Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Examen Parcial - 2024 - Tema 1

Nombre y apellido:
DNI:
Nro de hojas entregadas *(esta hoja cuenta como hoja entregada)*:

Importante: todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1:
Dadas las siguientes proposiciones lógicas escritas en lenguaje natural, (a) Traduzca cada una a lenguaje proposicional, y (b) Resuelva para cada una su correspondiente tabla de verdad.

- Apruebo si y solo si me saco más de cuatro.
- Si me saco un siete o más, apruebo y promociono.

Resolución:
a) Establezco primero las proposiciones simples:

$$A = \text{Apruebo}$$
$$C = \text{Me saco un cuatro o más}$$
$$S = \text{Me saco un siete o más}$$
$$P = \text{Promociono}$$

Y ahora asocio las proposiciones compuestas en lenguaje natural a su versión en lenguaje proposicional equivalente:

$$\text{Apruebo si y solo si me saco mas de cuatro.} \equiv A \leftrightarrow C$$

$$\text{Si me saco un siete o más apruebo y promociono.} \equiv S \rightarrow (A \land P)$$

b) Resolvemos las tablas de verdad:

$A \leftrightarrow C$

A	C	$A \leftrightarrow C$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

$S \rightarrow (A \land P)$

S	A	P	$A \land P$	$S \rightarrow (A \land P)$
F	F	F	F	V
F	F	V	F	V
F	V	F	F	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
V	F	V	F	F
V	V	F	F	F
V	V	V	V	V

Ejercicio 2:
El Centro de Estudiantes abrió un formulario de inscripción para los que quieren participar de los E-Games de las Olimpíadas. Ya fue respondido por 45 personas, de las que 22 quieren jugar al LoL, 18 al Age of Empires y 19 al Counter. Además:

- 4 quieren jugar al Counter, al Age of Empires y al LoL.
- 6 quieren jugar al Age of Empires y al LoL.
- 7 de los que quieren jugar al LoL, también quieren jugar Counter.
- 6 de los que quieren jugar al Age of Empires, también quieren jugar Counter.

Para armar los equipos, necesitan que los ayudes a responder estas preguntas:

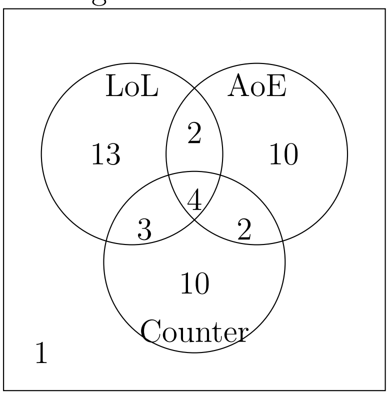
1. ¿Cuántas personas de las que contestaron el formulario no quieren jugar a ningún juego?
2. ¿Cuántos de los que no quieren jugar al Age of Empires, sí quieren jugar al Counter?
3. ¿Cuántos de los que no quieren jugar al Counter, quieren jugar al LoL?
4. ¿Cuántos quieren jugar solamente al LoL?

Resolución:
Partimos del primer ítem que dice que $|(LoL \cap AoE \cap C)| = 4$. A partir de eso y usando los tres puntos siguientes tenemos que:

$$|(LoL \cap AoE) - (LoL \cap AoE \cap C)| = 6 - 4 = 2$$
$$|(AoE \cap Counter) - (LoL \cap AoE \cap C)| = 6 - 4 = 2$$
$$|(Counter \cap LoL) - (LoL \cap AoE \cap C)| = 7 - 4 = 3$$

Finalmente, sabiendo que $|LoL| = 22$, podemos calcular $|LoL - (AoE \cup Counter)| = 22 - (2+4+3) = 13$. Análogamente, usando que $|AoE| = 18$ obtenemos $|AoE - (LoL \cup Counter)| = 18 - (2+4+2) = 10$. Además, como $|Counter| = 19$, tenemos que $|Counter - (LoL \cup AoE)| = 19 - (2+4+3) = 10$.

El Diagrama de Venn resultante es:



1. La cantidad de personas que contestaron el formulario pero no seleccionaron ningún juego es $|\mathcal{U}| - |LoL \cup AoE \cup C| = 45 - (13 + 10 + 10 + 3 + 2 + 2 + 4) = 1$
2. De los que no juegan al Age of Empires, los que sí juegan al Counter son $3 + 10 = 13$.
3. Los que no juegan Counter, pero si juegan al LoL son $13 + 2 = 15$.
4. Los que juegan solamente al LoL son 13.

Ejercicio 3:
Una empresa de tecnología desarrolló un nuevo sensor de temperatura que convierte la temperatura medida en grados Celsius (°C) en una señal digital, representada por un número real. La empresa definió la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ para este propósito, donde la señal digital y se calcula a partir de la temperatura x en grados Celsius mediante la siguiente fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 136{,}575$$

El equipo de ingeniería quiere que la señal de salida sea única para cada temperatura de entrada, y que sea posible obtener señales de salida que correspondan a cualquier número real. Teniendo en cuenta que no existen en el universo temperaturas iguales o inferiores a $-273{,}15$°C:

a) Determine si la función puede asignar la misma señal digital a diferentes temperaturas. Justifique su respuesta.

b) Evalúe si es posible que, para cualquier valor de señal digital, exista una temperatura correspondiente que la produzca. Justifique su respuesta.

Resolución:

a) Para saber si la función puede asignar un mismo valor a distintas temperaturas debemos verificar su inyectividad.

   Para esto, consideramos dos temperaturas x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$f(x_1) = f(x_2)$$

   Sustituyendo la expresión de f:

$$\frac{1}{2}x_1 + 136{,}575 = \frac{1}{2}x_2 + 136{,}575$$

   Restamos 136,575 de ambos lados de la ecuación:

$$\frac{1}{2}x_1 + 136{,}575 = \frac{1}{2}x_2 + 136{,}575$$

   Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 2:

$$x_1 = x_2$$

   Dado que $x_1 = x_2$, concluimos que la función es inyectiva, es decir, no asigna la misma señal digital a diferentes temperaturas.

b) Para decidir si es posible que para cualquier valor de señal digital deseada exista una temperatura correspondiente que la genere, se debe verificar que la función sea sobreyectiva. Para ello, consideramos un valor arbitrario de la señal digital $y \in \mathbb{R}^+$ y verificamos si existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

   Sustituyendo la expresión de f:

$$\frac{1}{2}x + 136{,}575 = y$$

Restamos 136,575 de ambos lados de la ecuación:

$$\frac{1}{2}x = y - 136{,}575$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 2:

$$x = 2y - 273{,}15$$

Dado que y puede ser cualquier número real positivo, $x = 2y - 273{,}15$ siempre tiene una solución en $\mathbb{R}$ mayor a 273,15. Por lo tanto, para cualquier valor de la señal digital deseada y, existe una temperatura x correspondiente.

Concluimos que la función es sobreyectiva, es decir, cubre todo el rango de posibles valores de señal digital.

Ejercicio 4:
Jaimito empezó a entrenar natación, sabiendo nadar 5 estilos: Crawl, Espalda, Pecho, Mariposa y Perrito. En clase, el profesor le indica una cantidad de largos de pileta que tiene que nadar, y qué estilo utilizar en cada uno. Cuando el profesor le dice estilo "libre", Jaimito puede escoger cualquiera de los estilos que sabe.

1. Si el profesor le indica que nade 20 largos estilo libre, ¿de cuántas formas distintas podría nadarlos Jaimito?
2. Si el profesor le dice que nade 7 largos, pero que los largos pares los nade en Crawl, y los impares los nade Mariposa o Perrito. ¿De cuántas formas distintas podría nadarlos Jaimito?
3. Si el profesor le pide que haga 3 series de 4 largos cada una, con la restricción de que en una serie no puede repetir estilos al nadar cada largo. ¿De cuántas formas distintas podría nadarlos Jaimito?

Resolución:
a) Son 20 largos, entonces se tienen 20 casillas a rellenar, una por largo.

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

Como Jaimito sabe 5 estilos, entonces para cada uno de los 20 largos tiene 5 opciones,

$$\underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}$$

Luego, multiplico y obtengo la respuesta final: 5^{20}

b) Son 7 largos, entonces se tienen 7 casillas a rellenar, una por largo.

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

En las casillas pares solo tiene una opción para nadar mientras que en las impares tiene dos opciones,

$$\underline{2}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{2}$$

Luego multiplico y se obtiene la respuesta final: 2^4

c) 1 serie tiene 4 largos. Si quiere nadar una serie sin repetir estilos, equivale a tomar conjuntos de 5C4 formas diferentes, esto es: $\frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$. Otro razonamiento válido es que como Jaimito sabe 5 estilos, basta con elegir cuál de todos no va a usar en cada serie, y listo. Luego, dado que son 3 series, planteamos 3 casillas a rellenar (una por serie), y en cada una tiene 5C4=5 opciones,
$\underline{5}\ \underline{5}\ \underline{5}$
Esto nos dice que Jaimito tiene 5^3 formas de seleccionar los estilos que va a nadar. Ahora falta contar los diferentes ordenes en el que los nada.
Para cada serie, tiene 4 largos, entonces como no puede repetir, tiene 4! formas de nadar cada serie. Y son 3 series donde cada una puede elegir entre 5 estilos, se tiene la solución final como
$\underline{5 * 4!}\quad \underline{5 * 4!}\quad \underline{5 * 4!}$
Por lo tanto la respuesta final es $(5 * 4!)^3$

Ejercicio 5:
Se tiene un arreglo N = [2, 3, 6, 4, 9, 8, 7, 2, 2, 9] con las notas obtenidas en el último parcial de TMC. Se extrae un elemento del arreglo N al azar, y se almacena en la variable *Nota*. Determinar:

1. La probabilidad de que el valor de *Nota* corresponda a un examen promocionado.
2. La probabilidad de que el valor de *Nota* corresponda a un examen promocionado si se sabe que está aprobado.
3. La probabilidad de que el valor de *Nota* corresponda a un examen desaprobado.
4. La probabilidad de que el valor de *Nota* corresponda a un examen aprobado y promocionado.
5. La probabilidad de que el valor de *Nota* sea un 10 o un 7.

Resolución:
Para resolver el ejercicio, en primer lugar clasificamos las notas:

- Notas promocionadas (≥ 7): 9, 8, 7, 9
- Notas aprobadas (≥ 4 y < 7): 6, 4
- Notas desaprobadas (< 4): 2, 3, 2, 2

Número total de notas: 10
Teniendo en cuenta esto, resolvemos cada uno de los incisos.

1.
$$P(\text{Promocionado}) = \frac{\text{Número de notas promocionadas}}{\text{Número total de notas}} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

2. En este caso queremos calcular una probabilidad condicional. Primero, calculamos la probabilidad de estar aprobado (incluye aprobado y promocionado):
$$P(\text{Aprobado}) = \frac{\text{Número de notas aprobadas y promocionadas}}{\text{Número total de notas}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$
Luego, usamos la fórmula de probabilidad condicional:
$$P(\text{Promocionado} \mid \text{Aprobado}) = \frac{P(\text{Promocionado} \cap \text{Aprobado})}{P(\text{Aprobado})} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$$

3.
$$P(\text{Desaprobado}) = \frac{\text{Número de notas desaprobadas}}{\text{Número total de notas}} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

4. Sabemos que todos los exámenes promocionados están también aprobados, por lo que:
$$P(\text{Aprobado y Promocionado}) = P(\text{Promocionado}) = 0{,}4$$

5. Entre los exámenes no hay ninguna nota de 10, solo hay una nota de 7.
$$P(\text{Nota} = 10 \text{ o Nota} = 7) = P(\text{Nota} = 10) + P(\text{Nota} = 7) = 0 + \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Ejercicio 6:
Determinar la solución, si existe, para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

Resolución:

Podrían resolver este sistema usando cualquiera de los métodos que vimos en clase. Elegimos acá explicárselos usando el método matricial, para que les quede otro ejemplo.

Primero expresamos el sistema en forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Llamamos a la matriz de coeficientes A, al vector de incógnitas $\mathbf{x}$ y al vector constante o de carga $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Primero, verificamos que el determinante de A es distinto de cero:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 3(4) = -2 - 12 = -14 \neq 0 \tag{3}$$

Dado que el determinante es distinto de cero, la matriz A es invertible. Calculamos entonces la matriz inversa A^{-1}, utilizando la fórmula que vimos en clase:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ahora, resolvemos el sistema utilizando la matriz inversa:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Multiplicamos las matrices:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \cdot 5 + \frac{3}{14} \cdot 1 \\ \frac{2}{7} \cdot 5 - \frac{1}{7} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} + \frac{3}{14} \\ \frac{10}{7} - \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{14} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix} \tag{6}$$

La solución del sistema es:

$$(x, y) = \left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7} \right) \tag{7}$$