

1 \mathbb{R} und \mathbb{C}

Ordnungsvollständigkeit: Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ s. d.

(i) $A \neq \emptyset$ (ii) $\forall a \in A \forall b \in B \ a \leq b$

Dann: $\exists c \in \mathbb{R}$ s.d. $\forall a \in A \ a \leq c \leq \forall b \in B \ c \leq b$

Korollar 1.1.7 (Archimedisches Prinzip)

Sei $x > 0, y \in \mathbb{R}$ Dann: $\exists n \in \mathbb{N} \ y \leq n \cdot x$

Satz 1.1.8 $\forall t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ hat $x^2 = t$ eine Lösung in \mathbb{R}

Satz 1.1.10 $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(i) $|x| \geq 0$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(ii) $|xy| = |x||y|$

(iv) $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Satz 1.1.11 (Young'sche Ungleichung)

$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

Definition 1.1.12 Sei $A \subset \mathbb{R}$

(i) / (ii) $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere/untere Schranke** von A wenn $\forall a \in A \ a \leq / \geq c$. A ist **nach oben/unten beschränkt**, wenn es eine obere/untere Schranke gibt.

(iii) / (iv) $m \in \mathbb{R}$ ist ein **Maximum/Minimum** von A wenn $m \in A$ und m **obere/untere Schranke** von A ist.

Satz 1.1.15 Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ Sei A nach oben/unten beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere/ grösste untere Schranke von A : $c := \sup A / c := \inf A$ genannt **Supremum/Infimum** von A

Korollar 1.1.16 Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Wenn B **nach oben/unten beschränkt** ist, folgt $\sup A \leq \sup B / \inf B \leq \inf A$

Konvention: Wenn A **nicht beschränkt** ist, definieren wir $\sup A = +\infty$ bzw. $\inf A = -\infty$

Satz 1.3.4 (Fundamentalsatz der Algebra) Sei $n \geq 1, n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{C}$ und

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

Dann

$$\exists z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C},$$

so dass

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

2 Folgen und Reihen

2.1 Grenzwert einer Folge

Definition 2.1.1 Eine **Folge (reeller Zahlen)** ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen eine Folge mit $(a_n)_{n \geq 1}$

Lemma 2.1.3 Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge. Dann gibt es **höchstens eine reelle Zahl $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:** $\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]\}$ **endlich**.

Definition 2.1.4 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist **konvergent**, wenn es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]\}$ **endlich** ist.

Lemma 2.1.6 Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge. Folgende Aussagen sind äquivalent

(1) $(a_n)_{n \geq 1}$ **konvergiert gegen $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$**

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass $|a_n - l| < \varepsilon \ \forall n \geq N$

Satz 2.1.8 Seien $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ **konvergent** mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(1) $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ ist **konvergent**: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

(2) $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ ist **konvergent**: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(3) Sei $\forall n \geq 1 \ b_n \neq 0$ und $b \neq 0$. Dann ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1}$ **konvergent** und $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1} = \frac{a}{b}$

(4) Wenn $\exists K \geq 1$ mit $\forall n \geq K : a_n \leq b_n$, folgt $a \leq b$

Beispiel 2.1.9 $b \in \mathbb{Z} : \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^b = 1$. Das folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$ und wiederholter Anwendung von **Satz 2.1.8 (2) und (3)**.

2.2 Satz von Weierstrass

Definition 2.2.1 (1)[(2)] $(a_n)_{n \geq 1}$ ist **monoton wachsend [fallend]** wenn: $a_n \leq [\geq] a_{n+1} \ \forall n \geq 1$

Satz 2.2.2 (Weierstrass) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ **monoton wachsend [fallend]** und **nach oben [unten] beschränkt**. Dann **konvergiert $(a_n)_{n \geq 1}$ mit**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}]$$

Beispiel 2.2.3 Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq q < 1$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a q^n = 0.$$

Wir können annehmen, dass $q > 0$. Sei $x_n = n^a q^n$, dann folgt:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (n+1)^a q^{n+1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^a q \cdot n^a q^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n. \end{aligned}$$

Also:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = 1$ (**Beispiel 2.1.9**), gibt es ein n_0 , so dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q} \ \forall n \geq n_0.$$

Es folgt:

$$x_{n+1} < x_n \ \forall n \geq n_0.$$

Da für $x_n > 0 \ \forall n \geq 1$ die Folge nach **unten beschränkt** ist und für $n \geq n_0$ **monoton fallend** ist.

Sei

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q x^n \\ &= q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q \cdot l. \end{aligned}$$

Also $(1 - q) \cdot l = 0$ woraus $l = 0$ folgt.

Bemerkung 2.2.24 In **Beispiel 2.2.3** wird zweimal die folgende einfache Tatsache verwendet: Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine **konvergente** Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die durch

$$b_n := a_{n+k} \ n \geq 1$$

definierte Folge **konvergent** und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

Lemma 2.2.7 (Bernoulli Ungleichung)

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \ \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

2.3 Limes superior und Limes inferior

Limes inferior/ superior: Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine beschränkte Folge. Sei $\forall n \geq 1$:

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$$

$$c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

Dann folgt $\forall n \geq 1$ $b_n \leq b_{n+1}$ (monoton wachsend) und $c_n \geq c_{n+1}$ (monoton fallend) und beide Folgen beschränkt. Wir definieren:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

2.4 Cauchy Kriterium

Lemma 2.4.1 $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n \geq 1}$ beschränkt und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

Satz 2.4.2 (Cauchy Kriterium) $(a_n)_{n \geq 1}$ ist genau dann konvergent, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$,

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

2.5 Satz von Bolzano-Weierstrass

Definition 2.5.1 Ein abgeschlossenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist von der Form

$$(1) [a, b] \quad a \leq b \in \mathbb{R}$$

$$(3)]-\infty, a] \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(2) [a, +\infty[\quad a \in \mathbb{R}$$

$$(4)]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Bemerkung 2.5.2 Ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \in I$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in I$.

Bemerkung 2.5.3 Seien $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ mit $a \leq b$, $c \leq d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann ist $I \subseteq J$ genau dann, wenn $c \leq a$, $b \leq d$

Satz 2.5.5.5 (Cauchy-Cantor) Sei

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Intervalle mit

$$\mathcal{L}(I_1) < +\infty$$

Dann gilt

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset.$$

Falls zudem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$$

gilt, enthält

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n$$

genau einen Punkt.

Definition 2.5.7 Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n \geq 1}$, wobei

$$b_n = a_{l(n)}$$

und

$$l : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$$

Satz 2.5.9 (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

2.6 Folgen in \mathbb{R}^d und \mathbb{C}

Definition 2.6.1 Eine Folge in \mathbb{R}^d ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^d$. Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen die Folge mit $(a_n)_{n \geq 1}$

Definition 2.6.2 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in \mathbb{R}^d ist konvergent, wenn $\exists a \in \mathbb{R}^d$, so dass $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Satz 2.6.3 Sei $b = (b_1, \dots, b_d)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nj} = b_j \quad \forall 1 \leq j \leq d$$

Bemerkung 2.6.4 Sei $x = (x_1, \dots, x_d)$.

Dann ist $\forall 1 \leq j \leq d$

$$x_j^2 \leq \sum_{i=1}^d x_i^2 = \|x\|^2 \leq d \cdot \max_{1 \leq i \leq d} x_i^2$$

woraus

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \cdot \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

folgt.

Bemerkung 2.6.5 Eine konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in \mathbb{R}^d ist beschränkt. Das heisst: $\exists R \geq 0$ mit $\|a_n\| \leq R \quad \forall n \geq 1$

Satz 2.6.6 (1) Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge ist: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$.

(2) Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

2.7 Reihen

Definition 2.7.1 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, wenn die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definieren wir: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Beispiel 2.7.2 (Geometrische Reihe) Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Sei

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n.$$

$$q \cdot S_n = q + \dots + q^n + q^{n+1}$$

woraus

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

folgt. Es gilt also:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nun zeigen wir die Konvergenz:

$$|S_n - \frac{1}{1-q}| = \left| \frac{-q^{n+1}}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}.$$

Es folgt aus **Beispiel 2.2.3** und $0 \leq |q| < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - \frac{1}{1-q}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} = 0.$$

Somit konvergiert $(S_n)_{n \geq 1}$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

Beispiel 2.7.3 (Harmonische Reihe) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

Satz 2.7.4 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent sowie $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right)$$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k)$ konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Satz 2.7.5 (Cauchy Kriterium) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $|\sum_{k=n}^m a_k| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$.

Satz 2.7.6 Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

konvergiert genau dann, wenn die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Korollar 2.7.7 (Vergleichssatz) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit: $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$. Dann gelten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Die Implikationen treffen auch zu, wenn $\exists K \geq 1$ mit $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$

Definition 2.7.9 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 2.7.10 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt: $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Satz 2.7.12 (Leibniz 1682) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt:

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

Definition 2.7.14 Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wenn es eine bijektive Abbildung $\phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ gibt, so dass $a'_n = a_{\phi(n)}$

Satz 2.7.16 (Dichlet 1837) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe mit demselben Grenzwert.

Satz 2.7.17 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Beispiel 2.7.18 (Exponentialfunktion)

Für $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Reihe:

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

mit allgemeinem Glied

$$a_n = \frac{z^n}{n!}.$$

Dann folgt für $z \neq 0$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Also gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$$

und die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren die Exponentialfunktion:

$$\exp z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Bemerkung 2.7.19 Das Quotientenkriterium versagt, wenn z. B. unendlich viele Glieder a_n der Reihe verschwinden (= 0 sind)

Satz 2.7.20 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren}$$

Konvergenzradius

Sei $(c_k)_{k \geq 0}$ eine Folge (in \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

existiert, definieren wir:

$$\rho = +\infty \quad \text{wenn } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \quad \text{wenn } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0$$

Riemann Zeta Funktion Sei $s > 1$ und

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Die Reihe konvergiert $\forall s > 1$

Korollar 2.7.21 Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut $\forall |z| < \rho$ und divergiert $\forall |z| > \rho$.

Definition 2.7.22 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$, wenn es eine Bijektion $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt, mit $b_k = a_{\sigma(k)}$.

Satz 2.7.23 (Cauchy 1821) Wir nehmen an, dass es $B \geq 0$ gibt, so dass $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$. Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \text{ und } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Und jede lineare Anordnung der Doppelreihe konvergiert absolut mit gleichem Grenzwert.

Definition 2.7.24 Das Cauchy Produkt der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} b_j \right) \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots \end{aligned}$$

Satz 2.7.26 Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut konvergieren, konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

Anwendung 2.7.27 (Exponentialfunktion) $\forall z, w \in \mathbb{C}$
 $\exp(w+z) = \exp(w) \exp(z)$.

Wir berechnen das Cauchy Produkt der Reihen: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^i}{i!}$, $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$. Dieses ist: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{z^j}{j!} \right)$. Woraus die Behauptung folgt.

Satz 2.7.28 Sei $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an, dass:

(1) $f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$ existiert

(2) es eine Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[$ gibt, so dass

2.1 $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$

2.2 $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert.

Dann folgt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

Korollar 2.7.29 (Exponentialfunktion) $\forall z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n_{n \geq 1}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

3 Stetige Funktionen

3.1 Reellwertige Funktionen

Definition 3.1.1 f ist nach [oben/unten] beschränkt wenn $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach [oben/unten] beschränkt ist.

Definition 3.1.2 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$, ist:

(1)[(2)] [streng] monoton wachsend, wenn
 $\forall x, y \in D \quad x \leq [<] y \Rightarrow f(x) \leq [<] f(y)$

(3)[(4)] [streng] monoton fallend, wenn
 $\forall x, y \in D \quad x \leq [<] y \Rightarrow f(x) \geq [>] f(y)$

(5)[(6)] [streng] monoton, wenn f [streng] monoton wachsend oder fallend ist.

3.2 Stetigkeit

Definition 3.2.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig, wenn
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

so dass $\forall x \in D$ die Implikation:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt

Definition 3.2.2 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Satz 3.2.4 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 stetig, wenn für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D die folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Korollar 3.2.5 Seien $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ beide stetig in x_0 :

(1) $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ sind stetig in x_0 .

(2) Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, ist

$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0

Definition 3.2.6 Eine polynomielle Funktion

$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form:

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

wobei: $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Wenn $a_n \neq 0$ ist, ist n der Grad von P .

Korollar 3.2.7 Polynomielle Funktionen sind auf ganz \mathbb{R} stetig.

Korollar 3.2.8 Seien P, Q polynomielle Funktionen auf \mathbb{R} mit $Q \neq 0$. Seien x_1, \dots, x_m die Nullstellen von Q . Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

stetig.

3.3 Zwischenwertsatz

Satz 3.3.1 (Zwischenwertsatz, Bolzano 1817) Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$.

3.4 Min-Max Satz

Definition 3.4.2 Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, wenn es von der Form $I = [a, b]$, $a \leq b$ ist.

Lemma 3.4.3 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 . So sind $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ stetig in x_0 .

Lemma 3.4.4 Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine konvergente Folge in \mathbb{R} mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$. Sei $a \leq b$. Wenn $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$, folgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$.

Satz 3.4.5 Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I . Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit: $f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$. Insbesondere ist f beschränkt.

3.5 Umkehrabbildung

Satz 3.5.1 Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$, $f : D_1 \rightarrow D_2$, $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Korollar 3.5.2 Wenn in **Satz 3.5.1** f auf D_1 und g auf D_2 stetig sind, ist $g \circ f$ auf D_1 stetig.

Satz 3.5.3 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \rightarrow I$ ist stetig, streng monoton.

3.6 Reelle Exponentialfunktion

Satz 3.6.1 $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Korollar 3.6.2

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Potenzreihendarstellung von \exp folgt ausserdem:

$$\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0.$$

Wenn $y < z$ ist, folgt (aus 2.7.27)

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(y + (z - y)) \\ &= \exp(y) \exp(z - y) \end{aligned}$$

und da $\exp(z - y) > 1$ ist folgt folgendes Korollar:

Korollar 3.6.3 $\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$

Korollar 3.6.4 $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Korollar 3.6.5 Der natürlich Logarithmus $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. Des weiteren gilt

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0, +\infty[.$$

Korollar 3.6.6 (1)/(2) Für $a > / < 0$ ist

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto x^a \end{aligned}$$

eine stetige, streng monoton wachsende/fallende Bijektion.

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$:

$$(3) \ln(x^a) = a \ln(x) \quad (4) x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$(5) (x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 3.7.1 Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\forall x \in D : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Definition 3.7.3 (Weierstrass 1841) Die Folge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig in D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass:

$$\forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Satz 3.7.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in D) stetigen Funktionen, die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f (in D) stetig.

Definition 3.7.5 Eine Funktionenfolge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmässig konvergent, wenn $\forall x \in D$ der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert und die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gleichmässig gegen f konvergiert.

Korollar 3.7.6 Die Funktionenfolge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmässig in D , wenn:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass $\forall n, m \geq N$ und $\forall x \in D$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Korollar 3.7.7 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wenn $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ stetig.

Definition 3.7.8 Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig (in D), wenn die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Satz 3.7.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmässig in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion.

Definition 3.7.10 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat positiven Konvergenzradius, wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\begin{aligned} \rho &= +\infty & \text{für } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} &= 0 \\ \rho &= \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{für } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} &> 0 \end{aligned}$$

Satz 3.7.11 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ und

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho.$$

Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf $[-r, r]$, insbesondere ist

$$f :]-\rho, \rho[\rightarrow \mathbb{R}$$

stetig.

3.8 Trigonometrische Funktionen

Satz 3.8.1 $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen.

Satz 3.8.2 Sei $z \in \mathbb{C}$

$$(1) \exp iz = \cos(z) + i \sin(z)$$

$$(2) \cos(z) = \cos(-z) \text{ und } \sin(-z) = -\sin(z)$$

$$(3) \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$(4) \sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$$

$$(5) \cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$$

$$(6) \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

Korollar 3.8.3 $\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$
 $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$

3.9 Die Kreiszahl π

Satz 3.9.1 Die Sinusfunktion hat auf $]0, +\infty[$ mindestens eine Nullstelle. Sei

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}.$$

- (1) $\sin \pi = 0, \pi \in]2, 4[$ (2) $\forall x \in]0, \pi[: \sin x > 0$
 (3) $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Korollar 3.9.2 $x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$

Korollar 3.9.3 Sei $x \in \mathbb{R}$

- (1) $e^{i\pi} = -1, e^{2i\pi} = 1$
 (2) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
 (3) $\sin(x + \pi) = -\sin(x), \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
 (4) $\cos(x + \pi) = -\cos(x), \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Sei $k \in \mathbb{Z}$

- (5) **Nullstellen von Sinus** $= \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
 $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$
 $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$
 (6) **Nullstellen von Cosinus** $= \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
 $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}[$
 $\cos(x) < 0 \quad \forall x \in [(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+2)\pi - \frac{\pi}{2}[$

3.10 Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.10.1 $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D , wenn $\forall \delta > 0$:

$$([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

Definition 3.10.3 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D . Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$, bezeichnet mit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $\forall x \in D \cap ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\})$:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Bemerkung 3.10.4 (1) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D . Dann gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

genau, dann wenn für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ folgendes gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$.

(2) Sei $x_0 \in D$. Dann ist f genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

(3) Mittels (1) zeigt man leicht, dass wenn $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existieren:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

folgen.

(4) Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ falls beide Grenzwerte existieren.

(5) Wenn $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$, so existiert $l := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und $l = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$

Satz 3.10.6 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}, x_0$ Häufungspunkt von $D, f : D \rightarrow E$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass $y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und $y_0 \in E$. Wenn $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ in y_0 stetig ist, folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0).$$

4 Differenzierbare Funktionen

4.1 Die Ableitung

Definition 4.1.1 f ist in x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Bemerkung 4.1.2 Es ist oft von Vorteil in der Definition von $f'(x_0)$, $x = x_0 + h$ zu setzen, so dass:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Satz 4.1.3 (Weierstrass 1861) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D . Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist in x_0 differenzierbar

(2) Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$2.1 \quad f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

$$2.2 \quad r(x_0) = 0 \text{ und } r \text{ ist stetig in } x_0$$

Wenn dies zutrifft, ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Satz 4.1.4 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn es eine Funktion $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die in x_0 stetig ist und $\forall x \in D$

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0).$$

In diesem Fall gilt:

$$\phi(x) = f'(x).$$

Korollar 4.1.5 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D . Wenn f in x_0 differenzierbar ist, ist f in x_0 stetig.

Definition 4.1.7 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in D differenzierbar, wenn für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist.

Satz 4.1.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gelten:

- (1) $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und
 $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
 (2) $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und
 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
 (3) Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und
 $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Satz 4.1.11 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt, sei $f : D \rightarrow E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion, so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist und sei $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Korollar 4.1.12 Sei $f : D \rightarrow E$ eine **bijektive Funktion**, sei $x_0 \in D$ ein **Häufungspunkt**. Wir nehmen an f ist in x_0 **differenzierbar** und $f'(x_0) \neq 0$. Zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ **stetig**. Dann ist y_0 ein **Häufungspunkt** von E , f^{-1} ist in y_0 **differenzierbar** und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

4.2 Zentrale Sätze über die Ableitung

Definition 4.2.1 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

(1)[(2)] f besitzt ein **lokales Maximum [Minimum]** in x_0 , wenn $\exists \delta > 0$ mit:

$$f(x) \leq [\geq] f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

(3) f besitzt ein **lokales Extremum** in x_0 , wenn es ein **lokales Minimum oder Maximum** ist.

Satz 4.2.2 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$. Wir nehmen an, f ist in x_0 **differenzierbar**.

(1) Wenn $f'(x_0) > 0$ ist, $\exists \delta > 0$ mit:

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\\ f(x) &< f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\end{aligned}$$

(2) Wenn $f'(x_0) < 0$ ist, $\exists \delta > 0$ mit:

$$\begin{aligned} f(x) &< f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\\ f(x) &> f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\end{aligned}$$

(3) Wenn f in x_0 ein **lokales Extremum** besitzt, folgt

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz 4.2.3 (Rolle 1690) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ **differenzierbar**. Wenn $f(a) = f(b)$, so gibt es $\xi \in]a, b[$ mit:

$$f'(\xi) = 0.$$

Satz 4.2.4 (Lagrange 1797) Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ **differenzierbar**. Es gibt $\xi \in]a, b[$ mit:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Korollar 4.2.5 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ **differenzierbar**.

(1) Wenn $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f **konstant**.

(2) Wenn $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b].$$

(3)[(4)] Wenn $f'(\xi) \geq [\geq] 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f auf $[a, b]$ **[strikt] monoton wachsend**.

(5)[(6)] Wenn $f'(\xi) \leq [\leq] 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f auf $[a, b]$ **[strikt] monoton fallend**.

(7) Wenn es $M \geq 0$ gibt, mit: $|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in]a, b[$, folgt $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Beispiel 4.2.6 (1) **arcsin** Da $\sin' = \cos$ und

$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt aus **Korollar 4.2.5**

(4), dass die Sinusfunktion auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ strikt monoton wachsend ist. Also ist $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv. Wir definieren:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

als die Umkehrfunktion von \sin . Nach **Korollar 4.1.12** ist sie auf $] -1, 1[$ differenzierbar und für $y = \sin x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt nach **4.1.12**:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Wir verwenden nun:

$$y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

woraus mit $\cos x > 0$ folgt: $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$. Wir erhalten also $\forall y \in]-1, 1[$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(2) **arccos** Eine analoge Diskussion, wie in (1) zeigt, dass $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ strikt monoton fallend ist und $[0, \pi]$ auf $[-1, 1]$ bijektiv abbildet. Sei:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

die Umkehrfunktion. Sie ist auf $] -1, 1[$ differenzierbar und

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \forall y \in]-1, 1[.$$

(3) **arctan** Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ hatten wir die Tangensfunktion definiert: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und deren Ableitung

berechnet: $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Also ist \tan auf $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend mit $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$. Also ist $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-\infty, \infty[$ bijektiv. Sei

$$\arctan :]-\infty, \infty[\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

die Umkehrfunktion. Dann ist **arctan** differenzierbar und für $y = \tan x$:

$$\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Satz 4.2.9 (Cauchy) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ **differenzierbar**. Es gibt $\xi \in]a, b[$ mit:

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Wenn $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ ist, folgt:

$$g(a) \neq g(b) \text{ und } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Satz 4.2.10 (Bernoulli 1691/92, de l'Hôpital 1696) Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[.$$

Wenn

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bemerkung 4.2.11 Der Satz gilt auch wenn:

$$b = +\infty \quad \lambda = +\infty \quad x \rightarrow a^+$$

Definition 4.2.13 (1) f ist **konvex** (auf I), wenn $\forall x, y \in I$, $x \leq y$ und $\lambda \in [0, 1]$ folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

(2) f ist **streng konvex**, wenn $\forall x, y \in I$, $x < y$ und $\lambda \in]0, 1[$ folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Bemerkung 4.2.14 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **konvex**. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass $\forall n \geq 1$, $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $[0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ folgendes gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Lemma 4.2.15 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Die Funktion f ist **genau dann konvex**, wenn $\forall x_0 < x < x_1$ in I folgendes gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Satz 4.2.16 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. f ist genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wachsend ist.

Korollar 4.2.17 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a, b[$. f ist (streng) konvex, wenn $f'' \geq 0$ (bzw. $f'' > 0$) auf $]a, b[$.

4.3 Höhere Ableitungen

Definition 4.3.1 (1) Für $n \geq 2$ ist f n -mal differenzierbar in D , wenn $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n -te Ableitung von f .

(2) f ist n -mal stetig differenzierbar in D , wenn f n -mal differenzierbar in D & $f^{(n)}$ in D stetig ist.

(3) Die Funktion f ist in D **glatt**, wenn sie $\forall n \geq 1$ n -mal differenzierbar ist.

Bemerkung 4.3.2 Es folgt aus **Korollar 4.1.5**, dass für $n \geq 1$ eine n -mal differenzierbare Funktion $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar ist.

Satz 4.3.3 (analog zu Satz 4.1.9) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 4.3.1, $n \geq 1$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in D .

(1) $f + g$ ist n -mal differenzierbar und

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

(2) $f \cdot g$ ist n -mal differenzierbar und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Satz 4.3.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 4.3.1, $n \geq 1$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in D . Wenn $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ ist, ist $\frac{f}{g}$ in D n -mal differenzierbar.

Satz 4.3.6 Seien $E, D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien $f : D \rightarrow E$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ n -mal differenzierbar und

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x) (g^{(k)} \circ f)(x)$$

wobei $A_{n,k}$ ein Polynom in den Funktionen $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$ ist.

4.4 Potenzreihen & Taylor Approximation

Satz 4.4.1 Seien $f_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge wobei f_n einmal in $]a, b[$ $\forall n \geq 1$ stetig differenzierbar ist. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ wie auch $(f_n')_{n \geq 1}$ gleichmäßig in $]a, b[$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n =: f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n' =: p$ konvergieren. Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = p$.

Satz 4.4.2 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[.$$

Korollar 4.4.3 Unter der Voraussetzung von Satz 4.4.1 ist f auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ glatt und

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}.$$

Insbesondere ist

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}.$$

Satz 4.4.5 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ $(n+1)$ -mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in]a, x[$ mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

Korollar 4.4.6 (Taylor Approximation)

Sei $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]c, d[$ $(n+1)$ -mal differenzierbar. Sei $c < a < d$. $\forall x \in [c, d] \exists \xi$ zwischen x und a , so dass:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

Korollar 4.4.7 Sei $n \geq 0$, $a < x_0 < b$ und

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $]a, b[$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar. Annahme: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$.

(1) Wenn n gerade ist und x_0 eine lokale Extremalstelle ist, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.

(2) Wenn n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Minimalstelle.

(3) Wenn n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Maximalstelle.

Korollar 4.4.8 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $a < x_0 < b$. Annahme: $f'(x_0) = 0$.

(1) Wenn $f^{(2)}(x_0) > 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Minimalstelle.

(2) Wenn $f^{(2)}(x_0) < 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Maximalstelle.

5 Riemann Integral

5.1 Definition und Integrabilitätskriterien

Definition 5.1.1 Eine Partition von I ist eine endliche Teilmenge $P \subseteq [a, b]$ wobei $\{a, b\} \subseteq P$. Es gilt: $n := \text{card } P - 1 \geq 1$ und es gibt genau eine Bijektion

$$\{0, 1, 2, \dots, n\} \rightarrow P$$

$$j \mapsto x_j$$

mit der Eigenschaft $i < j \implies x_i < x_j$.

Eine Partition P' ist eine Verfeinerung von P , wenn

$P \subset P'$. Offensichtlich ist die **Vereinigung** $P_1 \cup P_2$ **zweier Partitionen** wieder **eine Partition**. Insbesondere haben **zwei Partitionen** immer eine **gemeinsame Vereinigung**. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte Funktion**, das heisst es gibt $M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

Sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine **Partition** von I . Insbesondere gilt: $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$ mit $i \geq 1$

$$\delta_i := x_i - x_{i-1}$$

Untersumme $s(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i$, $f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

Obersumme $S(f, P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i$, $F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

Lemma 5.1.2 (1) Sei P' eine **Verfeinerung** von P .

Dann gilt:

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

(2) Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt:

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Sei $\mathcal{P}(I)$ die **Menge der Partitionen** von I . Wir definieren:

$$s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$$

$$S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$$

Definition 5.1.3 Eine **beschränkte Funktion** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **(Riemann) integrierbar**, wenn

$$s(f) = S(f).$$

In diesem Fall bezeichnen wir den **gemeinsamen Wert** von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Satz 5.1.4 Eine **beschränkte Funktion** ist genau dann integrierbar, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}(I)$:

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

Satz 5.1.8 (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875) Eine **beschränkte Funktion** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **genau dann integrierbar**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass: $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$,

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Hier bezeichnet $\mathcal{P}_\delta(I)$ die **Menge der Partitionen** P , für welche $\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \leq \delta$.

Korollar 5.1.9 Die **beschränkte Funktion** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **genau dann integrierbar** mit

$$A := \int_a^b f(x) dx,$$

wenn: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $\forall P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P) < \delta$ und ξ_1, \dots, ξ_n mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$|A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon.$$

5.2 Integrierbare Funktionen

Satz 5.2.1 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt, integrierbar** und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ und (falls $|g(x)| \geq \beta > 0$ $\forall x \in [a, b]$) $\frac{f}{g}$ **integrierbar**.

Bemerkung 5.2.2 Sei $\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte Funktion**. Dann ist

$$(*) \quad \sup_{x, y \in [c, d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x \in [c, d]} \phi(x) - \inf_{x \in [c, d]} \phi(x).$$

Einerseits gilt offensichtlich $\forall x, y \in [c, d]$:

$$\phi(x) \leq \sup_{[c, d]} \phi, \quad \phi(y) \geq \inf_{[c, d]} \phi$$

also ist

$$\phi(x) - \phi(y) \leq \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi,$$

woraus durch vertauschen von x, y folgt:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi.$$

Andererseits sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\xi \in [c, d]$ und $\eta \in [c, d]$ $\phi(\xi) > \varepsilon$ und $\phi(\eta) < \inf_{[c, d]} \phi + \varepsilon$ woraus

$$\phi(\xi) - \phi(\eta) > \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi - 2\varepsilon$$

folgt. Dies zeigt die Aussage $(*)$

Korollar 5.2.3 Seien P, Q Polynome und $[a, b]$ ein **Intervall** in dem Q **keine Nullstelle** besitzt. Dann ist

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

integrierbar.

Definition 5.2.4 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D **gleichmässig stetig**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D$:

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Satz 5.2.6 (Heine 1872) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig** in dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann ist f in $[a, b]$ **gleichmässig stetig**.

Satz 5.2.7 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. f ist **integrierbar**.

Satz 5.2.8 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **monoton** $\implies f$ **integrierbar**.

Bemerkung 5.2.9 Seien $a < b < c$ und $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt** mit $f|_{[a, b]}$ und $f|_{[b, c]}$ **integrierbar**. Dann ist f integrierbar und

$$(*) \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

In der Tat ergibt die **Summe einer Obersumme (respektive Untersumme)** für $f|_{[a, b]}$ und $f|_{[b, c]}$ eine **Obersumme (respektive Untersumme)** für f . Wir erweitern jetzt die Definition von $\int_a^b f(x) dx$ auf: $\int_a^a f(x) dx = 0$ und wenn $a < b$

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

Dann gilt $(*)$ für alle Tripel a, b, c unter den entsprechenden Integrabilitätsvoraussetzungen.

Satz 5.2.10 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein **kompaktes Intervall** mit **Endpunkten** a, b sowie $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt integrierbar** und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

5.3 Ungleichungen & Mittelwertsatz

Satz 5.3.1 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Dann folgt:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Korollar 5.3.2 Wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, folgt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Satz 5.3.3 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

Satz 5.3.4 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. So $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

Satz 5.3.6 (Cauchy 1821) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt und integrierbar mit $g \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

5.4 Fundamentalsatz Differentialrechnung

Satz 5.4.1 (Fundamentalsatz der Analysis) Seien $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Definition 5.4.2 Sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f , wenn F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.

Satz 5.4.3 (Fundamentalsatz Differentialrechnung) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. So gibt es eine **Stammfunktion** F von f , die bis auf eine additive Konstante ein-

deutig bestimmt ist und:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Satz 5.4.5 (Partielle Integration) Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Satz 5.4.6 (Substitution) Sei $a < b$, $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a, b]) \subseteq I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt$$

Korollar 5.4.8 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(1) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass das abgeschlossene Intervall mit **Endpunkten** $a+c, b+c \in I$. Dann gilt:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x) dx = \int_a^b f(t+c) dt$$

(2) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$, so dass das abgeschlossene Intervall mit den **Endpunkten** $ac, bc \in I$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx$$

5.5 Integration konvergenter Reihen

Satz 5.5.1 Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. So ist f beschränkt integrierbar und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Korollar 5.5.2 Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge beschränkter, integrierbarer Funktionen, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a, b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)) dx$.

Korollar 5.5.3 Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \leq r < \rho$, f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt

$$\forall x \in]-\rho, \rho[: \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

5.8 Uneigentliche Integrale

Definition 5.8.1 Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Wenn $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existiert, bezeichnen wir den **Grenzwert** mit $\int_a^{\infty} f(x) dx$ und sagen, dass f auf $[a, +\infty[$ integrierbar ist.

Lemma 5.8.3 Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b] \quad \forall b > a$. (1) Wenn $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ auf $[a, \infty[$ integrierbar ist, ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar. (2) Wenn $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^{\infty} g(x) dx$ divergiert, divergiert auch $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Satz 5.8.5 (McLaurin 1742) Sei $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergiert.

Eine Situation, die zu einem **uneigentlichen Integral** führt, ist wenn $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$ beschränkt und integrierbar ist, aber auf $]a, b]$ nicht notwendigerweise beschränkt ist.

Definition 5.8.8 In dieser Situation ist $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, wenn $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ existiert. In

diesem Fall wird der **Grenzwert** mit $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet.

Definition 5.8.11 Für $s > 0$ definieren wir $\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$.

Satz 5.8.12 (Bohr-Mollerup)

(1) Die **Gamma Funktion** erfüllt die Relationen:

$$(a) \Gamma(1) = 1 \quad (b) \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$$

(c) γ ist **logarithmisch konvex**, d.h. $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$ für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$.

(2) Die **Gamma Funktion** ist die **einzige** Funktion $]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, die (a), (b) und (c) erfüllt. Darüberhinaus gilt: $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \forall x > 0$

Lemma 5.8.13 Sei $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dann gilt $\forall a, b \geq 0: a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Satz 5.8.14 (Hölder Ungleichung) Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle stetigen Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$

5.9 Das unbestimmte Integral

Satz 5.9.3 Seien P, Q Polynome mit $\deg(P) < \deg(Q)$ und Q mit Produktzerlegung (*) Dann gibt es $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$ mit: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{((x-a_i)^2 + \beta_i^2)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}$.

6 Anhang A

Satz A.0.1 (Binomialsatz) $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geq 1$ gilt: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

7 Wichtige Beispiele

Ungerade und gerade Funktionen Sei $f(x)$ eine gerade Funktion. Dann: $f(x) = f(-x)$. Sei $g(x)$ eine ungerade Funktion. Dann: $-g(x) = g(-x)$. Das Produkt von 2 geraden Funktionen ist gerade. Das Produkt von 2 ungeraden Funktionen ist gerade. Das Produkt einer ungeraden und einer geraden Funktion, ist ungerade. Für ungerade Funktionen gilt: $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$. (Dies kann man sich graphisch vorstellen).

Konvergenztest für Reihen Gegeben: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(1) Spezieller Typ?

1.1 Geometrische Reihe: $\sum q^n$? Konvergent, wenn: $|q| < 1$.

1.2 Alternierende Reihe: $\sum (-1)^n a_n$? Konvergent, wenn: $\lim a_n = 0$.

1.3 Riemann Zeta: $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ Konvergent, wenn: $s > 1$.

1.4 Teleskopreihe $\sum (b_n - b_{n-1})$? Konvergent, wenn: $\lim b_n$ existiert.

(2) Kein spezieller Typ:

2.1 $\lim a_n = 0$? Nein: divergent.

2.2 Quotientenkriterium anwendbar?

2.3 Wurzelkriterium anwendbar?

2.4 Gibt es eine konvergente Majorante?

2.5 Gibt es eine divergente Minorante?

2.6 Nichts von all dem?

\Rightarrow kreativ sein.

Allgemeine Potenzen Wir können die Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus verwenden, um allgemeine Potenzen zu definieren. Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig definieren wir: $x^a := \exp(a \ln x)$. Insbesondere: $x^0 = 1 \quad \forall x > 0$.

Trigonometrische Funktionen Sinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$: $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Kosinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$: $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$. Tangensfunktion für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$: $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Cotangensfunktion für $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$: $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Hyperbelfunktionen $\forall x \in \mathbb{R}$: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Es gilt offensichtlich: $\cosh x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\sinh x \geq 1 \quad \forall x \in]0, +\infty[$, $\sin(0) = 0$. Daraus folgt: \cosh ist auf $[0, \infty[$ strikt monoton wachsend, $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$. Also ist $\cosh: [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird mit $\operatorname{arcosh}: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ bezeichnet. Unter Verwendung von $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ folgt: $\operatorname{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y \in]1, +\infty[$. Analog zeigt man, dass $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bijektiv ist. Dessen Umkehrfunktion wird mit $\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet und es gilt: $\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Für $\tanh x$ folgt: $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$ Also ist \tanh auf \mathbb{R} streng monoton wachsend und man zeigt, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$. Die Funktion $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion wird mit $\operatorname{artanh}:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Es gilt

dann: $\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in]-1, 1[$.

7.1 Ableitungen

$$(ax^z)' = azx^{z-1}$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = (\ln(x) + 1)e^x$$

$$(x \ln x)' = \ln(x) + 1$$

$$e^{f(x)} = e^x$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sinh' x = \cosh x$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \forall y \in]1, +\infty[$$

$$\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in]-1, 1[$$

$$\int x^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \quad s \neq -1 \quad \int x^s dx = \ln x + C \quad s = -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad (\text{verwende } \ln x = \ln x \cdot 1)$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

$$n \geq 1 \quad I_n = \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int (ax + b)^s \, dx = \frac{1}{a(s+1)} (ax + b)^{s+1} + C \quad s \neq -1$$

$$\int (ax + b)^s \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C$$

7.3 Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

7.4 Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, |q| < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot q^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \dots$$