Unidad 5

Teorema de los residuos

5º CLASE

Cintia Perrone – PS 2023

Criterio de clasificación de singularidades aisladas de funciones que son cociente de funciones analíticas

Teorema 5.2.12. Sea $f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, donde $N(z)$ y $D(z)$ son analíticas en z_0 tal que $N(z)$ tiene un cero de orden p y $D(z)$ tiene un cero de orden q en z_0, entonces:

i) Si $p < q$, z_0 es un polo de orden $(q - p)$ de $f(z)$

ii) Si $p \geq q$, z_0 es una singularidad evitable de $f(z)$

Demostración:

Puesto que $N(z)$ tiene un cero de orden p en z_0 y $D(z)$ tiene un cero de orden q en z_0, por el Teorema de Caracterización de ceros:

$N(z) = (z - z_0)^p n_1(z)$, con $n_1(z)$ analítica en z_0 y $n_1(z_0) \neq 0$

$D(z) = (z - z_0)^q d_1(z)$, con $d_1(z)$ analítica en z_0 y $d_1(z_0) \neq 0$

Así podemos escribir:

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{(z-z_0)^p n_1(z)}{(z-z_0)^q d_1(z)} = (z-z_0)^{p-q} g_1(z) \qquad con \qquad g_1(z) = \frac{n_1(z)}{d_1(z)}$$

$g_1(z)$ es analítica en z_0 por ser cociente de funciones analíticas en z_0 con denominador no nulo en z_0 y $g_1(\mathrm{z}_0) \neq 0$.

i) Si $q > p \;\Rightarrow\; q - p > 0$

$$f(z) = (z-z_0)^{p-q} g_1(z) = (z-z_0)^{-(q-p)} g_1(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{q-p}}\, g_1(z)$$

Por Teorema de Caracterización de Polos, z_0 es un polo de orden $q-p$ de $f(z)$

ii) Si $p \geq q$ entonces $f(z) = (z - z_0)^{p-q} g_1(z)$, válido si $z \neq z_0$, es decir en una región $0 < |z - z_0| < \infty$. Por otro lado $g_1(z)$ es analítica en z_0 y admite un desarrollo de Taylor en z_0 válido en la región $|z - z_0| < R$. Por lo tanto, $f(z) = (z - z_0)^{p-q} g_1(z)$ admite un desarrollo en serie de Laurent en $0 < |z - z_0| < R$ y solamente tiene potencias positivas de $(z - z_0)$, es decir, $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$, es decir, z_0 es una singularidad evitable de $f(z)$.

(Ejemplo pizarrón 5.A)

Resolución de integrales a lo largo de una curva cerrada de una función analítica sobre la curva y en su interior, salvo en un número finito de puntos singulares.

El Teorema de Cauchy-Goursat nos permitía calcular la integral de una función $f(z)$ a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ suave, o suave a trozos, simple, cerrada y recorrida en sentido antihorario, afirmando que el resultado era:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0$$

¿Pero qué ocurre en el caso en que la función $\boldsymbol{f(z)}$ sea analítica sobre la curva $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ y en su interior, salvo en un número finito de puntos singulares?

Para responder esta pregunta recurriremos al concepto de **“Residuo”.**

Primero analizaremos el caso de una función $f(z)$ analítica sobre una curva cerrada $\mathcal{C}$ y en su interior, salvo en un punto z_0: Si z_0 es una singularidad aislada de $f(z)$ entonces $f(z)$ es analítica en un entorno reducido de z_0, $0 < |z - z_0| < R$ y $f(z)$ admite un desarrollo de Laurent en dicho entorno reducido:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \qquad 0 < |z - z_0| < R$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad y \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz$$

siendo $\mathcal{C}$ cualquier curva cerrada, suave o suave a trozos, simple y recorrida en sentido antihorario, contenida en la corona o entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$ y que rodea a z_0.

Si $n = 1$:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-1+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz \qquad \Rightarrow \qquad \oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i b_1$$

Es decir, si obtenemos el coeficiente b_1, podemos calcular el valor de la integral.

(Ejemplo pizarrón 5.B)

5.3 Residuo

Definición 5.3.1: Sea $\boldsymbol{z_0}$ una singularidad aislada de $f(z)$. Se denomina **residuo** de $f(z)$ en $\boldsymbol{z_0}$ al coeficiente b_1 de la potencia $(z-z_0)^{-1}$ del desarrollo de la serie de Laurent de $f(z)$ en un entorno reducido de $\boldsymbol{z_0}$, $0<|z-z_0|<R$ y se indica $\boldsymbol{Res_{z_0} f(z)}$.

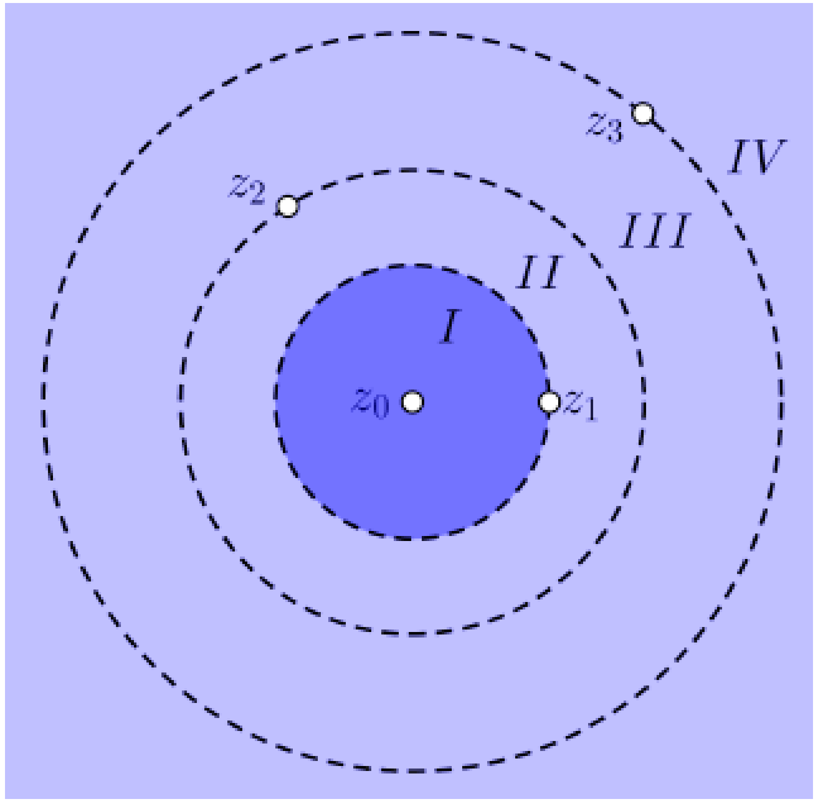
El desarrollo en serie de Laurent de una función $f(z)$ en una singularidad aislada z_0 puede admitir varias coronas de convergencia:

$$I: \ 0 < |z - z_0| < R_1$$

$$II: \ R_1 < |z - z_0| < R_2$$

$$III: \ R_2 < |z - z_0| < R_3$$

$$IV: \ R_3 < |z - z_0| < \infty$$



Para clasificar la singularidad z_0 y hallar el residuo de $f(z)$ en z_0 debemos encontrar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ convergente en la corona o entorno reducido I.

Si z_0 es una **singularidad evitable** de $f(z)$, se cumple que todos los coeficientes b_n de la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0 < |z - z_0| < R$ son iguales a cero. Entonces, en particular, para las singularidades evitables tenemos $\boldsymbol{Res_{z_0} f(z) = b_1 = 0}$.

Para encontrar **el residuo de singularidades esenciales** no se cuenta con ninguna fórmula y se debe encontrar el **desarrollo de Laurent** convergente en la corona $0 < |z - z_0| < R$.

Para determinar **el residuo en un polo de orden $\boldsymbol{k}$** de una función $f(z)$, sin necesidad de encontrar el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en un entorno reducido de z_0 podemos utilizar la **siguiente proposición**:

Proposición 5.3.7. Cálculo de residuos en polos:

i) Si z_0 es un polo de orden $k > 1$ de $f(z)$ entonces:

$$Res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] \right\}$$

ii) Si z_0 es un polo simple $k = 1$ de $f(z)$ entonces:

$$Res_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right]$$

Demostración:

i) Si z_0 un polo de orden $k > 1$ de $f(z)$, por el Teorema de caracterización de polos:

$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} h(z)$ con $h(z)$ analítica en z_0 y $h(z_0) \neq 0$. Entonces $h(z)$ admite un desarrollo de Taylor: $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}}{n!}(z-z_0)^n \quad en \quad |z-z_0| < R$

Reemplazando en $f(z)$:

$$f(z) = \frac{h(z_0)}{(z-z_0)^k} + \frac{h'(z_0)}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!\,(z-z_0)} + \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{h^{(k+1)}(z_0)(z-z_0)}{(k+1)!} + \cdots$$

$$en \quad 0 < |z-z_0| < R$$

El residuo será por definición el coeficiente b_1 del desarrollo de la serie de Laurent:

$$Res_{z_0}f(z) = b_1 = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}}h(z)\right\}$$

$$Res_{z_0}f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}}(z-z_0)^k f(z)\right\}$$

ii) Si $k = 1$ tenemos:

$$Res_{z_0}f(z) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$$

(Ejemplo pizarrón 5.C)

Teorema de los Residuos

Teorema 5.3.10. Teorema de los Residuos.

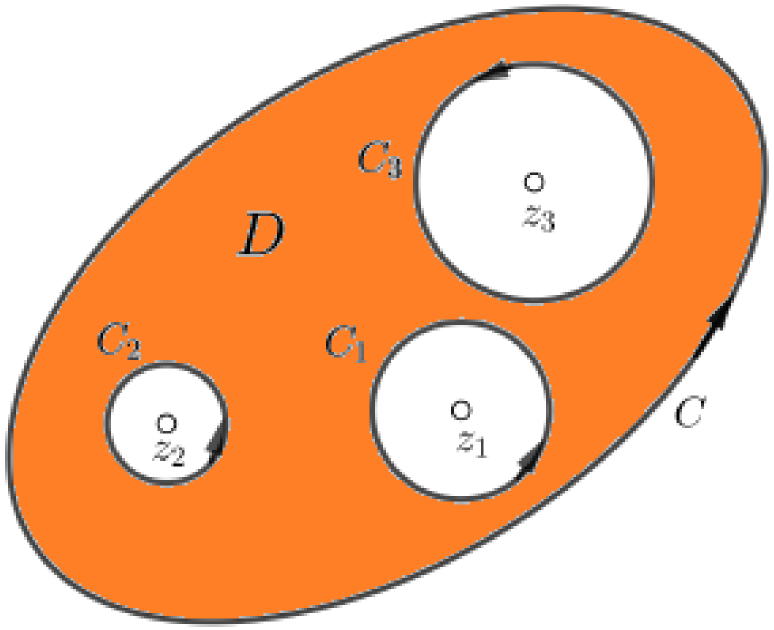
Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple, suave o suave a trozos y recorrida en sentido antihorario. Sea $f(z)$ una función analítica sobre $\mathcal{C}$ y en su interior, salvo en un número finito de puntos singulares z_1, z_2,…, z_n interiores a $\mathcal{C}$. Entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res_{z_j} f(z)$$

Demostración:

Vamos a utilizar el Corolario de Cauchy-Goursat. Para eso consideramos a cada punto singular z_j $j = 1, \ldots, n$ como el centro de una circunferencia C_j interior a C, orientada en sentido antihorario y de radio suficientemente pequeño de modo que dos cualesquiera de ellas sean disjuntas.

La curva C y las circunferencias C_j forman la frontera de una región D donde $f(z)$ es analítica.



Por el Corolario de Cauchy-Goursat:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} f(z)\,dz$$

Por la definición de residuo en una singularidad aislada:

$$\oint_{C_j} f(z)\,dz = 2\pi i Res_{z_j} f(z) \qquad j = 1, \dots, n$$

Reemplazando:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res_{z_j} f(z) \qquad j = 1, \dots, n$$

(Ejemplo pizarrón 5.D)