DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

2º Teste
Parte Cálculo Analítico

Data: 30 JUNHO 2021
Hora: 10H00

Duração: 45 minutos
Disciplina: 41769
Salas: 12.2.8, 12.2.9, 12.2.10, 12.2.11, 12.2.12.

Cotação:
1) 2 valores
2) 2 + 1 +2 + 2 = 7 valores
3) 1 valor

Só é permitido o uso de máquina de calcular científica

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Considere um corpo de massa 2 kg com a energia potencial $E_p = \frac{1}{2} k\left(x^2 - x_{eq}^2\right)^2$, em que x_{eq} é a posição de equilíbrio e k uma constante. Determine a força aplicada ao corpo em função de x, k e x_{eq}.

2. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\, x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e ϕ são constantes.

b) Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

c) Calcule A e ϕ , no caso em que a velocidade inicial é +1 m/s e a posição inicial a posição de equilíbrio do sistema.

d) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo. Mantêm-se constante ao longo do tempo?

3. O integral definido de uma função definida desde a até b

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Pode ser calculado aproximadamente pela aproximação retangular, onde se faz:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = f(x_i)\, \delta x$$

onde $\delta x = (b-a)/n$ e n um número inteiro.

Determine como varia o erro global do integral I em função do passo δx?

Formulário:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \qquad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2 \qquad \int_C \vec{F}^{(conservativa)}\cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v} \qquad \vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2}A\,\rho_{ar}|\vec{v}|\,\vec{v} \qquad \left|\vec{F}_{rol}\right| = \mu\left|\vec{N}\right|$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v} \qquad \vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \vec{F}_{elástica} = -k\,\vec{r}$$

$$\vec{F}_{elet} = -k_e\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \vec{F}_{elet} = q\vec{E}_{elet}$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \qquad E_p = m\,g\,y \qquad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad E_p = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|}$$

$$P_o = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\,dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$x(t) = A\,\cos(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \qquad E = \frac{1}{2}k\,A^2$$

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}} \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{x_{min}} \delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \cdots$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\cos(n\omega t)\;dt, \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\cdots \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\sin(n\omega t)\;dt, \qquad n = 1,\,2,\,\cdots$$

$$x(t) = A\,e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

Grandezas físicas e conversões:

1 polegada = 1 in = 0,39370 m 1 pé = 1 ft = 2,54 cm 1 milha = 1,609344 km

1 rad = 57.29578 graus

1 cv (cavalo – vapor métrico) = 735,4975 W 1 hp (cavalo – vapor inglês) = 745,715 W

M_{Sol} = M = 1.989 × 10^{30} kg 1 AU = 1.489 × 10^{11} m 1 ano = 365,24 dias

$G = 6.67\times10^{11}\ \mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)} = 4\pi^2\ \mathrm{AU^3/(M\cdot ano^2)}$ g = 9,80 m/s^2

ρ_{ar} = 1.225 kg/m^3 v_{som} = 340 m/s

c = 299792,458 km/s = 2,99792458 × 10^8 m/s

Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$\mathrm{e} = 2{,}71828183$ $\pi = 3{,}14159265$

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x)$ $\operatorname{sen}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$

$\cos(-x) = +\cos(x)$ $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\operatorname{sen}(x)$

$\operatorname{sen}(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$

$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right)$

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos x - \cos y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$