Física I
Apuntes de Clase 4, 2022

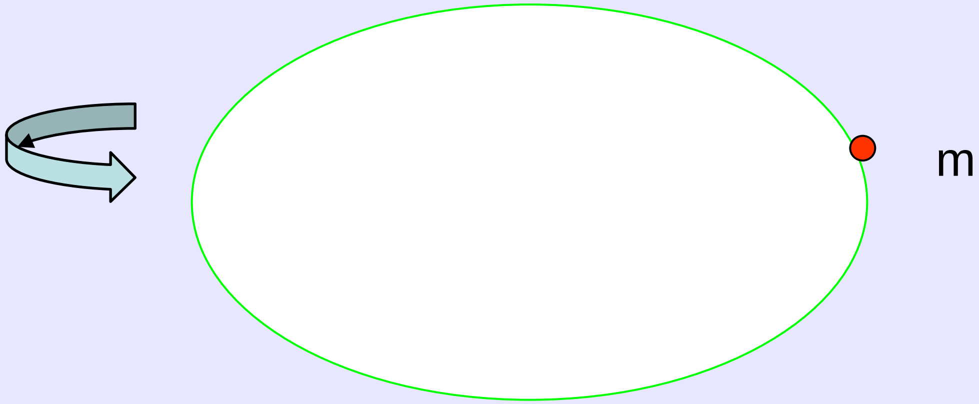
Turno E

Prof. Susana Conconi

Dinámica del Movimiento circular

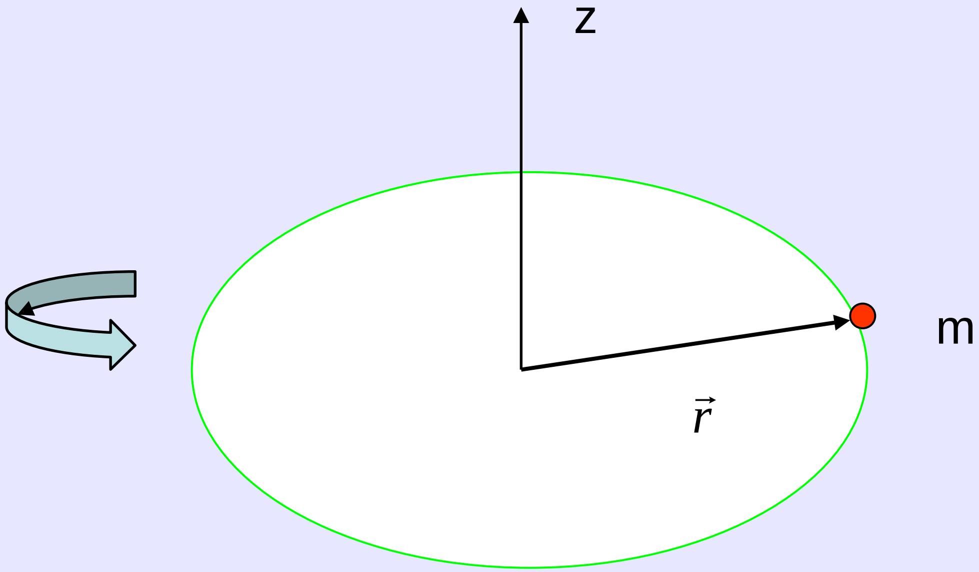
Movimiento Circular

Un cuerpo de masa m, modelado como partícula, realiza un movimiento circular en sentido antihorario (sentido de movimiento contrario a las agujas del reloj).



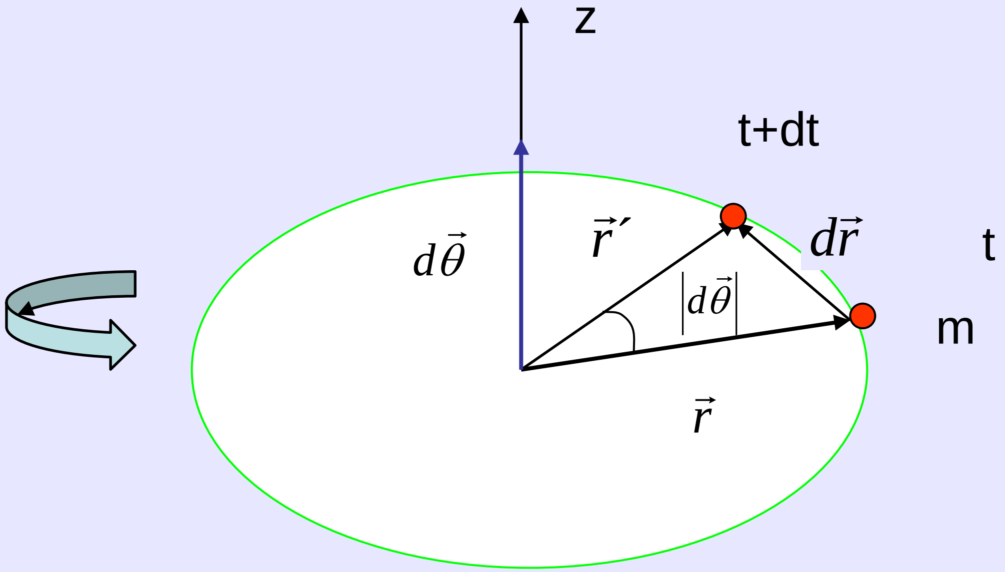
Movimiento Circular

Un cuerpo de masa m, modelado como partícula, realiza un movimiento circular en sentido antihorario.



Movimiento Circular

Un cuerpo de masa m, modelado como partícula, realiza un movimiento circular en sentido antihorario.



Se define el vector $d\vec{\theta}$, llamado diferencial de ángulo barrido por el vector posición **r** en el tiempo dt.

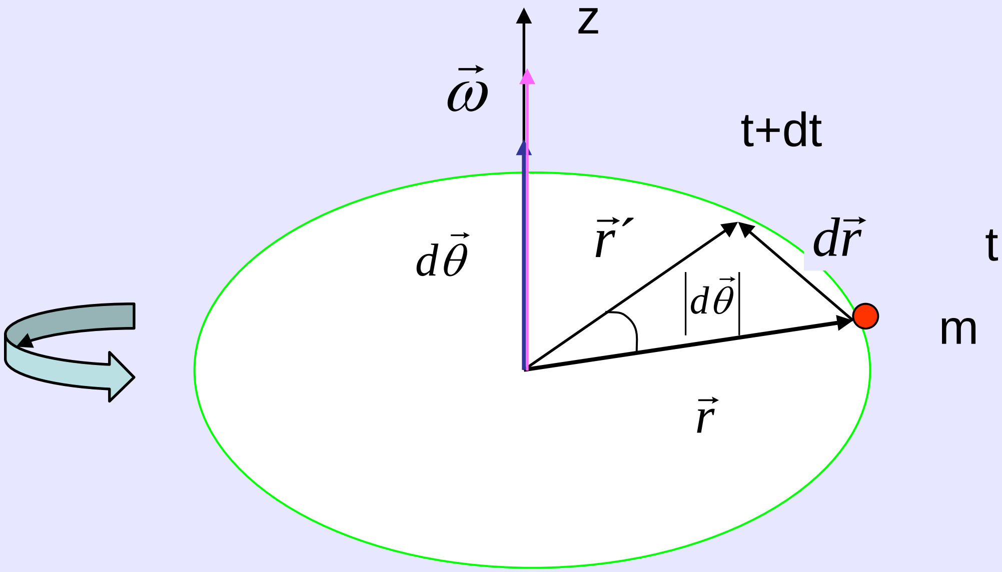
$$d\vec{\theta}\left\{\begin{array}{l}\text{dirección perpendicular a la circunferencia}\\ \text{módulo dado por el ángulo barrido}\\ \text{sentido dado por la regla de la mano derecha}\end{array}\right.$$

Se define el vector $d\vec{\theta}$, llamado diferencial de ángulo barrido por el vector posición **r** en el tiempo dt.

$$d\vec{\theta} \begin{cases} \text{dirección perpendicular a la circunferencia} \\ \text{módulo dado por el ángulo barrido} \\ \text{sentido dado por la regla de la mano derecha} \end{cases}$$

Si se deriva con respecto al tiempo, se obtiene la *velocidad angular ω*

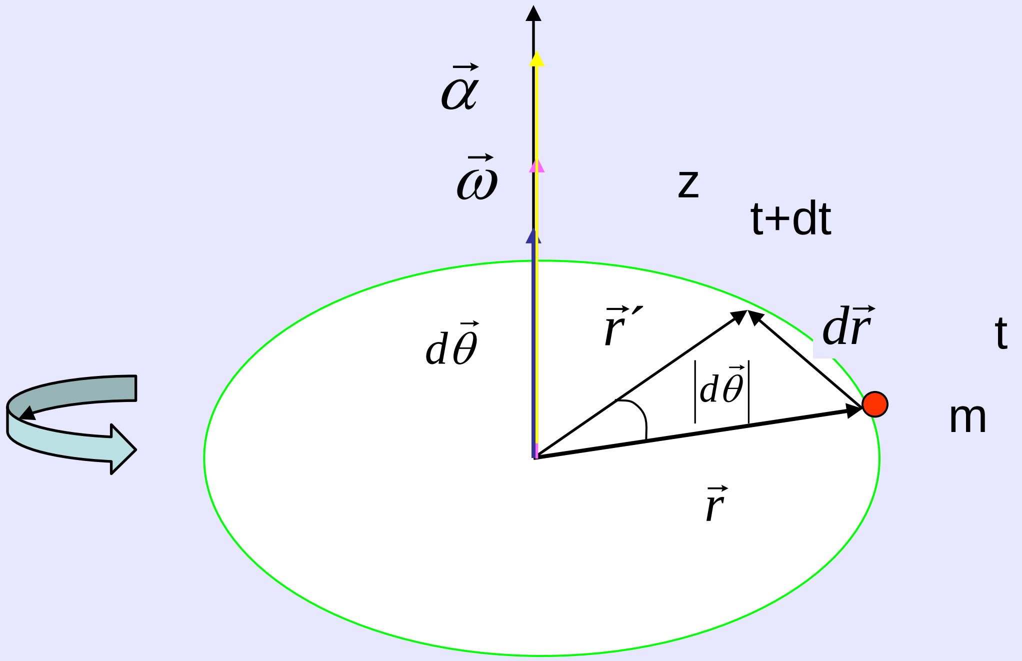
$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \begin{cases} \text{dirección dada por } d\vec{\theta} \\ \text{sentido dado por la regla de la mano derecha} \end{cases}$$


z
$\vec{\omega}$
t+dt
$d\vec{\theta}$
$\vec{r}'$
$d\vec{r}$
t
$|d\vec{\theta}|$
m
$\vec{r}$

Finalmente, si derivamos $\vec{\omega}$ con respecto al tiempo, vamos a obtener una aceleración, denominada aceleración angular y se denota con $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Tiene la dirección de $d\vec{\omega}$, si aumenta $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ tiene el mismo sentido que $\vec{\omega}$. Si $\vec{\omega}$ disminuye, tiene sentido opuesto



$\vec{\alpha}$
$\vec{\omega}$
z
t+dt
$\vec{r}'$
$d\vec{r}$
t
$d\vec{\theta}$
$|d\vec{\theta}|$
m
$\vec{r}$

Unidades en que se expresan las variables cinemáticas circulares:

[$d\theta$] en radianes

[ω] radianes /s

[α] radianes/ s^2

En general, omitimos la mención a los radianes en las unidades de $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$

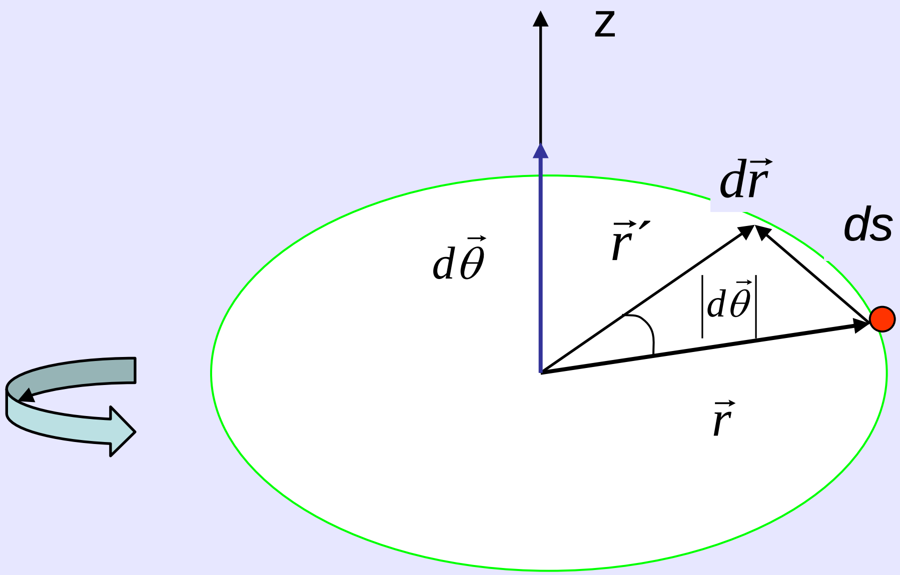
¿Cómo se vinculan las variables cinemáticas angulares con las lineales?

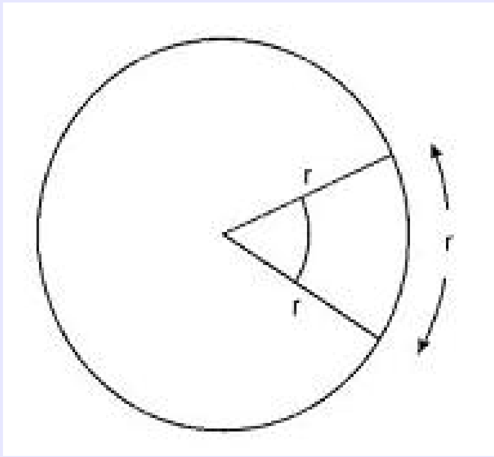
Empleanado la definición de radián

Arco = ángulo x el radio

$ds = d\theta \cdot r$ y aproximamos $$ds \cong \left| d\vec{r} \right|$$

Radián: ángulo central que se encuentra en una circunferencia, con un arco que tiene la misma longitud que el radio.





Vectorizando la expresión anterior $$d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$$

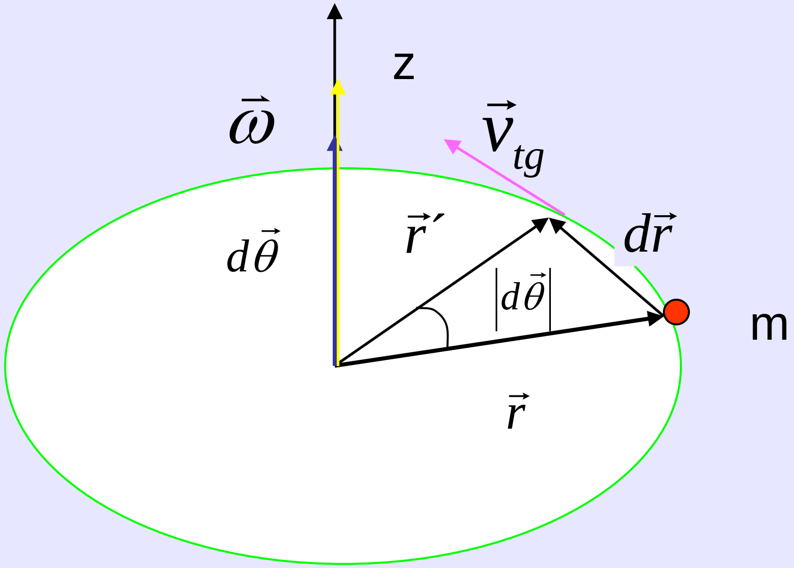
Si dividimos por dt

Obtenemos la velocidad tangencial $\vec{v}_{tg} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\theta} \times \vec{r}}{dt}$

$$\vec{v}_{tg} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$|\vec{v}_{tg}| = |\vec{\omega}| \times |\vec{r}| \, sen\, 90^{o} = \omega . r$$

$\vec{v}$



$\vec{v}_{tg}$ es tangente en todo punto de la trayectoria circular.

Si su modulo es constante pero cambia de dirección: $\overrightarrow{\Delta v} \neq 0$, está acelerado

Si derivamos la velocidad con respecto al tiempo, obtendremos la aceleración resultante

$$\vec{a}_{resul\tan te} = \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_{resul\tan te} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}_{resul\tan te} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{tg}$$

Si derivamos la velocidad con respecto al tiempo, obtendremos la aceleración resultante

$$\vec{a}_{resultante} = \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_{resultante} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}_{resultante} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{tg}$$

$$\vec{a}_{resultante} = \vec{a}_{tangencial} + \vec{a}_{radial}$$

$$\vec{a}_{\tan gencial} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

Da cuenta del cambio de módulo del vector velocidad

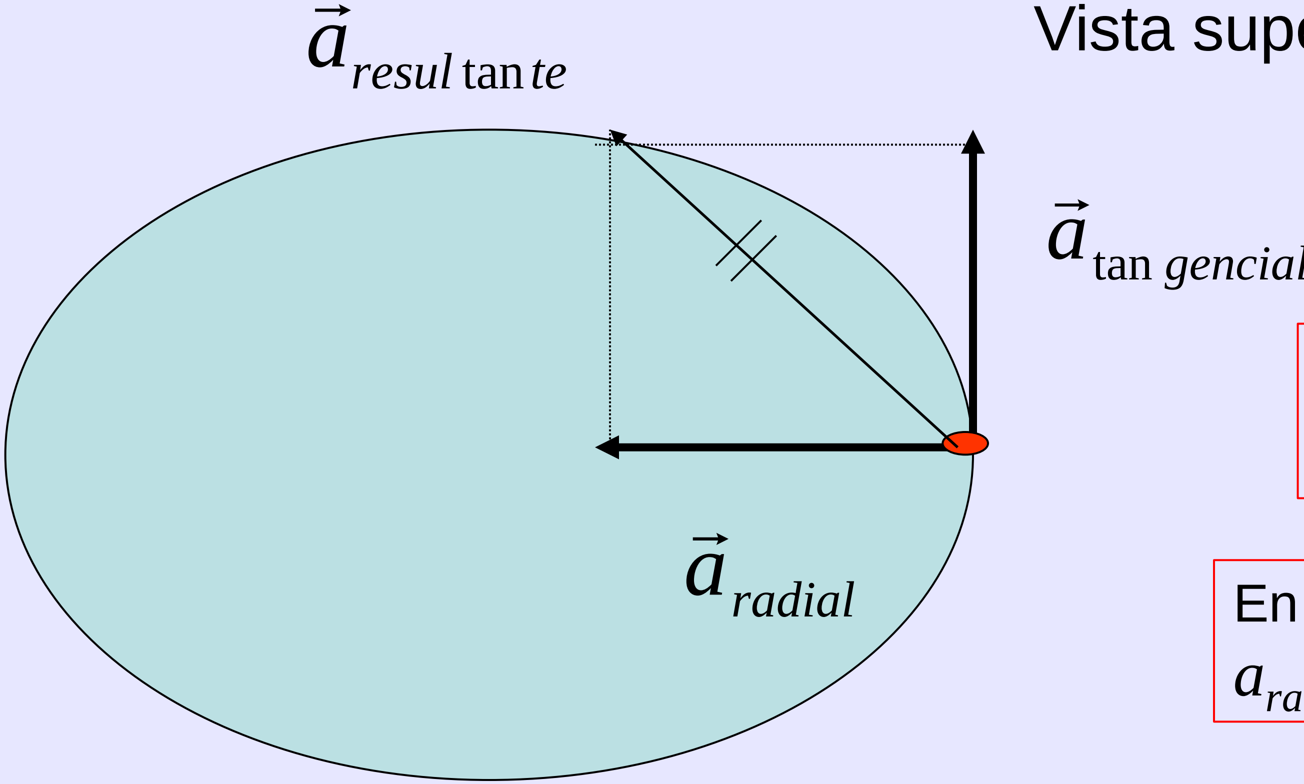
$$\left|\vec{a}_{\tan gencial}\right| = |\vec{\alpha}|\,|\vec{r}|\, sen\,90 = \alpha\, r$$

$$\vec{a}_{radial} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{tg}$$

Da cuenta del cambio de dirección del vector velocidad

$$\left|\vec{a}_{radial}\right| = |\vec{\omega}|\,|\vec{v}_{tg}|\, sen\,90 = \omega\, v_{tg} = \omega^2\, r = \frac{v_{tg}^2}{r}$$

Llamamos radial = centrípeta



Vista superior

Si $\vec{\omega}$ es constante
$\vec{\alpha}$ es nula y a_{tg} =0

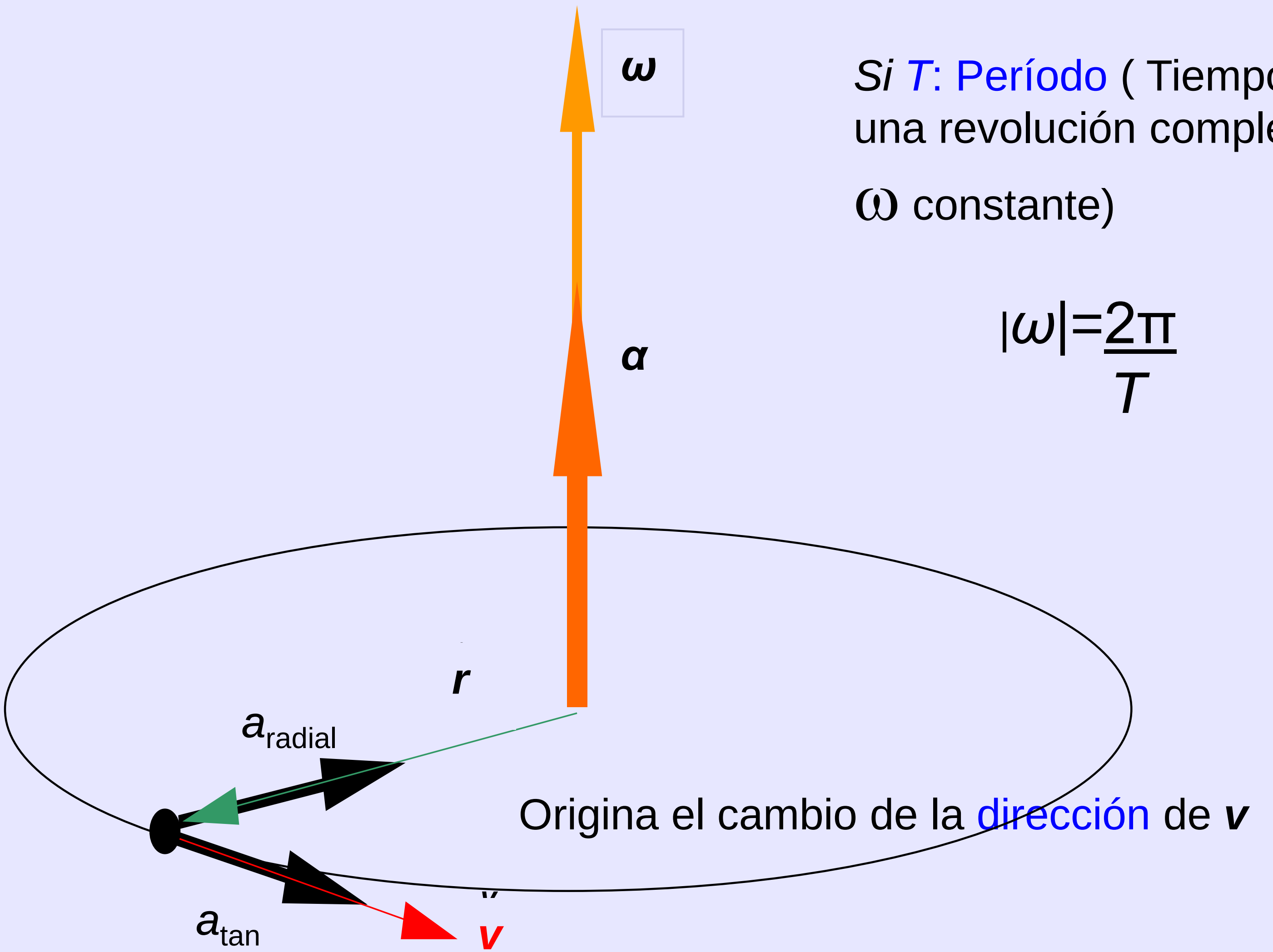
En movimiento circular:
a_{rad} siempre es ≠ 0

$$\vec{a}_{resultante} = \vec{a}_{tangencial} + \vec{a}_{radial}$$

$$|a_{resultante}| = \sqrt{|a_{tg}|^2 + |a_{rad}|^2}$$

Si *T*: Período (Tiempo que tarda en una revolución completa, considerando ω constante)

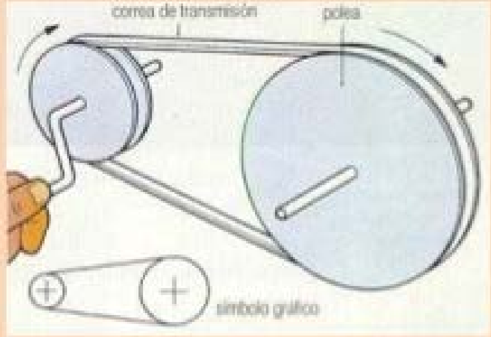
$$|\omega| = \frac{2\pi}{T}$$

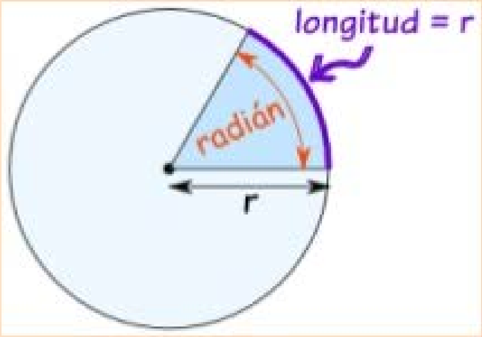


Origina el cambio del módulo de ***v***

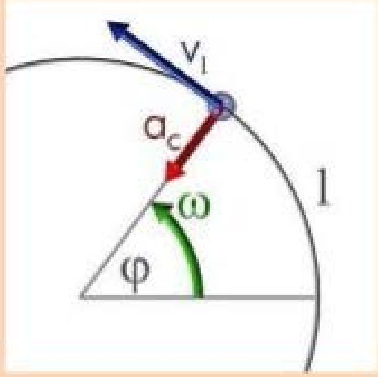
En solidos que giran solidarios: V_{tg} es igual en ambos bordes.

La soga vincula ambas ruedas con la velocidad tangencial

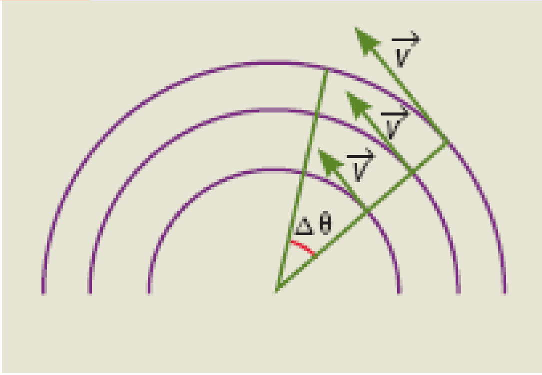




MOVIMIENTO CIRCULAR



En un solido que gira V_{tg} depende del radio



En cada caso, la velocidad angular es la misma, pero la rapidez no lo es.

Cinemática circular

Encontramos que a medida que la partícula gira la dirección de $\vec{\alpha}$ =cte. Por lo tanto, si además conocemos las condiciones iniciales (θ_0, ω_0) podemos obtener por las ecuaciones horarias del movimiento circular por integración, *suponiendo que el módulo de la aceleración angular es constante*.

En este caso, tendremos solo componente z .

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 . t + \frac{1}{2} \alpha . t^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha . t$$

Sólo para modulo de aceleración angular constante

Analogías entre cinemática lineal y circular

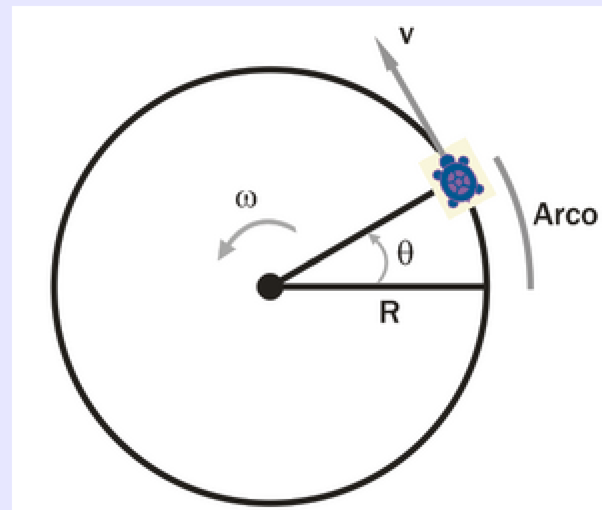
$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} \qquad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} \qquad \vec{\omega} = \frac{d\,\vec{\theta}}{dt}$$

Cinemática lineal con **a** = cte	Cinemática de rotación con **α** = cte
$v = v_0 + a\,t$	$\omega = \omega_0 + \alpha\,t$
$x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0\,t + \frac{1}{2}\alpha\,t^2$

Ejemplo 1:

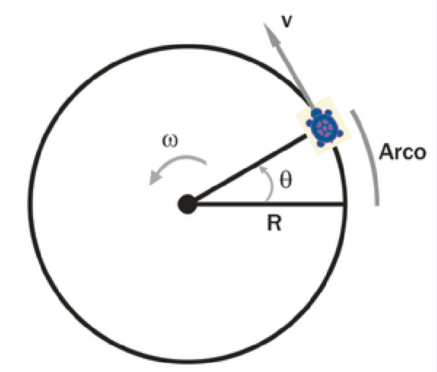
Un disco de 20 cm de radio gira a 33.33 rpm. Hallar su velocidad angular, la velocidad tangencial y la aceleración centrípeta de un punto de su periferia



Ej 1: R= 0,20 m

Velocidad angular: 33,33 rpm ➔ ω en 1/seg o rad/seg

1 revolución ➔ 1 vuelta = 2π rad



33,33 rev ➔ 33,33 . 2. π rad

1 min ➔ 60 seg

$$\omega = \frac{33{,}33\ .\ 2\ .\pi\quad rad}{60\ seg} = 3{,}49\ 1/seg$$

$$\boxed{\omega = 3{,}49\ 1/seg}$$

Para la velocidad tangencial de un punto en la periferia:

ω = 3,49 1/seg

$v_{tg} = \omega \cdot R = 3{,}49\ 1/seg \cdot 0{,}2\ m$

$$\boxed{v_{tg} = 0{,}70\ m/seg}$$

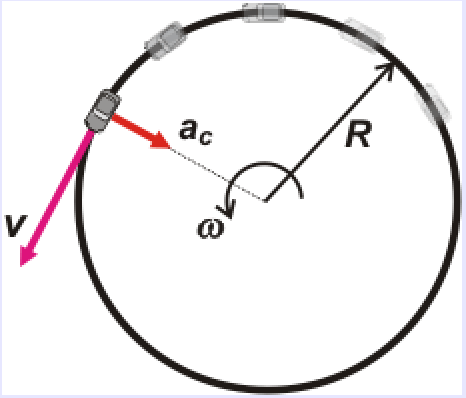
Para la aceleración centrípeta o radial en un punto de la periferia:

$$a_r = \omega^2 \cdot R = v_{tg}^2 / R$$

$$a_r = 3{,}49^2\ 1/seg^2 \cdot 0{,}2\ m$$

$$\boxed{a_r = 2{,}44\ m/seg^2}$$

Ejemplo 2: a)¿Cuál es la aceleración que experimenta un niño que viaja en un autito en el borde de una calesita que tiene 2 m de radio y que da una vuelta cada 8 segundos?



Si el niño da 1 vuelta cada 8 segundos su velocidad angular va a ser:

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathbf{t}}$$

$$\omega = \frac{2(3{,}14)}{8\mathbf{s}} = 0{,}785\frac{1}{\mathbf{s}}$$

Para calcular la aceleración centrípeta tenemos

$$\mathbf{a}_c = \omega^2 \cdot \mathbf{r}$$

Entonces:

$$\mathbf{a}_c = \left(0{,}785\frac{1}{\mathbf{s}}\right)^2 \cdot 2\,\mathbf{m}$$

$$\mathbf{a}_c = 0{,}62\frac{1}{\mathbf{s}^2} \cdot 2\,\mathbf{m} = 1{,}23\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2}$$

Es la aceleración centrípeta del niño. Como se mueve a ω constante no hay componente tangencial de la aceleración . a resultante = a radial

Dinámica del movimiento circular

-Definir el Sistema Físico en Estudio

-Definir modelo a utilizar

-Elegir un Sistema Inercial de Referencia

-Definir un sistema de ejes

-Identificar los agentes externos que interactúan con el sistema.

-Identificar la acciones (fuerzas) sobre el sistema

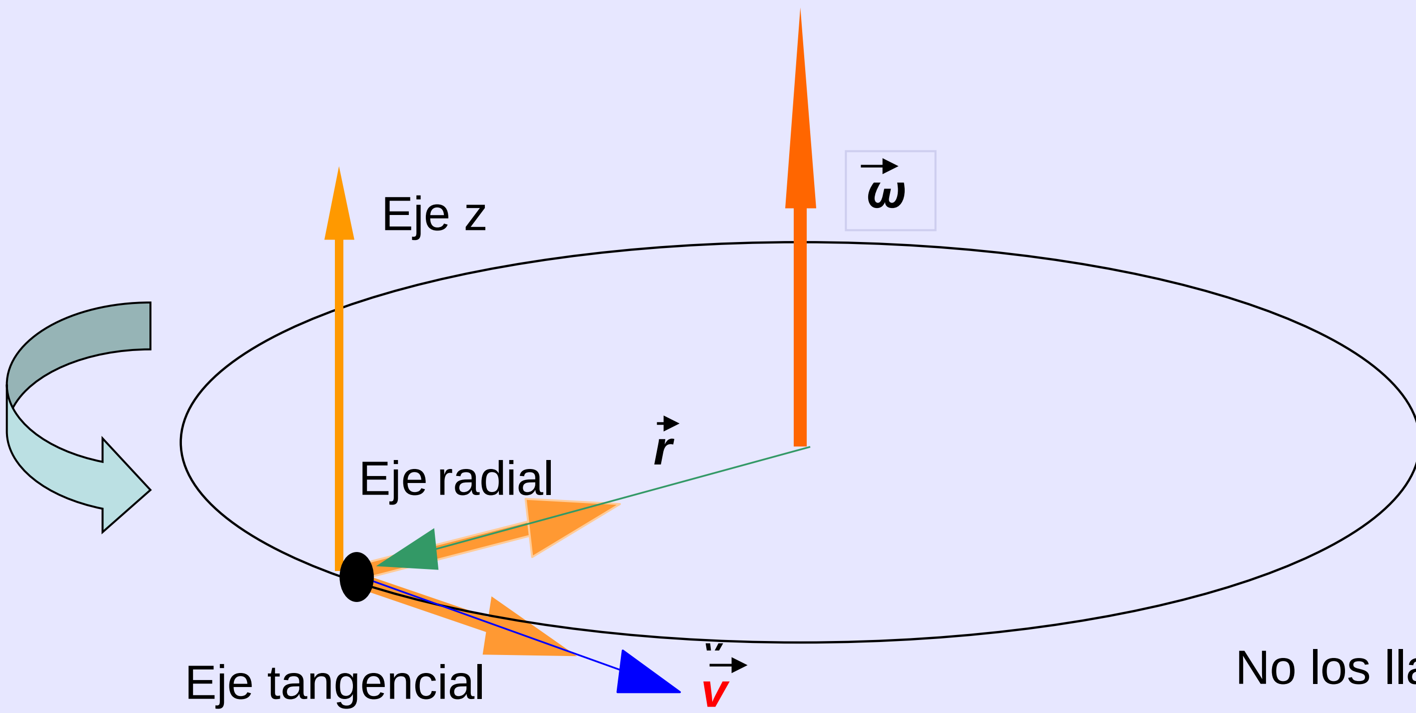
-Aplicar la 2da y 3ra ley de Newton

Si es Movimiento Circular: Radio constante (R) y $\sum \vec{F}_{rad} \neq 0$ ($a_{rad} \neq 0$)

Si es Movimiento Circular Uniforme: rapidez constante (v: constante, w constante, $a_{tg} = 0$, $a_{rad} \neq 0$)

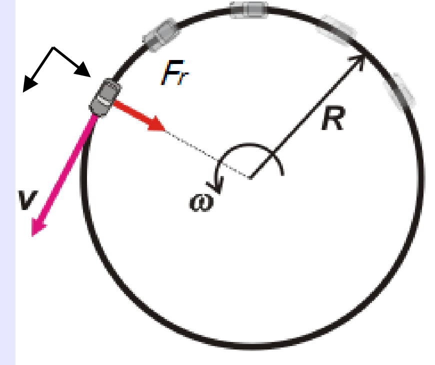
Sistema de referencia inercial no puede estar acelerado. No puedo usar el objeto en movimiento circular aunque tenga rapidez constante

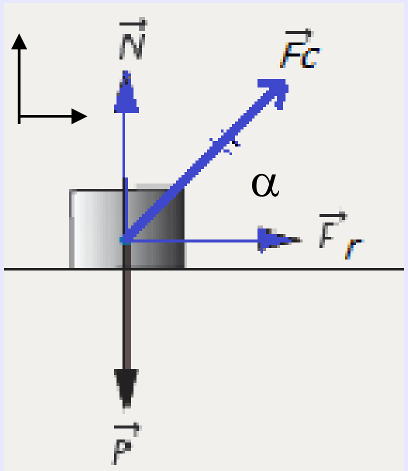
Sistema de ejes instantáneos que se mueve con el punto que rota



No los llamamos x, y, z

Ejemplo 2 b) ¿Qué fuerza neta hace el autito/ calesita sobre el niño, si el niño tiene una masa de 50 kg?





La sumatoria de Fuerzas radiales será :

$$\Sigma Frad = F_r = m \ . \ a_c = 50 \text{ kg} \ . \ 1.23 \text{ m/s}^2 = 61.5 \text{ N}$$

La sumatoria de Fuerzas en z será:

$$\Sigma Fz = 0$$
$$N - P = 0$$
$$N = m.g = 50 \ kg \ . \ 9.8 \text{ m/s2} = 490 \text{ N}$$

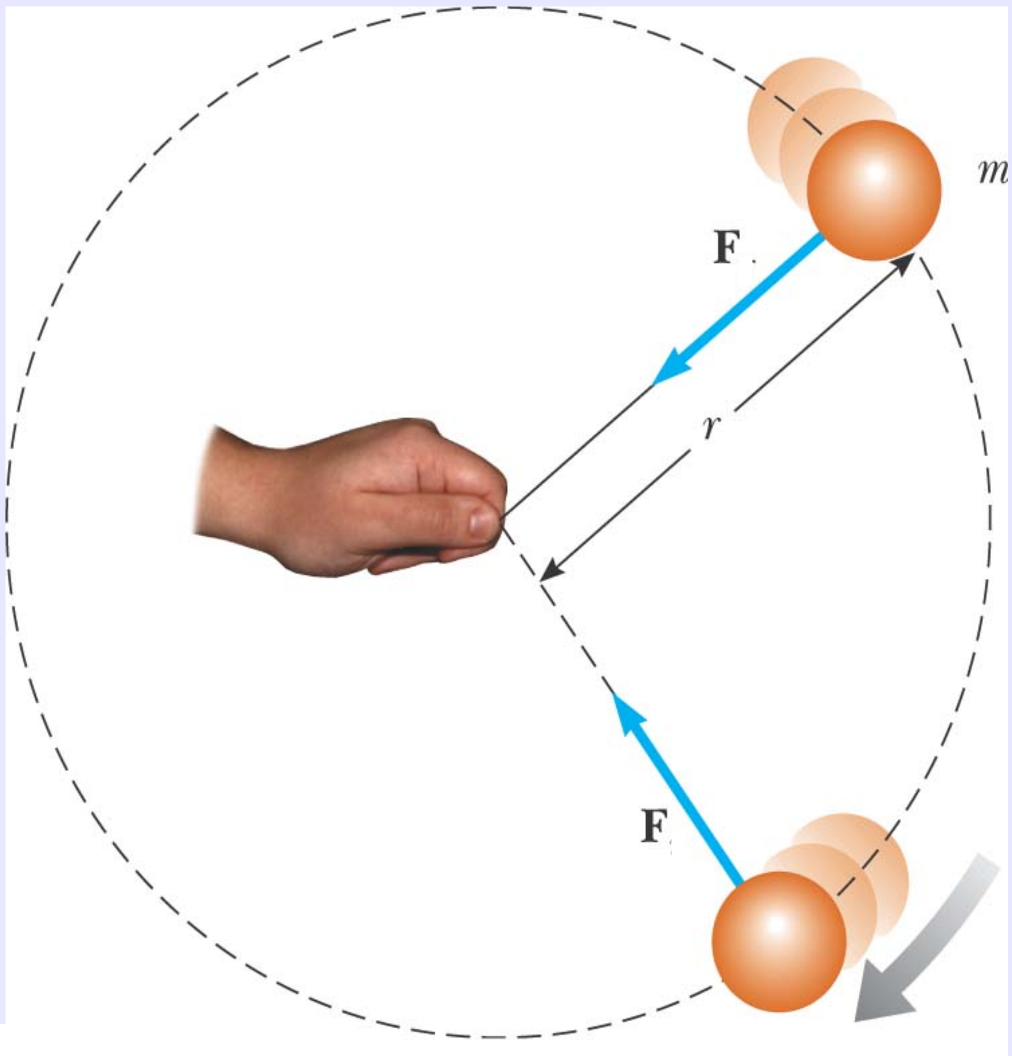
$$Fc = \sqrt{F_r^2 + N^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} (N / F_r)$$

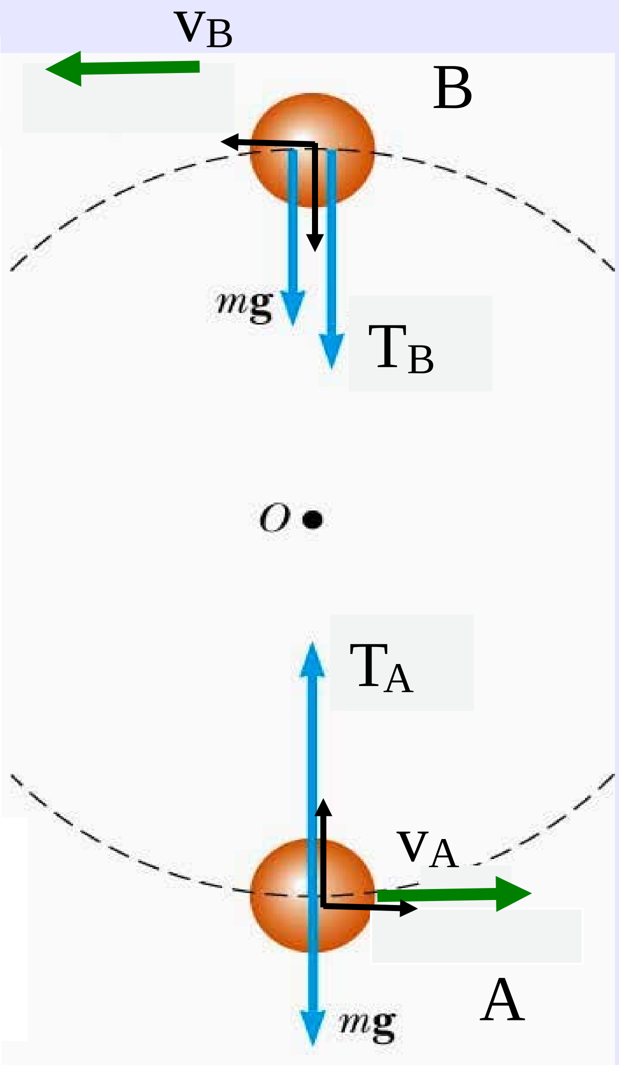
$$F_c = 493.4 \text{ N} \ , \quad \alpha = \tan^{-1} (490/61.5) = 82.8^o$$

Casos particulares a analizar:

Cuerpo atado a una soga - Movimiento vertical



En los extremos verticales



En B: $$\sum F_{rad} = T_B + mg = m\,a_c = m\frac{v_B^2}{R}$$

$$\sum F_{tg} = 0$$

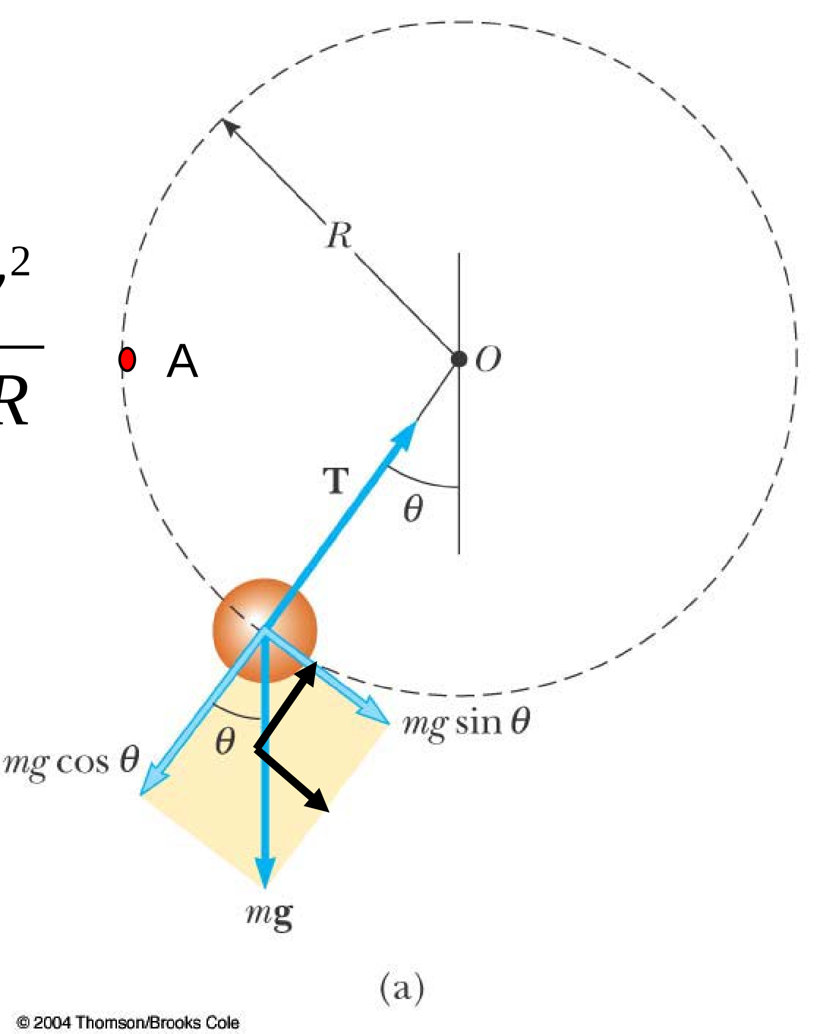
En A: $$\sum F_{rad} = T_A - mg = m\,a_c = m\frac{v_A^2}{R}$$

$$\sum F_{tg} = 0$$

En cualquier punto de la trayectoria

$$\sum F_r = T - mg.\cos\theta = m\,a_c = m\frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{tg} = mg.sen\theta = m\,a_{tg}$$



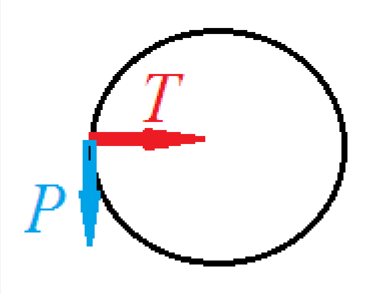
En A?

$$\sum F_r = T - \cancel{mg.\cos 90}$$

$$\sum F_r = T = m\,a_c$$

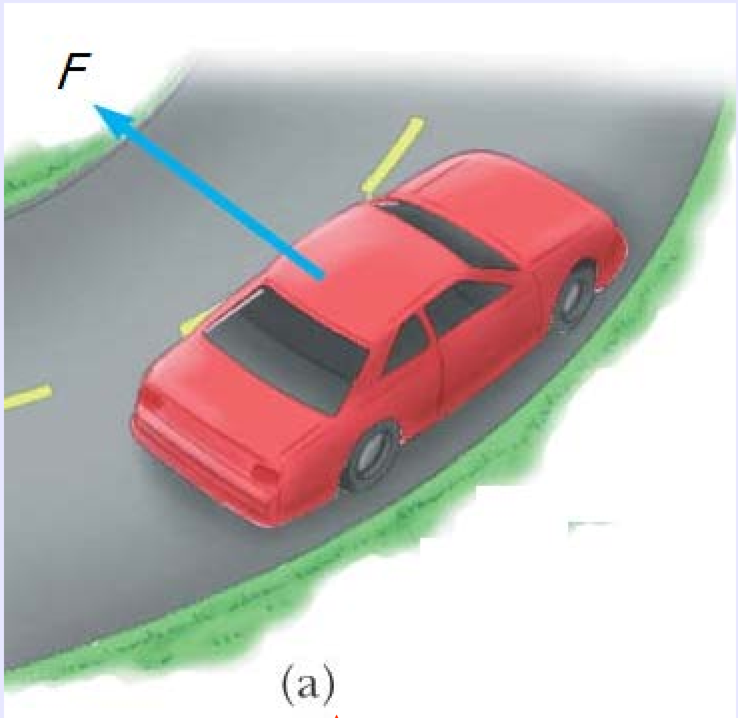
$$\sum F_{tg} = mg.sen\,90$$

$$\sum F_{tg} = \cancel{m}g = \cancel{m}\,a_{tg}$$



$$g = a_{tg}$$

Un coche de 1600 kg toma una curva de 100 m de radio a 70 km/h.



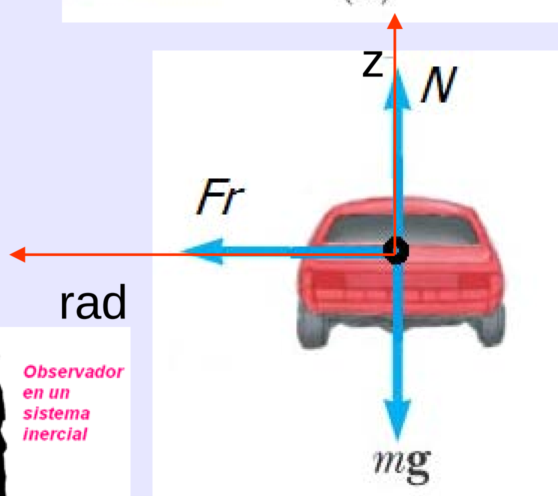
a) ¿Cual el la fuerza neta radial (F) que se ejerce sobre el auto?

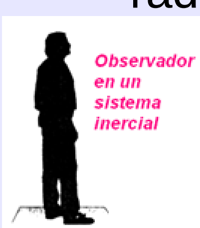
b) Si el coeficiente de roce con pavimento humedo es de 0.25, Cual es la máxima velocidad para tomar la curva cuando llueve?

c) ¿toma la curva o derrapa?

$$\sum F_z = N - mg = 0$$

$$\sum F_{rad} = f_r = m\, a_c = m \frac{v^2}{R}$$





M= 1600 kg R = 100m

$$v_{tg} = \frac{70 \times 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 19.4 \text{ m/s}$$

$$\boxed{f_r = 6.048 \text{ N}}$$

b) Si el coeficiente de roce con pavimento humedo es de 0.25, ¿toma la curva o derrapa?

$$\sum F_{rad} = f_{r,\max} = m\, a_c = m \frac{v_{\max}^{\;2}}{R}$$

$$f_{r,\max} = \mu_e\, N = \mu_e\, mg$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\mu_e\, R\, g}$$

Vmax = 15,6 m/s

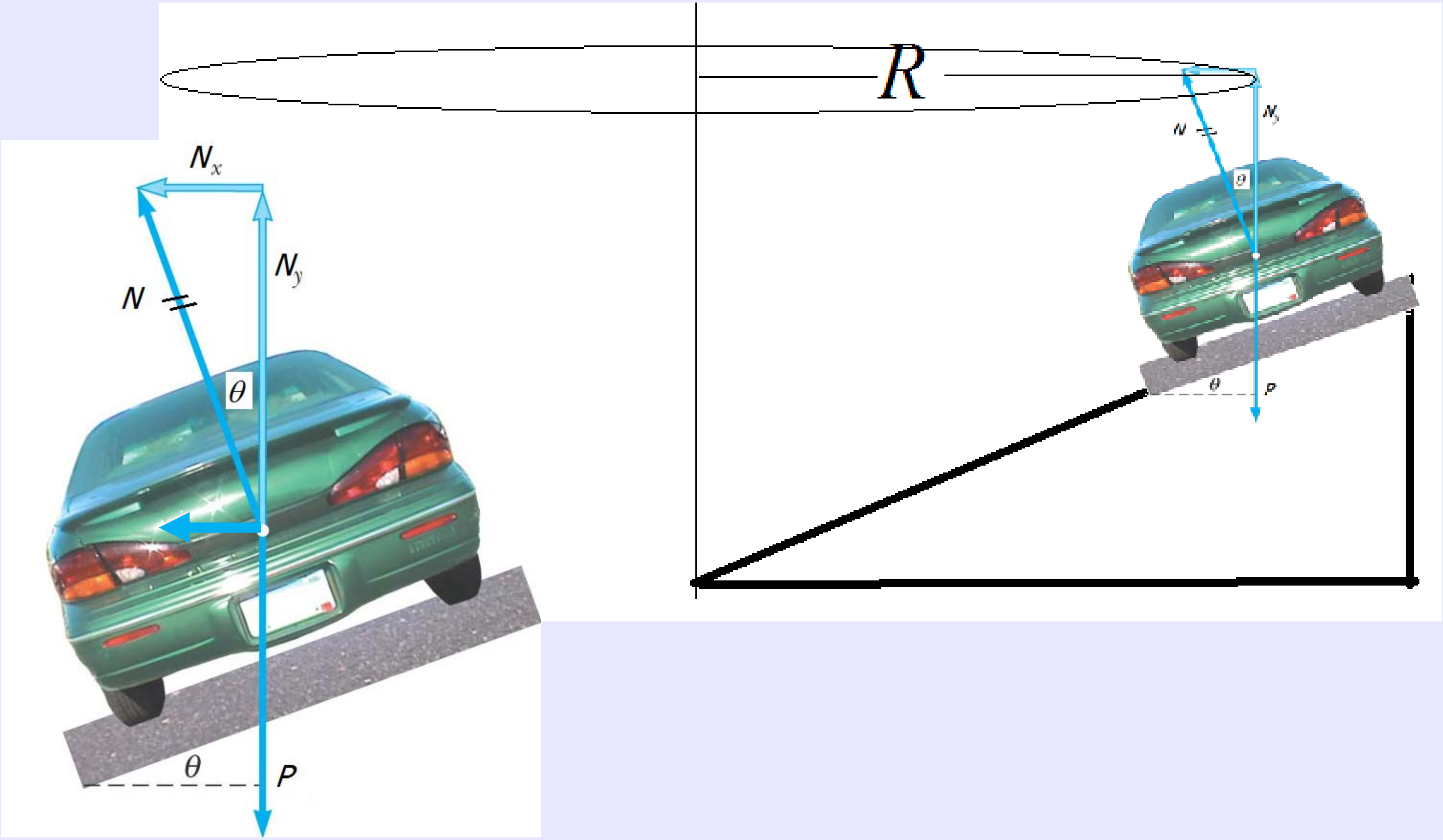
c) ¿Toma la curva o derrapa?

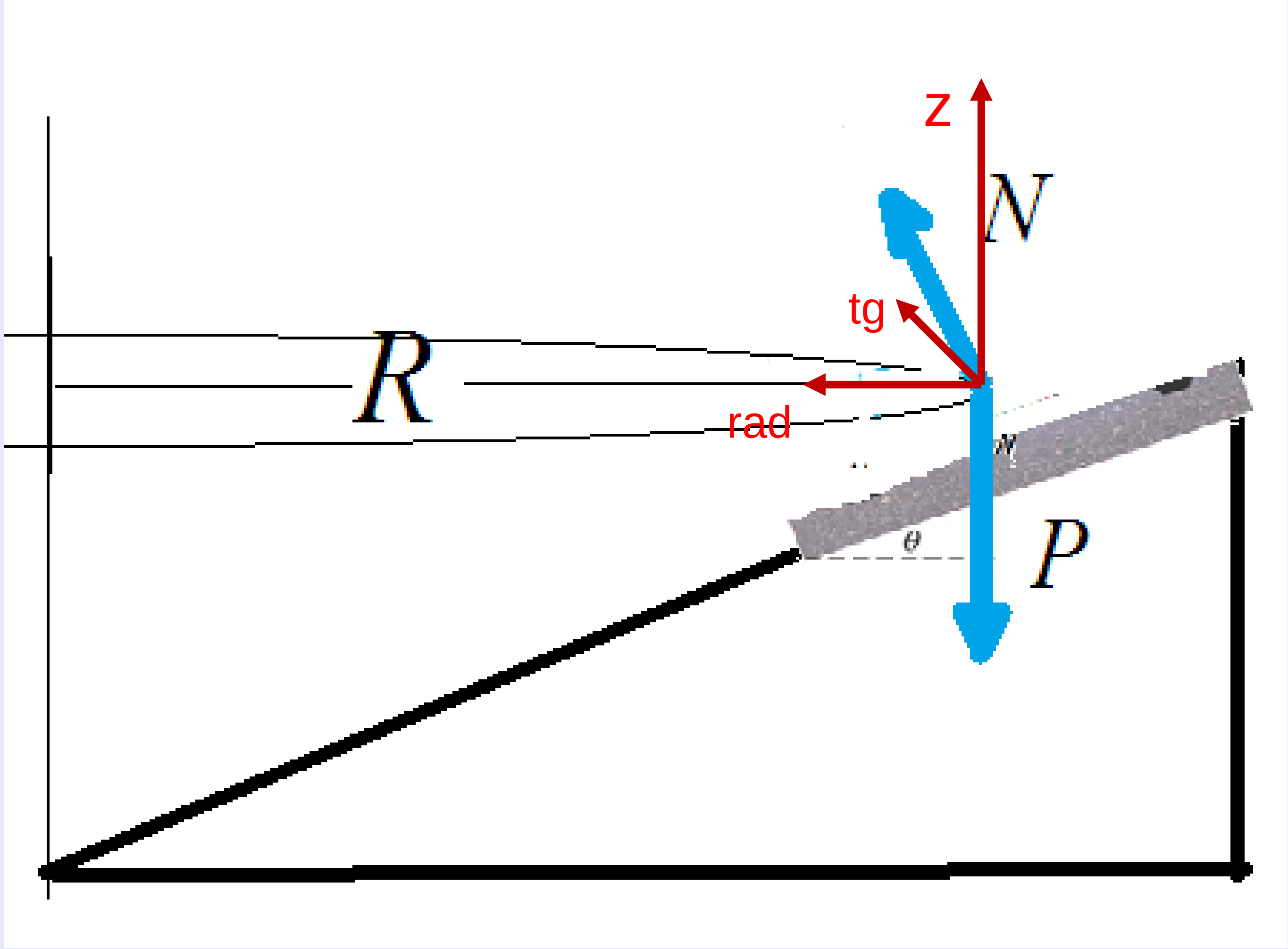
Vmax = 15,6 m/s < 19.6 m/s,
➔ derrapa, no puede ir a esa velocidad

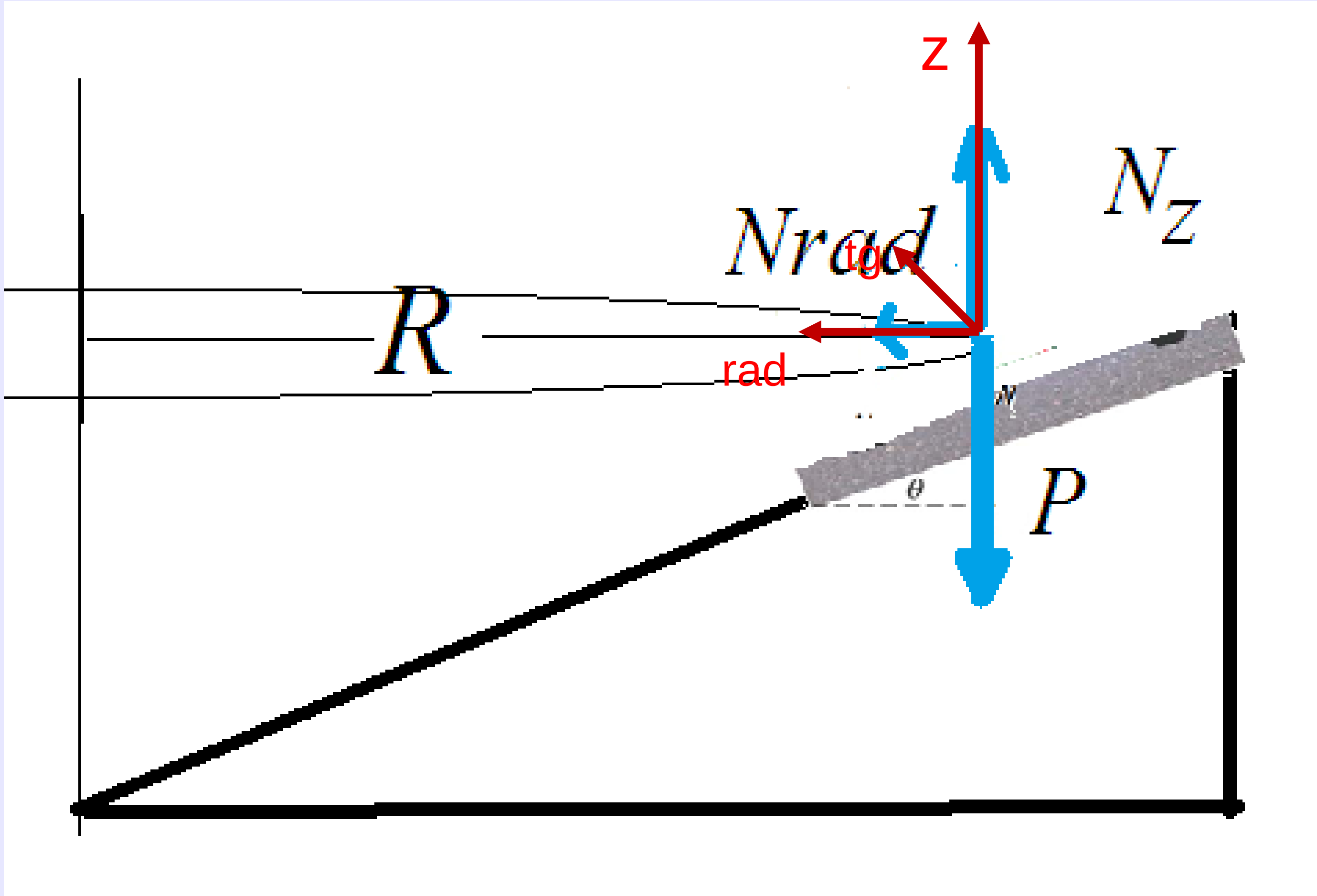
Mayor seguridad en las curvas

¿Como podemos aumentar la seguridad en las curvas si el piso está mojado y aumentar la velocidad máxima? : peralte

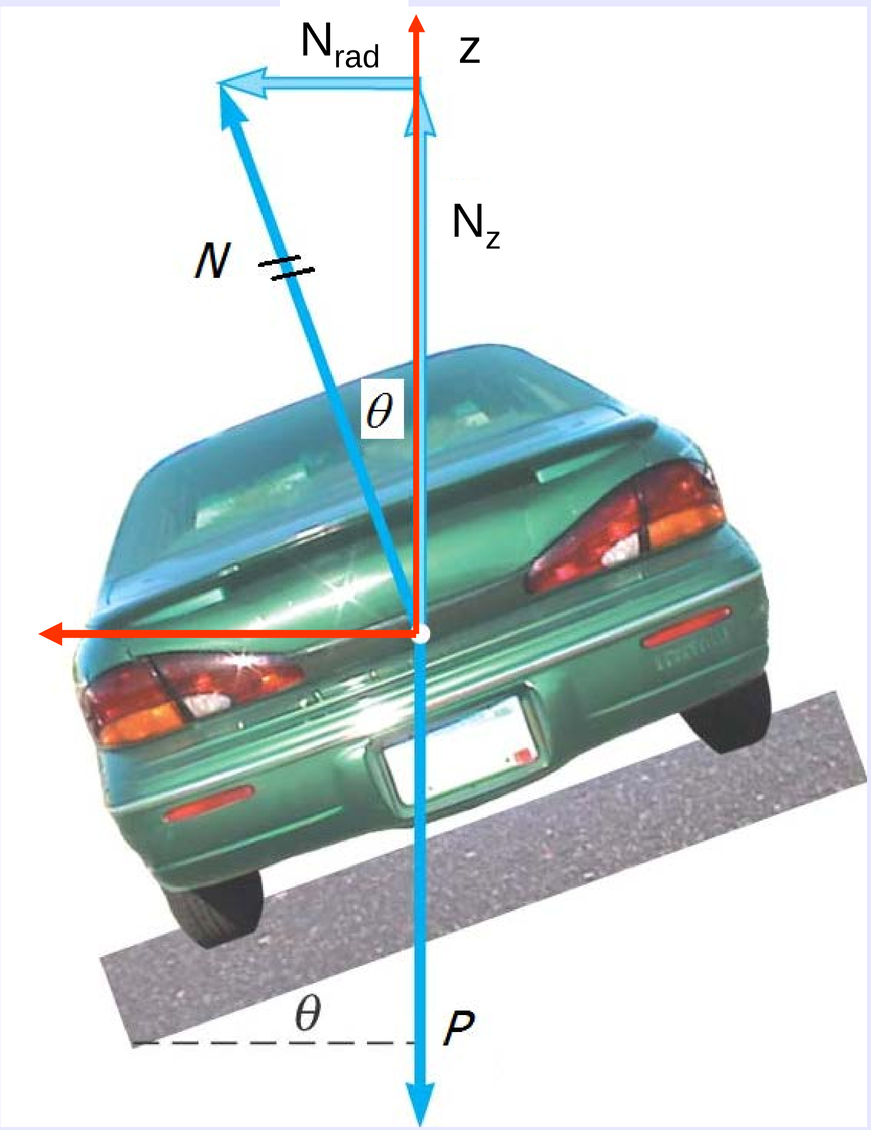
¿Cual será la velocidad máxima sin tener en cuenta el roce, si el Angulo es θ?




z
N
tg
R
rad
θ
P



z
N_z
$Nrad$
tg
R
rad
P
θ



$$\sum F_z = N_z - mg = 0$$

$$\Rightarrow N\cos\theta = mg$$

$$\sum F_{rad} = N_{rad} = m\,a_c$$

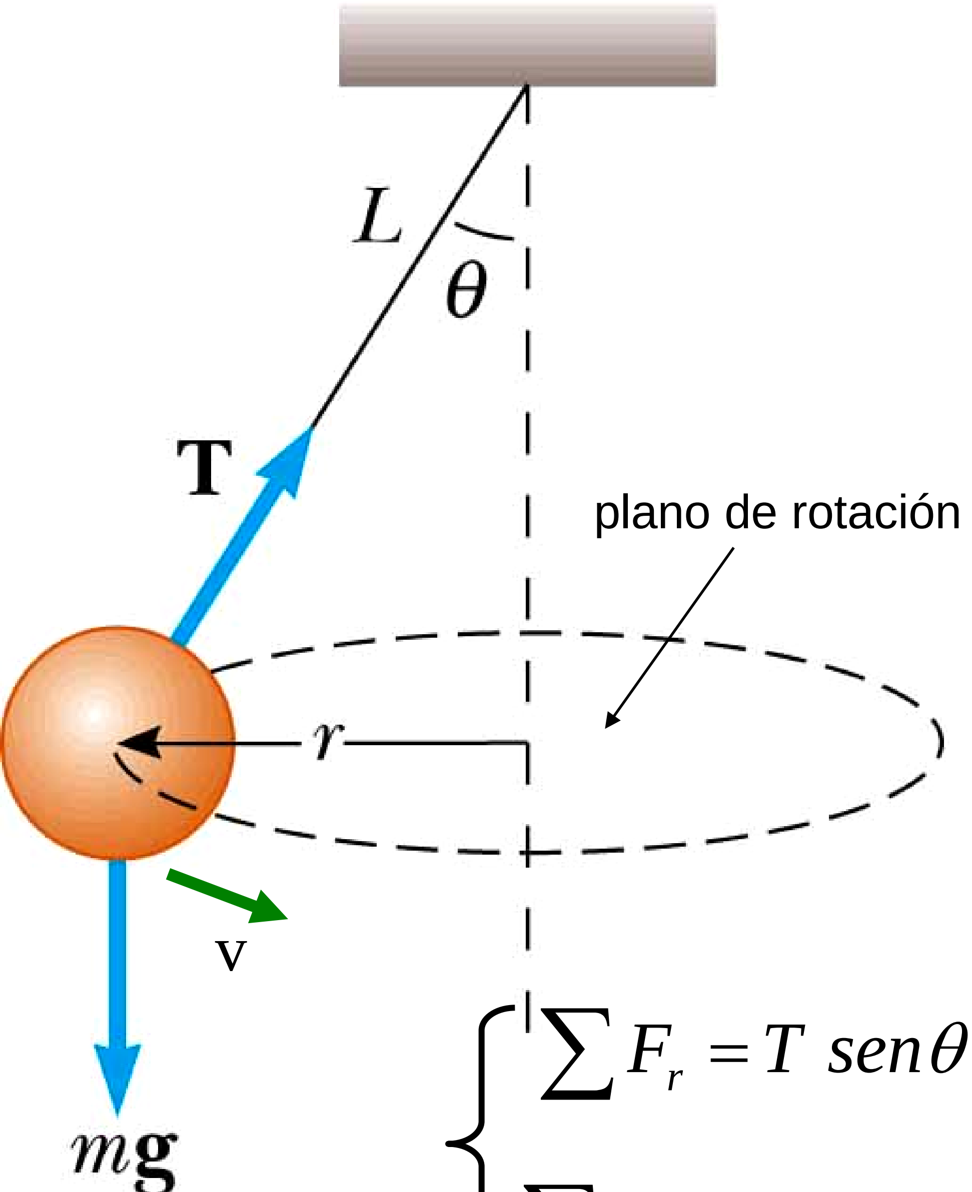
$$\Rightarrow N\ sen\theta = m\frac{v^2}{R}$$

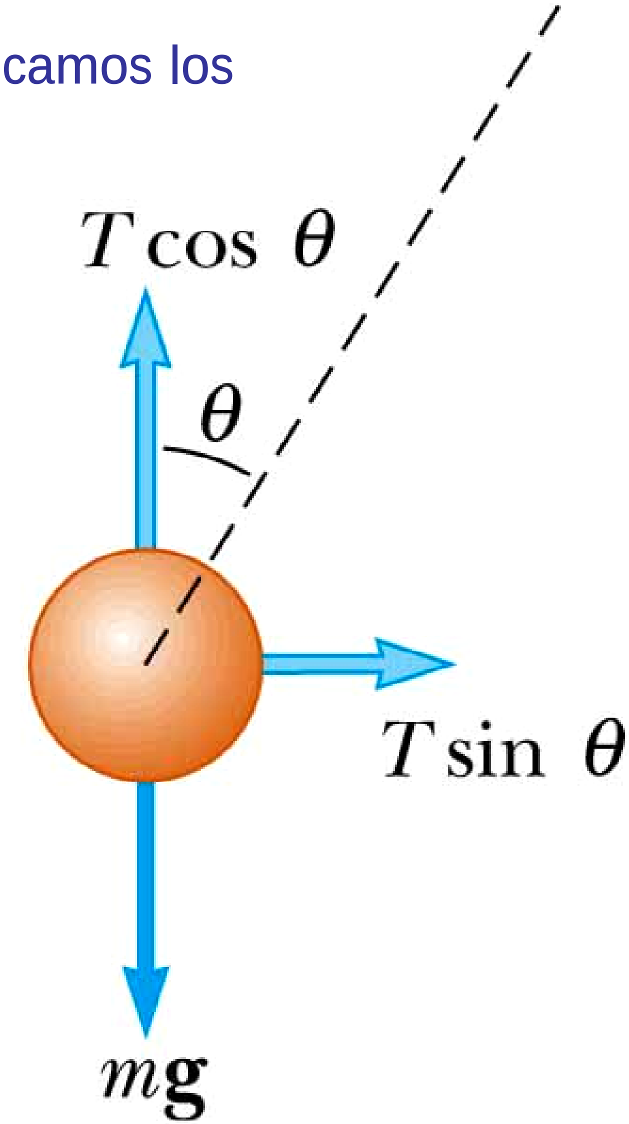
$$\Rightarrow tg\theta = \frac{v^2}{g\,R} \Rightarrow \boxed{v_{max} = \sqrt{g\,R\,tg\theta}}$$

Casos a ver en la practica

Péndulo cónico

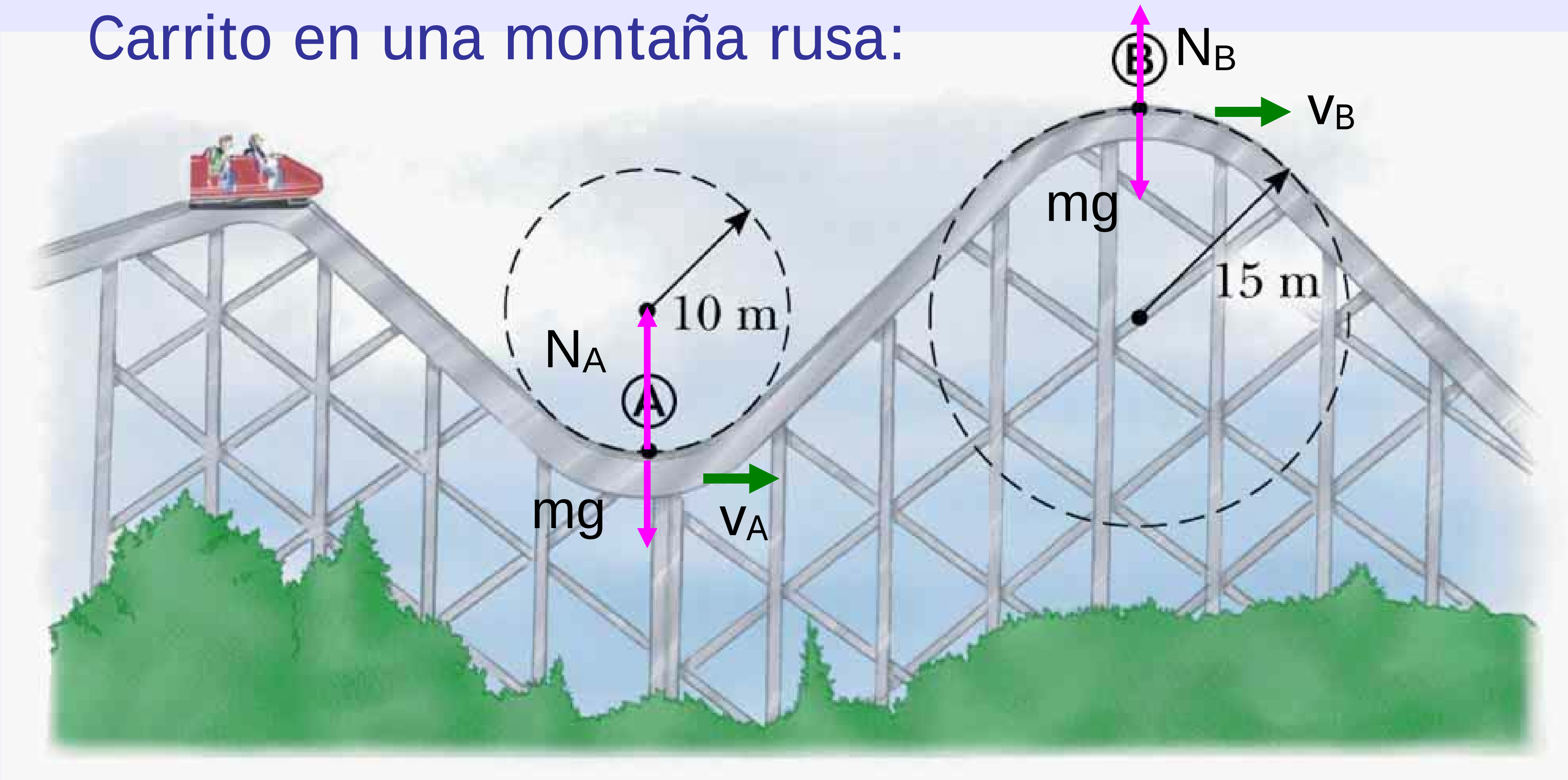
¿Cómo ubicamos los ejes?





$$\begin{cases} \sum F_r = T\ sen\theta = m\dfrac{v^2}{r} \\ \sum F_z = T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Carrito en una montaña rusa:



En A: $\sum F_{rad} = N_A - mg = m\,a_{c,A} = m\,\dfrac{v_A^2}{R_A}$

En B: $\sum F_{rad} = mg - N_B = m\,a_{c,B} = m\,\dfrac{v_B^2}{R_B}$