Universidad de Chile
Departamento de Ciencias de la Computación
CC4102 - Diseño y Análisis de Algoritmos

Auxiliar 5 - "Análisis Amortizado y Consultas Tarea 1"

Profesores: Pablo Barceló
Gonzalo Navarro
Auxiliar: Dustin Cobas

P1. Realocando un Arreglo: Permitiendo contracciones

P2. Trits

Considere el siguiente sistema redundante de dígitos ternarios. Un número se representa como una secuencia de *trits*, que, como su nombre lo indica, pueden tomar tres posibles valores: 0, +1 ó −1. El valor de un número $t_{k-1} \dots t_0$ (donde cada t_i es un *trit*) se define como:

$$\sum_{i=0}^{k-1} t_i 2^i$$

El proceso de incrementar un número de este tipo es análogo al de la operación en números binarios. Se añade 1 al *trit* menos significativo; si el resultado es 2, se cambia el *trit* a 0 y se propaga una reserva hacia el siguiente *trit*. Se repite el proceso hasta que no exista carry. El proceso de decrementar es análogo.

Comenzando de 0, se realiza una secuencia de n incrementos y decrementos (sin un orden particular). Demuestre que, utilizando esta representación, el costo amortizado por operación es $\mathcal{O}(1)$.

Soluciones

P1. Realocando un Arreglo: Permitiendo contracciones

P2. Trits

Consideremos la función potencial ϕ como la cantidad de 1s y -1s. Veamos que $\phi_0 = 0$ y $\phi_i \geq 0$ por ser una cantidad.

Analicemos ahora el costo amortizado por operación.

En el caso del incremento, supongamos que hay l 1s consecutivos en las posiciones menos significativas del número y que luego de ellos hay un 0 o un -1. En este caso tenemos que:

$$\begin{aligned}\hat{c} &= c + \Delta\phi \\ &\leq (l+1) + (-l+1) \\ &= 2\end{aligned}$$

En el caso del decremento, supongamos que hay l -1s consecutivos en las posiciones menos significativas del número y que luego de ellos hay un 0 o un 1. En este caso también tenemos que:

$$\begin{aligned}\hat{c} &= c + \Delta\phi \\ &\leq (l+1) + (-l+1) \\ &= 2\end{aligned}$$