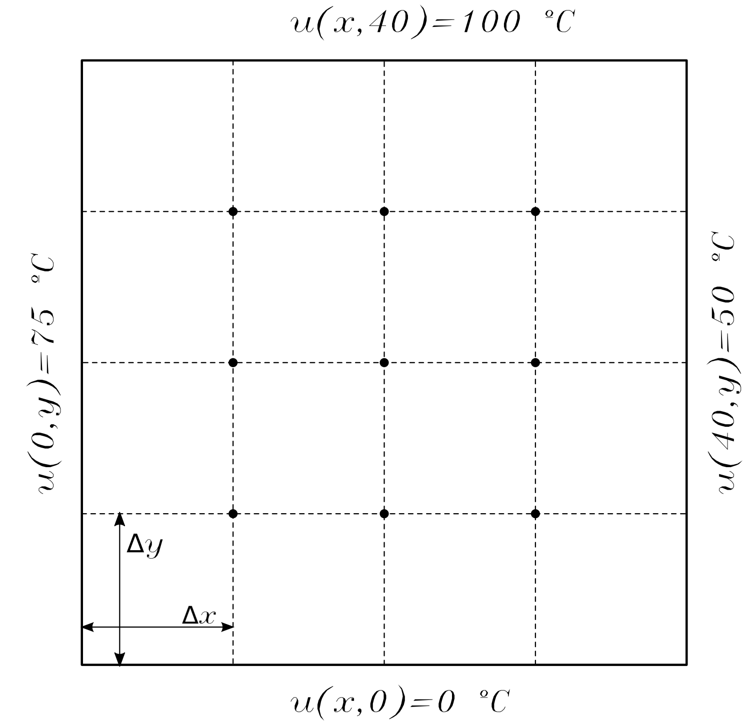
Trabajo Práctico N° 6. Matemática D1.

Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales.

Ejercicio 1

Se quiere conocer la distribución de temperatura en una placa con condiciones de borde de Dirichet luego de alcanzar su estado estacionario. La placa posee una geometría cuadrada de 40 cm de lado y sus bordes se encuentran a las temperaturas que se indican en la siguiente figura:



a) Aplicando el método de diferencias finitas obtener la molécula para resolver el problema de distribución de calor de la ecuación de Laplace.

b) Calcular la temperatura en los puntos internos tomando $\Delta x = \Delta y = 10cm$.

Ejercicio 2

Se quiere determinar la distribución estacionaria de calor en una lámina delgada de metal en forma de cuadrado con lado 0,5 m, la cual se mantiene a 0 °C en dos fronteras adyacentes mientras que el calor en las otras fronteras varía linealmente de 0 °C a 100 °C.

El problema se expresa matemáticamente como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

con las condiciones de borde

$$T(x,0) = 0 \qquad T(x,0{,}5) = 200\,x$$

$$T(0,y) = 0 \qquad T(0{,}5,y) = 200\,y$$

a) Resolver mediante el método de diferencias finitas considerando $\Delta x = \Delta y = 0{,}125$.

b) Comparar los valores hallados con la solución exacta $T(x,y) = 400\,x\,y$ en los puntos correspondientes.

c) Si en la misma placa se coloca una fuente de temperatura que introduzca un flujo de calor en algunos puntos o área del dominio, la ecuación que representa al problema es llamada ecuación de Poisson y es de la forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Suponer una fuente puntual de calor en el punto central de la placa con valor $f(x, y) = 4$. Hallar la nueva distribución de temperatura utilizando la misma malla que en los incisos anteriores y comparar los resultados.

Ejercicio 3

Una placa rectangular 2 metros por 3 metros posee una distribución de temperatura en régimen estacionario representada por un modelo que responde a la ecuación de Laplace. Las condiciones de borde son $u_x = (0, y) = u_x(2, y) = 0$ para $0 < y < 3$ (condiciones de Neumann o bordes aislados) y $u(x, 0) = 0$; $u(x, 3) = x^2$ para $0 < x < 2$.

Empleando el método de diferencias finitas, hallar en forma matricial el sistema de ecuaciones lineales que resuelve el problema considerando $\Delta x = \Delta y = 1\, m$. ¿Cómo puede resolver el sistema?. ¿De que forma puede obtener una mejor precisión?.

Ejercicio 4

Evalúe la distribución de la temperatura luego de transcurridos $0,2$ segundos en una varilla de aluminio de 10 cm de largo si su extremo izquierdo está a 50 °C y su extremo derecho duplica dicha temperatura.

Emplee un método explícito con la aproximación indicada para resolver $u_t = C\, u_{xx}$ con $C = 0,835 cm^2/s$, $\Delta x = 2cm$ y $\Delta t = 0,1$ seg. Inicialmente la temperatura en la barra es nula.

¿Puede ampliar el paso Δt indefinidamente utilizando un esquema de resolución explicito?

Ejercicio 5

Si en la resolución de la ecuación de calor se emplea el siguiente esquema para aproximar la derivada segunda en el espacio, ¿Cuál es la molecula computacional resultante para un método explícito?¿De que orden resulta el método?.

$$f''(x_i) = \frac{2\, f(x_i) - 5\, f(x_{i+1}) + 4\, f(x_{i+2}) - f(x_{i+3}))}{\Delta x^2} + O[\Delta x^2]$$

Ejercicio 6

Una barra de longitud 1 m cuyo material tiene una conductividad térmica igual a 6 cal/s cm °C se encuentra a una temperatura de 10 °C. En el tiempo t=0 se coloca una fuente en el extremo inicial de la barra con 240 °C de temperatura y en el extremo final una fuente con 50 °C de temperatura. Determinar la distribución de temperatura para distintos intervalos de tiempo durante el régimen temporario. Adoptar $\Delta x = 0,2$ m.

a) ¿En qué tiempo aproximadamente la temperatura se estabiliza en la barra? Utilizar un método explícito de cálculo.

b) Analizar las condiciones de estabilidad. Graficar la solución.

c) Graficar la variación de la temperatura en el punto medio en función del tiempo.

d) Resolver el problema anterior con un método implícito.