DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2021/2022 - 2º Semestre

Prova de Recurso - Resolução
Parte Cálculo Computacional-Numérico

Data: 20 julho 2022
Hora: 15H45

Duração: 2 horas
Disciplina: 41769

Salas: 10.3.7, 10.3.14

Cotação: 1) 1 + 1 + 1 = 3 valores
2) 1 + 1 + 0.5 = 2.5 valores
3) 1 + 0.5 + 0.5 = 2 valores
4) 0.5 + 0.5 + 1 + 1 = 3 valores

NOTE:
a) Responda às perguntas **na vossa folha de prova**, justificando-as,
b) Na vossa folha de prova indique os métodos, os algoritmos, passos, … usados.
c) Indique claramente o sistema de eixos usado.
d) **Esboce os gráficos**, indicando univocamente os pontos importantes. Se gravar as figuras, salve-as em formato png.
e) **Os ficheiros** devem ser copiados para a caneta de memória do docente presente na sala com **o nome e número do aluno** (para poderem ser consultados quando o docente tiver dúvidas durante a correção).
f) **Os ficheiros poderão ser um por alínea e com a impressão dos resultados**.
g) Tem de usar o seu computador portátil. Pode (e deve) usar os seus programas, assim como outros programas que tenha obtido.
h**) É um teste de consulta, mas não pode aceder à internet, incluindo para consultar documentos do python**.

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Foi medida a atividade radioativa de uma amostra do isótopo radioativo ^{89}Sr em cada 5 semanas, à mesma hora. Os valores medidos da atividade com o tempo são, em mCi:

10.07, 6.293, 3.831, 2.500, 1.409, 0.8775, 0.5369, 0.3522, 0.2173 , 0.1357

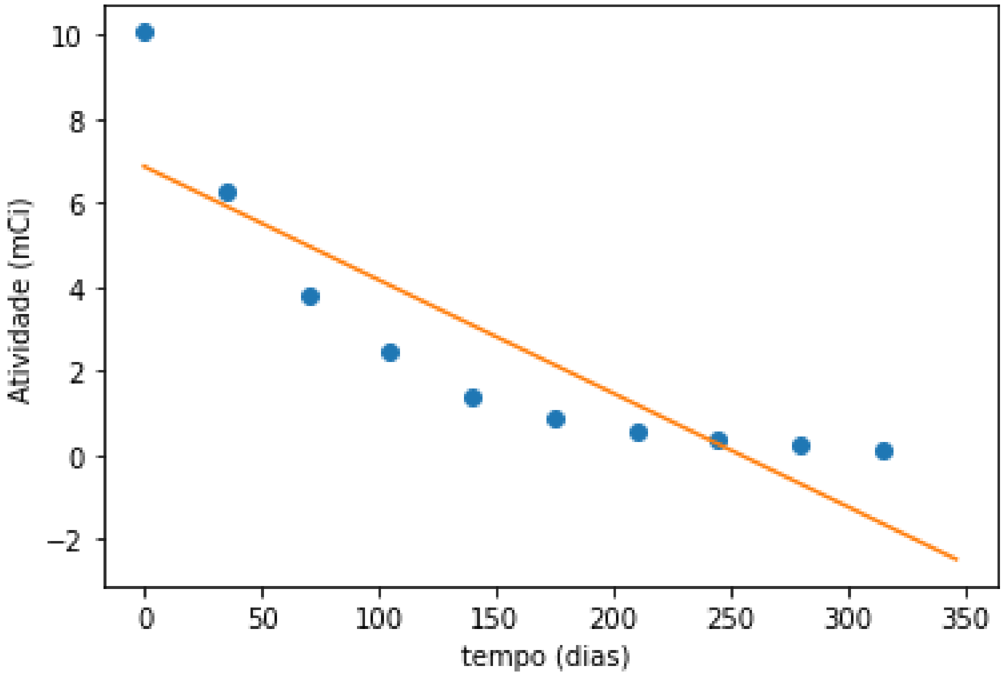
a) Trace o gráfico da atividade a em função do tempo, usando os dados da tabela, e faça um ajuste linear. Indique os valores do declive, e o seu erro, a ordenada na origem, e o seu erro, e o coeficiente de determinação r^2.

b) Trace o gráfico $\log(a)$ em função do tempo. Indique os valores do declive, e o seu erro, e do coeficiente de determinação r^2.

c) Pelos resultados obtidos nas alíneas anteriores, que conclui acerca da relação entre a atividade (a) e o tempo. Justifique. Faça um outro gráfico que mostre essa relação.

Resolução resumida,

a)

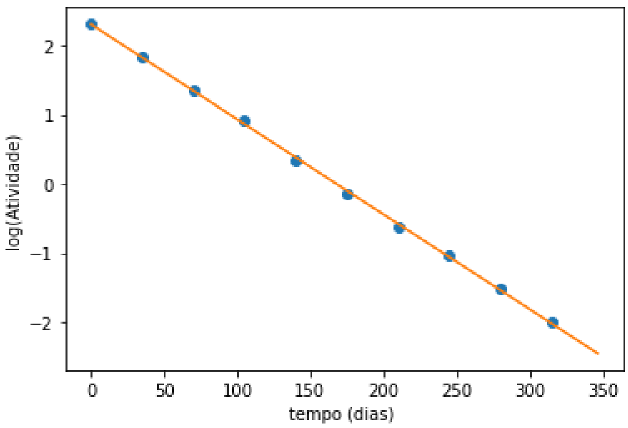


m = - 0.026970285714285714 dm = 0.005321055673851765 mCi/dias (/7= MCi/semana)
m = - 0.18879200000000002 dm = 0.037247389716962356 mCi/semana

b = 6.87008 db= 0.9942332367297836 mCi
r**2 = 0.762545559791159

Muito mau ajuste. Pelo gráfico e por r**2 muito longe de 1.

b)



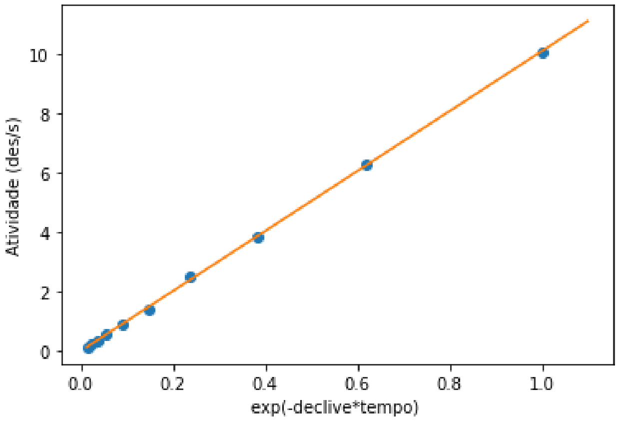
m = - 0.013739375862118196 dm = 0.00010272921303866169 (a em MCi e t em dias)
m = - 0.09617563103482737 dm = 0.0007191044912706318 (a em MCi e t em semana)

b = 2.307084949264381 db= 0.019194837311709255
r**2 = 0.9995529565783836

Muito bom. Pelo gráfico e por r**2 muito perto de 1.

A lei é atividade=C exp(m*tempo)

c) A lei: atividade=C exp(m*tempo)



m = 10.106550649935409 dm = 0.05556156816268989
b = -0.003502223378880935 db= 0.02235339392520397
r**2 = 0.9997582713822771

está justificada e é

$$a = b + m\,x = (0.00\ \pm 0.03) + (10.106 \pm 0.06)\ e^{-(0.0137 \pm 0.0001)t} \quad \text{mCi}$$

2. Uma bola de gole é lançada a 328 km/h, o que constitui o recorde mundial de velocidade, num plano horizontal. Se a bola for batida fazendo um ângulo com a horizontal de 30º, calcule

a) Em ponto cai no chão e quanto demorou? Considere o coeficiente de resistência do ar $C_{res} = 0.5$.

b) Em ponto cai no chão e quanto demorou se a bola for batida com back spin, a fazer uma rotação de velocidade angular $\vec{\omega} = (0,0,209)$ rad/s é perpendicular ao plano de movimento? O eixo OX é na horizontal, o eixo OY na vertical, e o coeficiente de resistência do ar $C_{res} = 0.5$.

c) Considere o problema da alínea b), mas nesta alínea o coeficiente de resistência do ar é reduzido para $C_{res} = 0.2$ quando a velocidade da bola ultrapassa 30 m/s. Esta redução é devida ao efeito que as crateras na superfície da bola provocam no escoamento do ar à sua volta.

Note: Considere sempre o peso do volante e a força de resistência do ar.

$\vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} |\vec{v}|\, \vec{v}$ Dados da bola: diâmetro $= 42.7$ mm e massa $= 45.9$ g.

$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v}$ Outros: $\rho_{ar} = 1.225$ kg/m^3.

Resolução resumida,

a)

```
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   vv=np.sqrt(vx[i]**2+vy[i]**2)
   cres=0.5
   dres=cres/2*area*ro*vv/massa
   ax[i]=-dres*vx[i]
   ay[i]=-g-dres*vy[i]
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
   y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

Método de Euler,

δt (s)	Alcance (m)	Tempo (s)
0.01	163.979	5.529999
0.001	164.073	5.53000
0.0001	164.0856	5.53020000
0.00001	164.08644	5.5301899
Converge para	**164.09**	**5.53**

Alcance considerado pelo x[i], com o correspondente y[i] mais perto de zero

b)

```
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   vv=np.sqrt(vx[i]**2+vy[i]**2)
   cres=0.5
   dres=cres/2*area*ro*vv/massa
   mag=0.5*area*ro*raio
   amx= - mag*omega*vy[i]/massa
   amy= + mag*omega*vx[i]/massa
   ax[i]=-dres*vx[i]+amx
   ay[i]=-g-dres*vy[i]+amy
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
   y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

Método de Euler,

δt (s)	Alcance (m)	Tempo (s)
0.01	177.112882	6.889999
0.001	177.3124	6.895
0.0001	177.3374265	6.89589
0.00001	177.33877	6.895899
Converge para	**177.34**	**6.90**

Alcance considerado pelo x[i], com o correspondente y[i] mais perto de zero

c)

```
vtur=30
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   vv=np.sqrt(vx[i]**2+vy[i]**2)
   cres=0.5
   if vv > vtur:                    # quando vv < 30 volta a cres=0.5
      cres=0.2
   dres=cres/2*area*ro*vv/massa
   mag=0.5*area*ro*raio
   amx= - mag*omega*vy[i]/massa
   amy= + mag*omega*vx[i]/massa
   ax[i]=-dres*vx[i]+amx
   ay[i]=-g-dres*vy[i]+amy
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
   y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

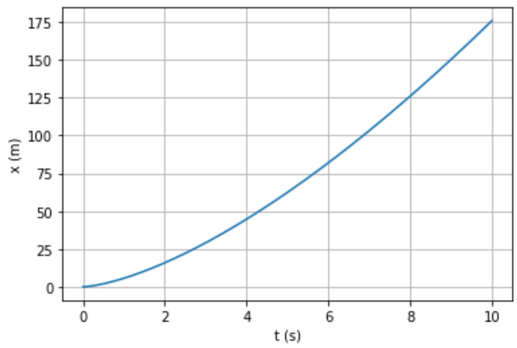
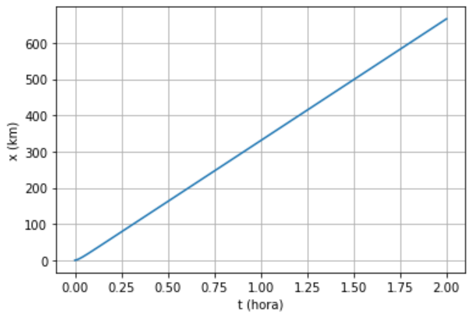
Método de Euler,

δt (s)	Alcance (m)	Tempo (s)
0.01	300.3942	9.92999
0.001	300.519427	9.926999999
0.0001	300.53137	9.9270999
0.00001	300.533371	9.927139
Converge para	**300.53**	**9.93**

Alcance considerado pelo x[i], com o correspondente y[i] mais perto de zero

3. Uma locomotiva elétrica, de massa 200 toneladas, tem a potência de 7 000 kW.
a) Se partir com a velocidade de 0.5 m/s, qual a lei do movimento (espaço percorrido em função do tempo)? Qual a distância percorrida em 2 horas e a velocidade terminal?
b) Se atrelarmos uma carruagem de passageiros de 60 toneladas à locomotiva, qual a distância percorrida em 2 horas e a velocidade terminal?
c) Calcule o trabalho realizado pelas força de resistência do ar e a força de resistência ao rolamento, no sistema da alínea a). Mostre que é da mesma ordem de grandeza da energia consumida pela locomotiva
Note: Considere que a locomotiva usa sempre a mesma potência.
Parâmetros: O coeficiente de resistência ao μ da locomotiva é 0.001 e da carruagem 0.002. O coeficiente de resistência do ar é $C_{res} = 0.9$, e a área frontal da locomotiva é $A = 3.12 \times 4.88\ \mathrm{m}^2$. E $\rho_{ar} = 1.225\ \mathrm{kg/m}^3$.

Resolução resumida,
a)
```
frolc=-niu*m*g
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    fr=-.5*cres*area*denar*vx[i]**2
    floc=pot/vx[i]
    ax=(floc+frolc+fr)/m
    vx[i+1]=vx[i]+ax*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
```

	
Nos 1ºs 10 segundos movimentos acelerado	Depois movimento uniforme

Método de Euler,

δt (s)	Distância percorrida (km)	Velocidade (km/h)
0.01	665.98	335.88
0.001	665.97	335.88
Converge para	**665.97**	**335.88**

b)
```
niu=0.001
niuc=0.002
ml=200*1000
mc=60*1000
m=ml+mc
frolc=-niu*ml*g-niuc*mc*g

for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    fr=-.5*cres*area*denar*vx[i]**2
    floc=pot/vx[i]
    ax=(floc+frolc+fr)/m
    vx[i+1]=vx[i]+ax*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
```

Método de Euler,

δt (s)	Distância percorrida (km)	Velocidade (km/h)
0.01	660.72693	334.1026
0.001	660.72693	334.1026
Converge para	**660.73**	**334.10**

c)

```
print(' Energia fornecida em 2 horas = ',pot*tf/10**9,' GJ') # c)                    50.4  GJ
fun=(frol+fres)*vx
energia_res=dt*((fun[0]+fun[n])*0.5+np.sum(fun[1:n]))    # INTEGRACAO                -49.3GJ
```

São da mesma ordem de grandeza

4. Um corpo de massa 0.5 kg move-se num oscilador duplo de energia potencial

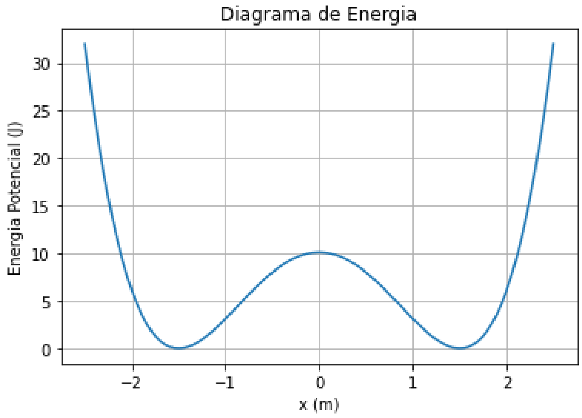
$$E_p = \frac{1}{2}k\left(x^2 - x_{eq}^2\right)^2,$$

em que x_{eq} e $-x_{eq}$ são posições de equilíbrio e k a constante elástica. A força aplicada ao corpo é

$$F_x = -2\, k\, x\, \left(x^2 - x_{eq}^2\right)$$

Considere $k = 4$ N/m e $x_{eq} = 1.5$ m.
a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial (energia potencial em função da posição). Qual o movimento quando a energia total for menor que 2 J?
b) Calcule a lei do movimento, quando o corpo for largado na posição 2 m. Quanto é a sua energia mecânica?
c) Entre que limites se efetua o movimento e qual o período e a frequência do movimento? Apresente os resultados com a precisão de 4 algarismos.
d) O sistema corpo-molas é imerso num meio que amortece, de força $F_x^{(amort)} = -b\, v_x$, $b = 1$ kg/s, e sujeito a uma força exterior $F_x^{(ext)} = 10 \cos t$ N. Caraterize o movimento se o corpo for largado na posição 2 m. Refira nomeadamente o tipo de movimento, limites inferior e superior, a amplitude e frequência.

Resolução resumida,
a)



Como não há forças dissipativas ou de resistência ao movimento, a energia mecânica $E = E_c + E_p$ é constante. E neste caso, vamos considerar para já,

$$E_c + E_p = 2 \text{ J}$$

e o máximo de energia potencial, nas posições em que $E_c = 0$, é 2 J, o que indicamos por

$$\max E_p = 2 \text{ J} = E_{p,max}$$

e x_{lim} os pontos em a energia potencial é máxima. No diagrama de energia tem-se 4 destes pontos, para uma energia potencial menor que 2 J.

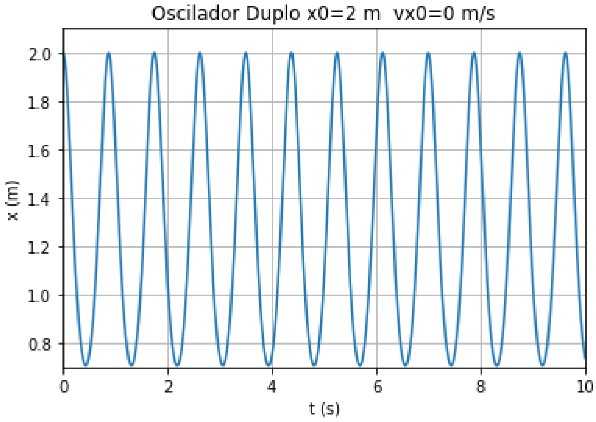
O movimento do corpo processa-se entre os pontos x_{lim} e em que $E_p \leq E_{p,max}$. Pelo gráfico, vimos que temos 2 zonas, cada uma à volta do mínimo de energia potencial, visto existir uma barreira de potencial quando x=0, a cerca de 10 J. Para as energias consideradas < 2 J temos movimento oscilatório à volta de um dos mínimos de energia potencial, sendo este mínimo dependente das condições iniciais.

b)

```
x[0]=2
vx[0]=0
energia[0]=0.5*m*vx[0]**2+0.5*k*(x[0]**2-xeq**2)**2
print('energia=',energia[0])
```

E= 6.125 J

```
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   ax[i]=-2*k/m*x[i]*(x[i]**2-xeq**2)
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
```

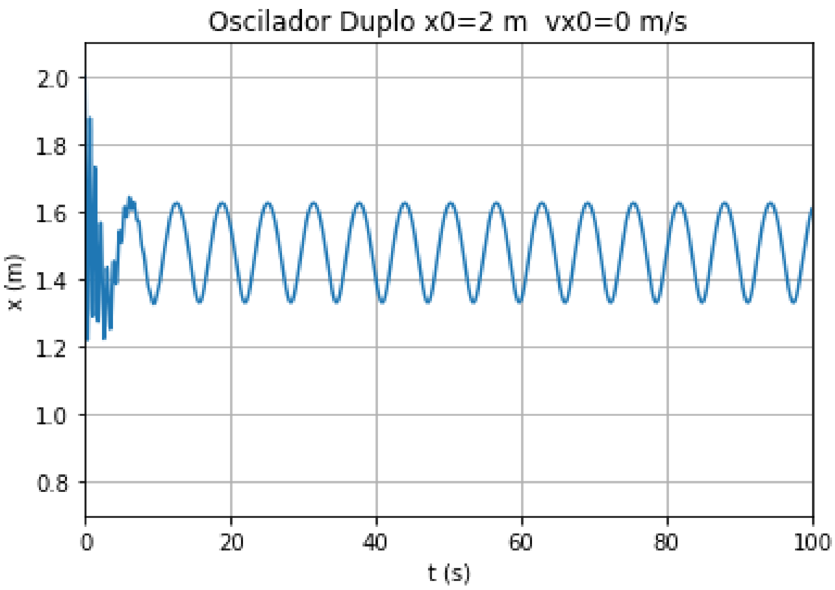


c)

Método de Euler-Cromer, e a interpolação de Lagrange para calcular os máximos

δt (s)	x_{lim} inferior (m)	x_{lim} superior (m)	T (s)	ω (rad/s)
0.01	0.705699	2.00070	0.874846776	7.18204088
0.001	0.70709275	2.00000700	0.874551328	7.18446717
0.0001	0.70710664094	2.000000070	0.874548340	7.18449171
0.00001	0.707106779	2.00000000	.8745493207	7.18448366
Converge para	**0.7071**	**2.000**	**0.8745**	**7.184**

e)



Movimento inicialmente oscilatório e irregular, num regime transiente (ou transitório) seguido por um movimento periódico quase harmónico (parece sinusoidal, o que pode ser verificado se calcularmos os coeficientes de Fourier), que corresponde ao regime estacionário.

No regime estacionário, usando Método de Euler-Cromer,

δt (s)	x_{lim} inferior (m)	x_{lim} superior (m)	T (s)	ω (rad/s)
0.00001	1.330	1.624	6.283	1.000000