Unidad 4

Series de Potencias

1º CLASE

Cintia Perrone – PS 2023

OBJETIVO

El objetivo de este capítulo es el estudio de las series de potencia de Taylor en variable compleja y de las series de Laurent; ambas herramientas matemáticas que se utilizan para representar funciones analíticas complejas en términos de una serie de potencias complejas. La serie de Taylor se utiliza para representar una función analítica compleja en términos de una suma de términos de potencia creciente de la variable compleja alrededor de un punto z_o, mientras que la serie de Laurent se utiliza para representar una función analítica compleja en términos de una suma de términos de potencia creciente y decreciente de la variable compleja alrededor de un punto singular z_o y estudiar sus propiedades. También se pueden utilizar para calcular integrales complejas y para resolver ecuaciones diferenciales en variable compleja.

4.1 Sucesión de números complejos

Definición 4.1.1: Una sucesión infinita de números complejos es una función que a cada número natural n le asigna un número complejo z_n:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$n \rightarrow z_n$$

De este modo se obtiene una lista ordenada de números complejos:

$$z_1, z_2, z_3 \dots, z_n, \dots$$

donde z_1 es el primer término de la sucesión, z_2 es el segundo término, etc. El término z_n es el término n-ésimo o general y la sucesión $z_1, z_2, z_3 \dots, z_n, \dots$ se anota $\{z_n\}_{n\geq 1}$ o $\{z_n\}$.

(Ejemplo pizarrón 1.A)

Definición 4.1.3: Si los términos de una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se acercan a un numero L tanto como queramos para n suficientemente grande, diremos que el

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L$$

En este caso se dice que **la sucesión es convergente** y que converge a L.

Si el límite no existe, se dice que la sucesión es divergente.

Teorema 4.1.4. Sea una sucesión de números complejos $\{z_n\}$, donde $z_n = x_n + iy_n$.

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L_1 + iL_2 \quad \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = L_1 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = L_2$$

Propiedad 4.1.5. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos:

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L \implies \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |L|$. No se cumple la recíproca en general.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$

(Ejemplo pizarrón 1.B)

4.2 Series de números complejos

Sea una sucesión de números complejos $\{z_n\}$.

Consideremos la expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots z_n + \cdots$$

Que indica la suma de los infinitos términos de la sucesión $\{z_n\}$ y que se denomina **serie infinita asociada a la sucesión o simplemente serie**.

Consideremos las sumas:

$$S_1 = z_1$$

$$S_2 = z_1 + z_2$$

$$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$$

…………………..

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n$$

De este modo se obtiene una sucesión $\{S_n\}$, denominada sucesión de sumas parciales o serie.

Definición 4.2.1: Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es convergente, es decir, si existe el límite $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Al valor S se lo denomina suma de la serie y se indica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

En síntesis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ es divergente, es decir, si no existe el límite $\lim_{n\to\infty} S_n$, se dice que la serie es divergente y no tiene suma.

Teorema 4.2.2. Condición necesaria de convergencia.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

Teorema 4.2.3. Condición suficiente de divergencia.

Si $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es divergente.

(Ejemplo pizarrón 1.C)

Definición 4.2.4. Convergencia absoluta.

Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente, si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

Teorema 4.2.5. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente y vale:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

(Ejemplo pizarrón 1.D)

Proposición 4.2.6. Criterio de comparación.

Sean las series $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$:

a) Si $|z_n| \leq |w_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

b) Si $|z_n| \leq |w_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ es divergente.

(Ejemplo pizarrón 1.E)

Proposición 4.2.7. Criterio del cociente.

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$:

a) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

b) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es divergente.

c) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L = 1$ el criterio no decide.

(Ejemplo pizarrón 1.F)

Definición 4.2.9: Serie geométrica.

Una serie geométrica es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots$ donde $\boldsymbol{r}$ se denomina **la razón** de la serie.

- Si $|r| < 1$ la serie es convergente y su suma es $S = \frac{a}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$
- Si $|r| \geq 1$ la serie diverge.

Demostración:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n + \cdots$$

$$rS = r\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = ra + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} + \cdots$$

$$S - rS = a \quad \Rightarrow S = \frac{a}{1-r}$$

(Ejemplo pizarrón 1.G)

Si $\sum_{n=k}^{\infty} ar^n$ y $|r| < 1$ su suma es $S = \frac{ar^k}{1-r} = \sum_{n=k}^{\infty} ar^n$

Demostración:

$$S = \sum_{n=k}^{\infty} ar^n = ar^k + ar^{k+1} + ar^{k+2} + \cdots$$

$$rS = r\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = ar^{k+1} + ar^{k+2} + ar^{k+3} + \cdots$$

$$S - rS = ar^k \Rightarrow S = \frac{ar^k}{1-r}$$

Teorema 4.2.11. Sea una serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n) = S = X + iY \iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \wedge \sum_{n=1}^{\infty} y_n = X$$

(Ejemplo pizarrón 1.H)

4.2 Series de potencias

Definición 4.3.1: Serie de potencias. Una serie de potencias de $(z - z_0)$, o centrada en z_0, es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

Donde $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 0,1,2 \ldots$ son los coeficientes de la serie y $z_0 \in \mathbb{C}$ se denomina centro de la serie.

Reemplazando z por un determinado número complejo, se obtiene una serie numérica, la que puede ser o no convergente.

El conjunto de los valores de z para los que la serie de potencias es convergente se denomina región de convergencia.

Para cada z donde la serie es convergente tendremos un valor de la suma de la serie, por lo cual queda definida en la región de convergencia una función suma $S(z)$. (Ejemplo pizarrón 1.I)

Importancia de las series de potencias:

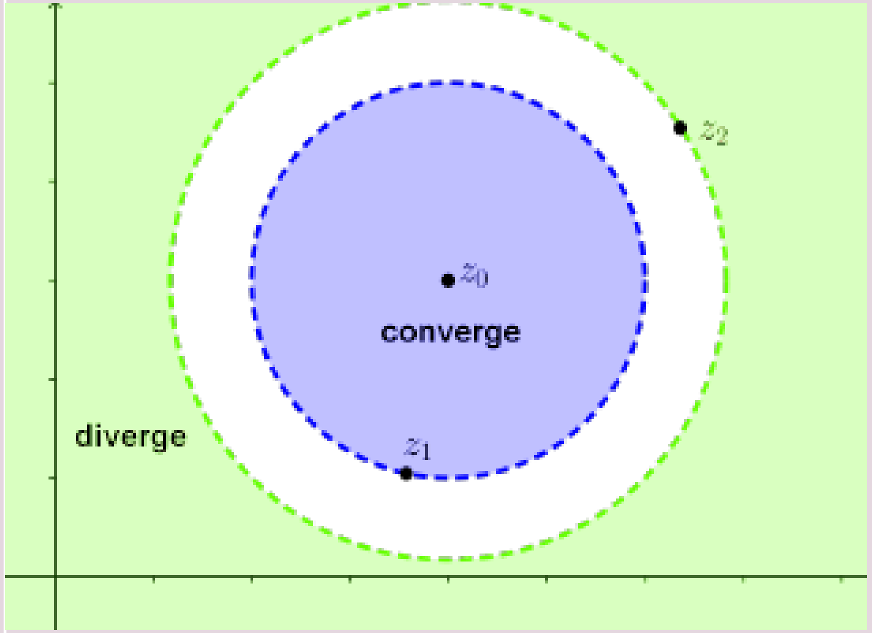
La suma de toda serie de potencias convergente es una función analítica y toda función analítica puede representarse por una serie de potencias.

Teorema 4.3.3: Convergencia de una serie de potencias

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

1) Si converge en un punto $z = z_1 \neq z_0$ entonces converge absolutamente para todo z tal que $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ (es decir, para todos los puntos que están a una distancia de z_0 menor que la distancia a la que está z_1 respecto de z).

2) Si diverge en $z = z_2$ entonces diverge para todo z tal que $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ (es decir, para todos los puntos que están a una distancia de z_0 mayor que la distancia que está z_2 respecto a z_0). (Ver demostración en el libro)

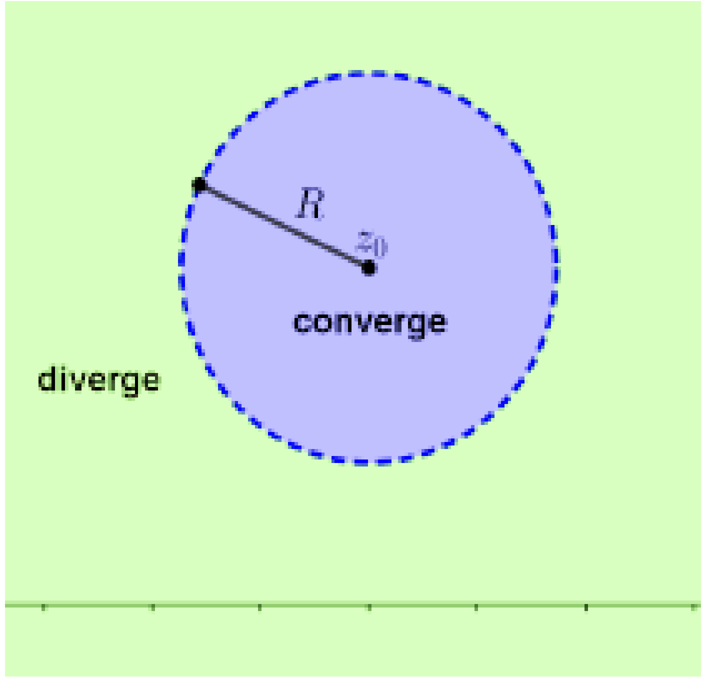


Radio de convergencia

Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, consideremos todos los puntos z en los que la serie es convergente.

Sea $R > 0$ el menor número tal que la distancia a z_0 de los puntos donde la serie converge es menor que R. Es decir que R es el radio del menor círculo abierto centrado en z_0 que contiene a todos los puntos donde la serie converge.

Por el teorema de convergencia, la serie converge absolutamente para todos los z tales $|z - z_0| < R$ y diverge si $|z - z_0| > R$.



A diferencia del caso de las series de potencias reales en que se estudiaba la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia, para los z que verifican $|z - z_0| = R$, en general, no se analiza la convergencia de la serie ya que se trata de infinitos puntos.

Observaciones

Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ pueden ocurrir solamente estas tres posibilidades:

1) La serie solamente converge en z_0. En este caso el radio de convergencia es cero: $R=0$.

2) La serie converge para todo z. En este caso se dice que el radio de convergencia es infinito y lo indicamos $R=\infty$.

3) Existe un numero positivo R tal que la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z-z_0|<R$ y diverge para los z tales que $|z-z_0|>R$

Para determinar la región de convergencia, y por ende el valor del radio de convergencia, vamos a considerar la serie de los módulos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - z_0)^n|$$

es decir, analizamos la convergencia absoluta de la serie.

(Ejemplo pizarrón 1.J)

Recordar que:

"Si $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ *es convergente entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es convergente y se dice que* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es absolutamente convergente".*

Funciones definidas por series de potencias

En todos los puntos del disco de convergencia, la serie de potencias tiene suma, por lo cual en cada punto del mismo, queda definida una función $f(z)$ que en cada z vale la suma de la serie en dicho punto:

$$f(z) = S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \forall z\colon |z - z_0| < R$$

(con $R > 0$ o $R = \infty$. El caso $R = 0$ no es de interés práctico ya que tendríamos una función definida en un solo punto).

En este caso diremos que $f(z)$ esta representada por una serie de potencias de $(z - z_0)$ o que está desarrollada en serie de potencias de $(z - z_0)$.

Analiticidad de la función suma de una serie de potencias.

Teorema 4.3.6.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \;\; \forall z : |z - z_0| < R$ con $0 < R \leq \infty$.

Entonces, $f(z)$ es analítica en todos los puntos del disco de convergencia.

Toda función representada por una serie de potencias, es analítica en todos los puntos del disco de convergencia.

(Ejemplo pizarrón 1.K)

Suma y producto de series de potencias.

Teorema 4.3.7.

Sean $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \forall\, z: |z-z_0|<R_1$ y $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n$ $\forall\, z: |z-z_0|<R_2$. Si llamamos $R=Min\{R_1,R_2\}$, se cumple:

1) $f(z)+g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}[c_n+d_n](z-z_0)^n$

$\forall\, z: |z-z_0|<R$.

2) $f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$

$\forall\, z: |z-z_0|<R$ con $b_n=\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}=c_0d_n+c_1d_{n-1}+c_2d_{n-2}+\cdots+c_nd_0$

(Ejemplo pizarrón 1.L)

Teorema 4.3.9. Derivación de series de potencias.

Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \ \ \forall\, z\colon |z-z_0|<R$ con $0<R\leq\infty$. Entonces:

1) $f'(z)$ es derivable en todos los puntos del disco de convergencia y su derivada $f(z)$ se obtiene derivando término a término la serie que la representa:

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(z-z_0)^{n-1} \ \ \forall\, z\colon |z-z_0|<R \ \text{ con } 0<R\leq\infty.$$

2) Repitiendo esta propiedad para $f''(z)$ se obtiene que

$$f''(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2} \ \ \forall\, z\colon |z-z_0|<R \ \text{ con } 0<R\leq\infty.$$

3) En general, para $\forall k\geq 1$:

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)\ldots\big(n-(k-1)\big)(z-z_0)^{n-k} \ \ \forall\, z\colon |z-z_0|<R \ \text{ con } 0<R\leq\infty.$$

Las series de las derivadas, tienen todas el mismo radio de convergencia que el de la serie sin derivar. Es decir, una función que admite desarrollo en serie de potencias convergente, tiene derivadas de todo orden en su disco de convergencia, las que se obtienen derivando término a término la serie que la representa.

(Ejemplo pizarrón 1.M)

Integración de las series de potencias

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ convergente en del disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. $f(z)$ es analítica en el disco de convergencia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. El conjunto D es un conjunto simplemente conexo del plano complejo. Por el Teorema de Cauchy-Goursat la integral a lo largo de toda curva cerrada incluida en D es igual a cero. Esto es equivalente, por el Teorema de independencia del camino, a que la función admite primitiva en D y a que la integral de la función es independiente del camino en D. Por lo que podemos calcular la integral de una función representada por serie de potencias, como una integral indefinida o bien, dados dos puntos cualesquiera del conjunto D, calcular la integral aplicando la regla de Barrow.

Teorema 4.3.11. Integración de series de potencias.

Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \forall\, z\colon |z-z_0|<R$ con $0<R\leq\infty$. Entonces:

1) $\int f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int (z-z_0)^n\, dz=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}+C \qquad \forall\, z\colon |z-z_0|<R$

$0<R\leq\infty$.

Una serie de potencias se puede integrar término a término y la serie resultante tiene el mismo radio de convergencia que la serie original.

2) Para todo par $z_1, z_2 \in D$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[\frac{(z_2-z_0)^{n+1}}{n+1}-\frac{(z_1-z_0)^{n+1}}{n+1}\right]$$

(Ejemplo pizarrón 1.N)