弹塑性力学与有限元

吴俊超

2024 年 9 月 13 日

目录

第一章 绪论 **3**
1.1 拉压杆问题 3
1.1.1 平衡微分方程 3
1.1.2 几何方程 3
1.1.3 物理方程 4
1.1.4 边界条件 5
1.1.5 小节 5
1.2 张量 6
1.2.1 一阶张量 6
1.2.2 高阶张量 7
1.2.3 点乘与叉乘 7
1.2.4 张量微分 9
1.2.5 2 阶张量的谱分解 9

第二章 应力 **12**
2.1 平衡微分方程 12
2.2 应力边界条件 13
2.3 一点的应力状态 14
2.4 莫尔圆 17

第三章 连续体变形 **19**
3.1 应变 19
3.2 转动 20
3.3 体积应变 21
3.4 变形协调方程 22

第四章 弹性 **23**
4.1 4 阶弹性张量 23

4.2 平面应变与平面应力 25
4.2.1 平面应变问题 (Plane strain) 25
4.2.2 平面应力问题 (Plane stress) 26
4.3 弹性力学方程组 26

第五章 变分原理 28
5.1 最小势能原理 28
5.2 里兹-伽辽金法 29
5.3 分段近似空间 31

第六章 有限元法 34
6.1 弹性力学问题伽辽金有限元法 34
6.2 拉格朗日插值近似 37
6.3 四节点双线性单元 (QUAD) 39
6.4 三角形常应变单元 (CST) 40
6.5 有限元法求解一维问题 41

第七章 有限元法施加约束 43
7.1 罚函数法 (Penalty) 43
7.2 拉格朗日乘子法 (Lagrangian multiplier) 43

第八章 一维塑性 44
8.1 塑性应变 44
8.1.1 理想弹塑性模型 46
8.1.2 各向同性等向硬化模型 47
8.1.3 各向同性随动硬化模型 47
8.1.4 Return-mapping 算法 48

第九章 多维塑性 50
9.1 Lode 坐标系 50
9.2 J_2 模型 52
9.2.1 Tresca 准则 52
9.2.2 Mises 屈服准则 53

第一章 绪论

本章前半部分主要介绍弹塑性力学课程的主要学习内容，通过一维拉压杆问题介绍课程的知识体系架构。本章后半部分介绍课程所需的数学工具——张量运算的符号定义和基本运算规则。

1.1 拉压杆问题

1.1.1 平衡微分方程

考虑如图所示的杆结构，该杆长度为 L，横截面积为 A。杆的左端固定，右端施加大小为 P 的拉力，杆整体施加单位长度的体力 b。取一微元体 Δx 进行受力分析，微元体的左右两端收到内力（轴力）F_N 的作用。F_N 以拉为正、压为负，且 F_N 是关于 x 的函数。此时，微元体左端的轴力大小可表示为 $F_N(x)$，方向为 x 轴负方向；微元体右端轴力的大小为 $F_N(x+\Delta x)$，方向为 x 轴正方向。由 x 方向的平衡方程有

$$F_N(x+\Delta x) - F_N(x) + b\Delta x = 0 \tag{1.1}$$

根据极限的定义有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f_{,x} \tag{1.2}$$

平衡方程(1.1)中，当 $\Delta x \to 0$，根据关系式(1.2)可得**平衡微分方程**

$$F_{N,x} + b = 0, \quad 0 < x < L \tag{1.3}$$

平衡微分方程描述杆件内部内力和体力之间的关系，杆件内部每一点处均满足该方程。

1.1.2 几何方程

接下来准备采用位移 u 描述杆件的变形，为了描述杆件内部点 x 处的变形如图所示，同样取微元体 Δx 进行分析，经过外力作用下，微元体移

动且变形为微元体 $\Delta x'$。此时，微元体左端的位移为 $u(x)$，右端位移即为 $u(x+\Delta x)$。根据几何关系有

$$\Delta x + u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta x' \ \Rightarrow \ \Delta x' - \Delta x = u(x+\Delta x) - u(x) \quad (1.4)$$

变形则通过应变 ε 进行衡量，在一维情况下应变为单位长度的变形量，引入极限定义式(1.2)有

$$\varepsilon = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \approx u_{,x} \quad (1.5)$$

上式称为**几何方程**，几何方程描述了位移和变形（应变）之间的关系。

值得注意的是，几何方程(1.5)满足线性函数的定义，即函数 f 满足下列关系式

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases} \quad (1.6)$$

称 f 为线性函数。显然式(1.5)满足上述关系。除了线性的几何方程外，某些弹性力学问题的几何方程为非线性函数，如大变形问题，其几何方程为

$$\varepsilon = u_{,x} + \frac{1}{2} u_{,x}^2 \quad (1.7)$$

1.1.3 物理方程

物理方程描述应力与应变直接的关系，应力指单位面积下所收到内力的大小，具体可参见后续章节。在一维情况下，应力 σ 为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad (1.8)$$

其中，A 为横截面积。

应力应变之间的关系一般有弹性和塑性两种，弹性为外力卸载后，物体可恢复为原来的形状；而塑性情况下，外力去除后会产生不可恢复的变形。如图所示的应力应变关系图中，弹性卸载过程按原路径返回，而塑性情况下，应力卸载后能有一部分残留的应变，称该应变为塑性应变 ε^p。

应力应变关系除了弹性、塑性区分外，还可以分为线性和非线性，如

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon, & \text{Linear} \\ \sigma = E\varepsilon^2, & \text{Non-linear} \end{cases} \quad (1.9)$$

其中，E 为杨氏模量。

1.1.4 边界条件

边界条件主要分为两种，一种需要满足边界上的外力和内力之间的关系，称之为**应力边界条件或自然边界条件** Γ^t；另一种是约束位移的边界条件，称之为**位移边界条件或强制（本质）边界条件** Γ^g。两类边界条件满足 $\Gamma^t \cap \Gamma^g = \varnothing$, $\Gamma^t \cup \Gamma^g = \Gamma$ 时，弹性力学问题存在唯一解。

应力边界条件同样可取边界处的微元体 Δx 进行分析，如图所示，微元体左端受轴力 $F_N(x)$ 作用，右端受外力 P 作用，同时微元体内部受体力 b 作用，根据 x 方向平衡条件有

$$P - F_N(L) + b\Delta x = 0 \tag{1.10}$$

当 $\Delta x \to 0$ 时

$$F_N(L) = EAu_{,x}(L) = P$$

位移边界条件相较应力边界条件要简单许多，本问题的位移边界条件为杆件左端固定，即

$$u(0) = 0 \tag{1.11}$$

1.1.5 小节

上述各方程即为求解弹性力学问题的基本方程，这些方程化综合简为**弹性力学方程组**。本节所示一维拉压杆问题的弹性力学方程组为

$$(EAu_{,x})_{,x} + b = 0, \quad 0 < x < L \tag{1.12a}$$

$$EAu_{,x}(L) = P \tag{1.12b}$$

$$u(0) = 0 \tag{1.12c}$$

假设体力 b 和拉力 P 均为常数，对式(1.12a)进行两次积分，积分过程中产生的待定系数通过式(1.12b)和(1.12c)确定，可得位移的解析表达式为

$$u(x) = -\frac{b}{2EA}x^2 + \frac{P + bL}{EA}x \tag{1.13}$$

弹性力学方程组是一类常见的偏微分方程组，各个方程确定了位移、应变、应力和边界条件（给定的位移和外力）之间的关系。每组关系之间均会存在线性关系和非线性关系，其中的非线性关系就可以相应的称为**几何非线性、材料非线性和边界条件非线性**。本教程主要学习先弹性部分内容和小部分塑性内容，这些内容遵循下列基本假定

- **连续性**：位移 u 在全域可微（导数存在）；
- **小变形**：几何方程为线性方程;

- **弹性**：可恢复性;
- **均匀性**：材料系数与位置无关;
- **各向同性**：材料系数与方向无关。

本节内容即为本教程所有内容的一个缩影，后续章节将会学习弹性力学方程组中各个方程是如何定义和得到的，并学习如何采用数值求解的方法（有限元法）求得相应的数值近似解。

1.2 张量

张量是非常实用且重要的数学工具，它可以简化方程的表达式和推导过程。本节将简要介绍张量的定义和一些常用的运算规则，其内容将有助于后续章节的学习。

1.2.1 一阶张量

张量与向量、矩阵非常类似，但又不完全一样。一阶张量与向量一样均，均为矢量（具有方向）。这里我们采用粗体表示矢量，在空间中的一点 $\boldsymbol{x}$ 可用张量表示为

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.14}$$

其中，x_i 称为张量 $\boldsymbol{x}$ 的分量，下标 $i = 1, 2, 3$ 分别对应 x, y, z 方向。$\boldsymbol{e}_i$ 为 x_i 轴的基向量

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{1.15}$$

式(1.14)中的第二个等式是通过 **Einstein 求和公式**得到的，该求和公式要求表达式中出现两个相同的下标时，表达式需要对这个下标等于 $1, 2, 3$ 情况进行求和。例如，a_i, b_i 分别为一阶张量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的分量时，根据 Einstein 求和公式，下式成立。

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_ib_i \tag{1.16}$$

Einstein 求和公式能将求和过程的表达式进行简化，在三维的弹性力学推导中有大大降低了公式的复杂程度。

1.2.2 高阶张量

高阶张量可通过一阶张量和并矢算子（Dyad product）得到，两个基向量的并矢过程可表示为

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \quad \text{or} \quad \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{1.17}$$

这里需要注意，并矢得到的二阶基向量并没有明确的物理含义，在不同情况下的意义可能不一样，可能代表位置，或是代表方向。不是一般性，两个一阶张量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 的并矢过程可表示为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} &= (u_i\boldsymbol{e}_i) \otimes (v_j\boldsymbol{e}_j) \\
&= (u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3) \otimes (v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= u_1v_1\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + u_1v_2\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + u_1v_3\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 \\
&+ u_2v_1\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + u_2v_2\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + u_2v_3\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 \\
&+ u_3v_1\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1 + u_3v_2\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 + u_3v_3\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 \\
&= u_iv_j\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j
\end{aligned} \tag{1.18}$$

从上式结果可以看出，通过 Einstein 求和公式表示时，式(**??**)的第一个等式可以跳过中间步骤得到最后的并矢结果，简化运算过程。

本教程中常用的一阶张量主要有位移 $\boldsymbol{u}$、外荷载 t 等。常用的高阶张量有

- 应力 $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ 包括 9 项分量；
- 应变 $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ 包括 9 项分量；
- 四阶弹性张量 $\boldsymbol{C} = C_{ijkl}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l$ 包括 81 项分量。

1.2.3 点乘与叉乘

基向量的点乘（Dot product）定义为

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{1.19}$$

其中，δ_{ij} 称为 Kronecker delta 函数

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1.20}$$

通过基函数点乘的结果可得到两个一阶张量的点乘结果为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= (u_i\boldsymbol{e}_i) \cdot (v_j\boldsymbol{e}_j) \\
&= u_iv_j\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = u_iv_j\delta_{ij} \\
&= u_iv_i
\end{aligned} \tag{1.21}$$

需要注意，根据 Einstein 求和公式，上式的结果式 3 项相加。

进一步将一个 1 阶张量和一个 2 阶张量点乘有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= (u_i \ \boldsymbol{e}_i \ ) \cdot (\sigma_{jk} \ \boldsymbol{e}_j \ \otimes \boldsymbol{e}_k) \\
&= u_i \sigma_{jk} \delta_{ij} \boldsymbol{e}_k \\
&= u_i \sigma_{ik} \boldsymbol{e}_k
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

从上式中可以看出，点乘作用在相邻的两个基向量上，将其转化为 Kronecker delta 函数，整体张量阶次减小 2 阶，即由整体 3 阶减为 1 阶。

双点乘（Double dot product）算子是另一类常用的点乘算子，其运算规则与单点乘类似。例如，两个 2 阶张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$、$\boldsymbol{\sigma}$ 进行双点乘有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} &= (\varepsilon_{ij} \ \boldsymbol{e}_i \ \otimes \ \boldsymbol{e}_j \ ) : (\sigma_{kl} \ \boldsymbol{e}_k \ \otimes \ \boldsymbol{e}_l \ ) \\
&= \varepsilon_{ij} \sigma_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \\
&= \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

可以看出得到的结果中无基向量，而是个标量，总阶次由 4 阶变为 0 阶。

当一个 4 阶张量 $\boldsymbol{C}$ 和一个 2 阶张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 进行双点乘可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} &= (C_{ijkl} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \ \boldsymbol{e}_k \ \otimes \ \boldsymbol{e}_l \ ) : (\varepsilon_{mn} \ \boldsymbol{e}_m \ \otimes \ \boldsymbol{e}_n \ ) \\
&= C_{ijkl} \varepsilon_{mn} \delta_{km} \delta_{ln} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\
&= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

双点乘与单点乘类似，作用于相邻的两对基向量，整体张量阶次减小 4 阶。

两个基向量的叉乘（Cross product）算子可以表示为

$$
\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{1.25}
$$

其中，ϵ_{ijk} 为枚举函数（Permutation notion）定义为

$$
\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = 123,\ 231,\ 312 \\ -1 & ijk = 321,\ 213,\ 132 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.26}
$$

两个 1 阶张量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 进行叉乘有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= u_i v_j \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j \\
&= u_i v_j \epsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \boldsymbol{e}_i \\
&+ (u_3 v_1 - u_1 v_3) \boldsymbol{e}_j \\
&+ (u_1 v_2 - u_2 v_1) \boldsymbol{e}_k
\end{aligned} \tag{1.27}
$$

点乘和叉乘是除加减法外两类最基本的张量运算规则，两则具有一定的几何意义。两个 1 阶张量的点乘相当于一个张量向另一个张量投影的乘积，两个 1 阶张量的叉乘相当于这两个张量所组成的平行四边形的面积。

1.2.4　张量微分

张量的微分作用在张量的分量上，如位移 $\boldsymbol{u}$ 对 x 的一阶导数可表示为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial x}\boldsymbol{e}_i = u_{i,1}\boldsymbol{e}_i \tag{1.28}$$

其中，下标“,1“代表对 x 求导数。为了表示方便，这里定义微分张量（nabla tensor）为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \tag{1.29}$$

运用张量的并矢、点乘和叉乘可以定义张量的梯度（Gradient）、散度（Divergence）、旋度（Curl）：

- **梯度（Gradient）**

$$\nabla\boldsymbol{u} = u_{i,j}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{1.30}$$

- **散度（Divergence）**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = u_{i,i} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} \tag{1.31}$$

- **旋度（Curl）**

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = u_{i,j}\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1.32}$$

1.2.5　2 阶张量的谱分解

对于一个 2 阶张量 $\boldsymbol{A}$ 采用 3×3 的方阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

该方阵的特征值可通过下列特征方程求得：

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{1}) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0 \tag{1.34}$$

其中

$$\mathbf{1} = \delta_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{1.35}$$

$$I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} = A_{ii} = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2\boldsymbol{A} - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})) \\ &= \frac{1}{2}(A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}) \\ &= \lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + \lambda^{(2)}\lambda^{(3)} + \lambda^{(1)}\lambda^{(3)} \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$I_3 = \det\boldsymbol{A} = \epsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\lambda^{(3)} \tag{1.38}$$

式中 $\mathbf{1}$ 为 2 阶单位张量（Second order identity tensor），I_1, I_2, I_3 分别为张量 $\boldsymbol{A}$ 的第一、第二和第三不变量，当张量 $\boldsymbol{A}$ 代表应力或应变时。坐标系进行旋转变换的情况下 I_1, I_2, I_3 保持不变，所以称它们为不变量。其中，I_1 也称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹（Trace），$\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = A_{ii}$。$\lambda^{(i)}, i = 1, 2, 3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值。与之对应的三个特征向量 $\boldsymbol{n}^{(i)}, i = 1, 2, 3$ 满足

$$(\boldsymbol{A} - \lambda^{(i)}\mathbf{1}) \cdot \boldsymbol{n}^{(i)} = \mathbf{0} \tag{1.39}$$

上述过程称为 2 阶张量的特征分解，也称谱分解（Spectral decomposition）。除了谱分解外，对于 2 阶对称张量 $\boldsymbol{A}$ 还可将其分为主方向部分（dilatational/volumetric）$\boldsymbol{A}^v$ 和偏方向部分（deviatoric）$\boldsymbol{A}^d$，采用分量可表示为

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij} + (A_{ij} - \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij}) \\ &= A_{ij}^v + A_{ij}^d \end{aligned} \tag{1.40}$$

式中

$$\begin{cases} A_{ij}^v = \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij} \\ A_{ij}^d = A_{ij} - \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij} \end{cases} \tag{1.41}$$

从主方向部分和偏方向部分表达式可以看出，这两部分具有正交性，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^v : \boldsymbol{A}^d &= A_{ij}^v A_{ij}^d \\ &= \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij}(A_{ij} - \frac{1}{3}A_{ll}\delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{3}A_{kk}A_{ii} - \frac{1}{9}A_{ll}\delta_{ii} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.42}$$

为了推导方便，这里可以引入 4 阶单位对称张量（Symmetirc fourth order identity tensor）$\boldsymbol{I}$ 和 4 阶单位偏张量（Deviatoric fourth order identity tensor）$\boldsymbol{I}^d$ 描述偏方向部分，4 阶单位对称张量和偏张量具有如下表达式

$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}^d &= (\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl})\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l \\ &= \boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{1} \otimes \boldsymbol{1}\end{aligned} \tag{1.44}$$

对于 2 阶对称张量 $\boldsymbol{A}$ 具有如下关系

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}^d = \boldsymbol{I}^d : \boldsymbol{A} \tag{1.45}$$

偏方向部分 $\boldsymbol{A}^d$ 的三个不变量称为 J_1, J_2, J_3，这三个不变量也常用在弹塑性应力-应变本构关系中，其表达式根据公式(1.41)和(1.36)-(1.38)可得

$$J_1 = A^d_{ii} = A_{ii} - \frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ii} = 0 \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned}J_2 &= \frac{1}{2}(A^d_{ij}A^d_{ij} - A^d_{ii}A^d_{jj}) = \frac{1}{2}A^d_{ij}A^d_{ij} \\ &= \frac{1}{6}((\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2 + (\lambda^{(1)} - \lambda^{(3)})^2 + (\lambda^{(2)} - \lambda^{(3)})^2)\end{aligned} \tag{1.47}$$

$$J_3 = \epsilon_{ijk}A^d_{1i}A^d_{2j}A^d_{3k} \tag{1.48}$$

相应的应力、应变主方向部分和偏方向部分的张量如下所示

- **静水压力**（主应力）：$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$
- **偏应力**：$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$
- **平均应变或球应变**（主应变）：$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$
- **偏应变**：$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$

第二章　应力

本章将介绍多维情况下应力是如何定义，并以二维情况为例，推导与应力相关的平衡微分方程和应力边界条件表达式。同时，引出空间中一点应力状态的一些特性，如应力的不变量、莫尔圆等。

2.1　平衡微分方程

力根据其作用范围可分为体力和面力，体力作用于物体内部，其大小代表单位体积所受到力的大小。面力则作用在物体表面，其大小代表单位面积所受力的大小。根据第一章介绍可知，应力是一种面力。在多维情况下，应力可由二阶张量进行表示，如图所示二维情况微元体，张量的第一个下标代表应力所在平面的法向，而第二个下标则表示这个应力的投影方向。即 σ_{ij} 代表法向为 i 方向的平面上 j 方向力的大小，也可以视为应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 在法向为 i 的平面上 j 方向的投影，即

$$\sigma_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{2.1}$$

在边长为 Δx 和 Δy 的方形微元体中，根据 x、y 方向的平衡条件有

$$\begin{aligned}&(\sigma_{11}(x+\Delta x, y) - \sigma_{11}(x,y))\Delta y + \\ &\qquad (\sigma_{21}(x, y+\Delta y) - \sigma_{21}(x,y))\Delta x + b_1 \Delta x \Delta y = 0\end{aligned} \tag{2.2a}$$

$$\begin{aligned}&(\sigma_{12}(x+\Delta x, y) - \sigma_{12}(x,y))\Delta y + \\ &\qquad (\sigma_{22}(x, y+\Delta y) - \sigma_{22}(x,y))\Delta x + b_2 \Delta x \Delta y = 0\end{aligned} \tag{2.2b}$$

等式两端同除 $\Delta x \Delta y$ 并根据极限定义可得

$$\begin{cases}\sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + b_1 = 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + b_2 = 0\end{cases} \tag{2.3}$$

上式二维形式下的平衡微分方程。引入 Einstein 求和公式和张量可进一步将平衡微分方程简写为一个式子，式子可分别采用分量和张量表示

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \tag{2.4a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{2.4b}$$

值得注意的是，不同于公式(2.2)，采用张量的平衡微分方程(2.4)不止适用于 x, y 正交的直角坐标系，在曲体坐标系等非直角坐标系下依然成立，张量表示的方程更具有鲁棒性。

在二维情况下，微元体除了有 x、y 方向的静力平衡条件外，还有需满足力矩平衡。如图所示对矩形微元体形心 O 点取矩得

$$\begin{aligned}(\sigma_{12}(x+\Delta x, y) + \sigma_{12}(x, y))\Delta y\frac{\Delta x}{2}& \\ -(\sigma_{21}(x, y+\Delta y) + \sigma_{21}(x, y))\Delta x\frac{\Delta y}{2} &= 0\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中，由于体力 $\boldsymbol{b}$ 的合力过形心点 O，故忽略体力影响。当 $\Delta x, \Delta y \to 0$ 时，有

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{2.6}$$

结合 $\sigma_{11} = \sigma_{11}$、$\sigma_{22} = \sigma_{22}$，可将上式统一写成如下分量表达式

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2.7}$$

该关系式称为**剪力互等定理**。

2.2　应力边界条件

对于应力边界条件，如图所示取一包含边界处的微元体进行分析。该微元体为三角形，斜边 Δs 为物体外边界，而直角边 Δx、Δy 为内边界。其中，外边界的法向为 $\boldsymbol{n}$，其分量 n_i 根据几何关系有

$$n_1 = \cos\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta s}, \quad n_2 = \sin\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta s} \tag{2.8}$$

根据 x、y 方向静力平衡条件有

$$t_1\Delta s - \sigma_{11}\Delta x - \sigma_{21}\Delta y + b_1\frac{\Delta x\Delta y}{2} = 0 \tag{2.9a}$$

$$t_2\Delta s - \sigma_{12}\Delta x - \sigma_{22}\Delta y + b_2\frac{\Delta x\Delta y}{2} = 0 \tag{2.9b}$$

将上式等式两边同除 Δs，并根据几何关系式(2.8)可得

$$t_1 - \sigma_{11}n_1 - \sigma_{21}n_2 + b_1n_1\frac{\Delta y}{2} = 0 \tag{2.10a}$$

$$t_2 - \sigma_{12}n_1 - \sigma_{22}n_2 + b_2n_2\frac{\Delta x}{2} = 0 \tag{2.10b}$$

当 $\Delta x, \Delta y \to 0$ 时

$$t_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 \tag{2.11a}$$

$$t_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 \tag{2.11b}$$

上式即为二维情况下的应力边界条件表达式。与平衡微分方程类似，并引入剪力互等定理式(2.7)，上式可采用分量或张量化简为一个式子

$$t_j = \sigma_{ij} n_i \quad \text{or} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j \tag{2.12a}$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \tag{2.12b}$$

应力边界条件也可以看作是应力朝法向 $\boldsymbol{n}$ 的投影等于外荷载。通常来讲，一个张量与一个单位向量的点乘，可视为这个张量朝这个方向的投影。

2.3　一点的应力状态

一点处的应力随着切面不同（基向量不同），其分量的大小也不同。在二维情况下，对于任意的一个法向为 $\boldsymbol{n}$ 的平面，其法向方向的应力分量 σ_{nn} 称为正应力，其切向方向的应力分量 σ_{ns} 称为切应力，正应力和切应力可表示为

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn} &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \\
&= n_i \sigma_{ij} n_j \\
&= \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 \\
&= \sigma_{11} \cos^2\alpha + \sigma_{22} \sin^2\alpha + 2\sigma_{12} \sin\alpha \cos\alpha \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\alpha + \sigma_{12} \sin 2\alpha
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ns} &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{s} \\
&= n_i \sigma_{ij} s_j \\
&= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin\alpha \cos\alpha + \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha
\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中，$\boldsymbol{s}$ 为切向单位张量，其分量与法向分量具有如下关系

$$s_1 = -n_2, \quad s_2 = n_1 \tag{2.15}$$

从式(2.13)和式(2.14)中可以看出，正应力和切应力会随着投影平面的改变而改变，并且两者的大小是相关的。角度 α 可视为投影平面和直接坐标系的夹角，当 α 确定时，应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 关于这个投影平面的正应力和切应力也

随之确定。同时，当选取合适的角度 α 时，可使切应力为零，令 $\alpha^{(i)}$ 为切应力为零时的角度，根据切应力表达式(2.14)可知该表达式为

$$\tan 2\alpha^{(i)} = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha^{(k)} = \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+\sigma_{12}^2}} \\ \cos 2\alpha^{(k)} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})}{\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+\sigma_{12}^2}} \end{cases} \tag{2.17}$$

当切应力为零时，正应力称为**主应力**（Principal stress），将式(2.17)代入式(2.13)可得主应力表达式为

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \tag{2.18}$$

其中，σ_i 为主应力，与之对应的主方向为

$$\boldsymbol{n}^{(i)} = \{\cos\alpha^{(i)}, \sin\alpha^{(i)}\}^T \tag{2.19}$$

由于 tan 函数的周期为 180°，式(2.16)为一固定值时，$\alpha^{(i)}$ 具有两个值，分别为 $\alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$。且 $\alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$ 相差 90°，即 $\boldsymbol{n}^{(1)}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}^{(2)}$，$\boldsymbol{n}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}^{(2)} = 0$。此时，$\boldsymbol{n}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{n}^{(2)}$ 可作为基向量与主应力 σ_i 一起用于表示应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 为

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \boldsymbol{n}^{(1)} \otimes \boldsymbol{n}^{(1)} + \sigma_2 \boldsymbol{n}^{(2)} \otimes \boldsymbol{n}^{(2)} \tag{2.20}$$

通过对上式等号两端同乘 $\boldsymbol{n}^{(k)}$ 可以证明主应力 σ_k 和主方向 $\boldsymbol{n}^{(k)}$ 为应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的特征值和特征向量

$$\text{no sum } k \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}^{(k)} = \sigma_k \boldsymbol{n}^{(k)} \tag{2.21a}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} n_j^{(k)} = \sigma_k n_i^{(k)} \tag{2.21b}$$

$$\Rightarrow (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_k) n_j^{(k)} = 0 \tag{2.21c}$$

进一步将式(2.21c)写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_k & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(k)} \\ n_2^{(k)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{2.22}$$

上式即为矩阵特征值的求解方程。

在二维情况下的应力张量具有 2 个主应力和 2 个主方向，而三维情况下则具有 3 个主应力和 3 个主方向。三维情况下的主应力和主方向也为应力的特征值和特征向量

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_k & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_k & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^{(k)} \\ n_2^{(k)} \\ n_3^{(k)} \end{Bmatrix} = 0 \tag{2.23}$$

相应的谱分解格式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \boldsymbol{n}^{(1)} \otimes \boldsymbol{n}^{(1)} + \sigma_2 \boldsymbol{n}^{(2)} \otimes \boldsymbol{n}^{(2)} + \sigma_3 \boldsymbol{n}^{(3)} \otimes \boldsymbol{n}^{(3)} \tag{2.24}$$

式(2.23)矩阵的行列式如下所示，根据该行列式可求得主应力的大小。

$$\sigma_k^3 - I_1 \sigma_k^2 + I_2 \sigma_k - I_3 = 0 \tag{2.25}$$

式中 I_1、I_2、I_3 为第一、二、三主应力不变量

$$I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{2.26a}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2(\boldsymbol{\sigma}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma})) = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) \\ &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \end{aligned} \tag{2.26b}$$

$$I_3 = \det \boldsymbol{\sigma} = \epsilon_{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\sigma_{3k} \tag{2.26c}$$

当 $\boldsymbol{\sigma}$ 为主方向时，应力的三个不变量也可以由主应力确定

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{2.27a}$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \tag{2.27b}$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \tag{2.27c}$$

根据节1.2.5中的谱分解过程，可以将应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 分解为静水压部分和偏应力部分

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + \boldsymbol{s} \tag{2.28}$$

式中 p 为静水压力，$\boldsymbol{s}$ 为偏应力，静水压力和偏应力分量表达式为

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \tag{2.29}$$

根据上式可得，主应力可采用静水压力和偏应力进行表示

$$\sigma_i = p + s_i \tag{2.30}$$

式中 $s_i, i = 1, 2, 3$ 为偏应力张量 $\boldsymbol{s}$ 的主偏应力。

偏应力张量 $\boldsymbol{s}$ 也有相对应的不变量 J_1、J_2、J_3 为

$$J_1 = s_{ii} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \tag{2.31a}$$

$$J_2 = -\frac{1}{2}(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ij}) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{1}{2}s_i s_i \tag{2.31b}$$

$$J_3 = \epsilon_{ijk}s_{1i}s_{2j}s_{3k} = s_1 s_2 s_3 \tag{2.31c}$$

对比式(2.27b)与式(2.31b)可以发现，为了表示方便 J_2 的符号与 I_2 相反。此时，$\sqrt{2J_2}$ 为偏应力张量 $\boldsymbol{s}$ 的模。将式(2.29)代入式(2.31b)J_2 可采用 σ_{ij} 进行表示

$$\begin{aligned}J_2 &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}\\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij})(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{ll}\delta_{ij})\\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{ii}\sigma_{jj})\\ &= \frac{1}{3}(\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{11}\sigma_{33}-\sigma_{22}\sigma_{33})\\ &+\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2\\ &= \frac{1}{6}((\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2)\\ &+\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2\end{aligned} \tag{2.32}$$

上式也采用主应力 σ_i 表示为

$$J_2 = \frac{1}{6}((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2) \tag{2.33}$$

应力的谱分解常用于塑性损伤破坏模型中，根据材料的破坏模式，可分为压力相关模型和压力无关模型。

2.4 莫尔圆

上节已介绍，任意一点处的应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 在不同平面上投影得到的正应力和切应力具有一定的关系，利用主应力的特性，可进一步确定正应力和切应力之间的联系。在式(2.13)和(2.14)中，将正应力 σ_{nn} 和切应力 σ_{ns} 简写成 σ 和 τ，并采用主方向 $\boldsymbol{n}^{(1)}$、$\boldsymbol{n}^{(2)}$ 为坐标轴，即 $\sigma_{11}=\sigma_1, \sigma_{22}=\sigma_2, \sigma_{12}=0, \alpha=\alpha-\alpha^{(1)}$，有

$$\sigma = \sigma_{nn} = \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)+\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2(\alpha-\alpha^{(1)}) \tag{2.34a}$$

$$\tau = \sigma_{ns} = \frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_1)\sin 2(\alpha-\alpha^{(1)}) \tag{2.34b}$$

根据三角函数关系进一步将上式化简为

$$(\sigma-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2))^2+\tau^2 = \frac{1}{4}(\sigma_1-\sigma_2)^2 \tag{2.35}$$

如图所示，将 σ 作为 x 轴，τ 作为 y 轴，式(2.35)为圆形。该圆称为**莫尔圆**（Mohr's circle），其圆心坐标为 $(\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2), 0)$，半径为 $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)$。此

时，一点处不同切面的正应力和切应力只能在莫尔圆上进行取值，从该圆可以很方便地知道一点处正应力和切应力的取值范围。

在塑性力学中，莫尔圆通常可用于制定剪切相关的塑性准则，这些准则通常在剪力最大的切面上产生塑性应变。由莫尔圆可知最大剪应力为莫尔圆的半径，即

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{2.36}$$

此时，最大剪应力平面与主应力方向夹角 45°

$$\sin 2(\alpha - \alpha^{(1)}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha^{(1)} \pm \frac{\pi}{4} \tag{2.37}$$

第三章　连续体变形

应变可以采用多种不同的方式进行衡量，本章介绍最为常用的一种多维情况下的应变描述，并将应变逐步退化为小变形情况，推导多维情况下几何方程表达式。同时，介绍空间中应变的一些特性，如体积应变、变形协调方程等。

3.1　应变

在多维情况下，应变可通过微元段的变形进行衡量。如图所示，在点 $\boldsymbol{x}$ 处取一微元段 $d\boldsymbol{x}$，微元体经过变形后变为微元体 $d\boldsymbol{x}'$，根据几何关系有

$$d\boldsymbol{x}' = d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \tag{3.1}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 为位移，根据极限的定义有如下关系

$$\lim_{d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}\nabla = u_{i,j}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{3.2}$$

或当 $d\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}\nabla \cdot d\boldsymbol{x} \tag{3.3}$$

将式(3.3)代入式(3.1)可得变形后微元段表达式为

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x}' &= d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}\nabla \cdot d\boldsymbol{x} \\ &= (dx_i + u_{i,j}dx_j)\boldsymbol{e}_i \\ &= (\delta_{ij} + u_{i,j})dx_j\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

此时，微元段的变形量可通过变形前后的长度平方差进行衡量。变形前的长度平方为 $ds^2 = d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x}$，变形后的长度平方差为 $ds'^2 = d\boldsymbol{x}' \cdot d\boldsymbol{x}'$，两者

的差为

$$\begin{aligned} ds'^2 - ds^2 &= d\boldsymbol{x}' \cdot d\boldsymbol{x}' - d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} \\ &= (\delta_{ki} + u_{k,i})(\delta_{kj} + u_{k,j})dx_i dx_j - dx_k dx_k \\ &= (\delta_{ki}\delta_{kj} + u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})dx_i dx_j - dx_k dx_k \\ &= dx_i(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})dx_j \\ &= dx_i\, 2E_{ij}\, dx_j = d\boldsymbol{x} \cdot 2\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{3.5}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为**格林拉格朗日应变**（Green-Lagrangian Strain），其具有如下张量和分量表达式为

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \tag{3.6a}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla + \nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\nabla) \tag{3.6b}$$

从上式中可以看出，格林拉格朗日应变为非线性应力应变关系，实际上是用于大变形情况的一种应变衡量方式。在此基础上忽略格林拉格朗日应变中的高阶项可得小变形情况下的应变表达式为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3.7a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla + \nabla\boldsymbol{u}) \tag{3.7b}$$

值得注意的是，小变形情况下的应变表达式(3.7)与第一章中一维情况的应变表达式(1.5)保持一致。式(3.7)中 $i = j = 1$ 时即为一维情况下应变表达式，$\varepsilon = \varepsilon_{11} = u_{1,1} = u_{,x}$。

3.2 转动

根据式(3.4)可知，微元段的总变形量可表示为

$$\frac{d\boldsymbol{x}' - d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}\nabla \tag{3.8}$$

总变形可采用应变(3.7)表示为

$$\boldsymbol{u}\nabla = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla + \nabla\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla - \nabla\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \tag{3.9}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ 称为转动张量，其张量和分量表达式为

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \tag{3.10a}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla - \nabla\boldsymbol{u}) \tag{3.10b}$$

从转动张量的表达式可以看出，与应变张量不同，转动张量并不是对称张量，而是反对称张量，即 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$。转动张量除了可以采用 2 阶张量描述外，还可以采用 1 阶张量进行表示

$$\omega_1 = \omega_{23}, \quad \omega_2 = \omega_{31}, \quad \omega_3 = \omega_{12} \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u} \tag{3.12}$$

利用应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和转动张量 $\boldsymbol{\omega}$，变形后的微元段 $d\boldsymbol{x}'$ 可表示为

$$d\boldsymbol{x}' = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}) \cdot d\boldsymbol{x} \tag{3.13}$$

式中 $\mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{x}$ 代表变形前的微元段，应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 描述微元段拉伸、剪切变形，而 $\boldsymbol{\omega}$ 则描述微元段的转动。如果微元段仅有转动，没有拉伸与剪切，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\omega}) \cdot d\boldsymbol{x}$，通过转动张量的反对称性并忽略高阶项，可证明变形后的微元段长度没有变化

$$\begin{aligned} ds'^2 &= d\boldsymbol{x}' \cdot d\boldsymbol{x}' \\ &= (\delta_{ki} + \omega_{ki})(\delta_{kj} + \omega_{kj}) dx_i dx_j \\ &= dx_k dx_k + (\underbrace{\omega_{ij} + \omega_{ji}}_{=0} + \omega_{ki}\omega_{kj}) dx_i dx_j \\ &\approx dx_k dx_k = d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} = ds^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.3 体积应变

与应力相同，应变可通过谱分解分为平均应变 ε_m 和偏应变张量分量 e_{ij}，其表达式为

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij} \tag{3.15}$$

其中，ε_{kk} 也称为体积应变。体积应变描述以微元段为对角线所在微元体的体积变化率，变形前后该微元体的体积分别为 $V = dx_1 dx_2 dx_3$、$V' = dx_1' dx_2' dx_3'$，此时，体积应变为

$$\begin{aligned} \frac{V' - V}{V} &= \frac{dx_1' dx_2' dx_3' - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} \\ &= \frac{(\delta_{1i} + \varepsilon_{1i})(\delta_{2j} + \varepsilon_{2j})(\delta_{3k} + \varepsilon_{3k}) dx_i dx_j dx_k - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} \\ &\approx \frac{(\delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} + \delta_{2j}\delta_{3k}\varepsilon_{1i} + \delta_{1i}\delta_{3k}\varepsilon_{2j} + \delta_{1i}\delta_{2j}\varepsilon_{3k}) dx_i dx_j dx_k - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} \\ &= \frac{\varepsilon_{1i} dx_i dx_2 dx_3 + \varepsilon_{2j} dx_1 dx_j dx_3 + \varepsilon_{3k} dx_1 dx_2 dx_k}{dx_1 dx_2 dx_3} \\ &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{kk} \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.4　变形协调方程

根据应变张量表达式(3.7)可以看出，应变分量之间并不是独立的，而是存在一定的关系。如在二维情况下，应变分量满足如下关系

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}&=u_{1,122}+u_{2,211}\\&=(u_{1,2}+u_{2,1})_{,12}\\&=2\varepsilon_{12,12}\end{aligned}\tag{3.17}$$

上式也可以改写为

$$\varepsilon_{ii,jj}-\varepsilon_{ij,ij}=0,\quad i,j=1,2\tag{3.18}$$

如上所述应变分量之间的关系称为**变形协调方程**，变形协调方程在解析逆解法和半逆解法的求解过程中起到一定作用。三维情况下的变形协调方程如下所示

$$\begin{cases}\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}=\varepsilon_{12,12}\\\varepsilon_{22,33}+\varepsilon_{33,22}=\varepsilon_{23,23}\\\varepsilon_{33,11}+\varepsilon_{11,33}=\varepsilon_{13,13}\\\varepsilon_{11,23}=(-\varepsilon_{23,1}+\varepsilon_{13,2}+\varepsilon_{12,3})_{,1}\\\varepsilon_{22,13}=(\varepsilon_{23,1}-\varepsilon_{13,2}+\varepsilon_{12,3})_{,2}\\\varepsilon_{33,12}=(\varepsilon_{23,1}+\varepsilon_{13,2}-\varepsilon_{12,3})_{,3}\end{cases}\tag{3.19}$$

同样地，上式也可改写为哑标求和形式

$$\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}-\varepsilon_{ik,jl}-\varepsilon_{jl,ik}=0\tag{3.20}$$

第四章　弹性

本章介绍各向同性弹性情况下的物理方程（应力应变关系），也称为**本构关系**（Constitutive relationship）。同时，本章还介绍了两种常用的弹性力学问题平面假设——平面应力问题和平面应变问题。

4.1　4 阶弹性张量

应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 和应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 都是 2 阶张量，两者之间可以通过一个 4 阶系数张量建立联系

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{4.1}$$

或

$$\boldsymbol{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.2}$$

式中 $\boldsymbol{C}$ 称为 4 阶弹性张量，该张量具有 81 个分量。然后根据应力张量和应变张量的对称性，$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$，可知

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \tag{4.3}$$

各向同性弹性材料均存在一应变能密度函数 W，其应力张量等于应变能密度函数对应变张量的偏导数，即

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.4}$$

进一步引入(4.2)，式(4.4)可改写为

$$\boldsymbol{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}, \quad C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \tag{4.5}$$

根据上式可以看出

$$C_{ijkl} = C_{klij} \tag{4.6}$$

结合式(4.3)和(4.6)可以推出，4 阶弹性张量 $\boldsymbol{C}$ 可假设为如下形式

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{4.7}$$

式中 λ 和 μ 称为**拉梅常数**（Lamé parameters）。通过拉梅常数表示 4 阶弹性张量是根据对称性确定的两个常数，然而通过力学试验而确定的常数为杨氏模量（Young's modulus）E 和泊松比（Poisson's ratio）ν，λ,μ 和 E,ν 具有如下关系

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.8}$$

此时，将式(4.7)、(4.8)代入式(4.1)，应力可采用拉梅常数或杨氏模量、柏松比表示为

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{4.9a}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} \tag{4.9b}$$

上式即为各向同性同性材料应力应变本构关系。同样地，应变分量也可以采用应变进行表示

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \tag{4.10}$$

除了采用拉梅常数或杨氏模量、泊松比表示本构关系外，还可以通过应力张量和应变张量的谱分解进行改写

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \\
&= (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) \\
&= 3K\varepsilon_m\delta_{ij} + 2Ge_{ij} \\
&= p\delta_{ij} + s_{ij}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中

$$p = K\varepsilon_{kk}, \quad s_{ij} = 2Ge_{ij} \tag{4.12}$$

式中 K 为屈曲模量（bulking modulus）G 为剪切模量（Shear modulus），$G=\mu$。从式中可以看出，静水压力仅与体积应变相关，控制结构拉伸变形。而偏应力仅与偏应变相关，控制结构剪切变形。

为后续表述方便，应力张量可以采用沃伊特标记（Voigt notation）表示为向量形式

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.13}$$

其中，应力与应变向量为

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{33},\ \sigma_{12},\ \sigma_{13},\ \sigma_{23}\}^T \tag{4.14a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ 2\varepsilon_{12},\ 2\varepsilon_{13},\ 2\varepsilon_{23}\} \tag{4.14b}$$

此时的系数矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

或

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

沃伊特标记常用于有限元法中理论推导和程序实现过程本构关系的表示形式中，式中应力和应变的顺序是固定的。

4.2 平面应变与平面应力

三维弹性力学问题退化为低维情况需做一些特定的假设以进行问题的简化，在二维弹性力学问题有两种主要的简化方式——平面应变问题和平面应力问题。平面应变问题假设平面外方向相关的应变为零，而平面应力问题假设平面外方向相关应力为零。

4.2.1 平面应变问题 (Plane strain)

平面应变问题可描述具有较大厚度的物体面内受力分析，如水坝结构等。在平面应变问题中假设

$$\varepsilon_{3i} = 0 \tag{4.17}$$

在这种假设的情况下，本构关系式(4.13)可以化简为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} (1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} \\ \nu\varepsilon_{11} + (1-\nu)\varepsilon_{22} \\ \nu\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} \\ (1-2\nu)\varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

在平面应变问题中，虽然平面外方向的应变都为零，但从表达式中可以看出平面外的主应力 σ_{33} 并不为零。但在求解过程中，通常不需要引入 σ_{33}，所以平面应变问题的本构关系可以改写为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix} \tag{4.19}$$

4.2.2　平面应力问题 (Plane stress)

平面应力问题一半描述厚度较小物体的面内受力分析，如薄板面内问题等。与平面应变问题相反，平面应力问题则是假设平面外的应力为零，即

$$\sigma_{3i}=0 \tag{4.20}$$

结合本构本构关系式(4.13)可得

$$\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0,\quad \varepsilon_{33}=-\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \tag{4.21}$$

由此可见，在平面应力问题中平面外方向不受内力作用，但该方向主方向上存在变形。将关系式(4.21)回代到本构关系式(4.13)可化简得平面应力问题本构关系式为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix} \tag{4.22}$$

值得注意的是，平面应变问题和平面应力问题是可以互相转换的，仅需将其中一问题的杨氏模量和柏松比通过下式进行替换，就可将问题转换为另一问题。

$$E\rightarrow\frac{E}{1-\nu^2},\quad \nu\rightarrow\frac{\nu}{1-\nu} \tag{4.23}$$

4.3　弹性力学方程组

利用几何方程(3.7)和应力应变关系(4.9)，可将应力及其梯度采用位移表示为

$$\sigma_{ij}=\lambda u_{,kk}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{4.24a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u}\mathbf{1}+\mu(\boldsymbol{u}\nabla+\nabla\boldsymbol{u}) \tag{4.24b}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} &= (\lambda+\mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} \\
&= (\lambda+2\mu)u_{j,ji} - \mu(u_{j,ij} - u_{i,jj})
\end{aligned} \tag{4.25a}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} &= (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} \\
&= (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})
\end{aligned} \tag{4.25b}
$$

上式中 $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$。利用上式平衡方程和应力边界条件均可改写为用位移表示，此时弹性力学方程组为

$$
\begin{cases}
(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega \\
(\lambda+\mu)(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} + \mu\nabla^2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} & \text{on } \Gamma^t \\
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} & \text{on } \Gamma^g
\end{cases} \tag{4.26}
$$

在多维情况下，解析求解弹性力学方程组十分困难，仅有少数几种规则的求解域可以得到解析解。在下一章节中，将介绍如何采用能量法对该方程进行求解，在能量法中弹性力学方程称为强形式（Strong form），在方程的每个点处都必须满足。在能量法中强形式将转化为弱形式（Weak form），弱形式仅要求全域满足方程即可，并不要求全域上每点都满足，所以称之为弱形式。

第五章　变分原理

本章介绍弹性力学变分原理中最常用的最小势能原理，最小势能原理是有限元法的基础，本章的内容对后续有限元法的学习有重要帮助。本章将从一维杆问题出发，详细讲述变分原理的推导过程和解题思路。

5.1　最小势能原理

最小势能原理要求物体的位移（即变形）应满足整体势能能量在已知边界条件下取最小值。以第一章一维拉压杆问题为例，势能包括外力做的功和内力做的功。杆右端的拉力 P 所做的功为 $Pu|_{x=L}$；杆件内部微元体 dx 上体力 b 所做功为 $ubdx$。整体杆件外力所做的功为

$$W^{ext}(u) = Pu|_{x=L} + \int_0^L ubdx \tag{5.1}$$

对于内力功，杆件的轴力与位移（应变）具有一定联系。如图所示，在线性假设下，轴力与应变呈线性关系。此时，微元体 dx 上轴力做功为

$$\begin{aligned} dW^{int}(u) &= \int_0^{\varepsilon} F_N d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} EA\varepsilon d\varepsilon \\ &= \frac{1}{2}EA\varepsilon^2 = \frac{1}{2}F_N\varepsilon \end{aligned} \tag{5.2}$$

而整体内力功即为

$$W^{int}(u) = \int_0^L \frac{1}{2}F_N(u)\varepsilon(u)dx = \int_0^L \frac{1}{2}EAu_{,x}^2dx \tag{5.3}$$

结合内能(5.3)和外能(5.1)，杆件整体势能 Π 为

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= W^{int}(u) - W^{ext}(u) \\ &= \int_0^L \frac{1}{2}F_N\varepsilon dx - Pu|_{x=L} - \int_0^L ubdx \end{aligned} \tag{5.4}$$

式中势能函数的变量为位移 u，而位移 u 是关于 x 的函数，我们把这类以函数作为变量的函数称之为**泛函**（Functional），与之相对应的微分求导过

程称为**变分**（Variation）。根据最小势能原理，真实位移应为势能泛函 Π 取最小时的位移。令势能泛函对变量 u 求一阶变分为零，可得势能泛函取得极值时的位移，即

$$\delta\Pi(u) = \int_0^L \delta u_{,x} EAu_{,x} dx - \delta u P|_{x=L} - \int_0^L \delta u b dx = 0 \tag{5.5a}$$

$$\Rightarrow \int_0^L \delta u_{,x} EAu_{,x} dx = \delta u P|_{x=L} + \int_0^L \delta u b dx \tag{5.5b}$$

式中 δu 为位移的变分，上式即是强形式(1.12)的弱形式，该弱形式不同于强形式，仅要求在全域满足上式即可。同时，上式也称为虚功原理，而 δu 即为虚功原理中的虚位移。虚位移 δu 与位移 u 两者并不相同，δu 是物体所有可能发生的位移，所以称之为虚位移。需要注意的是，当 $\delta\Pi(u) = 0$ 时，势能泛函 $\Pi(u)$ 不仅为极小值，同时也能证明是最小值，具体证明过程可参考相关文献。

5.2　里兹-伽辽金法

根据最小势能原理，弹性力学方程组就可转化为如下**里兹-伽辽金问题**（Ritz-Galerkin problem）：对于求解空间中的任意函数 δu，从求解空间中寻找位移 u 使得下式恒成立

$$\int_0^L \delta u_{,x} EAu_{,x} dx = \delta u P|_x + \int_0^L \delta u b dx \tag{5.6}$$

其中求解空间的选择就极为重要，在第一章中已经知道，当体力 b 与拉力 P 为常数时，该问题的精确解为二次多项式(1.13)。所以首先选择二次多项式且满足位移边界条件 $u(0) = 0$ 的求解空间进行该问题的求解，此时位移 u 和虚位移 δu 假设为

$$u(x) = a_1 x + a_2 x^2 \tag{5.7a}$$

$$\delta u(x) = b_1 x + b_2 x^2 \tag{5.7b}$$

式中 $a_i, i = 1, 2$ 为待定系数，而由于式(5.6)对于所有求解空间中的虚位移 δu 都成立，所以 $b_i, i = 1, 2$ 可以取任意实数。将假设的 u 和 δu 表达

式(5.7)代入到里兹伽辽金问题(5.6)中，方程等号左边为

$$\begin{aligned}\int_0^L \delta u_{,x} EA u_{,x} dx &= \int_0^L (b_1+2b_2x)EA(a_1+2a_2x)dx \\ &= \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}^T \int_0^L EA \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 2x & 4x^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}^T EA \begin{bmatrix} L & L^2 \\ L^2 & \frac{4}{3}L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \\ &= \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{a}\end{aligned} \tag{5.8}$$

上式中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为系数向量。同样地，等式右边则改写为

$$\begin{aligned}\delta u P|_{x=L} + \int_0^L \delta u b dx &= (b_1L+b_2L^2)P + \int_0^L (b_1x+b_2x^2)bdx \\ &= (b_1L+b_2L^2)P + (\frac{b_1L^2}{2}+\frac{b_2L^3}{3})b \\ &= (PL+\frac{bL^2}{2})b_1 + (PL^2+\frac{bL^3}{3})b_2 \\ &= \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} PL+\frac{bL^2}{2} \\ PL^2+\frac{bL^3}{3} \end{Bmatrix} \\ &= \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{f}\end{aligned} \tag{5.9}$$

对式(5.6)两端同时消去 $\boldsymbol{b}^T$ 就可以确定待定系数向量 $\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f} = \begin{Bmatrix} \frac{P+bL}{EA} \\ -\frac{b}{2EA} \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

将系数 $\boldsymbol{a}$ 表达式(5.10)代入式(5.7)可得最终位移为

$$u(x) = -\frac{b}{2EA}x^2 + \frac{P+bL}{EA}x \tag{5.11}$$

由求得的位移结果可以看出，求解得到的位移表达式(5.11)与解析求得的位移表达式(1.13)相同，这是由于此时的求解空间包含精确解。在伽辽金法的使用过程中，由于大多数情况下并不知道精确解是什么函数，所以求解空间难以包含精确解。而在此问题中，势能泛函表达式(5.5)中包含位移一阶导数，所以求解空间至少为线性函数（一阶导数不为零）。当求解空间为满足边界条件 $u(0)=0$ 的线性函数时，假设的位移和虚位移表达式为

$$u(x) = a_1x, \quad \delta u(x) = b_1x \tag{5.12}$$

以同样的步骤进行求解，可得相应的矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 为

$$\boldsymbol{K} = [EAL],\ \boldsymbol{f} = \{PL+\frac{bL^2}{2}\}\ \Rightarrow \boldsymbol{a} = \{\frac{bL}{2EA}+\frac{P}{EA}\} \tag{5.13}$$

此时求解得到的位移为

$$u(x) = (\frac{bL}{2EA} + \frac{P}{EA})x \tag{5.14}$$

图作出线性空间位移解(5.14)和二次空间的位移解(5.11)的对比图。从图中可以看出，线性求解空间得到的位移接近二次空间的到的位移，并且在求解域处（杆件左右两端）位移相等。在伽辽金法中，虚位移 δu 也称为权函数（Weight function），而位移 u 称为试函数（Trial function）。如果试函数和权函数的求解空间包括精确解，此时的位移 u 即为精确解。如果试函数和权函数求解空间不包括精确解，位移 u 为求解空间到精确解最近的一点近似解。

5.3　分段近似空间

由上节可知，如果采用线性空间求解精确解为二次的问题可以得到一近似解，且解在求解域中具有插值的性质（求解域两端与精确解相等）。进一步如果采用分段多项式空间进行求解，能否类似得到一个具有插值性质的解。并且随着求解域尺寸的减小，近似解逐步收敛至精确解。

假设位移 u 及其变分 δu 在全域上为分段线性函数，且满足位移边界条件，即

$$u(x) = \begin{cases} a_1 x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ a_2 + a_3 x & \frac{L}{2} < x \le L \end{cases} \tag{5.15a}$$

$$\delta u(x) = \begin{cases} b_1 x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ b_2 + b_3 x & \frac{L}{2} < x \le L \end{cases} \tag{5.15b}$$

与上节相同，将假设的虚位移与位移代入到弱形式中，弱形式左端分别为

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta u_{,x} EA u_{,x} dx &= \int_0^{\frac{L}{2}} b_1 EA a_1 dx + \int_{\frac{L}{2}}^L b_3 EA a_3 dx \\ &= b_1 \frac{EAL}{2} a_1 + b_3 \frac{EAL}{2} a_3 \\ &= \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{EAL}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EAL}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \\ &= \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{a} \end{aligned} \tag{5.16}$$

而等式右端为

$$
\begin{aligned}
\delta uP + \int_0^L \delta ubdx &= (b_2 + b_3L)P + \int_0^{\frac{L}{2}} b_1xbdx + \int_{\frac{L}{2}}^L (b_2 + b_3x)bdx \\
&= \frac{bL^2}{8}b_1 + (P + \frac{bL}{2})b_2 + (PL + \frac{3bL^2}{8})b_3 \\
&= \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{bL^2}{8} \\ P + \frac{bL}{2} \\ PL + \frac{3bL^2}{8} \end{Bmatrix} \\
&= \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{f}
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

从式(5.16)中可以看出，矩阵 $\boldsymbol{K}$ 不可逆，仅能确定系数 a_1 和 a_3 为

$$
a_1 = \frac{bL}{4EA}, \quad a_3 = \frac{3bL}{4EA} + \frac{2P}{EA} \tag{5.18}
$$

此时的位移表达式为

$$
u(x) = \begin{cases} \frac{bL}{4EA}x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ a_2 + (\frac{3bL}{4EA} + \frac{2P}{EA})x & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \tag{5.19}
$$

将解得的位移表达式(5.19)对比精确解(1.13)可以看出，此时的求解得到的位移误差较大，且不连续。造成这种不连续的原因主要是近似的位移不连续造成的，即不满足**协调性**（Compatibility）。如果在位移表达式(5.15)的基础上，进一步使假设的位移连续

$$
\begin{cases} \frac{L}{2}a_1 = a_2 + \frac{L}{2}a_3 \\ \frac{L}{2}b_1 = b_2 + \frac{L}{2}b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{2}{L}a_2 + a_3 \\ b_1 = \frac{2}{L}b_2 + b_3 \end{cases} \tag{5.20}
$$

将关系式(5.20)代入到式(5.16)和(5.17)此时的弱形式左右两端为

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \delta u_{,x}EAu_{,x}dx &= (\frac{2}{L}b_2 + b_3)\frac{EAL}{2}(\frac{2}{L}a_2 + a_3) + b_3\frac{EAL}{2}a_3 \\
&= b_2\frac{2EA}{L}a_2 + b_2EAa_3 + b_3EAa_2 + b_3EALa_3 \\
&= \begin{Bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{EAL}{2} & EA \\ EA & EAL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \\
&= \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta uP + \int_0^L \delta ubdx &= \frac{bL^2}{8}(\frac{2}{L}b_2 + b_3) + (P + \frac{bL}{2})b_2 + (PL + \frac{3bL^2}{8})b_3 \\
&= (P + \frac{3bL}{4})b_2 + (PL + \frac{bL^2}{2})b_3 \\
&= \begin{Bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} P + \frac{3bL}{4} \\ PL + \frac{bL^2}{2} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{f}
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

此时可解得系数和相对应的位移为

$$\begin{cases} a_2 = \frac{bL^2}{4EA} \\ a_3 = \frac{bL}{4EA} + \frac{P}{EA} \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{L}a_2 + a_3 = \frac{3bL}{4EA} + \frac{P}{EA} \tag{5.23}$$

$$u(x) = \begin{cases} (\frac{3bL}{4EA} + \frac{P}{EA})x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{bL^2}{4EA} + (\frac{bL}{4EA} + \frac{P}{EA})x & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \tag{5.24}$$

对此近似节与精确解可以看出，由于满足协调性，位移误差相比于式(5.19)小得多，且在分段的端点处均满足插值性。但需要注意的是，求解的插值性在多维情况下难以实现，但近似空间的协调性依然是分段近似求解收敛性的保证。

第六章　有限元法

本章主要介绍几种常用的有限近似方案，包括一维的拉格朗日插值近似、四节点双线性单元和三角线性单元。同时介绍伽辽金弱形式中采用的数值积分方法——高斯积分方法，并通过简单的悬臂梁问题，详细讨论如何采用有限法求解多维问题。

6.1　弹性力学问题伽辽金有限元法

在多维情况下，与强形式(4.26)相对应的势能泛函 Π 可由内力功和外力功表示为如下形式

$$\Pi(\boldsymbol{x}) = \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega}_{\text{Internal energy}} - \underbrace{\int_{\Gamma^t} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t} d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b} d\Omega}_{\text{External energy}} \tag{6.1}$$

令上式的变分为零可得相对应的伽辽金弱形式为

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Gamma^t} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t} d\Gamma + \int_\Omega \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b} d\Omega \tag{6.2}$$

在有限法中，整体求解域将离散为分片单元 $\{\Omega_C\}_{C=1}^{n_e}$，$\cup_{C=1}^{n_e}\Omega_C \approx \Omega$，$n_e$ 为总单元个数。单元顶点 $\{\boldsymbol{x}_I\}_{I=1}^{n_p}$ 为有限元控制节点，n_p 为总节点数。在每个节点上都配有相对应的形函数 N_I 和节点系数 d_I，对于一个标量场变量 u，其有限元近似 u^h 可表示为

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} N_I(\boldsymbol{x}) d_I \tag{6.3}$$

而对于弹性力学问题，此时的场变量为位移张量 $\boldsymbol{u}$，位移张量的分量 u_i 的有限元近似 u_i^h 及其变分近似 δu_i^h 为

$$u_i^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} N_I(\boldsymbol{x}) d_{iI}, \quad \delta u_i^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} N_I(\boldsymbol{x}) \delta d_{iI} \tag{6.4}$$

采用矩阵形式表示时，近似的位移 $\boldsymbol{u}$ 表示为

$$\boldsymbol{u}^h = \sum_{I=1}^{n_p} \boldsymbol{N}_I \boldsymbol{d}_I \tag{6.5}$$

显然，在多维弹性力学问题中，一个节点上具有多个节点系数。此时通过几何方程可得近似的应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{d}_I \tag{6.6}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}^h$ 为近似应变向量，$\boldsymbol{d}_I$ 为节点系数向量，$\boldsymbol{B}_I$ 为位移梯度矩阵，各向量和矩阵的表达式为

- 三维情况：

$$\boldsymbol{u}^h = \{u_1^h,\ u_2^h,\ u_3^h\}^T \tag{6.7}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h = \{\varepsilon_{11}^h,\ \varepsilon_{22}^h,\ \varepsilon_{33}^h,\ 2\varepsilon_{12}^h,\ 2\varepsilon_{13}^h,\ 2\varepsilon_{23}^h\}^T \tag{6.8}$$

$$\boldsymbol{d}_I = \{d_{1I},\ d_{2I},\ d_{3I}\}^T \tag{6.9}$$

$$\boldsymbol{N}_I = \begin{bmatrix} N_I & 0 & 0 \\ 0 & N_I & 0 \\ 0 & 0 & N_I \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

$$\boldsymbol{B}_I = \begin{bmatrix} N_{I,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,2} & 0 \\ 0 & & 0N_{I,3} \\ N_{I,2} & N_{I,1} & 0 \\ N_{I,3} & 0 & N_{I,1} \\ 0 & N_{I,3} & N_{I,2} \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

- 二维情况：

$$\boldsymbol{u}^h = \{u_1^h,\ u_2^h\}^T \tag{6.12}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h = \{\varepsilon_{11}^h,\ \varepsilon_{22}^h,\ 2\varepsilon_{12}^h\}^T \tag{6.13}$$

$$\boldsymbol{d}_I = \{d_{1I},\ d_{2I}\}^T \tag{6.14}$$

$$\boldsymbol{N}_I = \begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

$$\boldsymbol{B}_I = \begin{bmatrix} N_{I,1} & 0 \\ 0 & N_{I,2} \\ N_{I,2} & N_{I,1} \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

进一步通过物理方程(4.13)与近似的应变相结合，可得近似的应力表达式为

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}^h = \sum_{I=1}^{n_p} \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_I\boldsymbol{d}_I \tag{6.17}$$

将近似的位移(6.4)、应变(6.6)和应力(6.17)代入伽辽金弱形式(6.2)中，等式左边可改写为

$$\begin{aligned}\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^h : \boldsymbol{\varepsilon}^h d\Omega &= \sum_{I,J=1}^{n_p} \delta\boldsymbol{d}_I^T \int_\Omega \boldsymbol{B}_I\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_J^T d\Omega\boldsymbol{d}_J \\ &= \sum_{I,J=1}^{n_p} \delta\boldsymbol{d}_I^T\boldsymbol{K}_{IJ}\boldsymbol{d}_J \\ &= \delta\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}\end{aligned} \tag{6.18}$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵，另一方面，等式右边可改写为

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^t} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}d\Gamma + \int_\Omega \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}d\Omega &= \sum_{I=1}^{n_p} \delta\boldsymbol{d}_I(\int_{\Gamma^t}\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{t}d\Gamma + \int_\Omega \boldsymbol{N}_I\boldsymbol{b}d\Omega) \\ &= \sum_{I=1}^{n_p} \delta\boldsymbol{d}_I^T\boldsymbol{f}_I \\ &= \delta\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{f}\end{aligned} \tag{6.19}$$

其中，$\boldsymbol{f}$ 为力向量。同时消去等式左右两边的虚位移系数 $\delta\boldsymbol{d}$ 可得最终的离散控制方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \tag{6.20}$$

式中

$$\boldsymbol{K} = \mathsf{A}_{I,J=1}^{n_p}\boldsymbol{K}_{IJ}, \quad \boldsymbol{K}_{IJ} = \int_\Omega \boldsymbol{B}_I^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_J d\Omega \tag{6.21a}$$

$$\boldsymbol{f} = \mathsf{A}_{I=1}^{n_p}\boldsymbol{f}_I, \quad \boldsymbol{f}_I = \int_{\Gamma^t}\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{t}d\Gamma + \int_\Omega \boldsymbol{N}_I\boldsymbol{b}d\Omega \tag{6.21b}$$

其中，A 是组装算子。

有限元近似在全域上将位移离散为分片多项式的形式，离散控制方程表达式(6.21)中的积分也在每个单元中通过数值方式进行实现。最常用的数值积分方法是**高斯积分法**（Gauss quadrature），数值积分通常表示为被积函数在高斯积分点处的取值乘以相对应的权重再进行求和。以刚度矩阵为例，数值积分可表示为

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{B}_I\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_J^T d\Omega &= \sum_{C=1}^{n_c}\int_{\Omega_C} \boldsymbol{B}_I^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_J d\Omega \\ &\sum_{C=1}^{n_c}\sum_{G=1}^{n_g} \boldsymbol{B}_I^T(\boldsymbol{x}_G)\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_J(\boldsymbol{x}_G)w_G\end{aligned} \tag{6.22}$$

式中 $\boldsymbol{x}_G$ 和 w_G 为高斯积分点和权重。在不同类型的有限元近似中，高斯积分点和权重各不相同。从离散控制方程中可以看出，仅需要确定有限元近似的形函数及其梯度和相对应的高斯积分方案即可求解问题。

6.2　拉格朗日插值近似

在一维有限元近似中，形函数可采用拉格朗日插值近似函数。拉格朗日插值近似可将离散节点近似为相应阶次的函数，并且要求函数经过每个离散节点。当采用线性拉格朗日插值近似时，每段近似函数由两个形函数和两个节点系数组成，在以 x_1 和 x_2 为顶点的单元中，近似位移可表示为

$$u^h(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} d_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} d_2 = \sum_{I=1}^{2} N_I(x) d_I \tag{6.23}$$

其中

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{6.24}$$

从形函数表达式中可以看出，形函数具有插值性（Kronecker delta property），即 $N_I(x_J) = \delta_{IJ}$。当形函数具有插值性时，节点系数 d_I 具有物理意义，即近似函数在节点 x_I 处的取值，$d_I = u^h(x_I)$。此时，形函数相对应的梯度为

$$N_{1,x} = \frac{1}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{L}, \quad N_{2,x} = \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{L} \tag{6.25}$$

式中 L 为单元长度。

形函数表达式(6.24)在程序实现中并不是最简单的形式，表达式中 x_1, x_2 分别为单元的顶点，但每个单元的顶点各不相同。这里引入参数空间表示形函数，可进一步化简形函数表达式。物理空间 $x \in [x_1, x_2]$ 将投影到 $\xi \in [-1, 1]$ 的参数空间中，此时物理坐标 x 可采用参数坐标 ξ 表示为

$$x(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} x_1 + \frac{1 + \xi}{2} x_2 \tag{6.26}$$

将由参数坐标表示的 x 表达式式(6.26)代入形函数表达式(6.24)，形函数可用参数坐标表示为

$$N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad N_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \tag{6.27}$$

值得注意的是，结合式(6.26)与形函数表达式(6.27)可知，物理坐标 x 也可采用形函数和顶点坐标插值表示。当场变量与物理坐标采用相同方式投影至参数空间时，称之为**等参投影**。此时，相对应形函导数也可通过下式进行计算

$$N_{I,x} = N_{I,\xi} \xi_{,x} = N_{I,\xi} J \tag{6.28}$$

式中 $J=\xi_{,x}$ 为雅可比（Jacobi），其可通过式(6.26)计算得到

$$J=\xi_{,x}=\frac{1}{x_{,\xi}}=\frac{2}{x_2-x_1}=\frac{2}{L} \tag{6.29}$$

此时形函数(6.24)的梯度为

$$N_{1,x}=N_{1,\xi}J=-\frac{1}{L},\quad N_{2,x}=N_{2,\xi}J=\frac{1}{L} \tag{6.30}$$

从式中可以看出通过参数坐标得到梯度(6.30)与直接求导得到的表达式(6.25)相同。

表 6.1: 一维高斯积分点及权重

n_g	ξ_G	w_G	积分精度
1	0	2	1
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	3
3	0	$\frac{8}{9}$	5
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$	
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	7
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	
5	0	$\frac{128}{225}$	9
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$	
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	
n	$\cdots$	$\cdots$	$2n-1$

对比式(6.24)和式(6.27)，采用参数坐标描述的形函数表达式在每个单元中一样，在程序实现的过程中计算效率高。同时，相对应的高斯积分点位置采用参数坐标表示时，参数坐标是固定的，表 (6.1) 列出了一维的高斯积分点及其权重。

6.3 四节点双线性单元 (QUAD)

四节点单元顾名思义就是一个单元有 4 个节点，形函数建立在四边形上。形函数的值等于一维线性函数通过张量积得到

$$
\begin{cases}
N_1 = \dfrac{1}{4}(1-\xi)(1=\eta) \\
N_2 = \dfrac{1}{4}(1+\xi)(1=\eta) \\
N_3 = \dfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_4 = \dfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
\end{cases} \tag{6.31}
$$

或

$$
\begin{gathered}
N_I = \frac{1}{4}(1+\xi_I\xi)(1+\eta_I\eta) \\
\xi_I = \begin{cases} 1 & I=2,3 \\ -1 & I=1,4 \end{cases}, \quad \eta_I = \begin{cases} 1 & I=3,4 \\ -1 & I=1,2 \end{cases}
\end{gathered} \tag{6.32}
$$

从四节点单元表达式中可以看出，其形函数表达式包含了两个一维线性形函数表达式(6.27)相乘，所以也称之为**双线性单元**。此时，形函数的导数可表示为

$$
\begin{cases}
N_{I,x} = N_{I,\xi}\xi_{,x} + N_{I,\eta}\eta_{,x} \\
N_{I,y} = N_{I,\xi}\xi_{,y} + N_{I,\eta}\eta_{,y}
\end{cases} \tag{6.33}
$$

或改写为矩阵形式

$$
\begin{Bmatrix} N_{I,x} \\ N_{I,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-T} \begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{Bmatrix} \tag{6.34}
$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 为雅可比矩阵。在二维四节点单元中，雅可比不再是一个常数，而是矩阵，其表达式可表示为

$$
\boldsymbol{J} = [J_{ij}] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right] \tag{6.35}
$$

而四节点单元为等参投影，坐标 x, y 可采用形函数表示为

$$
x = \sum_{I=1}^{4} N_I x_I, \quad y = \sum_{I=1}^{4} N_I y_I \tag{6.36}
$$

其中 (x_I, y_I) 为四节点单元节点坐标。此时，雅可比矩阵中的元素可改写为

$$
J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial(\sum_{I=1}^{4} N_I x_{iI})}{\partial \xi_j} = \sum_{I=1}^{4} N_{I,j} x_{iI} \tag{6.37}
$$

在四节点单元中，高斯积分方案可采用一维的高斯积分方案通过张量积确定，积分精度也和一维情况相同。例如，通过一维 2 点高斯积分方案可得到四节点单元 4 点高斯积分方案，相应的节点坐标和权重为

ξ_G	η_G	w_G
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

6.4　三角形常应变单元 (CST)

在三节点三角形单元中，场变量假设为线性函数，如

$$u^h(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \tag{6.38}$$

其中，$a_i, i = 0,1,2$ 为常系数，常系数可通过满足三角形节点处的插值性条件求得

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 = u_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 = u_2 \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 = u_3 \end{cases} \tag{6.39}$$

式中 $(x_i, y_i), i = 1,2,3$ 为三角形顶点坐标，u_i 为相对应的节点系数。通过整理可得

$$\begin{aligned} u^h(\boldsymbol{x}) &= \frac{A_1}{A}u_1 + \frac{A_2}{A}u_2 + \frac{A_3}{A}u_3 \\ &= \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 \\ &= \sum_{I=1}^{3} N_I u_I \end{aligned} \tag{6.40}$$

如图所示，A 为三角形单元面积，$N_I = \xi_I$ 为三节点有限元形函数，A_1, A_2, A_3 分别为以 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 为顶点组成三角形的面积。此时，在三角形单元内的参数坐标可表示为 $\xi_i = \frac{A_i}{A}$，$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$。

三节点单元形函数梯度也可通过式(6.34)进行计算，该单元也是等参单元，物理坐标可通过三角形单元形函数和三角形顶点表示为

$$\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{x}_1 + \xi_2 \boldsymbol{x}_2 + \xi_3 \boldsymbol{x}_3 \tag{6.41}$$

此时相对应的雅可比矩阵和其逆矩阵为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}x_1-x_3 & x_2-x_3\\ y_1-y_3 & y_2-y_3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}^{-1}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}y_2-y_3 & x_3-x_2\\ y_2-y_1 & x_1-x_3\end{bmatrix} \tag{6.42}$$

将上式代入式(6.34)中可得三节点单元形函数导数为

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix}N_{1,x}\\ N_{1,y}\end{Bmatrix}&=\frac{1}{2A}\begin{Bmatrix}y_2-y_3\\ x_3-x_2\end{Bmatrix}\\
\begin{Bmatrix}N_{2,x}\\ N_{2,y}\end{Bmatrix}&=\frac{1}{2A}\begin{Bmatrix}y_3-y_1\\ x_1-x_3\end{Bmatrix}\\
\begin{Bmatrix}N_{3,x}\\ N_{3,y}\end{Bmatrix}&=\frac{1}{2A}\begin{Bmatrix}y_1-y_2\\ x_2-x_1\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.43}$$

从形函数导数的表达式(6.43)中可以看出，三节点单元形函数导数均为常数，所以也称为常应变三角形单元（Constant strain triangle, CST）。在三角形单元中，数值积分方案也不同于四节点双线性单元。表6.2为常用的三角形高斯积分点及其权重。

表 6.2: 三角形单元高斯积分点及权重

n_g	ξ_G	η_G	w_G	积分精度
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	2
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{9}{16}$	3
	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{25}{48}$	

6.5　有限元法求解一维问题

同样地考虑第一章中的拉压杆问题，并采用两节点线性有限元形函数进行求解。首先采用等距的两个单元进行求解，将形函数及其导数(6.24)、(6.30)代入离散控制方程(6.21)中，此时刚度矩阵(6.21a)为

$$\boldsymbol{K}=\underbrace{\frac{2EA}{L}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\text{Element 1}}+\underbrace{\frac{2EA}{L}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}}_{\text{Element 2}}=\frac{2EA}{L}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix} \tag{6.44}$$

相对应的力向量(6.21b)为

$$\boldsymbol{f}=\underbrace{\begin{Bmatrix}\frac{bL}{4}\\ \frac{bL}{4}\\ 0\end{Bmatrix}}_{\text{Element 1}}+\underbrace{\begin{Bmatrix}0\\ \frac{bL}{4}\\ \frac{bL}{4}+P\end{Bmatrix}}_{\text{Element 2}}=\begin{Bmatrix}\frac{bL}{4}\\ \frac{bL}{2}\\ \frac{bL}{4}+P\end{Bmatrix} \tag{6.45}$$

从上式可以看出，根据拉格朗日近似的插值特性，节点上的外荷载可直接施加在相应位置的外力向量上。同理，由位移边界条件和插值特性可知，$u^h(0)=d_1=0$。仅需对刚度矩阵(6.44)和力向量(6.45)改写为如下形式，即可求得满足位移边界条件的结果。

$$\boldsymbol{K}=\frac{2EA}{L}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}=\begin{Bmatrix}0\\ \frac{bL}{2}\\ \frac{bL}{4}+P\end{Bmatrix} \tag{6.46}$$

根据上式可解得节点系数为

$$\boldsymbol{d}=\begin{Bmatrix}0\\ \frac{3bL^2}{8EA}+\frac{PL}{2EA}\\ \frac{bL^2}{2EA}+\frac{PL}{EA}\end{Bmatrix} \tag{6.47}$$

对比求得的近似解和精确解可以看出，通过有限元法得到的近似解在节点上等于精确解，即 $d_I=u(x_I)$。但需要指出，这种有限元解的插值性质仅在一维情况存在，在二维三节点单元和四节点单元的有限元解都不具有插值性质。

第七章　有限元法施加约束

本章将

7.1　罚函数法 (Penalty)

7.2　拉格朗日乘子法 (Lagrangian multiplier)

第八章　一维塑性

本章将介绍一维情况下理想弹塑性、各向同性等向硬化、随动硬化等塑性应力应变关系及其数学描述，并通过一维弹塑性模型介绍 Return-mapping 算法。

8.1　塑性应变

不同与弹性材料，塑性材料在一定的受力作用下将产生不可恢复的变形。此时，总应变 ε 可分为弹性部分应变 ε^e 和塑性部分应变 ε^p 两部分，即

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{8.1}$$

应力将由弹性部分应变 ε^e 提供

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \tag{8.2}$$

其中，塑性应变 ε^p 是不可恢复的，其大小只能增加不能减小。在弹性阶段，ε^p 保持不变，$\dot{\varepsilon}^p = 0$。而在塑性阶段，ε^p 将随着荷载的增加而改变，所以采用本构关系式(8.2)描述并不方便。通常情况下，塑性本构关系采用如下增量形式表示

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e = \begin{cases} E\dot{\varepsilon} & \text{elastic stage} \\ E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) & \text{plastic stage} \end{cases} \tag{8.3}$$

如图所示，在线性弹塑性模型当中，在外荷载较小时应力应变还是弹性关系，撤除外荷载后还物体恢复到原来状态。随着外荷载增加，荷载达到屈服应力 σ_Y(Yield stress) 时，物体产生不可恢复的应变，撤除外荷载后，应力应变关系服从式(8.3)。进入塑性状态后，σ_Y 保持不变的称为理想弹塑性材料，此时应力保持不变，$\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}^p = 0$。$\sigma_Y$ 增大称为硬化过程 (hardening)，此时应力增量与塑性应变增量同时增大或减小，$\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}^p > 0$。$\sigma_Y$ 减小称为软化过程 (softening)，此时应力增量随塑性应变的增大而减小或减小而增大，$\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}^p < 0$。屈服应力函数 σ_Y 所组成的平面称为屈服面 (Yield surface)，该平

面所构成的方程为屈服函数 (Yield function)$f(\sigma)$。应力 σ 只能存在于屈服面内，即屈服函数需始终保持小于等于零

$$f(\sigma) \leq 0 \tag{8.4}$$

当 $f<0$ 时，材料处于弹性阶段；当 $f=0$ 时，材料处于塑性状态。上式称为屈服条件 (Yield condition)。为了保持屈服条件始终成立，塑性应变将增大，塑性应变的增大过程满足的关系式称为流动法则 (Flow rule)。最常见的流动法则称为 Associative flow rule，该流动法则满足

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}\frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{8.5}$$

其中，$\dot{\gamma}$ 为塑性应变增量的大小，该塑性应变增量大小待定。$\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ 为塑性应变增大的方向。

当物体处于加载阶段时，应力应变满足下面规律

$$\begin{cases} \varepsilon > 0, \quad \dot{\varepsilon} > 0, \quad \sigma > 0 \\ \varepsilon < 0, \quad \dot{\varepsilon} < 0, \quad \sigma < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma\dot{\varepsilon} > 0 \tag{8.6}$$

当 $f(\sigma)<0$ 时，

$$\dot{\gamma} = 0, \quad \dot{f} > 0 \tag{8.7}$$

当 $f(\sigma)=0$ 时，

$$\dot{\gamma} > 0, \quad \dot{f} = 0 \tag{8.8}$$

当物体处于卸载阶段时，

$$\begin{cases} \varepsilon > 0, \quad \dot{\varepsilon} < 0, \quad \sigma > 0 \\ \varepsilon < 0, \quad \dot{\varepsilon} > 0, \quad \sigma < 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma\dot{\varepsilon} < 0 \tag{8.9}$$

当 $f(\sigma)<0$ 时，

$$\dot{\gamma} = 0, \quad \dot{f} < 0 \tag{8.10}$$

当 $f(\sigma)=0$ 时，

$$\dot{\gamma} = 0, \quad \dot{f} < 0 \tag{8.11}$$

综合上述加载卸载过程，可得塑性应变增量和屈服函数应满足 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 准则和一致性条件 (Consistency condition)

- Karush-Kuhn-Tucker 准则

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\gamma} f = 0 \tag{8.12}$$

- 一致性条件

$$\dot{\gamma}\dot{f} = 0 \tag{8.13}$$

这两个条件是数值模拟过程中，弹塑性过程具有收敛解的必要条件。后续章节中介绍的 Return-mapping 算法也是根据 KKT 准则建立的。同时，塑性应变增量大小 $\dot{\gamma}$ 也可以根据一致性条件确定。接下来将介绍理想弹塑性和线性硬化过程时，如何确定塑性应变增量。

8.1.1 理想弹塑性模型

在理想弹塑性模型中，屈服应力保持不变，应力始终不超过屈服应力所组成的区间范围。此时屈服函数和屈服条件为

$$-\sigma_Y \leq \sigma \leq \sigma_Y \Rightarrow f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y \leq 0, \quad \sigma_Y > 0 \tag{8.14}$$

在此屈服函数下，塑性应变增量方向为

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \mathrm{sign}(\sigma) \tag{8.15}$$

其中

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma > 0 \\ 0 & \sigma = 0 \\ -1 & \sigma < 0 \end{cases} \tag{8.16}$$

当材料进入塑性阶段时，塑性应变增量大小 $\dot{\gamma}$ 大于零。此时根据一致性条件，$\dot{f}$ 必须等于零，由此可推出塑性应变增量大小为

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\sigma} \\ &= \mathrm{sign}(\sigma)E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \\ &= \mathrm{sign}(\sigma)E\dot{\varepsilon} - E\dot{\gamma} \\ &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \dot{\gamma} = \mathrm{sign}(\sigma)\dot{\varepsilon} \tag{8.17}$$

此时，塑性应变增量为

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\varepsilon} \tag{8.18}$$

将此塑性应变增量代入式(8.3)可得理想弹塑性下的本构关系为

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\varepsilon} & \text{elastic stage} \\ 0 & \text{plastic stage} \end{cases} \tag{8.19}$$

该应力应变关系与理想弹塑性情况下的应力应变关系图保持一致。

8.1.2 各向同性等向硬化模型

等向硬化过程中屈服应力将随着荷载的继续增大而增大，弹性范围也只能增大，即 $\dot{\sigma}_Y \geq 0$。描述屈服应力增大的规律也称为**硬化准则** (hardening rule)，最常见的硬化准则为线性硬化准则。在一维情况下，该准则假设该屈服应力的增量 $\dot{\sigma}_Y$ 与塑性应变增量大小 $\dot{\gamma}$ 呈线性关系

$$\dot{\sigma}_Y = K\dot{\gamma} \tag{8.20}$$

其中，$K > 0$ 为塑性模量。此时，屈服应力可表示为

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + K\alpha \tag{8.21}$$

式中，α 为硬化变量，$\dot{\alpha} = \dot{\gamma}$。对于各向同性硬化模型，拉压屈服应力的大小将同时增加或减小，即屈服条件应满足

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_{Y0} + K\alpha) \leq 0 \tag{8.22}$$

同样地，塑性应变增量大小可通过一致性条件确定

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\dot{\alpha} \\ &= \operatorname{sign}(\sigma)E\dot{\varepsilon} - E\dot{\gamma} - K\dot{\gamma} \Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{E}{E+K}\operatorname{sign}(\sigma)\dot{\varepsilon} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8.23}$$

此时，塑性应变增量为

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{E}{E+K}\dot{\varepsilon} \tag{8.24}$$

将此塑性应变增量代入式(8.3)可得各向同性等向硬化模型下的塑性阶段本构关系为

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = \frac{EK}{E+K}\dot{\varepsilon} = E^T\dot{\varepsilon} \tag{8.25}$$

式中 $E^T = \frac{EK}{E+K}$ 为切向弹塑性模量 (Tangent elastoplastic modulus)，由式(8.19)可知理想弹塑性模型的切向弹塑性模量为零。

8.1.3 各向同性随动硬化模型

随动硬化过程中弹性范围的中心点位置随着屈服应力的增加而改变，所以屈服条件可假设为

$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_{Y0} + K\alpha) \leq 0 \tag{8.26}$$

式中 q 为屈服面中心坐标 (back stress)。随动硬化准则将描述屈服面中心坐标如何定义的。最简单的随动硬化模型为 Ziegler's rule，该模型假设屈服面中心坐标与塑性应变增量呈线性关系

$$\dot{q} = H\dot{\varepsilon}^p = H\dot{\gamma}\text{sigan}(\sigma - q) \tag{8.27}$$

其中 H 为随动硬化模量 (Kinematic hardening modulus)。根据一致性条件即可确定随动硬化模型的塑性应变增量为

$$\begin{aligned}\dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\dot{\alpha} \\ &= \text{sign}(\sigma - q)E\dot{\varepsilon} - (E + K + H)\dot{\gamma} \\ &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\gamma} &= \frac{E}{E + K + H}\text{sign}(\sigma - q)\dot{\varepsilon}\end{aligned} \tag{8.28}$$

此时，塑性应变增量为

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{E}{E + K + H}\dot{\varepsilon} \tag{8.29}$$

将此塑性应变增量代入式(8.3)可得各向同性随动硬化模型下的塑性阶段本构关系和相应的切向弹塑性模量为

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = \frac{E(K + H)}{E + K + H}\dot{\varepsilon} = E^T\dot{\varepsilon} \tag{8.30}$$

8.1.4 Return-mapping 算法

在塑性阶段物理方程不再是线性关系，即使是最简单的理想弹塑性过程，物理方程也是分段线性函数。当使用有限元法进行求解时，离散控制方程不再是线性方程组，而是非线性方程组，需要采用非线性迭代的方法进行求解。对于塑性应力应变关系采用 **Return-mapping 算法**进行迭代求解，迭代求解过程变量对时间的微分将变为有限的增量形式，如应变对时间的导数 $\dot{\varepsilon}$ 将改为增量形式表示 $\Delta\varepsilon$。

Return-mapping 算法主要分为两个步骤——预测与矫正，以各向同性等向硬化材料为例，已知第 n 步应力 σ_n、塑性应变 ε_n^p、应变增量 $\Delta\varepsilon_n$、硬化变量 α_n。在预测阶段，首先假设第 $n+1$ 步为弹性阶段，采用弹性应力应变关系得到所有尝试的物理量

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \sigma_n + E\Delta\varepsilon_n \tag{8.31a}$$

$$\varepsilon_{n+1}^{ptrial} = \varepsilon_n^p \tag{8.31b}$$

$$\alpha_{n+1}^{trial} = \alpha_n \tag{8.31c}$$

$$f_{n+1}^{trial} = |\sigma_{n+1}^{trial}| - (\sigma_{Y0} + K\alpha_{n+1}^{trial}) \tag{8.31d}$$

当 $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ 时，物体处于弹性阶段，此时塑性应变保持不变。其余变量按弹性应力应变关系进行更新

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} \tag{8.32a}$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p} = \varepsilon_{n}^{p} \tag{8.32b}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n} \tag{8.32c}$$

当 $f_{n+1}^{trial} > 0$ 时，物体进入塑性阶段，此时塑性应变增量不为零，$\Delta\gamma > 0$。其余变量此时，塑性应变增量大小为 $\Delta\gamma = \varepsilon_{n+1}^{p} - \varepsilon_{n}^{p} = 0$，各个变量有

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p}) \\ &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n}^{p}) - E(\varepsilon_{n+1}^{p} - \varepsilon_{n}^{p}) \\ &= \sigma_{n+1}^{trial} - E\Delta\varepsilon^{p}\end{aligned} \tag{8.33a}$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p} = \varepsilon_{n}^{p} + \Delta\varepsilon^{p} \tag{8.33b}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n} + \Delta\gamma \tag{8.33c}$$

其中

$$\Delta\varepsilon^{p} = \Delta\gamma \mathrm{sign}(\sigma_{n+1}) \tag{8.34}$$

将式(8.34)代入式(8.33a)有

$$(|\sigma_{n+1}| + E\Delta\gamma)\mathrm{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{trial}|\mathrm{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \tag{8.35}$$

由于 $E, \Delta\gamma > 0$ 可得

$$\mathrm{sign}(\sigma_{n+1}) = \mathrm{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \tag{8.36}$$

由于此时处于塑性状态，应力需在屈服面上，即 $f_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}f_{n+1} &= |\sigma_{n+1}| - (\sigma_{Y_0} + K\alpha_{n+1}) \\ &= \underbrace{|\sigma_{n+1}^{trial}| - (\sigma_{Y0} + K\alpha_{n})}_{f_{n+1}^{trial}} - E\Delta\gamma - K\Delta\alpha \\ &= f_{n+1}^{trial} - (E+K)\Delta\gamma \\ &= 0 \\ \Rightarrow \Delta\gamma &= \frac{f_{n+1}^{trial}}{E+K} > 0\end{aligned} \tag{8.37}$$

求得塑性应变增量大小后即可更新所有变量

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma E \mathrm{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \tag{8.38a}$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p} = \varepsilon_{n}^{p} + \Delta\gamma \mathrm{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \tag{8.38b}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n} + \Delta\gamma \tag{8.38c}$$

第九章　多维塑性

本章将介绍多维情况下与 J_2 相关的屈服准则，J_2 相关的屈服准则通常可以描述金属类材料的塑性应力应变关系。常用的与 J_2 相关的屈服准则有 Tresca 准则和 Mises 准则，并与 Mises 理想弹塑性屈服准则为例，介绍多维情况下切向弹塑性模量的推导过程。

9.1　Lode 坐标系

对于各向同性材料，其屈服应力应当与方向无关。即任意一点处的任意一平面上的应力达到屈服应力时，该点处其余平面上的应力也达到屈服应力。所以为了方便描述，屈服函数可采用主应力 σ_i 表示

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{9.1}$$

此时，屈服面可建立与由主应力 σ_i 所组成的坐标系中，此坐标系也成为**主应力空间**。但是采用主应力进行表示时，屈服面函数形式通常较为复杂，而是改为应力的三个不变量 I_1, I_2, I_3 表示

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0 \tag{9.2}$$

在主应力空间上，将主应力进行谱分解可在主应力空间的基础上建立以不变量 I_i 为基础的坐标系。在主应力空间中的一点 $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 可采用相应的基向量 $\boldsymbol{e}_i$ 和主应力表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \boldsymbol{e}_1 + \sigma_2 \boldsymbol{e}_2 + \sigma_3 \boldsymbol{e}_3 \tag{9.3}$$

对主应力引入谱分解，主应力分解为静水压力和主偏应力表示

$$\sigma_i = p + s_i, \quad p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad s_i = \sigma_i - p \tag{9.4}$$

将式(9.4)代入式(9.3)，主应力空间中的应力向量可分解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \sum_{i=1}^{3}\sigma_i\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3}(p+s_i)\boldsymbol{e}_i \\ &= p\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i + \sum_{i=1}^{3}s_i\boldsymbol{e}_i = \frac{I_1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_z + \sum_{i=1}^{3}s_i\boldsymbol{e}_i\end{aligned} \tag{9.5}$$

其中，$\boldsymbol{e}_z = \frac{\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{3}}$ 的方向为静水压力轴线方向，该向量模为 $\sqrt{3}$。过坐标系原点做垂直于静水压力轴的平面称为 π 平面，由上式可知，所有 $\sum_{i=3}^{3}s_i\boldsymbol{e}_i$ 均平行于 π 平面，并且根据式(2.33)，该向量的模为

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}s_i^2} = \sqrt{2J_2}, \quad \sum_{i=1}^{3}s_i\boldsymbol{e}_i = \sqrt{2J_2}\boldsymbol{e}_r \tag{9.6}$$

以 $\frac{I_1}{\sqrt{3}}$ 为 z 轴，$\sqrt{2J_2}$ 为半径 r 轴，如果在 π 平面上选取一合适的夹角 θ，即可组成圆柱坐标系表示主应力空间中的应力状态。

令主应力空间基向量 $\boldsymbol{e}_i$ 在 π 平面上的投影为 $\boldsymbol{e}_i'$，$\boldsymbol{e}_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{e}_i'$。在 π 平面上，以主应力空间坐标原点为原点，$\boldsymbol{e}_2'$ 为 y 轴，重新建立一直角坐标系 xOy。假设一点应力状态在 π 平面上的投影为 $\sqrt{2J_2}\boldsymbol{e}_r$，此时可选取 $\boldsymbol{e}_r$ 与 x 轴的夹角 θ_σ 为圆柱坐标系的夹角变量，称为 **Lode 角**。直角坐标系 (x, y) 与极坐标系 $(\sqrt{2J_2}, \theta_\sigma)$ 具有如下关系

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_1 - s_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{2J_2}\cos\theta_\sigma \tag{9.7a}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{6}}(2s_2 - s_1 - s_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{2J_2}\sin\theta_\sigma \tag{9.7b}$$

根据上述关系可得 Lode 角为

$$\theta_\sigma = \arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_\sigma \tag{9.8}$$

其中

$$\mu_\sigma = \frac{2s_2 - s_1 - s_3}{s_1 - s_3} = \frac{3s_2}{s_1 - s_3} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \tag{9.9}$$

式中，μ_σ 为 **Lode 参数**，当处于单轴拉伸时 $\mu_\sigma = -1$；当处于纯剪状态时 $\mu_\sigma = 0$；当处于单轴压缩时 $\mu_\sigma = 1$。由于 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$，有

$$-1 \leq \mu_\sigma \leq 1, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta_\sigma \leq \frac{\pi}{6} \tag{9.10}$$

Lode 角也可通过下式由 J_2 和 J_3 确定

$$\cos 3\theta_\sigma = \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{\frac{3}{2}}} \tag{9.11}$$

根据几何关系，主应力 σ_i 和主偏应力 s_i 可采用 I_1、J_2 和 θ_σ 表示为

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= p + s_1 = \frac{I_1}{3} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}}\sin(\theta_\sigma + \frac{2\pi}{3}) \\ \sigma_2 &= p + s_2 = \frac{I_1}{3} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}}\sin\theta_\sigma \\ \sigma_3 &= p + s_3 = \frac{I_1}{3} + \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}}\sin(\theta_\sigma - \frac{2\pi}{3})\end{aligned} \tag{9.12}$$

圆柱坐标系 $(I_1, J_2, \theta_\sigma)$ 称为 **Lode 坐标系**或 **Haigh–Westergaard 坐标系**，通过该坐标系屈服条件就可表示为

$$f(I_1, J_2, \theta_\sigma) = 0 \text{ or } f(I_1, J_2, J_3) = 0 \tag{9.13}$$

9.2 J_2 模型

9.2.1 Tresca 准则

在 Tresca 准则中假设当剪应力达到最大时，材料发生屈服。此时屈服准则可以表示为

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sqrt{\frac{3}{2}}K \tag{9.14}$$

式中 K 为屈服相关的材料系数，σ_1、σ_3 分别为最大和最小主应力。当主应力 σ_i 不区分大小时，屈服函数也可改写为

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) - \sqrt{\frac{3}{2}}K \tag{9.15}$$

从 Tresca 准则的屈服面方程中可以看出，该准则与静水压力无关 (式中不存在 $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$)，屈服面始终垂直于 π 平面。将式(9.7)引入将主应力采用 π 平面上的 x, y 坐标表示可得屈服面方程在 π 平面上投影的形状

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{6}}{2}y\right| \le \sqrt{\frac{3}{2}}K \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{3}}{3}x - y\right| \le K \tag{9.16a}$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{2}y\right| \le \sqrt{\frac{3}{2}}K \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{3}}{3}x + y\right| \le K \tag{9.16b}$$

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = |\sqrt{2}x| \le \sqrt{\frac{3}{2}}K \Rightarrow |x| \le \frac{\sqrt{3}}{2}K \tag{9.16c}$$

从上式可知，在 π 平面上 Tresca 屈服面为正六边形。由于 Tresca 屈服面并不连续，当采用 Associative 流动法则时，塑性应变方向为 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$。但不连续的 Tresca 屈服面在不连续处导数并不存在，使用起来不方便。

除了采用主应力表示 Tresca 准则屈服面方程外,还可以使用 J_2 和 Lode 角 θ_σ 表示

$$f(J_2,\theta_\sigma)=2\sqrt{J_2}\cos\theta_\sigma-K\le 0 \tag{9.17}$$

9.2.2　Mises 屈服准则

Mises 屈服准则要求偏应力的大小不能超过相对应的屈服应力，其屈服准则可表示为

$$f(\boldsymbol{\sigma})=\sqrt{2J_2}-K\le 0 \tag{9.18}$$

其中，$\sqrt{2J_2}$ 为偏应力的大小，根据 J_2 的表达式可改写为主应力 σ_i 或 π 平面直角坐标系 x,y 表示

$$\sqrt{2J_2}=\sqrt{\frac{1}{3}((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2)}=\sqrt{x^2+y^2} \tag{9.19}$$

相较于 Tresca 准则，Mises 准则具有光滑的屈服面，当材料为 Associative 材料时，其塑性应变可假设为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\dot{\gamma}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \tag{9.20}$$

式中 $\dot{\gamma}$ 为塑性应变增量的大小，$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$ 为塑性应变增量的方向，其表达式为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}&=\frac{\partial f}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2J_2}}\frac{\partial(\frac{1}{2}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{\sqrt{2J_2}}\boldsymbol{s}:\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\\&=\frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|}=\boldsymbol{n}_s\end{aligned} \tag{9.21}$$

式中 $\boldsymbol{n}_s$ 为偏应力 $\boldsymbol{s}$ 的方向。

当材料进入塑性阶段时，根据一致性条件有

$$\begin{aligned}\dot{f}&=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{n}_s:\boldsymbol{C}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\\&=\boldsymbol{n}_s:\boldsymbol{C}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\gamma}\boldsymbol{n}_s)\\&=0\end{aligned}\qquad\Rightarrow\dot{\gamma}=\frac{\boldsymbol{n}_s:\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\boldsymbol{n}_s:\boldsymbol{C}:\boldsymbol{n}_s} \tag{9.22}$$

此时本构关系为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}}&=\boldsymbol{C}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)\\&=\boldsymbol{C}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\frac{\boldsymbol{n}_s:\boldsymbol{C}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\boldsymbol{n}_s:\boldsymbol{C}:\boldsymbol{n}_s}\boldsymbol{n}_s)\\&=(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{n}_s\otimes\boldsymbol{n}_s:\boldsymbol{C}):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\\&=\boldsymbol{C}^T:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned} \tag{9.23}$$

其中，$\boldsymbol{C}^T$ 为四阶切向弹塑性张量。与一维情况不同，二维情况下的切向弹塑性张量并不为零。