

Modelação de Sistemas Físicos

1ª aula Prática

Sumário:

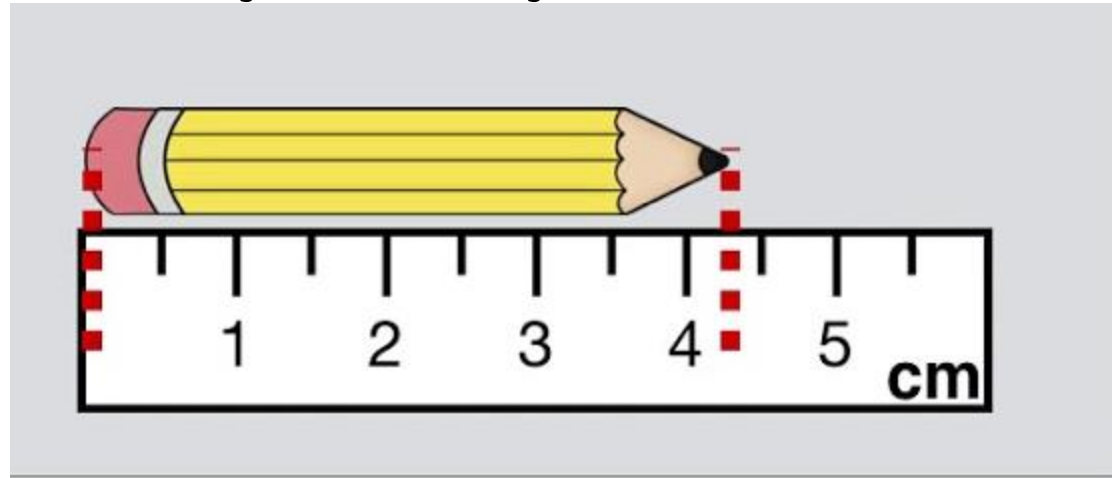
Resolução de problemas sobre o cap. 1

Bibliografia:

Serway, cap. 1

Sorensen, cap. 3

Observação e medição



Registo de uma quantidade usando só uma medição:

O valor da medição de uma quantidade (como também a representação digital de um número real) está sempre afetado de uma incerteza,

À quantidade que se mede, na figura o comprimento do lápis, c , associamos ao valor que melhor se estima, \bar{c} , um outro valor, Δc , chamado erro ou indeterminação, Tal que se tem a certeza que o comprimento está entre $\bar{c} - \Delta c$ e $\bar{c} + \Delta c$

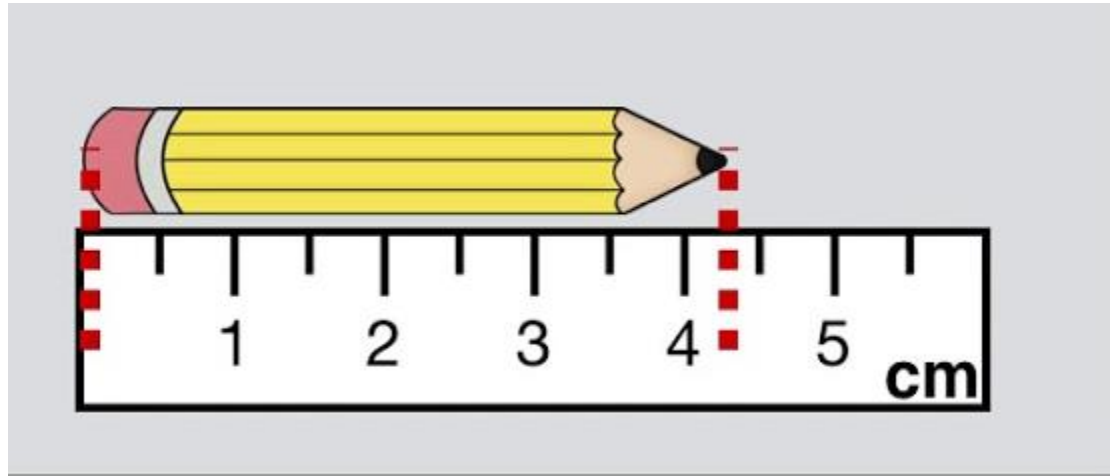
Pela figura tem-se a certeza que
E pode-se considerar

$$4,0 \text{ cm} < c < 4,5 \text{ cm}$$
$$\bar{c} = 4,25 \text{ cm} \quad \text{e} \quad \Delta c = 0,25 \text{ cm}$$

O comprimento do lápis indica-se

$$c = 4,3 \pm 0,3 \text{ cm}$$

Observação e medição

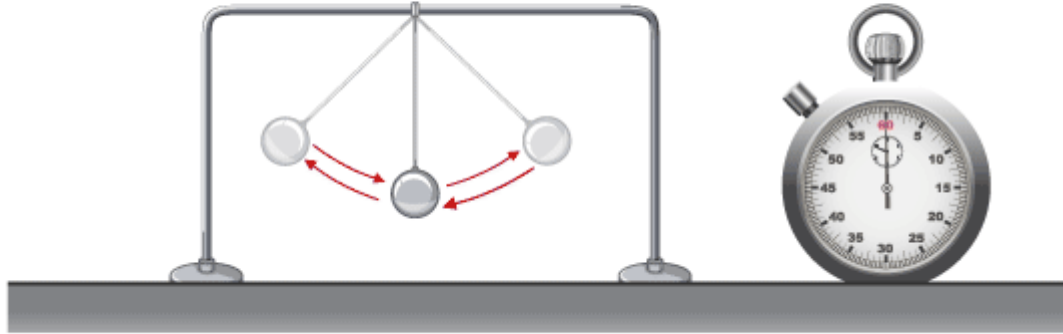


Este erro considerado é um exemplo de um erro de leitura ou instrumental.

Instrumentos de escala contínua: O erro é metade da menor divisão da escala

Instrumentos de escala digital: O erro é uma divisão da escala.

Observação e medição



Registo de uma quantidade usando 10 ou mais medições:

Cada vez que se mede o tempo de uma oscilação completa (período, T) obtêm-se um valor diferente.

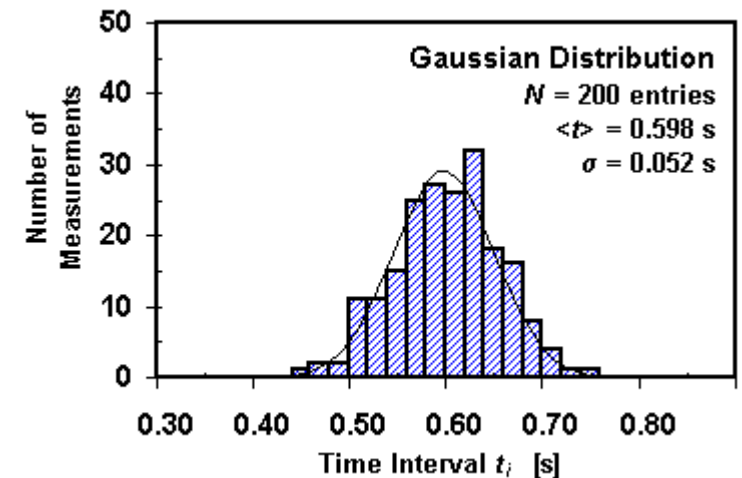
Vai-se obter também a melhor estimativa do período (valor médio)

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$$

e o desvio padrão $s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}$,

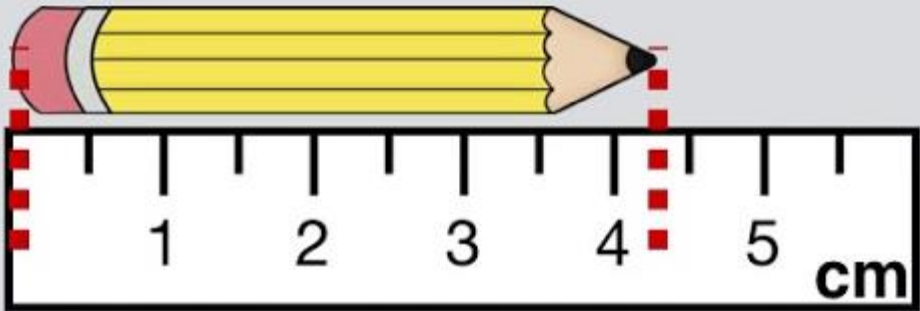
O valor do período indica-se por

$$T = \bar{T} \pm s$$

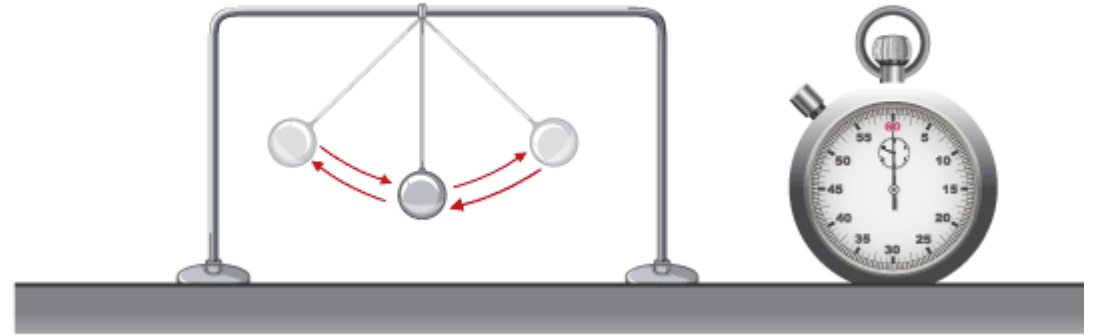


Este é um erro de observação.

Observação e medição



Erro de leitura

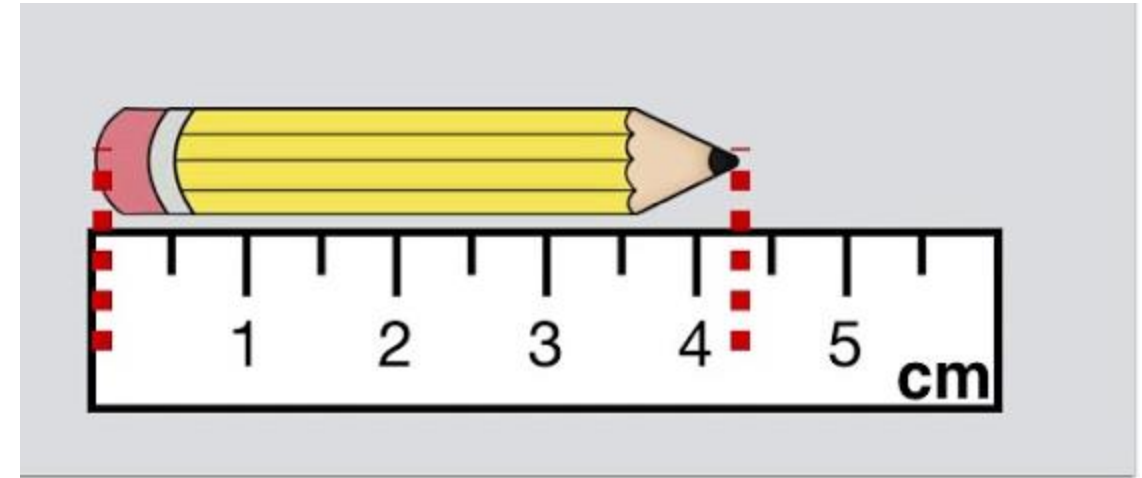


Erro de observação.

Os erros de leitura e os erros de observação são independentes.

Como erro a associar ao valor, toma-se como erro o maior destes dois erros.

Observação e medição



Precisão e Exatidão.

Precisão mede o grau de variação das medições da mesma quantidade obtido na experiência. Se a variação for pequena, tem-se precisão elevada. Pode-se relacionar com o erro relativo

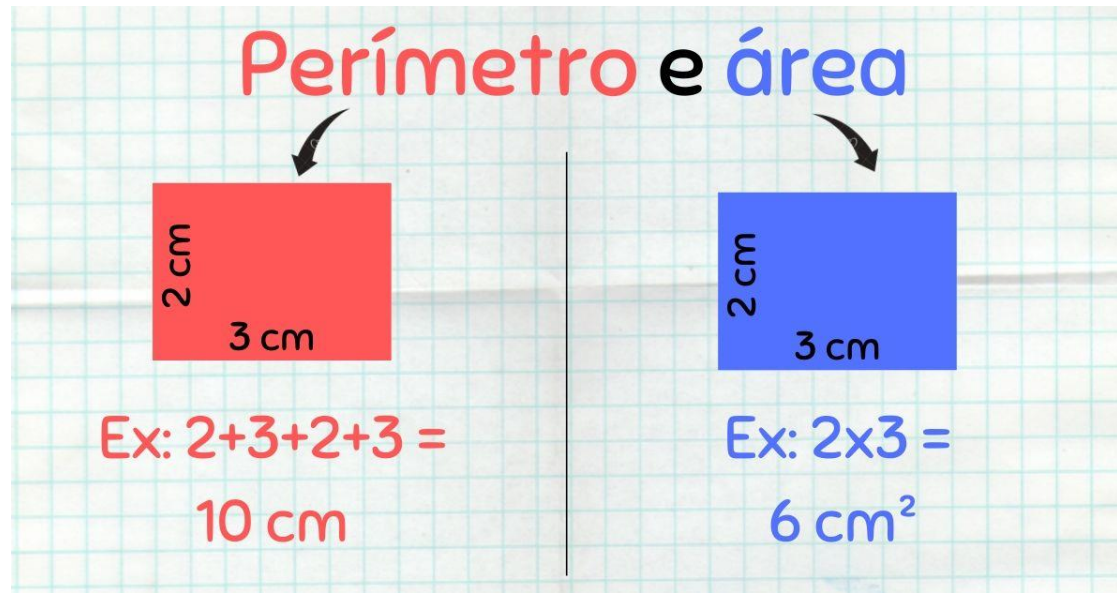
$$\text{erro relativo} = \left| \frac{\Delta c}{\bar{c}} \right|$$

A precisão é tanto maior quanto o erro relativo for menor.

A **exatidão** de uma quantidade física obtida numa medição mede a proximidade do valor medido e do valor correto. Quanto menor for a diferença entre estes últimos dois valores maior é a exatidão.

Precisão e Exatidão são dois conceitos diferentes.

Observação e medição



Como se determina o erro de quantidades que não se medem, mas que são funções de quantidades medidas?
Exemplo: O perímetro e a área de um retângulo?

Observação e medição

Como se determina o erro de quantidades que não se medem, mas que são funções de quantidades medidas?

Adição de duas parcelas: largura, L , e profundidade, P ,

$$S = L + P$$

Em que $L = 3,0 \pm 0,1$ cm

$P = 2,0 \pm 0,1$ cm

$S = 5,0$ cm mas ΔS ?

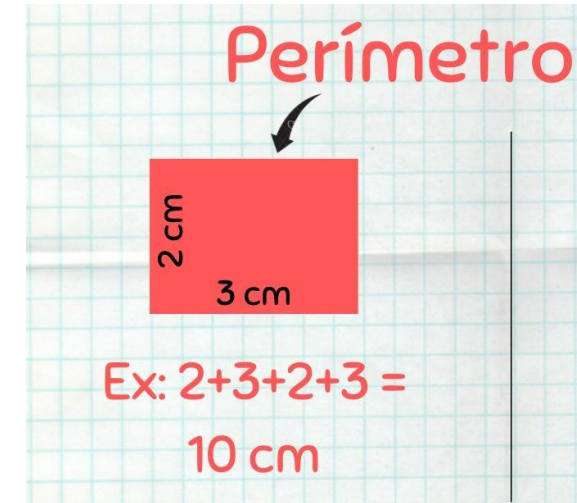
O valor máximo de $S = 5,0 + (\Delta L + \Delta P)$

O valor mínimo de $S = 5,0 - (\Delta L + \Delta P)$

$$\Delta S = \Delta L + \Delta P$$

O mesmo de a subtração de duas parcelas, $D = L - P$

$$\Delta D = \Delta L + \Delta P$$



Observação e medição

Como se determina o erro de quantidades que não se medem, mas que são funções de quantidades medidas?

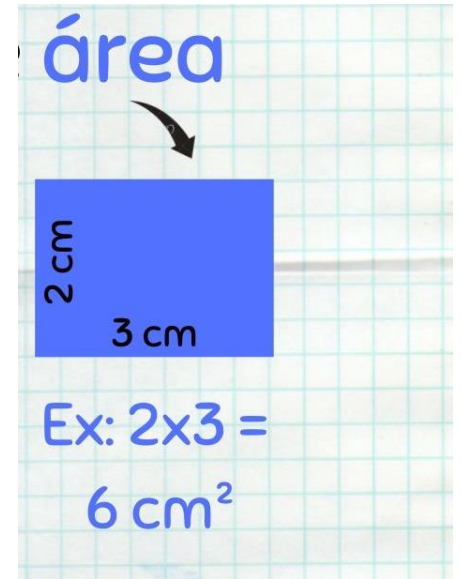
E o produto de 2 quantidades? Exemplo, a área do retângulo?

$$A = L \times P$$

$$\left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta P}{P} \right|$$

Igual expressão para a divisão de duas quantidades.

$$\text{Geral: } F = F(x, y, \dots) \quad \Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \Delta y + \dots$$



Observação e medição

Derivada Total ($\frac{d}{dx}$) da função $f(x) = 4x^2$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = 8x$$

Derivada Parcial ($\frac{\partial}{\partial x}$) da função $g(x, y) = 4x^2y$

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \delta x, y) - g(x, y)}{\delta x} = 8xy$$

na derivada parcial é como se as outras variáveis (neste caso y) fossem constantes (não variam na definição de derivada parcial)

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 4x^2$$

Observação e medição

Problema cap 1

3. Encontre as derivadas parciais das funções

$$h(x, y) = 8x + 10x^2y + y^2$$

e

$$p(x, y, z) = -4xy + 10x^2yz + y^2 + yz$$

a) $\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$

b) $\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}$

c) $\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x}$

Observação e medição

Problema cap 1

1. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 25 \pm 1 \text{ cm}$$

$$Q = 10 \pm 1 \text{ cm}$$

a) Calcule a soma das duas quantidades

$$S = P + Q$$

b) Calcule a diferença das duas quantidades

$$D = P - Q$$

c) Calcule o produto das duas quantidades

$$M = P Q$$

Observação e medição

Problema cap 1

2. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 15.2 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$Q = 14.9 \pm 0.3 \text{ cm}$$

a) Calcule a soma das duas quantidades

$$S = P + Q$$

b) Calcule a diferença das duas quantidades

$$D = P - Q$$

c) Calcule o erro relativo da diferença D

Observação e medição

Algarismos Significativos de uma quantidade

São os algarismos que se conhecem com certeza (100%) mais o 1º algarismo que é afetado pelo erro

Ex: Comprimento

a) $4,10 \pm 0,02 \text{ m}$ possui 3 algarismos significativos (o erro afeta as centésimas)

b) $4,100 \pm 0,02 \text{ m}$ possui 3 algarismos significativos (o erro afeta as centésimas)

c) $4,100 \pm 0,2 \text{ m}$ possui 2 algarismos significativos (o erro afeta as décimas)

Permite escrever os valores de um modo mais simples: Escrever só os algarismos significativos

a) $4,10 \text{ m}$ possui 3 algarismos significativos

b) $4,10 \text{ m}$ possui 3 algarismos significativos

c) $4,1 \text{ m}$ possui 2 algarismos significativos

Em Física $4,10 \text{ m} \neq 4,1 \text{ m}$

Serway, 1.6; Sorensen, 3.3

Observação e medição

Operações

Produto e divisão: O resultado da operação deve apresentar o número de algarismos significativos igual ao menor dos fatores

ex: Círculo de raio $r = 6,0 \pm 0,1 \text{ cm}$
 de área $A = \pi \times (6,0 \text{ cm})^2 = 113,097 \dots \text{ cm}^2$
 apresenta-se com 2 algarismos significativos
 $A = \pi \times (6,0 \text{ cm})^2 = 1,1 \times 10^2 \text{ cm}^2$

Adição e subtração: O resultado da operação deve apresentar o número de casas decimais igual ao menor número de casa decimais das parcelas.

ex: $23,2 + 5,174 = 28,4$
 $3,4 + 10 = 13$
 $1,0001 + 0,0003 = 1,0004$
 $1,002 - 0,998 = 0,004$

Cálculos intermédios fazem-se com os todos os algarismos (na máquina de calcular ou computador). O resultado final apresenta-se arredondado.

Observação e medição

Problema cap 1

4. Um carro americano segue à velocidade de 85,0 milhas/hora. Passa por uma estrada com o limite de velocidade 50 km/h. Está o carro a exceder o limite de velocidade?

Note: 1 milha = 1609 m

Observação e medição

Problema cap 1

4. Um carro americano segue à velocidade de 85,0 milhas/hora. Passa por uma estrada com o limite de velocidade 50 km/h. Está o carro a exceder o limite de velocidade? Expresse a velocidade do carro em m/s?
Note: 1 milha = 1609 m

Resolução:

85.0 milhas / hora =

$$85.0 \frac{\text{milhas}}{\text{hora}} = \frac{85.0 \times 1609 \text{ m}}{\text{hora}} = \frac{136765 \text{ m}}{\text{hora}} = 137 \times 10^3 \text{ m/hora} = 137 \text{ km/hora}$$

$$85.0 \frac{\text{milhas}}{\text{hora}} = \frac{85.0 \times 1609 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 38.0 \text{ m/s}$$

Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Quando se tem um conjunto x, y de N medições, o método dos mínimos quadráticos oferece o ajuste linear que apresenta a menor diferença entre os valores medidos e os estimados por uma reta $y = m x + b$. Se se considerar que os erros que afetam os valores de y são iguais, as expressões que o método fornece são:

$$m = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}$$

$$r^2 = \frac{\left(N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i\right)^2}{\left[N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2\right] \left[N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N y_i\right)^2\right]}$$

$$\Delta m = |m| \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}$$

O coeficiente de determinação r^2 é tal que quando ~ 1 indica um ótimo ajuste, enquanto que ~ 0 indica que o modelo não é linear.

$$\Delta b = \Delta m \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}.$$

Escreva um programa em python que calcule as quantidades anteriores.

Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Escreva um programa em python que calcule as quantidades anteriores. Como teste ao programa escrito, compare os seus resultados com os de um problema conhecido, indicado na tabela abaixo,

L (cm)	X (cm)
222.0	2.3
207.5	2.2
194.0	2.0
171.5	1.8
153.0	1.6
133.0	1.4
113.0	1.2
92.0	1.0

em que L é a abcissa (x) e X a ordenada (y), com os valores

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i = 2322.4; \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1286.0; \quad \sum_{i=1}^N y_i = 13.5;$$
$$\sum_{i=1}^N x_i^2 = 221719.5; \quad \sum_{i=1}^N y_i^2 = 24.33;$$
$$m = 0.01015505; \quad \Delta m = 0.000162973$$
$$b = 0.05507544; \quad \Delta b = 0.02713077$$
$$r^2 = 0.99845714$$

Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

- a) Comece por representar os dados experimentais num gráfico.
- b) Calcular as somas das expressões acima.
- c) De seguida calcule o declive, a ordenada na origem e o coeficiente de determinação ou de correlação r^2 .
- d) faça um gráfico com os pontos experimentais e a reta cujos parâmetros m e b calculou anteriormente.
- e) Encontre o valor de X , quando $L = 165.0$ cm. Use a reta determinada pela regressão linear.
- f) Afaste da reta encontrada um dos valores medidos de y . Compare o coeficiente de determinação com o valor anterior. Faça um gráfico com os novos pontos experimentais e a nova reta.

Nota: os valores da tabela acima são as medições realizadas numa experiência de difração por uma dupla fenda de um feixe de luz, em que L é a distância da dupla fenda ao alvo e X a distância entre máximos luminosos consecutivos da figura de difração.