Física I
Apuntes Clase 8, 2022

Turno E

Prof. Susana Conconi

Movimiento Armónico Simple, Péndulo

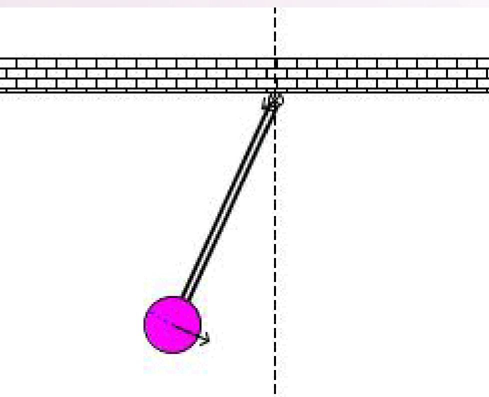
Vamos a analizar un tipo de movimiento en el que un objeto es apartado de la posición de equilibrio estable y se produce un movimiento oscilatorio alrededor de ésta, limitado por dos posiciones extremas.

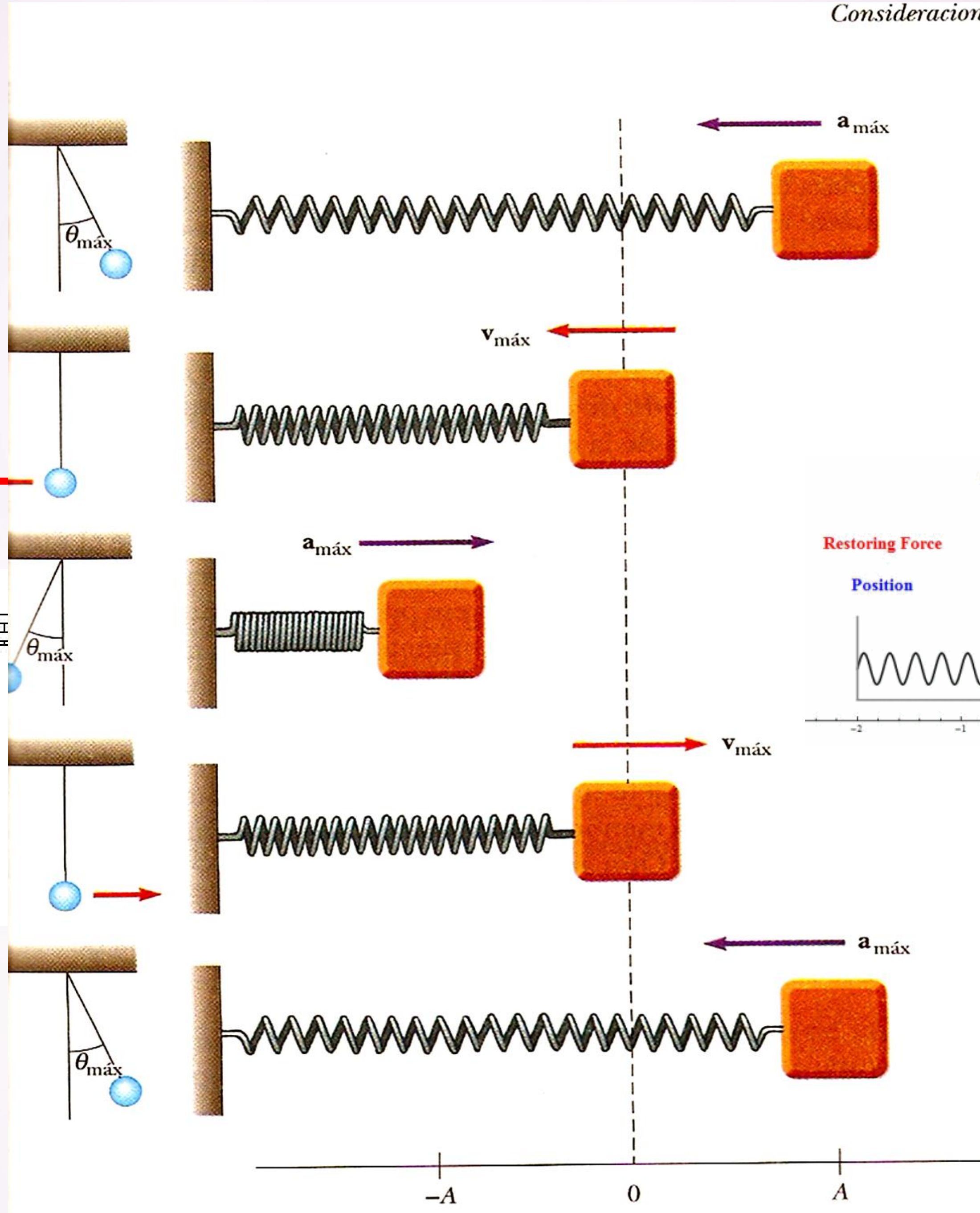
Existen varios ejemplos conocidos como la oscilación de un péndulo, la vibración de una cuerda, el balanceo de un barco o el movimiento de una masa sujeta a un resorte, entre otros.

Todos estos movimientos **periódicos** se producen debido a la existencia de una **fuerza** que tiende a **restaurar** al objeto a la posición de equilibrio estable ya mencionada.

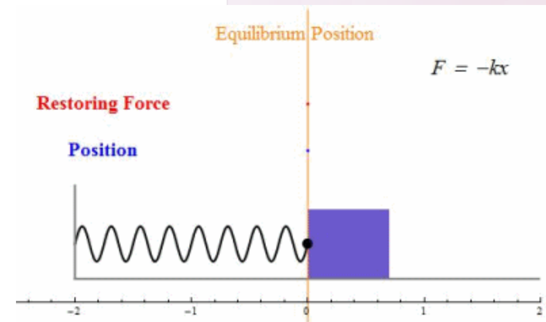
La descripción matemática de la posición del objeto en función del tiempo no siempre es simple. En esta clase vamos a estudiar el tipo más sencillo de movimiento oscilatorio que se puede describir con una función trigonométrica simple.

Péndulo simple



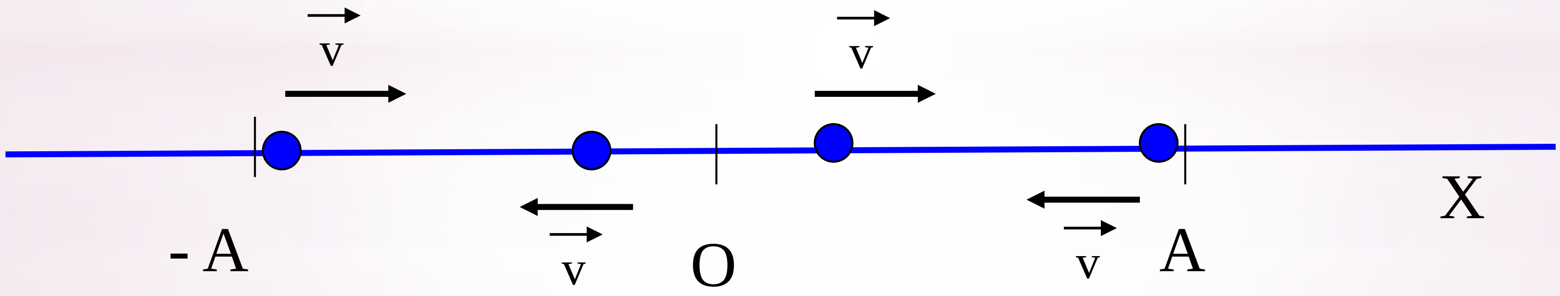


Resorte



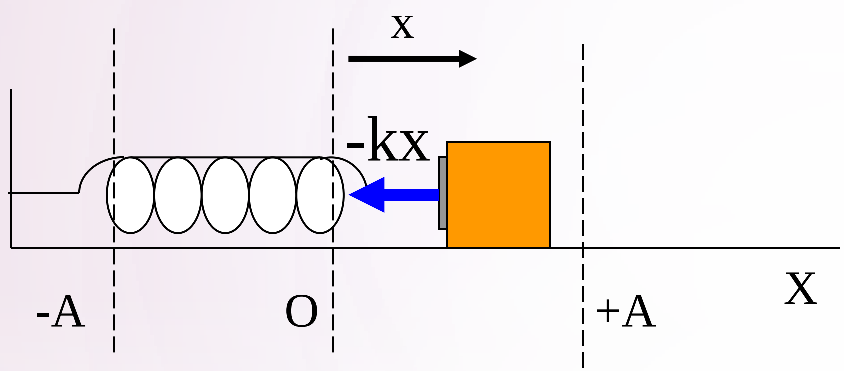
Movimiento Armónico Simple (M.A.S)

Una partícula que se mueve a lo largo del eje X describe un M.A.S. cuando existe una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento, es decir, que actúa en sentido contrario. En general, esta condición se cumple casi siempre cuando es pequeña la separación del equilibrio.



Analicemos el caso de un cuerpo sujeto a un resorte o elástico

¿Qué tipo de fuerza restauradora es la responsable de generar un M.A.S?



En el caso de un resorte, Ley de Hooke:

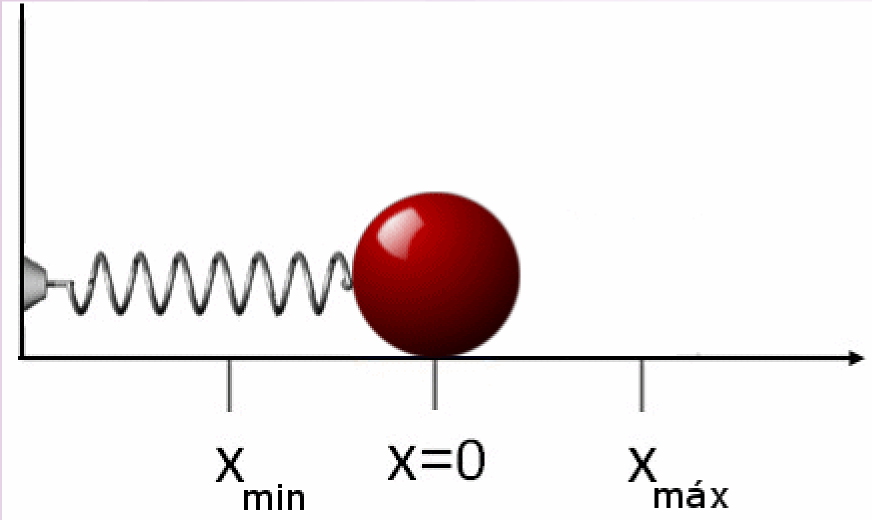
$$F_X = -k\,x \quad (I)$$

Combinando la ec. (I) con la 2da Ley de Newton nos queda:

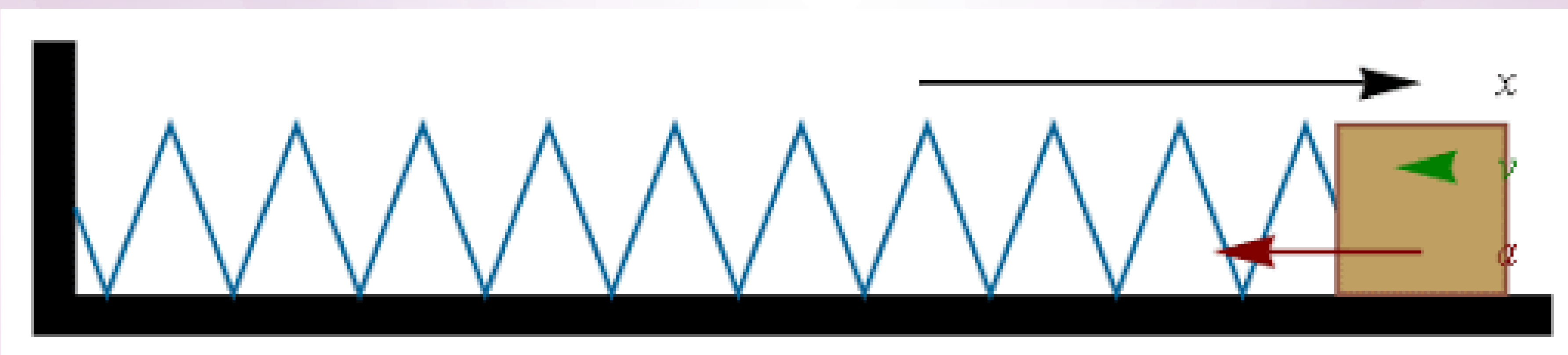
$$F_x = ma_x \Rightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

La aceleración es proporcional al desplazamiento y tiene sentido contrario.

Si un sistema presenta esta característica, se puede concluir que el mismo presenta un M.A.S.



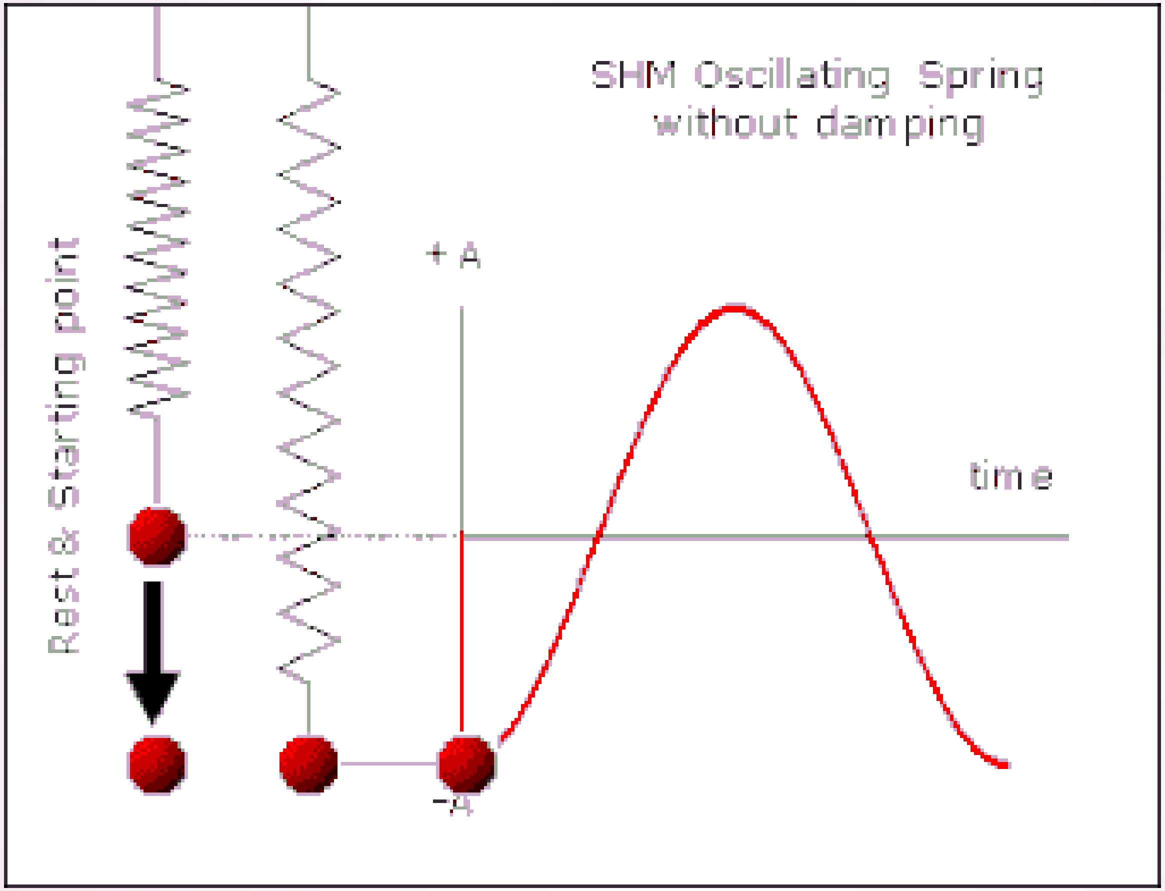
-A +A



-A o +A

$$F_x = -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0}$$ (II) Ecuación diferencial de 2do orden



$$F_x = -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0}$$ (II) Ecuación diferencial de 2do orden

Esta es una ecuación cuya solución es una función del tiempo y debe cumplir con ciertas condiciones:

1) Debe ser periódica ya que debe poder describir un movimiento periódico provocado por una fuerza restauradora.

2) la solución $x\,(t)$ tiene que ser tal que la derivada 2da tiene que ser proporcional a $x\,(t)$ pero con signo cambiado, para todo valor de tiempo t.

Entonces proponemos: $x\,(t) = A\cos\,(\omega t + \varphi)$

Derivemos y veamos qué nos queda al reemplazar las expresiones en la ecuación (II):

$$-\cancel{A}\omega^2\cos(\cancel{\omega t+\varphi})+\frac{k}{m}\cancel{A}\cos(\cancel{\omega t+\varphi})=0$$

Entonces: $\boxed{\omega^2=\frac{k}{m}}$ Frecuencia angular (unidades 1/s)

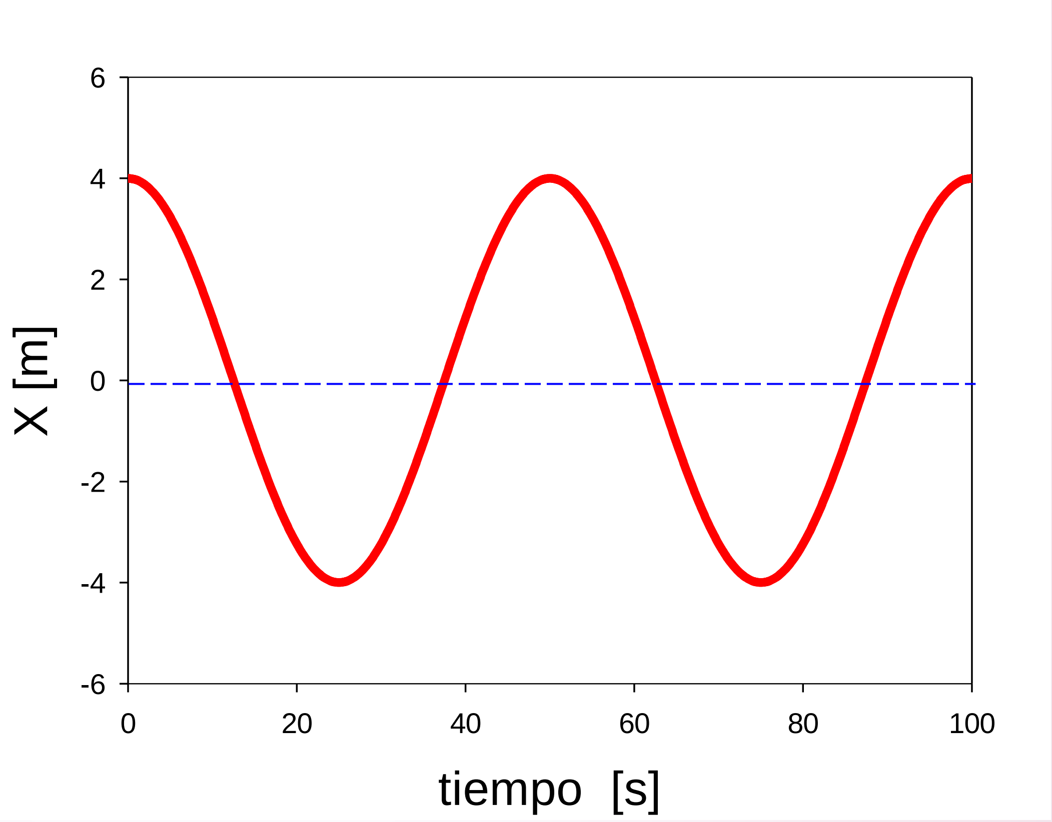
$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$con\ A=4\ \ m$$

$$\omega=7.2\ {}^{1}\!/_{s}$$

$$\varphi=0$$

$$x(t)=4m\cos(7{,}21/s.t)$$



$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

- A se denomina amplitud del movimiento.
- $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia angular.
- $(\omega t + \varphi)$ es la fase.
- φ es la fase inicial (condiciones iniciales para t = 0).

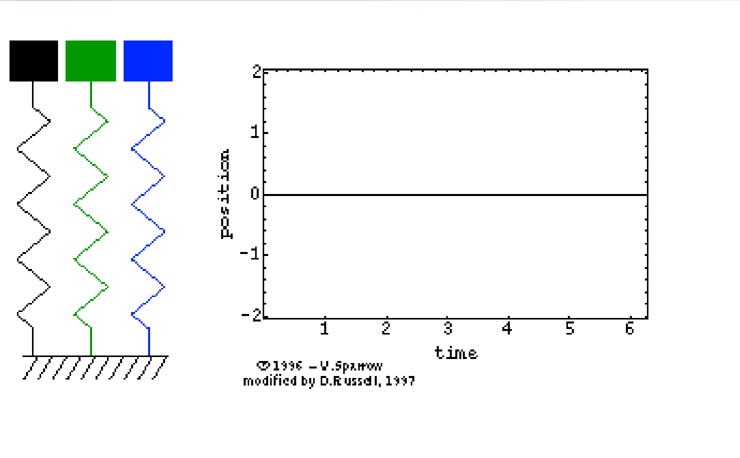
1) Como los valores máximo y mínimo de la función coseno son +1 y -1, el movimiento se realiza en una región del eje X comprendida entre $+A$ y $-A$, respectivamente.

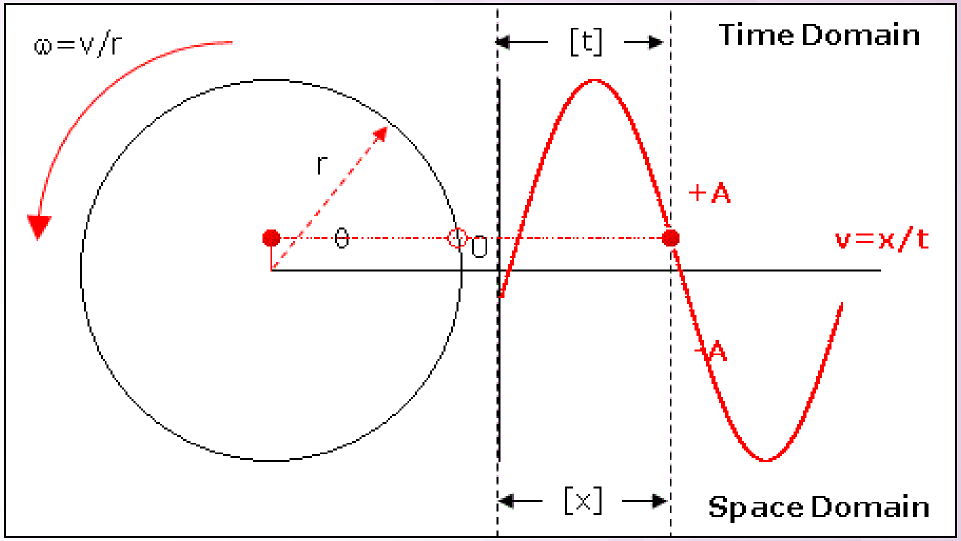
2) La función coseno es periódica y se repite cada 2π, por tanto, el movimiento se repite cuando el argumento de la función coseno se incrementa en 2π, es decir, cuando transcurre un tiempo T tal que $[\omega \underbrace{(t + T)} + \varphi] = (\omega t + \varphi) + 2\pi$
Entonces:

$$\cancel{\omega t} + \omega T + \cancel{\varphi} = \cancel{\omega t} + \cancel{\varphi} + 2\pi \Rightarrow \boxed{T = 2\pi/\omega = \text{período}}$$

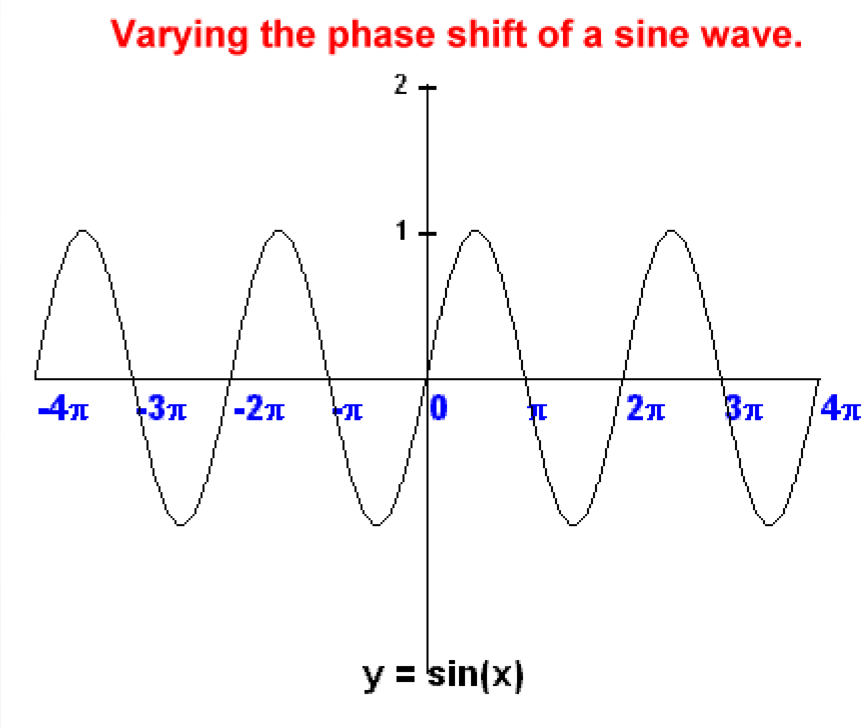
Frecuencia: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$, $\quad [f] = \dfrac{1}{s} = Hertz$

¿Como podemos entender el significado de w?

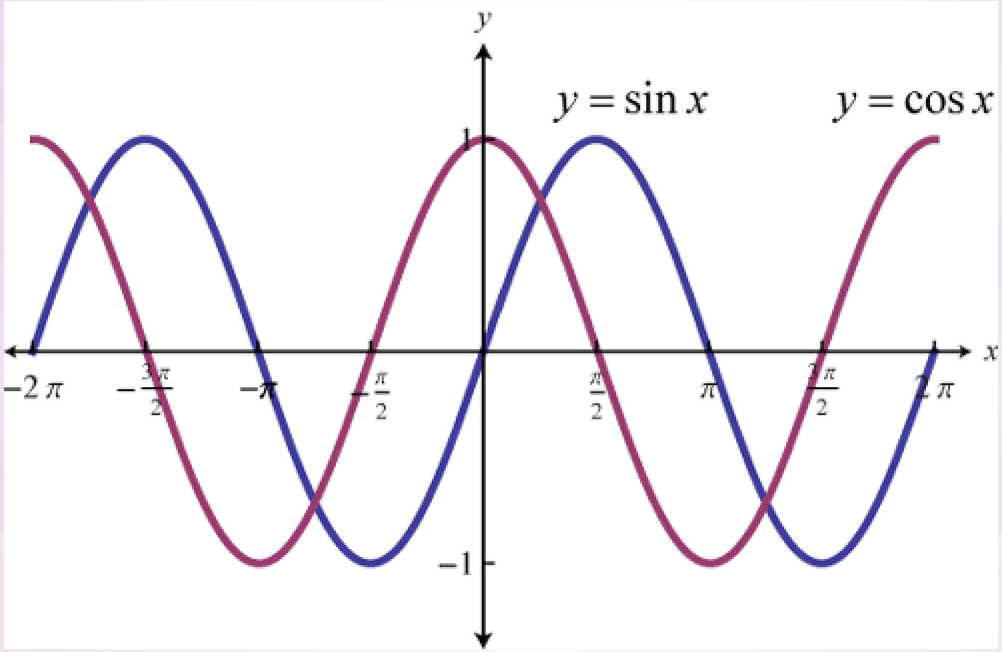




¿Y la fase inicial?

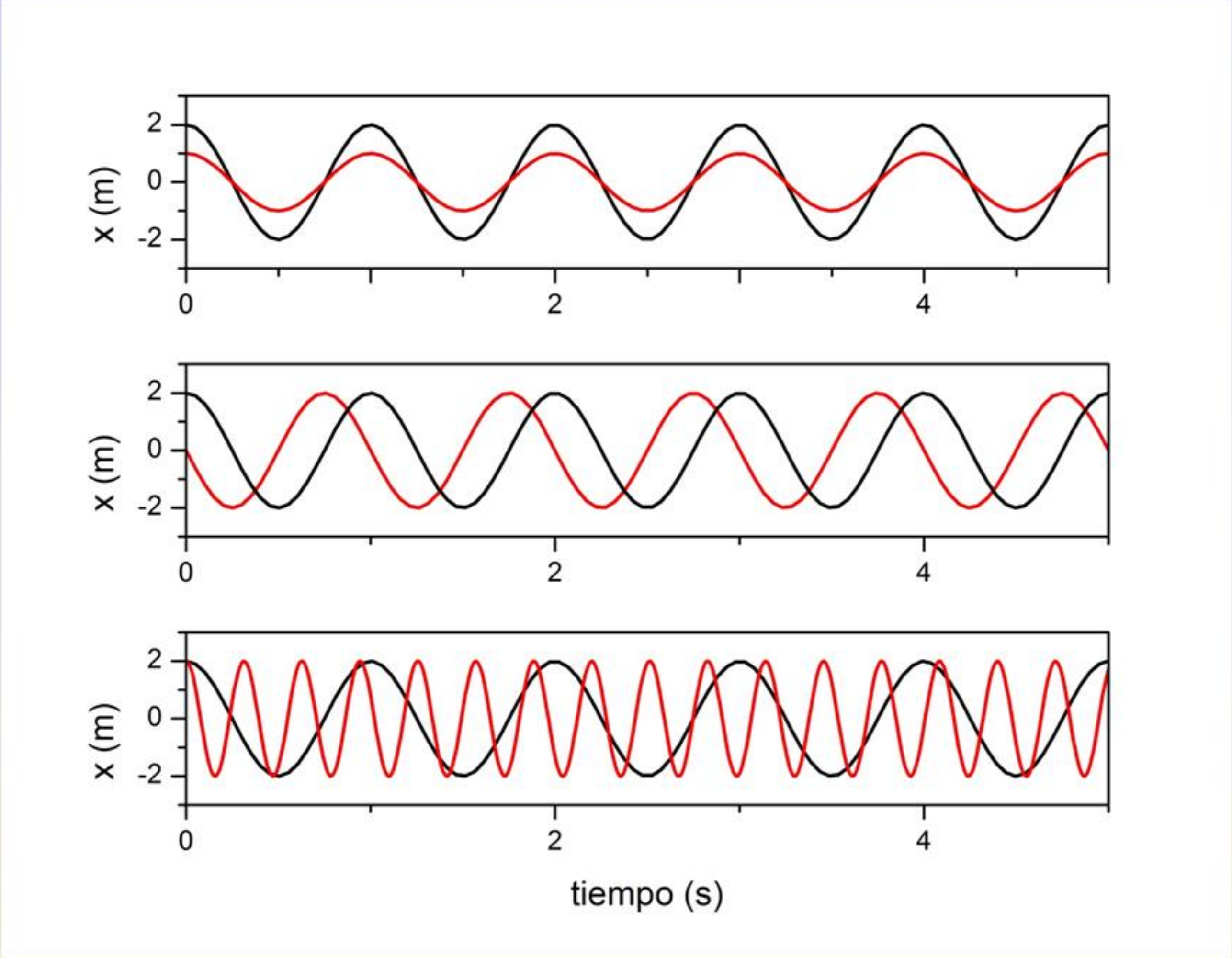


Podemos expresar también con seno la función del MAS. Solo debemos tener en cuenta la diferencia de fase entre ambas funciones



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Curva negra
A = 2m
w = 6.28 rad/s
φ = 0 rad



Curva roja todo igual cambiando:
A= 1m

φ = 1.57 rad

w = 20 rad/s

Como la **posición** en un M.A.S. viene dada por la ecuación:

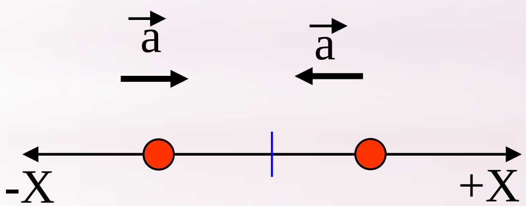
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

la **velocidad** queda expresada como:

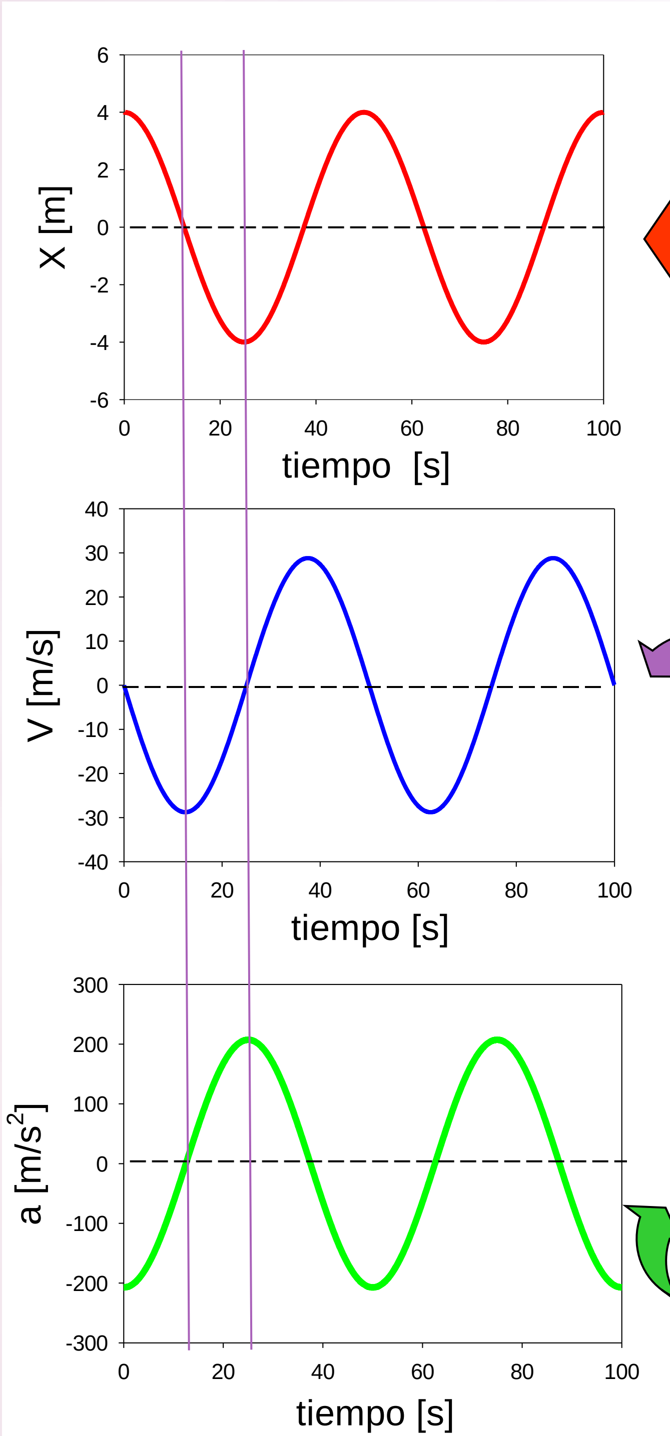
$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = -A\,\omega\, sen\,(\omega t + \varphi),$$

y la **aceleración** queda expresada como:

$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\,\omega^2 x$$



Se puede observar que la aceleración está dirigida en sentido contrario a la posición *x*: *si* $x>0$, $a<0$ *y si* $x<0$, $a>0$. Además, se observa que la aceleración vale 0 cuando el objeto está en la posición de equilibrio (x = 0) y toma su máximo valor con signo contrario cuando se encuentra en la máxima elongación (x_{max}).



A=4m

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = -A\,\omega\,sen(\omega t + \varphi)$$

La velocidad está desfasada en 90º

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\,\omega^2 x$$

La aceleración está en contrafase respecto a x (t)

¿Qué ocurre con la energía en un M.A.S?

Si la única fuerza que actúa es la restauradora – k x, ya vimos que es conservativa, entonces:

$$\Delta E_{mec} = W_{NC} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{mec,f} - E_{mec,i} = 0$$

$$E_{mec,f} = E_{mec,i} \quad \Rightarrow \quad E_{c,f} + E_{p,el,f} = E_{c,i} + E_{p,el,i} = cte$$

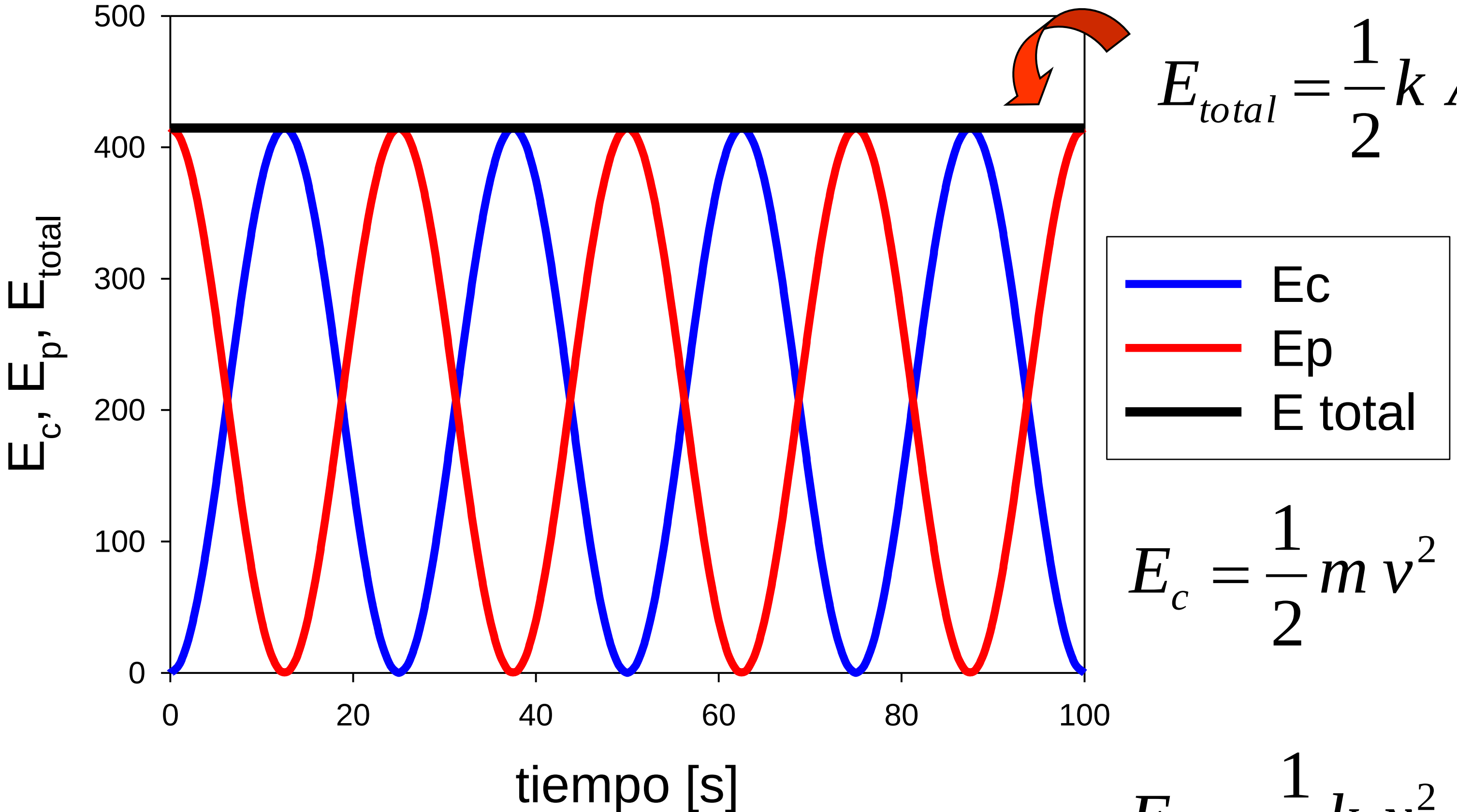
$$E_{mec} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = cte$$

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m \underbrace{(-A\,\omega\, sen\,(\omega\, t + \varphi))^2}_{v^2} + \frac{1}{2} k \underbrace{A^2 \cos^2 (\omega\, t + \varphi)}_{x^2} = cte \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{mec} = \frac{1}{2}\, k\, A^2 = cte}$$

Para todo tiempo t

Energía cinética, potencial y total



$$E_{total} = \frac{1}{2} k\ A^2$$

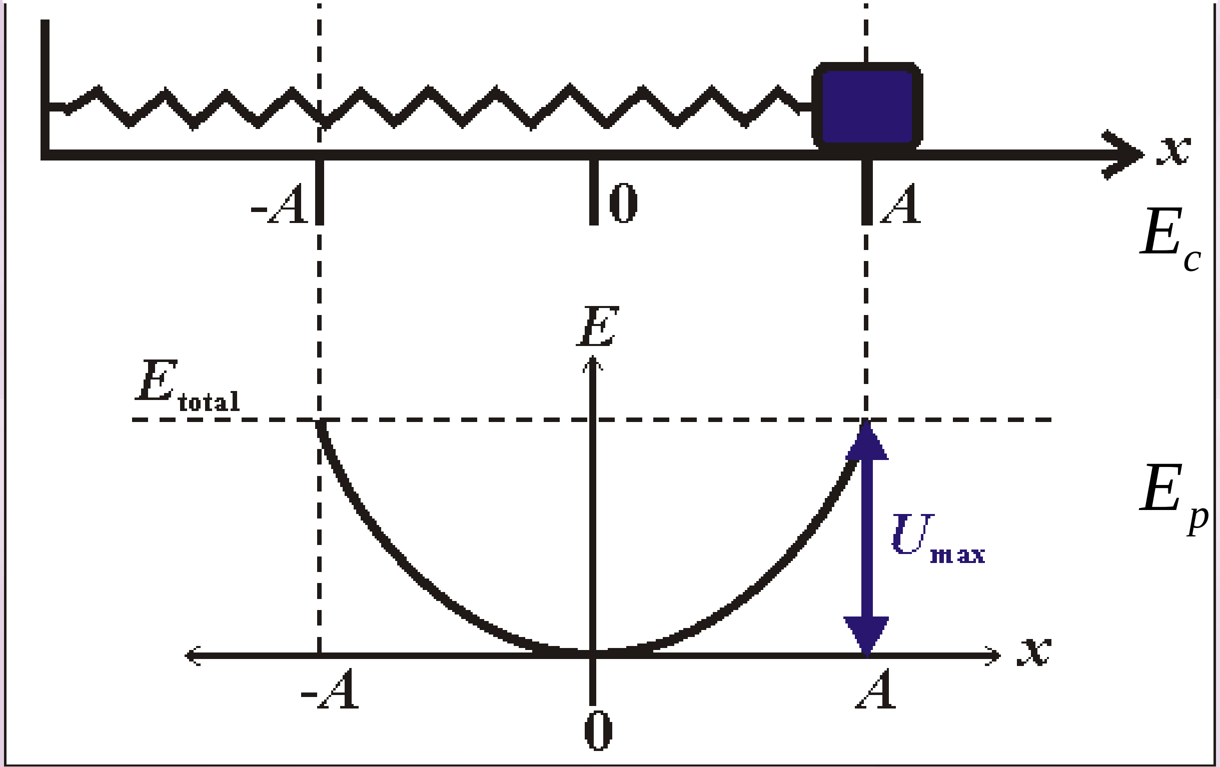
$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k\ x^2$$

En los extremos Energía potencial elástica máxima

En x=0 Energia cinètica màxima

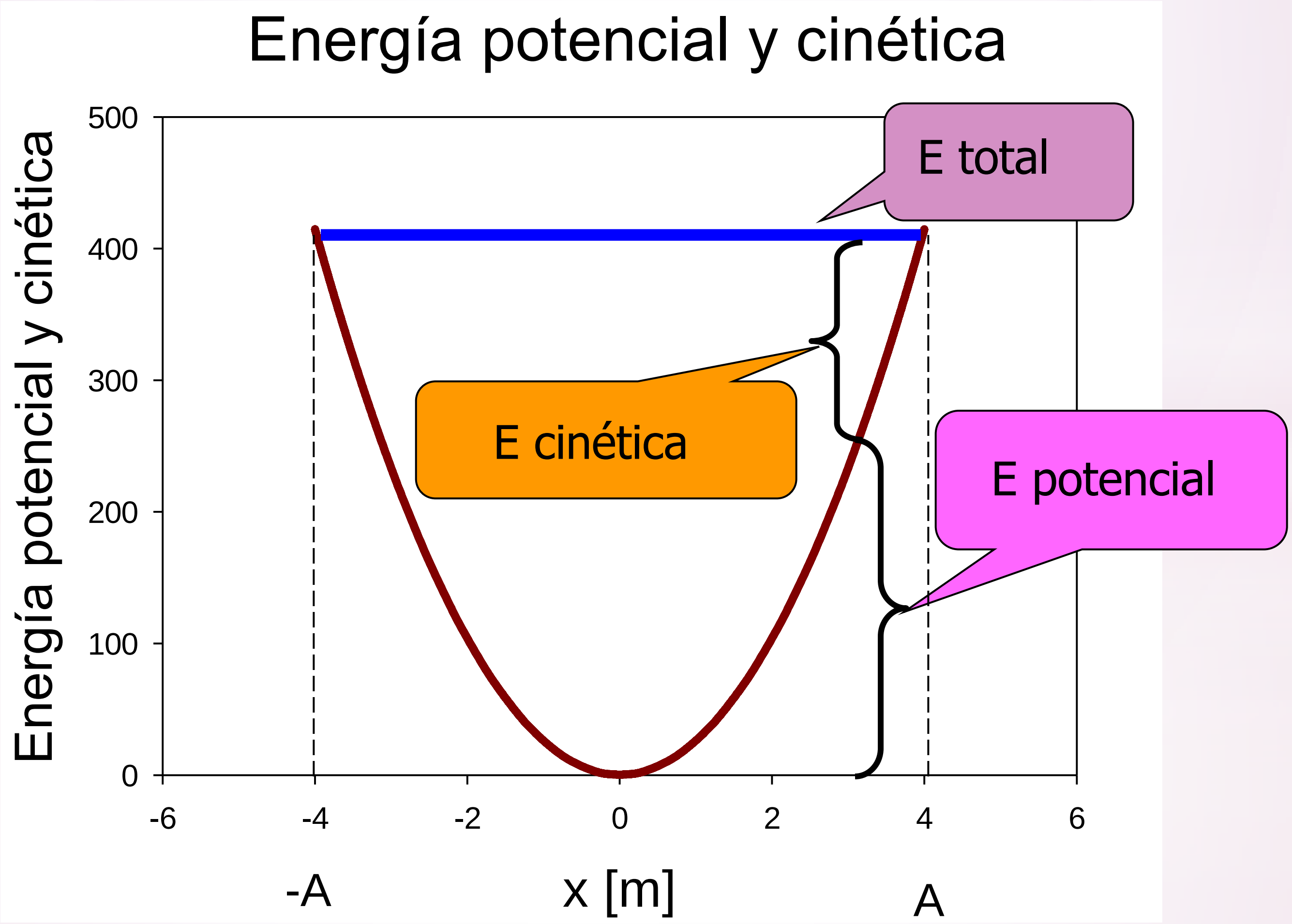
En toda la trayectoria E_{total} = ½ k x^2



$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

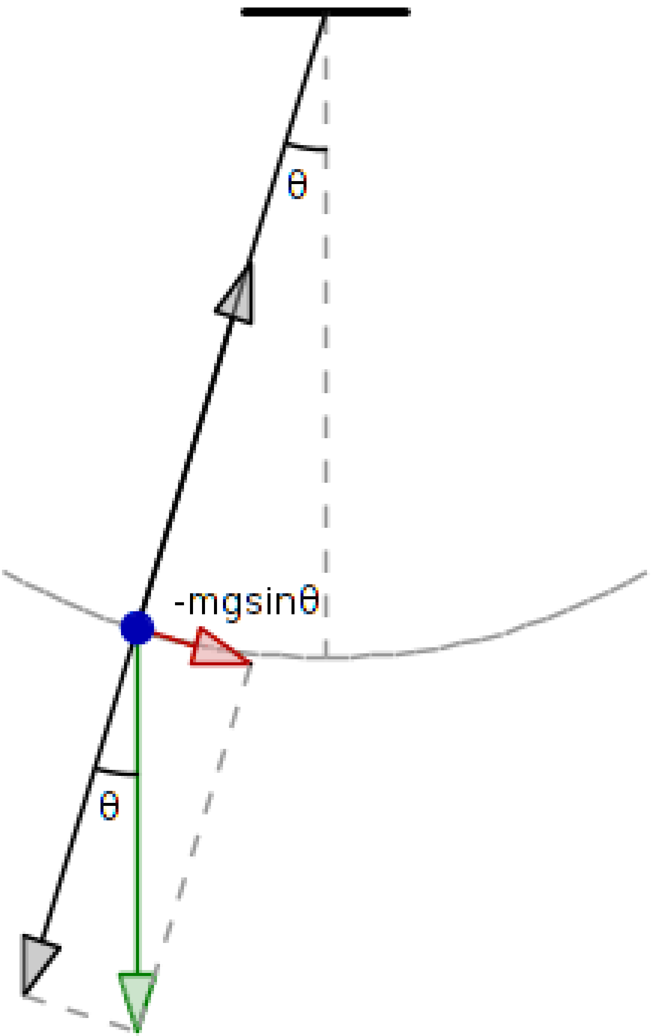
$$E_p = \frac{1}{2} k\ x^2$$

¿Cómo son las energías cinética y potencial en función de la posición?

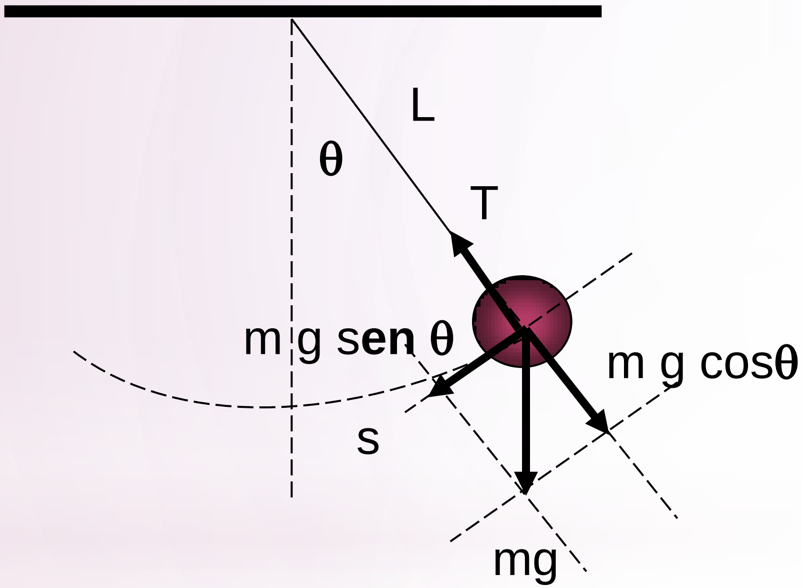


Péndulo simple

Fuerzas:
Tensión y **Peso**



El péndulo simple



$$\theta = \frac{s}{L}, \qquad a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$F_t = -m\, g\, sen\theta = m\frac{d^2 s}{dt^2} \Rightarrow$$

$$-\, g\, sen\theta = \frac{d^2 L\theta}{dt^2}$$

En el caso de ángulos pequeños, $sen\theta \cong \theta \Rightarrow$

$$\frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = -\, g\, \theta \Rightarrow \frac{L\, d^2\theta}{dt^2} = -\, g\, \theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0} \qquad \text{(III)}$$

Si comparamos esta expresión con $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$

concluimos que: $\boxed{\omega^2 = \dfrac{g}{L}}$ para el caso de un péndulo simple

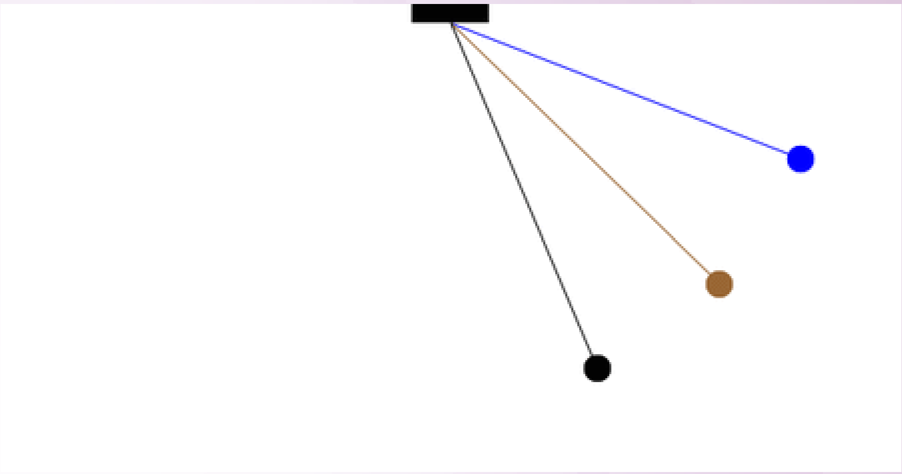
La solución de la ecuación (III) es: $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \delta)$

donde $\theta_0 = \dfrac{s_0}{L}$ es el desplazamiento angular máximo y $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

El período de un péndulo simple es: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ ➡

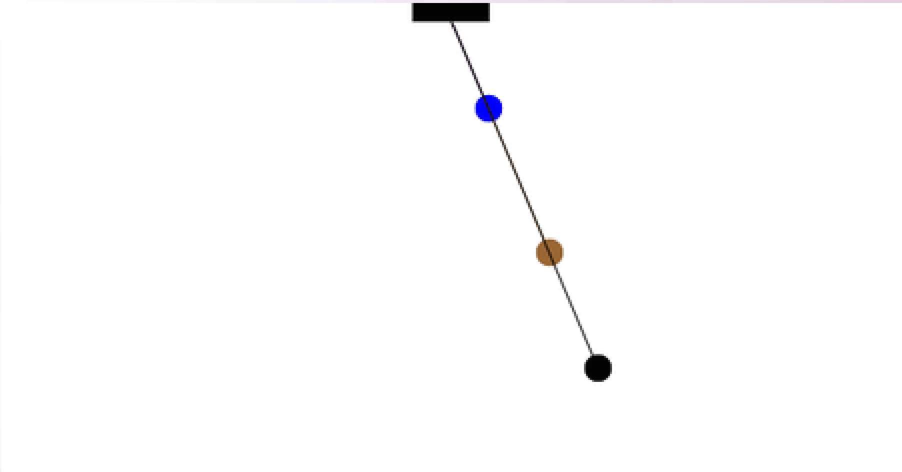
$\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}}$ ➡ Midiendo el período de un péndulo simple podríamos determinar "g"

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



EL perìodo solo depende de L y la gravedad

No depende del angulo inicial



Ejemplo:

Una masa de dos gramos unida a un resorte realiza oscilaciones con un periodo de 0,5 s a ambos lados de su posición de equilibrio. Calcular:

a) la constante elástica del resorte.

b) Si la energía del sistema es de 0,05 J, ¿cuál es la amplitud de las oscilaciones?

c) la velocidad de la masa en un punto situado a 10 cm de la posición de equilibrio.

d) La aceleración máxima y la velocidad máxima del objeto durante el movimiento

Rtas:

a) k= 0,316 N/m

b) A= 0,56m

c) v= 6,96m/s

d) $a_{max} = \pm A\omega^2$ y $v_{max} = \pm A\omega$

a) la constante elástica del resorte.

T= 0,05 s

m = 0,002 kg

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$k = \omega^2 m = \frac{2^2 \pi^2}{T^2} m$$

k = 0,316 N/m

b) Si la energía del sistema es de 0,05 J, ¿cuál es la amplitud de las oscilaciones?

Em total = 0,05 J

$$E_{M\ total} = \frac{1}{2} k\, A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2\, E_{M\ total}}{k}}$$

$$A = 0{,}56\ m$$

c) la velocidad de la masa en un punto situado a 10 cm de la posición de equilibrio.

$E_{M\,total} = 0{,}05\ J$

$$E_{Mtot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$x = 0{,}1\ m$

$$v^2 = \frac{2}{m}\left(E_{Mtot} - \frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$v = \pm\, 6{,}96\ m/s$$

d) La aceleración máxima y la velocidad máxima del objeto durante el movimiento

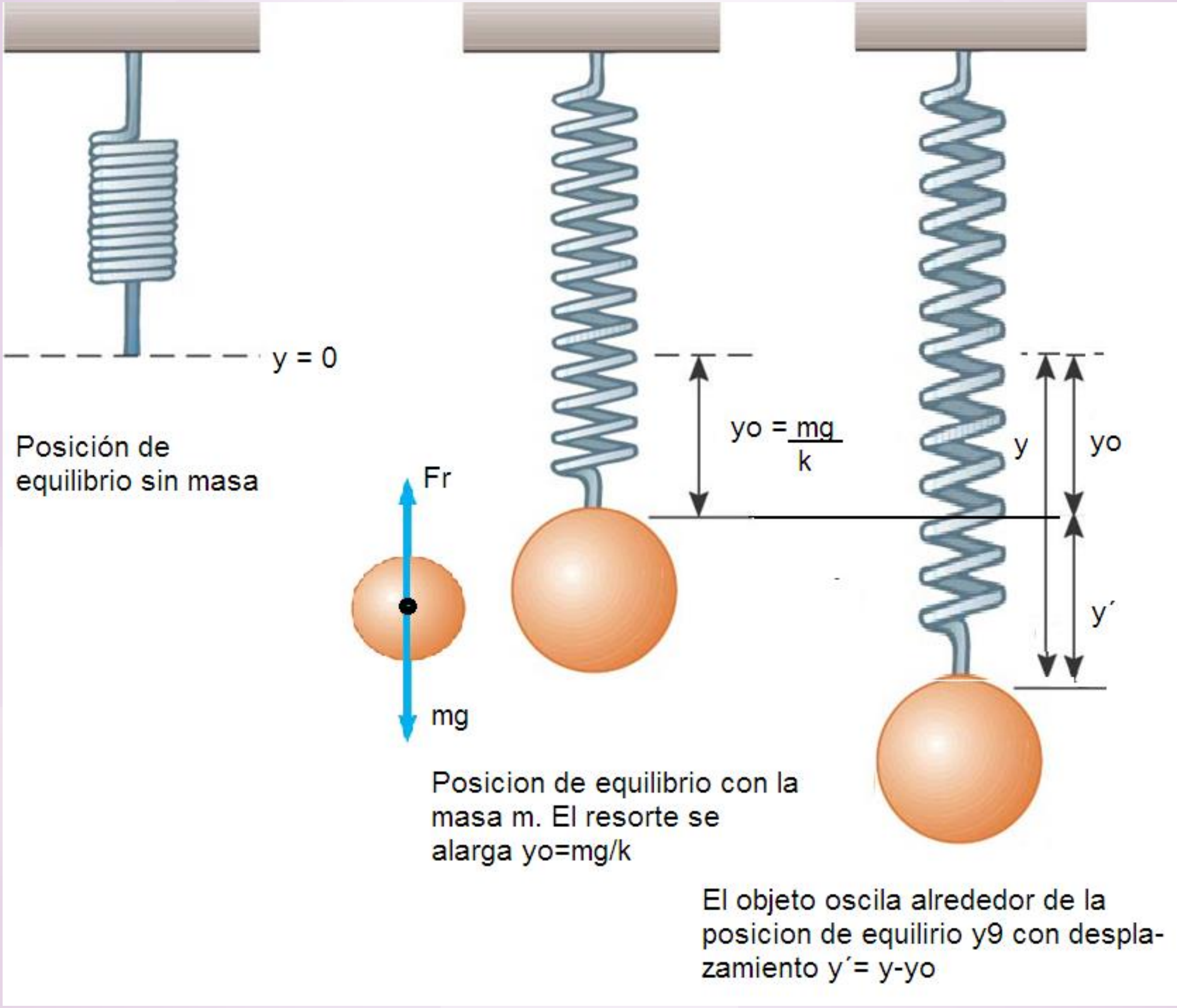
$$|v(t)| = |-A\,\omega\,\underbrace{sen\,(\omega\,t+\varphi)}_{\pm 1}| \Rightarrow v_{max}$$

$$v_{max} = \pm A\,.\,\omega$$

$$|a(t)| = |-A\omega^2\,\underbrace{\cos\,(\omega\,t+\varphi)}_{\pm 1}| \Rightarrow a_{max}$$

$$a_{max} = \pm A\,.\,\omega^2$$

*Cuerpo colgado de un resorte



Cuerpo colgado de un resorte vertical

El efecto que produce la fuerza gravitatoria es desplazar la posición de equilibrio desde y= 0 a y´= 0

El objeto oscila alrededor de esta posición de equilibrio con la misma frecuencia angular que en el caso de un objeto sobre un resorte horizontal.

Si elegimos la energía potencial total (incluida la gravitatoria) igual a cero en la nueva posición de equilibrio y´= 0, en cualquier otra posición se cumple:

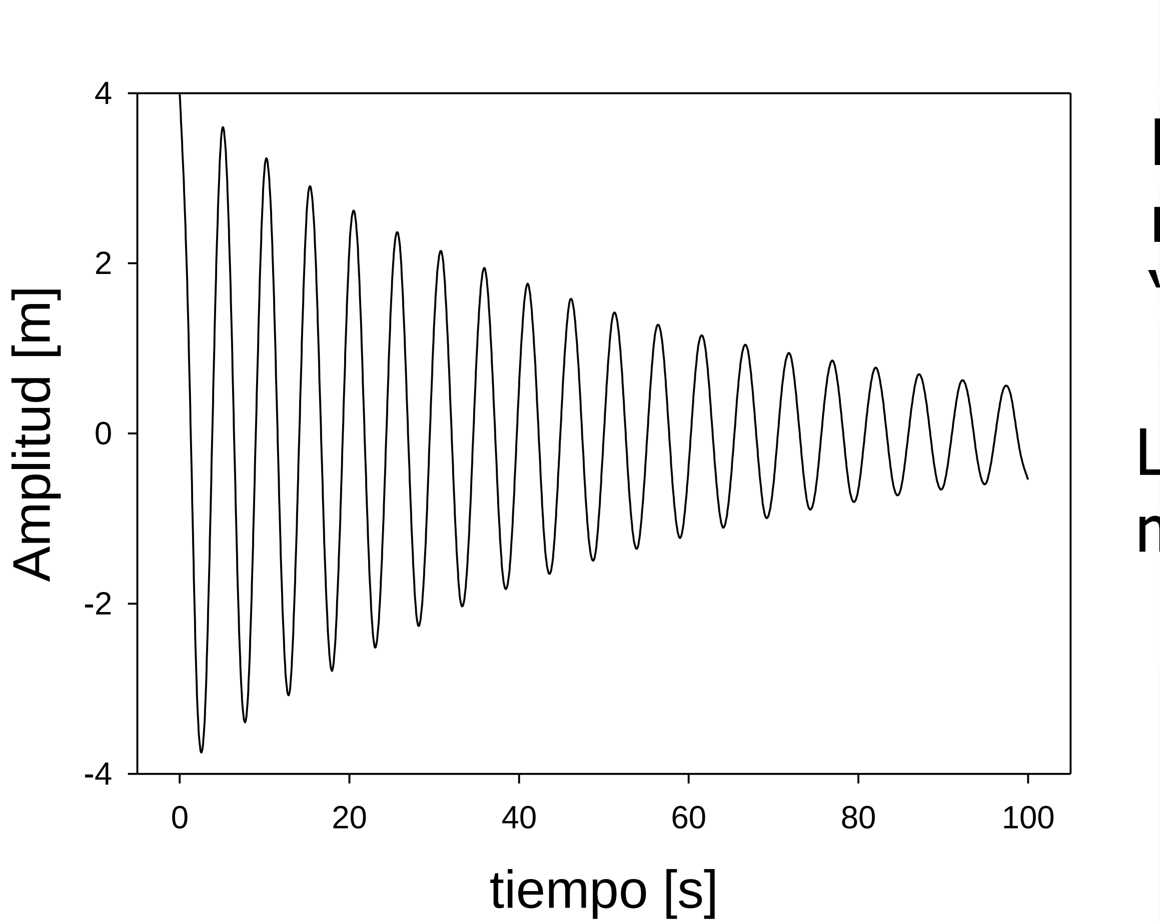
$$E_{pe} = \frac{1}{2} k \, y'^2$$

Conclusión:

Si medimos el desplazamiento desde la posición de equilibrio del resorte con la masa colgada (yo) nos podemos olvidar de la influencia de la gravedad

Oscilaciones amortiguadas

En todos los movimientos oscilantes reales se disipa energía mecánica debido a algún tipo de fuerza de fricción o rozamiento. Esto hace que la amplitud del sistema vaya disminuyendo a medida que transcurre el tiempo.



Este tipo de movimiento se denomina "amortiguado"

La ecuación de movimiento es:

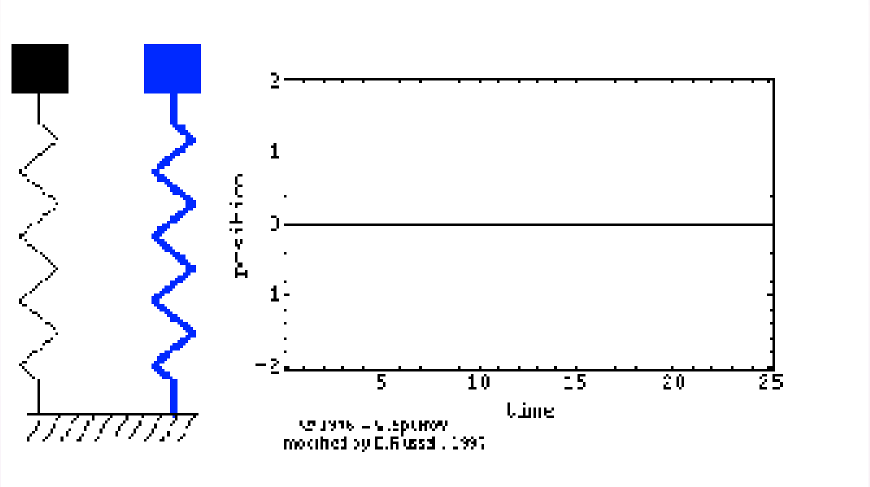
$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

La término $F_d = -b\,v$ representa la fuerza dinámica, proporcional a la velocidad, ejercida sobre el oscilador en sentido contrario al movimiento.

La solución es del tipo: $$\boxed{x = A_0\, e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos\left(\omega' t + \delta\right)}$$

donde A_0 es la amplitud original, $$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}$$

y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ es la frecuencia cuando no hay amortiguamiento



Oscilaciones forzadas

Es posible compensar la pérdida de energía de un oscilador amortiguado, aplicando una fuerza externa que realice un trabajo positivo sobre el sistema. Esto ocurre cuando la fuerza actúa en el sentido de movimiento del objeto, como por ej. cuando damos pequeños “empujoncitos” en instantes adecuados a los niños que se hamacan. Esta dependencia temporal puede expresarse como:

$$F_{ext}(t) = F_0 \, cos(\omega' t)$$

La ecuación de movimiento del objeto es entonces:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \, cos(\omega' t)$$

La solución es: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega' t - \varphi)}$

donde: $$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left[\left(\omega'^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega'}{m}\right)^2\right]}}$$

resonancia!!!!

y $$\varphi = \arccos \frac{b\omega'/m}{\sqrt{\left(\omega'^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega'}{m}\right)^2}}$$

ω' es la frecuencia de la fuerza externa

ω_0 es la frecuencia propia del sistema

Resonancia: se llama resonancia al caso en el que la frecuencia externa (ω') coincide con la frecuencia propia del objeto (ω_0). Para esta condición la amplitud alcanza su máximo valor.

Ejemplos de resonancia:

1) Los terremotos son fuerzas oscilatorias que, aplicadas a edificios pueden llegar a destruirlos parcial o totalmente. Actualmente los edificios se construyen de manera que la frecuencia propia (ω_0) no coincida con los valores comprendidos en el rango 0-15 Hz, que es la frecuencia típica de los terremotos.

2) Un puente colgante de Inglaterra colapsó cuando unas tropas marchaban sobre él en forma acompasada: la vibración de resonancia inducida por los soldados aumentó la amplitud de oscilación lo suficiente como para romper el puente (1830). Hoy día se sabe que hay que "romper fila" al atravesar un puente!!

3) Puente de Tacoma, Estados Unidos (1940)

Los fuertes vientos produjeron vórtices con fuerzas impulsoras periódicas de una frecuencia (ω') similar a la propia del puente (ω_0) provocando la ondulación observada y luego el colapso del mismo. https://youtu.be/j-zczJXSxnw?list=PLpO_VEuHb93rSVCdyNBTFBw5IkbJZzPPb