

# Análisis Tiempo-Frecuencia y Descomposición de Señales

## Clase 5

Dr. Marcelo Alejandro Colominas  
macolominas@conicet.gov.ar

Lab. Señales y Dinámicas no Lineales  
Instituto de Investigación y Desarrollo en Bioingeniería y Bioinformática (IBB)  
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina

2019



LABORATORIO DE SEÑALES  
Y DINÁMICAS NO LINEALES  
FI-UNER • Entre Ríos • Argentina



Facultad de  
UNER Ingeniería



# Contenidos

- 1 Motivación
- 2 Reassignment y Synchrosqueezing
- 3 Ejemplos
- 4 Implementación

# Contenidos

- 1 Motivación
- 2 Reassignment y Synchrosqueezing
- 3 Ejemplos
- 4 Implementación

- Tanto la STFT como la CWT sufren de una «incertidumbre» en su representación.

- Tanto la STFT como la CWT sufren de una «incertidumbre» en su representación.
- Sin embargo, gozan de cierta redundancia que puede aprovecharse.

- Tanto la STFT como la CWT sufren de una «incertidumbre» en su representación.
- Sin embargo, gozan de cierta redundancia que puede aprovecharse.
- Por otro lado, la información referente a la fase de estas representaciones suele menospreciarse.

- Tanto la STFT como la CWT sufren de una «incertidumbre» en su representación.
- Sin embargo, gozan de cierta redundancia que puede aprovecharse.
- Por otro lado, la información referente a la fase de estas representaciones suele menospreciarse.
- Existen estrategias que usan esta información, y mejoran la «resolución» de las representaciones.

- Tanto la STFT como la CWT sufren de una «incertidumbre» en su representación.
- Sin embargo, gozan de cierta redundancia que puede aprovecharse.
- Por otro lado, la información referente a la fase de estas representaciones suele menospreciarse.
- Existen estrategias que usan esta información, y mejoran la «resolución» de las representaciones.
- Ellas son la técnica de Reassignment, y un caso especial: Synchrosqueezing.



# Contenidos

- 1 Motivación
- 2 Reassignment y Synchrosqueezing
- 3 Ejemplos
- 4 Implementación

# Reassignment

Kodera 1976, Auger & Flandrin 1995, Auger 2013

## Idea

La idea consiste en «reasignar» los coeficientes de la representación desde  $(t, f)$  a  $(\tilde{t}, \tilde{f})$ . Originalmente propuesta para el espectrograma (Kodera *et al.* 1976), luego fue extendida a todas las representaciones bilineales (Auger & Flandrin, 1995).

# Reassignment

Kodera 1976, Auger &amp; Flandrin 1995, Auger 2013

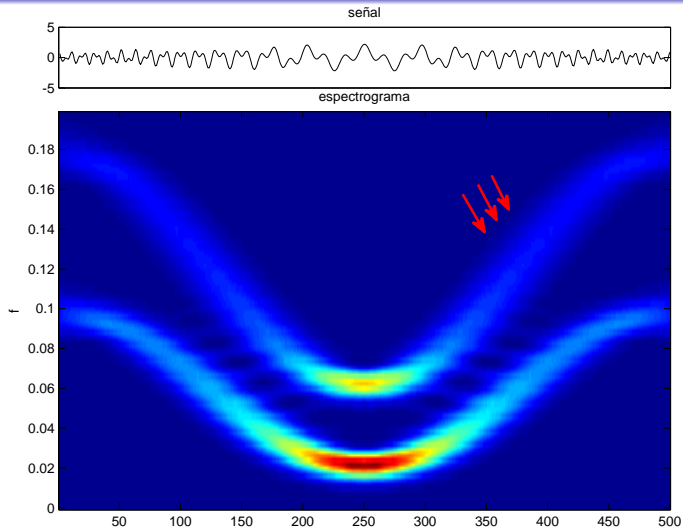
## Idea

La idea consiste en «reasignar» los coeficientes de la representación desde  $(t, f)$  a  $(\tilde{t}, \tilde{f})$ . Originalmente propuesta para el espectrograma (Kodera *et al.* 1976), luego fue extendida a todas las representaciones bilineales (Auger & Flandrin, 1995).

$$RS_x^g(t, f) = \iint S_x^g(u, v) \delta(t - \tilde{t}_x(u, v)) \delta(f - \tilde{f}_x(u, v)) du dv.$$

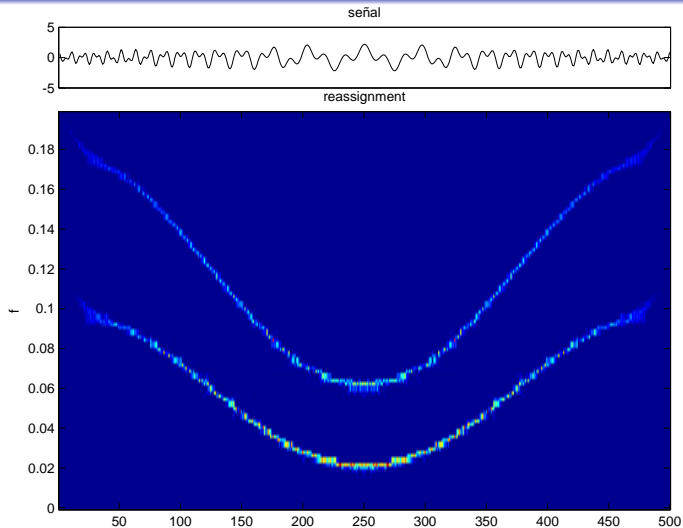
# Reassignment

Kodera 1976, Auger & Flandrin 1995, Auger 2013



# Reassignment

Kodera 1976, Auger & Flandrin 1995, Auger 2013



No permite la reconstrucción.

# Synchrosqueezing

Daubechies 1996, Daubechies 2011, Auger 2013

## Idea

Con el fin de lograr una representación invertible, Daubechies sugiere reasignar los coeficientes solo «verticalmente» y trabajar con representaciones lineales (la CWT en su propuesta de 1996). En el caso de la STFT:

# Synchrosqueezing

Daubechies 1996, Daubechies 2011, Auger 2013

## Idea

Con el fin de lograr una representación invertible, Daubechies sugiere reasignar los coeficientes solo «verticalmente» y trabajar con representaciones lineales (la CWT en su propuesta de 1996). En el caso de la STFT:

$$SF_x^g(t, f) = \int F_x^g(t, v) \delta(f - \tilde{f}_x(t, v)) dv$$

# Synchrosqueezing

Daubechies 1996, Daubechies 2011, Auger 2013

## Idea

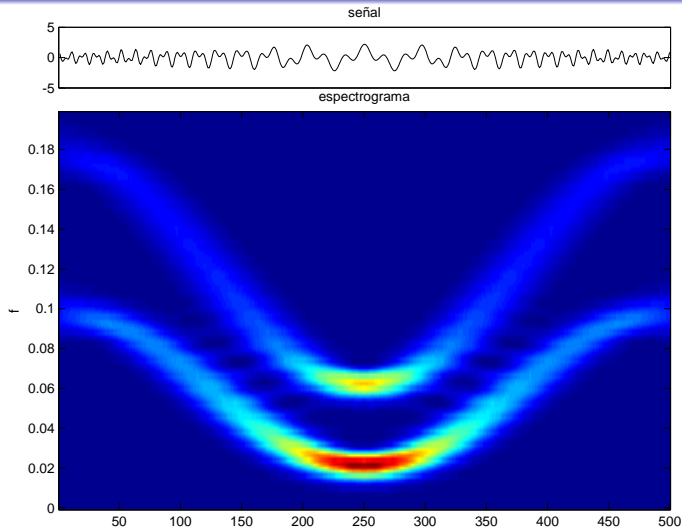
Con el fin de lograr una representación invertible, Daubechies sugiere reasignar los coeficientes solo «verticalmente» y trabajar con representaciones lineales (la CWT en su propuesta de 1996). En el caso de la STFT:

$$SF_x^g(t, f) = \int F_x^g(t, v) \delta(f - \tilde{f}_x(t, v)) dv$$
$$x(t) = \frac{1}{g(0)} \int SF_x^g(t, v) dv$$



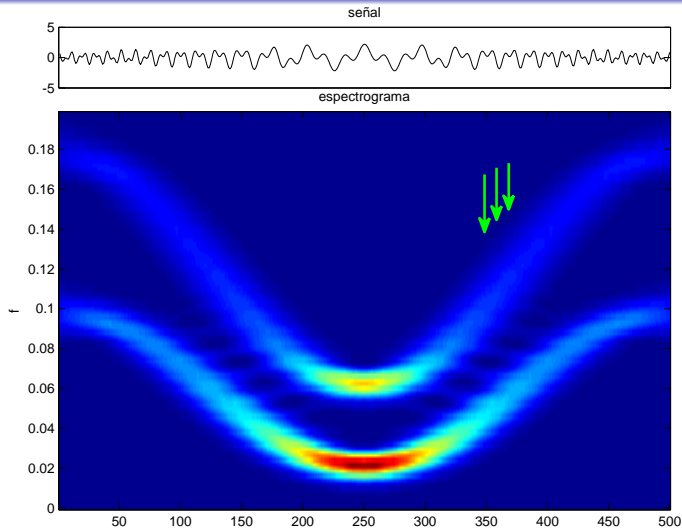
# Synchrosqueezing

Daubechies 1996, Daubechies 2011, Auger 2013



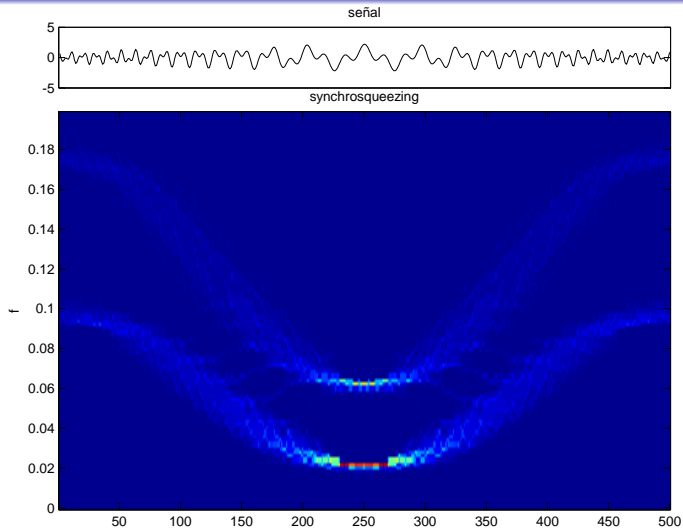
# Synchrosqueezing

Daubechies 1996, Daubechies 2011, Auger 2013



# Synchrosqueezing

Daubechies 1996, Daubechies 2011, Auger 2013



Permite la reconstrucción.

# Synchrosqueezing

Daubechies 1996, Daubechies 2011, Auger 2013

Para la CWT

También puede plantearse para la transformada ondita continua:

# Synchrosqueezing

Daubechies 1996, Daubechies 2011, Auger 2013

Para la CWT

También puede plantearse para la transformada ondita continua:

$$SW_x^\psi(t, s) = \int W_x^\psi(t, v) \delta(s - \tilde{s}_x(t, v)) \frac{dv}{v}$$

# Synchrosqueezing

Daubechies 1996, Daubechies 2011, Auger 2013

## Para la CWT

También puede plantearse para la transformada ondita continua:

$$SW_x^\psi(t, s) = \int W_x^\psi(t, v) \delta(s - \tilde{s}_x(t, v)) \frac{dv}{v}$$

$$x(t) = \frac{1}{\tilde{C}_\psi} \int SW_x^\psi(t, v) dv$$

# Operadores

## Operador frecuencial para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

# Operadores

## Operador frecuencial para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $F_x^g(t, f) = e^{i2\pi f_0 t} \hat{g}(f - f_0)$ .



# Operadores

## Operador frecuencial para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $F_x^g(t, f) = e^{i2\pi f_0 t} \hat{g}(f - f_0)$ .

Queremos recuperar la frecuencia  $f_0$  del tono puro:

# Operadores

## Operador frecuencial para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $F_x^g(t, f) = e^{i2\pi f_0 t} \hat{g}(f - f_0)$ .

Queremos recuperar la frecuencia  $f_0$  del tono puro:

- $$f_0 = \frac{\partial_t F_x^g(t, f)}{i2\pi F_x^g(t, f)}.$$

# Operadores

## Operador frecuencial para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $F_x^g(t, f) = e^{i2\pi f_0 t} \hat{g}(f - f_0)$ .

Queremos recuperar la frecuencia  $f_0$  del tono puro:

- $f_0 = \frac{\partial_t F_x^g(t, f)}{i2\pi F_x^g(t, f)}.$
- $f_0 = f - \frac{1}{i2\pi} \frac{F_x^{g'}(t, f)}{F_x^g(t, f)}.$

# Operadores

## Operador frecuencial para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $F_x^g(t, f) = e^{i2\pi f_0 t} \hat{g}(f - f_0)$ .

Queremos recuperar la frecuencia  $f_0$  del tono puro:

- $f_0 = \frac{\partial_t F_x^g(t, f)}{i2\pi F_x^g(t, f)}.$
- $f_0 = f - \frac{1}{i2\pi} \frac{F_x^{g'}(t, f)}{F_x^g(t, f)}.$  En la práctica, debemos tomar la parte real del segundo término del miembro derecho, con lo que queda:  $f_0 = f - \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left( \frac{F_x^{g'}(t, f)}{F_x^g(t, f)} \right).$

# Operadores

## Operador frecuencial para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $F_x^g(t, f) = e^{i2\pi f_0 t} \hat{g}(f - f_0)$ .

Queremos recuperar la frecuencia  $f_0$  del tono puro:

- $f_0 = \frac{\partial_t F_x^g(t, f)}{i2\pi F_x^g(t, f)}.$
- $f_0 = f - \frac{1}{i2\pi} \frac{F_x^{g'}(t, f)}{F_x^g(t, f)}.$  En la práctica, debemos tomar la parte real del segundo término del miembro derecho, con lo que queda:  $f_0 = f - \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left( \frac{F_x^{g'}(t, f)}{F_x^g(t, f)} \right).$
- $f_0 = \frac{1}{2\pi} \partial_t \text{Arg} F_x^g(t, f).$

# Operadores

## Operador temporal para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

# Operadores

## Operador temporal para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = \delta(t - t_0)$  entonces  $F_x^g(t, f) = g(t - t_0)e^{i2\pi f(t-t_0)}$ .

# Operadores

## Operador temporal para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = \delta(t - t_0)$  entonces  $F_x^g(t, f) = g(t - t_0)e^{i2\pi f(t-t_0)}$ .

Queremos recuperar el instante  $t_0$  de la delta:



# Operadores

## Operador temporal para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = \delta(t - t_0)$  entonces  $F_x^g(t, f) = g(t - t_0)e^{i2\pi f(t-t_0)}$ .

Queremos recuperar el instante  $t_0$  de la delta:

- $$t - t_0 = \frac{\partial_f F_x^g(t, f)}{i2\pi F_x^g(t, f)}.$$

# Operadores

## Operador temporal para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = \delta(t - t_0)$  entonces  $F_x^g(t, f) = g(t - t_0)e^{i2\pi f(t-t_0)}$ .

Queremos recuperar el instante  $t_0$  de la delta:

- $t - t_0 = \frac{\partial_f F_x^g(t, f)}{i2\pi F_x^g(t, f)}.$
- $t - t_0 = -\frac{F_x^{tg}(t, f)}{F_x^g(t, f)}.$

# Operadores

## Operador temporal para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = \delta(t - t_0)$  entonces  $F_x^g(t, f) = g(t - t_0)e^{i2\pi f(t-t_0)}$ .

Queremos recuperar el instante  $t_0$  de la delta:

- $t - t_0 = \frac{\partial_f F_x^g(t, f)}{i2\pi F_x^g(t, f)}.$
- $t - t_0 = -\frac{F_x^{tg}(t, f)}{F_x^g(t, f)}.$  En la práctica, debemos tomar la parte real del miembro derecho, con lo que queda:  

$$t_0 = t + \operatorname{Re} \left( \frac{F_x^{tg}(t, f)}{F_x^g(t, f)} \right).$$

# Operadores

## Operador temporal para la STFT

Tenemos  $F_x^g(t, f) = \int x(u)g(u - t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$ .

Si  $x(t) = \delta(t - t_0)$  entonces  $F_x^g(t, f) = g(t - t_0)e^{i2\pi f(t-t_0)}$ .

Queremos recuperar el instante  $t_0$  de la delta:

- $t - t_0 = \frac{\partial_f F_x^g(t, f)}{i2\pi F_x^g(t, f)}.$
- $t - t_0 = -\frac{F_x^{tg}(t, f)}{F_x^g(t, f)}.$  En la práctica, debemos tomar la parte real del miembro derecho, con lo que queda:  

$$t_0 = t + \operatorname{Re} \left( \frac{F_x^{tg}(t, f)}{F_x^g(t, f)} \right).$$
- $t - t_0 = \frac{1}{2\pi} \partial_f \operatorname{Arg} F_x^g(t, f).$

# Operadores

## Operador frecuencial para la CWT

Tenemos  $W_x^\psi(t, f) = \int x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left( \frac{u-t}{s} \right) du.$

# Operadores

## Operador frecuencial para la CWT

Tenemos  $W_x^\psi(t, f) = \int x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left( \frac{u-t}{s} \right) du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $W_x^\psi(t, f) = \hat{\psi}^*(sf_0) e^{i2\pi f_0 t}$ .

# Operadores

## Operador frecuencial para la CWT

Tenemos  $W_x^\psi(t, f) = \int x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left( \frac{u-t}{s} \right) du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $W_x^\psi(t, f) = \hat{\psi}^*(s f_0) e^{i2\pi f_0 t}$ .

Queremos la frecuencia  $f_0$  del tono puro:

# Operadores

## Operador frecuencial para la CWT

Tenemos  $W_x^\psi(t, f) = \int x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left( \frac{u-t}{s} \right) du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $W_x^\psi(t, f) = \hat{\psi}^*(s f_0) e^{i2\pi f_0 t}$ .

Queremos la frecuencia  $f_0$  del tono puro:

- $$f_0 = \frac{\partial_t W_x^\psi(t, s)}{i2\pi W_x^\psi(t, s)}.$$



# Operadores

## Operador frecuencial para la CWT

Tenemos  $W_x^\psi(t, f) = \int x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left( \frac{u-t}{s} \right) du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $W_x^\psi(t, f) = \hat{\psi}^*(s f_0) e^{i2\pi f_0 t}$ .

Queremos la frecuencia  $f_0$  del tono puro:

- $f_0 = \frac{\partial_t W_x^\psi(t, s)}{i2\pi W_x^\psi(t, s)}.$
- $f_0 = -\frac{W_x^{\psi'}(t, s)}{i2\pi s W_x^\psi(t, s)}.$

# Operadores

## Operador frecuencial para la CWT

Tenemos  $W_x^\psi(t, f) = \int x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left( \frac{u-t}{s} \right) du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $W_x^\psi(t, f) = \hat{\psi}^*(s f_0) e^{i2\pi f_0 t}$ .

Queremos la frecuencia  $f_0$  del tono puro:

- $f_0 = \frac{\partial_t W_x^\psi(t, s)}{i2\pi W_x^\psi(t, s)}.$
- $f_0 = -\frac{W_x^{\psi'}(t, s)}{i2\pi s W_x^\psi(t, s)}.$  En la práctica, debemos tomar la parte real del segundo término del miembro derecho, con lo que queda:  $f_0 = -Im \left( \frac{W_x^{\psi'}(t, s)}{2\pi s W_x^\psi(t, s)} \right).$

# Operadores

## Operador frecuencial para la CWT

Tenemos  $W_x^\psi(t, f) = \int x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left( \frac{u-t}{s} \right) du$ .

Si  $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$  entonces  $W_x^\psi(t, f) = \hat{\psi}^*(sf_0) e^{i2\pi f_0 t}$ .

Queremos la frecuencia  $f_0$  del tono puro:

- $f_0 = \frac{\partial_t W_x^\psi(t, s)}{i2\pi W_x^\psi(t, s)}$ .
- $f_0 = -\frac{W_x^{\psi'}(t, s)}{i2\pi s W_x^\psi(t, s)}$ . En la práctica, debemos tomar la parte real del segundo término del miembro derecho, con lo que queda:  $f_0 = -Im \left( \frac{W_x^{\psi'}(t, s)}{2\pi s W_x^\psi(t, s)} \right)$ .
- $f_0 = \frac{1}{2\pi} \partial_t \text{Arg} W_x^\psi(t, s)$ .

# Observaciones

- El *reassignment* logra una ubicación perfecta para chirps lineales, pero no es invertible.

# Observaciones

- El *reassignment* logra una ubicación perfecta para chirps lineales, pero no es invertible.
- Si  $x(t) = e^{i2\pi(at+bt^2)}$  entonces  $\phi'(\tilde{t}) = \tilde{f}$ .

# Observaciones

- El *reassignment* logra una ubicación perfecta para chirps lineales, pero no es invertible.
- Si  $x(t) = e^{i2\pi(at+bt^2)}$  entonces  $\phi'(\tilde{t}) = \tilde{f}$ .
- *Synchrosqueezing* logra una ubicación perfecta sólo para tonos puros, pero es invertible.

# Observaciones

- El *reassignment* logra una ubicación perfecta para chirps lineales, pero no es invertible.
- Si  $x(t) = e^{i2\pi(at+bt^2)}$  entonces  $\phi'(\tilde{t}) = \tilde{f}$ .
- *Synchrosqueezing* logra una ubicación perfecta sólo para tonos puros, pero es invertible.
- Existe el *synchrosqueezing* de segundo orden que logra una ubicación perfecta para chirps lineales, y se mantiene invertible.

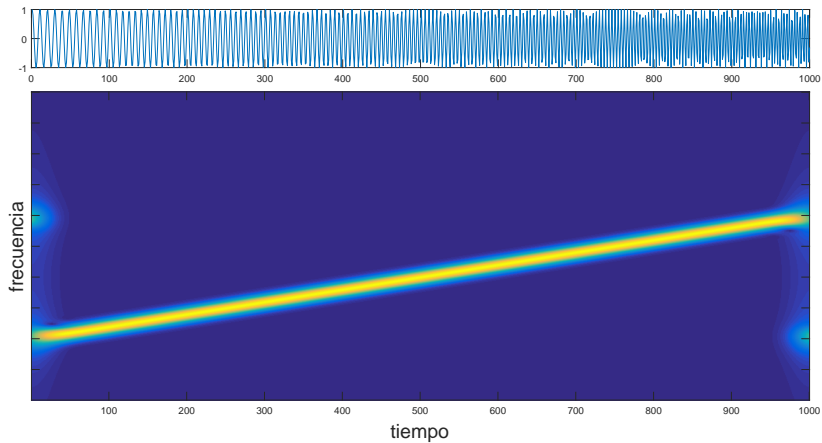
# Observaciones

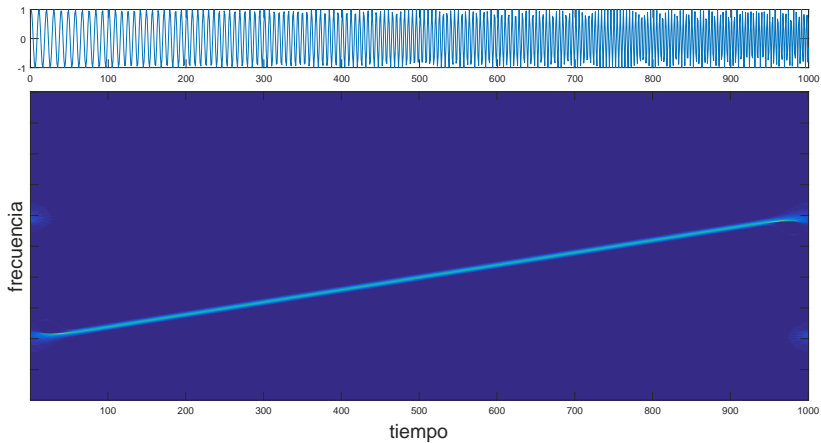
- El *reassignment* logra una ubicación perfecta para chirps lineales, pero no es invertible.
- Si  $x(t) = e^{i2\pi(at+bt^2)}$  entonces  $\phi'(\tilde{t}) = \tilde{f}$ .
- *Synchrosqueezing* logra una ubicación perfecta sólo para tonos puros, pero es invertible.
- Existe el *synchrosqueezing* de segundo orden que logra una ubicación perfecta para chirps lineales, y se mantiene invertible.
- También existen versiones de *synchrosqueezing* de orden mayor.

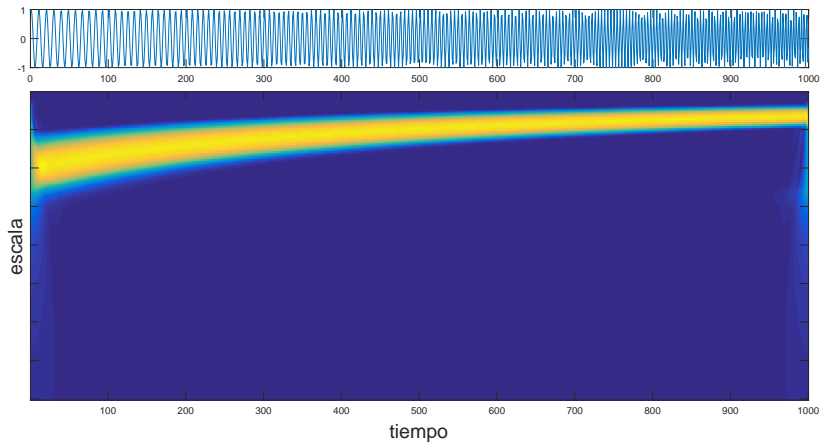


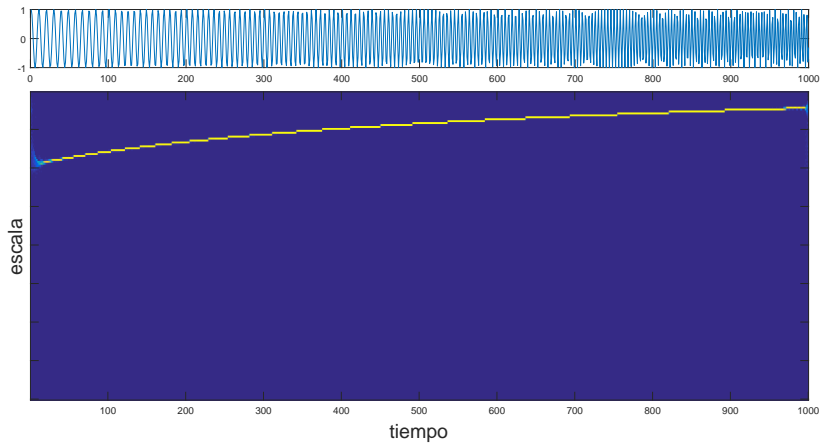
# Contenidos

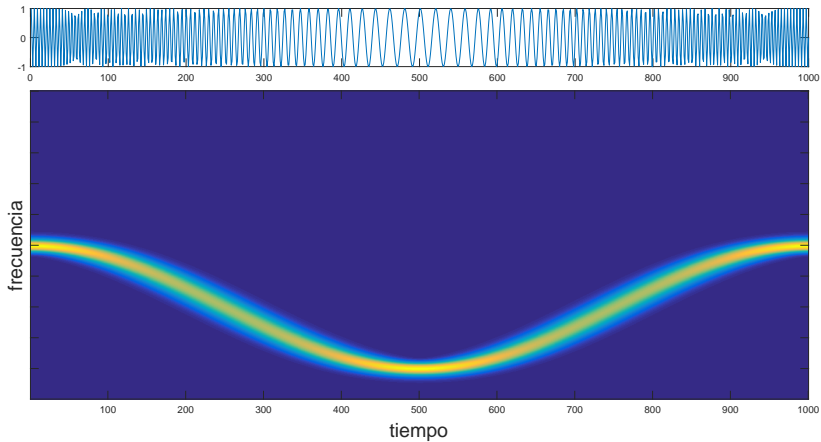
- 1 Motivación
- 2 Reassignment y Synchrosqueezing
- 3 Ejemplos**
- 4 Implementación

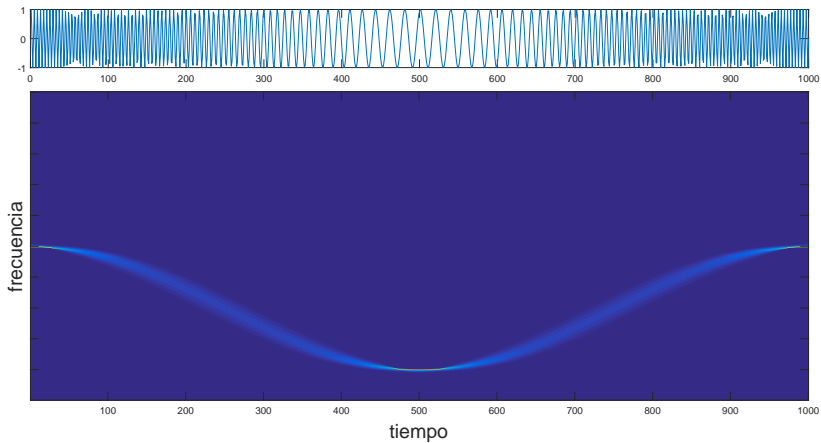


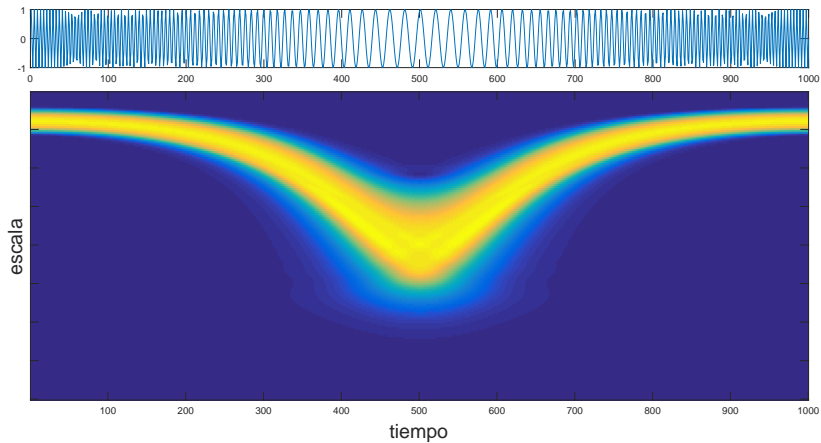




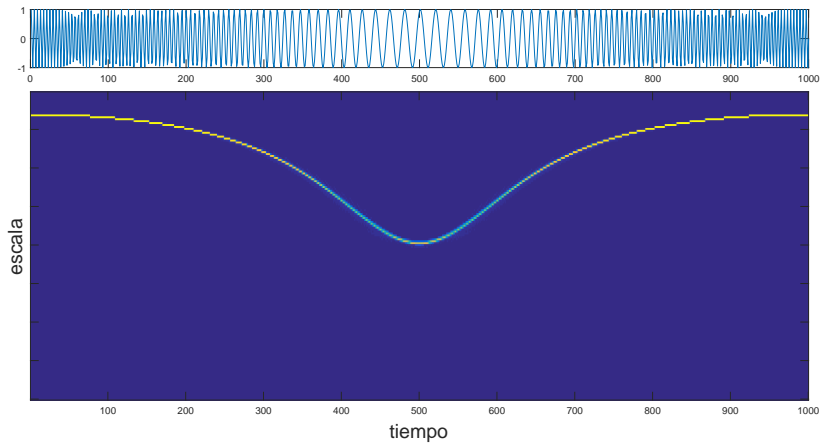












# Contenidos

- 1 Motivación
- 2 Reassignment y Synchrosqueezing
- 3 Ejemplos
- 4 Implementación**

## Aproximación

Consideremos  $h_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ , con  $\int h(t) dt = 1$ , y tal que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(t) = \delta(t)$ .

## Aproximación

Consideremos  $h_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ , con  $\int h(t) dt = 1$ , y tal que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(t) = \delta(t)$ .

Entonces,  $\widetilde{SF}_x^{g, h_\alpha}(t, f) = \int F_x^g(t, v) \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{f - \tilde{f}(t, v)}{\alpha}\right) dv$ ,

y  $\widetilde{SW}_x^{\psi, h_\alpha}(t, f) = \int W_x^\psi(t, v) \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{s - \tilde{s}(t, v)}{\alpha}\right) \frac{dv}{v}$ , constituyen aproximaciones a  $SF_x^g(t, f)$  y  $SW_x^\psi(t, s)$  respectivamente.

## Aproximación

Consideremos  $h_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ , con  $\int h(t) dt = 1$ , y tal que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(t) = \delta(t)$ .

Entonces,  $\widetilde{SF}_x^{g, h_\alpha}(t, f) = \int F_x^g(t, v) \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{f - \tilde{f}(t, v)}{\alpha}\right) dv$ ,

y  $\widetilde{SW}_x^{\psi, h_\alpha}(t, f) = \int W_x^\psi(t, v) \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{s - \tilde{s}(t, v)}{\alpha}\right) \frac{dv}{v}$ , constituyen aproximaciones a  $SF_x^g(t, f)$  y  $SW_x^\psi(t, s)$  respectivamente.

## Implementación para la STFT

Definimos una partición del eje de frecuencias:  $\{f_l\}_{l=0}^\infty$ , y  $\mathbf{F}_l = [f_l, f_{l+1}]$ .

## Aproximación

Consideremos  $h_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ , con  $\int h(t) dt = 1$ , y tal que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(t) = \delta(t)$ .

Entonces,  $\widetilde{SF}_x^{g, h_\alpha}(t, f) = \int F_x^g(t, v) \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{f - \tilde{f}(t, v)}{\alpha}\right) dv$ ,

y  $\widetilde{SW}_x^{\psi, h_\alpha}(t, f) = \int W_x^\psi(t, v) \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{s - \tilde{s}(t, v)}{\alpha}\right) \frac{dv}{v}$ , constituyen aproximaciones a  $SF_x^g(t, f)$  y  $SW_x^\psi(t, s)$  respectivamente.

## Implementación para la STFT

Definimos una partición del eje de frecuencias:  $\{f_l\}_{l=0}^\infty$ , y  $\mathbf{F}_l = [f_l, f_{l+1}]$ .

Estimamos el operador  $\tilde{f}(n, k)$ .

## Aproximación

Consideremos  $h_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ , con  $\int h(t) dt = 1$ , y tal que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(t) = \delta(t)$ .

Entonces,  $\widetilde{SF}_x^{g, h_\alpha}(t, f) = \int F_x^g(t, v) \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{f - \tilde{f}(t, v)}{\alpha}\right) dv$ ,

y  $\widetilde{SW}_x^{\psi, h_\alpha}(t, f) = \int W_x^\psi(t, v) \frac{1}{\alpha} h\left(\frac{s - \tilde{s}(t, v)}{\alpha}\right) \frac{dv}{v}$ , constituyen aproximaciones a  $SF_x^g(t, f)$  y  $SW_x^\psi(t, s)$  respectivamente.

## Implementación para la STFT

Definimos una partición del eje de frecuencias:  $\{f_l\}_{l=0}^\infty$ , y  $\mathbf{F}_l = [f_l, f_{l+1}]$ .

Estimamos el operador  $\tilde{f}(n, k)$ .

Aproximamos la versión *synchrosqueezing* de la STFT en tiempo discreto mediante:  $TF_x^g[n, f_l] = \sum_{k: \tilde{f}(n, k) \in \mathbf{F}_l} F_x^g[n, k]$ .

## Implementación para la CWT

Definimos una partición del eje de escalas:  $\{s_l\}_{l=0}^{\infty}$ , y  $S_l = [f_l, f_{l+1}]$ .



## Implementación para la CWT

Definimos una partición del eje de escalas:  $\{s_l\}_{l=0}^{\infty}$ , y

$$S_l = [f_l, f_{l+1}].$$

Estimamos el operador  $\tilde{s}(n, s(k))$ .

## Implementación para la CWT

Definimos una partición del eje de escalas:  $\{s_l\}_{l=0}^{\infty}$ , y

$$S_l = [f_l, f_{l+1}].$$

Estimamos el operador  $\tilde{s}(n, s(k))$ .

Aproximamos la versión *synchrosqueezing* de la CWT en tiempo discreto mediante:

## Implementación para la CWT

Definimos una partición del eje de escalas:  $\{s_l\}_{l=0}^{\infty}$ , y

$$S_l = [f_l, f_{l+1}].$$

Estimamos el operador  $\tilde{s}(n, s(k))$ .

Aproximamos la versión *synchrosqueezing* de la CWT en tiempo discreto mediante:  $TW_x^\psi[n, s_l] = \sum_{k: \tilde{s}(n, s(k))} W_x^\psi[n, s(k)] \frac{\Delta s(k)}{s(k)}$ .