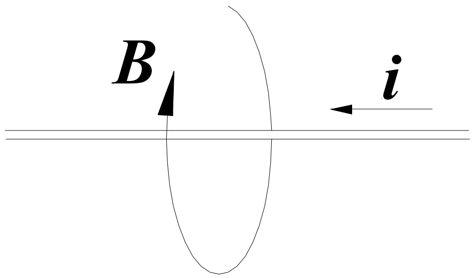
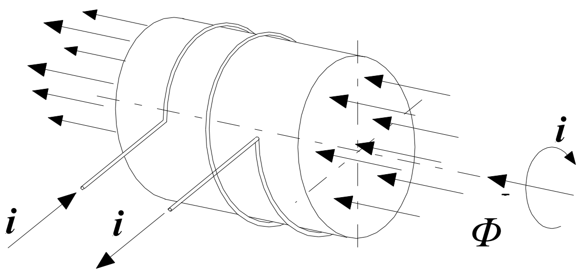
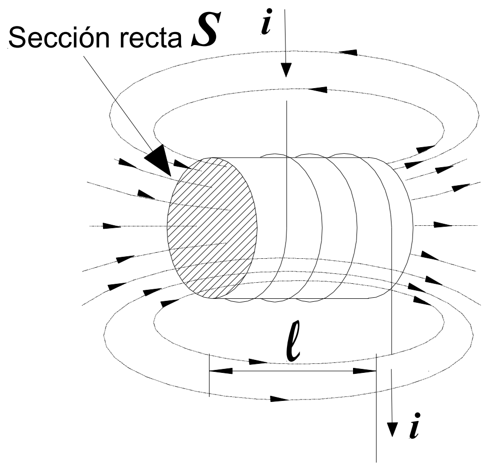
# CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

## Efectos magnéticos de la corriente

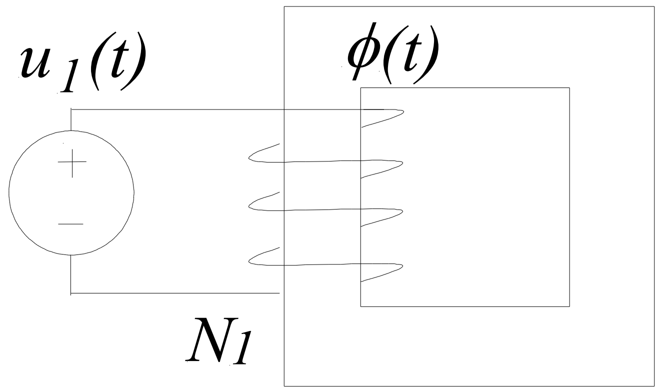


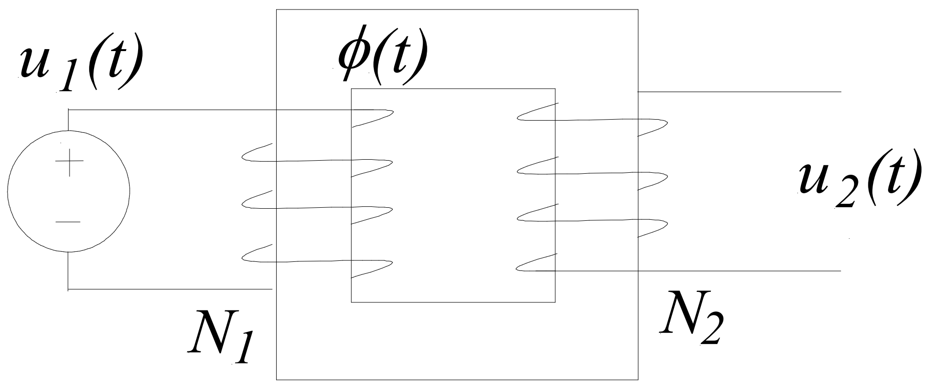

$$\Phi = B \cdot S$$

# CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE




$$\phi(t) = \frac{1}{N_1}\int u_1 dt$$

*De acuerdo a la ley de Faraday* $$u(t) = N\frac{d\phi}{dt}$$




$$u_2(t) = N_2\frac{d\phi(t)}{dt}$$

*El signo de* $\boldsymbol{u_2(t)}$ *debe ser tal que el efecto se oponga a la causa que le da origen, por lo tanto:*

*Ley de Lenz*

$$u_2(t) = -N_2\frac{d\phi(t)}{dt}$$

*Por otra parte, en una bobina (relación constitutiva)*

$$u(t) = L\frac{di}{dt}$$

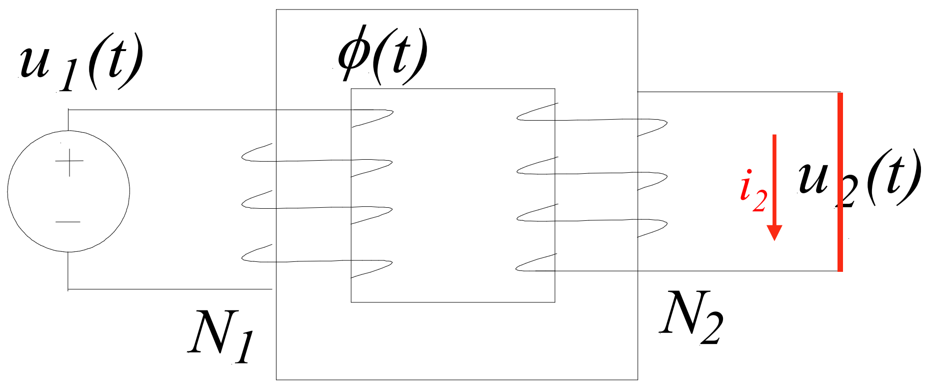
*junto a*

$$u(t) = N\frac{d\phi}{dt}$$

*resulta*

$$L = N\frac{\phi}{i}$$

***Autoinductancia***




*Además, si la bobina de la derecha se cortocircuitara*

$$N_2\frac{d\phi(t)}{dt} = L_2\frac{di_2(t)}{dt}$$

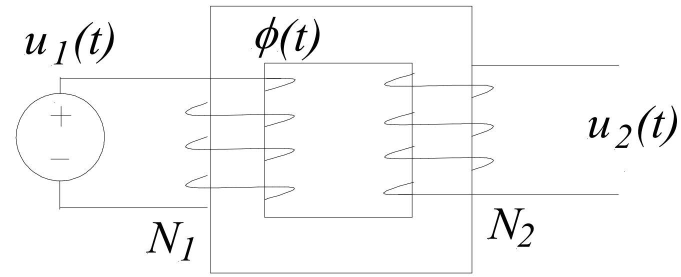
# CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

*Recordando la expresión:*

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi(t)}{dt}$$

*que se puede reescribir*

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt}$$




*e indica que* $\boldsymbol{u_2}$ *depende de* $\boldsymbol{i_1}$ *a través de una constante* $\boldsymbol{M}$*,*
*llamada* ***inductancia mutua***

*Y combinando* $u_2(t) = N_2 \dfrac{d\phi(t)}{dt}$ *y* $u_2(t) = M \dfrac{di_1(t)}{dt}$ *resulta*

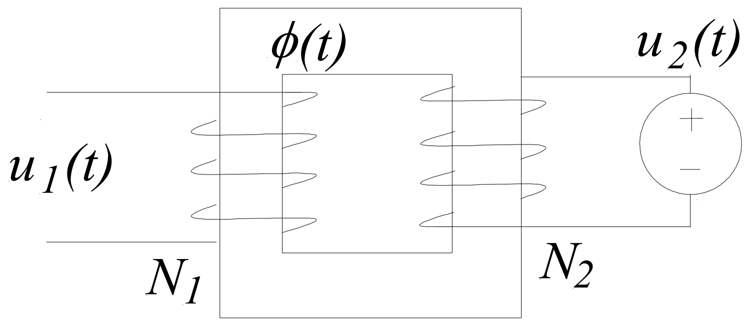
$$M = N_2 \frac{\phi}{i_1}$$

*Además, la relación de* $u_1(t) = N_1 \dfrac{d\phi(t)}{dt}$ *y* $u_2(t) = N_2 \dfrac{d\phi(t)}{dt}$ *a través del flujo, origina*

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{u_1}{u_2}$$

***relación de transfomación***

*Expresiones matemáticas similares se obtendrían si se intercambian la fuente y la bobina pasiva*

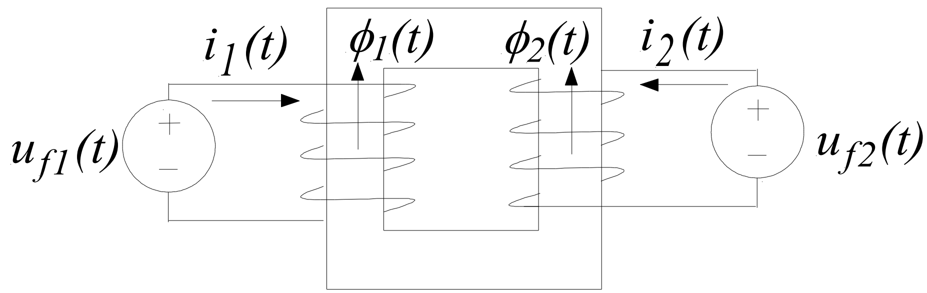



$$u_1(t) = M\,\frac{di_2(t)}{dt} \qquad\qquad u_2(t) = L_2\,\frac{di_2(t)}{dt}$$

***CONCLUSIÓN***

***Se ha podido representar un efecto magnético mediante una relación entre <u>tensiones y corrientes</u>, en vez de considerar flujos u otras variables magnéticas***

*Si ambas bobinas fueran activas (alimentadas con fuentes)*




*aparece un flujo neto, que es compartido por ambas bobinas, y se suele denominar **flujo mutuo** o **concatenado***

*Se puede plantear un par de expresiones que relacionan el efecto de cada fuente y el efecto mutuo sobre cada arrollamiento, teniendo en cuenta cómo interactúan los flujos generados por ambas bobinas*

$$u_{f1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_{f2}(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt}$$

*¿cómo se determina el signo de los términos de **M**?*

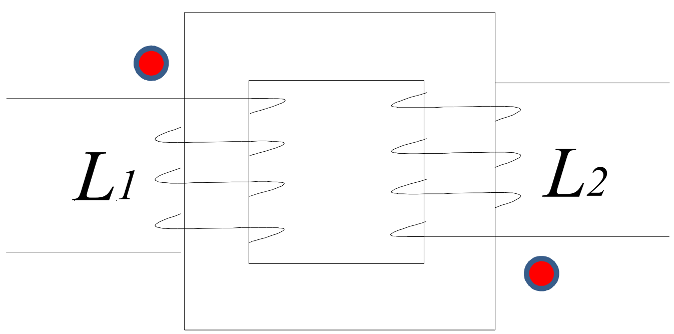
## PUNTOS HOMÓLOGOS

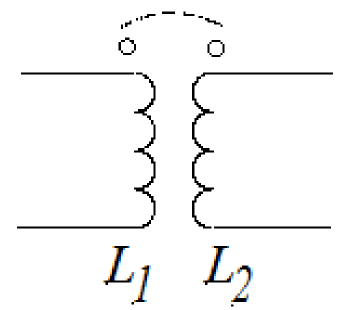
*Los* **puntos homólogos** *existen independientemente de la corriente y/o la tensión, pues representan una característica geométrica de un circuito acoplado magnéticamente.*

*Indican:*

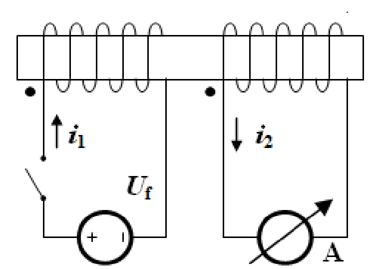
- *la forma en la que están enrolladas las bobinas sobre el núcleo* ***¡Ojo!***
- *que la polaridad instantánea de la tensión inducida en un punto homólogo respecto la "caída" de tensión en el otro punto es la misma.*

*¡Y no hace falta dibujar el núcleo de hierro!*



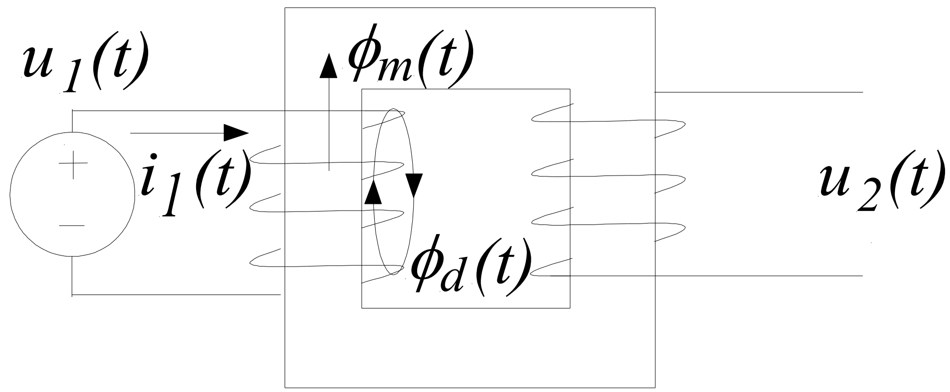




*Experimento para determinar los puntos homólogos si no se pueden ver los sentidos de los arrollamientos*



# CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

## DISPERSIÓN




$$\phi_1 = \phi_m + \phi_d$$

*Al existir flujo de dispersión, se puede escribir:*

$$\phi_{m1} = k_1\phi_1 \quad y \quad \phi_{m2} = k_2\phi_2$$

$$\phi_{d1} = \sigma_1\phi_1 \qquad \phi_{d2} = \sigma_2\phi_2$$

***$k_1$* y *$k_2$* → *coeficiente* o *factor de acoplamiento***

***$\sigma_1$ y $\sigma_2$* → *coeficiente* o *factor de dispersión***

*y los flujos totales resultan*

$$\phi_{m1} + \phi_{d1} = \phi_1(k_1 + \sigma_1) = \phi_1$$

$$\phi_{m2} + \phi_{d2} = \phi_2(k_2 + \sigma_2) = \phi_2 \qquad con \quad \boldsymbol{k + \sigma = 1}$$

***k** y **σ** son función de la **geometría del sistema**, y pueden tomar valores entre **0** y **1**, en forma contrapuesta*

*Analizando las autoinductancias*

$$L_1 = \frac{N_1\phi_1}{i_1} = \frac{N_1\phi_{d1}}{i_1} + \frac{N_1\phi_{m1}}{i_1} = L_{d1} + L_{m1} \qquad y \qquad L_2 = \frac{N_2\phi_2}{i_2} = \frac{N_2\phi_{d2}}{i_2} + \frac{N_2\phi_{m2}}{i_2} = L_{d2} + L_{m2}$$

*Recordando las expresiones* $M = \dfrac{N_2\phi_{m1}}{i_1}$ *y* $a = \dfrac{N_1}{N_2}$

*Resultan* $M = \dfrac{N_1\phi_{m2}}{i_2} = \dfrac{N_2}{N_2}\dfrac{N_1\phi_{m2}}{i_2} = aL_{m2}$ *y* $M = \dfrac{N_2\phi_{m1}}{i_1} = \dfrac{N_1}{N_1}\dfrac{N_2\phi_{m1}}{i_1} = \dfrac{L_{m1}}{a}$

*de las cuales* $L_{m1} = a^2 L_{m2}$

*Por otra parte* $M^2 = \dfrac{N_2\phi_{m1}}{i_1}\cdot\dfrac{N_1\phi_{m2}}{i_2} = \dfrac{N_2 k\phi_1}{i_1}\cdot\dfrac{N_1 k\phi_2}{i_2} = \dfrac{N_2 k\dfrac{L_1 i_1}{N_1}}{i_1}\cdot\dfrac{N_1 k\dfrac{L_2 i_2}{N_2}}{i_2} = kL_1\cdot kL_2 = k^2 L_1 L_2$

$$M = k\sqrt{L_1\cdot L_2}$$

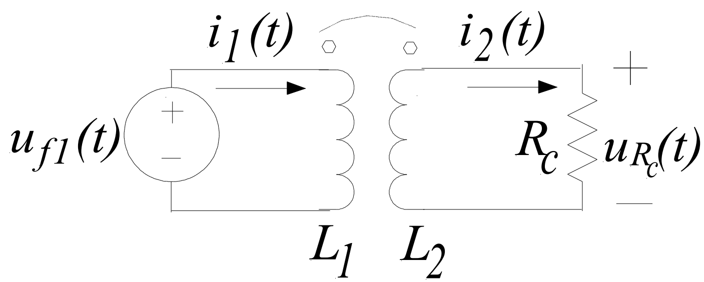
***¡Ojo!***

*Luego* $M = k\sqrt{L_1\cdot L_2} = \sqrt{k_1\cdot k_2}\sqrt{L_1\cdot L_2} = \sqrt{k_1\cdot k_2\cdot L_1\cdot L_2} = \sqrt{L_{m1}\cdot L_{m2}}$

*Y si la dispersión fuera nula* $L_{m1} = L_1$ *y* $L_{m2} = L_2$

## TRANSFORMADOR

### Circuito acoplado básico




$$u_{f1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$0 = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) \cdot R_C - M \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$\underline{U}_{f1} = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 = jX_{L1} \underline{I}_1 - jX_M \underline{I}_2$$

$$0 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 = jX_{L2} \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_1$$

*¿Cómo se determinó el signo de los términos de **M**?*

# CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

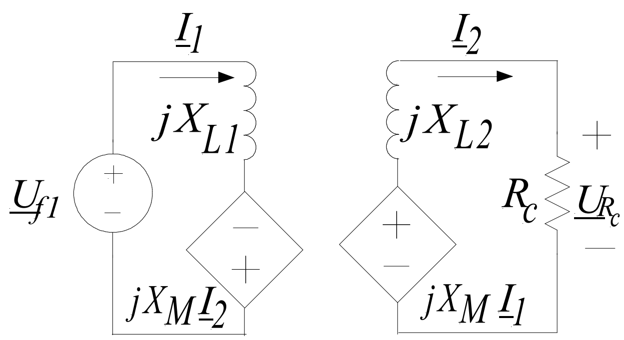
## TRANSFORMADOR

### Circuito equivalente con fuentes controladas

*Reescribiendo adecuadamente el sistema anterior*

$$\underline{U}_{f1} + jX_M \underline{I}_2 = jX_{L1} \underline{I}_1$$

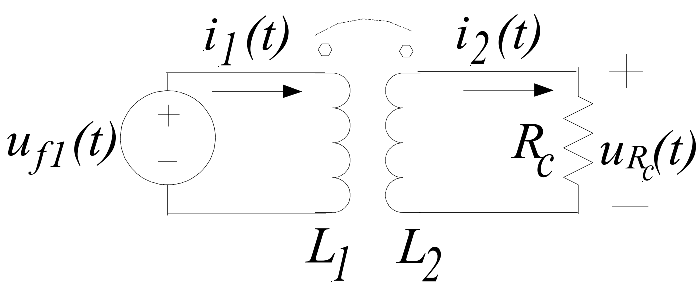
$$jX_M \underline{I}_1 = jX_{L2} \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2$$

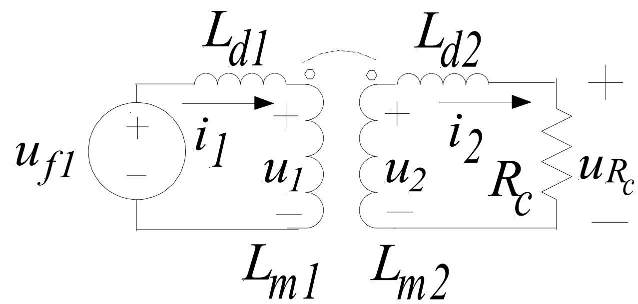


## TRANSFORMADOR

### Modelo conductivo

*Se pueden separar las inductancias de dispersión y de magnetización*




*A partir de dicha separación se pueden reescribir las ecuaciones del sistema*

$$\underline{U}_{f1} = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2$$

$$0 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_C \cdot \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_{f1} = j\omega L_{d1} \underline{I}_1 + j\omega L_{m1} \underline{I}_1 - j\omega M I_2$$

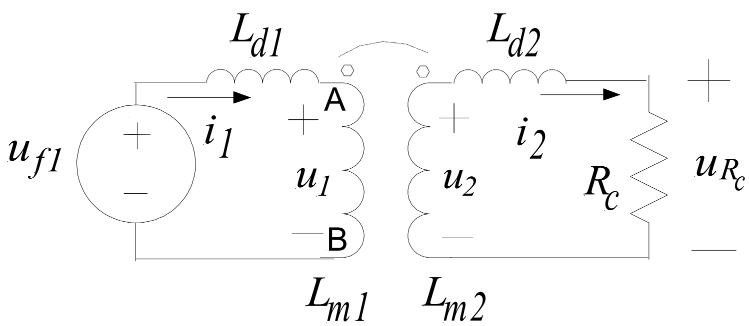
$$0 = j\omega L_{d2} \underline{I}_2 + j\omega L_{m2} \underline{I}_2 + \underline{I}_2 \cdot R_C - j\omega M \underline{I}_1$$

*Debe tenerse en cuenta que, en esta condición, el acoplamiento entre* $\mathbf{L_{m1}}$ *y* $\mathbf{L_{m2}}$ *es* ***perfecto*** *o* ***ideal****, es decir* ***k=1***

## TRANSFORMADOR

### Modelo conductivo

*Se busca obtener la **admitancia equivalente** vista desde AB hacia la derecha*




$$u_{AB}(t) = u_1(t) = L_{m1}\frac{di_1(t)}{dt} - M\frac{di_2(t)}{dt}$$

$$M\frac{di_1}{dt} = L_{m2}\frac{di_2}{dt} + L_{d2}\frac{di_2}{dt} + i_2 \cdot R_C$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_1 = j\omega L_{m1}\underline{I}_1 - j\omega M\,\underline{I}_2$$

$$j\omega M\,\underline{I}_1 = j\omega L_{m2}\underline{I}_2 + j\omega L_{d2}\underline{I}_2 + R_C\,\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_1 = jX_{m1}\underline{I}_1 - jX_M\,\underline{I}_2$$

$$jX_M\,\underline{I}_1 = jX_{m2}\underline{I}_2 + jX_{d2}\underline{I}_2 + R_C\,\underline{I}_2$$

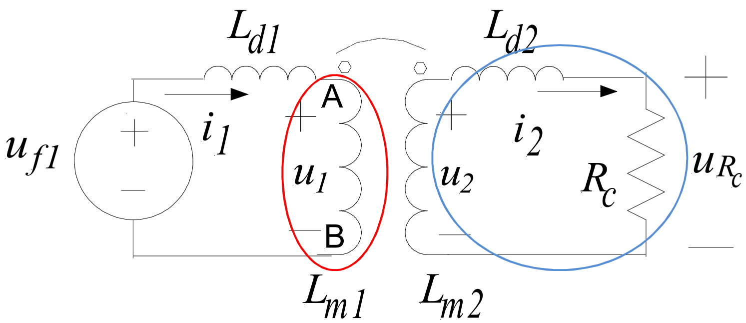
*Recordando la expresión de **M** en función de $\mathbf{L_{m1}}$ y $\mathbf{L_{m2}}$ (para acoplamiento perfecto)*

$$M = \sqrt{L_{m1}\cdot L_{m2}} \quad\Rightarrow\quad M^2 = L_{m1}\cdot L_{m2} \quad\Rightarrow\quad X_M{}^2 = X_{L_{m1}}\cdot X_{L_{m2}}$$

*multiplicando por $\omega^2$ a ambos lados del igual*

# CIRCUITOS ACOPLADOS MAGNÉTICAMENTE

*Operando matemáticamente para obtener la **admitancia** vista desde **AB** y ordenando*




$$\underline{Y}_{AB} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = \frac{1}{jX_{m1}} + \frac{1}{a^2\left(jX_{d2} + R_C\right)}$$

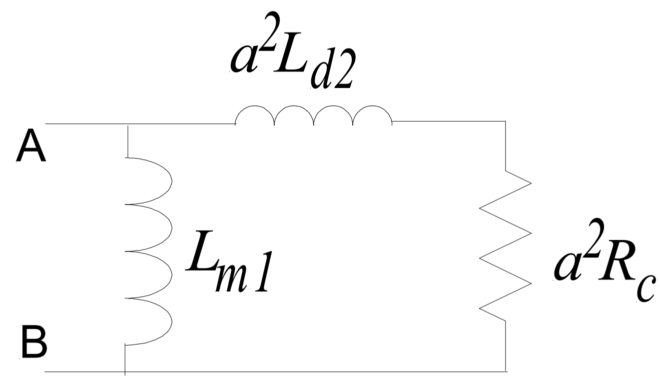
*con* $$a^2 = \frac{X_1}{X_2} = \frac{k \cdot X_1}{k \cdot X_2} = \frac{X_{m1}}{X_{m2}}$$

$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{jX_{m1}} + \frac{1}{R_C a^2 + jX_{d2} a^2}$$

*Inductancia de valor* $\boldsymbol{L_{m1}}$

*Resistencia de valor* $\boldsymbol{R_C}$ *en serie con inductancia de valor* $\boldsymbol{L_{d2}}$

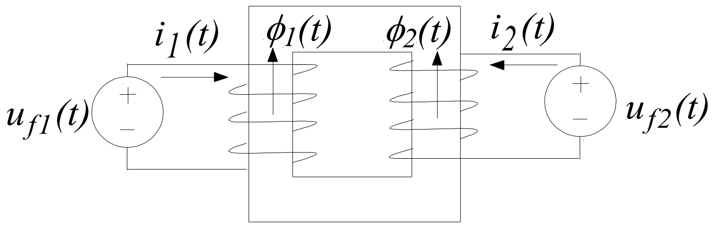
*Ambos elementos están en paralelo*



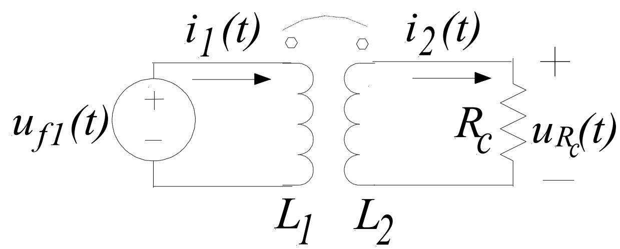

*Circuito equivalente conductivo visto desde **AB***

## RECAPITULACIÓN

*Dos inductores energizados, muy próximos uno del otro, **ejercen influencia mutua** a través de sus respectivos campos magnéticos*




*Dicha influencia puede ser cuantificada en función de la geometría del conjunto y expresada matemáticamente mediante relaciones de **tensiones y corrientes**, lo cual permite el análisis utilizando las leyes básicas de circuitos*




*Se pone de manifiesto la utilidad de los **puntos homólogos** para establecer las polaridades de las **caídas de tensión** y de las correspondientes **tensiones inducidas** en los inductores involucrados, cuya ubicación surge del modo en que se encuentran arrolladas las bobinas*

*Surge como principal aplicación el **transformador**, para el cual se presentó un modelo conductivo, lo que permite suprimir el acoplamiento magnético del análisis circuital*