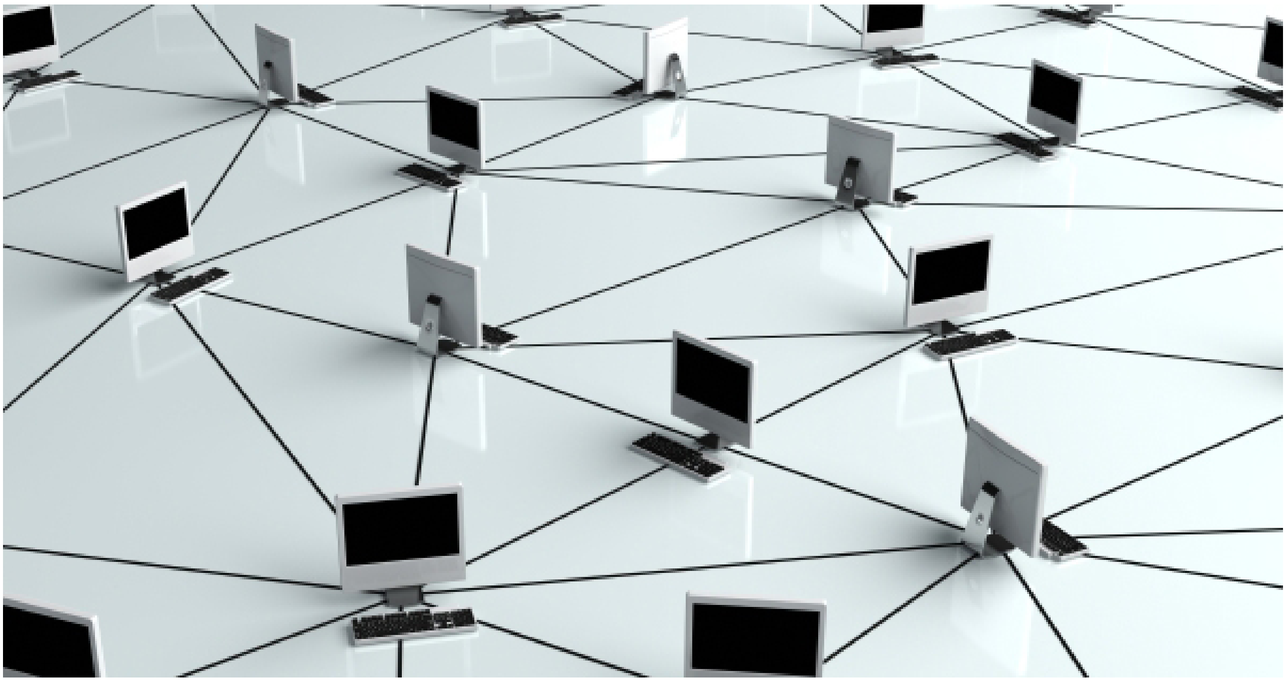
Instituto Superior Técnico

Trabalho de Matemática Computacional (LERC + LEE 2014/2015)



A parte computacional deve ser efectuada em Octave (ou Matlab).

A entrega é através do Fenix até ao dia 19 de Dezembro de 2014 às 23 **horas e** 55 **minutos. Deverão submeter um** `zip` **contendo o relatório em formato** `pdf` **e o código utilizado em formato de ficheiro Octave (Matlab) com a extensão** `.m` **de acordo com o que se pede em cada pergunta. Os grupos que entregarem o trabalho até ao dia** 20 **de Outubro de** 2014 **terão um bónus de** 0.5 **valores, se a nota sem bónus for igual ou superior a** 2.5 **valores, com a nota do trabalho não excedendo** 5 **valores.**

Detecção de cópias: *a entrega de um projecto pressupõe o compromisso de honra que o trabalho incluso foi realizado pelos alunos referenciados no relatório para avaliação. A quebra deste compromisso, ou seja a tentativa de um grupo se apropriar de trabalho realizado por colegas, tem como consequência a reprovação de todos os alunos envolvidos (incluindo os que possibilitaram a ocorrência) à disciplina de Matemática Computacional neste ano lectivo.*

1. Considere um sistema de encaminhamento e processamento de pacotes em que os pacotes chegam através de uma rede com três filas com capacidade limitada. Cada pacote precisa de um tempo fixo de processamento seguido de um processo de ordenação que processa algumas das mensagens.

   O objectivo é expressar a parte do encaminhamento do sistema como uma função linear de regressão e depois comparar o metamodelo (função ajustada) com o modelo de simulação original. A análise é realizada em termos do tempo médio no sistema (resposta), em relação ao tempo médio entre chegadas (variável de decisão). O tempo médio entre chegadas relevante está no intervalo $[1; 2]$ (região experimental).

   O metamodelo constrói-se em termos da mesma resposta (tempo médio no sistema, Y), mesma variável de decisão (tempo médio entre chegadas, X), e região experimental $[1; 2]$. Considerem-se $n = 14$ pontos experimentais $\{X_i : i = 1, 14\} = \{1.0, 1.05,\ 1.1,\ 1.15,\ 1.2,\ 1.25,\ 1.3,\ 1.4,\ 1.5,\ 1.6,\ 1.7,\ 1.8,\ 1.9,\ 2.0\}$, com passos mais curtos onde a variação da resposta é maior.

   Construa um metamodelo adequado utilizando o método dos mínimos quadrados e calcule o erro associado. Justifique a escolha da função aproximadora que utilizou. Os dados para a construção encontram-se na tabela seguinte:

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	1.00	26.0000	8	1.40	46.6170
2	1.05	19.6880	9	1.50	69.0938
3	1.10	32.6642	10	1.60	74.4054
4	1.15	22.9469	11	1.70	98.7041
5	1.20	41.5549	12	1.80	102.6395
6	1.25	28.5068	13	1.90	131.8577
7	1.30	45.8218	14	2.00	149.0000

2. Considere a equação

$$2\log(1 + x^2) - 2x^2 + c = 0 \tag{1}$$

   onde a constante c é calculada da seguinte forma

$$c = r + 0.5$$

   sendo r um número real que resulta de dividir o número do grupo por 2.

   (a) Calcule c.

   (b) Escolha um intervalo de números reais onde a equação tenha solução única e para esse intervalo demonstre a existência e unicidade de solução nesse intervalo.

(c) Use o método da bissecção para aproximar a solução com uma precisão de 10^{-6}.

(d) Use o método de Newton para aproximar a solução com uma precisão de 10^{-6}.

(e) Para cada método, represente graficamente os erros ao longo das iteradas, numa escala apropriada, e faça uma tabela contendo as iteradas, as aproximações e os erros respectivos.

(f) Com base nos resultados experimentais e na teoria sobre os dois métodos utilizados comente a experiência efectuada.

(g) Justifique teoricamente a convergência do método de Newton no intervalo que escolheu na 2ª alínea. Que pode dizer quanto à monotonia das aproximações?

3. Pretende-se resolver o sistema pelo método de Jacobi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \\ c \\ c \\ c \end{bmatrix}$$

onde a constante c é a mesma da equação (1)

(a) Para este sistema determine a matriz $\mathbf{C}^3$ em que $\mathbf{C}$ é a matriz presente na representação matricial do método de Jacobi. Com o auxílio do Matlab justifique teoricamente que o método converge.

(b) Escolhendo para aproximação inicial o vector zero, efectue iterações até que o erro $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2$ seja menor que 10^{-3}. Para estimar o erro use a estimativa da alínea seguinte.

(c) Sabendo que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 \leq \frac{\beta}{1-\beta}\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2$$

em que $\beta = \|\mathbf{C}\|_2 < 1$ e $\mathbf{x}$ é a solução do sistema, represente graficamente e numa escala adequada o erro em função da iterada. Comente.

(d) Mostre a seguinte majoração para o erro da iterada k

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-3)}\|_2$$

em que $\alpha = \|\mathbf{C}^3\|_2 < 1$ e $\mathbf{x}$ é a solução do sistema. Utilize a majoração anterior para obter um majorante do erro da iterada obtida ao fim de 50 iterações.

(e) Sem efectuar iterações, ao fim de quantas iterações prevê que poderemos ter uma aproximação da solução com um erro inferior a 10^{-4}?