Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Examen Parcial - 2017

Nombre y apellido:
DNI:
Nro de hojas:

1. Determinar si es válida la siguiente equivalencia de proposiciones lógicas. Justifique.

$$\neg p \vee \neg q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

La respuesta es que no son equivalentes. Existen diferentes alternativas para justificarlo. Una de las más simples es evaluar las proposiciones para todas las configuraciones de entrada posibles: para ser equivalentes deben tener igual resultado para TODAS las valuaciones, con lo cual para que no sean equivalentes basta encontrar una valuación para la cual ambas proposiciones resulten en valores de verdad diferentes.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	**1**	1	**0**
0	1	1	0	**1**	0	**1**
1	0	0	1	**1**	0	**1**
1	1	0	0	**0**	0	**1**

Como se ve en la tabla de verdad, las proposiciones lógicas no tienen igual resultado para toda valuación, por lo que no son equivalentes.

Otra alternativa igual de válida es aplicar la ley de De Morgan en la segunda proposición lógica:

$$\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg\neg p \vee \neg\neg q \equiv p \vee q$$

Y posteriormente resolver la tabla de verdad correspondiente.

2. La dirección de deportes de la UNCPBA está convocando alumnos de todas las facultades para armar equipos que los representen en los próximos juegos nacionales en las disciplinas Fútbol, Vóley y Hockey. En total, ya hay 40 inscriptos. Se sabe que 15 se anotaron solamente para jugar al Fútbol, 2 para jugar al Hockey y unos 9 están anotados para jugar tanto al Fútbol como al Vóley. Ninguno de los anotados en Hockey están interesados en jugar otro deporte.

   a) Representar la información disponible en un diagrama de Venn.

   b) Determinar cuántos inscriptos hay al momento para jugar *únicamente* al voley. Justificar la respuesta.

   a) **Sabemos que todos los anotados están interesados en jugar a alguno de los 3 deportes. Además, sabemos que los anotados para jugar al Hockey no están interesados en jugar a ningún otro deporte, por lo que la intersección entre el conjunto de los jugadores de Hockey y los conjuntos de Fútbol y Vóley es vacía ($\emptyset$). Con esta información podemos representar los datos que tenemos en un diagrama de Venn como el de la Figura 1.**

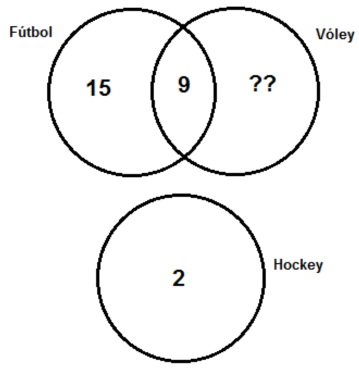


Figura 1: Diagrama de Venn del ejercicio 2.a)

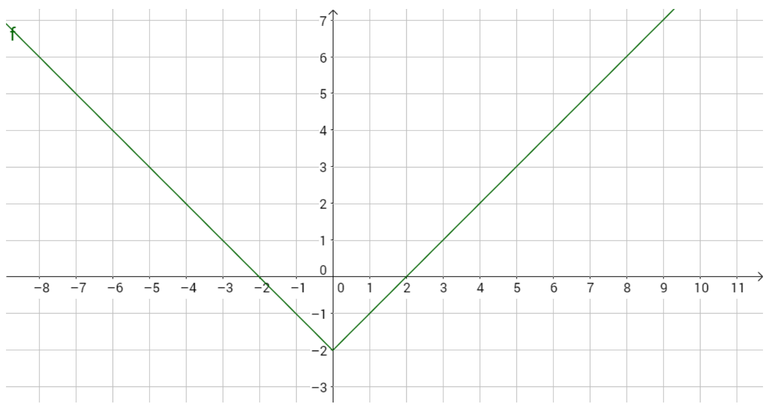
b) **Sabiendo que hay un total de 40 inscriptos, y teniendo en cuenta el diagrama anterior, podemos calcular la cantidad de inscriptos para jugar únicamente al vóley, a la que llamaremos x:**

$$40 = 15 + 9 + 2 + x$$
$$x = 40 - 15 - 9$$
$$x = 14$$

3. Determinar dominio, imagen, raíces, intervalos de positividad, negatividad, crecimiento y decrecimiento de la siguiente función. Indicar además si la función es inyectiva, suryectiva o biyectiva.

$$f(x) = |x| - 2$$

La función $f(x)$ es la función valor absoluto, desplazada dos unidades hacia abajo en el eje de las y. Podemos graficarla fácilmente dando valores a x y graficando sus correspondientes valores de y: A continuación analizaremos



cada una de las respuestas:

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$: **El dominio de la función (es decir, los valores de x para los que la función está definida) son todos los reales.**

- $\mathrm{Im}(f) = [-2; \infty)$: **La imagen son todos los valores que toma la variable y. En la gráfica se ve fácilmente que la función toma como valor mínimo -2, y que todos los demás son mayores a él.**

- **Raíces en $x = 2$ y en $x = -2$: Las raíces son los valores de x tales que $f(x) = 0$. Luego, si igualamos la función a 0, es posible hallarlos despejando:**

$$|x| - 2 = 0$$
$$|x| = 2$$
$$x = \pm 2$$

- **Intervalos de positividad: $x \in \mathbb{R} | x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$: Los intervalos de positividad corresponden a aquellos valores de x para los cuales la función toma valores positivos (es decir, los x para los cuales $f(x) > 0$). En la gráfica se observa que la función toma valores positivos hasta la primera raíz, y luego vuelve a tomar positivos a partir de la segunda. También podían hallarse resolviendo las inecuaciones.**

- **Intervalos de negatividad: $x \in \mathbb{R} | x \in (-2, 2)$. Los intervalos de negatividad corresponden a aquellos valores de x para los cuales la función toma valores negativos (es decir, los x para los cuales $f(x) < 0$). En la gráfica se observa que la función toma valores negativos únicamente entre la primera y la segunda raíz. También podían hallarse resolviendo las inecuaciones.**

- **Intervalos de crecimiento: $x \in \mathbb{R} | (0, \infty)$. Los intervalos de crecimiento corresponden a los valores de x para los que la función crece. Se observa en la gráfica que la función crece a partir de -2.**

- **Intervalos de decrecimiento: $x \in \mathbb{R} | (-\infty, 0)$. Los intervalos de decrecimiento corresponden a los valores de x para los que la función crece. Se observa en la gráfica que la función decrece hasta -2.**

- **Para que la función sea inyectiva debe cumplirse si $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$. Para chequearlo evaluamos:**

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$|x_1| - 2 = |x_2| - 2$$
$$|x_1| = |x_2|.$$

Luego, $f(x_1) = f(x_2)$ se cumplirá para $x_2 = \pm x_1$. Por lo tanto, x_1 y x_2 no son necesariamente iguales, y $f(x)$ no es inyectiva.

- **Para que la función sea suryectiva, el codominio de f debe ser igual a su imagen. Luego, como $\mathbb{R} \neq [-2, \infty)$, entonces $f(x)$ no es suryectiva.**

- **$f(x)$ no es biyectiva porque no es inyectiva y suryectiva.**

4. En la clase de TMC, que tiene 60 alumnos, van a distribuirse 3 premios. Determinar de cuántas maneras puede hacerse si:

   a) Los premios son iguales.

b) Los premios son distintos.

Nota: Un alumno puede recibir a lo sumo un premio.

a) **Si los premios son iguales, debo calcular de cuántas maneras puedo elegir 3 alumnos entre los 60 totales, sin importar el orden en el que lo haga. Siendo C la cantidad de combinaciones posibles, calculo:**

$$C = \binom{60}{3}$$

$$C = \frac{60!}{3!(60-3)!}$$

$$C = \frac{60 * 59 * 58 * 57!}{6(57)!}$$

$$C = \frac{60 * 59 * 58}{6}$$

$$C = 34220$$

Luego, se pueden distribuir de 34220 maneras distintas.

b) **Si los premios son distintos, me importa el orden en el que elijo a los alumnos. Al entregar el primer premio tengo 60 opciones (una por cada alumno). Al entregar el segundo, como cada alumno puede recibir a lo sumo un premio, tengo 59 opciones. Por último, para el tercer premio, me quedan 58 opciones. Siendo C la cantidad de permutaciones diferentes, calculo:**

$$C = 60 * 59 * 58$$

$$C = 205320$$

Luego, si los premios son distintos, se pueden distribuir de 205320 maneras distintas.

5. Papá Noel se dejó olvidada la bolsa de regalos en el living de una casa. Se sabe que la bolsa contiene: 4 pares de medias, 3 de los cuales son amarillos y 1 rojo; 4 trenes eléctricos, 2 azules y 2 amarillos; 7 remeras, 3 amarillas, 3 rojas, 1 negra pero ninguna blanca; y 4 pares de zapatillas, 2 blancos y 2 negros. El más pequeño de la familia ha encontrado la bolsa, y se dispone a sacar regalos de ella. Resolver cada inciso de manera independiente:

   a) La probabilidad de que el regalo que saque sea blanco.

   b) La probabilidad de que saque un par de zapatillas dado que el regalo es blanco.

   c) La probabilidad de sacar un tren eléctrico sabiendo que el regalo es amarillo.

   d) La probabilidad de sacar dos pares de medias seguidos, sin reponer el primero sacado.

   a) **Defino el suceso aleatorio B="Sacar un regalo blanco."Sabiendo que hay un total de 19 regalos, de los cuales 2 son blancos, calculo la probabilidad** $P(B) = \frac{2}{19} \approx 0{,}1052$

b) **Defino el suceso aleatorio Z="Sacar un par de zapatillas."Sabiendo que hay un total de 2 regalos blancos, ambos zapatillas, calculo la probabilidad:**
$P(Z|B) = \frac{2}{2} = 1$

c) **Defino los sucesos aleatorios T="Sacar un trenz A="Sacar un regalo amarillo". Sabiendo que hay 8 regalos amarillos, de los cuales 2 son trenes eléctricos, calculo**:
$P(T|A) = \frac{2}{8} = 0{,}25$

d) **Defino el suceso aleatorio M="Sacar dos pares de medias seguidos". En este caso, me interesa la probabilidad de sacar dos veces seguidas un par de medias. Cuando no se saco nada de la bolsa, hay 4 pares de medias entre los 19 regalos totales. En el caso del segundo regalo, si ya se sacó un par de medias, las opciones cambian: ahora habrán 3 pares de medias en un total de 18 regalos. Calculo la probabilidad:**
$P(M) = \frac{4}{19} * \frac{3}{18} \approx 0{,}035$

6. Se tienen los vectores $u =< x, \frac{1}{2} >$, $v =< 1, 1 >$

   a) Hallar los posibles valores de x que verifican $||u|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   b) Determinar el angulo formado entre los vectores u y v.

a) **Si sabemos que** $||u|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **entonces:**

$$\sqrt{x^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$
$$x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$
$$x^2 = \frac{1}{4}$$
$$x = \sqrt{(\frac{1}{4})}$$
$$x = \pm\frac{1}{2}$$

Entonces, los posibles valores de x que verifican $||u|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **son** $x = \frac{1}{2}$ **y** $x = -\frac{1}{2}$

b) **Habiendo calculado antes los posibles valores de x, elegimos** $u =< \frac{1}{2}, \frac{1}{2} >$ **Sabemos que, siendo** θ **el ángulo formado entre** u **y** v**, se comprueba que:**

$$\cos(\theta) = \frac{< u, v >}{||u||||v||}$$

Reemplazando:

$$\cos(\theta) = \frac{(\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 1)}{\frac{1}{\sqrt{2}} * (\sqrt{1^2 + 1^2})}$$
$$\cos\theta = 1$$

$$\theta = \arccos 1$$
$$\theta = 0°$$

El ángulo formado entre u y v es de $0°$, entonces u y v son paralelos.

7. Al censar la cantidad de barrios populares por provincia se obtuvieron los siguientes datos: [Buenos Aires: 1611, CABA: 55, Catamarca: 33, Chaco: 264, Chubut: 56, Córdoba: 174, Corrientes: 107, Entre Ríos: 167, Formosa: 78, Jujuy: 91, La Rioja: 14, Mendoza: 205, Misiones: 243, Neuquen: 84, Río Negro: 114, Salta: 145, San Juan: 29, San Luis: 23, Santa Cruz: 5, Santa Fe: 333, Santiago del Estero: 47, Tierra del Fuego: 36, Tucumán: 186]

   a) Obtener media, mediana y moda.

   b) El desvío estándar del conjunto total de datos de $\sigma \approx 324{,}605$. Se sabe además que el desvío estándar del subconjunto de provincias correspondiente a la patagonia (Chubut, Santa Cruz,Neuquen, Río Negro y Tierra del fuego) es $\sigma \approx 42{,}1426$. Qué representan estos valores? Comparelos y analice.

   a) **Para obtener la media debo sumar todos los valores y dividirlos por la cantidad de elementos de la población.**

$$\bar{x} = \frac{1611 + 55 + 33 + ... + 186}{23}$$
$$\bar{x} = \frac{4100}{23} \approx 178{,}26$$

   Para obtener la mediana, ordeno todos los elementos de manera ascendente y obtengo el valor que se encuentra en el punto medio, que es $M = 91$.

   Para obtener la moda, me fijo cuál es el valor más repetido entre todos los elementos. Como no hay valores repetidos, el conjunto de datos no tiene moda.

8. Calcular $14\mathrm{A}_{(16)} - \mathrm{B}1_{(16)}$.

   Una manera muy sencilla de calcular el resultado de esta operación es transformar los operandos a base decimal, y luego resolver la resta como hacemos usualmente. Entonces:

   $14A_{(16)} = 10_{(10)} * 16^0_{(10)} + 4_{(10)} * 16^1_{(10)} + 1_{(10)} * 16^2_{(10)} = 330_{(10)}$
   $B1_{(16)} = 1_{(10)} * 16^0_{(10)} + 11_{(10)} * 16^1_{(10)} = 177_{(10)}$
   $330_{(10)} - 177_{(10)} = 153_{(10)} = 99_{(16)}$