

# 1 $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

**Ordnungsvollständigkeit:** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  s. d.

(i)  $A \neq \emptyset$  (ii)  $\forall a \in A \forall b \in B \ a \leq b$

Dann:  $\exists c \in \mathbb{R}$  s.d.  $\forall a \in A \ a \leq c \leq b \ \forall b \in B$

**Korollar 1.1.7 (Archimedisches Prinzip)**

Sei  $x > 0, y \in \mathbb{R}$  Dann:  $\exists n \in \mathbb{N} \ y \leq n \cdot x$

**Satz 1.1.8**  $\forall t \geq 0, t \in \mathbb{R}$  hat  $x^2 = t$  eine Lösung in  $\mathbb{R}$

**Satz 1.1.10**  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(i)  $|x| \geq 0$

(iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$

(ii)  $|xy| = |x||y|$

(iv)  $|x + y| \geq ||x| - |y||$

**Satz 1.1.11 (Young'sche Ungleichung)**

$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

**Definition 1.1.12** Sei  $A \subset \mathbb{R}$

(i) / (ii)  $c \in \mathbb{R}$  ist eine **obere/untere Schranke** von  $A$  wenn  $\forall a \in A \ a \leq / \geq c$ .  $A$  ist **nach oben/unten beschränkt**, wenn es eine obere/untere Schranke gibt.

(iii) / (iv)  $m \in \mathbb{R}$  ist ein **Maximum/Minimum** von  $A$  wenn  $m \in A$  und  $m$  **obere/untere Schranke** von  $A$  ist.

**Satz 1.1.15** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  Sei  $A$  nach oben/unten beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere / grösste untere Schranke von  $A$ :  $c := \sup A / c := \inf A$  genannt **Supremum/Infimum** von  $A$

**Korollar 1.1.16** Seien  $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$  Wenn  $B$  **nach oben/unten beschränkt** ist, folgt  $\sup A \leq \sup B / \inf B \leq \inf A$

**Konvention:** Wenn  $A$  **nicht beschränkt** ist, definieren wir  $\sup A = +\infty$  bzw.  $\inf A = -\infty$

**Satz 1.3.4 (Fundamentalsatz der Algebra)** Sei  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{C}$  und

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

Dann

$$\exists z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C},$$

so dass

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

# 2 Folgen und Reihen

## 2.1 Grenzwert einer Folge

**Definition 2.1.1** Eine **Folge (reeller Zahlen)** ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir schreiben  $a_n$  statt  $a(n)$  und bezeichnen eine Folge mit  $(a_n)_{n \geq 1}$

**Lemma 2.1.3** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge. Dann gibt es **höchstens eine reelle Zahl  $l \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft:**  $\forall \varepsilon > 0$  ist die Menge  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]\}$  **endlich**.

**Definition 2.1.4** Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist **konvergent**, wenn es  $l \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\forall \varepsilon > 0$  die Menge  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin [l - \varepsilon, l + \varepsilon]\}$  **endlich** ist.

**Lemma 2.1.6** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge. Folgende Aussagen sind äquivalent

(1)  $(a_n)_{n \geq 1}$  **konvergiert gegen  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$**

(2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ , so dass  $|a_n - l| < \varepsilon \ \forall n \geq N$

**Satz 2.1.8** Seien  $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$  **konvergent** mit  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(1)  $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$  ist **konvergent**:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

(2)  $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$  ist **konvergent**:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(3) Sei  $\forall n \geq 1 \ b_n \neq 0$  und  $b \neq 0$ . Dann ist  $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1}$  **konvergent** und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 1} = \frac{a}{b}$

(4) Wenn  $\exists K \geq 1$  mit  $\forall n \geq K : a_n \leq b_n$ , folgt  $a \leq b$

**Beispiel 2.1.9**  $b \in \mathbb{Z} : \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^b = 1$ . Das folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$  und wiederholter Anwendung von **Satz 2.1.8 (2) und (3)**.

## 2.2 Satz von Weierstrass

**Definition 2.2.1** (1)[(2)]  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist **monoton wachsend [fallend]** wenn:  $a_n \leq [\geq] a_{n+1} \ \forall n \geq 1$

**Satz 2.2.2 (Weierstrass)** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  **monoton wachsend [fallend]** und **nach oben [unten] beschränkt**. Dann **konvergiert**  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$$

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}]$$

**Beispiel 2.2.3** Sei  $a \in \mathbb{Z}$  und  $0 \leq q < 1$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a q^n = 0.$$

Wir können annehmen, dass  $q > 0$ . Sei  $x_n = n^a q^n$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (n+1)^a q^{n+1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^a q \cdot n^a q^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n. \end{aligned}$$

Also:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n.$$

Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a = 1$  (**Beispiel 2.1.9**), gibt es ein  $n_0$ , so dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q} \ \forall n \geq n_0.$$

Es folgt:

$$x_{n+1} < x_n \ \forall n \geq n_0.$$

Da für  $x_n > 0 \ \forall n \geq 1$  die Folge nach **unten beschränkt** ist und für  $n \geq n_0$  **monoton fallend** ist.

Sei

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q x^n \\ &= q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q \cdot l. \end{aligned}$$

Also  $(1 - q) \cdot l = 0$  woraus  $l = 0$  folgt.

**Bemerkung 2.2.24** In **Beispiel 2.2.3** wird zweimal die folgende einfache Tatsache verwendet: Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine **konvergente** Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist die durch

$$b_n := a_{n+k} \ n \geq 1$$

definierte Folge **konvergent** und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

**Lemma 2.2.7 (Bernoulli Ungleichung)**

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \ \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

## 2.3 Limes superior und Limes inferior

**Limes inferior/ superior:** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine beschränkte Folge. Sei  $\forall n \geq 1$ :

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$$

$$c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

Dann folgt  $\forall n \geq 1$   $b_n \leq b_{n+1}$  (monoton wachsend) und  $c_n \geq c_{n+1}$  (monoton fallend) und beide Folgen beschränkt. Wir definieren:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

## 2.4 Cauchy Kriterium

**Lemma 2.4.1**  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert genau dann, wenn  $(a_n)_{n \geq 1}$  beschränkt und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

**Satz 2.4.2** (Cauchy Kriterium)  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist genau dann konvergent, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ ,

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

## 2.5 Satz von Bolzano-Weierstrass

**Definition 2.5.1** Ein abgeschlossenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  ist von der Form

$$(1) [a, b] \quad a \leq b \in \mathbb{R}$$

$$(3) ]-\infty, a] \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(2) [a, +\infty[ \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(4) ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$$

**Bemerkung 2.5.2** Ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n \in I$   $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in I$ .

**Bemerkung 2.5.3** Seien  $I = [a, b]$ ,  $J = [c, d]$  mit  $a \leq b$ ,  $c \leq d$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $I \subseteq J$  genau dann, wenn  $c \leq a$ ,  $b \leq d$

**Satz 2.5.5.5** (Cauchy-Cantor) Sei

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

eine Folge abgeschlossener Intervalle mit

$$\mathcal{L}(I_1) < +\infty$$

Dann gilt

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset.$$

Falls zudem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$$

gilt, enthält

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n$$

genau einen Punkt.

**Definition 2.5.7** Eine Teilfolge einer Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist eine Folge  $(b_n)_{n \geq 1}$ , wobei

$$b_n = a_{l(n)}$$

und

$$l : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$$

**Satz 2.5.9** (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

## 2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

**Definition 2.6.1** Eine Folge in  $\mathbb{R}^d$  ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Wir schreiben  $a_n$  statt  $a(n)$  und bezeichnen die Folge mit  $(a_n)_{n \geq 1}$

**Definition 2.6.2** Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathbb{R}^d$  ist konvergent, wenn  $\exists a \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$  mit

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

**Satz 2.6.3** Sei  $b = (b_1, \dots, b_d)$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nj} = b_j \quad \forall 1 \leq j \leq d$$

**Bemerkung 2.6.4** Sei  $x = (x_1, \dots, x_d)$ .

Dann ist  $\forall 1 \leq j \leq d$

$$x_j^2 \leq \sum_{i=1}^d x_i^2 = \|x\|^2 \leq d \cdot \max_{1 \leq i \leq d} x_i^2$$

woraus

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \cdot \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

folgt.

**Bemerkung 2.6.5** Eine konvergente Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathbb{R}^d$  ist beschränkt. Das heisst:  $\exists R \geq 0$  mit  $\|a_n\| \leq R \quad \forall n \geq 1$

**Satz 2.6.6** (1) Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge ist:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$  mit  $\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$ .

(2) Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

## 2.7 Reihen

**Definition 2.7.1** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent, wenn die Folge  $(S_n)_{n \geq 1}$  der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definieren wir:  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

**Beispiel 2.7.2** (Geometrische Reihe) Sei  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$ . Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Sei

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n.$$

$$q \cdot S_n = q + \dots + q^n + q^{n+1}$$

woraus

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

folgt. Es gilt also:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nun zeigen wir die Konvergenz:

$$|S_n - \frac{1}{1-q}| = \left| \frac{-q^{n+1}}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}.$$

Es folgt aus **Beispiel 2.2.3** und  $0 \leq |q| < 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - \frac{1}{1-q}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} = 0.$$

Somit konvergiert  $(S_n)_{n \geq 1}$  gegen  $\frac{1}{1-q}$ .

**Beispiel 2.7.3** (Harmonische Reihe) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

**Satz 2.7.4** Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j$  konvergent sowie  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann ist:

(1)  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) + \left( \sum_{j=1}^{\infty} b_j \right)$$

(2)  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k)$  konvergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

**Satz 2.7.5 (Cauchy Kriterium)** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist genau dann konvergent, wenn:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$  mit  $|\sum_{k=n}^m a_k| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq N$ .

**Satz 2.7.6** Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit  $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

konvergiert genau dann, wenn die Folge  $(S_n)_{n \geq 1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

**Korollar 2.7.7 (Vergleichssatz)** Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$  Reihen mit:  $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$ . Dann gelten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Die Implikationen treffen auch zu, wenn  $\exists K \geq 1$  mit  $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$

**Definition 2.7.9** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent, wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

**Satz 2.7.10** Eine absolut konvergente Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist auch konvergent und es gilt:  $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

**Satz 2.7.12 (Leibniz 1682)** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton fallend mit  $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt:

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

**Definition 2.7.14** Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  ist eine Umordnung der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wenn es eine bijektive Abbildung  $\phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  gibt, so dass  $a'_n = a_{\phi(n)}$

**Satz 2.7.16** (Dichlet 1837) Wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe mit demselben Grenzwert.

**Satz 2.7.17 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821)** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine Reihe.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

**Beispiel 2.7.18 (Exponentialfunktion)**

Für  $z \in \mathbb{C}$  betrachten wir die Reihe:

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

mit allgemeinem Glied

$$a_n = \frac{z^n}{n!}.$$

Dann folgt für  $z \neq 0$ :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Also gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$$

und die Reihe konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Wir definieren die Exponentialfunktion:

$$\exp z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

**Bemerkung 2.7.19** Das Quotientenkriterium versagt, wenn z. B. unendlich viele Glieder  $a_n$  der Reihe verschwinden (= 0 sind)

**Satz 2.7.20 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821)**

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren}$$

**Konvergenzradius**

Sei  $(c_k)_{k \geq 0}$  eine Folge (in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ). Wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

existiert, definieren wir:

$$\rho = +\infty \quad \text{wenn } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \quad \text{wenn } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0$$

**Riemann Zeta Funktion** Sei  $s > 1$  und

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Wir wissen, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert. Die Reihe konvergiert  $\forall s > 1$

**Korollar 2.7.21** Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  konvergiert absolut  $\forall |z| < \rho$  und divergiert  $\forall |z| > \rho$ .

**Definition 2.7.22**  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe  $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$ , wenn es eine Bijektion  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  gibt, mit  $b_k = a_{\sigma(k)}$ .

**Satz 2.7.23** (Cauchy 1821) Wir nehmen an, dass es  $B \geq 0$  gibt, so dass  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$ . Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \text{ und } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Und jede lineare Anordnung der Doppelreihe konvergiert absolut mit gleichem Grenzwert.

**Definition 2.7.24** Das Cauchy Produkt der Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  ist die Reihe:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} b_j \right) \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots \end{aligned}$$

**Satz 2.7.26** Falls die Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  absolut konvergieren, konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} b_j \right) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

**Anwendung 2.7.27 (Exponentialfunktion)**  $\forall z, w \in \mathbb{C}$   
 $\exp(w+z) = \exp(w) \exp(z)$ .

Wir berechnen das Cauchy Produkt der Reihen:  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^i}{i!}$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$ . Dieses ist:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{z^j}{j!} \right)$ . Woraus die Behauptung folgt.

**Satz 2.7.28** Sei  $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge. Wir nehmen an, dass:

(1)  $f(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$  existiert

(2) es eine Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty[$  gibt, so dass

2.1  $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \forall n \geq 0$

2.2  $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$  konvergiert.

Dann folgt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

**Korollar 2.7.29 (Exponentialfunktion)**  $\forall z \in \mathbb{C}$  konvergiert die Folge  $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n_{n \geq 1}$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

### 3 Stetige Funktionen

#### 3.1 Reellwertige Funktionen

**Definition 3.1.1**  $f$  ist nach [oben/unten] beschränkt wenn  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  nach [oben/unten] beschränkt ist.

**Definition 3.1.2** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D \subseteq \mathbb{R}$ , ist:

(1)[(2)] [streng] monoton wachsend, wenn

$$\forall x, y \in D \quad x \leq [<] y \Rightarrow f(x) \leq [<] f(y)$$

(3)[(4)] [streng] monoton fallend, wenn

$$\forall x, y \in D \quad x \leq [<] y \Rightarrow f(x) \geq [>] f(y)$$

(5)[(6)] [streng] monoton, wenn  $f$  [streng] monoton wachsend oder fallend ist.

#### 3.2 Stetigkeit

**Definition 3.2.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ . Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0$  stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

so dass  $\forall x \in D$  die Implikation:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt

**Definition 3.2.2** Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn sie in jedem Punkt von  $D$  stetig ist.

**Satz 3.2.4** Sei  $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  ist genau dann in  $x_0$  stetig, wenn für jede Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $D$  die folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0).$$

**Korollar 3.2.5** Seien  $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  beide stetig in  $x_0$ :

(1)  $f + g$ ,  $\lambda \cdot f$ ,  $f \cdot g$  sind stetig in  $x_0$ .

(2) Wenn  $g(x_0) \neq 0$  ist, ist

$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in  $x_0$

**Definition 3.2.6** Eine polynomielle Funktion

$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion der Form:

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

wobei:  $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ . Wenn  $a_n \neq 0$  ist, ist  $n$  der Grad von  $P$ .

**Korollar 3.2.7** Polynomielle Funktionen sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

**Korollar 3.2.8** Seien  $P, Q$  polynomielle Funktionen auf  $\mathbb{R}$  mit  $Q \neq 0$ . Seien  $x_1, \dots, x_m$  die Nullstellen von  $Q$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

stetig.

#### 3.3 Zwischenwertsatz

**Satz 3.3.1 (Zwischenwertsatz, Bolzano 1817)** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $a, b \in I$ . Für jedes  $c$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  gibt es ein  $z$  zwischen  $a$  und  $b$  mit  $f(z) = c$ .

#### 3.4 Min-Max Satz

**Definition 3.4.2** Ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  ist kompakt, wenn es von der Form  $I = [a, b]$ ,  $a \leq b$  ist.

**Lemma 3.4.3** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ . So sind  $|f|$ ,  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$  stetig in  $x_0$ .

**Lemma 3.4.4** Sei  $(x_n)_{n \geq 1}$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{R}$  mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ . Sei  $a \leq b$ . Wenn  $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$ , folgt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$ .

**Satz 3.4.5** Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf einem kompakten Intervall  $I$ . Dann gibt es  $u \in I$  und  $v \in I$  mit:  $f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$ . Insbesondere ist  $f$  beschränkt.

#### 3.5 Umkehrabbildung

**Satz 3.5.1** Seien  $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D_1 \rightarrow D_2$ ,  $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D_1$ . Wenn  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $f(x_0)$  stetig sind, so ist  $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  stetig.



**Korollar 3.5.2** Wenn in **Satz 3.5.1**  $f$  auf  $D_1$  und  $g$  auf  $D_2$  stetig sind, ist  $g \circ f$  auf  $D_1$  stetig.

**Satz 3.5.3** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, streng monoton. Dann ist  $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f^{-1} : J \rightarrow I$  ist stetig, streng monoton.

### 3.6 Reelle Exponentialfunktion

**Satz 3.6.1**  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

**Korollar 3.6.2**

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Potenzreihendarstellung von  $\exp$  folgt ausserdem:

$$\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0.$$

Wenn  $y < z$  ist, folgt (aus 2.7.27)

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(y + (z - y)) \\ &= \exp(y) \exp(z - y) \end{aligned}$$

und da  $\exp(z - y) > 1$  ist folgt folgendes Korollar:

**Korollar 3.6.3**  $\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$

**Korollar 3.6.4**  $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**Korollar 3.6.5** Der natürlich Logarithmus  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. Des weiteren gilt

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in ]0, +\infty[.$$

**Korollar 3.6.6** (1)/(2) Für  $a > / < 0$  ist

$$\begin{aligned} ]0, +\infty[ &\rightarrow ]0, +\infty[ \\ x &\mapsto x^a \end{aligned}$$

eine stetige, streng monoton wachsende/fallende Bijektion.

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$ :

$$(3) \ln(x^a) = a \ln(x) \quad (4) x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$(5) (x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

### 3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen

**Definition 3.7.1** Die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 0}$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$\forall x \in D : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

**Definition 3.7.3** (Weierstrass 1841) Die Folge  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert gleichmässig in  $D$  gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ , so dass:

$$\forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Satz 3.7.4** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktionenfolge bestehend aus (in  $D$ ) stetigen Funktionen, die (in  $D$ ) gleichmässig gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  (in  $D$ ) stetig.

**Definition 3.7.5** Eine Funktionenfolge  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleichmässig konvergent, wenn  $\forall x \in D$  der Grenzwert  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  existiert und die Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  gleichmässig gegen  $f$  konvergiert.

**Korollar 3.7.6** Die Funktionenfolge  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert genau dann gleichmässig in  $D$ , wenn:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$ , so dass  $\forall n, m \geq N$  und  $\forall x \in D$ :

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

**Korollar 3.7.7** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Wenn  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  stetig.

**Definition 3.7.8** Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  konvergiert gleichmässig (in  $D$ ), wenn die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

**Satz 3.7.9** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass  $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$  und, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmässig in  $D$  und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in  $D$  stetige Funktion.

**Definition 3.7.10** Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat positiven Konvergenzradius, wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\begin{aligned} \rho &= +\infty & \text{für } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} &= 0 \\ \rho &= \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{für } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} &> 0 \end{aligned}$$

**Satz 3.7.11** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $\rho > 0$  und

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho.$$

Dann gilt:  $\forall 0 \leq r < \rho$  konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf  $[-r, r]$ , insbesondere ist

$$f : ]-\rho, \rho[ \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig.

### 3.8 Trigonometrische Funktionen

**Satz 3.8.1**  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetige Funktionen.

**Satz 3.8.2** Sei  $z \in \mathbb{C}$

$$(1) \exp iz = \cos(z) + i \sin(z)$$

$$(2) \cos(z) = \cos(-z) \text{ und } \sin(-z) = -\sin(z)$$

$$(3) \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$(4) \sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$$

$$(5) \cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$$

$$(6) \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

**Korollar 3.8.3**  $\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$

$$\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$$

### 3.9 Die Kreiszahl $\pi$

**Satz 3.9.1** Die Sinusfunktion hat auf  $]0, +\infty[$  mindestens eine Nullstelle. Sei

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}.$$

$$(1) \sin \pi = 0, \pi \in ]2, 4[ \quad (2) \forall x \in ]0, \pi[: \sin x > 0$$

$$(3) e^{i\pi} = i$$

$$\text{Korollar 3.9.2} \quad x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$$

**Korollar 3.9.3** Sei  $x \in \mathbb{R}$

$$(1) e^{i\pi} = -1, e^{2i\pi} = 1$$

$$(2) \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$$

$$(3) \sin(x + \pi) = -\sin(x), \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$(4) \cos(x + \pi) = -\cos(x), \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Sei  $k \in \mathbb{Z}$

**(5) Nullstellen von Sinus**  $= \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in ]2k\pi, (2k+1)\pi[$$

$$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$$

**(6) Nullstellen von Cosinus**  $= \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in ]2k\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}[$$

$$\cos(x) < 0 \quad \forall x \in [(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+2)\pi - \frac{\pi}{2}[$$

### 3.10 Grenzwerte von Funktionen

**Definition 3.10.1**  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungspunkt der Menge  $D$ , wenn  $\forall \delta > 0$ :

$$([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

**Definition 3.10.3** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann ist  $A \in \mathbb{R}$  der Grenzwert von  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$ , bezeichnet mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass  $\forall x \in D \cap ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\})$ :

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

**Bemerkung 3.10.4** (1) Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

genau, dann wenn für jede Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$  folgendes gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$ .

(2) Sei  $x_0 \in D$ . Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

(3) Mittels (1) zeigt man leicht, dass wenn

$f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existieren:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

folgen.

(4) Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \leq g$ . Dann folgt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  falls beide Grenzwerte existieren.

(5) Wenn  $g_1 \leq f \leq g_2$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$ , so existiert  $l := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$

**Satz 3.10.6** Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0$  Häufungspunkt von  $D$ ,  $f : D \rightarrow E$  eine Funktion. Wir nehmen an, dass  $y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und  $y_0 \in E$ . Wenn  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  in  $y_0$  stetig ist, folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0).$$

## 4 Differenzierbare Funktionen

### 4.1 Die Ableitung

**Definition 4.1.1**  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit  $f'(x_0)$  bezeichnet.

**Bemerkung 4.1.2** Es ist oft von Vorteil in der Definition von  $f'(x_0)$ ,  $x = x_0 + h$  zu setzen, so dass:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**Satz 4.1.3** (Weierstrass 1861) Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  Häufungspunkt von  $D$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1)  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar

(2) Es gibt  $c \in \mathbb{R}$  und  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit:

$$2.1 \quad f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

$$2.2 \quad r(x_0) = 0 \text{ und } r \text{ ist stetig in } x_0$$

Wenn dies zutrifft, ist  $c = f'(x_0)$  eindeutig bestimmt.

**Satz 4.1.4** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0$  genau dann differenzierbar, wenn es eine Funktion  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, die in  $x_0$  stetig ist und  $\forall x \in D$

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0).$$

In diesem Fall gilt:

$$\phi(x) = f'(x).$$

**Korollar 4.1.5** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Wenn  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

**Definition 4.1.7**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $D$  differenzierbar, wenn für jeden Häufungspunkt  $x_0 \in D$ ,  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist.

**Satz 4.1.9** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar. Dann gelten:

(1)  $f + g$  ist in  $x_0$  differenzierbar und

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(2)  $f \cdot g$  ist in  $x_0$  differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) Wenn  $g(x_0) \neq 0$  ist, ist  $\frac{f}{g}$  in  $x_0$  differenzierbar und

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

**Satz 4.1.11** Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$ , sei  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt, sei  $f : D \rightarrow E$  eine in  $x_0$  differenzierbare Funktion, so dass  $y_0 := f(x_0)$  ein Häufungspunkt von  $E$  ist und sei  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $y_0$  differenzierbare Funktion. Dann ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

**Korollar 4.1.12** Sei  $f : D \rightarrow E$  eine **bijektive Funktion**, sei  $x_0 \in D$  ein **Häufungspunkt**. Wir nehmen an  $f$  ist in  $x_0$  **differenzierbar** und  $f'(x_0) \neq 0$ . Zudem nehmen wir an  $f^{-1}$  ist in  $y_0 = f(x_0)$  **stetig**. Dann ist  $y_0$  ein **Häufungspunkt** von  $E$ ,  $f^{-1}$  ist in  $y_0$  **differenzierbar** und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

## 4.2 Zentrale Sätze über die Ableitung

**Definition 4.2.1** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ .

(1)[(2)]  $f$  besitzt ein **lokales Maximum [Minimum]** in  $x_0$ , wenn  $\exists \delta > 0$  mit:

$$f(x) \leq [\geq] f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap D$$

(3)  $f$  besitzt ein **lokales Extremum** in  $x_0$ , wenn es ein **lokales Minimum oder Maximum** ist.

**Satz 4.2.2** Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in ]a, b[$ . Wir nehmen an,  $f$  ist in  $x_0$  **differenzierbar**.

(1) Wenn  $f'(x_0) > 0$  ist,  $\exists \delta > 0$  mit:

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$$

(2) Wenn  $f'(x_0) < 0$  ist,  $\exists \delta > 0$  mit:

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$$

(3) Wenn  $f$  in  $x_0$  ein **lokales Extremum** besitzt, folgt

$$f'(x_0) = 0.$$

**Satz 4.2.3** (Rolle 1690) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  **differenzierbar**. Wenn  $f(a) = f(b)$ , so gibt es  $\xi \in ]a, b[$  mit:

$$f'(\xi) = 0.$$

**Satz 4.2.4** (Lagrange 1797) Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  **differenzierbar**. Es gibt  $\xi \in ]a, b[$  mit:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

**Korollar 4.2.5** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  **differenzierbar**.

(1) Wenn  $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[$  ist, ist  $f$  **konstant**.

(2) Wenn  $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in ]a, b[$  ist, gibt es  $c \in \mathbb{R}$  mit:

$$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b].$$

(3)[(4)] Wenn  $f'(\xi) \geq [\geq] 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[$  ist, ist  $f$  auf  $[a, b]$  **[strikt] monoton wachsend**.

(5)[(6)] Wenn  $f'(\xi) \leq [\leq] 0 \quad \forall \xi \in ]a, b[$  ist, ist  $f$  auf  $[a, b]$  **[strikt] monoton fallend**.

(7) Wenn es  $M \geq 0$  gibt, mit:  $|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in ]a, b[$ , folgt  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

**Beispiel 4.2.6** (1) **arcsin** Da  $\sin' = \cos$  und

$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  folgt aus **Korollar 4.2.5**

(4), dass die Sinusfunktion auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  strikt monoton wachsend ist. Also ist  $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  bijektiv. Wir definieren:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

als die Umkehrfunktion von  $\sin$ . Nach **Korollar 4.1.12** ist sie auf  $] -1, 1[$  differenzierbar und für  $y = \sin x$ ,  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  folgt nach **4.1.12**:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Wir verwenden nun:

$$y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

woraus mit  $\cos x > 0$  folgt:  $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$ . Wir erhalten also  $\forall y \in ]-1, 1[$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(2) **arccos** Eine analoge Diskussion, wie in (1) zeigt, dass  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  strikt monoton fallend ist und  $[0, \pi]$  auf  $[-1, 1]$  bijektiv abbildet. Sei:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

die Umkehrfunktion. Sie ist auf  $] -1, 1[$  differenzierbar und

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \forall y \in ]-1, 1[.$$

(3) **arctan** Für  $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$  hatten wir die Tangensfunktion definiert:  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  und deren Ableitung

berechnet:  $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Also ist  $\tan$  auf  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  streng monoton wachsend mit  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ . Also ist  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]-\infty, \infty[$  bijektiv. Sei

$$\arctan : ]-\infty, \infty[ \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

die Umkehrfunktion. Dann ist **arctan** differenzierbar und für  $y = \tan x$ :

$$\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}.$$

**Satz 4.2.9** (Cauchy) Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  **differenzierbar**. Es gibt  $\xi \in ]a, b[$  mit:

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Wenn  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$  ist, folgt:

$$g(a) \neq g(b) \text{ und } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

**Satz 4.2.10** (Bernoulli 1691/92, de l'Hôpital 1696) Seien  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[.$$

Wenn

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Bemerkung 4.2.11** Der Satz gilt auch wenn:

$$b = +\infty \quad \lambda = +\infty \quad x \rightarrow a^+$$

**Definition 4.2.13** (1)  $f$  ist **konvex** (auf  $I$ ), wenn  $\forall x, y \in I$ ,  $x \leq y$  und  $\lambda \in [0, 1]$  folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

(2)  $f$  ist **streng konvex**, wenn  $\forall x, y \in I$ ,  $x < y$  und  $\lambda \in ]0, 1[$  folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

**Bemerkung 4.2.14** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  **konvex**. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass  $\forall n \geq 1$ ,  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq I$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  in  $[0, 1]$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  folgendes gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

**Lemma 4.2.15** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion. Die Funktion  $f$  ist **genau dann konvex**, wenn  $\forall x_0 < x < x_1$  in  $I$  folgendes gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

**Satz 4.2.16** Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar.  $f$  ist genau dann (streng) konvex, wenn  $f'$  (streng) monoton wachsend ist.

**Korollar 4.2.17** Sei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar in  $]a, b[$ .  $f$  ist (streng) konvex, wenn  $f'' \geq 0$  (bzw.  $f'' > 0$ ) auf  $]a, b[$ .

### 4.3 Höhere Ableitungen

**Definition 4.3.1** (1) Für  $n \geq 2$  ist  $f$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$ , wenn  $f^{(n-1)}$  in  $D$  differenzierbar ist. Dann ist  $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$  und nennt sich die  $n$ -te Ableitung von  $f$ .

(2)  $f$  ist  $n$ -mal stetig differenzierbar in  $D$ , wenn  $f$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$  &  $f^{(n)}$  in  $D$  stetig ist.

(3) Die Funktion  $f$  ist in  $D$  **glatt**, wenn sie  $\forall n \geq 1$   $n$ -mal differenzierbar ist.

**Bemerkung 4.3.2** Es folgt aus **Korollar 4.1.5**, dass für  $n \geq 1$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar ist.

**Satz 4.3.3** (analog zu Satz 4.1.9) Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  wie in Definition 4.3.1,  $n \geq 1$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$ .

(1)  $f + g$  ist  $n$ -mal differenzierbar und

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

(2)  $f \cdot g$  ist  $n$ -mal differenzierbar und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

**Satz 4.3.5** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  wie in Definition 4.3.1,  $n \geq 1$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$ . Wenn  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$  ist, ist  $\frac{f}{g}$  in  $D$   $n$ -mal differenzierbar.

**Satz 4.3.6** Seien  $E, D \subseteq \mathbb{R}$  Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien  $f : D \rightarrow E$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar. Dann ist  $f \circ g$   $n$ -mal differenzierbar und

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x) (g^{(k)} \circ f)(x)$$

wobei  $A_{n,k}$  ein Polynom in den Funktionen  $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$  ist.

### 4.4 Potenzreihen & Taylor Approximation

**Satz 4.4.1** Seien  $f_n : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktionenfolge wobei  $f_n$  einmal in  $]a, b[$   $\forall n \geq 1$  stetig differenzierbar ist. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge  $(f_n)_{n \geq 1}$  wie auch  $(f'_n)_{n \geq 1}$  gleichmäßig in  $]a, b[$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = p$  konvergieren. Dann ist  $f$  stetig differenzierbar und  $f' = p$ .

**Satz 4.4.2** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

auf  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[.$$

**Korollar 4.4.3** Unter der Voraussetzung von Satz 4.4.1 ist  $f$  auf  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  **glatt** und

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}.$$

Insbesondere ist

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}.$$

**Satz 4.4.5** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$   $(n+1)$ -mal differenzierbar. Für jedes  $a < x \leq b$  gibt es  $\xi \in ]a, x[$  mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

**Korollar 4.4.6** (Taylor Approximation)

Sei  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]c, d[$   $(n+1)$ -mal differenzierbar. Sei  $c < a < d$ .  $\forall x \in [c, d] \exists \xi$  zwischen  $x$  und  $a$ , so dass:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

**Korollar 4.4.7** Sei  $n \geq 0$ ,  $a < x_0 < b$  und

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $]a, b[$   $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar. Annahme:  $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ .

(1) Wenn  $n$  gerade ist und  $x_0$  eine lokale Extremalstelle ist, folgt  $f^{(n+1)}(x_0) = 0$ .

(2) Wenn  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$  ist, ist  $x_0$  eine strikt lokale Minimalstelle.

(3) Wenn  $n$  ungerade ist und  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$  ist, ist  $x_0$  eine strikt lokale Maximalstelle.

**Korollar 4.4.8** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  zweimal stetig differenzierbar. Sei  $a < x_0 < b$ . Annahme:  $f'(x_0) = 0$ .

(1) Wenn  $f^{(2)}(x_0) > 0$  ist, ist  $x_0$  eine strikt lokale Minimalstelle.

(2) Wenn  $f^{(2)}(x_0) < 0$  ist, ist  $x_0$  eine strikt lokale Maximalstelle.

## 5 Riemann Integral

### 5.1 Definition und Integrabilitätskriterien

**Definition 5.1.1** Eine Partition von  $I$  ist eine endliche Teilmenge  $P \subseteq [a, b]$  wobei  $\{a, b\} \subseteq P$ . Es gilt:  $n := \text{card } P - 1 \geq 1$  und es gibt genau eine Bijektion

$$\{0, 1, 2, \dots, n\} \rightarrow P$$

$$j \mapsto x_j$$

mit der Eigenschaft  $i < j \implies x_i < x_j$ .

Eine Partition  $P'$  ist eine **Verfeinerung** von  $P$ , wenn



$P \subset P'$ . Offensichtlich ist die **Vereinigung**  $P_1 \cup P_2$  **zweier Partitionen** wieder **eine Partition**. Insbesondere haben **zwei Partitionen** immer eine **gemeinsame Vereinigung**. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine **beschränkte Funktion**, das heisst es gibt  $M \geq 0$  mit  $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ .

Sei  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine **Partition** von  $I$ . Insbesondere gilt:  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

**Länge des Teilintervalls**  $[x_{i-1}, x_i]$  mit  $i \geq 1$

$$\delta_i := x_i - x_{i-1}$$

**Untersumme**  $s(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i$ ,  $f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

**Obersumme**  $S(f, P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i$ ,  $F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

**Lemma 5.1.2** (1) Sei  $P'$  eine **Verfeinerung** von  $P$ .

Dann gilt:

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

(2) Für beliebige Partitionen  $P_1, P_2$  gilt:

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Sei  $\mathcal{P}(I)$  die **Menge der Partitionen** von  $I$ . Wir definieren:

$$s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$$

$$S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$$

**Definition 5.1.3** Eine **beschränkte Funktion**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist **(Riemann) integrierbar**, wenn

$$s(f) = S(f).$$

In diesem Fall bezeichnen wir den **gemeinsamen Wert** von  $s(f)$  und  $S(f)$  mit

$$\int_a^b f(x) dx.$$

**Satz 5.1.4** Eine **beschränkte Funktion** ist genau dann integrierbar, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}(I)$ :

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

**Satz 5.1.8** (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875) Eine **beschränkte Funktion**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist **genau dann integrierbar**, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass:  $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I)$ ,

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Hier bezeichnet  $\mathcal{P}_\delta(I)$  die **Menge der Partitionen**  $P$ , für welche  $\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \leq \delta$ .

**Korollar 5.1.9** Die **beschränkte Funktion**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist **genau dann integrierbar** mit

$$A := \int_a^b f(x) dx,$$

wenn:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass  $\forall P \in \mathcal{P}(I)$  mit  $\delta(P) < \delta$  und  $\xi_1, \dots, \xi_n$  mit  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$|A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon.$$

## 5.2 Integrierbare Funktionen

**Satz 5.2.1** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **beschränkt, integrierbar** und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind  $f + g$ ,  $\lambda \cdot f$ ,  $f \cdot g$ ,  $|f|$ ,  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$  und (falls  $|g(x)| \geq \beta > 0$   $\forall x \in [a, b]$ )  $\frac{f}{g}$  **integrierbar**.

**Bemerkung 5.2.2** Sei  $\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  eine **beschränkte Funktion**. Dann ist

$$(*) \quad \sup_{x, y \in [c, d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x \in [c, d]} \phi(x) - \inf_{x \in [c, d]} \phi(x).$$

Einerseits gilt offensichtlich  $\forall x, y \in [c, d]$ :

$$\phi(x) \leq \sup_{[c, d]} \phi, \quad \phi(y) \geq \inf_{[c, d]} \phi$$

also ist

$$\phi(x) - \phi(y) \leq \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi,$$

woraus durch vertauschen von  $x, y$  folgt:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi.$$

Andererseits sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $\xi \in [c, d]$  und  $\eta \in [c, d]$   $\phi(\xi) > \varepsilon$  und  $\phi(\eta) < \inf_{[c, d]} \phi + \varepsilon$  woraus

$$\phi(\xi) - \phi(\eta) > \sup_{[c, d]} \phi - \inf_{[c, d]} \phi - 2\varepsilon$$

folgt. Dies zeigt die Aussage  $(*)$

**Korollar 5.2.3** Seien  $P, Q$  Polynome und  $[a, b]$  ein **Intervall** in dem  $Q$  **keine Nullstelle** besitzt. Dann ist

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

**integrierbar**.

**Definition 5.2.4** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  ist in  $D$  **gleichmässig stetig**, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D$ :

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Satz 5.2.6** (Heine 1872) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **stetig** in dem kompakten Intervall  $[a, b]$ . Dann ist  $f$  in  $[a, b]$  **gleichmässig stetig**.

**Satz 5.2.7** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **stetig**.  $f$  ist **integrierbar**.

**Satz 5.2.8**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **monoton**  $\implies f$  **integrierbar**.

**Bemerkung 5.2.9** Seien  $a < b < c$  und  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  **beschränkt** mit  $f|_{[a, b]}$  und  $f|_{[b, c]}$  **integrierbar**. Dann ist  $f$  integrierbar und

$$(*) \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

In der Tat ergibt die **Summe einer Obersumme (respektive Untersumme)** für  $f|_{[a, b]}$  und  $f|_{[b, c]}$  eine **Obersumme (respektive Untersumme)** für  $f$ . Wir erweitern jetzt die Definition von  $\int_a^b f(x) dx$  auf:  $\int_a^a f(x) dx = 0$  und wenn  $a < b$

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

Dann gilt  $(*)$  für alle Tripel  $a, b, c$  unter den entsprechenden Integrabilitätsvoraussetzungen.

**Satz 5.2.10** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein **kompaktes Intervall** mit **Endpunkten**  $a, b$  sowie  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  **beschränkt integrierbar** und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

### 5.3 Ungleichungen & Mittelwertsatz

**Satz 5.3.1** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar, und  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ . Dann folgt:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**Korollar 5.3.2** Wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar, folgt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Satz 5.3.3** (Cauchy-Schwarz Ungleichung) Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt integrierbar. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

**Satz 5.3.4** (Mittelwertsatz, Cauchy 1821) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. So  $\exists \xi \in [a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

**Satz 5.3.6** (Cauchy 1821) Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wobei  $f$  stetig,  $g$  beschränkt und integrierbar mit  $g \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ . Dann gibt es  $\xi \in [a, b]$  mit:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

### 5.4 Fundamentalsatz Differentialrechnung

**Satz 5.4.1** (Fundamentalsatz der Analysis) Seien  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist in  $[a, b]$  stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

**Definition 5.4.2** Sei  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Eine Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **Stammfunktion** von  $f$ , wenn  $F$  (stetig) differenzierbar in  $[a, b]$  ist und  $F' = f$  in  $[a, b]$  gilt.

**Satz 5.4.3** (Fundamentalsatz Differentialrechnung) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. So gibt es eine **Stammfunktion**  $F$  von  $f$ , die bis auf eine additive Konstante ein-

deutig bestimmt ist und:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Satz 5.4.5** (Partielle Integration) Seien  $a < b \in \mathbb{R}$  und  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

**Satz 5.4.6** (Substitution) Sei  $a < b$ ,  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $\phi([a, b]) \subseteq I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt$$

**Korollar 5.4.8** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

(1) Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , so dass das abgeschlossene Intervall mit **Endpunkten**  $a+c, b+c \in I$ . Dann gilt:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x) dx = \int_a^b f(t+c) dt$$

(2) Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $c \neq 0$ , so dass das abgeschlossene Intervall mit den **Endpunkten**  $ac, bc \in I$ . Dann gilt:

$$\int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx$$

### 5.5 Integration konvergenter Reihen

**Satz 5.5.1** Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. So ist  $f$  beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Korollar 5.5.2** Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge beschränkter, integrierbarer Funktionen, so dass  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  auf  $[a, b]$  gleichmässig konvergiert. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

**Korollar 5.5.3** Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist für jedes  $0 \leq r < \rho$ ,  $f$  auf  $[-r, r]$  integrierbar und es gilt  $\forall x \in ]-\rho, \rho[$ :

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

### 5.8 Uneigentliche Integrale

**Definition 5.8.1** Sei  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b]$  für alle  $b > a$ . Wenn

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

existiert, bezeichnen wir den **Grenzwert** mit

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

und sagen, dass  $f$  auf  $[a, +\infty[$  integrierbar ist.

**Lemma 5.8.3** Sei  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b] \quad \forall b > a$ .

(1) Wenn  $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$  und  $g(x)$  auf  $[a, \infty[$  integrierbar ist, ist  $f$  auf  $[a, \infty[$  integrierbar.

(2) Wenn  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  und  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  divergiert, divergiert auch  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .

**Satz 5.8.5** (McLaurin 1742) Sei  $f : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  monoton fallend. Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  konvergiert genau dann, wenn  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  konvergiert.

Eine Situation, die zu einem **uneigentlichen Integral** führt, ist wenn  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Intervall  $[a+\varepsilon, b]$ ,  $\varepsilon > 0$  beschränkt und integrierbar ist, aber auf  $]a, b]$  nicht notwendigerweise beschränkt ist.

**Definition 5.8.8** In dieser Situation ist

$$f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar, wenn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

existiert. In diesem Fall wird der **Grenzwert** mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet.

**Definition 5.8.11** Für  $s > 0$  definieren wir

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx.$$

**Satz 5.8.12 (Bohr-Mollerup)**

(1) Die **Gamma Funktion** erfüllt die Relationen:

(a)  $\Gamma(1) = 1$       (b)  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$

(c)  $\gamma$  ist **logarithmisch konvex**, d.h.

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle  $x, y > 0$  und  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

(2) Die **Gamma Funktion** ist die **einzige** Funktion  $]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$ , die (a), (b) und (c) erfüllt. Darüberhinaus gilt:  $\forall x > 0$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

**Lemma 5.8.13** Sei  $p > 1$  und  $q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt  $\forall a, b \geq 0$ :

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

**Satz 5.8.14 (Hölder Ungleichung)** Seien  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Für **alle stetigen Funktionen**  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

## 5.9 Das unbestimmte Integral

**Satz 5.9.3** Seien  $P, Q$  **Polynome** mit  $\deg(P) < \deg(Q)$  und  $Q$  mit **Produktzerlegung**  $(*)$  Dann gibt es  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$  mit:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{((x-a_i)^2 + \beta_i^2)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}$$

## 6 Anhang A

**Satz A.0.1 (Binomialsatz)**  $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geq 1$  gilt:

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

## 7 Wichtige Beispiele

### 7.1 Gerade und ungerade Funktionen

Sei  $f(x)$  eine **gerade** Funktion. Dann:

$$f(x) = f(-x)$$

Sei  $g(x)$  eine **ungerade** Funktion. Dann:

$$-g(x) = g(-x)$$

Das **Produkt** von **2 geraden** Funktionen ist **gerade**. Das **Produkt** von **2 ungeraden** Funktionen ist **gerade**. Das **Produkt** einer **ungeraden** und einer **geraden** Funktion, ist **ungerade**. Für **ungerade** Funktionen gilt:

$$\int_{-a}^{+a} g(x) dx = 0.$$

(Dies kann man sich graphisch vorstellen).

### 7.2 Konvergenztest für Reihen

Gegeben:  $\sum_{n=0}^\infty a_n$

(1) Spezieller Typ?

**1.1 Geometrische Reihe:**  $\sum q^n$ ? **Konvergent**, wenn:  $|q| < 1$ .

**1.2 Alternierende Reihe:**  $\sum (-1)^n a_n$ ? **Konvergent**, wenn:  $\lim a_n = 0$ .

**1.3 Riemann Zeta:**  $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$  **Konvergent**, wenn:  $s > 1$ .

**1.4 Teleskopreihe**  $\sum (b_n - b_{n-1})$ ? **Konvergent**, wenn:  $\lim b_n$  existiert.

(2) Kein spezieller Typ:

**2.1**  $\lim a_n = 0$ ? Nein: **divergent**.

**2.2 Quotientenkriterium** anwendbar?

**2.3 Wurzelkriterium** anwendbar?

**2.4** Gibt es eine **konvergente Majorante**?

**2.5** Gibt es eine **divergente Minorante**?

**2.6** Nichts von all dem?

$\Rightarrow$  **kreativ sein**.

### 7.3 Trigonometrische Funktionen

**Sinusfunktion** für  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**Kosinusfunktion** für  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

**Tangensfunktion** für  $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ :

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

**Cotangensfunktion** für  $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$ :

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

### 7.4 Hyperbelfunktionen

$\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Es gilt offensichtlich:

$$\cosh x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x \geq 1 \quad \forall x \in ]0, +\infty[$$

$$\sinh 0 = 0$$

Daraus folgt: **cosh** ist auf  $[0, \infty[$  strikt monoton wachsend,  $\cosh(0) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$ . Also ist **cosh** :  $[0, \infty[ \rightarrow [1, \infty[$  bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$$

bezeichnet. Unter Verwendung von

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt:

$$\operatorname{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad \forall y \in ]1, +\infty[$$

Analog zeigt man, dass **sinh** :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend und bijektiv ist. Dessen Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet und es gilt:

$$\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Für **tanh x** folgt:

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$$

Also ist  $\tanh$  auf  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend und man zeigt, dass

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1.$$

Die Funktion  $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{artanh} : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet. Es gilt dann:

$$\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in ]-1, 1[$$

## 7.5 Ableitungen

$$(ax^z)' = azx^{z-1}$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = (\ln(x) + 1)e^x$$

$$(x \ln x)' = \ln(x) + 1$$

$$e^{f(x)} = e^x$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sinh' x = \cosh x$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\operatorname{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \forall y \in ]1, +\infty[$$

$$\operatorname{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in ]-1, 1[$$

## 7.6 Integrale

$$\int x^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C \quad s \neq -1 \quad \int x^s dx = \ln x + C \quad s = -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad (\text{verwende } \ln x = \ln x \cdot 1)$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

$$n \geq 1 \quad I_n = \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int (ax+b)^s dx = \frac{1}{a(s+1)} (ax+b)^{s+1} + C \quad s \neq -1$$

$$\int (ax+b)^s dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$$

## 7.7 Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

## 7.8 Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, |q| < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot q^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \dots$$