a) Bestimmen sie die Gleichung einer Geraden g durch die Punkte $A(7\,|\,-3\,|\,2)$ und $B(-4\,|\,5\,|\,-2)$.

b) Bestimmen sie die Gleichung einer Geraden h, die aus g hervorgeht, wenn g um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ verschoben wird.

c) Bestimmen sie die Gleichung einer Geraden i, die zu g orthogonal ist und durch $C(1\,|\,2\,|\,3)$ verläuft.

d) Bestimmen sie die Gleichung einer Geraden j, die zu i parallel ist und durch den Punkt A von oben verläuft.

e) Berechnen sie alle Spurpunkte der Geraden g.

Lösung 1

a)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) Berechne $\overrightarrow{OA} + \vec{v}$. Der Richtungsvektor bleibt gleich.

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) z.B.

$$i : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) z.B.

$$j : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e)

$$S_{x_1x_2}(1{,}5 \,|\, 1 \,|\, 0)$$
$$S_{x_2x_3}(0 \,|\, 2{,}09 \,|\, -0{,}55)$$
$$S_{x_1x_3}(2{,}88 \,|\, 0 \,|\, 0{,}5)$$

Prüfen sie die Lage der Geraden g und h zueinander. Prüfen sie auch auf orthogonalität, falls die Geraden windschief sind und geben sie den Schnittpunkt an, falls sich die Geraden schneiden.

a)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

c)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung 2

a) Die Geraden schneiden sich in $(-3\,|\,2\,|\,-1)$.

   Sie sind nicht orthogonal. Das Skalarprodukt der Richtungsvektoren ist 13.

b) Die Geraden sind echt parallel. Die Richtungsvektor sind mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ skaliert.

c) Die Geraden sind windschief zueinander.

   Sie sind orthogonal, das das Skalarprodukt der Richtungsvektoren gleich null ist: $1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 = 3 - 3 = 0$.

Gegeben ist ein Dreieck ABD mit $A(-1\,|\,-1\,|\,1)$, $B(2\,|\,-2\,|\,1)$ und $D(2{,}5\,|\,-0{,}5\,|\,1)$.

a) Berechnen sie die Länge der drei Seiten des Dreiecks.

b) Bestimmen sie die Koordinaten eines Punktes C, so dass $ABCD$ ein *Parallelogramm* ist.

c) Prüfen sie, ob das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck ist.

d) Bestimmen sie Gleichungen für die Diagonalengeraden von $ABCD$ und ermitteln sie deren Schnittpunkt.

e) Mit einem Punkt E, der senkrecht über dem Schnittpunkt der Diagonalen liegt, bildet $ABCD$ eine Pyramide. Bestimmen sie den Punkt E so, dass das Volumen der Pyramide 10 ist.

Lösung 3

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| \approx 3{,}16$, $\left|\overrightarrow{BD}\right| \approx 1{,}58$, $\left|\overrightarrow{AD}\right| \approx 3{,}54$

b)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Ja, denn $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BD} = 0$

d)

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AD}$$
$$h : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BC}$$
$$S(0{,}75 \,|\, -0{,}75 \,|\, 1)$$

e) E liegt über S, also $E(0{,}75 \,|\, -0{,}75 \,|\, 1 + h)$. Das Volumen der Pyramide berechnet sich durch

$$V_P = 10 = \frac{1}{3} \cdot (\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right|) \cdot h$$

Nach h umgestellt ergibt sich $h \approx 6$, also $E(0{,}75 \,|\, -0{,}75 \,|\, 7)$.

In einem Bergwerk kann ein Minenschacht durch eine Gerade mit der Gleichung

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 22 \\ -20 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Die x_1x_2-Ebene stellt den Meeresspiegel (NN) dar. Alle Werte sind in Metern angegeben.

Ein zweiter Mienenschacht soll am Punkt $K(5\,|\,-6\,|\,16)$ orthogonal zu g in den Berg gebohrt werden und im Berg auf g treffen.

a) Bestimmen sie die allgemeine Form (abhängig von einer unbekannten r) für einen Ortsvektor $\overrightarrow{OS_r}$, für einen Punkt S_r, der auf g liegt.

b) Der neue Schacht soll orthogonal zu g verlaufen. Stellen sie eine Gleichung mit $\overrightarrow{OS_r}$ auf, die dies ausdrückt und lösen sie nach r auf (Kontrolle: $r \approx 0{,}2064$).

c) Bestimmen sie eine Gleichung für den zweiten Mienenschacht.

d) Wie weit muss gebohrt werden, bis der erste Mienenschacht erreicht ist?

Lösung 4

a)

$$\overrightarrow{OS_r} = \begin{pmatrix} -20+70r \\ 12+22r \\ 8-20r \end{pmatrix}$$

b)

$$\left(\overrightarrow{OS_r} - \overrightarrow{OK}\right) * \begin{pmatrix} 70 \\ 22 \\ -20 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow r \approx 0{,}2064$$

c) Berechne $S_{0{,}2064} = (-5{,}552 \,|\, 16{,}5408 \,|\, 3{,}872)$

Richtungsvektor berechnen:

$$\vec{w} = \overrightarrow{KS} = \begin{pmatrix} -5{,}552 \\ 16{,}5408 \\ 3{,}872 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10{,}552 \\ 22{,}5408 \\ -12{,}128 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10{,}552 \\ 22{,}5408 \\ -12{,}128 \end{pmatrix}$$

d)

$$|\vec{w}| \approx 27{,}69(\text{m})$$