Unidad 6

Transformadas integrales

7º CLASE

Cintia Perrone – PS 2023

6.3 Propiedades de la transformada de Fourier:

1) **Linealidad**: Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(s)$ y a, b son números complejos, entonces:

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [af(t) + bg(t)]e^{-i2\pi ts} dt \ =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[af(t)e^{-i2\pi ts} + bg(t)e^{-i2\pi ts}\right] dt \ = \int_{-\infty}^{\infty} af(t)e^{-i2\pi ts} dt \ + \int_{-\infty}^{\infty} bg(t)e^{-i2\pi ts} dt \ =$$

$$a\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ts} dt \ + b\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ts} dt \ = aF(s) + bG(s)$$

2) Similaridad: Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y a es un número real no nulo, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Demostración:

Si $a > 0$ hacemos sustitución $u = at,\ du = a\,dt,\ -\infty < u < \infty$:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i2\pi ts}dt \ = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi\left(\frac{u}{a}\right)s}\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Si $a < 0$ hacemos sustitución $u = at,\ du = a\,dt,\ -\infty < -u < \infty$:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i2\pi ts}dt \ = \int_{\infty}^{-\infty} f(u)e^{-i2\pi\left(\frac{u}{a}\right)s}\frac{1}{a}du =$$

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = -\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi\left(\frac{u}{a}\right)s}\frac{1}{a}du = -\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

3) Traslación en el tiempo: Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y a es un número real, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = F(s)e^{-i2\pi sa}$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i2\pi ts}dt \ =$$

Hacemos sustitución $u = t - a$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi(u+a)s}du \ = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi as}e^{-i2\pi us}du \ = e^{-i2\pi as}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi us}du$$

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-i2\pi as}F(s)$$

4) Traslación en el dominio de la frecuencia: Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y a es un número real, entonces:

$$\mathcal{F}\left\{f(t)e^{i2\pi ta}\right\} = F(s-a)$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\left\{f(t)e^{i2\pi ta}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i2\pi ta}e^{-i2\pi ts}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi t(s-a)}dt = F(s-a)$$

5) Simetría: Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ entonces:

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = f(-s) \Leftrightarrow \mathcal{F}\{F(-t)\} = f(s)$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\{F(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(-t)\, e^{-i2\pi ts} dt$$

Hacemos sustitución $u = -t$ y $du = -dt$

$$\mathcal{F}\{F(-t)\} = \int_{\infty}^{-\infty} F(u)\, e^{-i2\pi(-u)s}(-du) \; = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{i2\pi us} du = f(s)$$

Resumen:

1) **Linealidad**: Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s), \mathcal{F}\{g(t)\} = G(s)$ y a, b son números complejos, entonces:

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

2) **Similaridad**: Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y a es un número real no nulo, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

3) **Traslación en el tiempo**: Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y a es un número real, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = F(s)e^{-i2\pi sa}$$

4) **Traslación en el dominio de la frecuencia**: Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y a es un número real, entonces:

$$\mathcal{F}\left\{f(t)e^{i2\pi ta}\right\} = F(s-a)$$

5) **Simetría**: Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ entonces:

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = f(-s) \Leftrightarrow \mathcal{F}\{F(-t)\} = f(s)$$

(Ejemplo pizarrón 7.A)

6.4 Integral de Fourier de funciones pares o impares.

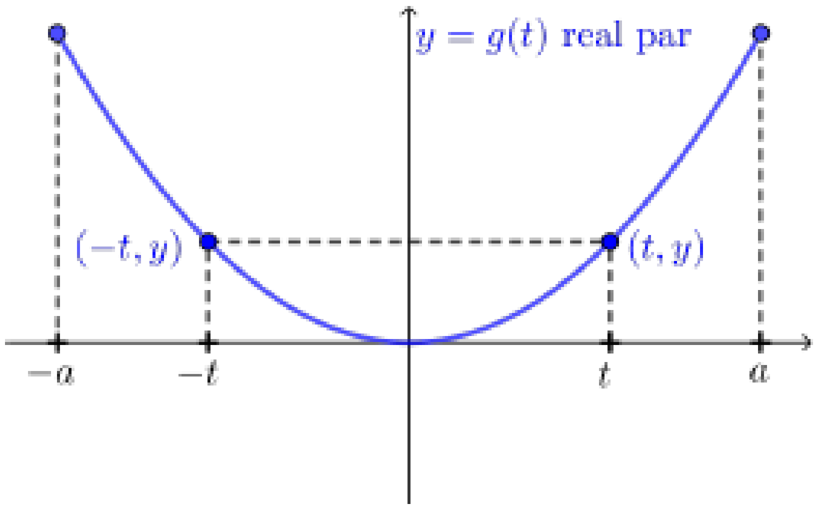
Repaso de funciones pares e impares.

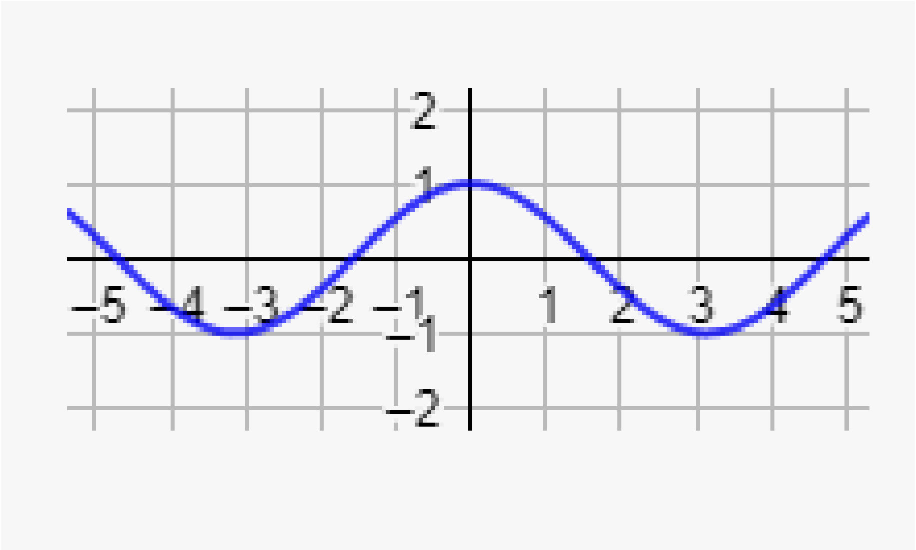
Si $g(t)$ tiene por dominio un subconjunto de R simétrico con respecto al origen $(-a, a)$, $[-a\ a]$ con $a > 0$ y toma valores reales, se dice que:

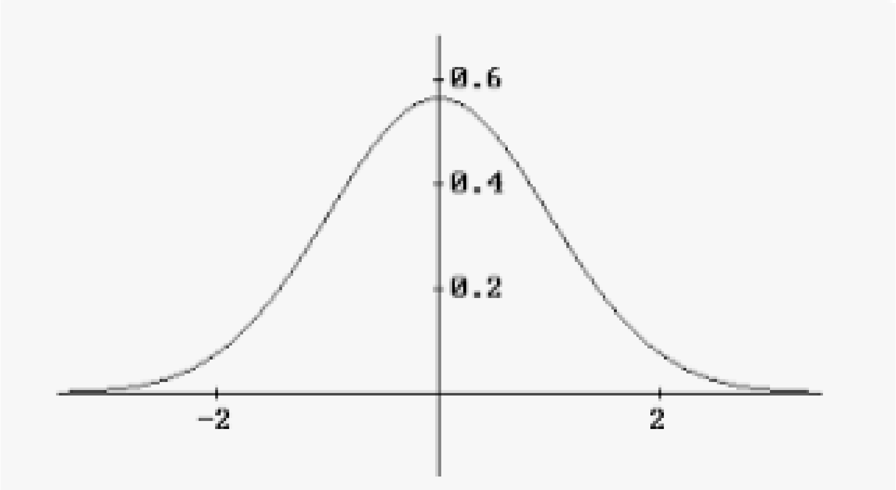
- $g(t)$ es par si $g(-t) = g(t)$ para todo t del dominio de g.
- $g(t)$ es impar si $g(-t) = g(t)$ para todo t del dominio de g.

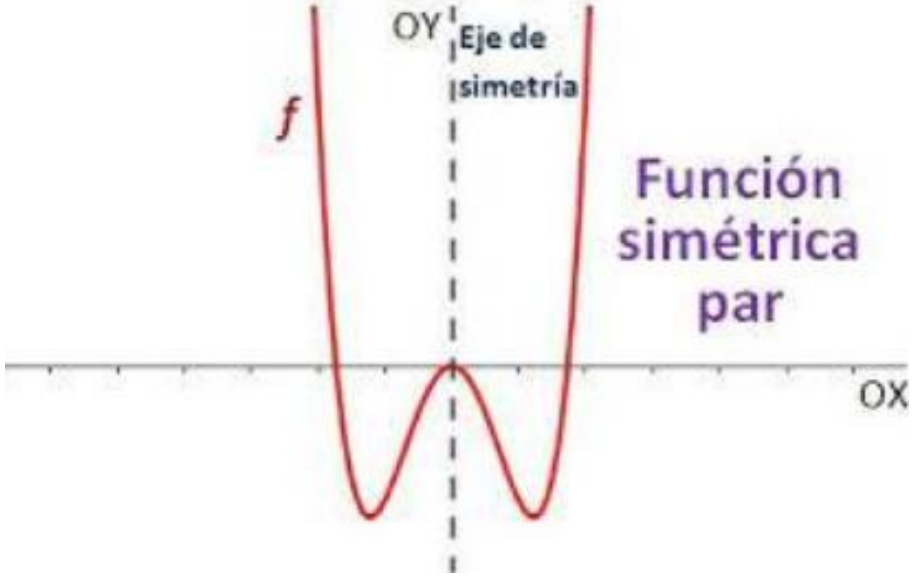
Para una función a valores reales: si es par, su gráfica resulta simétrica con respecto al eje y; si es impar, su gráfica resulta simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Ejemplo de funciones pares

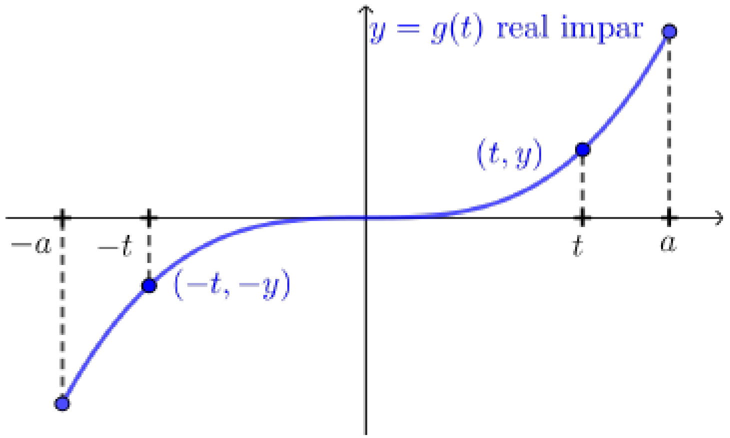


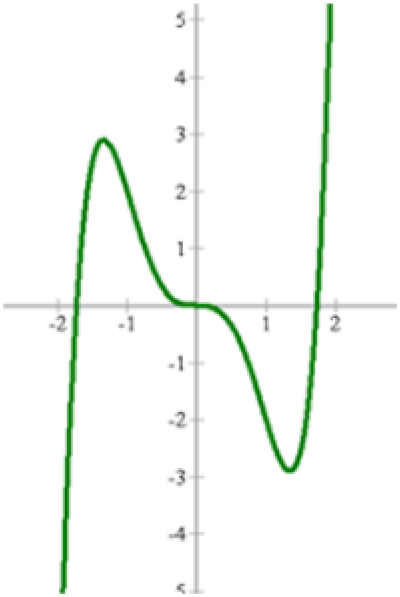


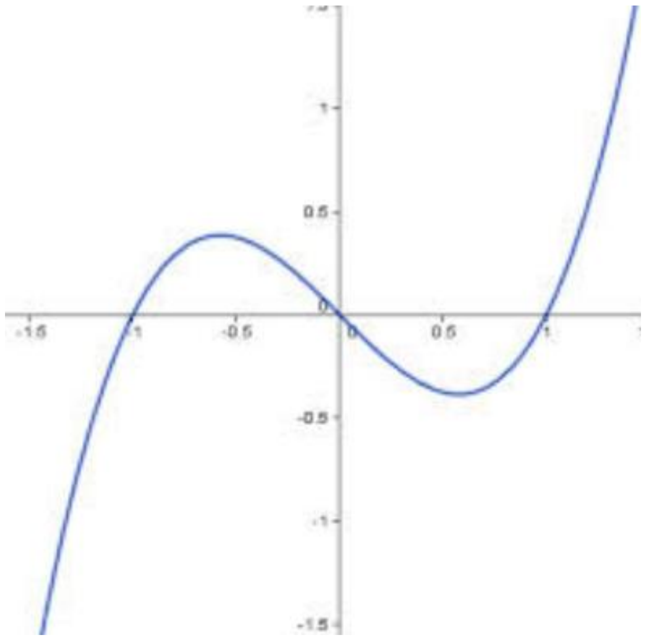


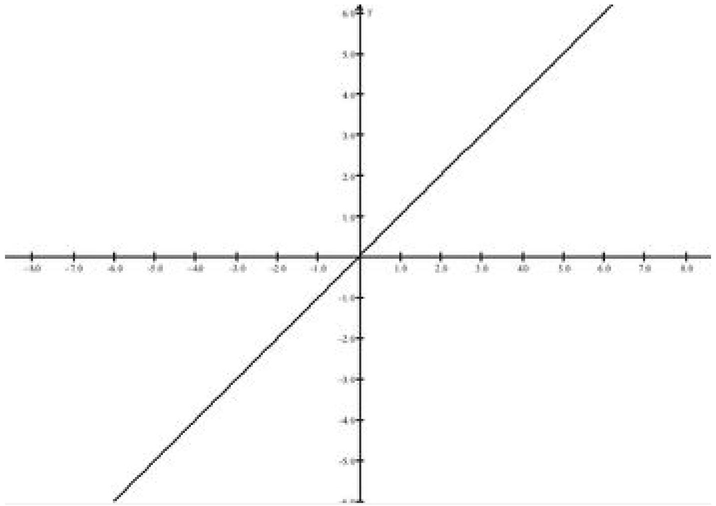


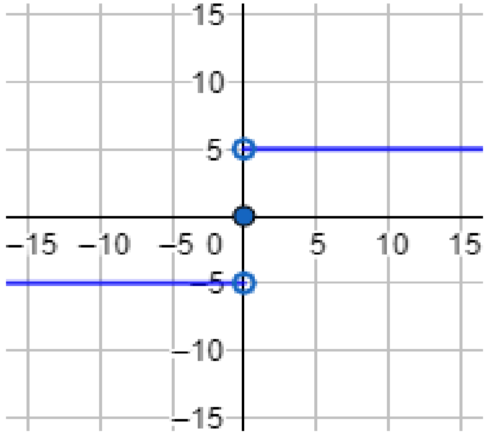
Ejemplo de funciones impares











En el caso de que $g(t)$ tome valores complejos:

$g(t)$ es par si y solo si sus partes real e imaginaria son pares.

$g(t)$ es impar si y solo si sus partes real e imaginaria son impares.

Propiedades

- El producto de dos funciones pares o de dos funciones impares es una función par.
- El producto de una función par y una impar es una función impar.
- Si una función es par o impar entonces su modulo es una función par.
- Si una función es par entonces su derivada es impar, si la función es impar entonces su derivada es par.

Integrales de funciones pares sobre intervalos simétricos con respecto al origen.

Si la función $g(t)$ es par entonces para $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-a}^{a} g(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} g(t)\,dt$$

Además, si $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$ converge:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = 2\int_{0}^{\infty} g(t)\,dt$$

Integrales de funciones impares sobre intervalos simétricos con respecto al origen.

Si la función $g(t)$ es impar entonces para $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-a}^{a} g(t)\, dt = 0$$

Además, si $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt$ converge:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = 0$$

Formas de la transformada e integral de Fourier de funciones pares

Sea $f(t)$ una función que satisface las hipótesis del teorema de existencia de la transformada e integral de Fourier.

Si $f(t)$ es una función par, entonces:

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(2\pi ts)\,dt$$

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = 2\int_0^{\infty} F(s)\cos(2\pi ts)\,ds$$

Demostración:

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ts}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(2\pi st)-isen(2\pi st)]\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\,dt-i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sen(2\pi st)\,dt=2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(2\pi ts)\,dt$$

Analizaremos si en este caso, $F(s)$ es una función par o impar:

$$F(-s)=2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(2\pi t(-s))\,dt=2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(2\pi ts)\,dt=F(s)$$

Con lo cual, si $f(t)$ es par, entonces $F(s)$ es una función par. Y si $f(t)$ es real, entonces $F(s)$ es real.

Demostración:

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi ts}\,ds = vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)[\cos(2\pi st)+isen(2\pi st)]\,ds =$$

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\cos(2\pi st)\,ds + i\;vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)sen(2\pi st)\,ds = 2\int_{0}^{\infty} F(s)\cos(2\pi ts)\,ds$$

(Ejemplo pizarrón 7.B)

Formas de la transformada e integral de Fourier de funciones impares

Sea $f(t)$ una función que satisface las hipótesis del teorema de existencia de la transformada e integral de Fourier.

Si $f(t)$ es una función impar, entonces:

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(t)\} = -2i\int_0^{\infty} f(t)sen(2\pi ts)\,dt$$

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = 2i\int_0^{\infty} F(s)sen(2\pi ts)\,ds$$

Demostración:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ts}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(2\pi st) - isen(2\pi st)]\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi st)\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sen(2\pi st)\,dt = -2i\int_{0}^{\infty} f(t)sen(2\pi ts)\,dt$$

Analizaremos si en este caso, $F(s)$ es una función par o impar:

$$F(-s) = -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\big(2\pi t(-s)\big)\,dt = 2i\int_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(2\pi ts)\,dt = -F(s)$$

Con lo cual, si $f(t)$ es impar, entonces $F(s)$ es una función impar. Y si $f(t)$ es real, entonces $F(s)$ es imaginaria pura.

Demostración:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi ts}\,ds = vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)[\cos(2\pi st) + isen(2\pi st)]\,ds =$$

$$vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\cos(2\pi st)\,ds + i\,vp\int_{-\infty}^{\infty} F(s)sen(2\pi st)\,ds$$

$$= 2i\int_{0}^{\infty} F(s)sen(2\pi ts)\,ds$$

(Ejemplo pizarrón 7.C)

6.5 Convolución de funciones

Definición 6.5.1. Sean $f(t), g(t)$ funciones seccionalmente continuas, definidas para $t \in \mathbb{R}$. Se define la operación **producto de convolución o convolución** de $f(t)$ y $g(t)$ cuya notación es $(f * g)(t)$ como:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Propiedades

Conmutatividad: $f * g = g * f$

Asociatividad: $(f * g) * h = f * (g * h)$

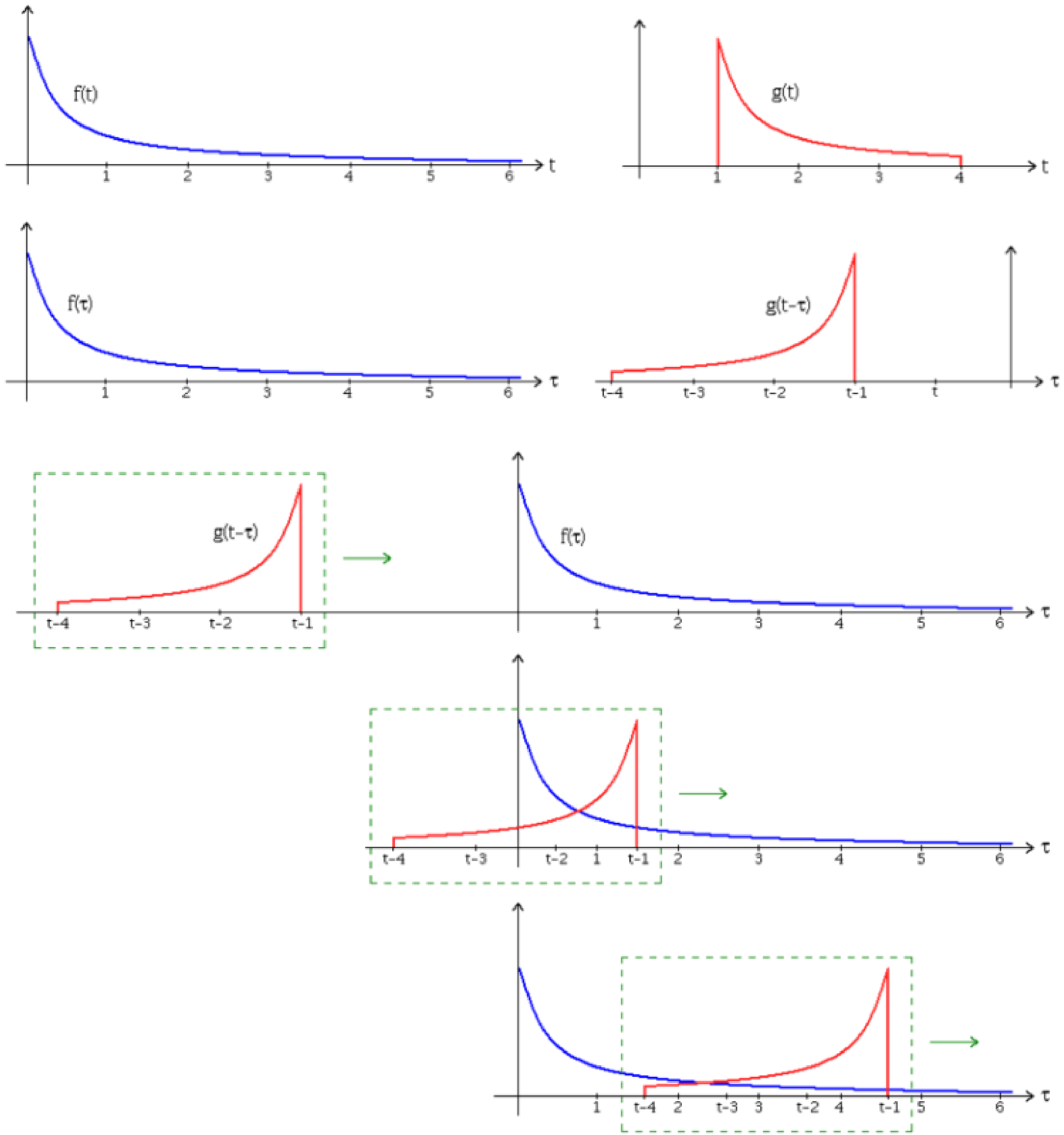
Distributividad con respecto a la suma: $(f + g) * h = f * h + g * h$

(Ejemplo pizarrón 7.D)

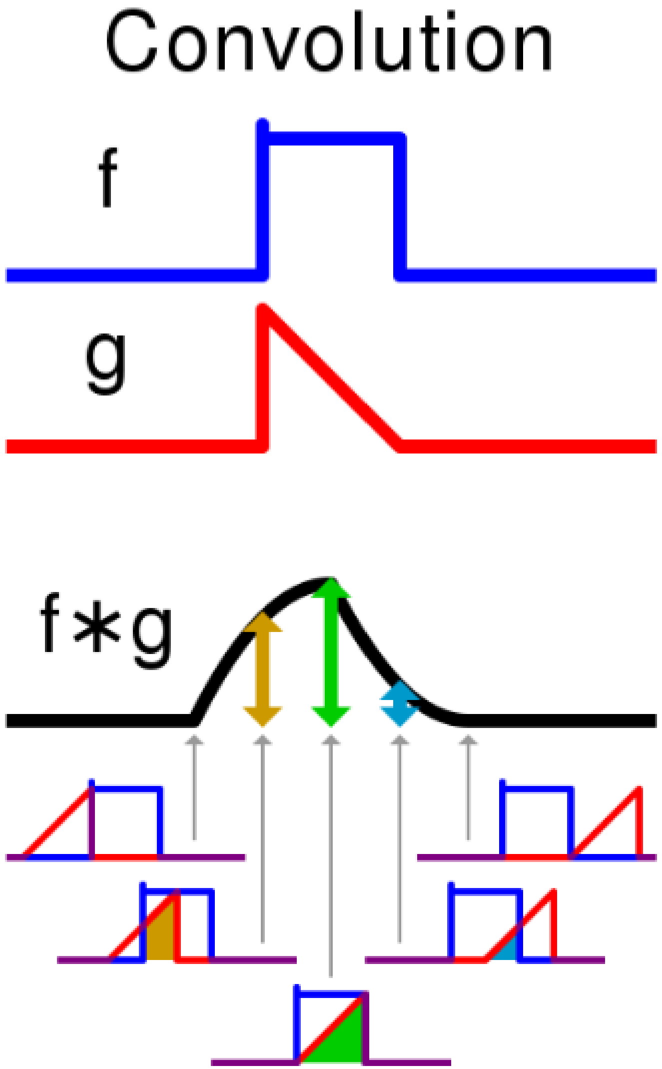
6.5 Convolución

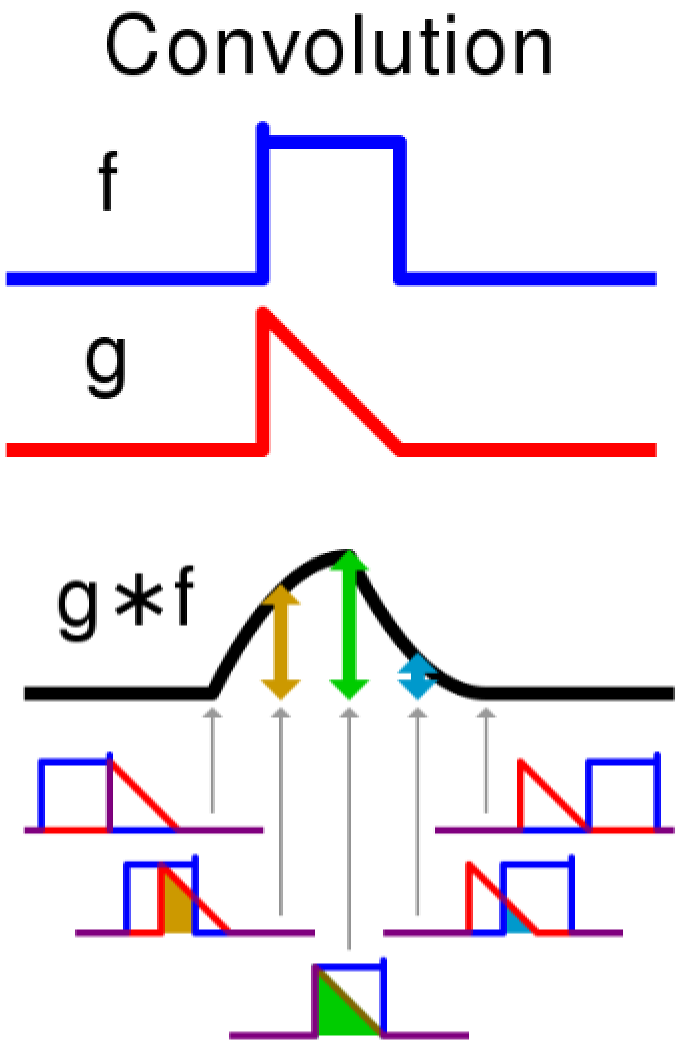
La convolución es una operación matemática que combina dos funciones para producir una tercera función que representa la forma en que una de las funciones "influye" en la otra. Esta operación se realiza mediante la superposición y multiplicación de las funciones de entrada en diferentes puntos y luego sumando los resultados.

6.5 Convolución

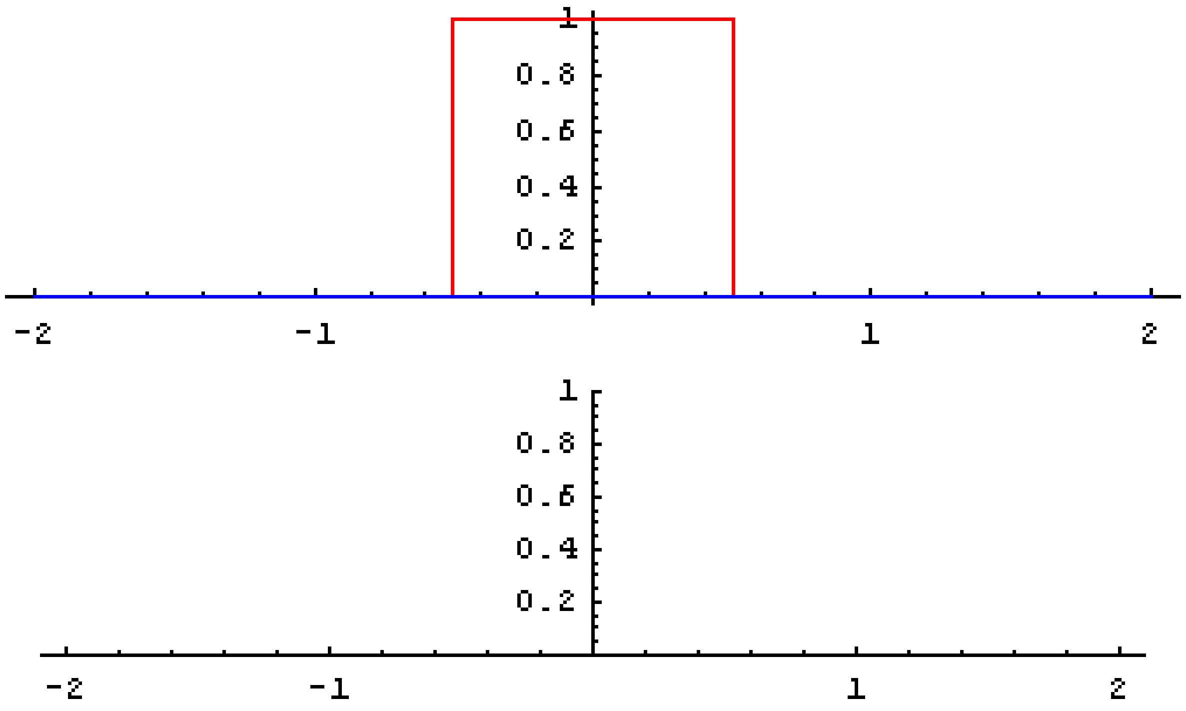


6.5 Convolución

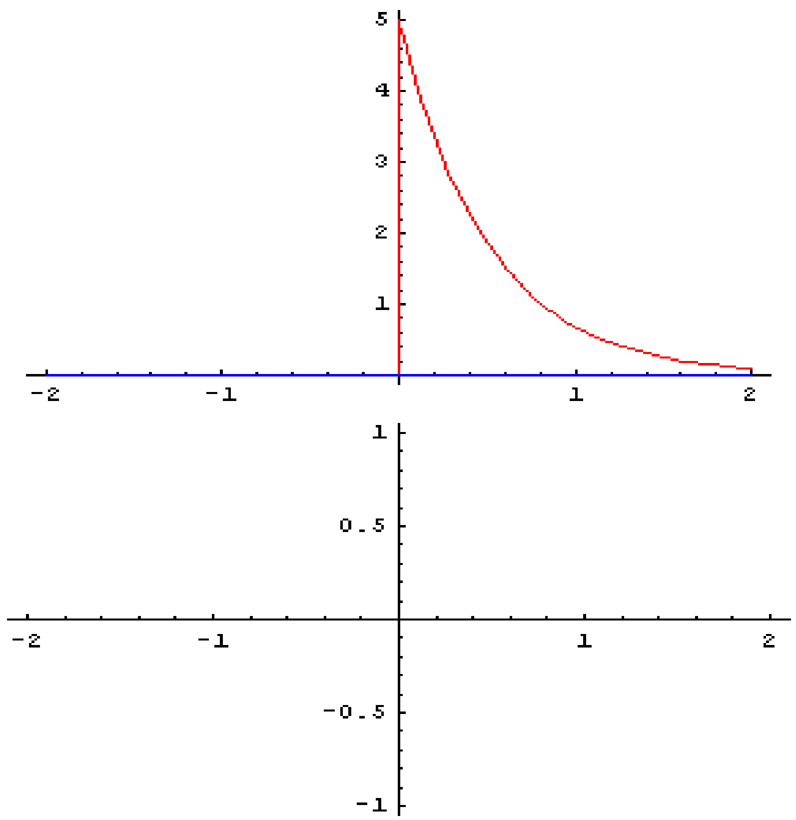


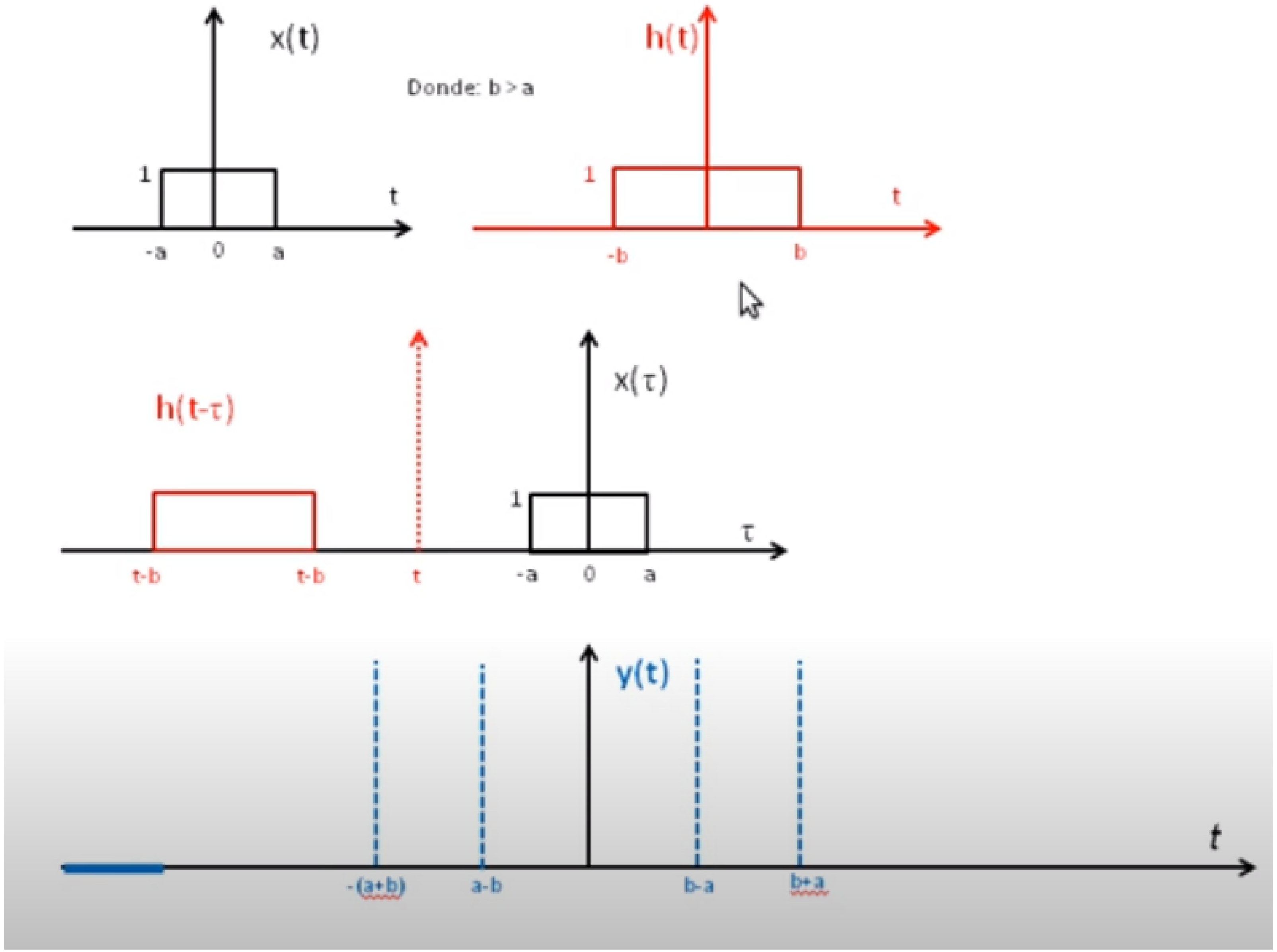


6.5 Convolución

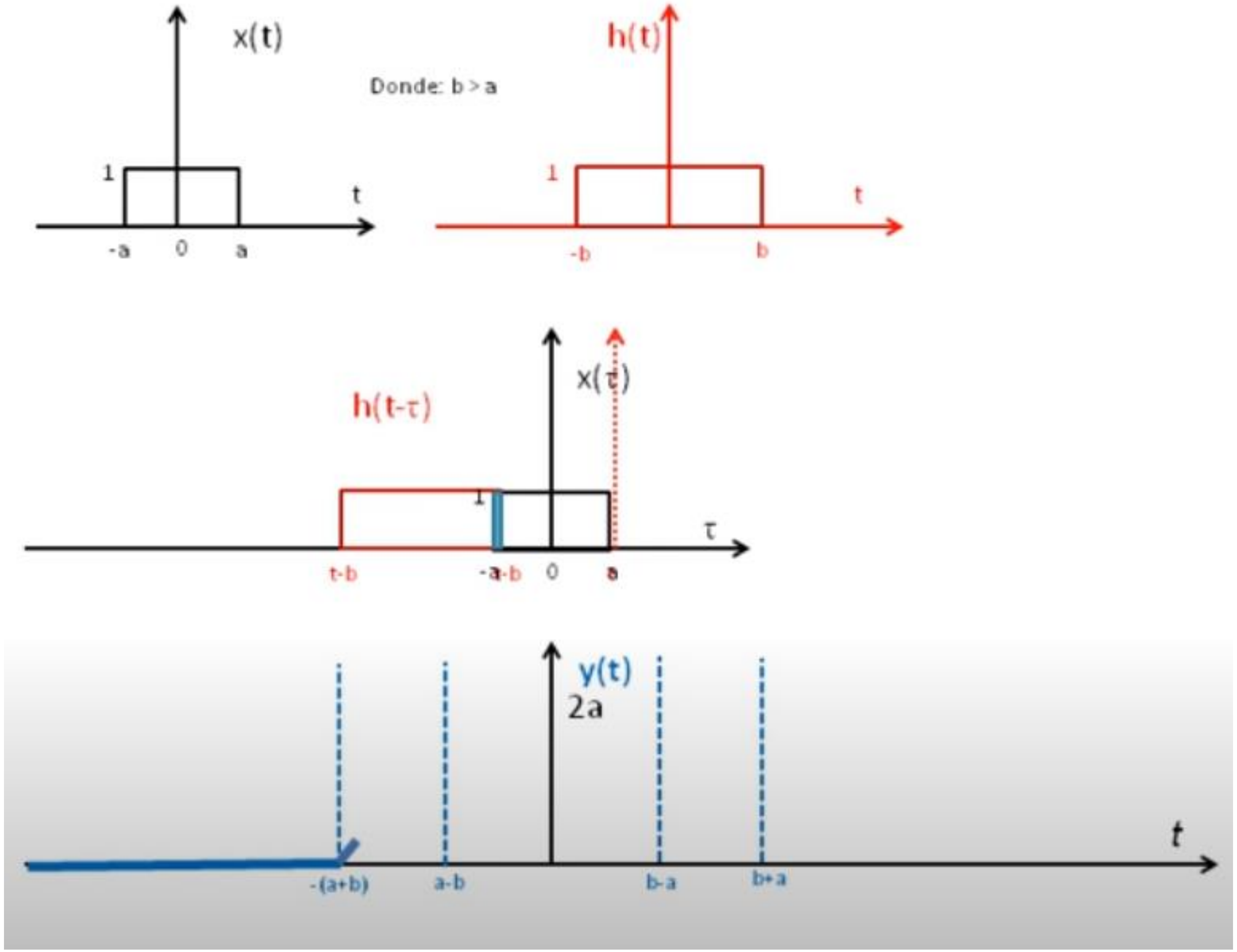


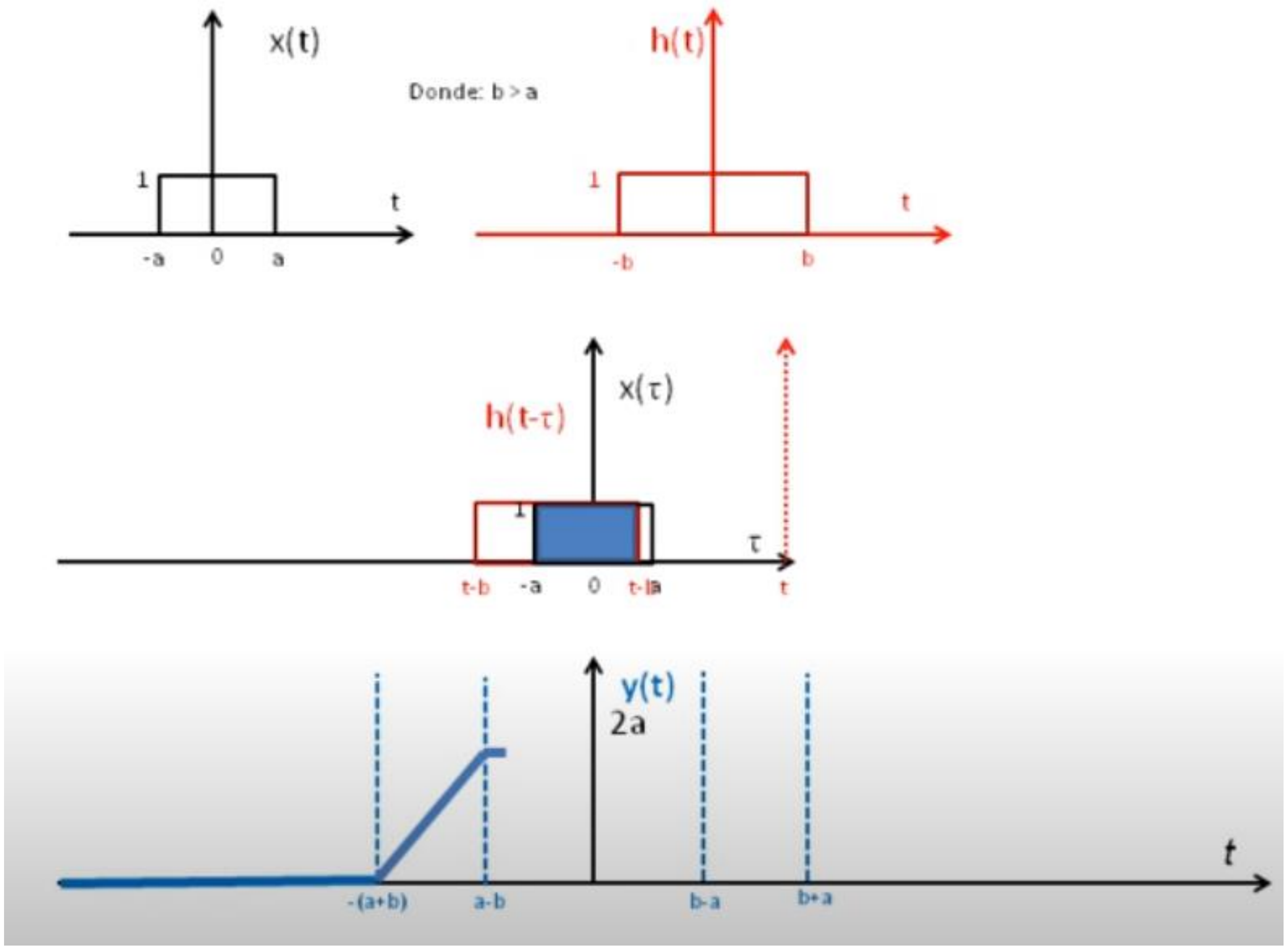
6.5 Convolución

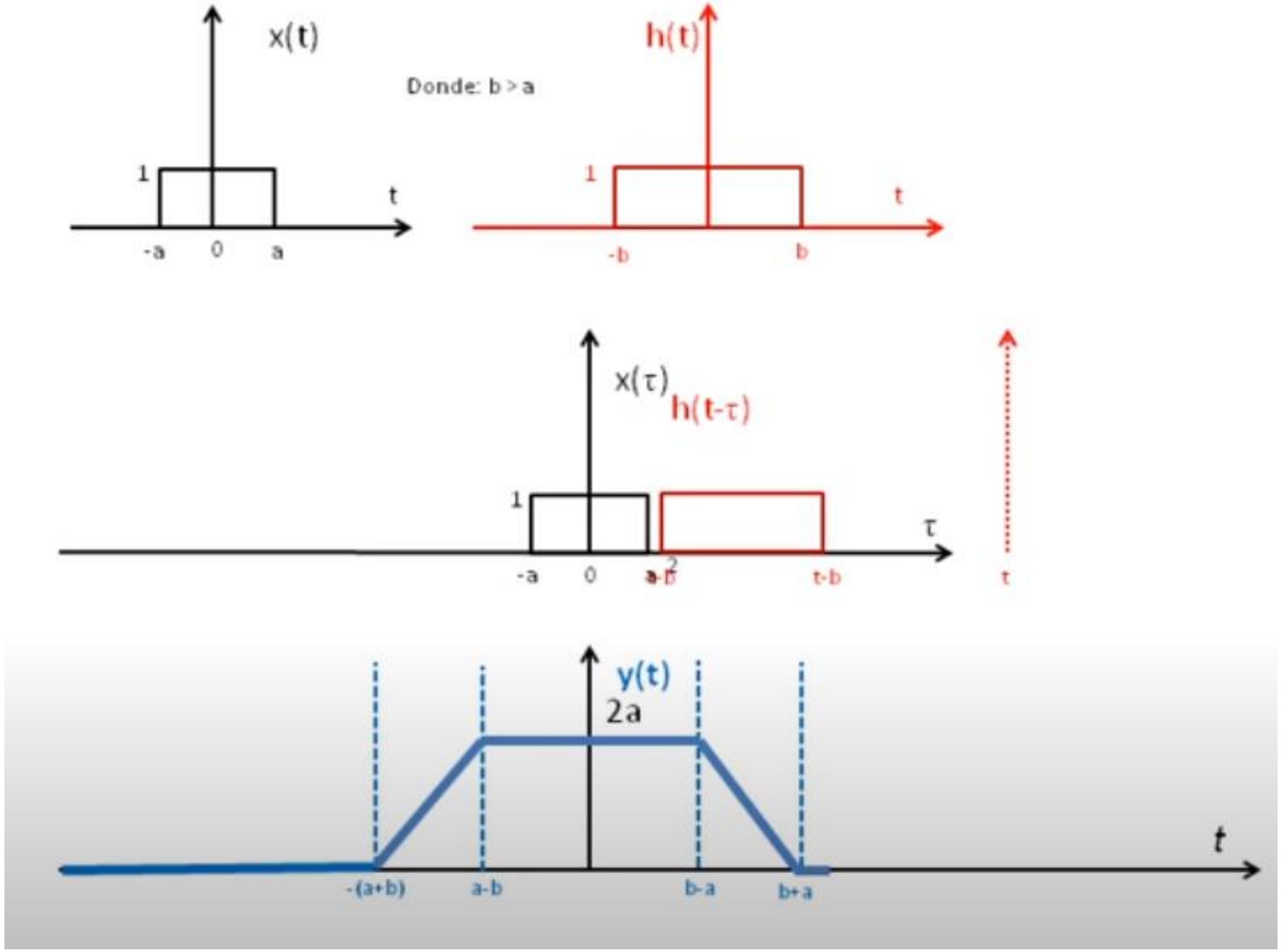




x(t)
Donde: b > a
h(t)
1
t
-a
0
a
1
t
-b
b
h(t-τ)
x(τ)
1
τ
t-b
t-b
t
-a
0
a
y(t)
t
-(a+b)
a-b
b-a
b+a


x(t)
Donde: b > a
h(t)
1
t
-a
0
a
-b
b
h(t-τ)
x(τ)
τ
t-b
-a-b
y(t)
2a
-(a+b)
a-b
b-a
b+a


x(t)
Donde: b > a
h(t)
1
t
-a
0
a
1
t
-b
b
x(τ)
h(t-τ)
1
τ
t-b
-a
0
t-a
t
y(t)
2a
t
-(a+b)
a-b
b-a
b+a



https://www.youtube.com/watch?v=OmMocxJ7MnQ&ab_channel=LuisChaparro

Teorema 6.5.3. Transformada de la convolución.

Sean $f(t), g(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(s)$ entonces:

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}\mathcal{F}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

(Ejemplo pizarrón 7.E)