Unidad 6

Transformadas integrales

6º CLASE

Cintia Perrone – PS 2023

Repaso de Integrales impropias:

Una integral impropia de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ donde $f(x)$ es continua para todo x real, se dice que es convergente si existen los límites:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

y el valor al que converge es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

Si la integral impropia es convergente, se puede calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Este límite se denomina valor principal de Cauchy de la integral impropia y se indica:

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Si la integral impropia es convergente, su valor coincide con el valor principal. Sim embargo, puede existir el valor principal y la integral impropia ser divergente.

(Ejemplo pizarrón 6.A)

Transformaciones integrales:

Sea $N(t,s)$ una función de las variables t y s. Si $f(t)$ es una función (real o compleja) entonces la transformada integral de la función $f(t)$ respecto al núcleo $N(t,s)$ es:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)N(t,s)\,dt$$

cuando la integral existe.

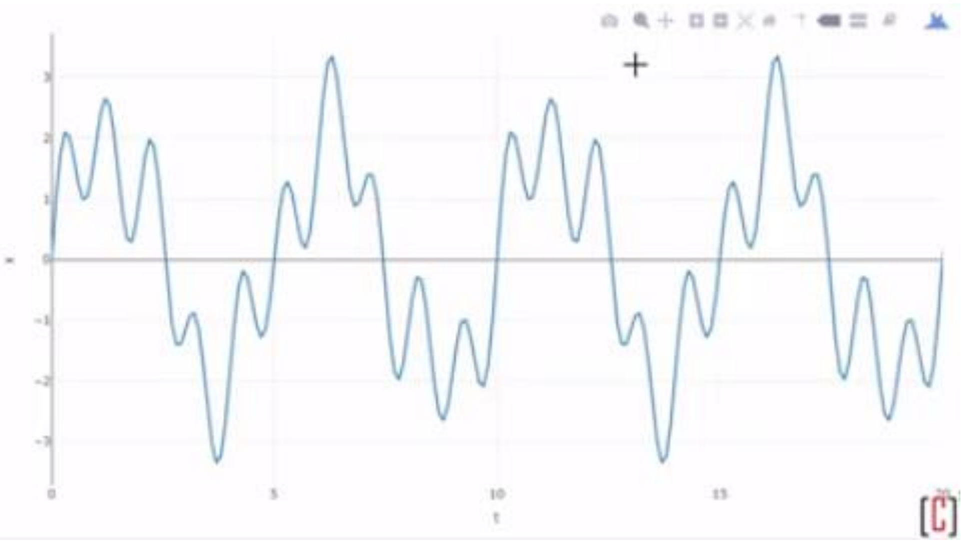
Diversos núcleos originan diferentes transformadas integrales. Abordaremos los casos con $N(t,s) = e^{-i2\pi ts}$ (transformada de Fourier) y $N(t,s) = e^{-its}$ (transformada de Laplace).

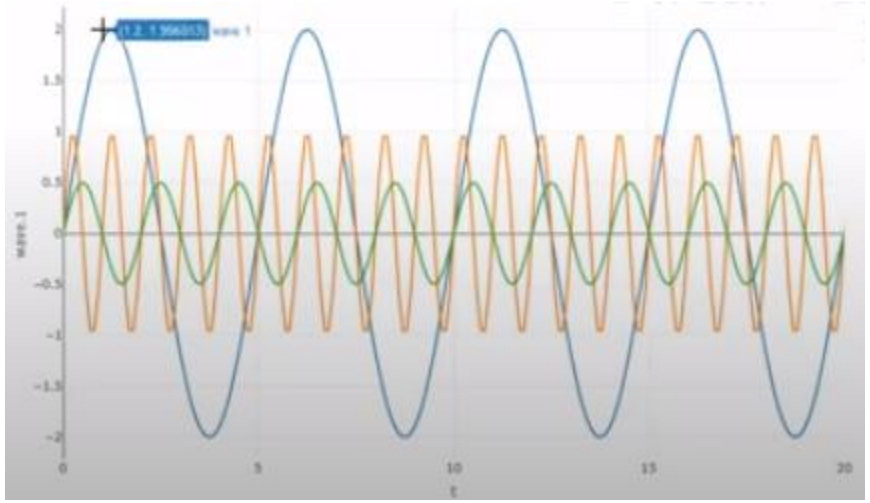
Transformada de Fourier:

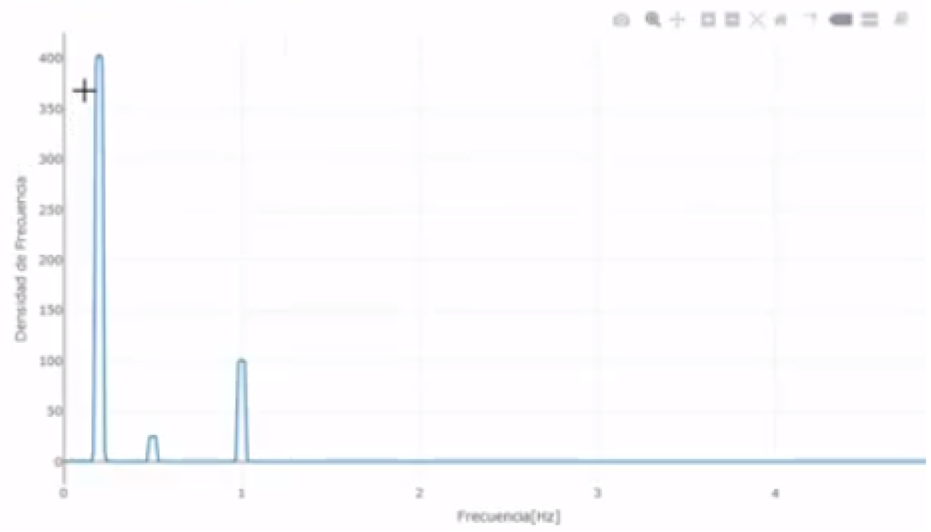
La transformada de Fourier es un concepto matemático utilizado en el análisis de señales y sistemas. Permite descomponer una señal en sus componentes de frecuencia, lo que facilita el estudio y la manipulación de las características de la señal en el dominio de la frecuencia.

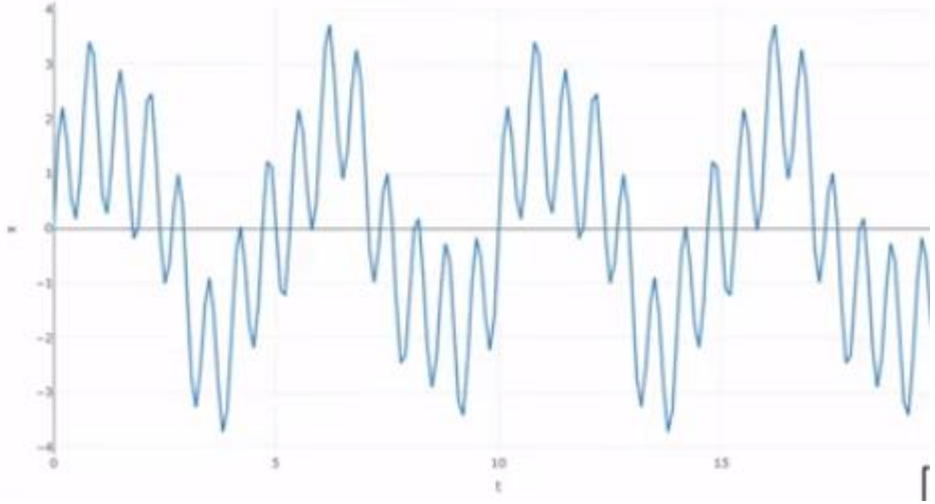
Una señal se puede representar en el dominio del tiempo, donde se muestra cómo la señal varía con el tiempo, o en el dominio de la frecuencia, donde se muestra la composición de frecuencias presentes en la señal. La transformada de Fourier permite pasar de una representación a otra.

La representación gráfica de la transformada de Fourier se llama espectro de frecuencia. Visualmente, el espectro de frecuencia muestra la amplitud y la fase de las diferentes componentes de frecuencia presentes en una señal. Puedes encontrar visualizaciones en forma de gráficos llamados gráficos de magnitud y fase.

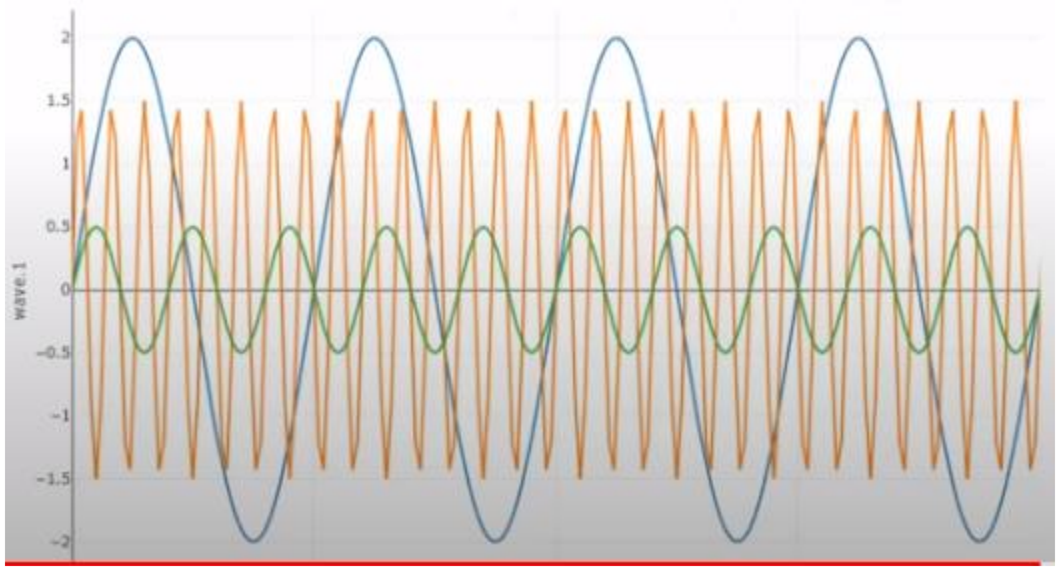

t


wave 1
t

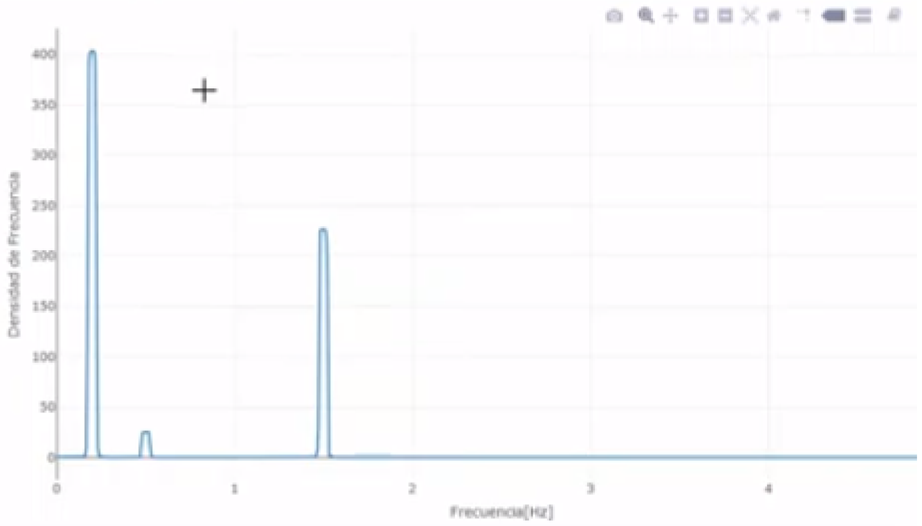

Densidad de Frecuencia
Frecuencia[Hz]



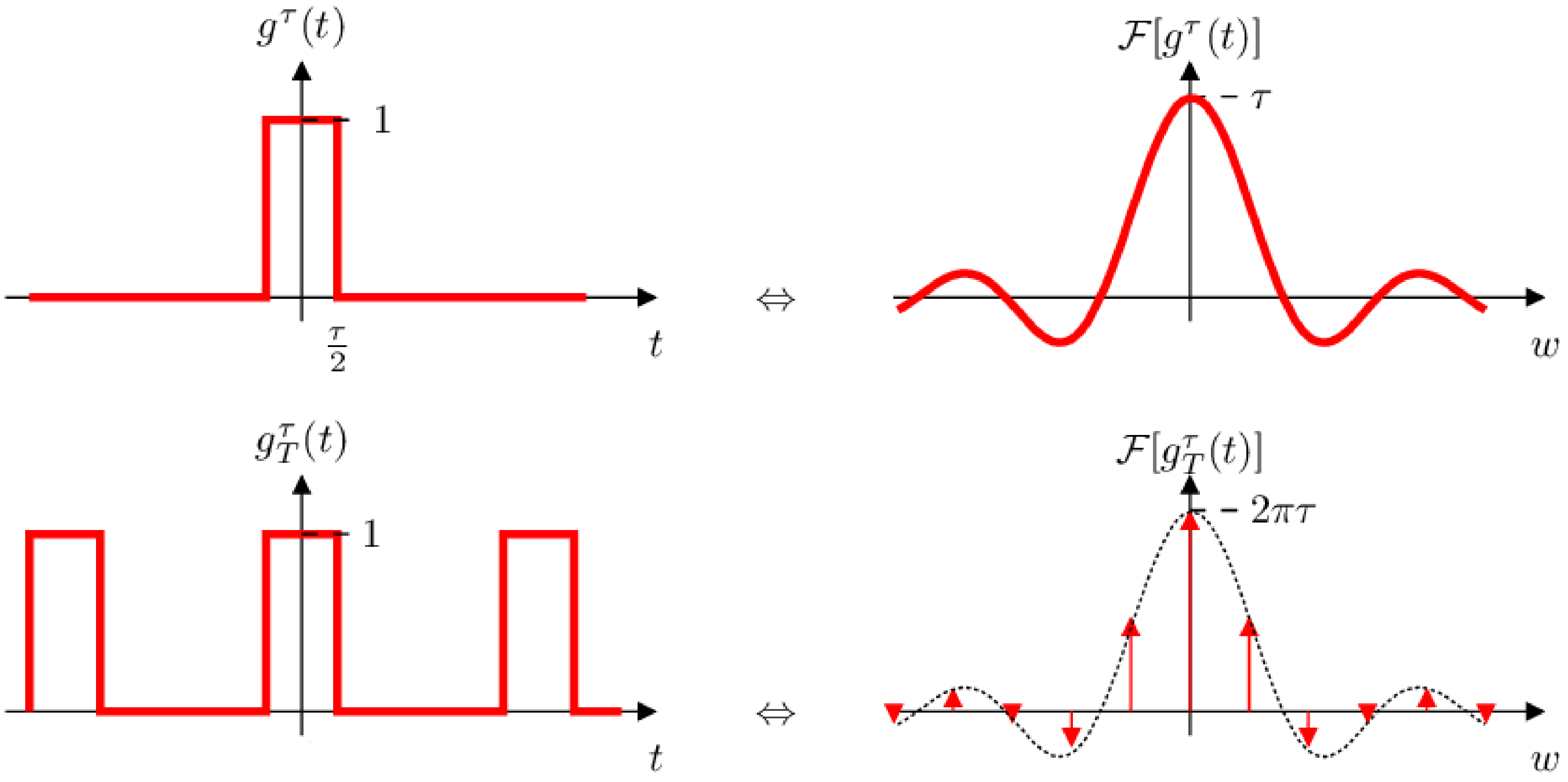
t

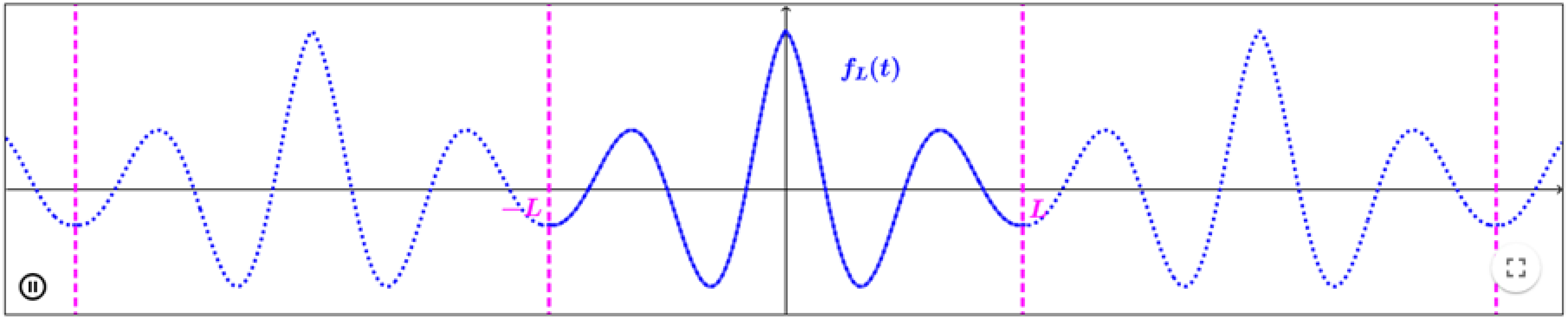


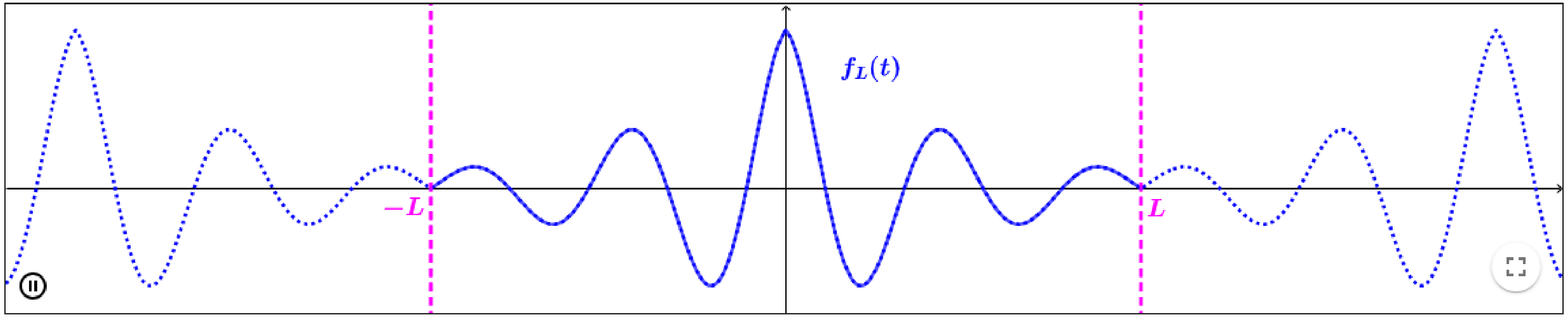
wave.1

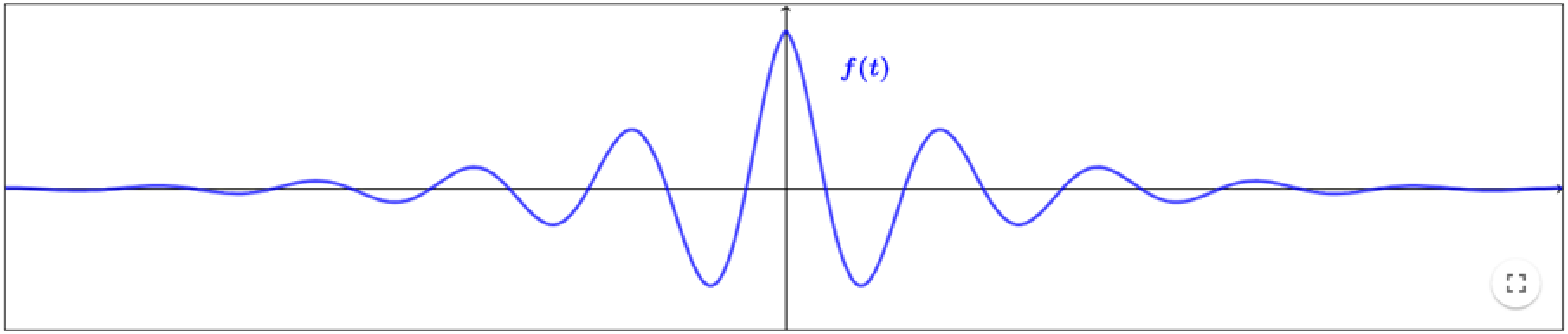


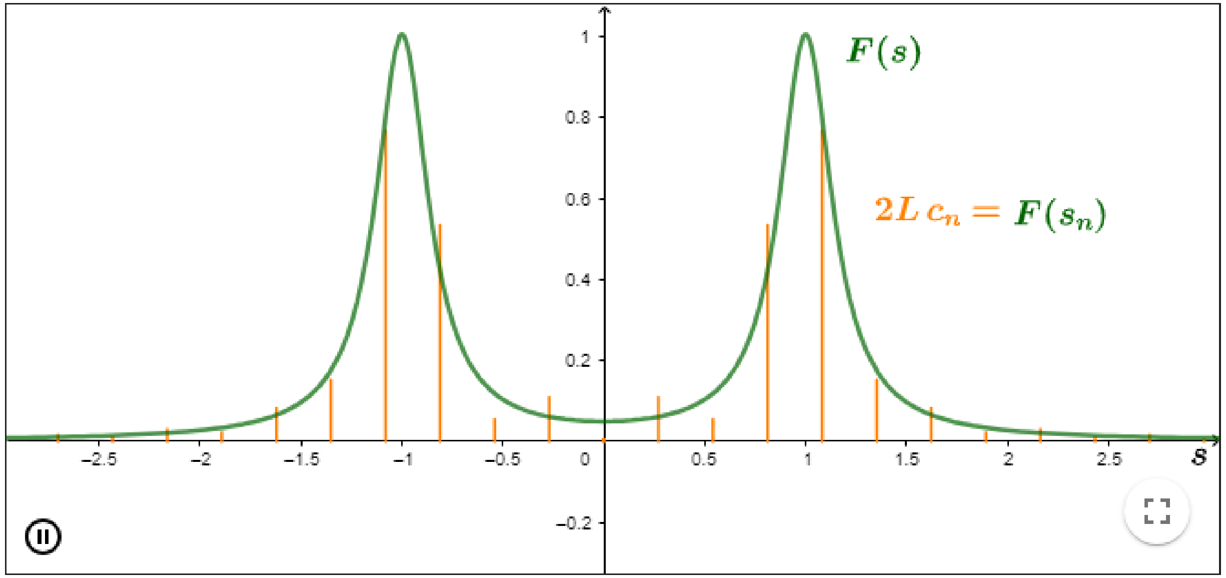
Densidad de Frecuencia
Frecuencia[Hz]


$g^{\tau}(t)$
1
$\frac{\tau}{2}$
t
$\Leftrightarrow$
$\mathcal{F}[g^{\tau}(t)]$
τ
w
$g_T^{\tau}(t)$
1
t
$\Leftrightarrow$
$\mathcal{F}[g_T^{\tau}(t)]$
$2\pi\tau$
w

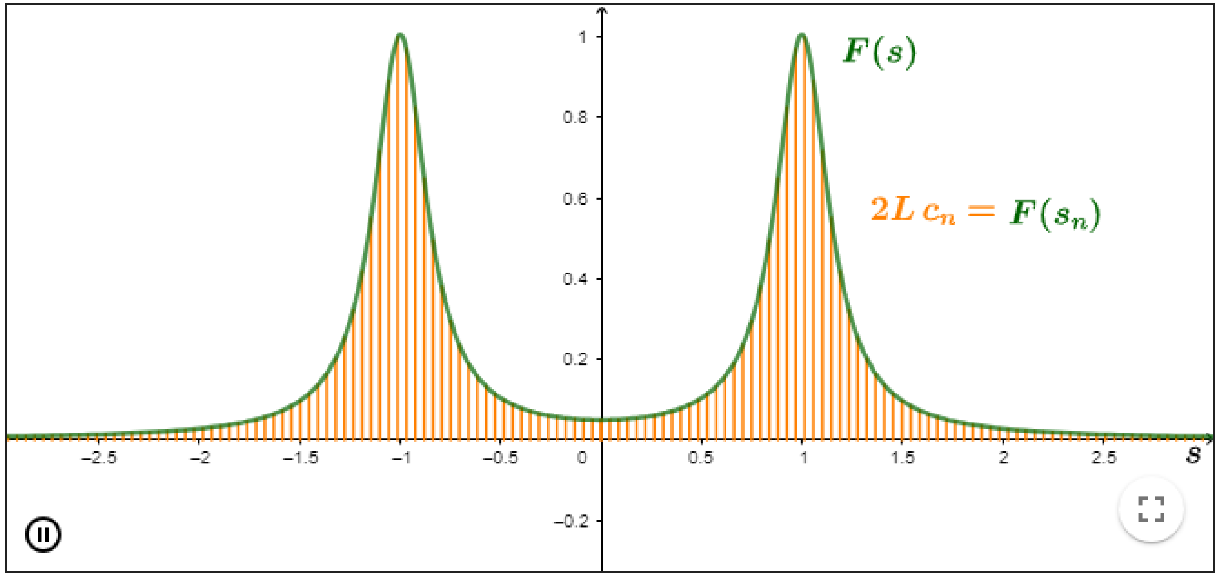

$f_L(t)$
$-L$
L


$f_L(t)$
$-L$
L


$f(t)$



$F(s)$
$2L\,c_n = F(s_n)$
s



$F(s)$
$2L\,c_n = F(s_n)$
s

Representación de $f(t)$ mediante la integral de Fourier:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = vp \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{i2\pi ts}\, ds$$

Donde $\boldsymbol{F(s)}$ **es la transformada de Fourier** de $f(t)$:

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = vp \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi ts}\, dt$$

Además,

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\} = vp \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{i2\pi ts}\, ds$$

es la transformada inversa de Fourier de $\boldsymbol{F(s)}$.

Llamaremos al dominio de $f(t)$ dominio del tiempo, al de $F(s)$ dominio de la frecuencia y $F(s)$ se conoce como el espectro complejo de frecuencia de $f(t)$.

6.2 Transformada e integral de Fourier

Teorema 6.2.1:

Condiciones suficientes (de Dirichlet) para la existencia.

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cumple las siguientes condiciones:

- $f(t)$ y $f'(t)$ son seccionalmente continuas dentro de cualquier intervalo finito.
- $f(t)$ es absolutamente integrable, es decir $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

Entonces, existe y es continua la transformada de Fourier de $f(t)$

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = vp \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi ts}\, dt$$

Y es posible la representación de f(t) mediante su integral de Fourier:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = vp \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{i2\pi ts}\, ds = \lim_{u \to \infty} \int_{-u}^{u} F(s) e^{i2\pi ts}\, ds$$

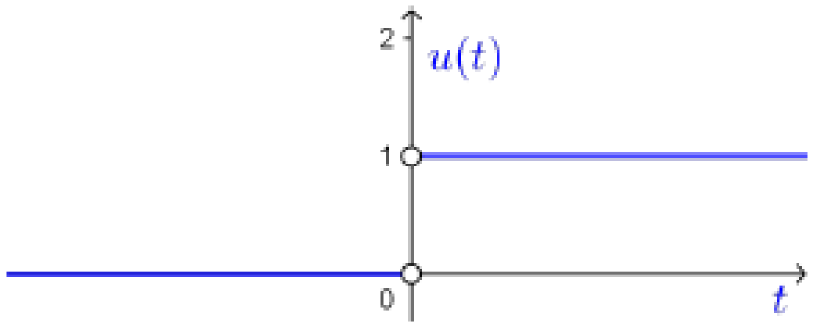
(Ejemplos pizarrón 6.B)

Las condiciones de Dirichlet son suficientes pero no necesarias, es decir, hay funciones que no las cumplen pero tienen transformada e integral de Fourier. (Ejemplo pizarrón 6.C)

Función escalón unitario (o salto unidad o función de Heaviside)

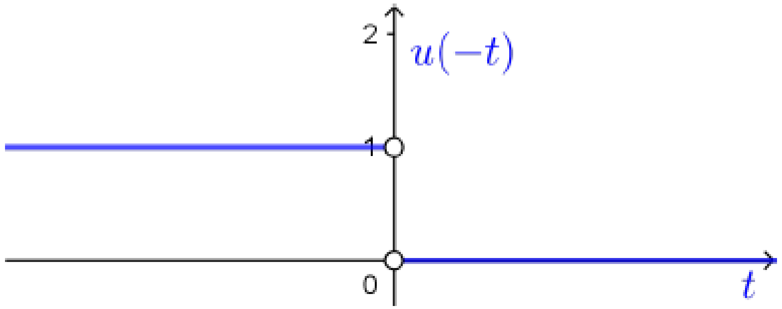
La función escalón unitario está definida como:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

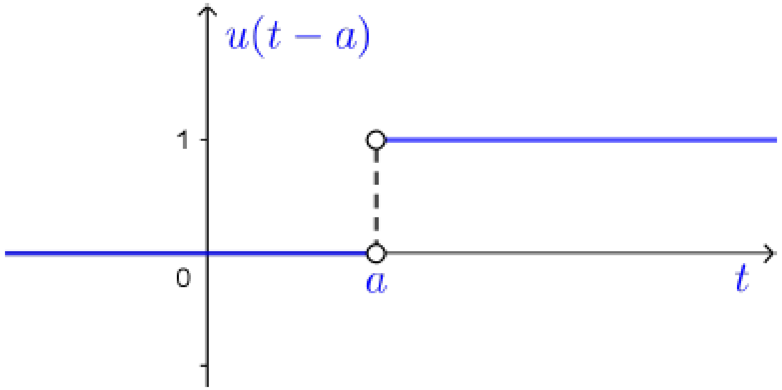


Algunos casos:

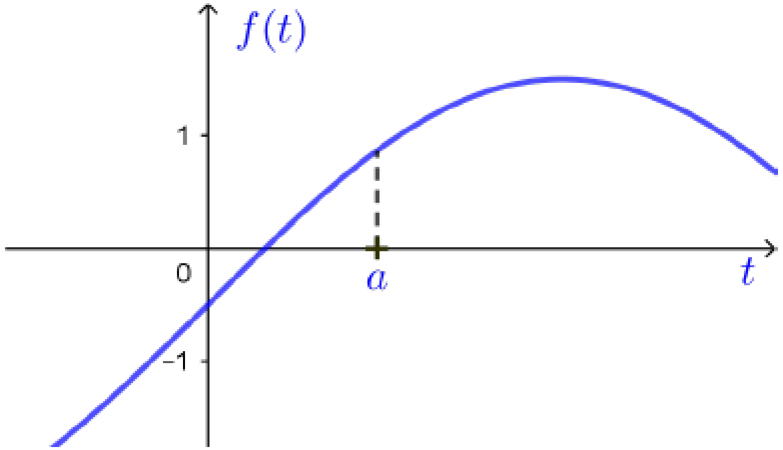
$$u(-t) = \begin{cases} 0 & -t < 0 \\ 1 & -t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$



$$u(t-a)=\begin{cases}0 & t-a<0\\ 1 & t-a>0\end{cases}=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases}$$



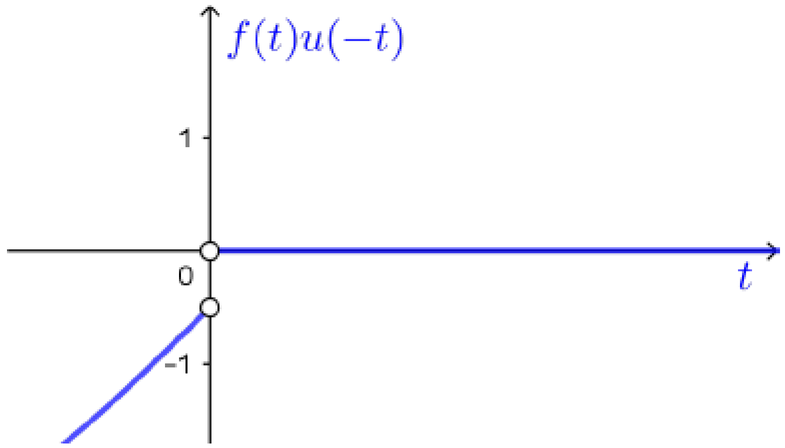
Dada una función $f(t)$:



Multiplicar una función $f(t)$ por un escalón unitario puede "conectarla" o "desconectarla":

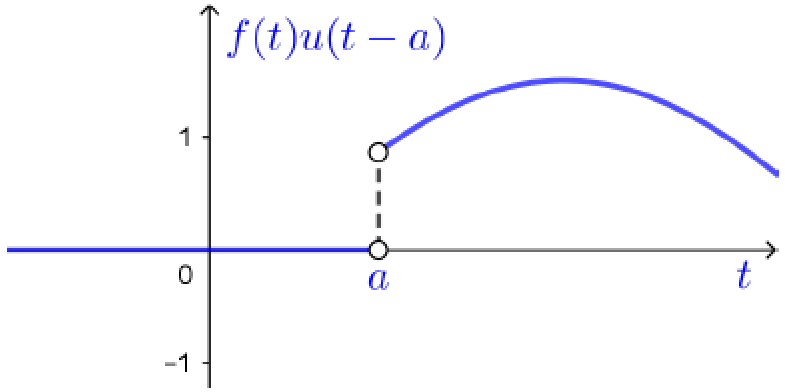
$f(t)$ "desconectada" en $t > 0$:

$$f(t)u(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ f(t) & t < 0 \end{cases}$$



$f(t)$ "conectada" en $t > a$:

$$f(t)u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t) & t > a \end{cases}$$

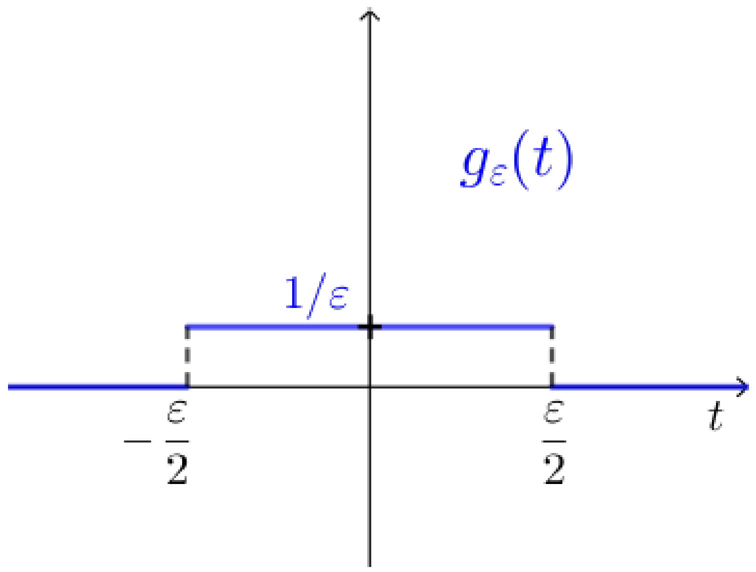


(Ejemplo pizarrón 6.D)

Impulso unitario finito

Deseamos describir un evento que este "conectado" en un entorno de $t = 0$ durante un tiempo corto con una magnitud muy grande. En principio, para $\varepsilon > 0$, definimos la función:

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & |t| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

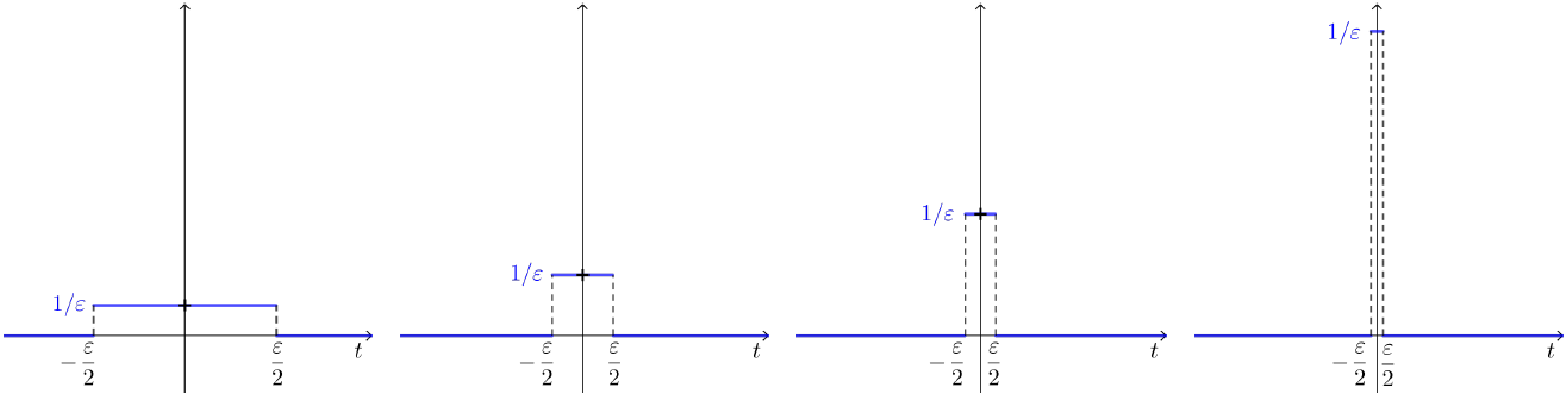


que llamamos **impulso unitario finito** debido a que el área bajo su gráfica es 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)\, dt = 1$$

Impulso unitario o delta de Dirac

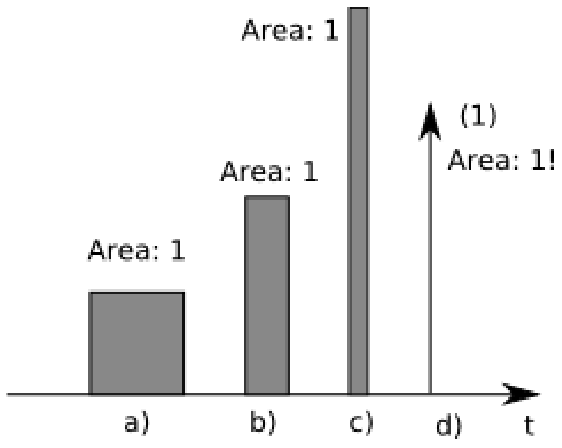
Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty$, $g_{\varepsilon}(t)$ se aproxima a lo que se llama impulso unitario o delta de Dirac:

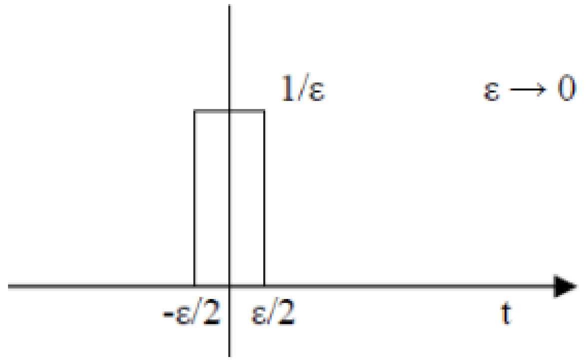


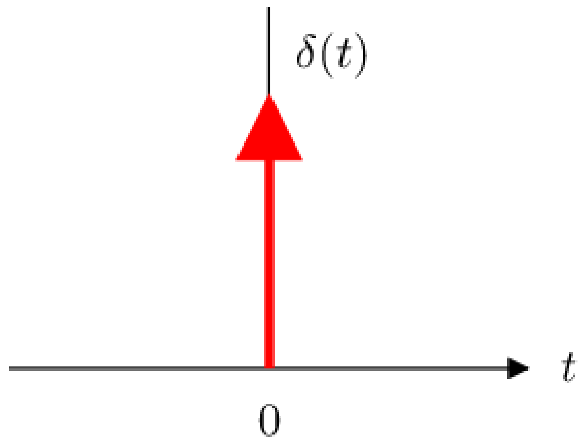
$g_{\varepsilon}(t)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

Impulso unitario o delta de Dirac

Cuando $\varepsilon \to 0$ y $\frac{1}{\varepsilon} \to \infty$, $g_\varepsilon(t)$ se aproxima a lo que se llama impulso unitario o delta de Dirac y se lo simboliza $\delta(t)$. No tiene duración, sinó área. Este elemento no se corresponde con una función ordinaria a valores reales, ya que es infinitesimalmente estrecha e infinitamente alta. La flecha en $t = 0$ indica que el área del pulso está concentrada en $t = 0$ y la altura de la flecha se la usa para representar el área del impulso.







Podemos caracterizar $\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

$\delta(t)$ conserva las dos propiedades de $g_\varepsilon(t)$, la cual se anula fuera de $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ y tiene área 1. Es decir, cumple las condiciones:

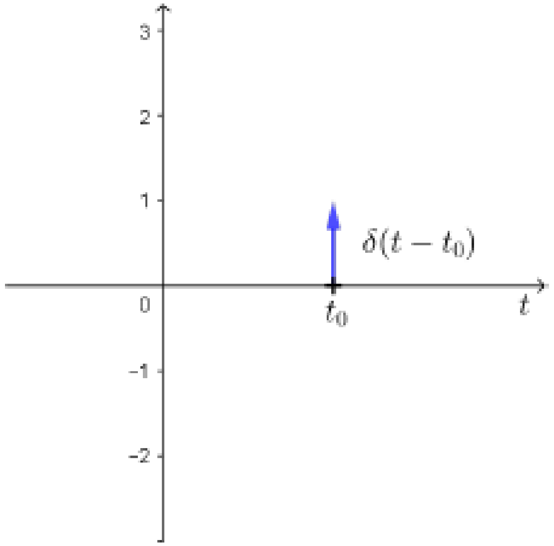
1) $\delta(t) = 0$ para todo $t \neq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

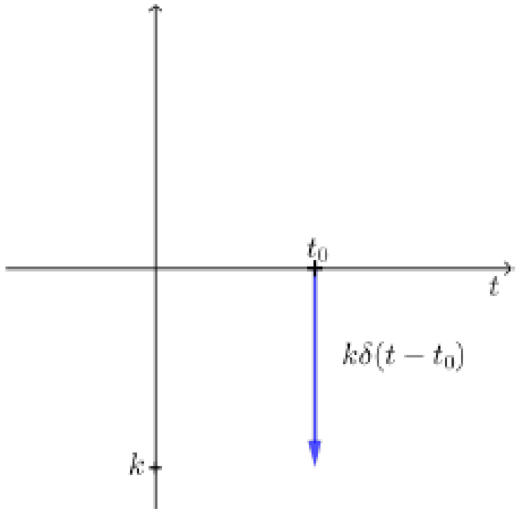
Una función ordinaria nula salvo en un punto, tiene área 0, por lo cual $\delta(t)$ no es una función ordinaria; es una **función generalizada o distribución**.

Ejemplos:

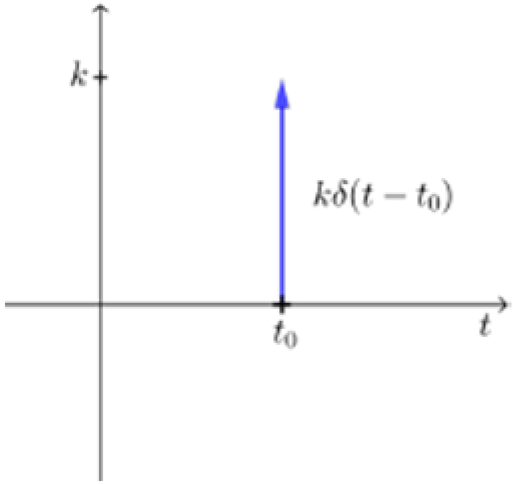
$$\delta(t - t_0)$$



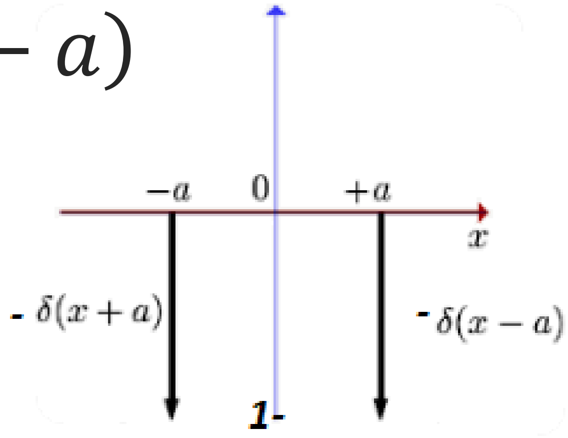
$$k\delta(t - t_0) \quad k < 0$$



$$k\delta(t - t_0) \quad k > 0$$



$$-\delta(t + a) - \delta(t - a)$$



Definición 6.2.6. ***Distribución.*** *Sea P un conjunto de funciones reales llamadas de prueba. Una distribución o función generalizada $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$ es una correspondencia que a cada función $\phi \in P$ le asigna un único número real que notamos $g(t)\{\phi\}$ ($g(t)$ es un funcional, función cuyo argumento es una función); es decir,*

$$\begin{aligned} g(t) : P &\to \mathbb{R} \\ \phi &\to g(t)\{\phi\} \end{aligned}$$

y dicho número verifica:

1) $g(t)\{a\phi_1 + b\phi_2\} = ag(t)\{\phi_1\} + bg(t)\{\phi_2\}$ *(linealidad)*

2) $g(t - t_0)\{\phi(t)\} = g(t)\{\phi(t + t_0)\}$ *(composición de la función ordinaria $t - t_0$ con la distribución g)*

3) $g(at)\{\phi\} = \dfrac{1}{|a|} g(t)\left\{\phi\left(\dfrac{t}{a}\right)\right\}$ *(composición de la función ordinaria at con la distribución g)*

4) *Si* f *es una función tal que* $f\phi \in P$ *entonces* $g(t)f(t)\{\phi\} = g(t)\{f\phi\}$ *(producto de la función ordinaria* f *con la distribución* g *o producto de escalar con la distribución* g *si* f *es constante)*

Si g_1 *y* g_2 *son dos distribuciones definidas sobre* P*:*

5) $g_1(t) = g_2(t)$ *cuando* $g_1(t)\{\phi\} = g_2(t)\{\phi\}$ para todo $\phi \in \mathrm{P}$ *(igualdad de distribuciones)*

6) $[g_1(t) + g_2(t)]\{\phi\} = g_1(t)\{\phi\} + g_2(t)\{\phi\}$ *(suma de distribuciones)*

Función ordinaria como distribución

Si P es un conjunto apropiado de funciones de prueba y f es una función tal que para toda $\phi \in P$ la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt$ existe, f define una distribución:

$$f(t)\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt$$

Ejemplos de funciones ordinarias como distribución:

1) Sea P el conjunto de las funciones continuas que son nulas fuera de algún intervalo acotado. La función escalón unitario $u(t)$ define una distribución:

$$u(t)\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi(\mathrm{t})dt \ = \int_{0}^{\infty} \phi(t)dt \qquad \text{para todo } \phi \in P$$

2) Sea P el conjunto de las funciones continuas. La función $g_{\varepsilon}(t)$ define una distribución:

$$g_{\varepsilon}(t)\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\varepsilon}(t)\phi(\mathrm{t})dt \ = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \phi(t)dt \quad \text{para todo } \phi \in P$$

Delta de Dirac como distribución:

Sea P el conjunto de las funciones continuas definimos las distribución delta de Dirac:

$$\delta(t)\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt \ = \phi(0) \qquad \text{para todo } \phi \in P$$

- Si $\phi(t) = 1 \qquad \delta(t)\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).1 = 1$
- $\delta(t - t_0)\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\phi(t)dt \ = \phi(t_0)$

$$\delta(t - t_0)\{\phi\} = \delta(t)\{\phi(t + t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t + t_0)dt \ = \phi(0 + t_0) = \phi(t_0)$$

Válido para cualquier intervalo de integración que contenga al número t_0

Derivada de una distribución

Consideremos P tal que si $\phi \in P$ entonces $\phi' \in P$.

Sea $g(t)$ una distribución en P, se define la distribución derivada $g'(t)$ en P:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi'(t)dt$$

Ejemplo: La derivada de $u(t)$ como distribución es $u'(t) = \delta(t)$.

Sea $\phi \in P$ el conjunto de funciones continuas, nulas fuera de algún intervalo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi'^{(t)}dt = -\int_{0}^{\infty} \phi'(t)dt = -\lim_{b\to\infty}[\phi(b) - \phi(0)] = \phi(0)$$

Transformada de Fourier de una distribución
Consideremos P tal que para toda $\phi \in P$ existe su transformada de Fourier y $\mathscr{F}\{\phi\} \in P$.
Sea $g(t)$ una distribución en P, se define $\mathscr{F}\{g(t)\}$:

$$\mathscr{F}\{g(t)\}\{\phi\} = g(t)\{\mathscr{F}\{\phi\}\}, \quad \text{para todo} \quad \phi \in \mathrm{P}$$

Ejemplo:

$$\delta(t-t_0)\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)dt \ = \phi(t_0)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}\{\phi\} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-i2\pi ts}\,dt\right]\{\phi\} = e^{-i2\pi t_0 s}\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi t_0 s}\phi(s)ds = \Phi(t_0)$$

$$\delta(t-t_0)\{\mathcal{F}\{\phi\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathcal{F}\{\phi\}dt \ = \Phi(t_0)$$

Ejemplos:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-i2\pi ts}\, dt = e^{-i2\pi t_0 s}$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i2\pi ts}\, dt = e^{-i2\pi 0 s} = 1$$