1 $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Ordnungsvollständigkeit: Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ s. d.

(i) $A \neq \emptyset$ (ii) $\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \ a \leqslant b$

Dann: $\exists c \in \mathbb{R}$ s.d. $\forall a \in A \ \ a \leqslant c \, \forall b \in B \ \ c \leqslant b$

Korollar 1.1.7 **(Archimedisches Prinzip)**

Sei $x > 0 y \in \mathbb{R}$ Dann: $\exists n \in \mathbb{N} \quad y \leqslant n * x$

Satz 1.1.8 $\forall t \geqslant 0, t \in \mathbb{R}$ hat $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$

Satz 1.1.10 $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(i) $|x| \geqslant 0$

(ii) $|xy| = |x||y|$

(iii) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

(iv) $|x+y| \geqslant ||x| - |y||$

Satz 1.1.11 **(Young'sche Ungleichung)**

$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leqslant \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

Definition 1.1.12 Sei $A \subset \mathbb{R}$

(i) / (ii) $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere/untere Schranke** von A wenn $\forall a \in A \ \ a \leqslant / \geqslant c$. A ist **nach oben/unten beschränkt**, wenn es eine **obere/untere Schranke** gibt.

(iii) / (iv) $m \in \mathbb{R}$ ist ein **Maximum/Minimum** von A wenn $m \in A$ und m **obere/untere Schranke** von A ist.

Satz 1.1.15 Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ Sei A nach oben/unten beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere/ grösste untere Schranke von A: $c := sup \, A \ / \ c := inf \, A$ genannt **Supremum/Infimum** von A

Korollar 1.1.16 Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Wenn B **nach oben/unten beschränkt** ist, folgt $\sup A \leqslant \sup B$ / $\inf B \leqslant \inf A$

Konvention: Wenn A **nicht beschränkt ist**, definieren wir $\sup A = +\infty$ bzw. $\inf A = -\infty$

Satz 1.3.4 **(Fundamentalsatz der Algebra)** Sei $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}$ und

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$$

Dann

$$\exists z_1, ..., z_n \in \mathbb{C},$$

so dass

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$$

2 Folgen und Reihen

2.1 Grenzwert einer Folge

Definition 2.1.1 Eine **Folge (reeller Zahlen)** ist eine Abbildung $a : N^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen eine Folge mit $(a_n)_{n \geqslant 1}$

Lemma 2.1.3 Sei $(a_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge. Dann gibt es **höchstens eine reelle Zahl** $l \in \mathbb{R}$ **mit** der Eigenschaft: $\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$ **endlich**.

Definition 2.1.4 Eine Folge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ist **konvergent**, wenn es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$ **endlich** ist.

Lemma 2.1.6 Sei $(a_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge. Folgende Aussagen sind äquivalent

(1) $(a_n)_{n \geqslant 1}$ **konvergiert gegen** $l = \lim_{n \to \infty} a_n$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geqslant 1$, so dass $|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N$

Satz 2.1.8 Seien $(a_n)_{n \geqslant 1}, (b_n) n \geqslant 1$ **konvergent** mit $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, $b = \lim_{n \to \infty} b_n$

(1) $(a_n + b_n)_{n \geqslant 1}$ ist **konvergent**: $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$

(2) $(a_n \cdot b_n)_{n \geqslant 1}$ ist **konvergent**: $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(3) Sei $\forall n \geqslant 1 \ b_n \neq 0$ und $b \neq 0$. Dann ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geqslant 1}$ **konvergent** und $\lim_{n \to \infty} (\frac{a_n}{b_n})_{n \geqslant 1} = \frac{a}{b}$

(4) Wenn $\exists K \geqslant 1$ mit $\forall n \geqslant K: \ a_n \leqslant b_n$, folgt $a \leqslant b$

Beispiel 2.1.9 $b \in \mathbb{Z}: \ \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^b = 1$. Das folgt aus $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$ und wiederholter Anwendung von **Satz 2.1.8 (2) und (3)**.

2.2 Satz von Weierstrass

Definition 2.2.1 (1)[(2)] $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ist **monoton wachsend [fallend]** wenn: $a_n \leqslant [\geqslant] a_{n+1} \ \ \forall n \geqslant 1$

Satz 2.2.2 **(Weierstrass)** Sei $(a_n)_{n \geqslant 1}$ **monoton wachsend [fallend]** und **nach oben [unten] beschränkt**. Dann **konvergiert** $(a_n)_{n \geqslant 1}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} a_n = sup\{a_n : n \geqslant 1\}$$
$$[\lim_{n \to \infty} a_n = inf\{a_n : n \geqslant 1\}]$$

Beispiel 2.2.3 Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $0 \leqslant q < 1$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} n^a q^n = 0.$$

Wir können annehmen, dass $q > 0$. Sei $x_n = n^a q^n$, dann folgt:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (n+1)^a q^{n+1} \\ &= (\frac{n+1}{n})^a q \cdot n^a q^n \\ &= (1 + \frac{1}{n})^a \cdot q \cdot x_n. \end{aligned}$$

Also:

$$x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^a \cdot q \cdot x_n.$$

Da $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^a = 1$ **(Beispiel 2.1.9)**, gibt es ein n_0, so dass

$$(1 + \frac{1}{n})^a < \frac{1}{q} \ \ \forall n \geqslant n_0.$$

Es folgt:

$$x_{n+1} < x_n \ \ \forall n \geqslant n_0.$$

Da für $x_n > 0 \ \ \forall n \geqslant 1$ die Folge nach **unten beschränkt** ist und für $n \geqslant n_0$ **monoton fallend** ist. Sei

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^a \cdot q x^n \\ &= q \cdot \lim_{n \to \infty} x_n = q \cdot l. \end{aligned}$$

Also $(1 - q) \cdot l = 0$ woraus $l = 0$ folgt.

Bemerkung 2.2.24 In **Beispiel 2.2.3** wird zweimal die folgende einfache Tatsache verwendet: Sei $(a_n)_{n \geqslant 1}$ eine **konvergente** Folge mit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die durch

$$b_n := a_{n+k} \ \ n \geqslant 1$$

definierte Folge **konvergent** und

$$\lim_{n \to \infty} b_n = a.$$

Lemma 2.2.7 **(Bernoulli Ungleichung)**

$$(1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \, x > -1$$

2.3 Limes superior und Limes inferior

Limes inferior/ superior: Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine **beschränkte Folge**. Sei $\forall n \geqslant 1$:

$$b_n = inf\{a_k : k \geqslant n\}$$
$$c_n = sup\{a_k : k \geqslant n\}$$

Dann folgt $\forall n \geqslant 1$ $b_n \leqslant b_{n+1}$ (**monoton wachsend**) und $c_n \geqslant c_{n+1}$ (**monoton fallend**) und **beide Folgen beschränkt**. Wir definieren:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$$

2.4 Cauchy Kriterium

Lemma 2.4.1 $(a_n)_{n\geqslant 1}$ **konvergiert genau dann, wenn** $(a_n)_{n\geqslant 1}$ **beschränkt** und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$

Satz 2.4.2 (**Cauchy Kriterium**) $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist **genau dann kovergent, wenn** $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \geqslant 1$,

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geqslant N$$

2.5 Satz von Bolzano-Wierstrass

Definition 2.5.1 Ein **abgeschlossenes Intervall** $I \subseteq \mathbb{R}$ ist von der Form

(1) $[a,b]$ $a \leqslant b \in \mathbb{R}$
(2) $[a,+\infty[$ $a \in \mathbb{R}$
(3) $]-\infty,a]$ $a \in \mathbb{R}$
(4) $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

Bemerkung 2.5.2 Ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist **genau dann abgeschlossen, wenn** für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit $a_n \in I$ $\lim_{n\to\infty} a_n \in I$.

Bemerkung 2.5.3 Seien $I = [a,b]$, $J = [c,d]$ mit $a \leqslant b$, $c \leqslant d$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Dann ist $I \subseteq J$ **genau dann, wenn** $c \leqslant a$, $b \leqslant d$

Satz 2.5.5.5 (**Cauchy-Cantor**) Sei

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Intervalle mit

$$\mathcal{L}(I_1) < +\infty$$

Dann gilt

$$\bigcap_{n\geqslant 1} I_n \neq \emptyset.$$

Falls **zudem**

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$$

gilt, enthält

$$\bigcap_{n\geqslant 1} I_n$$

genau einen Punkt.

Definition 2.5.7 Eine **Teilfolge** einer Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n\geqslant 1}$, wobei

$$b_n = a_{l(n)}$$

und

$$l : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$$

eine **Abbildung** mit der Eigenschaft

$$l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geqslant 1$$

Satz 2.5.9 (**Bolzano-Weierstrass**) **Jede beschränkte Folge** besitzt eine **konvergente Teilfolge**.

2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

Definition 2.6.1 Eine **Folge in** $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen die Folge mit $(a_n)_{n\geqslant 1}$

Definition 2.6.2 Eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in $\mathbb{R}^d$ ist **konvergent**, wenn $\exists a \in \mathbb{R}^d$, so dass $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \geqslant 1$ mit

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N$$

Satz 2.6.3 Sei $b = (b_1, \dots, b_d)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ (2) $\lim_{n\to\infty} a_{nj} = b_j \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant d$

Bemerkung 2.6.4 Sei $x = (x_1, \dots, x_d)$.
Dann ist $\forall 1 \leqslant j \leqslant d$

$$x_j^2 \leqslant \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = \|x\|^2 \leqslant d \cdot \max_{1\leqslant i\leqslant d} x_i^2$$

woraus

$$|x_j| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{d} \cdot \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i|$$

folgt.

Bemerkung 2.6.5 **Eine konvergente Folge** $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in $\mathbb{R}^d$ **ist beschränkt**. Das heisst: $\exists R \geqslant 0$ mit $\|a_n\| \leqslant R \;\; \forall n \geqslant 1$

Satz 2.6.6 (1) Eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ **konvergiert genau dann, wenn** sie eine **Cauchy Folge** ist: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \geqslant 1$ mit $\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geqslant N$.
(2) **Jede beschränkte Folge** hat eine **konvergente Teilfolge**.

2.7 Reihen

Definition 2.7.1 Die **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **ist konvergent**, wenn die Folge $(S_n)_{n\geqslant 1}$ der **Partialsummen konvergiert**. In diesem Fall definieren wir: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$

Beispiel 2.7.2 (**Geometrische Reihe**) Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Sei

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \dots + q^n.$$
$$q \cdot S_n = q + \dots + q^n + q^{n+1}$$

woraus

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

folgt. Es gilt also:

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Nun zeigen wir die Konvergenz:

$$|S_n - \frac{1}{1-q}| = |\frac{-q^{n+1}}{1-q} = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}.$$

Es folgt aus **Beispiel 2.2.3** und $0 \leqslant |q| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} |S_n - \frac{1}{1-1}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} = 0.$$

Somit konvergiert $(S_n)_{n\geqslant 1}$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

Beispiel 2.7.3 (**Harmonische Reihe**) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

Satz 2.7.4 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ **konvergent** sowie $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ **konvergent** und

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_k)$ **konvergent** und

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Satz 2.7.5 (**Cauchy Kriterium**) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **genau dann konvergent, wenn**: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \geqslant 1$ mit $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon \quad \forall m \geqslant n \geqslant N$.

Satz 2.7.6 Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit

$$a_k \geqslant 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

konvergiert genau dann, wenn die Folge $(S_n)_{n \geqslant 1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

der **Partialsummen nach oben beschränkt ist**.

Korollar 2.7.7 (**Vergleichssatz**) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit: $0 \leqslant a_k \leqslant b_k \quad \forall k \geqslant 1$. Dann gelten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \textbf{ konvergent} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textbf{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \textbf{ divergent} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \textbf{ divergent}$$

Die **Implikationen treffen auch zu**, wenn $\exists K \geqslant 1$ mit

$$0 \leqslant a_k \leqslant b_k \quad \forall k \geqslant K$$

Definition 2.7.9 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ **konvergiert**.

Satz 2.7.10 Eine **absolut konvergente Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **auch konvergent** und es gilt: $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Satz 2.7.12 (**Leibniz** 1682) Sei $(a_n)_{n \geqslant 1}$ **monoton fallend** mit $a_n \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann **konvergiert**

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt:

$$a_1 - a_2 \leqslant S \leqslant a_1$$

Definition 2.7.14 Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ist eine **Umordnung der Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wenn es eine **bijektive Abbildung** $\phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ **gibt**, so dass $a'_n = a_{\phi(n)}$

Satz 2.7.16 (Drichlet 1837) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung** der Reihe mit **demselben Grenzwert**.

Satz 2.7.17 (**Quotientenkriterium**, Cauchy 1821) Sei $(a_n)_{n \geqslant 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geqslant 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textbf{ konvergiert absolut}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textbf{ divergiert}$$

Beispiel 2.7.18 (**Exponentialfunktion**) Für $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Reihe:

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

mit allgemeinem Glied

$$a_n = \frac{z^n}{n!}.$$

Dann folgt für $z \neq 0$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$$

und die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren die **Exponentialfunktion**:

$$\exp z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Bemerkung 2.7.19 Das **Quotientenkriterium versagt**, wenn z. B. **unenedlich viele Glieder** a_n der Reihe **verschwinden** (= 0 sind)

Satz 2.7.20 (**Wurzelkriterium**, Cauchy 1821)

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textbf{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \textbf{ divergieren}$$

Konvergenzradius

Sei $(c_k)_{k \geqslant 0}$ eine Folge (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Wenn

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

existiert, definieren wir:

$$\rho = +\infty \qquad \text{wenn } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \qquad \text{wenn } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0$$

Riemann Zeta Funktion Sei $s > 1$ und

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Die Reihe konvergiert $\forall s > 1$

Korollar 2.7.21 Die **Potenzreihe** $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ **konvergiert absolut** $\forall |z| < \rho$ und **divergiert** $\forall |z| > \rho$.

Definition 2.7.22 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine **lineare Anordnung der Doppelreihe** $\sum_{i,j \geqslant 0} a_{ij}$, wenn es eine **Bijektion** $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ **gibt**, mit $b_k = a_{\sigma(k)}$.

Satz 2.7.23 (Cauchy 1821) Wir nehmen an, dass es $B \geqslant 0$ gibt, so dass $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leqslant B \quad \forall m \geqslant 0$. Dann **kovergieren die folgenden Reihen absolut**:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geqslant 0 \text{ und } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geqslant 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Und **jede lineare Anordnung der Doppelreihe konvergiert absolut mit gleichem Grenzwert**.

Definition 2.7.24 Das **Cauchy Produkt** der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}b_j)$$
$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + ...$$

Satz 2.7.26 Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ **absolut konvergieren, konvergiert ihr Cauchy Produkt** und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j}b_j) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$$

Anwendung 2.7.27 **(Exponentialfunktion)** $\forall z, w \in \mathbb{C}$

$$\exp(w + z) = \exp(w)\exp(z).$$

Wir berechnen das Cauchy Produkt der Reihen: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^i}{i!}$, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$. Dieses ist: $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!}\frac{z^j}{j!})$

Woraus die Behauptung folgt.

Satz 2.7.28 Sei $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an, dass:

(1) $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$ existiert

(2) es eine Funktion $g : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty[$ gibt, so dass

2.1 $|f_n(j)| \leqslant g(j) \quad \forall j \geqslant 0, \ \forall n \geqslant 0$

2.2 $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ **konvergiert**.

Dann folgt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

Korollar 2.7.29 **(Exponentialfunktion)** $\forall z \in \mathbb{C}$ **konvergiert** die Folge $((1 + \frac{z}{n})^n)_{n\geqslant 1}$ und

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = exp(z)$$

3 Stetige Funktionen

3.1 Reellwertige Funktionen

Definition 3.1.1 f ist nach **[oben/unten] beschränkt** wenn $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach **[oben/unten] beschränkt** ist.

Definition 3.1.2 Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$, ist:

(1)[(2)] **[streng] monoton wachsend**, wenn

$$\forall x, y \in D \quad x \leqslant [<] y \Rightarrow f(x) \leqslant [<] f(y)$$

(3)[(4)] **[streng] monoton fallend**, wenn

$$\forall x, y \in D \quad x \leqslant [<] y \Rightarrow f(x) \geqslant [>] f(y)$$

(5)[(6)] **[streng] monoton**, wenn f **[streng] monoton wachsend** oder **fallend** ist.

3.2 Stetigkeit

Definition 3.2.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 **stetig**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$$

so dass $\forall x \in D$ die Implikation:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt

Definition 3.2.2 Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist **stetig**, wenn sie in **jedem Punkt von D stetig** ist.

Satz 3.2.4 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 **stetig**, wenn für **jede Folge** $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in D die folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Korollar 3.2.5 Seien $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ beide **stetig** in x_0:

(1) $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ sind **stetig** in x_0.

(2) Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, ist

$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0

Definition 3.2.6 Eine **polynomielle Funktion** $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form:

$$P(x) = a_n x^n + ... + a_0$$

wobei: $a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R}$. Wenn $a_n \neq 0$ ist, ist n der **Grad** von P.

Korollar 3.2.7 **Polynomielle Funktionen** sind auf ganz $\mathbb{R}$ **stetig**.

Korollar 3.2.8 Seien P, Q **polynomielle Funktionen** auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, ..., x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, ..., x_m\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

3.3 Zwischenwertsatz

Satz 3.3.1 **(Zwischenwertsatz**, Bolzano 1817) Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige Funktion** und $a, b \in I$. **Für jedes** c **zwischen** $f(a)$ und $f(b)$ **gibt es ein** z zwischen a und b mit $f(z) = c$.

3.4 Min-Max Satz

Definition 3.4.2 Ein **Intervall** $I \subset \mathbb{R}$ ist **kompakt**, wenn es von der Form $I = [a, b]$, $\quad a \leqslant b$ ist.

Lemma 3.4.3 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig** in x_0. So sind $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ **stetig** in x_0.

Lemma 3.4.4 Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine **konvergente Folge** in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Sei $a \leqslant b$. Wenn $\{x_n : n \geqslant 1\} \subseteq [a, b]$, folgt: $\lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b]$.

Satz 3.4.5 Sei $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig auf einem kompakten Intervall** I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit: $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v) \quad \forall x \in I$. **Insbesondere ist** f **beschränkt**.

3.5 Umkehrabbildung

Satz 3.5.1 Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$, $f : D_1 \longrightarrow D_2$, $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ **stetig sind**, so ist $g \circ f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 **stetig**.

Korollar 3.5.2 Wenn in **Satz 3.5.1** f auf D_1 und g auf D_2 stetig sind, ist $g \circ f$ auf D_1 **stetig**.

Satz 3.5.3 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig, streng monoton**. Dann ist $J := f(i) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \longrightarrow I$ ist **stetig, streng monoton**.

3.6 Reelle Exponentialfunktion

Satz 3.6.1 $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ ist **streng monoton wachsend, stetig und surjektiv**.

Korollar 3.6.2

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aus der **Potenzreihendarstellung** von $\exp$ folgt ausserdem:

$$\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0.$$

Wenn $y < z$ ist, folgt (aus **2.7.27**)

$$\begin{aligned}\exp(z) &= \exp(y + (z-y)) \\ &= \exp(y)\exp(z-y)\end{aligned}$$

und da $\exp(z-y) > 1$ ist folgt folgendes Korollar:

Korollar 3.6.3 $\exp(z) > exp(y) \quad \forall z > y$

Korollar 3.6.4 $\exp(x) \geqslant 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Korollar 3.6.5 Der **natürlich Logarithmus** $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine **streng monoton wachsende, stetige, bijektive** Funktion. Des weiteren gilt

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0, +\infty[.$$

Korollar 3.6.6 (1)/(2) Für $a > / < 0$ ist

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto x^a\end{aligned}$$

eine **stetige, streng monoton wachsende/fallende Bijektion**.

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$:

(3) $\ln(x^a) = a\ln(x)$ (4) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

(5) $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 3.7.1 Die **Funktionenfolge** $(f_n)_{n \geqslant 0}$ **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\forall x \in D: \; f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Definition 3.7.3 (Weierstrass 1841) Die Folge $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ **konvergiert gleichmässig** in D gegen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \geqslant 1$, so dass:

$$\forall n \geqslant N, \forall x \in D: \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Satz 3.7.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **Funktionenfolge** bestehend aus (in D) **stetigen Funktionen**, die (in D) **gleichmässig gegen eine Funktion** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ **konvergiert**. Dann ist f (in D) **stetig**.

Definition 3.7.5 Eine Funktionenfolge $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist **gleichmässig konvergent**, wenn $\forall x \in D$ der **Grenzwert** $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ **existiert und die Folge** $(f_n)_{n \geqslant 0}$ **gleichmässig gegen** f **konvergiert**.

Korollar 3.7.6 Die Funktionenfolge $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ **konvergiert genau dann gleichmässig** in D, wenn: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \geqslant 1$, so dass $\forall n, m \geqslant N$ und $\forall x \in D$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Korollar 3.7.7 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wenn $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen** ist, dann ist die Funktion $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ **stetig**.

Definition 3.7.8 Die **Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ **konvergiert gleichmässig** (in D), wenn die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge **gleichmässig konvergiert**.

Satz 3.7.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge **stetiger Funktionen**. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leqslant c_n \; \forall x \in D$ und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ **konvergiert**. Dann **konvergiert** die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmässig in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D **stetige Funktion**.

Definition 3.7.10 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat **positiven Konvergenzradius**, wenn

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

existiert. Der **Konvergenzradius** ist dann definiert als:

$$\rho = +\infty \qquad \text{für } \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \qquad \text{für } \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0$$

Satz 3.7.11 Sei $\sum_{k=0}^{\infty}$ eine **Potenzreihe** mit **positivem Konvergenzradius** $\rho > 0$ und

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k c^k, \; |x| < \rho.$$

Dann gilt: $\forall 0 \leqslant r < \rho$ **konvergiert**

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf $[-r, r]$, insbesondere ist

$$f :]-\rho, \rho[\longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig.

3.8 Trigonometrische Funktionen

Satz 3.8.1 $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind **stetige Funktionen**.

Satz 3.8.2 Sei $z \in \mathbb{C}$

(1) $\exp iz = \cos(z) + i\sin(z)$

(2) $\cos(z) = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$

(3) $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

(4) $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

(5) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

(6) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

Korollar 3.8.3 $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
$\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$

3.9 Die Kreiszahl π

Satz 3.9.1 Die **Sinusfunktion** hat auf $]0,+\infty[$ **mindestens eine Nullstelle**. Sei

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}.$$

(1) $\sin\pi = 0,\ \pi \in]2,4[$ (2) $\forall x \in]0,\pi[: \sin x > 0$

(3) $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Korollar 3.9.2 $x \geqslant \sin x \geqslant x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{6}$

Korollar 3.9.3 Sei $x \in \mathbb{R}$

(1) $e^{i\pi} = -1,\ e^{2i\pi} = 1$

(2) $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x),\ \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

(3) $\sin(x+\pi) = -\sin(x),\ \sin(x+2\pi) = \sin(x)$

(4) $\cos(x+\pi) = -\cos(x),\ \cos(x+2\pi) = \cos(x)$

Sei $k \in \mathbb{Z}$

(5) **Nullstellen von Sinus** $= \{k\cdot\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi,(2k+1)\pi[$$
$$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi,(2k+2)\pi[$$

(6) **Nullstellen von Cosinus** $= \{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}[$$
$$\cos(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+2)\pi - \frac{\pi}{2}[$$

3.10 Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.10.1 $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge D, wenn $\forall\delta > 0$:

$$(]x_0-\delta, x_0+\delta[) \setminus \{x_0\} \cap D \neq \emptyset$$

Definition 3.10.3 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein **Häufungspunkt** von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$, bezeichnet mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, wenn $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0$, so dass $\forall x \in D \cap (]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus\{x_0\})$:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Bemerkung 3.10.4 (1) Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein **Häufungspunkt** von D. Dann gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ **genau, dann wenn** für jede Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ folgendes gilt: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$.

(2) Sei $x_0 \in D$. Dann ist f **genau dann stetig, wenn** $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(3) Mittels **(1)** zeigt man leicht, dass wenn $f,g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to x_)} f(x),\ \lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren:

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

folgen.

(4) Seien $f,g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leqslant g$. Dann folgt $\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$ falls beide Grenzwerte existieren.

(5) Wenn $g_1 \leqslant f \leqslant g_2$und $\lim_{x\to x_0} g_1(x) = \lim_{x\to x_0} g_2(x)$, so existiert $l := \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $l = \lim_{x\to x_0} g_1(x)$

Satz 3.10.6 Seien $D,E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 **Häufungspunkt** von D, $f : D \longrightarrow E$ eine **Funktion**. Wir nehmen an, dass $y_0 := \lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und $y_0 \in E$. Wenn $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ in y_0 **stetig** ist, folgt:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0).$$

4 Differenzierbare Funktionen

4.1 Die Ableitung

Definition 4.1.1 f ist in x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x-0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Bemerkung 4.1.2 Es ist oft von Vorteil in der Definition von $f'(x_0)$, $x = x_0 + h$ zu setzen, so dass:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Satz 4.1.3 (Weierstrass 1861) Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ **Häufungspunkt** von D. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist in x_0 **differenzierbar**

(2) Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit:

2.1 $f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$

2.2 $r(x_0) = 0$ und r ist **stetig** in x_0

Wenn dies zutrifft, ist $c = f'(x_0)$ **eindeutig** bestimmt.

Satz 4.1.4 Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 **genau dann differenzierbar, wenn** es eine Funktion $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, die in x_0 **stetig** ist und $\forall x \in D$

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0).$$

In diesem Fall gilt:

$$\phi(x) = f'(x).$$

Korollar 4.1.5 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein **Häufungspunkt** von D. Wenn f in x_0 **differenzierbar** ist, ist f in x_0 **stetig**.

Definition 4.1.7 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in D **differenzierbar**, wenn für **jeden Häufungspunkt** $x_0 \in D$, f in x_0 **differenzierbar** ist.

Satz 4.1.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein **Häufungspunkt** von D und $f,g : d \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 **differenzierbar**. Dann gelten:

(1) $f+g$ ist in x_0 **differenzierbar** und

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(2) $f\cdot g$ ist in x_0 **differenzierbar** und

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, ist $\frac{f}{g}$ in x_0 **differenzierbar** und

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Satz 4.1.11 Seien $D,E \subseteq \mathbb{R}$, sei $x_0 \in D$ ein **Häufungspunkt**, sei $f : D \longrightarrow E$ eine in x_0 **differenzierbare Funktion**, so dass $y_0 := f(x_0)$ ein **Häufungspunkt** von E ist und sei $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in y_0 **differenzierbare Funktion**. Dann ist $g\circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 **differenzierbar** und

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Korollar 4.1.12 Sei $f : D \longrightarrow E$ eine **bijektive Funktion**, sei $x_0 \in D$ ein **Häufungspunkt**. Wir nehmen an f ist in x_0 **differenzierbar** und $f'(x_0) \neq 0$. Zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ **stetig**. Dann ist y_0 ein **Häufungspunkt** von E, f^{-1} ist in y_0 **differenzierbar** und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

4.2 Zentrale Sätze über die Ableitung

Definition 4.2.1 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

(1)[(2)] f besitzt ein **lokales Maximum [Minimum]** in x_0, wenn $\exists \delta > 0$ mit:

$$f(x) \leqslant [\geqslant] f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

(3) f besitzt ein **lokales Extremum** in x_0, wenn es ein **lokales Minimum oder Maximum** ist.

Satz 4.2.2 Sei $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$. Wir nehmen an, f ist in x_0 **differenzierbar**.

(1) Wenn $f'(x_0) > 0$ ist, $\exists \delta > 0$ mit:

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$
$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

(2) Wenn $f'(x_0) < 0$ ist, $\exists \delta > 0$ mit:

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$
$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

(3) Wenn f in x_0 ein **lokales Extremum** besitzt, folgt

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz 4.2.3 (Rolle 1690) Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ **differenzierbar**. Wenn $f(a) = f(b)$, so gibt es $\xi \in]a, b[$ mit:

$$f'(\xi) = 0.$$

Satz 4.2.4 (Lagrange 1797) Sei $f \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig** und in $]a, b[$ **differenzierbar**. Es gibt $\xi \in]a, b[$ mit:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Korollar 4.2.5 Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig** und in $]a, b[$ **differenzierbar**.

(1) Wenn $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f **konstant**.

(2) Wenn $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b].$$

(3)[(4)] Wenn $f'(\xi) \geqslant [>] 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f auf $[a, b]$ **[strikt] monoton wachsend**.

(5)[(6)] Wenn $f'(\xi) \leqslant [<] 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f auf $[a, b]$ **[strikt] monoton fallend**.

(7) Wenn es $M \geqslant 0$ gibt, mit: $|f'(\xi)| \leqslant M \quad \forall \xi \in]a, b[$, folgt $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|.$$

Beispiel 4.2.6 **(1) arcsin** Da $\sin' = \cos$ und $\cos(x) > 0 \; \forall x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt aus **Korollar 4.2.5 (4)**, dass die Sinusfunktion auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ strikt monoton wachsend ist. Also ist $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ bijektiv. Wir definieren:

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

als die Umkehrfunktion von $\sin$. Nach **Korollar 4.1.12** ist sie auf $] - 1, 1[$ differenzierbar und für $y = \sin x, \quad x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt nach **4.1.12**:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Wir verwenden nun:

$$y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

woraus mit $\cos c > 0$ folgt: $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$. Wir erhalten also $\forall y \in] - 1, 1[$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(2) arccos Eine analoge Diskussion, wie in **(1)** zeigt, dass $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1,]$ strikt monoton fallend ist und $[0, \pi]$ auf $[-1, 1]$ bijektiv abbildet. Sei:

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

die Umkehrfunktion. Sie ist auf $] - 1, 1[$ differenzierbar und

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \forall y \in] - 1, 1[.$$

(3) arctan Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ hatten wir die Tangensfunktion definiert: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und deren Ableitung berechnet: $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Also ist $\tan$ auf $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend mit $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$. Also ist $\tan :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow] - \infty, \infty[$ bijektiv. Sei

$$\arctan :] - \infty, \infty[\longrightarrow] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

die Umkehrfunktion. Dann ist $\arctan$ differenzierbar und für $y = \tan x$:

$$\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Satz 4.2.9 (Cauchy) Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ **differenzierbar**. Es gibt $\xi \in]a, b[$ mit:

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Wenn $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ ist, folgt:

$$g(a) \neq g(b) \text{ und } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Satz 4.2.10 **(Bernoulli** 1691/92, **de l'Hôpital** 1696) Seien $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ **differenzierbar** mit

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[.$$

Wenn

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0, \; \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bemerkung 4.2.11 Der Satz **gilt auch** wenn:

$$b = +\infty \qquad \lambda = +\infty \qquad x \to a^+$$

Definition 4.2.13 (1) f ist **konvex** (auf I), wenn $\forall x, y \in I, x \leqslant y$ und $\lambda \in [0, 1]$ folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

(2) f ist **streng konvex**, wenn $\forall x, y \in I, x < y$ und $\lambda \in]0, 1[$ folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Bemerkung 4.2.14 Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **konvex**. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass $\forall n \geqslant 1$, $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq I$ und $\lambda_1, ...\lambda_n$ in $[0,1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ folgendes gilt:

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Lemma 4.2.15 Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Die Funktion f ist **genau dann konvex, wenn** $\forall x_0 < x < x_1$ in I folgendes gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Satz 4.2.16 Sei $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ **differenzierbar**. f ist **genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wachsend** ist.

Korollar 4.2.17 Sei $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a,b[$. f ist **(streng) konvex**, wenn $f'' \geqslant 0$ (bzw. $f'' > 0$) auf $]a,b[$.

4.3 Höhere Ableitungen

Definition 4.3.1 (1) Für $n \geqslant 2$ ist f **n-mal differenzierbar in D**, wenn $f^{(n-1)}$ in D **differenzierbar** ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die **n-te Ableitung** von f

(2) f ist **n-mal stetig differenzierbar** in D, wenn f **n-mal differenzierbar** in D & $f^{(n)}$ in D **stetig** ist.

(3) Die Funktion f ist in D **glatt**, wenn sie $\forall n \geqslant 1$ **n-mal differenzierbar** ist.

Bemerkung 4.3.2 Es folgt aus **Korollar 4.1.5**, dass für $n \geqslant 1$ eine **n-mal differenzierbare** Funktion **$(n-1)$-mal stetig differenzierbar** ist.

Satz 4.3.3 **(analog zu Satz 4.1.9)** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in **Definition 4.3.1**, $n \geqslant 1$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ **n-mal differenzierbar** in D.

(1) $f + g$ ist **n-mal differenzierbar** und $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

(2) $f \cdot g$ ist **n-mal differenzierbar** und $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Satz 4.3.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in **Definition 4.3.1**, $n \geqslant 1$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ **n-mal differenzierbar** in D. Wenn $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ ist, ist $\frac{f}{g}$ in D **n-mal differenzierbar**.

Satz 4.3.6 Seien $E, D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen für die **jeder Punkt Häufungspunkt** ist. Seien $f : D \longrightarrow E$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ **n-mal differenzierbar**. Dann ist $f \circ g$ **n-mal differenzierbar** und $(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x)(g^{(k)} \circ f)(x)$ wobei $A_{n,k}$ ein Polynom in den Funktionen $f', f^{(2)}, ..., f^{n+1-k)}$ ist.

4.4 Potenzreihen & Taylor Approximation

Satz 4.4.1 Seien $f_n :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge wobei f_n **einmal** in $]a,b[\quad \forall n \geqslant 1$ **stetig differenzierbar** ist. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n \geqslant 1}$ wie auch $(f_n')_{n \geqslant 1}$ **gleichmässig** in $]a,b[$ mit $\lim_{n \to \infty} f_n =: f$ und $\lim_{n \to \infty} f_n' =: p$ **konvergieren**. Dann ist f **stetig differenzierbar** und $f' = p$.

Satz 4.4.2 Sei $\sum_{k=0}^\infty c_k x^k$ eine **Potenzreihe** mit pos. Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k (x - x_0)^k$ auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ **differenzierbar** und $f'(x) = \sum_{k=0}^\infty k c_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.

Korollar 4.4.3 Unter der Voraussetzung von **Satz 4.4.1** ist f auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ **glatt** und $f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^\infty c_k \frac{k!}{(k-j)!}(x - x_0)^{k-j}$. Insbesondere ist $c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$.

Satz 4.4.5 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig** und in $]a,b[$ **$(n+1)$-mal differenzierbar**. Für jedes $a < x \leqslant b$ gibt es $\xi \in]a,x[$ mit: $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Korollar 4.4.6 **(Taylor Approximation)** Sei $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig** und in $]c,d[$ **$(n+1)$-mal differenzierbar**. Sei $c < a < d$. $\forall x \in [c,d] \, \exists \xi$ zwischen x und a, so dass: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Korollar 4.4.7 Sei $n \geqslant 0$, $a < x_0 < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ in $]a,b[$ **$(n+1)$-mal stetig differenzierbar**. Annahme: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = ... = f^{(n)}(x_0) = 0$.

(1) Wenn n **gerade** ist und x_0 eine **lokale Extremalstelle** ist, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.

(2) Wenn n **ungerade** ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ist, ist x_0 eine **strikt lokale Minimalstelle**.

(3) Wenn n **ungerade** ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ist, x_0 eine **strikt lokale Maximalstelle**.

Korollar 4.4.8 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig** und in $]a,b[$ **zweimal stetig differenzierbar**. Sei $a < x_0 < b$. Annahme: $f'(x_0) = 0$.

(1) Wenn $f^{(2)}(x_0) > 0$ ist, ist x_0 eine **strikt lokale Minimalstelle**.

(2) Wenn $f^{(2)}(x_0) < 0$ ist, ist x_0 eine **strikt lokale Maximalstelle**.

5 Riemann Integral

5.1 Definition und Integrabilitätskriterien

Definition 5.1.1 Eine **Partition** von I ist eine endliche Teilmenge $P \subsetneq [a,b]$ wobei $\{a,b\} \subseteq P$. Es gilt: $n := \text{card}\, P - 1 \geqslant 1$ und es gibt **genau eine Bijektion** $\{0,1,2,...,n\} \longrightarrow P$, $j \mapsto x_j$ mit der Eigenschaft $i < j \Longrightarrow x_i < x_j$.

Eine **Partition** P' ist eine **Verfeinerung** von P, wenn $P \subset P'$. Offensichtlich ist die **Vereinigung** $P_1 \cup P_2$ **zweier Partitionen** wieder **eine Partition**. Insbesondere haben **zwei Partitionen immer** eine **gemeinsame Vereinigung**. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte Funktion**, das heisst es gibt $M \geqslant 0$ mit $|f(x)| \leqslant M \quad \forall x \in [a,b]$. Sei $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ eine **Partition** von I. Insbesondere gilt: $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ **Länge des Teilintervalls** $[x_{i-1}, x_i]$, $\delta_i := x_i - x_{i-1}$, $i \geqslant 1$

Untersumme $s(f,P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i$, $f_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$

Obersumme $S(f,P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i$, $F_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$

Lemma 5.1.2 (1) Sei P' eine **Verfeinerung** von P. Dann gilt: $s(f,P) \leqslant s(f,P') \leqslant S(f,P') \leqslant S(f,P)$.

(2) Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt: $s(f,P_1) \leqslant S(f,P_2)$.

Sei $\mathcal{P}(I)$ die Menge der Partitionen von I. Wir definieren: $s(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}(I)} s(f,P)$, $S(f) = \inf_{P\in\mathcal{P}(I)} S(f,P)$.

Definition 5.1.3 Eine **beschränkte Funktion** $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist **(Riemann) integrierbar**, wenn $s(f) = S(f)$. In diesem Fall bezeichnen wir den **gemeinsamen Wert** von $s(f)$ und $S(f)$ mit $\int_a^b f(x)\,dx$.

Satz 5.1.4 Eine **beschränkte Funktion** ist genau dann integrierbar, wenn $\forall\varepsilon > 0\,\exists P \in \mathcal{P}(I)$: $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Satz 5.1.8 (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875) Eine **beschränkte Funktion** $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist **genau dann integrierbar, wenn** $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0$, so dass: $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$, $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Hier bezeichnet $\mathcal{P}_\delta(I)$ die **Menge der Partitionen** P, für welche $\max_{1\leqslant i\leqslant n} \delta_i \leqslant \delta$.

Korollar 5.1.9 Die **beschränkte Funktion** $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist **genau dann integrierbar mit** $A := \int_a^b f(x)\,dx$, **wenn**: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, so dass $\forall P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P) < \delta$ und $\xi_1,...,\xi_n$ mit $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, $P = \{x_0,...,x_n\}$ $|A - \sum_{i+1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon$.

5.2 Integrierbare Funktionen

Satz 5.2.1 Seien $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt, integrierbar und** $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g$, $\lambda\cdot f$, $f\cdot g$, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ und (falls $|g(x)| \geqslant \beta > 0\quad \forall x \in [a,b]$) $\frac{f}{g}$ **integrierbar**.

Bemerkung 5.2.2 Sei $\phi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte Funktion**. Dann ist $(*)$ $\sup_{x,y\in[c,c]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x\in[c,d]} \phi(x) - \inf_{x\in[c,d]} \phi(x)$. Einerseits gilt offensichtlich $\forall x,y \in [c,d]$: $\phi(x) \leqslant \sup_{[c,d]}\phi$, $\phi \geqslant \inf_{[c,d]}\phi$ also ist $\phi(x) - \phi(y) \leqslant \sup_{[c,d]}\phi - \inf_{[c,d]}\phi$, woraus durch vertauschen von x,y folgt: $|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant \sup_{[c,d]} - \inf_{[c,d]}\phi$. Andererseits sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\xi \in [c,d]$ und $\eta \in [c,d]$ $\phi(\xi) > \varepsilon$ und $\phi(\eta) < \inf_{[c,d]}\phi + \varepsilon$ woraus $\phi(\xi) - \phi(\eta) > \sup_{[c,d]}\phi - \inf_{[c,d]}\phi - 2\varepsilon$ folgt. Dies zeigt die Aussage $(*)$

Korollar 5.2.3 Seien P,Q Polynome und $[a,b]$ ein **Intervall** in dem Q **keine Nullstelle** besitzt. Dann ist $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ **integrierbar**.

Definition 5.2.4 Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D **gleichmässig stetig**, wenn $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ $\forall x,y \in D:\quad |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Satz 5.2.6 (Heine 1872) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig** in dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ **gleichmässig stetig**.

Satz 5.2.7 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. So ist f **integrierbar**.

Satz 5.2.8 Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **monoton**. So ist f **integrierbar**.

Bemerkung 5.2.9 Seien $a < b < c$ und $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt** mit $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ **integrierbar**. Dann ist f integrierbar und $(*)$ $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$. In der Tat ergibt die **Summe einer Obersumme (respektive Untersumme)** für $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ **eine Obersumme (respektive Untersumme)** für f. Wir erweitern jetzt die Definition von $\int_a^b f(x)\,dx$ auf: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ und wenn $a < b$, $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$. Dann gilt $(*)$ für alle Tripel a,b,c unter den entsprechenden Integrabilitätsvoraussetzungen.

Satz 5.2.10 Sei $I \subsetneq \mathbb{R}$ ein **kompaktes Intervall** mit **Endpunkten** a,b sowie $f_1,f_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt integrierbar** und $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,dx = \lambda_1 \int_1^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\,dx$.

5.3 Ungleichungen & Mittelwertsatz

Satz 5.3.1 Seien $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt integrierbar**, und $f(x) \leqslant g(x)\quad \forall x \in [a,b]$. Dann folgt: $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Korollar 5.3.2 Wenn $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt integrierbar**, folgt: $|\int_a^b f(x)\,dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Satz 5.3.3 **(Cauchy-Schwarz Ungleichung)** Seien $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt integrierbar**. Dann gilt: $|\int_a^b f(x)g(x)\,dx| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$.

Satz 5.3.4 **(Mittelwertsatz**, Cauchy 1821) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. So $\exists\xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

Satz 5.3.6 (Cauchy 1821) Seien $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wobei f **stetig**, g **beschränkt** und **integrierbar** mit $g \geqslant 0\quad \forall x \in [a,b]$. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$.

5.4 Fundamentalsatz Differentialrechnung

Satz 5.4.1 **(Fundamentalsatz der Analysis)** Seien $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. Die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\quad a \leqslant x \leqslant b$ ist in $[a,b]$ **stetig differenzierbar** und $F'(x) = f(x)\quad \forall x \in [a,b]$.

Definition 5.4.2 Sei $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. Eine Funktion $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f, wenn F **(stetig) differenzierbar** in $[a,b]$ ist und $F' = f$ in $[a,b]$ gilt.

Satz 5.4.3 **(Fundamentalsatz der Differentialrechnung)** Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. So gibt es eine **Stammfunktion** F von f, die bis auf eine addidive Konstante **eindeutig** bestimmt ist und: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Satz 5.4.5 **(Partielle Integration)** Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig differenzierbar**. Dann gilt: $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$.

Satz 5.4.6 **(Substitution)** Sei $a < b$, $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig differenzierbar**, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subseteq I$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige Funktion**. Dann gilt: $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$.

Korollar 5.4.8 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig**.

(1) Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$, so dass das abgeschlossene Intervall mit **Endpunkten** $a+c, b+c \in I$. Dann gilt:

$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(t+c)\,dt$.

(2) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$, so dass das abgeschlossene Intervall mit den **Endpunkten** $ac, bc \in I$. Dann gilt: $\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx$.

5.5 Integration konvergenter Reihen

Satz 5.5.1 Sei $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von **beschränkten, integrierbaren Funktionen**, die **gleichmässig** gegen eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **konvergiert**. So ist f **beschränkt integrierbar und** $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Korollar 5.5.2 Sei $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge **beschränkter, integrierbarer Funktionen**, so dass $\sum_{n=0}^\infty f_n$ auf $[a,b]$ **gleichmässig konvergiert**. Dann gilt: $\sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b (\sum_{n=0}^\infty f_n(x))\,dx$.

Korollar 5.5.3 Sei $f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_k x^k$ eine **Potenzreihe** mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \leqslant r < \rho$, f auf $[-r, r]$ **integrierbar** und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$: $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$.

5.8 Uneigentliche Integrale

Definition 5.8.1 Sei $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt und integrierbar** auf $[a,b]$ für alle $b > a$. Wenn $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existiert, bezeichnen wir den **Grenzwert** mit $\int_a^\infty f(x)\,dx$ und sagen, dass f auf $[a, +\infty[$ **integrierbar ist**.

Lemma 5.8.3 Sei $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt und integrierbar auf** $[a,b]$ $\forall b > a$. (1) Wenn $|f(x)| \leqslant g(x)$ $\forall x \geqslant a$ und $g(x)$ auf $[a, \infty[$ **integrierbar** ist, ist f auf $[a, \infty[$ **integrierbar**. (2) Wenn $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ **divergiert, divergiert** auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Satz 5.8.5 (McLaurin 1742) Sei $f : [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ **monoton fallend**. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ **konvergiert genau dann, wenn** $\int_1^\infty f(x)\,dx$ **konvergiert**.

Eine Situation, die zu einem uneigentlichen Integral führt, ist wenn $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$ **beschränkt** und **integrierbar** ist, aber auf $]a, b]$ **nicht** notwendigerweise **beschränkt** ist.

Definition 5.8.8 In dieser Situation ist $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **integrierbar**, wenn $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ existiert.In diesem Fall wird der **Grenzwert** mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet.

Definition 5.8.11 Für $s > 0$ definieren wir $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx$.

Satz 5.8.12 **(Bohr-Mollerup)**

(1) Die **Gamma Funktion** erfüllt die Relationen:

(a) $\Gamma(1) = 1$ (b) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $\forall s > 0$

(c) γ ist **logarithmisch konvex**, d.h. $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1--\lambda}$ für alle $x, y > 0$ und $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

(2) Die **Gamma Funktion** ist die **einzige** Funktion $]0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$, die (a), (b) und (c) erfüllt. Darüberhinaus gilt: $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$ $\forall x > 0$

Lemma 5.8.13 Sei $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + 1q = 1$. Dann gilt $\forall a, b \geqslant 0$: $a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Satz 5.8.14 (**Hölder Ungleichung**) Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{1}$. Für **alle stetigen Funktionen** $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$

5.9 Das unbestimmte Integral

Satz 5.9.3 Seien P, Q **Polynome** mit $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$ und Q mit **Produktzerlegung** $(*)$ Dann gibt es $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$ mit: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{((x-a_i)^2 + \beta_i^2)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{x - \gamma_i)^j}$.

6 Anhang A

Satz A.0.1 **(Binomialsatz)** $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geqslant 1$ gilt: $(x+y)^n = \sum_n k x^k y^{n-k}$.

7 Wichtige Beispiele

Ungerade und gerade Funktionen Sei $f(x)$ eine **gerade** Funktion. Dann: $f(x) = f(-x)$. Sei $g(x)$ eine **ungerade** Funktion. Dann: $-g(x) = g(-x)$. Das **Produkt** von **2 geraden** Funktionen ist **gerade**. Das **Produkt** von **2 ungeraden** Funktionen ist **gerade**. Das **Produkt einer ungeraden und einer geraden** Funktion, ist **ungerade**. Für **ungerade** Funktionen gilt: $\int_{-a}^{+a} g(x)\,dx = 0$. (Dies kann man sich graphisch vorstellen).

Konvergenztest für Reihen Gegeben: $\sum_{n=0}^\infty a_n$.

(1) Spezieller Typ?

1.1 **Geometrische Reihe**: $\sum q^n$? **Konvergent**, wenn: $|q| < 1$.

1.2 **Alternierende Reihe**: $\sum (-1)^n a_n$? **Konvergent**, wenn: $\lim a_n = 0$.

1.3 **Riemann Zeta**: $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ **Konvergent**, wenn: $s > 1$.

1.4 **Teleskopreihe** $\sum (b_n - b_{n-1})$? **Konvergent**, wenn: $\lim b_n$ existiert.

(2) Kein spezieller Typ:

2.1 $\lim a_n = 0$? Nein: **divergent**.

2.2 **Quotientenkriterium** anwendbar?

2.3 **Wurzelkriterium** anwendbar?

2.4 Gibt es eine **konvergente Majorante**?

2.5 Gibt es eine **divergente Minorante**?

2.6 Nichts von all dem?

$\Longrightarrow$ **kreativ sein**.

Allgemeine Potenzen Wir können die Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus verwenden, um allgemeine Potenzen zu definieren. Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig definieren wir: $x^a := \exp(a \ln x)$. Insbesondere: $x^0 = 1$ $\forall x > 0$.

Trigonometrische Funktionen Sinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$: $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Kosinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$: $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$. Tangensfunktion für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$: $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Cotangensfunktion für $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$: $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Hyperbelfunktionen $\forall x \in \mathbb{R}$: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Es gilt offensichtlich: $\cosh x \geqslant 1\ \forall x \in \mathbb{R}$, $\sinh x \geqslant 1\ \forall x \in]0, +\infty[$, $\sin(0) = 0$. Daraus folgt: cosh ist auf $[0, \infty[$ strikt monoton wachsend, $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$. Also ist $\cosh : [0, \infty[\longrightarrow [1, \infty[$ bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird mit $\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ bezeichnet. Unter Verwendung von $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ folgt: $\operatorname{arcosh}'y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\ \forall y \in]1, +\infty[$. Analog zeigt man, dass $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bijektiv ist. Dessen Umkehrfunktion wird mit $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bezichnet und es gilt: $\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ \forall y \in \mathbb{R}$. Für $\tanh x$ folgt: $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$ Also ist tanh auf R streng monoton wachsend und man zeigt, dass $\lim_{x \to +\infty} \tanh x = 1$, $\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1$. Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion wird mit $\operatorname{artanh} :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Es gilt dann: $\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2}\ \forall y \in]-1, 1[$.

7.1 Ableitungen

$(ax^z)' = azx^{z-1}$
$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = (\ln(x) + 1)e^x$
$(x \ln x)' = \ln(x) + 1$
$e'^x = e^x$
$\sin' x = \cos x$
$\cos' x = -\sin x$
$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\ln' x = \frac{1}{x}$
$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$
$\sinh' x = \cosh x$
$\cosh' x = \sinh x$
$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arcosh}'y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \forall y \in]1, +\infty[$
$\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in]-1, 1[$

7.2 Integrale

$\int x^s\, dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \quad s \neq -1 \qquad \int x^s\, dx = \ln x + C \quad s = -1$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$
$\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \operatorname{arsinh} x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \operatorname{arcosh} + C$
$\int e^x\, dx = e^x + C$
$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$ (verwende $\ln x = \ln x \cdot 1$)
$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$
$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$
$n \geqslant 1 \quad I_n = \int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
$\int (ax + b)^s\, dx = \frac{1}{a(s+1)} (ax + b)^{s+1} + C \quad s \neq 1$
$\int (ax + b)^s\, dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C$

7.3 Additionstheoreme

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$
$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$
$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$
$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$
$\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

7.4 Grenzwerte

$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$
$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$
$\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$
$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ |q| < 1 \quad \lim_{x \to \infty} n^\alpha \cdot q^n = 0$
$\lim_{x \to 0} \sqrt[x]{x} = ...$
$\lim_{x \to 0} x^x = ...$