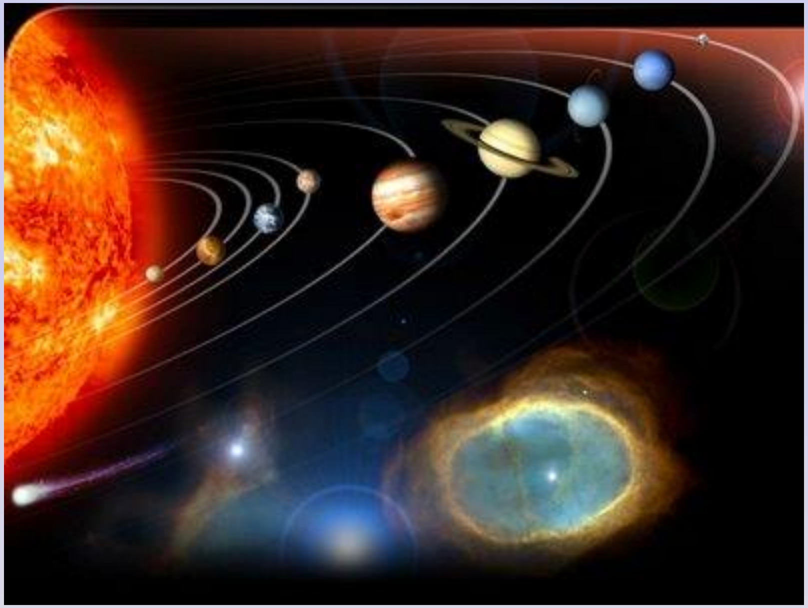
Física I
Apuntes de Clase 8, 2021

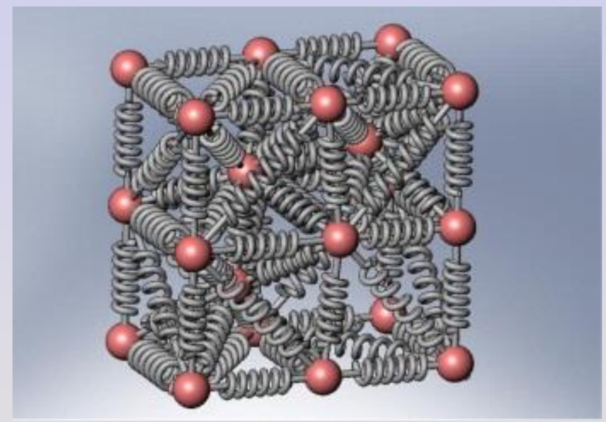
Turno E

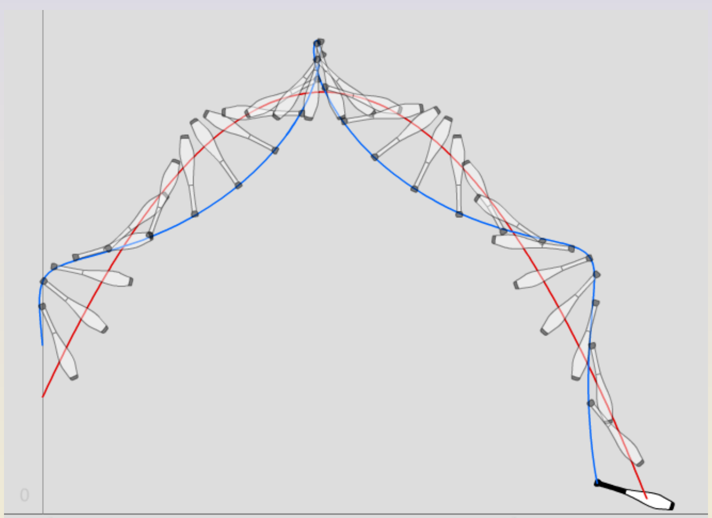
Prof. Susana Conconi

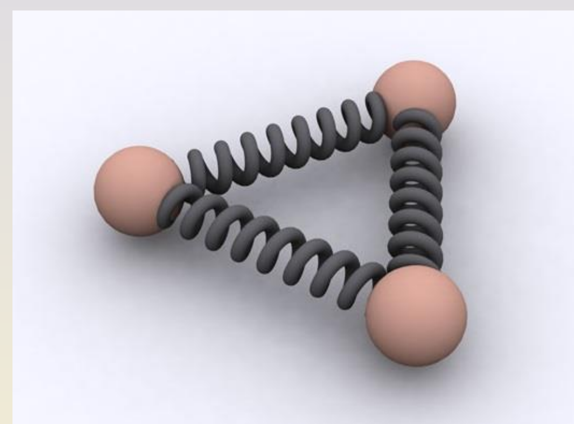
Sistema de Partículas
- Centro de Masas.
- Dinámica sistema de partículas.
- Teorema impulso - cantidad de movimiento.
- Conservación cantidad de movimiento.
- Colisiones - Explosiones
- Teorema trabajo Energía para un sistema de partículas

Sistemas de partículas



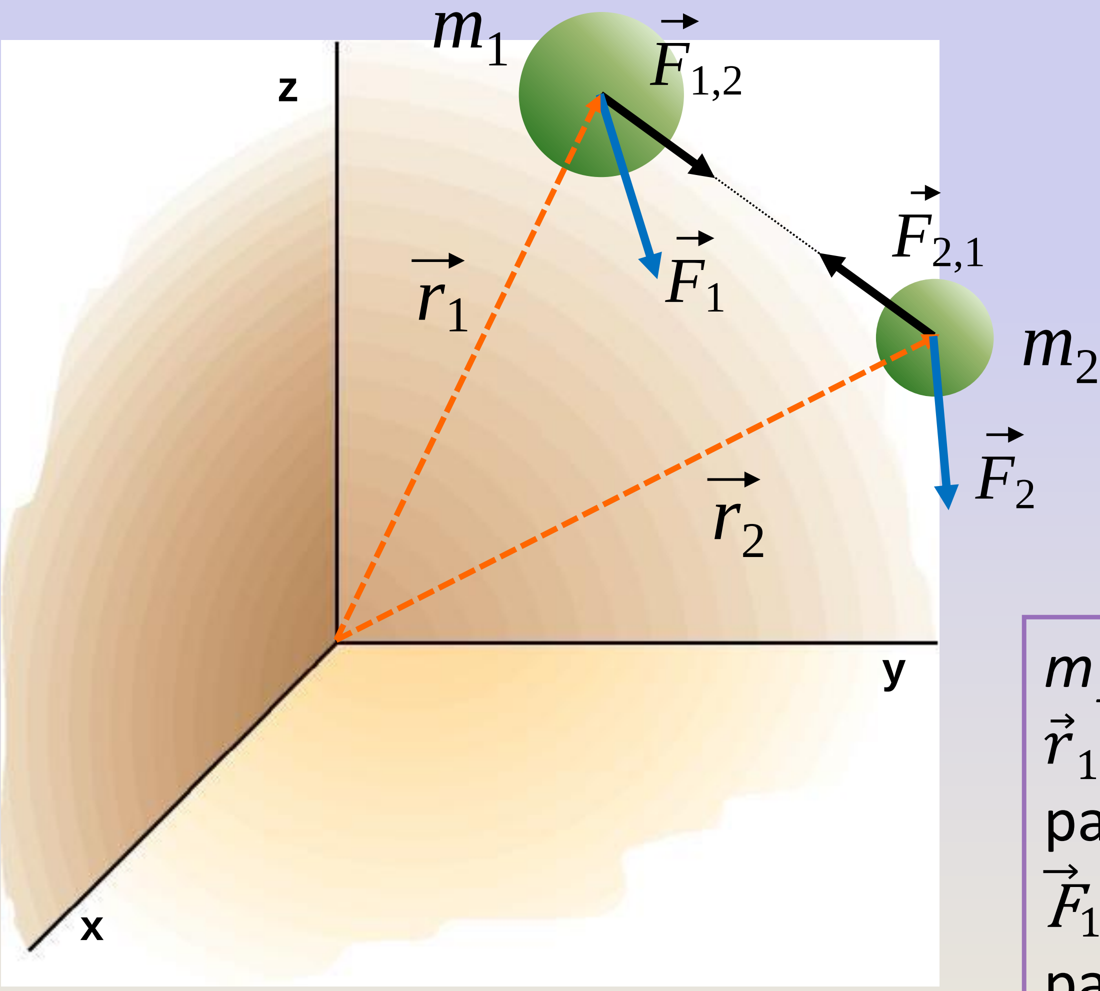






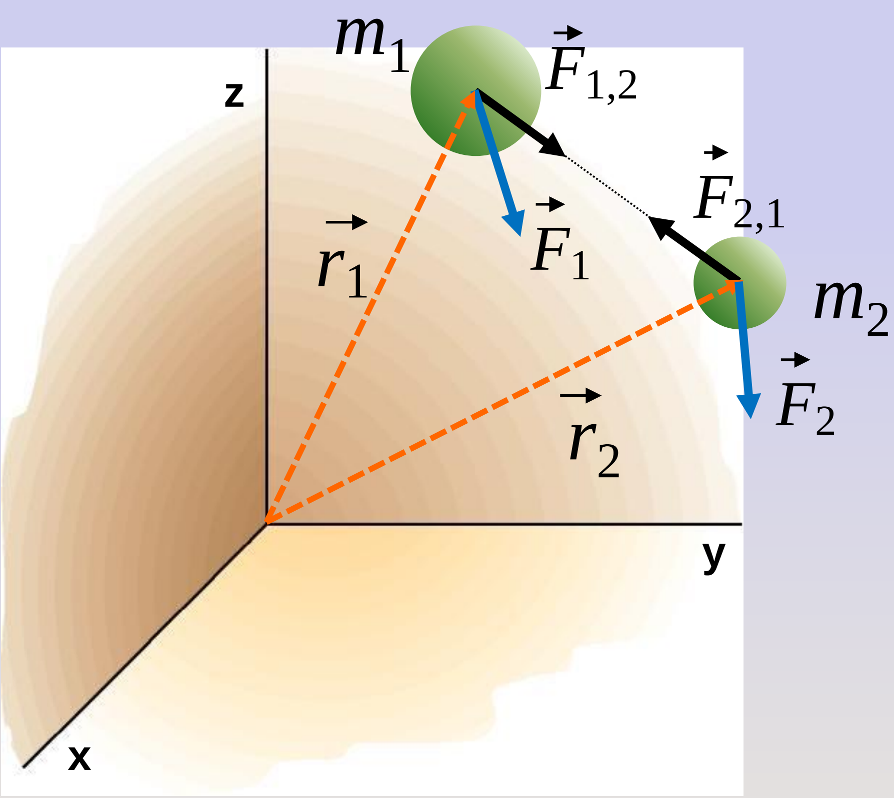
Hasta aquí hemos aplicado las leyes de Newton tratando a los objetos como si fueran partículas puntuales que tienen masa pero no tamaño, aunque muchas de las aplicaciones se extendían a objetos como bolas, bloques e incluso automóviles. En esta clase justificaremos estas aplicaciones considerando que un objeto extenso es un sistema de partículas y aplicando las leyes de Newton a todas ellas. Demostraremos que existe un punto del sistema cuyo movimiento bajo la influencia de fuerzas externas puede ser analizado como el de una partícula simple. Este punto se llama centro de masa. El movimiento de cualquier objeto o sistema de partículas, por complejo que sea, puede describirse en función del movimiento del centro de masas más el movimiento de las partículas respecto al centro de masas. En esta clase describiremos cómo hallar el centro de masa de los objetos y demostraremos que las leyes de newton aplicadas al movimiento del centro de masa de un sistema complejo nos conducen a la segunda de las grandes leyes de la conservación que encontraremos: la conservación de la cantidad de movimiento.

Sistema de dos partículas:



m_1: masa de la partícula 1
$\vec{r}_1$: vector posición de la partícula 1
$\vec{F}_1$: fuerza externa sobre la partícula 1
$\vec{F}_{1,2}$: fuerza ejercida por la partícula 2 sobre la partícula 1

Sistema de dos partículas:



Aplicamos la Segunda Ley de Newton a cada partícula por separado:

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_{1,2} = m_1\,\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_{2,1} = m_2\,\vec{a}_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_2 = m_1\,\vec{a}_1 + m_2\,\vec{a}_2$$

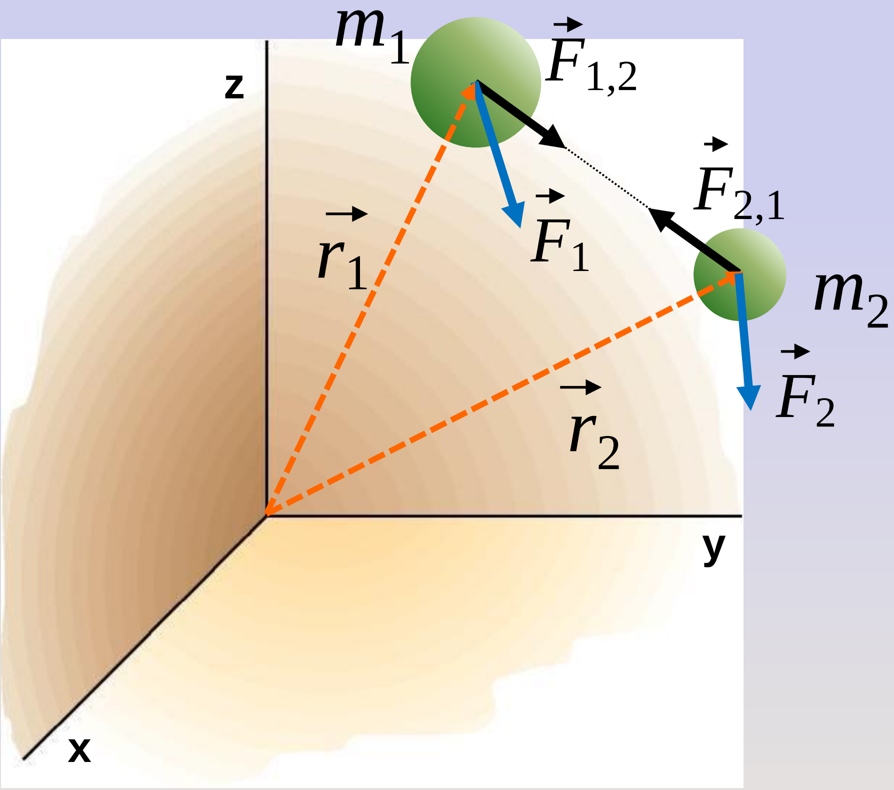
$$\Downarrow$$

$$\vec{F}_1 + \cancel{\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{2,1}} + \vec{F}_2 = m_1\,\vec{a}_1 + m_2\,\vec{a}_2$$

Tercera ley de Newton

(acción y reacción) $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$

Sistema de dos partículas:



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1\,\vec{a}_1 + m_2\,\vec{a}_2$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1\,\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2\,\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d^2}{dt^2}(m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2)$$

$$M = m_1 + m_2 \qquad \Downarrow$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M\,\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{M}\right)$$

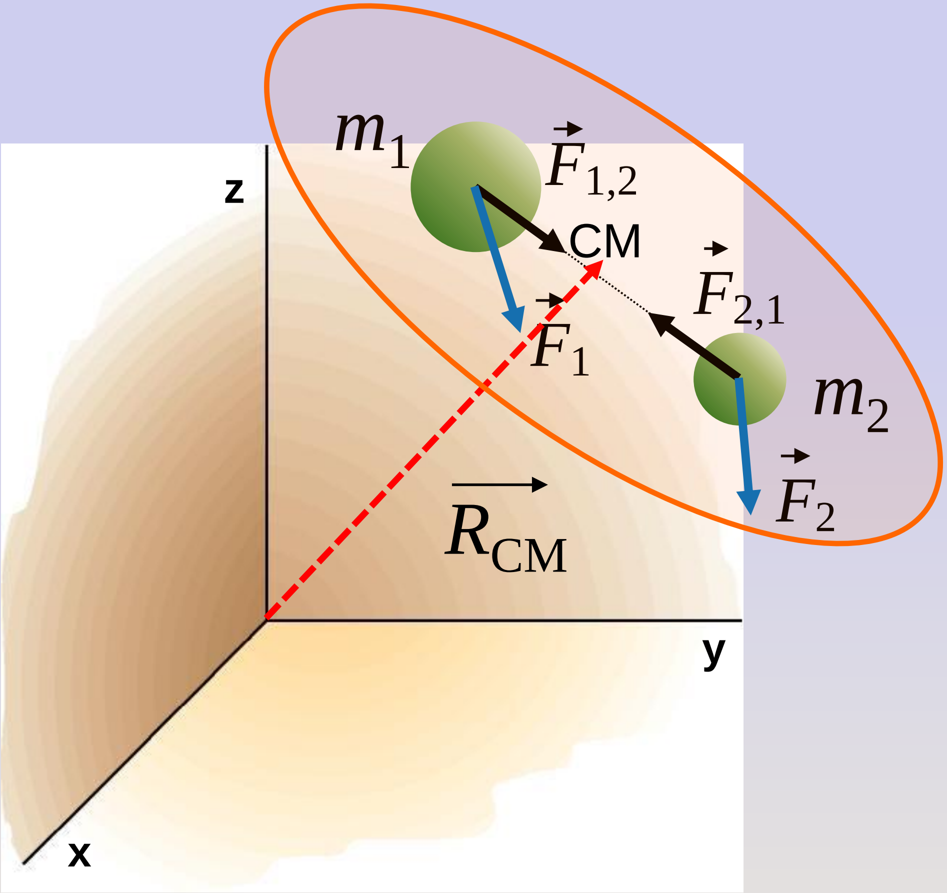
$$\Downarrow$$

Si definimos:

$$\vec{R}_{CM} = \left(\frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{M}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M\,\frac{d^2\vec{R}_{CM}}{dt^2}}$$

Sistema de dos partículas:



$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M\,\frac{d^2\vec{R}_{CM}}{dt^2}}$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$\vec{R}_{CM} = \left(\frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{M}\right)$$

Esta expresión es semejante a la 2da Ley de Newton para el caso de una partícula puntual:
El centro de masa de un sistema se mueve como una partícula de masa M sometida a la influencia de la suma de las fuerza externas que actúan sobre el sistema

Sistema de dos partículas:

$$\boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\ \vec{r}_1 + m_2\ \vec{r}_2\right)}$$

Posición del centro de masa

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(m_1\ \vec{r}_1 + m_2\ \vec{r}_2\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\ \frac{d\vec{r}_1}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)$$

$$M = m_1 + m_2$$

Sistema de dos partículas:

$$\boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\, \vec{r}_1 + m_2\, \vec{r}_2\right)}$$

Posición del centro de masa

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)}$$

Velocidad del centro de masa

$$\vec{A}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\,\frac{d\vec{v}_2}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{M}\left(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2\right)$$

$$M = m_1 + m_2$$

Sistema de dos partículas:

$$\boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2\right)}$$

Posición del centro de masa

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)}$$

Velocidad del centro de masa

$$\boxed{\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2\right)}$$

Aceleración del centro de masa

$$M = m_1 + m_2$$

Sistema de N partículas: centro de masa

Sistema con 2 partículas: $\longrightarrow$ Sistema con N partículas:

$$M = m_1 + m_2 \quad \longrightarrow \quad M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$$

$$\boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2\right)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\,\vec{r}_1 + m_1\,\vec{r}_1 + \ldots + m_N\,\vec{r}_N\right)}$$

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N\right)}$$

$$\boxed{\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2\right)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_N\vec{a}_N\right)}$$

Sistema de N partículas: centro de masa

Sistema con N partículas:

Masa total del sistema

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$$

Posición del centro de masa

$$\boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\ \vec{r}_1 + m_1\ \vec{r}_1 + \ldots + m_N\ \vec{r}_N\right)}$$

Velocidad del centro de masa

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N\right)}$$

Aceleración del centro de masa

$$\boxed{\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_N\vec{a}_N\right)}$$

Sistema de N partículas: centro de masa

Sistema con N partículas:

Masa total del sistema

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Posición del centro de masa

$$\boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \ \vec{r}_i}$$

Velocidad del centro de masa

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}$$

Aceleración del centro de masa

$$\boxed{\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}$$

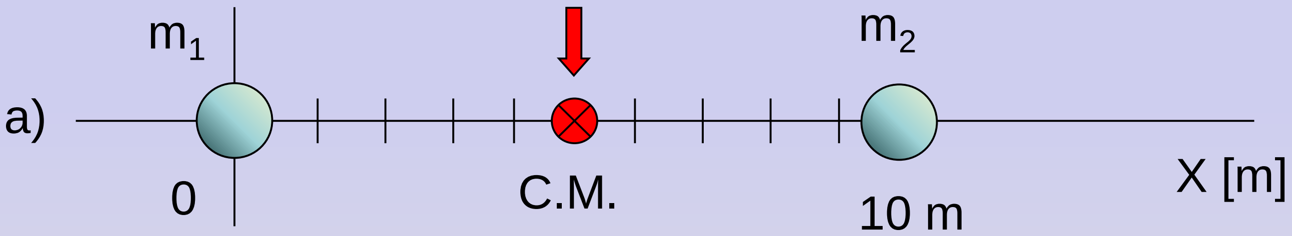
Sistema de N partículas: centro de masa

Podemos descomponer al vector posición del centro de masas en sus tres componentes:

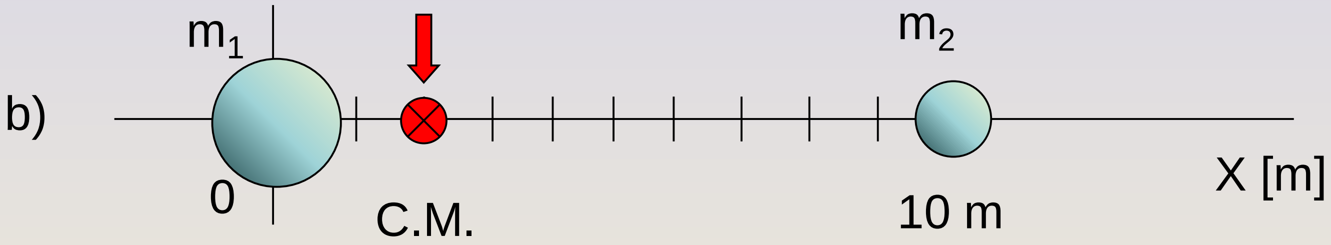
$$\vec{R}_{CM} = X_{CM}\,\hat{i} + Y_{C\hat{M}}\,\hat{j} + Z_{CM}\,\hat{k}$$

$$\vec{R}_{CM} \quad \begin{cases} X_{CM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots . + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots . + m_N} = \\[2em] Y_{CM} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots . + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \dots . + m_N} = \\[2em] Z_{CM} = \dfrac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots . + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \dots . + m_N} = \end{cases}$$

Ejemplo: Supongamos dos partículas m_1 y m_2, cada una de masa 2 kg, ubicadas como indica la figura. a) Hallar la posición del C.M. b) Si m_1 = 8 kg, hallar la posición del C.M. en este caso

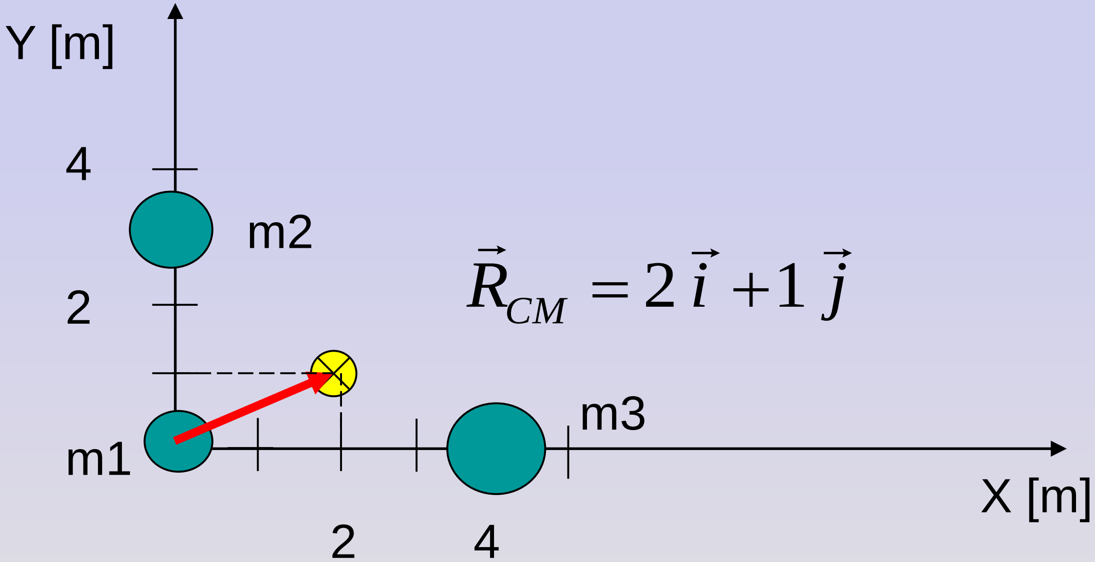


$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2kg.0 + 2kg.10m}{4kg} = 5m$$



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{8kg.0 + 2kg.10m}{10kg} = 2m$$

Ejemplo: Determinar el C.M. del sistema de 3 partículas mostrado en la figura



$$\vec{R}_{CM} = 2\,\vec{i} + 1\,\vec{j}$$

m1 = 2 kg

m2 = 4 kg

m3 = 6 kg

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2kg.0 + 4kg.0m + 6kg.4m}{12kg} = 2m$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2kg.0 + 4kg.3m + 6kg.0}{12kg} = 1m$$

Centro de masa: cuerpo continuo

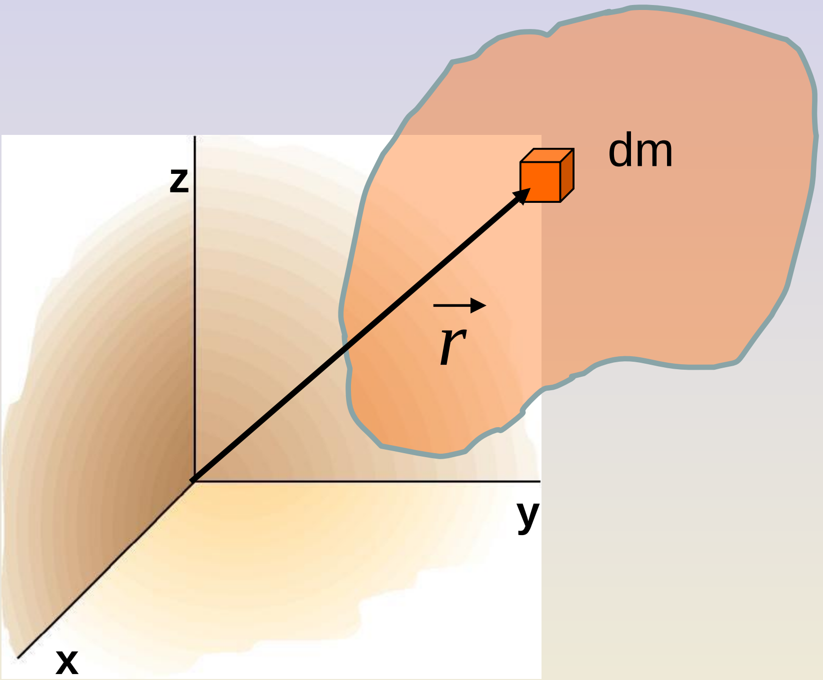
Sistema de partículas

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i$$

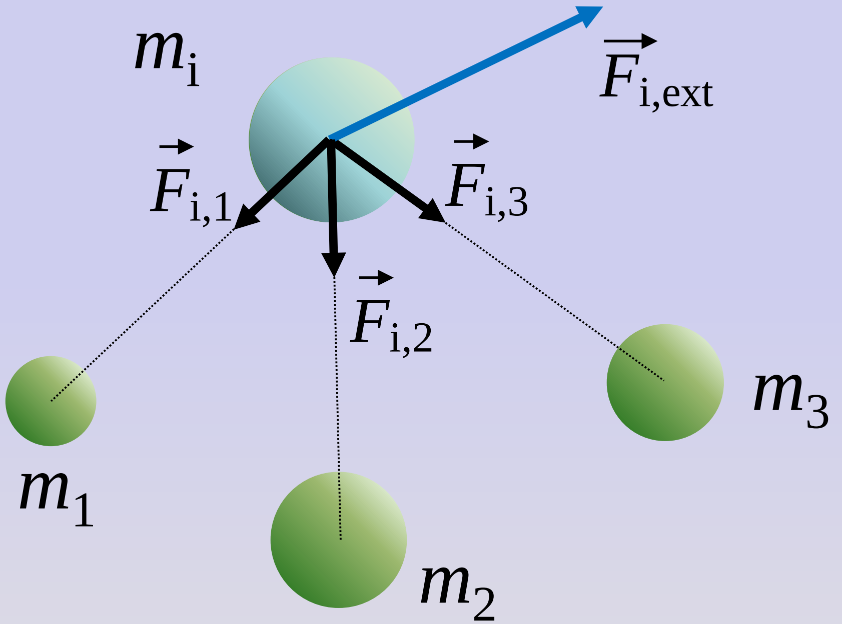
Para un cuerpo continuo, la suma se sustituye por una integral:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int_{volumen} \vec{r}\,dm$$

en donde dm es un elemento de masa localizado en la posición $\vec{r}$.



Sistema de N partículas: dinámica del centro de masa



Por 2da Ley de Newton

$$\vec{F}_{R,i} = \vec{F}_{R,i,\,\mathrm{int}} + \vec{F}_{R,i,\,\mathrm{ext}}$$

$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

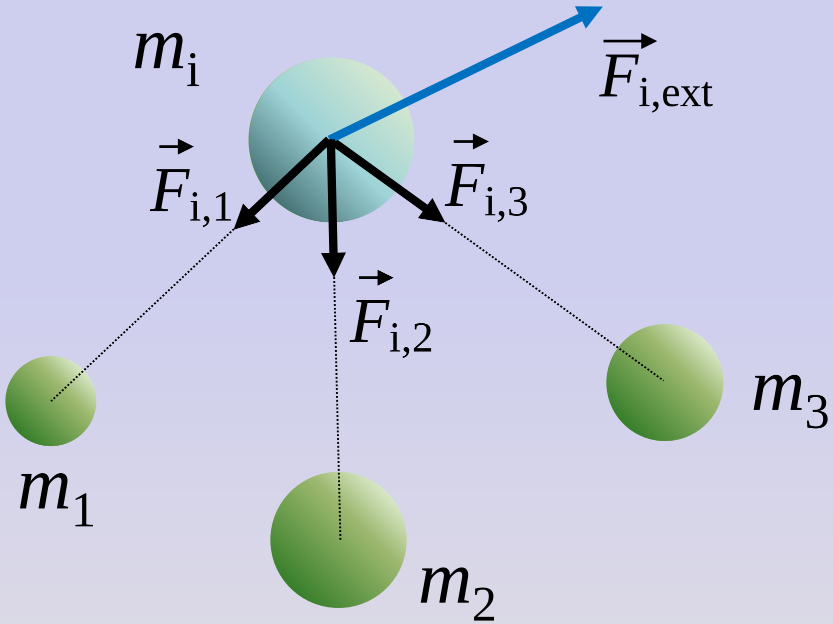
$$M\ \vec{A}_{CM,S} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_{R,i,\,\mathrm{int}} + \sum_i \vec{F}_{R,i,\,\mathrm{ext}}$$

La sumatoria sobre todas las partículas i

Las fuerzas que actúan sobre la partícula i pueden dividirse en dos categorías:

- las fuerza interiores debidas a las interacciones con otras partículas que se encuentran dentro del sistema
- las fuerzas externas ejercidas por agentes ajenos al sistema

Sistema de N partículas: dinámica del centro de masa



Por 2da Ley de Newton

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_{R,i} = \vec{F}_{R,i,\,\text{int}} + \vec{F}_{R,i,\,\text{ext}}$$

$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i$$

$$M\,\vec{A}_{CM,S} = \sum_i m_i\vec{a}_i = \cancel{\sum_i \vec{F}_{R,i,\,\text{int}}} + \sum_i \vec{F}_{R,i,\,\text{ext}}$$

Por la 3ra Ley de Newton las fuerzas internas se presentan en parejas de fuerza iguales pero opuestas, es decir $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$. Entonces, la suma total de todas las fuerzas internas es nula.

$$\boxed{M\,\vec{A}_{CM,S} = \sum_i \vec{F}_{R,i,\,\text{ext}} = \vec{F}_{neta,\,\text{ext}}}$$

Sistema de N partículas: dinámica del centro de masa

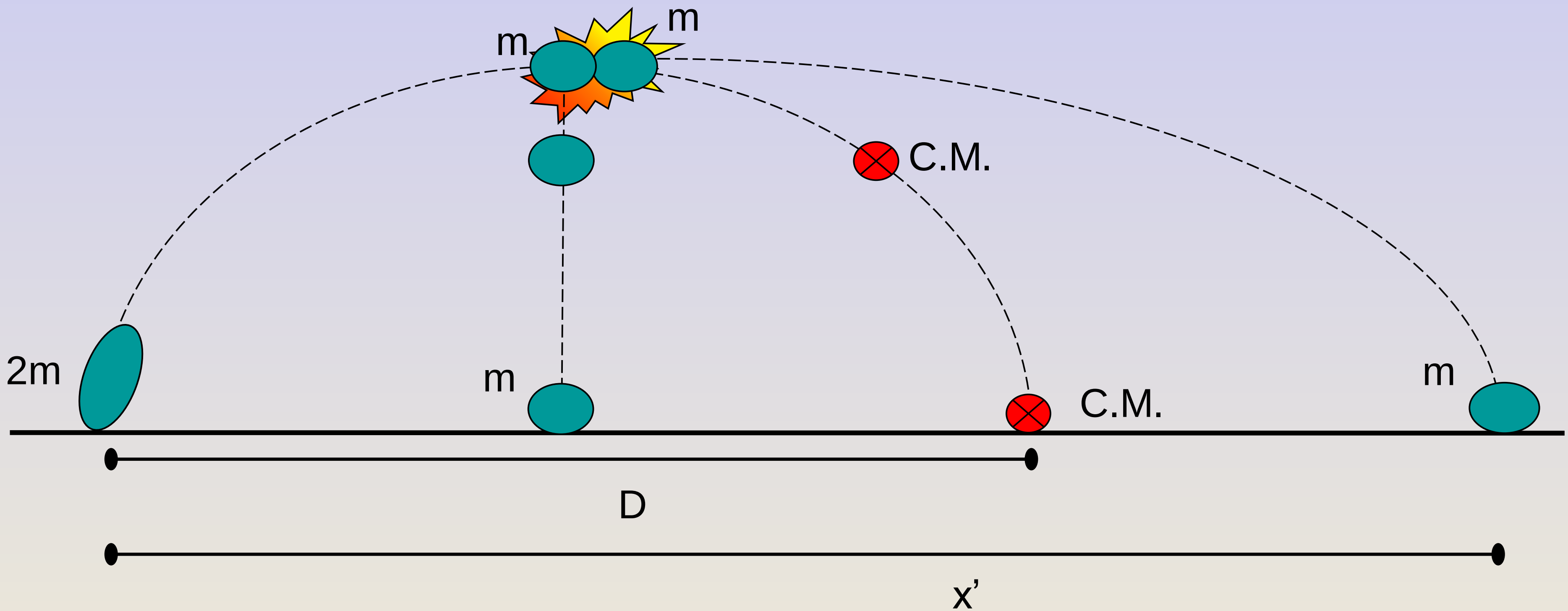
El centro de masas se mueve como una partícula imaginaria de masa *M* bajo la influencia de la fuerza neta externa ejercida sobre el sistema.

$$\boxed{M\ \vec{A}_{CM,S} = \vec{F}_{neta,\,\mathrm{ext}}}$$

$$M = \sum_i m_i$$

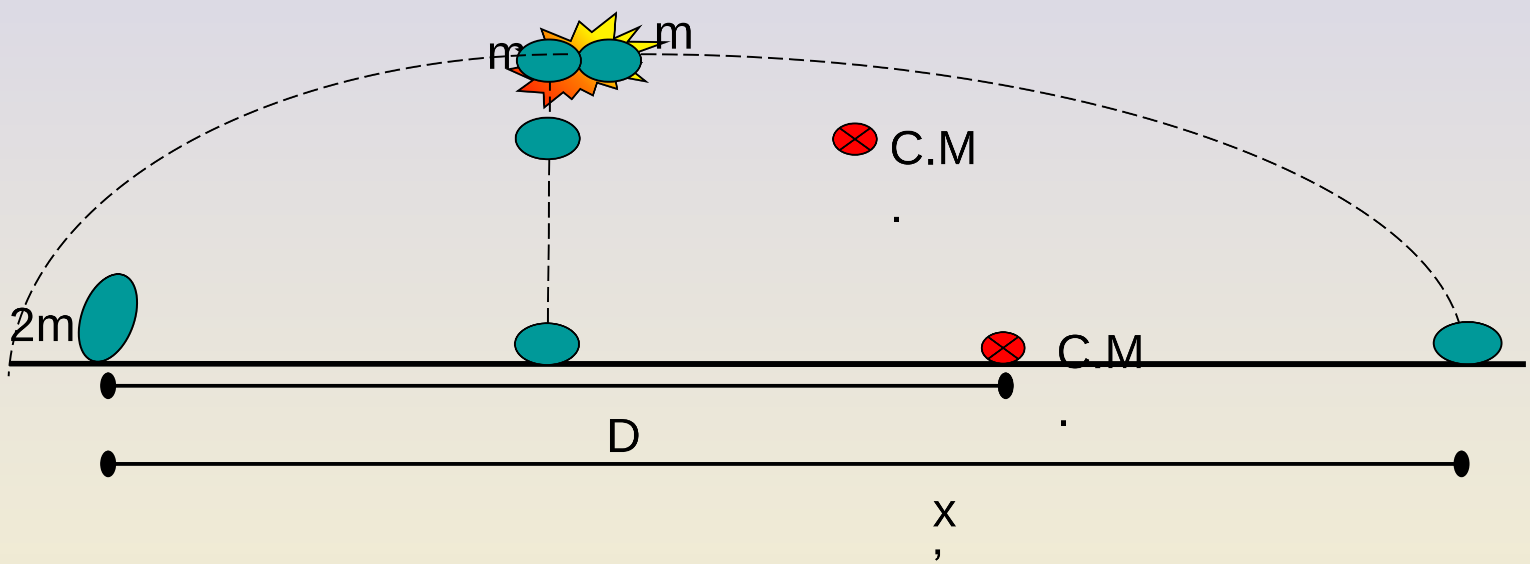
Ejemplo: un proyectil de masa 2m es lanzado y al llegar al punto de máxima altura explota en dos fragmentos, de tal forma que uno de ellos cae verticalmente.

¿A qué distancia caerá el otro trozo sabiendo que el proyectil entero hubiera caído a una distancia D?



El segundo fragmento colisionará contra el piso en una posición x'. Sabiendo que el centro de masa, a pesar de la explosión, continuará describiendo su trayectoria parabólica, podemos afirmar que:

$$x_{CM} = D = \frac{m\frac{D}{2} + m\,x'}{2m} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{2\,m\,D - \frac{1}{2}\,m\,D}{m} = \frac{3}{2}D$$



Sistema de N partículas: la cantidad de movimiento total del sistema puede calcularse como la suma de las cantidades de movimiento de cada partícula del sistema

$$\vec{P}_{sist} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N$$
$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N$$
$$= \sum_i m_i\vec{v}_i = M\,\vec{V}_{CM,S}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$$

Llegamos también a que la cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa.

$$\vec{P}_{sist} = M\,\vec{V}_{CM,S}$$

Sistema de N partículas: cantidad de movimiento

$$\vec{P}_{sist} = M\ \vec{V}_{CM,S}$$

$$\frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} = M\ \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = M\vec{A}_{CM}$$

$$M\vec{A}_{CM,S} = \vec{F}_{neta,\,\mathrm{ext}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} = \vec{F}_{neta,ext}}$$

La segunda ley de Newton para un **sistema** de partículas de masa total constante

Sistema de N partículas:

Conservación de la cantidad de movimiento

Como $$\boxed{\frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} = \vec{F}_{neta,ext}}$$

Si $\vec{F}_{neta,ext} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{P}_{sist}}{dt} = 0$

$$\Downarrow$$

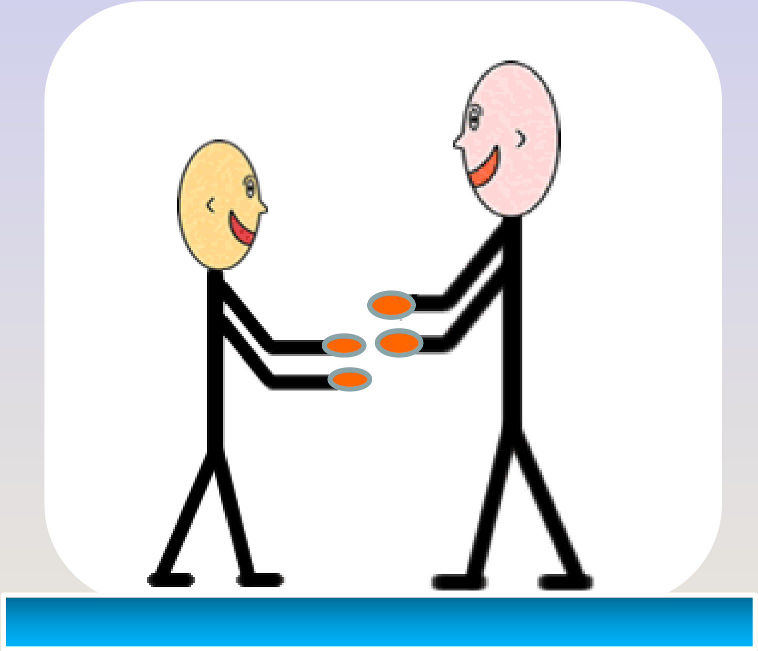
$$\vec{P}_{sist} = M\,\vec{V}_{CM,S} = cte$$

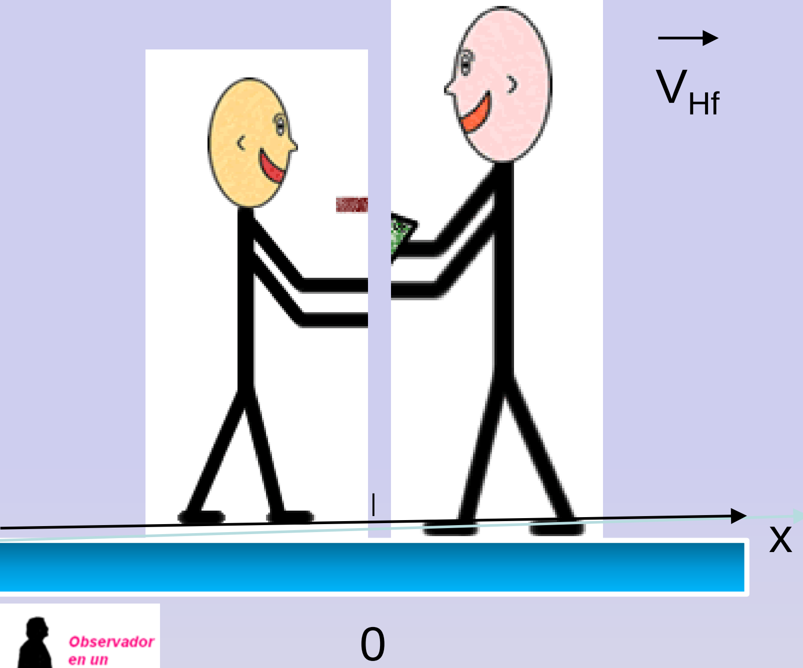
Si la fuerza externa resultante sobre un sistema es igual a cero, la velocidad del centro de masa del sistema es constante y la cantidad de movimiento del sistema se conserva

Principio de Conservación de la Cantidad de Movimiento

Para resolver en clase:
Ejercicio Nº 2:

Un hombre de 70 kg y un muchacho de 50 kg están de pie juntos sobre una superficie de hielo lisa. Se empujan uno al otro y el hombre adquiere una velocidad de 0.5 m/s respecto del hielo. ¿Qué velocidad respecto al hielo adquiere el muchacho? ¿Varía la velocidad del CM del sistema?

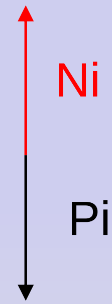




SFE= hombre y niño
Modelados como partícula

mH = 70 kg

Mn= 50 kg



DCL para ambos

Luego del empujón: $v_{Hf} = 0{,}5$ m/s

$$\vec{F}_{neta,ext} = 0 = \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt}$$

Principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{P}_{sist} = cte$$

$$\vec{P}_{sist} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

En x ➔ $P_{x\,sist} = \sum_i m_i v_{xi}$

$$P_{ix} = 0$$

$$P_{fx} = m_n \,.\, v_{fnx} + m_H .\, v_{fHx}$$

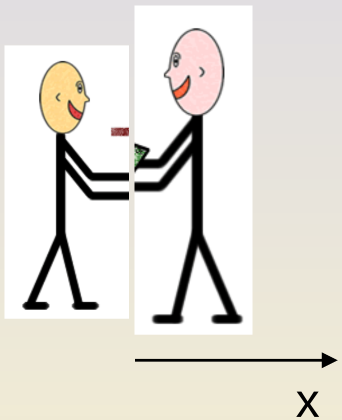
$$P_{ix} = P_{fx}$$

$$0 = m_n v_{fn_x} + m_H \vec{v}_{fH_x}$$

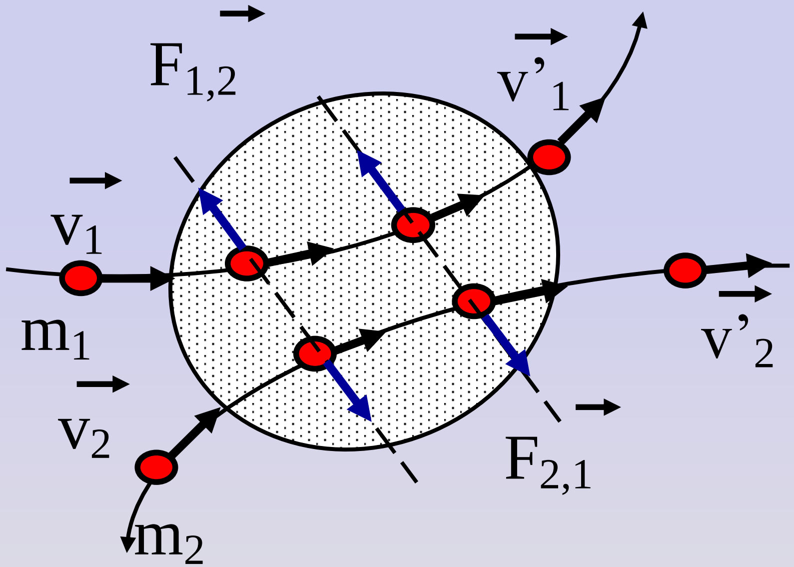
$$v_{fn_x} = -\frac{m_H \; v_{fH_x}}{m_n}$$

$$v_{fn_x} = -\frac{70kg \;\; 0{,}5 \; m/s}{50 \; kg}$$

$$v_{fnx} = -0{,}7 \; m/s$$



Colisiones



En una colisión entre dos objetos, éstos se aproximan uno al otro, interactúan fuertemente en una zona dada y luego se separan. En el sentido microscópico no existe necesariamente contacto entre las 2 partículas.

La interacción puede ser breve (bolas de billar) o durar siglos (choques entre 2 estrellas).

Antes de la colisión, es decir cuando ambos objetos están alejados, cada uno de ellos posee una dada velocidad. Luego del choque se mueven con velocidades diferentes de las que tenían antes de la colisión.

Para el caso de 2 partículas, si suponemos que no hay ninguna fuerza neta externa sobre el sistema:

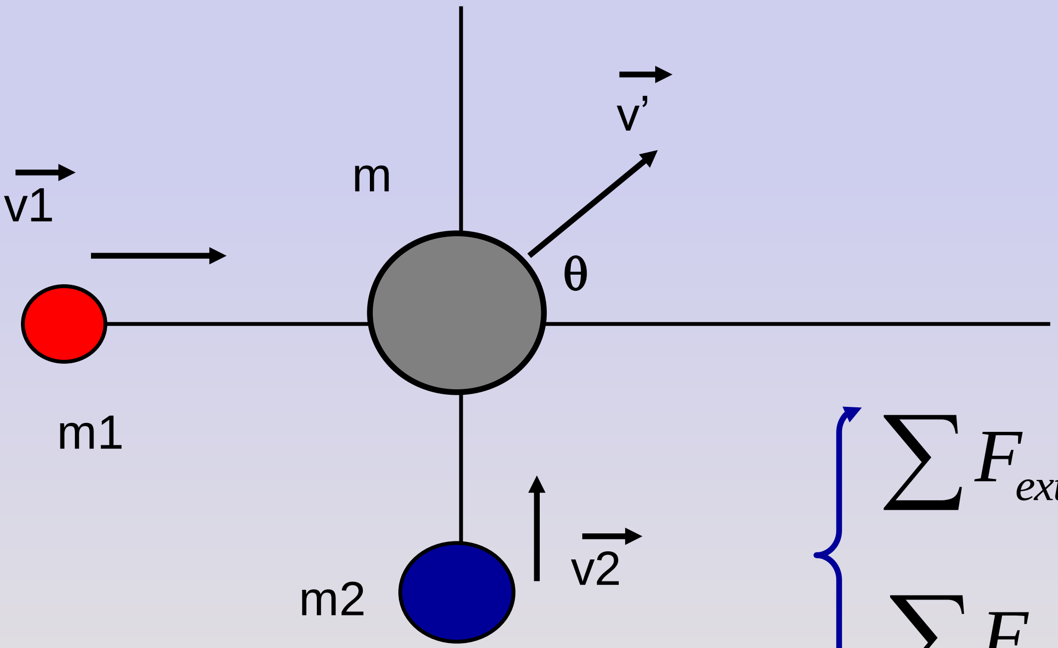
$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} \Rightarrow \vec{P}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)_{antes} = \left(\vec{p}_1' + \vec{p}_2'\right)_{después}$$

$$\boxed{\left(m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2\right)_{inicial} = \left(m_1\,\vec{v}_1' + m_2\,\vec{v}_2'\right)_{final}}$$

Cuidado!! Recordar que es una ecuación vectorial: hay que trabajar con cada una de las componentes!!!

Ejemplo: colisión en 2D sobre una superficie lisa:



mtotal = m1+m2

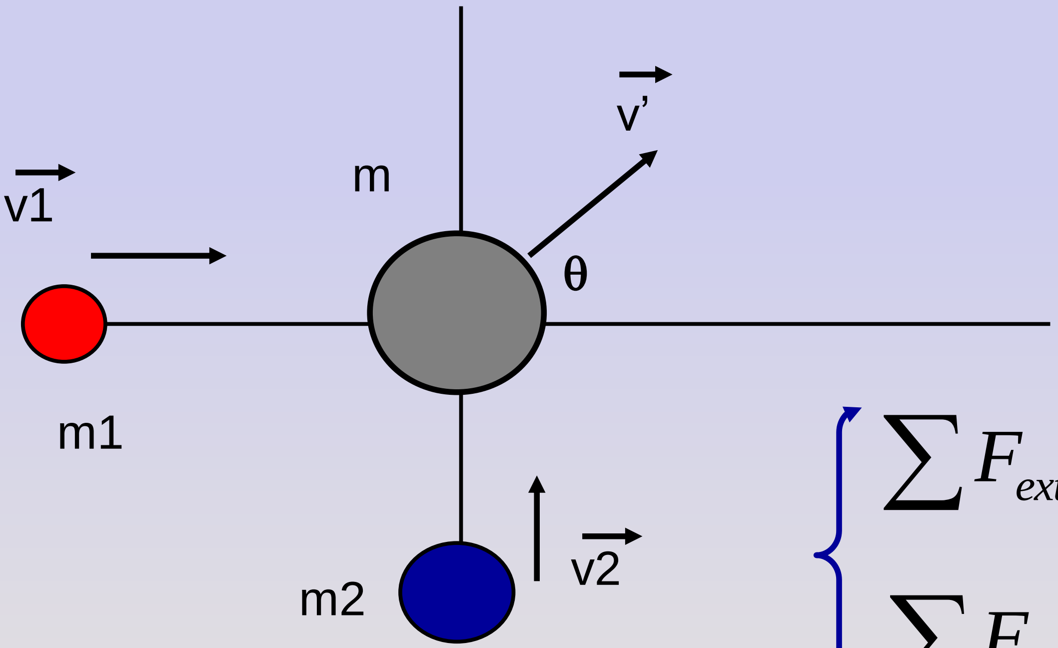
Incógnitas: ¿v'? ¿ θ ?

$$\begin{cases} \sum F_{ext.,x} = \dfrac{dp_x}{dt} = 0 \Rightarrow p_x = cte \\ \sum F_{ext.,y} = \dfrac{dp_y}{dt} = 0 \Rightarrow p_y = cte \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum p_x = \underbrace{m_1 v_1 + m_2 0}_{\text{antes}} = \underbrace{(m_1 + m_2).v'.\cos\theta}_{\text{despues}} \\ \sum p_y = m_1.0 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2).v'.sen\theta \end{cases}$$

2 ecuaciones y 2 incógnitas……

Ejemplo: colisión en 2D sobre una superficie lisa:



SFE: 2 masas

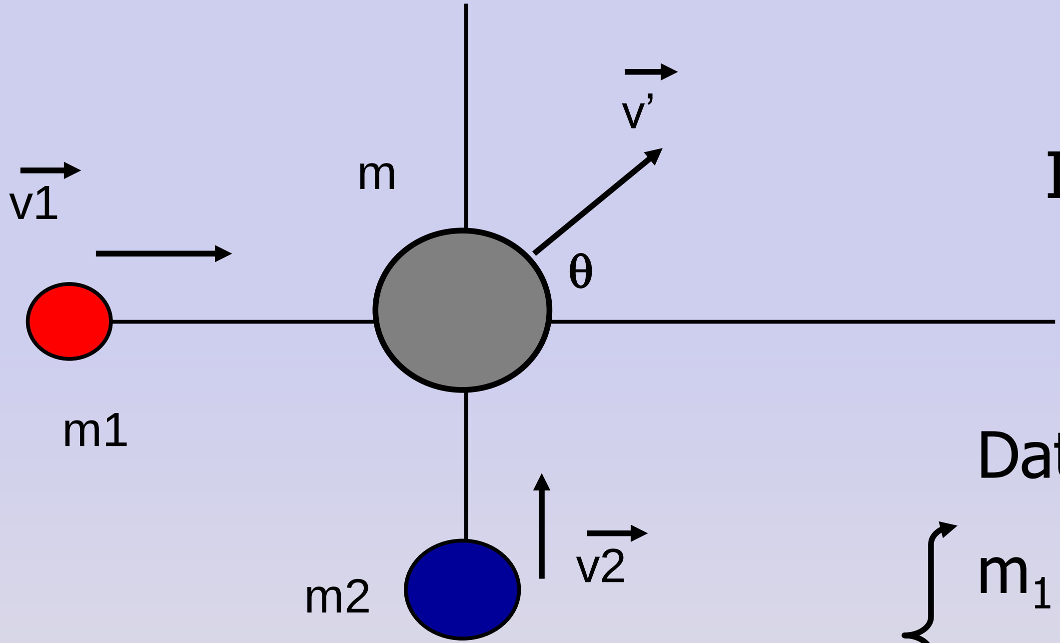
m = m1+m2

Incógnitas: ¿v'? ¿ θ ?

$$\begin{cases} \sum F_{ext.,x} = \dfrac{dp_x}{dt} = 0 \Rightarrow p_x = cte \\ \sum F_{ext.,y} = \dfrac{dp_y}{dt} = 0 \Rightarrow p_y = cte \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum p_x = m_1 v_1 + m_2 0 = (m_1 + m_2).\, v_x \\ \sum p_y = m_1 .0 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2).\, v_y \end{cases}$$

2 ecuaciones y 2 incógnitas……



Incógnitas: ¿v'? ¿ θ ?

Datos:

$$\begin{cases} m_1 = 3 \text{ kg}; \; v_1 = 5 \text{ m/s} \\ m_2 = 4 \text{ kg} \; ; \; v_2 = 3 \text{ m/s} \end{cases}$$

$v' = 2{,}7$ m/s

$\theta = 38{,}6^o$

Prueben hacerlo

IMPULSO y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En general, cuando dos partículas se aproximan entre sí, la interacción produce una variación de la cantidad de movimiento y de la energía en cada una de ellas.

Para cada partícula:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_{1,2} &= \frac{d\vec{p}_1}{dt} \\ \vec{F}_{2,1} &= \frac{d\vec{p}_2}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1};$$

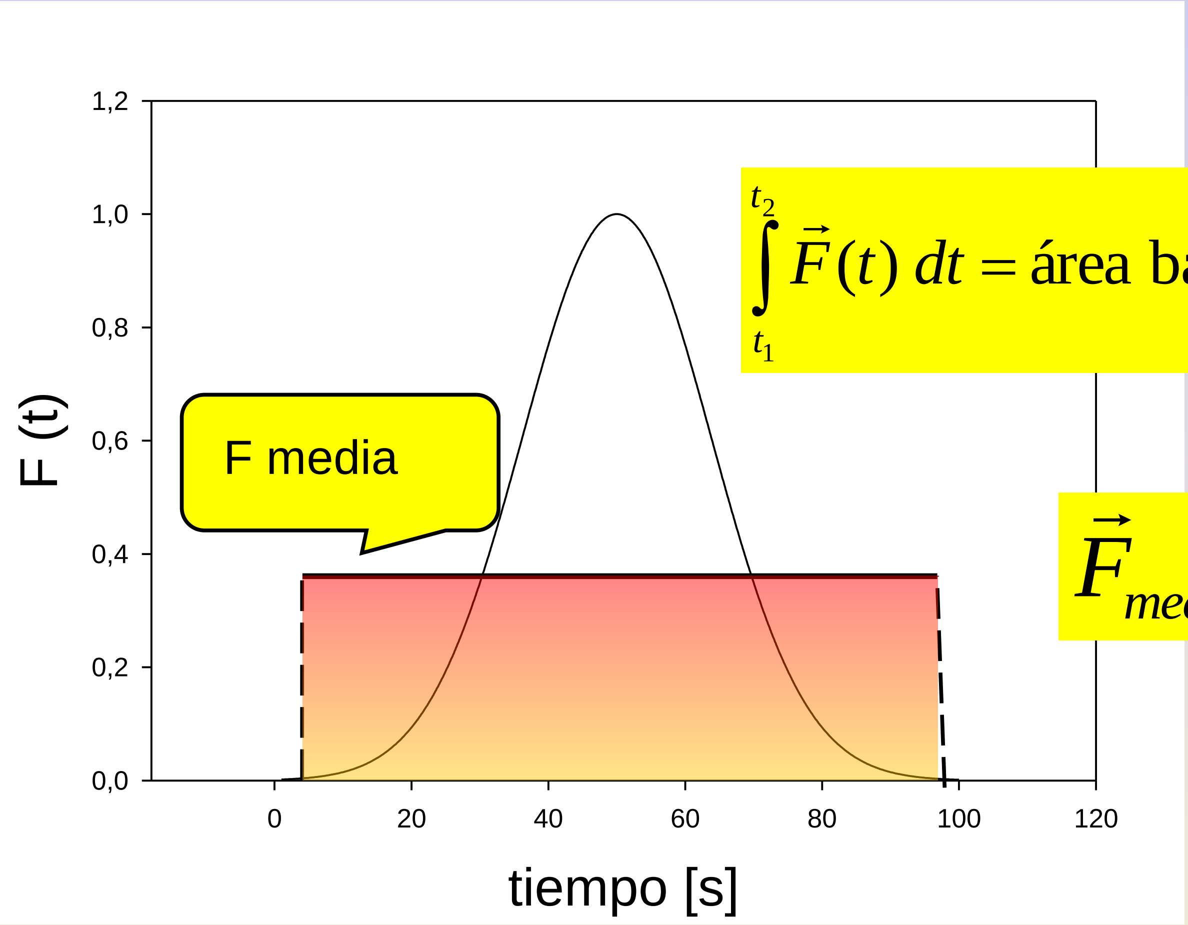
3ra Ley de Newton

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Para cada partícula individual tendremos: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F}.dt = d\vec{p}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{I}\left(\text{impulso}\right) = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt}$$

Para resolver la integral tendríamos que conocer F(t) o, en caso contrario podríamos evaluar la fuerza promedio a partir del teorema de valor medio a la integral. El area bajo la curva es igual al area del rectangulo F.Δt



$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt = \text{área bajo la curva} = F_{media}\,.\Delta t$$

$$\vec{F}_{media}.\Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

En sistemas de partículas, si tomamos a cada partícula individualmente, en una colisión, su cantidad de movimiento no se conserva, podemos aplicar a cada partícula independiente:

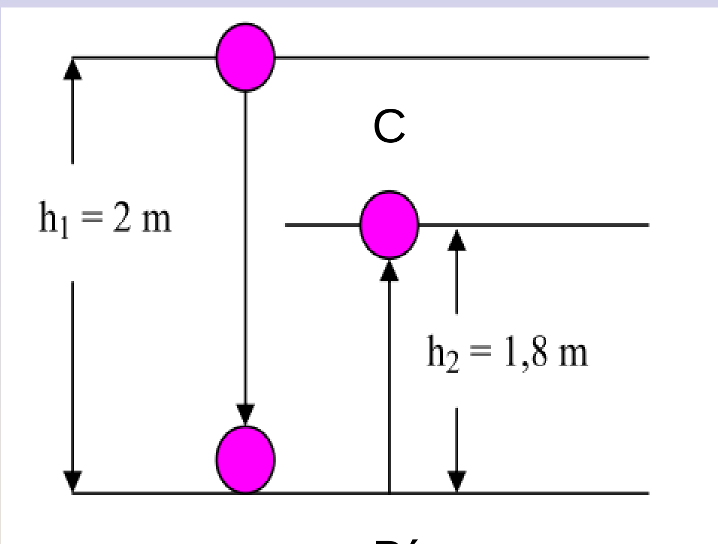
$$\boxed{\vec{I}\left(\text{impulso}\right) = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt}$$

Esto también puede aplicarse a las colisiones entre partículas y otros objetos, como pisos o paredes a los que no analizamos con un modelo de partícula

Impulso y variación de la cantidad de movimiento. ¿Cuál es el sistema que físico?

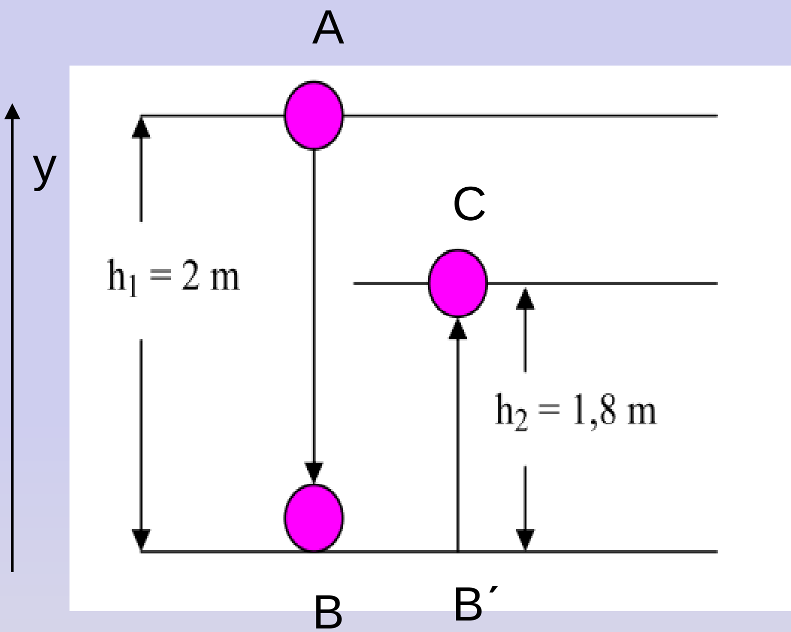
Ejemplo: Una gran pelota con una masa de 60 g se deja caer desde una altura de 2 m. Rebota hasta una altura de 1.8 m. a) ¿Cuál es el cambio en su momento lineal durante el choque con el piso?.
b) Cual fue la fuerza media recibida si estuvo en contacto con el piso 0.10 seg?

Sistema Fisico: la pelota
¡No hay conservación!



Entre A y B Conservación de la Energía y también entre B´ y C

Entre B y B´, $I = \Delta P = m(v_{B'} - v_B)$



Entre A y B Conservación de la Energía y también entre B´ y C

$$Wnc = \Delta E_M = 0 \quad \rightarrow \quad E_M A = E_M B$$

$$E_m A = m\,g\,h_A + \tfrac{1}{2}\,m\,\cancel{v_A^{2}}$$

$$E_m B = m\,\cancel{g\,_{fB}} + \tfrac{1}{2}\,m\,v_B^{2}$$

$$m\,g\,h_A = \tfrac{1}{2}\,m\,v_B^{2}$$

$$v_B = \sqrt{2\,g\,h_A}$$ = -6,26m/s

Velocidad con que llega la pelota a B, hacia abajo

entre B´ y C

$$Wnc = \Delta E_M = 0 \quad \rightarrow \quad E_M B' = E_M C$$

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v_{B'}^{2} = m\,g\,h_C$$

$$v_{B'} = \sqrt{2\,g\,h_C}$$ = 5,93m/s

Velocidad con que l
pelota sale en B´
hacia arriba

Entre B y B´, $\Delta\ Py = m(v_{B'} - v_B)$

$$\Delta\ Py = m(v_{B'} - v_B) = 0{,}06\ kg\ .\ (5{,}98 m/s - (-\ 6.26\ m/s)$$

$\Delta\ P = 0{,}731\ Kg\ m\ /s\ > 0,$ *hacia arriba*

El impulso es un vector

b) $F = \Delta\ P\ /\ dt\ = 0{,}731\ Kg\ m\ /s\ \ /0{,}1\ s$

$F = 7{,}31\ N$ *hacia arriba*

Energía de un sistema de Partículas

Energía cinética de un sistema de partículas no rígidas

La energía cinética total de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de cada una de ellas:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, v_{i,o}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{i,o} \bullet \vec{v}_{i,o}\right) \qquad \text{(III)}$$

Pero además sabemos que: $\vec{v}_{i,O} = \vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O}$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{i,O} \bullet \vec{v}_{i,O} = \left(\vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O}\right) \bullet \left(\vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O}\right)$$

Energía cinética de un sistema de partículas no rígidas

Desarrollando el producto escalar

$$\vec{v}_{i,O} \bullet \vec{v}_{i,O} = \left(\vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O}\right) \bullet \left(\vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O}\right)$$

$$\vec{v}_{i,O} \bullet \vec{v}_{i,O} = \vec{v}_{i,CM} \bullet \vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O} \bullet \vec{V}_{CM,O} + 2\vec{V}_{CM,O} \bullet \vec{v}_{i,CM}$$

Reemplazando en la ec. (III) nos queda:

$$E_C = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \, \vec{v}_{i,CM} \bullet \vec{v}_{i,CM} + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \, \vec{V}_{CM,O} \bullet \vec{V}_{CM,O} + \sum_i m_i \, \vec{V}_{CM,O} \bullet \vec{v}_{i,CM}$$

$$E_C = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \, (v_{i,CM})^2 + \tfrac{1}{2} (V_{CM,O})^2 \sum_i m_i + \vec{V}_{CM,O} \bullet \sum_i m_i \vec{v}_{i,CM}$$

Energía cinética de un sistema de partículas no rígidas

$$E_C = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \left(v_{i,CM}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(V_{CM,O}\right)^2 \sum_i m_i + \vec{V}_{CM,O} \bullet \sum_i m_i \vec{v}_{i,CM}$$

Usando que $M = \sum_i m_i$

Y que $\vec{P}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_{i,CM} = 0$

La cantidad de movimiento de todo el sistema respecto al centro de masas es cero

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} M\, V_{CM,O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v_{i,CM}^2 = \frac{1}{2} M\, V_{CM,O}^2 + E_{c,rel}} \qquad \text{(IV)}$$

$$\boxed{E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, V_{CM,O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v_{i,CM}^2 = \frac{1}{2} M\, V_{CM,O}^2 + E_{c,rel}} \qquad \text{(IV)}$$

Energía cinética del CM

Energía cinética relativa al CM

donde: $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema de partículas.

$$\boxed{E_c = E_{c,CM} + E'_{c,rel}} \qquad \text{(V)}$$

La energía cinética de un sistema de partículas está constituida por dos términos:

(1) La energía cinética "del CM" ($E_{c,CM}$)

(2) La energía cinética "relativa" al CM ($E'_{c\ rel.}$)

- El término $E_{c,\,CM} = \frac{1}{2} M\, V_{CM}^2$ representa la energía cinética del CM y depende del sistema de coordenadas asociado al sistema inercial S.

- El término $E'_{c,rel} = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v_{i,CM}^2$ depende sólo de las velocidades de las partículas respecto al CM y no depende del sistema de coordenadas asociado al sistema inercial S.

Esta forma de describir la energía cinética de un sistema de partículas permite entender más claramente lo que ocurre en el caso de colisiones.

Si sobre un sistema de partículas la resultante de las fuerzas externas es nula, entonces:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 = \frac{d\,\vec{P}_{CM}}{dt} \Rightarrow \vec{P}_{CM} = cte \quad \Rightarrow \quad E_{c,CM} = \frac{1}{2} M V_{CM,O}^{2} = cte$$

y el 1er término de la ec. (V) no varía. **Sólo la energía relativa al CM (2do término de la ec. (V)) puede ser la responsable de un aumento o disminución de la energía cinética total del sistema de partículas.**

Como ejemplo podemos citar el caso del niño y el muchacho que se empujan con las manos sobre una superficie helada originando un aumento de la energía cinética total debido al aumento de la energía cinética relativa al CM. En el caso de una bala que queda empotrada en un bloque, se produce una disminución de la energía cinética total debido a una disminución de la energía cinética relativa al CM.

Teorema de trabajo y energía para un sistema de partículas no rígidas

Utilizando la expresión (V), el teorema de trabajo-energía cinética para un sistema de partículas ahora nos queda:

$$\boxed{\Delta E_c = \Delta E_{c,CM} + \Delta E^{'}_{c,rel} = \underbrace{W_{F\,\mathrm{ext}} + W_{F\,\mathrm{int}}}_{\text{Procesos de transferencia}}}$$

estados

Choques inelásticos: son los que ocurren en la mayoría de los casos de nuestra vida cotidiana.

Si $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ ➡ $\boxed{\vec{P}_{total} = cte}$

F_{int} no cons. ➡ $\boxed{E_{cin} \neq cte}$

Un caso especial de los choques inelásticos lo constituye el choque de tipo "plástico", en el que las partículas intervinientes quedan totalmente adheridas.

Choques elásticos:

Si $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ ➡ $\boxed{\vec{P}_{total} = cte}$

F_{int} son cons. ➡ $\boxed{E_{cin} = cte}$

Advertencia: para determinar el tipo de choque: 1) hallar las veloc. finales de cada una de las partículas y 2) determinar la Ecin final total del sistema.

Coeficiente de restitución

Cuando dos cuerpos chocan, sus materiales pueden comportarse de distinta manera según las fuerzas de restitución que actúen sobre los mismos. Hay materiales cuyas fuerzas restituirán completamente la forma de los cuerpos sin haber cambio de forma ni energía cinética perdida en forma de calor, etc. En otros tipos de choque los materiales cambian su forma, liberan calor, etc., modificándose la energía cinética total.

Coeficiente de restitución (K) que evalúa esta pérdida o no de energía cinética:

$$K = \frac{v_{2(f)} - v_{1(f)}}{v_{2(0)} - v_{1(0)}}$$

$V_{1(0)}$, $V_{2(0)}$ = Velocidades de los cuerpos 1 y 2 antes del choque
$V_{2(f)}$, $V_{1(f)}$ = Velocidades de los cuerpos 1 y 2 después del choque

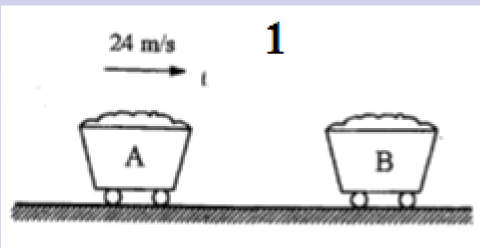
K varía entre 0 y 1.

Si K = 0 choque perfectamente inelástico (plastico)
Si 0 < K < 1 choque inelastico
Si K = 1 choque perfectamente elástico

Ej: En una vía horizontal se encuentran dos carritos que transportan minerales en una mina, de igual masa. El carrito A se mueve a 24 m/s y alcanza al carrito B, que esta en reposo. Suponiendo que se pierde el 20% de la energía cinética original del sistema a causa del impacto, a) calcular la velocidad de cada carrito después del impacto.

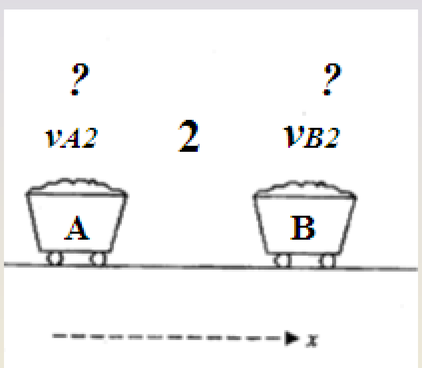
b) Calcular la energía cinética del cm antes y después del impacto y compararla con la energía cinética del sistema

$$\sum F_{ext.,x} = \frac{dp_x}{dt} = 0 \Rightarrow p_x = cte$$



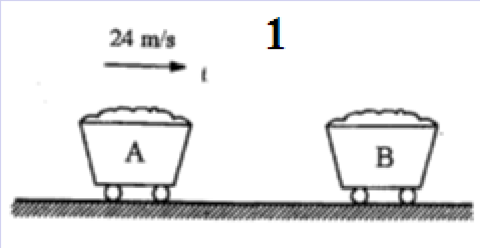
De la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento se tiene:

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$



pero como las masas de los carros son iguales

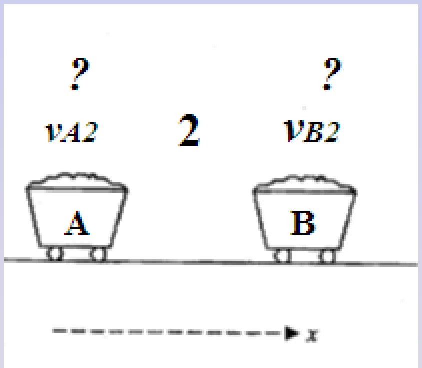
$$v_{A1} + v_{B1} = v_{A2} + v_{B2}$$



$$24 + 0 = v_{A2} + v_{B2}$$

$$v_{A2} + v_{B2} = 24$$

$$v_{B2} = 24 - v_{A2}$$



se pierde el 20% de la energía cinetica del sistema

$$\left(\frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2\right)0.8 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2$$

Simplificando

$$\left(v_{A1}^2 + v_{B1}^2\right)0.8 = v_{A2}^2 + v_{B2}^2$$

$$\left(24^2 + 0\right)0.8 = v_{A2}^2 + v_{B2}^2$$

Sustituyendo:

$$(24^2)0.8 = v_{A2}^2 + (24 - v_{A2})^2$$

$$(24^2)0.8 = v_{A2}^2 + 24^2 - 48v_{A2} + v_{A2}^2$$

$$(24^2)(-0.2) = 2v_{A2}^2 - 48v_{A2}$$

$$v_{A2}^2 - 24v_{A2} + 57.6 = 0$$

Resolviendo la ecuación

$$(v_{A2})_1 = 21.3 \text{ m/s}$$

$$(v_{A2})_2 = 2.70 \text{ m/s}$$

Estas son las raíces.
Pero el cuerpo A no puede ir mas rápido que B, esta detrás!
Sabemos que suman 24m/s

La mayor es v_{B2}

$$v_{A2} = 2.70 \, {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}} \rightarrow$$

$$v_{B2} = 21.3 \, {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}} \rightarrow$$

Ambas hacia x positivo

b) Calcular la energía cinética del CM antes y después del impacto.

$$E_{CM} = \frac{1}{2} M V^2_{CM,O}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)$$

$$V_{x\,CM} = \frac{m_{\mathbf{A}} v_{x\,\mathbf{A}} + m_{\mathbf{B}} v_{x\,\mathbf{B}}}{m_{\mathbf{A}} + m_{\mathbf{B}}}$$

$$V_{x\,CM_{\mathbf{1}}} = \frac{m_{\mathbf{A}} v_{x\,\mathbf{A}\,\mathbf{1}} + m_{\mathbf{B}} v_{x\,\mathbf{B}\,\mathbf{1}}}{m_{\mathbf{A}} + m_{\mathbf{B}}}$$

$$V_{x\,CM_{\mathbf{2}}} = \frac{m_{\mathbf{A}} v_{x\,\mathbf{A}\,\mathbf{2}} + m_{\mathbf{B}} v_{x\,\mathbf{B}\,\mathbf{2}}}{m_{\mathbf{A}} + m_{\mathbf{B}}}$$

$$m_{\mathbf{A}} = m_{\mathbf{B}}$$

$$V_{x\,CM_{\mathbf{1}}} = \frac{v_{x\,\mathbf{A}\,\mathbf{1}} + v_{x\,\mathbf{B}\,\mathbf{1}}}{\mathbf{2}}$$

$$V_{x\,CM_{\mathbf{2}}} = \frac{v_{x\,\mathbf{A}\,\mathbf{2}} + v_{x\,\mathbf{B}\,\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

$$\boxed{Vx_{CM1} = 12\ m/s \quad = \quad Vx_{CM2}}$$

$$\boxed{E_{CM} = \frac{1}{2} M\, V^2_{CM,O}}$$

$$Ec_{\,CM\,1} = \cancel{\tfrac{1}{2}}\,\cancel{2}.m\ 12^2\ m^2/s^2 = Ec_{\,CM\,2}$$

La energía cinética del CM no cambia en el choque.

$\boldsymbol{V_{CM}}$ ***antes*** **=** $\boldsymbol{V_{CM}}$ ***después***,

si se cumple el ***Principio de conservación de la cantidad de movimiento***.

La energía cinética del sistema:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v^2_{i,o}$$

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^{\ 2} + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^{\ 2} \quad = \quad ½\ m\ 24^2\ m^2/s^2 = m.\ \ 576\ m^2/s^2$$

$$E_{c2} = \ ½\ m\ 2{,}7^2\ m^2/s^2 + ½\ m\ 21{,}3^2\ m^2/s^2 = ½\ m\ (2{,}7^2 + 21{,}3^2\ )m^2/s^2$$

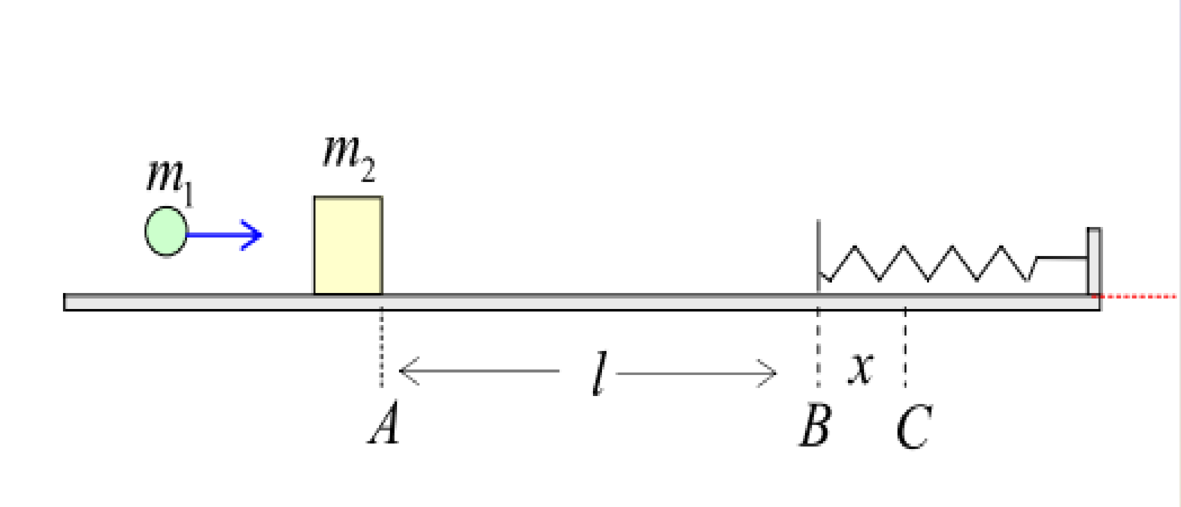
$$E_{c2} = m\ 461 m^2/s^2 \quad < \quad m.\ \ 576\ m^2/s^2$$

Se perdió el 20% de la energía del sistema

Ej para entregar: Un bloque de plastilina de masa m_2= 1.2kg se encuentra en reposo en el punto A, a una distancia l =1.5 m del

extremo libre de un resorte (punto B). Una bolita de vidrio de masa m1 =0.2kg llega a chocar contra el bloque de plastilina con velocidad $v_{i,1}$= 30m/s y queda incrustada en él. Después del choque, el sistema se desliza sobre un plano horizontal con roce (μ_k= 0.17) y llega a chocar al resorte de constante k = 100 N/m que se encuentra estirado en su largo natural. Despreciar el roce a partir de B

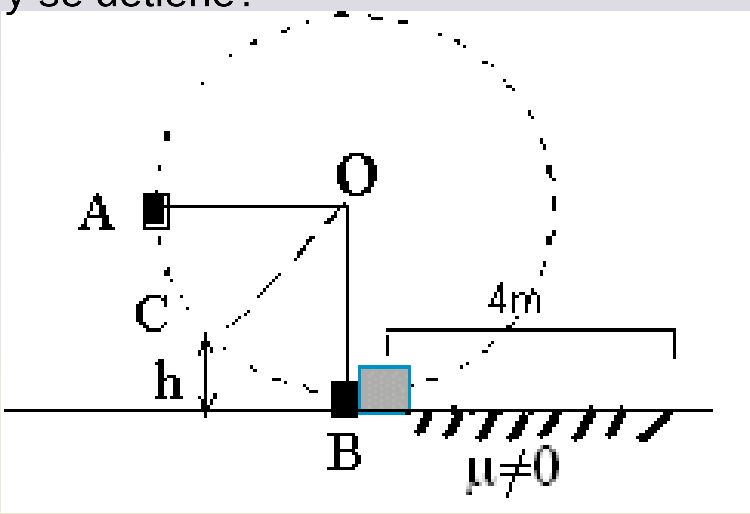
a) Hallar la máxima compresión x del resorte
b) ¿Se perdió energía cinética en el choque? Si es asi ¿cual fue la causa?



Ejercicio integrador adicional a la guia: El sistema de la figura consta de una masa puntual m_1=20 kg, atada a una cuerda de masa despreciable de longitud 1.5 m. Se deja caer desde la posición A. Al llegar al punto más bajo de su trayectoria, punto B, se produce un choque perfectamente elástico con otra masa m_2=25 kg, que se encuentra en reposo en esa posición sobre una superficie horizontal. Como consecuencia del choque, la masa m_1 rebota hasta alcanzar la posición C a una altura h del suelo y la masa 2 comienza a moverse y se frena a los 4 m. Determinar

a. La velocidad de m_1 al llegar a la posición B antes del choque y la tensión de la cuerda en ese instante.
b. Las velocidades de m_1 y m_2 después del choque.
c. El impulso recibido por m1 en el choque.
d. La altura h al que asciende la masa m_1 después del choque y la tensión de la cuerda en ese instante.
e. El trabajo de la fuerza de roce entre la superficie y el bloque

f . ¿La tensión de la cuerda en la altura h es la misma cuando desciende que cuando vuelve y se detiene?



¿SISTEMAS FISICOS?

Rta:
a. v1=5,42 m/s;
T= 588N –
b. v2f=4,82; v1f=-0,6m/s –
c. I: -92Kgm/seg

d. h=0,02m