Auxiliar 7 - Tú y tu Algoritmo *On-line*[*]

CC4102 - Diseño y Análisis de Algoritmos
Profesor: Pablo Barceló   Auxiliar: Jorge Bahamonde

15 de Mayo del 2015

1 Online Set Covering

En el problema online de set covering, se nos entrega (U, S), donde U contiene n elementos y S contiene m subconjuntos de U. Luego se entrega de forma online una secuencia de elementos e_1, e_2, ..., e_t. El algoritmo que resuelve el problema debe construir un subconjunto R de S. Cuando llega un nuevo elemento, si no está cubierto por los subconjuntos de R, debe escogerse un conjunto de S que lo contenga y agregarlo a R (se permite agregar más conjuntos, si se desea).

1. Demuestre que no se puede obtener (usando un algoritmo determinístico) un radio competitivo mejor que $\log_2 n$. **Hint:** Considere $n = 2^d$, $U = \{0,1\}^d$, $S = \{S_i\}_{i=0}^d$, siendo $S_0 = \{0^d\}$ y para $1 \leq i \leq d$, considerando S_i como el conjunto de las cadenas con 1 en la i-ésima posición.
2. Demuestre que no se puede obtener un radio competitivo mejor que $\Omega(\frac{\log m}{\log n})$ con un algoritmo determinístico. **Hint:** Considere $U = [n]$ y S los subconjuntos de U con $\sqrt{n}$ elementos (luego $m = |S| = \binom{n}{\sqrt{n}}$).

2 El problema post-terremotos

Considere un ente beauchefiano cualquiera que, luego de asistir a una choripanada con terremotos un viernes 15 de Mayo[1], despierta en una carretera recta en la mitad de la noche. Decide buscar la ciudad más cercana para eventualmente volver a casa; sin embargo, está tan oscuro que sólo podrá notar que llegó a una ciudad cuando entre en ésta. El problema es que nuestro amigo no sabe en qué dirección está la ciudad más cercana. Provéale de un algoritmo 9-competitivo para solucionar su dilema.[2]

3 El problema de los k servidores

Considere el escenario donde tiene k puntos (*servidores*) en un *espacio métrico* (donde está definida una función de distancia d simétrica, no negativa y que cumple la desigualdad triangular) y una secuencia de puntos (*peticiones*) que debe atender. Cada vez que llega una petición, un servidor debe moverse hacia esa posición.

El problema *online* consiste en minimizar la distancia recorrida por todos los servidores luego de n peticiones, sin saber la secuencia de puntos a atender.

1. Sea $\mathcal{A}$ un algoritmo online para el problema de los k servidores bajo un espacio métrico arbitrario con al menos $k+1$ puntos. Pruebe que el radio competitivo de $\mathcal{A}$ es al menos k.

[*] créditos a Elisa Kauffmann :)
[1] ;)
[2] Ricardo Baeza-Yates *et al* mostraron que esta solución es óptima :)

2. Utilizaremos una función potencial para esta parte. Una función de potencial Φ demuestra un radio competitivo r de un algoritmo $\mathcal{A}$ si satisface las siguientes condiciones:

   - Φ es no negativa.
   - Cada respuesta a una petición del algoritmo óptimo incrementa Φ no más de r veces el costo cargado al algoritmo por esa respuesta.
   - Cada respuesta de $\mathcal{A}$ disminuye el potencial por al menos el costo cargado a $\mathcal{A}$ por esa respuesta.

   Un algoritmo es r-competitivo si existe una función de potencial que cumpla estas propiedades (Propuesto: ¿Puede demostrarlo?)

   Considere el problema de k servidores en una línea y el siguiente algoritmo:

   - Si todos los servidores están al mismo lado de la petición, se envía el servidor más cercano.
   - Si una petición está entre dos servidores, envía los dos a velocidad constante, deteniéndose cuando uno de ellos llega al objetivo.

   Utilice una función de potencial Φ que demuestre un radio competitivo k para este algoritmo.