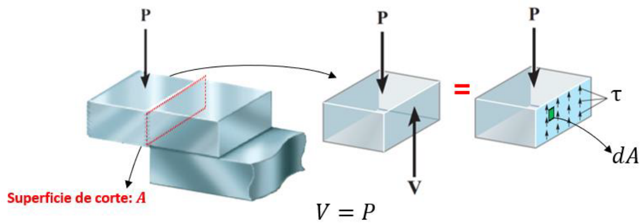
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
4201059 Análisis Estructural I
Solución: primer examen parcial (20%)
Jueves 14 de marzo de 2024

(1) Respecto a $\tau_{prom} = \frac{V}{A}$:

(a) deduzca la expresión,

- **[+0.25]** Explicación y construcción del esquema de cortante simple o doble correctamente dibujado, en donde se aprecien los elementos más importantes de la deducción.



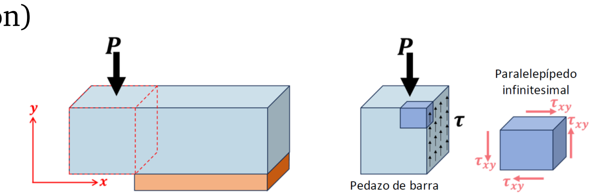
- **[+0.25]** Concepto de la fuerza cortante como la integral de un diferencial de área dA multiplicado por la función de esfuerzos cortantes τ: $V = \int \tau dA$
- **[+0.25]** Sacar τ asumiéndolo como τ_{prom}, el esfuerzo cortante promedio de la sección transversal, es decir, una constante. Y despejar:

$$V = \tau_{prom} \int dA = \tau_{prom} A$$

$$\tau_{prom} = \frac{V}{A}$$

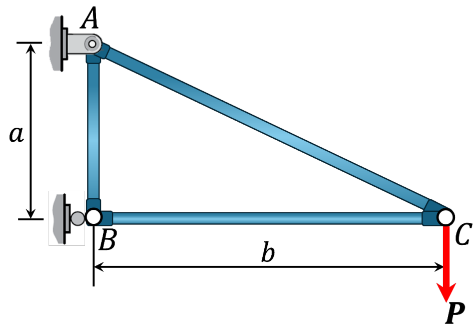
(b) explique si la ecuación cumple con el equilibrio estático en cualquier punto de una barra sometida a esfuerzo cortante por corte directo.

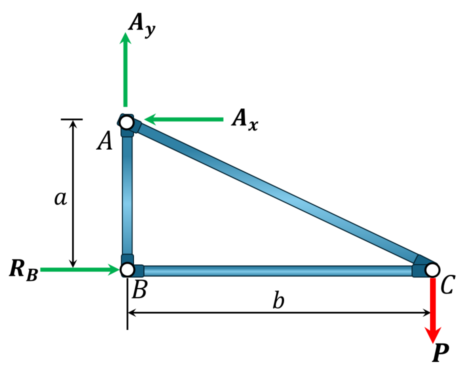
- **[+0.25]** Se toma un pedazo de la barra que permita observar el comportamiento de los esfuerzos. Luego, se extrae un paralelepípedo infinitesimal sobre el borde (frontera) de la barra (sólido). El esfuerzo τ_{xy} por la derecha por equilibrio también está a la izquierda, arriba abajo. Pero en realidad sobre la cara superior no hay esfuerzos (pues se trata de la frontera y no hay cargas en dicha dirección)



- **[+0.25]** El modelo no es consistente y no cumple con el equilibrio en un punto, para todos los puntos de la barra. Esto se explica debido a que el modelo se hace como si el esfuerzo fuera igual en toda la sección transversal, lo cual no es así.

(2) Determine la longitud máxima b, para que el esfuerzo normal en ninguna barra supere $250Mpa$. Todos los miembros son perfiles tubulares de diámetro $115mm$ y espesor de pared $6mm$. La carga aplicada es $P = 200kN$ y $a = 7.5m$.

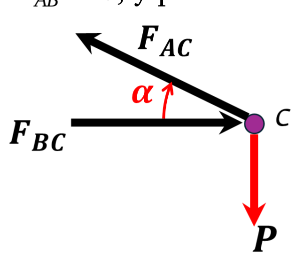




- **[+0.25]** Se dibuja un D.C.L. externo para determinar las reacciones en los apoyos. Se ubican unas flechas de las reacciones coherentes con los efectos de la carga P aplicada. De acá se determina por:

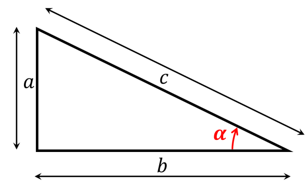
  * $\sum M_A = 0 \longrightarrow 0 = R_B(a) - P(b) \longrightarrow \boxed{\mathrm{R}_B = \frac{b}{a}P \rightarrow}$
  * $\sum f_y = 0 \longrightarrow 0 = A_y - P \longrightarrow \boxed{\mathrm{A}_y = P \uparrow}$
  * $\sum f_x = 0 \longrightarrow 0 = R_B - A_x \longrightarrow \boxed{\mathrm{A}_x = \frac{b}{a}P \leftarrow}$

- **[+0.15]** Se observa que el elemento AB es un miembro de fuerza cero, debido a que por el nodo B es la única fuerza en el eje y. Alternativamente, esto se puede concluir haciendo equilibrio en el nodo A o en el nodo B. Esto es $F_{AB} = 0$, y por lo tanto, $\sigma_{AB} = 0$.



- **[+0.30]** Cálculo de las dos fuerzas internas en función de las distancias. Se inicia analizando el equilibrio en el nodo C:
  - $\sum f_y = 0 \longrightarrow 0 = -P + \sin\alpha F_{AC} \longrightarrow F_{AC} = \dfrac{P}{\sin\alpha}$
  - $\sum f_x = 0 \longrightarrow 0 = F_{BC} - F_{AC}\cos\alpha = F_{BC} - \dfrac{P}{\sin\alpha}\cos\alpha \longrightarrow F_{BC} = \dfrac{P}{\tan\alpha}$

  Teniendo en cuenta las relaciones en el siguiente triángulo:

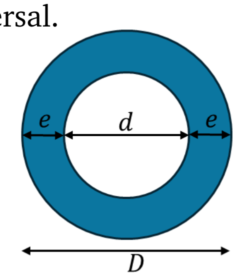


  Se establece que:

$$\boxed{F_{AC} = \frac{c}{a}P}$$

$$\boxed{F_{BC} = \frac{b}{a}P}$$

  Se calcula el área de la sección tranversal.

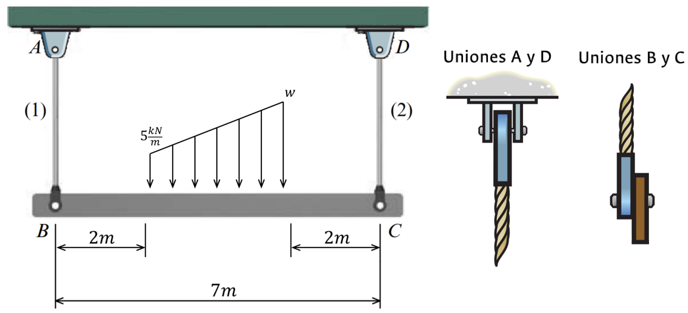


$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi(D^2 - (D-2e)^2)}{4} = \frac{\pi(115^2 - (115-2(6))^2)}{4} = 2054.60mm^2$$

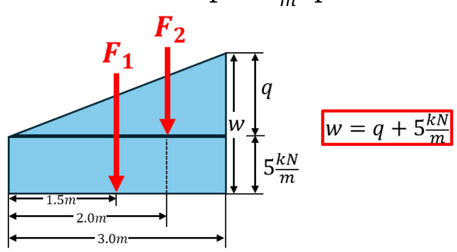
- **[+0.30]** Se calcula el esfuerzo en las barras AC y BC, teniendo en cuenta que la carga $P = 200kN = 200,000N$. En este paso es importante llegar a las dos expresiones que limitan la dimesnión b.
  - $\sigma_{AC} = \dfrac{F_{AC}}{A} = \dfrac{\frac{c}{a}P}{A} = \dfrac{\frac{c}{7.5m}200,000N}{2054.60mm^2} \leq 250MPa \longrightarrow c \leq 19.26m.$

    Luego, según el triángulo auxiliar $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{12.98^2 - 7.5^2} = 10.59m$. Por lo tanto, $\boxed{b \leq 17.74m}$
  - $\sigma_{BC} = \dfrac{F_{BC}}{A} = \dfrac{\frac{b}{a}P}{A} = \dfrac{\frac{b}{7.5m}200,000N}{2054.60mm^2} \leq 250MPa \longrightarrow \boxed{b \leq 19.26m}.$
- **[+0.25]** Finalmente, para que se cumplan simultáneamente las condiciones $b \leq 17.74m$ y $b \leq 19.26m$, es necesario que $b \leq 17.74m$. Este paso debe ir muy bien justificado.

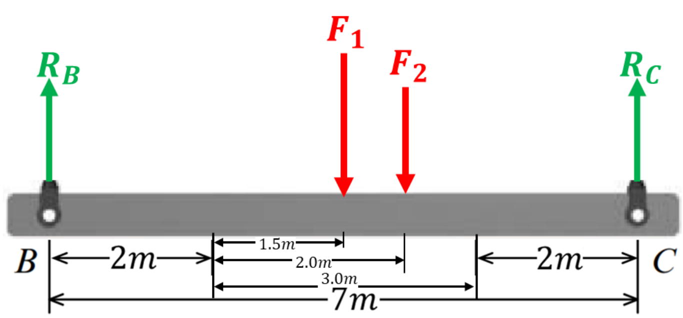
(3) Determine la intensidad de carga máxima w para que el esfuerzo cortante en los pernos de diámetro $9.82mm$ de las uniones A, B, C y D no supere $\tau_{max} = 150MPa$; y el esfuerzo normal en los cables (1) y (2) de área de sección transversal de $46mm^2$ no supere $\sigma_{max} = 250MPa$.



Analizamos la carga w, y la rescribimos como $w = q + 5\frac{kN}{m}$ por facilidad de análisis.



- **[+0.25]** Trazamos el D.C.L. externo y calculamos las reacciones en los cables, teniendo en cuenta que:
  - $F_1 = 5\frac{kN}{m}(3m) \longrightarrow F_1 = 15kN \downarrow$ (un rectángulo).
  - $F_2 = \dfrac{q(3m)}{2} \longrightarrow F_2 = 1.5q \downarrow$ (un triángulo).



  Luego, el equilibrio estático:
  - $\sum M_B = 0 \longrightarrow 0 = -F_1(3.5) - F_2(4) - R_C(7) \longrightarrow R_C = \frac{3.5}{7}F_1 + \frac{4}{7}F2 = 0.5(15) + \frac{4}{7}1.5q$. De donde se concluye que $\boxed{R_C = 7.5 + \frac{6}{7}q \text{ en } [kN]}$.
  - $\sum f_y = 0 \longrightarrow 0 = R_B - F_1 - F_2 + R_C \longrightarrow R_B = -R_C + F1 + F2 = -7.5 - \frac{6}{7}q + 15 + 1.5q$. Por lo tanto, $\boxed{R_B = 7.5 + \frac{9}{14}q \text{ en } [kN]}$.
- **[+0.25]** Identificamos que $R_C > R_B$. Luego, debido a que las uniones A y D son iguales, la unión crítica es D debiddo a que soporta más fuerza. De igual forma, como las uniones B y C son iguales, la unión crítica es C debido a que soporta más fuerza. Alternativamente se pueden calcular el esfuerzo cortante en cada unión, y llegar a la misma conclusión.

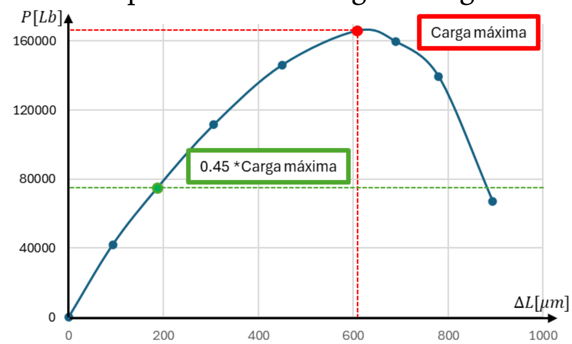
- **[+0.25]** En la unión D tenemos dos superficies de corte del perno, y en la unión C una sola. Claramente, al tratarse de esfuerzos cortantes, la unión en C con cortante simple es crítica. Por lo tanto, en la unión C tenemos un área de cortante $A_{cort} = \dfrac{d^2\pi}{4} = \dfrac{9.82^2\pi}{4} = 75.74mm^2$. Además, tener en cuenta que R_C está en kN, el cual se debe pasar a N por conveniencia en las operaciones.
    * $\tau = \dfrac{R_C}{A_{cort}} = \dfrac{1000\frac{N}{kN}(7.5+\frac{6}{7}q)}{75.74mm^2} \leq 150MPa \longrightarrow q \leq 4504.12\frac{N}{m}$, es decir, $\boxed{q \leq 4.50\frac{kN}{m}}$.
- **[+0.25]** El cable (2) soporta más carga que el cable (1) debido a que $R_C > R_B$, pero tienen la misma sección transversal. Por tanto, se analiza el esfuerzo en el cable (2). El área de la sección transversal es $46mm^2$. Además, tener en cuenta que R_C está en kN, el cual se debe pasar a N por conveniencia en las operaciones.
    * $\sigma = \dfrac{R_C}{A} = \dfrac{1000\frac{N}{kN}(7.5+\frac{6}{7}q)}{46mm^2} \leq 250MPa \longrightarrow q \leq 4666.67\frac{N}{m}$, es decir, $\boxed{q \leq 4.67\frac{kN}{m}}$.
- **[+0.25]** Finalmente, para que se cumplan simultáneamente las condiciones $q \leq 4.50kN$ y $q \leq 4.67kN$, es necesario que $q \leq 4.50kN$. Este paso debe ir muy bien justificado. Luego, $w = q + 5\frac{kN}{m} = 4.5 + 5$, por lo tanto, $\boxed{w \leq 9.5\frac{kN}{m}}$.

(4) En un ensayo a compresión se quiere conocer las propiedades mecánicas de un espécimen de concreto de diámetro $15cm$ y altura $30cm$. Se calibró el extensómetro en $0mm$ respecto a la altura del cilindro, obteniendo los datos de la tabla.

$\Delta L\ [\mu m]$	$P\ [Lb]$
0	0
-93	42096
-186	74661
-306	111595
-450	146145
-609	166002
-690	159648
-780	139394
-894	67116

(a) Determinar el módulo de elasticidad (no usar $E_c = 4700\sqrt{f'c}$) y la resistencia máxima a compresión $f'c$. $(1Kg = 2.20462Lb)$

Una guía importante para resolver el problema es la siguiente gráfica:



- **[+0.20]** Teniendo en cuenta que los gráficos de carga aplicada P VS. ΔL y esfuerzo σ vs. deformación ε son proporcionales, debido a que la longitud inicial y el área de la sección transversal se asumen constantes, es posible identificar la carga con la cual se va a aplicar el concepto de la línea secante entre el origen y el $0.45f'c$. De los datos se tiene que la carga máxima es $166002Lb$, luego, el 0.45 de la carga máxima es $74701Lb$; de aquí, se concluye que es posible usar la información de los datos de laboratorio: $(186\mu m, 74661Lb)$, ya que sólo hay una variación del 0.5% entre $74701Lb$ y $74661Lb$. Se otorgan los puntos si se identifican los dos puntos de interés por cualquier método lógico.
- **[+0.30]** Tomando los datos de P_{max} y $0.45P_{max}$, se convierte P a N. Para pasar de Lb a Kg se multiplica por $\frac{1Kg}{2.20462Lb}$, y para pasar de Kg a N se multiplica por $\frac{9.81N}{1Kg}$. Luego, es esfuerzo en el cilindro de concreto es $\sigma = \dfrac{F}{A}$, en donde el área es $A = \dfrac{d^2\pi}{4} = \dfrac{(1500mm)^2\pi}{4} = 1767145.87mm^2$.

Esfuerzo	$P[Lb]$	$P[Kg]$	$P[N]$	$\sigma[MPa]$
Datos para P_{max}	166002	75297.33	738666.81	41.8
Datos para $0.45P_{max}$	74661	33865.7	332222.52	18.8

De acá, se obtiene que la resistencia máxima a compresión es $\boxed{f'_c = 41.8MPa}$.

- **[+0.10]** Se calcula la deformación ε para el punto $(186\mu m, 74661Lb)$. Se convierte Δ_L de μm a cm multiplicando por $\frac{1}{10000cm}$. Luego, la deformación, se obtiene aplicando la ecuación $\varepsilon = \dfrac{L_f - L_i}{L_i} = \dfrac{\Delta L}{L_i} = \dfrac{0.0186cm}{30cm} = 0.00062\frac{mm}{mm}$. Por lo tanto, $\boxed{\text{la deformación para el } 0.45f_c' \text{ es } 0.00062}$.

Deformación	$\Delta L[\mu m]$	$\Delta L[cm]$	$\varepsilon[mm/mm]$
Datos para $0.45P_{max}$	186	0.0186	0.00062

- **[+0.20]** Finalmente, el módulo de elasticidad se determina como la pendiente de la recta secante entre el origen y el punto de $0.45f'c$, es decir, la pendiente entre los puntos $(0\frac{mm}{mm}, 0MPa)$ y $(0.00062\frac{mm}{mm}, 18.8MPa)$. De esta manera, $E = \dfrac{18.8-0}{0.00062-0} = 30322.58MPa = 30.32GPa$. Por lo tanto, $\boxed{\text{el módulo de elasticidad es } E = 30.32GPa}$.

(b) ¿Se puede usar la ley de Hooke en estructuras hechas de concreto reforzado? ¿Por qué? ¿Cómo afecta sus hipótesis/simplificaciones?

- **[+0.15]**Se puede usar la ley de Hooke para estructuras hechas de concreto reforzado, pero se deben hacer correcciones y suposiciones adicionales que serán vistas en cursos avanzados, dichas correcciones se observan en los códigos de construcción.
  Fundamentalmente, el concreto reforzado presenta problemas en la hipótesis de linealidad y elasticidad. Por lo tanto, se otorgan los puntos si se hace un desarrollo la explicación de estas dos hipótesis en el concreto. No se trata de definir las 10 hipótesis de la ley de Hooke, sólo explicar cómo se afectan o incumplen las dos mencionadas.
- **[+0.15]** La gráfica de esfuerzo-deformación del concreto no cumple con la linealidad, es decir, no hay una zona en la que se observe una proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones. Esto se observa claramente en la metodología de cálculo del módulo de elasticidad. Al no cumplir con linealidad, también se afecta el principio de superposición.
- **[+0.15]** El concrerto elástico no cumple con el comportamiento elástico completamente porque tal como se verá en cursos posteriores, dicho material presenta agrietamiento, lo cual no implica una falla de un elemento estructural. El agriteamiento es una forma de daño, es decir, las deformaciones no son completamente recuperables; esto implica que no se cumple completamente con la continuidad del material, afectando también el principio de superposición.

«Cum cogitaveris quot te antecedant, respice quot sequantur»
Séneca