Departamento de Física
Universidade de Aveiro

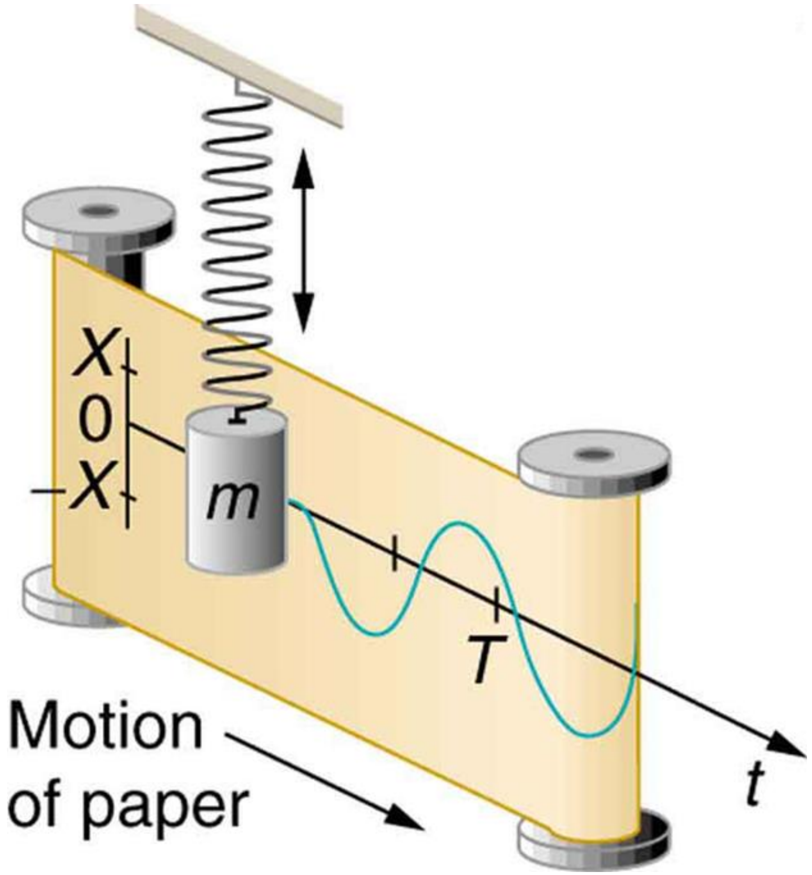
Modelação de Sistemas Físicos

10ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 7 Oscilações
Osciladores Simples e Amortecidos

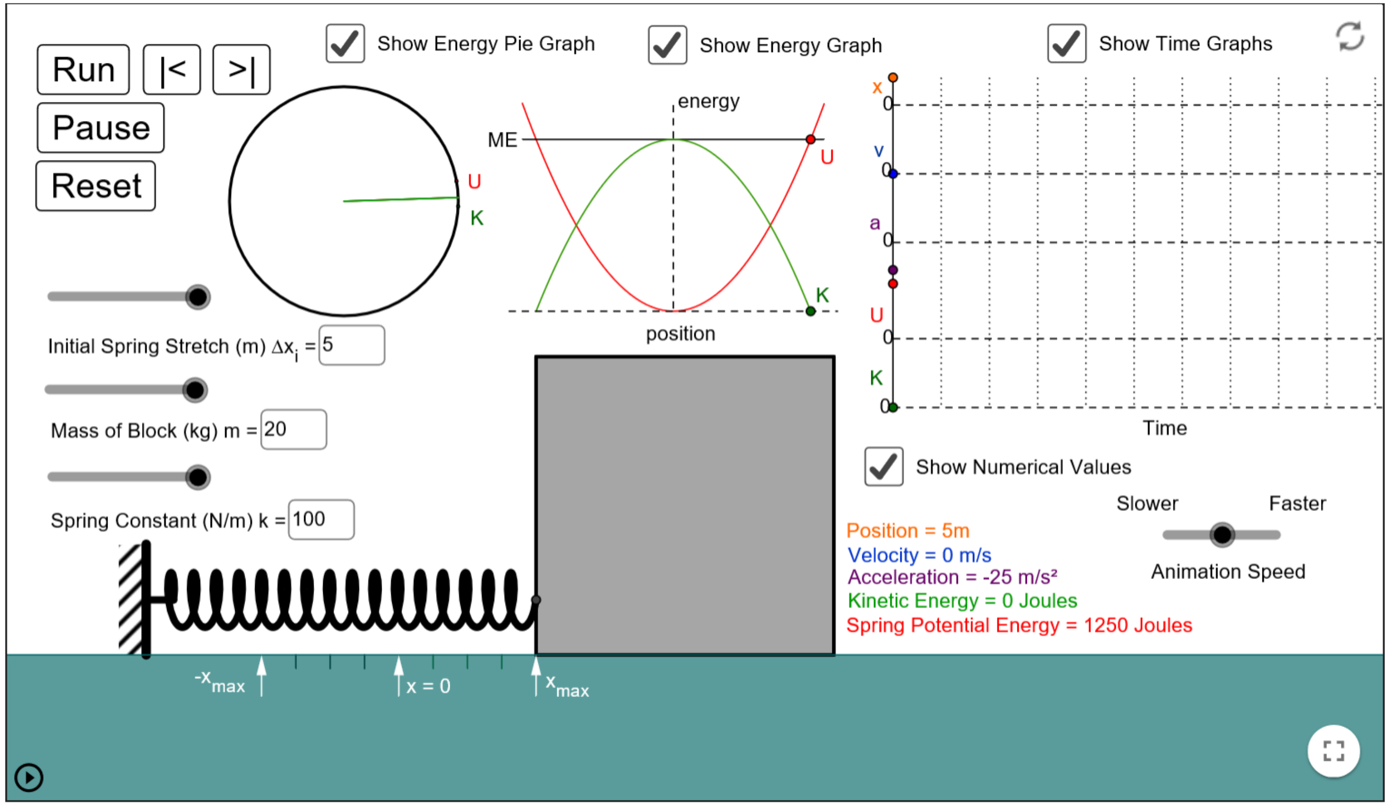
Bibliografia:
Cap. 7: Serway, cap. 15;


X
0
−X
m
T
t
Motion
of paper

Simple Harmonic Motion: Mass on a Spring

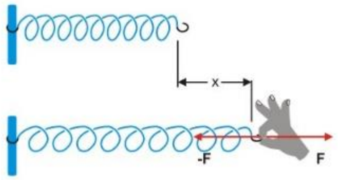
Autor: Alan Pacey, Tom Walsh

This simulation shows the oscillation of a box attached to a spring. Adjust the initial position of the box, the mass of the box, and the spring const
Run, Pause, Reset, and Step buttons to examine the animation. Check or uncheck boxes to view/hide various information.



https://www.geogebra.org/m/EGg2Pvhm

Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))
Cálculo Analítico:



$$F_x = -k\,x \implies \quad a_x = -\frac{k}{m}x \quad \implies \begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega\,t + \phi) \end{cases} \qquad k = m\omega^2$$

$x(0)$ e $v_x(0)$ calcula-se A e ϕ

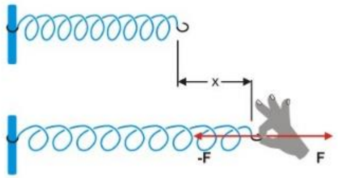
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$F_x = -k\,x = -\frac{dE_p}{dx} \quad \implies \quad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\,x^2 \quad \implies \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2\,A^2$$ = conserva-se

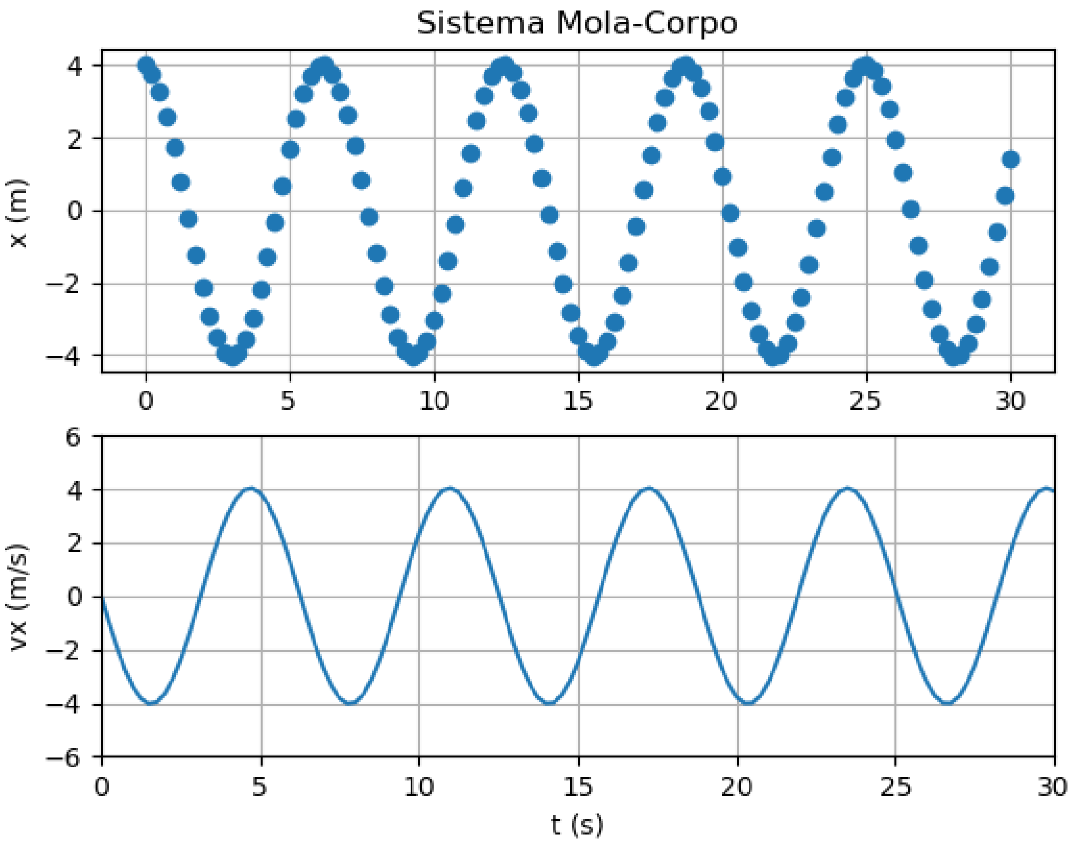
$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega t + \phi) \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ \frac{v_x(t)}{\omega} = -A\,\sin(\omega\,t + \phi) \end{cases} \implies \quad x^2(t) + \left(\frac{v_x(t)}{\omega}\right)^2 = A^2$$

eq. circunferência raio A

Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))
Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer:

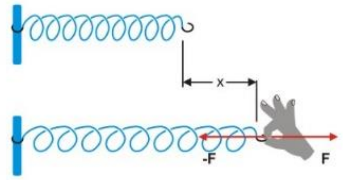


$$F_x = -k\,x \implies \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m} x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$



Como calcular a amplitude e o período ? Como saber que x é uma função coseno ou seno?

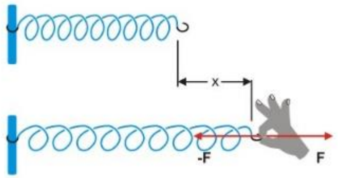
Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))
Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer:



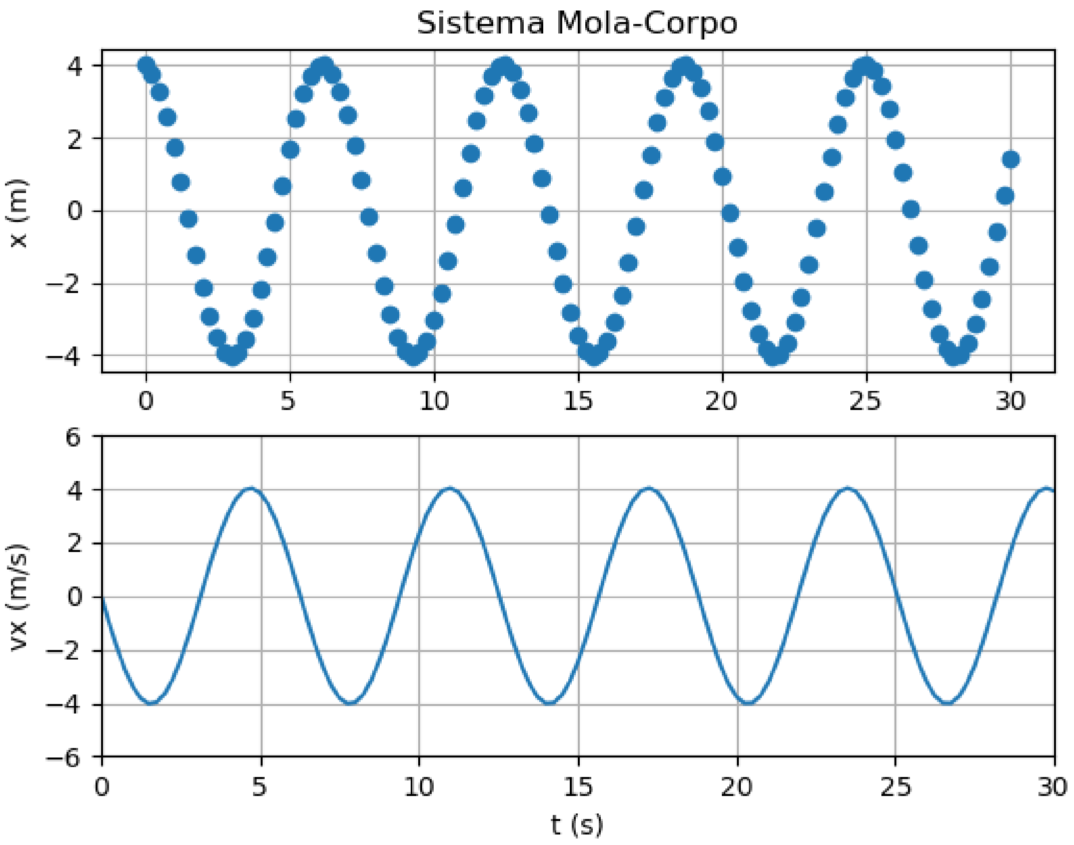
$$F_x = -k\,x \;\Longrightarrow\; \begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

Como calcular A e T? Fácil! Mas vamos aumentar a precisão de cálculo

Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))
Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer:

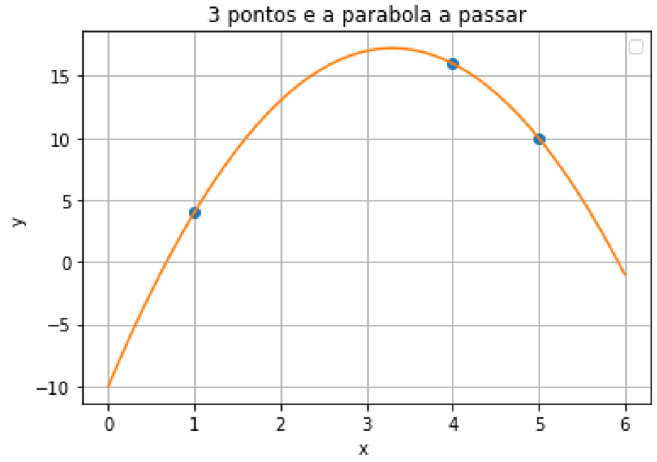


$$F_x = -k\,x \;\Longrightarrow\; \begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$



Como calcular A e T? Fácil! Mas vamos aumentar a precisão de cálculo

Cálculo da amplitude da oscilação



Por três pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2) há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos:
Polinómio de Lagrange

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

Podemos usar o polinómio para
- Interpolação
- Interpolação inversa
- Cálculo de máximo e mínimos

Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

Por três pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2) há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos:
Polinómio de Lagrange

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

A condição de máximo, como de mínimo, é :

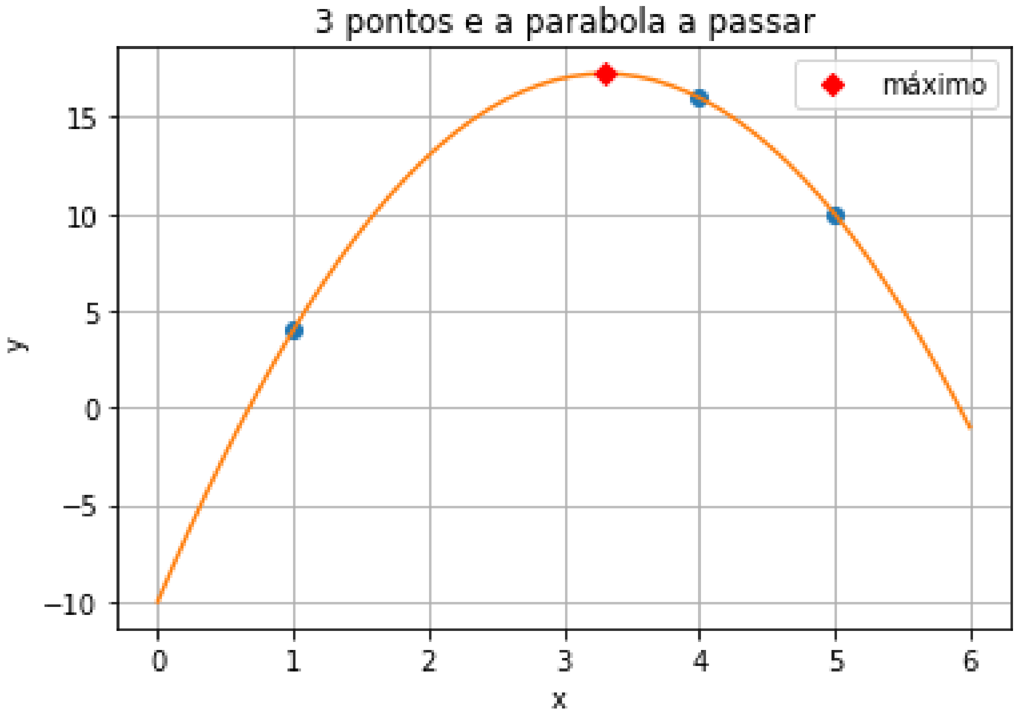
$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 0}$ **no ponto** (x_m, y_{max})

$$\Longrightarrow 0 = \frac{[(x-x_2)+(x-x_1)]}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{[(x-x_2)+(x-x_0)]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{[(x-x_0)+(x-x_1)]}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

$$\Longrightarrow x_m = \frac{a0+b0+c0}{2(a+b+c)} \qquad \Longrightarrow y_{max}(x_m) = \text{polinómio de Lagrange}$$

$$a0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \qquad a1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \qquad a2 = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$a = \frac{(x_2+x_1)y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \qquad b = \frac{(x_2+x_0)y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \qquad c = \frac{(x_0+x_1)y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

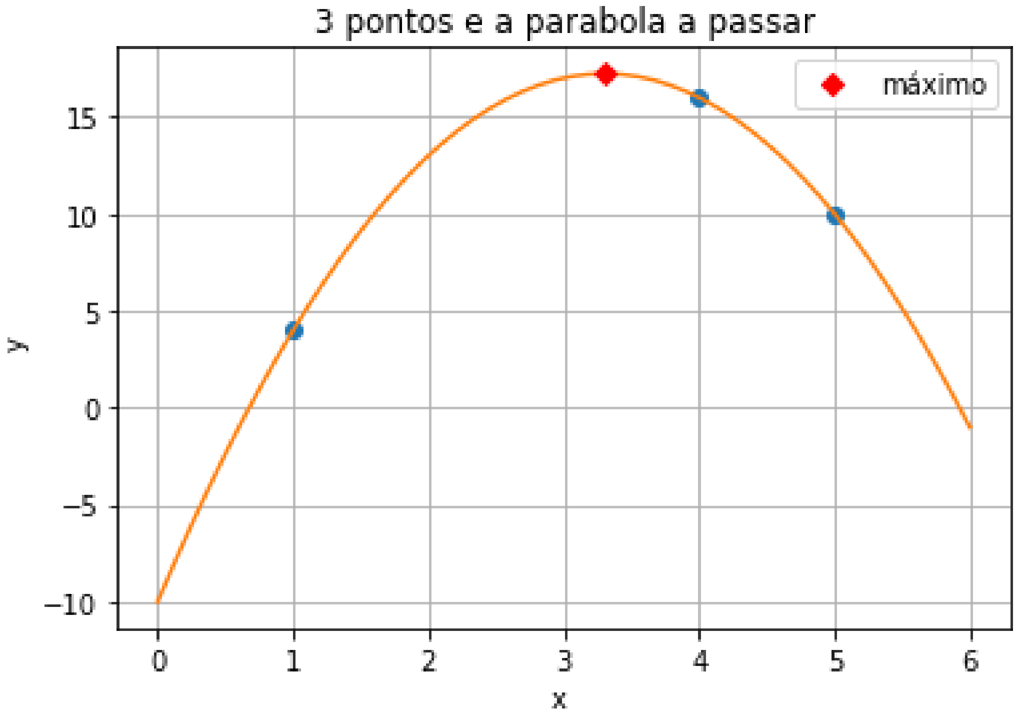


Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

Por três pontos (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2) há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos:
Polinómio de Lagrange

O máximo ou o mínimo duma função de pontos discretos por interpolação de Lagrange:

```
def maxminv(xm1,xm2,xm3,ym1,ym2,ym3):
    # Máximo ou mínimo usando o polinómio de Lagrange
    # Dados (input): (x0,y0), (x1,y1) e (x2,y2)
    # Resultados (output): xm, ymax
    xab=xm1-xm2
    xac=xm1-xm3
    xbc=xm2-xm3

    a=ym1/(xab*xac)
    b=-ym2/(xab*xbc)
    c=ym3/(xac*xbc)

    xmla=(b+c)*xm1+(a+c)*xm2+(a+b)*xm3
    xm=0.5*xmla/(a+b+c)

    xta=xm-xm1
    xtb=xm-xm2
    xtc=xm-xm3

    ymax=a*xtb*xtc+b*xta*xtc+c*xta*xtb
    return xm, ymax
```



Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

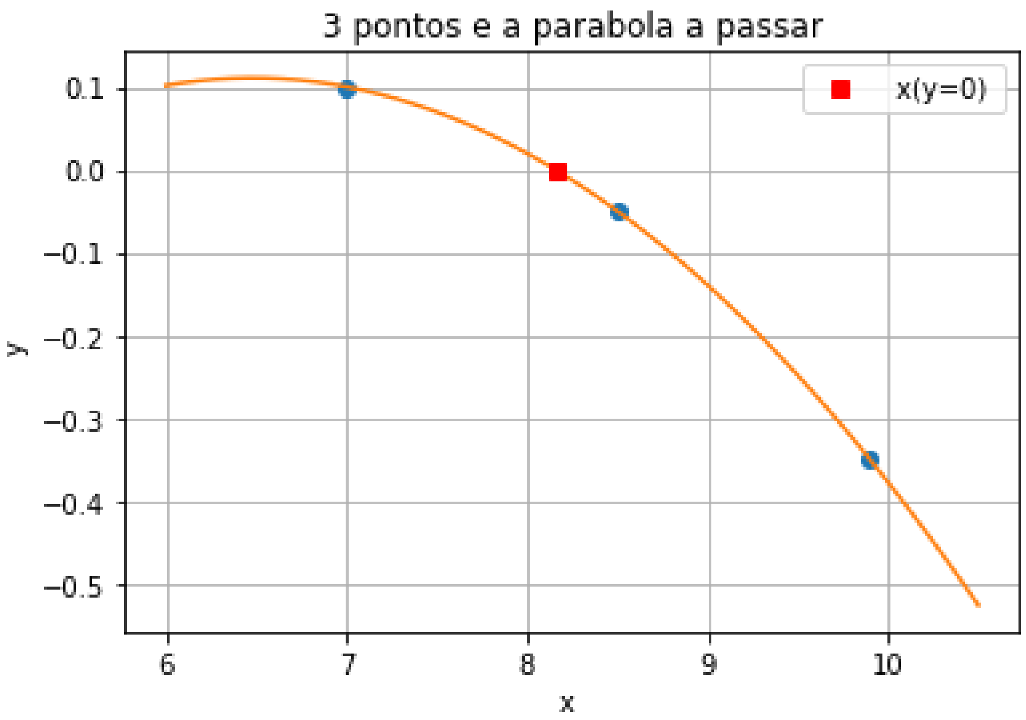
Problema: Dado um certo y_{inp}, qual o x_{out} correspondente?

Interpolação inversa

$$y_{inp} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$x_{out} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\begin{cases} a = e + f + g \\ b = e\,(x_0+x_1) + f\,(x_0+x_2) + g\,(x_1+x_2) \\ c = y_{inp} + \ e\,x_0x_1 + f\,x_0x_2 + g\,x_1x_2 \\ e = \frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} \\ f = \frac{y_1}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)} \\ g = \frac{y_0}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)} \end{cases}$$

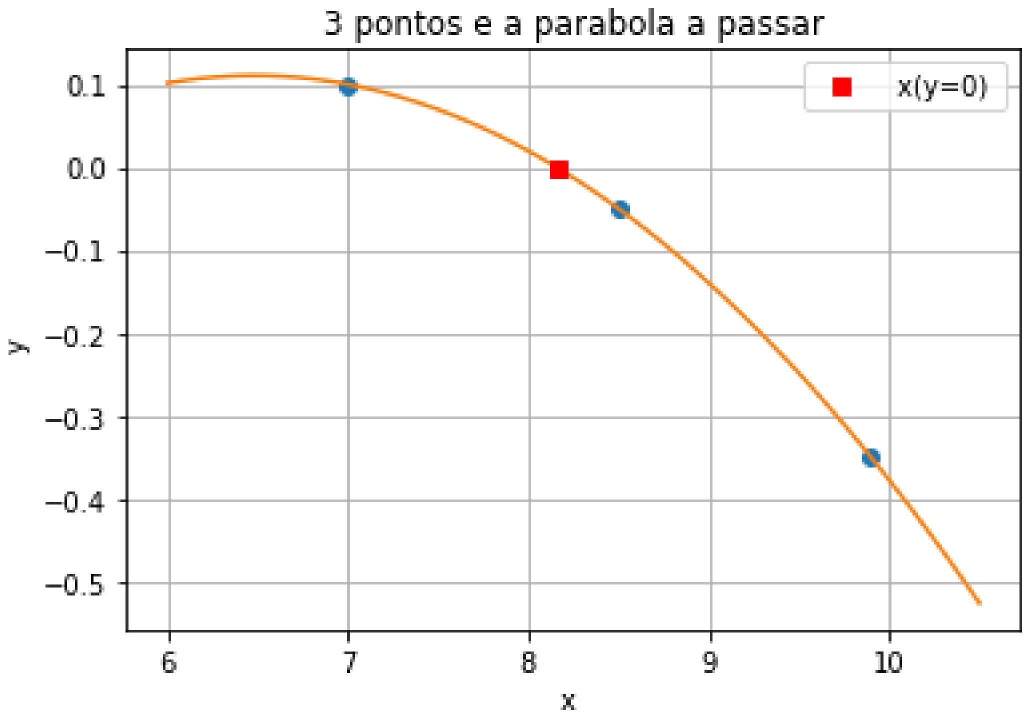


Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

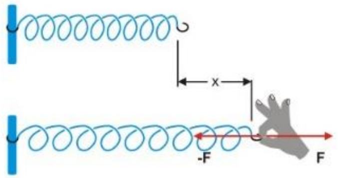
Problema: Dado um certo y_{inp}, qual o x_{out} correspondente?

Interpolação inversa $x_{out} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

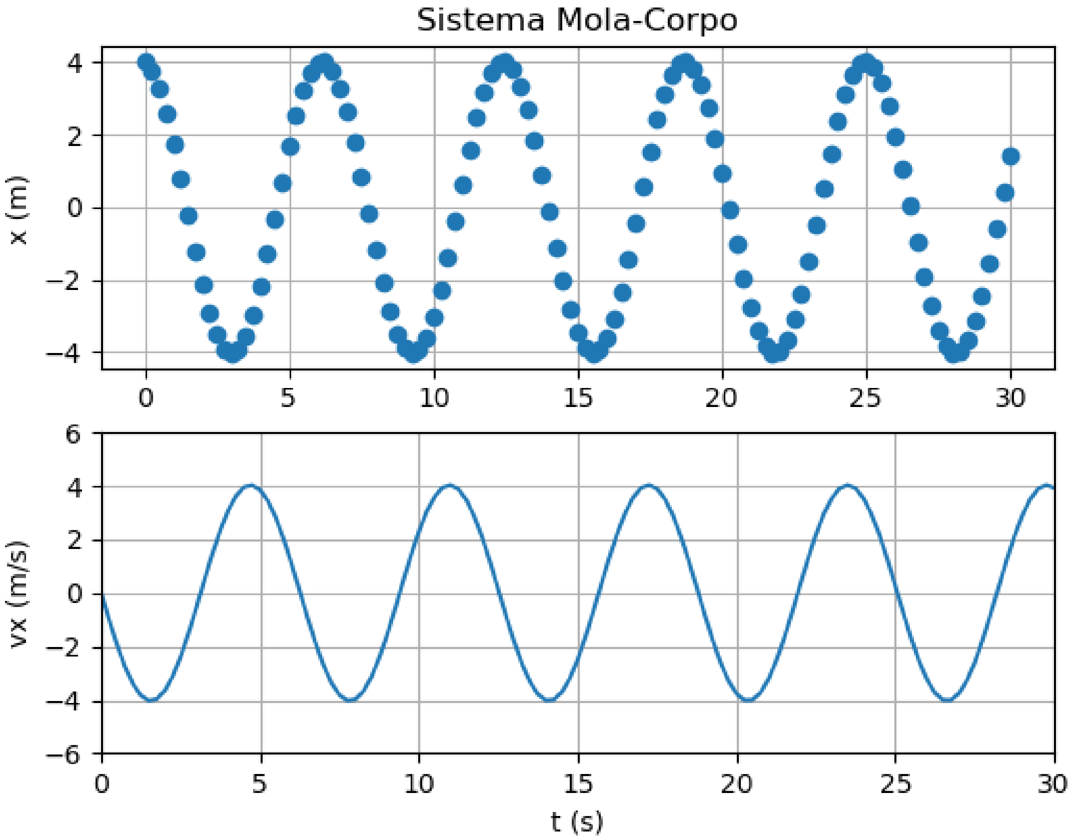
```
def intlaginvv(yinp,xm1,xm2,xm3,ym1,ym2,ym3):
  # interpolação inversa usando o polinómio de Lagrange
  # Dados (input): yinp, (x0,y0), (x1,y1) e (x2,y2)
  # Resultados (output): xout, yout
   xab=xm1-xm2
   xac=xm1-xm3
   xbc=xm2-xm3
    a=ym1/(xab*xac)
   b=-ym2/(xab*xbc)
   c=ym3/(xac*xbc)
    am=a+b+c
   bm=a*(xm2+xm3)+b*(xm1+xm3)+c*(xm1+xm2)
   cm=yinp+a*xm2*xm3+b*xm1*xm3+c*xm1*xm2
   xout=(bm+np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)
   if xm3 > xm1 and (xout < xm1 or xout > xm3):
      xout=(bm-np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)
   if xm1 > xm3 and (xout < xm3 or xout > xm1):
      xout=(bm-np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)

   xta=xout-xm1
   xtb=xout-xm2
   xtc=xout-xm3
   yout=a*xtb*xtc+b*xta*xtc+c*xta*xtb
   return xout, yout
```



Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))
Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer:

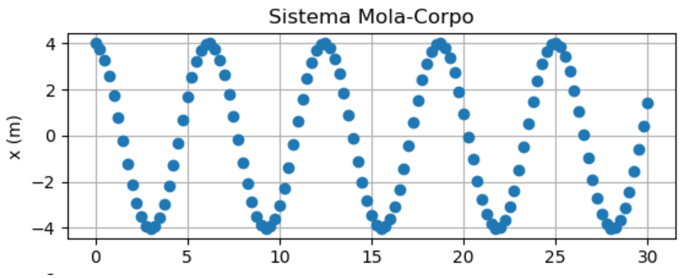


$$F_x = -k\,x \;\Longrightarrow\; \begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$



Como saber que x é uma função coseno ou seno? Difícil, mas:

Como saber que x é uma função coseno ou seno? Difícil, mas:



Série de Fourier:

A série de Fourier decompõe uma função periódica $f(t)$, de período T ou frequência angular $\omega = 2\pi / T$, numa soma de funções sinusoidais de frequência angular múltipla de ω ($\omega_n = n\omega$)

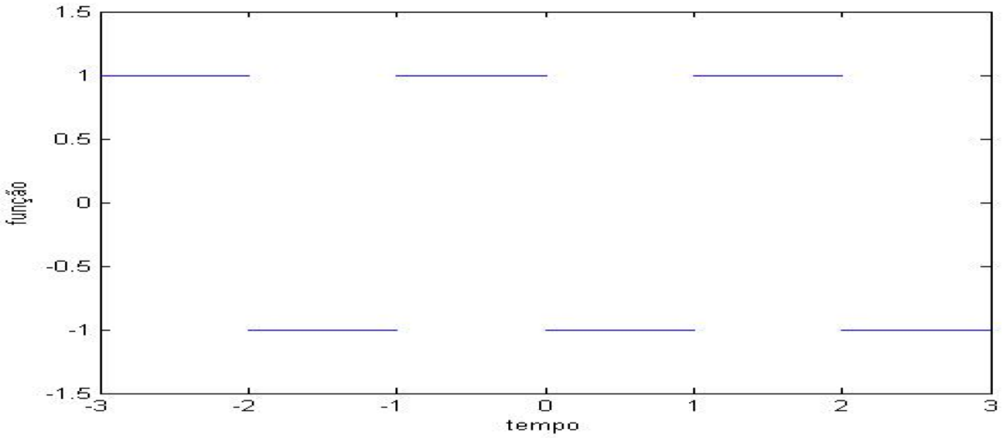
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t\right) \qquad \text{(b1.1)}$$

Os coeficientes de Fourier são expressos por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t)\, dt \,; \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_n t)\, dt \,; \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Série de Fourier: Ex.: Onda quadrada



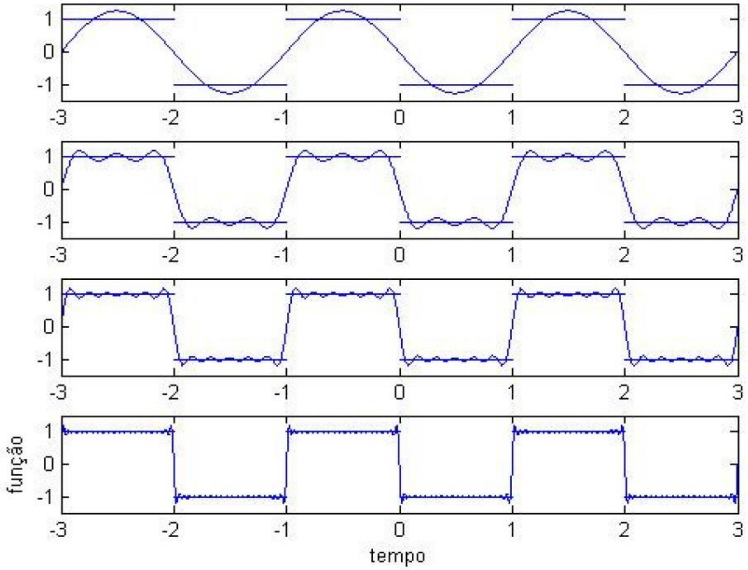


Figura 3.

A função quadrado reconstruída usando a série de Fourier com um número crescente de termos. De cima para baixo está a função reconstruída com 1, 5, 11 e 41 termos.

Vamos calcular os coeficientes a e b, usando

$$\begin{cases} a_n = 0, & n = 0,1,2,3 \\ b_n = 2\left((-1)^n - 1\right)/\left(n\pi\right), & n = 1,2,3 \end{cases}$$

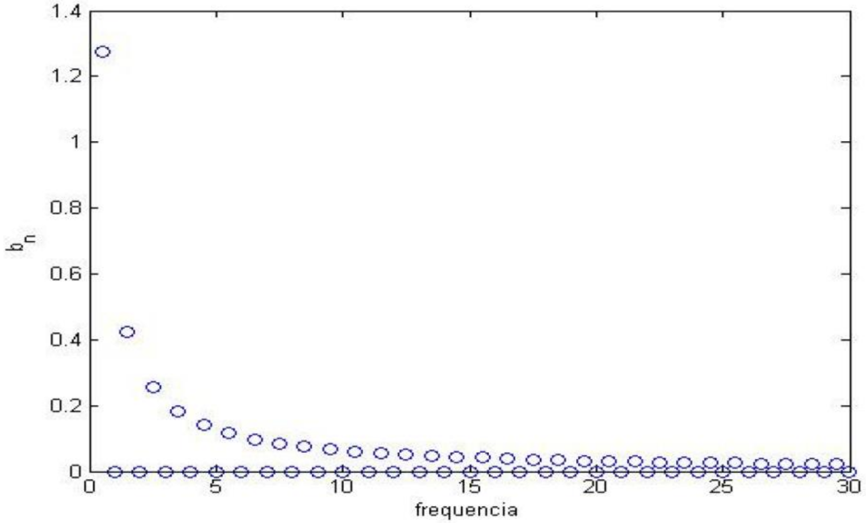
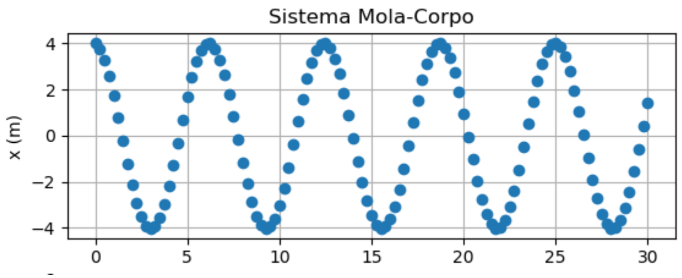


Figura 2.
Os coeficientes de Fourier b_n

Como saber que x é uma função coseno ou seno? Difícil, mas:



Basta calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_n t)\,dt\,; \qquad \text{n=0, 1, 2, …}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega_n t)\,dt\,; \qquad \text{n=1, 2, 3, ….}$$

Mas a função está expressa por pontos!

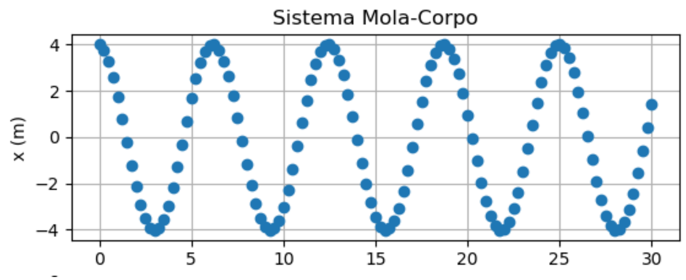
Integração numérica usando a aproximação trapezoidal:

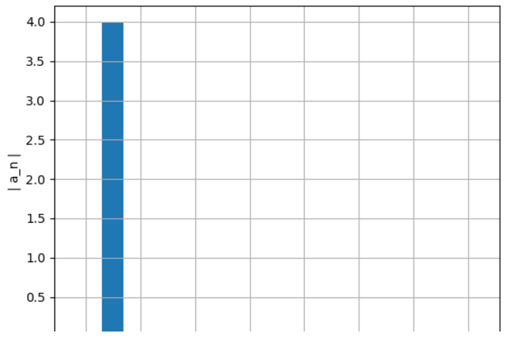
Como saber que x é uma função coseno ou seno? Difícil, mas:

Basta calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega_n t)\,dt\ ; \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

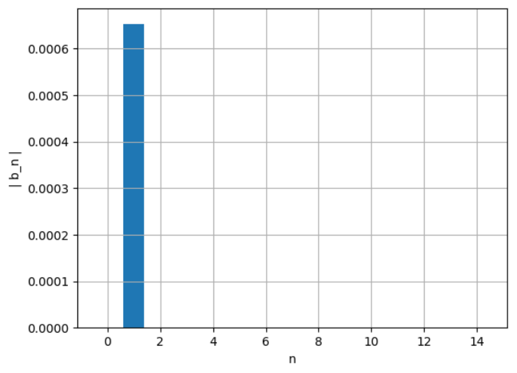
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega_n t)\,dt\ ; \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$





$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 4 \\ a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = 0 \\ b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \cdots$$



$x(t) = a_1\cos(\omega t) \quad \Longrightarrow$ x é uma função coseno

Importância do oscilador harmónico

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}} \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{tx_{min}} \delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

com $\delta x = x - x_{min}$

em x_{min} a força é nula! $F_x(x_{min}) = -\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}} = 0$

$$E_p(x) - E_p(x_{min}) = +\frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{tx_{min}} \delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

Se fizermos a escolha: $E_p(x_{min}) = 0 \quad e \quad x_{min} = 0$

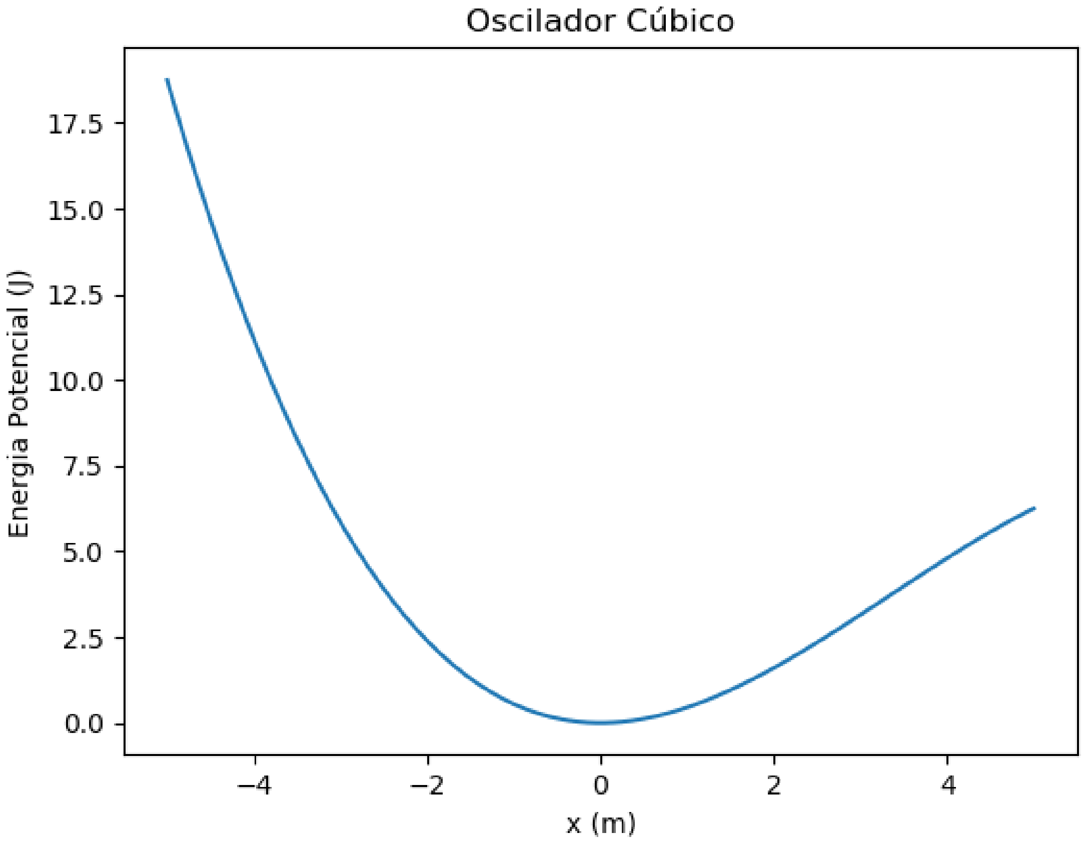
$$E_p(x) = +\frac{1}{2}k\, x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{x_{min}} x^3 + \mathcal{O}(x^4) \qquad \text{com: } \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}} = k$$

e requer $\delta x < 1$

Oscilador cúbico: $E_p(x) = +\frac{1}{2}k\ x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3E_p}{dx^3}\bigg|_{tx_{min}}\ x^3$

Método de Integração Numérico de Euler-Cromer

$$E_p(x) = +\frac{1}{2}k\ x^2 + \alpha\ x^3$$

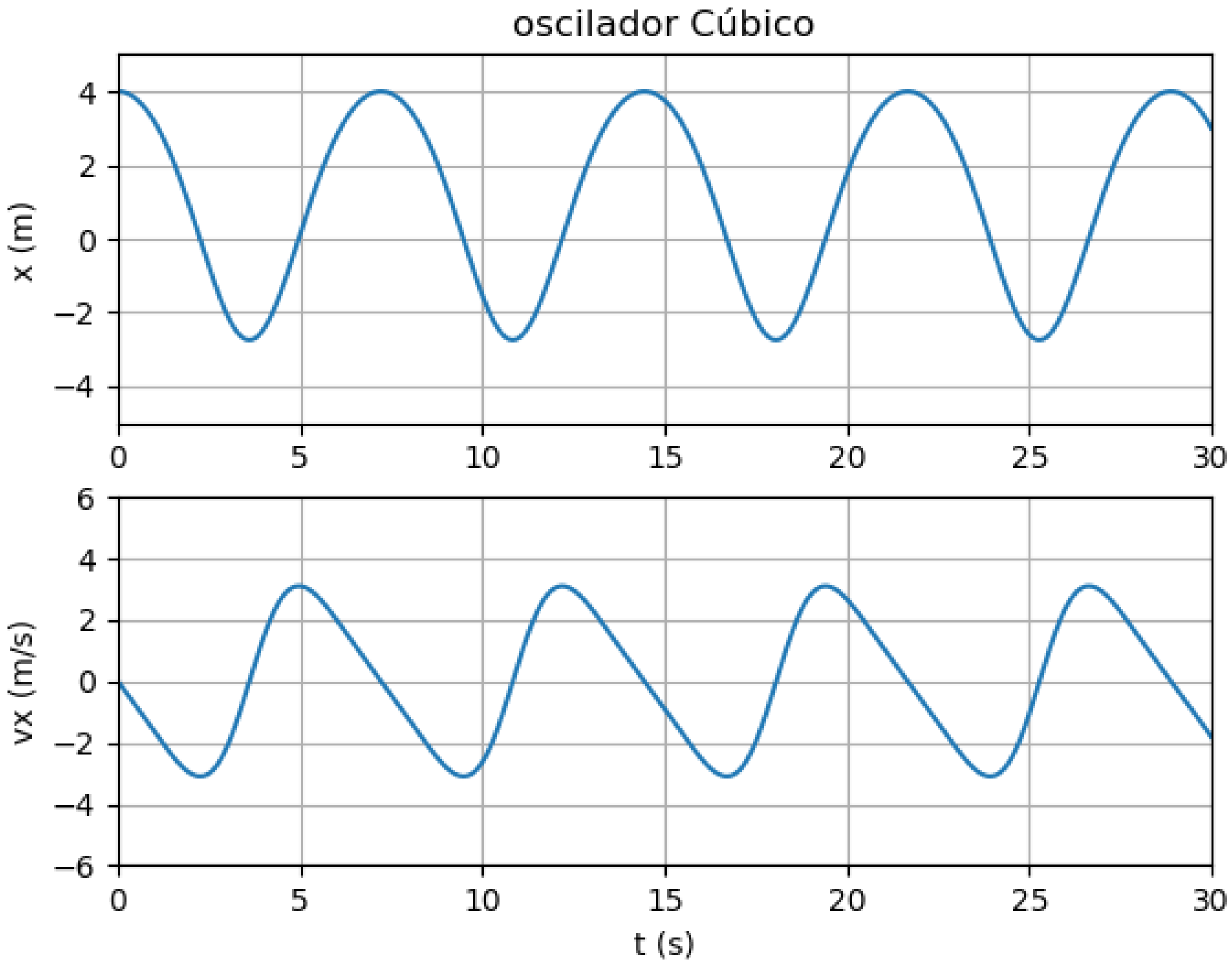


Oscilador cúbico: $E_p(x) = +\frac{1}{2} k\, x^2 + \alpha\, x^3$

Método de Integração Numérico de Euler-Cromer

Força: $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -k\, x - \alpha\, x^2$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{\alpha}{m}\, x^2 \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

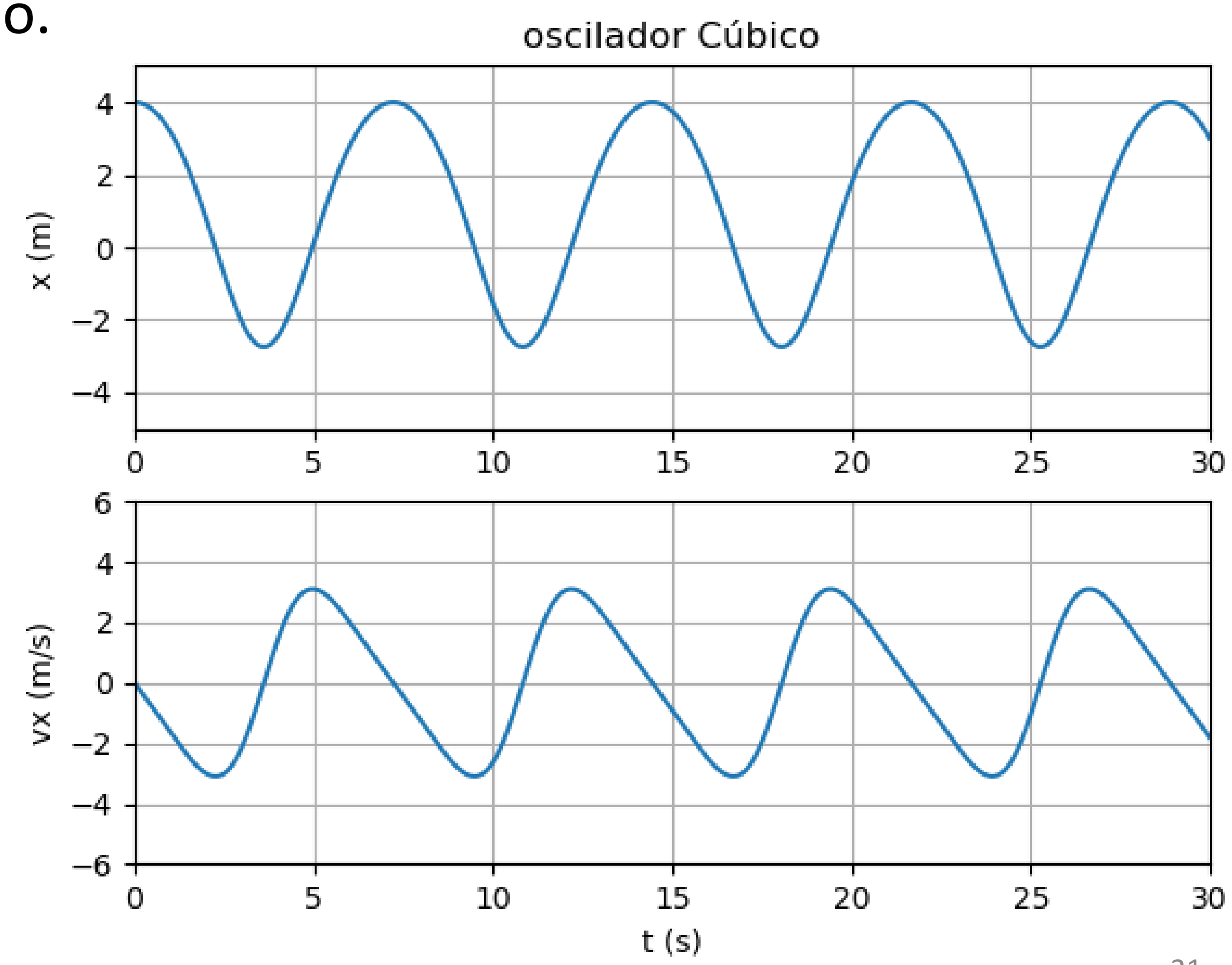


Oscilador cúbico: $E_p(x) = +\frac{1}{2}k\,x^2 + \alpha\,x^3$

Método de Integração Numérico de Euler-Cromer

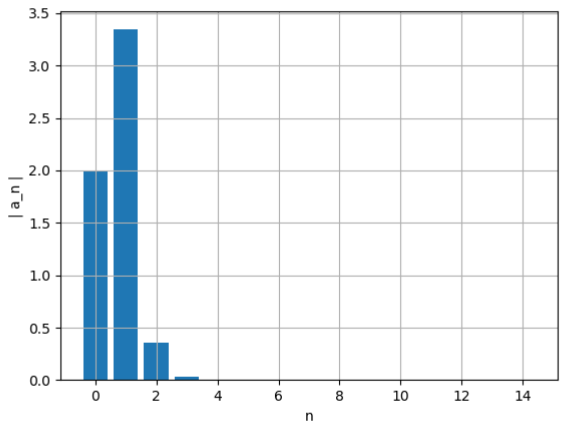
Podemos calcular a amplitude e o período.

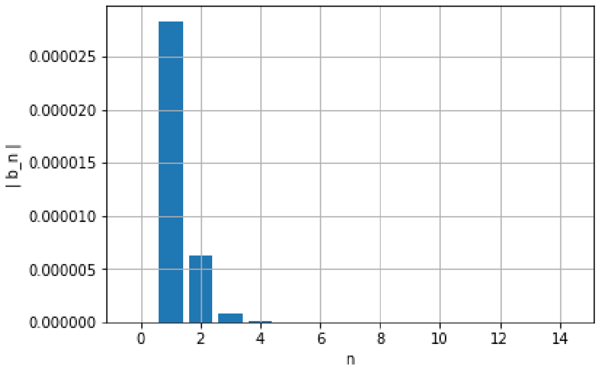
E é um seno ou coseno?

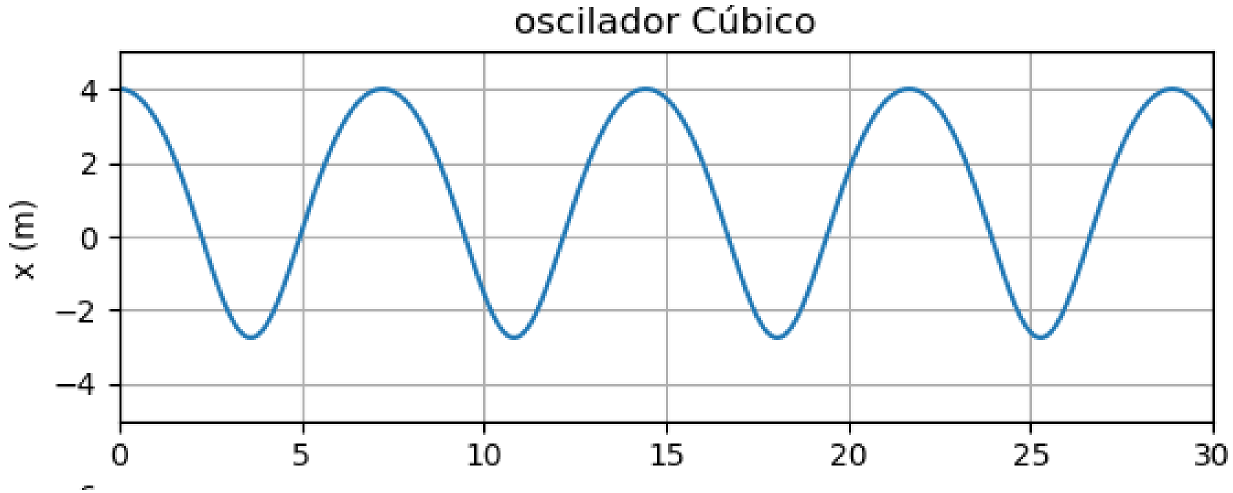


E é um seno ou coseno?

Calcular Coeficientes de Fourier







$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 3.3 \\ a_2 = 0.4 \\ a_3 = \ a_4 = \cdots = 0 \\ b_1 = b_2 = \ b_3 = \cdots = 0 \end{cases}$$

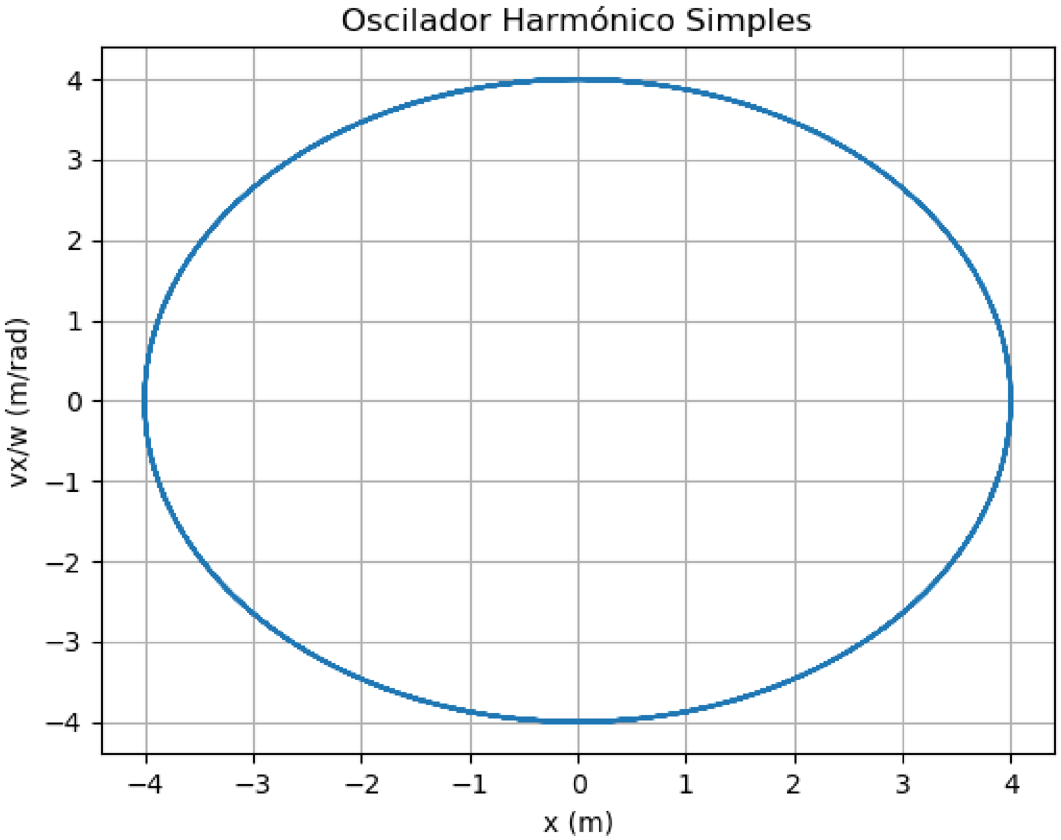
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t)$$

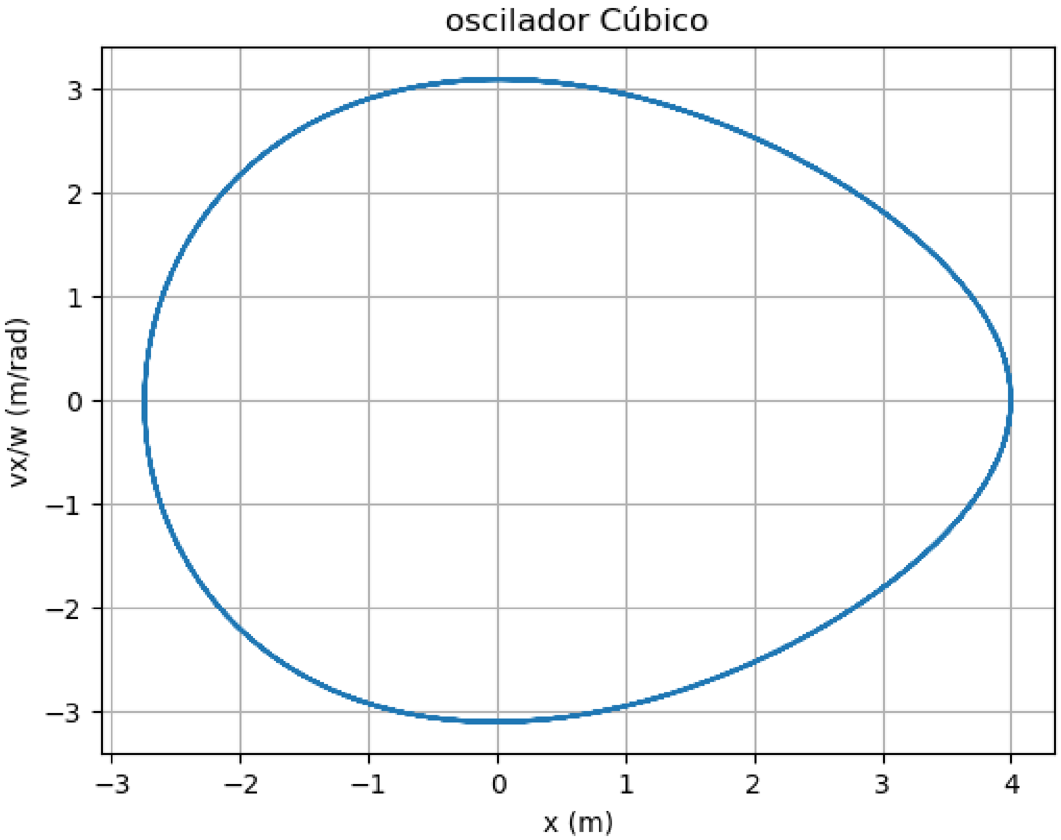
É uma soma de cosenos (3 parcelas) $\overline{x} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(t) \ \ dt$

Espaço de fase (x, v_x)

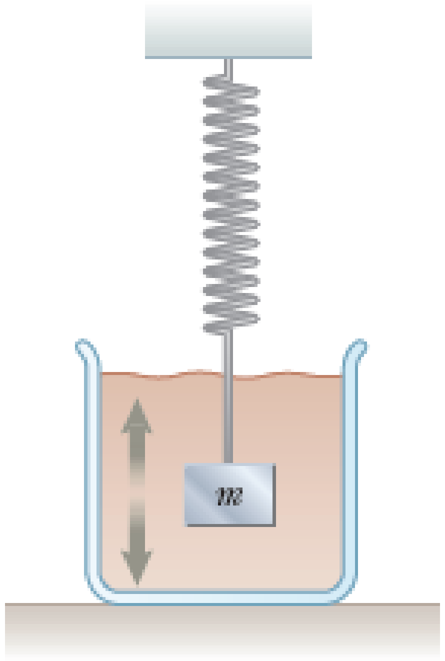
Oscilador Harmónico Simples:
$x^2(t) + v_x^2(t) = A^2$
eq. circunferência raio A

Oscilador Cúbico:





Oscilador Harmónico Amortecido



$$F_x^{resistência} = -bv_x$$

Oscilador Harmónico Amortecido

Cálculo Analítico: <u>Amortecimento fraco</u>: $b < 2\, m\, \omega_0$

$$F_x = -k\,x\; - bv_x \Longrightarrow\;\; a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\, t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A_a \omega e^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega\, t + \phi) - A_a \frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\, t + \phi\,) \end{cases}$$

em que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ ou $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ $\quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

sabendo $x(0)$ e $v_x(0)$ calcula-se A_ae ϕ

Oscilador Harmónico Amortecido Cálculo Analítico: Amortecimento fraco: $b < 2\,m\,\omega_0$

$$F_x = -k\,x\ - bv_x \Longrightarrow \qquad a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A_a \omega e^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega\,t + \phi) - A_a \frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t + \phi\,) \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

sabendo $x(0)$ e $v_x(0)$ calcula-se A e ϕ

$$\phi = arc\tan\ [-(\frac{v_x(0)}{x(0)} + \frac{b}{2m})/\omega]$$

obtemos 2 valores . Temos de escolher qual deles é!

$$A_a = \sqrt{x(0)^{\,2} + ((v_x(0) + x(0)\frac{b}{2m})/\omega)^2}$$

Oscilador Harmónico Amortecido

Cálculo Analítico:

<u>Amortecimento forte</u> $b > 2\, m\, \omega_0$

Amortecimento tão forte que o corpo vai diretamente para a posição de equilíbrio

<u>Amortecimento critico (ou excecional)</u> $b = 2\, m\, \omega_0$

Quando começa o amortecimento forte

Oscilador Harmónico Amortecido

Amortecimento forte: $b > 2\, m\, \omega_0$

$F_x = -k\, x\ - b v_x \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x$

ax=-kmx-bmvx

$k = 1$ N/m

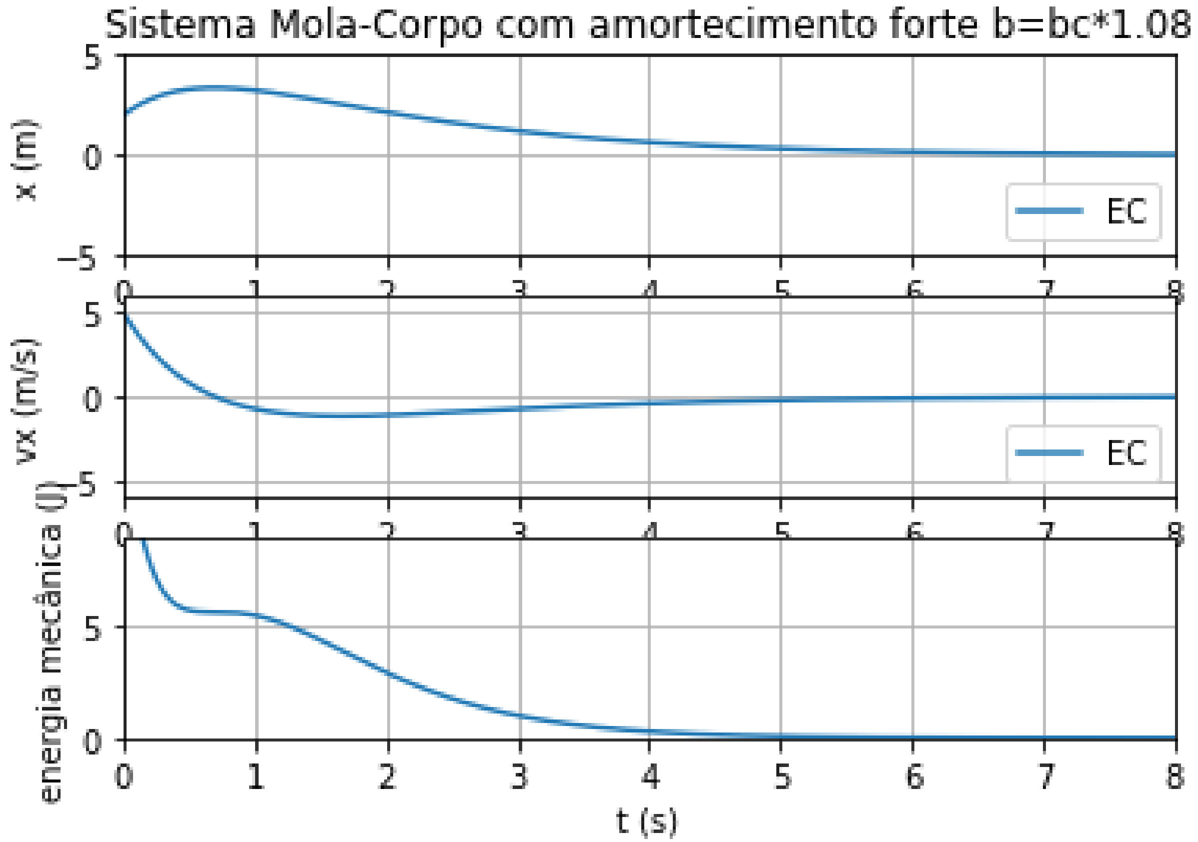
$m = 1$ kg $\qquad \omega_0 = 1\ \mathrm{rad/s}$

$b_c = 2$ kg/s

$b = \boldsymbol{b_c} \times \mathbf{1.08} = 2.16$ kg/s

$x(0)$=2 m e $v_x(0) = 5$

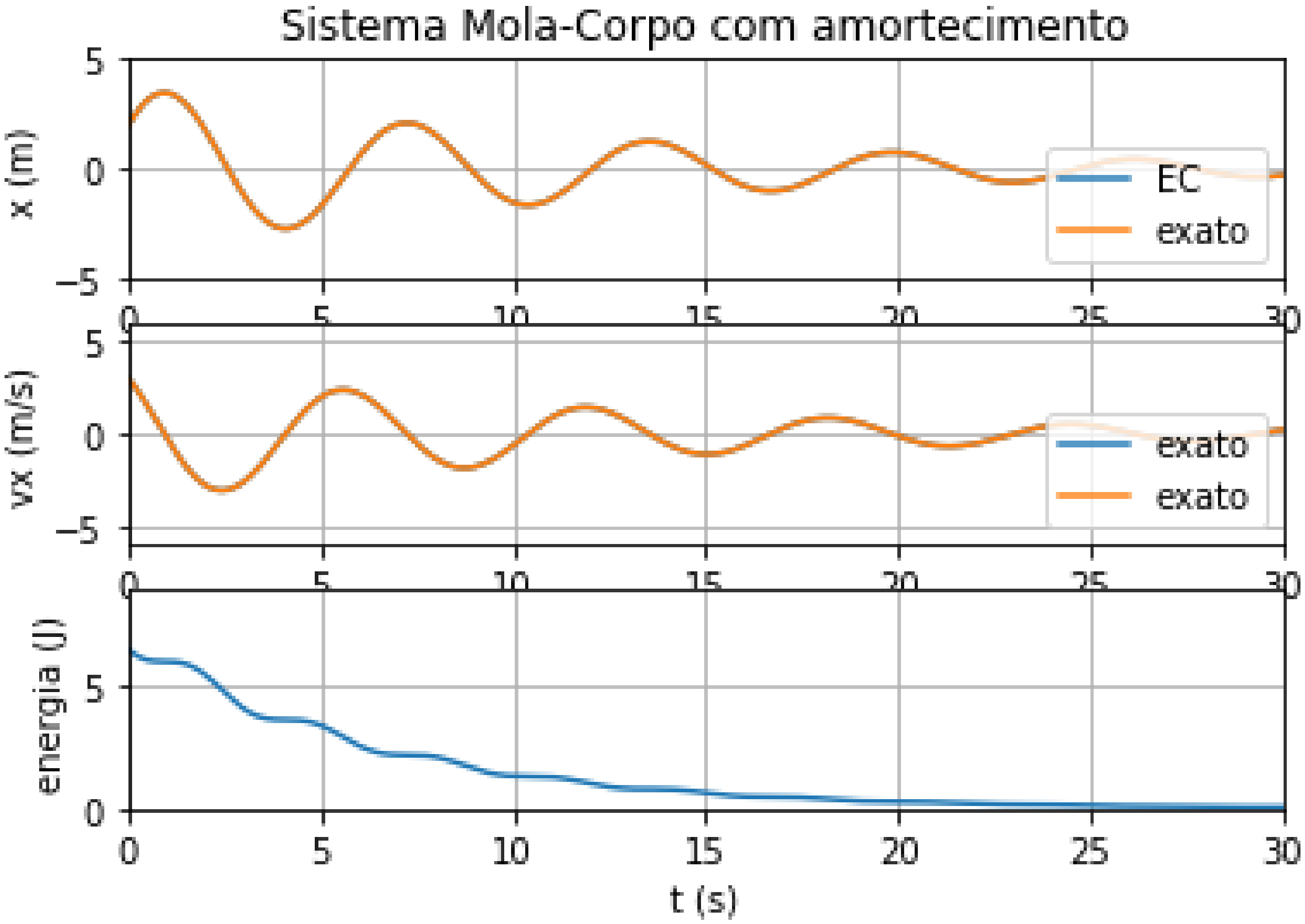
Usando o método de Euler-Cromer obtivemos as soluções:



Oscilador Harmónico Amortecido

Cálculo Numérico: <u>Amortecimento fraco</u>: $b < 2\,m\,\omega_0$

$$F_x = -k\,x\; - b v_x \Longrightarrow$$
$$a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$



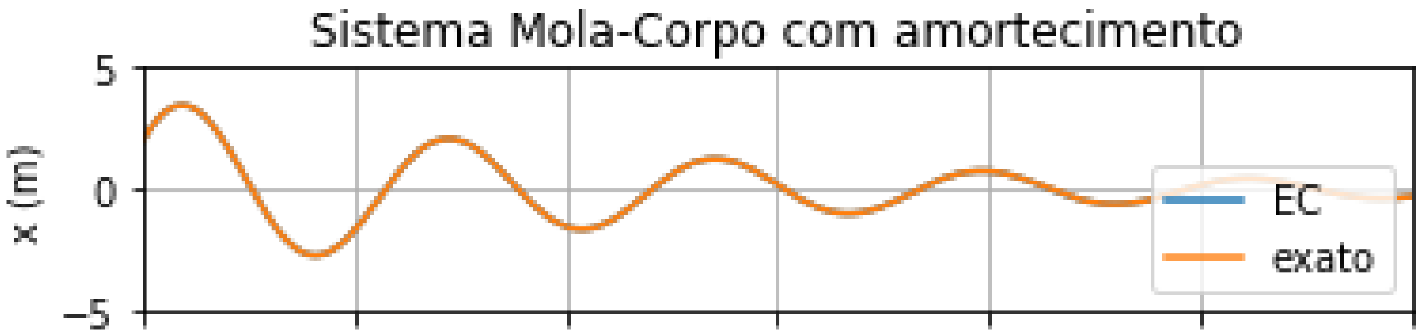
$k = 1$ N/m
$m = 1$ kg $\qquad \omega_0 = 1$ rad/s
$b = 0.16$ kg/s

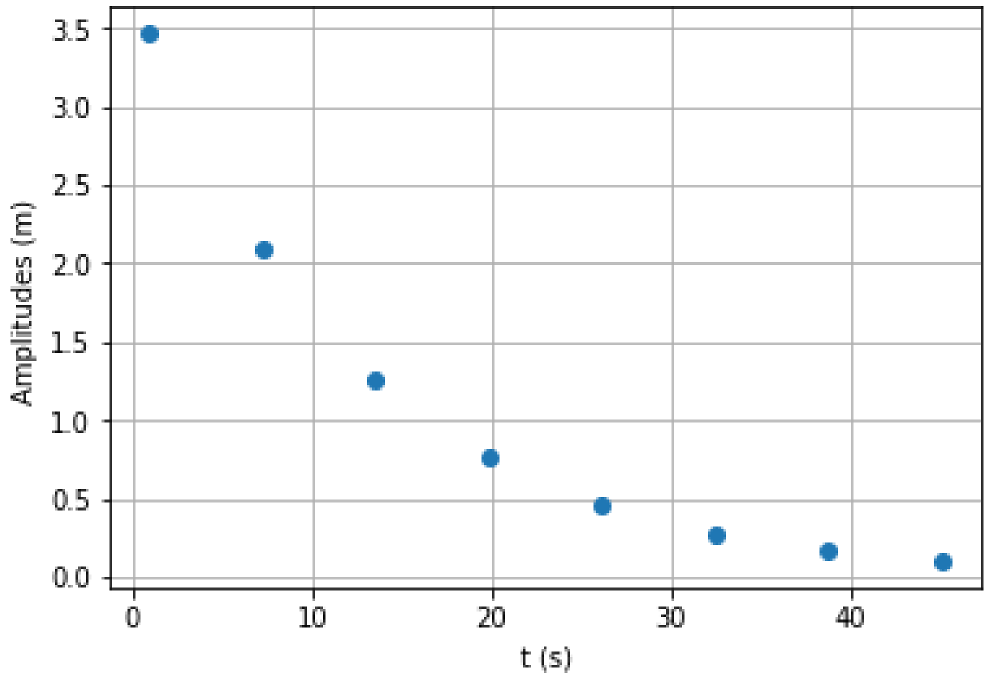
Do resultado numérico ($\delta t = 10^{-5}$ s)

$T = 6.3034$ s

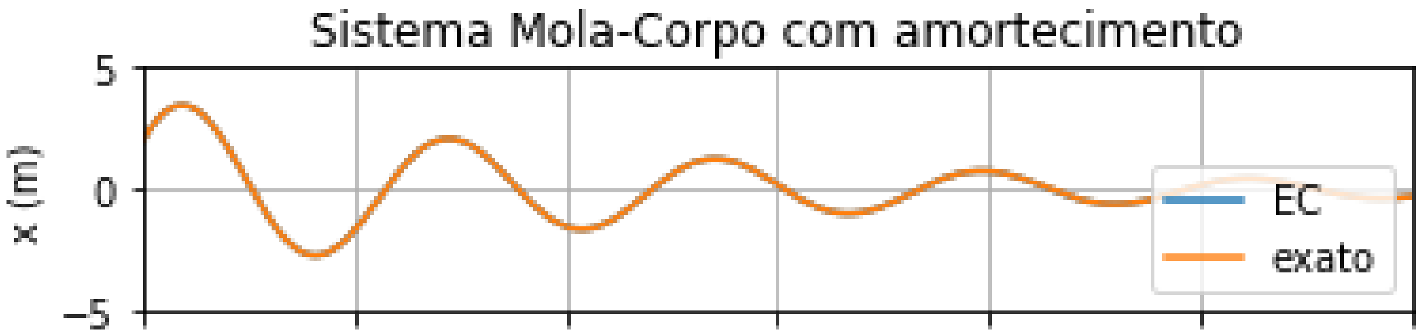
$\omega = 0.9968$ rad/s

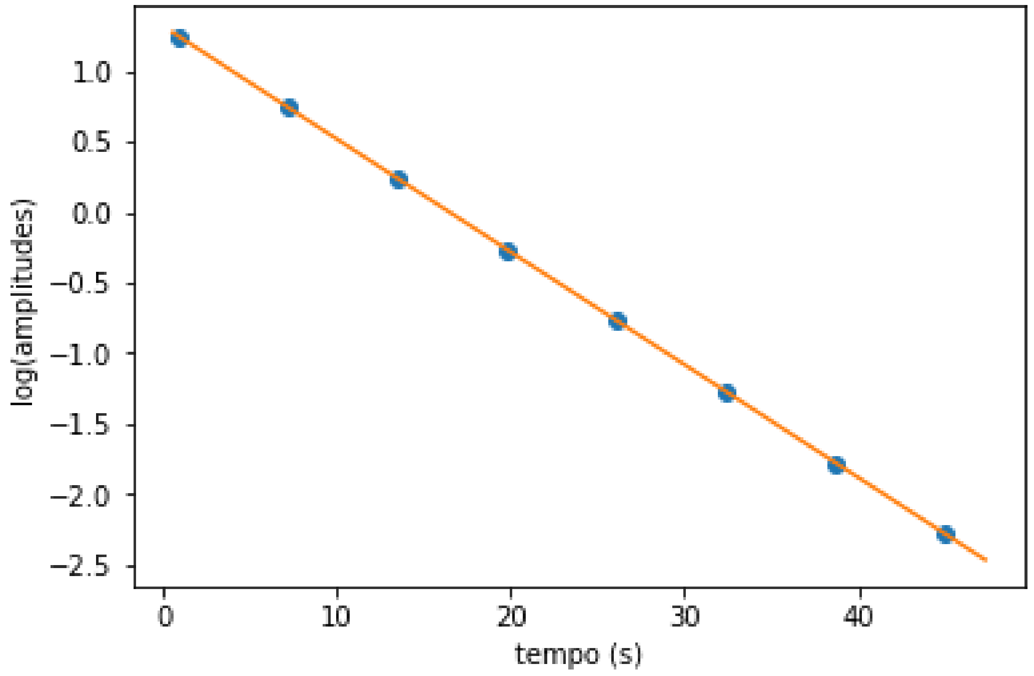
$\omega^{\,analitico} = 0.9968$ rad/s





Que lei segue o decréscimo das amplitudes?





Por regressão linear
m = -0.08000031898266281 dm = 1.3765157967774959e-09
b = 1.3180827347694213 db = 3.737587029359997e-08
r**2 = 0.9999999999999983

$$A = e^{b} e^{mt}$$

$$A = 3.736\ e^{-0.0800\ t}\ \text{m}$$

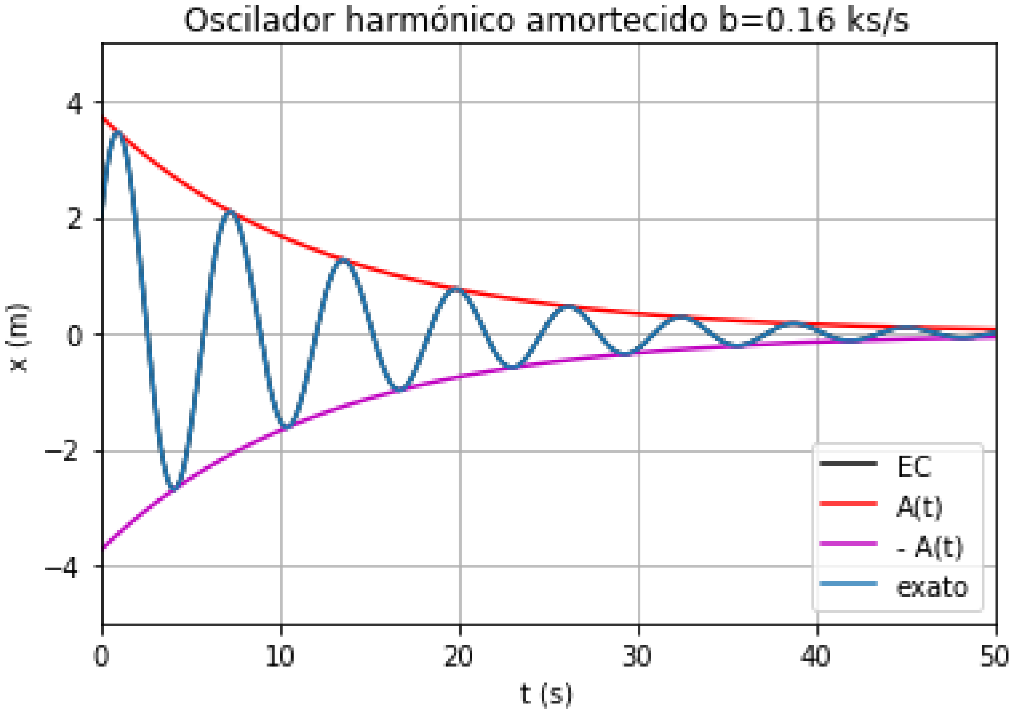
Solução analítica:

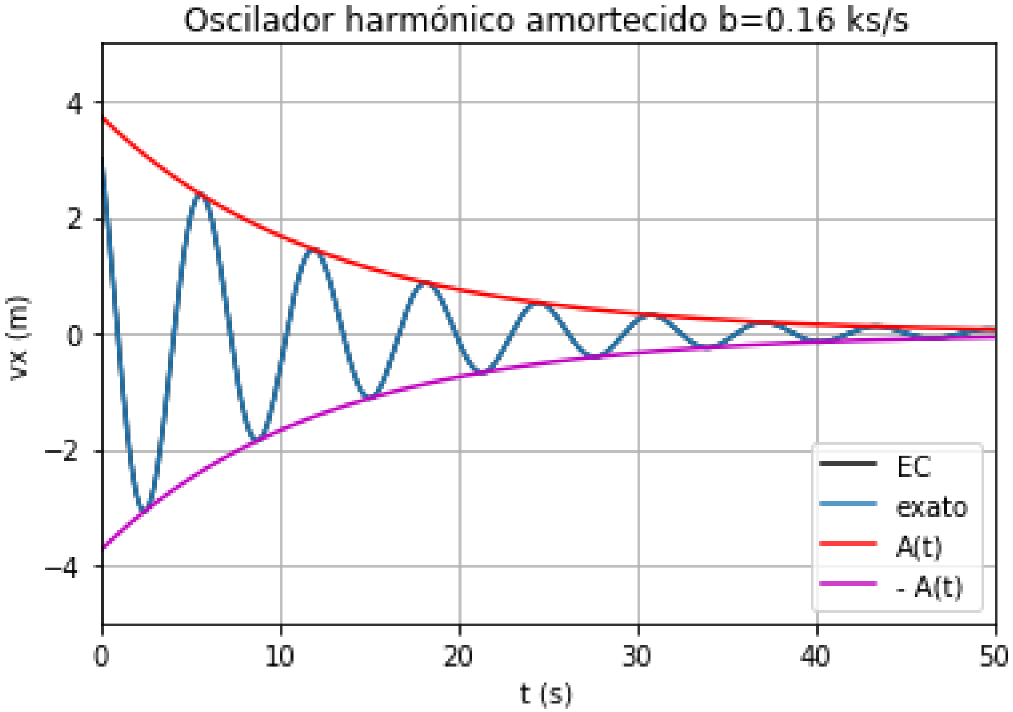
$$A = 3.748\ e^{-0.08\ t}$$

$$A(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$x(t) = A(t)\cos(\omega\, t + \phi\ )$$

$$v_x(t) = -A(t)\ \left[\omega \sin(\omega\, t + \phi) + \frac{b}{2m}\cos(\omega\, t + \phi\ )\right]$$

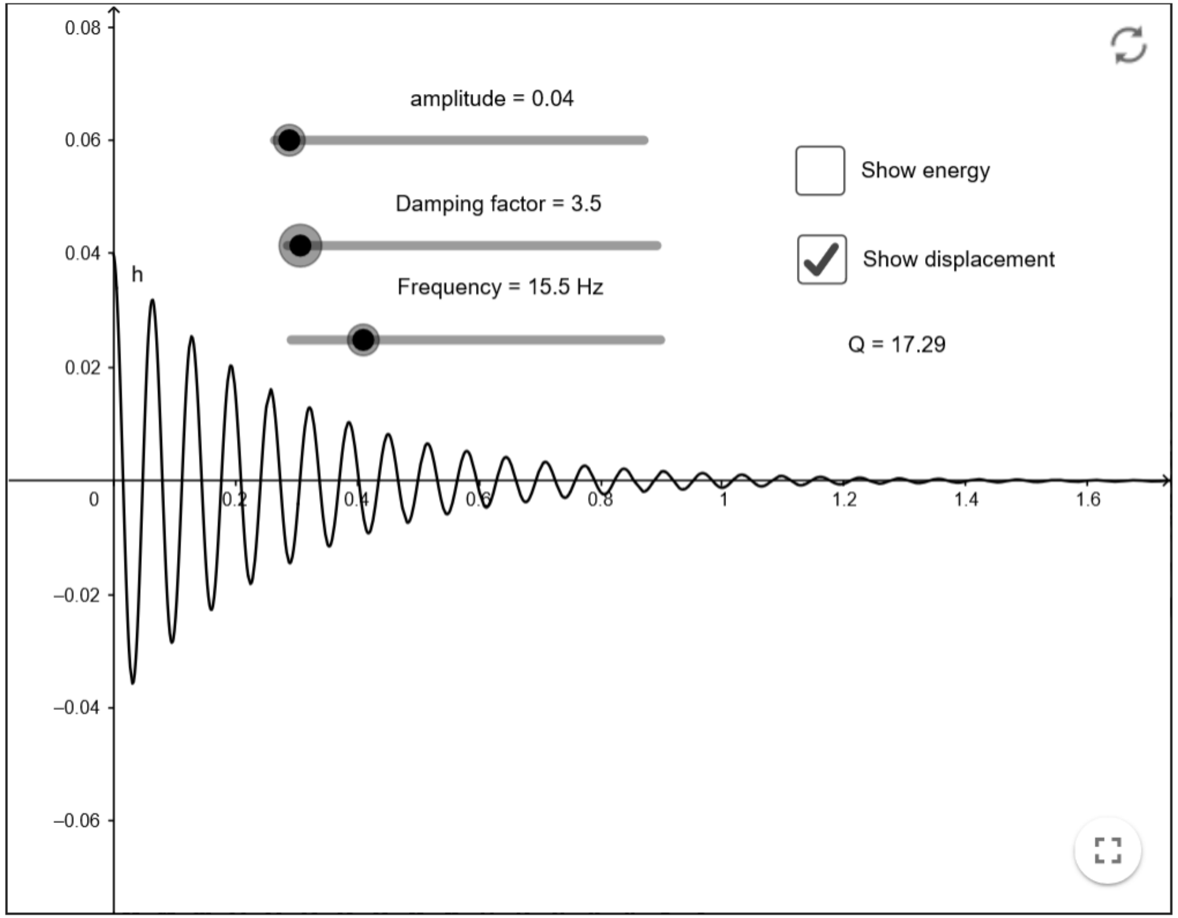




Damped harmonic motion

Autor: Chris Hamper

Vary the damping factor to see the the change in Q value



https://www.geogebra.org/m/ZMjkkEwU

Problema 7.13

Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola (k = 100 N/m) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

a) Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais.

b) Determine o primeiro instante de tempo e a posição respetiva em que isso acontece.

c) De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento (b = 2 kg/s). Determine a variação de energia mecânica no segundo ($\Delta t = 1$ s) seguinte.

Oscilador Amortecido

Problema 7.13:

Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola (k = 100 N/m) executa
um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm.
A oscilação tem início numa das posições extremas.

a) Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais.

$m = 1\,\text{kg}$ $\Rightarrow$ $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\,\text{rad/s}$

$K = 100\,\frac{N}{m}$

$A = 10\,\text{cm} = 0{,}10\,\text{m}$

$x(0)$ = posição extrema $= A$ $\Rightarrow$ $\phi = 0$

$x(t) = A\cos\omega t$

Oscilador Amortecido

Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola (k = 100 N/m) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

a) Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais.

b) Determine o primeiro instante de tempo e a posição respetiva em que isso acontece.

a) t? $E_c = E_p$

$m = 1\,kg$ $\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10$ rad/s

$K = 100 \frac{N}{m}$

$A = 10\,cm = 0{,}10\,m$

$x(0) =$ posição extrema $= A$ $\Rightarrow \phi = 0$

$x(t) = A\cos\omega t$

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x^2$ $K = m\omega^2$

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$

$v^2 = \omega^2 x^2$

$+\omega^2 A^2 \sin^2\omega t = \omega^2 A^2 \cos^2\omega t$

$\sin^2\omega t = \cos^2\omega t \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \ldots$

$10t = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow t = \frac{\pi}{40}\,s = 0{,}0785\,s$

$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} k A^2$

$E_c = E_C = \frac{1}{4} k A^2 = \frac{1}{4} \times 100 \times 0{,}1^2 = 0{,}25\,J$

Oscilador Amortecido

Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola (k = 100 N/m) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

b) Determine o primeiro instante de tempo e a posição respetiva em que isso acontece.

c) De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento (b = 2 kg/s). Determine a variação de energia mecânica no segundo ($\Delta t = 1$ s) seguinte.

Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola (*k* = 100 N/m) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

b) Determine o primeiro instante de tempo e a posição respetiva em que isso acontece.

c) De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento (*b* = 2 kg/s). Determine a variação de energia mecânica no segundo ($\Delta t = 1$ s) seguinte.

Pista

Usar o Método de Euler-Cromer.

Cálcular a energia $E(t) = E_c(t) + E_p(t)$,

No instante $t = 0.0785 + 1 = 1.0785$ s