方案
- 进度安排

Hellinger-Reissner(HR)变分原理

余能泛函

$$\bar{\Pi}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sigma_{ij}C_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl}d\Omega-\int_{\Gamma^g}\sigma_{ij}n_j g_i d\Gamma-\int_{\Gamma^t}u_i(\sigma_{ij}n_j-t_i)d\Gamma+\int_{\Omega}u_i(\sigma_{ij,j}+b_i)d\Gamma$$

位移离散

$$u_i^h(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{n_p}\Psi_I(\boldsymbol{x})d_{iI}$$

应力离散

$$\sigma_{ij}^h(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{n_p}\boldsymbol{a}_{ij}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}),\quad \text{in } \Omega_C$$

✓ 问题1

HR变分原理弱形式

$$\delta\bar{\Pi}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u})=0$$

$$\int_{\Omega}\delta\sigma_{ij}C_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl}d\Omega=\int_{\Gamma^t}\delta\sigma_{ij}n_j u_i d\Gamma-\int_{\Omega}\delta\sigma_{ij,j}u_i d\Omega+\int_{\Gamma^g}\delta\sigma_{ij}n_j g_i d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma^t}\delta u_i\sigma_{ij}n_j d\Gamma-\int_{\Omega}\delta u_i\sigma_{ij,j}d\Omega=\int_{\Gamma^t}\delta u_i t_i d\Gamma+\int_{\Omega}\delta u_i b_i d\Omega$$

✓ 问题3

积分域划分方案

◆ **正定性** **分析数值积分点数量和刚度矩阵的正定性之间的关系，确定满足正定性时背景积分域数量的最小值**

$$\boldsymbol{K_{IJ}} = C_{ijkl}\tilde{g}_{jI}^{T}G^{-1}\tilde{g}_{kJ}$$

$$G = \int_{\Omega_C} \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T d\Omega \qquad \tilde{g}_{jI} = \int_{\partial\Omega_C} \Psi_I \boldsymbol{q} n_j d\Gamma - \int_{\Omega_C} \Psi_I \boldsymbol{q}_{,j} d\Gamma$$

$$rank(\boldsymbol{K}) > nd_{of}$$

◆ **误差估计**

$$\| u - \tilde{u}^h \|_{H_1} \leqslant \underbrace{\boxed{C_{1p}s^k \mid u \mid_{H^{k+1}}}}_{\text{插值误差}} + \underbrace{\boxed{C_{1q}h^l \mid u \mid_{H^{l+1}}}}_{\text{数值积分误差}}$$

$$C_{1q}h^l \mid u \mid_{H^{l+1}} \leqslant C_{1p}s^k \mid u \mid_{H^{k+1}}$$

✓ 问题2

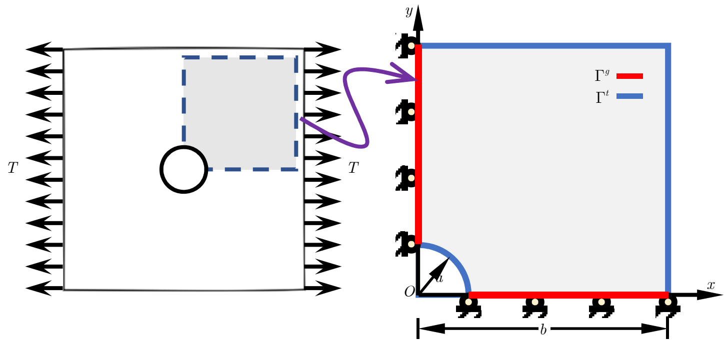
提纲

- 研究背景
- 研究方案
- 进度安排

进度安排

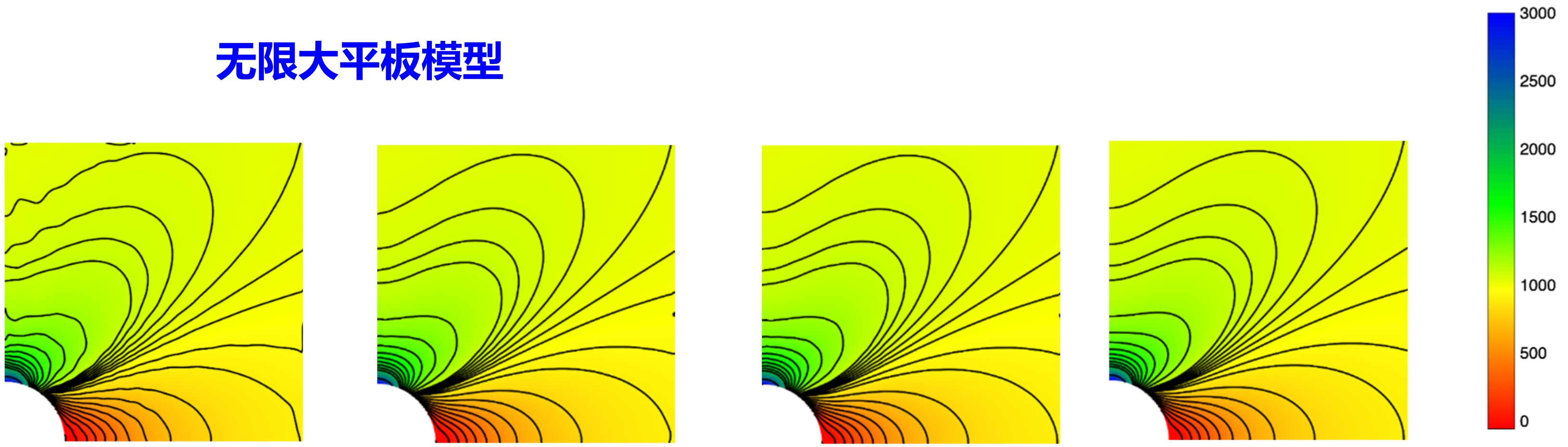
时间	研究内容	进度情况
2022.1-2022.6	建立基于Hellinger-Reissner原理的变分一致型伽辽金无网格法	●
2022.7-2022.12	弹性力学问题的Hellinger-Reissner变分原理本质边界条件施加方案	●
2023.1-2023.6	薄板问题的Hellinger-Reissner变分原理本质边界条件施加方案	○
2023.7-2023.12	变分一致型伽辽金无网格的背景积分域进行优化划分方案，整理成果并完成论文初稿撰写	
2024.1-2024.3	进一步修改完善论文，形成并提交论文终稿	
		●已完成 ○正在进行

弹性力学问题



无限大平板模型

几何参数	$a = 1$
杨氏模量	$E = 3\times10^{6}$
泊松比	$\nu = 0.3$
荷载	$T = 1000$



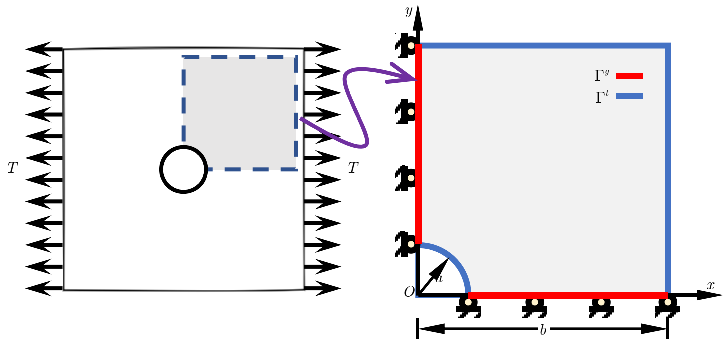
RKGSI-Penalty　RKGSI-Nitsche　RKGSI-HR　Exact Solution

应力云图

- 吴俊超, 吴新瑜, 赵珧冰, 王东东. 基于赫林格–赖斯纳变分原理的一致高效无网格本质边界条件施加方法. 力学学报, 2022, 54(9): 1-14 doi: 10.6052/0459-1879-22-151

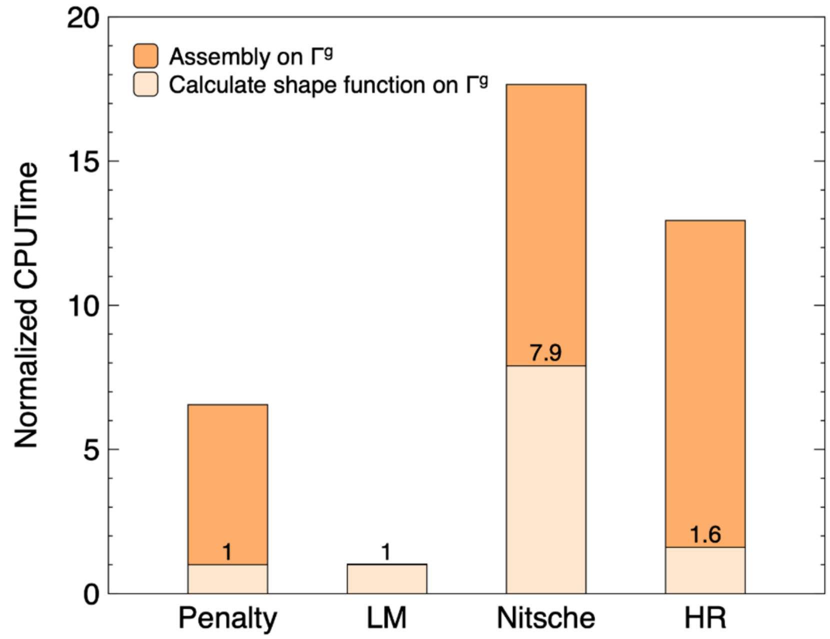
恳请各位老师批评指正

计算效率对比图



无限大平板模型

几何参数	$a=1$
杨氏模量	$E=3\times10^{6}$
泊松比	$\nu=0.3$
荷载	$T=1000$



本质边界条件效率分析

伽辽金弱形式

弹性力学问题强形式

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = t_i & \text{on } \Gamma^t \\ u_i = g_i & \text{on } \Gamma^g \end{cases}$$

势能泛函

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\, d\Omega - \int_{\Gamma^t} u_i t_i\, d\Gamma - \int_\Omega u_i b_i\, d\Omega$$

变分

伽辽金弱形式

$$\delta\Pi(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\, d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i\, d\Gamma - \int_\Omega \delta u_i b_i\, d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\, d\Omega = \int_{\Gamma^t} \delta u_i t_i\, d\Gamma + \int_\Omega \delta u_i b_i\, d\Omega$$

无网格离散

离散控制方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}$$