DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

1º TESTE – Tipo e de Treino
Parte Cálculo Computacional-Numérico

Data: 27 ABRIL 2021 **Duração:** ¾ hora **Cotação**: 1) 1 +1.5 + 1.5 +1 = 5 valores
Hora: 16H30 **Disciplina:** 41769 2) 2 + 1.5 + 1.5 = 5 valores

NOTE:
Responda às perguntas **na vossa folha de prova**, justificando-as,
a) Indique claramente o sistema de eixos usado.
b) Esboce os gráficos, indicando univocamente os pontos importantes. Se gravar as figuras, salve-as em formato png.
c) Na vossa folha de prova indique os métodos, os algoritmos, passos, … usados.
e) Os ficheiros devem ser copiados para a caneta de memória do docente presente na sala com o nome e número do aluno (para poderem ser consultados quando o docente tiver dúvidas durante a correção).
f) Tem de usar o seu computador portátil. Pode (e deve) usar os seus programas, assim como outros programas que tenha obtido.
g) Não pode aceder à internet, incluindo para consultar documentos do python

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. O período de oscilação de uma massa, M**,** presa a uma mola foi medido para massas diferentes. As medições efetuadas estão registadas na seguinte tabela:

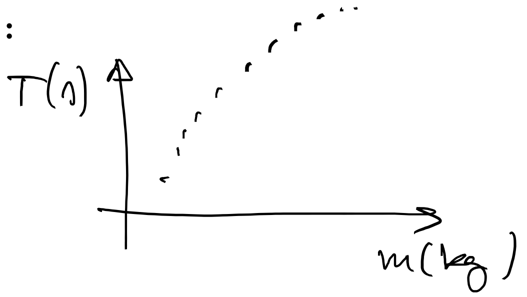
M (kg)	T (s)
0,15	1,21
0,20	1,40
0,16	1,26
0,11	1,05
0,25	1,60
0,32	1,78
0,40	2.00
0,45	2,11
0,50	2,22
0,55	2,33

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação ente o período de oscilação e a massa é linear?
b) Apresente as medições num gráfico log-log. Qual a dependência entre as quantidade período e massa?
c) Considerando a relação entre o período e a massa descoberta na alínea anterior, transforme as quantidades de modo a obter um gráfico que apresente uma relação linear. Encontre o declive, a ordenada na origem, os erros respetivos e o coeficiente de determinação. É um bom ajuste?

d) Calcule a constante elástica, definida como $K = 4\pi^2 \frac{M}{T^2}$ (o que equivale a se ter $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$).

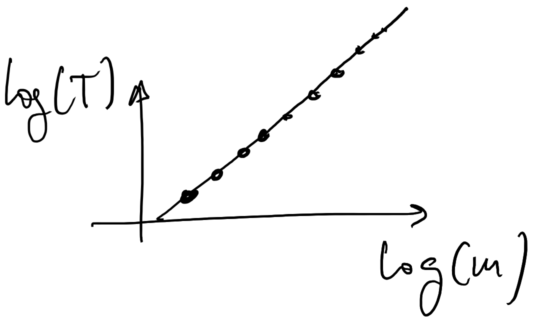
Resolução :

a)



não é linear.

b)



é linear

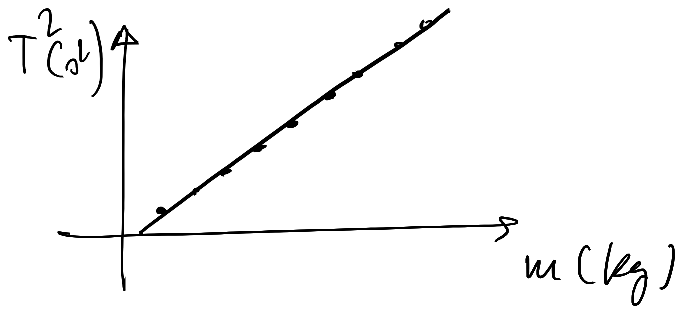
declive 0.499 ± 0.005

$r^2 =$

$$T = C\, m^{0.5}$$

$$T^2 = C^2\, m$$

c)



declive $9.87 \pm 0.08\ s^2/kg$

b $0.02 \pm 0.03\ s^2$

$r^2 = 0.9995 \sim 1$

É um bom ajuste, pois $r^2 \sim 1$.

d)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{M}{K} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{K} M$$

declive $\frac{4\pi^2}{K}$

$$\frac{4\pi^2}{K} = 9.87 \pm 0.08\ s^2/kg$$

$$k = \frac{4\pi^2}{9.87} = 3.9998 \qquad \frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta m}{m} \Rightarrow \Delta K = 0.032$$

$$\longrightarrow K = 4.00 \pm 0.03\ N/m\ (kg/s^2)$$

2. Numa partida de ténis, muitas vezes a bola é batida de modo a adquirir rotação, num eixo horizontal e perpendicular à velocidade. Calcule a trajetória da bola, quando parte da posição inicial (-10,1,0) com a velocidade 130 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A bola de ténis tem a massa 57 g, o diâmetro 67 mm e no ar tem a velocidade terminal 100 km/h. Calcule a altura máxima e o alcance (quando bate em $y = 0$ da trajetória da bola, quando

a) A rotação é nula.

b) A rotação é descrita por $\vec{\omega} = (0, 0, +100)$ rad/s

c) A rotação é descrita por $\vec{\omega} = (0, 0, -100)$ rad/s

As forças aplicadas à bola de ténis são o seu peso, a força de resistência do ar e, em rotação, a força de Magnus.

A densidade do ar é $\rho_{ar} = 1.225$ kg/m^3

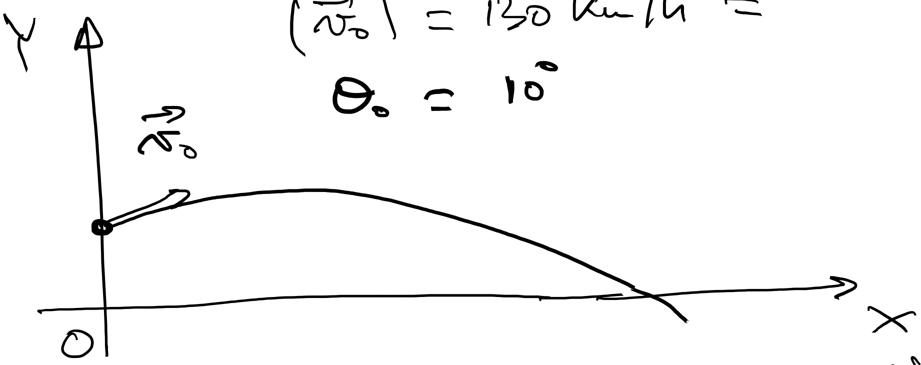
Resolução:

$m = 57g = 0.057$ kg

$d = 67$ mm $\Rightarrow r = 33.5$ mm $= 0.0335$ m

$|\vec{v}_0| = 130$ km/h $=$ m/s

$\theta_0 = 10°$



metodo do Euler

$$v_x(i+1) = v_x(i) + a_x(i) \cdot \delta t$$
$$v_y(i+1) = v_y(i) + a_y(i) \cdot \delta t$$
$$x(i+1) = x(i) + v_x(i) \cdot \delta t$$
$$y(i+1) = y(i) + v_y(i) \cdot \delta t$$

a) $\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{res}$

$$\begin{cases} F_x = 0 - mD|\vec{v}| \cdot v_x \\ F_y = -mg - mD|\vec{v}| \cdot v_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = -D|\vec{v}| \cdot v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}| v_y \end{cases}$$

$$D = g/v_T^2$$

a) Cálculo com as funções maximo e zerosv

δt (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	2.9868	29.16701087
0.01	2.7282197721	27.4047699
0.001	2.70360028	27.22868
0.0001	2.701150538	27.211076
0.00001	2.700905686	27.2093157962

altura máxima =2.70 m; alcance 27.21 m;

b)

δt (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	3.9019528	40.96493035
0.01	3.646755	39.4620245
0.001	3.622064	39.310731
0.0001	3.61960309	39.2955928
0.00001	3.61935707370	39.294078914

3.62 m; 39.29 m

c)

δt (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	2.53547	21.74859
0.01	2.26736381	19.8336427
0.001	2.24225	19.6436191
0.0001	2.23976238	19.6246321
0.00001	2.239513193	19.6227335

2.24 m; 19.62 m;

Formulário:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v} \qquad \vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$\vec{F}_{grav} = -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \vec{F}_{elástica} = -k\,\vec{r}$$

$$\vec{F}_{elet} = -k\,\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \vec{F}_{elet} = q\vec{E}_{elet}$$

Grandezas físicas e conversões:

1 polegada = 1 in = 0,39370 m   1 pé = 1 ft = 2,54 cm   1 milha = 1,609344 km

1 cv = 735,4975 W   1 hp = 745,715 W

$M_{Sol} = \mathrm{M} = 1.989\times 10^{30}$ kg   1 AU = 1.489×10^{11} m   1 ano = 365,24 dias

$G = 6.67\times 10^{11}\ \mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)} = 4\pi^2\ \mathrm{AU^3/(M\cdot ano^2)}$ $g = 9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$

$c = 299792{,}458$ km/s $= 2{,}99792458\ \times 10^8$ m/s

$k_B = 1.380649\times 10^{-23}$ J/K $= 8.61733\times 10^{-5}$ eV/K

$\varepsilon_0 = 8{,}854187817\times 10^{-12}$ F/m $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}98755188\times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$

$m_e = 9{,}10938356\times 10^{-31}$ kg

$m_p = 1{,}67262\times 10^{-27}$ kg $= 1836.151\ m_e$

$m_n = 1{,}67493\times 10^{-27}$ kg   1 Å = 10^{-10} m

$e = 1{,}602176208\times 10^{-19}$ C $e/c = 5{,}34428\ \times 10^{-28}$ C · m/s

Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$\mathrm{e} = 2{,}71828183$ $\pi = 3{,}14159265$

$$\mathrm{sen}\,(-x) = -\,\mathrm{sen}\,(x) \qquad \mathrm{sen}\,(\pi - x) = \mathrm{sen}\,(x) \qquad \mathrm{sen}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$$

$$\cos(-x) = +\cos(x) \qquad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\,\mathrm{sen}\,(x)$$

$$\mathrm{sen}\,(x \pm y) = \sin x\ \cos y\ \pm \cos x\ \sin y \qquad \cos(x \pm y) = \cos x\ \cos y\ \mp \mathrm{sen}\,x\ \mathrm{sen}\,y$$

$$\sin x\ \cos y = \frac{1}{2}\ [\mathrm{sen}\,(x+y) + \mathrm{sen}\,(x-y)]$$

$$\cos x\ \sin y = \frac{1}{2}\ [\mathrm{sen}\,(x+y) - \mathrm{sen}\,(x-y)]$$

$$\sin x\ \sin y = \frac{1}{2}\ [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x\ \cos y = \frac{1}{2}\ [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\mathrm{sen}\,x\ \pm\ \mathrm{sen}\,y = 2\cos\left(\frac{x\mp y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x\pm y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos x - \cos y = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$