MÓDULO I - PROBABILIDAD

1- Probabilidad

1.1 - Espacios muestrales y eventos.

La Teoría de Probabilidades estudia los llamados ***experimentos aleatorios***.

Ejemplos clásicos de experimentos aleatorios son los juegos de azar:

a) tirar un dado y observar el número en la cara de arriba.
b) tirar una moneda
c) lanzar una moneda cuatro veces y contar el número total de caras obtenidas.
d) lanzar una moneda cuatro veces y observar la sucesión de caras y cecas obtenidas.

Simbolizamos con ε a un experimento aleatorio.

Un experimento aleatorio tiene las siguientes características:

1-Se lo puede repetir bajo las mismas condiciones tantas veces como se desee.

2- No se puede predecir con exactitud el resultado de dicho experimento, pero se puede decir cuáles son los posibles resultados del mismo.
3- A medida que el experimento se repite, los resultados individuales parecen ocurrir en forma caprichosa. Pero si el experimento se repite un gran número de veces, y registramos la ***proporción*** de veces que ocurre un determinado resultado, veremos que esa proporción tiende a estabilizarse en un valor determinado a medida que aumenta el número de veces que se repite el experimento.
Por ejemplo, consideremos el experimento de lanzar un dado y observar el número de la cara superior. Supongamos que tiramos el dado N veces, y sea n el número de veces que sale el número 5 en los N tiros del dado. Entonces $\frac{n}{N}$ es la proporción de veces que sale el número 5 en los N tiros. Si el dado es normal a medida que N aumenta, $\frac{n}{N}$ tiende a estabilizarse en un número que es 1/6.

Observación: en los experimentos no aleatorios o ***deterministas*** se puede predecir con exactitud el resultado del experimento, es decir, las condiciones en las que se verifica un experimento determinan el resultado del mismo. Por ejemplo, si colocamos una batería en un circuito simple, el modelo matemático que posiblemente describiría el flujo observable de corriente sería I = E/R, que es la ley de Ohm. El modelo predice el valor de I al dar E y R. O sea, si se repite el experimento anterior cierto número de veces, empleando cada vez el mismo circuito, es decir manteniendo fijas E y R, esperaríamos observar el mismo valor de I.

A veces sucede que un experimento no es aleatorio estrictamente, pero resulta mucho más sencillo estudiarlo como si fuera aleatorio. Por ejemplo, si tiramos una moneda y observamos qué lado queda hacia arriba, el resultado sería predecible conociendo en forma precisa las velocidades iniciales de traslación y rotación, y las elasticidades de los materiales del piso y de la moneda. Pero la precisión con la que se necesitan conocer estos datos es casi imposible de obtener en la realidad, por lo que es más conveniente tratar al experimento como aleatorio.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es el ***espacio muestral***. Al espacio muestral lo anotamos con la letra S.

Por ejemplo,

a) Si ε : tirar un dado y observar el número en la cara de arriba, entonces podemos tomar como espacio muestral a $S=\{1,2,3,4,5,6\}$
b) Si ε : tirar una moneda, entonces $S=\{c,s\}$
c) Si ε : lanzar una moneda tres veces y contar el número total de caras obtenidas entonces podemos considerar $S=\{0,1,2,3\}$
d) Si ε : lanzar una moneda tres veces y observar la sucesión de caras y cecas obtenidas, entonces $S=\{(c,c,c);(c,c,s);(c,s,c);(s,c,c);(c,s,s);(s,s,c);(c,s,c);(s,s,s)\}$
e) Si ε : tirar un dado las veces necesarias hasta que sale un 6 por primera vez, y contar el número de tiros realizados, entonces $S=\{1,2,3,4,.....\}=N$, donde *N* es el conjunto de los números naturales.
f) Si ε : medir el tiempo de vida de una lamparita eléctrica, entonces $S=\{t\in R, t\geq 0\}$ donde *R* es el conjunto de los números reales.

<u>Observaciones</u>:

1- la elección de *S* no es única, depende de lo que se quiera observar del experimento aleatorio.
2- El espacio muestral puede ser un conjunto finito, o infinito. A su vez si es infinito puede ser infinito numerable o no numerable. En e) el conjunto *S* es infinito numerable, en f) el conjunto *S* es infinito no numerable.

Se llama ***evento*** o ***suceso*** a todo subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo,

a) En el experimento dado en el ejemplo a), un evento de *S* sería $A=\{2,4,6\}$ pues $A\subset S$.
   Podemos expresar al evento *A* con palabras de la siguiente manera *A*: "sale un número par"

   También $B=\{1,2,3\}$ es un evento al que podemos expresar verbalmente como *B*: "sale un número menor o igual que 3"
b) En el experimento dado en el ejemplo d), un evento de *S* sería $C=\{(c,c,c);(c,c,s);(c,s,c);(s,c,c)\}$, el que en palabras se puede expresar como *C*: "salen por lo menos dos caras"
c) En el experimento dado en el ejemplo f), un evento de *S* sería *D*: "la lamparita dura más de 1200 horas", en notación de conjuntos $D=\{t\in R;\quad t>1200\}$

<u>Observaciones</u>:

1- en el ejemplo a) anterior, si al tirar el dado sale el número 2, entonces podemos decir que ***A ocurrió*** pues $2\in A$. Pero también ***B ocurrió*** pues $2\in B$. En cambio si al tirar el dado sale el número 4, entonces el evento *A* ocurrió pero ***B no ocurrió***, pues $4\notin B$.
2- el conjunto $\varnothing$ es un evento (pues el conjunto $\varnothing$ está incluido en todo conjunto, en particular $\varnothing\subset S$). Es el evento que ***nunca ocurre.***
El espacio muestral *S* es un evento (pues todo conjunto está incluido en sí mismo), y *S* ***siempre ocurre.***

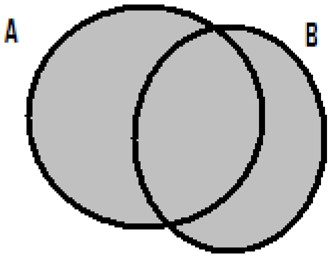
Las operaciones habituales entre conjuntos se pueden aplicar a los eventos, dando como resultado nuevos eventos. Específicamente
1- Si *A* y *B* son eventos, entonces $A\cup B$ es otro evento. $A\cup B$ ocurre si y solo si ocurre *A* **o** si ocurre *B*
2- Si *A* y *B* son eventos, entonces $A\cap B$ es otro evento. $A\cap B$ ocurre si y solo si ocurre *A* **y** ocurre *B*
3- Si *A* es un evento A^C es un evento. A^C ocurre si y solo si no ocurre *A*

<u>Nota</u>: recordar que las operaciones de unión, intersección diferencia y complemento se definen de la siguiente manera:

1- $A \cup B$ es el conjunto formado por los elementos que están en *A* ***o*** en *B* (donde el ***o*** está en sentido in-clusivo), en notación de conjuntos

$A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$

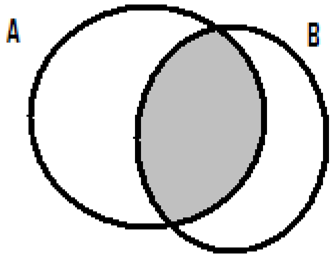
En la figura la zona en gris simboliza $A \cup B$



2- $A \cap B$ es el conjunto formado por los elementos que están en *A* ***y*** en *B*, en notación de conjuntos

$A \cap B = \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$

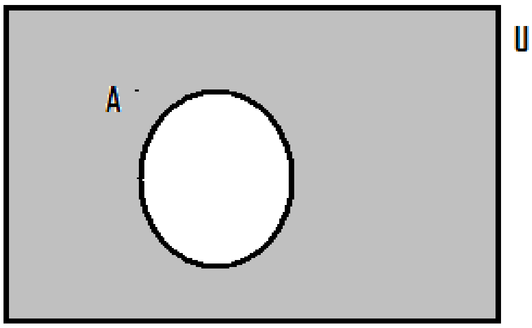
En la figura la zona en gris simboliza $A \cap B$



3- A^C es el conjunto formado por los elementos que están en el conjunto universal *U* y no están en *A*, en notación de conjuntos

$A^C = \{x;\ x \in U \wedge x \notin A\}$

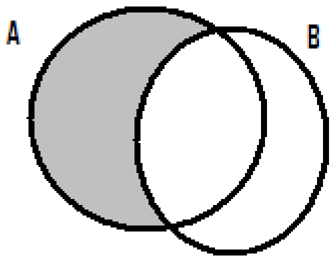
La zona en gris simboliza A^C



4- $A - B$ es el conjunto formado por los elementos que están en *A* ***y no están*** en *B*, en notación de conjuntos $A - B = \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$,

La zona en gris simboliza $A - B$

Notar que $A - B = A \cap B^C$



Es útil recordar las siguientes propiedades sobre el álgebra de conjuntos:

1- Leyes de idempotencia

a) $A \cup A = A$ b) $A \cap A = A$

2- Leyes asociativas

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3- Leyes conmutativas

a) $A \cup B = B \cup A$ b) $A \cap B = B \cap A$

4- Leyes distributivas

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5- Leyes de identidad

a) $A \cup \emptyset = A$ b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
c) $A \cup U = U$ d) $A \cap U = A$

6- Leyes de complemento

a) $A \cup A^C = U$ b) $A \cap A^C = \emptyset$
c) $\left(A^C\right)^C = A$ d) $U^C = \emptyset$, $\emptyset^C = U$

7- Leyes de De Morgan

a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

La relación de inclusión entre un conjunto y otro y las operaciones anteriores con conjuntos lleva al siguiente

Teorema:

a) $A \subset B$ es equivalente a $A \cap B = A$
b) $A \subset B$ es equivalente a $A \cup B = B$
c) $A \subset B$ es equivalente a $B^C \subset A^C$
d) $A \subset B$ es equivalente a $A \cap B^C = \emptyset$,
e) $A \subset B$ es equivalente a $B \cup A^C = U$

Sean *A* y *B* dos conjuntos. El ***conjunto producto*** de *A* y *B*, expresado $A \times B$, está formado por todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$, es decir

$$A \times B = \{(a,b);\ \ a \in A \wedge b \in B\}$$

Se anota al producto $A \times A = A^2$

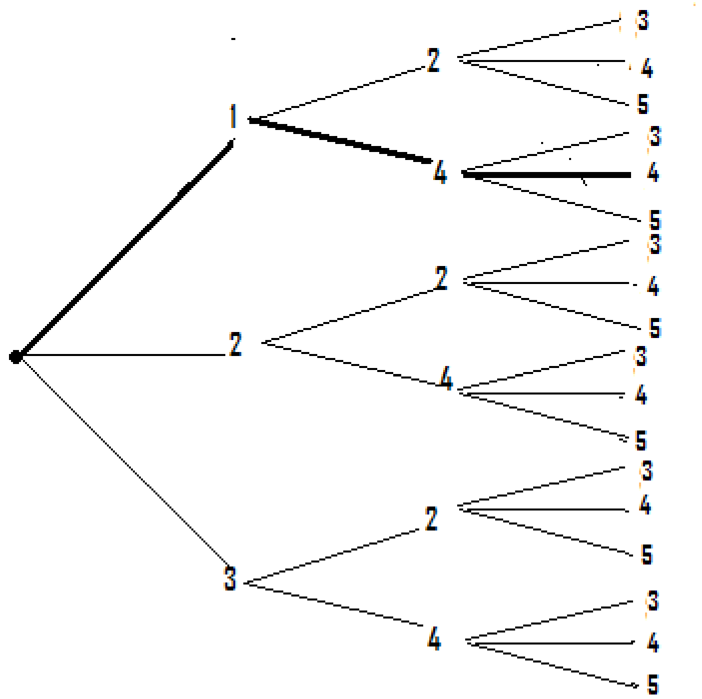
Por ejemplo, si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{7,8\}$, entonces $A \times B = \{(1,7); (1,8); (2,7); (2,8); (3,7); (3,8)\}$

El concepto de conjunto producto se extiende a un número finito de conjuntos en forma natural. El conjunto producto de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se anota $A_1 \times A_2 \times .. \times A_n$ y es igual a

$A_1 \times A_2 \times .. \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in A_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$, es decir es el conjunto de todas las *n-uplas* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde $a_i \in A_i$ para cada *i*.

Por ejemplo, si $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4\}$, $C=\{3,4,5\}$, entonces un método conveniente para hallar el producto $A\times B\times C$ es por medio del denominado "diagrama de árbol" que se muestra a continuación, el cual se construye de izquierda a derecha.

$A\times B\times C$ consta de todas las ternas (o 3-uplas) formadas al seguir cada "camino" del árbol



Por ejemplo el camino con trazo más grueso indicaría la terna (1, 4, 4)

Las operaciones de unión e intersección también se pueden generalizar a más de dos conjuntos
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son n conjuntos, entonces

a) la unión de todos ellos se anota $A_1\cup A_2\cup .. \cup A_n$ o también $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y es igual a $A_1\cup A_2\cup .. \cup A_n=\{x;\ \text{existe } i \text{ tal que } x\in A_i\}$, es decir un elemento x pertenece a $A_1\cup A_2\cup .. \cup A_n$ si x pertenece ***a alguno de los conjuntos*** A_i **.**
De forma análoga se define la unión de una secuencia infinita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$, y se la anota con el símbolo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

b) la intersección de todos ellos se anota $A_1\cap A_2\cap .. \cap A_n$ o también $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ y es igual a $\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\{x;\ x\in A_i \ \text{ para todo } i\}$, es decir un elemento x pertenece a $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ si x pertenece ***a todos los conjuntos*** A_i
De forma análoga se define la intersección de una secuencia infinita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$, y se la anota con el símbolo $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Si A y B son dos eventos tales que $A\cap B=\varnothing$, se dice que son disjuntos o ***mutuamente excluyentes.***

Es decir si *A* y *B* son mutuamente excluyentes no pueden ocurrir a la vez. Por ejemplo, si se tira un dado y se observa el número de la cara superior, los eventos $A=\{1,3,5\}$ y $B=\{2,4,6\}$ son mutuamente excluyentes. Al tirar un dado sale un número par o un número impar, no pueden darse ambas cosas a la vez.
Los eventos con un solo elemento son eventos ***elementales o simples***. Por ejemplo, volviendo al experimento ε : tirar un dado y observar el número en la cara de arriba, y $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, entonces los conjuntos unitarios $\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ son eventos simples. Notar que dos eventos simples cualesquiera son mutuamente excluyentes.

Dado un evento *A* asociado a un experimento aleatorio ε . Supongamos que se repite *n* veces el experimento ε , y anotamos n_A al número de veces que ocurre *A* en la *n* repeticiones de ε . Se define la ***frecuencia relativa de A***, y se simboliza f_A , al cociente $\frac{n_A}{n}$. Es decir que f_A es la ***proporción de veces que ocurre A en las n repeticiones de*** ε **.**
La frecuencia relativa f_A tiene las siguientes propiedades:
1- $0 \le f_A \le 1$
2- $f_A = 1$ si y solo si *A* ocurre ***cada vez*** en las *n* repeticiones
3- $f_A = 0$ si y solo si *A* no ocurre ***nunca*** en las *n* repeticiones
4- si *A* y *B* son dos eventos mutuamente excluyentes entonces $f_{A\cup B} = f_A + f_B$

Dado un evento *A*, se quiere asignar al mismo un número que indique qué tan ***probable*** es que *A* ocurra. A ese número lo definiríamos como la ***probabilidad de A***. En ese sentido parecería que la frecuencia relativa f_A sería una buena elección. Pero nos encontramos con el siguiente problema, ¿cuántas veces deberíamos repetir el experimento aleatorio para definir f_A, es decir qué valor de *n* tomaríamos?

Por ejemplo en el experimento de tirar un dado consideremos el evento A: “sale el número 4”, si lo lanzamos 100 veces podríamos encontrar que $n_A = 14$, y si lo lanzamos nuevamente 100 veces podría ocurrir que n_A sea diferente del anterior por ejemplo podría *A* ocurrir 20 veces. Entonces, tendríamos dos valores diferentes para f_A , 0.14 y 0.2

Se dijo antes que en un experimento aleatorio a medida que *n* aumenta la frecuencia relativa de *A* tiende a estabilizarse en un número, pero no podemos en la práctica repetir el experimento infinitas veces.

Se quiere asignar a cada evento *A* un número que no dependa de la experimentación. Por este motivo procedemos como sigue:

<u>Definición axiomática de probabilidad</u>.

Sea ε un experimento aleatorio y *S* un espacio muestral asociado con ε . Con cada evento *A* asociamos un número real llamado probabilidad de *A*, que anotamos *P(A)*, el cual satisface las siguientes propiedades básicas o *axiomas*

1- $0 \le P(A) \le 1$
2- $P(S) = 1$
3- Si *A* y *B* son eventos mutuamente excluyentes entonces $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
4- Si $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$ es una secuencia de eventos tales que
$A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \ne j$, entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

La elección de estas propiedades está motivada por las características correspondientes de la frecuencia relativa.

Observación: supongamos el experimento de lanzar una moneda y el espacio muestral $S=\{c,s\}$. Notar que podemos escribir $S=\{c\}\cup\{s\}$, es decir como unión de eventos simples. Por los axiomas 2 y 3 de la definición de probabilidad tenemos que

$$1=P(S)=P(\{c\})+P(\{s\})$$

Es decir $1=P(\{c\})+P(\{s\})$, lo que implica que $P(\{c\})=1-P(\{s\})$. No podemos deducir el valor de $P(\{c\})$ ni el valor de $P(\{s\})$ de las propiedades anteriores. Necesitamos información adicional, por ejemplo si el dado es normal. De ser así podemos plantear que $P(\{c\})=P(\{s\})$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} 1=P(\{c\})+P(\{s\}) \\ P(\{c\})=P(\{s\}) \end{array}\right\} \Rightarrow P(\{c\})=P(\{s\})=0.5$$

Podemos deducir de los axiomas otras propiedades útiles para el cálculo de probabilidades.

Propiedades de la probabilidad

1- $P(\varnothing)=0$

Dem.) Siendo *A* un evento cualquiera podemos escribir $A\cup\varnothing=A$
Además *A* y $\varnothing$ son mutuamente excluyentes, por lo tanto por axioma 3

$$P(A)=P(A\cup\varnothing)=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P}(\varnothing)$$

O sea que

$$P(A)=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P}(\varnothing)\Rightarrow \mathrm{P}(\varnothing)=0$$

2- Si A^C es el evento complementario de A, entonces $P(A^C)=1-P(A)$

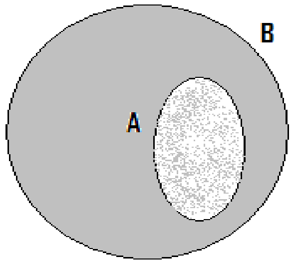
Dem.) Si A es un evento cualquiera, entonces podemos escribir $A\cup A^C=S$
Además, por definición de complemento de un conjunto, A y A^C son mutuamente excluyentes.
Por lo tanto, por axioma 2 y por axioma 3

$$1=P(S)=P(A)+P(A^C)$$

Despejando

$$P(A^C)=1-P(A)$$

3- Si $A\subset B$ entonces $P(A)\le P(B)$



Dem.) Sean *A* y *B* dos eventos tales que $A\subset B$.
De la figura vemos que $B=A\cup(B\cap A^C)$
Y además A y $B\cap A^C$ son mutuamente excluyentes.

Entonces $P(B) = P(A) + P(B \cap A^C)$

Y como por axioma 1 tenemos que $P(B \cap A^C) \geq 0$, entonces $P(B) \geq P(A)$

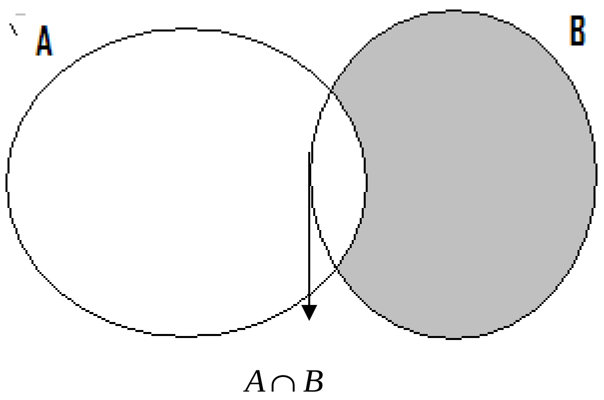
4- Si $A \subset B$, entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$

Dem.) Siguiendo los pasos de la demostración anterior llegamos a

$P(B) = P(A) + P(B \cap A^C)$, lo que implica que $P(B \cap A^C) = P(B) - P(A)$

Y como $B \cap A^C = B - A$, entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

<u>Observación</u>: ***en general*** vale la siguiente propiedad $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$



5- Si *A* y *B* son dos eventos ***cualesquiera***, entonces

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dem.) Escribimos a $A \cup B$ como unión de partes disjuntas de la siguiente manera, (observar la figura)

$A \cup B = B \cup (A \cap B^C)$

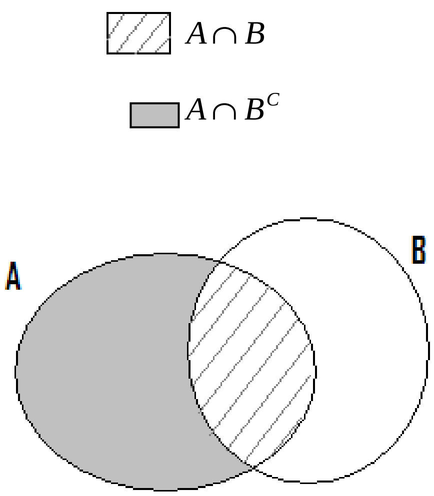
$\therefore P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B^C)$ (1)

Y por la observación anterior

$P(B \cap A^C) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ (2)

Por lo tanto, reemplazando (2) en (1): $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$

Con lo que queda demostrada la propiedad.



Observaciones:

1- La propiedad anterior se puede generalizar para expresar la probabilidad de tres eventos

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Se llega a la igualdad anterior escribiendo $A\cup B=D$ y aplicando la propiedad 5, es decir:

$$P(A\cup B\cup C)=P(D\cup C)=P(D)+P(C)-P(D\cap C)=$$
$$=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)\cap C) \quad (3)$$

Nuevamente aplicamos 5: $P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(A\cap B)$

Y además, aplicando las leyes distributivas $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

Entonces:

$$P((A\cup B)\cap C)=P((A\cap C)\cup(B\cap C))=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P((A\cap C)\cap(B\cap C))$$

Como $(A\cap C)\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$, reemplazando en (3) se llega a :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

En general, se puede probar que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son *n* eventos cualesquiera entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-.....+(-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap....\cap A_n)$$

2- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son *n* eventos tales que $A_i\cap A_j=\emptyset$ con $i\neq j$ entonces $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

Notar que la igualdad anterior es una generalización del axioma 3.

1.2 - El espacio muestral finito

Sea ε un experimento aleatorio y *S* un espacio muestral asociado a ε. Supongamos que *S* es un conjunto finito al que anotamos $S=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, es decir consideramos que tiene *n* elementos.

Podemos escribir a *S* como unión de eventos elementales de la siguiente forma.

Si $A_i=\{a_i\}$ entonces $S=A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n$. Además sabemos que $P(S)=1$, por lo tanto tenemos el resultado:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1 \qquad (4)$$

Es decir: ***la suma de las probabilidades de los eventos elementales es igual a 1***

Si ahora tomamos un evento cualquiera *B* de *S*, lo anotamos $B=\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}\}$, entonces podemos escribir a *B* como unión de eventos simples: $B=A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup ...\cup A_{i_k}$. Por lo tanto

$$P(B)=P(A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_k})=P(A_{i_1})+P(A_{i_2})+\ldots+P(A_{i_k})$$

Es decir para calcular la probabilidad de B se suman las probabilidades de los eventos elementales que lo componen.

Si asumimos que $P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_n)=p$, es decir todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir, entonces reemplazando en (4):

$$\underbrace{p+p+\ldots+p}_{n \text{ veces } p}=1 \quad\Rightarrow\quad np=1 \quad\Rightarrow\quad p=\frac{1}{n}=\frac{1}{\#S}$$

Donde el símbolo #*S* se lee: número de elementos de *S*, (en general #*S* indica el ***cardinal*** de *S*)

Cuando $P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_n)=p$, se dice que *S* es ***equiprobable.***

Si *B* es un evento cualquiera de *S*, lo anotamos $B=\{a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_k}\}$ (o sea que #*B* = *k*), entonces escribimos a *B* como unión de eventos simples: $B=A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_k}$, y nuevamente

$$P(B)=P(A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_k})=P(A_{i_1})+P(A_{i_2})+\ldots+P(A_{i_k})$$

Como ya vimos que $P(A_i)=\dfrac{1}{n}$ para todo *i=1,2,…,n,* se tiene que:

$$P(B)=P(A_{i_1})+P(A_{i_2})+\ldots+P(A_{i_k})=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{k \text{ veces}}=\frac{k}{n}=\frac{\#B}{\#S}$$

Es decir ***si B es un evento de un espacio muestral equiprobable entonces*** $P(B)=\dfrac{\#B}{\#S}$

Ejemplos:

1- Supongamos que se tira una moneda normal tres veces, y se cuenta el número de caras obtenido luego de los tres tiros. Tomemos como espacio muestral a $S=\{0,1,2,3\}$

¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos dos caras?

En este caso *S* ***no es equiprobable***, pues
el evento $\{0\}$ ocurre de una sola forma: cuando en los tres tiros sale ceca
El evento $\{3\}$ ocurre de una sola forma: cuando en los tres tiros sale cara
Pero el evento $\{1\}$ ocurre cuando en los tres tiros sale una sola cara y eso puede darse de tres formas distintas (c,s,s); (s,s,c) o (c,s,c)
Análogamente para el evento $\{2\}$ puede darse de tres formas distintas:
(c,c,s); (c,s,c) o (s,c,c)
Por lo tanto $P(\{0\})=P(\{3\})$ y $P(\{1\})=P(\{2\})$. Si anotamos $P(\{0\})=P(\{3\})=p$ y $P(\{1\})=P(\{2\})=q$ entonces $q=3p$ (5)
Además se cumple $P(\{0\})+P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})=1$ (6)
Entonces de (5) y (6)

$$\left.\begin{array}{l} q = 3p \\ p + q + q + p = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q = 3p \\ 2p + 2q = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{1}{8} \ , \ \ q = \frac{3}{8}$$

De esta forma conocemos las probabilidades de todos los eventos elementales.

Si B: " salen al menos dos caras" , entonces $B = \{2,3\}$
Para calcular *P(B)* hacemos

$$P(B) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = 0.5$$

Si tomamos como espacio muestral a

$$S = \{(c,c,c);(c,c,s);(c,s,c);(s,c,c);(c,s,s);(s,s,c);(c,s,c);(s,s,s)\}$$

Entonces *S* ***es equiprobable*** pues cada resultado (cada terna) se de una sola forma.

En este caso ***podemos plantear directamente*** $P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{4}{8} = 0.5$

2- En el caso de espacios muestrales equiprobables es necesario recordar las ***técnicas de conteo*** para calcular el número de elementos de un conjunto sin enumerar sus elementos.
Por ejemplo:

Se tiene una urna con 15 bolillas distinguibles (pueden estar numeradas), de las cuales 10 son blancas y 5 son rojas. Se extraen ***al azar*** dos bolillas de la urna,

a) ¿cuál es la probabilidad de extraer todas blancas?
b) ¿cuál es la probabilidad de extraer exactamente una bolilla blanca?
c) ¿cuál es la probabilidad de extraer al menos una bolilla blanca?

Supongamos que se extraen las dos bolillas ***sin reemplazo*** y ***no importa el orden*** en que son extraídas.
Al decir que se extraen al azar, se entiende que el espacio muestral del experimento es equiprobable.
Al decir que se extraen las bolillas sin reemplazo, significa que se extrae una bolilla y sin regresarla a la urna se extrae la siguiente.
El espacio muestral de este experimento se puede tomar como $S = \{\{1,4\};\{2,5\},\{2,10\},...\}$, es de-
cir como el conjunto cuyos elementos son conjuntos, todos los conjuntos de dos elementos que se puedan formar a partir de un conjunto de 15 elementos. Por ejemplo, el resultado $\{1,4\}$ signi-
fica que se extrajeron las bolillas 1 y 4. ¿Cuántos elementos tiene *S*?, recordando las técnicas de conteo el número de elementos de *S* es igual al número combinatorio $\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!}$

Para responder la pregunta **a)** anotemos *A*: "las dos bolillas son blancas"

Entonces $P(A)=\dfrac{\# A}{\# S}$. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto *A*?, tantos como formas haya de extraer dos bolillas blancas. Se tiene que $\# A=\binom{10}{2}=\dfrac{10!}{2!(10-2)!}$.

Por lo tanto $P(A)=\dfrac{\# A}{\# S}=\dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}}=\dfrac{\frac{10!}{2!(10-2)!}}{\frac{15!}{2!(15-2)!}}=\dfrac{3}{7}$

Veamos ahora el inciso **b)**. Anotamos *B*: "se extrae exactamente una bolilla blanca"
Entonces

$$P(B)=\frac{\# B}{\# S}=\frac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{2}}$$

Y por último el inciso c). Anotamos C: "se extrae al menos una bolilla blanca"
Podemos resolverlo de dos maneras:

La forma más fácil es calcular $P(C^C)$ donde C^C: "ninguna bolilla es blanca"

$$P(C^C)=\frac{\# C^C}{\# S}=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}}\Rightarrow P(C)=1-P(C^C)=1-\frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}}=1-\frac{2}{21}=\frac{19}{21}$$

Otra forma de resolverlo podría ser la siguiente, escribimos $C=C_1\cup C_2$ donde

C_i :"se extraen i bolillas blancas exactamente" $\quad i=1,2$

Notar que $C_1\cap C_2=\varnothing$. Por lo tanto $P(C)=P(C_1)+P(C_2)$

Y $\quad P(C_1)=\dfrac{\# C_1}{\# S}=\dfrac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{2}}\quad ; \quad P(C_2)=\dfrac{\# C_2}{\# S}=\dfrac{\binom{10}{2}\binom{5}{0}}{\binom{15}{2}}$

Por lo tanto $P(C)=\dfrac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{2}}+\dfrac{\binom{10}{2}\binom{5}{0}}{\binom{15}{2}}=\dfrac{10}{21}+\dfrac{9}{21}=\dfrac{19}{21}$

3- Si en el ejemplo anterior importa el orden en que son extraídas las bolillas, entonces $S=\{(1,4);(2,5),(2,10),.(4,1);(5,2)....\}$, es decir que *S* es el conjunto de todos los ***pares*** (a,b) don-
de $a\neq b$, por ejemplo (1,4) expresa el resultado: primero se extrajo la bolilla 1 y en segundo término se extrajo la bolilla 2. El número de elementos de *S* es 15x14 = 210.
En este caso
$P(A)=\dfrac{10\times 9}{15\times 14}=\dfrac{3}{7}$;

Para calcular la probabilidad de B hay que distinguir si la bolilla blanca se extrae primero o se extrae en segundo término:

$$P(B)=\frac{10\times 5+5\times 10}{15\times 14}=\frac{2(10\times 5)}{15\times 14}$$

Para calcular la probabilidad de C nuevamente podemos pensarlo de dos formas, pero si consideramos $C=C_1\cup C_2$ en cada caso hay que tener en cuenta el orden en que se extraen las bolillas.

Es mas práctico hacer $P(C)=1-P(C^C)=1-\dfrac{5\times 4}{15\times 14}$

4- Si ahora ***importa el orden*** en que son extraídas las bolillas y además la extracción se hace ***con re emplazo*** (se extrae una bolilla y se la devuelve a la urna antes de extraer la siguiente), entonces *S* es el conjunto de pares *(a,b)* donde ahora puede ocurrir que *a = b.*
En este caso #*S* = 15 x 15, y calculamos

$$P(A)=\frac{10\times 10}{15\times 15}\quad ;\quad P(B)=\frac{10\times 5+5\times 10}{15\times 15}=\frac{2(10\times 5)}{15\times 15}\quad ;\quad P(C)=1-P(C^C)=1-\frac{5\times 5}{15\times 15}$$

Practica
Espacios muestrales y eventos. Asignación de probabilidades.

1) Se examinan tres fusibles en secuencia, y se observa en cada caso si están o no defectuosos.
   a) Describir el espacio muestral del experimento. ¿Cuántos elementos tiene?
   b) Expresar explícitamente los siguientes eventos:
      i) C: exactamente un fusible esta defectuoso.
      ii) D: a lo sumo un fusible está defectuoso
      iii) E: los tres fusibles están en las mismas condiciones.
      iv) ¿Cuáles de los sucesos C, D o E son mutuamente excluyentes?
      v) sean los eventos A_i : el fusible i-ésimo está defectuoso $i = 1, 2, 3$. Expresar los eventos anteriores en función de A_1, A_2 y A_3.
      vi) sean los eventos B_i : hay exactamente i fusibles defectuosos con $i = 0, 1, 2, 3$. ¿Cuántos elementos tiene cada B_i ?

2) Dos estaciones de servicio, A y B, se encuentran en cierto cruce de caminos; en cada una hay seis surtidores de nafta. Consideramos el experimento en que el número de surtidores en uso en un día particular se determina para cada una de las estaciones.
   a) Describir el espacio muestral del experimento. ¿Cuántos elementos tiene?
   b) Expresar explícitamente los siguientes eventos:
      i) C: el número de surtidores en uso es el mismo para ambas estaciones de servicio.
      ii) D: el número total de surtidores en uso es cuatro.
      iii) E: por lo menos un surtidor está en uso en cada estación de servicio.
      iv) ¿Cuáles de los sucesos C, D o E son mutuamente excluyentes?
      v) sean los eventos A_i : la estación de servicio A tiene en uso exactamente i surtidores, $i = 0,1,2, 3, 4, 5, 6$; y B_i: la estación de servicio B tiene en uso i surtidores exactamente, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Expresar los eventos anteriores en función de A_i , B_i , $i= 0,1, 2, 3, 4, 5, 6$.
      vi) ¿Cuántos elementos tiene cada evento A_i ?.

3) Supongamos un espacio muestral S que consta de 4 elementos: $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. ¿Qué función define un espacio de probabilidad en S?
   a) $P(a_1) = ½$; $P(a_2) = 1/3$, $P(a_3) = ¼$; $P(a_4) = 1/5$.
   b) $P(a_1) = ½$; $P(a_2) = 1/4$, $P(a_3) = -¼$; $P(a_4) = 1/2$.
   c) $P(a_1) = ½$; $P(a_2) = 1/4$, $P(a_3) = 1/8$; $P(a_4) = 1/8$.
   d) $P(a_1) = ½$; $P(a_2) = 1/4$, $P(a_3) = ¼$; $P(a_4) = 0$.

4) Se construye un dado de manera que el 1 y el 2 ocurran con el doble de la frecuencia que se presenta el 5, el cual ocurre con una frecuencia 3 veces superior al 3 , al 4 , o al 6. Si se lanza una vez, encuentre la probabilidad de que
   a) el número sea par.
   b) el número sea mayor que 4.

5) Una clase consta de 10 hombres y 20 mujeres de los cuales la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen ojos castaños. Hallar la probabilidad de que una persona escogida al azar sea un hombre o tenga los ojos castaños.

6) A un individuo se le presentan tres vasos diferentes de bebida de cola, marcadas

C, D, y P. Se le pide degustar las tres y luego ponerlas en lista de preferencia. Supongamos que la misma bebida de cola es la que en realidad se ha puesto en los tres vasos.

a) ¿Cuáles son los eventos elementales en este experimento de clasificación, y probabilidad se asignaría a cada uno?

ii b) ¿Cuál es la probabilidad de que C sea clasificada primera?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que C sea clasificada primera y D última?

7) Suponga que se lanzan dos monedas normales y que se observa el resultado de las caras que quedan hacia arriba. Si se tira primero una moneda y después la otra:

a) Establezca los puntos muestrales de este experimento.

b) Asigne una probabilidad razonable a cada punto.¿ Son los puntos igualmente probables?.

c) Sea A el evento de observar exactamente una vez cara y B el evento de observar al menos una cara. Obtenga los puntos muestrales de A y B .

d) A partir de la respuesta en c), calcule P(A), P(B), P($A \cap B$), P($A \cup B$), y P($A^c \cup B$).

e) Repetir a), b), c), d) si se tiran las dos monedas simultáneamente, y el experimento consiste en observar el número de caras que se obtienen.

1) Se escogen al azar 3 lámparas entre 15.

a) ¿De cuántas formas se puede hacer la elección si:

i) no importa el orden en que son elegidas?

ii) importa el orden en que son elegidas y la elección se hace sin sustitución?

iii) importa el orden en que son elegidas y la elección se hace con sustitución?

i b) De las 15 lámparas 5 son defectuosas. Para cada uno de los experimentos anteriores hallar la probabilidad de los siguientes eventos:

ii i) ninguna sea defectuosa

ii) una exactamente sea defectuosa.

iii iii) una por lo menos sea defectuosa.

9) Se seleccionan al azar dos cartas entre 10 cartas numeradas de 1 a 10. Hallar la probabilidad de que la suma sea impar si:

a) las dos cartas se sacan juntas.

b) se sacan una tras otra sin sustitución.

c) las dos cartas se sacan una después de la otra con sustitución.

10) Una caja posee 6 tuercas y 10 tornillos. Si se escogen al azar 3 piezas, hallar la probabilidad de:

a) seleccionar 3 tuercas

b) seleccionar exactamente 2 tuercas

c) seleccionar por lo menos una tuerca

d) seleccionar exactamente 2 tornillos

11) Tres moléculas de tipo A, tres de tipo B, tres de tipo C y tres de tipo D deben combinarse para formar una molécula en cadena. Una de estas moléculas en cadena es ABCDABCDABCD, y otra es BCDDAAABDBCC.

a) ¿Cuántas de estas moléculas en cadena hay?.

b) Supongamos que se selecciona al azar una molécula en cadena del tipo descrito. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres moléculas de cada tipo terminen una junto a otra?

12) Tres parejas de casados han comprado boletos para el teatro y se sientan en una fila formada por solo seis asientos. Si toman sus asientos de un modo totalmente aleatorio
    a) ¿Cuál es la probabilidad de que Pablo y María (marido y mujer), se sienten en los dos asientos de la extrema izquierda?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que Pablo y María terminen sentados uno junto a otro?

13) En el interior de un círculo se selecciona un punto al azar. Hallar la probabilidad de que el punto quede mas cercano al centro que a la circunferencia.

14) Un ingeniero se dispone a visitar dos fábricas A y B. Los transportes que lo llevan a las fábricas parten del mismo lugar. A las horas en punto salen los que lo levan a la fábrica A y a las horas y ¼ los que lo llevan a la fábrica B. Si sale de su casa sin preocuparse por la hora y toma el primer transporte que sale, ¿cuál es la probabilidad de que visite la fábrica A?. ¿Y la B?.

2 - Probabilidad condicional

2.1- <u>Definición</u>

Supongamos el experimento aleatorio de extraer al azar sin reemplazo dos bolillas de una urna que contiene 7 bolillas rojas y 3 blancas. Asumimos que las bolillas de un mismo color son distinguibles.

Consideramos los eventos A: "la primer bolilla extraída es blanca", y B: "la segunda bolilla extraída es blanca".

El espacio muestral *S* se puede pensar como el conjunto
$S = \{(a,b);\ \ a = 1,2,...10;\ \ b = 1,2,...10;\ \ a \neq b\}$ y $\#S = 10 \times 9$.

Es claro que $P(A) = \frac{3 \times 9}{10 \times 9} = \frac{3}{10}$. Pero si queremos calcular $P(B)$ no es tan directo. Podemos calcular la ***probabilidad de B sabiendo que A ocurrió***: es igual a $\frac{2}{9}$, ya que si *A* ocurrió, entonces en la urna quedaron 9 bolillas de las cuales 2 son blancas. La probabilidad anterior la anotamos $P(B/A)$ y se lee: probabilidad condicional de *B* dado *A*. Es decir $P(B/A) = \frac{2}{9}$.

Notar que podemos interpretar lo anterior de la siguiente forma: el espacio muestral original *S* se ha ***reducido*** al evento *A*, es decir ***se toma a A como nuevo espacio muestral*** para calcular la probabilidad de *B*.

También podemos interpretar que la probabilidad condicional de *B* dado *A* debería ser la proporción de veces que ocurre $A \cap B$ con respecto al número de veces que ocurre *A*. Pensando en términos de frecuencia relativa: $P(B/A) \approx \frac{n_{A \cap B}}{n_A}$.

Esta idea motiva la siguiente definición:

Sean *A* y *B* dos eventos de un espacio muestral *S*. La probabilidad condicional de *B* dado *A* se define como

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{si } P(A) \neq 0$$

Análogamente

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{si } P(B) \neq 0$$

En algunos casos se puede calcular $P(B/A)$ directamente reduciendo el espacio muestral. En otros será necesario aplicar la definición anterior.

<u>Observación</u>: si *A* y *B* son eventos de un espacio muestral *S* ***equiprobable***, entonces

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\#(A \cap B)}{\# A}$$

<u>Ejemplos</u>:

1- En el experimento de extraer dos bolillas

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3\times 2}{10\times 9}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{9}$$

2- Se tira un dado normal dos veces. Sean los eventos *A*: "la suma de los números obtenidos es 6" y *B*: "el primer número es igual a 4" Tenemos que $A=\{(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)\}$ y $B=\{(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6)\}$ Entonces para calcular $P(A/B)$ mediante la definición de probabilidad condicional

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{1}{6}$$

También podemos calcularlo en forma directa, reduciendo el espacio muestral, de todos los pares del evento *B*, observamos cuáles cumplen con lo requerido por *A*, es decir de todos los pares de *B*, solo uno tiene la propiedad de que sus componentes suman 6, por lo tanto

$$P(A/B)=\frac{1}{6}$$

3- Se lanza una moneda normal tres veces.
Hallar la probabilidad de que salgan todas caras si sale alguna cara.
El espacio muestral reducido es el evento A: "sale alguna cara"
Tenemos que $A=\{(c,c,c);(c,c,s);(c,s,c);(s,c,c);(c,s,s);(s,s,c);(s,c,s)\}$
Y $B=\{(c,c,c)\}$
Por lo tanto $P(B/A)=\frac{1}{7}$

4- En cierta ciudad, 40% de la población tiene cabellos castaños, 25% tiene ojos castaños y 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar
a) si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?
b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ni cabellos ni ojos castaños?

Sean los eventos *A*: "la persona elegida al azar tiene ojos castaños", *B*: "la persona elegida al azar tiene cabellos castaños"
Entonces $P(A)=0.25$, $P(B)=0.40$ y $P(A\cap B)=0.15$
a) Se pide calcular $P(A/B)$:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.15}{0.40}$$

b) $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.15}{0.25}$

c) $P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=1-(0.25+0.40-0.15)$

5- Sean los eventos *A* y *B* con $P(A)=0.5$, $P(B)=\frac{1}{3}$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$.
Hallar: a) $P(A/B)$, b) $P(B/A)$, c) $P(A\cup B)$, d) $P(A^C/B^C)$, e) $P(B^C/A^C)$

a) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$ b) $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

c) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$

d) $P(A^C/B^C)=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}$

Calculamos: $P(B^C)=1-P(B)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$;

$$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

Por la ley de De Morgan

Entonces $P(A^C/B^C)=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$

e) $P(B^C/A^C)=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{P(A^C)}=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{1-P(A)}=\dfrac{\frac{5}{12}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{6}$

<u>Observaciones</u>:

a) Si $A\subset B$ entonces $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(A)}{P(A)}=1$

b) Si $A\cap B=\varnothing$ entonces $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(\varnothing)}{P(A)}=0$

c) Es fácil comprobar que $P(B(/A)$ para *A* fijo, satisface los axiomas de la probabilidad, esto es:

1- $0\le P(B/A)\le 1$

2- $P(S/A)=1$

3-Si B_1 y B_2 son eventos mutuamente excluyentes entonces

$$P\big((B_1\cup B_2)/A\big)=P(B_1/A)+P(B_2/A)$$

4-Si $B_1,B_2,\ldots,B_n,B_{n+1},\ldots$ es una secuencia de eventos tales que $B_i\cap B_j=\varnothing$ si $i\neq j$ enton-ces

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)/A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i/A)$$

Teorema de la multiplicación

Si *A* y *B* son dos eventos entonces $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ si $P(A)\neq 0$

Por lo tanto

$$P(A \cap B) = P(B/A)\, P(A) \qquad (6)$$

Análogamente de $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ si $P(B) \neq 0$, se deduce

$$P(A \cap B) = P(A/B)\, P(B) \qquad (7)$$

(6)y (7) se conocen como ***teorema de la multiplicación***.
Consideremos otra vez el ejemplo de extraer dos bolillas al azar sin reemplazo de una urna que contiene 3 bolillas blancas y 7 rojas. Si *A*: "la primer bolilla extraída es blanca", y *B*: "la segunda bolilla extraída es blanca", entonces

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$$

Si A_1 , A_2 , A_3 son tres eventos entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

pues:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(B \cap A_3) = P(B)P(A_3/B) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3/A_1 \cap A_{23}) =$$

$B = A_1 \cap A_2$ Teorema de la multiplicación

$$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

Teorema de la multiplicación

El teorema de la multiplicación se puede generalizar a *n* eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots, A_{n-1}) \qquad (8)$$

<u>Ejemplos:</u>

1- Una clase tiene 12 niños y 4 niñas. Si se escogen tres estudiantes de la clase al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean todos niños?

<u>Solución:</u>
Anotamos A_i : "el i-ésimo estudiante elegido es un niño" $i = 1,2,3$
Entonces la probabilidad pedida es

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{12}{16} \times \frac{11}{15} \times \frac{10}{14}$$

2- Los estudiantes de una clase se escogen al azar, uno tras otro, para presentar un examen.
a) Si la clase consta de 4 niños y 3 niñas, ¿cuál es la probabilidad de que niños y niñas queden al-
ternados?
b) Si la clase consta de 3 niños y 3 niñas, ¿cuál es la probabilidad de que niños y niñas queden alternados?

Solución:

a) Nuevamente anotamos A_i : “el i-ésimo estudiante elegido es un niño”

Entonces la probabilidad pedida es, aplicando (8):

$$P(A_1 \cap A_2^{\,C} \cap A_3 \cap A_4^{\,C} \cap A_5 \cap A_6^{\,C} \cap A_7) = \frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = \frac{1}{35}$$

15) Hay dos casos mutuamente excluyentes: el primer estudiante es un niño, y el primero es una niña.

Si el primero es un niño, entonces por (8) la probabilidad de que los estudiantes se alternen es

$$P(A_1 \cap A_2^{\,C} \cap A_3 \cap A_4^{\,C} \cap A_5 \cap A_6^{\,C}) = \frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = \frac{1}{20}$$

Si el primero es una niña, entonces por (8) la probabilidad de que los estudiantes se alternen es

$$P(A_1^{\,C} \cap A_2 \cap A_3^{\,C} \cap A_4 \cap A_5^{\,C} \cap A_6) = \frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = \frac{1}{20}$$

Entonces la probabilidad pedida es $\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$

En el ejemplo inicial de extraer dos bolillas de una urna, todavía queda por resolver cómo calculamos la $P(B)$, siendo A: “la primer bolilla extraída es blanca”, y B: “la segunda bolilla extraída es blanca”

Podemos expresar al espacio muestral S como $S = A \cup A^C$

Además A y A^C son mutuamente excluyentes.

Por otro lado podemos escribir

$B = B \cap S = B \cap \left(A \cup A^C\right) = \left(B \cap A\right) \cup \left(B \cap A^C\right)$ por la ley distributiva

Entonces

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C) = P(B/A)P(A) + P(B/A^C)P(A^C)$$

$\left(B \cap A\right) \cap \left(B \cap A^C\right) = \varnothing$ teorema de la multiplicación

Lo hecho en este ejemplo se generaliza en el siguiente teorema

2.2 - Teorema de la probabilidad total

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de un espacio muestral S que cumplen:

a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$

b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$

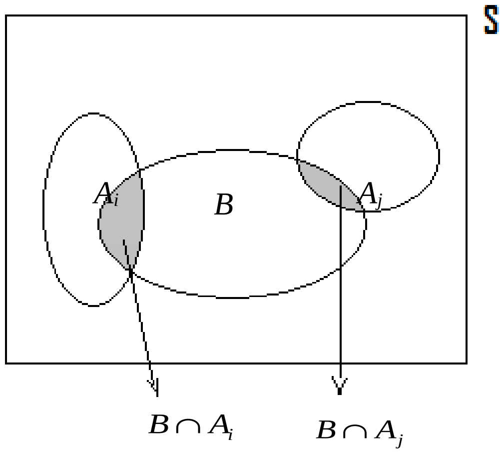
c) $P(A_i) > 0 \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$ Se dice que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una ***partición de S*** Entonces para cualquier evento B de S

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n)$$

Dem.) Podemos escribir

$$B = B \cap S = B \cap \left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\right) = \left(B \cap A_1\right) \cup \left(B \cap A_2\right) \cup ... \cup \left(B \cap A_n\right)$$

Ley distributiva de la $\cap$ con respecto a la $\cup$



Además si $A_i \cap A_j = \varnothing$ con $i \neq j$, entonces $\left(B \cap A_i\right) \cap \left(B \cap A_j\right) = \varnothing$ si $i \neq j$ (ver figura)

Por lo tanto $P(B) = P\left(B \cap A_1\right) + P\left(B \cap A_2\right) + ... + P\left(B \cap A_n\right) =$

Teorema de la multiplicación

$$= P(B / A_1)P(A_1) + P(B / A_2)P(A_2) + \ldots + P(B / A_n)P(A_n)$$

<u>Teorema de Bayes</u>

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de un espacio muestral *S* que cumplen:

a) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = S$
b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$
c) $P(A_i) > 0 \quad \forall i = 1,2,...,n$

Entonces para cualquier evento *B* de *S* tal que $P(B) > 0$

$$P(A_k / B) = \frac{P(B / A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B / A_i)P(A_i)} \qquad k = 1, \ldots, n$$

Dem.)

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B / A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B / A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B / A_i)P(A_i)}$$

def. de prob. Condicional teor, de la probabilidad total

teor. de multiplicación

<u>Ejemplos:</u>

1- Tres máquinas A, B, y C producen respectivamente 60%, 30% y 10% del número total de artícu-los de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas máquinas son respectiva-mente 2%, 3% y 4%. Se selecciona un artículo al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

b) Si al seleccionar un artículo al azar resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el artí-culo hubiera sido producido por la máquina C?

<u>Solución</u>:

a) Sean los eventos

A: “el artículo seleccionado fue producido por la máquina A”

B: “el artículo seleccionado fue producido por la máquina B”

C: “el artículo seleccionado fue producido por la máquina C”

D: “el artículo seleccionado es defectuoso”

Los datos que tenemos son los siguientes

$P(A)=0.6 \quad P(B)=0.3 \quad P(C)=0.1 \quad P(D/A)=0.02 \quad P(D/B)=0.03 \quad P(D/C)=0.04$

Se pide hallar la $P(D)$.

Se aplica el teorema de la probabilidad total tomando como partición de *S* a los eventos *A*, *B* y *C.*

Entonces

$$P(D)=P(D/A)P(A)+P(D/B)P(B)+P(D/C)P(C)=0.02\times 0.6+0.03\times 0.3+0.04\times 0.1$$

b) Se pide hallar $P(C/D)$. Aplicamos el teorema de Bayes

$$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D/C)P(C)}{P(D)}=\frac{0.04\times 0.1}{0.02\times 0.6+0.03\times 0.3+0.04\times 0.1}=\frac{4}{25}$$

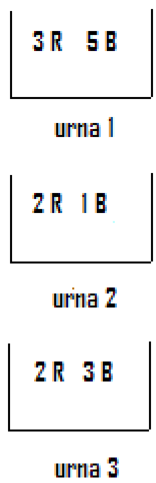
2- Se nos dan tres urnas como sigue:

Una urna 1 contiene 3 bolas rojas y 5 blancas.

Una urna 2 contiene 2 bolas rojas y 1 blanca.

Una urna 3 contiene 2 bolas rojas y 3 blancas

Se selecciona una urna al azar y se saca una bola de la urna. Si la bola es roja, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna 1?



Solución:

Sean los eventos A_i: “se elige la urna *i*” $i = 1, 2, 3$

Entonces $P(A_i)=1/3 \quad i=1,2,3$

Además podemos tomar a A_1, A_2, A_3 como una partición del espacio muestral *S.*

Sea el evento B :"extraer bolilla roja"

Se pide calcular $P(A_1/B)$

Entonces

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+P(B/A_3)P(A_3)}=$$

def. de prob. condicional

Teorema de Bayes

$$=\frac{\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}}{\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{173}{360}}=\frac{45}{173}$$

2.3 - Independencia

Dados dos eventos A y B , puede ocurrir que $P(B/A)$ y $P(B)$ sean diferentes, eso significa que saber que A ocurrió modifica la probabilidad de ocurrencia de B

En el ejemplo anterior $P(B/A_1)=\frac{3}{8}\neq P(B)=\frac{173}{360}$

Pero puede suceder que $P(B/A)$ y $P(B)$ sean iguales, en ese caso A y B son eventos independientes, saber que A ocurrió no afecta la probabilidad de ocurrencia de B.

Entonces, dos eventos A y B son ***independientes*** si $P(B/A)=P(B)$, y son ***dependientes*** de otro modo.

Notar que por el teorema de la multiplicación $P(A\cap B)=P(B/A)P(A)$ si $P(A)>0$
Entonces
A y B son independientes $\Rightarrow P(A\cap B)=P(B/A)P(A)=P(B)P(A)$
Recíprocamente
Si $P(A\cap B)=P(B)P(A)$ entonces

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A)}{P(A)}=P(B) \qquad \therefore \qquad A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

si $P(A)>0$

Por lo tanto:

$$A \text{ y } B \text{ son independientes si y solo si } P(A\cap B)=P(A)P(B) \qquad (9)$$

Es decir podemos usar (9) como definición de independencia de eventos.

Ejemplos:

1-Se tira un dado normal dos veces, sean los eventos
A: “la suma de los números obtenidos es igual a 7”
B: “el primer número obtenido es 4”
¿Son A y B independientes?

Sabemos que el espacio muestral es el conjunto de 36 pares ordenados (a,b) donde tanto a como
b pueden tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Además $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ y $B=\{(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6)\}$
Entonces

$$P(A\cap B)=\frac{1}{36} \qquad P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} \qquad P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Como $P(A\cap B)=\frac{1}{36}=P(A)P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ entonces A y B son independientes

Observación: si A fuera el evento A: “la suma de los números obtenidos es igual a 6”, entonces A
y B son dependientes

2-Se tiene una urna con 10 bolillas blancas y 5 rojas. Se extraen al azar dos bolillas ***con reemplazo*** de la urna. Entonces los eventos
A: “la primer bolilla es blanca”

B: “la segunda bolilla es roja”
Son independientes

$$P(A\cap B)=\frac{10\times 5}{15\times 15} \qquad P(A)=\frac{10\times 15}{15\times 15}=\frac{10}{15} \qquad P(B)=\frac{5\times 15}{15\times 15}=\frac{5}{15}$$

Pero si la extracción se hace ***sin reemplazo***, entonces *A* y *B* son ***dependientes*** pues

$$P(A\cap B)=P(B/A)P(A)=\frac{5}{14}\times\frac{10}{15} \qquad P(A)=\frac{10}{15}$$

y $P(B)=P(B/A)P(A)+P(B/A^C)P(A^C)=\frac{5}{14}\times\frac{10}{15}+\frac{4}{14}\times\frac{5}{15}=\frac{5}{15}$

por lo tanto $P(A\cap B)\neq P(B)P(A)$

Notar que la diferencia está en que $P(B/A)=\frac{5}{14}\neq P(B)=\frac{5}{15}$

<u>Observación</u>: si en el ejemplo anterior la urna tiene 1000 bolillas blancas y 500 rojas, y se extraen ***sin reemplazo*** dos bolillas al azar entonces

$$P(B/A)=\frac{500}{1499}=0.3335557... \qquad \text{y} \qquad P(B)=\frac{5}{15}=0.3333333...$$

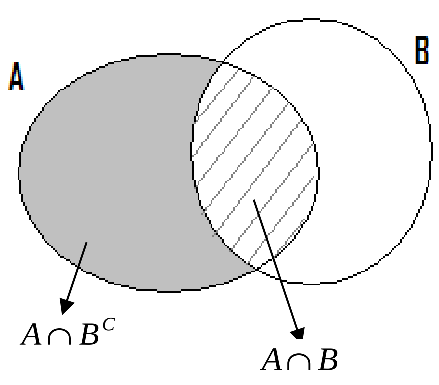
O sea que $P(B/A)$ y $P(B)$ son ***casi*** iguales.

Por lo tanto podemos asumir que *A* y *B* son independientes, aunque la extracción se haga sin reemplazo.

En la práctica, si *N* es el tamaño de la población y *n* el tamaño de la muestra extraída sin reemplazo, si $\frac{n}{N}<0.05$ entonces podemos operar como si la extracción se hubiera hecho con reemplazo.

Si dos eventos *A* y *B* son independientes entonces *A* y B^C son independientes (10)

Dem.) se debe probar que $P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$
Para esto escribimos
$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$
Como $A\cap B$ y $A\cap B^C$ son mutuamente excluyentes entonces



$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)=$$
A y *B* independientes
$$=P(A)(1-P(B))=P(A)P(B^C)$$
Con lo que queda demostrada la propiedad.

Observación: si A y B son eventos independientes, entonces A^C y B^C son independientes. Se llega a este resultado aplicando (10) sobre *A* y *B*, y luego se aplica (10) nuevamente a *A* y B^C.

Independencia de más de dos eventos.

La noción de independencia de eventos se puede ampliar a *n* eventos de la siguiente manera:

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos, se dice que son ***independientes*** si

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}) \qquad k = 2,\ldots,n \qquad (11)$$

Observaciones:

1- si *n* = 2 entonces (11) se reduce a la definición de dos eventos independientes.
2- si *n* = 3 entonces (11) significa que se deben cumplir las siguientes 4 condiciones:

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

b) $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$

c) $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$

d) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

La condición d) significa que un evento es independiente de la intersección de los otros dos, por

ejemplo $P(A_1 / A_2 \cap A_3) = P(A_1)$

Esto es porque en general por el teorema de la multiplicación vale que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

y por d)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

entonces

$$P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \Rightarrow P(A_3 / A_1 \cap A_2) = P(A_3)$$

Ejemplos:

1- Las probabilidades de que tres hombres peguen en el blanco son, respectivamente, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{3}$.

Cada uno dispara una vez al blanco.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de ellos pegue en el blanco?
b) Si solamente uno pega en el blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea el primer hombre?

Solución:

a) consideremos los eventos A_i: "el hombre i-ésimo pega en el blanco" $i = 1, 2, 3$

$$P(A_1) = \frac{1}{6} \qquad P(A_2) = \frac{1}{4} \qquad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Sea el evento *B*: "exactamente un hombre pega en el blanco"

Entonces $B = \left(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3\right) \cup \left(A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C\right) \cup \left(A \cap A_2^C \cap A_3^C\right)$

Por lo tanto $P(B) = P\left(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3\right) + P\left(A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C\right) + P\left(A \cap A_2^C \cap A_3^C\right)$

Y por independencia
$$P(B) = P\left(A_1^C\right)P(A_2^C)P(A_3\big) + P\left(A_1^C\right)P(A_2)P)(A_3^C\big) + P\left(A_1\right)P(A_2^C)P)(A_3^C\big) =$$
$$= \left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{3} + \left(1-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{5}{24} = \frac{31}{72}$$

b) Se pide calcular $P(A_1 / B)$
$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31}$$

2- Cierto tipo de proyectil da en el blanco con probabilidad 0.3, ¿ cuántos proyectiles deberán ser disparados para que haya al menos un 80% de probabilidad de pegar en el blanco?

Solución:
Escribimos A_i: "el proyectil i-ésimo da en el blanco" $i = 1, 2, \ldots, n$
Se quiere que
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) > 0.8$$

Asumiendo independencia esto es equivalente a
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P\left((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^C\right) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \cap \ldots \cap A_n^C) =$$
$$= 1 - P(A_1^C)P(A_2^C)\ldots P(A_n^C)) = 1 - 0.7^n > 0.8$$

Por lo tanto $0.7^n < 0.2 \Rightarrow n\ln(0.7) < \ln(0.2) \Rightarrow n > \dfrac{\ln(0.2)}{\ln(0.7)} = 4.5123$

Es decir se deben hacer por lo menos 5 disparos

Practica

Probabilidad condicional - Sucesos independientes
Teorema de la probabilidad total – Fórmula de Bayes.

1) Se analizan los discos de policarbonato plástico de un proveedor para determinar su resistencia a las ralladuras y a los golpes. A continuación se resumen los resultados obtenidos al analizar 100 muestras

		Resistencia a los golpes	
		alta	baja
Resistencia a las ralladuras	alta	80	9
	baja	6	5

Sean A: el evento donde el disco tiene una alta resistencia a los golpes, y B: el evento donde el disco tiene una alta resistencia a las ralladuras. Determine las siguientes probabilidades:

a) P(A)
b) P(B)
c) P(A/B)
d) P(B/A)

2) Un lote contiene 15 piezas de fierro fundido de un proveedor local 25 de un proveedor de otro estado. Se eligen dos piezas al azar, sin remplazo, del lote de 40. Sean A: el evento donde la primera pieza seleccionada es del proveedor local, y B: el evento donde la segunda pieza seleccionada es del proveedor local. Calcular:

a) P(A)
b) P(B/A)
c) $P(A \cap B)$
d) $P(A \cup B)$

4) Suponga que ahora se eligen tres piezas al azar, sin remplazo, del lote de 40. Además de los eventos A y B, sea C: el evento donde la tercera pieza seleccionada es del proveedor local. Calcular:

a) $P(A \cap B \cap C)$
b) $P(A \cap B \cap C^C)$

3) Un lote de 500 contenedores para jugo de naranja congelado contiene 5 que están defectuosos. Se toman del lote dos al azar, sin remplazo.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo contenedor sea defectuoso si el primero lo fue?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos contenedores sean defectuosos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos contenedores sean aceptables?

d) Del lote se escogen al azar tres contenedores, sin remplazo.
d_1) ¿Cuál es la probabilidad de que el tercero sea defectuoso, dado que el primero y el segundo son defectuosos?
d_2) ¿Cuál es la probabilidad de que el tercero sea defectuoso, dado que el primero es defectuoso y el segundo es aceptable?
d_3) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres contenedores sean defectuosos?

4) Un negocio vende camisas deportivas en tres talles (pequeña, mediana y grande) y tres modelos (a cuadros, estampadas y de franjas) y dos largos de manga (corta y larga). Las siguientes tablas dan las proporciones de camisas vendidas que caen en varias combinaciones de categoría

Manga corta

	Modelo		
talle	**cuadros**	**estampadas**	**franjas**
P	0.04	0.02	0.05
M	0.08	0.07	0.12
G	0.03	0.07	0.08

Manga larga

	Modelo		
talle	**cuadros**	**estampadas**	**franjas**
P	0.03	0.02	0.03
M	0.10	0.05	0.07
G	0.04	0.02	0.08

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente camisa vendida sea mediana, de manga larga y estampada?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente camisa vendida sea mediana y estampada?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente camisa vendida sea de manga corta?. ¿Y de manga larga?.
d) Dado que la camisa que se acaba de vender era a cuadros y de manga corta, ¿cuál es la probabilidad de que su talle fuera mediano?
e) Dado que la camisa que se acaba de vender era a cuadros y mediana, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de manga corta?. ¿Y de manga larga?.

5) Suponga que $P(A/B) = 0.2$, $P(A/B^C) = 0.3$ y $P(B) = 0.8$. ¿Cuál es el valor de $P(A)$?.

6) Suponga que el 2% de los rollos de tela de algodón son defectuosos, al igual que el 3% de los rollos de tela de nylon. De los rollos utilizados por un fabricante, 70% son de algodón y 30% son de nylon. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar uno de ellos éste sea defectuoso?

7) La irregularidad del corte de productos de papel aumenta a medida que las hojas de la cuchilla se desgastan. Sólo el 1% de productos cortados con cuchillas nuevas tienen cortes irregulares, el 3% de los cortados con cuchillas de filo promedio exhiben irregularidades y el 5% de los cortados con cuchillas desgastadas presentan irregularidades. Si el 25% de las cuchillas utilizadas en el proceso de corte son nuevas, el 60% tiene un filo promedio y el 15% de las cuchillas están desgastadas, ¿cuál es la proporción de productos que tendrán cortes irregulares?

8) Se toman muestras de espuma de dos proveedores y se hace una evaluación a éstas para determinar el grado con el que cumplen ciertas especificaciones. A continuación se resumen los resultados obtenidos con 126 muestras

		Cumple con los requerimientos	
		sí	**no**
proveedor	**1**	80	4
	2	40	2

Sean los eventos A: la muestra es del proveedor 1, y B: la muestra cumple con las especificaciones.

a) Los eventos A y B ¿son independientes?

b) Los eventos A^C y B ¿son independientes?

9) La probabilidad de que una muestra de laboratorio contenga altos niveles de contaminación es 0,10. Se analizan cinco muestras, éstas son independientes.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna contenga altos niveles de contaminación?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una tenga altos niveles de contaminación?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una tenga altos niveles de contaminación?

10) Un lote de 500 contenedores para jugo de naranja congelado contiene cinco que están defectuosos. Se escogen dos al azar, sin remplazo. Sean los eventos A: el primer contenedor es defectuoso y B: el segundo contenedor es defectuoso.
   a) Los eventos A y B son independientes?
   b) Si el muestreo se hace sin remplazo, ¿los eventos A y B son independientes?.

11) Suponga que P(A/B) = 0.8, P(A) = 0.5 y P(B) = 0.2. Calcular P(B/A).

12) La alineación entre la cinta magnética y la cabeza de un sistema de almacenamiento en cinta magnética, afecta el desempeño del sistema. Suponga que el 10% de las operaciones de lectura se ven atenuadas por una alineación oblicua, el 5% de ellas son atenuadas por una alineación descentrada, y que las demás operaciones de lectura se realizan de manera correcta. La probabilidad de un error en la lectura por una alineación oblicua es 0.01, por una alineación descentrada 0.02, y 0.001 por una alineación correcta.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de tener un error en la lectura?.
   b) Si se presenta un error en la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que se deba a una alineación oblicua?.

13) Setenta por ciento de aviones ligeros que desaparecen en vuelo en cierto país son descubiertos posteriormente. De las naves descubiertas, 60% tienen localizador de emergencia, en tanto que 90% de los no descubiertos no tienen ese localizador. Supongamos que desaparece un avión ligero.
    a) Si tiene localizador de emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que no sea localizado?.
    b) Si no tiene localizador de emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que sea localizado?

14) Cierto tipo de proyectil da en el blanco con probabilidad 0.3. ¿Cuántos proyectiles deberán ser disparados para que haya al menos un 80% de probabilidad de pegar en el blanco?.

3 -
VARIABLES ALEATORIAS

3.1- Generalidades

En muchas situaciones experimentales se quiere asignar un número real a cada uno de los elementos del espacio muestral. Al describir el espacio muestral de un experimento un resultado individual no tiene que ser necesariamente un número, por ejemplo, al tirar una moneda y tomar como espacio muestral $S=\{c,s\}$, o al tirar un dado dos veces tomamos como espacio muestral a $S=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$, aquí *S* es un conjunto de pares ordenados.

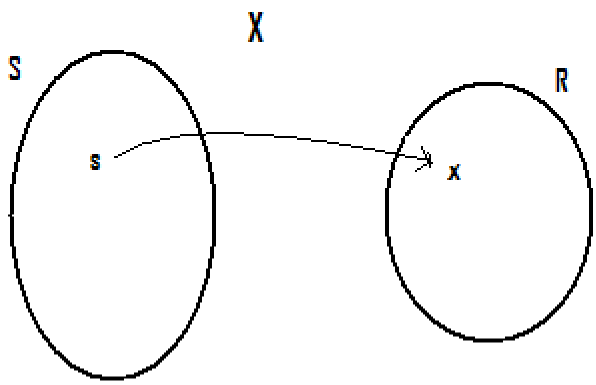
Definición: Sea ε un experimento aleatorio y *S* un espacio muestral asociado a él. Una ***variable aleatoria*** es una función que asigna a cada elemento de *S* un número real.

-
Notación: se anota a una variable aleatoria con letras mayúsculas *X, Y, Z, W,…*

Entonces, si *X* es una variable aleatoria de *S* en *R*

$$X : S \to R \quad \text{tal que} \quad X(s) = x$$

Con diagramas de Venn



Desde ahora en lugar de escribir variable aleatoria, escribiremos v.a.

Ejemplos:

1- Se tira una moneda tres veces

Sea *X* la v.a. X: "número de caras obtenidas luego de los tres tiros"

Si tomamos como espacio muestral

$$S=\{(c,c,c);(c,c,s);(c,s,c);(s,c,c);(c,s,s);(s,s,c);(s,c,s);(s,s,s)\}$$

entonces

$$X((c,c,c))=3$$
$$X((c,c,s))=X((s,c,c))=X((c,s,c))=2$$
$$X((c,s,s))=X((s,c,s))=X((s,s,c))=1$$
$$X((s,s,s))=0$$

La imagen de esta función es el conjunto $\{0,1,2,3\}$

Dada una v.a. X a su imagen se la anota R_X y se la denomina ***rango o recorrido de X***

En el ejemplo anterior $R_X = \{0,1,2,3\}$

2- Se tira un dado tantas veces como sean necesarias hasta que sale el número 1 por primera vez.

Podemos simbolizar el espacio muestral de la siguiente manera $S = \{1,\ 01,\ 001,\ 0001,\ \ldots\}$ por ejemplo 001 simboliza el resultado que en los dos primeros tiros no salió el número 1 y en el tercer tiro salió el 1.

Sea Y la v.a.: Y: "número de tiros necesarios hasta que sale el 1 por primera vez"

Entonces $R_Y = \{1,2,3,4,\ldots\}$, es decir el rango de Y es el conjunto de los números naturales.

3- En el interior de un círculo de radio r y centro el origen de coordenadas, se elige un punto al azar.

Tomamos como espacio muestral a $S = \{(x, y),\ \ x^2 + y^2 \le r^2\}$. Aquí S es infinito no numerable

Definimos la v.a. Z: "distancia del punto elegido al origen"

Entonces $R_Z = \{z;\ \ 0 \le z \le r\}$

Las variables aleatorias se clasifican según su rango.

Sea X es una v.a. con rango R_X. Si R_X es un conjunto ***finito o infinito numerable*** entonces se dice que X es una ***v.a. discreta***. Si R_X es un conjunto ***infinito no numerable*** entonces X es una ***v.a. continua***.

El rango R_X es considerado un nuevo ***espacio muestral***, y sus subconjuntos son ***eventos***. Por ejemplo:

En el ejemplo 1, los eventos unitarios o elementales son $\{0\};\ \{1\};\ \{2\};\ \{3\}$, ***pero los anotamos*** $\{X = 0\};\ \{X = 1\};\ \{X = 2\};\ \{X = 3\}$

Otros eventos son, por ejemplo:

$\{X \le 1\}$, es decir, salió a lo sumo una cara.

Notar que podemos escribir $\{X \le 1\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\}$, o sea escribimos al evento como ***unión de eventos elementales*** $\{X > 0\}$, es decir, salieron una o más caras. Tenemos que $\{X > 0\} = R_X - \{X = 0\}$. En el ejemplo 2, $\{Y \ge 4\}$ sería el evento "al menos 4 tiros son necesarios para que salga por primera vez el numero 1" $\{4 \le Y \le 6\}$ sería el evento "se necesitan entre 4 y 6 tiros para que salga el 1 por primera vez". Notar que $\{4 \le Y \le 6\} = \{Y = 4\} \cup \{Y = 5\} \cup \{Y = 6\}$

En el ejemplo 3, $\left\{\frac{1}{3}r < Z < \frac{2}{3}r\right\}$ sería el evento "el punto elegido se encuentra a una distancia del centro mayor que $\frac{1}{3}r$, pero menor que $\frac{2}{3}r$

Volviendo al ejemplo 1, notar que $B = \{X = 0\}$ ocurre en R_X si y solo si el evento $A = \{(s, s, s)\}$ ocurre en S. Se dice que A y B son ***eventos equivalentes***.

De la misma forma los eventos

$A = \{(c, c, c)\}$ y $B = \{X = 3\}$ son equivalentes

$A = \{(c, c, s); (c, s, c); (s, c, c)\}$ y $B = \{X = 2\}$ son equivalentes

En general

siendo $A \subset S$ y $B \subset R_X$, A y B ***son equivalentes*** si $A = \{s \in S;\ \ X(s) \in B\}$

Si *X* es una v.a. de *S* en *R*, y R_X es el rango de *X*, para calcular la probabilidad de un evento *B* de R_X se busca el evento *A* en *S* equivalente a *B* y entonces $P(B)=P(A)$
Por ejemplo,
En el ejemplo 1, $P(B)=P(X=0)=P(A)=P(\{(s,s,s)\})=\frac{1}{8}$ si la moneda es normal.
$P(B)=P(X\leq 1)=P(\{(s,s,s);(c,s,s);(s,c,s);(s,s,c)\})=\frac{4}{8}=0.5$ si la moneda es normal

También podríamos haber planteado

$$P(B)=P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=0.5$$

En el ejemplo 3, si $B=\left\{\frac{1}{3}r\leq Z\leq\frac{2}{3}r\right\}$, entonces *B* es equivalente a
$A=\left\{(x,y);\ \frac{1}{3}r\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq\frac{2}{3}r\right\}$, por lo tanto

$$P(B)=P(A)=\frac{\text{area de } A}{\text{area de } S}=\frac{\pi\left(\frac{2}{3}r\right)^2-\pi\left(\frac{1}{3}r\right)^2}{\pi r^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

<u>Observación</u>: en este ejemplo si $B=\left\{Z=\frac{2}{3}r\right\}$, entonces $P(B)=P(A)=\frac{\text{area de } A}{\text{area de } S}=\frac{0}{\pi r^2}=0$

3.2 - <u>Variables aleatorias discretas</u>

Sea *X* una v.a. discreta. Anotamos su rango como $R_X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ si el rango es un conjunto finito de *n* elementos, y anotamos $R_X=\{x_1,x_2,\ldots\ldots\}$ si el rango es un conjunto infinito numerable.

A cada x_i se le asigna un número $p(x_i)=P(X=x_i)$. Estos números deben satisfacer las condiciones siguientes

a) $p(x_i)\geq 0$ para todo *i*
b) $\sum_i p(x_i)=1$

La función $p(x)$ que antes se definió, se llama ***función de probabilidad o de frecuencia de la v.a. X***. El conjunto de pares $(x_i,p(x_i))$ $i=1,2,\ldots$ es la ***distribución de probabilidad de X.***

Por ejemplo

1-Se tira una moneda normal tres veces, sea la v.a. *X*: "número de caras obtenidas"
Entonces $R_X=\{0,1,2,3\}$

Para hallar la distribución de probabilidad de *X* supongamos que la probabilidad de salir cara es ½ entonces

$$P(X=0)=P(\{(s,s,s)\})=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=P(\{(c,s,s);(s,c,s);(s,s,c)\})=\frac{3}{8}$$

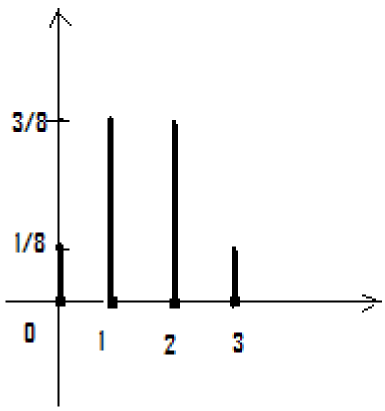
$P(X=2)=P(\{(c,c,s);(s,c,c);(c,s,c)\})=\dfrac{3}{8}$

$P(X=3)=P(\{(c,c,c)\})=\dfrac{1}{8}$

Se puede presentar la distribución de probabilidad de *X* en una tabla de la siguiente forma

x	0	1	2	3
p(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Un gráfico de la distribución de probabilidad de *X* sería



2-Se tira un dado normal. Sea X: "número que queda en la cara superior" Entonces $R_X=\{1,2,3,4,5,6\}$. La función de distribución de *X* es

x	1	2	3	4	5	6
p(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

<u>Observación</u>:

Sea X una v.a. discreta con rango finito $R_X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, donde cada x_i es un número entero y x_{i+1} es el consecutivo de x_i .

Si $P(X=x_i)=\dfrac{1}{n}$ para cada i entonces se dice que X tiene ***distribución uniforme discreta***.

Por ejemplo podría ser $R_X=\{1,2,3,\dots,n-1,n\}$, en este caso X es uniforme discreta en el intervalo natural $[1,n]$.

La v.a. del ejemplo 2 anterior es uniforme discreta en el intervalo natural $[1,6]$

<u>Función de distribución acumulada</u>

Sea X una v.a. con rango R_X . Se define la ***función de distribución acumulada de X*** (abreviamos F.d.a de *X*) como

$$F(x)=P(X\leq x) \qquad -\infty<x<\infty \tag{12}$$

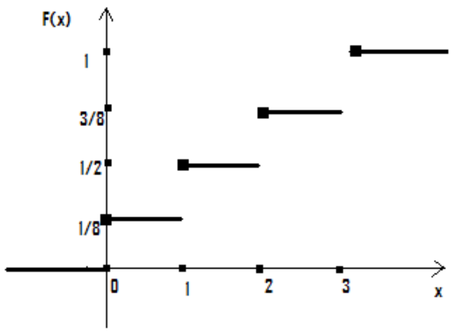
En el caso de ser *X* una v.a. discreta

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i) \qquad -\infty < x < \infty$$

Volviendo al ejemplo 1 anterior, la F.d.a. de *X* es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{8} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{8} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \dfrac{7}{8} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La gráfica de la F.d.a. de *X* es



<u>Observación</u>: la F.d.a. de *X* es una función ***escalonada***, los puntos de "salto" coinciden con los puntos del rango de *X*, y la magnitud del salto en x_i es igual a $P(X = x_i)$

En general si X es una v.a. discreta cualquiera, su F.d.a. será una función escalonada.

Además si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los valores del rango de *X* ordenados de menor a mayor entonces

$$P(X = x_1) = F(x_1)$$
$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \qquad i = 2, \ldots, n$$

Es decir, se puede obtener la función de distribución de X a partir de su F.d.a.

Para números cualesquiera *a* y *b*

1- Si $a \le b$ entonces $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a)$

2- Si $a < b$ entonces $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$

3- Si $a < b$ entonces $F(a) \le F(b)$ (es decir *F(x)* es una función creciente)

Además se cumple que

$$1-\ \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i} P(X = x_i) = 1$$

$$2-\ \lim_{x\to -\infty} F(x) = \lim_{x\to -\infty} \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le -\infty} P(X = x_i) = 0$$

3.3 – Esperanza de una variable aleatoria discreta

Sea *X* una v.a. discreta con rango R_X . La ***esperanza , valor medio o valor esperado de X*** , lo anotamos $E(X)$, y se define como

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

La sumatoria se hace sobre todos los posibles valores de *X*
Otra notación usual es μ_X o μ

Ejemplos:

1- Sea la v.a. X: “número que queda en la cara de arriba al tirar un dado normal” $R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$

Entonces $E(X) = \sum_{x=1}^{6} xP(X = x) =$

$$= 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + 6P(X = 6) =$$

$$= 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

2- Se tira una moneda normal tres veces, sea la v.a. *X*: “número de caras obtenidas”

Entonces $R_X = \{0,1,2,3\}$

Calculamos la esperanza de *X*

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} xP(X = x) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Observaciones:

1- La esperanza de una v.a. no tiene que coincidir necesariamente con algún valor del rango de la variable

2- En el ejemplo 1 donde el rango es finito y equiprobable, la esperanza de X coincide con el ***promedio de los valores del rango de X***

3- Se puede interpretar a la esperanza de una v.a. como un ***promedio “pesado” o “ponderado” de los valores del rango de la variable***, donde el “peso” de cada x_i es la probabilidad $P(X = x_i)$

4- Otra interpretación que se puede hacer de la esperanza es la siguiente: consideremos el ejemplo 1, supongamos que tiramos el dado muchas veces, *N* veces, y entonces obtenemos una secuencia de *N* valores $x_1, x_2, \ldots, x_N$ donde cada x_i es un número natural del 1 al 6. Supongamos además que hacemos un promedio de esos *N* valores, y si llamamos n_i al número de veces que sale el número i tenemos que:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} = \frac{n_1 1 + n_2 2 + ... + n_6 6}{N} =$$
$$= \frac{n_1}{N}\times 1 + \frac{n_2}{N}\times 2 + ... + \frac{n_6}{N}\times 6 \approx 1\times P(X=1) + 2\times P(X=2) + ... + 6\times P(X=6) = E(X)$$

Es decir si promediamos los N valores medidos de X, ese promedio tiende a $E(X)$ cuando $N \to \infty$, pues $\frac{n_i}{N} \approx P(X=i)$ cuando N es grande.

Esperanza de una función

A veces importa hallar la esperanza de una ***función de X*** y no de X misma. Veamos un ejemplo.
Un instructor de escritura técnica ha solicitado que cierto reporte sea entregado a la semana siguiente, agregando la restricción de que cualquier reporte que sobrepase las cuatro páginas será rechazado.
Sea X: "número de páginas del reporte de cierto estudiante seleccionado al azar"
Supongamos que X tenga la siguiente distribución de probabilidad

x	1	2	3	4
p(x)	0.01	0.19	0.35	0.45

Suponga que el instructor tarda $\sqrt{X}$ minutos calificando un trabajo que consiste en X páginas. Claramente $\sqrt{X}$ es ***otra variable aleatoria***. ¿Cuál será su esperanza?, ¿a qué es igual $E\left(\sqrt{X}\right)$?
Para calcular la esperanza de una v.a. se necesita conocer su función de distribución de probabilidad, por lo tanto habría que hallar previamente la distribución de probabilidad de la v.a. $Y = \sqrt{X}$.
Está claro que si el rango de X es $R_X = \{1,2,3,4\}$ entonces el rango de Y será $R_Y = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}$
.
Además
$$P(Y=\sqrt{1}) = P(X=1) = 0.01$$
$$P(Y=\sqrt{2}) = P(X=2) = 0.19$$
$$P(Y=\sqrt{3}) = P(X=3) = 0.35$$
$$P(Y=\sqrt{4}) = P(X=4) = 0.45$$
Por lo tanto
$$E(Y) = \sqrt{1}\times P(Y=\sqrt{1}) + \sqrt{2}\times P(Y=\sqrt{2}) + \sqrt{3}\times P(Y=\sqrt{3}) + \sqrt{4}\times P(Y=\sqrt{4}) =$$
$$= \sqrt{1}\times P(X=1) + \sqrt{2}\times P(X=2) + \sqrt{3}\times P(X=3) + \sqrt{4}\times P(X=4) = 1.78491$$
O sea
$$E(Y) = \sum_x \sqrt{x} P(X=x)$$
Lo visto en este ejemplo se puede generalizar en el siguiente

Teorema: Si X es una v.a. discreta con rango R_X y distribución de probabilidad *p(x)*, entonces la esperanza de cualquier función *h(X)* es igual a

$$E(h(X)) = \sum_x h(x)p(x)$$

Ejemplo:
Un negocio de computadoras ha comprado tres computadoras de cierto tipo a \$500 cada una y las

venderá a \$1000 cada una. El fabricante ha aceptado volver a comprar en \$200 cualquier computadora que no se haya vendido en un tiempo especificado.
Sea X: "número de computadoras vendidas" , y supongamos que la distribución de probabilidad de X es

x	0	1	2	3
p(x)	0.1	0.2	0.3	0.4

Si consideramos la v.a. Y: "utilidad obtenida", entonces Y es una función de X, es decir $Y = h(X)$
Específicamente

$$Y = 1000X + 200(3 - X) - 1500 = 800X - 900$$

La utilidad esperada, es decir la $E(Y)$ será

$$E(Y) = \sum_{x=0}^{3} (800x - 900) P(X = x) =$$
$$= (800 \times 0 - 900) P(X = 0)(800 \times 1 - 900) P(X = 1) + (800 \times 2 - 900) P(X = 2) + (800 \times 3 - 900) P(X = 3) =$$
$$= (-900) \times 0.1 + (-100) \times 0.2 + 700 \times 0.3 + 1500 \times 0.4 = \$700$$

Notar que aplicando propiedades de la notación Σ se puede plantear

$$E(Y) = \sum_{x=0}^{3} (800x - 900) P(X = x) = 800 \sum_{x=0}^{3} x P(X = x) - 900 \sum_{x=0}^{3} P(X = x) = 800E(X) - 900$$

y calculando la esperanza de X , se llega al mismo resultado

<u>Propiedades de la esperanza</u>

En el ejemplo anterior tenemos que ***Y es una función lineal de X*** , es decir $Y = aX + b$ con a y b números reales.
En este caso vale entonces la siguiente propiedad

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

La demostración sigue los mismos pasos que en el ejemplo anterior

$$E(aX + b) = \sum_{x} (ax + b) P(X = x) = a \underbrace{\sum_{x} x P(X = x)}_{= E(X)} + b \underbrace{\sum_{x} x P(X = x)}_{= 1} = aE(X) + b$$

<u>Ejemplo</u>:
En el ejemplo anterior donde $Y = 800X - 900$
Directamente calculamos

$$E(Y) = 800E(X) - 900$$

Y

$$E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 = 2$$

En consecuencia

$$E(Y) = 800E(X) - 900 = 800 \times 2 - 900 = 700$$

Observaciones:
1- Para cualquier constante *a*, $E(aX) = aE(X)$
2- Para cualquier constante *b*, $E(X+b) = E(X)+b$

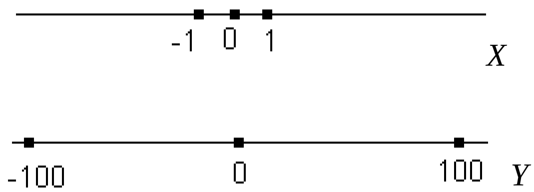
Varianza de una variable aleatoria

La esperanza de una v.a. mide dónde está centrada la distribución de probabilidad. Pero supongamos el siguiente ejemplo
Sean X e Y dos variables aleatorias con distribuciones dadas por

x	-1	1
p(x)	0.5	0.5

y	-100	100
p(y)	0.5	0.5

Es fácil verificar que $E(X) = E(Y) = 0$, pero los valores que toma la v.a. *Y* están más “alejados” de su esperanza que los valores de *X*.



Se busca una medida que refleje este hecho, se define entonces la varianza de una v.a.

Sea X una v.a. discreta con rango R_X, función de distribución de probabilidad *p(x)* y esperanza $E(X) = \mu$,
Entonces la ***varianza de X***, que anotamos $V(X)$, σ^2 o σ_X^2 es

$$V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 \, p(x)$$

La ***desviación estándar de X*** es $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Observaciones:
1- La varianza de una v.a. nunca es negativa
2- La cantidad $h(X) = (X-\mu)^2$ es el cuadrado de la desviación de *X* desde su media, y la varianza de *X* es la esperanza de la desviación al cuadrado. Si la mayor parte de la distribución de probabilidad está cerca de μ, entonces σ^2 será relativamente pequeña. Si hay valores de la variable alejados de μ que tengan alta probabilidad, entonces σ^2 será grande.
3- σ^2 está expresado en las unidades de medida de *X* al cuadrado, mientras que σ está expresada en las mismas unidades de medida que *X*.

Ejemplo:
En el caso de las variables aleatorias *X* e *Y* nombradas anteriormente,
$V(X) = (-1-0)^2 \times 0.5 + (1-0)^2 \times 0.5 = 1$ y $\sigma_X = 1$
$V(Y) = (-100-0)^2 \times 0.5 + (100-0)^2 \times 0.5 = 100^2$ y $\sigma_Y = 100$

Otra forma de escribir la varianza de una v.a., que facilita los cálculos es

$$V(X) = \sum_{x\in R_X}(x-\mu)^2 p(x) = \sum_{x\in R_X}\left(x^2 - 2\mu x + \mu^2\right)p(x) = \sum_{x\in R_X} x^2 p(x) - 2\mu \sum_{x\in R_X} xp(x) + \mu^2 \sum_{x\in R_X} p(x) =$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Por lo tanto

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Propiedades de la varianza

Las propiedades de la varianza de una v.a. son consecuencia de las propiedades de la esperanza de una v.a.
Si X es una v.a. discreta con rango R_X y distribución de probabilidad *p(x)*, entonces la varianza de cualquier función *h(X)* es igual a

$$V(h(X)) = \sum_{x\in R_X}\left(h(x) - E(h(X))\right)^2 p(x)$$

Si *h(X)* es una función lineal, entonces

$$V(aX+b) = a^2 V(X) \quad \text{y} \quad \sigma_{aX+b} = \sqrt{V(aX+b)} = |a|\sigma_X$$

Observaciones:
1- $V(aX) = a^2 V(X)$
2- $V(X+b) = V(X)$

Ejemplo:
En un ejemplo anterior donde X: "número de computadoras vendidas" y Y: "utilidad obtenida", la *V(Y)* sería $V(Y) = 800^2 V(X)$
Necesitamos calcular *V(X)*
$V(X) = E(X^2) - \mu^2$

Sabemos ya que $\mu = E(X) = 2$

Calculamos $E(X^2) = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.4 = 5$

En consecuencia

$$V(Y) = 800^2 V(X) = 800^2\left(E(X^2) - \mu^2\right) = 800^2\left(5 - 2^2\right) = 800$$

Practica
Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad discretas

1) Para cada variable aleatoria (v.a.) definida a continuación, describa el conjunto de valores posibles para la variable (recorrido o rango), e indique si la variable es discreta:
   1- X: " número de huevos que no están rotos en una caja de cartón estándar (de una docena) seleccionada al azar"
   2- Y:" el número de estudiantes de la lista de un grupo para un curso en particular, ausentes el primer día de clases".
   3- U:" el número de veces que un inexperto tiene que intentar pegarle a una pelota de golf antes de lograrlo".
   4- X:" peso de una persona elegida al azar"
   5- Y:" tensión (en libras por pulgada cuadrada) a la que una raqueta de tenis seleccionada al azar haya sido encordada"

2) Sea X: " el número de neumáticos de un automóvil seleccionado al azar, que tengan baja presión".

   a) ¿Cuál de las siguientes tres funciones p(x) es una función de distribución de probabilidad (fdp), y por qué no se permiten las otras dos?

x	0	1	2	3	4
p(x)	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
p(x)	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
p(x)	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

   Para la fdp legítima de la parte a) calcular: $P(2 \le X \le 4)$; $P(X \le 2)$ y $P(X \ne 0)$.

   b) Si $p(x) = 5(c - x),\ x = 0,1,2,3,4$, ¿cuál es el valor de c?. (Sugerencia: $\sum_{x=0}^{4} p(x) = 1$)

3) Un grupo de partes moldeadas se clasifica de acuerdo con su longitud, de la siguiente manera:

Longitud redondeada a la décima de mm más cercana.........	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
número de partes..........................	0	3	10	25	40	18	16	2

   a) Si la variable aleatoria X es la longitud (redondeada a la décima de mm más cercana) de una parte moldeada seleccionada al azar, determine la función de probabilidad de X.
   b) ¿Cuál es el valor de $P(X \le 5.1)$?
   c) ¿Cuál es el valor de $P(4.95 \le 5.35)$?
   d) Determine la función de distribución acumulada
   e) Calcular: ($P(X < 5.25)$; $P(X \le 32)$; $P(X > 32)$; $P(33 < X \le 38)$
   f) ¿Qué proporción de partes tienen longitud 5.5 o menos?

4) Un negocio de computadoras que atiende pedidos por correo tiene seis líneas telefónicas. Denotamos por X el número de líneas en uso en un momento especificado. Supongamos que la función de probabilidad de X está dada en la tabla siguiente:

x	0	1	2	3	4	5	6
p(x)	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

a) Graficar la función de probabilidad de X.
b) Hallar la función de distribución acumulada (Fda.) de X y graficarla.
c) Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:
   i) A:" a lo sumo 3 líneas están en uso"
   ii) B:" menos de 3 líneas están en uso"
   iii)C:" por lo menos 3 líneas están en uso"
   iv)D:" entre 2 y 5 líneas inclusive están en uso"

5) El espesor de un entablado de madera (en pulgadas) que algún cliente ordena, es una variable aleatoria X que tiene la siguiente Fda.:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<\frac{1}{8} \\ 0.2 & \frac{1}{8}\le x<\frac{1}{4} \\ 0.9 & \frac{1}{4}\le x<\frac{3}{8} \\ 1 & \frac{3}{8}\le x \end{cases}$$

a) Hallar la función de distribución de X.
b) Calcular: i) P(X ≤ 1/8)
   ii) P(X ≤ ¼)
   iii) P(X ≤ 5/16)
   iv) P(X > ¼)

c) P(X ≤ 1/2)

6) El voltaje de una pila nueva puede ser aceptable o no aceptable. Cierta linterna de mano necesita dos pilas, así que éstas han de seleccionarse y probarse independientemente hasta encontrar dos aceptables. Supongamos que el 80% de todas las pilas tiene voltaje aceptable y denotemos por Y el número de pilas que deben ser probadas.
   a) ¿Cuál es P(Y = 2)?
   b) ¿Cuál es P(Y = 3)? (Sugerencia: hay dos resultados diferentes que resultan en Y = 3)
   c) Para tener Y = 5, ¿qué debe ser cierto de la quinta pila seleccionada?. Haga una lista de cuatro resultados para los que Y = 5, y luego determine P(Y = 5).
   d) ¿Cuál sería una fórmula general para P(Y = *y*)?

6) Un geólogo ha recolectado 10 especímenes de roca basáltica y 10 de granito. Si el geólogo instruye a un asistente de laboratorio para que seleccione al azar 15 de los especímenes para analizarlos,
a)¿cuál es la fdp de la v.a. X: " el número de especímenes de basalto seleccionados para analizarlos"?
b) ¿cuál es la probabilidad de que todos los especímenes de uno de los dos tipos de roca sean seleccionados para el análisis?

7) Un instructor de un grupo de escritura técnica ha solicitado que cierto reporte sea entregado a la semana siguiente, agregando la restricción de que cualquier reporte que supere cuatro páginas será rechazado. Sea Y = el número de páginas del reporte de cierto estudiante seleccionado al azar y supongamos que Y tiene la siguiente distribución

y	1	2	3	4
p(y)	0.01	0.19	0.35	0.45

a) Calcular E(Y), V(Y) y σ_Y .
b) Suponga que el instructor tarda $\sqrt{Y}$ minutos calificando un trabajo que consiste en Y páginas. ¿Cuál es la cantidad esperada de tiempo (E($\sqrt{Y}$)) empleada en calificar un trabajo seleccionado al azar?

8) Una compañía proveedora de productos químicos tiene actualmente en existencia 100 libras de cierto producto, que vende a clientes en lotes de 5 libras. Sea X = número de lotes ordenados por un cliente seleccionado al azar, y suponga que X tiene la siguiente distribución

x	1	2	3	4
p(x)	0.2	0.4	0.3	0.1

a)Calcular E(X) y V(X).

b) Calcular el número esperado de libras sobrantes después de embarcar el pedido del siguiente cliente, y la varianza del número de libras restantes.

3.4- Variables aleatorias discretas importantes

Distribución binomial

Sea ε un experimento aleatorio. Sea A un evento asociado a ε y anotamos $P(A)=p$.

Supongamos un experimento aleatorio ε_0 que cumple los siguientes requisitos:

1- se realizan ***n*** repeticiones ***independientes*** de ε , donde n se fija de antemano.
2- las repeticiones son idénticas, y en cada repetición de ε observamos ***si ocurre A*** o ***no ocurre A*** (cuando *A* ocurre se dice que se obtuvo un "éxito", caso contrario se obtuvo un "fracaso")
3- la probabilidad de éxito es constante de una repetición a otra de ε , y es igual a *p*

Se dice entonces que ε_0 es un ***experimento binomial***

Ejemplos:

1- Se tira una moneda 4 veces en forma sucesiva e independiente, y observamos en cada tiro si sale cara o no sale cara.
Entonces este es un experimento binomial pues:
ε sería el experimento "tirar una moneda"
A sería el evento "sale cara"
ε se repite en forma sucesiva e independiente *n = 4* veces
$P(A)=p$ es la misma en cada tiro.
2- Se tiene una urna con 15 bolillas blancas y 5 verdes. Se extraen al azar ***con reemplazo*** tres bolillas y se observa si la bolilla extraída es blanca.
Entonces este es un experimento binomial pues:
ε sería el experimento "extraer al azar una bolilla de la urna"
A sería el evento "se extrae bolilla blanca"
ε se repite en forma sucesiva e independiente *n = 3* veces
$P(A)=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$ es la misma en cada extracción.
3- Si en el ejemplo anterior se extraen las bolillas ***sin reemplazo*** entonces el experimento no es bino-
mial, pues ***falla la independencia***:

Si anotamos A_i :"se extrae bolilla blanca en la $i-$ésima extracción", entonces

$$P(A_1)=\frac{15}{20} \quad ; \quad P(A_2)=P(A_2/A_1)P(A_1)+P(A_2/A_1^{C})P(A_1^{C})=\frac{14}{19}\times\frac{15}{20}+\frac{15}{19}\times\frac{5}{20}=\frac{15}{20}$$

Pero $P(A_2)=\dfrac{15}{20}\neq P(A_2/A_1)=\dfrac{14}{19}$ por lo tanto las extracciones no son independientes

Observación: si en la urna hubiese 1500 bolillas blancas y 500 verdes y se extraen dos bolillas al azar sin reemplazo, entonces

$$P(A_2)=\frac{15}{20}=0.75\approx P(A_2/A_1)=\frac{1499}{1999}=0.74987$$

Por lo tanto en estas condiciones podemos asumir que el experimento es binomial

La variable aleatoria binomial y su distribución

En la mayoría de los experimentos binomiales, interesa el número total de éxitos, más que saber exactamente cuáles repeticiones produjeron los éxitos

Sea la v.a. *X*: "número de éxitos en las *n* repeticiones de ε"

Entonces se dice que X es una v.a. binomial

Veamos cuál es la distribución de probabilidad de *X*, para esto primero tomamos un caso concreto: el ejemplo 1 anterior en el que se tira una moneda 4 veces. Supongamos que la probabilidad de cara es ¾

Aquí el rango de *X* sería $R_X = \{0,1,2,3,4\}$

Para facilitar la notación escribimos A_i :"sale cara en el $i-$ésimo tiro" $i = 1,2,3,4$

Por lo tanto

$$P(X=0) = P\left(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C\right) = P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3^C)P(A_4^C) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

por independencia

Para calcular la $P(X=1)$ pensamos que hay cuatro casos posibles en los que se puede obtener exactamente una cara, que la cara salga en el 1º tiro, o en el 2º o en el 3º o en el 4º tiro. Notar que tenemos cuatro casos y eso ***es igual a la cantidad de formas en que podemos elegir entre los 4 tiros uno de ellos en el cual sale cara, es decir tenemos*** $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$ ***casos diferentes.***

$$P(X=1) =$$
$$= P\left(A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C\right) + P\left(A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C\right) + P\left(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C\right) +$$
$$+ P\left(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4\right)$$

Cada término es igual a $p(1-p)^3$ por lo tanto $P(X=1) = 4p(1-p)^3$

Análogamente, para calcular $P(X=2)$ tenemos $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ casos en los que salen exactamente dos caras, por lo tanto

$$P(X=2) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C\right) + P\left(A_1 \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C\right) + \ldots\ldots = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$$

Pensando de la misma forma los otros casos se llega a

$$P(X=3) = \binom{4}{3} p^3 (1-p) \quad ; \quad P(X=4) = p^4$$

En general con un argumento análogo tenemos que $R_X = \{0,1,2,\ldots,n\}$ y

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k 1-p)^{n-k} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n$$

<u>Notación</u>: indicamos que *X* es una v.a. binomial ***con parámetros n y p*** con el símbolo $X \sim B(n,p)$

Dado que los números $P(X=k)$ corresponden a la distribución de una v.a., automáticamente cumplen que $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=1$

De todas formas se podría hacer una verificación algebraica utilizando la fórmula del binomio de Newton

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p^{k}(1-p)^{n-k}=\left(p+(1-p)\right)^{n}=1$$

Ejemplos:

1- En el ejemplo anterior en el que se tira una moneda 4 veces, calcular la probabilidad de obtener:
   a) exactamente una cara
   b) al menos una cara
   c) a lo sumo una cara

Solución:

a) tenemos que la v.a. X: "número de caras obtenido" es $B(4,0.25)$

se pide $P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3}=4\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{3}=0.421875$

b) la probabilidad de obtener ***al menos una cara*** es

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}$$

Pero más fácil es hacer

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-0}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{4}=1-0.421875=0.578125$$

c) la probabilidad de obtener ***a lo sumo una cara*** es

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-0}+\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-1}=0.84375$$

Observación: si $X\sim B(n,p)$ para calcular $P(X\leq k)$ en general se debe hacer

$$P(X\leq k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)=P(X=0)+P(X=1)+\ldots\ldots+P(X=k)$$

Notar que $P(X\leq k)$ ***es la F.d.a. de X evaluada en k, es decir*** $F(k)=P(X\leq k)$

Existen tablas de la función de distribución acumulada de la binomial para diferentes valores de *n* y *p*

Consultando estas tablas se puede obtener directamente el resultado del inciso c) buscando para *n =4* y *p = 0.25*

Además consultando las tablas podemos evaluar $P(X=k)$ haciendo

$$P(X=k)=F(k)-F(k-1)\qquad k=1,2,\ldots,n$$

2- Supongamos que el 20% de todos los ejemplares de un texto en particular fallan en una prueba de resistencia a la encuadernación. Se seleccionan 15 ejemplares al azar.

Sea la v.a. X: "número de ejemplares que fallan en la prueba entre los 15 seleccionados"

a) ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo 8 fallen en la prueba?

b) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 8 fallen en la prueba?

c) ¿cuál es la probabilidad de que al menos 8 fallen en la prueba?

Solución:

a) Tenemos que $X \sim B(15, 0.2)$

$$P(X \le 8) = \sum_{k=0}^{8} P(X = k) = F(8) = 0.999$$

por tabla de la F.d.a.

b) $P(X = 8) = F(8) - F(7) = 0.999 - 0.996 = 0.003$

por tabla de la F.d.a.

c) $P(X \ge 8) = 1 - P(X \le 7) = 1 - F(7) = 1 - 0.996 = 0.004$

por tabla de la F.d.a.

Observaciones:

1- Si $X \sim B(1, p)$ entonces la v.a. X toma sólo dos valores 0 y 1 con probabilidades p y 1-p es decir

podemos escribir

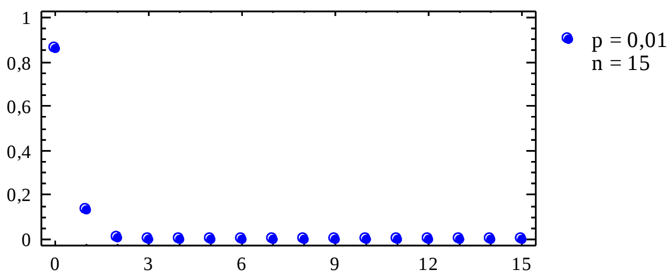
$$X = \begin{cases} 1 & \text{si al ejecutar } \varepsilon \text{ ocurre éxito} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} P(X = 1) = P(A) = p \\ P(X = 0) = P(A^C) = 1 - p \end{array}$$

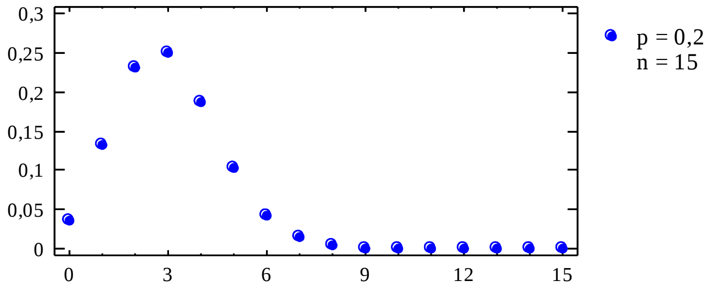
En este caso se dice que X tiene distribución de Bernoulli

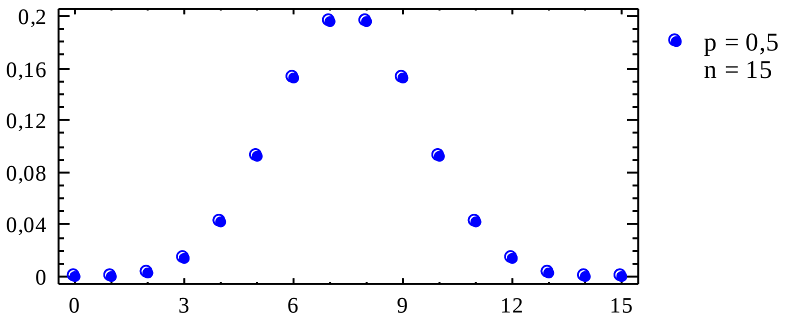
En el caso de ser $X \sim B(n, p)$ se dice que se tienen ***"n ensayos de Bernoulli"***

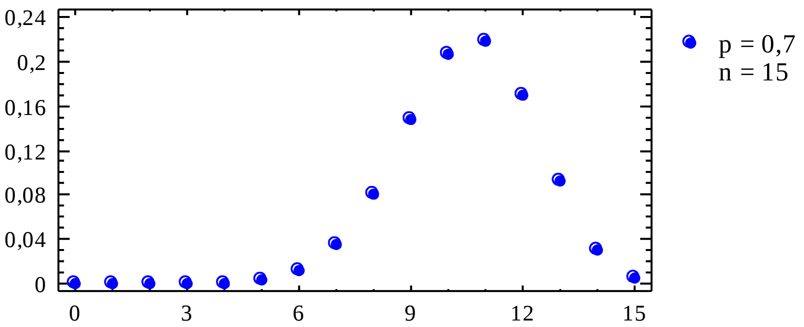
2- A continuación se muestra cómo varía la forma de la distribución a medida que p aumenta manteniendo n fijo en 15. Se grafica la distribución de frecuencia para p = 0.01; 0.2, 0.5, 0.7 y 0.995.

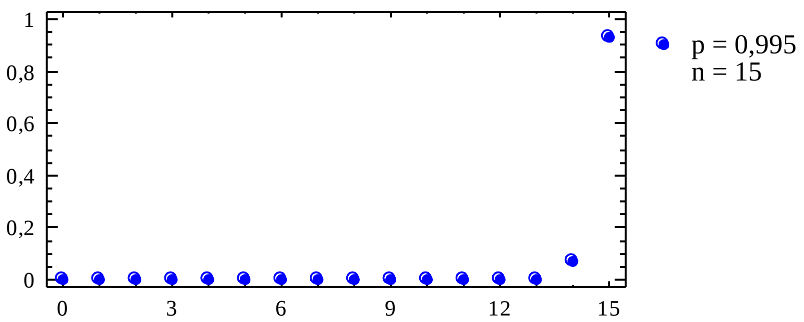
Observar que para $p = 0.5$ la distribución de frecuencia es simétrica.




0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
3
6
9
12
15
p = 0,2
n = 15


0,2
0,16
0,12
0,08
0,04
0
0
3
6
9
12
15
p = 0,5
n = 15


0,24
0,2
0,16
0,12
0,08
0,04
0
0
3
6
9
12
15
p = 0,7
n = 15


1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
3
6
9
12
15
p = 0,995
n = 15

Esperanza y varianza

Sea $X \sim B(n, p)$, entonces $E(X) = np$ y $V(X) = np(1-p)$

Dem.)
Aplicamos la definición:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kp(k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

El primer término es cero, por lo tanto podemos comenzar la suma en $k=1$:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ponemos todo en términos de k-1:

$$E(X) = \sum_{(k-1)=0}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} pp^{k-1}(1-p)^{[(n-1)-(k-1)]}$$

Sacamos fuera de la suma n y p que no dependen del índice k y hacemos el cambio de índice: $(k-1) \rightarrow s$:

$$E(X) = np\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{s![(n-1)-s]!} p^s (1-p)^{[(n-1)-s]} = np\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} p^s (1-p)^{[(n-1)-s]}$$

Recordando el desarrollo del binomio de Newton

$(a+b)^r = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{r}{s} a^r b^{[r-s]}$, tenemos (con r=n-1):

$$E(X) = np[p + (1-p)]^{n-1} = np[1]^{n-1} = np$$

Veamos el cálculo de la varianza

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Luego:

$V(X) = E(X^2) - [np]^2$. Nos queda calcular $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2.p(k) = \sum_{k=0}^{n} k^2.\binom{n}{k}.p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2.\frac{n!}{k!(n-k)!}.p^k (1-p)^{n-k} .$$

Para calcular esta suma tratamos de llevarla a la forma del desarrollo de un binomio de Newton. Como el primer término es cero comenzamos a sumar desde k=1. Además simplificamos k en el numerador con el factor k en $k!$ del denominador:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k.\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k.\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.p^k (1-p)^{n-k} .$$

Separamos en dos sumas:

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[1+(k-1)\right].\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{(k-1)=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!}.p^{(k-1)}(1-p)^{\left[(n-k)-(k-1)\right]}+$$

$$+n(n-1)p^2\sum_{(k-2)=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(k-1)!\left[(n-2)-(k-2)\right]!}.p^{(k-2)}(1-p)^{\left[(n-2)-(k-2)\right]}$$

Esto es:

$$E\left(X^2\right)=n.p\sum_{s=0}^{n-1}k.\binom{n-1}{s}.p^s(1-p)^{\left[(n-1)-s\right]}+n.(n-1)p^2\sum_{r=0}^{n-2}k.\binom{n-2}{r}.p^r(1-p)^{\left[(n-2)-r\right]}$$

Las sumas corresponden al desarrollo de un binomio de Newton:

$E\left(X^2\right)=np\left[p+(1-p)\right]^{n-1}+n(n-1)p^2\left[p+(1-p)\right]^{n-2}=np[1]^{n-1}+n(n-1)p^2[1]^{n-2}$, es decir

$E\left(X^2\right)=np+n(n-1)p^2$. Entonces:

$V(X)=E\left(X^2\right)-[np]^2=np+n(n-1)p^2-[np]^2=np-np^2$ o sea:

$V(X)=np(1-p)$

Distribución geométrica

Sea ε un experimento aleatorio. Sea *A* un evento asociado a ε y anotamos $P(A)=p$.

Supongamos un experimento aleatorio ε_0 que cumple los siguientes requisitos:

1- se realizan repeticiones independientes de ε , hasta que ocurre A por primera vez inclusive.
2- las repeticiones son idénticas, y en cada repetición de ε observamos ***si ocurre A*** o ***no ocurre A*** (cuando *A* ocurre se dice que se obtuvo un “éxito”, caso contrario se obtuvo un “fracaso”)
3- la probabilidad de éxito es constante de una repetición a otra de ε , y es igual a *p*

Sea la v.a. *X*: “número de repeticiones de ε hasta que ocurre *A* por primera vez inclusive”
Veamos cuál es la distribución de probabilidad de X
El rango es el conjunto $R_X=\{1,2,3,....\}=N$
Además si anotamos A_i :"ocurre A en la $i-$ésima repetición de ε" , entonces

$$P(X=k)=P(A_1^C\cap A_2^C\cap\ldots\cap A_{k-1}^C\cap A_k)=P(A_1^C)P)(A_2^C)\ldots P(A_{k-1}^C)P(A_k)=(1-p)^{k-1}p$$

por independencia

En consecuencia

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \qquad k=1,2,.....$$

<u>Notación</u>: $X\sim G(p)$

Para verificar que $\sum_{k=1}^{n} P(X=k)=1$ recordar que $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \dfrac{1}{1-a}$ si $|a|<1$

$$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p = p\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p\,\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

<u>Observaciones:</u>

1- $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ y $P(X=k+1)=(1-p)^k p$

Es decir $P(X=k+1)=(1-p)^{k-1}p(1-p)=P(X=k)(1-p)$ $\forall k=1,2,.....$

Podemos interpretar que para cada *k*, los $a_k = P(X=k)$ son los términos de una sucesión geométrica con razón *1-p* y primer término $a_1 = p$

2- La F.d.a. sería

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{k=1}^{[x]} P(X=k)$$

donde $[x]$ indica parte entera de *x*

Si *x* es un entero positivo entonces recordando que la suma de los *n* primeros términos de una sucesión geométrica con razón r y término general $a_k = pr^{k-1}$ es $\sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$ tenemos que

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{k=1}^{[x]} P(X=k)=\frac{p\left(1-r^{[x]}\right)}{1-r}=\frac{p\left(1-(1-p)^{[x]}\right)}{1-(1-p)}=1-(1-p)^{[x]}$$

$$r=1-p$$

Por lo tanto

$$F(x)=\begin{cases}1-(1-p)^{[x]} & \text{si } x\ge 1\\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases}$$

3- Una variante en la definición de distribución geométrica es definir la v.a. *Y*: "***número de fracasos*** hasta el primer éxito", en este caso $R_Y=\{0,1,2,....\}$, es decir se incluye al cero.

La distribución de probabilidad o frecuencia sería en este caso

$$P(Y=k)=(1-p)^k p \qquad k=0,1,2,.....$$

Notar que la relación entre entre X e Y sería: $X=Y+1$.

Es decir si adoptamos esta última definición ***no incluimos*** la repetición del experimento en el cual ocurre el primer éxito.

Ejemplos:

1- La probabilidad de que una computadora que corre cierto sistema operativo se descomponga en determinado día es de 0.1. Determinar la probabilidad de que la máquina se descomponga por primera vez en el duodécimo día, después de la instalación del sistema operativo

Solución:
Definimos la v.a. X: "número de días hasta que la computadora se descompone por primera vez"
Entonces $X \sim G(0.1)$
Se pide calcular la $P(X = 12)$
$P(X = 12) = (1-p)^{12-1} p = 0.9^{11} \times 0.1 = 0.031381$

2- Una prueba de resistencia a la soldadura consiste en poner carga en uniones soldadas hasta que se dé una ruptura. Para cierto tipo de soldadura, 80% de las rupturas ocurre en la propia soldadura, mientras que otro 20% se da en las vigas. Se prueba cierto número de soldaduras.
Sea la v.a. X: "número de pruebas hasta que se produce la ruptura de la viga"
¿Qué distribución tiene *X*?. ¿Cuál es la probabilidad que en la tercera prueba se produzca la primera ruptura de la viga?

Solución:
Cada prueba es un ***"ensayo de Bernoulli"***, con un éxito definido como la ruptura de una viga. Por lo tanto, la probabilidad de éxito es $p = 0.2$.
La v.a. *X* tiene una distribución geométrica con parámetro $p = 0.2$ es decir $X \sim G(0.2)$
Para calcular la probabilidad pedida hacemos $P(X = 3) = (1-p)^{3-1} p = 0.8^2 \times 0.2 = 0.128$

Esperanza y varianza

$$\boxed{\text{Sea } X \sim G(p) \text{ entonces } E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Dem.) Llamamos $1 - p = q$
Planteamos

$$\sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} =$$

Notar que $\frac{d}{dq}\left(q^k\right) = kq^{k-1}$, por lo tanto como $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ si $|a| < 1$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}\left(q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \qquad \therefore\ E(X) = \frac{1}{p}$$

Calculamos ahora la varianza

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ donde $\mu = E(X) = \dfrac{1}{p}$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1+1)p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1}$$

Pero

$$p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = pq\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2}\left(q^k\right) = pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{q}{1-q}\right) =$$
$$= pq\frac{2}{(1-q)^3} = q\frac{2}{p^2}$$

Y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = \frac{1}{p}$

Por lo tanto

$$V(X) = E(X^2) - \frac{1}{p^2} = q\frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{2(1-p) + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Distribución binomial negativa

La distribución binomial negativa constituye una extensión de la distribución geométrica.
Sea *r* un entero positivo. y *A* un evento con $P(A) = p$.

Sea la v.a. *X*: "número de repeticiones de hasta que ocurre *A* por *r*-ésima vez, incluyendo la r-ésima vez que ocurre *A*"

Veamos cuál es la distribución de probabilidad de X
El rango es el conjunto $R_X = \{r, r+1, r+2, r+3, ...\}$
Para obtener una expresión genérica de la $P(X = k)$, notar que si en el *k*-ésimo ensayo ocurre éxito por *r*-ésima vez, entonces en los *k-1* primeros ensayos ocurrieron *r-1* éxitos. Si anotamos *B*: " en los primeros *k-1* ensayos ocurran *r-1* éxitos", entonces

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \qquad k = r, r+1, r+2, ...$$

Notación: $X \sim BN(r, p)$

Ejemplo:

En una prueba de fuerza de soldadura, 80% de las pruebas da como resultado ruptura de soldadura, mientras que otro 20% da ruptura de la viga. Sea la v.a. *X*:"número de pruebas hasta la tercera ruptura de la viga inclusive". ¿Cuál es la distribución de *X*?. Determinar la $P(X = 8)$

Solución:
Tenemos que $X \sim BN(3,\ 0.2)$

Por lo tanto $P(X=8)=\binom{8-1}{3-1}p^3(1-p)^{8-3}=\binom{7}{2}0.2^3\times 0.8^5=0.05505$

Observación: la distribución geométrica puede verse como un caso particular de la distribución binomial negativa con $r=1$

Esperanza y varianza

Si $X \sim BN(r,p)$ entonces $E(X)=\dfrac{r}{p}$ y $V(X)=\dfrac{r(1-p)}{p^2}$

Distribución de Poisson

Una v.a. X con rango $R_X=\{0,1,2,....\}$ se dice tener ***distribución de Poisson con parámetro*** λ, si para algún $\lambda>0$

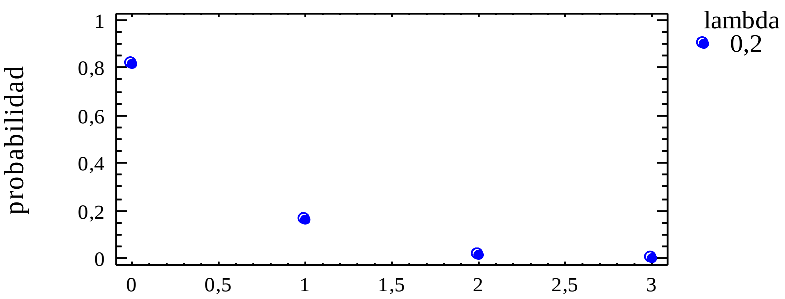
$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad k=0,1,2,.....$$

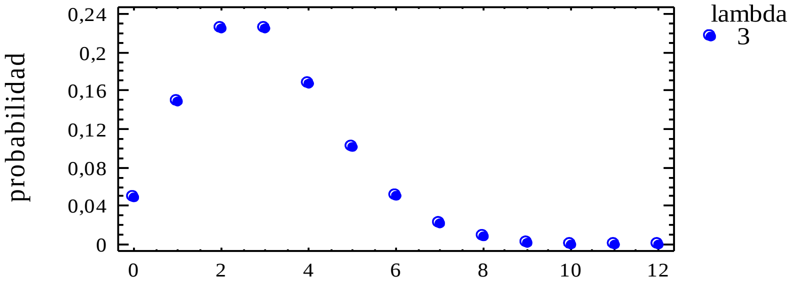
Es fácil verificar que $\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=1$ usando el hecho que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}$

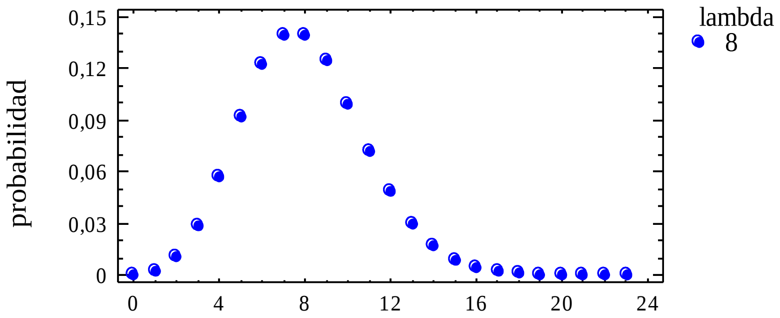
$$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

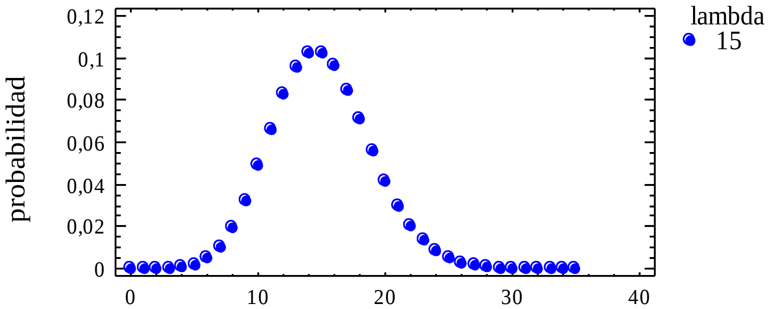
En los siguientes gráficos se ve como varía la forma de la distribución con los valores de λ

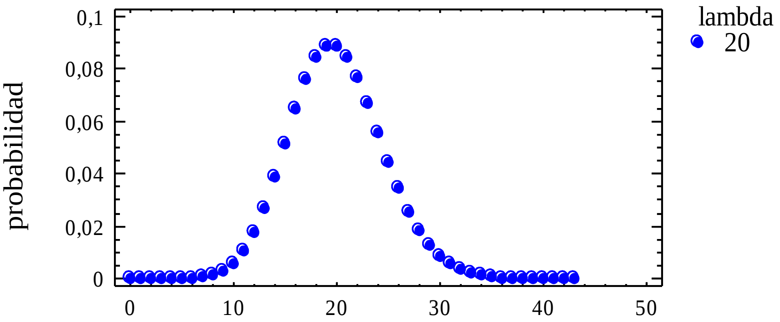
Notar que para valores de λ "pequeños" la distribución es asimétrica, a medida que λ aumenta, la distribución tiende a ser cada vez más simétrica

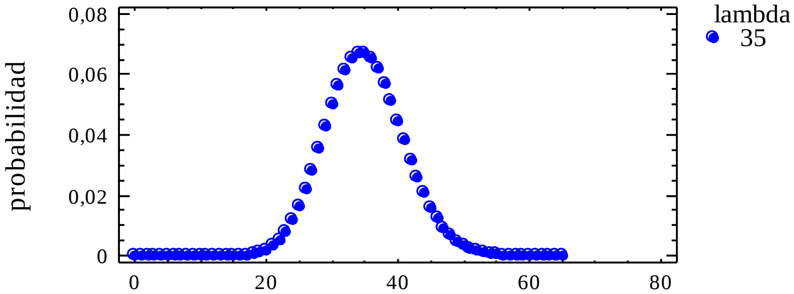



probabilidad
0,24
0,2
0,16
0,12
0,08
0,04
0
0
2
4
6
8
10
12
lambda
3


probabilidad
0,15
0,12
0,09
0,06
0,03
0
0
4
8
12
16
20
24
lambda
8


probabilidad
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
0
10
20
30
40
lambda
15





Ejemplo:

Considere escribir en un disco de computadora y luego enviar el escrito por un certificador que cuenta el número de pulsos faltantes. Suponga que este número X tiene una distribución de Poisson con parámetro igual a 0.2

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un disco tenga exactamente un pulso faltante?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un disco tenga al menos dos pulsos faltantes?
c) Si dos discos se seleccionan independientemente, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno contenga
algún pulso faltante?

Solución:
a) Sea la v.a. X: "número de pulsos faltantes en un disco"
Entonces $X \sim P(0.2)$

Se pide $P(X=1)=e^{-0.2}\dfrac{0.2^1}{1!}=0.163746$

b) Siendo X como en a) se pide calcular $P(X \geq 2)$

$$P(X \geq 2)=1-P(X \leq 1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-e^{-0.2}\frac{0.2^0}{0!}-e^{-0.2}\frac{0.2^1}{1!}=0.01752$$

c) Sea la v.a. Y: "número de discos sin pulsos faltantes"
Entonces $Y \sim B(2, p)$ donde $p=P(X=0)=e^{-0.2}$
Por lo tanto se pide calcular $P(Y=2)$

$$P(Y=2)=\binom{2}{2}p^2(1-p)^0=p^2=\left(e^{-0.2}\right)^2=0.67032$$

Esperanza y varianza

Si $X \sim P(\lambda)$ entonces $E(X) = \lambda$ y $V(X) = \lambda$

Dem.)

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ donde $\mu = E(X) = \lambda$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{k!} =$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda^2 + \lambda$$

Por lo tanto

$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Practica

Distribución binomial, distribución geométrica, distribución binomial negativa, distribución de Poisson.

1) En un proceso de producción se examinan lotes de 50 resortes helicoidales para determinar si cumplen con los requerimientos del cliente. El número promedio de resortes helicoidales que no cumplen con los requerimientos es de 5 por lote. Suponga que el número de resortes que no cumplen con los requerimientos en un lote, denotado por X, es una v.a. binomial.
   a) ¿Qué valor tienen *n* y *p*?
   b) Calcular $P(X \leq 2)$
   c) Calcular $P(X \geq 49)$

2) Una persona pasa todas las mañanas a la misma hora por un cruce donde el semáforo está en verde el 20% de las veces. Suponga que cada mañana representa un ensayo independiente.
   a) En cinco mañanas consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de que el semáforo esté en verde exactamente un día?
   b) En 20 mañanas, ¿cuál es la probabilidad de que el semáforo esté en verde exactamente 4 días?
   c) En 20 mañanas, ¿cuál es la probabilidad de que el semáforo esté en verde mas de 4 días?
   d) En 20 mañanas, ¿cuál es el número esperado de veces que el semáforo estará en verde?.

3) En referencia al ejercicio 2):
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera mañana en que la luz del semáforo se encuentre en verde sea la cuarta mañana desde el inicio del experimento?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la luz del semáforo no se encuentre en verde durante 10 mañanas consecutivas?

4) Suponga que cada una de las llamadas que hace una persona a una estación de radio muy popular tiene una probabilidad de 0.02 de que la línea no esté ocupada. Suponga que las llamadas son independientes.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primer llamada que entre sea la décima que realiza la persona?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario llamar mas de 5 veces para hallar desocupada la línea?
   d) ¿Cuál es el número promedio de llamadas que deben hacerse para hallar desocupada la línea?.

5) La probabilidad de que la calibración de un transductor en un instrumento electrónico cumpla con las especificaciones del sistema de medición, es 0.6. Suponga que los intentos de calibración son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que se requieran como máximo 3 intentos para satisfacer las especificaciones del sistema de medición?

6) La escala electrónica de un proceso de llenado automático detiene la línea de producción después de haber detectado 3 paquetes con un peso menor que el especificado. Suponga que la

probabilidad de llenar un paquete con un peso menor es 0.001 y que cada operación de llenado es independiente.

a) ¿Cuál es el número promedio de operaciones de llenado antes de que se detenga la línea de producción?
b) ¿Cuál es la desviación estándar del número de operaciones de llenado antes de que se detenga la línea de producción?.

7) Un lote de 75 arandelas contiene cinco en las que la variabilidad en el espesor alrededor de la circunferencia de la arandela es inaceptable. Se toma una muestra al azar de 10 arandelas, sin reemplazo.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las arandelas inaceptables se encuentre en la muestra?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las arandelas inaceptables se encuentre en la muestra?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una de las arandelas inaceptables se encuentre en la muestra?
   d) ¿Cuál es el número promedio de arandelas inaceptables en la muestra?

8) Suponga que el número de clientes que entran en un banco en una hora es una v.a. Poisson, y que $P(X = 0) = 0.05$. Hallar la media y la varianza de X.

9) A menudo, el número de llamadas telefónicas que llegan a un conmutador se modela como una v.a. Poisson. Suponga que, en promedio, se reciben 10 llamadas por hora.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 5 llamadas en una hora?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban 3 o menos llamadas en una hora?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban exactamente 15 llamadas en dos horas?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 5 llamadas en 30 minutos?

10) Se supone que el número de defectos en los rollos de tela de cierta industria textil es una v.a. Poisson con una media de 0.1 defectos por metro cuadrado.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de tener dos defectos en un metro cuadrado de tela?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de tener un defecto en 10 metros cuadrados de tela?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que no halla defectos en 20 metros cuadrados de tela?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que existan al menos 2 defectos en 10 metros cuadrados de tela?

3.5 – <u>Variables aleatorias continuas</u>

En la sección anterior se consideraron variables aleatorias discretas, o sea variables aleatorias cuyo rango es un conjunto finito o infinito numerable. Pero hay variables aleatorias cuyo rango son todos los números reales de un intervalo dado, (es decir es un conjunto infinito no numerable). Ejemplos de variables continuas podrían ser

X: "tiempo que tarda en llegar un colectivo a una parada"
Y: "tiempo de vida de un fusible"
Como ahora los valores de una v.a. continua no son contables no se puede hablar del *i*-ésimo valor de la v.a. *X* y por lo tanto $p(x_i) = P(X = x_i)$ pierde su significado. Lo que se hace es sustituir la función $p(x)$ definida sólo para $x_1, x_2, \ldots$, por una función $f(x)$ definida para todos los valores *x* del rango de *X*. Por lo tanto se da la siguiente definición de v.a. continua

Sea *X* una v.a.. Decimos que es ***continua*** si existe una función no negativa *f* , definida sobre todos los reales $x \in (-\infty, \infty)$, tal que para cualquier conjunto *B* de números reales

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

O sea que la probabilidad de que *X* tome valores en *B* se obtiene al integrar la función *f* sobre el conjunto *B*.

A la función f la llamamos función densidad de probabilidad (f.d.p.).

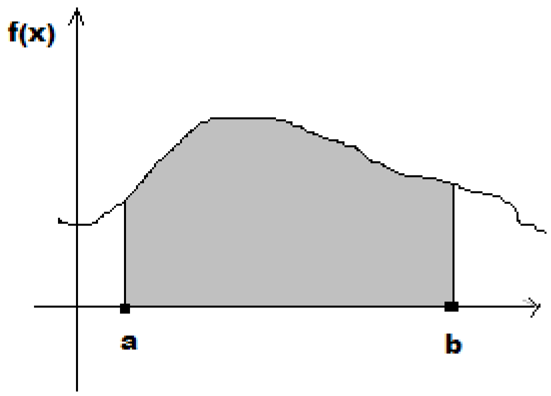
<u>Observaciones:</u>

1- Como *X* debe tomar algún valor real, entonces debe cumplirse que

$$1 = P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

2- Si *B* es el intervalo real $[a,b] = \{x \in R;\ a \le x \le b\}$ entonces

$$P(X \in B) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$



Notar que en este caso la probabilidad de que *X* tome valores en el intervalo $[a,b]$ es ***el área bajo f entre a y b***

3- Si en la observación anterior $a = b$ entonces

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Es decir la probabilidad que una v.a. continua tome algún valor fijado es cero. Por lo tanto, para una v.a. continua

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Función de distribución acumulada

Sea X una v.a. continua. Se define la ***función de distribución acumulada de X*** (abreviamos F.d.a de *X*) como

$$F(x) = P(X \le x) \qquad -\infty < x < \infty$$

Si X tiene f.d.p. f(x) entonces

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad -\infty < x < \infty$$

Además

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Observaciones:

1- Si *X* es una v.a. con *f.d.p.* *f(x)* y función de distribución acumulada $F(x)$ entonces

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right) = f(x) \quad \text{donde } F(x) \text{ sea derivable}$$

Es decir, se puede obtener la función de densidad de X a partir de su F.d.a.

2- Como en el caso discreto vale

Si $a < b$ entonces $F(a) \le F(b)$ (es decir *F(x)* es una función creciente)

Y además se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-\infty} f(t)dt = 0$$

Ejemplos:

1- Supongamos que *X* es una v.a. continua con *f.d.p.* dada por

$$f(x) = \begin{cases} C\left(4x - 2x^2\right) & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el valor de C?

b) Hallar $P(X > 1)$

c) Hallar la F.d.a. de *X*

Solución:

a) Por lo dicho en la observación 1, se debe cumplir que $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, por lo tanto

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2} C\left(4x-2x^2\right)dx+\int_{2}^{\infty} 0dx=\int_{0}^{2} C\left(4x-2x^2\right)dx$$

Entonces

$$C\int_{0}^{2}\left(4x-2x^2\right)dx=C\left(4\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2}=C\,\frac{8}{3}=1$$

$$\therefore\quad C=\frac{3}{8}$$

Es útil hacer un gráfico de la densidad

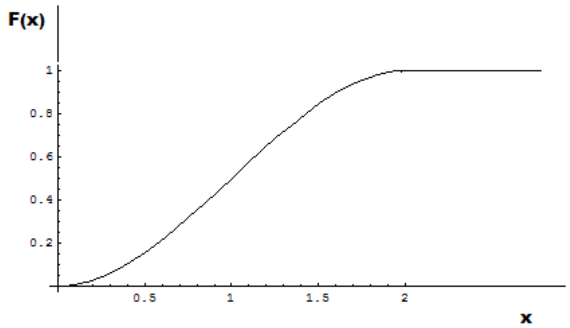
b) Para calcular la probabilidad que X sea mayor que 1, planteamos

$$P(X>1)==\int_{1}^{2}\frac{3}{8}\left(4x-2x^2\right)dx=\frac{1}{2}$$

c) Para calcular la F.d.a. notar que tenemos tres casos: $x<0$, $0\le x\le 2$ y $x>2$, por lo tanto

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si}\quad x<0 \\ \int_{0}^{x}\frac{3}{8}\left(4t-2t^2\right)dt & \text{si}\quad 0\le x\le 2 \\ 1 & \text{si}\quad x>2 \end{cases} \qquad \text{es decir} \qquad F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si}\quad x<0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1-\frac{x}{3}\right) & \text{si}\quad 0\le x\le 2 \\ 1 & \text{si}\quad x>2 \end{cases}$$

El gráfico de la F.d.a. es



Se podría haber calculado la $P(X>1)$ a partir de la F.d.a. de la siguiente forma

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F(1)=1-\frac{3}{4}1^2\left(1-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

2- El tiempo de vida en horas que una computadora funciona antes de descomponerse es una v.a. continua con *f.d.p.* dada por

$$f(x)=\begin{cases}0.01e^{-0.01x} & \text{si} \quad x\geq 0\\ 0 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

a) hallar la F.d.a. de X

b) ¿Cuál es la probabilidad que la computadora funcione entre 50 y 150 horas antes de descomponerse?

c) ¿Cuál es la probabilidad que una computadora se descomponga antes de registrar 100 horas de uso?

d) ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 2 de 5 computadoras se descompongan antes de registrar 100 horas de uso?. Asumir que las computadoras trabajan en forma independiente.

Solución:

a) Hacemos un gráfico de la densidad y entonces observamos claramente que hay dos casos a considerar para calcular la F.d.a.: $x\geq 0$ y $x<0$. Si $x<0$ entonces

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{0}0dx=0$$

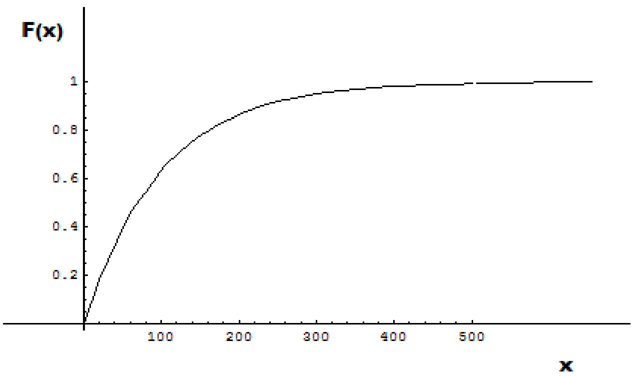
Y si $x\geq 0$ tenemos

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}0.01e^{-0.01t}dt=$$

$$=0+0.01\left(\frac{e^{-0.01t}}{-0.01}\right)\Bigg|_{0}^{x}=1-e^{-0.01x}$$

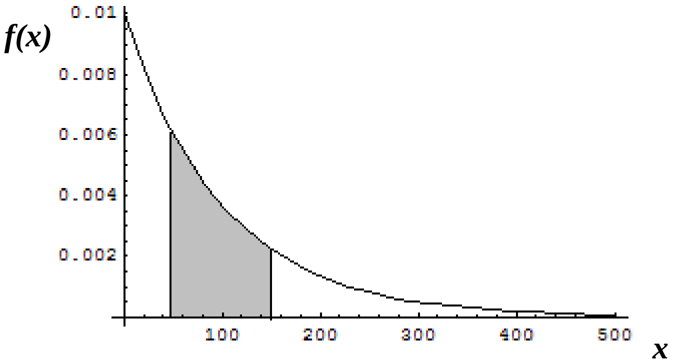
$$\therefore \quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-0.01x} & \text{si} \quad x\geq 0\\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases}$$

La gráfica de la F.d.a. es



Se pide calcular $P(50\leq X\leq 150)$, lo hacemos con la F.d.a.:

$$P(50\leq X\leq 150)=F(150)-F(50)=e^{-0.01\times 50}-e^{-0.01\times 150}=0.3834$$



c) Hay que calcular $P(X < 100)$

$$P(X < 100) = F(100) = 1 - e^{-0.01 \times 100} = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$$

d) Podemos definir la v.a.

Y: "número de computadores entre 5 que se descomponen antes de las 100 horas de uso"

Entonces $Y \sim B(5,p)$ donde $p = P(X < 100)$

Por lo tanto hay que calcular

$$P(Y = 2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \frac{5!}{2!3!}\left(1 - e^{-1}\right)^2 \left(e^{-1}\right)^3 \approx 0.198937$$

3.6 – Esperanza de una variable aleatoria continua

Para una v.a. discreta la $E(X)$ se definió como la suma de los $x_i\, p(x_i)$. Si *X* es una v.a. continua con *f.d.p. f(x)*, se define $E(X)$ sustituyendo la sumatoria por integración y $p(x_i)$ por *f(x)*.

La esperanza de una v.a. continua *X* con *f.d.p. f(x)* se define como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Ejemplo:

Para ciertas muestras de minerales la proporción de impurezas por muestra, es una v.a. *X* con f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & \text{si } \ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Hallar la esperanza de *X*

Solución:

Se plantea

$$E(X) = \int_0^1 x\left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)dx = \left(\frac{3}{2}\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{24}$$

A menudo se desea calcular la esperanza de una función de *X*, *Y = h(X)*, esto se puede hacer hallando previamente la densidad de *Y* y luego calcular *E(Y)* aplicando la definición anterior.

Otra forma de calcular *E(Y)* sin hallar la densidad de *Y* está dada por el siguiente

Teorema: Si *X* es una v.a. continua con *f.d.p. f(x)* y *h(X)* es cualquier función de *X*, entonces

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$$

Dem.) sin demostración

Ejemplo: En el ejemplo anterior supongamos que el valor en dólares de cada muestra es $Y = h(X) = 5 - 0.5X$. Encontrar la esperanza de *Y*

Podemos hallar la esperanza de *Y* encontrando previamente su *f.d.p.*
Para esto se encuentra la *F.d.a.* de *Y* , para luego hallar la densidad de *Y* derivando la *F.d.a*
Anotamos $G(y)$ y $g(y)$ a la *F.d.a* de *Y* y a la densidad de *Y* respectivamente

$$G(y)=P(Y\le y)=P(5-0.5X\le y)=P\left(X\ge\frac{5-y}{0.5}\right)=1-P\left(X\le\frac{5-y}{0.5}\right)=1-F\left(\frac{5-y}{0.5}\right)$$

Donde $F(x)=P(X\le x)$

Entonces

$$g(y)=\frac{d}{dy}\left(1-F\left(\frac{5-y}{0.5}\right)\right)=-f\left(\frac{5-y}{0.5}\right)\left(-\frac{1}{0.5}\right)=f\left(\frac{5-y}{0.5}\right)\left(\frac{1}{0.5}\right)=$$

$$=\begin{cases}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{5-y}{0.5}\right)^2+\frac{5-y}{0.5}\right)\left(\frac{1}{0.5}\right) & \text{si} \quad 0<\frac{5-y}{0.5}<1\\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases}$$

O sea

$$g(y)=\begin{cases}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{5-y}{0.5}\right)^2+\frac{5-y}{0.5}\right)\left(\frac{1}{0.5}\right) & \text{si} \quad \frac{9}{2}<y<5\\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases}$$

Ahora calculamos la $E(Y)$

$$E(Y)=\int_{9/2}^{5} y\left(\frac{3}{2}\left(\frac{5-y}{0.5}\right)^2+\frac{5-y}{0.5}\right)\frac{1}{0.5}\,dy=\frac{223}{46}$$

Aplicando el teorema anterior los cálculos se reducen:

$$E(Y)=E(h(X))=\int_0^1 \underbrace{(5-0.5x)}_{h(x)}\underbrace{\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)}_{f(x)}dx=\frac{223}{46}$$

Notar que de la misma forma que en el caso discreto, si $h(x)=ax+b$, es decir si *h* es una función lineal, aplicando las propiedades de linealidad de la integral tenemos

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

En el ejemplo anterior se podía encontrar la esperanza de *Y* haciendo

$$E(Y)=E(h(X))=E(5-0.5X)=5-0.5E(X)=5-0.5\times\frac{17}{24}=\frac{223}{46}$$

<u>Varianza de una variable aleatoria continua</u>

Sea *X* una v.a. continua con *f.d.p. f(x)* y sea $E(X)=\mu$, entonces la varianza de *X* es

$$V(X)=\sigma_X^2=E\left[(X-\mu)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

La interpretación de la varianza de una v.a. continua es la misma que para el caso discreto.
Además sigue valiendo la igualdad

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2$$

Pues en la demostración hecha para el caso discreto si sustituyen las sumatorias por integrales.
Por la misma razón, también vale que

$$V(aX + b) = a^2 V(X) \qquad \text{y} \qquad \sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$$

<u>Ejemplo</u>:
Calculamos la varianza de $Y = 5 - 0.5X$

$$V(Y) = 0.5^2 V(X)$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - \left(\frac{17}{24}\right)^2$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)dx = \left(\frac{3}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{20}$$

$$\therefore \quad V(X) = \frac{11}{20} - \left(\frac{17}{24}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad V(Y) = 0.5^2\left(\frac{11}{20} - \left(\frac{17}{24}\right)^2\right) = \frac{139}{11520}$$

Práctica

Variables aleatorias continuas y distribuciones de probabilidad

1) Para cada una de las siguientes variables, decida qué modelo de v.a. es el mejor: discreto o continuo.
a) El tiempo transcurrido hasta que un proyectil regresa a la Tierra.
b) El volumen de gasolina que se pierde por evaporación durante el llenado del tanque de combustible.
c) El número de baches mayores de media pulgada en un tramo de 10 millas de una carretera
e)El peso de una pieza de plástico moldeada por inyección.
f) El número de moléculas en una muestra de gas.

2) Demuestre que las siguientes funciones son funciones de densidad de probabilidad (fdp) para algún valor de *k*, determine el valor de *k*.
a) $f(x) = kx^2, \quad 0 < x < 4$
b) $f(x) = k(1+2x), \qquad 0 < x < 2$
c) $f(x) = ke^{-x}, \qquad 0 < x$

3) La función de densidad de probabilidad del tiempo de falla (en horas) de un componente electrónico de una copiadora es $f(x) = \dfrac{e^{-x/1000}}{1000}$ para $x > 0$.
a)Calcular la probabilidad de que:
i) el componente tarde mas de 3000 horas en fallar.

ii) el componente falle en el lapso comprendido entre 1000 y 2000 horas.

iii) el componente falle antes de 1000 horas.
b) Calcular el número de horas en las que fallarán el 10% de todos los componentes.
c) Calcular la función de distribución acumulada (Fda.).
d) Utilice la Fda. para calcular la probabilidad de que un componente tarde mas de 3000 horas en fallar.

4) La fdp del peso neto en libras de un paquete de herbicida químico es

$$f(x) = 2 \qquad \text{para} \qquad 49.75 < x < 50.25 \quad \text{libras}$$

a) Calcular la probabilidad de que un paquete pese mas de 50 libras.
b) ¿Cuánto herbicida está contenido en el 90% de los paquetes?
c) Determinar la Fda.
d) Utilice la Fda para calcular la probabilidad de que un paquete pese menos de 50.1 libras.
e) Utilice la Fda para calcular la probabilidad de que un paquete pese entre 49.9 y 50.1 libras.

4) La función de densidad de probabilidad de la longitud de una bisagra para puertas es

$$f(x) = \begin{cases} 1.25 & \text{para } 74.6 < x < 75.4 \text{ milimetros} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Calcule lo siguiente:

a) P(X < 74.8)

b) P(X < 74.8 ó x > 75.2)

c) Si las especificaciones para este proceso son una longitud entre 74.7 y 75.3 milímetros, ¿cuál es la proporción de bisagras que cumple con las especificaciones?

d) Para cualquier *a* tal que 74.6 < *a* < *a*+0.02 < 75.4, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud de la bisagra esté entre *a* y *a*+0.02?

5) Sea X una v.a. continua con Fda. dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & .x < 0 \\ \frac{x}{4}\left[1 + \ln\left(\frac{4}{x}\right)\right] & ,0 < x < 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

(Este tipo de Fda. está sugerido en el artículo “Variability in Measured Bedload-Transport Rates”(*Water Resources Bull*., 1985,pp.39-48) como modelo para cierta variable hidrológica)

¿Cuál es:

a) P(X ≤ 1)?

b) P(1 ≤ X ≤ 3)?

c)Hallar la fdp.

6) El tiempo X (en segundos) que tarda un bibliotecario para localizar una ficha de un archivo de registros sobre libros prestados tiene una fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} e^{-x/20}, & x > 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Calcular:

a) P(X ≤ 30)

b) P(X >20)

c) P(20 < X ≤ 30)

d) ¿Para qué valor de t P(X < t) = 0.5? (t es la *mediana* de la distribución)

e) ¿Para qué valor de x, $f(x)$ es máxima (tal *x* es la *moda* de la distribución)

f) Hallar la Fda.

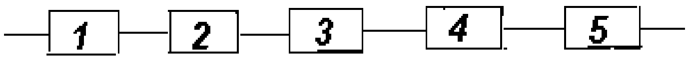
g) Derivar la Fda y verificar que coincide con $f(x)$.

7)La demanda semanal de gas propano (en miles de galones) de una distribuidora en particular es una v.a. X con fdp. dada por

$$f(x)=\begin{cases} 2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) \quad , & 1<x<2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

a) Calcular la Fda. de X. Derivar la Fda. y verificar que coincide con $f(x)$.
b) Calcular la mediana de la distribución.
c) Calcular los cuartiles de la distribución.

8) Un sistema consta de cinco componentes idénticos colocados en serie, como se muestra.



Tan pronto como falla un componente, falla todo el sistema. Suponga que cada componente tiene una duración que se puede considerar como una v.a. *X* con fdp dada por

$$f(x)=\begin{cases} 0.01e^{-0.01x}, & x>0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y que los componentes fallan independientemente uno de otro. Defina eventos
$A_i:$ el $\quad i-ésimo \quad componente \quad dura \quad por \quad lo \quad menos \quad x \quad horas$,
¿

por lo que A_i son eventos independientes. Sea *Y*: el tiempo en que falla el sistema, esto es la duración más breve, entre los cinco componentes

a) Escriba el evento $\{Y>y\}$ en función de $A_1, A_2, ...,A_5.$
b) Calcular P($Y>y$), utilizando a) y el hecho que $A_1, A_2, ...,A_5$ son independientes.
c) Obtener la Fda de *Y*, esto es F(*y*) = P($Y \le y$).
d) Obtener la fdp de *Y.*

9) Un ecologista desea marcar una región circular de muestreo de 10 m de radio. Sin embargo, el radio de la región resultante es en realidad una v.a. R con fdp:

$$f(r)=\begin{cases} \dfrac{3}{4}\left[1-(10-r)^2\right], & 9\le r\le 11 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

¿Cuál es el área esperada de la región circular resultante?

10) La demanda semanal de gas propano (en miles de galones) de una distribuidora particular es una v.a. con fdp:

$$f(x)=\begin{cases} 2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right), & 1\le x\le 2 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

a) Calcular E(X) y V(X).
b) Si 1500 galones están en existencia al principio de semana y no se recibe nuevo suministro durante la semana, ¿cuánto de los 1500 galones se espera que queden al fin de la semana?.

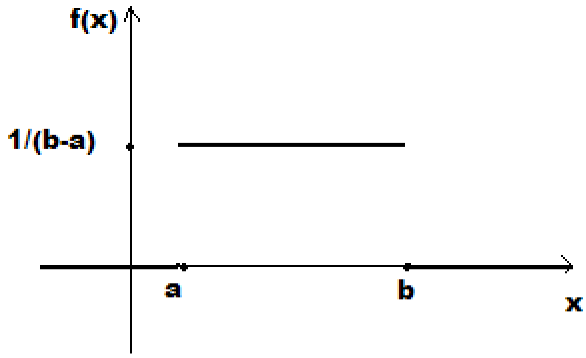
11) Si la temperatura a la que un cierto compuesto se funde es una variable aleatoria con valor medio de 120ºC y desviación estándar de 2ºC, ¿cuáles son la temperatura media y la desviación estándar medidas en ºF?.(Sugerencia: ºF = 1.8ºC+32).

3.7 - Variables aleatorias continuas importantes

Distribución uniforme

Una v.a. continua X se dice que tiene ***distribución uniforme en el intervalo*** $[a,b]$, con $a < b$, si tiene función de densidad de probabilidad dada por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } \ a\le x\le b \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$



La figura muestra la gráfica de la *f.d.p.*

Notación: $X \sim U[a,b]$

Es fácil verificar que *f(x)* es una *f.d.p.* pues $f(x)\ge 0$ para todo *x*, y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\,x\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}(b-a)=1$$

La F.d.a. para $a\le x\le b$ sería

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_a^x \frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}$$

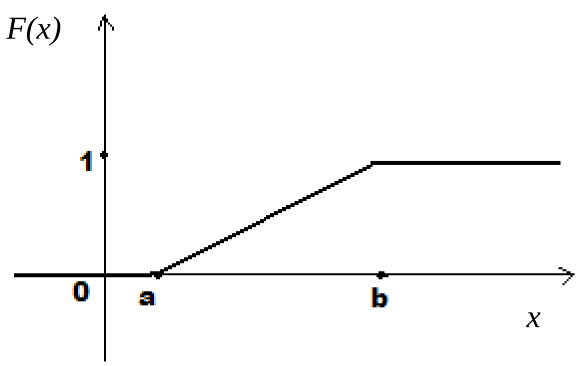
Para $x<a$, tenemos que $P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$

Y para $x>b$ tenemos que $P(X\le x)=\int_{-\infty}^{a} 0dt+\int_a^b \frac{1}{b-a}dt+\int_b^x 0dt=1$

Por lo tanto la F.d.a. es

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } \ x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } \ a\le x\le b \\ 1 & \text{si } \ x>b \end{cases}$$

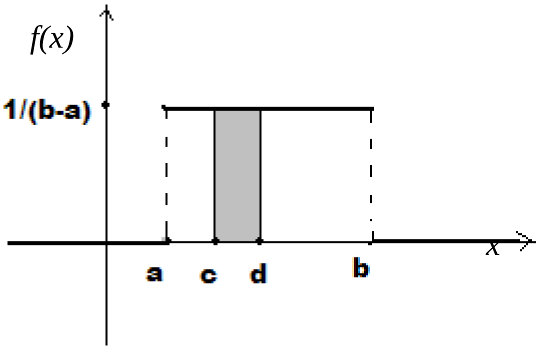
Y su gráfica es



Observación:

Si $X \sim U[a,b]$ y $a \le c < d \le b$, entonces

$$P(c \le X \le d) = F(d) - F(c) = \frac{d-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$$



Ejemplo:

Los colectivos de una determinada línea llegan a una parada en particular en intervalos de 15 minutos comenzando desde las 7 A.M. Esto es, ellos llegan a la parada a las 7, 7:15, 7:30, 7:45 y así siguiendo. Si un pasajero llega a la parada en un tiempo que se puede considerar una v.a. distribuida uniformemente entre 7 y 7:30, encontrar la probabilidad de que

a) el pasajero espere menos de 5 minutos al colectivo

b) el pasajero espere más de 10 minutos al colectivo

Solución:

Sea X: "tiempo en minutos desde las 7 hs en que el pasajero llega a la parada"

Entonces podemos considerar que $X \sim U[0,30]$

a) si el pasajero espera menos de 5 minutos al colectivo, entonces llega a la parada entre las 7:10 y 7:15 o entre las 7:25 y 7:30, entonces la probabilidad pedida es

$$P(10 \le X \le 15) + P(25 \le X \le 30) = \int_{10}^{15} \tfrac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \tfrac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

O también se puede plantear directamente

$$P(10 \le X \le 15) + P(25 \le X \le 30) = \frac{15-10}{30} + \frac{30-25}{30} = \frac{2 \times 5}{30} = \frac{1}{3}$$

b) Análogamente si debe esperar más de 10 minutos, deberá llegar entre las 7 y las 7:05 o entre las 7:15 y 7:20, por lo tanto la probabilidad pedida es

$$P(0 \le X \le 5) + P(15 \le X \le 20) = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{2 \times 5}{30} = \frac{1}{3}$$

Esperanza y varianza

Sea una X variable aleatoria continua distribuida uniformemente en el intervalo $[a,b]$, es decir $X \sim U[a,b]$. Entonces, $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ y $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Dem.)

Recordamos que la *f.d.p.* de una v.a. $X \sim U[a,b]$ es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Entonces:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Notar que (a+b)/2 representa el punto medio del intervalo $[a,b]$ (como es de esperar por el significado de la distribución y de la esperanza):
Calculamos ahora la varianza de X

Deseamos calcular $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, es decir

$V(X) = E(X^2) - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$. Debemos obtener $E(X^2)$:

$E(X^2) = \displaystyle\int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}.\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{b^2+b.a+a^2}{3}$. Entonces:

$$V(X) = \frac{b^2+b.a+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución normal o gaussiana

Sea X una v.a. Decimos que tiene distribución normal con parámetros μ y σ si su *f.d.p.* es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty \qquad (13)$$

Donde $\mu \in R$ y $\sigma > 0$

Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Para darse una idea de la forma de la gráfica notar que:

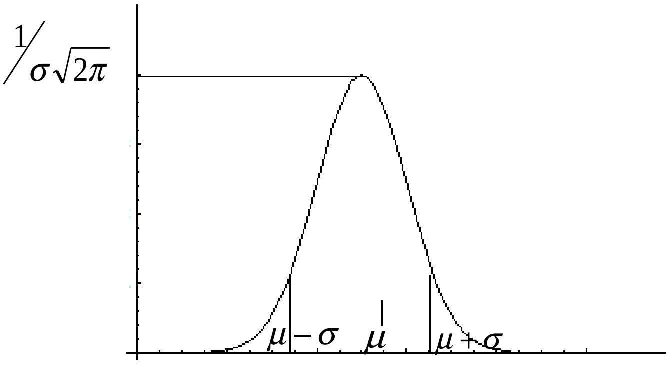
1- $f(x)$ es simétrica alrededor de μ, es decir $f(\mu+x) = f(\mu-x)$ para todo x

2- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (eje x asíntota horizontal)

3- Si planteamos $\dfrac{d}{dx}f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \mu$. Se pude verificar que en $x = \mu$ la función tiene un máximo absoluto, $f(\mu) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

4- Si planteamos $\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 0 \Rightarrow x = \mu \pm \sigma$. Se puede verificar que en $x = \mu - \sigma$ y en $x = \mu + \sigma$ la función tiene dos puntos de inflexión, y además en el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ la función es cóncava hacia abajo y fuera de ese intervalo es cóncava hacia arriba

La gráfica de $f(x)$ tiene forma de campana



Observación:

Cuando μ varía la gráfica de la función se ***traslada***, μ ***es un parámetro de posición***.

Cuando σ aumenta, la gráfica se "achata", cuando σ disminuye la gráfica se hace mas "puntiaguda", se dice que σ ***es un parámetro de escala***.

Se puede probar que f(x) es una *f.d.p.* es decir que

a) $f(x) \geq 0$ para todo x

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Que a) es cierta es obvio; para probar b) es necesario recurrir al cálculo en dos variables (no lo demostramos).

Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ entonces se dice que X tiene ***distribución normal estándar***. Se anota $X \sim N(0,1)$

En este caso la *f.d.p.* se simboliza con $\varphi(x)$, es decir

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

En este caso la gráfica de la densidad es simétrica con respecto al origen.
La *F.d.a.* de una v.a. normal estándar se anota $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

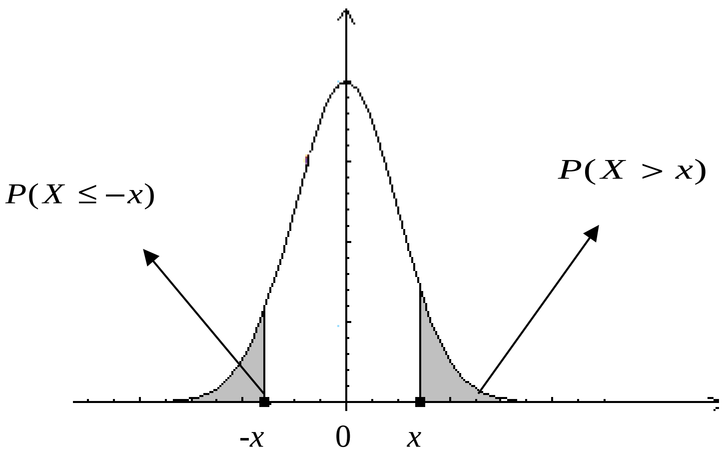
Esta integral no puede expresarse en términos de funciones elementales, por lo tanto se calcula $\Phi(x)$

Para valores específicos de *x* mediante una aproximación numérica.

Esto ya está hecho, existen tablas de la función de distribución acumulada de la normal estándar para valores de *x* que oscilan en general entre -4 y 4, pues para valores de *x* ***menores que -4***, $\Phi(x) \approx 0$, y para valores de *x* ***mayores que 4***, $\Phi(x) \approx 1$

Notar que como la $\varphi(x)$ es simétrica con respecto al origen entonces

$$\Phi(-x) = P(X \le -x) = P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - \Phi(x)$$



Por ejemplo, si $X \sim N(0,1)$ entonces utilizando la tabla de la *F.d.a.* de *X*

a) $P(X \le 1.26) = \Phi(1.26) = 0.89616$

b) $P(X > 1.26) = 1 - P(X \le 1.26) = 1 - \Phi(1.26) = 1 - 0.89616 = 0.10384$

c) $P(X > -1.37) = P(X \le 1.37) = \Phi(1.37) = 0.91465$

d) $P(-1.25 < X < 0.37) = P(X < 0.37) - P(X < -1.25) = \Phi(0.37) - \Phi(-1.25) =$

$= \Phi(0.37) - (1 - \Phi(1.25)) = 0.64431 - (1 - 0.89435) = 0.53866$

e) ¿Para qué valor x se cumple que $P(-x < X < x) = 0.95$?

Tenemos que $P(-x < X < x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$

Por lo tanto $2\Phi(x) - 1 = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = \dfrac{0.90 + 1}{2} = 0.975$

Observamos en la tabla de la F.d.a. que $x = 1.96$, pues $\Phi(1.96) = 0.975$

Una propiedad importante de la distribución normal es que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces la v.a. $Y = aX + b$ con a y b números reales, $a \ne 0$, tiene también distribución normal pero con parámetros $a\mu + b$ y $a^2\sigma^2$, es decir

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow\; aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \qquad (14)$$

Podemos demostrar lo anterior primero hallando la *F.d.a.* de *Y*

$$G(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)\underset{a>0}{=}P\left(X\le\frac{y-b}{a}\right)=F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$ donde F es la F.d.a. de X

Por lo tanto, la f.d.p. de Y la obtenemos derivando *G(y)*

$$g(y)=\frac{d}{dy}G(y)=\frac{d}{dy}F\left(\frac{y-b}{a}\right)=f\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2}$$ donde

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Operando en el exponente se llega a

$$g(y)=\frac{1}{a}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma}\right)^2}$$

Si $a<0$ entonces

$$G(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=P\left(X\ge\frac{y-b}{a}\right)=1-F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Y derivando con respecto a *y* obtenemos

$$g(y)=\frac{d}{dy}G(y)=\frac{d}{dy}\left(1-F\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)=-f\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{a}=-\frac{1}{a}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a}-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

O sea, para $a\neq 0$ la *f.d.p.* de *Y* es $g(y)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma}\right)^2}$

Y comparando con (13) se deduce que $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

Una consecuencia importante del resultado (14) es que

$$\boxed{\text{si} \quad X\sim N(\mu,\sigma^2) \quad \text{entonces} \quad Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)} \qquad (15)$$

Notar que *Y* se pude escribir como $Y=\frac{1}{\sigma}X+\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$ es decir claramente *Y* es una función lineal de *X*. Por lo tanto aplicamos el resultado (14) con $a=\frac{1}{\sigma}$ y $b=-\frac{\mu}{\sigma}$ y llegamos a (15).

Si $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ entonces la *F.d.a.* de X es

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$$

F(x) no puede expresarse en términos de funciones elementales y sólo hay tablas de la F.d.a. de la normal estándar. Para calcular *F(x)* procedemos de la siguiente forma

$$F(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Y \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$Y \sim N(0,1)$

<u>Ejemplos</u>:

1- Si $X \sim N(3,9)$ entonces

a) $P(2 < X < 5) = P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5-3}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.3779$

b) $P(X > 0) = P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.8413$

c) $P(|X-3| > 6) = 1 - P(|X-3| \le 6) = 1 - [P(-6 \le X - 3 \le 6)] = 1 - \left[P\left(\frac{-6}{3} \le \frac{X-3}{3} \le \frac{6}{3}\right)\right] =$

$= 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] = 2[1 - \Phi(2)] = 0.0456$

2- Hay dos máquinas para cortar corchos destinados para usarse en botellas de vino. La primera produce corchos con diámetros que están normalmente distribuidos con media de 3 cm y desviación estándar de 0.1 cm. La segunda máquina produce corchos con diámetros que tienen una distribución normal con media de 3.04 cm y desviación estándar de 0.02 cm. Los corchos aceptables tienen diámetros entre 2.9 cm y 3.1 cm. ¿Cuál máquina tiene mas probabilidad de producir un corcho aceptable?

<u>Solución</u>:

Sean las variables aleatorias

X: "diámetro de un corcho producido por la máquina 1"

Y: "diámetro de un corcho producido por la máquina 2"

Entonces $X \sim N(3, 0.1^2)$ y $Y \sim N(3.04, 0.02^2)$

Calculamos cuál es la probabilidad que la máquina 1 produzca un corcho aceptable

$P(2.9 \le X \le 3.1) = P\left(\frac{2.9-3}{0.1} \le \frac{X-3}{0.1} \le \frac{3.1-3}{0.1}\right) = \Phi\left(\frac{3.1-3}{0.1}\right) - \Phi\left(\frac{2.9-3}{0.1}\right) =$

$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$

Análogamente para la máquina 2

$P(2.9 \le Y \le 3.1) = P\left(\frac{2.9-3.04}{0.02} \le \frac{Y-3.04}{0.02} \le \frac{3.1-3.04}{0.02}\right) = \Phi\left(\frac{3.1-3.04}{0.02}\right) - \Phi\left(\frac{2.9-3.04}{0.02}\right) =$

$= \Phi(3) - \Phi(-7) = 0.9987 - 0 = 0.9987$

Entonces es más probable que la máquina 2 produzca corchos aceptables.

3- El dispositivo automático de apertura de un paracaídas militar de carga se ha diseñado para abrir el paracaídas cuando éste se encuentre a 200 m de altura sobre el suelo. Supongamos que la altitud de apertura en realidad tiene una distribución normal con valor medio de 200 m y desviación estándar de 30 m. Habrá un daño al equipo si el paracaídas se abre a una altitud de menos de 100 m. ¿Cuál es la probabilidad de que haya daño a la carga en al menos uno de cinco paracaídas lanzados independientemente?

<u>Solución</u>:

Sea la v.a. *X*: "altitud de apertura en metros de un paracaídas"

Entonces $X \sim N(200,30^2)$

Calculamos $P(X < 100) = \Phi\left(\dfrac{100-200}{30}\right) = \Phi(-3.33) = 0.0004$

Consideramos ahora la v.a. *Y*: "número de paracaídas entre 5 que se abren a menos de 100 metros"
Podemos considerar que $Y \sim B(5,\ 0.0004)$
Por lo tanto hay que calcular $P(Y \geq 1)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.0004^0 (1-0.0004)^{5-0} = 1-(1-0.0004)^5 = 0.0019984$$

4- Supóngase que la resistencia a romperse (en Kgr) de fibras de yute está descrita por una v.a. continua *X* normalmente distribuida con $\mu = E(X) = 165$ Kgr y $\sigma^2 = V(X) = 9$ (Kgr)^2. suponiendo además que una muestra de esta fibra se considera defectuosa si $X < 162$. Cuál es la probabilidad de que una fibra elegida al azar sea defectuosa?

Solución:
Deseamos conocer $P(X < 162)$

$$P(X < 162) = P\left(\frac{X-165}{3} < \frac{162-165}{3}\right) = P\left(\frac{X-165}{3} < -1\right) = \Phi(-1),$$

puesto que $Z = \dfrac{X-165}{3} \sim N(0,1)$. Entonces

$P(X < 162) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$.

De la tabla tenemos $\Phi(1) = 0.8413 \rightarrow \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$.

Es decir $P(X < 162) = 0.1587$.

Observación:
Uno puede objetar el usar una distribución normal para describir a la v.a. *X* que representa la resistencia a romperse de la fibra ya que ésta es, obviamente, una cantidad no negativa, mientras que una v.a. normalmente distribuida puede tomar valores que varían entre $-\infty$ y $+\infty$. Sin embargo al modelar el problema con una normal (que aparentemente debería ser invalidada como modelo por lo señalado) vemos que les estamos asignando al suceso $\{X < 0\}$ una probabilidad prácticamente nula (ver también la figura siguiente):

$$P(X < 0) = P\left(\frac{X-165}{3} < \frac{0-165}{3}\right) = \Phi(-55) = 1 - \Phi(55) \approx 1 - 1 = 0.$$

En casos como estos se justifica usar la distribución normal para modelar situaciones en que la variable aleatoria considerada puede tomar, por su significado, sólo valores positivos, aún cuando la normal permita tomar valores tanto positivos como negativos por cuanto la probabilidad de que la v.a. tome valores negativos es prácticamente nula.

Esperanza y varianza de una variable aleatoria con distribución normal

Sea $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ entonces $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$

Dem.) Usaremos el resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

Calculamos la esperanza de X

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$ hacemos la sustitución

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma} \quad \rightarrow \quad x=(\sigma.t+\mu),\ dt=\frac{dx}{\sigma} \quad y \ -\infty<t<+\infty.$$

Luego:

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma.t+\mu).e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Considerado como función de *t*, el integrando de la primera integral $f(t)=te^{-\frac{t^2}{2}}$ es una función impar de *t*, es decir, verifica $f(-t)=-f(t)$. En consecuencia la integral a lo largo de un intervalo simétrico con respecto al origen, como lo es $(-\infty,\infty)$ se anula.

El segundo sumando, por su parte, es justamente μ veces la integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$. Entonces $E(X)=\mu$.

Veamos el cálculo de la varianza de X

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)-\mu^2$. Nos queda evaluar $E(X^2)$,

$$E(X^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$. Hacemos nuevamente la sustitución

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma} \quad \rightarrow \quad x=(\sigma.t+\mu),\ dt=\frac{dx}{\sigma} \quad y \ -\infty<t<+\infty$$. Reemplazando:

$$E(X^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma.t+\mu)^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{2\sigma.\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t.e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Ahora el integrando de la segunda integral es impar y por lo tanto se anula. Entonces

$$E(X^2)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\mu^2.$$

Debemos calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Integrando por partes

con $\begin{cases} u=t & du=dt \\ dv=te^{-\frac{t^2}{2}}dt & v=-e^{-\frac{t^2}{2}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

El corchete de Barrow se anula en ambos extremos y la integral es justamente $\sqrt{2\pi}I=\sqrt{2\pi}$. Entonces : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$. Por lo tanto $E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$ y, en consecuencia,

$V(X)=E(X^2)-\mu^2=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$

Distribución exponencial

Sea X una v.a. continua. Se dice que tiene distribución exponencial con parámetro λ si su f.d.p. es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad \text{donde} \quad \lambda > 0$$

La distribución exponencial se utiliza algunas veces para modelar el tiempo que transcurre antes de que ocurra un evento. A menudo se lo llama ***tiempo de espera***.

Es fácil verificar que *f(x)* es una densidad bien definida

a) Claramente $f(x) \geq 0$ para todo x

b) $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left(\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right) \Bigg|_0^{\infty} = 1$

La F.d.a. de una v.a. exponencial es sencilla:

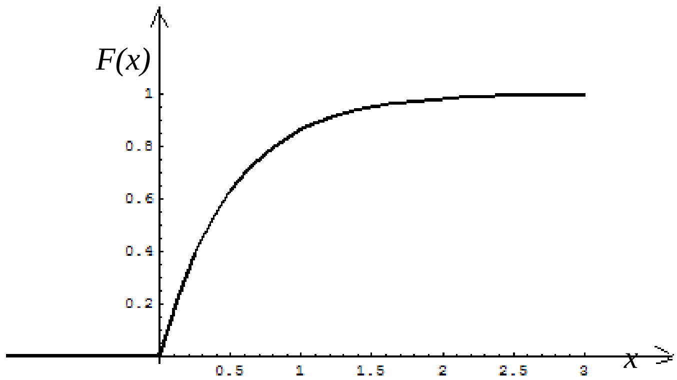
Si $x < 0$ entonces $F(x) = P(X \leq x) = 0$

Si $x \geq 0$ entonces $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left(\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right) \Bigg|_0^{x} = 1 - e^{-\lambda x}$

Por lo tanto

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Su gráfica es



Notación: $X \sim Exp(\lambda)$

Ejemplo:

Supongamos que el tiempo, en segundos, de respuesta en cierta terminal de computadora en línea (es decir el tiempo transcurrido entre el fin de la consulta del usuario y el principio de la respuesta del sistema a esa consulta) se puede considerar como una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.2$. Calcular

a) la probabilidad de que el tiempo de respuesta sea a lo sumo 10 segundos.

b) la probabilidad de que el tiempo de respuesta esté entre 5 y 10 segundos.

Solución:
Sea X la v.a., entonces $X \sim Exp(0.2)$
a) Se pide calcular $P(X \leq 10)$
Por lo tanto
$P(X \leq 10) = F(10) = 1 - e^{-0.2\times 10} = 1 - 0.135 = 0.865$
b) $P(5 \leq X \leq 10) = F(10) - F(5) = \left(1 - e^{-0.2\times 10}\right) - \left(1 - e^{-0.2\times 5}\right) = 0.233$

Esperanza y varianza de la distribución exponencial

-

Sea $X \sim Exp(\lambda)$ entonces $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ y $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Dem.)
Es útil calcular en general $E(X^k)$ el ***momento de orden k con respecto al origen*** siendo k un número natural

$$E(X^k) = \int_0^{+\infty} x^k f(x)dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx \qquad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Integrando por partes:

$$\begin{cases} u = x^k \\ dv = \lambda e^{-\lambda x}dx \end{cases} \qquad \begin{cases} du = kx^{k-1}dx \\ v = -e^{-\lambda x} \end{cases} \qquad \rightarrow \quad \mu_k = -x^k e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + k\int_0^{+\infty} x^{k-1}e^{-\lambda x}dx$$

. El corchete de Barrow se anula y queda $E(X^k) = k\lambda \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{k-1}e^{-\lambda x}dx$. Aplicando reiteradamente se llega finalmente a

$$E(X^k) = k(k-1)\ldots 2.1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = k!\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k$$

Por lo tanto tenemos para la esperanza y la varianza:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Propiedades de la distribución exponencial

1- **Relación entre la distribución exponencial y la variable de Poisson**.

Sea T el tiempo de espera hasta el siguiente evento en un proceso de Poisson con parámetro λ.
Veamos cuál es la *F.d.a.* de T.
Si $t < 0$ entonces claramente $F(t) = P(T \leq t) = 0$
Si $t \geq 0$ entonces para hallar $F(t) = P(T \leq t)$ consideramos el evento complementario de $\{T \leq t\}$.
Notar que $\{T > t\}$ si y solo si no ocurre ningún evento durante las siguientes t unidades de tiempo.
Si X: "número de eventos que ocurren en las siguientes t unidades de tiempo", entonces
$\{T > t\}$ ocurre si y solo si $\{X = 0\}$ ocurre, por lo tanto $P(T > t) = P(X = 0)$

Como $X \sim P(\lambda t)$ entonces

$$P(T > t) = P(X = 0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

Por lo tanto

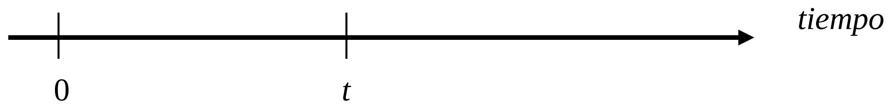
$$F(t) = P(T \le t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Como *F(t)* es la F.d.a. de una v.a. exponencial, entonces $T \sim Exp(\lambda)$

Por lo tanto

Si los eventos siguen un proceso de Poisson con parámetro λ, y si *T* representa el tiempo de espera desde cualquier punto inicial hasta el próximo evento, entonces $T \sim Exp(\lambda)$

Consideremos un aplicación hidrológica de estas ideas



i) X = Nº de inundaciones en un período $[0, t]$ $\rightarrow$ $X \sim P(\lambda t)$

ii) λ = Nº medio de inundaciones por unidad de tiempo $\rightarrow$ $\lambda = \frac{E(X)}{t}$

iii) *T* = Tiempo transcurrido entre inundaciones $\rightarrow$ $T \sim Exp(\lambda)$

iv) $E(T)$ = Tiempo medio de retorno de las inundaciones $\rightarrow$ $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

2- **<u>Propiedad falta de memoria</u>**

La distribución exponencial tiene una propiedad conocida como falta de memoria, que se muestra en el siguiente ejemplo: El tiempo de vida, en años, de un circuito integrado particular tiene una distribución exponencial con parámetro 0.5. Encuentre la probabilidad de que el circuito dure más de tres años

Sea la v.a. X : “tiempo de vida, en años, de un circuito integrado particular”, entonces $X \sim Exp(0.5)$

Y $P(X > 3) = 1 - F(3) = e^{-1.5} = 0.223$

Supongamos ahora que actualmente un circuito tiene cuatro años y aún funciona. Se quiere hallar la probabilidad de que funcione tres años más.

Por lo tanto planteamos una probabilidad condicional

$$P(X>7|X>4)=\frac{P(X>7 \text{ y } X>4)}{P(X>4)}=\frac{P(X>7)}{P(X>4)}=\frac{e^{-0.5\times 7}}{e^{-0.5\times 4}}=e^{-0.5\times(7-4)}=e^{-1.5}=0.223$$

Observamos que $P(X>7/X>4)=P(X>7-4)=P(X>3)$.

En general, la probabilidad que se tenga que esperar *t* unidades adicionales, dado que ya se han esperado *s* unidades, es la misma que la probabilidad de que se tenga que esperar *t* unidades desde el inicio. La distribución exponencial no “recuerda” cuánto tiempo se ha esperado.

En particular, si el tiempo de vida de un componente sigue una distribución exponencial, entonces la probabilidad de que un componente que tiene *s* unidades de tiempo dure *t* unidades de tiempo adicionales es la misma que la probabilidad de que un componente nuevo dure t unidades de tiempo. En otras palabras, un componente cuyo tiempo de vida siga una distribución exponencial no muestra ningún síntoma de los años o del uso.

Los cálculos hechos en el ejemplo anterior se pueden repetir para valores cualesquiera s y t y entonces se pude probar que

si $X \sim Exp(\lambda)$ y t y s son números positivos, entonces $P(X > t + s / X > s) = P(X > t)$

Practica
Distribución uniforme. Distribución normal. Distribución exponencial

1) Supongamos que tomo un colectivo para ir al trabajo, y que cada 5 minutos llega un colectivo a la parada de la esquina. Debido a las variaciones en la hora en que salgo de casa, no siempre llego al mismo tiempo a la parada de la esquina, así que mi tiempo de espera en minutos X al siguiente colectivo es una v.a. continua uniforme en el intervalo (0,5).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que yo espere entre 1 y 3 minutos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que yo espere por lo menos 4 minutos?

2) El espesor del borde de un componente de una aeronave está distribuido de manera uniforme entre 0.95 y 1.05 milímetros.

a) Obtenga la F.d.a. del espesor del borde.
b) Calcule la proporción de bordes cuyo espesor es mayor que 1.02 mm.
c) ¿Qué espesor está excedido por el 90% de los bordes?
d) Calcule la media y la varianza del espesor del borde.

3) Sea Z una v.a. normal estándar, (es decir Z ~ N(0,1)). Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(-1.50 \le Z \le 2.00)$
b) $P(-2.50 \le Z \le 0)$
c) $P(1.50 \le Z)$
d) $P(-2.50 \le Z \le 2.50)$
e) $P(|Z| \le 2.50)$
f) $P(Z \le 1.37)$
g) $P(-1.75 \le Z)$

4) Sea Z ~ N(0,1), determinar el valor de la constante *c* para que:

a) $\Phi(c) = 0.9838$
b) $P(|Z| \ge c) = 0.016$
c) $P(Z \ge c) = 0.121$
d) $P(0 \le Z \le c) = 0.291$
e) $P(-c \le Z \le c) = 0.668$

5) Si X ~ N(80,10), calcular:

a) $P(X \le 100)$
b) $P(X \le 80)$
c) $P(65 \le X \le 100)$
d) $P(X \ge 70)$
e) $P(85 \le X \le 95)$
f) $P(|X - 80| \le 10)$

6) Un tipo particular de tanque de gasolina para un automóvil compacto está diseñado para contener 15 galones. Suponga que la capacidad real de un tanque escogido al azar de este tipo esté normalmente distribuido con media de 15 galones y desviación estándar de 0.2 galones.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un tanque seleccionado al azar contenga a lo sumo 14.8 galones?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un tanque seleccionado al azar contenga entre 14.7 y 15.1 galones?
c) Si el automóvil en el que se instala un tanque seleccionado al azar recorre exactamente 25 millas por galón, ¿cuál es la probabilidad de que el automóvil pueda recorrer 370 millas sin reabastecerse?.

7) Hay dos máquinas para cortar corchos destinados para usarse en botellas de vino. La primera produce corchos con diámetros que están normalmente distribuidos con media de 3 cm y desviación estándar de 0.1 cm. La segunda máquina produce corchos con diámetros que tienen una distribución normal con media de 3.04 cm y desviación estándar de 0.02 cm. Los corchos aceptables tienen diámetros entre 2.9 cm y 3.1 cm. ¿Cuál máquina tiene mas probabilidad de producir un corcho aceptable?

8) El dispositivo automático de apertura de un paracaídas militar de carga se ha diseñado para abrir el paracaídas cuando éste se encuentre a 200 m de altura sobre el suelo. Supongamos que la altitud de apertura en realidad tiene una distribución normal con valor medio de 200 m y desviación estándar de 30 m. Habrá un daño al equipo si el paracaídas se abre a una altitud de menos de 100 m. ¿Cuál es la probabilidad de que haya daño a la carga en al menos uno de cinco paracaídas lanzado independientemente?

9) La distribución del peso de paquetes enviados de cierto modo es normal con valor medio de 10 libras y desviación estándar de 2 libras. El servicio de paquetería desea establecer un valor de peso *c*, mas allá del cual habrá cargo extra. ¿Cuál valor de *c* es tal que 99% de todos los paquetes pesen por lo menos 1 libra abajo del peso con cargo extra?.

10) Suponga que X tiene una distribución exponencial con media 10. Calcular:
a) $P(X > 10)$ b) $P(X > 20)$ c) x, tal que $P(X < x) = 0.95$

11) El tiempo entre arribos de los taxis a un cruce muy concurrido tiene una distribución exponencial con media 10 minutos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que esté en el cruce tenga que esperar mas de una hora para tomar un taxi?
b) Suponga que la persona ya esperó una hora; ¿cuál es la probabilidad de que llegue uno en los siguientes 10 minutos?
c) Determine *x*, de modo tal que la probabilidad de que la persona espere mas de *x* minutos para tomar un taxi sea 0.01.

12) El tiempo entre llegadas de mensajes electrónicos a una computadora tiene una distribución exponencial con media de 2 horas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la computadora no reciba mensajes en un periodo de 2 horas?
b) Si la computadora no ha recibido ningún mensaje en las últimas 4 horas, ¿cuál es la probabilidad de recibir un mensaje en las 2 horas siguientes?

c) ¿Cuál es el tiempo esperado entre el quinto y el sexto mensaje?

5- VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

5.1 – Generalidades

Hasta ahora hemos considerado el caso de variables aleatorias unidimensionales. Esto es, el resultado del experimento de interés se registra como un único número real.
En muchos casos, sin embargo, nos puede interesar asociar a cada resultado de un experimento aleatorio, dos o más características numéricas. Por ejemplo, de los remaches que salen de una línea de producción nos puede interesar el diámetro X y la longitud Y. Teniendo en cuenta la inevitable variabilidad en las dimensiones de los remaches debido a las numerosas causas presentes en el proceso de fabricación, los podemos representar asociándoles dos variables aleatorias X e Y que pueden pensarse como una ***variable aleatoria bidimensional***: (X, Y).

Sea ε un experimento aleatorio y S un espacio muestral asociado a él. Sean $X : S \to R, Y : S \to R$, que a cada resultado $s \in S$ le asignan el par de números reales (x, y)
Llamaremos a (X, Y) ***variable aleatoria bidimensional***.
Si en lugar de dos variables aleatorias, tenemos n variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$, llamaremos a $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ***variable aleatoria n-dimensional***

En lo que sigue nos referiremos en particular a variables aleatorias n-dimensionales con n=2, es decir nos concentraremos en ***variables aleatorias bidimensionales*** por cuanto son las más simples de describir, fundamentalmente en relación a la notación. Pero debemos tener presente que las propiedades que estudiemos para ellas se pueden extender sin demasiada dificultad al caso general.

Al conjunto de valores que toma la variable aleatoria bidimensional (X,Y) lo llamaremos ***recorrido*** de la v.a. (X,Y) y lo indicaremos R_{XY}. En otras palabras $R_{XY} = \left\{(x, y) : x = X(s) \;\; e \;\; y = Y(s) \;\; con \;\; s \in S\right\}$, es decir, es la imagen por (X, Y) del espacio muestral S.
Notar que el recorrido de (X,Y) es un subconjunto del espacio Euclidiano: $R_{XY} \subseteq R^2$. Como antes, puede considerarse al recorrido R_{XY} como un espacio muestral cuyos elementos son ahora pares de números reales.

Como con cualquier espacio muestral, según el número de elementos que lo constituyen, podemos clasificar a los recorridos R_{XY} en numerables (finitos o infinitos) y no-numerables.
Los recorridos numerables son, en general, de la forma

$$R_{XY} = \left\{(x_i, y_j) \;\; con \;\; i = 1,2,...,n \;\; y \;\; j = 1,2,..m\right\} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), ..., (x_n, y_m)\} \qquad \text{(finito)}$$

$$R_{XY} = \left\{(x_i, y_j) \;\; con \;\; i = 1,2,... \;\; y \;\; j = 1,2,..\right\} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), ...\} \qquad \text{(infinito numerable)}$$

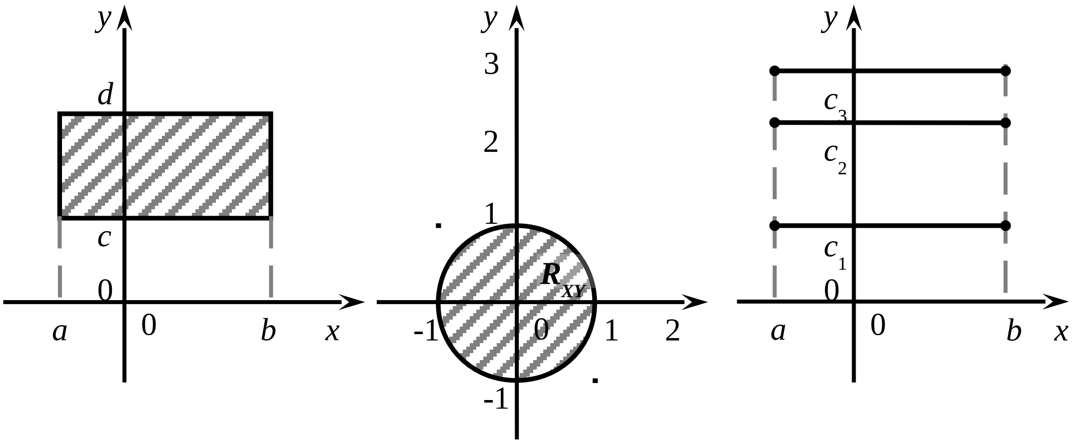
Los recorridos no numerables son regiones o subconjuntos no numerables del plano Euclidiano. Por ejemplo:

$$R_{XY} = \left\{(x, y) : a \le x \le b; \;\; c \le y \le d\right\} \qquad \text{(no numerable)}$$

$$R_{XY} = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\right\} \qquad \text{(no numerable)}$$

$R_{XY} = \left\{ (x, y_j) : a \le x \le b, \;\; y_j = c_1, c_2, c_3 \right\}$ (no numerable "mixto")

cuyas gráficas se pueden apreciar en la figura siguiente. Notar en el último recorrido, *X* es v.a. continua e *Y* discreta.



Clasificaremos a las variables aleatorias bidimensionales de la siguiente manera:
(X, Y) es v.a. ***bidimensional discreta*** si *X* e *Y* son discretas
(X, Y) es v.a. ***bidimensional continua*** si *X* e *Y* son continuas
El caso X continua, Y discreta (o viceversa) no lo consideramos.

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta y sea R_{XY} su recorrido (numerable). Sea $p : R_{XY} \to R$ una función que a cada elemento (x_i, y_j) le asigna un número real $p(x_i, y_j)$ tal que $P\left(X = x_i,\; Y = y_j \right) = p(x_i, y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in R_{XY}$ y que verifica.

a) $p(x_i, y_j) \ge 0 \quad \forall (x_i, y_j) \in R_{XY}$

b) $\sum_{(x_i, y_j) \in R_{XY}} p(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$

A esta función la llamaremos ***función de probabilidad puntual conjunta*** de la variable aleatoria bidimensional (X, Y). En forma abreviada la designaremos *fdp conjunta*.

Ejemplos:

1-Dos líneas de producción, señaladas I y II, manufacturan cierto tipo de artículo a pequeña escala. Supóngase que la capacidad máxima de producción de la línea I es cinco artículos por día, mientras que para la línea II es 3 artículos/día. Debido a los innumerables factores presentes en todo proceso de producción, el número de artículos realmente producido por cada línea puede pensarse como una variable aleatoria. En conjunto podemos pensar en una variable aleatoria bidimensional (X, Y) discreta, donde la primera componente X corresponde a la producción de la línea I y la segunda componente Y a los artículos que salen de la línea II. La *fdp* conjunta correspondiente a variables aleatorias bidimensionales suele presentarse, por comodidad, como una tabla. Supongamos que la para la v.a. (X, Y) que nos interesa aquí la tabla correspondiente a $p(x_i, y_j)$ es

Y/X	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

¿Cuál es la probabilidad de qué salgan más artículos de la línea I que de la línea II?

Antes de calcular la probabilidad que nos pide el problema, hagamos algunas consideraciones sobre la tabla que representa a $p(x_i, y_j)$.
Se trata de una tabla a doble entrada donde en la primera fila se indican los valores que puede tomar la v.a. X (en este caso X=0,1,2,3,4,5) y la primera columna indica los valores que puede tomar la variable Y (0,1,2,3). Para determinar el valor de la $p(x_i, y_j)$ cuando la v.a. (X, Y) toma el valor (x_i, y_j) consideramos el número que se encuentra en la columna correspondiente a $X = x_i$ y la fila correspondiente a $Y = y_j$. Por ejemplo: $p(4,2) = P(X = 4, Y = 2) = 0.05$.
Podemos verificar fácilmente que la *fdp* conjunta definida por esta bien definida. En efecto verifica las condiciones a) $p(x_i, y_j) \geq 0 \quad \forall (x_i, y_j) \in R_{XY}$ y b) $\sum_{(x_i, y_j) \in R_{XY}} p(x_i, y_j) = 1$.
Para contestar la pregunta del enunciado, consideremos el suceso $B \subset R_{XY}$ definido

B: "es el suceso que ocurre cuando la línea I produce más artículos que la línea II" o, $B = \{X > Y\}$. Luego:

$$P(B) = P(X > Y) = \sum_{y_j=0}^{3} \sum_{x_i > y_j} p(x_i, y_j) = 0.01+0.03+0.05+0.07+0.09+0.04+0.05+0.06+0.08+$$

$$+0.05+0.05+0.06+0.06+0.05=0.75.$$

2- Hay tres cajas registradoras a la salida de un supermercado. Dos clientes llegan a las cajas en diferentes momentos cuando no hay otros clientes ante aquellas. Cada cliente escoge una caja al azar e independientemente del otro.
Sean las variables aleatorias X: " nº de clientes que escogen la caja 1" e Y: "nº de clientes que escogen la caja 2". Hallar la *fdp* conjunta de *(X,Y)*

Podemos suponer que el espacio muestral original S es el conjunto de pares ordenados $S = \{(1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,2);(2,3);(3,1);(3,2);(3,3)\}$ donde la primera componente del par indica la caja elegida por el cliente 1 y la segunda componente del par indica la caja elegida por el cliente 2.
Además notar que X como Y pueden tomar los valores 0, 1, 2
El punto muestral (3,3) es el único punto muestral que corresponde al evento $\{X = 0, Y = 0\}$
Entonces

$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{9}$; pensando de forma análoga los otros casos:

$P(X = 1, Y = 0) = \frac{2}{9}$; $P(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{9}$; $P(X = 0, Y = 1) = \frac{2}{9}$, $P(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{9}$,

$P(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{9}$; $P(X = 1, Y = 2) = P(X = 2, Y = 2) = 0$

5.2 - <u>Funciones de distribución marginales de una v.a. (*X*,*Y*) discreta</u>

Sea (*X*,*Y*) discreta y sea $p(x_i, y_j)$ (*i*=1,2,…*n*, *j*=1,2,…,*m*) su función de probabilidad conjunta (Eventualmente *n* y/o *m* pueden ser ∞).

La función de probabilidad marginal de *X* es $p(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)$ (*i*=1,2,…,*n*)

La función de probabilidad marginal de *Y* es $q(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j)$ (*j*=1,2,…,*m*)

Observación: Remarcamos que la función de probabilidad marginal de *X*, es decir $p(x_i)$ calculada a partir de $p(x_i, y_j)$ en la forma indicada, coincide con la función de probabilidad de la variable aleatoria unidimensional *X* considerada en forma aislada. Análogamente la función de probabilidad marginal de *Y*, es decir $q(y_j)$ calculada a partir de $p(x_i, y_j)$ en la forma indicada, coincide con la función de probabilidad de variable aleatoria unidimensional *Y* considerada en forma aislada.

Ejemplo:
Siguiendo con el ejemplo 1,

$$p(5) = P(X = 5) = p(5,0) + p(5,1) + p(5,2) + p(5,3) = 0.09 + 0.08 + 0.06 + 0.05$$
$$= 0.28$$

$$q(1) = P(Y = 1) = p(0,1) + p(1,1) + p(2,1) + p(3,1) + p(4,1) + p(5,1) = 0.01 + 0.02 + 0.04 + 0.05 + 0.06$$
$$= 0.26$$

Observemos que se verifica la condición de normalización para cada una de las marginales:

$$\sum_{x_i=0}^{5} p(x_i) = 0.03 + 0.08 + 0.16 + 0.21 + 0.24 + 0.28 = 1$$

$$\sum_{y_j=0}^{3} q(y_j) = 0.25 + 0.26 + 0.25 + 0.24 = 1$$

5.3– Variables aleatorias independientes

Ya se discutió el concepto de independencia entre dos eventos *A* y *B*. Esas mismas ideas podemos trasladarlas en relación a dos variables aleatorias *X* e *Y* que, eventualmente, podemos considerarlas como las componentes de una variable aleatoria bidimensional (X, Y).
De acuerdo con esto, intuitivamente decimos que dos variables, *X* e *Y*, son independientes si el valor que toma una de ellas no influye de ninguna manera sobre el valor que toma la otra. Esto lo establecemos más formalmente:

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Sea $p(x_i, y_j)$ su *fdp* conjunta y $p(x_i)$ y $q(y_j)$ las correspondientes *fdp* marginales de *X* e *Y*. Decimos que *X* e *Y* son ***variables aleatorias independientes*** si y sólo si

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in R_{XY}$$

Observación: Notar que para poder afirmar la independencia de *X* e *Y* debe cumplirse la factorización de la *fdp* conjunta como producto de las *fdp* marginales para ***todos*** los pares de valores de la v.a. (X, Y). Por lo tanto, para verificar la independencia es necesario demostrar la validez de la factorización para todos los pares. En cambio, es suficiente encontrar un solo par que no la verifica, para afirmar, de acuerdo con la definición, que las variables *X* e *Y* son no independientes, es decir, que son dependientes. Esto es, para demostrar la dependencia es suficiente con encontrar un solo par que no verifique la factorización señalada.

Vimos que dos sucesos *A* y *B* son independientes si y sólo si $P(A|B) = P(A)$ y $P(B|A) = P(B)$ (donde por supuesto debía ser $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$). En términos de variables aleatorias, esta forma de ver la independencia se manifiesta en la igualdad entre las *fdp* condicionales y las correspondientes *fdp* marginales, como demostramos en este

Ejemplo:
1- Supongamos que una máquina se usa para un trabajo específico a la mañana y para uno diferente en la tarde. Representemos por *X* e *Y* el número de veces que la máquina falla en la mañana y en la tarde respectivamente. Supongamos que la tabla siguiente da la función de probabilidad conjunta $p(x_i, y_j)$ de la variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y).

Y/X	0	1	2	$q(y_j)$
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.04	0.08	0.08	0.2
2	0.06	0.12	0.12	0.3
$P(x_i)$	0.2	0.4	0.4	1

Deseamos saber si las variables aleatorias *X* e *Y* son independientes o dependientes.
Para demostrar que son independientes debemos probar que se verifica $\forall (x_i, y_j) \in R_{XY}$ $p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$ Verificamos directamente que

$$p(0,0) = 0.1 = p(0)q(0) = 0.2 \times 0.5$$
$$p(0,1) = 0.04 = p(0)q(1) = 0.2 \times 0.2$$
$$p(0,2) = 0.06 = p(0)q(2) = 0.2 \times 0.3$$
$$p(1,0) = 0.2 = p(1)q(0) = 0.4 \times 0.5$$
$$p(1,1) = 0.08 = p(1)q(1) = 0.4 \times 0.2$$
$$p(1,2) = 0.12 = p(1)q(2) = 0.4 \times 0.3$$
$$p(2,0) = 0.2 = p(2)q(0) = 0.4 \times 0.5$$
$$p(2,1) = 0.08 = p(2)q(1) = 0.4 \times 0.2$$
$$p(2,2) = 0.12 = p(2)q(2) = 0.4 \times 0.3$$

Luego *X* e *Y* son independientes.

Observaciones
1- De la definición de las *fdp* marginales, vemos que tanto en el caso discreto como en el continuo, la *fdp* conjunta determina unívocamente las *fdp* marginales. Es decir, si (X, Y) es discreta del conocimiento de la función de probabilidad conjunta $p(x_i, y_j)$ podemos determinar unívocamente las funciones de probabilidad $p(x_i)$ y $q(y_j)$. Sin embargo la inversa no se cumple en general. Es decir del conocimiento de $p(x_i)$ y $q(y_j)$ no se puede, en general, reconstruir $p(x_i, y_j)$ a menos que *X* e *Y* sean variables independientes en cuyo caso es $p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$.

2- El concepto de independencia entre dos variables aleatorias se puede generalizar a *n* variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$

5.4 - <u>Función de una variable aleatoria bidimensional</u>

Existen muchas situaciones en las que dado una variable aleatoria bidimensional nos interesa considerar otra variable aleatoria que es función de aquélla. Por ejemplo, supongamos que las variables aleatorias *X* e *Y* denotan la longitud y el ancho, respectivamente, de una pieza, entonces $Z = 2X + 2Y$ es una v.a. que representa el perímetro de la pieza, o la v.a. $W = X.Y$ representa el área de la pieza. Tanto *Z* como *W* ***son variables aleatorias***.

En general, sea S un espacio muestral asociado a un experimento probabilístico ε, sean $X : S \to R$ e $Y : S \to R$ dos variables aleatorias que definen una variable aleatoria bidimensional (X, Y) cuyo recorrido es R_{XY}, y sea una función de dos variables reales $H : R_{XY} \to R$ que a cada elemento (x, y) del recorrido R_{XY} le hace corresponder un número real $z = H(x, y)$, entonces la función compuesta $Z = H(X, Y) : S \to R$ es una variable aleatoria, puesto que a cada elemento $s \in S$ le hace corresponder un número real $z = H[X(s), Y(s)]$. Diremos que la variable aleatoria *Z* es ***función de la variable aleatoria bidimensional (X,Y).***

Algunas variables aleatorias que son función de variables aleatorias bidimensionales son $Z = X + Y$, $Z = X.Y$, $Z = X / Y$, $Z = mín(X, Y)$, $Z = máx(X, Y)$, etc.

Lo anterior se puede generalizar si en lugar de dos variables aleatorias tenemos *n* variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$, y $z = H(x_1, x_2, \ldots x_n)$ es una función de n variables a valores reales.

<u>Ejemplos</u>:

1- Sea $Z \sim B(n, p)$

Podemos escribir a Z como suma de variables aleatorias de la siguiente forma.

Recordar que *Z* cuenta el número de éxitos en *n* repeticiones o ensayos del experimento ε

Si definimos

$$X_i = \begin{cases} 1 & si \;\; en \;\; la \;\; í-ésima \;\; repetición \;\; de \;\; \varepsilon \;\; ocurre \;\; éxito \\ 0 & caso \;\; contrario \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Notar que a cada X_i se la puede considerar $B(1, p)$, y además $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes

Podemos escribir $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

2- Sea *Z* v.a. binomial negativa con parámetros *r* y *p*, es decir $Z \sim BN(r, p)$

Si definimos

X_1: “número de repeticiones del experimento requeridos hasta el 1º éxito”

X_2: “número de repeticiones del experimento adicionales requeridos hasta el 2º éxito”

X_3: “número de repeticiones del experimento adicionales requeridos hasta el 3º éxito”

Y en general

X_i : “número de repeticiones del experimento adicionales después del *(i-1)*–ésimo éxito requeridos hasta el *i*-ésimo éxito”

Entonces cada variable tiene ***distribución geométrica con parámetro p*** y $Z = X_1 + X_2 + ... + X_r$

Notar además que $X_1, X_2, ..., X_r$ son independientes

Esperanza de una v.a. que es función de una v.a. bidimensional

Sea una variable aleatoria bidimensional (X,Y) cuya *fdp* conjunta es la función de probabilidad conjunta $p(x_i, y_j)$ si es discreta o la función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$ si es continua y sea una función real de dos variables $z = H(x,y)$ de manera que podemos definir una variable aleatoria *Z* que es función de la variable aleatoria bidimensional (X,Y) de la forma $Z = H(X,Y)$. Si la *fdp* de *Z* es $q(z_i)$, siendo *Z* discreta, entonces la esperanza matemática de *Z* es, de acuerdo con la definición general,

$$E(Z) = \sum_{x_i \in R_X} z_i . q(z_i) \qquad \text{(}Z\text{ discreta)}$$

Nuevamente lo interesante es considerar la posibilidad de evaluar $E(Z)$ sin tener que calcular previamente la *fdp* de *Z*. El siguiente teorema nos muestra cómo hacerlo.

Teorema Sea (*X*,*Y*) una variable aleatoria bidimensional y sea *Z*=*H*(*X*,*Y*) una variable aleatoria que es función de (*X*,*Y*).

Si *Z* es variable aleatoria discreta que proviene de la variable aleatoria bidimensional discreta (*X*,*Y*) cuyo recorrido es R_{XY} y su *fdp* conjunta es $p(x_i, y_j)$, entonces:

$$E(Z) = E[H(X,Y)] = \sum_{(x_i, y_j) \in R_{XY}} H(x_i, y_j) p(x_i, y_j)$$

Dem.) sin demostración

Esperanza de una suma de variables aleatorias

Sean *X* e *Y* dos variables aleatorias arbitrarias. Entonces $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Dem.) en el teorema anterior consideramos $H(x,y) = x + y$

Si *(X,Y)* es discreta

$$E(Z) = E[H(X,Y)] = \sum_{(x_i, y_j) \in R_{XY}} H(x_i, y_j) p(x_i, y_j) = \sum_{(x_i, y_j) \in R_{XY}} (x_i + y_j) p(x_i, y_j) =$$

Aplicando la propiedad distributiva y separando en dos sumas

$$E(Z) = \sum_{(x_i, y_j) \in R_{XY}} (x_i + y_j) p(x_i, y_j) = \sum_{(x_i, y_j) \in R_{XY}} x_i \, p(x_i, y_j) + \sum_{(x_i, y_j) \in R_{XY}} y_j \, p(x_i, y_j) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i \, p(x_i, y_j) + \sum_i \sum_j y_j \, p(x_i, y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(x_i, y_j) + \sum_j y_j \sum_i p(x_i, y_j) =$$

Pero $\sum_j p(x_i, y_j) = p(x_i)$ y $\sum_i p(x_i, y_j) = q(y_j)$, por lo tanto

$$= \sum_i x_i p(x_i) + \sum_j y_j q(y_j) = E(X) + E(Y)$$

Para el caso *(X,Y)* continua <u>sigue siendo válida esta propiedad</u>.

Podemos generalizar la propiedad anterior a un número finito cualquiera de variables aleatorias:

> Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aleatorias arbitrarias. Entonces:
>
> $E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$ o, en notación más concentrada,:
>
> $$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_1\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

(leemos: “la esperanza de la suma es la suma de las esperanzas”)

Dem.) Se deduce por inducción completa sobre el número n de variables aleatorias.

Observación: se deduce que la esperanza verifica la ***propiedad lineal***:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i).$$

<u>Ejemplos</u>:

1- Vamos a aplicar algunas de las propiedades anteriores para calcular de una manera alternativa la esperanza matemática de una variable aleatoria X distribuida binomialmente.

Sea entonces una v.a. X~B(n,p).

Ya vimos que podemos escribir $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ donde cada X_i se la puede considerar $B(1, p)$, y además $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes

Entonces

$E(X_i) = 1 \times P(X_i = 1) + 0 \times P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = p$ para cualquier i

Por lo tanto

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = \underbrace{p + p + \ldots + p}_{n \text{ veces}} = np$$

<u>Observación</u>: muchas veces es conveniente descomponer una variable aleatoria como suma de otras más simples para facilitar los cálculos

<u>Ejemplo</u>

El espesor X de una cuña de madera (en milímetros) tiene una función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4} - \dfrac{3(x-5)^2}{4} & 4 \le x \le 6 \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases}$$

a) Determine E(X)

b) Si Y denota el espesor de una cuña en pulgadas (1mm = 0.0394 pulgadas), determine E(Y)

c) Si se seleccionan tres cuñas de manera independiente y las apilamos una encima de otra, encuentre la media y la varianza del espesor total.

a) Verifique el lector que

$$E(X)=\int_4^6 x\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}(x-5)^2\right)dx=5$$

b) $Y=0.0394X$ entonces $E(Y)=E(0.0394X)=0.0394E(X)=0.197$

c) Notar que si X_i : "espesor de cuña *i*" , i = 1, 2, 3 entonces $X=X_1+X_2+X_3$ es el espesor total

Por lo tanto $E(X)=E(X_1+X_2+X_3)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=5+5+5=15$

En general ***la esperanza de un producto de variables aleatorias no es igual al producto de las esperanzas***

> Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional tal que X e Y son variables aleatorias ***independientes***, entonces: $E(X.Y)=E(X).E(Y)$

(leeremos:" la esperanza del producto es el producto de las esperanzas").

Dem.) análoga a la demostración de la propiedad anterior.

Para el caso *(X,Y)* continua <u>sigue siendo válida esta propiedad</u>.

<u>Ejemplo</u>:

Supongamos que debido a innumerables causas incontrolables la corriente *i* y la resistencia *r* de un circuito varían aleatoriamente de forma tal que pueden considerarse como variables aleatorias *I* y *R* independientes. Supongamos que las correspondientes *fdp* son:

$$g(i)=\begin{cases}2i & 0\le i\le 1\\ 0 & demás\ \ valores\end{cases}\qquad\qquad h(r)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{9} & 0\le r\le 3\\ 0 & demás\ \ valores\end{cases}$$

Nos interesa considerar el voltaje $v=i.r$ de manera que podemos definir la variable aleatoria $V=I.R$. Hallar el valor esperado o esperanza matemática del voltaje: $E(V)$.
Como I y R son independientes, usando la propiedad anterior

$$E(V)=E(I)E(R)$$

$$E(I)=\int_0^1 i(2i)di=2\left.\frac{i^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}\qquad E(R)=\int_0^3 r\left(\frac{r^2}{9}\right)dr=\frac{1}{9}\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^3=\frac{1}{9}\times\frac{3^4}{9}=1$$

$$\therefore\quad E(V)=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

<u>**Varianza de una suma de variables aleatorias**</u>

.

$$\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\sigma_{XY}\quad \text{con}\quad \sigma_{XY}=E(X.Y)-E(X).E(Y)}$$

Dem.) Escribimos la varianza en su forma alternativa

$V(X+Y)=E\left([X+Y]^2\right)-[E(X+Y)]^2$. Desarrollamos los cuadrados y aplicamos la propiedad lineal de la esperanza:

$$\begin{aligned}V(X+Y)&=E\left(X^2+2.X.Y+Y^2\right)-[E(X)+E(Y)]^2\\&=E\left(X^2\right)+2E(X.Y)+E\left(Y^2\right)-\left\{[E(X)]^2+2E(X)E(Y)+[E(Y)]^2\right\}\end{aligned}$$

Agrupando convenientemente:

$$\begin{aligned}V(X+Y)&=\left\{E\left(X^2\right)-[E(X)]^2\right\}+\left\{E\left(Y^2\right)-[E(Y)]^2\right\}+2\{E(X.Y)-E(X)E(Y)\}\\&=V(X)+V(Y)+2\{E(X.Y)-E(X)E(Y)\}\end{aligned}$$

, es decir

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\sigma_{XY}$$

$\sigma_{XY}=E(X.Y)-E(X).E(Y)$ se la llama la ***covarianza de X e Y.***

<u>Observaciones:</u>

1- Teniendo presente la definición de la desviación estándar de una v.a. *X:* $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$, vemos que a la propiedad anterior la podemos escribir:

$$V(X+Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2+2\sigma_{XY}$$

2- Análogamente se prueba que $V(X-Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2\sigma_{XY}$

3- X e Y son independientes, entonces $V(X+Y)=V(X-Y)=V(X)+V(Y)$

Esto es porque si las variables aleatorias X e Y son independientes, entonces $E(X.Y)=E(X).E(Y)$.

Por lo tanto la covarianza vale cero : $\sigma_{XY}=E(X.Y)-E(X).E(Y)=0$.

4- Podemos generalizar, usando el principio de inducción completa, al caso de n variables aleatorias independientes:

Si $X_1,X_2,\dots,X_n$ son n variables aleatorias independientes entonces:

$V(X_1+X_2+\dots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\dots+V(X_n)$ o, en forma más compacta, $V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)$.

5- Vemos que la esperanza de la suma de dos variables aleatorias X e Y es igual a la suma de las esperanzas $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ cualesquiera sean X e Y. En cambio la varianza de la suma de las variables aleatorias X e Y es, en general, igual a la suma de las varianzas, $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$, sólo si X e Y son variables independientes.

Ejemplos:
1- Podemos ejemplificar la aplicación de las propiedades de la varianza, calculando nuevamente la varianza de una v.a. X distribuida binomialmente con parámetros n y p.
Sea entonces una v.a. X~B(n,p). Vimos que se puede escribir:
$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, donde las n variables aleatorias son independientes entre sí y tienen todas la misma distribución:
$X_i \sim B(1, p) \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$
Entonces, tratándose de n variables aleatorias independientes
$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$ todas la varianzas son iguales y podemos escribir la suma como n veces una cualquiera de ellas:
$V(X) = nV(X_i)$. Pero
$V(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2$.
Ya vimos que $E(X_i) = 1.p + 0(1-p) = 0$
Además es: $E(X_i^2) = 1^2.p + 0^2(1-p) = p$
Entonces: $V(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$.
Luego:
$V(X) = nV(X_i) = np(1-p)$
que es el resultado que habíamos obtenido a partir de la definición y llevando las sumas involucradas a la forma del desarrollo de un binomio de Newton.

5.6 - Covarianza

Sean X e Y dos variables aleatorias. La ***covarianza de X e Y*** se define:

$$\boxed{Cov(X,Y) = E\{[X - E(X)].[Y - E(Y)]\} = E(X.Y) - E(X).E(Y)}$$

Notación: la notación usual para la covarianza de X e Y es σ_{XY} o $Cov(X,Y)$

La última igualdad surge de desarrollar el producto y aplicar las propiedades de la esperanza:
$E\{[X - E(X)].[Y - E(Y)]\} = E\{X.Y - X.E(Y) - E(X).Y + E(X)E(Y)\}$

Teniendo presente que $E(X)$ y $E(Y)$ son constantes:
$E\{[X - E(X)].[Y - E(Y)]\} = E(X.Y) - E(X).E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$.

Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $Cov(X,Y) = 0$.

Dem.)
Según vimos, si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $E(X.Y) = E(X).E(Y)$, de donde se sigue la propiedad.

Propiedades de la covarianza

Las siguientes propiedades son útiles y su verificación se deja como ejercicio
1- $Cov(a + bX, c + dY) = bdCov(X,Y)$

2- $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$

3- $Cov\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Cov(X_i,Y_j)$

4- $Cov(X,X)=V(X)$

<u>Ejemplos</u>:

Sean (X,Y) con *f.d.p.* conjunta

X/Y	**0**	**1**	**2**	
0	0	2/70	3/70	5/70
1	3/70	18/70	9/70	30/70
2	9/70	18/70	3/70	30/70
3	3/70	2/70	0	5/70
	15/70	40/70	15/70	

a) ¿Cuales son *E(X)* , *V(X), E(Y)* y *V(Y)?*

$$E(X)=0\times\frac{0}{70}+1\times\frac{3}{70}+2\times\frac{9}{70}+3\times\frac{3}{70}=$$

$$=\frac{105}{70}=\frac{3}{2}$$

$$E(Y)=0\times\frac{15}{70}+1\times\frac{40}{70}+2\times\frac{15}{70}=1$$

Verifique el lector que $V(X)=\frac{15}{28}$ y $V(Y)=\frac{3}{7}$

b) ¿Son *X* e *Y* independientes?

$P(X=0,Y=0)=0$ pero $P(X=0)P(Y=0)=\frac{5}{70}\frac{15}{70}\neq 0$

Por lo tanto *X* e *Y* son dependientes, lo que implica que $Cov(X,Y)\neq 0$

c) ¿Cuál es la *Cov(X,Y)?*

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$E(XY)=0\times0\times0+0\times1\times\frac{2}{70}+0\times2\times\frac{3}{70}+$$

$$+1\times0\times\frac{3}{70}+1\times1\times\frac{18}{70}+1\times2\times\frac{9}{70}+$$

$$+2\times0\times\frac{9}{70}+2\times1\times\frac{18}{70}+2\times2\times\frac{3}{70}+$$

$$+3\times0\times\frac{3}{70}+3\times1\times\frac{2}{70}+3\times2\times0=\frac{90}{70}$$

Entonces $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{9}{7}-\frac{3}{2}\times1=-\frac{3}{14}$

d) Sea Z = *X*+*Y*

¿Cuál es la *E(Z)* y *V(Z)* ?

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{3}{2} + 1 = 2.5$$

$$V(Z) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{15}{18} + \frac{3}{7} + 2\times\left(-\frac{3}{14}\right) = \frac{15}{28}\ .$$

5.7 - Funciones de distribución marginales de una v.a. (*X*,*Y*) continua

Sean (X,Y) continuas con función de densidad de probabilidad conjunta f(x,y). Si queremos hallar $P(X \leq x)$ podemos plantear

$$P(X \leq x) = P(X \leq x,\ -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{x} g(x)dx$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = g(x)$

Por definición de fdp debe ser $g(x)$ la fdp de la v.a. X

Análogamente

$$P(Y \leq y) = P(-\infty < X < \infty,\ Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{y} h(x)dx$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = h(x)$

Por definición de fdp debe ser $h(x)$ la fdp de la v.a. Y

En general:
Sea (*X*,*Y*) continua y sea $f(x,y)$ su función de densidad de probabilidad conjunta.
La ***función de densidad de probabilidad marginal de X*** es:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

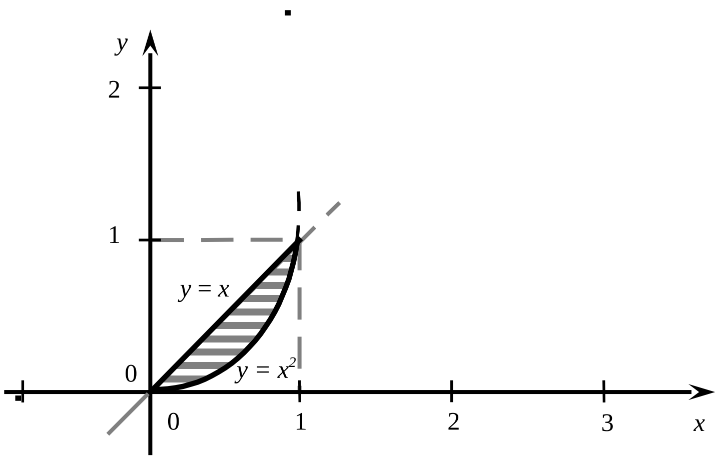
La ***función de densidad de probabilidad marginal de Y*** es:

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Observación: Remarcamos aquí también que la función de de densidad de probabilidad marginal de *X*, es decir $g(x)$, calculada a partir de $f(x,y)$ en la forma indicada, coincide con la función de densidad de probabilidad de variable aleatoria unidimensional *X* considerada en forma aislada. Análogamente la función de densidad de probabilidad marginal de *Y*, es decir $h(y)$ calculada a partir de $f(x,y)$ en la forma indicada, coincide con la función de densidad de probabilidad de variable aleatoria unidimensional *Y* considerada en forma aislada. De manera que podemos calcular probabilidades como, por ejemplo

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(a \leq X \leq b,\ -\infty < Y < \infty\right) = \int_{a}^{b}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx =$$
$$= \int_{a}^{b} g(x)dx$$

Ejemplo: Consideremos la v.a. continua (*X*,*Y*) uniformemente distribuida cuyo recorrido R_{XY} dibujamos



Ya vimos que la *fdp* está dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}6 & para\ (x,y)\ tal\ que\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\\ 0 & para\ los\ demás\ puntos\end{cases}$$

Entonces las funciones de densidad de probabilidad de *X* e *Y* son

$$g(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{x^2}^{x}6dy=6\left(x-x^2\right) & 0\le x\le 1\\ 0 & para\ los\ demás\ valores\end{cases}$$

$$h(y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6\left(\sqrt{y}-y\right) & 0\le y\le 1\\ 0 & para\ los\ demás\ valores\end{cases}$$

Variables aleatorias independientes

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional continua. Sea $f(x,y)$ su *fdp* conjunta y $g(x)$ y $h(y)$ las correspondientes *fdp* marginales de *X* e *Y*. Decimos que *X* e *Y* son ***variables aleatorias independientes*** si y sólo si

$$f(x,y)=g(x)h(y)\quad \forall (x,y)\in R^2$$

Ejemplos

1- Sean *X* e *Y* v.a. continuas que representan el tiempo de vida de dos dispositivos electrónicos. Supongamos que la *fdp* conjunta de la v.a. continua (X,Y) es:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & 0\le x<\infty,\ \ 0\le y<\infty \\ 0 & \text{para los demás valores} \end{cases}$$

Deseamos saber si X e Y son variables aleatorias independientes.
Calculamos las *fdp* marginales de X e Y:

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{0}^{+\infty} e^{-(x+y)}dy=e^{-x}$$
$$h(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-(x+y)}dx=e^{-y}$$

Luego las marginales son:

$$g(x)=\begin{cases} e^{-x} & 0\le x<\infty \\ 0 & para\ \ los\ \ demás\ \ valores \end{cases}$$

$$h(y)=\begin{cases} e^{-y} & 0\le y<\infty \\ 0 & para\ \ los\ \ demás\ \ valores \end{cases}$$

Vemos que efectivamente

$$f(x,y)=g(x)h(y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}=e^{-x}e^{-y} & 0\le x<\infty,\ \ 0\le y<\infty \\ 0 & \text{para los demás valores} \end{cases}$$

Es decir X e Y son v.a. independientes.

También podemos verificar la condición b_1):

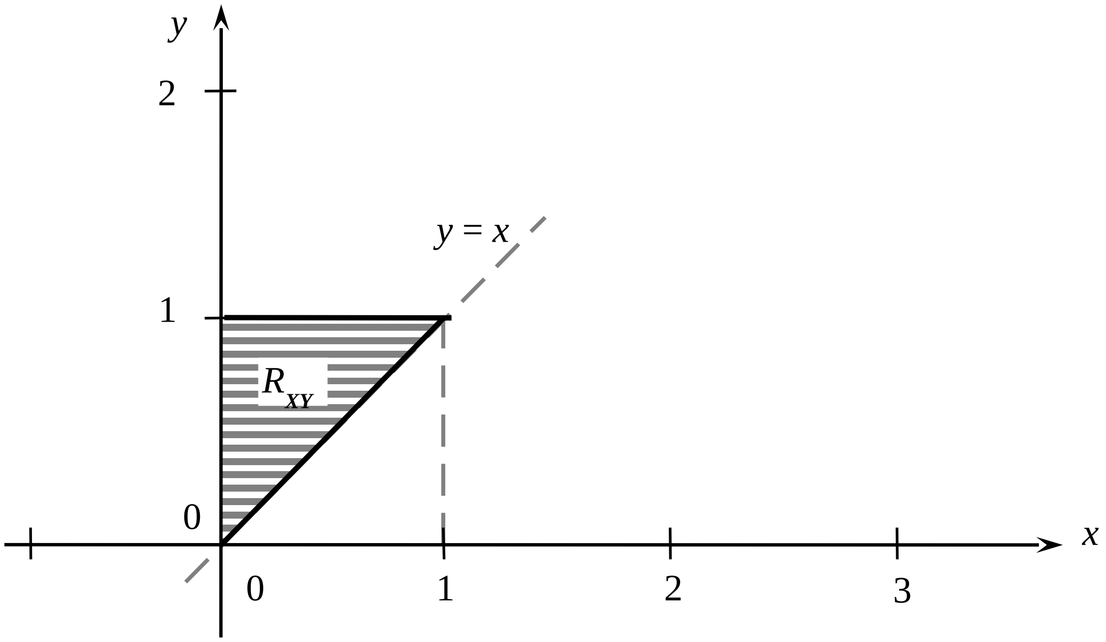
$$g(x|y)=\frac{f(x,y)}{h(y)}=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}}=e^{-x} \quad 0\le x<\infty \\ 0 \ \ \text{para los demás valores} \end{array}\right\}=g(x)\quad \forall (x.y)\in \boldsymbol{R}^2$$

2- Consideremos un ejemplo donde no se verifica la independencia.

Sea una v.a.b cuya *fdp* conjunta es

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & 0\le x\le y\le 1 \\ 0 & \text{para los demás valores} \end{cases}$$

En la figura siguiente mostramos el recorrido



Calculamos las *fdp* marginales de X e Y :

$$g(x)=\begin{cases}\int_x^1 8xydy=4x\left(1-x^2\right) & 0\le x\le 1\\ 0 \quad \text{para los demás valores}\end{cases}$$

$$h(y)=\begin{cases}\int_0^y 8xydx=4y^3 & 0\le y\le 1\\ 0 \quad \text{para los demás valores}\end{cases}$$

y podemos apreciar que para $0\le x\le y\le 1$ en general es

$$f(x,y)=8xy\neq 16x\left(1-x^2\right)y^3=g(x)h(y).$$

Luego X e Y son variables aleatorias dependientes.

<u>Observaciones</u>

1- De la definición de las *fdp* marginales, vemos que tanto en el caso discreto como en el continuo, la *fdp* conjunta determina unívocamente las *fdp* marginales. Es decir, si (X,Y) es discreta del conocimiento de la función de probabilidad conjunta $p(x_i,y_j)$ podemos determinar unívocamente las funciones de probabilidad $p(x_i)$ y $q(y_j)$. Análogamente, si (X,Y) es continua del conocimiento de la función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$ podemos determinar unívocamente las funciones de densidad $g(x)$ y $h(y)$. Sin embargo la inversa no se cumple en general. Es decir del conocimiento de $p(x_i)$ y $q(y_j)$ no se puede, en general, reconstruir $p(x_i,y_j)$ a menos que X e Y sean variables independientes en cuyo caso es $p(x_i,y_j)=p(x_i)q(y_j)$ y, análogamente, en el caso continuo, del conocimiento de $g(x)$ y $h(y)$ no se puede construir en general $f(x,y)$ excepto cuando X e Y son independientes en cuyo caso puedo escribir $f(x,y)=g(x)h(y)$

2- Podemos observar del último ejemplo, que puede ocurrir que aún cuando la función $f(x,y)$ ya esté escrita en forma factorizada como una función sólo de *x* por una función sólo de *y*, las variables *X* e *Y* no sean independientes puesto que el dominio es tal que hace que las variables sean dependientes. Así, en el ejemplo anterior, el recorrido $R_{XY} = \{(X,Y) : 0 \le x \le y \le 1\}$ condiciona los valores que toma *x* a los valores que toma *y*.

3- El concepto de independencia entre dos variables aleatorias se puede generalizar a *n* variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$

Esperanza de una v.a. que es función de una v.a. bidimensional

Sea una variable aleatoria bidimensional (X,Y) con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$ y sea una función real de dos variables $z = H(x,y)$ de manera que podemos definir una variable aleatoria *Z* que es función de la variable aleatoria bidimensional (X,Y) de la forma $Z = H(X,Y)$. Entonces la esperanza matemática de *Z* es, de acuerdo con la definición general,

$$E(Z) = E[H(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y) f(x,y) dxdy.$$

Ejemplo:
Supongamos que debido a innumerables causas incontrolables la corriente *i* y la resistencia *r* de un circuito varían aleatoriamente de forma tal que pueden considerarse como variables aleatorias *I* y *R* independientes. Supongamos que las correspondientes *fdp* son:

$$g(i) = \begin{cases} 2i & 0 \le i \le 1 \\ 0 & demás \;\; valores \end{cases} \qquad h(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{9} & 0 \le r \le 3 \\ 0 & demás \;\; valores \end{cases}$$

Nos interesa considerar el voltaje $v = i.r$ de manera que podemos definir la variable aleatoria $V = I.R$. Específicamente deseamos conocer el valor esperado o esperanza matemática del voltaje: $E(V)$.
Usando la propiedad establecida en el teorema anterior:

$E(V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(i,r). f(i,r) didr$. Ahora bien, puesto que consideramos que *I* y *R* son variables aleatorias independientes, la *fdp* conjunta de la v.a. bidimensional (*I*,*R*) es simplemete el producto de las marginales o sea de las *fdp* de las variables aleatorias *I* y *R* tomadas como variables aleatorias unidimensionales: $f(i,r) = g(i).h(r)$, es decir:

$$f(i,r) = \begin{cases} \frac{2}{9} i.r^2 & si \;\; 0 \le i \le 1 \;\; y \;\; 0 \le r \le 3 \\ 0 & demás \;\; valores \end{cases}$$

Entonces

$$E(V) = \int_0^3 dr \int_0^1 di (i.r). \frac{2}{9} i.r^2 = \frac{2}{9}\int_0^3 r^3 dr \int_0^1 i^2 di = \frac{3}{2}$$

Practica

Variable aleatoria bidimensional

1) Cierto supermercado tiene una caja de salida común y una caja rápida. Denote por X_1 el número de clientes que están en espera en la caja común en un momento en particular del día, y por X_2 el número de clientes en espera en la caja rápida al mismo tiempo. Suponga que la fdp conjunta de X_1 y X_2 es como se indica en la tabla siguiente:

		X_1			
		0	1	2	3
X_2	0	0.08	0.07	0.04	0.00
	1	0.06	0.15	0.05	0.04
	2	0.05	0.04	0.10	0.06
	3	0.00	0.03	0.04	0.07
	4	0.00	0.01	0.05	0.06

a) ¿Cuál es $P(X_1 = 1, X_2 = 1)$, esto es, la probabilidad de que haya exactamente un cliente en cada línea de espera?.

b) ¿Cuál es $P(X_1 = X_2)$, esto es, la probabilidad de que los números de clientes de las dos líneas de espera sean iguales?

c) Sea A el evento de que haya por lo menos dos clientes más en una línea de espera que en la otra. Exprese A en términos de X_1 y X_2 y calcule la probabilidad de este evento.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de clientes de las dos líneas de espera sea exactamente cuatro?. ¿Y por lo menos cuatro?.

e) Determine la fdp. marginal de X_1 y la fdp marginal de X_2.

f) Por inspección de las probabilidades $P(X_1 = 4)$, $P(X_2 =0)$ y $P(X_1 = 4, X_2 =0)$, ¿son X_1 y X_2 variables aleatorias independientes?

2) Un ingeniero mide la cantidad , (por peso), de un contaminante particular en unas muestras de aire de cierto volumen recogidas sobre la chimenea de una central de energía eléctrica que funciona a carbón. Sea X la cantidad del contaminante por muestra recogida cuando no esta funcionando cierto dispositivo de limpieza en la chimenea, y sea Y la cantidad de contaminante por muestra recogida bajo las mismas condiciones ambientales cuando el dispositivo esta trabajando. Se observa que el comportamiento de la frecuencia relativa de X e Y puede tener el modelo :

$$f(x,y)=\begin{cases} K & \text{si } 0\le x\le 2 \;\; ; 0\le y\le 1 \; ; 2y\le x \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases}$$

a) Determine el valor de K.

b) Calcule $P(X \ge 3Y)$, es decir encuentre la probabilidad de que el dispositivo de limpieza reduzca la cantidad de contaminante en un tercio o mas.

c) Si esta funcionando el dispositivo limpiador, calcule la probabilidad de que la cantidad de contaminante en una muestra sea mayor que 0.5.
d) Dado que la cantidad de contaminante en una muestra obtenida cuando funciona el limpiador es **mayor de** 0.5, calcule la probabilidad de que la cantidad de contaminante, si no hubiera funcionado el dispositivo limpiador, hubiera sido mayor que 1.5
e) ¿Son independientes las cantidades de contaminantes por muestra recogida con y sin el dispositivo de limpieza?.

3) Sean X e Y las proporciones de dos tipos diferentes de componentes de una muestra de una mezcla de productos químicos utilizada como insecticida.. Suponga que X e Y tienen la función de densidad conjunta dada por :

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le x \le 1; \quad 0 \le y \le 1; \quad 0 \le x + y \le 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

a) Encuentre $P(X \le 3/4, Y \le 3/4)$
b) Calcular $P(X \le 1/2, Y \le 1/2)$
c) Calcule $P(X \ge 1/2 \mid Y \le 1/4)$
d) Calcule $P(X \ge 1/2 \mid Y = 1/4)$
e) ¿Son X e Y independientes ?

4) La duración Y para los fusibles de cierto tipo se representa por la fdp:

$$f(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right) e^{-y/3}, & y > 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

(Las mediciones se indican en cientos de horas).
a) Si dos de estos fusibles tienen duraciones independientes Y_1 e Y_2, encuentre la fdp conjunta para Y_1 e Y_2.
b) Un fusible de a) se encuentra en un sistema principal y el otro en un sistema de emergencia que entra en función solamente si falla el sistema principal. La duración efectiva total de los dos fusibles es entonces $Y_1 + Y_2$. Calcule $P(Y_1 + Y_2 \le 1)$.

5) Un topógrafo desea trazar una región cuadrada con cada lado de longitud *L*. Sin embargo, debido a un error de medición, traza un rectángulo en el que los lados norte-sur tienen ambos una longitud X y los lados este-oeste tienen longitud Y. Suponga que X e Y son independientes y que cada uno tiene fdp:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A}, & L - A \le x \le L + A \\ 0, & c.c \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2A}, & L - A \le y \le L + A \\ 0, & c.c \end{cases}$$

donde $0<A<L$. ¿Cuál es el área esperada del rectángulo resultante?

6) Determine la covarianza de las variables X_1 y X_2 del ejercicio 2)

7) Determine la covarianza de las variables X e Y del ejercicio 3)

6- SUMA DE VARIABLES ALEATORIAS Y TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

5.1 – Suma de variables aleatorias independientes

Cuando se estudiaron las variables aleatorias bidimensionales se habló de una ***función de variable aleatoria bidimensional.*** En particular se nombró la suma de *n* variables aleatorias**,** pero no se dijo nada sobre la ***distribución*** de esa v.a. suma.
Es a menudo importante saber cuál es la distribución de una suma de variables aleatorias independientes.

1- ***Suma de variables aleatorias binomiales independientes***

$$X \sim B(n_1, p)\ ;\ Y \sim B(n_2, p)\ ;\ X \text{ y } Y \text{ independientes} \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$$

Dem.)
Nuevamente consideramos el evento $\{X+Y=k\}$ como unión de eventos excluyentes $\{X=i, Y=k-i\}$ $\quad 0 \le i \le n_1$, entonces

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{n_1} P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^{n_1} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n_2-k+i} =$$

X e *Y* independientes

$$= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}$$

En la expresión anterior si $j > r$ entonces $\binom{r}{j} = 0$

Por último usamos la siguiente identidad combinatoria $\quad \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i} = \binom{n_1+n_2}{k}$

Y entonces

$$P(X+Y=k) = \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}$$

O sea *X+Y* tiene distribución binomial con parámetros n_1+n_2 y p

Observación: se puede generalizar el resultado a *n* variables aleatorias independientes, usando el principio de inducción completa, es decir
Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son *n* variables aleatorias independientes donde $X_i \sim B(n_i, p)$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$ entonces $\sum_{i=0}^{n} X_i \sim B(\sum_{i=0}^{n} n_i, p)$

2- Suma de variables aleatorias normales independientes

Si *X* e *Y* son dos variables aleatorias continuas independientes con densidades *g(x)* y *h(y)* respectivamente se puede probar (no lo demostraremos aquí) que la v.a. $Z = X+Y$ tiene densidad dada por

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z-y)h(y)\,dy$$

Usando esto se puede demostrar el siguiente importante resultado:

Si X e Y son variables aleatorias independientes donde $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^{\ 2}\right)$ y $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^{\ 2}\right)$ entonces $X+Y \sim N\left(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}\right)$

Por inducción completa se puede generalizar este resultado a n variables:

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$ entonces $\sum_{i=0}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=0}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$

De lo anterior y del hecho que $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$ tenemos:

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$ entonces $\sum_{i=0}^{n} a_i X_i \sim N(\sum_{i=0}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2)$ donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales

Se dice que $\sum_{i=0}^{n} a_i X_i$ es una ***combinación lineal de variables aleatorias***.

Ejemplos:

1- La envoltura de plástico para un disco magnético está formada por dos hojas. El espesor de cada una tiene una distribución normal con media 1.5 milímetros y desviación estándar de 0.1 milímetros. Las hojas son independientes.

a) Determine la media y la desviación estándar del espesor total de las dos hojas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el espesor total sea mayor que 3.3 milímetros?

Solución: Sean las variables aleatorias

X: "espesor de la hoja 1" e *Y*: "espesor de la hoja 2"

Entonces $X \sim N(1.5, 0.1^2)$; $Y \sim N(1.5, 0.1^2)$ y X e Y independientes

a) Si definimos la v.a. *Z*: "espesor total de las dos hojas" , entonces $Z = X+Y$

Por lo tanto $Z \sim N(1.5+1.5, \quad 0.1^2+0.1^2)$ es decir $Z \sim N(3, \quad 0.02)$

En consecuencia $E(Z) = 3$, $\sigma_Z = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{0.02}$

b) Se pide calcular $P(Z > 3.3)$

$$P(Z > 3.3) = P\left(\frac{Z-3}{\sqrt{0.02}} > \frac{3.3-3}{\sqrt{0.02}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{3.3-3}{\sqrt{0.02}}\right) = 1-\Phi(2.12132) = 1-0.983 = 0.017$$

2-Tengo tres mensajes que atender en el edificio administrativo. Sea X_i : " el tiempo que toma el *i*-ésimo mensaje" (i = 1, 2 ,3), y sea X_4 : " el tiempo total que utilizo para caminar hacia y desde el

edificio y entre cada mensaje". Suponga que las X_i son independientes, normalmente distribuidas, con las siguientes medias y desviaciones estándar:

$$\mu_1 = 15\,\text{min}, \quad \sigma_1 = 4, \quad \mu_2 = 5, \quad \sigma_2 = 1, \quad \mu_3 = 8, \quad \sigma_3 = 2, \quad \mu_4 = 12, \quad \sigma_4 = 3$$

Pienso salir de mi oficina precisamente a las 10.00 a.m. y deseo pegar una nota en mi puerta que dice "regreso a las *t* a.m." ¿A qué hora *t* debo escribir si deseo que la probabilidad de mi llegada después de *t* sea 0.01?

<u>Solución</u>: Definimos la v.a. *Z*: "tiempo transcurrido desde que salgo de mi oficina hasta que regreso", entonces $T = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

Por lo tanto $T \sim N\left(\sum_{i=1}^{4}\mu_i,\ \sum_{i=1}^{4}\sigma_i^{\,2}\right)$, y se pide hallar *t* tal que $P(T > t) = 0.01$

$\sum_{i=1}^{4}\mu_i = 15+5+8+12 = 50$ y $\sum_{i=1}^{4}\sigma_i^{\,2} = 4^2+1^2+2^2+3^2 = 30$

Entonces $P(T > t) = 1 - \Phi\left(\dfrac{t-50}{\sqrt{30}}\right) = 0.01$, es decir $\Phi\left(\dfrac{t-50}{\sqrt{30}}\right) = 0.99$

Buscando en la tabla de la normal $\dfrac{t-50}{\sqrt{30}} = 2.33 \quad \Rightarrow \quad t = 2.33\times\sqrt{30} + 50 = 62.7619$

3- El ancho del marco de una puerta tiene una distribución normal con media 24 pulgadas y desviación estándar de 1/8 de pulgada. El ancho de la puerta tiene una distribución normal con media 23.875 de pulgadas y desviación estándar de 1/16 de pulgadas. Suponer independencia.

a) Determine la distribución, la media y la desviación estándar de la diferencia entre el ancho del marco y de la puerta.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia entre el ancho del marco y de la puerta sea mayor que ¼ de pulgada?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la puerta no quepa en el marco?.

<u>Solución</u>: Sean las variables aleatorias

X: "ancho del marco de la puerta en pulgadas"

Y: "ancho de la puerta en pulgadas"

Entonces $X \sim N(24,\ (1/8)^2)$, $Y \sim N(23.875,\ (1/16)^2)$, *X* e *Y* independientes

a) Se pide la distribución de *X-Y* , $E(X-Y)$, $\sigma_{X-Y} = \sqrt{V(X-Y)}$

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 24 - 23.875 = 0.125$$

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) = \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{5}{256} \quad \therefore \quad \sigma_{X-Y} = \frac{\sqrt{5}}{16}$$

Por lo tanto $X - Y \sim N\left(0.125,\ \left(\dfrac{\sqrt{5}}{16}\right)^2\right)$

b) Se pide la probabilidad $P(X - Y > 1/4)$

$$P(X-Y > 1/4) = 1 - \Phi\left(\frac{0.25-0.125}{\frac{\sqrt{5}}{16}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 1 - \Phi(0.8944) = 1 - 0.8133 = 0.1867$$

c) Si la puerta no entra en el marco entonces se da el evento $\{X < Y\}$ o equivalentemente $\{X - Y < 0\}$, por lo tanto

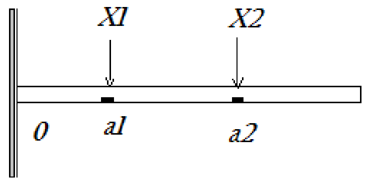
$$P(X-Y < 0) = \Phi\left(\frac{0-0.125}{\frac{\sqrt{5}}{16}}\right) = \Phi\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 0.1867$$

4- Supongamos que las variables aleatorias X e Y denotan la longitud y el ancho en cm, respectivamente, de una pieza.
Supongamos además que X e Y son independientes y que X ~ N(2 , 0.1^2) , Y ~ N(5 , 0.2^2).
Entonces $Z = 2X + 2Y$ es una v.a. que representa el perímetro de la pieza.
Calcular la probabilidad de que el perímetro sea mayor que 14.5 cm.

Solución: tenemos que $Z \sim N\left(2\times 2+2\times 5,\ 2^2\times 0.1^2+2^2\times 0.2^2\right)$, o sea $Z \sim N(14,\ 0.2)$
La probabilidad pedida es $P(Z>14.5)$, entonces

$$P(Z>14.5)=1-\Phi\left(\frac{14.5-14}{\sqrt{0.2}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1-\Phi(1.1180)=1-0.8810=0.119$$

5- Si se aplican dos cargas aleatorias X_1 y X_2 a una viga voladiza como se muestra en la figura si-
guiente, el momento de flexión en 0 debido a las cargas es $a_1X_1+a_2X_2$.



a) Suponga que X_1 y X_2 son v.a. independientes con medias 2 y 4 KLbs respectivamente, y desviaciones estándar 0.5 y 1.0 KLbs, respectivamente. Si $a_1=5$ pies y $a_2=10$ pies, ¿cuál es el momento de flexión esperado y cuál es la desviación estándar del momento de flexión?

b) Si X_1 y X_2 están normalmente distribuidas, ¿cuál es la prabilidad de que el momento de flexión supere 75 Klbs?

Solución: Sea la v.a. Z: “momento de flexión en 0”, entonces $Z=5X_1+10X_2$
Por lo tanto
a) $E(Z)=5E(X_1)+10E(X_2)=5\times 2+10\times 4=50$

$$V(Z)=5^2\times 0.5^2+10^2\times 1^2=25\times 0.25+10\times 1=\frac{65}{4} \quad \therefore\ \sigma_Z=\sqrt{\frac{65}{4}}$$

b) Si X_1 y X_2 están normalmente distribuidas, entonces $Z\sim N\left(50,\ \frac{65}{4}\right)$

Por lo tanto

$$P(Z>75)=1-\Phi\left(\frac{75-50}{\sqrt{\frac{65}{4}}}\right)=1-\Phi\left(\frac{10\sqrt{65}}{13}\right)=1-\Phi(6.20)\approx 1-1=0$$

Promedio de variables aleatorias normales independientes

> Si $X_1, X_2,\dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$ para todo $i=1,2,\dots,n$ entonces la v.a. $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ tiene distribución normal con media μ y varianza $\dfrac{\sigma^2}{n}$

Dem.) Notar que $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ es un caso particular de combinación lineal de variables aleatorias donde $a_i = \dfrac{1}{n}$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$

Además en este caso $\mu_i = \mu$ y $\sigma_i^2 = \sigma^2$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$

Por lo tanto, $\overline{X}$ tiene distribución normal con esperanza $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n}\mu_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n}\mu = \dfrac{1}{n} n\mu = \mu$ y varianza $\sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \sigma^2 = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 n\sigma^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Es decir, $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

Observación: a $\overline{X}$ se lo llama ***promedio muestral*** o ***media muestral***

Ejemplos:

1) El diámetro interno de un anillo de pistón seleccionado al azar es una v.a. con distribución normal con media 12 cm y desviación estándar de 0.04 cm.

a) Si $\overline{X}$ es el diámetro promedio en una muestra de $n = 16$ anillos, calcule $P(11.99 \le \overline{X} \le 12.01)$

b) ¿Qué tan probable es que el diámetro promedio exceda de 12.01 cuando $n = 25$?

Solución:

a) Sean las variables aleatorias X_i : "diámetro del anillo *i*" $i = 1,2,\ldots,16$

Entonces $X_i \sim N\left(12, 0.04^2\right)$ para cada *i*.

Por lo tanto $\overline{X} \sim N\left(12, \dfrac{0.04^2}{16}\right)$. Entonces

$$P(11.99 \le \overline{X} \le 12.01) = P\left(\frac{11.99-12}{\sqrt{\frac{0.04^2}{16}}} \le \frac{\overline{X}-12}{\sqrt{\frac{0.04^2}{16}}} \le \frac{12.01-12}{\sqrt{\frac{0.04^2}{16}}}\right) =$$

$$= \phi\left(\frac{12.01-12}{\sqrt{\frac{0.04^2}{16}}}\right) - \phi\left(\frac{11.99-12}{\sqrt{\frac{0.04^2}{16}}}\right) = \phi(1) - \phi(-1) = 2\phi(1) - 1 =$$

$$= 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826$$

b) En este caso $\overline{X} \sim N\left(12, \dfrac{0.04^2}{25}\right)$, entonces

$$P(\overline{X} > 12.01) = 1 - \phi\left(\frac{12.01-12}{\sqrt{\frac{0.04^2}{25}}}\right) = 1 - \phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

2) Una máquina embotelladora puede regularse de tal manera que llene un promedio de μ onzas por botella. Se ha observado que la cantidad de contenido que suministra la máquina presenta una distribución normal con $\sigma = 1$ onza. De la producción de la máquina un cierto día, se obtiene una muestra de 9 botellas llenas (todas fueron llenadas con las mismas posiciones del control operativo) y se miden las onzas del contenido de cada una.

a) Determinar la probabilidad de que la media muestral se encuentre a lo más a 0.3 onzas de la media real μ para tales posiciones de control

b) ¿Cuántas observaciones deben incluirse en la muestra si se desea que la media muestral esté a lo más a 0.3 onzas de μ con una probabilidad de 0.95?

<u>Solución</u>:

a) Sean las variables aleatorias X_i : "contenido en onzas de la botella *i*" $i = 1,2,\ldots,9$

Entonces $X_i \sim N(\mu,1)$ para cada *i*.

Por lo tanto $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{9}\right)$. Se desea calcular

$$P(|\overline{X} - \mu| \le 0.3) = P(-0.3 \le \overline{X} - \mu \le 0.3) = P\left(-\frac{0.3}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{0.3}{\sigma/\sqrt{n}} \right) =$$

$$= P\left(-\frac{0.3}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{0.3}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = P\left(-0.9 \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le 0.9 \right) = \Phi(0.9) - \Phi(-0.9) =$$

$$= 2\Phi(0.9) - 1 = 0.6318$$

b) Ahora se pretende que

$$P(|\overline{X} - \mu| \le 0.3) = P(-0.3 \le \overline{X} - \mu \le 0.3) = 0.95$$

Entonces

$$P(|\overline{X} - \mu| \le 0.3) = P\left(\frac{-0.3}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{0.3}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = P\left(-0.3\sqrt{n} \le \frac{\overline{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} \le 0.3\sqrt{n} \right) = 0.95$$

Mediante la tabla de la acumulada de la normal estándar se tiene que

$$P\left(-0.3\sqrt{n} \le \frac{\overline{X} - \mu}{1/\sqrt{n}} \le 0.3\sqrt{n} \right) = 2\Phi\left(0.3\sqrt{n}\right) - 1 = 0.95 \;\Rightarrow\; \Phi\left(0.3\sqrt{n}\right) = 0.975 \;\Rightarrow\; \left(0.3\sqrt{n}\right) = 1.96$$

O sea $n \approx \left(\frac{1.96}{0.3} \right)^2 = 42.68$

Si tomamos $n = 43$, entonces $P(|\overline{X} - \mu| \le 0.3)$ será un poco mayor que 0.95

5.2 - Teorema central del límite

Acabamos de ver que la suma de un número finito n de variables aleatorias independientes que están normalmente distribuidas es una variable aleatoria también normalmente distribuida. Esta propiedad reproductiva no es exclusiva de la distribución normal. En efecto, por ejemplo, ya vimos que existen variables aleatorias discretas que la cumplen, es el caso de la Poisson y la Binomial.
En realidad, la propiedad que le da a la distribución normal el lugar privilegiado que ocupa entre todas las distribuciones es el hecho de que la suma de un número muy grande, rigurosamente un número infinito numerable, de variables aleatorias independientes con distribuciones ***arbitrarias*** (no necesariamente normales) es una variable aleatoria que tiene, aproximadamente, una distribución normal. Este es, esencialmente, el contenido del

Teorema central del límite (T.C.L.):
Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$ para todo $i = 1,2,\dots,n$, es decir ***independientes idénticamente distribuidas***

Sea la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y sea $Z_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$.

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n \le z) = \Phi(z)$, esto es $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le z\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,dx$

Dem.) sin demostración

Observaciones:

1- Notar que $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mu$ y $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\sigma^2$

Por lo tanto $Z_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ es la v.a. S_n ***estandarizada***

2- Notar que $P\left(\dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le z\right) = P\left(\dfrac{\frac{S_n - n\mu}{n}}{\frac{\sqrt{n\sigma^2}}{n}} \le z\right) = P\left(\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$, por lo tanto también se puede enunciar el Teorema central del límite de la siguiente forma

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$ para todo $i = 1,2,\dots,n$, es decir ***independientes idénticamente distribuidas***

Sea la v.a. promedio muestral $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y sea $Z_n = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n \le z) = \Phi(z)$, esto es $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,dx$

Donde $Z_n = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ es el ***promedio muestral estandarizado***

3- Aunque en muchos casos el T.C.L. funciona bien para valores de *n* pequeños , en particular donde la población es continua y simétrica, en otras situaciones se requieren valores de *n* mas grandes, dependiendo de la forma de la distribución de las X_i. En muchos casos de interés práctico, si $n \geq 30$, la aproximación normal será satisfactoria sin importar cómo sea la forma de la distribución de las X_i . Si $n < 30$, el T.C.L. funciona si la distribución de las X_i no está muy alejada de una distribución normal

4- Para interpretar el significado del T.C.L., se generan (por computadora) *n* valores de una v.a. exponencial con parámetro $\lambda = 0.5$, y se calcula el promedio de esos *n* valores. Esto se repite 1000 veces, por lo tanto tenemos 1000 valores de la v.a. $\overline{X}$.
Hacemos un ***histograma de frecuencias*** de $\overline{X}$, esto es, tomamos un intervalo (a,b) donde "caen" todos los valores de $\overline{X}$, y lo subdividimos en intervalos mas chicos de igual longitud. La ***frecuencia de cada subintervalo*** es la cantidad de valores de $\overline{X}$ que caen en dicho subintervalo. Se grafican estas frecuencias obteniéndose los gráficos siguientes que se pueden considerar una aproximación a la verdadera distribución de $\overline{X}$.
Se observa que a medida que aumenta el valor de *n* los gráficos se van haciendo más simétricos, pareciéndose a la gráfica de una distribución normal.

Ejemplos:
1- Supóngase que 30 instrumentos electrónicos D_1, D_2, ...,D_{30}, se usan de la manera siguiente: tan pronto como D_1 falla empieza a actuar D_2. Cuando D_2 falla empieza a actuar D_3, etc. Supóngase que el tiempo de falla de D_i es una v.a. distribuida exponencialmente con parámetro $\lambda = 0.1$ por hora. Sea T el tiempo total de operación de los 30 instrumentos. ¿Cuál es la probabilidad de que T exceda 350 horas?

Solución:
Si X_i : "tiempo de falla del instrumento D_i" $\quad i = 1,2,\ldots,30$
Entonces $X_i \sim Exp(0.1)$ para $i = 1,2,\ldots,30$

El tiempo total de operación de los 30 instrumentos es $T = \sum_{i=1}^{30} X_i$, donde

$$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = 30 \times E(X_i) = 30 \times \frac{1}{0.1} = 300$$

$$V(T) = V\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = 30 \times V(X_i) = 30 \times \frac{1}{0.1^2} = 3000$$

Entonces por T.C.L. $\dfrac{T - 300}{\sqrt{3000}} \sim N(0,1)$ ***aproximadamente*** pues $n = 30$
La probabilidad pedida es

$$P(T > 350) = P\left(\frac{T-300}{\sqrt{3000}} > \frac{350-300}{\sqrt{3000}}\right) \underset{\text{T.C.L.}}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{350-300}{\sqrt{3000}}\right) = 1 - \Phi(0.9128) = 1 - 0.81859 = 0.18141$$

2- Suponga que el consumo de calorías por día de una determinada persona es una v.a. con media 3000 calorías y desviación estándar de 230 calorías. ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de consumo de calorías diario de dicha persona en el siguiente año (365 días) sea entre 2959 y 3050?

Solución:
Definimos las variables aleatorias
X_i : "cantidad de calorías que una persona consume en el día *i*" $i = 1,2,\ldots,365$
Se sabe que $E(X_i) = 3000$ y $V(X_i) = 230^2$
Si $\overline{X} = \dfrac{1}{365}\sum_{i=1}^{365} X_i$ entonces $E(\overline{X}) = 3000$ y $V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{230^2}{365}$
La probabilidad pedida es

$$P\left(2959 \le \overline{X} \le 3050\right) = P\left(\frac{2959-3000}{230/\sqrt{365}} \le \frac{\overline{X}-3000}{230/\sqrt{365}} \le \frac{3050-3000}{230/\sqrt{365}}\right) \approx$$

T.C.L.

$$\approx \Phi\left(\frac{3050-3000}{230/\sqrt{365}}\right) - \Phi\left(\frac{2959-3000}{230/\sqrt{365}}\right) = \Phi(4.15) - \Phi(-3.40) \approx 1 - 0 = 1$$

Aplicaciones del Teorema central del límite

Aproximación normal a la distribución binomial

El Teorema central del límite se puede utilizar para aproximar las probabilidades de algunas variables aleatorias discretas cuando es difícil calcular las probabilidades exactas para valores grandes de los parámetros.
Supongamos que *X* tiene una distribución binomial con parámetros *n* y *p*. Para calcular $P(X \le k)$ debemos hacer la suma $P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)$ o recurrir a las tablas de la F.d.a. , pero para valores de *n* grandes no existen tablas, por lo tanto habría que hacer el cálculo en forma directa y muchas veces es laborioso.
Como una opción podemos considerar a X como suma de variables aleatorias más simples, específicamente, si definimos

$$X_i = \begin{cases} 1 & si \;\; en \;\; la \;\; í-ésima \;\; repetición \;\; de \;\; \varepsilon \;\; ocurre \;\; éxito \\ 0 & caso \;\; contrario \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

entonces cada X_i se la puede considerar $B(1, p)$, y además $X_1, X_2,\ldots, X_n$ son independientes
Podemos escribir $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y ***si n es grande*** entonces *X* tendrá ***aproximadamente*** una distribución normal con parámetros np y $np(1-p)$, es decir

$$Z_n = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{X - n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}} \approx N(0,1)$$ si *n* es lo suficientemente grande

Observaciones:
1- La aproximación normal a la distribución binomial funciona bien aun cuando *n* no sea muy grande si *p* no está demasiado cerca de cero o de uno. En particular la aproximación normal a la binomial es buena si *n* es grande , $np > 5$ y $n(1-p) > 5$, ***pero es más efectivo aplicar esta aproximación cuando*** $np > 10$ ***y*** $n(1-p) > 10$

2- Corrección por continuidad.

Acabamos de ver que si $X \sim B(n,p)$ entonces, para n suficientemente grande, podemos considerar que aproximadamente es $X \sim N[n.p, n.p(1-p)]$. El problema que surge de inmediato si deseo calcular, por ejemplo, la probabilidad de que $X = k$ (con k alguno de los valores posibles 0,1,2, …,n) es que la binomial es una distribución discreta y tiene sentido calcular probabilidades como $P(X = k)$ mientras que la normal es una distribución continua y, en consecuencia, $P(X = k) = 0$ puesto que para una variable aleatoria continua la probabilidad de que ésta tome un valor aislado es cero. Esto se resuelve si se considera $P(X = k) \approx P\left(k - \frac{1}{2} \le X \le k + \frac{1}{2}\right)$

También se puede usar esta corrección para mejorar la aproximación en otros casos, específicamente en lugar de $P(X \le k)$ calculamos

$P(X \le k) \approx P\left(X \le k + \frac{1}{2}\right)$

Y en lugar de $P(X \ge k) \approx P\left(X \ge k - \frac{1}{2}\right)$

<u>Ejemplos</u>:

1- Sea $X \sim B(25, 0.4)$. Hallar las probabilidades exactas de que $X \le 8$ y $X = 8$ y comparar estos resultados con los valores correspondientes encontrados por la aproximación normal.

<u>Solución</u>:

De la tabla de la $F.d.a.$ de la binomial encontramos $P(X \le 8) = 0.274$

Y $P(X = 8) = P(X \le 8) - P(X \le 7) = 0.274 - 0.154 = 0.120$

Ahora usamos la aproximación normal

$$\underbrace{P(X \le 8) \approx P(X \le 8.5)}_{\text{corrección por continuidad}} = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{8.5 - 10}{\sqrt{25 \times 0.4 \times 0.6}}\right) \approx \Phi(-0.61) = 0.2709$$

Observar que el valor aproximado está muy cercano al valor exacto para $P(X \le 8) = 0.274$

$$P(X = 8) \approx P(7.5 \le X \le 8.5) = P\left(\frac{7.5 - 10}{\sqrt{6}} \le \frac{X - 10}{\sqrt{6}} \le \frac{8.5 - 10}{\sqrt{6}}\right) = P\left(-1.02 \le \frac{X - 10}{\sqrt{6}} \le -0.61\right) =$$
$$= 0.2709 - 0.1593 = 0.1170$$

Nuevamente este valor aproximado está muy cerca del valor real de $P(X = 8) = 0.120$

2- Suponga que el 10% de todos los ejes de acero producidos por cierto proceso están fuera de especificaciones, pero se pueden volver a trabajar (en lugar de tener que enviarlos a la chatarra). Considere una muestra aleatoria de 200 ejes y denote por X el número entre ellos que estén fuera de especificaciones y se puedan volver a trabajar. ¿Cuál es la probabilidad (aproximada) de que X sea

a) a lo sumo 30?

b) menos de 30?

c) entre 15 y 25 (inclusive)?

<u>Solución</u>:

Sea la v.a. X: "número de ejes fuera de especificaciones"

Entonces $X \sim B(200, \ 0.1)$, además $np = 200 \times 0.1 = 20 > 5$ y $n(1-p) = 200 \times (1 - 0.1) = 180 > 5$

Por lo tanto podemos aplicar la aproximación normal a la binomial

a) la probabilidad pedida es $P(X \le 30)$

$$P(X \le 30) \approx P(X \le 30.5) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{30.5 - 20}{\sqrt{18}}\right) \approx \Phi\left(\frac{30.5 - 20}{\sqrt{18}}\right) = \Phi(2.474) = 0.993244$$

b) La probabilidad pedida es $P(X < 30)$

Al ser X una v.a. ***discreta*** con distribución binomial $P(X < 30) = P(X \le 29)$

$$P(X \le 29) \approx P(X \le 29.5) \approx \Phi\left(\frac{29.5 - 20}{\sqrt{18}}\right) = \Phi(2.2391) = 0.98745$$

c)

$$P(15 \le X \le 25) \approx P(14.5 \le X \le 25.5) \approx \Phi\left(\frac{25.5 - 20}{\sqrt{18}}\right) - \Phi\left(\frac{14.5 - 20}{\sqrt{18}}\right) =$$

$$= \Phi(1.2963) - \Phi(-1.2963) = 2\Phi(1.2963) - 1 = 2 \times 0.90147 - 1 = 0.80294$$

3- El gerente de un supermercado desea recabar información sobre la proporción de clientes a los que no les agrada una nueva política respecto de la aceptación de cheques. ¿Cuántos clientes tendría que incluir en una muestra si desea que la fracción de la muestra se desvíe a lo mas en 0.15 de la verdadera fracción, con probabilidad de 0.98?.

Solución:

Sea X: "número de clientes a los que no les agrada la nueva política de aceptación de cheques"

Entonces $X \sim B(n, \ p)$ donde p es desconocido y es la ***verdadera proporción*** de clientes a los que no les agrada la nueva política de aceptación de cheques. El gerente tomará una muestra de n clientes para ***"estimar"*** p con $\overline{X} = \frac{X}{n}$ ya que $\overline{X} = \frac{X}{n}$ es la proporción de clientes a los que no les agrada la nueva política de aceptación de cheques ***en la muestra de n clientes***. Si no se toman a ***todos los clientes,*** entonces $\overline{X} = \frac{X}{n}$ ***no será igual a p***.

La pregunta es cuál debe ser n para que $\overline{X} = \frac{X}{n}$ se aleje del verdadero p en menos de 0.15 con probabilidad 0.98 por lo menos, o sea para que $P(|\overline{X} - p| \le 0.15) \ge 0.98$

Entonces planteamos

$$P(|\overline{X} - p| \le 0.15) = P(-0.15 \le \overline{X} - p \le 0.15) = P\left(\frac{-0.15n}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{0.15n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \underset{\text{T.C.L.}}{\approx}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{0.15n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.15n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.15n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 \ge 0.98$$

Por lo tanto $\Phi\left(\frac{0.15n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \ge \frac{0.98 + 1}{2} = 0.99$

Además $\frac{0.15n}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{0.15\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \ge \frac{0.15\sqrt{n}}{\sqrt{0.5(1-0.5)}} = 0.3\sqrt{n}$

Entonces debe cumplirse que $0.3\sqrt{n} \ge 2.33$ o sea $n \ge \left(\frac{2.33}{0.3}\right)^2 = 60.3211$

O sea ***se debe tomar una muestra de al menos 61 clientes***

<u>Aproximación normal a la distribución Poisson</u>

Se puede probar aplicando Teorema central del límite que

Si $X \sim P(\lambda)$ entonces para λ suficientemente grande $\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ tiene aproximadamente distribución $N(0,1)$

Es decir para λ suficientemente grande $\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(0,1)$

En la práctica si $\lambda \geq 30$ la aproximación es buena.

<u>Observación</u>: la demostración es sencilla si λ es igual a un número natural *n* pues, si consideramos las variables aleatorias $X_i \sim P(1)$ con $i = 1,2,\dots,n$ independientes, entonces ya sabemos que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)$, es decir $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n)$

Pero además por T.C.L. si *n* es grande $\sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene aproximadamente distribución normal con parámetros $n\mu = n \times 1 = n$ y $n\sigma^2 = n \times 1 = n$

O sea la distribución de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ que es exactamente Poisson con parámetro *n*, se puede aproximar con una $N(n,n)$, por lo tanto $\dfrac{X-n}{\sqrt{n}} \approx N(0,1)$ aproximadamente para valores de *n* suficientemente grandes

En los gráficos siguientes se muestra para diferentes valores de λ cómo aproxima la distribución $N(\lambda,\ \lambda)$ a la distribución $P(\lambda)$

<u>Ejemplo:</u>

El número de infracciones por estacionamiento en cierta ciudad en cualquier día hábil tiene una distribución de Poisson con parámetro λ = 50. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que:

a) entre 35 y 70 infracciones se expidan en un día en particular?

b) el número total de infracciones expedidas durante una semana de 5 días sea entre 225 y 275?

<u>Solución</u>:

Sea *X*: “número de infracciones por estacionamiento en cierta ciudad en cualquier día hábil”

Entonces $X \sim P(\lambda)$ donde $\lambda = 50$

Como $\lambda = 50$ entonces $\dfrac{X-50}{\sqrt{50}} \approx N(0,1)$ (aproximadamente)

a) la probabilidad pedida es

$$P(35 \le X \le 70) \approx \Phi\left(\frac{70-50}{\sqrt{50}}\right) - \Phi\left(\frac{35-50}{\sqrt{50}}\right) = \Phi(2.8284) - \Phi(-2.12132) =$$

$$= 0.997599 - 0.017 = 0.9805$$

b) Sea Y: "número total de infracciones expedidas durante una semana de 5 días"

Entonces $Y \sim P(\lambda)$ donde $\lambda = 50 \times 5 = 250$

La probabilidad pedida es

$$P(225 \le Y \le 275) \approx \Phi\left(\frac{275-250}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{225-250}{\sqrt{250}}\right) = \Phi(1.5811) - \Phi(-1.5811) =$$

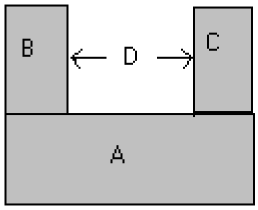
$$= 2\Phi(1.5811) - 1 = 2 \times 0.94295 - 1 = 0.8859$$

Práctica

Suma de variables aleatorias - Teorema central del límite.

1) Un hueco cilíndrico es perforado con un bloque de acero y se fabrica un pistón cilíndrico que quepa en el hueco. El diámetro del hueco es una v.a. X con distribución normal con media 20 cm y desviación estándar 0.01 cm. El diámetro del pistón es una v.a. Y con distribución normal con media 19.90 cm y desviación estándar 0.02 cm. La holgura es otra v.a. Z y es la mitad de la diferencia entre los diámetros.
Si X e Y son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que la holgura sea menor que 0.08 cm?

2) Un componente en forma de U esta formado por tres piezas A, B y C. La figura ilustra el componente.



La longitud de A tiene una distribución normal con media de 10 mm y desviación estándar de 0.1 mm. El espesor de las piezas B y C esta distribuido normalmente con media de 2 mm y desviación estándar de 0.05 mm. Suponga que todas las dimensiones son independientes.

c) Determine la media y la desviación estándar de la longitud del hueco D.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el hueco D sea menor que 5.9 mm?.

3) La v.a. X, que representa el número de cerezas en una tarta, tiene la siguiente distribución de probabilidad

x	4	5	6	7
$P(X = x)$	0.1	0.4	0.3	0.2

a) Encuentre $E(X)$ y $V(X)$

b) Encuentre la esperanza y la varianza del número de cerezas promedio en 40 tartas

c) Encuentre la probabilidad aproximada de que el número promedio de cerezas en 40 tartas sea menor que 5.5.

3) Supóngase que se tiene cierto número de voltajes, V_i, i = 1, 2,.......,20, que se reciben en lo que se llama un "sumador". Sea V la suma de los voltajes recibidos, es decir $V = \sum_{i=1}^{20} V_i$. Cada una de las variables aleatorias V_i está distribuida uniformemente en el intervalo (0, 10) en voltios. Hallar la probabilidad de que el voltaje de entrada sobrepase los 105 voltios.

<u>**Observación**</u>: Supongamos que se tienen n variables aleatorias $X_1, X_2,........,X_n$, **independientes** y con la **misma distribución de probabilidad**. Se dice que $X_1, X_2,........,X_n$ forman una **muestra aleatoria de tamaño n**.

e) La resistencia a la ruptura de un remache tiene un valor medio de 10000 lb/pulg^2 y una desviación estándar de 500 lb/pulg^2.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia media a la ruptura de la muestra, para una muestra aleatoria de 40 remaches, sea entre 9900 y 10200?

d) Si el tamaño muestral hubiera sido 15 en lugar de 40, ¿podría calcularse la probabilidad pedida en la parte a) a partir de la información dada?

f) Se sabe que la dureza Rockwell de pernos de cierto tipo tiene un valor medio de 50 y desviación estándar de 1.5.
e) Si la distribución es normal, ¿cuál es la probabilidad de que la dureza muestral media para una muestra aleatoria de 9 pernos sea por lo menos 52?
f) ¿Cuál es la probabilidad (aproximada) de que la dureza muestral media para una muestra aleatoria de 40 pernos sea al menos 52?

g) Suponga que la densidad del sedimento (g/cm) de un espécimen seleccionado al azar de cierta región está normalmente distribuida con media 2.65 y desviación estándar 0.85.
3- Si se selecciona una muestra aleatoria de 25 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que la densidad promedio de sedimento muestral sea a lo sumo 3.00?. ¿Y entre 2.65 y 3.00?
4- ¿Qué tan grande se requeriría un tamaño muestral para asegurar que la primera probabilidad de la parte a) sea por lo menos 0.99?.

8) Suponga que X es una v.a. binomial con n = 100 y p = 0.1.
a) Calcular la probabilidad exacta de que X sea menor que 4.
b) Aproxime la probabilidad de que X sea menor que 4 y compare el resultado con el del inciso a).
c) Aproxime la probabilidad de que $8 < X < 12$.

c) Suponga que el 10% de todos los ejes de acero producidos por cierto proceso están fuera de especificaciones, pero se pueden volver a trabajar (en lugar de tener que enviarlos a la chatarra). Considere una muestra aleatoria de 200 ejes y denote por X el número entre ellos que estén fuera de especificaciones y y se puedan volver a trabajar. ¿Cuál es la probabilidad (aproximada) de que X sea
7) a lo sumo 30?
8) menos de 30?
9) entre 15 y 25 (inclusive)?

10) Se procede a detener el funcionamiento de una máquina para repararla si en una muestra aleatoria de 100 artículos de la producción diaria de la máquina se encuentran por lo menos 15% de artículos defectuosos. (Suponga que la producción diaria consta de un gran número de artículos). Si realmente la máquina produce solo 10% de artículos defectuosos, encuentre la probabilidad de que se pare la máquina un día dado.

11) El gerente de un supermercado desea recabar información sobre la proporción de clientes a los que no les agrada una nueva política respecto de la aceptación de cheques. ¿Cuántos clientes tendría que incluir en una muestra si desea que la fracción de la muestra se desvíe a lo mas en 0.15 de la verdadera fracción, con probabilidad de 0.98?.
Responder utilizando Teorema central del límite.