

DETERMINANTES y SISTEMAS de ECUACIONES.

Lucía Contreras Caballero.

Los determinantes son números asociados a las matrices que nos informan sobre la compatibilidad y determinación de un sistema de ecuaciones cuando los calculamos para las matrices de los sistemas de ecuaciones.

Los determinantes también tienen interpretación geométrica y vamos a empezar motivando su definición por su significado geométrico.

Dado un vector podemos considerar su longitud, que es un número; dados dos vectores podemos construir un paralelogramo cuyos lados son los vectores dados y considerar su área; Dados tres vectores podemos construir un paralelepípedo cuyas aristas son los tres vectores y considerar su volumen. Las longitudes, las áreas y los volúmenes son números asociados a vectores, a parejas de vectores o a ternas de vectores.

Escribiendo en filas las coordenadas de un vector de la recta, de dos vectores del plano o de tres vectores del espacio tenemos una matriz 1×1 , una matriz 2×2 o una matriz 3×3 . Designando la longitud, el área o el volumen asociado a los vectores filas por las matrices entre barras, las longitudes, las áreas y los volúmenes son números asociados a esas matrices que cumplen:

a) Si multiplicamos uno de los vectores por una constante, el número asociado queda multiplicado por esa constante:

$$|ra_{11}| = r|a_{11}| \quad \left| \begin{array}{cc} ra_{11} & ra_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| = r \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ccc} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| = r \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

Lo análogo ocurre con las otras filas.

b) Si en un vector, una pareja o una terna de vectores, sustituimos un vector por la suma de otros dos, el número asociado (longitud, área o volumen) a la matriz correspondiente es la suma de los números asociados a las dos matrices de vectores correspondientes a los vectores sumandos:

$$|a_{11} + a'_{11}| = |a_{11}| + |a'_{11}|$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & a_{13} + a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

También ocurriría con las otras filas.

Conviene hacer un dibujo en el caso de las áreas para verlo más claro.

c) Si uno de los vectores es proporcional a alguno de los otros, el área o el volumen es cero. (Esta propiedad sólo tiene sentido cuando la matriz es de orden mayor que 1)

De las propiedades c) b) y a) vamos a deducir que las áreas y los volúmenes cambian de signo al cambiar el orden de las filas de una matriz por una permutación de dos filas:

En volúmenes se verificaría:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) + \frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) + \frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) - \frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) - \frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

por b)

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) \\ \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) - \frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) - \frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) - \frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) - \frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| =$$

por b)

$$= \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) \\ \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) \\ -\frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & -\frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & -\frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| +$$

$$+ \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ -\frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & -\frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & -\frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| =$$

(porque los volúmenes asociados a vectores proporcionales son cero)

$$= \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) \\ -\frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & -\frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & -\frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

Por otra parte,

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) + \frac{1}{2}(a_{21} - a_{11}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) + \frac{1}{2}(a_{22} - a_{12}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) + \frac{1}{2}(a_{23} - a_{13}) \\ \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) - \frac{1}{2}(a_{21} - a_{11}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) - \frac{1}{2}(a_{22} - a_{12}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) - \frac{1}{2}(a_{23} - a_{13}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) \\ \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} - a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} - a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(a_{21} - a_{11}) & \frac{1}{2}(a_{22} - a_{12}) & \frac{1}{2}(a_{23} - a_{13}) \\ \frac{1}{2}(a_{11} + a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{22}) & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

expresión opuesta a la anterior, teniendo en cuenta la propiedad a) para $r = -1$.

El cambio de signo se comprobaría de la misma manera si permutáramos la segunda y la tercera filas o la primera y la tercera filas.

La comprobación del cambio de signo en las áreas es exactamente igual al cambio hecho entre primera y segunda filas.

Enumeremos ahora tres propiedades deducidas de las propiedades a), b) y c).

De la propiedad c), junto con la propiedad a) hemos deducido: 1) que al hacer en la matriz una operación elemental de permutación de filas cambia de signo el "número" asociado.

De la propiedad a) tenemos: 2) al hacer en una matriz la operación elemental de multiplicar una fila por una constante, el "número" queda multiplicado por esa constante. (También es cierta la propiedad a) para longitudes, áreas y volúmenes cuando $r = 0$).

De la propiedad c) junto con la propiedad b) podemos deducir: 3) al hacer en una matriz la operación elemental de sumar a una fila de la matriz otra fila multiplicada por una constante, el "número" asociado queda invariante. (Compruébese como ejercicio).

Las tres propiedades enumeradas de estos "números" asociados a las matrices nos dicen *cómo están relacionados entre sí* los "números" asociados a *matrices relacionadas por operaciones elementales*. Si las propiedades de estos "números" están relacionadas con las operaciones elementales, que son las que realizamos en las matrices para resolver los sistemas de ecuaciones, podemos pensar que esos números nos dan información sobre la resolubilidad de dichos sistemas.

Asociando a las matrices identidad el número 1, lo cual es coherente con el valor de la longitud, el área y el volumen de las matrices formadas por los vectores coordenados, quedan determinados los "números" asociados a las matrices elementales por las propiedades 1), 2) y 3).

1) Las matrices elementales obtenidas al intercambiar dos filas de la matriz identidad, tendrían como "número" asociado el opuesto del asociado a la matriz identidad, es decir, -1 .

2) Las matrices elementales obtenidas al multiplicar una fila de la identidad por una constante c distinta de cero, según la propiedad a) tienen como "número" asociado el producto de esta constante por el número asociado a la matriz identidad, es decir, c .

3) Las matrices elementales obtenidas al sumar a una fila de la matriz identidad otra fila multiplicada por una constante tienen el mismo "número" asociado que la matriz identidad, es decir, 1.

Matemáticamente, las operaciones elementales se realizan en las matrices multiplicando a la izquierda por matrices elementales. Las propiedades 1), 2) y 3) respecto a una matriz general A quedan resumidas en términos de matrices elementales en la

Proposición 1: Si E_i es una matriz elemental, $|E_i A| = |E_i| |A|$.

La demostración de esta proposición consiste en su comprobación en cada uno de los tres tipos de matrices elementales teniendo en cuenta las propiedades 1), 2) y 3).

También podemos establecer con la proposición 1. el siguiente

Teorema 1: $|{}^tA| = |A|$.

En efecto, podemos comprobar que el teorema es cierto para matrices elementales: recorriendo los tres tipos de matrices elementales que hay, y considerando las traspuestas de cada tipo, vemos que la traspuesta de cada matriz elemental es elemental del mismo tipo y que le corresponde el mismo "número" que a la matriz elemental considerada.

En cuanto al caso general, distinguimos dos casos:

a) A es invertible.

Si A es invertible, es producto de matrices elementales.

Sea $A = E_m \cdots E_1$, entonces ${}^tA = {}^tE_1 \cdots {}^tE_m$ y como las matrices traspuestas de matrices elementales son, a su vez, matrices elementales con el mismo "número asociado",

$$\begin{aligned} |{}^tA| &= |{}^tE_1 \cdots {}^tE_m| = |{}^tE_1| \cdots |{}^tE_m| = |{}^tE_1| \cdots |{}^tE_m| |I| = \\ &= |E_1| \cdots |E_m| = |E_m| \cdots |E_1| = |E_m \cdots E_1| = |A| \end{aligned}$$

b) A no es invertible.

Entonces tA tampoco es invertible, porque si lo fuera, tA sería producto de matrices elementales, en cuyo caso A sería el producto (en orden inverso) de las traspuestas de esas matrices elementales, siendo por tanto invertible.

Si la matriz A no es invertible, por operaciones elementales se puede reducir a una matriz escalonada E con la última fila de ceros.

Si en una matriz E hay una fila de ceros, su número asociado es cero, ya que multiplicando la fila de ceros por un número distinto de cero y de uno, queda la misma matriz; por lo que se verificaría debido a la propiedad 2), que $c|E| = |E|$, lo cual implica $|E| = 0$, cuando $c \neq 1$.

Ahora, en virtud de la proposición 1, si $A = E_k \cdots E_1 E$, se tiene $|A| = |E_k| |E_{k-1} \cdots E_1 E| = |E_k| |E_{k-1}| \cdots |E_1| |E| = 0$

El mismo razonamiento para tA , puesto que no es invertible, nos da $|{}^tA| = 0$, siendo, por tanto, también, $|{}^tA| = |A|$.

Hagamos ahora dos observaciones: Primera: hemos obtenido, si A es invertible, $|E_m| \cdots |E_1| = |A|$ cuando $A = E_m \cdots E_1$, es decir, el "número asociado" a A está determinado por las matrices elementales que llevan A a la identidad y es distinto de cero.

Segunda: como al trasponer una matriz, las columnas pasan a filas, las propiedades a) b) c) enunciadas respecto a las filas de una matriz son, análogamente, ciertas respecto a las columnas en los números que buscamos. En particular es cierta la

Proposición 2. Si una matriz tiene una columna de ceros su "número asociado" es cero.

Para la demostración de la proposición 2, tengamos en cuenta que se puede ver que si una matriz tiene una fila de ceros su "número asociado" es cero de manera similar a cómo hemos demostrado que el "número asociado" a una matriz escalonada con la última fila de ceros es cero. Entonces, teniendo en cuenta, el teorema 1. queda establecida la proposición 2.

En virtud de estas propiedades, se puede hacer el desarrollo del número asociado a una matriz 2×2 .

En efecto, combinando la propiedad b) respecto a filas y columnas en matrices 2×2 , para una matriz 2×2 , el determinante ha de ser, por la linealidad de las columnas:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} =$$

debido a que el número es cero cuando hay una columna de ceros, en virtud de la proposición 2.

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - bc \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad - cb$$

En cuanto a una matriz 3×3 , tendríamos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} =$$

por la proposición 2.

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Observando ahora que

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ya que estas dos matrices se escalonan o se transforman en la identidad con matrices elementales análogas de igual "número asociado".

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

por la misma razón anterior.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

por la misma razón que anteriormente.

Podemos concluir que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Este proceso se puede hacer en cualquier dimensión y justifica nuestra definición por inducción de los "números asociados" que vamos a llamar determinantes

Se establece que el determinante de las matrices identidad son 1. (Lo cual está en coherencia con el valor de la longitud, el área y el volumen determinados por los vectores coordenados).

Dada una matriz cuadrada A , se representa por A_{ij} el determinante asociado a la submatriz de A , obtenida suprimiendo la fila i y la columna j de A .

El determinante de una matriz $n \times n$ se define como:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|$$

Para dar completa validez a la definición, comprobaremos que con ella se verifican las propiedades a), b) y c) enunciadas anteriormente. Una vez comprobadas dichas propiedades para nuestra definición, como a), b) y c) implican 1), 2) y 3), tenemos también que la proposición 1) es cierta para nuestra definición: $|E_i A| = |E_i| |A|$ donde E_i es una matriz elemental y A es una matriz cualquiera; y también es cierto para nuestra definición el teorema 1: $|^t A| = |A|$, ya que se puede repetir el proceso de su demostración. Con lo cual, aplicando la definición de determinante a $|^t A|$, tenemos:

$$|A| = |^t A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}|$$

También el teorema 1. implica las propiedades a), b) y c) respecto a columnas.

Veamos ahora cómo dichas propiedades dan una relación de los números buscados con la resolubilidad de sistemas de ecuaciones. Dado el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array} \right\}$$

Como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{vmatrix}$$

Dado que la propiedad 1) implica que los determinantes de matrices con filas iguales son nulos, se tiene:

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

y

$$a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

o equivalentemente, cambiando columnas en los primeros determinantes, y cambiando los signos,

$$a_{11} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = b_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

y

$$a_{21} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

lo cual dice que las soluciones son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{cuando} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Lo análogo ocurre con los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

Cuando $|A| \neq 0$, la matriz escalonada obtenida de ella por el método de Gauss tiene en la última fila, el último elemento distinto de cero, por lo cual se puede llegar a la matriz I desde A , multiplicando por matrices elementales. En ese caso, la matriz A es producto de matrices elementales y por tanto es invertible.

Con esta observación podemos demostrar que la solución de un sistema de ecuaciones lineales, antes hallada, es única cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

En efecto, si

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a_{11}x' + a_{12}y' = b_1 \\ a_{21}x' + a_{22}y' = b_2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comprobemos ahora que con la definición dada se cumplen las propiedades requeridas al principio.

Recordemos las propiedades:

a) Si multiplicamos una fila de una matriz por una constante, el determinante de la matriz queda multiplicado por esa constante.

b) Si descomponemos una fila de una matriz en suma de otras dos filas el determinante de la matriz dada es la suma de los determinantes de las dos matrices obtenidas sustituyendo en la matriz dada la fila considerada por cada una de las filas sumandos.

c) El determinante de una matriz con filas proporcionales es cero.

En lugar de la propiedad c) podemos considerar la propiedad 1), ya que ambas son equivalentes cuando a) y b) son ciertas. (Compruébese como ejercicio).

1) Si intercambiamos dos filas en una matriz su determinante cambia de signo.

La demostración de las propiedades básicas puede hacerse por inducción ya que así se ha hecho la definición.

Para un determinante de una matriz de orden 1, sólo tienen sentido las propiedades a) y b), que son trivialmente ciertas.

Por eso comprobamos las tres propiedades a), b) c) para determinantes de matrices de orden 2 y luego demostramos que supuestas ciertas las propiedades para determinantes de orden $n - 1$, lo son para determinantes de orden n .

Comprobamos en primer lugar la propiedad 1, porque permite transmitir lo que probemos para la primera fila a las demás filas.

Probemos 1) en matrices 2×2 :

Se reduce a comprobar que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

De la definición se tiene:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \quad y \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb)$$

estando por tanto comprobado.

Para comprobar la propiedad a), es suficiente comprobarla con la primera fila, ya que por la propiedad 1), se trasmite a la segunda fila.

En efecto,

$$\begin{vmatrix} ra & rb \\ c & d \end{vmatrix} = rad - crb = r(ad - cb) = r \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Vemos la propiedad b) en matrices 2×2 , respecto a la primera fila,

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = (a + a')d - c(b + b') = ad - cb + a'd - cb' = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

La propiedad se trasmite a la segunda fila, usando la propiedad 1).

Ahora, suponiendo que la propiedad 1) se verifica en determinantes de matrices $(n-1) \times (n-1)$, vamos a comprobarla en determinantes de matrices de orden n .

Primero, lo demostramos cuando el intercambio de filas se hace entre dos filas sucesivas:

Por definición,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^i a_{i-1,1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

Por la hipótesis de inducción, estos sumandos son:

$$= a_{11} \left(- \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \right) + a_{21} \left(- \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right) + \cdots +$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^{i+1} a_{i-1,1} \left(- \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right) + (-1)^i a_{i1} \left(- \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right) + \cdots + \\
& + (-1)^{n+1} a_{n1} \left(- \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \right) = - \left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right) + \\
& \cdots - \left((-1)^i a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+1} a_{i-1,1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right) + \cdots \\
& - (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

Si las filas intercambiadas no son sucesivas, tenemos que darnos cuenta de que este intercambio puede hacerse en dos etapas compuestas de intercambios de filas sucesivas: intercambiar la fila "i" y la fila "j", suponiendo que $j > i$, es bajar la fila "i" al sitio "j", para lo cual tenemos que saltar sucesivamente sobre $j - i$ filas y luego subir la fila "j" (que ya ha quedado en el sitio " $j - 1$ " al sitio "i", para lo cual tenemos que saltar sucesivamente otras $j - 1 - i$ filas. En total, hemos hecho $2(i - j) - 1$ cambios de filas sucesivas, lo cual se traduce en un cambio total de signo: $(-1)^{2(i-j)-1} = -1$.

Pasamos a demostrar la propiedad a) en determinantes de orden n , suponiendo que es cierta para determinantes de orden $n - 1$:

Por definición,

$$\begin{vmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ra_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \\
+ (-1)^i a_{i-1,1} \begin{vmatrix} ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Por la hipótesis de inducción, estos sumandos son:

$$ra_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} r \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^i a_{i-1,1} r \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \\
+ (-1)^{i+1} a_{i1} r \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} r \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
& r \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & & & & & & & & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & & & & & & & \\ a_{11} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} & -a_{21} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} & +(-1)^i a_{i-1,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} & & & & \\ & a_{i2} & \cdots & a_{in} & & a_{i2} & \cdots & a_{in} & & a_{i2} & \cdots & a_{in} & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & & & \end{array} \right) + \\
& + r \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & & & & & & & & & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & & & & & & & \\ (-1)^{i+1} a_{i1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} & & & & & & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} & & & & \\ & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} & & & & & & a_{i2} & \cdots & a_{in} & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & & & & & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} & & & & \end{array} \right) = \\
& r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Esta propiedad se trasmite a las demás filas usando la propiedad 1).

Para acabar, demostramos la propiedad b) en determinantes $n \times n$, suponiéndola cierta en determinantes $n-1 \times n-1$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & \cdots & a_{1n} + a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11} + a'_{11}) \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} + a'_{12} & \cdots & a_{1n} + a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + (-1)^i a_{i-1,1} \begin{vmatrix} a_{12} + a'_{12} & \cdots & a_{1n} + a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} + a'_{12} & \cdots & a_{1n} + a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \\
& + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} + a'_{12} & \cdots & a_{1n} + a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción, estos sumandos son:

$$\begin{aligned}
& a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a'_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \\
& + (-1)^i a_{i-1,1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^i a_{i-1,1} \begin{vmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-2,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \\
& + \cdots + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +
\end{aligned}$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

cogiendo los sumandos uno sí, otro no,

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Esta propiedad demostrada en la primera fila se trasmite a las demás filas por la propiedad 1).

Como se ha dicho antes, ahora podemos demostrar el Teorema 1, utilizado para la motivación de la definición, como si no lo hubiéramos demostrado, pero siguiendo el mismo camino.

Debido al Teorema 1 las propiedades comprobadas para las filas se traducen en propiedades análogas para las columnas.

Una vez comprobada la validez de la definición, podemos establecer el

Teorema 2. Una matriz es invertible si y sólo si su determinante es distinto de cero.

Dedujimos en la segunda parte de la demostración del teorema 1 que el determinante de las matrices no invertibles es cero.

Para ver que el determinante de las matrices invertibles es distinto de cero, empecemos por las matrices elementales, que son invertibles, recorriendo sus distintos tipos. Se puede ver que sus determinantes son distintos de cero. (Se hizo en la página 4.)

Para verlo en el caso general, debido al teorema que estableció una matriz es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales, y a la proposición 1, hacemos el siguiente razonamiento: Sea $A = E_m \cdot E_{m-1} \cdots E_1 = E_m \cdot E_{m-1} \cdots E_1 I$, entonces es necesario, según la proposición 1, que $|A| = |E_m| |E_{m-1} \cdots E_1| |I| = |E_m| |E_{m-1}| \cdots |E_1| \neq 0$ porque todos los determinantes de matrices elementales son distintos de cero.

Podíamos haber dado la definición de determinante de una matriz invertible utilizando las matrices elementales en las que se descompone como producto, pero se hubiera planteado el problema sobre si el número asociado será independiente del camino por el que la matriz llega a la identidad por transformaciones elementales. Este problema está resuelto en la definición dada, ya que sólo intervienen los números de las entradas de la matriz. Según la definición que hemos dado, el determinante de la matriz sólo depende de los números que forman la matriz y no de la sucesión de matrices elementales que la transforman en la identidad; es independiente de esta sucesión.

También probamos aquí el siguiente

Teorema 3: $|AB| = |A||B|$: **El determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de las matrices.** De donde se deduce que $|A^{-1}| = 1/|A|$.

Demostración del Teorema 3:

También ahora distinguimos dos casos:

a) $|A| \neq 0$. Entonces, A es invertible y teníamos en la proposición 2 del capítulo sobre el método de Gauss:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \cdots E_m^{-1}$$

donde E_i y E_i^{-1} son matrices elementales, (Estas E_1, \dots, E_m no son las mismas del teorema 2.) de donde

$$|A| = |E_1^{-1}| |E_2^{-1}| \cdots |E_k^{-1}| \cdots |E_m^{-1}|$$

Por otra parte,

$$AB = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \cdots E_m^{-1} B$$

y

$$|AB| = |E_1^{-1}| |E_2^{-1}| \cdots |E_k^{-1}| \cdots |E_m^{-1}| |B| = |E_1^{-1}| |E_2^{-1}| \cdots |E_k^{-1}| \cdots |E_m^{-1}| |B| = |A||B|.$$

b) $|A| = 0$. Entonces, A no es invertible; al reducir A a una matriz escalonada E , esta matriz escalonada tiene su última fila formada por ceros, entonces,

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1} E$$

y

$$AB = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1} EB$$

donde la matriz EB tiene la última fila de ceros, por tanto su determinante es nulo y

$$|AB| = |E_1^{-1}||E_2^{-1} \cdots E_m^{-1} \cdots EB| = |E_1^{-1}||E_2^{-1}| \cdots |E_m^{-1}| \cdots |EB| = 0 = |A||B|.$$

Hagamos aquí la observación de que la única forma de definir el determinante de la matriz identidad coherente con este teorema era darle el valor 1, ya que si hubiera sido cero, no hubiera distinguido matrices invertibles de matrices no invertibles y de no ser cero, $|I| = |II| = |I||I|$ implica $|I| = 1$.

BIBLIOGRAFIA

(A) Algebra Lineal y aplicaciones. J. Arvesú Carballo, R. Alvarez Nodarse, F. Marcellán Español. Ed. Síntesis Madrid. 1999.

(FB) Algebra lineal. J. B. Fraleigh y R. A. Beauregard. Ed. Addison- Wesley /Iberoamericana, 1989.

(H) Algebra y Geometría. Eugenio Hernández. Ed. Addison- Wesley / UAM, 1994.

[L] Linear Algebra for Mathematics, Science, and Engineering. E. M. Landesman, M. R. Hestenes. Prentice-Hall International, Inc. 1992.

[S] Introduction to Linear Algebra. G. Strang. Wellesley-Cambridge Press 1993.