

- a) Bestimmen sie die Gleichung einer Geraden  $g$  durch die Punkte  $A(7 | -3 | 2)$  und  $B(-4 | 5 | -2)$ .
- b) Bestimmen sie die Gleichung einer Geraden  $h$ , die aus  $g$  hervorgeht, wenn  $g$  um den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$  verschoben wird.
- c) Bestimmen sie die Gleichung einer Geraden  $i$ , die zu  $g$  orthogonal ist und durch  $C(1 | 2 | 3)$  verläuft.
- d) Bestimmen sie die Gleichung einer Geraden  $j$ , die zu  $i$  parallel ist und durch den Punkt A von oben verläuft.
- e) Berechnen sie alle Spurpunkte der Geraden  $g$ .

v.2019-12-01

Prüfen sie die Lage der Geraden  $g$  und  $h$  zueinander. Prüfen sie auch auf orthogonalität, falls die Geraden windschief sind und geben sie den Schnittpunkt an, falls sich die Geraden schneiden.

a)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

c)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

v.2019-12-01

**Lösung 1**

a)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) z.B.

$$i : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) z.B.

$$j : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Berechne  $\overrightarrow{OA} + \vec{v}$ . Der Richtungsvektor bleibt gleich.

e)

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$S_{x_1x_2}(1,5 | 1 | 0)$$

$$S_{x_2x_3}(0 | 2,09 | -0,55)$$

$$S_{x_1x_3}(2,88 | 0 | 0,5)$$

v.2019-12-01

**Lösung 2**

a) Die Geraden schneiden sich in  $(-3 | 2 | -1)$ .

Sie sind nicht orthogonal. Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren ist 13.

b) Die Geraden sind echt parallel. Die Richtungsvektoren sind mit dem Faktor  $\frac{4}{3}$  skaliert.

c) Die Geraden sind windschief zueinander.

Sie sind orthogonal, das das Skalarprodukt der Richtungsvektoren gleich null ist:  $1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 = 3 - 3 = 0$ .

v.2019-12-01

Gegeben ist ein Dreieck  $ABD$  mit  $A(-1 | -1 | 1)$ ,  $B(2 | -2 | 1)$  und  $D(2,5 | -0,5 | 1)$ .

- Berechnen sie die Länge der drei Seiten des Dreiecks.
- Bestimmen sie die Koordinaten eines Punktes  $C$ , so dass  $ABCD$  ein Parallelogramm ist.
- Prüfen sie, ob das Parallelogramm  $ABCD$  ein Rechteck ist.
- Bestimmen sie Gleichungen für die Diagonalengeraden von  $ABCD$  und ermitteln sie deren Schnittpunkt.
- Mit einem Punkt  $E$ , der senkrecht über dem Schnittpunkt der Diagonalen liegt, bildet  $ABCD$  eine Pyramide. Bestimmen sie den Punkt  $E$  so, dass das Volumen der Pyramide 10 ist.

v.2019-12-01

In einem Bergwerk kann ein Minenschacht durch eine Gerade mit der Gleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 22 \\ -20 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Die  $x_1x_2$ -Ebene stellt den Meeresspiegel (NN) dar. Alle Werte sind in Metern angegeben.

Ein zweiter Minenschacht soll am Punkt  $K(5 | -6 | 16)$  orthogonal zu  $g$  in den Berg gebohrt werden und im Berg auf  $g$  treffen.

- Bestimmen sie die allgemeine Form (abhängig von einer unbekannten  $r$ ) für einen Ortsvektor  $\overrightarrow{OS_r}$ , für einen Punkt  $S_r$ , der auf  $g$  liegt.
- Der neue Schacht soll orthogonal zu  $g$  verlaufen. Stellen sie eine Gleichung mit  $\overrightarrow{OS_r}$  auf, die dies ausdrückt und lösen sie nach  $r$  auf (Kontrolle:  $r \approx 0,2064$ ).
- Bestimmen sie eine Gleichung für den zweiten Minenschacht.
- Wie weit muss gebohrt werden, bis der erste Minenschacht erreicht ist?

v.2019-12-01

**Lösung 3**

a)  $|\overrightarrow{AB}| \approx 3,16, |\overrightarrow{BD}| \approx 1,58, |\overrightarrow{AD}| \approx 3,54$

b)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Ja, denn  $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD} = 0$

d)

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$h : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$S(0,75 | -0,75 | 1)$$

e)  $E$  liegt über  $S$ , also  $E(0,75 | -0,75 | 1 + h)$ .

Das Volumen der Pyramide berechnet sich durch

$$V_P = 10 = \frac{1}{3} \cdot (|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}|) \cdot h$$

Nach  $h$  umgestellt ergibt sich  $h \approx 6$ , also  $E(0,75 | -0,75 | 7)$ .

v.2019-12-01

**Lösung 4**

a)

$$\overrightarrow{OS_r} = \begin{pmatrix} -20 + 70r \\ 12 + 22r \\ 8 - 20r \end{pmatrix}$$

b)

$$(\overrightarrow{OS_r} - \overrightarrow{OK}) * \begin{pmatrix} 70 \\ 22 \\ -20 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow r \approx 0,2064$$

c) Berechne  $S_{0,2064} = (-5,552 | 16,5408 | 3,872)$

Richtungsvektor berechnen:

$$\vec{w} = \overrightarrow{KS} = \begin{pmatrix} -5,552 \\ 16,5408 \\ 3,872 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10,552 \\ 22,5408 \\ -12,128 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10,552 \\ 22,5408 \\ -12,128 \end{pmatrix}$$

d)

$$|\vec{w}| \approx 27,69(\text{m})$$

v.2019-12-01