

Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Examen Parcial - 2018

Nombre y apellido:

DNI:

Nro de hojas:

Carlitos, flamante graduado de la TUDAI, tiene hoy su primer entrevista de trabajo en SiMen Medicals. Luego de una relajada charla con el encargado de RRHH, tiene que hablar con el líder de desarrollo de software, Juan Alberto Didí. El señor Didí le explica que hay muchos aspirantes al puesto que se postuló y que, por eso, decidieron tomar una prueba escrita para cuantificar las habilidades de cada uno en conocimientos básicos que precisan para implementar las aplicaciones que ofrece SiMen Medicals.

1. Dada la siguiente función python:

- a) Indique cuál será el valor que retorna la función para cada combinación de parámetros de entrada.
- b) Proponga una modificación para optimizar la función.

```
#####  
def func(p, q, r):  
    if ((p != q) and (r or not r)):  
        return False  
    else:  
        return True  
#####
```

Respuesta:

- a) Para evaluar el valor de retorno de la función debemos determinar para qué valores de entrada de los parámetros p, q y r se ejecuta el fragmento de código correspondiente al if y para cuáles se ejecuta el fragmento de código asociado al else. Para ello construimos una tabla de verdad que evalúe el resultado de la proposición lógica $(p \neq q) \text{ and } (r \text{ or not } r)$

| p | q | r | $(\neg r)$ | $(p \oplus q)$ | $(r \vee \neg r)$ | $(p \oplus q) \wedge (r \vee \neg r)$ | Salida |
|---|---|---|------------|----------------|-------------------|---------------------------------------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Para aquellas combinaciones de entrada que se evalúen como verdaderas, se ejecutará el bloque de código correspondiente al if, por lo que la *salida* de la función será 0 (false). En cambio, para aquellas combinaciones de entrada que se evalúen como falsas, se ejecutará el bloque de código correspondiente al else, por lo que la *salida* de la función será 1 (true).

- b) Como se puede ver en la tabla de verdad, evaluar $(r \vee \neg r)$ no modifica el valor de verdad de la proposición. Por lo que el código se podría optimizar de la siguiente manera:

```
#####  
def func(p, q, r):  
    if (p != q):  
        return False  
    else:  
        return True  
#####
```

2. Las máquinas de tomografía computada desarrolladas por SiMen Medicals, modelan la absorción de la radiación $h(x)$ a través de la materia con la ley de Beer-Lambert. Para calibrar la máquina, sin ningún objeto en su interior, la formula se reduce a:

$$h(x) = 5e^{-x}$$

Donde x es la distancia desde la fuente emisora de radiación hasta el detector. Dicha distancia es a lo sumo 100 centímetros. Dado el contexto, determinar:

- Dominio e imagen,
- Raíces y ordenada al origen,
- Intervalos de positividad y negatividad,
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Indicar si la función es inyectiva, suryectiva o biyectiva.

Respuesta:

$$a) \text{ Dom} = [0, 100] \text{ Img} = [5e^{-100}, 5]$$

b) Raíces:

$$\begin{aligned} 5e^{-x} &= 0 \\ e^{-x} &= 0 \\ -x &= \ln(0) \\ x &= -\infty \notin \text{Dom} \end{aligned}$$

No tiene raíces.

Ordenada al origen:

$$h(0) = 5e^{-0} = 5$$

c) Intervalos de positividad y negatividad:

$$h(x) > 0 \quad \forall x \in \text{Dom}$$

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$h(x) \text{ decrece en el intervalo } [0, 100]$$

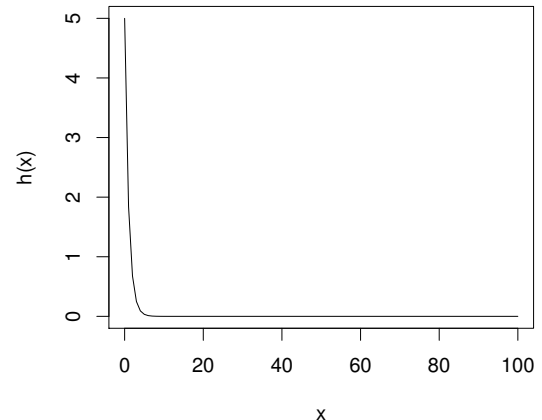
e) Inyectividad:

$$\begin{aligned} h(x_0) &= h(x_1) \\ 5e^{-x_0} &= 5e^{-x_1} \\ e^{-x_0} &= e^{-x_1} \\ \ln(e^{-x_0}) &= \ln(e^{-x_1}) \\ x_0 &= x_1 \end{aligned}$$

f) Suryectividad: si consideramos que el codominio de la función es $[5e^{-100}, 5]$, la función $h(x)$ es suryectiva puesto que ambos conjuntos coinciden. Por ser $h(x)$ inyectiva y suryectiva, resulta que $h(x)$ es biyectiva.

En total se presentaron 50 personas a la entrevista. El señor Didí seleccionó a los mejores 15 postulantes. Las notas obtenidos por cada uno de los 15 postulantes son:

$$[7, 7, 10, 9, 7, 7, 8, 9, 8, 8, 7, 6, 9, 8, 9] \quad (1)$$



3. El señor Didí tiene que presentar un reporte al jefe de contratación, en el cual debe informar los siguientes datos estadísticos. Ayúdelo a calcular:

- Media, mediana, moda, mínimo, máximo

Respuesta:

$$Media = \frac{7 + 7 + 10 + 9 + 7 + 7 + 8 + 9 + 8 + 8 + 7 + 6 + 9 + 8 + 9}{15}$$

$$Media \approx 7,93$$

$$Mediana = 8$$

$$Moda = 7$$

$$\text{Mínimo} = 6$$

$$\text{Máximo} = 10$$

4. Mario Lorenzo, el director del sector de contrataciones, le informa que no podrán contratarlos a todos por falta de presupuesto. El señor Didí quiere contratar a Carlitos, a pesar de que él sacó 6 en la entrevista. Entonces, recurre al azar para escoger a los candidatos a contratar. Para ello escribe los nombres de los postulantes en papeles y los coloca en una bolsa. Para darle prioridad a aquellos que les fue mejor en la entrevista decide colocar un papel por cada punto obtenido en la entrevista, ver (1). Por ejemplo: como Carlitos obtuvo un 6, habrá 6 papeles con su nombre en la bolsa.

Nota: Luego de seleccionar un participante al azar, se sacan todos los papeles con su nombre de la bolsa y se elige al próximo.

Responda:

- Cuál es la probabilidad de que Carlitos sea escogido en el primer intento?
- Cuál es la probabilidad de que Carlitos sea escogido en segundo lugar, si se sabe que en primer lugar fue elegido el candidato con mayor probabilidad de selección?
- Si se sabe que el nombre que se sacó en primer lugar es una persona que obtuvo una nota de a lo sumo 8, cuál es la probabilidad de que esa persona sea Carlitos?

Respuesta:

- Al comenzar, se tienen todos los candidatos en la bolsa. Al haber un papel por cada punto obtenido se tienen un total de 119 papeles:

$$total = 7 + 7 + 10 + 9 + 7 + 7 + 8 + 9 + 8 + 8 + 7 + 6 + 9 + 8 + 9$$

Al haber obtenido una nota de 6 en el examen, hay 6 papeles con el nombre de Carlitos en la bolsa. La probabilidad de que Carlitos sea escogido en primer lugar es:

$$p = \frac{6}{119} = 0,0504$$

- Si en primer lugar fue elegido el candidato con mayor probabilidad de selección (aquel que obtuvo un 10 en el examen) en la bolsa quedarán un total de 109 papeles. La probabilidad de que Carlitos sea elegido es, entonces:

$$p = \frac{6}{109} = 0,055$$

c) Al haber sido escogido un candidato con nota menor o igual a 8 quedarán un total de 73 papeles.

$$total = 7 + 7 + 7 + 7 + 8 + 8 + 8 + 7 + 6 + 8 = 73$$

Entonces, la probabilidad de que Carlitos sea elegido es:

$$p = \frac{6}{73} = 0,0822$$

Carlitos fue contratado, y el Señor Didí le da a elegir entre 3 proyectos diferentes.

5. La empresa paga las horas trabajadas de forma diferenciada dependiendo del tipo de tarea. En cada uno de los 3 proyectos se tiene que trabajar como: Programador (P), Diseñador (D) y Tester (T). La paga por hora de cada actividad es: $P \rightarrow \$150$, $D \rightarrow \$250$, $T \rightarrow \$100$

- Proyecto A: 8 hs de diseño, 25 hs de programación y 7 hs de testing semanales.
- Proyecto B: 15 hs de diseño, 10 hs de programación y 15 hs de testing semanales.
- Proyecto C: 0 hs de diseño, 8 hs de programación y 32 hs de testing semanales.

Nota: Resuelva los siguientes incisos usando notación y operación matricial

- a) Si Carlitos quiere el puesto mejor remunerado, qué proyecto deberá elegir?
- b) Se sabe que el año que viene el aumento del pago por hora para cada actividad es del 40 % para testing, 40 % para programador y 5 % para diseñador. A qué proyecto se deberá cambiar Carlitos el año que viene?

Respuesta:

a)

$$\begin{bmatrix} 25 & 8 & 7 \\ 10 & 15 & 15 \\ 8 & 0 & 32 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 150 \\ 250 \\ 100 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 150 \cdot 25 + 250 \cdot 8 + 100 \cdot 7 \\ 150 \cdot 10 + 250 \cdot 15 + 100 \cdot 15 \\ 150 \cdot 8 + 250 \cdot 0 + 100 \cdot 32 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 6450 \\ 6750 \\ 4400 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (2)$$

Con el Proyecto B obtiene mas ingresos.

b)

$$\begin{bmatrix} 25 & 8 & 7 \\ 10 & 15 & 15 \\ 8 & 0 & 32 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1,4 & 0 & 0 \\ 0 & 1,05 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 150 \\ 250 \\ 100 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \right) = \begin{bmatrix} 8330 \\ 8137,5 \\ 6160 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (3)$$

El Proyecto A será el de mayor remuneración el año entrante.

6. Finalmente, hubo 8 contratados, que deben asignarse a los 3 proyectos. Se necesita 2 para el proyecto A, 3 para el proyecto B y 3 para el proyecto C. Ayude al señor Didí a responder:

- a) De cuántas formas diferentes se pueden asignar los nuevos empleados a los 3 proyectos?

Respuesta:

Se pueden asignar de 560 formas distintas:

$$\binom{8}{2} * \binom{6}{3} * \binom{3}{3} = 28 * 20 * 1 = 560$$

En su primer día de trabajo en SiMen Medical, Carlitos se da cuenta de que perdió la contraseña de la computadora que le asignaron.

7. Nicolás, jefe del departamento de IT, le dice que su contraseña es igual el número resultante (en decimal) de la siguiente operación matemática:

$$FC1_{(16)} + 01010_{(2)}$$

¿Cuál es la contraseña de Carlitos?

Respuesta: Para poder realizar la suma, primero se llevan los dos números a una base en común, en este caso la base decimal:

$$FC1_{(16)} = 1 * 16^0 + 12 * 16^1 + 15 * 16^2 = 4033_{10}$$

$$01010_{(2)} = 0 * 2^0 + 1 * 2^1 + 0 * 2^2 + 1 * 2^3 + 0 * 2^4 = 10_{10}$$

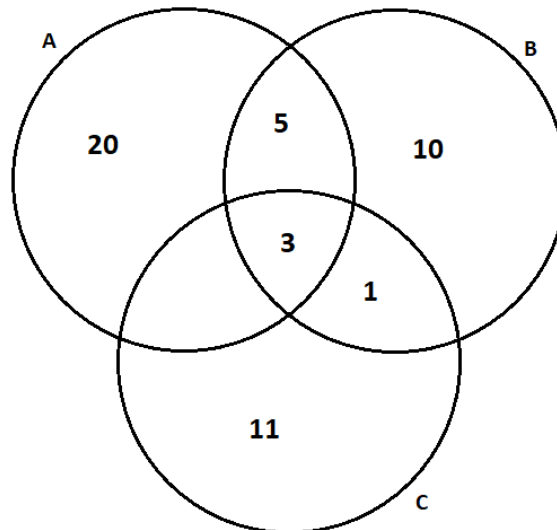
$$FC1_{(16)} + 01010_{(2)} = 4033_{10} + 10_{10} = 4043_{10}$$

8. En la charla de orientación, el señor Didí les comenta a los nuevos candidatos que el sector de desarrollo de software médico consta de 3 proyectos insignia y que, a su vez, la cantidad de empleados en los proyectos es:

- 28 en el Proyecto A
- 19 en el Proyecto B
- 15 en el Proyecto C
- 8 en los Proyecto A y B
- 4 en los Proyecto B y C
- 3 en los Proyecto A y C
- 3 en los 3 Proyectos.

- a) ¿Cuántos empleados hay en total?
- b) ¿Cuántos trabajan únicamente en el Proyecto C?
- c) ¿Cuántos trabajan en el Proyecto C y en el B pero no en el A?

Respuesta:



- a) En total hay 50 empleados
- b) 11 empleados trabajan únicamente en el proyecto C.
- c) Sólo un empleado trabaja en los proyectos C y B pero no en el A.

$$\#empleados = 20 + 5 + 3 + 1 + 11 + 10 = 50$$