



# Física Computacional

2023/2024

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

## Trabalho Prático 6

Transformada de Fourier discreta  
e sua aplicação na resolução de equações diferenciais

### Problema 6.1: Propriedades da transformada de Fourier discreta

Considere um vetor  $\mathbf{t} = 0:\Delta t:(N-1)\Delta t$ , com  $\Delta t = 0.1$ ,  $N = 2^{10}$  (1024), e vários vetores  $y(t)$  como indicado em baixo. Para todos eles, calcule a transformada de Fourier  $Y(\omega)$  usando a rotina **fft** do MATLAB.

Use **fftshift** para rearranjar a saída da **fft** de forma que a frequência zero esteja no centro. Escreva um vetor de frequências  $\omega$  adequado ao seu  $\Delta t$  e faça o gráfico da **densidade espectral**, calculada a partir de  $(\Delta t |Y(\omega)|)^2$ , em função de  $\omega$ .

Note que a multiplicação por  $\Delta t$  não resulta da definição de densidade espectral, mas sim da maneira (incorreta) como o MATLAB calcula a transformada de Fourier discreta.

- Use  $y = \sin(t)$ ,  $y = \sin(10t)$  e  $y = \sin(t) + \sin(10t)$  e verifique se os picos da transformada de Fourier estão nas localizações esperadas.
- Use  $y = \sin(10t) + \sin(40t)$  e verifique o efeito de aliasing. Altere o que for necessário para obter um resultado correto.
- Volte a usar a amostragem definida no início do enunciado do problema, use  $y = \sin(10t) + \sin(10.05t)$  e dê uma explicação para o que observa. Altere o que for necessário para obter um resultado melhor.
- Use uma função complexa  $y = \exp(-i10t) + \exp(i20t)$ .

Note que o vetor  $\mathbf{t}$  inicial tem 1024 elementos e este valor não foi escolhido ao acaso. De acordo com a documentação do MATLAB, o algoritmo usado pelas funções **fft** e **ifft** (designado *Fast Fourier Transform*) é mais rápido quando o comprimento dos vetores é uma potência de 2.

## Problema 6.2: Resolução da equação paraxial

A equação que descreve a propagação de feixes de luz num meio homogêneo dentro da aproximação paraxial tem uma forma adimensional dada por,

$$i \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

(consulte a FR2).

Esta equação possui uma solução analítica, que se escreve no espaço solução de Fourier como,

$$\tilde{q}(z, k) = \tilde{q}(0, k) \exp\left(-\frac{i}{2} k^2 z\right).$$

Considere várias formas do feixe em  $z = 0$ , nomeadamente:

- a) Gaussiana do tipo  $q(0, x) = \exp(-x^2/2)$ .
- b) Secante hiperbólica do tipo  $q(0, x) = \text{sech}(x)$ .

Determine o perfil do feixe em vários valores de  $z$ , até  $z = 4$ . Faça um gráfico da evolução de  $|q|^2$ , usando, por exemplo, o comando **meshc**.

Em todos os casos, crie um vetor para  $x$  e outro para  $k$  que correspondam a um par de transformadas discretas.

O vetor  $k$  deve ter a estrutura adequada à FFT ,

```
dw = 2*pi/(N*dx)  
k = [0:N/2-1 -N/2:-1]*dw;
```

(assim evita-se o **fftshift**) .

Crie  $q(z_1 = 0, x)$ , determine a sua transformada de Fourier.

Calcule  $\tilde{q}(z_2, k)$  usando a equação acima, e determine a sua transformada de Fourier inversa usando a rotina **ifft**.

Pode fazer um ciclo com instruções deste tipo para obter  $q(z, x)$  em vários pontos ao longo do intervalo pretendido.

### **Problema 6.3: Resolução da equação não linear de Schrödinger**

Se a propagação do feixe se der de novo num meio homogêneo, mas no qual o índice de refração varia com a intensidade do feixe, isto é,  $n = n_1 + n_2 I$ , a equação adimensional que descreve a propagação é:

$$i \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2 q = 0$$

esta equação pode escrever-se na forma,

$$\frac{\partial q}{\partial z} = i \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2 q \right) (**)$$

Neste exercício vai integrar esta equação ao longo da direção  $z$ , usando um método pseudoespectral Runge-Kutta de ordem 2, semelhante ao que usou no trabalho 3 (consulte a tabela de Butcher do problema 3.1). Note que a derivada em  $x$  é calculada numa direção transversal a  $z$ .

0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
<hr/>	
	0 1

Para tal :

- a) Parta de um vetor  $x$ , de -20 a 20, com  $N=256$  pontos ( $2^8$  pontos), e considere um feixe inicial do tipo  $q(0, x) = \text{sech}(x)$ .
- b) Crie o vetor  $k$  com uma estrutura semelhante ao que criou no problema anterior.
- c) Considere  $dz=0.001$ .

Repare que em Matlab,:

i) A segunda derivada,  $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$  pode ser calculada da seguinte forma,  
`ifft(k2.*fft(q))`, com `k2=(1i*k).^2;`

ii)  $|q|^2 = q.*\text{conj}(q)$

Então, a derivada de  $q$  em ordem a  $z$  (\*\*), pode escrever-se como:

`dq=1i*(0.5*ifft(k2.*fft(q))+ q.*q.*conj(q));`

A integração de  $q$  em ordem a  $z$ , usando o **RK2**, (problema 3.1), pode escrever-se como:

```
for nn = 1:nmax

    dq1 = 1i*(0.5*ifft(k2.*fft(q)) + q.*q.*conj(q));
    v = q + 0.5*dq1*dz;

    dq2 = 1i*(0.5*ifft(k2.*fft(v)) + v.*v.*conj(v));
    q = q + dq2 *dz;

%(só guardamos alguns perfis)

if mod(nn, round(nmax/250)) == 0
    qx = [qx q];
    zz = [zz nn*dz];
end

end
```

d) Faça um gráfico da evolução de  $|q|^2$  ao longo de  $z$ .

Deve observar que este feixe não alarga.

Esta equação modela a propagação paraxial de feixes na presença de difração (que existe sempre) e do efeito de Kerr (índice de refração a variar com a intensidade do feixe). Para algumas intensidades e forma da envolvente igual a uma secante hiperbólica, o feixe não sofre nenhuma alteração da forma ao longo da propagação, porque o efeito não linear compensa de forma exata a difração (dispersão a 1D).