Unidad 6

Transformadas integrales

9º CLASE

Cintia Perrone – PS 2023

π

6.10 Aplicación a ecuaciones integrodiferenciales

Transformada de la derivada primera de una función:

Sea $f(t)$ continua para $t \geq 0$, de orden exponencial σ para $t \to \infty$ y $f'(t)$ seccionalmente continua para $t \geq 0$. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces para $Re(s) > \sigma$:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Demostración:

Calcularemos por definición la transformada de Laplace de $f'(t)$:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-ts}\,dt$$

Integramos por partes:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} f'(t)e^{-ts}\,dt = e^{-ts}f(t)\Big|_0^b - \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} f(t)(-s)e^{-ts}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{b\to\infty} \left(e^{-tb}f(b)\right) - f(0) - \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} f(t)(-s)e^{-ts}\,dt$$

Vamos a trabajar sobre el término $e^{-tb}f(b)$:

Para cumplir las condiciones de la existencia de Laplace, la función $f(t)$ tiene que ser de orden exponencial: Existen T y M constantes no negativas tales que:

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \text{ para todo } t \geq T$$

Entonces supongamos un $b \geq T$:

$$|f(b)| \leq Me^{\sigma b}$$

Multiplicamos a ambos lados por: $\left|e^{-sb}\right| = e^{-Re(s)b}$:

$$|f(b)|e^{-Re(s)b} \leq Me^{\sigma b}e^{-Re(s)b}$$

$$\left|f(b)e^{-Re(s)b}\right| \leq Me^{b(\sigma - Re(s))}$$

$$0 \leq \left| f(b)e^{-Re(s)b} \right| \leq Me^{b(\sigma - Re(s))}$$

Y tenemos que $\lim_{b\to\infty} Me^{b(\sigma - Re(s))} = 0$ si $\sigma - Re(s) \leq 0$

Por el teorema de intercalación:

$$\lim_{b\to\infty} \left| f(b)e^{-Re(s)b} \right| = 0 \quad si \qquad Re(s) \geq \sigma$$

O equivalentemente:

$$\lim_{b\to\infty} f(b)e^{-Re(s)b} = 0 \quad si \qquad Re(s) \geq \sigma$$

Así, la transformada de Laplace de $f'(t)$:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{b\to\infty} \left(e^{-tb} f(b)\right) - f(0) - \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(t)(-s)e^{-ts}\, dt$$

Queda:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) - \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(t)(-s)e^{-ts}\, dt \quad si \quad Re(s) \geq \sigma$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\int_0^\infty f(t)e^{-ts}\, dt - f(0) \quad si \quad Re(s) \geq \sigma$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad si \quad Re(s) \geq \sigma$$

(Ejemplos pizarrón 9.A)

Transformada de la derivada segunda de una función:

Sea $f(t)$ y $f'(t)$ continuas para $t \geq 0$, de orden exponencial σ para $t \to \infty$ y $f''(t)$ seccionalmente continua para $t \geq 0$. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces para $Re(s) > \sigma$:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Demostración:

Calcularemos utilizando la ecuación para la transformada de la derivada primera:

$$f''(t) = [f'(t)]' = [g(t)]' \qquad con \quad g(t) = f'(t)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)'\} = sG(s) - g(0) \qquad (I)$$

Por la transformada de la derivada primera tenemos:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Reemplazando en (I):

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)'\} = s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

(Ejemplos pizarrón 9.B)

Teorema 6.10.4:

Transformada de la derivada de orden $n \geq 1$ de una función.

Sean $f(t), f'(t), f^{(2)}(t) \ldots\ldots\ldots f^{(n-1)}(t)$ continuas para $t \geq 0$, de orden exponencial σ para $t \to \infty$ y $f^{(n)}(t)$ seccionalmente continua para $t \geq 0$. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ entonces para $Re(s) > \sigma$:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Convolución de funciones.

El producto de convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ se definía como:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Si $f(t) = g(t) = 0$ para $t < 0$ tenemos:

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Demostración:

Si $f(t) = g(t) = 0$ para $t < 0$:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(\tau) g(t - \tau) d\tau + \int_{0}^{t} f(\tau) g(t - \tau) d\tau + \int_{t}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau =$$

La primera y última integral se anulan ya que $f(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ y $g(t - \tau) = 0$ para $t - \tau < 0$. Así:

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Teorema 6.10.6: **Transformada de la convolución de funciones.**

Sean $f(t), g(t)$ con $t \geq 0$. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ para $Re(s) > \sigma$ entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s) \quad \text{para} \quad Re(s) > \sigma$$

(Ejemplos pizarrón 9.C)

Teorema 6.10.7: **Transformada de la integral de una función.**

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ para $Re(s) > \sigma$ entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad \text{para} \quad Re(s) > \sigma$$

Demostración:

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau).1\,d\tau = f(t) * 1$$

Calculamos la transformada y aplicamos el teorema de la transformada de una convolución de funciones:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{L}\{f(t) * 1\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{1\} = F(s)\frac{1}{s}$$

(Ejemplos pizarrón 9.D)

Derivada de la transformada de Laplace

Teorema 6.10.14: **Derivada de la transformada de una función**

Sea $f(t)$ seccionalmente continua para $t \geq 0$, de orden exponencial σ para $t \to \infty$. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \text{para } Re(s) > \sigma$$

Es decir, si conocemos la transformada de una función, podemos obtener también, la de la función multiplicada por un polinomio.

Además:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t) \quad \text{para } t \geq 0$$

(Ejemplos pizarrón 9.E)