土木工程学院2022级开题汇报

内禀最优约束比的梁板壳结构有限元无网格混合分析方法

汇报人：徐洋涛

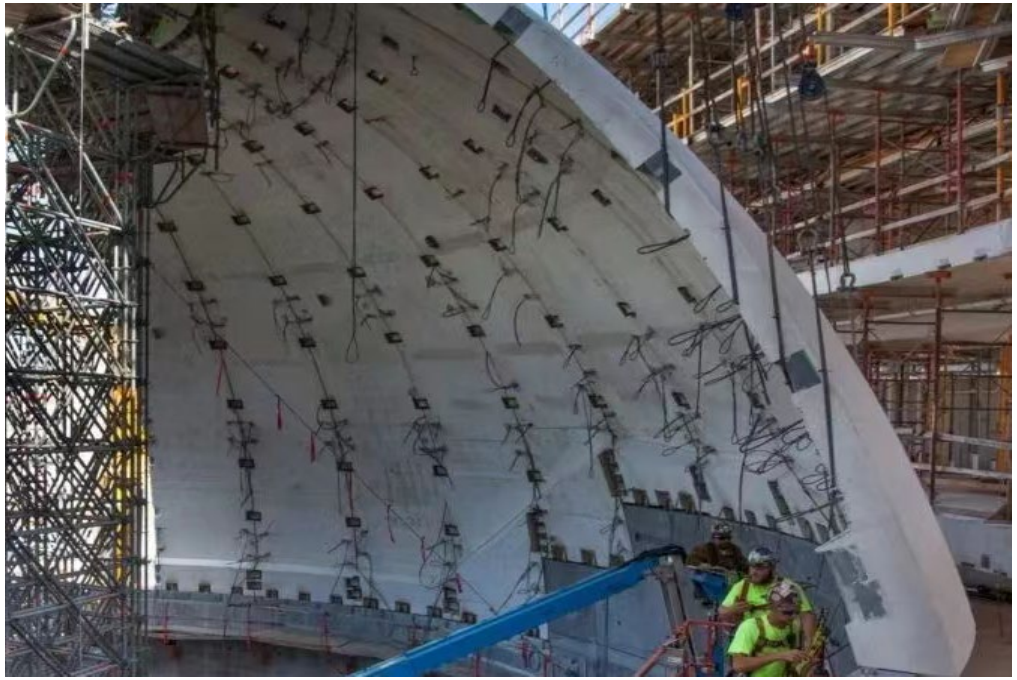
指导老师：许斌 吴俊超

2023年12月15日

目录

研究背景

梁、板结构



壳结构

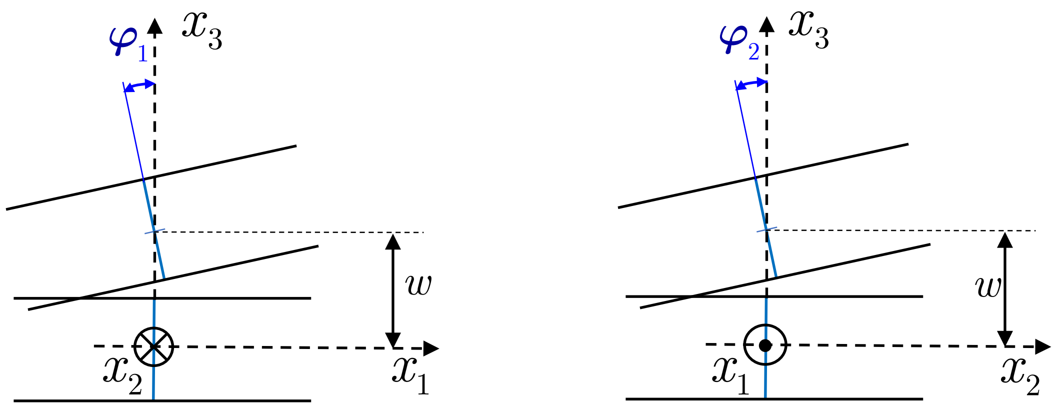
主要研究对象为考虑横向剪切应变的深梁、厚板、厚壳结构

研究背景

Mindlin板几何方程

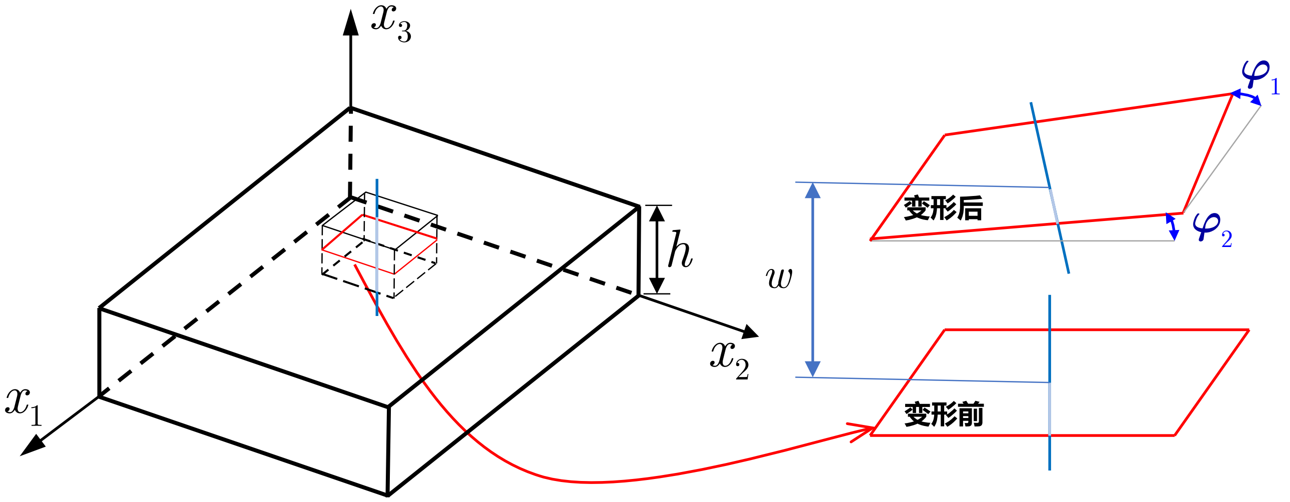
位移：

$$\begin{cases} u_\alpha(x) = -x_3\varphi_\alpha \quad \alpha = 1,2 \\ u_3(x) = w \end{cases}$$



应变：

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta}(x) = -\dfrac{x_3}{2}(\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}) \\ \varepsilon_{\alpha 3}(x) = \dfrac{1}{2}k(w_{,\alpha} - \varphi_\alpha) \end{cases}$$



k 为剪切修正系数

研究背景

平面应变假设：

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2\nu)}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{Bmatrix}=2G\begin{Bmatrix}\varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{13}\end{Bmatrix}$$

$$M_{\alpha\beta}=\int_0^h x_3\sigma_{\alpha\beta}dx_3 \qquad Q_\alpha=k\int_0^h \sigma_{\alpha 3}dx_3$$

弯矩：

$$\begin{Bmatrix}M_{11}\\ M_{22}\\ M_{12}\end{Bmatrix}=-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2\nu)}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_{1,1}\\ \varphi_{2,2}\\ \varphi_{1,2}+\varphi_{2,1}\end{Bmatrix}$$

剪力：

$$\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{Bmatrix}=kGh\begin{Bmatrix}w_{,1}-\varphi_1\\ w_{,2}-\varphi_2\end{Bmatrix}$$

研究背景

伽辽金弱形式：

$$D^b \int_\Omega \delta\boldsymbol{\kappa}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{\kappa} d\Omega + D^s \int_\Omega \delta\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\gamma} d\Omega + \int_{\Gamma^h} \delta\boldsymbol{\theta}^T \bar{\boldsymbol{M}} d\Gamma + \int_{\Gamma^h} \delta w^T \bar{\boldsymbol{Q}} d\Gamma - \int_\Omega \delta w q d\Omega = 0$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,2} \\ \varphi_{1,2} + \varphi_{2,1} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} w_{,1} - \varphi_1 \\ w_{,2} - \varphi_2 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

抗弯刚度和抗剪刚度

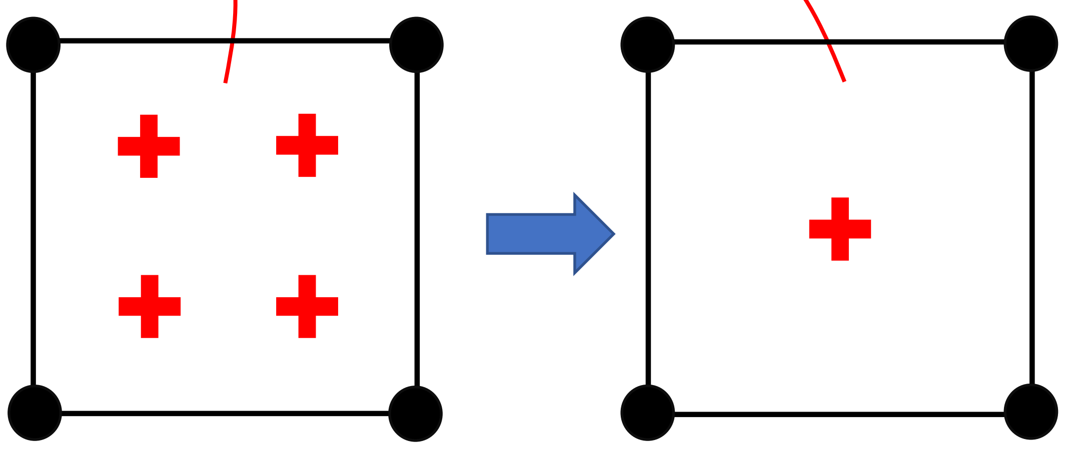
$$\boxed{D^b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad\qquad D^s = kGh}$$

抗剪刚度过大导致剪切自由度受到约束，引起自锁

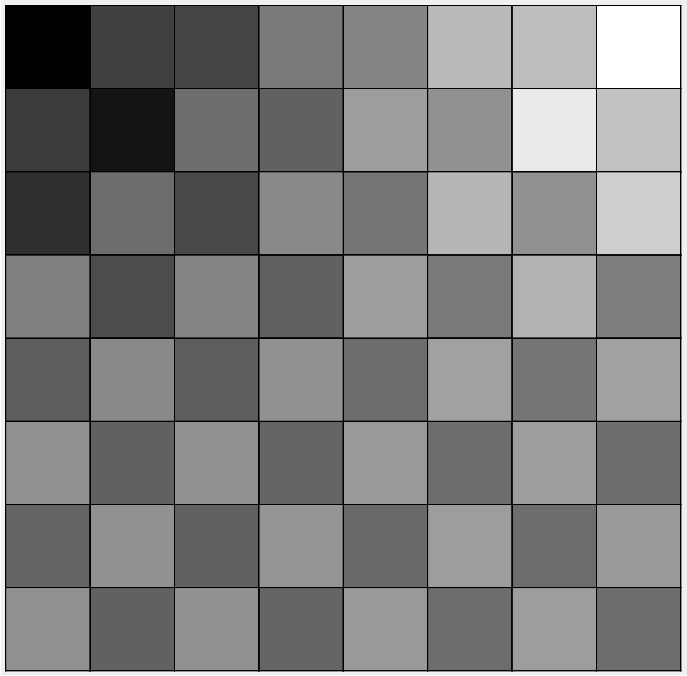
研究背景

缩减积分法

$$\boxed{D^b\int_\Omega \delta\boldsymbol{\kappa}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{\kappa}\, d\Omega} + \boxed{D^s\int_\Omega \delta\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\gamma}\, d\Omega} + \int_{\Gamma^h}\delta\boldsymbol{\theta}^T\bar{\boldsymbol{M}}\,d\Gamma + \int_{\Gamma^h}\delta w^T\bar{\boldsymbol{Q}}\,d\Gamma - \int_\Omega \delta w q\, d\Omega = 0$$



完全积分的四节点单元　　缩减积分的四节点单元



Q4R1单元棋盘模式应力

积分点过少将导致单元间的应力振荡，影响计算精度

研究背景

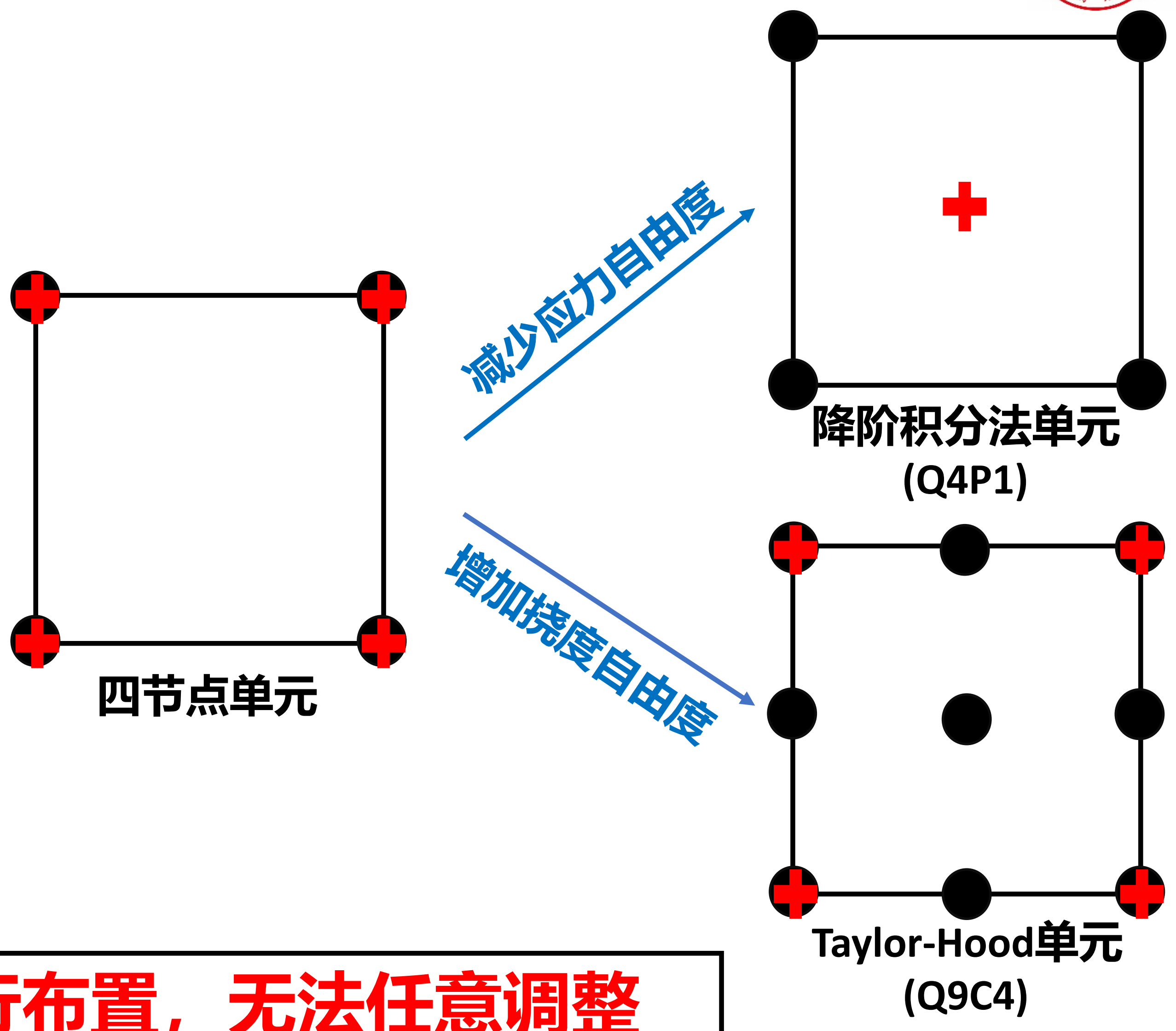
混合离散分析方法

挠度离散 ● 挠度节点

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^{n_u} N_I^u(x) d_I$$

应力离散 ✚ 应力节点

$$Q^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_q} N_I^q(\mathbf{x}) q_I$$



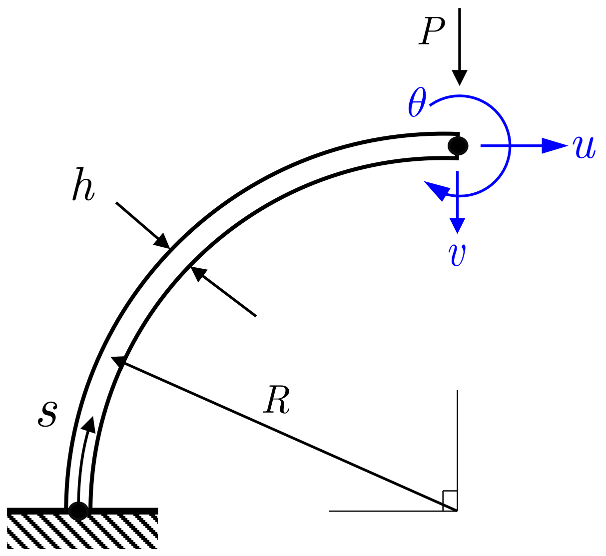
自由度需根据单元进行布置，无法任意调整

LBB稳定性条件

$$\inf_{q\in Q}\sup_{w\in H}\frac{b(w,q)}{\|w\|\|q\|}\geq\beta>0 \quad \overset{?}{\longleftrightarrow} \quad \dim(w):\dim(q)$$

LBB稳定性条件和自由度比例之间的关系不明确

研究背景



悬臂曲梁问题:

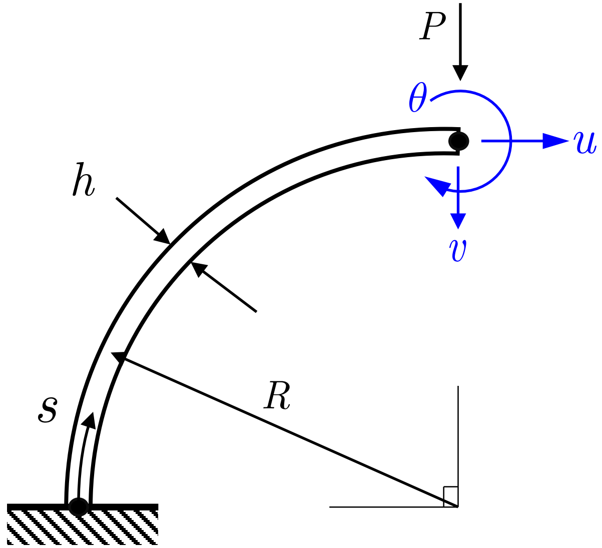
半径: $R=1$

荷载: $P=1000$

杨氏模量: $E=3\times10^{6}$

$\frac{h}{R}$	$\lvert\frac{u^f}{u^c}-1\rvert$	$\lvert\frac{v^f}{v^c}-1\rvert$	$\lvert\frac{\theta^f}{\theta^c}-1\rvert$
1/5	0.35%	1.59%	2.09%
1/10	2.57%	3.24%	3.57%
1/20	9.08%	9.30%	9.04%
1/30	17.83%	17.82%	16.80%
1/40	27.48%	27.28%	25.54%
1/50	36.90%	36.58%	34.26%
1/100	69.27%	68.83%	65.96%
1/200	89.75%	89.54%	88.06%
1/300	95.13%	95.02%	94.24%
1/400	97.19%	97.13%	96.66%
1/500	98.18%	98.14%	97.83%
1/1000	99.54%	99.53%	99.45%

研究背景



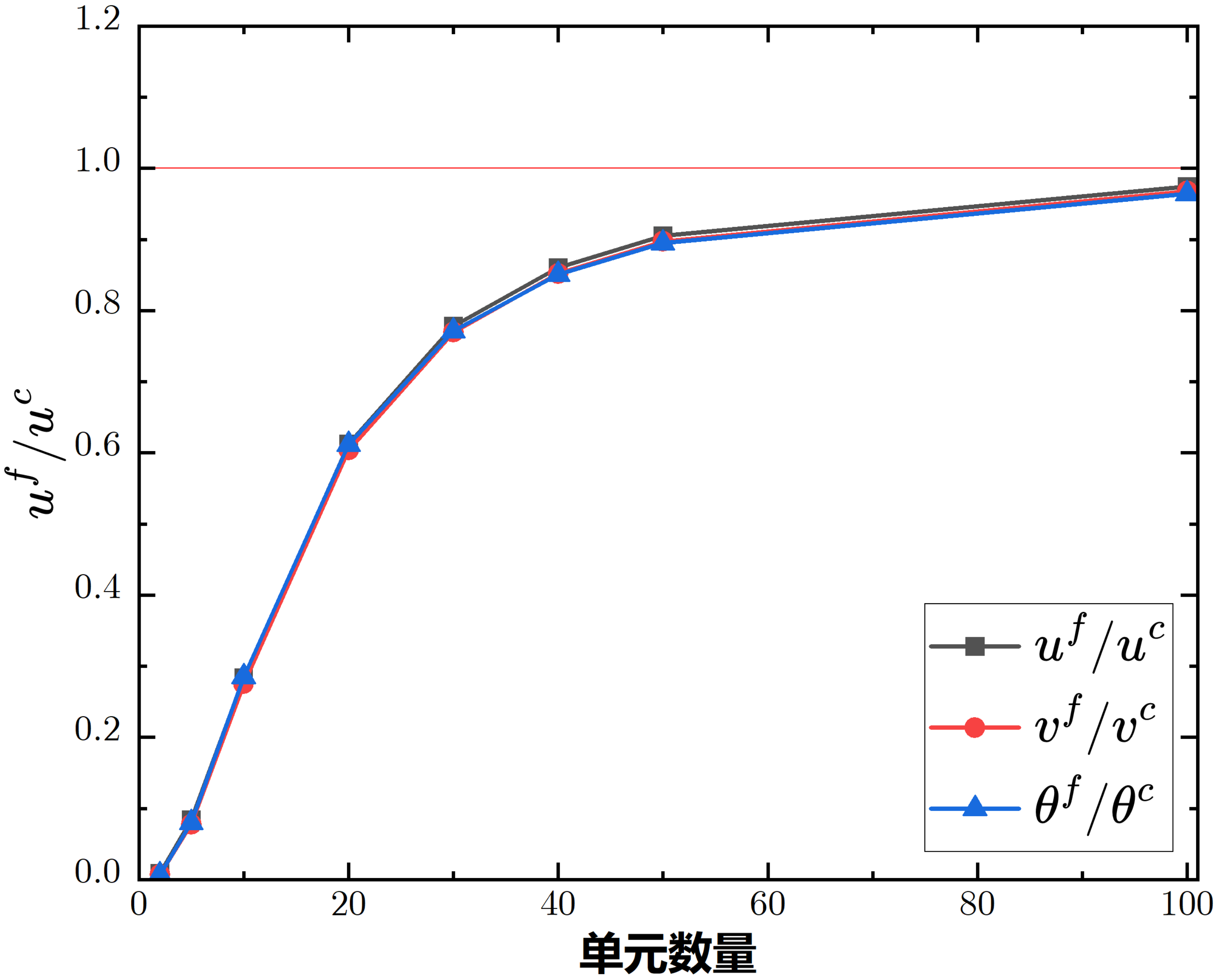
悬臂曲梁问题:

半径: $R = 1$

荷载: $P = 1000$

厚度: $h=1/10$

杨氏模量: $E = 3 \times 10^6$



研究背景

HUAQIAO UNIVERSITY

问题:

1.消除自锁的最优自由度比例;

2.如何任意调整约束自由度比例。

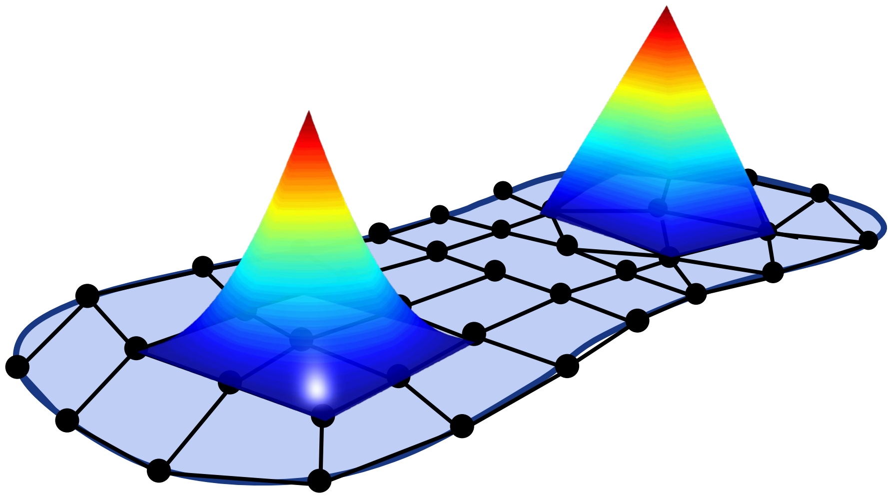
解决方案:

有限元 + 无网格

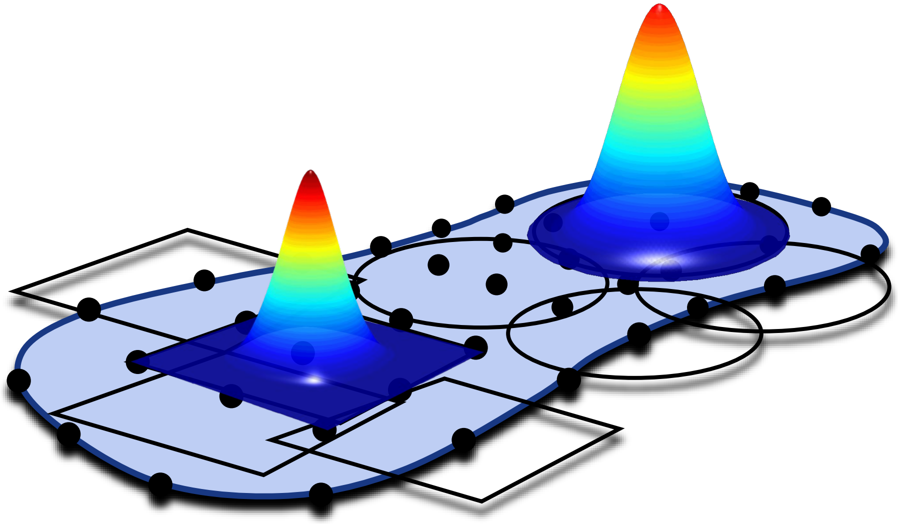
↓

内禀最优约束比的有限元无网格混合分析方法

研究方案



有限元法

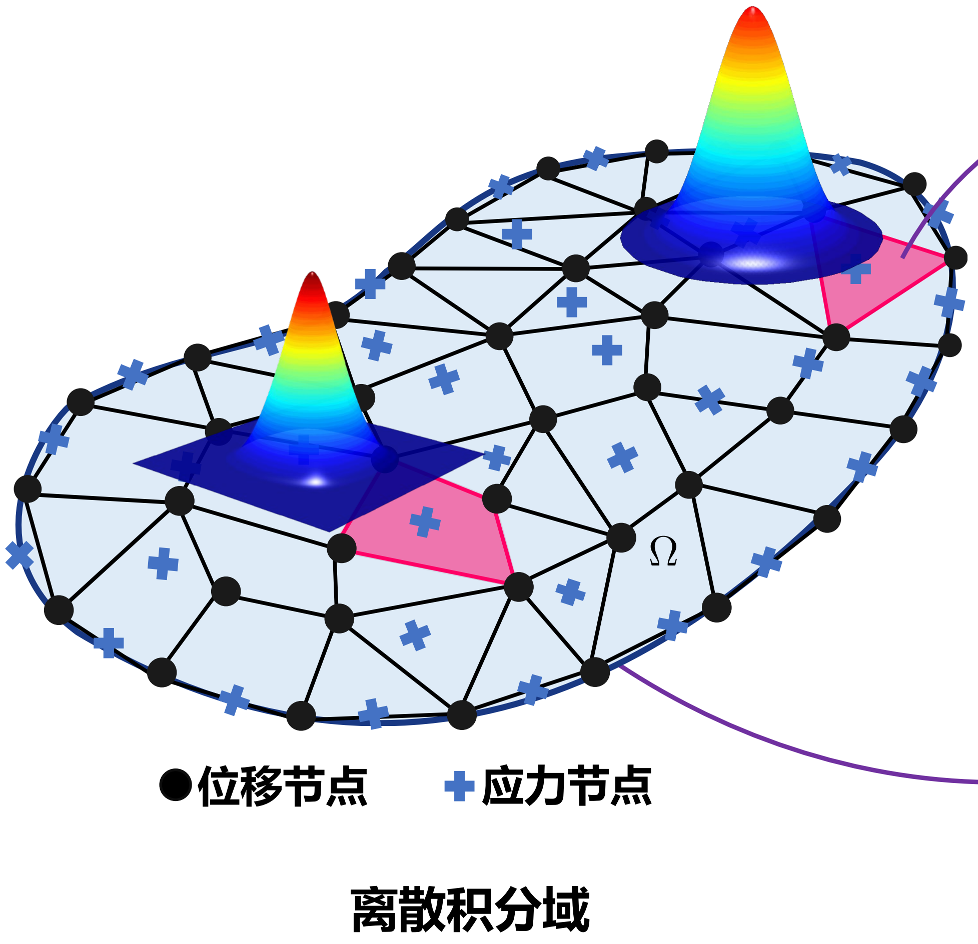


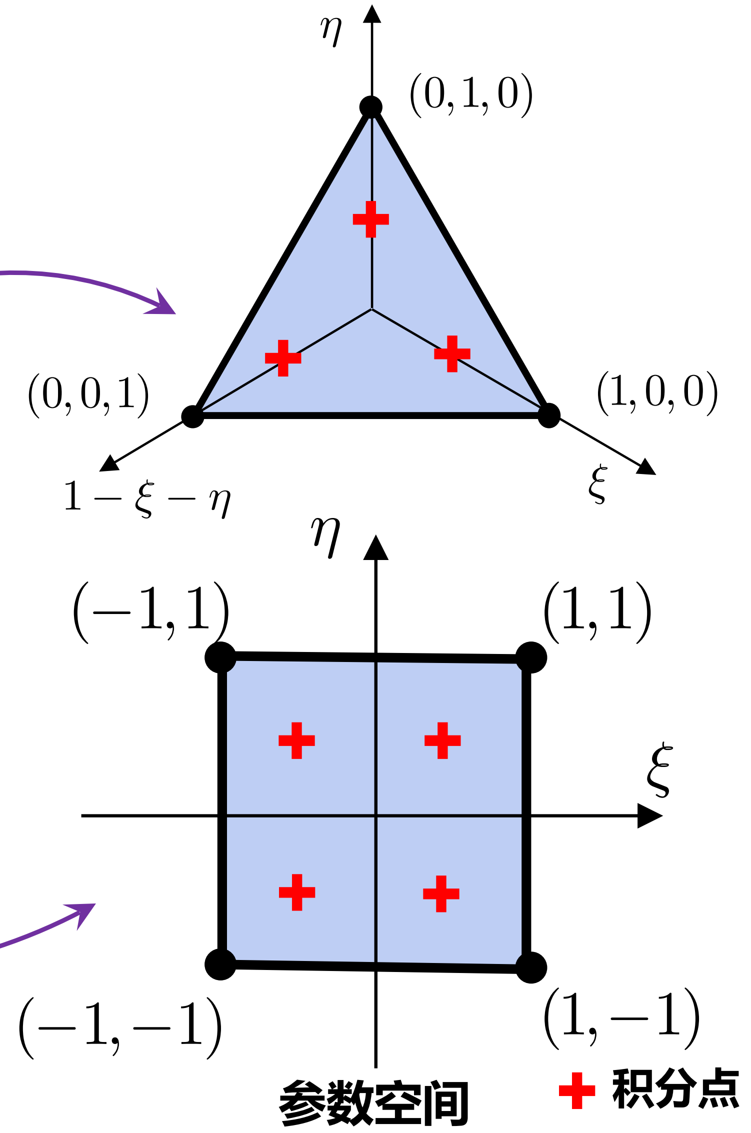
无网格法

无网格法具有全域高阶连续光滑的形函数

研究方案

有限元无网格混合离散





进度安排

时间	研究内容	进度情况
2023.7-2023.12	验证LBB稳定性条件与自由度比例之间的关系	●
2024.1-2024.2	进行Timoshenko假设下梁结构、曲梁结构的无网格有限元混合离散分析	○
2024.3-2024.9	进行Mindlin假设下板壳结构的有限元无网格混合离散分析	
2024.10-2024.12	整理成果并完成论文初稿撰写	
2025.1-2025.3	进一步修改完善论文，形成并提交论文终稿	

● 已完成　○ 正在进行

请各位老师批评指正！