

18장 스플라인과 소구간별 보간법

18.1 스플라인 보간법의 소개

18.2 선형 스플라인

18.3 2차 스플라인

18.4 3차 스플라인

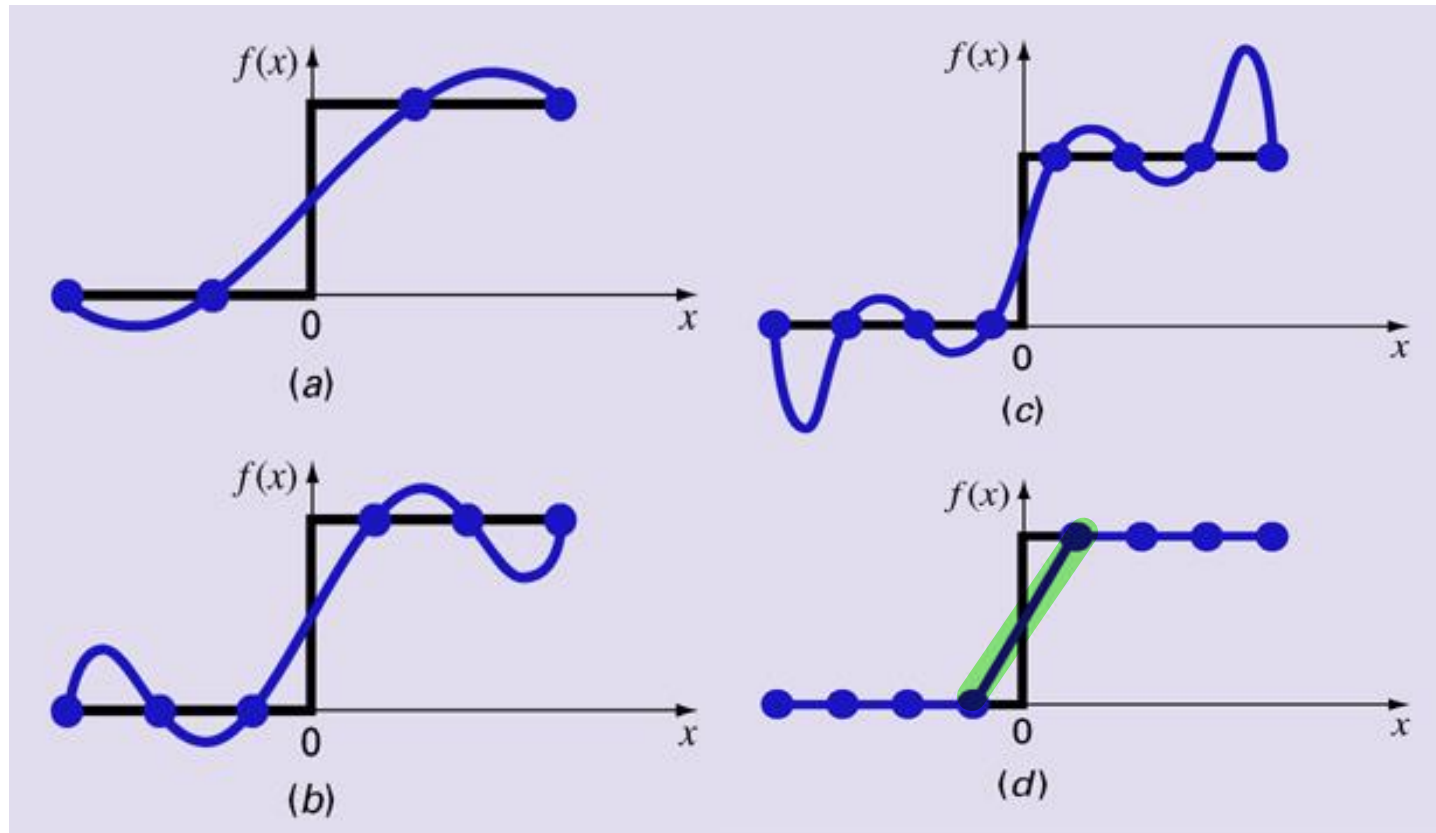


18.1 스플라인 보간법의 소개

- 고차 다항식 보간법 (다항이 있을 때, 고차 계속 사용하면
다항이 점점 커서 무한대 발생)
→ 반올림오차와 진동현상으로 인해 틀린 결과를 초래한다.
- 해결하기 위한 방법: 데이터 점들의 부분집합에서 저차의
다항식을 소구간별로 적용하는 것
 - ⇒ 이런 방법으로 연결되는 다항식을 "**스플라인 함수**"라고 부른다.
 - **3차 스플라인**: 두 개의 데이터 점을 연결하는 곡선이 3차인 경우
 - 시각적으로 매끄럽게 처리
 - 부분적으로 급격한 변화가 있는 구간에서 우수한 근사를 제공



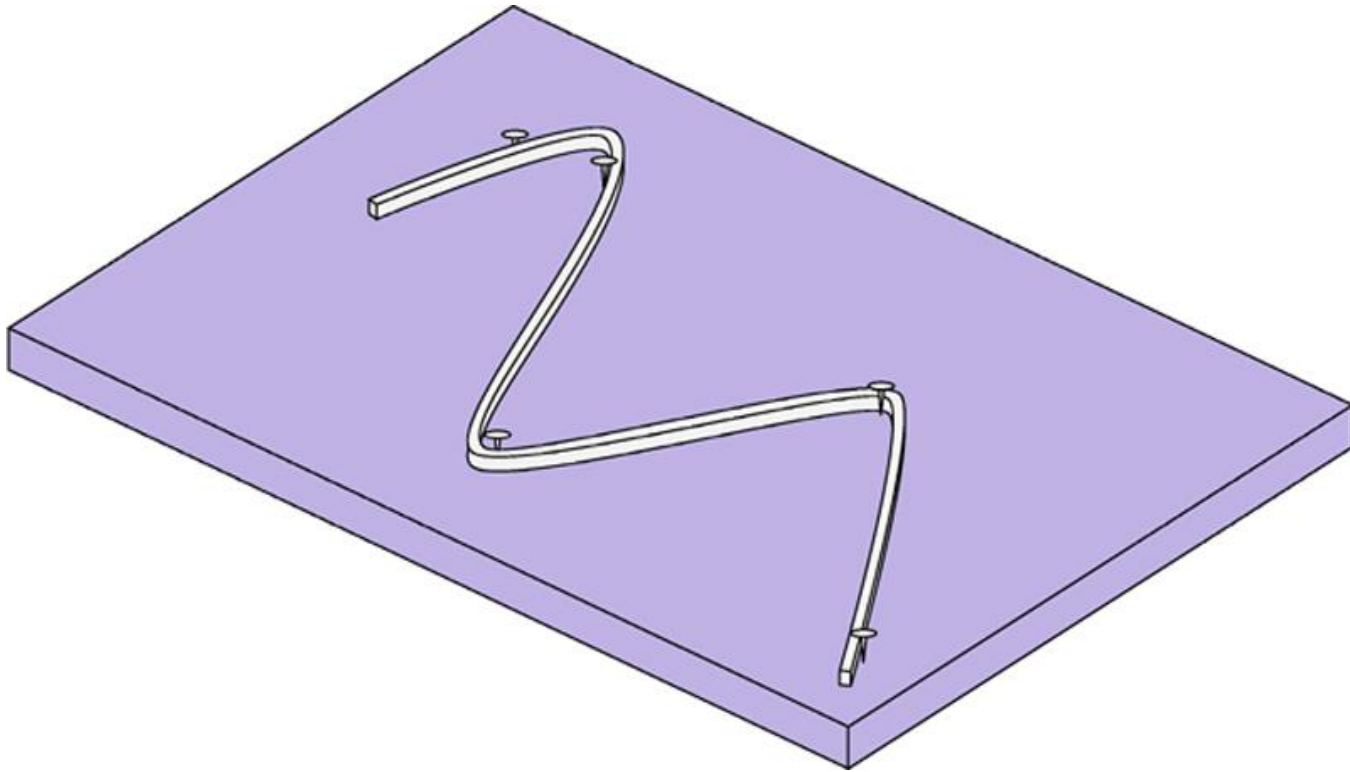
18.1 스플라인 보간법의 소개



스플라인 보간법이 고차 보간다항식보다 우수한 경우를 나타내는 시각적 비교:
그림 (a) ~ (c)의 보간다항식에서는 급격한 변화가 진동을 발생하나, 그림 (d)의 선형 스플라인에서는 직선으로 연결되는 우수성을 보임



18.1 스플라인 보간법의 소개



제도에서 일련의 점들을 통과하는 완만한 곡선을 그리기 위해
스플라인(얇고 유연한 줄)을 사용



18.2 선형 스플라인

- 각 구간 i 는 고유한 스플라인 함수 $s_i(x)$ 를 가진다.

선형 스플라인에서의 각 함수는 구간의 양 끝점인 두 점을 연결하는 직선으로 다음과 같다.

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

여기서 $a_i = f_i$ 는 절편이고,

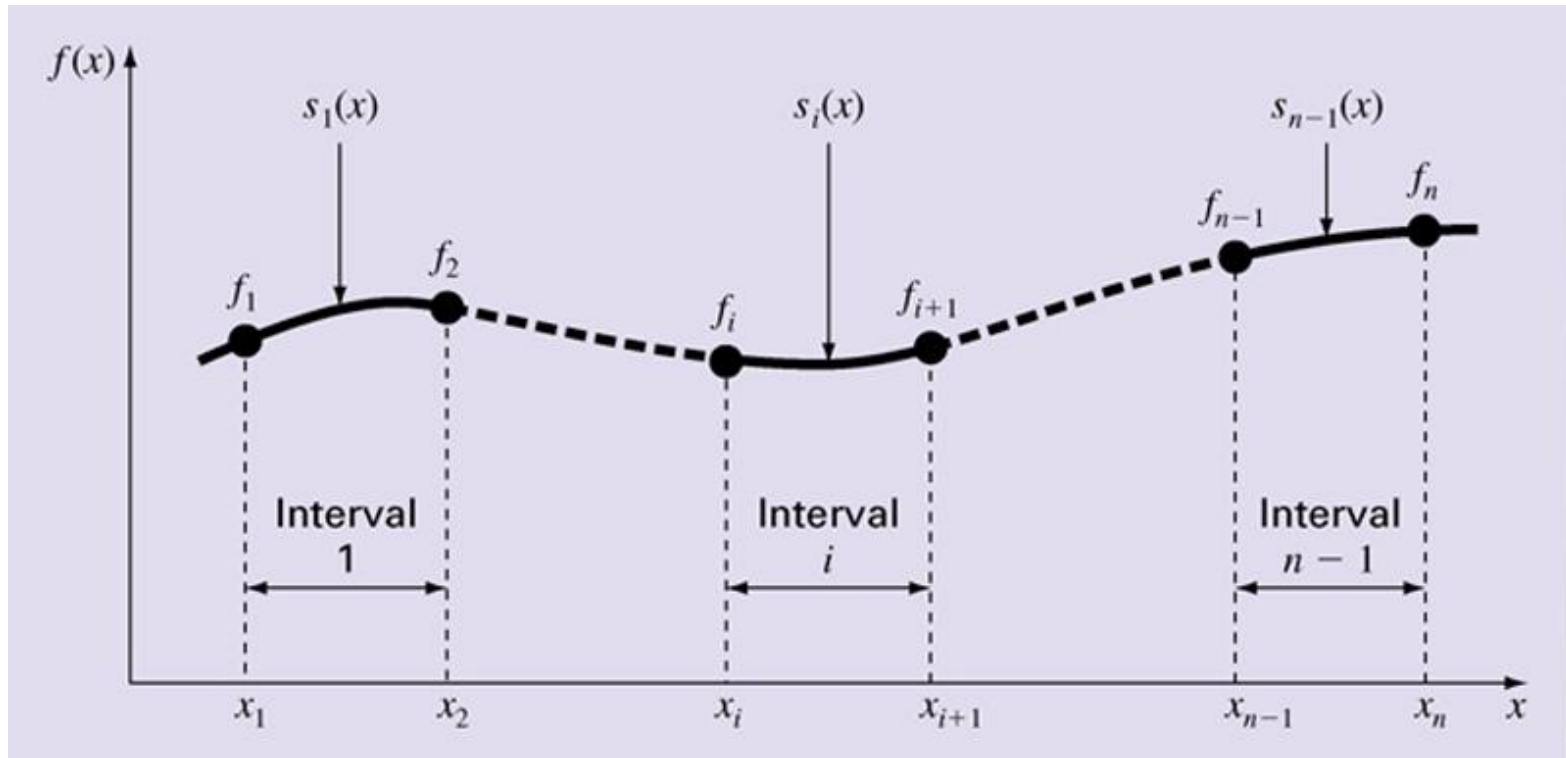
$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \text{ 는 기울기이다.}$$

$$\Rightarrow s_i(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$

Newton의 1차 다항식과 동일한 결과를 얻음



18.2 선형 스플라인



스플라인을 유도하는데 $n - 1$ 개의 구간에서 n 개의 데이터 점들이 사용됨



예제 18.1 [1차 스플라인]

Q. 1차 스플라인으로 주어진 자료를 접합하고,
 $x = 5$ 에서의 함수 값을 추정하라.

∴ 2개의
데이터는
가치
구함

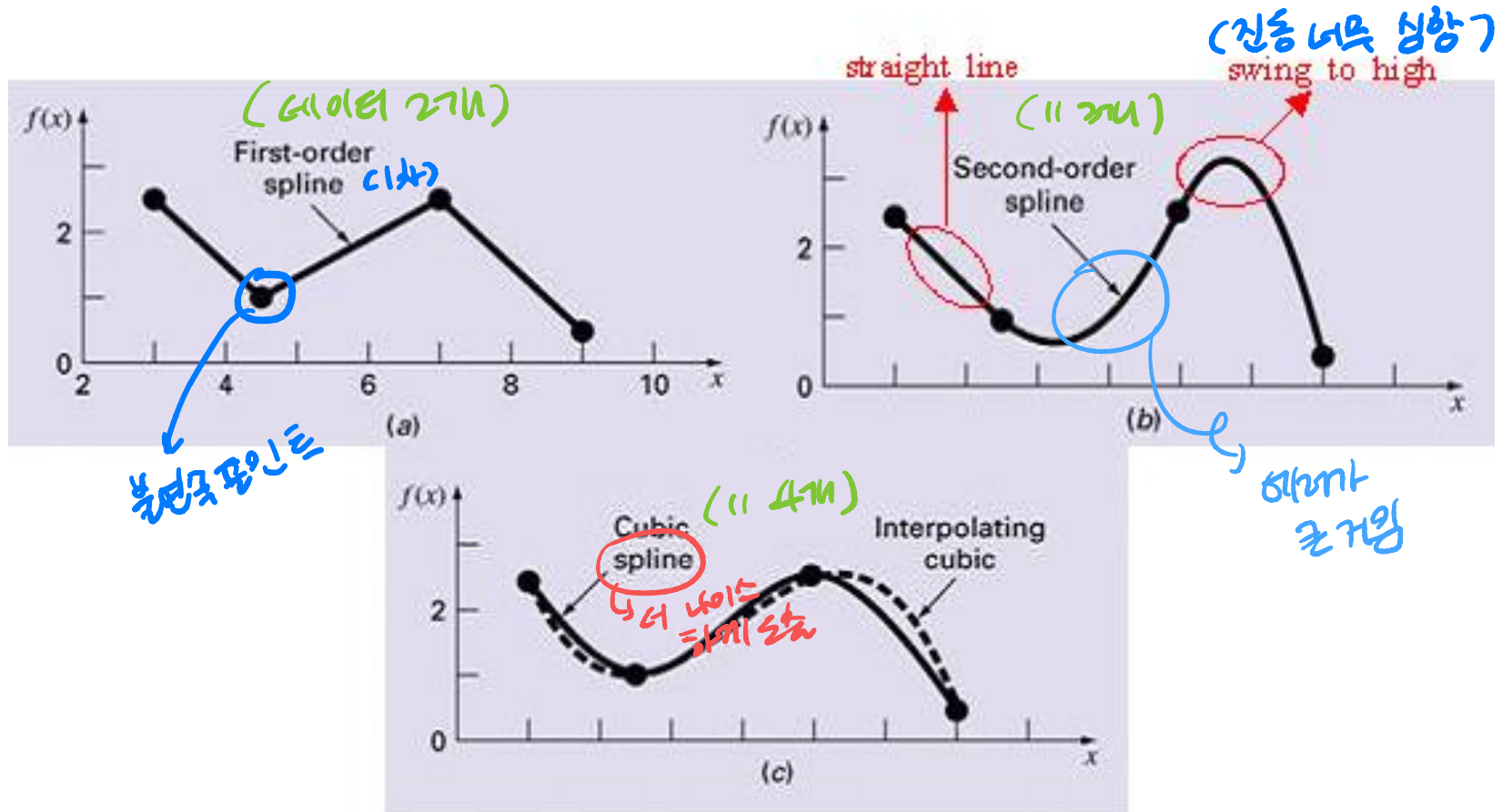
i	x_i	f_i (y)
1	3.0	2.5
2	4.5	1.0
3	7.0	2.5
4	9.0	0.5

풀이)

$$s_2(x) = 1.0 + \frac{2.5 - 1.0}{7.0 - 4.5} (x - 4.5) \Big|_{x=5} = 1.3$$



18.2 선형 스플라인



네 점에 대한 스플라인 접합: (a) 선형 스플라인, (b) 2차 스플라인
(c) 3차 스플라인 + 3차 보간다항식

"
 ⇒ BEST"



18.2 선형 스플라인

- 1차 스플라인의 단점은 완만한 곡선이 아니며, 절점에서 기울기가 급격히 변한다.
← 1차 도함수가 불연속
- 절점에서 매끄럽게 하기 위해 고차 스플라인이 요구된다.
- 3차 다항식 (또는 3차 스플라인): 실제로 가장 보편적으로 사용됨



18.3 2차 스플라인

■ 2차 다항식의 유도 (또는 2차 스플라인)

- 2차 다항식

- 실제로 크게 중요하지 않음
- 고차 스플라인을 전개하는 일반적인 방법을 제시하는데 적합

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

- n 개의 데이터 점에 대한 $n - 1$ 개의 구간
→ $3(n - 1)$ 개의 미지 상수



18.4 3차 스플라인

- 가장 많이 사용되는 방법이다.
- 4차 이상의 고차 스플라인은 내재된 불안정성으로 사용되지 않는다.

■ 3차 다항식의 유도 (또는 3차 스플라인)

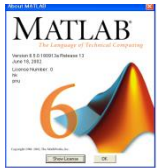
$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (*)$$

- n 개의 데이터 점에 대한 $n - 1$ 개의 구간
→ $4(n - 1)$ 개의 미지 계수



18.5 MATLAB에서의 소구간별 보간법

spline: 3차 스플라인 보간을 수행



MATLAB 함수: spline

$yy = \text{spline}(x, y, xx)$

x 와 y = 보간하고자 하는 값을 포함하는 벡터

$yy = xx$ 벡터로 주어지는 점에서 계산되는 스플라인 결과를 포함하는 벡터



[MATLAB 에서의 스플라인]

Q. Runge 함수는 다항식으로 잘 점합이 안 되는 함수로 알려져 있다.

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

MATLAB을 사용하여 구간 $[-1, 1]$ 에서 이 함수로부터 구한 9개의 등간격 데이터 점을 점합시켜라.



예제 18.4 (MATLAB 에서의 스플라인)

