Aula 6

EQUAÇÕES às DERIVADAS PARCIAIS:

Problemas de valor inicial

Elíticas, Parabólicas e Hiperbólicas

PDEs parabólicas

A equação de condução do calor

Método de Euler

Método de Crank-Nicolson

03-04-2024

1.Introdução

Uma equação que contém derivadas parciais de uma função desconhecida em ordem a duas ou mais varíáveis independentes designa-se por ***equação às derivadas parcias*** ou ***parcial diferencial* (PDE)**. Em geral uma destas variáveis independentes é o *t* (tempo) e as restantes são variáveis espaciais.

Uma das mais importantes PDEs é a ***equação de onda***, que pode modelar ondas em cordas vibrantes, e membranas (ondas elásticas em sólidos), em acústica, em electromagnetismo e em reatores nucleares, por exemplo. Outra PDE é a ***equação de difusão do calor*** que nos dá a temperatura ao longo de uma barra (1D), ou placa (2D), e a ***equação de Laplace*** na electrostática, e na hidrodinâmica.

As PDEs são equações bastante importantes em vários domínios, nomeadamente, na dinâmica, na elasticidade, na transferância de calor, no campo electromagnético e na mecânica quântica. Têm uma gama de aplicações mais abrangente que as ODEs.

Tal como nas ODEs a ***ordem* da equação** é a da derivada mais elevada presente na mesma. As mais comuns em engenharia são as de 2ª ordem.

Exemplos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

***Questão*: *são lineares*? *E de que ordem*?**

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 + 6\,\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu\,\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

Classificação de PDEs de 2ª ordem de coeficientes constantes

As PDEs de segunda ordem (ordem da derivada de maior ordem presente na equação) de coeficientes constantes são do tipo,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + H = 0$$

Onde *A*, *B*, *e C* são funções de *x* e de *y*, e *H* é função de *x*, *y*, *u*, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

Ou de modo equivalente,

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = g(x, y)$$

E podem **classificar-se** da forma:

- Equações **elípticas** se $B^2 - 4AC < 0$
- Equações **parabólicas** se $B^2 - 4AC = 0$
- Equações **hiperbólicas** se $B^2 - 4AC > 0$

03-04-2024

$B^2 - 4\,A\,C$	Categoria	Exemplo
< 0	Elítica	$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ **Equação de Laplace** (estado estacionário (2D), (3D))
$= 0$	Parabólica	$\frac{\partial T}{\partial t} = k' \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, $\frac{\partial T}{\partial t} = k' \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$ **Equação de Condução do Calor** (1 D) e (2D)
> 0	Hiperbólica	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ **Equação de Onda** (1D) e (2D)

Cada categoria de PDEs está associada a um tipo específico de problema em engenharia.

Equações do ***tipo elítico*** são típicas de estados estacionários. Está característica está associada à ausência da derivada temporal, como se pode verificar pela equação de Laplace, apresentada na tabela anterior. Estas equações são empregues para obter uma distribuição *estacionária* de uma variável desconhecida no espaço, como por exemplo, o potencial elétrico na eletrostática ou a distribuição de temperatura numa placa de um dado material, sujeita a condições fronteira bem conhecidas.

Em contraste com as equações do tipo elítico, as equações do ***tipo parabólico*** caracterizam a evolução de uma variável desconhecida quer no espaço quer no tempo. Estas características estão associadas à presença das derivadas espaciais e da derivada temporal, como se pode observar a partir da equação de condução de calor, apresentada na tabela. Este tipo de equações é referido como *equações de propagação ou de evolução*, porque a solução se 'propaga' ou varia no tempo.

E por fim, as equações do ***tipo hiperbólico*** também estão associadas a problemas de *propagação*.

No entanto dependem da 2ª derivada em relação ao tempo e não da 1ª, como no caso das parabólicas, como se pode observar pela equação de onda. Como consequência a solução oscila. É o caso da transmissão de perturbações em cordas, barras, da transmissão do som, e de sinais eléctricos em circuitos.

2. Equações Parabólicas

As PDE estudadas nesta aula são **PDE parabólicas.** Vão ser estudadas como generalizações dos problemas de valor inicial encontrados no estudo de ODE. **(Problemas de valor inicial)**

- Equação de condução do calor:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

A temperatura no instante inicial, t = 0, é conhecida , ie., T(x,0) é conhecida para todos os valores de x. Por outro lado, os valores de T(x,t) são conhecidos na fronteira de x, (x = min e x = xmax), para todos os instantes.

- Equação de paraxial (a estudar na aula sobre Transformadas de Fourier):

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

É conhecida a forma do feixe em z = 0, ou seja, *q(x,0)* , e o seu comportamento na fronteira de x para todos os valores de z.

Problemas de valor inicial: *Semi-discretização*

Um dos métodos de resolução numérica deste tipo de PDE consiste em usar diferenças finitas para as derivadas referentes a uma das variáveis independentes, convertendo-se a PDE num sistema de ODEs.

Como exemplo, considere-se a equação do calor a uma dimensão:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

Com as seguintes condições inicial,

$$T(x,0) = g(x) \qquad \text{(CI)}$$

E fronteira,

$$T(0,t) = T(L,t) = 0. \qquad \text{(CF)}$$

Resolução pelo método de EULER

Aproximando a segunda derivada por diferenças finitas centradas, obtém-se um conjunto de (N_x-2) ODEs:

$$\frac{\partial T(i,t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{T(i-1,t)-2T(i,t)+T(i+1,t)}{(\Delta x)^2}$$

que poderão ser resolvidas por um dos método de resolução de problemas de valor inicial para ODE, com cuidados relativos à estabilidade dos mesmos.

MÉTODO de EULER

$$T(i,n+1) = T(i,n) + \frac{k\,\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}\left[T(i-1,n)-2T(i,n)+T(i+1,n)\right]$$

Estabilidade do método de EULER

No entanto, o método de Euler aplicado à equação de condução de calor é apenas ***condicionalmente estável.***

No estudo de estabilidade apresentado na aula 3, considerou-se uma linearização da equação diferencial. Neste caso tem-se um sistema de equações lineares, que pode ser representado na forma matricial do seguinte modo:

$$\frac{dT}{dt} = AT$$

Sendo A uma matriz $(N_x - 2) \times (N_x - 2)$ com 3 diagonais não nulas e constantes, cujos valores próprios são,

$$\lambda_l = \frac{2k}{c\rho(\Delta x)^2}\left(cos\frac{\pi l}{N_x - 1} - 1\right), \qquad l = 1, 2, \dots, N_x - 2.$$

Estabilidade do método de EULER

Todos estes valores próprios são reais negativos. Para que o método de Euler seja estável, todos os valores próprios λ_l, têm que satisfazer

$$\lambda_l \Delta t \geq -2$$

Se esta condição for satisfeita pelo menor dos valores próprios (o maior em termos absolutos), também será satisfeita por todos os outros.

Quanto mais pequeno for o valor do cosseno na expressão de λ_l, menor será o valor próprio. Quando l se aproxima de N_x -1 , o cosseno aproxima-se de −1. Então, o menor dos valores próprios é

$$\lambda_{N_x-2} = \frac{2k}{c\rho(\Delta x)^2}\left[cos\left(\frac{N_x-2}{N_x-1}\pi\right)-1\right]$$

$$\simeq -\frac{4k}{c\rho(\Delta x)^2}$$

Estabilidade do método de EULER

Substituindo no critério de estabilidade,

$$-\frac{4k}{c\rho(\Delta x)^2}\Delta t \geq -2$$

Para este problema, o método de Euler é condicionalmente estável,

Critério de Estabilidade

$$\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

O mesmo resultado pode ser obtido pela análise de estabilidade de von Neumann. Consulte a LEITURA 1, no final do capítulo.

Resolução pelo método de CRANK-NICOLSON

Devido às exigências de passo para assegurar a estabilidade da solução numérica, opta-se muitas vezes pelo **método de Crank-Nicolson**.

$$T(i,n+1) = T(i,n) + \frac{k}{2c\rho(\Delta x)^2}[T(i-1,n+1) - 2T(i,n+1) + T(i+1,n+1)$$

$$+T(i-1,n) - 2T(i,n) + T(i+1,n)]$$

Método de Crank-Nicolson

Fazendo um rearranjo de termos, de forma a que os termos em T(-, $n+1$) fiquem agrupados no 1º membro e os termos em T(-, n) fiquem agrupados no 2º membro, obtém-se,

MÉTODO de CRANK-NICOLSON

$$-T(i-1,n+1)+\left(\frac{2}{\eta}+2\right)T(i,n+1)-T(i+1,n+1)$$
$$=T(i-1,n)+\left(\frac{2}{\eta}-2\right)T(i,n)+T(i+1,n)$$

Com,

$$\eta=\frac{k}{c\rho(\Delta x)^2}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 & & & & \\ -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 \\ & & & & -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(2,n+1) \\ T(3,n+1) \\ \vdots \\ T(Nx-2,n+1) \\ T(Nx-1,n+1) \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
T(1,n+1) + T(1,n) + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T(2,n) + T(3,n) \\
T(2,n) + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T(3,n) + T(4,n) \\
\\
\vdots \\
T(Nx-3,n) + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T(Nx-2,n) + T(Nx-1,n) \\
T(Nx-2,n) + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T(Nx-1,n) + T(Nx,n) + T(Nx,n+1)
\end{bmatrix}
$$

<u>**Em resumo,**</u> para o método de Crank-Nicolson,

Método de Crank-Nicolson

- Devido às condições fronteira, é preciso adicionar termos extra (a vermelho) ao primeiro e ao último elemento do vetor **b.**

- A matriz é tridiagonal.

- O método consiste em resolver um sistema de equações algébricas cuja matriz é tridiagonal. Este processo é repetido para cada iteração no tempo.

- O método de Crank-Nicolson, é **incondicionalmente estável** neste caso, pois os valores próprios são números reais negativos.

Leitura 1 –Método de Euler

Análise da estabilidade de von Neumann

Considere-se uma equação genérica com a forma,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

com $\phi = \phi(x,t)$.

Condições fronteira $\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0.$

Condição inicial $\phi(x,0) = g(x)$

Considerando uma rede de N+1 pontos equiespaçados entre si, a coordenada x, pode ser discretizada como $x_i = x_{i-1} + \Delta x$

A discretização pelo método de Euler, dá-nos

$$\phi(i,n+1) = \phi(i,n) + \frac{\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[\phi(i-1,n) - 2\phi(i,n) + \phi(i+1,n)\right]$$

Considerando uma solução do tipo,

$$\phi(i,n) = \sigma^n e^{ikx_i}$$

E inserindo na equação discretizada, obtém-se:

$$\sigma^{n+1}e^{ikx_i} = \sigma^n e^{ikx_i} + \frac{\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\,\sigma^n\left(e^{ikx_{i-1}} - 2e^{ikx_i} + e^{ikx_{i+1}}\right)$$

Note que, $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ e $x_{i-1} = x_i - \Delta x$

Dividindo ambos os membros da equação anterior por,

$$\sigma^n e^{ikx_i}$$

Tem-se, $\sigma = 1 + \left(\frac{\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)[2\,cos(k\,\Delta x) - 2]$

Para que a solução permaneça estável, $|\sigma| \leq 1$, (caso contrário σ^n cresce ilimitadamente),

$$\left|1 + \left(\frac{\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)[2\,cos(k\,\Delta x) - 2]\right| \leq 1$$

Ou seja,

$$-1 \leq 1 + \left(\frac{\alpha\ \Delta t}{(\Delta x)^2}\right)[2\ cos(k\ \Delta x) - 2] \leq\ 1$$

Esta desigualdade $[2\ cos(k\ \Delta x) - 2] \leq\ 1$, é sempre verdadeira, pois $2\ cos(k\ \Delta x) - 2$ é sempre menor ou igual a zero.

Com relação à desigualdade esquerda, pode reescrever-se como,

$$\left(\frac{\alpha\ \Delta t}{(\Delta x)^2}\right)[2\ cos(k\ \Delta x) - 2] \geq\ -2$$

Ou de modo equivalente,

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\alpha[1 -\ cos(k\ \Delta x)]}$$

03-04-2024

O caso mais restritivo ocorre quando $cos(k\ \Delta x) = -1$. Então para que o método seja estável, i.e., para que a solução não cresça ilimitadamente, Δt , deve verificar a seguinte condição,

$$\boldsymbol{\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha}}$$

Note que:

● a forma da solução assumida, $\sigma^n e^{ikx_i}$, pressupõe que a mesma é periódica, com periodo espacial $2\pi/k$;

● A análise de estabilidade de von Neumann nem sempre é aplicável.