Aula 7

Introdução

Transformadas de Fourier

Transformada de Fourier discreta

Frequência de Nyquist

Aliasing

Teorema da amostragem

Equação paraxial (Exercício 6.2)

Equação não linear de Schrödinger (Exercício 6.3)

17-04-2024

Transformadas de Fourier

Há várias definições para as transformadas de Fourier. Em FC considera-se a definição que melhor se aproxima da transformada de Fourier discreta usada pelo MATLAB.

Dada uma função f (t), a sua **Transformada de Fourier (TF)** pode ser definida como:

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt}$$

A função f(t) pode ser recuperada pela **Transformada de Fourier Inversa:**

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega}$$

Transformadas de Fourier

Em Engenharia, as funções são muitas vezes representadas por conjuntos de valores discretos. (Resultados experimentais).

Há necessidade de determinar a transformada de Fourier de forma numérica quando:

- Não se consegue calcular o integral de forma analítica.
- A função f(t) não está definida por uma expressão analítica, mas por uma tabela de dados, como acontece em aplicações de processamento de sinal, onde a TF, é uma ferramenta fundamental.

- A função f(t) está definida de forma discreta $f(j) = f(t_j)$ em N pontos equidistantes,

$$\boxed{t_j = (j-1)\,\Delta t} \qquad \text{com} \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

- A transformada de Fourier discreta $F(k) = F(\omega_k)$ está definida de forma discreta em N pontos equidistantes,

$$\boxed{\omega_k = (k-1)\,\Delta\omega} \qquad \text{com} \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

Transformadas de Fourier

Relação entre Δω e o intervalo total NΔt

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t}}$$

Desta forma as frequências discretas são 0 e as que correspondem a 1, 2, …(N-1) ciclos no intervalo total NΔt

De notar que,

$$t_j\,.\,\omega_k = [(j-1)\,\Delta t]\cdot\left[(k-1)\frac{2\pi}{N\Delta t}\right] = \frac{2\pi(j-1)(k-1)}{N}$$

Transformada de Fourier discreta

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \approx \sum_{j=1}^{N} f(j)\ e^{-2\pi i f_k t_j}\ \Delta t = \Delta t \sum_{j=1}^{N} f(j)\ e^{-2\pi i\,(j-1)(k-1)/N}$$

O somatório final designa-se por tranformada de Fourier discreta, $F(k)$.

A relação entre a transformada de Fourier discreta de um conjunto de valores, $F(k)$,e a sua transformada de Fourier contínua, $F(\omega)$, considerando que os mesmos são amostras de uma função contínua amostrada num intervalo de tempo Δt, é dada por,

$$F(\omega) = \Delta t \cdot F(k)$$

Do mesmo modo, define-se a transformada inversa discreta de Fourier, como,

$$f(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F(k)\ e^{2\pi i\,(j-1)(k-1)/N}$$

Notar que:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N} F(k)\ e^{2\pi i f_k t_j}\ \Delta\omega = \frac{1}{N\Delta t}\sum_{j=1}^{N} F(k)\ e^{2\pi i\,(j-1)(k-1)/N}$$

Pelo que,

$$f(t) = \frac{1}{\Delta t}\cdot\ f(j)$$

Definições das transformadas de Fourier discretas

$Transformada\ discreta$ $$F(k) = \sum_{j=1}^{N} f(j)\ e^{-2\pi i\,(j-1)(k-1)/N}$$

$Transformada\ \ inversa\ \ discreta$ $$f(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(k)\ e^{2\pi i\,(j-1)(k-1)/N}$$

Estas transformadas discretas podem ser obtidas em MATLAB com as funções intrínsecas **`fft`** e **`ifft`**, respectivamente.

Transformada de Fourier discreta

Seguidamente apresentar-se-ão algumas **propriedades da transformada discreta**, nomeadamente:

- A transformada discreta $F(k)$ é periódica, ie., $F(k+N) = F(k)$

- Assim como a transformada de Fourier contínua, a transformada discreta de uma função real é uma função complexa com parte real par e parte imaginária ímpar.

- Se a função for real e par, a transformada de Fourier é real e par.

- Embora em geral $F(k)$ seja complexa, habitualmente tem interesse calcular a **densidade espectral** que é dada por $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k})|^2$.

17-04-2024

OBSERVAÇÃO: O MATLAB permite obter a transformada de Fourier discreta, $\boldsymbol{F(k)}$, de uma função contínua cuja transformada de Fourier é $\boldsymbol{F(\omega)}$. Em rigor, a transformada de Fourier obtém--se a partir do resultado $\boldsymbol{F(k)}$, dado pelo MATLAB, que necessita de ser multiplicado por Δt, obtendo-se $\boldsymbol{\Delta t \cdot F(k)}$, ou seja $\boldsymbol{F(\omega)}$.

Apresentação da transformada de Fourier discreta

- A transformada discreta que temos estado a estudar assume N frequências discretas:

$$\boxed{0, \Delta\omega, 2\Delta\omega, \quad \ldots \quad (N-1)\Delta\omega}$$

- No entanto, especialmente para funções que têm frequências positivas e negativas, é conveniente mostrar a transformada entre as frequências*,

$$\boxed{-\frac{N}{2}\Delta\omega \qquad e \qquad \left(\frac{N}{2}-1\right)\Delta\omega}$$

**Estes limites são válidos para N par. Para N ímpar é necessário adicionar $\Delta\omega/2$ a ambos.*

17-04-2024

Apresentação da transformada de Fourier discreta

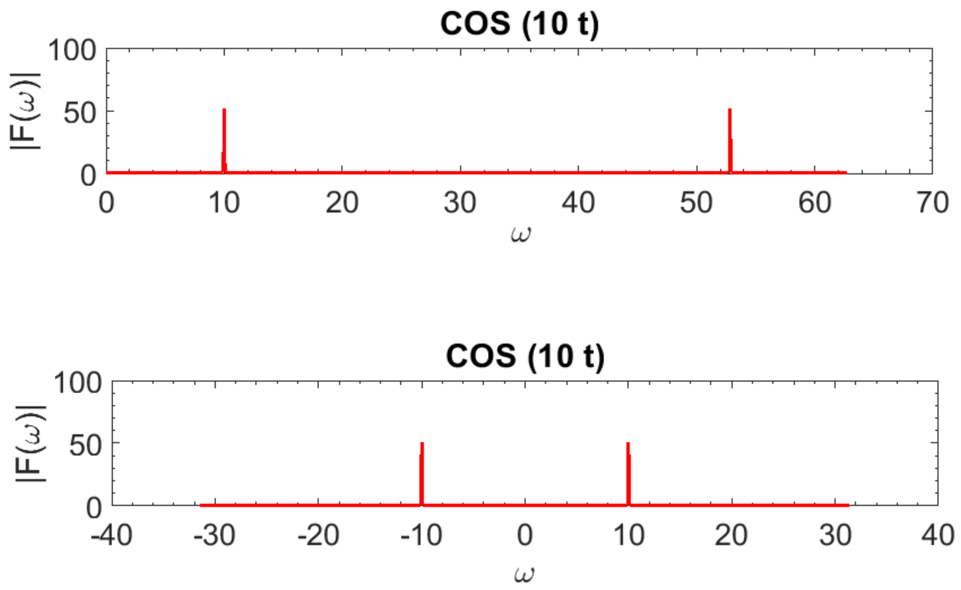


Figura: Duas representações da transformada de Fourier de cos(10t)

A transformada de Fourier, assim como a densidade espetral de funções reais, que são pares, apresentam dois picos situados simetricamente, relativamente a $\omega = 0$, para cada frequência que contenham. (De notar que $\boldsymbol{\cos(\omega t) = \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)/2}$ e $\boldsymbol{\mathrm{sen}(\omega t) = \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)/2i}$).

Frequência de Nyquist

● À frequência máxima, $\boldsymbol{\omega_{max} = N\,\Delta\omega/2 = \pi/\Delta t}$ ou,

$$\boxed{\mathbf{f_{max} = 1/(2\Delta t)}}$$

dá-se o nome de **frequência de Nyquist** e é a maior frequência que se obtém com a amostragem de período Δt.

● Suponha que a função real f(t) contém uma frequência ω_a superior a $\omega_{max} = \pi/\Delta t$.

É possível provar que essa frequência irá aparecer erradamente na posição $2\omega_{max} - \omega_a$.

$$\boxed{Se\ \boldsymbol{\omega_a > \omega_{max}} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\omega_a}\ \text{ surge na posição }\ \boldsymbol{2\omega_{max} - \omega_a}}$$

17-04-2024

Frequência de Nyquist

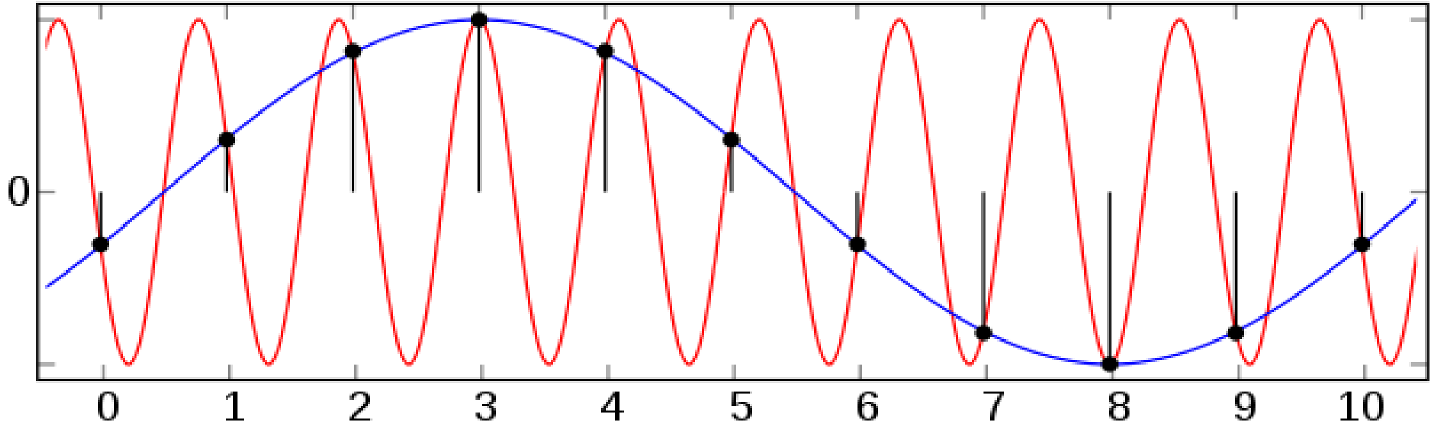


Figura: Duas sinusoides com frequências diferentes, 0.1 e 0.9, que se adequam à mesma amostragem com frequência igual a 1 (a frequência de Nyquist é igual a 0.5).

À razão $^{1}/_{\Delta t}$ dá-se o nome de **frequência de amostragem** ou **taxa de amostragem.**

Por exemplo, se Δt for medido em segundos, a taxa de amostragem dá o nº de amostras registadas por segundo.

‘Aliasing’ ou Falseamento

● Para que este efeito, designado por **‘aliasing’ ou falseamento**, não aconteça, é necessário aumentar ω_{max} . Tal consegue-se diminuindo o Δt da amostragem da função f(t).

● Aliás, é fácil entender que se a função for composta por frequências elevadas, é necessário um período de amostragem Δt pequeno.

Teorema da Amostragem

O período da amostragem deve ser inferior a metade do menor período presente na função, ou seja,

$$\boxed{\Delta t < \frac{1}{2\mathrm{f}_{\mathrm{highest}}} = \frac{T_{\mathrm{lowest}}}{2}}$$

Na prática, devemos ter uma ideia da maior frequência presente na função e escolher um Δt adequado.

Transformada de Fourier da DERIVADA

Seja F(ω) a TF de $f(t)$, então qual a TF de $h(t) = f'(t)$?

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

Integrando por partes esta equação, obtém-se,

$$f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \ i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \quad = i\omega\, F(\omega)$$

Se $f(t)$ for tal que se anule em $\pm\infty$.

De igual forma poderíamos obter para as derivadas de ordem superior:

Seja $g(t) = \ f^{(n)}(t)$, então,

$$G(\omega) = \ (i\omega)^n\, F(\omega)$$

17-04-2024

Como calcular derivadas com a TF em Matlab?

Vamos considerar uma função gaussiana, $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ e a sua 2ª derivada, $g''(x) = (x^2-1)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$.

Em Matlab, começamos por definir o vetor x. Para tal definimos o nº de pontos (potência de base 2, N=2^n), e o incremento dx. A partir destes valores definimos o incremento das frequências angulares, e construímos o vetor de frequências. De acordo com o resultado anterior, $G(\omega) = (i\omega)^2 F(\omega)$. Aplicado TF^{-1} a $G(\omega)$ obtém-se o resultado pretendido.

Método 1) Vetor de frequências centrado em zero, $\longrightarrow$ requerido o uso das funções **`fftshift, fft, ifftshift e ifft`**

```
dx=0.05; % = Delta x N=1024;  x=-(N-1)/2*dx:dx:(N-1)/2*dx;   dw=2*pi/(N*dx); % = Delta omega
%vetor de frequências centrado em 0
nyquist=pi/dw;
wmax=(N/2-1)*dw;
wmin=(-N/2)*dw;
w=wmin:dw:wmax;
```

```
%Função Gaussiana                %  2ª Derivada da Função Gaussiana

q(1,:) = exp(-x.^2./2);          qdt(1,:)=(x.^2-1).*exp(-x.^2./2);
```

```
%Solução numérica
w2=(1i*w).^2;
qd= ifft(ifftshift(w2.*fftshift(fft(q))));
```

compare qdt com qd!

OBS: Calcula-se a TF da função. Para multiplicar a transformada por $(i\omega)^2$ é necessário aplicar previamente o **`fftshift`**. Depois de efetuada a multiplicação é necessário aplicar o **`ifftshift`**, e só depois se pode aplicar a transformada inversa **`ifft`**.

17-04-2024

Método 2) Vetor de frequências com uma estrutura adequada à FFT, ⟶ só é requerido o uso das funções **`fft`**, e **`ifft`** (não é necessário usar as funções fftshift e ifftshift)

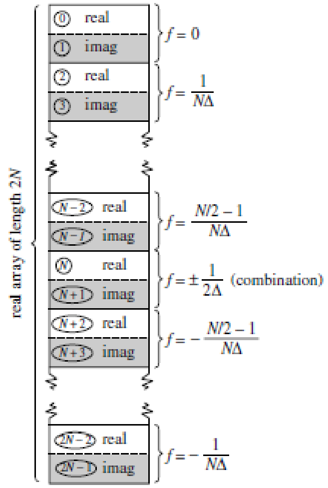
```
%É necessário construir um vetor de frequências com uma estrutura diferente,mas com as mesmas frequências
% Novo vetor de frequências    %dw=2*pi/(N*dx);
% vmin=(-N/2);
% vmax=(N/2-1);
% w1=0:vmax;
% w2=vmin:-1;
% w=[w1 w2]*dw;

%alternativa
w2 = [0:N/2-1 -N/2:-1]*dw;

%Solução numérica
w2s=(1i*w2).^2;
qd2= ifft(w2s.*fft(q2));
```

OBS: Deste modo poupam-se duas operações. O que pode fazer a diferença se for necessário calcular muitas vezes a derivada. Pode medir o tempo de cáculo em cada caso, com a instrução `tic toc`.

NOTA: A existência de um algorítmo que permitia calcular transformadas de Fourier mais rapidamente, a **FFT** (**fast Fourier Transform**), tornou-se conhecida após o trabalho de J.W.Cooley e J. W. Tukey, em meados dos anos 60. O vetor de frequências.(f linear), requerido para os cáculos está representado na figura. Pode ver-se a semelhança da estrutura, (bastante), com o vetor de frequências (f. angular) requerido em Matlab. Para saber mais, consulte '**NUMERICAL RECIPES, The Art of Scientific Computing**', de Press, Teukolsky, Vetterling and Flannery.



(b)

17-04-2024

Este resultado tem muitas aplicações práticas, como poderá verificar.

Recordando …

Classificação de PDEs de 2ª ordem de coeficientes constantes

Equações diferenciais às derivadas parciais, também conhecidas pela sigla PDE (partial differential equations) são equações diferenciais para uma função de várias variáveis.

As PDEs de segunda ordem (ordem da derivada de maior ordem presente na equação) de coeficientes constantes são do tipo,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=g(x,y)$$

E podem classificar-se da forma:

- Equações **hiperbólicas** se $B^2-4AC>0$
- Equações **parabólicas** se $B^2-4AC=0$
- Equações **elípticas** se $B^2-4AC<0$

17-04-2024

EXEMPLOS: PDEs de 2ª ordem

Equações elípticas descrevem situações de equilíbrio e apenas têm condições fronteira.

As equações parabólicas e hiperbólicas descrevem processos que evoluem no tempo e têm condições iniciais e de fronteira.

- A **equação de onda** é uma equação **hiperbólica**

$$\boxed{\nabla^2 q - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0}$$

- A **equação de condução do calor** é uma equação **parabólica**

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\nabla^2 T}$$

- A **equação de Laplace** é uma equação **elíptica**

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

Equação Paraxial

Considere a equação paraxial numa forma adimensional:

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

que descreve a propagação paraxial de um feixe de luz com uma envolvente $q(z, x)$ num meio homogéneo, ao longo da direção z, com difração na direção x.

Esta equação é uma PDE de 2ª ordem parabólica:

- q é uma função de duas variáveis independentes.
- a equação contém derivadas relativamente às duas variáveis, x e z.

Esta equação é uma PDE que, no espaço de Fourier, se transforma numa equação diferencial ordinária.

Equação Paraxial no espaço de Fourier

Aplicando a transformada de Fourier segundo a variável x a todos os termos da equação, obtém-se:

$$i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial q}{\partial z}e^{-ikx}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}e^{-ikx}dx \qquad = 0$$

As frequências são, neste caso, frequências espaciais usualmente designadas pela letra k. Considera-se a notação $\tilde{q}$ para representar a transformada de Fourier de q. Pode escrever-se:

$$i\frac{\partial\tilde{q}}{\partial z}-\frac{k^2}{2}\tilde{q}=0, \qquad \tilde{q}=TF\,(q)$$

Que é uma equação diferencial ordinária de variáveis separáveis, cuja solução é,

$$\tilde{q}\,(k,z)=\tilde{q}\,(k,0)\ \exp\left(-\frac{i}{2}\,k^2 z\right)$$

Na aula prática irá verificar a evolução de alguns feixes com envolventes diferentes, resultando sempre em alargamento transversal devido à difração.

Equação não linear de Schrödinger (NLS)

Se a propagação do feixe se der de novo num meio homogéneo, mas no qual o índice de refração varia com a intensidade do feixe, isto é, $n = n_1 + n_2 I$, a equação normalizada que descreve a propagação é:

$$\mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{q}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{q}}{\partial \mathrm{x}^2} + |q|^2 \mathrm{q} = 0$$

esta equação pode escrever-se na forma,

$$\frac{\partial \mathrm{q}}{\partial \mathrm{z}} = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{q}}{\partial \mathrm{x}^2} + |q|^2 q\right)$$

E pode ser integrada ao longo da direção z. Na aula prática vai integrar esta equação, usando um método pseudo-espectral Runge-Kutta de ordem 2, com uma tabela de Butcher semelhante à que usou no trabalho 3. O método está descrito no enunciado da série.

No caso presente a equação é uma equação às derivadas parciais. Em muitos casos, os métodos usados para a integração numérica de ODEs podem ser adaptados, e usados na integração numérica de PDEs.