Unidad 6

Transformadas integrales

8º CLASE

Cintia Perrone – PS 2023

π

Transformada de Laplace

- La transformada de Laplace permite convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas más fáciles de resolver. Al aplicar la transformada de Laplace a una ecuación diferencial, se obtiene una ecuación algebraica en el dominio de la frecuencia compleja, que luego se puede resolver para encontrar la solución en el dominio del tiempo.
- También se utiliza para analizar sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Al aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones que describen un sistema, se puede obtener una función transferencia en el dominio de la frecuencia compleja. Esto permite estudiar las propiedades del sistema, como su estabilidad, respuesta en frecuencia, amortiguación, resonancia, entre otros.

Transformada de Laplace

- Es fundamental en el análisis y diseño de sistemas de control. Permite analizar la estabilidad y respuesta en frecuencia de los sistemas de control, así como diseñar controladores que cumplan con ciertas especificaciones de desempeño.
- Permite estudiar la respuesta en frecuencia de los circuitos electrónicos, analizar la respuesta transitoria y estable de los sistemas, y diseñar filtros y amplificadores.
- Se utiliza para el análisis y procesamiento de señales en el dominio de la frecuencia para estudiar las características espectrales de las señales, y por ejemplo, filtrar señales no deseadas.

6.7 Transformada de Laplace bilateral.

Relación con la transformada de Fourier.

Se define la transformada de Laplace bilateral de $f(t)$ como:

$$\mathcal{L}_b\{f(t)\} = F_{\mathcal{L}_b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ts}\,dt$$

Para $s \in \mathbb{C}$ tales que la integral impropia exista.

Si $s = i2\pi s_2 \quad s_2 \in \mathbb{R}$, perteneciente al dominio de $F_{\mathcal{L}_b}(s)$ resulta:

$$F_{\mathcal{L}_b}(i2\pi s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi s_2 t}\,dt = F_{\mathcal{F}}(s_2) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

También hay una relación directa entre la Transformada de Laplace bilateral con la transformada de Fourier cuando $s = s_1 + is_2$

$$F_{\mathcal{L}_b}(2\pi s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi(s_1+is_2)t}\,dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{-2\pi s_1 t}]e^{-i2\pi s_2 t}\,dt = \mathcal{F}\{f(t)e^{-2\pi s_1 t}\}$$

Se puede interpretar a la transformada de Laplace bilateral de $f(t)$ como la transformada de Fourier de $f(t)$ multiplicada por una exponencial real.

6.8 Transformada de Laplace unilateral

Definición 6.8.1: **Transformada de Laplace**. Sea $f(t)$ una función de variable real definida para $t \geq 0$. La transformada de Laplace de $f(t)$**,** que indicaremos $\mathcal{L}\{f(t)\}$, $F_{\mathcal{L}_b}(s)$ o $F(s)$ está dado por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts}\, dt$$

Es importante conocer las condiciones que deben cumplir $f(t)$ y s (que puede ser real o complejo) para que dicha integral converja.

Los valores de s para los cuales la integral converge se llama **región de convergencia o dominio** de la transformada de Laplace.

Definiremos el concepto que describe una función que crece a lo sumo tan rápido como alguna función exponencial:

Definición 6.8.2: **Función de orden exponencial**.

Se dice que una función $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, es de orden exponencial σ cuando $t \to \infty$, si existen T y M constantes no negativas tales que:

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \text{ para todo } t \geq T.$$

(Ejemplos pizarrón 8.A)

Teorema 6.8.4: **Condiciones suficientes para la existencia.**

Si $f(t)$, $t \geq 0$ es una función seccionalmente continua en todo intervalo finito y es de orden exponencial σ, entonces existe $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para $Re(s) > \sigma$.

(Ejemplos pizarrón 8.B)

Propiedad: Sea $f(t) = t^n, n \in \mathbb{N}, t \geq 0$:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad si \quad Re(s) > 0$$

Ejemplos:

$$n = 0 \qquad \mathcal{L}\{1\} = \frac{0!}{s} = \frac{1}{s} \quad para \quad Re(s) > 0$$

$$n = 1 \qquad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1!}{s^2} = \frac{1}{s^2} \quad para \quad Re(s) > 0$$

$$n = 2 \qquad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3} \quad para \quad Re(s) > 0$$

La transformada inversa de Laplace

La transformada inversa o antitransformada de Laplace se nota $\mathcal{L}^{-1}$ y cumple:

$$\text{Si } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \ \text{ entonces } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t),\ t \geq 0$$

Si la transformada de Laplace de una función continua $f(t)$ es $F(s)$ para $Re(s) > \alpha$, se puede recuperar $f(t)$ calculando una integral compleja denominada integral de inversión compleja o integral de Bromwich ($\beta > \alpha$):

$$f(t) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\lambda}^{\beta + i\lambda} f(t) e^{-2\pi(s_1 + i s_2)t}\, dt \qquad t \geq 0$$

Ver ejemplo calculado en el libro, usando curvas auxiliares y teorema de Residuos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at} \quad t \geq 0$$

Al hallar la transformada inversa, lo que se hará es utilizar transformadas conocidas y propiedades. Ejemplos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at} \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \quad t \geq 0$$

6.9 Propiedades de la Transformada de Laplace

1) Linealidad: Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones tales que:

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),\ s \in D_1$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s),\ s \in D_2$

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad s \in D_1 \cap D_2$$

(Ejemplos pizarrón 8.C)

2) Traslación en el dominio de la transformada:

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ para $Re(s) > Re(b)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s-a) \quad para \qquad Re(s) > Re(a+b)$$

Es decir, si conocemos la transformada de una función, entonces también conocemos la transformada de esa función multiplicada por una exponencial. Además,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = f(t)e^{at} \quad t \geq 0$$

(Ejemplos pizarrón 8.D)

3) Traslación en el dominio del tiempo:

Sea $f(t), t \geq 0$. Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ para $Re(s) > Re(b)$ y a es una constante real positiva, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as} \quad para \quad Re(s) > Re(a+b)$$

Es decir, si conocemos la transformada de una función, entonces también conocemos la transformada de esa función corrida y “conectada” en cualquier $a > 0$. Además,

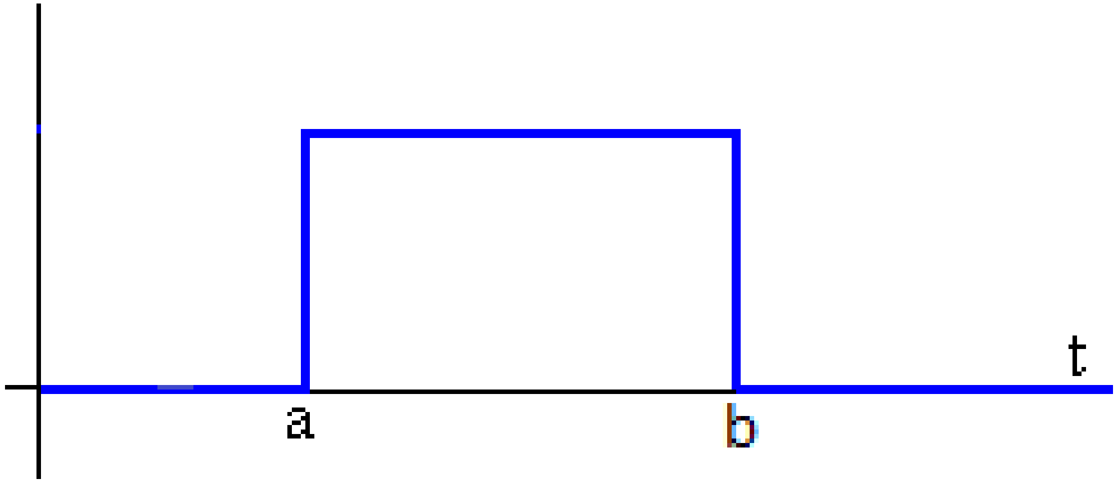
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-as}\} = f(t-a)u(t-a) \qquad t \geq 0$$

(Ejemplos pizarrón 8.E)

Transformadas de funciones definidas por tramos

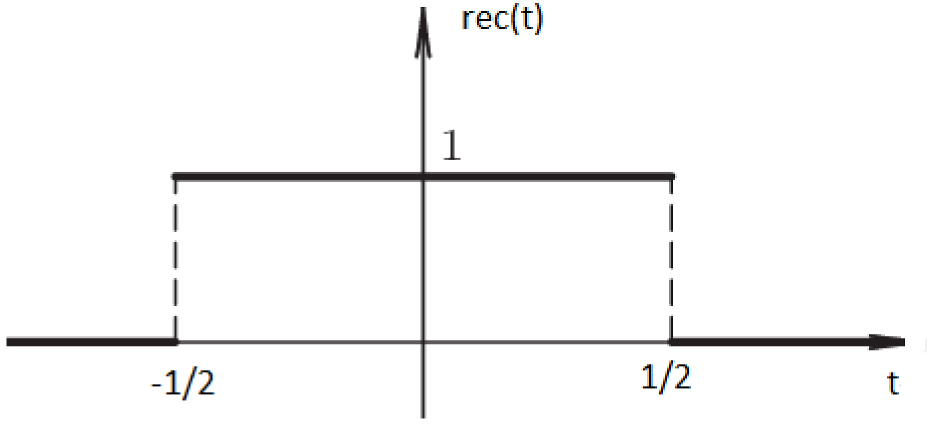
Sean a, b números reales con $a < b$, definimos la función rectangular $rec_{a,b}(t)$ como la diferencia de escalones unitarios:

$$rec_{a,b}(t) = u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0-0 & t < a \\ 1-0 & a < t < b \\ 1-1 & t > b \end{cases} = \begin{cases} 1 & a < t < b \\ 0 & t < a \ \vee \ t > b \end{cases}$$



Un caso particular es la función $rec(t)$ (vista anteriormente en un ejemplo):

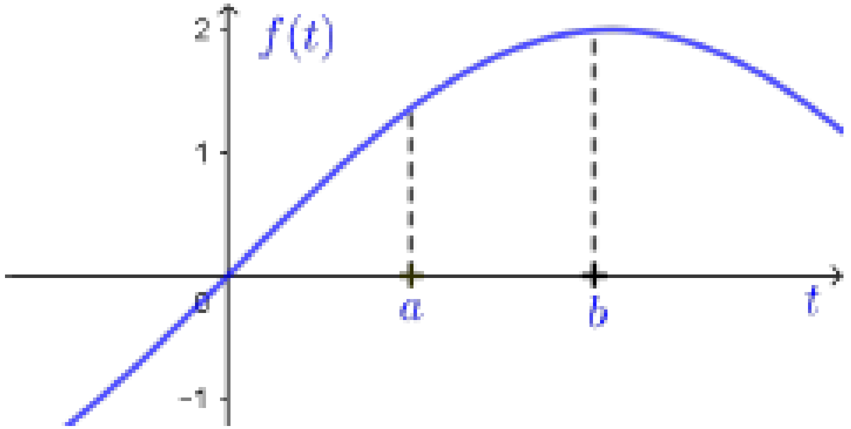
$$rec(t) = rec_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & -1/2 < t < 1/2 \\ 0 & t < -1/2 \ \vee \ t > 1/2 \end{cases}$$

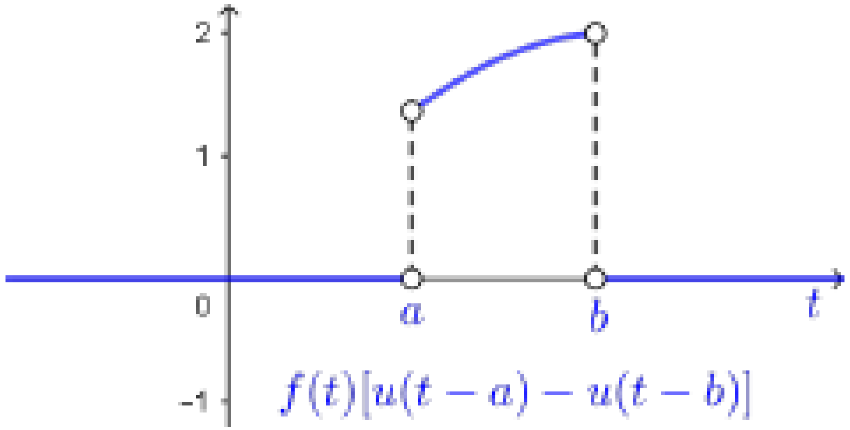


Si multiplicamos la función $rec_{a,b}(t)$ por una función $f(t)$, la limita al intervalo:

$$f(t)rec_{a,b}(t) = f(t)[u(t-a) - u(t-b)] = \begin{cases} f(t) & a < t < b \\ 0 & t < a \vee t > b \end{cases}$$

Y se dice que $f(t)$ esta “conectada" en ese intervalo.

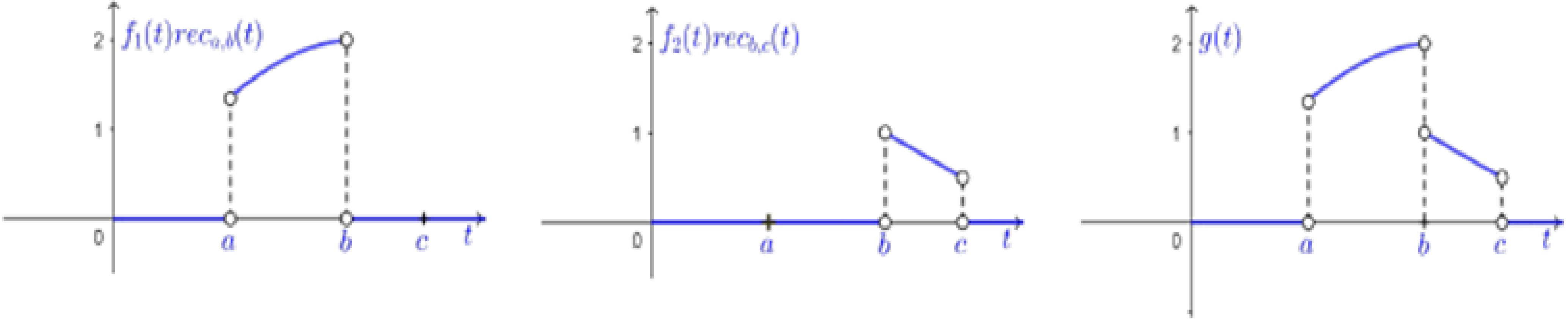




Este razonamiento se extiende a funciones definidas con cualquier cantidad de tramos:

$$g(t) = f_1(t)[u(t-a) - u(t-b)] + f_2(t)[u(t-b) - u(t-c)]$$

$$g(t) = \begin{cases} f_1(t) & a < t < b \\ f_2(t) & b < t < c \\ 0 & t < a \ \vee \ t > c \end{cases}$$



(Ejemplos pizarrón 8.F)

Transformadas de funciones periódicas

Si $f(t), t \geq 0$ es una función seccionalmente continua en el intervalo $(0, P)$ y es periódica de período P entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Ps}} \int_0^P f(v) e^{-sv} dv \quad para \;\; R(s) > 0$$

Ejemplo:

Calcular la transformada de Laplace de $f(t) = t, \quad 0 < t < 1 \quad\quad f(t+1) = f(t)$

$\mathrm{P} = 1$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 v e^{-sv} dv \quad para \;\; R(s) > 0$$

Transformada del impulso unitario

Sea $a > 0$ la transformada del impulso $\delta(t-a)$ se puede calcular como:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}\,dt = e^{-st}\Big|_{t=a} = e^{-at}$$

En la transformada de Laplace, cuando la función tiene peculiaridades en $t=0$ se considera el límite inferior de la integral 0^-. Con esta consideración, para $a = 0$:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^\infty \delta(t)e^{-st}\,dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1$$

Algunas transformadas conocidas:

$$\mathcal{L}\{sen(bt)\} = \frac{b}{s^2 + b^2} \quad Re(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{cos(bt)\} = \frac{s}{s^2 + b^2} \quad Re(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{senh(bt)\} = \frac{b}{s^2 - b^2} \quad Re(s) > |b|$$

$$\mathcal{L}\{cosh(bt)\} = \frac{s}{s^2 - b^2} \quad Re(s) > |b|$$