



*Se estudia el comportamiento de circuitos con señales **periódicas no naturales**.*

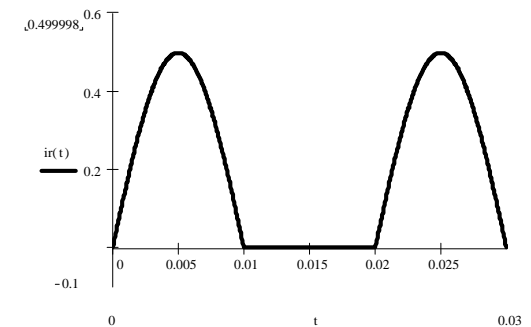
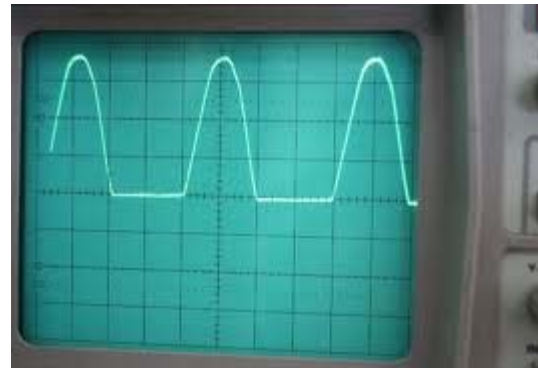
*Estas señales **periódicas no naturales** pueden ser generadas por las fuentes o por alinealidades de los elementos pasivos.*

SEÑALES POLIARMÓNICAS

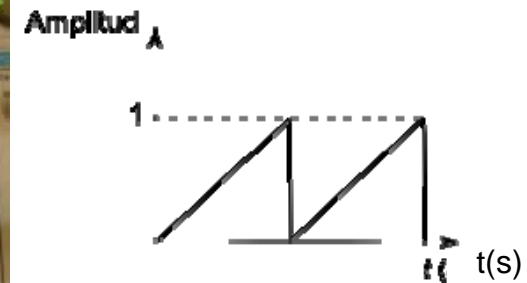
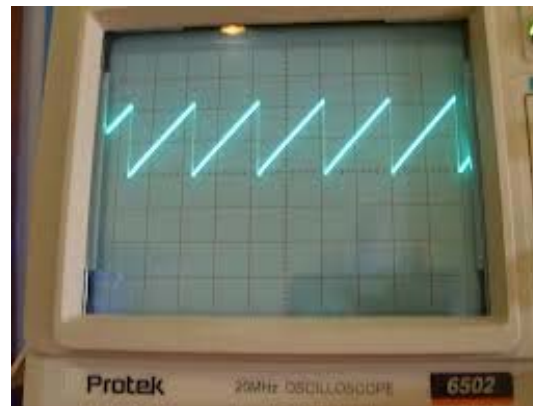
Son señales *periódicas no naturales*, que se encuentran con frecuencia en electrónica y con cada vez mayor asiduidad en las redes, debido a la influencia que los circuitos electrónicos tienen en las mismas

Algunos ejemplos típicos son

Rectificada media onda



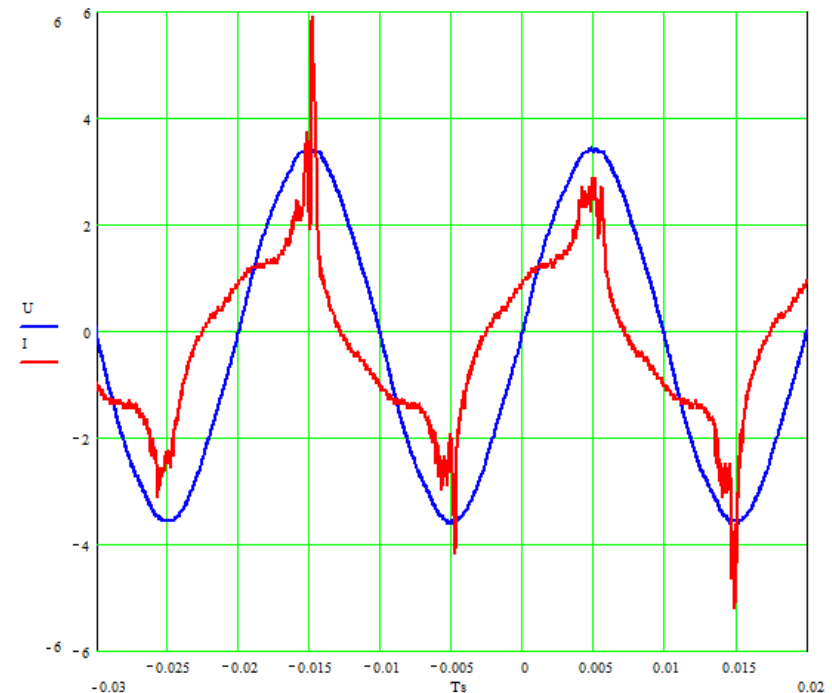
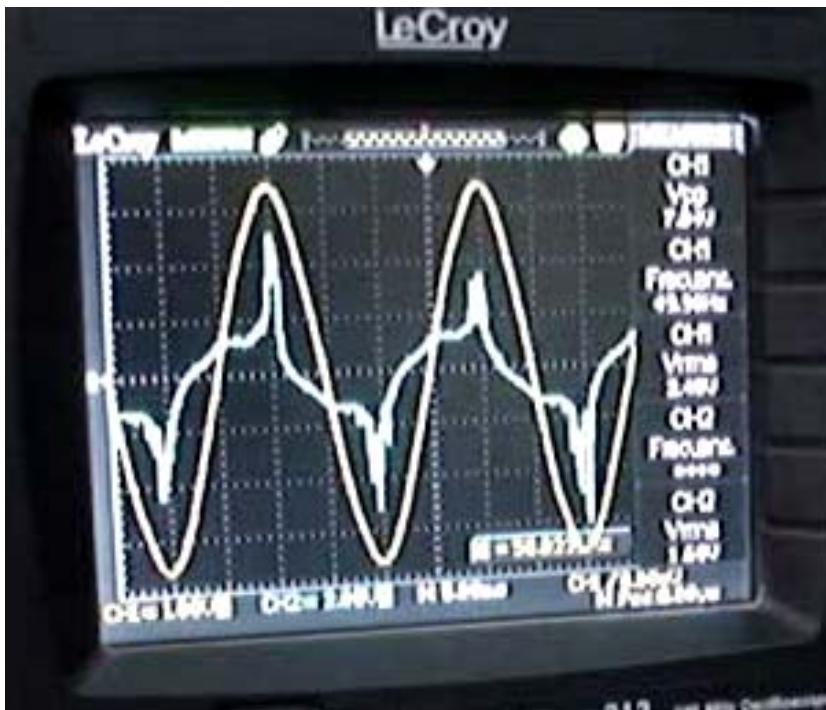
Diente de sierra





SEÑALES POLIARMÓNICAS

Señal periódica no senoidal arbitraria debida a carga no lineal



¿Cómo se estudian los circuitos que presentan este tipo de señales?

SERIE DE FOURIER

Si la señal es periódica de periodo T se cumple que



$$F(t) = f(t+T)$$

Una **serie de Fourier** es una suma de infinitos términos senos y/o cosenos de amplitudes adecuadas y cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia de la onda original, que se suele denominar **frecuencia fundamental**, mediante la cual es posible representar funciones periódicas no senoidales

$$\begin{aligned} u(t) &= A_0 + A_1 \text{sen}(\omega_1 t) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t) + A_3 \text{sen}(\omega_3 t) + \dots \\ &\quad \dots + B_1 \cos(\omega_1 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) + B_3 \cos(\omega_3 t) + \dots \\ &= U_0 + U_1 \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) + U_2 \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2) + U_3 \text{sen}(\omega_3 t + \phi_3) + \dots \end{aligned}$$

con $\omega_2 = 2\omega_1$; $\omega_3 = 3\omega_1$; etc.

$$U_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}; \phi_i = \arctg(B_i/A_i)$$

¿Cómo se calculan los coeficientes de la serie a partir de la expresión analítica de la función original?





SERIE DE FOURIER

*Para que exista una representación por serie de Fourier la función en estudio debe cumplir las **condiciones de Dirichlet**:*

- *La función debe ser periódica*
- *El valor medio en el período debe ser finito*
- *Si la función es discontinua, el número de discontinuidades en el período debe ser finito*
- *Debe tener un número finito de máximos positivos y negativos en el período*

SERIE DE FOURIER

Cumplidas las condiciones anteriores, se puede demostrar que el cálculo de los coeficientes de la serie se puede realizar con las siguientes expresiones

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad \rightarrow \quad \text{Observar que corresponde al valor medio de la función original}$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \operatorname{sen}(n\omega t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt$$



SERIE DE FOURIER

Se puede simplificar el cálculo y la expresión de la serie observando las simetrías de la función original; algunos ejemplos:

Función impar (simetría respecto al origen)

*La serie que representa a este tipo de funciones sólo contienen términos **seno***

$$f(t) = -f(-t)$$

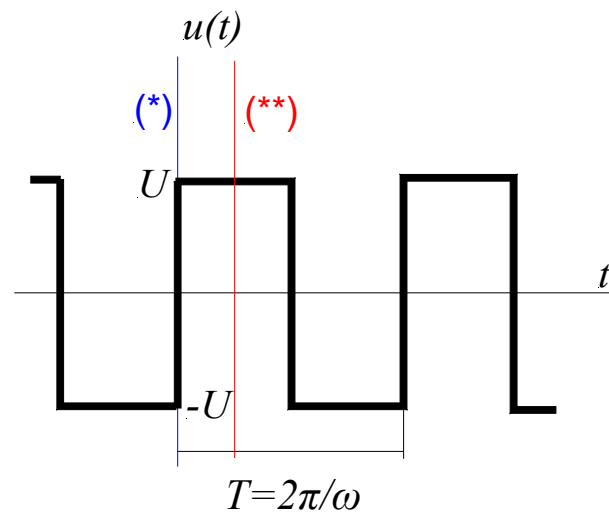
Función par (simetría respecto al eje de ordenadas):

*La serie que representa a este tipo de funciones sólo contienen términos **coseno***

$$f(t) = f(-t)$$

SERIE DE FOURIER

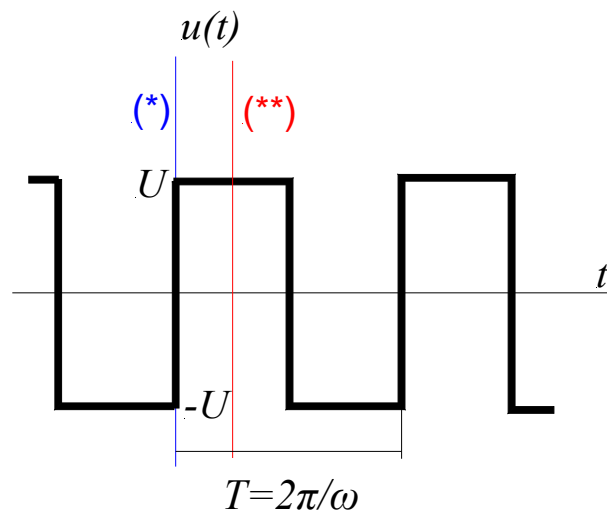
Ejercicio: Encontrar la serie de Fourier que representa a la siguiente forma de onda:



- Tips:**
- El valor medio de la señal es **nulo** $\rightarrow A_0 = 0$
 - De acuerdo a dónde se ubique el eje de ordenadas, la simetría puede ser **par (**)** o **impar (*)**, \rightarrow serie de **cosenos** o de **senos**

SERIE DE FOURIER

Ejercicio: Encontrar la serie de Fourier que representa a la siguiente forma de onda:

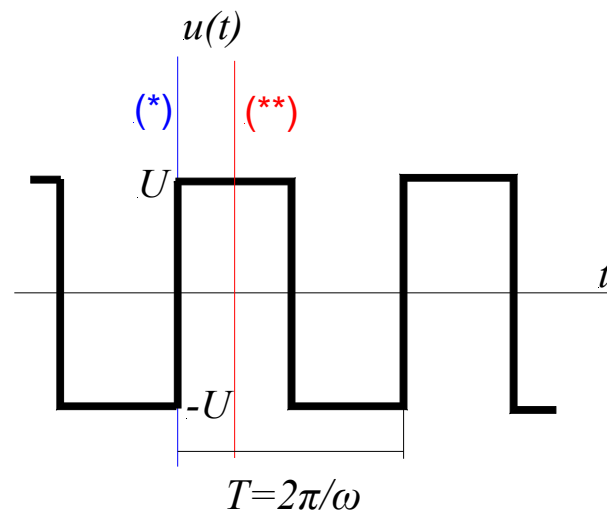


Si se supone el eje en (*), se deduce que los $B_n = 0$ (sólo hay términos del seno) y el cálculo de los A_n resultan

$$A_n = \frac{2U}{\pi \cdot n} (1 - \cos n\pi) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A_n &= \frac{4U}{\pi \cdot n} && \text{si } n \text{ es impar} \\ A_n &= 0 && \text{si } n \text{ es par} \end{aligned}$$

SERIE DE FOURIER

Ejercicio: Encontrar la serie de Fourier que representa a la siguiente forma de onda:



Y la serie se escribe

$$\Rightarrow u(t) = \frac{4U}{\pi} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{4U}{3\pi} \operatorname{sen}(3\omega t) + \frac{4U}{5\pi} \operatorname{sen}(5\omega t) + \dots$$

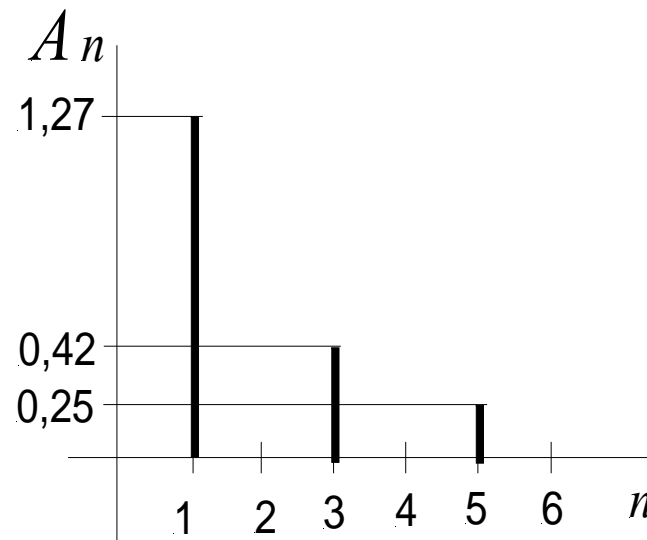
Resolver para el caso en que el eje se ubique en (**)

SERIE DE FOURIER

ESPECTRO DE FRECUENCIAS O DE LÍNEAS

Se grafican las amplitudes (en módulo) de los coeficientes en función de los armónicos

*Para el ejercicio anterior
(suponiendo $U=1$)*

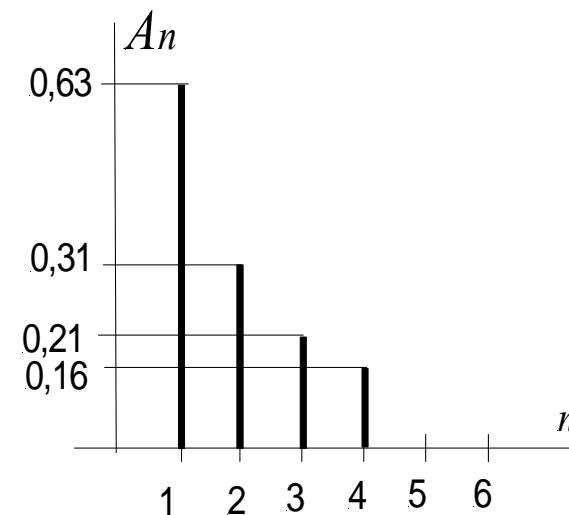
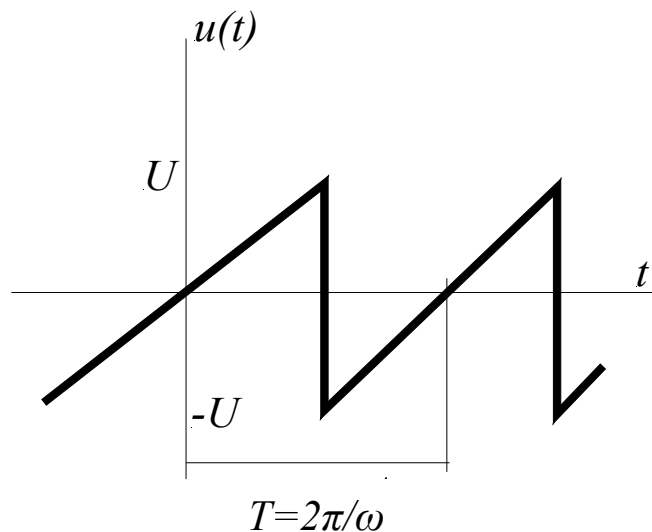


SERIE DE FOURIER

ESPECTRO DE FRECUENCIAS O DE LÍNEAS

Se grafican las amplitudes (en módulo) de los coeficientes en función de los armónicos

*Para otro caso
(suponiendo $U=1$)*

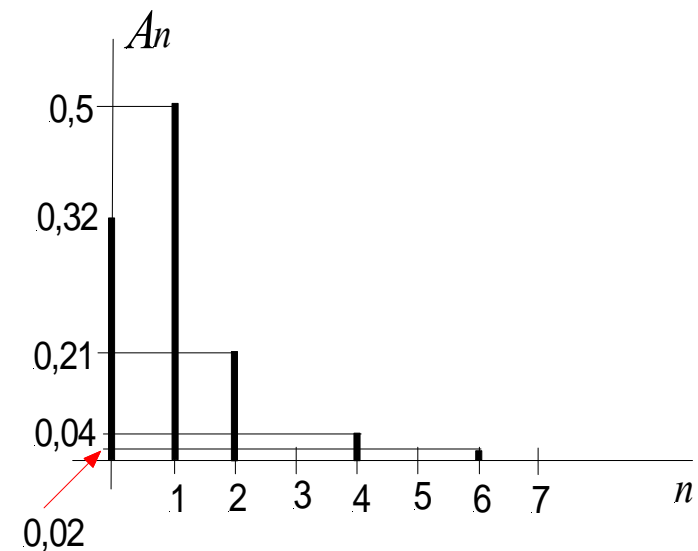
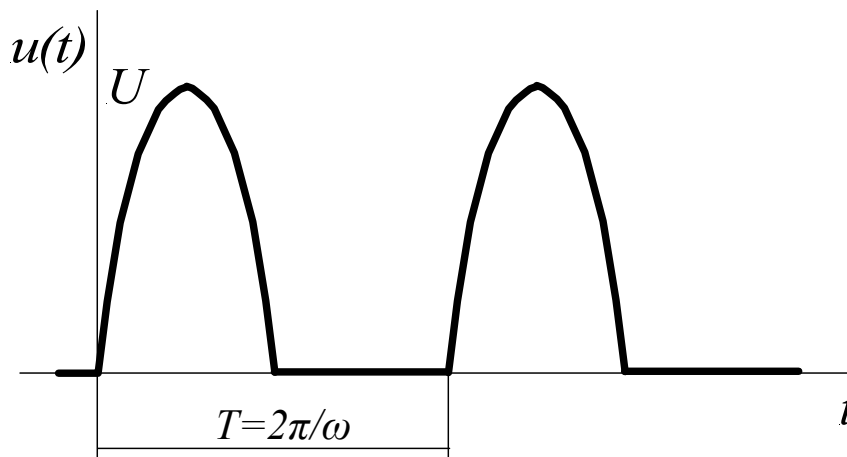


SERIE DE FOURIER

ESPECTRO DE FRECUENCIAS O DE LÍNEAS

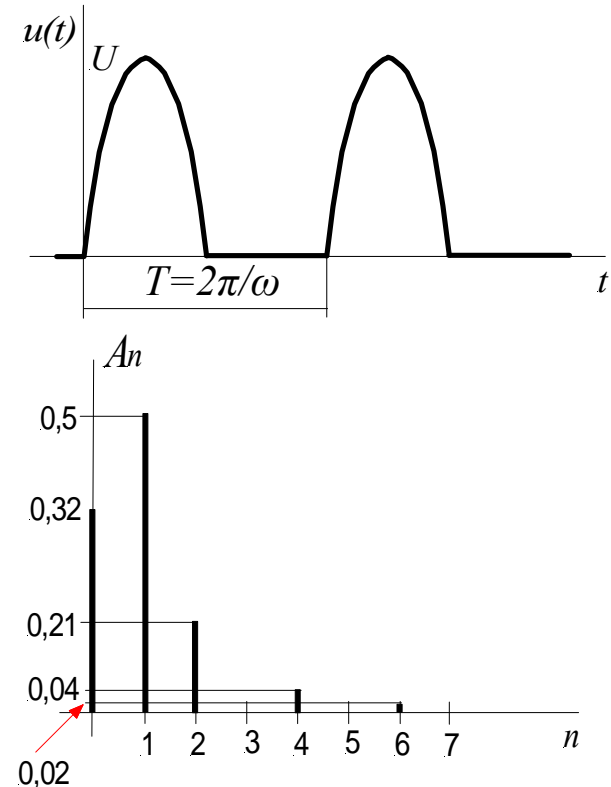
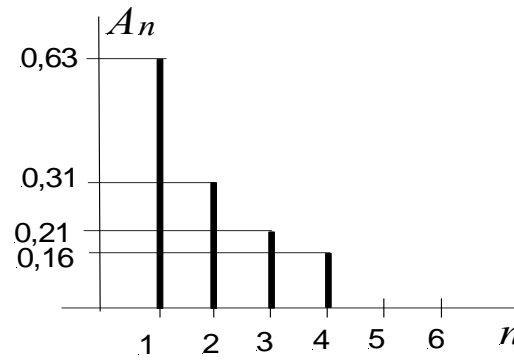
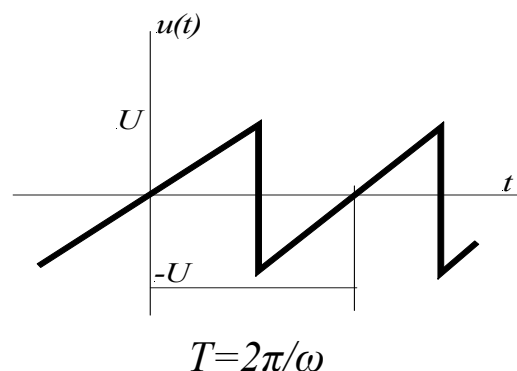
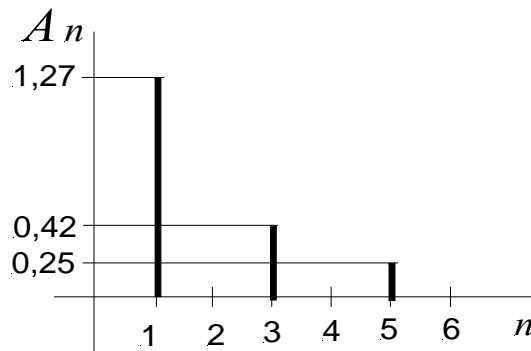
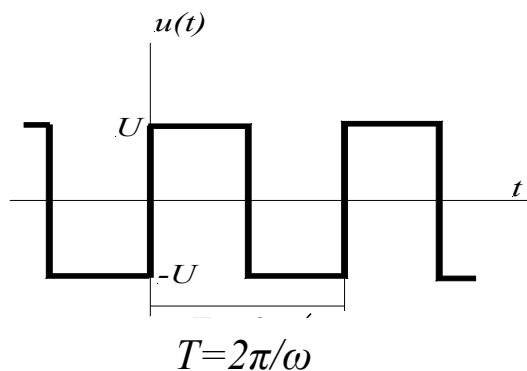
Se grafican las amplitudes (en módulo) de los coeficientes en función de los armónicos

*Un caso más
(suponiendo $U=1$)*



SERIE DE FOURIER

ESPECTRO DE FRECUENCIAS O DE LÍNEAS



Si las funciones tienen grandes discontinuidades las amplitudes del espectro decrecen lentamente (se necesitan muchos términos de la serie); si el espectro disminuye rápidamente significa que la serie se puede representar con pocos términos

SEÑALES POLIARMÓNICAS


VALOR EFICAZ

Si $u(t)$ es una poliarmónica

$$u(t) = U_0 + U_1 \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) + U_2 \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2) + U_3 \text{sen}(\omega_3 t + \phi_3) + \dots$$

La expresión general del valor eficaz de $u(t)$

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$$


$$U_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(U_0 + U_1 \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) + U_2 \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2) + U_3 \text{sen}(\omega_3 t + \phi_3) + \dots \right)^2 dt$$

Reordenando la expresión anterior



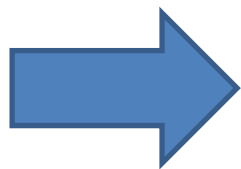
SEÑALES POLIARMÓNICAS

VALOR EFICAZ

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T U_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi_1) dt + \frac{1}{T} \int_0^T U_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \phi_2) dt + \frac{1}{T} \int_0^T U_3^2 \sin^2(\omega_3 t + \phi_3) dt + \dots$$

pues los productos de subíndices diferentes son nulos

Se puede observar que cada término resulta en el valor eficaz del correspondiente armónico, y que el valor eficaz del término que representa el valor medio es el mismo valor medio



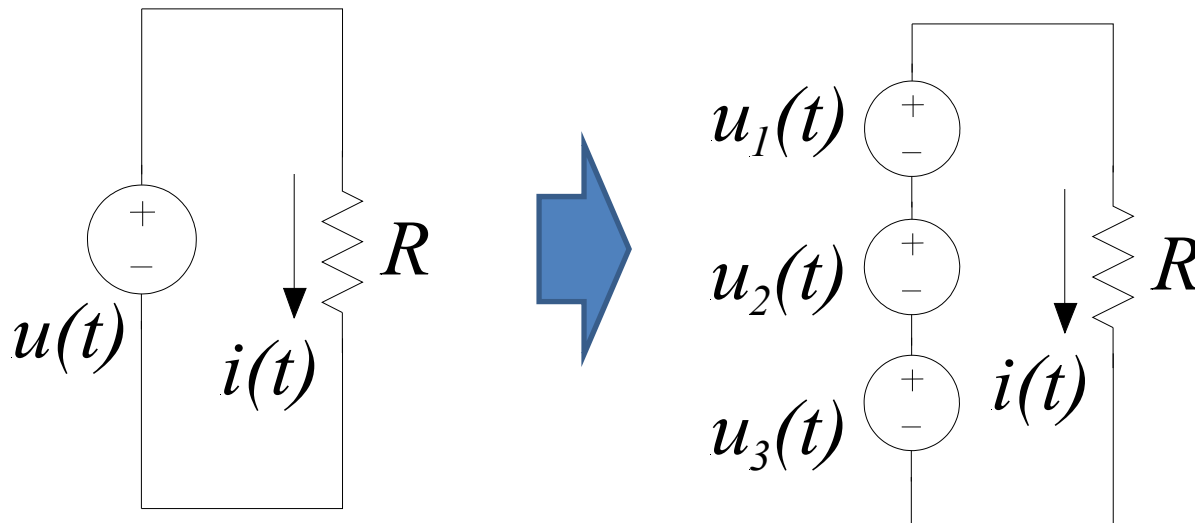
$$U_{ef}^2 = U_{0ef}^2 + U_{1ef}^2 + U_{2ef}^2 + U_{3ef}^2 + \dots$$

SEÑALES POLIARMÓNICAS

APLICACIÓN

Una señal de tensión poliarmónica $u(t) = 10\text{sen}(50t) + 10\text{sen}(100t) + 10\text{sen}(150t)$ V se aplica a un resistor $R = 1\Omega$.

Mediante la aplicación del **principio de superposición** determinar y graficar cada componente de corriente resultante, así como la corriente total.

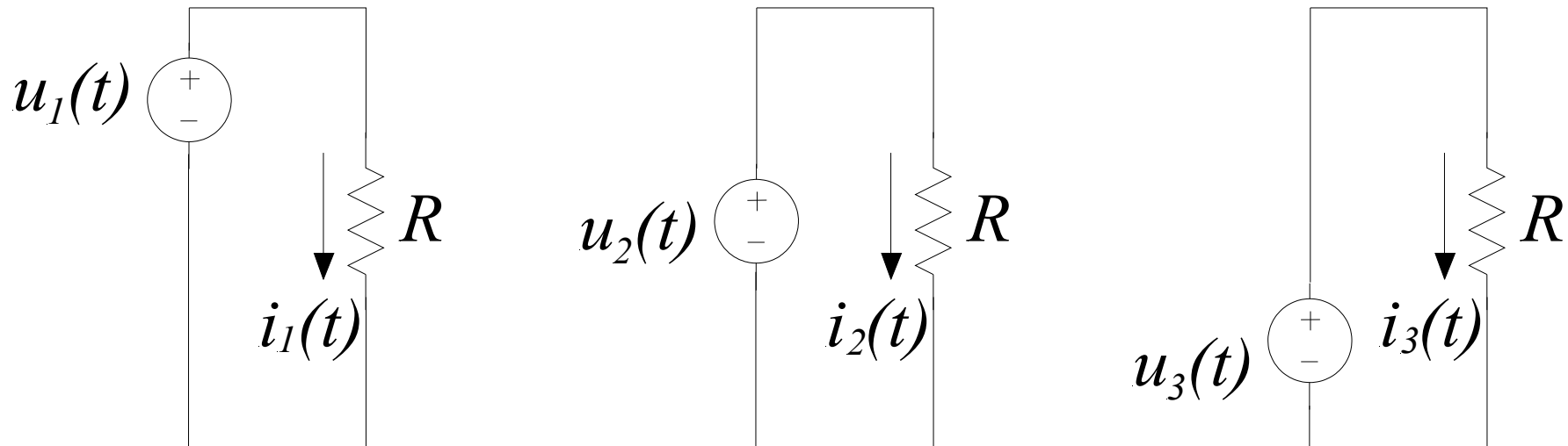


Pues
 $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$

SEÑALES POLIARMÓNICAS

APLICACIÓN

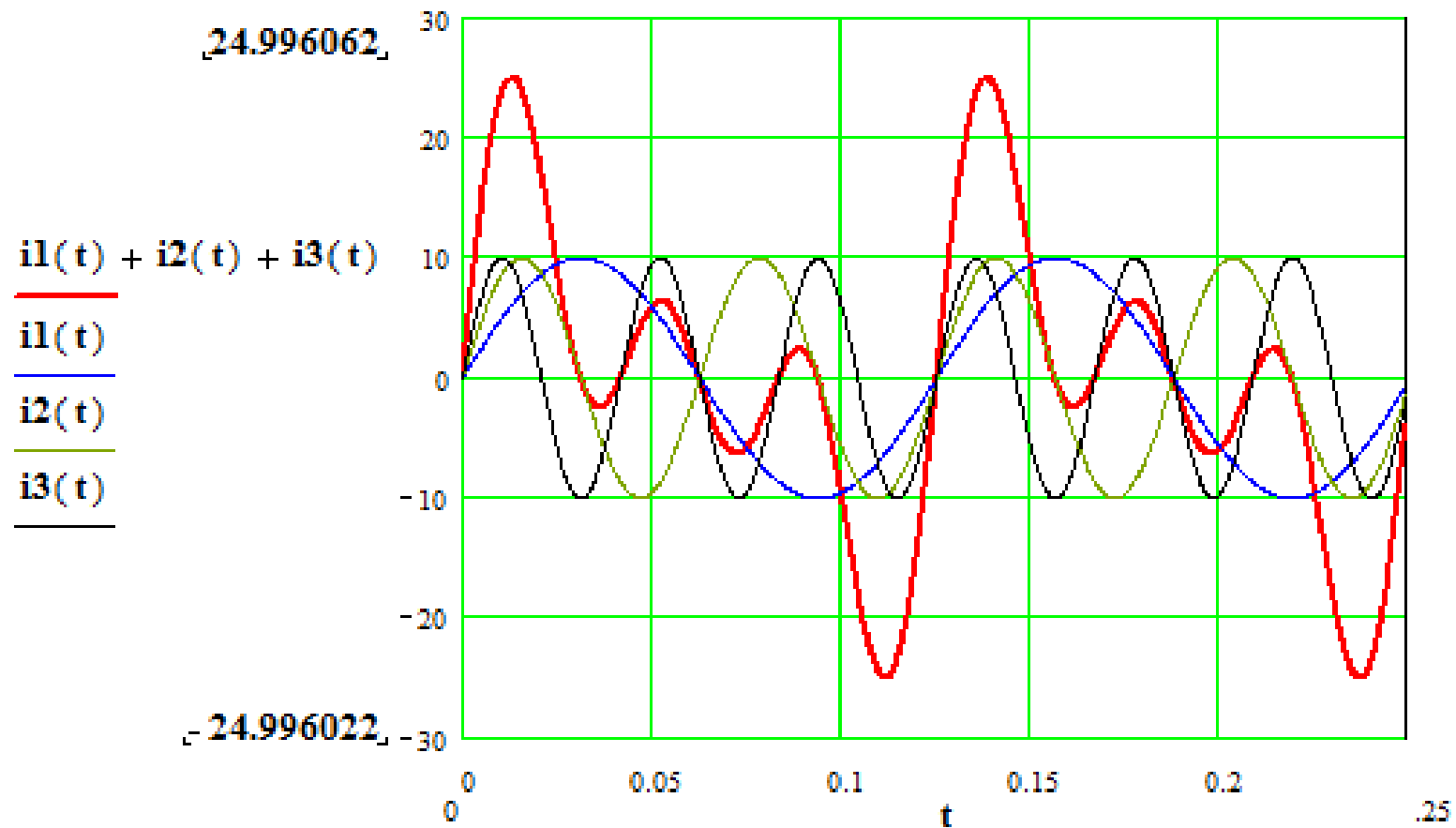
SOLUCIÓN → aplicación del **principio de superposición**



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 10\text{sen}(50t) + 10\text{sen}(100t) + 10\text{sen}(150t) \text{ A}$$

SEÑALES POLIARMÓNICAS

APLICACIÓN



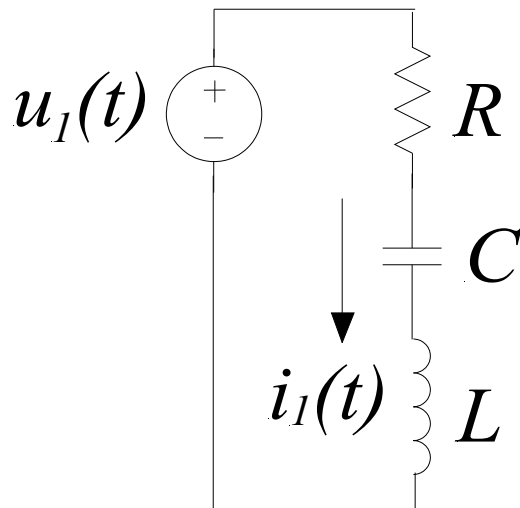
SEÑALES POLIARMÓNICAS

APLICACIÓN

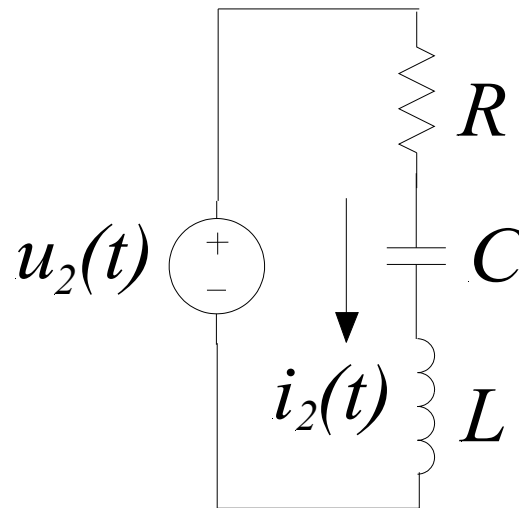
Se intercala ahora una impedancia serie LC , con $L = 100 \text{ mH}$ y $C = 1 \text{ mF}$ ¿qué tipo de circuito resulta? Repetir lo realizado en el caso anterior.

Comparar los resultados y efectuar comentarios.

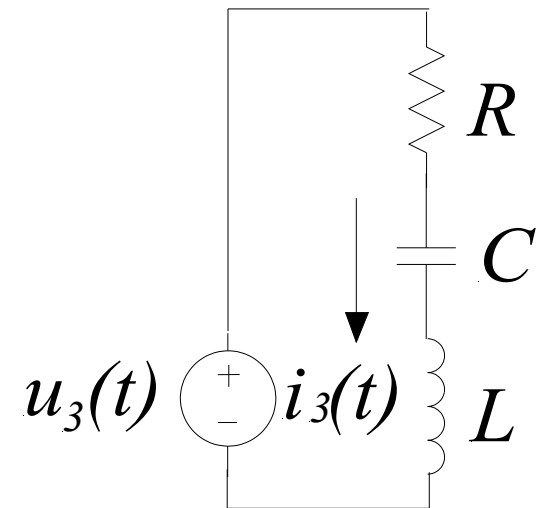
SOLUCIÓN → aplicación del **principio de superposición**



$$i_1(t) = 0,67 \text{sen}(50t + 1,5) \text{ A}$$



$$i_2(t) = 10 \text{sen}(100t) \text{ A}$$



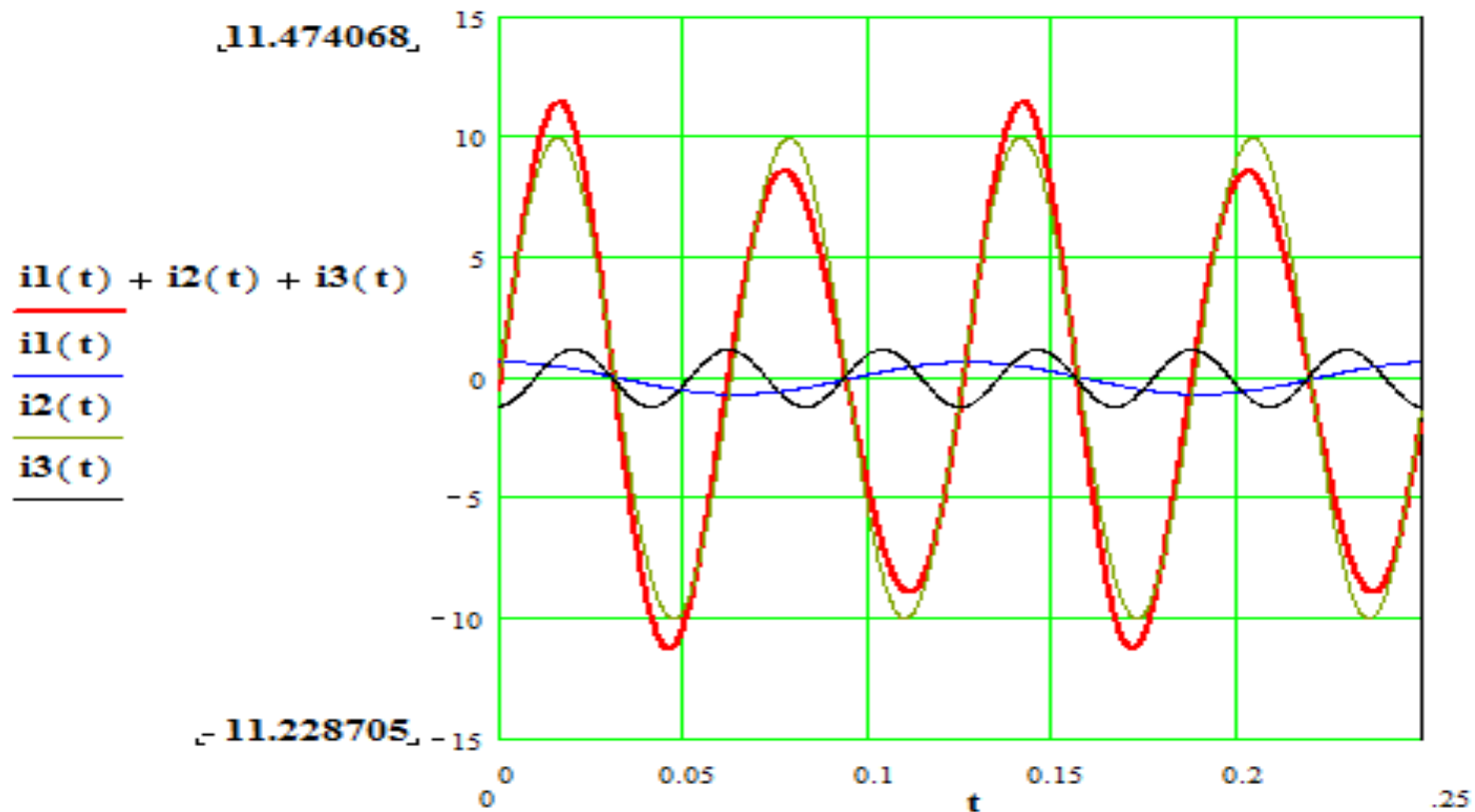
$$i_3(t) = 1,19 \text{sen}(150t - 1,45) \text{ A}$$

SEÑALES POLIARMÓNICAS

APLICACIÓN

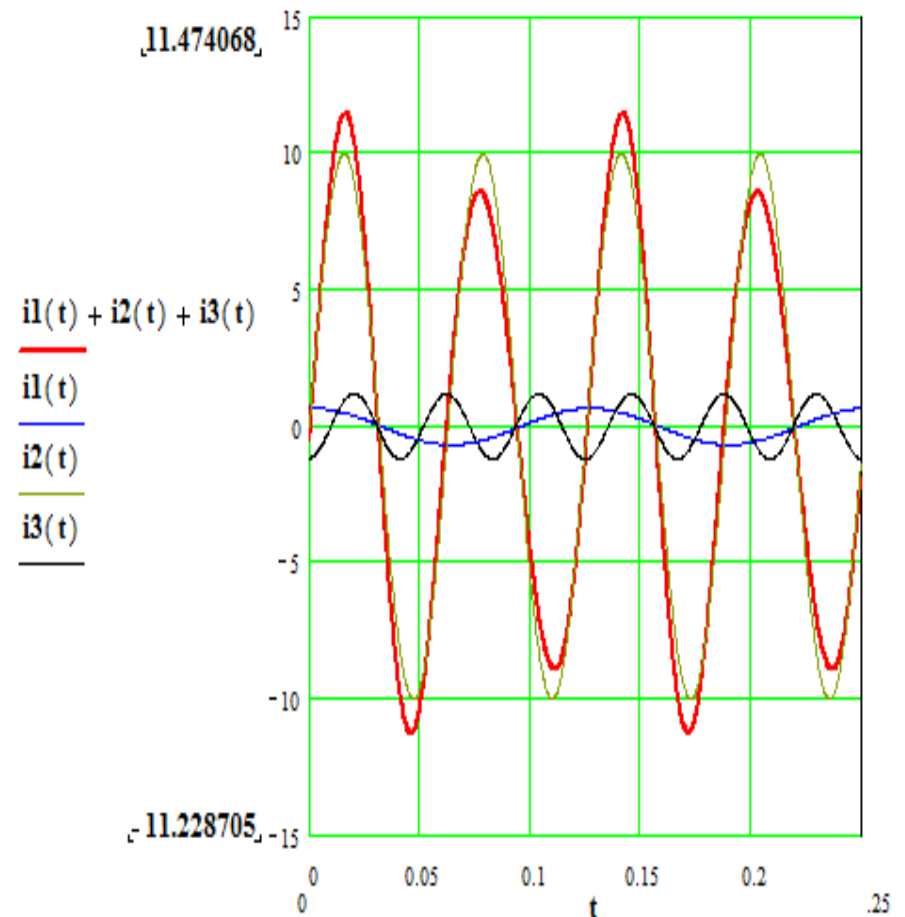
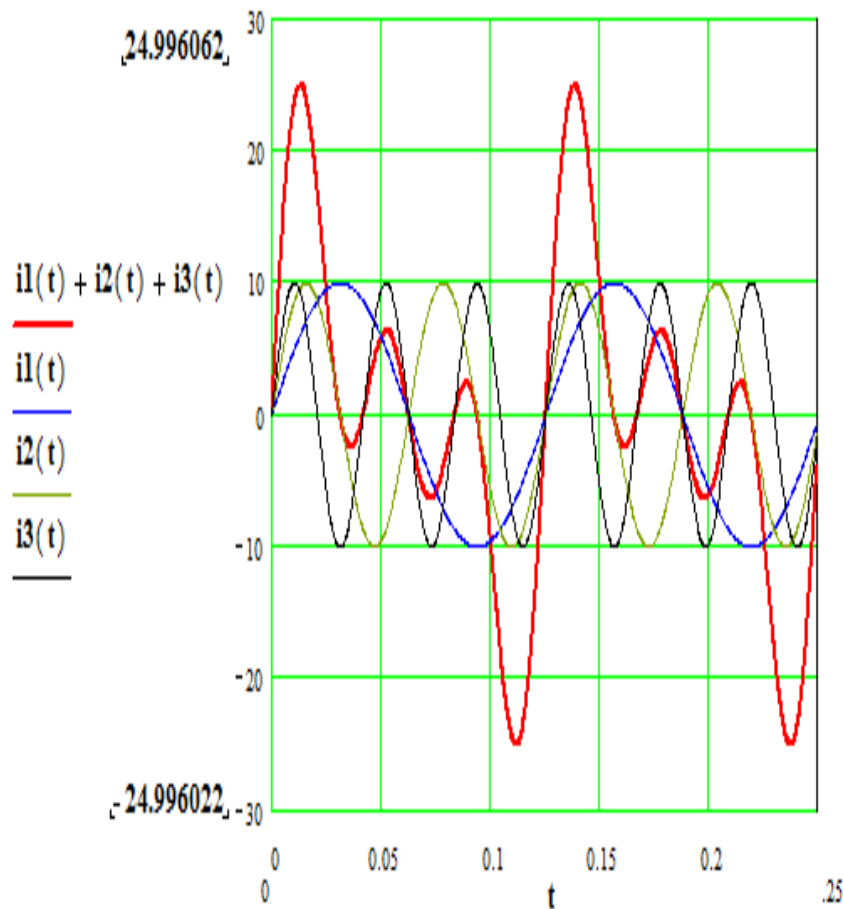


$$i(t) = 0,67 \sin(50t + 1,5) + 10 \sin(100t) + 1,19 \sin(150t - 1,45) \text{ A}$$



SEÑALES POLIARMÓNICAS

APLICACIÓN





SEÑALES POLIARMÓNICAS

BIBLIOGRAFÍA

- * *Circuitos Eléctricos. Parte 2* – Morcelle-Deorsola
- * *Circuitos Eléctricos* - Spinadel
- * *Principios de Electrotecnia, Tomo 2* - Netushil-Strajov
- * *Apuntes de Electrotecnia General* - Faradje-Kahn
- * *Circuitos en Ingeniería Eléctrica* - Skilling
- * *Circuitos Eléctricos* - Dorf
- * *Análisis Básico de Circuitos Eléctricos* - Johnson-Hilburn-Jonhson