Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

1º TESTE- Tipo e de Treino
Parte Cálculo Analítico

Data: 27 ABRIL 2021
Hora: 16H30
Duração: 1/2 horas
Disciplina: 41769
Cotação: 1) 1 +1 + 1 = 3 valores
2) 2 + 1 + 1 = 4 valores
3) 1.5 + 1.5 = 3 valores

Só é permitido o uso de máquina de calcular científica

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Foram medidos três comprimentos:

$P = 12.2 \pm 0.1$ cm

$R = 20.9 \pm 0.3$ cm

$S = 1.0 \pm 0.1$ cm

a) Calcule a soma das duas quantidades $A = P + R$

b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = R - S$

c) Calcule o volume $V = P \cdot R \cdot S$

Resolução resumida:

a) $A = (12.2 \pm 0.1)\,cm + (20.9 \pm 0.3)\,cm$

$= 31.1 \pm 0.4\ cm$

b) $D = (20.9 \pm 0.3)\,cm - (1.0 \pm 0.1)\,cm$

$= 19.9 \pm 0.4\ cm$

c) $$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta S}{S}$$

$$= \frac{0.1}{12.2} + \frac{0.3}{20.9} + \frac{0.1}{1.0} = 0.123$$

$V = 12.2 \times 20.9 \times 1 = 254.98$

$\Delta V = 31.4$ $\to$ $V = (25 \pm 3) \times 10\ cm^3$

2. O método de Feynman-Newton integra as equações diferenciais do movimento

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt},$$

fazendo a aproximação:

$$x(t+\delta t) = x(t) + v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) \times \delta t$$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x\left(t - \frac{\delta t}{2}\right) + a_x(t) \times \delta t,$$

se souber $x(t_0) = x_0$ e $v_x(t_0) = v_{x0}$.

a) Calcule o erro de truncatura local do método de Feynman-Newton.

b) Calcule o erro de truncatura global do método de Feynman-Newton.

c) Para iniciar o cálculo das velocidades tem de conhecer $v_x\left(\frac{\delta t}{2}\right)$. Encontre uma expressão que permita calcular esta última quantidade. Considere $t_0 = 0$.

Resolução resumida:

a) Quer-se determinar como $|x(t+\delta t)_{exato} - x(t+\delta t)_{FN}|$ varia com δt

$$x(t+\delta t)_{FN} = x(t) + v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) \times \delta t$$

$$x(t+\delta t)_{\mathrm{FN}} = x(t) + \left[v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=t} \delta t/2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)\right] \times \delta t$$

$$x(t+\delta t)_{\mathrm{FN}} = x(t) + v_x(t) \times \delta t + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=t} \delta t^2/2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^3/4 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

Comparando com a série de Taylor

$$x(t+\delta t)_{exato} = x(t) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3 x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

O erro local da posição é $\mathcal{O}(\delta t^3)$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x\left(t - \frac{\delta t}{2}\right) + a_x(t) \times \delta t$$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = \left[v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=t} (-\delta t/2) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)\right] + a_x(t)\, \delta t$$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x(t) + \left(-\left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=t} (\delta t/2) + a_x(t)\, \delta t\right) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)$$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x(t) + \left(+\left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t (\delta t/2)\right) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)$$

Comparando com a série de Taylor de $v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right)$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t (\delta t/2) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_t (\delta t/2)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3 v_x}{dt^3}\right|_t (\delta t/2)^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

O erro local que afeta a velocidade é $\mathcal{O}(\delta t^3)$

b) quer na posição quer na velocidade e o erro de truncatura local é $\mathcal{O}(\delta t^3)$.

No instante (qualquer) $t_f = n\,\delta t$ o erro acumulado depois de n passos é:

$$n\,\mathcal{O}(\delta t^3) = \frac{t_f}{\delta t}\,\mathcal{O}(\delta t^3) = \mathcal{O}(\delta t^2)$$

c) usando a série de Taylor

$$v_x(\delta t/2) = v_x(0) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=0} \delta t/2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_{t=0} \delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)$$

3. A força resultante aplicada a um objeto de massa 100 g é (2,0; 4,0; 0,0) N.

a) Qual a aceleração que provoca no objeto?

b) Qual a lei da velocidade?

Resolução resumida:

a) $m = 100\,g = 0{,}1\,kg$

$\vec{F} = (2{,}0;\ 4{,}0;\ 0{,}0)\ N$

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$

$= \frac{1}{0{,}1}(2{,}0;\ 4{,}0;\ 0{,}0)$

$\vec{a} = (20;\ 40;\ 0)\ m/s$

b) $\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a} \cdot dt$

$= \int_{t}^{t_0} (20;\ 40;\ 0)\ dt$

$= (20t;\ 40t;\ 0)\Big|_{t_0}^{t}$

$= (20(t-t_0);\ 40(t-t_0);\ 0)$

$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + (20(t-t_0);\ 40(t-t_0);\ 0)$