Breve introdução

aos

Métodos de Runge-Kutta

OBS: Não perder de vista que os métodos dados até ao momento, nomeadamente, os Métodos de Euler, Euler-Cromer, Euler Implícito, Crank-Nicolson, têm como objectivo a integração numérica de equações diferenciais ordinárias!

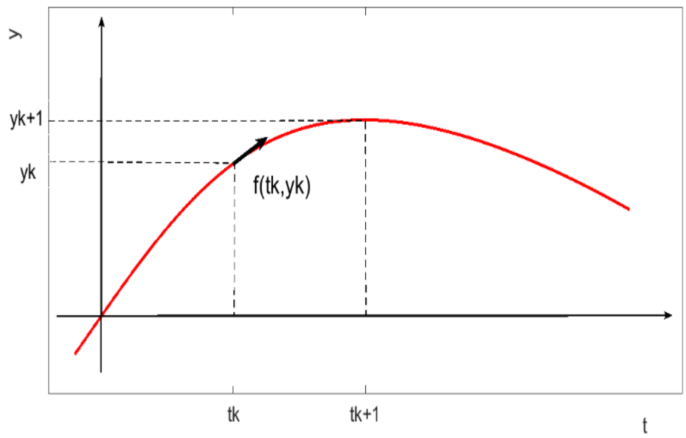
Como ponto de partida considerou-se uma ODE do tipo

$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = f(t, y)}$, com uma CI (condição inicial) conhecida.

Introdução Breve

►Recordemos o **Método de Euler**...

$$y_{k+1} = y_k + f\left(t_{k,}\, y_k\right) \times h \qquad para \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ N-2$$



Pela figura podemos verificar que na iteração k, entre os intantes t_k e t_{k+1}, a função incremento,

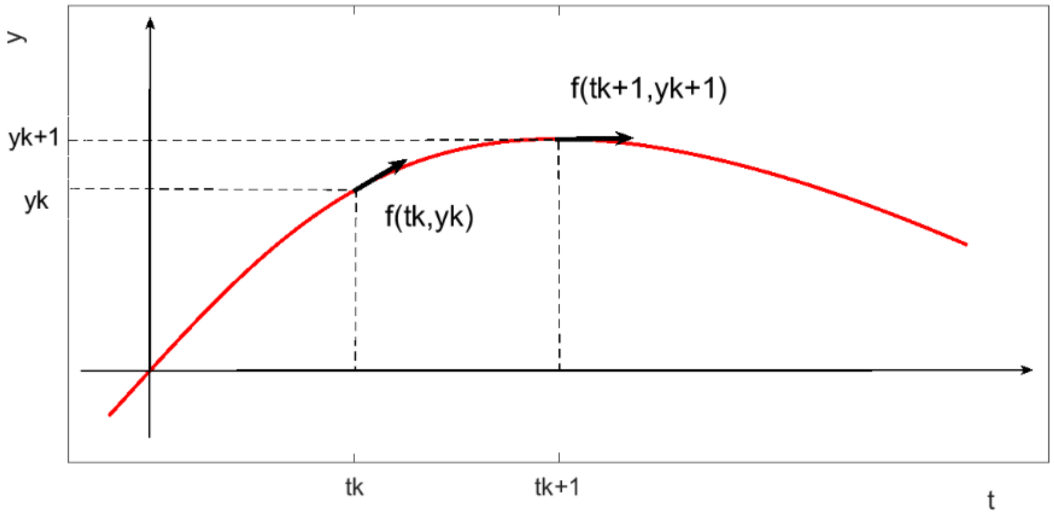
$f(t_k, y_k)$, (a derivada), é calculada no ponto inicial do intervalo **(t_k, y_k)**.

Já vimos que essa aproximação vai introduzir erros.

ERRO GLOBAL do método de EULER ► O(h) !

► E recordemos também **o Método de Crank-Nicolson…**

$$y_{k+1} = y_k + \left[f\left(t_{k,} y_k\right) + f\left(t_{k+1,} y_{k+1}\right)\right] \times \frac{h}{2} + O(h^2)$$



Neste caso, em cada iteração, a função incremento, $\mathbf{f(t_k, y_k)}$, (a derivada), é calculada em dois pontos do intervalo, no ponto inicial $\mathbf{(t_k, y_k)}$ e no ponto final $\mathbf{(t_{k+1}, y_{k+1})}$.

No algoritmo é considerada uma média destes dois valores.

Consequência prática ►

ERRO GLOBAL do método de Crank-Nicolson é O(h^2) !

A precisão aumentou !!!!!!!!!

E porque não usar a expansão em série de Taylor?

➨ $y_{k+1} = y_k + h\, y_k' + \frac{h^2}{2!}\, y_k'' + \frac{h^3}{3!}\, y_k''' + O(h^4)$

Mas o cálculo das derivadas de ordem superior é normalmente complexo!

E em alternativa,

porque não calcular a função incremento, (a derivada), em vários pontos intermédios?

Será que se ganha mais precisão, como no método de Crank-Nicolson?

Métodos de Runge-Kutta

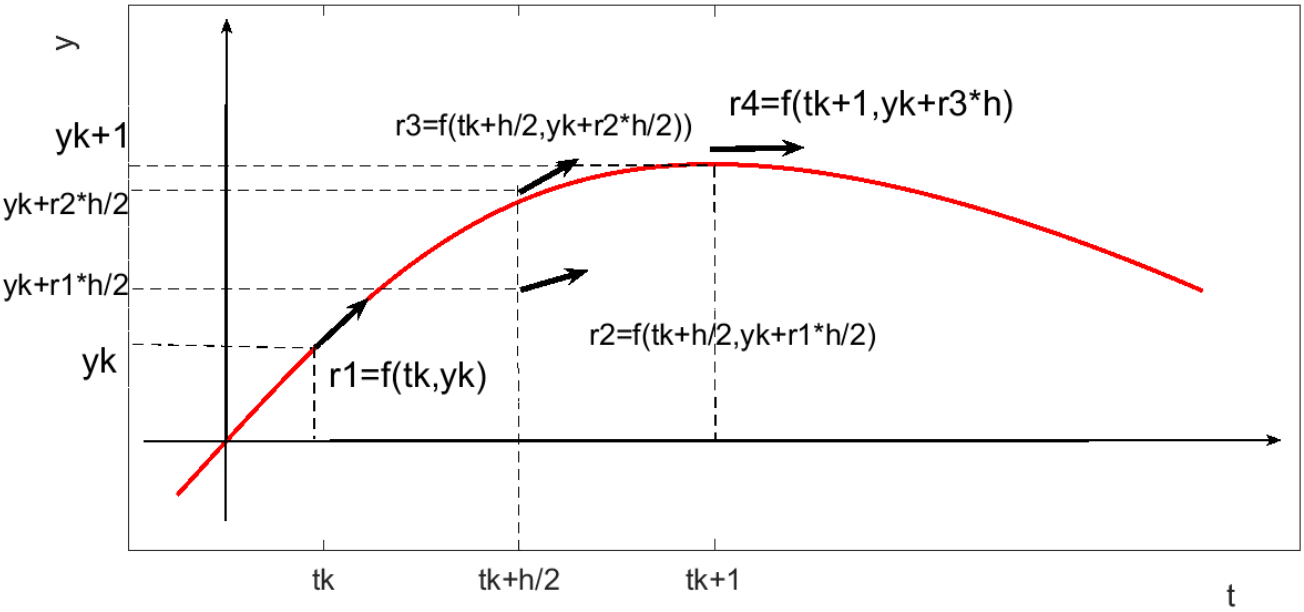
Os métodos de Runge-Kutta conseguem a precisão da série de Taylor, sem o cálculo de derivadas de ordem superior.

Como?

Considerando o cálculo da função incremento, f, em vários pontos do intervalo $[t_k , t_{k+1}]$.

Como exemplo, consideremos um método de Runge-Kutta de 4ª ordem:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(r_1 + 2\,r_2 + 2\,r_3 + r_4) \times h$$



Neste caso, a função incremento é calculada em **4 pontos** distintos:

1º ponto

P1 (t_k, y_k) e $r_1 = f(t_k, y_k)$ (*função incremento*)

À custa desta função incremento, r_1, encontram-se as coordenadas do 2º ponto,

2º ponto

P2 $\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 \times \frac{h}{2}\right)$ e $r_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 \times \frac{h}{2}\right)$

De modo semelhante, r_2, vai ser usado para calcular as coordenadas do 3º ponto,

3º ponto

P3 $\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 \times \frac{h}{2}\right)$ e $r_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 \times \frac{h}{2}\right)$

E r_3, vai ser usado para calcular as coordenadas do 4º ponto,

4º ponto

P4 $(\boldsymbol{t_k + h, y_k + r_3 * h})$ **e** $\quad \boldsymbol{r_4} = f(t_k + h, y_k + r_3 * h)$

A função incremento, obtida para um dado ponto, vai gerar a coordenada y do ponto seguinte, e assim sucessivamente.

A função incremento final é uma média ponderada das funções incremento (r1, r2, r3 e r4), (a derivada), obtida nos 4 pontos do intervalo. Repare que no instante $\boldsymbol{t_k + \frac{h}{2}}$, há dois valores para y.

E o ERRO GLOBAL é O(h ^{4}) ! E não foi necessário calcular derivadas de ordem superior!

Representação de BUTCHER

EXEMPLO

Consulte os slides 7, 8, 9 e 10 da AULA3

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

$$r_1 = f(t_k, y_k)$$

$$r_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_1 \times \frac{h}{2}\right)$$

$$r_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + r_2 \times \frac{h}{2}\right)$$

$$r_4 = f(t_k + h, y_k + r_3 \times h)$$

$$\boldsymbol{y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\,(r_1 + 2\,r_2 + 2\,r_3 + r_4) \times h}$$

Coluna 1	
0	$t_k + 0 \times h$
1/2	$t_k + 1/2 \times h$
1/2	$t_k + 1/2 \times h$
1	$t_k + 1 \times h$

Matriz			Coordenada y
1/2			$\boldsymbol{y_k + r_1 \times h \times 1/2}$
0	**1/2**		$\boldsymbol{y_k + r_1 \times h \times 0 + r_2 \times h \times 1/2}$
0	**0**	**1**	$\boldsymbol{y_k + r_1 \times h \times 0 + r_2 \times h \times 0 + r_3 \times h \times 1}$

Linha (Pesos)			
1/6	**1/3**	**1/3**	**1/6**
$\boldsymbol{y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\,(1\,r_1 + 2\,r_2 + 2\,r_3 + 1\,r_4)\cdot h}$			