

# Auxiliar 3 - Preparación para el Control

CC4102 - Diseño y Análisis de Algoritmos  
Profesor: Pablo Barceló    Auxiliar: Jorge Bahamonde

08 de Abril del 2015

## 1 Memoria Secundaria

1. Dados dos arreglos  $A[1, N]$  y  $B[1, N]$  de enteros que no caben en memoria principal, se desea construir (también en disco) el arreglo  $C[i] = A[B[i]]$ . Diseñe un algoritmo eficiente de memoria externa para construir  $C$  y analícelo.
2. Dado un grafo dirigido  $G = (V, E)$ , con  $|V| = n$  y  $|E| = e$ , ambos mucho mayores que  $M$ . El grafo es un archivo secuencial de pares  $(u, v)$  en disco, donde se listan las aristas. Se desconoce  $n$  y  $e$ . Considere  $V = \{1 \dots n\}$  para simplificar. Se pide construir y analizar algoritmos eficientes en el modelo de memoria secundaria para:

- Calcular el grado interior y exterior (número de arcos entrantes y salientes) de todos los nodos.
- Calcular el cuadrado del grafo, definido como  $G^2 = (V, E')$ , donde:

$$E' = \{(u, v) \mid u, v \in E \wedge \exists w \in V, (u, w) \wedge (w, v) \in E\}$$

Puede suponer, para este caso, que  $M \geq n$ , pero no que  $M \geq e$ .

- **Bonus track:** calcule cualquier potencia del grafo. Proponga un algoritmo eficiente en memoria y analícelo. No es aceptable una solución que cueste  $k - 1$  veces o más que lo que obtuvo en el punto anterior.

## 2 Surtido :)

1. Se tiene una secuencia  $P[1, n]$  de números reales positivos y un objetivo real  $x$ . Se desea encontrar todas las posiciones  $j$  tales que para algún un  $i \leq j$ ,  $\sum_{k=i}^j P[k] = x$ . Resuelva este problema en tiempo  $O(n)$
2. Considere un árbol binario completo de  $n$  nodos. Una vez en un nodo, se entra al  $i$ -ésimo hijo con probabilidad  $q_i \geq 1/2$ , para  $i \in [1, 2]$ . Se desea analizar la cantidad de hojas a la que llega el algoritmo:
  - Dé una recurrencia que describa la cantidad de hojas a las que se llega en promedio cuando se parte de la raíz de un árbol binario completo de  $n$  nodos.
  - Demuestre que el total de hojas a las que se llega es  $O(n^\alpha)$ , y halle una fórmula en o función de  $q_1$  y  $q_2$  que determine  $\alpha$ . Verifique que  $\alpha$  está entre 0 y 1, y determine cómo deben ser  $q_1$  y  $q_2$  en los casos extremos.
3. Se desea analizar el costo promedio de insertion sort:

- Sea  $A[1, n]$  un arreglo de  $n$  números distintos. Si  $i < j$  y  $A[i] > A[j]$ , entonces decimos que el par  $(i, j)$  es una inversión de  $A$ . Supongamos que los elementos de  $A[1, n]$  vienen dados por una permutación aleatoria  $\Pi$  de  $\{1, \dots, n\}$ . Calcule la cantidad esperada de inversiones en  $A[1, n]$ .
- Utilice la parte anterior para demostrar que el costo promedio de insertion sort es  $\Theta(n^2)$ .