Tarea 4

1. Simulaciones de Montecarlo

Simule un proceso donde un jugador apuesta a la ruleta que tiene 36 números rojos y negros y un 0 verde.

a) Sus fondos iniciales son 100, apuesta de a 1, y en cada ronda gana 36 con probabilidad 1/37, y pierde 1 con probabilidad 36/37. Después de 100 rondas, cual es la distribución empírica de fondos n? Cuál es su media? Cuál es el tiempo promedio para que la mitad de los jugadores (si fueran muchos) llegaran a 0?

b) Como cambia lo anterior si cada ronda apuesta a rojo o negro? La ganancia en este caso es 1 con probabilidad 18/37 y la perdida 1 con probabilidad 19/37.

c) Como cambia el caso anterior si ahora apuesta con la siguiente estrategia: apuesta 1, y si gana, apuesta de nuevo 1, si pierde, va doblando la apuesta hasta que gane y después de ganar apuesta de nuevo 1.

2. Algoritmo de Doob-Gillespie

Simule usando Doob-Gillespie la fila en la caja de un almacén de acuerdo a los siguientes parámetros: La probabilidad de que llegue un cliente es de 1/5 min entre 9 y 5pm y de 1/2min entre 5 y 7pm, el cajero atiende un cliente en promedio cada 2min, y si la fila es de más de 10 personas todos tienen la posibilidad de aburrirse e irse con tasa de 1/10 min. Cuánto es la espera promedio? Cuántos clientes pierde el almacén al mes por no tener más cajeros?

3. Operador densidad

Considere un oscilador armónico cuántico con Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \qquad p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dq}$$

a) Encuentre la función de partición Z y la energía $< \mathcal{H} >$.

b) Escriba la expresión formal para la matriz de densidad ρ en términos de los estados propios $|n\}$ y niveles de energía ϵ_n.

c) Muestre que para un operador general A(x), a menos que $\left[A, \frac{\partial A}{\partial x}\right] = 0$, en general

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp\left[A(x)\right] \neq \frac{\partial A}{\partial x} \exp\left[A(x)\right]$$

mientras que en todos los casos

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tr}\left\{\exp\left[A(x)\right]\right\} = \operatorname{tr}\left\{\frac{\partial A}{\partial x} \exp\left[A(x)\right]\right\}$$

d) Note que la función de partición no depende de m, $\partial Z/\partial m = 0$, y use esto para obtener

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right\rangle$$

e) Use d) y a) para encontrar $<q^2>$.

f) En representación de coordenadas, calcule $\langle q'|\rho|q\rangle$ en el límite de alta temperatura. Puede usar la aproximación

$$\exp(\beta A)\exp(\beta B) = \exp\left[\beta(A+B) + \beta^2[A,B]/2 + \mathcal{O}(\beta^3)\right]$$

g) En el límite de baja temperatura, ρ está dominado por los estados de baja energía. Use la función de onda del estado base para estimar $\langle q'|\rho|q\rangle$ cuando T tiende a 0.

4. Problema 11.3 del Huang

5. Problema 12.6 del Huang