

Aulas 3 e 4

● **PVI : Métodos de Runge-Kutta**

Método de Runge-Kutta de 2ª ordem (RK2)

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4)

Método de Runge-Kutta de passo adaptativo

Representação de Butcher

● **Consistência e convergência**

● **Estabilidade**

Métodos de Euler, de Euler-Implicito, de Crank-Nicolson, e de RK2 e RK4



Métodos de Runge-Kutta

Vimos que o erro local em cada iteração do método de Euler é proporcional a h^2 e que o erro global é proporcional a h^1 . Então, diz-se que,

A ordem (de convergência) do método de Euler é 1 !

O método de Euler pode ser adequado para problemas simples, no entanto para problemas mais complexos é conveniente usar métodos numéricos de ordem superior. Tem que ser encontrado um equilíbrio entre a complexidade e a ordem do método a usar para cada problema.

O método tem também que ser *estável* para esse problema, mas vamos deixar essa discussão para mais tarde!

Os métodos de **Runge-Kutta (RK)** têm a precisão da aproximação em série de Taylor sem ser necessário o cálculo de derivadas de ordem elevada.



Métodos de Runge-Kutta

Por exemplo, pretende-se obter um método de ordem 2. Para tal considera-se na aproximação em série de Taylor mais um termo na expansão,

$$y_{k+1} = y_k + h f_1(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2!} f_2(t_k, y_k)$$

Sendo,

$$f_1(t, y) = \frac{dy}{dt} \quad e \quad f_2(t, y) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

O cálculo das derivadas de ordem superior é normalmente complexo.

Como contornar este problema?

Para tal, recordemos o método de Crank-Nicolson:

$$y_{k+1} = y_k + [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})] \times \frac{h}{2}$$



Métodos de Runge-Kutta

Este método é de ordem 2, e não é necessário o cálculo de derivadas de ordem superior a 1, para se atingir esta precisão! A 1ª derivada é calculada em dois instantes diferentes, t_k e t_{k+1} . (Recorde que o problema deste método se deve ao facto de ser implícito).

EXEMPLO: Vamos tentar encontrar um método que use a primeira derivada calculada explicitamente em t_k e em t_{k+1} . Vamos chamar r_1 e r_2 a esses dois valores:

$$r_1 = f(t_k, y_k) \quad e \quad r_2 = f(t_{k+1}, y_{k+1}) = f(t_{k+1}, y_k + r_1 \times h)$$

O que se fez foi calcular a função incremento f , ('o declive'), no ponto t_k, y_k , i.e., r_1 . Esta função r_1 , permite obter uma 1ª estimativa de $y_{k+1} = y_k + r_1 \times h$. Esta 1ª estimativa permite calcular a função incremento r_2 , no ponto t_{k+1}, y_{k+1} .

À semelhança do método de Crank-Nicolson, pode considerar-se uma nova estimativa para o valor de y_{k+1} , a seguinte expressão:

$$y_{k+1} = y_k + \left[\frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2 \right] \times h$$

Questão: Será este método de ordem 2? É convergente?



Métodos de Runge-Kutta

Vamos introduzir **os métodos de Runge-Kutta explícitos** de uma forma mais genérica.

Assim,

Em cada iteração, a função $f(t, y)$ é calculada s vezes, obtendo-se sucessivamente

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_s.$$

No nosso exemplo $s = 2$.

Os valores de $r_1, r_2, r_3, \dots, r_s$ são calculados para valores da variável independente t , entre t_k e t_{k+1} , dados respetivamente por $t_k + c_1 h, t_k + c_2 h, \dots, t_k + c_s h$.

No nosso exemplo $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$.

OBS: $c_1 = 0$ é inevitável para um método explícito, mas em relação aos outros valores de c , para já sabemos que não serão superiores a 1.



Métodos de Runge-Kutta

O valor de r_i , para cada $0 < i \leq s$, é calculado a partir dos $i-1$ valores de r calculados previamente:

$$r_i = f(t_k + c_i \times h, y_k + [a_{i1} r_1 + \dots + a_{i(i-1)} r_{i-1}] \times h)$$

A notação pode confundir um pouco.

Para simplificar, vejamos o exemplo para $i=3$:

$$r_3 = f(t_k + c_3 \times h, y_k + [a_{31} r_1 + a_{32} r_2] \times h)$$

No nosso exemplo só existe o elemento

$$a_{21} = 1$$



Métodos de Runge-Kutta

MÉTODOS de RUNGE-KUTTA

Finalmente, quando todos os s valores de r já foram calculados, a estimativa para y_{k+1} obtém-se a partir de uma média ponderada dos valores de r ,

$$y_{k+1} = y_k + (b_1 r_1 + b_2 r_2 + \cdots + b_s r_s) \times h$$

No nosso exemplo,

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad e \quad b_2 = \frac{1}{2}$$

É fácil de perceber que a soma dos pesos tem que dar 1:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_s = 1$$



Métodos de Runge-Kutta

Cada método de Runge-Kutta pode ser representado sinteticamente por um quadro de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}$$

Um método explícito com $s=3$, por exemplo, terá um quadro genérico,

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$



Métodos de Runge-Kutta

OBS1: para ordens p iguais ou inferiores a 4 é possível construir métodos de Runge-Kutta em que o número m de valores de r a determinar é igual à ordem do método, mas isso exige que os valores, quer dos vetores c e b quer dos elementos da matriz A , obedeam a certas relações cujo estudo não se enquadra nesta unidade curricular. Por exemplo, para se contruir um método de ordem 5, já é necessário calcular e usar pelo menos 6 valores diferentes de r .

OBS2: *quando estiver a programar métodos de Runge-Kutta tem que ser muito cuidadoso!* Pequenos enganos podem significar que está a escrever um método de ordem inferior à desejada e isso pode não ser observável nos gráficos dos resultados. Como exemplo, pode acontecer escrever r_2 num sítio onde deveria estar r_3 e o método passa a estar completamente errado, no sentido em que passa a ter uma ordem inferior à pretendida.



Métodos de Runge-Kutta

Voltando ao exemplo apresentado, e à questão colocada: *Será este método de ordem 2? E é convergente?* É de facto um método de ordem 2 e é convergente(?).

O seu quadro de Butcher, como se viu, é,

0		
1	1	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

O quadro de Butcher do método de Euler é simplesmente,

0	
	1



Um método de Runge-Kutta de segunda ordem (RK2)

No Trabalho 3 vamos usar o método de Runge-Kutta de segunda ordem com o seguinte quadro de Butcher:

0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0 1

Descrito de outra forma,

$$r_1 = f(t_k, y_k)$$

$$r_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 \times \frac{h}{2}\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + r_2 \times h$$

Este método de Runge-Kutta de segunda ordem também é conhecido por método de **Euler-Richardson**.



EXEMPLO 1 – Aplicação de um método RK2 a uma equação de 2ª ordem

Já vimos que uma equação de 2ª ordem, é equivalente a um sistema de duas equações de 1ª ordem,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = f(t, y, v) \end{cases}$$

Aplicando-se o método RK2 ao sistema,

$$\begin{cases} r_{1v} = f(t_k, y_k, v_k) \\ r_{1y} = v_k \\ r_{2v} = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_{1y} \times \frac{h}{2}, v_k + r_{1v} \times \frac{h}{2}\right) \\ r_{2y} = v_k + r_{1v} \times \frac{h}{2} \end{cases}$$



EXEMPLO 1 – Aplicação de um método RK2 a uma equação de 2ª ordem

Obtém-se:

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k + r_{2v} \times h \\ y_{k+1} = y_k + r_{2y} \times h \end{cases}$$

OBS: note que tem que calcular primeiro r_{1v} e r_{1y} antes de calcular r_{2v} e r_{2y} (e assim sucessivamente, se o método for de ordem p superior a 2).



Um método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)

No trabalho 3 vamos usar o seguinte método de Runge-Kutta de quarta ordem:

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$r_1 = f(t_k, y_k)$$

$$r_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 \times \frac{h}{2}\right)$$

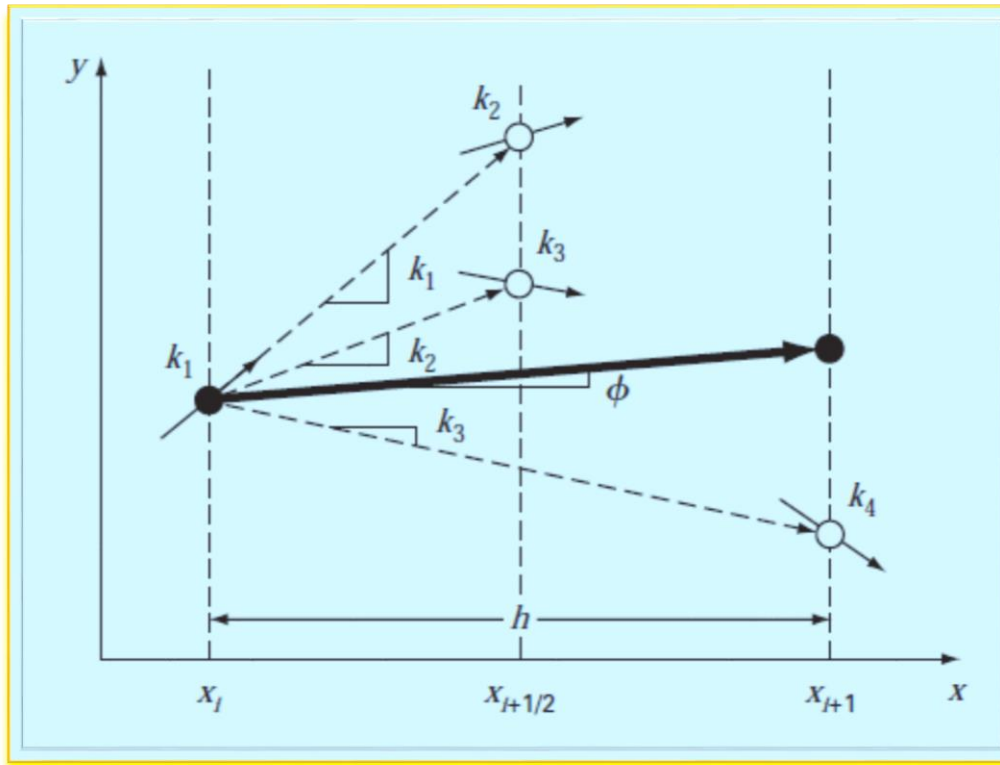
$$r_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 \times \frac{h}{2}\right)$$

$$r_4 = f(t_k + h, y_k + r_3 \times h)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4) \times h$$



Um método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4)



Representação dos declives para o método RK4



LEITURA 1: RK4 – Exemplo de Aplicação

Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = 4 e^{0.8 x} - 0.5 y$$

Usando o método de RK de 4ª ordem, integre-a numericamente de $t=0$ a $t=0.5$, com passo temporal de 0.5. A condição inicial em $x=0$ é $y=2$. Pode mostrar-se que esta equação tem solução analítica dada por:

$$y = \frac{4}{1.3} (e^{0.8 x} - e^{-0.5 x}) + 2 e^{-0.5 x}$$

Compare a solução numérica com a solução analítica.

SOLUÇÃO:

1º passo: Cálculo do declive no início do intervalo $\rightarrow r_1$

$$r_1 = f(0, 2) = 4 \times e^{0.8 \times (0)} - 0.5 \times (2) = 3$$



2º passo: Cálculo do declive no ponto médio do intervalo (0.25) usando $r_1 \rightarrow r_2$

$$r_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 \times \frac{h}{2}\right)$$

$$x_k + \frac{h}{2} = 0 + 0.25 = 0.25, \quad y_k + r_1 \times \frac{h}{2} = 2 + 3 \times (0.25) = 2.75$$

$$r_2 = f(0.25, 2.75) = 4e^{0.8 \times (0.25)} - 0.5 \times (2.75) = 3.510611$$

3º passo: Cálculo do declive no ponto médio do intervalo (0.25) usando $r_2 \rightarrow r_3$

$$r_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 \times \frac{h}{2}\right)$$

$$x_k + \frac{h}{2} = 0 + 0.25 = 0.25, \quad y_k + r_2 \times \frac{h}{2} = 2 + 3.510611 \times (0.25) = 2.877653$$

$$r_3 = f(0.25, 2.877653) = 4 \times e^{0.8 \times (0.25)} - 0.5 \times (2.877653) = 3.446785$$



4º passo: Cálculo do declive no ponto final do intervalo (0.5) usando $r_3 \rightarrow r_4$

$$r_4 = f(x_k + h, y_k + r_3 \times h)$$

$$x_k + h = 0 + 0.5 = 0.5, \quad y_k + r_3 \times h = 2 + 3.446785 \times (0.5) = 3.723392$$

$$r_4 = f(0.5, 3.723392) = 4 \times e^{0.8 \times (0.5)} - 0.5 \times (3.723392) = 4.105603$$

5º passo: Cálculo de y_{k+1} no ponto final do intervalo (0.5) usando r_1, r_2, r_3 , e r_4

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (r_1 + 2 \times r_2 + 2 \times r_3 + r_4) \times h$$

$$y(0.5) = 2 + \frac{1}{6} (3 + 2 \times 3.510611 + 2 \times 3.446785 + 4.105603) \times h$$

$$y(0.5) = 2 + 3.503399 \times (0.5) = 3.751699$$

A solução analítica em $x=0.5$ tem o valor de 3.751521. **Verifique os resultados e comente!!!!**



Métodos de Runge-Kutta de passo adaptativo

Os métodos de Runge-Kutta utilizados na prática, os de passo adaptativo, são algo diferentes daqueles que apresentámos. Nestes o passo, i.e. a diferença h entre valores consecutivos da variável independente, não é mantida constante. Em zonas do domínio em que a função y tem um comportamento ‘errático’, justifica-se o uso de um h bastante pequeno, mas quando a função tem uma variação previsível, pode aumentar-se bastante o passo.

Estes métodos exigem alguns cálculos extra em cada iteração para comparar a exatidão com a exatidão desejada. No entanto, dão-nos a possibilidade de reduzir o número de iterações, o que permite tornar os algoritmos mais rápidos por fatores que podem ser até de uma ou duas ordens de grandeza.

Uma forma de verificar se o passo deve ser aumentado ou diminuído é estimar $y(t+h)$ de duas maneiras distintas: usando um passo $h/2$ e um passo h . A diferença entre estas duas estimativas, para um dado valor da variável independente, dá-nos uma indicação do erro cometido e permite-nos decidir se devemos aumentar, diminuir, ou manter o passo.



A função `ode45` do MATLAB

A função **ode45** do MATLAB, que vai usar nos trabalhos práticos, usa um método chamado de Dorman-Prince, com uma abordagem diferente. Em cada iteração são calculadas duas estimativas da solução, uma através de um método de Runge-Kutta de quarta ordem e outra através de uma estimativa de um método de quinta ordem. O erro do método de Runge-Kutta de quarta ordem é avaliado a partir da diferença entre as duas estimativas. Por outras palavras, o método é de facto de quarta ordem, mas corre-se em simultâneo um método de quinta ordem que nos permite ir alterando o passo de maneira a obter a exatidão desejada.

ESTABILIDADE

Nas aulas anteriores foi dito que, desde que satisfeitas algumas condições, como o método de Euler tem um erro local da ordem de h^2 , o seu erro global é da ordem de h .

O argumento que foi usado para o método de Euler pode ser estendido para outros métodos: **se o erro local é de ordem h^{p+1} , o erro global é da ordem de h^p .**

No entanto, isto só acontece se, para o problema em estudo e dado o passo h escolhido, o método for **estável**.



Seguidamente far-se-á uma discussão sucinta da estabilidade dos métodos até agora estudados para problemas de valor inicial.

Consistência e Convergência

No que se segue é necessário introduzir algumas definições.

Consistência

Um método numérico diz-se consistente com uma equação diferencial, se o erro local tende para zero com h , i.e, quando h tende para zero o erro local também tende para zero.

Os métodos estudados até ao presente são consistentes.

Convergência

Um método numérico diz-se convergente, se aplicado a qualquer ODE com função f Lipschitz contínua, a diferença entre a solução numérica e a solução exata em cada ponto tende para zero quando h tende para zero.

Pode mostra-se que todos os métodos estudados até agora são convergentes, quer para problemas lineares quer para problemas não-lineares.



ESTABILIDADE

A precisão de um esquema numérico é uma questão importante. No entanto, carece de significado se o esquema não for estável numericamente. Um esquema numérico diz-se estável se a solução numérica não tender para infinito. Por outras palavras, o erro global mantém-se limitado, e diz-se que o erro é bem comportado para um dado valor de h .

Como exemplo, considere-se a seguinte equação diferencial simples (o problema de teste):

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad \text{com} \quad y(0) = y_0$$

A solução analítica desta equação é dada pela expressão $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$. Esta solução não cresce com t se $\lambda \leq 0$.

A análise que se segue não é aplicável diretamente a sistemas não lineares, mas pode ajudar a escolher valores de h para esses casos.

De notar que os valores de λ podem ser complexos. Então, no caso geral tem-se $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ e $|\lambda| = (\lambda_r^2 + \lambda_i^2)^{1/2}$. Para que a solução da equação não cresça com t , é necessário que se verifique a condição $\lambda_r \leq 0$.



Estabilidade do método de EULER

Se se aplicar o método de Euler à equação anterior, $\frac{dy}{dt} = \lambda y$, em que $f(y) = \lambda y$, tem-se:

$$y_k = y_{k-1} + f(y_{k-1}) \times h = y_{k-1} + \lambda y_{k-1} \times h = y_{k-1}(1 + \lambda h) = y_0(1 + \lambda h)^k$$

A solução numérica y_k não cresce se,

$$|1 + \lambda h| \leq 1$$

Definindo $z = \lambda h$, como um número complexo, então $|1 + z| \leq 1$, o que obriga a que z (ou de modo equivalente λh) esteja contido num disco de raio 1, centrado em $z = -1$ no plano complexo.

De notar que $|1 + \lambda h| \leq 1$ é equivalente a $|(1 + \lambda_r h) + i\lambda_i h| \leq 1$, pelo que se tem:

$$(1 + \lambda_r h)^2 + \lambda_i^2 h^2 \leq 1.$$

Considerem-se dois casos particulares:

- **λ é puramente real**, $\lambda \equiv \lambda_r \leq 0$. Então, para

$$h \leq \frac{2}{|\lambda_r|}$$



o método de Euler é estável. Neste caso o método de Euler é condicionalmente estável.

- λ é puramente imaginário, $\lambda \equiv \lambda_i$.

Neste caso o método de Euler é instável.

Estabilidade do método de EULER IMPLÍCITO

Aplicando o método de Euler implícito à equação $\frac{dy}{dt} = \lambda y$, em que $f(y) = \lambda y$, obtém-se:

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + \lambda y_k \times h \Leftrightarrow y_k(1 - \lambda h) = y_{k-1} \\ \Leftrightarrow y_k &= (1 - \lambda h)^{-1} y_{k-1} \Leftrightarrow y_k = (1 - \lambda h)^{-k} y_0 \end{aligned}$$

Considerando $z = \lambda h$, então $\frac{1}{|1-z|} \leq 1$, ou de modo equivalente, $|1 - z| \geq 1$. Neste caso z (ou λh) está contido na região exterior a um disco de raio 1, centrado em $z = 1$ no plano complexo.

Note que $|1 - \lambda h| \geq 1$ é equivalente a $|(1 - \lambda_r h) + i\lambda_i h| \geq 1$, pelo que se tem:

$$(1 - \lambda_r h)^2 + \lambda_i^2 h^2 \geq 1.$$

Repare que tal acontece sempre que $\lambda_r \leq 0$.



Então, pode dizer-se que o método de Euler implícito é **incondicionalmente estável** para $\lambda_r \leq 0$.

Estabilidade do método de CRANK-NICOLSON

Analogamente, aplicando o método de Crank-Nicolson à equação $\frac{dy}{dt} = \lambda y$, obtém-se:

$$y_k = y_{k-1} + (y_{k-1} + y_k) \times \frac{\lambda h}{2} \Leftrightarrow y_k \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) = y_{k-1} \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y_k = \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}\right) y_{k-1} \Leftrightarrow y_k = \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}\right)^k y_0$$

Se o fator $\left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}\right)$ permanecer limitado a solução não cresce:

$$\left|\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1 + z}{1 - z}\right| \leq 1$$



Tal acontece quando $|1 + z| \leq |1 - z|$, i.e., quando z tende para -1 , o que corresponde ao semi-plano complexo esquerdo.

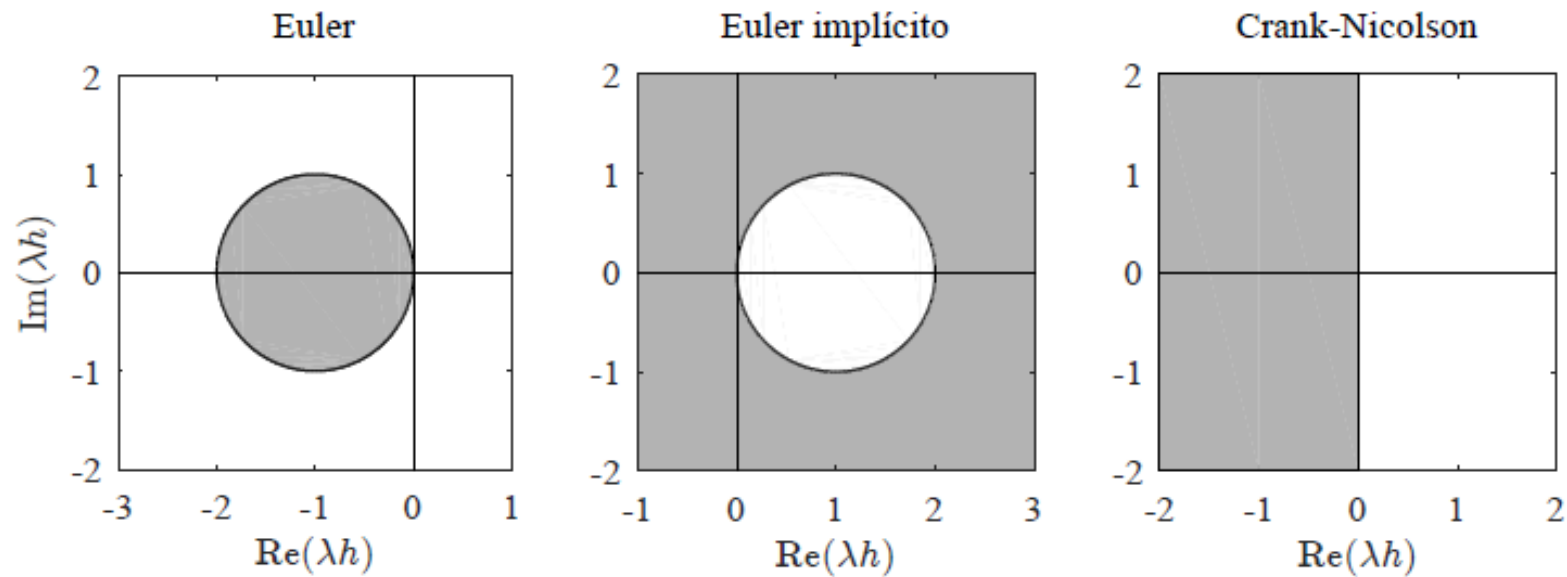
De facto $\left| \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right| \leq 1$ é *equivalente* a $\frac{\left(1 + \frac{\lambda_r h}{2}\right)^2 + \frac{\lambda_i^2 h^2}{4}}{\left(1 - \frac{\lambda_r h}{2}\right)^2 + \frac{\lambda_i^2 h^2}{4}} \leq 1$. Esta condição verifica-se sempre que

$\lambda_r \leq 0$. Neste caso, o numerador é menor ou igual ao denominador, tornando a condição verdadeira.

Então, pode dizer-se que o método de Crank-Nicolson é **incondicionalmente estável** para $\lambda_r \leq 0$.

Na figura seguinte estão representadas as regiões de estabilidade e instabilidade para os métodos de Euler, de Euler implícito e de Crank-Nicolson, no plano complexo em função de λh .





Pode verificar-se que a região de estabilidade do método de Euler é pequena, comparativamente à região de estabilidade dos métodos de Euler implícito e de Crank-Nicolson. A vasta região de estabilidade é uma das características que tornam os métodos implícitos atrativos.



Estabilidade do método de RUNGE-KUTTA de 2ª ordem (RK2)

Para se estudar a estabilidade do método de RK2 considera-se uma vez mais a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = \lambda y$, em que $f(y) = \lambda y$.

Aplicando-se o método RK2 com $r_1 = \lambda y_{k-1}$, e $r_2 = \lambda \left(y_{k-1} + \frac{h}{2} r_1 \right)$, obtém-se:

$$y_k = y_{k-1} + r_2 \times h \Leftrightarrow y_k = y_{k-1} \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow y_k = y_0 \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \right)^k$$

A solução não tende para infinito, se

$$\left| 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \right| \leq 1$$



Considerem-se dois casos particulares:

- **λ é puramente real**, $\lambda \equiv \lambda_r \leq 0$. Então, para

$$h \leq \frac{2}{|\lambda_r|}$$

o método é estável. Neste caso o método de RK2 é condicionalmente estável.

- **λ é puramente imaginário**, $\lambda \equiv \lambda_i$, o método de RK2 é instável.

Estes casos particulares são idênticos aos obtidos para o método de Euler. Há no entanto a realçar as seguintes diferenças:

- A região de estabilidade no plano complexo é maior para o método de RK2 do que para o método de Euler.
- No caso dos movimentos oscilatórios, ($\leftrightarrow \lambda$'s puramente imaginários), o aumento da amplitude é muito menor que num método de Euler.



Estabilidade do método de RUNGE-KUTTA de 4ª ordem (RK4)

Para se estudar a estabilidade do método de RK4 considera-se uma vez mais a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = \lambda y$, em que $f(y) = \lambda y$.

Aplica-se o método RK4 com $r_1 = \lambda y_{k-1}$, $r_2 = \lambda \left(y_{k-1} + \frac{h}{2} r_1 \right)$, $r_3 = \lambda \left(y_{k-1} + \frac{h}{2} r_2 \right)$ e $r_4 = \lambda (y_{k-1} + h r_3)$, e com $y_k = y_{k-1} + \frac{h}{6} (r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$.

Substituindo $r_1 = \lambda y_{k-1}$, $r_2 = \lambda y_{k-1} \left(1 + \frac{h}{2} \lambda \right)$, $r_3 = \lambda y_{k-1} \left(1 + \frac{h}{2} \lambda + \frac{h^2}{4} \lambda^2 \right)$ e $r_4 = \lambda y_{k-1} \left(1 + h\lambda + \frac{h}{2} \lambda^2 + \frac{h^2}{4} \lambda^3 \right)$, obtém-se:

$$y_k = y_{k-1} \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^3 h^3}{6} + \frac{\lambda^4 h^4}{24} \right)$$

$$\Leftrightarrow y_k = y_0 \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^3 h^3}{6} + \frac{\lambda^4 h^4}{24} \right)^k$$



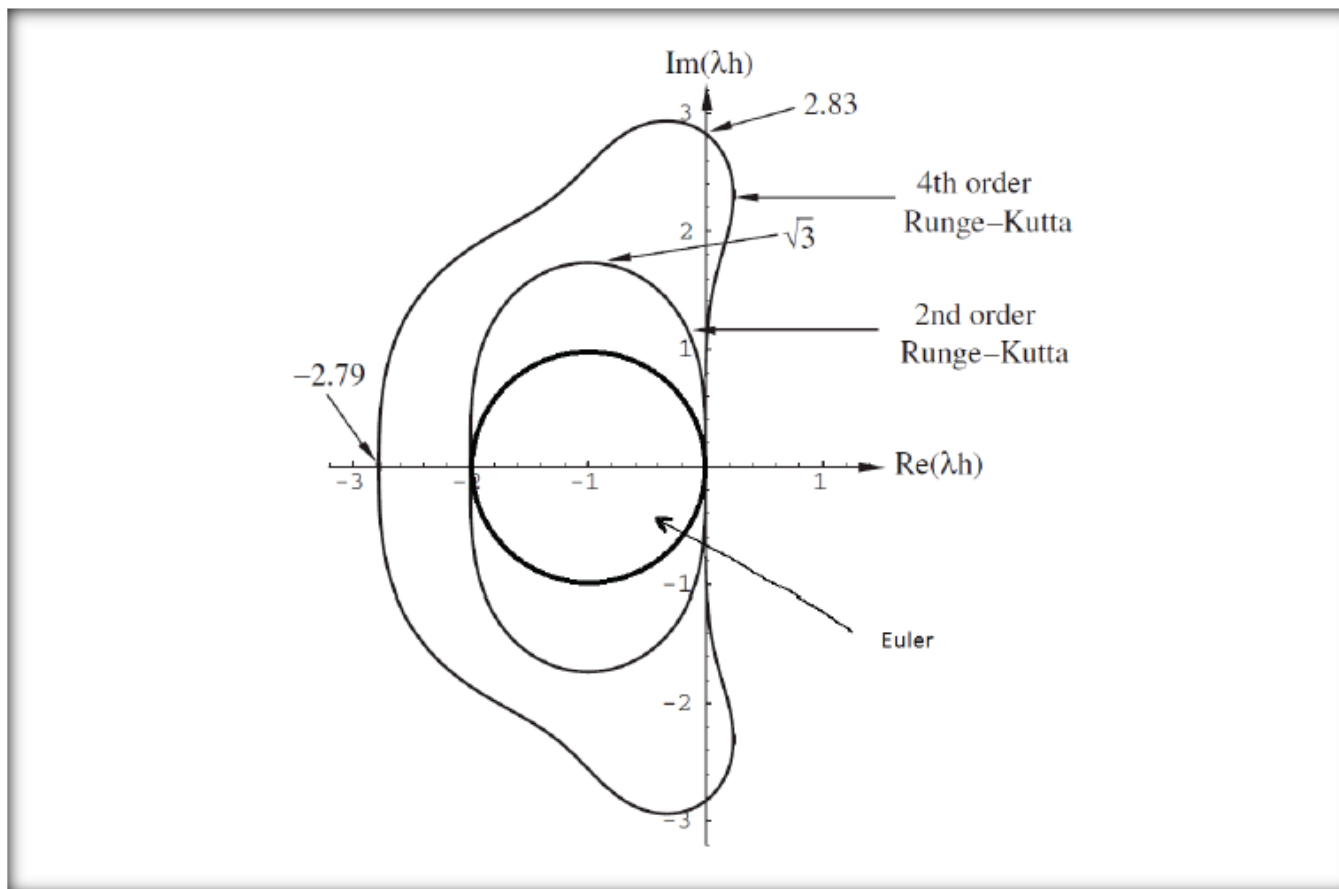
A solução numérica y_k não cresce se:

$$\left| 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^3 h^3}{6} + \frac{\lambda^4 h^4}{24} \right| \leq 1$$

A figura seguinte as regiões de estabilidade no plano $(h\lambda_r, h\lambda_i)$ de ambos os métodos de Runge-Kutta agora estudados.

Na verdade, todos os métodos explícitos de Runge-Kutta de uma dada ordem $p \leq 4$, com $s=p$, têm as mesmas regiões de estabilidade.





Regiões de estabilidade absoluta no plano $(h\lambda_r, h\lambda_i)$, dos métodos de Euler e Runge-Kutta de 2ª e 4ª ordens



Estabilidade para sistemas de ODE

Até ao presente, estudou-se a estabilidade de alguns esquemas numéricos com base na equação diferencial linear escalar,

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y.$$

Para um sistema de equações lineares deste tipo, tem-se,

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

Sendo A a matriz do sistema, uma matriz quadrada. A solução pode ser escrita como,

$$y(t) = y_0 e^{A(t-t_0)}$$

► Uma condição necessária para a estabilidade é que o produto λh se encontre na região de estabilidade para todos os valores próprios λ de A.



LEITURA 2 **Estabilidade para sistemas de ODE**

Exemplo: o oscilador harmónico simples (OHS)

Considere-se novamente o sistema massa-mola, de massa m e cuja constante da mola é K . Pela 2ª lei de Newton sabe-se que a força restauradora do equilíbrio é proporcional ao deslocamento,

$$F = -Ky \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Ky$$

Pelo que,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{K}{m}y = -\omega^2 y, \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{K}{m}$$

Recordando que esta equação pode ser escrita como um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem, tem-se,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\omega^2 y \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$



O sistema linear pode ser escrito na forma matricial,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$$

Para o qual os λ são os valores próprios da matriz A ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Que são dados por $\lambda = \pm i\omega$.

Como os valores próprios são imaginários puros, o método de Euler é, neste caso, instável. Porquê?

O mesmo sucede para muitos outros movimentos oscilatórios.

