

Universidad Nacional de Colombia  
Sede Manizales  
Mecánica de sólidos  
Primer examen parcial (25 %)  
Jueves 09 de marzo de 2023  
**Solución**

De forma detallada, pero no en más de siete (7) renglones, responda las siguientes preguntas:

(1) [25 %] Acerca del principio de superposición:

(a) ¿En qué consiste y cómo funciona?

- \* [+0.25] Si escribía que el principio de superposición expresa que los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de un sólido en equilibrio sujeto a un conjunto de configuraciones de carga se pueden analizar como la suma de las soluciones que corresponden a cada una de dichas configuraciones, asumiendo que cada una de ellas se aplica independientemente. Los términos claves son: efectos individuales y suma de efectos.
- \* [+0.25] Si explicaba el funcionamiento del principio de superposición mediante un ejemplo o con los gráficos de entrada-salida que aparecen en el libro.

(b) Demuestre matemáticamente que es válido para un sólido isótropo.

- \* [+0.25] Si hacía una descripción del proceso de demostración, explicando que se necesitaban las ecuaciones de equilibrio externo y la ley de Hooke para isótropos en su representación matricial:  $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2G \underline{\underline{\varepsilon}}$ .
- \* [+0.25] Si reemplazaba en  $\underline{\underline{\sigma}}$  de la ley de Hooke en las ecuaciones de equilibrio externo  $\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\hat{n}}}$ . Y demostraba que para  $\underline{\underline{f}}_1$  y  $\underline{\underline{f}}_2$  sus respuestas individuales sumadas es igual a la respuesta de aplicar  $\underline{\underline{f}}_1 + \underline{\underline{f}}_2$ .

(c) Explicar las condiciones necesarias para que sea aplicable.

- \* [+0.125] Si explicaba que el material debe ser elástico, es decir, sus deformaciones no son permanentes. Si solo lo mencionaba y no lo explicaba +0.05.
- \* [+0.125] Si explicaba que el material debe tener un comportamiento lineal, es decir, sus esfuerzos son proporcionales a sus deformaciones. Si solo lo mencionaba y no lo explicaba +0.05.
- \* [+0.125] Si explicaba que el material debe ser continuo, es decir, no puede haber agujeros o discontinuidades. También podía mencionar que el material no se puede traslapar. Si solo lo mencionaba y no lo explicaba +0.05.
- \* [+0.125] Si explicaba que se debe considerar el principio de rigidez relativa, es decir, que las deformaciones, desplazamientos y giros son muy pequeñas. Si solo lo mencionaba y no lo explicaba +0.05.

(2) [25 %] Deduzca que  $\underline{\underline{\hat{n}}} = \left[ \frac{dy(s)}{ds}, -\frac{dx(s)}{ds} \right]^T$  en las ecuaciones de equilibrio externo bidimensional (usar los cuatro casos).

- \* **[+0.375]** Por cada caso de demostración incluyendo: una gráfica correcta, determinación de  $\hat{n}$  y sus componentes de acuerdo con la posición de la flecha. Se tenía en cuenta la mitad si había problemas en la explicación. Se tenía una cuarta parte si si había problemas en la explicación y deficiencias en los pasos.

(3) **[35 %]** Respecto a  $\sigma_1(x, y)$  y  $\sigma_2(x, y)$ :

(a) Haga una descripción detallada de la interpretación de sus gráficas para el diseño del concreto reforzado.

- \* **[+0.35]** Si explicaba que  $\theta_1$  en el gráfico de  $\sigma_1$  muestra la disposición ideal del acero de refuerzo, siempre y cuando  $\sigma_1 > 0$ .
- \* **[+0.35]** Si explicaba que  $\theta_2$  en el gráfico de  $\sigma_2$  muestra el patrón de agrietamiento del concreto, siempre y cuando  $\sigma_1 > 0$ .
- \* **[+0.20]** Por aportes en los que se menciona que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  muestran las zonas de mayor tracción y compresión en cualquier dirección, siempre y cuando  $\sigma_1 > 0$  y  $\sigma_2 < 0$ .

(b) ¿Qué relación existe con las fuerzas cortantes? ¿Qué tipo de acero se pone en el diseño convencional? ¿Con qué tipo de grietas se asocia?

Por ejemplo, en 2D  $\sigma_1(x, y)$  se relaciona con  $V(x)$  en la ecuación  $\sigma_1(x, y) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ , pues  $\tau_{xy}$  es proporcional a  $V(x)$  según  $V(x) = -\iint \tau_{xy}(x, y)dA$ . Luego, cuando  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son muy pequeños la ecuación de  $\sigma_1$  es proporcional (está dominada) por  $V(x)$ . Esto en una viga simplemente apoyada ocurre cerca a los apoyos (lejos del centro de la luz). Por lo tanto, cerca a los apoyos se ponen más flejes que en el centro de la luz, con el fin de controlar las grietas por tracción diagonal que se observan en el gráfico de  $\sigma_2$  y  $\theta_2$ .

- \* **[+0.35]** Si explicaba la relación de las funciones  $V(x)$  y  $\sigma_1$ , y en qué partes de una viga.
- \* **[+0.25]** Si explicaba que se ponen flejes con mayor concentración a los apoyos. Si sólo mencionaba el tipo de acero, se otorgaba **[+0.1]**.
- \* **[+0.10]** Si exponía que se asocia a grietas por tracción diagonal.

(c) ¿Qué relación existe con los momentos flectores? ¿Qué tipo de acero se pone en el diseño convencional? ¿Con qué tipo de grietas se asocia?

Por ejemplo, en 2D  $\sigma_1(x, y)$  se relaciona con  $M(x)$  en la ecuación  $\sigma_1(x, y) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ , pues  $\sigma_x$  es proporcional a  $M(x)$  según  $M(x) = \iint y\sigma_x(x, y)dA$ . Luego, en una viga ocurre que  $\sigma_x \gg \sigma_y$ , y si  $\tau_{xy}$  es muy pequeño, entonces  $\sigma_1$  es proporcional (está dominada) por  $M(x)$ . Esto en una viga simplemente apoyada ocurre cerca al centro de la luz. Y como el concreto resiste más a tracción que a compresión, se ubican varillas longitudinales en la zona inferior cerca al centro de luz, pues allí se presentan los  $\sigma_1$  mayores en la dirección longitudinal. Con este acero se controlan las grietas verticales de la parte inferior que se observan en el gráfico de  $\sigma_2$  y  $\theta_2$ .

- \* **[+0.35]** Si explicaba la relación de las funciones  $M(x)$  y  $\sigma_1$ , y en qué partes de una viga.

- \* **[+0.25]** Si explicaba que se ponen varillas longitudinales en la parte inferior y cerca al centro de la luz. Si sólo mencionaba el tipo de acero, se otorgaba [+0.1].
- \* **[+0.10]** Si exponía que se asocia a grietas verticales en la parte inferior.

(4) **[15 %]** Acerca de la tensión plana:

(a) Explicar las condiciones necesarias para que sea aplicable ¿en qué tipo de estructuras?

- \* **[+0.15]** Si mencionaba que los esfuerzos  $\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ .
- \* **[+0.15]** Si explicaba que los esfuerzos  $\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  son en realidad aproximadamente cero, gracias a que las áreas donde actúan dichos esfuerzos son relativamente más grandes que las de los demás esfuerzos.
- \* **[+0.15]** Si mencionaba que una dimensión de la estructura debe ser mucho más pequeñas que las demás.
- \* **[+0.15]** Si mencionaba que puede aplicar en estructuras como placas delgadas, vigas de gran altura delgadas o muros cargados en sus bordes.
- \* **[+0.15]** Si exponía que no se pueden aplicar cargas en la dirección z o su superficie ortogonal.
- \* **[+0.15]** Si decía que las cargas deben aplicarse en el espesor (dimensión más pequeña).
- \* **[+0.15]** Si exponía que debe cumplir con las 9 hipótesis de la ley de Hooke vistas en clase.
- \* **[+0.15]** Si mencionaba que uno de los esfuerzos principales debe ser cero.

*«Cum cogitaveris quot te antecedant, respice quot sequantur»*

**Séneca**