Modelação de Sistemas Físicos

Ano Académico 2021/2022 - 2º Semestre

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

2º TESTE - Resolução
Parte Cálculo Analítico

Data: 3 junho 2022
Hora: 16H30

Duração: 1/2 hora
Disciplina: 41769
Salas: 12.1.1 e 12.2.1.

Cotação: 1) 2.5 + 1.5 = 4 valores
2) 2 + 1 = 3 valores
3) 2 + 1 = 3 valores

Só é permitido o uso de máquina de calcular científica

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Considere um espaço a 3 dimensões. Um corpo tem 2 forças aplicadas. Uma força é $\vec{F}_1 = 2\,\hat{\imath}$ N e a outra força é $\vec{F}_2$ está no plano OXY, tem comprimento 3 N e faz um ângulo 30º com o eixo dos XX.

a) Calcule a soma das duas forças, a suas componentes segundo os três eixos cartesianos e o seu módulo.

b) Encontre um vetor que seja perpendicular aos vetores $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

Resolução resumida,

a) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$$\vec{F}_1 = 2\,\hat{\imath}\text{ N} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} F_{1x} = 1\text{ N} \\ F_{1y} = 0 \end{cases}$$

e,

$$\begin{cases} F_{2x} = 3\cos(30^o)\text{N} = 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\text{N} \\ F_{2y} = 3\sin(30^o)\text{ N} = \frac{3}{2}\text{ N} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} F_x = F_{1x} + F_{2x} = 1 + 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ N} \\ F_y = F_{1y} + F_{2y} = \frac{3}{2}\text{ N} \end{cases}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{(1 + 3\,\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = 3.898\text{ N}$$

b) Como as duas forças estão no plano OXY, qualquer vetor só segundo OZ é perpendicular às duas forças.

Ou, pelo produto vetorial que se sabe que o resultado é um vetor perpendicular.

$$\vec{V}_\perp = \vec{F}_1 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\hat{k}\text{ N}^2$$

2. O integral definido de uma função definida desde a até b

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Pode ser calculado aproximadamente pela aproximação retangular, onde se faz:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = f(x_i)\, \delta x$$

onde $\delta x = (b-a)/n$ e n um número inteiro.

a) Determine como varia o erro local do integral I em função do passo δx?

b) Determine como varia o erro global do integral I em função do passo δx?

Resolução resumida,

a) $$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - (f(x_i)\, \delta x\,)_{\,ap.\ retang} \right|$$

A função $f(x)$ pela série de Taylor à volta de x_i

$$f(x) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3)$$

Subst. em

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3) \right] dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3) \right] dx$$

$$= f(x_i)\, (x_{i+1} - x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \sigma((x_{i+1} - x_i)^3)$$

$$= f(x_i)\, \delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3)$$

Subst. no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - (f(x_i)\, \delta x\,)_{\,ap.\ retang} \right|$$

$$= \left| \left(f(x_i)\, \delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3) \right) - (\, f(x_i)\ \delta x\,) \right| = \left| \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3) \right| = \sigma(\delta x^2)$$

O erro local de truncatura de um integral de uma fatia é da $\sigma(\delta x^2)$.

b) O erro global do integral completo, que é um somatório de n fatias, é o acumular dos erros locais

$$n\, \sigma(\delta x^2) = \frac{b-a}{\delta x}\, \sigma(\delta x^2) = \sigma(\delta x^1).$$

3. Considere um corpo de massa m e de carga elétrica q sujeito a uma força elástica e num campo elétrico $\vec{E}$ uniforme (constante). Nesta situação física o corpo tem a energia potencial

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k \left(x - x_{eq}\right)^2 - q\, E_x\, x\ ,$$

em que k uma constante e x_{eq} a posição de equilíbrio da mola que exerce no corpo a força elástica. Determine, em função de x, k e x_{eq},

a) A força aplicada ao corpo

b) e a nova posição de equilíbrio.

Resolução resumida,

a) $$F_x = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -k\left(x - x_{eq}\right) + q\, E_x\ ,$$

b) Posição de equilíbrio $x_{eq}^{(nova)}$ quando $F_x = 0$

$$0 = -k\left(x_{eq}^{(nova)} - x_{eq}\right) + q\, E_x$$

$$x_{eq}^{(nova)} = +x_{eq} + \frac{q}{k}\, E_x$$

Formulário

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \qquad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \sigma(\delta t^4)$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2 \qquad \int_C \vec{F}^{(conservativa)}\cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v} \qquad \vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2}A\,\rho_{ar}|\vec{v}|\,\vec{v} \qquad \left|\vec{F}_{rol}\right| = \mu\left|\vec{N}\right| \qquad \left|\vec{F}_{impulsão}\right| = m_{fluido}\,g$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v} \qquad \vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \vec{F}_{elástica} = -k\,\vec{r}$$

$$\vec{F}_{elet} = -k_e\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \vec{F}_{elet} = q\,\vec{E}_{elet}$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \qquad E_p = m\,g\,y \qquad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad E_p = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|}$$

$$P_o = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}(t)\,dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

$$\sum\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Grandezas físicas e conversões:

1 polegada = 1 in = 0,39370 m   1 pé = 1 ft = 2,54 cm   1 milha = 1,609344 km

1 rad = 57,29578 graus

1 cv (cavalo − vapor métrico) = 735,4975 W   1 hp (cavalo − vapor inglês) = 745,715 W

M_{Sol} = M = $1{,}989\times10^{30}$ kg   1 AU = $1{,}489\times10^{11}$ m   1 ano = 365,24 dias

$g = 9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$ $G = 6{,}67408\times10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)} = 4\pi^2\ \mathrm{AU^3/(M\cdot ano^2)}$ $R_{Terra} = 6371$ km

Sistema Internacional de Unidades (SI):

Quantidades básicas

Quantidade	**unidade**	**Símbolo**
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K
Corrente elétrica	ampere	A

Outras quantidades importantes

Quantidade	**unidade**	**Símbolo**
Velocidade	metro/segundo	m/s
Aceleração	metro/segundo^2	m/s^2
Força	kilograma × metro/segundo^2 = newton	N
Energia	kilograma × metro2 /segundo^2 = joule	J
Potência	kilograma × metro2 /segundo^3 = watt	W