



# ELECTROTECNIA Y ELECTRÓNICA

(Mecánica - Electromecánica - Computación)

## TRABAJO DE APLICACIÓN Nº 03

Preparado por: Ing. Pablo Morcelle del Valle, Ing. Augusto Cassino, Ing. Guillermo Renzi.

Actualizado por: Ing. Fabián Blasseti, Ing. Gustavo Adgi Romano, Ing. Mónica González, Ing J.P. Cardacce

### CIRCUITOS EN CORRIENTE ALTERNA

Excitación, respuesta, señales. Tipos de señales. Señal alterna senoidal. Componentes activos y pasivos en corriente alterna. Fasor. Impedancia y admitancia complejas. Aplicaciones.

**REPASAR:** Métodos de resolución de circuitos. Funciones senoidales: parámetros, gráficas, valores medio y medio cuadrático. Números complejos: formas exponencial, polar, binómica. Representación en el plano complejo. Álgebra de números complejos.

### EJERCICIO Nº 01:

Dada la función  $a(t) = A_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$ , y suponiendo conocidos  $A_{\max}$ ,  $\omega$  y  $\varphi$ .

- a) Realizar su exhaustiva descripción, efectuando el dibujo de su gráfica e indicando en la misma o calculando, según el caso, las siguientes magnitudes: **amplitud, pulsación, período, fase, valor medio, valor medio cuadrático**.

**SUGERENCIA:** No olvidar indicar en el gráfico las magnitudes de los ejes y sus unidades.

- b) Explicar qué representan cada una de las magnitudes de a) y cuáles son sus unidades, indicando **nombre y símbolo** de las mismas.

- c) Dada la función  $b(t) = B_{\max} \sin(\omega t + \alpha)$ , y suponiendo que  $\alpha > \varphi$ , dibujar en un mismo gráfico  $a(t)$  y  $b(t)$ , indicando qué onda “adelanta” o “atrás” a la otra, justificando la respuesta

**SUGERENCIA:** No olvidar explicar todo explícitamente y con el mayor detalle posible.

### EJERCICIO Nº 02:

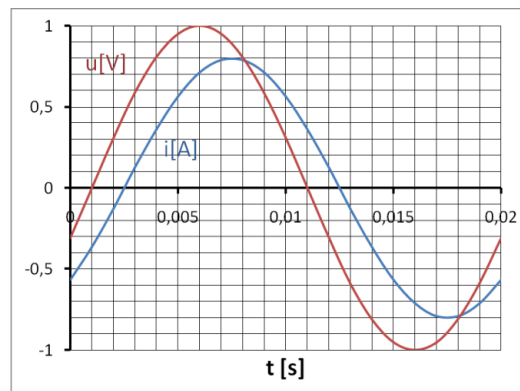
Se tiene un circuito serie formado por una fuente de tensión alterna, un resistor y un elemento reactivo.

Para el mismo se han obtenido las curvas de tensión y corriente indicadas en la figura.

- a) Analizar la gráfica y luego obtener los valores de las amplitudes de cada onda, sus períodos, frecuencias, pulsaciones y ángulos de desfase, explicando cómo se determina cada parámetro.

**SUGERENCIA:** No olvidar asignar símbolos y unidades a cada parámetro obtenido.

- b) A partir de lo obtenido en a) escribir correctamente las expresiones de  $i(t)$  y  $u(t)$ , incluyendo los valores numéricos obtenidos del gráfico, explicando con detalle cómo se obtienen dichas expresiones.



### EJERCICIO Nº 03:

Dado un circuito serie **RLC**, excitado por una fuente de tensión alterna senoidal  $u(t) = U_{\max} \sin(\omega t + \alpha)$ :

- a) Dibujar el circuito, asignar sentido a la corriente y polaridad a las tensiones. A partir de la segunda ley de Kirchhoff, plantear la ecuación diferencial que describe el funcionamiento del circuito.

**SUGERENCIA:** Recordar que la ecuación diferencial es una expresión general del funcionamiento del circuito y es válida independientemente de la forma matemática de la excitación.

- b) ¿Qué forma matemática debe tener la solución particular de la ecuación obtenida en a) de acuerdo a la excitación aplicada? Justificar la respuesta y escribir dicha solución particular.  
c) Para el resultado de b), indicar la composición de cada parámetro de la solución, explicando su significado con relación a los elementos del circuito.  
d) Repetir el ejercicio, suponiendo que el ángulo  $\alpha$  tiene signo opuesto al supuesto inicialmente. Efectuar comentarios.

### EJERCICIO Nº 04:

- a) Explicar qué es un número complejo. Indicar las diferentes formas de expresarlo, cuáles son sus partes y cómo es la nomenclatura utilizada para su uso en el análisis de circuitos. Graficar, sin olvidar identificar los ejes del diagrama.  
b) Explicar qué es un **fasor**. Escribir correctamente la expresión de un fasor genérico, indicando cuáles son sus partes. Gra-



ficar, sin olvidar identificar correctamente todos los parámetros que permiten reconocer dicho operador.

- c) ¿Cuál es la relación entre un fasor y su número complejo correspondiente? ¿En qué casos y por qué es posible utilizar este último?

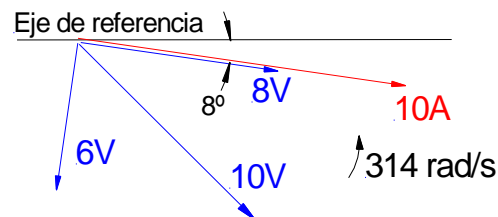
### EJERCICIO N° 05:

- a) Obtener los fasores correspondientes a las funciones  $a(t)$  y  $b(t)$ . Explicar.
- b) ¿Cuál es la ventaja de utilizar fasores en lugar de funciones trigonométricas aplicadas a la resolución de circuitos?
- c) ¿Qué operador debe utilizarse para obtener una función en el tiempo a partir de un fasor? Justificar y mostrar matemáticamente cómo se realiza.

### EJERCICIO N° 06:

El diagrama fasorial de la figura representa la corriente y las tensiones de un circuito serie formado por una fuente de tensión y dos elementos pasivos (uno de ellos reactivo).

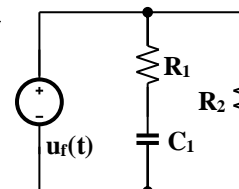
Analizar el fasorial y dibujar el circuito que da lugar a dicho diagrama, justificando la respuesta. Determinar los valores de todos los elementos del circuito, explicando cómo se obtienen.



### EJERCICIO N° 07:

En el circuito de la figura:  $u_f(t) = 50 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$  V;  $R_1 = 3\Omega$ ;  $R_2 = 10\Omega$ ;  $C_1 = 800\mu F$  y  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ .

- a) Representar el circuito utilizando fasores e impedancias mostrando claramente los pasos seguidos. Determinar las expresiones de todas las corrientes en forma fasorial explicando los pasos seguidos y las leyes aplicadas.
- b) Encontrar la  $Z$  equivalente vista por la fuente ( $Z_e = U_f / I_T$ ) aplicando la ley de Ohm y compararla con la asociación en paralelo de impedancias:  $Z_e = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$  y verificar que ambas expresiones son equivalentes. Sacar conclusiones.



Nota:  $i_1(t)$  Corriente por R1 C1 hacia abajo,  $i_2(t)$  Corriente por R2 hacia abajo,  $i_T(t) = i_1(t) + i_2(t)$

RESPUESTA:  $Z_{eq} = 3,66 \angle -36^\circ \Omega$

- c) Hallar las expresiones de  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  e  $i_T(t)$  a partir de los fasores calculados y graficarlas en función del tiempo.

RESPUESTA:  $i_1(t) = 5 \text{ A} \sin(\omega t + 30^\circ)$ ;  $i_2(t) = 10 \text{ A} \sin(\omega t + 83^\circ)$ ;  $i_T(t) = 13,67 \text{ A} \sin(\omega t + 66^\circ)$ .

### EJERCICIO N° 08:

En el circuito de la figura:  $I_f = 2 \text{ A} \angle 20^\circ$  y  $f = 50 \text{ Hz}$ . Los elementos que componen el circuito poseen los siguientes valores,  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $C = 1,6 \text{ mF}$ ,  $L = 6,4 \text{ mH}$ .

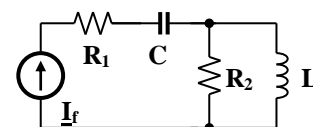
- a) Calcular la impedancia equivalente que ve la fuente.

RESPUESTA:  $Z_{eq} = 1,8 \angle -13^\circ \Omega$

- b) Determinar todas las tensiones y corrientes del circuito en forma fasorial.

RESPUESTA:  $U_{If} = 3,7 \angle 8^\circ \text{ V}$ ,  $U_{R1} = 2 \angle 20^\circ \text{ V}$ ,  $U_C = 3,98 \angle -70^\circ \text{ V}$ ,  $U_{R2} = U_L = 3,6 \angle 83,3^\circ \text{ V}$ ,  $I_{R2} = I_L = 0,9 \angle 83,3^\circ \text{ A}$ ,  $I_L = 1,79 \angle -6,7^\circ \text{ A}$

- c) Dibujar los diagramas fasoriales de tensión y corriente en cada una de las ramas. Verificar con cálculos analíticos.

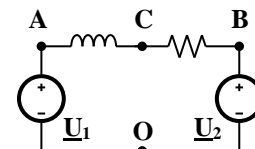


### EJERCICIO N° 09:

Para el circuito de la figura se cumple que  $X_L = R$ .

- a) Usando **exclusivamente** la representación gráfica de los fasores del circuito, determinar la tensión  $U_{CO}$ , para los siguientes valores de las fuentes de tensión.

- $U_1 = 100e^{j120^\circ} \text{ V}$ ;  $U_2 = 100e^{j60^\circ} \text{ V}$ .
- $U_1 = -100e^{j120^\circ} \text{ V}$ ;  $U_2 = -100e^{j60^\circ} \text{ V}$ .



**SUGERENCIA:** No hacer cálculos ni plantear analíticamente las ecuaciones de Kirchhoff. Observar las relaciones de tensión y corriente que se establecen en los elementos pasivos y utilizarlas para poder construir **gráficamente** ecuaciones de la segunda ley de Kirchhoff en forma gráfica.

RESPUESTA:  $U_{CO} = j137 \text{ V}$  (punto 1);  $U_{CO} = -j137 \text{ V}$  (punto 2).

- b) Repetir suponiendo que se reemplaza el inductor por un capacitor de valor  $X_c = R$ .

RESPUESTA:  $U_{CO} = j37 \text{ V}$  (punto 1);  $U_{CO} = -j37 \text{ V}$  (punto 2).

- c) Plantear y resolver en forma analítica y verificar los resultados obtenidos.



### EJERCICIO N° 10:

En el circuito de la figura:  $\underline{U}_C = 4.e^{j30}\Omega \cdot \underline{I}_L$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $X_L = 4\Omega$ .

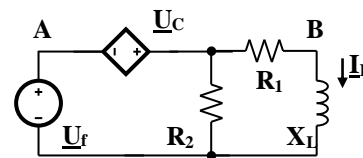
- a) Se desconoce la tensión de la fuente de tensión pero se conoce la tensión entre los puntos A y B:  $\underline{U}_{AB} = 20.e^{j90}V$ . Calcular  $\underline{U}_f$ .

RESPUESTA:  $\underline{U}_f = 20.e^{j30}V$

- b) Determinar todas las tensiones y corrientes del circuito en forma fasorial.

RESPUESTA:  $\underline{U}_C = 34,4.e^{j120}V$ ,  $\underline{U}_{R1} = 17,2.e^{j150}V$ ,  $\underline{U}_{R2} = 38,7.e^{j87}V$ ,  $\underline{U}_L = 34,6.e^{j60}V$ ,  $\underline{I}_f = 15,6.e^{j116}A$ ,  $\underline{I}_{R2} = 9,7.e^{j87}A$ ,  $\underline{I}_L = 8,6.e^{j150}A$

- c) Dibujar los diagramas fasoriales de tensión y corriente en cada una en las ramas. Verificar con cálculos analíticos.



### EJERCICIO N° 11

En el siguiente circuito:  $G = 0,25S$ ;  $X_C = 2\Omega$ ;  $B_L = 0,333S$ ;  $\underline{I}_f = 2A$  y  $\underline{U}_f = 10V/-45^\circ$ .

- a) Mediante el método de análisis de nodo calcular  $\underline{U}_C$  e  $\underline{I}_L$ .

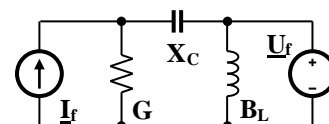
RESPUESTA:  $\underline{U}_C = 3,2/20^\circ V$ ,  $\underline{I}_L = 3,3/-135^\circ A$ .

- b) Dibujar el diagrama fasorial resultante y determinar gráficamente a partir del mismo (sin hacer cálculos) las corrientes y tensiones faltantes.

RESPUESTA: según las aproximaciones de acuerdo a las escalas adoptadas del diagrama, resulta  $\underline{U}_{If} \approx 12/-30^\circ V$ ,  $\underline{I}_G \approx 3/-30^\circ A$ ,  $\underline{I}_C \approx 1,7/110^\circ A$ ,  $\underline{I}_{Uf} \approx 4,3/114^\circ A$ . Los valores obtenidos por cálculo son  $\underline{U}_{If} = 11,6/-31^\circ V$ ,  $\underline{I}_G = 2,9/-31^\circ A$ ,  $\underline{I}_C = 1,6/110^\circ A$ ,  $\underline{I}_{Uf} = 4,2/-116^\circ A$ .

- c) Obtener el circuito equivalente de Thevenin en bornes del capacitor.

RESPUESTA:  $\underline{U}_{Th} = 3,2/20^\circ V$ ,  $\underline{Z}_{Th} = 1,8/-63^\circ \Omega$



### EJERCICIOS INTEGRADORES

**Sugerencia:** Resolver todos los ejercicios siguiendo las pautas establecidas para los ejercicios anteriores: No dar por hechos u obvios suposiciones o afirmaciones, nada debe darse por implícito. Plantear, explicar, justificar, respetar la nomenclatura y simbología. En este caso, el hábito hace al monje.

### EJERCICIO N° 12

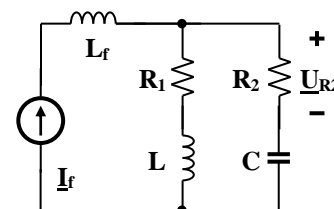
En el circuito de la figura se conoce el módulo de la tensión ( $\underline{U}_{R2}$ ). Los datos son los siguientes:  $R_1 = 3\Omega$ ;  $R_2 = 5\Omega$ ;  $\underline{Z}_L = j4\Omega$ ;  $\underline{Z}_C = -j4,3\Omega$ ;  $|\underline{U}_{R2}| = 50V$ ;  $\underline{Z}_{Lf} = j5\Omega$ .

- a) Determinar el fasor de la corriente de la fuente  $\underline{I}_f$  en forma gráfica exclusivamente.  
b) Determinar el fasor de la corriente de la fuente  $\underline{I}_f$  en forma analítica y verificar resultados.

RESPUESTA:  $\underline{I}_f = 11/-56^\circ A$

- c) Realizar el diagrama fasorial de todas las tensiones y corrientes del circuito.

RESPUESTA:  $\underline{U}_{If} = 71,5/-10^\circ A$ ,  $\underline{U}_{Lf} = 55/34^\circ V$ ,  $\underline{U}_L = 40/-23^\circ V$ ,  $\underline{U}_{R1} = 30/-113^\circ V$ ,  $\underline{U}_C = 30/-90^\circ V$ ,  $\underline{U}_{R2} = 50/0^\circ V$ ,  $\underline{I}_1 = 10/-113^\circ A$ ,  $\underline{I}_2 = 10/0^\circ A$ . Corrientes de arriba hacia abajo y tensiones con el positivo arriba o a la izquierda.



### EJERCICIO N° 13

En el circuito de la figura:  $\underline{U}_f = 311V/0^\circ$ ,  $R = 30\Omega$ ,  $X_C = 40\Omega$ ,  $X_L = 30\Omega$ . Se desconoce el valor de la admitancia  $\underline{Y}$ .

- a) Determinar el valor de la admitancia  $\underline{Y}$  (módulo y ángulo) que logra un desfase nulo entre la tensión de la fuente y su corriente. Explicar a qué elemento corresponde y que reactancia tiene.

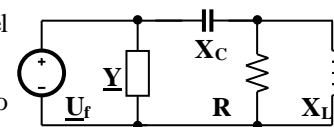
RESPUESTA: Es un inductor de reactancia  $34,3\Omega$ .

- b) Calcular el valor de la impedancia equivalente y observar su valor. Efectuar comentarios.

RESPUESTA:  $\underline{Z}_{eq} = 57,1\Omega$ . Es resistiva, lo que logra un desfase nulo entre la corriente y la tensión de la fuente.

- c) Calcular la tensión en el capacitor. Comparar su valor con la tensión de la fuente. Efectuar comentarios.

RESPUESTA:  $\underline{U}_C = 426V/149^\circ$  (positivo a la izquierda), la tensión es mayor que la tensión de la fuente.





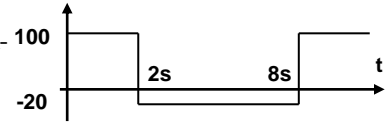
## EJERCICIOS RESUELTOS

**Aclaración:** Debe observarse que en la resolución de estos ejercicios se efectúan planteos, explicaciones, justificaciones, y nada se da por sobreentendido.

### EJERCICIO N° 14

Para la onda de la figura:

- Determinar los valores medio y medio cuadrático de forma genérica. Luego, reemplazar por valores para obtener un resultado numérico.
- Comparar los resultados obtenidos y efectuar comentarios.



**Resolución:** Para realizar los cálculos se define matemáticamente la forma de onda por tramos:

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 < t < T_1 \\ B & T_1 < t < T_2 \end{cases} \quad \text{Dónde: } \begin{cases} A = 100 \\ B = -20 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} T_1 = 2s \\ T_2 = 8s \end{cases}$$

- Valor medio:

$$f_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T_1} A dt + \int_{T_1}^{T_2} B dt \right] = \frac{1}{T} \left[ A \cdot t \Big|_0^{T_1} + B \cdot t \Big|_{T_1}^{T_2} \right] = \frac{1}{T} \left[ A \cdot T_1 + B \cdot (T_2 - T_1) \right] = \frac{1}{8} [100 \cdot 2 - 20 \cdot (8 - 2)] = 10$$

Debe observarse que este resultado corresponde al área neta de la función en un período.

$$\text{b) Valor eficaz: } f_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \left[ \int_0^{T_1} A^2 dt + \int_{T_1}^{T_2} B^2 dt \right]} = \sqrt{\frac{1}{T} \left[ A^2 \cdot t \Big|_0^{T_1} + B^2 \cdot t \Big|_{T_1}^{T_2} \right]} = \sqrt{\frac{1}{T} \left[ A^2 \cdot T_1 + B^2 \cdot (T_2 - T_1) \right]}$$

$$\text{Reemplazando por valores: } f_{ef} = \sqrt{\frac{1}{8} [100^2 \cdot 2 + 20^2 \cdot (8 - 2)]} = 52,9$$

En este caso el valor eficaz o *valor medio cuadrático* resulta mayor al simple valor medio, dado que ambas áreas, positiva y negativa, hacen un aporte al resultado final con el mismo signo.

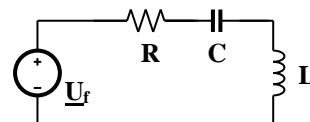
### EJERCICIO N° 15:

Un circuito serie **RLC** alimentado con una fuente de tensión  $\underline{U}_f$  y los siguientes datos  $f = 50 \text{ Hz}$ ;  $\underline{U}_f = 155 \text{ V } / 0^\circ$ ;  $R = 10 \Omega$ ,  $X_L = 7 \Omega$  y  $X_C = 2 \Omega$ .

- Determinar la impedancia equivalente del circuito.
- Calcular la corriente y las tensiones en cada elemento.
- Dibujar el diagrama fasorial completo y el triángulo de impedancias.

**Resolución**

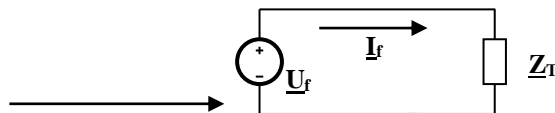
- El circuito que representa la situación planteada es el siguiente:



La mejor manera de definir la impedancia equivalente de un circuito es mediante la ley de Ohm en forma generalizada, con lo cual se puede plantear:

$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{U}_f}{\underline{I}_f} = R + j(X_L - X_C)$$

Que corresponde al circuito generalizado siguiente:



Luego, de la ecuación anterior, la impedancia equivalente se obtiene asociando los elementos pasivos que conforman el circuito real:  $\underline{Z}_T = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C) = 10 \Omega + j5 \Omega$ ,  $|\underline{Z}_T| = |R + jX_L - jX_C| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 11,18 \Omega$

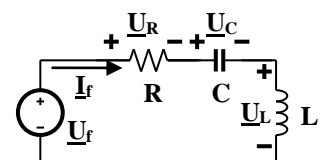
$$\arg(\underline{Z}_T) = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \arctg\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right) = \arctg\left(\frac{5}{10}\right) \cong 26,565^\circ \cong 27^\circ$$

- Aplicando nuevamente la ley de Ohm:

$$\underline{I}_f = \frac{\underline{U}_f}{\underline{Z}_T} = \frac{\underline{U}_f}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{\underline{U}_f}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \cdot e^{j \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)}} = \frac{|\underline{U}_f|}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cdot e^{j\left[\phi_f - \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)\right]} =$$

$$= \frac{155}{\sqrt{10^2 + 5^2}} \cdot e^{j[0 - 27^\circ]} \cong 13,86 \cdot e^{-j27^\circ} \text{ A}$$

Las tensiones se calculan aplicando la ley de Ohm, pero antes se identifican en el circuito:





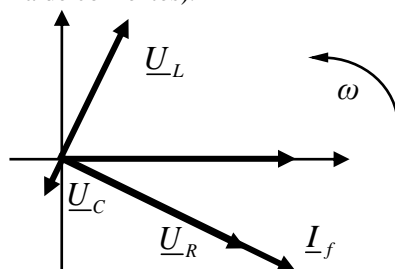
$$\underline{U}_R = \underline{I}_f \cdot \underline{Z}_R = \underline{I}_f \cdot R = \frac{\underline{U}_f}{R + j(X_L - X_C)} \cdot R = 13,86 \cdot e^{-j27^\circ} \text{ A} \cdot 10 \Omega = 138,6 \cdot e^{-j27^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I}_f \cdot \underline{Z}_C = \underline{I}_f \cdot (-jX_C) = \frac{-jX_C \cdot \underline{U}_f}{R + j(X_L - X_C)} = 13,86 \cdot e^{-j27^\circ} \text{ A} \cdot (-j2 \Omega) = 13,86 e^{-j27^\circ} \text{ A} \cdot 2 e^{-j90^\circ} \Omega = 27,72 \cdot e^{-j116^\circ} \text{ V}$$

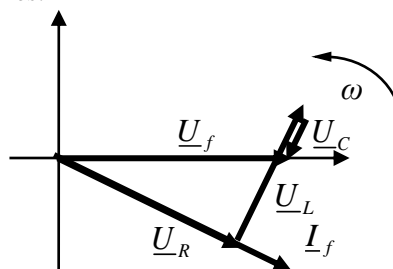
$$\underline{U}_L = \underline{I}_f \cdot \underline{Z}_L = \underline{I}_f \cdot (jX_L) = \frac{jX_L \cdot \underline{U}_f}{R + j(X_L - X_C)} = 13,86 \cdot e^{-j27^\circ} \text{ A} \cdot (j7 \Omega) = 13,86 \cdot e^{-j27^\circ} \text{ A} \cdot (7 \cdot e^{j90^\circ} \Omega) = 97,02 \cdot e^{j64^\circ} \text{ V}$$

c) El diagrama fasorial completo comprende una corriente y cuatro tensiones.

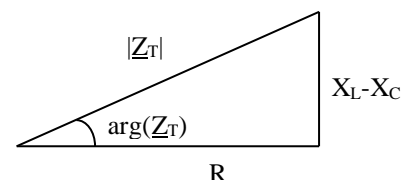
Se puede realizar uniendo las colas de los fasores (útil en el caso de suma de corrientes):



O bien realizando la suma gráfica de las tensiones encadenando los fasores:



El triángulo de impedancias resulta:



Se puede observar que el caso graficado corresponde a una carga con características inductivas. Si la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva cambian el diagrama fasorial y el triángulo de impedancias.

En los diagramas fasoriales en general, no es necesario dibujar los ejes, sólo debe tenerse en cuenta que los ángulos se miden tomando como referencia un eje horizontal y en sentido anti horario, además de establecer una escala para las corrientes y otra para las tensiones.

## COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

En el desarrollo de este TAP han resultado importantes los siguientes aspectos:

- El dominio de la utilización de las señales senoidales.
- El valor máximo, medio y eficaz de las señales senoidales.
- La utilización del fasor para representar funciones armónicas y así simplificar los cálculos en circuitos con tensiones y corrientes alternas senoidales.
- La necesidad del álgebra compleja y el cambio de  $i$  por  $j$ .
- La conversión de las funciones alternas senoidales en sus correspondientes fasores/números complejos y viceversa.
- La utilización desde el punto de vista gráfico de los fasores (diagrama fasorial) para resolver e interpretar el funcionamiento de circuitos en CA.
- Lectura de los instrumentos en CA.
- Los triángulos de impedancia.
- La verificación de la validez de los métodos de resolución aplicados a circuitos cuyas señales no sean continua solamente.
- La dependencia de la reactancia y susceptancia de la pulsación  $\omega$ .