



# Física Computacional

2022/2023

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

## Trabalho Prático 4

Problemas de valor fronteira — Valores próprios

### Introdução aos Problemas 4.1 e 4.2.

Uma corda com densidade linear  $\mu$  está sujeita a uma tensão  $T$  e encontra-se fixa nas duas extremidades,  $x = 0$  e  $x = L$ . Sabemos que a corda vibra com modos normais que são soluções da equação:

$$\frac{T}{\mu} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \omega^2 y(x) = 0$$

Resolvendo analiticamente a equação diferencial, conclui-se que os valores possíveis das frequências angulares dos modos normais de vibração são dados por,

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Estas frequências são os valores próprios deste problema. Use  $\mu = 10^{-3}$  kg/m,  $L = 1$  m e  $T = 10^3$  N.

### **Problema 4.1: Método de shooting — determinação da frequência do primeiro modo normal de vibração**

Neste problema vamos encontrar a frequência do modo fundamental pelo método do shooting.

Este método integra o problema desde  $x = 0$  a  $x = L$  usando um dos métodos adequados a problemas de valor inicial. A equação diferencial é ordinária, de segunda ordem.

Há uma ligeira diferença em relação àquelas com que temos trabalhado: a variável independente não é o tempo, mas sim a coordenada  $x$ . Seguindo o procedimento habitual, podemos transformá-la em duas equações diferenciais de primeira ordem acopladas:

$$\begin{cases} \frac{dy'(x)}{dx} = -\frac{\omega^2 \mu}{T} y(x) \\ \frac{dy(x)}{dx} = y'(x) \end{cases}$$

Use o método de Euler-Cromer que estudou anteriormente.

Para isso precisará de  $y(0)$  e  $y'(0)$ . Embora nada seja dito sobre  $y'(0)$ , neste problema o valor da derivada de  $y$  em  $x = 0$  é irrelevante. Se usar o dobro do valor escolhido pelo seu colega do lado, todos os seus valores  $y_k$  vão ser o dobro.

Para a implementação do método do shooting comece por,

- i) integrar numericamente o sistema para a frequência do modo fundamental. Calcule  $\omega_1$ , a partir da expressão para  $n=1$ .

Faça o plot de  $y(x)$ . A partir do gráfico confirme que se trata do modo fundamental. Qual é o valor de  $y(L)$ ?

- ii) Repita os cálculos para  $\omega = 2000$  rad/s. Faça o plot de  $y(x)$ . A partir do gráfico pode concluir se se trata de uma frequência fundamental? Porquê? Qual é o valor de  $y(L)$ ?

Embora conheçamos o valor analítico da frequência do primeiro modo, vamos tomá-la como desconhecida.

● O problema pode colocar-se deste modo: Qual é o valor da frequência que torna  $y(L)$  igual ao do modo fundamental, ie.,  $y(L) = 0$ ? ( $y(L) = 0$  é o nosso valor B). (consulte os slides 24 a 27 da Apresentação 5).

● Para aplicar o método tem que integrar numericamente o problema duas vezes para dois valores iniciais de  $\omega$ , diferentes do valor analítico. Por exemplo 2000 e 3500 rad/s.

● Melhore o valor de omega usando o método da secante (consulte os slides 24 a 27 da Apresentação 5).

- Repita a integração e o método da secante até que o valor de  $y(L)$  esteja tão perto de zero quanto o exigido por uma tolerância definida no programa.

**Problema 4.2: Método das diferenças finitas — determinação da frequência de vários modos normais de vibração**

Defina um conjunto de valores discretos igualmente espaçados da variável independente:

$$[x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_N] = [0, h, \dots, (k-1) \cdot h, \dots, L].$$

Substituindo a segunda derivada da equação diferencial pela sua aproximação por diferenças finitas, obtêm-se  $N-2$  equações que podem ser expressas em notação matricial na forma:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = -\frac{\omega^2 \mu}{T} h^2 \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Esta é uma equação aos valores e vetores próprios da matriz  $A$ ,

$$A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}.$$

Pode calcular os valores próprios da matriz aplicando a função do Matlab

**eigs(A,3,'sm')**

que terá como saída os três menores valores próprios da matriz  $A$ . Determine também os vetores próprios numéricos  $y(x)$ , usando

**[vec,val]=eigs(A,3,'sm').**

**Problema 4.3: Método de diferenças finitas — perfil de temperaturas numa resistência elétrica cilíndrica**

A equação seguinte modela a distribuição de temperatura  $T(r)$  numa resistência elétrica cilíndrica de raio  $R = 1\text{ mm}$  quando a temperatura da superfície externa,  $T(R)$ , é igual à temperatura ambiente  $20^\circ\text{ C}$ . A outra condição fronteira é  $T'(0) = 0$ .

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{Q}{\lambda} = 0$$

Considere que o calor produzido por unidade de tempo por unidade de volume é  $Q = 2.1\text{ MW/m}^3$  e a condutividade térmica é  $\lambda = 0.1\text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$ .

- Escreva a expressão geral das  $N - 2$  equações algébricas que aproximam a equação nos pontos interiores. Use diferenças finitas centradas para as derivadas.
- Escreva as equações para as duas condições fronteira.
- Coloque o problema na forma de uma matriz  $N$  por  $N$ .
- Resolva o problema usando a rotina do Matlab **linsolve** e verifique qual é, e para que valor de  $r$  ocorre, a temperatura máxima.

**Nota:** Para resolver este exercício, consulte os slides 15 a 23 da Apresentação 5. Recomenda-se o uso da forma matricial do slide 23.