Departamento de Física
Universidade de Aveiro

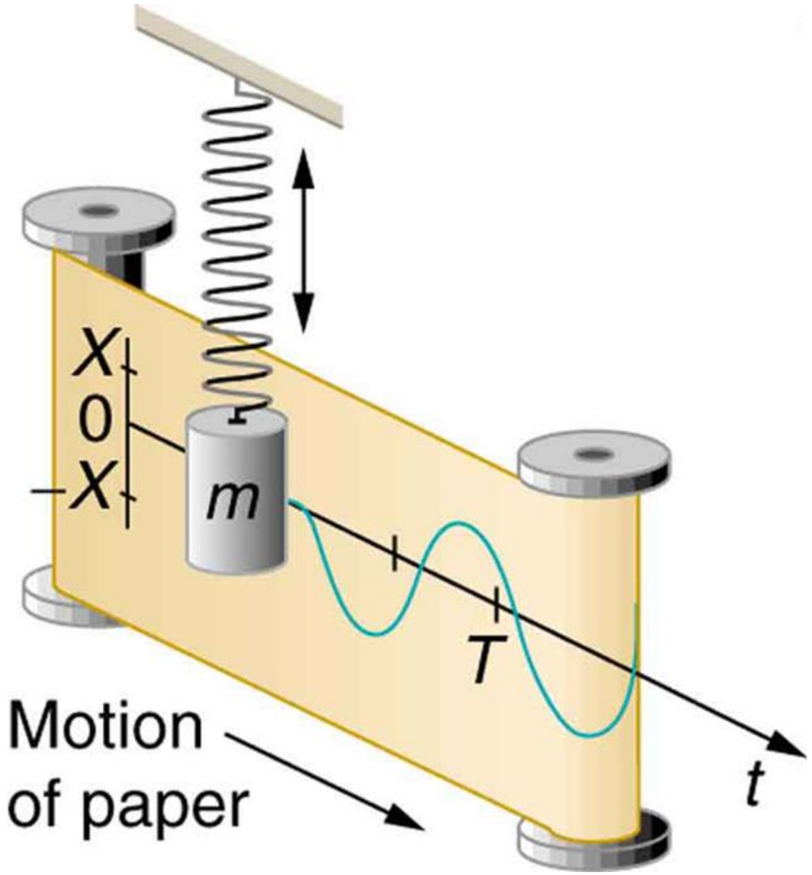
Modelação de Sistemas Físicos

9ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 7 Oscilações
Oscilador Harmónico Simples

Bibliografia:
Cap. 7: Serway, cap. 15;



X
0
−X
m
T
t
Motion
of paper

Cap. 7 Oscilações

www.youtube.com/watch?v=FJBPNJR2QJU
4’ 30’’

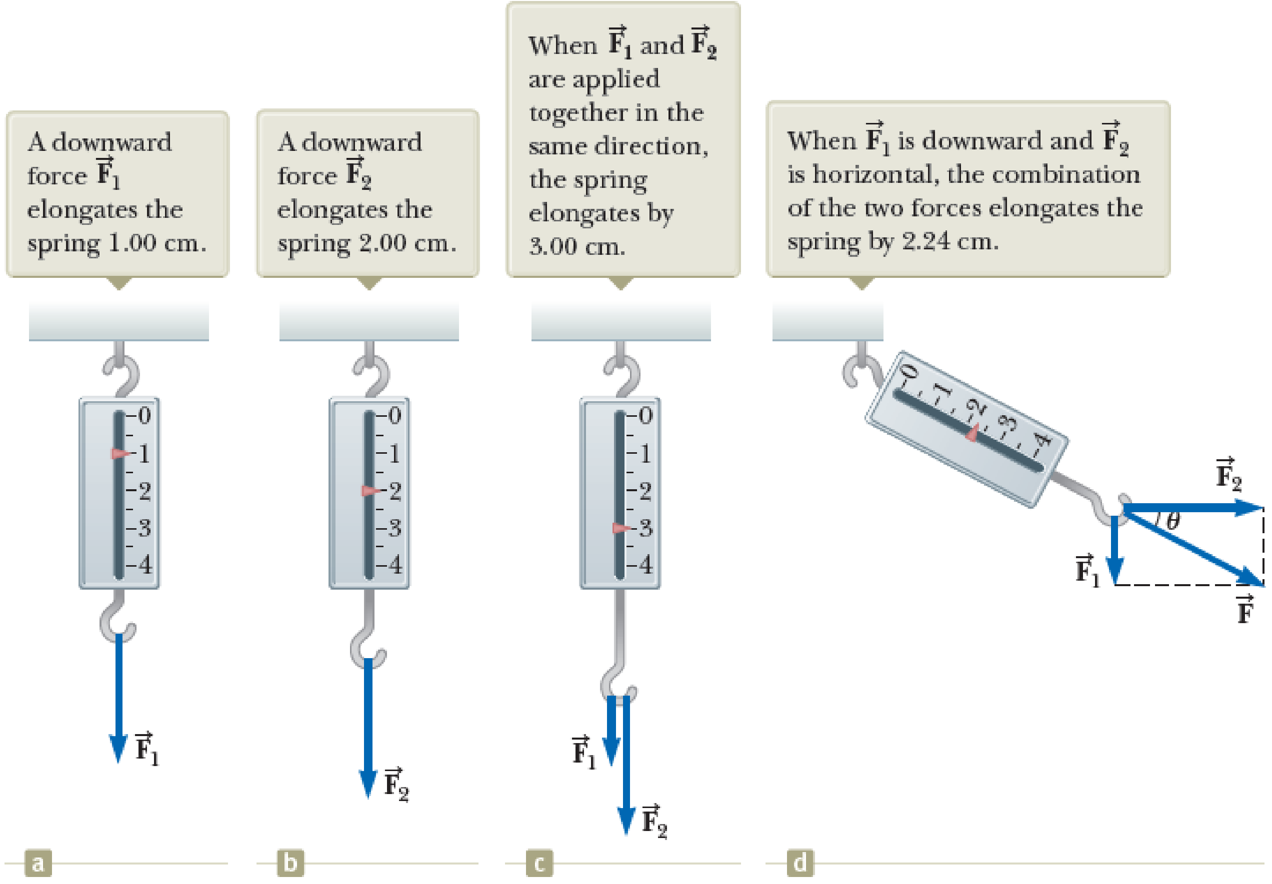
Medições: O período T é proporcional à raiz quadrada da massa M

$$T = C\sqrt{M}$$

Período: intervalo de tempo para o movimento se repetir

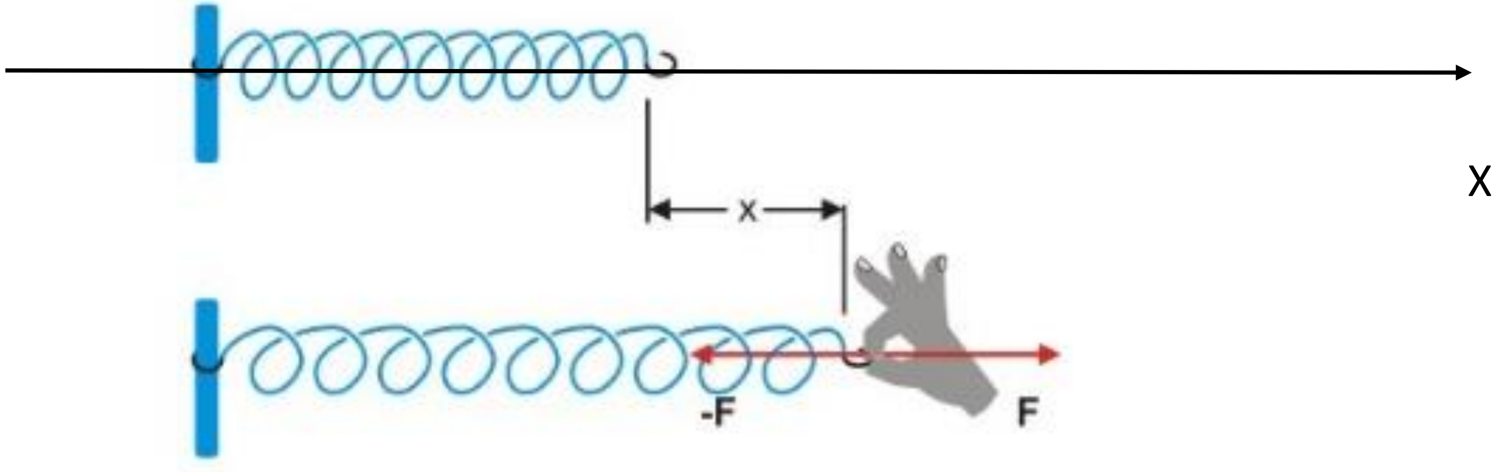
Período do movimento da Terra à volta do Sol: 1 ano

As forças são obtidas por realização de experiências e medições.



$$\begin{cases} F_x = -k\ x \\ F_y = -k\ y \\ F_z = -k\ z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = -k\vec{r}$$

A 1D (segundo OX)



Por medições:

$T = C\sqrt{m}$

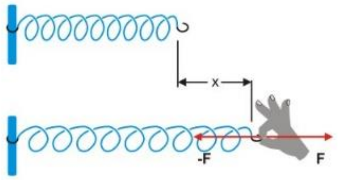
$F_x = -k\,x$

$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) \quad \Longrightarrow \vec{r}(t)$

Com $F_x = -k\,x \quad \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x \quad \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi) \end{cases}$

Cap. 7 Oscilações

A 1D (segundo OX)



$$a_x = -\frac{k}{m}x \quad \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) \end{cases}$$

<u>SOLUÇÕES IGUAIS</u> (só a expressão matemática é diferente $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \operatorname{sen}(x)$)

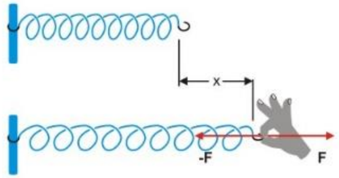
Outras expressões matemáticas que representam a mesma solução:

$x(t) = C\cos(\omega t) + D\operatorname{sen}(\omega t)$

$$\begin{cases} x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$$

Qualquer destas 3 expressões matemáticas concordam com a equação fundamental da dinâmica, na forma:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$



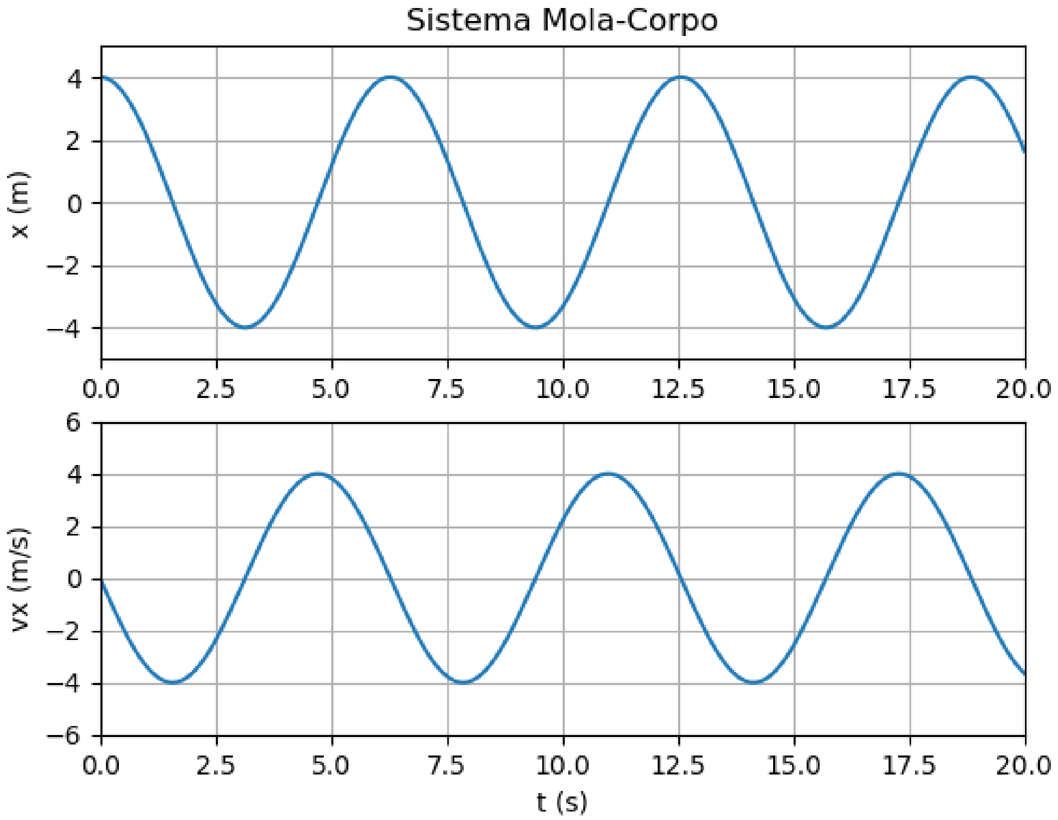
A 1D (segundo OX)

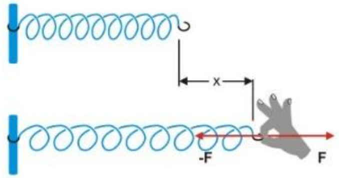
$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = A\sin(\,\omega\,t + \varphi)\,, \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = C\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\,\text{sen}(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \\ v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \end{cases}$$

As constantes A, ϕ, φ, C e D dependem das condições iniciais: $x(t=0)$ e $v_x(t=0)$

Qualquer das três expressões matemáticas:

Com:
$x(t=0) = 4$ m
$v_x(t=0) = 0$
$\sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s





A 1D (segundo OX)

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi) \end{cases}$$

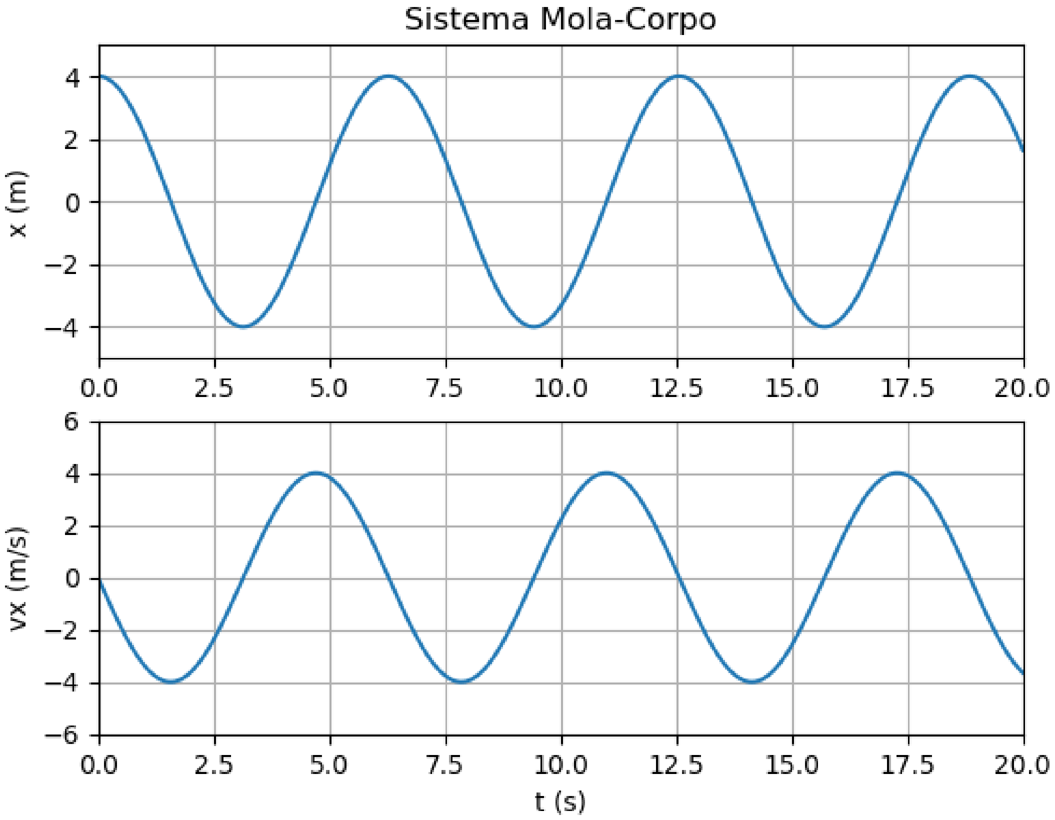
Com:

$x(t=0) = 4$ m

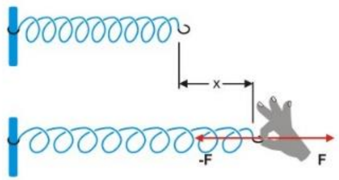
$v_x(t=0) = 0$

$\sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

Determine A e ϕ



Cap. 7 Oscilações



A 1D (segundo OX)

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\,\omega\, t + \varphi)\,, \\ v_x(t) = A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,\cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \varphi) \end{cases}$$

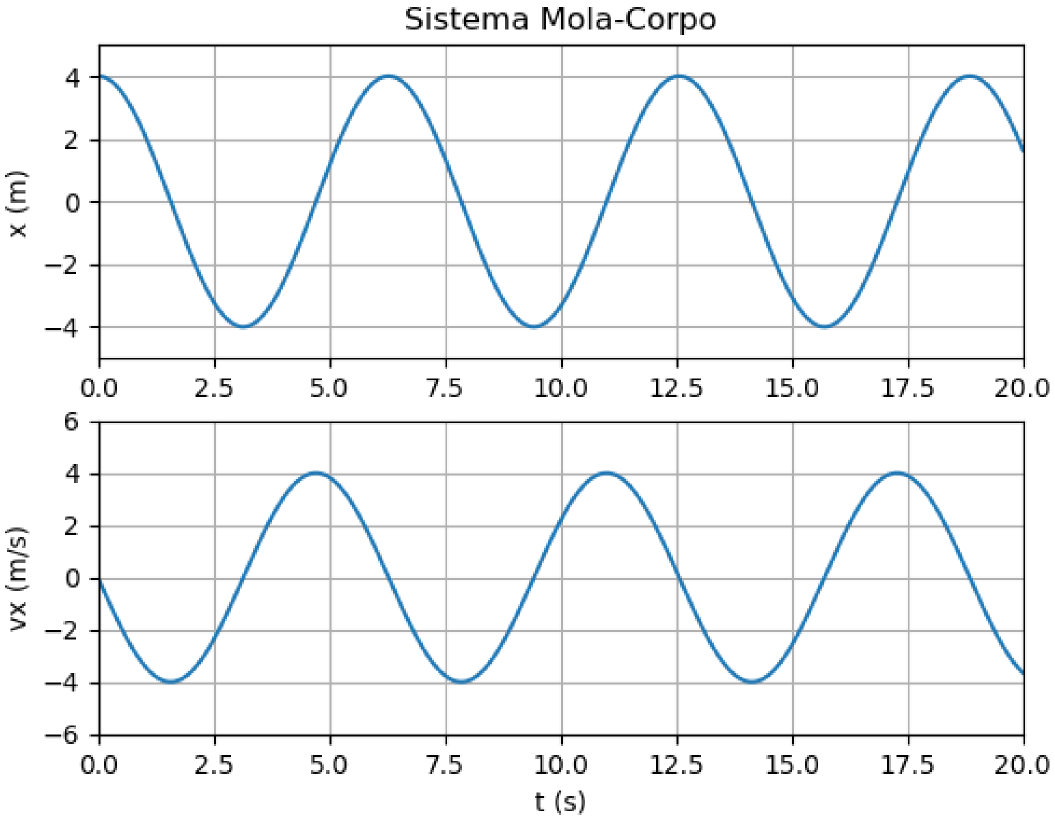
Com:

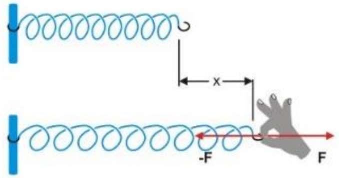
$x(t=0) = 4$ m

$v_x(t=0) = 0$

$\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 1$ rad/s

Determine A e φ





A 1D (segundo OX)

$$\begin{cases} x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\,\mathrm{sen}(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) \\ v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) \end{cases}$$

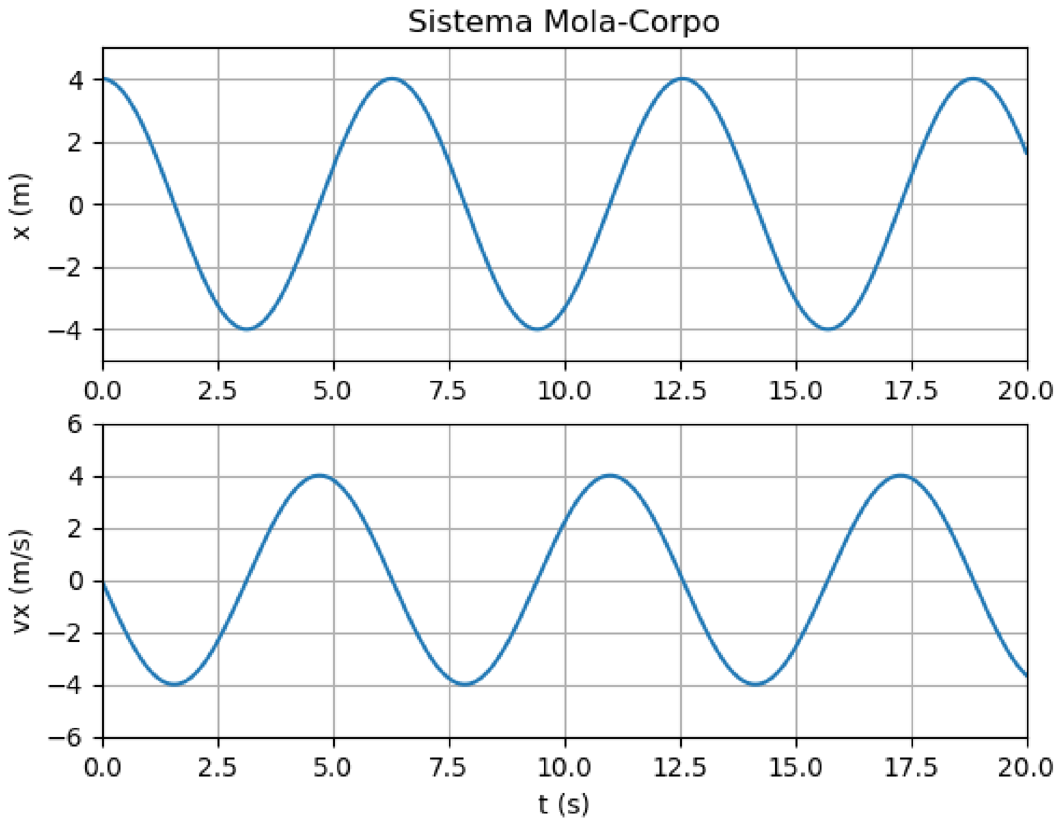
Com:

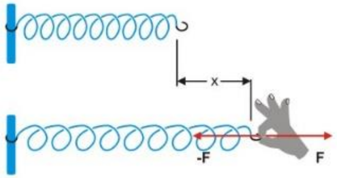
$x(t=0) = 4$ m

$v_x(t=0) = 0$

$\sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

Determine C e D





A 1D (segundo OX)

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi) \end{cases}$$

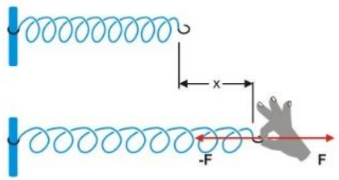
Com:

$x(t=0)=0$ m

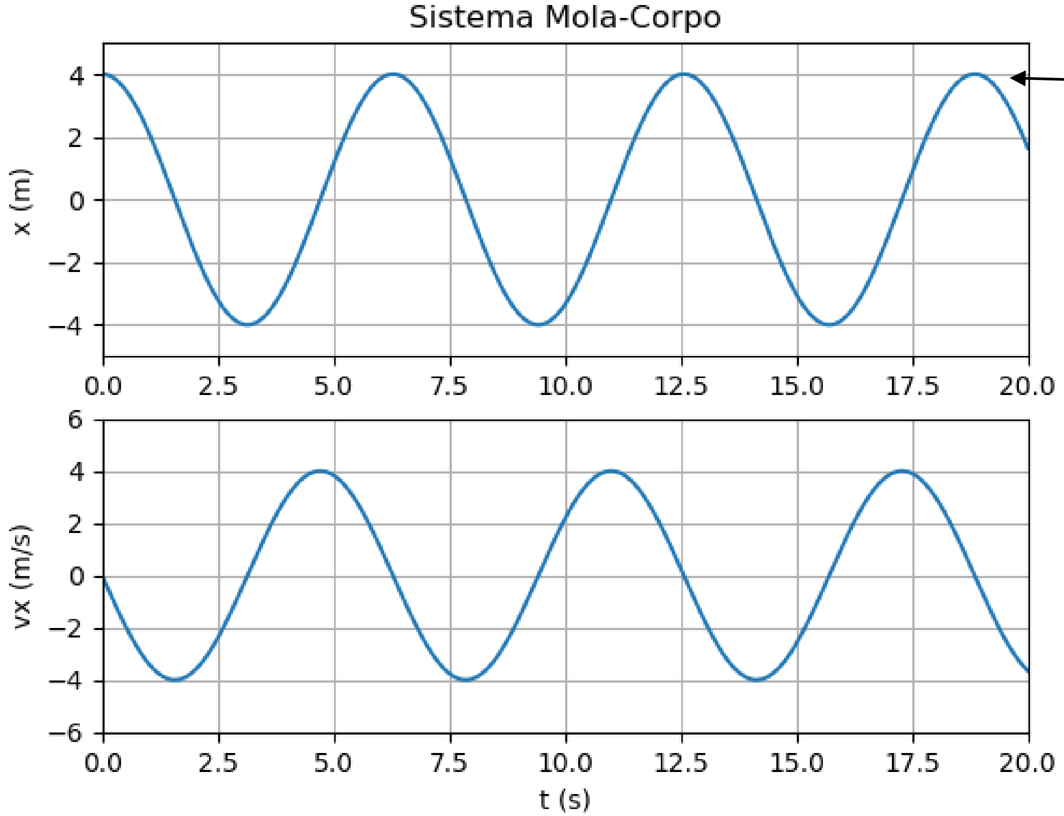
$v_x(t=0)=1$ m/s

$\sqrt{\frac{k}{m}}=1$ rad/s

Determine A e ϕ



$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,\sin(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \phi) \end{cases}$$



A : Amplitude

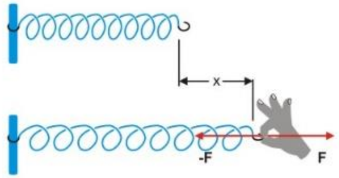
ϕ: fase inicial

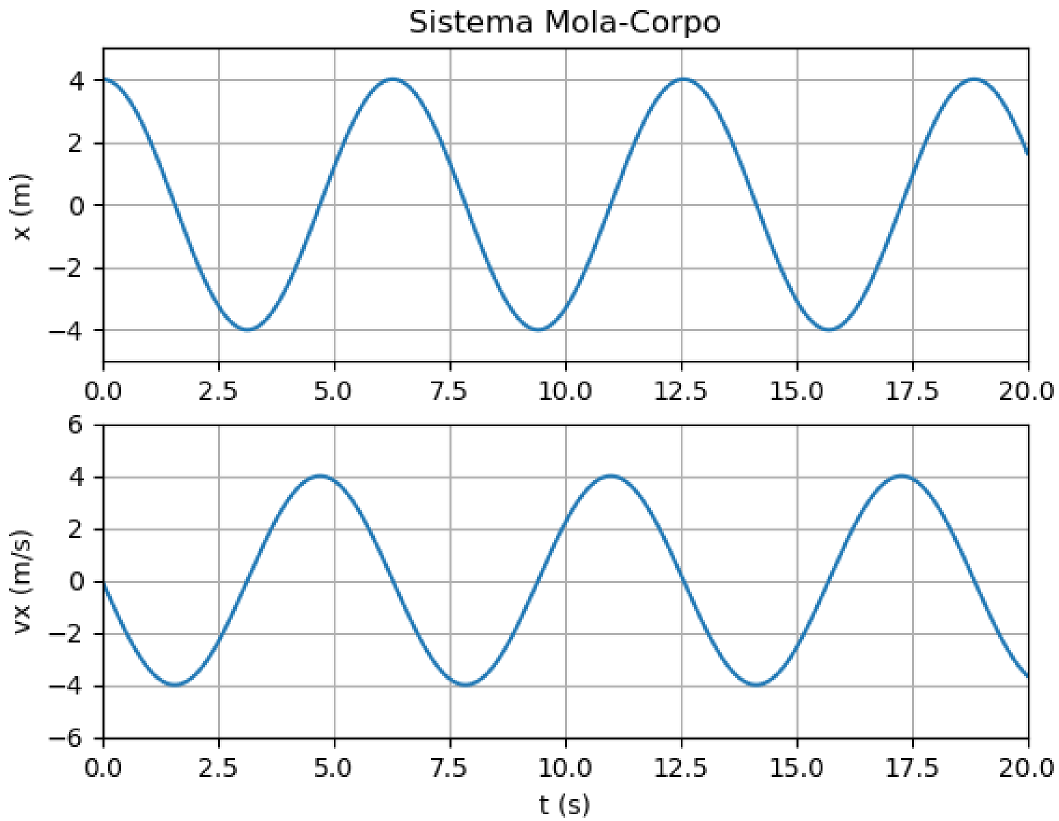
Cap. 7 Oscilações

$$
\begin{cases}
x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi\right) \\
v_x(t) = -A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,\sin(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi)
\end{cases}
$$

A : Amplitude

ϕ: fase inicial





Período T?

$$x(t+T) = x(t)$$

$$A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T)+\phi\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\phi\right)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T)+\phi = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\phi\right)+2\pi$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,T = 2\pi$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

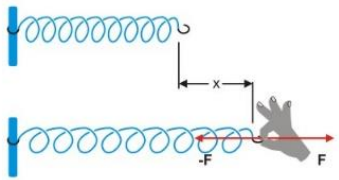
$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\sqrt{m}$ de acordo com as medições

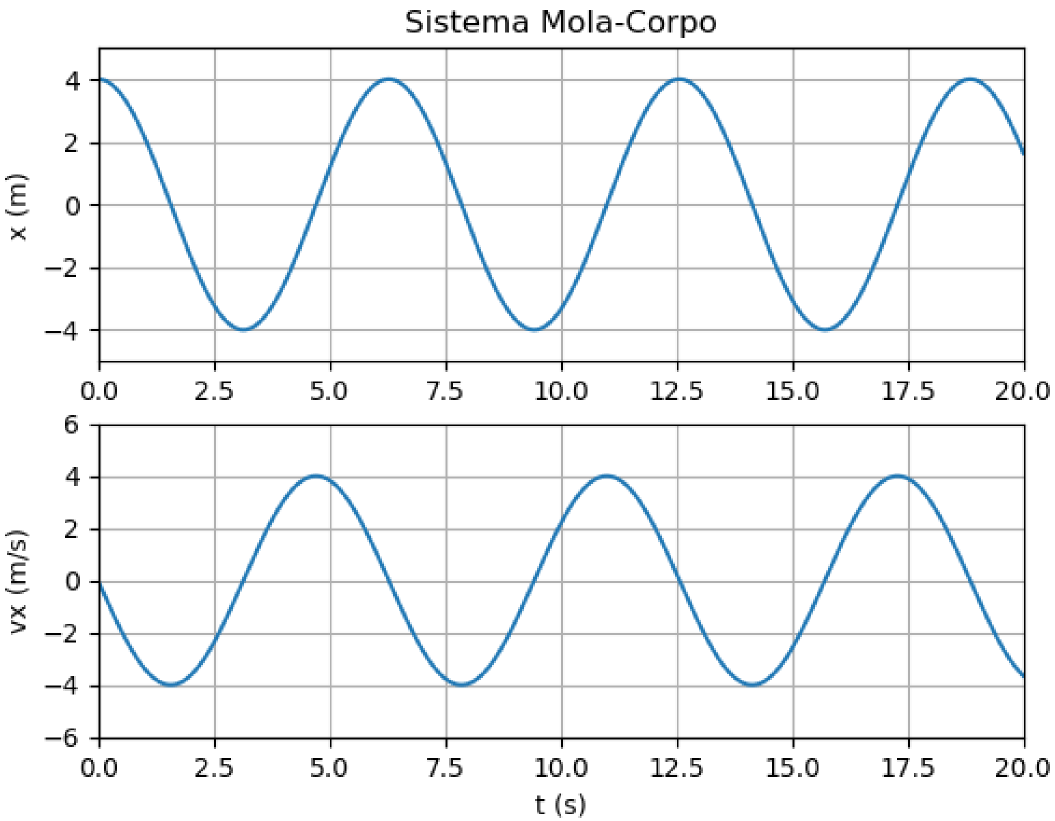
Cap. 7 Oscilações

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi) \end{cases}$$

A : Amplitude

ϕ: fase inicial





Frequência: número de repetições por unidade de tempo

$$f = \frac{1}{T}$$

1 repetição - leva 1 T

f repetições – leva 1 s => $fT = 1$

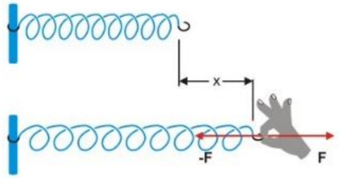
unidade: 1/s = Hz

Como $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ou $\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$: frequência angular ω

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

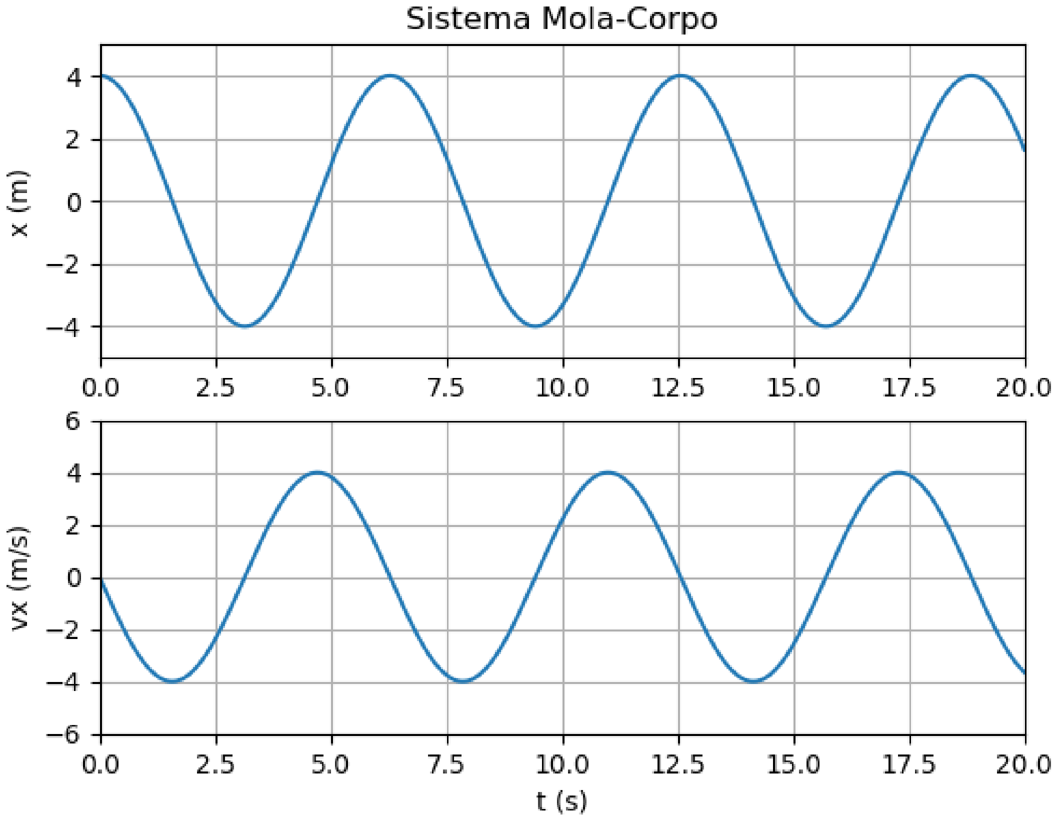


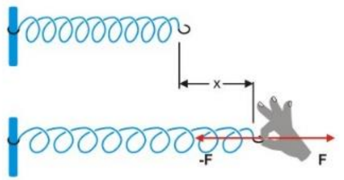
Movimento Harmónico Simples

$$F_x = -k\ x$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\ t + \phi\ ) \\ v_x(t) = -A\ \omega\ \sin(\omega\ t + \phi) \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$





Movimento Harmónico Simples – Energia Mecânica

$$F_x = -k\,x \quad \Longrightarrow \qquad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\,x^2 \qquad\qquad k = m\omega^2$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\,v_x^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega\,t + \phi) \end{cases}$$

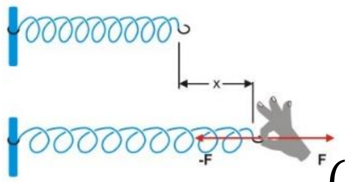
$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\,(A\,\omega\,\sin(\omega\,t + \phi))^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(A\cos(\omega\,t + \phi\,))^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m(A^2\omega^2\,\sin^2(\omega\,t + \phi)) + \frac{1}{2}m\omega^2\;A^2\cos^2(\omega\,t + \phi\,)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\,A^2(\,\sin^2(\omega\,t + \phi)) + \cos^2(\omega\,t + \phi\,)) =$$

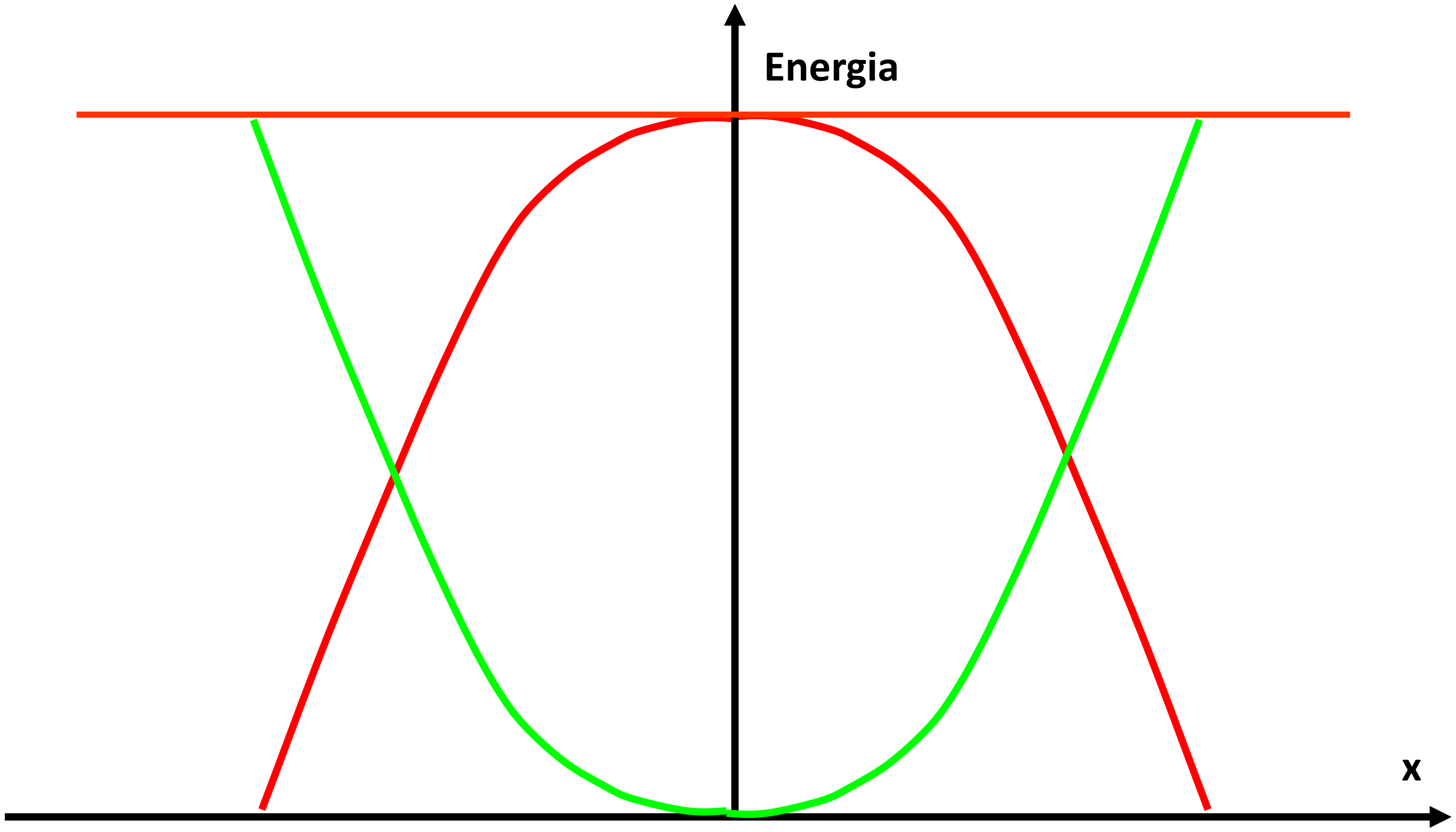
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2\,A^2$$

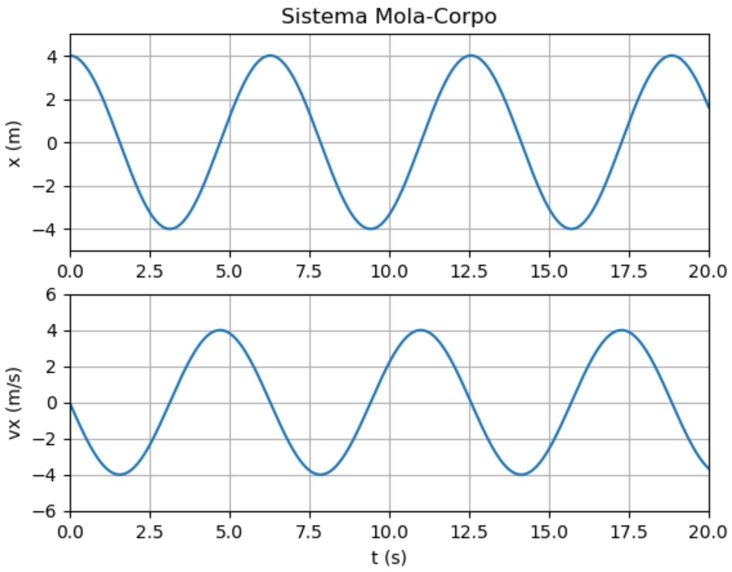
Movimento Harmónico Simples – Energia Mecânica



$$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2\, x^2 \quad \text{e} \quad E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2\, A^2$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\, t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\;\omega\,\sin(\omega\, t + \phi) \end{cases}$$





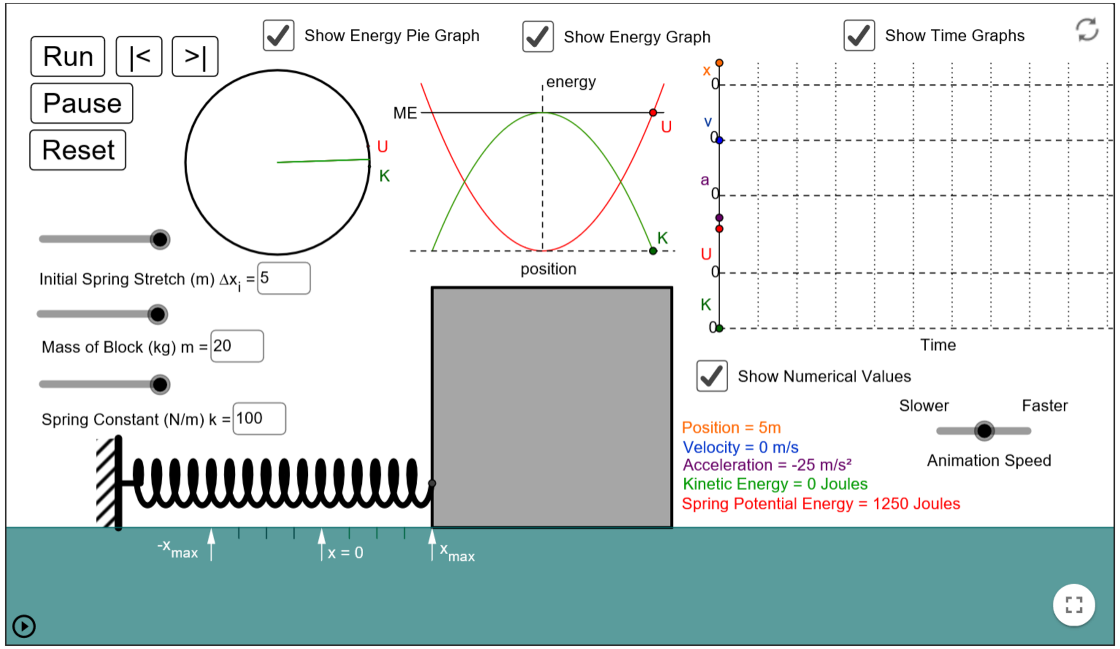
https://www.geogebra.org/m/EGg2Pvhm

Oscilador Harmónico Simples

Simple Harmonic Motion: Mass on a Spring

Autor: Alan Pacey, Tom Walsh

This simulation shows the oscillation of a box attached to a spring. Adjust the initial position of the box, the mass of the box, and the spring const
Run, Pause, Reset, and Step buttons to examine the animation. Check or uncheck boxes to view/hide various information.



https://www.geogebra.org/m/EGg2Pvhm

Oscilador Harmónico Simples

Cap. 7 Problema 5:

Um objeto de 500g, preso a uma mola com k=8N/m, oscila num movimento com amplitude A=10cm.
Calcule:

a) a velocidade e aceleração máximas.

b) a velocidade e aceleração quando o objeto dista 6 cm da posição de equilíbrio.

c) o tempo necessário para o objeto partir de x=0 e chegar a x=8 cm.

Formulário:

$$y(t) = A \ \cos(\omega t + \phi) \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Cap. 7 Problema 5: **Oscilador Harmónico Simples**

Um objeto de 500g, preso a uma mola com k=8N/m, oscila num movimento com amplitude A=10cm.

Calcule:

a) a velocidade e aceleração máximas.

Resolução:

$$m = 500g$$
$$k = 8 \ N/m$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8}{0,5}} = 4 \ rad/s$$

$$x(t) = 10 \cos(4t+\phi) \quad cm$$
$$v(t) = -40 \sin(4t+\phi) \quad cm/s$$
$$a(t) = -160 \cos(4t+\phi) \quad cm/s^2$$

a) $v_{max} = \omega A = 40 \ cm/s$

$$a_{max} = \omega^2 A = 160 \ cm/s^2$$

Cap. 7 Problema 5:
Um objeto de 500g, preso a uma mola com k=8N/m, oscila num movimento com amplitude A=10cm.
Calcule:
b) a velocidade e aceleração quando o objeto dista 6 cm da posição de equilíbrio.

b) no mesmo instante

$x = 6\,cm = 10 \cos(4t+\phi)\,cm \Rightarrow \cos(4t+\phi) = 0.6$

$v = -40 \sin(4t+\phi)\ cm/s$

$\Downarrow$

$a = -160 \cos(4t+\phi)\ cm/s^2$

$\sin^2(4t+\phi) = \pm\sqrt{1-0.6^2}$

$= \pm 0.8$

$v = -40 \times (\pm 0.8) = \mp 32\ cm/s$

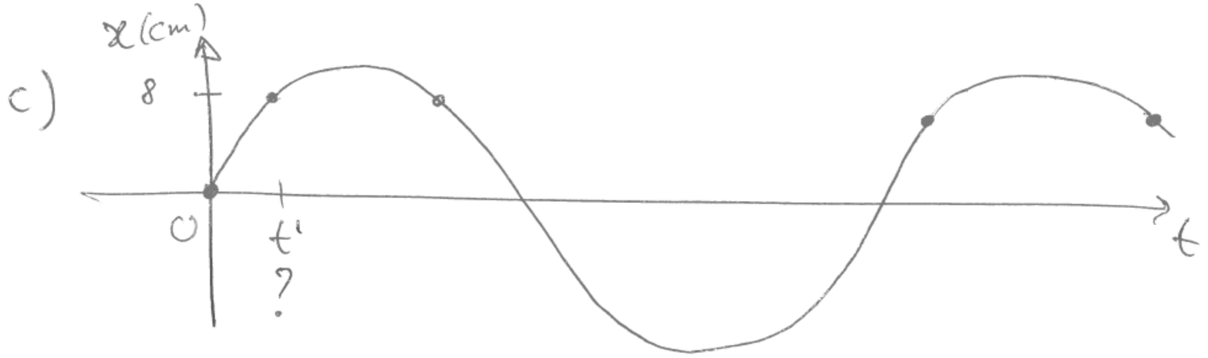
$a = -160 \times (0.6) = -96\ cm/s^2$

Cap. 7 Problema 5:

Um objeto de 500g, preso a uma mola com k=8N/m, oscila num movimento com amplitude A=10cm.

Calcule:

c) o tempo necessário para o objeto partir de x=0 e chegar a x=8 cm.



$$\begin{cases} t=0 \\ x(0)=0 \\ v(0)>0 \text{ (sobe)} \end{cases} \Rightarrow \quad x(t)=10\cos(4t+\phi)$$

$$0 = 10\cos\phi$$

$$\Downarrow$$

$$\phi = \ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

fornecem $v<0$

$$\therefore \phi = \ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$$

Cap. 7 Problema 5:

Um objeto de 500g, preso a uma mola com k=8N/m, oscila num movimento com amplitude A=10cm. Calcule:

c) o tempo necessário para o objeto partir de x=0 e chegar a x=8 cm.

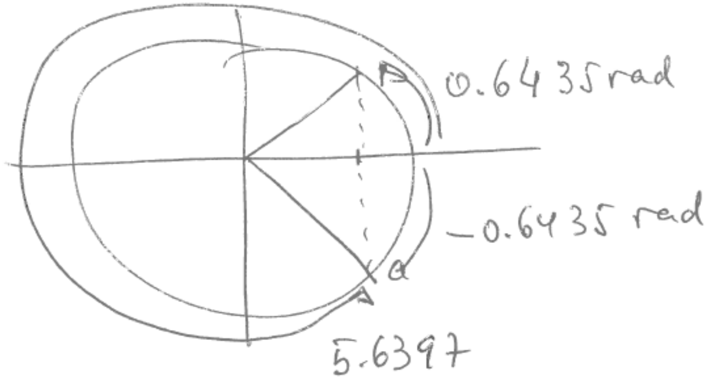
$$\begin{cases} t = t' \\ x(t') = 8\text{ cm} \\ v(t') > 0 \end{cases}$$

$$8 = 10\cos(4t'+\phi)$$

$$\underbrace{\cos(4t'+\phi)}_{\theta(t')} = 0.8$$

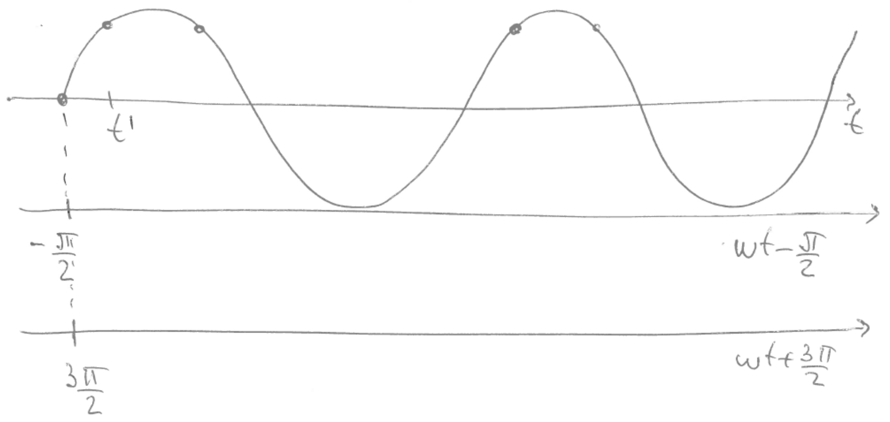
No círculo trigonométrico

$\theta(t')$ pode ser 2 ângulos



Cap. 7 Problema 5:

Um objeto de 500g, preso a uma mola com k=8N/m,
oscila num movimento com amplitude A=10cm. Calcule:
c) o tempo necessário para o objeto partir de x=0 e chegar a x=8 cm.



– Se escolhermos a fase inicial $\phi=-\frac{\pi}{2}$

o ângulo (fase) imediatamente maior é -0.6435 rad
(tal que $\omega t+\phi>\phi$)

$\omega t'-\frac{\pi}{2}=-0.6435$

$\omega t'=\frac{\pi}{2}-0.6435$

$\omega t'=0.9273 \Rightarrow t'=0.2318\,s$

– Se escolhermos $\phi=\frac{3\pi}{2}$

$\omega t'+\frac{3\pi}{2}=5.6397$

$\omega t'=5.6397-\frac{3\pi}{2}$

$\omega t'=0.9273 \Rightarrow t'=0.2318\,s$