Departamento de Física
Universidade de Aveiro

# Modelação de Sistemas Físicos

## 8ª Aula Teórica

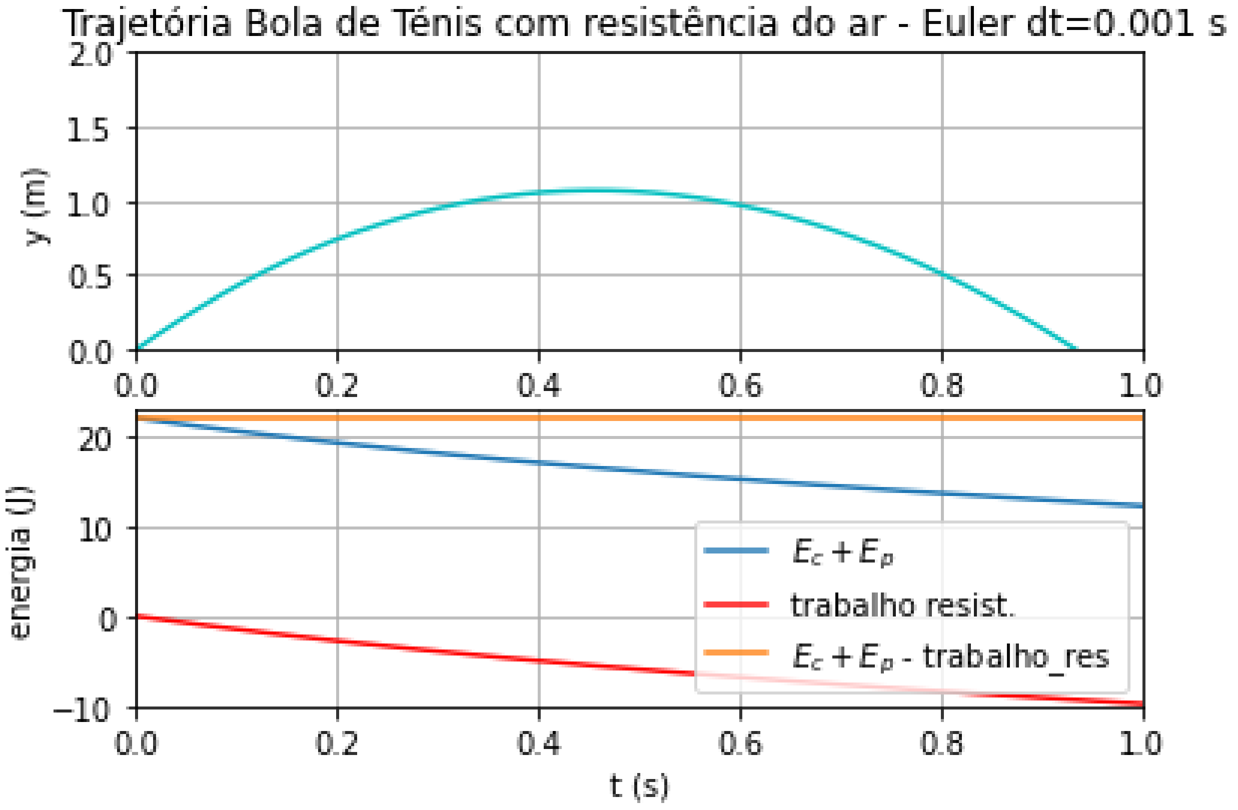
Sumário:
Cap. 5 Lei da Conservação da energia: Trabalho realizado por forças não conservativas.
Integração numérica.
Cap. 6 lei de conservação do momento: Momento e colisões

Bibliografia:
Cap. 6: Serway, cap. 9; Sørenssen, cap. 11 e 12;

# Trabalho de forças não conservativas

## Ex: Movimento da bola de ténis com resistência do ar

$$E(0) = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$



## Cálculo Trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

$\boldsymbol{W} = \int_{\boldsymbol{C}} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{r}}$ e $d\vec{r} = \vec{v}\, dt$

$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( F_{res,x}\, v_x\, dt + F_{res,yx}\, v_y\, dt + F_{res,z} v_z\, dt \right)$$

$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,z} v_z\, dt$$

Ex: Movimento da bola de ténis com resistência do ar ( a 2 dimensões )

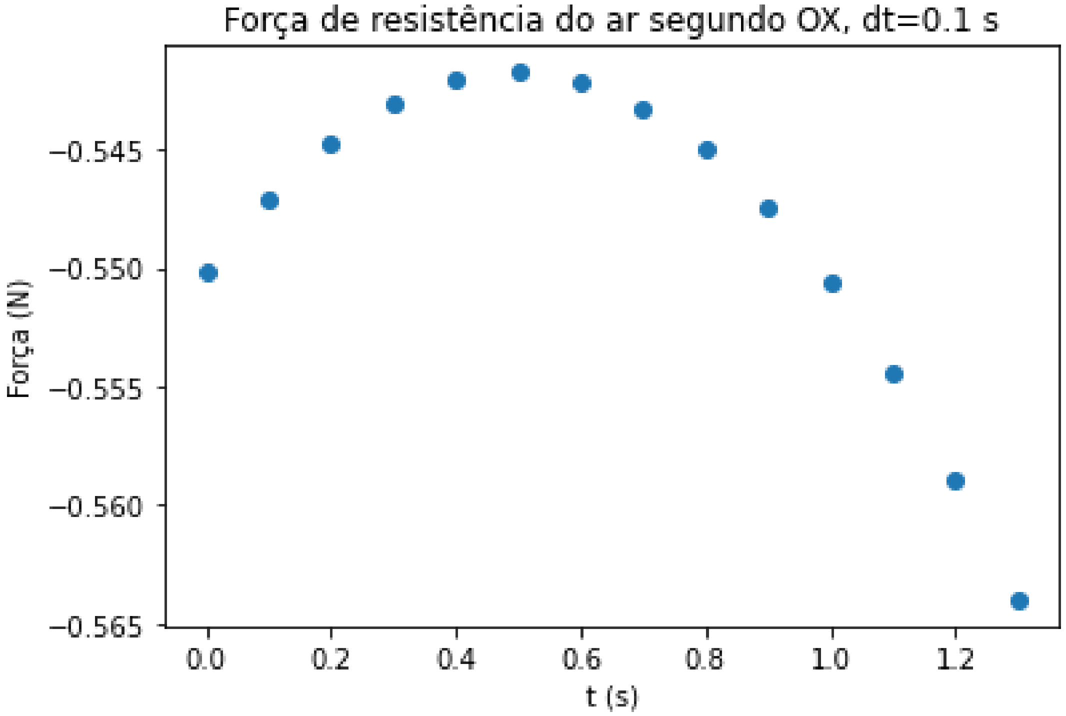
$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$

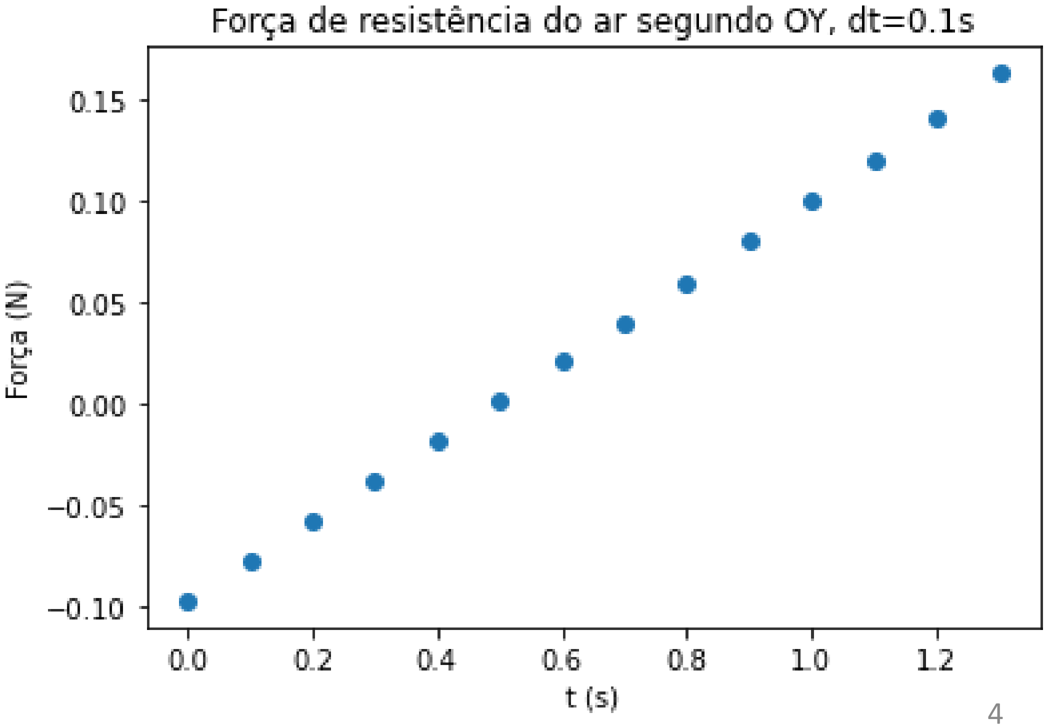
## Cálculo Trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

### Problemas cap 5  Bola de Ténis

**3.** Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$



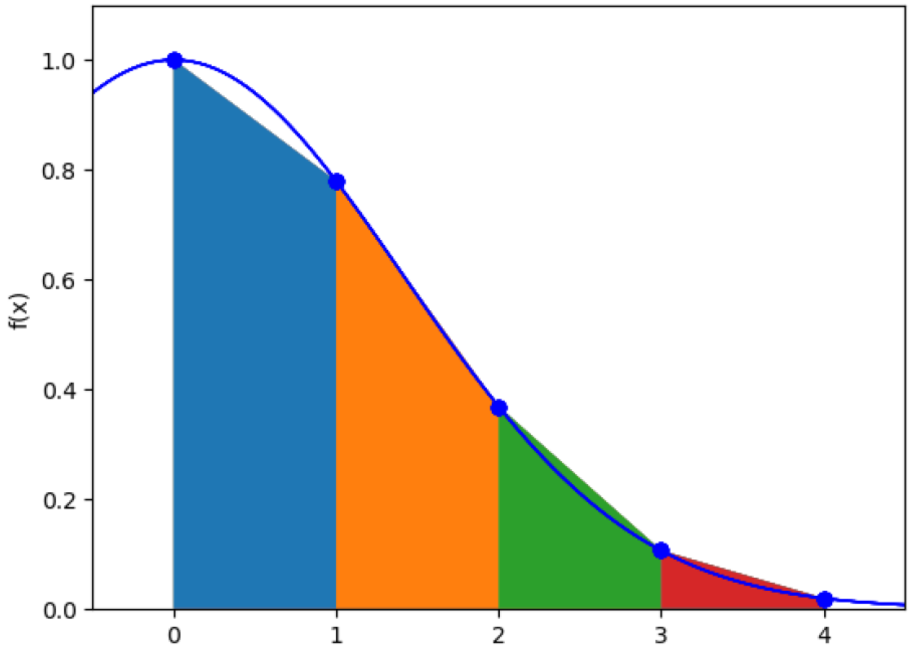
# Integração numérica a 1 dimensão:

Quando temos uma função $f(x)$ expressa só em pontos $x_i$, de í**ndices** $\boldsymbol{i = 0, 1, 2, 3, \dots, n}$, igualmente espaçados por $\delta x$, num total de $\boldsymbol{n+1}$ **elementos.** O integral desta função de pontos discretos, entre dois pontos $a$ e $b$

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

e onde $n = (b-a)/\delta x$ e $x_i = a + i\,\delta x$, obtêm-se facilmente por integração numérica.

**A interpretação geométrica do integral é a área** limitada pela função entre os dois pontos extremos $a$ e $b$. Na figura abaixo $a = 0$ e $b = 4$.



## Integração numérica

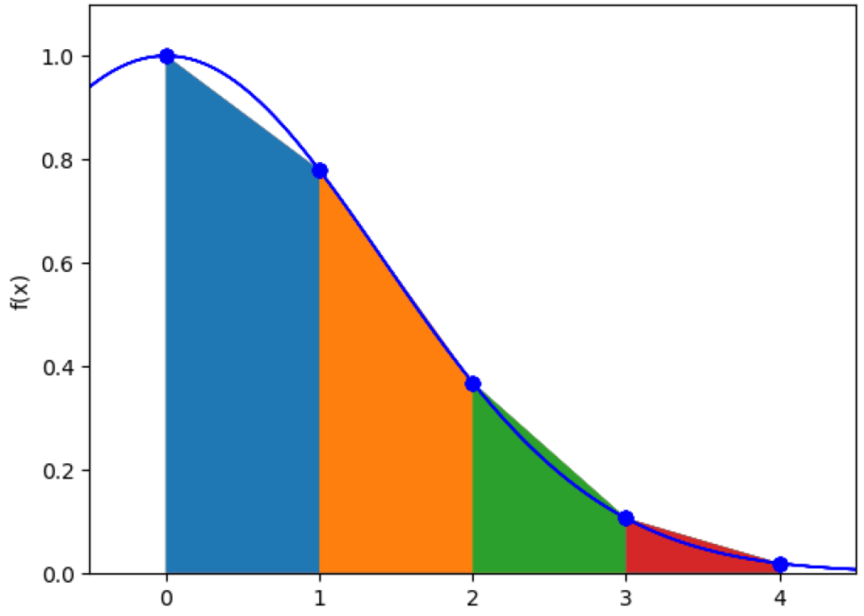
Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de $n$ fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

Se dividirmos a área em $n$ fatias de espessura

$$\delta x = (b - a)/n$$

e

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

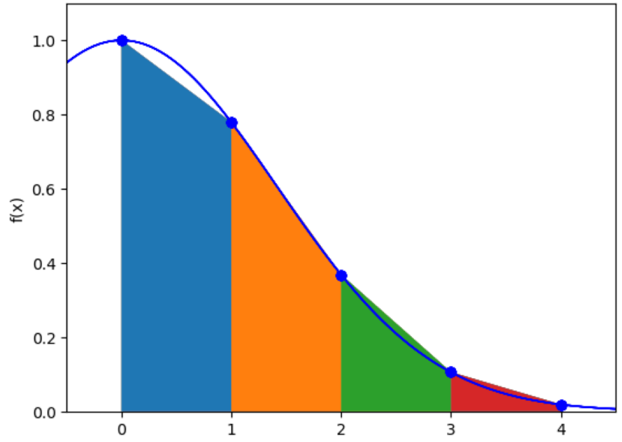


# Integração numérica

Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de $n$ fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

Assim $\delta x = (b-a)/n$

e $$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$




**Aproximação retangular**: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx f(x_i)\,\delta x$

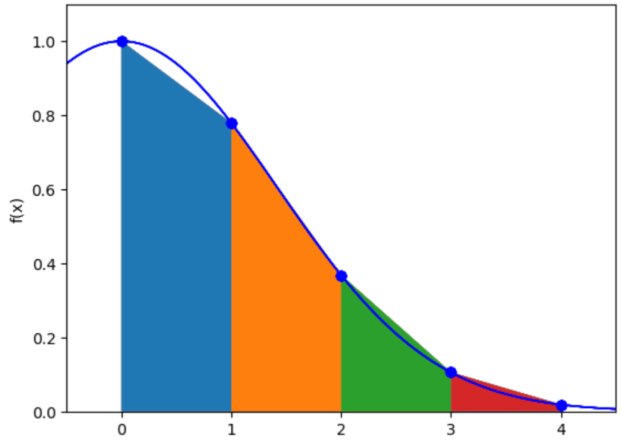
$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\delta x = \delta x \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$
$$= \delta x \times \left( f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) \right)$$

# Integração numérica

Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de $n$ fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

Assim $\delta x = (b-a)/n$

e $$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

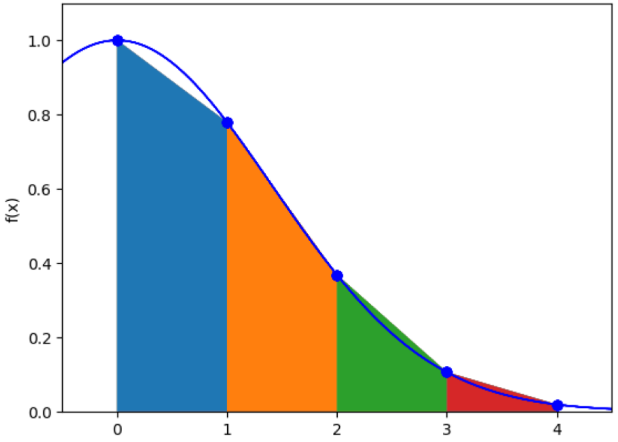



**Aproximação retangular**: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx f(x_i)\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\delta x = \delta x \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$
$$= \delta x \times \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})\right)$$

# Integração numérica

Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de $\boldsymbol{n}$ fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.




Assim $\delta x = (b-a)/n$

e $I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$

**Aproximação trapezoidal**: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\ \delta x =$$

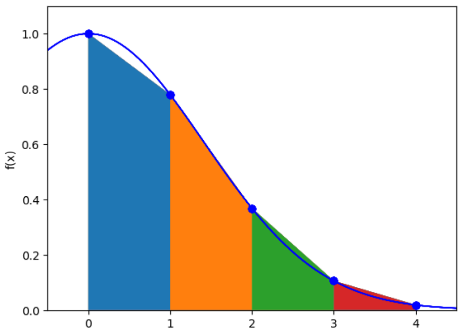
$$= \delta x \times \left( \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

# Integração numérica

**Aproximação trapezoidal**: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x =$$

$$= \delta x \times \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$




**Em python** podemos obter o integral da função $f(x)$ pela aproximação trapezoidal:

Integral = dx * ((f[0]+f[n])*0.5+np.sum(f[1:n]))

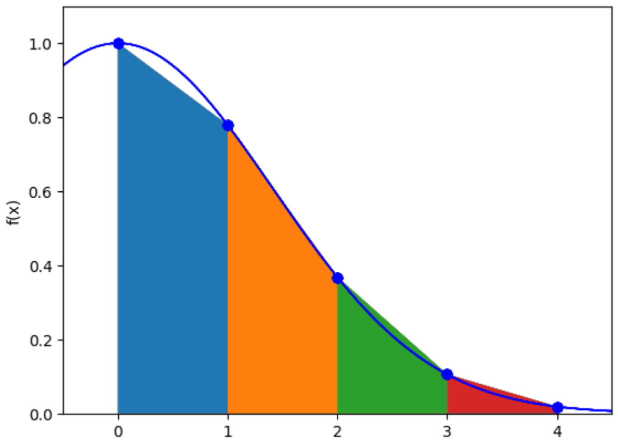
Note que temos $\boldsymbol{n+1}$ elementos da função. Note: Em (f[1:n])) não entra o elemento f[n]

Em termos da dimensão do vetor a integrar, ou seja de $\boldsymbol{n+1 = n_{dim}}$
a integração trapezoidal é calculada por

Integral = dx * ((f[0]+f[$n_{dim}$-1])*0.5+np.sum( f[1: $n_{dim} - 1$]))

# Problemas cap 5 Integração numérica

**Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:**




$$erro = \left| \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - \left( \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\, \delta x \right)_{ap.\ trap} \right|$$

A função $f(x)$ pela série de Taylor à volta de $x_i$

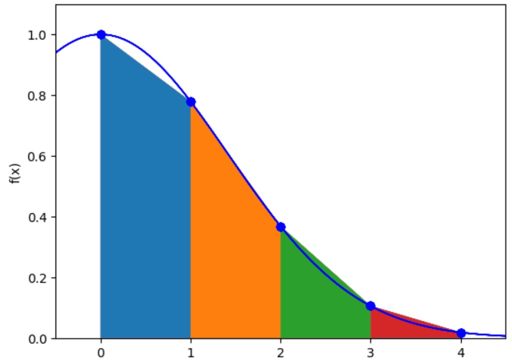
$$f(x) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{t=t} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3)$$

Subst. em

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3) \right] dx$$

# Problemas cap 5 Integração numérica

$$erro = \left| \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - \left( \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\ \delta x \right)_{ap.trap} \right|$$




$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \sigma\left((x - x_i)^3\right) \right] dx$$

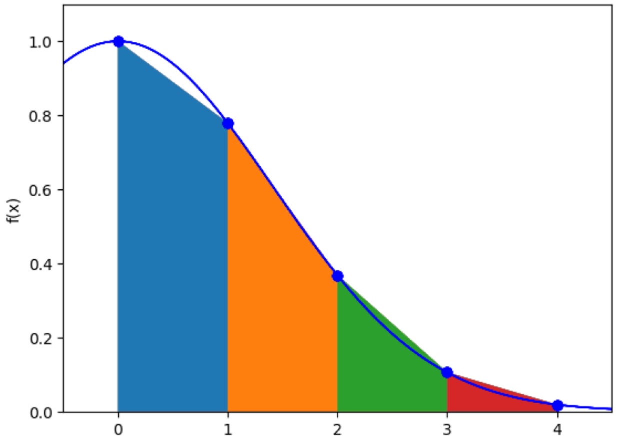
$$= f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \sigma\left((x_{i+1} - x_i)^3\right)$$

$$= f(x_i)\,\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3)$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x_{i+1} - x_i)^2 + \sigma\left((x_{i+1} - x_i)^3\right)$$

$$\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = f(x_i) + \frac{1}{2} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \sigma(\delta x^3)$$

# Problemas cap 5  Integração numérica




Subst. no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - \left( \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\ \delta x \right)_{ap.\,trap} \right|$$

$$= \left| \left( f(x_i)\, \delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\delta x^3) \right) - \left( \left( f(x_i) + \frac{1}{2} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \right) \delta x \right) \right|$$

$$= \mathcal{O}(\delta x^3)$$

O erro local de truncatura de um integral de uma fatia é da $\mathcal{O}(\delta x^3)$.

O erro global do integral completo, que é um somatório de $n$ fatias, é o acumular dos erros locais, sendo

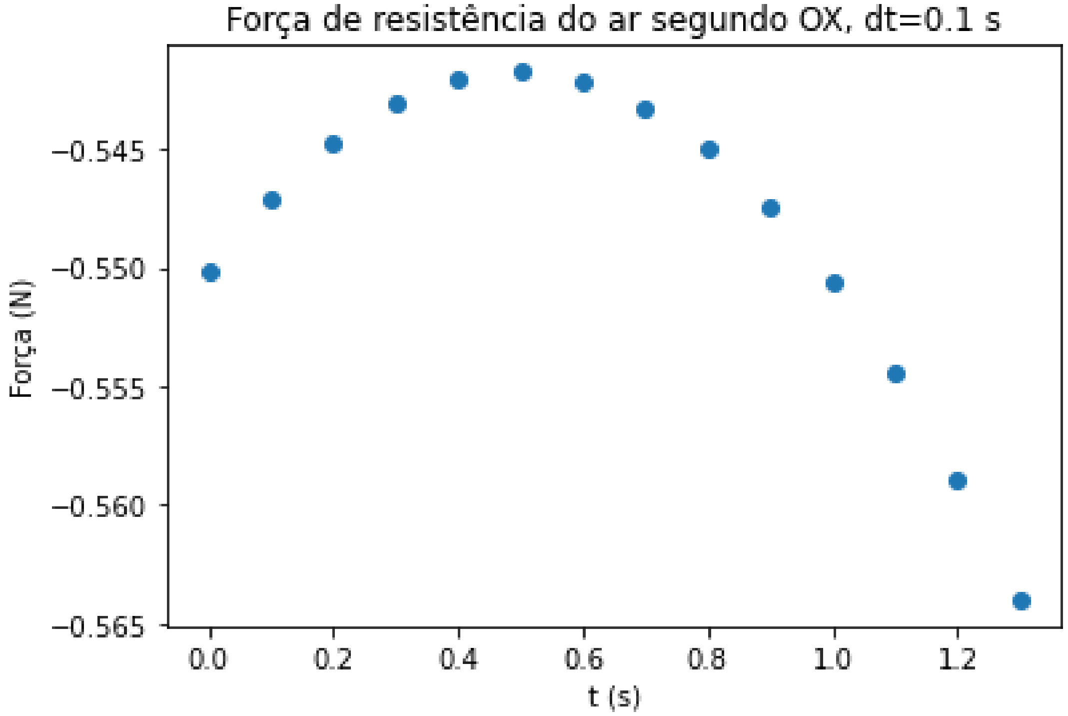
$$n\, \mathcal{O}(\delta x^3) = \frac{b-a}{\delta x}\ \mathcal{O}(\delta x^3) = \mathcal{O}(\delta x^2)$$

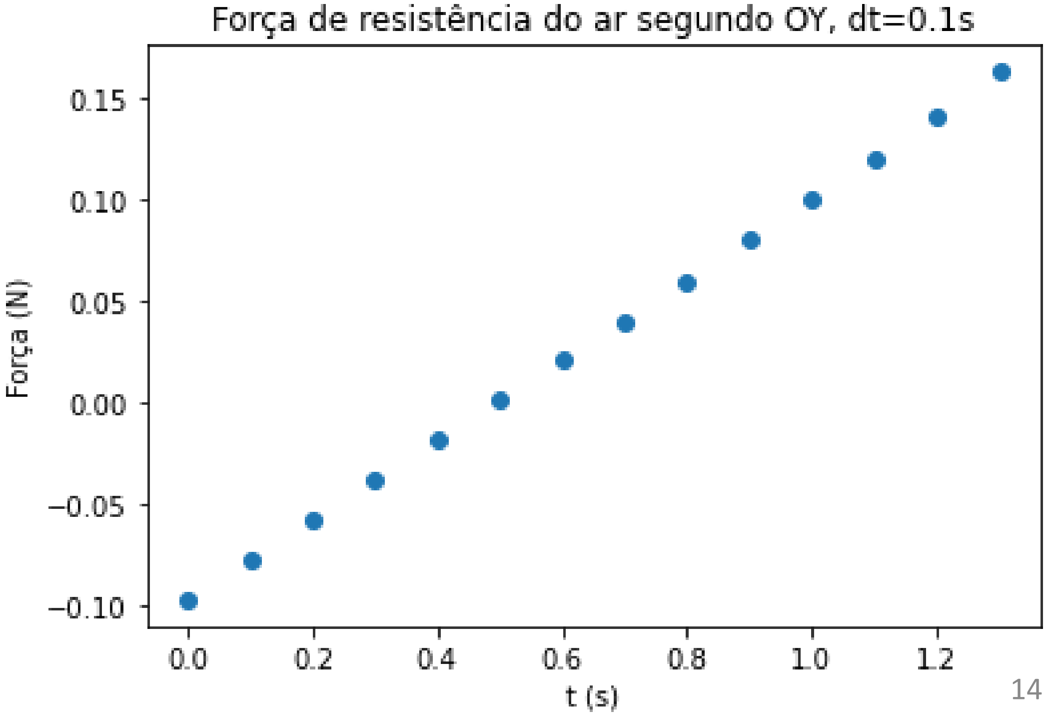
## **Problema cap 5 Cálculo Trabalho realizado pela força não conservativa**: Força de resistência do ar ao movimento da **Bola de Ténis**

**5.** Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes: $t_a = 0$, $t_b = 0.4$ s e $t_c = 0.8$ s.

$$W^{(res)} = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$



## **Problema cap 5 Cálculo Trabalho realizado pela força não conservativa**: Força de resistência do ar ao movimento da **Bola de Ténis**

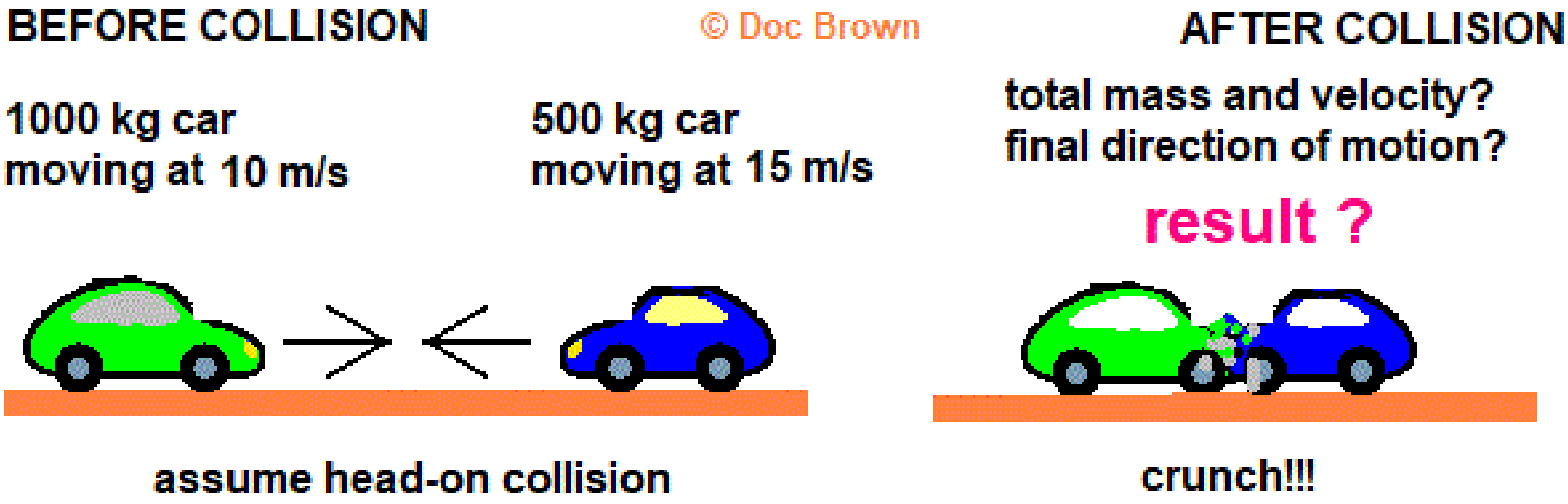
**5.** Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes: $t_a = 0$, $t_b = 0.4$ s e $t_c = 0.8$ s.

$$W^{(res)} = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$

*R:* c) 0 J; -4.98 J; - 8.38 J

# Cap. 6 Momento e colisões



# Cap. 6 Momento e colisões

Equação fundamental da dinâmica:

$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) \quad \Longrightarrow \vec{r}(t)$

obtemos a velocidade e a posição em função do tempo

Teorema Trabalho-Energia:

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;= \frac{1}{2} m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\,|\vec{v}_0|^2$ obtemos a velocidade em função da posição

e a lei de Conservação da Energia Mecânica (para sistemas só com forças conservativas)

**Impulso de uma força**: $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\,dt$

$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\,dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$ vamos obter a lei da Conservação do Momento (para sistemas isolados)

## 6.2 Teorema Impulso-momento e Conservação do momento

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{d\vec{v}}{dt}\, dt = m\,\vec{v}(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

em que $\boldsymbol{m\vec{v}(t)} = \boldsymbol{\vec{p}(t)}$ **é o momento** do corpo no instante $t$.

- A lei fundamental da dinâmica é reescrita em termos do momento

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Quando a massa do corpo é constante obtemos a forma conhecida

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

- Quando $\vec{F} = 0$,

$\vec{p}_1 = \vec{p}_0$ ou conservação do momento

# - Impulso e mudança do momento

## **Estimativa** da força de colisão:

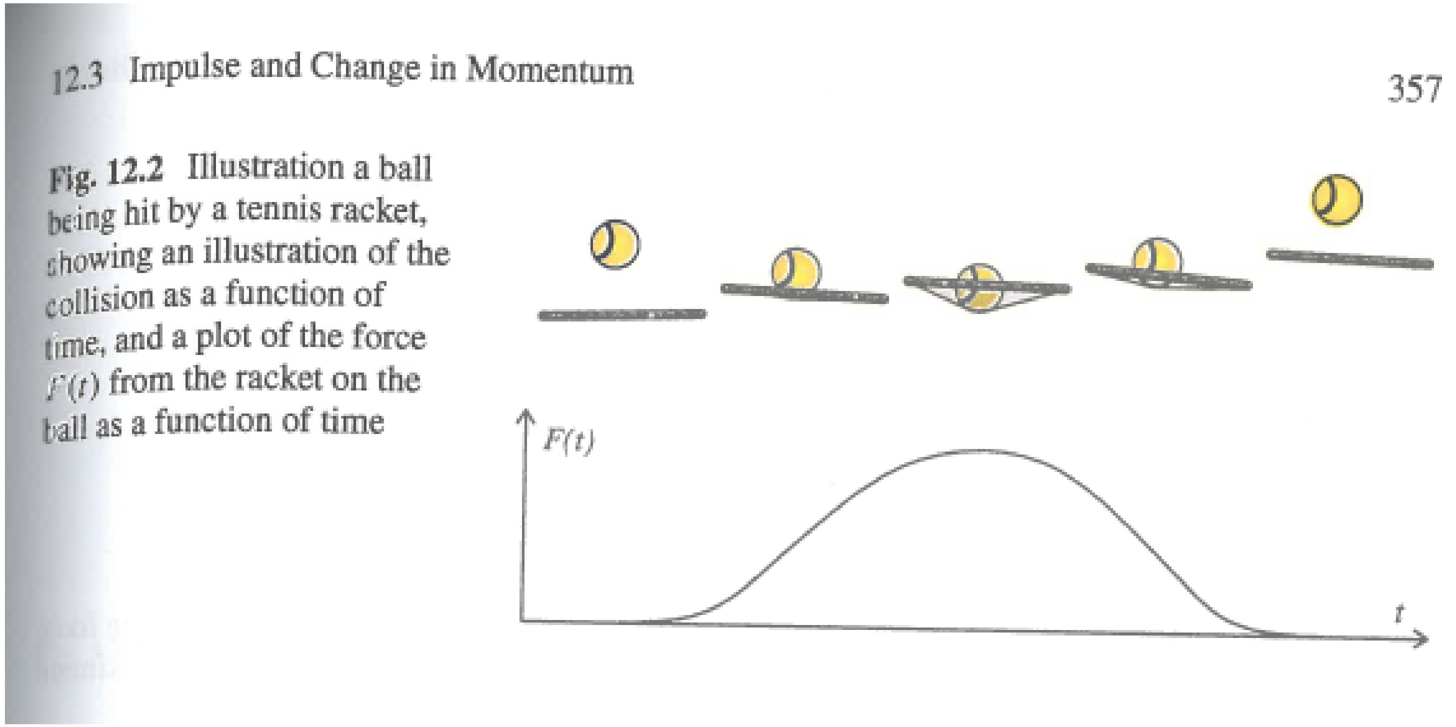
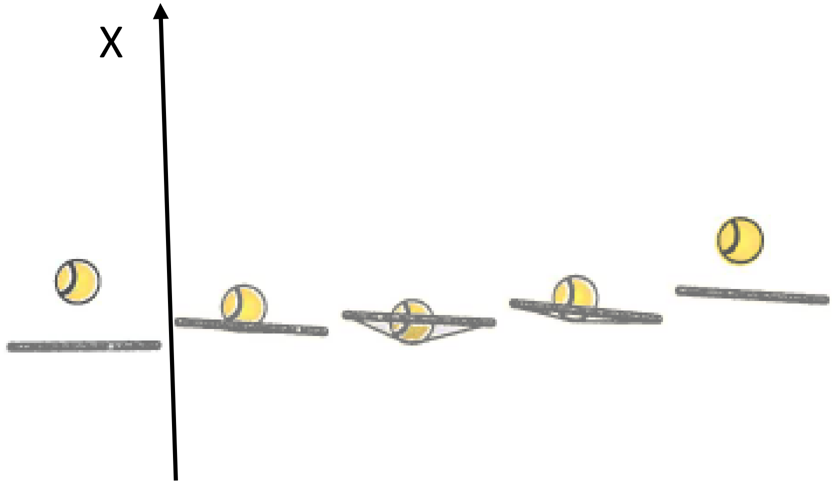

12.3 Impulse and Change in Momentum 357

**Fig. 12.2** Illustration a ball being hit by a tennis racket, showing an illustration of the collision as a function of time, and a plot of the force $F(t)$ from the racket on the ball as a function of time



Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$




Impulso de uma força:

$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$

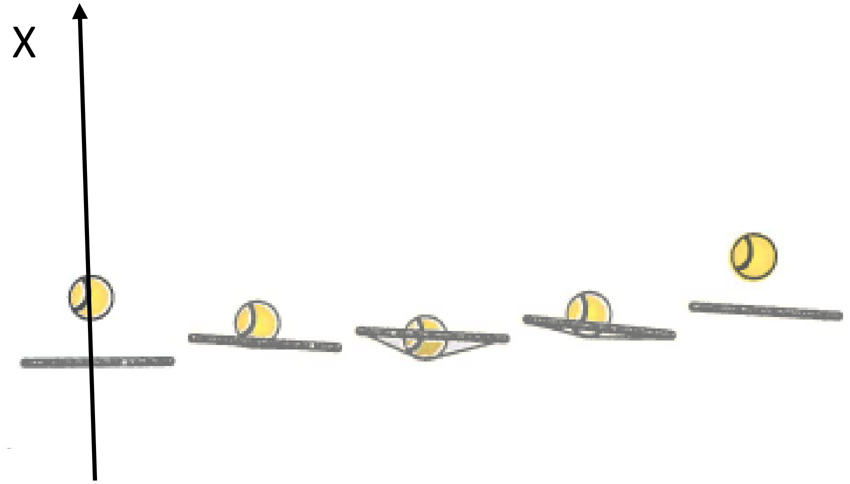
A 1D

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = p_{1x} - p_{0x}$$

Se soubermos $p_{1x}$ e $p_{0x}$, calculamos $\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt$

Estimativa da força $F_x$ $\quad \int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = \bar{F}_x\,(t_1 - t_0)$

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}$$




Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

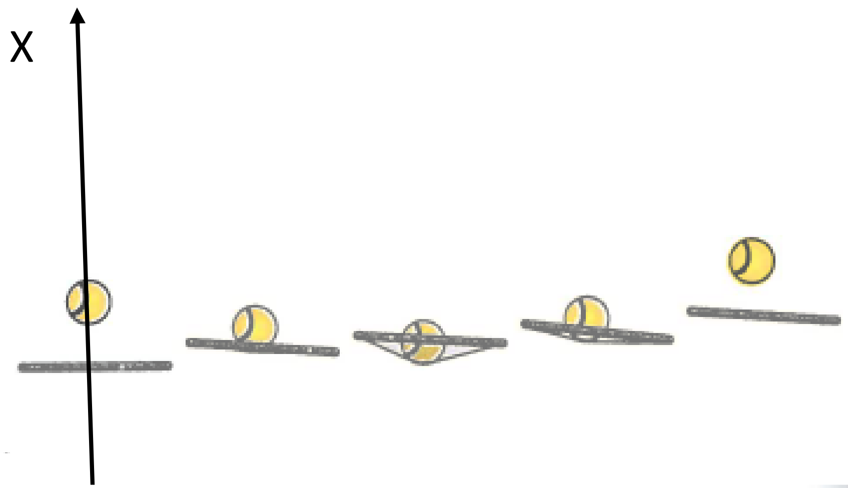
Estimativa da força $F_x$ $\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = \bar{F}_x\, (t_1 - t_0)$

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}$$

**Problema:**

Se $m = 0.057$
$\vec{v}_0 = -30\, \hat{\imath}\, \mathrm{km/h}$
$\vec{v}_1 = 30\, \hat{\imath}\, \mathrm{km/h}$

Qual a força média do impacto que durou 0.06 s?



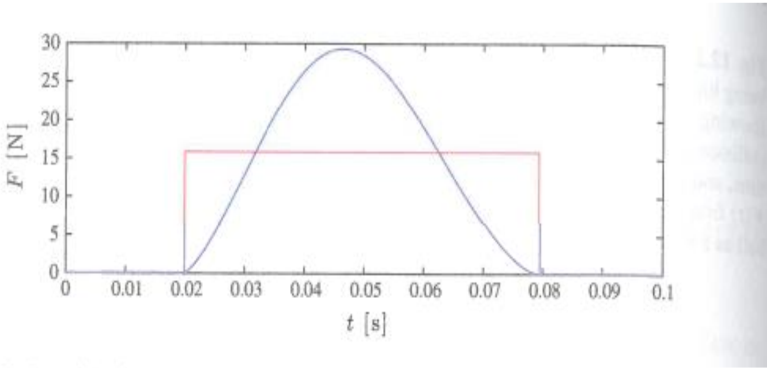

Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

## Estimativa da força $F_x$

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = \bar{F}_x\,(t_1 - t_0)$$

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}$$




O gráfico da força, $F_x$, em função do tempo que durou a colisão, e a força média, $\bar{F}_x$.

**Problema 6.1:**

Se $m = 0.057$
$\vec{v}_0 = -30\,\hat{\imath}\,\mathrm{km/h}$
$\vec{v}_1 = 30\,\hat{\imath}\,\mathrm{km/h}$

Qual a força média do impacto que durou 0.06 s?

R: $\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{0.057 \times 30/3.6 - 0.057 \times (-30/3.6)}{0.06} = 15.8\ \mathrm{N} = 1.61\ \mathrm{kgf}$

# Problema 6.4:

Um carro segue a 60 km/h. Sofre um acidente e o carro para em 0.2 s.
O condutor não tem o cinto colocado e embate no volante do carro.
a) Se o condutor tiver a massa de 75 kg, qual a força média que sofre (no torax) durante o acidente?
b) Qual a função do 'airbag'? O que muda no acidente?

# Problema 6.4:

Um carro segue a 60 km/h. Sofre um acidente e o carro para em 0.2 s.
O condutor não tem o cinto colocado e embate no volante do carro.
a) Se o condutor tiver a massa de 75 kg, qual a força média que sofre (no torax) durante o acidente?
b) Qual a função do 'airbag'? O que muda no acidente?

R:

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\,dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{75 \times \frac{60}{3.6} - 75 \times (0)}{0.2} = 6250 \text{ N} = 638 \text{ kgf}$$

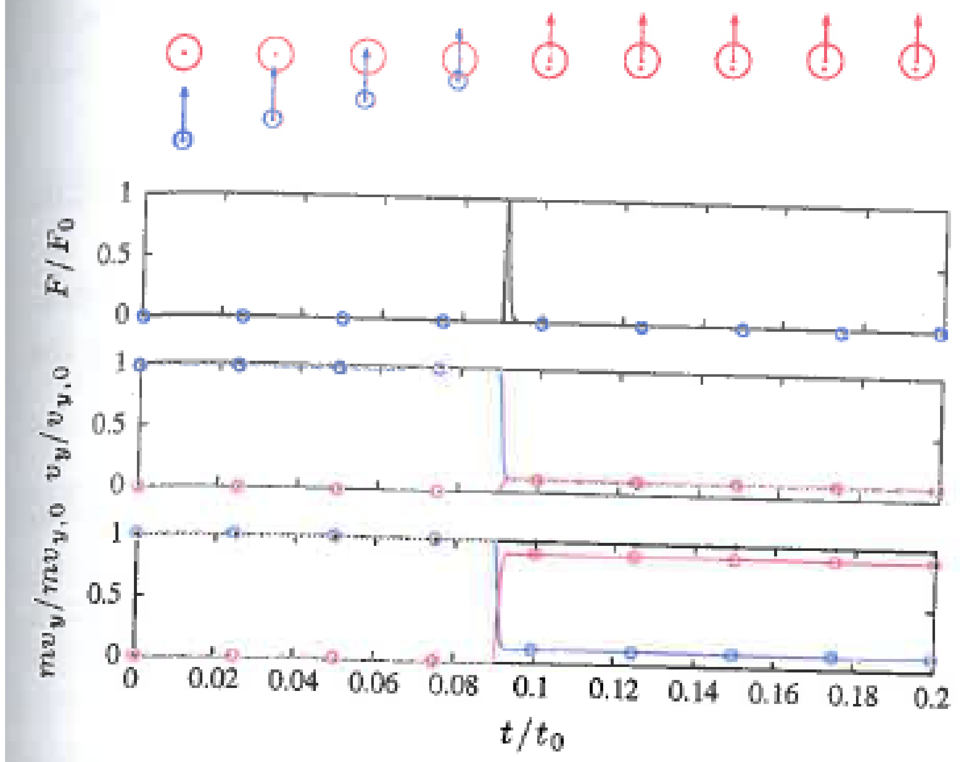
# Sistema de 2 corpos

Colisão meteoro - planeta

Início $t_0$

Termina $t_1$

12.1 Motivating Example—Meteor Impact 353



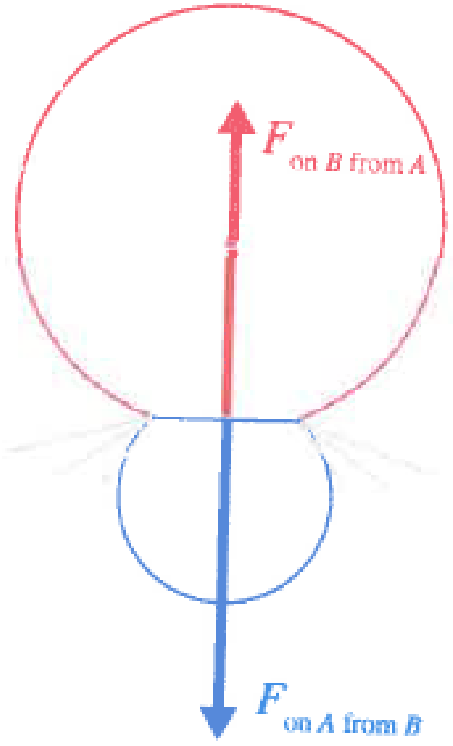




Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

Colisão meteoro (A) – planeta (B)

No instante to (A) $m_A$, $\vec{v}_{A,0}$, $\vec{p}_{A,0}$

(B) $m_B$, $\vec{v}_{B,0}$, $\vec{p}_{B,0}$

$$\vec{F}_A^{(de B)} = m_A \vec{a}_A$$

$$\vec{F}_B^{(de A)} = m_B \vec{a}_B$$

3ª lei de Newton

$$\vec{F}_B^{(de A)} = -\vec{F}_A^{(de B)} = -\vec{F}$$

Não conhecemos $\vec{F}$,

$$m_A \vec{a}_A = -\vec{F}$$

$$m_B \vec{a}_B = +\vec{F}$$

---

$$m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B)\, dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m_A \vec{a}_A \, dt + \int_{t_0}^{t_1} m_B \vec{a}_B \, dt = 0$$

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \qquad \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

$$m_A \, \vec{v}_A(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + m_B \, \vec{v}_B(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

$$m_A \left( \vec{v}_A(t_1) - \vec{v}_A(t_0) \right) + m_B \left( \vec{v}_B(t_1) - \vec{v}_B(t_0) \right) = 0$$

$$m_A \vec{v}_A(t_1) + m_B \vec{v}_B(t_1) = m_A \vec{v}_A(t_0) + m_B \vec{v}_B(t_0)$$

$$m_A \vec{v}_A(t_1) + m_B \vec{v}_B(t_1) = m_A \vec{v}_A(t_0) + m_B \vec{v}_B(t_0)$$

$t_1$ e $t_0$ quaisquer

$$\vec{P} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B \quad \text{é constante}$$

= Momento total é constante

**Antes da colisão**

Corpo A  com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

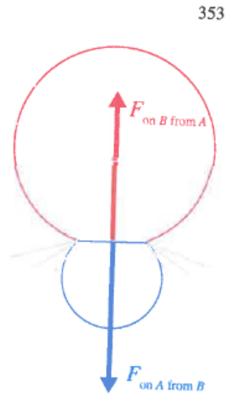
Corpo B  com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

**Depois da colisão**

Corpo A  com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

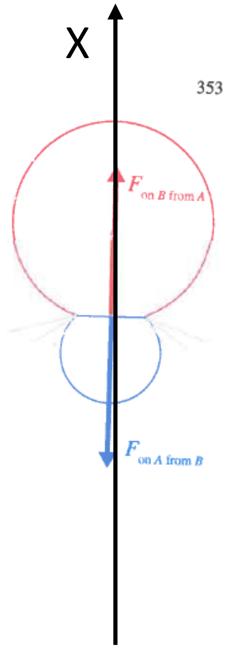
Corpo B  com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

Depois da colisão os 2 corpos seguem juntos $\vec{v}_1$




Sabemos que o momento total é constante $\vec{P} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$

Permite determinar a velocidade dos corpos depois da colisão




**Antes da colisão**

Corpo A com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

Corpo B com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

**Depois da colisão**

Corpo A com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

Corpo B com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

Depois da colisão os 2 corpos seguem juntos $\vec{v}_1$

$$P_x = m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}$$

$$P_x = m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

## O momento total conserva-se:

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A\ v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A\ v_{1x} + m_B v_{1x}$$

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = (m_A +\ m_B) v_{1x}$$

$$v_{1x} = \frac{m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}}{m_A +\ m_B}$$

# Sistema de 2 corpos

Existem fenómenos com forças complicadas.
O Impulso é difícil ou impossível de ser calculado.

Corpo A    com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_A$
Corpo B    com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_B$

Que forças existem entre os 2 corpos?

Forças internas: forças entre os corpos do sistema  (sistema Terra-Sol: força gravítica de atração)
Forças externas: forças entre os corpos do sistema e o meio ambiente

2ª Lei de Newton:

3ª Lei de Newton:

$$\vec{F}_B^{(A)} = -\,\vec{F}_A^{(B)}$$

Corpo A $\quad \sum \vec{F}_A^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$

Corpo B $\quad \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$

Somarmos: $\quad \sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt}$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} = \sum \vec{F}^{ext}$$

**Generalização da 2ª Lei de Newton** para o sistema de 2 corpos

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{P}$
= momento total
do sistema de 2 corpos

# Sistema de 2 corpos

Se todas as forças externas forem nulas $\sum \vec{F}^{ext} = 0$

temos um sistema de 2 corpos isolado

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{implica} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Num sistema de 2 corpos isolado o momento total conserva-se

## **Generalização para sistema de muitos corpos (N)**

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Se o sistema for isolado ($\sum \vec{F}^{ext} = 0$) temos a conservação do momento total $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$

# Colisões

Processo que envolve forças muito grandes entre os corpos
durante um intervalo de tempo muito curto

Num sistema de 2 corpos isolado, em que o momento total conserva-se.

Antes da colisão

Corpo A com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

Corpo B com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

Depois da colisão

Corpo A com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

Corpo B com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

# Colisões: Num sistema de 2 corpos isolado, em que o momento total conserva-se.

Antes da colisão

Corpo A com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

Corpo B com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

Depois da colisão

Corpo A com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

Corpo B com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

A 1 dimensão, o momento total é:

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}$$

$$m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

Pela conservação do momento total

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

também é em qualquer instante da colisão

Se soubermos as quantidades antes da colisão (massa e velocidades)

**Temos 1 equação com 2 incógnitas**

$v_{A,1x}$ e $v_{B,1x}$ (será preciso mais uma equação para serem calculadas)

Colisões: Num sistema de 2 corpos isolado, em que o momento total conserva-se.

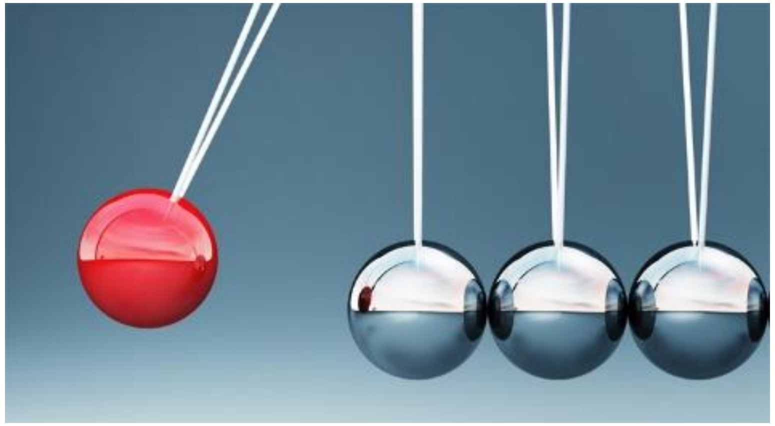
Se só atuarem forças conservativas,

a energia mecânica total também se conserva ( mais uma equação)

Quando acontece chama-se Colisão Elástica

Quando não há conservação da energia mecânica, chama-se Colisão Ineslática

Cap. 6 Momento e colisões

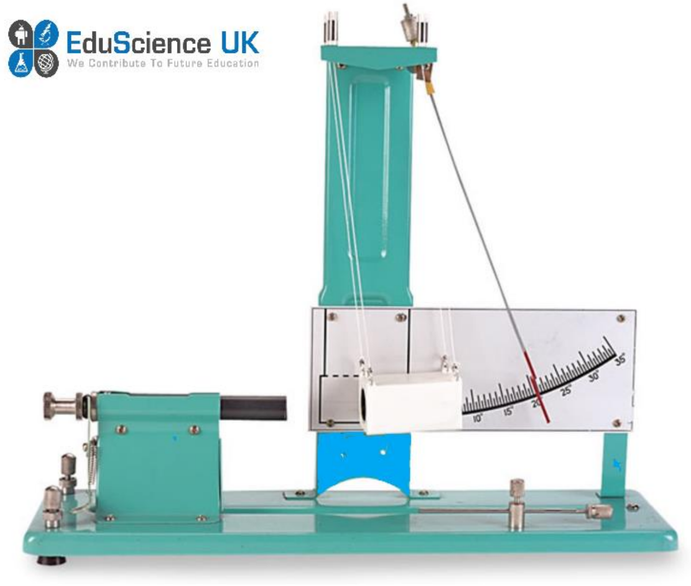


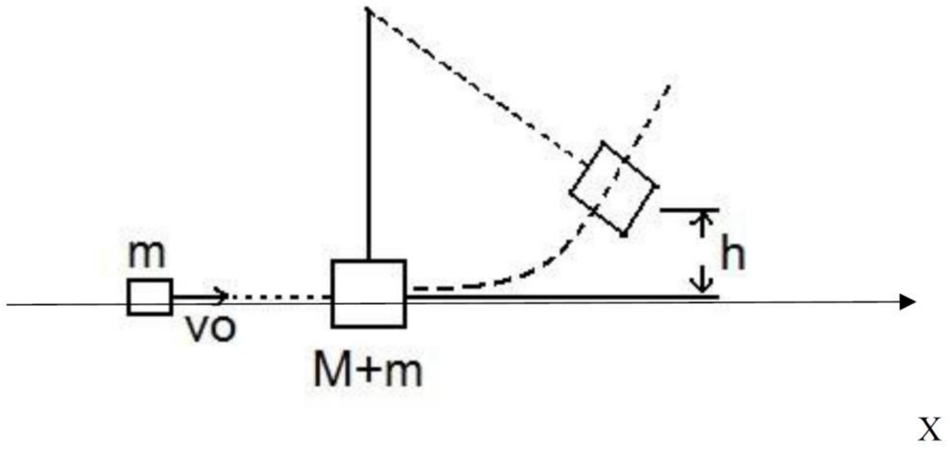
Lei de conservação do momento:

Antes:  o momento proveniente da bola que vai colidir

Depois da colisão: há várias possibilidades de combinações entre as várias massas e velocidades.
Mas **só uma bola emerge** de todo o conjunto? Tem-se também a conservação da energia.

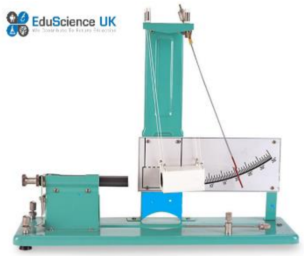
# Pêndulo balístico: medição da velocidade de uma bala



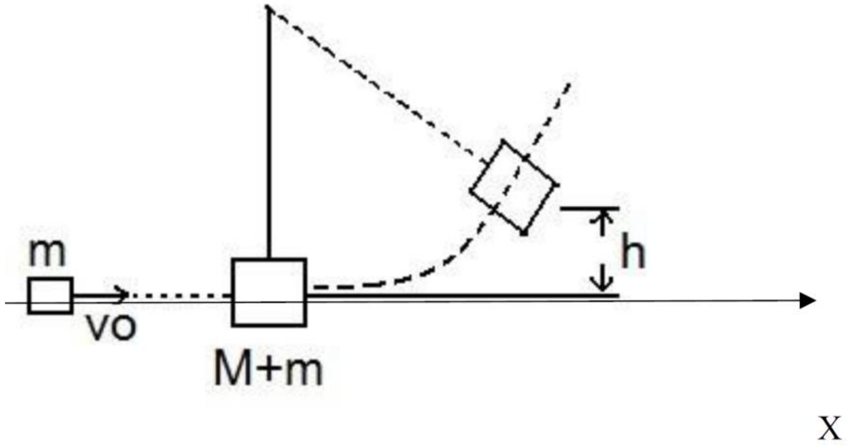

1. Colisão bala – bloco
2. Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura h

# Pêndulo balístico: medição da velocidade de uma bala




## 1. Colisão bala – bloco

| Antes da colisão | Depois da colisão |
|---|---|
| Momento da bala $m_{bala} v_{bala,x}$<br>Momento do bloco $0$ | Bala-bloco $(m_{bala} + M_{bloco})V$ |
| Conservação do momento<br>$m_{bala} v_{bala,x} = (m_{bala} + M_{bloco})V$ | |




$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}} V$$

## 2. Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura h

Os dois corpos juntos sobem como um pêndulo até à altura $h$, transformando energia cinética em energia potencial

Energia mecânica

No ponto mais baixo do pêndulo $\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 + 0$

No ponto a altura h $0 + (m_{bala} + M_{bloco})\, g\, h.$

Pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 = (m_{bala} + M_{bloco})\, g\, h$$

## 2. Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura h

Os dois corpos juntos sobem como um pêndulo até à altura $h$, transformando energia cinética em energia potencial


Energia mecânica

No ponto mais baixo do pêndulo $\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 + 0$

No ponto a altura h $0 + (m_{bala} + M_{bloco})\ g\ h.$

Pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 = (m_{bala} + M_{bloco})\ g\ h$$

$$V^2 = 2\ g\ h$$

e

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}} V$$

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}} \sqrt{2\ g\ h}$$

Mostre que a colisão é inelástica.