21장 수치미분

21장 수치미분

자유 낙하하는 번지 점프하는 사람의 속도와 이를 적분하여 구한 낙하거리는 다음과 같다.

$$v(t)=\sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right) \Longrightarrow z(t)=\frac{m}{c_d}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)\right]$$

)ㅋ in 19장.

위 문제의 역을 고려해보자. 즉 낙하한 거리를 미분하여 번지 점프하는 사람의 속도와 가속도를 구한다.

$$v(t)=\frac{dz(t)}{dt} \Longrightarrow v(t)=\sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

미분

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2z(t)}{dt^2} \Longrightarrow a(t)=g\ \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

미분을 해석적으로 구할 수 없는 경우에는 어떻게 하나?

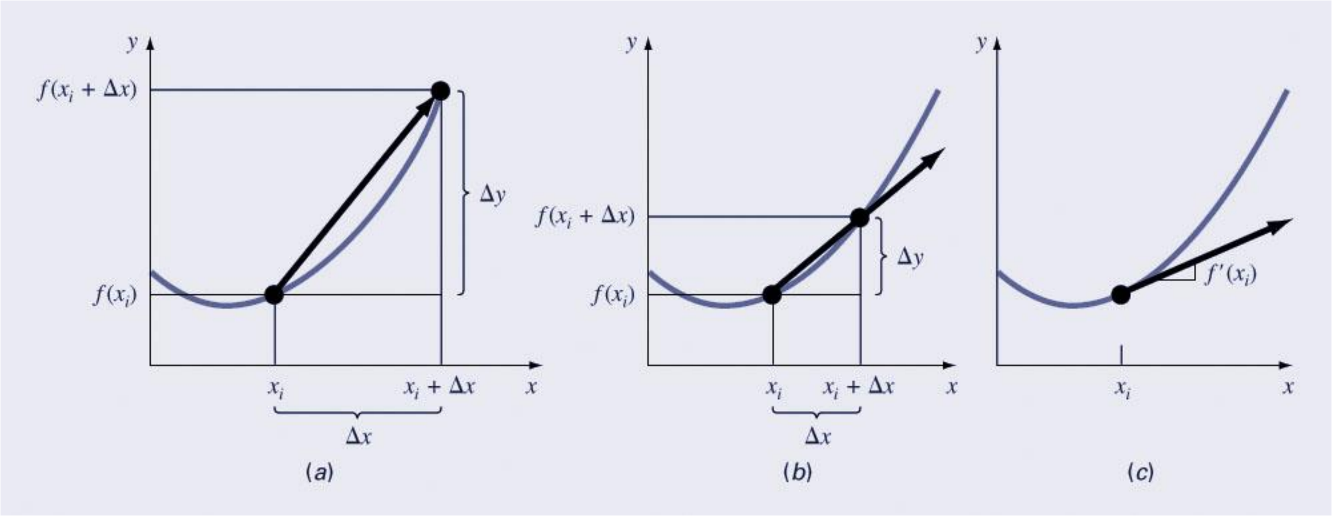
위치가 이산 값으로 주어질 경우에는 어떻게 미분하는가?

21.1 소개 및 배경

- **미분이란 무엇인가?**
  - 도함수 : 독립변수에 대한 종속변수의 변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} = y' = f'(x_i)$$

차분 근사 도함수



  - 1차 도함수 : 곡선의 한 점에서 접선의 구배

21.1 소개 및 배경

- 2차 도함수 : 구배가 얼마나 빨리 변하는지의 정도, 곡율

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

- 편도함수는 한 개 이상의 변수에 의존하는 함수에 대해 사용한다. 한 개의 변수를 고정시키고, 한 점에서 함수의 도함수를 취한다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

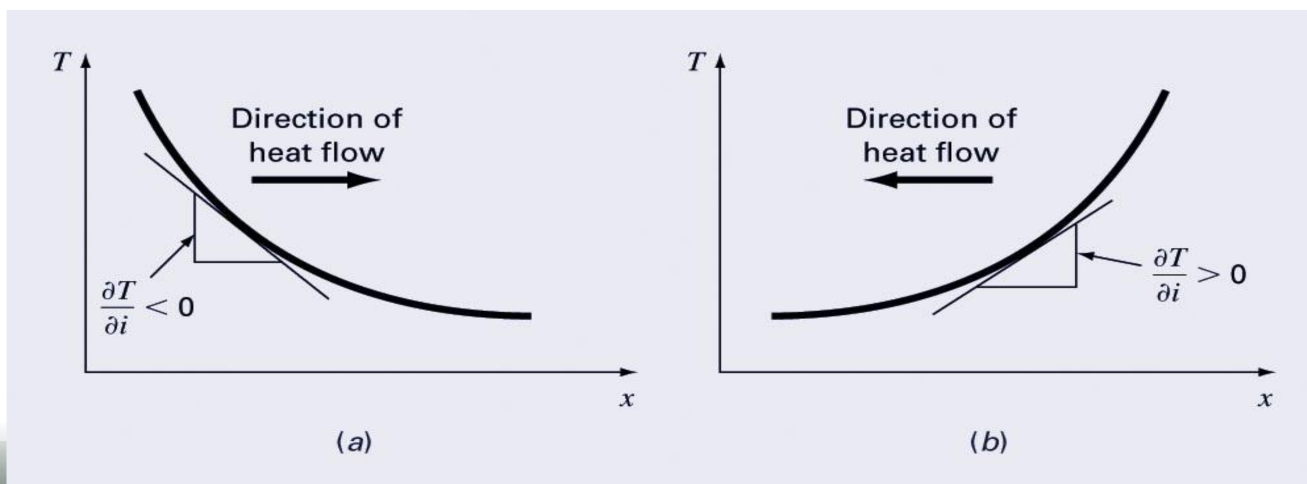
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

21.1 소개 및 배경

- 공학과 과학에서의 미분
  - Fourier의 열전도 법칙 : 고온 영역에서 저온 영역으로의 열전달을 정량화함.

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

여기서, q = 열플럭스(W/m2), k = 열전도계수[W/(m·K)]
T = 온도(K), x = 길이(m)



21.1 소개 및 배경

〈공학과 과학에서 널리 사용되는 1차원 구성 법칙〉

법칙	방정식	물리 분야	구배	플럭스	비례상수
Fourier 법칙	$q = -k\dfrac{dT}{dx}$	열전도	온도	열플럭스	열전도계수
Fick 법칙	$J = -D\dfrac{dc}{dx}$	물질 확산	농도	질량 플럭스	확산계수
D’Arcy 법칙	$q = -k\dfrac{dh}{dx}$	다공질 매체를 통과하는 유동	수두	유동 플럭스	수력 전도계수
Ohm 법칙	$J = -\sigma\dfrac{dV}{dx}$	전류	전압	전류 플럭스	전기 전도계수
Newton 점성법칙	$\tau = -\mu\dfrac{du}{dx}$	유체	속도	전단 응력	동점성계수
Hooke 법칙	$\sigma = E\dfrac{\Delta L}{L}$	탄성	변형	응력	탄성계수

21.2 고정확도 미분 공식

- 4장에서 Taylor series expansion을 이용하여 도함수에 대한 유한 차분 근사를 유도하였다. 1차 및 고차 도함수에 대한 전향, 후향, 중심 유한차분 근사를 소개하였음

- 정확도의 수준은 사용하는 Taylor series의 항의 개수에 따른다.
- 예를 들면,

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots$$

다시 쓰면,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2!}h + O(h^2) \quad (21.13)$$

⇒ 제곱을 하므로 오차가 더 ↓
계속 오차 → 0

- 2차 이상의 도함수 항을 무시하면, 전향차분 공식은 다음과 같다(4장).

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

$$① \quad f(x_{i+1}) = f(x_i) + f(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \cdots$$

$$② \quad f(x_{i+2}) = f(x_i) + f(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)}{2}(2h^2) + \cdots$$

$$\text{eq}② - 2 \times \text{eq}① \Rightarrow f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1})$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + o(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{2h} + o(h^2)$$

21.2 고정확도 미분 공식

- 2차 도함수에 대한 전향차분 근사 (4장 참조)

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

- 식 (21.13)에 대입하면,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2} h + O(h^2)$$

- 다시 정리하면,

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

오차가 줄어듦

- 2차 도함수를 고려함으로써 정확도를 O(h^2)으로 향상시켰다.

21.2 고정확도 미분 공식

Forward Finite-Difference

First Derivative	**Error**
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

21.2 고정확도 미분 공식

Backward Finite-Difference

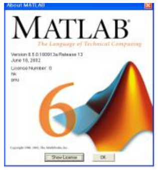
	Error
First Derivative	
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

21.2 고정확도 미분 공식

Centered Finite-Difference

First Derivative	**Error**
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$	$O(h^2)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$	$O(h^4)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$	$O(h^2)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) + 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{6h^4}$	$O(h^4)$

21.7 MATLAB을 이용한 수치미분



MATLAB 함수: gradient

```
fx = gradient(f)
```

f = 원소의 수가 n인 1차원 벡터
fx = *f*에 기초하여 계산된 n 개의 차분을 포함하는 벡터이다.

- 함수 gradient는 차분을 계산하여 반환한다. 그러나 반환되는 차분은 주어진 값 사이의 구간에서보다는, 그 값에서의 도함수를 구하게 된다.
- 만일 벡터가 등간격으로 주어진 데이터를 나타낸다면, 다음 구문은 간격으로 나누어 계산한 도함수 값을 반환한다.

```
fx = gradient(f, h)
```

h = 데이터 점들 사이의 간격

예제 21.5 (gradient를 사용한 미분)

Q. MATLAB 함수 gradient를 사용하여 다음의 함수를 미분하라.

(Forward ...?

(앞에서 배운)

풀이) 독립변수와 종속변수의 등간격 값을 생성한다.

```
>> f = @(x) 0.2+25*x-200*x.^2+675*x.^3-900*x.^4+400*x.^5;
>> x = 0 : 0.1 : 0.8 ;
>> y = f(x) ;
```

예제 21.5 (gradient를 사용한 미분)

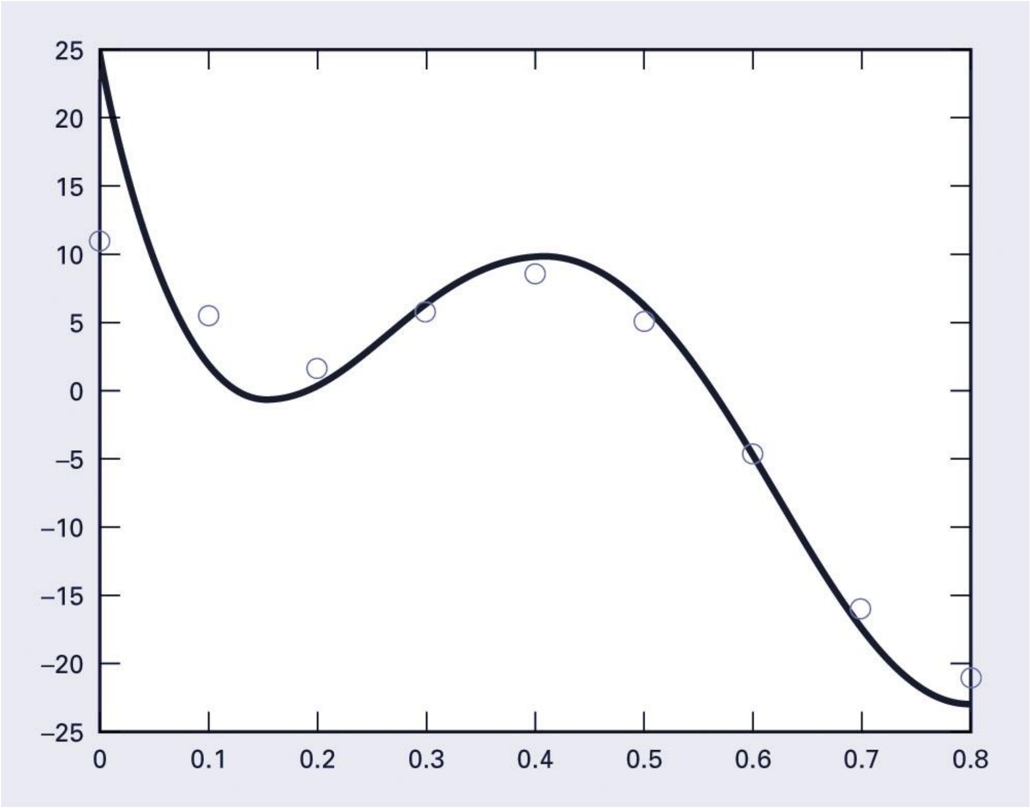
gradient 함수를 이용하여 도함수를 구한다.

```
>> dy=gradient(y, 0.1)
dy =
   Columns 1 through 5
      10.8900     5.4400     1.5900     5.8400    8.5900
   Columns 6 through 8
       5.0400    -4.8100   -16.1600   -21.3100
```

수치해와 해석해를 그린다.

```
>> xa=0: .01 : .8 ;
>> ya=25-400*xa+3*675*xa.^2-4*900*xa.^3+5*400*xa.^4;
>> plot(x, dy, 'o', xa, ya)
```

예제 21.5 (gradient를 사용한 미분)



정확한 도함수 값(실선)과 MATLAB의 gradient 함수를 사용해서 계산한 수치 결과(원)의 비교.

(중심차분근사 사용)

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2)$$