

Optimización por gradientes de reticulados estáticos

Javier Hurtado · Tomás Zegard · Diego López-García

Received: date / Accepted: date

Resumen Reducir el volumen o las fuerzas internas de una estructura es importante en un contexto de proyectos sustentables. En específico, se busca optimizar la geometría de una estructura de reticulados acorde a los requerimientos de carga a los que está sometida. Esto contrasta con el diseño estructural típico que sólo busca dimensionar los miembros: cambiando (también) la geometría el potencial de mejora es mayor. Para que la optimización sea eficiente y robusta se usa un algoritmo de optimización por gradientes, los cuales son aproximados por el método de diferencias finitas. La metodología es contrastada con soluciones existentes; disponibles en la literatura y en obras de infraestructura ya construidas. La *función objetivo* es el *load-path*

de la estructura, que es proporcional al volumen de la misma.¶ El volumen suele ser proporcional a su costo e impacto ambiental, por lo que la minimización del *load-path* resulta en una estructura más liviana y sustentable. Debido a la no-linealidad del problema, el diseño puede converger a un óptimo local. No obstante, dicho resultado es una (bienvenida) mejora sobre el diseño inicial.

Keywords Reticulados óptimos · Estructuras óptimas · Optimización por gradientes

1. Introducción

Los reticulados son estructuras compuestas por miembros (o barras) rectos y articulados en sus extremos (nodos) y las cargas deben estar aplicadas en los nodos. De esta forma sólo existen esfuerzos axiales (de tracción o compresión) en los miembros. Esto se traduce en un uso

Javier Hurtado · Tomás Zegard · Diego López-García

Departamento de Ingeniería Estructural y Geotecnia

Pontificia Universidad Católica de Chile

Cel.: +56 (9) 9339-1029

E-mail: jnhurtado@uc.cl

quasi-óptimo del miembro debido a que toda su sección transversal colabora en la transferencia de fuerzas (a diferencia de momentos flectores y esfuerzo de corte) (8). Los estados de carga de las estructuras varían en el tiempo, y son relativamente inciertos. Debido a ello, un diseño estructural debe considerar “múltiples estados de carga” con el objetivo de emular las distintas sollicitaciones a las que podría estar sometida la estructura a lo largo de su vida útil (3; 1). Por ello, el presente estudio considera la posibilidad de tener estructuras sometidas a múltiples estados de carga.

El diseño estructural “clásico” se enfoca en dimensionar miembros de orientación y longitud pre-establecidos, razón por la cual la sección transversal es la única variable a determinar, para cumplir con los requerimientos establecidos por las normas o códigos. Dicho enfoque es común tanto en Chile como en el resto del mundo (2; 1; 9). El objetivo de la optimización estructural suele ser la minimización del volumen, sujeto a restricciones de capacidad (resistencia), serviciabilidad, y otros. El volumen de una estructura tiene relación con el uso de material (recursos naturales) y capital humano (manufactura). El costo total de una estructura convencional tiene una estrecha relación con el volumen de la estructura: las estimaciones de costo iniciales de un proyecto suelen estar calculadas en base al volumen. Nuestra responsabilidad medioambiental y fondos limitados hacen

que la optimización estructural cobre cada vez mayor importancia; lo que es especialmente cierto para un país en desarrollo como lo es Chile.

La optimización de la geometría de una estructura tiene un mayor potencial de impacto en comparación al mero dimensionamiento de miembros (5). Este trabajo se centra en la optimización geométrica de reticulados *estáticamente determinados*: reticulados que pueden ser analizados usando sólo los principios de la estática (equilibrio). Para que la optimización sea eficiente, rápida, y robusta, la optimización utiliza el gradiente de la función objetivo; que se calculan en cada iteración. En optimización los tres métodos más populares (4) para determinar el gradiente son: el *método directo*; el *método adjoint* (o adjunto); y aproximados numéricamente por el *método de diferencias finitas* (FDM). El presente trabajo hace uso de FDM en su cálculo (aproximación) del gradiente, y usa éstos para hacer una mejora incremental del diseño previo. Luego, el proceso se repite (cálculo del gradiente y actualización del diseño) hasta que la configuración se estabilice y no experimente mayores cambios (convergencia).

2. Metodología

2.1. Análisis estructural

El objetivo de la optimización es reducir el *load-path*, que es una medida de la distancia que recorre una fuerza desde su punto de aplicación a los soportes (apoyos). Sin considerar el pandeo de los elementos estructurales; el *load-path* está directamente relacionado con el volumen de la estructura (11). El *load-path* de una estructura está definido como:

$$Z = \sum_i^{N_e} l_i |n_i| = \mathbf{l}^T \mathbf{n} \quad (1)$$

donde N_e es el número de barras en el reticulado, y l_i y n_i son el largo y la fuerza axial asociada al miembro i . Los esfuerzos axiales (y las reacciones de vínculo) de un reticulado estáticamente determinado se pueden calcular con el “método de los nodos” para reticulados (Hibbeler). Llamando \mathbf{B}^T y \mathbf{B}_r^T a las matrices de equilibrio nodal asociada a los miembros estructurales y reacciones de vínculo, respectivamente, la formulación matricial del método de los nodos es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{B}_r^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} = \mathbf{f} \quad (2)$$

donde \mathbf{r} son las reacciones de vínculo, y \mathbf{f} es el vector de fuerzas nodales. Si el reticulado es estáticamente determinado, la matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{B}_r^T \end{bmatrix}$ es cuadrada y de “rango completo”.

2.2. Optimización

El problema de optimización para el *load-path* es:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & Z = \mathbf{l}^T \mathbf{n} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{B}_r^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} = \mathbf{f} \end{aligned} \quad (3)$$

, donde \mathbf{x} es el vector de coordenadas de los nodos (variable de diseño). Es importante notar que tanto el largo de los miembros \mathbf{l} , como su fuerza axial \mathbf{n} , dependen de las coordenadas nodales.

Las aproximaciones por diferencias finitas (6) de la primera derivada de una función $f(\mathbf{x})$ usando diferencias *anterior* (backward), *posterior* (forward), y central son:

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{1}_i)}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (4)$$

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{f(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1}_i) - f(\mathbf{x})}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (5)$$

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{f(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1}_i) - f(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{1}_i)}{2\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (6)$$

, donde ε es una perturbación relativamente pequeña, y $\mathbf{1}_i$ es el *vector indicatriz* de zeros con un único 1 en la posición i :

$$\{\mathbf{1}_i\}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (7)$$

, donde δ_{ij} es el delta de Kronecker. Usando la diferencia anterior o posterior, el vector de gradiente $\nabla \mathbf{f}$ de tamaño n requiere n evaluaciones adicionales de $f(\cdot)$. Si bien la diferencia centrada tiene un error $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ de

orden superior (menor error); dicha aproximación requiere evaluar la función objetivo el doble de veces.

El problema de optimización presentado (Ecuación (3)) se optimiza por el “método de máxima gradiente” (*steepest descent method* o *gradient descent method*). Llamando \mathbf{x}_i al diseño en la iteración i , la nueva configuración \mathbf{x}_{i+1} es:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \alpha_i \cdot \nabla \mathbf{f}_i \quad (8)$$

, donde se busca α tal que la función objetivo sea mínima en la dirección de búsqueda $\nabla \mathbf{f}_i$. La optimización de la geometría de una estructura es un problema no lineal; si la optimización toma pasos muy agresivos se corre el riesgo de diverger. Para estabilizar el algoritmo, se implementa un “límite de movimiento” (*move limit*) que limita la variación entre una iteración y otra:

$$|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i| = |\alpha_i \cdot \nabla \mathbf{f}_i| \leq m \quad (9)$$

, donde m es el límite de movimiento definido por el usuario.

Se decide escalar el vector de gradiente para que su norma sea menor o igual al límite de movimiento m :

$$\nabla \mathbf{f}_i^* = \begin{cases} m \frac{\nabla \mathbf{f}_i}{|\nabla \mathbf{f}_i|} & \text{si } |\nabla \mathbf{f}_i| > m \\ \nabla \mathbf{f}_i & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (10)$$

Con ello, si la búsqueda del paso óptimo α_i se limita en el rango $0 \leq \alpha_i \leq 1$, se satisface la condición de límite de la Ecuación (9). Es decir, en cada iteración

del método de máxima gradiente se resuelve el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_i} \quad & f(\mathbf{x}_i - \alpha_i \cdot \nabla \mathbf{f}_i^*) \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq \alpha_i \leq 1 \end{aligned} \quad (11)$$

, que para la minimización del load-path $f(\cdot) = Z(\cdot)$.

El problema de optimización en una variable de la Ecuación (11) se resuelve usando el “método de la sección dorada” (6?) (*golden section search*). El intervalo de búsqueda inicial es $[0, 1]$, sin posibilidad de que dicho intervalo crezca a modo de garantizar que se cumpla el límite definido por la Ecuación (9) para estabilizar el algoritmo.

La optimización es de carácter iterativo y se detiene cuando se alcanza un criterio de convergencia definido por el usuario. Dada la configuración \mathbf{x}_i asociada a la iteración i , y una tolerancia para la convergencia tol , se procede a:

1. Cálculo del gradiente $\nabla \mathbf{f}_i$
2. Búsqueda de α_i que minimiza el problema de una variable
3. Actualización del diseño: $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \alpha_i \cdot \nabla \mathbf{f}_i$
4. Si $|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i| > tol$ se itera nuevamente.

2.3. Múltiples estados de carga

Cada estado de carga k se traduce en un vector de fuerzas \mathbf{f}_k . Los estados de carga están asociados a com-

binaciones de carga de diseño (o de uso) (? 3). Extendiendo la Ecuación (2) para considerar g estados de carga se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{B}_r^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{(N_e \times g)} \\ \mathbf{R}_{(N_s \times g)} \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_{(N_{\text{dof}} \times g)} \quad (12)$$

, donde las matrices $\mathbf{N} = \{\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2 \ \dots \ \mathbf{n}_k\}$ y $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \dots \ \mathbf{f}_k\}$ do. Los demás elementos se interpolan de manera lineal son las fuerzas axiales de cada miembro y las fuerzas nodales de los g estados de carga, respectivamente. En este caso la estructura tiene N_e miembros, N_{dof} grados de libertad, N_s grados de libertad con soportes (o apoyos), y g estados de carga.

El load-path (la función objetivo en el presente trabajo) para múltiples estados de carga se calcula con la carga máxima de cada miembro. Es decir:

$$n_i^* = \max_{j=1 \dots g} (\mathbf{n}_{i,j}) \quad \forall i$$

$$Z^* = \sum_i^{N_e} l_i |n_i^*| = \mathbf{l}^T \mathbf{n}^* \quad (13)$$

Minimizando Z^* se minimiza el volumen de la estructura completa, donde cada miembro se dimensiona proporcionalmente a su estado de carga crítico.

3. Implementación

Se creo una rutina en Python usando la librería NumPy y Matplotlib, la cual resuelve la estructura por medio de las operaciones descritas en la metodología. Luego se itera hasta lograr una variación mínima en la estructura luego del proceso.

Con la librería Matplotlib se grafica la estructura usando los arreglos de nodos y barras. Esta librería fue implementada de manera tal que el color más frío represente el elemento que se encuentre en mayor tracción y el color más cálido al elemento mas comprimido. Los demás elementos se interpolan de manera lineal según su esfuerzo interno dentro de la paleta de colores “RdYlBu”.

Para trabajar con múltiples estados de carga, se hace el mismo proceso. Pero tendremos tantos valores a optimizar como estados de carga, todos asociados a una misma estructura. Se calculará la función a optimizar para cada estado de carga y el que presente el valor más alto será usado para hacer un ciclo de optimización, luego se volverá a elegir el estado de carga con el valor más alto para optimizarlo y de esta manera se irá optimizando el valor más alto siempre hasta llegar a un equilibrio entre todos los estados de carga. Se grafica la envolvente de la estructura, mostrando los elementos con valores más extremos dentro de cada estado de carga.

4. Resultados

Los dos primeros ejemplos mostrados a continuación tienen el objetivo de verificar el correcto funcionamiento de la optimización.

Primero se comprobaron los resultados con el reticulado recuperado de (5). El cual se muestra en la Figura 1.

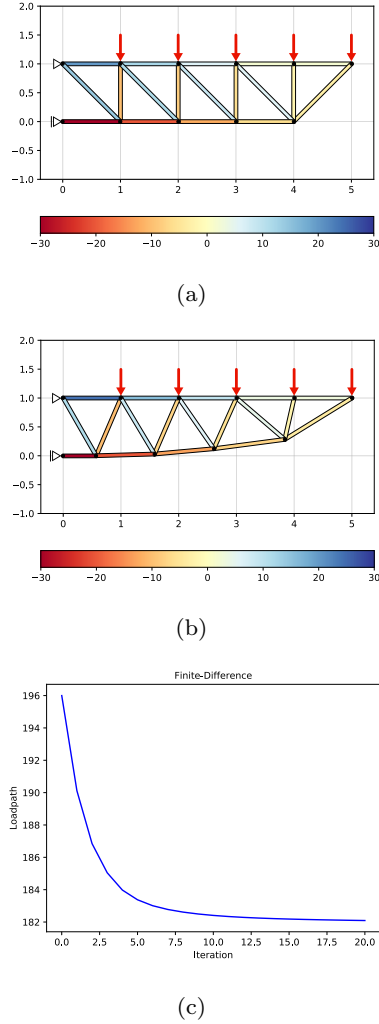


Figura 1 Puente corto: (a) Configuración original; (b) Geometría optimizada; (c) Historia de la función objetivo a lo largo de la optimización.

La estructura logra reducir el “Load-path” de 196 a 182, es decir, el volumen de la estructura se redujo al 92,8 % del volumen original.

Se estudió la torre de oficinas “Atlantic-Haus” . para esto se genero una torre en el programa con el mismo numero de nodos y con dos diagonales ortogonales uniendo cada nodo en la columna con la otra. se le aplicaron dos estados de carga, uno debido al peso propio y otro por el viento, debido a la importancia de este en el diseño. luego se optimizó el “Load-path” para reducir el volumen de la estructura.

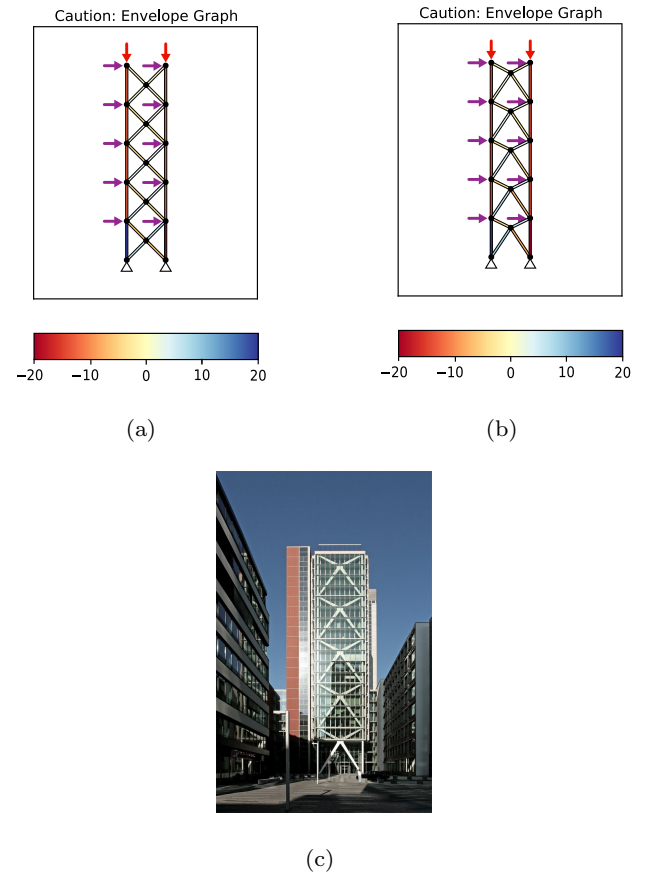


Figura 2 Torre con crucetas: (a) Configuración original; (b) Geometría optimizada; (c) Edificio Atlantic-Haus (Hamburgo, Alemania). Recuperado de <http://www.panoramio.com/photo/47309533> .

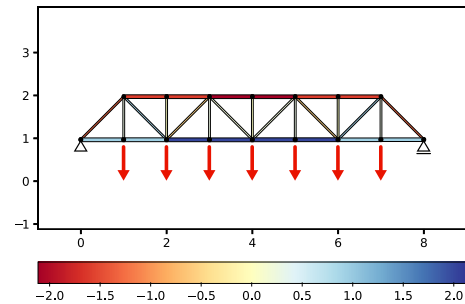
la estructura optimizada al igual que la torre “Atlantic–Haus” poseen los nodos internos a $3/4$ de la distancia entre los nodos de las columnas. esta estructura respecto a la propuesta en la Figura 2.1 reduce en un 5 % el volumen original.

Finalmente, dado que la optimización funciona y es utilizada. Se buscó optimizar alguna estructura en Chile, la cual podría tener un modelo mas optimo. La estructura seleccionada es el puente del ferrocarril que cruza sobre la ruta 78. El puente posee 4 sub estructuras iguales, por lo que optimizaremos solo una de ellas y la solución se aplica a todo el puente.

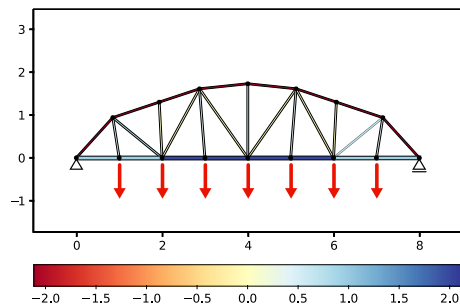
La solución propuesta Figura 3 en términos de reticulado es más optima que la original, distribuye mejor las cargas en las barras de esta forma se disminuye la cantidad de material a utilizar. logra reducir el “Load–path” de 120 a 84, es decir, el volumen de la estructura se redujo al 70 % del volumen original. Sin embargo, para considerar si es más optimo realizar esta estructura en la practica, tiene que entrar al análisis el costo de la construcción del proyecto, ya que al ser una geometría más compleja, su construcción puede llegar a ser más costosa que la reducción en costos de materiales.



(a)



(b)



(c)

Figura 3 Puente reticulado del ferrocarril: (a) Puente sobre ruta 78 (Santiago, Chile). Recuperado de <http://www.google.streetview.com/> ; (b) Configuración original; (c) Geometría optimizada

5. Conclusión

Se logró optimizar estructuras de manera eficiente con distintos estados de carga por medio del método descrito en la sección metodología, logrando reducir el volumen y por lo tanto, reduciendo los costos de materiales en la construcción del proyecto. la optimiza-

ción del volumen en estructuras iso-estáticas se usa en el diseño de edificios. Se podrían aplicar más casos si se incluyera el método de rigidez directa, el cual permitiría incorporar a la optimización diseños de estructuras hiper-estáticas, las cuales incluyen el material y propiedades geométricas de la sección transversal de los elementos al análisis.

Referencias

1. ACI Committee 318, American Concrete Institute (2014). *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14) and Commentary (ACI 318R-14)*.
2. American Institute of Steel Construction (2011). *Steel Construction Manual, 14th Edition*.
3. ASCE (2010). *(ASCE 7-10) Minimum design loads for buildings and other structures*. American Society of Civil Engineers, Reston, USA.
4. Christensen, P. W. and Klarbring, A. (2009). *An Introduction to Structural Optimization*, volume 153 of *Solid Mechanics and Its Applications*. Springer Netherlands, Dordrecht, Netherlands.
5. Felix, J. and Vanderplaats, G. N. (1987). Configuration Optimization of Trusses Subject to Strength, Displacement and Frequency Constraints. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 109(2):233–241.
6. Heath, M. (2002). *Scientific Computing: An Introductory Survey*. McGraw Hill, 2nd edition.
- Hibbeler. Hibbeler, R. C. *Structural Analysis*.
8. Jiang, Y., Z. T. B. W. (2017). Springer Berlin Heidelberg.
9. NRCC (2015). *National Building Code of Canada*. National Research Council of Canada, Ottawa, Ontario.
10. Spillers, W. R. (1975). Iterative design for optimal geometry. *ASCE Journal of the Structural Division*, 101(ST7):1435–1442.
11. Zegard, T., Baker, W. F., Mazurek, A., and Paulino, G. H. (2014). Geometrical Aspects of Lateral Bracing Systems: Where Should the Optimal Bracing Point Be? *Journal of Structural Engineering*, 140(9):04014063.