**Modelação de Sistemas Físicos**
Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

# 1º TESTE
# Parte Cálculo Analítico

**Data:** 30 ABRIL 2021
**Hora:** 16H30

**Duração:** 1/2 horas
**Disciplina:** 41769
**Salas:** 12.2.8, 12.2.9, 12.2.10, 12.2.11, 12.2.12.

**Cotação**: 1) 1 + 1 + 1 = 3 valores
2) 2 + 1 = 3 valores
3) 2 + 2 = 4 valores

***Só é permitido o uso de máquina de calcular científica***

***As respostas não podem ser escritas a lápis***

## *Justifique todas as respostas*

1. Foram medidos três comprimentos:

$P = 15.2 \pm 0.1$ cm

$Q = 14.9 \pm 0.3$ cm

$R = 5.0 \pm 0.2$ cm

a) Calcule a soma das duas quantidades $S = P + R$

b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = Q - R$

c) Calcule a área $A = P \cdot R$

**Resolução resumida:**

**a)** $S = 20.2 \pm 0.3$ cm

**b)** $D = 9.9 \pm 0.5$ cm

**c)** $A = 76.0 \pm \Delta A$ cm$^2$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta R}{R} = 0.0465$$

$$\Delta A = 3.539 \text{ cm}$$

$A = 76 \pm 4$ cm$^2$

**2.** O método de Euler-Cromer integra as equações diferenciais do movimento

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt},$$

fazendo a aproximação: $x(t+\delta t) = x(t) + v_x(t+\delta t) \times \delta t$

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t) \times \delta t,$$

se souber $x(t_0) = x_0$ e $v_x(t_0) = v_{x0}$.

a) Calcule o erro de truncatura local do método de Euler-Cromer.

b) Calcule o erro de truncatura global do método de Euler-Cromer.

**Resolução resumida:**

**a)** Quer-se determinar como $|x(t+\delta t)_{exato} - x(t+\delta t)_{EC}|$ varia com $\delta t$

$$x(t+\delta t)_{EC} = x(t) + v_x(t+\delta t) \times \delta t$$

$$x(t+\delta t)_{\mathrm{EC}} = x(t) + \left[v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=t} \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3)\right] \times \delta t$$

$$x(t+\delta t)_{\mathrm{EC}} = x(t) + v_x(t) \times \delta t + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=t} \delta t^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_{t=t} \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

Comparando com a série de Taylor

$$x(t+\delta t)_{exato} = x(t) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

$$|x(t+\delta t)_{exato} - x(t+\delta t)_{EC}| = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3)$$

O erro local da posição é $\mathcal{O}(\delta t^2)$

Para a velocidade: $|v_x(t+\delta t)_{exato} - v_x(t+\delta t)_{EC}|$

$$v_x(t+\delta t)_{EC} = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t$$

Comparando com a série de Taylor de $v_x(t+\delta t)$

$$v_x(t+\delta t)_{exato} = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

temos, $|v_x(t+\delta t)_{exato} - v_x(t+\delta t)_{EC}| = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$

O erro local que afeta a velocidade é $\mathcal{O}(\delta t^2)$

b) quer na posição quer na velocidade e o erro de truncatura local é $\mathcal{O}(\delta t^2)$.

No instante (qualquer) $t_f = n\,\delta t$ o erro acumulado depois de $n$ passos é:

$$n\,\mathcal{O}(\delta t^2) = \frac{t_f}{\delta t}\,\mathcal{O}(\delta t^2) = \mathcal{O}(\delta t)$$

3. A lei do movimento de um objeto de massa 0.1 kg é $\vec{r} = (\cos \omega t \,, \sin \omega t \,, 0)$ m.

a) Calcule a lei da velocidade $\vec{v}$.

b) Qual o ângulo entre os vetores posição $\vec{r}$ e velocidade $\vec{v}$? Depende do tempo?

**Resolução resumida:**

**a)** $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos \omega t \,, \sin \omega t \,, 0) = (-\omega \ \sin \omega t \,, \omega \ \cos \omega t \,, 0)$

b) $\vec{r} \cdot \vec{v} = |\vec{r}| \, |\vec{v}| \cos\theta = x \, v_x + y \, v_y + z \, v_z$

$$|\vec{r}| = \sqrt{\cos^2 \omega t \ + \sin^2 \omega t + 0} = 1$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\omega^2 \ \sin^2 \omega t + \omega^2 \cos^2 \omega t \ + 0} = \omega$$

$$x \, v_x + y \, v_y + \ z \, v_z = \cos \omega t \ (-\omega \ \sin \omega t) + \sin \omega t \ (\omega \ \cos \omega t) + 0$$

$$= -\omega \cos \omega t \ \sin \omega t + \omega \sin \omega t \ \ \cos \omega t) = 0$$

$$\cos\theta = 0 \qquad \Longrightarrow \ \theta = \pi/2$$