Exame 2018/19

1 a) Valores Próprios $\Rightarrow$ Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{5}{2}y \\ \dfrac{dy}{dt} = ix + (-2-2i)y \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 \\ i & -2-2i \end{bmatrix}$$

Para determinar os valores próprios λ da matriz A é necessário resolver: $|A - \lambda I| = 0$

↳ matriz identidade

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -\frac{5}{2} \\ i & -2-2i-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{5}{2} \\ i & -2-2i-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(-2-2i-\lambda) - \left(-\frac{5}{2}i\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda(1+i) + \frac{5}{2}i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-2(1+i) \pm \sqrt{(2(1+i))^2 - 4 \times 1 \times \frac{5}{2}i}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-2(1+i) \pm \sqrt{4(1+2i-1) - 10i}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 - i \pm \frac{\sqrt{-2i}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 - i \pm \frac{\sqrt{(1-i)^2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 - i \pm \frac{1-i}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \ \vee \ \lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

b) Para que os métodos sejam estáveis, os pontos $P_1 = h\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ e $P_2 = h\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ têm de estar dentro da sua zona de estabilidade. Marcando um ponto de exemplo, $h=2$, podemos ver que este já não se encontra dentro da região de estabilidade de nenhum dos métodos. Desenhando uma linha desde o centro do gráfico até este ponto exemplo, podemos observar que para h muito pequeno, todos os métodos são estáveis.

Com isto, podemos dizer que, os métodos são condicionalmente estáveis.

c) Para x:

$$P_{1x} = -\frac{h}{2} > -2,79 \ \vee \ -\frac{h}{2} < 0 \Leftrightarrow h_{1x} \in [0; 5,58]$$

$$P_{2x} = -\frac{3h}{2} > -2,79 \ \vee \ -\frac{3h}{2} < 0 \Leftrightarrow h_{2x} \in [0; 1,86]$$

Para y:

$$P_{1y} = -\frac{3h}{2} > -2,83 \ \vee \ -\frac{3h}{2} < 2,83 \Leftrightarrow h_{1y} \in [-1,88 ; 1,88]$$

$$P_{2y} = -\frac{h}{2} > -2,83 \ \vee \ -\frac{h}{2} < 2,83 \Leftrightarrow h_{2y} \in [-5,66 ; 5,66]$$

Deste modo: $h = 1,86$

d) Aplicando o método de Crank-Nicolson:

$$\Big\{ x_{...} = x_{...} + \frac{h}{2}\left(-\frac{5}{...} ... - \frac{5}{...} ... \right)$$

termos de $k+1$ do lado esquerdo e k do lado direito

$$\begin{cases} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(i x_k + y_k(-2-2i) + i x_{k+1} + y_{k+1}(-2-2i)\right) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_{k+1} + \frac{5h}{4} y_{k+1} = x_k - \frac{5h}{4} y_k \\ -\frac{h}{2} i x_{k+1} + \frac{h(2+2i)}{2} y_{k+1} + y_{k+1} = \frac{h}{2} i x_k + \frac{h(-2-2i)}{2} y_k + y_k \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_{k+1} + \frac{5h}{4} y_{k+1} = x_k - \frac{5h}{4} y_k \\ -\frac{h}{2} i x_{k+1} + y_{k+1}(1+h+hi) = \frac{h}{2} i x_k + y_k(1-h-hi) \end{cases}$$

$\Downarrow$ Matrizes

$A \to$ coeficientes termos $k+1$

$B \to$ termos k

$$A \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5h}{4} \\ -\frac{h}{2} i & 1+h+hi \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} x_k & -\frac{5h}{4} y_k \\ \frac{h}{2} i x_k & y_k(1-h-hi) \end{bmatrix}$$

Código:

```
>> A = [1 , 5*h/4 ; -h*2i , 1+h+h*i];
>> for k = 1 : N-1
>>    b = [x(k) , -5*h/4*y(k) ; -h*2i*x(k), y(k)*(1-h-h*i)]
>>    aux = linsolve(A, b);
>>    x(k+1) = aux(1)
>>    y(k+1) = aux(2)
>> end
```

2

a)

Primeira Derivada: $\rightarrow$ Trabalheira Deduzir Isto

$$y^{(1)}(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Segunda Derivada:

$$y^{(2)}(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

b)

Diferenças finitas centradas

$$\frac{d^2y(x)}{dx} + 2x\,\frac{dy(x)}{dx} = bx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + 2x_k\,\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = b\,x_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2kx_k}{2}\right) y_{k-1} - 2y_k + \left(1 + \frac{2kx_k}{2}\right) y_{k+1} = hh^2 x_k$$

Primeira linha A e primeiro elemento de b:

$$y_1 = \alpha \Rightarrow b_1 = \alpha$$

$$A = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]$$

Última linha A e último elemento de b:

diferenças finitas

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 0 \Rightarrow b_N = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(L) - y(L-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \times y_{N-1} + 1 \times y_N = 0$$

$$A = [0 \dots 0 \quad -1 \quad 1]$$

Linha de A e b genérico

$$b_k = bh^k x_k$$

$$A = \left[0 \;\dots\; 0 \quad 1 - \frac{ahx_k}{2} \quad -2 \quad 1 + \frac{ahx_k}{2} \quad 0 \;\dots\; 0\right]$$

c)

Problemas de valor fronteira $\Rightarrow$ Método de shooting

Explicação fica para outro dia xD

③

Exercício Muito aprofundado

! Não dado em aulas práticas !

④ Monte Carlo não sai