Unidad 4

Series de Potencias

3º CLASE

Cintia Perrone – PS 2023

4.6 Serie de Laurent

Si $f(z)$ analítica en z_0 se la puede desarrollar en serie de Taylor en algún entorno de z_0. Si $f(z)$ no es analítica en z_0 pero lo es en un anillo centrado en z_0, se la puede representar mediante una serie de potencias positivas y negativas, denominada serie de Laurent.

Teorema 4.6.1. Serie de Laurent

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio con forma de anillo o corona $r < |z - z_0| < R$ y sea C una curva cerrada, simple, suave o suave a trozos y recorrida en sentido antihorario, contenida en el anillo $r < |z - z_0| < R$ y que rodea a z_0. Entonces, para todo z del anillo $r < |z - z_0| < R$, $f(z)$ puede representarse mediante **la serie de Laurent**:

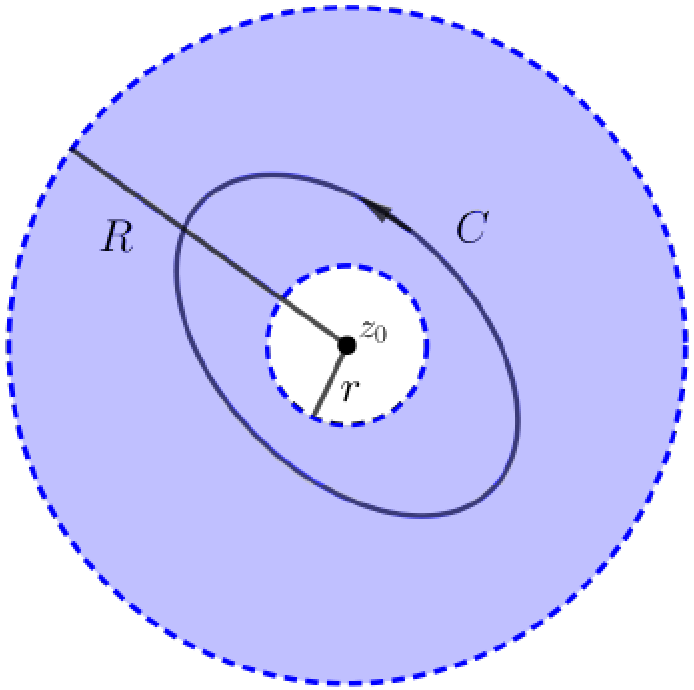
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n} \quad si \quad r < |z - z_0| < R$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad y \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz$$

Región de convergencia de una serie de Laurent:

$$r < |z - z_0| < R$$



Los coeficientes de la serie de Laurent no se suelen hallar calculando las integrales que los definen, sino utilizando otros métodos basados en utilizar desarrollos conocidos y realizar sustituciones adecuadas, integración o derivación, ya que por el siguiente teorema, podemos asegurar que toda serie de potencias (positivas o negativas) de $(z - z_0)$ que representa a una función en un anillo centrado en z_0, es el desarrollo en serie de Laurent en ese anillo.

Teorema 4.6.2. Teorema de unicidad de Laurent

Si una serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ converge a una función $f(z)$ en todos los puntos de la corona centrada en $r < |z - z_0| < R$, entonces es la serie de Laurent de $f(z)$ en potencias de $(z - z_0)$ en $r < |z - z_0| < R$.

Observaciones

1. Si $f(z)$ es analítica en z_0, es decir que hay un disco centrado en z_0 cuyo radio es la distancia de z_0 al punto mas cercano donde la función deja de ser analítica, se obtendrá una serie de potencias positivas de $(z - z_0)$, es decir la serie de Taylor de la función.

2. Si $f(z)$ no es analítica en z_0 y es analítica en una corona o anillo centrado en z_0: $r < |z - z_0| < R$, se obtendrá una serie de potencias positivas y negativas de $(z - z_0)$, es decir, la serie de Laurent.

Propiedad 4.6.3.

Las series de Laurent, como en el caso de las series de potencias, pueden derivarse término a término en su corona de convergencia, obteniéndose una nueva serie que converge en la misma corona a la derivada de $f(z)$.

(Ejemplos pizarrón 3.A)