DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

Exame - Resolução
Parte Cálculo Analítico

Data: 30 JUNHO 2021
Hora: 09H30

Duração: 1 hora 15 minutos
Disciplina: 41769
Salas: 12.2.8, 12.2.9, 12.2.10, 12.2.11, 12.2.12.

Cotação:
1) 1.5 + 1.5 + 1.5 = 4.5 valores
2) 3.5 = 3.5 valores
3) 2 = 2 valores
4) 3 = 3 valores
5) 2 + 1 +2 + 2 = 7 valores

Só é permitido o uso de máquina de calcular científica

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Foram medidos três comprimentos:

$P = 25.2 \pm 0.4$ cm

$Q = 16.9 \pm 0.3$ cm

$R = 5.0 \pm 0.2$ cm

a) Calcule a soma das duas quantidades $S = P + R$

b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = Q - R$

c) Calcule a área $A = P \cdot R$

Resolução resumida:

a) $S = 30.2 \pm 0.6$ cm

b) $D = 11.9 \pm 0.5$ cm

c) $A = 126 \pm \Delta A$

$$\left|\frac{\Delta A}{A}\right| = \left|\frac{\Delta P}{P}\right| + \left|\frac{\Delta R}{R}\right| = 0.0559$$

$$\Delta A = 126 \times 0.0559 = 7.04$$

$A = 126 \pm 7$

2. Uma bola de futebol é pontapeada de modo que roda sobre si própria, o que resulta adicionar a força de Magnus às outras forças. A força de Magnus resulta de o escoamento do ar ser diferente nos dois lados opostos da bola. Se a rotação for descrita pelo vetor $\vec{\omega} = (0,0,10)$ rad/s e a velocidade for $\vec{v} = (1,0,0)$ m/s, qual a força de Magnus, se for definida por $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v}$, em que $A = \pi r^2$ é a área da secção de corte da bola, r o raio da bola e $\rho_{ar} = 1.225$ kg/m^3 a massa volúmica do ar. O raio da bola de futebol é 11 cm.

Resolução resumida:

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +10\,\hat{j} \quad (SI)$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, (10\,\hat{j})$$

$$= \frac{1}{2} \pi (0.11)^2 \times 1.225 \times 0.11 \times 10\,\hat{j} \text{ N}$$

$$= 0.0256\,\hat{j} \text{ N}$$

3. O integral definido de uma função definida desde a até b

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Pode ser calculado aproximadamente pela aproximação retangular, onde se faz:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = f(x_i)\, \delta x$$

onde $\delta x = (b-a)/n$ e n um número inteiro.

Determine como varia o erro global do integral I em função do passo δx?

Resolução resumida:

Erro de truncatura (local) da aproximação retangular:

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - \left(f(x_i)\, \delta x \right)_{ap.\ retangular} \right|$$

A função $f(x)$ pela série de Taylor à volta de x_i

$$f(x) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \mathcal{O}((x - x_i)^3)$$

Subst. temos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \mathcal{O}((x - x_i)^3) \right] dx$$

$$= f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \mathcal{O}((x_{i+1} - x_i)^3)$$

$$= f(x_i)\, \delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

Subst. no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - \left(f(x_i)\, \delta x \right)_{ap.\ retangular} \right|$$

$$= \left| f(x_i)\, \delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\delta x^3) - (f(x_i)\, \delta x) \right| = \mathcal{O}(\delta x^2)$$

O erro de truncatura de um integral de uma fatia é da $\mathcal{O}(\delta x^2)$.

O erro global do integral completo, que é um somatório de n fatias, é o acumular dos erros locais

$$n\,\sigma(\delta x^2) = \frac{b-a}{\delta x}\,\sigma(\delta x^2) = \sigma(\delta x).$$

É da ordem de grandeza de δx.

4. Considere um corpo de massa 2 kg com a energia potencial $E_p = \frac{1}{2}k\left(x^2 - x_{eq}^2\right)^2$, em que x_{eq} é a posição de equilíbrio e k uma constante. Determine a força aplicada ao corpo em função de x, k e x_{eq}.

Resolução resumida:

$$F_x = -\frac{d}{dx}E_p$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}k\left(x^2 - x_{eq}^2\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}k\left[2\left(x^2 - x_{eq}^2\right)2x\right]$$

$$= -2kx\left(x^2 - x_{eq}^2\right)$$

5. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\, x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e ϕ são constantes.

b) Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

c) Calcule A e ϕ , no caso em que a velocidade inicial é $+1$ m/s e a posição inicial a posição de equilíbrio do sistema.

d) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo. Mantêm-se constante ao longo do tempo?

Resolução resumida:

a) eq. dinamica $F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(A\cos(\omega t+\phi)\right) \qquad c/\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-\omega A\sin(\omega t+\phi)\right)$$

$$= -\omega^2 \underbrace{A\cos(\omega t+\phi)}_{=x(t)}$$

$$= -\omega^2 x$$

$$= -\frac{k}{m}x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-kx}_{F_x}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \qquad \text{c.q.d.}$$

b) $$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right)\right)$$

$$= -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right)$$

c) A, ϕ ?

$$\begin{cases} t=0 \\ x_0 = 0 & = A \cos(\phi) \\ v_{x0} = +1 \text{ m/s} & = -A\sqrt{\frac{K}{m}} \sin(\phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cos\phi = 0 & \Longrightarrow \text{c/ } A \neq 0 \quad \phi = \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} \\ A\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\phi = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1 > 0 \\ \phi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{2} = -1 < 0 \end{cases}$$

como $A > 0$ $\quad A\sqrt{\frac{K}{m}}(-1) = -1$

$$\therefore \quad A = \sqrt{\frac{m}{K}}$$

$A = \sqrt{\frac{m}{K}}$ e $\phi = \frac{3\pi}{2}$

d) $E = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} K x^2$

$$= \frac{1}{2} m \left(-\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot A \sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \phi\right)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} K \left(A \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \phi\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{K}{m} A^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \phi\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} K A^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \phi\right)$$

$$= \frac{1}{2} K A^2 \left(\sin^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \phi\right) + \cos^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t + \phi\right)\right)$$

$= \frac{1}{2} K A^2 = c^{te}$

Formulário:

$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ $\qquad$ $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$

$\vec{F} = m\,\vec{a}$

$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$ $\qquad$ $\int_C \vec{F}^{(conservativa)}\cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$

$\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2} A\,\rho_{ar}|\vec{v}|\,\vec{v}$ $\qquad$ $\left|\vec{F}_{rol}\right| = \mu\left|\vec{N}\right|$

$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ $\qquad$ $\vec{F}_{elástica} = -k\,\vec{r}$

$\vec{F}_{elet} = -k_e\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ $\qquad$ $\vec{F}_{elet} = q\vec{E}_{elet}$

$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$ $\qquad$ $E_p = m\,g\,y$ $\qquad$ $E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$ $\qquad$ $E_p = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|}$

$P_o = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}(t)\,dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$

$\sum\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$x(t) = A\,\cos(\omega t + \phi)$ $\qquad$ $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ $\qquad$ $E = \frac{1}{2}k\,A^2$

$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}}\delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}}\delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{x_{min}}\delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$

$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \cdots$

$a_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$ $\qquad$ $b_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt, \quad n = 1, 2, \cdots$

$x(t) = A\,e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t + \phi)$ $\qquad$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$

$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi)$

Grandezas físicas e conversões:

1 polegada = 1 in = 0,39370 m $\qquad$ 1 pé = 1 ft = 2,54 cm $\qquad$ 1 milha = 1,609344 km

1 rad = 57.29578 graus

1 cv (cavalo – vapor métrico) = 735,4975 W $\qquad$ 1 hp (cavalo – vapor inglês) = 745,715 W

M_{Sol} = M = 1.989 × 10^{30} kg $\qquad$ 1 AU = 1.489 × 10^{11} m $\qquad$ 1 ano = 365,24 dias

$G = 6.67 \times 10^{11}\ \mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)} = 4\pi^2\ \mathrm{AU^3/(M\cdot ano^2)}$ $\qquad$ g = 9,80 m/s²

$\rho_{ar} = 1.225$ kg/m^3 $\quad$ $v_{som} = 340$ m/s

$c = 299792{,}458\ \mathrm{km/s} \ = 2{,}99792458\ \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}\ = 8.61733 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}$

$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$ $\quad$ $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}98755188 \times 10^{9}\ \ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

$m_e = 9{,}10938356 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

$m_p = 1{,}67262 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1836.151\ m_e$

$m_n = 1{,}67493 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ $\quad$ $1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \mathrm{m}$

$e = 1{,}602176208 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ $\quad$ $e/c = 5{,}34428\ \times 10^{-28}\ \mathrm{C \cdot m/s}$

Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$\mathrm{e} = 2{,}71828183$ $\quad$ $\pi = 3{,}14159265$

$\mathrm{sen}\,(-x) = -\mathrm{sen}\,(x)$ $\quad$ $\mathrm{sen}\,(\pi - x) = \mathrm{sen}\,(x)$ $\quad$ $\mathrm{sen}\,\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos\,(x)$

$\cos(-x) = +\cos(x)$ $\quad$ $\cos\,\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\,\mathrm{sen}\,(x)$

$\mathrm{sen}\,(x \pm y) = \sin x\ \cos y\ \pm \cos x\ \sin y$ $\quad$ $\cos\,(x \pm y) = \cos x\ \cos y\ \mp \mathrm{sen}\,x\ \mathrm{sen}\,y$

$$\sin x\ \cos y = \frac{1}{2}\ [\mathrm{sen}\,(x+y) + \mathrm{sen}\,(x-y)]$$

$$\cos x\ \sin y = \frac{1}{2}\ [\mathrm{sen}\,(x+y) - \mathrm{sen}\,(x-y)]$$

$$\sin x\ \sin y = \frac{1}{2}\ [\cos\,(x-y) - \cos\,(x+y)]$$

$$\cos x\ \cos y = \frac{1}{2}\ [\cos\,(x-y) + \cos\,(x+y)]$$

$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ $\quad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$$\mathrm{sen}\,x\ \pm\ \mathrm{sen}\,y = 2\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right)$$

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\quad$ $\cos x - \cos y = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$