Física Computacional

2023/2024

20 de Maio 2024

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

Trabalho Prático de Avaliação Contínua

No seu relatório identifique cada alínea, caso contrário a mesma poderá não ser considerada

(15 valores)

Parte I

(4 valores) Considere a seguinte função,

$$q = tanh(x)sech\,(x)$$

Calcule a sua derivada de 4ª ordem usando:

i) Transformadas de Fourier

ii) Diferenças finitas, com o seguinte esquema numérico:

$$y_k^{iv} = \frac{y_{k-2} - 4\,y_{k-1} + 6\,y_k - 4\,y_{k+1} + y_{k+2}}{h^4} + \mathcal{O}(h^2)$$

Considere h= 0.05 e N = 1024.

Compare as soluções obtidas com a solução analítica. (*Wolfram|Alpha*)

Sugestão: para cada método numérico, represente no mesmo gráfico a solução numérica e a analítica. Comente.

Considere mais dois valores distintos para h e N.

Parte II

(11 valores) A equação de Korteweg-De-Vries pode descrever fenómenos físicos variados, como por exemplo ondas em águas pouco profundas, ou ondas solitárias em linhas de transmissão não-lineares:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} - \alpha\, q \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

a) (4 valores) Considere $\alpha = 6$. Use um método espetral como o usado para a equação não linear de Schrödinger mas com um Runge-Kutta de 4ª ordem para encontrar a evolução de um perfil inicial, dado por :

$q(0, x) = -12\, sech^2 x$, para $-40 \le x \le 40$, com $L=80$, $N = 1024$, $dx = L/N$ e $dt = 1.5 \times 10^{-5}$, e um tempo final de integração $t_{final} = 1$.

Representе graficamente os resultados, e comente-os.

b) (2 valores) Repita a alínea anterior, para a mesma condição inicial, para diversos valores de α, ($\alpha = 0,\ 2,\ 3,\ 5$). Compare os resultados com os obtidos em a) e discuta os efeitos do termo não linear quando conjugado com os efeitos da dispersão de 3ª ordem. Represente no mesmo gráfico os perfis finais em função de x.

c) (1 valores) Usando o perfil final, ou seja $|q(t_{\text{final}}, x)|^2$, encontre as amplitudes máximas e estime as velocidades dos solitões, para um perfil inicial dado por $q(0, x) = -12\, sech^2 x$ e $t_{final} = 1$. Comente os resultados obtidos. Há alguma relação entre as velocidades e as amplitudes?

d) (2 valores) Considere agora um perfil inicial com a forma:

$$q(t_0, x1) = -12 \frac{3 + 4\cosh(2x1 + 24\, t_0) + \cosh(4x1)}{\{3\cosh(\mathrm{x1} - 12\, \mathrm{t_0}) + \cosh(3x1 + 12\, t_0)\}^2}$$

Com $x_1 = x + 60$, e $t_0 = -4$. Integre a equação até um $t_{final} = 8$. Considere $L=160$, e $N = 1024$. Pode ser necessário aumentar o nº de pontos e alargar o domínio de integração. *A simulação poderá demorar alguns minutos*. Estime a velocidade de cada impulso e relacione-a com a respetiva amplitude.

e) (2 valores) A equação de Korteweg-De-Vries, na forma generalizada, pode escrever-se como:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + (n+1)(n+2)\, q^n \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Modifique o código construído em a) para encontrar a evolução de um perfil inicial, dado por :

$$q(0,x) = \left(\frac{C}{2}\, sech^2\left(\frac{\sqrt{C}}{2} n\, x\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

f) para $-40 \leq x \leq 40$, com *L=80, N = 1024, dx = L/N* e *dt* =1.5 x 10^{-5}, e um tempo final de integração t_{final} = 1. Considere *C* =10, e *n* = 1, 3 e 0.5. Represente no mesmo gráfico os perfis finais em função de x.

Comente os resultados obtidos. Há alguma relação entre as velocidades e as amplitudes?