Unidad 4

Series de Potencias

2º CLASE

Cintia Perrone – PS 2023

4.4 Serie de Taylor

Toda función analítica se puede representar por una serie de potencias denominada serie de Taylor de la función.

Teorema 4.4.1. Teorema de Taylor

Sea $f(z)$ analítica en z_0. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ el mayor disco abierto centrado en z_0 y de radio R donde $f(z)$ es analítica.

Entonces existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ que converge a $f(z)$ en D.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \ \forall\, z\colon |z - z_0| < R \ \text{ con } 0 < R \leq \infty \quad \text{donde } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad n = 0,1,2 \ldots$$

Esta serie de potencias se denomina: desarrollo en serie de Taylor de $f(z)$ alrededor de z_0.

Para el caso en que $z_0 = 0$, la serie de Taylor se denomina de serie de Maclaurin.

Un aspecto muy importante y útil de este teorema, es que permite, sin aplicar el criterio del cociente, determinar el radio de convergencia de la serie de Taylor de una función $f(z)$: debemos pararnos en el punto z_0 donde queremos desarrollar la serie de $f(z)$ y determinar la distancia al punto mas cercano donde la función deja de ser analítica.

(Ejemplos pizarrón 2.A y 2.B)

Teorema 4.4.4. Teorema de unicidad de Taylor.

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \; \forall\, z{:}\, |z - z_0| < R$ con $0 < R \leq \infty$ entonces

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad n = 0,1,2,3 \ldots$$

Demostración:

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \; \forall\, z{:}\, |z - z_0| < R$ con $0 < R \leq \infty$

Se tiene:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

Si evaluamos en $z = z_0$ se obtiene $f(z_0) = c_0$, es decir, que para $n = 0$

tenemos $c_0 = \dfrac{f^{(0)}(z_0)}{0!} = f(z_0)$

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z\colon |z - z_0| < R$ con $0 < R \le \infty$

Se tiene:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

Si evaluamos en $z = z_0$ se obtiene $f(z_0) = c_0$, es decir, que para $n = 0$ tenemos $c_0 = f(z_0) = \frac{f^{(0)}(z_0)}{0!}$.

Derivando $f(z)$ se tiene:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + \cdots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots$$

$\forall\, z\colon |z - z_0| < R$

Nuevamente evaluamos en $z = z_0$ y obtenemos $f'(z_0) = c_1$, es decir, que para $n = 1$ tenemos $c_1 = f'(z_0) = \frac{f^{(1)}(z_0)}{1!}$

Por ser una serie de potencias podemos volver a derivarla término a término, conservando el radio de convergencia:

$$f''(z) = 2c_2 + 2\,.\,3c_3(z - z_0) + \cdots + (n-1)\,.\,nc_n(z - z_0)^{n-2} + \cdots$$

$$\forall\, z: |z - z_0| < R$$

Evaluamos en $z = z_0$ y obtenemos $f''(z_0) = 2c_2$, es decir, que para $n = 2$

tenemos $2c_2 = f''(z_0) \ \Rightarrow c_2 = \frac{f''(z_0)}{2} = \frac{f^{(2)}(z_0)}{2!}$

Si volvemos a derivar:

$$f'''(z) = 6c_3 + \cdots + (n-2)(n-1)\,.\,nc_n(z - z_0)^{n-3} + \cdots \quad \forall\, z: |z - z_0| < R$$

Evaluando en $z = z_0$ obtenemos $f'''(z_0) = 6c_3$, es decir, que para $n = 3$

tenemos $6c_3 = f'''(z_0) \Rightarrow c_2 = \frac{f'''(z_0)}{6} = \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}$

Podemos ver que en general se tiene:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n = 0,1,2,3 \ldots$$

Observaciones

1. Las derivadas de todo orden de una función analítica, son también funciones analíticas (Teorema de derivación de series de potencias).

2. Una **función analítica en z_0 admite un único desarrollo en serie de potencias** de $(z - z_0)$ convergente, que es su serie Taylor alrededor de z_0 (Teorema de unicidad de Taylor).

3. Cuando se tiene una función $f(z)$ representada por una serie de potencias de $(z - z_0)$, pero no se conoce la expresión de $f(z)$, el teorema de unicidad de Taylor permite calcular sus derivadas de cualquier orden en z_0:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(z_0) = c_n n! \qquad n = 0,1,2,3 \ldots$$

(Ejemplos pizarrón 2.C y 2.D)

4.5 Ceros de funciones analíticas

Definición 4.5.1. Sea $f(z)$ analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Decimos que $z_0 \in D$ es un cero de $f(z)$ si $f(z_0) = 0$.

Definición 4.5.3. Sea $f(z)$ analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Decimos que $z_0 \in D$ es un cero de orden $k \geq 1$ de $f(z)$ si:

$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

(Ejemplos pizarrón 2.E)

Teorema 4.5.5. Teorema de caracterización de ceros.

Sea $f(z)$ analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$.

$z_0 \in D$ es un cero de orden k de $f(z) \Leftrightarrow f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Demostración:

$\Rightarrow)$

Como $f(z)$ es analítica en z_0, admite un desarrollo de Taylor convergente en un disco abierto $|z - z_0| < R$ con $0 < R \leq \infty$.

Por ser z_0 un cero de orden k de $f(z)$, se tiene que:

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \text{ y } f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

Por lo cual, el desarrollo en serie de Taylor en z_0 tiene la forma:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f^{(1)}(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f^{(2)}(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0)^{k+1} + \cdots$$

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0)^{k+1} + \cdots =$$

$$f(z) = (z - z_0)^k \left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \cdots\right] =$$

Si llamamos $g(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \cdots$, podemos ver que $g(z)$ es una función analítica en z_0 por estar representada por una serie de potencias convergente en el disco abierto $|z - z_0| < R$ con $0 < R \leq \infty$ y $g(z_0) \neq 0$.

Con lo cual, $f(z)$ queda expresada como $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

$\Leftarrow)$

Tenemos que $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Como $g(z)$ es analítica en z_0 admite un desarrollo de Taylor alrededor de z_0 convergente en $|z - z_0| < R$ con $0 < R \leq \infty$.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Luego:

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n+k}$$

$$f(z) = g(z_0)(z - z_0)^k + g^{(1)}(z_0)(z - z_0)^{k+1} + \frac{g^{(2)}(z_0)}{2!} (z - z_0)^{k+2} + \cdots$$

La menor potencia que aparece es k, por lo tanto:

$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) = g(z_0) \neq 0$

Es decir, que z_0 es un cero de orden k de $f(z)$.

(Ejemplos pizarrón 2.F)

Propiedades:

Si z_0 es un cero de orden p de $f(z)$ y un cero de orden q de $g(z)$:

a) z_0 es un cero de orden $p+q$ de $f(z)g(z)$

b) Si $p < q$, z_0 es un cero de orden p de $f(z) \pm g(z)$

c) Si $p = q$, z_0 es un cero de orden mayor o igual que p de $f(z) \pm g(z)$

(Ejemplos pizarrón 2.G)

Demostración:

Como por hipótesis, z_0 es un cero de orden p de $f(z)$ y un cero de orden q de $g(z)$ por Teorema de caracterización de ceros, tenemos:

$f(z) = (z - z_0)^p f_1(z)$ y $g(z) = (z - z_0)^q g_1(z)$ siendo $f_1(z)$ y $g_1(z)$ funciones analíticas en z_0 y $f_1(z_0) \neq 0$ y $g_1(z_0) \neq 0$.

$a)$ z_0 es un cero de orden $p+q$ de $f(z)g(z)$

$f(z) = (z - z_0)^p f_1(z)$

$g(z) = (z - z_0)^q g_1(z)$

$f(z)g(z) = (z - z_0)^p f_1(z)(z - z_0)^q g_1(z) = (z - z_0)^{p+q} f_1(z) g_1(z)$

Como $f_1(z)$ y $g_1(z)$ son funciones analíticas en z_0 y $f_1(z_0) \neq 0$ y $g_1(z_0) \neq 0$ entonces $f_1(z)g_1(z)$ es analítica en z_0 y $f_1(z_0)g_1(z_0) \neq 0$.

Por teorema de caracterización de ceros, z_0 es un cero de orden $p+q$ de $f(z)g(z)$.

b) Si $p < q$, z_0 es un cero de orden p de $f(z) \pm g(z)$

$$f(z) = (z - z_0)^p f_1(z)$$

$$g(z) = (z - z_0)^q g_1(z)$$

$$f(z) \pm g(z) = (z - z_0)^p f_1(z) \pm (z - z_0)^q g_1(z)$$

Si $p < q$:

$$f(z) \pm g(z) = (z - z_0)^p [f_1(z) \pm (z - z_0)^{q-p} g_1(z)]$$

Como $f_1(z)$ y $g_1(z)$ son funciones analíticas en z_0 y $f_1(z_0) \neq 0$ y $g_1(z_0) \neq 0$ entonces $f_1(z) \pm (z - z_0)^{q-p} g_1(z)$ es analítica en z_0 y $f_1(z_0) \pm (z_0 - z_0)^{q-p} g_1(z_0) \neq 0$ ya que $f_1(z_0) \neq 0$.

c) Si $p = q$, z_0 es un cero de orden mayor o igual que p de $f(z) \pm g(z)$

$f(z) = (z - z_0)^p f_1(z)$ y $g(z) = (z - z_0)^q g_1(z)$

$f(z) \pm g(z) = (z - z_0)^p f_1(z) \pm (z - z_0)^q g_1(z)$

Si $p = q$:

$f(z) \pm g(z) = (z - z_0)^p [f_1(z) \pm g_1(z)]$

Puede ocurrir que $f_1(z) \pm g_1(z) = (z - z_0)^k h(z)$ con $h(z)$ analítica en z_0 y $h(z_0) \neq 0$ en cuyo caso:

$f(z) \pm g(z) = (z - z_0)^p (z - z_0)^k h(z) = (z - z_0)^{p+k} h(z)$, $h(z)$ analítica en z_0 y $h(z_0) \neq 0$ y por el teorema de caracterización de ceros z_0 es un cero de orden $p + k > p$ de $f(z) \pm g(z)$.

Si $f_1(z_0) \pm g_1(z_0) \neq 0$ y por ser $f_1(z) \pm g_1(z)$ analítica en z_0, por el teorema de caracterización de ceros, z_0 es un cero de orden p de $f(z) \pm g(z)$.