

# Körper

## 1.1 Reelle Zahlen

**Ordnungsvollständigkeit:** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  s. d. (i)

$A \neq \emptyset$  (ii)  $\forall a \in A \forall b \in B \ a \leq b$  Dann:  $\exists c \in \mathbb{R}$

s.d.  $\forall a \in A \ a \leq c \ \forall b \in B \ c \leq b$  **Korollar 1.1.7**

(Archimedisches Prinzip) Sei  $x > 0, y \in \mathbb{R}$  Dann:

$\exists n \in \mathbb{N} \ y \leq n \cdot x$  **Satz 1.1.8**  $\forall t \geq 0, t \in \mathbb{R}$  hat  $x^2 = t$

eine Lösung in  $\mathbb{R}$  **Satz 1.1.10**  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  (i)  $|x| \geq 0$

(ii)  $|xy| = |x||y|$  (iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (iv)

$|x + y| \geq ||x| - |y||$  **Satz 1.1.11** (Young'sche Ungleichung)

$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

**Definition 1.1.12** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  (i) / (ii)  $c \in \mathbb{R}$  ist eine

obere/untere Schranke von  $A$  wenn  $\forall a \in A \ a \leq / \geq c$ .

$A$  ist nach oben/unten beschränkt, wenn es eine obere/untere Schranke gibt.

(iii) / (iv)  $m \in \mathbb{R}$  ist ein Maximum/Minimum von  $A$  wenn  $m \in A$  und  $m$

obere/untere Schranke von  $A$  ist. **Satz 1.1.15** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

Sei  $A$  nach oben/unten beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere/

grösste untere Schranke von  $A$ :  $c := \sup A / c := \inf A$  genannt **Supremum/Infimum**

von  $A$  **Korollar 1.1.16** Seien  $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$

Wenn  $B$  nach oben/unten beschränkt ist, folgt  $\sup A \leq \sup B / \inf B \leq \inf A$

**Konvention:** Wenn  $A$  nicht beschränkt ist, definieren wir  $\sup A = +\infty$  bzw.

$\inf A = -\infty$

## 1.2 Der Euklidische Raum

## 1.3 Komplexe Zahlen

**Satz 1.3.4** (Fundamentalsatz der Algebra) Sei  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{C}$

und  $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  Dann  $\exists z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , so dass

$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$

# Folgen und Reihen

## 2.1 Grenzwert einer Folge

**Definition 2.1.1** Eine Folge (reeller Zahlen) ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir schreiben  $a_n$  statt  $a(n)$

und bezeichnen eine Folge mit  $(a_n)_{n \geq 1}$  **Lemma 2.1.3**

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge. Dann gibt es höchstens eine

reelle Zahl  $l \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft:  $\forall \varepsilon > 0$  ist

die Menge  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[ \}$  endlich.

**Definition 2.1.4** Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist konvergent,

wenn es  $l \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\forall \varepsilon > 0$  die Menge  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[ \}$

endlich ist. **Lemma 2.1.6** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge. Folgende Aussagen sind äquivalent

(1)  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert gegen  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  (2)

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ , so dass  $|a_n - l| < \varepsilon \ \forall n \geq N$

**Satz 2.1.8** Seien  $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$  konvergent mit

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  (1)  $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$  ist kon-

vergent:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$  (2)  $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$

ist konvergent:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$  (3) Sei  $\forall n \geq 1$

$b_n \neq 0$  und  $b \neq 0$ . Dann ist  $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1}$  konvergent und

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$  (4) Wenn  $\exists K \geq 1$  mit  $\forall n \geq K : a_n \leq$

$b_n$ , folgt  $a \leq b$  **Beispiel 2.1.9**  $b \in \mathbb{Z} : \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^b =$

1. Das folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$  und wiederholter

Anwendung von Satz 2.1.8 (2) und (3).

## 2.2 Satz von Weierstrass

**Definition 2.2.1** (1) [ (2) ]  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist monoton

wachsend [fallend] wenn:  $a_n \leq [\geq] a_{n+1} \ \forall n \geq 1$

**Satz 2.2.2** (Weierstrass) Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton wach-

send [fallend] und nach oben [unten] beschränkt. Dann konvergiert  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$  **Beispiel 2.2.3** Sei

$a \in \mathbb{Z}$  und  $0 \leq q < 1$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a q^n = 0$ .

Wir können annehmen, dass  $q > 0$ . Sei  $x_n = n^a q^n$ ;

dann folgt:  $x_{n+1} = (n+1)^a q^{n+1} = (\frac{n+1}{n})^a q \cdot n^a q^n =$

$(1 + \frac{1}{n})^a \cdot q \cdot x_n$ . Also:  $x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^a \cdot q \cdot x_n$ . Da

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^a = 1$  (Beispiel 2.1.9), gibt es ein  $n_0$ , so dass

$(1 + \frac{1}{n})^a < \frac{1}{q} \ \forall n \geq n_0$ . Es folgt:  $x_{n+1} < x_n \ \forall n \geq$

$n_0$ . Da für  $x_n > 0 \ \forall n \geq 1$  die Folge nach unten

beschränkt ist und für  $n \geq n_0$  monoton fallend ist.

Sei  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^a \cdot q x^n =$

$q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q \cdot l$ . Also  $(1 - q) \cdot l = 0$  woraus  $l = 0$  folgt.

**Bemerkung 2.2.24** In Beispiel 2.2.3 wird zweimal die

folgende einfache Tatsache verwendet: Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine

konvergente Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann

ist die durch  $b_n := a_{n+k} \ n \geq 1$  definierte Folge konver-

gent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ . **Lemma 2.2.7** (Bernoulli Ungle-

ichung)  $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \ \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

## 2.3 Limes superior und Limes inferior

**Limes inferior/superior:** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine

beschränkte Folge. Sei  $\forall n \geq 1: b_n = \inf \{a_k : k \geq n\}$ ,

$c_n = \sup \{a_k : k \geq n\}$  Dann folgt  $\forall n \geq 1 \ b_n \leq b_{n+1}$

(monoton wachsend) und  $c_n \geq c_{n+1}$  (monoton fall-

end) und beide Folgen beschränkt. Wir definieren:

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

## 2.4 Cauchy Kriterium

**Lemma 2.4.1**  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert genau dann, wenn

$(a_n)_{n \geq 1}$  beschränkt und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

**Satz 2.4.2** (Cauchy Kriterium)  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist genau dann

konvergent, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ , so dass  $|a_n - a_m| < \varepsilon$

$\forall n, m \geq N$

## 2.5 Satz von Bolzano-Weierstrass

**Definition 2.5.1** Ein abgeschlossenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$

ist von der Form (1)  $[a, b] \ a \leq b \ a, b \in \mathbb{R}$

(2)  $[a, +\infty[ \ a \in \mathbb{R}$  (3)  $]-\infty, a] \ a \in \mathbb{R}$  (4)

$]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$  **Bemerkung 2.5.2** Ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$

ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede kon-

vergente Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n \in I \ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in I$ .

**Bemerkung 2.5.3** Seien  $I = [a, b], J = [c, d]$  mit  $a \leq$

$b, c \leq d, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $I \subseteq J$  genau dann,

wenn  $c \leq a, b \leq d$  **Satz 2.5.5.5** (Cauchy-Cantor) Sei

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$  eine Folge abgeschlossener

Intervalle mit  $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$  Dann gilt  $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$ .

Falls zudem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$  gilt, enthält  $\bigcap_{n \geq 1} I_n$  genau

**einen Punkt.** **Definition 2.5.7** Eine **Teilfolge** einer Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist eine Folge  $(b_n)_{n \geq 1}$ , wobei  $b_n = a_{l(n)}$  und  $l: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  eine **Abbildung** mit der Eigenschaft  $l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$ . **Satz 2.5.9** (**Bolzano-Weierstrass**) Jede beschränkte Folge besitzt eine **konvergente Teilfolge**.

## 2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

**Definition 2.6.1** Eine Folge in  $\mathbb{R}^d$  ist eine Abbildung  $a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Wir schreiben  $a_n$  statt  $a(n)$  und bezeichnen die Folge mit  $(a_n)_{n \geq 1}$ . **Definition 2.6.2** Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathbb{R}^d$  ist **konvergent**, wenn  $\exists a \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$  mit  $\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$ . **Satz 2.6.3** Sei  $b = (b_1, \dots, b_d)$ . Folgende Aussagen sind äquivalent: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$  (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nj} = b_j \quad \forall 1 \leq j \leq d$

**Bemerkung 2.6.4** Sei  $x = (x_1, \dots, x_d)$ . Dann ist  $\forall 1 \leq j \leq d: x_j^2 \leq \sum_{i=1}^d x_i^2 = \|x\|^2 \leq d \cdot \max_{1 \leq i \leq d} x_i^2$  woraus  $|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \cdot \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$  folgt. **Bemerkung 2.6.5** Eine

**konvergente Folge**  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathbb{R}^d$  ist **beschränkt**. Das heisst:  $\exists R \geq 0$  mit  $\|a_n\| \leq R \quad \forall n \geq 1$ . **Satz 2.6.6** (1) Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  **konvergiert genau dann**, wenn sie eine **Cauchy Folge** ist:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$  mit  $\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$ . (2) **Jede beschränkte Folge** hat eine **konvergente Teilfolge**.

## 2.7 Reihen

**Definition 2.7.1** Die **Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist **konvergent**, wenn die Folge  $(S_n)_{n \geq 1}$  der **Partialsummen konvergiert**. In diesem Fall definieren wir:  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . **Beispiel 2.7.2** (**Geometrische Reihe**) Sei  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$ . Dann konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  und dessen Wert ist:  $\frac{1}{1-q}$ . Sei  $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n$ .  $q \cdot S_n = q + \dots + q^n + q^{n+1}$  woraus  $(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$  folgt. Es gilt also:  $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . Nun zeigen wir die Konvergenz:  $|S_n - \frac{1}{1-q}| = |\frac{-q^{n+1}}{1-q}| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$ . Es folgt aus Beispiel 2.2.3 und  $0 \leq |q| < 1$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - \frac{1}{1-q}| =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} = 0$ . Somit konvergiert  $(S_n)_{n \geq 1}$  gegen  $\frac{1}{1-q}$ .

**Beispiel 2.7.3** (**Harmonische Reihe**) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert. **Satz 2.7.4** Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j$  **konvergent** sowie  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann ist: (1)  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  **konvergent** und  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$  (2)  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k)$  **konvergent** und  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

**Satz 2.7.5** (**Cauchy Kriterium**) Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist **genau dann konvergent**, wenn:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$  mit  $|\sum_{k=n}^m a_k| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$ . **Satz 2.7.6** Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine Reihe mit  $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$ .  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  **konvergiert genau dann**, wenn die Folge  $(S_n)_{n \geq 1}, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  der **Partialsummen nach oben beschränkt** ist. **Korollar 2.7.7** (**Vergleichssatz**) Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$  Reihen mit:  $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$ . Dann gelten:  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  **konvergent**  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  **konvergent**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  **divergent**  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$  **divergent** Die Implikationen treffen auch zu, wenn  $\exists K \geq 1$  mit  $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$ . **Definition 2.7.9** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist **absolut konvergent**, wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  **konvergiert**. **Satz 2.7.10** Eine **absolut konvergente Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist **auch konvergent** und es gilt:  $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ . **Satz 2.7.12** (**Leibniz 1682**) Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  **monoton fallend** mit  $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dann konvergiert  $S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$

und es gilt:  $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$ . **Definition 2.7.14** Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  ist eine **Umordnung der Reihe**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wenn es eine **bijektive Abbildung**  $\phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  gibt, so dass  $a'_n = a_{\phi(n)}$ . **Satz 2.7.16** (**Drichlet 1837**) Wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **absolut konvergiert**, dann konvergiert **jede Umordnung der Reihe mit demselben Grenzwert**. **Satz 2.7.17** (**Quotientenkriterium, Cauchy 1821**) Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine Reihe. Wenn:  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$  konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **absolut**. Wenn:  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$  divergiert die Reihe **Beispiel 2.7.18** (**Exponentialfunktion**) Für

$z \in \mathbb{C}$  betrachte die Reihe:  $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$  mit allgemeinem Glied  $a_n = \frac{z^n}{n!}$ . Fann folgt für  $z \neq 0$ :  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1}$ . Also gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$  und die Reihe konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Wir definieren die **Exponentialfunktion**:  $\exp z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ . **Bemerkung 2.7.19** Das

**Quotientenkriterium versagt**, wenn z. B. **unendlich viele Glieder**  $a_n$  der Reihe **verschwinden** ( $= 0$  sind). **Satz 2.7.20** (**Wurzelkriterium, Cauchy 1821**) (1)

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **konvergiert absolut**. (2)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  **divergieren**. **Konvergenzradius**  $\rho$ : Sei  $(c_k)_{k \geq 0}$  eine Folge (in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ). Wenn  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$  existiert, definieren wir:  $\rho = +\infty$  wenn  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$

und  $\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$  wenn  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0$

**Riemann Zeta Funktion** Sei  $s > 1$  und  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ . Wir wissen, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert. Die Reihe konvergiert  $\forall s > 1$ . **Korollar 2.7.21** Die **Potenziereihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  **konvergiert absolut**  $\forall |z| < \rho$  und **divergiert**  $\forall |z| > \rho$ . **Definition 2.7.22**  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  ist eine **lineare Anordnung der Doppelreihe**  $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$ , wenn es eine **Bijektion**  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  gibt, mit  $b_k = a_{\sigma(k)}$ .

**Satz 2.7.23** (Cauchy 1821) Wir nehmen an, dass es  $B \geq 0$  gibt, so dass  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$ . Dann **konvergieren die folgenden Reihen absolut**:  $S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0$  und  $U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$  sowie  $\sum_{i=0}^{\infty} S_i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} U_j$  und es gilt:  $\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$  Und **jede lineare Anordnung der Doppelreihe konvergiert absolut mit gleichem Grenzwert**.

**Definition 2.7.24** Das **Cauchy Produkt** der Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$  ist die Reihe:  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$

**Satz 2.7.26** Falls die Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$  **absolut konvergieren**, **konvergiert ihr Cauchy Produkt** und es gilt:  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i) (\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$ .

**Anwendung 2.7.27 (Exponentialfunktion)**  $\forall z, w \in \mathbb{C} : \exp(w + z) = \exp(w) \exp(z)$ . Wir berechnen das Cauchy Produkt der Reihen:  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^i}{i!}, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$ . Dies ist:  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^n \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{z^j}{j!})$  Woraus die Behauptung folgt.

**Satz 2.7.28** Sei  $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge. Wir nehmen an, dass: (1)  $f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$  existiert (2) es eine Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[$  gibt, so dass  $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$  (2.2)  $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$  **konvergiert**. Dann folgt:  $\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n f_n(j)$ .

**Korollar 2.7.29 (Exponentialfunktion)**  $\forall z \in \mathbb{C}$  **konvergiert** die Folge  $((1 + \frac{z}{n})^n)_{n \geq 1}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$

### 3 Stetige Funktionen

#### 3.1 Reellwertige Funktionen

**Definition 3.1.1** [(1) / (2)] (3)  $f$  ist nach [oben/unten] **beschränkt** wenn  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  nach [oben/unten] **beschränkt** **Definition 3.1.2** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D \subseteq \mathbb{R}$ , ist: (1) [(2)] **[streng] monoton wachsend**, wenn  $\forall x, y \in D \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$  (3) [(4)] **[streng] monoton fallend**, wenn  $\forall x, y \in D \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$  (5) [(6)] **[streng] monoton**, wenn  $f$  **[streng] monoton wachsend** oder **fallend** ist.

#### 3.2 Stetigkeit

**Definition 3.2.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ . Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0$  **stetig**, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass  $\forall x \in D$  die Implikation:  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  gilt **Definition 3.2.2** Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist **stetig**, wenn sie in **jedem Punkt von D** **stetig** ist. **Satz 3.2.4** Sei  $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  ist genau dann in  $x_0$  **stetig**, wenn für

**jede Folge**  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $D$  die folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0).$$

**Korollar 3.2.5** Seien  $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beide **stetig** in  $x_0$ : (1)  $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$  sind **stetig** in  $x_0$ . (2) Wenn  $g(x_0) \neq 0$  ist, ist  $\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$  **stetig** in  $x_0$  **Definition**

**3.2.6 Eine polynomielle Funktion**  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion der Form:  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  wobei:  $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ . Wenn  $a_n \neq 0$  ist, ist  $n$  der **Grad** von  $P$ . **Korollar 3.2.7 Polynomielle Funktionen** sind auf ganz  $\mathbb{R}$  **stetig** **Korollar 3.2.8** Seien  $P, Q$  **polynomielle Funktionen** auf  $\mathbb{R}$  mit  $Q \neq 0$ . Seien  $x_1, \dots, x_m$  die Nullstellen von  $Q$ . Dann ist  $\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$  **stetig**.

**3.3 Zwischenwertsatz** **Satz 3.3.1 (Zwischenwertsatz, Bolzano 1817)** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine **stetige Funktion** und  $a, b \in I$ . Für jedes  $c$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  gibt es ein  $z$  zwischen  $a$  und  $b$  mit  $f(z) = c$ .

**3.4 Min-Max Satz** **Definition 3.4.2** Ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  ist **kompakt**, wenn es von der Form  $I = [a, b], a \leq b$  ist. **Lemma 3.4.3** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  **stetig** in  $x_0$ . So sind  $|f|, \max(f, g), \min(f, g)$  **stetig** in  $x_0$ . **Lemma 3.4.4** Sei  $(x_n)_{n \geq 1}$  eine **konvergente Folge** in  $\mathbb{R}$  mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ . Sei  $a \leq b$ . Wenn  $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$ , folgt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$ . **Satz 3.4.5** Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **stetig auf einem kompakten Intervall I**. Dann gibt es  $u \in I$  und  $v \in I$  mit:  $f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$ . Insbesondere ist  $f$  **beschränkt**.

#### 3.5 Umkehrabbildung

**Satz 3.5.1** Seien  $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}, f : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D_1$ . Wenn  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $f(x_0)$  **stetig** sind, so ist  $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  **stetig**. **Korollar 3.5.2** Wenn in **Satz 3.5.1**  $f$  auf  $D_1$  und  $g$  auf

$D_2$  **stetig** sind, ist  $g \circ f$  auf  $D_1$  **stetig**. **Satz 3.5.3** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  **stetig, streng monoton**. Dann ist  $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f^{-1} : J \rightarrow I$  ist **stetig, streng monoton**.

#### 3.6 Reelle Exponentialfunktion

**Satz 3.6.1**  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  ist **streng monoton wachsend, stetig und surjektiv**. **Korollar 3.6.2**  $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Aus der **Potenzreihendarstellung** von  $\exp$  folgt ausserdem:  $\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0$ . Wenn  $y < z$  ist, folgt (aus 2.7.27)  $\exp(z) = \exp(y + (z - y)) = \exp(y) \exp(z - y)$  und da  $\exp(z - y) > 1$  ist folgt folgendes Korollar: **Korollar 3.6.3**  $\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$  **Korollar 3.6.4**  $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  **Korollar 3.6.5** Der **natürliche Logarithmus**  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine **streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion**. Des weiteren gilt  $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in ]0, +\infty[$ . **Korollar 3.6.6** (1) / (2) Für  $a > / < 0$  ist  $]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[, x \mapsto x^a$  eine **stetige, streng monoton wachsende/fallende Bijektion**.  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$ : (3)  $\ln(x^a) = a \ln(x)$  (4)  $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$  (5)  $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

**3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen** **Definition 3.7.1** Die **Funktionenfolge**  $(f_n)_{n \geq 0}$  **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $\forall x \in D : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . **Definition 3.7.3** (Weierstrass 1841) Die Folge  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  **konvergiert gleichmässig** in  $D$  gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ , so dass:  $\forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . **Satz 3.7.4** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Funktionenfolge** bestehend aus (in  $D$ ) **stetigen Funktionen**, die (in  $D$ ) **gleichmässig** gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  **konvergiert**. Dann ist  $f$  (in  $D$ ) **stetig**. **Definition 3.7.5** Eine Funktionenfolge  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist **gleichmässig konvergent**, wenn  $\forall x \in D$  der **Grenzwert**  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  existiert und die Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  **gleichmässig** gegen  $f$  **konvergiert**. **Korollar 3.7.6** Die Funktionenfolge



$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert genau dann gleichmässig in  $D$ , wenn:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ , so dass  $\forall n, m \geq N$  und  $\forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ . **Korollar 3.7.7** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Wenn  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  stetig. **Definition 3.7.8**

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  konvergiert gleichmässig (in  $D$ ), wenn die durch  $S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$  definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert. **Satz 3.7.9** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass  $|f_n(x)| \leq c_n \forall x \in D$  und, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergiert. Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  gleichmässig in  $D$  und deren Grenzwert  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  ist eine in  $D$  stetige Funktion. **Definition 3.7.10** Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  hat positiven Konvergenzradius, wenn  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$

existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:  $\rho = +\infty$  für  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$ ,

$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$  für  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0$ . **Satz 3.7.11**

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $\rho > 0$  und  $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ,  $|x| < \rho$ . Dann gilt:  $\forall 0 \leq r < \rho$  konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  gleichmässig auf  $[-r, r]$ , insbesondere ist  $f : ]-\rho, \rho[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

### 3.8 Trigonometrische Funktionen

**Satz 3.8.1**  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetige Funktionen. **Satz 3.8.2** Sei  $z \in \mathbb{C}$  (1)  $\exp iz = \cos(z) + i \sin(z)$  (2)  $\cos(z) = \cos(-z)$  und  $\sin(-z) = -\sin(z)$  (3)  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ,  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  (4)

$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ ,  $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$  (5)  $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$  **Korollar 3.8.3**  $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ ,  $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$

### 3.9 Die Kreiszahl $\pi$

**Satz 3.9.1** Die Sinusfunktion hat auf  $]0, +\infty[$  mindestens eine Nullstelle. Sei  $\pi := \inf\{t > 0 : \sin t =$

$0\}$ . (1)  $\sin \pi = 0$ ,  $\pi \in ]2, 4[$  (2)  $\forall x \in ]0, \pi[ :$

$\sin x > 0$  (3)  $e^{i\pi/2} = i$  **Korollar 3.9.2**  $x \geq$

$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$  **Korollar 3.9.3** Sei

$x \in \mathbb{R}$  (1)  $e^{i\pi} = -1$ ,  $e^{2i\pi} = 1$  (2)  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) =$

$\cos(x)$ ,  $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$  (3)  $\sin(x + \pi) =$

$-\sin(x)$ ,  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$  (4)  $\cos(x + \pi) =$

$-\cos(x)$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$  (5) Nullstellen von

Sinus =  $\{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$   $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in$

$]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$   $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in ](2k+1)\pi,$

$(2k+2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$  (6) Nullstellen von Cosinus

=  $\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$   $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in ]-\frac{\pi}{2} +$

$2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$   $\cos(x) < 0 \quad \forall x \in ]-\frac{\pi}{2} +$

$(2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$

### 3.10 Grenzwerte von Funktionen

**Definition 3.10.1**  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungspunkt der Menge  $D$ , wenn  $\delta > 0 : (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \setminus \{x_0\} \cap D \neq \emptyset$ . **Definition 3.10.3** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann ist  $A \in \mathbb{R}$  der Grenzwert von  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$ , bezeichnet mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass  $\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \varepsilon$ . **Bemerkung 3.10.4** (1) Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  genau, dann wenn für jede Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$  folgendes gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$ . (2) Sei  $x_0 \in D$ . Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . (3) Mittels (1) zeigt man leicht, dass wenn  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existieren:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  folgen. (4) Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \leq g$ . Dann folgt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  falls beide Grenzwerte existieren. (5) Wenn  $g_1 \leq f \leq g_2$  und

$\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$ , so existiert  $l := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

und  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$  **Satz 3.10.6** Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0$

Häufungspunkt von  $D$ ,  $f : D \rightarrow E$  eine Funktion. Wir nehmen an, dass  $y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und

$y_0 \in E$ . Wenn  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  in  $y_0$  stetig ist, folgt:

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$ .

## 4 Differenzierbare Funktionen

### 4.1 Die Ableitung

**Definition 4.1.1**  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar, wenn der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit  $f'(x_0)$  bezeichnet.

**Bemerkung 4.1.2** Es ist oft von Vorteil in der Definition von  $f'(x_0)$ ,  $x = x_0 + h$  zu setzen, so dass:  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  **Satz 4.1.3** (Weierstrass 1861) Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  Häufungspunkt von  $D$ . Folgende Aussagen sind äquivalent: (1)  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar (2) Es gibt  $c \in \mathbb{R}$  und  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit:

2.1  $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$  2.2  $r(x_0) = 0$  und  $r$  ist stetig in  $x_0$  Wenn dies zutrifft, ist  $c = f'(x_0)$  eindeutig bestimmt. **Satz 4.1.4** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0$  genau dann differenzierbar, wenn es eine Funktion  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, die in  $x_0$  stetig ist und  $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$ . In diesem Fall gilt:  $\phi(x) = f'(x)$ . **Korollar 4.1.5** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Wenn  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, ist  $f$  in  $x_0$  stetig. **Definition 4.1.7**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $D$  differenzierbar, wenn für jeden Häufungspunkt  $x_0 \in D$ ,  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist. **Satz 4.1.9** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar. Dann gelten: (1)  $f + g$  ist in  $x_0$  differenzierbar und  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$  (2)  $f \cdot g$  ist in  $x_0$  differenzierbar und  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$  (3) Wenn  $g(x_0) \neq 0$  ist, ist  $\frac{f}{g}$  in  $x_0$

differenzierbar und  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

**Satz 4.1.11** Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$ , sei  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt, sei  $f : D \rightarrow E$  eine in  $x_0$  differenzierbare Funktion, so dass  $y_0 := f(x_0)$  ein Häufungspunkt von  $E$  ist und sei  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $y_0$  differenzierbare Funktion. Dann ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar und  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

**Korollar 4.1.12** Sei  $f : D \rightarrow E$  eine bijektive Funktion, sei  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt. Wir nehmen an  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar und  $f'(x_0) \neq 0$ . Zudem nehmen wir an  $f^{-1}$  ist in  $y_0 = f(x_0)$  stetig. Dann ist  $y_0$  ein Häufungspunkt von  $E$ ,  $f^{-1}$  ist in  $y_0$  differenzierbar und  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$  **Definition 4.2.1** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ . (1) [(2)]  $f$  besitzt ein lokales Maximum [Minimum] in  $x_0$ , wenn  $\exists \delta > 0$  mit:  $f(x) \leq [\geq] f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap D$

(3)  $f$  besitzt ein lokales Extremum in  $x_0$ , wenn es ein lokales Minimum oder Maximum ist. **Satz 4.2.2** Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in ]a, b[$ . Wir nehmen an,  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar. (1) Wenn  $f'(x_0) > 0$  ist,  $\exists \delta > 0$  mit:  $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$   
 $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$  (2) Wenn  $f'(x_0) < 0$  ist,  $\exists \delta > 0$  mit:  $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$   
 $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$  (3) Wenn  $f$  in  $x_0$  ein lokales Extremum besitzt, folgt  $f'(x_0) = 0$ . **Satz 4.2.3** (Rolle 1690) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Wenn  $f(a) = f(b)$ , so gibt es  $\xi \in ]a, b[$  mit:  $f'(\xi) = 0$ . **Satz 4.2.4** (Lagrange 1797) Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Es gibt  $\xi \in ]a, b[$  mit:  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ . **Korollar 4.2.5** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. (1) Wenn  $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[$  ist, ist  $f$  konstant. (2) Wenn  $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in ]a, b[$  ist, gibt es  $c \in \mathbb{R}$  mit:  $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$ . (3) [(4)] Wenn  $f'(\xi) \geq [\geq] 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[$  ist, ist  $f$  auf  $[a, b]$  [strikt] monoton wachsend. (5) [(6)] Wenn  $f'(\xi) \leq$

$\leq 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[$  ist, ist  $f$  auf  $[a, b]$  [strikt] monoton fallend. (7) Wenn es  $M \geq 0$  gibt, mit:  $|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in ]a, b[$ , folgt  $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ . **Satz 4.2.9** (Cauchy) Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Es gibt  $\xi \in ]a, b[$  mit:  $g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$ . Wenn  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$  ist, folgt:  $g(a) \neq g(b)$  und  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$  **Satz 4.2.10** (Bernoulli 1691/92, de l'Hôpital 1696) Seien  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$ . Wenn  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) =$

$0$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$  existiert, folgt:

$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . **Bemerkung 4.2.11** Der Satz gilt auch wenn:  $b = +\infty \quad \lambda = +\infty \quad x \rightarrow a^+$

**Definition 4.2.13** (1)  $f$  ist konvex (auf  $I$ ), wenn  $\forall x, y \in I, x \leq y$  und  $\lambda \in [0, 1]$  folgendes gilt:  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$  (2)  $f$  ist streng konvex, wenn  $\forall x, y \in I, x < y$  und  $\lambda \in ]0, 1[$  folgendes gilt:  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$  **Bemerkung 4.2.14** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass  $\forall n \geq 1, \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq I$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  in  $[0, 1]$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  folgendes gilt:  $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$

**Lemma 4.2.15** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion. Die Funktion  $f$  ist genau dann konvex, wenn  $\forall x_0 < x < x_1$  in  $I$  folgendes gilt:  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$  **Satz 4.2.16** Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar.  $f$  ist genau dann (streng) konvex, wenn  $f'$  (streng) monoton wachsend ist. **Korollar 4.2.17** Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar in  $]a, b[$ .  $f$  ist (streng) konvex, wenn  $f'' \geq 0$  (bzw.  $f'' > 0$ ) auf  $]a, b[$ . **Definition 4.3.1** (1) Für  $n \geq 2$  ist  $f$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$ , wenn  $f^{(n-1)}$  in  $D$  differenzierbar ist. Dann ist  $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$  und nennt sich die  $n$ -te Ableitung von  $f$  (2)  $f$  ist  $n$ -mal stetig differenzierbar in  $D$ , wenn  $f$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$  &  $f^{(n)}$  in  $D$  stetig ist. (3) Die

Funktion  $f$  ist in  $D$  glatt, wenn sie  $\forall n \geq 1$   $n$ -mal differenzierbar ist. **Bemerkung 4.3.2** Es folgt aus **Korollar 4.1.5**, dass für  $n \geq 1$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar ist.

**Satz 4.3.3** (analog zu Satz 4.1.9) Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  wie in **Definition 4.3.1**,  $n \geq 1$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$ . (1)  $f + g$  ist  $n$ -mal differenzierbar und  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$  (2)  $f \cdot g$  ist  $n$ -mal differenzierbar und  $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ . **Satz 4.3.5** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  wie in **Definition 4.3.1**,  $n \geq 1$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$ . Wenn  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$  ist, ist  $\frac{f}{g}$  in  $D$   $n$ -mal differenzierbar. **Satz 4.3.6** Seien  $E, D \subseteq \mathbb{R}$  Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien  $f : D \rightarrow E, g : E \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar. Dann ist  $f \circ g$   $n$ -mal differenzierbar und  $(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x)(g^{(k)} \circ f)(x)$  wobei  $A_{n,k}$  ein Polynom in den Funktionen  $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$  ist. **Satz 4.4.1** Seien  $f_n : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktionenfolge wobei  $f_n$  einmal in  $]a, b[$   $\forall n \geq 1$  stetig differenzierbar ist. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge  $(f_n)_{n \geq 1}$  wie auch  $(f'_n)_{n \geq 1}$  gleichmässig in  $]a, b[$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n =: f$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n =: p$  konvergieren. Dann ist  $f$  stetig differenzierbar und  $f' = p$ . **Satz 4.4.2** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  eine Potenzreihe mit pos. Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$  auf  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  differenzierbar und  $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ . **Korollar 4.4.3** Unter der Voraussetzung von **Satz 4.4.1** ist  $f$  auf  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  glatt und  $f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}$ . Insbesondere ist

$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$ . **Satz 4.4.5** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$   $(n + 1)$ -mal differenzierbar. Für jedes  $a < x \leq b$  gibt es  $\xi \in ]a, x[$  mit:  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$ . **Korollar 4.4.6** (Taylor Approximation) Sei  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]c, d[$   $(n + 1)$ -

**mal differenzierbar.** Sei  $c < a < d$ .  $\forall x \in [c, d] \exists \xi$  zwischen  $x$  und  $a$ , so dass:  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ . **Korollar 4.4.7** Sei  $n \geq 0$ ,  $a < x_0 < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $]a, b[$   $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar. Annahme:  $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ . (1) Wenn  $n$  gerade ist und  $x_0$  eine lokale Extremalstelle ist, folgt  $f^{(n+1)}(x_0) = 0$ . (2) Wenn  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$  ist, ist  $x_0$  eine strikt lokale Minimalstelle. (3) Wenn  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$  ist, ist  $x_0$  eine strikt lokale Maximalstelle. **Korollar 4.4.8** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  zweimal stetig differenzierbar. Sei  $a < x_0 < b$ . Annahme:  $f'(x_0) = 0$ . (1) Wenn  $f^{(2)}(x_0) > 0$  ist, ist  $x_0$  eine strikt lokale Minimalstelle. (2) Wenn  $f^{(2)}(x_0) < 0$  ist, ist  $x_0$  eine strikt lokale Maximalstelle.

## 5 Riemann Integral

### 5.1 Definition und Integrabilitätskriterien

**Definition 5.1.1** Eine Partition von  $I$  ist eine endliche Teilmenge  $P \subseteq [a, b]$  wobei  $\{a, b\} \subseteq P$ . Es gilt:  $n := \text{card } P - 1 \geq 1$  und es gibt genau eine Bijektion  $\{0, 1, 2, \dots, n\} \rightarrow P, j \mapsto x_j$  mit der Eigenschaft  $i < j \implies x_i < x_j$ . Eine Partition  $P'$  ist eine Verfeinerung von  $P$ , wenn  $P \subset P'$ . Offensichtlich ist die Vereinigung  $P_1 \cup P_2$  zweier Partitionen wieder eine Partition. Insbesondere haben zwei Partitionen immer eine gemeinsame Vereinigung. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion, das heisst es gibt  $M \geq 0$  mit  $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ . Sei  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine Partition von  $I$ . Insbesondere gilt:  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$  Länge des Teilintervalls  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\delta_i := x_i - x_{i-1}, i \geq 1$  **Untersumme**  $s(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$  **Obersumme**  $S(f, P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$  **Lemma 5.1.2** (1) Sei  $P'$  eine Verfeinerung von  $P$ . Dann gilt:  $s(f, P) \leq$

$s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$ . (2) Für beliebige Partitionen  $P_1, P_2$  gilt:  $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$ . Sei  $\mathcal{P}(I)$  die Menge der Partitionen von  $I$ . Wir definieren:  $s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P), S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$ .

**Definition 5.1.3** Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist (Riemann) integrierbar, wenn  $s(f) = S(f)$ . In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von  $s(f)$  und  $S(f)$  mit  $\int_a^b f(x) dx$ . **Satz 5.1.4** Eine beschränkte Funktion ist genau dann integrierbar, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}(I): S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ . **Satz 5.1.8** (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875) Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass:  $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ . Hier bezeichnet  $\mathcal{P}_\delta(I)$  die Menge der Partitionen  $P$ , für welche  $\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \leq \delta$ . **Korollar 5.1.9** Die beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar mit  $A := \int_a^b f(x) dx$ , wenn:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass  $\forall P \in \mathcal{P}(I)$  mit  $\delta(P) < \delta$  und  $\xi_1, \dots, \xi_n$  mit  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], P = \{x_0, \dots, x_n\} | A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon$ . **Satz 5.2.1** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, integrierbar und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$  und (falls  $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ )  $\frac{f}{g}$  integrierbar. **Bemerkung 5.2.2** Sei  $\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann ist (\*)  $\sup_{x, y \in [c, d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x \in [c, d]} \phi(x) - \inf_{x \in [c, d]} \phi(x)$ . Einerseits gilt offensichtlich  $\forall x, y \in [c, d]: \phi(x) \leq \sup_{x \in [c, d]} \phi, \phi \geq \inf_{x \in [c, d]} \phi$  also ist  $\phi(x) - \phi(y) \leq \sup_{x \in [c, d]} \phi - \inf_{x \in [c, d]} \phi$ , woraus durch vertauschen von  $x, y$  folgt:  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sup_{x \in [c, d]} \phi - \inf_{x \in [c, d]} \phi$ . Andererseits sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $\xi \in [c, d]$  und  $\eta \in [c, d]$   $\phi(\xi) > \varepsilon$  und  $\phi(\eta) < \inf_{x \in [c, d]} \phi + \varepsilon$  woraus

$\phi(\xi) - \phi(\eta) > \sup_{x \in [c, d]} \phi - \inf_{x \in [c, d]} \phi - 2\varepsilon$  folgt. Dies zeigt

die Aussage (\*) **Korollar 5.2.3** Seien  $P, Q$  Polynome und  $[a, b]$  ein Intervall in dem  $Q$  keine Nullstelle besitzt. Dann ist  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$  integrierbar.

**Definition 5.2.4** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$  ist in  $D$  gleichmässig stetig, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D: |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

**Satz 5.2.6** (Heine 1872) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in dem kompakten Intervall  $[a, b]$ . Dann ist  $f$  in  $[a, b]$  gleichmässig stetig. **Satz 5.2.7** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. So ist  $f$  integrierbar. **Satz 5.2.8** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton. So ist  $f$  integrierbar. **Bemerkung 5.2.9**

Seien  $a < b < c$  und  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt mit  $f|_{[a, b]}$  und  $f|_{[b, c]}$  integrierbar. Dann ist  $f$  integrierbar und (\*)  $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$ . In der Tat ergibt die Summe einer Obersumme (respektive Untersumme) für  $f|_{[a, b]}$  und  $f|_{[b, c]}$  eine Obersumme (respektive Untersumme) für  $f$ . Wir erweitern jetzt die Definition von  $\int_a^b f(x) dx$  auf:  $\int_a^a f(x) dx = 0$

und wenn  $a < b, \int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx$ . Dann gilt (\*) für alle Tripel  $a, b, c$  unter den entsprechenden Integrabilitätsvoraussetzungen. **Satz 5.2.10** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall mit Endpunkten  $a, b$  sowie  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:  $\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$ . **Satz 5.3.1** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar, und  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . Dann folgt:  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ . **Korollar 5.3.2** Wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar, folgt:  $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ . **Satz 5.3.3** (Bunjakowski 1859, Cauchy 1821, Schwarz 1885: Cauchy-Schwarz Ungleichung)

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar. Dann gilt:  $|\int_a^b f(x)g(x) dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$ . **Satz 5.3.4** (Mittelwertsatz, Cauchy 1821) Sei  $f :$



$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. So  $\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ . **Satz 5.3.6** (Cauchy 1821) Seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wobei  $f$  stetig,  $g$  beschränkt und integrierbar mit  $g \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ . Dann gibt es  $\xi \in [a, b]$  mit:  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ .

**Satz 5.4.1** (Fundamentalsatz der Analysis) Seien  $a < b$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Die Funktion  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $a \leq x \leq b$  ist in  $[a, b]$  stetig differenzierbar und  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . **Definition 5.4.2** Sei  $a < b$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Eine Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **Stammfunktion** von  $f$ , wenn  $F$  (stetig) differenzierbar in  $[a, b]$  ist und  $F' = f$  in  $[a, b]$  gilt.

**Satz 5.4.3** (Fundamentalsatz der Differentialrechnung) Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. So gibt es eine **Stammfunktion**  $F$  von  $f$ , die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ . **Satz 5.4.5** (Partielle Integration) Seien  $a < b \in \mathbb{R}$  und  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt:  $\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx$ .

**Satz 5.4.6** (Substitution) Sei  $a < b$ ,  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $\phi([a, b]) \subseteq I$  und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gilt:  $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx$ . **Korollar 5.4.8** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. (1) Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten  $a+c, b+c \in I$ . Dann gilt:  $\int_{a+c}^{b+c} f(x) dx = \int_a^b f(t+c) dt$ . (2) Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $c \neq 0$ , so dass das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten  $ac, bc \in I$ . Dann gilt:  $\int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx$ .

**Satz 5.5.1** Sei  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. So ist  $f$  beschränkt integrierbar und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .

**Korollar 5.5.2** Sei  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge beschränkter, integrierbarer Funktionen,

so dass  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  auf  $[a, b]$  gleichmässig konvergiert. Dann gilt:  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)) dx$ .

**Korollar 5.5.3** Sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist für jedes  $0 \leq r < \rho$ ,  $f$  auf  $[-r, r]$  integrierbar und es gilt  $\forall x \in ]-\rho, \rho[$ :  $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ .

**Definition 5.8.1** Sei  $f: [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b]$  für alle  $b > a$ . Wenn  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$  existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  und sagen, dass  $f$  auf  $[a, +\infty[$  integrierbar ist.

**Lemma 5.8.3** Sei  $f: [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b] \quad \forall b > a$ . (1) Wenn  $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$  und  $g(x)$  auf  $[a, \infty[$  integrierbar ist, ist  $f$  auf  $[a, \infty[$  integrierbar. (2)

Wenn  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  und  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  divergiert, divergiert auch  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ . **Satz 5.8.5** (McLaurin 1742) Sei  $f: [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  monoton fallend. Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  konvergiert genau dann, wenn  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  konvergiert. Eine Situation, die zu einem uneigentlichen Integral führt, ist wenn  $f: ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Intervall  $[a+\varepsilon, b]$ ,  $\varepsilon > 0$  beschränkt und integrierbar ist, aber auf  $]a, b]$  nicht notwendigerweise beschränkt ist.

**Definition 5.8.8** In dieser Situation ist  $f: ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, wenn  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$  existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit  $\int_a^b f(x) dx$  bezeichnet. **Definition 5.8.11** Für  $s > 0$  definieren wir  $\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ . **Satz 5.8.12** (Bohr-Mollerup) (1) Die Gamma Funktion erfüllt die Relationen: (a)  $\Gamma(1) = 1$  (b)  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$  (c)  $\gamma$  ist logarithmisch konvex, d.h.  $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$  für alle  $x, y > 0$  und  $0 \leq \lambda \leq 1$ . (2) Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion  $]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$ , die (a), (b) und (c) erfüllt. Darüberhinaus gilt:  $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \forall x > 0$

**Lemma 5.8.13** Sei  $p > 1$

und  $q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt  $\forall a, b \geq 0$ :  $a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ . **Satz 5.8.14** (Hölder Ungleichung)

Seien  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Für alle stetigen Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:  $\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$

**Satz 5.9.3** Seien  $P, Q$  Polynome mit  $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$  und  $Q$  mit Produktzerlegung  $(*)$  Dann gibt es  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$  mit:  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij} + B_{ij}x}{(x-a_i)^2 + \beta_i^2} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{x-\gamma_i}$ .

## 6 Anhang A

**Satz A.0.1** (Binomialsatz)  $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geq 1$  gilt:  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ .

## 7 Wichtige Beispiele

**Ungerade und gerade Funktionen** Sei  $f(x)$  eine gerade Funktion. Dann:  $f(x) = f(-x)$ . Sei  $g(x)$  eine ungerade Funktion. Dann:  $-g(x) = g(-x)$ . Das Produkt von 2 geraden Funktionen ist gerade. Das Produkt von 2 ungeraden Funktionen ist gerade. Das Produkt einer ungeraden und einer geraden Funktion, ist ungerade. Für ungerade Funktionen gilt:  $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$ . (Dies kann man sich graphisch vorstellen). **Konvergenztest für Reihen**

Gegeben:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . (1) Spezieller Typ? **1.1 Geometrische Reihe:**  $\sum q^n$ ? Konvergent, wenn:  $|q| < 1$ . **1.2 Alternierende Reihe:**  $\sum (-1)^n a_n$ ? Konvergent, wenn:  $\lim a_n = 0$ . **1.3 Riemann Zeta:**  $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$  Konvergent, wenn:  $s > 1$ . **1.4 Teleskopreihe**  $\sum (b_n - b_{n-1})$ ? Konvergent, wenn:  $\lim b_n$  existiert. (2) Kein spezieller Typ: **2.1**  $\lim a_n = 0$ ? Nein: divergent. **2.2 Quotientenkriterium** anwendbar? **2.3 Wurzelkriterium** anwendbar? **2.4** Gibt es eine konvergente Majorante? **2.5** Gibt es eine divergente Minorante? **2.6** Nichts von all dem?  $\Rightarrow$  kreativ sein.

**Allgemeine Potenzen** Wir können die Exponen-

tialfunktion und den natürlichen Logarithmus verwenden, um allgemeine Potenzen zu definieren. Für  $x > 0$  und  $a \in \mathbb{R}$  beliebig definieren wir:  $x^a := \exp(a \ln x)$ . Insbesondere:  $x^0 = 1 \quad \forall x > 0$ .

**Trigonometrische Funktionen** Sinusfunktion für  $z \in \mathbb{C} : \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ . Kosinusfunktion für  $z \in \mathbb{C} : \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ . Tangensfunktion für  $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z} : \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ . Cotangensfunktion für  $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z} : \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ . **Hyperbelfunktionen**  $\forall x \in \mathbb{R} : \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .  $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . Es gilt offensichtlich:  $\cosh x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sinh x \geq 1 \quad \forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\sin(0) = 0$ . Daraus folgt:  $\cosh$  ist auf  $[0, \infty[$  strikt monoton wachsend,  $\cosh(0) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$ . Also ist  $\cosh : [0, \infty[ \rightarrow ]1, \infty[$  bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird mit  $\operatorname{arsinh} : ]1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  bezeichnet. Unter Verwendung von  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  folgt:  $\operatorname{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y \in ]1, +\infty[$ . Analog zeigt man, dass  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend und bijektiv ist. Dessen Umkehrfunktion wird mit  $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet und es gilt:  $\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$ . Für  $\tanh x$  folgt:  $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$ . Also ist  $\tanh$  auf  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend und man zeigt, dass  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$ . Die Funktion  $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion wird mit  $\operatorname{artanh} : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet. Es gilt dann:  $\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in ]-1, 1[$ .

**Arcusfunktionen** Beispiel 4.2.6 (1)  $\arcsin$ : Da  $\sin' = \cos$  und  $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  folgt aus Korol-

lar 4.2.5 (4), dass die Sinusfunktion auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  strikt monoton wachsend ist. Also ist  $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  bijektiv. Wir definieren  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  als die Umkehrfunktion von  $\sin$ . Nach Korollar 4.1.12 ist sie auf  $] -1, 1[$  differenzierbar und für  $y = \sin x$ ,  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  folgt nach 4.1.12:  $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$ . Wir verwenden nun:  $y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  woraus mit  $\cos x > 0$  folgt:  $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$ . Wir erhalten also  $\forall y \in ] -1, 1[$   $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ .

(2)  $\arccos$ : Eine analoge Diskussion, wie in (1) zeigt, dass  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  strikt monoton fallend ist und  $[0, \pi]$  auf  $[-1, 1]$  bijektiv abbildet. Sei:  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  die Umkehrfunktion. Sie ist auf  $] -1, 1[$  differenzierbar und  $\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in ] -1, 1[$ .

(3)  $\arctan$ : Für  $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$  hatten wir die Tangensfunktion definiert:  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  und deren Ableitung berechnet:  $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Also ist  $\tan$  auf  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  streng monoton wachsend mit  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ . Also ist  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]-\infty, \infty[$  bijektiv. Sei  $\arctan : ]-\infty, \infty[ \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  die Umkehrfunktion. Dann ist  $\arctan$  differenzierbar und für  $y = \tan x$ :  $\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$ .

## 7.1 Ableitungen

$(ax^z)' = azx^{z-1} \quad (x^x)' = (e^{x \ln x})' = (\ln(x) + 1)e^x$   
 $(x \ln x)' = \ln(x) + 1 \quad e^x = e^x \sin' x = \cos x \cos' x = -\sin x \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x} \ln' x = \frac{1}{x}$   
 $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$   
 $\sinh' x = \cosh x \quad \cosh' x = \sinh x \quad \tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$   
 $\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \forall y \in ]1, +\infty[$

$$]1, +\infty[ \quad \operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in ]-1, 1[$$

## 7.2 Integrale

$\int x^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \quad s \neq -1 \quad \int x^s dx = \ln x + C \quad s = -1$   
 $\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$   
 $\int \sinh x dx = \cosh x + C \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C$   
 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x + C$   
 $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x + C$   
 $\int e^x dx = e^x + C \quad \int \ln x dx = x \ln x - x + C$  (verwende  $\ln x = \ln x \cdot 1$ )  
 $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$   
 $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$   
 $n \geq 1 \quad I_n = \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$   
 $\int (ax+b)^s dx = \frac{1}{a(s+1)} (ax+b)^{s+1} + C \quad s \neq -1$   
 $\int (ax+b)^s dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$

## 7.3 Additionstheoreme

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$   
 $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$   
 $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$   
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$   
 $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$   
 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$   
 $\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$   
 $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$   
 $\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$   
 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$   
 $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$   
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$   
 $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$   
 $\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$   
 $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$   
 $\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$

## 7.4 Grenzwerte

$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$   
 $\forall x \in \mathbb{R}, |q| < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} n^x \cdot q^n = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{x} = \dots$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \dots$