数学の基礎訓練 I

～基本的な概念・関数～

2022 年 3 月 29 日版　西井 淳

1　基礎知識

1.1　ギリシャ文字

以下の読みを書きなさい[答1]。

(1) γ (2) ϵ (3) σ (4) δ (5) η (6) λ (7) ρ (8) τ (9) ψ (10) ω (11) ϕ (12) χ (13) μ (14) ξ (15) ζ (16) φ (17) ε (18) κ (19) ν (20) Γ (21) Π (22) Σ (23) Θ (24) Λ (25) Δ (26) Φ (27) Ψ (28) Ω

1.2　数列の和と積

ギリシャ文字 Σ はアルファベットの S に対応するので，和 (Sum) の記号として使われている。ギリシャ文字 Π はアルファベットの P に対応するので，積 (Product) の記号として使われている。以下は例である。

$$\sum_{n=1}^{3} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$
$$\prod_{n=1}^{3} n^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

記号 $\sum$ や $\prod$ の下には変数名とその最小値を，上には最大値を書く。上の例では変数 n の最小値を 1, 最大値を 3 とする整数の集合

$$n \in \{1, \ldots, 3\}$$

に対して記号の右にある式の総和や総乗を計算している。なお，$\sum$ や $\prod$ で指定した変数のとるべき値が空集合になるときには，$\sum$ による総和は 0, $\prod$ による総乗は 1 とする。

以下は複数の $\sum$ を用いた表現の例である。

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=0}^{2}(j+k) &= \sum_{j=0}^{2}\left(\sum_{k=0}^{2}(j+k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{2}(0+k) + \sum_{k=0}^{2}(1+k) + \sum_{k=0}^{2}(2+k) \\
&= (0+1+2) + (1+2+3) + (2+3+4) \\
&= 18
\end{aligned}$$

上記の計算は次のようにすることもできる。

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=0}^{2}(j+k) &= \sum_{j=0}^{2}\left(\sum_{k=0}^{2}(j+k)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{2}((j+0)+(j+1)+(j+2)) \\
&= \sum_{j=0}^{2}3(j+1) \\
&= 3((0+1)+(1+1)+(2+1)) \\
&= 18
\end{aligned}$$

問 1 以下を計算しなさい[答2]。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{3} n+1$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}(n+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{0} n$

(4) $\displaystyle\prod_{k=3}^{0} k$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{3} 1$

(6) $\displaystyle\prod_{n=1}^{3} 2$

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{5}(-)^n n$

[答1] (1) γ：ガンマ (2) ϵ：イプシロン (3) σ：シグマ (4) δ：デルタ (5) η：イータ (6) λ：ラムダ (7) ρ：ロー (8) τ：タウ (9) ψ: プサイ (10) ω: オメガ (11) ϕ：ファイ (12) χ：カイ (13) μ：ミュー (14) ξ：クシー（グザイ） (15) ζ：ゼータ (16) φ：ファイ (ϕ の変形) (17) ε：イプシロン (ϵ の変形) (18) κ：カッパ (19) ν：ニュー (20) Γ：ガンマ (21) Π：パイ (22) Σ: シグマ (23) Θ: シータ (24) Λ: ラムダ (25) Δ：デルタ (26) Φ：ファイ (27) Ψ：プサイ (28) Ω: オメガ

[答2] (1) 7 (2) 9 (3) 0 (4) 1 (5) 3 (6) 8 (7) −3 (8) 7 (9) 12 (10) 11

(8) $\displaystyle\prod_{n=2}^{5} \frac{n+2}{n}$

(9) $\displaystyle\sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{j} (j+k)$

(10) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \prod_{l=1}^{k} 2^l$

問 2 以下の各数列の第 n 項までの和をそれぞれ $\sum$ を一つだけ用いて表しなさい[答 3]。

(1) $1+3+5+7+9+\cdots$

(2) $1-2+3-4+5-6+7-8+9-\cdots$

(3) $2\times1+3\times2+4\times3+\cdots$

問 3 以下の空欄に適切な数式を記入しなさい[答 4]。

$$\begin{aligned}
&r_{t+1}+\gamma r_{t+2}+\gamma^2 r_{t+3}+\cdots+\gamma^{T-1} r_{t+T} \\
&= \sum_{k=t}^{T+t-1} \gamma^{\boxed{(1)}} r_{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{T-1} \gamma^i r_{\boxed{(2)}} \\
&= \sum_{i=0}^{T-1} \gamma^{\boxed{(3)}} r_{T+t-i}
\end{aligned}$$

問 4 以下のうち等式として成り立つものに◯を，成り立たないものはには×を記しなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} 2n = 2\sum_{n=1}^{N} n$

(2) $\displaystyle\prod_{n=1}^{N} 2n = 2\prod_{n=1}^{N} n$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f(i,j) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} f(i,j)$

(4) $\prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} f(i,j) = \prod_{j=1}^{M} \prod_{i=1}^{N} (f(i,j)$

[答 3] (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-)^{k-1}k$ (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)k$

[答 4] (1) $k-t$ (2) $i+t+1$ (3) $T-i-1$

1.3 階乗

自然数 n に対して**階乗** (factorial) は次のように定義される。

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$$

ただし，便宜上

$$0! = 1$$

と定義されていることに注意。これは

$$n! = n\cdot(n-1)!$$

が $n \geq 1$ について成り立つようにするための定義である。

問 1 以下を計算しなさい[答 5]

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{2} n!$

(2) $\displaystyle\prod_{n=0}^{2} n!$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{3} \frac{(n+2)!}{n!}$

1.4 幾何学の基礎

1.4.1 内角の和

ユークリッド幾何学[注 1] においては公準（仮定）により，平行線の 2 つの**錯角**は等しい。

(1) 三角形の内角の和が π であることを証明せよ。

(2) 四角形の内角の和はいくつになるかを求めよ。

(3) 直径の円周角は直角であることを証明せよ。

[答 5] (1) 4 (2) 2 (3) 40

[注 1] ユークリッド幾何学とは古代ギリシアの数学者, 天文学者であるエウクレイデス (Eukleides, 英語名はユークリッド Euclid, BC365? - BC275?) による著書「ユークリッド原論」に基づく幾何学。ただし，エウクレイデスは実在せず「ユークリッド原論」は共同執筆であるとする説もある。

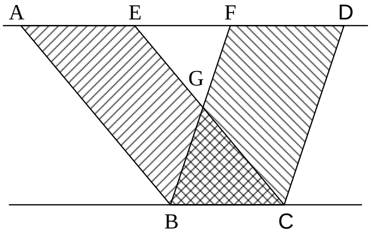


図 1　底面の長さと高さが互いに等しい平行四辺形の面積は等しい

1.4.2　面積

2辺の長さを a, b とする長方形が与えられたとき，その**面積**を ab で表す。

(1) 底辺の長さと高さが互いに等しい2つの平行四辺形の面積が互いに等しいことを幾何学的に証明せよ (図 1)。また，この結果をもとに平行四辺形の面積が「底辺の長さ×高さ」で求まる理由を説明せよ。

(2) 三角形の面積が「底辺の長さ×高さ÷2」で求まる理由を説明せよ。

1.4.3　三平方の定理

三平方の定理（ピタゴラス[注 2]の定理）を証明しなさい。

1.4.4　三次元空間内の二点間の距離

三次元空間の xyz 直交座標系において，点 $P(x_1, y_1, z_1)$ と点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ の間の**距離** (distance) PQ が

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

で表されることを証明せよ。

解説 幾何学的な問題では必ず図を描き，図でも文でも読み手に伝わるような説明を心がけること。

[注 2] ピタゴラス (Pythagoras, BC582-BC496) 古代ギリシャの数学者であり哲学者

1.5　多項式・関数・方程式

1.5.1　関数とは

関数 (function) とは，**入力値を出力値に対応付ける規則**のことである。つまり，入力 x を出力 y に対応付ける規則 f が与えられたとき，

$$y = f(x) \quad or \quad x \xmapsto{f} y$$

と書き，この規則のことを関数 $y = f(x)$，もしくは関数 $f(x)$ と呼ぶ。このとき，y を x の f による**像** (image) と呼ぶ。また，入力値を表す変数 x を**独立変数**，出力値を表す変数 y を**従属変数**と呼ぶ。

1.5.2　多項式とは

変数と定数の和と積のみからなる式を多項式 (polynomial) とよぶ。例えば，以下の式 $f(x)$ は変数 x と定数 $a_0, \ldots, a_n$ からなる多項式である。

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

1.5.3　因数分解

式 (1) で表される多項式 $f(x)$ を

$$f(x) = (x - c)(b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$$

と書き直せるとき，

$f(x)$ は**因数** (factor) $x - c$ をもつ

という。このようにある多項式をいくつかの多項式の積で表すことを**因数分解** (factorization) という。多項式 $f(x)$ が $x - c$ を因数に持つとき次式が成りたつ。

$$f(c) = 0$$

問 1 以下を実数の範囲内で因数分解しなさい。

(1) $x^3 - 1$

(2) $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

(3) $x^n - 1$

問 2 以下を因数分解しなさい。因数がすぐにわからないときには，次数の低い項でまとめると見通しがよくなることが多い。

(1) $x^2 - 2xy - x + 2y$

(2) $xy^2 + 3ay^2 - a^2x - 3a^3$

1.5.4 関数とグラフ

問 3 以下の各式が表すグラフを 2 次元 xy 平面に描きなさい。

(1) $y = -2x + 1$

(2) $y = x^2 - x$

(3) $x = 1$

(4) $x = 1$ と $y = 1$ の交わり

(5) $x^2 + y^2 = 1$

解説 グラフを描くときには以下に気をつけること。

(1) 座標軸について
   - (a) 各軸の名前 (x, y) を書いているか?
   - (b) 軸の正の向きを矢印で示しているか?
   - (c) 原点 (Origin) を明記しているか?

(2) グラフについて
   - (a) 直線や二次式を描くときは直線の方程式を一意に特定できる情報を記す。
   - (b) さらに複雑な関数でもその特徴を示す点の情報を記す。

問 4 各式が表すグラフを 3 次元 xyz 直交座標系に描きなさい。

(1) $x = 1$

(2) $x = 1$ と $y = 1$ の交わり

(3) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(4) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 1$

(5) $x^2 + y^2 = 1$

解説 3 次元グラフを描くとき, x, y 軸の向きが決まれば z 軸の向きが決まることに注意せよ。

問 5 $x^2 + y^2 = z^2$ について以下の問に答えなさい。

(1) $z = 0$ に対する断面の形を調べて xyz 直交座標系に図示しなさい。

(2) $z = 1$ における断面の形を調べて上の同じグラフ図示しなさい。

(3) $z = 2$ における断面の形を調べて上の同じグラフ図示しなさい。

(4) $x = 0$ に対する断面の形を調べて xyz 直交座標系に図示しなさい。

(5) 与式はどのような立体図形を表しているか。

問 6 関数 $y = x^2 + 2x$ について以下の問に答えなさい。

(1) $x \in [0, 1]$ における最大値と最小値は?

(2) $x \in [-2, 0]$ における最大値と最小値は?

1.5.5 方程式とは

方程式 (equation [注 3]) とは**変数がある値をとるときに両辺が等しくなる等式**のことである。よって, **方程式には必ず等号が一つ含まれる。**また, 方程式に含まれる変数はしばしば**未知数**と呼ばれる。

問 7 ここまでに述べた関数と方程式の定義に従い, 以下のうち適切でない表現を選びなさい[答 6]。

(1) 方程式 $x^2 + 1$

(2) 方程式 $x^2 + 1 = 0$

(3) 関数 $x^2 + 1 = 0$

(4) 方程式 $f(x)$

(5) 関数 $f(x)$

(6) 方程式 $y = x^2 + 1$ (x は独立変数。y は従属変数)

(7) 関数 $y = x^2 + 1$ (x は独立変数。y は従属変数)

(8) 方程式 $y = x^2 + 1$ (x も y も未知数)

(9) 関数 $y = x^2 + 1$ (x も y も未知数)

問 8 以下の問いに答えなさい

(1) $x = 1$ と $x = 2$ を解に持ち, x の最高次の係数が 2 である 2 次方程式を書きなさい。

(2) $x = 1$ のみを解に持ち, x の最高次の係数が 1 である 2 次方程式を書きなさい。

(3) $x = a$, $x = b$, $x = c$ を解に持ち, x の最高次の係数が 1 である 3 次方程式を書きなさい。

[注 3] equation の”equ” は” 等しい” という意味の接頭語

[答 6] (1) × (2) ○ (3) × (4) × (5) ○ (6) × (7) ○ (8) ○ (9) ×

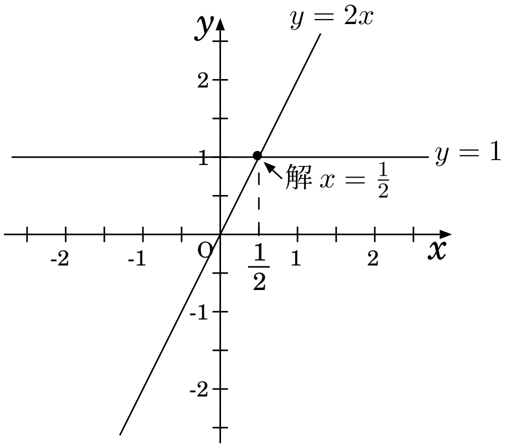


図 2　方程式 $2x = 1$ の幾何学的意味

1.5.6　方程式とグラフ

方程式 $f(x) = g(x)$ の解の意味を幾何学的に考えると，

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

の 2 曲線の交わりの x 座標を表す。このように，方程式の解は一般にいくつかの直線や曲線，曲面等の交わりと捉える事もできる。

例えば次式を考えてみよう。

$$2x = 1 \tag{2}$$

上式の解は以下の 2 直線の交点の x 座標の値となる (図 2)。

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 1 \end{cases}$$

すなわち，これは以下の 2 直線の交点として表現できる。

また，式 (2) を変形して

$$-2x + 1 = 0 \tag{3}$$

と書けば次の 2 直線の交点の x 座標と考えることもできる。

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

式 (2) と式 (3) は等価であるが，幾何学的には異なった意味を持つ。

問 9 以下の方程式の解を求めなさい。また，解の幾何学的意味を説明しなさい。求めた解は元の方程式に代入する事により，その解が正しいかどうかを確かめなさい。

(1) $x^2 - x = 0$

(2) $x^2 = x$

(3) $x = \sqrt{x}$

(4) $x^2 - 1 = 0$

(5) $x = \dfrac{1}{x}$

(6) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

(7) $\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

問 10 次の 2 曲線について以下の問に答えなさい。

$$\begin{cases} y &= x^2 + 2x + 1 \\ y &= x + c \end{cases}$$

(1) 2 曲線が交点をもつとき，その座標は以下の方程式を解くことにより求めることができる。

$$x^2 + 2x + 1 = x + c$$

上式の解はどのような点かをグラフにより示しなさい。

(2) 上式を変形すると以下のようになる。

$$x^2 + x + 1 - c = 0$$

上式の解はどのような点かをグラフにより示しなさい。

(3) 以下の条件について，(i) (2) のグラフを書いて幾何学的に考える方法，(ii) 判別式を用いる方法，(iii) 交点を求めるための方程式を因数分解した形に着目した方法でそれぞれ述べなさい。

(a) 2 曲線が異なる 2 点で交わる。

(b) 2 曲線が接する。

(c) 2 曲線が交点を持たない。

問 11 2 曲線 $y = x^2 + c$ と $x^2 + y^2 = 1$ について以下の問いに答えなさい。

(1) $c = 1$ のとき 2 曲線の接点や交点の数を答えなさい。また, 各接点や交点の x 座標を解とする方程式を因数分解した形を答えなさい。

(2) $c = -1$ のとき 2 曲線の接点や交点の数を答えなさい。また, 各接点や交点の x 座標を解とする方程式を因数分解した形を答えなさい。

(3) 2 曲線の交点や接点の数が c の値によってどう変わるか，またその時 x 座標を解とする方程式を因数分解した形がどう変わるかを答えなさい。

1.5.7　不等式とグラフ

不等式 (inequality) とは**不等号を含んだ式**であり, 二つの式の大小を評価するためのものである。

以下の不等式の幾何学的意味を考えてみよう。

$$f(x) > g(x) \qquad \cdots (*)$$

上式の左辺および右辺によって与えられる以下の 2 式がつくる 2 曲線をそれぞれ l, m とする。

$$\begin{cases} l : y = f(x) \\ m : y = g(x) \end{cases}$$

不等式 (*) の解は, 曲線 l の y の値が曲線 m に比べて大きくなるような x の範囲を意味する。

例えば, $2x > 1$ の解は

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 1 \end{cases}$$

の 2 直線のうち前者の値 y のほうが大きくなるような x の範囲を意味する (図 3)。

問 12 以下の不等式の解を求めなさい。また, 2 次元 xy 空間における解の幾何学的意味を説明しなさい。また，求めた解をみたすいくつかの値を x に代入する事により，その解が正しいかどうかを確かめなさい。

(1) $2x \geq 1$

(2) $x^2 - x > 0$

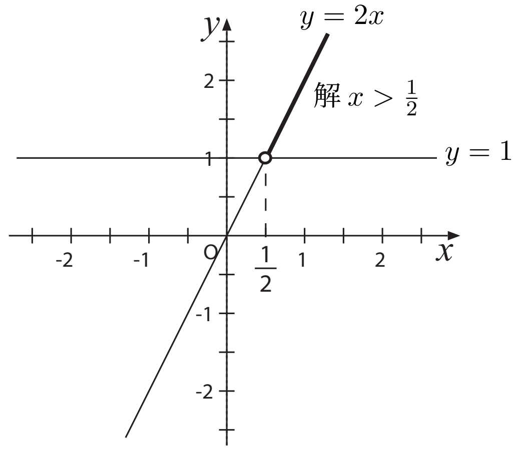


図 3　不等式 $2x > 1$ の幾何学的表現

(3) $x^2 > x$

(4) $x > \sqrt{x}$

(5) $x^2 - 1 \leq 0$

(6) $x > \dfrac{1}{x}$

(7) $x^3 - 3x^2 + 2x < 0$

問 13 以下の問に答えなさい[(答 7]

(1) $x < 1$ と $2 < x$ を解に持ち，x の最高次の係数が 2 である 2 次不等式を書きなさい。

(2) $x = 1$ のみを解に持ち，x の最高次の係数が 1 である 2 次不等式を書きなさい。

(3) $a < b < c$ とするとき，$x < a$, $b < x < c$ を解に持ち，x の最高次の係数が 1 である 3 次不等式を書きなさい。

1.5.8　合成関数

入力値 x に対して関数 f で変換した後, さらに関数 g で変換して得られる出力を y とするとき, この演算は次のように書く。

$$y = g(f(x)) \quad \text{or} \quad y = (g \circ f)(x)$$

問 14 $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 1$ とするとき, 下記の問に答えなさい[(答 8]。

[(答 7] (1) $2(x-1)(x-2) > 0$　(2) $(x-1)^2 \leq 0$　(3) $(x-a)(x-b)(x-c) < 0$

[(答 8] $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = 2(x+1)$,　$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x+1$　(1) $(f \circ g)(2) = 6$　(2) $(g \circ f)(2) = 5$

(1) $(f \circ g)(2)$ の値は?

(2) $(g \circ f)(2)$ の値は?

問 15 $f(x) = g(x^2) - 1$, $g(x) = x + 1$ のとき，$f(g(x)) = g(f(x))$ となる x を求めなさい(答 9 。

1.5.9　二次曲線

x, y に関する二次方程式で表される曲線を二次曲線という。2 次元 xy 平面においてその方程式を一般的に書くと以下のようになる。

$ax^2 + by^2 + pxy + qx + ry + c = 0 \quad (a, b, p, q, c\text{: 定数})$

その典型的な形は以下のように分類される。

(1) 放物線: $y = ax^2$, $x = ay^2$

(2) 円, 楕円: $ax^2 + by^2 = c$ $(a, b, c > 0)$

(3) 双曲線: $ax^2 - by^2 = c$

各図形の幾何学的意味は以下のとおりである。

(1) 放物線とは平面上のある点と, その点を通らない直線からの距離が等しい点の集合である。

(2) 円とは平面上のある点から等しい距離にある点の集合である。

(3) 楕円とは平面上のある二点からの距離の和が一定である点の集合である。

(4) 双曲線とは平面上のある二点からの距離の差が一定である点の集合である。

問 16 以下の**定性的表現**を表すグラフ (**幾何学的表現**) を描きなさい。また**定量的表現**としてできるだけ簡単な数式で表しなさい(答 10 。

(1) 平面上で点 $(2, 2)$ から距離 2 の点の集合。

(2) 平面上で点 $(1, 0)$ と点 $(-1, 0)$ からの距離の和が 4 の点の集合。

(3) 平面上で点 $(1, 1)$ と x 軸から等距離にある点の集合。

(4) 3 次元空間内で点 (a, b, c) から距離 1 の点の集合。

(答 9 $f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$,　$g(f(x)) = g(g(x^2)-1) = g((x^2+1)-1) = x^2+1$ より両者が等しくなる x は $x = 0$。

(答 10 (1) $\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 2$　(2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (3) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$ (4) $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = 1$

1.6　基礎的な関数の応用例

1.6.1　最適化問題

ある関数 $f(x)$ が最大もしくは最小となる x を求めることを**最適化問題** (optimization problem) とよび，この関数 f を**目的関数** (objective function or cost function) とよぶ。また，x がなんらかの条件 $g(x) = 0$ を満たさないといけない時，この条件を**制約条件** (constraint function) とよぶ。

最適化関数は物理学ではエネルギーを表す関数と対応する。最適化問題は物理計算，機械学習などの情報科学，経営手法を議論する経済学等幅広い分野で扱われる。最適化問題の解法は目的関数や制約条件によって様々な方法が提案されているが，解析的に解くよりも幾何学的に考えた方が簡単に解けることも多い。

問 1 以下の問に答えなさい(答 11 。

(1) $x^2 + y^2 = 4$ の条件下において，$x + y$ の最大値を求めたい。

　(a) 目的関数と制約条件が何か説明しなさい。

　(b) xy 平面上に目的関数と制約関数を図示し，最適解を求めなさい，また，x, y が最適解となる時の目的関数の値を求めなさい。

(2) $x + y = 1$ の条件下において，$x^2 + y^2$ の最小値と，そのときの x, y の値を述べなさい。

問 2 杢兵衛商会 (もくべえしょうかい) では木工製品の製造販売をしている。社長の杢兵衛さんは利益を上げるための分析をしたところ以下が判明した。机を一つ作るのに必要な材料は板 1 枚であり, 製作時間は 5 時間, その儲けは 4000 円である。本棚を一つ作るのに必要な材料は板 1 枚と角材 1 本であり, 製作時間は 1 時間, その儲けは 1000 円である。1 週間あたりに, 机と本棚の製造に使える時間は 34 時間であり, 板は 10 枚まで, 角材は 6 本までである。

(1) 1 週間あたりに製造する机と本棚の数をそれぞれ x と y とする。杢兵衛さんの目的は 1 週間あたりの総もうけ額 r を最大にすることである。

(答 11 (1)(a)　目的関数は $z = x + y$, 制約条件は $x^2 + y^2 = 4$。(1)(b) 最適解は $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, この時の目的関数の値は $2\sqrt{2}$　(2) $\min(x^2 + y^2) = 1/2$, $(x, y) = (1/2, 1/2)$

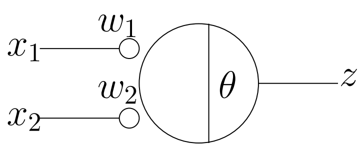
目的関数と，x, y に関する制約条件を全て数式にしなさい(答 12。

(2) 1 週間あたりの総もうけ額を最大にするには, 机と本棚の毎週の製造台数をそれぞれいくつにすればよいか(答 13。

1.6.2　脳の学習理論

脳の基本素子である神経細胞は，互いに結合しあってネットワーク状の構造を形成している。神経細胞の出力信号は 0, 1 で表現できるインパルス状の信号であり，また，他の神経細胞からの入力に強く活性化された時に出力信号が得られる。生理学者 McCulloch と数学者 Pitts は，このような生理学的知見に基づいて，1943 年に神経細胞の特性を以下のように数理モデル化した。

ここでは，簡単のため神経細胞が 2 入力のみを受け取るとする (右図)。神経細胞が出力信号を出している状態を $z = 1$，出していない状態を $z = 0$ で表すと，入力 (x_1, x_2) と出力 z は以下の関係式で表現される。



図

$$z = \begin{cases} 1 & (w_1x_1 + w_2x_2 \geq \theta \text{ のとき}) \\ 0 & (w_1x_1 + w_2x_2 < \theta \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで，w_1, w_2 は各入力信号が神経細胞に及ぼす影響を表す定数 (結合重み) を, θ は神経細胞の活動のしやすさを表す閾値を表す。

問 3 上述の神経回路モデルについて以下の問いに答えなさい。

(1) AND 回路と同じ入出力関係を実現するには, (w_1, w_2, θ) をどのように選べば良いか。適切な組み合わせを一つ述べなさい(答 14。

(2) 未学習の状態の脳の神経パラメータ (w_1, w_2, θ) はランダムな値となっており，学習とともに少しずつ変化していくと考えられる。上記の素子に $(x_1, x_2) = (1, 0)$ を入力したところ $z = 0$ が出力された。この時，各パラメータが少しずつ (例えば 0.1 ずつ) 変化するとして，どのように増減すれば出力が正解と一致する可能性があるだろうか(答 15。

前問のようなアイデアに基づき，Rosenblatt は 1957 年にパーセプトロン (Perceptron) と呼ばれる脳の学習モデルを発表した。実際に小脳ではこのような学習が行われていること (小脳パーセプトロン説) がその後の生理学実験で示唆されている。

1.7　数式, 定性的表現, 幾何学的表現

1.7.1　基本的な表現

問 1 以下の**定性的表現**をグラフや図形 (**幾何学的表現**) を書いて説明しなさい。また**定量的表現**としてできるだけ簡単な数式で表しなさい。必要に応じて変数の定義をすること。ただし，変数名はできるだけわかりやすくつけること(答 16。

(1) 2 つの値 x と y が線形関係にある。

(2) 2 つの値 x と y が比例関係にある。

(3) 太郎くんの英語の点は 60 点未満である。

(4) 次郎くんの英語の点は 60 点以下である。

(5) 三郎くんの英語の点は 80 点以上である。

(答 12(答)

$$\text{制約条件は} \begin{cases} 1\text{ 枚/台 } x + 1 \text{ 枚/台 } y & \leq 10[\text{枚}] \\ 1 \text{ 本/台 } y & \leq 6[\text{本}] \\ 5\text{hr/台 } x + y\text{hr/台} & \leq 34[\text{hr}] \end{cases}$$

目的関数は

$$r = 4000[\text{円/台}]x + 1000 \text{ 円/台 } y$$

問題文に明記されていない以下の暗黙の条件もある。

$$\begin{cases} 0 & \leq x \\ 0 & \leq y \end{cases}$$

(答 13(答) 机を 6 台, 本棚を 4 台にするとよい。(ヒント) 上の不等式をみたす x, y の領域をグラフに明示する。その領域と目的関数が交わる範囲内で r を様々に変え，その中で r が最大となる点を見つける。

(答 14(答) $(w_1, w_2, \theta) = (1, 1, 1.5)$

(答 15(答) w_1: 少し大きくする。w_2: 変化させても出力に無関係。θ: 少し小さくする。

(答 16(1) $y = ax + b$ (a, b は定数), もしくは $ax + by + c = 0$ (a, b, c は定数) (2) $y = kx$ (k は比例定数) (3) $E_{taro} < 60$ (E_{taro} は太郎の英語の点) (4) $E_{jiro} \leq 60$ (E_{jiro} は次郎の英語の点) (5) $E_{sabu} \geq 80$ (E_{sabu} は三郎の英語の点) (6) $F = k/n$ (F は力，n は単位時間あたりの回転数, k は比例定数)

(6) 直流モーターの出す力は，単位時間あたりの回転数に反比例する。

(7) 時刻 t_1 から時刻 t_2 までの間の，物体の位置 $x(t)$ の変化が 3 m であった。

(8) 時刻 t_1 から時刻 t_2 までの間の，物体の位置 $x(t)$ の変化を変位 Δx とよぶ。

1.7.2 和文数訳

問 2 以下の例題を読んで，その後の問いに答えなさい。
[例題] 以下の文章を数式で表しなさい。

> 現在の花子の年齢は 5 年前の桜子の年齢の 2 倍である。

(答)

> 現在の花子と桜子の年齢を**それぞれ** H, S とおく。**題意より次式が成り立つ。**
>
> $$H = 2(S - 5)$$

(例題の説明) 以下は定式化における注意点。

(1) 頭文字等を利用して**変数はわかりやすく**定義する。

(2) 定式化をするときには，機械的に文章を式に置き換える。**余計な変形は一切しない**こと。

(3) **説明を文章で**きちんと書く。

(4) 答の文中の太字は定型的な言い回し。必ず覚える。

[問] 以下の文章を数式で表しなさい。

> 5 年前には，太郎の年齢は花子の 3 倍だった。10 年前には，太郎の年齢は桜子の半分だった(答 17。

(答 17 **現在の**太郎，桜子，花子の年齢を**それぞれ** T,H,S とおく。**題意より次式が成り立つ。**

$$\begin{cases} T - 5 &= 3(H - 5) \\ T - 10 &= (S - 10)/2 \end{cases}$$

注) 知りたいのは現在の歳なので，例えば 5 年前の年齢を変数にするのはミスのもと。また，変数名はできるだけ誤解がないようにする。ここでは太郎たちの頭文字を使った。x, y, z 等とするとどれが何かわからなくなる。

問 3 以下の例題を読んで，その後の問に答えなさい。

「速度 v で 100 m 移動するのにかかる時間」を数式で表す時には以下のように書く。

$$\frac{100\ [\mathrm{m}]}{v}$$

このように**数値の単位は必ず明記**する。

一方，以下は悪い例である。

(1) $\dfrac{100}{v}$

(2) $\dfrac{100\ [\mathrm{m}]}{v\ [\mathrm{m/s}]}$

(3) $\dfrac{100\ [\mathrm{m}]}{v}\ [\mathrm{s}]$

(1) では，v が与えられても計算結果が何を表す量かわからなくなる。v の単位は数値とともに与えられれば良いので，(2) のように v 単位を事前に決める必要は無いし，移動にかかる時間は，必要に応じて秒で答えることも時速で答えることもできるので，(3) のように事前に決める必要も無い。
[問] 花子が自転車で 15 km 走るのにかかる時間は，6 km の距離を歩くときにかかる時間と同じである。花子が自転車で進む速度は，歩く速度よりも時速 9 km だけ速い。自転車での移動のときも徒歩のときもそれぞれ一定の速度で移動するものとする。

上記の問題文を数式にしなさい(答 18。

練習問題 以下の文を，それぞれ 1 つの数式で表しなさい。

(1) 太郎の年齢は花子の年齢の半分である。

(2) 太郎と花子の年齢の差は 5 歳である。

(3) 太郎の年齢は，5 年前の花子の年齢の 2 倍である。

1.8 有効数字

なにかの長さを 1 cm 目盛りの定規で測るときには「2.3 cm」など，目盛りより一桁低い桁まで読

(答 18 **花子が自転車ですすむ速度と歩く速度をそれぞれ** v_b, v_w とする。**題意より次式が成り立つ。**

$$\begin{cases} \frac{15[\mathrm{km}]}{v_b} &= \frac{6[\mathrm{km}]}{v_w} \\ v_b &= v_w + 9[\mathrm{km/hr}] \end{cases}$$

	有効桁数	科学的記数法
5.32	3 桁	5.32
53.2	3 桁	5.32×10^1
532	3 桁	5.32×10^2
5320	通常 3 桁と判断	5.32×10^3
5230.	4 桁	5.320×10^3
0.32	2 桁	3.2×10^{-1}
0.320	3 桁	3.20×10^{-1}
0.032	2 桁	3.2×10^{-2}

表 1　有効桁数と科学的記数法の例

むようにする。この例の場合では 2 桁の数字が意味のある数字になる。これを 0.023 m と書くことも，23 mm と書くこともできるが，どう書いても意味のある桁数は 2 桁。このように，測定で得た数字のうち意味のある部分を**有効数字** (significant figures) とよぶ。

表 1 に示した例にあるように 5320 等，小数部分でない末尾に 0 があると有効数字の判定ができないが，通常は最小の桁数 (5320 なら 3 桁) で判定する。このような曖昧な書き方を避けるために，研究開発の現場では**科学的記数法**がよく使われる。もし，5320 が有効数字 3 桁ならば 5.32×10^3 と，4 桁ならば 5.320×10^3 と表記する。

また，1/2 は小数で表すと $0.500\cdots$ と，有効桁数は無限桁になる。一方で，なんらかの測定データ 0.5 を小数で表すと 1/2 とは限らず，より精度の高い計測をすると 0.51 かもしれない。このような理由から，分数を安易に小数で表記するのはあまりよくない。

1.9　弧度法と度数法

1.9.1　角度の定義

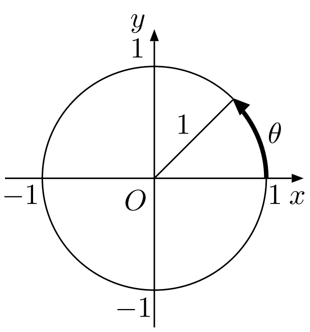


図 4　弧度法

弧度法とは，

> 半径 1 の円において，長さが 1 である弧を見込む中心角を 1 **ラジアン** (radian)[rad] (注 4

として角度を表す方法のことである (図 4)。言いかえると，扇型の弧長 x が半径 r の θ 倍であるならば，すなわち

$$x = r\theta$$

ならば，この比率 θ を用いてこの扇型の中心角を表す方法を弧度法とよぶ。この場合の中心角は

$$\theta = \frac{x}{r}\ [\mathrm{rad}]$$

と表されることになる。**ラジアンは半径に対する弧長の比**による角度表現なので本来は**単位の無い実数**であるが，あえてラジアンという単位をつけることで角度を表すことを示している。

一方，円の中心を通る直線で均等に円周を 360 分割してできる扇型の中心角を 1 度 (1° もしくは 1 deg と書く) として角度を表す方法を**度数法**という。

国際単位系 (**SI 単位系**(注 5) ではラジアンが角度の単位として定められており，数学・情報・物理分野での角度の表記はラジアンが一般的である。

(1) 度数法による角度 θ° を，弧度法による値 θ [rad] に変換するための式を述べなさい(答 19 。

(2) 以下は何ラジアンか答えなさい。

(1) 45°　(2) 360°　(3) 270°
(4) 90°　(5) 225°　(6) 180°
(7) 120°　(8) 60°　(9) -30°

(3) 1 ラジアンは度数法では何度程度か。以下から最も近い値を選びなさい。

(1) 30°　(2) 60°　(3) 90°　(4) 180°

(4) 以下の円弧の長さを答えなさい(答 20 。

(注 4 ラジアン (radian) は半径を表す語 radius と語源は同じ

(注 5 フランス語で Le Système International d'Unités の省略形。英語では The International System of Units. 時間 [s], 長さ [m], 質量 [kg], 電流 [A], 熱力学的温度 [K], 物質量 [mol], 光度 [cd] を基本単位とする

(答 19 $\theta\ [\mathrm{rad}] = \frac{2\pi}{360^\circ}\theta^\circ$

(答 20 (a) 2 m　(b) 10π cm　(c) $r\theta$

(a) 半径 2 m，中心角 1 rad の円弧

(b) 半径 10 cm，中心角 π [rad] の円弧

(c) 半径 r，中心角 θ [rad] の円弧

1.9.2 地球の大きさを求める

問 1 以下の問いに答えなさい。

(1) 地球と太陽の間の距離を R, 地球の半径を r, 太陽の中心から地球を見込む角(注 6 を θ とおく。r を R と θ を用いて表しなさい。

(2) 地球と太陽の間の距離を R は季節により若干変化するが, 平均すると $R = 1.5 \times 10^8$ km, 地球の半径 r は約 6.4×10^3 km である。$\theta \ll 1$ の時, $\sin\theta \simeq \theta$ となることを利用して太陽から地球を見込む角 θ を弧度法で答えなさい。

(3) 1° を弧度法で表し，有効数字 2 桁で答えなさい。

(4) 太陽から地球を見込む角 θ を度数法で答えなさい。

(5) 太陽の直径は地球の 109 倍である。これを約 100 倍として，地球から太陽を見込む角度を計算しなさい。

この問からわかるように，太陽から地球を見こむ角度も，地球から太陽を見こむ角度も非常に小さい。すなわち，太陽から地球を照らす現象は，点光源が点を照らす現象とほぼ同じである。そのため，太陽からの光は地球上のどの位置に対してもほぼ平行に入射しているとみなすことができる。

問 2 時は紀元前，エジプトの都市シエナでは，夏至の日の太陽は南中時に完全に頭上にのぼり，井戸は奥底まで明るく照らされることが知られていた。エジプトで活躍したギリシャ人の学者であるエラトステネス (Eratosthenes, BC275 頃-BC195 頃) は，同じく夏至の日の南中時に，都市アレキサンドリアで垂直にたてた棒の影を観察したところ，太陽は天頂から南に 7.2 度のところにあることがわかった。アレキサンドリアとシエナの間は貿易がさかんであり，一日約 18.5 km の移動をできるラクダで片道 50 日かかる距離であった。また，シエナはアレキサンドリアから，ほぼまっすぐ南下した位置にあった。これらのことからエラトステネスは地球の形は球形であると考え，また，太陽は地球から非常に遠くにあると仮定して**地球の周の長さ**を求めた。さて，エラトステネスと同様に以上のデータに基づいて，地球の周の長さを求めてみよ(答 21 。

(注 6 地球全体をちょうど覆える角度

(答 21 18.5 km/day $\times$ 50 days $\times 360^\circ / 7.2^\circ = \cdots$

2　いろいろな関数

2.1　三角関数 (円関数)

2.1.1　三角関数の基本

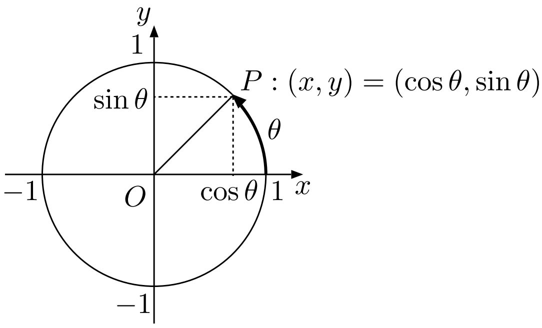


図 5　三角関数 (円関数)

原点を中心とする単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上で，点 $(1, 0)$ から反時計回りに回転するとき，通った円弧の長さを θ，最終到達点を $P = (x, y)$ とする (図 5)。このとき，

$$\sin\theta = y$$
$$\cos\theta = x$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定義し，それぞれ**正弦関数** (sine)，**余弦関数** (cosine)，**正接関数** (tangent) と呼ぶ。また，これらを総称して**三角関数** (trigonometric function) もしくは**円関数**と呼ぶ。

各三角関数の逆数を与える関数は，

$$\csc\theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta}$$

と定義されており(注 7，それぞれ**余割関数** (cosecant)，**正割関数** (secant)，**余接関数** (cotangent) と呼ぶ。また，これらをまとめて**割三角関数** (inverse trigonometric function)

問 1 各三角関数のグラフを定義に基づいて描きなさい。

問 2 任意の θ に対して以下が成り立つことを示しなさい。

(注 7 csc は cosec と書くこともある。

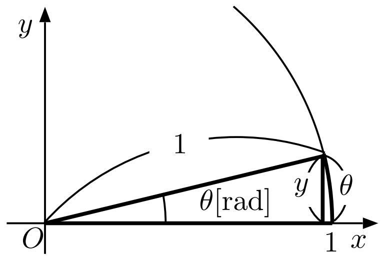


図 6　$\theta \ll 1$ のとき，$\sin\theta \simeq \theta$ となる

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

問 3 以下を証明しなさい。

(1) $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

(2) $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

問 4 以下の各式を $a\sin x$ もしくは $a\cos x$ (a は定数) という形に書きなおしなさい。(図を書いて考えること。厳密な証明は不要。)

(1) $\sin(-x)$

(2) $\cos(-x)$

(3) $\sin(x + \pi)$

(4) $\sin(x + \dfrac{\pi}{2})$

(5) $\cos(-x + \pi)$

(6) $\cos(x + \dfrac{3}{2}\pi)$

(7) $\sin(-x + \dfrac{\pi}{2})$

(8) $\cos(-x - \dfrac{\pi}{2})$

問 5 $\theta \ll 1$ のときには，図 6 で示すように $y = \sin\theta$ と，単位円上で角度 θ [rad] の見込む弧の長さ θ はほぼ等しくなる。すなわち，

$$\sin\theta \simeq \theta \qquad (\theta \ll 1)$$

となる。このことを利用して $\sin 1^\circ$ の近似値を求めなさい。(正確な値は $\sin 1^\circ = 0.0174524\cdots$ である。)

2.1.2　地球から月までの距離

問 6 古代ギリシャ時代にヒッパルコス (Hipparchos, BC190-BC125 頃) (注 8 は**地球から月までの距離**を

(注 8 ヒッパルコスは天体観測のために正弦表も作成した

以下のような方法で見積もった。

(1) 同じ時刻に月が水平方向に見える地点と，真上に見える地点を探す[注9]。この 2 点間と地球の中心のなす角度 θ がわかれば，月までの距離 x が地球の半径 R の何倍かを求めることが出来る。月までの距離 x を地球の半径 R と角度 θ を使って表しなさい。ここで，月までの距離 x とは，月と地球の中心間の距離とする。

(2) ヒッパルコスはその 2 地点と地球の中心のなす角度が 89 度であると結論づけ，地球の半径に対して地球と月の間の距離が何倍であるかを計算した。この値（概算値）を求めよ。

(3) 地球のおおよその大きさは，ヒッパルコス以前にすでに見積もられていた。地球が真円でありその周を 40,000km とした場合に**地球と月の間の距離**が何 km か概算で求めなさい。現在は地球と月の間の距離は約 38.4 万 km であることがわかっている。

このように三角関数は，建物や山などから天体にいたるまで様々な対象の高さや距離や位置を測るために発達した。

2.2　冪関数と指数関数

2.2.1　冪乗

ある数 a を何度か繰り返しかけて出来る数を a の**冪乗** (巾乗) (power) もしくは単に**冪**と呼ぶ。a と自然数 n に対して，a を n 回掛ける演算は a^n と書き，a を**底** (base), n を**指数** (exponent) と呼ぶ[注10]。

また，正の自然数 n に対して負の冪乗は以下のように定義される。

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \frac{1}{a^n}$$

問 1 以下を証明しなさい。

(1) $(x^n)^m = x^{n\times m}$

(2) $x^n x^m = x^{n+m}$

(3) $x^0 = 1$

[注9] 正確に時を刻む時計のなかったこの時代には，どうやって異なる地点で時の同時性を判断するかは大きな問題であった。たとえばどのような方法がありえるか各自考えてみよ

[注10] 0^0 は通常定義しない。

2.2.2　冪関数

$y = ax^k$ (a, k は定数) の形の関数を**冪関数**と呼ぶ。冪関数は自然現象を表す法則にしばしば登場する。たとえば，万有引力やクーロン力の大きさは冪関数で表される。

2.2.3　指数関数

正の自然数 n に対して

$$y = a^{\frac{1}{n}}, \quad (a > 0)$$

の値は**以下をみたす正の値**と定義される。

$$y^n = a, \quad (y > 0)$$

そこで，$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$ と定めることにより，冪乗の指数を任意の有理数とすることができる。さらに指数を任意の実数 x にまで拡張した関数

$$f(x) = a^x, \quad (a > 0)$$

を**指数関数** (exponential function) と呼ぶ。ここで，$a > 0$ ならば任意の x に対して $f(x) > 0$ である。

人口の増加の様子，放射性物質の崩壊による原子数の時間変化，化学変化による物質量の変化など，さまざまな自然現象を指数関数で記述できることが知られている。

練習問題 以下を計算して簡単にしなさい[答22]。

(1) $4^{\frac{3}{2}}$

(2) $4^{-\frac{3}{2}}$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$

(5) $\left(27^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

(6) $4^{e-\sqrt{2}} \times 2^{-e+2\sqrt{2}}$

[答22] (1) 8　(2) 1/8　(3) 1/8　(4) 8　(5) 3　(6) 2^e

2.2.4 平方根・冪根

ある複素数 a が与えられたとき, 2 乗すると a になる数 x, すなわち

$$x^2 = a$$

を満たす数 x を a の**平方根** (square root) とよぶ。
さらに, 複素数 a と自然数 n に対して, n 乗すると a になる数 x, すなわち

$$x^n = a$$

を満たす数 x を a の n **乗根** (n-th root) とよぶ。また, 平方根や n 乗根の総称を**冪根** (べきこん) という。

2.2.5 根号

ある**正の実数** a に対して，その**平方根のうち正の方**, すなわち $a^{\frac{1}{2}}$ を**根号** $\sqrt{\ }$ を用いて

$$\sqrt{a} \quad (= a^{\frac{1}{2}})$$

と書く。さらに**負の実数** a **に対しては**

$$\sqrt{a} = \sqrt{-|a|} = \sqrt{|a|}\, i$$

と定義する。
また，$\sqrt[n]{a}$ $(n > 2)$ を以下のように定義する。

(1) **正の実数** $a(>0)$ に対して

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

(2) **負の実数** $a(<0)$ に対して

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} -\sqrt[n]{|a|} & n : \text{奇数} \\ \text{未定義} & n : \text{偶数 (実数の範囲に } n \text{ 乗根無し)} \end{cases}$$

上記のように根号の定義式は複雑である。基本的には，冪根のうち実数値を，実数値が複数あるときは正の値を採用する。冪根が複素数のみのときには，平方根であれば虚部が正となる値を，平方根以外であれば値なしとする。

問 2 以下をできるだけ簡単な形にしなさい(答 23 。

(1) $\sqrt{(-2)(-2)}$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-2}$

(3) $\sqrt{x^2}$

練習問題 以下の値を求めなさい(答 24 。

(1) 4 の平方根

(2) $\sqrt{4}$

(3) $4^{\frac{1}{2}}$

(4) -8 の 3 乗根

(5) $\sqrt[3]{-8}$

(6) $(-8)^{\frac{1}{3}}$

(7) 16 の 4 乗根

(8) $\sqrt[4]{16}$

(9) $16^{\frac{1}{4}}$

2.2.6 ネイピア数

利子が r の一年複利で貯金をした場合，一年後に手に入れることが出来る金額が元の何倍か (貯金の増加率) を計算すると以下になる。

$$(1 + r)^1$$

半年複利で利子 $x/2$(半年当たり) で貯金した場合, 一年間での貯金の増加率は

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$$

である。このように複利計算の期間をどんどん短くしていくと表 2 のようになる。 さらに複利計算の期間をどんどん短くしていった極限 $(n \to \infty)$ における貯金の増加率は次式の通りである。

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \tag{4}$$

(答 23 (1) 2 (2) -2 (3) $|x|$

(答 24 (1) ± 2 (2) 2 (3) 2 (4) -2 , $1 \pm \sqrt{3}i$ (5) -2 (6) 未定義 (7) $\pm 2, \pm 2i$ (8) 2 (9) 2

表 2 複利計算。利率は一回の複利計算あたりの値。

	利率	1 年後	$r = 1.0$ のとき
1 年複利	r	$a_0(1+r)^1$	$(= 2a_0)$
半年複利	$\frac{r}{2}$	$a_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$	$(=2.25a_0)$
4 ヶ月複利	$\frac{r}{3}$	$a_0\left(1+\frac{r}{3}\right)^3$	$(=2.37a_0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$1/n$ 年複利	$\frac{r}{n}$	$a_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

上式で利率を $r = 1$ (100%) とした場合の増加率を**ネイピア数**(注 11) とよび，e で表す。その値は

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\cdots$$

と続く数であることが知られている。

e を用いると式 (4) は次式のように表される。

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{5}$$

ただし，変数 r を x と置き直した。これがオイラーによる**自然指数関数**(注 12)の定義式である。さらに，この定義に基づき，底を a とする指数関数も以下のように計算できる。

$$a^x = e^{x\cdot\ln a} \tag{6}$$

問 3 以下の問いに答えなさい。

(1) 式 (4) から式 (5) を導きなさい。

(2) 式 (6) が成り立つことを証明しなさい。

解説 常に一定の割合で変化をするもの（利子，個体の大きさや数，崩壊する放射性同位体等々）を数学的に扱うと，この e (注 13)がしばしば現れる。

(注 11 対数の発明者ジョン・ネイピアにちなんだ名称。ネイピアが作成した対数表の底は e に非常に近い定義に基づく値であった。上述のような複利計算に基づく e の定義は数学者ヤコブ・ベルヌーイ (Jakob Bernoulli, 1654-1705, スイス) による。ベルヌーイはライプニッツから微積分を学ぶ。ネイピア数を記号 e で初めて表したのはレオンハルト・オイラー (Lenhard Euler, 1704-1783)。

(注 12 底を e とする指数関数

(注 13 e の定義方法は他にもいくつかある。例えば「微分方程式 $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 1$ を満たす解を $y = \exp x$ とおいたとき，$e = \exp 1$ と定義する」といったものがある。

2.3 対数関数

2.3.1 対数表：かけ算と割算

例えば，16×8 を計算するとき，

$$16 \times 8 = 2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$$

と計算すると，かけ算を足し算に変換することができる。はじめの 16 と 8 がそれぞれ 2 の何乗か (それぞれ $\log_2 16$ と $\log_2 8$ と書く) と，最後の 2^7 の値は付録 A のような**対数表**があれば簡単にわかる。

同様に 14×17 を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} 14 \times 17 &\simeq 2^{3.80735} \times 2^{4.08746} \\ &= 2^{3.80735+4.08746} \\ &= 2^{7.89481} \\ &\simeq 238 \end{aligned}$$

問 1 対数表を用いて以下の計算をしなさい(答 25 。

(1) $128 \times 64 \div 4096$

(2) $13 \times 32 \times 8$

(3) $128 \times 138 \div 184$

解説 「a **を何乗したら** x **になるか**」を $\log_a x$ で表す。そして，これを**対数関数**もしくは単に**対数**とよぶ。

このかけ算を足し算に変換する不思議な**対数**の概念は発明家ジョン・ネイピア（John Napier, 1550-1617, スコットランド）(注 14によって発見された。log という表記は，ネイピアが対数を自然現象とは異なる純粋に論理上の演算と考えて **logistic algorithm** (**logarithm**) と名付けたことに起因するが，後でも触れるように log は自然現象の解析を行うと多くの場面で必要になる重要な関数の一つである。

ネイピアは 20 年かけて**対数表**の作成も行った。対数表を用いた計算方法は，計算機が発達する 20 世紀後半まで用いられ，科学と工学のみならず文明の進歩に大きく貢献した。よって正確な対数表の作成は国家プロジェクトとなる重要な事業であった。

(答 25 (1) 2 (2) 3328 (3) 96

(注 14 ネイピアは様々な発明をしたことが知られているが，特に対数と少数点の発明で有名。

2.3.2　対数関数の定義と基礎

対数関数のより正確な定義は以下の通りである。

> 「ある正の数（真数）x が，別の正の数（底）$a(\neq 1)$ を何乗したものか」を
>
> $\log_a x$
>
> という記号で表し，$f(x) = \log_a x$ を**対数関数**とよぶ。

$y = \log_a x$ ならば定義より $x = a^y$ が成立する。ここで指数関数の定義より $a > 0$ であり，また，$a = 1$ ではこれを何乗しても 1 にしかならないので，底 a は以下を満たすことが条件となる。

$$a > 0,\ a \neq 1$$

さらに，$x = a^y > 0$ なので，真数 x について $x > 0$ を満たすことが対数関数の条件であり，これを**真数条件**とよぶ。

また，対数関数の定義よりただちに，

$y = \log_a x$ の逆関数は $y = a^x$

である。

指数関数の数式処理に困った時には対数表現に変形するとしばしば突破口が開ける。逆に対数関数の扱いに困ったら指数関数にしてみると良い。

問 2 以下のグラフを書きなさい。a の値によりその概形がどう異なるかを考え，その特徴を場合分けをして示すこと。

(1) $y = a^x \ (a > 0)$

(2) $y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$

解説 底が e である対数 $\log_e$ は自然現象の解析で多く使われることから**自然対数** (natural logarithm) とよび，しばしば ln と書く。一方，底が 10 である対数 $\log_{10}$ は**常用対数**とよぶ。単に log と書く場合には，工学分野では常用対数 ($\log_{10}$) を指すことが多いが，自然科学分野では自然対数 ($\log_e$) を指す。**本テキストで以降単に log と書いたときには自然対数を指す。**

2.3.3　対数関数の基本公式

問 3 対数関数 log の定義より次式を証明せよ。以下で $a, b, c, x, y > 0$ である。また，底の値は 1 ではないとする。

(1) $\log_a 1 = 0$

(2) $\log_a a = 1$

(3) $\log_a b^c = c \log_a b$

(4) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(5) $\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c \quad (\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b})$

練習問題 以下を出来るだけ簡単な表現に直しなさい[答 26]。

(1) $\log_3 15 - \log_3 5$

(2) $\log_2(\sqrt{3} + 1) + \log_2(\sqrt{3} - 1)$

(3) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$

(4) $2^{\log_2 3}$

(5) $e^{\ln 2}$

(6) $2^{\log_{\sqrt{2}} 3}$

2.3.4　対数方程式

対数方程式を解くときには，

$$\log_a \bigcirc = \triangle$$

対数関数の定義に基づいて指数関数を用いた形 ($a^{\triangle} = \bigcirc$) に直すか，

$$\log_a \bigcirc = \log_a \triangle$$

の形に変形したあと対数表現を用いない形 ($\bigcirc = \triangle$) にする。一般には以下の手順で解く。

(1) **真数条件** ($\log_a x$ において $x > 0$) を確認する。

(2) 底をそろえる。

(3) 式を整理して，**対数を用いない表現**にして解を求める。

[答 26] (1) 1　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 2　(6) 9

(4) 解が真数条件を満たしているかを確認する。

練習問題 以下の対数方程式を解きなさい[答 27]。

(1) $\log_2(x-4)=3$

(2) $2=\ln(x+e^2)$

(3) $\log_2 x+3\log_8(x-1)=1$

(4) $\log_{\sqrt{3}}(x+3)-\log_9(3x+9)=1$

(5) $\log_4 x^2+6\log_x 2=5$

2.3.5　対数不等式

問 4 以下の各問の 2 つの対数はどちらが大きいか。それぞれの値を計算して答えよ。

(1) $\log_2 2$ と $\log_2 4$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ と $\log_{\frac{1}{2}} 4$

問 5 以下がなりたつとき p, q の大小関係を述べよ[答 28]。

$$\log_a p > \log_a q,\ (a>0,\ a\neq 1)$$

練習問題 以下の対数不等式を解きなさい。対数方程式で述べた計算手順を参照の上，真数条件に気を付けること[答 29]。

(1) $\log_2 x > \log_2 4$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 4$

(3) $\log_2 x > \log_{\frac{1}{4}} 9$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{4}} 9$

(5) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{9}}(3-x)$

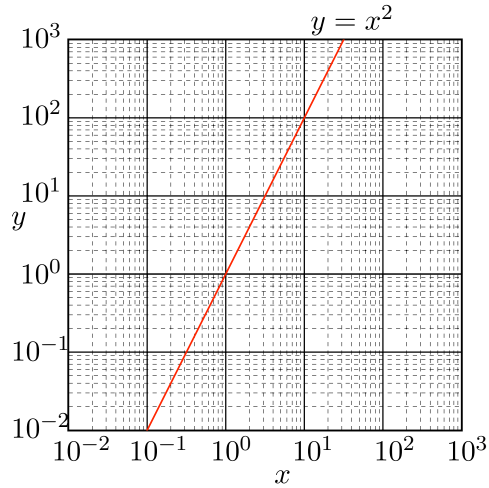


図 7　$y=x^2$ の両対数グラフ

2.4　対数関数と指数関数の応用問題

2.4.1　対数グラフ

点 (x, y) をグラフ上に表したいとき，x 軸の目盛を $\log x$(対数目盛) にとったグラフを**対数グラフ**という。特に，横軸もしくは縦軸の片方のみを対数目盛にしたものを**片対数グラフ**，両方の軸を対数目盛にしたものを**両対数グラフ**とよぶ。

例えば，$y=x^2$ を両対数グラフにプロットするには，以下のように考えると良い。$y=x^2$ の両辺の対数をとると，次式が得られる。

$$\log y = 2\log x$$

ここで，$X=\log x$, $y=\log y$ とおくと，上式は次式になる。

$$Y=2X$$

ちょうど，この X, Y が両対数グラフの各軸を表すので，$y=x^2$ は両対数グラフ上では図 7 のように傾き 2 の直線になる。

このように，なんらかの変数に対する指数関数は，通常のグラフでは曲線になるが，両対数グラフでは指数を傾きとする直線になる。そのため，様々な物理実験データを両対数グラフにプロットすることで，そのデータ点がなんらかの指数関数により得られたのか，その場合には指数の値はいくらかを容易に知ることができる。

問 1 以下の関数を両対数グラフにプロットしなさい。

(1) $y=x^3$

[答 27] (1) $x=12$ (2) $x=0$ (3) $x=2$ (真数条件に注意) (4) $x=0$ (5) $x=4, 8$

[答 28] $0<a<1$ のとき $p<q$, $1<a$ のとき $p>q$ (グラフを描いて考えるとよい)

[答 29] (1) $x>4$ (2) $0<x<4$ (3) $x>\frac{1}{3}$ (4) $0<x<3$ (5) $1<x<2$ (真数条件に注意)

(2) $y = \dfrac{1}{x^2}$

問 2 以下のグラフは，地震のマグニチュード M および地震が放出するエネルギー E と，その規模の地震が起きる 1 年あたりの頻度 n を示したものである。

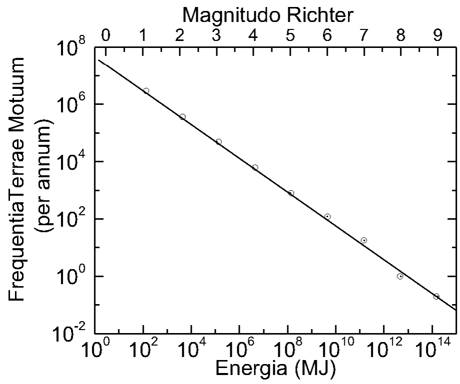


図 地震のマグニチュード (**上部**横軸)，および地震が放出するエネルギー (**下部**横軸) と，その規模の地震が起きる 1 年あたりの頻度 (縦軸) を示す。

(1) マグニチュード M と地震の頻度 n の関係式を書きなさい[答 30]。

(2) 地震のエネルギー E と地震の頻度 n の関係式を書きなさい[答 31]。

2.4.2　対数と自然現象

問 3 地震の発するエネルギーの大きさ E と地震の大きさを表すマグニチュード M には次式のような関係がある。

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

1995 年の兵庫県南部地震 (阪神・淡路大震災) のマグニチュードは 7.0, 2011 年の東北地方太平洋沖地震 (東日本大震災) のマグニチュードは 9.0 であった。後者の地震のエネルギーは前者の何倍か。

問 4 放射性同位体[注 15]のある時点での原子数を N とすると，崩壊による原子数の減少の様子は次式で表される。

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

ここで λ は定数である。この微分方程式を解くと次式が得られる。

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{7}$$

ここで N_0 は時刻 $t = 0$ での原子数である。

(1) 原子数が半分になる時間（半減期）を τ で表す。τ が満たすべき方程式を $N(t)$ を用いて表しなさい。

(2) $\tau = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ となることを示しなさい。

(3) 式 (7) を半減期 τ を用いて次式のように表すことができることを証明しなさい。

$$\frac{N(t)}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau}}$$

2.4.3　対数と桁数

問 5 3^{20} は 10 進数で何桁の数かを知りたい。以下の問いに答えなさい。

(1) ある整数 a が 10 進数で b 桁の数であるとする。x が満たすべき条件式を書きなさい。
ヒント) このように一般化した表現を問われたときは，2 桁の数がみたす条件式は何かを具体的な数値を並べて考えるなど，考えやすい具体的な例で考えてから，一般化して答えを導くのが常套手段[答 32]。

(2) 3^{20} は 10 進数で何桁の数か答えなさい[答 33]。必要なら $\log_{10} 3 = 0.4771$ を使いなさい。

[答 30] $n = a10^{-bM}$, (a, b は定数)
[答 31] $n = aE^{-b}$, (a, b は定数)
[注 15] 構造が不安定で，時間と共に放射性崩壊していく原子のこと。

[答 32] $10^{b-1} \leq a < 10^b$
[答 33] 3^{20} は 10 進数で 10 桁の数。

3　いろいろな座標表現

n 次元空間内のある点の位置は，しばしば直交する n 個の座標系を用いて表される。このような座標系を**直交座標系** (rectangular coordinate system) もしくは**デカルト座標系** (Cartesian coordinate system)[注 16]と呼ぶ。

直交座標を用いるかわりにある基準点からの距離 r (**動径**, radius) と方角 (**偏角**, argument) $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ を用いて位置を記述することもできる。このような座標系を**極座標系** (polar coordinate system) と呼ぶ。

3.1　2次元極座標 (円座標)

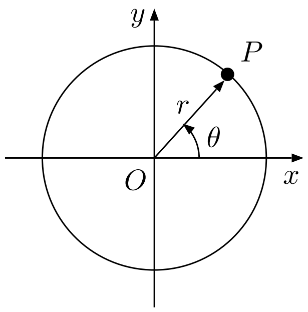


図 8　二次元極座標系

二次元空間内の点 P の位置は，原点 O からの距離 r (**動径**) と向き θ(**偏角**) で記述することができる。偏角 θ は，原点から始まる半直線を基準線とし，この半直線と線分 OP のなす角（反時計回りに測る）で表す。ただし，原則として $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。($-\pi < \theta \leq \pi$ を使う場合もある)。このように二次元空間内の座標を (r, θ) の組で表す座標系を**二次元極座標**，もしくは**円座標** (circular polar coordinates), **極形式**などとよぶ。極座標の角度 θ を決定する基準線は，一般に直交座標系の x 軸とする。

問 1 極座標 (r, θ) から直交座標 (x, y) に変換する式を導きなさい[答 34]。

問 2 以下の直交座標で表した各点を図示し，また極座標で表しなさい[答 35]。

(1) $(1, 0)$

(2) $(0, -1)$

(3) $(-1, -1)$

(4) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

(5) $(-1, \sqrt{3})$

問 3 以下の極座標で表した各点を図示し，また直交座標で表しなさい[答 36]。

(1) $(2, \dfrac{\pi}{3})$

(2) $(4, -\dfrac{\pi}{4})$

(3) $(1, \pi)$

(4) $(2, \dfrac{7}{6}\pi)$

(5) $(0, 3)$

問 4 以下は2次元空間での直交座標と極座標の対応表である。空欄を埋めなさい。解が複数の場合もあることに注意せよ[答 37]。

直交座標	極座標
$(1, \boxed{(1)})$	$(1, \boxed{(2)})$
$(\boxed{(3)}, 1)$	$(2, \boxed{(4)})$
$(\boxed{(5)}, 0)$	$(2, \boxed{(6)})$
$(\boxed{(7)}, 1)$	$(\boxed{(8)}, \dfrac{\pi}{2})$
$(1, \boxed{(9)})$	$(\boxed{(10)}, \dfrac{\pi}{4})$

3.2　3次元極座標 (球座標)

3次元空間内の点 P の位置を，図 9 のように原点 O からの距離 r(**動径**) と，OP の xy 平面への射影と x

[注 16] 直交座標の発案者である デカルト (René Descartes, 1596-1650, 仏) の名をとった呼び方。デカルトは哲学者，数学者であり，動物機械論，心身二元論を唱えた。また科学の手法として疑いようのない事実「我思うゆえに我あり」から全てを見直すことを提唱した。

[答 34] $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

[答 35] (1) $(1, 0)$　(2) $(1, \frac{3}{2}\pi)$　(3) $(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi)$　(4) $(2, \frac{7}{4}\pi)$　(5) $(2, \frac{2}{3}\pi)$

[答 36] (1) $(1, \sqrt{3})$ (2) $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$　(3) $(-1, 0)$　(4) $(-\sqrt{3}, -1)$　(5) $(0, 0)$

[答 37] (1) 0　(2) 0　(3) $\pm\sqrt{3}$ (4) $\dfrac{\pi}{6}$ ($x = \sqrt{3}$ のとき), $\dfrac{5}{6}\pi$ ($x = -\sqrt{3}$ のとき) (5) ± 2 (6) 0 ($x = 2$ のとき), π ($x = -2$ のとき) (7) 0　(8) 1　(9) 1　(10) $\sqrt{2}$

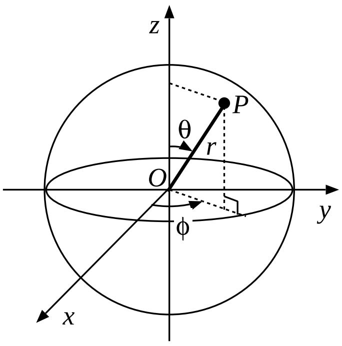


図 9　3 次元極座標系と直交座標系

軸となす角 ϕ, OP と z 軸のなす角 θ の組 (r, θ, ϕ) で表す座標表現を **3 次元極座標**もしくは**球座標** (spherical polar coordinates) という。原則として $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$ とする。

ただし，**3 次元極座標系の角度の定義は教科書によってしばしば異なる**のでよく注意すること。そして，本テキストのように，**3 次元極座標系の θ は 2 次元極座標系の θ としばしば定義が異なる**ことにも注意せよ。

問 極座標 (r, θ, ϕ) から直交座標 (x, y, z) への変換式を示しなさい(答 38)。

練習問題 以下は 3 次元空間での直交座標と極座標の対応表である。各点を図示し，また，空欄を埋めなさい(答 39)。

直交座標	極座標 *
$(1, 0, 0)$	$\boxed{(1)}$
$(0, 1, 0)$	$\boxed{(2)}$
$(0, 1, -1)$	$\boxed{(3)}$
$\boxed{(4)}$	$(2, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$
$\boxed{(5)}$	$(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \pi)$

(答 38) $(x, y, z) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r\cos\theta)$

(答 39) (1) $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$　(2) $(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$　(3) $(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{2})$　(4) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3})$　(5) $(-2, 0, 2)$

4　複素数

4.1　虚数単位と複素数

2 乗すると -1 になる数を**虚数単位** (imaginary unit) と定義し，i で表す(注 17)。すなわち，**虚数単位 i は次式を満たす想像上の数**である(注 18)。

$$i^2 = -1$$

虚数単位は平方根を用いると次式のように表される。

$$i = \sqrt{-1}$$

また，実数 (real number) a, b と虚数単位 i により

$$z = a + bi$$

と表される数を**複素数** (complex number) とよぶ。**実数空間は複素数空間の部分集合**である。

複素数 z の**実数部分** (real part) は $\mathrm{Re}(z)$, **虚数部分** (imaginary part) は $\mathrm{Im}(z)$ で表す。たとえば，

$$z = a + bi$$

ならば

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = a \\ \mathrm{Im}(z) = b \end{cases}$$

である。特に，$\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ のとき，z を**純虚数** (purely imaginary number) と呼ぶ。

問 1 以下の式の解を求めなさい。

(1) $x^2 + 2x + 2 = 0$

(2) $x^3 = 1$

(3) $x^4 = 1$

解説 上の設問にあった二次方程式の 2 根のように，虚数部分の符号のみが異なる 2 つの複素数を「互いに**複素共役**である」という。また，複素数 $z = a + bi$ と複素共役な複素数を**共役複素数** (きょうやくふくそすう, complex conjugate) と呼び，一般に $\bar{z} (= a - bi)$ と表す。

(注 17) 回路学等の工学分野では，電流を i と表すことが多いので，虚数単位を j と書くこともある。

(注 18) 二乗すると -1 になる数は二つ存在するが，いずれか一方を i とおけば，もう一方は $-i$ となる。

問 2 2 つの複素数 z_1, z_2 について以下が成り立つことを証明しなさい。

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

練習問題 以下の式を出来るだけ簡単な形 ($a+bi$ の形) にしなさい(答 40。

(1) $(2+i)^2$

(2) $\dfrac{2+i}{i}$

(3) $\dfrac{1+i}{1-i}$

4.2　複素平面

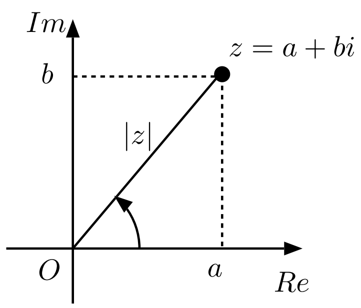


図 10　複素平面

ある複素数 $z = a+bi$ が与えられたとき，点 (a,b) を二次元の座標平面上の点に対応させることができる (図 10)。このような平面を**複素平面** (complex plane) とよぶ。

4.3　複素数の大きさ・距離

複素数 z の大きさ (絶対値) (absolute value, modulus) は複素平面上で z を表した**点と原点との間の距離**で定義され，$|z|$ で表す。$z = a+bi$ の大きさは次式で与えられる。

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

また, 複素平面上での 2 点

$$P : z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$Q : z_2 = a_2 + b_2 i$$

の間の**距離** (distance)$\overline{PQ}$ は実数空間の場合と同様に次式で与えられる。

$$\overline{PQ} = |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2} \quad \cdots (*)$$

問 1

(1) 次式が成り立つことを証明しなさい。

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

(2) (*) 式で示したように，複素平面上の 2 点 z_1, z_2 の間の距離 $\overline{PQ}$ は，$z_1 - z_2$ の大きさ $|z_1 - z_2|$ と等しいことを示しなさい。

練習問題

(1) 次の複素数について以下の問に答えなさい。

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = 1 + i$$

(a) z_1, z_2 とその共役複素数を複素平面上に描きなさい。また，それらの大きさを求めなさい。

(b) 以下の 2 点間の距離を求めなさい(答 41。

(i) z_1 と z_2

(ii) z_2 と $\overline{z_2}$

(iii) $2z_2$ と 1

(2) 以下の方程式の解を複素平面に図示しなさい。

(a) $x^3 = 1$

(b) $x^4 = 1$

(c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

(3) 方程式 $x^2+2x+1-\epsilon = 0$ の解が，ϵ の値によって複素平面をどのように動くか説明しなさい。

4.4　複素平面の極座標表現

複素平面において，複素数と原点を結ぶ直線と，実数軸の正の向きとなす角を複素数 $z = a+bi$ の**偏角**と呼び，$\arg z$ と表す。ただし角度は反時計回り方向を正の方向とする (図 11)。複素数 z の座標は**極座標形式**によって $(|z|, \arg z)$ と表すことができる。

(答 40 (1) $3+4i$　(2) $1-2i$　(3) i

(答 41 $|z_1 - z_2| = 1$,　$|z_2 - \overline{z_2}| = 2$　$|2z_2 - 1| = \sqrt{5}$

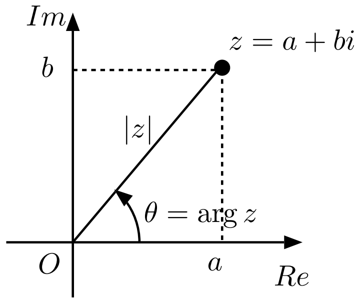


図 11　複素平面と極座標表現

例えば $z = 1 + i$ に対して，

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \arg z = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \quad (n\text{: 整数})$$

なので，$z = 1 + i$ を極座標形式で表すと以下のようになる。

$$\left(\sqrt{2}, \ \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right), \quad (n\text{: 整数})$$

問 1 次の複素数について以下の問に答えなさい。

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = -1 + i$$

(1) z_1, z_2 を極座標形式で表しなさい。

(2) z_1, z_2 に以下の数をかけた値を極座標形式で答えなさい。また，複素平面上に描きなさい.

(a) 2

(b) i

(c) $2i$

(d) z_2

(3) 複素数 z に上記の数をかけるのは，複素平面上で z をどのように移動させることになるか，説明しなさい。

複素数の演算の幾何学的意味は「数学の基礎訓練 II」でより詳細に取り上げる。

問 2 ある複素数 z と複素数 i の間の距離は複素数 z の大きさと丁度等しい。

(1) 題意をもっともよく表す方程式を書きなさい(答 42。

(2) 題意を満たす複素数が複素平面上で描く図形と，$\mathrm{Re}\{z\} = 2$ の交点を表す複素数を求めなさい(答 43。

問 3 ある複素数 z を複素平面上において，原点に関して反時計回りに $\pi/2$ 回転した値と，z の共役複素数が等しくなる。

(1) 題意をもっともよく表す方程式を書きなさい。(答 44

(2) 題意をみたす z を求めなさい。ただし $|z| = 2$ であるとする。(答 45

(答 42 $|z - i| = |z|$

(答 43 $z = 2 + \frac{i}{2}$

(答 44 $iz = \bar{z}$

(答 45 $z = \pm\sqrt{2}(1 - i)$

5　いろいろな関数とグラフ

5.1　偶関数と奇関数

任意の x について

$$f(x) = f(-x)$$

が成り立つ関数 $f(x)$ を**偶関数** (even function) とよび，

$$f(x) = -f(-x)$$

が成り立つ関数 $f(x)$ を**奇関数** (odd function) とよぶ。

問 1 偶関数，奇関数の幾何学的意味を説明しなさい。

問 2 以下の関数を (a) 偶関数，(b) 奇関数，(c) どちらでもない，に分類しなさい(答 46 。以下で $\exp x$ は e^x を意味する。

(1)	x^2	(2)	$\sin x$	(3)	$\cos x$
(4)	$\exp x$	(5)	$\sin^2 x$	(6)	$\ln x$
(7)	$\exp(-x^2)$	(8)	$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	(9)	$\dfrac{\sin x}{x}$

5.2　関数の概形

5.2.1　概形の書き方の基本

以下の関数の概形を描きなさい。

(1) $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

(2) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

解説 概形を書くときには以下をチェックすること。

- 偶関数もしくは奇関数か？ いずれかであれば $x \geq 0$ の図を描ければ $x < 0$ もすぐ描ける。
- 単調増加もしくは単調減少?
  (1) 単調性が確認できなかったら，起伏の様子を調べること。
  (2) 判断のために必ずしもわざわざ微分を求める必要はない。せずにすむ計算はしないほうが間違いが減る。
- $x \to \pm\infty$ での関数値は? (奇関数や偶関数なら $x \to \infty$ のみで OK)
- $x = 0$ での関数値は?

(答 46 **(a)** 1, 3, 5, 7, 9　**(b)** 2, 8　**(c)** 4, 6

5.2.2　複雑な関数の概形

以下の関数の概形を描きなさい。複雑な関数のグラフは，各パーツに分解して考えるとよい。

(1) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
($y = \dfrac{e^x}{2}$ と $y = \dfrac{e^{-x}}{2}$ のグラフを足す)

(2) $y = e^{-x} \sin x$
($y = \sin x$ と $y = e^{-x}$ のグラフをかける)

5.3　関数の平行移動と拡大

問 1 $y = \sin x$ を以下のように変換した式とグラフをそれぞれ書きなさい(答 47 。

(1) x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動する。

(2) x 軸方向に 2 倍に拡大する。

(3) y 軸方向に 1 平行移動する。

(4) y 軸方向に 2 倍に拡大する。

(5) x 軸方向に 2 倍に拡大してから，x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動する。

(6) x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動してから，x 軸方向に 2 倍に拡大する。

問 2 以下の問に答えなさい(答 48 。

(1) 関数 $y = f(x)$ を x 軸の正の方向に a だけ平行移動した関数の方程式を書きなさい。

(2) 関数 $y = f(x)$ を x 軸方向に c 倍に拡大した関数の方程式を書きなさい。

(3) 関数 $y = f(x)$ を y 軸の正の方向に b だけ平行移動した関数の方程式を書きなさい。

(4) 関数 $y = f(x)$ を y 軸方向に d 倍に拡大した関数の方程式を書きなさい。

問 3 以下の関数を表す式と概形を書きなさい。

(答 47 (1) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$　(2) $y = \sin\frac{x}{2}$　(3) $y - 1 = \sin x$　(4) $\frac{y}{2} = \sin x$　(5) $y = \sin\frac{x - \frac{\pi}{2}}{2}$　(6) $y = \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{x-\pi}{2}$

(答 48 (1) $y = f(x - a)$　(2) $y = f(x/c)$　(3) $y - b = f(x)$　(4) $y/d = f(x)$

(1) 関数 $y = x^2 - 2x + 1$ を x 軸方向に -1 だけ平行移動した関数

(2) $x^2 + 4y^2 = 1$ で表される図形を y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍した図形

問 4 以下の関数の概形を書きなさい。

(1) $y = \dfrac{e^{x-1} - e^{-x+1}}{e^{x-1} + e^{-x+1}} + 2$
(5.2 節の式 (2) をどのように移動したグラフか考える)

(2) $y = \dfrac{1}{1 + e^{-\frac{x-h}{T}}}$,　$(h, T$: 定数)
$T(>0)$ の大きさによりグラフの形がどのように変わるかも図示すること。

5.4　逆関数

関数 $y = f(x)$ を変形して，出力 y に対応する x を求めることができる形に書き直したものを

$$x = f^{-1}(y)$$

と書く。さらに記号 x, y を入れかえて作った関数

$$y = f^{-1}(x)$$

を関数 $f(x)$ の**逆関数**と呼ぶ。

解説 $y = \sin x$, $y = \cos x$ の逆関数はそれぞれ $y = \sin^{-1} x$, $y = \cos^{-1} x$，もしくは $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ と書く。

問 1 以下の値を求めなさい[答 50]。

(1) $\sin^{-1} 1$ (値域を $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ [注 19]とする)

(2) $\sin^{-1} \frac{1}{2}$　(値域を $(-\infty, \infty)$ [注 20]とする)

(3) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$　(値域を $(-\infty, \infty)$ とする)

問 2 以下の逆関数を図示しなさい。

(1) $y = \sin x$　$(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$

(2) $y = \cos x$　$(0 \le x \le \pi)$

問 3 任意の x に対して $\cos^{-1} x = \sin^{-1} x + a$, ($a$: 定数) が成り立つ a の値を求めなさい。ただし, $0 \le a < 2\pi$ とする。

問 4 以下の逆関数を求めよ。また，もとのグラフとその逆関数を同じ座標軸上に描きなさい[答 50]。

(1) $y = x^2 - 2x$　$(x \ge 1)$

(2) $y = e^x$

(3) $y = \ln(x+1)$　$(x > -1)$

(4) $y = 2\sin 3x$

(5) $y = 2f(3x)$

5.5　いろいろな図形表現

5.5.1　パラメータ関数のグラフ

問 各式があらわすグラフを 2 次元 xy 平面に描きなさい。

(1) $\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 2 \end{cases}$　(t は任意の実数)

(2) $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta - 2 \end{cases}$　(θは任意の実数)

5.5.2　2 次元極座標による図形表現

問 2 次元 (r, θ) 極座標系で以下のように表される図形の概形を書きなさい。

(1) $r = 1$

(2) $r = \theta$　$(\theta \ge 0)$

(3) $r = \cos\theta$　$(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$

[答 49] (1) $\pi/2$ (2) $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ (n は整数) (3) $\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ (n は整数)

[注 19] ある値 x が $[a, b]$ の値であるとは，$a \le x \le b$ を意味する

[注 20] ある値 x が (a, b) の値であるとは，$a < x < b$ を意味する

[答 50] (1) $y = \sqrt{x+1} + 1$ (2) $y = \ln x$ (3) $y = e^x - 1$ (4) $y = \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{x}{2}$ (5) $y = \frac{1}{3}f^{-1}(\frac{x}{2})$

5.5.3　３次元極座標による図形表現

問　3 次元 (r, θ, ϕ) 極座標系で以下のように表される図形の概形を書きなさい。

(1)　$r = 1$

(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

(3)　$\begin{cases} r = \phi \quad (r > 0) \\ \theta = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

5.5.4　複素平面におけるグラフ

以下の複素数 $z = x + iy$ が表すグラフを複素平面上に描きなさい。

(1)　$\mathrm{Re}(z) = 1$

(2)　$z = 1$

(3)　$z = i$

(4)　$|z| = 1$

(5)　$|2z - 1| = 1$

(6)　$|z - 2i| = 2$

(7)　$z = (1 + i)t$　(t は任意の実数)

A　対数表

n	$\log_2 n$	n	$\log_2 n$	n	$\log_2 n$	n	$\log_2 n$
1	0	51	5.67243	100	6.64386	151	7.2384
2	1	52	5.70044	101	6.65821	152	7.24793
3	1.58496	53	5.72792	102	6.67243	153	7.25739
4	2	54	5.75489	103	6.6865	154	7.26679
5	2.32193	55	5.78136	104	6.70044	155	7.27612
6	2.58496	56	5.80735	105	6.71425	156	7.2854
7	2.80735	57	5.83289	106	6.72792	157	7.29462
8	3	58	5.85798	107	6.74147	158	7.30378
9	3.16993	59	5.88264	108	6.75489	159	7.31288
10	3.32193	60	5.90689	109	6.76818	160	7.32193
11	3.45943	61	5.93074	110	6.78136	161	7.33092
12	3.58496	62	5.9542	111	6.79442	162	7.33985
13	3.70044	63	5.97728	112	6.80735	163	7.34873
14	3.80735	64	6	113	6.82018	164	7.35755
15	3.90689	65	6.02237	114	6.83289	165	7.36632
16	4	66	6.04439	115	6.84549	166	7.37504
17	4.08746	67	6.06609	116	6.85798	167	7.3837
18	4.16993	68	6.08746	117	6.87036	168	7.39232
19	4.24793	69	6.10852	118	6.88264	169	7.40088
20	4.32193	70	6.12928	119	6.89482	170	7.40939
21	4.39232	71	6.14975	120	6.90689	171	7.41785
22	4.45943	72	6.16993	121	6.91886	172	7.42626
23	4.52356	73	6.18982	122	6.93074	173	7.43463
24	4.58496	74	6.20945	123	6.94251	174	7.44294
25	4.64386	75	6.22882	124	6.9542	175	7.45121
26	4.70044	76	6.24793	125	6.96578	176	7.45943
27	4.75489	77	6.26679	126	6.97728	177	7.46761
28	4.80735	78	6.2854	127	6.98868	178	7.47573
29	4.85798	79	6.30378	128	7	179	7.48382
30	4.90689	80	6.32193	129	7.01123	180	7.49185
31	4.9542	81	6.33985	130	7.02237	181	7.49985
32	5	82	6.35755	131	7.03342	182	7.50779
33	5.04439	83	6.37504	132	7.04439	183	7.5157
34	5.08746	84	6.39232	133	7.05528	184	7.52356
35	5.12928	85	6.40939	134	7.06609	185	7.53138
36	5.16993	86	6.42626	135	7.07682	186	7.53916
37	5.20945	87	6.44294	136	7.08746	187	7.54689
38	5.24793	88	6.45943	137	7.09803	188	7.55459
39	5.2854	89	6.47573	138	7.10852	189	7.56224
40	5.32193	90	6.49185	139	7.11894	190	7.56986
41	5.35755	91	6.50779	140	7.12928	191	7.57743
42	5.39232	92	6.52356	141	7.13955	192	7.58496
43	5.42626	93	6.53916	142	7.14975	193	7.59246
44	5.45943	94	6.55459	143	7.15987	194	7.59991
45	5.49185	95	6.56986	144	7.16993	195	7.60733
46	5.52356	96	6.58496	145	7.17991	196	7.61471
47	5.55459	97	6.59991	146	7.18982	197	7.62205
48	5.58496	98	6.61471	147	7.19967	198	7.62936
49	5.61471	99	6.62936	148	7.20945	199	7.63662
50	5.64386	100	6.64386	149	7.21917	200	7.64386

B このドキュメントの著作権について

間違い等の連絡や加筆修正要望等の連絡は大歓迎です。

索 引

ま

や

ら