Introducción al Diseño Lógico (E0301)

Ingeniería en Computación

Clase 4. Representaciones en Punto Fijo
Curso 2023

En esta clase:

- Concepto de Representación en Punto Fijo
- Precisión – Rango
- Operaciones en Punto Fijo

Representacion de Punto Fijo

- En los sistemas de numeración posicionales de cualquier base, se pueden diferenciar los valores fraccionarios de los enteros mediante el uso convencional de un simbolo que los separa (punto o coma decimal)
- En el caso binario por ejemplo el número representado con 9 bits en la siguiente figura sería:

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	●	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
1	0	0	1	0	●	1	1	1	1

$2^4+2^1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4} = 16+2+0.5+0.25+0.125+0.0625=18.9375$

- ¿Cuál sería el número más grande y el más chico (omitiendo el cero) que puede representarse en este caso?
  - Es fácil ver que el mayor sería *31.9375* y el menor *0.0625*
  - tambien que la *resolución* o sea el incremento mínimo entre un valor y el siguiente también es $0.0625=2^{-4}$
-

Representacion de Punto Fijo

- Si ahora cambiamos la posición del punto, podemos obtener otro rango de representaciones y resolución.

•	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
•	1	0	0	1	0	1	1	1	1

$2^{-1}+2^{-4}+2^{-6}+2^{-7}+2^{-8}+2^{-9} = 1/2+1/16+1/64+1/128+1/256+1/512 = 0.591796875$

- ¿Y ahora cuál sería el número más grande y el más chico (omitiendo el cero) que puede representarse?
  - Es fácil ver que el mayor sería *0.998046875* y el menor *0.001953125*
  - tambien que la resolución o sea el incremento mínimo entre un valor y el siguiente también es $0.001953125=2^{-9}$

Representacion de Punto Fijo

- Por último situemos el punto en otra posición. Veamos que rango de valores podemos representar.

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	•
1	0	0	1	0	1	1	1	1	•

$$2^8+2^5+2^3+2^2+2^1+2^0 = 256+32+8+4+2+1 =303$$

- ¿Y ahora cuál sería el número más grande y el más chico (omitiendo el cero) que puede representarse?
  - Es fácil ver que el mayor sería 511 y el menor 1.
  - Tambien que la resolución o sea el incremento mínimo entre un valor y el siguiente también es $1=2^0$.

Representacion de Punto Fijo

- Representación de valores grandes

2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^{9}	2^{8}	2^{7}	2^{6}	2^{5}	2^{4}	2^{3}	2^{2}	2^{1}	2^{0}	•
1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	•

Aqui estamos usando los mismos 9 bits para representar el número, pero asumimos que hay 4 digitos menos significativos “ficticios” que no utilizamos.

- En el ejemplo anterior teníamos:

  $2^8+2^5+2^3+2^2+2^1+2^0 = 256+32+8+4+2+1 = 303$

  y en este tenemos

  $2^{12}+2^9+2^7+2^6+2^5+2^4 = 4096+512+128+64+32+16 = 4848$

- ¿Y ahora cuál sería el número más grande y el más chico (omitiendo el cero) que puede representarse?
  - Es fácil ver que el mayor sería 8176 y el menor 16.
  - Tambien que la resolución o sea el incremento mínimo entre un valor y el siguiente también es $16=2^4$.
- Se puede verificar que los valores representados de esta manera son los mismos que se obtenían en el ejemplo anterior, pero multiplicados por 16 o sea 2^4.

Representacion de Punto Fijo

- Si hacemos el cociente entre el valor mas alto y el mas pequeño que se pueden representar en todos los casos vistos podemos encontrar que:

  $31.9375 / 0.0625 = (2^5 – 2^{-4})/2^{-4} = 2^9 – 1 = 511$

  $0.998046875 / 0.001953125 = (2^0 – 2^{-9})/2^{-9} = 2^9 – 1 = 511$

  $511 / 1 = (2^9 – 2^0)/2^0 = 2^9 – 1 = 511$

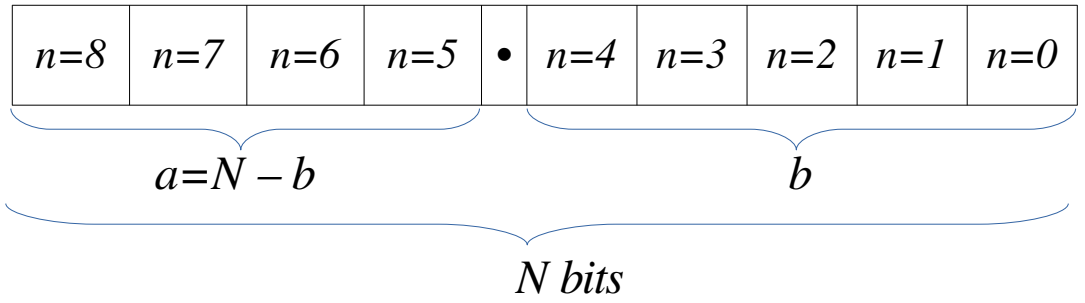
  $8176 / 16 = (2^{13} - 2^4) / 2^4 = 2^4 (2^9 – 1) / 2^4 = 511$

- Podemos observar que:
  - Con la misma cantidad de bits, podemos representar distintos rangos de valores numéricos dependiendo de donde situemos el punto decimal que separa la parte fraccionaria de la parte entera.
  - La cantidad de valores que pueden representarse es la misma.
  - La resolución corresponde al minimo valor representable distinto que cero y esta dada por el valor asignado al LSB.
  - Esta idea se puede extender para representar valores muy pequeños o muy grandes
  - Puede interpretarse que la ubicación del punto con respecto al LSB puede modificarse multiplicando por una *escala* 2^M, donde M es un entero.

Representacion de Punto Fijo

Vamos a formalizar esto para representaciones de números positivos

- Sea una representación de punto fijo de N bits, que llamaremos $U(a, b)$.
  Con $b \leq N$; $a = N - b$



- Esto se puede interpretar como ubicar el punto fraccionario entre los bits $n = b - 1$ y $n = b$ representando al conjunto de números:

$$P = \{p / 2^b \mid 0 \leq p \leq 2^N - 1, p \in Z\}.$$

- El bit n tiene un peso de $2^n/2^b = 2^{n-b}$ y la resolución es el menor valor representable 2^{-b}
- El valor de un numero x en particular está dado por $x = (1/2^b) \sum_{n=0}^{N-1} 2^n x_n$ dónde x_n representa el enésimo bit de x.
- El rango de la representación está dado por : $0 \leqslant x \leqslant (2^n - 1)/2^b = 2^{n-b} - 2^{-b} = 2^a - 2^{-b}$

$$\textit{Rango}: \quad 0 \leqslant x \leqslant = 2^a - 2^{-b}$$

$$\textit{Resolución}: \quad 2^{-b}$$

Representacion de Punto Fijo: Ca1 y Ca2

- Si consideremos $U(N,0)$, $a=N$, $b=0$, nos queda que la resolución es 1 y el rango representable será $0 \leq x \leq 2^N - 1$
- Esto coincide con la representación binaria natural en N bits, y sabemos que si queremos representar números con signo, debemos utilizar el MSB para esta finalidad.
- Se puede verificar que si definimos $\tilde{x} = Ca1(x)$, entonces para $U(N,0)$ tendremos $\tilde{x} = 2^N - 1 - x$.
- Si definimos $\hat{x} = Ca2(x)$, entonces $\hat{x} = \tilde{x} + 1 = 2^N - x$
- Ahora si queremos representar números con signo, y el MSB nos da el signo, entonces podemos decir que el rango de números positivos, lo vamos a reprentar con N-1 bits, y el MSB será cero.
- Para representar los números negativos, usaremos Ca2, y los valores que obtendremos es ese caso estarán dados por $\hat{x} = \tilde{x} + 1 = 2^N - x$
- El rango de números que podemos representar estará dado por:

$$P = \{ p \mid -2^{N-1} \leq p \leq (2^{N-1} - 1), p \in \mathbb{Z} \}$$

Representacion de Punto Fijo con signo

- y el valor obtenido para una representación dada en N bits será:

$$x = \left[-2^{N-1} x_{N-1} + \sum_{n=0}^{N-2} 2^n x_n \right]$$

- Puede verse que si el MSB (ubicado en la posición $N\text{-}1$) es cero, la representación de x es la de un número positivo de $N\text{-}1$ bits.
- Si el MSB es 1, podemos comprobar que se está realizando la operación de Ca2 sobre x y queda representado un número negativo.
- Si combinamos esta representación con lo que vimos para punto fijo positivo , estaríamos pasando de $U(N,0)$ a una representación con signo, que llamaremos $Q(N\text{-}1,0)$.
- Si ahora tomamos como antes a bits para la parte entera y b bits para la parte fraccionaria, generalizamos la representación a $Q(a,b)$ en la cual $a=N\text{-}b\text{-}1$ y el conjunto de números que pueden representarse será:

$$P = \{ p\ /2^b \mid -2^{N-1} \leq p \leq \left(2^{N-1}-1\right), p \in \mathbb{Z} \}$$

Representacion de Punto Fijo con signo

- El valor x representado por una $Q(a,b)$ de N bits será entonces:

$$x = \left(\frac{1}{2^b}\right)\left[-2^{N-1}x_{N-1} + \sum_{n=0}^{N-2} 2^n x_n\right]$$

- El factor $\left(\frac{1}{2^b}\right)$ se llama *Escala* y el rango de representación será:

$$-2^{N-1-b} \leq x \leq +2^{N-1-b} - 1/2^b$$

- Nótese que $a+b = N-1$ porque se utiliza el MSB para el signo
  - *Ejemplo 1: ¿Qué número representa 01011001 en $Q(3,4)$?*
    - Podemos ver que el número es positivo, entonces el valor corresponde a la representación entera del número 89 y debe multiplicarse por la escala dada por $1/2^4 = 1/16$ *se obtiene 5,5625*
  - *Ejemplo 2: ¿Qué número representa 10010110 en $Q(2,5)$?*
    - *El número es negativo (MSB=1) y la escala es $1/2^5 = 1/32$,* entonces el número representado es $-106 / 32 = -3,3125$

Operaciones

- Largo sin signo
  - El número de bits para representar $U(a,b)$ es $a+b$
- Largo con signo
  - El número de bits para representar $Q(a,b)$ es $a+b+1$
- Rango sin signo.
  - El rango de $U(a,b)$ es $0 \leq x \leq 2^{a} - 2^{-b}$.
- Rango con signo
  - el rango de $Q(a,b)$ es $-2^{a} \leq x \leq 2^{a} - 2^{-b}$.
- Cambio de escala:
  - Si tengo una representación de un número x en $Q\,(a\,,b)$ donde la escala es $1/2^{b}$ y quiero pasarlo a otra representación $Q_1(a_1\,,\ b_1)$ con la misma cantidad de bits N, se debe cambiar la escala desplazando los bits de la representación hacia la izquierda o hacia la derecha según b_1 sea mayor o menor que b respectivamente. Esto equivale a multiplicar o dividir por 2 respectivamente.
  - Debe analizarse si no se pierden bits más significativos al realizar esta operación
- Operandos de adición
  - Dos números binarios deben tener igual escala para poder sumarlos.
  - Esto es, la operación $X(c,d) + Y(e,f)$ es solamente válida si $X = Y$ (ya sea Q o U) y además se tiene que cumplir que $c=e$ y $d=f$.