Aula 1

• Introdução:

O que é uma ODE?

O que são problemas de valor inicial e de valor fronteira?

• Problemas de valor inicial

Método de Euler

Exemplos de Aplicação: movimento a 1D, a 2D, e 3D
(queda de uma pedra, oscilador harmónico simples, projécteis)

Estudo do movimento de bolas de ténis e futebol (facultativo)
Alguns conceitos de aerodinâmica de um objeto esférico (facultativo)

Equações diferenciais ordinárias (ODE)

ODE- ordinary differential equation

- *Equações diferenciais* são equações que relacionam variáveis independentes e variáveis dependentes e as suas derivadas.
- *Equações diferencias ordinárias* são aquelas que envolvem uma única variável independente e uma dependente.
- *Sistemas de equações diferenciais* ordinárias podem envolver várias variáveis dependentes mas uma única variável independente.
- *A ordem* de uma ODE é a ordem máxima das derivadas presentes.

Os problemas com ODEs podem ser:

- **problemas de valor inicial** – quando temos o valor de todas as variáveis dependentes definido num único valor da variável independente.
- **problemas de valor fronteira** - quando temos o valor das variáveis dependentes definido em mais do que um valor da variável independente.

Exemplos de Equações Diferenciais

1.
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (x^2 - 4x + 2)e^{-x}, \quad 0 < x < L,$$
$$T(x,0) = 0, \quad T(0,t) = 0, \quad T(L,t) = L^2 e^{-L}$$

2.
$$\frac{d^2 y}{dx^2} - xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(100) = 0$$

3.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1.25\,\exp(x + y/2), \quad a_x < x < b_x, \quad a_y < y < b_y$$
$$u(a_x, y) = u(b_x, y) = u(x, a_y) = u(x, b_y) = 0$$

4.
$$\frac{dC_1}{dt} = -k_1 C_1 + k_2 C_2 C_3$$
$$\frac{dC_2}{dt} = k_1 C_1 - k_2 C_2 C_3 - 2k_3 C_2^2$$
$$\frac{dC_3}{dt} = 2k_3 C_2^2$$
$$C_1(0) = 0.9, \quad C_2(0) = 0.1, \quad C_3(0) = 0$$

Exemplos de Equações Diferenciais

1. $$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(1+\epsilon y)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

2. $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = g(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$T(0,y) = T(1,y) = T_a, \quad T(x,0) = T_b, \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x,1) = 0$$

3. $$\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha\frac{du}{dx} + \beta u = f(x), \quad u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L$$

4. $$\frac{d^2F}{dz^2} + \left(az - \frac{F^2}{1+F^2}\right)F = 0, \quad F(\pm L) = 0,$$

Equações diferenciais ordinárias (ODE)

Quando pretendemos obter a solução para um dado problema físico, deparamo-nos frequentemente com a tarefa de resolver uma equação diferencial. Vamos começar por nos dedicar ao caso mais simples:

Equações diferencias ordinárias de primeira ordem, com condições iniciais, e sem condições fronteira.

Como todos sabemos, as equações diferenciais ordinárias (ODE) distinguem-se das equações diferenciais às derivadas parciais (PDE) pela existência de uma única variável independente: todas as derivadas são feitas em ordem a uma única variável, a que, numa discussão genérica, vamos chamar *t*, embora isso não queira de forma alguma dizer que a variável independente seja sempre o tempo.

Equações diferenciais ordinárias (ODE)

ODE de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1}$$

Em alguns casos, nos quais a função *f*(*t*, *y*) é bastante simples, a equação diferencial pode ser integrada explicitamente. De qualquer forma, para escrever a solução é preciso conhecer uma condição inicial, ou seja, o valor de y(t) para um dado valor do tempo. Se se tratasse de uma ODE de ordem *n*, teríamos que conhecer *n* constantes.

Método de EULER

Aparentemente simples, a equação (1) não pode ser resolvida analiticamente na maior parte dos casos. Tal acontece frequentemente na resolução de problemas físicos, pelo que é necessário recorrer a outro tipo de métodos, como por exemplo a métodos analíticos aproximados e a métodos numéricos.

O algoritmo mais simples para a resolução númerica desta equação é o método de Euler.

Este método pode ser obtido partindo da definição de derivada:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Considerando-se um intervalo de tempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ entre dois instantes consecutivos, e definindo $h = \Delta t$, podemos aproximar a equação diferencial original por:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx f(t_n, y_n)$$

Um rearranjo dos termos permite obter a seguinte expressão:

$$y_{n+1} = y_n + h * f(t_n, y_n)$$

Assim, o método de Euler dá-nos um esquema iterativo, que nos permite obter a solução em instantes futuros.

(OBS: A solução numérica é uma solução discreta, ie., só é conhecida em determinados instantes, em contraste com a solução analítica, que a existir, é geralmente conhecida em todos instantes da sua região de existência).

Pretende obter-se a solução numérica, de uma dada equação diferencial, num dado intervalo de tempo, $[t_0, t_f]$. Para se aplicar o método de Euler, define-se uma grelha de valores da variável independente equidistantes no intervalo de tempo:

$$t_0,\ t_0 + h,\ t_0 + 2h,\ t_0 + 3h,\ t_0 + 4h, \dots, t_f \quad \Leftrightarrow \quad (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_f)$$

Para simplificar, o espaçamento h, (ou h_t ou Δt,ou δt), é escolhido de forma a que $t_f - t_0$ seja um seu múltiplo inteiro. É fácil de perceber que o número de pontos, N, neste caso é dado por:

$$N = \frac{t_f - t_0}{h} + 1 \qquad (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{N-1})$$

● Assim, conhecida a solução no instante inicial t_0, $y(t_0) = y_0$, pode obter-se uma estimativa da solução no instante $t_1 = t_0 + h$, $y(t_0 + h) = y_1$:

$$y_1 = y_0 + h * f(t_0, y_0)$$

● Conhecidos t_1 e y_1, pode calcular-se $f(t_1, y_1)$, e usando o mesmo procedimento pode obter-se y_2, a estimativa da solução no instante t_2, ($t_2 = t_0 + 2h$, $y(t_0 + 2h) = y_2$):

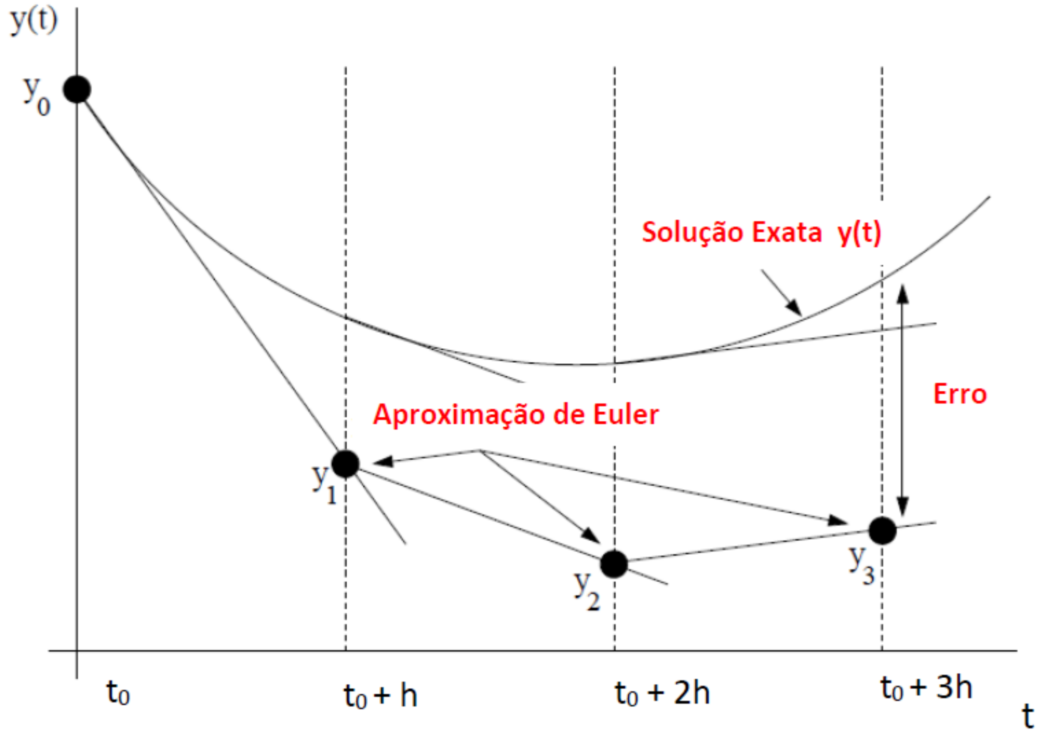
$$y_2 = y_1 + h * f(t_1, y_1)$$

● Aplicando repetidamente este procedimento, podemos determinar todos os valores y_k, ou seja, a estimativa numérica da solução y(t) nos pontos t_k:

MÉTODO de EULER - ODE de primeira ordem

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k) * h \qquad para \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-2$$

A representação gráfica deste processo iterativo está representado na Figura seguinte:



Note-se que cada aproximação subsequente da solução, y(t), é gerada a partir do declive (derivada) à curva no ponto anterior. A figura sugere que para passos mais pequenos, *h*, a solução deverá ser mais precisa. **E o ERRO?**

LEITURA_1

Método de Euler –Exemplo de Aplicação (Chapra)

Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dy}{dt} = -2t^3 + 12t^2 - 20t + 8.5$$

Usando o método de Euler integre-a numericamente de t=0 a t=3, com passo temporal de 0.5. A condição inicial em t=0 é y=1. Facilmente pode mostrar que esta equação tem solução analítica dada por: $y = -0.5\,t^4 + 4t^3 - 10t^2 + 8.5t + 1$. **Use uma calculadora.**

SOLUÇÃO: O que se está a pedir é que se obtenha a solução numérica nos seguintes instantes: 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, e 3. Com h=0.5. Por recurso à equação $y_{k+1} = y_k + f\left(t_{k,}\, y_k\right) * h$, obtém-se:

1ª iteração $\rightarrow$ $y(0.5) = y(0) + f(0{,}1) * h$

Sendo y(0)=1,(a condição inicial), e sendo a função f,(declive), em t=0 estimada por,

$f(0,1) = -2 * 0^3 + 12 * 0^2 - 20 * 0 + 8.5 = 8.5$

Então, a solução numérica em t = 0.5 é dada por:

$y(0.5) = y(0) + f(0,1) * h = 1.0 + 8.5 * 0.5 = 5.25$

E a solução analítica em t = 0.5 é dada por:

$y = -0.5 * 0.5^4 + 4 * 0.5^3 - 10 * 0.5^2 + 8.5 * 0.5 + 1$=3.21875

Qual é o erro cometido nesta iteração (em %)?

2ª iteração →

$y(1) = y(0.5) + f(0.5,5.25) * h = 5.25 + (-2 * 0.5^3 + 12 * 0.5^2 - 20 * 0.5 + 8.5) * 0.5$=5.875

Com o auxílio de uma calculadora repita o procedimento anterior para todos os instantes considerados.

Repita o procedimento anterior para h=0.25.

Método de Euler & MATLAB

Chama-se a atenção para uma dificuldade que surge quando se usa o MATLAB:

Os vetores do MATLAB não podem ter índices nulos, pelo que os índices do MATLAB têm de ser alterados para começarem em 1. Assim, o valor $\mathbf{y_0}$ da discussão anterior é dado pelo elemento **y(1)** do vetor **y** no MATLAB.

Um exemplo simples de aplicação é estudado na alínea a) do Problema 1.1 do Trabalho Prático 1.

Sem ter cuidado com os aspetos práticos do programa, podemos ver que a variável y nesse trabalho é a velocidade de um corpo e a função f é a expressão do somatório das forças nele aplicadas num dado instante, em função da velocidade e do tempo, dividido pela massa. Na prática, a aceleração é apenas função explícita da velocidade, ou seja, em vez de $f(t,y)$, temos $f(y)$.

Método de Euler para sistemas de ODE de 1ª ordem

Consideremos um sistema de equações diferenciais muito simples:

Sistema de ODE de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_x\,(t, x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_y\,(t, x, y) \end{cases}$$

Então, a generalização a fazer é a seguinte:

MÉTODO de EULER - Sistema de ODE de primeira ordem

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + f_x(t_k, x_k, y_k) * h \\ y_{k+1} = y_k + f_y(t_k, x_k, y_k) * h \end{cases} \qquad para \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-2$$

Método de Euler - ODE de ordem $\mathcal{N}$

● Consideremos uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

Definindo,

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

E derivando, obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f(t, y_1, y_2) \end{cases}$$

Ou seja, a equação diferencial de 2ª ordem pode ser expressa como um sistema de duas ODE acopladas de 1ª ordem

MÉTODO de EULER - ODE de 2ª ordem

$$\begin{cases} y_{2,k+1} = y_{2,k} + f(t_k, y_{1,k}, y_{2,k}) * h \\ y_{1,k+1} = y_{1,k} + y_{2,k} * h \end{cases}$$

E se a equação for de ordem $\mathcal{N}$?

MÉTODO de EULER - ODE de $\mathcal{N}$-ésima ordem

$$\text{Equação diferencial de ordem } N \Leftrightarrow \text{Sistema de } N \text{ equações diferenciais de } 1^{\text{a}} \text{ ordem}$$

Método de Euler - ODE de ordem $\mathcal{N}$

- Consideremos uma equação diferencial de ordem $\mathcal{N}$:

$$\frac{d^N y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \dots \qquad \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}}\right)$$

Definindo,

$$y_1 = y, \qquad y_2 = \frac{dy_1}{dt}, \qquad y_3 = \frac{dy_2}{dt}, \ \dots \ y_N = \frac{dy_{N-1}}{dt}$$

E derivando, obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{d\,y_2}{dt} = y_3 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{d\,y_{N-1}}{dt} = y_N \\ \dfrac{d\,y_N}{dt} = f(t, y_1, \dots y_N) \end{cases}$$

Com as condições iniciais,

$$y_1(t_0) = k_1, \qquad y_2(t_0) = k_2, \qquad \dots \ y_N(t_0) = k_N$$

EXEMPLO 1 - ODE de 2ª ordem : movimento retilíneo (1D)

No caso do movimento de um corpo de massa constante, *m*, que se move segundo uma trajetória retilínea, a 2ª lei de Newton pode escrever-se como:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\sum F\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)}{m}$$

Neste caso,

$$\begin{cases} y_2(t) = v(t) & (velocidade) \\ f\left(t_k, y_{1,k}, y_{2,k}\right) = \dfrac{\sum F\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)}{m} & (aceleração) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k + f\left(t_{k,} y_k, v_k\right) * h \\ y_{k+1} = y_k + v_k * h \end{cases}$$

EXEMPLO 2 - ODE de 2ª ordem : movimento no espaço tridimensional (3D)

Generalizando o procedimento do exemplo anterior para o caso em que a trajetória não é retilínea, em que o vetor posição é dado por $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + y(t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z(t)\hat{\boldsymbol{k}}$, a 2ª lei de Newton pode escrever-se como:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{\sum \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})}{m} \qquad (forma\ vetorial)$$

que corresponde a três equações na forma escalar,

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = f_x(t_{k,}x_{k,}\, y_k, z_z, v_{x,k},\, v_{y,k}, v_{z,k}\,) = \dfrac{\sum F_x}{m} \\ \dfrac{dv_y}{dt} = f_y(t_{k,}x_{k,}\, y_k, z_z, v_{x,k},\, v_{y,k}, v_{z,k}\,) = \dfrac{\sum F_y}{m} \\ \dfrac{dv_z}{dt} = f_z(t_{k,}x_{k,}\, y_k, z_z, v_{x,k},\, v_{y,k}, v_{z,k}\,) = \dfrac{\sum F_z}{m} \end{cases} \qquad (forma\ escalar)$$

EXEMPLO 2 - ODE de 2ª ordem : movimento no espaço tridimensional (3D)

A integração numérica das equações anteriores pelo **método de Euler** , permite obter:

Para a VELOCIDADE

$$\begin{cases} v_{x,k+1} = v_{x,k} + f_x(t_k, x_k, y_k, z_z, v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k}) * h \\ v_{y,k+1} = v_{y,k} + f_y(t_k, x_k, y_k, z_z, v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k}) * h \\ v_{z,k+1} = v_{z,k} + f_z(t_k, x_k, y_k, z_z, v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k}) * h \end{cases}$$

Para a POSIÇÃO

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_{x,k} * h \\ y_{k+1} = y_k + v_{y,k} * h \\ z_{k+1} = z_k + v_{z,k} * h \end{cases}$$

LEITURA_2- Aerodinâmica de um objecto esférico

Nos problemas **1.2** e **2.3**, estuda-se a trajetória de bolas (de ténis e de futebol) sujeitas:

- ao **peso**

- à **força de arrasto** (*drag force*) que se deve a dois fenómenos: o atrito e a diferença de pressões entre a parte da frente da bola (relativamente ao seu movimento) e a parte de trás da bola que se encontra a uma menor pressão;

- **efeito de Magnus** que ocorre quando a bola tem também um movimento de rotação.

LEITURA_2- Alguns conceitos de aerodinâmica

Camada limite – camada de ar que rodeia a esfera e que apresenta velocidades graduais, desde a velocidade do fluido nas posições mais distantes da esfera até à velocidade da esfera na superfície desta.

Esteira – região de pressão baixa que se forma atrás da bola.

• O movimento do ar na camada limite pode ser laminar ou turbulento. A transição para regime turbulento ocorre para velocidades superiores.

• No regime turbulento, a esteira é menos extensa porque a camada limite separa-se da bola mais atrás.

LEITURA_2 - Aerodinâmica de um objecto esférico → Força de Arrasto

Uma bola, que consideramos inicialmente sem rotação, desloca-se no ar com uma velocidade instantânea $\boldsymbol{v}$. O módulo da velocidade é dado por $v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. A força de arrasto, que tem a mesma direcção da velocidade, mas o sentido oposto, é habitualmente parametrizada por:

$$\boldsymbol{F_D} = -\frac{1}{2} C_D \rho A v^2 \hat{\boldsymbol{v}}$$

$$= -\frac{1}{2} C_D \rho A v^2 \frac{v_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + v_z \hat{\boldsymbol{k}}}{v}$$

$$= -\frac{1}{2} C_D \rho A \left(v v_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + v v_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + v v_z \hat{\boldsymbol{k}}\right)$$

Onde ρ é a massa volúmica do ar e $A=\pi R^2$ é a área da secção transversal da bola. O parâmetro adimensional C_D (ou C_A) é o coeficiente de arrasto (*drag*).

LEITURA_2 - Aerodinâmica de um objecto esférico → Força de Arrasto

No contexto em que estamos a trabalhar, o coeficiente de arrasto é dependente apenas de um parâmetro chamado número de Reynolds:

$$R_e = \frac{2\rho R v}{\eta}$$

Onde η é a viscosidade do ar. Como já foi dito, a força de arrasto é devida a dois fenómenos, o atrito e a diferença de pressões entre a parte da frente da bola (relativamente ao seu movimento) e a parte de trás da bola, onde se desenvolveu a zona de baixa pressão a que chamamos esteira.

É evidente que, para uma mesma velocidade, a força de arrasto será tanto menor quanto menor for a secção transversal da esteira, ou seja, quanto mais atrás a camada limite se separar da esfera.

LEITURA_2 - Aerodinâmica de um objecto esférico → Força de Arrasto

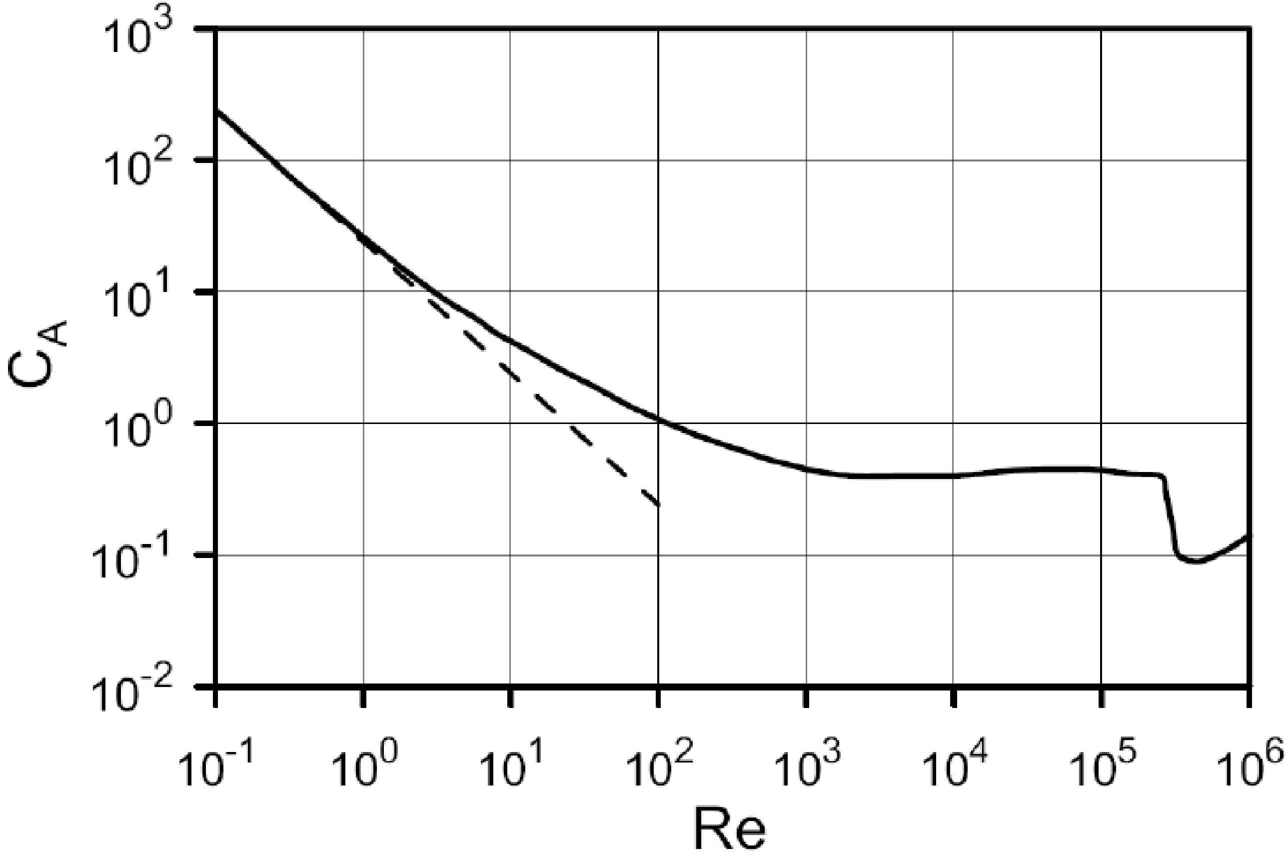


GRÁFICO-Coeficiente de arrasto (C_A) de uma esfera lisa em função do número de Reynolds (R_e)

LEITURA_2 - Aerodinâmica de um objecto esférico → Força de Arrasto

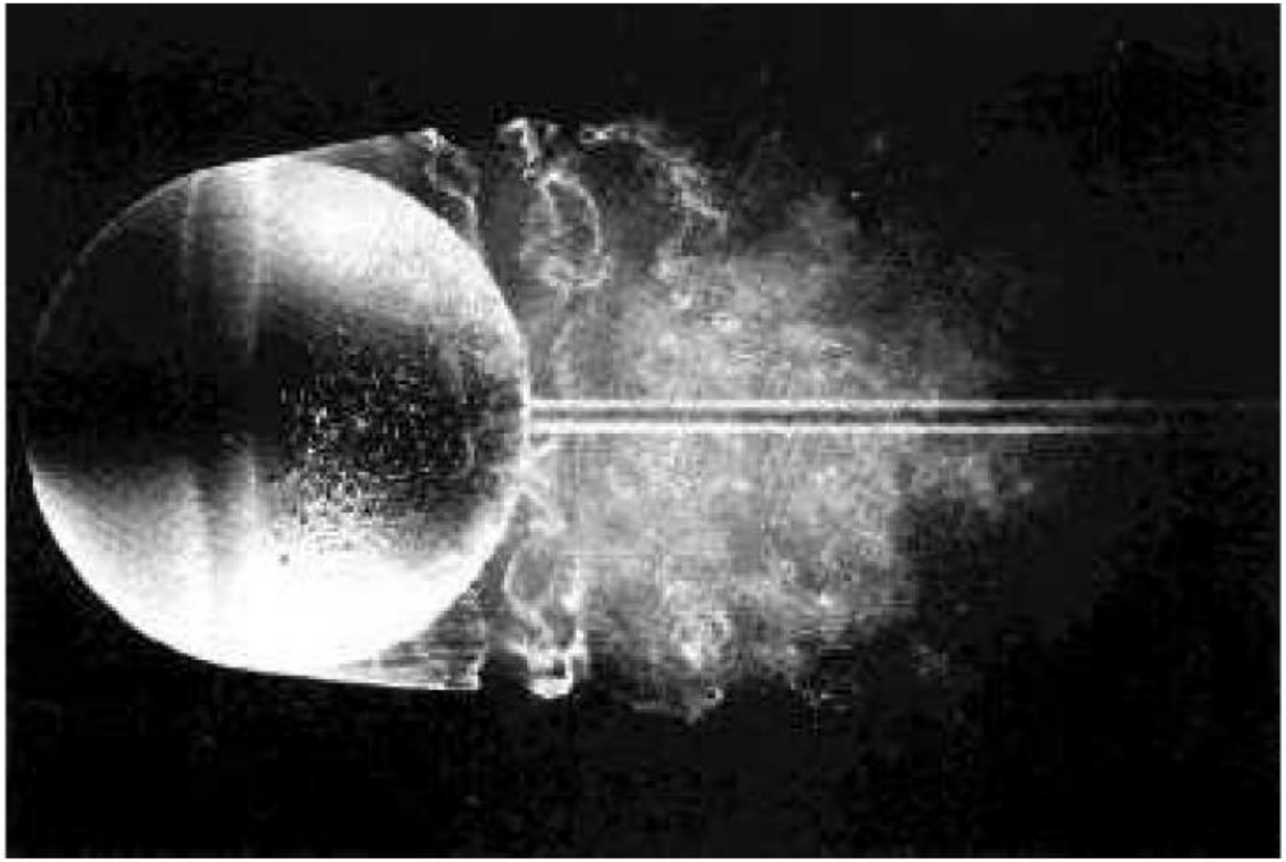
● Para valores do número de Reynolds bastante pequenos, estamos no limite de Stokes: C_D é inversamente proporcional à velocidade e o módulo da força de arrasto é proporcional a *v*.

● C_D é aproximadamente constante numa gama intermédia de valores do nº de Reynolds.

● A variação abrupta do coeficiente ocorre quando a camada limite se torna turbulenta e passa a separar-se da bola mais tarde, reduzindo as dimensões transversais da esteira.

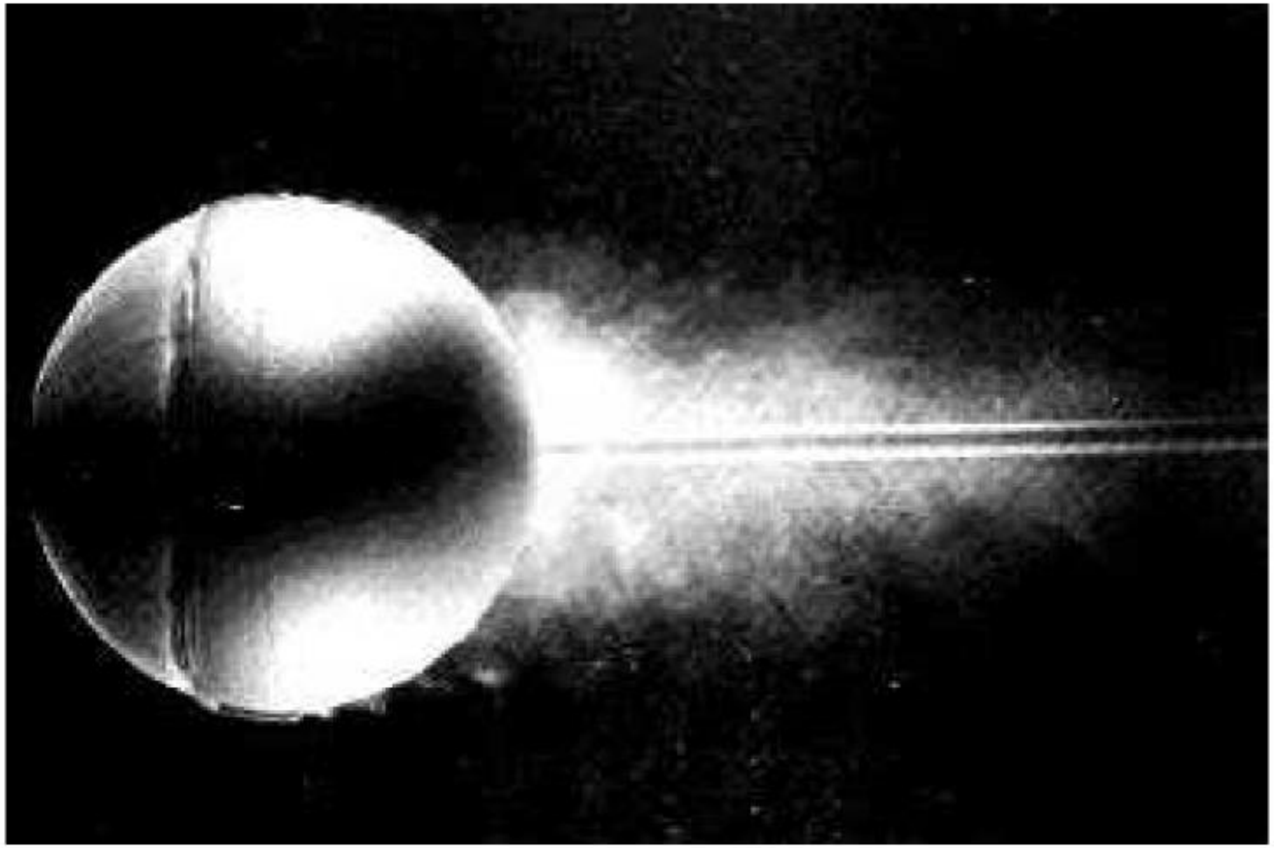
LEITURA_2 - Aerodinâmica de um objecto esférico

Camada limite laminar



LEITURA_2 - Aerodinâmica de um objecto esférico

Camada limite turbulenta



LEITURA_2 - Aerodinâmica de um objecto esférico → Efeito de Magnus

Vamos considerar a situação em que a bola é lançada com rotação.

Na figura do slide seguinte, o eixo de rotação é perpendicular ao plano da fotografia.

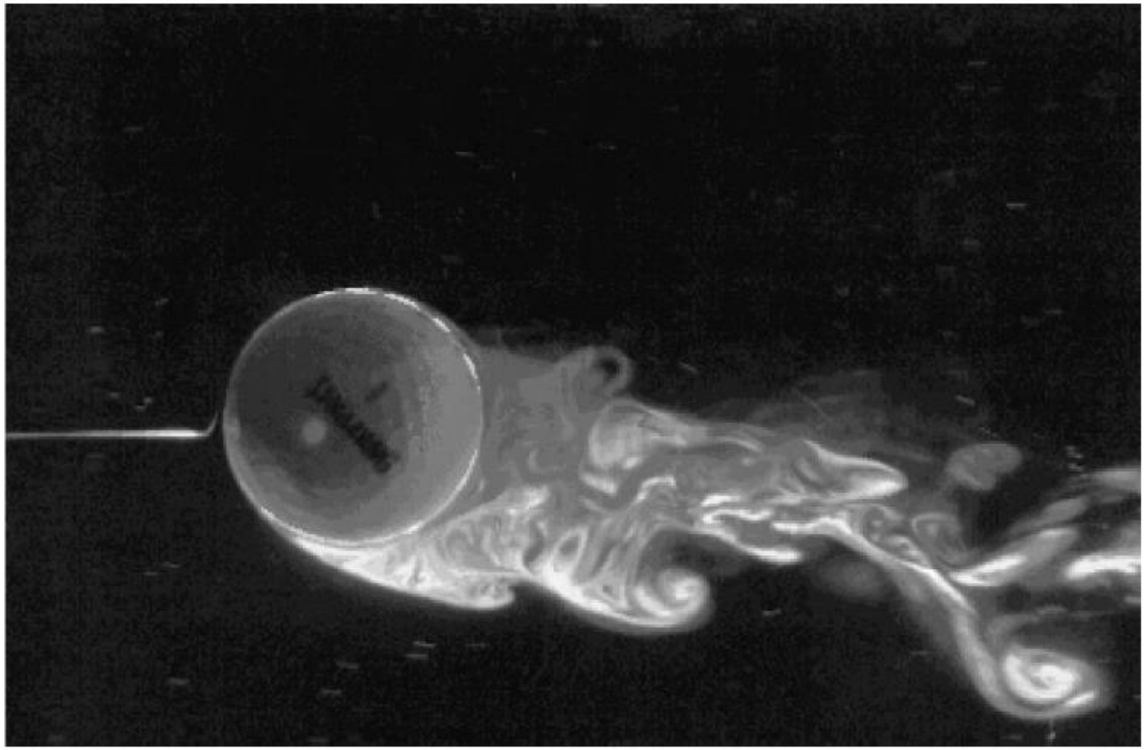
Como a rotação é no sentido horário, a velocidade do ar em relação à superfície superior da esfera é menor que a velocidade do ar relativamente à superfície inferior. A camada limite separa-se primeiro na superfície inferior e o ar é efetivamente desviado para baixo.

A terceira lei de Newton diz-nos que se a bola aplica uma força sobre o ar que o faz desviar para baixo, então o ar exerce uma força sobre a esfera que a faz desviar para cima.

A força devida aos efeitos aerodinâmicos passa a ter duas componentes, uma paralela à velocidade, $\boldsymbol{F_D}$, e outra perpendicular a ela e ao eixo de rotação, $\boldsymbol{F_L}$. (*L de lift*).

LEITURA_2 - Aerodinâmica de um objecto esférico → Efeito de Magnus

Rotação no sentido horário



LEITURA_2 - Aerodinâmica de um objecto esférico → Efeito de Magnus

Parametrização da Força de Magnus

A força de Magnus é perpendicular à velocidade de translação e ao eixo de rotação e é habitualmente parametrizada por:

$$\boldsymbol{F_L} = \frac{1}{2}\, C_L\, \rho\, A\, v^2\, (\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{v}})$$

O parâmetro C_L depende do nºde Reynolds e do parâmetro de rotação (spin)

$$S = \frac{R\,\omega}{v}$$

(e, em princípio, do ângulo entre o eixo de rotação e a velocidade de translação).

LEITURA_2 - Aerodinâmica de um objecto esférico → Efeito de Magnus

Parametrização da Força de Magnus

É preciso ter em atenção que a rotação afeta o coeficiente de arrasto que passa a ser também função do parâmetro S, como no exemplo da bola de ténis do Problema 1.2.

No Problema 1.3, a força de Magnus é parametrizada de uma forma ligeiramente diferente:

$$\boldsymbol{F_L} = \frac{1}{2}\, C_M\, \rho\, A\, R\, (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})$$