Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

12ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 8 Oscilações: Caos
Oscilador não harmónico forçado. Método de Runge-Kutta de 4ª ordem.
Oscilador de Lorenz.
Resolução de problemas.

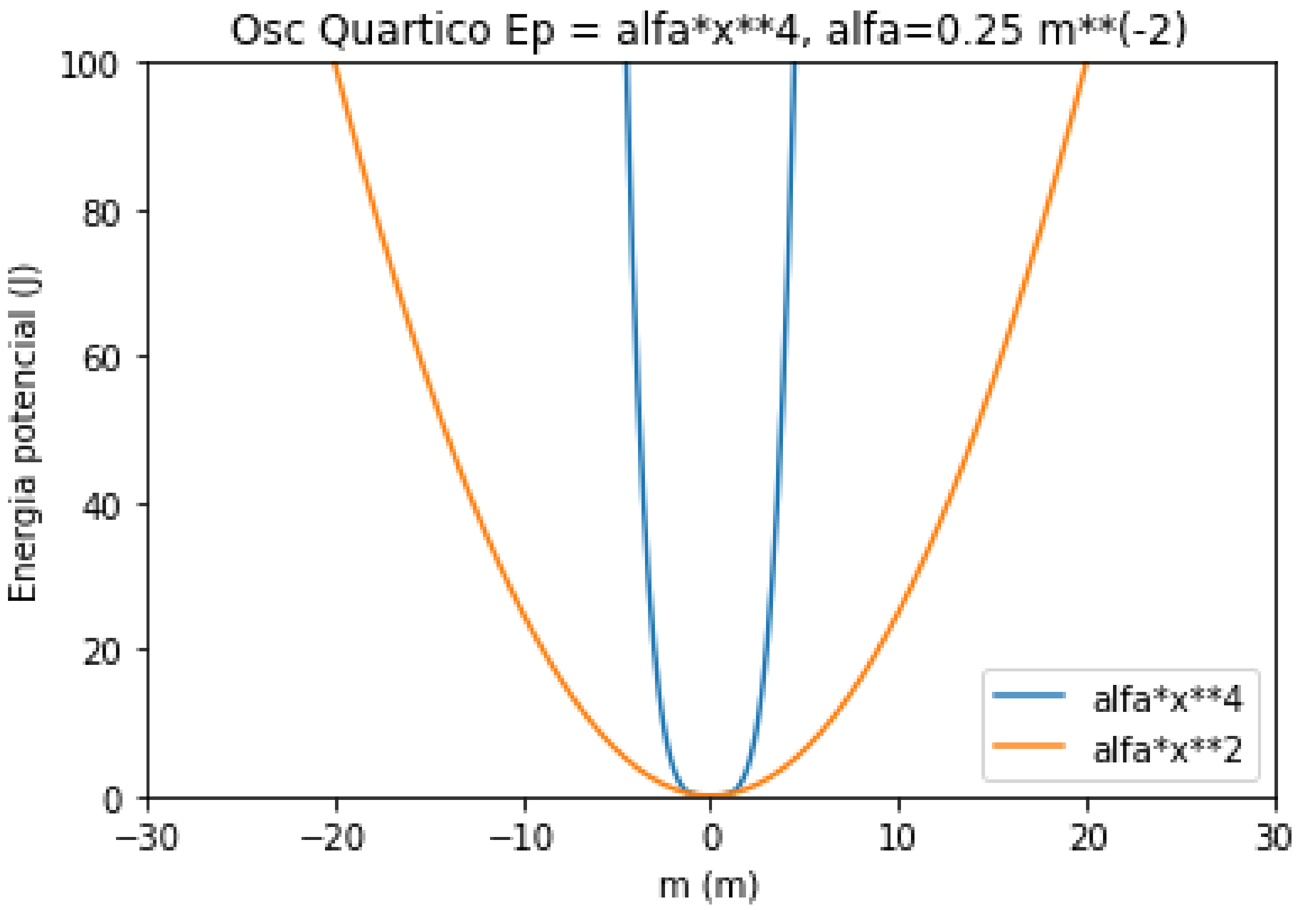
Bibliografia:

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$$E_p = \alpha x^4$$

$\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ **m**$^{-2}$

$$F_x = -4\alpha x^3$$



Oscilador extremamente não linear
(força não é proporcional a x , caso do oscilador harmónico)

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \alpha x^4$

$\boldsymbol{x(t=0) = 3.0000}$ **m**

$v_x(t=0) = 0$

$k = 1$ N/m;

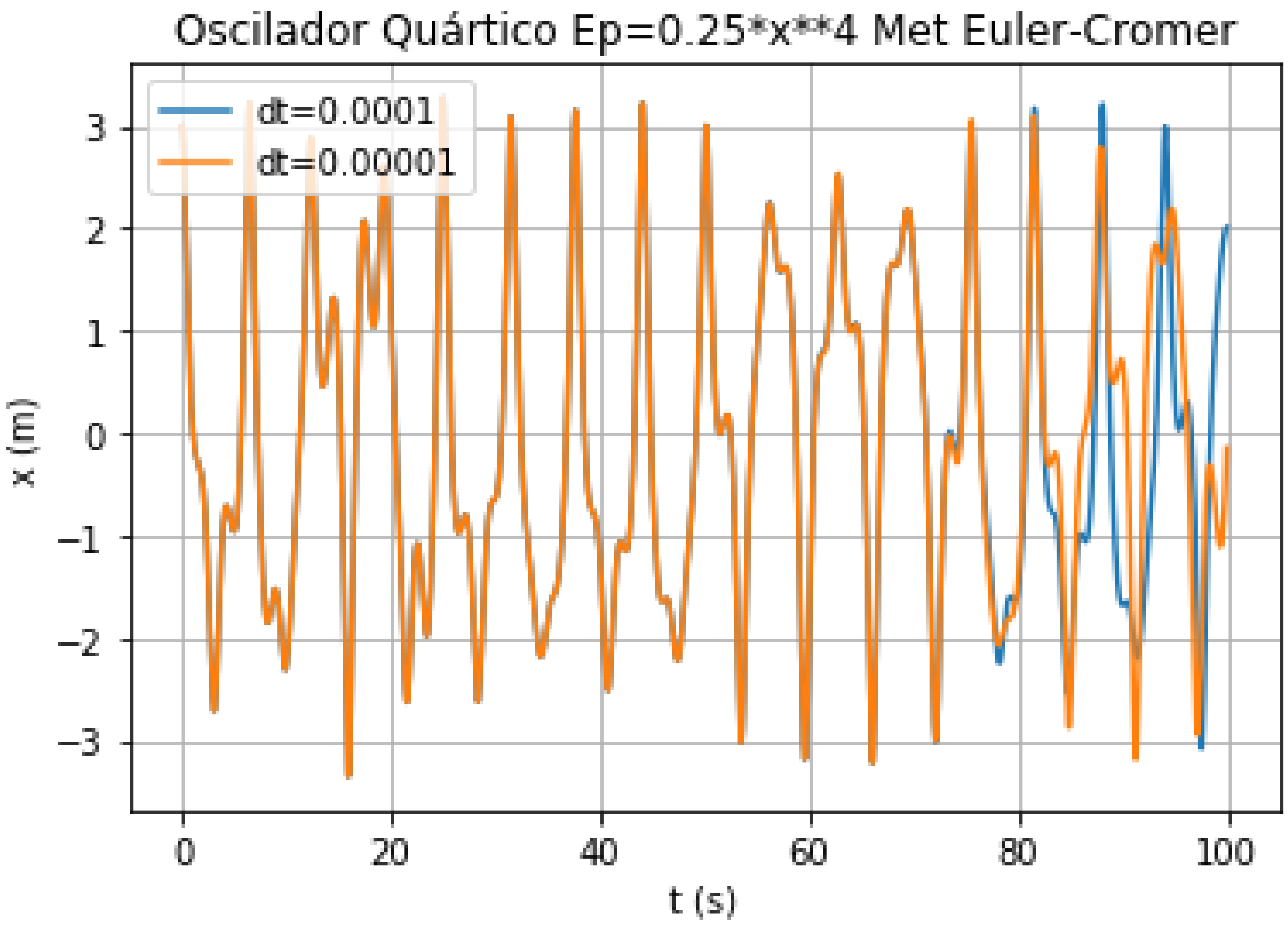
$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

$b = 0.05$ kg/s

$\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ **m**$^{-2}$

$F_0 = 7.5\ N$

$\omega_f = 1$ rad/s



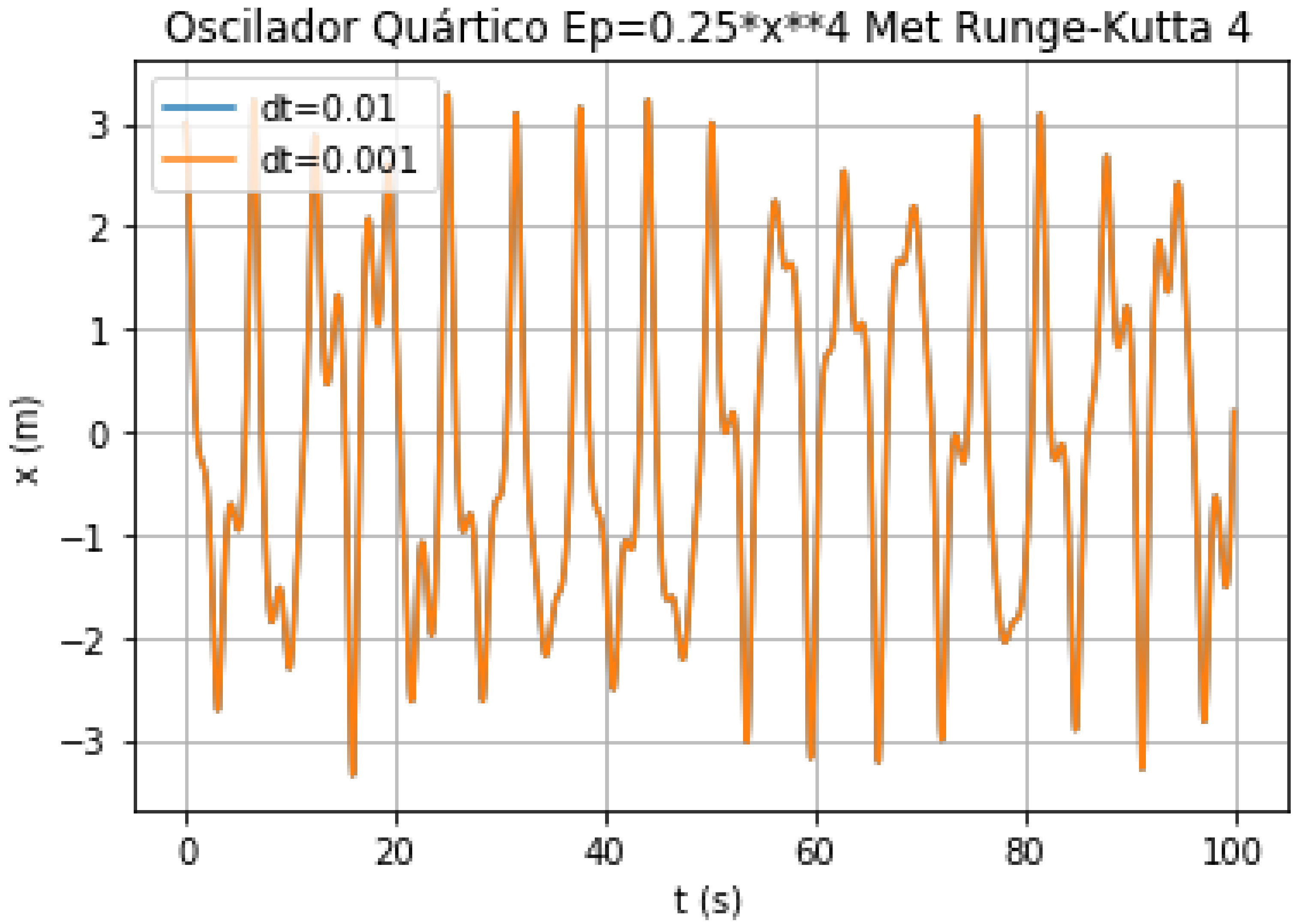
Método de Euler-Cromer

Solução <u>não</u> converge!

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

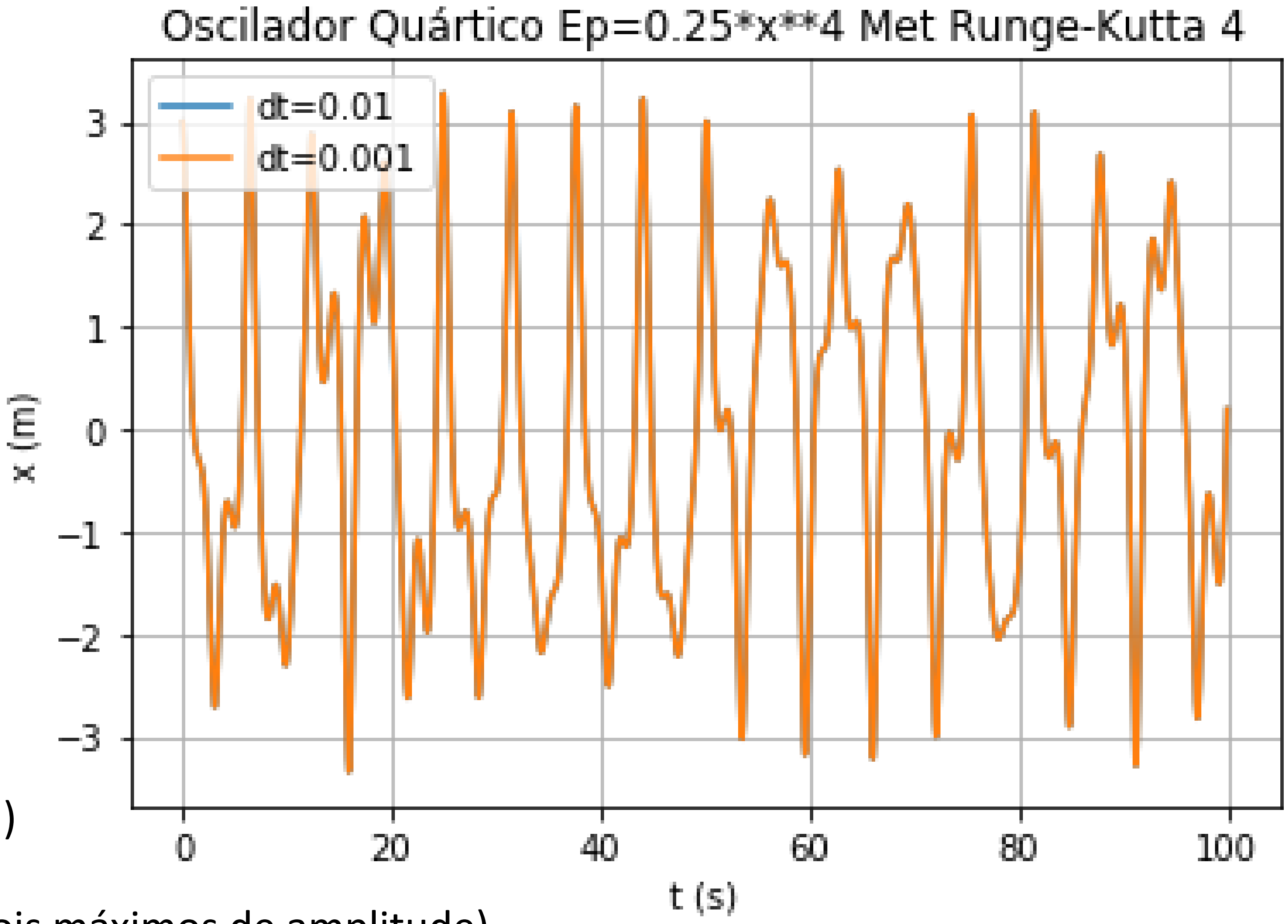
$E_p = \alpha x^4$
$\boldsymbol{x(t=0) = 3.0000}$ **m**
$v_x(t=0) = 0$
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 0.05$ kg/s
$\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ **m**$^{-2}$
$F_0 = 7.5\ N$
$\omega_f = 1$ rad/s



Solução converge!

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \alpha x^4$
$\boldsymbol{x(t=0) = 3.0000}$ **m**
$v_x(t=0) = 0$
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 0.05$ kg/s
$\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ **m**$^{-2}$
$F_0 = 7.5\ N$
$\omega_f = 1$ rad/s
Método de Runge-Kutta de 4ª ordem
Solução converge!



Caraterísticas:

-A amplitude (posição máxima e mínima) não se mantêm constante
- O período (intervalo de tempo entre dois máximos de amplitude) não se mantêm constante

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \alpha x^4$

$\boldsymbol{x(t=0) = 3.0000}$ **m**

$v_x(t=0) = 0$

$k = 1$ N/m;

$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

$b = 0.05$ kg/s

$\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ $\mathbf{m^{-2}}$

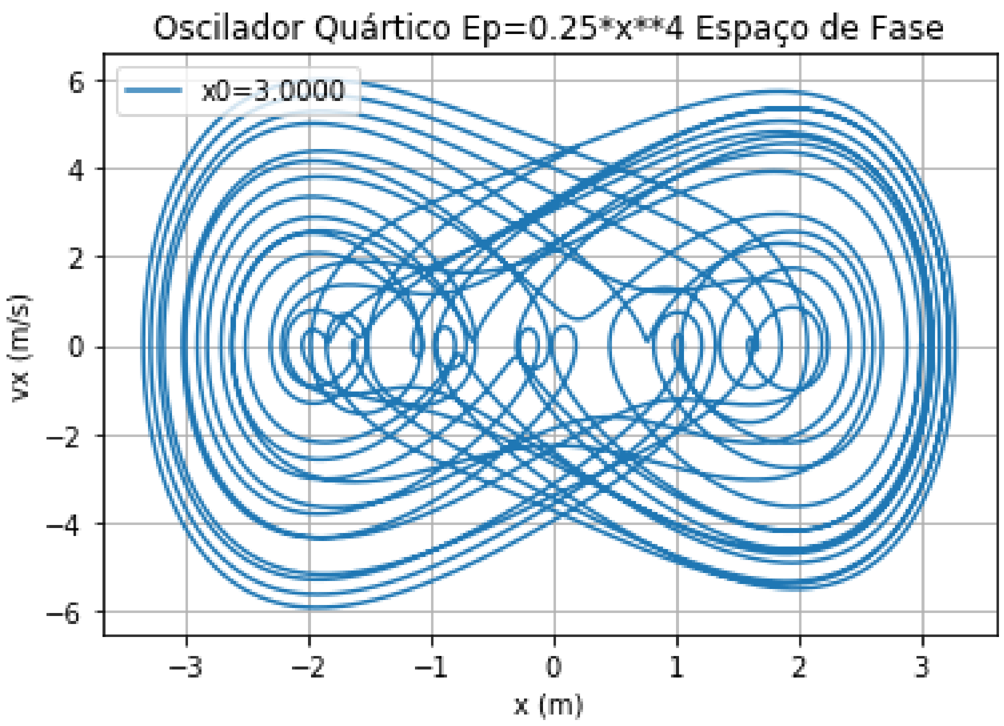
$F_0 = 7.5\ N$

$\omega_f = 1\ \mathrm{rad/s}$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Solução converge!

Espaço de Fase:

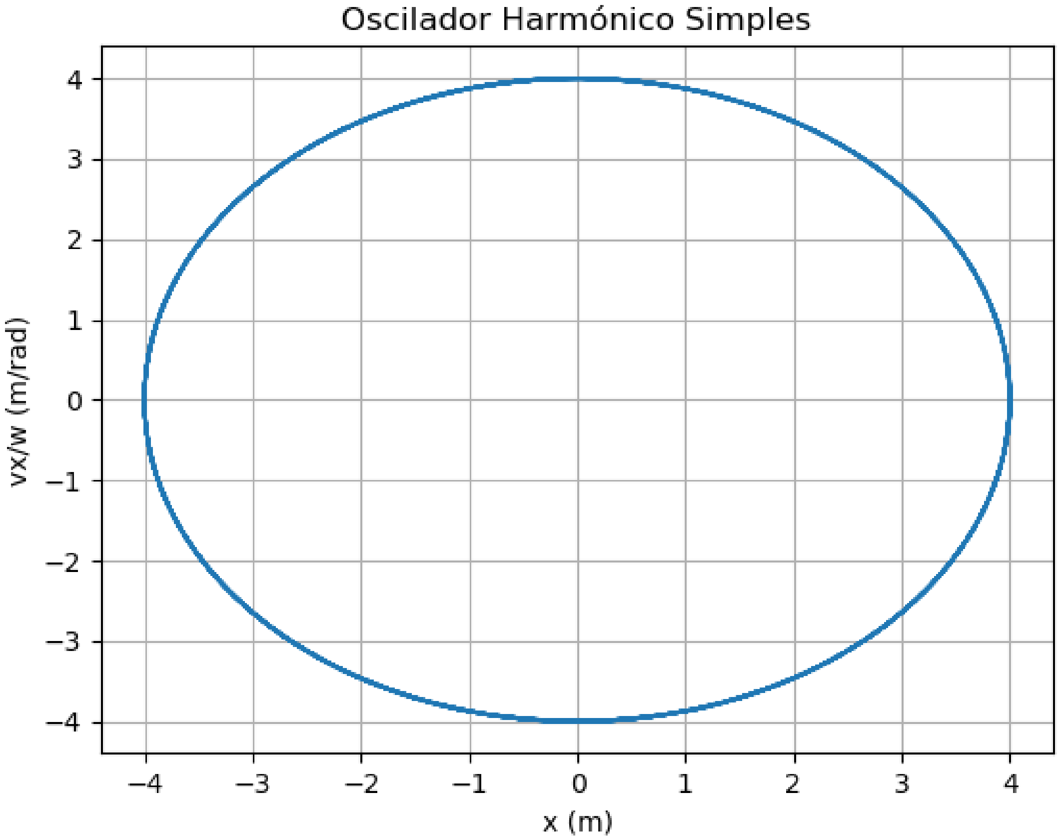


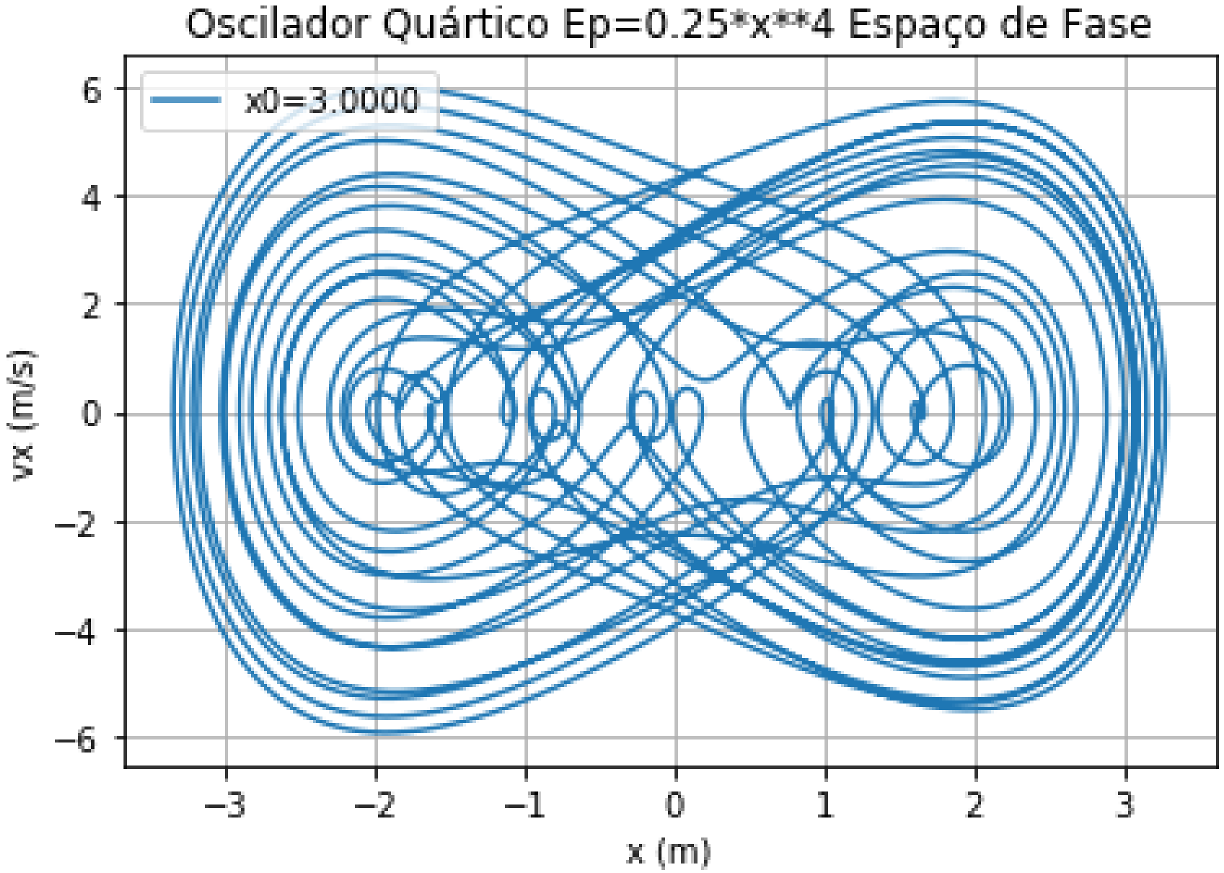
Caraterísticas:

- A figura no espaço de fase é muito complexa

Espaço de fase

Oscilador Harmónico Forçado e Amortecido





As duas trajetórias no espaço das fases contrastam imenso!
Harmónico: Trajetória fechada (parte estacionária)
Quártico: A trajetória nunca se fecha!

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$$

Método de Euler

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x\left(t, v_x(t)\right) \times \delta t$$

ou,

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + c_1 \times \delta t$$
$$c_1 = a_x\left(t, v_x(t)\right)$$

Erro global $\sigma(\delta t)$

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

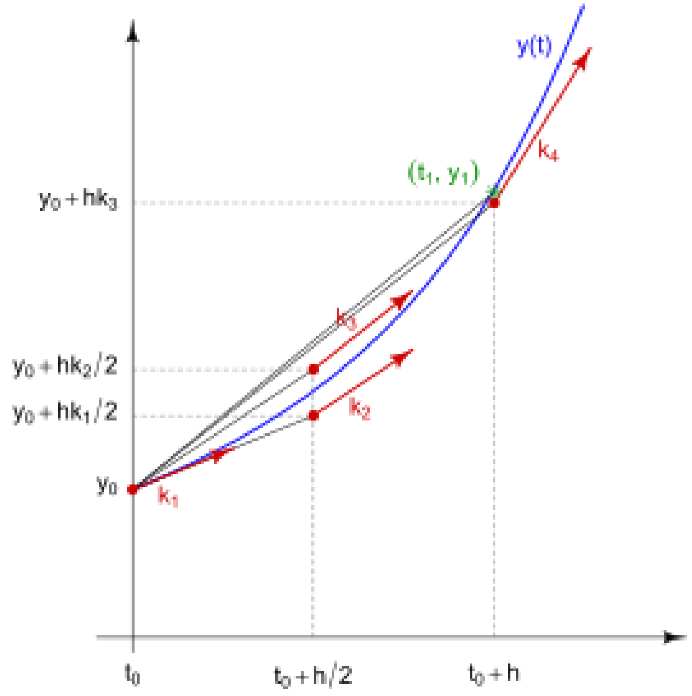
em que

$$c_1 = a_x\big(t, v_x(t)\big)$$

$$c_2 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1 \frac{\delta t}{2}\right)$$

$$c_3 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2 \frac{\delta t}{2}\right)$$

$$c_4 = a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3\, \delta t)$$



Erro global $\boldsymbol{\sigma(\delta t^4)}$

Problema:

Implemente o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para calcular a velocidade com que um volante de badmington atinge 2 s depois de ser largado. A velocidade terminal do volante é de 6.80 m/s, e a aceleração é

$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2}\left|v_y\right|v_y$.

Compare o valor obtido com o valor exato, de acordo com a lei $v_y(t) = v_T \tanh(\frac{g\,t}{v_T})$.

R: 6.75747944 m/s

No e-learning está a função

```
def rk4(t,vx,acelera,dt):
    """
    Integração numérica de equação diferencial de 2ª ordem:
                                dvx/dt = ax(t,vx)    de valor inicial
          Erro global:  proporcional a dt**4
    acelera=dvx/dt=Força(t,vx)/massa     : acelera é uma FUNÇÃO
    input:  t = instante de tempo
            vx(t) = velocidade
            dt = passo temporal
    output: vxp = vx(t+dt)
    """
```

```
global g,vt
def acelera(t,x,vx):
    ax=g-g/vt**2*np.abs(vx)*vx
    return ax
```

Equação diferencial de 2ª ordem de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = a_x(t, x, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

Exemplo: $a_x(t, x, v_x) = \frac{F_x(t,x,v_x)}{m} - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt}$

É transformada em 2 equações diferenciais de 1ª ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dv_x}{dt} = a_x(t, x, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

E aplica-se a cada equação diferencial o método numérico conveniente

Equações de Lorenz

Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\,x\ - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy\ - bz \\ \quad x(t = 0) = x_0 \\ \quad y(t = 0) = y_0 \\ \quad z(t = 0) = z_0 \end{cases}$$

As variáveis x, y e z não possuem significado físico direto.

 Condições iniciais **extramente próximas**

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \alpha x^4$

$\boldsymbol{x(t=0) = 3.0000}$ **m e 3.0003m**

$v_x(t=0) = 0$

$k = 1$ N/m;

$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

$b = 0.05$ kg/s

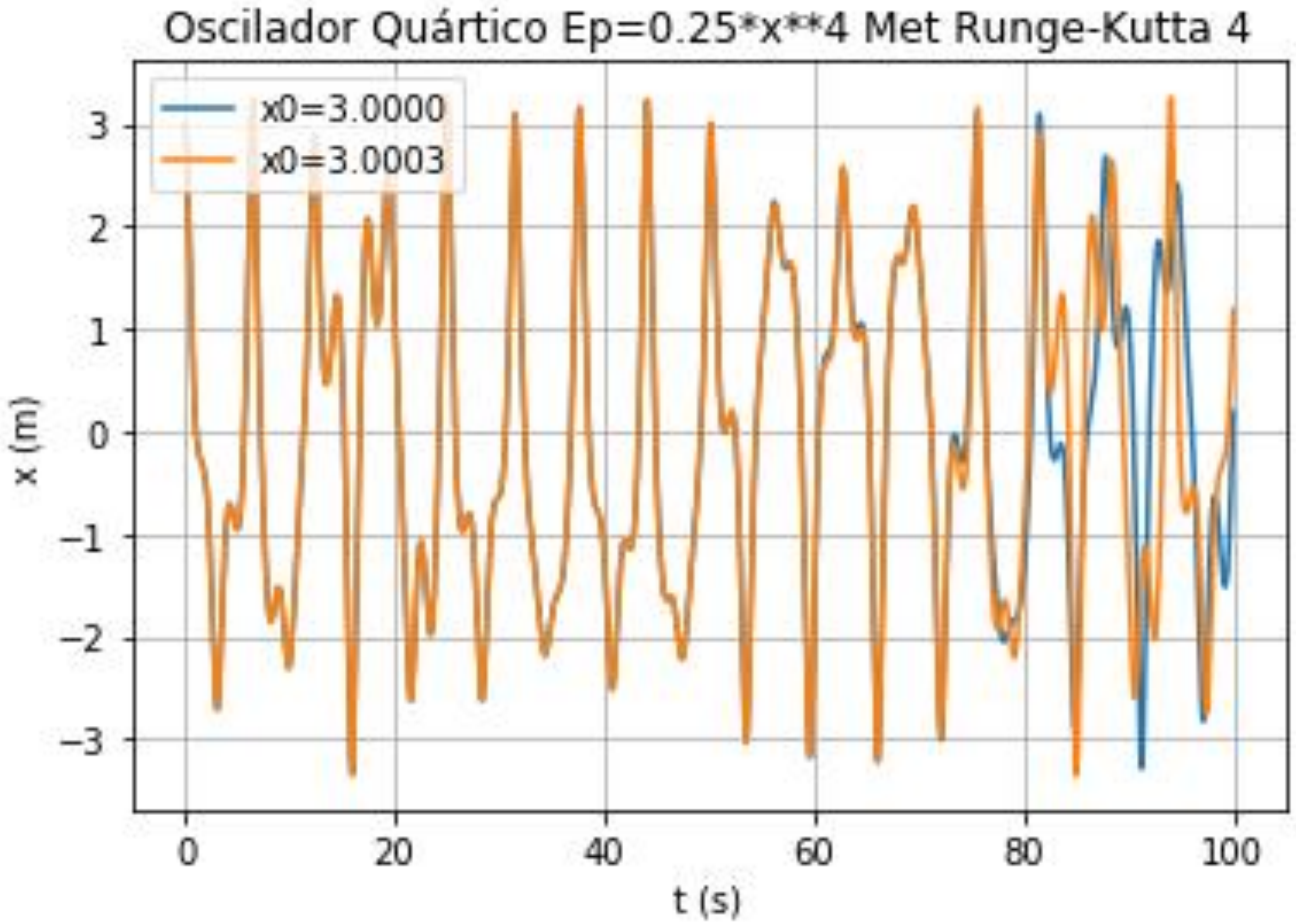
$\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ $\mathbf{m^{-2}}$

$F_0 = 7.5\ N$

$\omega_f = 1$ rad/s

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Solução converge!



Caraterísticas:

- Soluções com condições iniciais **extramente próximas DIVERGEM**!
- A diferença entre condições iniciais pode ser **menor que o erro experimental de cada condição inicial**

- **Apesar de a solução ser ÚNICA (para uma condição inicial), não se consegue calcular (prever) a evolução a médio prazo - CAOS -**

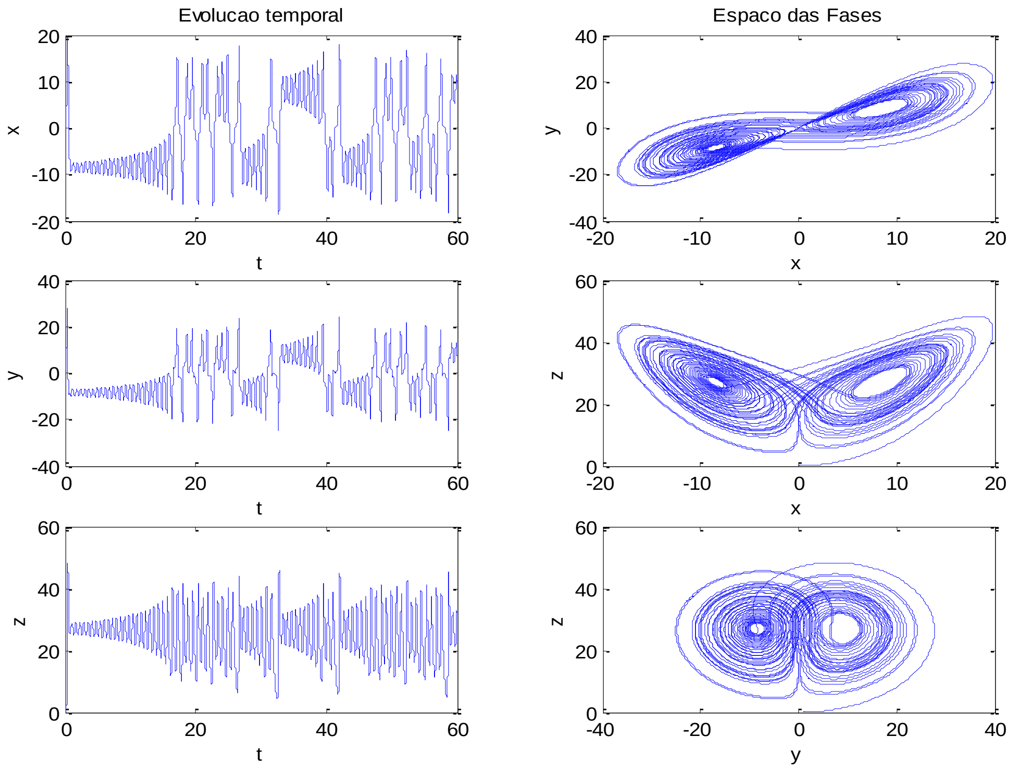
Equações de Lorenz

Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\,x\ - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy\ - bz \\ x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = y_0 \\ z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

$\sigma = 10; b = \frac{8}{3}; r = 28;$

Condições iniciais: $x(0) = z(0) = 0; y(0) = 1$



Estas equações possuem
uma extrema sensibilidade às condições iniciais.

Edward Norton Lorenz (1917-2008)

Fundador da teoria do caos.

Contribuições muito importantes dadas às ciências da atmosfera.

Lorenz foi professor de meteorologia no MIT, tendo sido em matemática a sua formação inicial, obtida na Universidade de Harvard.

Por João Corte-Real, Universidade de Évora

Edward Norton Lorenz (1917-2008)

A investigação científica de Edward Lorenz ultrapassou em muito aquilo que é normal encontrar mesmo nos melhores, pois constituiu de facto uma contribuição fundamental, basilar, para se compreender como a atmosfera da Terra opera, para o desenvolvimento da previsão numérica do tempo e para se entender a natureza do clima do planeta

Além da actividade científica, Lorenz era um amante e praticante de caminhadas, montanhismo e *ski*, as quais manteve até quase ao fim da vida.

Por João Corte-Real, Universidade de Évora

Osciladores Forçados:

- Insensíveis às condições iniciais (Os. Harmónico Amortecido e Forçado no regime estacionário)
- Extrema sensibilidade às condições iniciais – CAOS (para alguns parâmetros do Osc. Quártico Amortecido e Forçado)

Teorema de Poincaré-Bendixon:

O caos não pode ser observado em sistemas autónomos bidimensionais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

Note: as funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ não dependem do tempo, a variável independente.

Teorema de Poincaré-Bendixon:

O caos não pode ser observado em sistemas autónomos bidimensionais:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

Não é o caso das (3) equações de Lorenz

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\,x\ - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy\ - bz \\ x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = y_0 \\ z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

e do Os. Quártico Amortecido e Forçado (são 2 equações não autónomas (ou 3 autónomas com dt/dt=1)