

1 Skript

Kapitel 1

Ordnungsvollständigkeit: Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ s. d. (i) $A \neq \emptyset$ (ii) $\forall a \in A \forall b \in B \ a \leq b$

Dann: $\exists c \in \mathbb{R}$ s.d. $\forall a \in A \ a \leq c \ \forall b \in B \ c \leq b$

Korollar 1.1.7 (Archimedisches Prinzip) Sei $x > 0, y \in \mathbb{R}$ Dann: $\exists n \in \mathbb{N} \ y \leq n \cdot x$

Satz 1.1.8 $\forall t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ hat $x^2 = t$ eine Lösung in \mathbb{R}

Satz 1.1.10 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (i) $|x| \geq 0$ (ii) $|xy| = |x||y|$ (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (iv) $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Satz 1.1.11 (Young'sche Ungleichung) $\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

Definition 1.1.12 Sei $A \subset \mathbb{R}$

(i) / (ii) $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere/untere Schranke** von A wenn $\forall a \in A \ a \leq / \geq c$. A ist **nach oben/unten beschränkt**, wenn es eine obere/untere Schranke gibt.

(iii) / (iv) $m \in \mathbb{R}$ ist ein **Maximum/Minimum** von A wenn $m \in A$ und m **obere/untere Schranke** von A ist.

Satz 1.1.15 Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ Sei A nach oben/unten beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere/ grösste untere Schranke von A : $c := \sup A / c := \inf A$ genannt **Supremum/Infimum** von A

Korollar 1.1.16 Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Wenn B nach oben/unten beschränkt ist, folgt $\sup A \leq \sup B / \inf B \leq \inf A$

Konvention: Wenn A nicht beschränkt ist, definieren wir $\sup A = +\infty$ bzw. $\inf A = -\infty$

Satz 1.3.4 (Fundamentalsatz der Algebra) Sei $n \geq 1, n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{C}$ und $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$
Dann $\exists z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, so dass $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$

Kapitel 2

Definition 2.1.1 Eine **Folge (reeller Zahlen)** ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen eine Folge mit $(a_n)_{n \geq 1}$

Lemma 2.1.3 Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge. Dann gibt es **höchstens eine reelle Zahl $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:**
 $\forall \varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$ **endlich**.

Definition 2.1.4 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist **konvergent**, wenn es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$ **endlich** ist.

Lemma 2.1.6 Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge. Folgende Aussagen sind äquivalent

(1) $(a_n)_{n \geq 1}$ **konvergiert gegen $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$** (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass $|a_n - l| < \varepsilon \ \forall n \geq N$

Satz 2.1.8 Seien $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ **konvergent** mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(1) $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ ist **konvergent**: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ (2) $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ ist **konvergent**: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(3) Sei $\forall n \geq 1 \ b_n \neq 0$ und $b \neq 0$. Dann ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1}$ **konvergent** und $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1} = \frac{a}{b}$

(4) Wenn $\exists K \geq 1$ mit $\forall n \geq K : a_n \leq b_n$, folgt $a \leq b$

Definition 2.2.1 (1) [(2)] $(a_n)_{n \geq 1}$ ist **monoton wachsend [fallend]** wenn: $a_n \leq [\geq] a_{n+1} \ \forall n \geq 1$

Satz 2.2.2 (Weierstrass) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ **monoton wachsend [fallend]** und **nach oben [unten] beschränkt**. Dann **konvergiert** $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$ [$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n : n \geq 1\}$]

Bemerkung 2.2.24 In **Beispiel 2.2.3** wird zweimal die folgende einfache Tatsache verwendet: Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine **konvergente** Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die durch $b_n := a_{n+k} \ n \geq 1$ definierte Folge **konvergent** und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Lemma 2.2.7 (Bernoulli Ungleichung) $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \ \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

Limes inferior/ superior: Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine **beschränkte** Folge. Sei $\forall n \geq 1: b_n = \inf \{a_k : k \geq n\}$,
 $c_n = \sup \{a_k : k \geq n\}$ Dann folgt $\forall n \geq 1 \ b_n \leq b_{n+1}$ (**monoton wachsend**) und $c_n \geq c_{n+1}$ (**monoton fallend**)
und **beide Folgen beschränkt**. Wir definieren: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

Lemma 2.4.1 $(a_n)_{n \geq 1}$ **konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n \geq 1}$ beschränkt und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$**

Satz 2.4.2 (Cauchy Kriterium) $(a_n)_{n \geq 1}$ ist **genau dann konvergent**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$,
so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geq N$

Definition 2.5.1 Ein **abgeschlossenes Intervall** $I \subseteq \mathbb{R}$ ist von der Form

(1) $[a, b] \ a \leq b \ a, b \in \mathbb{R}$ (2) $[a, +\infty[\ a \in \mathbb{R}$ (3) $] -\infty, a] \ a \in \mathbb{R}$ (4) $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Bemerkung 2.5.2 Ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist **genau dann abgeschlossen**, wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \in I \ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in I$.

Bemerkung 2.5.3 Seien $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ mit $a \leq b$, $c \leq d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann ist $I \subseteq J$ genau dann, wenn $c \leq a$, $b \leq d$

Satz 2.5.5.5 (Cauchy-Cantor) Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$ eine Folge abgeschlossener Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$. Dann gilt $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$. Falls zudem $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$ gilt, enthält $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ genau einen Punkt.

Definition 2.5.7 Eine **Teilfolge** einer Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n \geq 1}$, wobei $b_n = a_{l(n)}$ und $l: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ eine **Abbildung** mit der Eigenschaft $l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$

Satz 2.5.9 (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Definition 2.6.1 Eine Folge in \mathbb{R}^d ist eine Abbildung $a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^d$. Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen die Folge mit $(a_n)_{n \geq 1}$

Definition 2.6.2 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in \mathbb{R}^d ist **konvergent**, wenn $\exists a \in \mathbb{R}^d$, so dass $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Satz 2.6.3 Sei $b = (b_1, \dots, b_d)$. Folgende Aussagen sind äquivalent: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nj} = b_j \quad \forall 1 \leq j \leq d$

Bemerkung 2.6.4 Sei $x = (x_1, \dots, x_d)$. Dann ist $\forall 1 \leq j \leq d: x_j^2 \leq \sum_{i=1}^d x_i^2 = \|x\|^2 \leq d \cdot \max_{1 \leq i \leq d} x_i^2$ woraus $|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \cdot \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$ folgt.

Bemerkung 2.6.5 Eine konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in \mathbb{R}^d ist **beschränkt**. Das heisst: $\exists R \geq 0$ mit $\|a_n\| \leq R \quad \forall n \geq 1$

Satz 2.6.6 (1) Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ **konvergiert genau dann**, wenn sie eine **Cauchy Folge** ist: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$. (2) Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Definition 2.7.1 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent**, wenn die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der **Partialsommen** konvergiert. In diesem Fall definieren wir: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Satz 2.7.4 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent sowie $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist: (1) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$ (2) $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Satz 2.7.5 (Cauchy Kriterium) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $|\sum_{k=n}^m a_k| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$.

Satz 2.7.6 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ der **Partialsommen nach oben beschränkt** ist.

Korollar 2.7.7 (Vergleichssatz) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit: $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$. Dann gelten: $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent Die Implikationen treffen auch zu, wenn $\exists K \geq 1$ mit $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$

Definition 2.7.9 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 2.7.10 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt: $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Satz 2.7.12 (Leibniz 1682) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dann konvergiert $S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ und es gilt: $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

Definition 2.7.14 Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ist eine **Umordnung** der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wenn es eine bijektive Abbildung $\phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ gibt, so dass $a'_n = a_{\phi(n)}$

Satz 2.7.16 (Dichlet 1837) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe mit demselben Grenzwert.

Satz 2.7.17 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

Wenn: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Wenn: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ divergiert die Reihe

Bemerkung 2.7.19 Das Quotientenkriterium versagt, wenn z. B. unendlich viele Glieder a_n der Reihe verschwinden (= 0 sind)

Satz 2.7.20 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821) (1) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

(2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergieren.

Konvergenzradius ρ : Sei $(c_k)_{k \geq 0}$ eine Folge (in \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Wenn $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert, definieren wir:

$\rho = +\infty$ wenn $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$ und $\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$ wenn $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0$

Korollar 2.7.21 Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut $\forall |z| < \rho$ und divergiert $\forall |z| > \rho$.

Definition 2.7.22 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine **lineare Anordnung** der Doppelreihe $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$, wenn es eine Bijektion $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt, mit $b_k = a_{\sigma(k)}$.

Satz 2.7.23 (Cauchy 1821) Wir nehmen an, dass es $B \geq 0$ gibt, so dass $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$. Dann **kongvergieren die folgenden Reihen absolut**: $S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0$ und $U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$ sowie $\sum_{i=0}^{\infty} S_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} U_j$ und es gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$ Und jede lineare Anordnung der Doppelreihe konvergiert absolut mit gleichem Grenzwert.

Definition 2.7.74 Das **Cauchy Produkt** der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

Satz 2.7.26 Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ **absolut konvergieren**, **konvergiert ihr Cauchy Produkt** und es gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i) (\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$.

Satz 2.7.28 Sei $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an, dass: (1) $f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$ existiert

(2) es eine Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[$ gibt, so dass 2.1 $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$

2.2 $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ **konvergiert**. Dann folgt: $\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n f_n(j)$.

Korollar 2.7.29 (Exponentialfunktion) $\forall z \in \mathbb{C}$ **konvergiert** die Folge $((1 + \frac{z}{n})^n)_{n \geq 1}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$

Kapitel 3

Definition 3.1.1 [(1) / (2)] (3) f ist nach [oben/unten] **beschränkt** wenn $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach [oben/unten] **beschränkt**

Definition 3.1.2 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$, ist:

(1) [(2)] **[streng] monoton wachsend**, wenn $\forall x, y \in D \quad x \leq [<] y \Rightarrow f(x) \leq [<] f(y)$

(3) [(4)] **[streng] monoton fallend**, wenn $\forall x, y \in D \quad x \leq [<] y \Rightarrow f(x) \geq [>] f(y)$

(5) [(6)] **[streng] monoton**, wenn f **[streng] monoton wachsend** oder **fallend** ist.

Definition 3.2.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 **stetig**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, so dass $\forall x \in D$ die Implikation: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt

Definition 3.2.2 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **stetig**, wenn sie in **jedem Punkt von D** stetig ist.

Satz 3.2.4 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 **stetig**, wenn für **jede** Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D die folgende Implikation gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Korollar 3.2.5 Seien $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ beide **stetig** in x_0 : (1) $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ sind **stetig** in x_0 . (2) Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, ist $\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ **stetig** in x_0

Definition 3.2.6 Eine **polynomielle Funktion** $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form: $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ wobei: $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Wenn $a_n \neq 0$ ist, ist n der **Grad** von P .

Korollar 3.2.7 **Polynomielle Funktionen** sind auf ganz \mathbb{R} **stetig**

Korollar 3.2.8 Seien P, Q **polynomielle Funktionen** auf \mathbb{R} mit $Q \neq 0$. Seien x_1, \dots, x_m die Nullstellen von Q .

Dann ist $\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ **stetig**.

Satz 3.3.1 (**Zwischenwertsatz**, Bolzano 1817) Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige Funktion** und $a, b \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$.

Definition 3.4.2 Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist **kompakt**, wenn es von der Form $I = [a, b], \quad a \leq b$ ist.

Lemma 3.4.3 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig** in x_0 . So sind $|f|, \max(f, g), \min(f, g)$ **stetig** in x_0 .

Lemma 3.4.4 Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine **konvergente Folge** in \mathbb{R} mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$. Sei $a \leq b$.

Wenn $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$, folgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$.

Satz 3.4.5 Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig auf einem kompakten Intervall I**. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit: $f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$. Insbesondere ist f **beschränkt**.

Satz 3.5.1 Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}, f : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Wenn f in x_0 und g in $f(x_0)$ **stetig** sind, so ist $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 **stetig**.

Korollar 3.5.2 Wenn in **Satz 3.5.1** f auf D_1 und g auf D_2 **stetig** sind, ist $g \circ f$ auf D_1 **stetig**.

Satz 3.5.3 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig, streng monoton**. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \rightarrow I$ ist **stetig, streng monoton**.

Satz 3.6.1 $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist **streng monoton wachsend, stetig und surjektiv**.

Korollar 3.6.2 $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Aus der **Potenzreihendarstellung** von \exp folgt ausserdem:

$\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0$. Wenn $y < z$ ist, folgt (aus 2.7.27) $\exp(z) = \exp(y + (z - y)) = \exp(y) \exp(z - y)$ und da $\exp(z - y) > 1$ ist folgt folgendes Korollar:

Korollar 3.6.3 $\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$

Korollar 3.6.4 $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Korollar 3.6.5 Der **natürliche Logarithmus** $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist eine **streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion**. Des weiteren gilt $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$.

Korollar 3.6.6 (1) / (2) Für $a > / < 0$ ist $]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $x \mapsto x^a$ eine **stetige, streng monoton**

wachsende/fallende Bijektion. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$: (3) $\ln(x^a) = a \ln(x)$ (4) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ (5) $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Definition 3.7.1 Die **Funktionenfolge** $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert punktwise** gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn
 $\forall x \in D : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Definition 3.7.3 (Weierstrass 1841) Die Folge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ **konvergiert gleichmässig** in D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass: $\forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Satz 3.7.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Funktionenfolge** bestehend aus (in D) **stetigen Funktionen**, die (in D) **gleichmässig gegen eine Funktion** $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ **konvergiert**. Dann ist f (in D) **stetig**.

Definition 3.7.5 Eine Funktionenfolge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **gleichmässig konvergent**, wenn $\forall x \in D$ der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ **existiert und die Folge** $(f_n)_{n \geq 0}$ **gleichmässig gegen** f **konvergiert**.

Korollar 3.7.6 Die Funktionenfolge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ **konvergiert genau dann gleichmässig** in D , wenn:
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$, so dass $\forall n, m \geq N$ und $\forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Korollar 3.7.7 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wenn $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine **gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen** ist, dann ist die Funktion $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ **stetig**.

Definition 3.7.8 Die **Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ **konvergiert gleichmässig** (in D), wenn die durch $S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$ definierte Funktionenfolge **gleichmässig konvergiert**.

Satz 3.7.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge **stetiger Funktionen**. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n \forall x \in D$ und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ **konvergiert**. Dann **konvergiert** die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **gleichmässig** in D und deren Grenzwert $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **ist eine in** D **stetige Funktion**.

Definition 3.7.10 Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hat **positiven Konvergenzradius**, wenn $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert.

Der **Konvergenzradius** ist dann definiert als: $\rho = +\infty$ für $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$,
 $\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$ für $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0$.

Satz 3.7.11 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine **Potenzreihe** mit **positivem Konvergenzradius** $\rho > 0$ und $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < \rho$.
 Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ **konvergiert** $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ **gleichmässig** auf $[-r, r]$, insbesondere ist $f :]-\rho, \rho[\rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**.

Satz 3.8.1 $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind **stetige Funktionen**.

Satz 3.8.2 Sei $z \in \mathbb{C}$ (1) $\exp iz = \cos(z) + i \sin(z)$ (2) $\cos(z) = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$

$$(3) \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$(4) \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w), \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

$$(5) \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

Korollar 3.8.3 $\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$, $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$

Satz 3.9.1 Die **Sinusfunktion** hat auf $]0, +\infty[$ **mindestens eine Nullstelle**. Sei $\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}$.

$$(1) \sin \pi = 0, \pi \in]2, 4[\quad (2) \forall x \in]0, \pi[: \sin x > 0 \quad (3) e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

Korollar 3.9.2 $x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$

Korollar 3.9.3 Sei $x \in \mathbb{R}$ (1) $e^{i\pi} = -1, e^{2i\pi} = 1$ (2) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

$$(3) \sin(x + \pi) = -\sin(x), \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad (4) \cos(x + \pi) = -\cos(x), \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$$(5) \text{Nullstellen von Sinus} = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$$

$$(6) \text{Nullstellen von Cosinus} = \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \cos(x) > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) < 0 \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$$

Definition 3.10.1 $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge D , wenn $\delta > 0 : (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \setminus \{x_0\} \cap D \neq \emptyset$.

Definition 3.10.3 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein **Häufungspunkt** von D . Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$, bezeichnet mit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass

$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Bemerkung 3.10.4 (1) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein **Häufungspunkt** von D . Dann gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ **genau**,
 dann wenn für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ folgendes gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$.

(2) Sei $x_0 \in D$. Dann ist f **genau dann stetig**, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

(3) Mittels (1) zeigt man leicht, dass wenn $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existieren:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ folgen.}$$

(4) Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ falls beide Grenzwerte existieren.

(5) Wenn $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$, so existiert $l := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und $l = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$.

Satz 3.10.6 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D , $f : D \rightarrow E$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass $y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und $y_0 \in E$. Wenn $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ in y_0 stetig ist, folgt: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$.

Kapitel 4

Definition 4.1.1 f ist in x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Bemerkung 4.1.2 Es ist oft von Vorteil in der Definition von $f'(x_0)$, $x = x_0 + h$ zu setzen, so dass:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Satz 4.1.3 (Weierstrass 1861) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D . Folgende Aussagen sind

äquivalent: (1) f ist in x_0 differenzierbar (2) Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$2.1 \quad f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \quad 2.2 \quad r(x_0) = 0 \text{ und } r \text{ ist stetig in } x_0$$

Wenn dies zutrifft, ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Satz 4.1.4 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn es eine Funktion $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die in x_0 stetig ist und $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$. In diesem Fall gilt: $\phi(x) = f'(x)$.

Korollar 4.1.5 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D . Wenn f in x_0 differenzierbar ist, ist f in x_0 stetig.

Definition 4.1.7 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in D differenzierbar, wenn für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist.

Satz 4.1.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gelten:

(1) $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(2) $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(3) Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Satz 4.1.11 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt, sei $f : D \rightarrow E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion, so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist und sei $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Korollar 4.1.12 Sei $f : D \rightarrow E$ eine bijektive Funktion, sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Wir nehmen an f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$. Zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 ein Häufungspunkt von E , f^{-1} ist in y_0 differenzierbar und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Definition 4.2.1 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. (1) (2) f besitzt ein lokales Maximum [Minimum] in x_0 , wenn $\exists \delta > 0$ mit: $f(x) \leq [\geq] f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$

(3) f besitzt ein lokales Extremum in x_0 , wenn es ein lokales Minimum oder Maximum ist.

Satz 4.2.2 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$. Wir nehmen an, f ist in x_0 differenzierbar.

(1) Wenn $f'(x_0) > 0$ ist, $\exists \delta > 0$ mit: $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\quad f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$

(2) Wenn $f'(x_0) < 0$ ist, $\exists \delta > 0$ mit: $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\quad f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$

(3) Wenn f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, folgt $f'(x_0) = 0$.

Satz 4.2.3 (Rolle 1690) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Wenn $f(a) = f(b)$, so gibt es $\xi \in]a, b[$ mit: $f'(\xi) = 0$.

Satz 4.2.4 (Lagrange 1797) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Es gibt $\xi \in]a, b[$ mit: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Korollar 4.2.5 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar.

(1) Wenn $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f konstant.

(2) Wenn $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit: $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$.

(3) (4) Wenn $f'(\xi) \geq [>] 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f auf $[a, b]$ [strikt] monoton wachsend.

(5) (6) Wenn $f'(\xi) \leq [<] 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist, ist f auf $[a, b]$ [strikt] monoton fallend.

(7) Wenn es $M \geq 0$ gibt, mit: $|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in]a, b[$, folgt $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$.

Satz 4.2.9 (Cauchy) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Es gibt $\xi \in]a, b[$ mit: $\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Wenn $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ ist, folgt: $g(a) \neq g(b)$ und

Satz 4.2.10 (Bernoulli 1691/92, de l'Hôpital 1696) Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Wenn $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert, folgt:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bemerkung 4.2.11 Der Satz gilt auch wenn: $b = +\infty \quad \lambda = +\infty \quad x \rightarrow a^+$

Definition 4.2.13 (1) f ist **konvex** (auf I), wenn $\forall x, y \in I, x \leq y$ und $\lambda \in [0, 1]$ folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

(2) f ist **streng konvex**, wenn $\forall x, y \in I, x < y$ und $\lambda \in]0, 1[$ folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Bemerkung 4.2.14 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass $\forall n \geq 1, \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $[0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ folgendes gilt: $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$

Lemma 4.2.15 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn

$$\forall x_0 < x < x_1 \text{ in } I \text{ folgendes gilt: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Satz 4.2.16 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. f ist genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wachsend ist.

Korollar 4.2.17 Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a, b[$. f ist (streng) konvex, wenn $f'' \geq 0$ (bzw. $f'' > 0$) auf $]a, b[$.

Definition 4.3.1 (1) Für $n \geq 2$ ist f n -mal differenzierbar in D , wenn $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist.

Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n -te Ableitung von f

(2) f ist n -mal stetig differenzierbar in D , wenn f n -mal differenzierbar in D & $f^{(n)}$ in D stetig ist.

(3) Die Funktion f ist in D glatt, wenn sie $\forall n \geq 1$ n -mal differenzierbar ist.

Bemerkung 4.3.2 Es folgt aus Korollar 4.1.5, dass für $n \geq 1$ eine n -mal differenzierbare Funktion $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar ist.

Satz 4.3.3 (analog zu Satz 4.1.9) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 4.3.1, $n \geq 1$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in D . (1) $f + g$ ist n -mal differenzierbar und $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

(2) $f \cdot g$ ist n -mal differenzierbar und $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Satz 4.3.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Definition 4.3.1, $n \geq 1$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in D . Wenn $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ ist, ist $\frac{f}{g}$ in D n -mal differenzierbar.

Satz 4.3.6 Seien $E, D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien $f : D \rightarrow E, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ n -mal differenzierbar und $(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x) (g^{(k)} \circ f)(x)$ wobei $A_{n,k}$ ein Polynom in den Funktionen $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$ ist.

Satz 4.4.1 Seien $f_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge wobei f_n einmal in $]a, b[\quad \forall n \geq 1$ stetig differenzierbar ist. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ wie auch $(f'_n)_{n \geq 1}$ gleichmäßig in $]a, b[$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n =: f$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n =: p$ konvergieren. Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = p$.

Satz 4.4.2 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit pos. Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ differenzierbar und $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.

Korollar 4.4.3 Unter der Voraussetzung von Satz 4.4.1 ist f auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ glatt und

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}. \text{ Insbesondere ist } c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}.$$

Satz 4.4.5 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ $(n + 1)$ -mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in]a, x[$ mit: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$.

Korollar 4.4.6 (Taylor Approximation) Sei $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]c, d[$ $(n + 1)$ -mal differenzierbar. Sei $c < a < d$. $\forall x \in [c, d] \exists \xi$ zwischen x und a , so dass: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$.

Korollar 4.4.7 Sei $n \geq 0, a < x_0 < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $]a, b[$ $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar.

Annahme: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$.

(1) Wenn n gerade ist und x_0 eine lokale Extremalstelle ist, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.

(2) Wenn n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Minimalstelle.

(3) Wenn n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Maximalstelle.

Korollar 4.4.8 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $a < x_0 < b$.

Annahme: $f'(x_0) = 0$.

(1) Wenn $f^{(2)}(x_0) > 0$ ist, ist x_0 eine strikt lokale Minimalstelle.

(2) Wenn $f^{(2)}(x_0) < 0$ ist, ist x_0 eine **strikt lokale Maximalstelle**.

Kapitel 5

Definition 5.1.1 Eine **Partition** von I ist eine endliche Teilmenge $P \subsetneq [a, b]$ wobei $\{a, b\} \subseteq P$. Es gilt:
 $n := \text{card } P - 1 \geq 1$ und es gibt **genau eine Bijektion** $\{0, 1, 2, \dots, n\} \rightarrow P, j \mapsto x_j$ mit der Eigenschaft
 $i < j \implies x_i < x_j$.

Eine **Partition** P' ist eine **Verfeinerung** von P , wenn $P \subset P'$. Offensichtlich ist die **Vereinigung** $P_1 \cup P_2$ zweier **Partitionen** wieder eine **Partition**. Insbesondere haben **zwei Partitionen immer eine gemeinsame Vereinigung**.
 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte Funktion**, das heisst es gibt $M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

Sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine **Partition** von I . Insbesondere gilt: $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i], \delta_i := x_i - x_{i-1}, i \geq 1$

Untersumme $s(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

Obersumme $S(f, P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

Lemma 5.1.2 (1) Sei P' eine **Verfeinerung** von P . Dann gilt: $s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$.

(2) Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt: $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$.

Sei $\mathcal{P}(I)$ die **Menge der Partitionen** von I . Wir definieren: $s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P), \quad S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$.

Definition 5.1.3 Eine **beschränkte Funktion** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **(Riemann) integrierbar**, wenn $s(f) = S(f)$.

In diesem Fall bezeichnen wir den **gemeinsamen Wert** von $s(f)$ und $S(f)$ mit $\int_a^b f(x) dx$.

Satz 5.1.4 Eine **beschränkte Funktion** ist genau dann integrierbar, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}(I): S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

Satz 5.1.8 (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875) Eine **beschränkte Funktion** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **genau dann integrierbar**, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass: $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.
 Hier bezeichnet $\mathcal{P}_\delta(I)$ die **Menge der Partitionen** P , für welche $\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \leq \delta$.

Korollar 5.1.9 Die **beschränkte Funktion** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **genau dann integrierbar mit** $A := \int_a^b f(x) dx$,
 wenn: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $\forall P \in \mathcal{P}(I)$ mit $\delta(P) < \delta$ und ξ_1, \dots, ξ_n mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,
 $P = \{x_0, \dots, x_n\} | A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon$.

Satz 5.2.1 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt, integrierbar** und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$ und (falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$) $\frac{f}{g}$ **integrierbar**.

Bemerkung 5.2.2 Sei $\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine **beschränkte Funktion**. Dann ist

(*) $\sup_{x, y \in [c, d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x \in [c, d]} \phi(x) - \inf_{x \in [c, d]} \phi(x)$. Einerseits gilt offensichtlich $\forall x, y \in [c, d]$:

$\phi(x) \leq \sup_{[c, d]} \phi, \quad \phi \geq \inf_{[c, d]} \phi$ also ist $\phi(x) - \phi(y) \leq \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi$, woraus durch vertauschen von x, y folgt:

$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi$. Andererseits sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\xi \in [c, d]$ und $\eta \in [c, d]$ $\phi(\xi) > \varepsilon$ und

$\phi(\eta) < \inf_{[c, d]} \phi + \varepsilon$ woraus $\phi(\xi) - \phi(\eta) > \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi - 2\varepsilon$ folgt. Dies zeigt die Aussage (*)

Korollar 5.2.3 Seien P, Q Polynome und $[a, b]$ ein **Intervall** in dem Q **keine Nullstelle** besitzt. Dann ist
 $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ **integrierbar**.

Definition 5.2.4 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D **gleichmässig stetig**, wenn
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Satz 5.2.6 (Heine 1872) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig** in dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann ist f in $[a, b]$ **gleichmässig stetig**.

Satz 5.2.7 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. So ist f **integrierbar**.

Satz 5.2.8 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **monoton**. So ist f **integrierbar**.

Bemerkung 5.2.9 Seien $a < b < c$ und $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt** mit $f|_{[a, b]}$ und $f|_{[b, c]}$ **integrierbar**. Dann ist

f **integrierbar** und (*) $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$. In der Tat ergibt die **Summe einer Obersumme** (respektive **Untersumme**) für $f|_{[a, b]}$ und $f|_{[b, c]}$ eine **Obersumme** (respektive **Untersumme**) für f . Wir

erweitern jetzt die Definition von $\int_a^b f(x) dx$ auf: $\int_a^a f(x) dx = 0$ und wenn $a < b, \int_b^a f(x) dx := -\int_a^b f(x) dx$.
 Dann gilt (*) für alle Tripel a, b, c unter den entsprechenden Integrabilitätsvoraussetzungen.

Satz 5.2.10 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein **kompaktes Intervall** mit **Endpunkten** a, b sowie $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt integrierbar** und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$.

Satz 5.3.1 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt integrierbar**, und $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Dann folgt:
 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Korollar 5.3.2 Wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt integrierbar**, folgt: $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Satz 5.3.3 (Bunjakovski 1859, Cauchy 1821, Schwarz 1885: **Cauchy-Schwarz Ungleichung**) Seien

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt integrierbar**. Dann gilt: $|\int_a^b f(x)g(x) dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$.

Satz 5.3.4 (**Mittelwertsatz**, Cauchy 1821) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. So $\exists \xi \in [a, b]$: $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$.

Satz 5.3.6 (Cauchy 1821) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wobei f **stetig**, g **beschränkt und integrierbar** mit

$g \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit: $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$.

Satz 5.4.1 (**Fundamentalsatz der Analysis**) Seien $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. Die Funktion

$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$ ist in $[a, b]$ **stetig differenzierbar** und $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Definition 5.4.2 Sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f , wenn F (**stetig**) **differenzierbar** in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.

Satz 5.4.3 (**Fundamentalsatz der Differentialrechnung**) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**. So gibt es eine **Stammfunktion** F von f , die bis auf eine additive Konstante **eindeutig** bestimmt ist und:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Satz 5.4.5 (**Partielle Integration**) Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig differenzierbar**. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Satz 5.4.6 (**Substitution**) Sei $a < b, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig differenzierbar**, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a, b]) \subseteq I$

und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige Funktion**. Dann gilt: $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt$.

Korollar 5.4.8 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**.

(1) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass das abgeschlossene Intervall mit **Endpunkten** $a+c, b+c \in I$.

Dann gilt: $\int_{a+c}^{b+c} f(x) dx = \int_a^b f(t+c) dt$.

(2) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$, so dass das abgeschlossene Intervall mit den **Endpunkten** $ac, bc \in I$.

Dann gilt: $\int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx$.

Satz 5.5.1 Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von **beschränkten, integrierbaren Funktionen**, die **gleichmässig** gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **konvergiert**. So ist f **beschränkt integrierbar** und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Korollar 5.5.2 Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge **beschränkter, integrierbarer Funktionen**, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a, b]$ **gleichmässig konvergiert**. Dann gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)) dx$.

Korollar 5.5.3 Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine **Potenzreihe** mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \leq r < \rho$, f auf $[-r, r]$ **integrierbar** und es gilt $\forall x \in]-\rho, \rho[$: $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$.

Definition 5.8.1 Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt und integrierbar** auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Wenn $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existiert, bezeichnen wir den **Grenzwert** mit $\int_a^{\infty} f(x) dx$ und sagen, dass f auf $[a, +\infty[$ **integrierbar** ist.

Lemma 5.8.3 Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt und integrierbar** auf $[a, b] \quad \forall b > a$.

(1) Wenn $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ auf $[a, \infty[$ **integrierbar** ist, ist f auf $[a, \infty[$ **integrierbar**.

(2) Wenn $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^{\infty} g(x) dx$ **divergiert**, **divergiert** auch $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Satz 5.8.5 (McLaurin 1742) Sei $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ **monoton fallend**. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ **konvergiert genau dann, wenn** $\int_1^{\infty} f(x) dx$ **konvergiert**.

Eine Situation, die zu einem **uneigentlichen Integral** führt, ist wenn $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a + \varepsilon, b], \quad \varepsilon > 0$ **beschränkt und integrierbar** ist, aber auf $]a, b]$ **nicht** notwendigerweise **beschränkt** ist.

Definition 5.8.8 In dieser Situation ist $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **integrierbar**, wenn $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ existiert. In diesem

Fall wird der **Grenzwert** mit $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet.

Definition 5.8.11 Für $s > 0$ definieren wir $\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$.

Satz 5.8.12 (Bohr-Mollerup) (1) Die **Gamma Funktion** erfüllt die Relationen:

$$(a) \quad \Gamma(1) = 1 \quad (b) \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$$

$$(c) \quad \gamma \text{ ist logarithmisch konvex, d.h. } \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda} \text{ für alle } x, y > 0 \text{ und } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

(2) Die **Gamma Funktion** ist die **einzige** Funktion $]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, die (a), (b) und (c) erfüllt.

$$\text{Darüberhinaus gilt: } \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \forall x > 0$$

Lemma 5.8.13 Sei $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $\forall a, b \geq 0$: $a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Satz 5.8.14 (**Hölder Ungleichung**) Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle **stetigen Funktionen** $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Satz 5.9.3 Seien P, Q Polynome mit $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$ und Q mit **Produktzerlegung** $(*)$ Dann gibt es

$$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R} \text{ mit: } \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{((x-a_i)^2 + \beta_i^2)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}.$$

Anhang A

Satz A.0.1 (Binomialsatz) $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geq 1$ gilt: $(x+y)^n = \sum_n kx^k y^{n-k}$.

2 Wichtige Beispiele

Ungerade und gerade Funktionen Sei $f(x)$ eine **gerade** Funktion. Dann: $f(x) = f(-x)$. Sei $g(x)$ eine **ungerade** Funktion. Dann: $-g(x) = g(-x)$. Das **Produkt** von 2 **geraden** Funktionen ist **gerade**. Das **Produkt** von 2 **ungeraden** Funktionen ist **gerade**. Das **Produkt** einer **ungeraden** und einer **geraden** Funktion, ist **ungerade**. Für **ungerade** Funktionen gilt: $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$. (Dies kann man sich graphisch vorstellen).

Konvergenztest für Reihen Gegeben: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(1) Spezieller Typ?

1.1 **Geometrische Reihe:** $\sum q^n$? **Konvergent**, wenn: $|q| < 1$.

1.2 **Alternierende Reihe:** $\sum (-1)^n a_n$? **Konvergent**, wenn: $\lim a_n = 0$.

1.3 **Riemann Zeta:** $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ **Konvergent**, wenn: $s > 1$.

1.4 **Teleskopreihe** $\sum (b_n - b_{n-1})$? **Konvergent**, wenn: $\lim b_n$ existiert.

(2) Kein spezieller Typ:

2.1 $\lim a_n = 0$? Nein: **divergent**.

2.2 **Quotientenkriterium** anwendbar?

2.3 **Wurzelkriterium** anwendbar?

2.4 Gibt es eine **konvergente Majorante**?

2.5 Gibt es eine **divergente Minorante**?

2.6 Nichts von all dem? \Rightarrow **kreativ sein**.

Beispiel 2.1.9 $b \in \mathbb{Z} : \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^b = 1$. Das folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$ und wiederholter Anwendung von **Satz 2.1.8 (2) und (3)**.

Beispiel 2.2.3 Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq q < 1$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a q^n = 0$. Wir können annehmen, dass $q > 0$. Sei

$x_n = n^a q^n$; dann folgt: $x_{n+1} = (n+1)^a q^{n+1} = (\frac{n+1}{n})^a q \cdot n^a q^n = (1 + \frac{1}{n})^a \cdot q \cdot x_n$. Also: $x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^a \cdot q \cdot x_n$.

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^a = 1$ (**Beispiel 2.1.9**), gibt es ein n_0 , so dass $(1 + \frac{1}{n})^a < \frac{1}{q} \quad \forall n \geq n_0$. Es folgt:

$x_{n+1} < x_n \quad \forall n \geq n_0$. Da für $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ die Folge nach **unten beschränkt** ist und für $n \geq n_0$ **monoton fallend** ist. Sei $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^a \cdot q x_n = q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q \cdot l$. Also $(1-q) \cdot l = 0$ woraus $l = 0$ folgt.

Beispiel 2.7.2 (Geometrische Reihe) Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ und dessen Wert ist: $\frac{1}{1-q}$.

Sei $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n$. $q \cdot S_n = q + \dots + q^n + q^{n+1}$ woraus $(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$ folgt. Es gilt

also: $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$. Nun zeigen wir die Konvergenz: $|S_n - \frac{1}{1-q}| = |\frac{-q^{n+1}}{1-q}| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$. Es folgt aus **Beispiel 2.2.3**

und $0 \leq |q| < 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - \frac{1}{1-q}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} = 0$. Somit konvergiert $(S_n)_{n \geq 1}$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

Beispiel 2.7.3 (Harmonische Reihe) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Beispiel 2.7.18 (Exponentialfunktion) Für $z \in \mathbb{C}$ betrachte die Reihe: $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ mit allgemeinem Glied

$a_n = \frac{z^n}{n!}$. Fann folgt für $z \neq 0$: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n}| = \frac{|z|}{n+1}$. Also gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$ und die Reihe konvergiert

für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren die **Exponentialfunktion**: $\exp z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Anwendung 2.7.27 (Exponentialfunktion) $\forall z, w \in \mathbb{C} : \exp(w+z) = \exp(w) \exp(z)$. Wir berechnen das Cauchy Produkt der

Reihen: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^i}{i!}, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$. Dies ist: $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^n \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{z^j}{j!})$ Woraus die Behauptung folgt.

Allgemeine Potenzen Wir können die Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus verwenden, um allgemeine Potenzen zu definieren. Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig definieren wir: $x^a := \exp(a \ln x)$.

Insbesondere: $x^0 = 1 \quad \forall x > 0$.

Riemann Zeta Funktion Sei $s > 1$ und $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Die Reihe konvergiert $\forall s > 1$

Trigonometrische Funktionen Sinusfunktion für $z \in \mathbb{C} : \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Kosinusfunktion für $z \in \mathbb{C} : \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

Tangensfunktion für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$: $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Cotangensfunktion für $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$: $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Hyperbelfunktionen $\forall x \in \mathbb{R}$: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Es gilt offensichtlich: $\cosh x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\sinh x \geq 1 \quad \forall x \in]0, +\infty[$, $\sinh(0) = 0$. Daraus folgt: \cosh ist auf $[0, \infty[$ strikt monoton wachsend, $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$. Also ist $\cosh : [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird mit $\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ bezeichnet. Unter Verwendung von $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ folgt: $\operatorname{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y \in]1, +\infty[$.

Analog zeigt man, dass $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bijektiv ist. Dessen Umkehrfunktion wird mit $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet und es gilt: $\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Für $\tanh x$ folgt: $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$. Also ist \tanh auf \mathbb{R} streng monoton wachsend und man zeigt, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$. Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion wird mit $\operatorname{artanh} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Es gilt dann: $\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1 - y^2} \quad \forall y \in]-1, 1[$.

Arcusfunktionen Beispiel 4.2.6 (1) \arcsin : Da $\sin' = \cos$ und $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt aus Korollar 4.2.5 (4), dass die Sinusfunktion auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ strikt monoton wachsend ist. Also ist $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv. Wir definieren $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ als die Umkehrfunktion von \sin . Nach Korollar 4.1.12 ist sie auf $] -1, 1[$ differenzierbar und für $y = \sin x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ folgt nach 4.1.12: $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$. Wir verwenden nun: $y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ woraus mit $\cos x > 0$ folgt: $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$. Wir erhalten also $\forall y \in]-1, 1[\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

(2) \arccos : Eine analoge Diskussion, wie in (1) zeigt, dass $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ strikt monoton fallend ist und $[0, \pi]$ auf $[-1, 1]$ bijektiv abbildet. Sei: $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ die Umkehrfunktion. Sie ist auf $] -1, 1[$ differenzierbar und $\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \forall y \in]-1, 1[$.

(3) \arctan : Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ hatten wir die Tangensfunktion definiert: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und deren Ableitung berechnet: $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Also ist \tan auf $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend mit $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$. Also ist $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-\infty, \infty[$ bijektiv. Sei $\arctan :]-\infty, \infty[\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ die

Umkehrfunktion. Dann ist \arctan differenzierbar und für $y = \tan x$: $\arctan'(y) = \cos x = \frac{1}{1 + y^2}$.

2.1 Ableitungen

$$(ax^z)' = azx^{z-1}$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = (\ln(x) + 1)e^x$$

$$(x \ln x)' = \ln(x) + 1$$

$$e^{f(x)} = e^x$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\sinh' x = \cosh x$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y \in]1, +\infty[$$

$$\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1 - y^2} \quad \forall y \in]-1, 1[$$

2.2 Integrale

$$\int x^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \quad s \neq -1 \quad \int x^s dx = \ln x + C \quad s = -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \operatorname{arsinh} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arcosh} x + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C \quad (\text{verwende } \ln x = \ln x \cdot 1)$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

$$n \geq 1 \quad I_n = \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int (ax+b)^s \, dx = \frac{1}{a(s+1)} (ax+b)^{s+1} + C \quad s \neq -1 \quad \int (ax+b)^s \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$$

2.3 Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

2.4 Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, |q| < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot q^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \dots$$