DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

**Modelação de Sistemas Físicos**
Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

# Prova de Recurso - Resolução
# Parte Cálculo Computacional-Numérica

**Data:** 14 Julho 2021
**Hora:** 10H30

**Duração:** 2 horas
**Disciplina:** 41769
**Salas:** 11.2.7,11.2.8,11.2.22, 10.3.14

**Cotação**: 1) 1 + 2 + 2 = 5 valores
2) 2 + 1.5 + 1.5 = 5 valores
3) 2 + 2 = 4 valores
4) 2 + 2 + 2 = 6 valores

**NOTE: De consulta, sem acesso à Internet**
a) Responda às perguntas, **justificando-as, na vossa folha de prova**
b) Indique claramente o sistema de eixos usado.
c) Esboce os gráficos, indicando univocamente os pontos importantes. Se gravar as figuras, salve-as em formato png.
d) Na vossa folha de prova indique os métodos, os algoritmos, passos, … usados.
e) Os ficheiros, com a identificação da pergunta e da alínea, devem ser copiados para a caneta de memória do docente presente na sala com o nome e número do aluno (para poderem ser consultados quando o docente tiver dúvidas durante a correção).
f) Tem de usar o seu computador portátil. Pode (e deve) usar os seus programas, assim como outros programas que tenha obtido.

***As respostas não podem ser escritas a lápis***

# *Justifique todas as respostas*

1. Com o objetivo de estudar o movimento de um carro a descer um plano inclinado, foi realizada uma experiência em que se larga o carro de uma certa altura, e foram registados os seguintes valores sobre o percurso percorrido e o tempo gasto:

| $t$ (s) | $s$ (m) |
|---|---|
| 0.5 | 0.121 |
| 1.5 | 0.997 |
| 2.5 | 2.55 |
| 3.5 | 6.09 |
| 4.5 | 9.31 |
| 5.5 | 15.8 |
| 6.5 | 17.1 |
| 7.5 | 25.5 |
| 8.5 | 26.5 |
| 9.5 | 38.8 |
| 10.5 | 41.9 |

A experiência foi efetuada em condições em que a resistência do ar é negligível (grandeza desprezável).

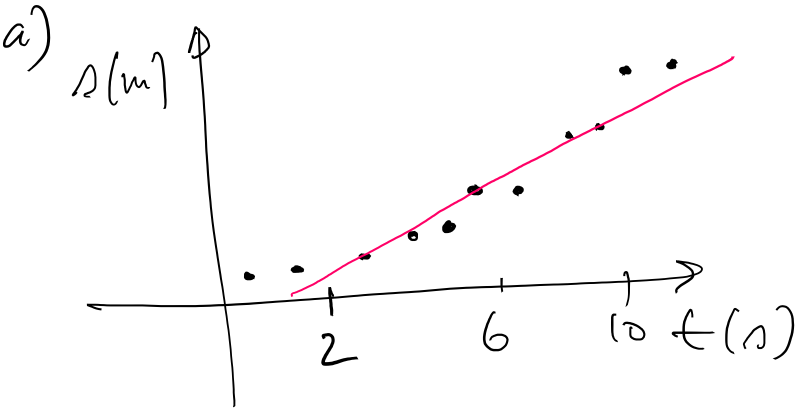
a) Trace o gráfico $s$ em função de $t$, usando os dados da tabela, e faça um ajuste linear. Indique os valores do declive, e o seu erro, a ordenada na origem, e o seu erro, e o coeficiente de determinação $r^2$.

b) Trace o gráfico log($s$) em função de log($t$). Indique os valores do declive, e o seu erro, e o coeficiente de determinação $r^2$.

c) Pelos resultados obtidos nas alíneas anteriores, que conclui acerca da relação entre a distância percorrida no plano inclinado ($s$) e o tempo gasto no percurso ($t$). Justifique. Faça um outro gráfico que mostre essa relação.

**Resolução resumida:**

a)




$m = 4.35$ m/s

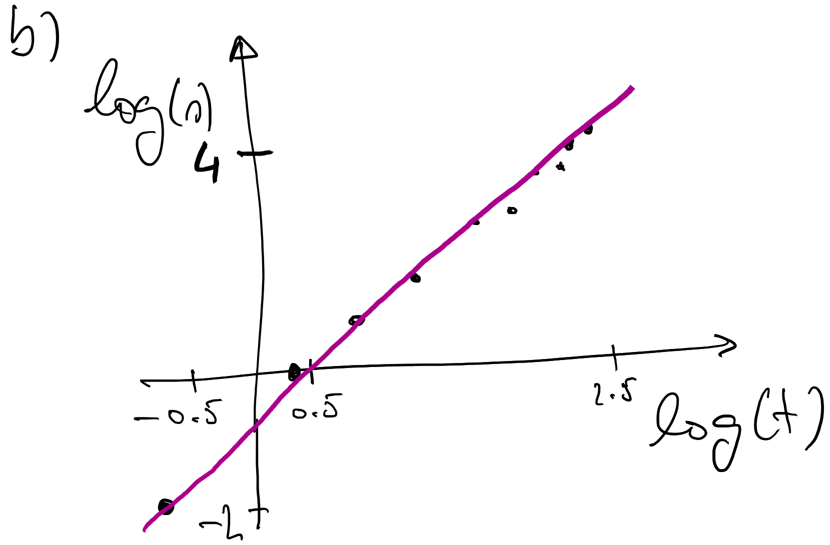
$\Delta m = 0.33$ m/s

$b = -7.140$ m

$\Delta b = 2.06$ m

$r^2 = 0.95$

b)




$m = 1.948$

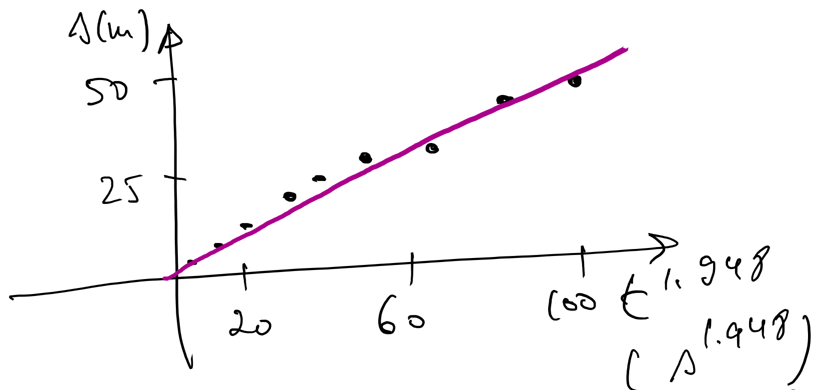
$\Delta m = 0.036$

$r^2 = 0.997$

$s = C\,t^{1.948}$

c)

$t \rightarrow t^{1.948}$




$m = 0.4407$ m/s$^{1.948}$

$\Delta m = 0.0185$ m/s$^{1.948}$

$b = 0.851$ m

$\Delta b = 0.890$ m

$r^2 = 0.984$

Relação $s = (0.44 \pm 0.02)\,t^{1.948} + (1 \pm 1)$ m

$r^2 \sim 1$ modelo muito fiel às medições

**2.** Uma bola de basquetebol é lançada à altura de 2.5 m com uma velocidade 10 m/s , a fazer um ângulo de 45º com a horizontal. Considerando que a velocidade terminal desta bola é 72 km/h (e a resistência do ar)

a) Faça o gráfico da trajetória (altura em função da distância percorrida na horizontal).

b) Em que ponto cai no chão e quanto demorou?

c) Se o jogador imprimir rotação à bola, em que ponto cai no chão? Considere a força de Magnus

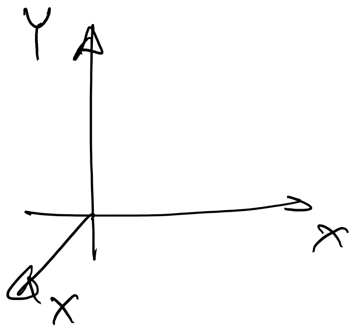
$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v}$$

e a rotação inicial se mantêm durante toda a trajetória $\vec{\omega} = (0,0,100)$ rad/s, o raio é 15 cm, $\rho_{ar} = 1.225$ kg/m$^3$ e a massa é 625 g. Considerou-se o sistema de eixos o eixo OX a horizontal e OY a vertical do movimento.

**Resolução resumida:**

a) $\vec{r}_0 = (0, 2.5, 0)$ m

$\vec{v}_0 = (10\cos 45^\circ, 10\sin 45^\circ, 0)$




$$\vec{F}^{res} = \left(-\frac{g}{v_T^2}|\vec{v}|\,v_x,\ -\frac{g}{v_T^2}|\vec{v}|\,v_y,\ -\frac{g}{v_T^2}|\vec{v}|\,v_z\right)$$

$$\vec{P} = (0, -mg, 0)$$

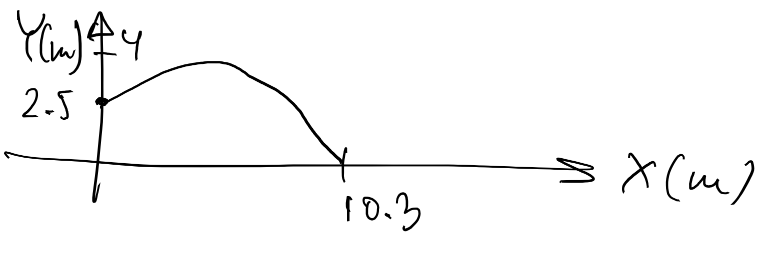
$$\vec{F}^{Magnus} = \frac{1}{2} A\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{Ar}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 100 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{Ar}{2}\left(100\, v_x\, \vec{j} - 100\, v_x\, \vec{i}\right)$$

↑ não possui componente segundo OZ!

$\vec{V}_0$ e nenhuma força têm componente segundo OZ!

Método de Euler, $\delta t = 0.0001$ s , $\vec{a} = \vec{F}/m$



b) Usando a condição de zeros, $y(i) * y(i+1) < 0$

e a função zeros V

Cai no chão em $x = 10.30$ m $\delta t = 0{,}0001$ s

$= 10.30$ m $\delta t = 0{,}00001$ s

e demora $t = 1.70$ s $\delta t = 0{,}0001$ s

$= 1.70$ s $\delta t = 0{,}00001$ s

R: $x = 10.30$ m

$t = 1.70$ s

c) $$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$r = 0.15$ m

$A = \pi r^2$

$\rho_{ar} = 1.225$ kg/m$^3$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 100 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = 100 v_x \hat{j} - 100 v_y \hat{i}$$

$$a_x = \ldots + \frac{F_{Magnus,x}}{m}$$

Bola cai no chão em $x = 6.968$ m $\delta t = 0{,}0001$ s

$= \underline{6.968 \text{ m}}$ $\delta t = 0{,}00001$ s

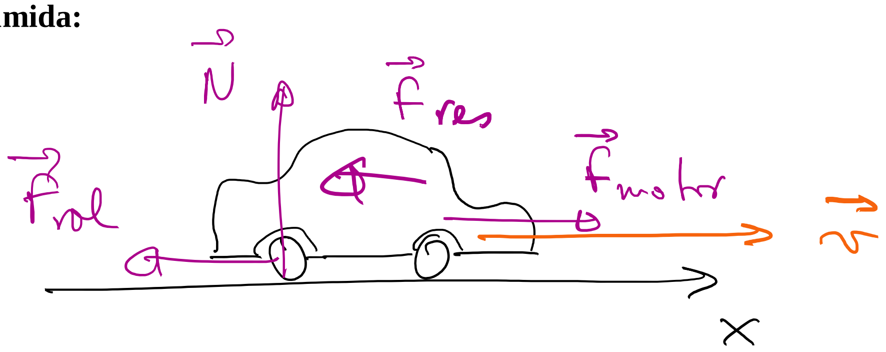
**3.** Considere um carro de massa 1200 kg a deslocar-se na horizontal.

**a**) Determine a evolução temporal da velocidade do carro, se este produzir continuamente a potência 60 cv e partir com um empurrão de 1 m/s? Qual a sua velocidade terminal?

b) Qual a potência desenvolvida pelo motor de um carro de massa 1200 kg, para manter a velocidade uniforme, na horizontal, de i) a 90 km/h? ii) a 130 km/h?

Dados: O coeficiente de resistência $\mu$ de um piso liso de alcatrão é de 0.004, o coeficiente de resistência do ar é $C_{res} = 0.9$, a área frontal do carro 3.0 m$^2$ e densidade do ar $\rho_{ar} = 1.225$ kg/m$^3$

**Resolução resumida:**




$$F_{motor\,x} = \frac{P_0}{v_x} \quad ; \quad P_0 = 60\,cv$$

$$F_{res,x} = -\frac{1}{2} C_{res} A \rho_{ar} |v_x| v_x \quad ; \quad C_{res} = 0.9$$

$A = 3.0\ m^2$

$$F_{rol\,x} = -\mu |\vec{N}|$$

$\rho_{ar} = 1.225\ kg/m^3$

$\mu = 0.004$

$|\vec{N}| = |\vec{P}| = 1200 \times 9.8\ N$

a)

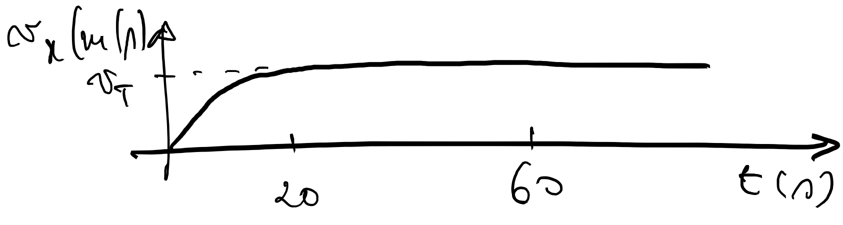
$$F_x = F_{motor,x} + F_{res,x} + F_{rol,x}$$

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

Método de Euler $\quad \delta t = 0.001\,s \quad v_T = 29.565\,m/s$

$v_{x0} = 1\,m/s \quad \delta t = 0.0001\,s \quad v_T = 29.565\,m/s$

$= 106.4\ Cv$



b) $\vec{v}$ constante $\Rightarrow$ $F_x = 0$
$= v$

$F_{motor,x} + F_{res,x} + F_{rol,x} = 0$

$$\frac{P_0}{v} - \frac{1}{2} C_{res} A \rho_{ar} \, v \cdot v - \mu |\vec{N}| = 0$$

$$P_0 = v \left[ \frac{1}{2} C_{res} A \rho_{ar} \, v^2 + \mu |\vec{N}| \right]$$

$v = 90$ km/h $\quad P_0 = 27\,015$ W $= 36.7$ CV

$v = 130$ km/h $\quad P_0 = 79\,573$ W $= 108$ CV

**4.** Um corpo de massa 0.5 kg move-se num oscilador quártico. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k\ x^2 + \beta\ x^4$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k\,x - 4\ \beta\ x^3$$

Considere $k = 1.8$ N/m e $\beta = 0.9$ N/m$^3$.

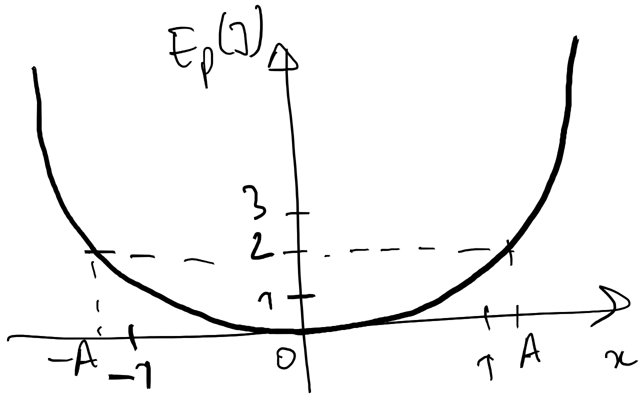
a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 4 J?

b) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 2.5 m e a velocidade inicial 3.0 m/s? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência e o período do movimento? Apresente os resultados com a precisão de 4 algarismos.

c) Faça a análise de Fourier da solução encontrada. Apresente o resultado como $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, sendo $a_n$ e $b_n$ os coeficientes de Fourier.

**Resolução resumida:**

a)

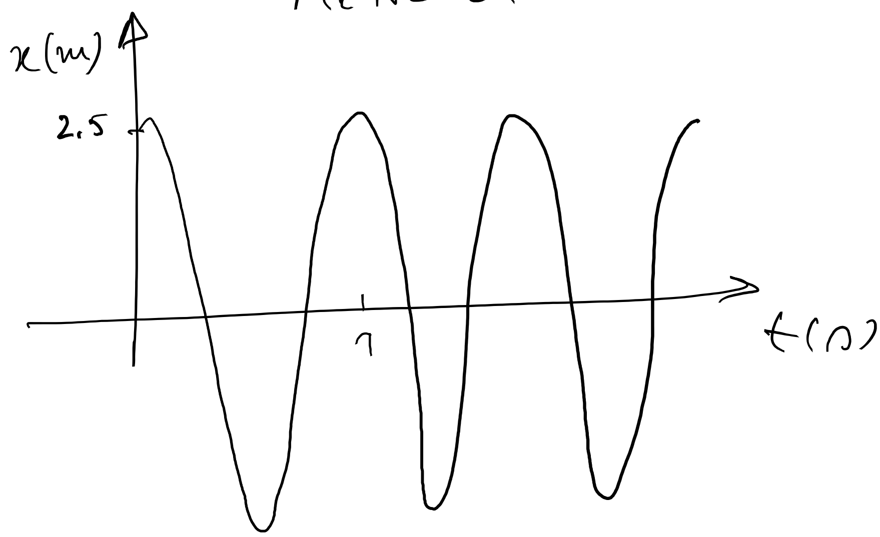



$E < 3$ J

Movimento periódico entre limites simétricos, A e −A, porque a energia potencial é simétrica.

b)

Método de Euler

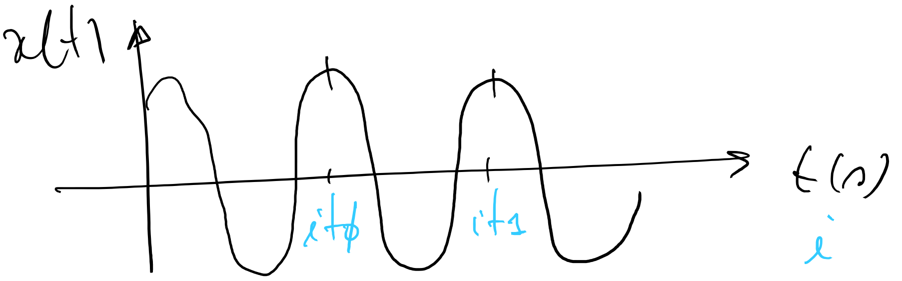


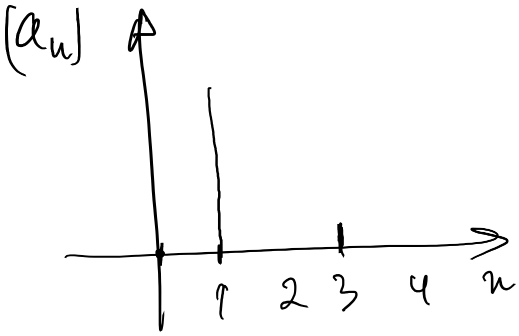
| $\delta t$ (s) | Energia (J) | A (m) | T (s) | f (Hz) |
|---|---|---|---|---|
| 0.001 | ]42.75; 43.10[ | 2.53483 | 1.03300 | |
| 0.0001 | ]43.00; 43,04[ | 2.53614 | 1.03300 | |
| 0.00001 | ]43.03; 43.03[ | 2.53626 | 1.03306 | 0.9681 |
| 0.000001 | 43.031 | 2.53627 | 1.03306 | |

↗ res final   Resultados convergiram

$\delta t = 0.00001$ s

c)



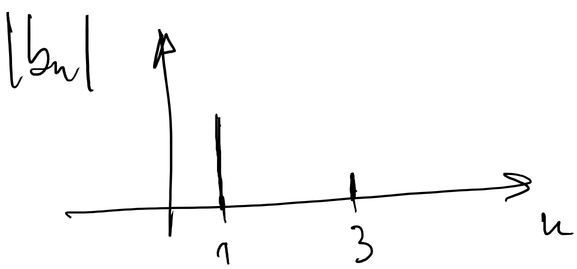

$a_0 = 0$

$a_1 = 2.408$

$a_2 = 0$

$a_3 = 0.0890$

$a_4 = 0$

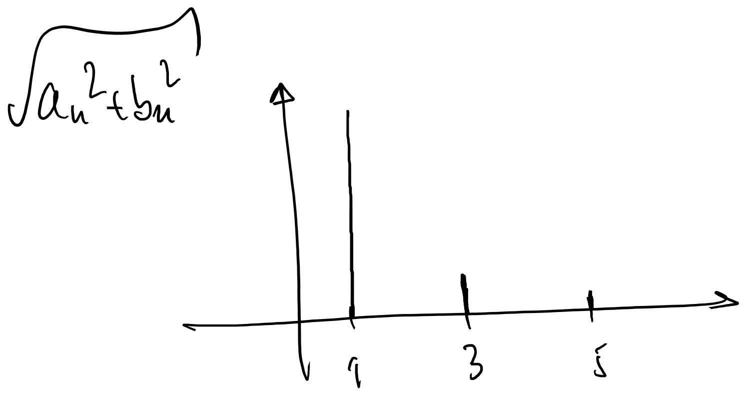



$b_1 = 0.3544$

$b_2 = 0$

$b_3 = 0.0417$

$b_4 = 0$




| $n$ | $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2.434 |
| 0 | 0 |
| 2 | 0.0983 |
| 3 | 0 |
| 4 | 0.00382 |