Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Segundo Recuperatorio - 2024 - Tema 2

Nombre y apellido:
DNI:
Nro de hojas entregadas (incluir la de enunciado):
Comisión (marcar con una X la que corresponda): ____ **Par** - _____ **Impar**
Columna Nro:

Importante: todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1: Determine utilizando tablas de verdad si la siguiente equivalencia es válida:

$$\sim Q \rightarrow \sim P \equiv P \rightarrow Q$$

Resolución:

P	Q	¬P	¬Q	P→Q	¬Q→¬P	P → Q ≡ ¬Q → ¬P
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Ejercicio 2: Una inmobiliaria tiene en alquiler diversas propiedades. De estas, 15 cuentan con garaje, 30 están ubicadas en el centro y 10 son monoambientes. Además, 5 de las propiedades tienen tanto garaje como ubicación céntrica, y solo 5 de los monoambientes son céntricos. No hay monoambientes con garaje. Denotando G como el conjunto de propiedades con garaje, C como el conjunto de propiedades céntricas y M como el conjunto de monoambientes:

a) Construya el correspondiente diagrama de Venn.

b) Marque en el diagrama la opción que representa la cantidad total de propiedades en alquiler y resuélvala:

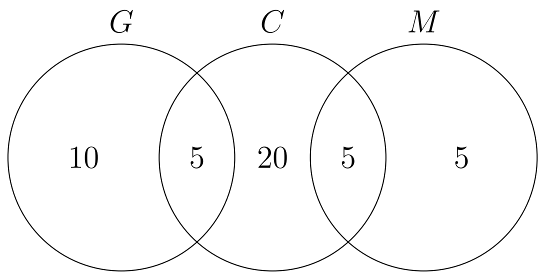
   I. $|G| + |C| + |M| - |G \cap C| - |C \cap M|$
   II. $|G + C + M|$
   III. $|G| + |C| + |M|$

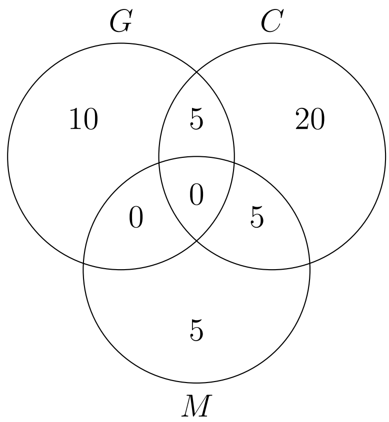
c) ¿Cuántas propiedades cuentan con garaje pero no están en el centro? Justifique.

d) ¿Qué representa el conjunto $C - M$?

Resolución:

a) Cualquiera de los siguientes dos diagramas son válidos:





b) $|G| + |C| + |M| - |G \cap C| - |C \cap M| = 15 + 30 + 10 - 5 - 5 = 45$. Hay 45 propiedades.

   La opción II no es válida porque no hemos definido la suma entre conjuntos, y la opción III tampoco es válida porque considera que no hay intersecciones.

c) $|G| - |G \cap C| = 15 - 5 = 10$. Hay 10 propiedades que tienen garaje sin ser céntricas.

d) $C - M$ es el **conjunto** formado por las propiedades que están en el centro pero no son monoambientes.

Ejercicio 3: En un instituto de biología marina calcularon que la altura (y) respecto al nivel del mar de un cormorán cuando pesca está dada por la siguiente función del tiempo (t):

$$y = at^2 - 9t,$$

donde a es una variable positiva que depende del individuo a estudiar. Responda justificando en cada caso:

a) ¿Podemos saber en qué tiempo del recorrido está el cormorán si conocemos la altura?

b) ¿En qué tiempo el cormorán entra al agua?

Resolución:

a Podemos saber en que tiempo del recorrido está si sabemos la altura? Justificar.

No, porque que la función no es inyectiva: A elementos distintos del dominio pueden corresponder el mismo valor del condominio, entonces, para un mismo valor del codominio (la altura) puede obtenerse de mas de un valor del dominio (el tiempo).

b En que momento entra al agua?

Como el nivel del agua está definido como el 0, la entrada y salida son las raíces. Y como a es una variable positiva, sabemos que tiene un intervalo de decrecimiento (descenso) y uno de crecimiento (ascenso). Por lo tanto, la primer raiz reprecenta la entrada al agua.

Luego,

$$x_0 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) - \sqrt{(-9)^2 - 4a0}}{2a} = \frac{9 - \sqrt{(-9)^2}}{2a} = 0.$$

Ejercicio 4: Jaimito tiene 6 libros de ciencia ficción, 5 libros de fantasía y 4 libros de terror, que le regalaron para su cumpleaños pero que todavía no leyó. Como se va de vacaciones de invierno, quiere seleccionar libros para leer en su viaje.

a) Si en la valija entran exactamente 2 libros, ¿cuántas combinaciones diferentes puede hacer?

b) Si en la valija puede poner hasta 3 libros, ¿cuántas combinaciones diferentes de libros puede llevar?

c) Y si Jaimito decidió llevar 3 libros y al menos uno tiene que ser de terror, ¿cuántas combinaciones diferentes puede llevar en este caso?

Resolución:

a) Dado que Jaimito tiene que elegir un subconjunto de 2 libros del total de 15 libros que tiene, se usa el número combinatorio 15C2, que da como resultado $\dfrac{15!}{2!(15-2)!}$

b) Análogo al inciso anterior, ahora Jaimito puede generar subconjuntos de 1, 2, o 3 libros del total de 15 libros. Luego, la respuesta es $\sum_{i=1}^{3} 15Ci = \sum_{i=1}^{3} \frac{15!}{i!(15-i)!}$

c) En este caso, por cada libro de terror que puede elegir tiene que elegir un subconjunto de 2 libros más de cualquier género, de un conjunto de 14 libros (porque una de terror ya lo va a sacar).

Luego tiene dos casillas, la primer representa los posibles libros de terror (4) y la segunda casilla representa la cantidad de subconjuntos de 2 libros ($\frac{14!}{2!(14-2)!}$). Entonces la respuesta es $4 \times \frac{14!}{2!(14-2)!}$.

Ejercicio 5: Pedro tiene que armar un equipo de 2 jugadores para jugar el torneo de truco. Los nombres de los 9 posibles jugadores se encuentran en una bolsa cerrada y se sabe que, entre ellos, hay 2 amigos de Pedro. Si elige uno de los jugadores, lo saca de la bolsa y luego saca otro, ambos en forma aleatoria, calcule la probabilidad de que:

a) Al menos uno de los jugadores sea amigo suyo.

b) Solo uno de los jugadores sea su amigo.

c) El segundo jugador sea su amigo, si se sabe que el primero no es su amigo.

d) Ninguno de los dos sea su amigo.

Resolución: Dados los datos:

- Total de jugadores: 9
- Amigos de Pedro: 2

a) Probabilidad de que al menos uno de los jugadores sea amigo suyo:

En este caso es más simple calcular la probabilidad de que ninguno de los jugadores sea amigo de Pedro y luego usar su complemento. Calculamos primero la probabilidad de que ninguno sea amigo y luego usamos el complemento.

$$P(\text{al menos uno es amigo}) = 1 - P(\text{ninguno es amigo}) = 1 - \frac{7}{9} * \frac{6}{8} = 1 - \frac{42}{72} = 1 - \frac{21}{36} = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

b) Probabilidad de que solo uno de los jugadores sea su amigo:

Hay dos casos posibles: que el primero sea su amigo y el segundo no, y que el primero no sea su amigo y el segundo sí.

$$P(\text{solo uno es amigo}) = \frac{2}{9} * \frac{7}{8} + \frac{7}{9} * \frac{2}{8} = \frac{14}{72} + \frac{14}{72} = \frac{28}{72} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

c) Probabilidad de que el segundo jugador sea su amigo, dado que el primero no lo es:

Probabilidad condicional:

$$P(\text{segundo es amigo} \mid \text{primero no es amigo}) = \frac{2}{8}$$

d) Probabilidad de que ninguno de los dos jugadores sea amigo suyo. Esto ya lo calculamos en el inciso a:

$$P(\text{ninguno es amigo}) = \frac{7}{9} * \frac{6}{8} = \frac{42}{72} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Ejercicio 6: Considere las siguientes matrices A y B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Determine cuál de las siguientes opciones corresponde al producto $A \times B$, justificando:

a) No es posible realizar este producto.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Resolución:
Para determinar si el producto $A \times B$ es posible, verificamos las dimensiones de las matrices. La matriz A es de 2×3 y la matriz B es de 3×2. Dado que el número de columnas de A (3) es igual al número de filas de B (3), el producto $A \times B$ es posible y resultará en una matriz de 2×2.

Calculamos el producto $A \times B$ como sigue:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos las matrices:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 8 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 8 \end{pmatrix}$$

Realizando los cálculos:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 6 + 2 - 5 & -4 + 1 - 8 \\ 0 + 2 + 0 & 0 + 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la opción correcta es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$