



# Física Computacional

## 2023/2024

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

### Trabalho Prático 1 (*Avançado*)

#### Método de Euler - **Revisões**

#### **Problema 1.1 Movimento a uma dimensão de um volante de badminton**

As forças que atuam sobre um volante de badminton são a força gravítica e a força de arrasto. Esta última é razoavelmente descrita por

$$\mathbf{F}_D = -\alpha v \mathbf{v},$$

onde  $v$  é o módulo da velocidade e  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade. Dito de outra forma, a força de resistência do ar tem a direção da velocidade, o sentido oposto, e um módulo dado por  $\alpha v^2$ .

No caso do movimento a uma dimensão, ao longo do eixo dos  $zz$ , é fácil de verificar que a força é dada por

$$F_{D,z} = -\alpha |v_z| v_z.$$

Também é fácil obter uma relação entre o valor de  $\alpha$ , considerado constante, e a velocidade limite  $v_{lim}$ :

$$\alpha = \frac{mg}{v_{lim}^2},$$

onde  $m$  é a massa do volante e  $g$  é a aceleração da gravidade. Para tornar mais fácil a comparação das soluções numéricas dos problemas, sugere-se que passe a considerar sempre  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ . Um valor tipicamente medido para os volantes de badminton é  $v_{lim} = 6.8 \text{ ms}^{-1}$ .

- a) Um volante é largado (com velocidade inicial nula) de uma altura muito grande. Vamos considerar que o sentido positivo do eixo vertical (dos  $zz$ ) aponta para cima. A equação diferencial que resulta da aplicação da segunda lei de Newton tem como solução analítica para a velocidade,

$$v_z(t) = -v_{lim} \tanh\left(\frac{g}{v_{lim}} t\right)$$

Use o método de Euler para obter uma estimativa numérica da velocidade entre  $t_0 = 0$  e  $t_f = 2$  s. Represente graficamente e compare com a solução analítica. Escolha vários valores de  $h = t_{k+1} - t_k$  e observe graficamente o que acontece.

b) Continue a considerar o lançamento da alínea anterior. Escreva um programa que calcule o módulo da diferença entre o valor analítico de  $v_z$  em  $t = 0.5$  s (passe a usar este valor como o instante final) e a estimativa numérica dessa velocidade obtida para vários valores de  $h$  entre  $10^{-1}$  s e  $10^{-4}$  s. Note que a sua escolha deve ser feita de tal forma que 0.5 s seja um múltiplo inteiro de todos os valores de  $h$ . Faça um gráfico do logaritmo do módulo do erro em função do logaritmo de  $h$ . Confirme que os pontos se aproximam de uma reta média (que pode ser traçada usando o comando **lsline** do MATLAB), ou seja, que o erro é aproximadamente proporcional a uma potência de  $h$ . Use a função **polyfit** do MATLAB para determinar o valor aproximado do expoente. O resultado será discutido nas aulas teóricas.

b) O mesmo volante é lançado verticalmente para cima, no instante  $t_0 = 0$  s, de uma altura inicial  $z_0 = 1$  m, com uma velocidade inicial  $v_{z,0} = 16 \text{ ms}^{-1}$ . Use o método de Euler e a forma dinâmica para as ODE e represente graficamente a estimativa numérica da altura instantânea do volante em função do tempo. O ciclo for deve ser interrompido logo que  $z$  toma valores negativos. Obtenha uma estimativa numérica do instante em que o volante cai no chão (use a função **interp1** do MATLAB).

## Problema 1.2 Lançamento de uma bola de ténis — topspin e backspin

Usando bolas de ténis novas e um túnel de vento, os coeficientes aerodinâmicos foram medidos por Stepanék (1988) para velocidades entre 13.6 e 28 m/s e rotações entre 800 e 3250 rpm. Um ajuste não linear das expressões das forças aerodinâmicas aos valores experimentais produz as seguintes parametrizações:

$$\begin{cases} C_D = 0.508 + (22.503 + 4.196 S^{-2.5})^{-0.4}, & S = \frac{R\omega}{v} \\ F_D = -\frac{1}{2} C_D \rho A v^2 \hat{v}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_L = (2.022 + 0.981 S^{-1})^{-1}, & S = \frac{R\omega}{v} \\ F_L = -\frac{1}{2} C_L \rho A v^2 (\hat{\omega} \times \hat{v}), \end{cases}$$

onde  $v$  e  $\omega$  são os valores absolutos da velocidade e da velocidade angular, respetivamente,  $R$  é o raio da bola e  $A$  é a área da sua secção transversal ( $A = \pi R^2$ ). Uma bola de ténis nova, de massa 57 g e de diâmetro 67 mm, é batida à altura de 0.7 m com uma velocidade inicial de 20 m/s que faz um ângulo de  $5^\circ$  com a horizontal. Considere que a massa volúmica do ar é  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ . Analise a trajetória da bola, calculando a altura máxima e o alcance, nas seguintes condições:

- Sem rotação.
- Com **topspin** constante de 3000 rpm.
- Com **backspin** constante de 3000 rpm.

Use  $z$  para o eixo vertical e considere que a trajetória define o plano  $xz$ . Nestas condições, o vetor velocidade angular só tem uma componente diferente de zero,  $\omega_y$ , que é positiva quando a bola é batida com *topspin* (assumindo  $v_x > 0$ ). Para obter um valor interpolado da altura máxima, comece por localizar o valor mais elevado do vetor  $z$  e o seu índice:

```
[z_max, ind]=max(z);
```

Está disponível no moodle um ficheiro **lagr.m** que usa a interpolação de Lagrange para determinar o valor máximo de uma parábola que passa pelo valor mais elevado de um vetor e pelos seus dois vizinhos mais próximos. Para usar a função nele definida, escreva

```
aux=lagr(x(ind-1:ind+1), z(ind-1:ind+1));
```

A altura máxima interpolada é dada por **aux(2)** e o valor correspondente de  $x$  por **aux(1)**.

Também pode usar **aux=lagr(t(ind-1:ind+1), z(ind-1:ind+1))**;

A diferença é que **aux(1)** passa a ser o instante em que é atingida a altura máxima.

### Problema 1.3 Bola de futebol — desvios laterais

Num dia sem chuva e num campo sem lama, uma bola de futebol é chutada com uma velocidade inicial de 80 km/h, fazendo um ângulo de  $10^\circ$  com a horizontal. A rotação é de 600 rpm, e, vista de cima, a bola roda no sentido direto. A bola seca e sem lama tem uma massa de 450 g e um perímetro de 70 cm. Use a expressão da força de arrasto parametrizada por Vítor Torres:

$$F_D = \begin{cases} -(0.015v^2)\hat{v} & \text{para } v \leq 9 \text{ m/s,} \\ -(0.25147 + 0.17431v - 0.015v^2 + 0.00054v^3)\hat{v} & \text{para } 9 \text{ m/s} \leq v \leq 20 \text{ m/s,} \\ -(-4.025 + 0.323v)\hat{v} & \text{para } v > 20 \text{ m/s,} \end{cases}$$

e a força de Magnus proposta por Watts e Bahill:

$$F_L = \frac{1}{2} C_M \rho A R(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}), \quad \text{com } C_M = 1.$$

Use o método de Euler para obter uma solução numérica para a trajetória. Considere que a velocidade angular de rotação se mantém constante ao longo do voo. A massa volúmica do ar é  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ . Nestas condições, observar-se-á um desvio lateral? Para que lado? Qual o seu valor numérico?