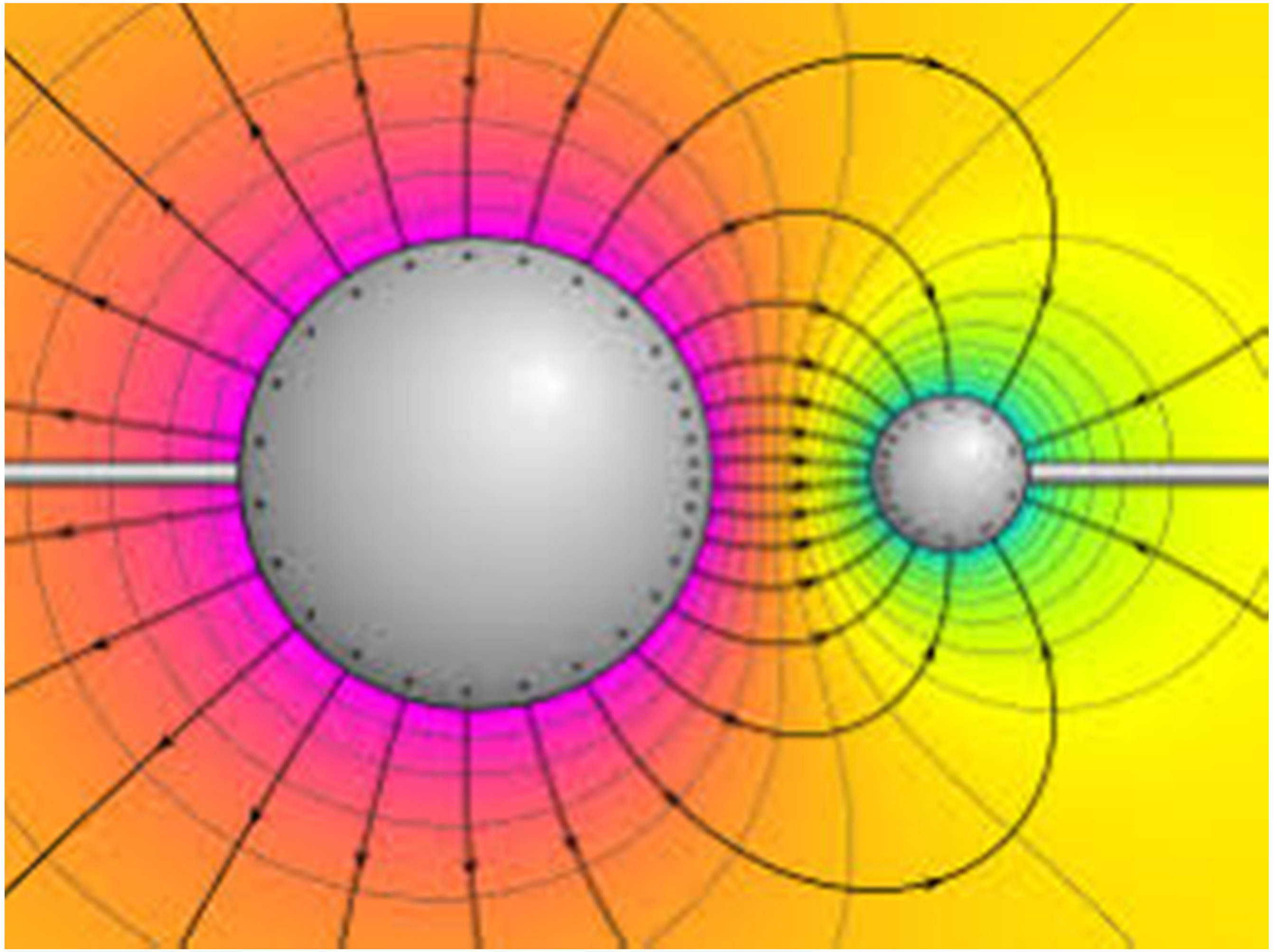
Potencial Eléctrico



Potencial Eléctrico

- Supongamos una carga de prueba q_0 en una región donde existe un campo eléctrico $\vec{E}$. Si q_0 está "libre" (se mueve libremente en el campo), entonces se va a mover a lo largo de una línea de campo.
- Sin embargo, si queremos desplazar a q_0 desde una posición arbitraria A hasta una posición final B (también arbitraria), en general será necesario realizar trabajo.
- Sabemos que la fuerza eléctrica debida al campo, sobre la carga de prueba es:

$$\vec{F}_E = q_0\vec{E}$$

- Por lo tanto, para mover q_0, sin acelerarla, un agente externo debe ejercer una fuerza

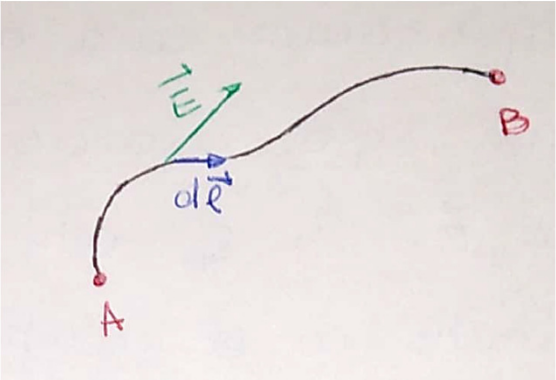
$$\vec{F}_{ext} = -q_0\vec{E}$$

y el trabajo realizado para llevarla de A hasta B será:

$$W_{AB} = -\int_A^B q_0\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Potencial Eléctrico

$$W_{AB} = -\int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Definición: La diferencia de potencial eléctrico entre los puntos A y B se define como el trabajo, por unidad de carga, necesario para llevar una carga de prueba desde A hasta B, en un campo electico, manteniéndola en equilibrio.

$$\boxed{V_B - V_A = \Delta V = \frac{W_{AB}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

Integral de línea del campo eléctrico

Potencial Eléctrico

El trabajo W_{AB} (y por lo tanto, la diferencia de potencial) puede ser negativo, positivo o cero, dependiendo de si el agente externo debe realizar trabajo a favor o en contra del campo $\vec{E}$.

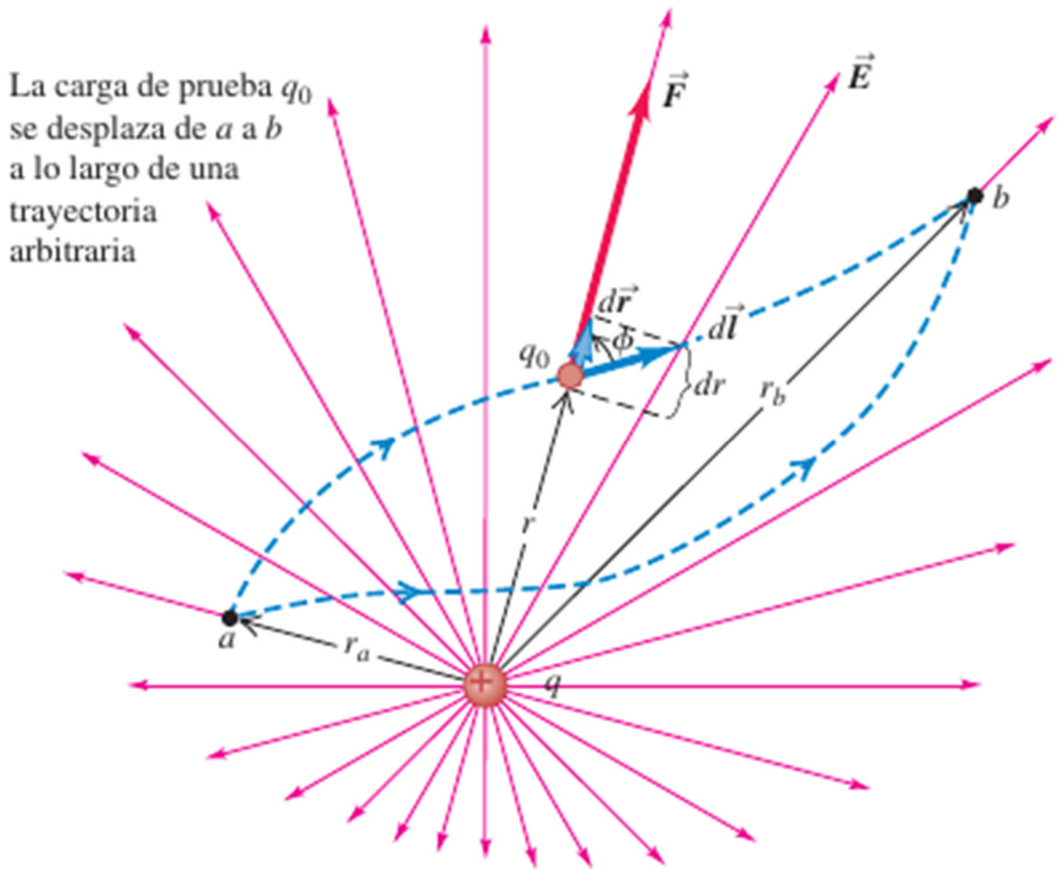
UNIDADES: $[V] = \dfrac{[W]}{[q]} = \dfrac{J}{C} = V \;\; (Volt)$

Notar que: $[E] = \dfrac{N}{C} = \dfrac{V}{m}$ → Usualmente se usa esta unidad

Importante: La fuerza eléctrica es conservativa y, por lo tanto, la integral de línea en la definición de ΔV es independiente de la trayectoria seguida para conectar A y B (afortunadamente, sino la definición de ΔV sería ambigua).

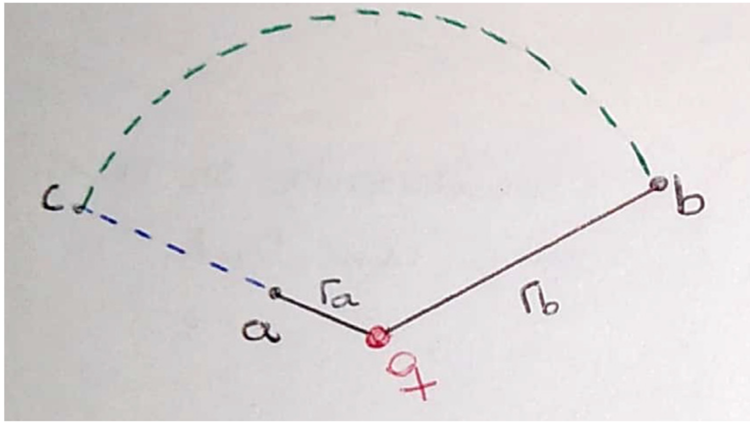
Potencial Eléctrico

- Ejemplo 1: Calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b, debido a una carga puntual q.



Potencial Eléctrico

Ya que la trayectoria que conecta a con b no es determinante, podemos elegir cualquier trayectoria que queramos. Si elegimos la trayectoria conveniente, los cálculos se simplifican bastante.



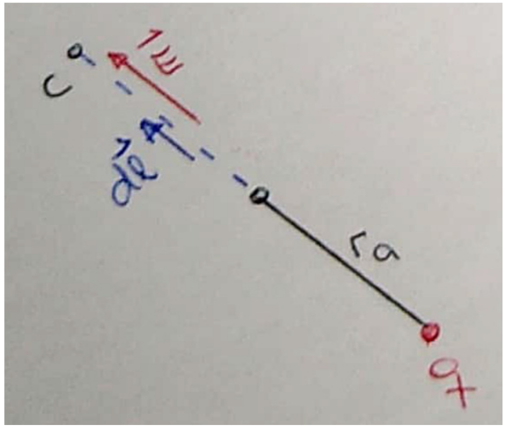
$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_b - V_a = -\underbrace{\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\text{En el tramo recto}} - \underbrace{\int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\text{En el tramo circular}}$$

Pero $\vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl\cos\theta$, donde θ = ángulo entre $\vec{E}$ y $d\vec{l}$.

Potencial Eléctrico

- En el tramo recto: $\vec{E} \parallel d\vec{l} \;\; (\theta = 0) \;\; y \;\; dl = dr$



$$\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^c E dr \cos 0$$

$$= \int_{r_a}^{r_c} \frac{kq}{r^2} dr$$

$$= -\frac{kq}{r_c} + \frac{kq}{r_a}$$

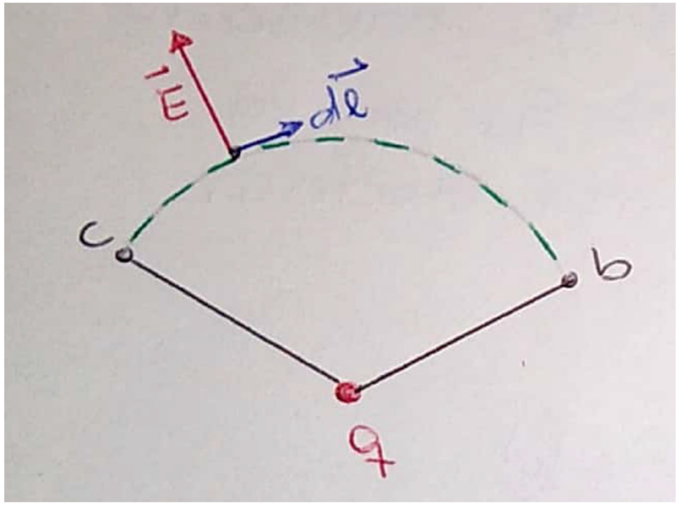
Pero $r_c = r_b$

$$\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{kq}{r_b} + \frac{kq}{r_a}$$

Potencial Eléctrico

- En el tramo circular:

$$\vec{E} \perp d\vec{l} \;\; (\theta = 90°)$$



$$\rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\rightarrow \int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Por lo tanto: $V_b - V_a = -\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$= -\left(-\frac{kq}{r_b} + \frac{kq}{r_a}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{V_b - V_a = \frac{kq}{r_b} - \frac{kq}{r_a}}$$

Energía Potencial Eléctrica

- Recordemos de Física I que, para una fuerza conservativa, se puede definir una energía potencial U que satisface

$$\Delta U_{AB} = -W_{AB}$$

- Para el caso de la fuerza eléctrica sobre una carga de prueba:

$$\vec{F}_E = q_0 \vec{E}$$

- El trabajo realizado sobre q_0 por la fuerza eléctrica es:

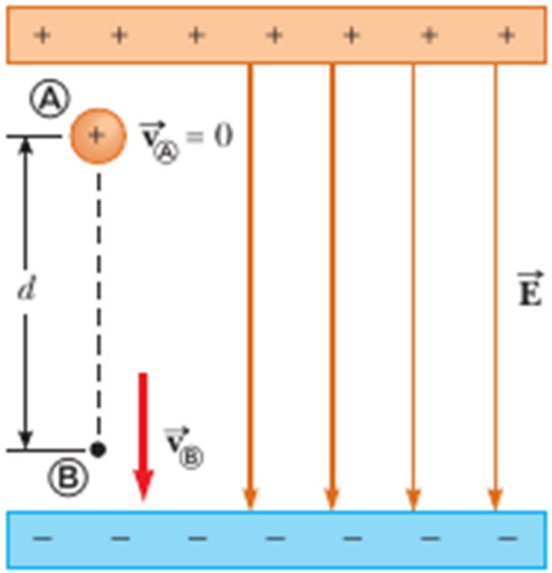
$$W^E{}_{AB} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0(-\Delta V_{AB})$$

- Por lo tanto: $\boxed{\Delta U_{AB} = U_B - U_A = q_0(V_B - V_A) = q_0 \Delta V}$

Energía Potencial Eléctrica

- Ejemplo 2: Un electrón se encuentra en la vecindad de una carga puntual estática $q = 5nC$. Cuando el e^- se encuentra a $10cm$ de dicha carga, tiene una velocidad de $3 \times 10^6 m/s$, de manera que se está alejado de ella, ¿A qué distancia de q el e^- se detendrá momentáneamente?

- Ejemplo 3: Un protón se libera desde el reposo en el punto A, en un campo eléctrico uniforme de $8 \times 10^4 V/m$ de magnitud. El protón se desplaza $0.5m$ hasta el punto B. Encontrar la velocidad del protón en B.



Potencial Eléctrico en un Punto

Hemos definido la diferencia de potencial entre dos puntos A y B como:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A menudo se toma el punto A muy lejos (infinito), y se elige arbitrariamente $V_A = 0$ (esto está asociado a la libertad de elegir el cero de energía potencial). Entonces, podemos definir el “potencial eléctrico en un punto P” como:

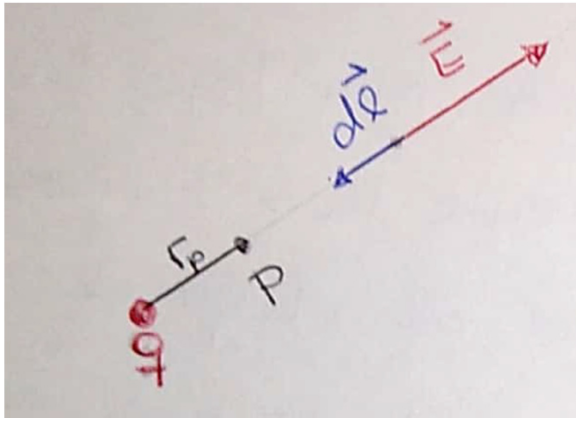
$$V(P) = \frac{W_{\infty \to P}}{q_0} - \int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

donde tomamos $V_A = 0$ y eliminamos índices.

En este caso, el potencial en un dado punto P está asociado al trabajo necesario para traer una carga de prueba q_0 desde el infinito hasta el punto P en cuestión, en una región donde existe un campo $\vec{E}$.

Potencial Eléctrico de una Carga Puntual

Supongamos que traigo una carga de prueba q_0 desde ∞ hasta un punto P ubicado a una distancia r_p de una carga puntual q positiva (que genera un campo $\vec{E}$)



$$\mathrm{V}(P) = -\int_{\infty}^{r_p} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl \cos 180° \quad y \;\; dl = -dr$$

$$\Rightarrow \mathrm{V}(r_p) = -\int_{\infty}^{r_p} E(-dr)(-1)$$

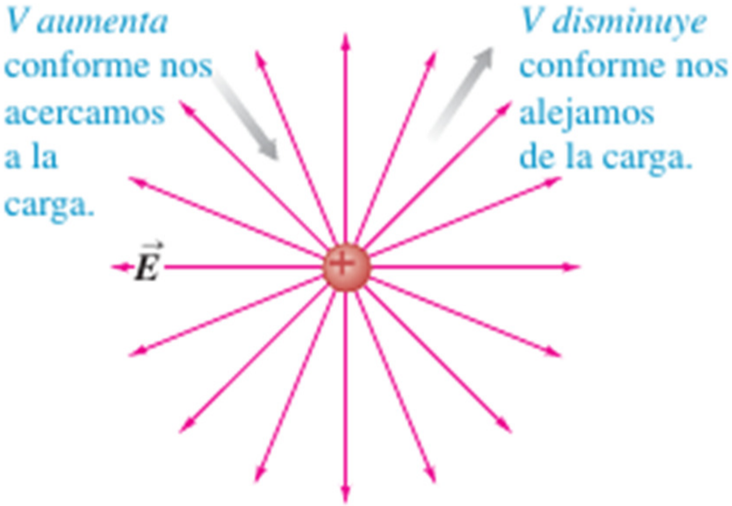
$$= -\int_{\infty}^{r_p} \frac{kq}{r^2} dr = -kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\infty}^{r_p}$$

Eliminando el índice P:

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{kq}{r}}$$

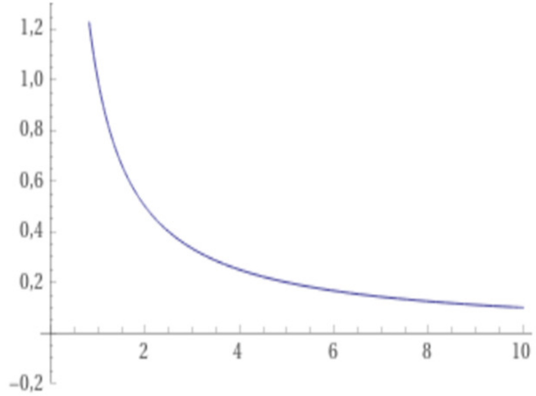
Potencial eléctrico en un punto ubicado a una distancia r de una carga puntual q.

a) Una carga puntual positiva



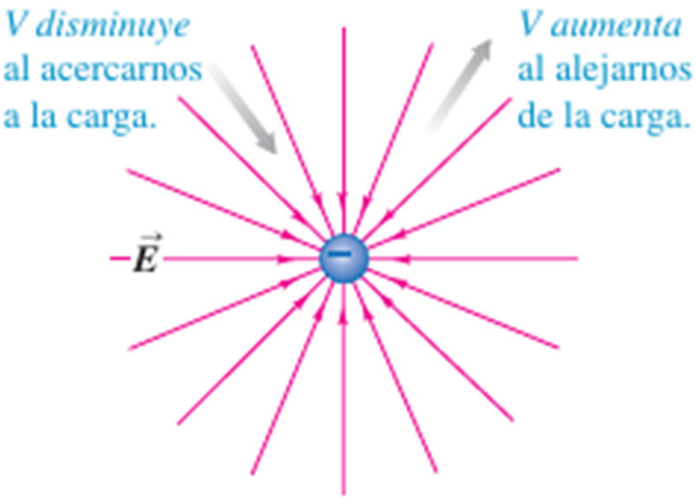
$$\boxed{V(r) = \frac{kq}{r}}$$

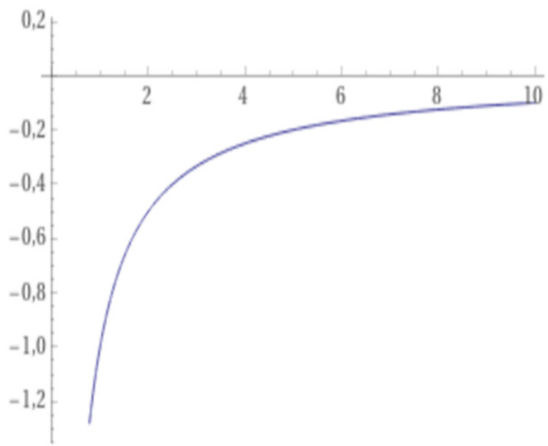
V es decreciente con r.



Si la carga hubiera sido negativa, habríamos obtenido el mismo resultado: $V = \frac{kq}{r}$, pero V sería negativo:

b) Una carga puntual negativa





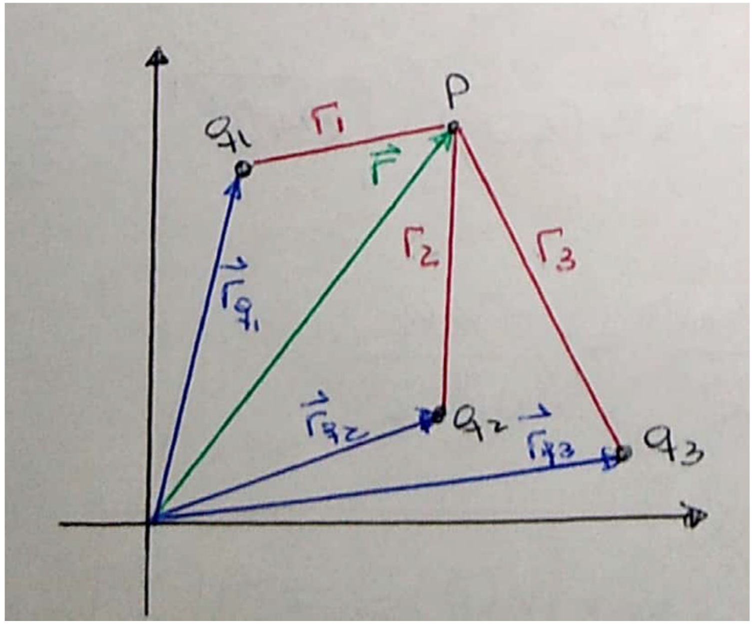
V es creciente con r.

Conclusión: El campo eléctrico apunta en la dirección de mayor a menor potencial (siempre).

Potencial Eléctrico

♦ POTENCIAL ELÉCTRICO DE UN CONJUTO DE CARGAS PUNTUALES

Supongamos un conjunto de N cargas puntuales $q_1, q_2, \cdots, q_N$:



$$V(P) = V_1(P) + V_2(P) + \cdots + V_N(P)$$

$$V(P) = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \cdots + \frac{kq_N}{r_N} \quad *$$

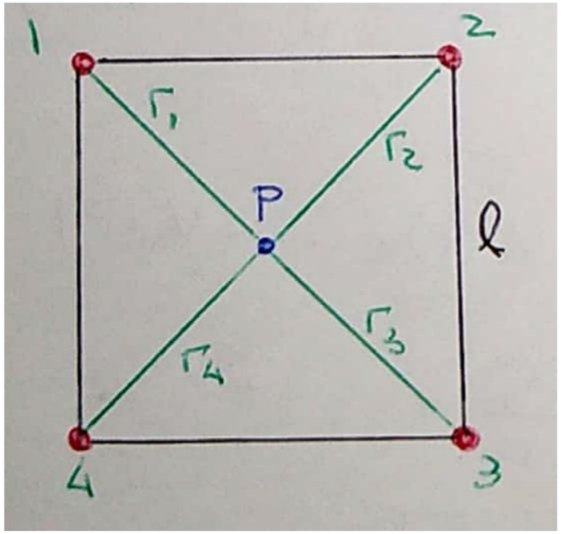
$$V(P) = \sum_{i=1}^{N} \frac{kq_i}{r_i} \qquad \text{(suma escalar)}$$

$r_i =$ Distancia de la carga q_i al punto P.

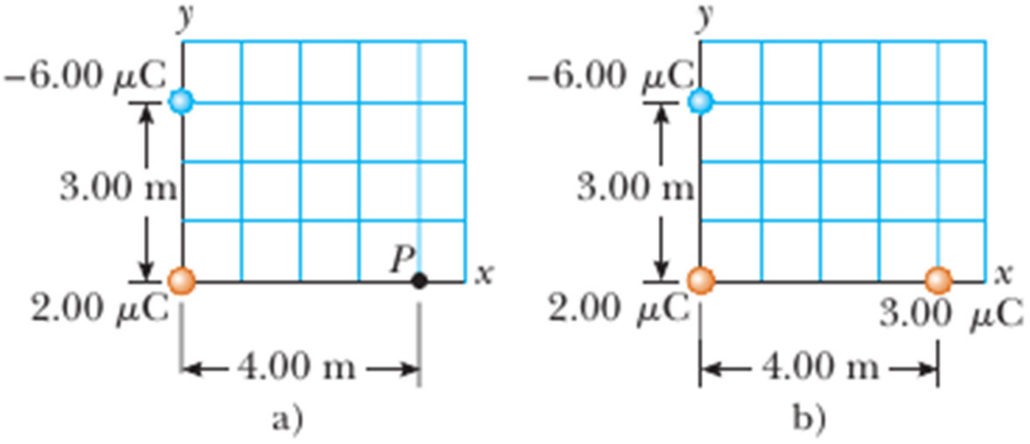
$$\rightarrow \boxed{V(P) = \sum_{i=1}^{N} \frac{kq_i}{\left\| \vec{r} - \vec{r}_{q_i} \right\|}}$$

* El potencial es un escalar.

- Ejemplo 4: Cuatro cargas idénticas de $1 \times 10^{-8} C$ se disponen en los vértices de un cuadrado de $10 cm$ de lado. Calcular el potencial eléctrico en el punto P ubicado en el centro del cuadrado.



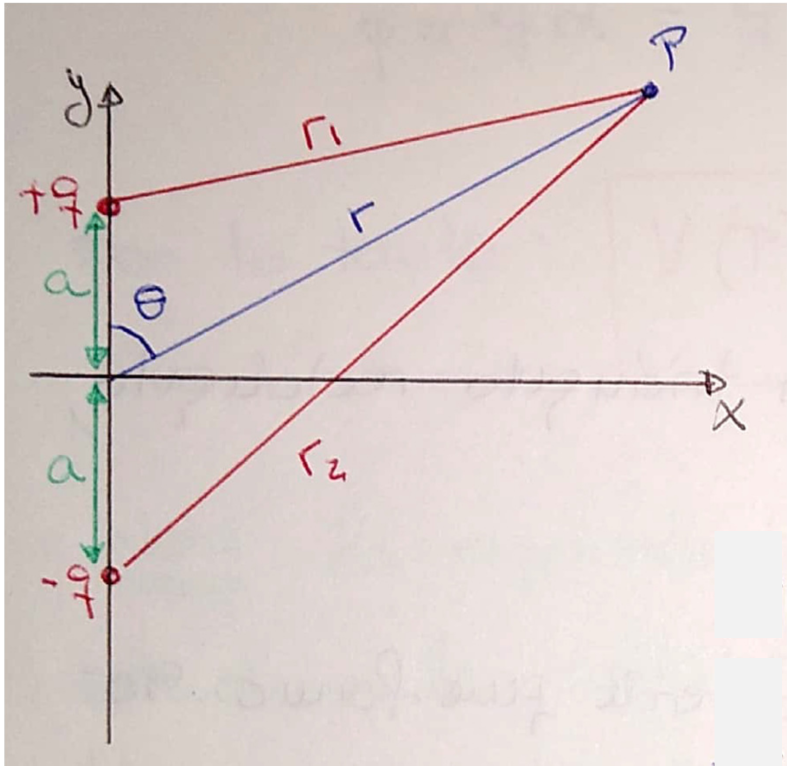
- Ejemplo 5: Una carga $q_1 = 2\mu C$ se ubica en el origen de coordenadas, y otra carga $q_2 = -6\mu C$ se ubica en $\vec{r}_2 = (0{,}3)m$.
  a) Encontrar el potencial eléctrico en el punto P de coordenadas $(4{,}0)m$.
  b) Calcular el trabajo realizado para traer una carga $q_3 = 3\mu C$ desde el infinito hasta P.



Potencial Eléctrico

♦ DIPOLO ELÉCTICO

Se define como dipolo eléctrico a un par de cargas de igual magnitud, y signos opuestos, separadas por una distancia $d = 2a$.

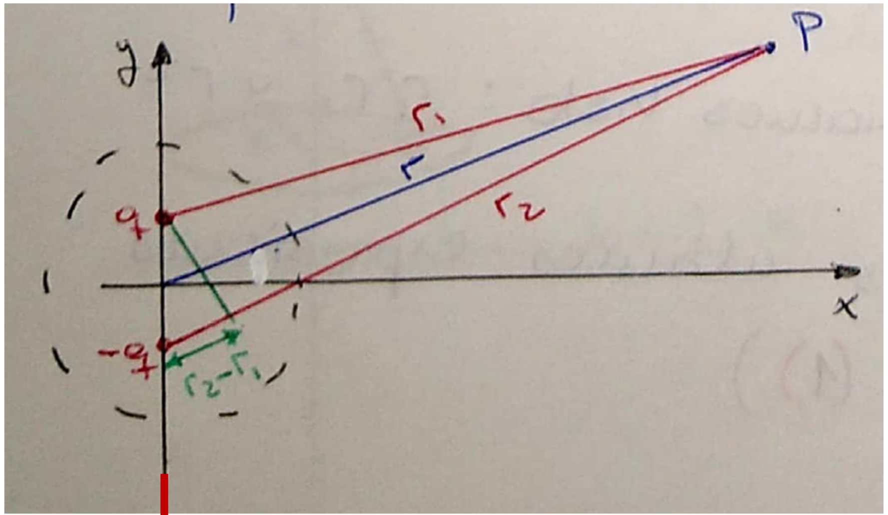


$$V(P) = \frac{kq}{r_1} + \frac{k(-q)}{r_2}$$

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)}$$

Este es el valor exacto del potencial en P.

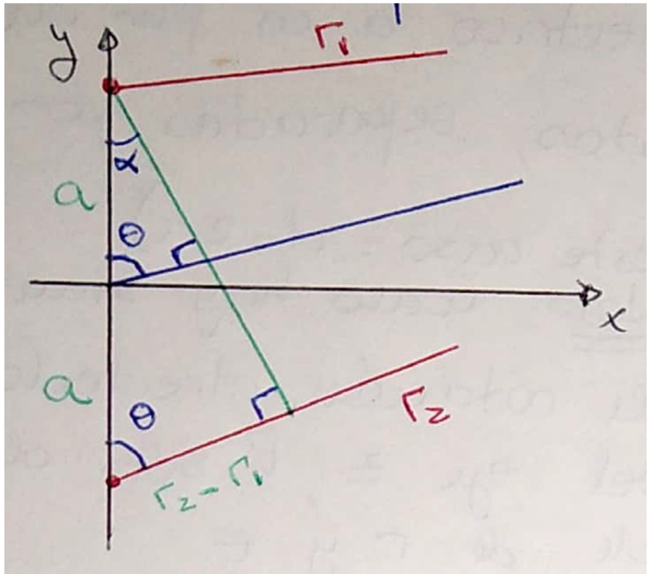


Ahora, para puntos muy lejanos ($r \gg d$)

→ $r_2 - r_1$ es muy pequeño

r, r_1 y r_2 son casi paralelos.

$r_1 r_2 \cong r^2$.



$$\sin\alpha = \cos\theta = \frac{r_2 - r_1}{2a}$$

→ $$2a\cos\theta = r_2 - r_1$$

→ $$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2a\cos\theta}{r^2}\right)$$

Momento dipolar eléctrico:

$$p = qd = q2a$$

→ $$\boxed{V(P) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Esta expresión se usa mucho para estudiar la radiación emitida por antenas.