Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Examen Parcial - 2025 - Tema 1

Nombre y apellido: **DNI:** **Número de hojas entregadas:**

1. ¿Es verdad que la negación del operador XOR es equivalente al operador Bi-Condicional?
Justifique su respuesta

2. Dado el conjunto D={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, defina por extensión los conjuntos A, B, y C tales que se cumplan las siguientes restricciones **simultáneamente**.

- A, B, y C sean disjuntos entre sí
- $A \cup B \cup C = D$
- A, B, y C tengan la misma cardinalidad
- $\forall x \in A, \neg\exists y \in B, x>y$
- $\forall y \in B, \neg\exists z \in C, y>z$

3. En una pequeña ciudad serrana, la temperatura a lo largo del día en verano puede aproximarse con la siguiente función:

$$T(t) = 5\cos((\pi/12)(t - 15)) + 25$$

Donde: T(t) es la temperatura en grados Celsius a la hora t del día. Además t está en el intervalo [0,24), siendo t=0 la medianoche. Responda:

a) ¿Cuáles son las temperaturas máximas y mínimas?
b) ¿Cuál es la amplitud térmica?
c) ¿Qué representa el valor 25 en la función?
(Del punto de vista de la función matemática y del contexto del problema físico)
d) ¿A qué hora del día se alcanza la temperatura máxima? ¿Y la mínima?

4. En un videojuego de rol, un jugador puede crear su personaje eligiendo entre distintas opciones de personalización. Estas son: tipos de raza {humano, elfo, orco}, clases de personaje {guerrero, mago, arquero, ladrón}, tipos de mascota inicial {dragón o lobo}.

a) ¿Cuántos personajes distintos se pueden crear si se elige una sola opción de cada categoría?
b) Si además el jugador puede elegir una de 5 armas iniciales, ¿cuántas combinaciones distintas de personaje se pueden generar ahora?
c) Si el nombre del personaje tiene que tener entre 2 y 6 caracteres válidos, ¿cuántos nombres distintos de personajes soporta el juego? Nota, los caracteres válidos son las 27 letras del abecedario y se distinguen mayúsculas de minúsculas.

5. Un mazo de cartas españolas tiene 40 cartas, divididas en 4 palos: oros, copas, espadas y bastos.
Cada palo tiene las siguientes cartas: 1 (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, sota (10), caballo (11), rey (12). Calcular las siguientes probabilidades:

a) Sacar el rey de copas.
b) Sacar el rey de copas, devolverlo al mazo, mezclar y luego sacar el rey copa nuevamente
c) Sacar el as de espada, el as de basto y el siete de espadas sin reposición intermedia y en ese orden.

6. En física, las fuerzas aplicadas a un objeto pueden representarse mediante vectores. Supongamos que a un objeto se le aplican las fuerzas u=(2,6,8) y w=(-i, -3j,-4k). Calcule.

a) ¿Qué valores deben tener i, j y k para que la suma de fuerzas sea nula?
b) Demostrar que los vectores u y w son paralelos y tienen sentido opuesto para i=j=k, con i>0

Resolución:

1. Es verdad que la negación del operador XOR es equivalente al operador Bi-Condicional? Justifique su respuesta

Sí, es verdad. Para mostrar la equivalencia, planteamos las tablas de verdad y verificamos que las columnas resultado sean iguales para las mismas entradas.

Las proposiciones serían: $\sim(P \veebar Q) \equiv P \leftrightarrow Q$

P	Q	$P \veebar Q$	$\sim(P \veebar Q)$
F	F	F	V
F	V	V	F
V	F	V	F
V	V	F	V

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

2. Dado el conjunto D={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, defina por extensión los conjuntos A,B, y C, tales que se cumplan las siguientes restricciones simultáneamente.

- **A, B, y C sean disjuntos entre sí**
- **$A \cup B \cup C = D$**
- **A, B, y C tengan la misma cardinalidad**
- **$\forall x \in A, \neg \exists y \in B, x>y$**
- **$\forall y \in B, \neg \exists z \in C, y>z$**

Que sean disjuntos entre sí, significa que no tengan elementos en común.
Que la unión de los tres conjuntos sea igual a D, significa que cada elemento de D tiene que estar en alguno de los conjuntos A, B, o C.
Que tengan la misma cardinalidad significa que tienen que tener la misma cantidad de elementos. Esto, sumado a las dos condiciones anteriores nos dice que la cardinalidad de A, B, y C es 3, porque hay 9 elementos en D.
La condición de que para todo elemento x de A, no existe un elemento y, en B, tal que x>y. Nos dice que todos los elementos de A tienen que ser menores que los elementos de B.
La última condición es anaĺoga pero entre los elementos de B y C. Es decir, todos los elementos de B tienen que ser menores que los elementos de C.
Por lo tanto, la única partición posible es:
A = {1,2,3}, B = {4,5,6}, C = {7,8,9}

3. En una pequeña ciudad serrana, la temperatura a lo largo del día en verano puede aproximarse con la siguiente función:

$$T(t) = 5\,cos((\pi/12)\,(t - 15)) + 25$$

Donde: T(t) es la temperatura en grados Celsius a la hora t del día. Además t está en el intervalo [0,24), siendo t=0 la medianoche. Responda:

a) ¿Cuáles son las temperaturas máximas y mínimas?
b) ¿Cuál es la amplitud térmica?
c) ¿Qué representa el valor 25 en la función?
(Del punto de vista de la función matemática y del contexto del problema físico)
d) ¿A qué hora del día se alcanza la temperatura máxima? ¿Y la mínima?

a) Para determinar los máximos y mínimos, como es una función trigonométrica y periódica, vemos los valores máximos y mínimos del coseno, los cuales son +1 y -1. Reemplazando en estos valores, tenemos
$T_{max} = 5\,(+1) + 25 = 30$
$T_{min} = 5\,(-1) + 25 = 20$

b) La amplitud térmica es la diferencia entre los valores máximos y mínimos, es decir $T_{max} - T_{min} = 30-20 = 10$.

c) En la función, 25 es el desplazamiento vertical, y representa que la temperatura media en el día es 25.

d) La temperatura máxima se alcanza cuando el coseno es 1, para eso el argumento del coseno tiene que ser cero. Entonces, planteando la ecuación

$$(\pi/12)\,(t - 15) = 0$$
$$t - 15 = 0$$
$$t = 15$$

Por lo tanto a las 15hs se tiene la temperatura máxima.
De forma análoga, la temperatura mínima del día se dará cuando el coseno sea -1, lo que ocurrirá cuando el argumento del coseno sea π. Entonces planteamos la ecuación

$$(\pi/12)\,(t - 15) = \pi$$
$$t - 15 = 12$$
$$t = 27$$

Como 27 no está en el dominio de la función, pero es periódica, podemos deducir que como 27 módulo 24 es 3, la temperatura mínima se da a las 3 de la mañana.
Otra forma de encontrar la temperatura mínima es usar el otro valor para el cuál el coseno es mínimo, que sería que el argumento sea -π, luego:

$$(\pi/12)\,(t - 15) = -\pi$$
$$t - 15 = -12$$
$$t = 3$$

4. En un videojuego de rol, un jugador puede crear su personaje eligiendo entre distintas opciones de personalización. Estas son: tipos de raza {humano, elfo, orco}, clases de personaje {guerrero, mago, arquero, ladrón}, tipos de mascota inicial {dragón o lobo}.

a) ¿Cuántos personajes distintos se pueden crear si se elige una sola opción de cada categoría?
b) Si además el jugador puede elegir una de 5 armas iniciales, ¿cuántas combinaciones distintas de personaje se pueden generar ahora?
c) Si el nombre del personaje tiene que tener entre 2 y 6 caracteres válidos, ¿cuántos nombres distintos de personajes soporta el juego? Nota, los caracteres válidos son las 27 letras del abecedario y se distinguen mayúsculas de minúsculas.

a) Como el jugador debe seleccionar solo una opción de cada una de las tres categorías (raza, clase, mascota), por el principio de la multiplicación, la cantidad de personajes distintos que se pueden generar queda determinada por el producto de la cardinalidad de los conjuntos de raza, clase y mascota. Esto es

$$3 \times 4 \times 2 = 24$$

b) El conjunto de armas iniciales tiene cardinalidad 5. Enfocando el problema de la misma forma que en el inciso a), tenemos ahora que multiplicar por un nuevo factor, la cantidad de armas iniciales. Luego

$$3 \times 4 \times 2 \times 5 = 120$$

c) El conjunto de caracteres válidos C, tiene cardinalidad 54, porque cada una de las 27 letras puede estar en minúscula o en mayúscula. Por otro lado, cada nombre puede tener una longitud de 2, 3, 4, 5 o 6 caracteres. Entonces podemos pensar al conjunto de todos los nombres como N, y dividirlo en subconjuntos disjuntos N2, N3, N4, N5 y N6, donde cada uno de estos subconjuntos Ni contiene los nombres de longitud i. Ahora la *cardinalidad de N que es la respuesta a la pregunta se calcula como la suma de las cardinalidades de N2, N3, N4, N5 y N6. Luego,*

$$|N_2| = 54 \times 54 = 54^2$$

$$|N_3| = 54 \times 54 \times 54 = 54^3$$

$$|N_4| = 54 \times 54 \times 54 \times 54 = 54^4$$

$$|N_5| = 54 \times 54 \times 54 \times 54 \times 54 = 54^5$$

$$|N_6| = 54 \times 54 \times 54 \times 54 \times 54 \times 54 = 54^6$$

Por lo tanto,

$$|N| = \sum_{i=2}^{6} |N_i| = \sum_{i=2}^{6} 54^i$$

5. Un mazo de cartas españolas tiene 40 cartas, divididas en 4 palos: oros, copas, espadas y bastos. Cada palo tiene las siguientes cartas: 1 (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, sota (10), caballo (11), rey (12). Calcular las siguientes probabilidades:

a) Sacar el rey de copas.

b) Sacar el rey de copas, devolverlo al mazo, mezclar y luego sacar el rey copa nuevamente

c) Sacar el as de espada, el as de basto y el siete de espadas sin reposición intermedia y en ese orden.

a) Planteando la probabilidad del suceso A="Sacar el rey de copas", como casos favorables sobres casos totales, resulta en:

$$p(A) = 1/40$$

b) Aquí hay un suceso, A="Sacar el rey de copas" que debe ocurrir dos veces consecutivas. Dado que hay reposición en el medio, las probabilidades de la primera y segunda ocurrencias son las mismas. Como son sucesos consecutivos, la probabilidad total del suceso B="Sacar dos veces el rey de copa con reposición intermedia en dos extracciones", se calcula como la multiplicación de las probabilidades de A. Luego:

$$p(B) = p(A) \times p(A) = (1/40) \times (1/40) = 1/1600$$

c) La probabilidad del suceso C="Sacar el as de espada, el as de basto y el siete de espadas sin reposición intermedia y en ese orden", se calcula multiplicando las probabilidades de los siguientes suceso C1="Sacar el as de espada del mazo completo", C2="Sacar el as de basto del mazo que no tiene el as de espada", y C3="Sacar el siete de espada del mazo que no tiene ni el as de espada ni el de basto". Luego:

$$p(C) = p(C1) \times p(C2) \times p(C3) = 1/40 \times 1/39 \times 1/38 = 1/(40 \times 39 \times 38) = 1/59280$$

6. En física, las fuerzas aplicadas a un objeto pueden representarse mediante vectores. Supongamos que a un objeto se le aplican las fuerzas u=(2,6,8) y w=(-i, -3j,-4k). Calcule.

a) ¿Qué valores deben tener i, j y k para que la suma de fuerzas sea nula?

b) Demostrar que los vectores u y w son paralelos y tienen sentido opuesto para i=j=k, con i>0

a) Para que la sumatoria de fuerzas sea nula, u+w=0, luego, se plantean las ecuaciones para cada dimensión.

$$2 + (-i) = 0 \Rightarrow i = 2$$

$$6 + (-3j) = 0 \Rightarrow j = 2$$

$$8 + (-4k) = 0 \Rightarrow k = 2$$

b) Para mostrar que u y w son paralelos cuando i=j=k, con i>0, planteamos la definición de producto interno en la que aparece el coseno del ángulo entre los vectores, y sabiendo que cuando son paralelos con sentido opuesto el coseno es -1, verificamos que se cumpla la igualdad.

$u \cdot w = |u||w|cos(\theta)$, *Verifiquemos que con* $cos(\theta) = -1$, *se cumple la igualdad*

$$u \cdot w = -|u||w|$$

$$(2, 6, 8) \cdot (-\ i, -\ 3i, -\ 4i) = -\sqrt{(2^2 + 6^2 + 8^2)}\sqrt{((-\ i)^2 + (-\ 3i)^2 + (-\ 4i)^2)}$$
$$-\ 2i - 18i - 32i = -\sqrt{(4 + 36 + 64)}\sqrt{(i^2 + 9i^2 + 16i^2)}$$
$$-\ 52i = -\sqrt{104}\ \sqrt{(26i^2)},$$

"Saco el cuadrado de i afuera de la raíz"

$$-\ 52i = -\ (\sqrt{104}\ \sqrt{26})i$$

Se simplifican los signos negativos y las i

$$52 = \sqrt{104}\sqrt{26},$$

Junto en una sola raíz, porque la raíz es distributiva con respecto al producto.

$$52 = \sqrt{(104 \times 26)},$$

Reescribo 104 como 52 por 2

$$52 = \sqrt{((52\times2)\times26)}$$

Opero algebraicamente

$$52 = \sqrt{(52\times52)}$$
$$52 = \sqrt{(52^2)}$$
$$52 = 52$$

Entonces se verifica la ecuación, por lo tanto se comprueba que los vectores son paralelos con sentido opuesto.