Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

14ª Aula Teórica

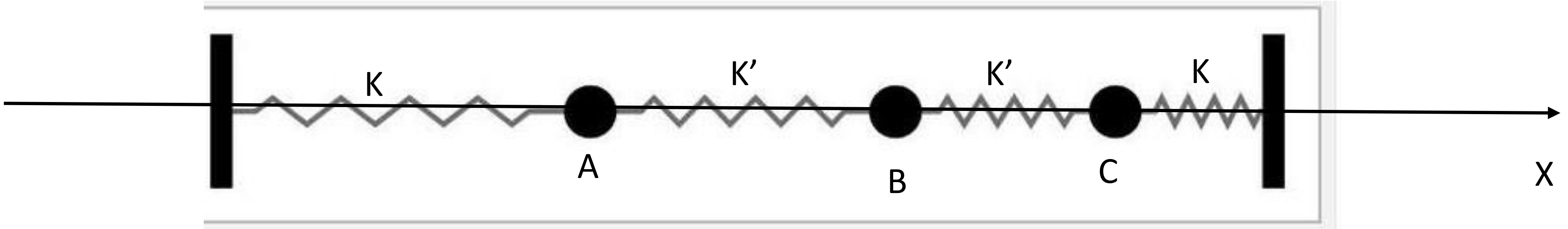
Sumário:

Cap. 9
N Osciladores acoplados, modos normais e ondas

Resolução de problemas.

Bibliografia:

3 Osciladors Harmónicos Acoplados

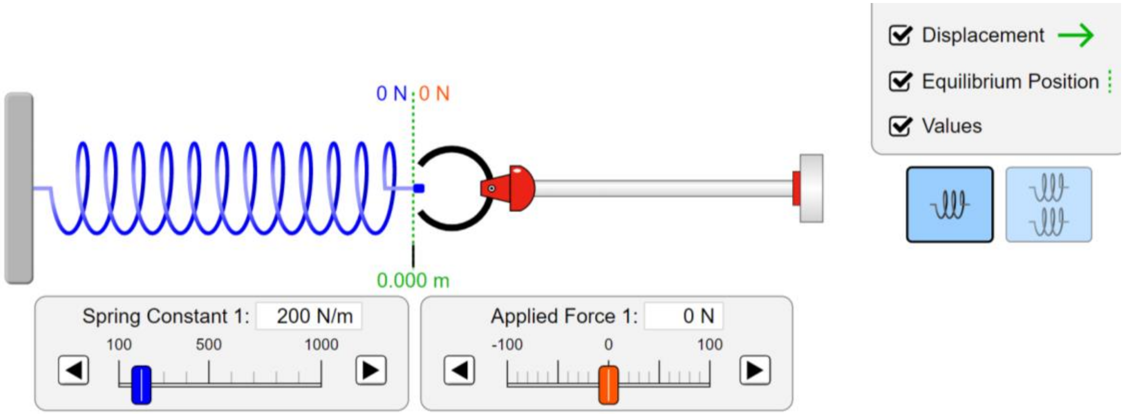


Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

Que forças estão aplicadas a cada corpo?

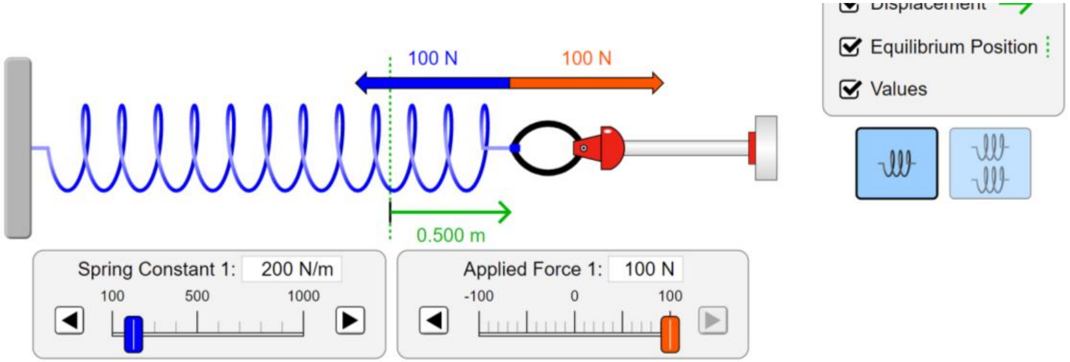
Mola: Posição de equilíbrio e comprimento da mola

Equilíbrio:
Posição x_{eq} e comprimento da mola l_{eq}



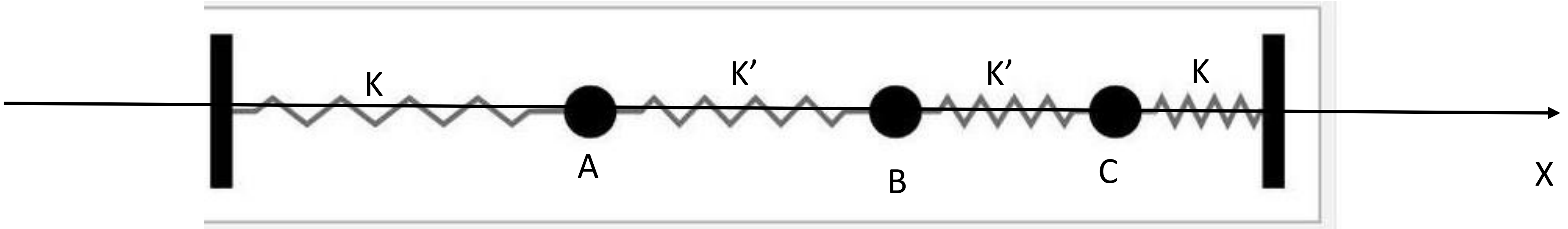
Mola distendida:
O afastamento $x - x_{eq}$ à posição de equilíbrio é quanto o comprimento da mola l aumentou

$$x - x_{eq} = l - l_{eq}$$



https://phet.colorado.edu/sims/html/hookes-law/latest/hookes-law_en.html

3 Osciladors Harmónicos Acoplados

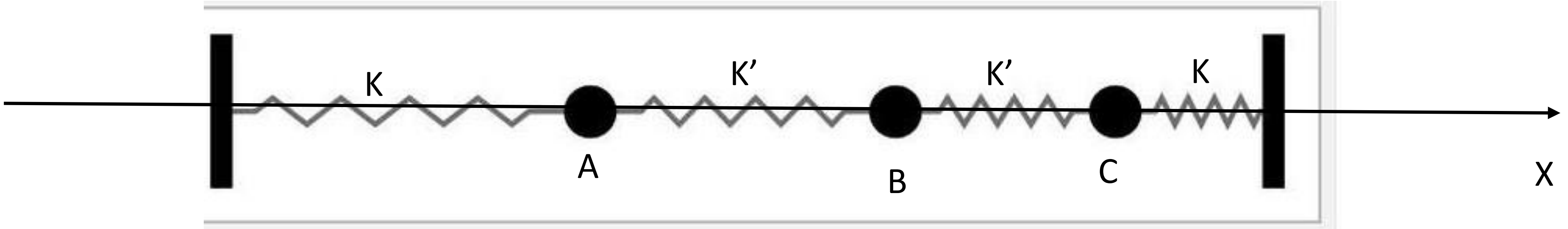


Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

- Força aplicada ao corpo B

$$F_{Bx} = -k'\left(\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right) - k'\left(\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_C - x_{Ceq}\right)\right)$$

3 Osciladors Harmónicos Acoplados



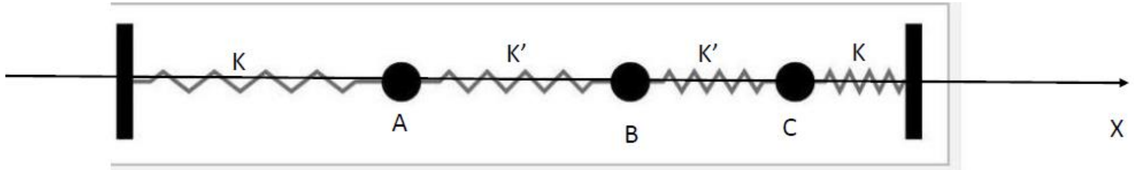
Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

- Equação dinâmica de Newton para cada corpo

Corpo A $m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'\left(\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right) - k'\left(\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_C - x_{Ceq}\right)\right)$

Corpo C $m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\left(x_C - x_{Ceq}\right) - k'\left(\left(x_C - x_{Ceq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$



Corpo A $m\,\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) \;-k'\big((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\big)$

Corpo B $m\,\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'\big((x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})\big) - k'\big((x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})\big)$

Corpo C $m\,\dfrac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'\big((x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})\big)$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

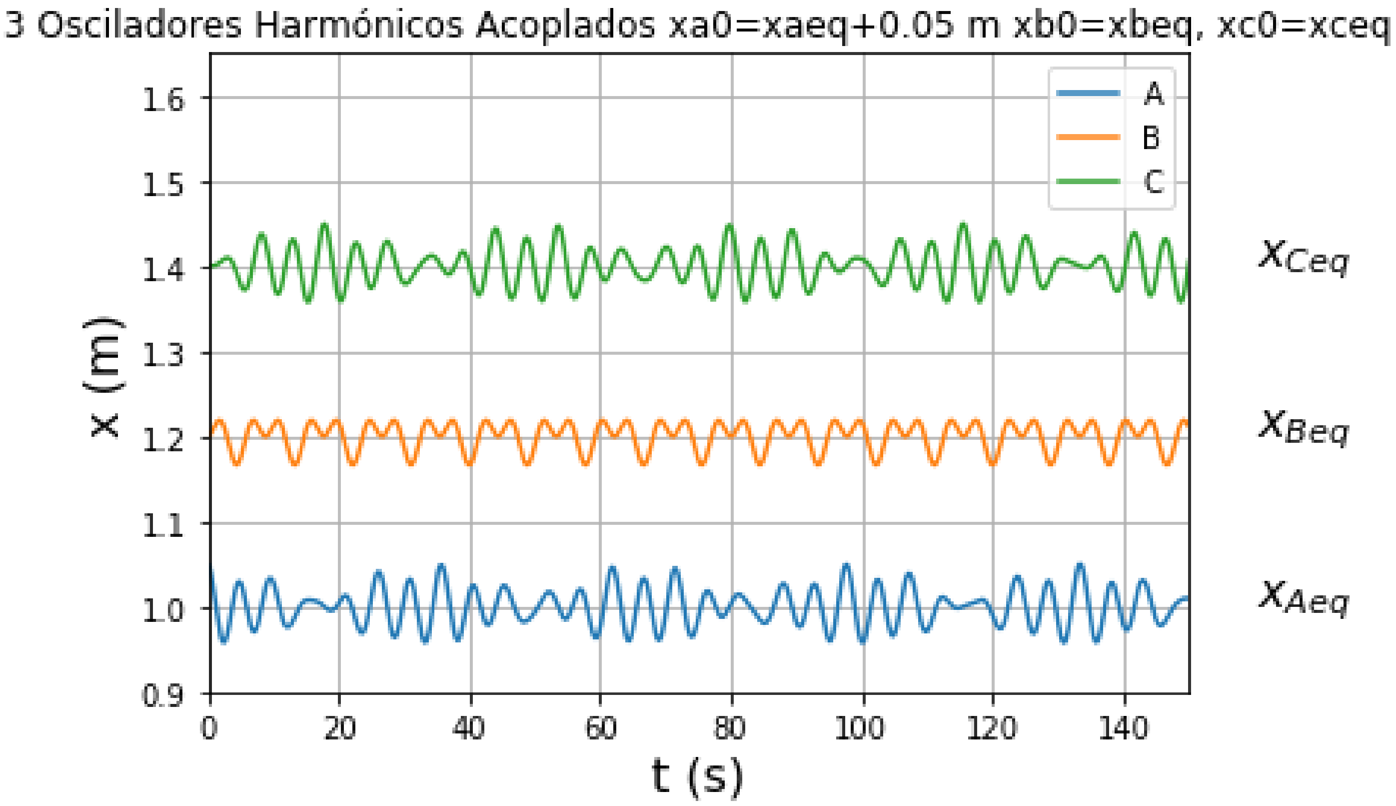
$$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1\ \mathrm{kg}$$

$$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m} \quad x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m} \quad x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\ \mathrm{m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq} \qquad x_{C0} = x_{Ceq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$

Movimento de cada corpo parece periódico



MODOS NORMAIS: Cálculo

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'\left(\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right) - k'\left(\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_C - x_{Ceq}\right)\right)$

Corpo C $\quad m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\left(x_C - x_{Ceq}\right) - k'\left(\left(x_C - x_{Ceq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Estas equações admitem soluções sinusoidais para cada corpo?

Transformação das variáveis x para o desvio u à posição de equilíbrio x_{eq}

$$x_A - x_{Aeq} = u_A$$
$$x_B - x_{Beq} = u_B$$
$$x_C - x_{Ceq} = u_C$$

$$\begin{cases} m\,\dfrac{d^2u_A}{dt^2} = -k\,u_A - k'(u_A - u_B) \\ m\,\dfrac{d^2u_B}{dt^2} = -k'(u_B - u_A) - k'(u_B - u_C) \\ m\,\dfrac{d^2u_{CA}}{dt^2} = -k\,u_C - k'(u_C - u_B) \end{cases}$$

MODOS NORMAIS

$$\begin{cases} m\ \dfrac{d^2u_A}{dt^2} = -k\ u_A\ - k'(u_A - u_B) \\ m\ \dfrac{d^2u_B}{dt^2} = -k'(u_B - u_A) - k'(u_B - u_C) \\ m\ \dfrac{d^2u_{CA}}{dt^2} = \ -k\ u_C - k'(u_C - u_B) \end{cases}$$

Suponha-se que $\quad u_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$

$$\begin{cases} -\omega^2\ u_A = -\dfrac{k}{m}\ u_A\ - \dfrac{k'}{m}(u_A - u_B) \\ -\omega^2\ u_B = \dfrac{-k'}{m}(u_B - u_A) - \dfrac{k'}{m}(u_B - u_C) \\ -\omega^2\ u_C = \ -\dfrac{k}{m}\ u_C - \dfrac{k'}{m}(u_C - u_B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{k+k'}{m} - \omega^2\right) u_A - \dfrac{k'}{m} u_B = 0 \\ -\dfrac{k'}{m} u_A + \left(\dfrac{2k'}{m} - \omega^2\right) u_B - \dfrac{k'}{m} u_C = 0 \\ -\dfrac{k'}{m} u_B + \left(\dfrac{k+k'}{m} - \omega^2\right) u_C = 0 \end{cases}$$

Sistema homogéneo de 3 equações a 3 incógnitas

MODOS NORMAIS

Suponha-se que $u_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$

$$\begin{cases} \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) u_A - \frac{k'}{m} u_B = 0 \\ -\frac{k'}{m} u_A + \left(\frac{2k'}{m} - \omega^2\right) u_B - \frac{k'}{m} u_C = 0 \\ -\frac{k'}{m} u_B + \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) u_C = 0 \end{cases}$$

Sistema homogéneo de 3 equações a 3 incógnitas
Problema de valores (ω^2)e vetores próprios

<u>Tem solução não nula</u>, o que requer:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m} - \omega^2\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

Python:

```
from numpy import linalg as LA
w, v = LA.eig(matdyn)   # eig: function para calcular valores e vetores próprios
                        #        de uma matriz simétrica
```

MODOS NORMAIS

Problema:

a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

em que $k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg

b) Calcule as frequências de vibração (= raiz quadrada do valor próprio)

c) Verifique que os vetores próprios são ortogonais (produto escalar nulo).

Python:

```
from numpy import linalg as LA
w, v = LA.eig(matdyn)       # eig: function para calcular valores e vetores próprios
                            #        de uma matriz simétrica
                            # w: valores próprios
                            # v: vetores próprios
```

MODOS NORMAIS

Problema:

a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

em que $k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg

Solução:

```
w, v = LA.eig(matdyn)   # eig: function para calcular valores e vetores próprios
print(np.sqrt(w),v)
(array([0.70710678,       1.22474487,      1.41421356]),        # Frequencias:
array([[ 4.08248290e-01, -7.07106781e-01,  5.77350269e-01],           # Vetores próprios:
       [ 8.16496581e-01,  4.02240178e-16, -5.77350269e-01],
       [ 4.08248290e-01,  7.07106781e-01,  5.77350269e-01]]))
```

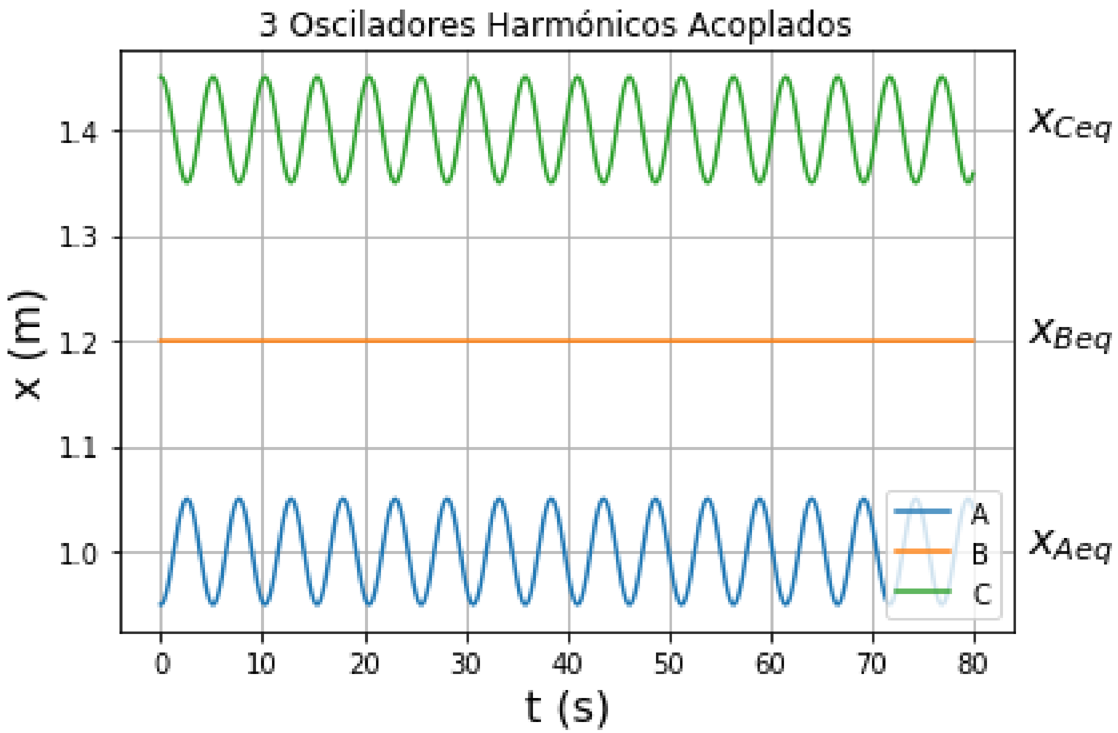
Modo Normal Simétrico

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1\ \mathrm{kg}$

$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\quad x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}\quad x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$

$$x_{A0} = x_{Aeq} - 0.05\ \mathrm{m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq}$$
$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.05\ \mathrm{m}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$



T=5.130 s e ω= 1.225 rad/s

(c) Longitudinal normal modes

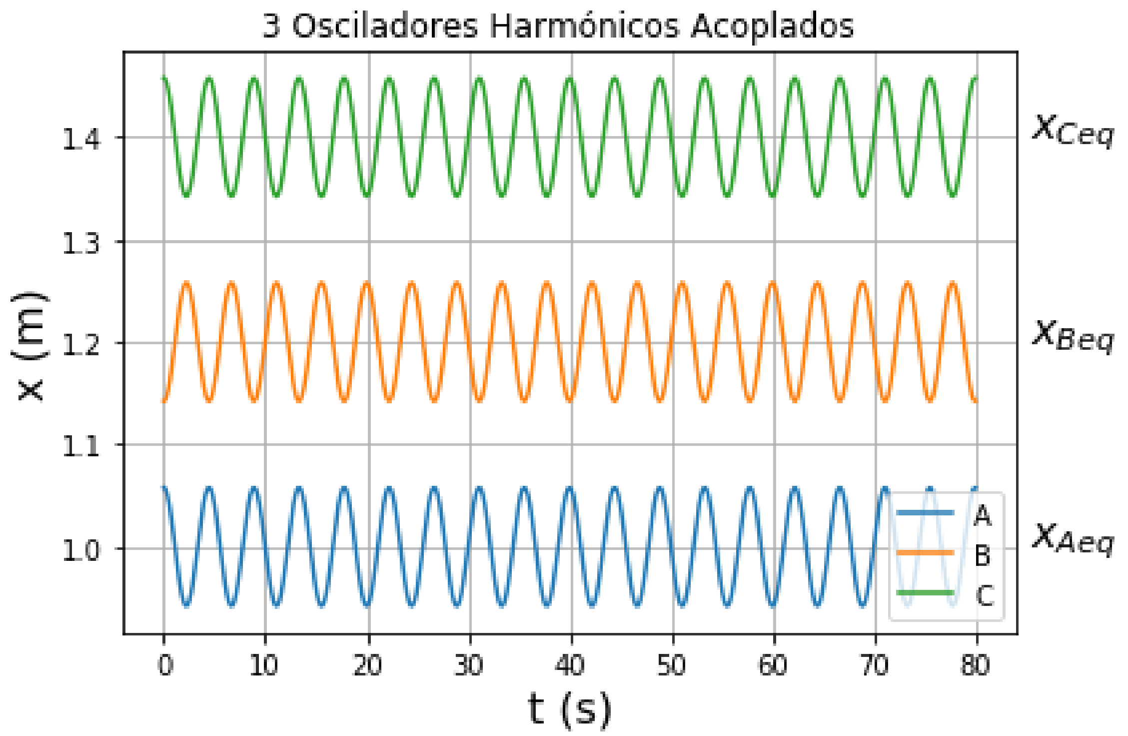
Modo Normal Asimétrico

$k = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$

$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\ \ x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}\ \ \ x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.0577\ \mathrm{m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq} - 0.0577\mathrm{m}$$
$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.0577\mathrm{m}$$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$



T= 4.443 s e ω= 1.414 rad/s

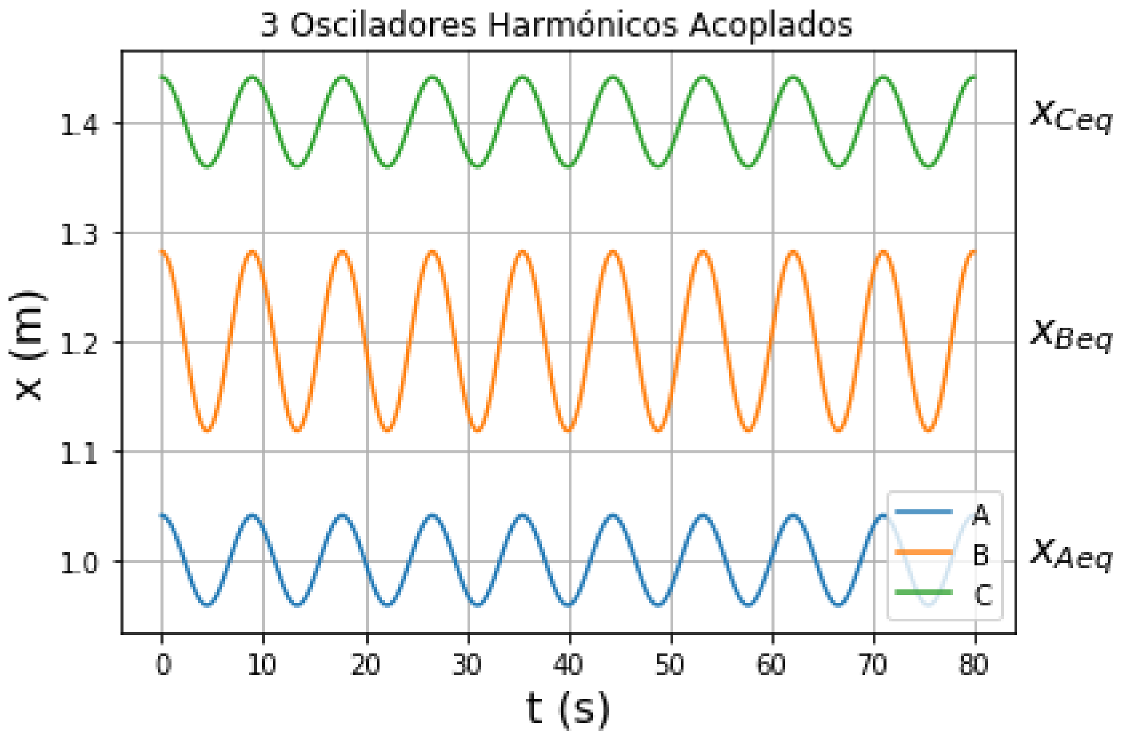
Modo Normal 3

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$

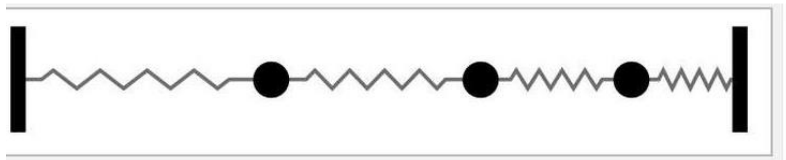
$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\ \ x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}\quad x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.0408\ \mathrm{m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq} + 0.0816\ \mathrm{m}$$
$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.0408\ \mathrm{m}$$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$



T= 8.886 s e ω= 0.707 rad/s



Amortecido

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq})\; - k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right) - b\,v_{Ax}$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'\left((x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})\right) - k'\left((x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})\right) - b\,v_{Bx}$

Corpo C $\quad m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'\left((x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})\right) - b\,v_{Cx}$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1\text{ kg}$

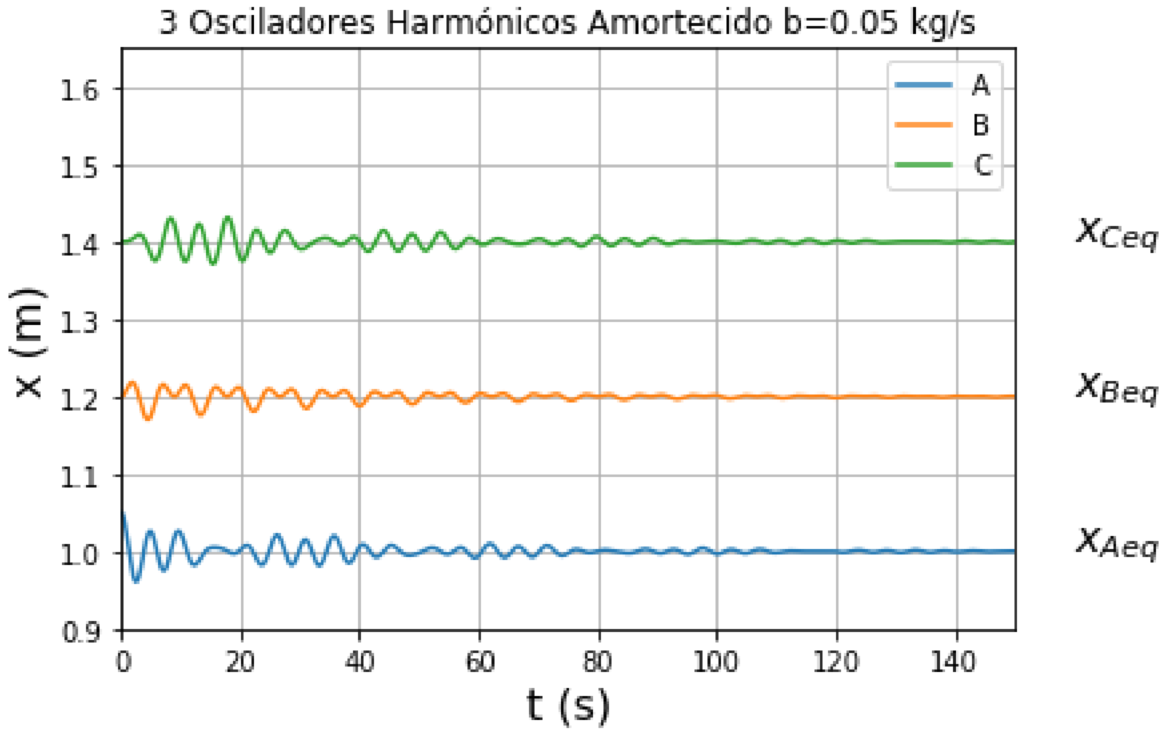
$x_{Aeq} = 1.0\text{ m}\;\; x_{Beq} = 1.2\text{ m}\quad x_{Ceq} = 1.4\text{ m}$

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\text{ m}$

$x_{B0} = x_{Beq}$

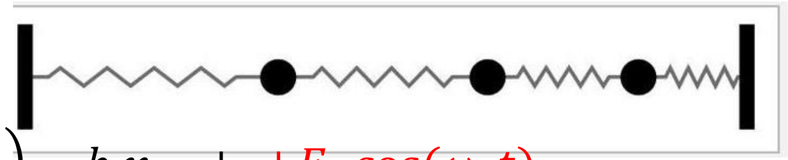
$x_{C0} = x_{Ceq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$



Cada corpo tende para a posição de equilíbrio, à medida que o tempo aumenta.

Oscilador Harmónico Forçado



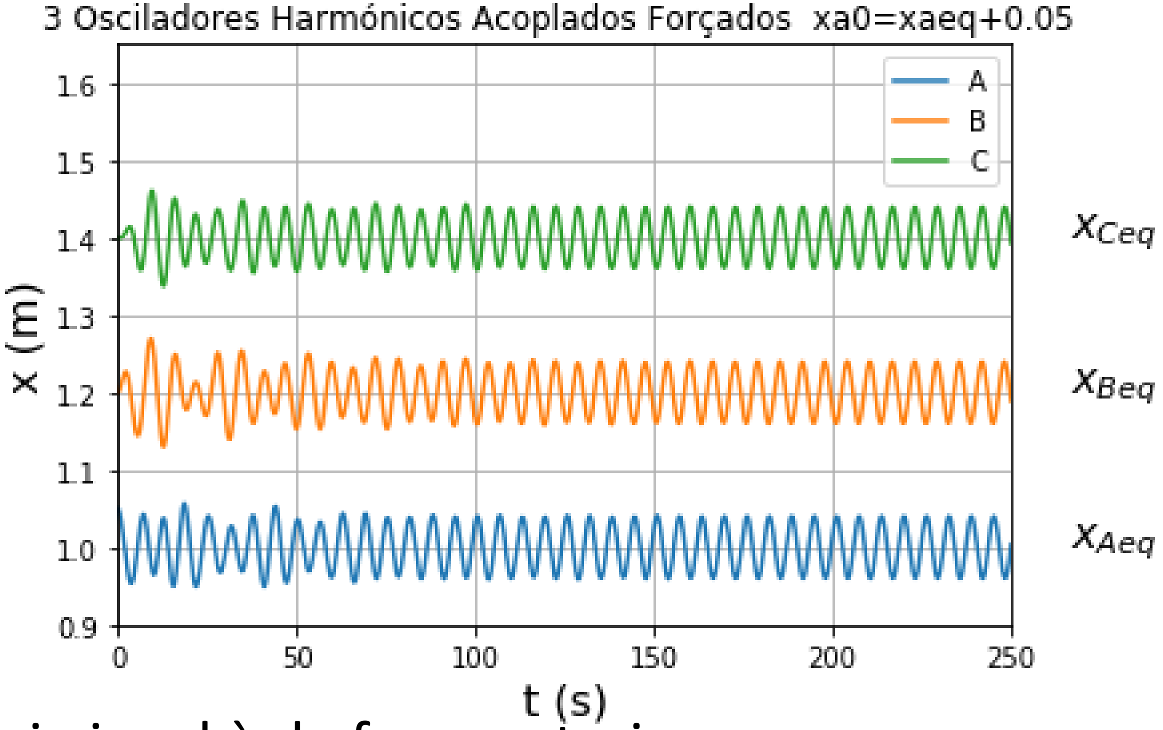
Corpo A $m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq})\; - k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right) - b\,v_{Ax} + {+F_0\cos(\omega_f t)}$

Corpo B $m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'\left((x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})\right) - k'\left((x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})\right) - b\,v_{Bx}$

Corpo C $m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'\left((x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})\right) - b\,v_{Cx}$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1$ kg, $b = 0.05$ kg/s
$x_{Aeq} = 1.0$ m $x_{Beq} = 1.2$ m $x_{Ceq} = 1.4$ m
$F_0 = 0.04\,N\,;\; \omega_f = 1$ rad/s

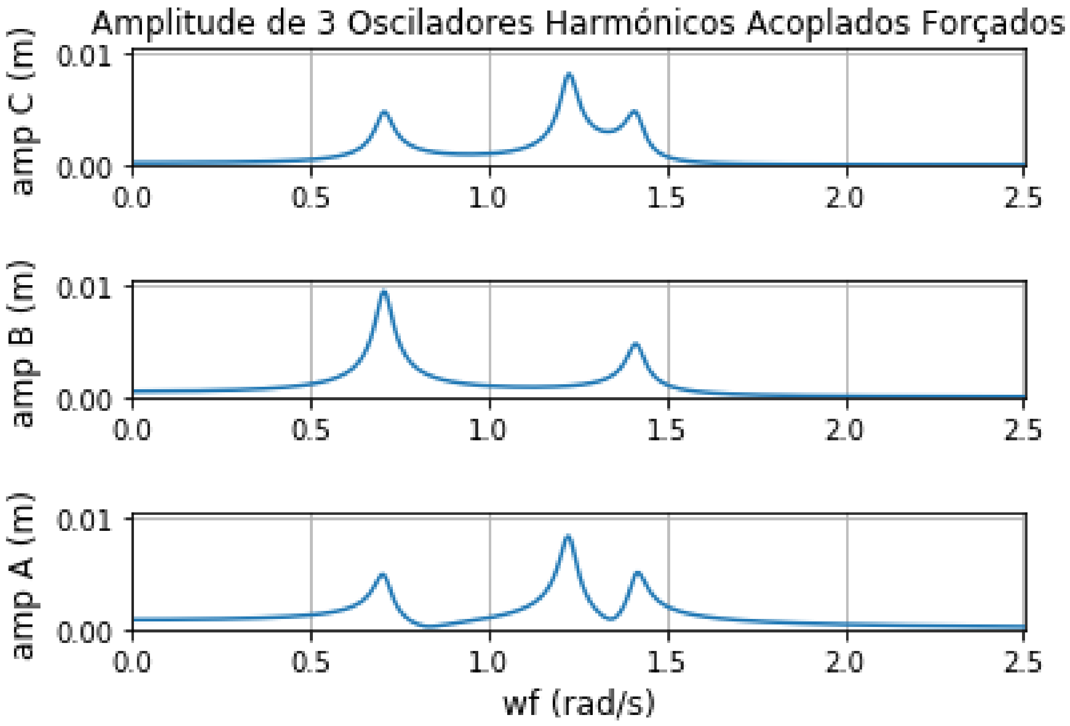


$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\text{ m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq}$$
$$x_{C0} = x_{Ceq}$$
$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$

Cada corpo tende para um regime estacionário,
de um movimento harmónico simples, de frequência igual à da força exterior:

$$\omega_A = \omega_B = \omega_C = 1.000\text{ rad/s}$$

Oscilador Harmónico Forçado: Amplitude no regime estacionário



Ressonâncias nas frequências $\omega_f = 0.703$, 1.225 e 1.409 rad/s.

São as frequências dos modos normais?

Se no caso não forçado e amortecido, cada corpo tiver movimento harmónico simples (amplitude e período constantes) com estas frequências. SIM!

Modos Normais e Osciladores Forçados

Ressonância:

Quando são forçados por uma força exterior, apresentam Ressonância quando a frequência da força externa for igual à frequência dos modos normais.

Por medição pode-se determinar as frequências dos modos normais.

Modos Normais e Osciladores Forçados

Modos normais são:
- Medidos
- Calculados, ou por modelos ou por equações fundamentais da Física.

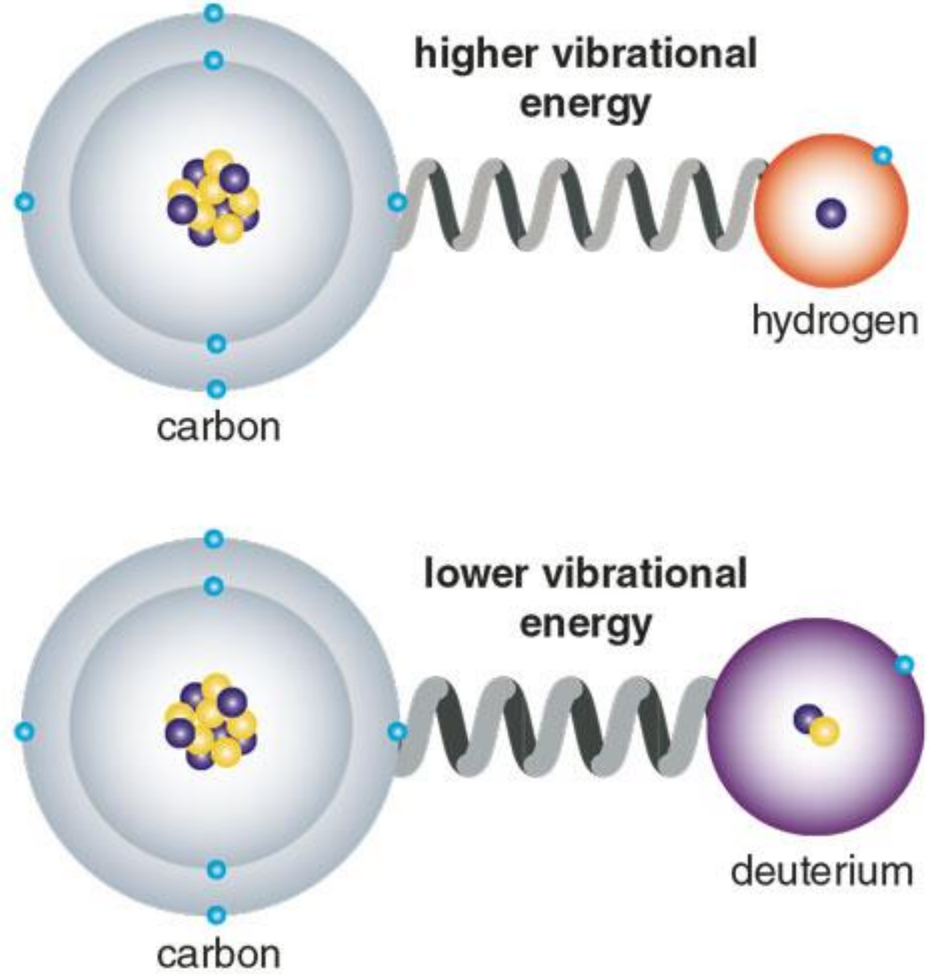
São usados no estudo da estrutura da matéria: Moléculas, Cristais, Sólidos, …

Experiência:
A matéria em estudo é excitada por luz laser, onda eletromagnética (campo elétrico)
- Força elétrica= Carga * Campo Elétrico

- Excita os núcleos atómicos, porque possuem carga elétrica positiva.
- Quando a frequência do laser produz ressonância, obtêm-se os modos normais.

Teoria:
- Modelos fenomenológicos – parâmetros ajustados aos valores experimentais dos modos normais
- Primeiros Princípios: Todas as quantidades medidas calculadas pela equação fundamental da Mecânica Quântica.

Modos Normais



MODOS NORMAIS

Problema:

a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

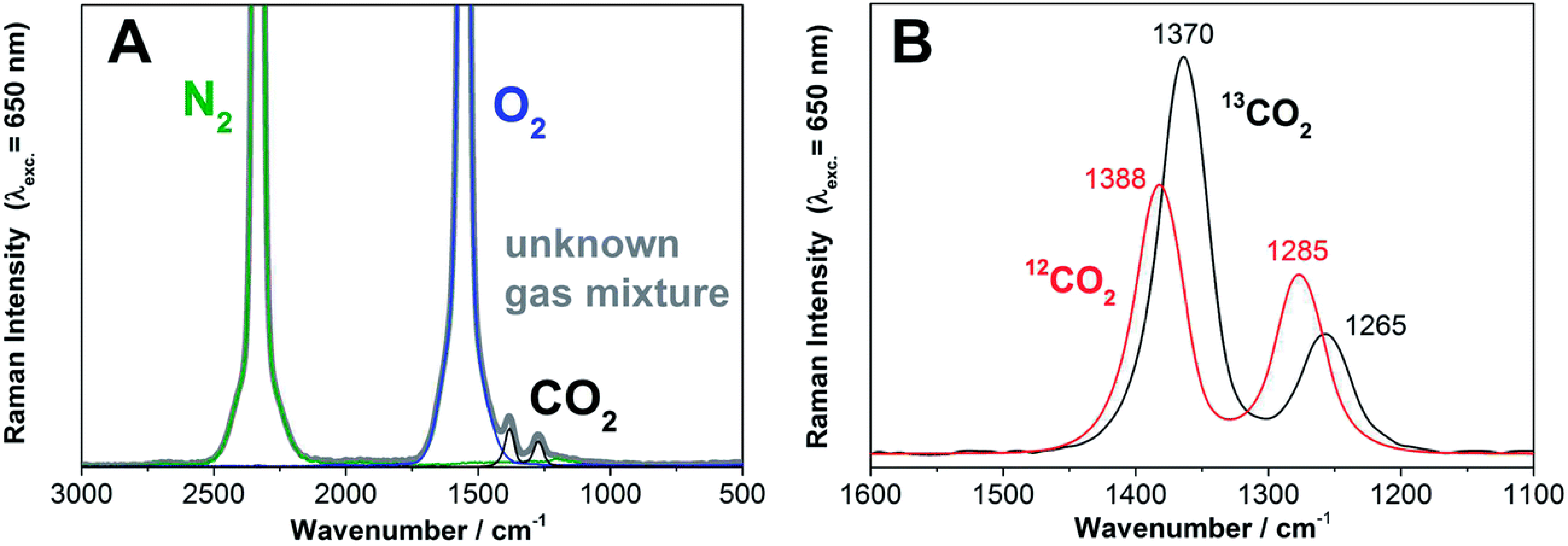
$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

em que $k = 0\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg

b) Calcule as frequências de vibração (= raiz quadrada do valor próprio)

c) Para o caso em que $m = 2$ kg, calcule as frequências dos modos normais.

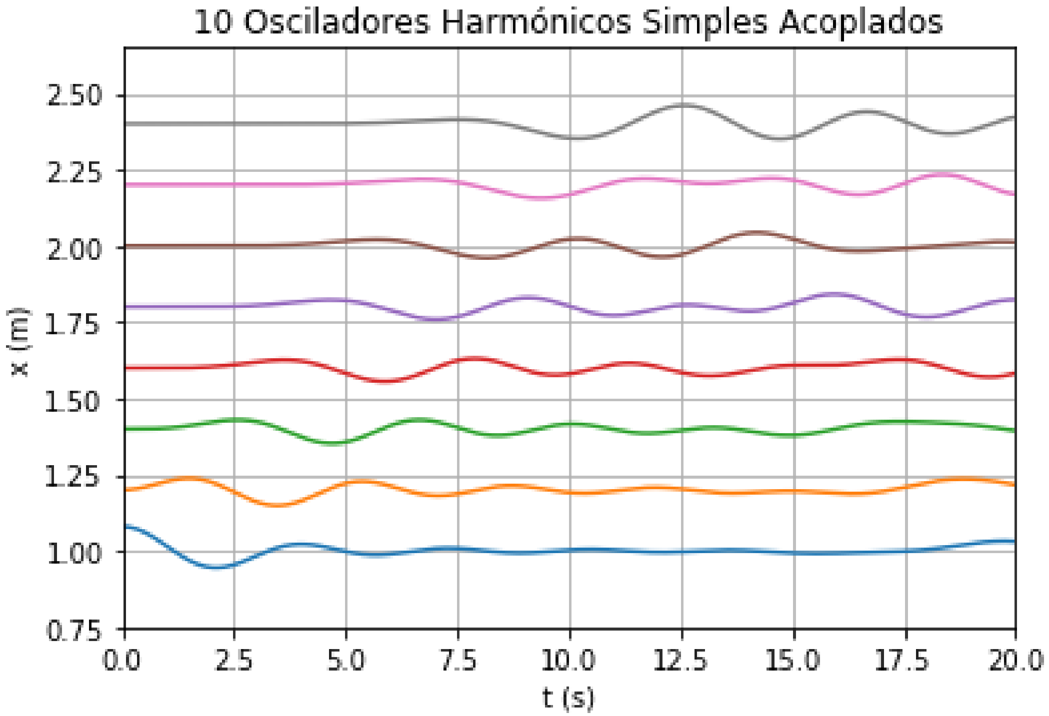
Modos Normais: Ressonância



Excitação por lazer, que mede as frequências de ressonância
e as dos modos normais serve para determinar a constituição química dos gases.

N osciladores acoplados

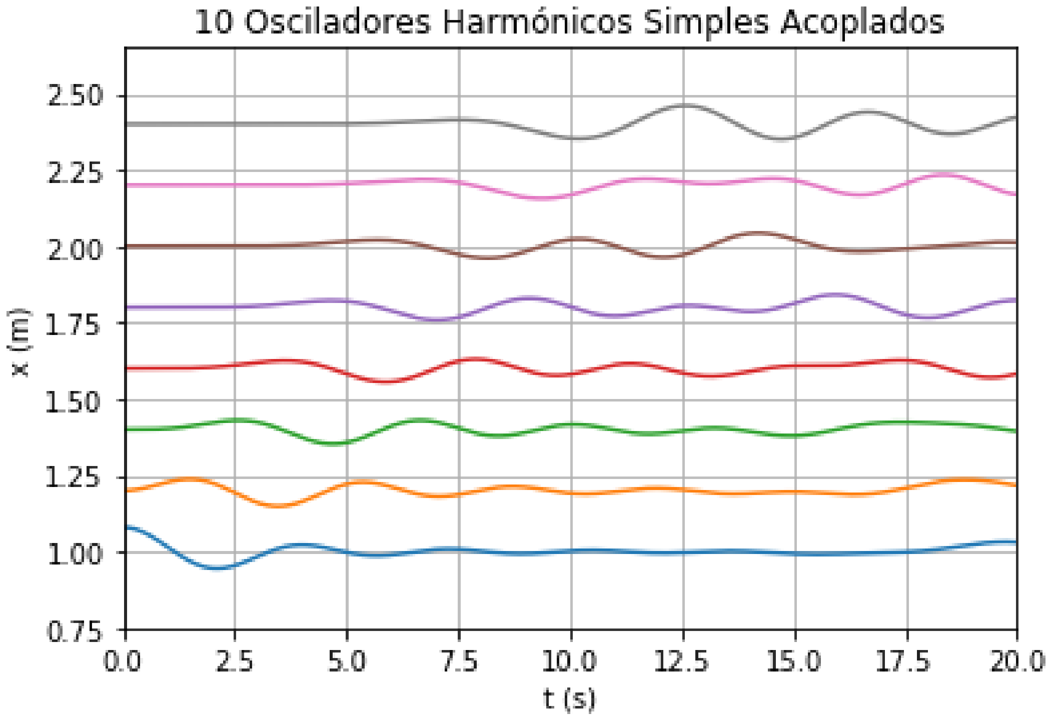
Propagação de um sinal em N osciladores acoplados

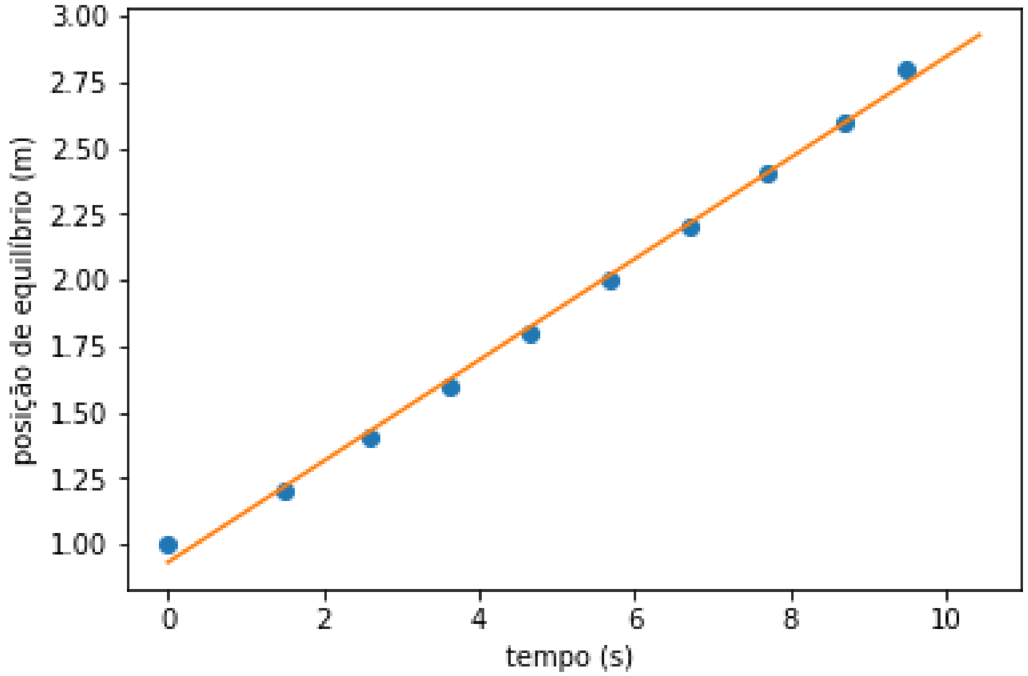


Acoplamentos de osciladores: Transmissão de energia, não instantânea

N osciladores acoplados

Propagação de um sinal em N osciladores acoplados



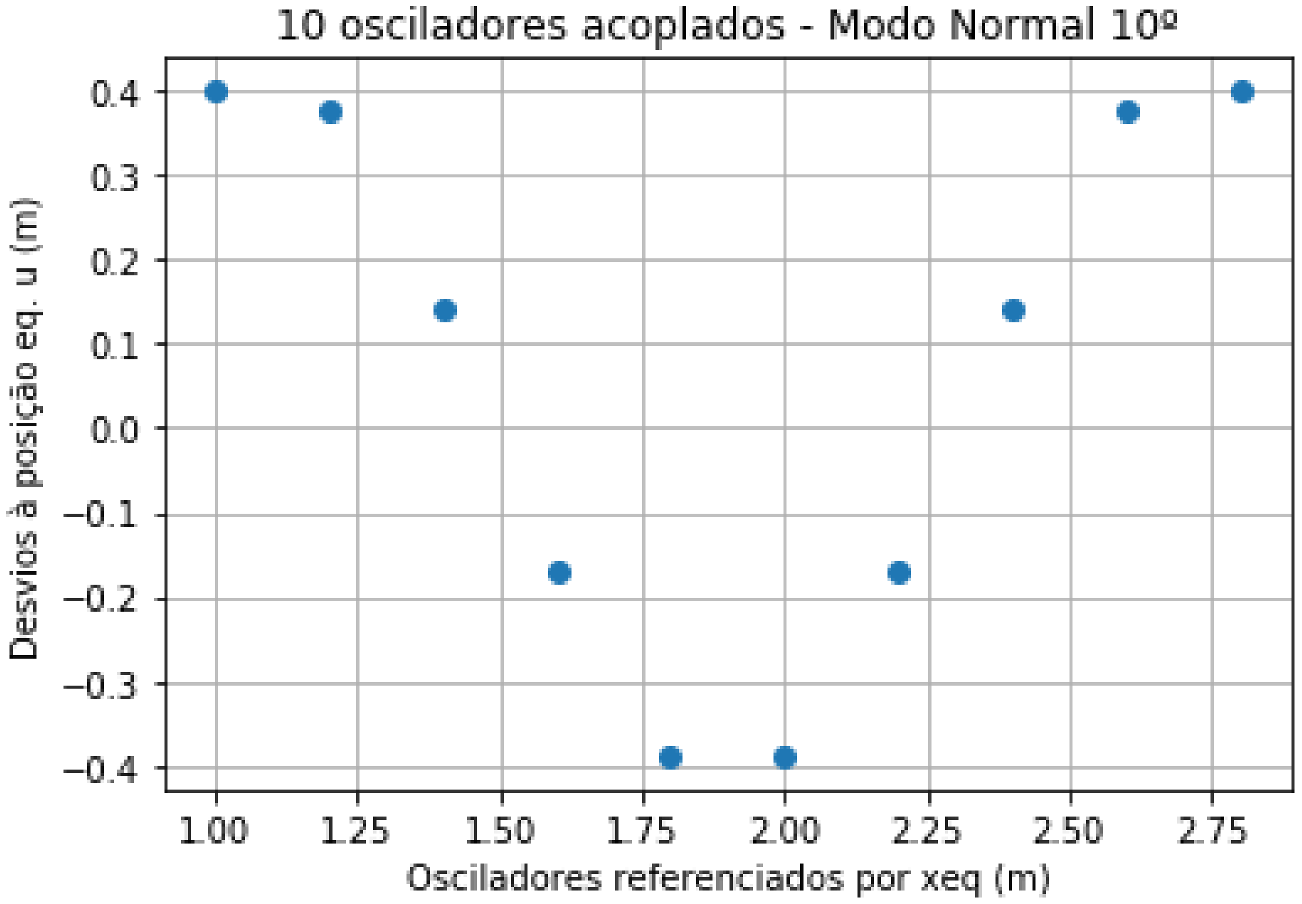


Velocidade de propagação da perturbação 0.192 ± 0.004 m/s

Acoplamentos de osciladores: Transmissão não instantânea de informação e de energia,

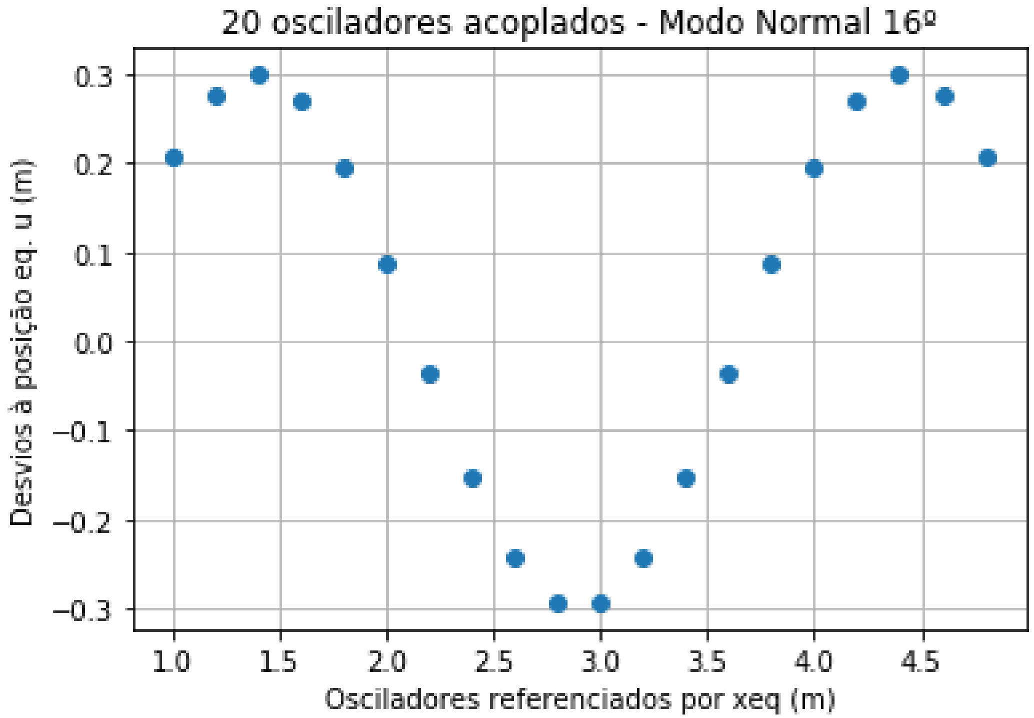
MODOS NORMAIS

10 osciladores acoplados: modo normal 10º



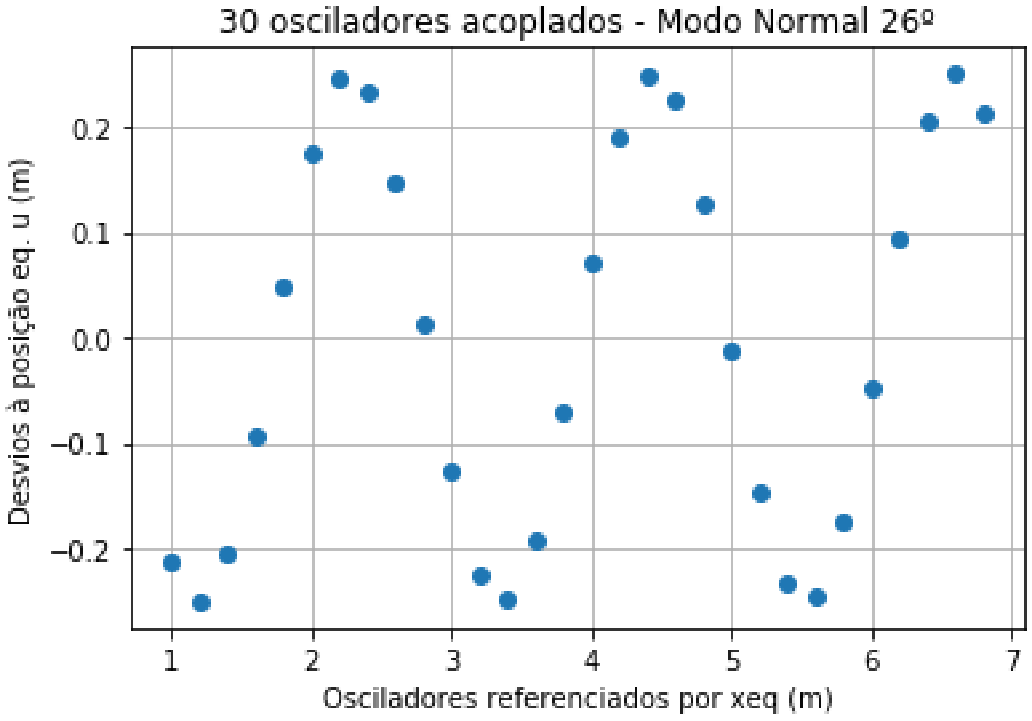
MODOS NORMAIS

20 osciladores acoplados: modo normal 16º



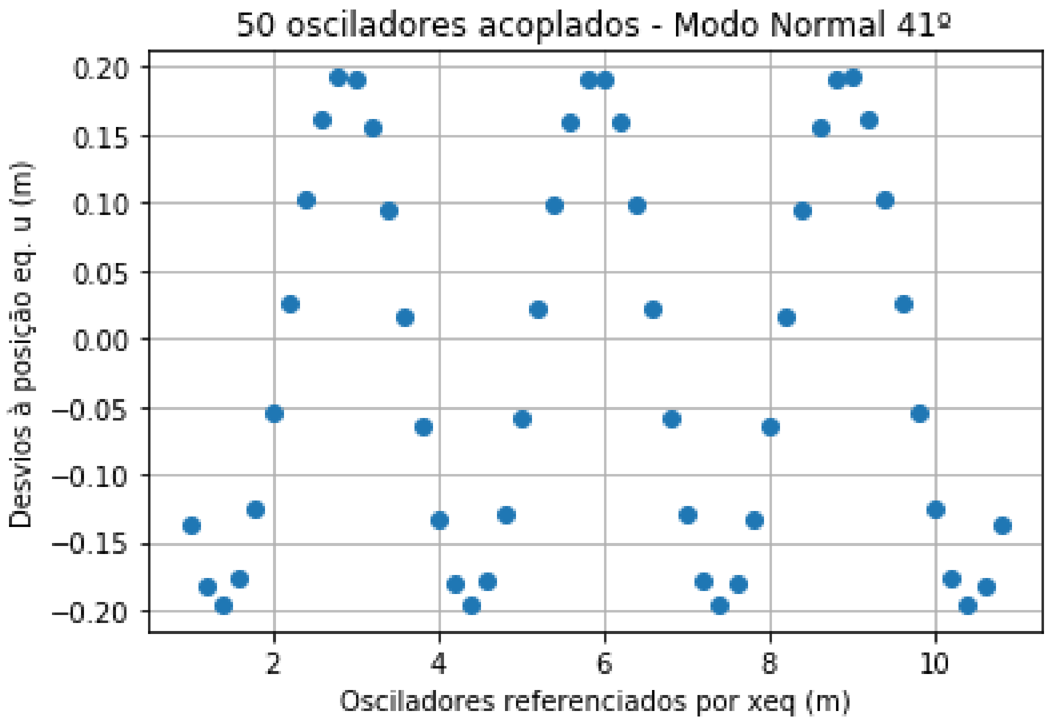
MODOS NORMAIS

30 osciladores acoplados: modo normal 26º

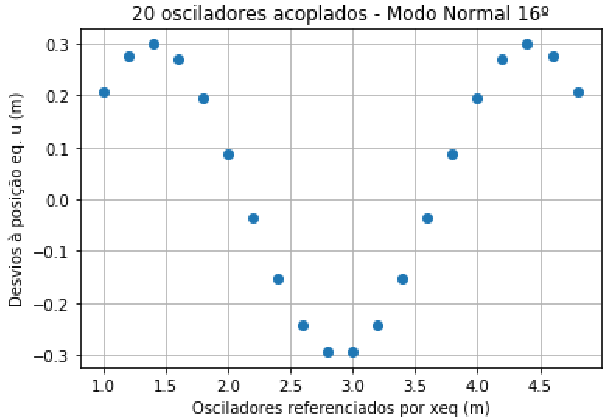


MODOS NORMAIS

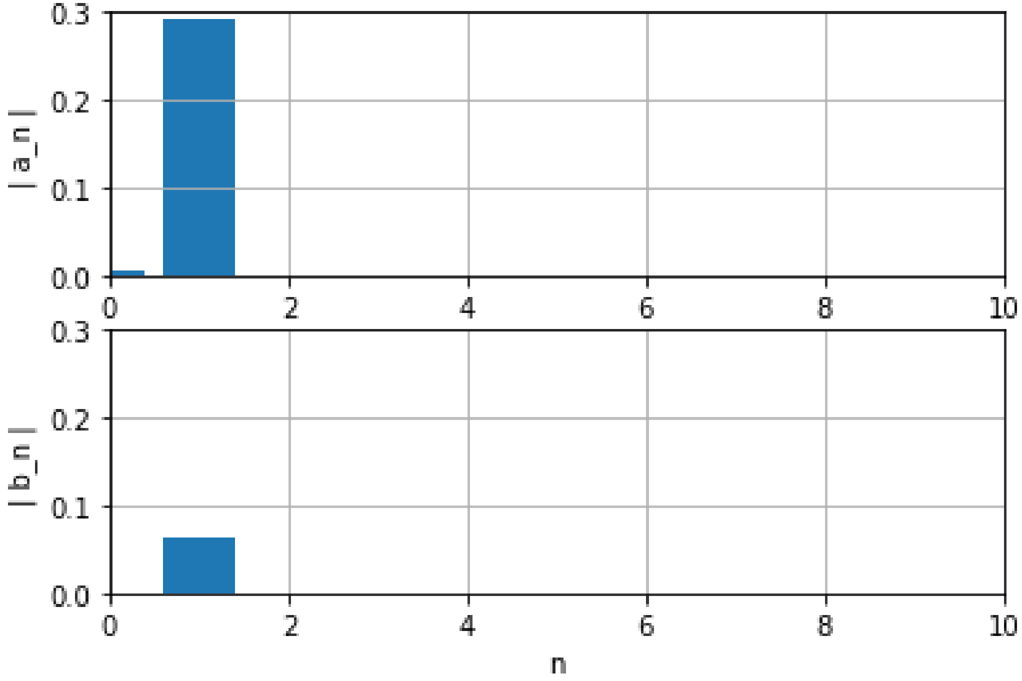
50 osciladores acoplados: modo normal 41º



Considere 20 osciladores acoplados de igual massa. O modo normal longitudinal 16º apresenta os seguintes desvios às posições de equilíbrio:

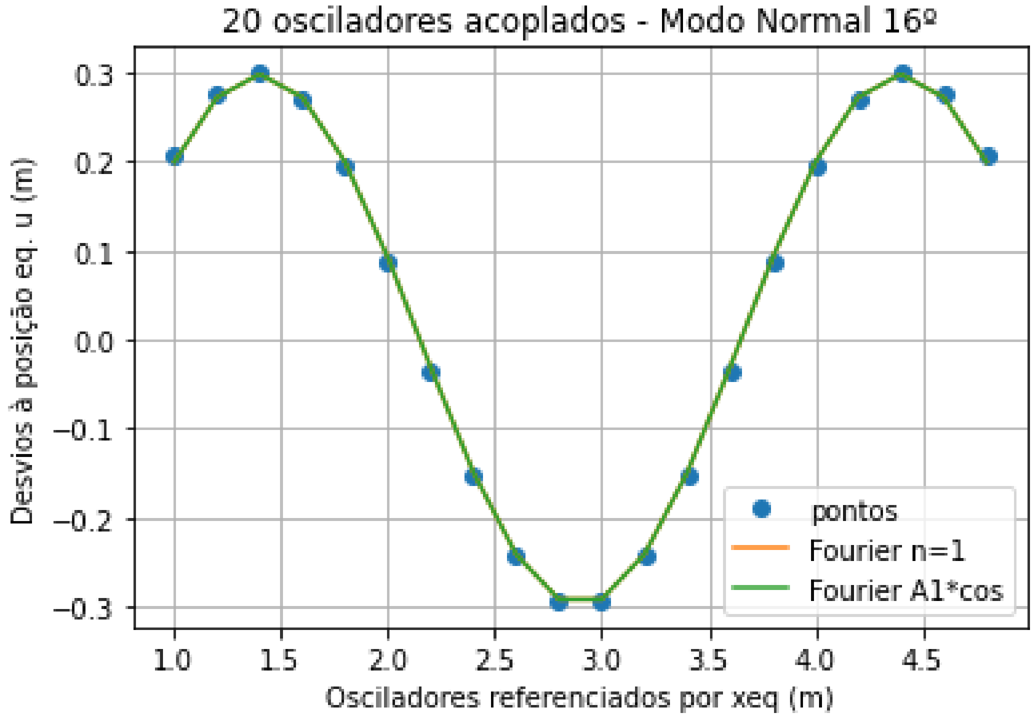


Parece uma função sinusoidal!
Os coeficientes de Fourier da parte que representa uma repetição (de máximo a máximo).
O comprimento dessa repetição é $\lambda = 4.4 - 1.4$ m.



Considere 20 osciladores acoplados de massa igual. O modo normal longitudinal 16º apresenta os seguintes desvios com as posições de equilíbrio:

O modo normal 16 usando só o termo de Fourier n=1:



$$u_{16}(x_{eq}) = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3} x_{eq}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{3} x_{eq}\right) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3} x_{eq} - \frac{2\pi}{3} 1.4\right)$$

MODOS NORMAIS

6 osciladores acoplados: modos normais

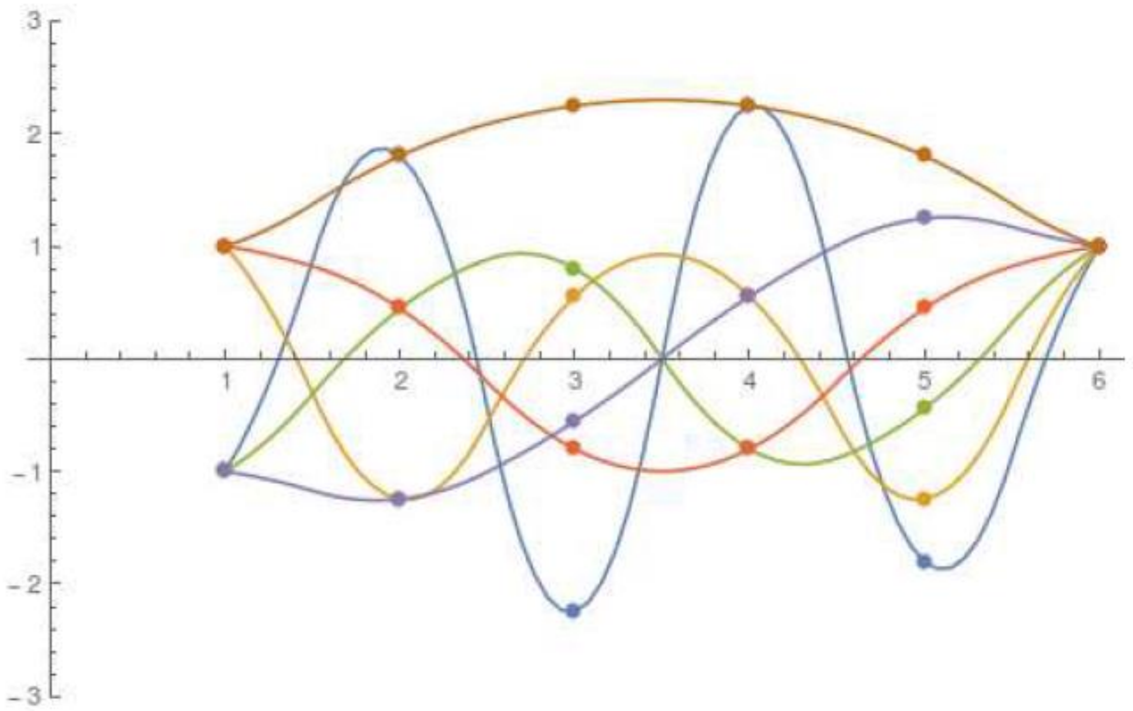
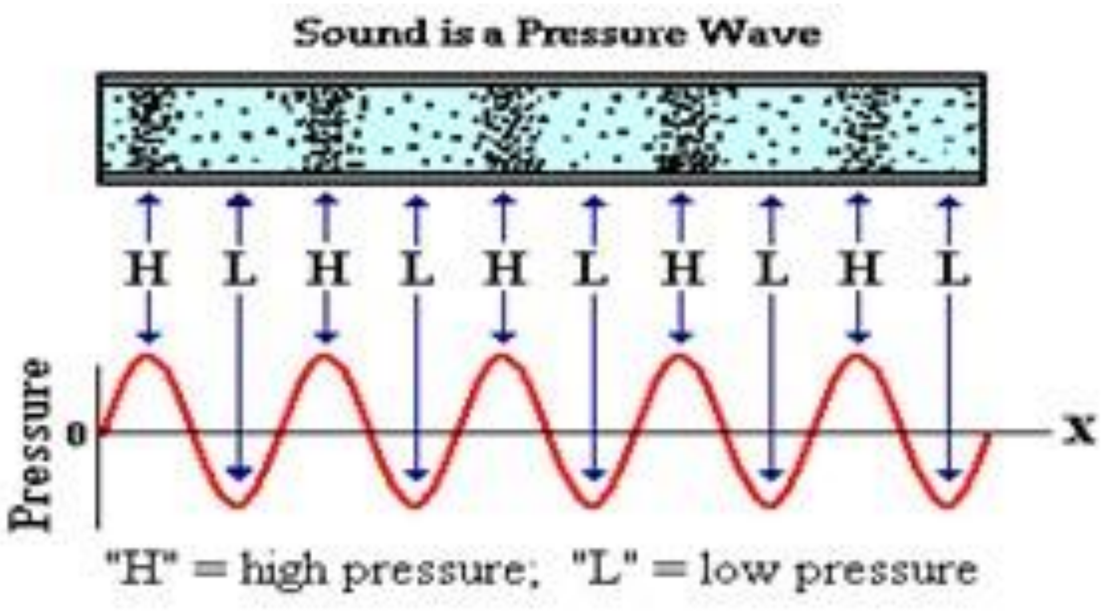


Figure 4. Normal modes displacements for the 6 mass system. These curves look like sine curves.

Os modos normais são um coseno ou seno em cada corpo!

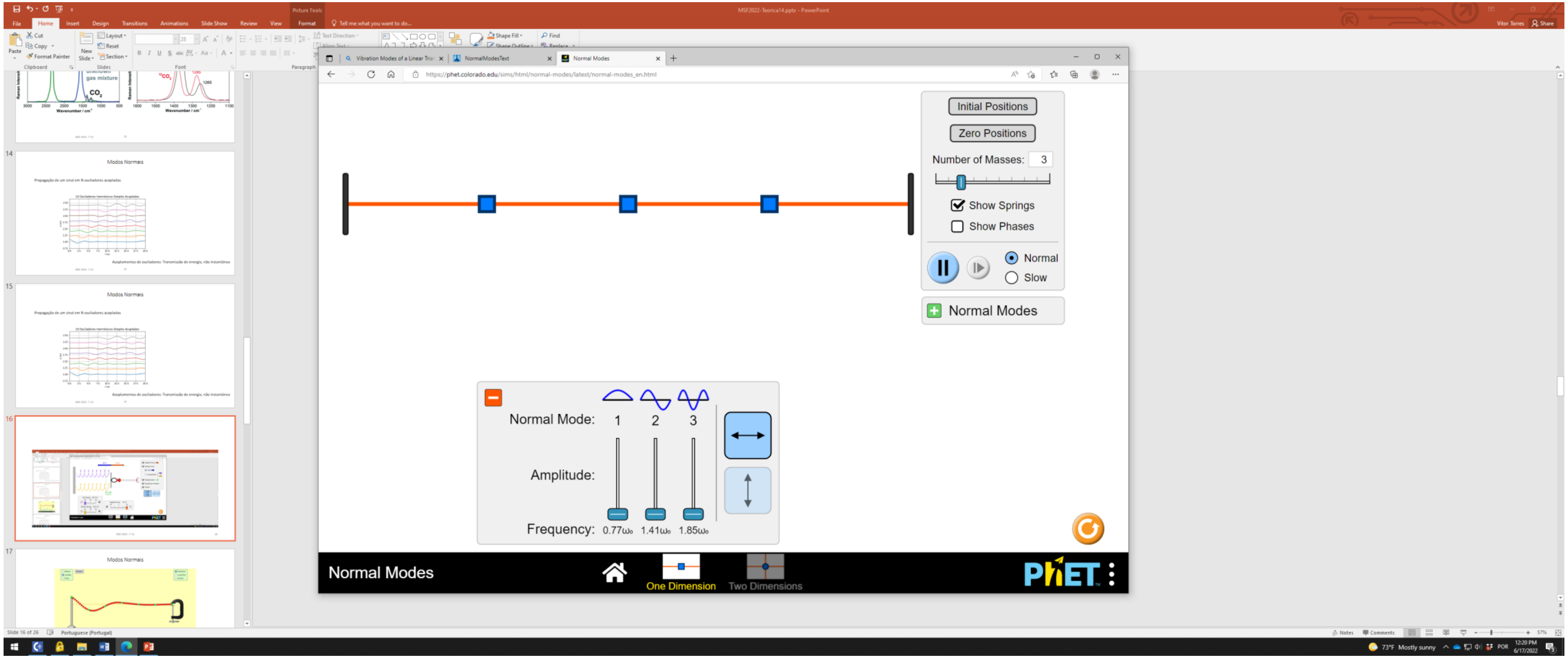
Cap. 3 Ondas

<u>Ondas longitudinais</u> - perturbação do meio tem a mesma direção da propagação da onda



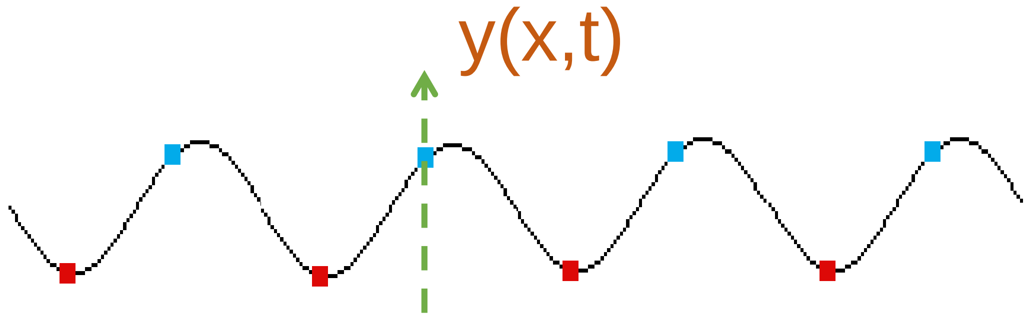
MODOS NORMAIS Longitudinais e Transversais

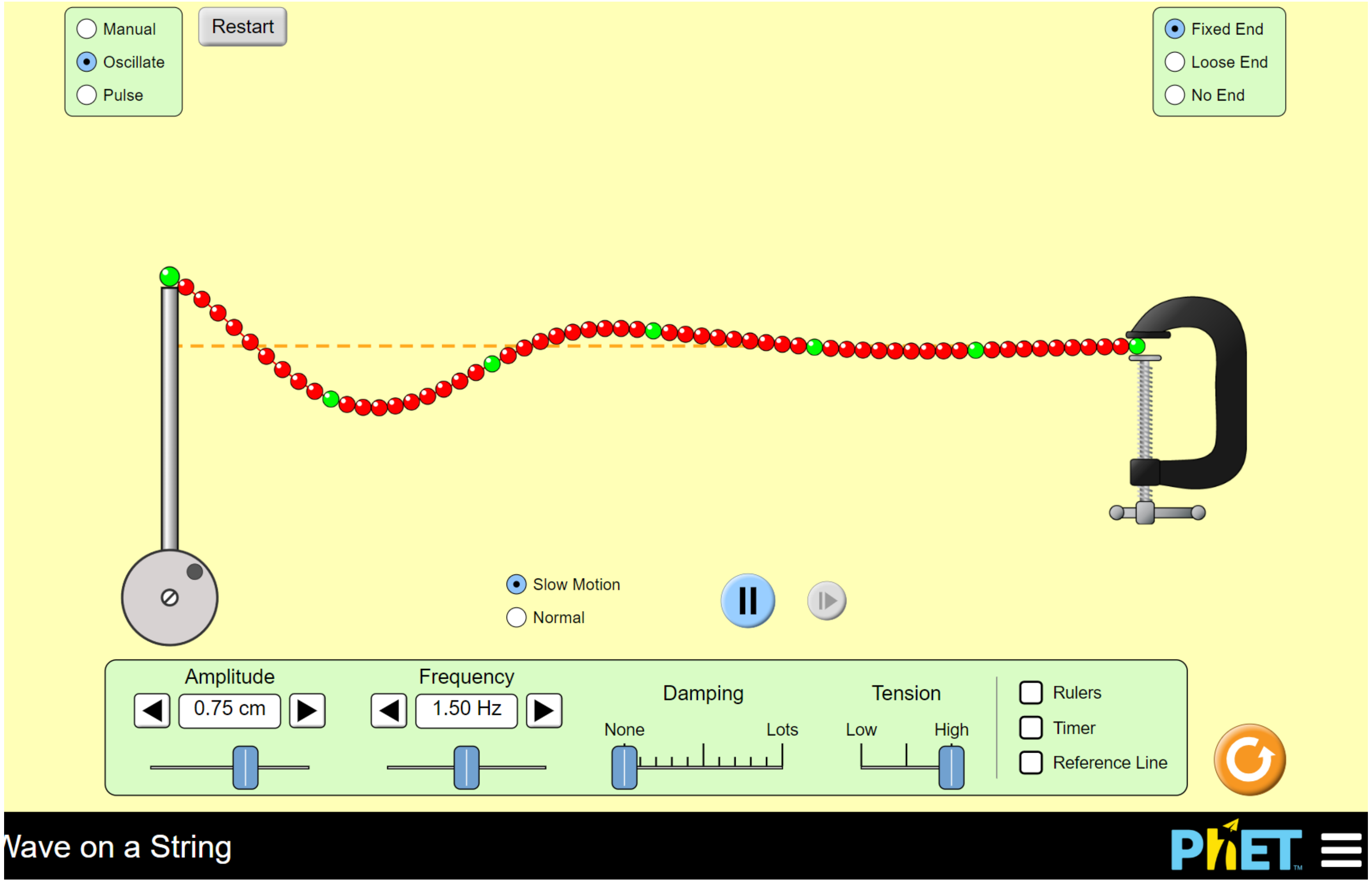
https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes_en.html



Cap. 3 Ondas

<u>Ondas transversais</u> – a perturbação do meio é perpendicular à direção de propagação da onda

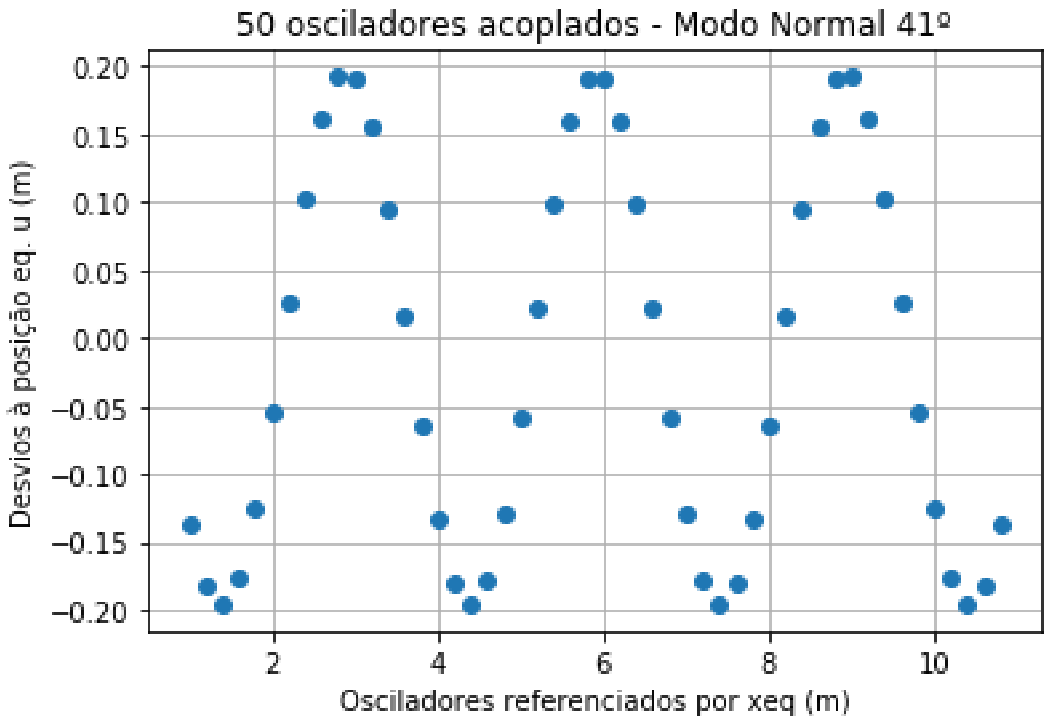




https://phet.colorado.edu/pt/simulations/wave-on-a-string

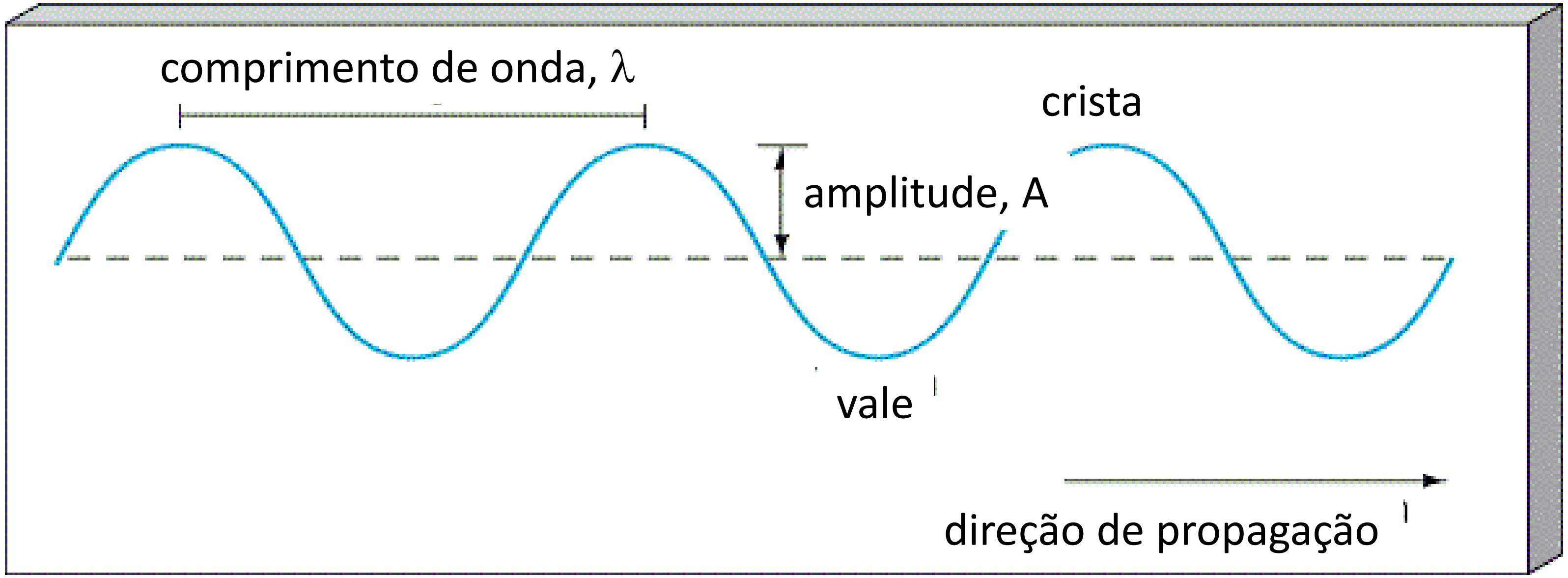
MODOS NORMAIS

50 osciladores acoplados: modo normal 41º



Como varia a oscilação em cada oscilador? Ou como varia no espaço? Seno ou coseno!

Onda



Repetição no tempo

$$T$$

$$f = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Onda:
Repetição no espaço

$$\lambda$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = número de onda