Física Computacional

2022/2023

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

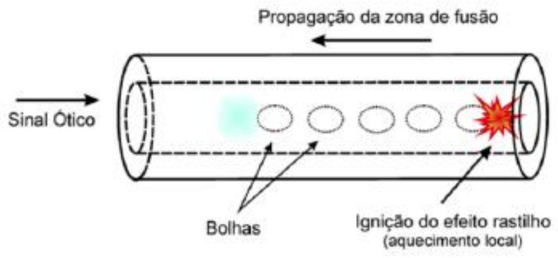
Folha de Revisões 2

Problema FR2.1: BVP – Método do Shooting

Considere a forma de uma frente de temperatura – relacionada com um efeito observado em fibras ópticas designado por *efeito de rastilho* – que é solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2T}{dx^2} - v\frac{dT}{dx} + \beta \exp(-1/T)\left(1 + \frac{dT}{dx} - vT\right) = 0$$

Obtida depois de uma normalização, i.e., as variáveis são adimensionais. T representa a temperatura, x a distância ao longo da fibra, v é a velocidade com que esta frente de temperatura se desloca, v é a velocidade com que esta frente de temperatura se desloca e β é um parâmetro relacionado com a absorção de luz que causa este efeito.



Use um método de shooting para determinar a velocidade v e a forma da frente de temperatura para $\beta = 18$. Integre desde $x = 0$ a $x = 7$, use $h = 0.01$ e as condições iniciais $T(0) = 10^{-4}$ e $T'(0) = 10^{-4}v$. O objetivo é que a derivada em $x = 7$ seja o mais próximo de zero possível. Para resolver a equação diferencial use o algoritmo de Euler-Cromer. Considere as primeiras estimativas para v iguais a 1.9 e 2.0 e a sugestão para a tolerância é de 10^{-4}. Represente graficamente a Temperatura e a sua derivada em função de x.

Problema FR2.2: BVP – Método do Shooting

Considere um oscilador não harmónico de massa m = 1.5 kg e K = 2 N/m cuja força restauradora é da forma,

$$F_x(x) = -K\,x\left(1 + \frac{3}{2}\alpha x\right)$$

A oscilação deste oscilador tem amplitudes diferentes para valores de x positivos e negativos. Considere que em t = 0, x = 1.9 m e v = 0 m / s e, usando o método de shooting (que, por sua vez, deve utilizar a função **`ode45`** do Matlab), ajuste o valor de α (~ -0.2) para que a amplitude negativa seja igual a -1.5 m.

Problema FR2.3: Crank-Nicolson

Neste trabalho vamos considerar uma equação que descreve a propagação de feixes de luz num dado meio dentro da aproximação paraxial. Vamos considerar a seguinte equação paraxial na forma adimensional,

$$\mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathrm{x}^2} + \mathrm{g}(x)\phi = 0$$

De notar que o último termo que descreve a variação do índice de refração com a variável transversal x. A função g(x) é proporcional à variação do índice de refração relativamente a um valor médio.

Vamos considerar duas situações:

$\mathbf{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, no caso do meio ser homogéneo, e $\mathbf{g}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$, com α positivo, que descreve um meio cujo índice de refração diminui à medida que nos afastamos de x = 0.

Considere um feixe gaussiano como condição inicial:

$$\phi(x,0) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

com x entre -20 a 20 e z desde 0 a 16. Considere ϕ igual a zero com x = -20 e x = 20.

a) Escreva a equação acima de forma a usar o método de Crank-Nicolson. Escreva a matriz **A** e o vetor **b** do sistema de equações**,**

$$\boldsymbol{A\phi} = \boldsymbol{b},$$

b) Encontre $\phi(x,z)$ usando o método de Crank-Nicolson. Represente graficamente $|\phi(x,z)|$ usando as rotinas do Matlab **`mesh`** e **`contourf`**.

Considere :

i) $\boldsymbol{\alpha = 0}$, no caso do meio ser homogéneo;

ii) $\boldsymbol{\alpha = 0.2}$. Pode variar ligeiramente este valor e verificar as diferenças no resultado final.

***Nota:** O método de Euler aplicado a esta equação seria sempre instável porque os valores próprios da matriz são imaginários.*

***

Nota de apoio - Problema FR2.3 a)

$$i\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g(x)\phi = 0$$

$$g(x) = -\alpha x^2.$$

Condição inicial:

$$\phi(x,0) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Condição fronteira: ϕ igual a zero em x = -20 e x = 20.

$$\begin{aligned}\phi(j,n+1) = \phi(j,n) &+ \frac{i\,\Delta z}{4}\left[\frac{\phi(j-1,n) - 2\phi(j,n) + \phi(j+1,n) + \phi(j-1,n+1)}{(\Delta x)^2}\right.\\ &- 2\alpha x(j)^2\,\phi(j,n) + \frac{\phi(j-1,n+1) - 2\phi(j,n+1) + \phi(j+1,n+1)}{(\Delta x)^2}\\ &\left.- 2\alpha x(j)^2\,\phi(j,n+1)\right]\end{aligned}$$

Divide-se tudo por $\eta = \frac{i\,\Delta z}{4(\Delta x)^2}$:

$$\frac{\phi(j,n+1)}{\eta} = \frac{\phi(j,n)}{\eta} + [\phi(j-1,n) - 2\phi(j,n) + \phi(j+1,n) + \phi(j-1,n+1) - 2\alpha x(j)^2\,\phi(j,n)] + [\phi(j-1,n+1) - 2\phi(j,n+1) + \phi(j+1,n+1) - 2\alpha x(j)^2\,\phi(j,n+1)]$$

$$-\phi(j-1,n+1) + \left(\frac{1}{\eta} + 2 + 2\alpha(\Delta x)^2 x(j)^2\right)\phi(j,n+1) - \phi(j+1,n+1) = \phi(j-1,n) + \left(\frac{1}{\eta} - 2 - 2\alpha(\Delta x)^2 x(j)^2\right)\phi(j,n) + \phi(j+1,n)$$

$$\xi = 2\alpha(\Delta x)^2$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\eta}+2+\xi x(2)^2\right) & -1 & & & \\ -1 & \left(\frac{1}{\eta}+2+\xi x(3)^2\right) & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & \left(\frac{1}{\eta}+2+\xi x(N_x-2)^2\right) & -1 \\ & & & -1 & \left(\frac{1}{\eta}+2+\xi x(N_x-1)^2\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi(2,n+1) \\ \phi(3,n+1) \\ \vdots \\ \phi(N_x-2,n+1) \\ \phi(N_x-1,n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(1,n+1) + \phi(1,n) + \left(\frac{1}{\eta}-2-\xi x(2)^2\right)\phi(2,n) + \phi(3,n) \\ \phi(2,n) + \left(\frac{1}{\eta}-2-\xi x(3)^2\right)\phi(3,n) + \phi(4,n) \\ \vdots \\ \phi(N_x-3,n) + \left(\frac{1}{\eta}-2-\xi x(N_x-2)^2\right)\phi(N_x-2,n) + \phi(N_x-1,n) \\ \phi(N_x-2,n) + \left(\frac{1}{\eta}-2-\xi x(N_x-1)^2\right)\phi(N_x-1,n) + \phi(N_x,n) + \phi(N_x,n+1) \end{bmatrix}$$