

1 \mathbb{R} und \mathbb{C}

Ordnungsvollständigkeit: Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ s. d.

(i) $A \neq \emptyset$ (ii) $\forall a \in A \forall b \in B \ a \leq b$

Dann: $\exists c \in \mathbb{R}$ s.d. $\forall a \in A \ a \leq c \leq \forall b \in B \ c \leq b$

Korollar 1.1.7 (Archimedisches Prinzip)

Sei $x > 0, y \in \mathbb{R}$ Dann: $\exists n \in \mathbb{N} \ y \leq n \cdot x$

Satz 1.1.8 $\forall t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ hat $x^2 = t$ eine Lösung in \mathbb{R}

Satz 1.1.10 $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(i) $|x| \geq 0$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(ii) $|xy| = |x||y|$

(iv) $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Satz 1.1.11 (Young'sche Ungleichung)

$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

Definition 1.1.12 Sei $A \subset \mathbb{R}$

(i) / (ii) $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere/untere Schranke** von A wenn $\forall a \in A \ a \leq / \geq c$. A ist **nach oben/unten beschränkt**, wenn es eine obere/untere Schranke gibt.

(iii) / (iv) $m \in \mathbb{R}$ ist ein **Maximum/Minimum** von A wenn $m \in A$ und m **obere/untere Schranke** von A ist.

Satz 1.1.15 Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ Sei A nach oben/unten beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere/ grösste untere Schranke von A : $c := \sup A / c := \inf A$ genannt **Supremum/Infimum** von A

Korollar 1.1.16 Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Wenn B **nach oben/unten beschränkt** ist, folgt $\sup A \leq \sup B / \inf B \leq \inf A$

Konvention: Wenn A **nicht beschränkt** ist, definieren wir $\sup A = +\infty$ bzw. $\inf A = -\infty$

Satz 1.3.4 (Fundamentalsatz der Algebra) Sei $n \geq 1, n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{C}$ und

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

Dann

$$\exists z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C},$$

so dass

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

2 Folgen und Reihen

2.1 Grenzwert einer Folge

Definition 2.1.1 Eine **Folge (reeller Zahlen)** ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen eine Folge mit $(a_n)_{n \geq 1}$

Lemma 2.1.3 Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge. Dann gibt es **höchstens eine reelle Zahl $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:** $\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]\}$ **endlich**.

Definition 2.1.4 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist **konvergent**, wenn es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]\}$ **endlich** ist.

Lemma 2.1.6 Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge. Folgende Aussagen sind äquivalent

(1) $(a_n)_{n \geq 1}$ **konvergiert gegen $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$**

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass $|a_n - l| < \varepsilon \ \forall n \geq N$

Satz 2.1.8 Seien $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ **konvergent** mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(1) $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ ist **konvergent**: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

(2) $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ ist **konvergent**: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(3) Sei $\forall n \geq 1 \ b_n \neq 0$ und $b \neq 0$. Dann ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1}$ **konvergent** und $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1} = \frac{a}{b}$

(4) Wenn $\exists K \geq 1$ mit $\forall n \geq K : a_n \leq b_n$, folgt $a \leq b$

Beispiel 2.1.9 $b \in \mathbb{Z} : \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^b = 1$. Das folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$ und wiederholter Anwendung von **Satz 2.1.8 (2) und (3)**.

2.2 Satz von Weierstrass

Definition 2.2.1 (1)[(2)] $(a_n)_{n \geq 1}$ ist **monoton wachsend [fallend]** wenn: $a_n \leq [\geq] a_{n+1} \ \forall n \geq 1$

Satz 2.2.2 (Weierstrass) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ **monoton wachsend [fallend]** und **nach oben [unten] beschränkt**. Dann **konvergiert $(a_n)_{n \geq 1}$ mit**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}]$$

Beispiel 2.2.3 Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq q < 1$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a q^n = 0.$$

Wir können annehmen, dass $q > 0$. Sei $x_n = n^a q^n$, dann folgt:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (n+1)^a q^{n+1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^a q \cdot n^a q^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n. \end{aligned}$$

Also:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = 1$ (**Beispiel 2.1.9**), gibt es ein n_0 , so dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q} \ \forall n \geq n_0.$$

Es folgt:

$$x_{n+1} < x_n \ \forall n \geq n_0.$$

Da für $x_n > 0 \ \forall n \geq 1$ die Folge nach **unten beschränkt** ist und für $n \geq n_0$ **monoton fallend** ist.

Sei

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q x^n \\ &= q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q \cdot l. \end{aligned}$$

Also $(1 - q) \cdot l = 0$ woraus $l = 0$ folgt.

Bemerkung 2.2.24 In **Beispiel 2.2.3** wird zweimal die folgende einfache Tatsache verwendet: Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine **konvergente** Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die durch

$$b_n := a_{n+k} \ n \geq 1$$

definierte Folge **konvergent** und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

Lemma 2.2.7 (Bernoulli Ungleichung)

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \ \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

2.3 Limes superior und Limes inferior

Limes inferior/ superior: Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine beschränkte Folge. Sei $\forall n \geq 1$:

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$$

$$c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

Dann folgt $\forall n \geq 1$ $b_n \leq b_{n+1}$ (monoton wachsend) und $c_n \geq c_{n+1}$ (monoton fallend) und beide Folgen beschränkt. Wir definieren:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

2.4 Cauchy Kriterium

Lemma 2.4.1 $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n \geq 1}$ beschränkt und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

Satz 2.4.2 (Cauchy Kriterium) $(a_n)_{n \geq 1}$ ist genau dann konvergent, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$,

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

2.5 Satz von Bolzano-Weierstrass

Definition 2.5.1 Ein abgeschlossenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist von der Form

$$(1) [a, b] \quad a \leq b \in \mathbb{R}$$

$$(3)]-\infty, a] \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(2) [a, +\infty[\quad a \in \mathbb{R}$$

$$(4)]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Bemerkung 2.5.2 Ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \in I$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in I$.

Bemerkung 2.5.3 Seien $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ mit $a \leq b$, $c \leq d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann ist $I \subseteq J$ genau dann, wenn $c \leq a$, $b \leq d$

Satz 2.5.5.5 (Cauchy-Cantor) Sei

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Intervalle mit

$$\mathcal{L}(I_1) < +\infty$$

Dann gilt

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset.$$

Falls zudem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$$

gilt, enthält

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n$$

genau einen Punkt.

Definition 2.5.7 Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n \geq 1}$, wobei

$$b_n = a_{l(n)}$$

und

$$l : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$$

Satz 2.5.9 (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

2.6 Folgen in \mathbb{R}^d und \mathbb{C}

Definition 2.6.1 Eine Folge in \mathbb{R}^d ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^d$. Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen die Folge mit $(a_n)_{n \geq 1}$

Definition 2.6.2 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in \mathbb{R}^d ist konvergent, wenn $\exists a \in \mathbb{R}^d$, so dass $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Satz 2.6.3 Sei $b = (b_1, \dots, b_d)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nj} = b_j \quad \forall 1 \leq j \leq d$$

Bemerkung 2.6.4 Sei $x = (x_1, \dots, x_d)$.

Dann ist $\forall 1 \leq j \leq d$

$$x_j^2 \leq \sum_{i=1}^d x_i^2 = \|x\|^2 \leq d \cdot \max_{1 \leq i \leq d} x_i^2$$

woraus

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \cdot \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

folgt.

Bemerkung 2.6.5 Eine konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in \mathbb{R}^d ist beschränkt. Das heisst: $\exists R \geq 0$ mit $\|a_n\| \leq R \quad \forall n \geq 1$

Satz 2.6.6 (1) Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge ist: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$.

(2) Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

2.7 Reihen

Definition 2.7.1 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, wenn die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definieren wir: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Beispiel 2.7.2 (Geometrische Reihe) Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Sei

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n.$$

$$q \cdot S_n = q + \dots + q^n + q^{n+1}$$

woraus

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

folgt. Es gilt also:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nun zeigen wir die Konvergenz:

$$|S_n - \frac{1}{1-q}| = \left| \frac{-q^{n+1}}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}.$$

Es folgt aus **Beispiel 2.2.3** und $0 \leq |q| < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - \frac{1}{1-q}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} = 0.$$

Somit konvergiert $(S_n)_{n \geq 1}$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

Beispiel 2.7.3 (Harmonische Reihe) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

Satz 2.7.4 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent sowie $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right)$$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k)$ konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Satz 2.7.5 (Cauchy Kriterium) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $|\sum_{k=n}^m a_k| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$.

Satz 2.7.6 Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

konvergiert genau dann, wenn die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Korollar 2.7.7 (Vergleichssatz) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit: $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$. Dann gelten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Die Implikationen treffen auch zu, wenn $\exists K \geq 1$ mit $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$

Definition 2.7.9 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 2.7.10 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt: $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Satz 2.7.12 (Leibniz 1682) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt:

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

Definition 2.7.14 Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wenn es eine bijektive Abbildung $\phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ gibt, so dass $a'_n = a_{\phi(n)}$

Satz 2.7.16 (Dichlet 1837) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe mit demselben Grenzwert.

Satz 2.7.17 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Beispiel 2.7.18 (Exponentialfunktion)

Für $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Reihe:

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

mit allgemeinem Glied

$$a_n = \frac{z^n}{n!}.$$

Dann folgt für $z \neq 0$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Also gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$$

und die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren die Exponentialfunktion:

$$\exp z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Bemerkung 2.7.19 Das Quotientenkriterium versagt, wenn z. B. unendlich viele Glieder a_n der Reihe verschwinden (= 0 sind)

Satz 2.7.20 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren}$$

Konvergenzradius

Sei $(c_k)_{k \geq 0}$ eine Folge (in \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

existiert, definieren wir:

$$\rho = +\infty \quad \text{wenn } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \quad \text{wenn } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0$$

Riemann Zeta Funktion Sei $s > 1$ und

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Die Reihe konvergiert $\forall s > 1$

Korollar 2.7.21 Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut $\forall |z| < \rho$ und divergiert $\forall |z| > \rho$.

Definition 2.7.22 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$, wenn es eine Bijektion $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt, mit $b_k = a_{\sigma(k)}$.

Satz 2.7.23 (Cauchy 1821) Wir nehmen an, dass es $B \geq 0$ gibt, so dass $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$. Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \text{ und } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Und jede lineare Anordnung der Doppelreihe konvergiert absolut mit gleichem Grenzwert.

Definition 2.7.24 Das Cauchy Produkt der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} b_j \right) \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots \end{aligned}$$

Satz 2.7.26 Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut konvergieren, konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

Anwendung 2.7.27 (Exponentialfunktion) $\forall z, w \in \mathbb{C}$
 $\exp(w+z) = \exp(w) \exp(z)$.

Wir berechnen das Cauchy Produkt der Reihen: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^i}{i!}$, $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$. Dieses ist: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{z^j}{j!} \right)$. Woraus die Behauptung folgt.

Satz 2.7.28 Sei $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an, dass:

(1) $f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$ existiert

(2) es eine Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[$ gibt, so dass

2.1 $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$

2.2 $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert.

Dann folgt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

Korollar 2.7.29 (Exponentialfunktion) $\forall z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n_{n \geq 1}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

3 Stetige Funktionen

3.1 Reellwertige Funktionen

Definition 3.1.1 f ist nach [oben/unten] beschränkt wenn $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach [oben/unten] beschränkt ist.

Definition 3.1.2 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$, ist:

(1)[(2)] [streng] monoton wachsend, wenn

$$\forall x, y \in D \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

(3)[(4)] [streng] monoton fallend, wenn

$$\forall x, y \in D \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

(5)[(6)] [streng] monoton, wenn f [streng] monoton wachsend oder fallend ist.

3.2 Stetigkeit

Definition 3.2.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

so dass $\forall x \in D$ die Implikation:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt

Definition 3.2.2 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Satz 3.2.4 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 stetig, wenn für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D die folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Korollar 3.2.5 Seien $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ beide stetig in x_0 :

(1) $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ sind stetig in x_0 .

(2) Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, ist

$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0

Definition 3.2.6 Eine polynomielle Funktion

$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form:

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

wobei: $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Wenn $a_n \neq 0$ ist, ist n der Grad von P .

Korollar 3.2.7 Polynomielle Funktionen sind auf ganz \mathbb{R} stetig.

Korollar 3.2.8 Seien P, Q polynomielle Funktionen auf \mathbb{R} mit $Q \neq 0$. Seien x_1, \dots, x_m die Nullstellen von Q . Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

3.3 Zwischenwertsatz

Satz 3.3.1 (Zwischenwertsatz, Bolzano 1817) Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$.

3.4 Min-Max Satz

Definition 3.4.2 Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, wenn es von der Form $I = [a, b]$, $a \leq b$ ist.

Lemma 3.4.3 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 . So sind $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ stetig in x_0 .

Lemma 3.4.4 Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine konvergente Folge in \mathbb{R} mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$. Sei $a \leq b$. Wenn $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$, folgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$.

Satz 3.4.5 Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I . Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit: $f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$. Insbesondere ist f beschränkt.

3.5 Umkehrabbildung

Satz 3.5.1 Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$, $f : D_1 \rightarrow D_2$, $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Korollar 3.5.2 Wenn in **Satz 3.5.1** f auf D_1 und g auf D_2 stetig sind, ist $g \circ f$ auf D_1 stetig.

Satz 3.5.3 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \rightarrow I$ ist stetig, streng monoton.

3.6 Reelle Exponentialfunktion

Satz 3.6.1 $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Korollar 3.6.2

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Potenzreihendarstellung von \exp folgt ausserdem:

$$\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0.$$

Wenn $y < z$ ist, folgt (aus 2.7.27)

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(y + (z - y)) \\ &= \exp(y) \exp(z - y) \end{aligned}$$

und da $\exp(z - y) > 1$ ist folgt folgendes Korollar:

Korollar 3.6.3 $\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$

Korollar 3.6.4 $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Korollar 3.6.5 Der natürlich Logarithmus $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. Des weiteren gilt

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0, +\infty[.$$

Korollar 3.6.6 (1)/(2) Für $a > / < 0$ ist

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto x^a \end{aligned}$$

eine stetige, streng monoton wachsende/fallende Bijektion.

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$:

$$(3) \ln(x^a) = a \ln(x) \quad (4) x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$(5) (x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 3.7.1 Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\forall x \in D : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Definition 3.7.3 (Weierstrass 1841) Die Folge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig in D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass:

$$\forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Satz 3.7.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in D) stetigen Funktionen, die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f (in D) stetig.

Definition 3.7.5 Eine Funktionenfolge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmässig konvergent, wenn $\forall x \in D$ der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert und die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gleichmässig gegen f konvergiert.

Korollar 3.7.6 Die Funktionenfolge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmässig in D , wenn:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass $\forall n, m \geq N$ und $\forall x \in D$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Korollar 3.7.7 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wenn $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ stetig.

Definition 3.7.8 Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig (in D), wenn die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Satz 3.7.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmässig in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion.

Definition 3.7.10 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat positiven Konvergenzradius, wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\begin{aligned} \rho &= +\infty & \text{für } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \rho &= \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{für } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{aligned}$$

Satz 3.7.11 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ und

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho.$$

Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf $[-r, r]$, insbesondere ist

$$f :]-\rho, \rho[\rightarrow \mathbb{R}$$

stetig.

3.8 Trigonometrische Funktionen

Satz 3.8.1 $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen.

Satz 3.8.2 Sei $z \in \mathbb{C}$

$$(1) \exp iz = \cos(z) + i \sin(z)$$

$$(2) \cos(z) = \cos(-z) \text{ und } \sin(-z) = -\sin(z)$$

$$(3) \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$(4) \sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$$

$$(5) \cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$$

$$(6) \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

Korollar 3.8.3 $\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$

$$\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$$

3.9 Die Kreiszahl π

Satz 3.9.1 Die Sinusfunktion hat auf $]0, +\infty[$ mindestens eine Nullstelle. Sei

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}.$$

- (1) $\sin \pi = 0, \pi \in]2, 4[$ (2) $\forall x \in]0, \pi[: \sin x > 0$
 (3) $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Korollar 3.9.2 $x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$

Korollar 3.9.3 Sei $x \in \mathbb{R}$

- (1) $e^{i\pi} = -1, e^{2i\pi} = 1$
 (2) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
 (3) $\sin(x + \pi) = -\sin(x), \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
 (4) $\cos(x + \pi) = -\cos(x), \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Sei $k \in \mathbb{Z}$

- (5) **Nullstellen von Sinus** $= \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
 $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$
 $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$
 (6) **Nullstellen von Cosinus** $= \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
 $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}[$
 $\cos(x) < 0 \quad \forall x \in [(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+2)\pi - \frac{\pi}{2}[$

3.10 Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.10.1 $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D , wenn $\forall \delta > 0$:

$$([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

Definition 3.10.3 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D . Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$, bezeichnet mit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $\forall x \in D \cap ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\})$:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Bemerkung 3.10.4 (1) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D . Dann gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

genau, dann wenn für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ folgendes gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$.

(2) Sei $x_0 \in D$. Dann ist f genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

(3) Mittels (1) zeigt man leicht, dass wenn $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existieren:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

folgen.

(4) Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ falls beide Grenzwerte existieren.

(5) Wenn $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$, so existiert $l := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und $l = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$

Satz 3.10.6 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}, x_0$ Häufungspunkt von $D, f : D \rightarrow E$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass $y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und $y_0 \in E$. Wenn $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ in y_0 stetig ist, folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0).$$

4 Differenzierbare Funktionen

4.1 Die Ableitung

Definition 4.1.1 f ist in x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Bemerkung 4.1.2 Es ist oft von Vorteil in der Definition von $f'(x_0)$, $x = x_0 + h$ zu setzen, so dass:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Satz 4.1.3 (Weierstrass 1861) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D . Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist in x_0 differenzierbar

(2) Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$2.1 \quad f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

$$2.2 \quad r(x_0) = 0 \text{ und } r \text{ ist stetig in } x_0$$

Wenn dies zutrifft, ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Satz 4.1.4 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn es eine Funktion $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die in x_0 stetig ist und $\forall x \in D$

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0).$$

In diesem Fall gilt:

$$\phi(x) = f'(x).$$

Korollar 4.1.5 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D . Wenn f in x_0 differenzierbar ist, ist f in x_0 stetig.

Definition 4.1.7 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in D differenzierbar, wenn für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist.

Satz 4.1.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gelten:

- (1) $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und
 $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
 (2) $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und
 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
 (3) Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und
 $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Satz 4.1.11 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt, sei $f : D \rightarrow E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion, so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist und sei $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Korollar 4.1.12 Sei $f : D \rightarrow E$ eine **bijektive Funktion**, sei $x_0 \in D$ ein **Häufungspunkt**. Wir nehmen an f ist in x_0 **differenzierbar** und $f'(x_0) \neq 0$. Zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ **stetig**. Dann ist y_0 ein **Häufungspunkt** von E , f^{-1} ist in y_0 **differenzierbar** und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

4.2 Zentrale Sätze über die Ableitung

Definition 4.2.1 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

(1)[(2)] f besitzt ein **lokales Maximum [Minimum]** in x_0 , wenn $\exists \delta > 0$ mit:

$$f(x) \leq [\geq] f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$

(3) f besitzt ein **lokales Extremum** in x_0 , wenn es ein **lokales Minimum oder Maximum** ist.

Satz 4.2.2 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$. Wir nehmen an, f ist in x_0 **differenzierbar**.

(1) Wenn $f'(x_0) > 0$ ist, $\exists \delta > 0$ mit:

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

(2) Wenn $f'(x_0) < 0$ ist, $\exists \delta > 0$ mit:

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

(3) Wenn f in x_0 ein **lokales Extremum** besitzt, folgt

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz 4.2.3 (Rolle 1690) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ **differenzierbar**. Wenn $f(a) = f(b)$, so gibt es $\xi \in]a, b[$ mit:

$$f'(\xi) = 0.$$

Satz 4.2.4 (Lagrange 1797) Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ **differenzierbar**. Es gibt $\xi \in]a, b[$ mit:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Korollar 4.2.5 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ **differenzierbar**.

(1) Wenn $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f **konstant**.

(2) Wenn $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b].$$

(3)[(4)] Wenn $f'(\xi) \geq [\geq] 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f auf $[a, b]$ **[strikt] monoton wachsend**.

(5)[(6)] Wenn $f'(\xi) \leq [\leq] 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f auf $[a, b]$ **[strikt] monoton fallend**.

(7) Wenn es $M \geq 0$ gibt, mit: $|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in]a, b[$, folgt $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Beispiel 4.2.6 (1) **arcsin** Da $\sin' = \cos$ und

$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt aus **Korollar 4.2.5**

(4), dass die Sinusfunktion auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ strikt monoton wachsend ist. Also ist $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv. Wir definieren:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

als die Umkehrfunktion von \sin . Nach **Korollar 4.1.12** ist sie auf $] -1, 1[$ differenzierbar und für $y = \sin x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt nach **4.1.12**:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Wir verwenden nun:

$$y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

woraus mit $\cos x > 0$ folgt: $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$. Wir erhalten also $\forall y \in]-1, 1[$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(2) **arccos** Eine analoge Diskussion, wie in (1) zeigt, dass $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ strikt monoton fallend ist und $[0, \pi]$ auf $[-1, 1]$ bijektiv abbildet. Sei:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

die Umkehrfunktion. Sie ist auf $] -1, 1[$ differenzierbar und

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \forall y \in]-1, 1[.$$

(3) **arctan** Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ hatten wir die Tangensfunktion definiert: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und deren Ableitung

berechnet: $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Also ist \tan auf $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend mit $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$. Also ist $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-\infty, \infty[$ bijektiv. Sei

$$\arctan :]-\infty, \infty[\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

die Umkehrfunktion. Dann ist **arctan** differenzierbar und für $y = \tan x$:

$$\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Satz 4.2.9 (Cauchy) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ **differenzierbar**. Es gibt $\xi \in]a, b[$ mit:

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Wenn $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ ist, folgt:

$$g(a) \neq g(b) \text{ und } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Satz 4.2.10 (Bernoulli 1691/92, de l'Hôpital 1696) Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[.$$

Wenn

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bemerkung 4.2.11 Der Satz gilt auch wenn:

$$b = +\infty \quad \lambda = +\infty \quad x \rightarrow a^+$$

Definition 4.2.13 (1) f ist **konvex** (auf I), wenn $\forall x, y \in I$, $x \leq y$ und $\lambda \in [0, 1]$ folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

(2) f ist **streng konvex**, wenn $\forall x, y \in I$, $x < y$ und $\lambda \in]0, 1[$ folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Bemerkung 4.2.14 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **konvex**. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass $\forall n \geq 1$, $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $[0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ folgendes gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Lemma 4.2.15 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Die Funktion f ist **genau dann konvex**, wenn $\forall x_0 < x < x_1$ in I folgendes gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Satz 4.2.16 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. f ist genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wachsend ist.

Korollar 4.2.17 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a, b[$. f ist (streng) konvex, wenn $f'' \geq 0$ (bzw. $f'' > 0$) auf $]a, b[$.

4.3 Höhere Ableitungen

Definition 4.3.1 (1) Für $n \geq 2$ ist f n -mal differenzierbar in D , wenn $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n -te Ableitung von f .

(2) f ist n -mal stetig differenzierbar in D , wenn f n -mal differenzierbar in D & $f^{(n)}$ in D stetig ist.

(3) Die Funktion f ist in D **glatt**, wenn sie $\forall n \geq 1$ n -mal differenzierbar ist.

Bemerkung 4.3.2 Es folgt aus **Korollar 4.1.5**, dass für $n \geq 1$ eine n -mal differenzierbare Funktion $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar ist.

Satz 4.3.3 (analog zu Satz 4.1.9) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 4.3.1, $n \geq 1$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in D .

(1) $f + g$ ist n -mal differenzierbar und

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

(2) $f \cdot g$ ist n -mal differenzierbar und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Satz 4.3.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 4.3.1, $n \geq 1$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in D . Wenn $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ ist, ist $\frac{f}{g}$ in D n -mal differenzierbar.

Satz 4.3.6 Seien $E, D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien $f : D \rightarrow E$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ n -mal differenzierbar und

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x) (g^{(k)} \circ f)(x)$$

wobei $A_{n,k}$ ein Polynom in den Funktionen $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$ ist.

4.4 Potenzreihen & Taylor Approximation

Satz 4.4.1 Seien $f_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge wobei f_n einmal in $]a, b[$ $\forall n \geq 1$ stetig differenzierbar ist. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ wie auch $(f'_n)_{n \geq 1}$ gleichmäßig in $]a, b[$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = p$ konvergieren. Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = p$.

Satz 4.4.2 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[.$$

Korollar 4.4.3 Unter der Voraussetzung von Satz 4.4.1 ist f auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ glatt und

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}.$$

Insbesondere ist

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}.$$

Satz 4.4.5 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ $(n+1)$ -mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in]a, x[$ mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

Korollar 4.4.6 (Taylor Approximation)

Sei $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]c, d[$ $(n+1)$ -mal differenzierbar. Sei $c < a < d$. $\forall x \in [c, d] \exists \xi$ zwischen x und a , so dass:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

Korollar 4.4.7 Sei $n \geq 0$, $a < x_0 < b$ und

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $]a, b[$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar. Annahme: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$.

(1) Wenn n gerade ist und x_0 eine lokale Extremstelle ist, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.

(2) Wenn n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Minimalstelle.

(3) Wenn n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Maximalstelle.

Korollar 4.4.8 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $a < x_0 < b$. Annahme: $f'(x_0) = 0$.

(1) Wenn $f^{(2)}(x_0) > 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Minimalstelle.

(2) Wenn $f^{(2)}(x_0) < 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Maximalstelle.

5 Riemann Integral

5.1 Definition und Integrabilitätskriterien

Definition 5.1.1 Eine Partition von I ist eine endliche Teilmenge $P \subseteq [a, b]$ wobei $\{a, b\} \subseteq P$. Es gilt: $n := \text{card } P - 1 \geq 1$ und es gibt genau eine Bijektion

$$\{0, 1, 2, \dots, n\} \rightarrow P$$

$$j \mapsto x_j$$

mit der Eigenschaft $i < j \implies x_i < x_j$.

Eine Partition P' ist eine Verfeinerung von P , wenn

$P \subset P'$. Offensichtlich ist die **Vereinigung** $P_1 \cup P_2$ **zweier Partitionen** wieder **eine Partition**. Insbesondere haben **zwei Partitionen** immer eine **gemeinsame Vereinigung**. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte Funktion**, das heisst es gibt $M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

Sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine **Partition** von I . Insbesondere gilt: $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$ mit $i \geq 1$

$$\delta_i := x_i - x_{i-1}$$

Untersumme $s(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i$, $f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

Obersumme $S(f, P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i$, $F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

Lemma 5.1.2 (1) Sei P' eine **Verfeinerung** von P . Dann gilt:

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

(2) Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt:

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Sei $\mathcal{P}(I)$ die **Menge der Partitionen** von I . Wir definieren:

$$s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$$

$$S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$$

Definition 5.1.3 Eine **beschränkte Funktion** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **(Riemann) integrierbar**, wenn

$$s(f) = S(f).$$

In diesem Fall bezeichnen wir den **gemeinsamen Wert** von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Satz 5.1.4 Eine **beschränkte Funktion** ist genau dann integrierbar, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}(I)$:

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

Satz 5.1.8 (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875) Eine **beschränkte Funktion** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **genau dann integrierbar**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass: $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$,

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Hier bezeichnet $\mathcal{P}_\delta(I)$ die **Menge der Partitionen** P , für welche $\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \leq \delta$.

Korollar 5.1.9 Die **beschränkte Funktion** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **genau dann integrierbar** mit

$$A := \int_a^b f(x) dx,$$

wenn: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $\forall P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P) < \delta$ und ξ_1, \dots, ξ_n mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$|A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon.$$

5.2 Integrierbare Funktionen

Satz 5.2.1 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt, integrierbar** und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ und (falls $|g(x)| \geq \beta > 0$ $\forall x \in [a, b]$) $\frac{f}{g}$ **integrierbar**.

Bemerkung 5.2.2 Sei $\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte Funktion**. Dann ist

$$(*) \quad \sup_{x, y \in [c, d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x \in [c, d]} \phi(x) - \inf_{x \in [c, d]} \phi(x).$$

Einerseits gilt offensichtlich $\forall x, y \in [c, d]$:

$$\phi(x) \leq \sup_{[c, d]} \phi, \quad \phi(y) \geq \inf_{[c, d]} \phi$$

also ist

$$\phi(x) - \phi(y) \leq \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi,$$

woraus durch vertauschen von x, y folgt:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi.$$

Andererseits sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\xi \in [c, d]$ und $\eta \in [c, d]$ $\phi(\xi) > \varepsilon$ und $\phi(\eta) < \inf_{[c, d]} \phi + \varepsilon$ woraus

$$\phi(\xi) - \phi(\eta) > \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi - 2\varepsilon$$

folgt. Dies zeigt die Aussage (*).

Korollar 5.2.3 Seien P, Q Polynome und $[a, b]$ ein **Intervall** in dem Q **keine Nullstelle** besitzt. Dann ist

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

integrierbar.

Definition 5.2.4 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D **gleichmässig stetig**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D$:

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Satz 5.2.6 (Heine 1872) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig** in dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann ist f in $[a, b]$ **gleichmässig stetig**.

Satz 5.2.7 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. f ist **integrierbar**.

Satz 5.2.8 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **monoton** $\implies f$ **integrierbar**.

Bemerkung 5.2.9 Seien $a < b < c$ und $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt** mit $f|_{[a, b]}$ und $f|_{[b, c]}$ **integrierbar**. Dann ist f integrierbar und

$$(*) \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

In der Tat ergibt die **Summe einer Obersumme (respektive Untersumme)** für $f|_{[a, b]}$ und $f|_{[b, c]}$ eine **Obersumme (respektive Untersumme)** für f . Wir erweitern jetzt die Definition von $\int_a^b f(x) dx$ auf: $\int_a^a f(x) dx = 0$ und wenn $a < b$

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

Dann gilt (*) für alle Tripel a, b, c unter den entsprechenden Integrabilitätsvoraussetzungen.

Satz 5.2.10 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein **kompaktes Intervall** mit **Endpunkten** a, b sowie $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt integrierbar** und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

5.3 Ungleichungen & Mittelwertsatz

Satz 5.3.1 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Dann folgt:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Korollar 5.3.2 Wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, folgt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Satz 5.3.3 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

Satz 5.3.4 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. So $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

Satz 5.3.6 (Cauchy 1821) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt und integrierbar mit $g \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

5.4 Fundamentalsatz Differentialrechnung

Satz 5.4.1 (Fundamentalsatz der Analysis) Seien $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Definition 5.4.2 Sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f , wenn F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.

Satz 5.4.3 (Fundamentalsatz Differentialrechnung) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. So gibt es eine **Stammfunktion** F von f , die bis auf eine additive Konstante ein-

deutig bestimmt ist und:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Satz 5.4.5 (Partielle Integration) Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Satz 5.4.6 (Substitution) Sei $a < b$, $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a, b]) \subseteq I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt$$

Korollar 5.4.8 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(1) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass das abgeschlossene Intervall mit **Endpunkten** $a+c, b+c \in I$. Dann gilt:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x) dx = \int_a^b f(t+c) dt$$

(2) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$, so dass das abgeschlossene Intervall mit den **Endpunkten** $ac, bc \in I$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx$$

5.5 Integration konvergenter Reihen

Satz 5.5.1 Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. So ist f beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Korollar 5.5.2 Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge beschränkter, integrierbarer Funktionen, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a, b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

Korollar 5.5.3 Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \leq r < \rho$, f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$:

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

5.8 Uneigentliche Integrale

Definition 5.8.1 Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Wenn

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

existiert, bezeichnen wir den **Grenzwert** mit

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

und sagen, dass f auf $[a, +\infty[$ integrierbar ist.

Lemma 5.8.3 Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b] \quad \forall b > a$.

(1) Wenn $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ auf $[a, \infty[$ integrierbar ist, ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar.

(2) Wenn $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^{\infty} g(x) dx$ divergiert, divergiert auch $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Satz 5.8.5 (McLaurin 1742) Sei $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergiert.

Eine Situation, die zu einem **uneigentlichen Integral** führt, ist wenn $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a + \varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$ beschränkt und integrierbar ist, aber auf $]a, b]$ nicht notwendigerweise beschränkt ist.

Definition 5.8.8 In dieser Situation ist

$$f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar, wenn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

existiert. In diesem Fall wird der **Grenzwert** mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet.

Definition 5.8.11 Für $s > 0$ definieren wir

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Satz 5.8.12 (Bohr-Mollerup)

(1) Die **Gamma Funktion** erfüllt die Relationen:

(a) $\Gamma(1) = 1$ (b) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$

(c) γ ist **logarithmisch konvex**, d.h.

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$.

(2) Die **Gamma Funktion** ist die **einzige** Funktion $]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, die (a), (b) und (c) erfüllt. Darüberhinaus gilt: $\forall x > 0$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Lemma 5.8.13 Sei $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $\forall a, b \geq 0$:

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Satz 5.8.14 (Hölder Ungleichung) Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle stetigen Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

5.9 Das unbestimmte Integral

Satz 5.9.3 Seien P, Q Polynome mit $\deg(P) < \deg(Q)$ und Q mit **Produktzerlegung** $(*)$. Dann gibt es $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$ mit:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{((x-a_i)^2 + \beta_i^2)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}$$

6 Anhang A

Satz A.0.1 (Binomialsatz) $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geq 1$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

7 Wichtige Beispiele

7.1 Gerade und ungerade Funktionen

Sei $f(x)$ eine **gerade** Funktion. Dann:

$$f(x) = f(-x)$$

Sei $g(x)$ eine **ungerade** Funktion. Dann:

$$-g(x) = g(-x)$$

Das **Produkt** von 2 **geraden** Funktionen ist **gerade**. Das **Produkt** von 2 **ungeraden** Funktionen ist **gerade**. Das **Produkt** einer **ungeraden** und einer **geraden** Funktion, ist **ungerade**. Für **ungerade** Funktionen gilt:

$$\int_{-a}^{+a} g(x) dx = 0.$$

(Dies kann man sich graphisch vorstellen).

7.2 Konvergenztest für Reihen

Gegeben: $\sum_{n=0}^\infty a_n$

(1) Spezieller Typ?

1.1 Geometrische Reihe: $\sum q^n$? **Konvergent**, wenn: $|q| < 1$.

1.2 Alternierende Reihe: $\sum (-1)^n a_n$? **Konvergent**, wenn: $\lim a_n = 0$.

1.3 Riemann Zeta: $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ **Konvergent**, wenn: $s > 1$.

1.4 Teleskopreihe $\sum (b_n - b_{n-1})$? **Konvergent**, wenn: $\lim b_n$ existiert.

(2) Kein spezieller Typ:

2.1 $\lim a_n = 0$? Nein: **divergent**.

2.2 Quotientenkriterium anwendbar?

2.3 Wurzelkriterium anwendbar?

2.4 Gibt es eine **konvergente Majorante**?

2.5 Gibt es eine **divergente Minorante**?

2.6 Nichts von all dem?

\Rightarrow **kreativ sein**.

7.3 Trigonometrische Funktionen

Sinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Kosinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Tangensfunktion für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Cotangensfunktion für $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$:

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

7.4 Hyperbelfunktionen

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Es gilt offensichtlich:

$$\cosh x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x \geq 1 \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\sinh 0 = 0$$

Daraus folgt: **cosh** ist auf $[0, \infty[$ strikt monoton wachsend, $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$. Also ist **cosh** : $[0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

bezeichnet. Unter Verwendung von

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt:

$$\operatorname{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y \in]1, +\infty[$$

Analog zeigt man, dass **sinh** : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bijektiv ist. Dessen Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet und es gilt:

$$\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Für **tanh x** folgt:

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$$

Also ist \tanh auf \mathbb{R} streng monoton wachsend und man zeigt, dass

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1.$$

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{artanh} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet. Es gilt dann:

$$\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in]-1, 1[$$

7.5 Ableitungen

$$(ax^z)' = azx^{z-1}$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = (\ln(x) + 1)e^x$$

$$(x \ln x)' = \ln(x) + 1$$

$$e^{f(x)} = e^x$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sinh' x = \cosh x$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \forall y \in]1, +\infty[$$

$$\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in]-1, 1[$$

7.6 Integrale

$$\int x^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \quad s \neq -1 \quad \int x^s dx = \ln x + C \quad s = -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad (\text{verwende } \ln x = \ln x \cdot 1)$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

$$n \geq 1 \quad I_n = \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int (ax+b)^s dx = \frac{1}{a(s+1)} (ax+b)^{s+1} + C \quad s \neq -1$$

$$\int (ax+b)^s dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$$

7.7 Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

7.8 Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, |q| < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot q^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \dots$$