

TEORÍA DE ALGORITMOS
(75.29) CURSO BUCHWALD - GENENDER

Trabajo Práctico

Juegos de Hermanos

3 de diciembre de 2024

Franco Rodriguez
108799

Juan Patricio Amboage
106892

Joaquin Ordoñez
108865

Santiago Antón
107542

Amparo Zanardi
108360

Índice

1. Introducción y primeros años	4
1.1. Análisis del problema	4
1.2. Demostración de optimalidad	4
1.2.1. Demostración por contradicción	4
1.3. Solución Propuesta	5
1.3.1. Implementacion	5
1.3.2. Análisis de complejidad	5
1.4. Análisis de variabilidad	5
1.5. Ejemplos de ejecución	5
1.5.1. Ejemplo 1	5
1.5.2. Ejemplo 2	7
1.5.3. Ejemplo 3	8
1.6. Mediciones	9
1.7. Conclusiones	10
2. Mateo empieza a Jugar	11
2.1. Análisis del problema y elaboración de la ecuación de recurrencia ¿Encuentra siempre la solución óptima?	11
2.2. Algoritmo y Complejidad	14
2.3. Mediciones Empíricas de Complejidad	15
2.4. Conclusión	16
3. Tercera parte: Cambios	17
3.1. “BatallaNaval” $\in NP$.	17
3.1.1. Certificador	17
3.1.2. Complejidad	18
3.2. “BatallaNaval” $\in NP - C$.	19
3.2.1. 3-Partition	19
3.2.2. Entradas y Salidas	20
3.2.3. $3 - Partition \leq BatallaNaval$	20
3.2.4. Complejidad	21
3.2.5. Ejemplo	21
3.3. Resolución de <i>BatallaNaval</i> por Backtracking	22
3.3.1. Implementación	22
3.3.2. Sets de datos	26
3.3.3. Mediciones	29
3.4. Resolución de <i>BatallaNaval</i> por Aproximación	31
3.4.1. ¿Es buena aproximación?	31
3.4.2. Implementación	31
3.4.3. Análisis de complejidad	32

3.4.4. Cálculo de la cota del algoritmo.	33
3.5. Resolución de <i>BatallaNaval</i> por Greedy	34
3.5.1. Implementación	34
3.5.2. Análisis de complejidad	36
3.5.3. Mediciones	37
3.5.4. Conclusiones	39
3.6. Conclusiones	39
4. Observaciones	40

1. Introducción y primeros años

Cuando Mateo nació, Sophia estaba muy contenta. Finalmente tendría un hermano con quien jugar. Sophi tenía 3 años cuando Mateo nació. Ya desde muy chicos, ella jugaba mucho con su hermano.

Pasaron los años, y fueron cambiando los juegos. Cuando Mateo cumplió 4 años, el padre de ambos le explicó un juego a Sophia: Se dispone una fila de n monedas, de diferentes valores. En cada turno, un jugador debe elegir alguna moneda. Pero no puede elegir cualquiera: solo puede elegir o bien la primera de la fila, o bien la última. Al elegirla, la remueve de la fila, y le toca luego al otro jugador, quien debe elegir otra moneda siguiendo la misma regla. Siguen agarrando monedas hasta que no quede ninguna. Quien gane será quien tenga el mayor valor acumulado (por sumatoria).

El problema es que Mateo es aún pequeño para entender cómo funciona esto, por lo que Sophia debe elegir las monedas por él. Digamos, Mateo está “jugando”. Aquí surge otro problema: Sophia es muy competitiva. Será buena hermana, pero no se va a dejar ganar (consideremos que tiene 7 nada más). Todo lo contrario. En la primaria aprendió algunas cosas sobre algoritmos greedy, y lo va a aplicar.

1.1. Análisis del problema

El problema consiste en maximizar el valor acumulado de Sophia, y minimizar el de Mateo. Por lo tanto, Sophia debe tomar la moneda de mayor valor en su turno, y la de menor valor en el turno de Mateo; de esta manera siempre ganará.

El algoritmo itera n veces para n monedas, y divide los turnos entre pares e impares, ya que como Sophia siempre comienza le corresponden los turnos pares. Sophia toma la moneda más grande entre la primera y la última de la fila y la agrega a su colección. Para el turno de Mateo, Sophia hace lo mismo pero con la moneda más chica y la colección de Mateo. El algoritmo es greedy porque en cada turno toma la mejor decisión local posible: la moneda de mayor valor disponible para Sophia y la de menor valor para Mateo. Esto asegura que cada turno contribuya de manera óptima al objetivo global.

1.2. Demostración de optimalidad

1.2.1. Demostración por contradicción

¿existe otra estrategia que pueda ser mejor para Sophia? Teniendo en cuenta que solo puede tomar la primera o la última moneda, y con el algoritmo propuesto actualmente toma la de mayor valor, la única otra estrategia posible es que tome la moneda de menor valor. Esto no es óptimo ya que no maximiza su ganancia ni minimiza la de Mateo, por lo tanto, no existe otra estrategia greedy que pueda ser mejor.

1.3. Solución Propuesta

1.3.1. Implementacion

```
1
2 def monedas(arr, arr_soph, arr_mat):
3     izq = 0
4     der = len(arr) - 1
5     res = ""
6     for i in range(len(arr)):
7         prim = arr[izq]
8         ult = arr[der]
9         if i % 2 == 0:
10             if prim > ult:
11                 res += "Primera moneda para Sophia; "
12                 arr_soph.append(prim)
13                 izq += 1
14             else:
15                 res += "ltima moneda para Sophia; "
16                 arr_soph.append(ult)
17                 der -= 1
18         else:
19             if arr[izq] < arr[der]:
20                 res += "Primera moneda para Mateo; "
21                 arr_mat.append(prim)
22                 izq += 1
23             else:
24                 res += "ltima moneda para Mateo; "
25                 arr_mat.append(ult)
26                 der -= 1
27     return res[:-2]
```

1.3.2. Análisis de complejidad

El algoritmo itera n veces, siendo n la cantidad de monedas, ya que por cada moneda hay un turno.

En cada iteración se toma una decisión en $\mathcal{O}(1)$ entre elegir la primera o última moneda de la fila, por lo tanto, su complejidad es $\mathcal{O}(n)$.

1.4. Análisis de variabilidad

La variabilidad de los valores de las monedas no influye en los tiempos del algoritmo, ya que únicamente se comparan las dos, para ver cuál de las dos es la de mayor o menor valor.

El algoritmo sigue siendo óptimo para cualquier variabilidad de los valores de las monedas, ya que no importa si la diferencia entre los valores son muy grandes o pequeños, siempre se tomará la decisión que maximice la ganancia de Sophia en cada turno. Está diseñado para garantizar la mejor opción en cada turno para Sophia y la peor para Mateo, sin importar la distribución de los valores.

1.5. Ejemplos de ejecución

1.5.1. Ejemplo 1

Recibiendo el arreglo Monedas = [5, 9, 1, 2, 4, 8, 6, 3, 7]

El algoritmo resuelve:

1. Última moneda para Sophia:
 - Monedas = [5, 9, 1, 2, 4, 8, 6, 3]
 - Sophia = [7]
 - Mateo = []
2. Última moneda para Mateo;
 - Monedas = [5, 9, 1, 2, 4, 8, 6]
 - Sophia = [7]
 - Mateo = [3]
3. Última moneda para Sophia;
 - Monedas = [5, 9, 1, 2, 4, 8]
 - Sophia = [7, 6]
 - Mateo = [3]
4. Primera moneda para Mate:
 - Monedas = [9, 1, 2, 4, 8]
 - Sophia = [7, 6]
 - Mateo = [3, 5]
5. Primera moneda para Sophia:
 - Monedas = [1, 2, 4, 8]
 - Sophia = [7, 6, 9]
 - Mateo = [3, 5]
6. Primera moneda para Mateo:
 - Monedas = [2, 4, 8]
 - Sophia = [7, 6, 9]
 - Mateo = [3, 5, 1]
7. Última moneda para Sophia:
 - Monedas = [2, 4]
 - Sophia = [7, 6, 9, 8]
 - Mateo = [3, 5, 1]
8. Primera moneda para Mateo:
 - Monedas = [4]
 - Sophia = [7, 6, 9, 8]
 - Mateo = [3, 5, 1, 2]
9. Última moneda para Sophia:
 - Monedas = []
 - Sophia = [7, 6, 9, 8, 4]
 - Mateo = [3, 5, 1, 2]

Sophia se quedó con las monedas = [7, 6, 9, 8, 4], suma: 34
Mateo se quedó con las monedas = [3, 5, 1, 2], suma: 11

1.5.2. Ejemplo 2

Recibiendo el arreglo Monedas = [1, 100, 2, 99, 3, 98, 4, 97]

El algoritmo resuelve:

1. Última moneda para Sophia:
 - Monedas = [1, 100, 2, 99, 3, 98, 4]
 - Sophia = [97]
 - Mateo = []
2. Primera moneda para Mateo:
 - Monedas = [100, 2, 99, 3, 98, 4]
 - Sophia = [97]
 - Mateo = [1]
3. Primera moneda para Sophia:
 - Monedas = [2, 99, 3, 98, 4]
 - Sophia = [97, 100]
 - Mateo = [1]
4. Primera moneda para Mateo:
 - Monedas = [99, 3, 98, 4]
 - Sophia = [97, 100]
 - Mateo = [1, 2]
5. Primera moneda para Sophia:
 - Monedas = [3, 98, 4]
 - Sophia = [97, 100, 99]
 - Mateo = [1, 2]
6. Primera moneda para Mateo:
 - Monedas = [98, 4]
 - Sophia = [97, 100, 99]
 - Mateo = [1, 2, 3]
7. Primera moneda para Sophia:
 - Monedas = [4]
 - Sophia = [97, 100, 99, 98]
 - Mateo = [1, 2, 3]
8. Última moneda para Mateo:
 - Monedas = []
 - Sophia = [97, 100, 99, 98]
 - Mateo = [1, 2, 3, 4]

Sophia se quedó con las monedas = [97, 100, 99, 98], suma: 394

Mateo se quedó con las monedas = [1, 2, 3, 4], suma: 10

1.5.3. Ejemplo 3

Recibiendo el arreglo Monedas = [9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]

El algoritmo resuelve:

1. Primera moneda para Sophia:

- Monedas = [8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]
- Sophia = [9]
- Mateo = []

2. Última moneda para Mateo:

- Monedas = [8, 7, 6, 5, 4, 3, 2]
- Sophia = [9]
- Mateo = [1]

3. Primera moneda para Sophia:

- Monedas = [7, 6, 5, 4, 3, 2]
- Sophia = [9, 8]
- Mateo = [1]

4. Última moneda para Mateo:

- Monedas = [7, 6, 5, 4, 3]
- Sophia = [9, 8]
- Mateo = [1, 2]

5. Primera moneda para Sophia:

- Monedas = [6, 5, 4, 3]
- Sophia = [9, 8, 7]
- Mateo = [1, 2]

6. Última moneda para Mateo:

- Monedas = [6, 5, 4]
- Sophia = [9, 8, 7]
- Mateo = [1, 2, 3]

7. Primera moneda para Sophia:

- Monedas = [5, 4]
- Sophia = [9, 8, 7, 6]
- Mateo = [1, 2, 3]

8. Última moneda para Mateo:

- Monedas = [5]
- Sophia = [9, 8, 7, 6]
- Mateo = [1, 2, 3, 4]

9. Última moneda para Sophia:

- Monedas = []
- Sophia = [9, 8, 7, 6, 5]

- Mateo = [1, 2, 3, 4]

Sophia se quedó con las monedas = [9, 8, 7, 6, 5], suma: 35

Mateo se quedó con las monedas = [1, 2, 3, 4], suma: 10

Los casos de prueba particulares del curso se encuentran en el archivo “tests.py”.

1.6. Mediciones

Realizamos mediciones sobre los tiempos de resolución con base en los casos de prueba propuestos por la cátedra:

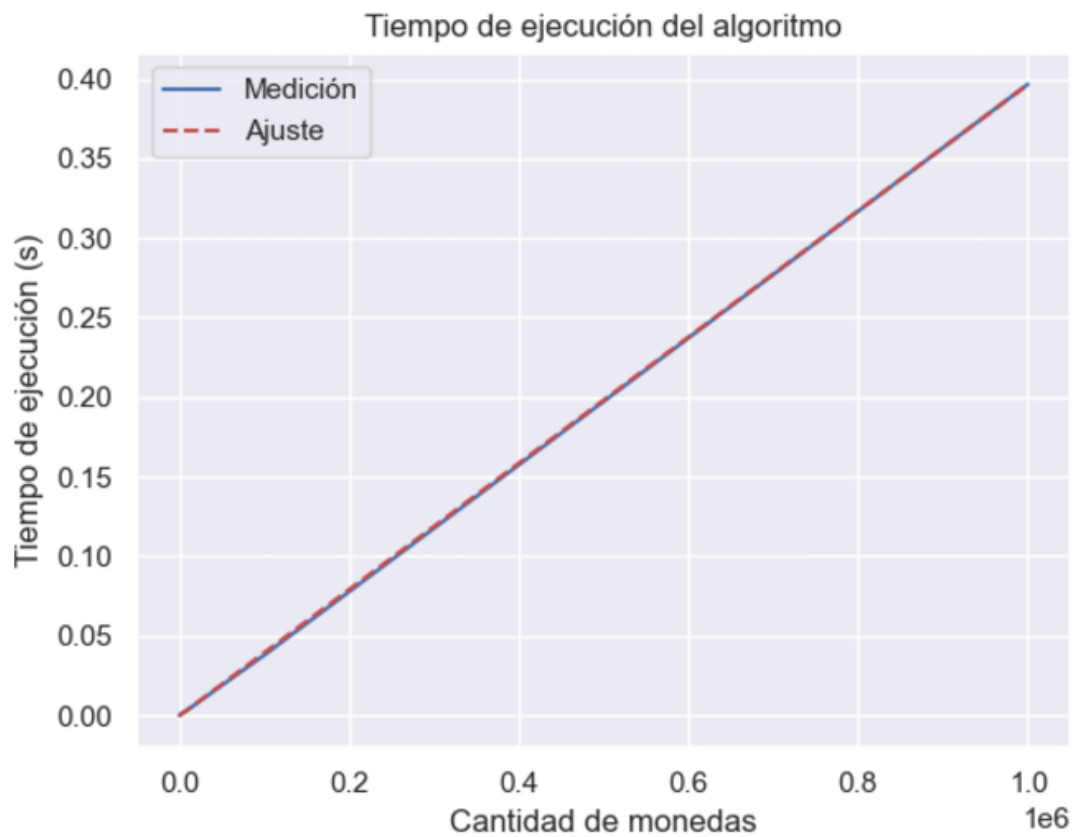


Figura 1: tiempos de resolución

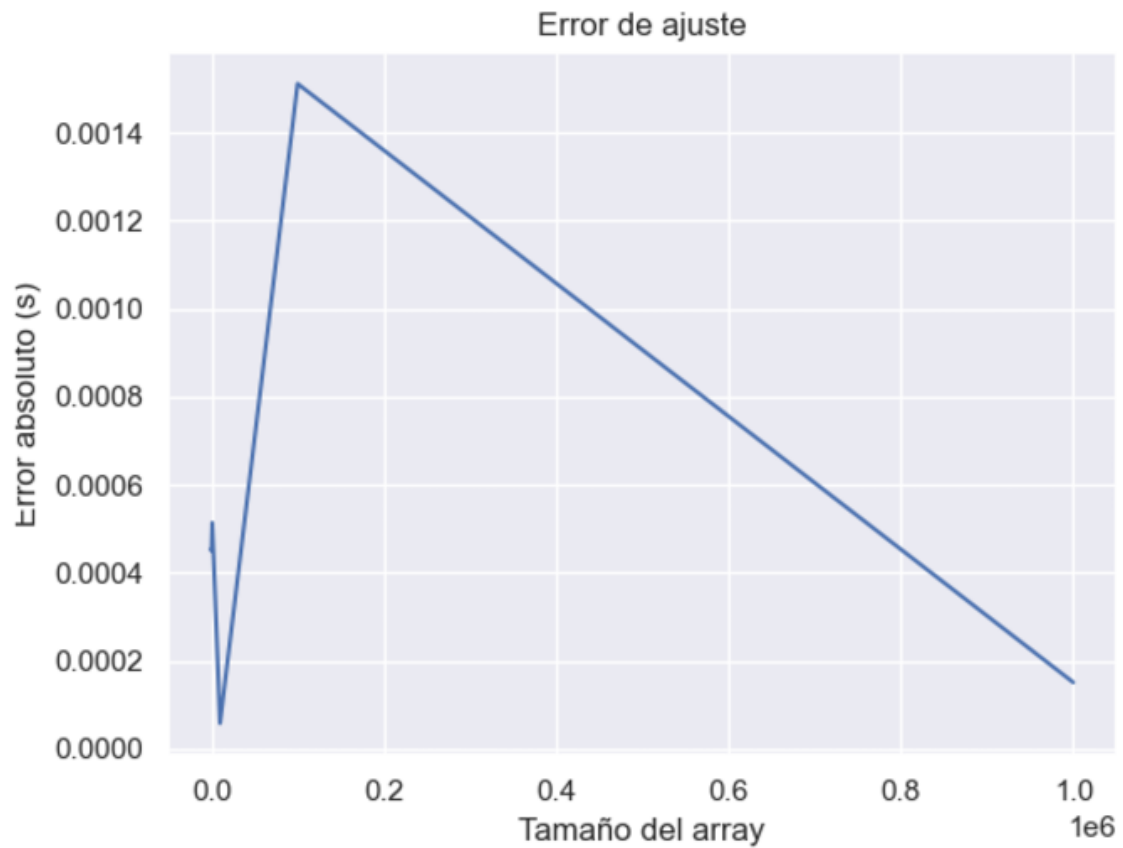


Figura 2: Error de las mediciones

1.7. Conclusiones

Finalmente, queda verificado que el algoritmo cumple con lo pedido en el enunciado mediante el análisis de los resultados y gráficos. En los gráficos se ve que justamente el tiempo de ejecución del algoritmo respecto de la cantidad de monedas sigue una trayectoria lineal, y que el error absoluto es muy pequeño, disminuyendo a medida que crece la cantidad de monedas.

2. Mateo empieza a Jugar

Continuamos con la situación planteada en la primera sección, solo que ahora han transcurrido algunos años. Mateo ya tiene siete, edad suficiente para convertirse en un oponente respetable. Para Sophia no será posible continuar sometiéndolo a sus engaños, ya que el joven Mateo ingresó en el campo de los algoritmos greedy, comenzándolos a aplicar y torciendo un poco las cosas para su hermana. Y esto a ella no le gusta nada. Afortunadamente, tampoco se quedó de brazos cruzados y comenzó a aprender sobre programación dinámica, por lo que va a contraatacar con esta nueva técnica para asegurarse ganar siempre que pueda.

2.1. Análisis del problema y elaboración de la ecuación de recurrencia ¿Encuentra siempre la solución óptima?

La primera pregunta al iniciar con el planteo de la ecuación de recurrencia es: ¿Existe alguna forma de resolver un juego de n monedas a partir de juegos más pequeños? La respuesta, lógicamente, tiene que ser afirmativa, ya que de lo contrario Sophia tendría que volver a jugar con Greedy o bien buscarse un método alternativo.

Comenzar con los casos bases siempre fue la mejor opción, así que rápidamente se pueden realizar dos deducciones:

- Si el juego tiene una sola moneda, la mejor opción es la misma moneda.
- Si el juego cuenta con dos monedas, elegir la de mayor valor.

Teniendo ya un punto de partida, surge otro cuestionamiento: ¿es posible construir una estructura memoriosa que registre estos dos casos base y nos permita avanzar con un juego de tres monedas en adelante?

Sea, por ejemplo, la serie de monedas $[1, 10, 5]$, la estructura debería guardar los resultados del siguiente conjunto de juegos:

- Tres juegos de una moneda: $[1]$, $[10]$, $[5]$.
- Dos juegos de dos monedas: $[1, 10]$, $[10, 5]$.
- Un juego de tres monedas: $[1, 10, 5]$ (el que queremos saber)

Observar que a medida que se construye la solución partiendo desde juegos más pequeños, la cantidad de juegos por paso disminuye en uno, por lo cual, una matriz cuadrada triangular podría adecuarse al contexto.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}$$

x: resultados de los juegos singulares y: resultados de los juegos de dos monedas z: resultado del juego completo de tres monedas

De esta manera, ya es posible pensar con claridad en ecuaciones de recurrencia, y en un algoritmo consecuente. Sea i el número de fila y j el número de columna, para los casos donde $i = j$, es decir, la diagonal de variables x_i , se completa con los resultados de todos los juegos de una moneda.

```
1  if i == j:
2      matriz[i][j] = monedas[i]
```

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 10 & y_2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Para y_1 e y_2 tenemos, respectivamente, los juegos de monedas $[1, 10]$ y $[10, 5]$, donde fácilmente podemos resolver eligiendo el máximo de cada uno. Particularmente, notar que cuando tenemos juegos de dos monedas, se cumple la relación $i = j - 1$. En el caso de la matriz, y_1 e y_2 se posicionan en $matriz[0][1]$ y $matriz[1][2]$. Entonces, ya tenemos una segunda ecuación para incorporar.

```
1  if i == j-1:
2      matriz[i][j] = max(monedas[i], monedas[j])
```

O de manera similar:

```
1  if i == j-1:
2      matriz[i][j] = max(matriz[i][i], matriz[j][j])
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & z_2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Y por último, el juego de tres monedas, que ya no es tan lineal. ¿Qué variantes pueden ocurrir en esta situación?

- *Alternativa 1*: Si Sophia elige la moneda de valor 1, su siguiente elección será la peor entre 10 y 5, ya que cuenta con que Mateo se apropiará de la mejor opción.
- *Alternativa 2*: Si elige la de valor 5, entonces su segunda moneda será la peor entre 1 y 10.

A Sophia claramente le servirá aquella que le deje más puntos. Por lo tanto, su juego de monedas óptimo vendrá dado por:

```
1  max(alternativa 1, alternativa 2)
```

A su vez, podría definirse a una *alternativa i* como:

```
1  alternativa_i = monedas[i] + Mejor juego post-elección de Mateo
```

Entonces, si Sophia elige la moneda de valor 5, ¿Cuál es el mejor juego post-elección de Mateo? Siendo que a Mateo le queda el juego de dos monedas $[1, 10]$, el mejor juego post-elección de Mateo será el resultado del juego singular $[1]$.

```
1  Mejor juego post-elección de Mateo = Mejor resultado[ Juego original - {moneda
    elegida por Sophia} - {moneda elegida por Mateo} ]
```

Y dicho juego de una moneda ya lo resolvimos anteriormente, solo tenemos que acceder al lugar de la matriz indicado. Por consiguiente, para este caso de tres monedas:

- *Alternativa 1*: $1 + matriz[2][2]$
- *Alternativa 2*: $5 + matriz[0][0]$

Ambas alternativas dan el mismo resultado: 6. Sophia está condenada a perder esta partida (Mateo hará 10 puntos). Para su desfortunio, la moneda más elevada está situada en el medio, al cual nunca tendrá acceso. Vemos que, a pesar de que Sophia encontró la solución óptima, no existe algoritmo posible que vulnere el orden de turnos. Solo le queda perder dejando su mayor esfuerzo en batalla.

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 6 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Pero entonces, ¿Para qué sirve la diagonal y_i si solo tuvimos en cuenta a los juegos de una moneda? En efecto, en este caso no hicieron falta, ya el juego de dos monedas fue elección para Mateo. Sophia tuvo que elegir, en su primer turno, con un juego de tres monedas, que requirió el servicio del juego de una moneda (su segundo turno).

¿Y si ampliamos el set a cuatro monedas? Por ejemplo: $[1, 10, 5, 7]$

Para los juegos de una y dos monedas, la matriz nos queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

En la tercera iteración tenemos dos juegos de tres monedas para resolver, $[1, 10, 5]$ y $[10, 5, 7]$. Para el primero, ya sabemos que el valor óptimo es 6. Para el segundo, la cuenta sería:

- $Alternativa_1 = 10 + \min(dp[3][3], dp[2][2]) = 10 + \min(7, 5) = 15.$
- $Alternativa_2 = 7 + \min(dp[2][2], dp[1][1]) = 7 + \min(5, 10) = 12.$

$$dp[1][3] = \max(15, 12) = 15.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Para la cuarta iteración, siendo i =primera moneda, j =ultima moneda, Sophia puede:

- $Alternativa_1$: Elegir la moneda de 1 (i), siguiendo con Mateo seleccionando el máximo entre $i + 1$ y j (10, 7), que será 10, y luego Sophia reutilizando el resultado obtenido del mejor juego entre $[5, 7]$, y ahora sí utilizamos la diagonal y_i .
- $Alternativa_2$: Elegir la moneda de 7 (j), siguiendo con Mateo seleccionando el máximo entre i y $j - 1$ (1, 5), que será 5, y luego Sophia reutilizando el resultado obtenido del mejor juego entre $[1, 10]$.

La alternativa 1 ofrece un resultado de 8, mientras que la alternativa 2 suma un total de 17. Esta vez, Sophia no fue perjudicada por el orden y le dio una paliza táctica a su hermano.

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 6 & 17 \\ 0 & 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

La ecuación de recurrencia resultante será:

```
1  if coins[i+1]>coins[j]:
2      alternativa_1 = monedas[i] + matriz[i+2][j]
3  else:
4      alternativa_1 = monedas[i] + matriz[i+1][j-1]
5
6  if coins[j-1]>coins[i]:
7      alternativa_2 = monedas[j] + matriz[i][j-2]
8  else:
9      alternativa_2 = monedas[j] + matriz[i+1][j-1]
```

Haciendo la revisión manual:

1. Sophia elige la moneda 7.

2. Mateo elige la moneda 5.
3. Sophia elige la moneda 10.
4. Mateo elige la moneda 1.

Podemos ver que a medida que vamos incluyendo más monedas al juego, la matriz va a ir creciendo y las decisiones se van tomando sobre juegos anteriores cada vez más grandes. Para 5 monedas, la última iteración surgirá de decidir entre tres juegos de tres monedas. Este sistema de decisiones recursivas es lo que permite a Sophia asegurarse la mayor puntuación posible, aunque como vimos en el primer ejemplo, no siempre obteniendo garantías de una victoria.

Incluso pueden presentarse casos donde, gracias a las virtudes de este algoritmo, Sophia estratégicamente elige una moneda de menor valor, para así evitar que Mateo se quede con una moneda alta en el siguiente turno. Por ejemplo, en el juego [3, 10, 5, 1], elegir 1 (sacrificando a la moneda de 3) y luego 10 gana la partida (11 puntos). Si, en cambio, Sophia siguiera el enfoque Greedy de Mateo y pensara localmente, elegiría 3, Mateo luego se llevaría el 10, Sophia concluiría con el 5 y Mateo con el 1, perdiendo 8 a 11.

2.2. Algoritmo y Complejidad

El siguiente código muestra la implementación del algoritmo en Python:

```
1 def maxCoins(coins):
2     n = len(coins)
3     dp = [[0] * n for _ in range(n)]
4
5     for length in range(1, n + 1):
6         for i in range(n - length + 1):
7             j = i + length - 1
8             if i == j: # Solo una moneda
9                 dp[i][j] = coins[i]
10            elif i == j - 1:
11                dp[i][j] = max(coins[i], coins[j])
12            else:
13                if coins[i + 1] > coins[j]:
14                    pick_i = coins[i] + dp[i + 2][j]
15                else:
16                    pick_i = coins[i] + dp[i + 1][j - 1]
17                if coins[j - 1] > coins[i]:
18                    pick_j = coins[j] + dp[i][j - 2]
19                else:
20                    pick_j = coins[j] + dp[i + 1][j - 1]
21                dp[i][j] = max(pick_i, pick_j)
22    return dp[0][n - 1]
```

La complejidad del algoritmo es $O(n^2)$ debido al doble bucle para llenar la matriz `dp`. Dado que la elección de monedas es constante, la variabilidad de sus valores no afecta el tiempo de ejecución.

2.3. Mediciones Empíricas de Complejidad

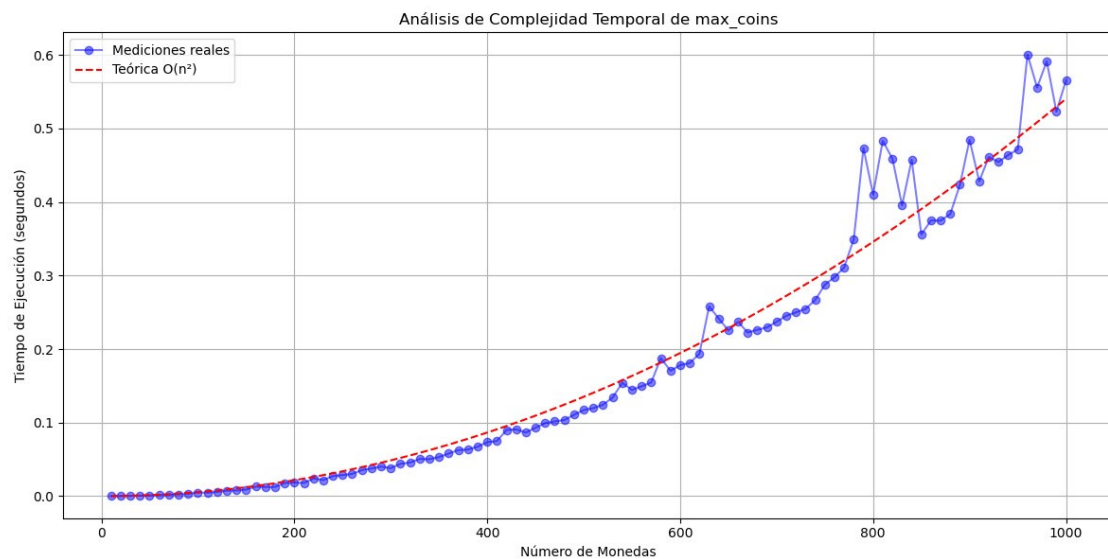


Figura 3: Complejidad de 0 a 1000 elementos

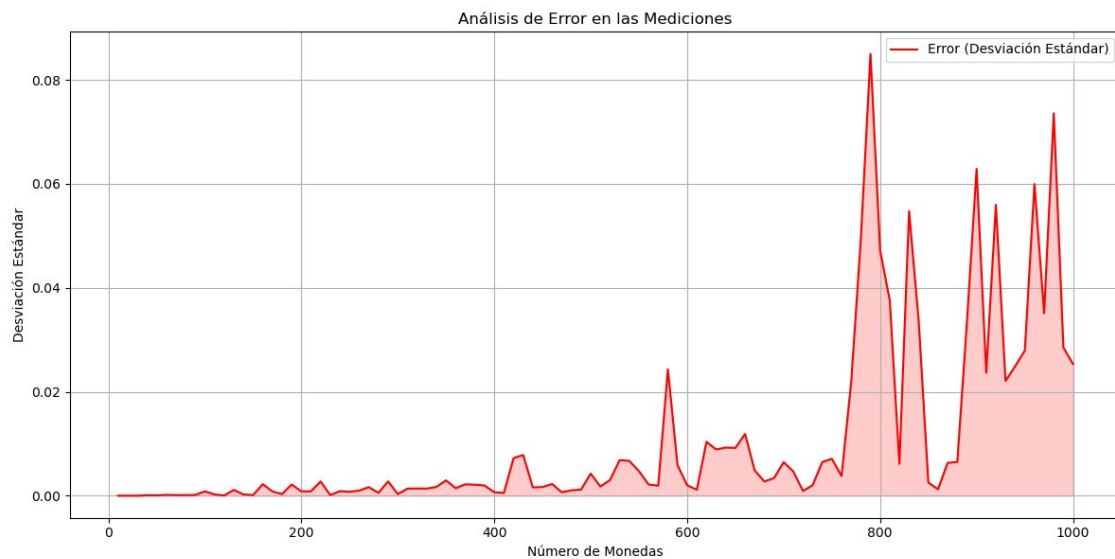


Figura 4: Error de las mediciones

Tras realizar ejecuciones del algoritmo con sets de prueba incrementales (10, 100 y 1000 monedas) pudimos verificar que, en efecto, la complejidad temporal se curva en forma de parábola, lo cual condice con el orden $O(n^2)$.

Para hacer las pruebas del algoritmo se utilizaron distintos sets de “monedas”. Estos sets se hicieron correr por una función llamada test que corría el algoritmo anteriormente visto y validaba que la devolución del algoritmo de programación dinámica fuera la esperada.

A continuación se muestra el código que se usó para las pruebas.

```
1 from parte_dos import maxCoins
```

```
2
3 def test(coins, expectedAnswer):
4     got = maxCoins(coins)
5     if got != expectedAnswer:
6
7         print(f"\u2717 Coins: {coins}, expected: {expectedAnswer}, got: {got}")
8         return
9
10    print(f"\u2713 Coins: {coins}, expected: {expectedAnswer}")
11
12    return
```

Esta función *test(coins, expectedAnswer)* toma el set de monedas a probar y el valor máximo acumulado esperado por Sophia. Luego corre el algoritmo de programación dinámica con el set de monedas y compara si el resultado obtenido es igual al esperado.

Algunos de los sets y sus resultados esperados, utilizados para testear el código, fueron

```
1 # set, resultado esperado
2 [1, 10, 5], 6
3 [3, 7, 2, 8, 5], 10
4 [1, 2, 3, 4, 5, 6], 12
5 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], 20
6 [20, 30, 2, 10], 40
7 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], 16
8 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], 30
9 [10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1], 30
10 [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], 5
11 [2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20], 60
12 [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512], 682
13 [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100], 300
```

Por otro lado, se testeó el algoritmo con las pruebas proporcionadas por la cátedra, para los cuales el algoritmo se probó exitoso.

2.4. Conclusión

Hemos visto que un algoritmo de programación dinámica ofrece una variante de juego con mayor profundidad táctica, en comparación al rendimiento lineal y predecible del algoritmo Greedy implementado en la primera parte. Sin embargo, el juego sigue estando sujeto a quien tenga la suerte de empezar, por lo que Sophia nunca tendrá el control total de las partidas.

3. Tercera parte: Cambios

Los hermanos siguieron creciendo. Mateo también aprendió sobre programación dinámica, y cada uno aplicaba la lógica sabiendo que el otro también lo hacía. El juego de las monedas se tornó aburrido en cuánto notaron que siempre ganaba quién empezara, o según la suerte. Los años pasaron, llegó la adolescencia y empezaron a tener gustos diferentes. En general, jugaban a juegos individuales. En particular, Sophia estaba muy enganchada con un juego inventado en Argentina por Jaime Poniachik (uno de los fundadores de Ediciones de Mente) en 1982: La Batalla Naval Individual.

En dicho juego, tenemos un tablero de $n \times m$ casilleros, y k barcos. Cada barco i tiene b_i de largo. Es decir, requiere de b_i casilleros para ser ubicado. Todos los barcos tienen 1 casillero de ancho. El tablero a su vez tiene un requisito de consumo tanto en sus filas como en sus columnas. Si en una fila indica un 3, significa que deben haber 3 casilleros de dicha fila siendo ocupados. Ni más, ni menos. No podemos poner dos barcos de forma adyacente (es decir, no pueden estar contiguos ni por fila, ni por columna, ni en diagonal directamente). Debemos ubicar todos los barcos de tal manera que se cumplan todos los requisitos.

3.1. “BatallaNaval” $\in NP$.

Para demostrar que “BatallaNaval” $\in NP$ debemos probar que una solución de “BatallaNaval” puede certificarse en tiempo polinomial, para ello propondremos un algoritmo que efectivamente lo haga.

3.1.1. Certificador

El programa certificador recibe:

- *tablero* , una matriz de $n \times m$ casilleros. Cada casillero tendrá un valor 0 si está vacío o 1 si está ocupado por un barco;
- *barcos* , una lista de k barcos, donde el barco en la posición i tiene b_i de largo;
- *restricciones_filas* , una lista de restricciones para las filas, donde la restricción en la posición j corresponde a la cantidad de casilleros a ser ocupados en la fila j ;
- *restricciones_columnas*, una lista de restricciones para las columnas, donde la restricción en la posición h corresponde a la cantidad de casilleros a ser ocupados en la columna h .

Y verifica que se cumplan las restricciones correspondientes de la siguiente manera:

```
1 def certificador_batalla_naval (tablero, barcos, restricciones_filas,
2   restricciones_columnas):
3
4     n = len(tablero)
5     m = len(tablero[0])
6
7     # 1 - Verificamos que las posiciones ocupadas por fila sean las
8     correspondientes.
9
10    for i in range(n):
11        if ( sum(tablero[i]) != restricciones_filas[i] ):
12            return False
13
14    # 2 - Verificamos que las posiciones ocupadas por columna sean las
15    correspondientes.
16
17    for j in range(m):
18        if ( sum(tablero[i][j] for i in range(n)) != restricciones_columnas[j] ):
19            return False
```

```
18 # Identificamos los barcos.
19
20 visitados = [[False] * m for _ in range(n)]
21 barcos_identificados = []
22
23 def dfs(x, y, barco_actual):
24     if ( not ( (0 <= x < n) and (0 <= y < m)) or visitados[x][y] or (tablero[x
25 ] [y] == 0) ):
26         return
27
28     visitados[x][y] = True
29     barco_actual.append((x, y))
30
31     for dx, dy in [(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)]:
32         dfs(x + dx, y + dy, barco_actual)
33
34 for i in range(n):
35     for j in range(m):
36         if ( (tablero[i][j] == 1) and not visitados[i][j] ):
37             barco_actual = []
38             dfs(i, j, barco_actual)
39             barcos_identificados.append(barco_actual)
40
41 # Identificamos los tama os de los barcos encontrados
42
43 tama os_encontrados = []
44
45 for barco in barcos_identificados:
46
47     #3 - Verificamos que el ancho del barco es de un casillero
48
49     filas = {x for x, y in barco}
50     columnas = {y for x, y in barco}
51
52     if ( (len(filas) > 1) and (len(columnas) > 1) ):
53         return False
54
55     tama os_encontrados.append(len(barco))
56
57
58     #4 - Verificamos que no haya adyacencia con otros barcos
59     for x, y in barco:
60         for dx, dy in [(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 1), (1, -1),
61 (1, 0), (1, 1)]:
62
63             adyacente_x = x + dx
64             adyacente_y = y + dy
65
66             if ( (0 <= adyacente_x < n) and (0 <= adyacente_y < m) and (tablero
67 [adyacente_x][adyacente_y] == 1) ):
68                 if (adyacente_x, adyacente_y) not in barco:
69                     return False
70
71 # 5 - Verificamos que los barcos identificados coincidan con los barcos dados
72
73 if sorted(tama os_encontrados) != sorted(barcos):
74     return False
75
76 return True
```

3.1.2. Complejidad

Ahora analizamos la complejidad del certificador propuesto:

- Verificación de restricciones de filas: $\mathcal{O}(n * m)$, ya que se procesan las n filas, cada una con m elementos.

- Verificación de restricciones de columnas: $\mathcal{O}(n * m)$, ya que se procesan las m columnas, cada una con n elementos.
- Identificar barcos:
 - Inicializar matriz de visitados es $\mathcal{O}(n * m)$, ya que se recorre todo el tablero;
 - El doble bucle es $\mathcal{O}(n * m)$, ya que cada celda del tablero es procesada una vez.
 - DFS es $\mathcal{O}(a)$, siendo a número total de celdas ocupadas por barcos ($a \leq n * m$.)
- Verificar forma y adyacencia: $\mathcal{O}(a)$, siendo a número total de celdas ocupadas por barcos ($a \leq n * m$.), porque revisamos todas las celdas ocupadas.
- Verificar que los barcos existen: $\mathcal{O}(k * \log(k))$, ya que esa es la complejidad de ordenar los arreglos y compararlos.

Finalmente, la complejidad del certificador es $\mathcal{O}(n * m)$, ya que $\mathcal{O}(n * m)$ es cota superior tanto de $\mathcal{O}(a)$ como de $\mathcal{O}(k * \log(k))$.

Confirmamos así que “*BatallaNaval*” $\in NP$ ya que se pueden certificar sus soluciones en tiempo polinomial.

3.2. “*BatallaNaval*” $\in NP - C$.

Para demostrar que “*BatallaNaval*” $\in NP - C$ hay que demostrar que es NP y NP-Hard. En la sección anterior hemos demostrado la primera condición y la segunda la demostraremos realizando la reducción polinomial de un problema NP-Completo a una instancia de Batalla Naval .

3.2.1. 3-Partition

Hemos decidido realizar la reducción $3 - Partition \leq BatallaNaval$ ya que 3-Partition en su versión unaria es un problema NP-Completo.

El problema 3-Partition consiste en decidir si dado un conjunto S de $n = 3 * m$ elementos, puede ser dividido en m subconjuntos tal que la suma de sus elementos sea la misma para todos.

Michael R. Garey y David S. Johnson, en la publicación “Complexity results for multiprocessor scheduling under resource constraints”, fueron los primeros en probar que el problema de la 3-partición es NP-completo.

Nosotros realizaremos una demostración a través de la reducción $2 - Partition \leq 3 - Partition$, problema trabajado en clase. Ambos problemas reciben un conjunto y devuelven sub-sets con la misma suma, la diferencia es que en $2 - Partition$ se deben generar dos sub-sets, mientras que en $3 - partition$ lo que importa son la cantidad de elementos en el sub-set (deben ser tres) y no la cantidad de sub-sets.

Consideremos que la entrada de $2 - Partition$ es un conjunto S de $n = 2 * m$ elementos. Se propone la siguiente transformación:

- Entrada:
 - Se agregan a S los elementos ficticios necesarios para que la cantidad de elementos sea $n = 3 * m$ (usamos ceros para no afectar la suma) y para que, al mismo tiempo, $n \div 3$ sea par.
- Salida:
 - Una vez resuelto $3 - Partition$, combinamos la mitad de los sub-sets de la solución en un nuevo sub-set S_1 y la otra mitad en un sub-set S_2 , eliminando los elementos ficticios que se agregaron en la entrada.

La transformación es polinomial ya que la transformación de la entrada es $\mathcal{O}(1)$ y la de la salida es $\mathcal{O}(n)$ (se recorren todos los elementos para armar S_1 y S_2). Por lo tanto, demostramos que $3 - Partition \in NP - C$

3.2.2. Entradas y Salidas

Para $3 - Partition$ tenemos:

- Entrada: E , una lista de n elementos.
- Salida: S , una lista de m subconjuntos de 3 elementos tal que la suma de los mismos es igual para todos los subconjuntos.

Para *BatallaNaval* tenemos:

- Entradas:
 - T , una matriz de $x \times w$ casilleros;
 - B , una lista de k barcos, donde el barco en la posición i tiene b_i de largo;
 - F , una lista de restricciones para las filas, donde la restricción en la posición j corresponde a la cantidad de casilleros a ser ocupados en la fila j ;
 - C , una lista de restricciones para las columnas, donde la restricción en la posición h corresponde a la cantidad de casilleros a ser ocupados en la columna h .
- Salida:
 - Z , una matriz de $x \times w$ casilleros. Cada casillero tendrá un valor 0 si está vacío o 1 si está ocupado por un barco, cumpliendo con las restricciones impuestas;

3.2.3. $3 - Partition \leq BatallaNaval$

Proponemos la siguiente transformación:

- Para la entrada:
 - $x = ((n/3) * 2) - 1$. Una fila para cada subconjunto a crear más las necesarias para asegurar que se cumpla la condición de no adyacencia de *BatallaNaval*.
 - $w = [\sum_{i=0}^n e_i] + n - 1$. Una columna para cada posición a ocupar por cada elemento de E más las necesarias para asegurar que se cumpla la condición de no adyacencia de *BatallaNaval*.
 - Creamos una matriz T de dimensiones $x \times w$ y la inicializamos.
 - Creamos la lista F con x elementos y la inicializamos intercalando $[\sum_{i=0}^n e_i]/(n/3)$ en una posición y 0 en la siguiente.
 - Creamos la lista C con w elementos y la inicializamos cargando un 1 en las posiciones correspondientes a e_i , un 0 en la siguiente posición a modo de separación y luego un 1 en las posiciones correspondientes a e_{i+1} . Así sucesivamente hasta cargar las posiciones correspondientes a los n elementos.
 - Creamos la lista B y la inicializamos con los elementos de E .
- Para la salida:
 - Creamos la lista S .
 - Recorremos las filas de la matriz Z identificando los elementos en cada una. Cada fila representa un sub-set y cada barco ubicado en ella es un elemento de ese sub-set. Cargamos en S los sub-sets identificados.

- Las filas de separación evitarán que un elemento esté en más de un sub-set, ya que se podrán ubicar únicamente de manera horizontal, quedando contenidos en una sola fila.
- Al tener la misma restricción para el resto de las filas nos aseguramos que la suma de los elementos en los sub-sets será igual para todos ellos.
- Las restricciones de las columnas aseguran que cada elemento se pueda ubicar una vez.

Por lo tanto, queda demostrado que “*BatallaNaval*” $\in NP - C$ ya que se puede realizar la reducción $3 - Partition \leq BatallaNaval$ en tiempo polinomial.

3.3. Resolución de *BatallaNaval* por Backtracking

3.3.1. Implementación

Para la implementación de la resolución por Backtracking hacemos uso de la siguiente librería *utils.py*:

```
1 '''
2     Pre: 'demandas' es un array con los valores de las demandas que
3         tiene una fila/columna.
4
5     Pos: Devuelve un array con cada indice i de 'demandas' tal que
6         se cumple que demandas[i] >= barco_size.
7 '''
8 def obtener_candidatos_por_demanda(demandas, barco_size):
9     candidatos = []
10    for i, demanda in enumerate(demandas):
11        if demanda >= barco_size:
12            candidatos.append(i)
13    return candidatos
14
15 '''
16    Pre: 'columnas_disponibles' es una lista con indices de columnas
17        del tablero cuya demanda es >= k.
18        'f' es el indice de una fila en el tablero.
19
20    Pos: Devuelve una lista de grupos de k puntos, todos los puntos
21        que esten en un mismo grupo van a estar en la misma fila f.
22        (fila f fija, columna c_i variable para cada punto de un grupo).
23
24        Cada punto de un mismo grupo es adyacente con el anterior
25        (i.e. a (f, c_i - 1)) y con el siguiente (f, c_i + 1).
26
27        (Cada grupo de puntos representa un lugar en el tablero
28         en donde podemos poner un barco de tama o k)
29 '''
30 def posiciones_para_barco_por_fila(columnas_disponibles, f, k, todas = True):
31     if len(columnas_disponibles) < k:
32         return []
33
34     casilleros = []
35     for c in columnas_disponibles:
36         casilleros.append((f, c))
37
38     posiciones = []
39     for i in range(len(casilleros) - k + 1):
40         son_consecutivos = True
41         consecutivos = []
42         for j in range(k):
43             actual = casilleros[i + j]
44             consecutivos.append(actual)
45             if j >= k - 1:
46                 continue
47
48             siguiente = casilleros[i + j + 1]
```

```
49         if actual[1] + 1 != siguiente[1]:
50             son_consecutivos = False
51
52     if son_consecutivos:
53         posiciones.append(consecutivos.copy())
54
55         if not todas:
56             # Devolvemos una sola posicion.
57             return posiciones
58     son_consecutivos = False
59
60     return posiciones
61
62 '''
63 Pre: 'filas_disponibles' es una lista con indices de filas del
64     tablero cuya demanda es >= k.
65     'c' es el indice de una columna en el tablero.
66
67 Pos: Devuelve una lista de grupos de k puntos, todos los puntos
68     que esten en un mismo grupo van a estar en la misma columna c.
69     (columna c fija, fila f_i variable).
70
71     Cada punto de un mismo grupo es adyacente con el anterior
72     (i.e. a (f_i - 1, c)) y con el siguiente (f_i + 1, c).
73
74     (Cada grupo de puntos representa un lugar en el tablero
75     en donde podemos poner un barco de tama o k)
76 '''
77 def posiciones_para_barco_por_columna(filas_disponibles, c, k, todas = True):
78     if len(filas_disponibles) < k:
79         return []
80
81     casilleros = []
82     for f in filas_disponibles:
83         casilleros.append((f, c))
84
85     posiciones = []
86     for i in range(len(casilleros) - k + 1):
87         son_consecutivos = True
88         consecutivos = []
89         for j in range(k):
90             actual = casilleros[i + j]
91             consecutivos.append(actual)
92             if j >= k - 1:
93                 continue
94
95             siguiente = casilleros[i + j + 1]
96             if actual[0] + 1 != siguiente[0]:
97                 son_consecutivos = False
98
99         if son_consecutivos:
100             posiciones.append(consecutivos.copy())
101
102         if not todas:
103             # Devolvemos una sola posicion.
104             return posiciones
105     son_consecutivos = False
106
107     return posiciones
108
109 def guardar_nuevos_candidatos(demanda, candidatos, nuevos_candidatos):
110     if len(nuevos_candidatos) == 0:
111         return
112
113     if not demanda in candidatos:
114         candidatos[demanda] = []
115
116     for lista in nuevos_candidatos:
117         candidatos[demanda].append(lista)
118
```

```

119 '''
120     Pos: Devuelve una lista de tuplas.
121
122     Cada tupla contiene informacion de la forma (demanda,
123     posiciones_candidatas),
124     en donde 'demanda' es un entero relacionada con linea del tablero (fila o
125     columna) y 'posiciones_candidatas' es una lista de listas con grupos de
126     puntos
127     (x_i, y_i) que podria ocupar el barco si lo ubicamos en el tablero.
128
129     Los puntos en cada grupo de puntos son posiciones validas, es decir, no
130     exceden
131     a la demanda de ninguna fila ni columna, ni son adyacentes con ningun
132     casillero
133     que otro barco este ocupando en el tablero.
134 '''
135 def obtener_candidatos(tablero, demanda_filas, demanda_columnas, barco_size, todos
136 = True):
137     candidatos_fila = obtener_candidatos_por_demanda(demanda_filas, barco_size)
138     posiciones_candidatas = {}
139
140     for f in candidatos_fila:
141         columnas_disponibles = []
142         for c in range(len(demanda_columnas)):
143             if demanda_columnas[c] == 0 or tablero[f][c] != None:
144                 continue
145             elif not hay_adyacencias(f, c, tablero):
146                 columnas_disponibles.append(c)
147         demanda = demanda_filas[f]
148         nuevos_candidatos = posiciones_para_barco_por_fila(columnas_disponibles, f,
149         barco_size, todos)
150         guardar_nuevos_candidatos(demanda, posiciones_candidatas, nuevos_candidatos
151 )
152         if not todos and len(nuevos_candidatos) > 0:
153             return list(posiciones_candidatas.items())
154
155     # Para que no se dupliquen los candidatos si un barco ocupa 1 casillero.
156     if (barco_size == 1):
157         return list(posiciones_candidatas.items())
158     candidatos_columna = obtener_candidatos_por_demanda(demanda_columnas,
159     barco_size)
160
161     for c in candidatos_columna:
162         filas_disponibles = []
163         for f in range(len(demanda_filas)):
164             if demanda_filas[f] == 0 or tablero[f][c] != None:
165                 continue
166             elif not hay_adyacencias(f, c, tablero):
167                 filas_disponibles.append(f)
168         demanda = demanda_columnas[c]
169         nuevos_candidatos = posiciones_para_barco_por_columna(filas_disponibles, c,
170         barco_size, todos)
171         guardar_nuevos_candidatos(demanda, posiciones_candidatas, nuevos_candidatos
172 )
173         if not todos and len(nuevos_candidatos) > 0:
174             return list(posiciones_candidatas.items())
175
176     return list(posiciones_candidatas.items())
177
178 def puedo_poner(tablero, demanda_filas, demanda_columnas, barco_size):
179     alternativas = obtener_candidatos(tablero, demanda_filas, demanda_columnas,
180     barco_size, False)
181     if len(alternativas) == 0:
182         return False
183     demanda, alternativa = alternativas[0]
184     return len(alternativa[0]) > 0
185
186 '''
187     Pos: Basandose en el estado actual del tablero y las demandas, y teniendo en
188     cuenta

```



```
177     solamente a los barcos de la lista que se encuentran entre los índices
178     [i+1, final_idx] y caben en el tablero, se retorna el valor de la demanda
179     total
180     que podría satisfacerse si pudieramos colocarlos a todos ellos.
181 '''
182 def demanda_proyectada(tablero, demanda_filas, demanda_columnas, barcos, i):
183     demandas = []
184     for j in range(i + 1, len(barcos)):
185         barco_idx, barco_size = barcos[j]
186         if puedo_poner(tablero, demanda_filas, demanda_columnas, barco_size):
187             demandas.append(barco_size*2)
188     return sum(demandas)
189 '''
190 Pre: barcos es una lista de tuplas de la forma (barco_id, barco_size) ordenada
191     de
192     manera descendente seg n el valor "barco_size".
193 Pos: Sea barcos[i] el barco actual, devuelve un índice de la lista en el cual
194     haya
195     otro barco con un "barco_size" distinto al barco actual.
196 '''
197 def obtener_siguiete_distinto(barcos, i):
198     actual = barcos[i]
199     actual_idx, actual_size = actual
200     for j in range(i + 1, len(barcos)):
201         siguiente_idx, siguiente_size = barcos[j]
202         if siguiente_size != actual_size:
203             return j
204     return i + 1
```

Y la implementación:

```
1 from utils import *
2
3 def batalla_naual_bt(tablero, barcos, demanda_filas, demanda_columnas,
4                     puestos, optimos, i):
5     demanda_cumplida = sum(size * 2 for (idx, size) in puestos.keys())
6     demanda_optima = sum(size * 2 for (idx, size) in optimos.keys())
7     if i == len(barcos):
8         if demanda_cumplida > demanda_optima:
9             optimos.clear()
10            optimos.update({barco: pos.copy() for barco, pos in puestos.items()})
11            return True
12            return False
13
14            barco = barcos[i]
15            barco_idx, barco_size = barco
16
17            alternativas = obtener_candidatos(tablero, demanda_filas, demanda_columnas,
18                                             barco_size)
19            hay_alternativas = len(alternativas) > 0
20
21            if not hay_alternativas:
22                return batalla_naual_bt(tablero, barcos, demanda_filas, demanda_columnas,
23                                       puestos,
24                                       optimos, i + 1)
25
26            proyectada = demanda_proyectada(tablero, demanda_filas, demanda_columnas,
27                                             barcos, i - 1)
28
29            if demanda_cumplida + proyectada <= demanda_optima: # No vamos a mejorar.
30                return batalla_naual_bt(tablero, barcos, demanda_filas, demanda_columnas,
31                                       puestos,
32                                       optimos, i + 1)
33
34            puestos[barco] = []
35            demanda_cumplida = sum(size * 2 for (idx, size) in puestos.keys())
36
37            for demanda, alternativa in alternativas:
```

```
34     for casilleros in alternativa:
35         colocar_barco(casilleros, tablero, barco_idx)
36         actualizar_demandas(casilleros, demanda_filas, demanda_columnas, False)
37         puestos[barco] = casilleros
38
39         proyectada = demanda_proyectada(tablero, demanda_filas,
40         demanda_columnas, barcos, i)
41         buena_alternativa = demanda_cumplida + proyectada > demanda_optima
42
43         if buena_alternativa:
44             if batalla_naual_bt(tablero, barcos, demanda_filas,
45             demanda_columnas,
46             puestos, optimos, i + 1):
47                 demanda_optima = sum(size * 2 for (idx, size) in optimos.keys()
48                 )
49
50         colocar_barco(casilleros, tablero, None) # Lo sacamos del tablero.
51         actualizar_demandas(casilleros, demanda_filas, demanda_columnas, True)
52
53     del puestos[barco]
54     k = obtener_siguiete_distinto(barcos, i)
55
56     return batalla_naual_bt(tablero, barcos, demanda_filas, demanda_columnas,
57     puestos,
58     optimos, k)
59
60 def batalla_naual(tablero, barcos, demanda_filas, demanda_columnas):
61     barcos_ordenados = list(enumerate(barcos))
62     barcos_ordenados.sort(key=lambda x: -x[1])
63     optimos = {}
64     batalla_naual_bt(tablero, barcos_ordenados, demanda_filas, demanda_columnas,
65     {}, optimos, 0)
66
67     return optimos
```

3.3.2. Sets de datos

Generamos sets de datos para corroborar la correctitud de la solución propuesta. Consideramos:

- Demandas por fila $\rightarrow F$
- Demandas por columna $\rightarrow C$
- Barcos $\rightarrow B$
- 9_2.12:
 - $F = [3, 4, 4, 7, 4, 2, 0, 5, 1]$
 - $C = [4, 5, 4, 0, 2, 2, 7, 6]$
 - $B = [2, 8, 4, 4, 5, 5, 7, 4, 3, 5, 7, 8]$
- 9_12.15:
 - $F = [3, 2, 5, 8, 0, 6, 9, 2, 6]$
 - $C = [10, 6, 4, 7, 1, 1, 9, 6, 1, 8, 0, 5]$
 - $B = [1, 8, 3, 10, 1, 9, 3, 2, 12, 10, 9, 8, 5, 11, 3]$
- 8_8.15:
 - $F = [6, 2, 0, 4, 4, 6, 0, 3]$
 - $C = [3, 4, 2, 6, 2, 1, 5, 5]$
 - $B = [1, 1, 2, 1, 8, 4, 5, 4, 5, 7, 4, 8, 8, 7, 6]$
- 8_10.15:

- $F = [5, 5, 0, 6, 6, 4, 1, 1]$
- $C = [3, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 8, 9, 1]$
- $B = [9, 3, 1, 3, 1, 6, 2, 8, 1, 1, 7, 3, 5, 9, 8]$
- 12_8_12:
 - $F = [3, 2, 3, 7, 2, 0, 3, 3, 3, 6, 4, 0]$
 - $C = [9, 7, 6, 2, 9, 8, 8, 5]$
 - $B = [1, 2, 3, 7, 2, 10, 3, 8, 10, 4, 10, 1]$
- 12_13_14:
 - $F = [1, 9, 1, 7, 2, 10, 4, 1, 10, 2, 1, 4]$
 - $C = [9, 10, 4, 9, 10, 2, 12, 1, 6, 5, 8, 9, 10]$
 - $B = [11, 4, 4, 4, 13, 9, 14, 2, 1, 2, 4, 1, 5, 8]$
- 12_12_12:
 - $F = [4, 10, 9, 4, 6, 2, 7, 7, 4, 0, 3, 4]$
 - $C = [6, 8, 2, 1, 2, 7, 6, 6, 2, 7, 7, 5]$
 - $B = [2, 11, 2, 4, 5, 9, 7, 8, 1, 12, 8, 9]$
- 11_8_12:
 - $F = [6, 0, 7, 6, 1, 6, 8, 7, 2, 1, 1, 3]$
 - $C = [1, 2, 4, 3, 5, 0, 5, 0]$
 - $B = [9, 2, 1, 0, 1, 3, 1, 1, 4, 8, 1, 2, 3, 3, 1, 4]$
- 10_8_15:
 - $F = [5, 2, 5, 6, 4, 5, 7, 4]$
 - $C = [8, 4, 7, 2, 1, 2, 2, 7, 1, 0, 0]$
 - $B = [1, 5, 1, 2, 8, 1, 1, 5, 9, 1, 3, 6, 4, 1, 4, 7, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 6]$
- 10_11_12:
 - $F = [5, 1, 0, 9, 2, 4, 2, 8, 9, 1, 3, 1, 1]$
 - $C = [6, 8, 0, 8, 5, 3, 8, 4, 1, 0, 0]$
 - $B = [5, 2, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 6, 1, 1, 7, 8]$
- 20_20_21:
 - $F = [81463048612436075505]$
 - $C = [8315794570032014410510]$
 - $B = [187111911063937111175101126]$
- 20_20_25:
 - $F = [8, 5, 6, 1, 6, 3, 1, 0, 2, 5, 4, 6, 1, 7, 7, 6, 4, 7, 2, 1]$
 - $C = [7, 10, 10, 4, 5, 4, 0, 1, 0, 1, 3, 4, 7, 4, 0, 10, 10, 6, 4, 2]$
 - $B = [4, 7, 11, 11, 6, 2, 3, 6, 2, 9, 5, 4, 7, 4, 9, 9, 10, 8, 7, 11, 3, 9, 11, 3, 8]$
- 20_23_20:
 - $F = [8, 3, 2, 2, 4, 5, 8, 7, 0, 5, 7, 4, 1, 6, 2, 1, 6, 0, 0, 7]$
 - $C = [0, 10, 3, 7, 1, 4, 5, 9, 9, 10, 2, 10, 4, 3, 2, 2, 10, 9, 9, 5, 3, 10, 10]$

- $B = [4, 7, 4, 10, 9, 10, 7, 9, 2, 4, 2, 11, 11, 8, 3, 3, 12, 6, 2, 1]$
- 21_21_21:
 - $F = [7, 0, 7, 6, 2, 7, 7, 0, 5, 2, 8, 1, 2, 7, 6, 8, 4, 6, 6, 7, 3]$
 - $C = [10, 4, 2, 1, 4, 0, 7, 0, 8, 6, 8, 9, 7, 5, 2, 10, 1, 7, 9, 0, 9]$
 - $B = [10, 3, 7, 2, 9, 12, 3, 11, 2, 5, 3, 6, 9, 11, 12, 2, 11, 9, 10, 5, 11]$
- 22_20_22:
 - $F = [3, 7, 4, 4, 5, 4, 4, 5, 0, 3, 0, 4, 6, 2, 1, 3, 5, 1, 0, 3, 8, 7]$
 - $C = [8, 5, 9, 1, 10, 6, 0, 2, 7, 1, 0, 10, 5, 6, 7, 1, 0, 3, 7, 5]$
 - $B = [4, 1, 3, 8, 2, 3, 3, 12, 6, 1, 10, 4, 4, 8, 10, 10, 5, 6, 11, 7, 10, 4]$
- 22_22_22:
 - $F = [8, 0, 8, 0, 5, 5, 5, 8, 6, 3, 0, 4, 3, 1, 8, 4, 2, 4, 7, 5, 7, 6]$
 - $C = [8, 5, 0, 6, 10, 5, 4, 0, 6, 7, 7, 3, 2, 0, 5, 0, 7, 0, 2, 6, 5, 3]$
 - $B = [8, 12, 1, 11, 10, 7, 6, 7, 8, 11, 7, 9, 7, 2, 7, 11, 3, 1, 10, 9, 6, 6]$
- 22_24_22:
 - $F = [7, 1, 8, 0, 8, 5, 7, 7, 7, 0, 2, 0, 5, 2, 6, 8, 2, 0, 7, 7, 3, 4]$
 - $C = [7, 3, 3, 8, 3, 9, 3, 10, 7, 3, 10, 10, 8, 7, 6, 2, 9, 4, 1, 5, 7, 2, 5, 6]$
 - $B = [2, 7, 11, 6, 12, 10, 5, 6, 8, 6, 9, 11, 4, 4, 8, 12, 11, 5, 3, 7, 2, 6]$
- 23_23_20:
 - $F = [0, 0, 1, 6, 0, 5, 8, 7, 5, 1, 0, 0, 7, 8, 2, 6, 4, 3, 7, 0, 7, 2, 4]$
 - $C = [5, 7, 8, 9, 8, 0, 7, 10, 5, 3, 9, 9, 9, 3, 0, 9, 4, 10, 2, 2, 4, 4, 2]$
 - $B = [2, 12, 6, 12, 11, 8, 12, 12, 10, 11, 3, 1, 3, 6, 9, 4, 2, 1, 2, 5]$
- 23_23_23:
 - $F = [0, 5, 5, 3, 5, 0, 0, 1, 1, 8, 7, 8, 4, 7, 1, 8, 1, 8, 7, 5, 7, 2, 8]$
 - $C = [9, 3, 6, 1, 6, 9, 0, 8, 9, 2, 3, 9, 6, 2, 8, 10, 10, 9, 8, 10, 7, 3, 6]$
 - $B = [1, 11, 2, 10, 1, 3, 10, 2, 3, 6, 2, 7, 12, 3, 12, 9, 7, 12, 12, 12, 1, 10, 7]$
- 24_24_24:
 - $F = [6, 7, 0, 6, 1, 0, 7, 4, 1, 0, 8, 2, 5, 6, 0, 0, 6, 0, 5, 7, 5, 7, 5, 2]$
 - $C = [10, 2, 6, 3, 5, 9, 5, 0, 9, 10, 6, 8, 9, 9, 9, 9, 8, 6, 6, 3, 10, 2, 10, 2]$
 - $B = [7, 11, 11, 9, 7, 11, 2, 7, 12, 9, 4, 10, 4, 3, 6, 7, 1, 6, 4, 5, 12, 1, 1, 5]$

3.3.3. Mediciones

Se realizaron mediciones sobre los tiempos de resolución con base en los casos de prueba propuestos por la cátedra:

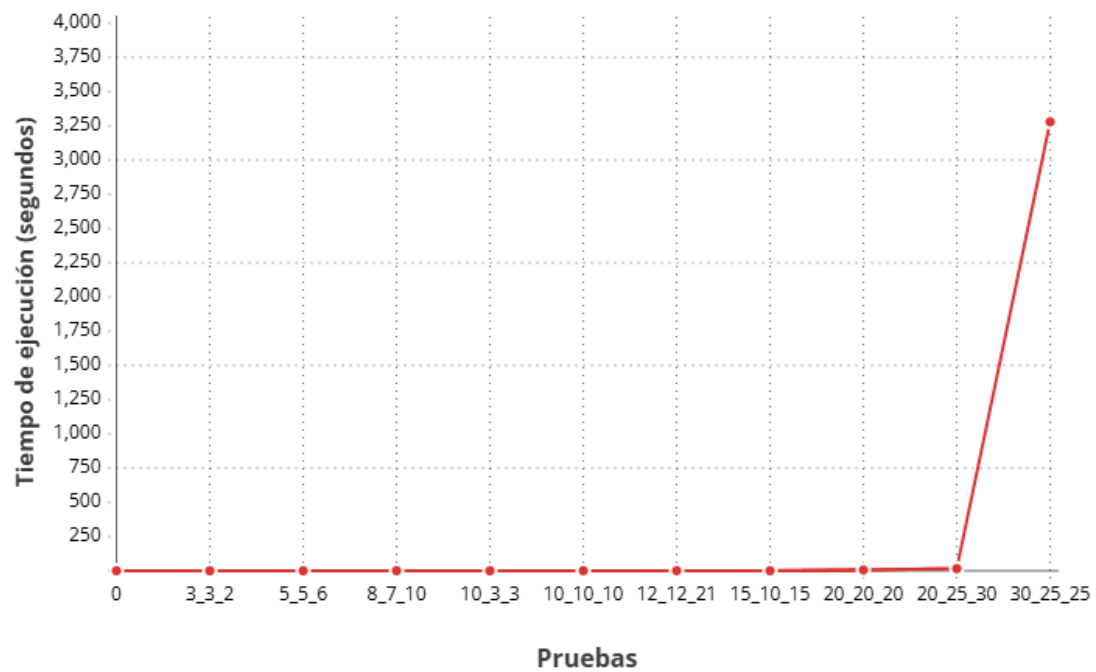


Figura 5: tiempos de resolución de los test de la cátedra

Agregamos otro gráfico sin el test 30_25_25 por motivos ilustrativos:

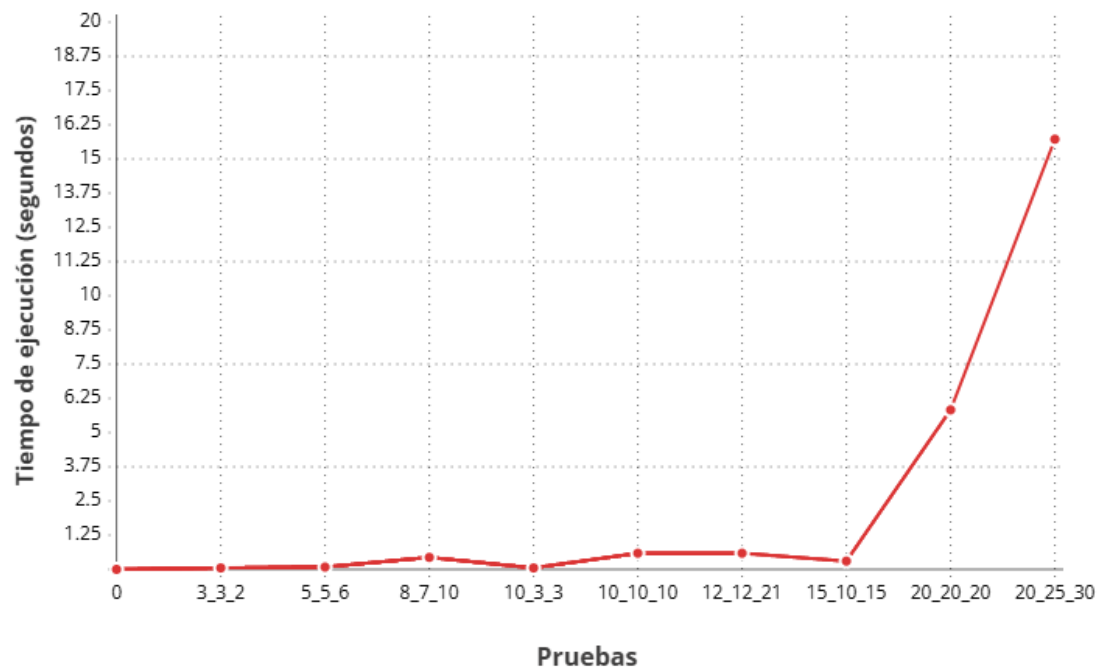


Figura 6: tiempos de resolución sin el test 30_25_25

Y sobre los sets de datos creados en la subsección anterior

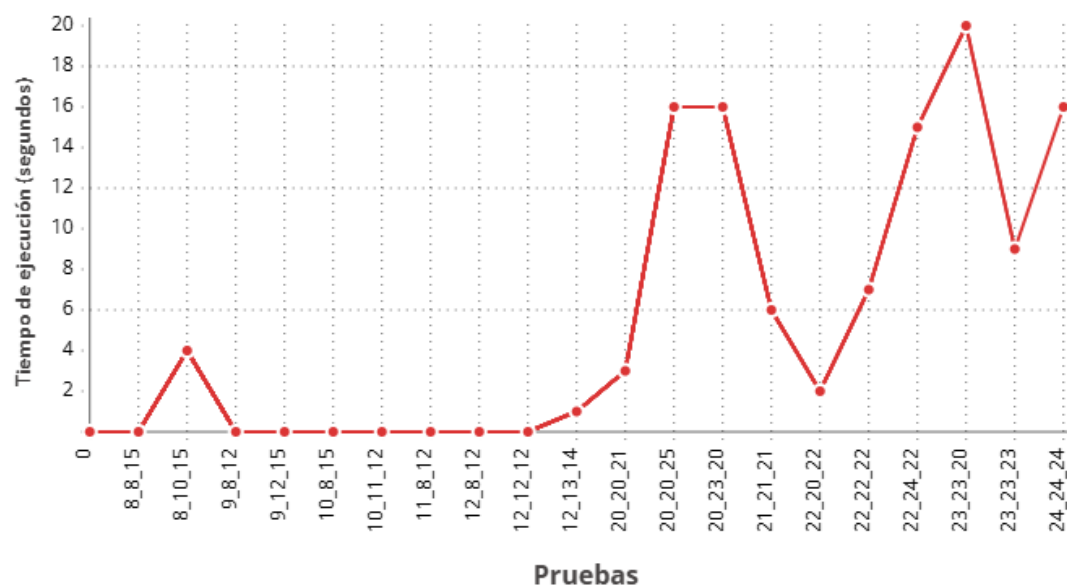


Figura 7: tiempos de resolución sets propios

3.4. Resolución de *BatallaNaval* por Aproximación

En esta sección analizaremos e implementaremos el algoritmo de aproximación propuesto por John Jellicoe:

- Ir a fila/columna de mayor demanda.
- Ubicar el barco de mayor longitud en dicha fila/columna en algún lugar válido. Si el barco de mayor longitud es más largo que dicha demanda, simplemente saltarlo y seguir con el siguiente.
- Volver a aplicar hasta que no queden más barcos o no haya más demandas a cumplir.

3.4.1. ¿Es buena aproximación?

Este algoritmo es útil como una aproximación al problema de la batalla naval, busca estratégicamente acercarse lo más posible a la solución óptima, intentando colocar en las filas/columnas de mayor demanda a los barcos de mayor tamaño.

3.4.2. Implementación

La implementación propuesta hace uso de la librería *utils.py*:

```
1 FILA = 0
2 COLUMNA = 1
3
4 import sys
5
6 common_directory_path = '../common/'
7 sys.path.append(common_directory_path)
8 from game_logic import *
9
10 def ordenar_barcos(barcos):
11     referencia_barcos = list(enumerate(barcos))
12     referencia_barcos.sort(key=lambda x: -x[1])
13     return referencia_barcos
14
15 def referenciar_demandas(demanda_filas, demanda_columnas):
16     referencias = {}
17     for idx, demanda_fila in enumerate(demanda_filas):
18         referencias[(idx, FILA)] = demanda_fila
19     for idx, demanda_columna in enumerate(demanda_columnas):
20         referencias[(idx, COLUMNA)] = demanda_columna
21     return referencias
22
23 def obtener_alternativa(tablero, demandas, tipo_demanda, demanda_idx, barco_size):
24     alternativa = []
25     consecutivos = 0
26     idx_inicial = 0
27     idx_final = None
28
29     for x in range(len(demandas)):
30         if demandas[x] == 0:
31             idx_inicial = x + 1
32             consecutivos = 0
33             continue
34
35         if (tipo_demanda == COLUMNA and hay_adyacencias(demanda_idx, x, tablero)) \
36         or (tipo_demanda == FILA and hay_adyacencias(x, demanda_idx, tablero)):
37             idx_inicial = x + 1
38             consecutivos = 0
39             continue
40
41         consecutivos += 1
42         if consecutivos == barco_size:
```

```

43         idx_final = x
44         break
45
46     if idx_final is not None:
47         for x in range(idx_inicial, idx_final + 1):
48             if tipo_demanda == COLUMNA:
49                 alternativa.append((demanda_idx, x))
50             elif tipo_demanda == FILA:
51                 alternativa.append((x, demanda_idx))
52
53     return alternativa

```

La implementación propuesta:

```

1  from utils import *
2
3  def aproximacion_batalla_naval(tablero, demanda_filas, demanda_columnas, barcos):
4      barcos_ordenados = ordenar_barcos(barcos)
5      puestos = {}
6      demandas = referenciar_demandas(demanda_filas, demanda_columnas)
7      while (len(demandas) > 0 and len(puestos) < len(barcos)):
8          hubo_inserciones = False
9          (idx, tipo_demanda) = demanda = max(demandas.items(), key=lambda x: x[1])
10         for barco in barcos_ordenados:
11             barco_idx, barco_size = barco
12             if (barco_size > demanda or barco in puestos):
13                 continue
14             if tipo_demanda == FILA:
15                 alternativa = obtener_alternativa(tablero, demanda_columnas,
16 COLUMNA, idx, barco_size)
17             else:
18                 alternativa = obtener_alternativa(tablero, demanda_filas, FILA, idx
19 , barco_size)
20             if (len(alternativa) == 0):
21                 continue
22             # ----- Colocamos un barco -----
23             colocar_barco(alternativa, tablero, barco_idx)
24             actualizar_demandas(alternativa, demanda_filas, demanda_columnas)
25             puestos[barco] = alternativa
26             hubo_inserciones = True
27             # ----- Actualizamos demandas -----
28             demandas[(idx, tipo_demanda)] -= barco_size
29             if tipo_demanda == FILA:
30                 disminuidos_idx = list(map(lambda x: x[1], alternativa))
31                 disminuidos = [(x, COLUMNA) for x in disminuidos_idx]
32             else:
33                 disminuidos_idx = list(map(lambda x: x[0], alternativa))
34                 disminuidos = [(x, FILA) for x in disminuidos_idx]
35             for disminuido in disminuidos:
36                 if disminuido in demandas:
37                     demandas[disminuido] -= 1
38             break
39         if not hubo_inserciones:
40             del demandas[(idx, tipo_demanda)]
41     return puestos

```

3.4.3. Análisis de complejidad

Para el análisis considerar:

- k , es la cantidad de barcos.
- m , es la cantidad de filas
- n , es la cantidad de columnas del tablero.

Consideramos importante mencionar antes del análisis que, en el algoritmo propuesto, decidimos almacenar juntas en una misma estructura de tamaño $n + m$ a las demandas de filas y columnas. Para poder diferenciar el tipo de demanda definimos dos constantes, *FILA* y *COLUMNA*, y se las asignamos a cada demanda según corresponda.

La estructura elegida fue un diccionario. Cada clave es una tupla de dos elementos, siendo el primero el índice de una fila/columna y el segundo una referencia constante a esta, el valor que va a tener asociado es el de su demanda.

El ciclo *while* tiene una complejidad $\mathcal{O}(n + m)$, ya que, en el peor de los casos, si no pudimos poner todos los barcos o pudimos ponerlos a todos pero luego de analizar casi todas las demandas, entonces habremos entrado al ciclo cerca de unas $n + m$ veces.

Luego, dentro del ciclo *while* tenemos un ciclo *for* en el cual, para una demanda ya seleccionada, se realiza un análisis barco por barco para ver si alguno la puede disminuir, por lo que entramos en él a lo sumo k veces. Dentro de este ciclo, realizamos tareas de una complejidad a lo sumo $\mathcal{O}(n)$ u $\mathcal{O}(m)$ dependiendo del tipo de demanda que se esté analizando. Como en el peor de los casos un barco prueba todas o casi todas las filas/columnas para ver si cabe en el tablero, la complejidad total del algoritmo termina siendo $\mathcal{O}(k * (n + m)^2)$.

3.4.4. Cálculo de la cota del algoritmo.

Sean:

- I una instancia del problema *BatallaNaval*.
- $A(I)$ una solución del algoritmo de aproximación.
- $z(I)$ una solución óptima.

Vamos a buscar obtener una cota inferior de forma empírica relacionando ambos algoritmos.

Para el siguiente análisis elegimos arbitrariamente dos instancias particulares:

- $I_1 =$
 - $F = [1, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 4]$
 - $C = [6, 5, 3, 0, 6, 3, 3]$
 - $B = [2, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 7, 7, 7]$
- $I_2 =$
 - $F = [5, 0, 0, 6, 2, 1, 6, 3, 3, 1, 2, 4, 5, 5, 2, 5, 4, 0, 4, 5]$
 - $C = [0, 5, 5, 0, 6, 2, 2, 6, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 1, 4, 5, 2, 1, 6]$
 - $B = [5, 5, 6, 5, 1, 3, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 6, 7, 7, 4]$

, Que se corresponden a los sets de datos 8.7_10 y 20_20_20 provistos por la cátedra.

Para calcular la cota tomamos como referencia a la instancia I_1 y generamos de manera aleatoria sets de datos de proporciones similares, obteniendo los siguientes resultados.

I	$z(1)$	$A(I)$	$\frac{A(I)}{z(I)}$
8_7_10	26	26	1
8_8_15	38	32	0.84
8_10_15	54	40	0.74
9_8_12	38	30	0.79
9_12_15	44	44	1
10_8_15	52	44	0.85
10_11_12	66	36	0.55
11_8_12	26	26	1
12_8_12	46	32	0.70
12_12_12	62	42	0.68
12_13_14	88	76	0.86

Nos quedamos con $r_{(A)} \leq 0,5$, que es un valor cercano al obtenido en el peor caso para la relación $\frac{A(I)}{z(I)}$. Podríamos decir entonces que A es una 2 aproximaciones.

Volvimos a tomar mediciones con volúmenes de datos más grandes para verificarlo. Para ello, como I_2 contiene un poco más del doble de filas, columnas y barcos que I_1 , decimos considerarla como un “volumen inmanejable de datos” y medimos otra vez con base en ello.

I	$z(1)$	$A(I)$	$\frac{A(I)}{z(I)}$
20_20_20	140	86	0.61
20_20_21	84	84	1
20_20_25	132	120	0.91
20_23_20	106	106	1
21_21_21	114	114	1
22_20_22	138	114	0.83
22_22_22	86	72	0.84
22_24_22	158	114	0.72
23_23_20	86	70	0.81
23_23_23	110	96	0.87
24_24_24	140	84	0.60

3.5. Resolución de *BatallaNaval* por Greedy

Proponemos un algoritmo que resuelve el problema *BatallaNaval* usando la metodología Greedy.

3.5.1. Implementación

Recordemos, una vez más, que la entrada del problema consiste en:

- B , una lista de k barcos, donde el barco en la posición i tiene b_i de largo;
- F , una lista de demanda para las filas, donde el valor en la posición j corresponde a la cantidad de casilleros a ser ocupados en la fila j ;
- C , una lista de demanda para las columnas, donde el valor en la posición h corresponde a la cantidad de casilleros a ser ocupados en la columna h .

Creamos la siguiente implementación en Python:

```
1
2 VERTICAL = 'V'
3 HORIZONTAL = "H"
4
5 #Verifica que la pocision dada y sus posiciones adyacentes esten vacias
6 def posicion_vacia (i , j , tablero):
7     for dx, dy in [(0, 0), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 1), (1, -1),
8         (1, 0), (1, 1)]:
9
10         adyacente_x = i + dx
11         adyacente_y = j + dy
12
13         if ( (0 <= adyacente_x < len(tablero)) and (0 <= adyacente_y < len(tablero
14             [0])) and (tablero[adyacente_x][adyacente_y] != 0) ):
15             return False
16
17     return True
18
19 # Valida si se puede ubicar un barco en la posicion y direccion recibidas,
20 # respetando los limites del tablero, cumpliendo las restricciones del mismo y
21 # evitando adyacencias con otros barcos
22
23 def se_puede_ubicar(i, j, longitud, direccion , tablero, demandas_filas ,
24     demandas_columnas):
25
26     if (direccion == HORIZONTAL) :
27
28         # Verificamos que el barco no se sale del tablero
29         if ( (j + longitud) > len(tablero[0]) ):
30             return False
31
32         # Verificamos que los casilleros a ocupar est n libres, no tengan barcos
33         # adyacentes y cumplan las demandas de las columnas
34         for col in range(j, (j + longitud)):
35             if ((not posicion_vacia(i , col , tablero)) or (demandas_columnas[col]
36                 < 1)):
37                 return False
38
39     else:
40
41         # Verificamos que el barco no se sale del tablero
42         if ((i + longitud) > len(tablero)):
43             return False
44
45         # Verificamos que los casilleros a ocupar est n libres, no tengan barcos
46         # adyacentes y cumplan las demandas de las filas
47         for fila in range(i, i + longitud):
48             if ((not posicion_vacia(fila , j , tablero)) or (demandas_filas[fila] <
49                 1)):
50                 return False
51
52     return True
53
54 # Ubica un barco en el tablero y actualiza las demandas de filas y columnas.
55 def ubicar_barco(i, j, longitud, direccion , tablero , demandas_filas ,
56     demandas_columnas):
57     if (direccion == HORIZONTAL):
58         for col in range(j, j + longitud):
59             tablero[i][col] = 1
60             demandas_filas[i] -= 1
61             demandas_columnas[col] -= 1
62     else:
63         for fila in range(i, i + longitud):
64             tablero[fila][j] = 1
65             demandas_filas[fila] -= 1
66             demandas_columnas[j] -= 1
67
68 def batalla_naual_greedy (demandas_filas , demandas_columnas , barcos):
69
70
```

```
61 demanda_cumplida = 0
62 demanda_total = sum(demandas_filas) + sum(demandas_columnas)
63 tablero = [[0]*len(demandas_columnas) for _ in range(len(demandas_filas))]
64
65 # Ordenamos los barcos de mayor a menor longitud
66 barcos.sort(reverse=True)
67
68
69 # Intentamos ubicar cada barco en todos los casilleros del tablero y en ambos
    sentidos
70
71 for barco in barcos:
72     colocado = False
73
74     for fila in range(len(tablero)):
75         for col in range(len(tablero[0])):
76
77             if ((demandas_filas[fila] >= barco) and (demandas_columnas[col] >=
1) and (se_puede_ubicar(fila, col, barco, HORIZONTAL, tablero, demandas_filas ,
demandas_columnas))):
78                 ubicar_barco(fila, col, barco, HORIZONTAL, tablero,
demandas_filas, demandas_columnas)
79                 colocado = True
80                 break
81             elif ((demandas_filas[fila] >= 1) and (demandas_columnas[col] >=
barco) and (se_puede_ubicar(fila, col, barco, VERTICAL, tablero, demandas_filas
, demandas_columnas))):
82                 ubicar_barco(fila, col, barco, VERTICAL, tablero,
demandas_filas, demandas_columnas)
83                 colocado = True
84                 break
85
86         if colocado:
87             break
88
89
90 demanda_incumplida = sum(demandas_filas) + sum(demandas_columnas)
91 demanda_cumplida = demanda_total - demanda_incumplida
92
93 return tablero , demanda_total, demanda_cumplida , demanda_incumplida
```

3.5.2. Análisis de complejidad

Ahora analizamos la complejidad de la solución propuesta:

- La función *posicion_vacia* tiene una complejidad de $\mathcal{O}(1)$, ya que se itera una cantidad de veces constante de 9 veces.
- La función *se_puede_ubicar* tiene una complejidad de $\mathcal{O}(l)$ siendo L la longitud recibida por parámetro, ya que itera sobre esa cantidad de posiciones.
- La función *ubicar_barco* tiene una complejidad de $\mathcal{O}(l)$, por el mismo motivo.
- En la función *batalla_naval_greedy*:
 - Ordenar los barcos tiene una complejidad de $\mathcal{O}(k * \log(k))$
 - Se itera sobre los k barcos y las $n * m$ posiciones del tablero. Además, por cada posición se llama a *se_puede_ubicar* y en el peor de los casos también a *ubicar_barco* por lo que resulta una complejidad $\mathcal{O}(k * n * m * l)$

Finalmente, la complejidad total del algoritmo es $\mathcal{O}(k * n * m * l)$, ya que es cota superior respecto a $\mathcal{O}(k * \log(k))$.

3.5.3. Mediciones

Realizamos mediciones sobre los tiempos de resolución con base en los casos de prueba propuestos por la cátedra:

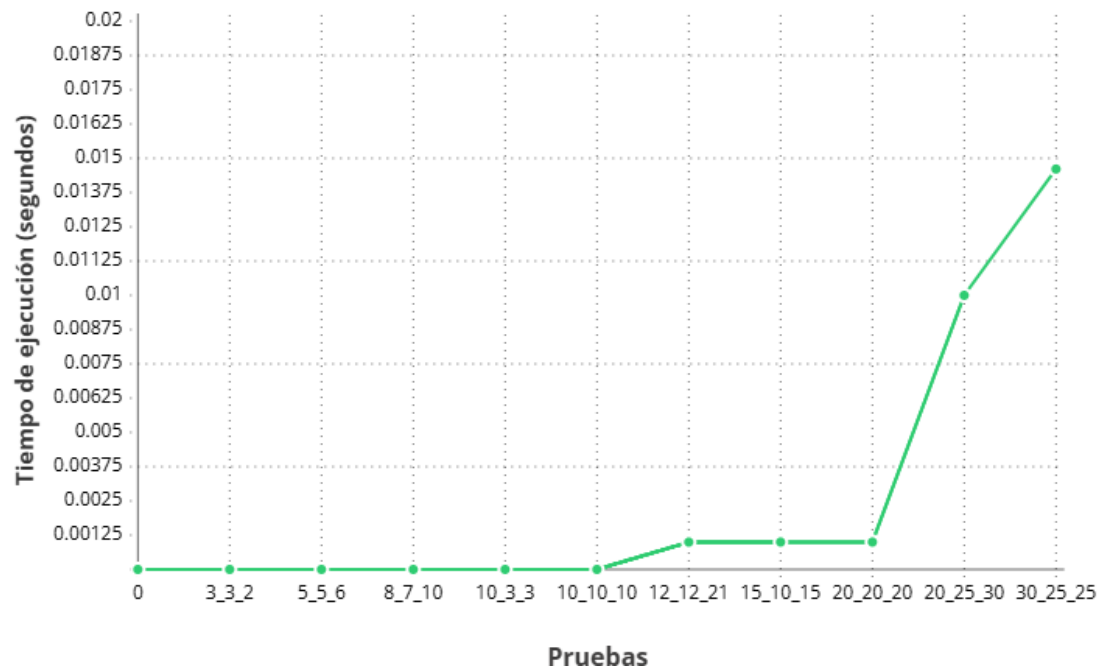


Figura 8: tiempos de resolución

Realizando una comparación con los tiempos obtenidos con la resolución por Backtracking (ver punto 3) tenemos:

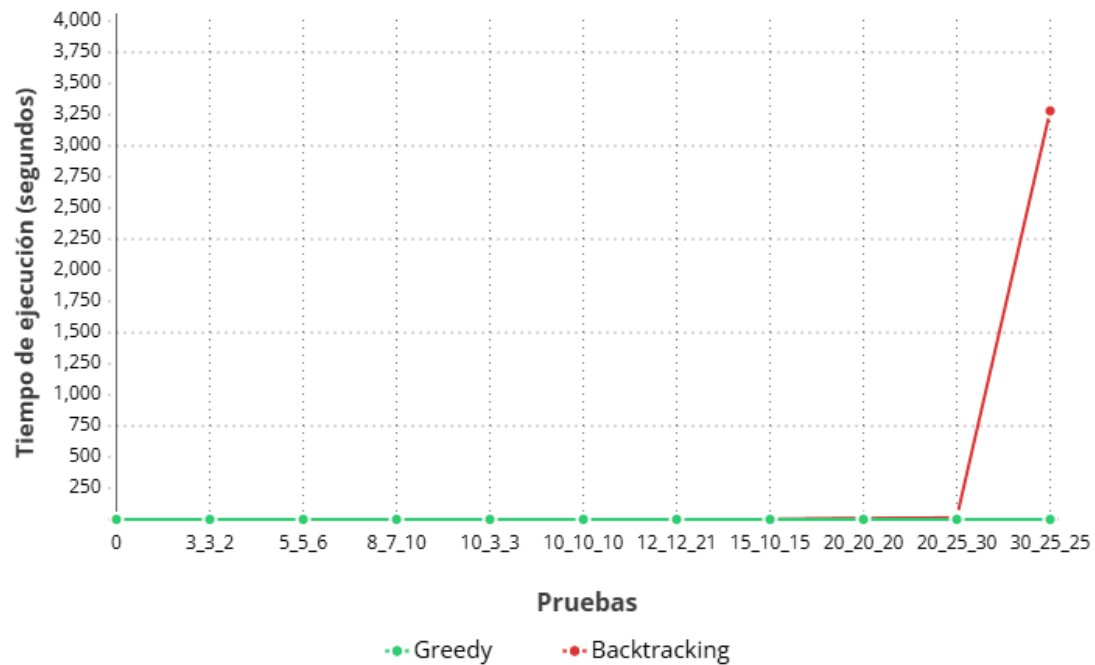


Figura 9: Comparación de tiempos Greedy vs. Backtracking

Agregamos otro gráfico sin el test 30_25_25 por motivos ilustrativos:

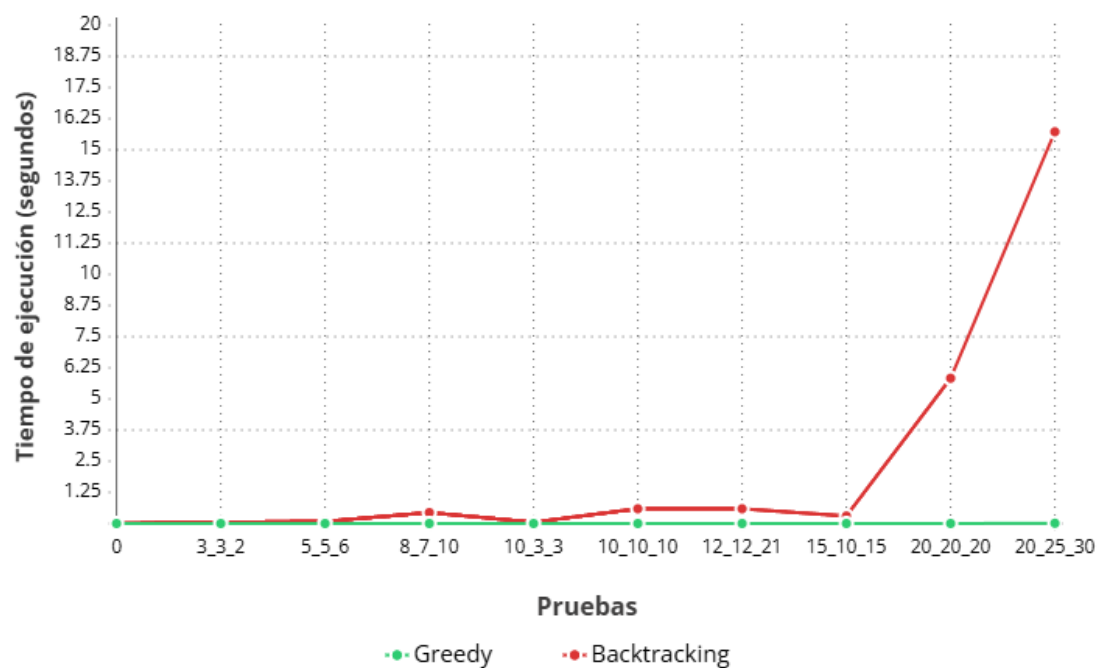


Figura 10: Comparación de tiempos Greedy vs. Backtracking, sin el test 30_25_25

3.5.4. Conclusiones

Consideramos de interés esta resolución ya que, al hacer la comparación, podemos observar las ventajas y desventajas de las distintas metodologías. El algoritmo greedy es más rápido, pero no siempre llega a la solución óptima. Por otro lado, el algoritmo de backtracking es más lento, pero siempre llega a la solución óptima.

3.6. Conclusiones

Es muy importante conocer las distintas metodologías de resolución, sus ventajas y sus desventajas para poder elegir la que mejor se adapte a nuestras necesidades. Los algoritmos Greedy y el de aproximación son notablemente más rápidos que el de backtracking, pero este último brinda soluciones óptimas. Usar estos algoritmos menos precisos puede ser útil para establecer rápidamente cotas inferiores en casos de prueba grandes, mientras que el backtracking nos sería más atractivo si lo que buscamos es la solución óptima precisa.

4. Observaciones

Cada sección del trabajo práctico fue implementada por separado y cuenta con su propio README.md con especificaciones para su ejecución.