Trabalho Prático

TRANSFORMADAS DE FOURIER

E

EQUAÇÃO DE KORTEWEG-DE-VRIES

102901 Martim Freitas de Sousa Gil
107403 João Nuno da Silva Luís
108072 João Nuno Almeida Marques
109680 Délcio da Costa Amorim

Parte I

Cálculo da derivada de 4ª ordem da função usando:

i) Transformadas de Fourier
ii) Método das Diferenças Finitas dada pela seguinte expressão

$$y_k^{iv} = \frac{y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2}}{h^4} + O(h^2)$$

Função em questão:

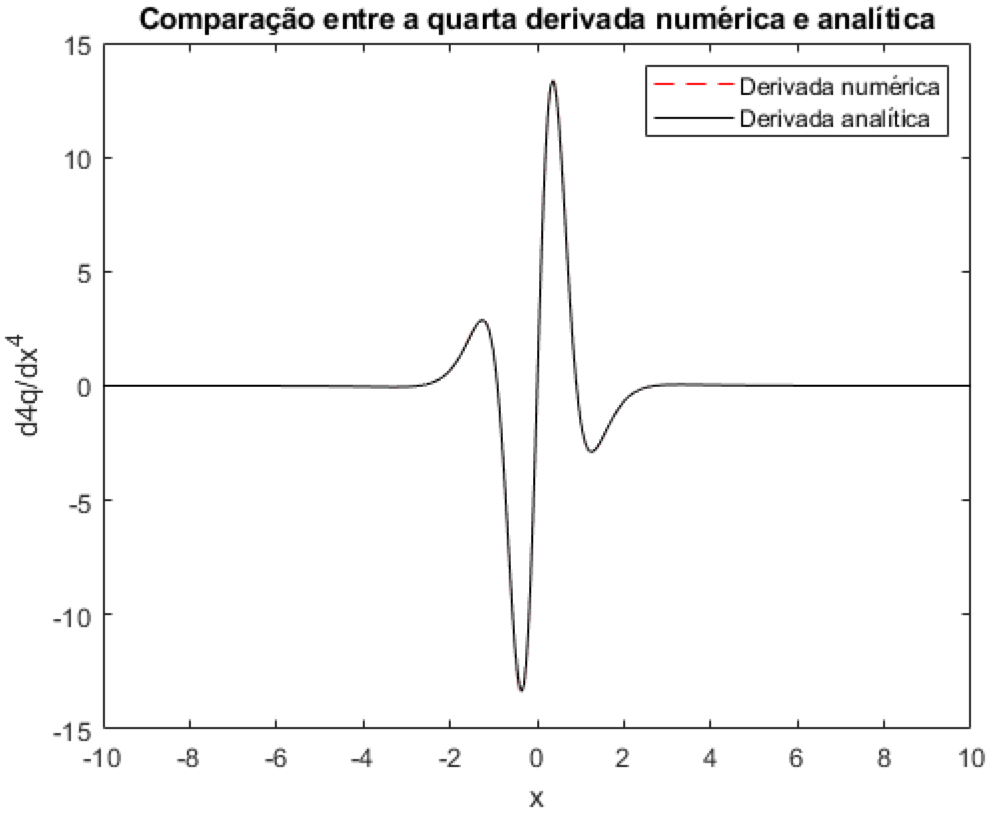
$$q = \tanh(x)\,\mathrm{sech}(x)$$

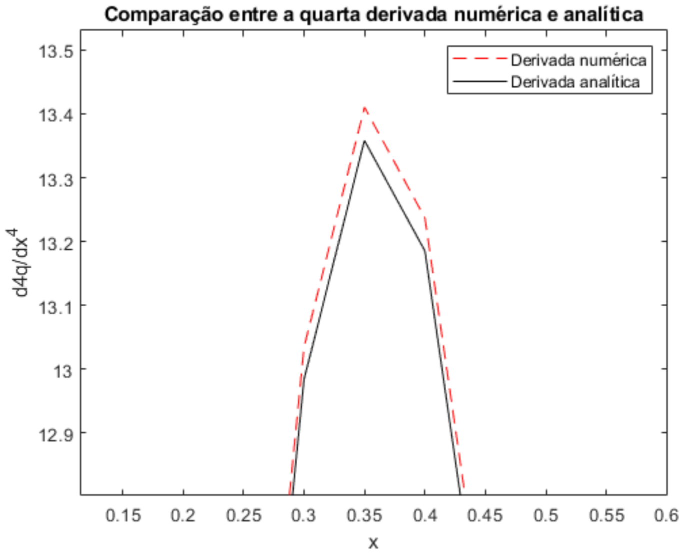
Derivada de 4ª ordem obtida no Wolfram|Alpha (solução analítica) :

$$\frac{\partial^4 q}{\partial x} = \tanh(x)\,\mathrm{sech}(x)(\tanh(x)^4 + 61\,\mathrm{sech}(x)^4 - 58\tanh(x)^2\,\mathrm{sec}h(x)^2$$

i) Transformadas de Fourier

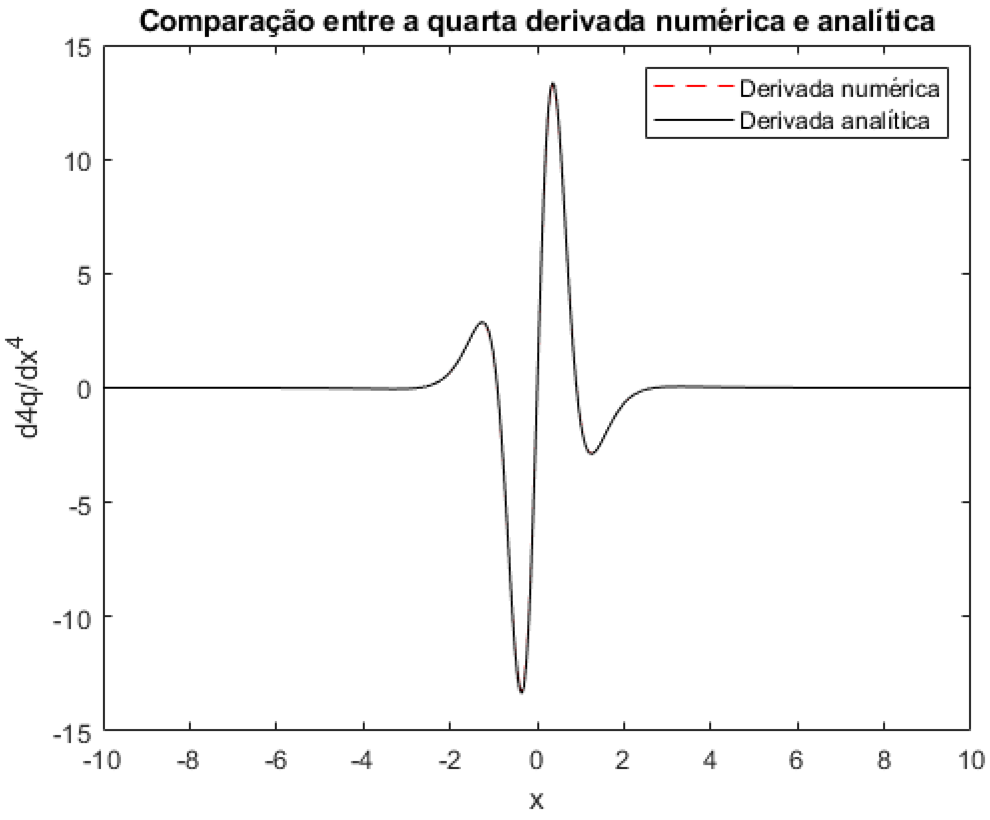
Condições iniciais:
h = 0.05
N = 1024

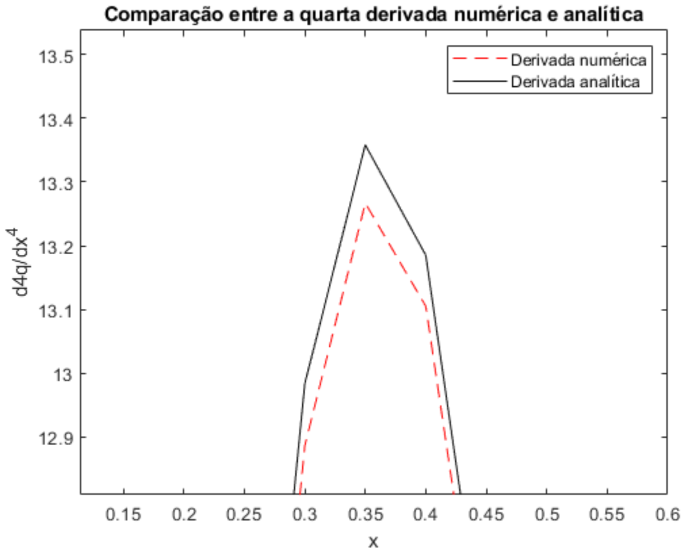




ii) Método das Diferenças Finitas

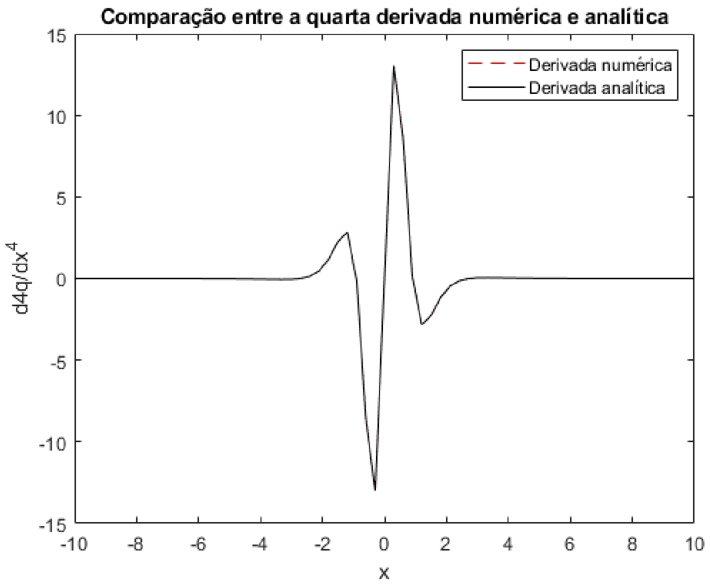
Condições iniciais:
h = 0.05
N = 1024

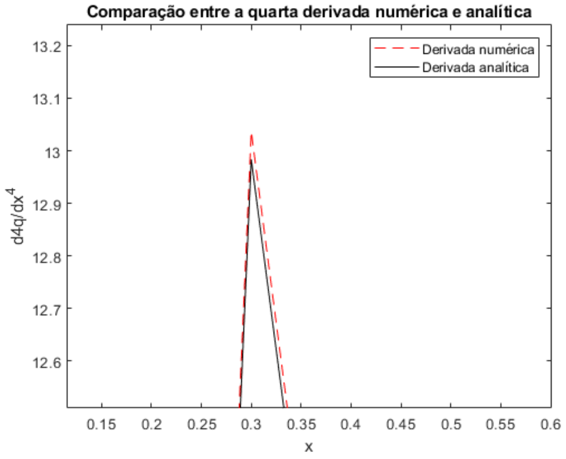


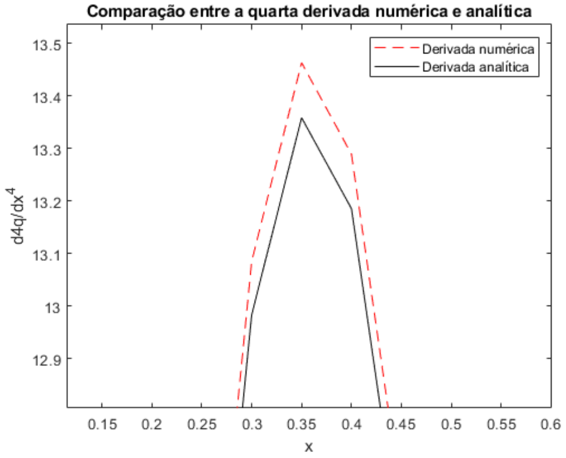


Variando os valores de h e N

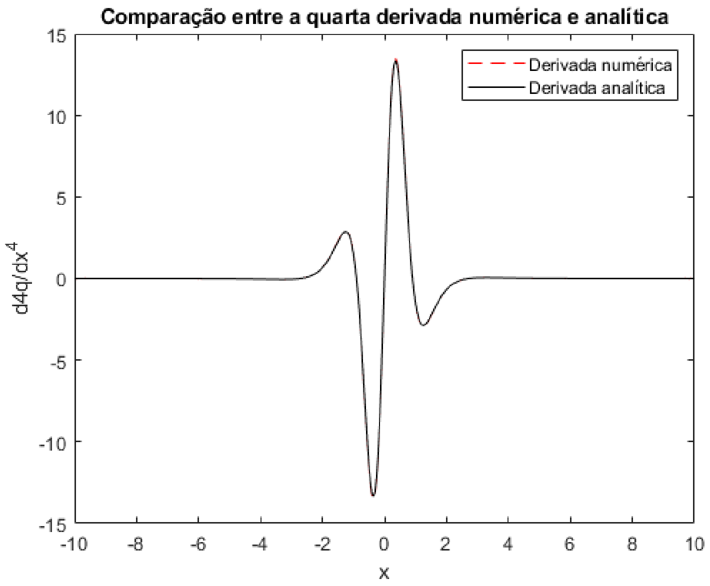
Condições iniciais: h = 0.3 N = 1024







Condições iniciais: h = 0.05 e N = 512



Parte II

Equação de Korteweg-De-Vries

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} - \alpha\, q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

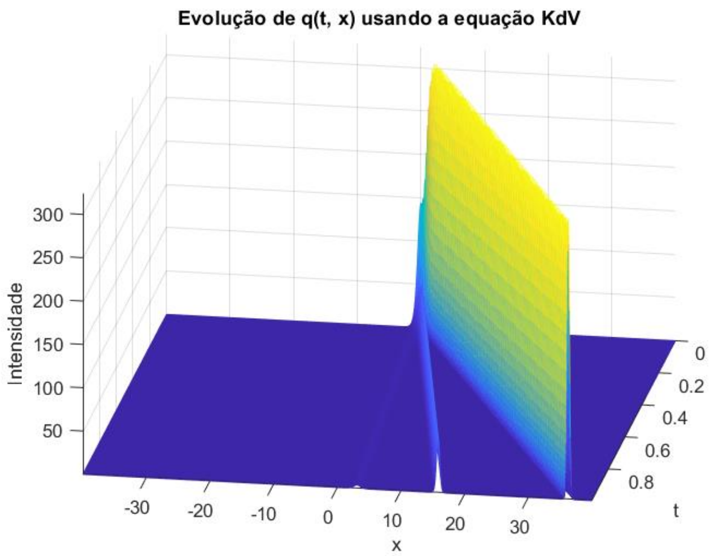
Runge-Kutta 4ª ordem:

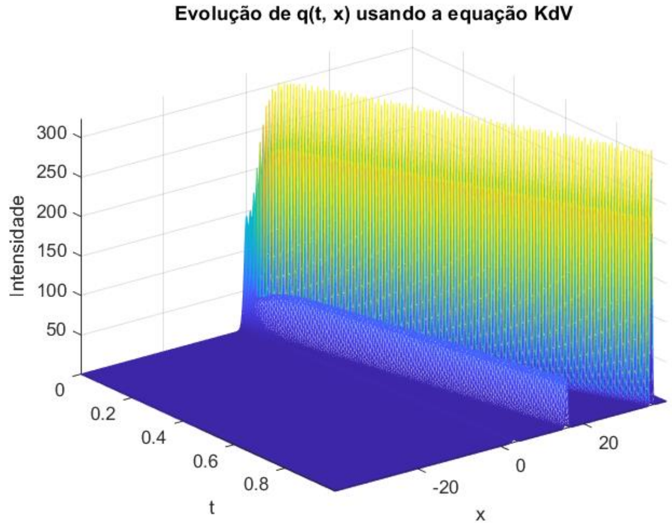
```
qx=zeros(Nt,N);
qx(1,:)=-12.*sech(x).^(2);
t1=(1i.*w);
t3=(1i.*w).^3;

for n = 1:Nt-1
    q=qx(n,:);

    r1 = (-ifft(t3.*fft(q)) + alfa.*q.*ifft(t1.*fft(q)));
    v = q + r1*dt/2;
    r2 = (-ifft(t3.*fft(v)) + alfa.*v.*ifft(t1.*fft(v)));
    v2 = q + r2*dt/2;
    r3 = (-ifft(t3.*fft(v2)) + alfa.*v2.*ifft(t1.*fft(v2)));
    v3 = q + r3*dt;
    r4 = (-ifft(t3.*fft(v3)) + alfa.*v3.*ifft(t1.*fft(v3)));

    qx(n+1,:)= qx(n,:) + 1/6*(r1 + 2*r2 + 2*r3 + r4)*dt;
end
```





ALÍNEA A)

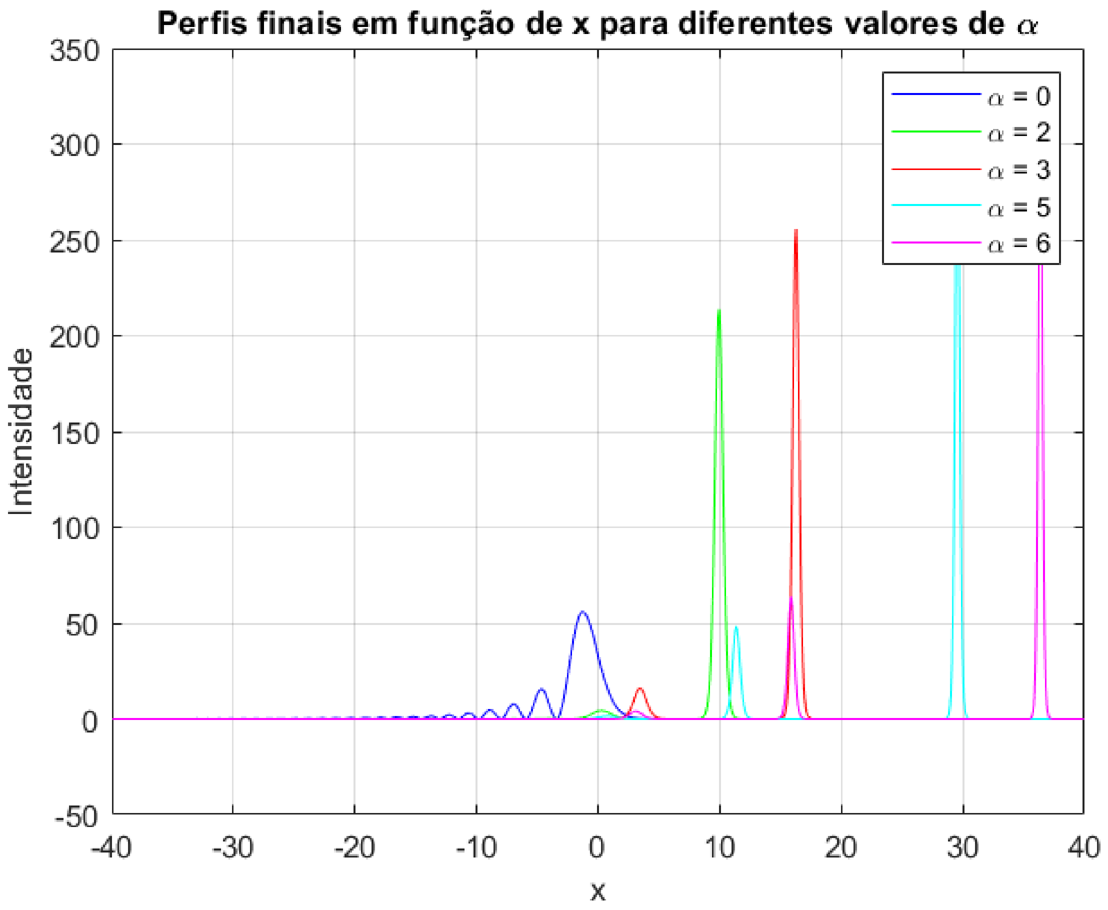
- **Equação de Korteweg-De-Vries:**

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} - \alpha q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

- **Condição inicial:**

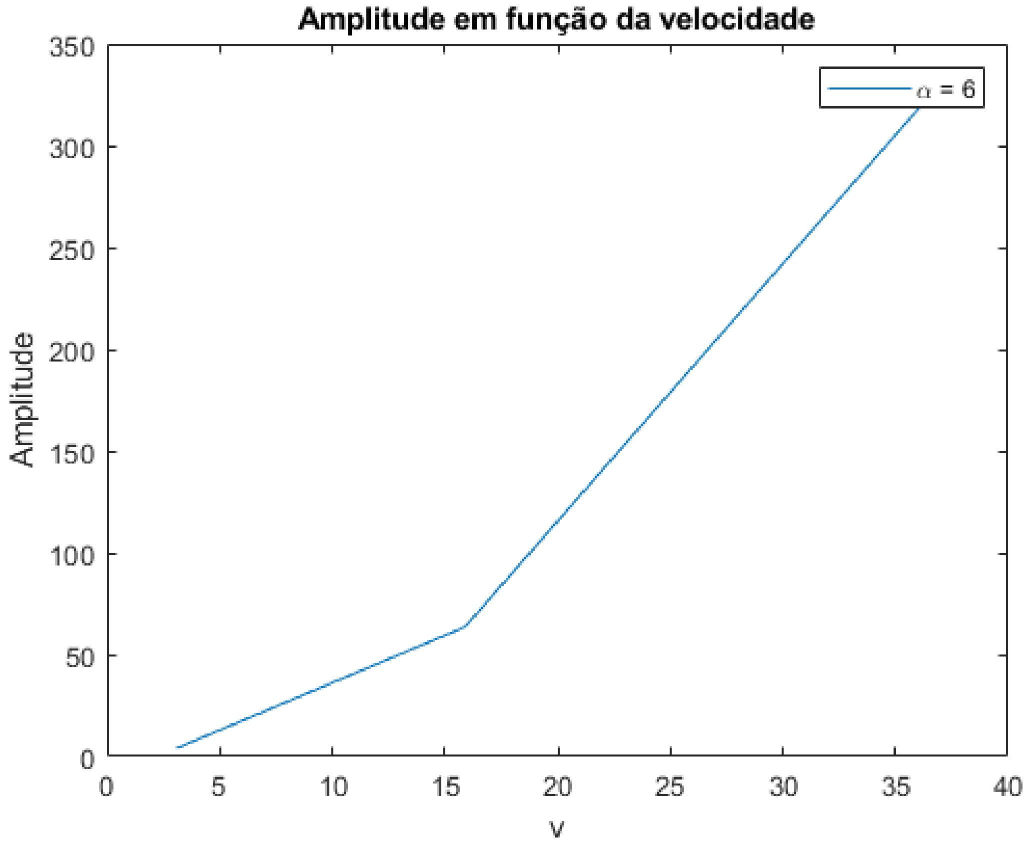
$$q(0, x) = -12\, sech^2 x$$

ALÍNEA B)

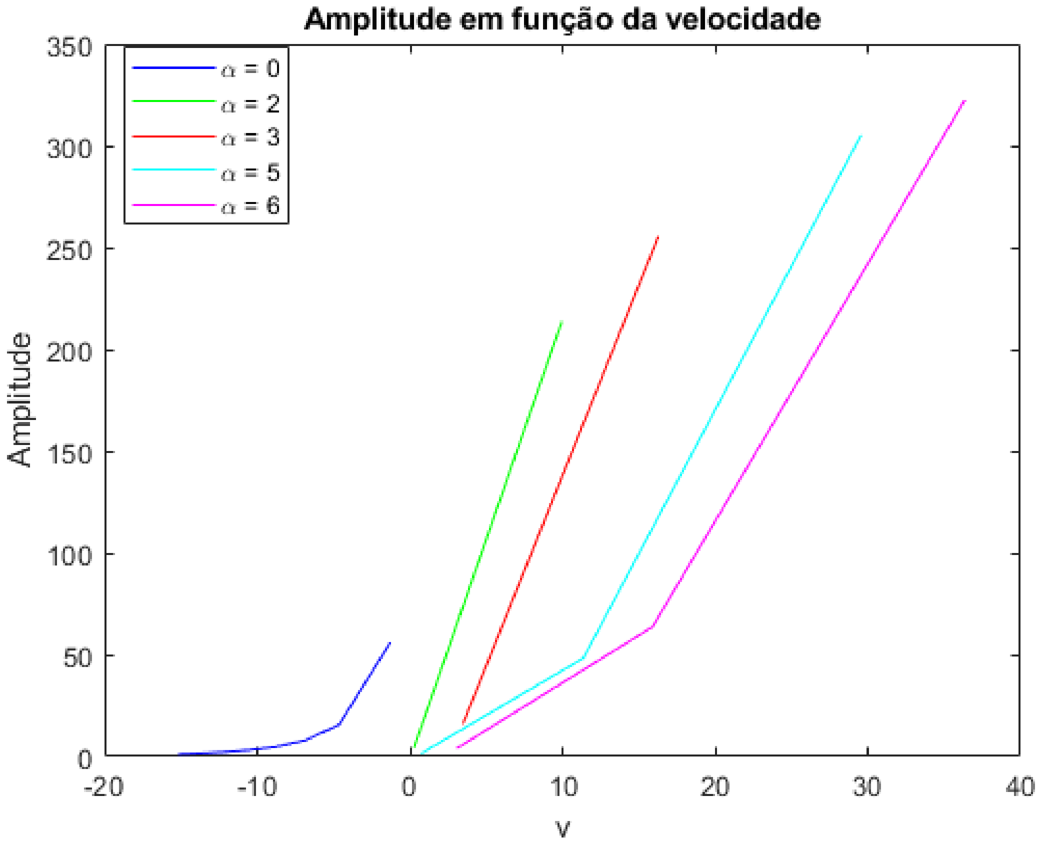


Perfis finais em função de x para diferentes valores de α
Intensidade
x
α = 0
α = 2
α = 3
α = 5
α = 6
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40

ALÍNEA C)



Amplitude em função da velocidade
Amplitude
v
α = 6



Amplitude em função da velocidade
Amplitude
v
α = 0
α = 2
α = 3
α = 5
α = 6

ALÍNEA D)

Forma do perfil inicial:

$$q(t_0, x1) = -12\ \frac{3 + 4\cosh(2x1 + 24 * t_0) + \cosh(4x1)}{(3\cosh(x1\ - 12t_0) + \cosh(3x1 + 12t_0))^2}$$

Com:

$x1 = x + 60$

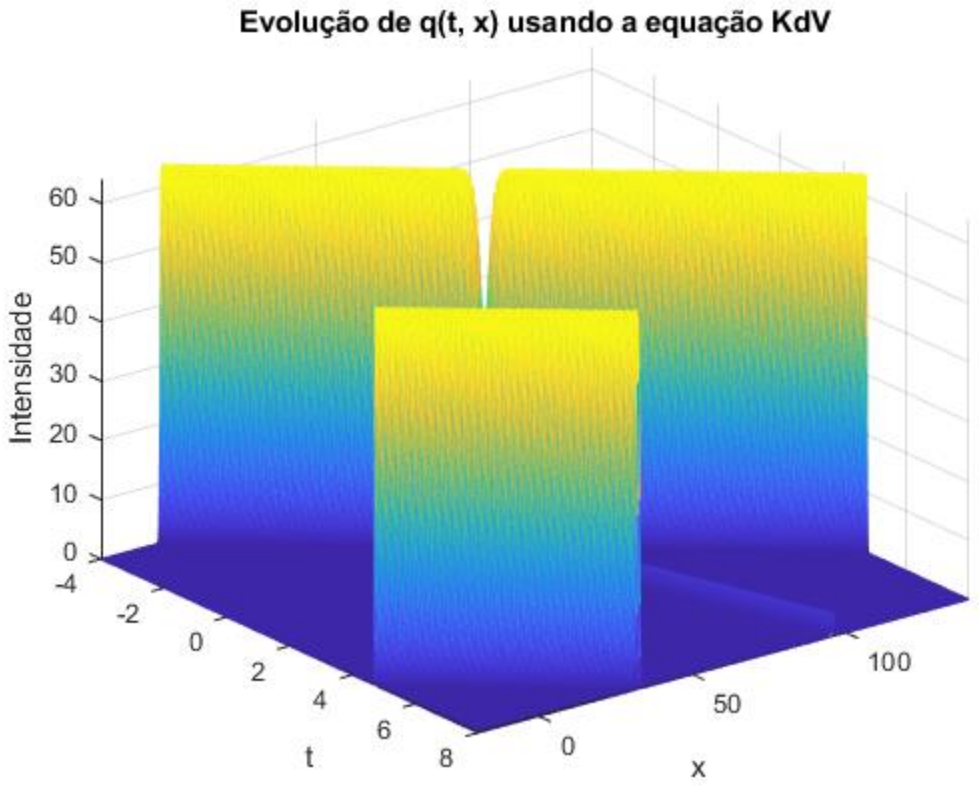
$t_0 = -4$

$t_{final} = 8$

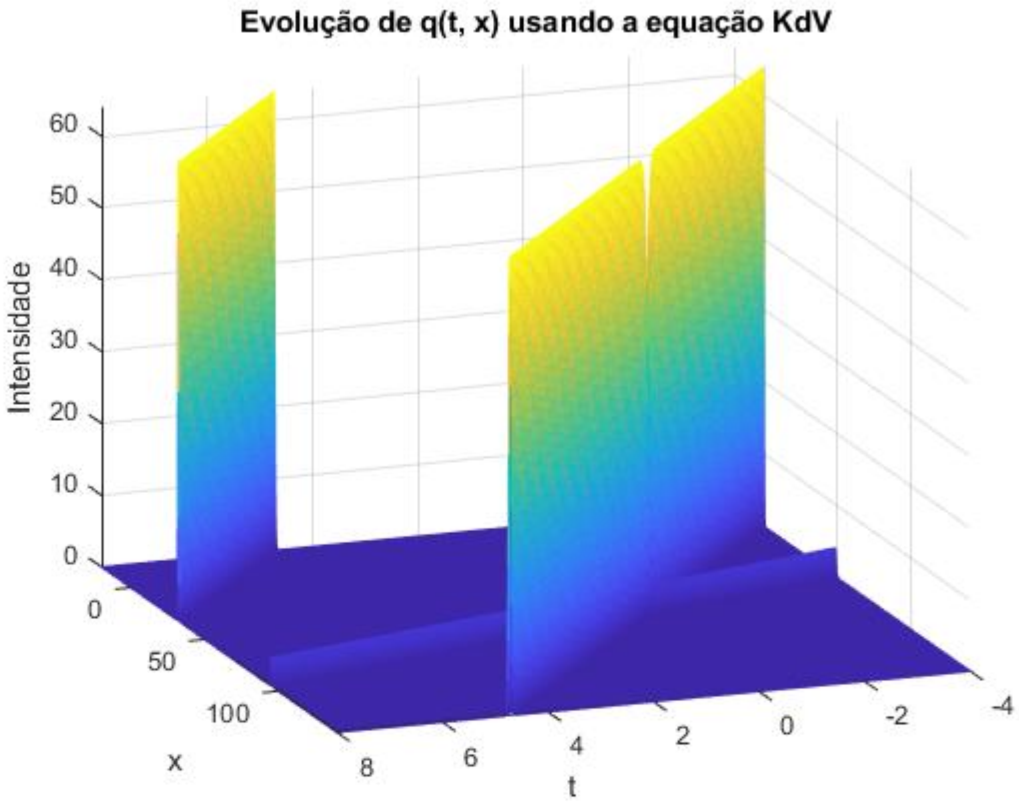
$L = 160$

$N = 1024$

ALÍNEA D)



Evolução de q(t, x) usando a equação KdV
Intensidade
60
50
40
30
20
10
0
-4
-2
0
2
4
6
8
t
0
50
100
x



Evolução de q(t, x) usando a equação KdV
Intensidade
60
50
40
30
20
10
0
0
50
100
x
8
6
4
2
0
-2
-4
t

ALINEA E)

- **Nova equação de Korteweg-De-Vries, na forma generalizada :**

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + (n+1) * (n+2) * q^n \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

- **Condição inicial:**

$$q(0,x) = (\frac{C}{2} * sech^2\left(\frac{\sqrt{C}}{2} * n * x\right))^{\frac{1}{n}}$$