Unidad 5

Teorema de los Residuos

4º CLASE

Cintia Perrone – PS 2023

RESUMEN

En este tema vamos a desarrollar un resultado muy importante en el Análisis Complejo, y con diferentes aplicaciones en ciertas áreas de Matemática Aplicada: el Teorema de los Residuos.

Primero vamos a definir y analizar los llamados **puntos singulares o singularidades** de una función (de ahí surgirá el concepto de **polo**). A partir de su clasificación, definiremos el llamado **residuo** de una función en una singularidad aislada**,** para finalmente abordar el estudio del **Teorema de los Residuos**.

APLICACIONES

El **Teorema de los Residuos**:

- Nos permite calcular integrales de una función de variable compleja a lo largo de una curva cerrada cuando la función tiene un número finito de puntos singulares en el interior de la curva.
- Nos proporciona un método sencillo para calcular algunos tipos de integrales reales sin necesidad de conocer una primitiva de la función integrando.
- Es aplicable al cálculo de la transformada inversa de Laplace. La inversión de la transformación de Laplace en la resolución de problemas de valores iniciales de ecuaciones diferenciales ordinarias por el método tradicional puede ser muy tedioso. El Teorema de residuos puede aplicarse para obtener la transformada de Laplace inversa eludiendo el rigor de la resolución en fracciones parciales y el uso de la tabla de transformaciones de Laplace.

APLICACIONES

- En el diseño de cualquier sistema de control de un proceso dinámico, la estabilidad es uno de los principales parámetros a tener en cuenta, ya que en el caso de entrar en inestabilidad se puede producir el deterioro y destrucción del proceso. Se puede decir que un sistema o proceso es estable si, ante una señal de entrada limitada en amplitud, el sistema responde con una señal de salida también limitada en amplitud. Para sistemas lineales, la estabilidad está directamente ligada con la posición de los **polos** del sistema de la función de transferencia de lazo cerrado.

5.1 Singularidades

Definición 5.1.1: Se dice que $\boldsymbol{z_0}$ es un **punto singular** o una **singularidad** de la función $f(z)$, si $f(z)$ no es analítica en $\boldsymbol{z_0}$ pero es analítica en algún punto de todo entorno de $\boldsymbol{z_0}$.

Ejemplos:

- $f(z) = \frac{z^2}{z-5}$ Su dominio de analiticidad es $\mathbb{C} - \{5\}$.

$z_0 = 5$ es un punto singular.

- $f(z) = Ln(-z)$

Su dominio de analiticidad es $\mathbb{C} - \{z : Re(z) \geq 0 \ \wedge \ Im(z) = 0\}$. $z_0 = 0$ y todos los puntos del eje real positivo son singularidades de $f(z)$.

- $f(z) = \bar{z}$

Su dominio de analiticidad es vacío entonces $f(z)$ no tiene puntos singulares.

- $f(z) = z^3$

Su dominio de analiticidad es $\mathbb{C}$ entonces $f(z)$ no tiene puntos singulares.

Las singularidades pueden ser:

- ♦ **Aisladas**
- ♦ **No aisladas**

Singularidades aisladas

Definición 5.1.3 : Se dice que $\boldsymbol{z_0}$ es una **singularidad aislada** de $f(z)$, si $f(z)$ no es analítica en $\boldsymbol{z_0}$, pero para todos los puntos de algún entorno reducido de $\boldsymbol{z_0}$, $f(z)$ es analítica. Es decir, que existe algún número positivo R tal que $f(z)$ es analítica en todos los puntos del conjunto $E^*(\mathrm{z}_0, R) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < R\}$.

Ejemplos:

- La función $f(z) = \frac{z^2}{z-5}$ tiene una singularidad aislada en $z_0 = 5$.
- La función $f(z) = \frac{1}{sen(z)}$ tiene las singularidades aisladas $z_k = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Singularidades no aisladas

Definición 5.1.4 : Se dice que $\boldsymbol{z_0}$ es una **singularidad no aislada** de $f(z)$, si $f(z)$ no es analítica en $\boldsymbol{z_0}$ y para todo entorno reducido de $\boldsymbol{z_0}$ hay al menos un punto donde $f(z)$ no es analítica. Es decir que para todo número positivo R, $f(z)$ no es analítica en algún punto del conjunto $E^*(\mathrm{z}_0, R) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < R\}$.

Ejemplo:

- La función $f(z) = Ln(-z)$ tiene las singularidades

$\{z : Re(z) \geq 0 \wedge Im(z) = 0\}$ que son no aisladas.

5.2 Clasificación de las singularidades aisladas

Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$. Entonces $f(z)$ es analítica en algún entorno reducido de z_0 $E^*(\mathrm{z}_0, R) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < R\}$ y $f(z)$ admite un desarrollo en serie de Laurent centrado en z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

Se denomina **parte principal** de la serie de Laurent a los términos correspondientes a las **potencias negativas** de $(z - z_0)$ y a los coeficientes se los representa como $\boldsymbol{b_n}$. Podremos clasificar las singularidades aisladas analizando el comportamiento de la parte principal de la serie de Laurent, en un entorno reducido de la singularidad aislada z_0.

Clasificación de las singularidades aisladas:

♦ **Singularidad evitable**

♦ **Singularidad esencial**

♦ **Polo de orden k**

Singularidad evitable

Definición 5.2.1 : La función $f(z)$ tiene una **singularidad evitable** en $\boldsymbol{z_0}$, si la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $\boldsymbol{z_0}$ convergente en $0 < |z - z_0| < R$, no tiene términos; es decir, $b_n = 0$ $\forall n \geq 1$.

(Ejemplo pizarrón 4.A)

- $f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0 si y solo si $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe.

- En particular en este caso $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$ del desarrollo de la serie de Laurent de $f(z)$ en un entorno reducido de z_0.

- Si una función $f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0, se puede redefinir una nueva función $g(z)$ tal que:

$$g(z) \begin{cases} f(z) & si \quad z \neq z_0 \\ a_0 & si \quad z = z_0 \end{cases}$$

Esta nueva función $g(z)$ es analítica en z_0

Singularidad esencial

Definición 5.2.5 : La función $f(z)$ tiene una **singularidad esencial** en $\boldsymbol{z_0}$, si la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $\boldsymbol{z_0}$ convergente en $0 < |z - z_0| < R$, tiene infinitos términos no nulos; es decir, $b_n \neq 0$ para infinitos valores de n.

(Ejemplo pizarrón 4.B)

- Si analizamos el comportamiento $f(z)$ en un entorno reducido de z_0 podremos observar que el $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe.

Polo de orden k

Definición 5.2.3. La función $f(z)$ tiene un **polo de orden $\boldsymbol{k}$** en $\boldsymbol{z_0}$, si la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $\boldsymbol{z_0}$, convergente en $0 < |z - z_0| < R$, tiene finitos términos no nulos; es decir, $b_n = 0 \ \ \forall n > k$ y $b_k \neq 0$. Si $k = 1$ se dice que $\boldsymbol{z_0}$ es un polo simple.

(Ejemplo pizarrón 4.C)

- $f(z)$ tiene un polo en z_0 si y solo si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$
- Si z_0 es un polo de orden k de $f(z)$ entonces $-k$ es la menor potencia negativa de $(z - z_0)$ que aparece en la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en z_0.

Caracterización de polos

Teorema de Caracterización de Polos: z_0 es un polo de orden k de $f(z)$ si y solo si $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} h(z)$ con $h(z)$ analítica en z_0 y $h(z_0) \neq 0$.

Demostración:

⇒) Sea z_0 un polo de orden k de $f(z)$, por lo tanto existe algún $R > 0$ de modo tal que $f(z)$ tiene un desarrollo en serie de Laurent, convergente en el entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$ que tiene la forma:

$$\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad b_k \neq 0$$

$$\frac{1}{(z-z_0)^k}\left[b_k + b_{k-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k}\right]$$

Si llamamos:

$$h(z) = b_k + b_{k-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k}$$

Podemos observar que $h(z)$ es una serie de potencias positivas que converge en $|z-z_0| < R$ a una función suma. Entonces $h(z)$ es analítica en z_0. Además $h(z_0) = b_k \neq 0$. De manera que nos queda:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}\left[b_k + b_{k-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k}\right] = \frac{1}{(z-z_0)^k} h(z)$$

$\Leftarrow$) Sea $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} h(z)$ con $h(z)$ analítica en z_0 y $h(z_0) \neq 0$. Si $h(z)$ es analítica en z_0, entonces admite un desarrollo de Taylor centrado en z_0 y convergente en $|z - z_0| < R^*$ con $R^* > 0$:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad h(z_0) = a_0 \neq 0$$

Entonces:

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} = (z-z_0)^{-k} + (z-z_0)^{-k+1} + (z-z_0)^{-k+2} + \cdots$$

Obtenemos un desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en z_0, convergente en $0<|z-z_0|<R^*$. Como $-k$ es la menor potencia negativa de $(z-z_0)$ que aparece en el desarrollo de Laurent, entonces podemos afirmar que z_0 es un polo de orden k de $f(z)$.

(Ejemplo pizarrón 4.D)

Propiedades:

Si z_0 es un polo de orden p de $f(z)$ y un polo de orden q de $g(z)$ con $p > q$:

a) $f(z)g(z)$ tiene un polo de orden $p + q$ en z_0.

b) $f(z) + g(z)$ tiene un polo de orden p en z_0.

c) $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene una singularidad evitable en z_0.

d) $\frac{g(z)}{p(z)}$ tiene un polo de orden $p - q$ en z_0.