



Física Computacional

2023/2024

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

Trabalho Prático 1

Métodos de Euler e Euler-Cromer - Revisões

Problema 1.1 Queda de uma pedra (movimento a 1 Dimensão)

Uma pedra é largada de um segundo andar de um edifício. Pretende-se conhecer a velocidade \mathbf{v} , e a posição \mathbf{z} , da pedra em função do tempo t , desde o momento em que é largada até atingir o solo. A pedra está unicamente sujeita ao seu peso.

Considere que a pedra tem massa m igual a 150 g, e que a aceleração da gravidade \mathbf{g} é igual a $9.8 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Considere ainda que a pedra é largada com velocidade inicial nula. A altura típica de um andar é de 3 m.

Como fazer? E de onde partir?

Precisamos de relembrar alguns conhecimentos!

► Como sabemos da Mecânica, parte-se da equação do movimento, (2ª Lei de Newton), e integra-se:

A 1ª integração, da aceleração em ordem ao tempo, dá-nos a velocidade;

A 2ª integração, da velocidade em ordem ao tempo, dá-nos a posição.

No nosso caso, a integração vai ser feita numericamente pelo método de Euler.

► Por outro lado, sabemos do Cálculo que uma equação diferencial de ordem n pode ser convertida num sistema de n equações diferenciais de 1ª ordem.

- a) Escreva a equação diferencial que resulta da aplicação da segunda lei de Newton ao problema.
- b) Escreva o algoritmo de Euler. Pode aplicá-lo diretamente à equação diferencial que obteve em a)? Porquê?
(Recorde que este algoritmo permite obter a solução numérica para uma equação diferencial do tipo $\frac{dz}{dt} = f(t, z)$.
- c) Aplique o algoritmo de Euler às duas equações diferenciais de 1ª ordem que resultam da equação de 2ª ordem obtida em a).
- d) Obtenha uma estimativa numérica da velocidade, v , entre os instantes inicial, $t_0 = 0$ s, e final, $t_f = 2$ s. Use o método de Euler para integrar a equação do movimento, com passo $h = 0.2$ s. Considere que o sentido positivo do eixo vertical (o eixo dos ZZ) aponta para cima. Use um ciclo **For**.

Para a construção do código é necessário:

- ▶ Aplicar o algoritmo de Euler à equação de evolução para a velocidade, de modo a obter uma equação de recorrência.
(Discretização da equação).
- ▶ Esta equação de recorrência permite obter a velocidade num instante $k+1$ à custa da velocidade e da aceleração no instante k .

Para obter a velocidade no intervalo de tempo requerido, é necessário:

- definir um incremento temporal, $h = t_{k+1} - t_k$ (o passo);
- criar um vetor para a variável independente t , $t = t_0:h:t_f$
- criar um vetor de zeros para a variável dependente v , com a mesma dimensão do vetor t
 (vai obter a solução numérica nos instantes t_k):

N = length(t); v=zeros(N,1);

v(1) = V₀; %Pode ser definido antes de v? Porquê?

- criar um ciclo que vai calculando $v(k+1)$ à custa de $v(k)$ e $a(k)$

```
for k=1:N-1
    v(k+1) = v(k) + ... ;
end
```

- represente o resultado com **plot(t,v)**.

- **O código corre? Não. Porquê?**
- Para correr tem que definir previamente todas as constantes!
(`h= ... ; t0 = ... ; tf = ...; V0 =... ; m = 0.150 e g = 9.8;`)
- No topo do código deve incluir sempre as seguintes intruções:
`clc;`
`clear all;`
`close all;`

e) Repita para o ciclo **while**.

f) Compare o resultado com a solução analítica, sabendo que a equação diferencial para a velocidade admite a seguinte solução:

$$v_z(t) = v_0 - gt$$

g) Use o método de Euler para integrar numericamente as duas equações de 1ª ordem obtidas em c). Represente graficamente a altura da pedra em função do tempo.

Obtenha uma estimativa numérica do instante em que a pedra cai no chão e da sua velocidade. Use o **interp1** do Matlab.

Para a construção de um novo código a partir do código obtido em d) é preciso ter em conta que:

► O ciclo (for ou while) deve ser interrompido logo que z toma valores negativos. Não faz sentido do ponto de vista físico ter $z < 0$!

Como fazer? Pode incluir um **break** no programa sempre que $z < 0$!

► Depois de inserir o **break** no programa, analise os novos vetores **v** e **z** no editor do Matlab. O que observa?
Deve verificar que os vetores, a partir de um dado índice, só contêm zeros.
Estes zeros não têm qualquer significado físico.
Têm que se descartar!!!!
Uma forma de os eliminar é a seguinte:
Identificar o índice k para o qual isso acontece, e novamente os vetores,
`v=v(1:k); etc... t=t(1:k)...`

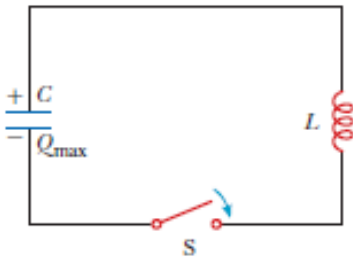
- Para obter a estimativa numérica do instante em que a pedra cai no chão, deve usar a função **interp1** do MATLAB, para $z = 0$.

- h) Compare o resultado com a solução analítica, sabendo que a equação diferencial para a posição admite a seguinte solução:

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

O que observa? O comportamento é idêntico ao observado em e)? Interprete os resultados.

Problema 1.2 Oscilador harmónico simples (circuito LC)



Considere o circuito da figura, contituido por um condensador e uma bobina (um indutor) em série. (Circuito LC). O condensador C encontra-se carregado com a carga Q_0 , e com uma diferença de potencial aos seus terminais de $V_c(t=0) = 5\text{ V}$.

No instante $t = 0\text{ s}$ o interruptor S é fechado. O condensador começa a descarregar-se, oscilando a carga entre $+Q_0$ e $-Q_0$. Como consequência a tensão V_c , aos seus terminais, oscila também, entre um valor máximo de $+5\text{ V}$ e um valor mínimo de -5 V .

Considere que a indutância, L tem o valor de 0.25 H e a capacidade C é igual a $1 \times 10^{-3}\text{ F}$.

- a) Escreva a equação diferencial que resulta da aplicação das leis de Kirchhoff ao circuito.

Recorde: a variação do potencial aos terminais do condensador é dada por $V_c = Q/C$, e no indutor L é dada por $V_L = L\,dI/dt$. A corrente elétrica no circuito é definida como $I = dQ/dt$.

- b) Mostre que a equação diferencial obtida em a) se pode escrever como:

$$\frac{d^2 V_c}{dt^2} = -a V_c$$

Sendo $a = 1/(LC)$.

- c) Aplique o algoritmo de Euler à equação obtida em b). Realize as transformações que achar necessárias para o poder fazer.
- d) Use o método de Euler para integrar numericamente o sistema de equações obtido em c), para um tempo final $t_f = 0.5s$, e $h = 0.001 s$. Represente graficamente a tensão V_c , a carga Q , e a corrente I , em função do tempo. Estão em fase?
- e) Compare os resultados obtidos com as soluções analíticas, sabendo que o problema admite as seguintes soluções :

$$V_c(t) = V_o \cdot \cos(\omega t) \quad Q(t) = Q_o \cdot \cos(\omega t)$$

$$I(t) = -Q_o \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = -I_{max} \cdot \sin(\omega t)$$

Sendo ω a frequência angular das oscilações, dada por $\sqrt{\frac{1}{LC}}$, (o período é $T = 2\pi/\omega$). V_o , e Q_o representam a tensão e a carga no condensador no instante inicial, respetivamente. I_{max} representa o valor máximo da corrente, e é dado por $-\omega Q_o$. Considerou-se que a fase inicial era nula.

- f) Repita os cálculos considerando $h = 0.0001s$. O que observa?

Discuta o impacto da variação do valor de h na solução do problema, em particular na amplitude e no período da mesma.

- g) Determine o período T .

Para tal use a função **islocalmax** do Matlab. Esta função permite localizar máximos locais. Os valores encontrados devem ser interpolados. Porquê? Use o **interp1** do Matlab.

Obtenha o valor do período, a partir dos instantes em que ocorrem os máximos locais. Compare o valor obtido com o valor esperado.

- h) Para o OHS sabe-se que a energia total se conserva. Porquê?

Verifique este resultado para o circuito LC.

A energia elétrica armazenada no condensador é dada por $U_c = \frac{1}{2} Q^2/C$. A energia magnética armazenada na bobina é dada por $U_m = \frac{1}{2} LI^2$. Pode mostrar-se que $U_c + U_m = \frac{1}{2} Q_o^2/C$.

Problema 1.3 Oscilador harmónico simples (Euler-Cromer)

- a) Repita as alíneas d) e h) do problema anterior mas agora usando o método de Euler-Cromer.
- b) O método de Euler-Cromer pode ser aplicado a ODEs de qualquer ordem? Qual é a ordem deste método?

Problema 1.4 Oscilador harmónico simples (Erro Global do método de Euler)

- a) Sabe-se que, para o método de Euler, o erro global é directamente proporcional a h .
Definindo-se o erro global como o módulo da diferença entre a solução analítica e a numérica no final da simulação, pode escrever-se:

$$\text{Erro Global} = \text{constante} * h$$

Vamos verificar este resultado!

Como fazer?

Para tal é necessário calcular o erro global para vários valores de h .

No nosso caso, vamos considerar como erro global o valor absoluto da diferença entre a amplitude obtida no instante final da simulação e a amplitude prevista para o mesmo instante, t_f ,

$$\text{Erro Global} = |V(t_f) - V_c(t_f)|$$

Vamos considerar valores de h entre $10^{-3}s$ e $10^{-7}s$.

Note que a sua escolha deve ser feita de tal forma que 10 s seja um múltiplo inteiro de todos os valores de h .

Faça um gráfico do logaritmo do módulo do erro em função do logaritmo de h .

Note que: os valores de h considerados têm diferentes ordens de grandeza. E quando se lida com diferentes ordens de grandeza é habitual logaritmizar a equação.

► Linearize a equação obtida, calcule o declive e compare-o com o valor esperado.

Para verificarmos a validade deste resultado é necessário construir um novo código, a partir do anterior (Problema 1.2 (d)) .

Para a construção de um novo código a partir do anterior é preciso ter em conta que:

- Para cada valor de h , e para o mesmo tempo final de simulação t_f , a dimensão dos vetores muda.
 - Para cada valor de h obtém-se um valor para o Erro Global.
 - Há que correr o programa para vários valores de h , e calcular o respectivo Erro Global para cada caso.
- É necessário construir um vector com diversos valores de h .
- É necessário construir um vector Erro Global, com a mesma dimensão do vector dos valores de h .

```
Hhs=[10-1 ... .... 10-4]  
Nh=length(Hhs);
```

```
for j=1:Nh %este ciclo permite variar os valores de h...
```

```
h= Hhs(j);
```

```
% OLD
```

```
t = t0:h:tf
```

```
N = length(t); dVc=zeros(1,N);  
dVc(1) = 0; Vc=zeros(1,N); Vc(1)=V0;
```

```
for k=1:N
```

```
    dVc(k+1) = dVc(k) + .... *h ;
```

```
    Vc(k+1) = Vc(k) + dVc(k)*h;
```

```
end
```

```
Vmax= max(Vc);
```

```
ERROGLOBAL(j) = abs(V0-Vmax);
```

```
End
```

```
ETC... plot(log(Hhs), log(ERROGLOBAL))
```

Pode usar o comando **lsline** do MATLAB para traçar uma recta sobre a curva que obteve.

Use a função **polyfit** do MATLAB para determinar o valor aproximado do expoente. (Qual é o valor esperado)?

Repita para o método de Euler-Cromer. O que pode concluir?