

分类号 0212

学校代码 10590

U D C 519.2

密 级 公开

深圳大学硕士学位论文

基于事件激发采样随机环境中复杂网络同步问题研究

学位申请人姓名 周家木

专 业 名 称 统 计 学

学 院 (系、所) 数学与统计学院

指导教师姓名 董海玲 副教授

深圳大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文 基于事件激发采样随机环境中复杂网络同步问题研究，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：

日期： 年 月 日

学位论文使用授权说明

（必须装订在印刷本首页）

本人完全了解深圳大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并在校园网内提供检索与全文阅览服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文。

（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名：

导师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

摘 要

复杂网络在各个学科和领域都有着普遍的应用, 同步又是复杂网络一种具有代表性的群体行为. 最近几年, 复杂网络同步问题的研究吸引了越来越多研究者的关注, 研究者们在各类同步问题上取得了较大的进展. 然而, 大多数同步结果都是建立在连续通讯模式下, 即网络节点间的信息状态实时更新并且实时传递. 这不仅浪费通讯带宽而且降低网络抗干扰能力, 从而使得网络不稳定. 因此考虑离散通讯模式的控制策略有着更加实际的意义.

本学位论文主要讨论在随机环境下, 如何构造合适的事件激发规则并结合相应的控制方法来实现马氏耦合复杂网络的同步. 主要工作包括以下几个方面:

首先介绍了复杂网络背景和同步研究现状以及同步的相关定义、随机过程理论相关基础知识. 同时也介绍了证明定理过程中所用的引理及符号说明.

其次讨论非线性耦合拓扑与随机发生的耦合以及随机耦合强度并存的复杂网络均方指数同步问题. 引进 Bernoulli 随机变量和正态随机变量来刻画随机发生耦合和随机耦合强度. 为了降低网络间通讯的频率以及控制器的更新频率, 分别在连续监控和离散监控两种情形下, 设计两种基于不同误差上界的分散式事件激发规则. 采取分散式事件激发采样策略和牵制控制相结合的控制方法, 对网络几个关键节点实行牵制控制. 根据 Lyapunov 稳定性理论、随机过程理论以及 Gronwall-Bellman 不等式推导复杂网络能够实现均方指数同步的充分条件. 通过经典蔡氏电路数值仿真不仅证实给出的判据能够保证网络达到同步, 同时在数值上比较四种不同激发规则在同步速度和激发频率上的差异.

接着研究带有时滞与部分未知转移率的马氏耦合复杂网络同步问题. 网络节点之间的拓扑关系不仅存在模式切换, 而且模式间切换概率是部分未知的. 另外, 节点动力学受到时滞的影响. 除此之外, 还考虑了动态调整的同步目标. 利用集中式的事件激发采样策略, 对网络的节点以概率 p 进行随机控制来促使网络达到同步. 通过构造新的随机 Lyapunov-Krasovskii 函数, 基于随机过程理论、Lyapunov 稳定性理论、以及 Halanay 不等式得出同步的充分条件. 最后给出事件激发间隔下界保证 Zeno 现象在事件激发采样控制策略下不会发生. 数值模拟的结果显示, 事件激发采样控制策略能够促使网络快速达到同步, 并且两事件激发时刻具有明显的间隔.

最后, 在转移概率部分未知的基础上, 进一步研究带有噪声干扰的复杂网络同步问题. 不同于自身节点动力学的噪声, 本文考虑的是节点之间的信号传输过程遭受的噪声, 其噪声由布朗运动产生. 根据测量误差和同步误差, 分别构造出集中式和分散式事件激发规则. 利用稳定性理论和伊藤-德布林公式, 推导出同步条件. 数值例子验证了理论结果的有效性.

关键词: 同步; 事件激发策略; 马氏链; 部分转移率未知; 布朗运动

Abstract

Complex networks have applied widely in the domain of science, and synchronization is a typical cluster behavior of complex networks. In recent years, more and more researchers have been attracted by the problem of synchronization of complex networks, and major result has been established. However, almost all of these results are built upon the assumption that the communication of nodes are a continue mode. Namely, the information between the nodes in networks update and transmit immediately, which would not only lead to wasting of communication bandwidth, but also reduce anti-interference ability. So the discrete mode communication control strategy are more practical significance.

This paper mainly discuss how to construct a suitable event-triggered rule and corresponding control method to achieve synchronization of complex networks with Markov switching in random environment. The main work includes the following aspects:

First of all, we introduce the background of complex networks and research status about synchronization and corresponding definitions, basic knowledge of random process theory, lemma and some symbols needed in this paper.

Secondly, the mean square exponential synchronization issues of complex networks with Markov switching nonlinear and randomly occurring coupling topology and random coupling strength are studied. Bernoulli random variable and normal random variable are introduced to depict random occurring coupling and random coupling strength. In order to reduce the frequency of communication between the network and the update of the controller, Two different decentralized event-triggered rules base on synchronization error upper bound and exponential upper bound are proposed in the continuous monitoring and discrete monitoring. The key nodes are pinned to prompt the networks realizing synchronization by using control method with decentralized event-triggered sample strategy and pinning control. According to Lyapunov stability theory, the stochastic process theory and Gronwall-Bellman inequality, the sufficient condition of mean square exponential synchronization are derived. In the numerical example part, it is not only confirm the synchronization condition is valid vote, but also compare the differences about four different rules in the synchronous speed and triggered frequency.

Next, we study exponential synchronization problems for an array of Markovian jump delayed complex networks with partially unknown transition rates. In the networks model, the topological relationship between nodes not only switch in limited mode, but also the switching probability are partially unknown, and the node dynamic behavior

is time-delay. In addition, the synchronization trajectory is dynamic. To impel the array complex networks to achieve exponential synchronization, a new randomly occurring event-triggered control strategy is proposed with the probability p base on centralized event-triggered sample strategy. By constructing a novel stochastic Lyapunov-Krasovskii function, some exponential synchronization criteria are obtained in terms of LMIs and famous Halanay inequality. Furthermore, we obtain a positive lower bound of the event intervals which can exclude the Zeno behaviors in event-triggered sample strategy. Numerical simulation show that the event-triggered sample control strategy can achieve synchronization rapidly and there has obvious gap between two event-triggered moment.

Finally, the issue of synchronization of complex networks perturbed by stochastic noise are further researched base on partially unknown transition rates. The stochastic noise appear in the signal transmission process between the nodes rather than the node's dynamics which is produced by the Brownian movement. According to the measurement error and synchronization error, the centralized and decentralized event-triggered rules are provided. By using stability theory and inequalities of stochastic integral, some exponential synchronization criteria are obtained. A simulation example is provided to demonstrate the effectiveness of the theoretical results.

Keywords: Synchronization; Event-Triggered Strategy; Markov Chain; Partially Unknown Transition Rates; Brownian Movement

目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
第 1 章 引言	1
1.1 复杂网络的研究背景及意义	1
1.2 复杂网络同步控制及其研究现状	3
1.3 本文的主要工作及创新点	5
第 2 章 预备知识	7
2.1 复杂网络的理论和模型	7
2.2 随机过程理论	8
2.3 相关定义、引理	10
第 3 章 分散式事件激发采样下带马氏切换的非线性随机耦合网络同步问题	13
3.1 分散式事件激发采样的网络模型	13
3.2 分散式事件激发采样的复杂网络同步分析	14
3.2.1 连续监控激发规则	15
3.2.2 离散监控激发规则	19
3.3 数值模拟	24
3.4 小结	29
第 4 章 集中式事件激发采样下带部分未知转移率和时滞的复杂网络同步问题	31
4.1 集中式事件激发采样的网络模型	31
4.2 基于集中式事件激发采样的复杂网络同步分析	33
4.2.1 网络的同步判据	33
4.2.2 事件激发时刻间隔的下界	37
4.3 数值模拟	39
4.4 小结	42
第 5 章 基于事件激发采样带部分未知转移率和布朗运动的复杂网络同步问题	43
5.1 集中式事件激发采样控制策略	44
5.1.1 集中式事件激发采样带布朗运动的网络模型	44

5.1.2	同步分析	45
5.2	分散式事件激发采样控制策略	48
5.2.1	分散式事件激发采样带布朗运动的网络模型	48
5.2.2	同步分析	49
5.3	数值模拟	50
5.4	小结	53
第 6 章 总结与展望		55
参考文献		57
致谢		63
攻读硕士学位期间的研究成果		65

第 1 章 引言

1.1 复杂网络的研究背景及意义

随着人类的进步和社会的发展,人与人之间、人与自然界之间以及自然与自然之间形成各种千姿百态、形形色色的复杂网络系统,例如社交关系系统、电力系统、航空系统、万维网、食物链、疾病传播系统、蛋白质相互作用系统等等.人们为了研究这些网络系统的特征和性质,抛开系统的物理和社会含义,把系统中互异的元素称之为节点(node),把元素之间的关系用连边(edge)来表示,于是物理网络系统都可以抽象为由节点和连边组成的复杂网络模型.例如,在社会关系系统中,可以把每一个人看做网络的节点,如果两个人之间相互认识,那么就用连边表示;在航空系统网络中,我们可以把各个城市看做网络的节点,若城市之间存在航线,就用连边来表示.由此可见,任何一个复杂的网络系统都可以将其抽象成为具有节点和连边的网络结构.这种从具体网络模型上升到抽象网络模型的思想给研究者探索网络内部结构的复杂性提供了一种新思路.

这种将真实网络中的实体与实体之间的关联抽象化成为节点和连边所组成的复杂网络的思想是源于 18 世纪 30 年代著名数学家 Euler 论证哥七桥问题. Euler 首次将真实存在的物理关系抽象为节点与连边,从而开创图论学科,使网络研究最终独立成为一门学科.从此掀起了科学家们对网络科学理论的研究热潮.早些年,研究者们研究的网络模型都是具有某种特殊结构的网络,也就是说网络中的节点与节点关系遵循一定的规律,这种网络称为规则网络.主要的规则网络有完全连接网络、最近邻连接网络、星形网络、Lattice 网络、Layers 网络等.但是对于大规模网络而言,它的复杂程度并不是都能采用规则网络来表征.

1960 年前后,两位杰出的数学大师 Erdős 与 Rényi 创立了著名的随机图理论,从而为随机网络 (ER Network) 的发展奠定了理论基础.随机网络与规则网络最大的不同点在于网络节点间的关系不再是确定的,而是以一定的概率随机连接的.由于复杂网络节点之间的关系是受到随机变量的控制,从而使得网络耦合拓扑空间变得更为复杂,并且在数学性质上与规则网络也存在质的不同,很多规则网络的性质在随机网络中不在成立. Erdős 和 Rényi 两人在研究时发现,随机网络的重要特征和性质都是随着节点数量的扩大而突出出现的.

20 世纪末,科学家们发现,很多网络都具有高度的集群性、不均衡的度分布以及中心节点结构.这类结构的网络恰好是介于规则网络和随机网络之间,但是它的统计特征与规则网络和随机网络截然不同.国际上出现两项具有里程碑意义工作: Watts 和 Strogatz 在 1998 年定义了一种新型网络—小世界网络^[1](如图 1.1).小世界网络介于规则网络和随机网络之间,它是在规则网络的基础上以一定的概率断开连边后在重新随机连接其他的节点所形成的网络.当切断连边的概率取 0、1 两个极端值的时候,此时就变成规则网络和随机网络(如图 1.3).生活中的很多网络都表现出小世界特性,例如蛋

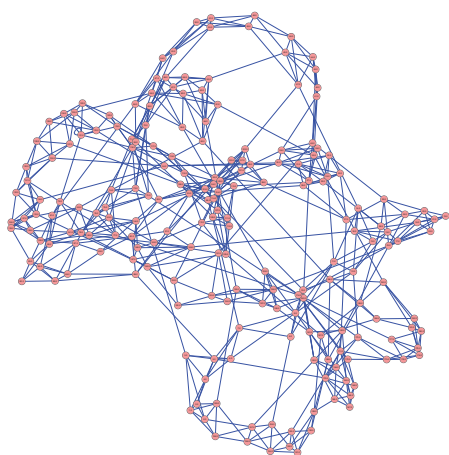


图 1.1: 小世界网络.



图 1.2: 无标度网络.

白质分子相互作用网、手机通讯网络、科学引文网以及社会关系网等. 小世界网络的提出, 进一步证实了“六度分离”假说.

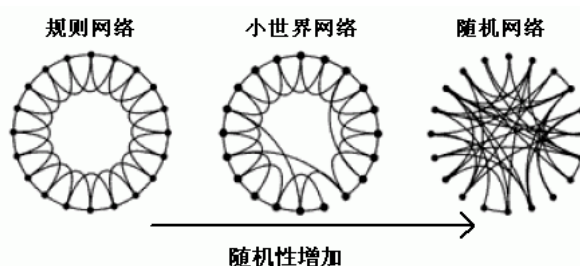


图 1.3: 规则网络、小世界网络、随机网络之间的关系.

一年后, Barabási 等人于 1999 年在《科学》杂志上出了另外一种非均匀的网络模型——无标度网络^[2](如图 1.2). 这类网络不仅拥有较大的聚类特性和较小的平均路径长度, 而且节点的度服从幂律分布. 许多复杂网络系统, 例如因特网路由关系网, 人力资源关系网等, 其网络中的大多数节点都是与某些特殊的节点有关联, 即网络中存在个别具有主要控制能力的节点. 这种网络节点间关系的不均匀性称为无标度网络的无标度性, 这种不均匀性是网络内在的一种性质. 复杂网络的“小世界”与“无标度”等统计特性的发现, 不仅丰富了网络内部结构的拓扑形式, 更进一步推动了研究者对复杂网络结构不断探索的热潮, 同时也加快了复杂网络理论在各个学科的研究进程^[3-9].

进入 21 世纪后, 小世界效应和无标度特性的提出使得复杂网络的理论研究踏上新台阶, 并形成多学科交叉的理论成果. 近年来, 众多理论模型和分析方法如雨后春笋般涌现, 并且尝试利用复杂网络理论成果来解决各领域的实际问题. 目前主要研究工作分为: 一是研究网络内部耦合结构的变化以及统计性质, 例如网络系统的平均路径长度、聚集系数、度及度分布、谱性质、介数、小世界效应、无标度特性等特征; 二是研究复杂网络动力学行为, 包括鲁棒性、稳定性、一致性、以及同步问题等; 三是复杂网络在各个领域的应用, 包括生物医学、保密通信、图像处理、交通运输等领域^[10-12].

1.2 复杂网络同步控制及其研究现状

同步 (synchronization) 指的是两个或者两个以上性质相同或相似的动力系统通过系统节点之间的相互影响使得各个节点的动力学行为随着时间演变慢慢地趋于同步调. 复杂网络的同步是一种群集行为. 自然界中同步现象数不胜数, 其中两个最为经典的同步现象是: 1665 年, 荷兰物理学家、数学家惠更斯发现自家墙上的两个挂钟不论钟摆开始时如何摆动, 一段时间后, 两个摆钟的摆动频率完全相同, 摆动的方向恰好相反; 1680 年, 荷兰旅行家肯普弗在旅行时注意到一个奇特的现象: 停留树枝上的萤火虫闪光的频率非常有规律, 几乎都是同时闪或者不闪. 除此之外, 生活中还存在各式各样的同步现象, 例如鱼群朝同一方向游动, 大雁群的一致飞行, 演唱会观众的拍手声等等.

1990 年 Pecora 和 Carroll^[9] 发现了一类混沌系统的同步现象, 由此开启了同步理论的研究新篇章. 目前已经出现了各种不同形式的同步模式: 有限时间同步^[13]、固定时间同步^[14]、完全同步^[15]、簇同步^[16]、位相同步^[17]、指数同步^[18]. 其中, 完全同步指的是只需要当时间趋于无穷时, 网络所有的节点之间的误差趋于零, 它是同步模式中最普遍的一种. 而指数同步是指误差以指数形式趋于零, 它是比完全同步具有更快同步速度的同步模式. 本文仅讨论这两种同步模式.

在近十多年里, 人们对各种复杂网络拓扑模型的同步问题进行了广泛地研究并积累了大量的研究成果^[19-27]. 但大多数的研究成果都是基于理想的假设: 网络所处的环境是保持不变的, 即网络的耦合结构、耦合强度是固定的, 且网络节点间的通讯不会受到其他外在因素的干扰. 然而, 在实际问题中, 这个假定很难被认为是合理的. 事实上, 在现实应用中, 网络系统的节点状态、耦合结构和耦合强度不可避免地遭受来自外部随机因素的干扰. 例如电力输送网会受到地震、火灾、雷击、输变电系统短路等不可预知因素的影响; 保密通讯会受到黑客的攻击等等. 因此考虑随机环境下的网络同步更加具有实际意义. 最近几年, 研究者们开始重视随机环境下复杂网络同步问题, 并且现在成为了一个较为活跃的研究方向. 随机环境下复杂网络同步问题研究的主题包括: 一是运用连续时间马尔可夫链来模拟耦合结构受随机环境影响而切换的变化过程^[28-38]; 二是引入随机变量来刻画耦合强度的随机性以及随机发生的耦合关系^[39-41]; 三是通过布朗运动来模拟随机噪声对网络节点自身以及节点之间信号传输过程的干扰^[42-46]. 尽管随机环境下复杂网络同步问题的研究取得较大的进展, 但还有许多问题亟待解决. 例如, 节点间状态信息的传输并非是简单的线性可观测形式, 而是通过非线性映射后的形式; 信息传输的有限速度和带宽引起网络节点自身动力学时滞的问题, 马尔可夫链转移率获取困难而引起的部分未知转移率的切换拓扑同步问题, 等等. 这些问题的解决能够更进一步完善复杂网络同步理论.

在现实生活中, 网络很难依靠自身节点之间的拓扑关联实现同步 (自然同步)^[17, 47]. 这是由于网络内部节点庞大, 节点间的关联较为稀疏, 并且网络节点的关系会遭受到外部随机因素的干扰. 因此, 需要对网络施加外力, 即通过设置控制器来促使网络实现的同步. 目前, 很多控制策略被提出. 比较经典而且经济的控制策略是牵制控制^[48-50]. 它只

需要控制系统中极少数重要的节点, 然后通过节点的耦合关系将控制输入信号传送到其他的节点, 从而使得整个网络在控制节点的带领下达到同步状态. 相对于全局控制, 牵制控制具有可操作性强且节省控制成本的优势. 然而, 很多全局控制或者牵制控制的同步成果都是在连续通信模式下建立的, 这使得系统连续不断地更新自身信息状态和控制输入信号, 并且实时地向邻居节点发送当前状态信息. 显然, 这种模式会导致不必要的带宽和能源消耗, 加大了网络的通讯负荷, 并且降低了网络抗干扰能力.

随后, 研究者们提出了数据采样机制来降低节点间的通讯以及控制输入的更新频率, 数据采样机制主要有周期采样^[51] 以及事件激发采样. 根据周期选取的不同, 周期采样又分为固定周期采样、时变周期采样、以及随机周期采样. 相对于连续通信模式, 周期采样以可变频率进行采样并更新节点状态和控制项, 一定程度上节省了控制成本, 并且减少了节点间的通讯频率. 尽管周期采样模式能够减小能量的消耗和降低网络的通讯负荷, 但是该通讯模式对周期的选择较为敏感, 若周期过短会导致较大的计算负荷, 若周期过长会导致同步速度较慢. 除此之外, 网络不能够根据各个节点的状态自动地改变采样数据的频率. 不同于周期采样, 事件激发采样机制能够根据网络自身节点间的关系以及节点与同步目标之间的误差来决定采样时刻, 即系统能够根据自身的运行状况自适应地调整采样时间点, 事件激发采样机制正好弥补了周期采样在周期选择上的缺陷. 事件激发采样控制策略被广泛应用于多主体系统一致性控制问题^[42, 52-59], 最近有研究者开始关注事件激发采样控制策略在复杂网络同步问题的研究, 并取得了一些进展性工作^[60-66]. 事件激发采样模式的主要思想是: 当系统节点与同步目标之间的偏差大于给定的阈值时, 此时事件被触发, 节点就更新自身的状态和控制项, 并向邻居节点传递信息. 换句话说, 网络节点的信息更新和信号的传输只发生在事件激发时刻. 事件激发采样控制模式最大的特点是网络根据节点自身的状态按照需要进行更新和传递数据信号, 从而能够极大减少通信的频率, 节省能量. 正如 K. Åström^[67] 和 B. Wang^[68] 等人证实, 事件激发采样控制策略比周期采样策略表现出更好性能.

事件激发采样策略的核心在于根据网络节点间的关系定义激发规则. 按照激发时刻是否一致可以分为集中式激发规则^[42] 和分散式激发规则^[53]; 按照监控时间是否连续可以分为连续监控激发规则^[64] 和离散监控激发规则^[66]. 连续监控激发规则不仅依赖于节点及其邻居最新激发时刻状态信息, 而且依赖于节点当前的状态信息, 即需要对节点的状态进行实时的监控. 而离散监控激发规则只需根据最新激发时刻的状态信息对下一次激发时刻进行预测, 在下一次激发到来之前, 节点的状态不需要进行监控. 这两种激发规则各有利弊, 连续监控激发规则花费较大的监控成本, 但是激发频率较低, 因而有效地降低了网络节点间的通讯负荷, 更有利于维持网络的稳定性; 而离散监控激发规则监控成本较低, 但会增加激发频率, 加大通讯负荷. 在实际应用中一般根据监控成本和通讯负荷来衡量运用那种激发规则. 集中式激发规则要求所有节点的激发时刻一致, 即根据网络节点的信息状态对每个节点定义统一的激发规则. 而分散式激发规则每个节点根据自身状态和邻居最新的更新信息定义自己的事件触发规则. 相比较而言, 集中式采样策略具有更低的计算负荷, 并且能更快地促使系统达到同步, 但激发频率比分散式采样策

略要高.

目前, 利用事件激发采样策略研究复杂网络问题还处于起步阶段, 主要集中在以下几个方面: 一是通过有限时间事件激发研究带马氏链的非线性系统鲁棒性的问题^[69]; 二是利用事件激发通讯协议研究带马尔可夫跳网络的状态估计问题^[70, 71]; 三是设计事件激发通讯策略研究多主体系统一致性问题^[72, 73]; 四是基于事件激发采样控制策略研究一般马氏切换拓扑复杂网络的同步问题^[74-76]; 五是采用事件激发采样协议研究转移率未知的马氏跳复杂网络的控制问题^[77, 78]. 尽管事件激发采样技术在网络研究方面已有相关的理论成果, 但为数不多. 特别是在复杂网络的同步问题上, 一方面, Liu、Shao、Wang 等人^[74-76]所考虑的都是简单的线性耦合系统, 同时也未考虑到耦合关系随机中断、耦合强度随机变化的情况, 除此之外, 他们也没有在离散监控的情形下设计事件激发采样策略. 另一方面, 对于转移率未知的问题, Senan^[77]讨论了带混合时滞的转移率未知的带马尔可夫跳神经网络的同步问题, Li^[78]给出了转移率未知的马氏跳网络随机稳定性的充分条件, 并给出了事件激发的下界, 证实了 Zeno 现象不会发生. 然而, 对于部分转移率未知、动态同步目标以及时滞共存的复杂网络同步问题并未发现相关成果, 此外对于节点状态信息在传输过程中受到噪声干扰的模型也未见有研究者们利用事件激发采样技术来给出同步判据. 这些网络模型同步问题的解决, 能够更进一步地完善事件激发采样策略下复杂网卡控制同步问题的理论. 本文将逐一讨论运用事件激发采样控制去研究这类带有随机因素影响的复杂网络同步问题.

1.3 本文的主要工作及创新点

本文主要利用基于事件激发采样策略的离散通讯模式研究几类带有马尔可夫切换的复杂网络同步问题. 通过设定合适的事件激发规则, 基于 Lyapunov 稳定性理论、矩阵理论、随机过程理论等知识推导出几类马尔可夫切换网络的同步判据, 并给出数值模拟例子说明推导的同步条件是有效性的.

本学位论文工作分为以下六个部分:

第一章介绍复杂网络及其同步的研究背景和意义, 简单概述和分析国内外有关复杂网络同步研究的现状, 并介绍复杂网络常用控制方法以及基于事件激发控制策略的优点, 最后简要叙述本文工作及创新点.

第二章给出复杂网络的理论和模型, 介绍随机过程理论的基础知识, 最后给出复杂网络同步的数学定义、证明主要结论所有的引理、及本文所用的记号.

第三章对非线性随机发生耦合的复杂网络同步问题进行了研究. 网络模型是在卢文联 2015 年研究的一篇文章^[61]基础上进行改进, 模型不仅包含了马氏切换和非线性耦合, 而且也考虑了网络节点间的耦合关系和耦合强度受到随机因素影响的情形, 即随机发生的耦合和随机耦合强度. 基于分散式事件激发控制策略下, 分别给出连续监控形式的同步误差上界 (CRS) 和指数函数上界 (CRE) 激发规则以及离散监控情形下的同步误差上界 (DRS) 和指数函数上界 (DRE) 激发规则. 利用稳定性理论、随机过程理论、以及矩阵分析理论推导出同步的充分条件. 最后, 对于四种不同激发策略, 分别比较其优缺

点和适用场景. 并给出一个数值仿真来验证本节结论的有效性.

第四章基于集中式事件激发策略研究了部分转移率未知时滞的复杂网络同步问题. 本章在第三章的基础上进行拓展, 在马氏切换拓扑的基础上, 对部分转移率未知以及节点自身动力学存在时滞的网络进行研究. 基于集中式事件激发策略, 设计随机发生的控制器来促使网络达到同步. 在稳定性理论、随机过程理论、以及矩阵分析理论下证实给出的同步判据是充分有效的. 同时, 也给出了几个一般模型下的推论. 最后给出事件激发间隔的下界, 从而证实 Zeno 现象不会发生. 数值仿真揭示理论结果的有效性. 本章的主要结果已发表在 *Applied Mathematics and Computation* 杂志.

第五章研究部分转移概率未知带噪声干扰的复杂网络同步问题. 通过引进布朗运动模拟网络节点间信号传输过程中噪声的影响, 分别在集中式和分散式事件激发策略下, 构造马氏调制的线性控制器. 然后利用伊藤公式、Lyapunov 稳定性定理等知识, 给出部分转移概率未知且带随机扰动马尔可夫网络的同步判据. 最后通过实验仿真证实定理给出的判定条件的有效性.

第六章针对本文的工作进行简要概括和总结, 以及对以后研究方向进行展望.

本文的主要创新点如下:

- 目前基于事件激发策略的控制方法研究非线性耦合关系马氏切换网络的理论结果还未有人提及. 本文在线性基础上, 研究了随机发生的非线性耦合、随机耦合强度以及事件激发控制模式共存的网络模型同步问题;
- 在网络耦合关系随机性方面, 本文不仅以马氏切换模拟随机切换拓扑, 还考虑耦合关系在切换过程中的转移率是部分未知. 除此之外, 网络节点存时滞的情况也加入到模型中, 同时引进动态的同步目标. 设置合适的事件激发策略控制网络达到同步;
- 针对部分转移概率未知时滞的网络模型, 给出事件激发区间的下界, 证实了 Zeno 现象不会发生;
- 噪声是一项不可避免的随机因素, 而噪声一般对网络节点自身和网络节点间通讯都会造成影响. 相对于网络节点自身, 通讯干扰对网络稳定性影响更大. 很多研究者往往只考虑了节点自身动力学行为受到噪声扰动, 而本文在离散通讯模式下加入布朗运动模拟节点间的信号传输过程中受到噪声扰动.

第 2 章 预备知识

2.1 复杂网络的理论和模型

网络是一类描述自然系统和人工系统的模型. 一个网络是具有一定特定功能群体. 其中每个个体都具有自己的动力学行为, 而个体间存在着相互的联系和影响. 这种联系和影响可以利用图论来描述: 网络的个体可以看作图的节点, 个体之间的联系和影响可以用图的边来表示. 网络节点的状态不仅取决于自身动力学的特性, 而且常常会受到与自身有联系节点的影响. 复杂网络是具有大规模节点和复杂的连接拓扑结构的网络. 其复杂性主要体现在两个方面, 一是节点的动力学行为, 它既可以是线性有序的动力学行为, 也可以是非线性或者时空混沌动力学行为; 二是复杂的拓扑结构, 主要体现为时滞拓扑、切换拓扑、时变拓扑、以及噪声干扰的拓扑相混合而成的拓扑结构.

一个由 N 个 n 维状态恒同节点组成的线性耦合复杂网络模型为:

$$\dot{x}_i(t) = f(t, x_i(t)) - c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma [x_j(t) - x_i(t)], \quad i = 1, \dots, N,$$

其中 $x_i(t) = (x_i^1(t), x_i^2(t), \dots, x_i^n(t))^T \in R^n$ 是第 i 个节点在时刻 t 的 n 维状态向量; 连续映射 $f(\cdot, \cdot) : R \times R^n \mapsto R^n$ 是节点自身动力学特性; $L = (l_{ij})_{N \times N}$ 是网络的耦合矩阵, 其中 l_{ij} 表示节点 j 与节点 i 之间的影响权重, 如果点 j 与节点 i 有关联, 即网络拓扑图存在边, 则 $l_{ij} = l_{ji} \leq 0$, 否则 $l_{ij} = l_{ji} = 0$, 其中 $l_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N l_{ij}$, c 是网络节点间的耦合强度; $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ 是内耦合矩阵, 描述节点 n 个状态之间的相互作用.

在现实生活中, 很多网络系统通过自身节点间的调节很难达到同步. 因此需要人为地加入适当的控制. 此外网络系统的耦合关系常常会因所处环境的变化而变化. 本文主要利用事件激发采样控制方法研究带有切换拓扑的复杂网络同步问题. 基于事件激发采样策略的受控复杂网络的数学模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(t, x_i(t)) - c \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma [x_j(t_k) - x_i(t_k)] + u_i(t), \\ t_k \leq t < t_{k+1}, \quad i &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $\{r_t, t \geq 0\}$ 是有限状态空间齐次马尔可夫链; $\{t_1, t_2, \dots\}$ 是严格递增的事件激发时刻序列; $u_i(t)$ 是网络控制输入.

定义 2.1. 如果一个网络系统对于任何的初始值 $x_i(0), i = 1, 2, \dots, N$, 以及任意两个节点 $x_i(t), x_j(t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

则称该网络系统在均方意义下能够达到同步, 简称**均方同步**; 如果存在两个正数 δ 和 M , 使得

$$E\|x_i(t) - x_j(t)\|^2 \leq Me^{-\delta t}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

则称该网络系统在均方意义下能够达到指数同步, 简称**均方指数同步**.

注 2.1. 从定义 2.1 可以看出, 均方指数同步是网络中任意两个节点的所有状态向量之差的范数平方的期望指数递减于零, 它是均方同步的一种特殊情况.

2.2 随机过程理论

随机过程 (Stochastic Process) 是有限维随机变量的一种推广, 它是由无穷多个随机变量形成的随机变量序列, 是概率空间上的一族随机变量. 自协方差只与时间差有关的随机过程称为平稳过程. 任意增量都相互独立的随机过程称为独立增量过程. 比较经典的随机过程有泊松过程、更新过程、马尔科夫过程、鞅、以及布朗运动. 本文主要利用随机过程论中的马尔可夫链和布朗运动相关理论去研究复杂网络的微分动力学系统.

马尔可夫过程: 具备无后效性或者马氏性的随机过程称为马尔可夫过程. 即将来的发展状态只与当前的状态有关, 而与过去的状态无关的随机过程. 在现实生活中, 有很多过程都是马尔可夫过程, 例如液态中微小粒子呈现出来的无规律运动、流行性疾病受到病菌感染人群的数量、银行办理业务排队等候的人数等, 都可视为马尔可夫过程. 在复杂网络研究中可以用马尔可夫过程来描述网络系统处于不同外在环境时耦合结构的切换情况. 下面给出具有离散状态空间的马尔可夫过程的定义:

定义 2.2. ^[80] 设状态空间 $S = \{1, 2, 3, \dots\}$, 随机过程 $\{r(t), t \geq 0\}$ 对于任意 $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$, $i_k \in S$, $0 \leq k \leq n+1$, 若 $P\{r(t_0) = i_0, r(t_1) = i_1, \dots, r(t_n) = i_n\} > 0$, 就有

$$P\{r(t_{n+1}) = i_{n+1} | r(t_0) = i_0, r(t_1) = i_1, \dots, r(t_n) = i_n\} = P\{r(t_{n+1}) = i_{n+1} | r(t_n) = i_n\}$$

则称 $\{r(t), t \geq 0\}$ 为连续参数马尔可夫链 (简称连续参数马氏链). 若对于任意 $s, t \geq 0, i, j \in S$, 有

$$P\{r(s+t) = j | r(s) = i\} = P\{r(t) = j | r(0) = i\} = p_{ij}(t).$$

则称 $\{r(t), t \geq 0\}$ 为齐次马尔可夫链, 称 $P = (p_{ij}(t))(i, j \in S)$ 为转移概率矩阵. 本文仅考虑有限状态空间的齐次马尔可夫链.

引理 2.1. ^[80] 当 S 为有限状态空间时, $\forall i, j \in S, i \neq j$, 极限

$$q_{ii} \triangleq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}, \quad q_{ij} \triangleq p'_{ij}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}.$$

存在且有限, 并且有 $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$. 称 $Q = (q_{ij})$ 为 $\{r(t), t \geq 0\}$ 的转移率矩阵, 或称密度矩阵.

下面给出马尔可夫链的转移率矩阵的元素部分未知时的情形, 其形式如下:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & ? \\ ? & ? & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & ? & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix},$$

这里 “?” 代表未知的转移率. 为了记号上方便, 对任意 $u \in S$, 记 $S = S_1^u \cup S_2^u$, 其中 $S_1^u = \{v | q_{uv} \text{ 是已知的}\}$, $S_2^u = \{v | q_{uv} \text{ 是未知的}\}$.

布朗运动: 是指空气或者液体中的微粒受到气体或者液体的原子或者分子的碰撞而产生的一种无规则的随机运动. 最先发现这种无规律的运动是英国植物学家 R. 布朗, 他在做植物实验时候发现水中的花粉颗粒不停地无规律运动, 即使过再长的时间, 这种无规律的运动也不会停止. 后来他进一步实验证明, 不仅花粉微粒, 任何微小粒子在空气中或者是在流体中都会表现出这种无规则运动. 后来人们把这种现象称之为布朗运动. 下面给出布朗运动严格的数学定义:

定义 2.3. ^[80] 设随机过程 $X(t), t \geq 0$ 满足:

- (1) $X(t)$ 是独立增量过程;
- (2) $\forall s, t > 0, X(s+t) - X(s) \sim N(0, c^2t)$, 即 $X(s+t) - X(s)$ 是期望为 0, 方差为 c^2t 的正态分布;
- (3) $X(t)$ 关于 t 是连续函数.

则称 $X(t), t \geq 0$ 是布朗运动或维纳过程 (Wiener process).

当 $c = 1$ 时, 称 $X(t), t \geq 0$ 是标准布朗运动, 此时若 $X(s) = 0$, 则 $X(t) \sim N(0, t)$.

定义 2.4 (伊藤过程). ^[81] 设随机过程 $W(t), t \geq 0$ 是布朗运动, $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ 是相应的域流. 伊藤过程是如下形式的随机过程:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u) dW(u) + \int_0^t \Theta(u) dW(u),$$

其中 $X(0)$ 非随机, $\Delta(u), \Theta(u)$ 是适应的随机过程.

引理 2.2 (伊藤—德布林公式). ^[81] 设 $X(t), t \geq 0$ 是定义 2.4 中给出的伊藤过程, 连续函数 $f(t, x)$ 的偏导数 $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ 和 $f_{xx}(t, x)$ 都有定义并且连续, 则对于每一个 $T \geq 0$, 有:

$$\begin{aligned} f(T, X(T)) &= f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t)) dt + \int_0^T f_x(t, X(t)) \Delta(t) dW(t) \\ &\quad + \int_0^T f_x(t, X(t)) \Theta(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X(t)) \Delta^2(t) dt. \end{aligned}$$

注 2.2. 引理 2.2 是以精确的数学语言叙述的. 公式右端每一项都有确切的含义, 第一项是非随机, 第三项是一个伊藤积分之和, 其余三项是关于时间变量的勒贝格积分.

将上式写成微分形式记法如下:

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))\Delta(t)dW(t) \\ &\quad + f_x(t, X(t))\Theta(t)dt + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))\Delta^2(t)dt. \end{aligned}$$

2.3 相关定义、引理

符合说明: 如果没有特殊说明, 则在文中 I_n 表示 n 阶单位矩阵, 0 表示具有适当维数的零矩阵; $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A)$ 是 n 阶矩阵 A 的特征根, 若所有的特征根都为实数, 则不妨将其排序为: $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$; x^\top 记作向量 x 的转置, $\|x\|$ 记作向量 x 欧几里得范数; $\mathbf{1}_n$ 记作元素全部是 1 的 n 维向量; 符号 E 表示数学期望, 符号 \otimes 表示 Kronecker 积.

定义 2.5. ^[16] 称函数 $f(\cdot) : R^n \mapsto R^n$ 满足 $QUAD$ 条件, 记作 $f \in QUAD(G, \Delta, \xi)$, 如果存在两个正定对角阵 $G = \text{diag}\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, $\Delta = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ 和一个正数 ξ , 使得对任意 $x, y \in R^n$, 有

$$(x - y)^\top G[f(x) - f(y) - \Delta(x - y)] \leq -\xi(x - y)^\top G(x - y).$$

定义 2.6. 称函数 $f(\cdot) : R^n \mapsto R^n$ 属于函数类 $L(l_1, l_2)$, 记作 $f(\cdot) \in L(l_1, l_2)$, 如果存在两个正数 l_1 和 l_2 , 使得对任意 $x, y \in R^n$, 有

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq l_1\|x - y\|, \\ \|f(x) + f(y)\| &\leq l_2\|x + y\|. \end{aligned}$$

称函数 $g(\cdot) : R^n \mapsto R^n$ 属于函数类 $C(\sigma)$, 记作 $g(\cdot) \in C(\sigma)$, 如果存在非零常数 σ , 使得对任意 $x, y \in R^n$, 有

$$(x - y)^\top (g(x) - g(y)) \geq \sigma(x - y)^\top (x - y).$$

事实上, 现实存在的很多混沌系统, 比如洛伦兹系统, 陈氏系统, Lü 系统和 Chua's 电路系统, 他们的自身动力学函数都满足定义 2.5 和定义 2.6.

引理 2.3. ^[82] 设 A, B, C 和 D 是具有适当维数的矩阵, 则下面性质成立:

$$\begin{cases} (aA) \otimes B = A \otimes (aB); \\ (A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C; \\ (A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD); \end{cases}$$

其中 a 是常数.

引理 2.4. ^[82] 设矩阵 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{m \times m}$ 是对称矩阵, 则对任意 $x \in R^{nm}$, 有

$$\lambda_1(A) \cdot \lambda_1(B)x^\top x \leq x^\top (A \otimes B)x \leq \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B)x^\top x.$$

引理 2.5. ^[83] 设 x, y 是 n 维向量, 则对任意 n 阶半正定矩阵 P 以及任意常数 $\mu > 0$, 有

$$2x^\top Py \leq \mu x^\top Px + \frac{1}{\mu} y^\top Py$$

引理 2.6 (Lyapunov 稳定性定理). 设 $x = 0$ 是非线性系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0$$

(其中 $x \in R^n$, $f: D \subset R^n \rightarrow R^n$ 满足局部 Lipschitz 条件) 的平衡点, $D \subset R^n$ 是包含原点的定义域. 设 $V(x): D \rightarrow R^+$ 是连续可微的函数, 如果

$$\begin{aligned} V(0) &= 0; \\ V(x) &> 0, \quad x \in D - \{0\}; \\ \dot{V}(x) &\leq 0, \quad x \in D; \end{aligned}$$

那么, 平衡点 $x = 0$ 是稳定的. 特别的, 如果

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \in D,$$

那么, 平衡点 $x = 0$ 是渐近稳定的.

引理 2.7 (Lyapunov—Krasovskii 稳定性定理). 考虑时滞微分方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (2.2)$$

这里 $f: R \times C \mapsto R^n$ 是一个连续函数, 同时将 $R \times C$ 的一个有界子集映射到一个 R^n 的有界子集, 令 $u, v, w: R^+ \mapsto R^+$ 是连续并且严格单调非减函数, 满足当 $s > 0$, $u(s), v(s), w(s)$ 为正, 同时有 $u(0) = v(0) = 0$. 若存在连续函数 $V: R \times C \mapsto R$ 使得

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|)$$

和

$$\dot{V}(t, x(t, x(t))) \leq -w(\|x(t)\|)$$

成立, 这里 \dot{V} 为 V 沿着方程 (2.2) 解的方向导数, 则该方程的解 $x = 0$ 就是一致渐近稳定的. 并把 V 称之为 Lyapunov—Krasovskii 函数.

第 3 章 分散式事件激发采样下带马氏切换的非线性随机耦合网络同步问题

目前, 复杂网络同步问题已经得到研究者广泛研究. 早些时候的网络同步问题的理论成果主要是建立在固定耦合拓扑的假设之上, 即网络节点间的耦合关系只有一种模式. 后来有研究者发现, 在实际应用中网络节点间的关系并不是一成不变的. 例如在企业关系网中, 企业与企业之间某时期是竞争关系, 但在某时期会转为合作关系. 显然, 变化的拓扑结构更加适应于实际的网络模型. 研究者们提出, 通过引入马氏链来模拟网络拓扑结构在不同外环境中的切换过程.

本文在前人的基础上, 继续探讨具有切换拓扑结构的复杂网络同步问题. 节点间的线性耦合是较为简单的耦合方式, 对于大规模节点的网络, 节点间的耦合关系往往不能够直接观测得到, 而是观测到其经过非线性函数映射后的结果. 因此研究非线性耦合的结构更符合实际网络环境且更具有挑战性. 特别是在保密通讯方面, 线性的耦合结构比较容易受到黑客的攻击, 不利于通讯安全. 将信号通过非线性转换后再传输能够极大地提高了信息传输的安全性.

很多现实中的网络很难达到同步或者同步时间较长, 因此需要引进控制方法促进网络快速到达同步. 控制方法根据采样时间是否连续可以分为连续采样控制和非连续采样控制, 其中非连续采样控制方法有周期间歇控制、脉冲控制、以及基于事件激发采样控制. 事件激发采样控制策略的基本思想是网络节点间的信息传输只发生在事件激发时刻, 而该时刻由只依赖于节点自身状态信息以及邻居节点上一次更新的状态信息的激发规则决定. 当激发规则满足时, 事件就会被激发, 此时采样行为发生, 相应的控制器发生更新. 基于事件激发采样不仅可以减少控制器的更新频率, 同时还可以减少节点间的通讯负荷. 根据节点是否具有一致的激发时刻, 可将事件激发采样分为分散式和集中式两种. 本章节采用的是分散式事件激发采样的控制策略去研究带有马氏切换非线性耦合复杂网络的同步问题.

3.1 分散式事件激发采样的网络模型

分散式事件激发采样的特点是每个节点都有自己的激发规则, 某节点的激发并不会引起其他邻居节点的激发, 但会将该激发时刻的采样信息转告给邻居节点使其更新激发规则. 本章节利用基于分散式事件激发采样的牵制控制方法研究带有马氏切换的随机发生非线性耦合复杂网络同步问题. 网络的随机性不仅体现在耦合模式是随机切换的, 同时还体现在随机发生的耦合以及随机耦合强度. 其网络模型如下:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) - \theta(t)\rho(t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma[h(x_j(t_k^i)) - h(x_i(t_k^i))] + u_i(t),$$

$$t_k^i \leq t < t_{k+1}^i, i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

其中 $\theta(t)$ 是伯努利随机变量, 满足 $P(\theta(t) = 1) = \theta \in (0, 1)$, 它描述网络系统随机发生的耦合; $\rho(t)$ 是随机耦合强度, 其 $E[\rho(t)] = c > 0, \text{Var}(\rho(t)) < \infty$. 这里假设 $\sigma(t), \theta(t)$ 和 $\rho(t)$ 是相互独立的; $h(x_i(t)) = (h_1(x_i^1(t)), h_2(x_i^2(t)), \dots, h_n(x_i^n(t)))^\top \in R^n$ 是非线性耦合函数; t_k^i 是第 i 个节点第 k 次事件激发的时刻. 控制输入 $u_i(t)$ 的定义如下:

$$u_i(t) = -\tau\rho(t)d_i(r_t)\Gamma[h(x_i(t_k^i)) - h(s(t_k^i))], \quad (3.2)$$

这里 $\tau\rho(t)$ 是控制增益; $d_i(r_t) = I_{\{i \in \mathcal{D}(r_t)\}}$ 是牵制节点集 $\mathcal{D}(r_t) \subset \{1, 2, \dots, N\}$ 上的示性函数, 即, 如果 $i \in \mathcal{D}(r_t)$, 则 $I_{\{i \in \mathcal{D}(r_t)\}} = 1$, 否则 $I_{\{i \in \mathcal{D}(r_t)\}} = 0$; $s(t)$ 是孤立节点动力学 $\dot{s}(t) = f(s(t))$ 的轨道, 即同步的目标轨道.

注 3.1. 该模型与 (2.1) 的不同之处是每个节点都具有自己的激发时刻, 且增加了非线性耦合、随机发生的耦合、以及随机耦合强度. 它更加符合实际生活中的系统, 具有更广泛的应用价值.

3.2 分散式事件激发采样的复杂网络同步分析

本节主要探索在连续时间监控和离散时间监控下, 网络系统 (3.1) 能够达到同步的条件. 通过构造合适的事件激发规则, 结合稳定性理论, 推导出在两种情形下的同步判据. 在给出结论之前, 先给出必要的引理.

引理 3.1. 设矩阵 $Q \in R^{n \times n}$ 满足 $q_{ij} = q_{ji}$, $q_{ii} = -\sum_{j=1, i \neq j}^n q_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 则对任意向量 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\top$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^\top$, 有

$$u^\top Q v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i q_{ij} v_j = -\sum_{j>i} q_{ij} (u_i - u_j)(v_i - v_j).$$

引理 3.2 (Gronwall—Bellman 不等式).^[88, 89] 设 $\varphi(t), \alpha(t), \beta(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数.

情形 1: 如果 $\varphi(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负可微, 且对任意 $t \in [a, b]$, 有

$$\dot{\varphi}(t) \geq \alpha(t)\varphi(t) + \beta(t).$$

那么

$$\varphi(t) \geq \varphi(a)e^{\int_a^t \alpha(s)ds} + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds.$$

情形 2: 如果 $\beta(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负可积, 且对任意 $t \in [a, b]$, 有

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\varphi(s)ds.$$

那么

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(u)du}ds.$$

由于非线性耦合的结构形式众多, 并且及其复杂, 这里我们仅讨论符合以下假设的非线性函数类.

假设 3.1. 假设存在正数 $\alpha_k, \beta_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 使得对任意 $x, y \in R$, 有

$$\alpha_k \leq \frac{h_k(x) - h_k(y)}{x - y} \leq \beta_k.$$

注 3.2. 假设 3.1 是比较常见的, 只要函数满足一阶导数有界并且导数值为正数即可, 例如反正切函数就可以满足.

记 $e_i(t) = x_i(t) - s(t) (i = 1, 2, \dots, N)$ 为节点 i 的同步误差. 为了讨论方便, 引入下述记号:

$$\begin{aligned} f(e_i(t)) &= f(x_i(t)) - f(s(t)), \\ h(e_i(t)) &= h(x_i(t)) - h(s(t)), \\ e(t) &= (e_1^\top(t), e_2^\top(t), \dots, e_N^\top(t))^\top, \\ f(e(t)) &= (f^\top(e_1(t)), f^\top(e_2(t)), \dots, f^\top(e_N(t)))^\top, \\ h(e(t)) &= (h^\top(e_1(t)), h^\top(e_2(t)), \dots, h^\top(e_N(t)))^\top, \\ D(r_t) &= \text{diag}\{d_1(r_t), d_2(r_t), \dots, d_N(r_t)\}. \end{aligned}$$

于是网络系统 (3.1) 可以写成误差系统的形式:

$$\dot{e}(t) = f(e(t)) - \theta(t)\rho(t)[L(r_t) \otimes \Gamma]h(e(t)) - \tau\rho(t)[D(r_t) \otimes \Gamma]h(e(t)) + \rho(t)\tilde{e}(t), \quad (3.3)$$

其中 $\tilde{e}(t) = (\tilde{e}_1^\top(t), \tilde{e}_2^\top(t), \dots, \tilde{e}_N^\top(t))^\top$ 是系统测量误差, 其分量定义为如下:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i(t) &= \theta(t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma [h(x_j(t)) - h(x_j(t_k^i))] \\ &\quad - \tau d_i(r_t) [h(x_i(t)) - h(x_i(t_k^i)) + h(s(t_k^i)) - h(s(t))]. \end{aligned}$$

3.2.1 连续监控激发规则

在连续监控情形下, 监控器实时地收集节点 $x_i(t), x_j(t)$ 和 $s(t)$ 的状态信息, 事件激发规则根据收集到的节点状态信息判断此时是否满足激发条件. 如果关于某个节点 i 的激发规则满足, 则关于节点 i 的事件就被激发, 从而获得新的事件激发时刻 t_{k+1}^i . 与此同时, 节点 i 更新自身状态和控制器状态, 并且发送 $t_{k_i(t)}^i$ 时刻的状态信息给邻居节点, 这里 $k_i(t) = \arg\max_{k'} \{t_{k'}^i \leq t\}$. 于是邻居节点更新 t_k^i 时的状态信息为 t_{k+1}^i 时的状态信息, 但关于邻居节点的事件不会被激发直到属于邻居节点的激发条件满足. 具体流程见图 3.1.

下面给出两种不同误差上界的激发规则:

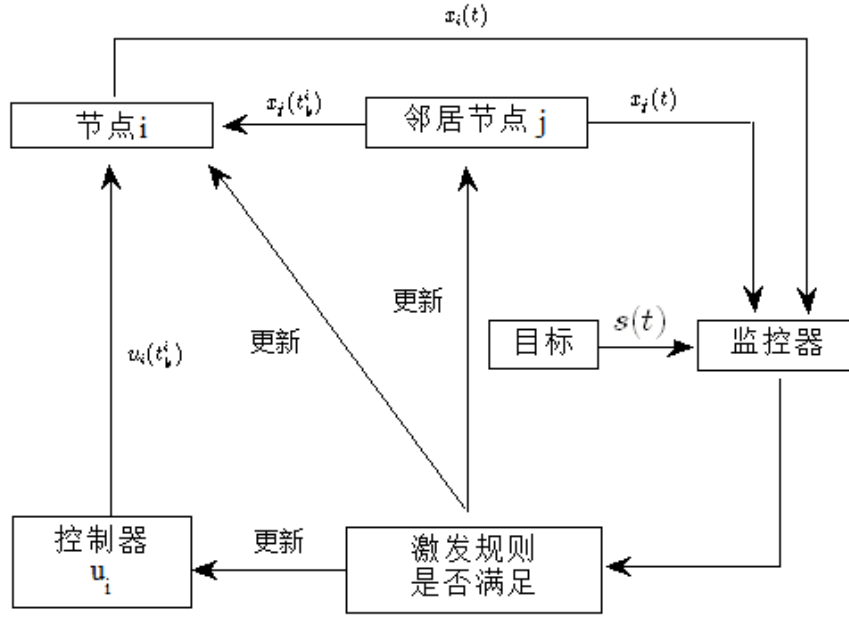


图 3.1: 连续监控下事件激发牵制控制流程图

情形 a: 基于同步误差上界的连续监控事件激发规则 (简称为 CRS 激发规则):

$$t_{k+1}^i = \max \{t \geq t_k^i : \|\tilde{e}_i(t)\| \leq \omega \|e_i(t)\|\} \quad (3.4)$$

情形 b: 基于指数函数上界的连续监控事件激发规则 (简称为 CRE 激发规则):

$$t_{k+1}^i = \max \{t \geq t_k^i : \|\tilde{e}_i(t)\| \leq ae^{-bt}\} \quad (3.5)$$

其中 $\omega = \frac{2\xi\varepsilon - \delta\bar{\varepsilon}}{2c\bar{\varepsilon}}$, $0 < \delta \leq \frac{2\xi\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}$, $a > 0$, $b > 0$, $\varepsilon = \min_v \{\lambda_{\min}(P(v)) \cdot \lambda_{\min}(G)\}$, $\bar{\varepsilon} = \max_v \{\lambda_{\max}(P(v)) \cdot \lambda_{\max}(G)\}$.

网络系统激发的具体算法如下:

算法 3.1 (连续监控事件激发算法).

- 1) 对 $i = 1, 2, \dots, N$, 初始化: $t_0^i = 0$;
- 2) 当 $t \geq t_k^i$ 时, 监控器实时收集节点 $x_i(t)$, $x_j(t)$, $s(t)$ 的状态信息并发送到激发机制 (3.4) (或者 (3.5));
- 3) 如果 $\|\tilde{e}_i(t)\| > \omega \|e_i(t)\|$ (或者 $\|\tilde{e}_i(t)\| > ae^{-bt}$), 则事件被激发, 最新的激发时刻 $t_{k+1}^i = t$, 则返回 2);
- 4) 当 $t = t_{k+1}^i$ 时, 节点 i 以及它的邻居节点和控制器将会更新状态信息, 即用 t_{k+1}^i 时刻状态信息替换 t_k^i 时刻的状态信息, 返回 2).

下面给出连续监控情形下的同步判定定理.

定理 3.1. 如果假设 3.1 成立, $f(\cdot)$ 属于 $QUAD(G, \Delta, \xi)$, 并且存在正定对角阵 $P(u) = \text{diag}\{p_1(u), \dots, p_N(u)\}$, $u \in S$, 使得对任意 $u \in S$, 有

$$\bar{\delta}P(u) \otimes G - c\theta \underline{\alpha}P(u)L(u) \otimes G\Gamma - c\tau \underline{\alpha}P(u)D(u) \otimes G\Gamma + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m q_{uv}P(v) \otimes G \leq 0, \quad (3.6)$$

其中 $\bar{\delta} = \max_k \{\delta_k\}$, $\underline{\alpha} = \min_k \{\alpha_k\}$. 那么, 基于 CRS 激发规则或者 CRE 激发规则, 按照算法 3.1, 网络系统 (3.1) 可以实现均方指数同步.

证明: 在 $r(t) = u \in S$ 时, 定义随机 Lyapunov—Krasovskii 函数 $V(t)$ 如下:

$$V(t) = \frac{1}{2} e^\top(t) [P(u) \otimes G] e(t).$$

记 \mathcal{L} 是弱无穷小生成元算子. 根据引理 2.3 和式 (3.3) 以及 *QUAD* 条件, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \mathcal{L} V(t) &= \mathbb{E} \left\{ e^\top(t) [P(u) \otimes G] \left[F(e(t)) - I \otimes \Delta e(t) + I \otimes \Delta e(t) - c\theta [L(u) \otimes \Gamma] H(e(t)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c\tau [D(u) \otimes \Gamma] H(e(t)) + c\tilde{e}(t) \right] + \frac{1}{2} \sum_v q_{uv} e^\top(t) [P(v) \otimes G] e(t) \right\} \\ &\leq \mathbb{E} \left\{ (\bar{\delta} - \xi) e^\top(t) [P(u) \otimes G] e(t) - c\theta e^\top(t) [P(u) L(u) \otimes G\Gamma] H(e(t)) \right. \\ &\quad \left. - c\tau e^\top(t) [P(u) D(u) \otimes G\Gamma] H(e(t)) + c e^\top(t) [P(u) \otimes G] \tilde{e}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_v q_{uv} e^\top(t) [P(v) \otimes G] e(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

下面处理上式中含有非线性的项, 根据假设 3.1 和引理 3.1, 可得

$$\begin{aligned} & - \mathbb{E} \left\{ e^\top(t) [P(u) L(u) \otimes G\Gamma] H(e(t)) \right\} \\ &= - \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^\top(t) p_i(u) l_{ij}(u) G\Gamma h(e_j(t)) \right\} \\ &= - \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_i(u) l_{ij}(u) \sum_{k=1}^n e_i^k(t) g_k \gamma_k h_k(e_j^k(t)) \right\} \\ &= - \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=1}^n g_k \gamma_k \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_i(u) l_{ij}(u) e_i^k(t) h_k(e_j^k(t)) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=1}^n p_k \gamma_k \sum_{j>i} p_i(u) l_{ij}(u) (e_i^k(t) - e_j^k(t)) (h_k(e_i^k(t)) - h_k(e_j^k(t))) \right\} \\ &\leq \underline{\alpha} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=1}^n g_k \gamma_k \sum_{j>i} p_i(u) l_{ij}(u) (e_i^k(t) - e_j^k(t))^2 \right\} \\ &= -\underline{\alpha} \mathbb{E} \left\{ e^\top(t) [P(u) L(u) \otimes G\Gamma] e(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

利用类似的方法可得如下关系式:

$$- \mathbb{E} \left\{ e^\top(t) [P(u) D(u) \otimes G\Gamma] H(e(t)) \right\} \leq -\underline{\alpha} \mathbb{E} \left\{ e^\top(t) [P(u) D(u) \otimes G\Gamma] e(t) \right\}. \quad (3.10)$$

对于式 (3.7) 中含有系统测量误差的项, 通过运用引理 2.4 和引理 2.5, 可得

$$\mathbb{E} \left\{ e^\top(t) [P(u) \otimes G] \tilde{e}(t) \right\} \leq \mathbb{E} \left\{ \frac{\mu}{2} e^\top(t) [P(u) \otimes G]^2 e(t) + \frac{1}{2\mu} \tilde{e}^\top(t) \tilde{e}(t) \right\}$$

$$\leq \mathbb{E}\left\{\frac{\mu\bar{\varepsilon}^2}{2}e^\top(t)e(t) + \frac{1}{2\mu}\tilde{e}^\top(t)\tilde{e}(t)\right\}, \quad (3.11)$$

其中 μ 是正数. 将式 (3.8)–(3.11) 代入式 (3.7), 并结合式 (3.6) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathcal{L}V(t) &\leq \mathbb{E}\left\{e^\top(t)\left[\bar{\delta}P(u) \otimes G - c\theta\alpha P(u)L(u) \otimes G\Gamma\right.\right. \\ &\quad \left.- c\tau\alpha P(u)D(u) \otimes G\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{v=1}^m q_{uv}P(v) \otimes G\right]e(t) \\ &\quad \left.+ \left(\frac{c\mu\bar{\varepsilon}^2}{2} + \frac{\delta\bar{\varepsilon}}{2} - \xi\bar{\varepsilon}\right)e^\top(t)e(t) + \frac{1}{2\mu}\tilde{e}^\top(t)\tilde{e}(t) - \frac{\delta\bar{\varepsilon}}{2}e^\top(t)e(t)\right\} \\ &\leq \mathbb{E}\left\{\left(\frac{c\bar{\varepsilon}^2\mu}{2} - c\bar{\varepsilon}\omega\right)e^\top(t)e(t) + \frac{c\bar{\varepsilon}}{2\omega}\tilde{e}^\top(t)\tilde{e}(t)\right\} - \delta EV(t, e(t)). \end{aligned} \quad (3.12)$$

情形 a: 当选用 CRS 激发规则时, 此时选择常数 δ 使得 $0 < \delta \leq \frac{2\xi\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}$ 即可. 根据激发条件式 (3.4) 可得

$$\mathbb{E}\tilde{e}^\top(t)\tilde{e}(t) \leq \omega^2\mathbb{E}e^\top(t)e(t). \quad (3.13)$$

由于式 (3.12) 对任意 $\mu > 0$ 都成立, 因此可取 $\mu = \frac{\omega}{\bar{\varepsilon}}$ 并将其代入式 (3.12), 结合式 (3.13), 可得

$$\mathbb{E}\mathcal{L}V(t) \leq -\delta EV(t).$$

根据比较原理可得

$$EV(t) \leq EV(0)e^{-\delta t}.$$

因此

$$\mathbb{E}\|x_i(t) - s(t)\|^2 \leq \frac{2}{\bar{\varepsilon}}EV(0)e^{-\delta t}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

所以在 CRS 激发规则下, 网络系统 (3.1) 可以达到均方指数同步.

情形 b: 当选用 CRE 激发规则时, 根据激发条件式 (3.5) 可得

$$\mathbb{E}\tilde{e}^\top(t)\tilde{e}(t) \leq Na^2e^{-2bt}. \quad (3.14)$$

因为式 (3.12) 对任意 $\mu > 0$ 成立, 故取 $\mu = \frac{2\omega}{\bar{\varepsilon}}$ 并代入式 (3.12), 结合式 (3.14), 可得

$$\mathbb{E}\mathcal{L}V(t) \leq \frac{Nca^2\bar{\varepsilon}}{2\omega}e^{-2bt} - \delta EV(t).$$

求解上式相对应的微分方程并利用比较原理可得

$$EV(t, e(t)) \leq \frac{Nca^2\bar{\varepsilon}}{2\omega(-2b+\delta)}\left[e^{(-2b+\delta)t} - 1\right]e^{-\delta t} + EV(0, e(0))e^{-\delta t} = \pi e^{-\delta t},$$

其中 $\pi = EV(0, e(0)) + \frac{Nca^2\bar{\varepsilon}}{2\omega(-2b+\delta)}(e^{(-2b+\delta)t} - 1)$. 根据 $V(t)$ 的定义可得

$$\mathbb{E}\|x_i(t) - s(t)\|^2 \leq \frac{2\pi}{\bar{\varepsilon}}e^{-\delta t}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

因此在 CRE 激发规则下, 网络系统 (3.1) 可以达到均方指数同步. \square

注 3.3. CRS 激发规则中的系统测量误差被同步误差控制, 其系数 ω 是由系统决定的, 不可以被修改. 而 CSE 激发规则中的系统测量误差被指数函数控制, 激发规则中的参数 a 和 b 可以根据所需的同步速度和激发频率进行选择. 一般上, CRS 激发规则的同步速度会比 CRE 激发规则快, 但是 CRS 激发规则的激发频率会高于 CRE 激发规则. 高激发频率会引起系统间的数据频繁更新, 因此 CRS 激发规则比 CRE 激发规则有更大的计算负荷. 至于监控成本方面, 两种激发规则花费的成本是一样的.

3.2.2 离散监控激发规则

连续监控激发规则不仅需要实时监控节点的变化情况, 同时激发规则的信息也需要实时地更新. 因此连续监控会花费较高的监控成本和通讯负荷. 为了较少监控成本和通讯负荷, 这一节研究采用离散监控模式. 不同于连续监控激发策略, 在离散监控激发策略中, 节点的状态信息只在 $t = t_k^i$ 时刻时监控. 然后根据最新监控得到的状态信息进行预测下一次事件激发的间隔 π_k^i 来确定下一次激发时刻. 当时间达到预测的激发时刻, 即 $t = t_k + \pi_k^i$ 时, 关于节点 i 的事件就被激发, 新的激发时刻 t_{k+1}^i 被确定. 此时, 监控器记录该时刻的状态信息发送至控制器和各邻居节点. 同时节点 i 和其邻居节点重新预测下一次激发间隔. 详见图 3.2 预测激发过程图.

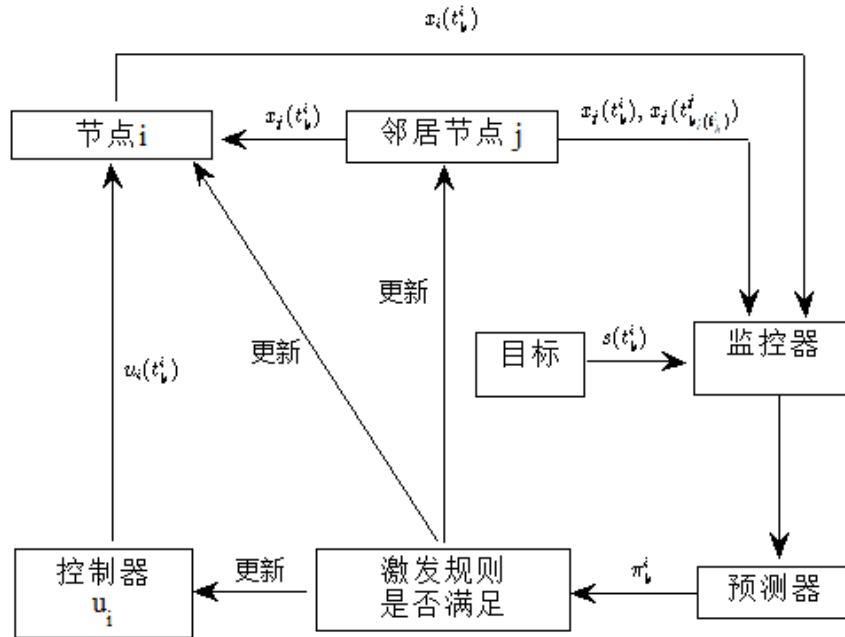


图 3.2: 离散监控下的预测激发过程图

与连续监控情形一样, 这里也给出两种不同系统误差上界的激发规则. 不同的是, 离散监控情形下给出的是与系统误差和同步误差相关函数.

情形 c: 基于同步误差上界的离散监控激发规则 (简称为 DRS 激发规则):

$$\pi_k^i = \max \left\{ t : \sum_{j=1, j \neq i}^N (-l_{ij}(r_{t+t_k^i})) \varphi(t, \xi_k^i, \zeta_{k_j(t+t_k^i)}^j, x_i(t_k^i), x_j(t_k^i)) \right\}$$

$$+ \tau d_i(r_{t+t_k^i})\varphi(t, \xi_k^i, 0, x_i(t_k^i), s(t_k^i)) \leq \omega \psi(t, \xi_k^i, 0, x_i(t_k^i), s(t_k^i))\}, \quad (3.15)$$

$$t_{k+1}^i = t_k^i + \pi_k^i,$$

其中 $\omega = \frac{2\xi\varepsilon - \delta\varepsilon}{2c\varepsilon}$, $0 < \delta \leq \frac{2\xi\varepsilon}{\varepsilon}$, $\xi_k^i = z_i(r_t, t_k^i)$, $\zeta_{k_j(t+t_k^i)}^j = z_j(r_t, t_{k_j(t+t_k^i)}^j)$, 函数 $z_i(\cdot, \cdot)$, $z_j(\cdot, \cdot)$, $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 和 $\psi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 的具体定义将会在定理 3.2 中给出.

情形 d: 基于指数函数上界的离散监控激发规则 (简称为 DRE 激发规则):

$$\begin{aligned} \pi_k^i = \max \left\{ t : \sum_{j=1, j \neq i}^N (-l_{ij}(r_{t+t_k^i})) E\varphi(t, \xi_k^i, \zeta_{k_j(t+t_k^i)}^j, x_i(t_k^i), x_j(t_k^i)) \right. \\ \left. + \tau d_i(r_{t+t_k^i}) E\varphi(t, \xi_k^i, 0, x_i(t_k^i), s(t_k^i)) \leq a e^{-b(t+t_k^i)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$t_{k+1}^i = t_k^i + \pi_k^i,$$

其中 a 和 b 是正数.

注 3.4. 离散监控下的激发规则分为两个部分, 一个是预测部分, 另一个是判断部分. 预测部分是整个激发规则最主要部分. 相比于连续的监控激发规则, 离散监控激发规则具有更大计算复杂度.

算法 3.2 (离散监控事件激发算法).

- 1) 对所有 $i = 1, 2, \dots, N$, 初始化: $t_0^i = 0$;
- 2) 当 $t = t_k^i$ 时, 控制器收集节点状态信息 $x_i(t_k^i)$, $x_j(t_{k_j(t_k^i)}^j)$ 以及 $s(t_k^i)$ 并传递给预测机制;
- 3) 预测机制根据 (3.15)(或者 (3.16)) 预测下一次事件激发间隔 π_k^i ;
- 4) 当 $t_k^i < t < t_k^i + \pi_k^i$ 时, 如果存在某个邻居节点 j 的事件被激发, 则 $t_{k_j+1}^j = t$, 返回 3);
- 5) 如果 r_t 的状态发生转移, 则返回 2);
- 6) 当 $t = t_k^i + \pi_k^i$ 时, 则节点 i 的事件被激发, 新的事件激发时刻 $t_{k+1}^i = t$. 此时节点 i 以及它的邻居节点和控制器将会更新, 即利用 t_{k+1}^i 时的状态信息替换 t_k^i 时的状态信息, 返回 2).

在给出本节定理前, 先证明如下引理:

引理 3.3. 若函数 $f(\cdot) : R^n \mapsto R^n$ 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $l > 0$, 使得对任意 $x, y \in R^n$ 有 $\|f(x) - f(y)\| < l\|x - y\|$ 成立, 则函数 $f(\cdot)$ 满足 QUAD 条件.

证明: 取 $G = I_n$, $\Delta = (1 + \frac{l}{2})I_n$, 则根据引理 2.5 和 Lipschitz 条件可得

$$\begin{aligned} & (x - y)^\top G[f(x) - f(y) - \Delta(x - y)] \\ &= (x - y)^\top [f(x) - f(y)] - (1 + \frac{l^2}{2})(x - y)^\top (x - y) \\ &\leq \frac{1}{2}(x - y)^\top (x - y) + \frac{1}{2}(f(x) - f(y))^\top (f(x) - f(y)) - (1 + \frac{l^2}{2})(x - y)^\top (x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq -\frac{1}{2}(1+l^2)(x-y)^\top(x-y) + \frac{l^2}{2}\|x-y\|^2 \\ &= -\frac{1}{2}(x-y)^\top G(x-y). \end{aligned}$$

因此根据定义 2.5, 函数 $f(\cdot)$ 满足 QUAD 条件. \square

定理 3.2. 如果假设 3.1 成立, $f(\cdot) \in L(l_1, l_2)$ 以及 $f(\cdot) \in C(\sigma)$, 并且存在正定对角阵 $P(u) = \text{diag}\{p_1(u), \dots, p_N(u)\}$, $u \in S$, 使得对任意 $u \in S$, 有

$$\bar{\delta}P(u) \otimes G - c\theta\underline{\alpha}P(u)L(u) \otimes G\Gamma - c\tau\underline{\alpha}P(u)D(u) \otimes G\Gamma + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m q_{uv}P(v) \otimes G \leq 0,$$

其中 $\bar{\delta} = \max_k\{\delta_k\}$, $\underline{\alpha} = \min_k\{\alpha_k\}$, 那么, 基于 DRS 激发规则或者 DRE 激发规则, 按照算法 3.2, 网络系统 (3.1) 可以实现均方指数同步.

证明: 该定理的条件与定理 3.1 的条件是一样的, 唯一不同的是事件激发规则. 因此主要证明思路是考察在离散监控事件激发规则成立的条件下连续监控事件激发规则是否也成立. 这只要判断 $\|\tilde{e}_i(t)\|$ 的上界函数和 $\|e_i(t)\|$ 的下界函数是否是 φ 和 ψ 即可. 当 $l_{ij}(r_t) \neq 0$ 时, 首先估计 $\|(h(x_j(t)) - h(x_j(t_k^i))) - (h(x_i(t)) - h(x_i(t_k^i)))\|$ 的上界函数. 显然 $h(x_i(\cdot)), h(x_j(\cdot))$ 满足如下方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + z_i(r_t, t_k^i), \\ \dot{x}_j(t) = f(x_j(t)) + z_j(r_t, t_{k_j(t)}^j), \end{cases} \quad (3.17)$$

这里 $t \in [t_k^i, \min\{t_{k+1}^i, t_{k_j(t)+1}^j\}]$, $z_i(r_t, t_k^i)$ 和 $z_j(r_t, t_k^i)$ 的定义如下:

$$\begin{aligned} z_i(r_t, t_k^i) &= -\theta(t)\rho(t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t)\Gamma[h(x_j(t_k^i)) - h(x_i(t_k^i))] \\ &\quad - \tau\rho(t)d_i(r_t)\Gamma[h(x_i(t_k^i)) - h(s(t_k^i))]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

为了讨论的方便, 将方程组 (3.17) 抽象为一般形式:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) + \xi, \\ \dot{v} = f(v) + \zeta, \end{cases} \quad (3.19)$$

其中 $u = u(t), v = v(t), u(0) = u_0, v(0) = v_0 \in R^n$. 根据假设 3.1 可得

$$\begin{aligned} &\|(h(u) - h(u_0)) - (h(v) - h(v_0))\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n [(h_k(u^k) - h_k(u_0^k)) - (h_k(v^k) - h_k(v_0^k))]^2 \\ &= \sum_{k=1}^n [(h_k(u^k) - h_k(u_0^k))^2 + (h_k(v^k) - h_k(v_0^k))^2] \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^n (h_k(u^k) - h_k(u_0^k))(h_k(v^k) - h_k(v_0^k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \bar{\beta}^2 \sum_{k=1}^n [(u^k - u_0^k)^2 + (v^k - v_0^k)^2] - 2 \sum_{k=1}^n (h_k(u^k) - h_k(u_0^k))(h_k(v^k) - h_k(v_0^k)) \\
 &= \bar{\beta}^2 \sum_{k=1}^n [(u^k - u_0^k) - (v^k - v_0^k)]^2 + \varrho \\
 &= \bar{\beta}^2 \|(u - u_0) - (v - v_0)\|^2 + \varrho,
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

其中 $\bar{\beta} = \max_k \{\beta_k\}$, $\varrho = \sum_{k=1}^n [2\bar{\beta}^2(u^k - u_0^k)(v^k - v_0^k) - 2(h_k(u^k) - h_k(u_0^k))(h_k(v^k) - h_k(v_0^k))]$.
对 ϱ 进一步线性化可得:

$$\begin{aligned}
 \varrho &\leq \sum_{k=1}^n [2\bar{\beta}^2(u^k - u_0^k)(v^k - v_0^k) + (h_k(u^k) - h_k(u_0^k))^2 + (h_k(v^k) - h_k(v_0^k))^2] \\
 &\leq \sum_{k=1}^n [2\bar{\beta}^2(u^k - u_0^k)(v^k - v_0^k) + \bar{\beta}^2(u^k - u_0^k)^2 + \bar{\beta}^2(v^k - v_0^k)^2] \\
 &= \bar{\beta}^2 \sum_{k=1}^n (u^k - u_0^k + v^k - v_0^k)^2 \\
 &= \bar{\beta}^2 \|u - u_0 + v - v_0\|^2.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

将式 (3.21) 代入式 (3.20) 可得

$$\begin{aligned}
 &\|(h(u) - h(u_0)) - (h(v) - h(v_0))\|^2 \\
 &\leq \bar{\beta}^2 \|(u - u_0) - (v - v_0)\|^2 + \bar{\beta}^2 \|u - u_0 + v - v_0\|^2.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

因为 $f(\cdot)$ 属于函数类 $L(l_1, l_2)$, 根据方程 (3.19), 有

$$\begin{aligned}
 &\|(u(t) - u_0) - (v(t) - v_0)\| \\
 &= \left\| \int_0^t [f(u(s)) - f(v(s))] ds + (\xi - \zeta)t \right\| \\
 &\leq \int_0^t \|f(u(s)) - f(v(s))\| ds + \|\xi - \zeta\|t \\
 &\leq l_1 \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds + \|\xi - \zeta\|t \\
 &\leq l_1 \int_0^t \|(u(s) - u_0) - (v(s) - v_0)\| ds + (\|\xi - \zeta\| + l_1 \|u_0 - v_0\|)t.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

类似地

$$\begin{aligned}
 &\|(u(t) - u_0) + (v(t) - v_0)\| \\
 &= \left\| \int_0^t t[f(u(s)) + f(v(s))] ds + (\xi + \zeta)t \right\| \\
 &\leq \int_0^t \|f(u(s)) + f(v(s))\| ds + \|\xi + \zeta\|t \\
 &\leq l_2 \int_0^t \|u(s) + v(s)\| ds + \|\xi + \zeta\|t
 \end{aligned}$$

$$\leq l_2 \int_0^t \|(u(s) - u_0) + (v(s) - v_0)\| ds + (\|\xi + \zeta\| + l_2 \|u_0 + v_0\|)t. \quad (3.24)$$

对式 (3.23) 和式 (3.24) 分别应用 Gronwall–Bellman 不等式, 可得

$$\|(u(t) - u_0) - (v(t) - v_0)\| \leq \eta_1 (\exp^{l_1 t} - 1), \quad (3.25)$$

其中 $\eta_1 = (\|\xi - \zeta\| + l_1 \|u_0 - v_0\|)/l_1$;

$$\|(u(t) - u_0) + (v(t) - v_0)\| \leq \eta_2 (\exp^{l_2 t} - 1), \quad (3.26)$$

其中 $\eta_2 = (\|\xi + \zeta\| + l_2 \|u_0 + v_0\|)/l_2$.

结合式 (3.22)、(3.25) 和 (3.26) 可得

$$\|(h(u) - h(u_0)) - (h(v) - h(v_0))\| \leq \varphi(t, \xi, \zeta, u_0, v_0), \quad (3.27)$$

其中 $\varphi(t, \xi, \zeta, u_0, v_0) = \bar{\beta} \sqrt{(\eta_1^2 (e^{l_1 t} - 1)^2 + \eta_2^2 (e^{l_2 t} - 1)^2)}$. 因此 $\|(h(u) - h(u_0)) - (h(v) - h(v_0))\|$ 的上界函数已得到.

接下来估计 $\|u(t) - v(t)\|$ 的下界函数. 根据引理 2.5 和方程 (3.19) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [(u(t) - v(t))^\top (u(t) - v(t))] \\ &= 2(u(t) - v(t))^\top (f(u(t)) - f(v(t)) + \xi - \zeta) \\ &= 2(u(t) - v(t))^\top (f(u(t)) - f(v(t))) + 2(u(t) - v(t))^\top (\xi - \zeta) \\ &\geq 2\sigma(u(t) - v(t))^\top (u(t) - v(t)) + 2(u(t) - v(t))^\top (\xi - \zeta) \\ &\geq 2\sigma(u(t) - v(t))^\top (u(t) - v(t)) - \sigma(u(t) - v(t))^\top (u(t) - v(t)) - \frac{1}{\sigma} (\xi - \zeta)^\top (\xi - \zeta) \\ &= \sigma(u(t) - v(t))^\top (u(t) - v(t)) - \frac{1}{\sigma} (\xi - \zeta)^\top (\xi - \zeta). \end{aligned} \quad (3.28)$$

通过利用引理 3.2, 可以推出

$$(u(t) - v(t))^\top (u(t) - v(t)) \geq (u_0 - v_0)^\top (u_0 - v_0) e^{\sigma t} - \frac{(\xi - \zeta)^\top (\xi - \zeta)}{\sigma^2} (e^{\sigma t} - 1). \quad (3.29)$$

由于对任意 $u_0 \neq v_0$, 式 (3.29) 右端在小区间 $[0, t]$ 上是正数, 故有

$$\|u(t) - v(t)\| \geq \psi(t, \xi, \zeta, u_0, v_0), \quad (3.30)$$

其中

$$\psi(t, \xi, \zeta, u_0, v_0) = \left\{ \|u_0 - v_0\|^2 e^{\sigma t} - \frac{\|\xi - \zeta\|^2}{\sigma^2} (e^{\sigma t} - 1) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

综上所述, 如果激发规则 DRS 满足, 那么根据式 (3.27) 和 (3.30), 激发规则 CRS 也满足. 类似地, 如果激发规则 DRE 满足, 那么根据式 (3.27), 激发规则 CRE 也满足. 因此根据定理 3.1 的结论, 网络系统 (3.1) 可以实现均方指数同步. \square

注 3.5. 几何上, φ 可以看作是在映射 h 下 $u(t)$ 和 $v(t)$ 从 0 时刻到 t 时刻的位移差的上界函数, 而 ψ 可以看作是 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在 t 时刻的距离的下界函数.

注 3.6. 在 DRS 激发规则中, 从 0 时刻到 t 时刻轨道之间的位移差的上界函数被同步误差的下界函数控制, 而在 DRE 激发规则中, 从 0 时刻到 t 时刻轨道之间的位移差的上界函数被可由参数 a, b 调节收敛速度的指数函数控制. 因此 DRS 激发规则的同步速度比 DRE 激发规则快, 但 DRS 激发规则的激发次数比 DRE 激发规则高. 故在选择激发规则时, 需要在收敛速度和激发次数之间进行取舍. 如果状态监控、数据更新、信号通讯成本较低, 对同步速度要求不高的情况下, 则选用 DRE 激发规则并选择较大的参数 a, b , 否则选择 DRS 激发规则较好. 四种激发函数的各方面特征比较如下:

表 3.1: 四种激发规则的特征比较

同步速度	CRS>DRS, CRE>DRE
监控成本	CRS=CRE>DRS>DRE
计算负荷	DRS>DRE>CRS>CRE
激发次数	DRS>DRE>CRS>CRE

注 3.7. 连续监控激发规则和离散监控激发规则最大的区别在于收集节点状态信息时刻的不同, 在连续监控情形中, 监控器需要不停地监控网络所有节点状态并收集记录其状态信息, 激发规则需要根据收集到数据进行实时更新, 即激发规则每时每刻都需要计算和判断条件是否满足. 而在离散监控激发规则中, 监控器只在事件激发时刻监控节点状态, 当某个节点的事件激发时, 监控器把该节点状态信息传递给预测机制, 预测机制根据收集得到的信息进行预测下一次激发时刻, 即激发规则是需要在激发时刻对数据进行更新.

3.3 数值模拟

本节给出一个数值例子去验证前文提出定理结论的有效性, 并在数值例子中比较四种激发规则的性能. 该例子考虑含有 100 个节点的复杂网络, 每个节点都有 3 个不同的状态组成. 网络模型如下:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i(t) &= f(x_i(t)) - \theta(t)\rho(t) \sum_{j=1}^{100} l_{ij}(r_t) \Gamma[h(x_j(t_k^i)) - h(x_i(t_k^i))] + u_i(t), \\
 t_k^i &\leq t < t_{k+1}^i, \quad i = 1, \dots, 100. \\
 u_i(t) &= -\tau\rho(t)d_i(r_t)\Gamma[h(x_i(t_k^i)) - h(s(t_k^i))],
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

其中网络可能的拓扑结构见图 3.3、图 3.4 和 图 3.5, 这里选择著名的蔡氏电路系统作为自动力学性态, 它的动力学方程为:

$$f(x) = \begin{pmatrix} z_1(-x_1 + x_2 - g(x_1)) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -z_2(x_2) \end{pmatrix}$$

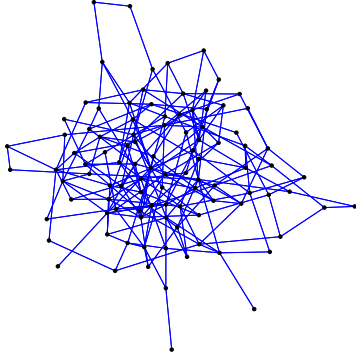


图 3.3: 马尔可夫链处在状态 1 下的网络拓扑结构.

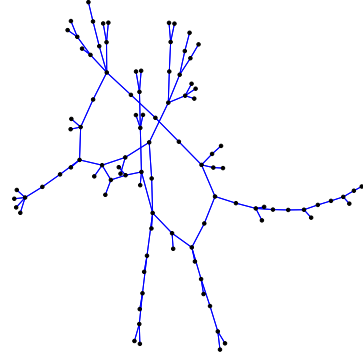


图 3.4: 马尔可夫链处在状态 2 下的网络拓扑结构.

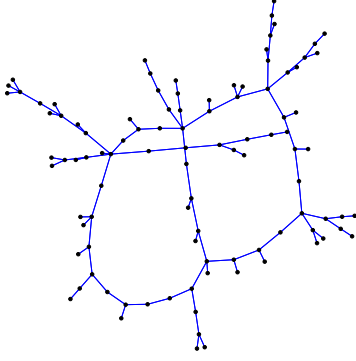


图 3.5: 马尔可夫链处在状态 3 下的网络拓扑结构.

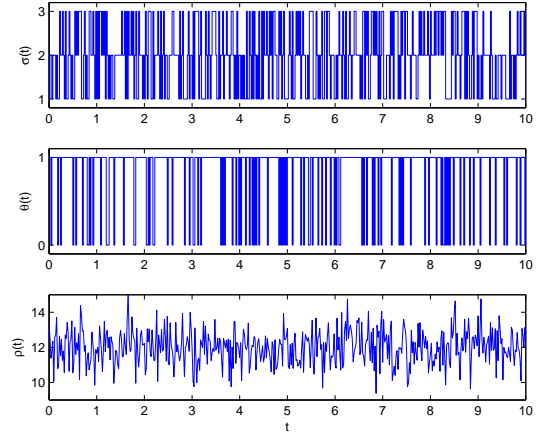


图 3.6: 马尔可夫链和随机变量的变化图.

其中 $g(x_1) = r_1 x_1 + 1/2(r_2 - r_1)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$, $z_1 = 9.78, z_2 = 14.97, r_1 = -0.75, r_2 = -1.31$. 非线性耦合函数以及状态空间为 $S = \{1, 2, 3\}$ 的马氏链的转移率矩阵如下所示:

$$h(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 0.2 \sin x_1 \\ 2x_2 + 1 \\ 3x_3 + 0.5 \cos x_3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 5 & -8 & 3 \\ 1 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

根据 $h(x)$ 定义, 通过计算可知, 取 $\alpha = 1.95, \beta = 3.25$ 可得 $h(x)$ 满足假设 3.1. 可能的牵制控制节点为: $\mathcal{D}_1 = \{1, 20, 50, 79\}, \mathcal{D}_2 = \{1, 23, 43, 54\}, \mathcal{D}_3 = \{1, 4, 29, 31\}$. $\theta(t)$ 是参数为 $p = 0.8$ 伯努利随机变量, $\rho(t)$ 是参数为 $\mu = 12, \sigma^2 = 1$ 的正态随机变量. 其演变情况如图 3.6 所示.

下面选择相应的参数使得定理 3.1 和定理 3.2 的条件成立. 取 $\Gamma = G = P(u) =$

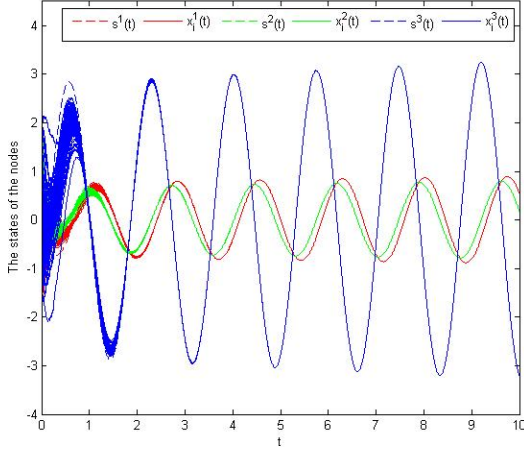


图 3.7: 在连续监控激发规则 CRS 下, 网络节点状态向量 $x_i^j(t) (i = 1, 2, \dots, 100, j = 1, 2, 3)$ 和目标轨道 $s^j(t) (j = 1, 2, 3)$ 随时间变化情况.

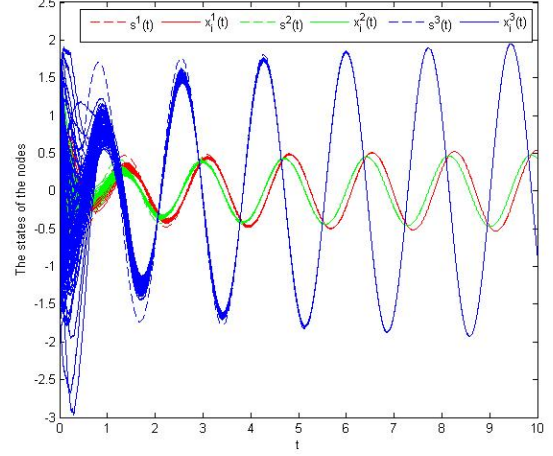


图 3.8: 在连续监控激发规则 CRE 下, 网络节点状态向量 $x_i^j(t) (i = 1, 2, \dots, 100, j = 1, 2, 3)$ 和目标轨道 $s^j(t) (j = 1, 2, 3)$ 随时间变化情况.

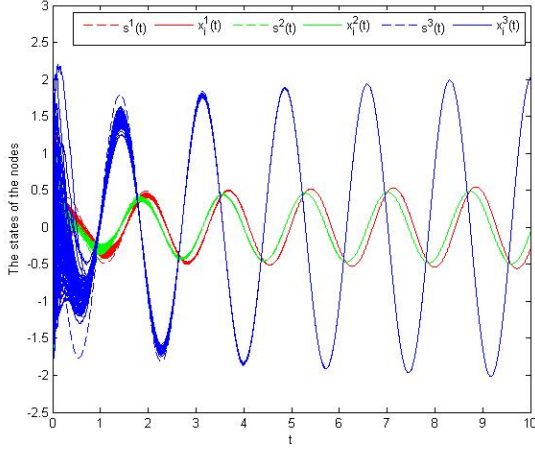


图 3.9: 在离散监控激发规则 DRS 下, 网络节点状态向量 $x_i^j(t) (i = 1, 2, \dots, 100, j = 1, 2, 3)$ 和目标轨道 $s^j(t) (j = 1, 2, 3)$ 随时间变化情况.

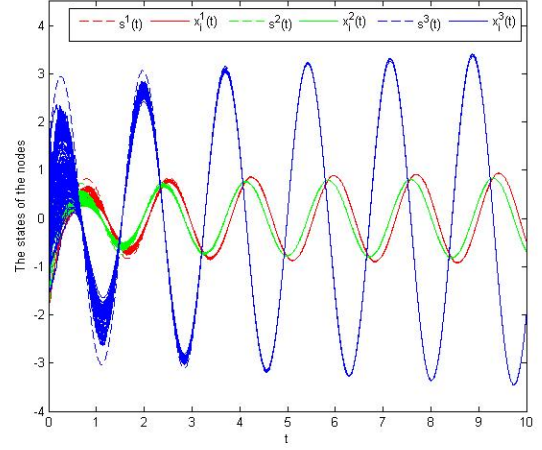


图 3.10: 在离散监控激发规则 DRE 下, 网络节点状态向量 $x_i^j(t) (i = 1, 2, \dots, 100, j = 1, 2, 3)$ 和目标轨道 $s^j(t) (j = 1, 2, 3)$ 随时间变化情况.

$I_3, \Delta = \epsilon I_3, \epsilon = 11.7$. 通过对函数 f 求偏导数可得其可能的 Jacobin 矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 3.0318 & 9.78 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.97 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2.445 & 9.78 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.97 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此取 $\xi = \epsilon - 9.1207 = 2.5793$, 其中 9.1207 是 Jacobin 矩阵对称部分的最大特征值. 接下来估计参数 l_1, l_2 , 根据微分中值定理可得:

$$\begin{aligned} (f(u)f(v))^{\top}((f(u) - f(v))) &= (J(\varsigma)(u - v))^{\top}(J(\varsigma)(u - v)) \\ &= (u - v)^{\top}J(\varsigma)^{\top}J(\varsigma)(u - v) \\ &\leq \lambda_{\max}(J(\varsigma)^{\top}J(\varsigma))(u - v)^{\top}(u - v) \end{aligned}$$

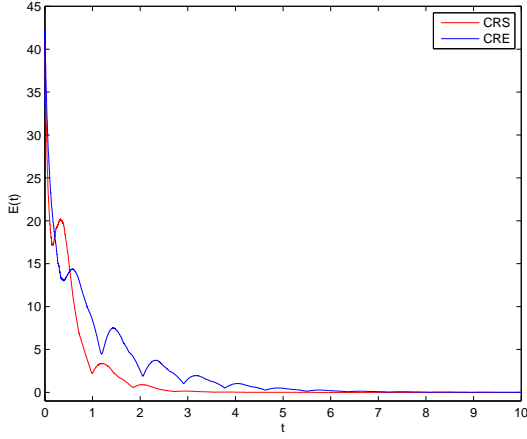


图 3.11: 在连续监控激发规则 CRS 和激发规则 CRE 下, 网络总误差轨道 $E(t)$ 随时间变化情况.

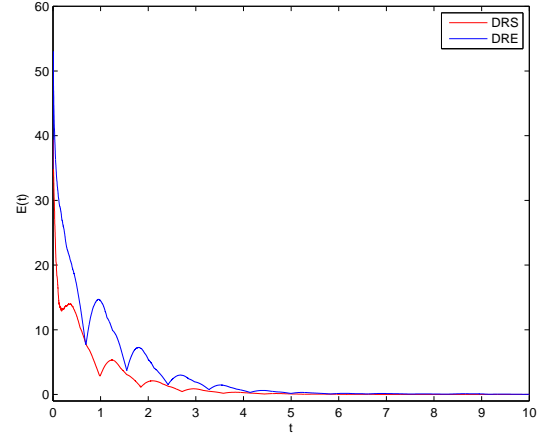


图 3.12: 在离散监控激发规则 DRS 和激发规则 DRE 下, 网络总误差轨道 $E(t)$ 随时间变化情况.

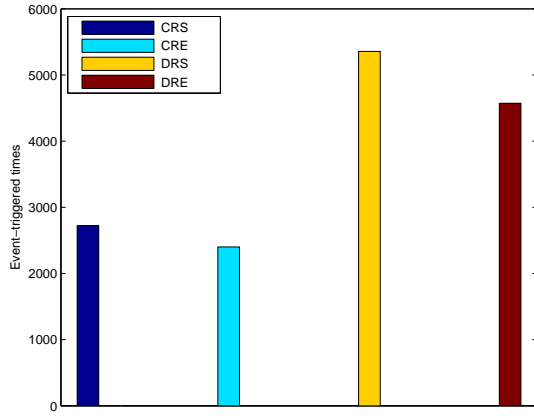


图 3.13: 连续监控和离散监控四种激发规则每个节点平均激发次数.

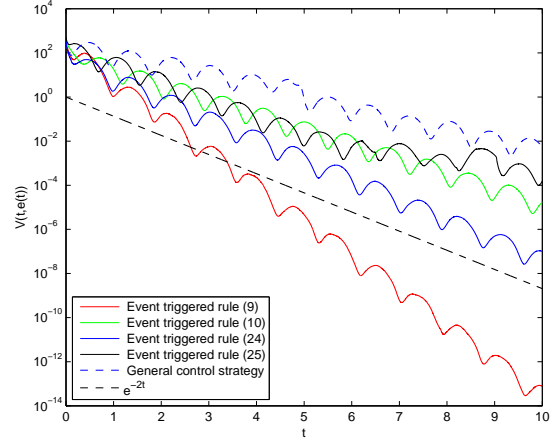


图 3.14: Lyapunov-Krasovskii 函数 $V(t)$.

$$\leq 17.9826^2(u-v)^\top(u-v)$$

故取 $l_1 = 17.9826$ 可使得 $\|f(u) - f(v)\| \leq l_1 \|u - v\|$. 记 $\nu = z_1(1+r_1)$ 或者 $z_1(1+r_2)$, $\mu = x + s$, 于是

$$\begin{aligned} & \|f(x) + f(s)\|^2 \\ &= (-\nu\mu_1 + z_1)^2 + (\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)^2 + (z_2\mu_2)^2 \\ &= (\nu^2 + 1)\mu_1^2 + (z_1^2 + z_2^2 + 1)\mu_2^2 + \mu_3^2 - 2(z_1\nu + 1)\mu_1\mu_2 + 2\mu_1\mu_3 - 2\mu_2\mu_3 \\ &\leq (\nu^2 + z_1\nu + 3)\mu_1^2 + (z_1^2 + z_2^2 + z_1\nu + 3)\mu_2^2 + 3\mu_3^2 \\ &\leq 32.8901\mu_1^2 + 346.6614\mu_2^2 + 3\mu_3^2 \\ &\leq 18.6188^2\|x + s\|^2. \end{aligned}$$

因此取 $l_2 = 18.6188$, 可使得 $\|f(x) + f(s)\| \leq l_2\|x + s\|$. 综上所述, $f(\cdot)$ 属于函数类

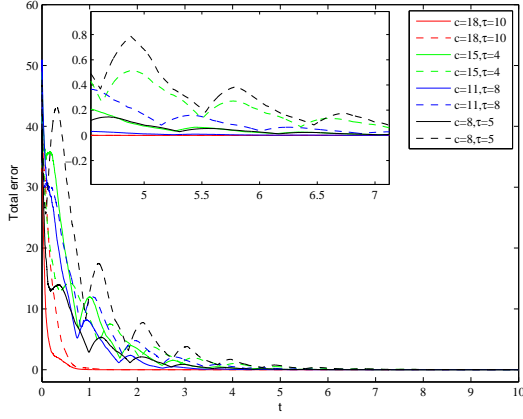


图 3.15: 连续监控下不同耦合强度和控制强度的系统总误差图, 其中实线表示 CRS 激发规则, 虚线表示 CRE 激发规则.

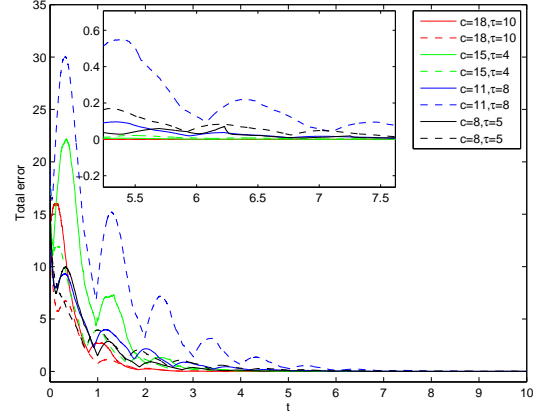


图 3.16: 离散监控下不同耦合强度和控制强度的系统总误差图, 其中实线表示 DRS 激发规则, 虚线表示 DRE 激发规则.

$L(l_1, l_2)$.

选取 $c = 12, \theta = 0.8, \tau = 2.8$, 那么对所有 $u \in S$, $\epsilon I - c\theta\alpha L(u) - c\alpha\tau D(u) < 0$. 即定理 3.1 和定理 3.2 的条件成立. 取 $\delta = 0.05, a = b = 0.2$, 通过计算可得 $\omega = 0.2$.

利用欧拉法, 取步长为 0.01, 区间为 $[0, 10]$. 通过 MATLAB 求解微分方程 (5.3) 并画出相应的变化图, 见图 3.7 至图 3.16.

图 3.7 至图 3.10 展示了在四种激发规则下, 节点状态向量轨道 $x_i^j(t) (i = 1, 2, \dots, 100, j = 1, 2, 3)$ 的变化情况. 从图中可以看出, 所有节点的状态都趋于同步. 因此本文提出的激发规则是有效的.

为了更好的比较四种激发规则的性能, 下面画出不同激发规则下的网络系统总同步误差, 其定义为如下:

$$E(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^3 (x_i^j(t) - s^j(t))^2}.$$

图 3.11 和图 3.12 描述了在四种激发规则下网络系统总误差随时间变化过程, 从这两个图可以看出, 系统误差都能够趋于零. 但各种激发规则趋于零的时间有稍微的差别. CRS 激发规则达到同步所需要的时间比 CRE 要快一些. DRS 激发规则达到同步所需要的时间比 DRE 要快一些. 即基于误差上界的激发规则有较短的同步时间. 这与表 3.1 分析的结果一致.

图 3.13 和图 3.14 分别是四种激发规则的平均激发次数和 Lyapunov—Krasovskii 函数 $V(t)$. 从图中看出, 离散监控的激发规则的平均激发次数要高于连续情形, 四种事件激发函数的平均激发次数从高到低依次是: $DRS > DRE > CRS > CRE$, 即要使得同步时间较快则需要付出更高的激发次数. 四种激发规则的 $V(t)$ 收敛速度都比 e^{-2t} 快, 即网络能够实现指数同步. 图 3.15 和图 3.16 是选择几个不同耦合强度和控制强度时的系统误差图, 图中可以看出, 复杂网络节点间耦合强度和输入的控制强度越大, 系统获得同步所需要的时间就越短.

3.4 小结

在这一章节, 主要研究了一类带有马氏切换非线性耦合的时滞网络, 主要引进了事件激发采样的牵制控制策略. 分析了连续和离散两种情形下的基于不同误差上界的激发规则, 利用 Lyapunov—Krasovskii 稳定性理论和 Kronecker 积的性质推导了充分的均方指数同步条件, 并在数值模拟中比较了四种不同激发规则之间的同步性能以及消耗的成本.

第 4 章 集中式事件激发采样下带部分未知转移率和时滞的复杂网络同步问题

上一章节讨论了基于分散式事件激发采样控制策略下的转移概率已知的马氏切换的复杂网络. 尽管网络模型考虑的切换拓扑的情形, 但是马氏链的转移率是已知的. 特别是多切换拓扑的模型中, 很难去精确获得每个切换拓扑间的转移率. 本章节将切换拓扑的转移率推广到部分未知的情形. 另一方面, 在现实的网络中, 由于信号传输和信息过程的有限速度以及有限带宽, 所以时滞是不可避免的, 如无线通信网络中由于环境噪声等影响用户间的通信会出现时间延迟的情况. 时滞可能会降低网络的性能和稳定性. 在采样策略上, 本章采用集中式事件激发采样方法, 集中式事件激发采样只有一个激发规则, 所有节点都按照此规则更新. 其特点是花费较少的计算负荷. 但采样频率会较频繁.

4.1 集中式事件激发采样的网络模型

在这一章节, 考虑一个部分未知转移率的马尔可夫链切换拓扑以及自身动力学时滞复杂网络, 在集中式事件激发采样控制策略下的数学模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(t, x_i(t), x_i(t - \tau)) - c \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma[x_j(t_k) - x_i(t_k)] + u_i(t), \\ t_k \leq t < t_{k+1}, \quad i &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.1)$$

这里的节点自身动力与前两章的模型相比较多了时滞因子, 即 $f(\cdot, \cdot, \cdot) : R \times R^n \times R^n \mapsto R^n$; c 是常量耦合强度; $\{t_1, t_2, \dots\}$ 是严格递增的激发时刻序列; $u_i(t)$ 是控制输入, 定义如下:

$$u_i(t) = -\rho c \beta_i(t) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma[x_i(t_k) - x_j(t_k)], \quad (4.2)$$

这里 ρc 是控制强度增益; $\beta_i(t)$ 是伯努利随机变量, 并且满足: $E\beta_i(t) = \beta \in (0, 1)$, $E[\beta_i(t)\beta_j(t)] = E\beta_i(t)E\beta_j(t)$.

注 4.1. 以上复杂网络模型除了马氏链和自身动力学与上一章不同之外, 该模型并不需要特定的同步目标轨道作为引导, 网络的同步目标是由节点在演变过程中确定的, 即这是一个动态调整的同步目标. 由于本节并未采用孤立节点的动力学行为作为网络同步目标, 而是采用动态协调的同步目标. 因此这里的控制输入的形式与上一章的控制形式有所不同. 每个节点的控制输入都是与该节点与其余节点的差成正比, 即根据节点自身与邻居节点之间的关系调整控制输入.

由于自身动力学行为包含有时滞因子, 所以 QUAD 条件在本章不再适用, 下面给出类似 Lipschitz 条件的假设:

假设 4.1. ^[43] 对于节点自身动力学 $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, 假设存在两个常数 α_1 和 α_2 , 使得对任意的 $x(t), y(t) \in R^n$, 有

$$\|f(t, x(t), x(t-\tau)) - f(t, y(t), y(t-\tau))\| \leq \alpha_1 \|x(t) - y(t)\| + \alpha_2 \|x(t-\tau) - y(t-\tau)\|.$$

对于一些著名混沌吸引子, 例如蔡氏电路等, 他们的动力学 $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 均满足上述假设. 在同步的文献中, 类似的假设已经被广泛地采用.

下面给出本节至关重要的引理:

引理 4.1. 如果半正定矩阵 $A \in R^n$ 满足行和为零且有且仅有一个零特征根, 则对任意 $x \in R^n$, 只要 $x^\top \mathbf{1}_N = 0$, 则有 $x^\top Ax \geq \lambda_2 x^\top x$, 其中 λ_2 是矩阵 A 最小非零特征值.

证明: 由于矩阵 A 是半正定矩阵且有且仅有一个零特征根, 所以将矩阵 A 的特征根进行如下排序: $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$, 同时存在正交矩阵 $P = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_1 = (1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})^\top$, $\xi_i \in R^n, i = 1, 2, \dots, n$, 使得 $A = PDP^\top$, 其中 $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. 又因为 $A\mathbf{1}_n = 0$, 所以 $(\lambda_1 \mathbf{1}_n^\top \xi_1, \lambda_2 \mathbf{1}_n^\top \xi_2, \dots, \lambda_n \mathbf{1}_n^\top \xi_n)^\top = 0$. 注意到 $\lambda_i > 0, i = 2, \dots, n$, 故 $\xi_i^\top \mathbf{1}_n = 0, i = 2, \dots, n$. 对任意向量 $x \in R^n$, $x^\top \mathbf{1}_N = 0$, 存在向量 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top \in R^n$ 使得 $x = Pa$. 根据 $x^\top \mathbf{1}_N = 0$ 以及 $\xi_i^\top \mathbf{1}_n = 0, i = 2, \dots, n$, 可以得出 $a_1 \xi_1^\top \mathbf{1}_n = \sqrt{n} a_1 = 0$, 故 $a_1 = 0$. 因此 $x^\top Ax = \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 \geq \lambda_2 (a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) = \lambda_2 a^\top a = \lambda_2 x^\top x$. \square

引理 4.2 (Halanay 不等式). ^[92] 设 $w(t)$ 是定义在区间 $[t_0 - \tau, \infty)$ 上的非负函数, 并且区间 $[t_0, \infty)$ 上连续. 如果存在两个正数 ξ, η 并且满足 $\xi > \eta$, 使得

$$\dot{w}(t) \leq -\xi w(t) + \eta w(t - \tau), \quad t \geq t_0,$$

则 $w(t) \leq w_{t_0} e^{-\gamma(t-t_0)}$, $t \geq t_0$, 其中 $w_{t_0} = \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0} w(t)$, $\gamma > 0$ 是方程 $\xi - \gamma - \eta e^{\gamma\tau} = 0$ 的最小实根.

定义测量误差 $\delta_i(t) = x_i(t_k) - x_i(t)$, 同步误差 $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$, 其中 $s(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t)$ 为参考节点. 于是有 $s(t) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N^\top \otimes I_n) x(t)$, 以及

$$s(t) - s(t_k) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N^\top \otimes I_n) (x(t) - x(t_k)) = -\frac{1}{N} (\mathbf{1}_N^\top \otimes I_n) \delta(t), \quad (4.3)$$

这里 $x(t) = (x_1^\top(t), x_2^\top(t), \dots, x_N^\top(t))^\top$, $\delta(t) = (\delta_1^\top(t), \delta_2^\top(t), \dots, \delta_N^\top(t))^\top$. 根据式 (4.2) 和式 (4.3), 可得

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -\rho c \beta_i(t) \Gamma(x_i(t_k) - s(t_k)) \\ &= -\rho c \beta_i(t) \Gamma(\delta_i(t) + x_i(t) - s(t) + s(t) - s(t_k)) \end{aligned}$$

$$= -\rho c \beta_i(t) \Gamma(\delta_i(t) + e_i(t) - \frac{1}{N}(\mathbf{1}_N^\top \otimes I_n) \delta(t)).$$

为了方便, 记 $f(t, x(t), x(t - \tau)) = (f^\top(t, x_1(t), x_1(t - \tau)), \dots, f^\top(t, x_N(t), x_N(t - \tau)))^\top$, $B_t = \text{diag}\{\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_N(t)\}$. 由于 $x_j(t_k) = \delta_j(t) + x_j(t) = \delta_j(t) + e_j(t) + s(t)$ 和 $\sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) = 0$, 所以, 根据 Kronecker 积的性质, 式 (4.1) 可以被写成下式:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t - \tau)) - c[L_{r_t} \otimes \Gamma](\delta(t) + e(t)) \\ &\quad - \rho c[B_t \otimes \Gamma][\delta(t) + e(t) - (U \otimes I_n)\delta(t)], \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $U = \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^\top$, $e(t) = (e_1^\top(t), \dots, e_N^\top(t))^\top$. 因为 $e(t) = x(t) - \mathbf{1}_N \otimes s(t) = x(t) - (U \otimes I_n)x(t)$ 和 $(\mathbf{1}_N^\top \otimes I_n)(L_{r_t} \otimes \Gamma) = (\mathbf{1}_N^\top L_{r_t}) \otimes \Gamma = 0$, 所以网络系统 (4.1) 的误差系统为:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - (U \otimes I_n)\dot{x}(t) \\ &= f(t, x(t), x(t - \tau)) - [U \otimes I_n]f(t, x(t), x(t - \tau)) - c[L_{r_t} \otimes \Gamma](\delta(t) + e(t)) \\ &\quad - \rho c[B_t \otimes \Gamma][\delta(t) + e(t) - (U \otimes I_n)\delta(t)] + \rho c[U B_t \otimes \Gamma][\delta(t) + e(t) - (U \otimes I_n)\delta(t)] \\ &= f(t, x(t), x(t - \tau)) - [U \otimes I_n]f(t, x(t), x(t - \tau)) - c[(L_{r_t} + \rho B_t - \rho U B_t) \otimes \Gamma]e(t) \\ &\quad - c[(L_{r_t} + \rho B_t - \rho B_t U - \rho U B_t + \rho U B_t U) \otimes \Gamma]\delta(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2 基于集中式事件激发采样的复杂网络同步分析

下面设置集中式的事件激发策略, 结合随机发生控制的方法给出网络系统 (4.1) 的均方指数同步充分条件, 并且给出事件激发间隔的下界, 以确保在事件激发过程中不会发生事件瞬间累积, 即 Zeno 现象. 在给出主要结论前, 先给出一些符号的说明: $\bar{\lambda}_v = \lambda_N(L_v)$, $\bar{\lambda} = \max_{u \in S} \{\lambda_N(L_u)\}$, $\lambda_2 = \min_{u \in S} \{\lambda_2(L_u)\}$, $\gamma = \min_{i=1}^n \{\gamma_i\}$, $\bar{\gamma} = \max_{i=1}^n \{\gamma_i\}$.

4.2.1 网络的同步判据

记 $\hat{x}(t) = (L_u \otimes I_n)x(t)$, $\hat{\delta}(t) = (L_u \otimes I_n)\delta(t)$, $\hat{e}(t) = (L_u \otimes I_n)e(t)$, 则有 $\hat{e}(t) = (L_u \otimes I_n)e(t) = (L_u \otimes I_n)x(t) = \hat{x}(t)$. 定义事件激发函数如下:

$$g(t) = \|\hat{\delta}(t)\| - \varpi \|\hat{x}(t)\|, \quad (4.6)$$

其中 ϖ 是正数. 当事件激发函数达到阈值 0 时, 系统就会被激发, 激发时刻随即被确定, 即:

$$t_{k+1} = \max\{t \geq t_k : g(t) \leq 0\}.$$

定理 4.1. 如果假设 4.1 成立, 并且存在常数 a, a_1, a_2, \dots, a_m , 使得对任意 $u \in S$, 有:

$$\begin{cases} \pi + a + \pi_u - c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) \leq 0, \\ 2a\lambda_2^2 - \bar{\lambda}\alpha_2 > 0, \\ L_v^2 - a_u I_N \leq 0, & \text{if } v \neq u, v \in S_2^u, \\ L_v^2 - a_u I_N \geq 0, & \text{if } v = u, v \in S_2^u, \end{cases} \quad (4.7)$$

其中 $\pi = \bar{\lambda}(\frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \alpha_2)$, $\pi_u = \frac{1}{2} \sum_{v \in S_1^u \setminus \{u\}} q_{uv}(\frac{\bar{\lambda}_v^2}{\lambda_2^2} - \frac{a_u}{\lambda_2^2}) + \frac{1}{2} q_{uu} I(u)(1 - \frac{a_u}{\lambda_2^2})$, 如果 $u \in S_1^u$, 则 $I(u) = 1$, 否则 $I(u) = 0$. 那么, 在事件激发函数 (4.6) 下, 取 $\varpi = \frac{c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) - \pi - a - \max_{u \in S} \{\pi_u\}}{c\bar{\gamma}(\lambda + \rho\beta)}$, 网络系统 (4.1) 对任意初值都可以实现均方指数同步.

证明: 定义随机 Lyapunov-Krasovskii 函数如下:

$$V(t) = \frac{1}{2} \hat{e}^\top(t) \hat{e}(t).$$

记 $x^k(t) = (x_1^k(t), x_2^k(t), \dots, x_N^k(t))^\top$, $e^k(t) = (e_1^k(t), e_2^k(t), \dots, e_N^k(t))^\top$, 则有:

$$\hat{e}^\top(t) \hat{e}(t) = e^\top(t) [L_u^2 \otimes I_n] e(t) = \sum_{k=1}^n e^k(t)^\top L_u^2 e^k(t). \quad (4.8)$$

因为 L_u 满足 $\sum_{i=1}^N e_i^k(t) = \sum_{i=1}^N [x_i^k(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j^k(t)] = 0$, 所以 $L_u e^k(t) = 0$ 当且仅当 $e^k(t) = 0$. 因此 $V(t) = 0$ 当且仅当 $e(t) = 0$. 故 Lyapunov-Krasovskii 是合格的.

根据式 (4.8) 和引理 4.1, 有:

$$\hat{e}^\top(t) \hat{e}(t) = \sum_{k=1}^n e^k(t)^\top L_u^2 e^k(t) \geq \lambda_2^2 \sum_{k=1}^n e^k(t)^\top e^k(t) = \lambda_2^2 e^\top(t) e(t).$$

因此 $\|\hat{x}(t)\| = \|\hat{e}(t)\| \geq \lambda_2 \|e(t)\|$.

因为 $E[B_t] = \beta I_N$ 和 $L_u U = \frac{1}{N} L_u 1_N 1_N^\top = 0$, 因此有:

$$\begin{aligned} E\mathcal{L}V(t) &= E\left\{\hat{e}^\top(t) \dot{\hat{e}}(t) + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m q_{uv} \hat{e}^\top(t) \hat{e}(t)\right\} \\ &= E\left\{\hat{e}^\top(t) [L_u \otimes I_n] f(t, x(t), x(t-\tau)) - c \hat{e}^\top(t) [(L_u^2 + \rho\beta L_u) \otimes \Gamma] e(t) \right. \\ &\quad \left. - c \hat{e}^\top(t) [(L_u^2 + \rho\beta L_u) \otimes \Gamma] \delta(t) + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m q_{uv} e^\top(t) [L_v^2 \otimes I_n] e(t)\right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

根据 $L_u 1_N = 0$ 以及假设 4.1, 有:

$$\begin{aligned} &E\left\{\hat{e}^\top(t) [L_u \otimes I_n] f(t, x(t), x(t-\tau))\right\} \\ &= E\left\{\hat{x}(t) [L_u \otimes I_n] [f(t, x(t), x(t-\tau)) - \mathbf{1}_N \otimes f(t, s(t), s(t-\tau))]\right\} \\ &\leq E\left\{\|\hat{x}(t)\| \|L_u \otimes I_n\| (\alpha_1 \|e(t)\| + \alpha_2 \|e(t-\tau)\|)\right\} \\ &\leq E\left\{\bar{\lambda} \alpha_1 \|\hat{x}(t)\| \|e(t)\| + \bar{\lambda} \alpha_2 \|\hat{x}(t)\| \|e(t-\tau)\|\right\} \\ &\leq \frac{\bar{\lambda} \alpha_1}{\lambda_2} E\|\hat{x}(t)\|^2 + \bar{\lambda} \alpha_2 (E\|\hat{x}(t)\|^2 + \frac{1}{2} E\|e(t-\tau)\|^2) \\ &\leq \pi E\|\hat{x}(t)\|^2 + b E\|e(t-\tau)\|^2 \\ &= -2a E\|e(t)\|^2 + b E\|e(t-\tau)\|^2 + (\pi + a) E\{\hat{x}^\top(t) \hat{x}(t)\}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 $\pi = \bar{\lambda}(\frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \alpha_2)$, $b = \frac{\bar{\lambda} \alpha_2}{\lambda_2^2}$. 通过利用引理 2.4 可得:

$$-c E\left\{\hat{e}^\top(t) [(L_u^2 + \rho\beta L_u) \otimes \Gamma] e(t)\right\} = -c E\left\{\hat{e}^\top(t) [(L_u + \rho\beta I_N) \otimes \Gamma] \hat{e}(t)\right\}$$

$$\leq -c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta)\mathbb{E}\{\hat{x}^\top(t)\hat{x}(t)\}. \quad (4.11)$$

根据范数三角不等式性可得:

$$\begin{aligned} -c\mathbb{E}\left\{\hat{e}^\top(t)[(L_u^2 + \rho\beta L_u) \otimes \Gamma]\delta(t)\right\} &= -c\mathbb{E}\left\{\hat{x}^\top(t)[(L_u + \rho\beta I_N) \otimes \Gamma]\hat{\delta}(t)\right\} \\ &\leq c\mathbb{E}\left\{\|\hat{x}^\top(t)\| \|(L_u + \rho\beta I_N) \otimes \Gamma\| \|\hat{\delta}(t)\|\right\} \\ &\leq c\bar{\gamma}(\bar{\lambda} + \rho\beta)\mathbb{E}\left\{\|\hat{x}^\top(t)\| \|\hat{\delta}(t)\|\right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

因为 $\sum_{v=1}^m q_{uv} = 0$, 结合条件 (4.7), 可得:

$$\begin{aligned} &\sum_{v=1}^m q_{uv}\mathbb{E}\left\{e^\top(t)[L_v^2 \otimes I_n]e(t)\right\} \\ &= \sum_{v \in S_1^u} q_{uv}\mathbb{E}\left\{e^\top(t)[(L_v^2 - a_u I_N) \otimes I_n]e(t)\right\} + \sum_{v \in S_2^u} q_{uv}\mathbb{E}\left\{e^\top(t)[(L_v^2 - a_u I_N) \otimes I_n]e(t)\right\} \\ &\leq \sum_{v \in S_1^u \setminus \{u\}} q_{uv}\mathbb{E}\left\{e^\top(t)[(L_v^2 - a_u I_N) \otimes I_n]e(t)\right\} + I(u)q_{uu}\mathbb{E}\left\{e^\top(t)[(L_u^2 - a_u I_N) \otimes I_n]e(t)\right\} \\ &\leq \sum_{v \in S_1^u \setminus \{u\}} q_{uv}(\bar{\lambda}_v^2 - a_u)\mathbb{E}\left\{e^\top(t)e(t)\right\} + I(u)q_{uu}\mathbb{E}\left\{e^\top(t)[L_u^2 \otimes I_n]e(t)\right\} \\ &\quad - I(u)q_{uu}a_u\mathbb{E}\left\{e^\top(t)e(t)\right\} \\ &\leq \sum_{v \in S_1^u \setminus \{u\}} q_{uv}\left(\frac{\bar{\lambda}_v^2}{\bar{\lambda}_2^2} - \frac{a_u}{\bar{\lambda}_2^2}\right)\mathbb{E}\left\{\hat{e}^\top(t)\hat{e}(t)\right\} + q_{uu}I(u)\left(1 - \frac{a_u}{\bar{\lambda}_2^2}\right)\mathbb{E}\left\{\hat{e}^\top(t)\hat{e}(t)\right\} \\ &= 2\pi_u\mathbb{E}\left\{\hat{x}^\top(t)\hat{x}(t)\right\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中 $\pi_u = \frac{1}{2} \sum_{v \in S_1^u \setminus \{u\}} q_{uv}\left(\frac{\bar{\lambda}_v^2}{\bar{\lambda}_2^2} - \frac{a_u}{\bar{\lambda}_2^2}\right) + \frac{1}{2}q_{uu}I(u)\left(1 - \frac{a_u}{\bar{\lambda}_2^2}\right)$, $I(u)$ 为示性函数, 即如果 $u \in S_1^u$, 则 $I(u) = 1$, 否则 $I(u) = 0$.

将式 (4.10)–(4.13) 代入式 (4.9), 于是可得:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathcal{L}V(t) &\leq -2a\mathbb{E}V(t) + b\mathbb{E}V(t - \tau) + [\pi + a + \pi_u - c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta)]\mathbb{E}\left\{\hat{x}^\top(t)\hat{x}(t)\right\} \\ &\quad + c\bar{\gamma}(\bar{\lambda} + \rho\beta)\mathbb{E}\left\{\|\hat{x}^\top(t)\| \|\hat{\delta}(t)\|\right\}. \end{aligned}$$

根据定理条件 (4.7), 当 $t = t_k (k = 1, 2, \dots)$ 时, 事件激发函数 $g(t) = 0$; 当 $t_k < t < t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ 时, 事件激发函数 $g(t) < 0$. 因此上式最后两项的和为非正数, 于是可得:

$$\mathbb{E}\mathcal{L}V(t) \leq -2a\mathbb{E}V(t) + b\mathbb{E}V(t - \tau). \quad (4.14)$$

通过利用引理 4.2, 可得:

$$\mathbb{E}V(t) \leq V_0 e^{-\epsilon t}, \quad (4.15)$$

其中 $V_0 = \sup_{-\tau \leq t \leq 0} EV(t)$, $\epsilon > 0$ 是方程 $2a - \epsilon - \frac{\bar{\lambda}\alpha_2}{\lambda_2^2}e^{\epsilon t} = 0$ 的最小实根. 根据 $V(t)$ 的定义以及式 (4.15), 可得:

$$E\|x_i(t) - s(t)\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_2^2}EV(t) \leq \frac{2V_0}{\lambda_2^2}e^{-\epsilon t}, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

因此

$$E\|x_i(t) - x_j(t)\|^2 \leq \frac{8V_0}{\lambda_2^2}e^{-\epsilon t}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

根据 定义 2.1, 网络系统 (4.1) 可以达到均方指数同步. \square

注 4.2. 事实上, 定理 4.1 的条件是比较容易满足的. 首先, 选择合适的 a_u 使得最后两个不等式成立; 其次, 选择大于 $\frac{\bar{\lambda}\alpha_2}{2\lambda_2^2}$ 的常数 a ; 最后, 选择合适的常数 c 和 ρ 就可以使得第一个不等式满足. 容易看出, 常数 c 和 ρ 在定理中扮演着重要的角色. 耦合强度 c 和控制强度 ρ 越大, 定理的条件就越容易满足. 即使节点间耦合强度 c 比较微弱, 但只要控制输入强度 ρ 足够大, 网络依然可以实现同步.

注 4.3. 事件激发函数 (4.6) 只依赖于节点当前的状态信息和最新激发时刻的状态信息, 而不需要知道各个节点之间的差距或者是与虚拟同步目标之间的差距. $\|\hat{x}(t)\|$ 的系数 ϖ 是提前设计好的, 因此并不需要像 Lu 提出^[66] 的激发规则那样在每次事件激发之后对该系数进行调整. 相比与 Lu 提出^[66] 的激发规则, 事件激发函数 (4.6) 具有更低的计算复杂度.

定理给出的结果是针对带有部分未知转移率的马尔可夫切换拓扑以及自身动力学存在时滞的网络模型, 对于更加简洁的模型有如下推论. 若马尔可夫链的转移率全部已知, 那么定理 4.1 的条件可以被弱化.

推论 4.1. 如果假设 4.1 成立, 并且存在常数 $a > \frac{\bar{\lambda}\alpha_2}{2\lambda_2^2}$, 使得对所有 $u \in S$, 有

$$\pi + a + \pi_u - c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) \leq 0,$$

其中 $\pi = \bar{\lambda}(\frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \alpha_2)$, $\pi_u = \frac{1}{2} \sum_{v \neq u} q_{uv}(\frac{\bar{\lambda}_v^2}{\lambda_2^2} - 1)$. 那么, 在事件激发函数 (4.6) 下, 取 $\varpi = \frac{c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) - \pi - a - \max_{u \in S} \{\pi_u\}}{c\gamma(\lambda + \rho\beta)}$, 网络系统 (4.1) 对于任意初值可以实现均方指数同步.

若网络节点自身动力学不包含时滞, 并且马尔可夫链的转移率全部已知, 那么网络系统 (4.1) 可转化为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(t, x_i(t)) - c \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma[x_j(t_k) - x_i(t_k)] + u_i(t), \\ t_k &\leq t < t_{k+1} \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.16)$$

同时, 假设 4.1 变成常见的 Lipschitz 条件. 即, 假设存在常数 α_1 使得对任意 $x(t), y(t) \in R^n$, 有

$$\|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\| \leq \alpha_1 \|x(t) - y(t)\|. \quad (4.17)$$

推论 4.2. 如果 $f(\cdot, \cdot)$ 满足条件 (4.17) 并且存在一个正数 a , 使得对所有 $u \in S$, 有

$$\pi + a + \pi_u - c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) \leq 0, \quad (4.18)$$

其中 $\pi = \frac{\bar{\lambda}\alpha_1}{\lambda_2}$, $\pi_u = \frac{1}{2} \sum_{v \neq u} q_{uv}(\frac{\bar{\lambda}_v^2}{\lambda_2^2} - 1)$. 那么, 在激发函数 (4.6) 下, 取 $\varpi = \frac{c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) - \pi - a - \max_{u \in S} \{\pi_u\}}{c\bar{\gamma}(\lambda + \rho\beta)}$, 网络系统 (4.16) 对于任意初值可以实现均方指数同步.

注 4.4. 事实上, 网络系统 (4.16) 与文 Lu^[66] 研究的系统是相类似的, 不同之处在于设置控制器时目标轨道的选取. 然而上述推论的条件更加容易满足. 这是由于条件 (4.18) 是一般的实数不等式, 而 Lu^[66] 提出的定理条件是矩阵不等式. 除此之外, 本文事件激发规则更加简洁, 不需要在每次激发后更新激发函数的系数.

若复杂网络耦合结构不受马氏链调制, 那么网络系统数学模型 (4.1) 改成下式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(t, x_i(t), x_i(t - \tau)) - c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma[x_j(t_k) - x_i(t_k)] + u_i(t), \\ t_k &\leq t < t_{k+1} \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.19)$$

推论 4.3. 如果假设 4.1 成立并且存在一个正数 $a > \frac{\bar{\lambda}\alpha_2}{2\lambda_2^2}$, 使得:

$$\pi + a - c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) \leq 0,$$

其中 $\pi = \bar{\lambda}(\frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \alpha_2)$. 那么, 在事件激发函数 (4.6) 下, 取 $\varpi = \frac{c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) - \pi - a}{c\bar{\gamma}(\lambda + \rho\beta)}$, 网络系统 (4.19) 对于任意初值可以实现均方指数同步.

4.2.2 事件激发时刻间隔的下界

众所周知, 如果系统频繁地被激发, 那么将会出现不必要的事件累积, 即 Zeno 现象. 下面给出定理说明 Zeno 现象是不会出现的. 任意两次事件激发的时刻间隔都不会无限趋于零, 也就是说, 任意两个事件激发时刻间隔都存在正的下界.

定理 4.2. 如果假设 4.1 成立, 并且存在常数 a, a_1, a_2, \dots, a_m , 使得对所有 $u \in S$, 有

$$\begin{cases} \pi + a + \pi_u - c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) \leq 0, \\ 2a\lambda_2^2 - \bar{\lambda}\alpha_2 > 0, \\ L_v^2 - a_u I_N \leq 0, & \text{if } v \neq u, v \in S_2^u, \\ L_v^2 - a_u I_N \geq 0, & \text{if } v = u, v \in S_2^u, \end{cases} \quad (4.20)$$

其中 $\pi = \bar{\lambda}(\frac{\alpha_1}{\lambda_2} + \alpha_2)$, $\pi_u = \frac{1}{2} \sum_{v \in S_1^u \setminus \{u\}} q_{uv}(\frac{\bar{\lambda}_v^2}{\lambda_2^2} - \frac{a_v}{\lambda_2^2}) + \frac{1}{2} q_{uu} I(u)(1 - \frac{a_u}{\lambda_2^2})$, 如果 $u \in S_1^u$, 则 $I(u) = 1$, 否则 $I(u) = 0$. 那么, 在事件激发函数 (4.6) 下, 取 $\varpi = \frac{c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) - \pi - a - \max_{u \in S} \{\pi_u\}}{c\bar{\gamma}(\lambda + \rho\beta)}$, 对任意初值, 任意两个事件激发时刻间隔存在正的下界.

证明: 根据 $\hat{\delta}(t)$ 的定义, 当 $t = t_k$ 时, $\|\hat{\delta}(t)\| = 0$; 当 $t_k < t < t_{k+1}$ 时, $\|\hat{\delta}(t)\| < 0$. $\|\hat{\delta}(t)\|$ 将会逐渐波动式增长, 直到它的值等于 $\varpi\|\hat{x}(t)\|$ 时, 系统就会被激发. 也就是说, 事件间隔是 $\frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}$ 从 0 达到 ϖ 的时间段. 接下来寻找该段时间的一个正下界. 类似于 D. Xie 使用的方法^[57], 关键的问题是寻找函数 $\frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}$ 的上界函数. 注意到 $\dot{\hat{\delta}}(t) = (L_u \otimes I_n)\dot{\delta}(t) = -(L_u \otimes I_n)\dot{x}(t) = -\dot{\hat{x}}(t)$, 因此有下面等式成立.

$$\frac{d\|\hat{\delta}(t)\|}{dt} = \frac{\hat{\delta}^\top(t)\dot{\hat{\delta}}(t)}{\|\hat{\delta}(t)\|} = \frac{\hat{\delta}^\top(t)(L_u \otimes I_n)\dot{\delta}(t)}{\|\hat{\delta}(t)\|} = \frac{-\hat{\delta}^\top(t)\dot{\hat{x}}(t)}{\|\hat{\delta}(t)\|}. \quad (4.21)$$

根据式 (4.21), 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} &= \frac{\|\hat{x}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|^2} \frac{d\|\hat{\delta}(t)\|}{dt} - \frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|^2} \frac{d\|\hat{x}(t)\|}{dt} \\ &= \frac{-\hat{\delta}^\top(t)\dot{\hat{x}}(t)}{\|\hat{\delta}(t)\|\|\hat{x}(t)\|} - \frac{\|\hat{\delta}(t)\|\hat{x}^\top(t)\dot{\hat{x}}(t)}{\|\hat{x}(t)\|^3} \\ &\leq \left(1 + \frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right) \frac{\|\dot{\hat{x}}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

利用假设 4.1 和式 (4.4) 可得:

$$\begin{aligned} \|\dot{\hat{x}}(t)\| &= \|(L_u \otimes I_n)\dot{x}(t)\| \\ &= \left\| (L_u \otimes I_n) [f(t, x(t), x(t-\tau)) - c(L_u \otimes \Gamma)(\delta(t) + e(t)) \right. \\ &\quad \left. - c\rho(B_t \otimes \Gamma)(\delta(t) + e(t) - (U \otimes I_n)\delta(t))] \right\| \\ &\leq \|(L_u \otimes I_n)f(t, x(t), x(t-\tau))\| + c\|(L(u) \otimes \Gamma)(\hat{\delta}(t) + \hat{e}(t))\| \\ &\quad + c\rho\|(I_N \otimes \Gamma)(\hat{\delta}(t) + \hat{e}(t))\| \\ &\leq \frac{\bar{\lambda}\alpha_1}{\lambda_2^2} \|\hat{x}(t)\| + \frac{\bar{\lambda}\alpha_2}{\lambda_2^2} \|\hat{x}(t-\tau)\| + c\bar{\gamma}(\bar{\lambda} + \rho)(\|\hat{\delta}(t)\| + \|\hat{x}(t)\|). \end{aligned} \quad (4.23)$$

将式 (4.23) 代入式 (4.22), 可得:

$$\frac{d}{dt} \frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} \leq \left(1 + \frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right) \left[\frac{\bar{\lambda}\alpha_1}{\lambda_2^2} + \frac{\bar{\lambda}\alpha_2}{\lambda_2^2} \frac{\|\hat{x}(t-\tau)\|}{\|\hat{x}(t)\|} + c\bar{\gamma}(\bar{\lambda} + \rho) \left(1 + \frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right) \right]. \quad (4.24)$$

根据条件 (4.20) 和定理 4.1, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{e}(t)\| = 0$. 因此存在正数 κ 使得对所有 $t > 0$, $\frac{\|\hat{x}(t-\tau)\|}{\|\hat{x}(t)\|} \leq \kappa$ 成立. 故式 (4.24) 转化为:

$$\frac{d}{dt} \frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} \leq c\bar{\gamma}(\bar{\lambda} + \rho) \left(1 + \frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\lambda}\alpha_1}{\lambda_2^2} + \frac{\bar{\lambda}\alpha_2}{\lambda_2^2} \kappa\right) \left(1 + \frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|}\right). \quad (4.25)$$

记 $k_1 = c\bar{\gamma}(\bar{\lambda} + \rho)$, $k_2 = \frac{\bar{\lambda}\alpha_1}{\lambda_2^2} + \frac{\bar{\lambda}\alpha_2}{\lambda_2^2} \kappa$. 根据比较原理, $\frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} \leq \phi(t, \phi_0)$, 其中 $\phi(t, \phi_0)$ 是微分方程 $\dot{\phi}(t) = k_1(1 + \phi(t))^2 + k_2(1 + \phi(t))$ 关于初值 $\phi(0, \phi_0) = \phi_0$ 的解. 通过求解该微分方程可得:

$$\phi(t) = \frac{k_2 \exp \left\{ k_2 t + \ln \frac{k_1 \phi_0 + k_1}{k_1 \phi_0 + k_1 + k_2} \right\}}{k_1 - k_1 \exp \left\{ k_2 t + \ln \frac{k_1 \phi_0 + k_1}{k_1 \phi_0 + k_1 + k_2} \right\}} - 1, \quad (4.26)$$

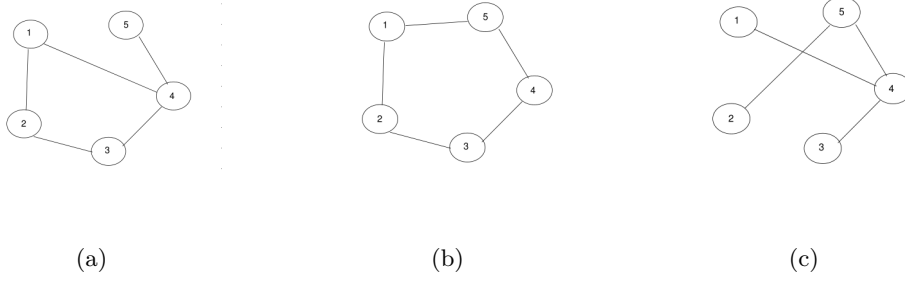


图 4.1: 网络系统在不同马氏链状态下可能的拓扑结构图.

因此

$$\frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\hat{x}(t)\|} \leq \phi(t). \quad (4.27)$$

从而, 任意两个事件激发 t_k, t_{k+1} 的时刻间隔的正下界 τ^* 满足 $\phi(\tau^*, 0) = \varpi$. 通过求解该方程可得:

$$\tau^* = \frac{1}{k_2} \ln \frac{(k_1 + k_2)(1 + \varpi)}{k_2 + k_1(1 + \varpi)}.$$

即 τ^* 使任意两个事件激发时刻间隔的下界. □

4.3 数值模拟

本节给出一个数值的例子来印证定理的有效性. 考虑一个带有部分未知转移率和自身动力学时滞共存的马尔可夫切换耦合的复杂网络, 该网络包含 5 个节点, 每个节点包含 3 个状态, 其动力学方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(t, x_i(t), x_i(t - \tau)) - c \sum_{j=1}^5 l_{ij}(r_t) [x_j(t_k) - x_i(t_k)] + u_i(t), \\ t_k \leq t < t_{k+1} \quad i &= 1, \dots, 5, \end{aligned} \quad (4.28)$$

其中 $x_i(t) = (x_i^1(t), x_i^2(t), x_i^3(t))^T \in R^n$ 是第 i 个节点的状态向量; $f(t, x_i(t), x_i(t - \tau)) = (-z(1+b)x_i^1(t) + zx_i^2(t) - zh(x_i^1(t)), x_i^1(t) - x_i^2(t) + x_i^3(t), -\eta x_i^2(t) - ex_i^3(t) - \eta\epsilon \sin(\nu x_i^1(t - \tau)))$, $h(x) = 1/2(a - b)(|x + 1| - |x - 1|)$. $z = 9.78, a = -1.4325, b = -0.7831, \eta = 9.53, e = 0.1636, \epsilon = 0.2, \nu = 0.5, \tau = 0.02$. $\{r_t, t \geq 0\}$ 是有限状态空间 $S = \{1, 2, 3\}$ 上的马氏链, 部分未知转率矩阵如下:

$$Q = \begin{pmatrix} -8 & ? & ? \\ 5 & -8 & 3 \\ ? & ? & -8 \end{pmatrix},$$

其中 “?” 表示未知的转移率. 可以看出, 马尔可夫链的平均逗留时间服从参数为 0.1 的

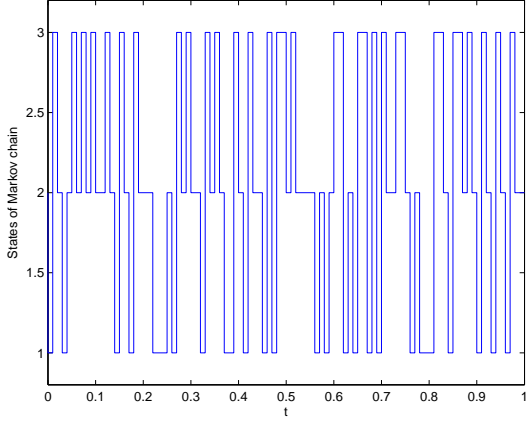


图 4.2: 马尔可夫链 $\{\sigma(t)|t \in [0, 1]\}$ 在转移概率矩阵 Q 下的状态切换.

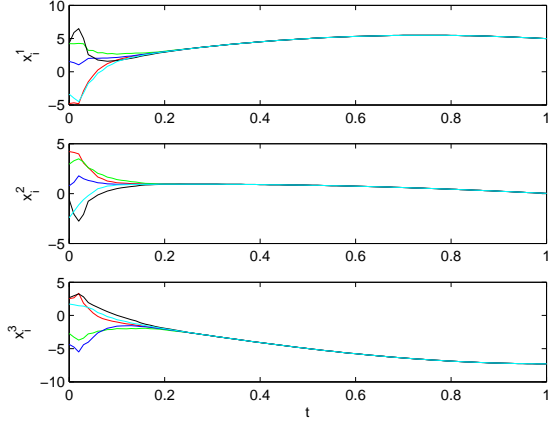


图 4.3: 基于事件激发随机发生控制策略下, 时滞马氏系统 (4.28) 在参数 $c = 8.2, \theta = 20$ 下的节点状态向量轨道 $x_i^j(t) (i = 1, 2, \dots, 5, j = 1, 2, 3)$ 的变化情况.

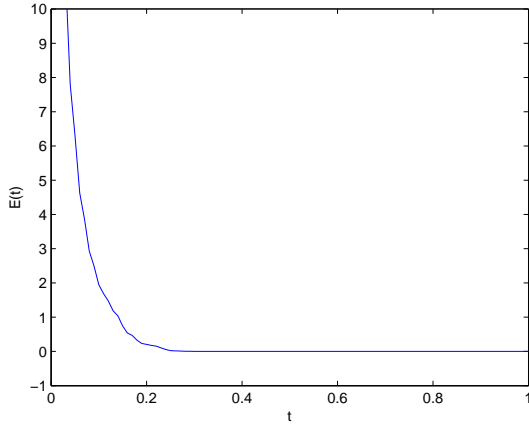


图 4.4: 系统 (4.28) 总同步误差轨道 $E(t)$.

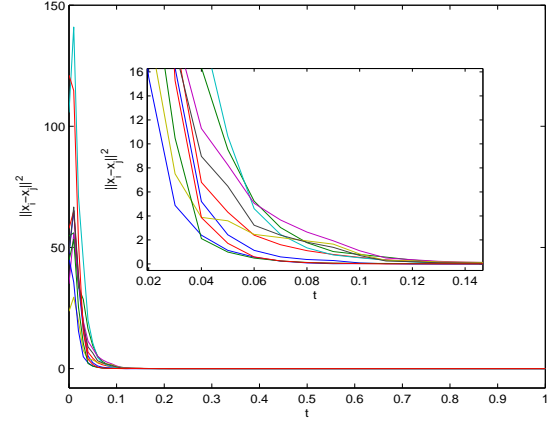


图 4.5: 不同节点间的状态差距 $\|x_i - x_j\|^2, i = 1, 2, \dots, 5, j = i + 1, i + 2, \dots, 5$ 演变过程.

指数分布, 并且 $S_1^1 = \{1\}, S_2^1 = \{2, 3\}, S_1^2 = \{1, 2, 3\}, S_2^2 = \emptyset, S_1^3 = \{3\}, S_2^3 = \{1, 2\}$. 具体的演变过程见图 4.2. 可能的耦合结构如图 5.1. $u_i(t)$ 是随机发生控制器, 其定义如下:

$$u_i(t) = -\rho c \beta_i(t) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma[x_i(t_k) - x_j(t_k)],$$

其中 ρc 是控制强度增益, $\{\beta_i(t), i = 1, 2, \dots, 5\}$ 是相互独立的随机过程, 并且满足 $E\{\beta_i(t)\} = 0.8$.

下面验证定理 4.1 与定理 4.2 的条件. 首先估计参数 α_1 和 α_2 使得 $f(t, x(t), x(t-\tau))$ 满足假设 4.1, 根据 f 的定义, 可以将 f 分解成时滞和非时滞两个部分: $f(t, x(t), x(t-\tau)) = f_1(x(t)) + f_2(x(t-\tau))$, 其中 $f_1(x(t)) = (-z(1+b)x_1(t) + zx_2(t) - zh(x_1(t)), x_1(t) - x_2(t) + x_3(t), -\eta x_2(t) - ex_3(t))^T$, $f_2(x(t-\tau)) = (0, 0, -\eta e \sin(\nu x_1(t-\tau)))^T$. 于是函数 f_1 所以可能的 Jacobin 矩阵为:

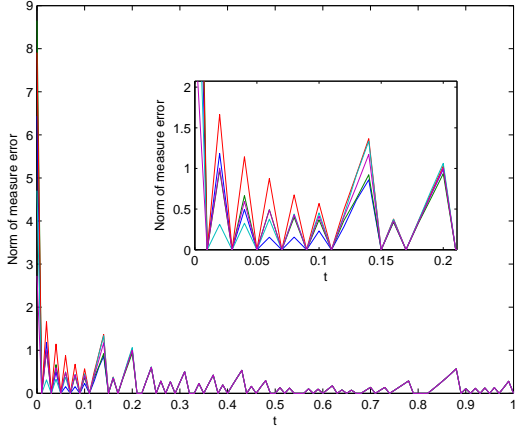
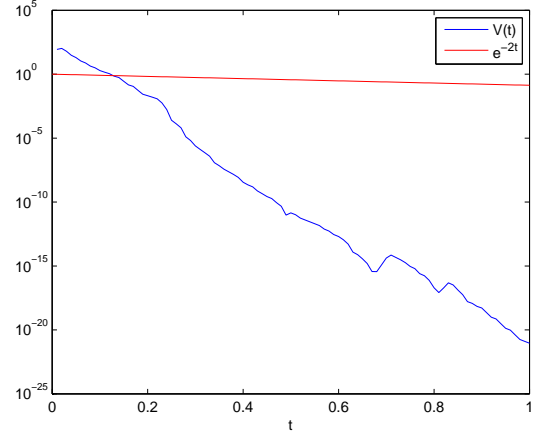


图 4.6: 测量误差的变化过程.


 图 4.7: Lyapunov-Krasovskii 函数 $V(t)$ 的变化过程.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 4.2299 & 9.78 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -9.53 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} -2.1213 & 9.78 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -9.53 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于任意 $x(t), x(t - \tau), y(t)$ 和 $y(t - \tau) \in R^3$, 通过利用范数三角不等式性可得:

$$\begin{aligned} & \|f(t, x(t), x(t - \tau)) - f(t, y(t), y(t - \tau))\| \\ & \leq \|f_1(x(t)) - f_1(y(t))\| + \|f_2(x(t - \tau)) - f_2(y(t - \tau))\| \\ & = \max\{\|J_1\|, \|J_2\|\} \|x(t) - y(t)\| + \|- \eta \epsilon \sin(\nu x_1(t - \tau)) + \eta \epsilon \sin(\nu y_1(t - \tau))\| \\ & \leq \max\{\|J_1\|, \|J_2\|\} \|x(t) - y(t)\| + |\eta \epsilon \nu| \|x_1(t - \tau) - y_1(t - \tau)\| \\ & \leq \max\{\|J_1\|, \|J_2\|\} \|x(t) - y(t)\| + |\eta \epsilon \nu| \|x(t - \tau) - y(t - \tau)\|. \end{aligned}$$

因此取 $\alpha_1 = \max\{\|J_1\|, \|J_2\|\} = 14.0228, \alpha_2 = |\eta \epsilon \nu| = 0.9530$ 可使得 $f(t, x(t), x(t - \tau))$ 满足假设 4.1.

其次, 选取 $a_1 = 17.39, a_2 = -3$ 以及 $a_3 = 20.08$, 则有 $L_v^2 - a_u I_N \leq 0 (v \neq u, v \in S_2^u)$ 和 $L_u^2 - a_u I_N \geq 0 (u \in S_2^u)$. 最后, 选取 $c = 8.2, \rho = 20, a = 0.95$, 则有 $\pi_1 = 23.66, \pi_2 = 28.822, \pi_3 = 27.94$ 以及 $\varpi = 0.35$. 容易证明, 对于任意 $u \in \{1, 2, 3\} 2a\lambda_2^2 - \bar{\lambda}\alpha_2 > 0$ 且 $\bar{\lambda}(\alpha_1\lambda_2^{-1} + \alpha_2) + a + \pi_u - c\gamma(\lambda_2 + \rho\beta) < 0$. 因此定理 4.1 和定理 4.2 的条件满足.

利用欧拉法, 取步长为 0.01, 区间为 $[0, 1]$. 通过 MATLAB 求解微分方程 (4.28) 并画出相应的变化图.

图 4.2 展现了在区间 $[0, 1]$ 马氏链在转移概率矩阵 Q 下的状态切换过程. 图 4.3 描绘了网络节点的各个状态 $x_i^j(t) (i = 1, 2, \dots, 5, j = 1, 2, 3)$ 随着时间演变的过程, 从该图可以看出, 不同节点间的同一状态趋于同步. 即, 在事件激发随机发生控制策略下, 系统 (4.28) 能够实现均方指数同步.

定义系统总误差如下:

$$E(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 \left(x_i^j(t) - \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 x_k^j(t) \right)^2}.$$

系统总误差 $E(t)$ 的演变过程参见图 4.4. 各个节点轨道之间的距离差演变过程见图 4.5. 从图 4.4 和图 4.5 可以看出, 网络系统 (4.28) 在很短时间内达到同步. 图 4.6 描述了测量误差的演变过程, 从该图中可以看到, 测量误差线与横轴的角度就是事件激发的时刻, 图中任意两个激发时刻之间都存在间隔, 且间隔没有随着时间的延长而减小. 这说明事件激发时刻间隔的正下界是存在的, 即 Zeno 现象不会发生. 图 4.7 展示了 Lyapunov—Krasovskii 函数 $V(t)$ 的变化情况以及与指数函数 e^{-2t} 的对比, 可以看出, $V(t)$ 的收敛于零的速度比指数函数 e^{-2t} 快一些, 因此该同步属于指数同步.

4.4 小结

本章利用集中式事件激发采样策略和随机发生控制方法研究了动力学时滞和带有马氏切换耦合复杂网络同步问题. 网络的马氏链的转移率矩阵是部分未知的, 并且孤立节点动力学受到时滞的影响. 通过利用 Lyapunov 稳定性理论以及随机分析知识, 本章得出了充分的同步条件并保证了 Zeno 现象不会发生. 最后, 给出了一些数值的例子来证实结论的有效性.

第 5 章 基于事件激发采样带部分未知转移率和布朗运动的复杂网络同步问题

前面两章分别讨论了分散式和集中事件激发采样控制策略下不同网络模型的同步问题, 通过设计合适的事件激发采样控制规则, 利用随机过程理论以及稳定性定理, 给出网络同步的充分判据. 然而前面两章的网络模型没有考虑更为重要的随机因素, 即噪声干扰. 众所周知, 网络节点间的信号传输很容易遭受到噪声干扰, 特别是在计算机通信、保密通讯、输电网方面. 因此噪声是复杂网络同步研究不可忽略的因素. 本章在部分未知转移率的模式切换网络的基础上, 进一步讨论带有布朗运动的复杂网络同步问题. 并分别给出集中式和分散式两种事件激发规则. 集中式和分散式事件激发采样策略的区别在于, 集中式激发规则要求所有的节点在事件激发时刻同时更新状态, 而分散式激发规则中每个节点都有自己的激发规则. 这两种激发规则都是通过定义相应的激发函数, 当激发函数的阈值达到 0 时, 事件就被激发, 节点的信息得到更新.

下面给出当函数包含马尔可夫马过程和布朗运动时, 弱无穷小生成元算子求解方法.

引理 5.1. ^[90] 考虑一个定义在正无穷上, 初值为 $x_0 = \zeta \in C_{F_0}^b([-\tau, 0]; R^n)$, 带有马尔可夫链和布朗运动形式的随机微分方程:

$$dx(t) = f(t, x(t), x(t - \tau), r(t))dt + \sigma(t, x(t), x(t - \tau))dw(t),$$

其中

$$f : R^n \times R_+ \times S \rightarrow R^n, \quad \sigma : R^n \times R_+ \times S \rightarrow R^{n \times m}.$$

记 $C^{2,1}(R_+ \times R^n; R_+)$ 是定义在 $R^n \times R_+ \times S$ 上关于 x 二阶连续可微, 关于 t 一阶可微的所有函数集. 如果 $V \in C^{2,1}(R_+ \times R^n \times S; R_+)$. 则关于 V 从 $R^n \times R_+ \times S$ 到 R^n 上的弱无穷小生成元算子 $\mathcal{L}V$ 可以由下式给出:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t, x, r) = & V_t(t, x, r) + V_x(t, x, r)f(t, x, r) \\ & + \frac{1}{2}\text{tr}[\sigma(t, x, r)^\top V_{xx}\sigma(t, x, r)] + \sum_{j=1}^M \gamma_{ij}V(t, x, j), \end{aligned} \quad (5.1)$$

其中 $V_x(t, x, r) = (\frac{\partial V(t, x, r)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(t, x, r)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V(t, x, r)}{\partial x_n})$, $V_{xx}(t, x, r) = (\frac{\partial^2(V(t, x, r))}{\partial x_i \partial x_j})_{n \times n}$, $V_t(t, x, r) = \frac{\partial V(t, x, r)}{\partial t}$.

为了方便叙述, 我们定义记号如下: $\bar{q} = \max\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, $\underline{q} = \min\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, $\bar{\gamma} = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, $\bar{\lambda} = \max_{v=1}^m \{\lambda_N(L(u))\}$.

5.1 集中式事件激发采样控制策略

集中式事件激发采样控制策略指的是根据节点的状态信息构造统一的事件激发函数, 所有节点都遵循该激发函数进行信息的更新. 即网络所有节点都具有统一的激发时刻.

5.1.1 集中式事件激发采样带布朗运动的网络模型

基于事件激发采样策略下, 节点间信号传输受到随机噪声干扰的受控马氏切换复杂网络模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(x_i(t)) - \rho(t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma[x_j(t_k) - x_i(t_k) + (\varepsilon_{ij}(t) \otimes \mathbf{1}_n) \xi_{ij}(t)] + u_i(t), \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.2)$$

其中 $\varepsilon_{ij}(t) \geq 0$ 是噪声强度, t_k 是节点的第 k 次激发时刻, $\xi_{ij}(t)$ 是标准白噪声过程. 将网络 (5.2) 写成微分形式如下:

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= \left[f(x_i(t)) - \rho(t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma(x_j(t_k) - x_i(t_k)) + u_i(t) \right] dt \\ &\quad - \rho(t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma(\varepsilon_{ij}(t) \otimes \mathbf{1}_n) dw_{ij}(t), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.3)$$

其中 $w_{ij}(t)$ 是定义在 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的标准布朗运动, 满足:

$$\mathbb{E}\{dw_{ij}(t)\} = 0, \quad \mathbb{E}\{[dw_{ij}(t)]^2\} = dt.$$

其他记号的含义在无特殊说明时与前文一致, 下同.

设置集中式事件激发控制输入 $u_i(t)$ 如下:

$$u_i(t) = -\epsilon \rho(t) d_i(r_t) \Gamma[x_i(t_k) - s(t_k)]$$

其中同步的目标轨道 $s(t)$ 满足 $\dot{s}(t) = f(s(t))$. 这里的控制输入与第 3 章的控制输入 (3.2) 不同在于此处的控制输入是线性的.

网络 (5.3) 在上述控制器控制下可转化为如下形式:

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= \left[f(x_i(t)) - \rho(t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma(x_j(t_k) - x_i(t_k)) + u_i(t) \right] dt - \rho(t) R_i(t) dw_i(t), \\ t_k &\leq t < t_{k+1}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.4)$$

其中 $R_i(t) = (l_{i1}(r_t)\varepsilon_{i1}(t), \dots, l_{iN}(r_t)\varepsilon_{iN}(t))$, $w_i(t) = (w_{i1}(t), \dots, w_{iN}(t))^\top$, $\{t_1, t_2, \dots\}$ 是严格递增的集中式事件激发时刻序列.

定义节点测量误差 $\delta_i(t) = x_i(t_k) - x_i(t)$. 因为 $\sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) = 0$, 所以网络系统 (5.4) 可以表示成误差系统的形式:

$$de_i(t) = \left[f(x_i(t)) - f(s(t)) - \rho(t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma(\delta_j(t) + e_j(t)) - \epsilon \rho(t) d_i(r_t) \Gamma(\delta_i(t) + e_i(t) + s(t) - s(t_k)) \right] dt - \rho(t) R_i(t) dw_i(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.5)$$

利用 Kronecker 积的性质, 上式可以改成如下:

$$de(t) = \left[f(e(t)) - \rho(t) [L(r_t) \otimes \Gamma](\delta(t) + e(t)) - \epsilon \rho(t) [D(r_t) \otimes \Gamma](\delta(t) + e(t) + \hat{s}(t)) \right] dt - \rho(t) \Sigma(t) dw(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.6)$$

其中 $\delta(t) = (\delta_1^\top(t), \dots, \delta_N^\top(t))^\top$, $\Sigma(t) = \text{diag}\{R_1(t), \dots, R_N(t)\}$, $\hat{s}(t) = \mathbf{1}_N \otimes \tilde{s}(t)$, $\tilde{s}(t) = s(t) - s(t_k)$, $w(t) = (w_1^\top(t), \dots, w_N^\top(t))^\top$,

定义集中式事件激发函数 $g^c(t)$ 如下:

$$g^c(t) = (1 + \epsilon) \|\delta(t)\|^2 + \epsilon \|\hat{s}(t)\|^2 - \frac{\xi^2 \underline{q}^2}{4(\bar{\lambda}^2 + 2\epsilon)c^2 \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2} \|e(t)\|^2 \quad (5.7)$$

注 5.1. 在 t 时刻, 如果 $g^c(t)$ 达到阈值 0, 那么事件就被激发, 新的事件激发时刻被确定, 即 $t_{k+1} = t$. 此时所有的节点状态和控制输入都要更新至该时刻的信息. 此后 $g^c(t) < 0$ 直到下一次事件激发.

5.1.2 同步分析

定理 5.1. 如果 $f(\cdot)$ 属于 $QUAD(G, \Delta, \xi)$, 噪声强度 $\varepsilon_{ij}(t)$ 满足 $\int_0^\infty \varepsilon_{ij}^2(s) ds < \infty$, 并且存在正数 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m, a_1, a_2, \dots, a_m$ 使得对所有 $u \in S$, 下式不等式成立:

$$\begin{cases} (\bar{\delta} + \chi_u) I_N - c \underline{\gamma} (L(u) + \epsilon D(u)) \leq 0, \\ \pi_v - a_u \leq 0, \quad \text{if } v \neq u, v \in S_2^u, \\ \pi_v - a_u \geq 0, \quad \text{if } v = u, v \in S_2^u, \end{cases} \quad (5.8)$$

其中 $\bar{\delta} = \max_{k=1}^k \{\delta_k\}$, $\underline{\gamma} = \min_{k=1}^k \{\gamma_k\}$, $\chi_u = \sum_{v \in S_1^u} q_{uv} (\pi_v - a_u) / \pi_u$, 那么在事件激发函数 (5.7) 下, 网络系统 (5.4) 可以实现均方指数同步.

证明: 定义 Lyapunov-Krasovskii 函数为

$$V(t) = \frac{1}{2} \pi_{r_t} e^\top(t) [I_N \otimes Q] e(t).$$

当 $r(t) = u$ 时, 根据引理 5.1 可得

$$dV(t) = \mathcal{L}V(t)dt + \rho(t) \pi_u e^\top(t) (I_N \otimes Q) \Sigma(t) dw(t), \quad (5.9)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}V(t) &= \pi_u e^\top(t) [I_N \otimes Q] \left\{ \tilde{f}(e(t)) - \rho(t) [L(u) \otimes \Gamma] (e(t) + \delta(t)) \right. \\
 &\quad \left. - \epsilon \rho(t) [D(u) \otimes \Gamma] (\delta(t) + e(t) + \hat{s}(t)) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \pi_u \rho^2(t) \text{tr}[(I_N \otimes Q) \Sigma(t) \Sigma^\top(t)] + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m q_{uv} \pi_v e^\top(t) [I_N \otimes Q] e(t) \\
 &\leq \pi_u e^\top(t) [I_N \otimes Q] \tilde{f}(e(t)) - \pi_u \rho(t) \underline{\gamma} e^\top(t) [L(u) \otimes Q] e(t) \\
 &\quad - \pi_u \rho(t) e^\top(t) [L(u) \otimes Q \Gamma] \delta(t) - \pi_u \epsilon \rho(t) e^\top(t) [D(u) \otimes Q \Gamma] \delta(t) \\
 &\quad - \pi_u \epsilon \rho(t) \underline{\gamma} e^\top(t) [D(u) \otimes Q] e(t) - \pi_u \epsilon \rho(t) e^\top(t) [D(u) \otimes Q \Gamma] \hat{s}(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \pi_u \rho^2(t) \text{tr}[(I_N \otimes Q) \Sigma(t) \Sigma^\top(t)] + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m q_{uv} \pi_v e^\top(t) [I_N \otimes Q] e(t). \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

因为 $f(\cdot)$ 属于 $QUAD(G, \Delta, \xi)$, 所以

$$\begin{aligned}
 e^\top(t) [I_N \otimes Q] \tilde{f}(e(t)) &\leq -\xi e^\top(t) [I_N \otimes Q] e(t) + e^\top(t) [I_N \otimes Q \Delta] e(t) \\
 &\leq (\bar{\delta} - \xi) e^\top(t) [I_N \otimes Q] e(t). \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

通过利用引理 2.5, 可得

$$\begin{aligned}
 -e^\top(t) [L(u) \otimes Q \Gamma] \delta(t) &\leq \frac{\mu}{2} e^\top(t) [L(u) L(u)^\top \otimes Q^2 \Gamma^2] e(t) + \frac{1}{2\mu} \delta^\top(t) \delta(t) \\
 &\leq \frac{\mu}{2} \bar{\lambda}^2 \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2 e^\top(t) e(t) + \frac{1}{2\mu} \delta^\top(t) \delta(t). \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

其中 $\bar{\lambda} = \lambda_N(L)$, $\bar{q} = \max_k \{q_k\}$, $\bar{\gamma} = \max_k \{\gamma_k\}$.

$$\begin{aligned}
 -e^\top(t) [D(u) \otimes Q \Gamma] \delta(t) &\leq \frac{\mu}{2} e^\top(t) [D(u) D(u)^\top \otimes Q^2 \Gamma^2] e(t) + \frac{1}{2\mu} \delta^\top(t) \delta(t) \\
 &\leq \frac{\mu}{2} \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2 e^\top(t) e(t) + \frac{1}{2\mu} \delta^\top(t) \delta(t). \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
 -e^\top(t) [D(u) \otimes Q \Gamma] \hat{s}(t) &\leq \frac{\mu}{2} e^\top(t) [D(u) D(u)^\top \otimes Q^2 \Gamma^2] e(t) + \frac{1}{2\mu} \delta^\top(t) \hat{s}(t) \\
 &\leq \frac{\mu}{2} \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2 e^\top(t) e(t) + \frac{1}{2\mu} \hat{s}^\top(t) \hat{s}(t). \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

根据 $R_i(t)$ 的定义可得 $R_i(t) R_i^\top(t) = \sum_{j=1}^N l_{ij}^2(r_t) \varepsilon_{ij}^2(t) \Gamma \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top \Gamma$. 因此, $\text{tr}[R_i(t) R_i^\top(t)] = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n l_{ij}^2(r_t) \varepsilon_{ij}^2(t) \gamma_k^2$.

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[(I_N \otimes Q) \Sigma(t) \Sigma^\top(t)] &\leq \text{tr}[I_N \otimes Q] \text{tr}[\Sigma(t) \Sigma^\top(t)] \\
 &\leq Nq \sum_{i=1}^N \text{tr}[R_i(t) R_i^\top(t)]
 \end{aligned}$$

$$= Nqh(t), \quad (5.15)$$

其中 $q = \sum_{i=1}^n q_{ii}$, $h(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n l_{ij}^2(r_t) \varepsilon_{ij}^2(t) \gamma_k^2$. 根据 $\sum_{v=1}^m q_{uv} a_u = 0$ 以及条件 (5.8) 可得

$$\begin{aligned} e^\top(t) \sum_{v=1}^m q_{uv} \pi_v [I_N \otimes Q] e(t) &= e^\top(t) \left[\sum_{v=1}^m q_{uv} (\pi_v - a_u) (I_N \otimes Q) \right] e(t) \\ &= e^\top(t) \left\{ \left[\sum_{v \in S_1^u} q_{uv} (\pi_v - a_u) + \sum_{v \in S_2^u} q_{uv} (\pi_v - a_u) \right] (I_N \otimes Q) \right\} e(t) \\ &\leq 2\chi_u \pi_u e^\top(t) [I_N \otimes Q] e(t), \end{aligned} \quad (5.16)$$

其中 $\chi_u = \sum_{v \in S_1^u} q_{uv} (\pi_v - a_u) / \pi_u$.

又因为噪声强度 $\varepsilon_{ij}(t)$ 满足 $\int_0^\infty \varepsilon_{ij}^2(s) ds < \infty$, 所以 $\int_0^\infty h(s) ds < \infty$. 根据 (5.10) – (5.16) 以及 $E\rho(t) = c$ 可得

$$\begin{aligned} E\mathcal{L}V(t) &\leq -\pi_u \xi e^\top(t) [I_u \otimes Q] e(t) + \pi_u e^\top(t) [(\bar{\delta} + \chi_u) I_N - c\gamma(L(u) + \epsilon D(u)) \otimes Q] e(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\bar{\lambda}^2 + 2\epsilon) \pi_u c \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2 \mu e^\top(t) e(t) + (1 + \epsilon) \pi_u c \frac{1}{2\mu} \delta^\top(t) \delta(t) \\ &\quad + \pi_u \epsilon c \frac{1}{2\mu} \hat{s}^\top(t) \hat{s}(t) + \frac{1}{2} \pi_u c^2 Nqh(t). \end{aligned} \quad (5.17)$$

对式 (5.9) 两边同时取期望, 由于 $Ew(t) = 0$, 结合式 (5.17) 以及条件 (5.8) 可得:

$$\begin{aligned} \frac{dEV(t)}{dt} &\leq -\pi_u \xi e^\top(t) [I_u \otimes Q] e(t) + \frac{1}{2}(\bar{\lambda}^2 + 2\epsilon) \pi_u c \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2 \mu e^\top(t) e(t) \\ &\quad + (1 + \epsilon) \pi_u c \frac{1}{2\mu} \delta^\top(t) \delta(t) + \pi_u \epsilon c \frac{1}{2\mu} \hat{s}^\top(t) \hat{s}(t) + \frac{1}{2} \pi_u c^2 Nqh(t) \\ &\leq -\xi EV(t) + \frac{1}{2} \pi_u c^2 Nqh(t) + \frac{\pi_u}{2} [-\xi \underline{q} + (\bar{\lambda}^2 + 2\epsilon) c \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2 \mu] e^\top(t) e(t) \\ &\quad + \frac{\pi_u}{2\mu} c [(1 + \epsilon) \delta^\top(t) \delta(t) + \epsilon \hat{s}^\top(t) \hat{s}(t)]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

由于上式对任意 $\mu > 0$ 都成立, 故可取 $\mu = \frac{\xi \underline{q}}{2(\bar{\lambda}^2 + 2\epsilon) c \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2}$, 此时有

$$-\xi \underline{q} + (\bar{\lambda}^2 + 2\epsilon) c \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2 \mu = -\frac{c}{\mu} \frac{\xi^2 \underline{q}^2}{4(\bar{\lambda}^2 + 2\epsilon) c^2 \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2}.$$

在事件激发函数 (5.7) 下, 式 (5.18) 可以转化为

$$\frac{dEV(t)}{dt} \leq -\xi EV(t) + \frac{1}{2} \pi_u c^2 Nqh(t).$$

根据比较原理可得,

$$EV(t) \leq V(0) e^{-\xi t} + \frac{1}{2} \pi_u c^2 Nq \int_0^t h(s) e^{-\xi(t-s)} ds.$$

因为 $\int_0^\infty h(s)ds < \infty$, 故对任意给定 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $\int_\delta^\infty h(s)ds < \eta$. 因此, 对任意 $t \geq \delta$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t h(s)e^{-\xi(t-s)}ds &= \int_0^\delta h(s)e^{-\xi(t-s)}ds + \int_\delta^t h(s)e^{-\xi(t-s)}ds \\ &\leq e^{-\xi(t-\delta)} \int_0^\delta h(s)ds + \int_\delta^t h(s)ds \\ &\leq e^{-\xi(t-\delta)} \int_0^\infty h(s)ds + \int_\delta^\infty h(s)ds \\ &\leq e^{-\xi(t-\delta)} \int_0^\infty h(s)ds + \eta. \end{aligned}$$

因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} EV(t) = 0$, 根据 $V(t)$ 的定义可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|e(t)\|^2 = 0$. 于是, 对任意 $i, j = 1, 2, \dots, N$, $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|x_i(t) - x_j(t)\|^2 = 0$. 即网络系统 (5.4) 可以实现均方同步. \square

5.2 分散式事件激发采样控制策略

在集中式事件激发采样策略中, 当激发函数 (5.7) 达到阈值 0 的时候, 所有的节点此刻同时发生更新, 这将会导致节点间的信息传输频繁. 对于大规模的复杂网络, 信息的频繁传输使得的网络通信不安全, 并且加大通讯负荷. 为了减少信号传输的频率, 分散式的事件激发控制策略是一个很好的选择.

5.2.1 分散式事件激发采样带布朗运动的网络模型

在分散式事件激发采样策略中, 每一个节点都有特殊的激发函数, 并且该激发函数只依赖于自身节点的状态信息. 同时, 每个节点都有相对应的事件激发时刻. 其模型除了激发时刻不一样外, 其余项都与集中式事件激发采样策略的一样. 将系统 (5.4) 的激发时刻 t_k 替换为与节点有关的激发时刻 t_k^i 与 $t_{k'}^j$, 可得分散式事件激发采样下受控的网络微分方程:

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= \left[f(x_i(t)) - \rho(t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma(x_j(t_{k'}^j) - x_i(t_k^i)) + u_i(t) \right] dt \\ &\quad - \rho(t) R_i(t) dw_i(t), \quad t_k^i \leq t < t_{k+1}^i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.19)$$

其中 $\{t_1^i, t_2^i, \dots\}$ 是严格递增的序列, 它表示节点 i 的事件激发时刻; $k' = \arg \max_k \{t_k^j \leq t\}$; 控制输入 $u_i(t)$ 定义如下:

$$u_i(t) = -\epsilon \rho(t) d_i(r_t) \Gamma[x_i(t_k^i) - s(t_k^i)].$$

由于每个节点激发时刻不一致, 因此测量误差形式为 $\delta_i(t) = x_i(t_k^i) - x_i(t)$. 若没有特殊说明, 其他的记号与 5.1.1 的定义一样. 类似于 5.1.1, 网络系统 (5.19) 可以改写成

误差系统的形式:

$$de_i(t) = \left[f(x_i(t)) - f(s(t)) - \rho(t) \sum_{j=1}^N l_{ij}(r_t) \Gamma(\delta_j(t) + e_j(t)) - \epsilon \rho(t) d_i(r_t) \Gamma(\delta_i(t) + e_i(t) + s(t) - s(t_k)) \right] dt - \rho(t) R_i(t) dw_i(t), \quad t_k^i \leq t < t_{k+1}^i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.20)$$

通过利用 Kronecker 积的性质, 网络系统 (5.20) 可以改写为如下:

$$de(t) = [f(e(t)) - \rho(t)[L(r_t) \otimes \Gamma](\delta(t) + e(t)) - \epsilon \rho(t)[D(r_t) \otimes \Gamma](\delta(t) + e(t) + \hat{s}(t))] dt - \rho(t) \Sigma(t) dw(t), \quad t_k^i \leq t < t_{k+1}^i, \quad i = 1, \dots, N,$$

不同于集中式激发采样策略, 关于节点 i 的分散式激发函数 $g^i(t)$ 定义为如下:

$$g^i(t) = (1 + \epsilon) \|\delta_i(t)\|^2 + \epsilon \|\hat{s}_i(t)\|^2 - \frac{\xi^2 \underline{q}^2}{4(\bar{\lambda}^2 + 2\epsilon)c^2 \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2} \|e_i(t)\|^2, \quad (5.21)$$

5.2.2 同步分析

注 5.2. 在分散式事件激发采样策略中, 当分散式激发函数将要达到阈值 0 的时候, 每个节点更新自己的状态信息, 同时发送此时的状态信息给邻居节点. 在任意时刻, 事件激发函数(5.21) 都是负的. 这是因为在事件激发点处, 测量误差等于 0. 也就是说激发函数在事件激发时刻是右连续的, 激发时刻是激发函数的跳跃间断点.

定理 5.2. 如果 $f(\cdot)$ 属于 $QUAD(G, \Delta, \xi)$, 噪声强度 $\varepsilon_{ij}(t)$ 满足 $\int_0^\infty \varepsilon_{ij}^2(s) ds < \infty$, 并且存在正数 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m, a_1, a_2, \dots, a_m$ 使得对所有 $u \in S$, 下式不等式成立:

$$\begin{cases} (\bar{\delta} + \chi_u) I_N - c \underline{\gamma} (L(u) + \epsilon D(u)) \leq 0, \\ \pi_v - a_u \leq 0, \quad \text{if, } v \neq u, v \in S_2^u, \\ \pi_v - a_u \geq 0, \quad \text{if, } v = u, v \in S_2^u, \end{cases} \quad (5.22)$$

其中 $\chi_u = \sum_{v \in S_1^u} q_{uv} (\pi_v - a_u) / \pi_u$, 则在事件激发函数 (5.21) 下, 网络系统 (5.19) 均方同步到 $s(t)$.

证明: 在本定理的证明中, 使用定理 (5.1) 证明给出的 Lyapunov-Krasovskii 函数, 类似于 (5.9)-(5.18), 有

$$\begin{aligned} \frac{dEV(t)}{dt} &\leq -\xi EV(t) + \frac{1}{2} \pi_u c^2 N q h(t) + \frac{\pi_u}{2} [-\xi \underline{q} + (\bar{\lambda}^2 + 2\epsilon) c \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2 \mu] e^\top(t) e(t) \\ &\quad + \frac{\pi_u}{2\mu} c [(1 + \epsilon) \delta^\top(t) \delta(t) + \epsilon \hat{s}^\top(t) \hat{s}(t)] \\ &= -\xi EV(t) + \frac{1}{2} \pi_u c^2 N q h(t) + \frac{\pi_u}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ [-\xi \underline{q} + (\bar{\lambda}^2 + 2\epsilon) c \bar{q}^2 \bar{\gamma}^2 \mu] e_i^\top(t) e_i(t) \right. \end{aligned}$$

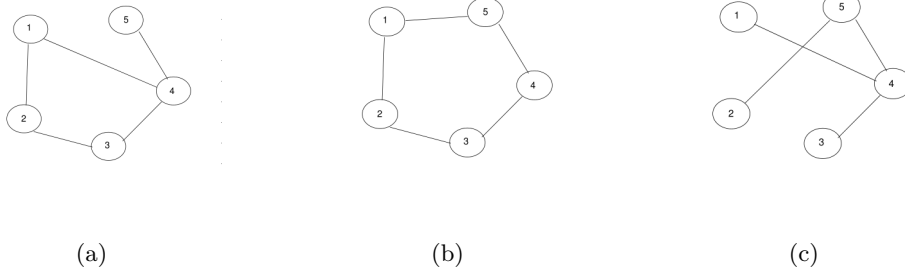


图 5.1: 网络系统在不同马氏链状态下可能的拓扑结构图.

$$+ \frac{c}{\mu} [(1 + \epsilon) \delta_i^\top(t) \delta_i(t) + \epsilon \hat{s}_i^\top(t) \hat{s}_i(t)] \Big\}. \quad (5.23)$$

由于 (5.23) 对任意 $\mu > 0$ 都成立, 因此可以选择 $\mu = \frac{\xi q}{2(\lambda^2 + 2\epsilon)c\bar{q}^2\bar{\gamma}^2}$. 根据分散式激发函数 (5.21), 在式 (5.23) 中的求和项小于或等于 0. 因此有

$$\frac{dEV(t)}{dt} \leq -\xi EV(t) + \frac{1}{2} \pi_u c^2 N q h(t).$$

类似于 (5.1) 的讨论, 可以得出, 对任意 $i = 1, 2, \dots, N$, $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|e_i(t)\|^2 = 0$ 成立, 于是根据三角不等式可得, 对任意 $i, j = 1, 2, \dots, N$, $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|x_i(t) - x_j(t)\|^2 = 0$. 于是根据定义 (2.1), 网络系统 (5.19) 在均方意义下同步到 $s(t)$. \square

5.3 数值模拟

为了验证理论结果的有效性, 本节给出一个数值仿真例子. 考虑一个 5 个节点, 每个节点含有 3 种状态的马尔可夫切换网络模型, 其非线性动力学如下:

$$f(x) = \begin{pmatrix} z_1(-x_1 + x_2 - g(x_1)) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -z_2(x_2) \end{pmatrix}$$

这里 $h(x_1) = r_1 x_1 + 1/2(r_2 - r_1)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$. 从节点自身动力学可以看出, 每个节点都是线性耦合的 Chua's 电路^[91]. 选择参数 $z_1 = 9.78, z_2 = 14.97, r_1 = -0.75, r_2 = -1.31$, 那么此时自身节点动力学具有双混沌吸引子.

对任意 $i, j = 1, 2, \dots, 5, t \geq 0, \xi_{ij}(t)$ 是标准白噪声, $\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{e^t} (i \neq j)$, 以及 $\varepsilon_{ii}(t) = 0$. 马尔可夫链 $\{r_t, t \geq 0\}$ 是定义在有限状态空间 $\{1, 2, 3\}$ 上, 其每个状态的平均逗留时间服从参数为 0.1 的指数分布, 并且转移率是部分未知的, 转移率矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} -8 & ? & ? \\ 5 & -8 & 3 \\ ? & ? & -8 \end{pmatrix}.$$

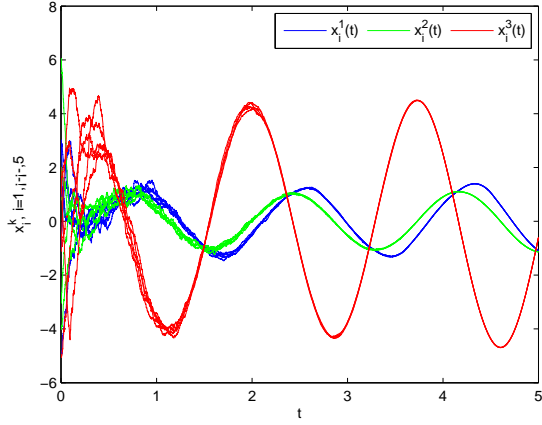


图 5.2: 在集中式激发采样策略下, 节点各个状态 $x_i^j(t)$ 随时间演变图.

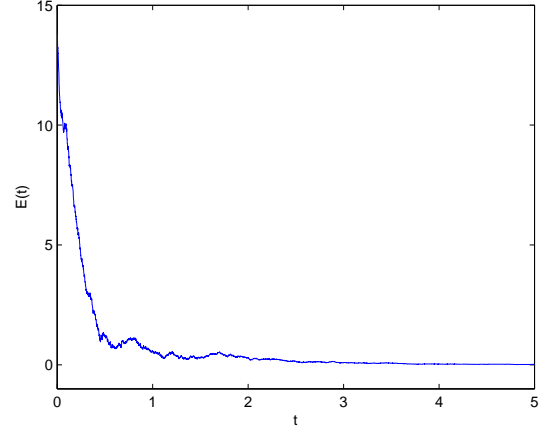


图 5.3: 在集中式激发采样策略下, 系统总误差 $E(t)$ 随时间演变图.

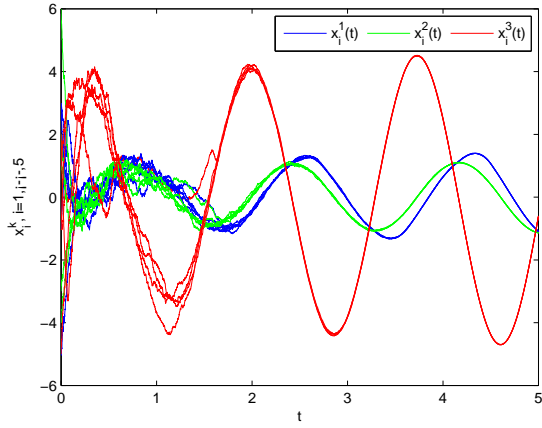


图 5.4: 在分散式激发采样策略下, 节点各个状态 $x_i^j(t)$ 随时间演变图.

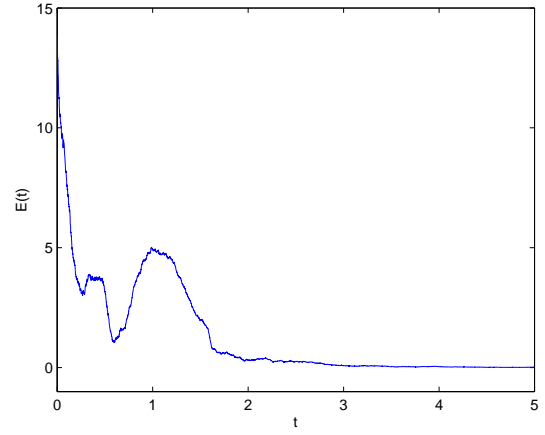


图 5.5: 在分散式激发采样策略下, 系统总误差 $E(t)$ 随时间演变图.

其中 “?” 表示未知转移率.

复杂网络所有可能的拓扑结构如图 5.1. 相应的控制节点集为 $\mathcal{D}_1 = \{2, 4, 5\}$, $\mathcal{D}_2 = \{1, 3, 5\}$, 和 $\mathcal{D}_3 = \{1, 2, 3\}$ 是相应马尔可夫链状态下的牵制节点集.

选取参数 $\Gamma = I_3$, $\Delta = 11.7I_3$. 为了估计 QUAD 条件中的参数 ξ , 这里先求 f 的 Jacobin 矩阵如下:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 3.0318 & 9.78 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.97 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} -2.445 & 9.78 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.97 & 0 \end{pmatrix}.$$

通过计算可知, f 所有的 Jacobin 矩阵的最大特征值为 9.1207. 于是可得 $\xi = \epsilon - 9.1207$. 因为 ξ 是正数, 故可取 $\epsilon = 11.7$, 此时 $\xi = 11.7 - 9.1207 = 2.5793$.

为了保证定理 5.1 和定理 5.2 的条件满足, 这里选取 $c = 25$, $\epsilon = 15$, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 8$, 以及 $a_1 = a_2 = a_3 = 8.5$. 节点的初值状态 $x_1(0) = (3, 1, -1)^\top$, $x_2(0) = (1, 2, -5)^\top$,

$x_3(0) = (-5, -4, -1)^\top$, $x_4(0) = (-1, 6, 2)^\top$, $x_5(0) = (8, -3, 1)^\top$, 以及 $s(0) = (1, -1, 2)^\top$. 定义系统同步误差为

$$E(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 (x_i^j(t) - s^j(t))^2}.$$

网络系统的微分方程求解方法利用的是欧拉迭代法, 步长为 0.001, 迭代时间为 $[0, 5]$, 数值解的结果以图片的形式给出, 见图 5.2—图 5.8.

从图 5.2 和图 5.3 可以看出, 基于集中式事件激发采样策略 (5.7) 下, 复杂网络系统的每一个节点每一维度的状态向量随着时间的演变慢慢地趋于同步状态, 并且系统同步误差从 10 迅速递减到 0. 同样的, 在分散式事件激发采样策略下, 图 5.4 和图 5.5 展示了复杂网络系统各个节点的状态随着时间的演变趋于一致, 并且系统误差以较大的速度收敛于 0.

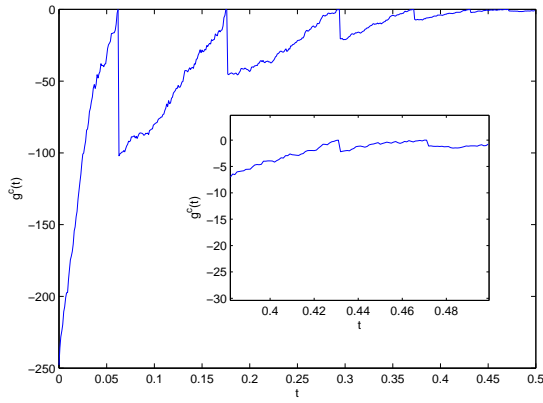


图 5.6: 集中式激发函数 (5.7) 变化图.

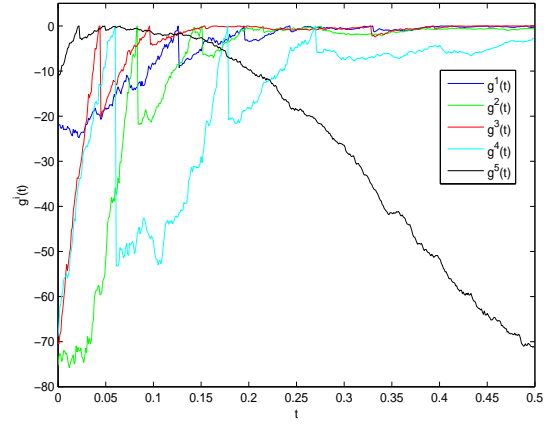


图 5.7: 分散式激发函数 (5.21) 变化图.

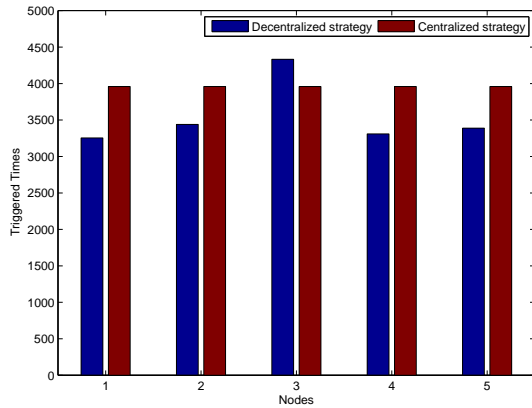


图 5.8: 在集中式激发采样策略和分散式激发采样策略下, 节点激发次数对比图.

为了更好的展现事件激发的过程, 图 5.6 和图 5.7 分别给出了在集中式事件激发采样策略和分散式事件激发采样策略下的激发函数的变量情况. 从图中可以看到, 集中式

和分散式的激发函数值都是负数. 当激发函数是左极限等于零的时候, 此时事件被激发, 测量误差就等于零, 从而使得激发函数的值就等于同步误差的相反数, 此后, 测量误差有开始慢慢的增大至同步误差时, 事件就再一次被激发. 因此事件激发函数是具有周期缩短且函波峰逐渐平缓趋于零的性质. 集中式事件激发策略和分散式事件激发策略的不同点在于, 集中式激发策略只有一个激发函数, 其激发函数是根据系统所有节点的策略误差和同步误差的距离定义的, 而分散式事件策略要求每一个节点都有自己的激发函数, 其激发函数是根据节点自身的策略误差和同步误差的距离定义的.

图 5.8 给出了两种事件激发的激发次数, 从图中可以看出, 除了节点 3 外, 集中式的激发次数要高于分散式的激发次数. 从系统的平均激发次数来看, 集中式策略的激发次数也是高于分散式策略的激发次数. 这说明了分散式激发策略具有更低的更新频率和信息传输频率, 从而更节省能量, 但是分散式策略需要计算每个节点的激发函数, 因此也会导致较大的计算负荷.

5.4 小结

本节主要讨论了带有部分未知转移率、随机噪声扰动、以及随机耦合强度的马氏切换复杂网络同步问题. 分别设置集中式和分散式的事件激发采样控制策略, 并在两种激发策略下分别给出了同步判据.

第 6 章 总结与展望

本学位论文主要运用事件激发控制策略分别讨论了三类处于不同随机环境下带有马氏切换耦合复杂网络同步问题。

首先讨论了非线性耦合拓扑与随机发生的耦合以及随机耦合强度并存的复杂网络均方指数同步问题。适当选择马尔可夫链处于不同状态下的牵制节点集,并分别在连续监控和离散监控两种情形下构造两个基于不同测量误差上界的事件激发规则,根据这些激发规则 and 控制器相结合形成的事件激发牵制控制策略来实现网络同步。在定理中给出了判定同步的判据,并通过构造简洁的 Lyapunov-Krasovskii 函数,利用稳定性理论和比较原理给出指数同步判据是充分有效的。最后给出一个节点相对较大规模的复杂网络数值例子证实理论结果的有效性。

其次考察了时滞与部分转移率共存的复杂网络同步问题。实际应用由于网络带宽或者有限速度的影响,节点动力学行为存在时滞在所难免,因此研究时滞的网络系统是很有必要的。为了实现网络在无具体同步目标的情况下实现网络的同步,在理论证明中设定合适的参考节点作为同步目标。通过事件激发策略和随机控制方法,得出了网络同步的充分条件。并且在同步的基础上进一步证明该事件激发策略下的控制方法不会引起 Zeno 现象。

最后研究了带有噪声干扰的部分转移率未知的马尔可夫切换拓扑复杂网络同步问题。这里建立了数学模型模拟实际环境中存在的噪声影响,同时考虑到马尔可夫链的转移率可能部分未知。这里的噪声主要是考虑信号传输过程中受到的干扰,即节点与节点间通讯受到干扰。与前面不同的是,这里考虑连续监控下的集中式和分散式的事件激发策略。根据节点的测量误差与同步误差构造相应的激发函数,激发函数是否到达阈值 0 即为事件激发规则。结合马氏调制的牵制控制方法,分别在两种事件激发策略实现了噪声影响下部分转移率的复杂网络均方同步。根据 Lyapunov 稳定性定理与随机分析理论得到网络同步的充分条件。

回顾网络科学理论的发展历程,尽管复杂网络的研究热潮刚兴起不久,但有关复杂网络的科研成果不胜枚举。随着社会发展、科技进步,特别是在大数据、互联网 + 时代,网络结构的关系更加复杂,节点维度急剧增加,复杂网络在各个领域将面临着新的挑战。这同时也是推动复杂网络向前发展的绝世良机。目前,本人觉得一下几个方面值得深入和广泛的研究:

- 如何从单一网络控制方法应用到多重网络 (即网络的网络) 中;
- 当网络的切换拓扑是带跳过程时又该如何构造控制方法使得网络同步;
- 如何从现有的网络结构挖掘出缺失的信息;
- 如何通过现有的节点状态信息预测节点在未来某时刻的行为特征。

参 考 文 献

- [1] S. Strogatz. Exploring complex networks[J]. Nature, 2001, 410(6825):268-276.
- [2] A. Barabasi, R. Albert. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286(5439):509-512.
- [3] 周涛, 柏文洁, 汪秉宏, 刘之景, 严钢. 复杂网络研究概述 [J]. 物理, 2005, 34:31-36.
- [4] 赵明, 周涛, 陈关荣, 汪秉宏. 复杂网络上动力系统同步的研究进展 II—如何提高网络的同步能力 [J]. 物理学进展, 2008, 28(1):22-34.
- [5] 方锦清. 驾驭强流束晕与探索网络科学 [M]. 原子能出版社, 2008:1-22, 215-265.
- [6] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006:1-16, 194-243.
- [7] V. Belykh, I. Belykh, M. Erik. Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators[J]. Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics, 2001, 63(3):339-347.
- [8] F. Wang, G. Chen. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I Fundamental Theory & Applications, 2002, 49(1): 54-62.
- [9] K. Josic. Synchronization in Chaotic Systems[J]. Pediatría Polska, 2000, 55(6):715-722.
- [10] M. Vieira. Chaos and synchronized chaos in an earthquake model[J]. Physical Review Letters, 1999, 82(1):201-204.
- [11] S. Wang, J. Kuang, J. Li, Y. Luo, H. Lu, G. Hu. Chaos-based secure communications in a large community[J]. Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics, 2002, 66(2).
- [12] L. Kunbert, K. Agladze, V. Krinsky. Image processing using light-sensitive chemical waves[J]. Nature, 1989, 337:244-247.
- [13] W. Cui, S. Sun, J. Fang, Y. Xu, L. Zhao. Finite-time synchronization of Markovian jump complex networks with partially unknown transition rates[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351:2543–2561.
- [14] Y. Zhou, C. Sun. Fixed time synchronization of complex dynamical networks[C]. 中国智能自动化学术会议, 2015, 105:649–655.
- [15] M. Zhan, X. Wang, X. Gong, G. Wei, C. Lai. Complete synchronization and generalized synchronization of one-way coupled time-delay systems[J]. Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics, 2003, 68.
- [16] H. Dong, D. Ye, J. Feng, J. wang. Almost sure cluster synchronization of Markovian switching complex networks with stochastic noise via decentralized adaptive pinning control[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 87(2):727-739.
- [17] C. Li, G. Chen. Phase synchronization in small-world networks of chaotic oscillators[J]. Physica A Statistical Mechanics & Its Applications, 2004, 341(1):73-79.

- [18] X. Feng, F. Zhang, W. Wang. Global exponential synchronization of delayed fuzzy cellular neural networks with impulsive effects[J]. *Chaos*, 2011, 44(1-3):9-16.
- [19] H. Karimi, P. Maass. Delay-range-dependent exponential H_∞ synchronization of a class of delayed neural networks[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2009, 41(3):1125-1135.
- [20] Y. Tang, Z. Wang, W. Wong, J. Kurths, J. Fang. Multiobjective synchronization of coupled systems[J]. *Chaos*, 2011, 21(2):939-952.
- [21] J. Lu, D. Ho, J. Cao, J. Kurths. Exponential synchronization of linearly coupled neural networks with impulsive disturbances[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(2):329-336.
- [22] Y. Liu, Z. Wang, J. Liang, X. Liu. Synchronization and state estimation for discrete-time complex networks with distributed delays[J]. *IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Part B Cybernetics*, 2008, 38(5):1314-1325.
- [23] H. Karimi, M. Zapateiro, N. Luo. Adaptive synchronization of master-slave systems with mixed neutral and discrete time-delays and nonlinear perturbations[J]. *Asian Journal of Control*, 2012, 14(1):251-257.
- [24] J. Lu, D. Ho, Z. Wang. Pinning stabilization of linearly coupled stochastic neural networks via minimum number of controllers[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2009, 20(10):1617-1629.
- [25] L. Turci, P. Lellis, E. Macau, M. Bernardo, M. Simões. Adaptive pinning control: A review of the fully decentralized strategy and its extensions[J]. *European Physical Journal Special Topics*, 2014, 223(13):2649-2664.
- [26] J. Zhou, J. Lu, J. Lü. Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network[J]. *Automatica*, 2008, 44(4):996-1003.
- [27] L. Turci, E. Macau. Adaptive node-to-node pinning synchronization control of complex networks[J]. *Chaos*, 2012, 22(3):361-383.
- [28] Z. Li, H. Park, Z. Wu. Synchronization of complex networks with nonhomogeneous Markov jump topology[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 74(1-2):65-75.
- [29] Y. Ma, Y. Zheng. Synchronization of continuous-time Markovian jumping singular complex networks with mixed mode-dependent time delays[J]. *Neurocomputing*, 2015, 156:52-59.
- [30] Y. Han, W. Lu, Z. Li, T. Chen. Pinning dynamic systems of networks with Markovian switching couplings and controller node set[J]. *Systems & Control Letters*, 2014, 65(1):56-63.
- [31] Y. Ma, Y. Zheng. Synchronization of continuous time Markovian jumping singular complex networks with mixed mode-dependent time delays[J]. *Neurocomputing*, 2015, 156:52-59.
- [32] Z. Li, J Park, Z Wu. Synchronization of complex networks with nonhomogeneous Markov jump topology[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 74:65-75.
- [33] X. Liu. H_∞ cluster synchronization for a class of neutral complex dynamical networks with Markovian switching[J]. *The Scientific World Journal*, 2014, 2014:1-20.

- [34] X. Yang, J. Cao. Adaptive pinning synchronization of complex networks with stochastic perturbations[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2010, 2010:179-186.
- [35] X. Zhou, K. Luo. Cluster synchronization of stochastic complex networks with Markovian switching and time-varying delay via impulsive pinning control[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2014, 2014(3):1-9.
- [36] J. Wang, M. Kwong, F. Austin. Mean-square exponential synchronization of Markovian switching stochastic complex networks with time-varying delays by pinning control[J]. *Abstract & Applied Analysis*, 2012, 2012:919-929.
- [37] X. Wang, J. Fang, A. Dai, W. Cui, G. He. Mean square exponential synchronization for a class of Markovian switching complex networks under feedback control and M-matrix approach[J]. *Neurocomputing*, 2014, 144(144):357-366.
- [38] S. Hao, J. Park, W. Guang, Z. Qiang. Finite-time synchronization for complex networks with semi-Markov jump topology[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, 24:40-51.
- [39] X. Yang, J. Cao, J. Lu. Synchronization of randomly coupled neural networks with Markovian jumping and time-delay[J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I Regular Papers*, 2013, 60(2):363-376.
- [40] M. Baumeister, J. Bühren, T. Kohnen. Adaptive synchronization in an array of chaotic neural networks with mixed delays and jumping stochastically hybrid coupling[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2009, 14(9-10):3615-3628.
- [41] X. Yang, J. Cao, J. Lu. Synchronization of Markovian coupled neural networks with nonidentical node-delays and random coupling strengths[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, 23(1):60-71.
- [42] A. Hu, J. Cao, M. Hua, L. Guo. Event-triggered consensus of multi-agent systems with noises[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352:3489-3503.
- [43] X. Yang, J. Cao, J. Lu. Synchronization of delayed complex dynamical networks with impulsive and stochastic effects[J]. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 2011, 12(4):2252-2266.
- [44] W. Yu, J. Cao. Synchronization control of stochastic delayed neural networks[J]. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2007, 373(1):252-260.
- [45] X. Yang, J. Cao, Y. Long, W. Rui. Adaptive lag synchronization for competitive neural networks with mixed delays and uncertain hybrid perturbations[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(10):1656-1667.
- [46] A. Hu, J. Cao, M. Hu, L. Guo. Cluster synchronization in directed networks of non-identical systems with noise via random pinning control[J]. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2014, 395(4):537-548.
- [47] X. Wang. Complex networks: topology dynamics and synchronization[J]. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 2002, 12(5):885-916.
- [48] W. Xia, J. Cao. Pinning synchronization of delayed dynamical networks via periodically intermittent control[J]. *Chaos*. 2009, 19(1):377-411

- [49] T. Chen, X. Liu, W. Lu. Pinning complex networks by a single controller[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I Regular Papers, 2007, 54(6):1317–1326.
- [50] W. Yu, G. Chen, J. Lü. On pinning synchronization of complex dynamical networks[J]. Automatica. 2009, 45(2): 429-435.
- [51] S. Li, J. Cao, Y. He. Pinning controllability scheme of directed complex delayed dynamical networks via periodically intermittent control[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2016, 2016:1-10.
- [52] D. Dimarogonas, E. Frazzoli, K. Johansson. Distributed-event-triggered control for multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(5):1291–1297.
- [53] H. Yan, Y. Shen, H. Zhang, H. Shi. Decentralized event-triggered consensus control for second-order multi agent systems[J]. Neurocomputing, 2014, 133:18–24.
- [54] Y. Fan, J. Yang. Average consensus of multi-agent systems with self-triggered controllers[J]. Neurocomputing, 2016, 177:33–39.
- [55] T. Xie, X. Liao, H. Li. Leader-following consensus in second-order multi-agent systems with input time delay: An event-triggered sampling approach[J]. Neurocomputing, 2015, 177:130–135.
- [56] H. Li, C. Ming, S. Shen, W. Wong. Event-triggered control for multi-agent systems with randomly occurring nonlinear dynamics and time-varying delay[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351:2582–2599.
- [57] D. Xie, S. Xu, Y. Chu, Y. Zou. Event-triggered average consensus for multi-agent systems with nonlinear dynamics and switching topology[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352:1080–1098.
- [58] H. Ma, D. Liu, D. Wang, F. Tan, C. Li. Centralized and decentralized event-triggered control for group consensus with fixed topology in continuous time[J]. Neurocomputing, 2016, 161:267–276.
- [59] G. Seyboth, D. Dimarogonas, K. Johansson. Event-based broadcasting for multi-agent average consensus[J]. Automatica, 2013, 49(1):245-252.
- [60] H. Li, X. Liao, G. Chen, D. Hill, Z. Dong, T. Huang. Event-triggered asynchronous intermittent communication strategy for synchronization in complex dynamical networks[J]. Neural Networks, 2015, 66:1–10.
- [61] W. Lu, Y. Han, T. Chen. Synchronization in networks of linearly coupled dynamical systems via event-triggered diffusions[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 26(12):3060-3069.
- [62] Z. Chen, D. Li, Y. Huang, C. Tang. Event-triggered communication for time synchronization in WSNs[J]. Neurocomputing, 2016, 177:416–426.
- [63] B. Zhou, X. Liao, T. Huang, G. Chen. Pinning exponential synchronization of complex networks via event triggered communication with combinational measurements[J]. Neurocomputing, 2015, 157:199–207.
- [64] J. Lang, Y. Zhang, B. Zhang. Event-triggered network-based synchronization of delayed neural networks[J]. Neurocomputing, 2013, 60(3):676-689.

- [65] J. Zhang, C. Peng, D. Du, M. Zheng. Adaptive event-triggered communication scheme for networked control systems with randomly occurring nonlinearities and uncertainties[J]. Neurocomputing, 2016, 174:475–482.
- [66] W. Lu, Y. Han, T. Chen. Pinning networks of coupled dynamical systems with Markovian switching couplings and event-triggered diffusions[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(9):3526–3545.
- [67] K. Åström, B. Bernhardsson. Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems[C]. IEEE Conference on Decision & Control, 2003, 2011–2016.
- [68] B. Wang, X. Meng, T. Chen. Event based pulse-modulated control of linear stochastic systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(59):2144–2150.
- [69] H. Zhang, J. Cheng, H. Wang, Y. Chen, H. Xiang. Robust finite-time event-triggered H_∞ boundedness for network-based Markovian jump nonlinear systems[J]. ISA Transactions, 2016, 63:32–38.
- [70] Y. Tan, D. Du, Q. Qi. State estimation for Markovian jump systems with an event-triggered communication scheme[J]. Circuits Systems & Signal Processing, 2017, 36:2–24.
- [71] Q. Li, B. Shen, Y. Liu, F. Alsaadi. Event-triggered H_∞ state estimation for discrete-time stochastic genetic regulatory networks with Markovian jump parameters and time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2016, 174:912–920.
- [72] A. Hu, J. Cao, M. Hu, L. Guo. Event-triggered consensus of Markovian jumping multi-agent systems via stochastic sampling[J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(13):1964–1972.
- [73] Y. Cui, M. Fei, D. Du. Event-triggered H_∞ Markovian switching pinning control for group consensus of large-scale systems[J]. Iet Generation Transmission & Distribution, 2016, 10(11):2565–2575.
- [74] X. Liu, G.i Xiao, W.. Tay, G. Ma, H. Xi. Synchronization of pinning networks with Markovian switching topologies and event-triggered communication[C]. Guilin, China. 2016. World Congress on Intelligent Control & Automation, 2016:2642–2647.
- [75] 邵浩宇, 胡爱花, 刘丹. Synchronization of Markovian jumping complex networks with event-triggered control[J]. Chinese Physics B, 2015, 24(9):595–602.
- [76] A. Wang, T. Dong, X. Liao. Event-triggered synchronization strategy for complex dynamical networks with the Markovian switching topologies[J]. Neural Networks, 2016, 74:52–57.
- [77] S. Senan, M. Ali, R. Vadivel b, S. Arik. Decentralized event-triggered synchronization of uncertain Markovian jumping neutral-type neural networks with mixed delays[J]. Neural Networks, 2017, 86:32–41.
- [78] H. Li, Z. Zuo, Y. Wang. Event triggered control for Markovian jump systems with partially unknown transition probabilities and actuator saturation[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(8):1848–1861.
- [79] M. Guinaldo, D. Lehmann, J. Senchez, S. Dormido, K. Johansson. Distributed event-triggered control with network delays and packet-losses[C]. Maui, American. 2013. IEEE Conference on Decision & Control, 2013, 22(1):1–6.

- [80] 林元烈. 应用随机过程 [M], 清华大学出版社, 2002.
- [81] Steven E. Shreve 著, 陈启宏, 陈迪华译. 金融随机分析 (第二卷)[M], 上海财经大学出版社, 2015.
- [82] R. Horn, C. Johnson. Matrix Analysis[M]. University of Alberta, 1985.
- [83] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory[J]. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automation, 1994, 85(5):798-799
- [84] X. Wang, H. Su. Pinning control of complex networked systems: A decade after and beyond[J]. Annual Reviews in Control, 2014, 38:103-111.
- [85] Y. Tang, F. Qian, H. Gao, J. Kurths. Synchronization in complex networks and its application – A survey of recent advances and challenges[J]. Annual Reviews in Control, 2014, 38(2):184-198.
- [86] W. Guo. Lag synchronization of complex networks via pinning control[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2011, 12(5): 2579-2585.
- [87] X. Liu, T. Chen. Synchronization analysis for nonlinearly-coupled complex networks with an asymmetrical coupling matrix[J]. Physica A Statistical Mechanics & Its Applications, 2008, 387:4429–4439.
- [88] T. Gronwall. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations[J]. Annals of Mathematics, 1991, 34(5):655-666.
- [89] R. Bellman. The stability of solutions linear of differential equations[J]. Duke Mathematical Journal, 1943, 10(4):643–647.
- [90] X. Mao. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1999, 79:45–67.
- [91] M. Porfiri, F. Fiorilli. Experiments on node-to-node pinning control of chua’ s circuits[J]. Physica D Nonlinear Phenomena, 2010, 239:454–464.
- [92] A. Ivanov, E. Liz, S. Trofimchuk. Halanay inequality, Yorke 3/2 stability criterion, and differential equations with maxima[J]. Tohoku Mathematical Journal, 2002, 54(2):277-295.

致 谢

这篇论文是在董海玲副教授的悉心关怀和指导下完成的。从论文的选题、收集材料到最后论文的撰写及定稿,无不凝聚着董老师的心血。同时很庆幸在这三年的研究生生涯中遇到董老师,无论是学习和生活,他都给予我极大的关心和帮助,她严谨治学的态度、宽以待人的品格、乐观进取的心态、平易近人的长者风范无时无刻不在影响着我。董老师渊博的学识、坚实的专业知识和敏锐的洞察力使我受益非浅,将是我一生学习的榜样。至此论文完成之际,向董老师致以最诚挚的谢意。

衷心感谢审阅鄙人论文的专家学者们,谢谢您在百忙之中抽空关注晚辈的学习成果,同时也感谢阅读过我论文的同行人或关注者,谢谢您的关注和建议!

衷心感谢讨论班的所有成员,他们是丰建文教授、赵毅老师、董海玲老师、王劲毅大师兄、余芬芬师姐、吴维扬师姐、余芬芬师姐、叶丹凤师姐、杨攀同学、李娜同学、付方方同学。一起生活学习的日子使我终生难忘!

衷心感谢任课老师魏正红老师、张君老师、李松臣老师、温松桥老师、董海玲老师、蒋春福老师、姚念老师、张玉老师、曹丽华老师、王启华老师、丰建文老师、赵毅老师等,您们无私的传授知识给我,恩师难忘,我的每一步成长都离不开师长的教导和呵护。

衷心感谢和我一起研途的同学们,感谢林俊生、莫广焰、楚天月、孙明,是你们陪我一起在这座美丽的校园里度过快乐的三年时光,我们在相互鼓励中不断成长、进步,留下了许多难忘的回忆。如今,大家都各奔东西,衷心祝愿大家在今后的人生道路上事事顺心,勇于不断攀登生活和事业得高峰,幸福美满。我们的同窗之谊永存。

最后,我要感谢我的父母一直以来给予的支持和信任,他们用最无私的奉献和真挚的爱支持我顺利完成学业。

由于作者水平有限,论文中难免存在错误或不妥之处,恳请给位专家教授指正。

周家木

2017 年 3 月 6 日 于 深圳大学

攻读硕士学位期间的研究成果

- [1] **Jiamu Zhou**, Hailing Dong, Jianwen Feng. Event-triggered communication for synchronization of Markovian jump delayed complex networks with partially unknown transition rates[J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 293(2017):617-629.
- [2] Hailing Dong, **Jiamu Zhou**, Bingchang Wang. Synchronization of complex networks with randomly nonlinear coupling and Markov jump topology via event-triggered strategy[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, submitted.