Análisis Tiempo-Frecuencia y Descomposición de Señales

Clase 8

Dr. Marcelo Alejandro Colominas
macolominas@conicet.gov.ar

Lab. Señales y Dinámicas no Lineales
Instituto de Investigación y Desarrollo en Bioingeniería y Bioinformática (IBB)
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina

2019

LABORATORIO DE SEÑALES Y DINÁMICAS NO LINEALES
FI-UNER • Entre Ríos • Argentina

UNER Facultad de Ingeniería

CONICET

Contenidos

1. Motivación
2. EMD
3. Versiones de EMD asistidas por ruido
4. Un enfoque de optimización para EMD
5. Un enfoque tiempo-escala para EMD

Contenidos

1. Motivación
2. EMD
3. Versiones de EMD asistidas por ruido
4. Un enfoque de optimización para EMD
5. Un enfoque tiempo-escala para EMD

Modelos de señales

- Hemos visto el modelo de señal multicomponente (llamado también modelo armónico adaptativo):

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t)\ \cos(2\pi\phi_k(t))$$

Modelos de señales

- Hemos visto el modelo de señal multicomponente (llamado también modelo armónico adaptativo):

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t)\,\cos(2\pi\phi_k(t))$$

- Sin embargo presenta algunas limitaciones, ya que supone que todos los «modos» deben ser funciones coseno moduladas en amplitud y frecuencia.

Modelos de señales

- Por otro lado, también vimos el modelo adaptativo no-armónico:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t)\, s_k(2\pi\phi_k(t))$$

que presenta una mayor versatilidad al reemplazar los cosenos por señales más generales s_k.

Modelos de señales

- Por otro lado, también vimos el modelo adaptativo no-armónico:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t)\, s_k(2\pi\phi_k(t))$$

que presenta una mayor versatilidad al reemplazar los cosenos por señales más generales s_k.

- Sin embargo, la dificultad que presenta su resolución llevó a plantear un modelo simplificado:

$$x(t) = A(t)s(2\pi\phi(t))$$

que, como vimos, resulta ser un caso especial del modelo multicomponente de cosenos.

Contenidos

1. Motivación
2. EMD
3. Versiones de EMD asistidas por ruido
4. Un enfoque de optimización para EMD
5. Un enfoque tiempo-escala para EMD

Descomposición Empírica en Modos

Idea Huang 1998

«señal = oscilaciones rápidas superpuestas con oscilaciones lentas»

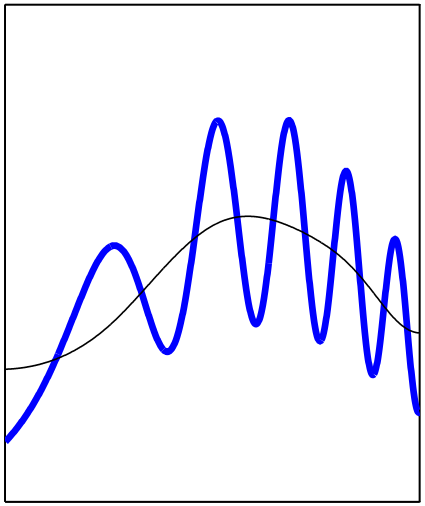
Descomposición Empírica en Modos

Idea

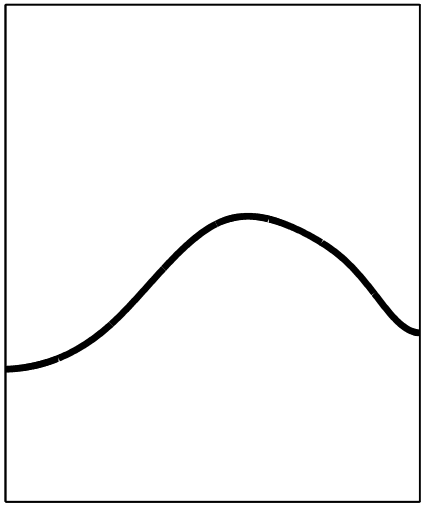
Huang 1998

«señal = oscilaciones rápidas superpuestas con oscilaciones lentas»

señal



oscilación lenta...



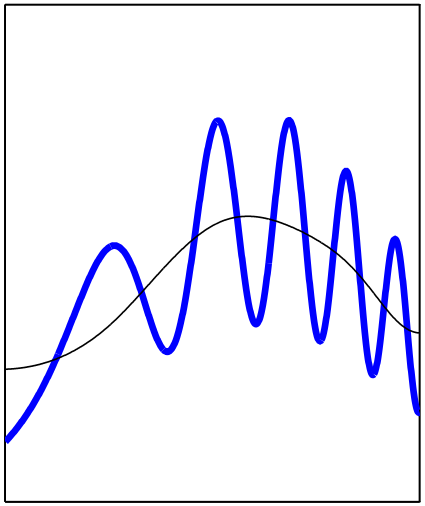
Descomposición Empírica en Modos

Idea

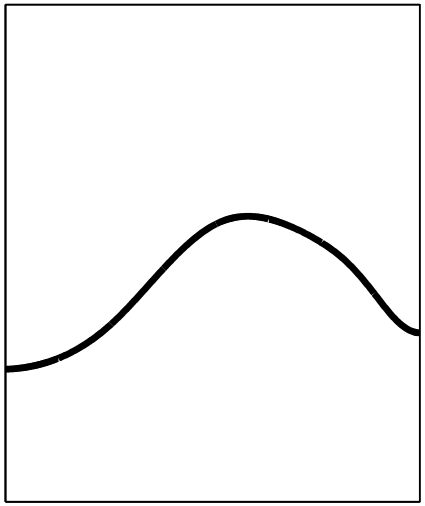
Huang 1998

«señal = oscilaciones rápidas superpuestas con oscilaciones lentas»

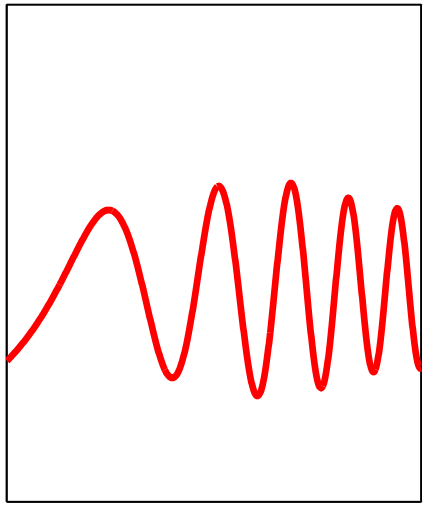
señal



oscilación lenta...



+ oscilación rápida



e iteramos...

EMD

Función intrínseca de modo

Una IMF (del inglés *Intrinsic Mode Function*), o simplemente modo, es una función que satisface dos condiciones:

EMD

Función intrínseca de modo

Una IMF (del inglés *Intrinsic Mode Function*), o simplemente modo, es una función que satisface dos condiciones:

1. las cantidades de puntos extremos (máximos y mínimos) y de cruces por cero son iguales o difieren, a lo sumo, en uno;

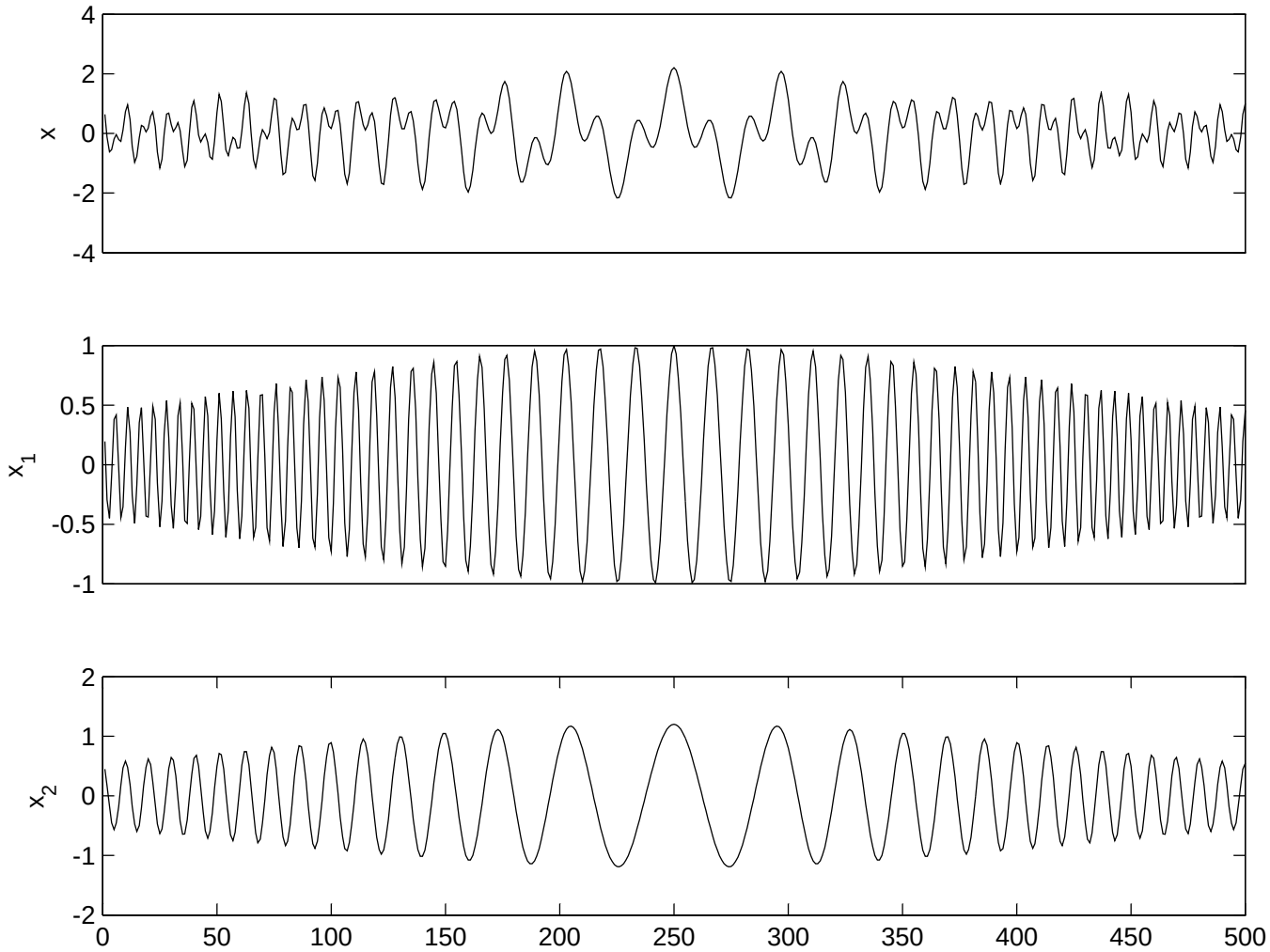
EMD

Función intrínseca de modo

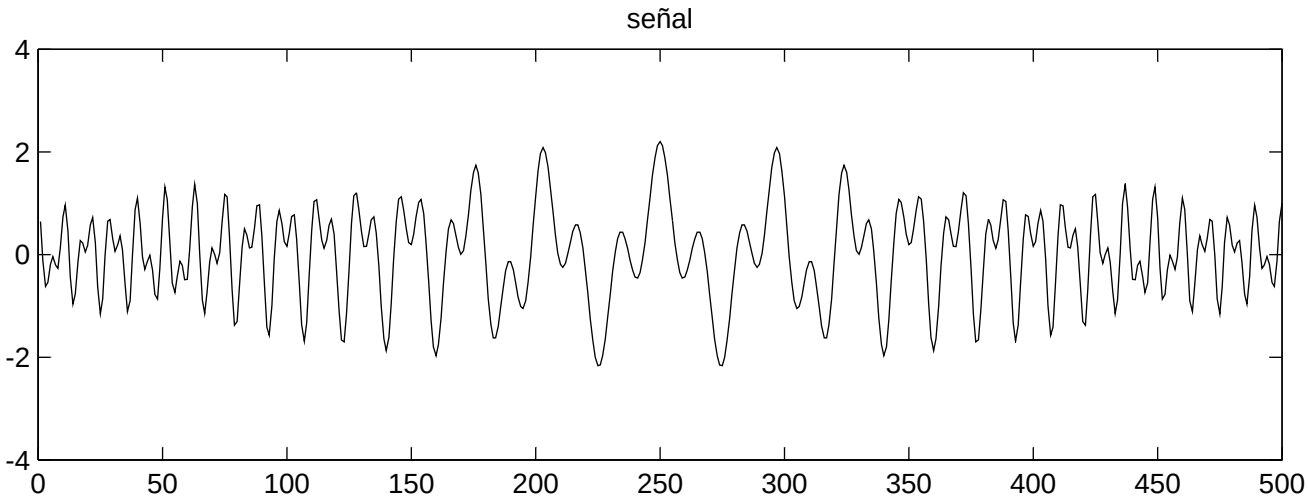
Una IMF (del inglés *Intrinsic Mode Function*), o simplemente modo, es una función que satisface dos condiciones:

1. las cantidades de puntos extremos (máximos y mínimos) y de cruces por cero son iguales o difieren, a lo sumo, en uno;
2. en cualquier punto, el valor medio de las envolventes superior e inferior es igual a cero.

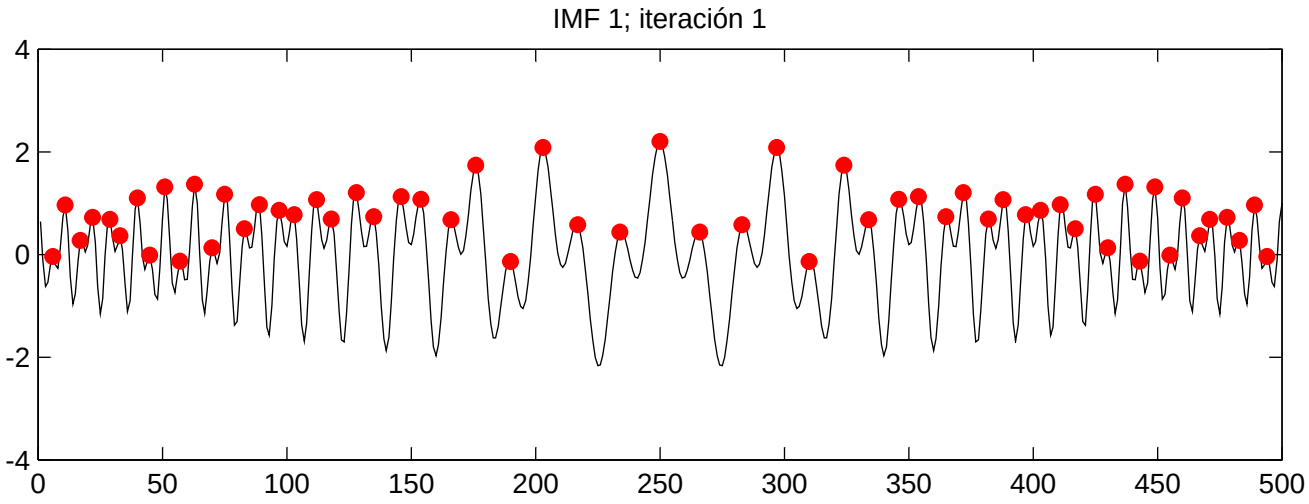
EMD


x
4
2
0
-2
-4
x_1
1
0.5
0
-0.5
-1
x_2
2
1
0
-1
-2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

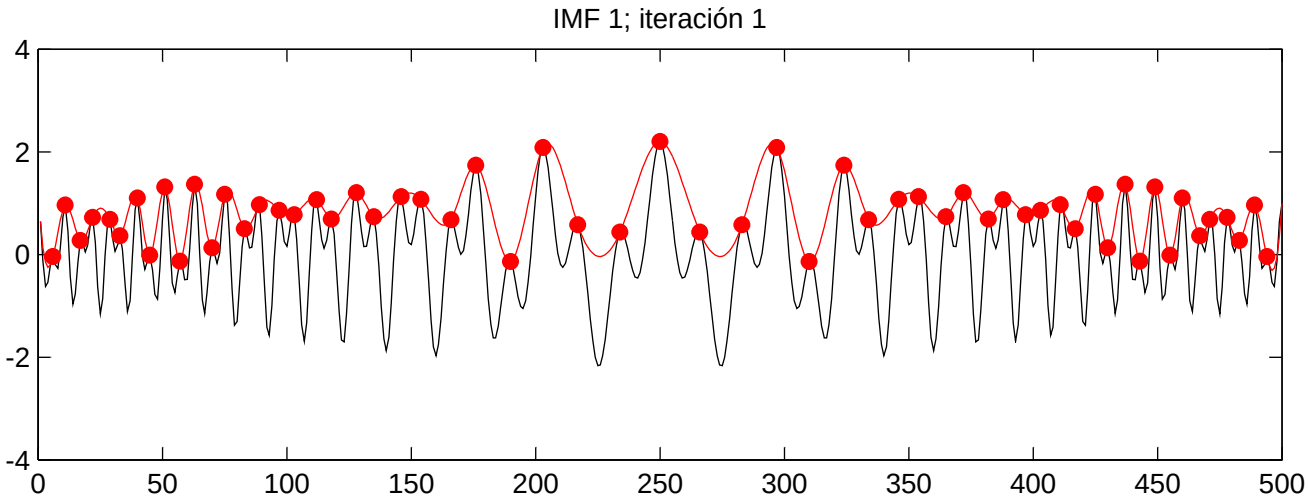
EMD



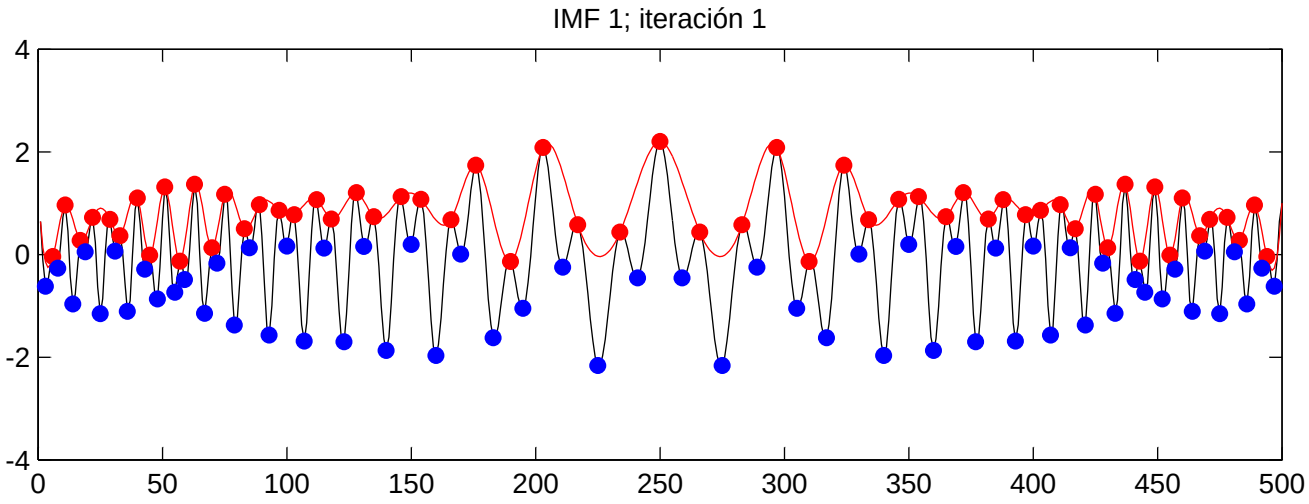
EMD



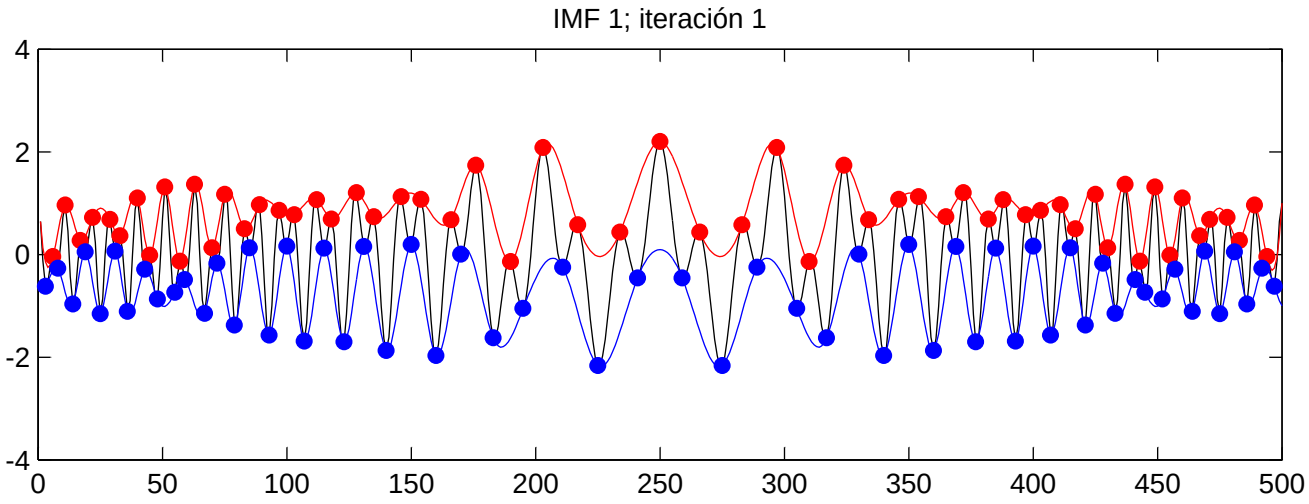
EMD



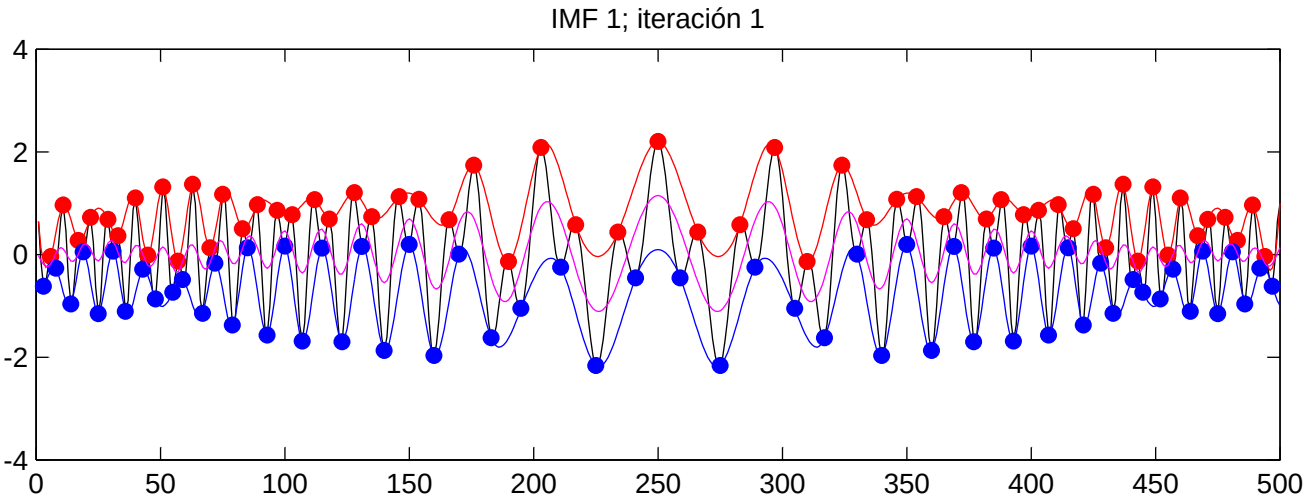
EMD



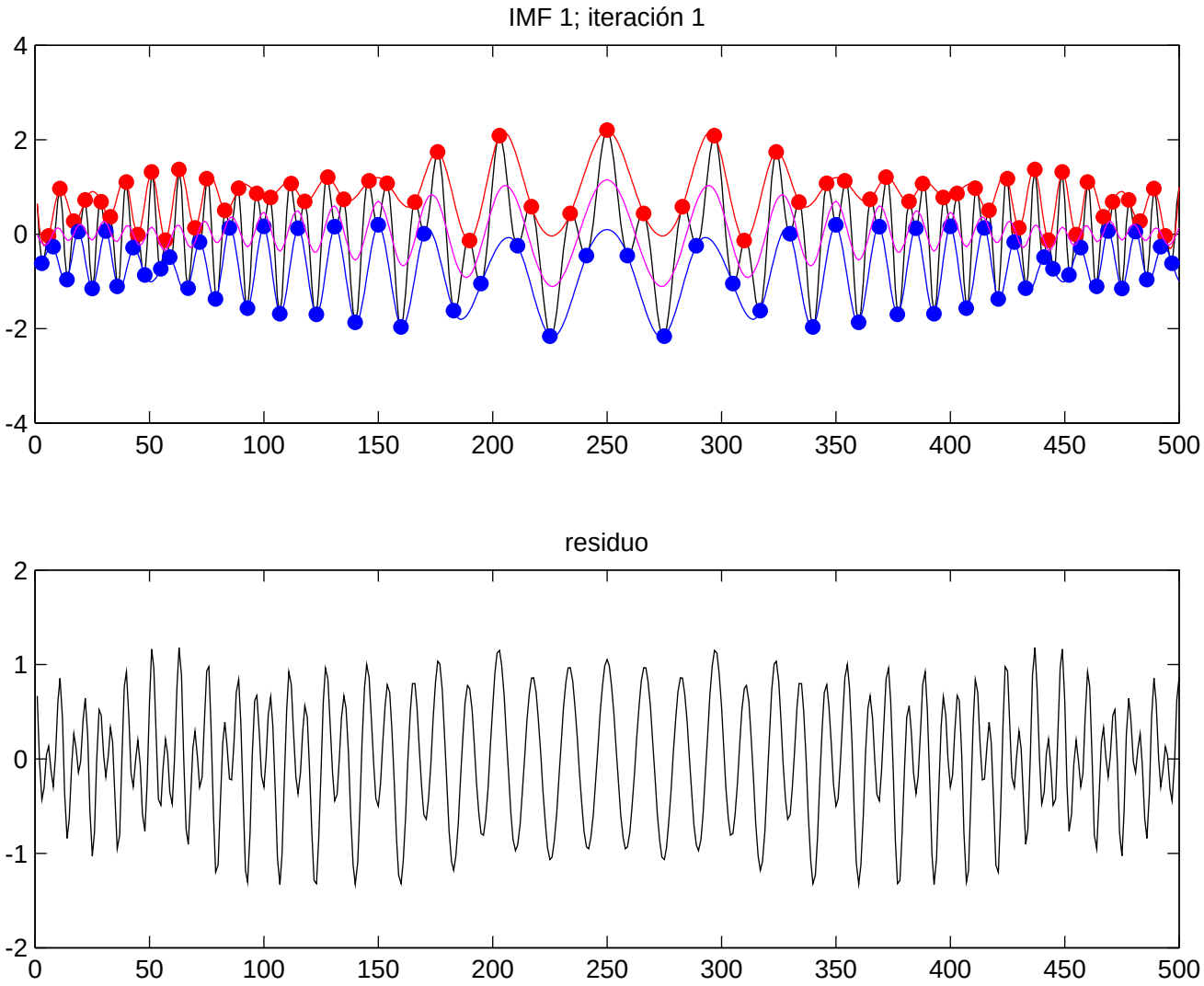
EMD



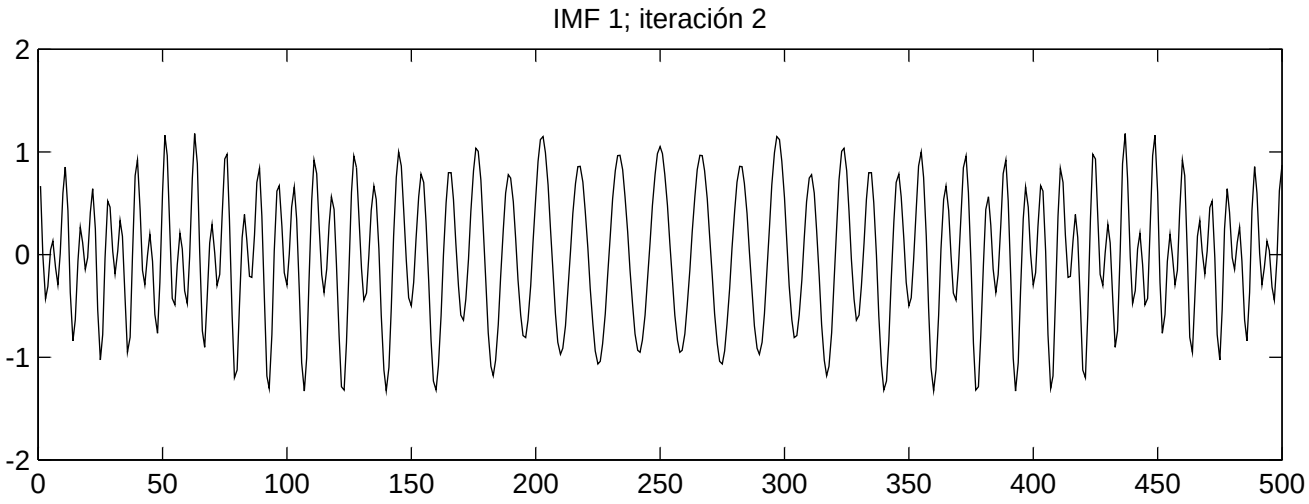
EMD



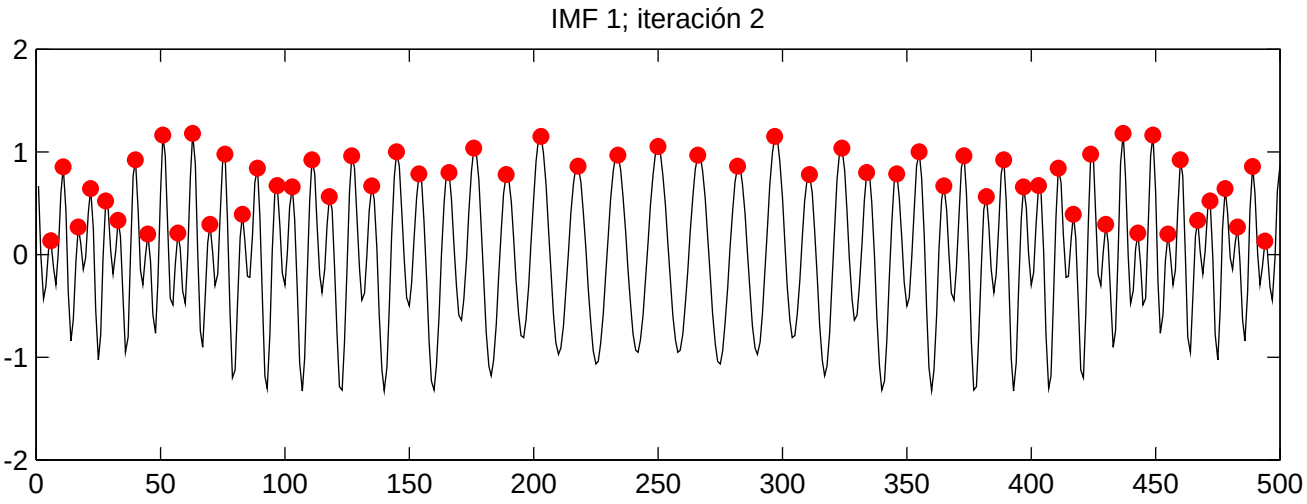
EMD


IMF 1; iteración 1
4
2
0
-2
-4
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
residuo
2
1
0
-1
-2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

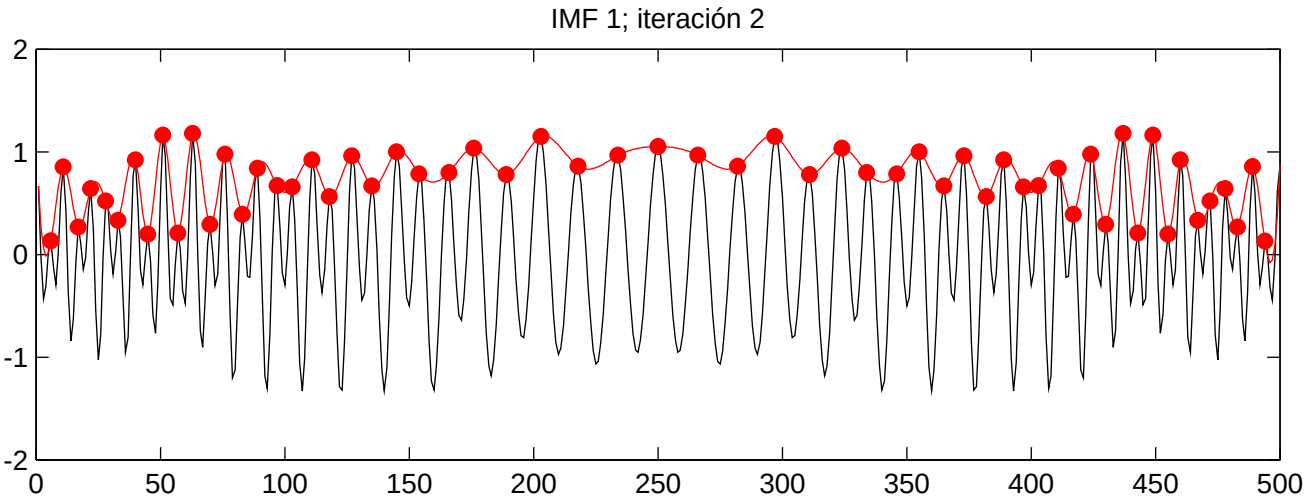
EMD



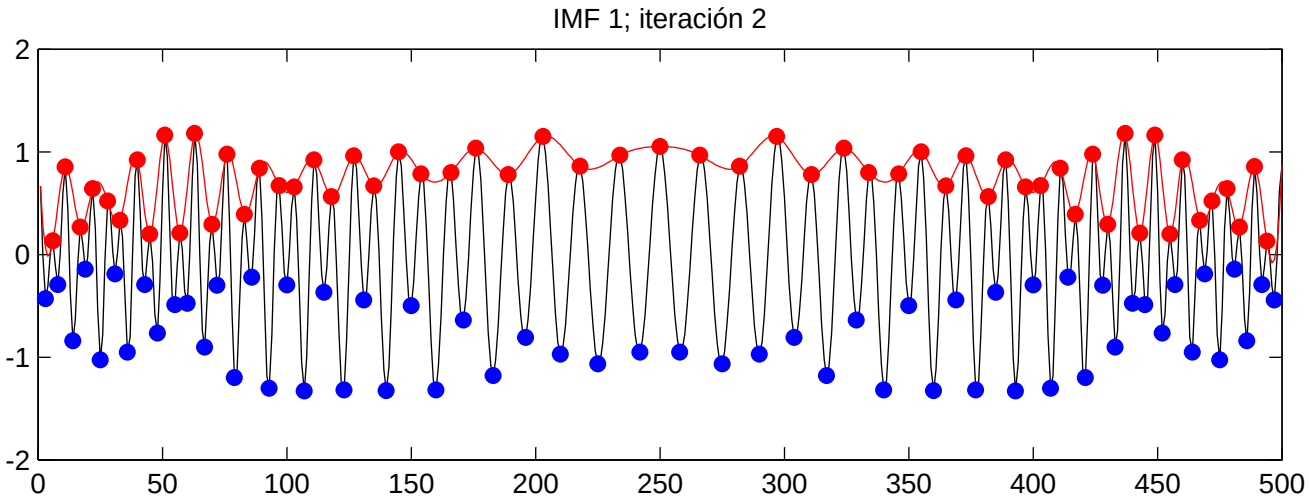
EMD



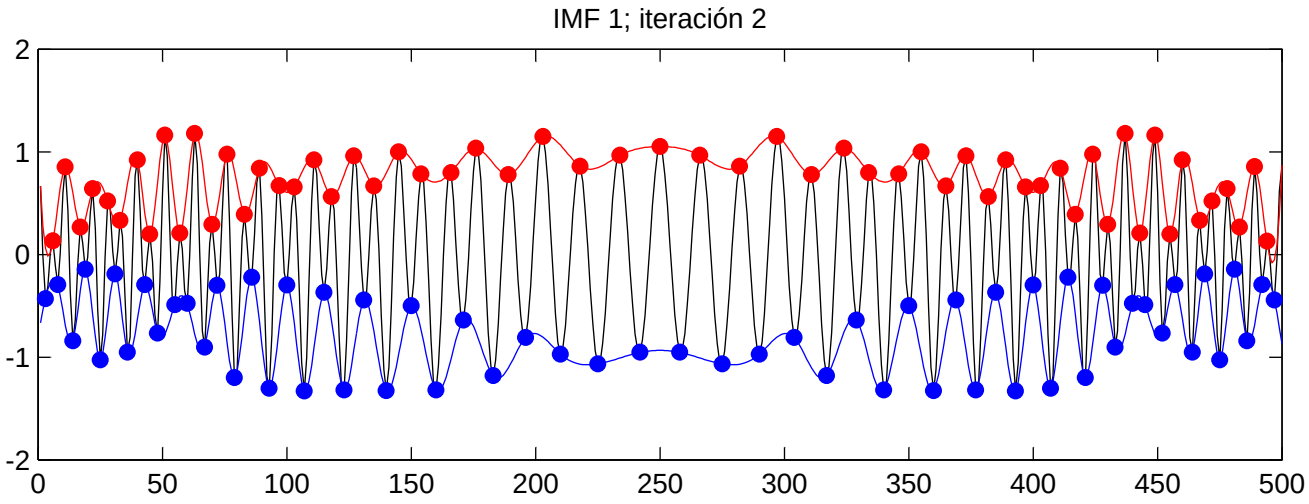
EMD



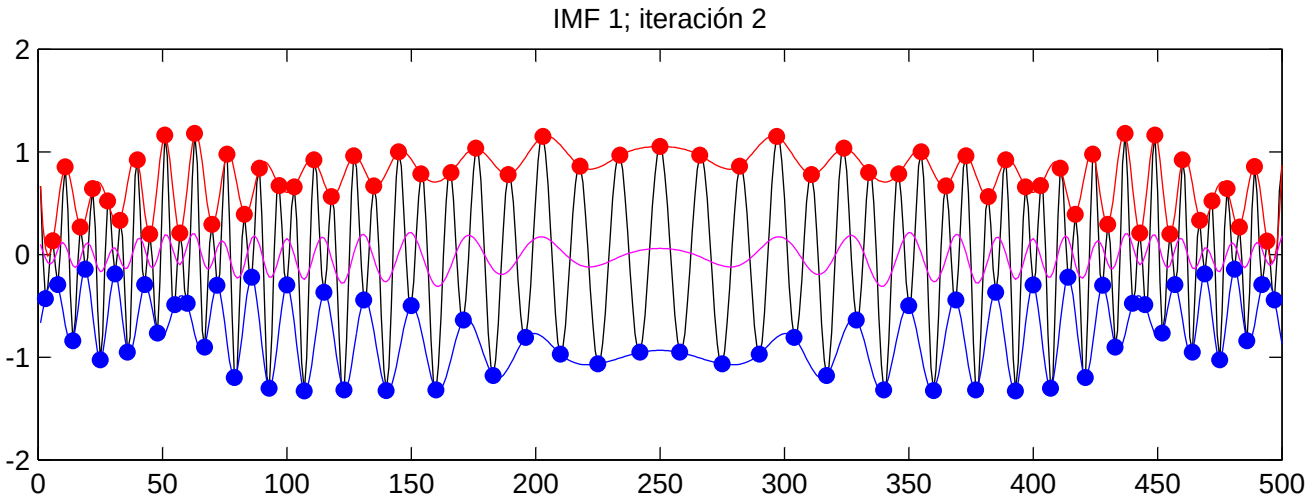
EMD



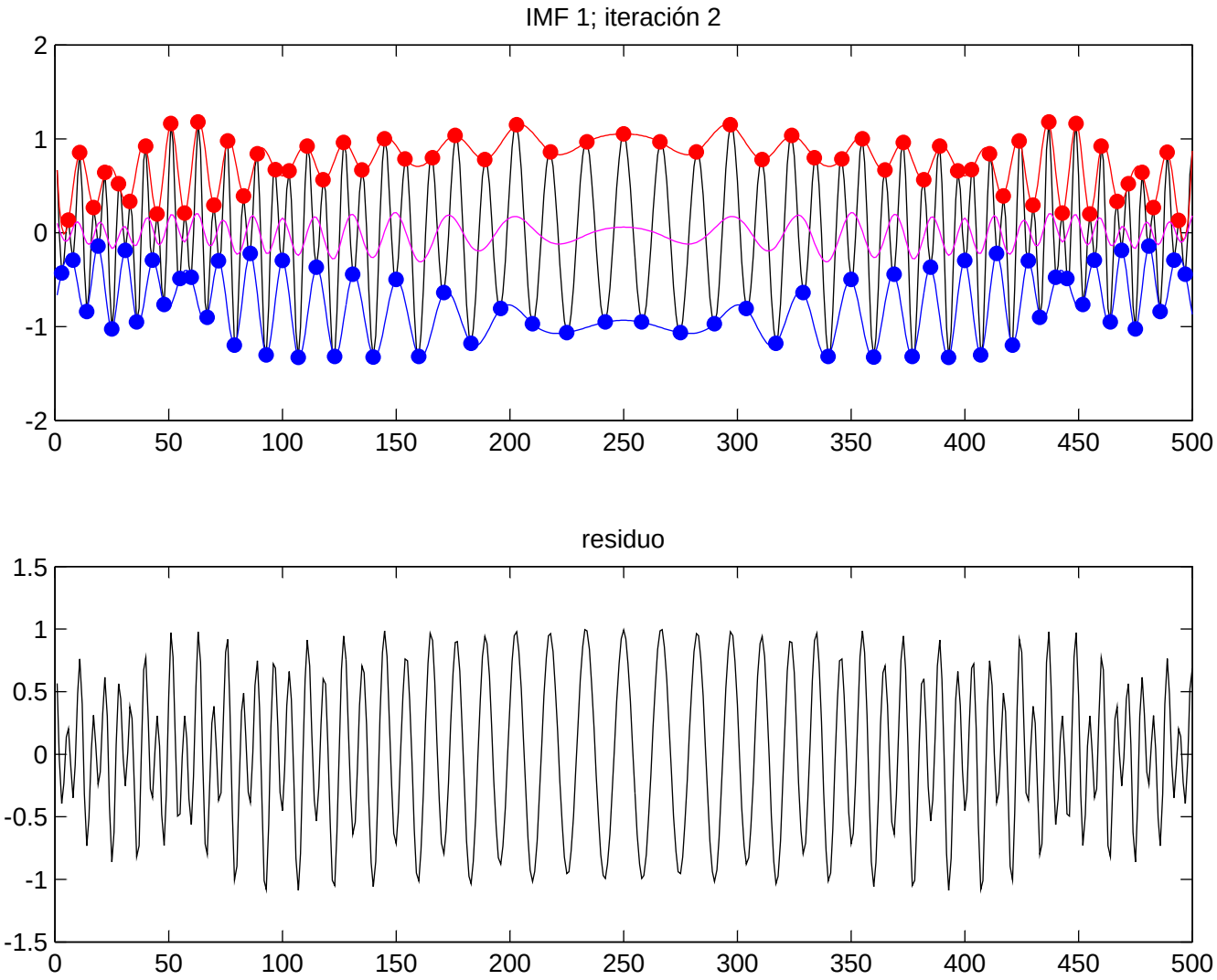
EMD



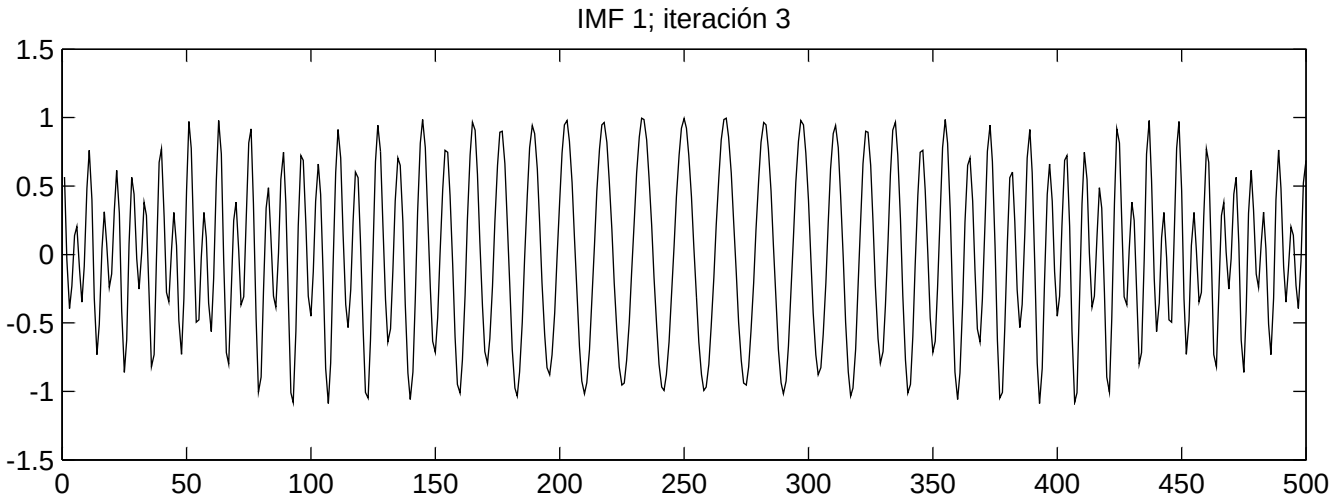
EMD



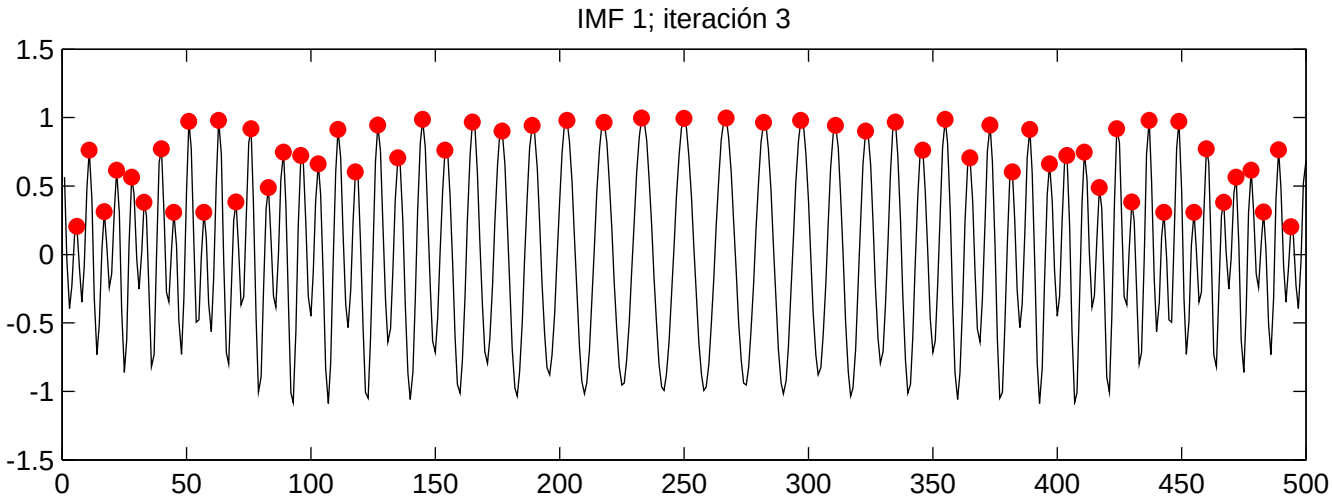
EMD


IMF 1; iteración 2
2
1
0
-1
-2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
residuo
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

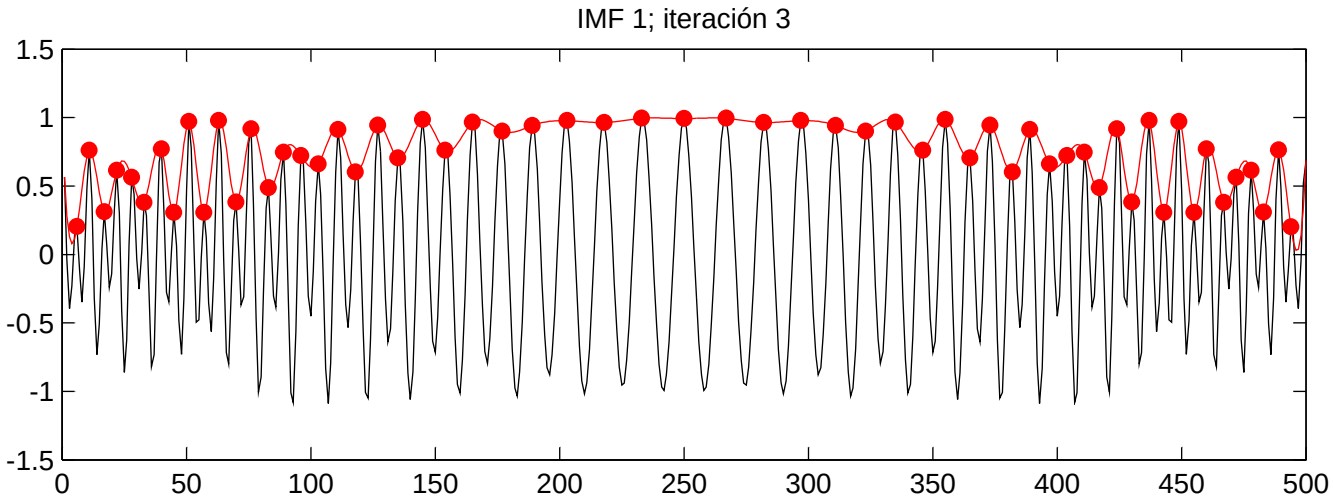
EMD


IMF 1; iteración 3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

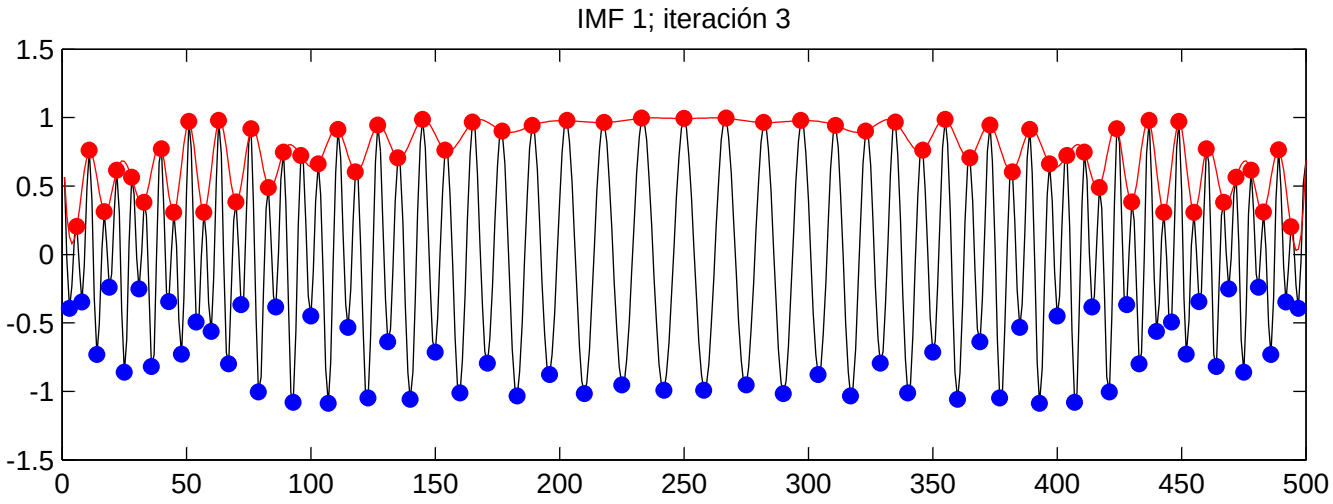
EMD


IMF 1; iteración 3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

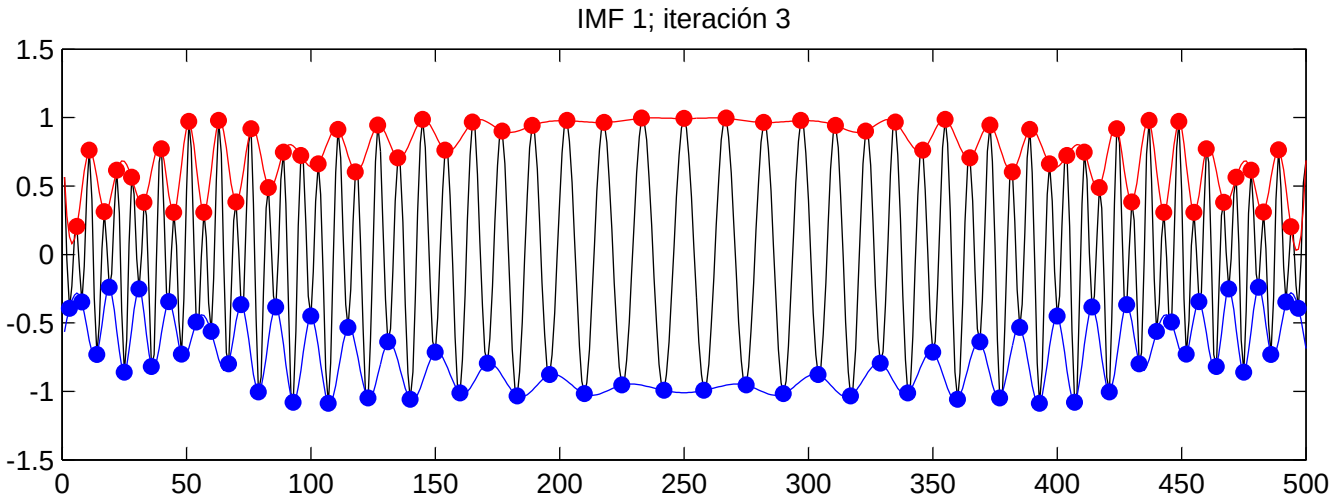
EMD


IMF 1; iteración 3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

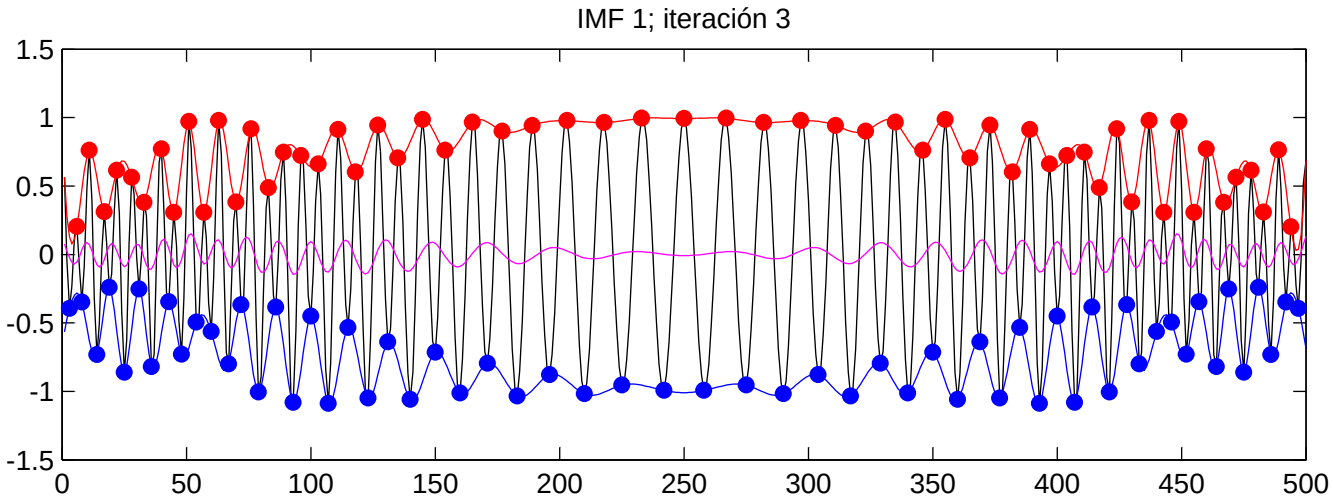
EMD


IMF 1; iteración 3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

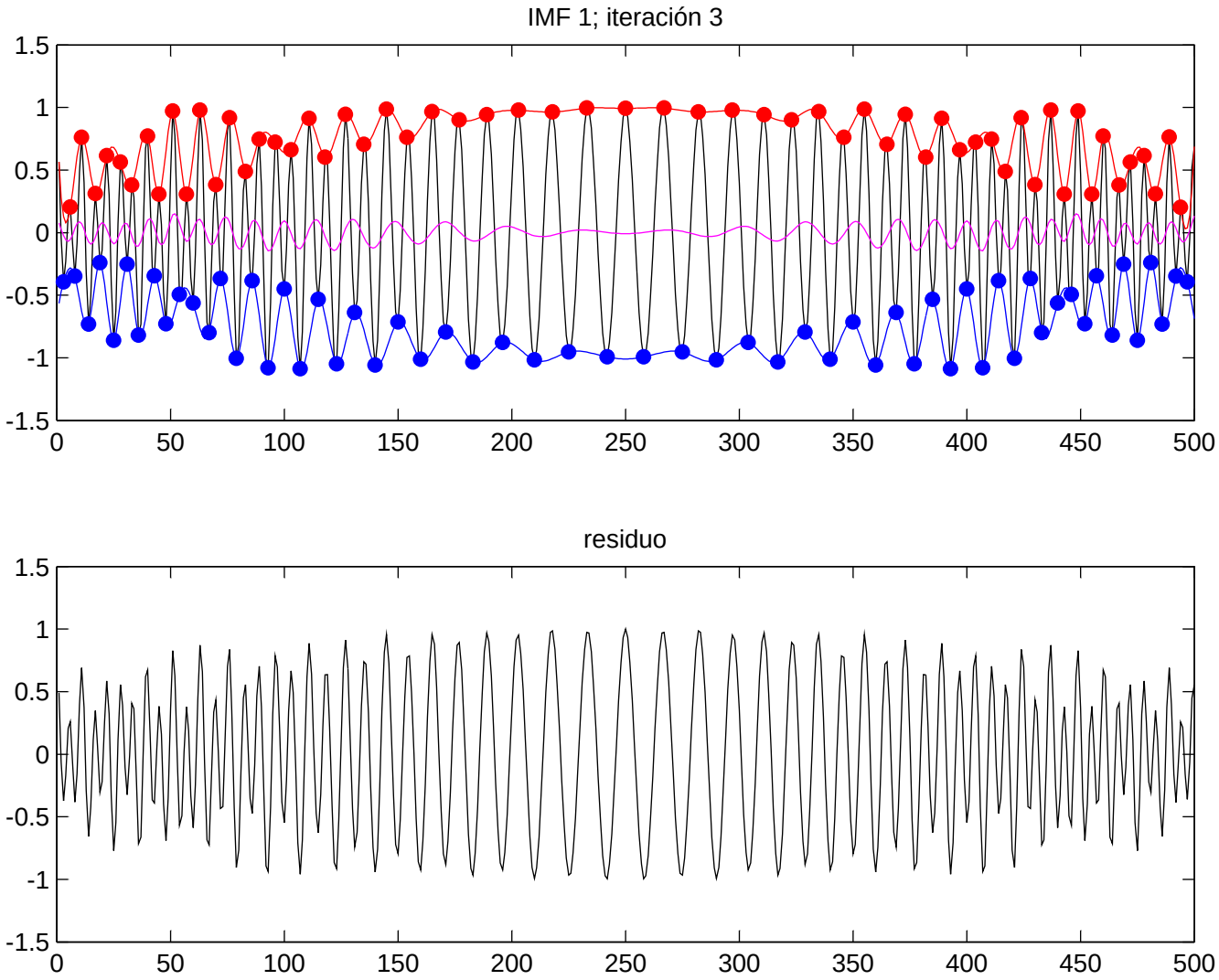
EMD


IMF 1; iteración 3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

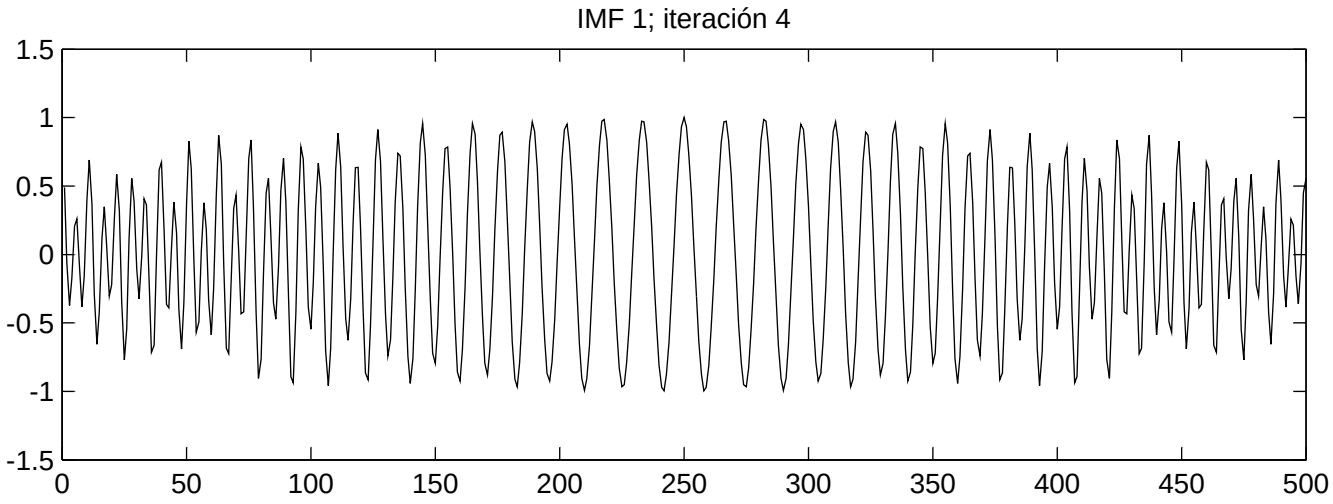
EMD


IMF 1; iteración 3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

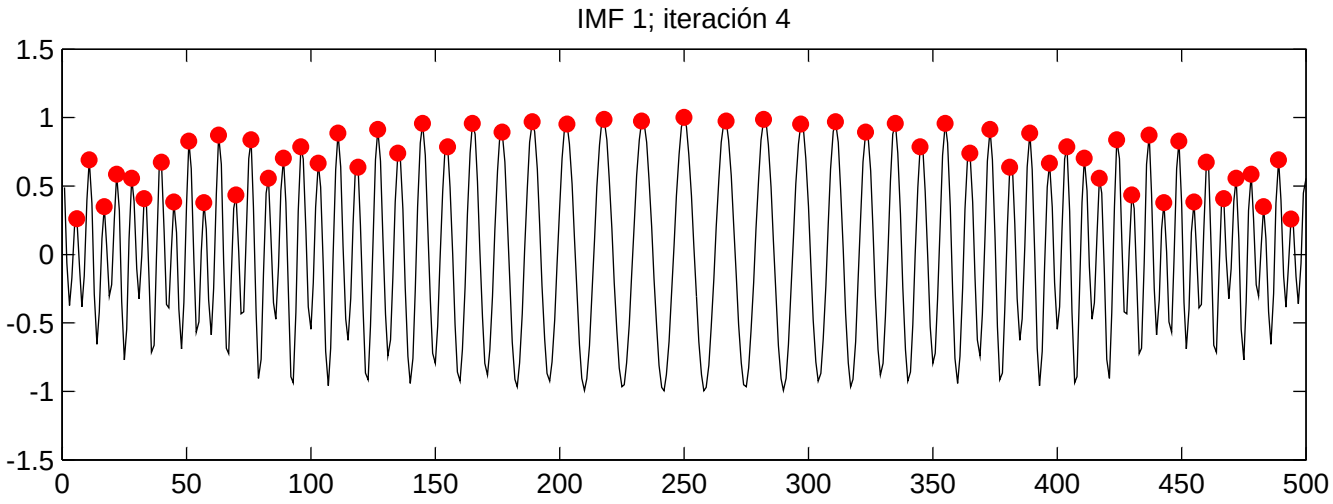
EMD


IMF 1; iteración 3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
residuo
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

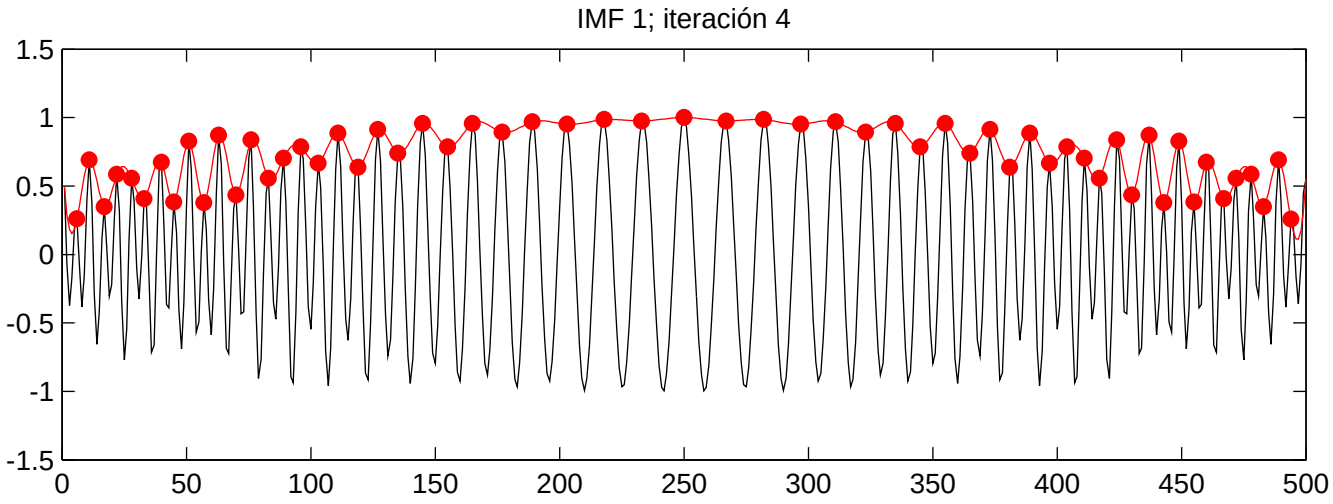
EMD


IMF 1; iteración 4
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

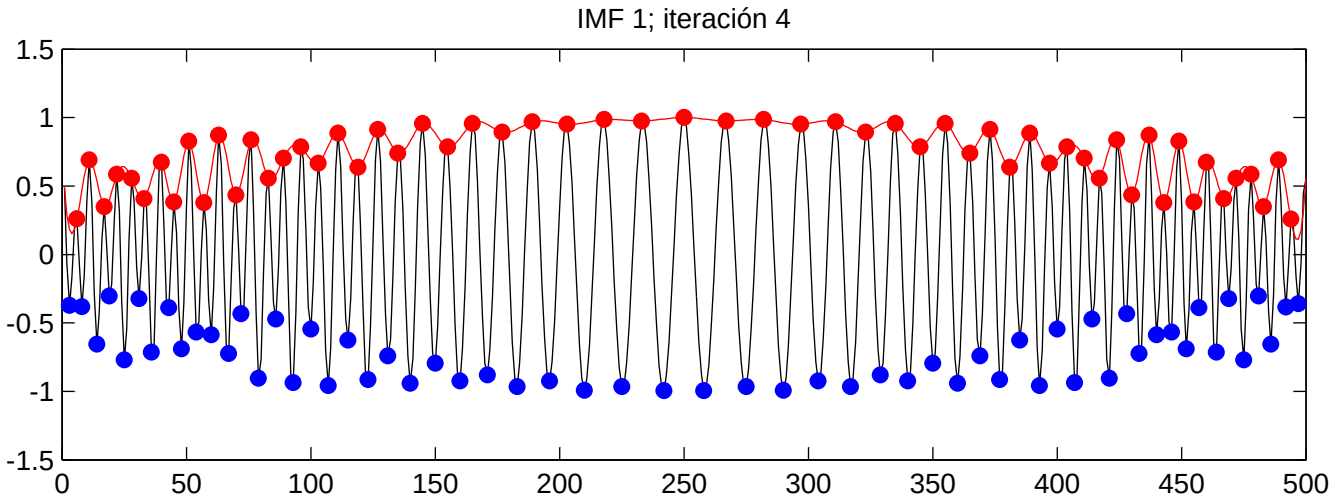
EMD


IMF 1; iteración 4
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

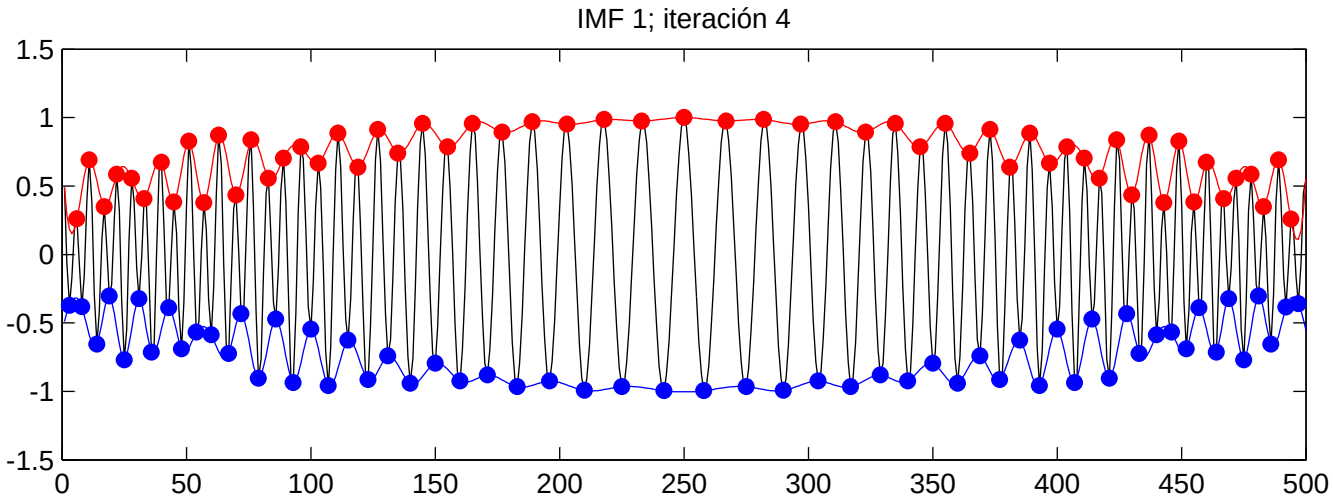
EMD


IMF 1; iteración 4
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

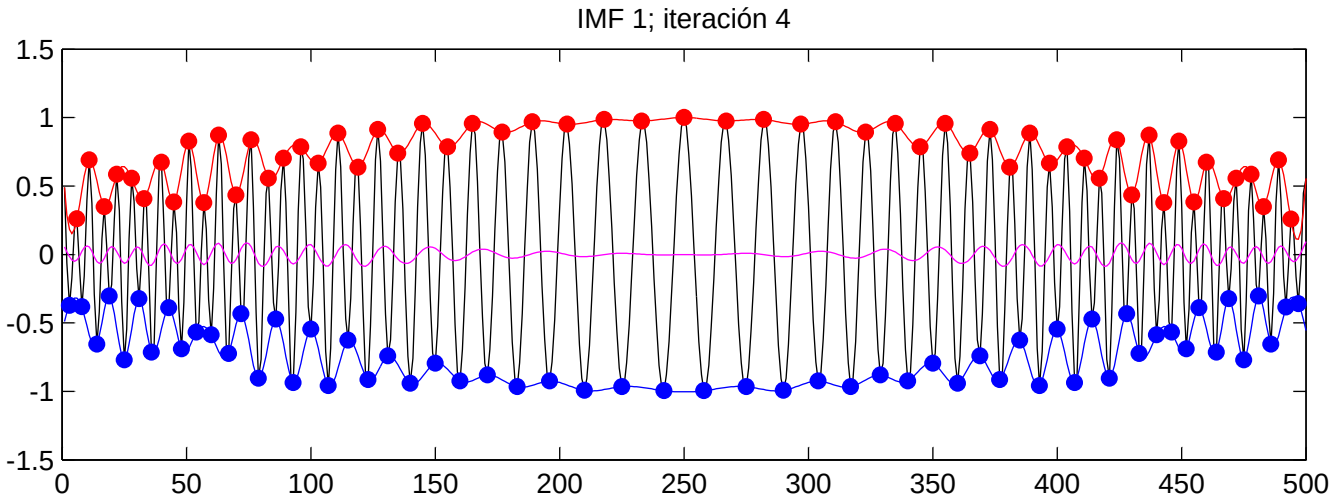
EMD


IMF 1; iteración 4
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

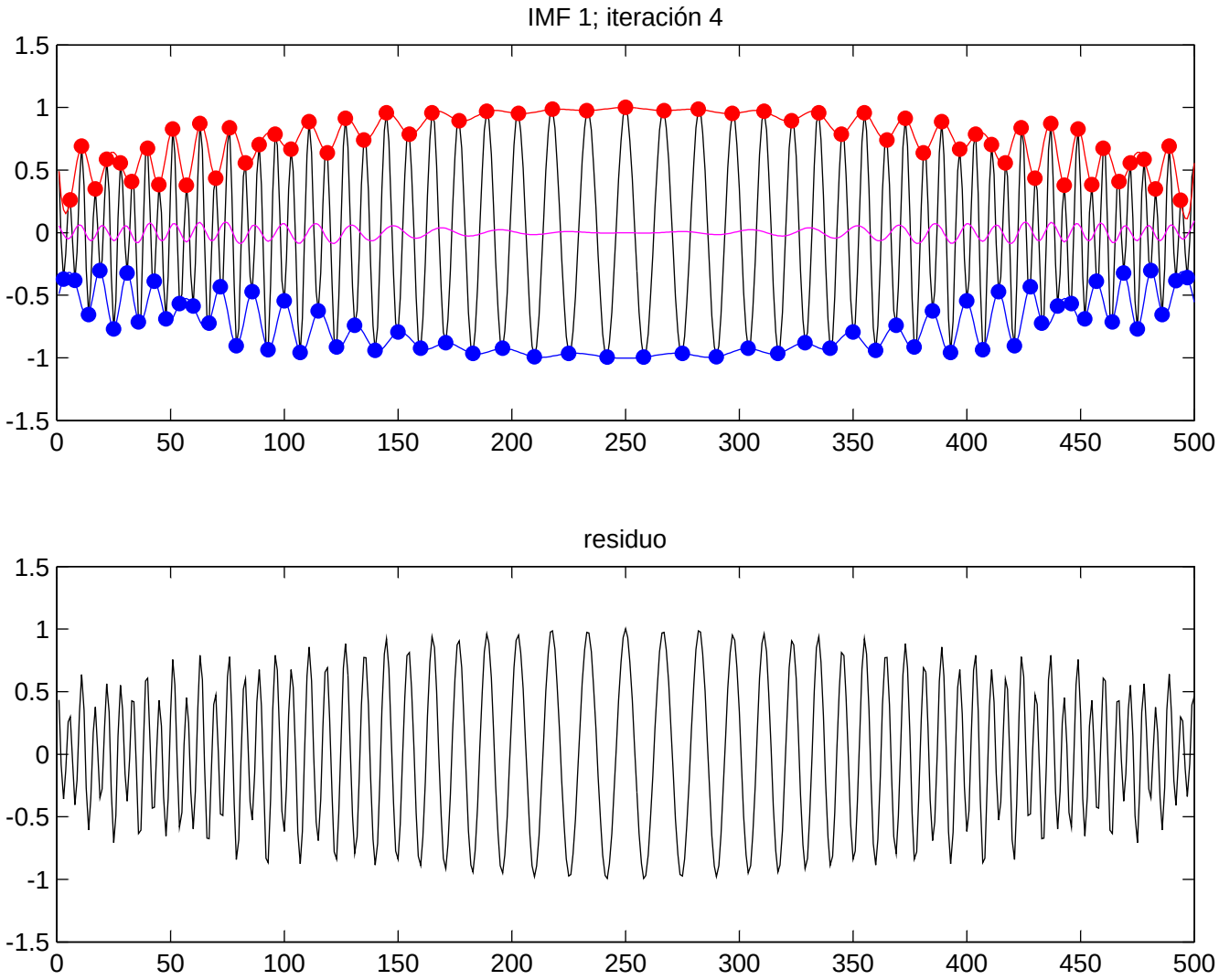
EMD


IMF 1; iteración 4
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

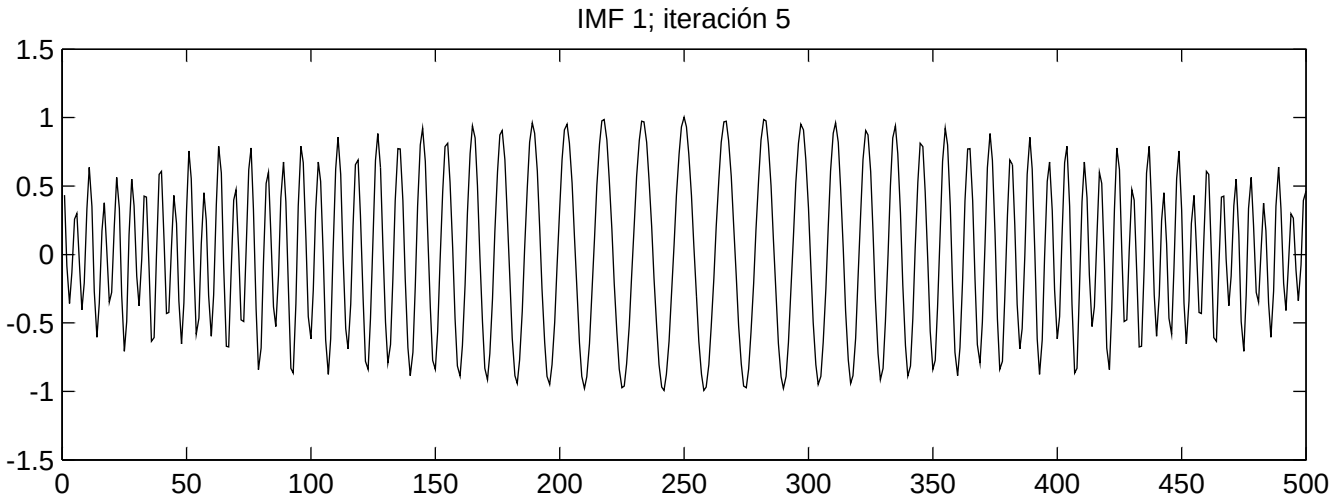
EMD


IMF 1; iteración 4
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

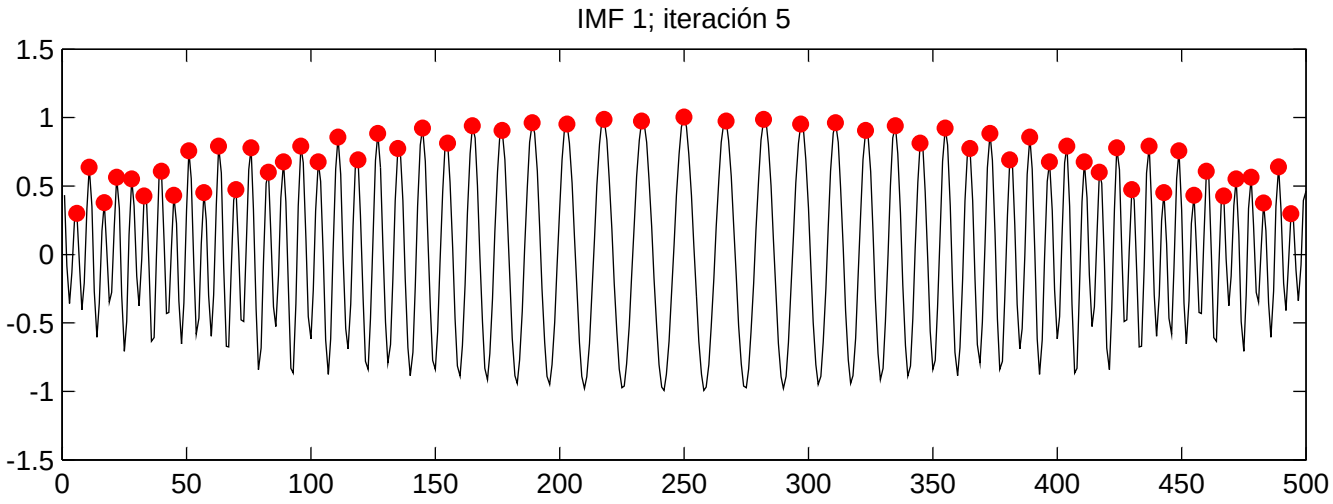
EMD


IMF 1; iteración 4
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
residuo
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

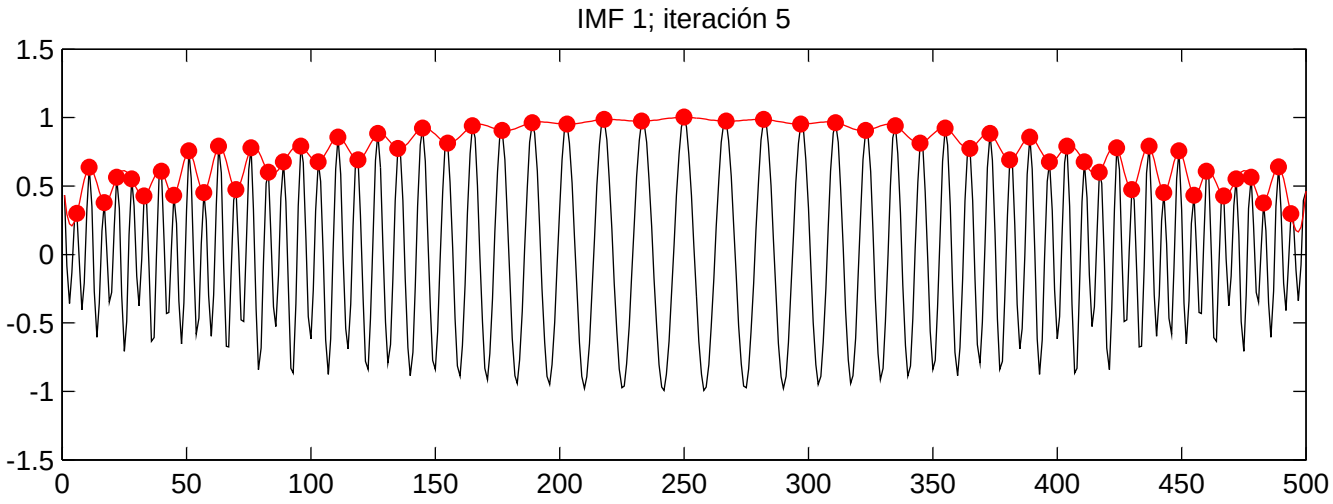
EMD


IMF 1; iteración 5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

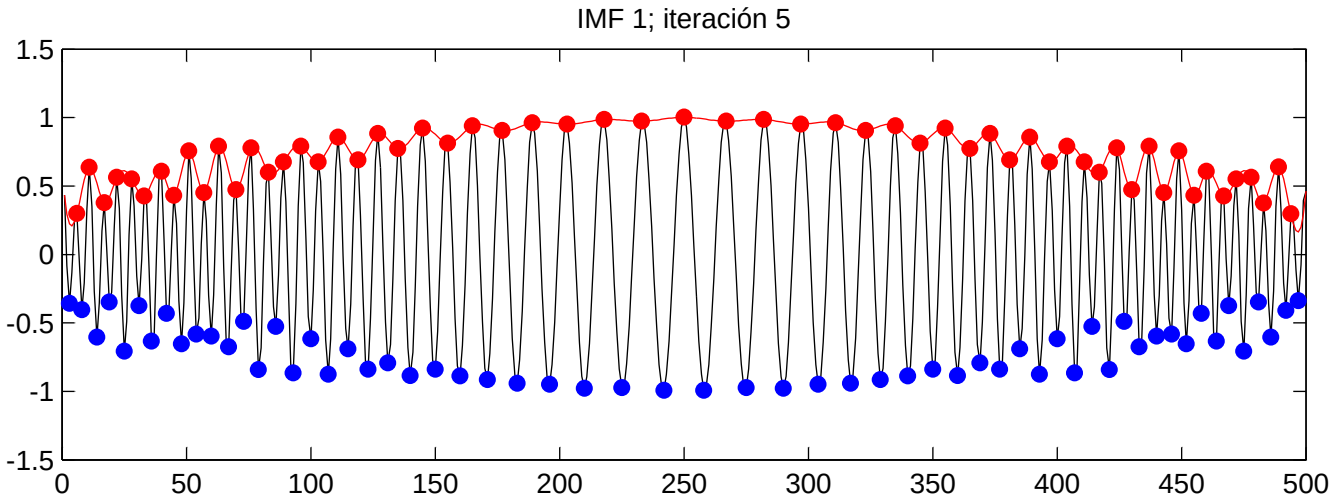
EMD


IMF 1; iteración 5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

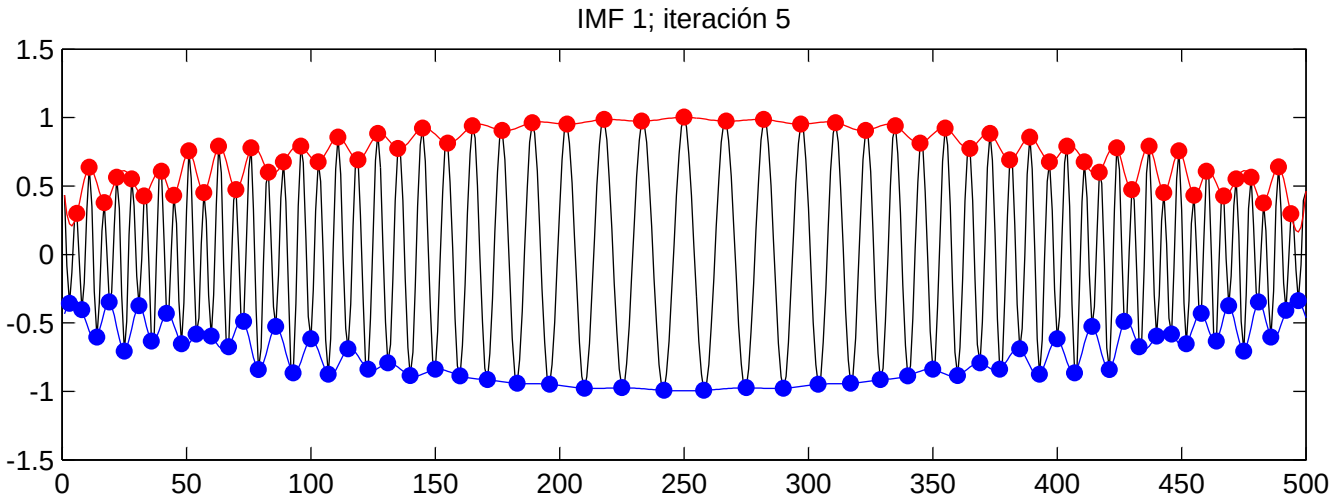
EMD


IMF 1; iteración 5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

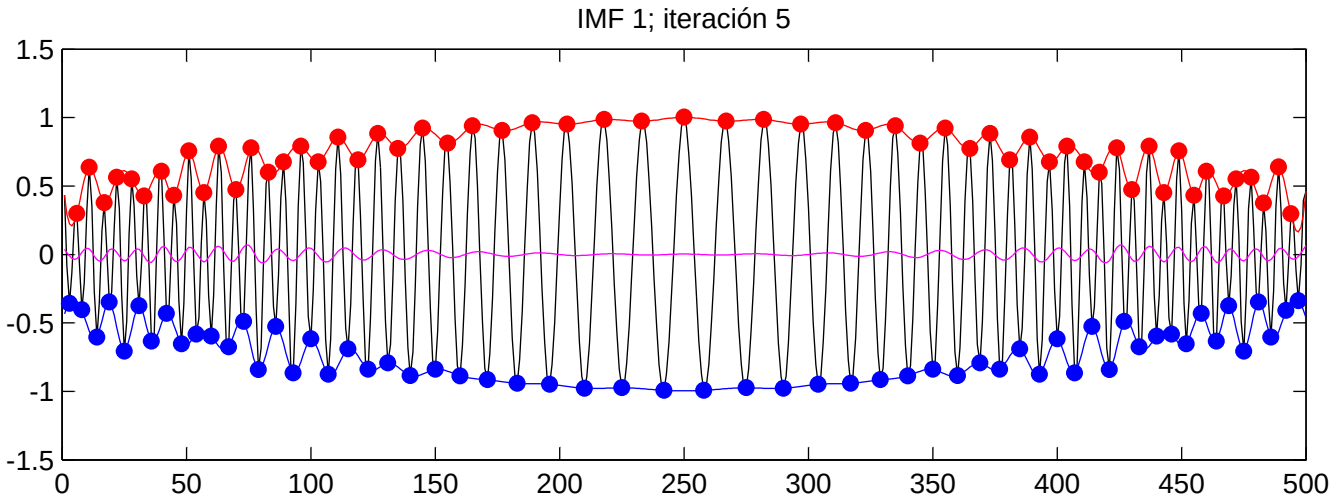
EMD


IMF 1; iteración 5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

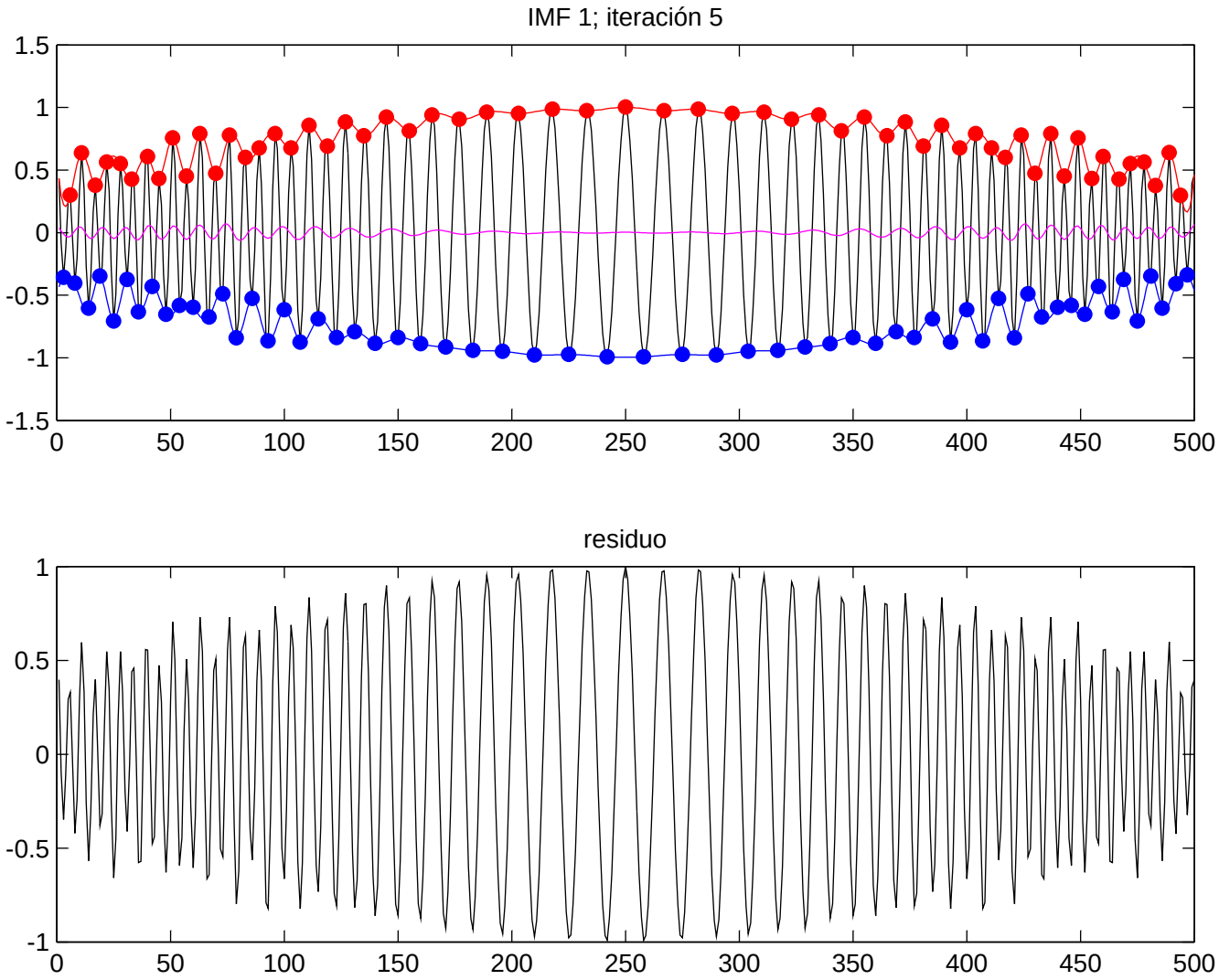
EMD


IMF 1; iteración 5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

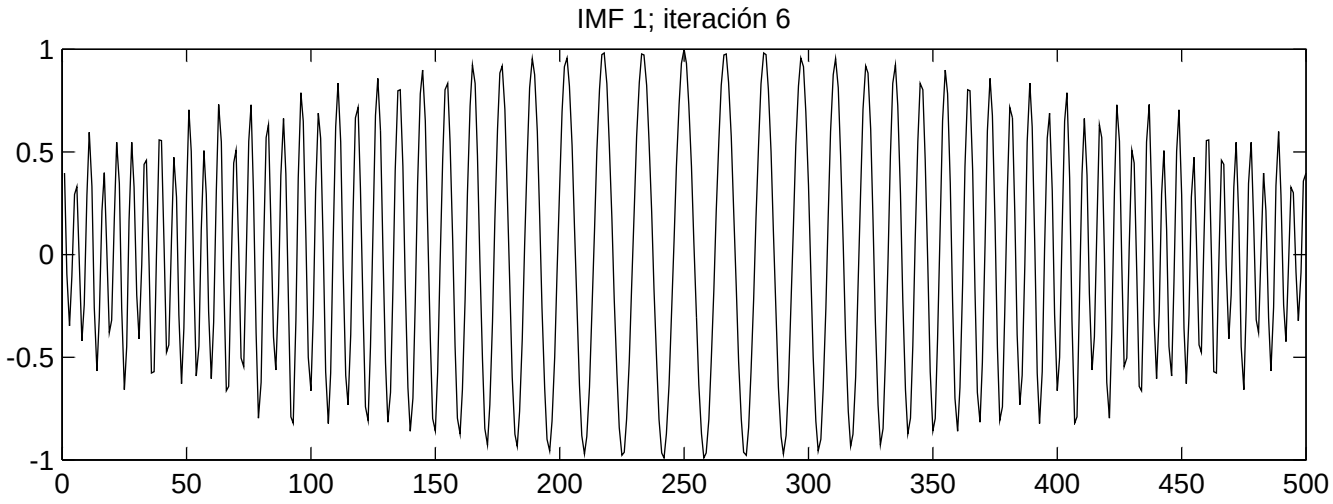
EMD


IMF 1; iteración 5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

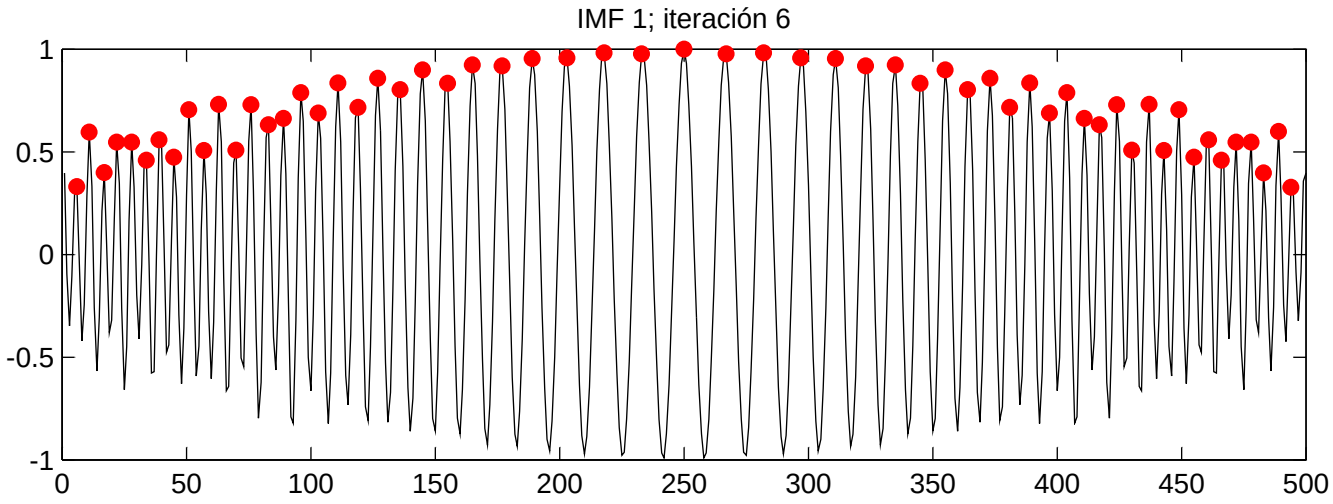
EMD


IMF 1; iteración 5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
residuo
1
0.5
0
-0.5
-1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

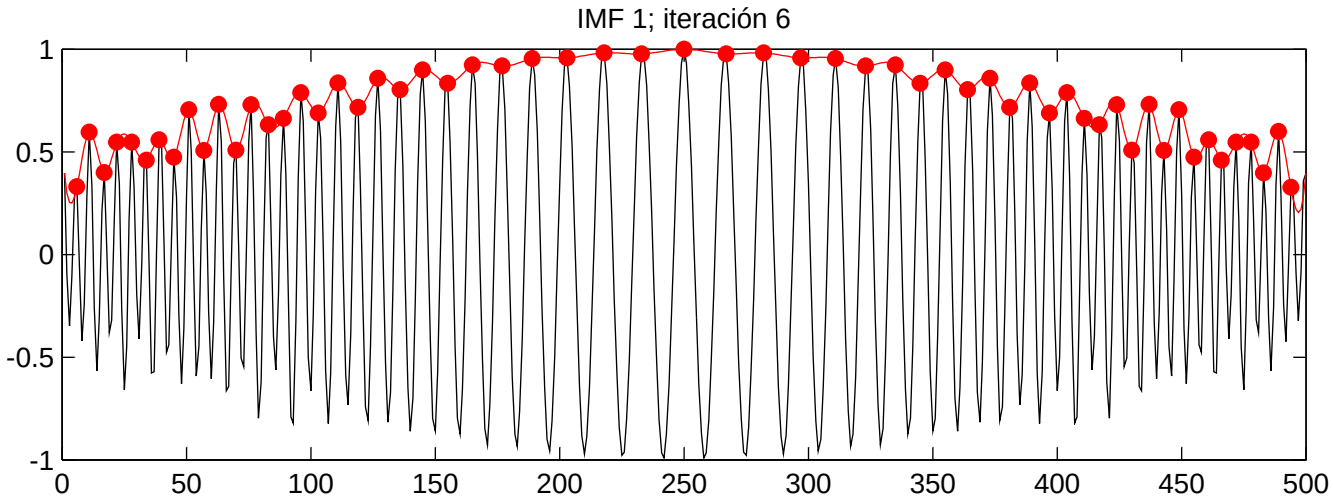
EMD


IMF 1; iteración 6
1
0.5
0
-0.5
-1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

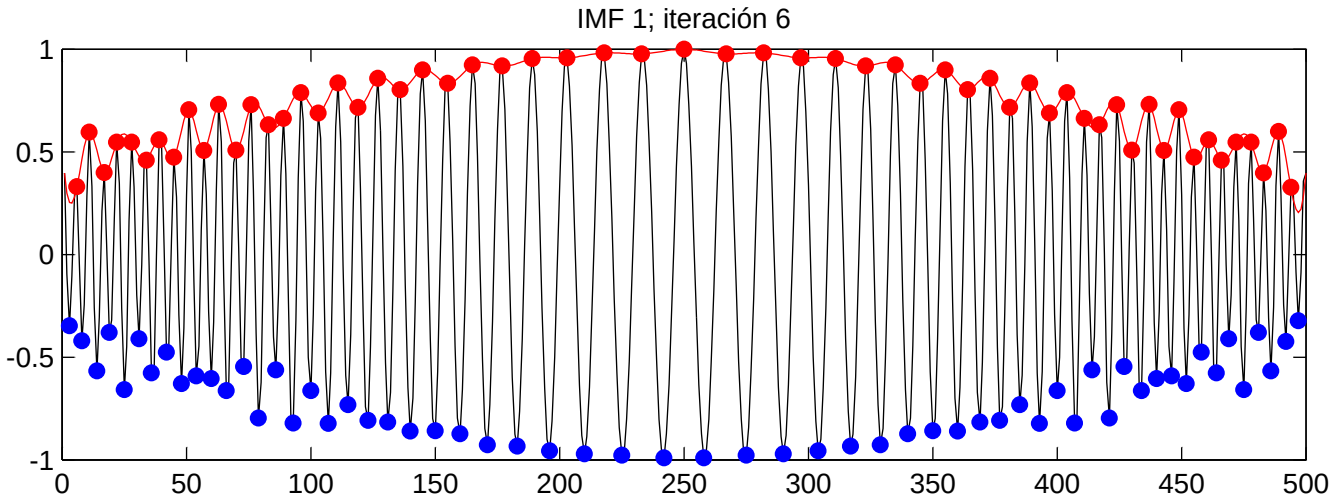
EMD


IMF 1; iteración 6
1
0.5
0
-0.5
-1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

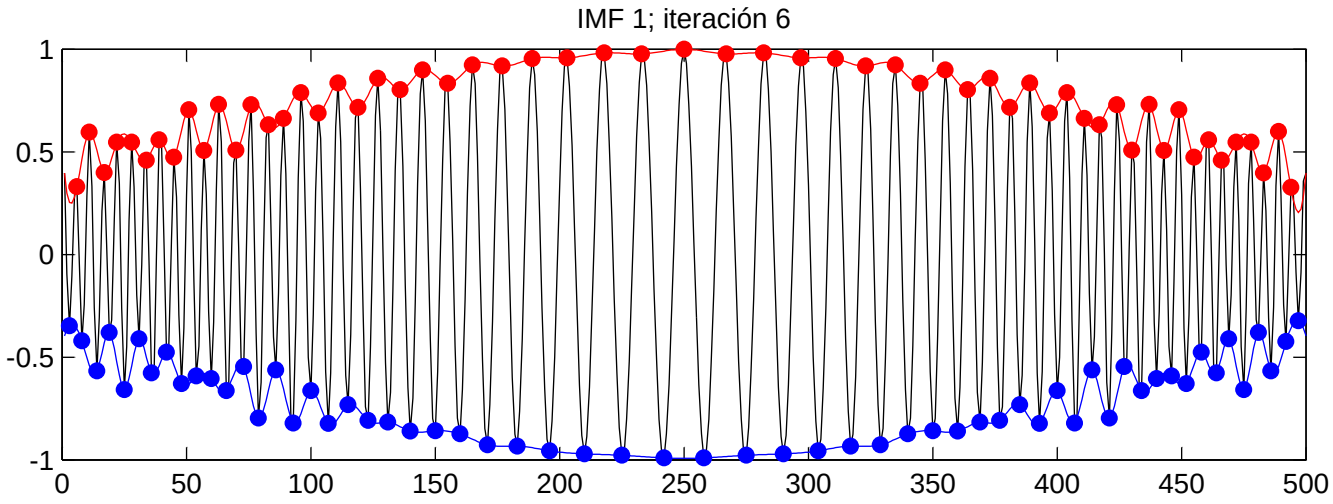
EMD


IMF 1; iteración 6
1
0.5
0
-0.5
-1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

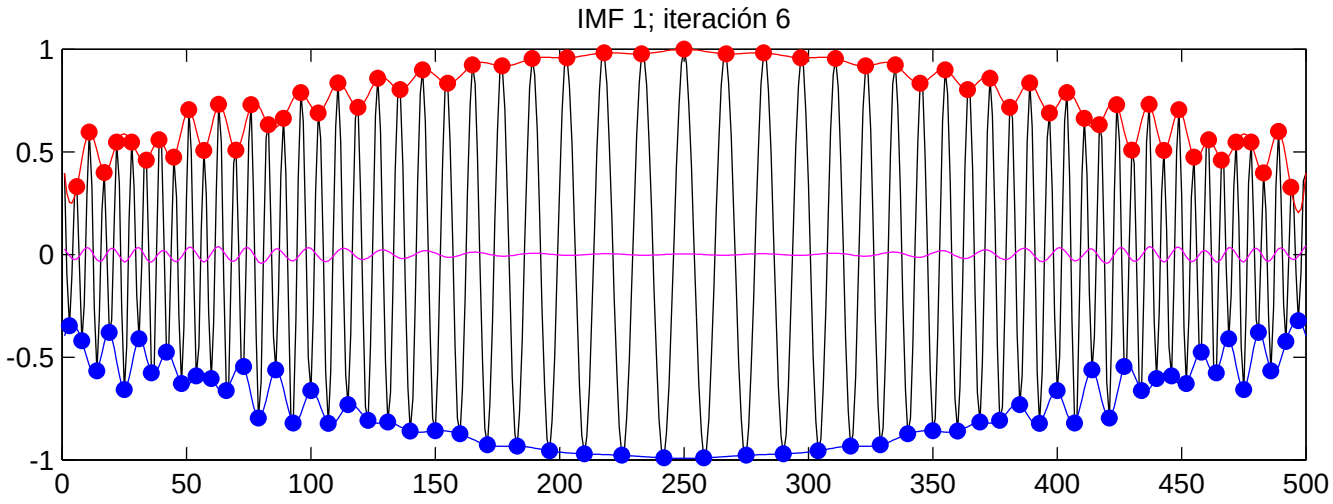
EMD


IMF 1; iteración 6
1
0.5
0
-0.5
-1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

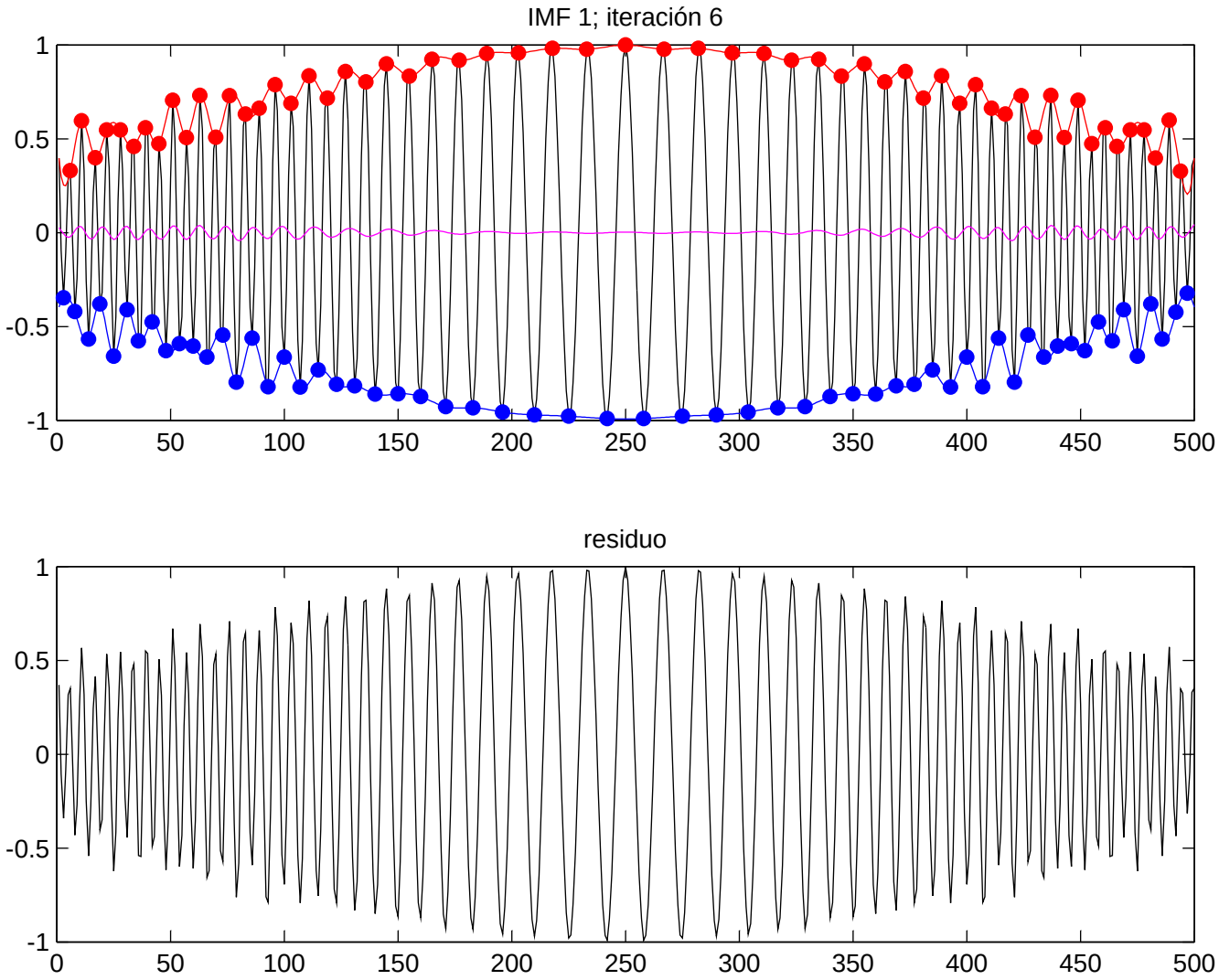
EMD


IMF 1; iteración 6
1
0.5
0
-0.5
-1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

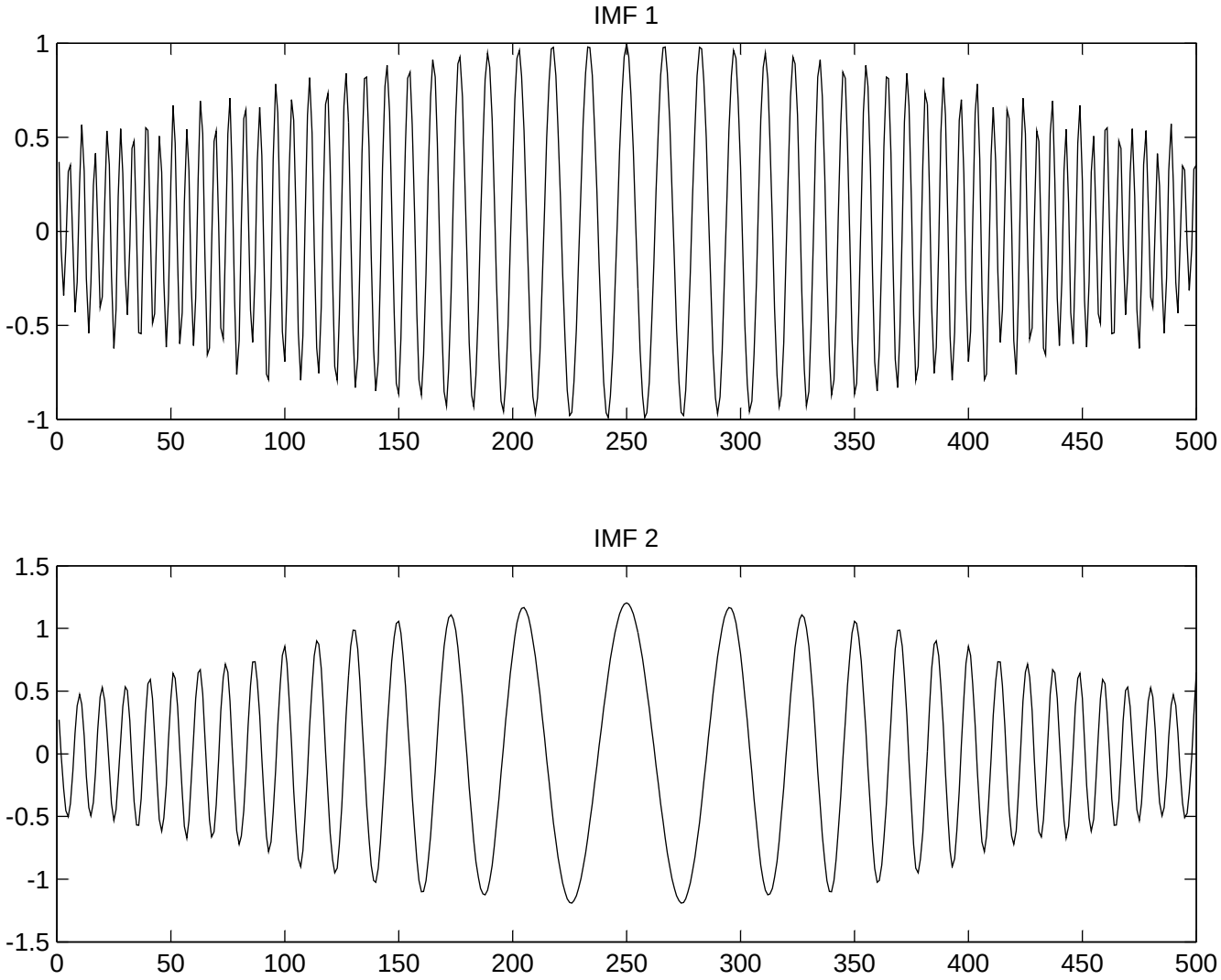
EMD


IMF 1; iteración 6
1
0.5
0
-0.5
-1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

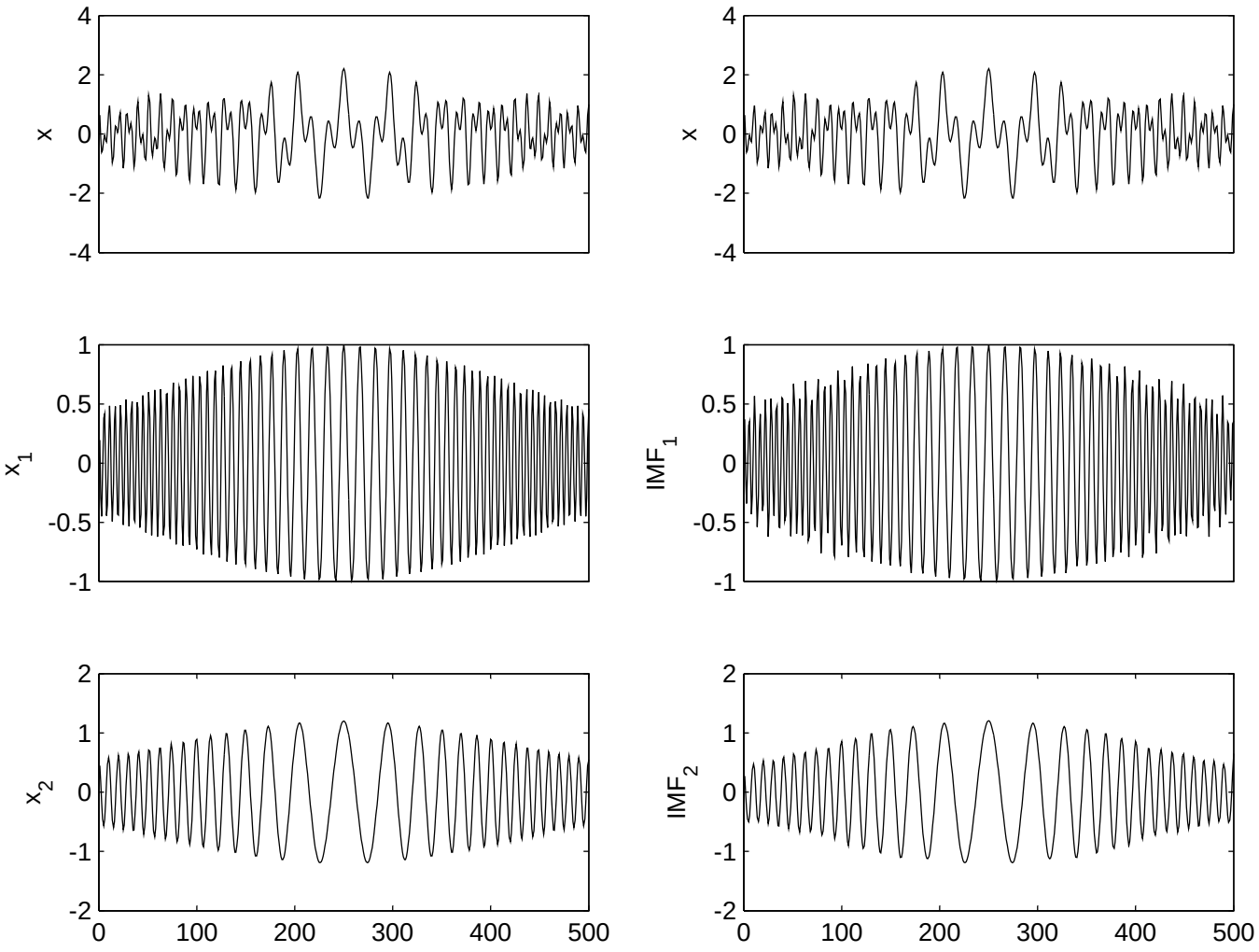
EMD


IMF 1; iteración 6
1
0.5
0
-0.5
-1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
residuo
1
0.5
0
-0.5
-1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

EMD


IMF 1
1
0.5
0
-0.5
-1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
IMF 2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

EMD



Descomposición deflacionaria

$$x(t) = d_1(t) + a_1(t)$$

Descomposición deflacionaria

$$
\begin{aligned}
x(t) &= d_1(t) + a_1(t) \\
&= d_1(t) + d_2(t) + a_2(t)
\end{aligned}
$$

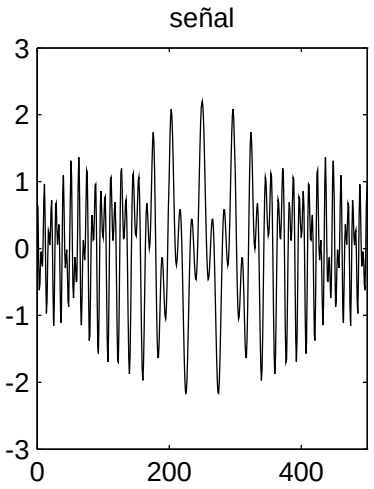
Descomposición deflacionaria

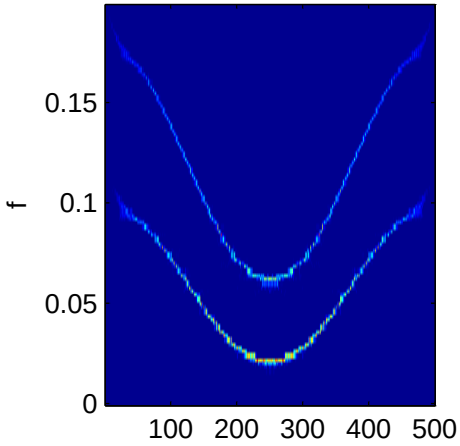
$$
\begin{aligned}
x(t) &= d_1(t) + a_1(t) \\
&= d_1(t) + d_2(t) + a_2(t) \\
&= \dots
\end{aligned}
$$

Descomposición deflacionaria

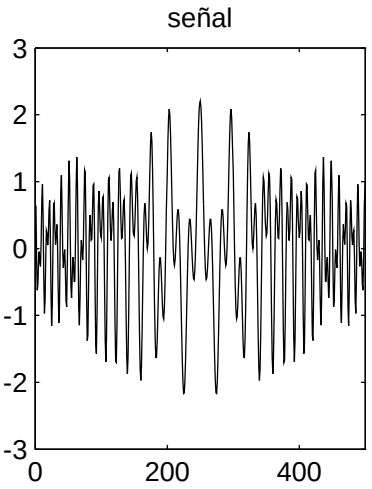
$$
\begin{aligned}
x(t) &= d_1(t) + a_1(t) \\
&= d_1(t) + d_2(t) + a_2(t) \\
&= \dots \\
&= \sum_{k=1}^{K} d_k(t) + a_K(t)
\end{aligned}
$$

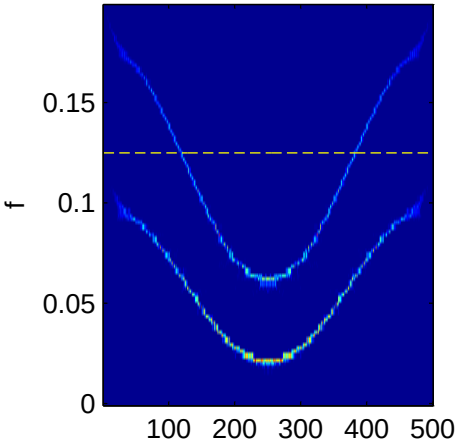
EMD



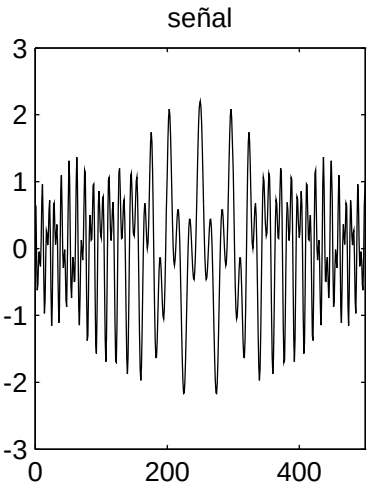


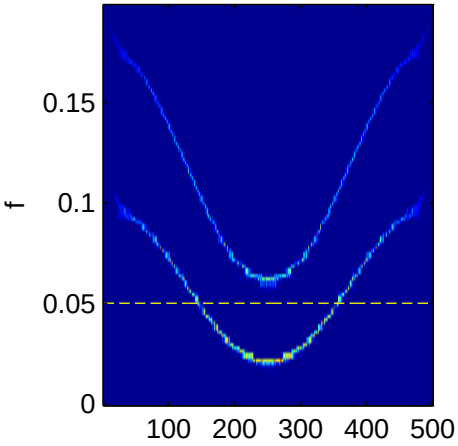
EMD



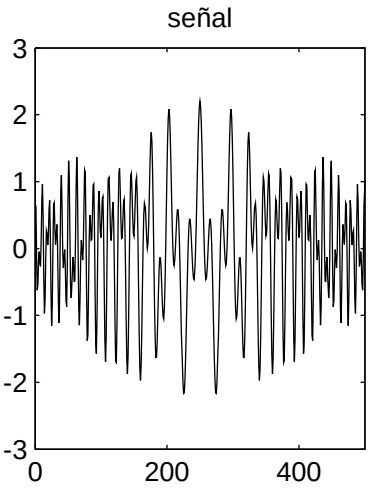


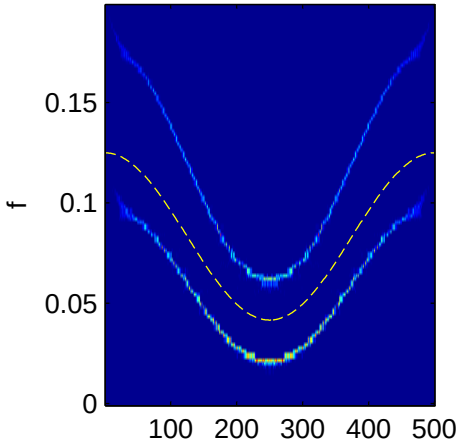
EMD



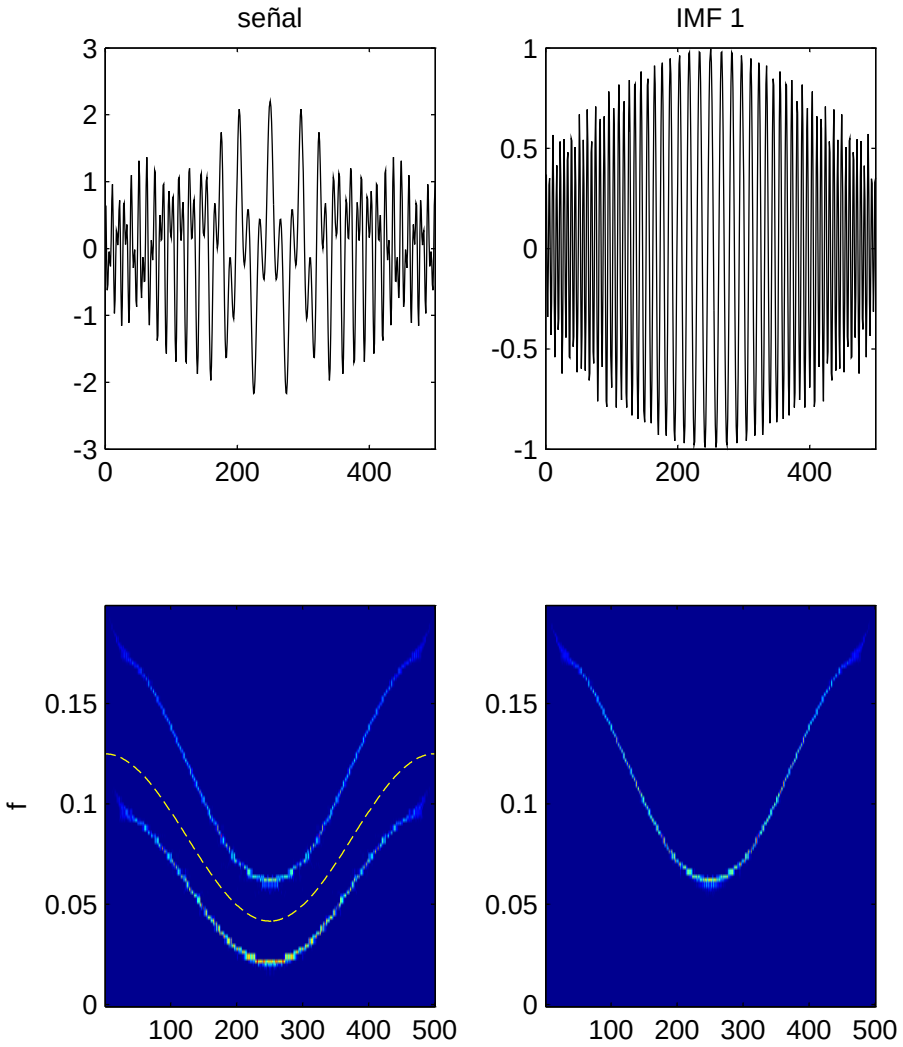


EMD

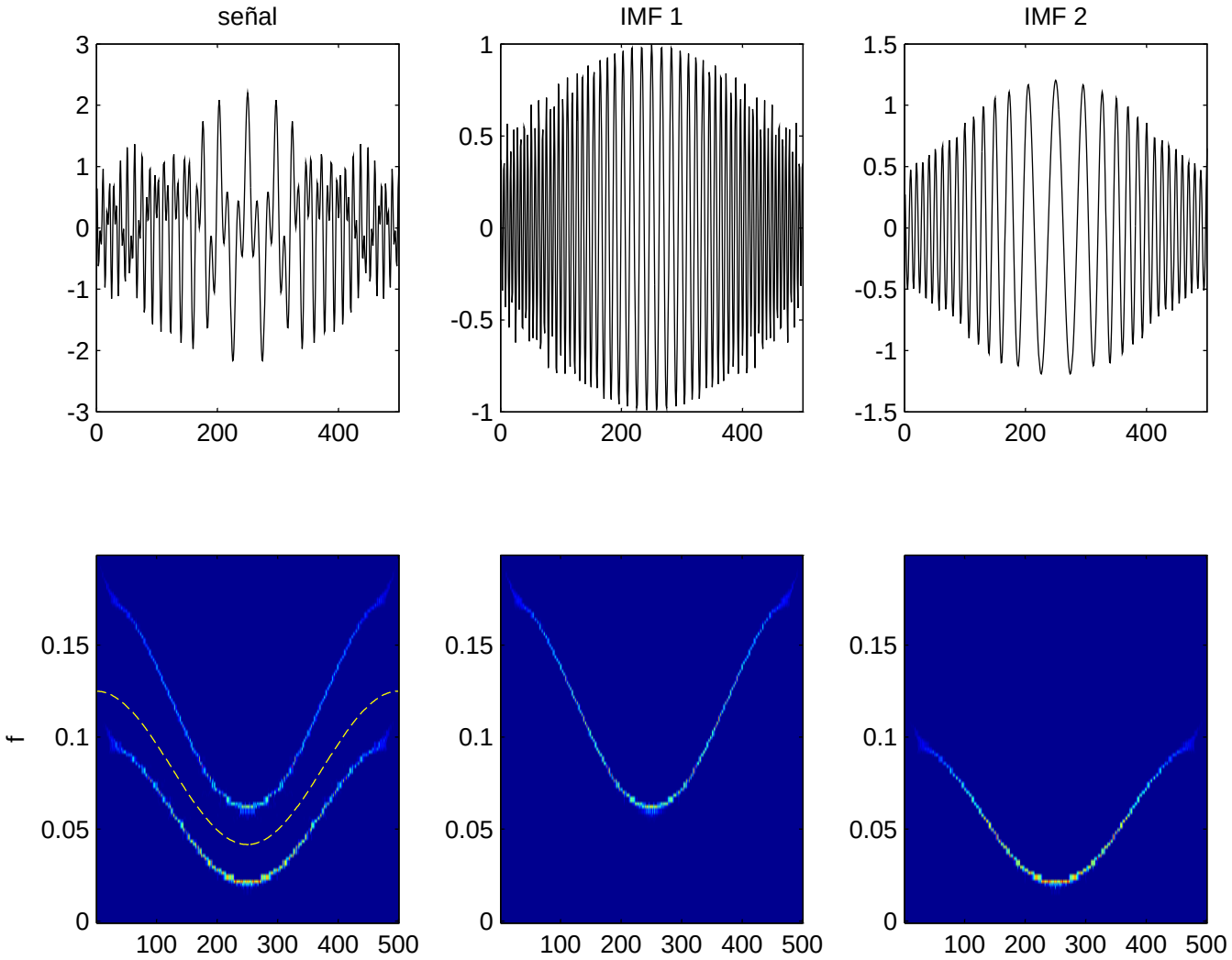




EMD


señal
IMF 1
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
200
400
1
0.5
0
-0.5
-1
0
200
400
f
0.15
0.1
0.05
0
100
200
300
400
500
0.15
0.1
0.05
0
100
200
300
400
500

EMD



- Los modos son obtenidos a la salida del algoritmo.

- Los modos son obtenidos a la salida del algoritmo.
- Estimación de $A_k(t)$ y $f_k(t)$ Bedrosian 1963, Nuttall 1966

$$A_k(t) = |x_k(t) + i\mathcal{H}x_k(t)|$$

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi}\partial_t \arg\left(x_k(t) + i\mathcal{H}x_k(t)\right)$$

- Los modos son obtenidos a la salida del algoritmo.
- Estimación de $A_k(t)$ y $f_k(t)$ Bedrosian 1963, Nuttall 1966

$$A_k(t) = |x_k(t) + i\mathcal{H}x_k(t)|$$

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi}\partial_t \arg\left(x_k(t) + i\mathcal{H}x_k(t)\right)$$

- Representación tiempo-frecuencia: espectro de Hilbert-Huang

$$H_x(t,f) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t)\delta(f - f_k(t))$$

- Los modos son obtenidos a la salida del algoritmo.
- Estimación de $A_k(t)$ y $f_k(t)$ Bedrosian 1963, Nuttall 1966

$$A_k(t) = |x_k(t) + i\mathcal{H}x_k(t)|$$

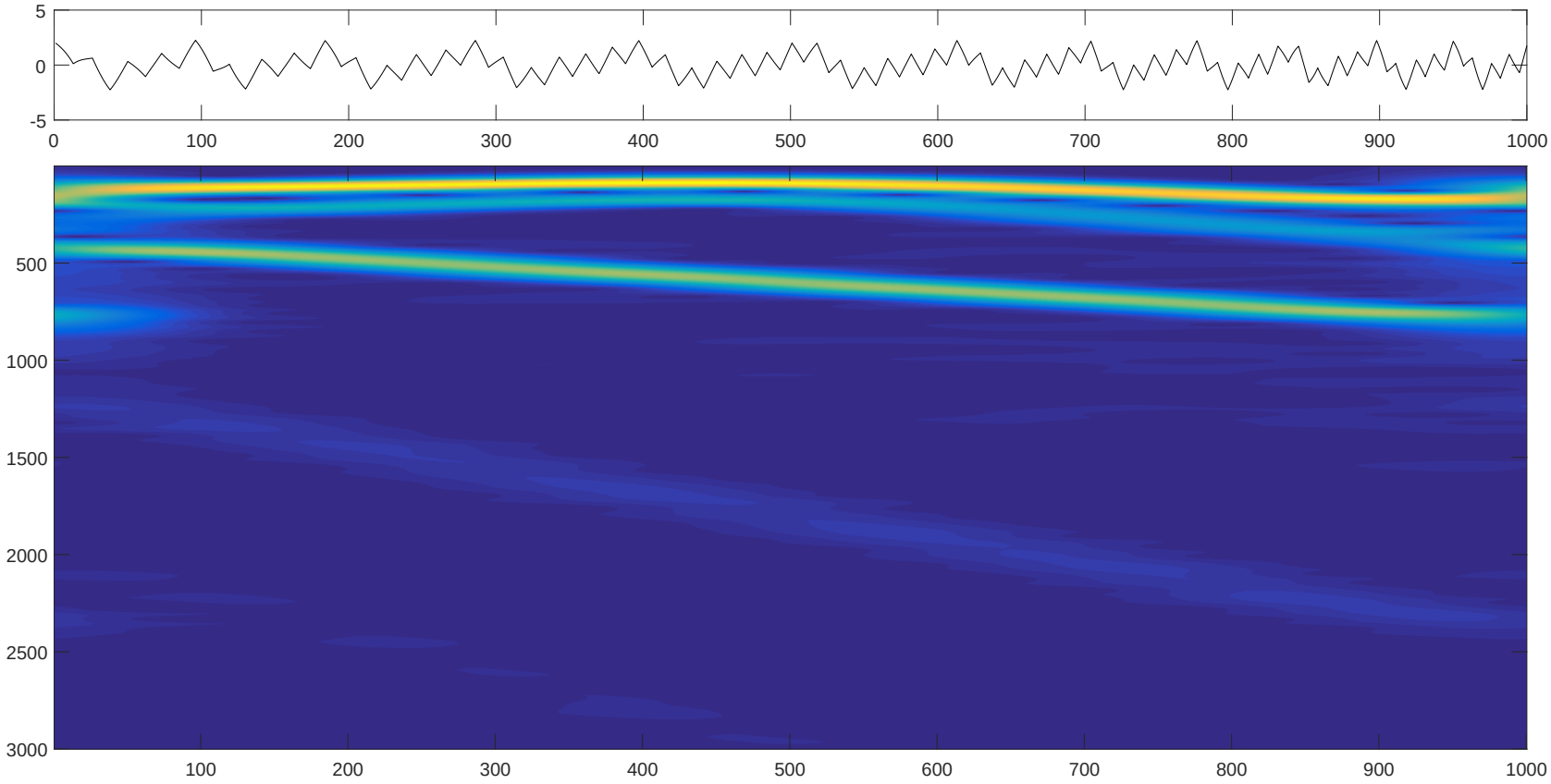
$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi}\partial_t \arg\left(x_k(t) + i\mathcal{H}x_k(t)\right)$$

- Representación tiempo-frecuencia: espectro de Hilbert-Huang

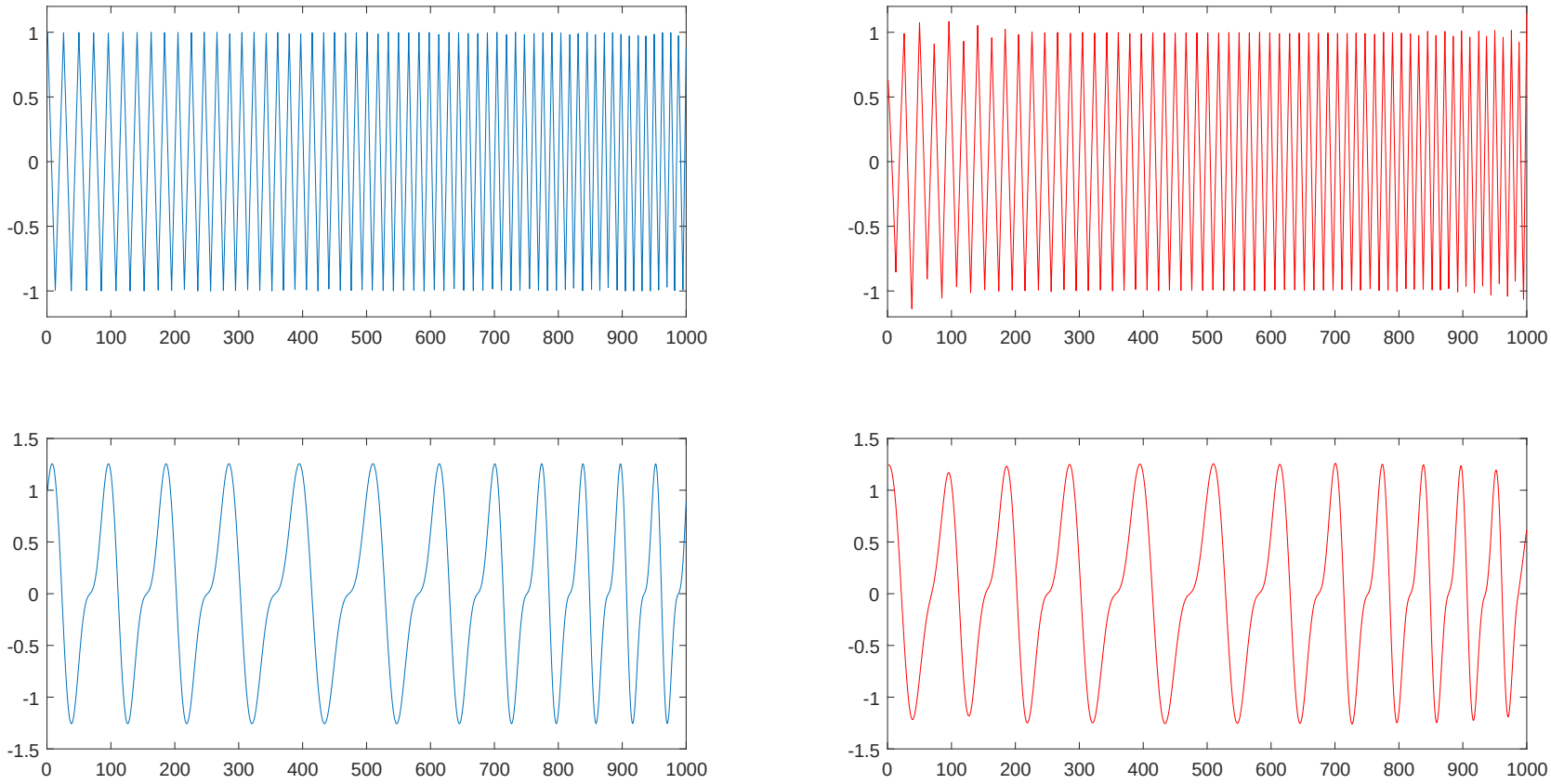
$$H_x(t,f) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t)\delta(f - f_k(t))$$

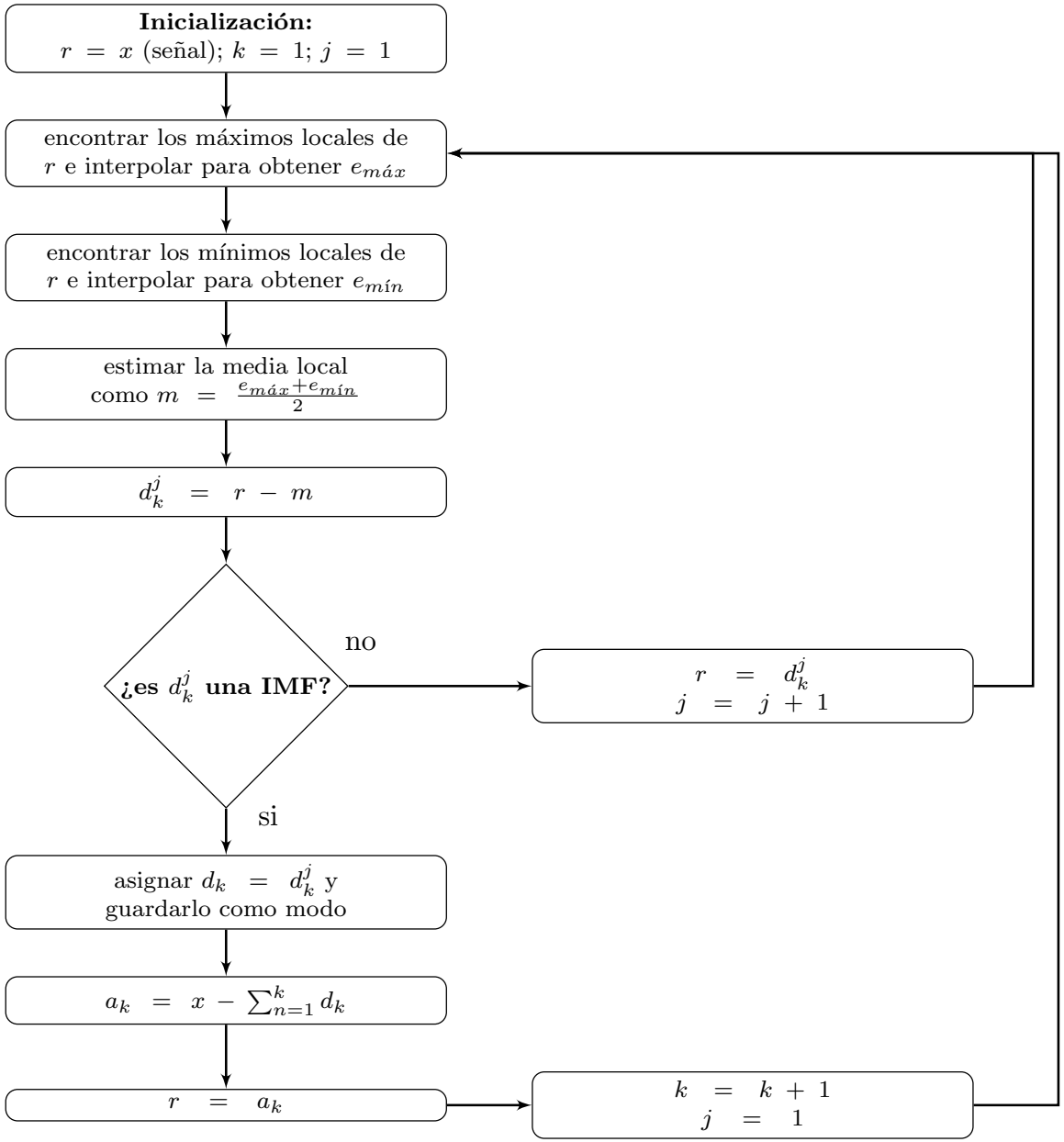
- 1 modo $\Rightarrow$ 1 cresta (no necesariamente coincide con las crestas teóricas) Rilling & Flandrin 2007.

Otro ejemplo



Otro ejemplo




Inicialización:
$r = x$ (señal); $k = 1$; $j = 1$
encontrar los máximos locales de r e interpolar para obtener $e_{máx}$
encontrar los mínimos locales de r e interpolar para obtener $e_{mín}$
estimar la media local como $m = \frac{e_{máx}+e_{mín}}{2}$
$d_k^j = r - m$
¿es d_k^j una IMF?
no
$r = d_k^j$
$j = j + 1$
si
asignar $d_k = d_k^j$ y guardarlo como modo
$a_k = x - \sum_{n=1}^{k} d_k$
$r = a_k$
$k = k + 1$
$j = 1$

Implementación

- Tratamiento de bordes.

Implementación

- Tratamiento de bordes.
- Criterios de detención (finalización de *sifting* y cantidad de modos).

Implementación

- Tratamiento de bordes.
- Criterios de detención (finalización de *sifting* y cantidad de modos).
- Esquema de interpolación (*spline* cúbicos, pchip, lineal, Akima,...).

Implementación

- Tratamiento de bordes.
- Criterios de detención (finalización de *sifting* y cantidad de modos).
- Esquema de interpolación (*spline* cúbicos, pchip, lineal, Akima,...).
- Problemas de muestreo.

Contenidos

1. Motivación
2. EMD
3. Versiones de EMD asistidas por ruido
4. Un enfoque de optimización para EMD
5. Un enfoque tiempo-escala para EMD

Mezcla de modos

- En presencia de ruido en la señal.

Mezcla de modos

- En presencia de ruido en la señal.
- Si no se cumple $\phi'_{k-1}(t) > \phi'_k(t), \quad \forall t$ (señales «intermitentes»).

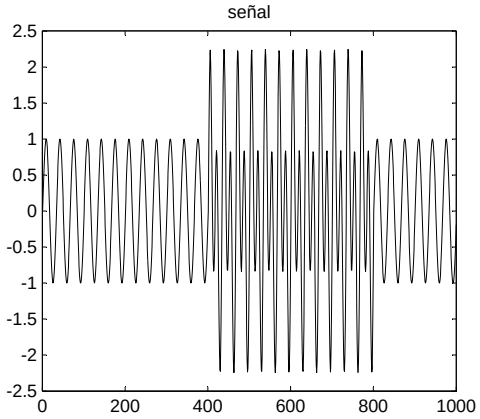
Mezcla de modos

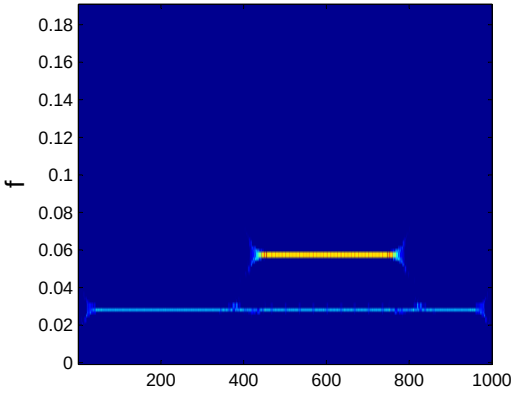
- En presencia de ruido en la señal.
- Si no se cumple $\phi'_{k-1}(t) > \phi'_k(t), \quad \forall t$ (señales «intermitentes»).

Mezcla de modos

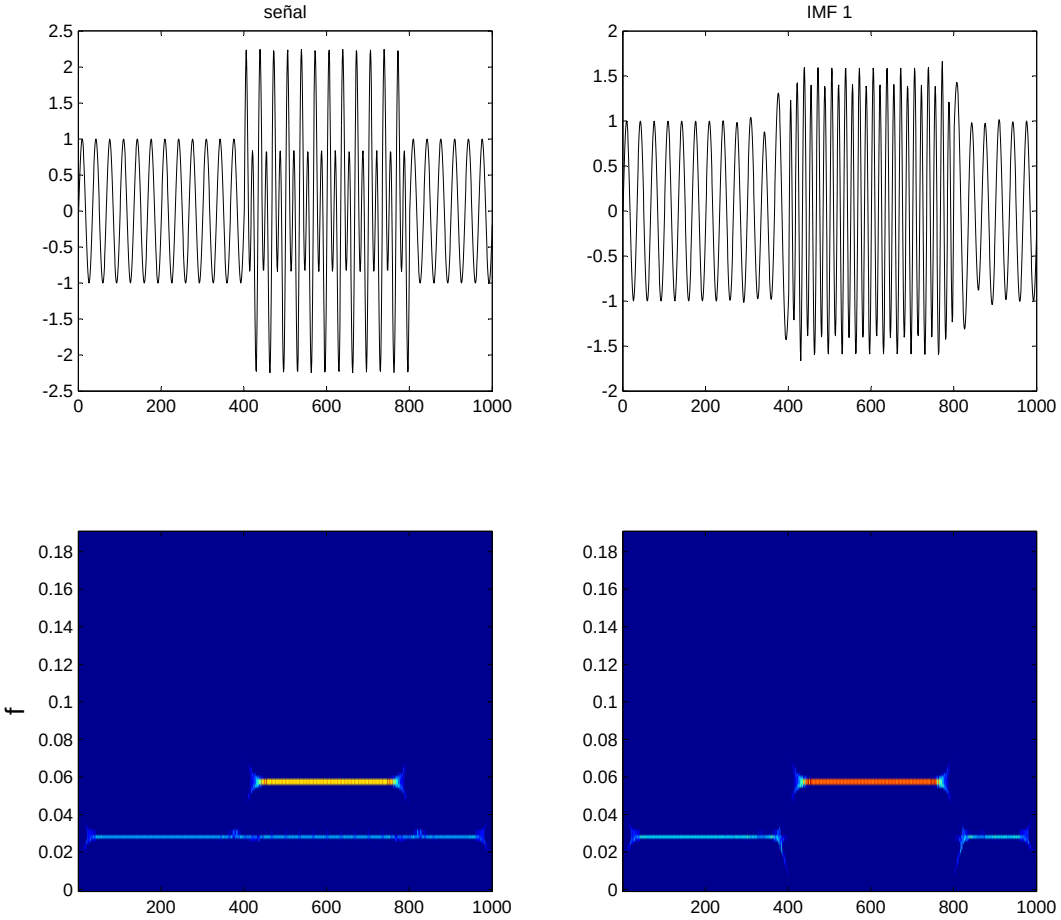
Presencia de oscilaciones de amplitud muy dispar en un modo, o presencia de oscilaciones muy similares en diferentes modos.

Mezcla de modos

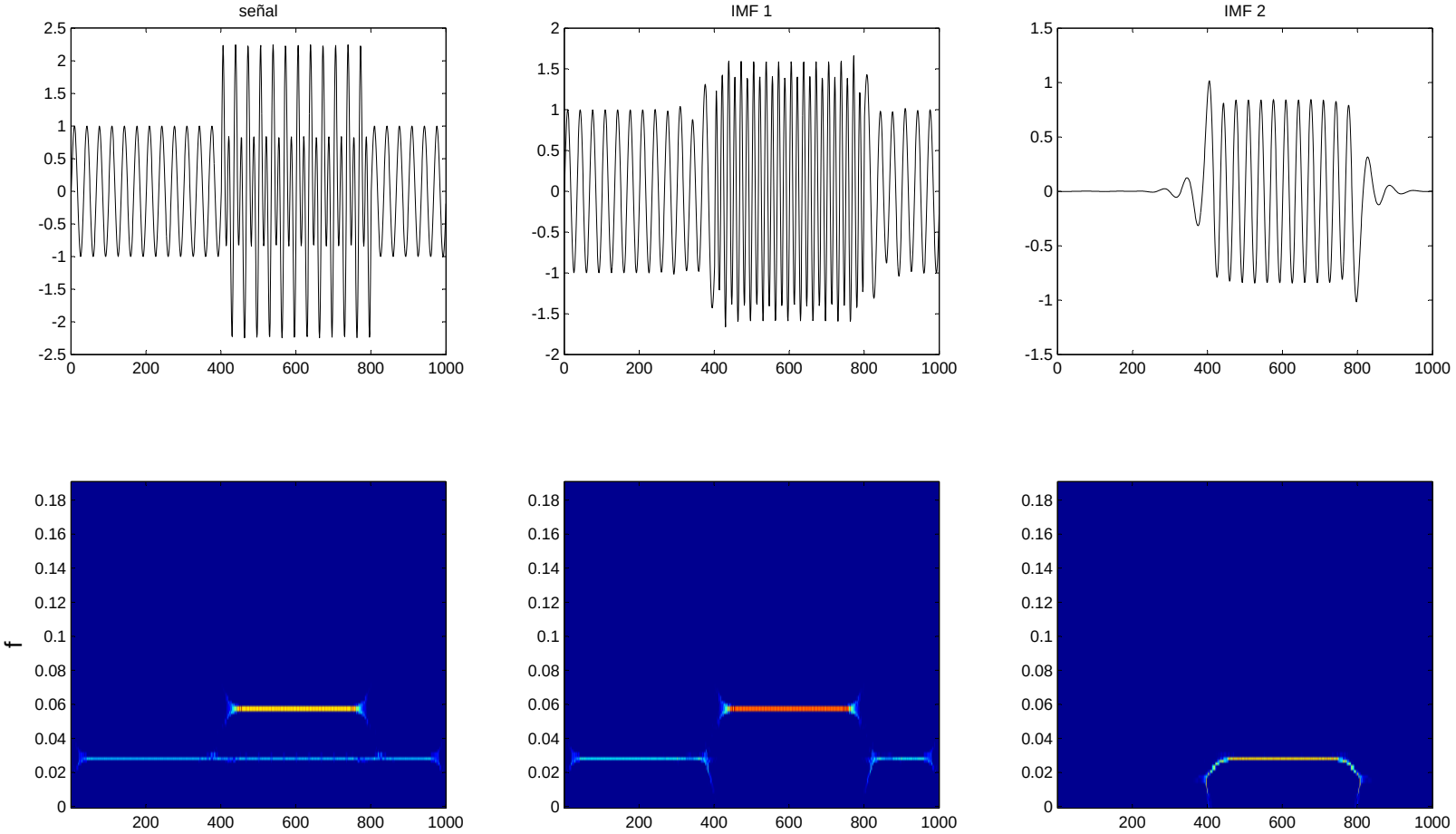




Mezcla de modos

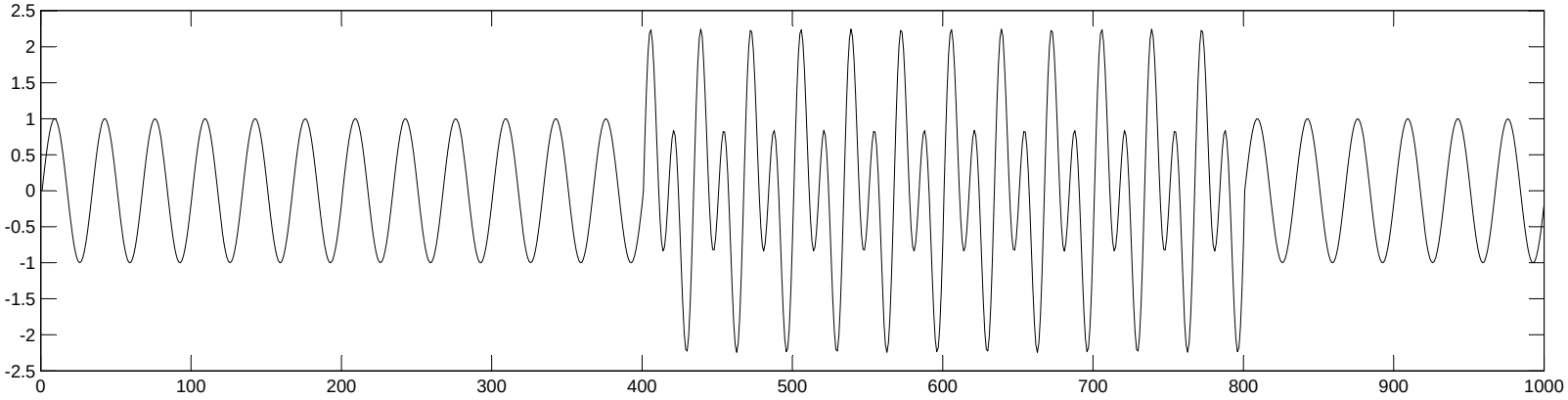


Mezcla de modos



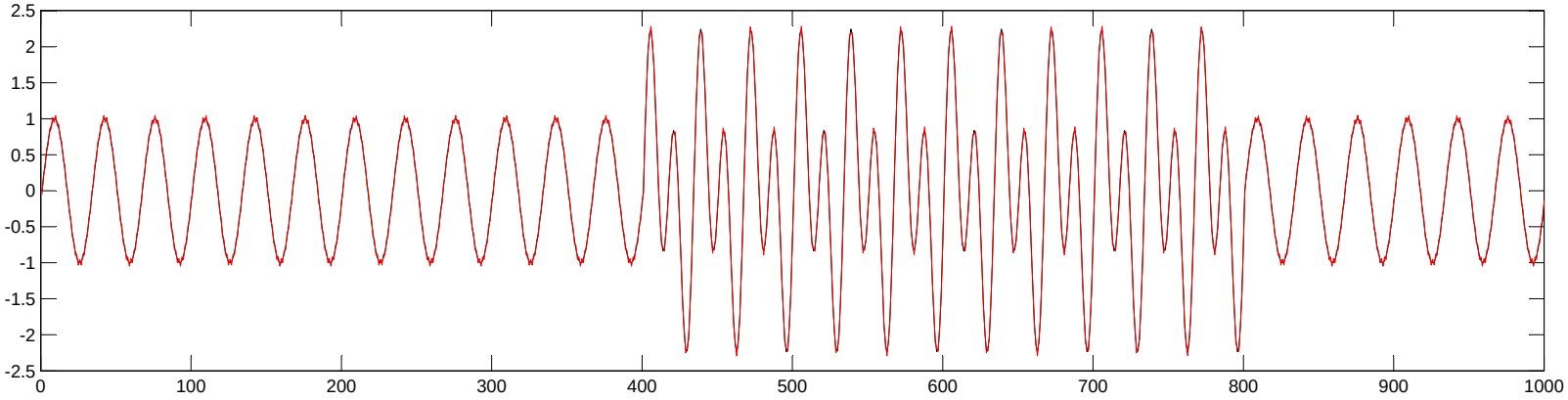
Señal de enmascaramiento

Deering & Kaiser 2005



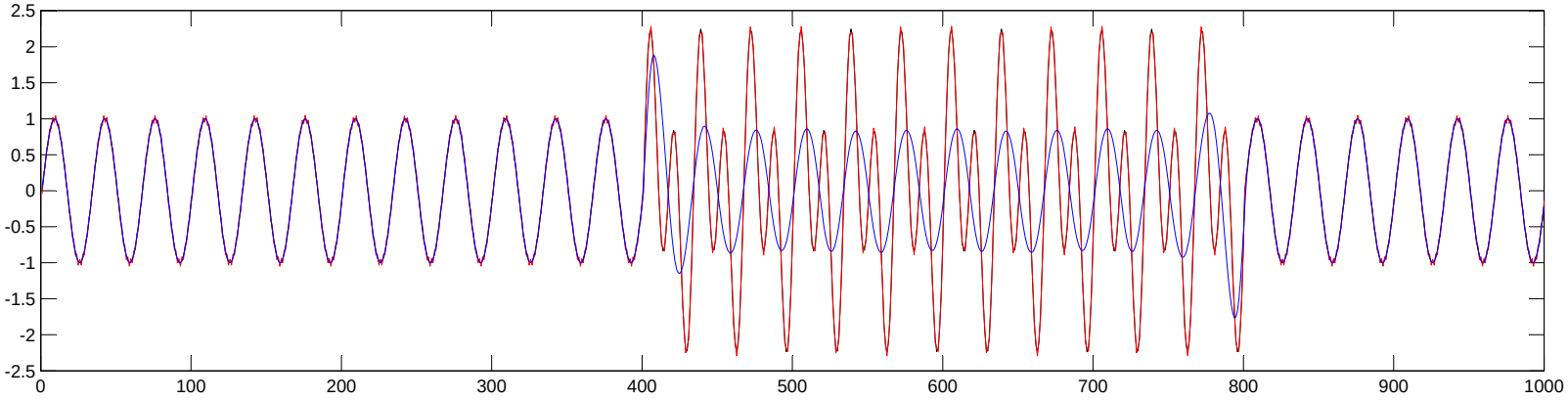
Señal de enmascaramiento

Deering & Kaiser 2005



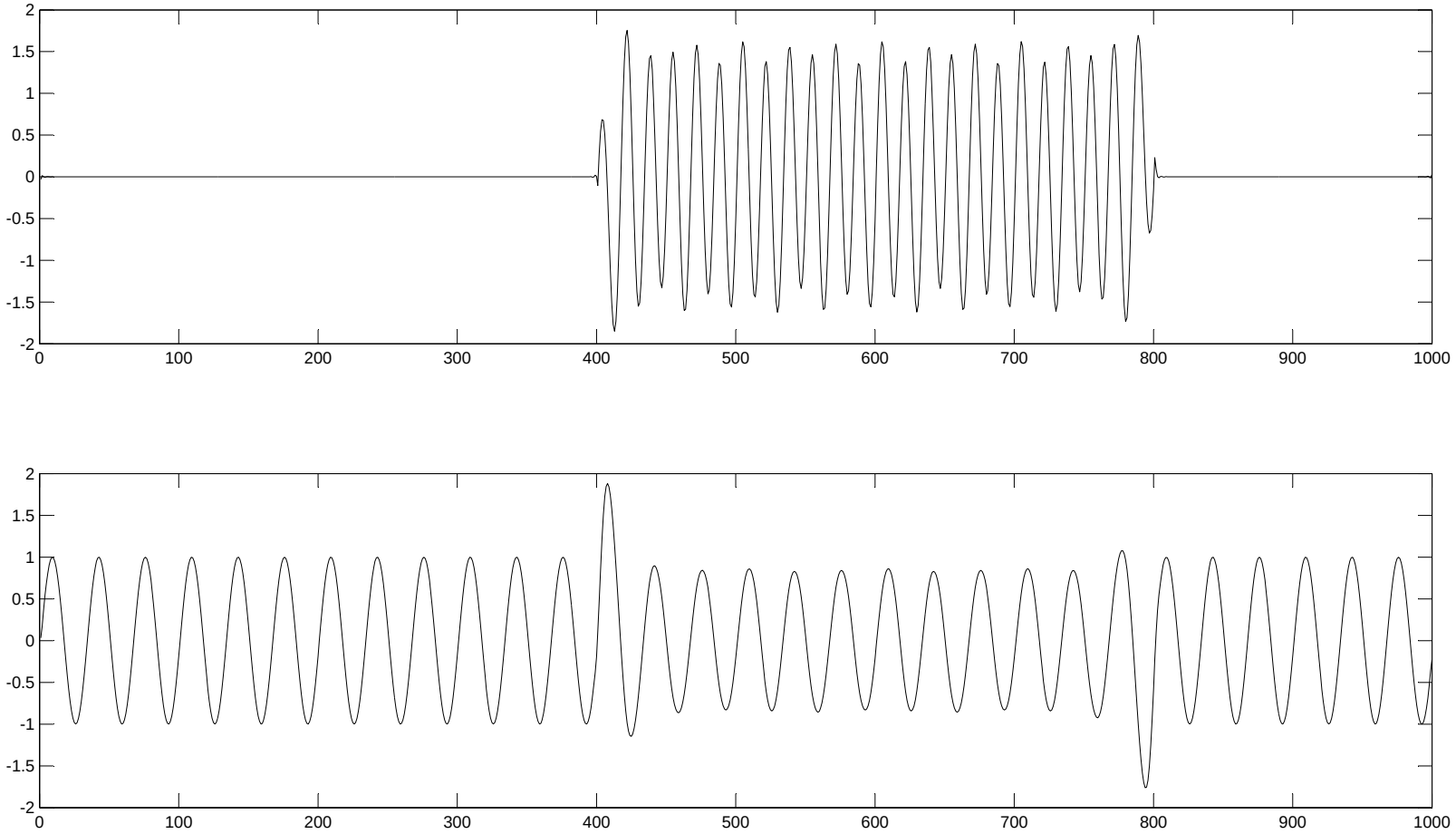
Señal de enmascaramiento

Deering & Kaiser 2005



Señal de enmascaramiento

Deering & Kaiser 2005



Ensemble EMD (EEMD)

Wu & Huang 2009

- x: señal de interés,

Ensemble EMD (EEMD)

Wu & Huang 2009

- x: señal de interés,
- $w^{(i)}$: realización de ruido blanco gaussiano con $\mathcal{N}(0,1)$,

Ensemble EMD (EEMD)

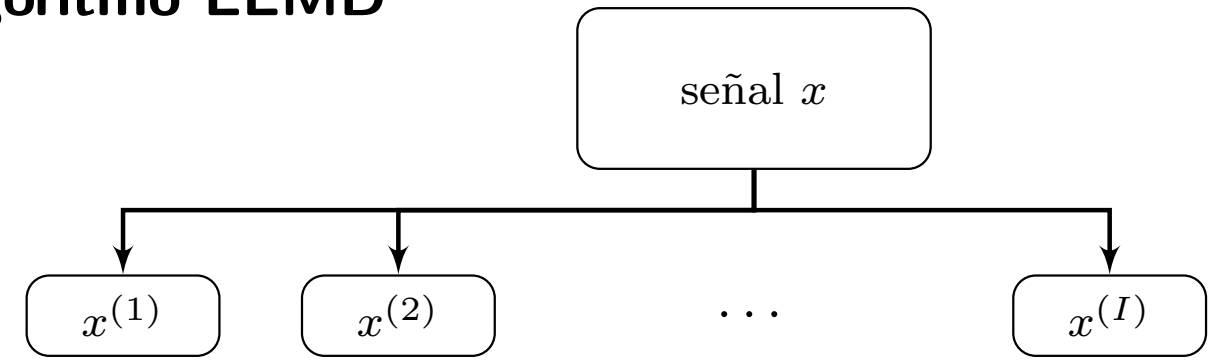
Wu & Huang 2009

- x: señal de interés,
- $w^{(i)}$: realización de ruido blanco gaussiano con $\mathcal{N}(0,1)$,
- $x^{(i)} = x + \epsilon_0 w^{(i)}$, con $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$.

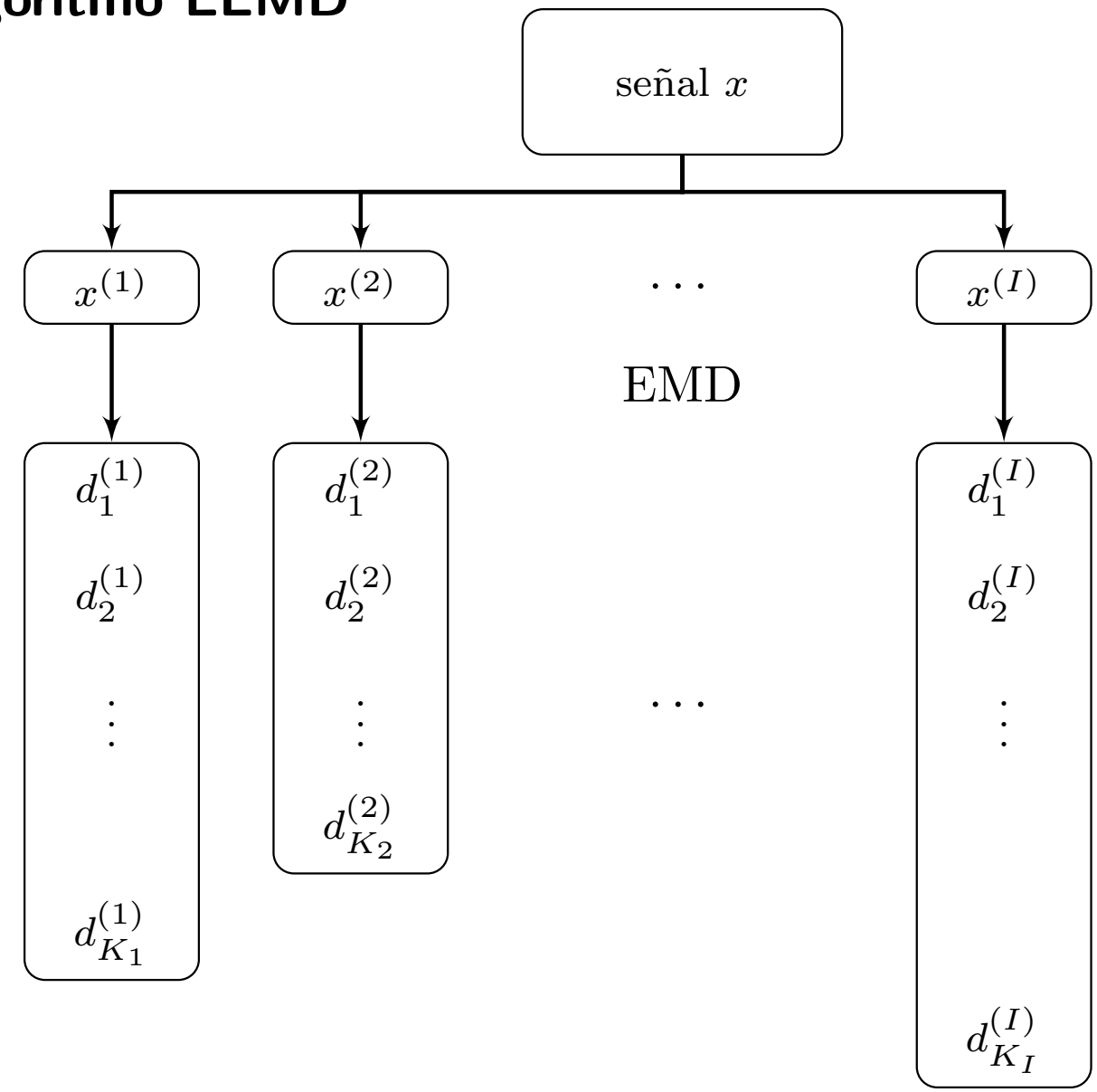
Algoritmo EEMD

señal x

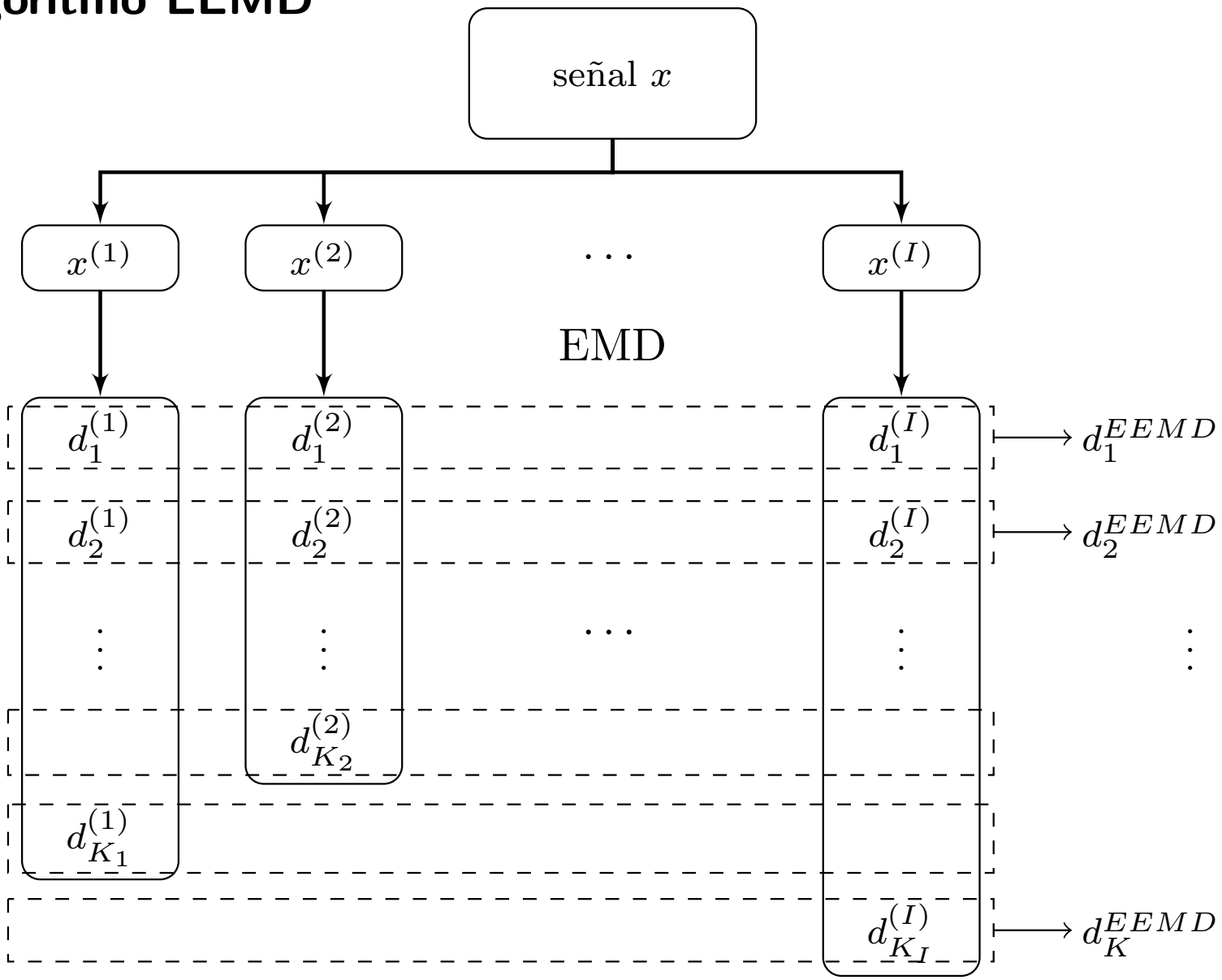
Algoritmo EEMD



Algoritmo EEMD

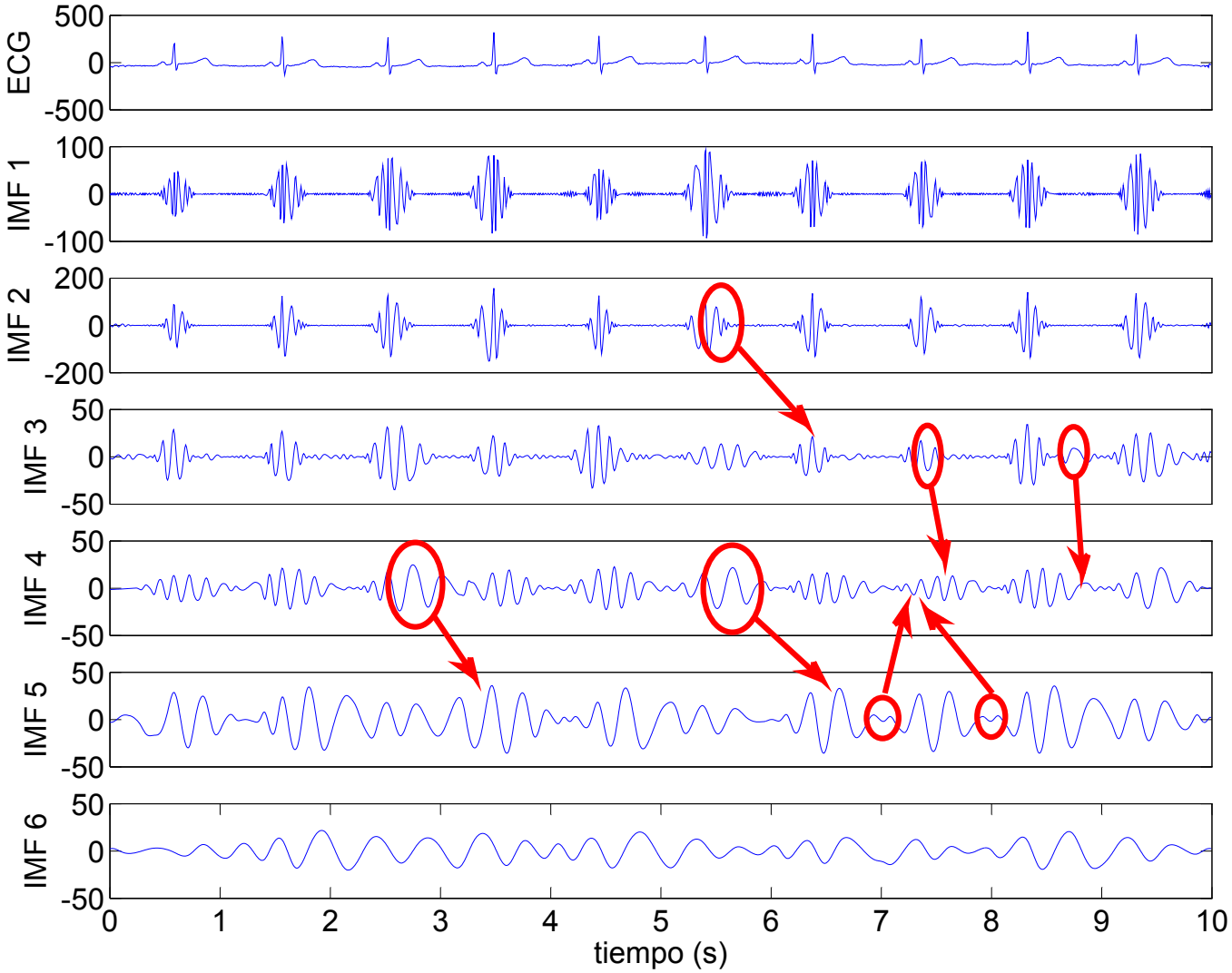


Algoritmo EEMD



EEMD

Reducción de mezcla de modos



hspace8mm

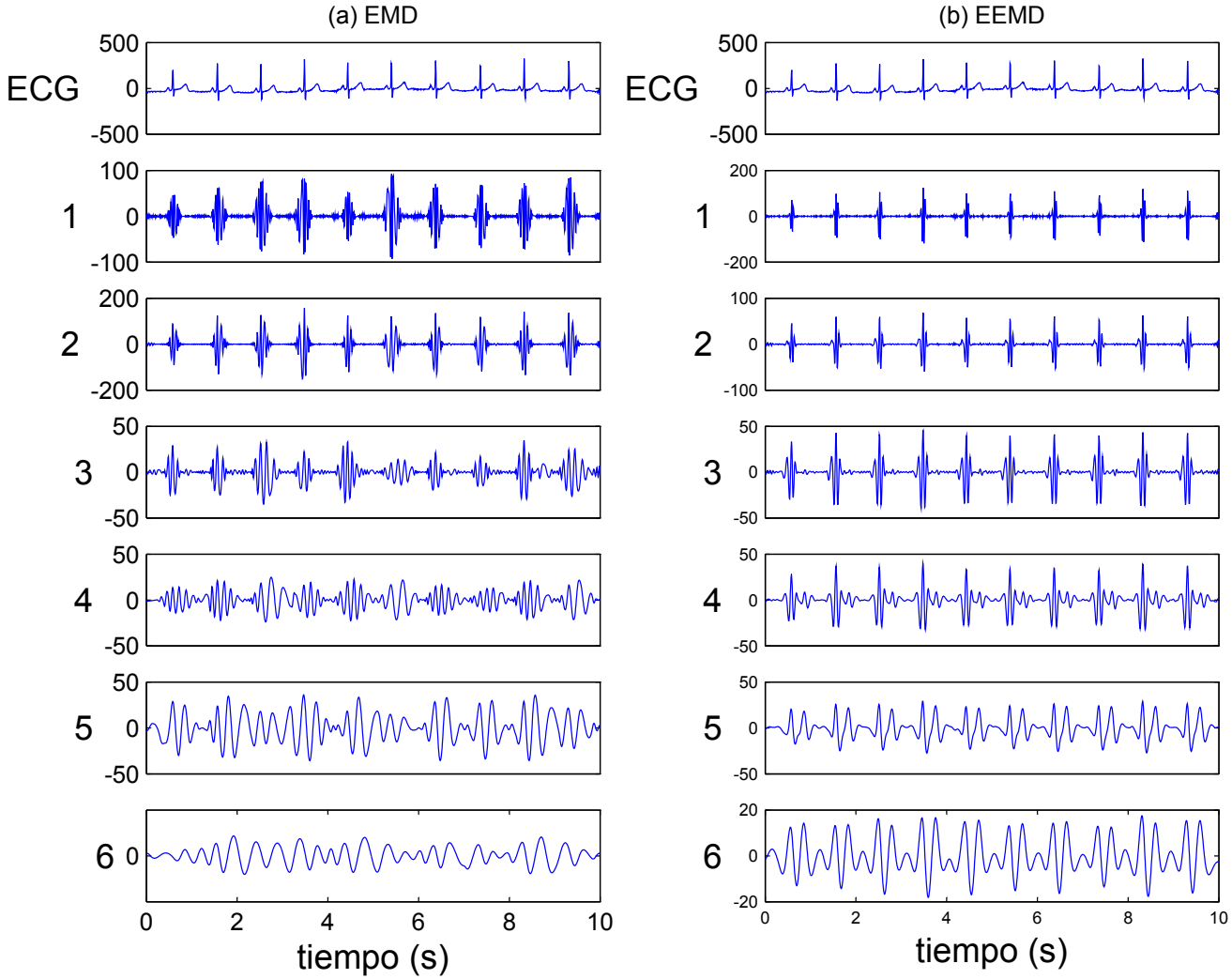
EEMD

Reducción de mezcla de modos

hspace8mm

EEMD

Reducción de mezcla de modos



hspace8mm

Problemas de EEMD

- Ruido residual en la reconstrucción de la señal

Problemas de EEMD

- Ruido residual en la reconstrucción de la señal

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon}{\sqrt{I}}$$

Problemas de EEMD

- Ruido residual en la reconstrucción de la señal

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon}{\sqrt{I}}$$

con ϵ_n ruido residual, ϵ ruido agregado e I cantidad de realizaciones.

Problemas de EEMD

- Ruido residual en la reconstrucción de la señal

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon}{\sqrt{I}}$$

con ϵ_n ruido residual, ϵ ruido agregado e I cantidad de realizaciones.

- Diferentes realizaciones de ruido puedan dar distintas cantidades de modos.

CEEMDAN

Complete Ensemble Empirical Mode Decomposition with Adaptive Noise

CEEMDAN

Complete Ensemble Empirical Mode Decomposition with Adaptive Noise

- Operador $\mathcal{E}_j(\cdot)$: produce el j-ésimo modo EMD.

CEEMDAN

Complete Ensemble Empirical Mode Decomposition with Adaptive Noise

- Operador $\mathcal{E}_j(\cdot)$: produce el j-ésimo modo EMD.
- Operador $\mathcal{M}(\cdot)$: produce la media local, tal que

$$\mathcal{E}_1(x) = x - \mathcal{M}(x).$$

CEEMDAN

Complete Ensemble Empirical Mode Decomposition with Adaptive Noise

- Operador $\mathcal{E}_j(\cdot)$: produce el j-ésimo modo EMD.
- Operador $\mathcal{M}(\cdot)$: produce la media local, tal que

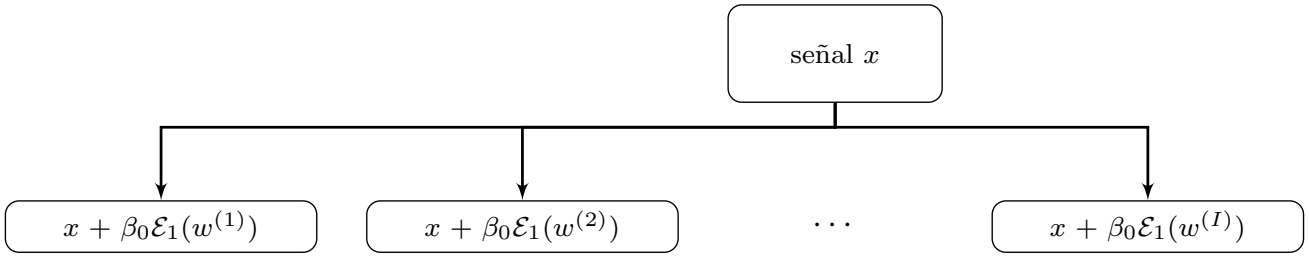
$$\mathcal{E}_1(x) = x - \mathcal{M}(x).$$

- $w^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

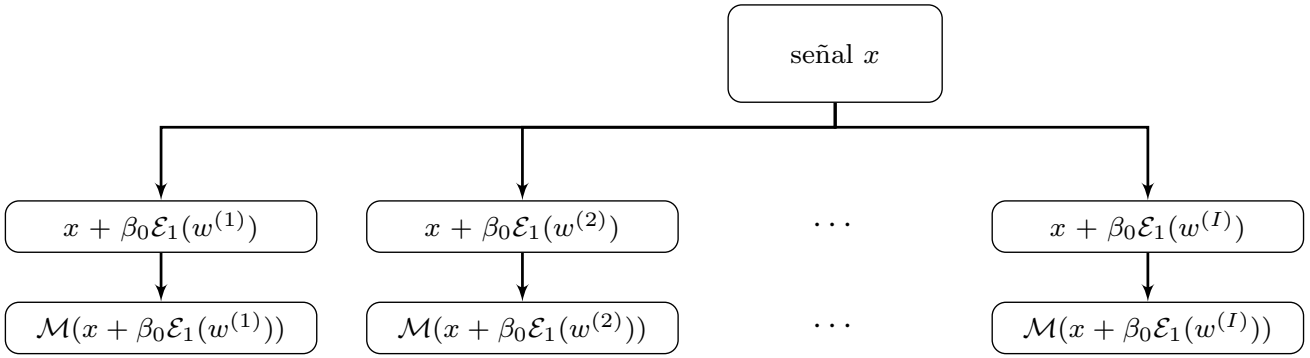
Algoritmo CEEMDAN

señal x

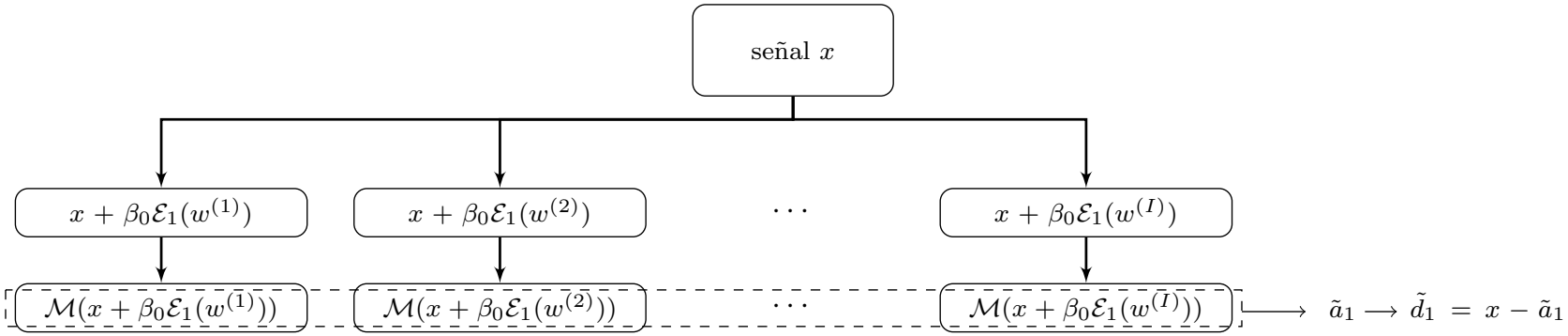
Algoritmo CEEMDAN



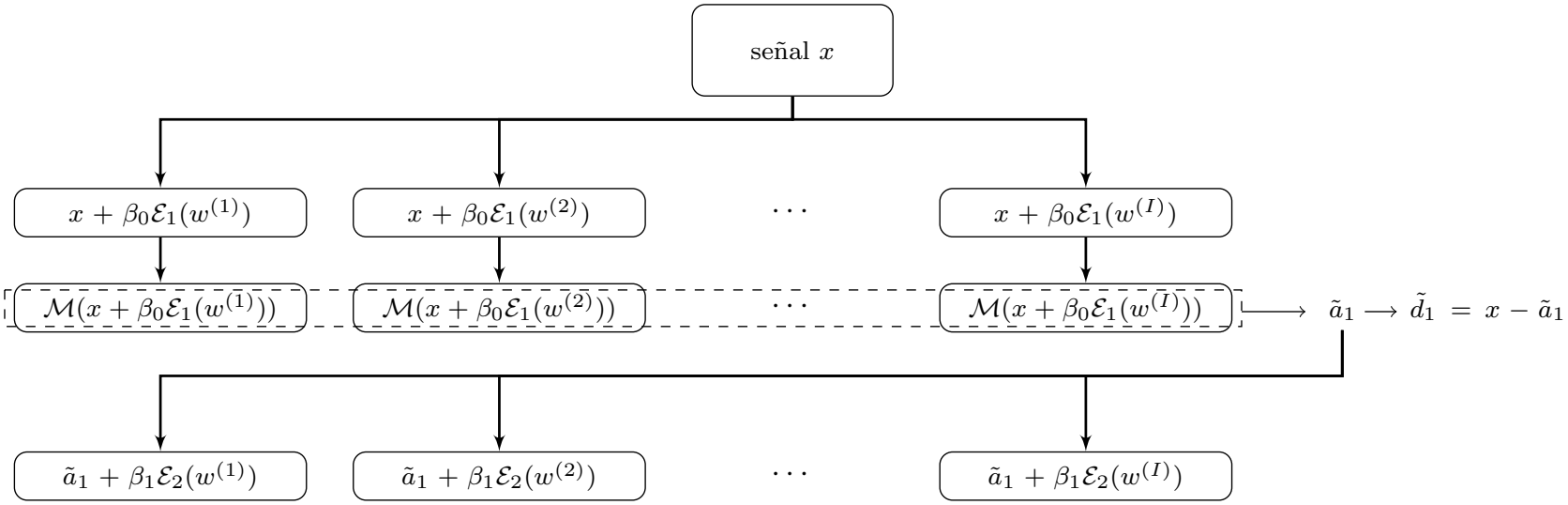
Algoritmo CEEMDAN



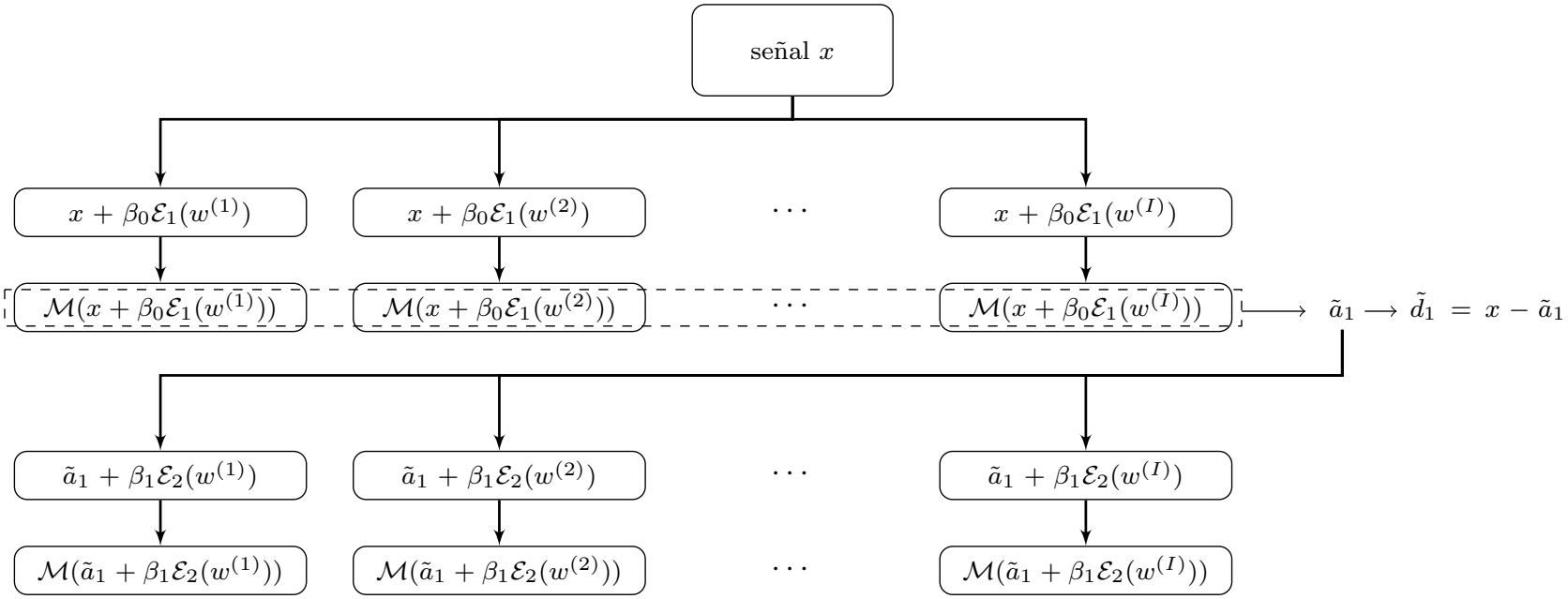
Algoritmo CEEMDAN



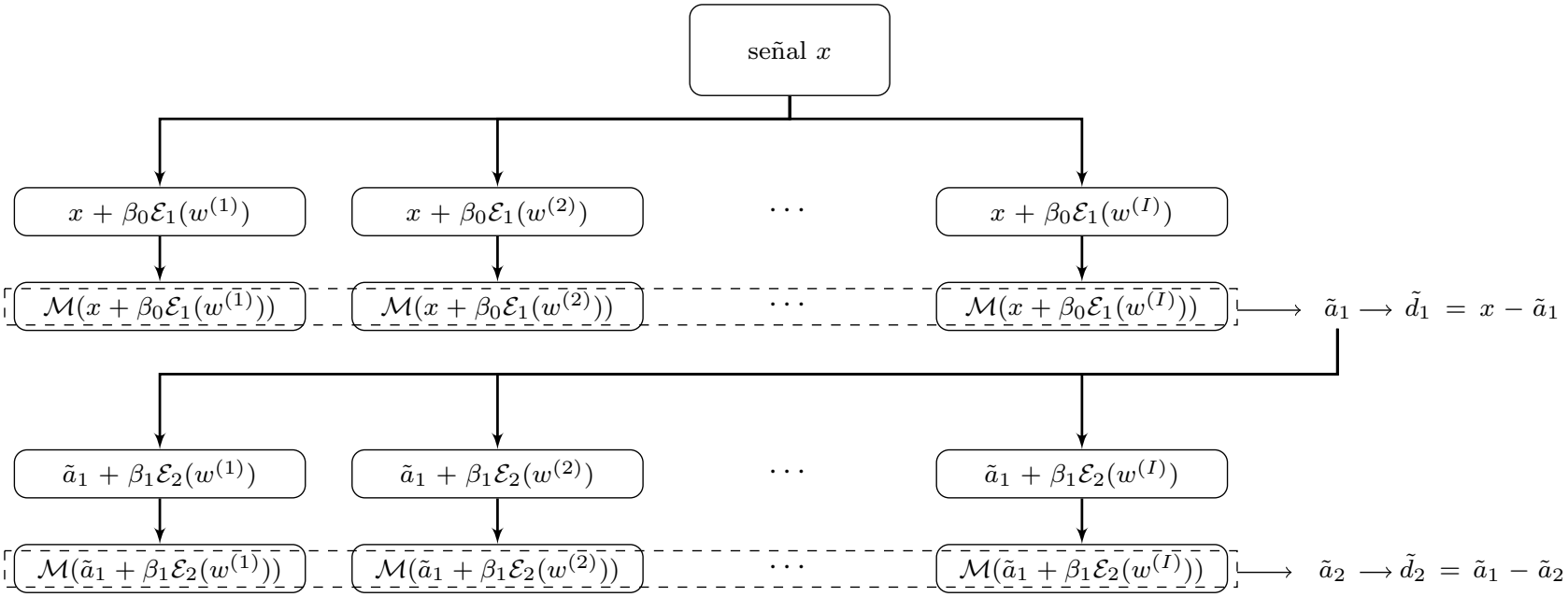
Algoritmo CEEMDAN



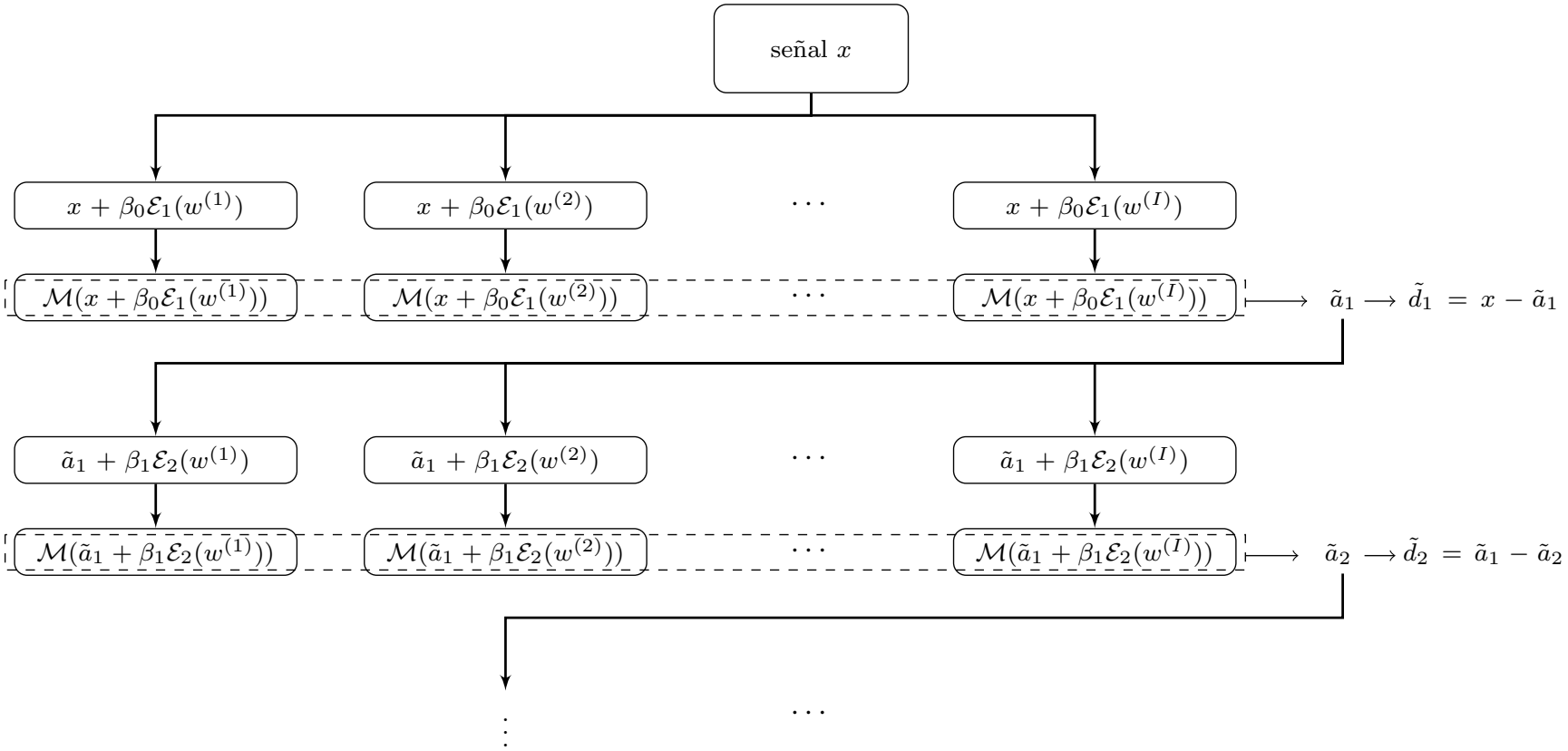
Algoritmo CEEMDAN



Algoritmo CEEMDAN



Algoritmo CEEMDAN

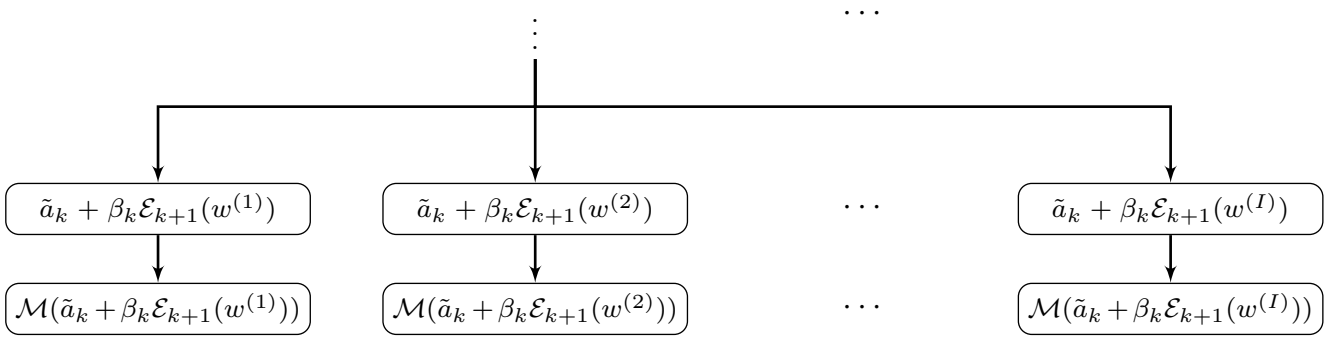


Algoritmo CEEMDAN (II)

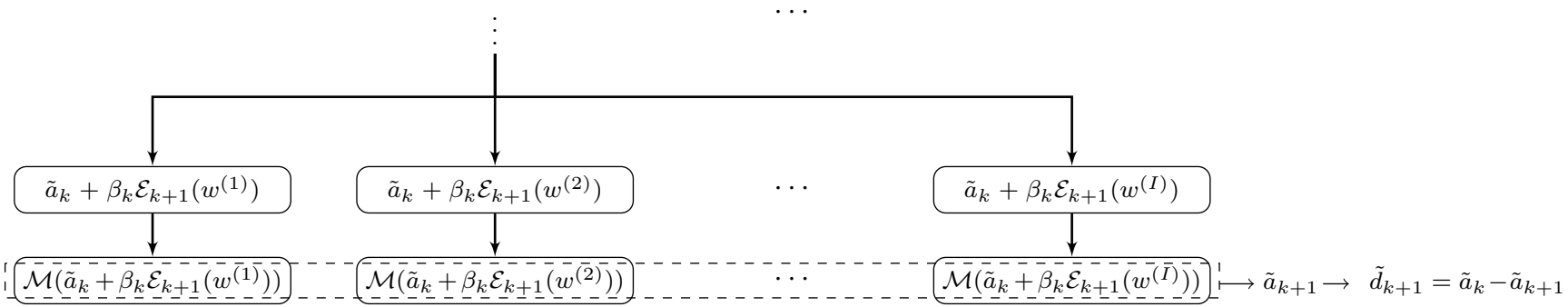
$$\vdots \qquad \cdots$$

$$\tilde{a}_k + \beta_k \mathcal{E}_{k+1}(w^{(1)}) \qquad \tilde{a}_k + \beta_k \mathcal{E}_{k+1}(w^{(2)}) \qquad \cdots \qquad \tilde{a}_k + \beta_k \mathcal{E}_{k+1}(w^{(I)})$$

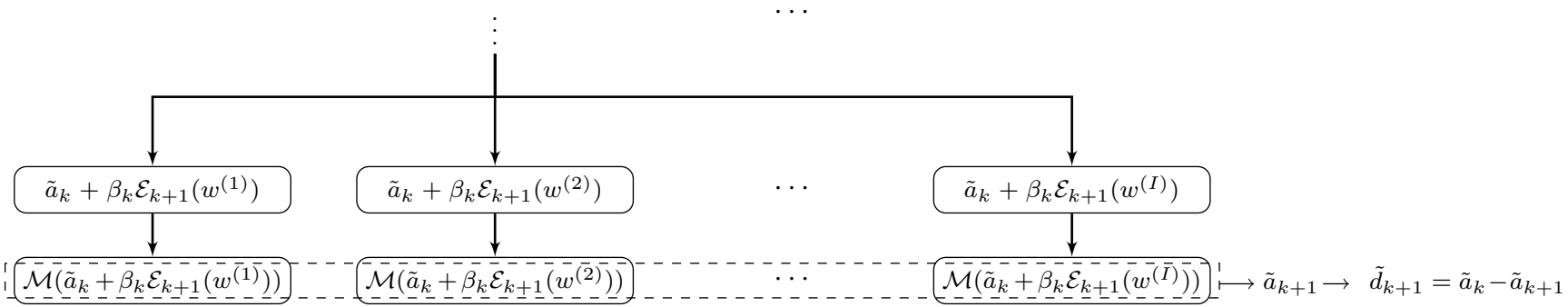
Algoritmo CEEMDAN (II)



Algoritmo CEEMDAN (II)



Algoritmo CEEMDAN (II)

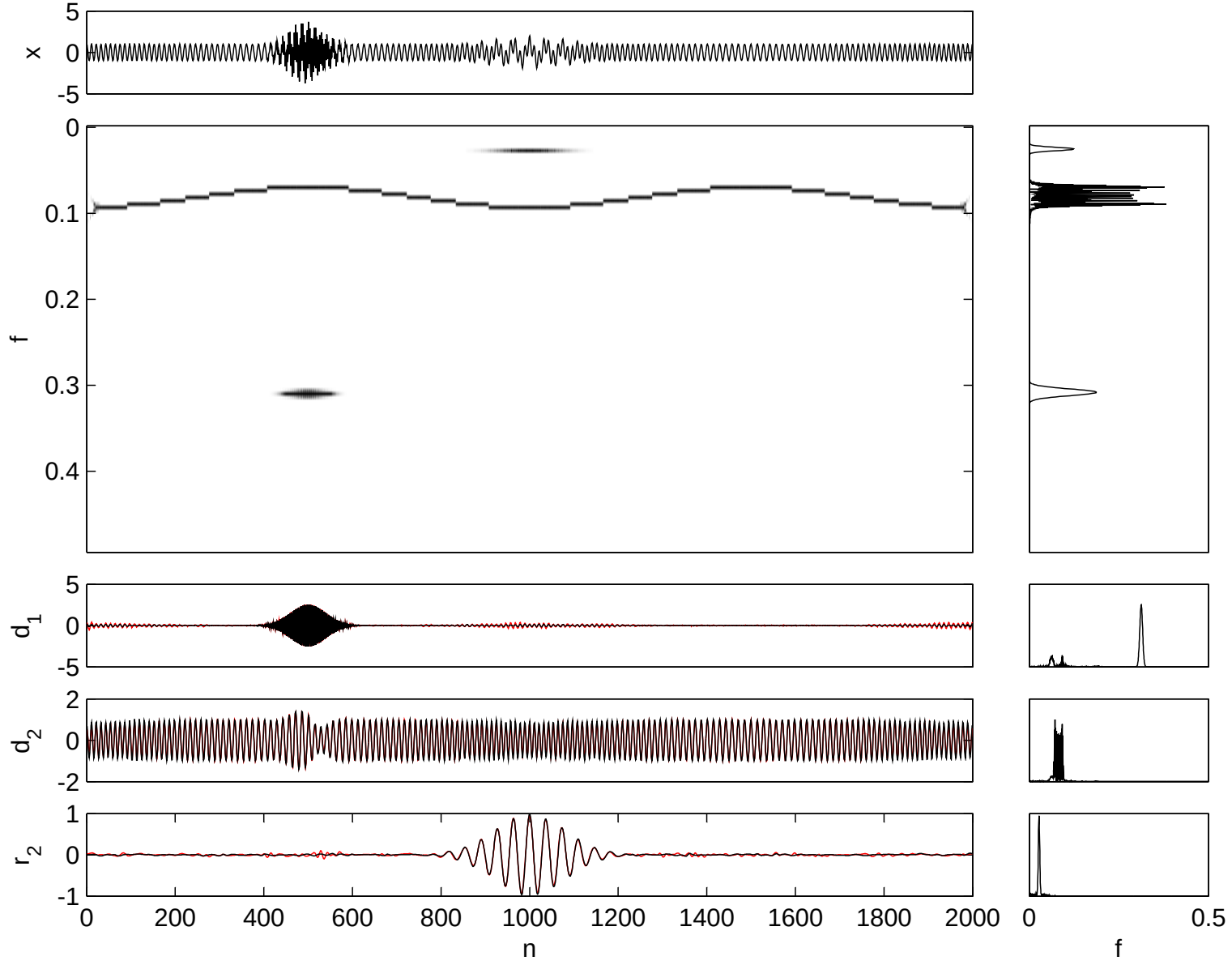


$$x = \tilde{a}_K + \sum_{k=1}^{K} \tilde{d}_k$$

Colominas, Schlotthauer & Torres, *Biomedical Signal Processing and Control*, 2014
Torres, Colominas, Schlotthauer & Flandrin, *ICASSP*, 2011

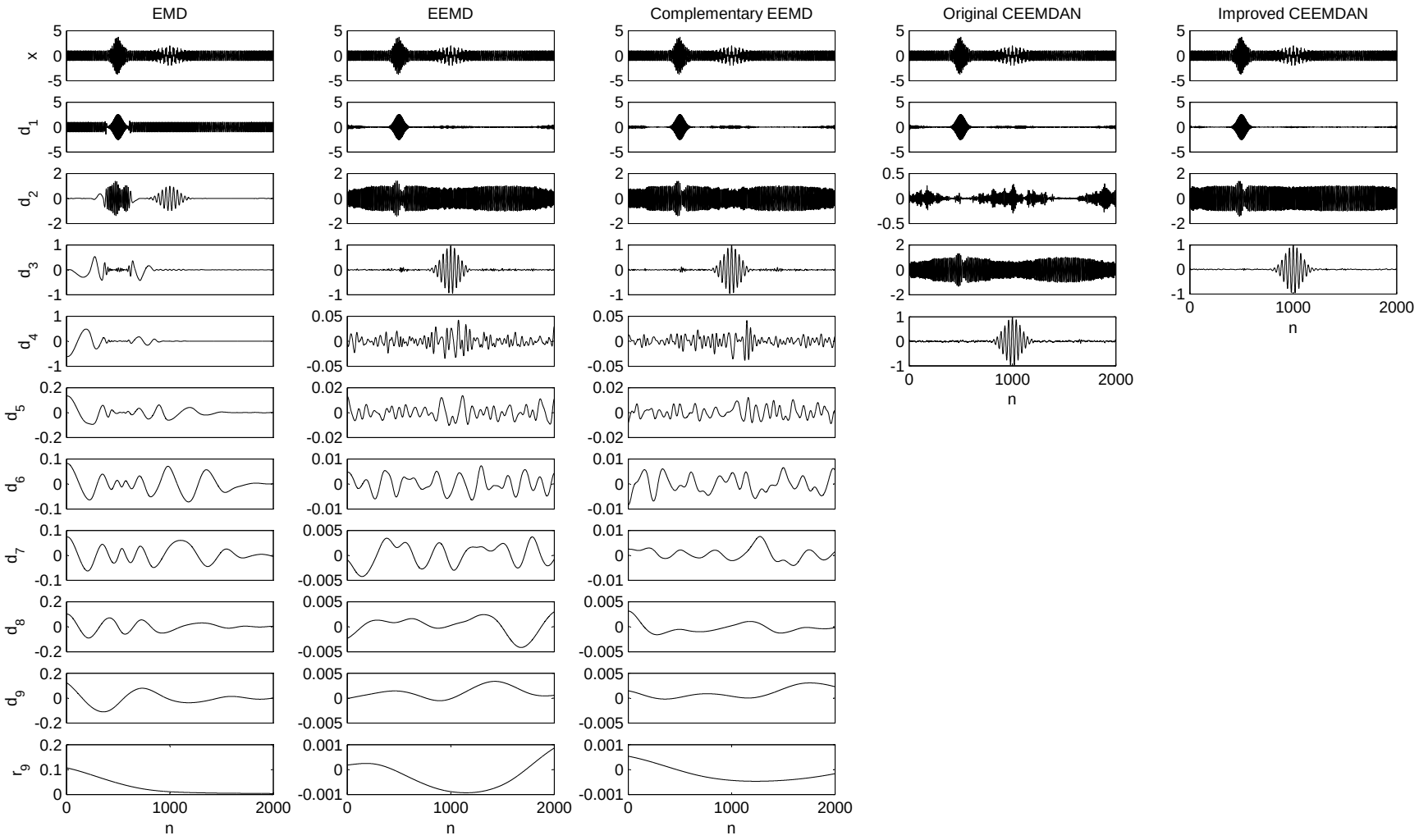
Resultados

Colominas, Schlotthauer & Torres, *Biomedical Signal Processing and Control*, 2014



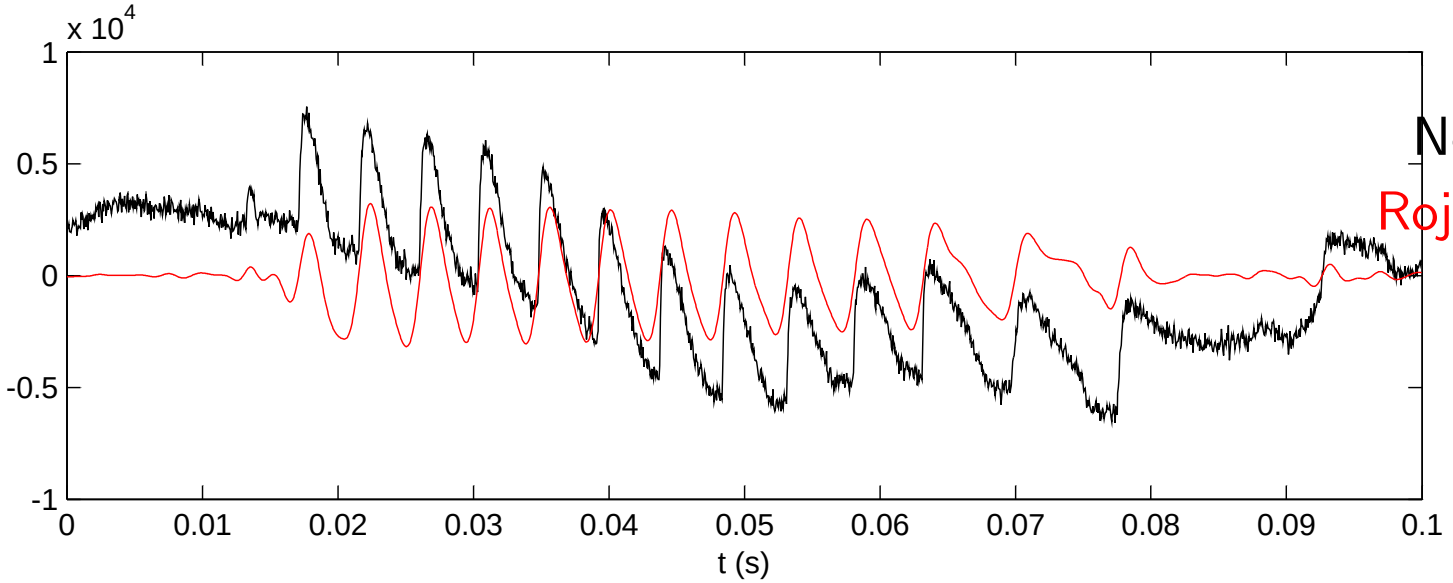
Resultados

Colominas, Schlotthauer & Torres, *Biomedical Signal Processing and Control*, 2014



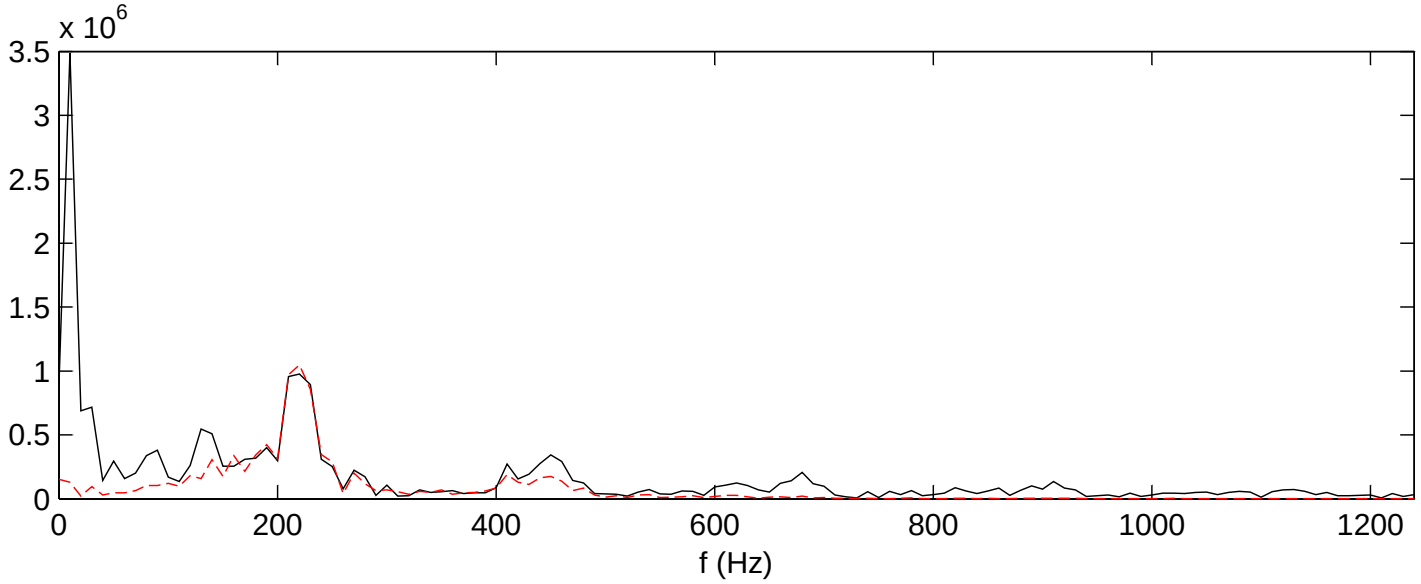
Aplicaciones

Colominas, Schlotthauer & Torres, *Biomedical Signal Processing and Control*, 2014



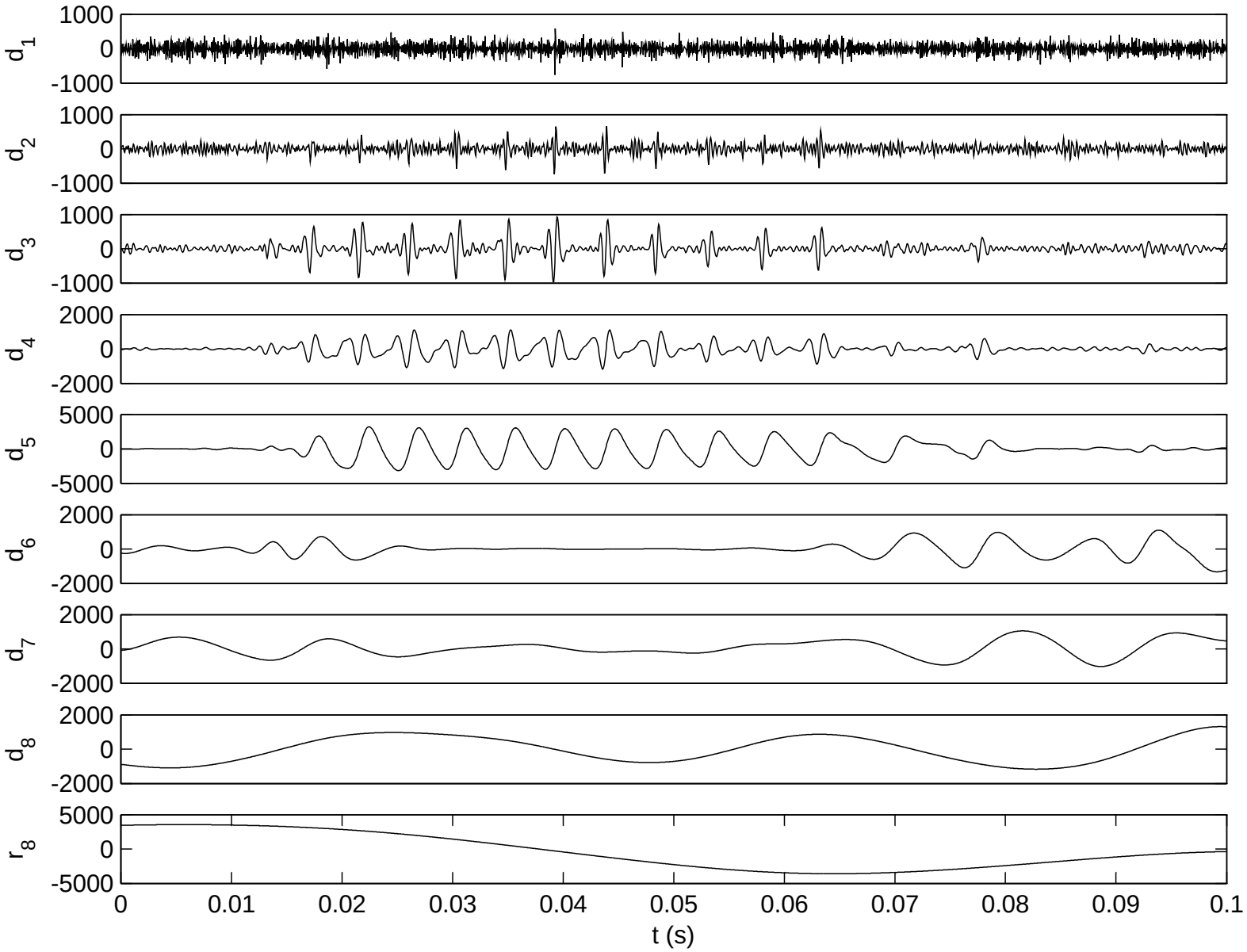
Negro: EGG

Rojo: modo 5



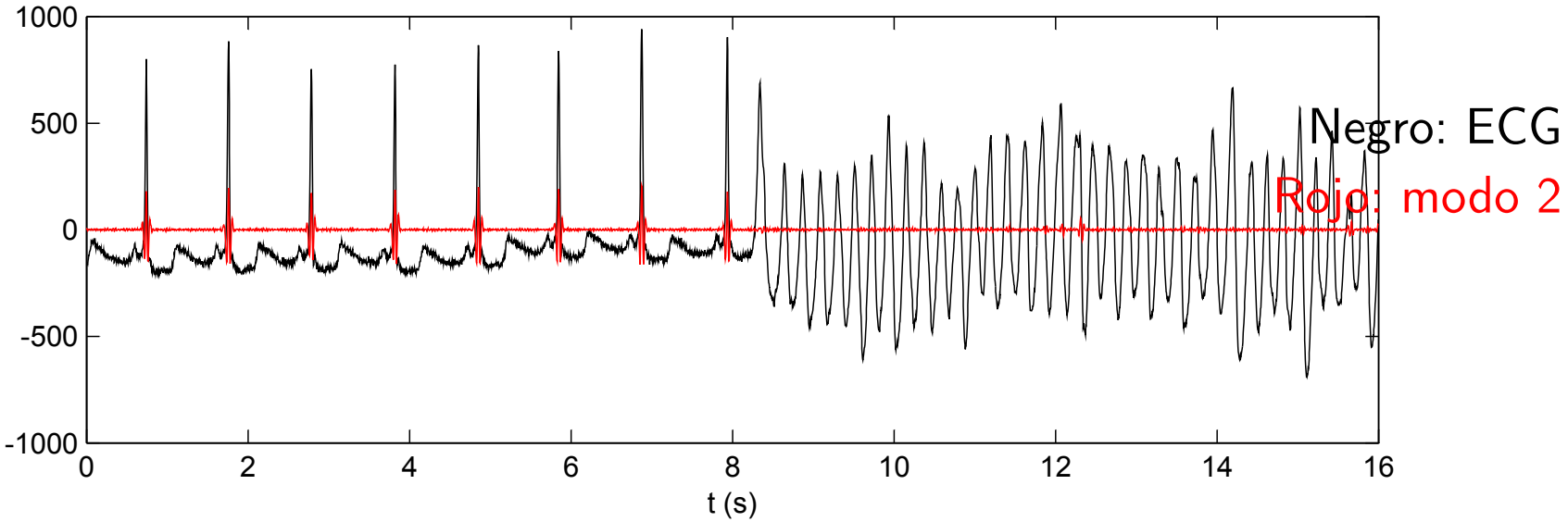
Aplicaciones

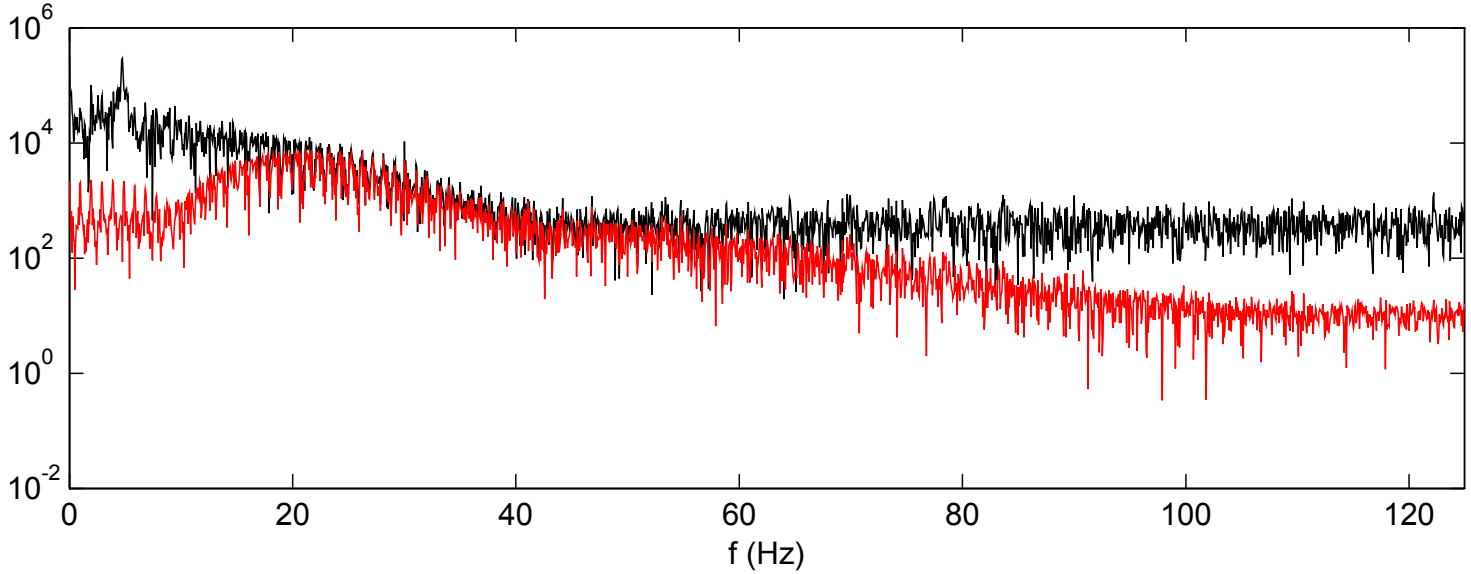
Colominas, Schlotthauer & Torres, *Biomedical Signal Processing and Control*, 2014



Aplicaciones

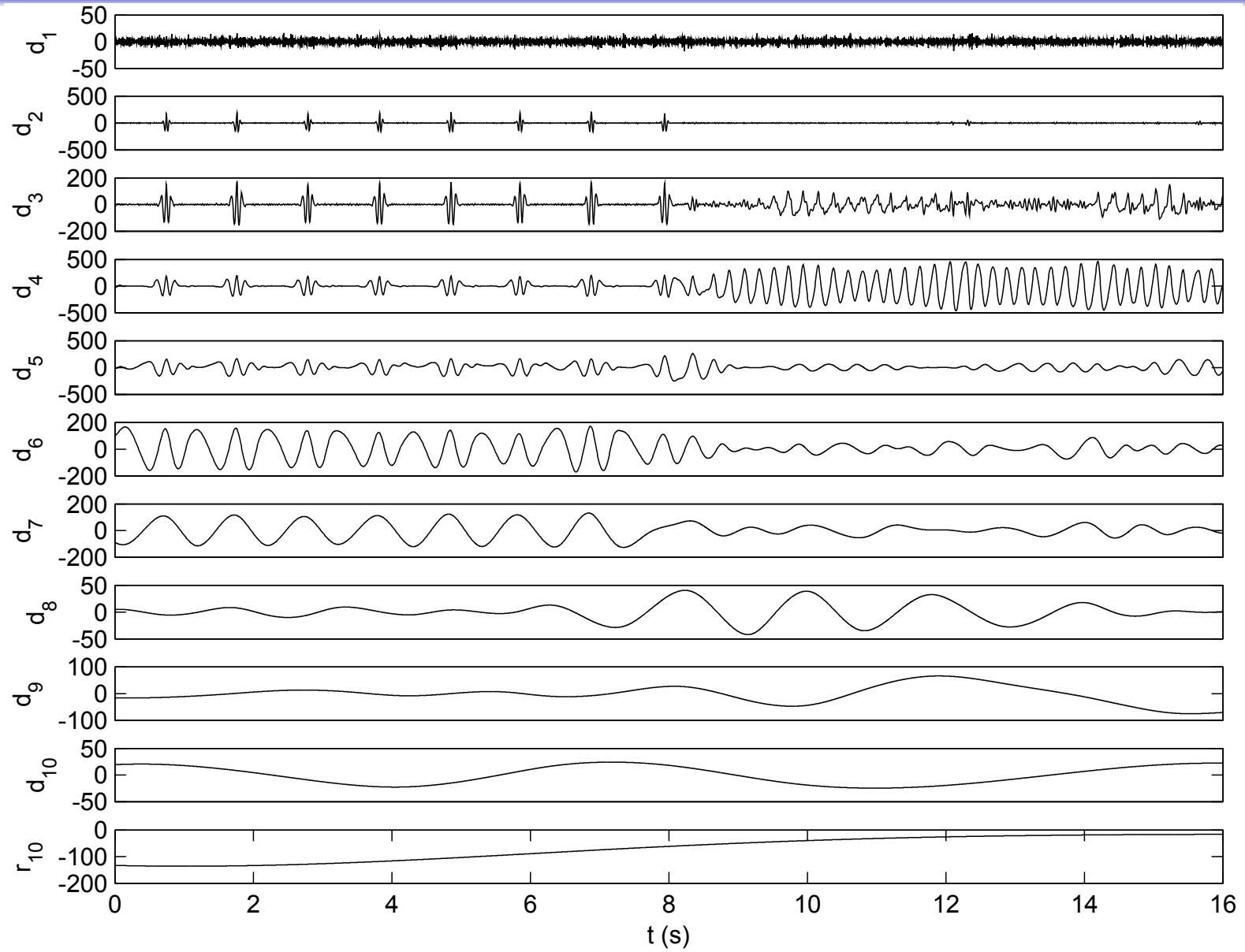
Colominas, Schlotthauer & Torres, *Biomedical Signal Processing and Control*, 2014





Aplicaciones

Colominas, Schlotthauer & Torres, *Biomedical Signal Processing and Control*, 2014



Contenidos

1. Motivación
2. EMD
3. Versiones de EMD asistidas por ruido
4. Un enfoque de optimización para EMD
5. Un enfoque tiempo-escala para EMD

Antecedentes

Oberlin *et al.* 2012 (OS-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

Antecedentes

Oberlin *et al.* 2012 (OS-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

$$a_k = \arg\min_a ||a''||_2^2$$
sujeto a $a \in \Pi \cap \mathbb{B}_{a_{k-1}}$,

- Π: espacio de funciones *splines*.
- $\mathbb{B}_{a_{k-1}}$: restricciones de simetría.

Antecedentes

Oberlin *et al.* 2012 (OS-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

$$a_k = \arg\min_a ||a''||_2^2$$
sujeto a $a \in \Pi \cap \mathbb{B}_{a_{k-1}}$,

- Π: espacio de funciones *splines*.
- $\mathbb{B}_{a_{k-1}}$: restricciones de simetría.

Parámetros:

Antecedentes

Oberlin *et al.* 2012 (OS-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

$$a_k = \arg\min_a ||a''||_2^2$$
sujeto a $a \in \Pi \cap \mathbb{B}_{a_{k-1}}$,

- Π: espacio de funciones *splines*.
- $\mathbb{B}_{a_{k-1}}$: restricciones de simetría.

Parámetros:

- Orden del espacio *spline*.

Antecedentes

Oberlin *et al.* 2012 (OS-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

$$a_k = \arg\min_a ||a''||_2^2$$
sujeto a $a \in \Pi \cap \mathbb{B}_{a_{k-1}}$,

- Π: espacio de funciones *splines*.
- $\mathbb{B}_{a_{k-1}}$: restricciones de simetría.

Parámetros:

- Orden del espacio *spline*.
- Tolerancia en la simetría (parámetro α).

Antecedentes

Pustelnik *et al.* 2014 (Prox-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

Antecedentes

Pustelnik *et al.* 2014 (Prox-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

$$(a_k, d_k) \in \mathrm{Argmin}_{a,d} ||a_{k-1} - a - d||_2^2$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} ||Da||_p^p \leq \eta_k, \\ ||P_k d||_q^q \leq \varepsilon_k, \\ (\forall j < k), |\langle d, d_j \rangle| \leq \zeta_{k,j}, \end{cases}$$

Antecedentes

Pustelnik *et al.* 2014 (Prox-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

$$(a_k, d_k) \in \mathrm{Argmin}_{a,d} ||a_{k-1} - a - d||_2^2$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} ||Da||_p^p \leq \eta_k, \\ ||P_k d||_q^q \leq \varepsilon_k, \\ (\forall j < k), |\langle d, d_j \rangle| \leq \zeta_{k,j}, \end{cases}$$

Parámetros:

Antecedentes

Pustelnik *et al.* 2014 (Prox-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

$$(a_k, d_k) \in \mathrm{Argmin}_{a,d} ||a_{k-1} - a - d||_2^2$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} ||Da||_p^p \leq \eta_k, \\ ||P_k d||_q^q \leq \varepsilon_k, \\ (\forall j < k), |\langle d, d_j \rangle| \leq \zeta_{k,j}, \end{cases}$$

Parámetros:

- $\eta_k > 0$, (K)

Antecedentes

Pustelnik *et al.* 2014 (Prox-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

$$(a_k, d_k) \in \mathrm{Argmin}_{a,d} ||a_{k-1} - a - d||_2^2$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} ||Da||_p^p \leq \eta_k, \\ ||P_k d||_q^q \leq \varepsilon_k, \\ (\forall j < k), |\langle d, d_j \rangle| \leq \zeta_{k,j}, \end{cases}$$

Parámetros:

- $\eta_k > 0$, (K)
- $\varepsilon_k > 0$, (K)

Antecedentes

Pustelnik *et al.* 2014 (Prox-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

$$(a_k, d_k) \in \mathrm{Argmin}_{a,d} ||a_{k-1} - a - d||_2^2$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} ||Da||_p^p \leq \eta_k, \\ ||P_k d||_q^q \leq \varepsilon_k, \\ (\forall j < k), |\langle d, d_j \rangle| \leq \zeta_{k,j}, \end{cases}$$

Parámetros:

- $\eta_k > 0$, (K)
- $\varepsilon_k > 0$, (K)
- $\zeta_{k,j} \geq 0$, $(K^2 - K)/2$

Antecedentes

Pustelnik *et al.* 2014 (Prox-EMD)

Dada x (o a_{k-1})

$$(a_k, d_k) \in \mathrm{Argmin}_{a,d} ||a_{k-1} - a - d||_2^2$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} ||Da||_p^p \leq \eta_k, \\ ||P_k d||_q^q \leq \varepsilon_k, \\ (\forall j < k), |\langle d, d_j \rangle| \leq \zeta_{k,j}, \end{cases}$$

Parámetros:

- $\eta_k > 0$, (K)
- $\varepsilon_k > 0$, (K)
- $\zeta_{k,j} \geq 0$, $(K^2 - K)/2$
- Normas p y q

señal = media local + modo

- Dada x, encontrar a tal que $d = x - a$ sea IMF.

señal = media local + modo

- Dada x, encontrar a tal que $d = x - a$ sea IMF.
- $\mathbb{L}_x = \{t_\ell, \ell = 1, \ldots, L\}$ conjunto de extremos locales.

señal = media local + modo

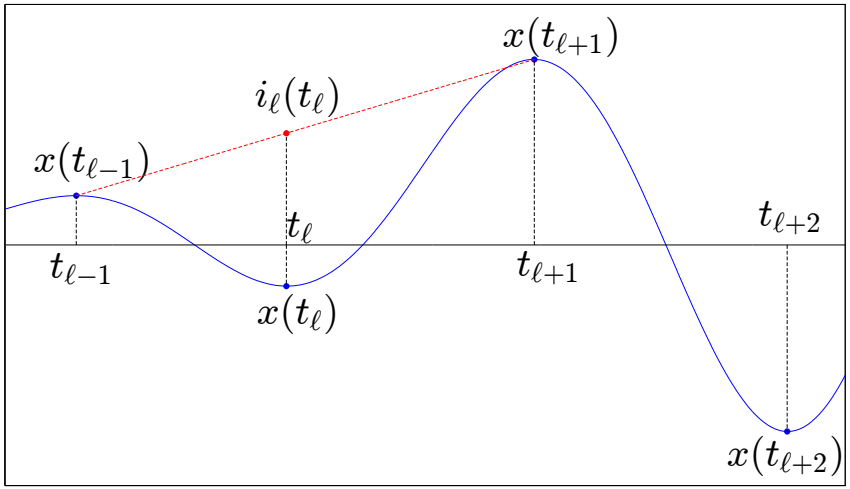
- Dada x, encontrar a tal que $d = x - a$ sea IMF.
- $\mathbb{L}_x = \{t_\ell, \ell = 1, \ldots, L\}$ conjunto de extremos locales.
- Extremos locales de x como estimaciones de los extremos locales de d.

señal = media local + modo

- Dada x, encontrar a tal que $d = x - a$ sea IMF.
- $\mathbb{L}_x = \{t_\ell, \ell = 1, \ldots, L\}$ conjunto de extremos locales.
- Extremos locales de x como estimaciones de los extremos locales de d.
- Se compara cada extremo local con la interpolación entre sus dos vecinos.

señal = media local + modo

- Dada x, encontrar a tal que $d = x - a$ sea IMF.
- $\mathbb{L}_x = \{t_\ell, \ell = 1, \ldots, L\}$ conjunto de extremos locales.
- Extremos locales de x como estimaciones de los extremos locales de d.
- Se compara cada extremo local con la interpolación entre sus dos vecinos.



$$\langle p_{t_\ell}, d\rangle = d(t_\ell) + i_\ell(t_\ell)$$

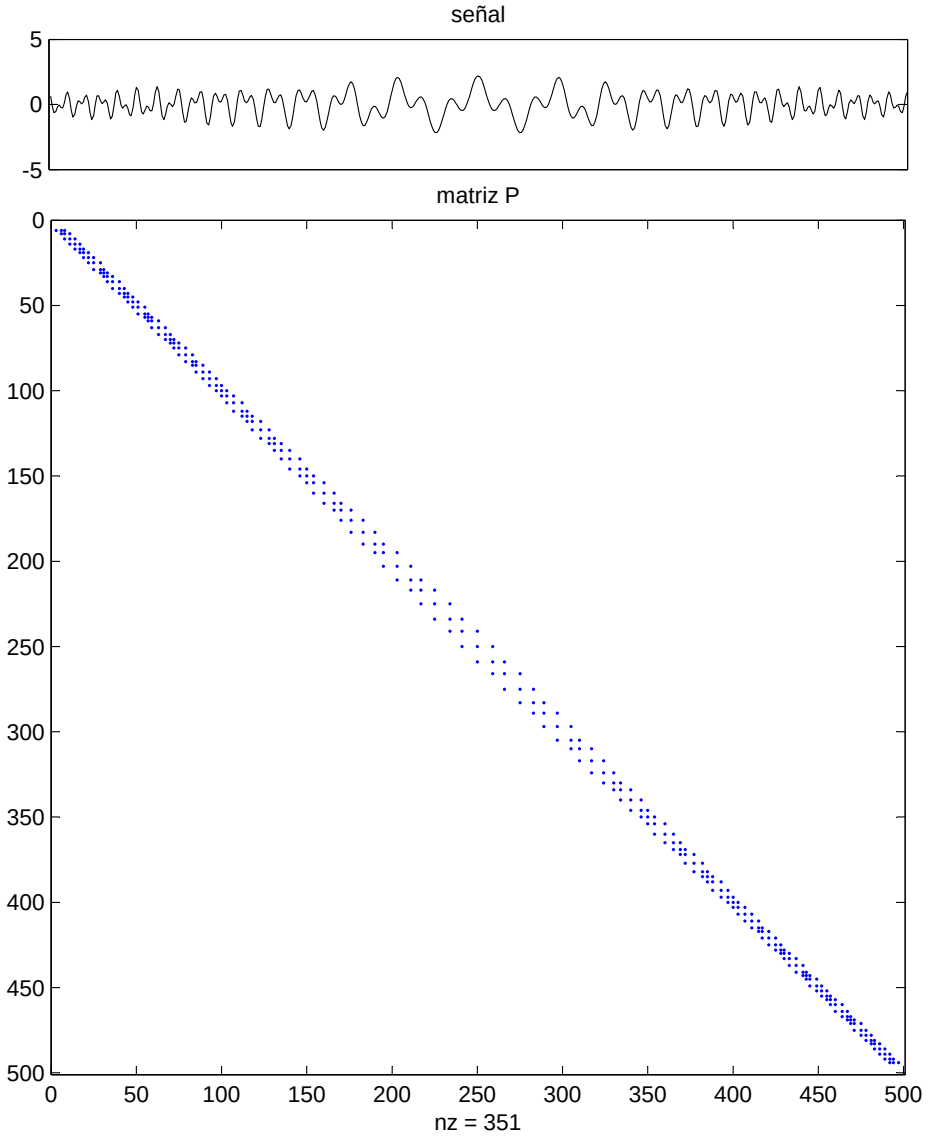
$$i_\ell(t) = \frac{d(t_{\ell+1})(t - t_{\ell-1})}{t_{\ell+1} - t_{\ell-1}} + \frac{d(t_{\ell-1})(t_{\ell+1} - t)}{t_{\ell+1} - t_{\ell-1}}.$$

$$p_{t_\ell} = \left[\cdots \frac{t_{\ell+1} - t_\ell}{t_{\ell+1} - t_{\ell-1}} \cdots 1 \cdots \frac{t_\ell - t_{\ell-1}}{t_{\ell+1} - t_{\ell-1}} \cdots\right]^T,$$

Matriz P_x (rala)

$$
P_x = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
 & t_{\ell-1} & & t_{\ell} & & t_{\ell+1} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow &
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
\ddots & & & & & & \\
 & 1 & \cdots & \frac{t_{\ell-1}-t_{\ell-2}}{t_{\ell}-t_{\ell-2}} & \cdots & & \\
 & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
 & \frac{t_{\ell+1}-t_{\ell}}{t_{\ell+1}-t_{\ell-1}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{t_{\ell}-t_{\ell-1}}{t_{\ell+1}-t_{\ell-1}} & \\
 & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \\
 & & & \frac{t_{\ell+2}-t_{\ell+1}}{t_{\ell+2}-t_{\ell}} & \cdots & 1 & \\
 & & & & & & \ddots
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\
\leftarrow \quad t_{\ell-1} \\
\\
\leftarrow \quad t_{\ell} \\
\\
\leftarrow \quad t_{\ell+1} \\
\\
\end{array}
$$

Matriz P_x (rala)



Problema de optimización sin restricciones

$$\min_{a} ||P_x(x-a)||_2^2 + \lambda ||Da||_2^2$$

Problema de optimización sin restricciones

$$\min_{a} ||P_x(x-a)||_2^2 + \lambda ||Da||_2^2$$

$$a^* = (P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x x$$

Colominas, Schlotthauer & Torres, *Digital Signal Processing*, 2015

Algoritmo

Algoritmo 1

Algoritmo

Algoritmo 1

1: Asignar $a_0 = x \in \mathbb{R}^N$ (señal).

Algoritmo

Algoritmo 1

1: Asignar $a_0 = x \in \mathbb{R}^N$ (señal).
2: Definir la matriz de diferencias

$$D \in \mathbb{R}^{N\times N} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Algoritmo

Algoritmo 1

1: Asignar $a_0 = x \in \mathbb{R}^N$ (señal).
2: Definir la matriz de diferencias

$$D \in \mathbb{R}^{N\times N} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3: **for** $k = 1, 2, \ldots$ **do**

Algoritmo

Algoritmo 1

1: Asignar $a_0 = x \in \mathbb{R}^N$ (señal).
2: Definir la matriz de diferencias

$$D \in \mathbb{R}^{N\times N} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3: **for** $k = 1, 2, \ldots$ **do**
4: Construir la matriz $P_{a_{k-1}}$, usando los extremos locales de a_{k-1}.

Algoritmo

Algoritmo 1

1: Asignar $a_0 = x \in \mathbb{R}^N$ (señal).
2: Definir la matriz de diferencias

$$D \in \mathbb{R}^{N\times N} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3: **for** $k = 1, 2, \ldots$ **do**
4: Construir la matriz $P_{a_{k-1}}$, usando los extremos locales de a_{k-1}.
5: Calcular la media local a_k para un $\lambda_k > 0$

$$a_k = (P_{a_{k-1}}^T P_{a_{k-1}} + \lambda_k D^T D)^{-1} (P_{a_{k-1}}^T P_{a_{k-1}}) a_{k-1}.$$

Algoritmo

Algoritmo 1

1: Asignar $a_0 = x \in \mathbb{R}^N$ (señal).
2: Definir la matriz de diferencias

$$D \in \mathbb{R}^{N\times N} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3: **for** $k = 1, 2, \ldots$ **do**
4: Construir la matriz $P_{a_{k-1}}$, usando los extremos locales de a_{k-1}.
5: Calcular la media local a_k para un $\lambda_k > 0$

$$a_k = (P_{a_{k-1}}^T P_{a_{k-1}} + \lambda_k D^T D)^{-1}(P_{a_{k-1}}^T P_{a_{k-1}})a_{k-1}.$$

6: Calcular el modo $d_k = a_{k-1} - a_k$.
7: **end for**

Características de la descomposición

$$a = (P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x x$$

Características de la descomposición

Comparación con *B-splines*

$$
\begin{aligned}
a &= (P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x x \\
&= \underbrace{\left(2(P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T\right)}_{\Psi} \underbrace{\frac{P_x x}{2}}_{\beta}
\end{aligned}
$$

Características de la descomposición

Comparación con *B-splines*

$$
\begin{aligned}
a &= (P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x x \\
&= \underbrace{\left(2(P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T\right)}_{\Psi} \underbrace{\frac{P_x x}{2}}_{\beta} \\
&= \sum_{\ell} \psi_\ell \beta(t_\ell)
\end{aligned}
$$

Relación con Chen 2006, Xu 2006, Jager 2010

Características de la descomposición

Comparación con *B-splines*

$$
\begin{aligned}
a &= (P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x x \\
&= \underbrace{\left(2(P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T\right)}_{\Psi} \underbrace{\frac{P_x x}{2}}_{\beta} \\
&= \sum_{\ell} \psi_\ell \beta(t_\ell)
\end{aligned}
$$

Relación con Chen 2006, Xu 2006, Jager 2010

$$
\beta(t_\ell) = \left(\frac{t_{\ell+1} - t_\ell}{2(t_{\ell+1} - t_{\ell-1})}\right) x(t_{\ell-1}) + \frac{1}{2} x(t_\ell) + \left(\frac{t_\ell - t_{\ell-1}}{2(t_{\ell+1} - t_{\ell-1})}\right) x(t_{\ell+1})
$$

Características de la descomposición

Comparación con *B-splines*

$$
\begin{aligned}
a &= (P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x x \\
&= \underbrace{\left(2(P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T\right)}_{\Psi} \underbrace{\frac{P_x x}{2}}_{\beta} \\
&= \sum_{\ell} \psi_\ell \beta(t_\ell)
\end{aligned}
$$

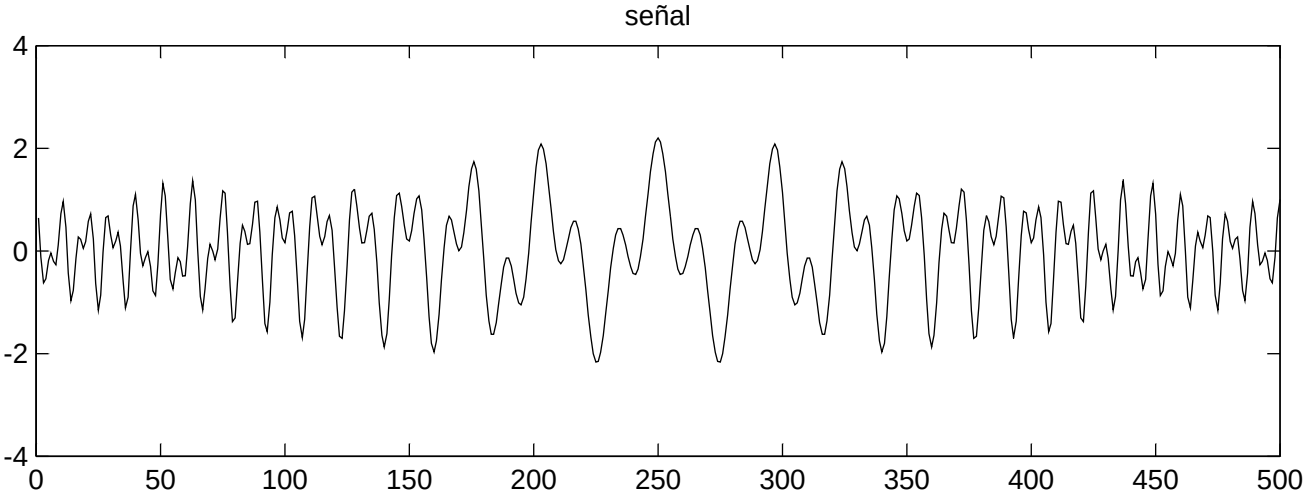
Relación con Chen 2006, Xu 2006, Jager 2010

$$
\beta(t_\ell) = \left(\frac{t_{\ell+1} - t_\ell}{2(t_{\ell+1} - t_{\ell-1})}\right) x(t_{\ell-1}) + \frac{1}{2} x(t_\ell) + \left(\frac{t_\ell - t_{\ell-1}}{2(t_{\ell+1} - t_{\ell-1})}\right) x(t_{\ell+1})
$$

$$
\sum_{\ell} \psi_\ell = \chi_{[1 \ldots N]}
$$

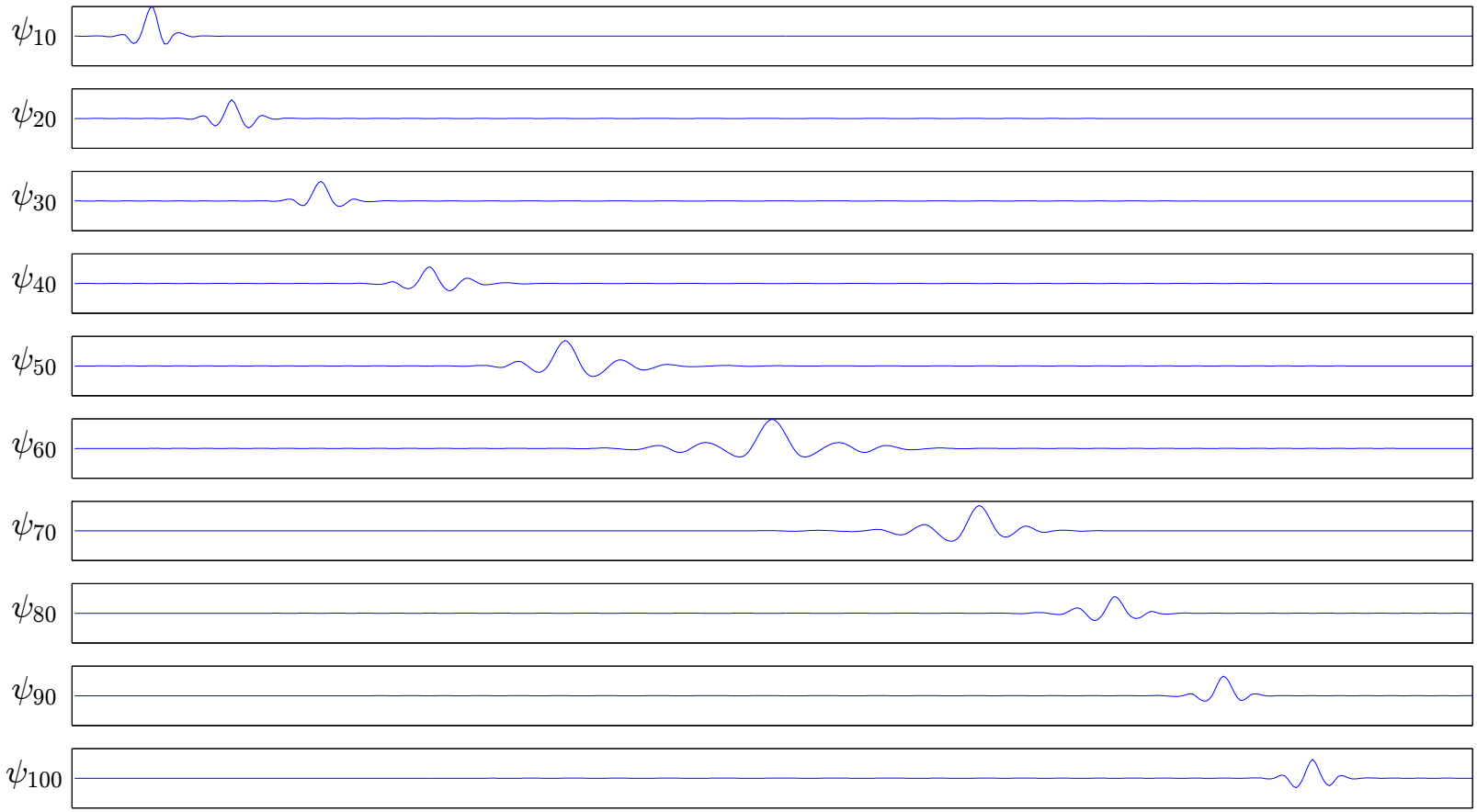
Características de la descomposición

Comparación con *B-splines*



Características de la descomposición

Comparación con *B-splines*



Características de la descomposición

$$a = (P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x x$$

Características de la descomposición

Filtro variante en el tiempo

$$
\begin{aligned}
a &= (P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x x \\
&= \underbrace{\left((P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x\right)}_{\Phi} x
\end{aligned}
$$

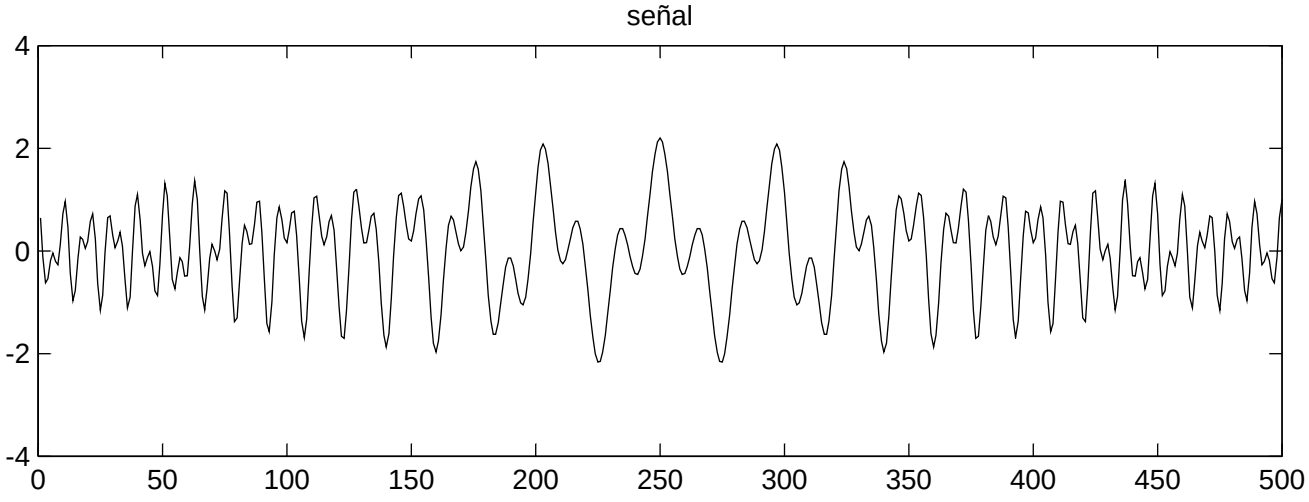
Características de la descomposición

Filtro variante en el tiempo

$$
\begin{aligned}
a &= (P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x x \\
&= \underbrace{\left((P_x^T P_x + \lambda D^T D)^{-1} P_x^T P_x\right)}_{\Phi} x \\
&= \sum_{\ell} \phi_\ell(n - t_\ell) x(t_\ell)
\end{aligned}
$$

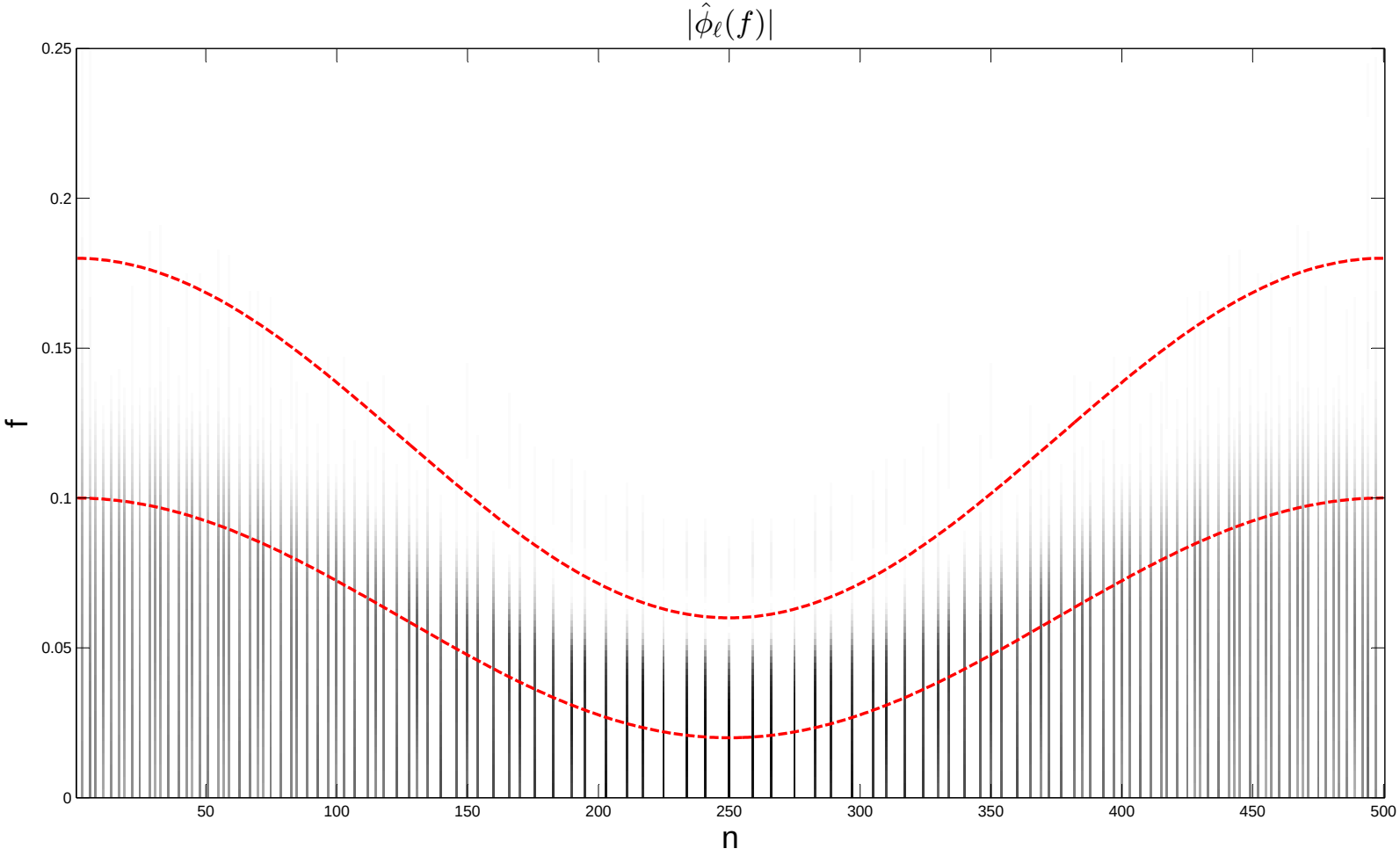
Características de la descomposición

Filtro variante en el tiempo



Características de la descomposición

Filtro variante en el tiempo



Implementación

- Selección de λ.

Implementación

- Selección de λ.
- Efectos de borde.

Implementación

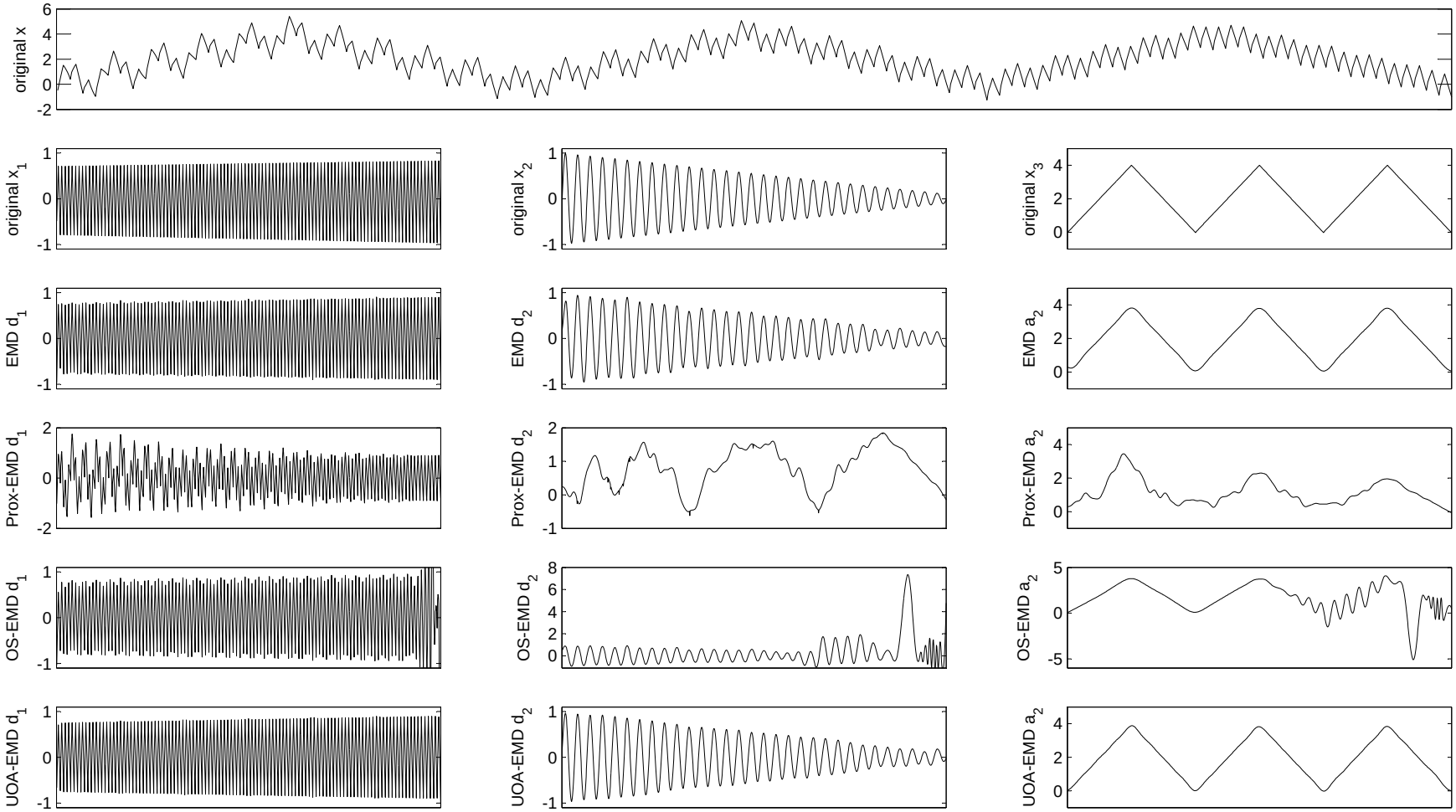
- Selección de λ.
- Efectos de borde.
- Criterios de detención.

Implementación

- Selección de λ.
- Efectos de borde.
- Criterios de detención.
- Efectos de muestreo.

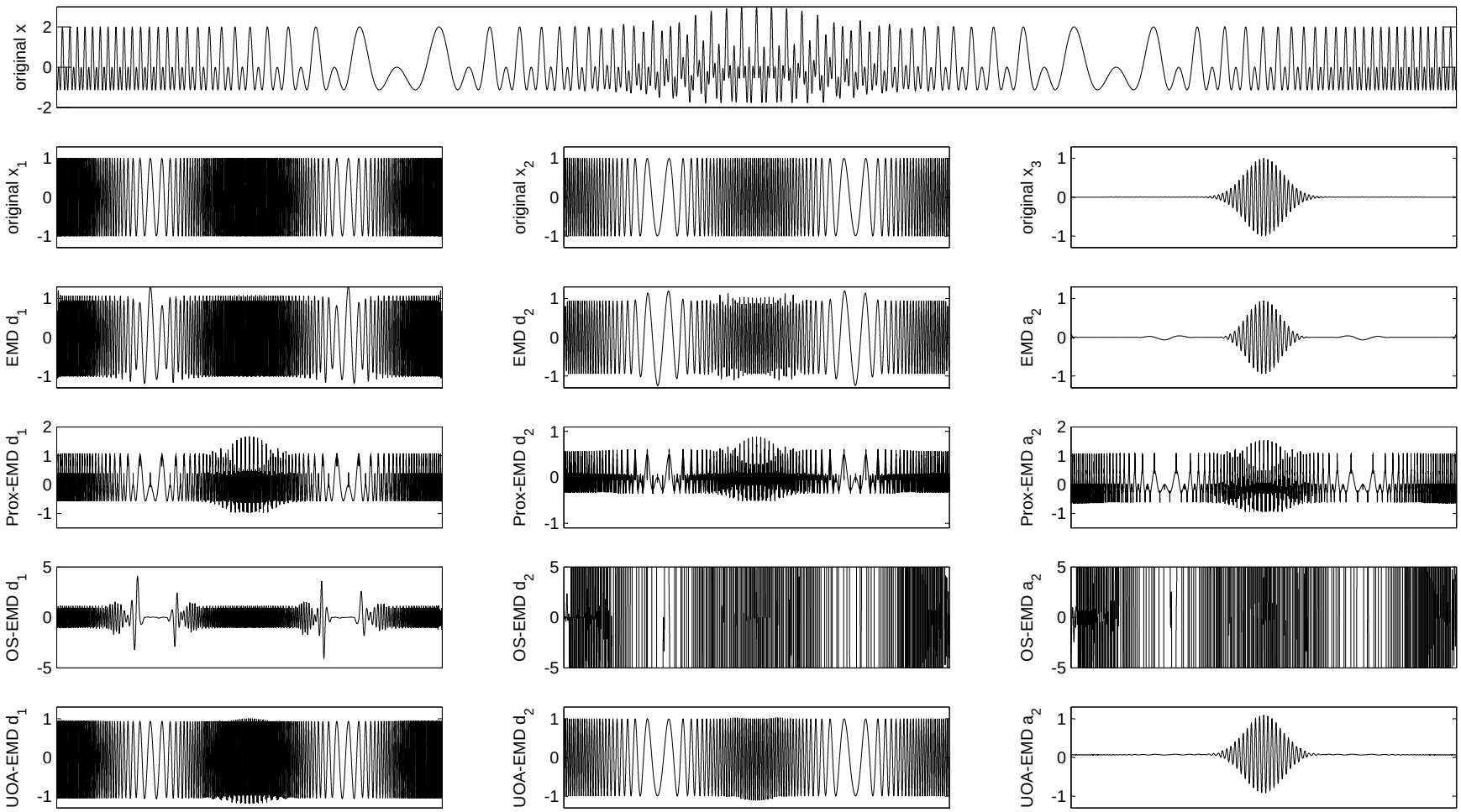
Resultados

Colominas, Schlotthauer & Torres, *Digital Signal Processing*, 2015



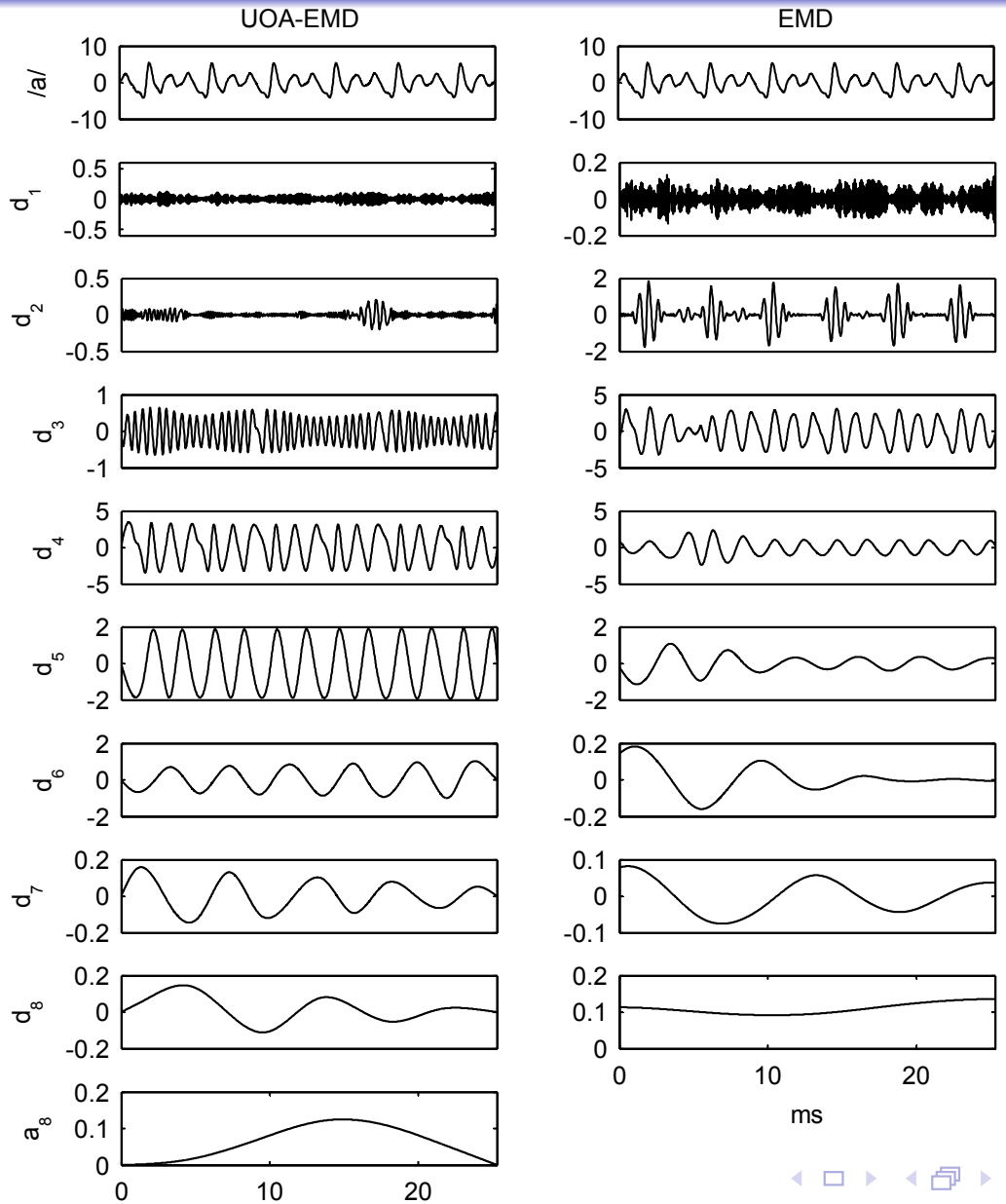
Resultados

Colominas, Schlotthauer & Torres, *Digital Signal Processing*, 2015

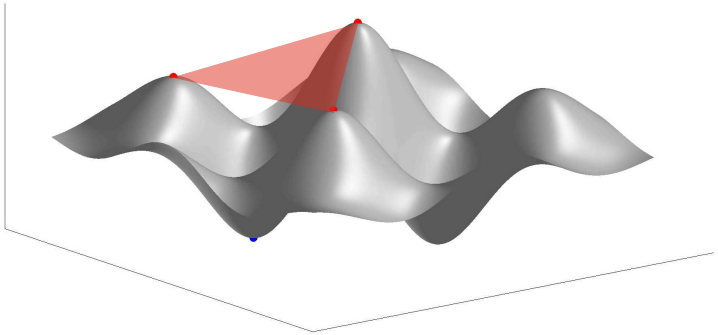


Aplicación a voz

Colominas, Schlotthauer & Torres, *Digital Signal Processing*, 2015

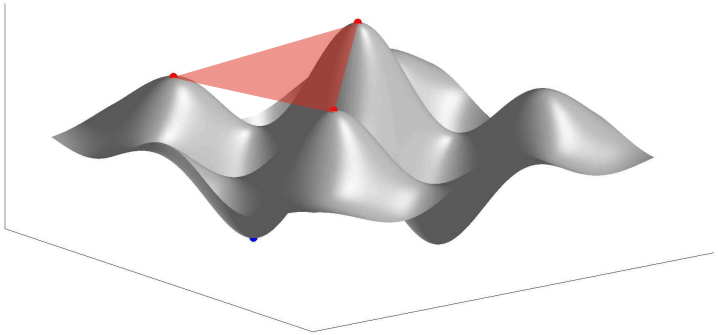


Extensión a dos dimensiones



$$\langle P_\ell, D\rangle = D(z_\ell) + c_1 D(z_1) + c_2 D(z_2) + c_3 D(z_3)$$

Extensión a dos dimensiones



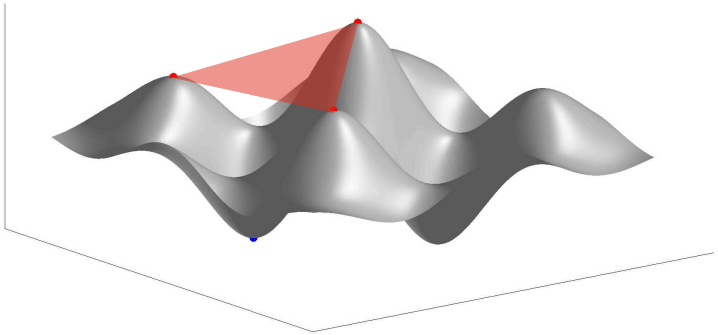
$$\langle P_\ell, D\rangle = D(z_\ell) + c_1 D(z_1) + c_2 D(z_2) + c_3 D(z_3)$$

$$c_2 = \frac{(x_\ell - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_\ell - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$c_3 = \frac{(x_2 - x_1)(y_\ell - y_1) - (x_\ell - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$c_1 = 1 - c_2 - c_3.$$

Extensión a dos dimensiones



$$\langle P_\ell, D\rangle = D(z_\ell) + c_1 D(z_1) + c_2 D(z_2) + c_3 D(z_3)$$

$$c_2 = \frac{(x_\ell - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_\ell - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

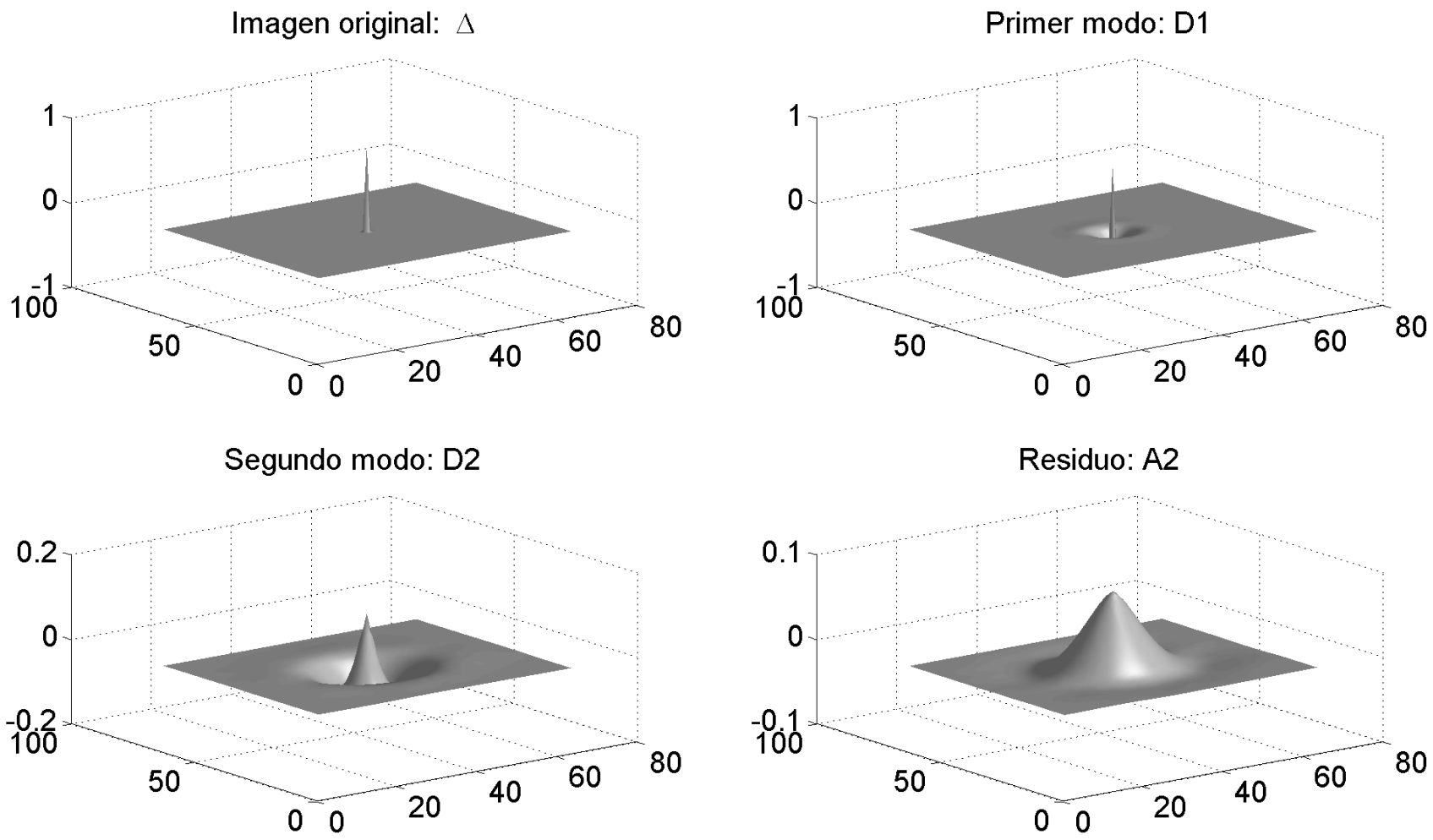
$$c_3 = \frac{(x_2 - x_1)(y_\ell - y_1) - (x_\ell - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$c_1 = 1 - c_2 - c_3.$$

$$K = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Resultados

Colominas, Humeau-Heutier & Schlotthauer, *IEEE Transactions on Image Processing*, 2016



Contenidos

1. Motivación
2. EMD
3. Versiones de EMD asistidas por ruido
4. Un enfoque de optimización para EMD
5. Un enfoque tiempo-escala para EMD

El problema de la media local

El problema de la media local

$$a(t) = \frac{1}{\alpha(t)} \int x(u) w\left(\frac{u-t}{\alpha(t)}\right) du,$$

Rilling 2007

El problema de la media local

$$a(t) = \frac{1}{\alpha(t)} \int x(u) w\left(\frac{u-t}{\alpha(t)}\right) du,$$

Rilling 2007

- $w(u)$: función de ponderación $\Rightarrow$ sin mayores dificultades.

El problema de la media local

$$a(t) = \frac{1}{\alpha(t)} \int x(u) w\left(\frac{u-t}{\alpha(t)}\right) du,$$

Rilling 2007

- $w(u)$: función de ponderación $\Rightarrow$ sin mayores dificultades.
- $\alpha(t)$: ***escala local*** $\Rightarrow$ problema complicado.

El problema de la media local

$$a(t) = \frac{1}{\alpha(t)} \int x(u) w\left(\frac{u-t}{\alpha(t)}\right) du,$$

Rilling 2007

- $w(u)$: función de ponderación $\Rightarrow$ sin mayores dificultades.
- $\alpha(t)$: ***escala local*** $\Rightarrow$ problema complicado.
- Análisis de **función de escalamiento** evaluada en la ***escala local***.

Propuesta de algoritmo

Propuesta de algoritmo

- Una nueva definición para los modos

$$d(t) = \frac{2}{\widetilde{C_\psi}} \mathcal{R}e \left(\int_0^{C\,\alpha(t)} W_x^\psi(t,s) \frac{ds}{s} \right).$$

Propuesta de algoritmo

- Una nueva definición para los modos

$$d(t) = \frac{2}{\widetilde{C_\psi}} \mathcal{R}e \left(\int_0^{C\,\alpha(t)} W_x^\psi(t,s) \frac{ds}{s} \right).$$

- La escala local

$$\alpha(t) = 2(t_{\ell+1} - t_\ell), \quad t_\ell < t < t_{\ell+1}.$$

Propuesta de algoritmo

- Una nueva definición para los modos

$$d(t) = \frac{2}{\widetilde{C_\psi}} \mathcal{R}e \left(\int_0^{C\,\alpha(t)} W_x^\psi(t,s) \frac{ds}{s} \right).$$

- La escala local

$$\alpha(t) = 2(t_{\ell+1} - t_\ell), \quad t_\ell < t < t_{\ell+1}.$$

- Discontinuidad y *synchrosqueezing*

$$d(t) = \frac{2}{\widetilde{C_\psi}} \mathcal{R}e \left(\int_0^{C\,\alpha(t)} SW_x(t,s) ds \right).$$

Propuesta de algoritmo

- Una nueva definición para los modos

$$d(t) = \frac{2}{\widetilde{C_\psi}} \mathcal{R}e \left(\int_0^{C\,\alpha(t)} W_x^\psi(t,s) \frac{ds}{s} \right).$$

- La escala local

$$\alpha(t) = 2(t_{\ell+1} - t_\ell), \quad t_\ell < t < t_{\ell+1}.$$

- Discontinuidad y *synchrosqueezing*

$$d(t) = \frac{2}{\widetilde{C_\psi}} \mathcal{R}e \left(\int_0^{C\,\alpha(t)} SW_x(t,s) ds \right).$$

- La constante $C = f_\psi + \Delta$.

Propuesta de algoritmo

- Una nueva definición para los modos

$$d(t) = \frac{2}{\widetilde{C_\psi}} \mathcal{R}e \left(\int_0^{C\,\alpha(t)} W_x^\psi(t,s) \frac{ds}{s} \right).$$

- La escala local

$$\alpha(t) = 2(t_{\ell+1} - t_\ell), \quad t_\ell < t < t_{\ell+1}.$$

- Discontinuidad y *synchrosqueezing*

$$d(t) = \frac{2}{\widetilde{C_\psi}} \mathcal{R}e \left(\int_0^{C\,\alpha(t)} SW_x(t,s) ds \right).$$

- La constante $C = f_\psi + \Delta$.
- Refinamiento de la escala local.

Propuesta de algoritmo

- Una nueva definición para los modos

$$d(t) = \frac{2}{\widetilde{C_\psi}} \mathcal{R}e \left(\int_0^{C\,\alpha(t)} W_x^\psi(t,s) \frac{ds}{s} \right).$$

- La escala local

$$\alpha(t) = 2(t_{\ell+1} - t_\ell), \quad t_\ell < t < t_{\ell+1}.$$

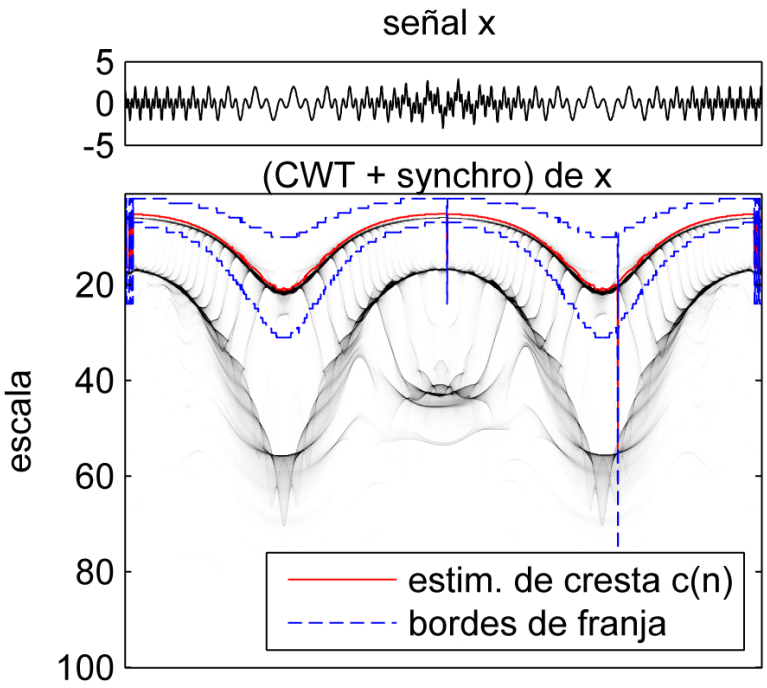
- Discontinuidad y *synchrosqueezing*

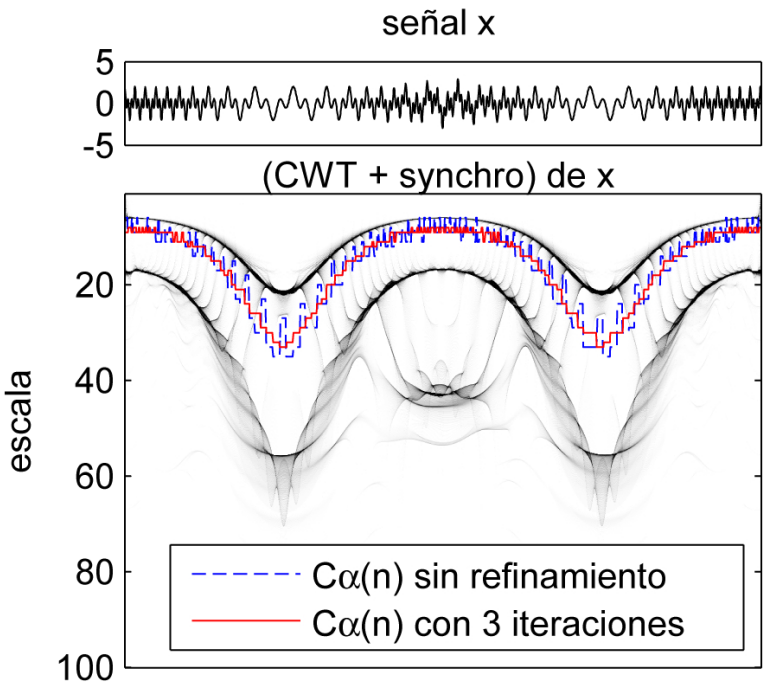
$$d(t) = \frac{2}{\widetilde{C_\psi}} \mathcal{R}e \left(\int_0^{C\,\alpha(t)} SW_x(t,s) ds \right).$$

- La constante $C = f_\psi + \Delta$.
- Refinamiento de la escala local.
- Tratamiento de bordes.

Resultados

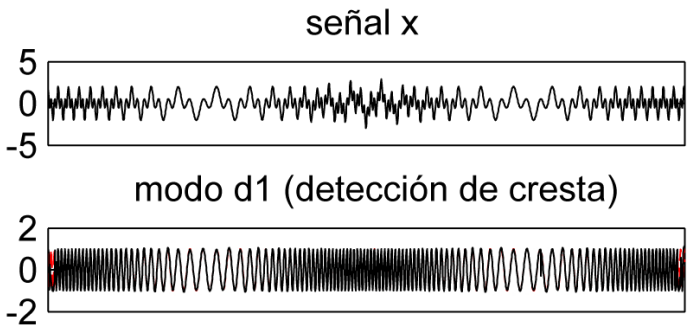
Colominas & Schlotthauer, *EUSIPCO*, 2016

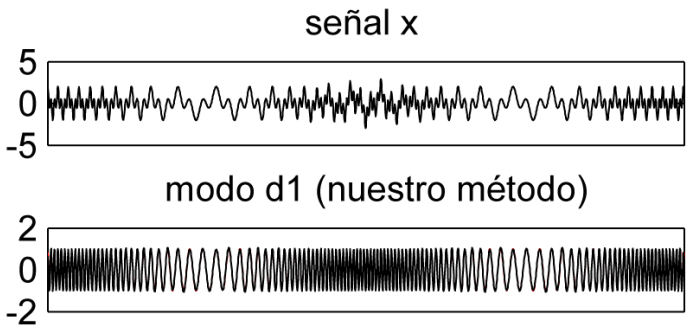




Resultados

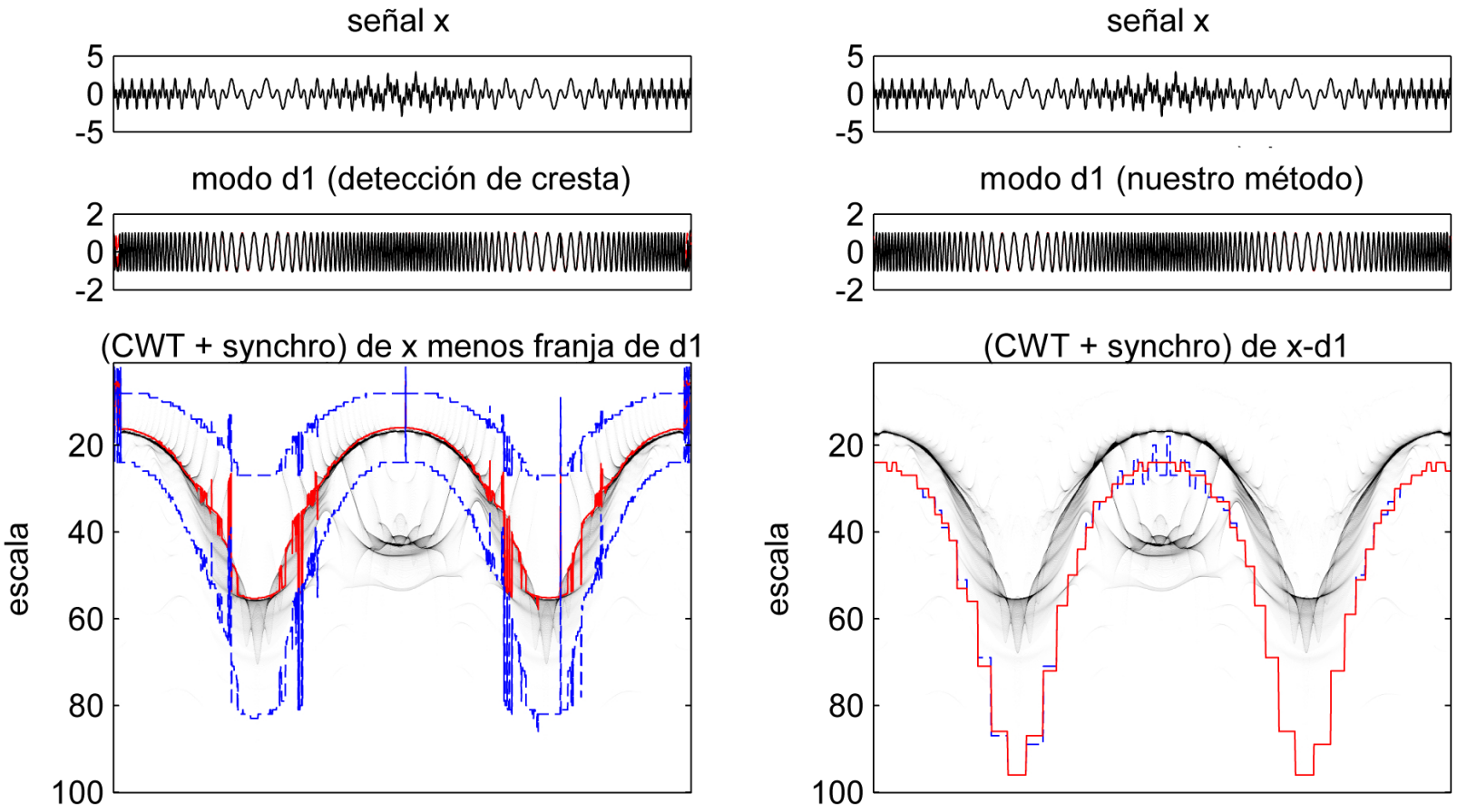
Colominas & Schlotthauer, *EUSIPCO*, 2016





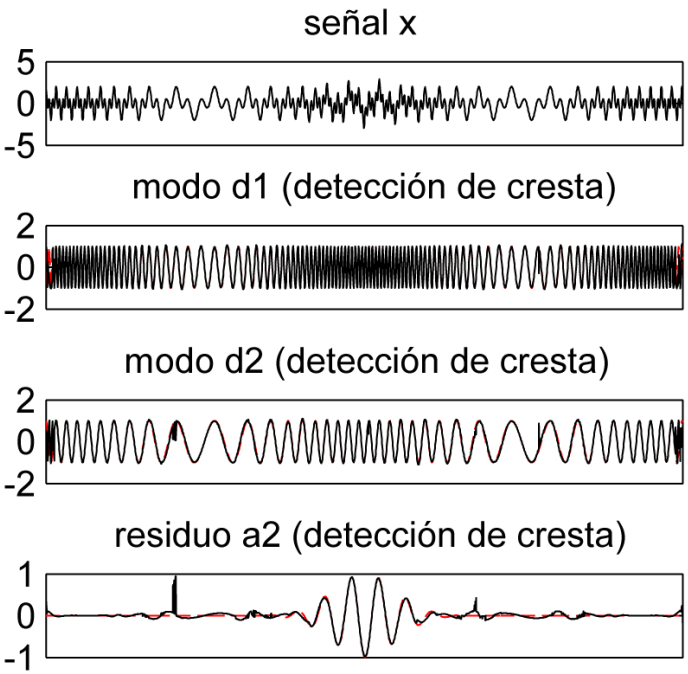
Resultados

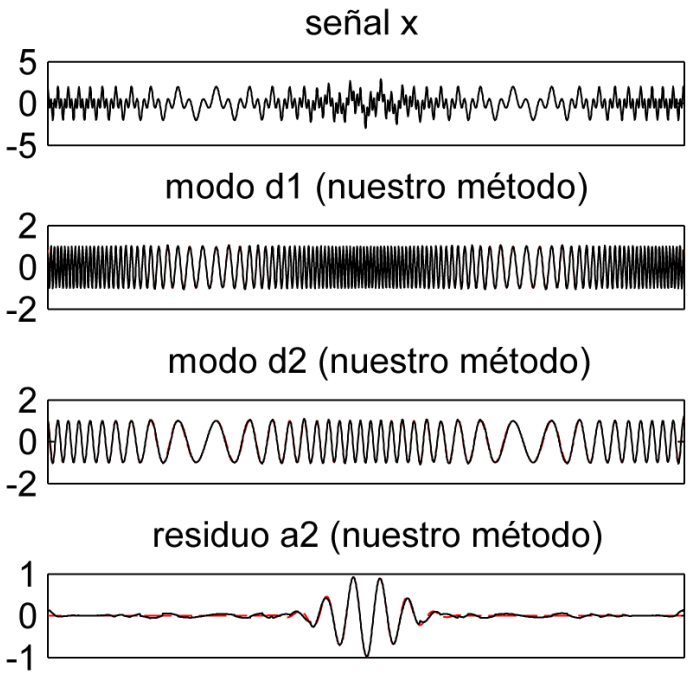
Colominas & Schlotthauer, *EUSIPCO*, 2016

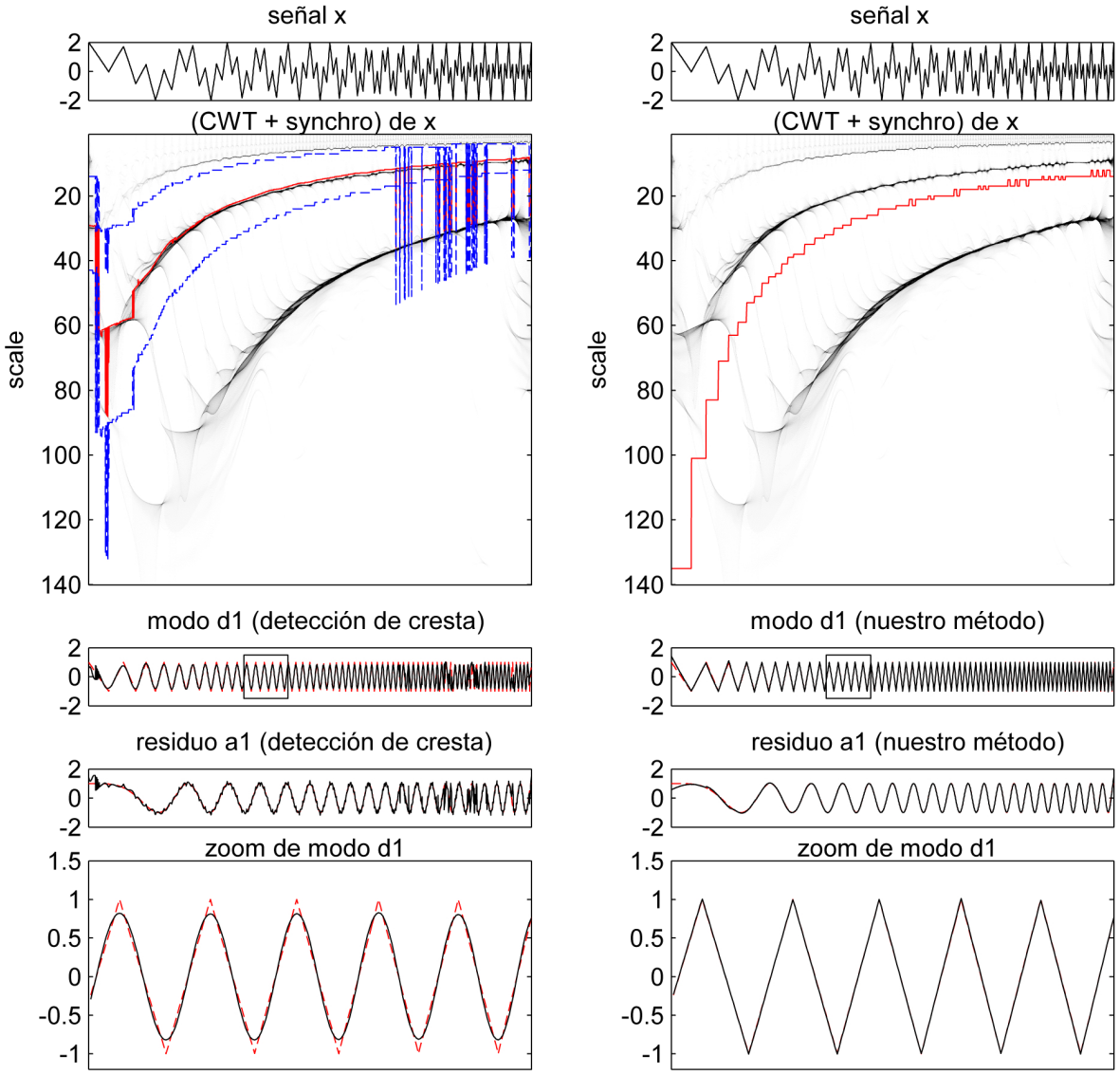


Resultados

Colominas & Schlotthauer, *EUSIPCO*, 2016





Resultados

Colominas & Schlotthauer, *EUSIPCO*, 2016