Der Querschnitt eines Deiches kann für $-2 \leq x \leq 6$ kann näherungsweise durch den Graph der Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot (x+2) \cdot e^{-\frac{2}{3}x}$ beschrieben werden (x und $f(x)$ in m). Die Deichsohle liegt auf der x-Achse.

a) Berechnen sie die Schnittpunkte von f mit den Koordinatenachsen.

b) Berechnen sie die Höhe des Deiches.

c) Welches ist die Landseite, welches die Seeseite des Deiches? Begründen sie ihre Meinung.

d) Bestimmen sie das Volumen des Deiches auf einer Länge von 100 m.

e) Nach einem Hochwasser soll der Deich an der Wasserseite abgeflacht werden. Der Vorschlag lautet, den Deich ab einem Wendepunkt des Graphen so aufzuschütten, dass der Querschnitt ab dieser Stelle ein konstantes Gefälle von 30 % aufweist.

   Bestimmen sie die Breite der Deichsohle, wenn dieser Vorschlag realisiert wird.

Lösung 1

a) y-Achsenabschnitt: $f(0) = 2 \cdot (0 + 2) \cdot e^{-\frac{2}{3} \cdot 0} = 4$

Nullstellen: $f(x) = 0$. Da $e^x > 0$, für alle x, ist $2 \cdot (x + 2) = 0$ zu bestimmen. Dann ergibt sich $x = -2$.

b) Extremstellen von $f(x)$ bestimmen und auf Hochpunkt im Intervall $[-2;\ 6]$ prüfen. Randextrema auf größere Werte prüfen (Maximum bei $(-0{,}5 \mid 4{,}1868)$).

c) Graph im GTR plotten und sinnvolle Begründung notieren.

d) Integral im Intervall $[-2;\ 6]$ bestimmen (GTR) und mit 100 multiplizieren:

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot 100 = 1654{,}95$$

e)
1. Wendestelle bestimmen ($f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$).
2. Geradengleichung $g(x) = -0{,}3x + b$ gesucht.
3. b bestimmen ($g(1) = -0{,}3x + b = 3{,}0805 \Leftrightarrow b = 3{,}3805$).
4. Nullstelle von $g(x)$ bestimmen ($g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 11{,}2683$).
5. Breite der Deichsohle berechnen ($11{,}2683 + 2 = 13{,}2683$).

Die Entwicklung einer Stechmückenpopulation in einem Sumpfgebiet kann näherungsweise durch die Funktion f mit $f(t) = -0{,}0065 \cdot e^{0{,}6t} + 1{,}3 \cdot e^{0{,}3t}$ beschrieben werden. (t in Tagen und $f(t)$ in Millionen Stechmücken).

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wurde damit begonnen, einen biologischen Wirkstoff zur Bekämpfung der Mückenlarven einzusetzen.

a) Beschreiben sie anhand des Funktionsgraphen den Verlauf der Mückenbekämpfung.

   Berechnen sie den y-Achsenabschnitt, den Hochpunkt und die Nullstelle der Funktion und erklären sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.

b) Zu welchem Zeitpunk nach Einsatz des Wirkstoffs wächst die Mückenpopulation am stärksten?

c) Die Intensität des Wirkstoffes kann variiert werden. In der vorliegenden Modellfunktion wurde die Intensität $0{,}6$ gewählt. Im Allgemeinen kann die Entwicklung abhängig von der Intensität a beschrieben werden durch $f_a(t) = -0{,}0065 \cdot e^{a \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{0{,}3t}$.

   Bestimmen sie die Intensität so, dass die Mückenpopulation schon nach 12 Stunden ausgerottet ist.

In einem Produktionsprozess werden Flüssigkeiten erhitzt, eine Zeit lang bei konstanter Temperatur gehalten und anschließend wieder abgekühlt.

Der Temperaturverlauf kann *während des Erhitzens* und *während des Abkühlens* mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(t) = 23+20\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{10}t}$ modellhaft beschrieben werden. Dabei ist t die vergangene Zeit in Minuten und $f(t)$ die Temperatur in $^\circ$C.

a) Geben Sie an, welche Temperaturen die Funktion f für den Beginn des Vorgangs und für den Zeitpunkt zwei Minuten nach diesem Beginn liefert.

b) Zeigen sie rechnerisch, dass der Graph von f genau einen Extrempunkt besitzt.

c) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f für große Werte von t und interpretieren Sie diesen Verlauf im Sachzusammenhang.

d) In dem Bereich, in dem f über 77 $^\circ$C verläuft, wird die Flüssigkeit in Wirklichkeit konstant bei dieser Temperatur gehalten.

   Bestimmen Sie diesen Bereich und skizzieren sie den wirklichen Verlauf der Temperatur.

In einem Entwicklungslabor wird der Ladevorgang bei Akkus an verschiedenen Ladegeräten getestet. Der zeitliche Verlauf der Ladung bei Verwendung eines bestimmten Ladegerätes wird durch die Funktion Q mit $Q(t) = 1000(1 - e^{-0{,}4t})$ modelliert (t in Stunden, $Q(t)$ in mAh).

a) Der Verlauf des Graphen legt die Vermutung nahe, dass sich die Funktion Q für große Werte von t dem Wert 1000 annähert und ihn nicht überschreitet. Entscheiden Sie begründet, ob diese Vermutung wahr ist und erklären sie die Bedeutung der oberen Grenze 1000 mAh im Sachzusammenhang.
b) Am Ladegerät wird der Ladezustand des Akkus mit Balken angezeigt. Bei einem Balken beträgt die Ladung weniger als 30 %. Bei zwei Balken zwischen 30 % und 60 %. Bestimmen Sie nach wie vielen Minuten der zweite Balken angezeigt wird.
c) Die momentane Änderungsrate der Ladung Q wird Ladestrom I genannt (Einheit: mA). Bestimmen sie eine Funktionsgleichung für I.
d) Begründen Sie, dass der Ladestrom I zum Startzeitpunkt des Ladevorgangs am größten ist. Und prüfen sie, ob der Ladestrom die Schwelle 500 mA überschreitet.
e) Der Ladevorgang wird abgeschaltet, wenn der Ladestrom I den Wert 10 erreicht. Bestimmen Sie wann der Ladevorgang nach dieser Bedingung abgeschaltet wird.

In einem Entwicklungslabor wird der Ladevorgang bei Akkus an verschiedenen Ladegeräten getestet. Der zeitliche Verlauf der Ladung bei Verwendung eines bestimmten Ladegerätes wird durch die Funktion Q modelliert (t in Stunden, $Q(t)$ in mAh). Die momentane Änderungsrate der Ladung Q wird Ladestrom I genannt (Einheit: mA).

Für einen Akku mit der Kapazität 1000 mAh wurde im Test der Ladestrom durch die Funktion $I(t) = (100t + 50) \cdot e^{-0,4t+0,1}$ modelliert. Nach 12 Stunden wird der Ladevorgang abgebrochen.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion I genau ein lokales Maximum besitzt.

b) Begründen sie, dass der Ladestrom den Wert 150 mA nie überschreitet.

c) Begründen sie, dass die Funktion Q für $t > 0$ monoton steigt.

d) Bestimmen sie die Ladung des Akkus an diesem Ladegerät, wenn der Ladevorgang nach 12 Stunden abgebrochen wird.