Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

3º Teste - resolução
Parte Cálculo Analítico

Data: 6 julho 2022
Hora: 14H30

Duração: 45 minutos
Disciplina: 41769
Salas: 23.3.14, 23.2.12, 23.2.13, 23.2.14

Cotação: 1) 1 + 1 + 2 + 2 = 6 valores
2) 1 + 1 = 2 valores
3) 2 = 2 valores

Só é permitido o uso de máquina de calcular científica

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e B são constantes.

b) Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

c) Calcule A e B , no caso em que a velocidade inicial é -2 m/s e a posição inicial a posição de equilíbrio do sistema.

d) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo. Mantêm-se constante ao longo do tempo?

Resolução resumida

a) Eq. de Newton $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x$, uma vez que $F_x = -k\,x$,

a ser satisfeita se $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

for solução

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left[A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] = -\frac{k}{m}\,x(t)$$

Ou $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x(t)$

E como queríamos demonstrar $m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x(t)$

b) $v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\left[-A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]$

c) $\begin{cases} t = 0 \\ v_x(t=0) = -2 \text{ m/s} \\ x(t=0) = x_{eq} = 0 \end{cases}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} -2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ [-A\sin(\,0\,) + B\cos(\,0)] \\ 0 = A\cos(\,0\,) + B\sin(\,0\,) \end{cases}$

$$\begin{cases} -2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\ \ B \\ 0 = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -2\sqrt{\frac{m}{k}} = -2 \text{ m} \\ A = 0 \end{cases}$$

e,

$$\begin{cases} x(t) = -2\sin t \\ v_x(t) = -2\cos t \end{cases}$$

d) Energia mecânica

$$E = E_c + E_p = \tfrac{1}{2} m\, v_x^2 + \tfrac{1}{2} k\, x^2$$

$$E = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}\ 4\ \cos^2 t + \tfrac{1}{2} 4\ \sin^2 t = 2 \text{ J} \quad \text{: constante}$$

2. Um corpo de massa 4 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador harmónico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k\, x$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 2$ N/m, $b = 0.5$ kg/s, e $F_0 = 10.5$ N.

a) Qual a frequência angular ω_f da força externa para se alcançar a ressonância?

b) Qual a amplitude no caso de ressonância?

Resolução resumida

a) $\omega_f \cong \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{0.5} = 0.707$ rad/s

b) $A(\omega_0) = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}} = \dfrac{105/4}{(0.5*\sqrt{0.5}/4} = 29.7$ m

3. A patilha de um clarinete oscila de acordo com a equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \alpha\,\frac{dx}{dt} - \beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

pode apresentar soluções caóticas?

Resolução resumida

A equação diferencial de 2ª ordem é equivalente a duas equações diferenciais de 1º ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{k}{m}x + \dfrac{\alpha}{m}\,v_x - \dfrac{\beta}{m}(v_x)^3 \end{cases}$$

que constituem um sistema de autónomo bidimensional, do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

o qual pelo Teorema Poincaré-Bendixon não pode apresentar caos.

Formulário:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \qquad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2 \qquad \int_C \vec{F}^{(conservativa)}\cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v} \qquad \vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2}A\,\rho_{ar}|\vec{v}|\,\vec{v} \qquad \left|\vec{F}_{rol}\right| = \mu\left|\vec{N}\right|$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v} \qquad \vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \vec{F}_{elástica} = -k\,\vec{r}$$

$$\vec{F}_{elet} = -k_e\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \vec{F}_{elet} = q\vec{E}_{elet}$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \qquad E_p = m\,g\,y \qquad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad E_p = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|}$$

$$P_o = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}(t)\,dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$x(t) = A\,\cos(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \qquad E = \frac{1}{2}k\,A^2$$

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}}\delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}}\delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{x_{min}}\delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \cdots$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\cos(n\omega t)\;dt, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\sin(n\omega t)\;dt, \qquad n = 1,\,2,\,\cdots$$

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(\omega t - \phi_1) + A_2\cos(2\omega t - \phi_2) + A_3\cos(3\omega t - \phi_3) + \cdots$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad n = 0,\,1,2,\,\cdots \qquad \phi_n = \sin\frac{b_n}{A_n} = \cos\frac{a_n}{A_n} \qquad n = 1,2,\,\cdots$$

$$x(t) = A\,e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t + \phi\,) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

$$y(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

Grandezas físicas e conversões:

1 polegada = 1 in = 0,39370 m 1 pé = 1 ft = 2,54 cm 1 milha = 1,609344 km

1 rad = 57.29578 graus

1 cv (cavalo – vapor métrico) = 735,4975 W 1 hp (cavalo – vapor inglês) = 745,715 W

M_{Sol} = M = 1.989 × 10^{30} kg 1 AU = 1.489 × 10^{11} m 1 ano = 365,24 dias

$G = 6.67 \times 10^{11}\ \text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2) = 4\pi^2\ \text{AU}^3/(\text{M}\cdot\text{ano}^2)$ $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$

$\rho_{ar} = 1.225$ kg/m^3 $\quad v_{som} = 340$ m/s

$c = 299792{,}458\ \mathrm{km/s} = 2{,}99792458 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} = 8.61733 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}$

$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$ $\quad k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}98755188 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

$m_e = 9{,}10938356 \times 10^{-31}$ kg

$m_p = 1{,}67262 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1836.151\ m_e$

$m_n = 1{,}67493 \times 10^{-27}$ kg $\quad 1\ \text{Å} = 10^{-10}$ m

$e = 1{,}602176208 \times 10^{-19}$ C $\quad e/c = 5{,}34428 \times 10^{-28}\ \mathrm{C \cdot m/s}$

Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$\mathrm{e} = 2{,}71828183$ $\quad \pi = 3{,}14159265$

$\mathrm{sen}\,(-x) = -\,\mathrm{sen}\,(x)$ $\quad \mathrm{sen}\,(\pi - x) = \mathrm{sen}\,(x)$ $\quad \mathrm{sen}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$

$\cos(-x) = +\cos(x)$ $\quad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\,\mathrm{sen}\,(x)$

$\mathrm{sen}\,(x \pm y) = \sin x\ \cos y \pm \cos x\ \sin y$ $\quad \cos(x \pm y) = \cos x\ \cos y \mp \mathrm{sen}\,x\ \mathrm{sen}\,y$

$$\sin x\ \cos y = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\,(x+y) + \mathrm{sen}\,(x-y)\right]$$

$$\cos x\ \sin y = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\,(x+y) - \mathrm{sen}\,(x-y)\right]$$

$$\sin x\ \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\cos x\ \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ $\quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$$\mathrm{sen}\,x \pm \mathrm{sen}\,y = 2\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right)$$

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\quad \cos x - \cos y = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$