DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

Prova de Recurso
Parte Cálculo Analítico

Data: 14 JULHO 2021
Hora: 09H30

Duração: 1 hora
Disciplina: 41769
Salas: 11.2.7, 11.2.8, 11.2.22, 10.3.14

Cotação:
1) 1.5 + 1.5 + 1.5 = 4.5 valores
2) 3.5 = 3.5 valores
3) 2 = 2 valores
4) 3 = 3 valores
5) 2 + 1 +2 + 2 = 7 valores

Só é permitido o uso de máquina de calcular científica

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 65.2 \pm 0.8 \text{ cm}$$

$$Q = 30.0 \pm 0.1 \text{ cm}$$

e a área de um retângulo

$$A = 15.0 \pm 0.2 \text{ cm}^2$$

de lado Q

a) Calcule a soma dois comprimentos $S = P + Q$

b) Calcule a diferença dos dois comprimentos $D = P - Q$

c) Calcule o outro lado do retângulo $l = A/Q$

Resolução resumida:

a) $S = 65.2 + 30.0 = 95.2$ cm

$\Delta S = \Delta P + \Delta Q = 0.9$ cm

$S = 95.2 \pm 0.9$ cm

b) $D = P - Q = 65.2 - 30.0 = 35.2$ cm

$\Delta D = \Delta P + \Delta Q = 0.9$ cm

$D = 35.2 \pm 0.9$ cm

c) $l = \frac{A}{Q} = 0.5$ cm $\quad \left|\frac{\Delta l}{l}\right| = \left|\frac{\Delta A}{A}\right| + \left|\frac{\Delta Q}{Q}\right| = 0.0166$

$l = 0.500 \pm 0.008$ cm $\quad \Delta l = 0.0083$ cm

2. Uma bola de basquetebol é lançada de modo que ao rodar sobre si própria, ao cair, a trajetória é a mais próxima possível da vertical. Do ponto de vista físico, durante toda a trajetória a bola está sujeita também à força de Magnus. Se a rotação for descrita pelo vetor $\vec{\omega} = (0,0,10)$ rad/s e a velocidade for $\vec{v} = (4,4,0)$ m/s, qual a força de Magnus, se for definida por $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v}$, em que $A = \pi r^2$ é a área da secção de corte da bola, r o raio da bola e $\rho_{ar} = 1.225$ kg/m^3 a massa volúmica do ar. O raio da bola de basquetebol é 12 cm e a sua massa 625 g.

Resolução resumida:

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$= \frac{1}{2} \pi\, 0.12^2 \times 0.12 \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}}_{40\hat{j} - 40\hat{i}}$$

$$= (-0.133, +0.133, 0)\ N$$

3. O integral definido de uma função definida desde a até b

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Pode ser calculado aproximadamente por:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = f(x_{i+1})\,\delta x$$

que é uma forma da aproximação retangular, e onde $\delta x = (b-a)/n$ e n um número inteiro.
Determine como varia o erro global do integral I em função do passo δx?

Resolução resumida:

Erro de truncatura (local) da aproximação retangular:

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right)_{exato} - \left(f(x_{i+1})\,\delta x \right)_{ap.\ retangular} \right|$$

A função $f(x)$ pela série de Taylor à volta de x_{i+1}

$$f(x) = f(x_{i+1}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1}) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 + \mathcal{O}((x - x_{i+1})^3)$$

Subst. no integral temos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_{i+1}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1}) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 + \mathcal{O}((x - x_{i+1})^3) \right] dx$$

$$= f(x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i) - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \mathcal{O}((x_{i+1} - x_i)^3)$$

$$= f(x_{i+1})\,\delta x - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

Subst. no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right)_{exato} - \left(f(x_{i+1})\,\delta x \right)_{ap.\ retangular} \right|$$

$$= \left| f(x_{i+1})\,\delta x - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\delta x^3) - \left(f(x_{i+1})\,\delta x \right) \right| = \mathcal{O}(\delta x^2)$$

O erro de truncatura de um integral de uma fatia é da $\mathcal{O}(\delta x^2)$.

O erro global do integral completo, que é um somatório de n fatias, é o acumular dos erros locais

$$n\,\mathcal{O}(\delta x^2) = \frac{b-a}{\delta x}\,\mathcal{O}(\delta x^2) = \mathcal{O}(\delta x).$$

É da ordem de grandeza de δx.

4. Considere um corpo de massa 2 kg com a energia potencial

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k\, x\, (1 + \alpha\, x^2) + E\, x,$$

em que k, α e E são constantes. Determine a força aplicada ao corpo em função de x, k, α e E.

$$F_x = -\frac{d\,E_p}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}k\ x(1+\alpha x^2) + E x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}k\left[(1+\alpha x^2) + x(2\alpha x)\right] - E$$

$$= -\frac{1}{2}k\left[1 + 3\alpha x^2\right] - E$$

5. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\, x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 4$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e ϕ são constantes.

b) Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

c) Calcule A e ϕ , no caso em que a velocidade inicial é +1 m/s e a posição inicial a posição de equilíbrio do sistema.

d) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo. Mantêm-se constante ao longo do tempo?

a) $$F_x = -K\,x(t) = m\,\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t + \phi\right)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{\frac{K}{m}}\,A \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t + \phi\right)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{K}{m}\,\underbrace{A \sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t + \phi\right)}_{= x(t)}$$

$$m\,\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = m\left(-\frac{K}{m}\right)x(t) = -K\,x(t)$$

c.q.d.

b) $$v_x = \frac{d}{dt}\,x(t) = \sqrt{\frac{K}{m}}\,A \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t + \phi\right)$$

c) $$\begin{cases} t = 0\,s \\ x_0 = 0 = A \sin\phi \Rightarrow \phi = 0° \lor \phi = \pi \\ v_{x0} = +1\,m/s = \sqrt{\frac{K}{m}}\,A \cos\phi \end{cases}$$

$$\phi = 0° \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow v_{x0} > 0$$

$$\phi = \pi \Rightarrow \cos\pi = -1 \Rightarrow v_{x0} < 0$$

de acordo c/ dados.

$$1 = \sqrt{\frac{K}{m}}\cdot A \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{K}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5\,m$$

d)

$$x = 0.5 \sin(2t)$$

$$v_x = \cos(2t)$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \underset{\uparrow 1}{m} \cos^2(2t) + \frac{1}{2} \underbrace{K\, 0.5^2}_{4 \times 0.5^2 = 1} \sin^2 2t$$

$$= \frac{1}{2} J = \text{constante}$$

Formulário:

$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ $\qquad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$

$\vec{F} = m\,\vec{a}$

$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$ $\qquad \int_C \vec{F}^{(conservativa)}\cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$

$\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v}$ $\qquad \vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2}A\,\rho_{ar}|\vec{v}|\,\vec{v}$ $\qquad \left|\vec{F}_{rol}\right| = \mu\left|\vec{N}\right|$

$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v}$ $\qquad \vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ $\qquad \vec{F}_{elástica} = -k\,\vec{r}$

$\vec{F}_{elet} = -k_e\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ $\qquad \vec{F}_{elet} = q\vec{E}_{elet}$

$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$ $\qquad E_p = m\,g\,y$ $\qquad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$ $\qquad E_p = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|}$

$P_o = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}(t)\,dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$

$\sum\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$x(t) = A\,\cos(\omega t + \phi)$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ $\qquad E = \frac{1}{2}k\,A^2$

$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}}\delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}}\delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{x_{min}}\delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$

$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \cdots$

$a_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\cos(n\omega t)\;dt,\qquad n = 0,\,1,\,2,\,\cdots$ $\qquad b_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\sin(n\omega t)\;dt,\qquad n = 1,\,2,\,\cdots$

$x(t) = A\,e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t + \phi)$ $\qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi)$

Grandezas físicas e conversões:

1 polegada = 1 in = 0,39370 m $\qquad$ 1 pé = 1 ft = 2,54 cm $\qquad$ 1 milha = 1,609344 km

1 rad = 57.29578 graus

1 cv (cavalo – vapor métrico) = 735,4975 W $\qquad$ 1 hp (cavalo – vapor inglês) = 745,715 W

M_{Sol} = M = 1.989×10^{30} kg $\qquad$ 1 AU = 1.489×10^{11} m $\qquad$ 1 ano = 365,24 dias

$G = 6.67\times10^{11}\ \mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)} = 4\pi^2\ \mathrm{AU^3/(M\cdot ano^2)}$ $\qquad g = 9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$

$\rho_{ar} = 1.225\ \mathrm{kg/m^3}$ $\qquad v_{som} = 340$ m/s

$c = 299792{,}458$ km/s $= 2{,}99792458\times10^8$ m/s

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K $= 8.61733 \times 10^{-5}$ eV/K

$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \times 10^{-12}$ F/m $\qquad k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}98755188 \times 10^9$ N $\cdot$ m^2/C^2

$m_e = 9{,}10938356 \times 10^{-31}$ kg

$m_p = 1{,}67262 \times 10^{-27}$ kg $= 1836.151\ m_e$

$m_n = 1{,}67493 \times 10^{-27}$ kg $\qquad$ 1 Å $= 10^{-10}$ m

$e = 1{,}602176208 \times 10^{-19}$ C $\qquad e/c = 5{,}34428 \times 10^{-28}$ C $\cdot$ m/s

Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$\mathrm{e} = 2{,}71828183 \qquad \pi = 3{,}14159265$

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x) \qquad \operatorname{sen}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$

$\cos(-x) = +\cos(x) \qquad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\operatorname{sen}(x)$

$\operatorname{sen}(x \pm y) = \sin x\ \cos y \pm \cos x\ \sin y \qquad \cos(x \pm y) = \cos x\ \cos y \mp \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} y$

$$\sin x\ \cos y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\right]$$

$$\cos x\ \sin y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)\right]$$

$$\sin x\ \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\cos x\ \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$$\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right)$$

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos x - \cos y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$