Departamento de Física
Universidade de Aveiro

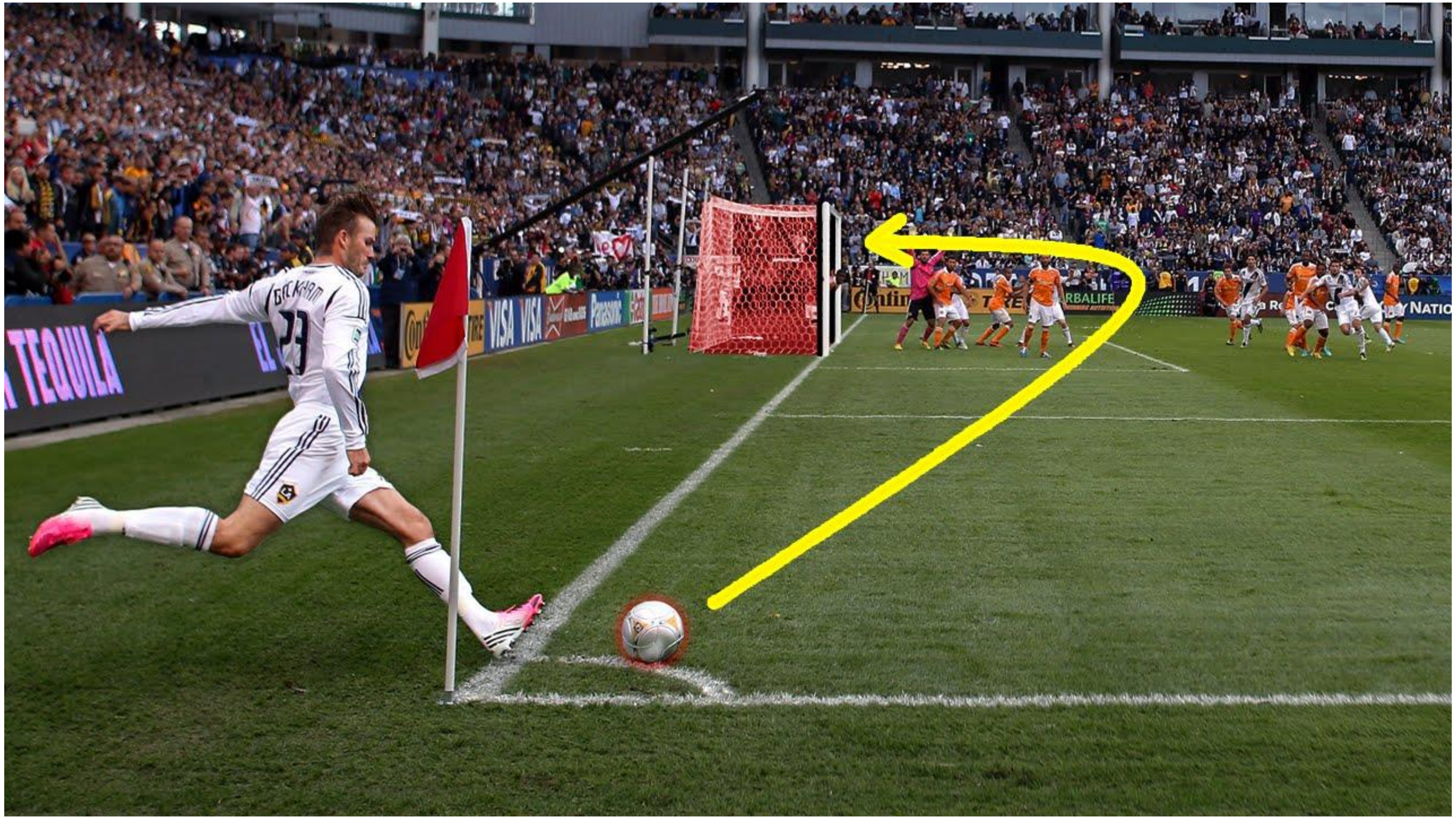
Modelação de Sistemas Físicos

6ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 4: Movimento no plano e no espaço

Bibliografia:
Cap. 4: Serway, cap. 4; Sørenssen, cap. 6; Villate, cap. 6

Cap. 4 Movimento a 3D



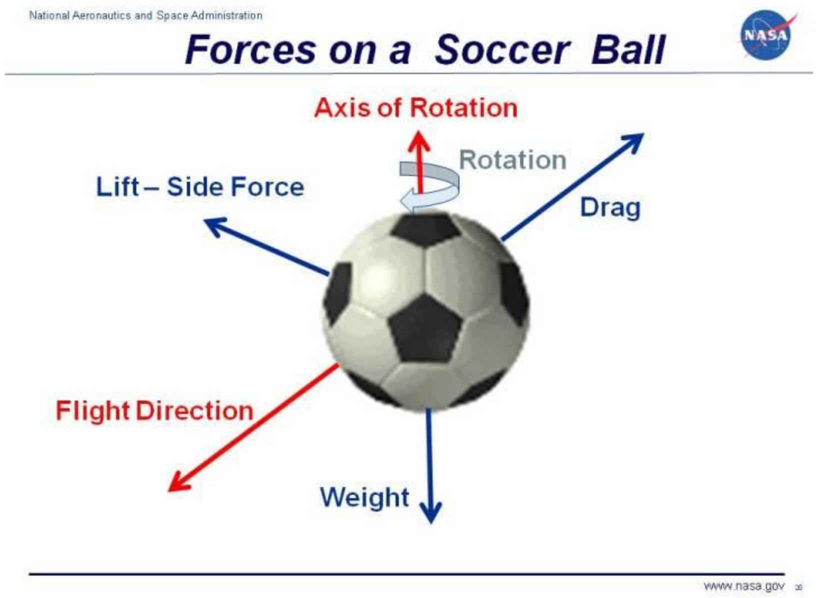
Se soubermos as forças aplicadas à bola saberemos a lei do movimento.
Uma bola em movimento desloca o ar à sua passagem.

Por isso sofre uma força de resistência do ar na forma

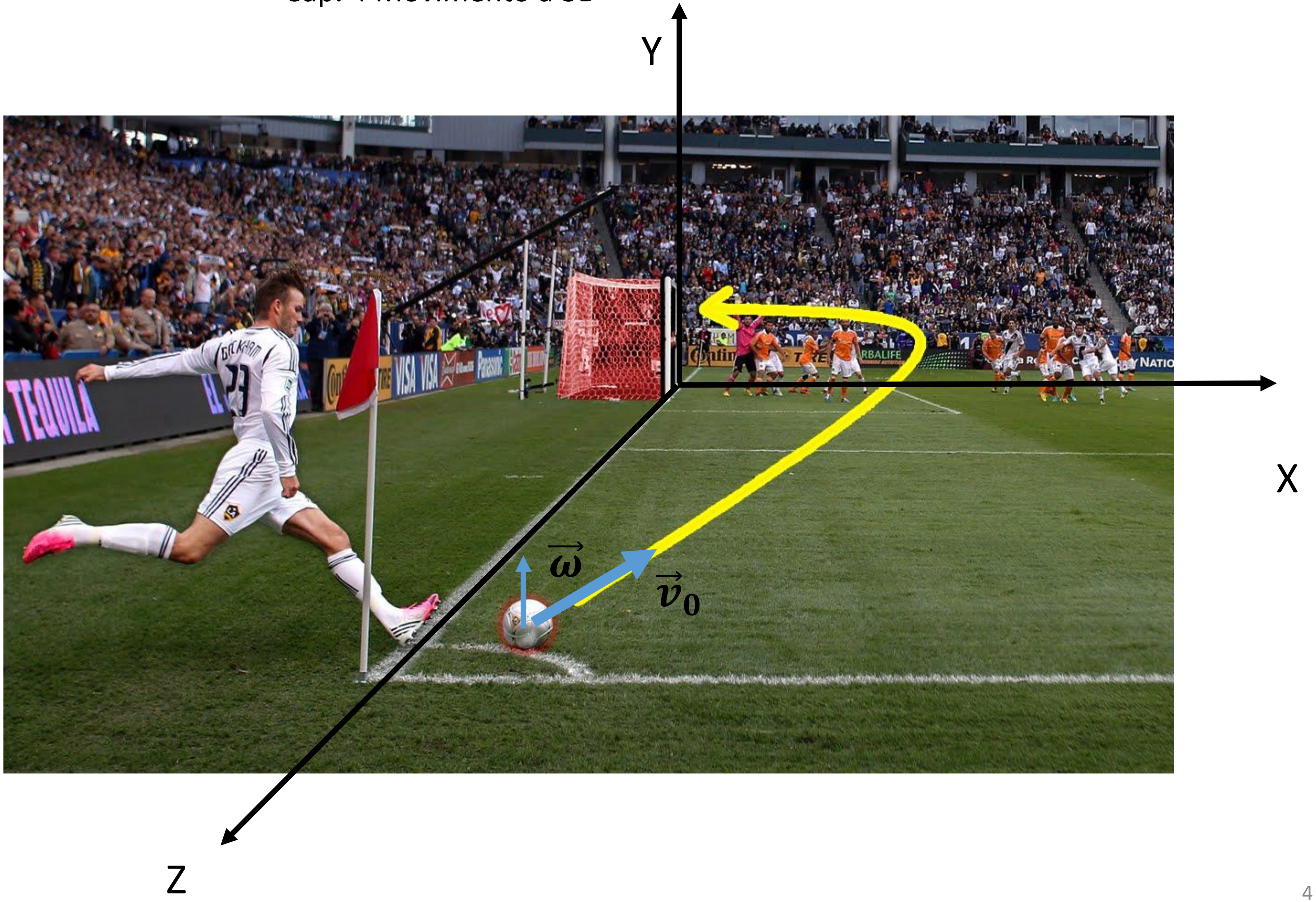
$$\vec{F}_{res} = -m\, D|\vec{v}|^2 \hat{v}$$

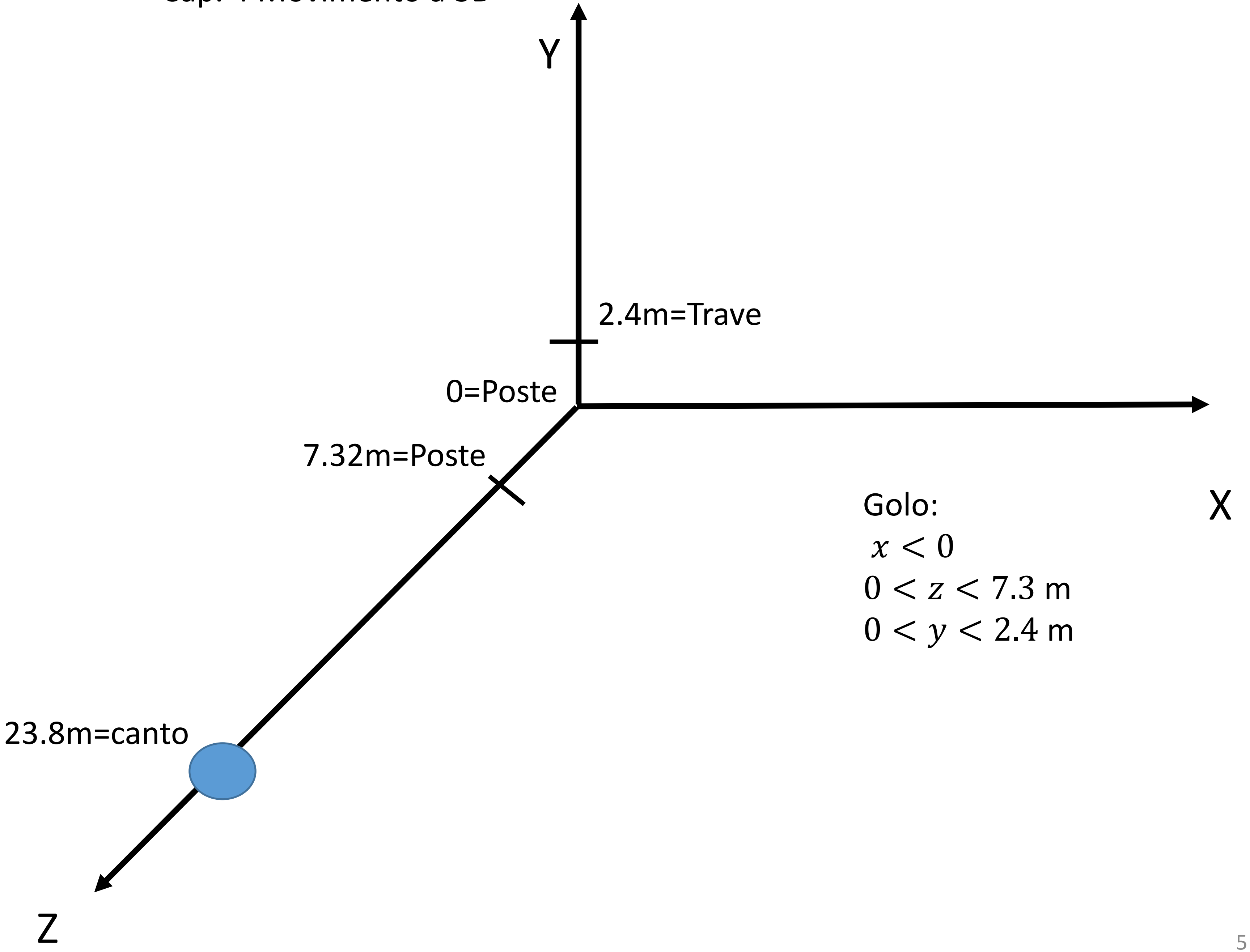
A rotação da bola faz que o escoamento do ar seja diferente nos lados opostos da bola. O resulatdo é o aparecimento de uma força perpendicular ao eixo de rotação. É a força de Magnus, que tem a forma

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v}$$



$\vec{\omega}$ é o vetor rotação, $|\vec{\omega}|$= ângulo (rad)/segundo
$A = \pi r^2$ a área da secção da bola
ρ_{ar} a densidade do ar
r o raio da bola


Y
X
Z
$\vec{\omega}$
$\vec{v}_0$



Golo:

$x < 0$

$0 < z < 7.3$ m

$0 < y < 2.4$ m

As projeções das forças são:

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} F_{res,x} = -m\, D|\vec{v}|v_x \\ F_{res,y} = -m\, D|\vec{v}|v_y \\ F_{res,z} = -m\, D|\vec{v}|v_z \end{cases}$$

O vetor velocidade angular $\vec{\omega} = (0{,}400{,}0)$ rad/s, faz que a força de Magnus seja

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 400 & 0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r \left(400\, v_z\, \hat{\imath} - 400\, v_x \hat{k}\right)$$

e assim as projeções são:

$$\begin{cases} F_{Magnus,x} = 200\, A\, \rho_{ar}\, r\; v_z \\ F_{Magnus,y} = 0 \\ F_{Magnus,x} = -200\, A\; \rho_{ar}\, r\; v_x \end{cases}$$

Problema:

Determinar se é golo ou não, a bola ser chutada do canto com rotação. Implementar o movimento da bola com rotação, usando o método de Euler. Modificar um programa anterior que seja semelhante e adicionar a parte do método de Euler correspondente à dimensão extra z

Dados:

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0{,}0{,}23.8m)$

$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = (25{,}5, -50)$ m/s

$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 400\ \mathrm{rad/s}, 0)$

$t_0 = 0\ s$

Massa da bola = 0.45 kg

Raio da bola: $r = 11$ cm

Área transversal da bola: $A = \pi\, r^2$

$\rho_{ar} = 1.225\ \mathrm{kg/m^3}$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = (\omega_y v_z, 0, -\omega_y v_x)$$

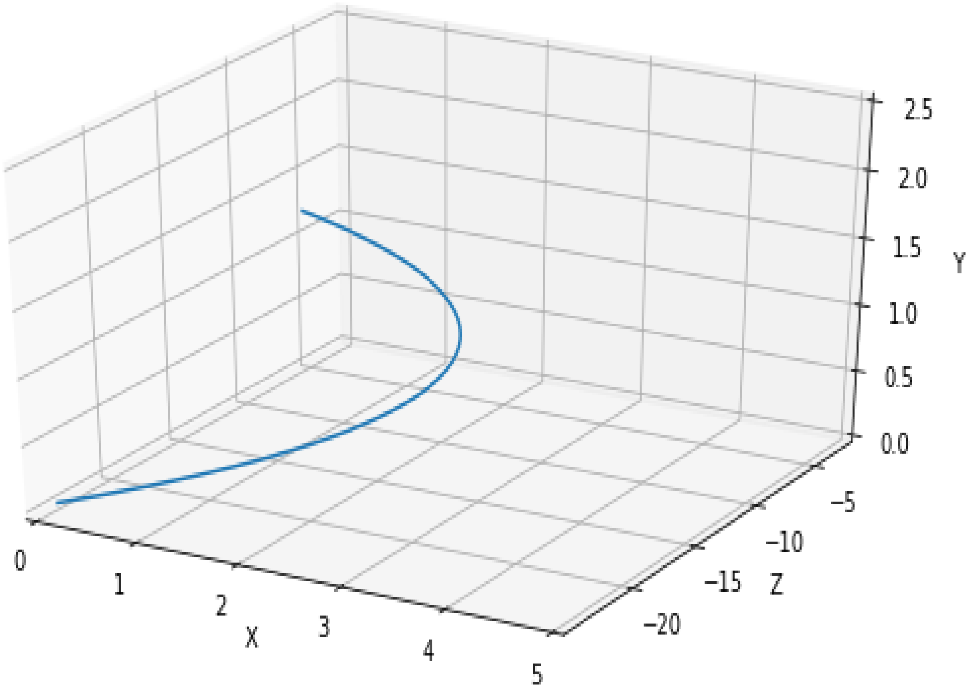
Problema:
Determinar se é golo ou não, a bola ser chutada do canto com rotação. Implementar o movimento da bola com rotação, usando o método de Euler. Modificar um programa anterior que seja semelhante e adicionar a parte do método de Euler correspondente à dimensão extra z

Dados:
$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,23.8m)$
$\vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right) = (25,5,-50)$ m/s
$\vec{\omega} = \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right) = (0, 400 \text{ rad/s}, 0)$
$t_0 = 0\ s$

Massa da bola = 0.45 kg
Raio da bola: $r = 11$ cm
Área transversal da bola: $A = \pi\, r^2$
$\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$

$\vec{\omega} \times \vec{v} = (\omega_y v_z, 0, -\omega_y v_x)$

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2+vy[i]**2+vz[i]**2)
    dres=g/vt**2
    mag=0.5*1.225*0.11*np.pi*0.11**2
    amx=mag*omega*vz[i]/massa
    amz=-mag*omega*vx[i]/massa
    ax[i]=-dres*vv*vx[i]+amx
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    az[i]=-dres*vv*vz[i]+amz
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    vz[i+1]=vz[i]+az[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
    z[i+1]=z[i]+vz[i]*dt
```



Golo:

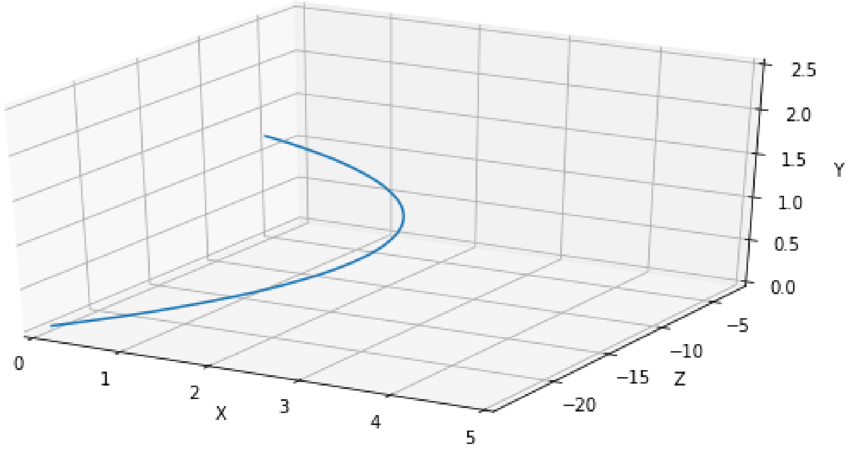
$x < 0$

$0 < z < 7.3$ m

$0 < y < 2.4$ m

É GOLO!

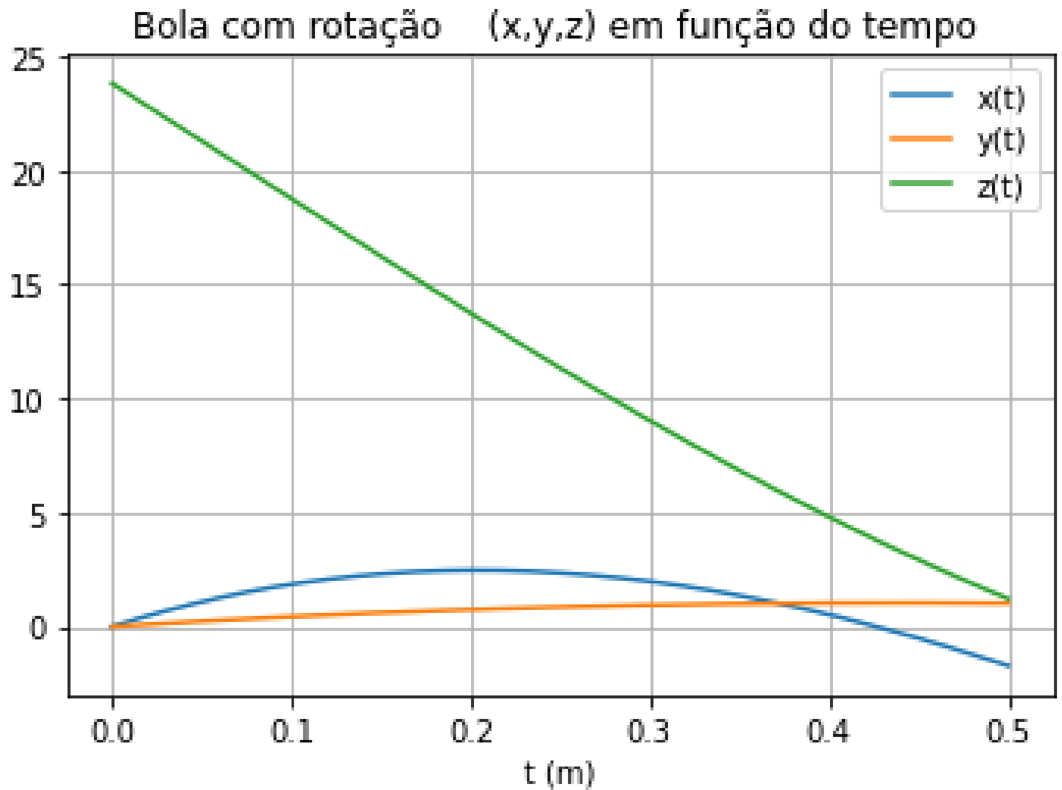
3D



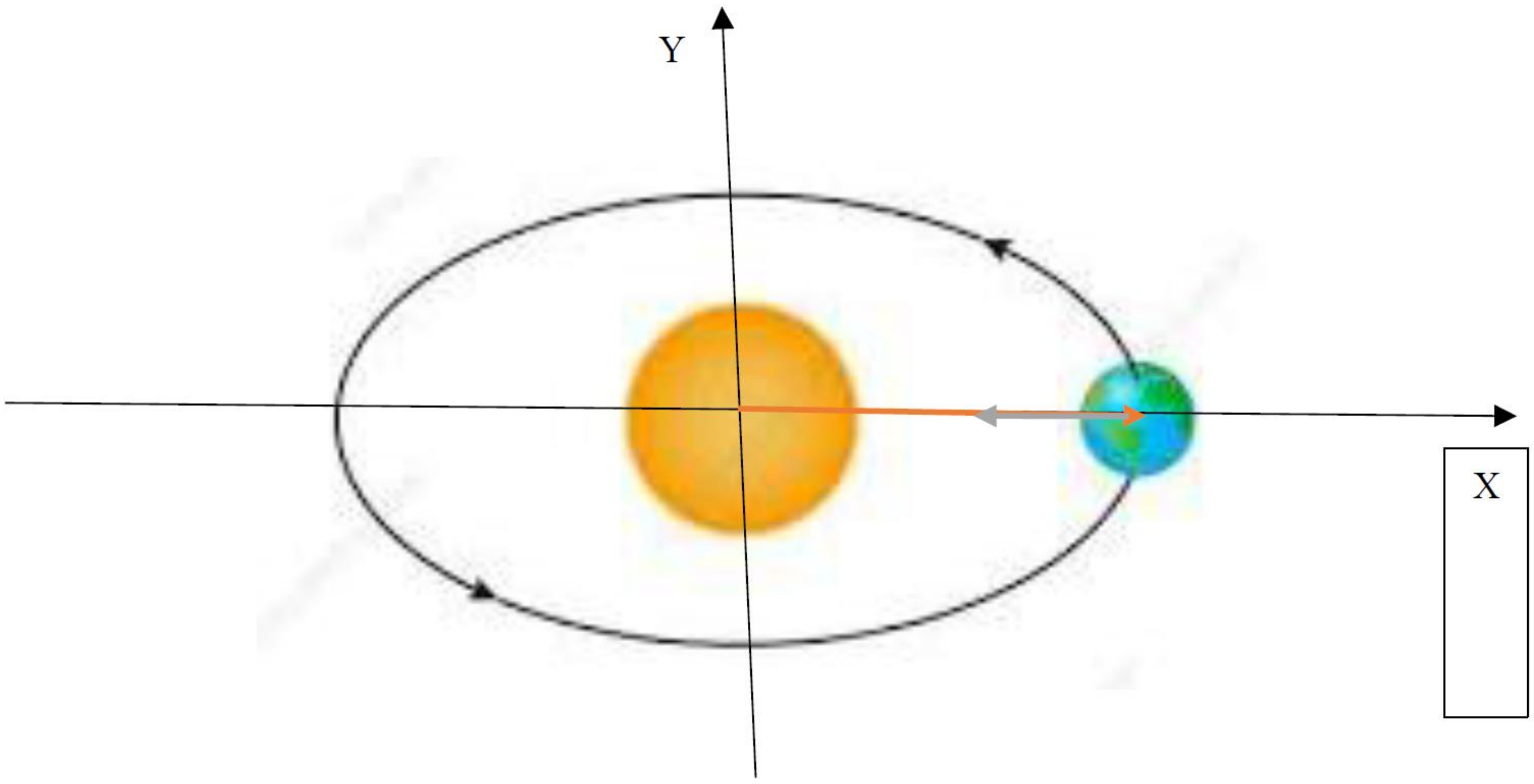
Golo:
$x < 0$
$0 < z < 7.3$ m
$0 < y < 2.4$ m

Projetando a trajetória nos EIXOS

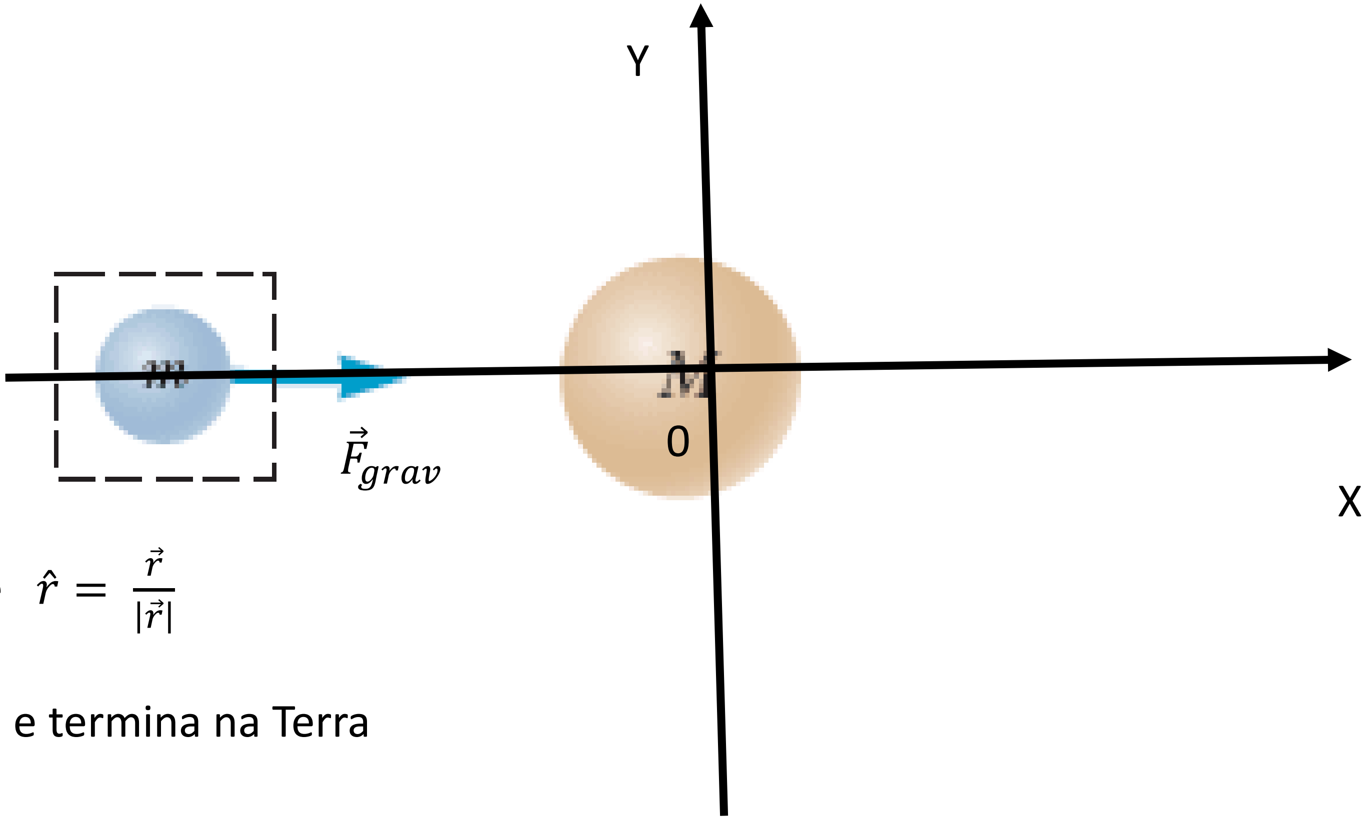
é mais fácil verificar se é golo.



Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



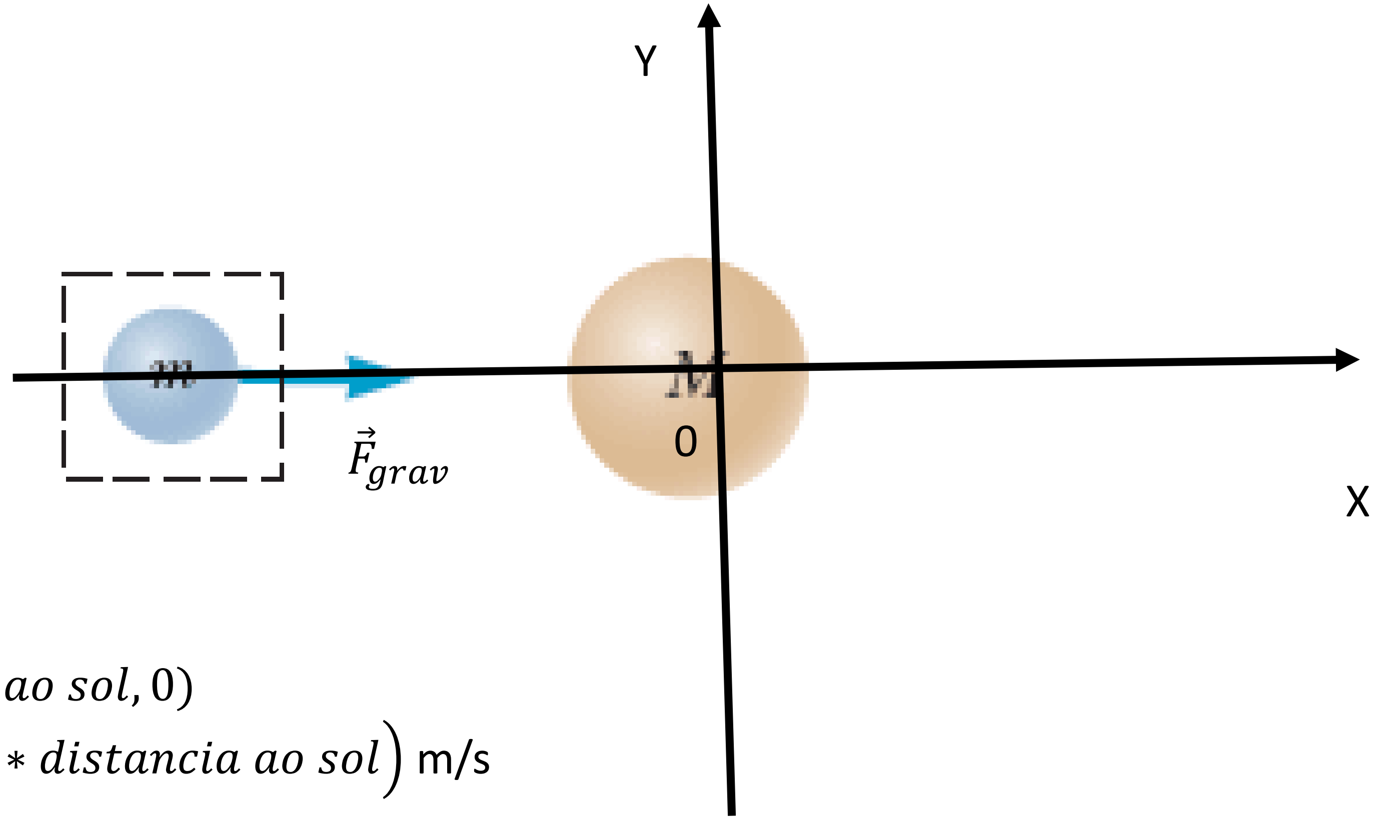
$\vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\,\hat{r}$ em que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$\vec{r}$ é o vetor com origem no Sol e termina na Terra

$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$

$$\vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\,G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}(\,x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}) = (-G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}x, -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}y\,)$$

Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



Condições iniciais

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (-distancia\ ao\ sol, 0)$$
$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = \left(0, -2\frac{pi}{ano} * distancia\ ao\ sol\right) \text{ m/s}$$

Sistema Astronómico de unidades

Grandeza	Símbolo	Definição	Valor no SI	Conversão do SI
Massa	M	Massa do Sol	$1{,}989 \times 10^{30}$ kg	$1 \text{ kg} = 5{,}028 \times 10^{-31}\text{M}$
Distância	AU	Distância média da Terra ao Sol	$1{,}498 \times 10^{11}$ m	$1 \text{ m} = 6{,}676 \times 10^{-12}\text{AU}$
Tempo	ano	Período da Terra em volta do Sol	$3{,}15 \times 10^{7}$ s	$1 \text{ s} = 3{,}17 \times 10^{-8}$ ano

Neste sistema, a constante de gravitação é

$$G = 6.67408 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2) = 6.67408 \times 10^{-11} \frac{(6.676\times10^{-12}\ \text{AU})^3}{5.028\times10^{-31}\ \text{M}\ (3.17\times10^{-8}\ \text{ano})^2} = 4\pi^2\ \text{AU}^3/(\text{M}\cdot\text{ano}^2),$$

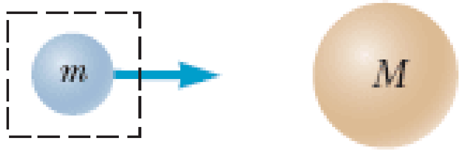
a unidade de energia é 5.50×10^{38} J e a unidade de velocidade é 4718.48 m/s.

Condições iniciais neste sistema de unidades

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (-1, 0)$ m
$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (0, -2\pi)$ m/s

tornam-se muito mais simples.

Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.

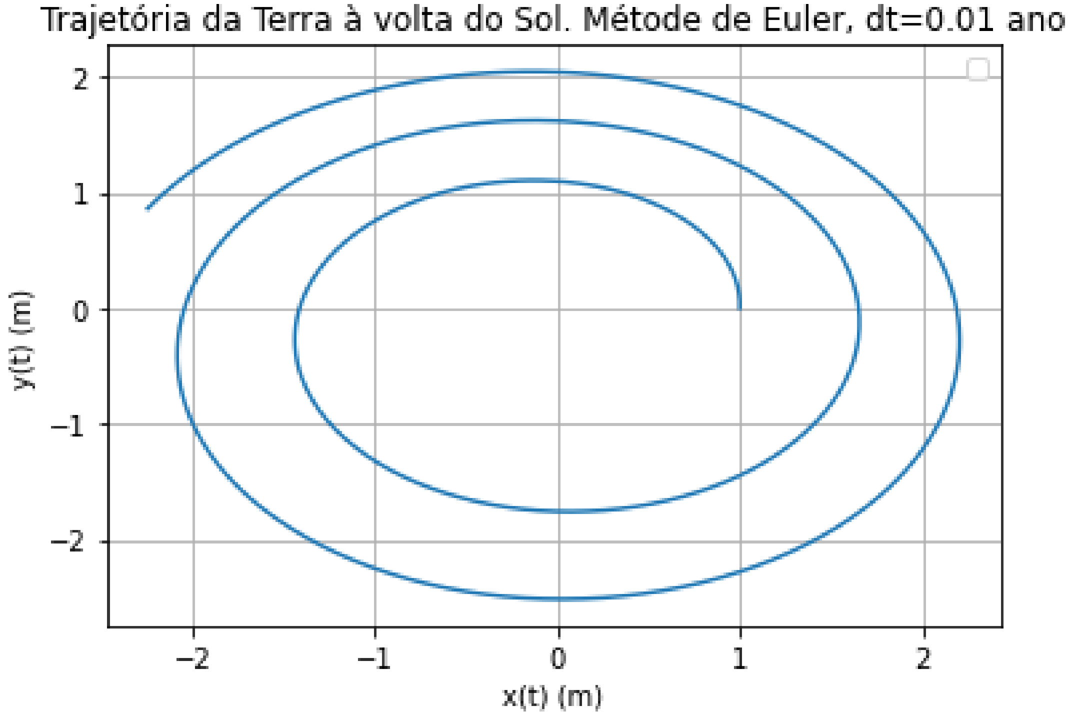


$$\vec{F}_{grav} = \left(-G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\,x,\, -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\,y\,\right)$$

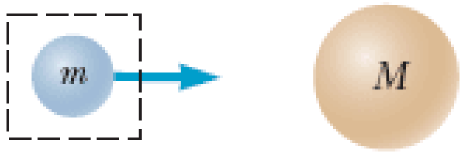
Integração pelo método de Euler

```
t[0]=0
vx[0]=v0x
vy[0]=v0y
x[0]=x0
y[0]=y0

for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```



Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.

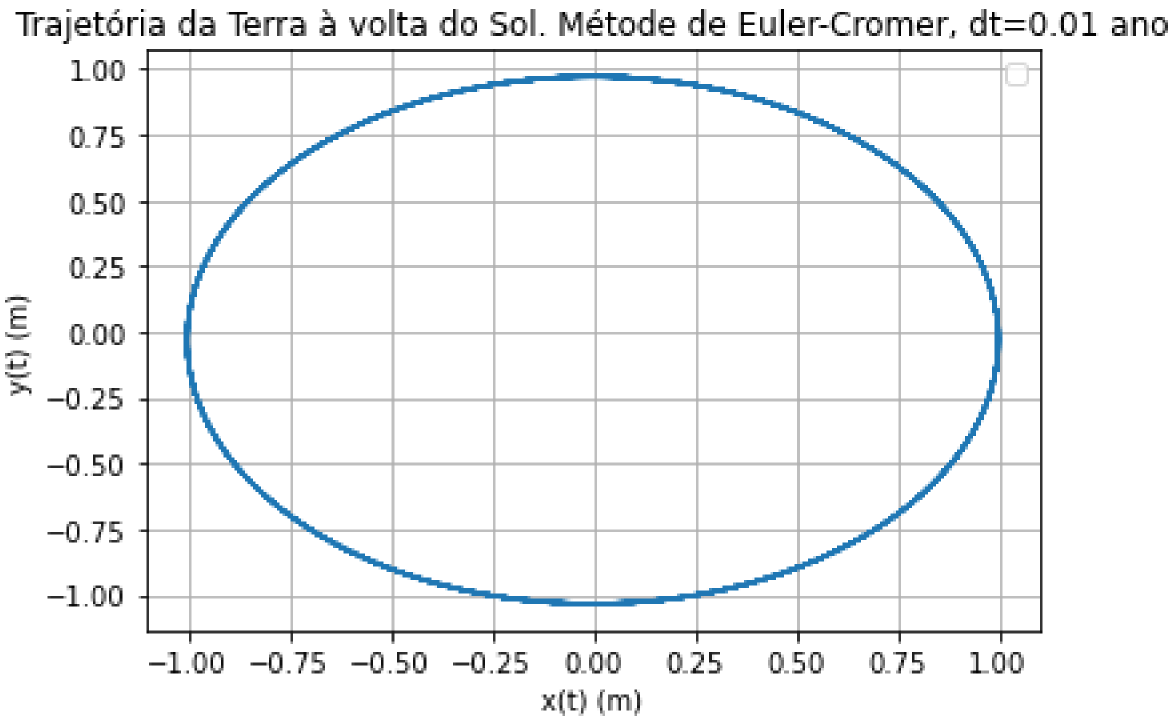


$$\vec{F}_{grav} = (-G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}x, -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}y\,)$$

Integração pelo método de Euler-Cromer ou Euler modificado)

```
t[0]=0
vx[0]=v0x
vy[0]=v0y
x[0]=x0
y[0]=y0

for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
   ax[i]=-gm/r**3*x[i]
   ay[i]=-gm/r**3*y[i]
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
   y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt
```



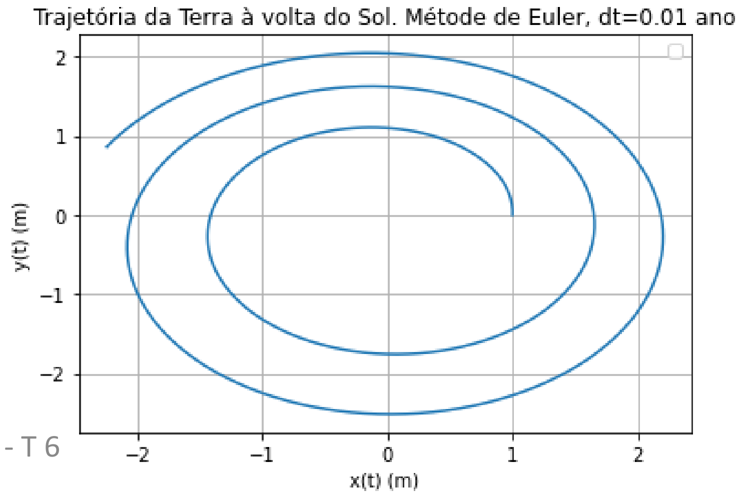
Produz órbitas fechadas

Métodos de Integração

Integração pelo método de Euler

```
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
   ax[i]=-gm/r**3*x[i]
   ay[i]=-gm/r**3*y[i]
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
   y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt x
```

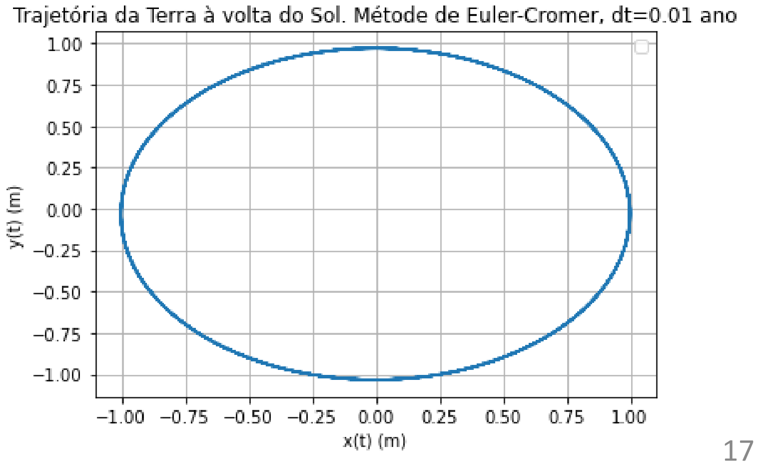
$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t) \times \delta t$$



Integração pelo método de Euler-Cromer

```
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
   ax[i]=-gm/r**3*x[i]
   ay[i]=-gm/r**3*y[i]
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
   y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt x
```

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t+\delta t) \times \delta t$$



Métodos de Integração

O método de Euler-Cromer :

- Mesmo erro de truncatura que o método de Euler
- Mas paar movimentos periódicos, o erro anula-se ao fim de um período (Terra à volta do Sol demora um ano)

Método de Euler mediocre para movimentos periódicos.