Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
Mecánica de sólidos
Tercer examen parcial (10 %)
Martes 18 de octubre de 2022
Solución

(1) [**+2.0**]Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es verdadera V o falsa F. Las respuestas **no** deben ser justificadas. Por cada respuesta mala se anula una buena, por lo que, solo responda si está seguro(a).

(a) El círculo de Mohr 2D es una curva paramétrica que se grafica en el sentido negativo en función de θ, mientras el sólido cambia su sistema de coordenadas en función de θ en el sentido positivo. **Falso**, porque si el cambia su sistema de coordenadas en función de θ, entonces la gráfica se hace en función de 2θ.

(b) En el círculo de Mohr 2D, si $\sigma_x > \sigma_y$ y $\tau_{xy} = 0$, entonces el esfuerzo axial máximo es σ_x y el mínimo es σ_y. **Verdadero**, porque $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix}$, siendo $\sigma_1 = \sigma_x$ y $\sigma_2 = \sigma_y$ $(\sigma_1 > \sigma_2)$, es decir, los esfuerzos axiales máximo y mínimo, respectivamente.

(c) En el círculo de Mohr 2D, si $\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$, entonces $\sigma_1 = \sigma_y$ y $\sigma_2 = \sigma_x$. **Falso**, porque siempre se cumple que $\tau_{max} = R$ y $R = \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$, es decir, $\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} = \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$. Luego, elevando ambos lados al cuadrado: $(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 = (\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2$, y esto solo es posible si $\tau_{xy} = 0$. Por lo tanto, $\sigma_1 = \sigma_x$ y $\sigma_2 = \sigma_y$ (ya que $\tau_{max} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$ es una cantidad positiva, es decir, $\sigma_x > \sigma_y$).

(d) En el círculo de Mohr 3D, si $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z > 0$ y $\tau_{xy} \neq 0$, entonces las circunferencias C_1, C_2 y C_3 se reducen a un punto (cualquier dirección es principal). **Falso**, porque a pesar de que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z > 0$, $\tau_{xy} \neq 0$, es decir, $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$. De $\underline{\underline{\sigma}}$ se concluye que $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$. Luego, las circunferencias C_1, C_2 y C_3 son diferentes.

(e) En el círculo de Mohr 3D, si $\sigma_1 = \sigma_2$, entonces la circunferencia $[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)]^2 + \tau_n^2 = [\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)]^2$ representa todas las combinaciones de esfuerzos posibles. **Verdadero**, porque $C_1 : [\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)]^2 + \tau_n^2 \geq [\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)]^2$, $C_2 : [\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)]^2 + \tau_n^2 \leq [\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)]^2$ y $C_3 : (\sigma_1, 0)$. Uniendo C_1, C_2 y C_3 queda la circunferencia $[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)]^2 + \tau_n^2 = [\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)]^2$.

(f) Los esfuerzos principales en 2D son los esfuerzos axiales máximos y mínimos posibles. **Verdadero**, porque si el centro del círculo de Mohr es $(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0) = (C, 0)$ y $R = \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$. Se puede demostrar que $\sigma_1 = C + R$ y $\sigma_2 = C - R$, es decir, el máximo y mínimo posible en el eje horizontal.

(g) El centro del círculo de Mohr 2D tiene coordenadas $(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0) = (\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0)$. **Verdadero**, porque igualando las coordenadas horizontales, tenemos: $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ y $0 = 0$. En particular, $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$, remplazando con $\sigma_1 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$ y $\sigma_2 =$

$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$, obtenemos: $\frac{\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}+\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}}{2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$, simplificando: $\frac{\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}}{2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$. Finalmente, $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$.

(h) Siempre se cumple en el círculo de Mohr 2D que $\tau_{min} = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$. **Verdadero**, porque $\tau_{min} = -R$, y el R (el radio) es una cantidad postiva definida por $R = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$ (con $\sigma_1 \geq \sigma_2$). Luego, $-R = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}$ (una cantidad negativa).

(i) En el círculo de Mohr 2D, si $\sigma_x = -\sigma_y$, entonces $\tau_{max} = \sigma_1$. **Verdadero**, porque teniendo en cuenta que $\sigma_1 = C + R$ y $\sigma_2 = C - R$ y $C = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$, pero $\sigma_x = -\sigma_y$, entonces $C = 0$. Luego, $\sigma_1 = R$ y $\sigma_2 = -R$, y se cumple que $\tau_{max} = R$, es decir, $\tau_{max} = \sigma_1$.

(j) En el círculo de Mohr 3D, si $\sigma_1 = \sigma_3$, entonces es un estado de esfuerzos sin cortante. **Verdadero**, porque la desigualdad $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ obliga a que $\sigma_2 = 0$. Es decir, C_1, C_2 y C_3 se reducen a único punto $(\sigma_1, 0)$ con cortante nulo (esto se observa muy bien analizando gráficamente).

(2) [**+1.5**] Diga detalladamente cuál es la interpretación física del círculo de Mohr en dos dimensiones para un punto $(x, y) \in \Omega$. Utilice los elementos más importantes del gráfico y/o las ecuaciones.

* **+1.0** si explicaba que el círculo de Mohr en dos dimensiones es una curva parámetrica que indica todas las posibles combinaciones de esfuerzos cortantes y axiales en un punto (x, y) de un sólido.

(3) [**+1.5**] Explique detalladamente cómo llegar a partir de: $\alpha^2 = \frac{\sigma_2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_n - \sigma_3\sigma_n + \sigma_n^2 + \tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)}$, $\beta^2 = -\frac{\sigma_1\sigma_3 - \sigma_1\sigma_n - \sigma_3\sigma_n + \sigma_n^2 + \tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_3)}$ y $\gamma^2 = \frac{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_n - \sigma_2\sigma_n + \sigma_n^2 + \tau_n^2}{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3)}$ a las desigualdades:

$$[\sigma_n - \tfrac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)]^2 + \tau_n^2 \geq [\tfrac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)]^2$$
$$[\sigma_n - \tfrac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)]^2 + \tau_n^2 \leq [\tfrac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)]^2$$
$$[\sigma_n - \tfrac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)]^2 + \tau_n^2 \geq [\tfrac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)]^2$$

¿Qué representan gráfica y físicamente dichas desigualdades?

Pista: Sumar $\frac{1}{4}(\sigma_2+\sigma_3)^2 - \sigma_2\sigma_3$, $\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_3)^2 - \sigma_1\sigma_3$ y $\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)^2 - \sigma_1\sigma_2$.

* **+0.25** si hacía un análisis de signos de las ecuaciones y extraía las desigualdades de los numeradores.
* **+0.25** si hacía los cálculos detallados para llegar a las inecuaciones de las circunferencias $C1$, $C2$ y $C3$
* **+0.25** si hacía una interpretación gráfica de las ecuaciones.
* **+0.25** si hacía una interpretación física de los resultados.

(4) [**+1.0**] De forma rigurosa diga todo lo que sabe acerca de la función **atan2()**. ¿Cómo se implementa en Python?

* **+0.33** si daba la definición explítica de $atan2(y, x)$ igual a seis condiciones. O si decía que es una función para determinar el ángulo correcto entre un vector $[x, y]^T$ y el eje x positivo.

* **+0.33** si exponía una aplicación en el contexto del círculo de Mohr en 2D, ya sea diciendo que sirve para hallar los ángulos en los que actúan los esfuerzos axiales máximos y mínimo (explicando sus correspondientes ecuaciones) o para hallar los ángulos en los que actúan los esfuerzos cortantes máximo y mínimo (explicando sus correspondientes ecuaciones).
* **+0.33** si explicaba por qué $atan(\frac{y}{x}) \neq atan(\frac{-y}{-x})$, o alternativamente planteaba la discusión sobre los vectores en los diferentes cuadrantes y cómo $atan()$ calcula la dirección, pero no el sentido.
* **+0.33** si explicaba cómo llamar correctamente en Python (en numpy o sympy) la función $atan2()$, además, de explicar su funcionamiento (por ejemplo, decir que es una función de dos argumentos).

«*Cum cogitaveris quot te antecedant, respice quot sequantur*»
Séneca