Física Computacional

2022/2023

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

Trabalho Prático 6

Transformada de Fourier discreta
e sua aplicação na resolução de equações diferenciais

Problema 6.1: Propriedades da transformada de Fourier discreta

Considere um vetor **t = 0:Δt: (N-1) Δt**, com Δt =0.1, N=2^{10} (1024) , e vários vetores $y(t)$ como indicado em baixo. Para todos eles, calcule a transformada de Fourier $Y\ (\omega)$ usando a rotina **`fft`** do MATLAB.
Use **`fftshift`** para rearranjar a saída da fft de forma que a frequência zero esteja no centro. Escreva um vetor de frequências ω adequado ao seu Δt e faça o gráfico da **densidade espetral**, calculada a partir de $\boldsymbol{(\Delta t\ |Y\ (\omega)|)^2}$, em função de ω.
Note que a multiplicação por Δt não resulta da definição de densidade espetral, mas sim da maneira (incorreta) como o MATLAB calcula a transformada de Fourier discreta.

a) Use $y = \sin(t)$, $y = \sin(10t)$ e $y = \sin(t) + \sin(10t)$ e verifique se os picos da transformada de Fourier estão nas localizações esperadas.
b) Use $y = \sin(10t) + \sin(40t)$ e verifique o efeito de aliasing. Altere o que for necessário para obter um resultado correto.
c) Volte a usar a amostragem definida no início do enunciado do problema, use y =sin(10t) + sin(10.05t) e dê uma explicação para o que observa. Altere o que for necessário para obter um resultado melhor.
d) Use uma função complexa $y = \exp(-i10t) + \exp(i20t)$.

Note que o vetor t inicial tem 1024 elementos e este valor não foi escolhido ao acaso. De acordo com a documentação do MATLAB, o algoritmo usado pelas funções **`fft`** e **`ifft`** (designado *Fast Fourier Transform*) é mais rápido quando o comprimento dos vetores é uma potência de 2.

Problema 6.2: Resolução da equação paraxial

A equação que descreve a propagação de feixes de luz num meio homogéneo dentro da aproximação paraxial tem uma forma adimensional dada por,

$$\mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{q}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{q}}{\partial \mathrm{x}^2} = 0$$

(consulte a FR2).
Esta equação possui uma solução analítica, que se escreve no espaço solução de Fourier como,

$$\tilde{q}(z,k) = \tilde{q}(0,k)\ exp\left(-\frac{i}{2}k^2 z\right).$$

Considere várias formas do feixe em $z = 0$, nomeadamente:
a) Gaussiana do tipo $q(0, x) = \exp(-x^2/2)$.
b) Secante hiperbólica do tipo $q(0, x) = \mathrm{sech}(x)$.

Determine o perfil do feixe em vários valores de z, até $z = 4$. Faça um gráfico da evolução de $|q|^2$, usando, por exemplo, o comando **meshc**.
Em todos os casos, crie um vetor para x e outro para k que correspondam a um par de transformadas discretas.
O vetor k deve ter a estrutura adequada à FFT ,

```
dw = 2*pi/(N*dx)
k = [0:N/2-1 -N/2:-1]*dw;
```

(assim evita-se o **fftshift**) .

Crie $q(z_1 = 0, x)$, determine a sua transformada de Fourier.
Calcule $\tilde{q}(z_2, k)$ usando a equação acima, e determine a sua transformada de Fourier inversa usando a rotina **ifft**.
Pode fazer um ciclo com instruções deste tipo para obter $q(z, x)$ em vários pontos ao longo do intervalo pretendido.

Problema 6.3: **<u>Resolução da equação não linear de Schrödinger</u>**

Se a propagação do feixe se der de novo num meio homogéneo, mas no qual o índice de refração varia com a intensidade do feixe, isto é, $n = n_1 + n_2 I$, a equação adimensional que descreve a propagação é:

$$\mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{q}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{q}}{\partial \mathrm{x}^2} + |q|^2 \mathrm{q} = 0$$

esta equação pode escrever-se na forma,

$$\frac{\partial \mathrm{q}}{\partial \mathrm{z}} = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{q}}{\partial \mathrm{x}^2} + |q|^2 q\right) \quad (**)$$

Neste exercício vai integrar esta equação ao longo da direção z, usando um método pseudoespectral Runge-Kutta de ordem 2, semelhante ao que usou no trabalho 3 (consulte a tabela de Butcher do problema 3.1). Note que a derivada em x é calculada numa direção transversal a z.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

<u>Para tal</u> :

a) Parta de um vetor x, de -20 a 20, com N= 256 pontos (2^N pontos), e considere um feixe inicial do tipo $q(0, x) = \mathrm{sech}(x)$.

b) Crie o vetor $\boldsymbol{k}$ com uma estrutura semelhante ao que criou no problema anterior.

c) Considere dz=0.001.

<u>Repare que em Matlab,:</u>

i) A segunda derivada, $\frac{\partial^2 \mathrm{q}}{\partial \mathrm{x}^2}$ pode ser calculada da seguinte forma, **`ifft(k2.*fft(q))`**, com **`k2 =(1i* k).^2;`**

ii) $|q|^2 =$ **`q.* conj(q)`**

Então, a derivada de **q** em ordem a **z** (**), pode escrever-se como:

```
dq=1i*(0.5*ifft(k2.*fft(q))+ q.*q.*conj(q));
```

A integração de **q** em ordem a **z,** usando o **RK2**, (problema 3.1), pode escrever-se como:

```
for nn = 1:nmax

 dq1 = 1i*(0.5*ifft(k2.*fft(q)) + q.*q.*conj(q));
 v = q + 0.5*dq1*dz;

 dq2 = 1i*(0.5*ifft(k2.*fft(v)) + v.*v.*conj(v));
 q = q + dq2 *dz;


%(só guardamos alguns perfis)

 if mod(nn, round(nmax/250)) == 0
  qx = [qx q];
  zz = [zz nn*dz];
 end

end
```

d) Faça um gráfico da evolução de $|q|_2$ ao longo de z.

Deve observar que este feixe não alarga.
Esta equação modela a propagação paraxial de feixes na presença de difração (que existe sempre) e do efeito de Kerr (índice de refração a variar com a intensidade do feixe). Para algumas intensidades e forma da envolvente igual a uma secante hiperbólica, o feixe não sofre nenhuma alteração da forma ao longo da propagação, porque o efeito não linear compensa de forma exata a difração (dispersão a 1D).