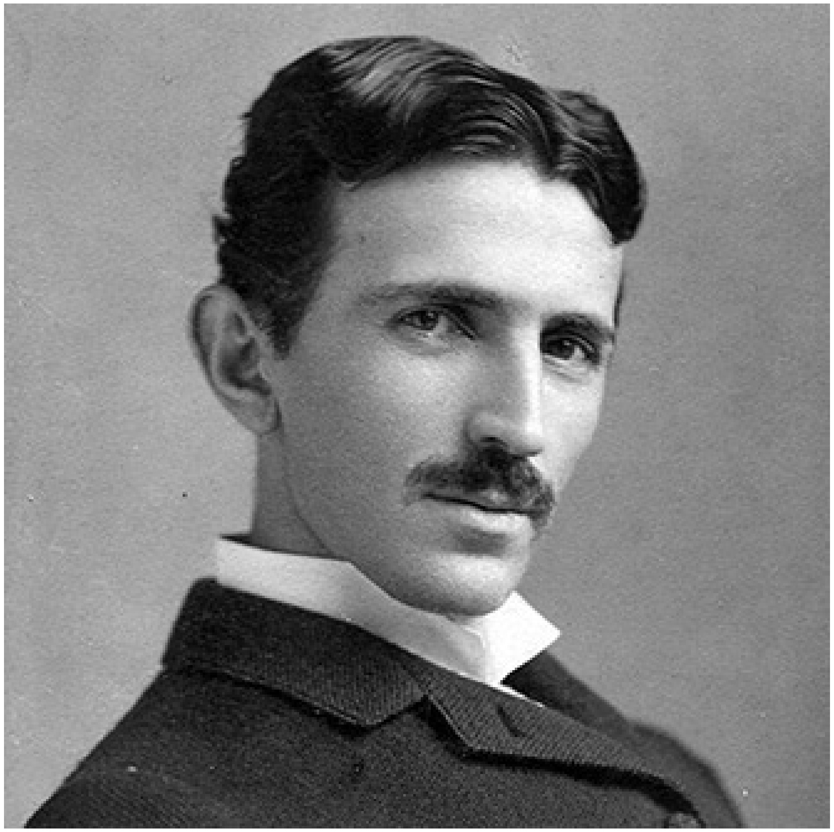
CIRCUITOS EN ALTERNA

STEINMETZ

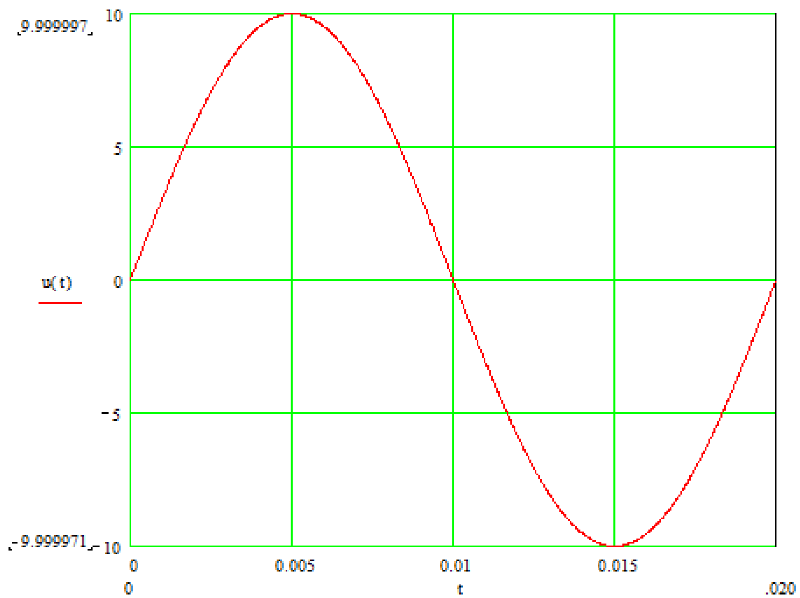


TESLA

CIRCUITOS EN ALTERNA

*La **alterna senoidal** es una señal o función que depende del tiempo de la siguiente manera:*

$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$$



$U_{máx}$*: amplitud en* [V]*, si fuera tensión*
ω*: pulsación en* [rad/s]
Además $T=2\pi/\omega$

En el estudio que sigue deben tenerse en cuenta las ecuaciones constitutivas de los elementos de circuito

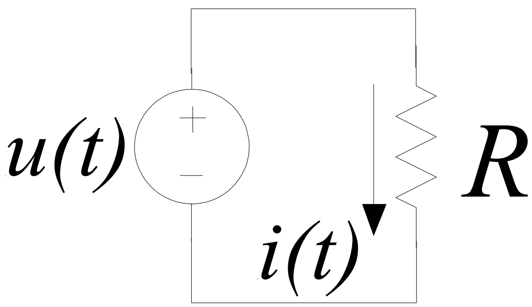
$$u_R = i \cdot R \qquad i_R = \frac{u}{R}$$

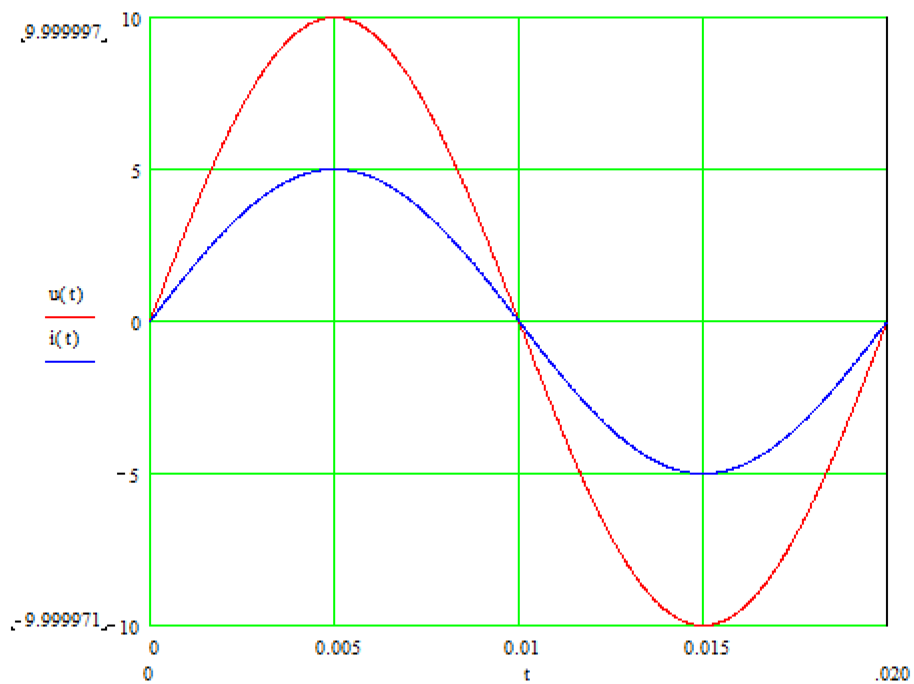
$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t) \cdot dt \qquad i_C(t) = C.\frac{du}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u(t) \cdot dt \qquad u_L(t) = L.\frac{di}{dt}$$

EXCITACIONES Y RESPUESTAS

Si se ***excita*** *un resistor de resistencia* R *mediante una tensión senoidal, la* ***respuesta*** *es una corriente, también senoidal, que está* ***en fase*** *con la tensión y cuya amplitud* $I_{máx}$ *vale* $U_{máx}/R$





$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$$

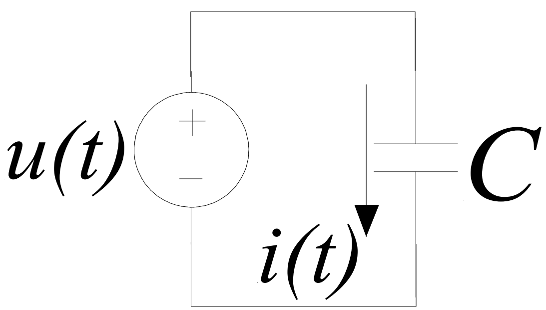
$$i(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$$

EXCITACIONES Y RESPUESTAS

*Si se **excita** un capacitor de capacitancia C mediante una tensión senoidal, la **respuesta** es una corriente, también senoidal, que está **adelantada** 90º respecto de la tensión y cuya amplitud $I_{máx}$ vale* $\dfrac{U_{máx}}{1/\omega \cdot C}$

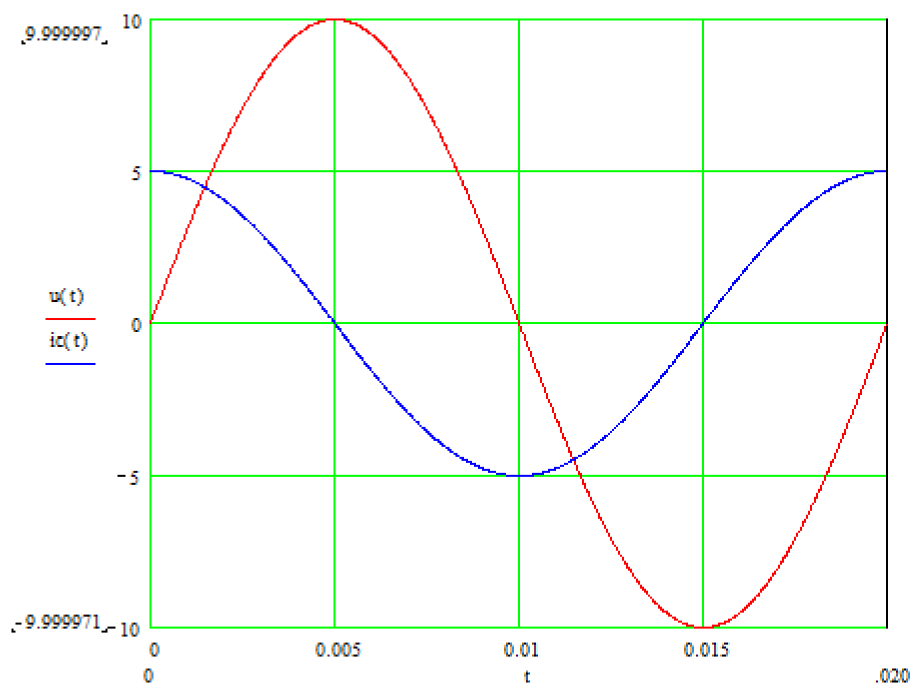
¿De dónde salen?

$$i_C(t) = C.\frac{du}{dt}$$



$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$$

$$i(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

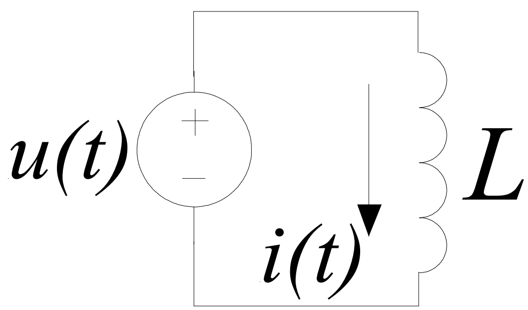


EXCITACIONES Y RESPUESTAS

*Si se **excita** un inductor de inductancia L mediante una tensión senoidal, la **respuesta** es una corriente, también senoidal, que está **atrasada** 90º respecto de la tensión y cuya amplitud $I_{máx}$ vale* $\dfrac{U_{máx}}{\omega \cdot L}$

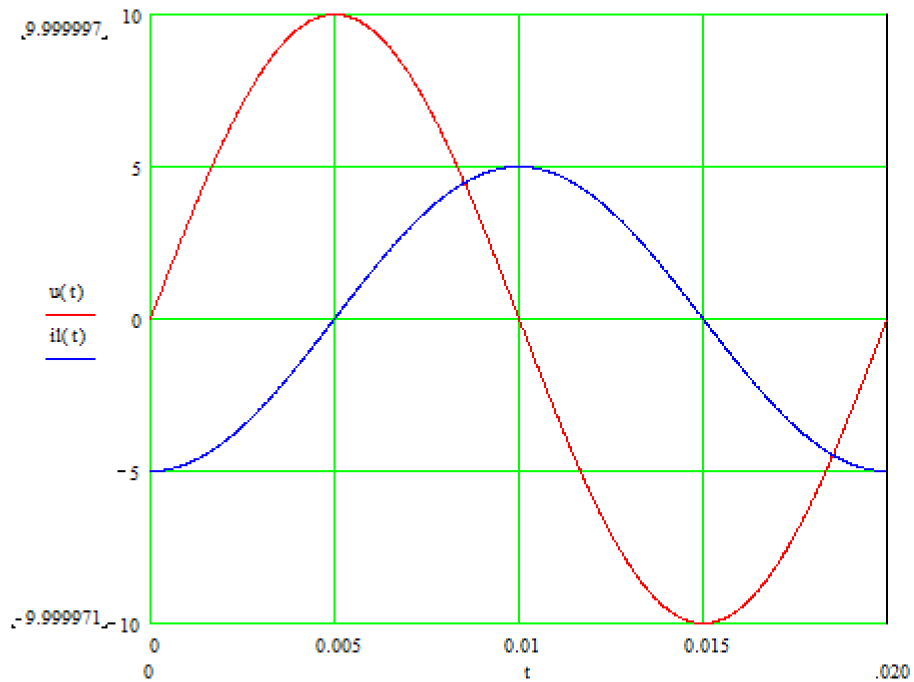
¿De dónde salen?

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u(t)\cdot dt$$



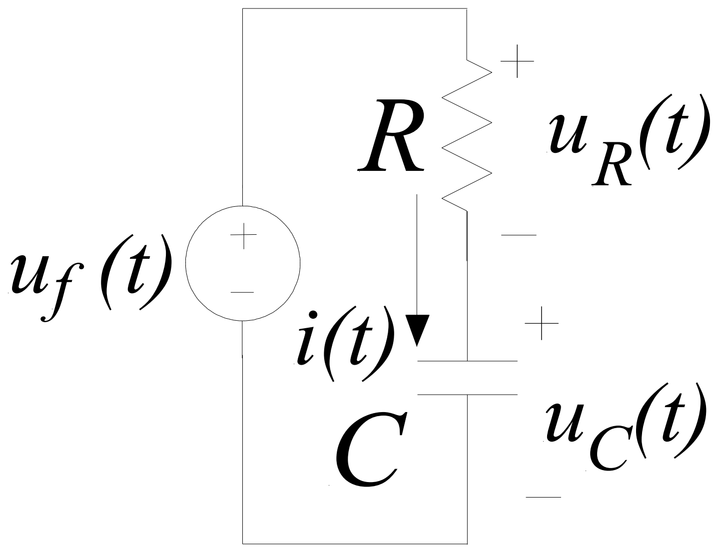
$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$$

$$i(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2})$$



EXCITACIONES Y RESPUESTAS

Para la combinación resistor-capacitor en serie



$$u_f(t) = U_{f\,máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$$

$$u_f(t) = u_R(t) + u_C(t)$$ *por LKT*

Luego $$u_f(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du_f(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

*La solución particular para el **estado permanente** vale* $$i(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t + \theta)$$

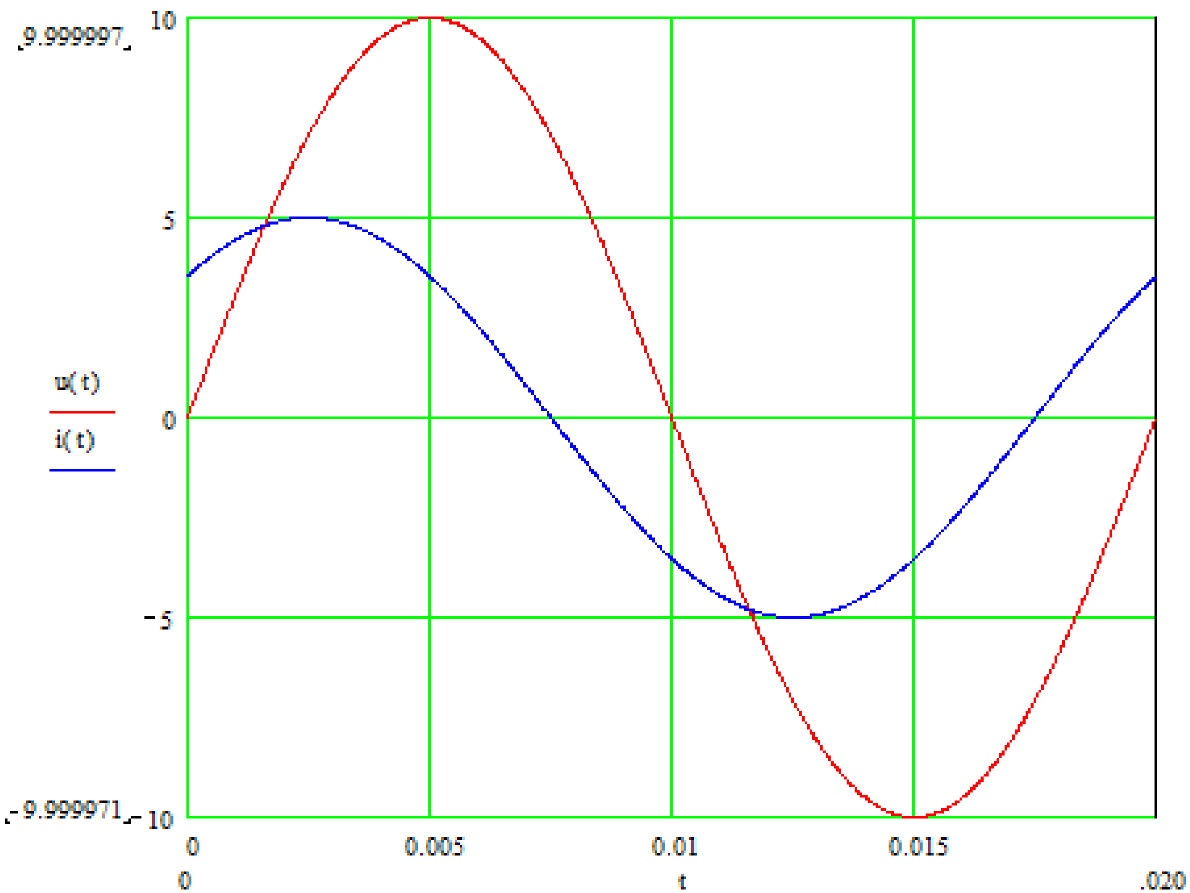
$$\Rightarrow \quad I_{máx} = \frac{U_{f\,máx}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}} \qquad \theta = arc\,tg\left(\frac{1/\omega \cdot C}{R}\right)$$

CIRCUITOS EN ALTERNA

$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t) \qquad i(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega t + \theta)$$

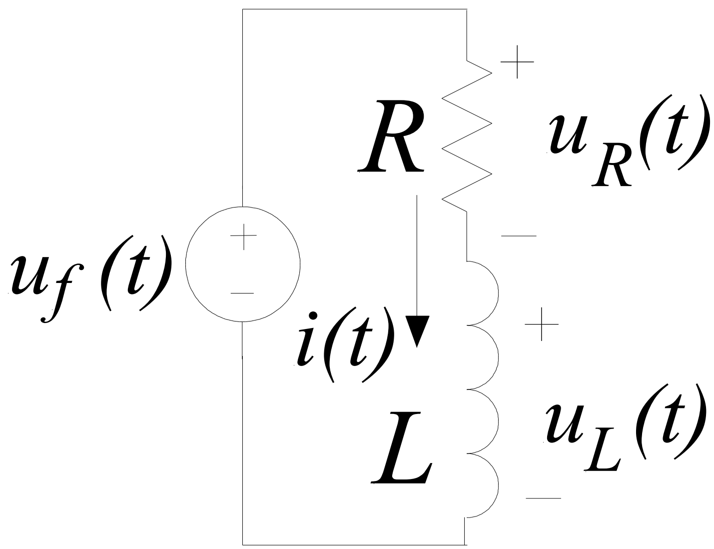
$$I_{máx} = \frac{U_{f\,máx}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}$$

$$\theta = arc\,tg\left(\frac{1/\omega \cdot C}{R}\right)$$



EXCITACIONES Y RESPUESTAS

Para la combinación resistor-inductor en serie



$$u_f(t) = U_{f\,máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$$

$$u_f(t) = u_R(t) + u_L(t) \qquad \text{por LKT}$$

Luego $$u_f(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

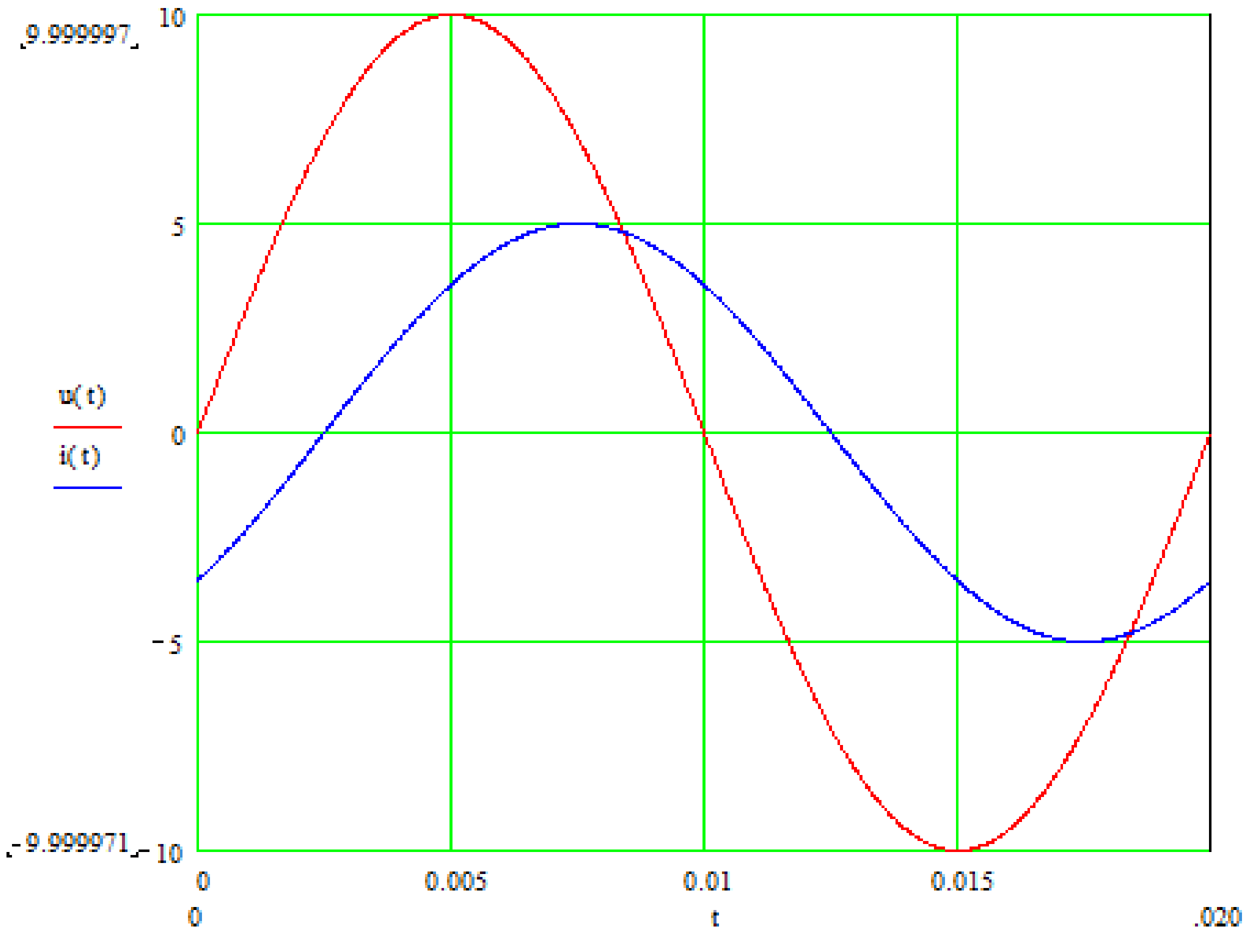
La solución particular para el ***estado permanente*** *vale* $$i(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t - \theta)$$

$$I_{máx} = \frac{U_{f\,máx}}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}} \qquad \theta = arc\,tg\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right)$$

CIRCUITOS EN ALTERNA

$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega t) \qquad i(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega t - \theta)$$

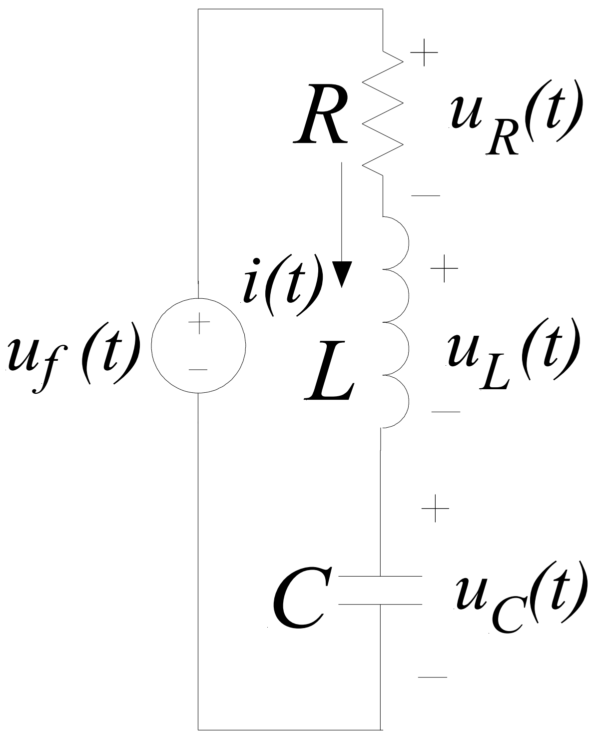
$$I_{máx} = \frac{U_{f\,máx}}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}}$$



$$\theta = arc\,tg\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right)$$

EXCITACIONES Y RESPUESTAS

Para la combinación resistor-inductor-capacitor en serie



$$u_f(t) = U_{f\,máx} \cdot sen(\omega t)$$

$$u_f(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$ por LKT

Luego $$u_f(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t).dt$$

$$\Rightarrow \frac{du_f(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

La solución particular para el **estado permanente** vale

$$i(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega t \pm \theta)$$

$$\Rightarrow I_{máx} = \frac{U_{f\,máx}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}} \qquad \theta = arc\,tg\left(\frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}\right)$$

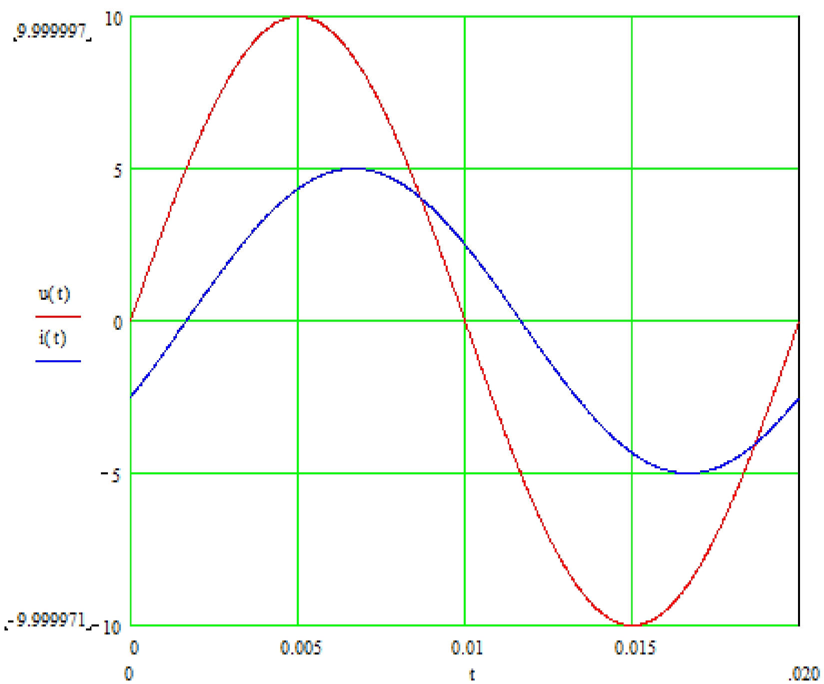
CIRCUITOS EN ALTERNA

$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$$

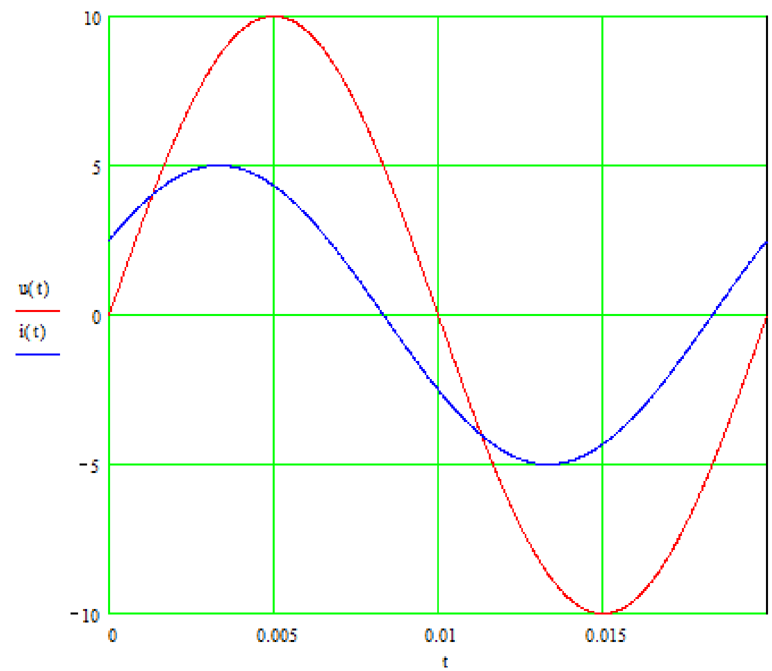
$$i(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t \pm \theta)$$

$$I_{máx} = \frac{U_{f\,máx}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}$$

$$\theta = arc\,tg\left(\frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}\right)$$

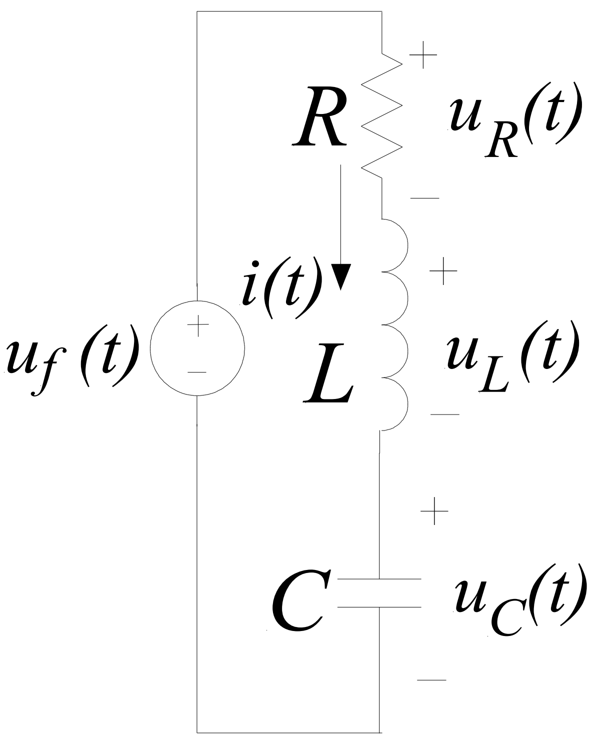


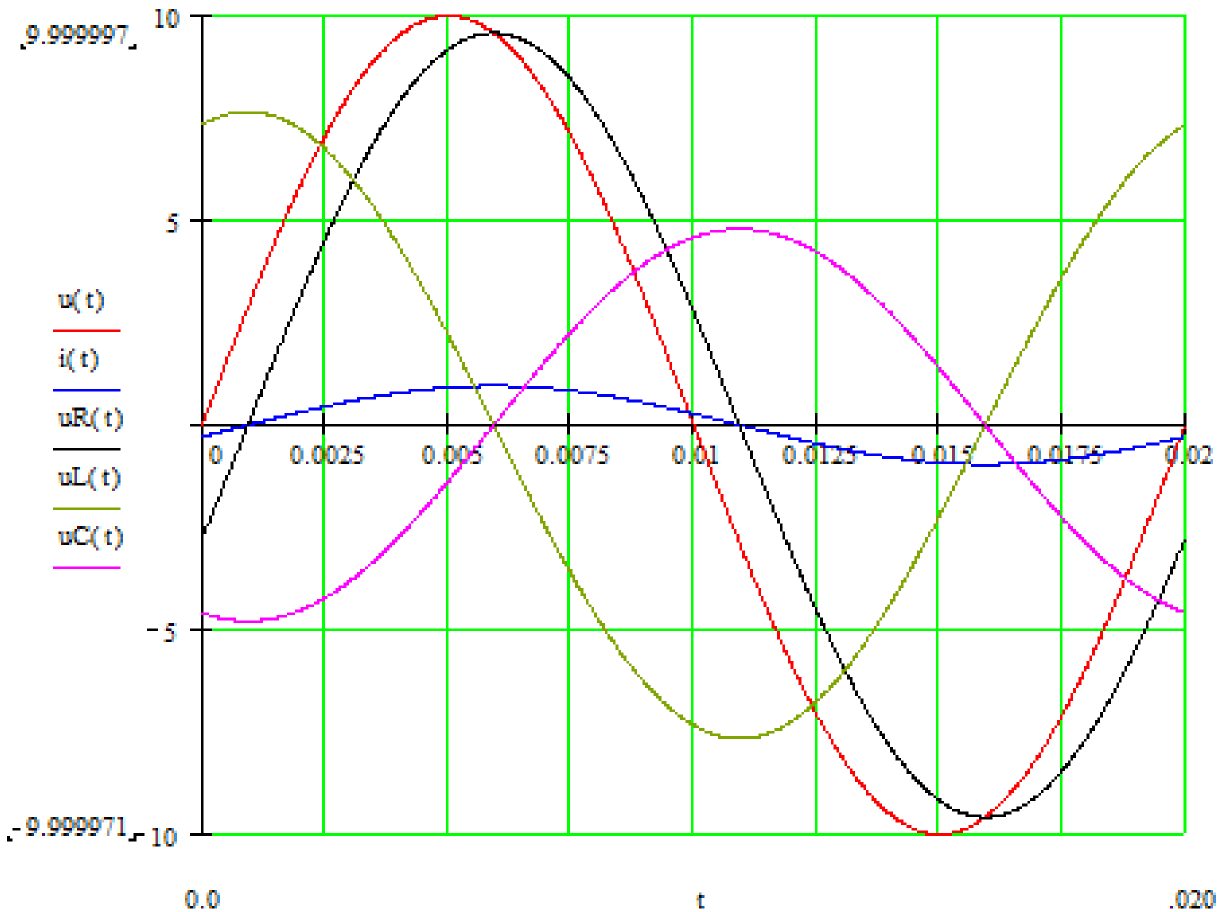
Predomina el efecto ***inductivo***



Predomina el efecto ***capactivo***

CIRCUITOS EN ALTERNA



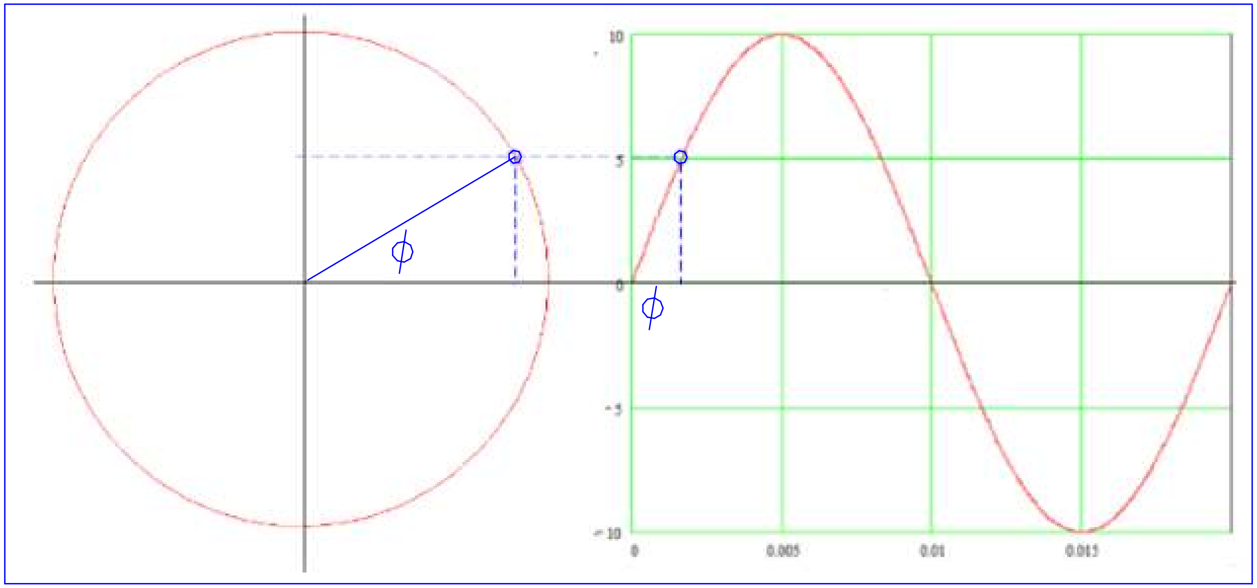


EJERCICIO: *Resolver planteando todos los circuitos duales de los vistos*

FASOR

Las complicaciones para el análisis de circuitos en CA senoidal justifica la utilización de una herramienta matemática relacionada con los números complejos *en la aplicación de las leyes de Ohm y Kirchhoff.*

Toda función senoidal dependiente del tiempo puede describirse mediante una función compleja equivalente denominada ***FASOR****.*



FASOR: $\dot{U} = U_{máx} \cdot e^{j\omega \cdot t}$ → *es equivalente a:* *(no es igual a)* → $u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$

FASOR

Caso general (fase inicial ≠0):

$$\dot{U} = U_{máx} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \phi)} = U_{máx} \cdot e^{j\omega \cdot t} \cdot e^{j\phi} = \underline{U} \cdot e^{j\omega \cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U} = U_{máx} \cdot e^{j\phi}$$

De la teoría de números complejos:

$$\boxed{\dot{U} = U_{máx} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \phi)} = U_{máx} \cdot cos(\omega t + \phi) + jU_{máx} \cdot sen(\omega t + \phi)}$$

Identidad de Euler

$$Re(\dot{U}) = U_{máx} \cdot cos(\omega t + \phi)$$

$$Im(\dot{U}) = U_{máx} \cdot sen(\omega t + \phi)$$

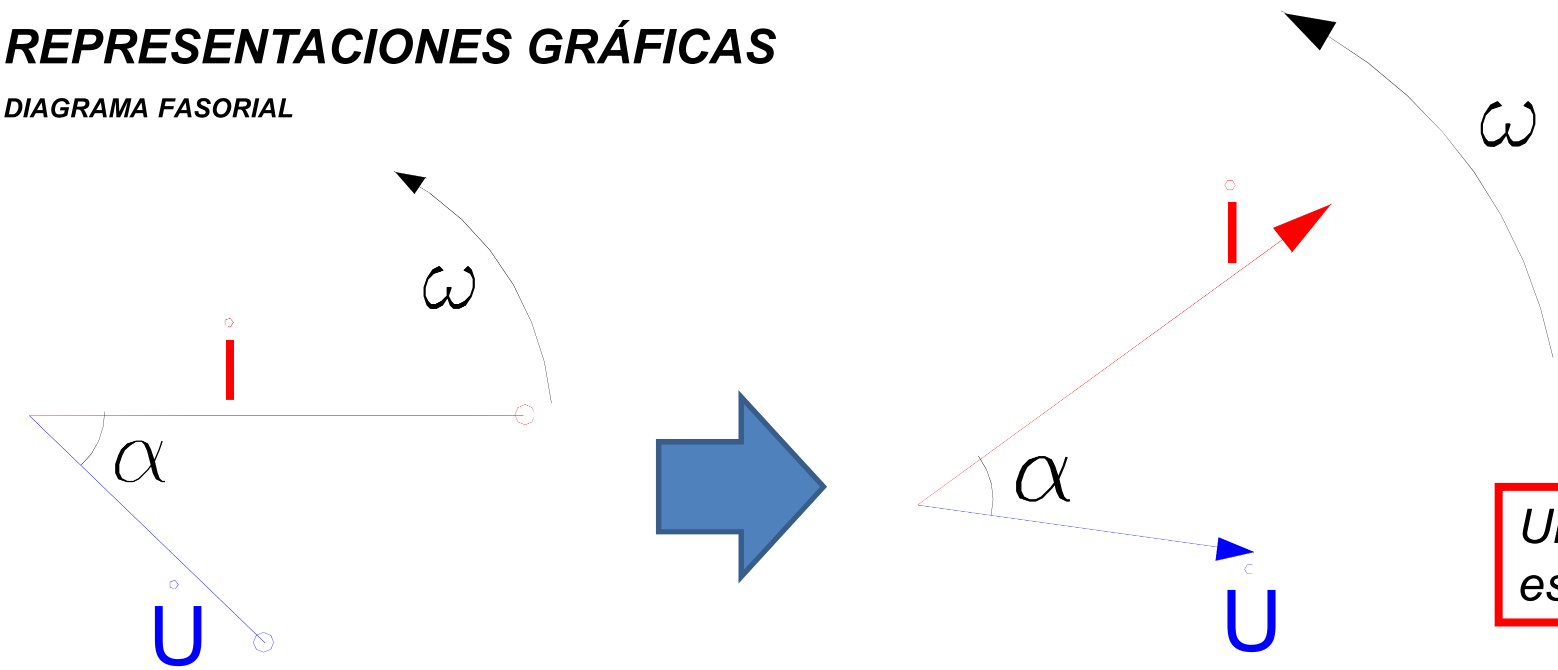
FASOR

Si $u(t)=U_{máx}sen(\omega t+\emptyset)$ *es una tensión, luego* $\mathring{U}=U_{máx}e^{j(\omega t+\emptyset)}$ *es su fasor equivalente.*

Igualmente, si $i(t)$ *es una corriente que varía en función del tiempo,* $\dot{I}=I_{máx}e^{j(\omega t+\emptyset+\alpha)}$ *es una corriente desfasada de la tensión anterior un ángulo* α*, y expresada por su fasor equivalente.*

REPRESENTACIONES GRÁFICAS

DIAGRAMA FASORIAL



Un fasor ***no*** *es un vector*

FASOR E IMPEDANCIA COMPLEJA

La aplicación de la ley de Ohm a los dos fasores anteriores da como resultado:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U_{máx} \cdot e^{j\omega t}}{I_{máx} \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}} = \frac{U_{máx}}{I_{máx}} e^{-j\alpha} = \left|\underline{Z}\right| \cdot e^{-j\alpha} = \underline{Z}$$

Z *es un* ***número complejo*** *(**no** es un fasor)* → ***IMPEDANCIA COMPLEJA***

→ ***La impedancia compleja es una expresión que caracteriza el comportamiento de una red pasiva en función de la relación entre la tensión y la corriente cuando éstas son de forma senoidal***

NÚMEROS COMPLEJOS

En función de los resultados anteriores, se puede resumir:

$\underline{U} = U_{máx} \cdot e^{j0}$ *Número complejo que representa a la tensión* $u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$

$\underline{I} = I_{máx} \cdot e^{j\alpha}$ *Número complejo que representa a la corriente* $i(t) = I_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t + \alpha)$

$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{-j\alpha}$ *Impedancia compleja donde, por ejemplo:*

(número complejo)

$$|\underline{Z}| = \frac{U_{máx}}{I_{máx}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\alpha = arc\,tg\left(\frac{\omega \cdot L - \dfrac{1}{\omega \cdot C}}{R}\right)$$

El fasor es simplemente una función que nos permite relacionar una función sinusoidal (corriente o tensión) con un número complejo equivalente

¿Unidades?

PARTES DE UNA IMPEDANCIA

Además de la forma polar, la impedancia compleja obtenida puede expresarse en forma binómica, por ejemplo:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Se puede asociar cada componente de esta impedancia a los respectivos elementos de circuito (conectados "en serie"):

$\boldsymbol{R}$ ***RESISTENCIA****, parte real, asociada a la característica de transformación irreversible de la energía*

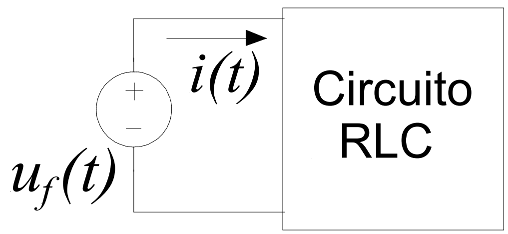
$\boldsymbol{\omega L = X_L}$ ***REACTANCIA INDUCTIVA****, parte imaginaria, asociada a la inductancia*

$\boldsymbol{\frac{1}{\omega C} = X_C}$ ***REACTANCIA CAPACITIVA****, parte imaginaria, asociada a la capacitancia*

¿Unidades? *¿Representación gráfica?*

Triángulo de ***impedancia***

APLICACIONES



Fuente alterna senoidal de pulsación ω

¿Impedancia equivalente del circuito o "vista" por la fuente?

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U_{máx} \cdot e^{j\omega t}}{I_{máx} \cdot e^{j(\omega t - \alpha)}} = \frac{U_{máx}}{I_{máx}} e^{j\alpha} = \left|\underline{Z}\right| \cdot e^{j\alpha}$$

Y como antes:

$$\left|\underline{Z}\right| = \frac{U_{máx}}{I_{máx}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\alpha = arc\,tg\left(\frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}\right)$$

¿característica de $\underline{Z}$?

APLICACIONES

También se podría escribir $\dot{U} = \underline{Z} \cdot \dot{I}$

Recordando la forma binómica de la impedancia y desarrollando

$$\dot{U} = \underline{Z} \cdot \dot{I} = \left\{ R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right\} \cdot \dot{I} = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} - j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

Finalmente, comparando con la expresión en función del tiempo para el circuito RLC

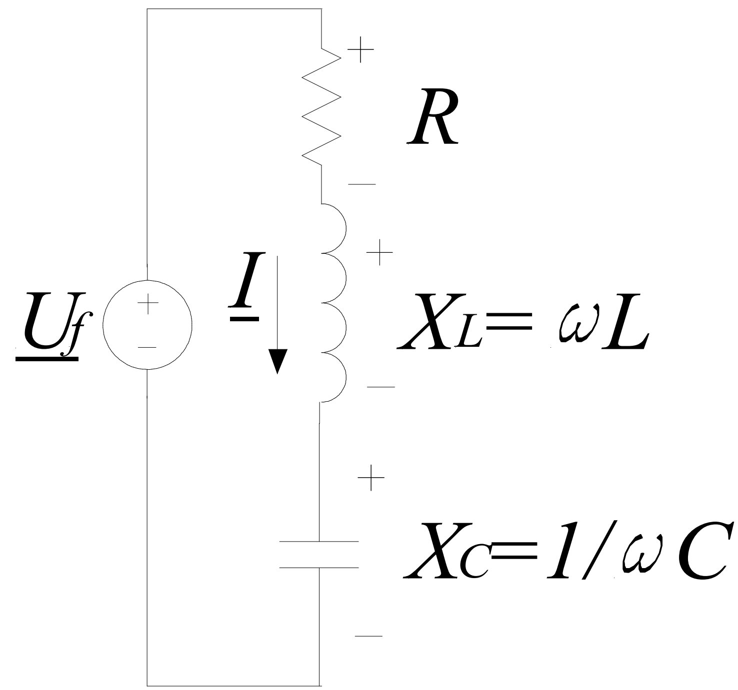
$$\dot{U} = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} \quad \Longleftrightarrow \quad u_f(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t).dt$$

se puede asociar un operador $j\omega$ *a las operaciones derivada e integral de la siguiente manera:*

$$j\omega \rightarrow \frac{d}{dt} \; y \; \frac{1}{j\omega} \rightarrow \int dt$$

APLICACIONES

Y teniendo en cuenta la definición de ***reactancia inductiva*** *y* ***reactancia capacitiva****, el circuito RLC se puede dibujar:*



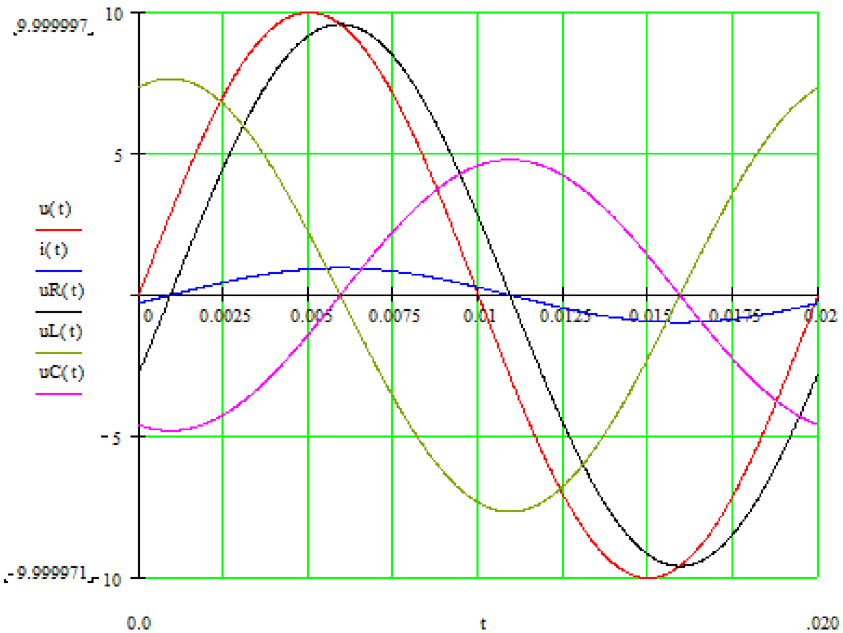
Además, $\mathring{U}_f$ *e* $\dot{I}$ *se reemplazaron por* $\underline{U}_f$ *e* $\underline{I}$*, respectivamente (¿por qué?)*

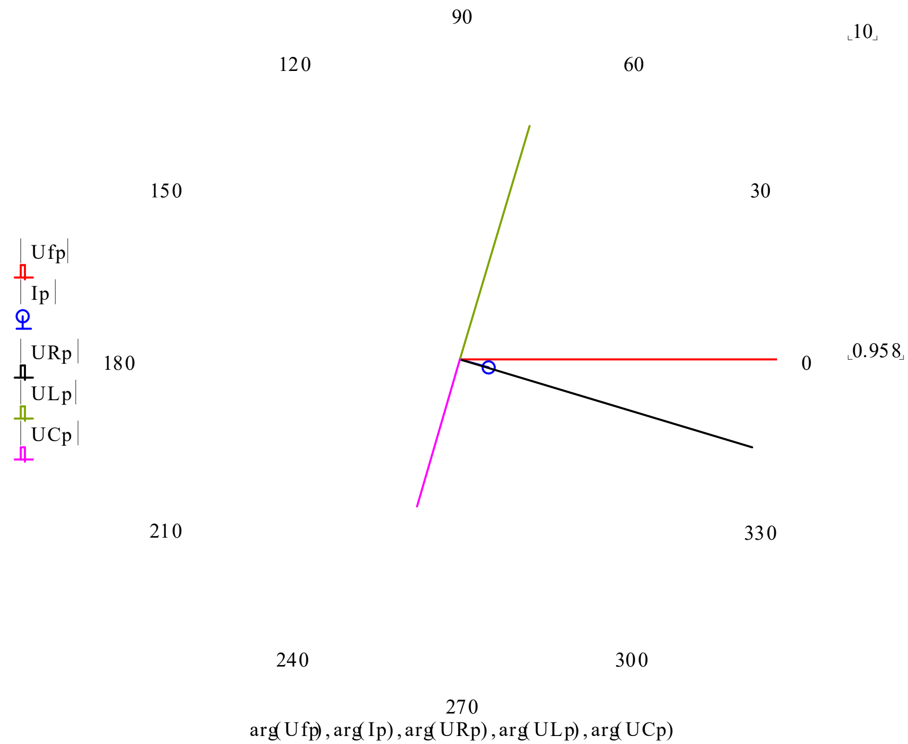
Ahora se puede escribir:

$$\underline{U}_f = \underline{Z} \cdot \underline{I} = R \cdot \underline{I} + jX_L \cdot \underline{I} - jX_C \cdot \underline{I}$$

$$= \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

APLICACIONES





APLICACIONES

¿Si en lugar del cociente $\underline{U}/\underline{I}$ se hiciera $\underline{I}/\underline{U}$?

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I_{máx} \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}}{U_{máx} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{I_{máx}}{U_{máx}} e^{j\alpha} = \left|\underline{Y}\right| \cdot e^{j\alpha} = \underline{Y}$$

ADMITANCIA COMPLEJA

¿Unidades y característica de $\underline{\mathbf{Y}}$?

Por lo tanto, para un caso general: $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$

DUALIDAD

PARTES DE UNA ADMITANCIA

Además de la forma polar, una admitancia compleja puede expresarse en forma binómica:

$$\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

Se puede asociar cada componente de la admitancia a los respectivos elementos de circuito (conectados "en paralelo"):

G ***CONDUCTANCIA****, parte real, asociada a la característica de transformación irreversible de la energía*

$\omega C = B_C$ ***SUSCEPTANCIA CAPACITIVA****, parte imaginaria, asociada a la capacitancia*

$\frac{1}{\omega L} = B_L$ ***SUSCEPTANCIA INDUCTIVA****, parte imaginaria, asociada a la inductancia*

Además: $G = \frac{1}{R}$ $B_L = \frac{1}{X_L}$ $B_C = \frac{1}{X_C}$ *¿Unidades?*

¿Representación gráfica?
Triángulo de ***admitancia***

¿DUALIDAD?

VALORES INSTANTÁNEO, MEDIO, EFICAZ

Si la función es senoidal:

$$u(t) = U_{máx} \cdot sen(\omega \cdot t)$$ → ***VALOR INSTANTÁNEO***

Para un caso general se define:

VALOR MEDIO → $$U_m = \frac{1}{T}\int_o^T u(t).dt$$ *¿Interpretación?*

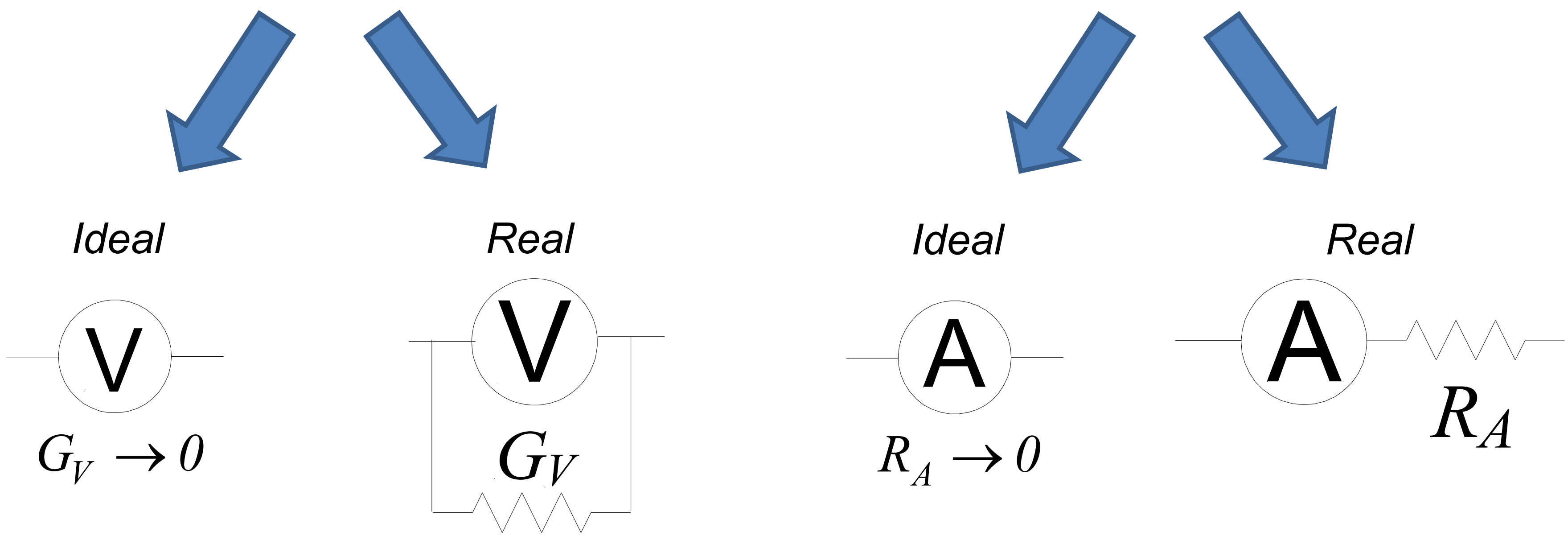
*Si **u(t)** es sinusoidal, $\boldsymbol{U_m}$ resulta igual a **cero***

VALOR EFICAZ → $$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_o^T u^2(t).dt}$$ *¿Interpretación?*

*Si **u(t)** es sinusoidal, $\boldsymbol{U_{ef}}$ resulta igual a $\boldsymbol{U_{máx}/\sqrt{2}}$*

INSTRUMENTOS

VOLTÍMETRO — **AMPERÍMETRO**



De continua

De valor eficaz

RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS EN ALTERNA

Valen las leyes fundamentales y todas las metodologías de resolución

Ley de Ohm (en alterna se generaliza como $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ *ó* $\underline{Y} = \dfrac{\underline{I}}{\underline{U}}$ *)*

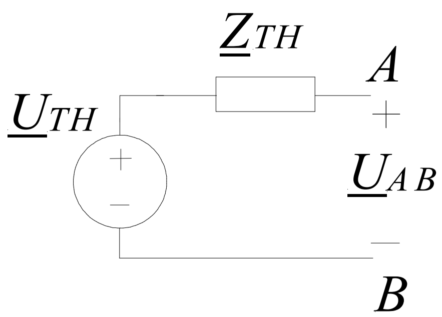
Leyes de Kirchhoff

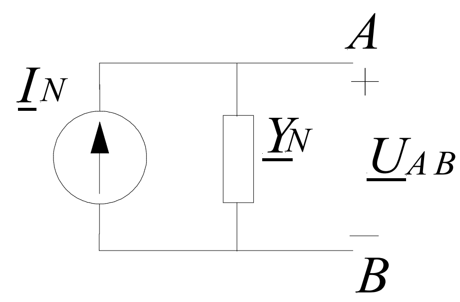
Análisis nodal

Análisis de malla

Principio de superposición

En el caso particular de los equivalentes de Thèvenin y Norton, los mismos pueden generalizarse de la siguiente manera:





RESUMEN

*Circuitos con **señal alterna senoidal** en estado permanente*

***EXCITACIONES y RESPUESTAS** en circuitos R, RL, RC, RLC*

***FASOR**, equivalencias con la señal senoidal*

DIAGRAMA FASORIAL

*Relación entre dos fasores: **IMPEDANCIA COMPLEJA** y sus componentes*

***Impedancia equivalente o "vista"** entre dos bornes*

***Característica** de una **IMPEDANCIA:** inductiva, capacitiva*

***Inversa** de una impedancia**: ADMITANCIA** y sus componentes*

***Característica** de una **ADMITANCIA:** inductiva, capacitiva*

INSTRUMENTOS