

**Departamento de Física**

Disciplina: 41773 - Física Computacional

Computacional Ano letivo: 2023/2024

# Trabalho Prático de Avaliação Contínua

**Autores:**

102901	Martim Freitas de Sousa Gil
107403	João Nuno da Silva Luís
108072	João Nuno Almeida Marques
109680	Délcio da Costa Amorim

**Turma:** PL6 **Grupo B**

**Docentes:** Sofia Latas, Albano Neto

## Sumário:

Neste relatório serão abordados dois temas: O 1º tema trata-se de calcular a 4ª derivada de uma função usando dois métodos: Transformadas de Fourier e Diferenças Finitas. Já o 2º tema trata-se da resolução da equação de Korteweg-De-Vries usando o método espectral com um Runge-Kutta de 4ª ordem.

O relatório é constituído por uma introdução onde são abordadas as questões teóricas e métodos teóricos usados para a resolução de ambos os problemas. De seguida, são apresentados os resultados obtidos e é feita a análise dos mesmos.

## Introdução:

O 1º tema do trabalho trata-se do cálculo da 4ª derivada de uma função, a função a derivar é:

$$q = \tanh(x)\operatorname{sech}(x)$$

i) Transformadas de Fourier

Se recorremos á Transformada de Fourier da derivada obtemos a expressão para derivadas de ordem n, que é dada por:

$$\text{Seja } g(t) = f^{(n)}(t), \text{ então } G_{(w)} = iw^{(n)}F(w)$$

Podemos resolver a 4ª derivada de q recorrendo a esta equação, passando a nossa função q para o domínio das frequências através da transformada de Fourier obtendo F(w) e usando a equação anterior obtemos que  $G_{(w)} = iw^{(4)}F(w)$  obtendo assim a solução da equação, depois só temos de recorrer á transformada inversa de Fourier para obter a solução no domínio do tempo.

ii) Diferenças Finitas

Para a resolução da 4ª derivada usando diferenças finitas usamos a equação dada:

$$q_k^{IV} = \frac{q_{k-2} - 4q_{k-1} + 6q_k - 4q_{k+1} + q_{k+2}}{h^4} + O(h^2)$$

O 2º tema do trabalho é a resolução da equação de Korteweg-De-Vries usando o método espectral associado ao Runge-Kutta:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} - \alpha q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Esta equação é usada para descrever fenómenos físicos variados tais como ondas em águas pouco profundas ou ondas solitárias em linhas de transmissão não-lineares.

Para integrarmos a equação em ordem ao tempo fizemos um rearranjo de termos de modo que:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \alpha q \frac{\partial q}{\partial x}$$

Com recurso ao método da transformada de Fourier explicado em i) e adaptando a expressão para o domínio discreto obtemos:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\text{ifft}((iw)^3 \times \text{fft}(q)) + \alpha q \times \text{ifft}((iw) \times \text{fft}(q))$$

Nesta expressão o w corresponde a um vetor de frequências com uma estrutura diferente de modo a não termos de recorrer ao ifftshift e fftshift do MATLAB.

Esta formula da derivada é depois devidamente aplicada ao Runge-Kutta de 4ª ordem.

## Parte I

Para esta secção foi considerada a função:

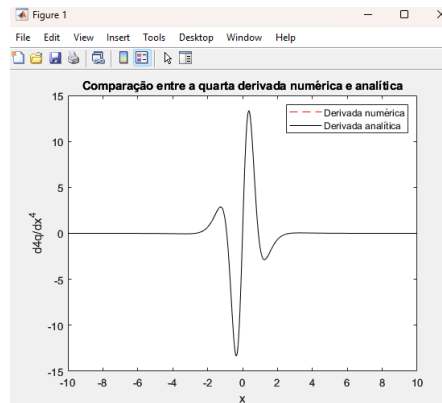
$$q = \tanh(x) \text{sech}(x)$$

O objetivo deste desta parte consiste em calcular a derivada de 4ª ordem utilizando as Transformadas de Fourier e também o método das diferenças finitas com o esquema numérico:

$$y_k^{iv} = \frac{y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2}}{h^4} + O(h^2)$$

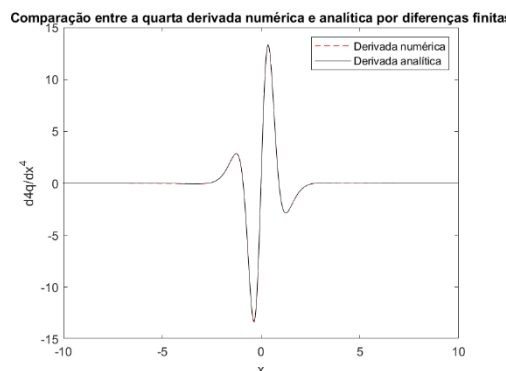
- i) Para as Transformadas de Fourier, fizemos uma comparação entre o método aplicado no MATLAB e no Wolfram-Alpha. No Wolfram-Alpha, a quarta derivada de q teve o seguinte resultado:

$$q = \tanh(x) \text{sech}(x) (\tanh(x)^4 + 61 \text{sech}(x)^4 - 58 \tanh(x)^2 \text{sech}(x)^2)$$



No MATLAB, observamos que a função da derivada analítica praticamente coincide com a função da derivada numérica, sendo necessário fazer uma grande quantidade de zoom para ver alguma diferença, o que indica uma boa adequação do método numérico ao problema em questão.

- ii) Fizemos o mesmo processo de comparação para o Método das Diferenças Finitas, e a figura tem a mesma semelhança:



Aumentando também o zoom nesta figura, acabamos por ver diferenças entre a solução numérica e analítica, mas mais uma vez, essa diferença é bastante reduzida.

Assim, se compararmos as duas imagens dos 2 métodos, podemos concluir que ambos se adequam já que coincidem praticamente com a solução analítica.

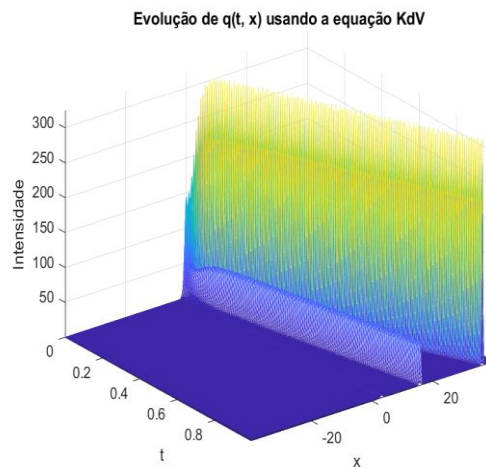
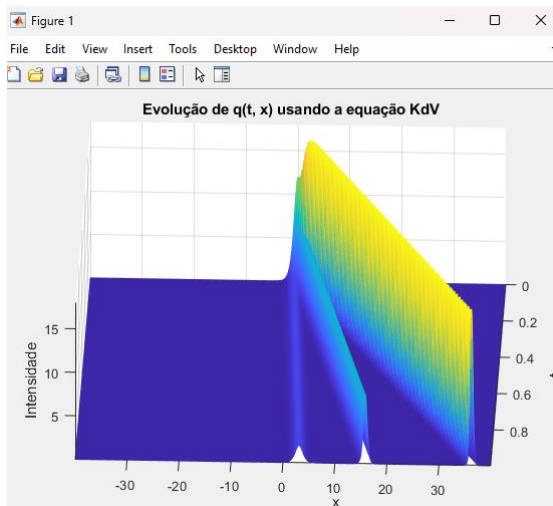
No entanto, se variarmos os valores de **h** e **N**, observamos que quanto maior o valor de h, menor é a aproximação à solução analítica e por consequência, menor será a exatidão da solução obtida. Já a variação do valor de N está relacionada com a granularidade dos vetores, isto é, quanto maior o valor de N, maior será o número de pontos que os vetores contêm e por consequência menor será o intervalo dos mesmos, resultando num gráfico mais preciso.

## Parte II

Nesta parte, vamos utilizar a equação de Korteweg-De-Vries para descrever fenómenos como as ondas em águas pouco profundas ou ondas solitárias em linhas de transmissão não-lineares. Esta equação é dada por:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial t^3} - \alpha q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

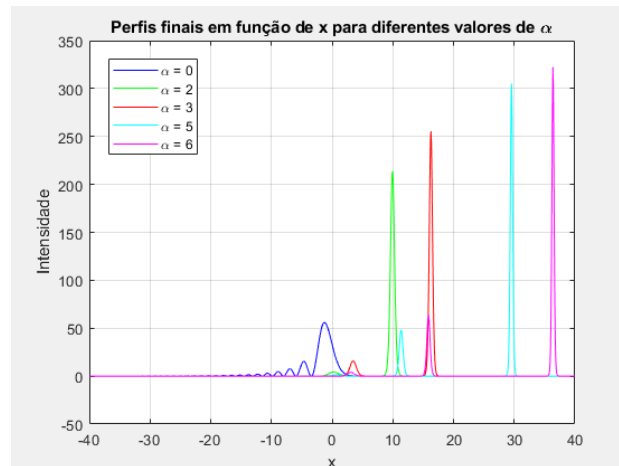
- a) Para esta alínea utilizámos o método de Runge-Kutta de 4ª ordem juntamente com as Transformadas de Fourier para encontrar a evolução de um perfil inicial.



Após análise do gráfico, podemos concluir que o pulso inicial é um pulso solitário,  $-12 * \text{sech}^2(x)$ , que é uma solução típica de solitão. À medida que o tempo varia, observamos que o perfil inicial sofre alterações devido á derivada de 3ª ordem. Estas alterações não são muito significativas uma vez que a forma do pulso é preservada.

A utilização dos métodos de Runge-Kutta de 4ª ordem, sendo um método explícito de integração de tempo, permite uma resolução mais precisa dos termos não lineares e dispersivos da equação Korteweg-De-Vries.

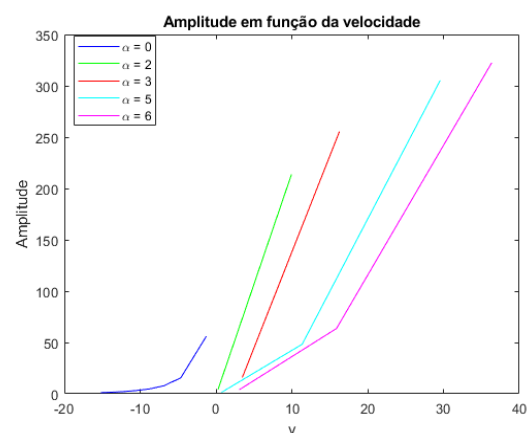
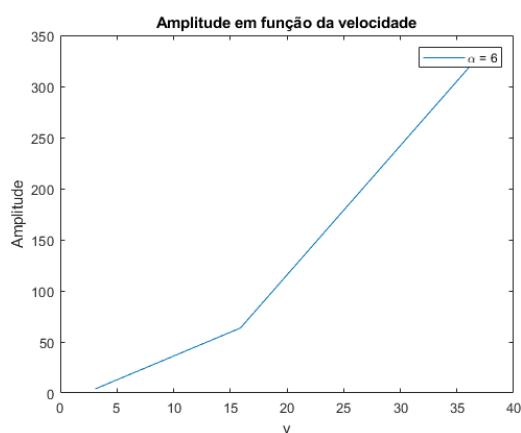
- b) Para esta alínea variámos o valor de  $\alpha$  através de um vetor no MATLAB.



Após análise do gráfico, podemos concluir que para  $\alpha = 0$ , o termo não linear provoca a dispersão do pulso inicial, o que provoca a perda da sua forma original. Podemos observar também que à medida que o  $\alpha$  aumenta, o termo não linear contraria de forma mais eficaz a dispersão do pulso, o que origina um pulso inicial mais coeso e definido, que mantém uma forma próxima à original. Verificamos também que com o aumento do  $\alpha$ , a amplitude aumenta também, sendo assim proporcionais.

Concluindo, podemos afirmar que à medida que o  $\alpha$  aumenta, a deformação do pulso inicial vai diminuindo e a amplitude dos solitões aumenta.

- c) De seguida, para definir as amplitudes máximas e as velocidades máximas, utilizámos o perfil final  $|q(t_{final}, x)|^2$  e considerámos um perfil inicial  $q(0, x) = -12 * \text{sech}^2 x$  e  $t_{final} = 1$ .



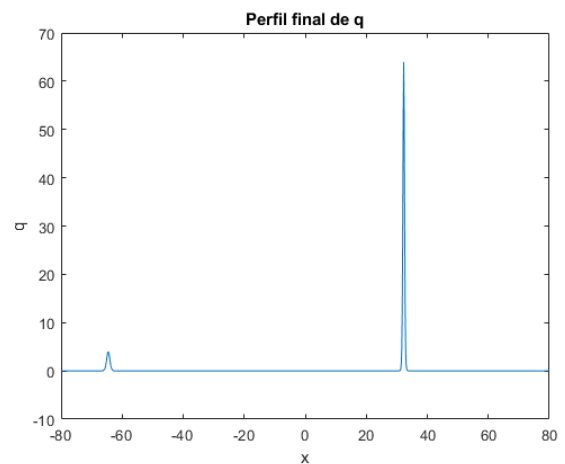
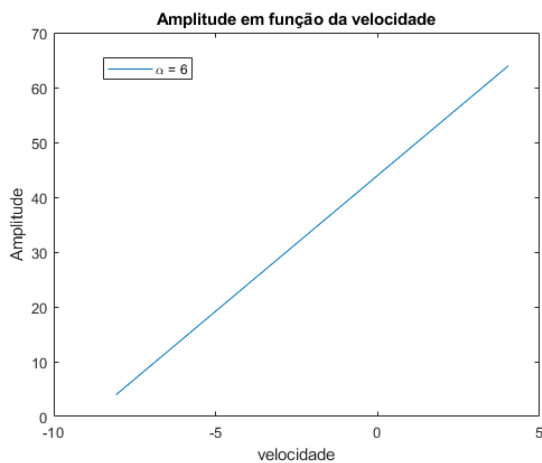
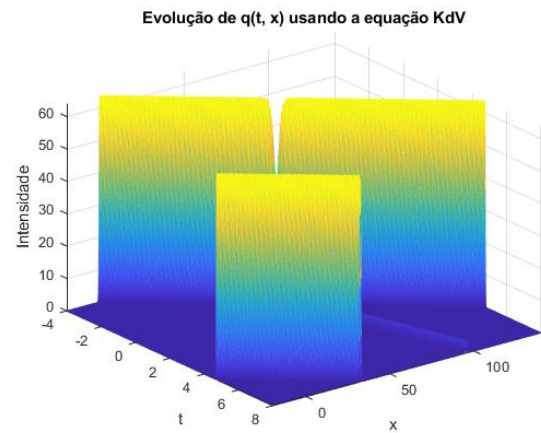
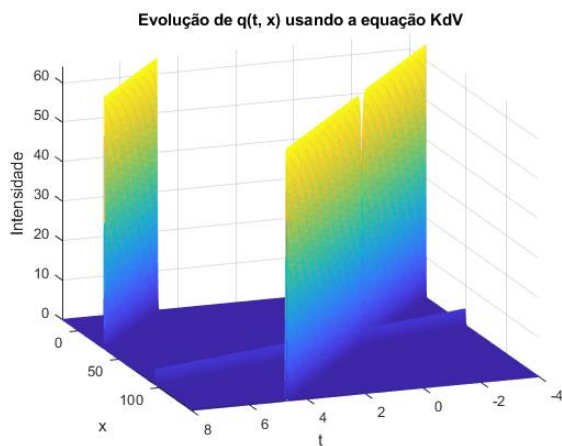
Após analisarmos os gráficos podemos observar que à medida que a velocidade aumenta, a amplitude aumenta também o que indica uma relação de proporcionalidade entre as duas. Para  $\alpha = 0$ , o solitão vai ser disperso uma vez que

o efeito linear é nulo, logo a amplitude será nula também. Relativamente á velocidade, esta será nula para  $\alpha = 0$ , pois o solitão não está em movimento.

Assim, podemos concluir que os solitões com maior amplitude tendem a mover-se mais rapidamente, sendo que estes solitões tem um  $\alpha$  maior.

- d) Para esta alínea, foi variado o perfil inicial e redefinido o tempo de integração. A condição inicial passou a ser seguinte:

$$q(t_0, x_1) = -12 \frac{3 + \cosh(2x_1 + 24t_0) + \cosh(4x_1)}{\{3\cosh(x_1 - 12t_0) + \cosh(3x_1 + 12t_0)\}^2}$$



Depois de analisarmos os gráficos, concluímos que com a alteração da condição inicial, o número de solitões aumenta passando a ter 3 solitões. Além disso, verificámos que com o aumento da amplitude do solitão, temos um aumento da velocidade a que a onda se propaga.

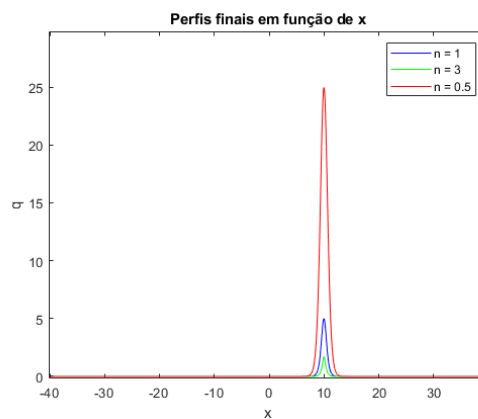
- e) Nesta alínea, utilizámos a equação de Korteweg-De-Vries na forma generalizada de maneira a encontrar a evolução do perfil inicial.

Esta equação é dada por,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + (n+1) * (n+2) * q^n \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

A equação da evolução do perfil inicial é dada por

$$q(0, x) = \left(\frac{c}{2} * \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2} * n * x\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$



Após a análise do gráfico podemos concluir que à medida que o valor de  $n$  aumenta, a amplitude do solitão irá diminuir. Podemos assim concluir que as amplitudes estão relacionadas com a velocidade, segundo os princípios da teoria dos solitões, onde a velocidade é proporcional á amplitude do pulso.

### Conclusão:

De um modo geral, pudemos concluir algumas teses. Verificámos que o  $\alpha$  tem um impacto significativo no comportamento e forma do solitão e que o  $n$  tem um comportamento inverso ao de  $\alpha$ , contudo, este tem um impacto de magnitude semelhante a  $\alpha$  no solitão. Além disso, concluimos que a condição inicial é muito importante, visto que esta tem grande impacto na propagação do pulso ao longo do eixo da posição.

Os resultados encontram-se dentro do esperado, onde é possível observar a variação dos pulsos com o tempo. Contudo, devido a limitações do MATLAB não foi possível realizar alguns gráficos na totalidade o que pode gerar pequenos erros.