FÍSICA COMPUTACIONAL 2022/2023

2º Teste Prático de Avaliação Discreta

10 de Maio de 2023 **Duração**: 2 horas

Universidade de Aveiro **Departamento de Física**

Siga o seguinte procedimento:

• Crie no *desktop* uma pasta com nome dado pelo seu nome, número mecanográfico seguido da sua turma prática (**ASantos888888_P8**, por exemplo).

Guarde os seus *scripts* nessa pasta, **um por alínea**.

• Quando tiver terminado, chame o professor vigilante para recolher o teste.

Em nenhum momento pode fazer login com outra conta.

Não apague o seu teste do *desktop*, mesmo depois de o professor o ter recolhido.

1) (10 val.)

Considere um oscilador não-linear, (o oscilador de Duffing), que quando deslocado do equilíbrio sofre a ação de uma força restauradora, e está também sujeito a amortecimento e a forçamento. A sua equação do movimento pode escrever-se como:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(y^3 - y) - \alpha\,\frac{dy}{dt} + \Gamma_0 \cos(\omega t)$$

α, Γ_0 e ω, representam o coeficiente de amortecimento, a amplitude e a frequência do forçamento, respectivamente.

Para os cálculos, considere: Γ_0 = 0.2, ω=1.0, e as seguintes condições iniciais, $y(0) = 0.0$, $y'(0)= 0.2$. Considere ainda um tempo de integração, t_f= *100,* com um passo h = 0.01.

a) (1valor) Escreva a equação diferencial de 2ª ordem, como um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem.

b) (6 valores) Usando o **método de 'shooting'** , ajuste o valor de α (~ 0.4), para que a média do valor mínimo da velocidade, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, seja igual a -0.2. A sugestão para a tolerância é de 10^{-4}.

Para a integração numérica da equação use o método de **Euler-Cromer.**

Use a rotina **'lagr.m'**, em conjunto com uma condição de mínimo, para encontrar a média do valor mínimo da velocidade. Em alternativa pode usar a função ***min*** do Matlab, (*sem usar a rotina lagr.m*) (menos 1.5 valor).

Note que:

*·pode ser necessário usar a instrução **'clear'** em cada ciclo, para encontar os valores das grandezas, para cada valor de α;*

*·a routina **'lagr.m'** só aceita valores positivos. Se o valor da grandeza a interpolar for negativo, deve multiplicar o seu valor por (-1), à entrada e à saida da routina, no programa principal.*

***Considere apenas o regime estacionário.** (Para tal pode ser necessário desprezar alguns períodos).*

Represente: y em função de t, $\frac{dy}{dt}$ em função de t, e $\frac{dy}{dt}$ em função de y. Identifique os eixos.

c) (3 valores)

Faça variar a frequência de forçamento, ω, entre 1.0 e 1.6, com um incremento dω = 0.1, e encontre os respetivos valores de α, para os quais a média do valor mínimo da velocidade, seja igual a -0.2. Modifique o código anterior. É obrigatório o uso de um ciclo. (*Sugestão: comece por considerar apenas 2 valores para a frequência*).

Represente *no mesmo gráfico,* as trajetórias no espaço de fases ($\frac{dy}{dt}$ em função de y) , mas apenas no regime estaciónario. Faça outro gráfico do período de forçamento em função de α.

Os resultados estão de acordo com o esperado? Comente os resultados na sua folha de teste.

***

2. (10 valores)

Considere o fluxo de calor através de uma placa porosa, de espessura x, na presença da difusão e da convecção. A evolução da temperatura ao longo do tempo, em toda a espessura da placa, é dada pela equação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\beta \frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Onde **T** é a temperatura, β é um coeficiente de difusão, ε é um parametro relacionado com a velocidade de um fluido que se move através da placa para a direita, x a espessura da placa e t o tempo. As duas faces da placa estão a temperaturas diferentes, e estas evoluem com o tempo do seguinte modo,

$$T(0,t) = \exp\left(\frac{3}{4}t\right) \quad e \quad T(L,t) = \exp\left(\frac{-2+3t}{4}\right).$$

A distribuição da temperatura inicial ao longo da espessura x é dada por:

$$T(x,0) = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \qquad para\ 0 \le x \le L$$

Pretende-se obter a solução numérica $T(x,t)$, ao longo da espessura da placa, x, e ao longo do tempo, t. Considere **L= 1**, $\beta = 1$, e $\varepsilon = 1$.

A *solução analítica* desta equação é conhecida. Assim, para as mesmas condições iniciais e fronteira, esta é dada pela seguinte expressão:

$$T(x,t) = \exp\left(\frac{-2x+3t}{4}\right)$$

a) (2 valores)

Discretize a equação pelo método de Euler, tal como fez para a equação do calor. (A derivada temporal é aproximada por diferenças avançadas ou progressivas, as derivadas espaciais são aproximadas por diferenças centradas). Mostre que se obtém a seguinte equação:

$$T_{i,n+1} = (C_2 + C_1)\, T_{i-1,n} + (1 - 2\, C_2)\, T_{i,n} + (C_2 - C_1)\, T_{i+1,n}$$

Com $C_1 = \frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}$ e $C_2 = \varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

b) (4.5 valores)

Obtenha a solução da equação para um tempo de integração $t_{final} = 1$. Considere $\Delta t = 0.001$ e $\Delta x = 0.1$.

Represente:

i) na mesma figura T em função de x, para alguns tempos (por exemplo para T(:,1:100:end));

ii) noutra figura, o perfil final de T em função de x, e o perfil da temperatura dado pela solução analítica, para o mesmo instante;

iii) noutra figura, o valor absoluto da diferença entre o perfil final de T em função de x, e o perfil da temperatura dado pela solução analítica;

Identifique os eixos.
Comente os resultados obtidos, na sua folha de teste.

c) (1.5 valores)
Repita a alínea **a)** para o método de Crank-Nicolson. Mostre que se obtém a seguinte equação:

$$-\frac{1}{2}(C_2 + C_1)T_{i-1,n+1} \quad + \quad (1 + C_2)\,T_{i,n+1} - \frac{1}{2}\,(C_2 - C_1)\;T_{i+1,n+1}$$
$$= \frac{1}{2}(C_2 + C_1)\,T_{i-1,n} \;+\; (1 - C_2)\,T_{i,n} + \frac{1}{2}(C_2 - C_1)\,T_{i+1,n}$$

Escreva a matriz do sistema (A), e o vetor dos termos independentes (b) .

d) (2 valores)
Repita a alínea **b)** para o método de Crank-Nicolson.
Comente os resultados obtidos, e compare-os com os obtidos pelo método de Euler, na sua folha de teste.