Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Primer Recuperatorio - 2024 - Tema 1

Nombre y apellido:
DNI:
Nro de hojas entregadas:

Importante: todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1: Determinar si la siguiente proposición lógica es tautología, contradicción o contingencia:

$$[(\sim P \wedge Q) \vee (R \to S)] \to (S \leftrightarrow P)$$

Resolución:

Este ejercicio puede resolverse realizando la tabla de verdad. Aunque aquí debajo les dejamos la tabla de verdad completa para que la verifiquen, fíjense que ya con las primeras dos líneas de la tabla nos alcanza para determinar que es contingencia. Cualquiera de las dos resoluciones (haciendo la tabla completa o planteando un par de valores) es válida.

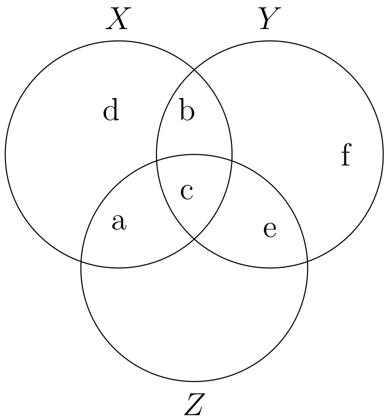
P	Q	R	S	¬P ∧ Q	R → S	(¬P ∧ Q) ∨ (R → S)	S ↔ P	[(¬P ∧ Q) ∨ (R → S)] → (S ↔ P)
F	F	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	V	V	F	V	V	V	V

Ejercicio 2: Represente los siguientes conjuntos utilizando diagramas de Venn, y resuelva luego los incisos:

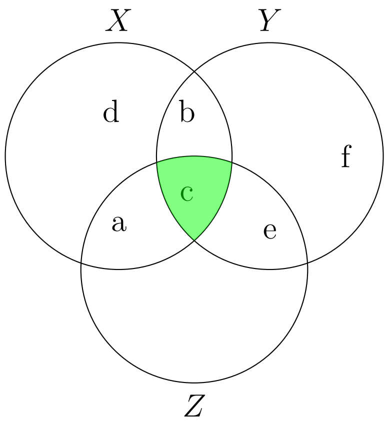
$$X = \{a, b, c, d\}, Y = \{b, c, e, f\}, Z = \{a, c, e\}$$

1. Indicar en el diagrama el conjunto $X \cap Y \cap Z$.
2. ¿Cuál es el cardinal de $Z - (X \cup Y)$?
3. ¿Son el mismo conjunto $X \cap (Y \cup Z)$ y $(X \cap Y) \cup Z$?

Resolución:



1. $X \cap Y \cap Z = \{c\}$



2.

$$X \cup Y = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$Z - (X \cup Y) = \{a, c, e\} - \{a, b, c, d, e, f\} = \emptyset$$

Entonces el cardinal de $Z - (X \cup Y)$ es 0.

3.

$$Y \cup Z = \{a, b, c, e, f\}$$
$$X \cap (Y \cup Z) = \{a, b, c\}$$
$$(X \cap Y) \cup Z = \{b, c\} \cup \{a, c, e\} = \{a, b, c, e\}$$

Por lo tanto, $X \cap (Y \cup Z)$ y $(X \cap Y) \cup Z$ no son el mismo conjunto.

Ejercicio 3: Se tiene un motor conectado al pistón de una bomba de agua. La altura del pistón y (expresada en centímetros), está descripta por la siguiente función del tiempo t (expresado en segundos):

$$y(t) = 3 \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Si cada vez que la altura del pistón baja hay un aumento de presión que sube un litro de agua, determine:

a) ¿Cada cuántos segundos sube un litro de agua?

b) ¿Cuántos centímetros puede recorrer el pistón como máximo?

1. Para determinar cuanto tarda la bomba en hacer un ciclo completo, debemos calcular el período. El período de una función seno de la forma $\sin(bt + c)$ es $\frac{2\pi}{b}$. En nuestra función, $b = 2$:

$$\text{Período} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

   Por lo tanto, la bomba hace un recorrido completo cada π segundos.

2. Para medir el recorrido, podemos ver la imagen de la función. Sabemos que la función seno oscila entre -1 y 1. Como esta está multiplicada por 3, la imagen es [-3,3]. Restando el mínimo con el máximo: $3 - -3 = 6$.

   Otra forma de calcularlo es viendo la amplitud de la función. Como la función tiene amplitud 3, sabemos que sube y baja 3 cm en relación a su media, por lo tanto, el recorrido total es $2 * 3 = 6$ cm.

Ejercicio 4: A cada dispositivo que se conecta a una red se le asigna una dirección (única), que consiste en un código de 3 números "n_1:n_2:n_3", donde cada $n_i \in [0, 255]$ es un número natural (ej. dos equipos A y B pueden tener direcciones "129:21:203¿ "0:0:255". Resuelva:

a) ¿Cuántas computadoras pueden conectarse a la red? (cuántas direcciones diferentes posibles se pueden generar)

b) ¿Cuántas direcciones hay con n_1 y n_3 pares? (recordar que el cero es par)

c) ¿Cuántas direcciones hay con n_1, n_2 y n_3 diferentes entre sí?

d) ¿Cuántas direcciones hay con n_1, n_2 y n_3 iguales entre sí?

Resolución:

a) Se tienen 3 casillas a completar, cada una representa los posibles valores de $n1$, $n2$ y $n3$
$\underline{256}$ $\underline{256}$ $\underline{256}$
Por lo tanto, se pueden conectar 256^3 computadoras a la red.

b) Dado el rango [0,255] de valores posibles para $n1$ y $n3$, si sólo pueden ser pares se tienen 128 valores posibles para cada uno, luego las direcciones posibles serían
$\underline{128}$ $\underline{256}$ $\underline{128}$
Por lo tanto, las direcciones posibles que cumplen esta condición son 256×128^2

c) En este caso, cada vez que se asigna un valor de n, no se puede repetir, por eso los valores posibles van cambiando de casilla en casilla $\underline{256}$ $\underline{255}$ $\underline{254}$
Entonces, la respuesta es $256 \times 255 \times 254$

d) En este caso, si tienen que ser iguales, una vez que se fijó n_1, los valores de n_2 y n_3 quedan definidos, luego $\underline{256}$ $\underline{1}$ $\underline{1}$
Entonces, la respuesta es $256 \times 1 \times 1 = 256$

Ejercicio 5: Si se lanzan dos dados y se observa su valor:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el valor de ambos dados sea igual?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los valores de ambos dados sea par?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el mayor de los dos valores sea un 5?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que el valor de uno de los dados sea un 1, si se sabe que el del otro también es un 1?

Resolución:

1. Hay 6 combinaciones posibles donde los dos dados son iguales: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6).

   El número total de posibles resultados al lanzar dos dados es $6 \times 6 = 36$. Calculamos la probabilidad como:
   $$P = \frac{\text{Casos exitosos}}{\text{Casos totales}}$$
   $$P(\text{Iguales}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

2. Las combinaciones para que la suma sea par pueden ser: - (par, par) - (impar, impar)

   Hay 9 combinaciones para (par, par) y 9 combinaciones para (impar, impar), lo que da un total de 18 combinaciones posibles donde la suma es par. Nuevamente, calculamos la probabilidad como:
   $$P = \frac{\text{Casos exitosos}}{\text{Casos totales}}$$
   $$P(\text{Suma par}) = \frac{9+9}{36} = \frac{18}{36} = 0{,}5$$

3. Para que el mayor de los dos dados sea un 5, las combinaciones posibles son: - (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5) - (1,5), (2,5), (3,5), (4,5)

   Esto da un total de 9 casos exitosas, sobre un total de 36 casos totales.
   $$P(\text{Mayor es 5}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

4. En este caso queremos calcular una porobabilidad condicional: la probabilidad de que el segundo dado sea 1, dado que el otro dado es un 1. Nuestro caso exitoso es el (1,1). Dado que sabemos que uno de los dados es un 1, tenemos 6 casos totales: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6). Luego calculamos:
   $$P(\text{Uno es 1} \mid \text{Otro es 1}) = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

Ejercicio 6: Un arquitecto está diseñando un marco para soportar una estructura, formada por vigas. Estas vigas deben colocarse de tal manera que sean ortogonales entre sí, para garantizar la estabilidad de la estructura. Si las direcciones de las vigas están dadas por los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$:
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

determinar si están siendo colocadas correctamente para garantizar la estabilidad de la estructura.

Resolución:
Para verificar si las vigas están bien colocadas, debe cumplirse lo que busca el arquitecto: que ambas vigas sean ortogonales entre sí. Esto es, que los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ sean ortogonales. Para verificarlo, recordemos que tenemos un vínculo entre el producto escalar (o producto punto o producto interno) y el ángulo θ entre dos vectores:

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos\theta.$$

Pero además, sabiendo que $\cos\theta = 0$ cuando $\theta = 90$ (es decir, cuando ambos vectores son ortogonales entre sí), entonces lo único que necesitamos es calcular el producto escalar entre ambos vectores y ver si es distinto de cero. Luego:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 3 - 2 - 4 = -3.$$

Entonces, como el producto es distinto de cero, ambos vectores no son ortogonales, por lo que las vigas no están siendo colocadas correctamente.