Лабораторная работа №1. Вариант 1.

№3 $\{W_1(t_1), t_1 \geq 0\}$ и $\{W_2(t_2), t_2 \geq 0\}$ - независимые копии стандартного винеровского процесса

$X(t_1, t_2) = \xi_1 W_1(t_1) + \xi_2 W_2(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$, где $\xi_1 \sim U[0,1]$, $\xi_2 \sim U[0,1]$ и ξ_1, ξ_2 - независимы между собой и от процессов.

Найти: $\mathbb{E}X(t_1, t_2)$ и $K_X(t, s)$

$$\mathbb{E}X(t_1,t_2) = \mathbb{E}[\xi_1 W_1(t_1) + \xi_2 W_2(t_2)] = \mathbb{E}[\xi_1 W_1(t_1)] + \mathbb{E}[\xi_2 W_2(t_2)] = \mathbb{E}\xi_1 \mathbb{E}W_1(t_1) + \mathbb{E}\xi_2 \mathbb{E}W_2(t_2) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

$$K_X(t,s) = K_X((t_1,t_2),(s_1,s_2)) = \operatorname{cov}(X(t_1,t_2), X(s_1,s_2)) =$$
$$= \mathbb{E}X(t_1,t_2)X(s_1,s_2) - \mathbb{E}X(t_1,t_2)\mathbb{E}X(s_1,s_2) = \mathbb{E}X(t_1,t_2)X(s_1,s_2) - 0 =$$
$$= \mathbb{E}[(\xi_1 W_1(t_1) + \xi_2 W_2(t_2))(\xi_1 W_1(s_1) + \xi_2 W_2(s_2))] = \mathbb{E}[\xi_1^2 W_1(t_1)W_1(s_1) + \xi_1\xi_2 W_1(t_1)W_2(s_2) +$$
$$+ \xi_2\xi_1 W_2(t_2)W_1(s_1) + \xi_2^2 W_2(t_2)W_2(s_2)] = \mathbb{E}\xi_1^2 \mathbb{E}W_1(t_1)W_1(s_1) + \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2 \mathbb{E}W_1(t_1)\mathbb{E}W_2(s_2) +$$
$$+ \mathbb{E}\xi_2\mathbb{E}\xi_1 \mathbb{E}W_2(t_2)\mathbb{E}W_1(s_1) + \mathbb{E}\xi_2^2 \mathbb{E}W_2(t_2)W_2(s_2) = \mathbb{E}\xi_1^2 \mathbb{E}W_1(t_1)W_1(s_1) - \mathbb{E}\xi_1^2 \mathbb{E}W_1(t_1)\mathbb{E}W_1(s_1)$$
$$+ \mathbb{E}\xi_2^2 \mathbb{E}W_2(t_2)W_2(s_2) - \mathbb{E}\xi_2^2 \mathbb{E}W_2(t_2)\mathbb{E}W_2(s_2) = \mathbb{E}\xi_1^2(\mathbb{E}W_1(t_1)W_1(s_1) - \mathbb{E}W_1(t_1)\mathbb{E}W_1(s_1))$$
$$+ \mathbb{E}\xi_2^2(\mathbb{E}W_2(t_2)W_2(s_2) - \mathbb{E}W_2(t_2)\mathbb{E}W_2(s_2)) = \mathbb{E}\xi_1^2 \operatorname{cov}(W_1(t_1), W_1(s_1)) +$$
$$+ \mathbb{E}\xi_2^2 \operatorname{cov}(W_2(t_2), W_2(s_2)) = \frac{1}{3}K_{W_1}(t_1, s_1) + \frac{1}{3}K_{W_2}(t_2, s_2) =$$
$$= \frac{1}{3}(\min\{t_1, s_1\} + \min\{t_2, s_2\})$$

$$K_X(t,s) = K_X((t_1,t_2),(s_1,s_2)) = \frac{1}{3}(\min\{t_1,s_1\} + \min\{t_2,s_2\})$$

№4 $\{W(t), t \geq 0\}$ - стандартный винеровский процесс

Показать что $\{tW(t^2), t \geq 0\}$ - гауссовский вектор

Зафиксируем произвольные $n_0 \in \mathbb{N}$ и $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_{n_0}^0 \geq 0$

По определению $(W(t_1^0), \ldots, W(t_{n_0}^0))$ - гауссовский вектор, т.к. $t_1^0 \ldots t_{n_0}^0 \geq 0$, то существуют $s_1, \ldots, s_{n_0}$: $s_1 = \sqrt{t_1^0}, \ldots, s_{n_0} = \sqrt{t_{n_0}^0}$

Составим матрицу следующего вида: $L^0 = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s_{n_0} \end{pmatrix}$

По доказанному на паре: $b + LX$ - гауссовский вектор, где X - гауссовский вектор, $b \in \mathbb{R}^n$, а L - матрица $n \times n$

возьмем $b_0 = \bar{0}$, $L = L^0$, тогда $b_0 + L^0 W(t^0)$ - гауссовский вектор, где $W(t^0) = (W(t_1^0), \ldots W(t_{n_0}^0))$

$b_0 + L_0 W(t^0) = (s_1 W(t_1^0), \ldots, s_{n_0} W(t_{n_0}^0)) = (\sqrt{t_1^0} W(t_1^0), \ldots, \sqrt{t_{n_0}^0} W(t_{n_0}^0))$

Переобозначив $t_1 = \sqrt{t_1^0}, \ldots, t_{n_0} = \sqrt{t_{n_0}^0}$ имеем $(t_1 W(t_1^2), \ldots, t_n W(t_{n_0}^2))$ - гауссовский вектор.

В силу произвольности выбранных $n_0 \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_{n_0} \geq 0$ имеем, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ $(t_1 W(t_1^2), \ldots, t_n W(t_n^2))$ - гауссовский вектор.

По определению $\{tW(t^2), t \geq 0\}$ - гауссовский процесс. ∎

Вариант 4.

№2 $X_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)$, $X_3 \sim N(a_3, \sigma_3^2)$

X_1, X_2, X_3 – независимы $X = (X_1 + 2X_2 - 1, X_2 + 3X_3 + 1)$. K_X – ?

Пусть $Y_1 = X_1 + 2X_2 - 1$, $Y_2 = X_2 + 3X_3 + 1$. $Y = (Y_1, Y_2)$, тогда $K_X = K_Y$

$$K_Y = (cov(Y_i, Y_j))_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}Y_1 & cov(Y_1, Y_2) \\ cov(Y_2, Y_1) & \mathbb{D}Y_2 \end{pmatrix}$$

$cov(Y_1 Y_2) = cov(Y_2, Y_1) = \mathbb{E}Y_1Y_2 - \mathbb{E}Y_1\mathbb{E}Y_2$

$\mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}[X_1 + 2X_2 - 1] = \mathbb{E}X_1 + 2\mathbb{E}X_2 - 1 = a_1 + 2a_2 - 1$

$\mathbb{E}Y_2 = \mathbb{E}[X_2 + 3X_3 + 1] = \mathbb{E}X_2 + 3\mathbb{E}X_3 + 1 = a_2 + 3a_3 + 1$

$\mathbb{E}Y_1\mathbb{E}Y_2 = (a_1 + 2a_2 - 1)(a_2 + 3a_3 + 1) = a_1a_2 + 3a_1a_3 + a_1 + 2a_2^2 + 6a_2a_3 + 2a_2 - a_2 -$
$- 3a_3 - 1 = a_1a_2 + 3a_1a_3 + a_1 + 2a_2^2 + 6a_2a_3 + a_2 - 3a_3 - 1$

$\mathbb{E}Y_1Y_2 = \mathbb{E}[(X_1 + 2X_2 - 1)(X_2 + 3X_3 + 1)] = \mathbb{E}[X_1X_2 + 3X_1X_3 + X_1 + 2X_2^2 + 6X_2X_3 +$
$+ 2X_2 - X_2 - 3X_3 - 1] = \mathbb{E}X_1X_2 + 3\mathbb{E}X_1X_3 + \mathbb{E}X_1 + 2\mathbb{E}X_2^2 + 6\mathbb{E}X_2X_3 + \mathbb{E}X_2 - \mathbb{E}X_3 - 1$
$= a_1a_2 + 3a_1a_3 + a_1 + 2\mathbb{E}X_2^2 + 6a_2a_3 + a_2 - 3a_3 - 1.$

$\mathbb{E}Y_1Y_2 - \mathbb{E}Y_1\mathbb{E}Y_2 = a_1a_2 + 3a_1a_3 + a_1 + 2\mathbb{E}X_2^2 + 6a_2a_3 + a_2 - 3a_3 - 1 - a_1a_2 - 3a_1a_3 - a_1 -$
$- 2a_2^2 - 6a_2a_3 - a_2 + 3a_3 + 1 = 2\mathbb{E}X_2^2 - 2a_2^2 = 2(\mathbb{E}X_2^2 - (\mathbb{E}X_2)^2) = 2\mathbb{D}X_2 = 2\sigma_2^2$

$\mathbb{D}Y_1 = \mathbb{D}(X_1 + 2X_2 - 1) = \mathbb{D}(X_1 + 2X_2) = \mathbb{D}X_1 + \mathbb{D}2X_2 = \sigma_1^2 + 4\sigma_2^2$

$\mathbb{D}Y_2 = \mathbb{D}(X_2 + 3X_3 + 1) = \mathbb{D}(X_2 + 3X_3) = \mathbb{D}X_2 + \mathbb{D}3X_3 = \sigma_2^2 + 9\sigma_3^2$

$$K_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + 4\sigma_2^2 & 2\sigma_2^2 \\ 2\sigma_2^2 & \sigma_2^2 + 9\sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

Вариант 4.

Лабораторная работа №1.

№1

$f, f_n \in C[a;b]$ $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f(x)|$ $f_n \to f$ при $n \to \infty$ и $x \in [a;b]$

$f_n \to f$ при $n \to \infty$ и $x \in [a;b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$

$\|g\| = \sup\limits_{x\in[a;b]} |g(x)| \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \sup\limits_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

По второй теореме Вейерштрасса $\sup\limits_{x\in[a;b]} |g(x)| = \max\limits_{x\in[a;b]} |g(x)| = M < +\infty$

Тогда имеем: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow |f_n - f| \le M < \varepsilon$

Необходимо показать, что $\forall \varepsilon_k > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \|f_n^k - f^k\| < \varepsilon$, где $k \in \mathbb{N}$

Доказательство проведём методом математической индукции.

Случай при $k=1$ верен из условия задачи, т.е $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}\ \forall n > N_{\varepsilon_1}\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon.$

Предположим, что при $k-1$ верно: $\forall \varepsilon_{k-1} > 0\ \exists N_{\varepsilon_{k-1}} \in \mathbb{N}\ \forall n > N_{\varepsilon_{k-1}}\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f_n^{k-1} - f^{k-1}\| < \varepsilon.$

Проверим выполнимость неравенства при k.

По второй теореме Вейерштрасса: $|f_n - f| \le m_1 < \varepsilon_1$ и $|f_n^{k-1} - f^{k-1}| \le m_{k-1} < \varepsilon_{k-1}$

где $m_1, m_{k-1} > 0$, тогда имеем:

$-m_1 \le f_n - f \le m_1 \Rightarrow -m_1 + f \le f_n \le m_1 + f$ и $-m_{k-1} \le f^{k-1}_n - f^{k-1} \le m_{k-1} \Rightarrow -m_{k-1} + f^{k-1} \le f_n^{k-1} \le m_{k-1} + f^{k-1}$

$f_n^k = f_n^{k-1} \cdot f_n \Rightarrow (-m_1 + f)(-m_{k-1} + f^{k-1}) \le f_n^{k-1} f_n \le (m_1 + f)(m_{k-1} + f^{k-1})$ при $n > \max\{N_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_{k-1}}\}$

$m_1 m_{k-1} - f^{k-1} m_1 - f m_{k-1} + f^k \le f_n^k \le m_1 m_{k-1} + f^{k-1} m_1 + f m_{k-1} + f^k \Leftrightarrow$

$m_1 m_{k-1} - f^{k-1} m_1 - f m_{k-1} \le f_n^k - f^k \le m_1 m_{k-1} + f^{k-1} m_1 + f m_{k-1} \Rightarrow$

$-m_1 m_{k-1} - f^{k-1} m_1 - f m_{k-1} < f_n^k - f^k \le m_1 m_{k-1} + f^{k-1} m_1 + f m_{k-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_n^k - f^k| < m_1 m_{k-1} + f^{k-1} m_1 + f m_{k-1}$

По первой теореме Вейерштрасса f и f^{k-1} ограничены на $[a;b]$, а $m_1 < \varepsilon_1$, $m_{k-1} < \varepsilon_{k-1}$. Следовательно, в силу произвольности выбранных ε_1 и ε_{k-1} при $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon \to 0$ $|f_n^k - f^k| \to 0$ или $|f_n^k - f^k| < \varepsilon_k$ при $n > N_{\varepsilon_k} = \max\{N_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_{k-1}}\}$

Т.к $\forall x \in [a;b]$ $|f_n^k - f^k| < \varepsilon_k$, то $\sup\limits_{x\in[a;b]} |f_n^k(x) - f^k(x)| < \varepsilon_k \Rightarrow \|f_n^k - f^k\| < \varepsilon_k$

Следовательно мы нашли такое $N_{\varepsilon_k} = \max\{N_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_{k-1}}\}$ при котором $\|f_n^k - f^k\| < \varepsilon_k$

Индукционный переход выполнен, значит верно, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \|f_n^k - f^k\| < \varepsilon$ или $f_n^k \to f^k$ при $n > N_\varepsilon$ и $x \in [a;b]$ ∎

$f \in C[a;b] \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\forall x \in [a;b]$

По свойству предела $\lim\limits_{x\to x_0} (\underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)}_{k}) = \underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)}_{k} =$

$= \underbrace{f(x_0) \cdot f(x_0) \cdot \ldots \cdot f(x_0)}_{k} = f^k(x_0)$ т.е $\lim\limits_{x\to x_0} f^k(x) = f^k(x_0)$ $\forall x \in [a;b]$, т.е

$f^k \in C[a;b]$. для f_n^k - аналогично.