Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Examen Recuperatorio - 2025 - Tema 2

Nombre y apellido: **DNI:** **Columna:** **Número de hojas:**

1. La siguiente proposición, es una Tautología, Contradicción, o Contingencia? **Justifique su respuesta**

$H \veebar K \wedge (K \wedge H \vee \neg K \wedge \neg H)$

2. En la UNICEN, 100 estudiantes de ingeniería de sistemas eligieron entre tres materias optativas: Inteligencia Artificial (IA), Robótica (R) y Programación Web (W). Los datos recolectados son: 29 estudiantes eligieron solo IA; 25 eligieron R; 30 eligieron W; 10 eligieron IA y R; 11 eligieron IA y W; 10 eligieron R y W; 5 estudiantes eligieron las tres materias. Responda, **justificando su respuesta**:

a. Realice el diagrama de Venn
b. ¿Cuántos estudiantes eligieron IA?
c. ¿Cuántos eligieron exactamente dos materias?
d. ¿Cuántos eligieron al menos una materia?
e. ¿Cuántos estudiantes no eligieron ninguna de las tres materias?

3. Una empresa de telefonía cobra a sus clientes en función del consumo mensual de datos (en gigabytes, GB). La tarifa se define según la siguiente función:

$$f(d) = 3d + 1, \ si \ d \leq 3$$
$$f(d) = 10 + 2(d - 3), \ si \ 3 < d \leq 8$$
$$f(d) = 21, \ si \ d > 8$$

Donde: d es el consumo de datos en GB durante el mes, y $f(d)$ es el monto a pagar, en miles de pesos.

a. Representar gráficamente la función y determinar su dominio.
b. Determinar el monto mínimo y máximo posible a pagar por los clientes.
c. ¿Cuándo es posible determinar el consumo de GB de un cliente dado el monto que tiene que pagar?

4. Jaimito planea ir al cine el sábado. Sabiendo que hay 5 películas en cartelera {Rápido y Furioso XII, Los vengadores IV, Parque Jurásico V, y Rockie X, StarWars XII}, 4 funciones posible {16:00 h, 19:00 h, 22:00 h, 00:00 h}, que además la butaca pueden ser de uno de los siguientes 3 tipos {común; VIP; 4D}, y que con la entrada pueden incluir uno de los siguientes 2 combos {pochoclo grande; pochoclo chico con gaseosa}. Indique**, justificando su respuesta**

a. Si Jaimito solo puede ir a la función de las 22:00 h, ¿cuántas opciones diferentes tiene para elegir?
b. Si Jaimito quiere ver dos películas diferentes, en horarios distintos, y puede elegir de forma independiente el tipo de butaca y el combo para cada función, ¿cuántas combinaciones posibles hay?

5. En una lotería nacional, cada jugador elige 5 números enteros en el rango [1,40]. En el sorteo oficial también se extraen 5 números distintos al azar. No importa el orden en el que se eligieron o extrajeron los números. Si un apostador compra un solo boleto con su combinación de 5 números {2, 4, 18, 26, 32}, Responda, **justificando su respuesta.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar los 5 números exactos, sin importar el orden?
b. ¿Cuál es la probabilidad de no acertar ningún número?

6. ¿Cuánto tiene que valer X para que los vectores u=(X, -1,-1, 1) y w=(X, X, X, X) sean perpendiculares? Responda, **justificando su respuesta.**

Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Examen Recuperatório - 2025 - Tema 2

1. La siguiente proposición, es una Tautología, Contradicción, o Contingencia? Justifique su respuesta

$H \veebar K \wedge (K \wedge H \vee \neg K \wedge \neg H)$

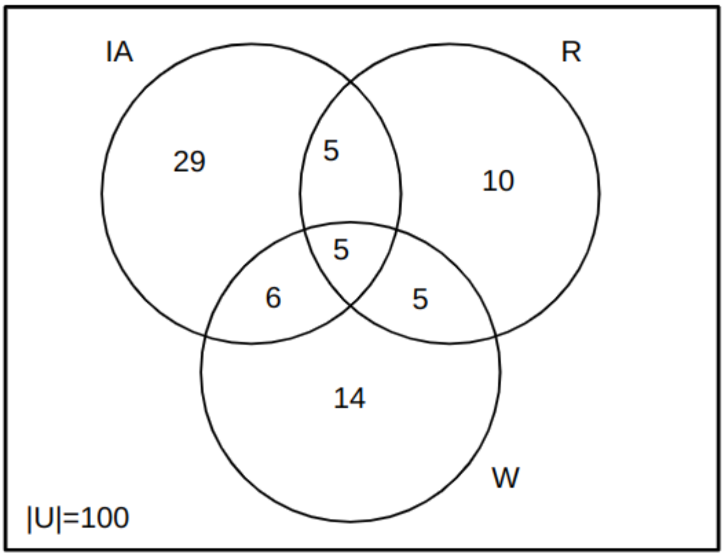
Luego de hacer la tabla de verdad de la proposición, se verifica que es una Contingencia, porque para algunas combinaciones de los valores de verdad de K y H se obtiene falso y en otras se obtiene verdadero.

H	K	¬H	¬K	K^H	¬K ^¬H	K^H v ¬K ^¬H	K ^ (K^H v ¬K ^¬H)	H ⊻ (K ^ (K^H v ¬K ^¬H))
F	F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V	F

2. En la UNICEN, 100 estudiantes de ingeniería en sistemas eligieron entre tres materias optativas: Inteligencia Artificial (IA), Robótica (R) y Programación Web (W). Los datos recolectados son: 29 estudiantes eligieron solo IA; 25 eligieron R; 30 eligieron W; 10 eligieron IA y R; 11 eligieron IA y W; 10 eligieron R y W; 5 estudiantes eligieron las tres materias. Responda, justificando su respuesta:

a. **Realice el diagrama de Venn**
b. **¿Cuántos estudiantes eligieron IA?**
c. **¿Cuántos eligieron exactamente dos materias?**
d. **¿Cuántos eligieron al menos una materia?**
e. **¿Cuántos estudiantes no eligieron ninguna de las tres materias?**

a. A continuación, el diagrama de Venn



b. A partir del diagrama, se obtiene que 45 alumnos eligieron IA.
c. A partir del diagrama, se obtiene que 16 alumnos solo eligieron 2 materias. 5 eligieron IA y R, 6 eligieron IA y W, por último, 5 eligieron R y W.

d. Sumando la cardinalidad de todos los subconjuntos disjuntos del diagrama de Venn, tenemos que un total de 74 alumnos eligieron al menos una materia.
e. Del total de 100 alumnos encuestados, 26 no eligieron ninguna de las tres materias. Esto se consigue restando del total de alumnos los 74 que eligieron al menos una materia.

3. Una empresa de telefonía cobra a sus clientes en función del consumo mensual de datos (en gigabytes, GB). La tarifa se define según la siguiente función:

$$f(d) = 3d + 1,\ d \leq 3$$
$$f(d) = 10 + 2(d - 3),\ 3 < d \leq 8$$
$$f(d) = 21,\ d > 8$$

Donde: d es el consumo de datos en GB durante el mes, y $f(d)$ es el monto a pagar, en miles de pesos.

a. Representar gráficamente la función y determinar su dominio.
b. Determinar el monto mínimo y máximos posibles a pagar por los clientes.
c. Cuándo es posible determinar el consumo de GB de un cliente dado el monto que tiene que pagar.

a. El dominio de la función f es {d ∈ R, d≥0}. En la gráfica se puede ver con colores diferentes cada uno de los 3 tramos de la función.

b. A partir del gráfico se puede ver que el mínimo de la función se da cuando d=0, luego $f(0) = 1$, por lo tanto el monto mínimo es $1000.
De forma análoga, el máximo se da a partir de d>8, donde la función se hace constante, con un monto de $21000.

c. Cuando el consumo $d \in [0, 8]$, la función f es inyectiva, lo que nos permite determinar dado un monto, cuál es el consumo que lo produjo. Cuando el consumo es superior a ($d > 8$), la función es constante y por lo tanto no es inyectiva, en consecuencia para el monto $21000, hay infinitos consumos.

4. Jaimito planea ir al cine el sábado. Sabiendo que hay 5 películas en cartelera {Rápido y Furioso XII, Los vengadores IV, Parque Jurásico V, y Rockie X, StarWars XII}, 4 funciones posible {16:00 h, 19:00 h, 22:00 h, 00:00 h}, que además la butaca pueden ser de uno de los siguientes 3 tipos {común; VIP; 4D}, y que con la entrada pueden incluir uno de los siguientes 2 combos {pochoclo grande; pochoclo chico con gaseosa}. Indique, justificando su respuesta

a. **Si Jaimito sólo puede ir a la función de las 22:00 h, cuántas opciones diferentes tiene para elegir.**
b. **Si Jaimito quiere ver dos películas diferentes, en horarios distintos, y puede elegir de forma independiente el tipo de butaca y el combo para cada función, ¿cuántas combinaciones posibles hay?**

a. Si Jaimito solo puede ir a la función de las 22 h, entonces tiene que elegir entre las 5 películas, las 3 tipos de butacas y los 2 combos. Luego por el principio de la multiplicación, la cantidad de opciones que tiene son:

$5 \times 3 \times 2 = 30$

b. Para ver dos películas distintas, Jaimito tiene 5C2=5!/(2!3!)=10 combinaciones distintas, y para los horarios tiene 4C2=4!/(2!2!)=6. Ahora, para cada uno de las 10 pares de películas que se puede elegir, tiene 6 combinaciones de horarios, lo que da un total de 10x6=60 combinaciones. ***Dado que puede intercambiar las funciones y horarios, hay que multiplicar por dos, teniendo 120 opciones en total.*** *Ahora, dado que la elección de butaca y combo de comida son independientes para cada par película-función, Jaimito tiene un total de 3(butacas primer función)x2(combos primer función)x3(butacas sgunda función)x2(combos sgunda función) = 36 por cada una de las 120 combinaciones de funciones (película y función). Luego la cantidad total de opciones es*

$2 \times 5C2 \times 4C2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 10 \times 6 \times 3 \times 2 = 4320$

5. En una lotería nacional, cada jugador elige 5 números enteros en el rango [1,40]. En el sorteo oficial también se extraen 5 números distintos al azar. No importa el orden en el que se eligieron o se sortearon los números. Si un apostador compra un solo boleto con su combinación de 5 números {2, 4, 18, 26, 32}, Responda, Justificando su respuesta.

a. **¿Cuál es la probabilidad de acertar los 5 números exactos, sin importar el orden?**
b. **¿Cuál es la probabilidad de no acertar ningún número?**

El conjunto de números para el sorteo tiene cardinalidad 40.
Dado que no importa el orden del sorteo ni de las boletas, el problema se resume en comparar conjuntos para saber si se gana o no.

a. Sea el suceso A="Sale sorteado la boleta {2,4,18,26,32}", para calcular la probabilidad como casos favorables sobre casos totales, tenemos que solo hay 1 caso favorable, que es sacar los 5 números, mientras que para los casos totales tenemos el número combinatorio 40 C 5 = 40!/(5! 35!).
Planteando la probabilidad tenemos:

$$p(A) = \frac{1}{\frac{40!}{5!\times35!}} = \frac{5!\times35!}{40\times39\times38\times37\times36\times35!} = \frac{5\times4\times3\times2}{40\times39\times38\times37\times36} = \frac{1}{39\times38\times37\times12} = \frac{1}{658008}$$
$$= 0.00000152$$

b. La probabilidad del evento B="ninguno de los números {2,4,18,26,32} salen sorteados" puede calcularse nuevamente usando la definición de casos favorables sobre casos totales, donde ahora los casos *favorables es el número combinatorio 35 C 5 = 35!/(5!(30!)). Y los casos totales siguen siendo el mismo número que en el inciso anterior. Luego, planteando la probabilidad encontramos*

$$p(B) = \frac{\frac{35!}{5!\times 30!}}{\frac{40!}{5!\times 35!}} = \frac{35!\times 5!\times 35!}{40!\times 5!\times 30!} = \frac{35!}{40\times 39\times 38\times 37\times 36\times 30!} = \frac{35\times 34\times 33\times 32\times 31\times 30!}{40\times 39\times 38\times 37\times 36\times 30!} =$$

$$= \frac{35\times 34\times 33\times 32\times 31}{40\times 39\times 38\times 37\times 36} = \frac{38955840}{78960960} = \frac{40579}{82251} = 0.493355704$$

6. Cuánto tiene que valer X para que los vectores u=(X, -1, -1, 1) y w=(X, X, X, X) sean perpendiculares.

Para que los vectores u y w sean perpendiculares, el producto interno entre ellos debe ser zero. Luego, se procede a plantear la ecuación y despejar X.

$$u \cdot w = 0$$
$$(X, -1, -1, 1) \cdot (X, X, X, X) = 0$$
$$X^2 - X - X + X = 0$$
$$X^2 - X = 0$$
$$X(X - 1) = 0$$

Las raíces del polinomio son X=0 y X=1. Para esos dos valores de X, los vectores u y w son perpendiculares.