Física Computacional

2023/2024

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

Trabalho Prático 2

Métodos implícitos e semi-implícitos para ODE
Oscilador harmónico simples e oscilador não harmónico
Órbita de Mercúrio

Problema 2.1: <u>Oscilador harmónico simples</u>

Considere um sistema massa-mola, semelhante ao apresentado nas aulas teóricas.

Para o estudo numérico deste problema, comece por:

- Escrever a equação diferencial que resulta da aplicação da segunda lei de Newton ao problema;
- Escrever o algorítmo indicado;
- Aplicar o algorítmo à equação do movimento.(Discretizar a equação)

a) Encontre a solução numérica do movimento harmónico simples, recorrendo ao método de Euler para encontrar $x(t)$ e $v_x(t)$, sabendo que $x(0) = 1$ m, $v_x(0) = 0$ m/s, $K = 1$ N/m e $m = 1$ kg.
Compare com a solução analítica. Represente graficamente x e v_x em função do tempo e também vx em função de x. Para verificar a estabilidade das soluções, calcule a energia mecânica total.

b) Os resultados da alínea anterior mostram que o método de Euler, como sabia, não é apropriado para estudar um sistema oscilatório. Repita a alínea usando o método de Euler–Cromer.

c) Repita a alínea a) usando o método de Euler implícito. Quais são as alterações observadas relativamente aos resultados obtidos nos métodos anteriores?

d) Repita mais uma vez a alínea a), usando agora o método dos trapézios ou de Crank–Nicolson. Comente os resultados.

e) Usando o método de Euler–Cromer ou o de Crank–Nicolson, determine a amplitude e o período do movimento. Compare com os valores da solução analítica.
Sugestão: faça uma lista dos pontos (t_k, x_k) tais que $x_{k-1} \leq x_k \geq x_{k+1}$ (condição de máximo local). Use a função **lagr.m** para obter, com maior precisão, uma lista de pontos (t, x) que correspondem aos máximos locais de x.

<u>Note que</u>*: a função* ***lagr.m*** *usa a interpolação de Lagrange para calcular o par de valores* (t_{max}, x_{max})*, em que* x_{max} *é o máximo local, que ocorre no instante* t_{max}*, à custa dos dois pontos vizinhos mais próximos,* (t_{k-1}, x_{k-1}) *e* (t_{k+1}, x_{k+1})*. O valor interpolado* x_{max}*, deverá ser mais preciso que* x_k*. Para usar a função nele definida, escreva,*

```
aux=lagr(t(ind-1:ind+1),x(ind-1:ind+1));
```

O valor de x_{max} *interpolado é dado por* **`aux(2)`** *e o valor correspondente de* t_{max} *por* **`aux(1)`**.

Com esta lista, determine valores médios para o período e amplitude.

Problema 2.2 <u>Órbita de Mercúrio</u>

O método de Euler–Cromer pode ser aplicado ao estudo numérico do movimento de corpos celestes. Neste problema, vamos calcular a órbita do planeta Mercúrio. A primeira aproximação que vamos fazer, dada a muito grande diferença entre as massas de Mercúrio, m_M, e do Sol, m_S, é considerar que o Sol se encontra fixo na origem das coordenadas. Assim, apenas temos que calcular a força que atua sobre o planeta:

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_S m_M}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

onde G é a constante gravitacional, r é o módulo do vetor posição $\boldsymbol{r}$ do planeta e $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ é o versor correspondente. Usando o plano xy como o plano da trajetória, a força pode ser escrita como

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_S m_M}{r^3}\ (x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}})$$

Para realizar cálculos numéricos com estas grandezas é mais conveniente utilizar unidades astronómicas, de modo a que os valores dos períodos e das distâncias não tenham ordens de grandeza muito afastadas da unidade. A unidade do tempo é o ano (da Terra) e a unidade astronómica de comprimento, AU, é a distância média entre a Terra e o Sol. Nestas unidades, o produto Gm_S é dado simplesmente por $4\pi^2$. Sempre que precisar de obter a coordenada polar angular θ referente a uma posição (x, y), sugere-se que use **`mod(atan2(y,x),2*pi)`**: assim irá obter um ângulo entre 0 e 2π.

a) Use o método de Euler–Cromer para representar graficamente uma translação completa de Mercúrio em torno do Sol.
   Não avance para as alíneas seguintes sem confirmar que o seu resultado está correto: deve obter uma elipse com os dois eixos paralelos aos eixos dos xx e dos yy. Sugere-se um h = 0.0001 ano.
   Note-se que se queremos reproduzir corretamente a trajetória, temos que utilizar condições iniciais exatas. Vamos considerar que em t = 0 o planeta se encontra no ponto mais longe do Sol, o afélio. A velocidade inicial tem que ter o valor apropriado para que o planeta descreva a elipse desejada. Use $x(t = 0) = 0.47$ AU e $v_y(t = 0) = 8.2$ AU/ano.
   Para que a trajetória não apareça distorcida, é importante desenhar a figura com as proporções certas. Pode fazê-lo usando, por exemplo, os seguintes comandos do MATLAB:

```
axis([-0.5 0.5 -0.5 0.5])
set(gca,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1])
```

b) Calcule o período da órbita. Compare com o valor observado.

c) Num intervalo de tempo muito menor que o período, a área varrida pela linha que une o Sol ao planeta é dada aproximadamente por $r^2\Delta\theta/2$.
   A segunda lei de Kepler afirma que essa área é a mesma para dois intervalos de tempo iguais. Confirme-o, apenas para a primeira metade da órbita, representando graficamente, em função de t, a área varrida em cada intervalo de tempo h.

Problema 2.3 **<u>Oscilador quártico</u>**

Considere um oscilador quártico de massa m = 1 kg, K = 1 N/m e energia potencial

$$V(x) = \frac{1}{2} K\, x^2(1 + \alpha x^2)$$

A força restauradora é

$$F_x(x) = -K\, x(1 + 2\alpha x^2)$$

Ou de outra forma,

$$m\, \frac{d^2x}{dt^2} = -K\, x(1 + 2\alpha x^2)$$

Esta equação de 2ª ordem é equivalente ao seguinte sistema de duas equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{K}{m}(x + 2\alpha x^3) \end{cases}$$

a) Use o método de Euler–Cromer e faça os gráficos de x e v_x em função do tempo e também v_x em função de x, quando α = −0.1 m−2, x(0) = 1 m e v_x(0) = 1 m/s.
Obtenha a amplitude e o período da oscilação.

b) Como varia o período com a amplitude? Faça a amplitude variar de 0.1 a 2 m e represente graficamente os resultados.