DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2021/2022 - 2º Semestre

Prova de Recurso
Parte Cálculo Analítico

Data: 20 julho 2022
Hora: 14H30

Duração: 1 hora 15 minutos
Disciplina: 41769
Salas: 10.3.7, 10.3.14

Cotação:
1) 0.5 + 1 + 1 = 2.5 valores
2) 2 = 2 valores
3) 1.5 + 0.5 = 2 valores
4) 1.5 = 1.5 valores
5) 0.5 + 0.5 + 1 + 1 = 3 valores

Só é permitido o uso de máquina de calcular científica

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Foram medidos três comprimentos:

$P = 25.0 \pm 0.4$ cm

$Q = 20.6 \pm 0.3$ cm

$R = 5.0 \pm 0.1$ cm

a) Calcule a soma das duas quantidades $S = P + R$

b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = Q - R$

c) Calcule a área $A = P \cdot R$

Resolução resumida:

a) $S = 30.0 \pm 0.5$ cm

b) $D = 15.6 \pm 0.4$ cm

c) $A = 125.00$ sem o erro

$$\left|\frac{\Delta A}{A}\right| = \left|\frac{\Delta P}{P}\right| + \left|\frac{\Delta R}{R}\right| \qquad \Delta r = 4.5$$

e $A = 125 \pm 5$ cm^2 com o erro arredondado por excesso.

2. Uma bola de futebol é pontapeada de modo que roda sobre si própria, o que resulta adicionar a força de Magnus às outras forças. A força de Magnus resulta de o escoamento do ar ser diferente nos dois lados opostos da bola. Se a rotação for descrita pelo vetor $\vec{\omega} = (10{,}0{,}10)$ rad/s e a velocidade for $\vec{v} = (0{,}1{,}0)$ m/s, qual a força de Magnus, se for definida por $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v}$, em que $A = \pi r^2$ é a área da secção de corte da bola, r o raio da bola e $\rho_{ar} = 1.225$ kg/m^3 a massa volúmica do ar. O raio da bola de futebol é 11 cm.

Resolução resumida:

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} \times \pi \times 0.11^2 \times\ 1.225\ \times\ 0.11 \times \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{F}_{Magnus} =\ 0.00256\ \times 10 \left(\hat{k} -\ \hat{\imath} \right) = -\,0.0256\, \hat{\imath}\ +\ 0.0256\, \hat{k}\ \ \mathrm{N}$$

3. O método de Feynman-Newton integra as equações diferenciais do movimento

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt},$$

fazendo as aproximações:

$$x(t+\delta t) = x(t) + v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) \times \delta t$$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x\left(t - \frac{\delta t}{2}\right) + a_x(t) \times \delta t,$$

se souber $x(t_0) = x_0$ e $v_x(t_0) = v_{x0}$.

a) Calcule o erro de truncatura local do método de Feynman-Newton.

b) Calcule o erro de truncatura global do método de Feynman-Newton.

Resolução resumida:

a) Quer-se determinar como $|x(t+\delta t)_{exato} - x(t+\delta t)_{FN}|$ varia com δt

$$x(t+\delta t)_{FN} = x(t) + v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) \times \delta t$$

$$x(t+\delta t)_{\mathrm{FN}} = x(t) + \left[v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=t} \delta t/2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)\right] \times \delta t$$

$$x(t+\delta t)_{\mathrm{FN}} = x(t) + v_x(t) \times \delta t + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=t} \delta t^2/2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^3/4 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

Comparando com a série de Taylor

$$x(t+\delta t)_{exato} = x(t) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

O erro local da posição é $\mathcal{O}(\delta t^3)$.

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x\left(t - \frac{\delta t}{2}\right) + a_x(t) \times \delta t$$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = \left[v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=t} (-\delta t/2) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)\right] + a_x(t)\,\delta t$$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x(t) + \left(-\left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=t} (\delta t/2) + a_x(t)\,\delta t\right) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)$$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x(t) + \left(+\left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t (\delta t/2)\right) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)$$

Comparando com a série de Taylor de $v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right)$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t (\delta t/2) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_t (\delta t/2)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3 v_x}{dt^3}\right|_t (\delta t/2)^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

O erro local que afeta a velocidade é $\mathcal{O}(\delta t^3)$

b) quer na posição quer na velocidade e o erro de truncatura local é $\mathcal{O}(\delta t^3)$.

No instante (qualquer) $t_f = n\,\delta t$ o erro acumulado depois de n passos é:

$$n\,\mathcal{O}(\delta t^3) = \frac{t_f}{\delta t}\,\mathcal{O}(\delta t^3) = \mathcal{O}(\delta t^2)$$

4. Considere um corpo de massa 2 kg com a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k\left(x^2 - x_{eq}^2\right)^2 - q\, E\, x\, \cos 4t,$$

em que x_{eq} é a posição de equilíbrio, k (constante elástica), q (carga elétrica) e E (amplitude do campo elétrico) são constantes. Determine a força aplicada ao corpo em função de x, k, x_{eq}, q, E e t.

Resolução resumida:

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -\frac{1}{2}\, k\, 2\left(x^2 - x_{eq}^2\right) x + \, q\, E\, \cos 4t$$

$$F_x = -2\, k\, x \left(x^2 - x_{eq}^2\right) + \, q\, E\, \cos 4t$$

5. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\, x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 4$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que B e ϕ são constantes.

b) Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

c) Calcule B e ϕ , no caso em que a velocidade inicial é +2 m/s e a posição inicial a posição de equilíbrio do sistema.

d) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo. Mantêm-se constante ao longo do tempo?

Resolução resumida:

a) Eq. de Newton $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\, x$, uma vez que $F_x = -k\, x$,

a ser satisfeita se $x(t) = B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)$

for solução

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left[B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)\right] = -\frac{k}{m}\, x(t)$$

Ou $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\, x(t)$

e como queríamos demonstrar $m\, \frac{d^2x}{dt^2} = -k\, x(t)$

b) $v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\left[B \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)\right]$

c) $\begin{cases} t = 0 \\ v_x(t=0) = 2 \text{ m/s} \\ x(t=0) = x_{eq} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ [B\cos(\phi\,)] \\ 0 = B\sin(\,\phi\,) \end{cases}$ $\begin{cases} 2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ B \\ \phi = 0 \quad \text{ou} \quad \phi = \pi \end{cases}$

$$\begin{cases} \phi = 0 \\ 2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ B \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \phi = \pi \\ 2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}\ B \end{cases}$$

Considerando B positivo $\begin{cases} B = 2\sqrt{\frac{m}{k}} = 1 \text{ m} \\ \phi = 0 \end{cases}$

e,

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ v_x(t) = 2\cos t \end{cases}$$

d) Energia mecânica

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\, v_x^2 + \frac{1}{2} k\, x^2$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\ 4\ \sin^2 t + \frac{1}{2}\ 4\cos^2 t = 2.0 \text{ J}$$: constante

Formulário:

$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ $\quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$

$\vec{F} = m\,\vec{a}$

$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$ $\quad \int_C \vec{F}^{(conservativa)}\cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$

$\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v}$ $\quad \vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2}A\,\rho_{ar}|\vec{v}|\,\vec{v}$ $\quad \left|\vec{F}_{rol}\right| = \mu\left|\vec{N}\right|$

$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v}$ $\quad \vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ $\quad \vec{F}_{elástica} = -k\,\vec{r}$

$\vec{F}_{elet} = -k_e\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ $\quad \vec{F}_{elet} = q\vec{E}_{elet}$

$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$ $\quad E_p = m\,g\,y$ $\quad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$ $\quad E_p = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|}$

$P_o = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}(t)\,dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$

$\sum\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$x(t) = A\,\cos(\omega t+\phi)$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ $\quad E = \frac{1}{2}k\,A^2$

$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}}\delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}}\delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{x_{min}}\delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$

$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \cdots$

$a_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \quad n = 0,\,1,\,2,\,\cdots$ $\quad b_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt, \quad n = 1,\,2,\,\cdots$

$x(t) = A\,e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t+\phi)$ $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx-\omega t+\phi)$

Grandezas físicas e conversões:

1 polegada = 1 in = 0,39370 m $\quad$ 1 pé = 1 ft = 2,54 cm $\quad$ 1 milha = 1,609344 km

1 rad = 57.29578 graus

1 cv (cavalo – vapor métrico) = 735,4975 W $\quad$ 1 hp (cavalo – vapor inglês) = 745,715 W

M_{Sol} = M = 1.989×10^{30} kg $\quad$ 1 AU = 1.489×10^{11} m $\quad$ 1 ano = 365,24 dias

$G = 6.67\times10^{11}\ \mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)} = 4\pi^2\ \mathrm{AU^3/(M\cdot ano^2)}$ $\quad g = 9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$

$\rho_{ar} = 1.225\ \mathrm{kg/m^3}$ $\quad v_{som} = 340$ m/s

$c = 299792{,}458$ km/s $= 2{,}99792458\times10^8$ m/s

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ J/K $= 8.61733 \times 10^{-5}$ eV/K

$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \times 10^{-12}$ F/m $\quad$ $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}98755188 \times 10^{9}$ N $\cdot$ m^2/C^2

$m_e = 9{,}10938356 \times 10^{-31}$ kg

$m_p = 1{,}67262 \times 10^{-27}$ kg $= 1836.151\, m_e$

$m_n = 1{,}67493 \times 10^{-27}$ kg $\quad$ 1 Å $= 10^{-10}$ m

$e = 1{,}602176208 \times 10^{-19}$ C $\quad$ $e/c = 5{,}34428 \times 10^{-28}$ C $\cdot$ m/s

Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$\mathrm{e} = 2{,}71828183 \qquad \pi = 3{,}14159265$

$\mathrm{sen}\,(-x) = -\,\mathrm{sen}\,(x) \qquad \mathrm{sen}\,(\pi - x) = \mathrm{sen}\,(x) \qquad \mathrm{sen}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$

$\cos(-x) = +\cos(x) \qquad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\,\mathrm{sen}\,(x)$

$\mathrm{sen}\,(x \pm y) = \sin x \,\cos y \pm \cos x \,\sin y \qquad \cos\,(x \pm y) = \cos x\,\cos y \mp \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y$

$\sin x\,\cos y = \frac{1}{2}\,[\mathrm{sen}\,(x+y) + \mathrm{sen}\,(x-y)]$

$\cos x\,\sin y = \frac{1}{2}\,[\mathrm{sen}\,(x+y) - \mathrm{sen}\,(x-y)]$

$\sin x\,\sin y = \frac{1}{2}\,[\cos\,(x-y) - \cos\,(x+y)]$

$\cos x\,\cos y = \frac{1}{2}\,[\cos\,(x-y) + \cos\,(x+y)]$

$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$\mathrm{sen}\,x \pm \mathrm{sen}\,y = 2\cos\left(\frac{x\mp y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x\pm y}{2}\right)$

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos x - \cos y = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$