Análisis Tiempo-Frecuencia y Descomposición de Señales
Clase 7

Dr. Marcelo Alejandro Colominas
macolominas@conicet.gov.ar

Lab. Señales y Dinámicas no Lineales
Instituto de Investigación y Desarrollo en Bioingeniería y Bioinformática (IBB)
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina

2019

Contenidos

Contenidos

- El modelo de señal multicomponente $x(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t)\cos(2\pi\phi_k(t))$ resulta muy versátil para modelar distintas señales del mundo real.

- El modelo de señal multicomponente $x(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t) \cos(2\pi\phi_k(t))$ resulta muy versátil para modelar distintas señales del mundo real.
- Sin embargo, puede presentar algunas limitaciones ya que modela a la señal como una superposición de cosenos modulados en amplitud y en frecuencia (señales monocomponentes).

- El modelo de señal multicomponente $x(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t)\cos(2\pi\phi_k(t))$ resulta muy versátil para modelar distintas señales del mundo real.
- Sin embargo, puede presentar algunas limitaciones ya que modela a la señal como una superposición de cosenos modulados en amplitud y en frecuencia (señales monocomponentes).
- Para señales más «complicadas», que generan más de una cresta en el plano TF, puede ser necesario un modelo que contemple un grado más de libertad.

- El modelo de señal multicomponente $x(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t) \cos(2\pi\phi_k(t))$ resulta muy versátil para modelar distintas señales del mundo real.
- Sin embargo, puede presentar algunas limitaciones ya que modela a la señal como una superposición de cosenos modulados en amplitud y en frecuencia (señales monocomponentes).
- Para señales más «complicadas», que generan más de una cresta en el plano TF, puede ser necesario un modelo que contemple un grado más de libertad.
- Veremos este nuevo modelo, y discutiremos cómo estimar sus parámetros.

Contenidos

El modelo adaptativo con función de forma de onda

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t) s_k(2\pi\phi_k(t)),$$

El modelo adaptativo con función de forma de onda

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t) s_k(2\pi\phi_k(t)),$$

con:

- $|A'_k(t)| < \epsilon$

El modelo adaptativo con función de forma de onda

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t) s_k(2\pi\phi_k(t)),$$

con:

- $|A'_k(t)| < \epsilon$
- $|\phi''_k(t)| < \epsilon$ (a veces)

El modelo adaptativo con función de forma de onda

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t) s_k(2\pi\phi_k(t)),$$

con:

- $|A_k'(t)| < \epsilon$
- $|\phi_k''(t)| < \epsilon$ (a veces)
- $\phi_k'(t) > 0$

El modelo adaptativo con función de forma de onda

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t) s_k(2\pi\phi_k(t)),$$

con:

- $|A_k'(t)| < \epsilon$
- $|\phi_k''(t)| < \epsilon$ (a veces)
- $\phi_k'(t) > 0$
- $|\phi_l'(t) - \phi_k'(t)| > 2B$, para $k \neq l$ (supp$\{\hat{g}\} = [-B, B]$).

El modelo adaptativo con función de forma de onda

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t) s_k(2\pi\phi_k(t)),$$

con:

- $|A'_k(t)| < \epsilon$
- $|\phi''_k(t)| < \epsilon$ (a veces)
- $\phi'_k(t) > 0$
- $|\phi'_l(t) - \phi'_k(t)| > 2B$, para $k \neq l$ ($\text{supp}\{\hat{g}\} = [-B, B]$).
- s_k son las funciones de forma de onda que reemplazan a la función coseno.

La función de forma de onda

Definición

Sea s una señal periódica de período 2π, cuya expansión en *serie de Fourier* es $s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(k) e^{ikt}$. Será una *función de forma de onda* (*wave shape function*) con parámetros δ, D, y θ si

La función de forma de onda

Definición

Sea s una señal periódica de período 2π, cuya expansión en *serie* de Fourier es $s(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)e^{ikt}$. Será una *función de forma de onda* (*wave shape function*) con parámetros δ, D, y θ si

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \text{ con } |k| \neq 1, |\hat{s}(k)| \leq \delta|\hat{s}(1)|$$

La función de forma de onda

Definición

Sea s una señal periódica de período 2π, cuya expansión en *serie de Fourier* es $s(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)e^{ikt}$. Será una *función de forma de onda* (*wave shape function*) con parámetros δ, D, y θ si

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \text{ con } |k| \neq 1, |\hat{s}(k)| \leq \delta |\hat{s}(1)|$$

y

$$\sum_{|n|>D} |n\hat{s}(n)| \leq \theta$$

- La primera condición, nos dice que la «frecuencia base» $\hat{s}(1)$ no puede ser cero; usamos esta condición para estimar la frecuencia instantánea.

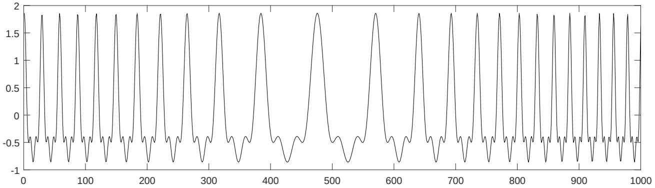
- La primera condición, nos dice que la «frecuencia base» $\hat{s}(1)$ no puede ser cero; usamos esta condición para estimar la frecuencia instantánea.
- La segunda condición nos dice «esencialmente» la forma de onda no oscila muy rápido (decaimiento de sus coeficientes de Fourier).

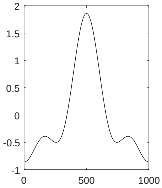
- La primera condición, nos dice que la «frecuencia base» $\hat{s}(1)$ no puede ser cero; usamos esta condición para estimar la frecuencia instantánea.
- La segunda condición nos dice «esencialmente» la forma de onda no oscila muy rápido (decaimiento de sus coeficientes de Fourier).

Ejemplo

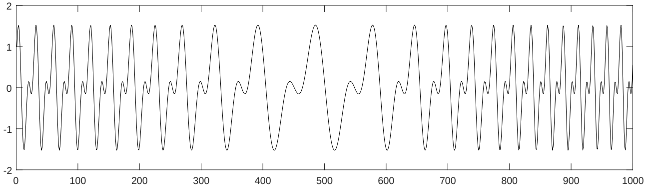
Por ejemplo, la función e^{it} es una función de forma de onda con $\delta = 0$, $D = 1$, y $\theta = 0$.

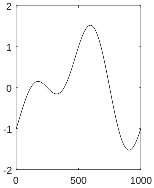
Más ejemplos



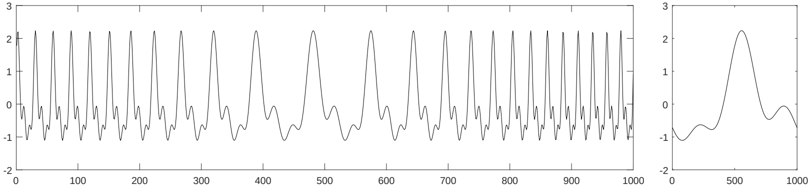


Más ejemplos





Más ejemplos



Contenidos

Suponemos que la señal está compuesta de una única forma de onda:

$$x(t) = A(t)s(2\pi\phi(t))$$

Suponemos que la señal está compuesta de una única forma de onda:

$$x(t) = A(t)s(2\pi\phi(t))$$

- Se cumplen las mismas restricciones que en el modelo más general.

Suponemos que la señal está compuesta de una única forma de onda:

$$x(t) = A(t)s(2\pi\phi(t))$$

- Se cumplen las mismas restricciones que en el modelo más general.
- Interpretamos a $\phi'(t)$ como la frecuencia instantánea.

Suponemos que la señal está compuesta de una única forma de onda:

$$x(t) = A(t)s(2\pi\phi(t))$$

- Se cumplen las mismas restricciones que en el modelo más general.
- Interpretamos a $\phi'(t)$ como la frecuencia instantánea.

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)e^{i2\pi k\phi(t)} \qquad (1) \\ &= A(t)\sum_{k\in\mathbb{N}_0} (\alpha(k)\cos(2\pi k\phi(t)) + \beta(k)\sin(2\pi k\phi(t))), \end{aligned}$$

Suponemos que la señal está compuesta de una única forma de onda:

$$x(t) = A(t)s(2\pi\phi(t))$$

- Se cumplen las mismas restricciones que en el modelo más general.
- Interpretamos a $\phi'(t)$ como la frecuencia instantánea.

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)e^{i2\pi k\phi(t)} \\ &= A(t)\sum_{k\in\mathbb{N}_0} (\alpha(k)\cos(2\pi k\phi(t)) + \beta(k)\sin(2\pi k\phi(t))), \end{aligned} \tag{1}$$

con $\hat{s}(0) = \frac{1}{2}\alpha(0)$ (aunque en general consideramos señales de media cero), y $\hat{s}(k) = \frac{1}{2}(\alpha(k) + i\beta(k))$.

Contenidos

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} (\alpha(k)A(t)\cos(2\pi k\phi(t)) + \beta(k)A(t)\sin(2\pi k\phi(t)))$$

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (\alpha(k) A(t) \cos(2\pi k \phi(t)) + \beta(k) A(t) \sin(2\pi k \phi(t)))$$

- Si conocemos $A(t)$ y $\phi(t)$, sólo resta estimar los coeficientes $\alpha(k)$ y $\beta(k)$.

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (\alpha(k) A(t) \cos(2\pi k \phi(t)) + \beta(k) A(t) \sin(2\pi k \phi(t)))$$

- Si conocemos $A(t)$ y $\phi(t)$, sólo resta estimar los coeficientes $\alpha(k)$ y $\beta(k)$.
- Si la señal tiene la frecuencia base dominante (parámetro δ pequeño), entonces podemos estimar $A(t)$ y $\phi(t)$ a través de la STFT (o de su versión con synchrosqueezing).

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (\alpha(k) A(t) \cos(2\pi k \phi(t)) + \beta(k) A(t) \sin(2\pi k \phi(t)))$$

- Si conocemos $A(t)$ y $\phi(t)$, sólo resta estimar los coeficientes $\alpha(k)$ y $\beta(k)$.
- Si la señal tiene la frecuencia base dominante (parámetro δ pequeño), entonces podemos estimar $A(t)$ y $\phi(t)$ a través de la STFT (o de su versión con synchrosqueezing).
- Definimos $y(t) = \frac{1}{g(0)} \int_{|f-c(t)|<d} R(t,f)df$, donde R es la STFT o su versión synchrosqueezing, $c(t)$ es la cresta estimada, y d es la mitad del ancho de la franja.

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (\alpha(k) A(t) \cos(2\pi k \phi(t)) + \beta(k) A(t) \sin(2\pi k \phi(t)))$$

- Si conocemos $A(t)$ y $\phi(t)$, sólo resta estimar los coeficientes $\alpha(k)$ y $\beta(k)$.
- Si la señal tiene la frecuencia base dominante (parámetro δ pequeño), entonces podemos estimar $A(t)$ y $\phi(t)$ a través de la STFT (o de su versión con synchrosqueezing).
- Definimos $y(t) = \frac{1}{g(0)} \int_{|f-c(t)|<d} R(t,f) df$, donde R es la STFT o su versión synchrosqueezing, $c(t)$ es la cresta estimada, y d es la mitad del ancho de la franja.
- $y(t)$ es una función compleja, de la cual podemos estimar $A(t)$ como su módulo, y $\phi(t)$ como su fase.

En tiempo discreto

- Obtenemos las estimaciones $\tilde{A}(n)$ y $\tilde{\phi}(n)$.

En tiempo discreto

- Obtenemos las estimaciones $\tilde{A}(n)$ y $\tilde{\phi}(n)$.
- Fijamos el valor del parámetro D, y hacemos que el parámetro θ valga cero (esto implica una cantidad finita D de coeficientes).

En tiempo discreto

- Obtenemos las estimaciones $\tilde{A}(n)$ y $\tilde{\phi}(n)$.
- Fijamos el valor del parámetro D, y hacemos que el parámetro θ valga cero (esto implica una cantidad finita D de coeficientes).
- Definimos la matriz

$$\mathbf{C} = [c_0^T, c_1^T, \ldots, c_D^T, d_1^T, \ldots, d_D^T]^T \in \mathbb{R}^{(2D+1)\times N},$$

que contiene en cada fila

$$c_l(n) = \tilde{A}(n)\cos(2\pi l\tilde{\phi}(n)) \quad d_l(n) = \tilde{A}(n)\sin(2\pi l\tilde{\phi}(n))$$

Continuación

- De acuerdo a lo definido, planteamos

$$x(n) \approx v^T \mathbf{C},$$

donde v^T es el vector de coeficientes α y β buscados.

Continuación

- De acuerdo a lo definido, planteamos

$$x(n) \approx v^T \mathbf{C},$$

donde v^T es el vector de coeficientes α y β buscados.

- En rigor, debemos plantear un problema de optimización

$$\min_{v} \|v^T \mathbf{C} - x\|^2$$

Continuación

- De acuerdo a lo definido, planteamos

$$x(n) \approx v^T \mathbf{C},$$

donde v^T es el vector de coeficientes α y β buscados.

- En rigor, debemos plantear un problema de optimización

$$\min_{v} \|v^T \mathbf{C} - x\|^2$$

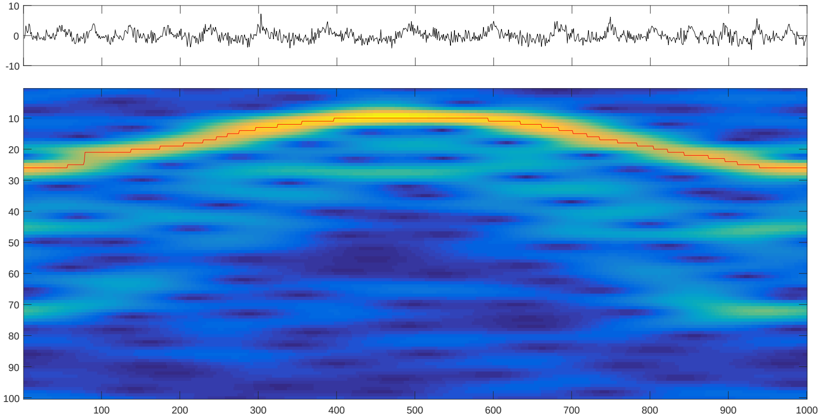
- Esto nos lleva a obtener $\tilde{v} = (x\mathbf{C}^T)(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}$, $\tilde{x} = \tilde{v}^T \mathbf{C}$.

- Podemos usar este método para limpieza de ruido.

- Podemos usar este método para limpieza de ruido.
- También como modelo, sobre la base del parámetro D (la cantidad de coeficientes).

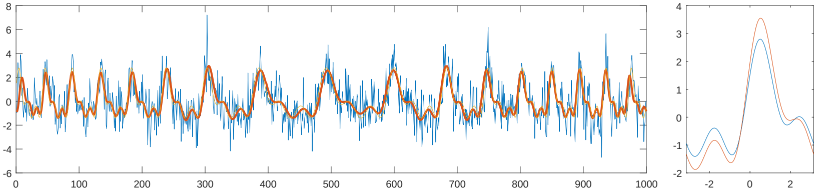
- Podemos usar este método para limpieza de ruido.
- También como modelo, sobre la base del parámetro D (la cantidad de coeficientes).
- Sin embargo, el parámetro D es fijado *a priori* por el usuario. Podrían explorarse métodos para su selección objetiva.

Ejemplos

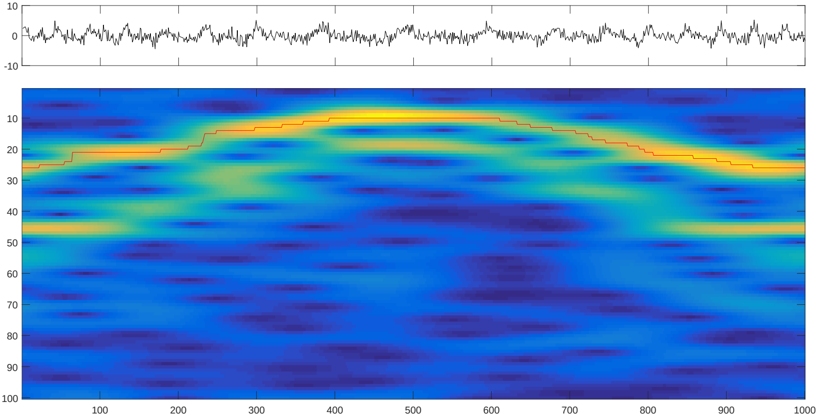


10
0
-10
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

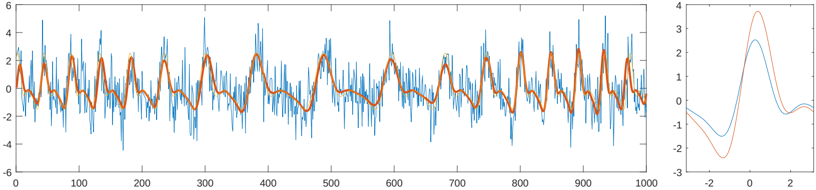
Ejemplos


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
0
2

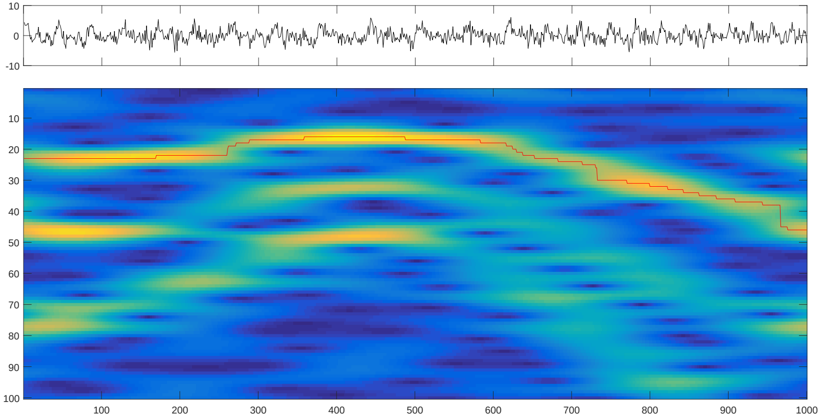
Ejemplos


10
0
-10
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

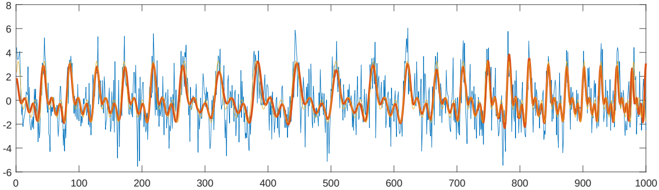
Ejemplos

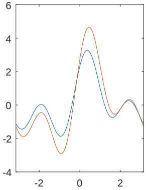

6
4
2
0
-2
-4
-6
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
0
2

Ejemplos

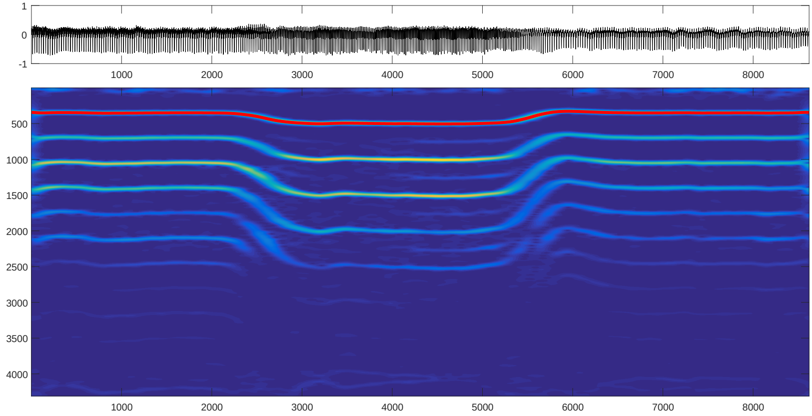

10
0
-10
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

Ejemplos

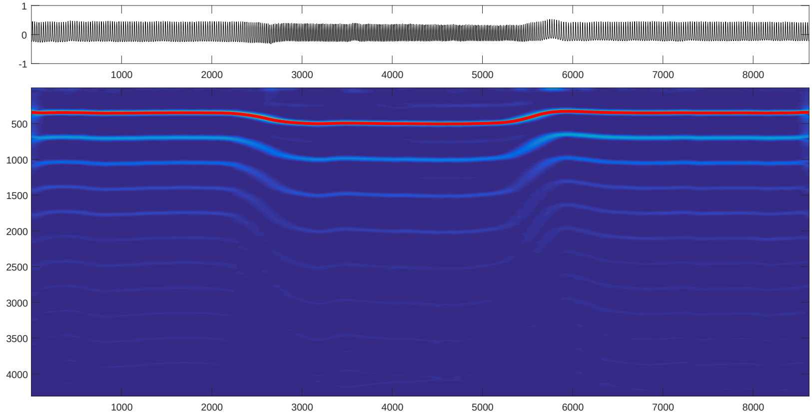




Señales de voz



Señales de voz



Señales de voz