

分类号 0212

学校代码 10590

U D C 519.2

密 级 公开



硕士学位论文

两个具有时滞复杂网络间的外同步与混合外同步研究

学位申请人姓名 周家木

专 业 名 称 统 计 学

学 院 (系、所) 数学与统计学院

导师姓名及职称 董海玲 副教授

深圳大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明： 所呈交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：

日期： 年 月 日

学位论文使用授权说明

(必须装订在印刷本首页)

本人完全了解深圳大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 1.按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 2.学校有权保留学位论文的印刷本和电子版，并在图书馆内和校园网内提供全文阅览服务；
- 3.学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存学位论文；
- 4.学校可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和阅览，并为与图书馆存在合作关系的非营利机构提供包括文献传递和文献交换在内的合理使用服务。

(保密的学位论文在解密后适用本授权)

论文作者签名：

导师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

摘 要

同步是复杂网络一种典型的群体动力学行为, 近年来对网络同步的研究吸引了来自多个不同学科的研究者的兴趣, 这主要是由于同步现象普遍存在于现实网络中, 并且对网络同步的研究涉及到包括微分动力系统, 网络理论, 矩阵理论, 稳定性理论等多个学科, 具有较强的挑战性. 现有关网络同步研究主要集中在同一网络内部节点间的同步 (常称为内同步), 两个网络间的同步 (常称为外同步) 的研究有着较强的理论意义和应用价值. 本学位论文主要对两个具有变时滞复杂网络间的外同步和混合外同步问题进行了研究. 其主要工作包含如下几个方面:

在第二章中我们对本文中涉及外同步的定义, 证明主要结论所用的引理以及一些符号进行介绍. 其中得到了含时变时滞微分不等式, 它推广了现有文献中关于分段连续可微的时滞微分不等式, 将是文中利用脉冲控制方法讨论含时变时滞的网络外同步的主要工具.

接着对两个无时滞耦合和有时变时滞耦合网络的外同步问题采取两种控制策略进行研究. 首先只对响应网络的部分节点实施负线性反馈控制, 利用 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理和 LMI 线性矩阵不等式得到了它们实现外同步的条件. 第二对响应网络的节点加以脉冲控制, 通过推广的微分不等式在理论上也给出了它们实现外同步的条件, 其主要结果推广了现有结论.

在本文的第四章研究了两个有特殊形式节点动力学且有时变时滞耦合网络的混合外同步问题. 利用牵制控制策略, 通过设计一类特殊的控制器, 达到了这两个网络的混合外同步, 类似地通过对响应网络的节点施以脉冲控制, 得到了驱动网络与响应网络间达到混合外同步, 其主要结果推广了现有结论.

本文中所有的理论结果均通过实际数值例子得到验证.

关键词: 复杂网络, 牵制控制, 脉冲控制, 外同步, 混合外同步.

Abstract

Synchronization, which means that a typical kind of collective dynamics behavior in complex network, has attracted considerable attention from different subjects of researchers in recent years. Mainly because that it often occurred in the real network. As we know that the investigation of synchronization in the complex network need the knowledge of the differential dynamics, the network theory, the stability theory and so on, which has great challenge. While a mass of researches only study the synchronization of the nodes in one network system (usually called inner synchronization), the investigation of synchronization between the two different network system (which called outer synchronization) has much more theoretical significance and application value. In this academic dissertation, we mainly study the outer synchronization and the hybrid outer synchronization of the complex network with time-varying delayed. Our main work includes the following several aspects:

In the second chapter, we give some preliminaries such as the definition of outer synchronization, lemmas that are necessary throughout the paper, and some notations. We get the differential inequality with time-varying delay, which extend the piecewise continuously differentiable delay differential inequality in the available literature, and it will be the essential tools to study the outer synchronization of the network with time-varying delayed via impulsive control.

Next, we will use two kinds of control strategies to investigate the outer synchronization of two complex networks with non-delay coupling and time-varying coupling. The first and foremost, we give the negative linear feedback control to some nodes in the response network, according to the Lyapunov-Krasovskii Stability Theorem and the Linear Matrix Inequality, we derive some sufficient conditions of the outer synchronization. There is one more point, we give impulsive control to a portion of the nodes in the network, some sufficient conditions for the outer synchronization are obtained based on the extend differential inequality. And we compared this with the existing research results.

In the fourth chapter, we study the mixed outer synchronization of the two complex networks with special node dynamics and time-varying delayed coupling. Using pinning control strategy, the mixed outer synchronization of the two networks is achieved by designing a special kind of controller. Similarly, impulsive control are given to the nodes of the response network, we obtain the mixed outer synchronization of the drive network and the response network, the main result generalize the existing conclusions.

In this paper, all of the theoretical results have been verified by actual numerical

example.

Keywords: Complex networks, pinning control, impulsive control, outer synchronization, mixed outer synchronization.

目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
第一章 引言	1
1.1 复杂网络的研究背景及意义	1
1.2 复杂网络同步的研究现状	3
1.3 本文的主要工作	4
第二章 预备知识	7
第三章 两个无时滞和时变时滞耦合复杂网络的外同步	11
3.1 模型描述	11
3.2 基于牵制控制下的外同步	12
3.3 基于脉冲控制下的外同步	15
3.4 数值模拟	19
3.5 结论	20
第四章 两个无时滞和时变时滞耦合复杂网络的混合外同步	23
4.1 问题的叙述	23
4.2 同步条件的推导	25
4.3 Numerical simulation	30
4.4 结论	33
第五章 总结与讨论	35
参考文献	37
致谢	41
攻读硕士学位期间的研究成果	43

第一章 引言

1.1 复杂网络的研究背景及意义

现实生活中可以看到各式各样按照一定规律形成的整体系统, 如工程系统, 环境系统, 社会系统等. 为研究这些系统的理论表述, 人们不得不抽去系统的物理和社会含义, 就一般意义下的系统进行分析. 可以说复杂网络是复杂系统的一种网络化表示, 是对复杂系统内部节点间相互关联的一种抽象. 网络科学作为一个跨学科广泛交叉的新兴领域, 逐步发展已经具有一定的规模并呈现出蓬勃发展的劲头. 网络科学着眼于自然和社会中复杂系统的微观性动态和宏观现象间的密切联系, 特别是复杂网络系统的各种涌现现象, 动力学等演化机制, 各种动力学行为和信息的传播, 预测和监控, 以及实际工程和社会所需的网络设计及其应用 [1]. 近十年来, 我们既感受到了网络科学强劲的生命力, 也找到了更为有效的描述复杂网络的方法. 但是, 随着研究的不断深入和科技的不断更新, 网络研究的问题层出不穷, 对复杂网络的定量及定性特征进行科学解释, 已成为网络时代研究工作中极富挑战性的科研课题.

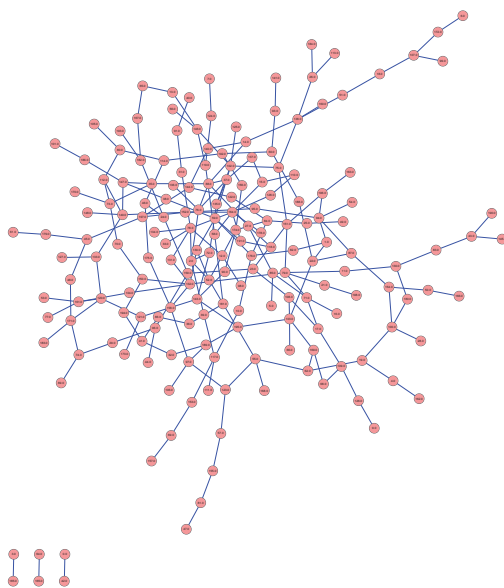


图 1.1: 200 个节点的随机网络, $p = 0.02$.

网络的科学研究开始于欧几里得几何图形时代, 18 世纪, 欧拉通过抽象论证七桥问题的无解开创图论学科, 使网络研究最终独立成为一门学科. 其后 200 年来, 网络的描述仅局限于简单的规则网络, 但是, 规则网络太过理想化难以真实揭示现实中网络的复杂性. 20 世纪 50 年代末, 当时著名的数学家 *Erdős* 和 *Rényi* 把随机图理论引入复杂网络, 他们认为, 图的连接拓扑结构可以看做有一定分布的随机变量, 并把这样的网络叫做随机网络 (ER Network, 如图 1.1). 接近半个世纪中, ER 随机图理论一直是研究复杂网络拓扑结构的基本模型. 对于复杂动力网络的研究, 国际上曾出现两项代表性工作:

1998 年 Strogatz 发现复杂网络的小世界 (Small-world) 特征 [2], 1999 年 Barabasi 发现复杂网络的无尺度 (Scale-free) 特征 [3], “小世界”与“无标度”等统计特性的发现不仅推动了复杂网络研究的发展也极大地丰富了复杂网络的研究内容, 复杂网络的研究热潮迅速展开, 复杂网络既与众多学科有着直接或间接的联系又与我们的日常生活密切相关, 吸引了不同学科科学家的研究兴趣 [4 – 10].

理论上, 网络科学涉及众多学科, 它既是数学中图论的自然延伸, 也是系统科学和复杂性科学的创新与发展. 网络科学涉及复杂网络的的拓扑结构、动力学同步及其产生机制、信息的传播等融合了数学、生物、信息科学甚至天文科学的相关知识, 其中的网络动力学更能深入地刻画复杂系统的本质. 而网络动力学是研究动力学模型在不同网络上的性质与相应网络的静态统计性质的联系, 同步行为是网络上一个典型的群体运动形式, 由于其重要的现实意义及其理论挑战性引起了人们的广泛关注, 此外非线性系统科学中的混沌动力学、稳定性理论、拓扑学等对网络科学的研究起着重大的支撑作用 [11, 12, 13].

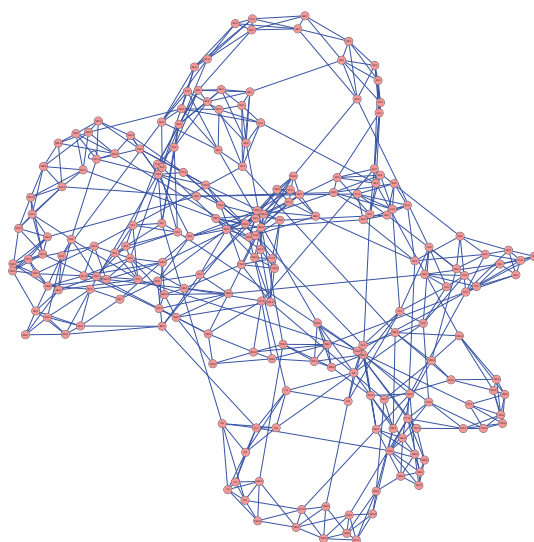


图 1.2: 200 个节点的小世界网络.

网络充满着我们生活的方方面面, 从最大的互联网和万维网, 到生命体的新陈代谢和社交网络, 我们就生活在一个由各式各样复杂网络组成的世界中. 比如, 因特网可以看作由路由器或网关通过物理或者逻辑连接形成的复杂网络; 万维网可以看做由站点和超链接组成的复杂网络; 食物链网是由各种物种及其之间的食物关系连接组成的复杂网络; 神经网络是由大量神经细胞为节点, 神经纤维作为边相互连接形成的复杂网络; 社会人际网络是由人和各种关系彼此连结而成的复杂网络; 各种交通运输网、Java 网络、经济与金融网络、代谢网络, 可见网络无处不在. 复杂网络的研究也吸引了众多科学家的关注. 被广泛应用在解决诸多现实方面的问题, 例如生物学 [14], 医学 [15], 保密通信 [16], 图像处理 [17] 等等.

Watts 和 Strogatz 对规则网络中少量的边进行重新连接, 构造出了一种介于规则网络和随机网络之间的网络, 揭示出了网络从规则网络向随机网络的过渡. 这类网络不仅

具有规则网络一样高的聚类系数同时拥有随机网络一样小的平均距离, 即小世界效应, 具有这种效应的网络即小世界网络 (small world networks)(如图 1.2). 显然, 小世界模型中节点的连接度分布是均匀的, ER 随机图和 WS 小世界模型的一个共同特征就是, 网络的度分布近似与泊松分布. 而现实世界也存在这样一类网络, 比如因特网、万维网、科研合作网络等, 网络中节点的数目不断扩大, 新的节点更倾向于连接那些具有较高连接度的节点, 度的分布与网络模型无关, 节点数目与度之间的关系可以近似地表示成一条下降相对缓慢的曲线, 一般来说, 这类网络的节点的度没有明显的特征长度, 故称节点度服从幂律分布的网络为无标度网络 (scale-free networks)(如图 1.3). 1999 年, Barabási 和 Albert 给出了无标度网络构造演化模型. 有趣的是现实世界中的复杂网络经常既是小世界又是无标度的.

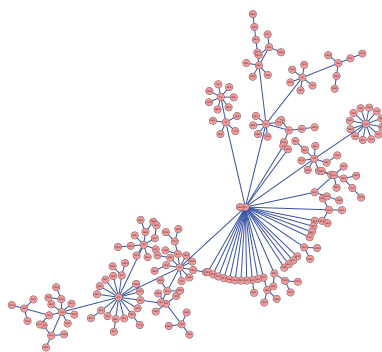


图 1.3: 200 个节点的无标度网络.

1.2 复杂网络同步的研究现状

同步是研究复杂网络的过程中一个不可忽视的内容, 已然成为各个领域科学家的研究热点. 同步指两个或多个动力系统, 经过系统间的相互影响或者外力作用, 在一定的初始状态下经过自身演化机制, 各节点的动力系统状态逐步接近, 最后达到相同的状态. 自然界中同步现象比比皆是. 同步现象最早引起人们的关注是在 1665 年, 物理学家惠更斯发现两个不同步的挂钟挂在同一个地方, 经过一段时间的摆动趋于同步状态. 有关同步理论的研究真正开始于 1990 年 Pecora 和 Carroll[10] 发现一类混沌系统的同步现象. 随着研究的广泛深入, 出现各种不同形式的同步模式, 例如完全同步 [18 – 19], 迟滞同步 [20 – 22], 指数同步 [23 – 24], 部分同步 [25 – 26]. 近年来关于复杂网络同步的研究精力主要集中于一个网络内部 (常称为内同步). 事实上, 在两个网络之间也存在着另外一种同步现象即“外同步”, 这类同步不考虑网络内部节点的同步状态, 只要网络间的相应节点达到同步. 一个熟知的外同步例子存在于传播动力学中, 比如人们熟悉的疯牛病, 获得性免疫缺陷综合症等, 最初存在于动物体内的病毒, 辗转传递给了人类, 在这个传播过程中, 动物和人类可以看成是两个不同的网络. 就我所知, 外同步的研究也得到了一些成果 [37 – 47], 其中, 作者在 [38] 中采用开环闭环控制策略, 对两个相同拓扑结构的网络间的同步问题进行分析, 提出“外同步”的概念. 作为外同步的一种特殊现象, 网络间

对应节点的不同状态变量可能达到不同的同步状态,如完全同步,相反的同步,甚至是趋于死亡的状态演化.文章[48–51]中,作者对这一问题进行了研究,特别是文章[49]中,作者通过一个数量耦合验证了两个无向耦合混沌吸引的混合同步.

简单来说,两种途径可以实现网络的同步,单纯依靠网络内部节点之间的相互联系和网络的拓扑结构实现的同步,称为自同步,如[27–28].Li等在文献[27]中讨论了小世界网络中混沌振子的相位同步,发现相位同步依赖于网络的耦合强度,混沌振子的数目等.现实生活中,网络内部节点数目非常庞大,网络生成具有随机性,这就意味网络不可能依靠自身演化实现同步,更多的情况下需要通过外部控制来实现网络的同步,复杂网络同步的控制问题不断被关注,并在复杂网络同步过程中发挥重要作用.

现有研究的同步分析方法很多,比如牵制控制和脉冲控制.对于一个大尺度的复杂网络来说,想要在全部分节点上实行控制,显得天方夜谭,牵制控制策略的有效性得以发挥.牵制控制的基本出发点是:通过选择性地对网络中的少部分节点施加控制,从而达到网络稳定同步的目的,这种思想已在大规模复杂动态网络的同步研究中得到验证[29–32].牵制的策略归结起来有以下两种:一种是随机牵制,我们可以随机选择被控节点;另一种是特定牵制,网络中节点最大的那些被选为控制节点.Chen等在文献[31]证明反馈增益足够大的条件下,仅仅用一个控制器就可以牵制整个网络最终实现同步.曹在[42]中对两个不同节点动力学性态的网络施行牵制控制,利用节点的输出变量,设计反馈控制器,确保两个复杂网络最终达到外部同步.随着复杂网络研究的持续发展,脉冲控制项凭借自身简单的结构在同步研究中也极受欢迎,而且这种控制技术易于操作,另外它克服了连续控制应用范围太过局限的弊端.只要某些条件满足,通过加入适当的控制项就可以达到改变系统状态的目的.最近,脉冲同步方法开始被应用到动态网络上,如此极大地节省了同步所需的耦合代价,被证明具有很大的应用.文献[33–36,40]等均采用脉冲控制的方法使网络达到同步.比如,周等人在[36]中依据动力系统的脉冲控制技术,研究复杂动力网络同步情况,并把得到的理论结果加以实践,得到Duffing振子的复杂动力网络混沌同步.Sun等人在[40]研究了两个网络间的外同步,采用的就是脉冲控制的方法.

1.3 本文的主要工作

本文在矩阵理论,微分动力系统,稳定性理论等知识的基础上讨论两个无时滞和时变时滞复杂网络间的外同步和混合外同步问题.本论文共分为五个部分,每个部分工作如下:

第一章介绍复杂网络及其同步和外同步的研究意义,简单介绍了两种控制策略的研究成果,并对国内外有关两个网络外同步的研究现状进行了概括和分析,最后简要叙述了本文的研究工作.

在第二章中给出了外同步的定义,证明主要结论所有的引理,及一些记号.并且将原有的分段连续时滞微分不等式进行推广,得出一个含时变时滞微分不等式,该引理将成为利用脉冲控制讨论时变网络外同步和混合外同步的一个重要工具.

接下来, 第三章讨论了两个一般同时含有无时滞和时变时滞耦合复杂网络的外同步问题. 我们采用两种不同的控制方法, 基于牵制控制理论, 在响应网络的部分节点添加负线性反馈控制器来实现两个网络达到外同步的参数所满足的条件. 在理论上利用稳定性定理和线性矩阵不等式 (LMI) 给出具体的讨论. 得到了两个网络达到外同步的判断依据. 另外对网络的外同步采用脉冲控制方法进行研究, 在响应网络中添加脉冲控制器, 依据推广的时变时滞微分不等式, 给出了网络实现外同步的理论判据. 此外, 通过两个网络模型进行了数值模拟, 验证所得到的理论结果.

这部分的主要结果已于 2015 年发表在 *Abstract and Applied Analysis*.

最后在第四章研究了两个复杂网络的混合外同步问题, 这类网络同时含有无时滞和有时变时滞耦合项并且可以进行特殊的分解变形. 通过只对响应网络的部分节点施加负线性反馈控制, 选择适当地牵制节点, 在理论上得到网络实现外同步的条件. 类似的, 通过对响应网络的节点施加脉冲控制达到两个网络间的混合外同步. 同时也给出数值模拟来说明理论结果的正确性.

这部分的主要结果已于 2015 年发表在 *Nonlinear dynamics*.

第五章总结论文的主要工作并指出今后可能的研究方向.

第二章 预备知识

本文利用图论、稳定性理论、控制理论、矩阵理论以及微分方程理论等相关知识,对两个复杂网络模型的外同步和混合外同步问题进行研究. 本章简要介绍一些常用的定义和引理.

首先给出两个线性耦合的复杂网络的数学模型, 包含 N 个恒同节点, 驱动网络中每个节点在耦合作用下的状态方程描述为:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c_1 \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \Gamma_1 x_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 x_j(t - \tau), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

响应网络中每个节点在耦合作用下的状态方程描述为:

$$\dot{y}_i(t) = f(y_i(t)) + c_1 \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \Gamma_1 y_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 y_j(t - \tau), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

其中 $x_i(t) = [x_i^1(t), x_i^2(t), \dots, x_i^n(t)]^T \in R^n$ 是第 i 个节点在 t 时刻的 n 维驱动状态变量, $y_i(t) = (y_i^1(t), y_i^2(t), \dots, y_i^n(t))^T \in R^n$ 是第 i 个节点的响应状态变量, 如果不考虑耦合时, $\dot{x}_i(t) = f(x_i(t))$; 时间 $t \in [0, +\infty)$. 常数 $c_1 > 0, c_2 > 0$ 代表网络的耦合强度 (可以不相同). 连续函数 $f(\cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^n (i = 1, 2, \dots, N)$ 代表第 i 个节点的局部动力学性态, $\Gamma_1 = \text{diag}(\gamma_1^1, \gamma_1^2, \dots, \gamma_1^n)$ 、 $\Gamma_2 = \text{diag}(\gamma_2^1, \gamma_2^2, \dots, \gamma_2^n)$ 是正定对角内耦合矩阵. $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$, $B = (b_{ij}) \in R^{N \times N}$ 分别表示非时滞和时变时滞情况下的耦合矩阵. 如果从节点 j 到节点 i 有边 ($i \neq j$), 则耦合强度 $a_{ij} \neq 0$ 表示节点 i, j 的连接权重, 否则 $a_{ij} = 0$, 其中 $a_{ii} = -\sum_{j=1, i \neq j}^N a_{ij}$, $b_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

假设 $C([- \tau, 0], R^n)$ 是巴拿赫空间上从 $[- \tau, 0]$ 到 R^n 的连续向量值函数, 范数 $\|\phi\| = \sup_{-\tau \leq s < 0} \|\phi(s)\|$. 泛函微分方程 (2.1) 的初值条件为 $x_i(t) = \phi_i(t) \in C([- \tau, 0], R^n)$. 假设 (2.1) 有满足初值条件的唯一解. 对于泛函微分方程 (2.2), 其初始条件为 $y_i(t) = \psi_i(t) \in C([- \tau, 0], R^n)$. 当 $t \in [- \tau, 0]$, 至少存在一个常数 $i (i = 1, 2, \dots, N)$ 使得 $\phi_i(t) \neq \psi_i(t)$. $\|\cdot\|$ 代表欧几里得范数或者矩阵的 2-范数.

定义 2.1. [44] 如果对任何的初值 $\phi_i(t)$ 和 $\psi_i(t)$, 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t, \psi) - x_i(t, \phi)\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.3)$$

其中 $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数, 就称网络 (2.1) 和 (2.2) 达到外同步.

注 1. 从定义 2.1 可以看出, 外同步是指两个网络的对应节点达到完全同步, 而不考虑网络内部的节点行为. 本学位论文没有假设拉普拉斯矩阵是对称的. 因此, 这两个复杂网络可能是有向的或者无向的.

定义 2.2. [51] 如果对任何的初值 $\phi_i(t)$ 和 $\psi_i(t)$, 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t, \psi) - Hx_i(t, \phi)\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4)$$

其中 $H = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0, -1, 1\} (i = 1, 2, \dots, n)$. $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数, 就称网络 (2.1) 和 (2.2) 达到混合外同步.

注 2. 从定义 2.2 可以看出, 混合外同步包含了完全外同步 (当 $\alpha_i = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$) 和相反的同步 (当 $\alpha_i = -1 (i = 1, 2, \dots, n)$) 两种特殊情况.

定义 2.3. 矩阵 $A = [a_{ij}] \in R^{N \times N} \in \mathbf{A}_1$, 当且仅当

$$1. a_{ij} \geq 0, i \neq j, a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}, i = 1, 2, \dots, N,$$

2. A 是不可约矩阵.

如果 $A \in \mathbf{A}_1$ 且又为对称的, 那么称 A 属于 \mathbf{A}_2 类, 记作 $A \in \mathbf{A}_2$.

引理 2.1. [48] 如果矩阵 $A \in \mathbf{A}_1$, 我们可以得到:

1. 矩阵 A 的实特征根是负的, 并且含有一个零重的特征值 1,
2. 矩阵 A 对应于特征值 0 的右特征向量为 $(1, 1, \dots, 1)^T$,
3. 矩阵 A 的对应于 0 特征值的左特征向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$ 满足 $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$, 并且 $\xi_i > 0$ 成立 $i = 1, 2, \dots, N$.

引理 2.2. [37] 线性矩阵不等式 (LMI)

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix} < 0,$$

等价于以下任一不等式:

$$\begin{aligned} (1) & S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0; \\ (2) & S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0, \end{aligned}$$

这里 S_{11} 和 S_{22} 是对称矩阵, S_{12} 是一个有适当维数的矩阵.

下面的引理是关于时变时滞具有跳跃点的微分不等式, 将在讨论脉冲控制网络外同步时用到. 它是有关常时滞结论的一个推广.

引理 2.3. 假设 $u(t) : [t_0 - \tau, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 满足标量微分方程:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \leq pu(t) + qu(t - \tau(t)), & t \neq t_k, t \geq t_0, \\ u(t_k) \leq \alpha_k u(t_k^-), & t = t_k, k = 1, 2, \dots, \\ u(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (2.5)$$

其中, $t \geq t_0$, 在 $t \neq t_k$ 时刻, $p, q > 0, \alpha_k > 0$, $u(t)$ 是连续的, $u(t_k) = u(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} u(t)$ 和 $u(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} u(t)$ 存在, $\varphi \in C([t_0 - \tau, t_0], R^+)$. $\tau(t)$ 是一个有界连续可微函数, $0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \alpha < 1$ and $0 \leq \tau(t) \leq \tau$. 那么

$$u(t) \leq \left(\prod_{i=1}^k \alpha_i \right) e^{(p + \frac{q}{1-\alpha})(t-t_0+k\tau)} \left[\sup_{t_0-\tau \leq s \leq t_0} \varphi(s) \right] \quad (2.6)$$

当 $t \in [t_k, t_{k+1})$.

证明. 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 对 (2.5) 中第一个不等式进行积分, 从 t_k 到 t 时刻, 我们得到

$$u(t) - u(t_k) \leq \int_{t_k}^t (pu(s) + qu(s - \tau(s))) ds \quad (2.7)$$

进而得到

$$u(t) \leq u(t_k) + \int_{t_k-\tau}^t \left(p + \frac{q}{1-\alpha} \right) u(s) ds. \quad (2.8)$$

下面将用数学归纳法证明引理 2.3 的结论.

当 $t \in [t_0, t_1)$, 由不等式 (2.5), 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &\leq pu(t) + q \sup_{t-\tau \leq s \leq \tau} u(s) \\ &\leq pu(t) + \frac{q}{1-\alpha} \sup_{t-\tau \leq s \leq \tau} u(s). \end{aligned}$$

由 [29] 中的引理 3 知, 当 $t \in [t_0, t_1)$, 我们有

$$u(t) \leq \left(\sup_{t_0-\tau \leq s \leq t_0} \varphi(s) \right) e^{(p + \frac{q}{1-\alpha})(t-t_0)}. \quad (2.9)$$

也就是 $k = 0$ 时, 引理 2.3 的结论成立.

假设 $k > 0$ 时 (2.5) 式的结论成立, 我们将证明在 $k + 1$, (2.5) 也成立.

当 $t \in [t_{k+1}, t_{k+2})$, 不失一般性, 假设前 l 个间断点都成立, 那么 (2.8) 可以写成

$$\begin{aligned} u(t) &\leq u(t_{k+1}) + \int_{t_{k+1}-\tau}^{t_{k+1}} \left(p + \frac{q}{1-\alpha} \right) u(s) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^l \int_{t_{k+1-i}}^{t_{k+1-i+1}} \left(p + \frac{q}{1-\alpha} \right) u(s) ds \\ &\quad + \int_{t_{k+1}}^t \left(p + \frac{q}{1-\alpha} \right) u(s) ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

证明方法类似于文献 [52] 中引理 1, 我们有 $t \in [t_{k+1}, t_{k+2})$,

$$u(t) \leq u(t_{k+1})e^{(p+\frac{q}{1-\alpha})(t-t_{k+1}+\tau)}$$

由归纳假设和 (2.5) 式中第二个不等式, 可以得到

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \alpha_{k+1}u(t_{k+1}^-)e^{(p+\frac{q}{1-\alpha})(t-t_{k+1}+\tau)} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^{k+1}\alpha_i\right)\left[\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t_0}\varphi(s)\right]e^{(p+\frac{q}{1-\alpha})(t-t_0+(k+1)\tau)}. \end{aligned}$$

即引理 2.3 的结论对 $k+1$ 成立.

因此, 由数学归纳法证得引理 3 成立 $k \geq 0$.

引理 2.4. (*Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理*) 考虑时滞微分方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

这里 $f: R \times C \rightarrow R^n$ 是一个连续函数, 同时将 $R \times C$ 的一个有界子集映射到一个 R^n 的有界子集, 令 $u, v, w: R^+ \rightarrow R^+$ 是连续并且严格单调非减函数, 满足当 $s > 0, u(s), v(s), w(s)$ 为正, 同时有 $u(0) = v(0) = 0$. 如果存在一个连续函数 $V: R \times C \rightarrow R$ 使得

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|)$$

和

$$\dot{V}(t, x(t, x(t))) \leq -w(\|x(t)\|)$$

成立, 这里 \dot{V} 是 V 沿着上述时滞微分方程解的导数, 那么这个方程的解 $x = 0$ 就是一致渐近稳定的. 这个函数 V 被称之为 *Lyapunov-Krasovskii* 函数.

引理 2.5. (*Lyapunov 稳定性定理*) 设 $x = 0$ 是非线性系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0$$

(其中 $x \in R^n, f: D \subset R^n \rightarrow R^n$ 满足局部 *Lipschitz* 条件) 的平衡点, $D \subset R^n$ 是包含原点的定义域. 设 $V(x): D \rightarrow R^+$ 是连续可微的函数, 如果

$$V(0) = 0;$$

$$V(x) > 0, \quad x \in D - \{0\};$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad x \in D;$$

那么, 平衡点 $x = 0$ 是稳定的. 特别的, 如果

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \in D,$$

那么, 平衡点 $x = 0$ 是渐近稳定的.

第三章 两个无时滞和时变时滞耦合复杂网络的外同步

在实际应用中, 网络间也存在着同步行为, 也就是外同步. 目前有关外同步的工作中, 作者在文献 [37] 中首次分析了两个相互作用含有不同频率振荡器网络间的同步. Li 等在文献 [46] 基于 Lyapunov 泛函方法, 得到了任意耦合强度下具有对称的拓扑结构的网络渐进的达到外同步. 然而在现实网络中, 节点间的信息传递往往由于信息阻塞等原因在发送方和接收方产生时滞, 但一般来说时滞不是固定不变的而是随着时间变化的, 由于环境因素, 现实网络中存在节点间信息交换同时滞并存的情况而网络中节点间耦合同时出现无时滞和时变时滞耦合, 如无线通信网络中由于环境噪声等影响用户间的通信会出现同时或滞后的情况. 基于此, Zheng 在 [41] 用牵制控制的方法, 讨论了两个无时滞和时滞网络的内外同步问题, 但他考虑的网络时滞项是不变的. 本章是在 [41, 44, 45] 的结果上的扩展, 主要研究两个含有无时滞和时变时滞的复杂网络的外同步, 分别用牵制和脉冲控制两种方法进行理论分析.

3.1 模型描述

考虑两个无时滞和时变时滞耦合的复杂网络, 它们都是由 N 个不同节点构成的网络, 每个节点都是 n 维动态系统. 其中驱动网络为:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 x_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 x_j(t - \tau(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1)$$

相应的响应网络为:

$$\dot{y}_i(t) = f(y_i(t)) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 y_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 y_j(t - \tau(t)) + u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2)$$

其中 $x_i(t) = [x_i^1(t), x_i^2(t), \dots, x_i^n(t)]^T \in R^n$ 是第 i 个节点在 t 时刻的 n 维驱动状态变量, $y_i(t) = [y_i^1(t), y_i^2(t), \dots, y_i^n(t)]^T \in R^n$ 是第 i 个节点的响应状态变量, 如果不考虑耦合时, $\dot{x}_i(t) = f(x_i(t))$; 时间 $t \in [0, +\infty)$. $u_i(t) (i = 1, 2, \dots, N)$ 表示加在第 i 个节点的线性控制器. 常数 $c_1 > 0, c_2 > 0$ 代表网络的耦合强度 (可以不相同). 连续函数 $f(\cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^n (i = 1, 2, \dots, N)$ 代表第 i 个节点的局部动力学性态, $\Gamma_1 = \text{diag}(\gamma_1^1, \gamma_1^2, \dots, \gamma_1^n)$ 、 $\Gamma_2 = \text{diag}(\gamma_2^1, \gamma_2^2, \dots, \gamma_2^n)$ 是正定对角内耦合矩阵. $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$, $B = (b_{ij}) \in R^{N \times N}$ 分别表示非时滞和时变时滞情况下的耦合矩阵. 如果从节点 j 到节点 i 有边 ($i \neq j$), 则耦合强度 $a_{ij} \neq 0$ 表示节点 i, j 的连接权重, 否则 $a_{ij} = 0$, 其中 $a_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$, $b_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. $\tau(t)$ 是时变时滞, 假设存在两个正常数 α 和 τ , 使得 $0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \alpha < 1$ 和 $0 \leq \tau(t) \leq \tau$.

假设 3.1. 假设存在正常数 L 使得

$$\|f(y) - f(x)\| \leq L\|y - x\|, i = 1, 2, \dots, N,$$

成立, 对任意 $x, y \in R^n$, $\|x\| = \sqrt{x^T x}$.

注 3. 事实上, 现实存在的很多混沌系统, 比如洛伦兹系统, 陈氏系统, Lü 系统 and Chua's 电路系统, 他们的动态函数都满足此假设.

记

$$e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$$

为第 i 个节点的响应状态变量 $y_i(t)$ 与驱动状态变量 $x_i(t)$ 间的误差向量. 网络 (3.1) 与 (3.2) 间的外同步问题转化为上述误差系统

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - x_i(t)\| = 0$$

的平衡点的稳定性问题.

3.2 基于牵制控制下的外同步

这一节, 我们用牵制控制的方法讨论含有变时滞和非时滞线性耦合复杂网络间 (3.1) 与 (3.2) 的外同步. 为了讨论的方便, 引入下述记号.

$$e^k(t) = (e_1^k(t), e_2^k(t), \dots, e_N^k(t))^T,$$

$$e^k(t - \tau(t)) = (e_1^k(t - \tau(t)), e_2^k(t - \tau(t)), \dots, e_N^k(t - \tau(t)))^T,$$

我们设计 (3.2) 中负反馈控制器为

$$u_i(t) = \begin{cases} -c_1 d_i \Gamma_1 e_i(t), & 1 \leq i \leq l < N, \\ 0, & 1 + l \leq i \leq N, \end{cases} \quad (3.3)$$

这里 $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, l$, 是反馈控制增益. 特别地, 当 $l = 1$ 时, 仅对系统 (3.2) 中的一个节点施以控制.

我们有:

$$\begin{cases} \dot{e}_i(t) = f(y_i(t)) - f(x_i(t)) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 e_j(t - \tau(t)) - c_1 d_i \Gamma_1 e_i(t), & i = 1, 2, \dots, l, \\ \dot{e}_i(t) = f(y_i(t)) - f(x_i(t)) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 e_j(t - \tau(t)), & i = 1 + l, \dots, N, \end{cases}$$

定理 3.1. 假设 3.1 成立的情况下, 如果条件

$$L\Xi + \frac{1}{1-\alpha}I_N + c_1\gamma_1^k(\Xi\tilde{A})^s + \frac{c_2^2(\gamma_2^k)^2\Xi B(\Xi B)^T}{4} < 0$$

满足, 那么驱动网络 (3.1) 和响应网络 (3.2) 实现外同步. 其中 $k = 1, 2, \dots, n$, $\Xi = \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$, $\tilde{A} = A - D$, $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_l, 0, \dots, 0\} \in R^{N \times N}$, $(\Xi\tilde{A})^s = \frac{\Xi\tilde{A} + \tilde{A}^T\Xi}{2}$.

证明: 构造如下形式的 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \xi_i e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^n \int_{t-\tau(t)}^t (e^k(s))^T e^k(s) ds. \quad (3.4)$$

对 $V(t)$ 进行求导运算, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N \xi_i e_i^T(t) \dot{e}_i(t) + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^n [(e^k(t))^T e^k(t) - (1-\dot{\tau}(t))(e^k(t-\tau(t)))^T e^k(t-\tau(t))] \\ &\leq \sum_{i=1}^N \xi_i e_i^T(t) [(f(y_i(t)) - f(x_i(t))) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) \\ &\quad + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 e_j(t-\tau(t))] - c_1 \sum_{i=1}^l \xi_i e_i^T(t) d_i \Gamma_1 e_i(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n [\frac{1}{1-\alpha} (e^k(t))^T e^k(t) - (e^k(t-\tau(t)))^T e^k(t-\tau(t))]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

根据假设 3.1, 有不等式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \xi_i e_i^T(t) (f(y_i(t)) - f(x_i(t))) &\leq L \sum_{i=1}^N \xi_i e_i^T(t) e_i(t) \\ &= L \sum_{k=1}^n (e^k(t))^T \Xi e^k(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

注意到

$$\begin{aligned} c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \xi_i e_i^T(t) a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) &= c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \xi_i [\sum_{k=1}^n e_i^k(t) \gamma_1^k e_j^k(t)] \\ &= c_1 \sum_{k=1}^n \gamma_1^k [\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \xi_i e_i^k(t) e_j^k(t)] \\ &= \sum_{k=1}^n (e^k(t))^T c_1 \gamma_1^k (\Xi A)^s e^k(t). \end{aligned}$$

从而得到

$$c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \xi_i e_i^T(t) a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) - c_1 \sum_{i=1}^l \xi_i d_i e_i^T(t) \Gamma_1 e_i(t) = \sum_{k=1}^n (e^k(t))^T c_1 \gamma_1^k \Xi (A - D) e^k(t)$$

$$= \sum_{k=1}^n (e^k(t))^T c_1 \gamma_1^k (\Xi \tilde{A})^s e^k(t). \quad (3.7)$$

类似上式同样的方法, 我们有

$$\begin{aligned} c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \xi_i e_i^T(t) b_{ij} \Gamma e_j(t - \tau(t)) &= c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} \xi_i \left[\sum_{k=1}^n e_i^k(t) \gamma_1^k e_j^k(t - \tau(t)) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n (e^k(t))^T c_2 \gamma_2^k \Xi B e^k(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

将不等式 (3.6), (3.7) 和 (3.8) 代入 (3.5) 式, 就有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{k=1}^n \left[(e^k(t))^T \left(L\Xi + \frac{1}{1-\alpha} I_N + c_1 \gamma_1^k (\Xi \tilde{A})^s \right) e^k(t) + (e^k(t))^T c_2 \gamma_2^k \Xi B e^k(t - \tau(t)) \right. \\ &\quad \left. - (e^k(t - \tau(t)))^T I_N e^k(t - \tau(t)) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n [(e^k(t))^T, (e^k(t - \tau(t)))^T] \Xi_1 \begin{pmatrix} e^k(t) \\ e^k(t - \tau(t)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} L\Xi + \frac{1}{1-\alpha} I_N + c_1 \gamma_1^k (\Xi \tilde{A})^s & \frac{c_2 \gamma_2^k \Xi B}{2} \\ \frac{c_2 \gamma_2^k (\Xi B)^T}{2} & -I_N \end{pmatrix},$$

引理 2.2 和定理 3.1 的条件等价于 $\Xi_1 < 0$, 因此我们有 $\dot{V}_i(t) \leq 0$. 这意味着

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - x_i(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

根据 Lyapunov 稳定性定理, 网络达到外同步. \square

注 4. 现有的文献中, 通常假设耦合矩阵是对称的, 即所讨论的网络为双向的. 但现实网络中存在大量的有向网络, 如电视网, 广播网等. 本节中我们假设耦合矩阵是对称的, 即所讨论的网络结构更一般, 并且定理的结论更适用于现实世界的大部分网络.

特别地, 当所讨论的网络中不含时滞时, 驱动网络可以描述为:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

响应网络为:

$$\dot{y}_i(t) = f(y_i(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 y_j(t) + u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

其中 $u_i(t)$ 如 (3.3) 给出, 我们有

推论 3.1. 假设 3.1 成立, 如果条件

$$L\Xi + c\gamma_1^k(\Xi\tilde{A})^s < 0$$

满足, 那么驱动网络 (3.1) 和响应网络 (3.2) 实现外同步.

注 5. 选择 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i e_i^T(t) e_i(t).$$

证明过程与定理 3.1 类似, 我们省去其证明过程.

如果非时滞耦合矩阵 A 是对称, 不可约的, A 对应于 0 特征根的左特征向量 $\xi = (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$, 我们可以得到下面的推论.

推论 3.2. 如果假设 3.1 成立, 并且条件

$$(L + \frac{1}{1-\alpha})I_N + c_1\gamma_1^k\tilde{A} + \frac{c_2^2(\gamma_2^k)^2 BB^T}{4} < 0$$

满足, 那么网络可以达到外同步.

注 6. 选择 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^n \int_{t-\tau(t)}^t (e^k(s))^T e^k(s) ds.$$

证明过程和定理 3.1 方法类似, 在此我们省去证明过程.

3.3 基于脉冲控制下的外同步

脉冲控制是在系统的某些特定时刻添加控制来改变系统的状态, 由于脉冲控制只是在一些间断点施加控制, 可以大大地降低控制成本, 并且在复杂动态网络控制过程中, 采用脉冲控制可以减少网络的数据传输量, 并提高网络的安全性和控制能力. 本节, 我们用脉冲控制的方法研究两个含有时滞和非时滞线性耦合复杂网络间的外同步. 为了实现两个网络间的外同步, 设计如下形式的脉冲控制器:

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik}(y_i(t^-) - x_i(t^-))\delta(t - t_k), \quad (3.9)$$

其中脉冲间隔序列 $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 满足 $t_{k-1} < t_k$ 并且 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$. 矩阵 $B_{ik} \in R^{n \times n}$ 是 t_k 时刻的状态脉冲增益矩阵. $\delta(\cdot)$ 代表狄利克雷函数,

$$\delta(t - t_k) = \begin{cases} 1, & t = t_k, \\ 0, & t \neq t_k. \end{cases}$$

含有脉冲控制器的响应网络可以描述为:

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = f(y_i(t)) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 y_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 y_j(t - \tau(t)), & t \neq t_k, t \geq t_0, \\ \Delta y_i = y_i(t_k^+) - y_i(t_k^-) = B_{ik}(y_i(t_k^-) - x_i(t_k^-)), & t = t_k, k = 1, 2, \dots, \\ y_i(t) = \psi_i(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

其中 $y_i(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} y_i(t)$ 并且 $y_i(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} y_i(t)$. 不失一般性, 我们假设 $y_i(t_k) = y_i(t_k^+)$.

误差系统改写为

$$\begin{cases} \dot{e}_i(t) = f(y_i(t)) - f(x_i(t)) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 e_j(t - \tau(t)), & t \neq t_k, t \geq t_0, \\ \Delta e_i = e_i(t_k^+) - e_i(t_k^-) = B_{ik} e_i(t_k^-), & t = t_k, k = 1, 2, \dots, \\ e_i(t) = \psi_i(t) - \phi_i(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

其主要结果为:

定理 3.2. 如果假设 3.1 成立, 并且存在一个正常数 η , 使得

$$(\beta + \frac{c_2}{1 - \alpha})(1 + \frac{\tau}{T_{min}}) + \frac{2 \ln |\sigma_k|}{T_{max}} < -\eta, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

成立, 那么驱动系统 (3.1) 和响应系统 (3.2) 能达到外同步. 其中

$$\beta = 2L + \lambda_m(2c_1(A \otimes \Gamma_1)^s + c_2(B \otimes \Gamma_2)(B \otimes \Gamma_2)^T),$$

$\sigma_k = \max_{1 \leq i \leq N} \|I_n + B_{ik}\|$, $k \in Z^+$, $T_{min} = \min\{t_k - t_{k-1} | k \in Z^+\}$, $T_{max} = \max\{t_k - t_{k-1} | k \in Z^+\}$, $\lambda_m(\cdot)$ 是矩阵的最大特征值.

证明: 记 $e(t) = (e_1^T(t), e_2^T(t), \dots, e_N^T(t))^T$, 选择如下李雅普诺夫函数

$$V(t) = e^T(t)e(t). \quad (3.10)$$

当 $t \neq t_k, k \in N$, 对 (3.10) 式求导, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \dot{e}_i(t) \\ &= 2 \sum_{i=1}^N [e_i^T(t) (f(y_i(t)) - f(x_i(t))) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} e_i^T(t) \Gamma_1 e_j(t) \\ &\quad + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} e_i^T(t) \Gamma_2 e_j(t - \tau(t))]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

由假设 3.1, 我们得到

$$2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) (f(y_i(t)) - f(x_i(t))) \leq 2 \sum_{i=1}^N L e_i^T(t) e_i(t)$$

$$= 2LV(t). \quad (3.12)$$

注意到

$$\begin{aligned} 2c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t) a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) &= 2c_1 e^T(t) (A \otimes \Gamma_1) e(t) \\ &\leq 2c_1 e^T(t) (A \otimes \Gamma_1)^s e(t). \end{aligned}$$

(3.11) 式的第三项可以写成

$$\begin{aligned} 2c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} e_i^T(t) \Gamma_2 e_j(t - \tau(t)) &= 2c_2 e^T(t) (B \otimes \Gamma_2) e(t - \tau(t)) \\ &\leq c_2 [e^T(t) (B \otimes \Gamma_2) (B \otimes \Gamma_2)^T e(t) \\ &\quad + e^T(t - \tau(t)) e(t - \tau(t))]. \end{aligned}$$

结合上面两个不等式, 得到

$$\begin{aligned} &2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [c_1 e_i^T(t) a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) + c_2 b_{ij} e_i^T(t) \Gamma_2 e_j(t - \tau(t))] \\ &= e^T(t) ((2c_1 A \otimes \Gamma_1) + c_2 V(t - \tau(t)) + c_2 (B \otimes \Gamma_2) (B \otimes \Gamma_2)^T) e(t) \\ &\leq \lambda_m (2c_1 (A \otimes \Gamma_1)^s + c_2 V(t - \tau(t)) + c_2 (B \otimes \Gamma_2) (B \otimes \Gamma_2)^T) V(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

当 $t \neq t_k, k \in Z^+$, 将不等式 (3.12) 和 (3.13) 代入 (3.11), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq [2L + \lambda_m (2c_1 (A \otimes \Gamma_1)^s + c_2 (B \otimes \Gamma_2) (B \otimes \Gamma_2)^T)] V(t) + c_2 V(t - \tau(t)) \\ &= \beta V(t) + c_2 V(t - \tau(t)), \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中

$$\beta = 2L + \lambda_m (2c_1 (A \otimes \Gamma_1)^s + c_2 (B \otimes \Gamma_2) (B \otimes \Gamma_2)^T).$$

当 $t = t_k, k \in Z^+$, 我们有

$$\begin{aligned} V(t_k) &= \sum_{i=1}^N e_i^T(t_k^+) e_i(t_k^+) \\ &= \sum_{i=1}^N e_i^T(t_k^-) (I_n + B_{ik})^T (I_n + B_{ik}) e_i(t_k^-) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq N} \|I_n + B_{ik}\|^2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t_k^-) e_i(t_k^-) \\ &= \sigma_k^2 V(t_k^-), \end{aligned} \quad (3.15)$$

这里 $\sigma_k = \max_{1 \leq i \leq N} \|I_n + B_{ik}\|$.

因此, 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 根据引理 2.3 和 (3.14) 和 (3.15),

$$V(t) \leq \left[\sup_{t_0-\tau \leq s \leq t_0} V(s) \right] \left(\prod_{i=1}^k \sigma_k^2 \right) e^{(\beta + \frac{c_2}{1-\alpha})(t-t_0+k\tau)}.$$

令 $T_{min} = \min\{t_k - t_{k-1} | k \in Z^+\}$, $T_{max} = \max\{t_k - t_{k-1} | k \in Z^+\}$, 那么

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \left[\sup_{t_0-\tau \leq s \leq t_0} V(s) \right] e^{(\beta + \frac{c_2}{1-\alpha})(t-t_0+k\tau)+2k \ln |\sigma_k|} \\ &\leq \left[\sup_{t_0-\tau \leq s \leq t_0} V(s) \right] e^{[(\beta + \frac{c_2}{1-\alpha})(1 + \frac{\tau}{T_{min}}) + 2 \frac{\ln |\sigma_k|}{T_{max}}](t-t_0)} \end{aligned}$$

由定理 3.4 的条件, 我们有

$$V(t) \leq \left[\sup_{t_0-\tau \leq s \leq t_0} V(s) \right] e^{-\eta(t-t_0)}.$$

因此, 我们有

$$\|e_i(t)\| \leq \left[\sup_{t_0-\tau \leq s \leq t_0} V(s) \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\eta}{2}(t-t_0)}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

上式表明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

驱动网络 (3.1) 和响应网络 (3.2) 实现外同步. □

特别地, 当只考虑含时滞的网络时, 其复杂网络形式描述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 y_j(t - \tau(t)), & i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{y}_i(t) = f(y_i(t)) + c \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 y_j(t - \tau(t)), & t \neq t_k, t \geq t_0, \\ \Delta y_i = y_i(t_k^+) - y_i(t_k^-) = B_{ik}(y_i(t_k^-) - x_i(t_k^-)), & t = t_k, k = 1, 2, \dots, \\ y_i(t) = \psi_i(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

我们有

推论 3.3. 如果假设 3.1 成立, 且存在一个正的常数 η , 使得

$$\left(\beta + \frac{c}{1-\alpha}\right)\left(1 + \frac{\tau}{T_{min}}\right) + \frac{2 \ln |\sigma_k|}{T_{max}} < -\eta$$

成立, 那么网络 (3.1) 和 (3.2) 实现外同步. 其中

$$\beta = 2L + \lambda_m(c(B \otimes \Gamma_2)(B \otimes \Gamma_2)^T),$$

$\sigma_k = \max_{1 \leq i \leq N} \|I_n + B_{ik}\|$, $T_{min} = \min\{t_k - t_{k-1} | k \in Z^+\}$, $T_{max} = \max\{t_k - t_{k-1} | k \in Z^+\}$, $\lambda_m(\cdot)$ 代表矩阵的最大特征值.

注 7. 文献 [48] 中, 作者研究了外同步也就是当数量矩阵 $H = I_n$ 的情况, 响应网络上同时施加了反馈控制和脉冲控制. 推论 3.5 中, 我们仅用脉冲控制器控制误差系统, 得到的结论也比文献 [48] 更简洁.

3.4 数值模拟

本节中为了检验前面关于两个无时滞和有时滞网络间外同步理论的正确性, 选取两个例子从数值实验结果进行说明.

为了验证理论结果, 选择如下驱动网络

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 x_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 x_j(t - \tau(t)), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.16)$$

数值试验 1 用 Lorenz 系统表示节点的局部动力学性态, 如图 3.1. 它的动力学方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = 28x_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3, \end{cases}$$

其中 $(x_1, x_2, x_3)^T \in R^3$ 表示混沌系统的状态变量组, 初值条件是随机的. 时变时滞 $\tau(t) = 0.01 - 0.01e^{-t}$, $\tau = 0.01$, $\alpha = 0.01$. $c_1 = 40, c_2 = 0.01$. $\Gamma_1 = \text{diag}\{5, 5, 5\}$, $\Gamma_2 = \text{diag}\{0.2, 0.2, 0.2\}$. 与文献 [44] 一样的证明知 $L = 150$, 这样, 假设 3.1 成立. 选择如下非对称耦合矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

和

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

通过计算, 矩阵 A 的对应于特征值 0 的特征向量 $\xi = (\frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8})^T$, 用耦合强度 52, 48 分别牵制控制第二个和第三个节点, 那么定理 3.1 的条件满足, 耦合网络能实现外同步. 图 3.2 给出了驱动网络和响应网络节点随时间演化规律, 其结果表明网络达到外同步.

数值试验 2 网络模型的选择如试验 1. 通过计算 $\lambda_m(2c_1(A \otimes \Gamma_1)^s + c_2(B \otimes \Gamma_2)(B \otimes \Gamma_2)^T) = 6.2435$, $T_{max} = T_{min} = 0.01$, 令

$$B_{ik} = \begin{pmatrix} -1.04 & 0 & 0 \\ 0 & -1.04 & 0 \\ 0 & 0 & -1.04 \end{pmatrix},$$

那么 $\sigma = 0.04$ 此时定理 3.4 的条件都满足, $\eta = 31.0662$, 非对称耦合网络 (3.16) 能实现外同步. 图 3.2 给出了驱动网络和响应网络节点随时间演化规律, 其结果表明网络达到外同步.

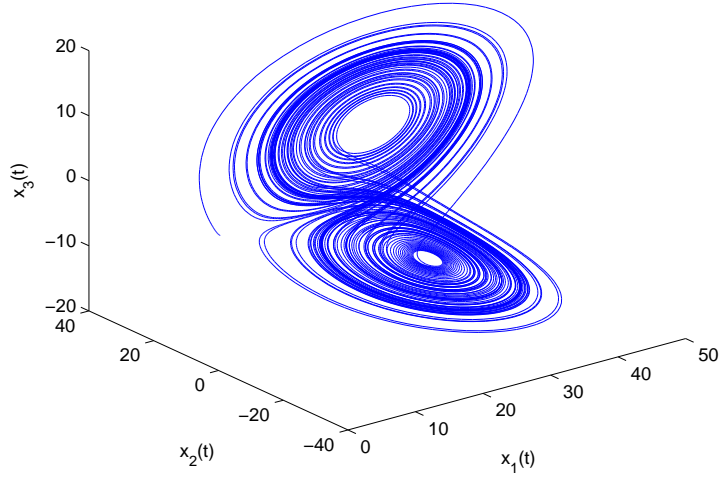


图 3.1: Lorenz 系统的混沌吸引子

3.5 结论

本章采用两种不同的控制方法, 研究了两个带有非时滞和时变时滞的复杂网络的外同步问题. 首先, 基于李亚普诺夫稳定性理论和 LMI 不等式, 通过牵制控制的方法, 给出网络达到外同步的一些新的有效的条件. 并对网络非时滞耦合以及耦合矩阵 A 和 B 是对称且不可约两种的情况进行讨论, 得到了两个推论. 此外, 通过在响应系统的节点上加脉冲控制器的策略, 根据时变延迟微分不等式, 得到网络达到外同步的充分条件并进行证明. 并对只含有时滞耦合的网络的外同步进行了讨论, 与现有结果进行了比较. 最后, 数值模拟进一步验证了理论结果的有效性和实用性.

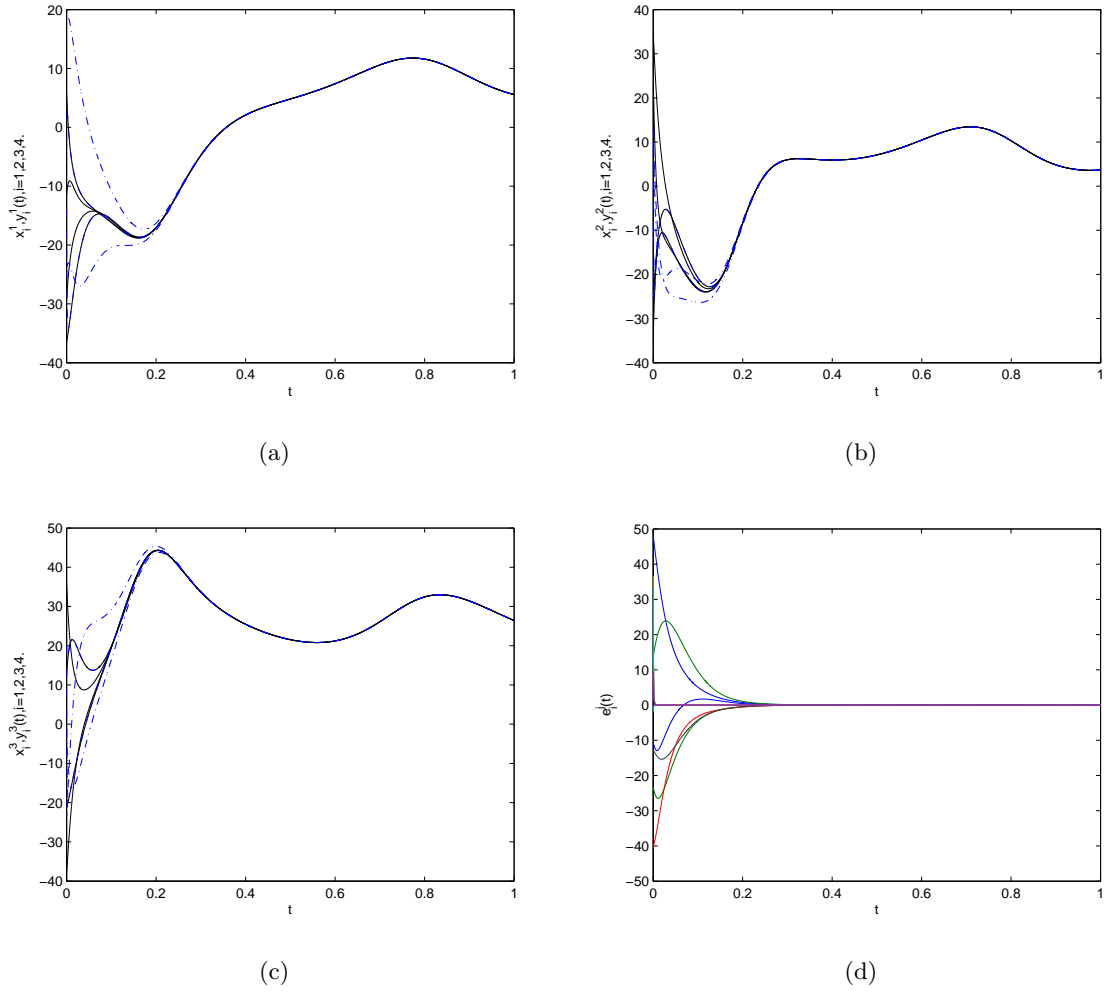


图 3.2: (a)(b)(c) 节点 x_i^k 和 y_i^k 随时间演化的轨迹 $i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3$. (d) 牵制控制下驱动网络和响应网络间的状态误差

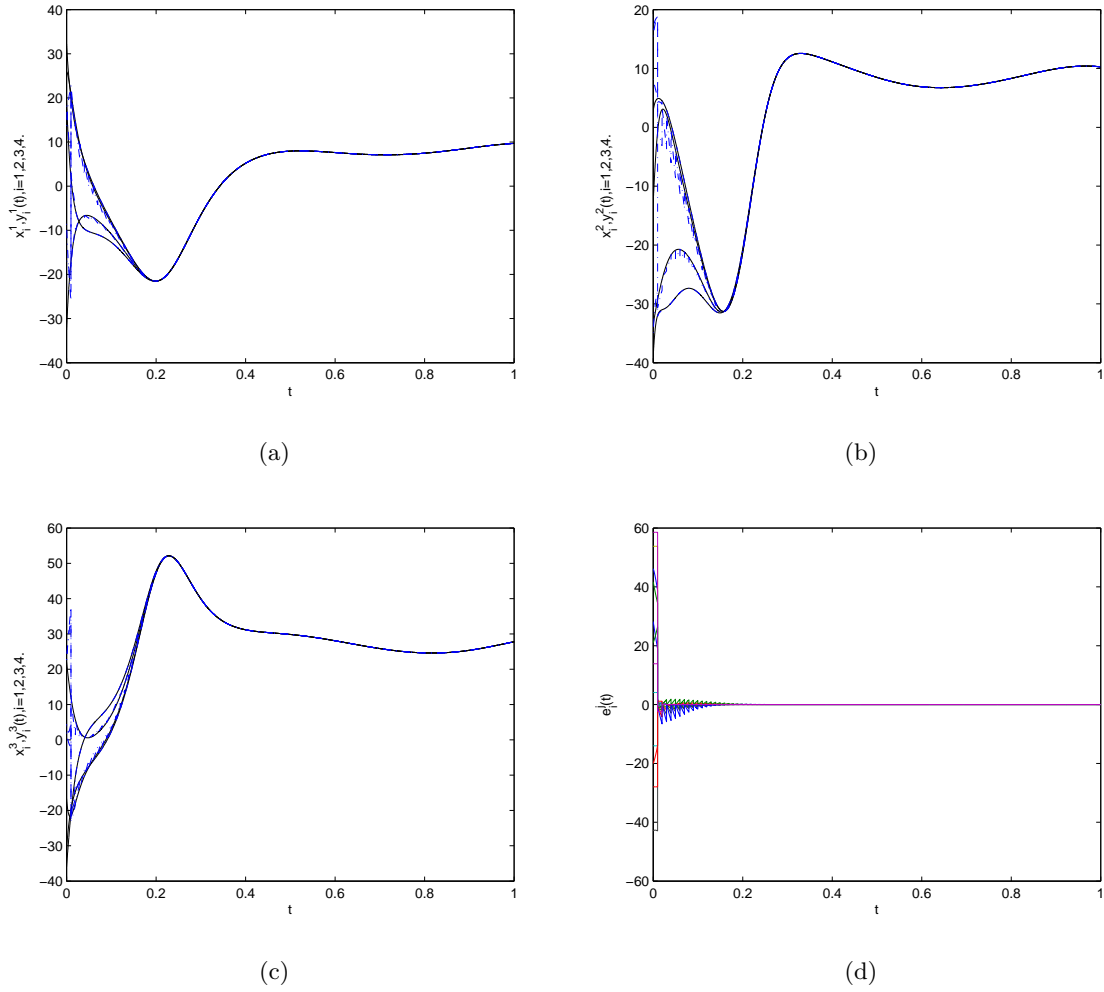


图 3.3: (a)(b)(c) 节点 x_i^k 和 y_i^k 随时间演化的轨迹 $i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3$. (d) 脉冲控制下驱动网络和响应网络间的状态误差

第四章 两个无时滞和时变时滞耦合复杂网络的混合外同步

在研究两个网络外同步时, 由于节点是多维的, 只研究节点间的外同步是不够的, 有时候还需要研究其反同步. 更一般地, 本章将研究两个复杂网络间的外同步的一个推广形式, 即混合外同步. 目前有关两个网络间混合外同步的研究工作主要考虑的网络模型是只含变时滞的 [48, 50] 由于环境因素, 现实网络中存在节点间信息交换同时滞并存的情况即网络中节点间耦合同时出现无时滞和是变时滞耦合, 如无线通信网络中由于环境噪声等影响用户间的通信会出现同时或滞后的情况. 基于此, Wang 在 [50] 中通过设计一个鲁棒性的线性反馈控制器讨论了两个无时滞和时滞网络的混合外同步问题. Zheng 等在 [48] 中讨论了两个含有时滞的复杂网络间的混合外同步, 采用的是脉冲混合控制的方法 (自适应和脉冲控制两种方法相结合). 但是他们采用的控制策略不易实施, 得到的同步条件也相当复杂. 本章是在 [48, 50] 的结果上的扩展, 主要研究两个含有无时滞和时变时滞的复杂网络的外同步, 分别用牵制和脉冲控制两种方法进行理论分析.

4.1 问题的叙述

在这一章节, 在集中式事件激发的策略下, 讨论如下的复杂网络的同步问题.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & f(t, x_i(t), x_i(t - \tau)) - c \sum_{j=1}^N l_{ij}(\sigma_t) \Gamma[x_j(t_k) - x_i(t_k)] \\ & + u_i(t_k) \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.1)$$

在上式中, $x_i(t) = (x_i^1(t), x_i^2(t), \dots, x_i^n(t))^T \in R^n$ 代表 t 时刻网络中第 i 个节点的状态向量; 时间序列 $\{t_1, t_2, \dots\}$ 是严格递增的事件激发时刻; $\{\sigma(t), t \geq 0\}$ 为连续时间离散状态的马尔科夫链, 它描述了不同时刻下复杂网络所处的外在环境; 连续映射 $f(\cdot) : R^n \times R^n \mapsto R^n$ 为孤立节点动力; $L(\sigma_t) = (l_{ij}(\sigma_t))_{N \times N} \in R^{N \times N}$ 是网络的外耦合矩阵并满足如下条件: 对任意 $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ 如果节点 i 与节点 j 在时刻 t 有联系, 则 $l_{ij}(\sigma_t) = l_{ji}(\sigma_t) < 0$, 否则 $l_{ij}(\sigma_t) = 0$, 对任意 i , $i = 1, 2, \dots, N$ 都有 $l_{ii}(\sigma_t) = -\sum_{j=1, j \neq i}^N l_{ij}(\sigma_t)$; $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ 是网络的内连接矩阵; c 是耦合强度增益; ρc 是控制强度增益; $s(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i x_i(t)$ 是网络的同步目标; $D_i(\sigma_t)$ 是伯努利随机变量并且满足: $E\{D_i(\sigma_t)\} = d_i(\sigma_t)$, 对任意 i, j, t_1 和 t_2 , $D_i(\sigma_{t_1})$ 与 $D_j(\sigma_{t_2})$ 相互独立, 它描述了对网络节点的控制情况; $u_i(t_k)$ 为控制输入, 其定义如下:

$$u_i(t_k) = -\rho c D_i(\sigma_t) \Gamma[x_i(t_k) - s(t_k)] \quad (4.2)$$

设 $\{\sigma(t), t \geq 0\}$ 是一个连续时间有限状态的马尔科夫链, be a right-continuous and time-homogeneous Markovian chain on the probability space taking values in a finite

state space $S = \{1, 2, \dots, m\}$ with generator $Q = (q_{ij})_{m \times m}$ give by

$$P\{\sigma(t + \Delta t) = j \mid \sigma(t) = i\} = p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} q_{ij}\Delta t + o(\Delta t) & i \neq j \\ 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t) & i = j \end{cases} \quad (4.3)$$

where $\Delta t > 0$ and $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)/\Delta t = 0$, $q_{ij} \geq 0$ is the transition rate from the state i to the state j and if $i \neq j$, $q_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^m q_{ij}$.

现实生活中, 尽管外在环境的变化是有限的, 如晴天或雨天, 但是我们并不清楚雨天转晴天或晴天转雨天的概率是多大, 也就是外在环境的切换概率有时候是部分未知的, 即马尔科夫链的转移率部分未知的. 具体形式如下:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & ? \\ ? & ? & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & ? & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix}$$

这里 "?" 表示未知转移率. 为了方便起见, $\forall u \in S$, 记 $S_1^u = \{v \mid q_{uv} \text{ 是已知的} \}$, $S_2^u = \{v \mid q_{uv} \text{ 是未知的} \}$, 显然有 $S = S_1^u \cup S_2^u$

下面给出一些必要的定义和引理.

定义 4.1. There exist two positive constants α_1 and α_2 such that for any $x(t), y(t) \in R^n$,

$$\|f(t, x(t), x(t - \tau)) - f(t, y(t), y(t - \tau))\| \leq \alpha_1 \|x(t) - y(t)\| + \alpha_2 \|x(t - \tau) - y(t - \tau)\|$$

引理 4.1. 设 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 为矩阵的最小和最大特征值, 如果 $A \in R^{n \times n}$ 与 $B \in R^{m \times m}$ 是实对称矩阵, 则对任意 $X \in R^{nm}$,

$$\lambda_{\min}(A) \cdot \lambda_{\min}(B) X^\top X \leq X^\top (A \otimes B) X \leq \lambda_{\max}(A) \cdot \lambda_{\max}(B) X^\top X$$

引理 4.2. If the real symmetrical matrix L satisfy the row sum is zero, then the eigenvalues of the matrix L are real and they can be denoted as $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$, where λ_i is the i th eigenvalue of matrix L . Furthermore, for any vector $x \in R^N$ satisfying $x^\top \mathbf{1}_N = 0$, one has $\lambda_2 x^\top x \leq x^\top L x \leq \lambda_N x^\top x$.

引理 4.3. [?] 设函数 $w(t)$ 在区间 $[t_0 - \tau, \infty)$ 上非负, 在区间 $[t_0, \infty)$ 上连续, 并且对任意的 $t \geq t_0$ 有

$$\dot{w}(t) \leq -\xi w(t) + \eta w(t - \tau), \eta > 0$$

1. 如果 $\xi > \eta$, 则

$$w(t) \leq w_{t_0} e^{-\gamma(t-t_0)}, t \geq t_0$$

2. 如果 $\xi < \eta$, 则

$$w(t) \leq w_{t_0} e^{-\epsilon(t-t_0+\tau)}, t \geq t_0$$

这里 $w_{t_0} = \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0} w(t)$, $\gamma > 0$ 是方程 $\xi - \gamma - \eta e^{\gamma\tau} = 0$ 的最小实根, $\epsilon > 0$ 是方程 $-\xi + \eta e^{-\epsilon\tau} = \epsilon$ 的唯一解.

当 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 定义节点的测量误差为节点状态在当前时刻 t 与最近激发时刻 t_k 之间的差距, 即 $\tilde{e}_i(t) = x_i(t_k) - x_i(t)$, 同步误差定义为 $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$. 从而系统 (4.1) 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) = & f(t, x_i(t), x_i(t - \tau)) - c \sum_{j=1}^N l_{ij}(\sigma_t) \Gamma[x_j(t_k) - x_i(t_k)] \\ & - \rho c D_i(\sigma_t) \Gamma \left[x_i(t_k) - \sum_{j=1}^N \xi_j x_j(t_k) \right] - \sum_{j=1}^N \xi_j x_j(t) \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.4)$$

为了研究的方便, 把每个节点的相关状态信息写成一个列向量的形式, 具体标记如下:

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1^\top(t), x_2^\top(t), \dots, x_N^\top(t))^\top \\ e(t) &= (e_1^\top(t), e_2^\top(t), \dots, e_N^\top(t))^\top \\ \tilde{e}(t) &= (\tilde{e}_1^\top(t), \tilde{e}_2^\top(t), \dots, \tilde{e}_N^\top(t))^\top \\ F(t, x(t), x(t - \tau)) &= (f^\top(t, x_1(t), x_1(t - \tau)), f^\top(t, x_2(t), x_2(t - \tau)), \dots, f^\top(t, x_N(t), x_N(t - \tau)))^\top \\ \tilde{s}(t) &= \mathbf{1}_N \otimes (s(t) - s(t_k)) \\ \mathcal{D}(\sigma_t) &= \text{diag}\{D_1(\sigma_t), D_2(\sigma_t), \dots, D_N(\sigma_t)\} \\ D(\sigma_t) &= \text{diag}\{d_1(\sigma_t), d_2(\sigma_t), \dots, d_N(\sigma_t)\} \end{aligned}$$

因为 $s(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i x_i(t) = [\xi^\top \otimes I_n]x(t)$ 和 $\xi^\top L = 0$, 所以通过利用 Kronecker 积的性质可以把 (4.4) 写成如下形式.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & F(t, x(t), x(t - \tau)) - [\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes I_n] F(t, x(t), x(t - \tau)) - c[L(\sigma_t) \otimes \Gamma](\tilde{e}(t) + e(t)) \\ & - \rho c[\mathcal{D}(\sigma_t) \otimes \Gamma](\tilde{e}(t) + e(t) + \tilde{s}(t)) + \rho c[\mathbf{1}_N \xi^\top \mathcal{D}(\sigma_t) \otimes \Gamma](\tilde{e}(t) + e(t) + \tilde{s}(t)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2 同步条件的推导

在给出结论性的定理前, 先给出事件激发函数的定义, 记 $\hat{x} = (L(\sigma_t) \otimes I_n)x(t)$, $\hat{e} = (L(\sigma_t) \otimes I_n)\tilde{e}(t)$, 定义如下集中式的激发函数.

$$g(t) = \|\Xi \tilde{e}(t)\| - \frac{k_{\sigma_t}}{c} \|\hat{x}(t)\| \quad (4.6)$$

这里 $k_{\sigma_t} = c\underline{\gamma} + \rho c \underline{\gamma} \lambda_{\sigma_t} \lambda_2^2 - (\frac{a}{2\lambda_2} + \frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \frac{\alpha_2}{2} + \pi_{\sigma_t})$, λ_{σ_t} 是矩阵 $\mathcal{D}(\sigma_t)L(\sigma_t)$ 的最小正特征值, $\lambda_2 = \min_{\sigma_t=1}^m \{\lambda_2(L(\sigma_t))\}$, $\underline{\gamma} = \min_{i=1}^n \{\gamma_i\}$, $\pi_{\sigma_t} = 1/(2\lambda_2^2) \sum_{v \in S_1^{\sigma_t}} q_{\sigma_t v} (\bar{\lambda}_v - a_{\sigma_t})$, $\Xi = (L(\sigma_t) + \rho \mathcal{D}(\sigma_t) + \rho \mathcal{D}(\sigma_t) \mathbf{1}_N \xi^\top) \otimes \Gamma$, a 是常数且满足 $a\lambda_N > \alpha_2$, 其中 $\lambda_N = \max_{i=1}^m \{\lambda_N(L(\sigma_t))\}$.

系统的具体激发规则为: 当激发函数达到设定的阈值 0 时, 系统就会激发, 下一个事件激发的时刻也随之确定.

定理 4.1. 若 f 定义 1, 并且存在常数 a_1, a_2, \dots, a_m 以及常数 $a > \alpha_2/\lambda_N$ 使得对任意 $u \in S$ 满足如下不等式.

$$\begin{cases} c\gamma + \rho c\gamma\lambda_u/\lambda_2^2 - (\frac{a}{2\lambda_2} + \frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \frac{\alpha_2}{2} + \pi_u) > 0 \\ \bar{\lambda}_v - a_u \leq 0 & \text{if } v \neq u, v \in S_2^u \\ \bar{\lambda}_v - a_u \geq 0 & \text{if } v = u, v \in S_2^u \end{cases} \quad (4.7)$$

其中 $\bar{\lambda}_v = \lambda_N(L(v))$. 那么在集中式事件激发函数 (4.6) 下, 对任意初值, 复杂网络 (4.1) 都能达到指数均方同步.

证明: 定义与马尔科夫跳有关的 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{2}e^\top(t)[L(\sigma_t) \otimes I_n]e(t) \quad (4.8)$$

注意到 $e(t) = x(t) - \mathbf{1}_N \otimes (\xi^\top \otimes I_n x(t)) = x(t) - [(\mathbf{1}_N \xi^\top) \otimes I_n]x(t)$, 所以有 $e^\top(t)(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_n) = 0$. 根据引理 2 可得 $\lambda_2 e^\top(t)e(t) \leq e^\top(t)(L(u) \otimes I_n)e(t)$. 所以 $V(t) \geq 0$, 以及 $V(t) = 0$ 当且仅当 $e(t) = 0$, 这意味着网络达到同步当且仅当 $V(t) = 0$. 因此这个 Lyapunov 函数是合格的.

记 \mathcal{L} 为弱无穷小生成算子, 当 $\sigma(t) = u$ 时, 通过利用引理 1, 可得

$$\begin{aligned} E\mathcal{L}V(t) &= e^\top(t)[L(u) \otimes I_n] \left[F(t, x(t), x(t-\tau)) - [\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes I_n]F(t, x(t), x(t-\tau)) \right] \\ &\quad - ce^\top(t)[L^2(u) \otimes \Gamma](\tilde{e}(t) + e(t)) - \rho ce^\top(t)[L(u)D(u) \otimes \Gamma](\tilde{e}(t) + e(t) + \tilde{s}(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m q_{uv} e^\top(t)[L(v) \otimes I_n]e(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Since $L(u)$ satisfy the row sum is zero, one can get $[L(u) \otimes I_n][\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes I_n]F(t, x(t), x(t-\tau)) = [L(u) \otimes I_n][\mathbf{1}_N \otimes f(t, s(t), s(t-\tau))] = 0$. Since $[L(u) \otimes I_n][\mathbf{1}_N \otimes s(t)] = 0$, so $[L(u) \otimes I_n]e(t) = [L(u) \otimes I_n]x(t) = \hat{x}(t)$. 根据假设 1 可得

$$\begin{aligned} &e^\top(t)[L(u) \otimes I_n] \left[F(t, x(t), x(t-\tau)) - [\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes I_n]F(t, x(t), x(t-\tau)) \right] \\ &= \hat{x}(t) \left[F(t, x(t), x(t-\tau)) - \mathbf{1}_N \otimes f(t, s(t), s(t-\tau)) \right] \\ &\leq \|\hat{x}(t)\|(\alpha_1 \|e(t)\| + \alpha_2 \|e(t-\tau)\|) \\ &= \alpha_1 \|\hat{x}(t)\| \|e(t)\| + \alpha_2 \|\hat{x}(t)\| \|e(t-\tau)\| \\ &\leq \frac{\alpha_1}{\lambda_2} \|\hat{x}(t)\|^2 + \frac{\alpha_2}{2} (\|\hat{x}(t)\|^2 + \|e(t-\tau)\|^2) \\ &= (\frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \frac{\alpha_2}{2}) \|\hat{x}(t)\|^2 + \frac{\alpha_2}{2} \|e(t-\tau)\|^2 \\ &\leq (\frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \frac{\alpha_2}{2}) \|\hat{x}(t)\|^2 + \frac{\alpha_2}{\lambda_N} V(t-\tau) \\ &\leq -aV(t) + \frac{\alpha_2}{\lambda_N} V(t-\tau) + (\frac{a}{2\lambda_2} + \frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \frac{\alpha_2}{2}) \hat{x}^\top(t) \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

式中 $\lambda_N = \max_{u=1}^m \{\lambda_N(L(u))\}$.

$$\begin{aligned} -ce^\top(t)[L^2(u) \otimes \Gamma](\tilde{e}(t) + e(t)) &= -ce^\top(t)[L^2(u) \otimes \Gamma]\tilde{e}(t) - ce^\top(t)[L^2(u) \otimes \Gamma]e(t) \\ &\leq -c\hat{x}^\top(t)[L(u) \otimes \Gamma]\tilde{e}(t) - c\gamma\hat{x}^\top(t)\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Note that $\tilde{s}(t) = \mathbf{1}_N \otimes (s(t) - s(t_k)) = [\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes I_n](x(t) - x(t_k)) = [\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes I_n]\tilde{e}(t)$, by Lemma 2, we have

$$\begin{aligned} & -\rho ce^\top(t)[L(u)D(u) \otimes \Gamma](\tilde{e}(t) + e(t) + \tilde{s}(t)) \\ &= -\rho ce^\top(t)[L(u)D(u) \otimes \Gamma]\tilde{e}(t) - \rho ce^\top(t)[L(u)D(u) \otimes \Gamma]e(t) - \rho ce^\top(t)[L(u)D(u)\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes \Gamma]\tilde{e}(t) \\ &\leq -\rho c\hat{x}^\top(t)[D(u) \otimes \Gamma]\tilde{e}(t) - \frac{\rho c\gamma\lambda_u}{\lambda_2^2}\hat{x}^\top(t)\hat{x}(t) - \rho c\hat{x}^\top(t)[D(u)\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes \Gamma]\tilde{e}(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Because $\sum_{v \in S_1^u} q_{uv}a_u + \sum_{v \in S_2^u} q_{uv}a_u = \sum_{v=1}^m q_{uv}a_u = 0$, so we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m q_{uv}e^\top(t)[L(v) \otimes I_n]e(t) &\leq \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m q_{uv}\bar{\lambda}_v e^\top(t)e(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v \in S_1^u} q_{uv}(\bar{\lambda}_v - a_u)e^\top(t)e(t) + \frac{1}{2} \sum_{v \in S_2^u} q_{uv}(\bar{\lambda}_v - a_u)e^\top(t)e(t) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{v \in S_1^u} q_{uv}(\bar{\lambda}_v - a_u)e^\top(t)e(t) \\ &\leq \pi_u \hat{x}(t)^\top \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

where $\bar{\lambda}_v = \lambda_N(L(v))$. $\pi_u = 1/(2\lambda_2^2) \sum_{v \in S_1^u} q_{uv}(\bar{\lambda}_v - a_u)$

Put (4.10-4.13) into (4.9), we have

$$\begin{aligned} E\mathcal{L}V(t) &\leq -aV(t) + \frac{\alpha_2}{\lambda_N}V(t - \tau) - k\hat{x}^\top(t)\hat{x}(t) - c\hat{x}^\top(t)\Xi\tilde{e}(t) \\ &\leq -aV(t) + \frac{\alpha_2}{\lambda_N}V(t - \tau) - k\|\hat{x}(t)\|^2 + c\|\hat{x}(t)\|\|\Xi\tilde{e}(t)\| \end{aligned}$$

Under the condition (4.7), the event-triggered function (4.6) satisfy $g(t) = 0$ when $t = t_k$ and $g(t) < 0$ for any $t \neq t_k$. Therefore we have

$$E\mathcal{L}V(t) \leq -aV(t) + \frac{\alpha_2}{\lambda_N}V(t - \tau)$$

According to the Lemma 3, we have

$$EV(t) \leq V_0 e^{-\delta t}$$

where $V_0 = \sup_{-\rho \leq t \leq 0} EV(t)$, $\delta > 0$ is the smallest real root of the equation $a - 2\alpha_2/\lambda_N - \eta e^{\alpha_2/\lambda_N t} = 0$ \square

注 8.

定理 4.2. *Suppose Assumption 1 and condition (4.7) holds, under the centralized event-triggered function (4.6). Then for any initial there exists a positive lower bound on the event interval.*

证明: At the event instant t_k , the $\|\Xi\tilde{e}(t_k)\| = 0$. When $\|\Xi\tilde{e}(t)\|$ grows and reaches $k/c\|\hat{x}(t)\|$, all the nodes will be triggered. That is to say, the nodes will not be triggered until $\|\Xi\tilde{e}(t)\|/\|\hat{x}(t)\| = k/c$. Next, we find the lower bound of the interval between event instants t_k and t_{k+1} . In order to achieve this target, similar to [?], we just need to find an upper bounded function of $\|\Xi\tilde{e}(t)\|/\|\hat{x}(t)\|$. Firstly, we find the upper bounded function of $\|\Xi\tilde{e}(t)\|$.

$$\begin{aligned}
 \|\Xi\tilde{e}(t)\|^2 &= \tilde{e}^\top(t)[(L(u) + D(u))^2 \otimes \Gamma - \rho(L(u) + D(u))D(u)\mathbf{1}_N\xi^\top \otimes \Gamma \\
 &\quad - \rho\xi\mathbf{1}_N^\top D(u)(L(u) + D(u)) \otimes \Gamma + \rho^2\xi\mathbf{1}_N^\top D(u)^2(u)\mathbf{1}_N\xi^\top \otimes \Gamma]\tilde{e}(t) \\
 &\leq \tilde{e}^\top(t)[(L(u) + D(u))^2 \otimes \Gamma + \rho^2\xi\mathbf{1}_N^\top D(u)^2(u)\mathbf{1}_N\xi^\top \otimes \Gamma]\tilde{e}(t) \\
 &\leq \tilde{e}^\top(t)[(L(u) + D(u))^2 \otimes \Gamma + \rho^2 \sum_{i=1}^N d_i^2(u)\mathbf{1}_N\xi^\top \otimes \Gamma]\tilde{e}(t) \\
 &\leq \tilde{e}^\top(t)\left[\bar{\lambda}_N^2\bar{\gamma} + N\rho^2\bar{\gamma} \sum_{i=1}^N d_i(u)\right]\tilde{e}(t) \\
 &\leq \frac{\varsigma}{\lambda_2^2}\tilde{e}^\top(t)(L^2(u) \otimes I_n)\tilde{e}(t) \\
 &= \frac{\varsigma}{\lambda_2^2}\|\hat{e}(t)\|^2
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

where $\varsigma = \bar{\gamma}(\bar{\lambda}_N^2 + N\rho^2 \sum_{i=1}^N d_i(u))$, $\bar{\lambda}_N = \lambda_N(L + D(u))$, $\bar{\gamma} = \max_{i=1}^n \{\gamma_i\}$. The upper bounded function of $\|\Xi\tilde{e}(t)\|$ is $\sqrt{\varsigma}/\lambda_2\|\hat{e}(t)\|$.

Note that $\dot{\hat{e}} = (L(u) \otimes I_n)\dot{\tilde{e}}(t) = -\dot{\hat{x}}(t)$. So we have the following inequality

$$\frac{d\|\hat{e}(t)\|}{dt} = \frac{\hat{e}^\top(t)\dot{\hat{e}}(t)}{\|\hat{e}(t)\|} = \frac{\hat{e}^\top(t)(L(u) \otimes I_n)\dot{\tilde{e}}(t)}{\|\hat{e}(t)\|} = \frac{-\hat{e}^\top(t)\dot{\hat{x}}(t)}{\|\hat{e}(t)\|} \tag{4.15}$$

According to the expression (4.15), then

$$\begin{aligned}
 \frac{d\|\hat{e}(t)\|}{dt} \frac{\|\hat{x}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} &= \frac{\|\hat{x}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|^2} \frac{d\|\hat{e}(t)\|}{dt} - \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|^2} \frac{d\|\hat{x}(t)\|}{dt} \\
 &= \frac{-\hat{e}^\top(t)\dot{\hat{x}}(t)}{\|\hat{e}(t)\|\|\hat{x}(t)\|} - \frac{\|\hat{e}(t)\|\hat{x}^\top(t)\dot{\hat{x}}(t)}{\|\hat{x}(t)\|^3} \\
 &\leq \frac{\|\dot{\hat{x}}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} + \frac{\|\hat{e}(t)\|\|\dot{\hat{x}}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|^2} \\
 &= \left(1 + \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right) \frac{\|\dot{\hat{x}}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

It follows that

$$\|\dot{\hat{x}}(t)\| = \|(L(u) \otimes I_n)\dot{\hat{x}}(t)\|$$

$$\begin{aligned}
 &= \|(L(u) \otimes I_n) \{f(x(t), x(t-\tau)) - cL(u) \otimes \Gamma(\tilde{e}(t) + e(t)) \\
 &\quad - \rho c D(u) \otimes \Gamma(\tilde{e}(t) + e(t) - \mathbf{1}_N \xi^\top \otimes I_n \tilde{e}(t))\}\| \\
 &\leq \|(L(u) \otimes I_n) f(x(t), x(t-\tau))\| + c\|(L^2(u) \otimes \Gamma)(\tilde{e}(t) + e(t)) \\
 &\quad + \rho c\|L(u) D(u) \otimes \Gamma(\tilde{e}(t) + e(t) - \mathbf{1}_N \xi^\top \otimes I_n \tilde{e}(t))\| \\
 &\leq \frac{\lambda_N \alpha_1}{\lambda_2} \|\hat{x}(t)\| + \frac{\lambda_N \alpha_2}{\lambda_2} \|\hat{x}(t-\tau)\| + c\lambda_N \bar{\gamma} (\|\hat{e}(t)\| + \|\hat{x}(t)\|) \\
 &\quad + \rho c\|L(u) D(u) \otimes \Gamma(\tilde{e}(t) + e(t) - \mathbf{1}_N \xi^\top \otimes I_n \tilde{e}(t))\|
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Denote $G = D(u)L^2(u)D(u)$, obviously, $G\mathbf{1}_N \xi^\top \leq 0$ and $\xi \mathbf{1}_N^\top G \leq 0$. Since $\lambda_N(\mathbf{1}_N \xi^\top) = N$, then we get

$$\begin{aligned}
 &\|L(u)D(u) \otimes \Gamma(\tilde{e}(t) + e(t) - [\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes I_n] \tilde{e}(t))\|^2 \\
 &= (\tilde{e}(t) + e(t))^\top [G \otimes \Gamma^2](\tilde{e}(t) + e(t)) - (\tilde{e}(t) + e(t))^\top [G\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes \Gamma^2] \tilde{e}(t) \\
 &\quad - \tilde{e}^\top(t) [\xi \mathbf{1}_N^\top G \otimes \Gamma^2](\tilde{e}(t) + e(t)) + \tilde{e}^\top(t) [\xi \mathbf{1}_N^\top G \mathbf{1}_N \xi^\top \otimes \Gamma^2] \tilde{e}(t) \\
 &= \tilde{e}^\top(t) [G \otimes \Gamma^2] \tilde{e}(t) + 2\tilde{e}^\top(t) [G \otimes \Gamma^2] e(t) + e^\top(t) [G \otimes \Gamma^2] e(t) \\
 &\quad - 2e^\top(t) [G\mathbf{1}_N \xi^\top \otimes \Gamma^2] \tilde{e}(t) + N^2 \tilde{e}^\top(t) [G \otimes \Gamma^2] \tilde{e}(t) \\
 &= \tilde{e}^\top(t) [(G + N^2 G + I_N) \otimes \Gamma^2] \tilde{e}(t) + e^\top(t) [(G + \Xi_0) \otimes \Gamma^2] e(t) \\
 &\leq \frac{\lambda_N(\Xi_1) \bar{\gamma}^2}{\lambda_2^2} \|\hat{e}(t)\| + \frac{\lambda_N(\Xi_2) \bar{\gamma}^2}{\lambda_2^2} \|\hat{x}(t)\| \\
 &\leq \frac{\lambda_{12} \bar{\gamma}^2}{\lambda_2^2} (\|\hat{e}(t)\|^2 + \|\hat{x}(t)\|^2)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

where $\Xi_0 = (G - G\mathbf{1}_N \xi^\top)(G - G\mathbf{1}_N \xi^\top)^\top$, $\Xi_1 = G + N^2 G + I_N$, $\Xi_2 = G + \Xi_0$, $\lambda_{12} = \max\{\lambda_N(\Xi_1), \lambda_N(\Xi_2)\}$.

Substitute (4.18) into (4.17)

$$\begin{aligned}
 \|\dot{\hat{x}}(t)\| &\leq \left(\frac{\lambda_N \alpha_1}{\lambda_2} + c\lambda_N \bar{\gamma}\right) \|\hat{x}(t)\| + \frac{\lambda_N \alpha_2}{\lambda_2} \|\hat{x}(t-\tau)\| + c\lambda_N \bar{\gamma} \|\hat{e}(t)\| + \frac{\sqrt{\lambda_{12}} \bar{\gamma}}{\lambda_2} \sqrt{\|\hat{e}(t)\|^2 + \|\hat{x}(t)\|^2} \\
 &\leq \left(\frac{\lambda_N \alpha_1}{\lambda_2} + c\lambda_N \bar{\gamma}\right) (\|\hat{x}(t)\| + \|\hat{e}(t)\|) + \frac{\lambda_N \alpha_2}{\lambda_2} \|\hat{x}(t-\tau)\| + \frac{\sqrt{\lambda_{12}} \bar{\gamma}}{\lambda_2} \sqrt{\|\hat{e}(t)\|^2 + \|\hat{x}(t)\|^2}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Put (4.19) into (4.16), we have

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} &\leq \left(1 + \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right) \left[\left(\frac{\lambda_N \alpha_1}{\lambda_2} + c\lambda_N \bar{\gamma}\right) \left(1 + \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda_N \alpha_2}{\lambda_2} \frac{\|\hat{x}(t-\tau)\|}{\|\hat{x}(t)\|} + \frac{\bar{\gamma} \sqrt{\lambda_{12}}}{\lambda_2} \sqrt{1 + \frac{\|\hat{e}(t)\|^2}{\|\hat{x}(t)\|^2}}\right] \\
 &\leq \left(1 + \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right) \left[\left(\frac{\lambda_N \alpha_1}{\lambda_2} + c\lambda_N \bar{\gamma} + \frac{\bar{\gamma} \sqrt{\lambda_{12}}}{\lambda_2}\right) \left(1 + \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right) + \frac{\lambda_N \alpha_2}{\lambda_2} \frac{\|\hat{x}(t-\tau)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right]
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Because $0 \leq \|\hat{x}(t)\| \leq 2\lambda_2 V(t)$, and $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$, there exist a positive constant κ such that $\|\hat{x}(t-\tau)\|/\|\hat{x}(t)\| \leq \kappa$ for all $t > 0$ hold. Then the expression (4.20) turns into

$$\frac{d}{dt} \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} \leq k_1 \left(1 + \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right)^2 + k_2 \left(1 + \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right) \quad (4.21)$$

where $k_1 = (\lambda_N \alpha_1 + \bar{\gamma} \sqrt{\lambda_{12}})/\lambda_2 + c\lambda_N \bar{\gamma}$, $k_2 = \lambda_N \alpha_2 \kappa/\lambda_2$.

According to the principle of comparison, $\|\hat{e}(t)\|/\|\hat{x}(t)\|$ satisfies the bound $\|\hat{e}(t)\|/\|\hat{x}(t)\| \leq \phi(t, \phi_0)$, where $\phi(t, \phi_0)$ is the solution of $\dot{\phi}(t) = k_1(1 + \phi(t))^2 + k_2(1 + \phi(t))$, $\phi(0, \phi_0) = \phi_0$. Solved the differential equation, we get

$$\phi(t) = \frac{k_2 \exp\{k_2 t + \ln(k_1 \phi_0 + k_1) - \ln(k_1 \phi_0 + k_1 + k_2)\}}{k_1 - k_1 \exp\{k_2 t + \ln(k_1 \phi_0 + k_1) - \ln(k_1 \phi_0 + k_1 + k_2)\}} - 1 \quad (4.22)$$

so we have

$$\frac{\|\Xi \tilde{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} \leq \frac{\sqrt{\varsigma}}{\lambda_2} \frac{\|\hat{e}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} \leq \frac{\sqrt{\varsigma}}{\lambda_2} \phi(t) \quad (4.23)$$

Consequently, the interval between event instants t_k and t_{k+1} is lower bounded by the interval τ^* that satisfies $\sqrt{\varsigma}/\lambda_2 \phi(\tau^*, 0) = k/c$. By Solving the equation, we have

$$\tau^* = \frac{1}{k_2} \ln \frac{(k_1 + k_2)(c\sqrt{\varsigma} + k\lambda_2)}{k_1(c\sqrt{\varsigma} + k\lambda_2) + k_2 c\sqrt{\varsigma}}$$

□

4.3 Numerical simulation

In this section, delayed and Markovian jumping complex networks with partially unknown transition rates is as an example to illustrate the aforementioned theoretical results. The system is an array of 5 coupled delayed Chua circuits with the map $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ of node dynamics as follows:

$$f(t, x(t), x(t-\tau)) = \begin{pmatrix} -z(1+b)x_1(t) + zx_2(t) - zh(x_1(t)) \\ x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ -\eta x_2(t) - ex_3(t) - \eta\epsilon \sin(\nu x_1(t-\tau)) \end{pmatrix}$$

where $h(x_1(t)) = 1/2(a-b)(|x_1(t)+1| - |x_1(t)-1|)$. $z = 9.78, a = -1.4325, b = -0.7831, \eta = 9.53, e = 0.1636, \epsilon = 0.2, \nu = 0.5$. Next, we estimate α_1 and α_2 such that $f(t, x(t), x(t-\tau))$ satisfies Assumption 1. According to the definition of f , we can split it into two parts and denote by $f(t, x(t), x(t-\tau)) = f_1(x(t)) + f_2(x(t-\tau))$, where $f_1(x(t)) = (-z(1+b)x_1(t) + zx_2(t) - zh(x_1(t)), x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), -\eta x_2(t) - ex_3(t))^T$ and $f_2(x(t-\tau)) = (0, 0, -\eta\epsilon \sin(\nu x_1(t-\tau)))^T$. Noting the Jacobin matrices of f_1 is one

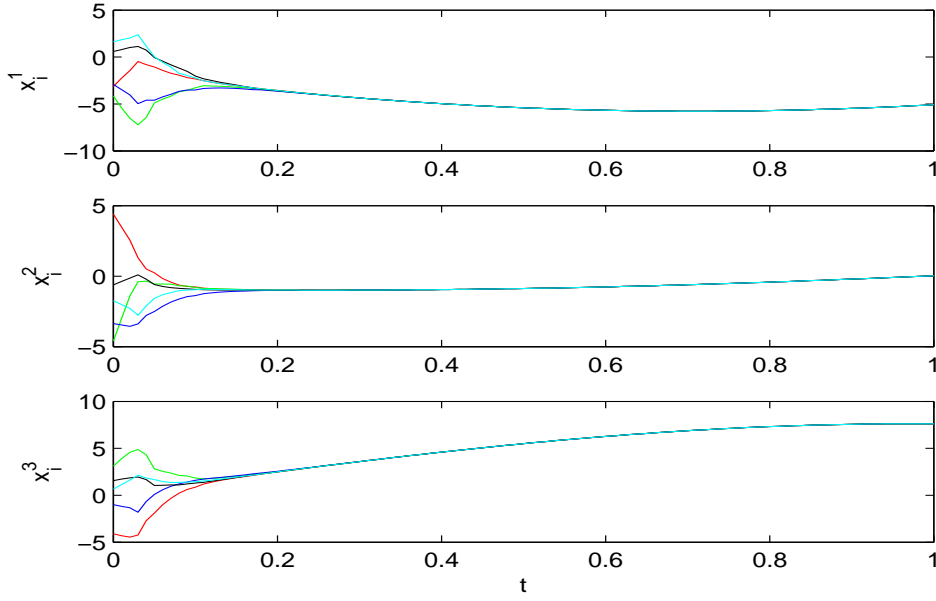


图 4.1: Dynamics of components of the coupled system

of the following

$$J_1 = \begin{pmatrix} 4.2299 & 9.78 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -9.53 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} -2.1213 & 9.78 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -9.53 & 0 \end{pmatrix}.$$

For all $x(t), x(t-\tau), y(t)$ and $y(t-\tau) \in R^3$, by using the norm of the triangle inequality, we have

$$\begin{aligned} & \|f(t, x(t), x(t-\tau)) - f(t, y(t), y(t-\tau))\| \\ & \leq \|f_1(x(t)) - f_1(y(t))\| + \|f_2(x(t-\tau)) - f_2(y(t-\tau))\| \\ & = \max\{\|J_1\|, \|J_2\|\} \|x(t) - y(t)\| + \|\eta\epsilon \sin(\nu x_1(t-\tau)) + \eta\epsilon \sin(\nu y_1(t-\tau))\| \\ & \leq \max\{\|J_1\|, \|J_2\|\} \|x(t) - y(t)\| + |\eta\epsilon\nu| \|x_1(t-\tau) - y_1(t-\tau)\| \\ & \leq \max\{\|J_1\|, \|J_2\|\} \|x(t) - y(t)\| + |\eta\epsilon\nu| \|x(t-\tau) - y(t-\tau)\| \end{aligned}$$

Therefore we pick $\alpha_1 = \max\{\|J_1\|, \|J_2\|\} = 14.0228$, $\alpha_2 = |\eta\epsilon\nu| = 0.9530$, then $f(t, x(t), x(t-\tau))$ satisfies Assumption 1.

The possible outer coupling matrices of the networks are described as follows:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} L_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

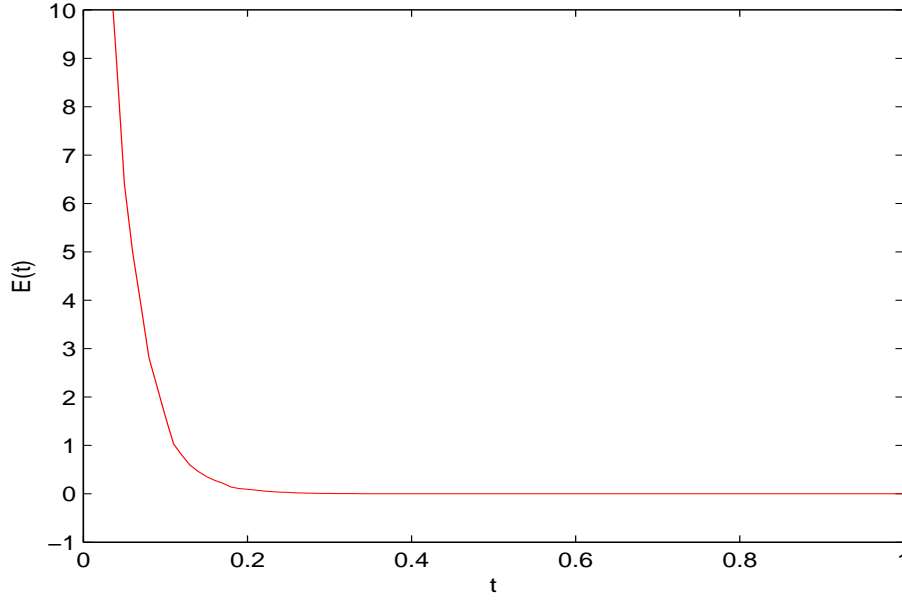


图 4.2: The total error of the system.

The corresponding possibility of control node is $D(1) = (0.2, 0.8, 0.1, 0.7, 0.8)$, $D(2) = (0.8, 0.1, 0.6, 0.3, 0.7)$ and $D(3) = (0.8, 0.6, 0.6, 0.1, 0.8)$. We take the partially unknown transition rate Markov chain $\{\sigma_t, t \geq 0\}$ with the finite state space of by $\{1, 2, 3\}$, The expected sojourn time of this Markov chain in each state follows an exponential distribution with parameter 0.1. The transition rate matrix is given by

$$\begin{pmatrix} ? & ? & 4 \\ 5 & -8 & 3 \\ ? & ? & -8 \end{pmatrix}$$

where "?" represents unknown transition rate. Let $\Gamma = I_3$, $c = 3.85$, $\rho = 7$, $a = 0.218$, $a_1 = a_3 = 4.4812$ and $a_2 = 0$, then $\pi_1 = 4.1024$, $\pi_2 = 11.0937$ and $\pi_3 = 4.6234$. Therefore, it is easy to verify that $a\lambda_N > a_2$ and $c\underline{\gamma} + \rho c\underline{\gamma}\lambda_2'/\lambda_2^2 - (\frac{a}{2\lambda_2} + \frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \frac{\alpha_2}{2} + \pi_u)$ is positive for all $u \in \{1, 2, 3\}$. So the conditions of Theorem 1 hold, and $k_1 = 0.5201$, $k_2 = 1.0543$ and $k_3 = 0.2124$.

Definite total the error as follow:

$$E(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 \left(x_i^j(t) - \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 x_k^j(t) \right)^2}$$

The ordinary differential equation (4.1) is numerically solved by the Euler method with a time step 0.01 (seconds) and the time duration of the numerical simulation in

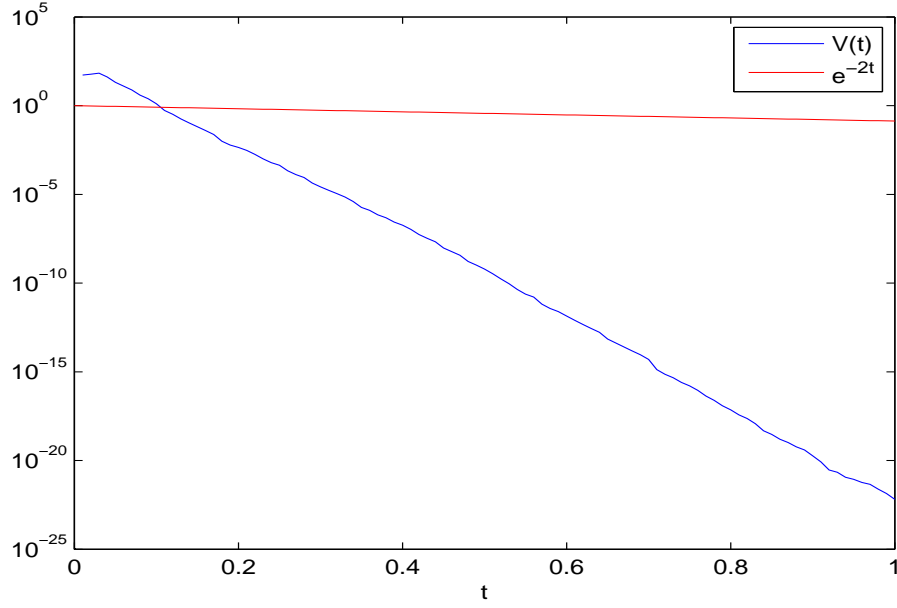


图 4.3: The dynamics of Lyapunov function.

$[0, 1]$ (seconds). Fig.1 shows the dynamics of each component of the 5 nodes and that the coupled system (4.1) reaches synchronization. Fig.2 and Fig.3 present that the total error of the 5 nodes and the Lyapunov function $V(t)$ decreases with respect to time and converges to zero as time goes to infinity. And the rate of convergence of Lyapunov function $V(t)$ is greater than e^{-2t} .

4.4 结论

本章利用事件激发函数和随机控制方法研究了带有事件激发耦合结构和马氏切换动力学系统的在均方意义下的指数同步问题。网络的马氏链的转移率矩阵式部分未知的，并且孤立节点动力学收到时滞的影响。基于事件激发函数的方法，通过利用 Lyapunov 稳定性理论以及随机分析知识，本章得出了充分的同步条件。同时，给出了一些数值的例子来证实结论的有效性。

第五章 总结与讨论

现有的大量文献主要聚焦在“内同步”，也就是一个网络内部节点的同步现象，对于两个网络间的同步现象也有研究的必要。本学位论文基于牵制控制和脉冲控制策略，研究了两个复杂网络的外同步和混合外同步。

在第二章将推广了原有的分段连续时滞微分不等式，给出一个引理，该引理在讨论脉冲控制时变网络外同步和混合外同步中起着至关重要的作用。

第三章讨论了两个无时滞和时变时滞耦合复杂网络的外同步问题。基于牵制控制策略，对响应网络的一部分节点进行控制，利用适当的 Lyapunov 函数等对网络模型进行详细分析，得到了两个网络达到外同步的判断依据。同时又采用脉冲控制的方法，通过在响应网络添加脉冲控制器，依据一般的时变时滞微分不等式，给出了网络实现外同步的理论判据。此外，通过两个网络模型进行了数值模拟，验证所得到的理论结果。

接着在第四章对两个复杂网络的混合外同步问题，将现有文献中所研究的网络模型推广到有向耦合且含时变时滞的非时滞和变时滞情形。利用牵制控制和脉冲控制两种方法，选择适当的 Lyapunov 函数等对网络模型进行分析，得到了满足某种条件结构的网络同步条件，基于广义对时变延迟方程的不等式，得到了充分的混合外同步条件。然后，给出数值模拟来说明理论结果的正确性。

回顾网络科学近年的发展历程，科学研究者把主要的兴趣和精力放在对网络自身的拓扑结构和动力学过程进行建模、分析乃至预测上，其中包含了复杂网络内部同步以及外部同步。随着当前工作重心的转移，能否在有限时间内对复杂网络进行控制使其达到同步，如何对含有随机扰动项的复杂网络进行有效控制令其达到同步，不连续耦合复杂网络如何控制都得到了广泛关注。不管怎样，其核心都是强调如何对网络进行控制。复杂网络的同步的研究在国内外正处于飞速发展之中，且不断产生新的理论和应用成果。虽然有关复杂网络的研究已经取得了令人瞩目的一些成果，但是复杂网络同步领域仍存在众多的问题等待解决。

众所周知，复杂网络传播过程中难免会受到外界的干扰，这些因素都会影响网络的同步。由于干扰的随机性，并且每点的时滞随时间变化的，复杂网络的耦合结构不是一成不变的，可能是随时间变化的，可能是一个 Markov 链，也应给予考虑。为了进一步反映现实系统，可以考虑在响应网络中加入白噪声，引入随机项对复杂网络建立模型时应该更接近真实网络，例如，随机扰动，噪声，拓扑结构。

在保密通信科技应用中，只有令信息传输在有限时间内达到同步，工作人员才能在规定的时间内对加密信息解码。因此，应用中我们希望两个系统或网络在有限时间内达到同步。能否进一步降低控制要求，使两个复杂网络可以在有限时间内实现外部同步？另外，不同节点动力学和拓扑结构的两个复杂网络能否在有限时间内达到外部同步，如果可以的话，那么约束条件是否会和两个不同复杂动力学网络相关等，都是值得深思的问题。

参 考 文 献

- [1] 毕桥, 方锦清. 网络科学与统计物理方法 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2011: 1-13.
- [2] S. H. Strogatz. Exploring complex networks [J]. Nature, 2001, 410: 268-276.
- [3] A. L. Barabasi, R. Albert. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286: 509-512.
- [4] 周涛, 柏文洁, 汪秉宏, 刘之景, 严钢. 复杂网络研究概述 [J]. 物理, 2005, 34: 31-36.
- [5] 赵明, 周涛, 陈关荣, 汪秉宏. 复杂网络上动力系统同步的研究进展 如何提高网络的同步能力 [J]. 物理学进展, 2008, 28(1): 22-34.
- [6] 方锦清. 驾驭强流束晕与探索网络科学 [M]. 原子能出版社, 2008:1-22, 215-265.
- [7] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 1-16, 194-243.
- [8] V. N. Belykh, I. V. Belykh, M. Erik. Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators [J]. Physical Review E, 2001, 3(036216): 1-4.
- [9] F. X. Wang, G. R. Chen. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 2002, 49(1): 54-62.
- [10] L. M. Pecora, T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8):821-824.
- [11] 王小帆, 苏厚胜. 复杂动态网络控制研究进展 [J]. 力学进展, 2008, 38(6): 751-765.
- [12] 吕金虎. 复杂网络的同步: 理论、方法、应用与展望 [J]. 力学进展, 2008, 38(6): 713-722.
- [13] X. Li, X. F. Wang, G. R. Chen. Pingning a complex dynamical network to its equilibrium[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I. 2004, 51(10): 2074-2087.
- [14] S. H. Strogatz, I. Stewart. Coupled oscillators and biological synchronization[J]. Sci. Amer.,1993, 269(6), 102-109.
- [15] M. D. Vieira. Chaos and synchronized chaos in an earthquake model[J]. Phys. Rev. Lett., 1999, 82, 201-204.
- [16] S. Wang, J. Kuang, J. Li, Y. Luo, H. Lu, G. Hu. Chaos-based secure communications in a large community[J]. Phys. Rev. E, 2002, 66, 065202.
- [17] L. Kunbert, K. I. Agladze, V. I. Krinsky. Image processing using light-sensitive chemical waves[J]. Nature, 1989, 337, 244-247.
- [18] C. G. Li, G. R. Chen. Synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays[J]. Physica A, 2004, 343: 263-278.

- [19] M. Zhan, X. G. Wang, X. F. Gong, G. W. Wei, C. H. Lai. Complete synchronization and generalized synchronization of one-way coupled time-delay systems[J]. Phys Rev E, 2003, 68, 036208.
- [20] J. Zhou, T. P. Chen, L. Xiang. Chaotic lag synchronization of coupled delayed neural networks and its applications in secure communication[J]. Circuits Syst Signal Process, 2005, 24, 5: 599-613.
- [21] Q. Miao, Y. Tang, S. Lu, J. Fang. Lag synchronization of a class of chaotic systems with unknown parameters[J]. Nonlinear Dynam, 2009, 57:1-2, 107-112.
- [22] W. Guo. Lag synchronization of complex networks via pinning control[J]. Nonlinear Anal, 2011, 12(5): 2579-2585.
- [23] X. M. Feng, F. Q. Zhang, W. J. Wang. Global exponential synchronization of delayed fuzzy cellular neural networks with impulsive effects[J]. Chaos, 2011, 44: 1-3, 9-16.
- [24] C. Hu, J. Yu, H. J. Jiang, Z. D. Teng. Exponential lag synchronization for neural networks with mixed delays via periodically intermittent control[J]. Chaos, 2010, 20, 023108: 1-8.
- [25] C. Vreeswijk. Partial synchronization in populations of pulse-coupled oscillators[J]. Phys. Rev. E, 1996, 54: 5522-5537.
- [26] B. Ao, Z. G. Zheng, Partial Synchronization on Complex Networks[J]. Europhys. Lett., 2009, 74(2), 50006.
- [27] C. Li, G. Chen. Phase synchronization in small-world networks of chaotic oscillators[J]. Physica A, 2004, 341: 73-79.
- [28] X. F. Wang. Complex networks: topology, dynamics and synchronization, Int. J. Bifurcat. Chaos, 2002, 12(5):885-916.
- [29] W. Xia, J. Cao. Pinning synchronization of delayed dynamical networks via periodically intermittent control[J]. Chaos. 2009, 19(1), 013120.
- [30] W. Yu, G. Chen, J. Lü. On pinning synchronization of complex dynamical networks[J]. Automatica. 2009, 45(2): 429-435.
- [31] T. Chen, X. Liu, W. Lu. Pinning complex networks by a single controller[J]. IEEE Trans. Cir. Syst. 2007, I54: 1317-1326.
- [32] X. Li, X. Wang, G. Chen. Pinning a complex dynamical networks to its equilibrium[J]. IEEE Trans. Cir. Syst. 2004, I51: 2074-2087.
- [33] 张刚, 张伟. 复杂网络的脉冲同步 [J]. 动力学与控制学报, 2009, 7(1), 1-4.
- [34] C. G. Li, G. R. Chen. Synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays[J]. Physica A, 2004, 343: 263-278.

- [35] P. Li, J. D. Cao, Z. D. Wang. Robust impulsive synchronization of coupled delayed neural networks with uncertainties[J]. Phys A. 2007, 373, 261-272.
- [36] 周进, 陈天平, 高艳辉. 脉冲控制下复杂网络的同步动力学行为 [A]. 第二届全国复杂动态网络学术论坛论文集 [C], 2005.
- [37] E. Montbri, J. Kurths, B. Blasius. Synchronization of two interacting populations of oscillators[J]. Phys RevE. 2004, 70, 056125.
- [38] C. P. Li, W. G. Sun, J. Kurths. Synchronization between two coupled complex networks[J]. Phys. Rev. E, 2007, 76, 046204.
- [39] W. Sun, R. Wang, W. Wang, J. Cao. Analyzing inner and outer synchronization between two coupled discrete-time networks with time delays[J]. Cogn. Neurodyn. 2010, 4(3): 225-231.
- [40] W. Sun, Z. Z. Yan, S. H. Chen, J. H. Lü. Outer Synchronization of Complex Networks by Impulse[J]. Commun. Theor. Phys. 2011, 56(5): 885-890.
- [41] S. Zheng. Inner-outer synchronization analysis of two complex networks with delayed and non-delayed coupling[J]. Journal of Information and Computing Science, 2012, 7(1), 011-018.
- [42] 曹素雯. 不同节点动态的复杂网络外部同步牵制控制 [J]. 计算机技术与发展, 2013, 23(11), 124-128.
- [43] X. J. Wu, H. T. Lu. Outer synchronization between two different fractional-order general complex dynamical networks[J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(7), 070511.
- [44] P. He, C. G. Jing, T. Fan, C. Z. Chen. Outer Synchronization of Complex Networks with Multiple Coupling Time-varying Delays[J]. International Journal of Control and Automation, 2013, 6(4): 197-216.
- [45] Y. Z. Sun, W. Li, J. Ruan. Generalized outer synchronization between complex dynamical networks with time delay and noise perturbation[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2013, 18: 989-998.
- [46] Z. C. Li, X. P. Xue. Outer synchronization of coupled networks using arbitrary coupling strength[J]. CHAOS, 2010, 20, 023106.
- [47] X. Q. Wu, W. X. Zheng, J. Zhou. Generalized outer synchronization between complex dynamical networks[J]. CHAOS, 2009, 19, 013109.
- [48] S. Zheng, W. Shao. Mixed outer synchronization of dynamical networks with nonidentical nodes and output coupling[J]. Nonlinear Dyn, 2013, 73: 2343-2352.
- [49] S. K. Bhowmick, C. Hens, D. Ghosh, S. Dana. Mixed synchronization in chaotic oscillators using scalar coupling[J]. Physics Letters A, 2012, 376: 2490-2495.
- [50] J. Wei. Wang, Q. H. Ma, L. Zeng. A novel mixed-synchronization phenomenon in coupled Chua's circuits via non-fragile linear control[J]. Chin. Phys. B Vol. 2011, 20(8), 080506.

- [51] J. W. Wang, Q. H. Ma, Z. Li, S. A. E. Mohammed. Mixed outer synchronization of coupled complex networks with time-varying coupling delay[J]. Chaos. 2011, 21(1), 013121.
- [52] A. D. Dai, W. N. Zhou, J. W. Feng, J. A. Fang and S. B. Xu. Exponential synchronization of the coupling delayed switching complex dynamical networks via impulsive control[J], Advances in Difference Equations, 2013, 195.

致 谢

这篇论文是在董海玲副教授的悉心关怀和指导下完成的。从论文的选题、收集材料到最后论文的撰写及定稿，无不凝聚着董老师的心血。同时很庆幸在这三年的研究生生涯中遇到董老师，无论是学习和生活，他都给予我极大的关心和帮助，她严谨治学的态度、宽以待人的品格、乐观进取的心态、平易近人的长者风范无时无刻不在影响着我。董老师渊博的学识、坚实的专业知识和敏锐的洞察力使我受益非浅，将是我一生学习的榜样。至此论文完成之际，向董老师致以最诚挚的谢意。

衷心感谢审阅鄙人论文的专家学者们，谢谢您在百忙之中抽空关注晚辈的学习成果，同时也感谢阅读过我论文的同行人或关注者，谢谢您的关注和建议！

衷心感谢讨论班的所有成员，他们是丰建文教授、赵毅老师、董海玲老师、王劲毅大师兄、余芬芬师姐、吴维扬师姐、余芬芬师姐、叶丹凤师姐、杨攀同学、李娜同学、付方方同学。一起生活学习的日子使我终生难忘！

衷心感谢任课老师魏正红老师、张君老师、李松臣老师、温松桥老师、董海玲老师、蒋春福老师、姚念老师、张玉老师、曹丽华老师、王启华老师、丰建文老师、赵毅老师等，您们无私的传授知识给我，恩师难忘，我的每一步成长都离不开师长的教导和呵护。

衷心感谢和我一起研途的同学们，感谢刘建、林俊生、莫广焰、楚天月、孙明，是你们陪我一起在这座美丽的校园里度过快乐的三年时光，我们在相互鼓励中不断成长、进步，留下了许多难忘的回忆。如今，大家都各奔东西，衷心祝愿大家在今后的人生道路上事事顺心，勇于不断攀登生活和事业得高峰，幸福美满。我们的同窗之谊永存。

最后，我要感谢我的父母一直以来给予的支持和新人，他们用最无私的奉献和真挚的爱支持我顺利完成学业。

由于作者水平有限，论文中难免存在错误或不妥之处，恳请给位专家教授指正。

周家木

2015 年 4 月 23 日 于 深圳大学

攻读硕士学位期间的研究成果

- [1] Jianwen Feng, **Sa Sheng**, Ze Tang, Yi zhao: Outer Synchronization of Complex Networks with Non-delayed and Time-Varying Delayed Couplings via Pinning Control or Impulsive Control. *Abstract and Applied Analysis*. Volume 2015, Article ID 414596, 11 pages.
- [2] **Sa Sheng**, Jianwen Feng, Se Tang, Yi Zhao: Mixed outer synchronization of two coupled complex networks with time-varying delay coupling and non-delay coupling, *Nonlinear Dynamics*. April 2015, Volume 80, Issue 1-2, pp803-815.