

Auxiliar 5 - Análisis Amortizado

CC4102/CC53A - Diseño y Análisis de Algoritmos
Profesor: Gonzalo Navarro Auxiliar: Miguel Romero

08 de Septiembre del 2014

1. La búsqueda binaria en un arreglo ordenado toma tiempo logarítmico, sin embargo la inserción toma tiempo lineal. Veremos que podemos mejorar el tiempo de inserción manteniendo varios arreglos ordenados.

Específicamente, suponga que se desea implementar las operaciones de búsqueda e inserción en un conjunto de n elementos. Sea $k = \lceil \log(n+1) \rceil$ y asuma que la representación binaria de n es $n_{k-1} \cdots n_1 n_0$. Utilizaremos k arreglos ordenados A_0, \dots, A_{k-1} , donde cada A_i tiene largo 2^i . Cada arreglo está lleno o vacío dependiendo si $n_i = 1$ o $n_i = 0$, respectivamente. El número total de elementos contenidos en los k arreglos es entonces $\sum_{i=0}^{k-1} n_i 2^i = n$. Aunque cada arreglo A_i está ordenado, no existe ninguna relación particular entre los elementos de distintos arreglos.

- (a) Muestre como realizar la operación de búsqueda en esta estructura de datos. Analice el costo de peor caso.
 - (b) Muestre como realizar la operación de inserción. Analice el costo de peor caso y el costo amortizado de insertar.
 - (c) (Propuesto) Discuta como implementar la operación de eliminar un elemento. Cuál es el costo amortizado de operaciones insertar/borrar?
2. Considere una tabla de tamaño $size$ que almacena num elementos, que se va llenando con inserciones y debemos realocarla cuando no queda espacio para insertar ($size = num$). Esta vez, también ocurren borrados y no queremos que $size$ sea mucho mayor que num , para no desperdiciar espacio. Al realocar la tabla para agrandarla o reducirla debemos pagar un costo de $O(num)$.
 - (a) Muestre que duplicar la tabla cuando se llena, y reducirla cuando $num = size/2$ no consigue un costo amortizado constante.
 - (b) Considere la estrategia de duplicar cuando la tabla se llena, y reducirla a $size/2$ cuando $num = size/4$. Demuestre que esta estrategia obtiene un costo amortizado constante utilizando la siguiente función potencial:

$$\Phi = \begin{cases} 2 \cdot num - size & \text{si } num \geq size/2 \\ size/2 - num & \text{si } num < size/2 \end{cases}$$

- (c) Analice el caso general en que queremos obtener un factor de carga α , con $0 < \alpha < 1/2$.