Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
Estática
Primer examen parcial (25 %)
Jueves 16 de marzo de 2023
Solución

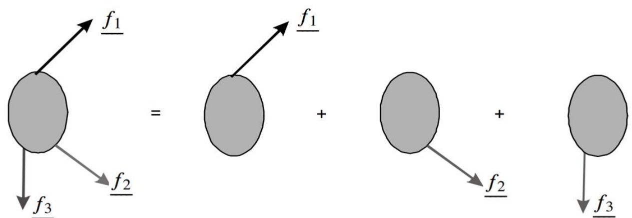
De forma clara y detallada responda las siguientes preguntas. Se deberán presentar gráficos de apoyo, cálculos paso a paso y explicación del procedimiento.

(1) [**25 %**] Responda las siguientes preguntas teóricas:

(a) Explique en qué consisten las hipótesis/simplificaciones:

* Principio de superposición.

El efecto de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo es igual la suma de los efectos individuales de cada una de las fuerzas.

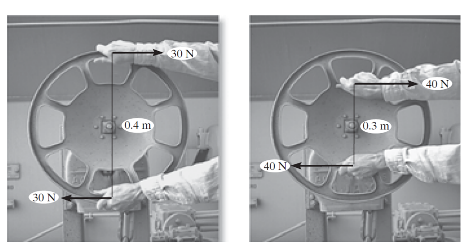


* Fuerza concentrada .

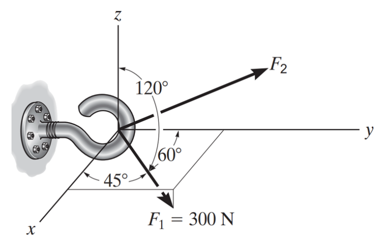
Representa el efecto de una carga que se supone actúa en cierto punto de un cuerpo. Una carga puede representarse mediante una fuerza concentrada, siempre que el área sobre la que se aplique la carga sea muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo.

(b) Explique qué son pares equivalentes.

Son momentos de par que producen igual momento. Por ejemplo:



(2) [**25 %**] Determine la magnitud y los ángulos directores de la fuerza $\underline{F_2}$ de modo que la fuerza resultante $\underline{F_R}$ actúe a los largo del eje z positivo y tenga una magnitud de $900N$.



Del esquema de fuerzas concurrentes en 3D tenemos que:

$$\underline{F_1} + \underline{F_2} = \underline{F_R}$$

Despejando $\underline{F_2}$:

$$\underline{F_2} = \underline{F_R} - \underline{F_1}$$

$$\underline{F_2} = \begin{bmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \\ F_{Rz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{bmatrix}$$

La resultante solo tiene componente en z (toda su magnitud):

$$\underline{F_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 900 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 300\cos(45°) \\ 300\cos(60°) \\ 300\cos(120°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 300\cos(45°) \\ 0 - 300\cos(60°) \\ 900 - 300\cos(120°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -212.13 \\ -150 \\ 1050 \end{bmatrix} [N]$$

La magnitud de $\underline{F_2}$ es:

$$F_2 = \sqrt{f_{2x}^2 + f_{2y}^2 + f_{2z}^2} = \sqrt{213.13^2 + 150^2 + 1050^2} = 1081.67N$$

Luego, la dirección de $\underline{F_2}$ (sus cosenos directores) es:

$$\underline{\hat{F_2}} = \frac{\underline{F_2}}{F_2} = \frac{1}{1081.67} \begin{bmatrix} -212.13 \\ -150 \\ 1050 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.20 \\ -0.14 \\ 0.97 \end{bmatrix}$$

De aquí:

$$\alpha = \cos\theta_x = -0.20$$
$$\beta = \cos\theta_y = -0.14$$
$$\gamma = \cos\theta_z = 0.97$$

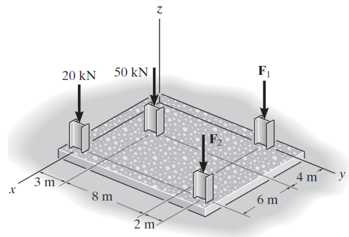
Finalmente, de los cosenos directores, extraemos sus ángulos directores en grados:

$$\theta_x = \arccos(-0.20) = \boxed{101.3° = \theta_x}$$

$$\theta_y = \arccos(-0.14) = \boxed{97.97° = \theta_y}$$

$$\theta_z = \arccos(0.97) = \boxed{13.90° = \theta_z}$$

(3) [**25 %**] Calcule la magnitud de las fuerzas $\underline{F_1}$ y $\underline{F_2}$ que generen que la resultante actúe sobre el centro de la losa de cimentación. Calcular la resultante.



Tenemos un problema que tiene 3 incógnitas: la magnitud F_1, la magnitud F_2 y la magnitud de la fuerza resultante F_R. Para poderlo resolver se requieren 3 ecuaciones. El centro de la cimentación está ubicado en la posición: $(d_x, d_y) = (\frac{10}{2}, \frac{13}{2})[m] = (5m, 6.5m)$. Denotemos a la fuerza de $50kN$ como F_3 y la fuerza de $20kN$ como F_4.

* Alrededor del eje x se genera un momento $m_x = d_y F_R$. Ya que todos los momentos se generan en el mismo sentido, podemos asumirlos en la ecuación todos positivos:

$$d_y F_R = d_{1y} F_1 + d_{2y} F_2 + d_{3y} F_3 + d_{4y} F_4$$

Reemplazando:

$$6.5 F_R = 11 F_1 + 13 F_2 + 3(50) + 0(20)$$

Despejando F_1:

$$\boxed{F_1 = \frac{6.5 F_R - 13 F_2 - 150}{11}} \quad (1)$$

* Alrededor del eje y se genera un momento $m_y = d_x F_R$. Ya que todos los momentos se generan en el mismo sentido, podemos asumirlos en la ecuación todos positivos:

$$d_x F_R = d_{1x} F_1 + d_{2x} F_2 + d_{3x} F_3 + d_{4x} F_4$$

Reemplazando:

$$5 F_R = 0 F_1 + 10 F_2 + 4(50) + 10(20)$$

Despejando F_R:

$$\boxed{F_R = 2F_2 + 80} \quad (2)$$

* Y la fuerza resultante es:

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

Reemplazando:

$$F_R = F_1 + F_2 + 50 + 20$$

Luego,

$$\boxed{F_R = F_1 + F_2 + 70} \quad (3)$$

Podemos resolver las ecuaciones (1), (2) y (3) por sustitución, o alternativamente resolviendo por algún método visto en álgebra lineal el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 6.5 & -11 & -13 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_R \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 80 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$F_1 = \frac{6.5(2F_2 + 80) - 13F_2 - 150}{11}$$

$$F_1 = \frac{\cancel{13F_2} - 6.5(80) - \cancel{13F_2} - 150}{11}$$

$$F_1 = \frac{370}{11}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{F_1 = 33.64kN}$$

Luego, igualando (2) y (3), y reemplazando con el resultado anterior:

$$2F_2 + 80 = F_1 + F_2 + 70$$

$$2F_2 + 80 = 33.64 + F2 + 70$$

$$F_2 = 33.64 - 10$$

Por lo tanto,

$$\boxed{F_2 = 23.64kN}$$

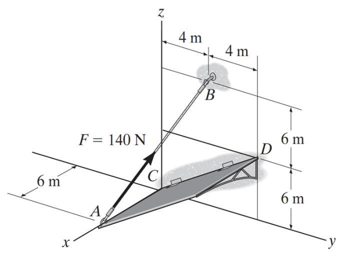
Y la fuerza resultante:

$$F_R = 33.64 + 23.64 + 50 + 20$$

Por lo tanto,

$$\boxed{F_R = 127.27kN}$$

(4) **[25 %]** Calcule el momento de la fuerza alrededor del eje DC (indicar el sentido del momento).



Debemos calcular $m_{DC} = \underline{\hat{DC}} \cdot \underline{m_D}$

* Las coordenadas de los puntos son:

$$A = (6, 0, 0)$$

$$B = (0, 4, 12)$$
$$C = (0, 0, 0)$$
$$D = (0, 8, 6)$$

* Calculamos las componentes de la fuerza $\underline{F} = F\underline{\hat{AB}}$.

$$\underline{\hat{AB}} = \frac{\underline{AB}}{||\underline{AB}||}$$

Donde:

$$\underline{AB} = B - A = (0, 4, 12) - (6, 0, 0) = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} [m]$$

$$||\underline{AB}|| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 12^2} = 14m$$

Por lo tanto,

$$\underline{F} = 140\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 40 \\ 120 \end{bmatrix} [N]$$

* Calculamos el vector r_{DA}:

$$\underline{r_{DA}} = DA = A - D = (6, 0, 0) - (0, 8, 6) = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -6 \end{bmatrix} [m]$$

* Calculamos $\underline{m_D}$:

$$\underline{m_D} = \underline{r_{DA}} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{\hat{i}} & \underline{\hat{j}} & \underline{\hat{k}} \\ 6 & -8 & -6 \\ -60 & 40 & 120 \end{vmatrix}$$

$$\underline{m_D} = [(-8)(120) - (-6)(40)]\underline{\hat{i}} - [(6)(120) - (-6)(-60)]\underline{\hat{j}} + [(6)(40) - (-8)(-60)]\underline{\hat{k}}$$

$$\underline{m_D} = -720\underline{\hat{i}} - 360\underline{\hat{j}} - 240\underline{\hat{k}}[kN.m] = \begin{bmatrix} -720 \\ -360 \\ -240 \end{bmatrix} [kN.m]$$

* Calculamos la dirección $\underline{\hat{DC}}$:

$$\underline{\hat{DC}} = \frac{\underline{DC}}{||\underline{DC}||}$$

Donde:

$$\underline{DC} = C - D = (0,0,0) - (0,8,6) = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$||\underline{DC}|| = \sqrt{0^2 + 8^2 + 6^2} = 10$$

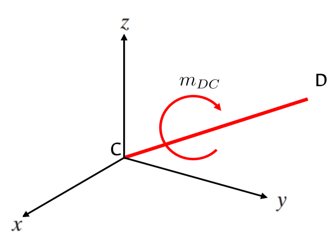
Por lo tanto,

$$\underline{\hat{DC}} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.8 \\ -0.6 \end{bmatrix} [m]$$

* Finalmente calculamos $m_{DC} = \underline{\hat{DC}} \cdot \underline{m_D}$:

$$m_{DC} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.8 \\ -0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -720 \\ -360 \\ -240 \end{bmatrix} = 0 + 288 + 144$$

$$\boxed{m_{DC} = 432kN.m}$$



«*Cum cogitaveris quot te antecedant, respice quot sequantur*»
Séneca