

Análisis Tiempo-Frecuencia y Descomposición de Señales

Clase 4

Dr. Marcelo Alejandro Colominas
macolominas@conicet.gov.ar

Lab. Señales y Dinámicas no Lineales
Instituto de Investigación y Desarrollo en Bioingeniería y Bioinformática (IBB)
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina

2019



Contenidos

1 Motivación

2 Transformada ondita continua (CWT)

3 Implementación

Contenidos

1 Motivación

2 Transformada ondita continua (CWT)

3 Implementación

- La STFT usa una ventana de longitud constante.

- La STFT usa una ventana de longitud constante.
- Para realizar el análisis, introduce oscilaciones dentro de la ventana.

- La STFT usa una ventana de longitud constante.
- Para realizar el análisis, introduce oscilaciones dentro de la ventana.
- Como la longitud de la ventana es constante, la cantidad de oscilaciones presentes dependerá de la frecuencia analizada.

- La STFT usa una ventana de longitud constante.
- Para realizar el análisis, introduce oscilaciones dentro de la ventana.
- Como la longitud de la ventana es constante, la cantidad de oscilaciones presentes dependerá de la frecuencia analizada.
- Por ejemplo, para bajas frecuencias, puede ocurrir que no llegue a entrar una oscilación completa dentro de la ventana.

- La STFT usa una ventana de longitud constante.
- Para realizar el análisis, introduce oscilaciones dentro de la ventana.
- Como la longitud de la ventana es constante, la cantidad de oscilaciones presentes dependerá de la frecuencia analizada.
- Por ejemplo, para bajas frecuencias, puede ocurrir que no llegue a entrar una oscilación completa dentro de la ventana.
- Podríamos usar una “ventana” de duración variable, pero con una cantidad constante de oscilaciones (Morlet).

Contenidos

1 Motivación

2 Transformada ondita continua (CWT)

3 Implementación

Definición clásica (Mallat)

Sea $x \in L^2(\mathbb{R})$ ($\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$), y $\psi \in \mathbb{C}$ tal que $\int \psi(t) dt = 0$. Entonces

$$\ddot{W}_x^\psi(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

Definición clásica (Mallat)

Sea $x \in L^2(\mathbb{R})$ ($\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$), y $\psi \in \mathbb{C}$ tal que $\int \psi(t) dt = 0$. Entonces

$$\ddot{W}_x^\psi(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

Definición modificada

$$W_x^\psi(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

Definición clásica (Mallat)

Sea $x \in L^2(\mathbb{R})$ ($\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$), y $\psi \in \mathbb{C}$ tal que $\int \psi(t) dt = 0$. Entonces

$$\ddot{W}_x^\psi(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

Definición modificada

$$W_x^\psi(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

$$W_x^\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$$

Definición clásica (Mallat)

Sea $x \in L^2(\mathbb{R})$ ($\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$), y $\psi \in \mathbb{C}$ tal que $\int \psi(t) dt = 0$. Entonces

$$\ddot{W}_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

Definición modificada

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

$$W_x^\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$$

Relación

$$W_x^\psi(t, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \ddot{W}_x^\psi(t, s)$$

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du$$

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du$$

CWT como producto interno

$$W_x^\psi(t, s) = \langle x, \tilde{\psi}_{ts} \rangle, \text{ con } \tilde{\psi}_{ts} = \frac{1}{s} \psi \left(\frac{u-t}{s} \right) \text{ (átomo tiempo-escala)}$$

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du$$

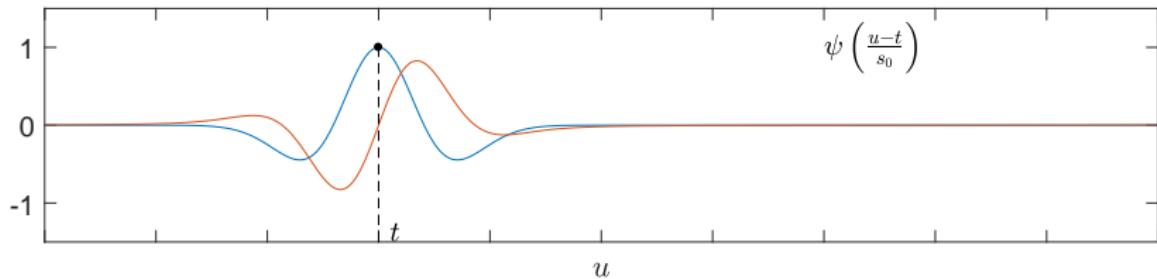
CWT como producto interno

$$W_x^\psi(t, s) = \langle x, \tilde{\psi}_{ts} \rangle, \text{ con } \tilde{\psi}_{ts} = \frac{1}{s} \psi \left(\frac{u-t}{s} \right) \text{ (átomo tiempo-escala)}$$

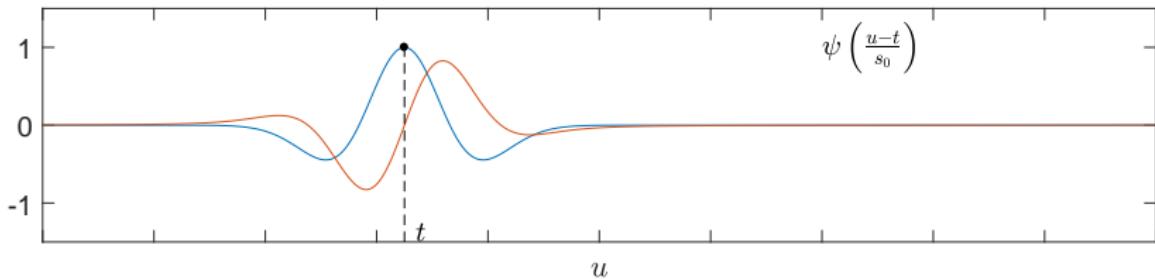
CWT como convolución

$$F_x^g(t, f) = (x * \bar{\psi}_s)(t), \text{ con } \bar{\psi}_s(t) = \psi^* \left(\frac{-t}{s} \right)$$

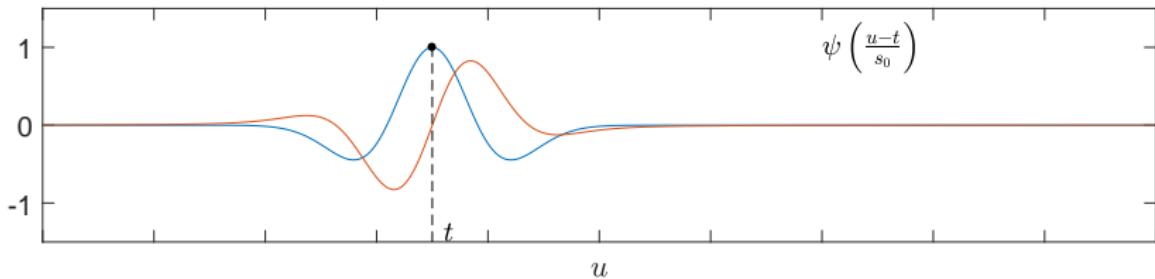
Átomos



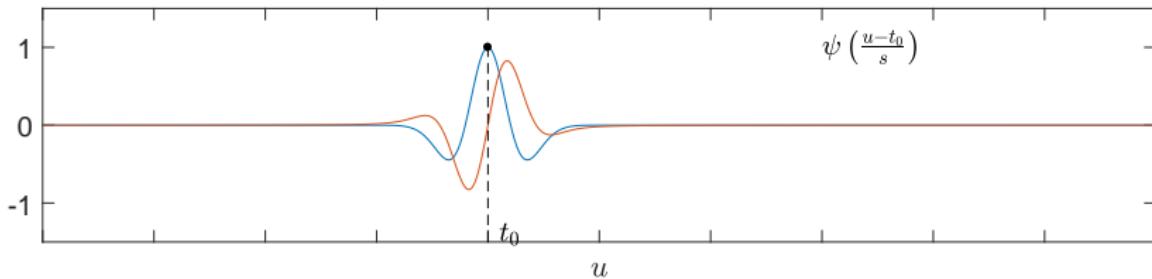
Átomos



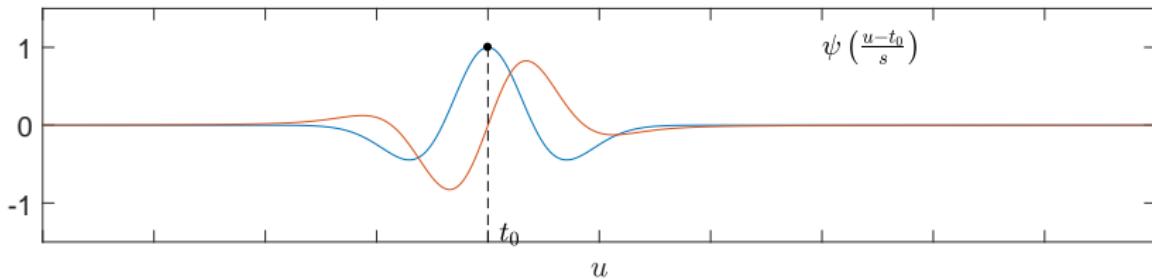
Átomos



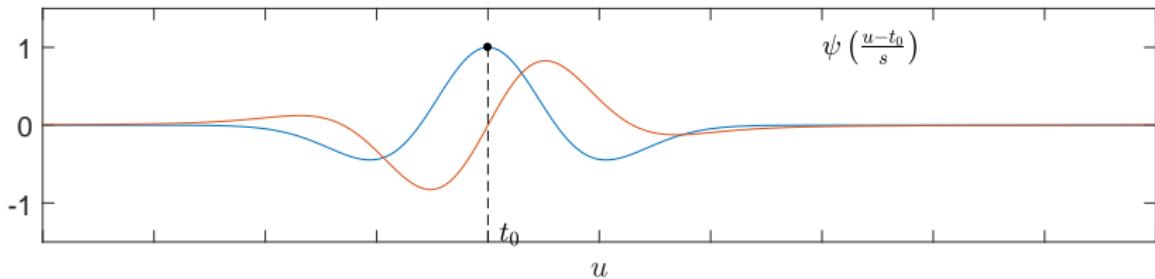
Átomos



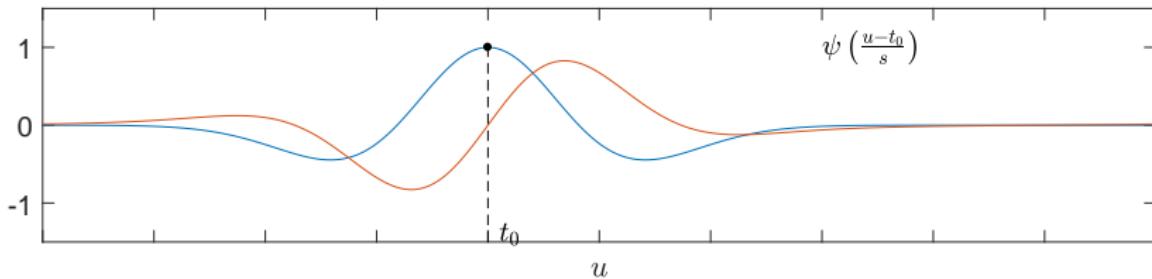
Átomos



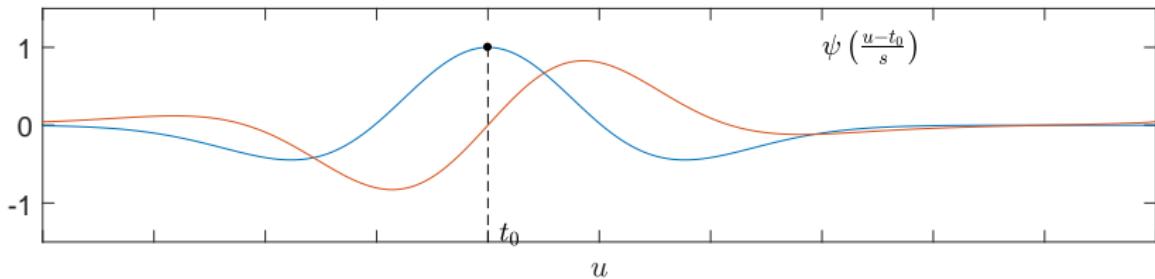
Átomos



Átomos

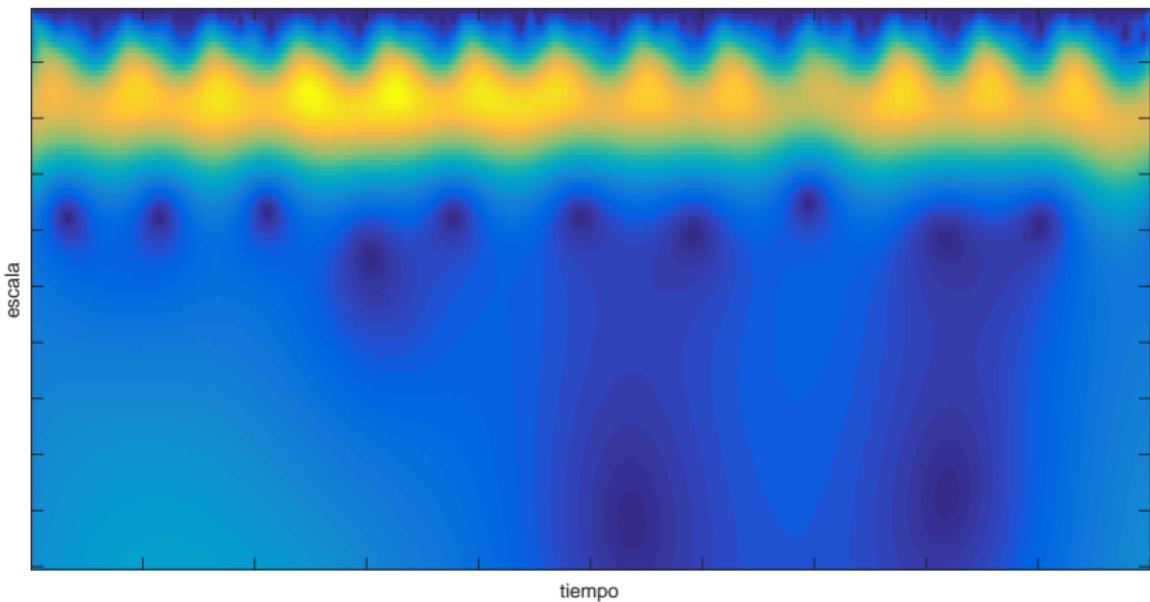
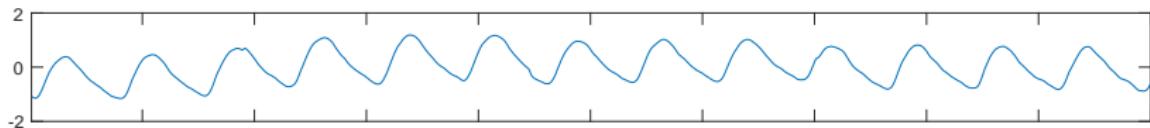


Átomos



Animación

Señal de PPG



Interpretación como banco de filtros

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

Interpretación como banco de filtros

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(sf) e^{i2\pi ft} df$$

Interpretación como banco de filtros

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(sf) e^{i2\pi ft} df$$

$$W_x^\psi(t, s) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}(f) \hat{\psi}^*(sf)\}$$

Interpretación como banco de filtros

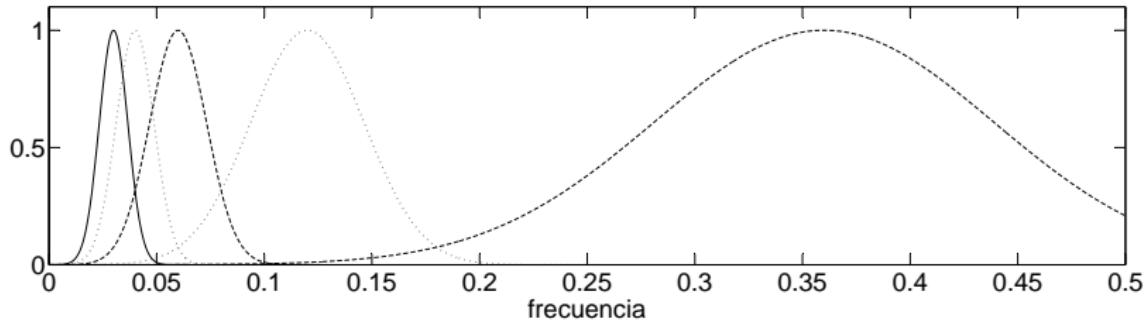
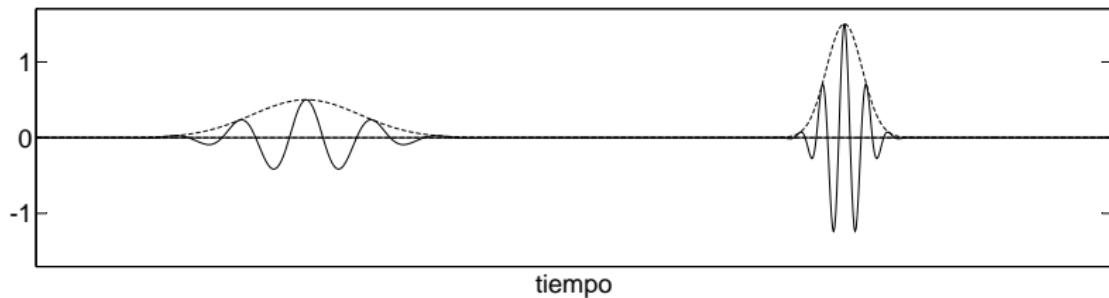
$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{s} \psi^* \left(\frac{u-t}{s} \right) du, \quad s > 0$$

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(sf) e^{i2\pi ft} df$$

$$W_x^\psi(t, s) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}(f) \hat{\psi}^*(sf)\}$$

Banco de filtros Q-constante.

Interpretación como banco de filtros



Reconstrucción

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}$$

Reconstrucción

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}$$

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \rho\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}, \text{ con}$$

$$\int \hat{\psi}^*(f) \hat{\rho}(f) \frac{df}{f} = C_\psi$$

Reconstrucción

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}$$

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \rho\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}, \text{ con}$$

$$\int \hat{\psi}^*(f) \hat{\rho}(f) \frac{df}{f} = C_\psi$$

(Esto implica que las onditas son respuestas al impulso de filtros pasa-banda)

Reconstrucción

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}$$

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \rho\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}, \text{ con}$$

$$\int \hat{\psi}^*(f) \hat{\rho}(f) \frac{df}{f} = C_\psi$$

(Esto implica que las onditas son respuestas al impulso de filtros pasa-banda)

$$x(t) = \frac{1}{\bar{C}_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(t, s) \frac{ds}{s}$$

Reconstrucción

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}$$

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \rho\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}, \text{ con}$$

$$\int \hat{\psi}^*(f) \hat{\rho}(f) \frac{df}{f} = C_\psi$$

(Esto implica que las onditas son respuestas al impulso de filtros pasa-banda)

$$x(t) = \frac{1}{\tilde{C}_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(t, s) \frac{ds}{s}$$

Si la ondita es compleja, entonces

$$x(t) = \frac{2}{\tilde{C}_\psi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(t, s) \frac{ds}{s} \right)$$

Reconstrucción

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}$$

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(u, s) \frac{1}{s} \rho\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}, \text{ con}$$

$$\int \hat{\psi}^*(f) \hat{\rho}(f) \frac{df}{f} = C_\psi$$

(Esto implica que las onditas son respuestas al impulso de filtros pasa-banda)

$$x(t) = \frac{1}{\tilde{C}_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(t, s) \frac{ds}{s}$$

Si la ondita es compleja, entonces

$$x(t) = \frac{2}{\tilde{C}_\psi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} W_x^\psi(t, s) \frac{ds}{s} \right)$$

Con la normalización clásica:

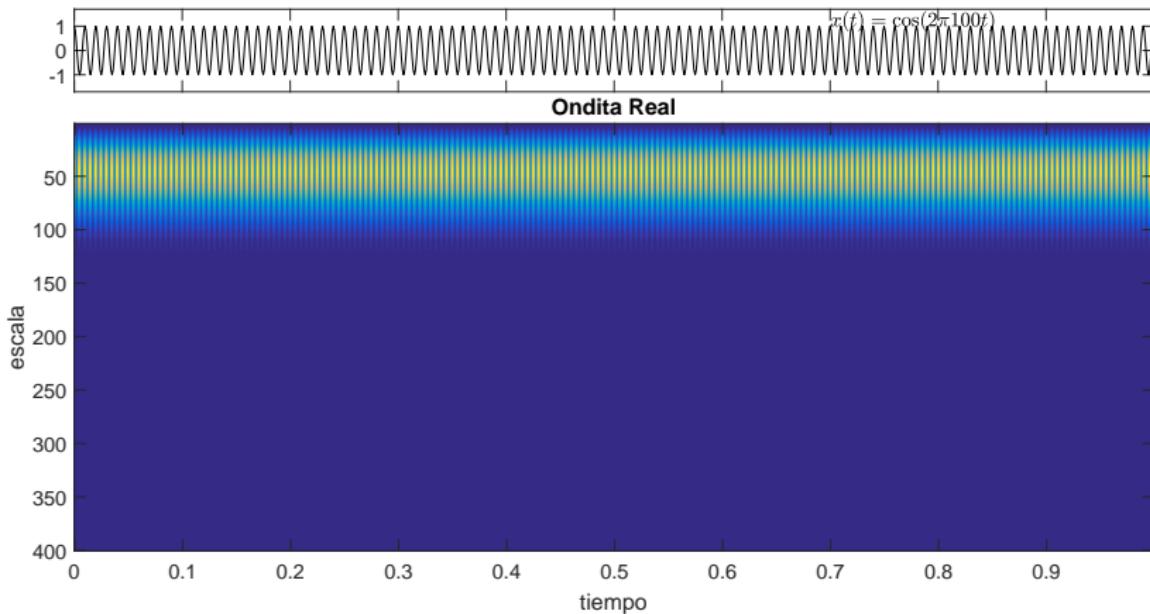
$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{W}_\psi^g(u, f) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}$$

¿Onditas reales o analíticas?

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(sf) e^{i2\pi ft} df$$

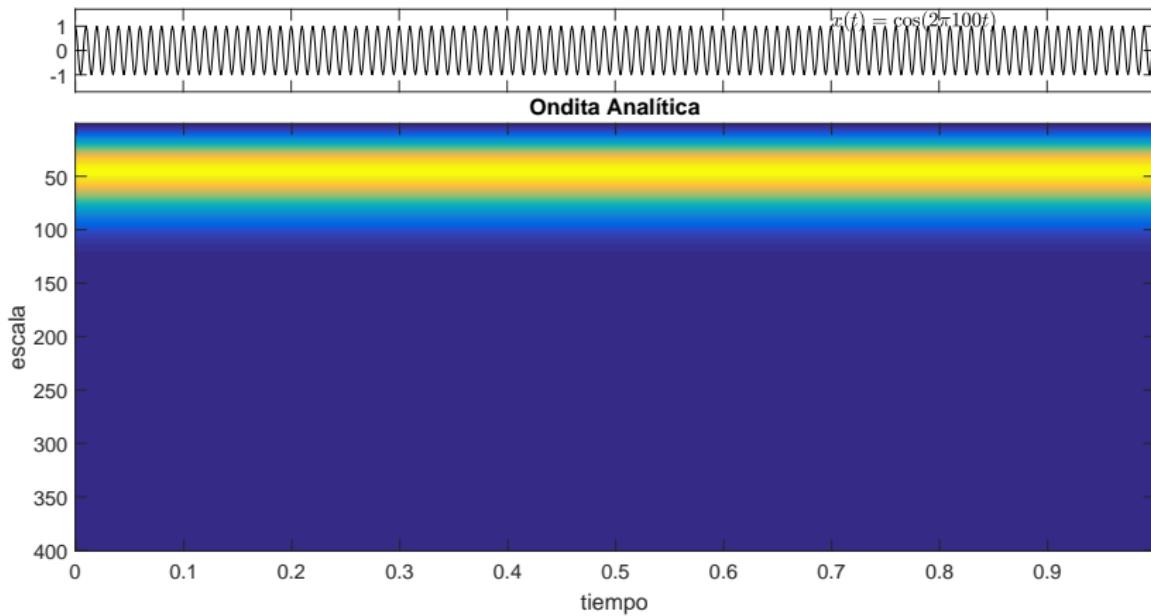
¿Onditas reales o analíticas?

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(sf) e^{i2\pi ft} df$$



¿Onditas reales o analíticas?

$$W_x^\psi(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(sf) e^{i2\pi ft} df$$



Interpretación frecuencial

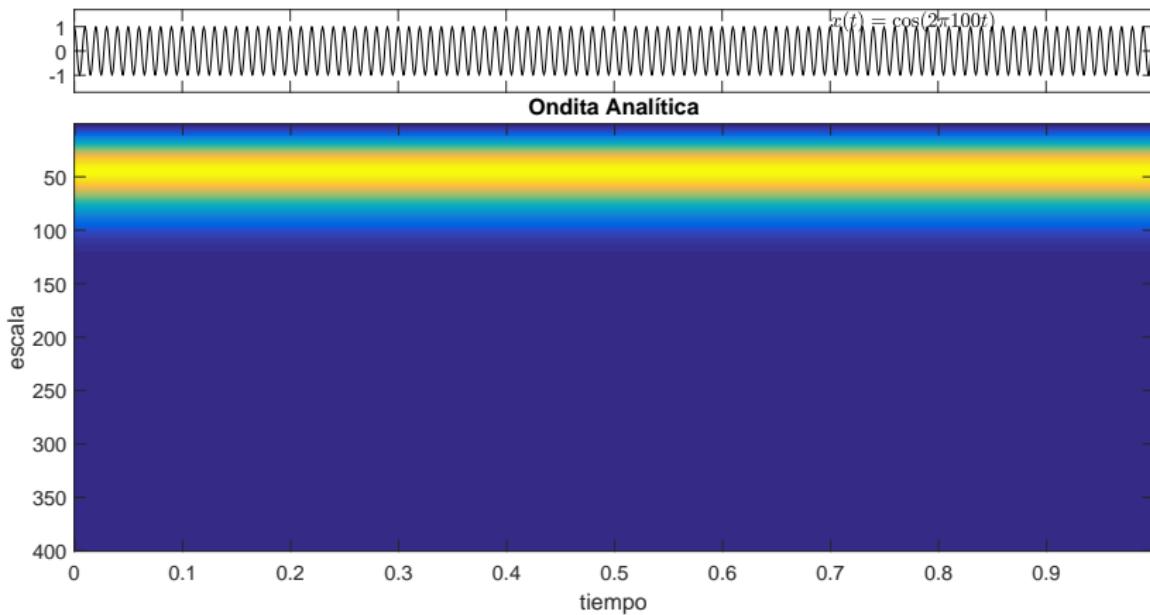
Estrictamente hablando, la CWT ofrece una representación tiempo-escala.

Interpretación frecuencial

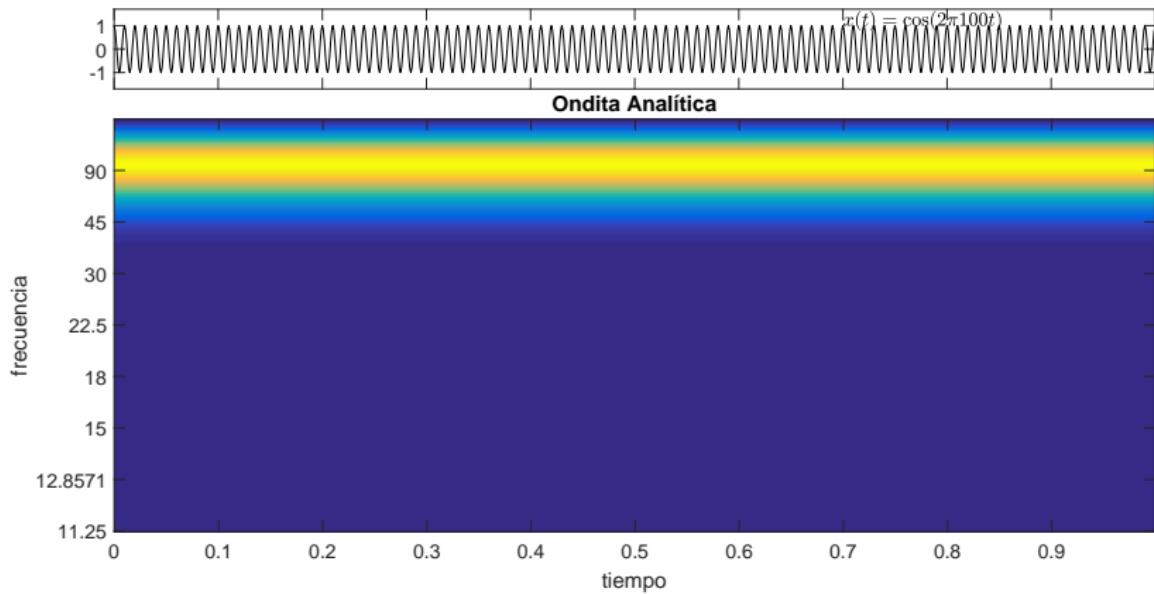
Estrictamente hablando, la CWT ofrece una representación tiempo-escala.

Sin embargo, podemos darle una interpretación frecuencial usando la identidad $s = f_p/f$, donde $f_p = \arg \max |\hat{\psi}(f)|$.

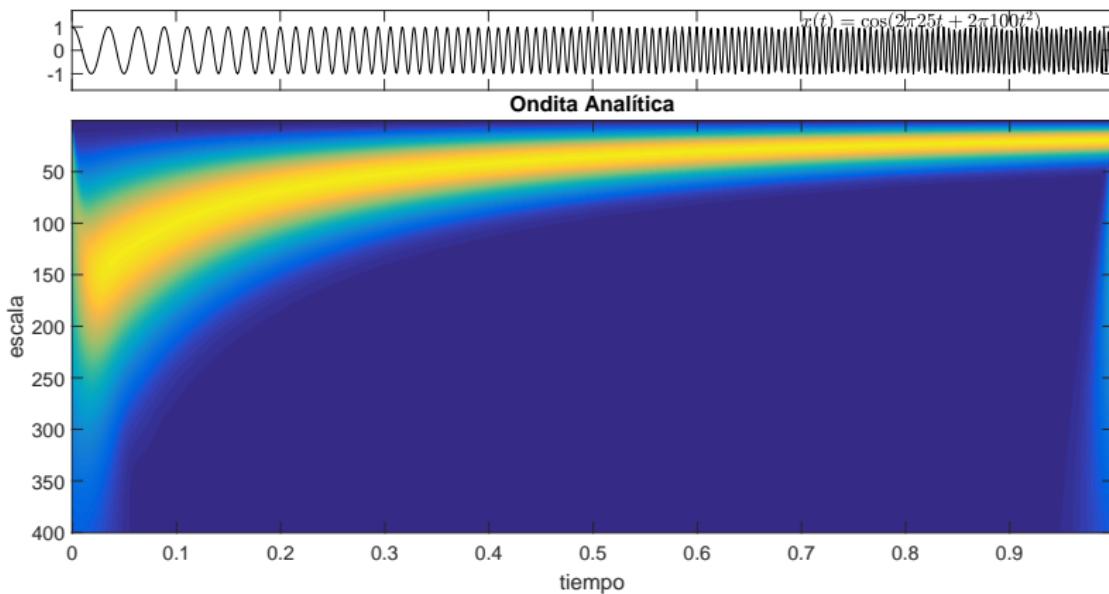
Interpretación frecuencial



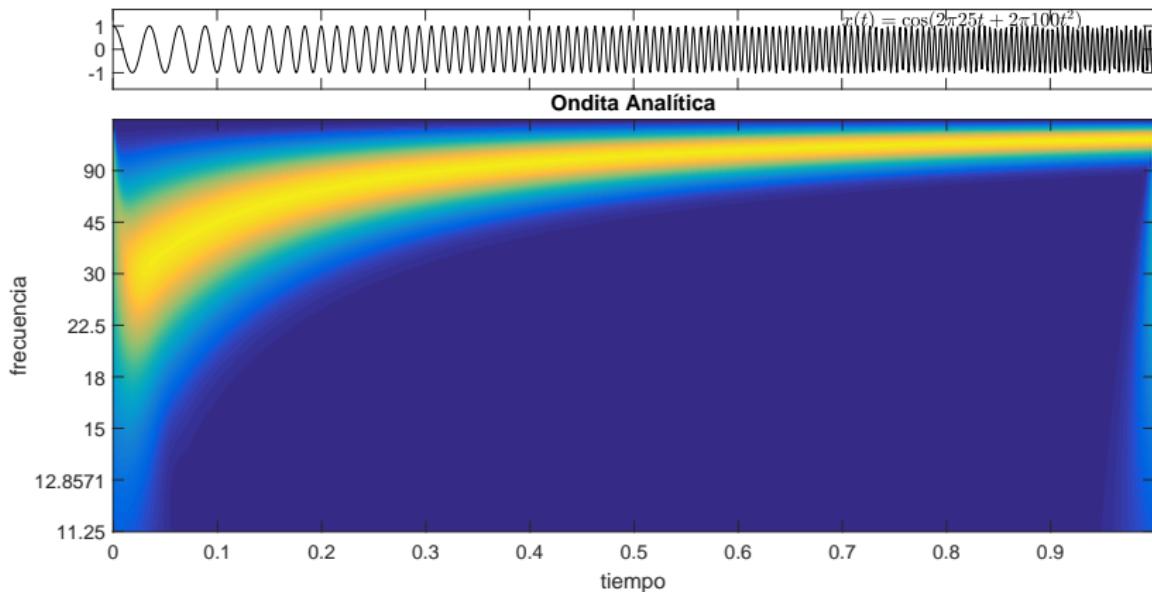
Interpretación frecuencial



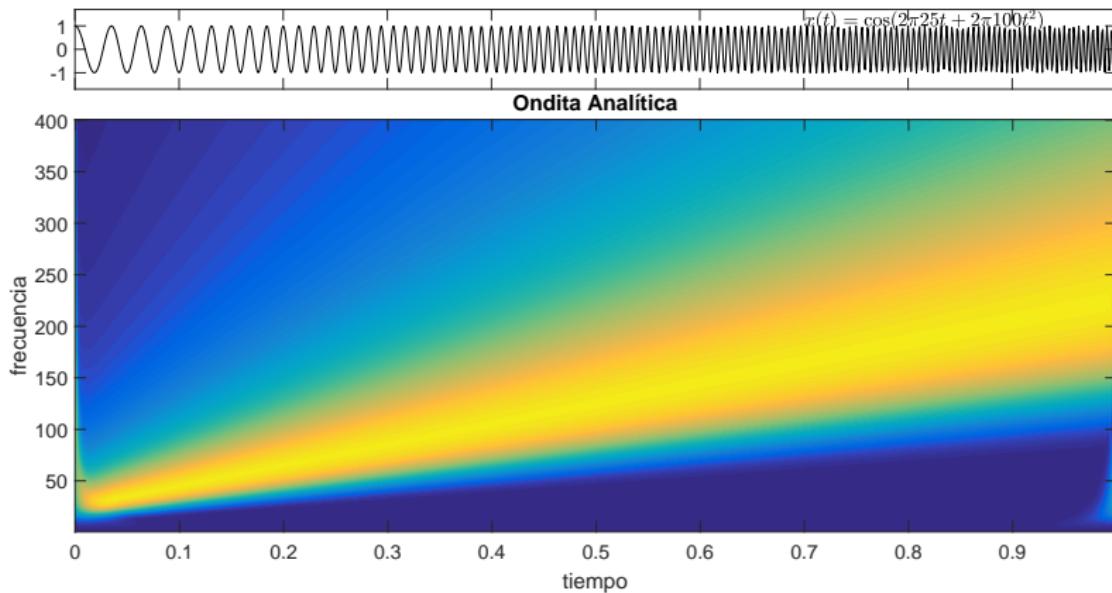
Interpretación frecuencial



Interpretación frecuencial



Interpretación frecuencial



Otras opciones para el eje de escalas

Una opción para la CWT es definir $s = a^\nu$, con $a, \nu \in \mathbb{R}$.

Otras opciones para el eje de escalas

Una opción para la CWT es definir $s = a^\nu$, con $a, \nu \in \mathbb{R}$.

$$W_x^\psi(t, s) = W_x^\psi(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{a^\nu} \psi^* \left(\frac{u-t}{a^\nu} \right) du$$

Otras opciones para el eje de escalas

Una opción para la CWT es definir $s = a^\nu$, con $a, \nu \in \mathbb{R}$.

$$W_x^\psi(t, s) = W_x^\psi(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{a^\nu} \psi^*\left(\frac{u-t}{a^\nu}\right) du$$

$$W_x^\psi(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(a^\nu f) e^{i2\pi ft} df$$

Otras opciones para el eje de escalas

Una opción para la CWT es definir $s = a^\nu$, con $a, \nu \in \mathbb{R}$.

$$W_x^\psi(t, s) = W_x^\psi(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{a^\nu} \psi^*\left(\frac{u-t}{a^\nu}\right) du$$

$$W_x^\psi(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(a^\nu f) e^{i2\pi ft} df$$

Reconstrucción

$$x(t) = \frac{1}{(\log a)\tilde{C}_{\psi,a}} \int_0^{+\infty} W_x^\psi(t, \nu) d\nu, \text{ con } \tilde{C}_{\psi,a} = \int_0^{+\infty} \hat{\psi}^*(a^\nu f) d\nu \text{ y}$$
$$\log e = 1.$$

Otras opciones para el eje de escalas

Una opción para la CWT es definir $s = a^\nu$, con $a, \nu \in \mathbb{R}$.

$$W_x^\psi(t, s) = W_x^\psi(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{a^\nu} \psi^*\left(\frac{u-t}{a^\nu}\right) du$$

$$W_x^\psi(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(a^\nu f) e^{i2\pi ft} df$$

Reconstrucción

$$x(t) = \frac{1}{(\log a)\tilde{C}_{\psi,a}} \int_0^{+\infty} W_x^\psi(t, \nu) d\nu, \text{ con } \tilde{C}_{\psi,a} = \int_0^{+\infty} \hat{\psi}^*(a^\nu f) d\nu \text{ y}$$

$$\log e = 1.$$

Para onditas complejas,

$$x(t) = \frac{2}{(\log a)\tilde{C}_{\psi,a}} \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} W_x^\psi(t, \nu) d\nu \right)$$

Otras opciones para el eje de escalas

Una opción para la CWT es definir $s = a^\nu$, con $a, \nu \in \mathbb{R}$.

$$W_x^\psi(t, s) = W_x^\psi(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \frac{1}{a^\nu} \psi^*\left(\frac{u-t}{a^\nu}\right) du$$

$$W_x^\psi(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \hat{\psi}^*(a^\nu f) e^{i2\pi ft} df$$

Reconstrucción

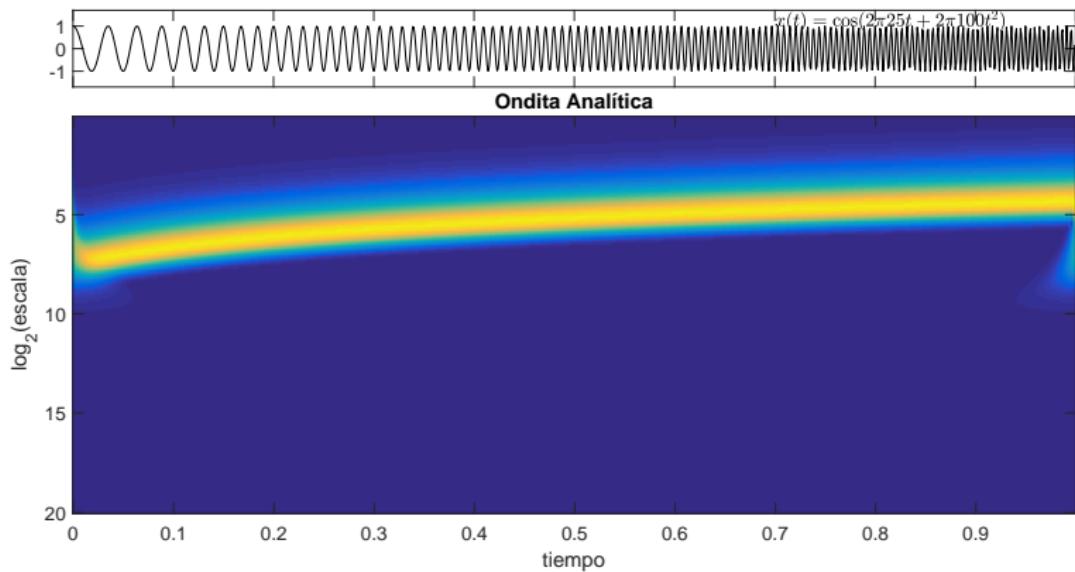
$$x(t) = \frac{1}{(\log a)\tilde{C}_{\psi,a}} \int_0^{+\infty} W_x^\psi(t, \nu) d\nu, \text{ con } \tilde{C}_{\psi,a} = \int_0^{+\infty} \hat{\psi}^*(a^\nu f) d\nu \text{ y}$$
$$\log e = 1.$$

Para onditas complejas,

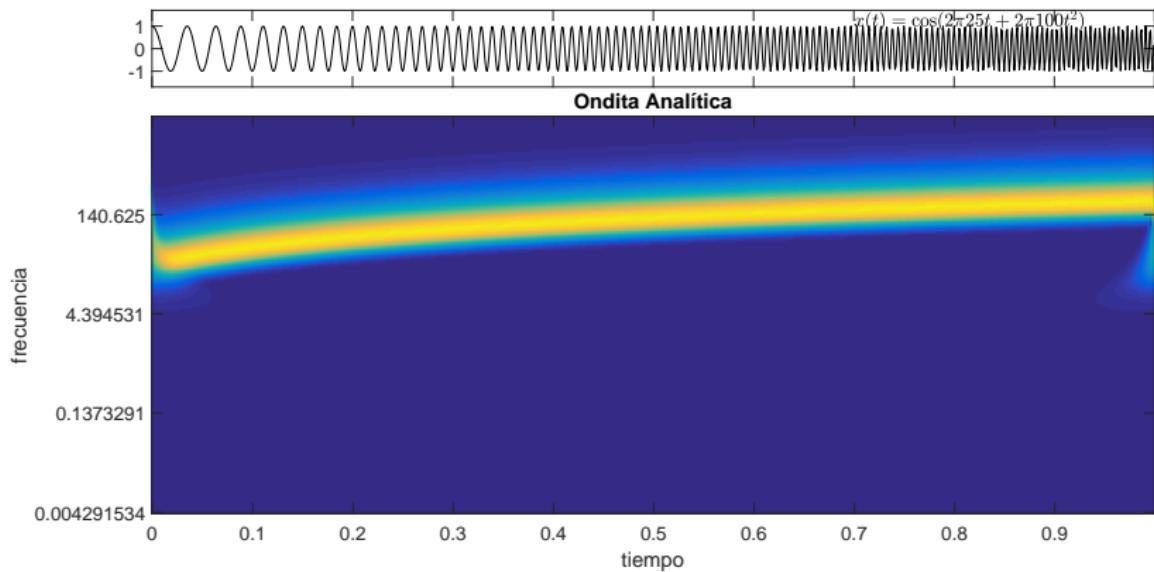
$$x(t) = \frac{2}{(\log a)\tilde{C}_{\psi,a}} \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} W_x^\psi(t, \nu) d\nu \right)$$

En el caso particular de $a = 2$, tenemos la transformada ondita diádica (continua).

Otras opciones para el eje de escalas



Otras opciones para el eje de escalas



Incertidumbre en la CWT

Dispersión temporal: $\int_{-\infty}^{\infty} (t - u)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \right)^2 dt = s^2 T$

Incertidumbre en la CWT

Dispersión temporal: $\int_{-\infty}^{\infty} (t - u)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \right)^2 dt = s^2 T$

Dispersión frecuencial: $\int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_p/s)^2 |\sqrt{s} \hat{\psi}(sf)|^2 df = \frac{B}{s^2}$

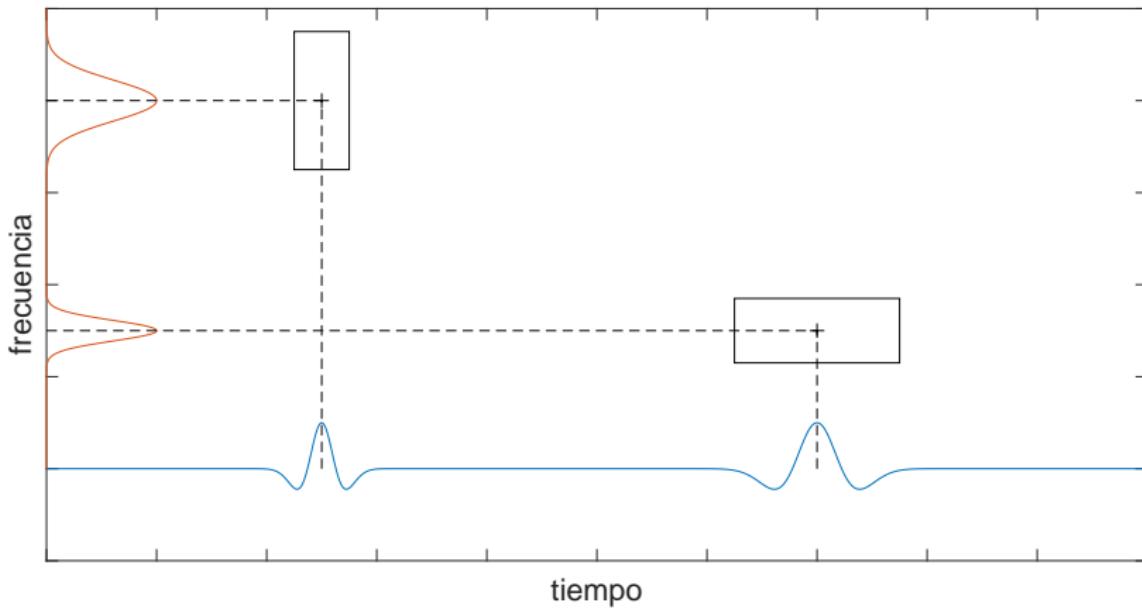
Incertidumbre en la CWT

Dispersión temporal: $\int_{-\infty}^{\infty} (t - u)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \right)^2 dt = s^2 T$

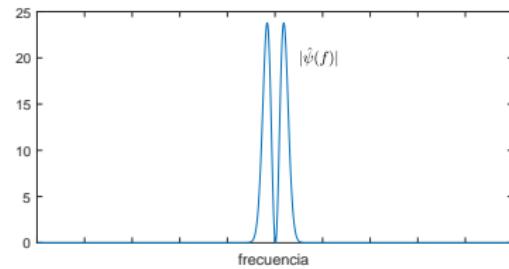
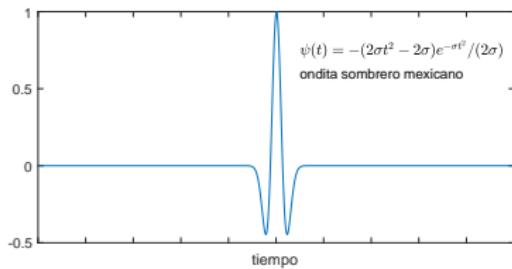
Dispersión frecuencial: $\int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_p/s)^2 |\sqrt{s} \hat{\psi}(sf)|^2 df = \frac{B}{s^2}$

$$s^2 T \frac{B}{s^2} = TB \geq \frac{1}{4\pi}$$

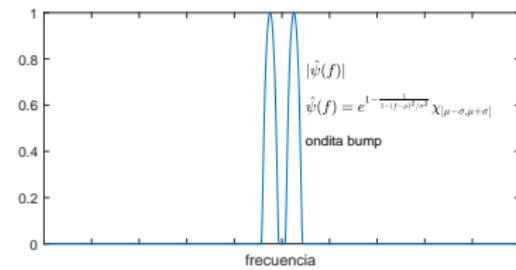
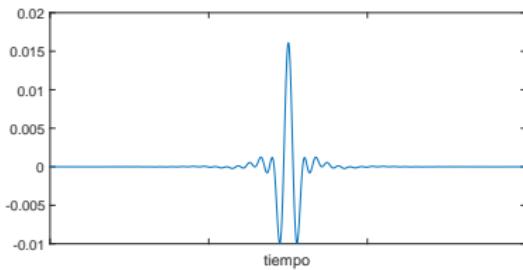
Incertidumbre en la CWT



Ejemplos de onditas



Ejemplos de onditas



Contenidos

1 Motivación

2 Transformada ondita continua (CWT)

3 Implementación

En tiempo discreto

Definición

$W_x^\psi[n, k] = \sum_u x[u] \psi^*((u - n)/(s(k))),$
con $n = 1 \dots N$ y $k = 1 \dots K$, $s(k)$ vector de escalas, y $\psi[n/s(k)]$
versión discreta de $\psi\left(\frac{t}{s(k)}\right)$.

En tiempo discreto

Definición

$W_x^\psi[n, k] = \sum_u x[u] \psi^*((u - n)/(s(k))),$
con $n = 1 \dots N$ y $k = 1 \dots K$, $s(k)$ vector de escalas, y $\psi[n/s(k)]$
versión discreta de $\psi\left(\frac{t}{s(k)}\right)$.

Implementación con la FFT

$$\text{FFT}\{x[n]\} = \hat{x}[k] = \sum_{n=1}^N x[n] e^{-i2\pi \frac{kn}{N}}, \text{ con } k = 0 \dots N-1.$$

En tiempo discreto

Definición

$W_x^\psi[n, k] = \sum_u x[u] \psi^*((u - n)/(s(k))),$
con $n = 1 \dots N$ y $k = 1 \dots K$, $s(k)$ vector de escalas, y $\psi[n/s(k)]$
versión discreta de $\psi\left(\frac{t}{s(k)}\right)$.

Implementación con la FFT

$$\text{FFT}\{x[n]\} = \hat{x}[k] = \sum_{n=1}^N x[n] e^{-i2\pi \frac{kn}{N}}, \text{ con } k = 0 \dots N-1.$$

Implementación en el dominio frecuencial:

$$W_x^\psi[n, k] = \text{iFFT}\{\hat{x}[q] \hat{\psi}^*[q s(k)]\}$$

En tiempo discreto

Definición

$W_x^\psi[n, k] = \sum_u x[u] \psi^*((u - n)/(s(k))),$
con $n = 1 \dots N$ y $k = 1 \dots K$, $s(k)$ vector de escalas, y $\psi[n/s(k)]$
versión discreta de $\psi\left(\frac{t}{s(k)}\right)$.

Implementación con la FFT

FFT $\{x[n]\} = \hat{x}[k] = \sum_{n=1}^N x[n] e^{-i2\pi \frac{kn}{N}}$, con $k = 0 \dots N - 1$.

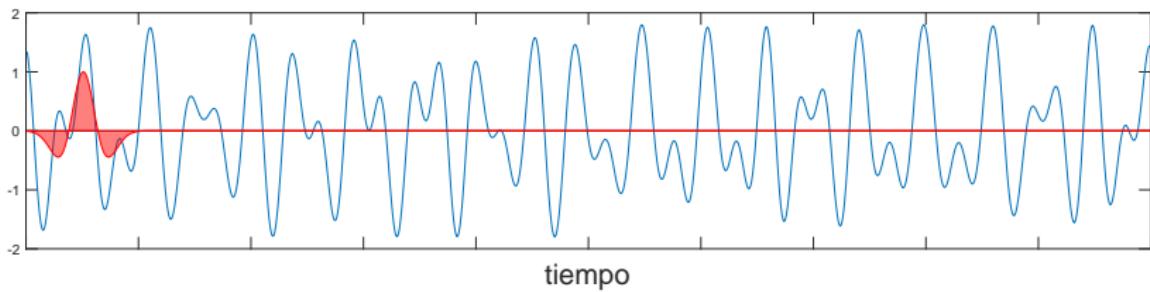
Implementación en el dominio frecuencial:

$$W_x^\psi[n, k] = \text{iFFT}\{\hat{x}[q] \hat{\psi}^*[q s(k)]\}$$

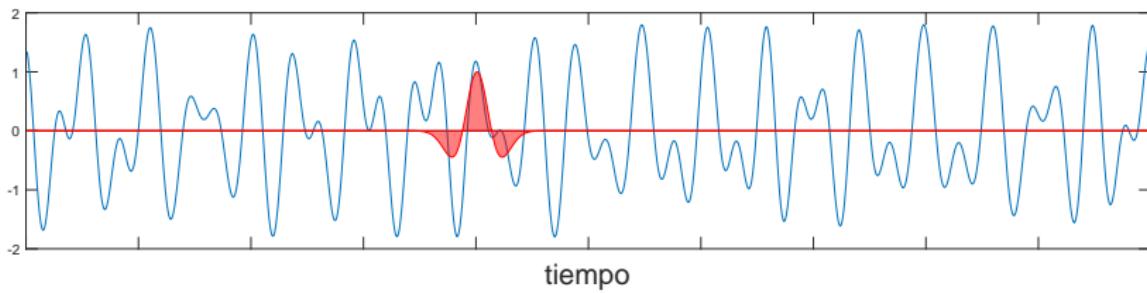
Reconstrucción

$$x[n] = \frac{2}{C} \text{Re} \left(\sum_{k=1}^K W_x^\psi[n, k] \right), \text{ con } C = \sum_k \hat{\psi}^*(q s(k)) \frac{\Delta s(k)}{s(k)}.$$

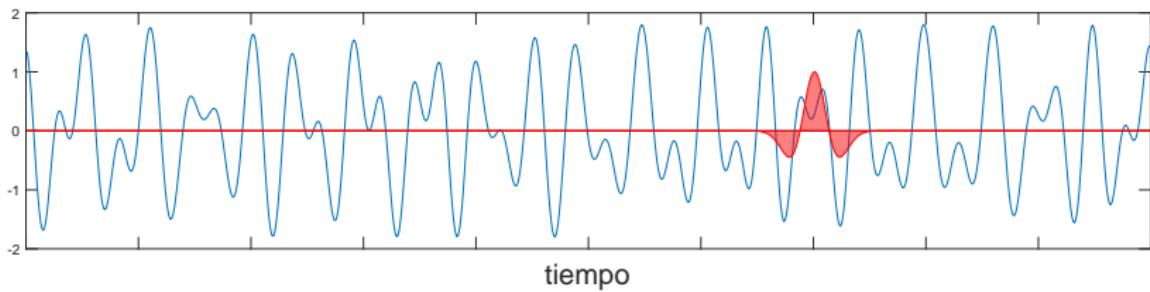
Efectos de borde



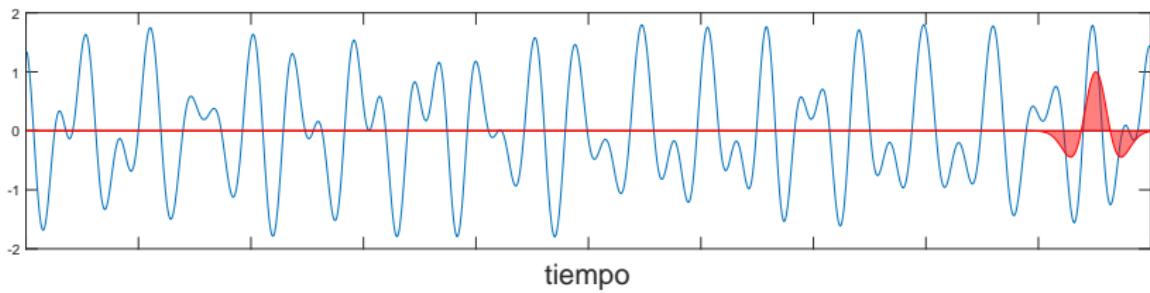
Efectos de borde



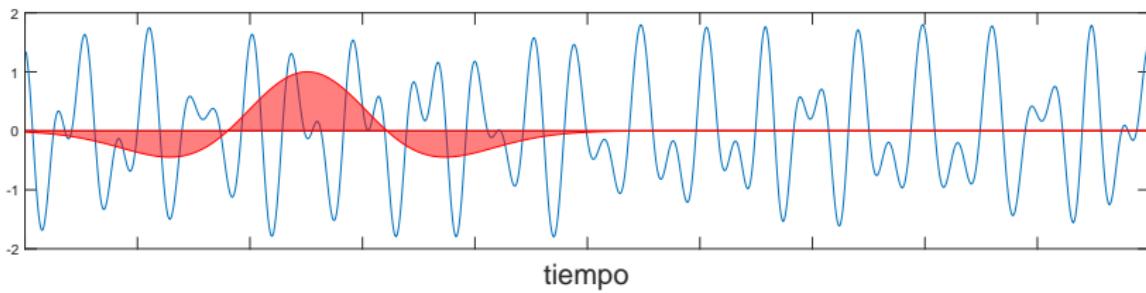
Efectos de borde



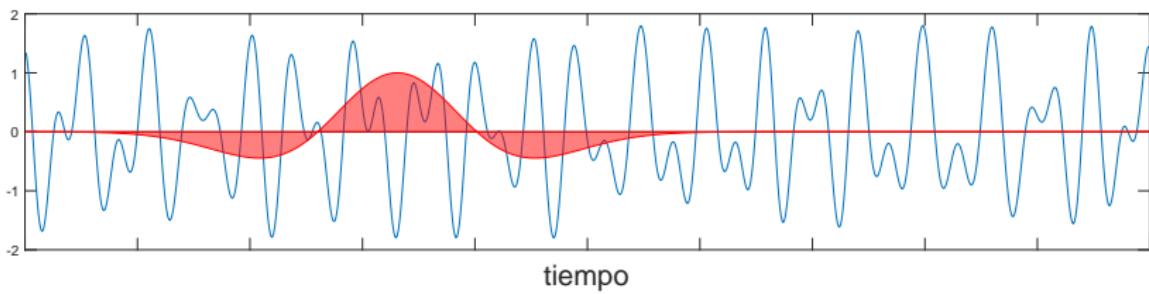
Efectos de borde



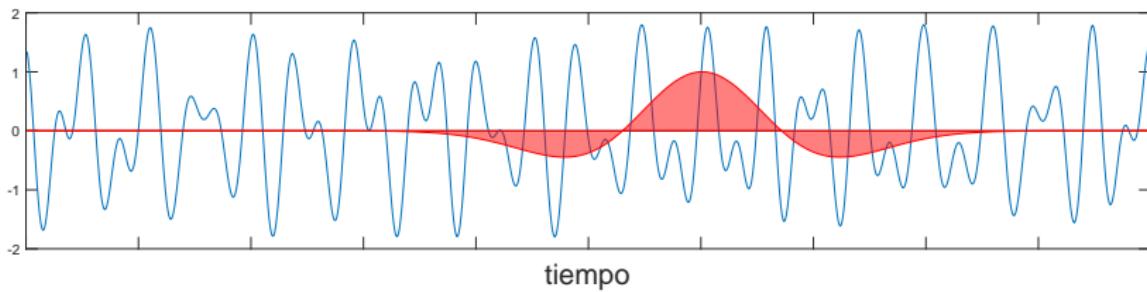
Efectos de borde



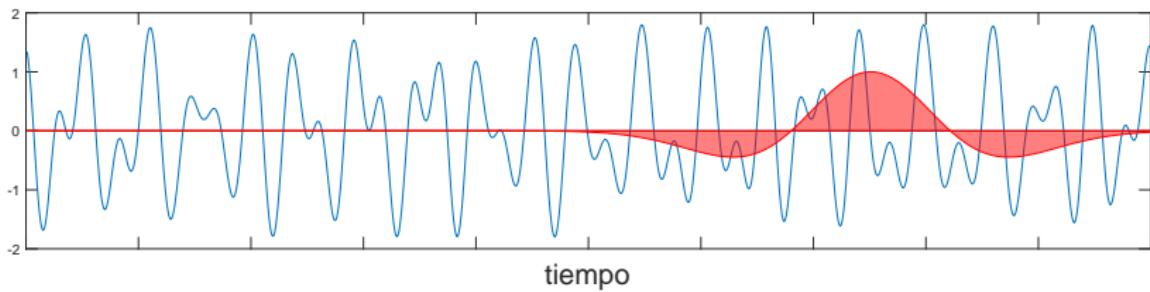
Efectos de borde



Efectos de borde



Efectos de borde



Efectos de borde

