

Modelação de Sistemas Físicos

5ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 3 Forças e movimento

Cap. 4 Movimento no plano e no espaço

Bibliografia:

Cap. 3: Serway, cap. 3 e 5; Sørenssen, cap. 5 e 6; Villate, cap. 4

Cap. 4: Serway, cap. 4; Sørenssen, cap. 6; Villate, cap. 6



$$\text{Força} = \text{massa} \times \text{aceleração}$$

2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m \vec{a}$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.

A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo.

A massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

Se as forças aplicadas ao um objeto forem conhecidas,
pode-se determinar o movimento do objeto – a sua posição e velocidade.

Forças determinam-se por experiências

Ou por modelos teóricos, que aplicados aos dados experimentais, concordam com eles.

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea):	$x(t),$	$y(t),$	$z(t)$	$\vec{r}(t) = (x, y, z)$
Velocidade instantânea:	$v_x(t) = \frac{dx}{dt},$	$v_y(t) = \frac{dy}{dt},$	$v_z(t) = \frac{dz}{dt}$	
Aceleração instantânea:	$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$	$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt},$	$a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}$	

E se souber a aceleração instantânea? Sim, se soubermos as Forças aplicadas

$$\begin{cases} F_x(t) = ma_x(t) \\ F_y(t) = ma_y(t) \\ F_z(t) = ma_z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x(t) = m \frac{dv_x(t)}{dt} \\ F_y(t) = m \frac{dv_y(t)}{dt} \\ F_z(t) = m \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{F}(t) = m \vec{a}(t) \Rightarrow \vec{F}(t) = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

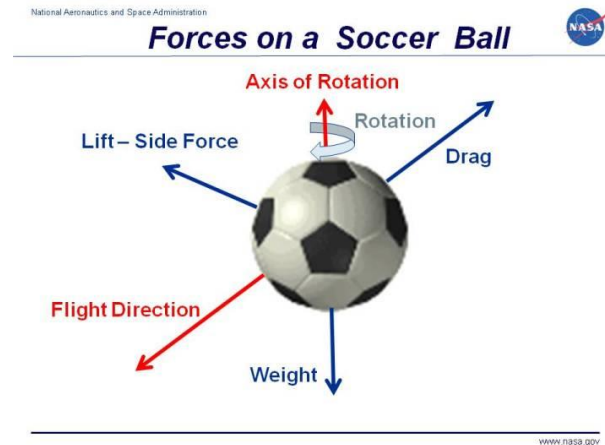
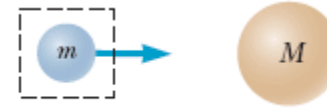
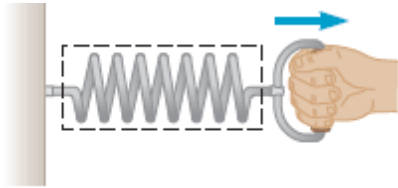
$\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ podem ser calculados

(i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Cap. 3 Forças e vetores

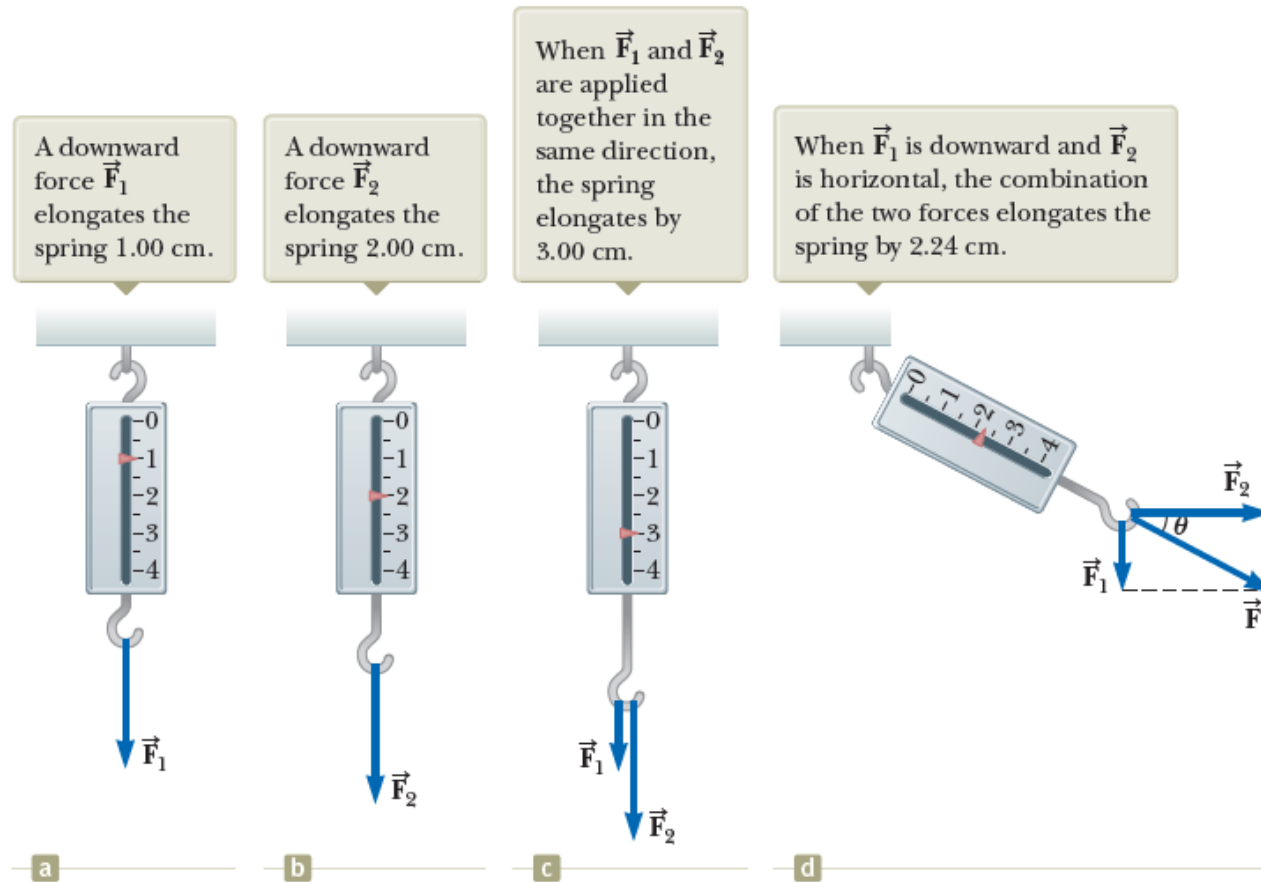
O estudo e a previsão de trajetórias requer o conhecimento das Forças aplicadas ao objeto.

As forças são obtidas por realização de experiências e medições



As forças são obtidas por realização de experiências e medições.

Exemplo: A mola e a força elástica



$$\begin{cases} F_x = -k x \\ F_y = -k y \\ F_z = -k z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = -k \vec{r}$$

Força de resistência do ar

Experiências no volante de badminton:

- Força oposta à velocidade
- Proporcional ao quadrado da velocidade

$$\vec{F} = -C(v) \hat{v} \quad \vec{v} = |\vec{v}| \hat{v} \quad \hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$$

$$|\vec{F}| \propto |\vec{v}|^2$$

$$\vec{F} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v}$$

A 1D:

$$\vec{v} = v_x \hat{i}$$

$$|\vec{v}| = |v_x| \quad \hat{v} = \frac{v_x}{|v_x|} \hat{i}$$

$$F_x = -m D |v_x|^2 \frac{v_x}{|v_x|} = -m D |v_x| v_x$$

Expressão válida para qualquer sentido do eixo e sentido da velocidade.

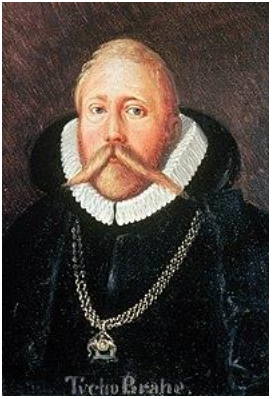


Gravidade revela-se como:

- Força entre corpos celestes (planetas, estrelas, cometas, asteroides) e satélites e sondas espaciais
- Peso

Força entre corpos celestes:

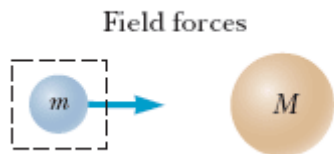
- Observação experimental de Tycho Brahe:
 - 3 Leis de Kepler das leis planetárias (em concordância com as observações experimentais de Tycho Brahe:
 - planetas com órbitas elípticas
 - o segmento que une cada planeta ao sol, varre áreas iguais em tempos iguais.
 - o quadrado do período de translação de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita
- Lei da gravidade de Newton (prevê as leis de Kepler)
 - Força atrativa
 - Na direção dos dois corpos



Tycho Brahe 1546-1601



Joahannes Kepler
1571-1630



$$|\vec{F}_{grav}| = G \frac{m M}{d^2},$$

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

d distância entre 2 corpos

$$\vec{F}_{grav} = G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

$$|\vec{r}| = d,$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Gravidade revela-se como:

- Força entre corpos celestes (planetas, estrelas, cometas, asteroides) e satélites e sondas espaciais
- Peso

Peso:

Força vertical,
aponta para baixo

$$|\vec{P}| = m |\vec{g}|, \quad |\vec{g}| = g = 9.80 \text{ m/s}^2 \text{ aceleração da gravidade}$$

\vec{P} é a força gravítica que a Terra exerce em qualquer corpo de massa m .

R_T Distância do corpo (na superfície da Terra) até ao centro da Terra

$$|\vec{F}_{grav}| = G \frac{m M_{Terra}}{R_T^2}$$

$$|\vec{P}| = m |\vec{g}|$$

$$|\vec{g}| = G \frac{M_{Terra}}{R_T^2}$$

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

$$M_{Terra} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg (valor médio)}$$

$$R_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$G \frac{M_{Terra}}{R_T^2} = 9.83 \text{ m/s}^2$$

- Lei elétrica entre duas cargas, q e Q (por experiências e medições)

Força atrativa entre cargas de sinais opostos e repulsiva entre cargas de igual sinal

Na direção das duas cargas

$$|\vec{F}_{elét}| = K \frac{qQ}{d^2},$$

$$K = 8.987551 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \text{ (constante de Coulomb)}$$

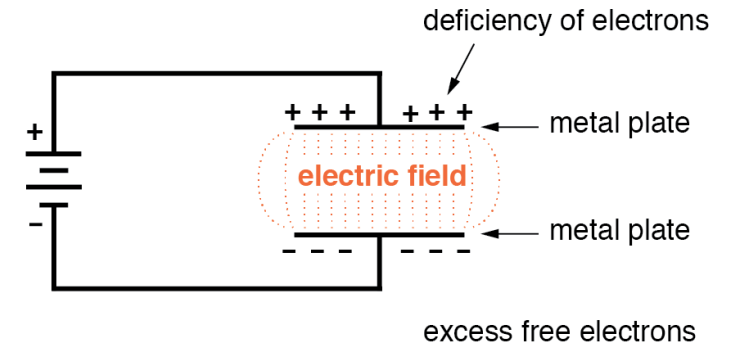
d distância entre 2 cargas



Charles-Augustin de Coulomb
1736-1806

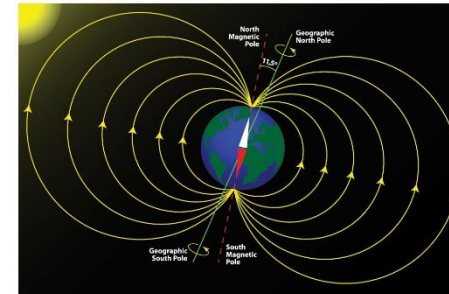
- Força elétrica aplicada a um corpo de carga elétrica q , num campo elétrico $\vec{E}_{elét}$

$$\vec{F}_{elét} = q \vec{E}_{elét}$$



- Força magnética aplicada a um corpo de carga elétrica q , num campo magnético \vec{B}_{mag}

$$\vec{F}_{mag} = q \vec{v} \times \vec{B}_{mag}$$



Charles-Augustin de Coulomb
1736-1806

Força normal \vec{N} ou \vec{n} é uma força de contato perpendicular à superfície, e oposto.
intensidade variável, a necessária para equilibrar o livro
(impede o livro de cair e de entrar dentro da mesa)

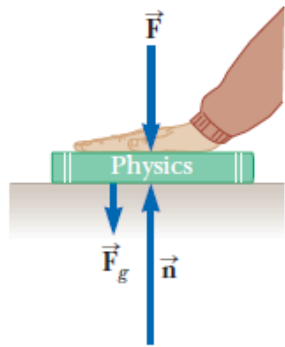


Figure 5.9 When a force \vec{F} pushes vertically downward on another object, the normal force \vec{n} on the object is greater than the gravitational force: $n = F_g + F$.

Forças aplicadas ao livro:

Peso: \vec{P} ou \vec{F}_g

Normal: \vec{n}

Força exercida pela mão: \vec{F}

Não existe movimento: $\vec{P} + \vec{n} + \vec{F} = 0$

ou $\vec{n} = \vec{F} - \vec{P}$

Força normal \vec{N} ou \vec{n} é uma força de contato perpendicular à superfície, e oposto.
intensidade variável, a necessária para equilibrar o livro
(impede o livro de cair e de entrar dentro da mesa)

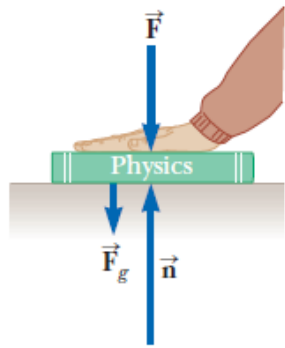


Figure 5.9 When a force \vec{F} pushes vertically downward on another object, the normal force \vec{n} on the object is greater than the gravitational force: $n = F_g + F$.

Qual a força normal aplicada ao livro (em função do peso e da força exercida pela mão)?

Forças aplicadas ao livro:

Peso: \vec{P} ou \vec{F}_g

Normal: \vec{n}

Força exercida pela mão: \vec{F}

Não existe movimento: $\vec{P} + \vec{n} + \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{n} = -\vec{F} - \vec{P}$

Projetando no eixo OY

$$n_y = -F_y - P_y$$

$$+|\vec{n}| = -(-|\vec{F}|) - (-|\vec{P}|)$$

$$|\vec{n}| = |\vec{F}| + |\vec{P}|$$

Força Tensão

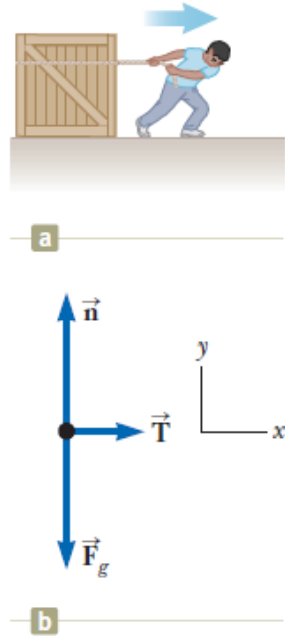


Figure 5.8 (a) A crate being pulled to the right on a frictionless floor. (b) The free-body diagram representing the external forces acting on the crate.

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea):	$x(t),$	$y(t),$	$z(t)$	$\vec{r}(t) = (x, y, z)$
Velocidade instantânea:	$v_x(t) = \frac{dx}{dt},$	$v_y(t) = \frac{dy}{dt},$	$v_z(t) = \frac{dz}{dt}$	
Aceleração instantânea:	$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$	$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt},$	$a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}$	

E se souber a aceleração instantânea? Sim, se soubermos as Forças aplicadas

$$\begin{cases} F_x(t) = ma_x(t) \\ F_y(t) = ma_y(t) \\ F_z(t) = ma_z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x(t) = m \frac{dv_x(t)}{dt} \\ F_y(t) = m \frac{dv_y(t)}{dt} \\ F_z(t) = m \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{F}(t) = m \vec{a}(t) \Rightarrow \vec{F}(t) = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ podem ser calculados

(i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Prob. 3.20

Um carro desce, sem fricção, uma colina inclinada de ângulo θ , com o motor desligado. Calcule a aceleração que adquire nessa descida.

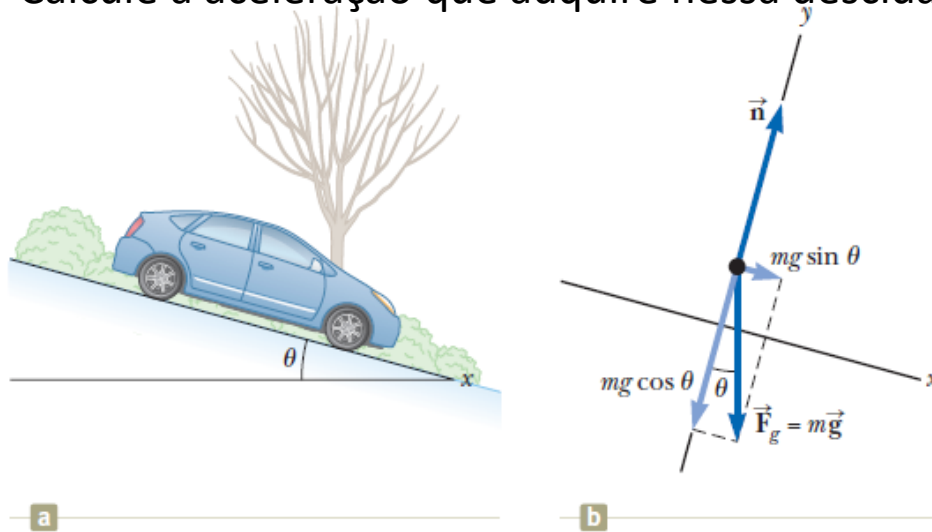


Figure 5.11 (Example 5.6) (a) A car on a frictionless incline. (b) The free-body diagram for the car. The black dot represents the position of the center of mass of the car. We will learn about center of mass in Chapter 9.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{n} = m\vec{a}$$

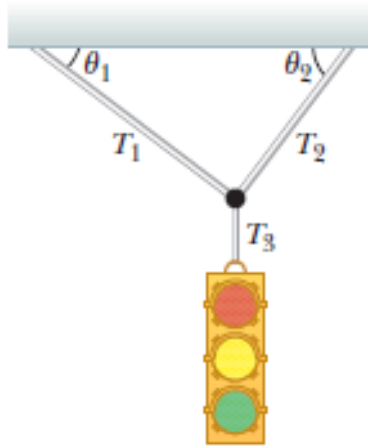
$$\vec{F}_g = \vec{P}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x + n_x = ma_x \\ F_y = P_y + n_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = +m g \sin \theta + 0 = ma_x \\ F_y = -m g \cos \theta + |\vec{n}| = 0 \end{cases} \Rightarrow a_x = g \sin \theta$$

a força normal anula as forças na direção OY

Cap. 3 Forças e vetores



- O semáforo não cai porque a força resultante é nula.
- $\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$
- 1ª lei de Newton

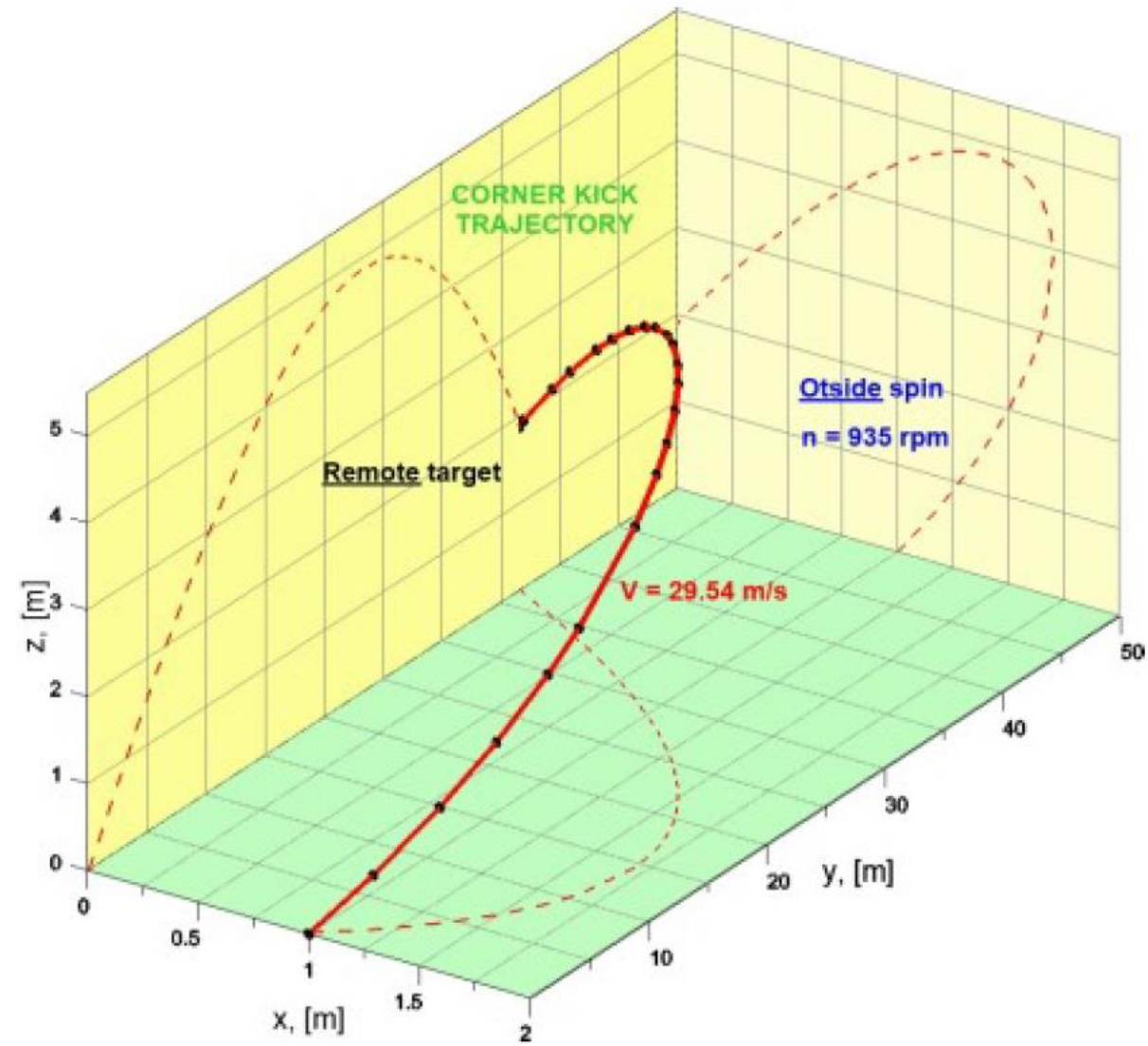


Fig. 10. Successful corner kick to remote target.

Cap. 2 Movimento a 1 dimensão

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

E se souber a aceleração instantânea?

Cálculo integral: $a_x(t)$

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^t a_x(t) dt$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

Calculado (i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Cap. 4 Movimento a 3 dimensões

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea):	$x(t),$	$y(t),$	$z(t)$	$\vec{r}(t) = (x, y, z)$
Velocidade instantânea:	$v_x(t) = \frac{dx}{dt},$	$v_y(t) = \frac{dy}{dt},$	$v_z(t) = \frac{dz}{dt}$	
Aceleração instantânea:	$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$	$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt},$	$a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}$	

E se souber a aceleração instantânea? Sim, se soubermos as Forças aplicadas

$$\begin{cases} F_x(t) = ma_x(t) \\ F_y(t) = ma_y(t) \\ F_z(t) = ma_z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x(t) = m \frac{dv_x(t)}{dt} \\ F_y(t) = m \frac{dv_y(t)}{dt} \\ F_z(t) = m \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{F}(t) = m \vec{a}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(t) = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ podem ser calculados

(i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Cap. 4 Movimento a 3D

Prob. 3.20

Um carro desce, sem fricção, uma colina inclinada de ângulo θ , com o motor desligado. Calcule a aceleração que adquire nessa descida.

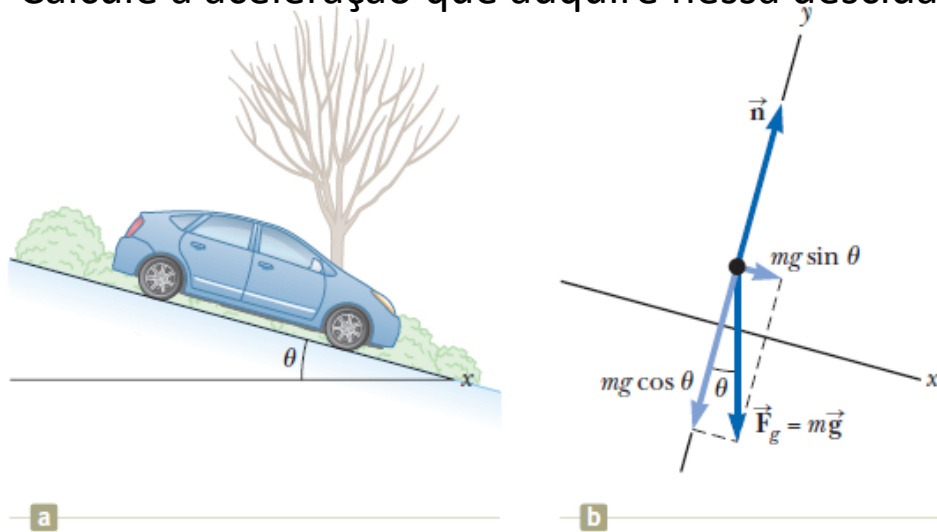


Figure 5.11 (Example 5.6) (a) A car on a frictionless incline. (b) The free-body diagram for the car. The black dot represents the position of the center of mass of the car. We will learn about center of mass in Chapter 9.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{n} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_g = \vec{P}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x + n_x = ma_x \\ F_y = P_y + n_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = m g \sin \theta + 0 = ma_x \\ F_y = -m g \cos \theta + |\vec{n}| = 0 \end{cases} \Rightarrow a_x = g \sin \theta$$

a força normal anula as forças na direção OY

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

Modelo: O movimento ou a trajetória da bola é devido à bola estar sempre sujeita à força da gravidade.

Aproximação:

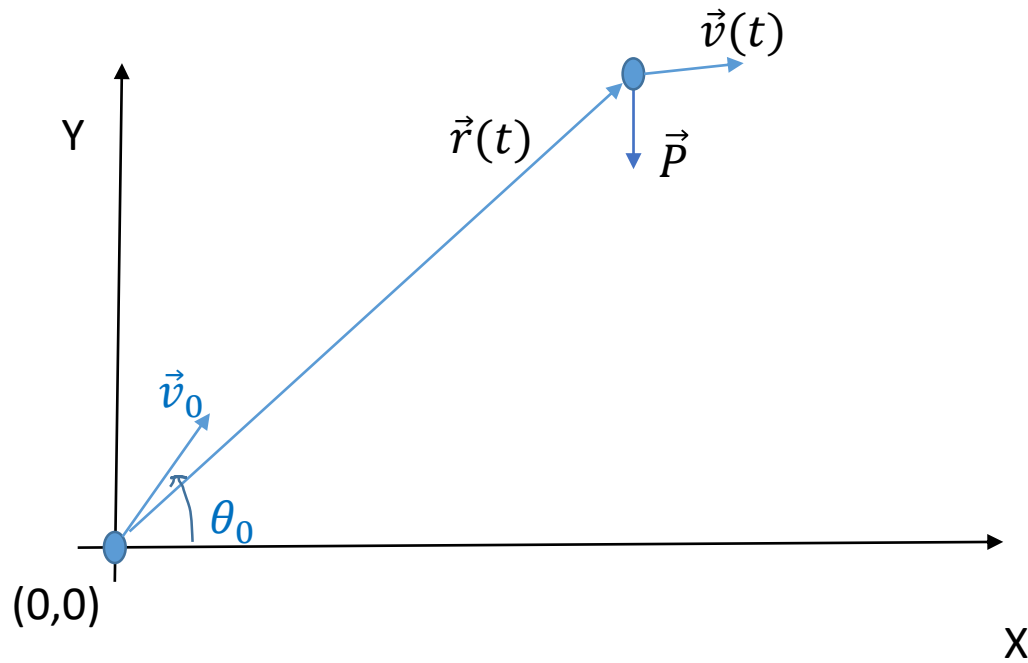
Num 1º estudo, não vamos considerar o efeito da resistência do ar, a rotação da bola, o efeito de altitude, impulsão, a rotação da Terra, ...

$$\vec{F} = m \vec{a} \text{ em que } \vec{F} = \vec{P}$$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo,

- na posição \vec{r}_0
- e inicia o seu movimento com
 - uma velocidade \vec{v}_0 ,
 - de rapidez (magnitude) $|\vec{v}_0|$
 - e a fazer um ângulo θ_0 com a horizontal (solo)

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.



$$\vec{r}_0 = (0,0)$$

$$\vec{v}_0 = (|\vec{v}_0| \cos \theta_0, |\vec{v}_0| \sin \theta_0)$$

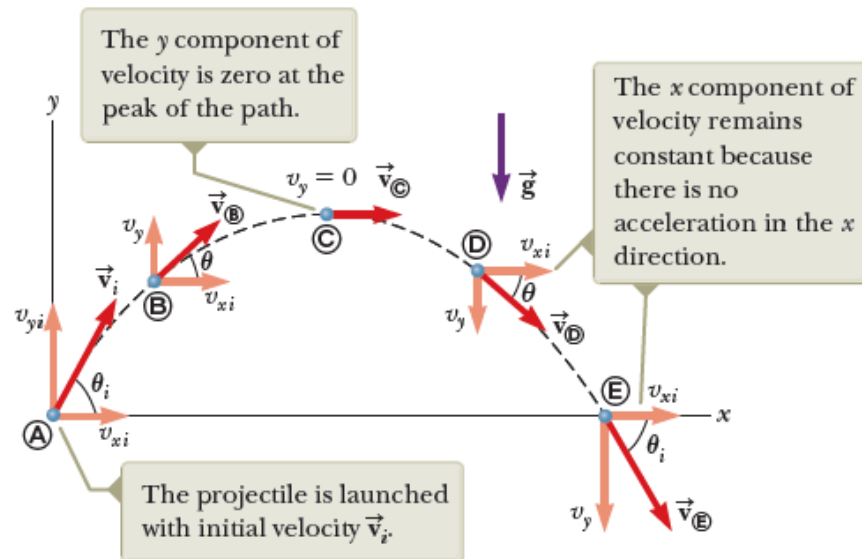
$$\begin{aligned} \vec{P} = m \vec{a} &\Leftrightarrow \begin{cases} P_x = m a_x \\ P_y = m a_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m a_x \\ -|\vec{P}| = m a_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m a_x \\ -mg = m a_y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \quad |\vec{P}| = mg \end{aligned}$$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo,

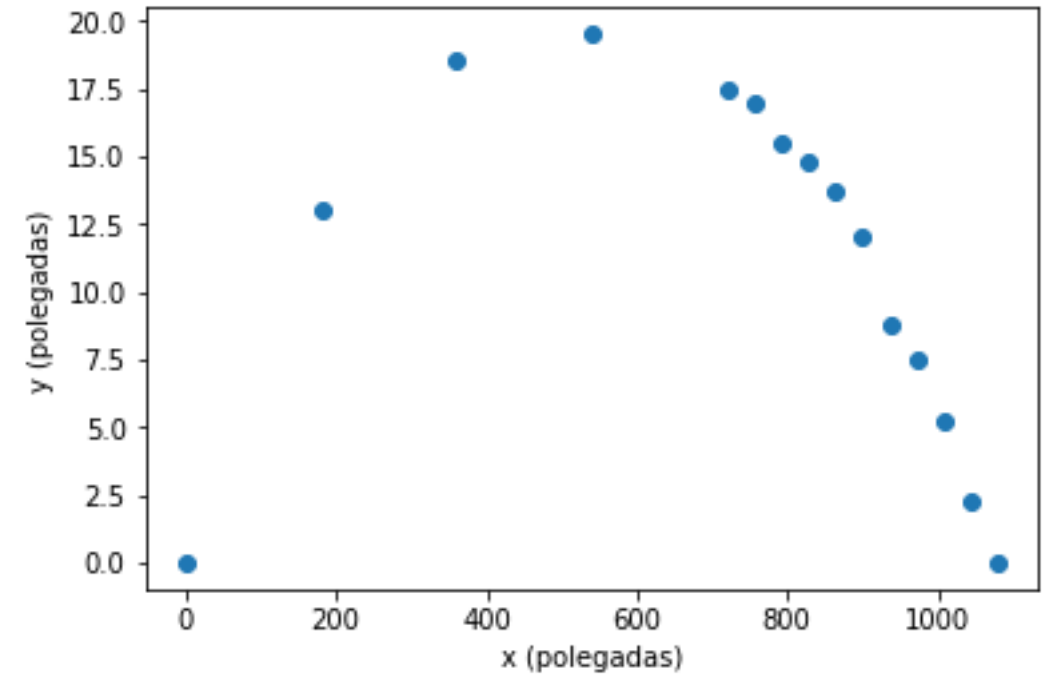
- na posição $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$
- e inicia o seu movimento com
uma velocidade $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$
de rapidez (magnitude) $|\vec{v}_0|$
e a fazer um ângulo θ_0 com a horizontal (solo)

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

O que esperamos:



Medições realizadas:



Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0, 0) \quad \text{e} \quad \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (|\vec{v}_0| \cos \theta_0, |\vec{v}_0| \sin \theta_0)$$

$$t_0 = 0 \text{ s}$$

$$\begin{cases} v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^t a_x(t) dt \\ v_y(t) - v_y(t_0) = \int_{t_0}^t a_y(t) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) - v_{0x} = \int_0^t 0 dt \\ v_y(t) - v_{0y} = \int_0^t -g dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v_x(t) dt \\ y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t v_y(t) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) - x_0 = \int_0^t v_{0x} dt \\ y(t) - y_0 = \int_0^t [v_{0y} - gt] dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \\ y(t) = y_0 + v_{0y} \frac{x - x_0}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} (x(t) - x_0) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} (x(t) - x_0)^2$$

equação da parábola

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

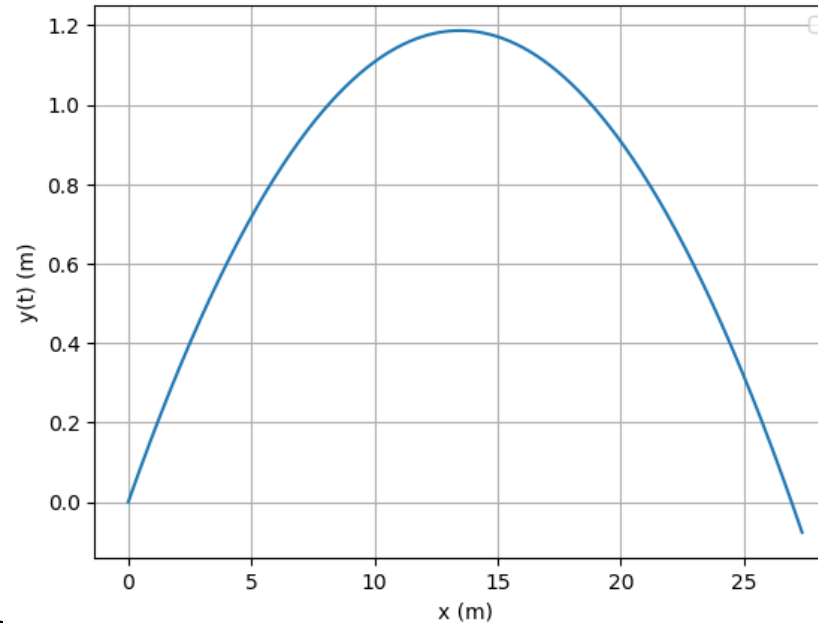
$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0, 0) \quad \text{e} \quad \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (|\vec{v}_0| \cos \theta_0, |\vec{v}_0| \sin \theta_0)$$

$$t_0 = 0 \text{ s}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \\ x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} (x(t) - x_0) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} (x(t) - x_0)^2 \quad \text{Parabola}$$

Trajetória de uma bola sem resistência do ar $v_0=100 \text{ km/h}$, $\theta=10^\circ$



Perguntas.

1. Qual a altura máxima e quando a atinge?
2. Qual o alcance máximo e quando o alcança?

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x(t) - x_0) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} (x(t) - x_0)^2 \quad \text{Parabola}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Perguntas:

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)?

$$\begin{aligned} \text{quando } \frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0 & \quad t_m = \frac{v_{0y}}{g} \quad \text{e} \quad y_m = y_0 + \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} \\ \text{ou, } \frac{dy(x)}{dx} = 0 & \end{aligned}$$

2. Qual o alcance máximo (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo} ?

$$\begin{aligned} \text{quando } y=0 & \quad \text{quando } y_0 = 0 \quad \text{temos } t_{solo} = \frac{2 v_{0y}}{g} \quad \text{e} \\ & \quad x_0 = 0 \quad x_{solo} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} \end{aligned}$$

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

Perguntas:

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)?

$$\text{quando } \frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0 \quad t_m = \frac{v_{0y}}{g} \quad \text{e} \quad y_m = y_0 + \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g}$$

$$\text{ou, } \frac{dy(x)}{dx} = 0$$

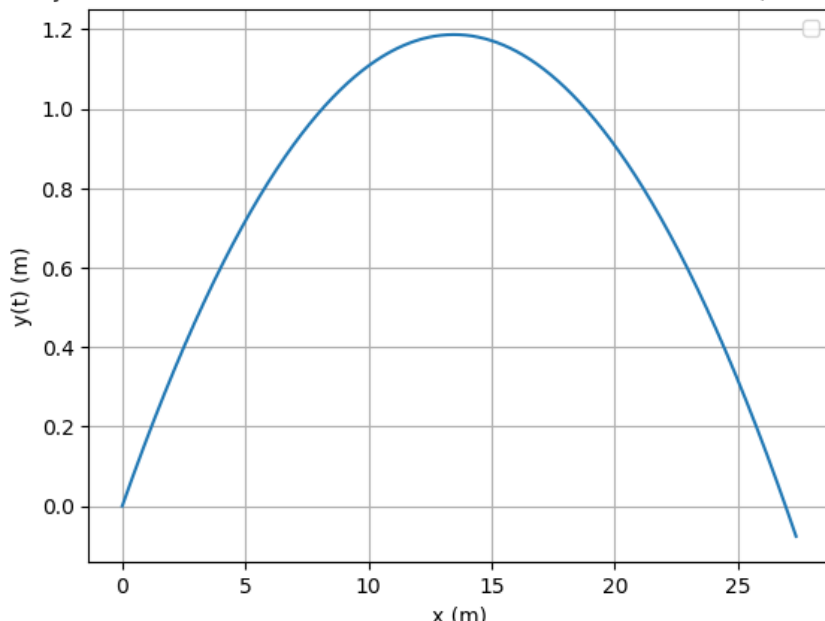
2. Qual o alcance máximo (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo} ?

quando $y=0$

$$\text{quando } y_0 = 0 \quad \text{temos } t_{solo} = \frac{2 v_{0y}}{g} \quad \text{e}$$

$$x_0 = 0 \quad x_{solo} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g}$$

Trajетória de uma bola sem resistência do ar $v_0=100$ km/h, $\theta=10^\circ$



$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$\vec{v}_0 = (27.36; 4.82) \text{ m/s}$$

$$t_m = 0.49 \text{ s}$$

$$y_m = 1.19 \text{ m}$$

$$t_{solo} = 0.98 \text{ s}$$

$$x_{solo} = 26.9 \text{ m}$$

Problemas cap 4

1. Uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10° com o campo (horizontal).

d) Desenvolva um programa que obtenha a lei do movimento e a lei da velocidade em função do tempo, usando o método de Euler. Tem confiança que o seu programa está correto?

e) Considere agora a resistência do ar. A força de resistência do ar ao movimento da bola é:

$$\begin{cases} F_x^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_y^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

em que $D = g/v_T^2$, e a velocidade terminal é $v_T = 100$ km/h. Atualize o seu programa de modo a considerar a força de resistência do ar. Faça o gráfico da altura em função da distância percorrida na horizontal.

f) Nas condições da alínea e), determine qual a altura máxima atingida pela bola e em que instante? Tem confiança no seu resultado?

Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar.

Como sabemos a força e a aceleração devido à resistência do ar, podemos integrar numericamente usando o método de Euler!

Perguntas:

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)?

$$\text{quando } \frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0 \quad t_m = ? \quad \text{e} \quad y_m = ?$$

$$\text{ou, } \frac{dy(x)}{dx} = 0$$

2. Qual o alcance máximo (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo} ?

$$\text{quando } y=0 \quad \text{quando } y_0 = 0 \quad \text{temos } t_{solo} = ? \quad \text{e}$$

$$x_0 = 0 \quad x_{solo} = ?$$

As respostas a estas perguntas podemos obtê-las com o procedimento usado no problema 2.7.

Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar.

$$\vec{F} = \vec{P} - m D |\vec{v}|^2 \hat{v} \quad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad D = g/v_T^2$$

Esta força não altera o plano do movimento. Temos um problema a 2D

$$\begin{cases} F_x = P_x - m D |\vec{v}| v_x = m a_x \\ F_y = P_y - m D |\vec{v}| v_y = m a_y \end{cases}$$

Como sabemos a força e a aceleração devido à resistência do ar, podemos integrar numericamente usando o método de Euler!

Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar no plano de lançamento.

$$\begin{cases} F_x = P_x - m D |\vec{v}| v_x = m a_x \\ F_y = P_y - m D |\vec{v}| v_y = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x - m D |\vec{v}| v_x = m a_x \\ F_y = P_y - m D |\vec{v}| v_y = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = -m D |\vec{v}| v_x = m a_x \\ F_y = -m g - m D |\vec{v}| v_y = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = -D |\vec{v}| v_x \\ a_y = -g - D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

1º Cálculo da velocidade por integração com o método de Euler das duas relações diferenciais:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$$

Num ciclo

a 2D

$$\begin{aligned} v_x(t + \delta t) &\approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t \\ v_y(t + \delta t) &\approx v_y(t) + a_y(t) \times \delta t \end{aligned}$$

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)
    dres=g/vt**2      # D
    ax[i]=-dres*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
```


Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar no plano de lançamento.

$$\begin{cases} F_x = P_x - m D |\vec{v}| v_x = m a_x \\ F_y = P_y - m D |\vec{v}| v_y = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x - m D |\vec{v}| v_x = m a_x \\ F_y = P_y - m D |\vec{v}| v_y = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = -m D |\vec{v}| v_x = m a_x \\ F_y = -m g - m D |\vec{v}| v_y = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = -D |\vec{v}| v_x \\ a_y = -g - D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

2º Cálculo da posição por integração com o método de Euler das duas relações diferenciais:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

a 2D

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

$$y(t + \delta t) \approx y(t) + v_y(t) \times \delta t$$

Num ciclo

for i in range(n):

t[i+1]=t[i]+dt

vv=np.sqrt(vx[i]**2 + vy[i]**2)

dres=g/vt**2 # D

ax[i]=-dres*vv*v_x[i]

ay[i]=-g-dres*vv*v_y[i]

vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt

vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt

x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt

y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt

Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar no plano de lançamento.

$$\begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

1º Cálculo da velocidade por integração com o método de Euler

2º Cálculo da posição velocidade por integração com o método de Euler

Num ciclo

for i in range(n):

 t[i+1]=t[i]+dt

 vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)

 dres=g/vt**2 # D

 ax[i]=-dres*vv*vx[i]

 ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]

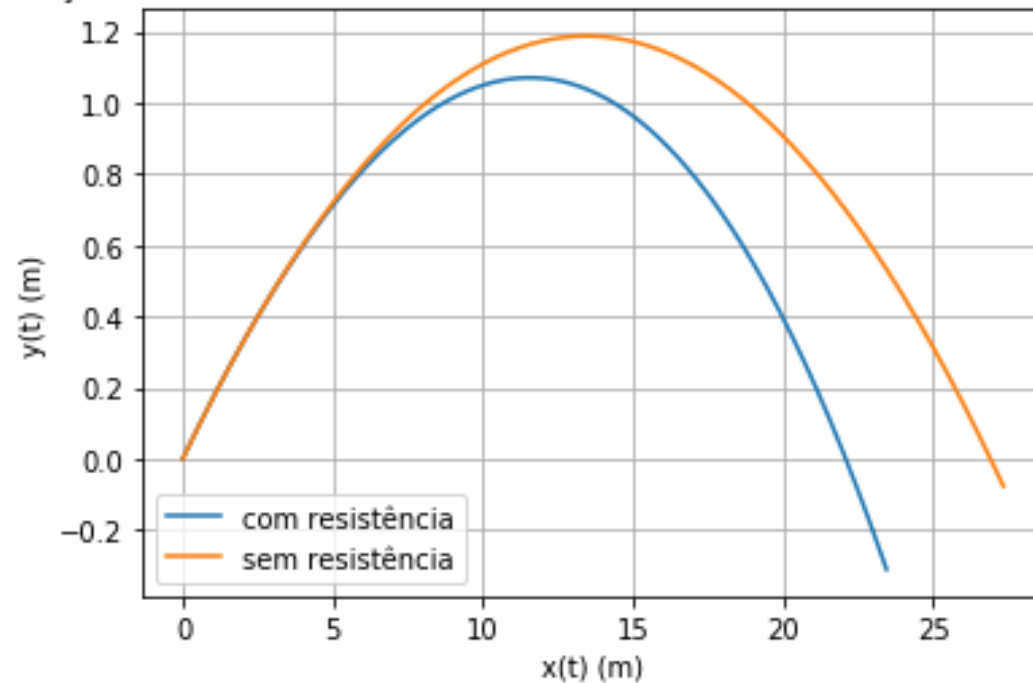
 vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt

 vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt

 x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt

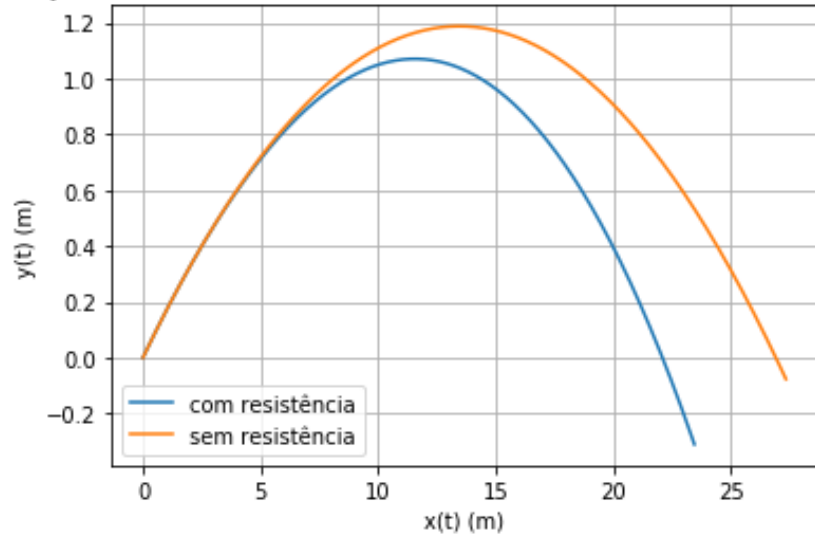
 y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt

Trajétória de uma bola sem e com resistência do ar v0=100 km/h, 10º



Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar no plano de lançamento.

Trajetória de uma bola sem e com resistência do ar $v_0=100 \text{ km/h}$, 10°



Perguntas:

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)?

quando $\frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0$

ou, $\frac{dy(x)}{dx} = 0$

2. Qual o alcance máximo (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo} ?

quando $y=0$