Universidad de Chile
Departamento de Ciencias de la Computación
CC4102 - Diseño y Análisis de Algoritmos

Auxiliar 6 - "Análisis Amortizado y Consultas Tarea 1"

Profesores: Pablo Barceló
Gonzalo Navarro
Auxiliar: ~~Manuel~~ Ariel Cáceres Reyes

30 de abril del 2018

P1. <u>MultiStack</u>

Un *multistack* consiste en una serie (potencialmente infinita) de stacks $S_0, \ldots ..., S_{t-1}$ donde el stack j puede almacenar hasta 3^j elementos. Todas las operaciones de *push* se realizan inicialmente sobre S_0.Cuando se desea *pushear* un elemento en un stack lleno S_j , se vacía este stack en el siguiente, S_{j+1} (posiblemente repitiéndose la operación de forma recursiva). Considere que las operaciones de *push* y *pop* en los stacks individuales tiene costo 1.

a) En el peor caso, ¿cuánto cuesta una operación de *push* en esta estructura?

b) Demuestre que el costo amortizado de una secuencia de n operaciones de *push* en un *multistack* inicialmente vacío es de $\mathcal{O}(n \log n)$. Utilice la siguiente función de potencial:

$$\phi = 2 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} N_j \cdot (\log_3 n - j)$$

donde N_j es el número de elementos en el stack j.

c) Muestre que el potencial anterior no funciona para cualquier secuencia de *pushes* y *pops*.

"Great ability develops and reveals itself increasingly with every new assignment."
Baltasar Gracian

Soluciones

P1. MultiStack

a) Supongamos hemos hecho $\sum_{j=0}^{k} 3^k$ *pushes* sobre el *multistacks*. En este caso tendremos los stacks $S_0, \ldots, S_k$ llenos, por lo que tendremos que vaciarlos todos, a un costo de n, que más el costo del push entrante nos da $n+1$.

b) Para realizar esta pregunta separaremos el costo del *push* del proceso de vaciado correspondiente.
Primero veamos que una operación de *push* considerando un S_0 vacío tiene como coste real 1, además el único N_j que cambia luego de hacer esta operación es el N_0 que pasa de 0 a 1, por lo que el cambio de potencial es de $2\log_3 n$.
Analicemos ahora el proceso de vaciado. Para esto supongamos que tenemos llenos los stacks $S_0, \ldots, S_k$, por lo tanto el coste real de la operación será $\sum_{j=0}^{k} 3^j = \frac{3^{k+1}-1}{2}$, además de los N_j sabemos lo siguiente:

- $(N_0)_{antes} = 1$ y $(N_0)_{despues} = 0$
- $(N_j)_{antes} = 3^j$ y $(N_j)_{despues} = 3^{j-1}$, para $j \in \{1, \ldots, k\}$
- $(N_{k+1})_{antes} = (N_{k+1})_{despues} - 3^k$
- $(N_j)_{antes} = (N_j)_{despues}$, para $j \in \{k+2, \ldots, t-1\}$

Luego si separamos la suma del potencial por los tramos anteriores, la diferencia de potencial queda:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= 2 \cdot \left(-\log_3 n + \sum_{j=1}^{k} (3^{j-1} - 3^j) \cdot (\log_3 n - j) + 3^k \cdot (\log_3 n - (k+1)) \right) \\
&= 2 \cdot \left(-\log_3 n - 2\sum_{j=1}^{k} 3^{j-1} \cdot (\log_3 n - j) + 3^k \cdot (\log_3 n - (k+1)) \right) \\
&= 2 \cdot \left(-\log_3 n - 2\sum_{j=0}^{k-1} 3^{j} \cdot (\log_3 n - j - 1) + 3^k \cdot (\log_3 n - (k+1)) \right) \\
&= 2 \cdot \left(-\log_3 n + 3^k \cdot (\log_3 n - 1) - k3^k - 2(\log_3 n - 1)\sum_{j=0}^{k-1} 3^j + 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} j3^j \right) \\
&= 2 \cdot \left(-\log_3 n + 3^k \cdot (\log_3 n - 1) - k3^k - (\log_3 n - 1) \cdot (3^k - 1) + 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} j3^j \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot \left(-1 - k3^k + 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} j3^j \right) \\
&= 2 \cdot \left(-1 - k3^k + 2 \cdot \frac{1}{4}(2 \cdot 3^k(k-1) - 3^k + 3) \right) \\
&= -2 - 2k3^k + 2 \cdot 3^k(k-1) - 3^k + 3 \\
&= 1 - 3^{k+1}
\end{aligned}
$$

que si le sumamos al coste real nos queda un coste amortizado menor a cero.

c) Primero explicaremos que para hacer un *pop* vemos si hay un elemento para popear (?) desde el stack S_0, si no es así *rellenamos* S_0 con S_1, repitiendo el proceso recursivamente si es necesario. Dividimos nuevamente el proceso en *pop* son S_0 lleno y el proceso de *relleno* y consideramos el mismo potencial. El *pop* tiene un coste amortizado ≤ 1.
Por otro lado, consideremos, para el proceso de *relleno*, que los primeros k stacks se encuentran vacíos, luego el *relleno* de los stacks tiene un coste de $\sum_{j=0}^{k} 3^j = \frac{3^{k+1}-1}{2}$, además de los N_j sabemos lo siguiente:

- $(N_0)_{antes} = 0$ y $(N_j)_{despues} = 1$
- $(N_j)_{antes} = 0$ y $(N_j)_{despues} = 2 \cdot 3^{j-1}$, para $j \in \{1, \ldots, k\}$
- $(N_{k+1})_{antes} = (N_{k+1})_{despues} + 3^k$
- $(N_j)_{antes} = (N_j)_{despues}$, para $j \in \{k+2, \ldots, t-1\}$

Luego si separamos la suma del potencial por los tramos anteriores, la diferencia de potencial queda:

$$
\Delta\phi = 2 \cdot \left(\log_3 n + 2 \sum_{j=1}^{k} 3^{j-1} \cdot (\log_3 n - j) - 3^k \cdot (\log_3 n - (k+1)) \right)
$$

Que es el mismo resultado obtenido anteriormente, pero negado, por lo que al sumarlo con el coste real no podremos acotarlo.