Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
Mecánica de sólidos
Cuarto examen parcial (25 %)
Jueves 03 de noviembre de 2022
Solución

(1) [+**1.0**] Deduzca la ley de Hooke para isótropos a partir de la ley de Hooke para ortótropos ¿por qué es posible hacer esta deducción? qué relación hay entre: (a) las deformaciones angulares y los esfuerzos axiales (b) las deformaciones longitudinales y los esfuerzos cortantes.

* [+**0.1**] Si decía que $\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu_{yz} = \nu_{zy} = \nu_{zx} = \nu_{xz} = \nu$, gracias a que en la isotropía las propiedades físicas en cualquier dirección son las mismas.
* [+**0.1**] Si decía que $E_x = E_y = E_z = E$, gracias a que en la isotropía las propiedades físicas en cualquier dirección son las mismas.
* [+**0.1**] Si decía que $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = G$, gracias a que en la isotropía las propiedades físicas en cualquier dirección son las mismas. Adicionalmente, si usaba la definición $G := \frac{E}{2(1+\nu)}$
* [+**0.1**]Si llegaba a que $\Delta = \frac{(1+\nu)^2(1-2\nu)}{E^3}$ mediante un procedimiento matemático coherente.
* [+**0.1**]Si identificaba el término de la matriz $\underline{\underline{D}}$: $\frac{1-\nu^2}{E^2\Delta}$ y lo llevaba a $\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ mediante un procedimiento matemático coherente.
* [+**0.1**]Si identificaba el término de la matriz $\underline{\underline{D}}$: $\frac{\nu^2+\nu}{E^2\Delta}$ y lo llevaba a $\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ mediante un procedimiento matemático coherente.
* [+**0.2**] Si explicaba que la deducción es posible gracias a que los materiales isótropos son una forma particular de los materiales ortótropos, exponiendo que las propiedades físicas son las mismas en cualquier dirección.
* [+**0.2**] Si decía que en los materiales isótropos y ortótropos, los esfuerzos axiales no producen deformaciones angulares, y los esfuerzos cortantes no producen deformaciones longitudinales (esto, gracias a la evidencia experimental). O equivalentemente decir que los esfuerzos axiales solo producen deformaciones longitudinales y que los esfuerzos cortantes solo producen deformaciones angulares.

(2) [+**1.8**] Analice las hipótesis (defina detalladamente cada una) hechas para construir la ley de Hooke ($\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}\underline{\varepsilon}$) para materiales isótropos. ¿Qué implicaciones tienen las simplificaciones en las deducciones del modelo? ¿qué parte del gráfico esfuerzo-deformación se usa?

* [+**0.1**] Si daba la definición de la hipótesis de continuidad.
* [+**0.1**] Si daba la definición de la hipótesis de isotropía.
* [+**0.1**] Si daba la definición de la hipótesis de homogeneidad.
* [+**0.1**] Si daba la definición de la hipótesis de comparación de diferenciales de primer, segundo y tercer orden.
* [+**0.1**] Si daba la definición de la hipótesis de deformación pequeñas.
* [+**0.1**] Si daba la definición de lineal dentro de la hipótesis: ley de Hooke.

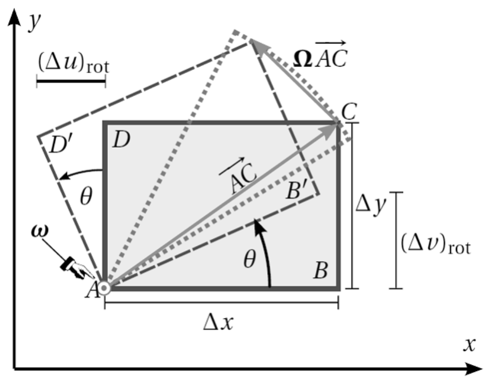
* **[+0.1]** Si daba la definición de elástico dentro de la hipótesis: ley de Hooke.
* **[+0.1]** Si daba la definición de la hipótesis de temperatura constante.
* **[+0.1]** Si daba la definición de la hipótesis de velocidad de aplicación de las cargas.
* **[+0.1]** Si daba la definición de la hipótesis del principio de superposición.
* **[+0.1]** Gráfico: Si explicaba qué parte del gráfico de esfuerzo-deformación se usa.
* **[+0.3]** Clasificación: Si diferenciaba claramente para $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ y $\underline{\underline{\sigma}}$ cuáles hipótesis aplican para cada una.
* Usos: Hasta **[+0.4]** por exponer las implicaciones de las simplificaciones en las deducciones del modelo. [+0.05] por cada una. Por ejemplo: - Decir que la temperatura modificaría la construcción de todo el modelo, por eso, se considera inicialmente constante. - Decir que gracias al prinicipio de superposición se pueden sumar las defomaciones longitudinales producidas por los esfuerzos axiales. - Decir que gracias la continuidad del material está relacionada con la continuidad del campo vectorial de desplazamientos. - Decir que el principio de superposición se puede aplicar gracias al comportamiento lineal de las deformaciones del material. - Decir que gracias a deformaciones pequeñas $1+\varepsilon_x \approx 1$. - Decir en qué parte del proceso de la deducción de $\underline{\underline{\sigma}}$ se usa la hipótesis de los diferenciales.

(3) **[+1.2]** Explique las <u>cuatro</u> componentes de la deformación. Haga una descripción gráfica y matemática detallada que soporte a cada una.

* **[+0.1]** Si explicaba adecuadamente el concepto de traslación rígida.
* **[+0.1]** Si explicaba adecuadamente el concepto de rotación rígida.
* **[+0.1]** Si explicaba adecuadamente el concepto de deformación angular.
* **[+0.1]** Si explicaba adecuadamente el concepto de deformación longitudinal.
* **[+0.1]** Si hacía una representación gráfica acertada de traslación rígida.
* **[+0.1]** Si hacía una representación gráfica acertada de rotación rígida.
* **[+0.1]** Si hacía una representación gráfica acertada de deformación angular.
* **[+0.1]** Si hacía una representación gráfica acertada de deformación longitudinal.
* **[+0.1]** Si decía que la traslación rígida se representa matemáticamente por la parte constante del campo vectorial de desplazamientos $\underline{u}(x, y, z)$.
* **[+0.1]** Si decía que la rotación rígida se representa matemáticamente por $\underline{\underline{\Omega}}\vec{AC}$.
* **[+0.1]** Si decía que la deformación longitudinal se representa matemáticamente por $\begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & \varepsilon_y \end{bmatrix} \vec{AC}$, o su equivalente en 3D.
* **[+0.1]** Si decía que la deformación angular se representa matemáticamente por $\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & 0 \end{bmatrix} \vec{AC}$, o su equivalente en 3D.

(4) **[+0.8]** De la figura, demuestre que $\omega_z = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}$. Recuerde la definición física de γ_1 y γ_2.

* **[+0.2]** si explicaba que $\omega_z = \theta$ porque ω_z es la magnitud de la rotación para el caso bidimensional.



* [**+0.4**] si usaba la definición física de γ_1 y γ_2, que son los ángulos que al ser positivos generan que el sólido se cierre en el punto A. Es decir, en la gráfica $\theta_1 = \gamma_1$ y $\theta_2 = -\gamma_2$. Esto se podía soportar con un gráfico auxiliar.
* [**+0.2**] si explicaba que θ se calcula como un promedio de los ángulos θ_1 y θ_2.

(5) [**+1.2**]Para cada una de las siguientes, diga si es verdadera V o falsa F. **Solo debe justificar las falsas**, exponiendo exactamente qué es falso y corrigiendo (use el concepto matemático).

(a) Por la hipótesis de deformaciones pequeñas: $\sin x = 1$, $\cos x = x$ y $\tan x = x$. [**+0.12**] **Falso**, [**+0.12**] en realidad es $\sin x = x$, $\cos x = 1$ y $\tan x = x$.

(b) La matriz gradiente de desplazamientos se puede descomponer en una matriz simétrica y otra antisimétrica, las cuales representan físicamente la traslación y la rotación. [**+0.12**] **Falso**, [**+0.12**] pues en realidad la matriz simétrica es la de deformaciones $\underline{\underline{\varepsilon}}$, es decir, las deformaciones angulares y las deformaciones longitudinales. Y sí es cierto que la matriz antisimétrica $\underline{\underline{\Omega}}$ representa la rotación.

(c) Se requieren al menos tres (3) mediciones de deformaciones longitudinales en direcciones dentro de un mismo plano para determinar las seis (6) componentes independientes de deformaciones: ε_x, ε_y, ε_z, γ_{yz}, γ_{xz} y γ_{xy}. [**+0.12**] **Verdadero**.

(d) Para construir la matriz constitutiva $\underline{\underline{D}}$ (tamaño 6x6) se requiere la siguiente cantidad de constantes elásticas (términos independientes) para los casos: anisótropo, 21; ortótropo, 9; e isótropo, 2.[**+0.12**] **Verdadero**.

(e) El tensor δ_{ijkl} que tiene 81 términos, pero solo 21 de ellos son independientes gracias únicamente a que σ_{ij} y ε_{kl} son tensores simétricos. [**+0.12**] **Falso**, [**+0.12**] falta decir también que es gracias a que δ_{ijkl} es simétrico o que la matriz $\underline{\underline{D}}$ lo es.

(f) Un coeficiente de Poisson negativo no tiene sentido debido a que matemáticamente el módulo de cortante lo restringe. [**+0.12**] **Falso**,[**+0.12**] necesariamente $G > 0$, luego $G := \frac{E}{2(1+\nu)}$. $E > 0$, entonces $2(1 + \nu) > 0$, es decir, $-1 < \nu$ (y no $0 < \nu$).

«*Cum cogitaveris quot te antecedant, respice quot sequantur*»
Séneca