Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Parcial - 2022 - Tema 1

Nombre y apellido:
DNI:
Nro de hojas entregadas:

Ejercicio 1:
Dadas las siguientes proposiciones lógicas:

1. $p \lor q \lor r \lor s \lor t$
2. $p \land q \land r \land s \land t$
3. $p \lor q \land r \land s \lor t$
4. $p \leftrightarrow q \lor r \leftrightarrow t$
5. $(p \leftrightarrow q) \lor (r \leftrightarrow t)$
6. $p \leftrightarrow (q \lor r) \leftrightarrow s$

(a) Indicar cuáles son tautologías, cuáles contradicción y cuáles contingencias.

(b) Para las contingencias, indicar el valor de verdad cuando las variables tienen los siguientes valores: $p = V$, $q = F$, $r = V$, $s = F$, $t = F$.

Resolución:
(a) Muchos pueden haberse tirado a resolver haciendo tablas de verdad. No estaba mal, pero tengan en cuenta que en lugar de hacer una tabla gigante, bastaba con observar que en algún punto se obtuvieran dos valores de verdad diferentes. Cuando eso ocurriera, ya podían detectar que se trataba de una contingencia!

La otra alternativa (mucho más sencilla y rápida) era analizar las proposiciones, estudiar cuándo podían dar verdaderas y cuanto falsa y justificar la respuesta dando esos dos ejemplos para cada una de las expresiones. Así:

1. Es una contingencia porque, por ejemplo, si $p = q = r = s = t = F$, es falsa (todas son falsas, luego el O lógico es falso), mientras que si cualquier variables es verdadera, la proposición es verdadera (con al menos una verdadera, el O lógico es verdadero).

2. Es una contingencia porque, si todas las variables son verdaderas, será verdadera (porque el Y lógico nos demanda que todas sean verdaderas para ser verdadero), mientras que si al menos una fuera falsa, sería falsa (porque basta una sola falsa para hacer falso al Y lógico).

3. En este caso, deben tener en cuenta la precedencia de operadores y además la asociatividad a izquierda. Como el operador $\land$ se resuelve antes que el $\lor$, necesitamos separar en términos la expresión. Luego, necesitamos también asociar términos de izquierda a derecha, obteniendo:

$$p \lor q \land r \land s \lor t \equiv p \lor (q \land r \land s) \lor t \equiv (p \lor (q \land r \land s)) \lor t.$$

   En la expresión resultante podemos ver que si $t = V$ ya la proposición será verdadera, y que si todas son falsas será falsa, con lo cual es una contingencia.

4. Nuevamente tenemos que tener en cuenta la precedencia de operadores y la asociatividad a izquierda. Acá la operación $\leftrightarrow$ actúa como separadora en términos, con lo cual la expresión resultante nos queda de la siguiente forma:

$$p \leftrightarrow q \lor r \leftrightarrow t \equiv p \leftrightarrow (q \lor r) \leftrightarrow t \equiv (p \leftrightarrow (q \lor r)) \leftrightarrow t.$$

Si recordamos la tabla de verdad del sí y solo sí, sabremos que será verdadera cuando antecedente y consecuente tomen diferentes valores. En el caso del primer paréntesis, podemos asumir $p = V$ y que $q = r = F$ (o $p = V$ y que $q = r = V$) y obtendríamos un antecedente falso (o un antecedente verdadero). Luego, cuando $t = V$ (o $t = F$, para el otro ejemplo), tendríamos como resultado un valor de verdad falso, mientras que si $t = F$ obtendríamos un resultado verdadero, por lo que la proposición es una tautología.

5. Nuevamente, podemos plantear el ejemplo $p = q = V$, y ya sabremos que la expresión es verdadera en ese caso (porque involucra un O lógico), o que $p = r = V$ y $q = t = F$, y entonces tendríamos ambos términos del O lógico falsos y el resultado dería falso. Con lo cual, estamos frente a otra contingencia.

6. Esta expresión es equivalente a la del punto (4), sólo que ya nos da los paréntesis puestos. Con lo cual, también es una contingencia.

En resumen: la respuesta correcta es que todas son contingencias, justificando cada una con algún ejemplo correcto (y no con la definición de contingencia).

(b) El ejercicio nos pide simplemente que tomemos aquellas proposiciones que hayamos identificado como contingencias (es decir, todas) y que las evaluemos reemplazando las variables proposicionales por los valores de verdad dados. Los resultados son:

1. La respuesta es V, ya que:

$$p \vee q \vee r \vee s \vee t \equiv (((p \vee q) \vee r) \vee s) \vee t \equiv (((V \vee F) \vee V) \vee F) \vee F \equiv V$$

2. La respuesta es F, ya que:

$$p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \equiv (((p \wedge q) \wedge r) \wedge s) \wedge t \equiv (((V \wedge F) \wedge V) \wedge F) \wedge F \equiv = F$$

3. La respuesta es V, ya que:

$$p \vee q \wedge r \wedge s \vee t \equiv (p \vee (q \wedge r \wedge s)) \vee t \equiv (V \vee (F \wedge V \wedge F)) \vee F \equiv V$$

4. La respuesta es F, ya que:

$$p \leftrightarrow q \vee r \leftrightarrow t \equiv (p \leftrightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow t \equiv (V \leftrightarrow (F \vee V)) \leftrightarrow F \equiv (V \leftrightarrow V) \leftrightarrow F \equiv V \leftrightarrow F \equiv F$$

5. La respuesta es F, ya que:

$$(p \leftrightarrow q) \vee (r \leftrightarrow t) \equiv (V \leftrightarrow F) \vee (V \leftrightarrow F) \equiv F \vee F \equiv F$$

6. La respuesta es F porque esta expresión es equivalente a la que resolvimos en el inciso (4), sólo que reemplazando $t = s$.

En muchos casos ocurrió que, en lugar de responder "verdadero.º "falso", contestaban diciendo "tautología.º çontradicción". Esto es incorrecto: el valor de verdad (que es lo que pide el ejercicio) es "verdadero.º "falso", "tautología.º çontradicción"son naturalezas de ciertas proposiciones lógicas para las cuales, sea cual sea la entrada, la respuesta es verdadera o falsa, respectivamente. Recuerden no mezclar ambas cosas!

Ejercicio 2
Jaimito trabajó en el Censo Nacional 2022 analizando parte de los resultados. Su jefe le pasó los siguientes datos: de un total de 45 millones de hogares censados, un total de 14 millones albergan a 4 personas, un total de 18 millones son viviendas tipo casa, y un total de 19 millones alquilan la vivienda. Además, le informó que:

- 4 millones de hogares censados declararon vivir en una casa alquilada y albergar 4 personas.
- 6 millones de hogares censados declararon vivir en una casa y albergar 4 personas.
- 7 millones de hogares censados donde viven 4 personas, declararon alquilar el inmueble.
- 6.5 millones de hogares censados fueron casas alquiladas.

Construir un diagrama de Venn representando los datos que recibió Jaimito de su jefe, completar los datos faltantes y responder:

(a) ¿Cuántos hogares censados no son casas?

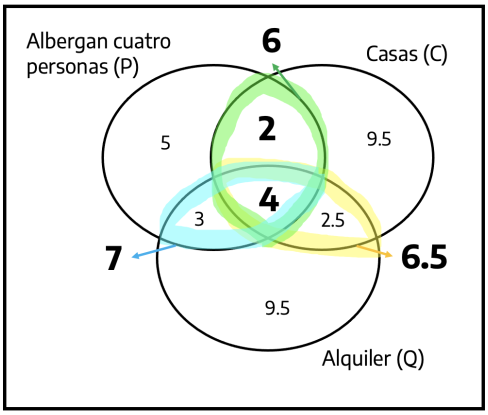
(b) ¿Cuántos hogares censados que no son casa, alquilan la vivienda?

(c) ¿Cuántos hogares censados que alquilan la vivienda alberga 4 personas?

(d) ¿Cuántos hogares censados no son casas, no alquilan y albergan una cantidad de personas diferente de 4?

Resolución
Para poder responder este ejercicio, necesitamos sí o sí construir un diagrama de Venn que nos permita entender la distribución de cantidades de personas censadas que cumplen tal o cual condición. Y para poder armarlo, necesitamos interpretar correctamente el enunciado.

Lo primero que debemos identificar es que las unidades que vamos a contar son "hogares censados", y que esos hogares pueden ser de 3 tipos: pueden ser casas (C), pueden albergar a cuatro personas (P) o ser viviendas de alquiler (Q). Fíjense, además, que un hogar censado puede ser una o más cosas a la vez: puede ser una casa que albergue a cuatro personas, o no ser una casa pero ser una vivienda de alquiler que albergue a cuatro personas, o incluso no ser ni una casa, ni albergar a cuatro personas ni ser una vivienda de alquiler.



Entendiendo esto que acabamos de analizar, seguimos el ejercicio analizando bien los datos que tenemos, y distribuyéndolos en un diagrama de Venn como el de la figura. En ella les dejamos marcadas en negrita las cantidades que son dato del enunciado, y en letra más pequeña los valores que tenían que ir completando ustedes. Vamos analizándolos uno por uno:

- Sabemos que 4 millones de hogares son una casa que además es alquilada y alberga a cuatro personas. Esto significa que 4 millones cumplen con las tres condiciones a la vez, y por ende están ubicadas en la intersección de los tres conjuntos. Por ello colocamos un 4 en el centro del diagrama.

- Nos indican que 6 millones de hogares son una casa que alberga a cuatro personas. Es decir, en la intersección entre C y P tenemos 6 millones de personas (región resaltada en verde en el dibujo). Pero observen que ya sabemos que, de esa cantidad, hay 4 millones que además alquilan, con lo cual si queremos completar la otra porción de la intersección debemos calcular 6 - 4 = 2 millones de personas, y colocarlo allí.
- Igual que en el caso anterior, sabemos que hay 7 millones de hogares en los que viven cuatro personas y que alquilan. Corresponden entonces al área señalada en celeste, y nuevamente tenemos que calcular la diferencia en este caso 7 - 4 = 3 millones para saber cuántos colocar en el área vacía de esa intersección.
- De la misma forma que antes, tenemos el dato de que hay 6.5 millones de hogares que son casas que se alquilan (área amarilla del diagrama). Calculamos la diferencia 6.5 - 4 = 2.5 millones, y esa es la cantidad que colocamos en el área vacía.
- Ahora recuperamos el dato de tener 14 millones de hogares que albergan a cuatro personas. Si a esos 14 millones les restamos los 2 millones que son casas pero no se alquilan + los 4 millones que son casas y se alquilan + los 3 millones que se alquilan y no son casas, obtenemos que en el área vacía que nos queda corresponde colocar 5 millones.
- Con el dato de las 18 millones de casas, repetimos el mismo procedimiento anterior, restándole las 2 millones de casas que albergan cuatro personas y no se alquilan, las 4 millones que albergan a cuatro personas y se alquilan y las 2.5 millones que no albergan a cuatro personas y se alquilan, y obtenemos los 9.5 millones de hogares que nos faltan para el gráfico.
- Finalmente, utilizando el dato de los 19 millones de alquileres, repetimos el proceso anterior y obtenemos los 9.5 que nos faltan.
- Si sumamos todos los valores que tenemos en el Venn, obtenemos:

  $$5 + 2 + 9{,}5 + 3 + 4 + 2{,}5 + 9{,}5 = 35{,}5\text{millones}$$

  que son los hogares que cumplen al menos alguna de las 3 condiciones que establecimos.
- Además, sabemos que tenemos un total de 45 millones de hogares censados.

Con el Venn construido, ahora es relativamente sencillo responder las demás preguntas:

(a) ¿Cuántos hogares censados no son casas? Simplemente al total de hogares censados (45 millones) le tenemos que restar las casas (que son 18 millones, según el enunciado). Luego: 45 millones - 18 millones = 27 millones.

(b) ¿Cuántos hogares censados que no son casa, alquilan la vivienda? Tenemos que sumar las porciones del conjunto Q que no están en la intersección con C. Es decir, 9.5 + 3 = 12.5 millones.

(c) ¿Cuántos hogares censados que alquilan la vivienda alberga 4 personas? Tenemos que sumar acá las porciones que están en la intersección entre P y Q, es decir 3 + 4 = 7 millones.

(d) ¿Cuántos hogares censados no son casas, no alquilan y albergan una cantidad de personas diferente de 4? Estos serán los elementos del universo U de censados que no figuran en ninguno de los tres conjuntos que analizamos. Sabemos del análisis que hicimos antes que tenemos 35.5 millones que cumplen alguna de las condiciones, y 45 millones en total de censados. Luego, 45 - 35.5 = 9.5 millones es la respuesta.

Ejercicio 3
¿Cuántos nombres de usuarios diferentes de longitud 11 se puede formar teniendo en cuenta que los primeros 5 caracteres pueden ser sólamente letras (de un total de 27), luego se coloca un ", y posteriormente 5 caracteres más que pueden ser sólamente dígitos (de un total de 10)?

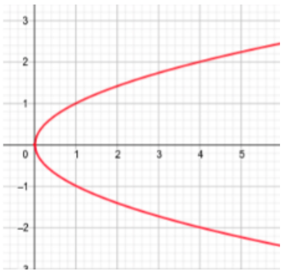
Resolución
Queremos construir nombres de usuario de longitud 11 (ni más chicos ni más grandes, todos de la misma longitud, 11), en los cuales el caracter del centro está fijo y es ". Esto significa que el caracter del centro no se toca, y que no nos permite generar nuevas combinaciones. Con lo cual podemos simplemente trabajar como si se tratara de nombres de longitud 10, en los cuales la primera mitad son letras (de un total de 27) y la segunda mitad son números (de un total de 10).

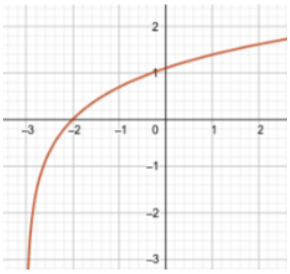
Tenemos entonces, para la primera mitad: $27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 27 = 27^5$ prefijos posibles, mientras que para la segunda mitad tenemos: $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ sufijos posibles. Como los prefijos se combinan con los sufijos para construir los nombres de usuario, esto nos da un total de $27^5 \times 10^5$ nombres diferentes.

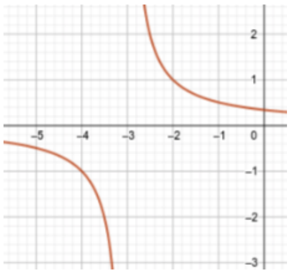
Algunas cosas que no tenía sentido hacer o responder:

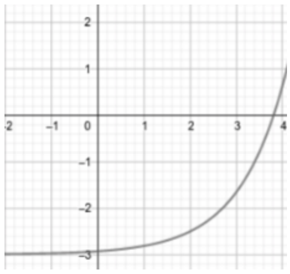
- Sumar estas cantidades. Estamos combinando todas las posibilidades de prefijos por todas las posibilidades de sufijos, con lo cual teníamos que multiplicar.
- Calcular el número combinatorio de algo. No estamos generando subconjuntos de elementos de un tamaño determinado, estamos armando cadenas de caracteres.
- Calcular permutaciones. No estamos ordenando cosas, estamos calculando todas las posibles cadenas de caracteres de longitud fija.
- Usar un factorial. Cada vez que elegimos un caracter no estamos anulándolo para que no se pueda usar, en absoluto! Ese caracter se puede volver a usar en la siguiente posición!

Ejercicio 4
Dadas las siguientes gráficas, responder:


(a)


(b)


(c)


(d)

1. ¿Cuál no representa a una función? ¿Por qué?
2. Para las que sí son funciones:
   (a) Identificar y justificar cuál de las siguientes fórmulas les corresponde:
      - $h(x) = \ln(x+3)$
      - $g(x) = \frac{1}{x+3}$
      - $f(x) = \frac{e^x}{15} - 3$

   (b) Determinar cuál es el dominio de cada una, justificando la respuesta.

Resolución
1. La opción (a) no es una función, porque a un mismo valor de x le corresponde en algunos casos más de un valor de y (por ejemplo, para $x = 1$ le corresponde $y = 1$ o $y = -1$. Esto contradice la definición de función, que establece que a cada valor de entrada x le corresponde uno y sólo un valor de y.

2. Resolveremos gráfica a gráfica:

- La gráfica (b) corresponde a $h(x)$, y podemos darnos cuenta porque el perfil es el de una función logarítmica, y porque además tiene una asíntota vertical en -3, que es el valor que vuelve 0 al argumento del logaritmo natural en $h(x)$, para el cual la función no está definida. Además, vemos que el dominio de la función es: $\{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$.
- La gráfica (c) corresponde a $g(x)$, ya que vemos que el perfil de la curva es el de una función racional con una asíntota vertical en -3, que es el valor que hace 0 al denominador y para el cuál la función no está definida. En este caso, el dominio de la función es: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\}$.
- La gráfica (d) corresponde a $f(x)$, y nos damos cuenta porque su perfil es el de una exponencial que está desplazada 3 unidades hacia abajo en el eje y. También podemos calcular la ordenada al origen reemplazando $x = 0$, y veremos que está ubicada en el punto $-3 + \frac{1}{15}$ (muy cerca de -3). Para esta función, el dominio son todos los reales, es decir $\mathbb{R}$.

Ejercicio 5
La bolsa de Surtido Bagley trae 10 anillitos rosas, 10 anillitos blancos, 10 anillitos celestes, 20 bocas de dama, 10 mini-Melba, 5 Pepito's y 35 pepas. Responder:

1. Si saco una galletita al azar, sin mirar el contenido de la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de que me toque una mini-Melba?

2. Si saco una galletita al azar, sin mirar el contenido de la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de que me toque un anillito?

3. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una galletita Pepito's si sé que antes alguien sacó todas las pepas?

Resolución
Tenemos una bolsa con un total de 100 galletitas (sale de sumar las cantidades de los distintos tipos de galletitas que tenemos). Luego, sabiendo esto:

1. A : extraer una mini-Melba. Sabemos que $|A| = 10$, y que el total de galletitas que tenemos es 100. Luego: $P(A) = 10/100$.

2. B : extraer un anillito. Sabemos que $|B| = 10 + 10 + 10 = 30$ anillitos, porque tenemos que contar todos los rosas, blancos y celestes. Luego: $P(B) = 30/100$.

3. Acá tenemos información de que alguien se tomó el trabajo de vaciar de pepas el paquete, por lo que el ejercicio nos está pidiendo una probabilidad condicional. Para resolverlo, de todas formas, basta con aplicar la definición de probabilidad. En lugar de tener 100 galletitas, tenemos ahora $100 - 35 = 65$ galletitas. Luego, definiendo C : extraer una Pepito's, obtenemos $P(C) = 5/65 = 1/13$.

Ejercicio 6
Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizar, de ser posible, las siguientes operaciones. En caso de no ser posible, indicar las razones por las que las soluciones no están definidas:

(a) $AB =$

(b) $AB^T =$

(c) $BA + 3I =$

(d) $-A^T I =$

(e) $CC^T =$

Resolución

(a) Podemos hacer esta operación porque $\dim(A) = 3 \times 2$ y $\dim(B) = 2 \times 3$, con lo cual el número de columnas de A coincide con el número de filas de B. El resultado va a ser una matriz de dimensiones 3×3:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & -5 & 5 \\ 5 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

(b) No podemos hacer esta operación porque al transponer B, $\dim(B^T) = 3 \times 2$. Luego, ocurre que la cantidad de columnas de A no es igual a la cantidad de filas de B^T, lo que no nos permite multiplicar las matrices.

(c) Podemos hacer esta operación tranquilamente! Acá, vemos que $\dim(B) = 2 \times 3$ y que $\dim(A) = 3 \times 2$, por lo que el número de columnas de B coincide con el de filas de A y el resultado del producto será una matriz de dimensiones 2×2. Luego, esa matriz podrá sumarse con la matriz $3I$ sin problemas. El resultado de la operación es:

$$BA + 3I = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Esta tampoco podremos realizarla porque $\dim(A^T) = 2 \times 3$, y $\dim(I) = 2 \times 2$, con lo cual el número de columnas de A^T difiere del de filas de I, lo que nos bloquea la posibilidad de multiplicarlas.

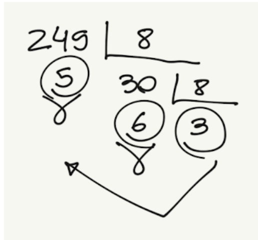
(e) Esta sí podemos realizarla, porque $\dim(C) = 3 \times 1$ y $\dim(C^t) = 1 \times 3$, con lo que el resultado será una matriz de 3×3 tal como:

$$CC^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7
1. Convertir el número 245_{10} a sistema octal.
2. Convertir el número 100101_2 a sistema decimal.

Resolución

1. Para pasar de decimal a octal, tenemos que dividir el número 245 por 8 hasta que el cociente sea menor a 8, y luego formar el número en el sistema octal concatenando el último cociente con los restos desde el de la última división al de la primera (ver figura). El resultado, entonces, es 365_8.



2. Para pasar de binario a decimal, construimos la suma de productos:

$$1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 32 + 4 + 1 = 37_{10}.$$