



Física Computacional

2022/2023

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

Trabalho Prático 2

Métodos implícitos e semi-implícitos para ODE
Oscilador harmónico simples e oscilador não harmónico
Órbita de Mercúrio

Problema 2.1: Oscilador harmónico simples

Considere um sistema massa-mola, semelhante ao apresentado nas aulas teóricas.

Para o estudo numérico deste problema, comece por:

- Escrever a equação diferencial que resulta da aplicação da segunda lei de Newton ao problema;
- Escrever o algoritmo indicado;
- Aplicar o algoritmo à equação do movimento. (Discretizar a equação)

- a) Encontre a solução numérica do movimento harmónico simples, recorrendo ao método de Euler para encontrar $x(t)$ e $v_x(t)$, sabendo que $x(0) = 1$ m, $v_x(0) = 0$ m/s, $K = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

Compare com a solução analítica. Represente graficamente x e v_x em função do tempo e também v_x em função de x . Para verificar a estabilidade das soluções, calcule a energia mecânica total.

- b) Os resultados da alínea anterior mostram que o método de Euler, como sabia, não é apropriado para estudar um sistema oscilatório. Repita a alínea usando o método de Euler–Cromer.

- c) Repita a alínea a) usando o método de Euler implícito. Quais são as alterações observadas relativamente aos resultados obtidos nos métodos anteriores?
- d) Repita mais uma vez a alínea a), usando agora o método dos trapézios ou de Crank–Nicolson. Comente os resultados.
- e) Usando o método de Euler–Cromer ou o de Crank–Nicolson, determine a amplitude e o período do movimento. Compare com os valores da solução analítica.
- Sugestão:* faça uma lista dos pontos (t_k, x_k) tais que $x_{k-1} \leq x_k \geq x_{k+1}$ (condição de máximo local). Use a função **lagr.m** para obter, com maior precisão, uma lista de pontos (t, x) que correspondem aos máximos locais de x .

Note que: a função **lagr.m** usa a interpolação de Lagrange para calcular o par de valores (t_{max}, x_{max}) , em que x_{max} é o máximo local, que ocorre no instante t_{max} , à custa dos dois pontos vizinhos mais próximos, (t_{k-1}, x_{k-1}) e (t_{k+1}, x_{k+1}) . O valor interpolado x_{max} , deverá ser mais preciso que x_k . Para usar a função nele definida, escreva,

aux=lagr(t(ind-1:ind+1),x(ind-1:ind+1));

O valor de x_{max} interpolado é dado por **aux(2)** e o valor correspondente de t_{max} por **aux(1)**.

Com esta lista, determine valores médios para o período e amplitude.

Problema 2.2 Órbita de Mercúrio

O método de Euler–Cromer pode ser aplicado ao estudo numérico do movimento de corpos celestes. Neste problema, vamos calcular a órbita do planeta Mercúrio. A primeira aproximação que vamos fazer, dada a muito grande diferença entre as massas de Mercúrio, m_M , e do Sol, m_S , é considerar que o Sol se encontra fixo na origem das coordenadas. Assim, apenas temos que calcular a força que atua sobre o planeta:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_S m_M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

onde G é a constante gravitacional, r é o módulo do vetor posição \mathbf{r} do planeta e $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ é o versor correspondente. Usando o plano xy como o plano da trajetória, a força pode ser escrita como

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_S m_M}{r^3} (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})$$

Para realizar cálculos numéricos com estas grandezas é mais conveniente utilizar unidades astronômicas, de modo a que os valores dos períodos e das distâncias não tenham ordens de grandeza muito afastadas da unidade. A unidade do tempo é o ano (da Terra) e a unidade astronômica de comprimento, AU, é a distância média entre a Terra e o Sol. Nestas unidades, o produto Gm_S é dado simplesmente por $4\pi^2$. Sempre que precisar de obter a coordenada polar angular θ referente a uma posição (x, y) , sugere-se que use `mod(atan2(y,x),2*pi)`: assim irá obter um ângulo entre 0 e 2π .

- a) Use o método de Euler–Cromer para representar graficamente uma translação completa de Mercúrio em torno do Sol.

Não avance para as alíneas seguintes sem confirmar que o seu resultado está correto: deve obter uma elipse com os dois eixos paralelos aos eixos dos xx e dos yy . Sugere-se um $h = 0.0001$ ano.

Note-se que se queremos reproduzir corretamente a trajetória, temos que utilizar condições iniciais exatas. Vamos considerar que em $t = 0$ o planeta se encontra no ponto mais longe do Sol, o afélio. A velocidade inicial tem que ter o valor apropriado para que o planeta descreva a elipse desejada. Use $x(t = 0) = 0.47$ AU e $v_y(t = 0) = 8.2$ AU/ano.

Para que a trajetória não apareça distorcida, é importante desenhar a figura com as proporções certas. Pode fazê-lo usando, por exemplo, os seguintes comandos do MATLAB:

```
axis([-0.5 0.5 -0.5 0.5])
set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1])
```

- b) Calcule o período da órbita. Compare com o valor observado.
- c) Num intervalo de tempo muito menor que o período, a área varrida pela linha que une o Sol ao planeta é dada aproximadamente por $r^2 \Delta\theta/2$.

A segunda lei de Kepler afirma que essa área é a mesma para dois intervalos de tempo iguais. Confirme-o, apenas para a primeira metade da órbita, representando graficamente, em função de t , a área varrida em cada intervalo de tempo h .

Problema 2.3 Oscilador quártico

Considere um oscilador quártico de massa $m = 1$ kg, $K = 1$ N/m e energia potencial

$$V(x) = \frac{1}{2} K x^2 (1 + \alpha x^2)$$

A força restauradora é

$$F_x(x) = -K x (1 + 2\alpha x^2)$$

Ou de outra forma,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -K x (1 + 2\alpha x^2)$$

Esta equação de 2ª ordem é equivalente ao seguinte sistema de duas equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = -\frac{K}{m}(x + 2\alpha x^3) \end{cases}$$

a) Use o método de Euler–Cromer e faça os gráficos de x e v_x em função do tempo e também v_x em função de x , quando $\alpha = -0.1 \text{ m}^{-2}$, $x(0) = 1 \text{ m}$ e $v_x(0) = 1 \text{ m/s}$.

Obtenha a amplitude e o período da oscilação.

b) Como varia o período com a amplitude? Faça a amplitude variar de 0.1 a 2 m e represente graficamente os resultados.