

Universidad Nacional de Colombia  
Sede Manizales  
Mecánica tensorial  
Tercer examen parcial (25 %)  
Miércoles 12 de abril de 2023

**Solución**  
**Calificación sobre 5.0**

De forma detallada responda las siguientes preguntas:

(1) [35 %] Círculo de Mohr:

(a) Explique y deduzca cómo contruir el círculo de Mohr en 3D a partir de:

$$* \alpha^2 = \frac{\sigma_2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_n - \sigma_3\sigma_n + \sigma_n^2 + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$* \beta^2 = \frac{\sigma_1\sigma_3 - \sigma_1\sigma_n - \sigma_3\sigma_n + \sigma_n^2 + \tau_n^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$* \gamma^2 = \frac{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_n - \sigma_2\sigma_n + \sigma_n^2 + \tau_n^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

**Pista:**  $\frac{1}{4}(\sigma_2 + \sigma_3)^2 - \sigma_2\sigma_3$ ,  $\frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_3)^2 - \sigma_1\sigma_3$  y  $\frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - \sigma_1\sigma_2$ .

- \* [+0.30] Si exponía que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  por la definición hecha en el problema de esfuerzos y direcciones principales.
- \* [+0.30] Si hacía un análisis de signos de las ecuaciones, extrayendo las desigualdades de los numeradores, teniendo en cuenta que las cantidades  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  y  $\gamma^2$  son mayores o iguales que cero.
- \* [+0.30] Si después de realizar las operaciones correspondientes llegaba a las siguientes inecuaciones limitadas en la igualdad por circunferencias.

$$[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)]^2 + \tau_n^2 \geq [\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)]^2$$

$$[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)]^2 + \tau_n^2 \leq [\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)]^2$$

$$[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)]^2 + \tau_n^2 \geq [\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)]^2$$

(b) Grafique ubicando centros y radios.

- \* [+0.30]. Si faltaba algún elemento importante como los radios, los centros o las áreas sombreadas, solo sumaba [+0.15].

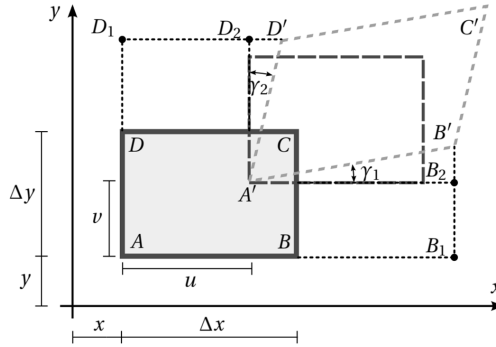
(c) ¿Qué representa físicamente el círculo de Mohr en 3D?

Físicamane el círculo de Mohr en 3D representa las combinaciones para un punto de esfuerzos posibles  $\sigma_n$  y  $\tau_n$  en todas las direcciones, incluidas las principales.. Es posible observar en los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , el máximo y el mínimo axial posible; así como los esfuerzos cortantes máximo y mínimo. Adicionalmente, en  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  el cortante es nulo.

- \* **[+0.55]** Si exponía de forma detallada la interpretación física del círculo de Mohr en 3D. Debía mencionar que gráficamente es posible observar los esfuerzos máximos y mínimos, tanto axiales como cortantes (si no lo hacía: **[-0.15]**). Si no hacía énfasis en que los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  el cortante es nulo: **[-0.15]**.

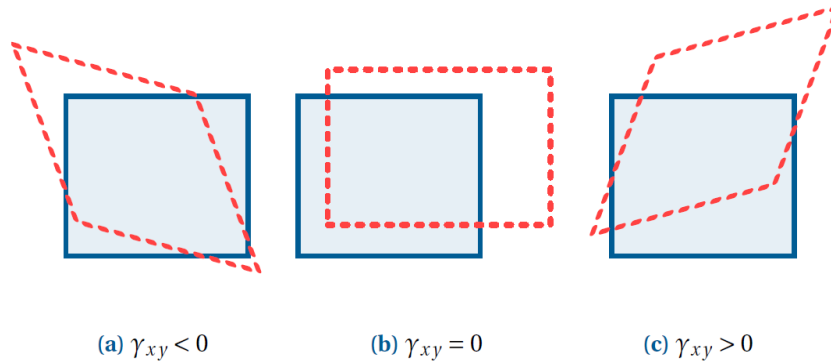
(2) **[25 %]** Deduzca que  $\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ . ¿Qué interpretación física y gráfica tiene:  $\gamma_{xy} > 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$  y  $\gamma_{xy} < 0$ ?

- \* **[+0.20]** Si construía una gráfica similar a la siguiente, considerando los puntos originales y los puntos desplazados y deformados, además, presentando los ángulos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Si faltaba algún elemento importante solo se otorgaba **[+0.13]**.



- \* **[+0.20]** Si especificaba que  $\gamma_{xy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (\gamma_1 + \gamma_2) \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{B_2 B'}{A' B_2} + \frac{D_2 D'}{A' D_2} \right)$ , gracias a que la hipótesis de deformaciones pequeñas permite hacer  $\gamma_1 \approx \tan \gamma_1 = \frac{B_2 B'}{A' B_2}$  y  $\gamma_2 \approx \tan \gamma_2 = \frac{D_2 D'}{A' D_2}$ .
- \* **[+0.20]** Si determinaba que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{B_2 B'}{A' B_2} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\text{Coord}_y(B') - \text{Coord}_y(B_2)}{\text{Coord}_x(B_2) - \text{Coord}_x(A')}$  a partir de los elementos de la gráfica. Luego,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{B_2 B'}{A' B_2} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{y + v(x + \Delta x, y) - (y + v(x, y))}{x + \Delta x + u(x + \Delta x, y) - (x - u(x, y))}$ .
- \* **[+0.20]** Si al simplificar obtenía  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{B_2 B'}{A' B_2} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x + u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}$  y luego multiplicaba toda la expresión por  $1 = \frac{\frac{\Delta x}{1}}{\frac{\Delta x}{1}}$ , llegando a  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} + \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}}{\frac{\Delta x}{1}}$ . En donde, al aplicar la **definición de derivada parcial** se llega a que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{B_2 B'}{A' B_2} \right) = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$ .
- \* **[+0.20]** Si aplicaba la definición de  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ , se llegaba a que  $1 + \varepsilon_x \approx 1$  debido a la hipótesis/simplificación de deformaciones pequeñas. Concluyendo finalmente que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{B_2 B'}{A' B_2} \right) = \frac{\partial v}{\partial x}$ .
- \* **[+0.20]** Si concluía que de forma análoga que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{D_2 D'}{A' D_2} \right) = \frac{\partial u}{\partial y}$ . Por lo tanto,  $\gamma_{xy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ .
- \* **[+0.30]** **[+0.10]** Por cada posibilidad correctamente explicada y graficada. Teniendo en cuenta que  $\gamma_{xy} > 0$  representa un cierre en radianes de un ángulo que originalmente era

recto,  $\gamma_{xy} = 0$  quiere decir que no hay deformación angular en el plano  $xy$  y  $\gamma_{xy} < 0$  representa una apertura en radianes de un ángulo que originalmente era recto.



- (3) [35 %] Dada la placa de la figura sometida a un estado de esfuerzos en un punto en el que  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , la deformación en la galga  $A$  (dirección  $x'$ ) es  $-1.1 \times 10^{-3}$ , en la galga  $B$  (a  $45^\circ$  de  $A$  sobre el plano) es  $9 \times 10^{-4}$  y en la galga  $C$  (dirección  $y'$ ) es  $2.9 \times 10^{-3}$ . La galga  $A$  está en la dirección  $(-0.56, -0.74, 0.37)$  y la galga  $C$  en la dirección  $(0.75, -0.64, -0.17)$ , formando una base ortonormal con la dirección perpendicular  $(0.37, 0.18, 0.91)$ .

- (a) Determine las deformaciones y direcciones principales en dicho punto.
- (b) ¿Qué interpretación física tienen los resultados?
- (c) Dibuje el círculo de Mohr de deformaciones en 3D para dicho punto.

\* [+0.25] A partir de la información de las galgas, si llegaba a la conclusión de que  $\varepsilon_{x'} = -1.1 \times 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_{y'} = 2.9 \times 10^{-3}$  y  $\gamma_{x'y'} = 0$ .

\* [+0.25] Si construía el tensor de deformaciones  $\underline{\underline{\varepsilon}}' = \begin{bmatrix} -1.1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 2.9 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

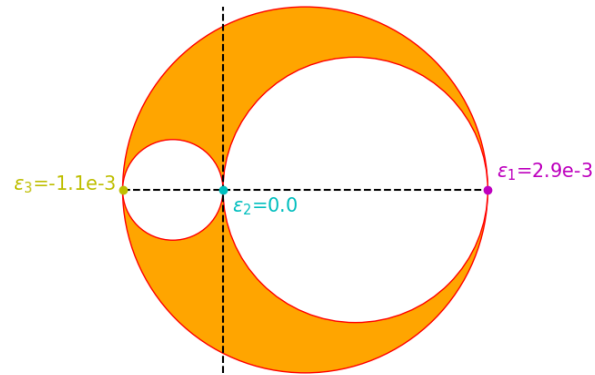
\* [+0.25] Si explicaba el polinomio característico es el mismo, independientemente del sistema de coordenadas usado. Por lo tanto, el polinomio característico era:  $(\varepsilon_n + 1.1 \times 10^{-3})(\varepsilon_n - 2.9 \times 10^{-3})\varepsilon_n = 0$ .

\* [+0.25] Si concluía que las raíces del polinomio característico eran:  $-1.1 \times 10^{-3}$ ,  $2.9 \times 10^{-3}$  y 0. Es decir, ordenándolas según la definición:  $\varepsilon_1 = 2.9 \times 10^{-3}$ , y  $\varepsilon_2 = 0$  y  $\varepsilon_3 = -1.1 \times 10^{-3}$ .

\* [+0.25] Si concluía que las direcciones principales eran:  $\hat{n}_1 = [0.75, -0.64, -0.17]^T$ ,  $\hat{n}_2 = [0.37, 0.18, 0.91]^T$  y  $\hat{n}_3 = [-0.56, -0.74, 0.37]^T$  gracias a que con respecto a dicha base se presentan las deformaciones principales (todas las deformaciones angulares son cero).

\* [+0.25] Si explicaba que los resultados mostraban que la placa tiene sus deformaciones principales orientadas con su forma, es decir, si la placa se ubicara en otra dirección, las direcciones principales serían las de la nueva posición. Por lo tanto, las deformaciones axiales medidas en las galgas  $C$  y  $A$  son la máxima y mínima que tiene la placa en ese punto.

- \* **[+0.25]** Si dibujaba correctamente el círculo de Mohr en 3D indicando las direcciones principales y los nombres de los ejes.



«*Cum cogitaveris quot te antecedant, respice quot sequantur*»

**Séneca**