Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

4ª Aula Teórica

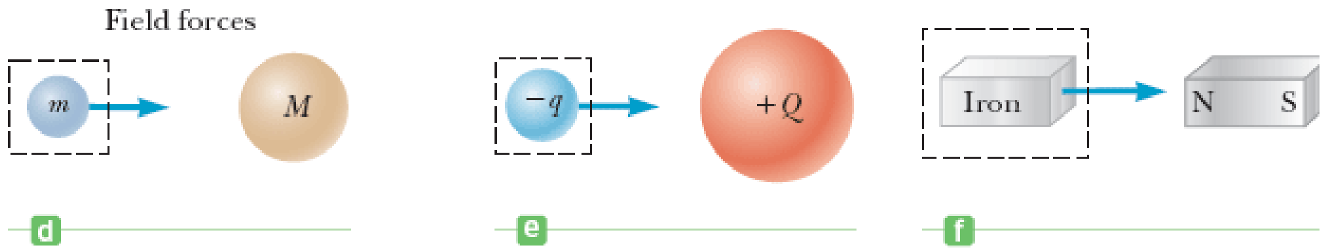
Sumário:
Cap. 3 Forças e vetores

Bibliografia:
Cap. 3: Serway, cap. 3 e 5; Sørenssen, cap. 5 e 6; Villate, cap. 4

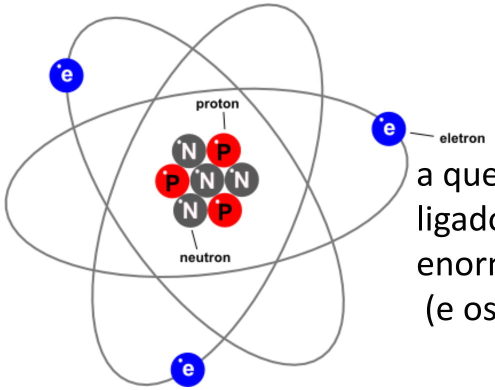
Força = massa × aceleração

Forças alteram o movimento

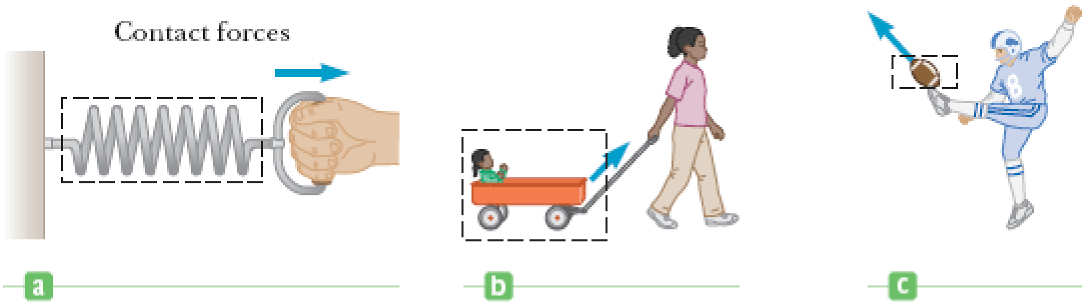
Força gravitacional Força elétrica Força magnética

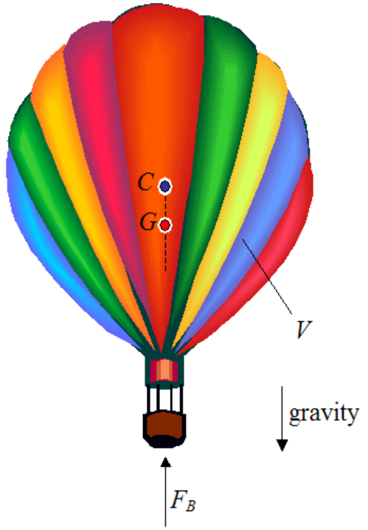


Força nuclear



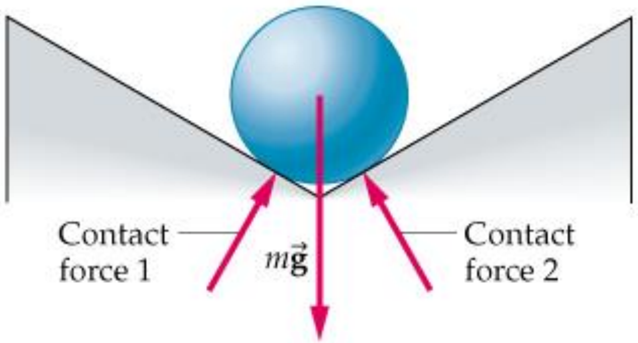
a que mantem os protões ligados, mais forte que a enorme forte repulsão elétrica (e os neutrões ligados)

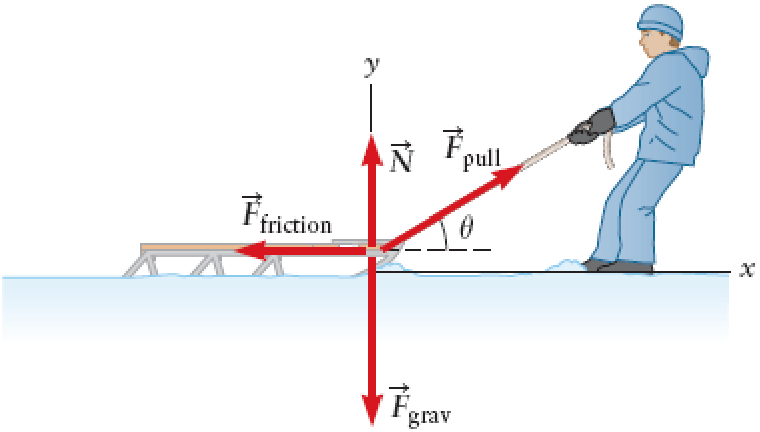


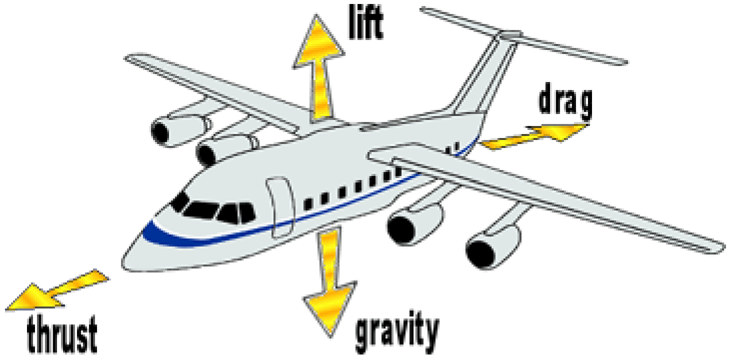


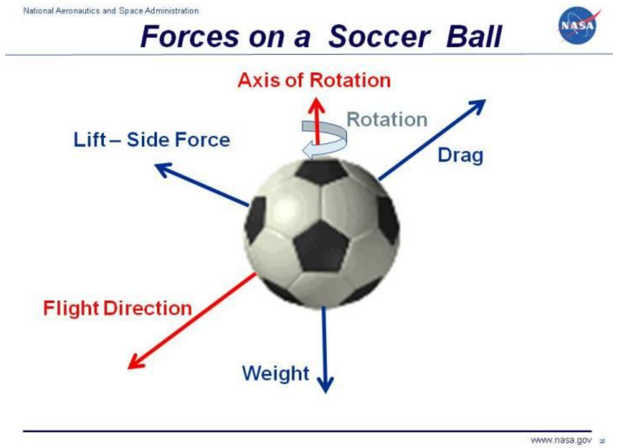
Impulsão

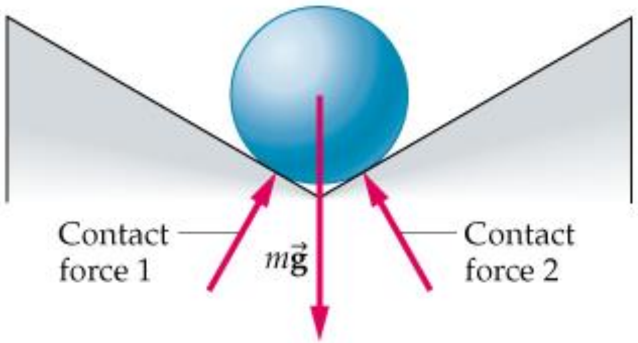
Cap. 3 Forças e vetores

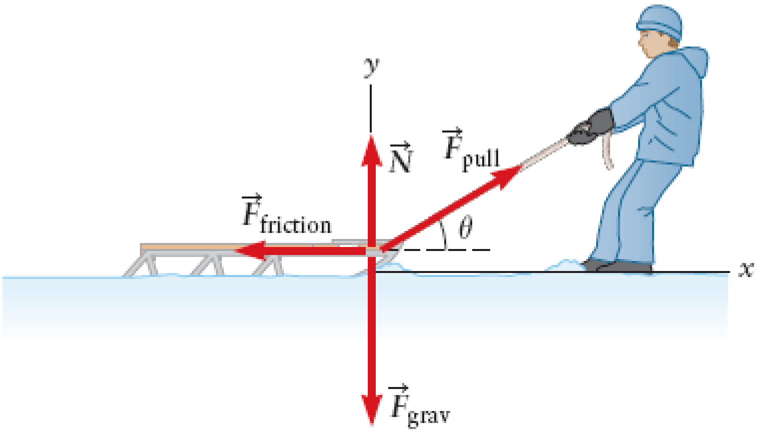








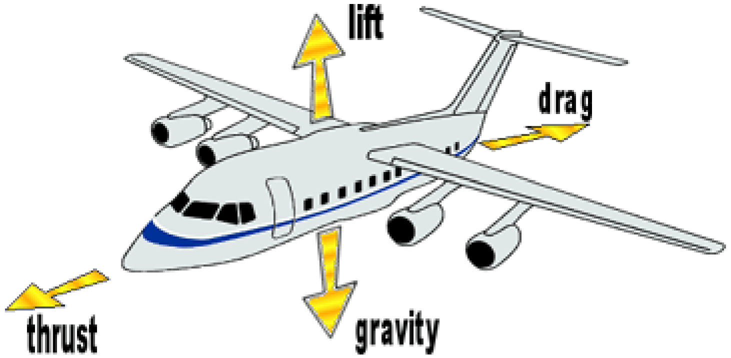


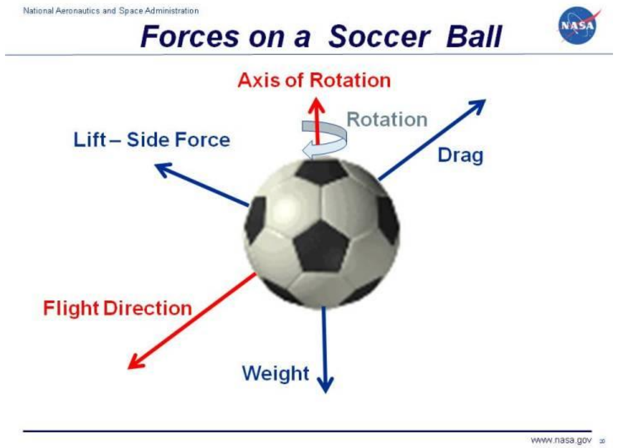


FORÇA é um VETOR

indica-se $\vec{F}$

a sua intensidade por $|\vec{F}|$





Os princípios da Mecânica:

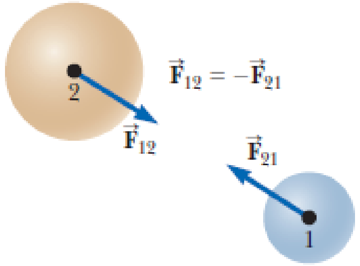
Isaac Newton 1642 - 1726

1ª lei de Newton: Quando $\vec{F} = 0$
o corpo ou está parado ou move-se a uma velocidade constante.

2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.
A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo.
É a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

3ª lei de Newton: Quando 2 corpos interatuam,
$\vec{F}_{12}$ a força no corpo 1 devido à interação com o corpo 2, e
$\vec{F}_{21}$ a força no corpo 2 devido à interação com corpo 1, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

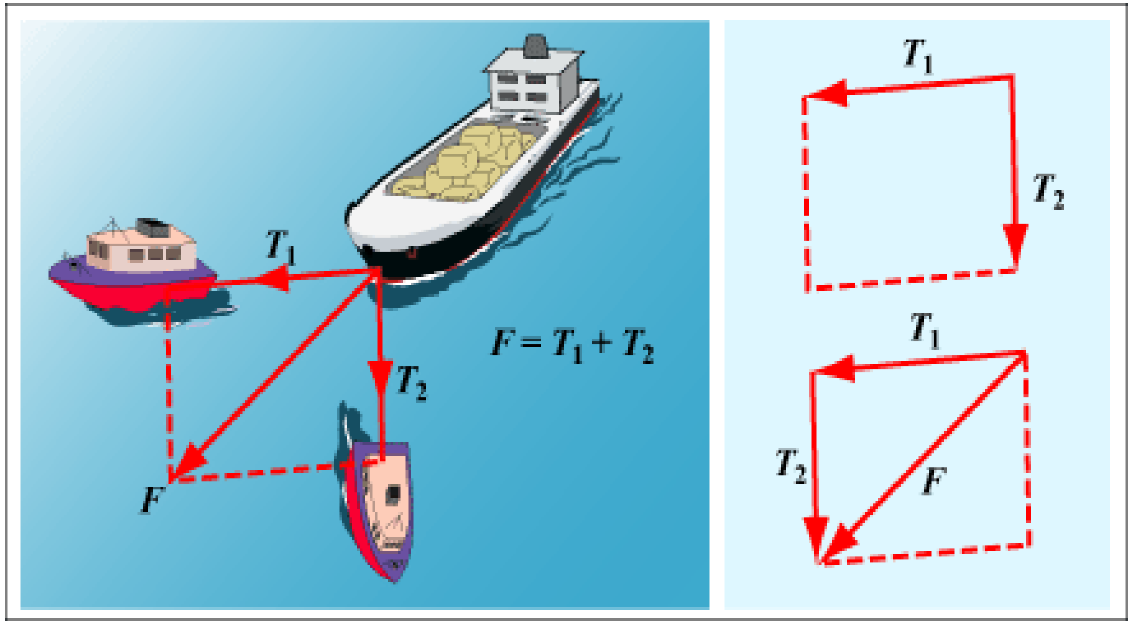


2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.
A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo.
A massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

Se as forças aplicadas ao um objeto forem conhecidas,
pode-se determinar o movimento do objeto – a sua posição e velocidade.

Forças determinam-se por experiências
Ou por modelos teóricos, que aplicados aos dados experimentais, concordam com eles.



T_1
T_2
$F = T_1 + T_2$
F
T_1
T_2
T_1
T_2
F

Vetor $\vec{a}$

$|\vec{a}| =$ módulo, intensidade, magnitude ou comprimento de $\vec{a}$

$\vec{c} = \lambda \vec{a}$ outro vetor

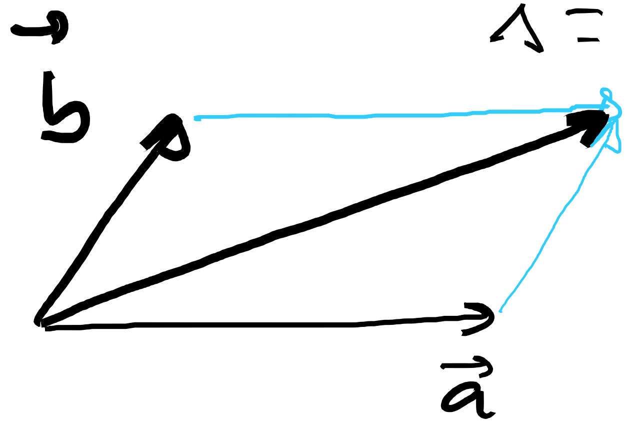
; $|\vec{c}| = |\lambda| \, |\vec{a}|$

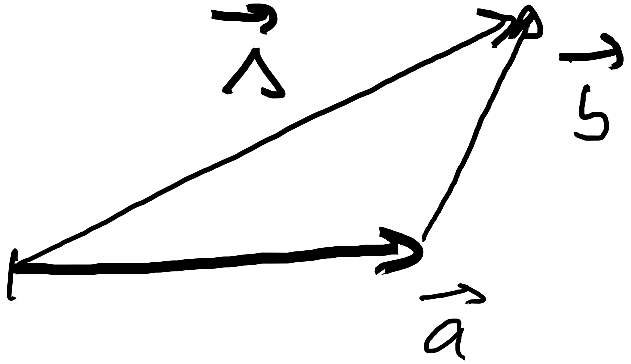
Vetor unitário ou versor $\hat{i}$, $|\hat{i}| = 1$: indica direção e sentido

ex: $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow \vec{a} = |\vec{a}| \, \hat{a}$

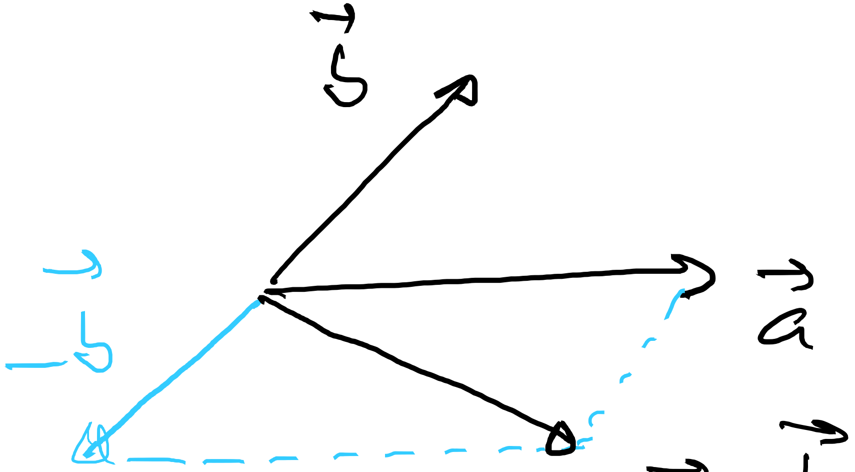
Soma de 2 vetores

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$





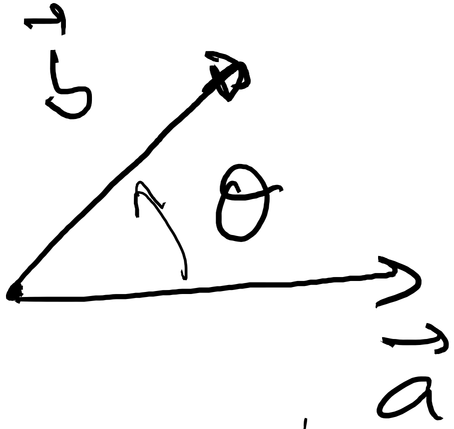
Diferença 2 vetores



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

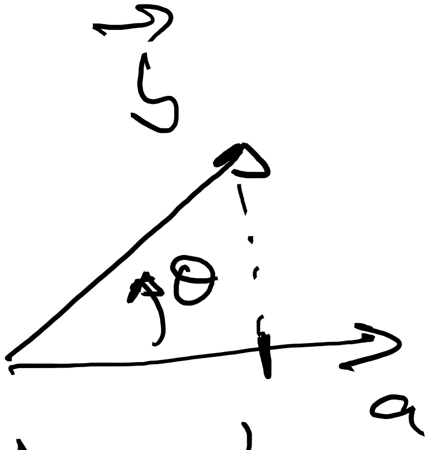
Produto escalar

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$



ou produto interno

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a},\vec{b})$$

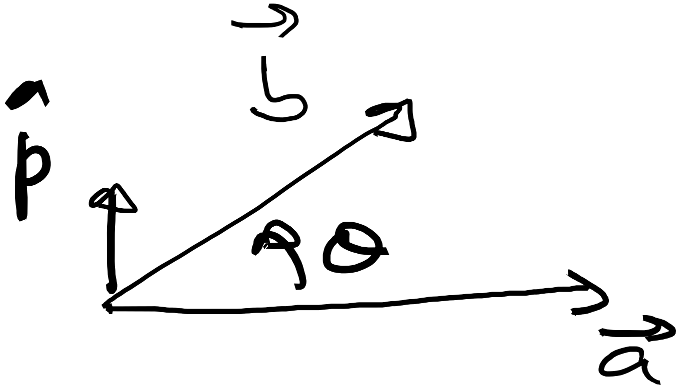


$$\underbrace{\qquad}_{|\vec{b}|\cos\theta} = \vec{b}\cdot\hat{a}$$

projeção de $\vec{b}$ na direção e sentido de $\vec{a}$

Produto Vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\text{sen}\,\theta\,\hat{p}$$



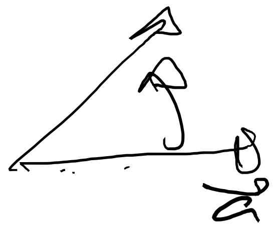
$\hat{p}$ = vetor unitário ⊥ ao plano formado $\vec{a}$ e $\vec{b}$

sentido: observador vê vetor $\vec{a}$ ir para $\vec{b}$ no sentido direto

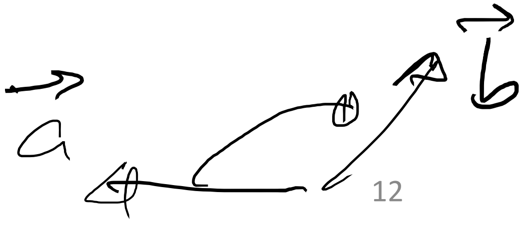
Ou, produto externo

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

direto:



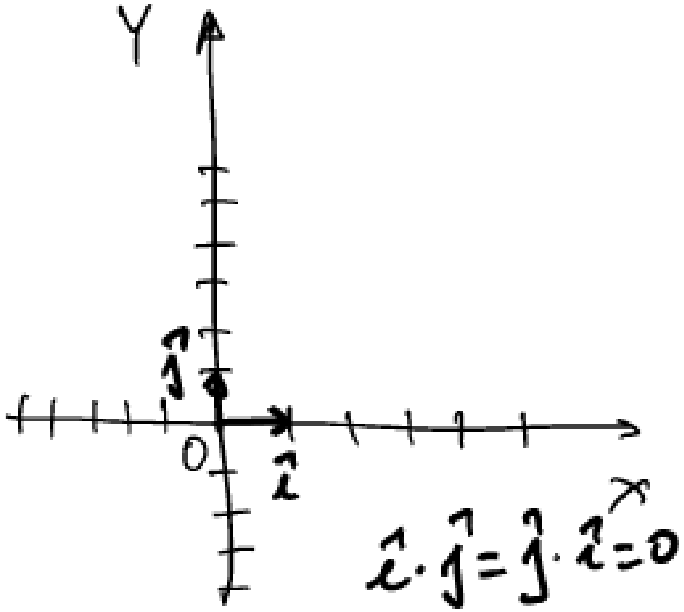
antidireto:



Vetores em referenciais cartesianos

Sistema de eixos cartesiano

2 dimensões



$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = 0$

$|\hat{\imath}| = 1$

$|\hat{\jmath}| = 1$

Vetores em referenciais cartesianos: 2 dimensões

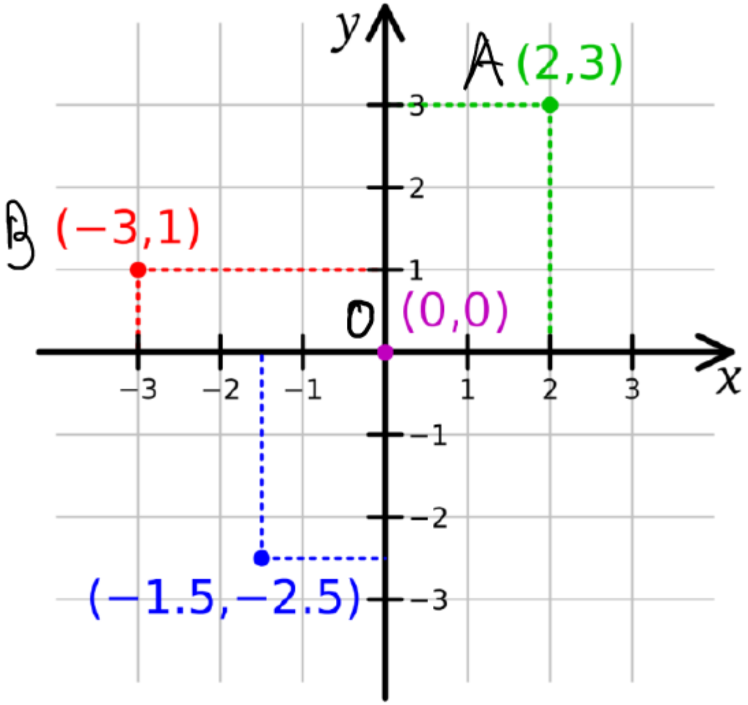
Posição dos pontos

A em (2,3)
O em (0,0) origem do sistema
B em (−1.5, −2.5)

coordenadas

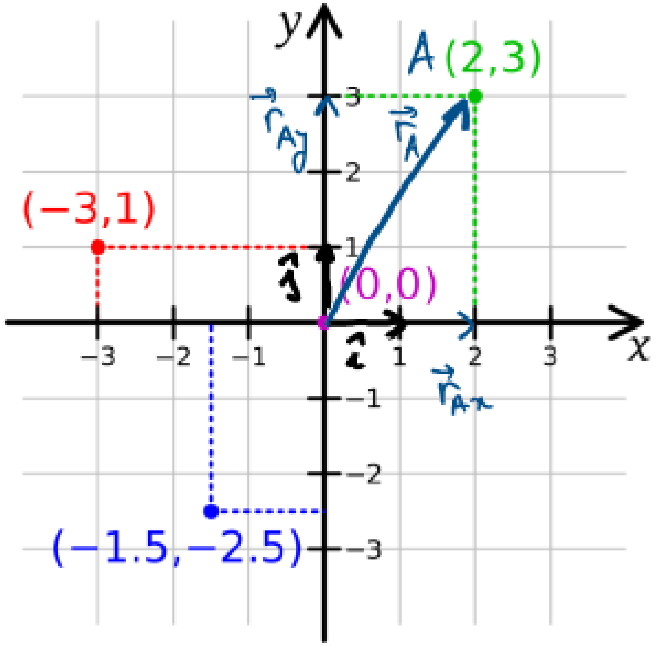
abscissa (x)

ordenada (y)



Vetores em referenciais cartesianos : 2 dimensões

Posição A é também indicada por um vetor, $\vec{r}_A$
com origem no ponto origem e termina no ponto A.



$$\vec{r}_A = \vec{r}_{Ax} + \vec{r}_{Ay}$$

$$\vec{r}_{Ax} = x_A \vec{\imath} = 2\vec{\imath}$$

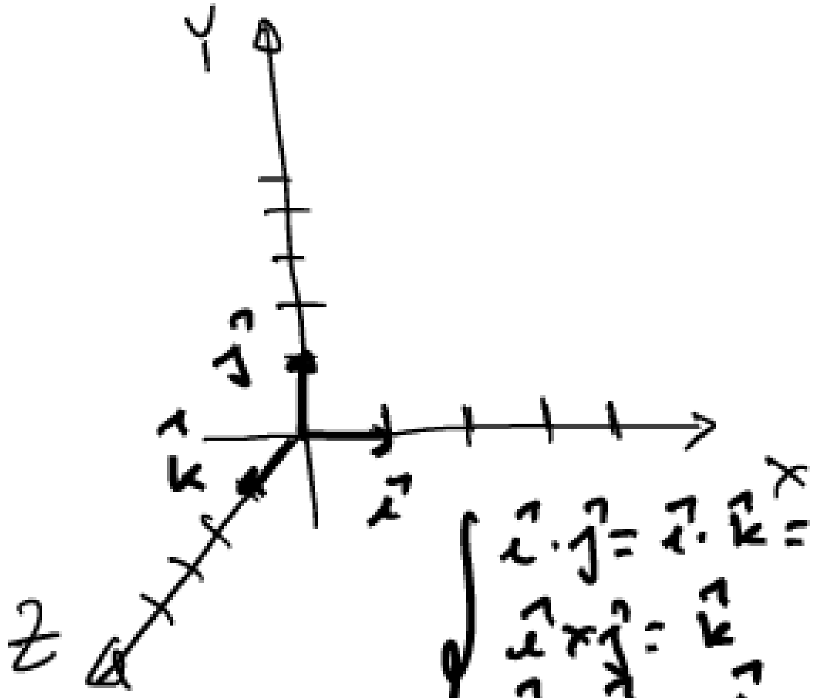
$$\vec{r}_{Ay} = y_A \vec{\jmath} = 3\vec{\jmath}$$

e

$$\vec{r}_A = x_A \vec{\imath} + y_A \vec{\jmath}$$

Vetores em referenciais cartesianos: 3 dimensões

3 dimensões



$$\begin{cases} \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0 \\ \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \qquad |\hat{k}| = 1 \\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} \end{cases}$$

Vetores em referenciais cartesianos: 3 dimensões

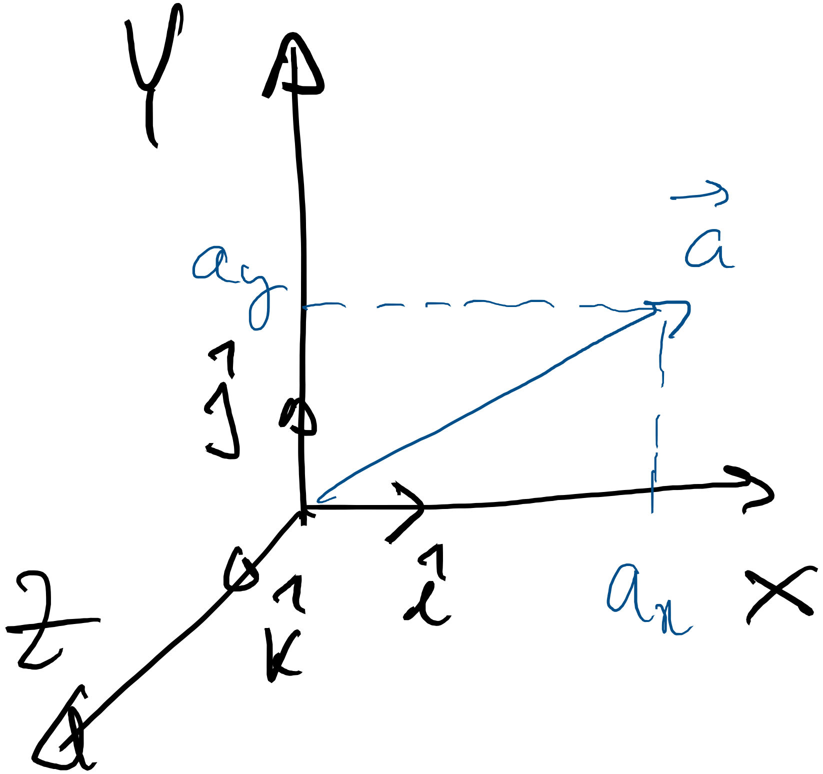
Referencial Cartesiano

$\hat{\imath} \perp \hat{\jmath} \perp \hat{k}$

$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$

$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$

$\hat{k}$



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$= a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Vetores em referenciais cartesianos: 3 dimensões

Produto escalar

A 3 dimensões um vetor $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

componentes do vetor $\vec{r}$ nos eixos Ox, Oy, Oz, respetivamente.

Tendo
$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k})\cdot(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}) \\
&= a_x b_x\,\vec{i}\cdot\vec{i} + a_x b_y\,\cancel{\vec{i}\cdot\vec{j}} + a_x b_z\,\cancel{\vec{i}\cdot\vec{k}} \\
&\quad + a_y b_x\,\cancel{\vec{j}\cdot\vec{i}} + a_y b_y\,\vec{j}\cdot\vec{j} + a_y b_z\,\cancel{\vec{j}\cdot\vec{k}} \\
&\quad + a_z b_z\,\cancel{\vec{k}\cdot\vec{i}} + a_z b_y\,\cancel{\vec{k}\cdot\vec{j}} + a_z b_z\,\vec{k}\cdot\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$ ≡ é um escalar

Vetores em referenciais cartesianos: 3 dimensões

Produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}$$

Problemas

A. Considere

$\vec{a}$=(1,2,0) e $\vec{b}$=(3,-2,2).

Calcule

a) A sua soma
b) A sua diferença
c) O seu produto escalar
d) O seu produto vetorial

B. Considere

$\vec{a}$=(2,1,0) e $\vec{b}$=(1,2,0). (Vetores a duas dimensões, pois ambos tem z=0)

Calcule

a) O módulo de cada vetor e o ângulo que formam.
b) O seu produto vetorial

Problemas

1) $\vec{a} = (1, 2, 0)$

$\vec{b} = (3, -2, 2)$

$\vec{a} + \vec{b} = (4, 0, 2)$

$\vec{a} - \vec{b} = (-2, 4, -2)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 - 4 + 0 = -1$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (4 - 0)\vec{i} + (0 - 2)\vec{j} + (-2 - 6)\vec{k}$$

$$= (4, -2, -8)$$

2) $\vec{a} = (2,1) \rightarrow$ vetor 2D

$\vec{b} = (1,2)$

Qual o módulo de cada vetor e qual o $\measuredangle$ que formam?

2) $\vec{a} = (2,1) \rightarrow$ vetor 2D
$\vec{b} = (1,2)$

a) Qual o módulo de cada vetor e qual o ∠ que formam?

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \sqrt{5}\,\sqrt{5}\,\cos\theta = 5\cos\theta \\ &= 2\times 1 + 1\times 2 = 4 \end{aligned}\right\} \quad \cos\theta = \frac{4}{5}$$

$\theta =$ 0.644 rad= 36.9º

Vetores a e b no 1º quadrante

2) $\vec{a} = (2,1)$ → vetor 2D

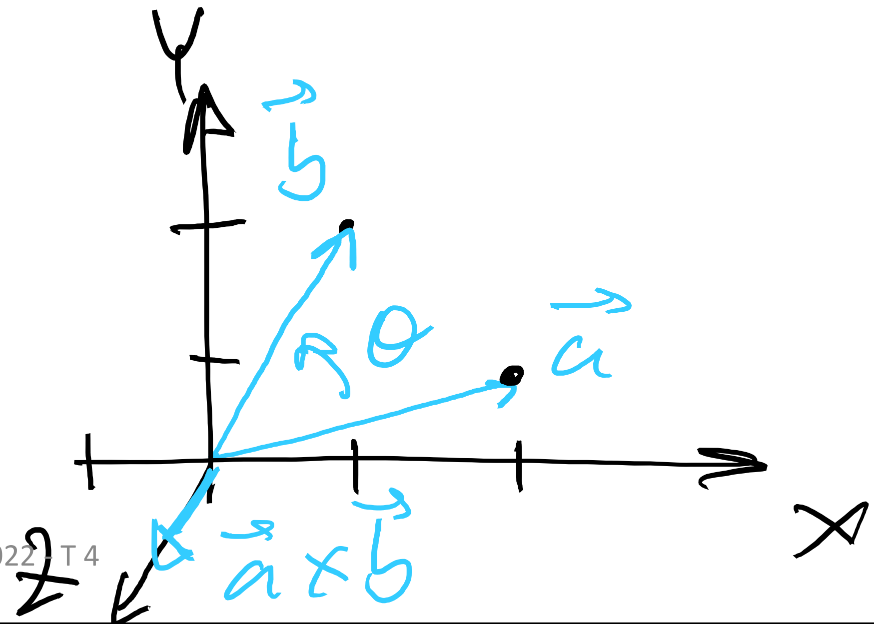
$\vec{b} = (1,2)$

b) $\vec{a} \times \vec{b}$? $= \sqrt{5}\,\sqrt{5}\,\sin\theta\;\hat{p}$

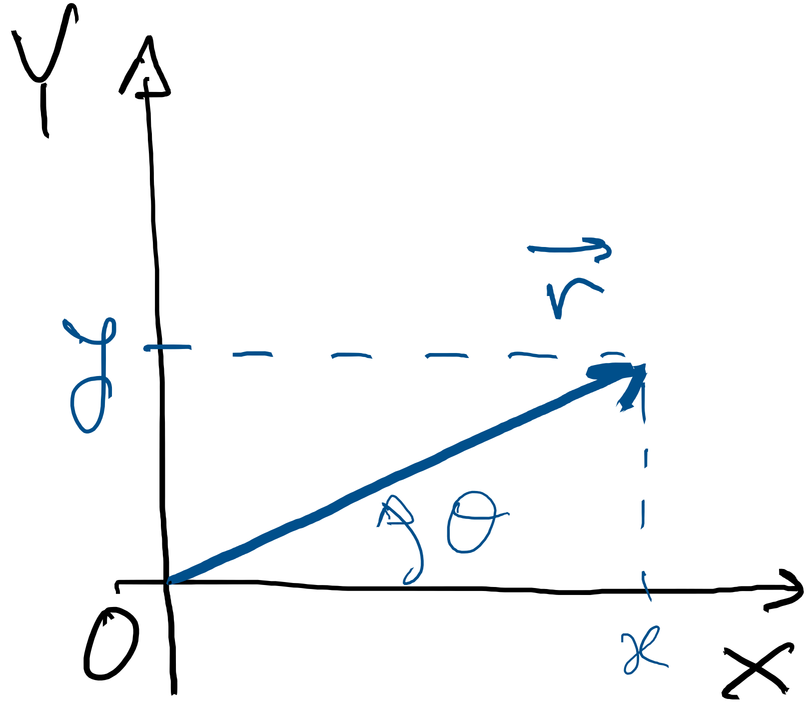
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4-1)\hat{k}$$

$$= 3\hat{k}$$

$$\therefore \hat{p} = \hat{k}$$



Espaço a 2D



Vetor $\vec{r}$, definido por 2 valores (x, y) ou $(|\vec{r}|, \theta)$

$x, y \equiv$ Coordenadas cartesianas

$$x = \vec{r} \cdot \hat{i} = |\vec{r}| \cos\theta$$

$$y = \vec{r} \cdot \hat{j} = |\vec{r}| \sin\theta$$

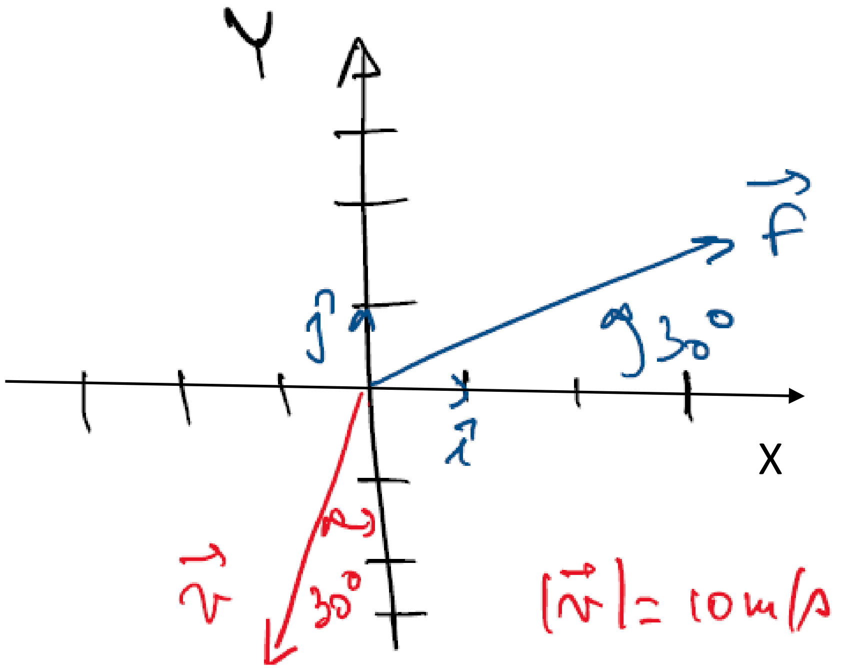
$|\vec{r}|, \theta \equiv$ Coordenadas polares

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arccos x / \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \arcsin y / \sqrt{x^2+y^2}$$

Cálculo das coordenadas



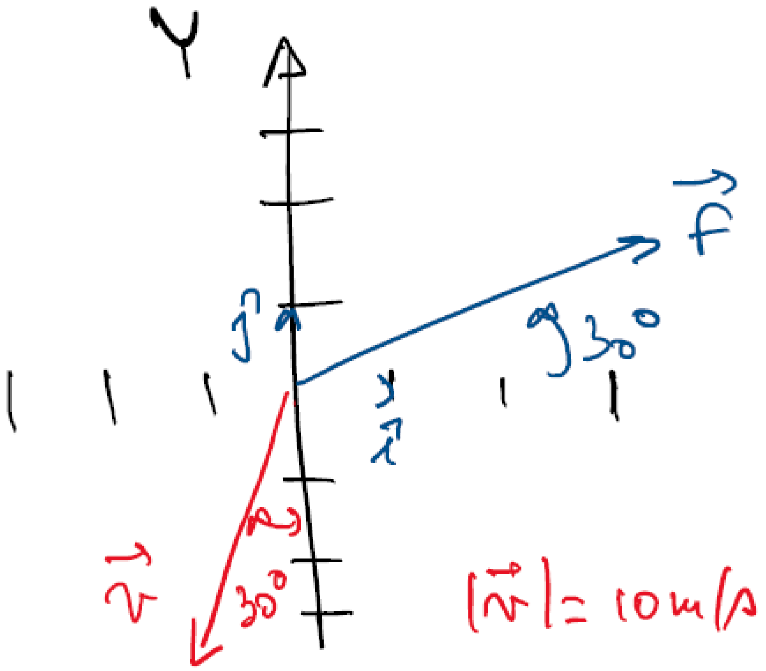
$|\vec{F}| = 5N$

$|\vec{v}| = 10m/s$

Problema:

Calcular as coordenadas cartesianas dos vetores $\vec{F}$ e $\vec{v}$.

Cálculo das coordenadas



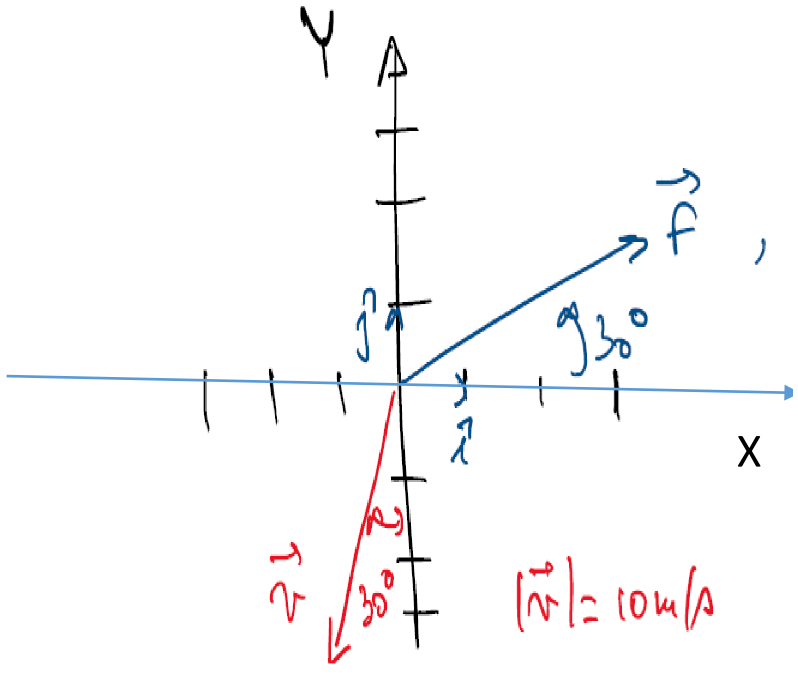
$\vec{F}$, $|\vec{F}| = 5N$

$$f_x = \vec{F}\cdot\vec{i} = |\vec{F}|\,|\vec{i}|\cos 30^\circ$$

$$f_y = \vec{F}\cdot\vec{j} = |\vec{F}|\,|\vec{j}|\cos 60^\circ$$

ou $$\begin{cases} f_x = +|\vec{F}|\cos 30^\circ \\ f_y = +|\vec{F}|\sin 30^\circ \end{cases}$$

Cálculo das coordenadas



$|\vec{F}| = 5N$

$$\begin{cases} v_x = |\vec{v}|\,|\vec{i}|\,\cos(270° - 30°) = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5\,m/s \\ v_y = |\vec{v}|\,|\vec{j}|\,\cos(180° - 30°) = -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3}\,m/s \end{cases}$$

ou,

$$\begin{cases} v_x = -|\vec{v}|\cos 60° = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5\,m/s \\ v_y = -|\vec{v}|\cos 30° = -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -5 \cdot \sqrt{3}\,m/s \end{cases}$$

Igualdade entre vetores

$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

$\longrightarrow \vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$

$\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}$

$\longrightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \iff \begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \\ c_z = a_z - b_z \end{cases}$

Igualdade entre vetores

Problema:

Se $\vec{a} = (a_x, 10, 0)$

$\vec{b} = (5, b_y, 0)$

$\vec{c} = (0, 1, c_z)$

e $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

calcule as componentes a_x, b_y e c_z.

Igualdade entre vetores

Problema:

Se $\vec{a} = (a_x, 10, 0)$

$\vec{b} = (5, b_y, 0)$

$\vec{c} = (0, 1, c_z)$

e $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

calcule as componentes a_x, b_y e c_z.

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \\ c_z = a_z - b_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a_x - 5 \\ 1 = 10 - b_y \\ c_z = 0 - 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 5 \\ b_y = 9 \\ c_z = 0 \end{cases}$$