



# Física Computacional

## 2023/2024

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

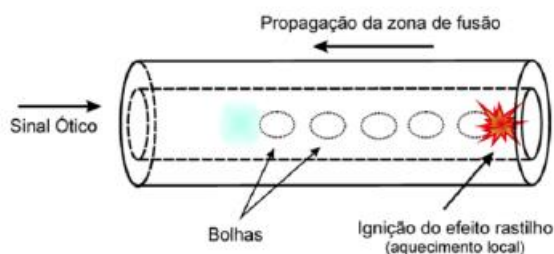
## Folha de Revisões 2

### Problema FR2.1: BVP – Método do Shooting

Considere a forma de uma frente de temperatura – relacionada com um efeito observado em fibras ópticas designado por *efeito de rastilho* – que é solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2T}{dx^2} - v \frac{dT}{dx} + \beta \exp(-1/T) \left( 1 + \frac{dT}{dx} - vT \right) = 0$$

Obtida depois de uma normalização, i.e., as variáveis são adimensionais.  $T$  representa a temperatura,  $x$  a distância ao longo da fibra,  $v$  é a velocidade com que esta frente de temperatura se desloca, e  $\beta$  é um parâmetro relacionado com a absorção de luz que causa este efeito.



Use um método de shooting para determinar a velocidade  $v$  e a forma da frente de temperatura para  $\beta = 18$ . Integre desde  $x = 0$  a  $x = 7$ , use  $h = 0.01$  e as condições iniciais  $T(0) = 10^{-4}$  e  $T'(0) = 10^{-4}v$ . O objetivo é que a derivada em  $x = 7$  seja o mais próximo de

zero possível. Para resolver a equação diferencial use o algoritmo de Euler-Cromer. Considere as primeiras estimativas para  $v$  iguais a 1.9 e 2.0 e a sugestão para a tolerância é de  $10^{-4}$ . Represente graficamente a Temperatura e a sua derivada em função de  $x$ .

### Problema FR2.2: BVP – Método do Shooting

Considere um oscilador não harmónico de massa  $m = 1.5 \text{ kg}$  e  $K = 2 \text{ N/m}$  cuja força restauradora é da forma,

$$F_x(x) = -K x \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha x \right)$$

A oscilação deste oscilador tem amplitudes diferentes para valores de  $x$  positivos e negativos. Considere que em  $t = 0$ ,  $x = 1.9 \text{ m}$  e  $v = 0 \text{ m/s}$  e, usando o método de shooting (que, por sua vez, deve utilizar a função `ode45` do Matlab), ajuste o valor de  $\alpha$  ( $\sim -0.2$ ) para que a amplitude negativa seja igual a  $-1.5 \text{ m}$ .

### Problema FR2.3: Crank-Nicolson

Neste trabalho vamos considerar uma equação que descreve a propagação de feixes de luz num dado meio dentro da aproximação paraxial. Vamos considerar a seguinte equação paraxial na forma adimensional,

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g(x) \phi = 0$$

De notar que o último termo que descreve a variação do índice de refração com a variável transversal  $x$ . A função  $g(x)$  é proporcional à variação do índice de refração relativamente a um valor médio.

Vamos considerar duas situações:

$g(x) = 0$ , no caso do meio ser homogéneo, e  $g(x) = -\alpha x^2$ , com  $\alpha$  positivo, que descreve um meio cujo índice de refração diminui à medida que nos afastamos de  $x = 0$ .

Considere um feixe gaussiano como condição inicial:

$$\phi(x, 0) = \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right)$$

com  $x$  entre  $-20$  a  $20$  e  $z$  desde  $0$  a  $16$ . Considere  $\phi$  igual a zero com  $x = -20$  e  $x = 20$ .

- a) Escreva a equação acima de forma a usar o método de Crank-Nicolson. Escreva a matriz  $\mathbf{A}$  e o vetor  $\mathbf{b}$  do sistema de equações,

$$\mathbf{A}\phi = \mathbf{b},$$

- b) Encontre  $\phi(x, z)$  usando o método de Crank-Nicolson. Represente graficamente  $|\phi(x, z)|$  usando as rotinas do Matlab **mesh** e **contourf**.

Considere :

- i)  $\alpha = 0$ , no caso do meio ser homogêneo;
- ii)  $\alpha = 0.2$ . Pode variar ligeiramente este valor e verificar as diferenças no resultado final.

**Nota:** O método de Euler aplicado a esta equação seria sempre instável porque os valores próprios da matriz são imaginários.

\*\*\*

### Nota de apoio - Problema FR2.3 a)

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g(x) \phi = 0$$

$$g(x) = -\alpha x^2.$$

Condição inicial:

$$\phi(x, 0) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Condição fronteira:  $\phi$  igual a zero em  $x = -20$  e  $x = 20$ .

$$\begin{aligned} \phi(j, n+1) = & \phi(j, n) \\ & + \frac{i \Delta z}{4} \left[ \frac{\phi(j-1, n) - 2\phi(j, n) + \phi(j+1, n) + \phi(j-1, n+1)}{(\Delta x)^2} \right. \\ & - 2\alpha x(j)^2 \phi(j, n) + \frac{\phi(j-1, n+1) - 2\phi(j, n+1) + \phi(j+1, n+1)}{(\Delta x)^2} \\ & \left. - 2\alpha x(j)^2 \phi(j, n+1) \right] \end{aligned}$$

Divide-se tudo por  $\eta = \frac{i \Delta z}{4(\Delta x)^2}$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(j, n+1)}{\eta} &= \frac{\phi(j, n)}{\eta} \\
&+ [\phi(j-1, n) - 2\phi(j, n) + \phi(j+1, n) + \phi(j-1, n+1) \\
&- 2\alpha x(j)^2 \phi(j, n)] \\
&+ [\phi(j-1, n+1) - 2\phi(j, n+1) + \phi(j+1, n+1) \\
&- 2\alpha x(j)^2 \phi(j, n+1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \phi(j-1, n+1) + \left( \frac{1}{\eta} + 2 + 2\alpha(\Delta x)^2 x(j)^2 \right) \phi(j, n+1) - \phi(j+1, n+1) \\
&= \phi(j-1, n) + \left( \frac{1}{\eta} - 2 - 2\alpha(\Delta x)^2 x(j)^2 \right) \phi(j, n) + \phi(j+1, n)
\end{aligned}$$

$$\xi = 2\alpha(\Delta x)^2$$

$$\begin{bmatrix}
\left( \frac{1}{\eta} + 2 + \xi x(2)^2 \right) & -1 & & & \\
-1 & \left( \frac{1}{\eta} + 2 + \xi x(3)^2 \right) & -1 & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & -1 & \left( \frac{1}{\eta} + 2 + \xi x(N_x - 2)^2 \right) & -1 \\
& & & -1 & \left( \frac{1}{\eta} + 2 + \xi x(N_x - 1)^2 \right)
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
\phi(2, n+1) \\
\phi(3, n+1) \\
\vdots \\
\phi(N_x - 2, n+1) \\
\phi(N_x - 1, n+1)
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\phi(1, n+1) + \phi(1, n) + \left( \frac{1}{\eta} - 2 - \xi x(2)^2 \right) \phi(2, n) + \phi(3, n) \\
\phi(2, n) + \left( \frac{1}{\eta} - 2 - \xi x(3)^2 \right) \phi(3, n) + \phi(4, n) \\
\vdots \\
\phi(N_x - 3, n) + \left( \frac{1}{\eta} - 2 - \xi x(N_x - 2)^2 \right) \phi(N_x - 2, n) + \phi(N_x - 1, n) \\
\phi(N_x - 2, n) + \left( \frac{1}{\eta} - 2 - \xi x(N_x - 1)^2 \right) \phi(N_x - 1, n) + \phi(N_x, n) + \phi(N_x, n+1)
\end{bmatrix}$$