06/09

파트 5 적분과 미분

5.1 소개

5.2 파트의 구성

5.1 소개

- 미적분
  - 미분 : 독립변수에 대한 종속변수의 변화율

$$v(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

    - y(t)= 임의의 물체의 시간에 따른 위치, v(t)= 속도
    - 함수의 구배

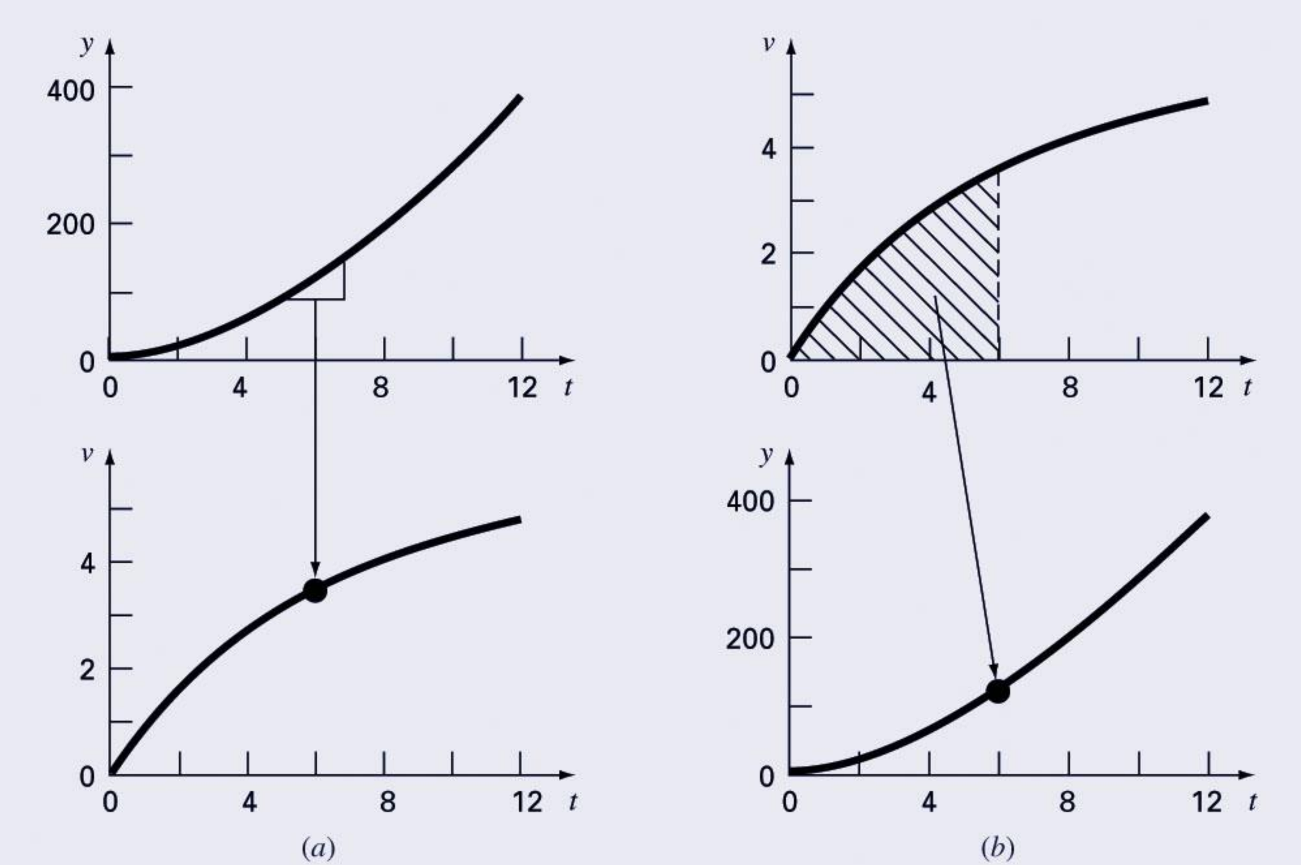
  - 적분 : 미분의 역, 어떤 구간 내에서 시간/공간에 따라 변화하는 정보를 합하여 전체 결과를 구함.

$$y(t) = \int_0^t v(t)\ dt$$

    - 0에서 t까지의 구간에서 곡선 v(t) 아래의 면적

5.1 소개

- **미분과 적분의 비교**



미분 **적분**

5.2 구성

- 19장 : 수치적분공식
- 20장 : 함수의 수치적분
- 21장 : 수치미분

19장 수치적분 공식

19.1 소개 및 배경
19.2 Newton-Cotes 공식
19.3 사다리꼴 공식
19.4 Simpson 공식

19장 수치적분 공식

자유 낙하하는 번지 점프하는 사람의 속도는 다음과 같다.

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right)$$

어떤 시간 t동안에 낙하한 거리 z를 구하는 적분식

$$z(t) = \int_0^t v(t)dt$$

$$= \int_0^t \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right) dt$$

적분

$$= \frac{m}{c_d} \ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right)\right]$$

적분을 해석적으로 구할 수 없는 경우에는 어떻게 처리하나?

속도가 이산 값으로 주어질 경우에는 어떻게 해를 구하나?

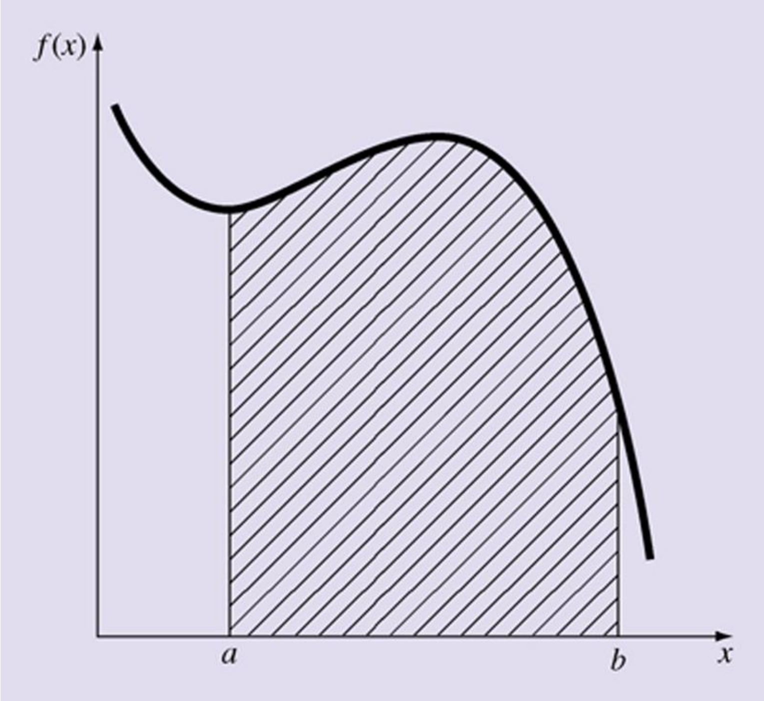
19.1 소개 및 배경

- 적분이란 무엇인가?

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

→ 독립변수 x 에 대한 함수 $f(x)$의 구간 $x = a$에서 $x = b$까지의 적분

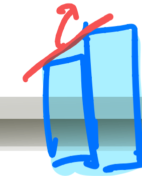
→$x = a$ 와 b 사이의 범위에서 곡선 $f(x)$ 아래의 면적



- 구적법= 수치적으로 정적분을 구하는 방법
  도형과 같은 면적을 가지는 사각형을 구축한다는 것을 의미

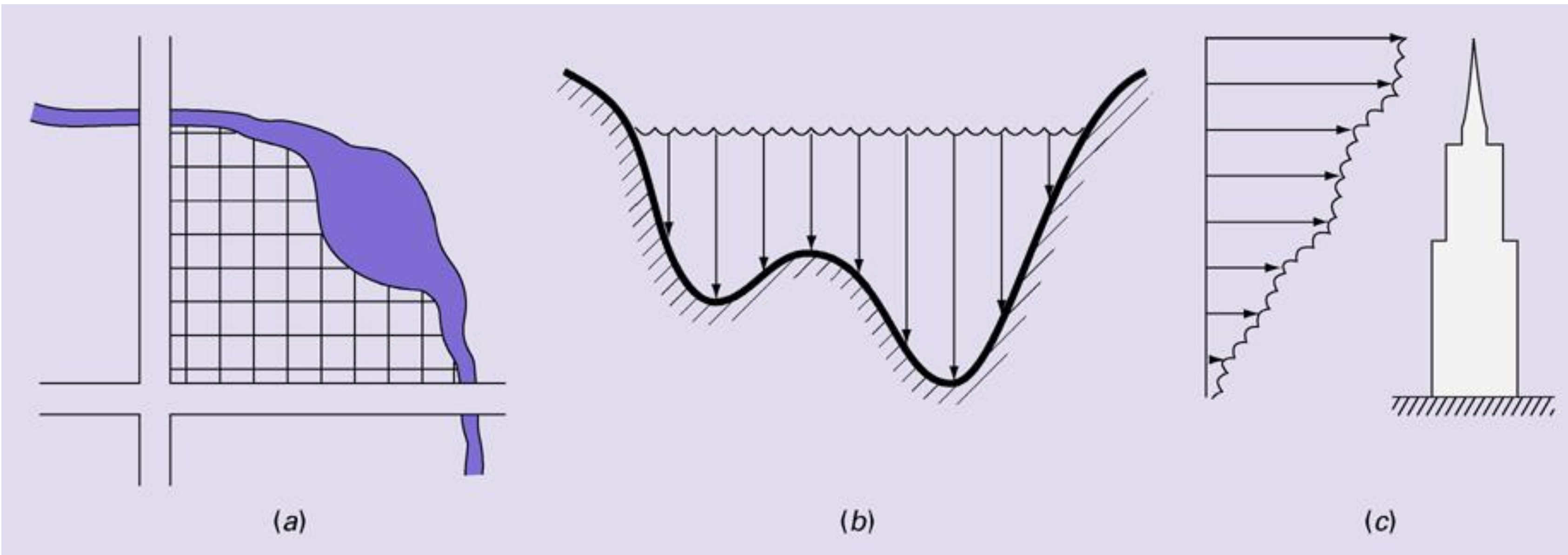
19.1 소개 및 배경

싸 함수 적음



⇒ 오차 ↓

- 공학과 과학에서의 적분



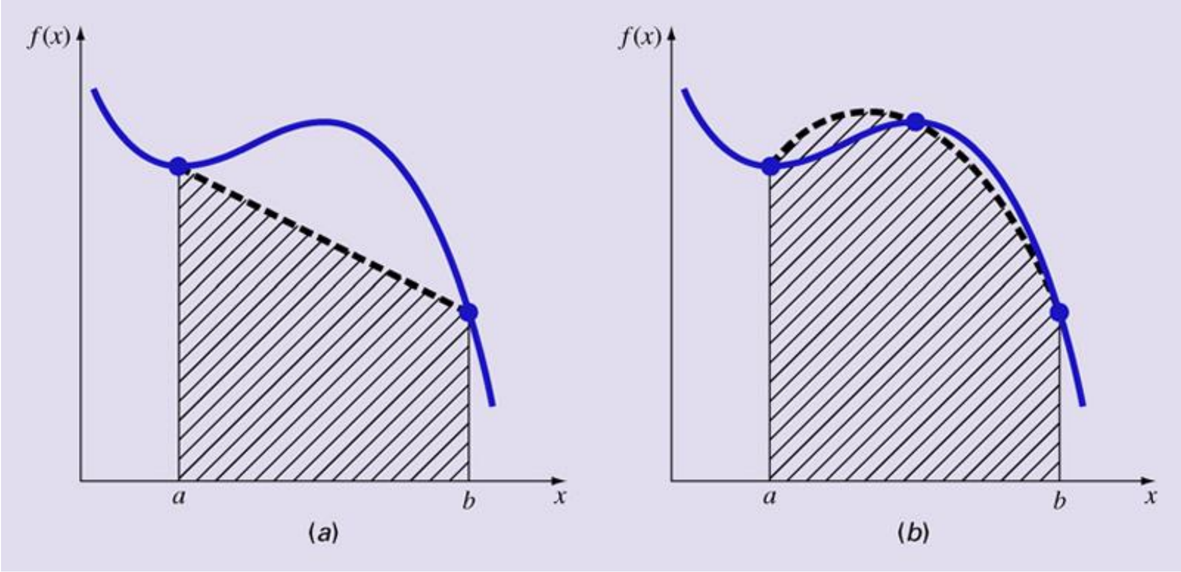
(a) 측량기사는 굽이쳐 흐르는 강과 두 길로 둘러싸인 들판의 면적을 알고자 함
(b) 수문학자는 강의 단면적에 관심이 있음
(c) 구조공학자는 고층건물 측면에 가해지는 풍력을 구하고자 함

19.2 Newton-Cotes 공식

다항식일수록 오차↓

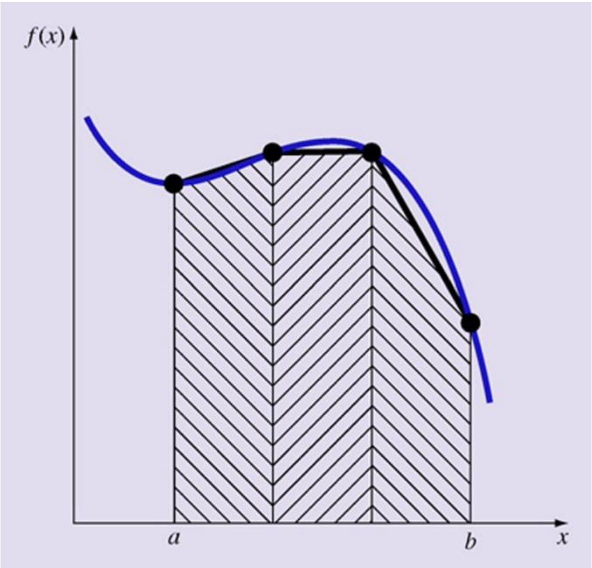
- 가장 널리 사용되는 수치적분 방법
- 복잡한 함수나 도표화된 데이터를 **적분하기 쉬운 *다항식*으로 대체함**

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$ 여기서 $$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \Lambda + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

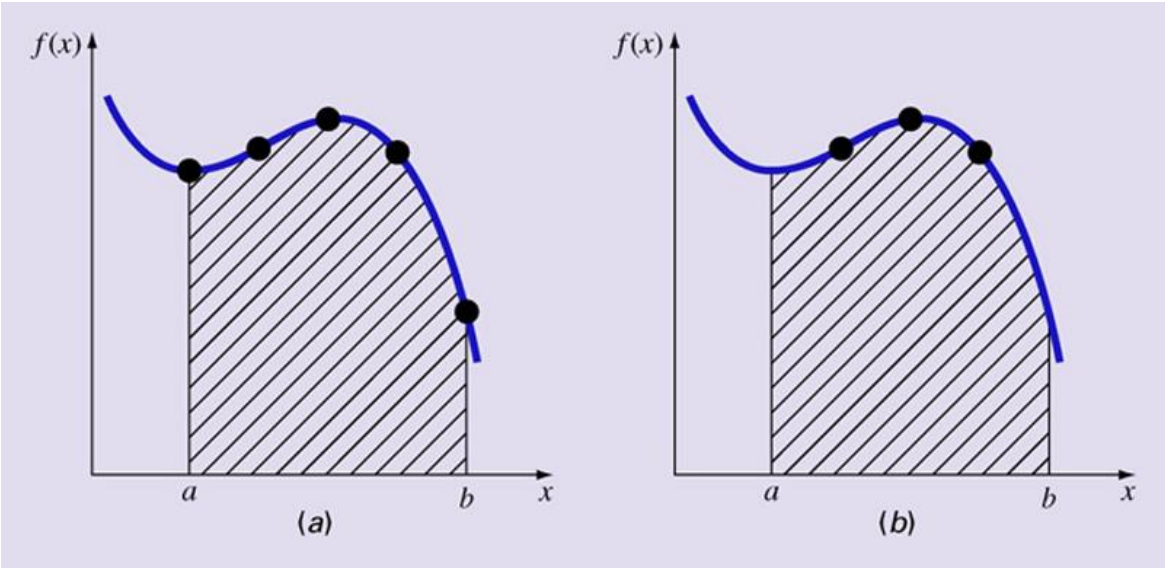


적분의 근사: (a) 직선 아래 면적, (b) 포물선 아래 면적

19.2 Newton-Cotes 공식



세 직선 아래의 면적으로 근사



(a) 폐구간 적분 공식과 **(b)** 개구간 적분 공식

- 데이터를 동일 간격의 소구간으로 나누어 일련의 다항식으로 근사값 계산 가장 [illegible] 사용
- Newton-Cotes 공식에는 폐구간법과 개구간법이 있음

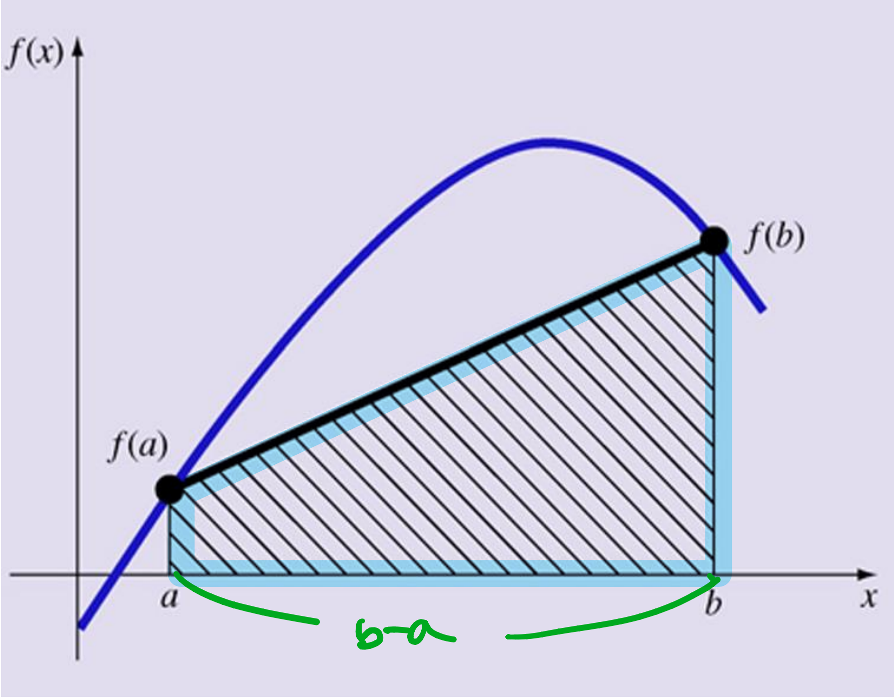
19.3 사다리꼴 공식

- Newton-Cotes 폐구간 적분공식의 첫 번째 방법
- 1차 다항식

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] dx$$

$$= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$\rightarrow$ 사다리꼴 공식



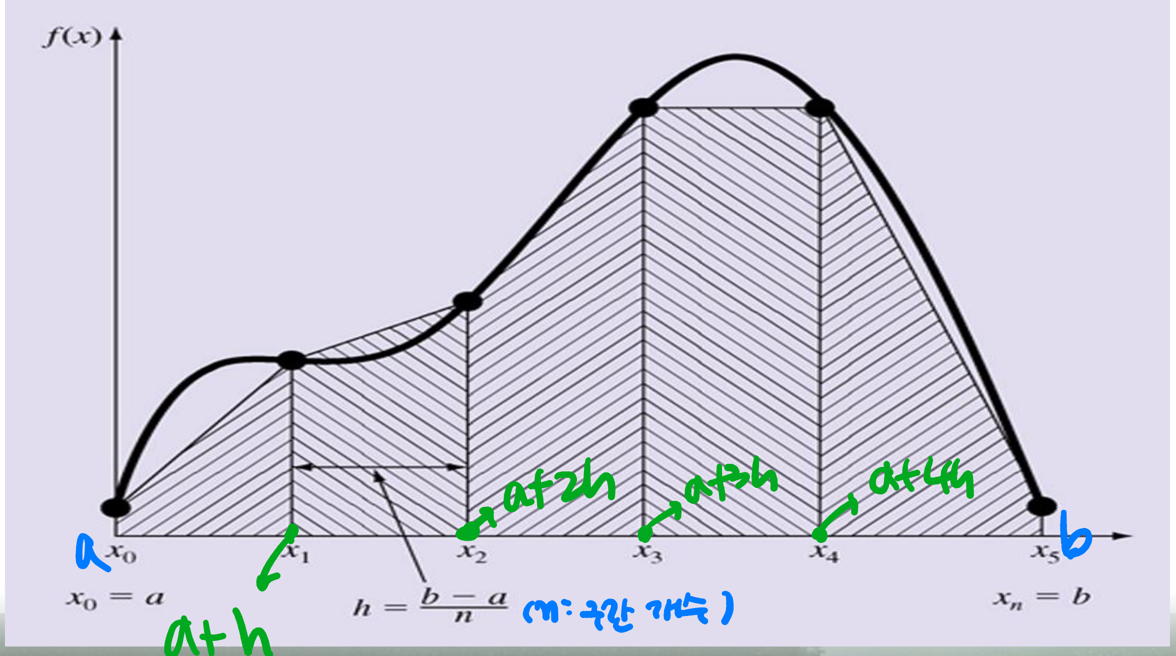
$$I = 폭 \times 평균높이 = (b-a) \times 평균높이$$

6개의 데이터 → 구간 5개

19.3 사다리꼴 공식

- 합성 사다리꼴 공식
  - *a*에서 *b*까지의 적분 구간을 다수의 소구간으로 나누고, 사다리꼴 공식을 각 소구간에 적용

    → 합성 (또는 다구간) 적분공식



19.3 사다리꼴 공식

- $(n + 1)$개의 등간격 기본점 $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

  → n개의 등간격 구간 폭; $h = \dfrac{b-a}{n}$

만약 $a = x_0$와 $b = x_n$로 놓으면,

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \Lambda + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

사다리꼴 공식을 각각 적용하면,

2개

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \Lambda + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

(처음) (끝)

19.3 사다리꼴 공식

MATLAB M-file: trap

Untitled

File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help

Stack: Base

안 넣어져도 OK

```
function I = trap(func, a, b, n, varargin)
% trap: composite trapezoidal rule quadrature
%    I = trap(func, a, b, n, p1, p2, …):
%                      composite trapezoidal rule.
% input:
%    func = name of function to be integrated
%    a, b = integration limits
%    n = number of segments (default = 100)
%    p1, p2, … = additional parameters used by func
% output:
%    I = integral estimate
```

구간

구간적분값

Ready

19.3 사다리꼴 공식

MATLAB M-file: trap

```
if nargin<3, error('at least 3 input arguments required'), end
if ~(b>a), error('upper bound must be greater than lower'), end
if nargin<4 | isempty(n), n=100; end
x = a; h = (b-a)/n;
s = func(a);
for i= 1: n-1
    x = x + h;
    s = s + 2* func(x);
end
s = s + func(b);
I = (b-a) * s/(2*n);
```

(a) $x_0 \sim x_{n-1}$

x_n (b)

예제

Q. 자유 낙하하는 사람이 처음 3초 동안 낙하하는 거리를 결정하라. 변수 값은 $g = 9.81\ m/s^2$, $m = 68.1\ kg$, 그리고 $c_d = 0.25\ kg/m$로 놓아라.

참고로 정해는 41.94805이다.

$$v(t) = \sqrt{\frac{9.81 \times 6.81}{0.25}} \times \tanh\left(\sqrt{\frac{9.81 \times 0.25}{6.81}} \times t\right)$$

예제

Command Window

File Edit View Web Window Help

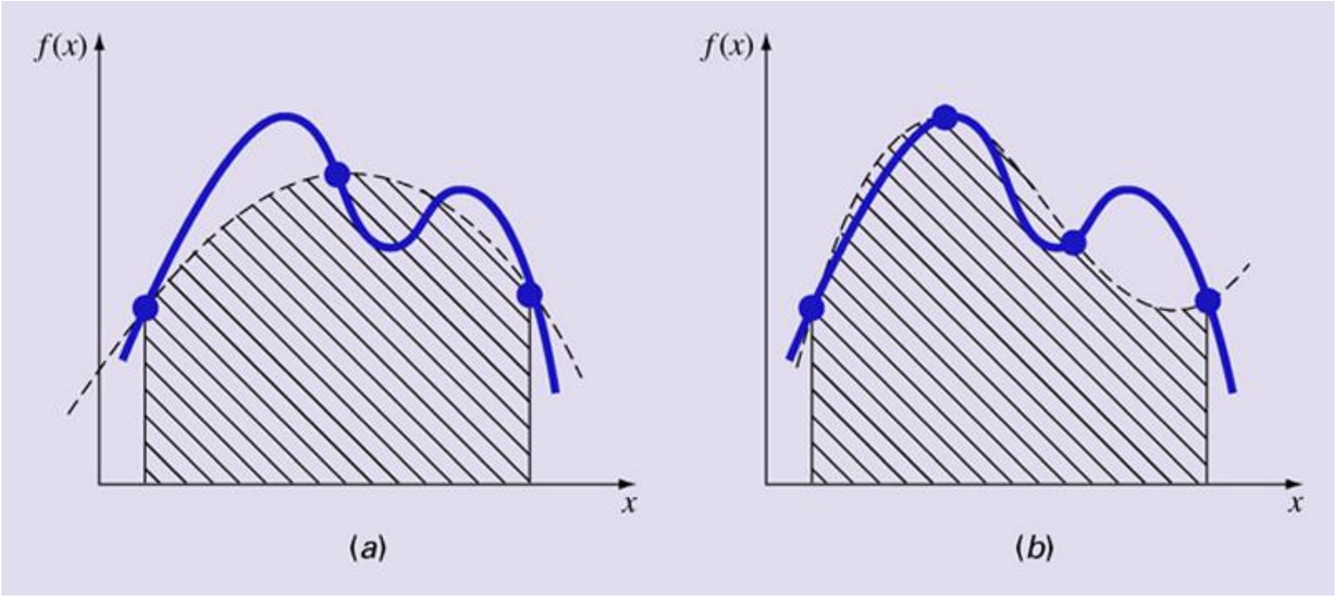
```
>> v = @(t) sqrt(9.81*68.1/0.25)*tanh(sqrt(9.81*0.25/68.1)*t)
v =
   @(t) sqrt(9.81*68.1/0.25)*tanh(sqrt(9.81*0.25/68.1)*t)
>>format long
>> trap(v, 0, 3, 5)                    % 5개의 구간
ans =
     41.86992959072735                         → 오차 = 0.186%
>> trap(v, 0, 3, 10000)                % 10000개의 구간
ans =
    41.94804999917528                          → 오차 = ?
```

오차↓

Ready

19.4 Simpson 공식

- 조밀한 구간에 대한 사다리꼴 공식보다 정확한 적분값을 구하는 방법
- 데이터 점들을 연결하는 고차 다항식을 사용



(a) **Simpson 1/3 공식**: 세 점을 연결하는 포물선 아래에 있는 면적
(b) **Simpson 3/8 공식**: 네 점을 연결하는 3차 방정식 아래에 있는 면적

19.4 Simpson 공식

- **Simpson 1/3 공식** 17장
  - 2차 다항식(Lagrange 다항식) 을 사용하는 경우

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

또는 $I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$ 또는 $I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$

여기서 $h = (b-a)/2$, $a = x_0$, $b = x_2$, 그리고 $x_1 = (a+b)/2$

19.4 Simpson 공식

▪ 합성 Simpson 1/3 공식

- 주어진 구간을 등간격의 여러 구간으로 나눔으로써 개선된 적분 결과를 얻는다.

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \Lambda + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

각각의 적분항에 Simpson 1/3 공식을 대입하면

$$I = 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6} + \Lambda + 2h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}$$

또는

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

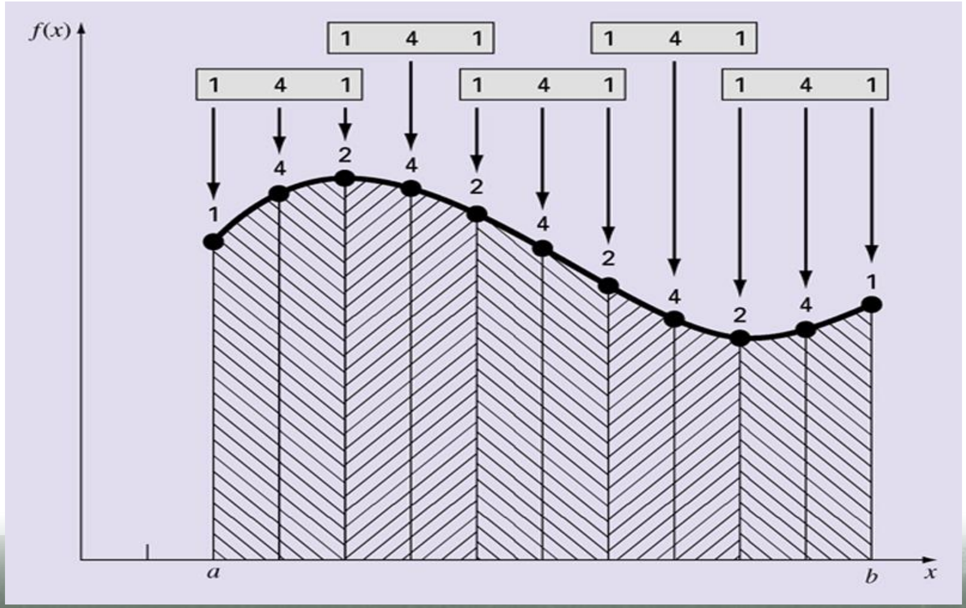
홀수 짝수

19.4 Simpson 공식

- 등간격으로 데이터가 분포되어 있는 경우에만 사용
- 짝수 개의 구간과 홀수 개의 점이 있는 경우에만 사용

  * 홀수 개의 구간과 짝수 개의 점이 있는 경우

  → Simpson 3/8 공식



합성 **Simpson 1/3** 공식에 사용되는 상대적 가중치(함수 값 위에 주어진 수치)

19.4 Simpson 공식

- **Simpson 3/8 공식**
  - 3차 Newton-Cotes 폐구간 적분 공식
  - 3차 Lagrange 다항식을 이용하여 유도

$$I = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

또는
$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

여기서 $h = (b-a)/3$

→ 구간의 개수가 홀수인 경우에 적용