# Análisis Tiempo-Frecuencia y Descomposición de Señales

## Clase 1

Dr. Marcelo Alejandro Colominas
macolominas@conicet.gov.ar

Lab. Señales y Dinámicas no Lineales
Instituto de Investigación y Desarrollo en Bioingeniería y Bioinformática (IBB)
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina

2019

LABORATORIO DE SEÑALES Y DINÁMICAS NO LINEALES
FI-UNER · Entre Ríos · Argentina

UNER Facultad de Ingeniería

CONICET

# Contenidos


1. Introducción
2. Motivación
3. Transformada de Fourier

# Contenidos


1. Introducción
2. Motivación
3. Transformada de Fourier

# Análisis TF y Descomposición de Señales

## Contenidos

- **Tema 1** Introducción. Necesidad del análisis tiempo-frecuencia. Transformada de Fourier. Propiedades.

# Análisis TF y Descomposición de Señales

## Contenidos

- **Tema 1** Introducción. Necesidad del análisis tiempo-frecuencia. Transformada de Fourier. Propiedades.
- **Tema 2** Definición de frecuencia instantánea. Método de la señal analítica. Transformada de Hilbert. Limitaciones. Teoremas de Bedrosian y de Nuttall.

# Análisis TF y Descomposición de Señales

## Contenidos

- **Tema 1** Introducción. Necesidad del análisis tiempo-frecuencia. Transformada de Fourier. Propiedades.
- **Tema 2** Definición de frecuencia instantánea. Método de la señal analítica. Transformada de Hilbert. Limitaciones. Teoremas de Bedrosian y de Nuttall.
- **Tema 3** Transformada de Fourier de tiempo corto. Versión clásica y modificada. Interpretación en dominio temporal y como banco de filtros. Espectrograma. Principio de incertidumbre. Elección de la ventana.

# Análisis TF y Descomposición de Señales

## Contenidos

- **Tema 4** Transformada ondita continua con distintas normalizaciones. Opciones para el eje de escalas. Reconstrucción clásica y vertical. Interpretación en el dominio temporal. Interpretación como banco de filtros autosimilares. Escalograma. Principio de incertidumbre. Elección de la ventana.

# Análisis TF y Descomposición de Señales

## Contenidos

- **Tema 4** Transformada ondita continua con distintas normalizaciones. Opciones para el eje de escalas. Reconstrucción clásica y vertical. Interpretación en el dominio temporal. Interpretación como banco de filtros autosimilares. Escalograma. Principio de incertidumbre. Elección de la ventana.
- **Tema 5** Reassignment y Synchrosqueezing. Dispersión temporal y frecuencial. Reassignment de la STFT. Distintas versiones de los operadores de reassignment. Synchosqueezing de la STFT e inversión. Synchrosqueezing de la CWT e inversión.

# Análisis TF y Descomposición de Señales

## Contenidos

- **Tema 6** Detección de crestas y extracción de modos. El modelo de señal multicomponente. Detección de crestas: problema de optimización. Solución voraz. Uso del vector de reassignment. Cuencas de atracción. Extracción de modos. Definiciones de dominios mediante ajuste de modelo en plano TF. Limpieza de ruido por umbralado.

# Análisis TF y Descomposición de Señales

## Contenidos

- **Tema 6** Detección de crestas y extracción de modos. El modelo de señal multicomponente. Detección de crestas: problema de optimización. Solución voraz. Uso del vector de reassignment. Cuencas de atracción. Extracción de modos. Definiciones de dominios mediante ajuste de modelo en plano TF. Limpieza de ruido por umbralado.
- **Tema 7** Wave Shape Functions. El modelo multicomponente con función de forma de onda. Modelo adaptativo no armónico. Definición de función de forma de onda. Algoritmo de estimación de forma de onda.

# Análisis TF y Descomposición de Señales

## Contenidos

- **Tema 6** Detección de crestas y extracción de modos. El modelo de señal multicomponente. Detección de crestas: problema de optimización. Solución voraz. Uso del vector de reassignment. Cuencas de atracción. Extracción de modos. Definiciones de dominios mediante ajuste de modelo en plano TF. Limpieza de ruido por umbralado.
- **Tema 7** Wave Shape Functions. El modelo multicomponente con función de forma de onda. Modelo adaptativo no armónico. Definición de función de forma de onda. Algoritmo de estimación de forma de onda.
- **Tema 8** Descomposición empírica en modos. Transformada de Hilbert-Huang. Algoritmos asistidos por ruido. EEMD. CEEMDAN. Aproximaciones a EMD basadas en técnicas de optimización.

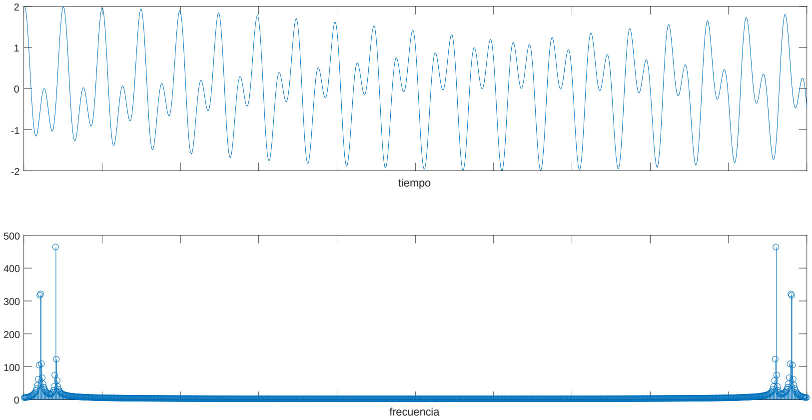
# Contenidos

1 Introducción

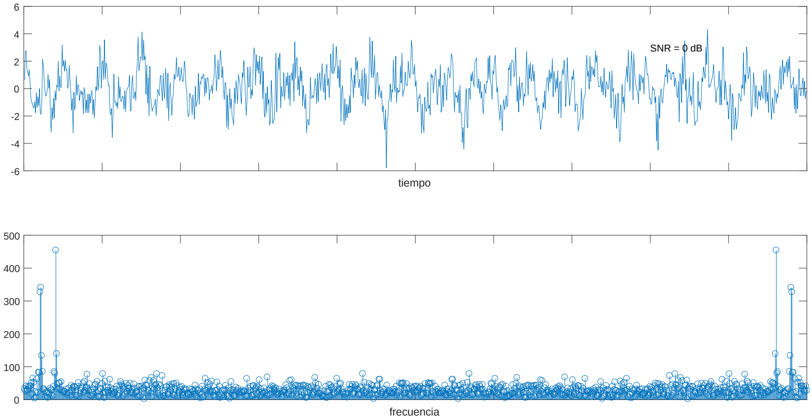
2 Motivación

3 Transformada de Fourier

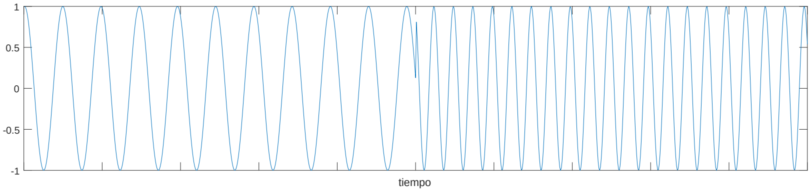
# Motivación

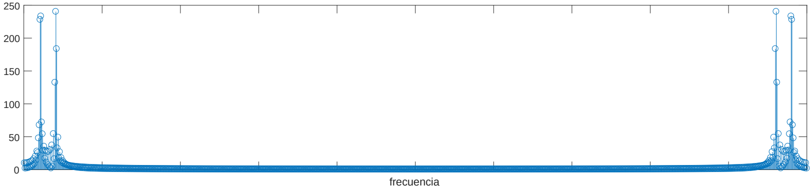


# Motivación

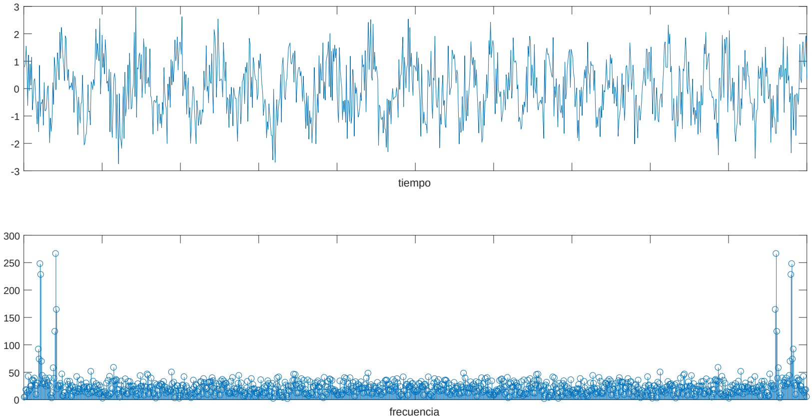


# Motivación

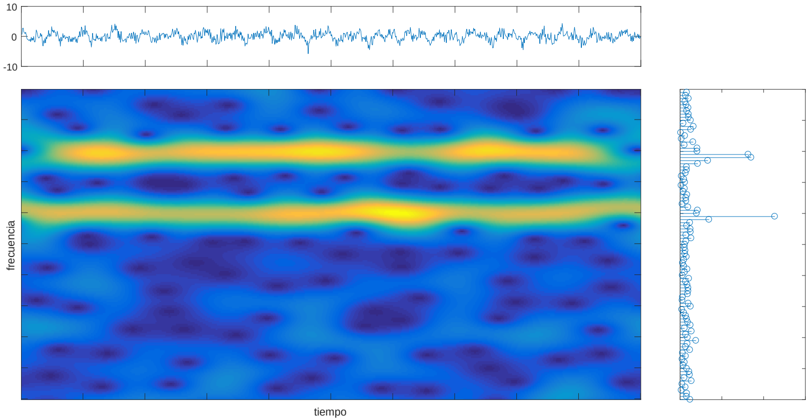


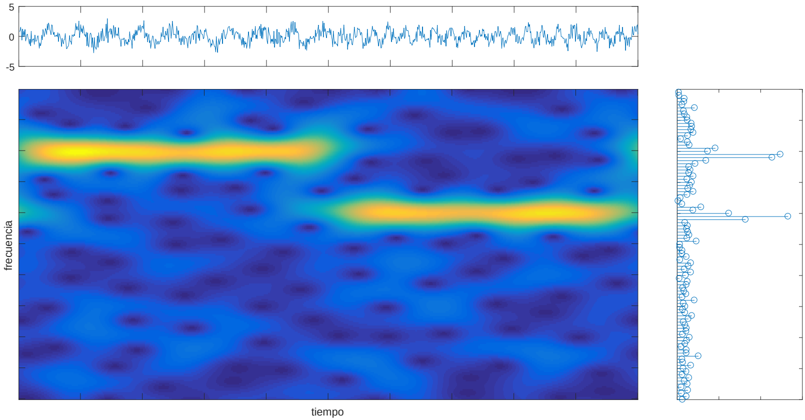
# Motivación



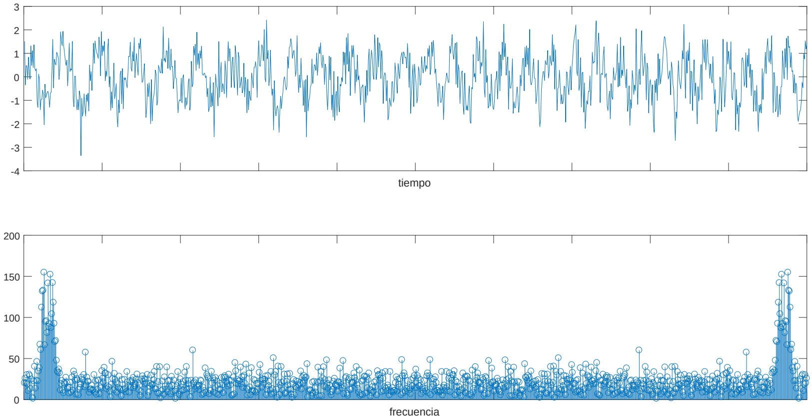
# Motivación



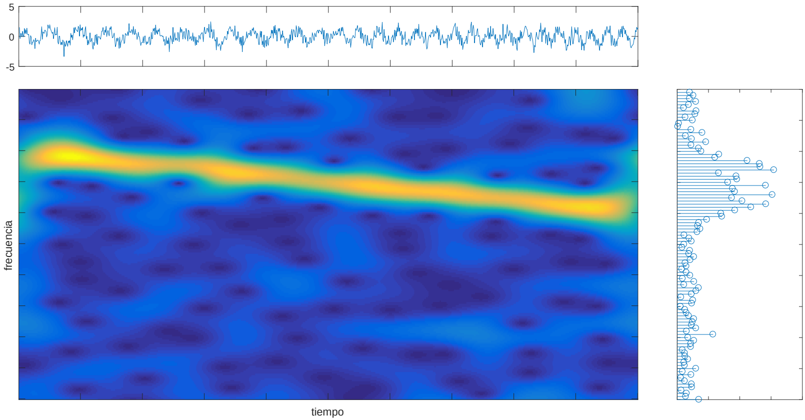
# Motivación



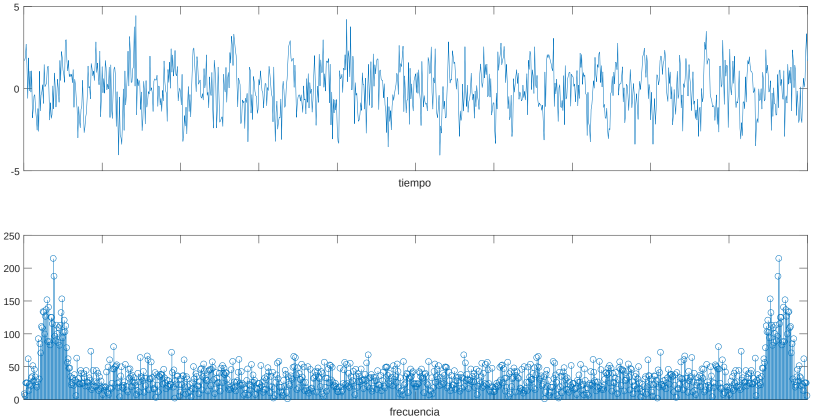
# Motivación



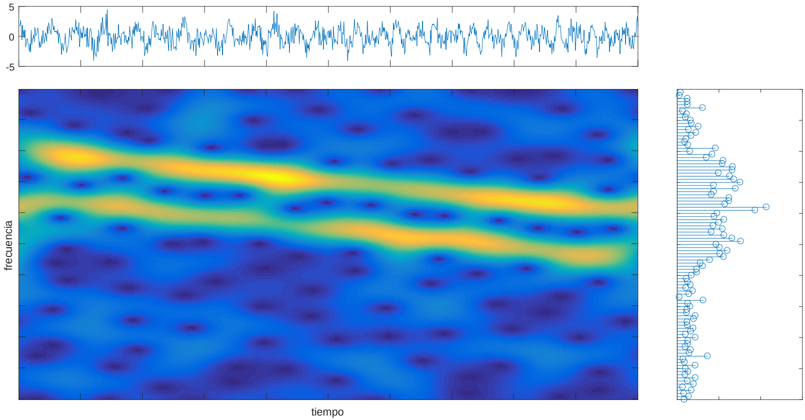
# Motivación



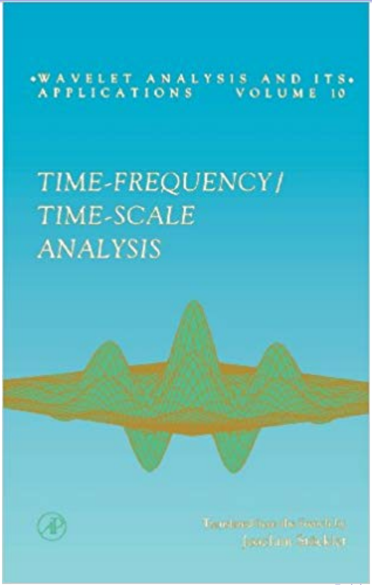
# Motivación



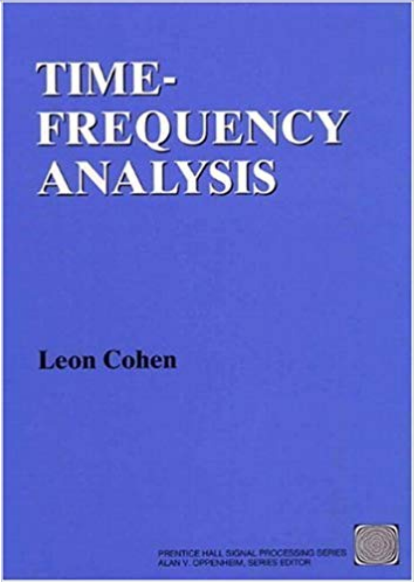
# Motivación



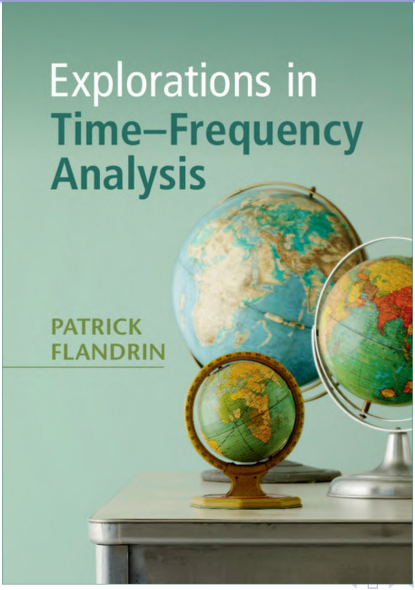
# Bibliografía principal



# Bibliografía principal



# Bibliografía principal



# Aplicaciones

- Sonidos animales: murciélagos, pájaros, ballenas.

# Aplicaciones

- Sonidos animales: murciélagos, pájaros, ballenas.
- Audio, habla y música.

# Aplicaciones

- Sonidos animales: murciélagos, pájaros, ballenas.
- Audio, habla y música.
- Turbulencia.

# Aplicaciones

- Sonidos animales: murciélagos, pájaros, ballenas.
- Audio, habla y música.
- Turbulencia.
- Señales electrofisiológicas: EEG, EMG, ECG.

# Aplicaciones

- Sonidos animales: murciélagos, pájaros, ballenas.
- Audio, habla y música.
- Turbulencia.
- Señales electrofisiológicas: EEG, EMG, ECG.
- Sonares, radares, vibraciones sísmicas.

# Contenidos

1 Introducción

2 Motivación

3 Transformada de Fourier

## Definición

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi f t}dt$$
$$x(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$$
$$\hat{x}(f) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$$

## Definición

$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$
$x(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$
$\hat{x}(f) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

## Inversión

$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f)e^{i2\pi ft}df$

## Producto interno

$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = (\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt)^*$

$x(t), y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

$z^*$: conjugado del número complejo $z$

## Producto interno

$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = (\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt)^*$

$x(t), y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

$z^*$: conjugado del número complejo $z$

## T. de Fourier

$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \langle x, \mathbf{e}_f \rangle$

$\mathbf{e}_f = e^{i2\pi ft}$

## Producto interno

$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = (\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt)^*$

$x(t), y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

$z^*$: conjugado del número complejo $z$

## T. de Fourier

$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \langle x, \mathbf{e}_f\rangle$

$\mathbf{e}_f = e^{i2\pi ft}$

## Inversión

$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x, \mathbf{e}_f\rangle \mathbf{e}_f df$

# Propiedades

- $x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \hat{x}^*(f) = \hat{x}(-f)$ (módulo par).

# Propiedades

- $x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \hat{x}^*(f) = \hat{x}(-f)$ (módulo par).
- $x(t)$ real y par $(x(t) = x(-t)) \Leftrightarrow \hat{x}(f)$ real pura y par.

# Propiedades

- $x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \hat{x}^*(f) = \hat{x}(-f)$ (módulo par).
- $x(t)$ real y par $(x(t) = x(-t)) \Leftrightarrow \hat{x}(f)$ real pura y par.
- $x(t)$ real e impar $(x(t) = -x(-t)) \Leftrightarrow \hat{x}(f)$ imaginaria pura e impar.

## Propiedades

- $x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \hat{x}^*(f) = \hat{x}(-f)$ (módulo par).
- $x(t)$ real y par $(x(t) = x(-t)) \Leftrightarrow \hat{x}(f)$ real pura y par.
- $x(t)$ real e impar $(x(t) = -x(-t)) \Leftrightarrow \hat{x}(f)$ imaginaria pura e impar.
- $\mathcal{F}\{\alpha x + \beta y\} = \alpha\mathcal{F}\{x\} + \beta\mathcal{F}\{y\}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (prop. de linealidad).

# Más propiedades

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

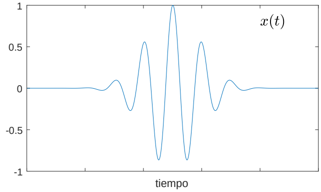
# Más propiedades

$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$
Corrimiento temporal: $\mathcal{F}\{x(t-a)\} = ?$, con $a \in \mathbb{R}$

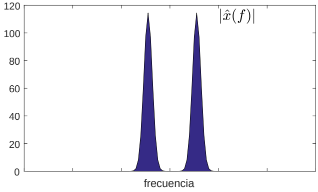
# Más propiedades

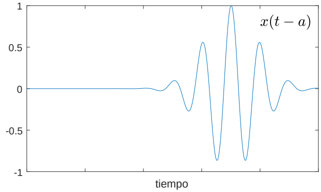
$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi f t}dt$$

Corrimiento temporal: $\mathcal{F}\{x(t-a)\} = ?$, con $a \in \mathbb{R}$

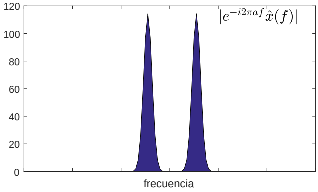



$\Leftrightarrow$



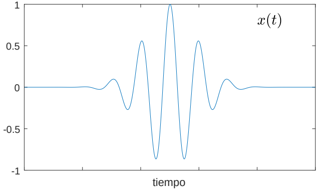

$\Leftrightarrow$



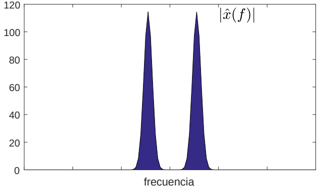
# Más propiedades

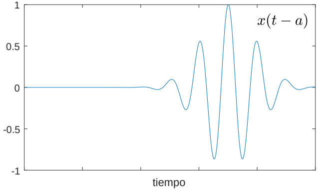
$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$

Corrimiento temporal: $\mathcal{F}\{x(t-a)\} = ?$, con $a \in \mathbb{R}$

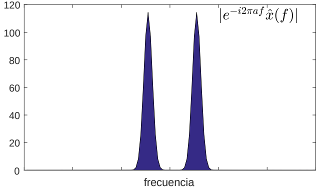



$\Longleftrightarrow$




$\Longleftrightarrow$




$\mathcal{F}\{x(t-a)\} = e^{-i2\pi a f} \hat{x}(f)$

## Más propiedades

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

# Más propiedades

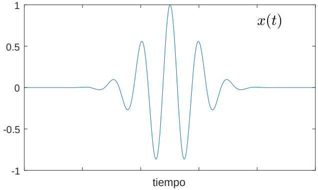
$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$

Corrimiento en frecuencia: $\mathcal{F}\{e^{i2\pi at}x(t)\} = ?$, con $a \in \mathbb{R}$

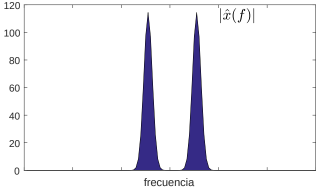
# Más propiedades

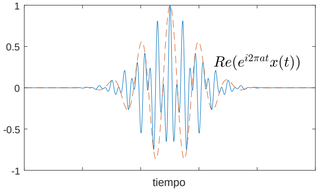
$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

Corrimiento en frecuencia: $\mathcal{F}\{e^{i2\pi at}x(t)\} = ?$, con $a \in \mathbb{R}$

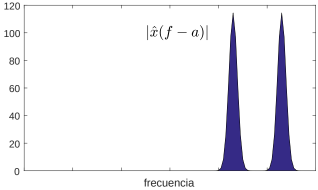



$\Longleftrightarrow$



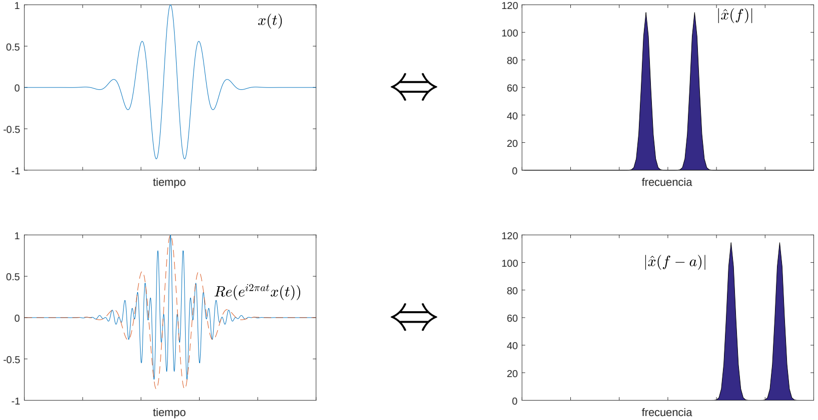

$\Longleftrightarrow$



# Más propiedades

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

Corrimiento en frecuencia: $\mathcal{F}\{e^{i2\pi at}x(t)\} =?$, con $a \in \mathbb{R}$




$$\mathcal{F}\{e^{i2\pi at}x(t)\} = \hat{x}(f-a)$$

# Más propiedades

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

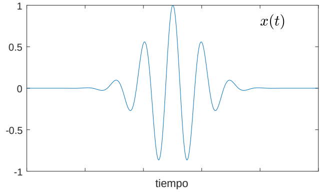
# Más propiedades

$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi f t}dt$
Derivación en el tiempo: $\mathcal{F}\{x'(t)\} =?$

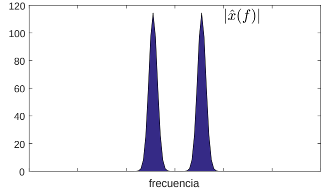
# Más propiedades

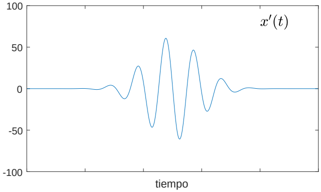
$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$

Derivación en el tiempo: $\mathcal{F}\{x'(t)\} = ?$

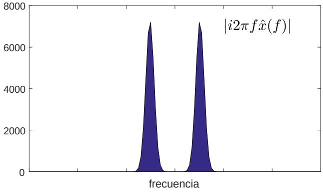



$\Longleftrightarrow$



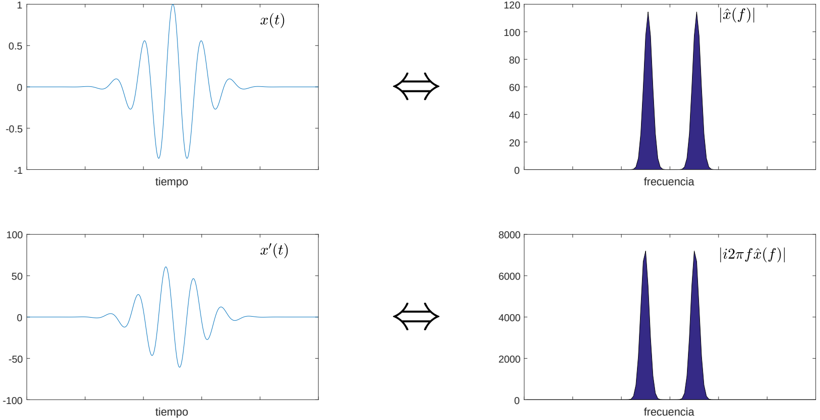

$\Longleftrightarrow$



# Más propiedades

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi f t}dt$$

Derivación en el tiempo: $\mathcal{F}\{x'(t)\} = ?$




$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = i2\pi f\hat{x}(f)$$

# Más propiedades

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

# Más propiedades

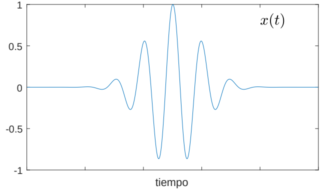
$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$

Derivación en la frecuencia: $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}'(f)\} =?$,

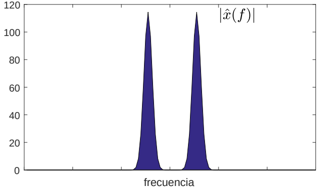
# Más propiedades

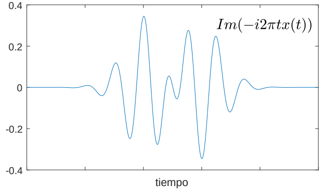
$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi f t}dt$$

Derivación en la frecuencia: $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}'(f)\} = ?,$

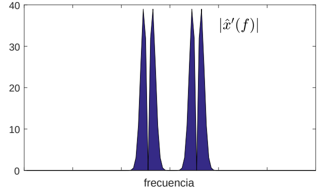



$\Leftrightarrow$



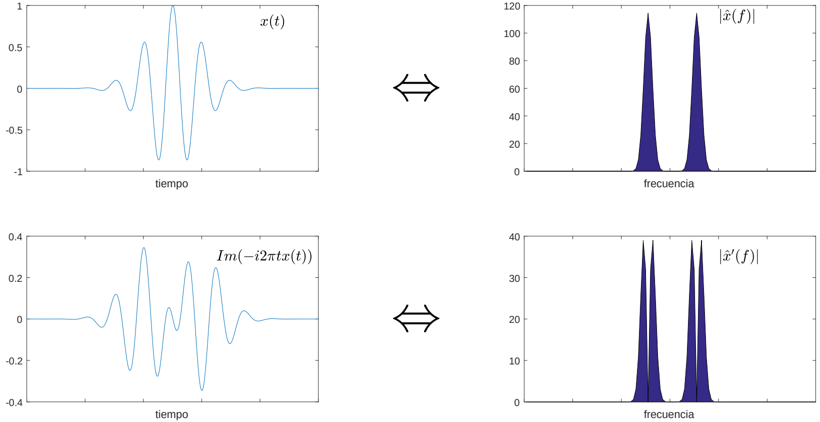

$\Leftrightarrow$



# Más propiedades

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Derivación en la frecuencia: $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}'(f)\} =?,$




$$\mathcal{F}\{-i2\pi t x(t)\} = \hat{x}'(f)$$

# Más propiedades

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

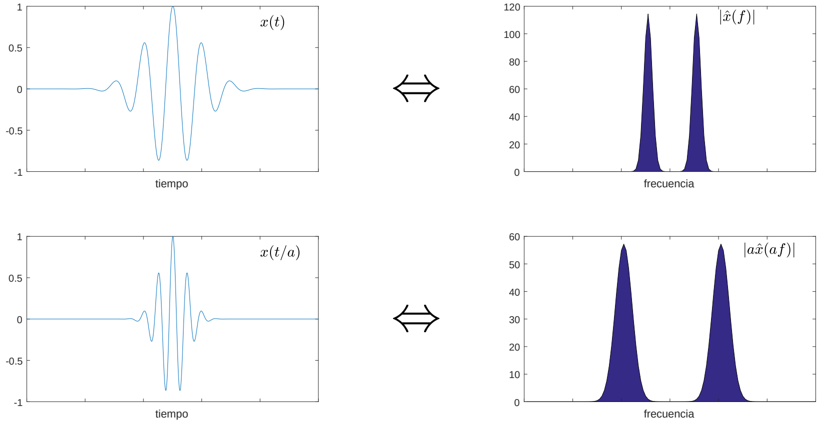
# Más propiedades

$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$
Escalado en el tiempo: $\mathcal{F}\{x(t/a)\} =?,$

# Más propiedades

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

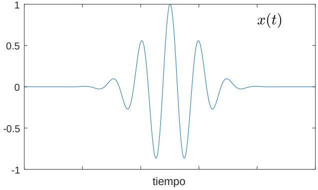
Escalado en el tiempo: $\mathcal{F}\{x(t/a)\} = ?$,



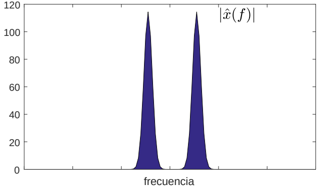
# Más propiedades

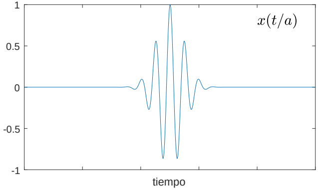
$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi f t}dt$

Escalado en el tiempo: $\mathcal{F}\{x(t/a)\} = ?$,

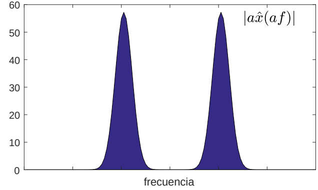



$\Leftrightarrow$




$\Leftrightarrow$




$\mathcal{F}\{x(t/a)\} = |a|\hat{x}(af)$

# Más propiedades

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

# Más propiedades

$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$

Recordemos que

$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f)e^{i2\pi ft}df$

# Más propiedades

$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$
Recordemos que
$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f)e^{i2\pi ft}df$
Entonces
$\mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} = x(-f)$
Propiedad de simetría o dualidad.

# Más propiedades

## Identidad de Plancherel

$$\langle x, y \rangle = \int x(t) y^*(t) dt = \int \hat{x}(f) \hat{y}^*(f) df = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

# Más propiedades

## Identidad de Plancherel

$$\langle x, y \rangle = \int x(t) y^*(t) dt = \int \hat{x}(f) \hat{y}^*(f) df = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

## Identidad de Parseval

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int |x(t)|^2 dt = \int |\hat{x}(f)|^2 df = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = \|\hat{x}\|^2$$

# Más propiedades

## Convolución

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

# Más propiedades

## Convolución

$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$

## T. de Fourier de una convolución temporal

$\mathcal{F}\{(x * y)(t)\} = ?$, con $x, y \in \mathbb{R}$

# Más propiedades

## Convolución

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

## T. de Fourier de una convolución temporal

$\mathcal{F}\{(x * y)(t)\} =?$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$\mathcal{F}\{(x * y)(t)\} = \hat{x}(f)\hat{y}(f)$

# Más propiedades

## Convolución

$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$

## T. de Fourier de una convolución temporal

$\mathcal{F}\{(x * y)(t)\} = ?$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$\mathcal{F}\{(x * y)(t)\} = \hat{x}(f)\hat{y}(f)$

## T. de Fourier de un producto

$\mathcal{F}\{x(t)y(t)\} = ?$, con $x, y \in \mathbb{R}$

# Más propiedades

## Convolución

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

## T. de Fourier de una convolución temporal

$\mathcal{F}\{(x * y)(t)\} = ?$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$\mathcal{F}\{(x * y)(t)\} = \hat{x}(f)\hat{y}(f)$

## T. de Fourier de un producto

$\mathcal{F}\{x(t)y(t)\} = ?$, con $x, y \in \mathbb{R}$

$\mathcal{F}\{x(t)y(t)\} = (\hat{x} * \hat{y})(f)$