Análisis Tiempo-Frecuencia y Descomposición de Señales

Clase 3

Dr. Marcelo Alejandro Colominas
macolominas@conicet.gov.ar

Lab. Señales y Dinámicas no Lineales
Instituto de Investigación y Desarrollo en Bioingeniería y Bioinformática (IBB)
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina

2019

Contenidos

Contenidos

Estimación de frecuencia instantánea

Tono puro

Si $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$ entonces

Estimación de frecuencia instantánea

Tono puro

Si $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$ entonces

$$F_x^g(t, f) = x(t)\hat{g}(f - f_0)$$

Estimación de frecuencia instantánea

Tono puro

Si $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$ entonces

$$F_x^g(t, f) = x(t)\hat{g}(f - f_0)$$

Tono "suavemente perturbado"

Si $x(t) = e^{i2\pi\phi(t)}$, con $|\phi''(t)| < \epsilon$, entonces

Estimación de frecuencia instantánea

Tono puro

Si $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$ entonces

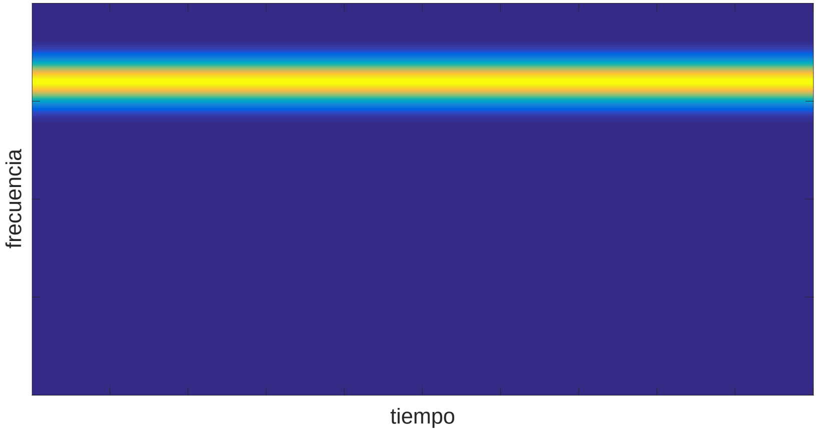
$$F_x^g(t, f) = x(t)\hat{g}(f - f_0)$$

Tono "suavemente perturbado"

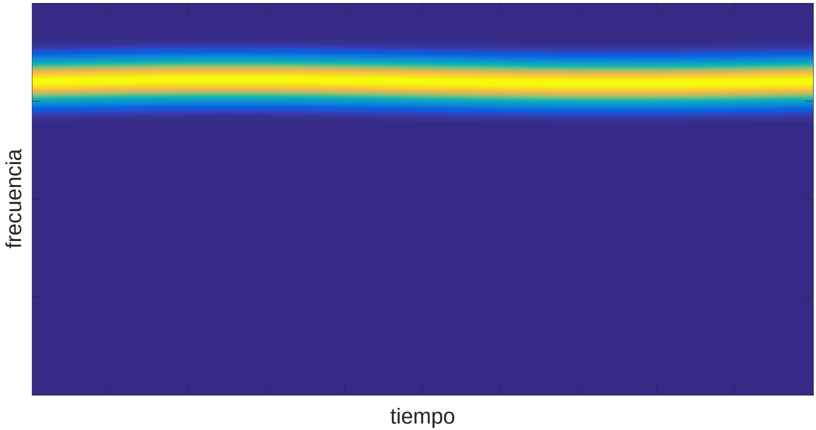
Si $x(t) = e^{i2\pi\phi(t)}$, con $|\phi''(t)| < \epsilon$, entonces

$$F_x^g(t, f) \approx x(t)\hat{g}(f - \phi'(t))$$

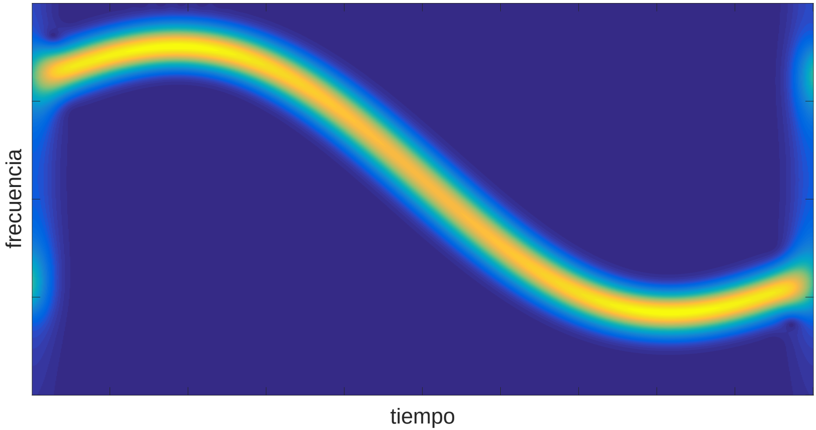
Estimación de frecuencia instantánea



Estimación de frecuencia instantánea



Estimación de frecuencia instantánea



Contenidos

Definición

$$S_x^g(t, f) = |F_x^g(t, f)|^2$$

Definición

$S_x^g(t, f) = |F_x^g(t, f)|^2$

$S_x^g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

Definición

$S_x^g(t, f) = |F_x^g(t, f)|^2$
$S_x^g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

Recordemos que
$F_x^g(t, f) = e^{i2\pi f t} V_x^g(t, f)$.

Definición

$S_x^g(t, f) = |F_x^g(t, f)|^2$
$S_x^g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

Recordemos que
$F_x^g(t, f) = e^{i2\pi f t} V_x^g(t, f)$.
Luego,
$|F_x^g(t, f)| = |V_x^g(t, f)|$,

Definición

$S_x^g(t, f) = |F_x^g(t, f)|^2$
$S_x^g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

Recordemos que
$F_x^g(t, f) = e^{i2\pi f t} V_x^g(t, f)$.
Luego,
$|F_x^g(t, f)| = |V_x^g(t, f)|$,
y por lo tanto
$S_x^g(t, f) = |V_x^g(t, f)|^2$

Definición

$S_x^g(t, f) = |F_x^g(t, f)|^2$
$S_x^g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

Recordemos que
$F_x^g(t, f) = e^{i2\pi ft} V_x^g(t, f)$.
Luego,
$|F_x^g(t, f)| = |V_x^g(t, f)|$,
y por lo tanto
$S_x^g(t, f) = |V_x^g(t, f)|^2$

El espectrograma es el caso más sencillo de las "distribuciones" cuadráticas en tiempo-frecuencia.

Definición

$$S_x^g(t, f) = |F_x^g(t, f)|^2$$
$$S_x^g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

Recordemos que
$F_x^g(t, f) = e^{i2\pi ft} V_x^g(t, f)$.
Luego,
$|F_x^g(t, f)| = |V_x^g(t, f)|$,
y por lo tanto
$S_x^g(t, f) = |V_x^g(t, f)|^2$

El espectrograma es el caso más sencillo de las "distribuciones" cuadráticas en tiempo-frecuencia.
No admite reconstrucción (Cohen).

Conservación de la energía

$$\int\!\!\int S_x^g(t,f)\,df\,dt = \int |x(t)|^2 dt = \int |\hat{x}(f)|^2 df$$

Conservación de la energía

$$\int\int S_x^g(t,f)df\,dt = \int |x(t)|^2 dt = \int |\hat{x}(f)|^2 df$$

Cantidades marginales

$$\int S_x^g(t,f)dt \neq |\hat{x}(f)|^2$$

Conservación de la energía

$$\iint S_x^g(t,f)\,df\,dt = \int |x(t)|^2 dt = \int |\hat{x}(f)|^2 df$$

Cantidades marginales

$$\int S_x^g(t,f)\,dt \neq |\hat{x}(f)|^2$$
$$\int S_x^g(t,f)\,df \neq |x(t)|^2$$

Conservación de la energía

$$\int\int S_x^g(t,f)df\,dt = \int |x(t)|^2 dt = \int |\hat{x}(f)|^2 df$$

Cantidades marginales

$\int S_x^g(t,f)dt \neq |\hat{x}(f)|^2$

$\int S_x^g(t,f)df \neq |x(t)|^2$

Sin embargo,

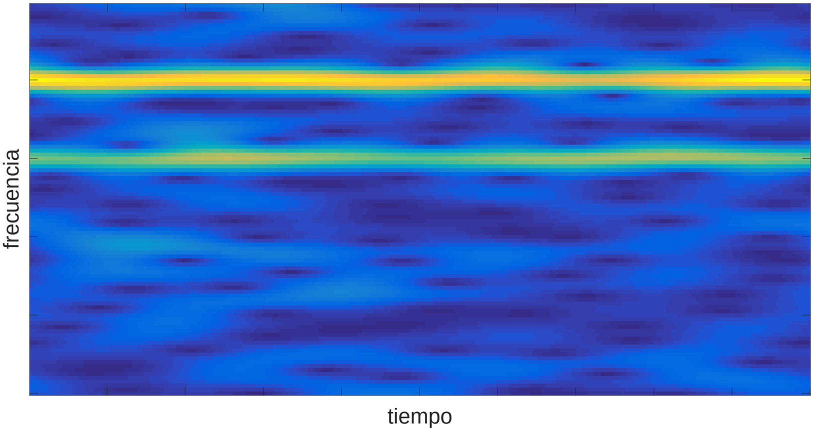
$\int S_x^g(t,f)dt = \int |\hat{x}(q)|^2 |\hat{g}(q-f)|^2 dq$

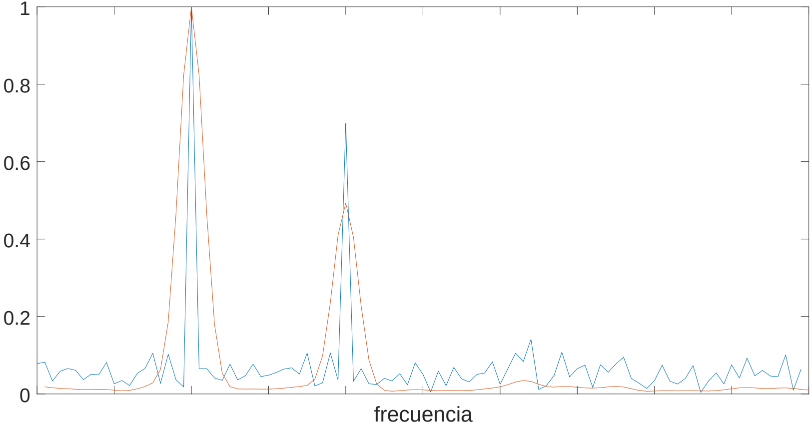
Conservación de la energía

$\iint S_x^g(t,f)df\,dt = \int |x(t)|^2 dt = \int |\hat{x}(f)|^2 df$

Cantidades marginales

$\int S_x^g(t,f)dt \neq |\hat{x}(f)|^2$
$\int S_x^g(t,f)df \neq |x(t)|^2$
Sin embargo,
$\int S_x^g(t,f)dt = \int |\hat{x}(q)|^2 |\hat{g}(q-f)|^2 dq$
Relación con periodograma, método de Bartlett, y método de Welch.


frecuencia
tiempo


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
frecuencia

Contenidos

El principio de "incertidumbre"

Sean $x(t)$ y $\hat{x}(f)$ un par de transformadas de Fourier.

El principio de "incertidumbre"

Sean $x(t)$ y $\hat{x}(f)$ un par de transformadas de Fourier. Consideremos las siguientes cantidades como "dispersiones" en tiempo y frecuencia respectivamente.

El principio de "incertidumbre"

Sean $x(t)$ y $\hat{x}(f)$ un par de transformadas de Fourier.
Consideremos las siguientes cantidades como "dispersiones" en tiempo y frecuencia respectivamente.

$T^2 = \int (t - \langle t \rangle)^2 |x(t)|^2 dt$

$B^2 = \int (f - \langle f \rangle)^2 |\hat{x}(f)|^2 df$

donde $\langle t \rangle$ y $\langle f \rangle$ son, respectivamente, los "centros de masa" temporal y frecuencial.

El principio de "incertidumbre"

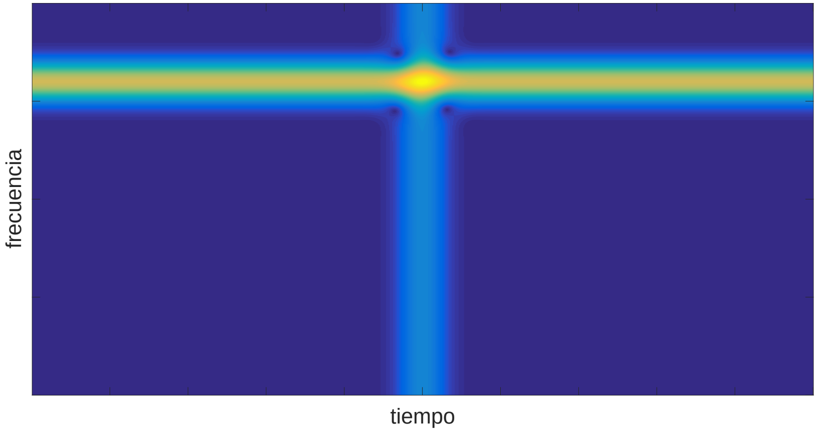
Sean $x(t)$ y $\hat{x}(f)$ un par de transformadas de Fourier.
Consideremos las siguientes cantidades como "dispersiones" en tiempo y frecuencia respectivamente.
$T^2 = \int (t - \langle t \rangle)^2 |x(t)|^2 dt$
$B^2 = \int (f - \langle f \rangle)^2 |\hat{x}(f)|^2 df$
donde $\langle t \rangle$ y $\langle f \rangle$ son, respectivamente, los "centros de masa" temporal y frecuencial.
Entonces

El principio de "incertidumbre"

Sean $x(t)$ y $\hat{x}(f)$ un par de transformadas de Fourier.
Consideremos las siguientes cantidades como "dispersiones" en tiempo y frecuencia respectivamente.
$T^2 = \int (t - \langle t \rangle)^2 |x(t)|^2 dt$
$B^2 = \int (f - \langle f \rangle)^2 |\hat{x}(f)|^2 df$
donde $\langle t \rangle$ y $\langle f \rangle$ son, respectivamente, los "centros de masa" temporal y frecuencial.
Entonces

$$TB \geq \frac{1}{4\pi}$$

Incertidumbre en la STFT



Incertidumbre en la STFT

Ya vimos que si $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$ entonces
$F_x^g(t, f) = x(t)\hat{g}(f - f_0)$

Incertidumbre en la STFT

Ya vimos que si $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$ entonces
$F_x^g(t, f) = x(t)\hat{g}(f - f_0)$
y
$S_x^g(t, f) = |F_x^g(t, f)|^2 = |\hat{g}(f - f_0)|^2$.

Incertidumbre en la STFT

Ya vimos que si $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$ entonces
$F_x^g(t,f) = x(t)\hat{g}(f - f_0)$
y
$S_x^g(t,f) = |F_x^g(t,f)|^2 = |\hat{g}(f - f_0)|^2$.

Por otro lado, si $x(t) = \delta(t - t_0)$ tenemos

Incertidumbre en la STFT

Ya vimos que si $x(t) = e^{i2\pi f_0 t}$ entonces
$F_x^g(t,f) = x(t)\hat{g}(f - f_0)$
y
$S_x^g(t,f) = |F_x^g(t,f)|^2 = |\hat{g}(f - f_0)|^2$.

Por otro lado, si $x(t) = \delta(t - t_0)$ tenemos
$F_x(t,f) = g(t - t_0)e^{i2\pi f(t-t_0)}$
y
$S_x^g(t,f) = |F_x^g(t,f)|^2 = |g(t - t_0)|^2$.

Incertidumbre en la STFT

Señal “ventaneada” y normalizada

Definamos

$$\tilde{x}_t(u) = \frac{x(u)g(u-t)}{\sqrt{\int |x(u)g(u-t)|^2 du}}$$

Incertidumbre en la STFT

Señal "ventaneada" y normalizada

Definamos

$$\tilde{x}_t(u) = \frac{x(u)g(u-t)}{\sqrt{\int |x(u)g(u-t)|^2 du}}$$

Queda claro que

$$\int |\tilde{x}_t(u)|^2 du = 1$$

Incertidumbre en la STFT

$$\hat{\tilde{x}}_t(f) = \int \tilde{x}_t(u) e^{-i2\pi f u} du,$$

es como una STFT de $x(t)$ normalizada localmente.

Incertidumbre en la STFT

$$\hat{\tilde{x}}_t(f) = \int \tilde{x}_t(u) e^{-i2\pi f u} du,$$

es como una STFT de $x(t)$ normalizada localmente.

$$T_t^2 = \int (u - \langle u \rangle) \tilde{x}_t(u) du,$$

es una medida temporal (variante en el tiempo) de la dispersión temporal.

Incertidumbre en la STFT

$$\hat{\tilde{x}}_t(f) = \int \tilde{x}_t(u) e^{-i2\pi f u} du,$$

es como una STFT de $x(t)$ normalizada localmente.

$$T_t^2 = \int (u - \langle u \rangle) \tilde{x}_t(u) du,$$

es una medida temporal (variante en el tiempo) de la dispersión temporal.

$$B_t^2 = \int (f - \langle f \rangle) \hat{\tilde{x}}_t(f), df$$

es una medida temporal (variante en el tiempo) de la dispersión frecuencial.

Incertidumbre en la STFT

$$\hat{\tilde{x}}_t(f) = \int \tilde{x}_t(u) e^{-i2\pi f u} du,$$

es como una STFT de $x(t)$ normalizada localmente.

$$T_t^2 = \int (u - \langle u \rangle) \tilde{x}_t(u) du,$$

es una medida temporal (variante en el tiempo) de la dispersión temporal.

$$B_t^2 = \int (f - \langle f \rangle) \hat{\tilde{x}}_t(f), df$$

es una medida temporal (variante en el tiempo) de la dispersión frecuencial.
Entonces

$$T_t B_t \geq \frac{1}{4\pi}$$

Átomos tiempo-frequencia

Volvamos a la definición de STFT como producto interno: $F_x^g(t,f) = \langle x, \tilde{g}_{tf} \rangle$, con $\tilde{g}_{tf} = g(u-t)e^{i2\pi f(u-t)}$ (átomo tiempo-frecuencia) que satisface $\|g\|^2 = \int g(t)dt = 1$.

Átomos tiempo-frequencia

Volvamos a la definición de STFT como producto interno: $F_x^g(t,f) = \langle x, \tilde{g}_{tf} \rangle$, con $\tilde{g}_{tf} = g(u-t)e^{i2\pi f(u-t)}$ (átomo tiempo-frecuencia) que satisface $\|g\|^2 = \int g(t)dt = 1$.
Para $\tilde{g}_{tf}$, también se cumple que

$$TB \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Átomos tiempo-frequencia

Volvamos a la definición de STFT como producto interno: $F_x^g(t,f) = \langle x, \tilde{g}_{tf} \rangle$, con $\tilde{g}_{tf} = g(u-t)e^{i2\pi f(u-t)}$ (átomo tiempo-frecuencia) que satisface $\|g\|^2 = \int g(t)dt = 1$.
Para $\tilde{g}_{tf}$, también se cumple que

$$TB \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Las traslaciones temporales y frecuenciales no modifican esta relación. Como su duración (proporcional a T) es constante, entonces la dispersión frecuencial también lo será.

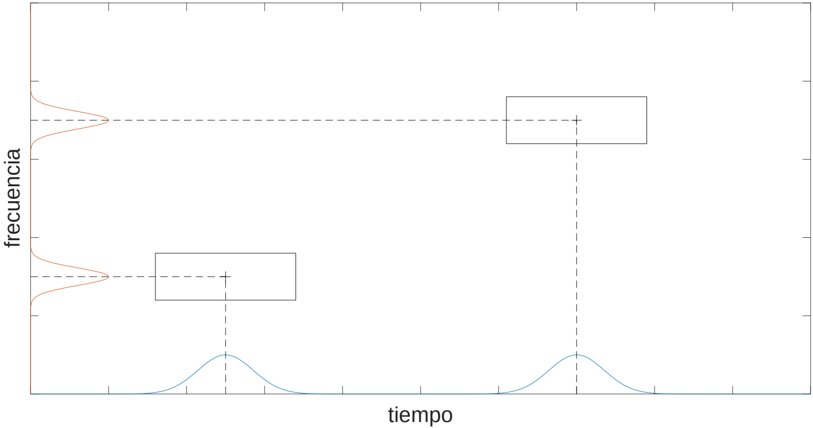
Átomos tiempo-frequencia

Volvamos a la definición de STFT como producto interno:
$F_x^g(t,f) = \langle x, \tilde{g}_{tf} \rangle$, con $\tilde{g}_{tf} = g(u-t)e^{i2\pi f(u-t)}$ (átomo tiempo-frecuencia) que satisface $\|g\|^2 = \int g(t)dt = 1$.
Para $\tilde{g}_{tf}$, también se cumple que

$$TB \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Las traslaciones temporales y frecuenciales no modifican esta relación. Como su duración (proporcional a T) es constante, entonces la dispersión frecuencial también lo será.
Los átomos tiempo-frecuencia de la STFT determinan una "partición" rectangular del plano TF.

Cajas de Heisenberg



Contenidos

Vimos que no podemos tener una resolución ideal tanto en tiempo como en frecuencia. Es una relación de compromiso.

Vimos que no podemos tener una resolución ideal tanto en tiempo como en frecuencia. Es una relación de compromiso. Podemos fijar una resolución temporal (eligiendo la longitud de nuestra ventana), pero eso fijará la resolución frecuencial.

Vimos que no podemos tener una resolución ideal tanto en tiempo como en frecuencia. Es una relación de compromiso. Podemos fijar una resolución temporal (eligiendo la longitud de nuestra ventana), pero eso fijará la resolución frecuencial. ¿Cómo elegir la longitud de la ventana?

Vimos que no podemos tener una resolución ideal tanto en tiempo como en frecuencia. Es una relación de compromiso. Podemos fijar una resolución temporal (eligiendo la longitud de nuestra ventana), pero eso fijará la resolución frecuencial. ¿Cómo elegir la longitud de la ventana?

Por otro lado, vimos que existe una **analogía** entre las distribuciones TF y las distribuciones probabilísticas.

Vimos que no podemos tener una resolución ideal tanto en tiempo como en frecuencia. Es una relación de compromiso. Podemos fijar una resolución temporal (eligiendo la longitud de nuestra ventana), pero eso fijará la resolución frecuencial. ¿Cómo elegir la longitud de la ventana?

Por otro lado, vimos que existe una **analogía** entre las distribuciones TF y las distribuciones probabilísticas. Podemos usar esta analogía, y definir la "entropía" de Rényi del espectrograma:

Vimos que no podemos tener una resolución ideal tanto en tiempo como en frecuencia. Es una relación de compromiso. Podemos fijar una resolución temporal (eligiendo la longitud de nuestra ventana), pero eso fijará la resolución frecuencial. ¿Cómo elegir la longitud de la ventana?

Por otro lado, vimos que existe una **analogía** entre las distribuciones TF y las distribuciones probabilísticas. Podemos usar esta analogía, y definir la "entropía" de Rényi del espectrograma:

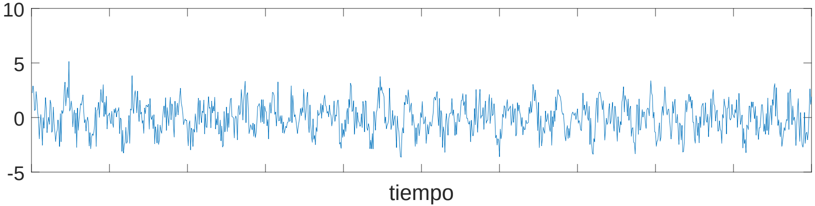
$$H_R^\alpha(S_x^g) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \iint \left(\frac{S_x^g(t,f)}{\iint S_x^g(a,b)dadb} \right)^\alpha dtdf, \quad \alpha \neq 1$$

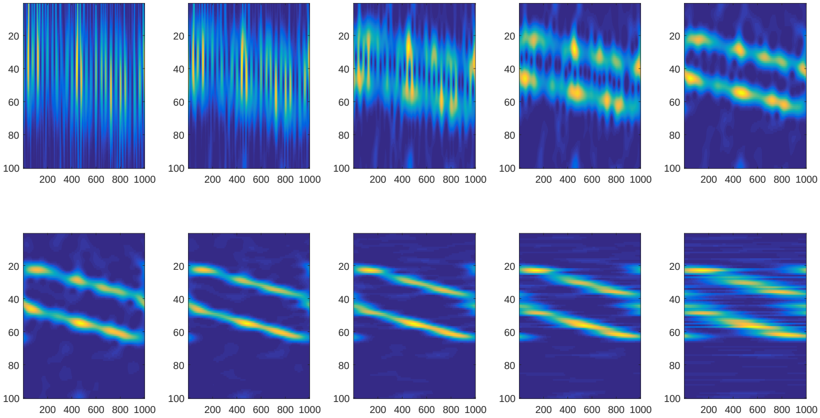
Vimos que no podemos tener una resolución ideal tanto en tiempo como en frecuencia. Es una relación de compromiso. Podemos fijar una resolución temporal (eligiendo la longitud de nuestra ventana), pero eso fijará la resolución frecuencial. ¿Cómo elegir la longitud de la ventana?

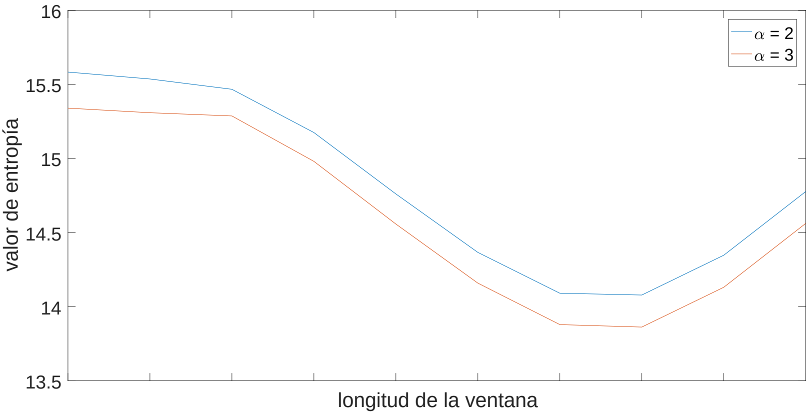
Por otro lado, vimos que existe una **analogía** entre las distribuciones TF y las distribuciones probabilísticas. Podemos usar esta analogía, y definir la "entropía" de Rényi del espectrograma:

$$H_R^\alpha(S_x^g) = \frac{1}{1-\alpha}\log_2 \iint \left(\frac{S_x^g(t,f)}{\iint S_x^g(a,b)dadb}\right)^\alpha dtdf, \quad \alpha \neq 1$$

Podemos elegir la ventana $g(t)$ tal que minimice la entropía de Rényi del espectrograma para varios valores de α.


10
5
0
-5
tiempo


20
40
60
80
100
200 400 600 800 1000


16
15.5
15
14.5
14
13.5
valor de entropía
longitud de la ventana
α = 2
α = 3