Análisis Tiempo-Frecuencia y Descomposición de Señales
Clase 2

Dr. Marcelo Alejandro Colominas
macolominas@conicet.gov.ar

Lab. Señales y Dinámicas no Lineales
Instituto de Investigación y Desarrollo en Bioingeniería y Bioinformática (IBB)
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina

2019

LABORATORIO DE SEÑALES Y DINÁMICAS NO LINEALES
LSyDnL
FI-UNER · Entre Ríos · Argentina

UNER Facultad de Ingeniería

CONICET

Contenidos

Contenidos

Si hablamos de funciones AM-FM, la idea de una frecuencia instantánea surge naturalmente. Para una señal de la forma

Si hablamos de funciones AM-FM, la idea de una frecuencia instantánea surge naturalmente. Para una señal de la forma

$$x(t) = a(t)\cos\left(2\pi\phi(t)\right),$$

Si hablamos de funciones AM-FM, la idea de una frecuencia instantánea surge naturalmente. Para una señal de la forma

$$x(t) = a(t)\cos\left(2\pi\phi(t)\right),$$

podemos definir la frecuencia instantánea como la tasa de cambio del argumento del coseno:

Si hablamos de funciones AM-FM, la idea de una frecuencia instantánea surge naturalmente. Para una señal de la forma

$$x(t) = a(t)\cos\left(2\pi\phi(t)\right),$$

podemos definir la frecuencia instantánea como la tasa de cambio del argumento del coseno:

$$f(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

Si consideramos una función $b(t)$, $0 < b(t) < 1$, entonces podemos escribir:

Si consideramos una función $b(t)$, $0 < b(t) < 1$, entonces podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a(t)\cos(2\pi\phi(t)), \\
&= \frac{a(t)}{b(t)} b(t)\cos(2\pi\phi(t)), \\
&= \tilde{a}(t)\cos(\tilde{\phi}(t)),
\end{aligned}
$$

Si consideramos una función $b(t)$, $0 < b(t) < 1$, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t)\cos(2\pi\phi(t)), \\ &= \frac{a(t)}{b(t)} b(t)\cos(2\pi\phi(t)), \\ &= \tilde{a}(t)\cos(\tilde{\phi}(t)), \end{aligned}$$

con $\tilde{a}(t) = a(t)/b(t)$ y $\tilde{\phi}(t) = \arccos(b(t)\cos(2\pi\phi(t)))$.

$$A\cos(2\pi f_0 t) = Re(Ae^{i2\pi f_0 t})$$

$$A\cos(2\pi f_0 t) = Re(Ae^{i2\pi f_0 t})$$

Para una señal $x(t)$ se define su transformada de Hilbert (en inglés, *Hilbert Transform*, HT) como

$$A\cos(2\pi f_0 t) = Re(Ae^{i2\pi f_0 t})$$

Para una señal $x(t)$ se define su transformada de Hilbert (en inglés, *Hilbert Transform*, HT) como

$$y(t) = \mathcal{H}\left\{x(t)\right\} = \frac{1}{\pi}(\mathrm{VP})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau,$$

$$A\cos(2\pi f_0 t) = Re(Ae^{i2\pi f_0 t})$$

Para una señal $x(t)$ se define su transformada de Hilbert (en inglés, *Hilbert Transform*, HT) como

$$y(t) = \mathcal{H}\left\{x(t)\right\} = \frac{1}{\pi}(\mathrm{VP})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau,$$

donde VP indica el valor principal de Cauchy.

Podemos definir la señal analítica $z_x(t)$ de la forma

Podemos definir la señal analítica $z_x(t)$ de la forma

$$z_x(t) = x(t) + iy(t) = A(t)e^{i\theta(t)},$$

Podemos definir la señal analítica $z_x(t)$ de la forma

$$z_x(t) = x(t) + iy(t) = A(t)e^{i\theta(t)},$$

en la cual

Podemos definir la señal analítica $z_x(t)$ de la forma

$$z_x(t) = x(t) + iy(t) = A(t)e^{i\theta(t)},$$

en la cual

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

Podemos definir la señal analítica $z_x(t)$ de la forma

$$z_x(t) = x(t) + iy(t) = A(t)e^{i\theta(t)},$$

en la cual

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

y

Podemos definir la señal analítica $z_x(t)$ de la forma

$$z_x(t) = x(t) + iy(t) = A(t)e^{i\theta(t)},$$

en la cual

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

y

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right).$$

Podemos definir la señal analítica $z_x(t)$ de la forma

$$z_x(t) = x(t) + iy(t) = A(t)e^{i\theta(t)},$$

en la cual

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

y

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right).$$

Entonces la frecuencia instantánea es

Podemos definir la señal analítica $z_x(t)$ de la forma

$$z_x(t) = x(t) + iy(t) = A(t)e^{i\theta(t)},$$

en la cual

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

y

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right).$$

Entonces la frecuencia instantánea es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}.$$

Podemos definir la señal analítica $z_x(t)$ de la forma

$$z_x(t) = x(t) + iy(t) = A(t)e^{i\theta(t)},$$

en la cual

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

y

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right).$$

Entonces la frecuencia instantánea es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}.$$

Limitaciones

Teoremas de Bedrosian (1963) y Nuttall (1966).

Podemos definir la señal analítica $z_x(t)$ de la forma

$$z_x(t) = x(t) + iy(t) = A(t)e^{i\theta(t)},$$

en la cual

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

y

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right).$$

Entonces la frecuencia instantánea es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}.$$

Limitaciones

Teoremas de Bedrosian (1963) y Nuttall (1966). Caso multicomponente.

$$\hat{z}_x(f) = \begin{cases} 0, \text{ si } f < 0 \\ \hat{x}(0), \text{ si } f = 0 \\ 2\hat{x}(f), \text{ si } f > 0 \end{cases}$$

Contenidos

Definición clásica

Sea $x \in L^2(\mathbb{R})$ ($\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$), y $g \in \mathbb{R}$ par ($g(t) = g(-t)$), con $\|g\| = 1$. Entonces $V_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f u}du$

Definición clásica

Sea $x \in L^2(\mathbb{R})$ ($\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$), y $g \in \mathbb{R}$ par ($g(t) = g(-t)$), con $\|g\| = 1$. Entonces
$V_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f u} du$

Definición modificada

$F_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f (u-t)} du$

Definición clásica

Sea $x \in L^2(\mathbb{R})$ ($\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$), y $g \in \mathbb{R}$ par ($g(t) = g(-t)$), con $\|g\| = 1$. Entonces
$V_x^g(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f u} du$

Definición modificada

$F_x^g(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f(u-t)} du$
$F_x^g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$

Definición clásica

Sea $x \in L^2(\mathbb{R})$ $(\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty)$, y $g \in \mathbb{R}$ par $(g(t) = g(-t))$, con $\|g\| = 1$. Entonces
$V_x^g(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi fu}du$

Definición modificada

$F_x^g(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$
$F_x^g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$

Relación

$F_x^g(t, f) = e^{i2\pi ft}V_x^g(t, f)$

$$F_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$$

$$F_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$$

STFT como producto interno

$F_x^g(t,f) = \langle x, \tilde{g}_{tf} \rangle$, con $\tilde{g}_{tf} = g(u-t)e^{i2\pi f(u-t)}$ (átomo tiempo-frecuencia)

$$F_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$$

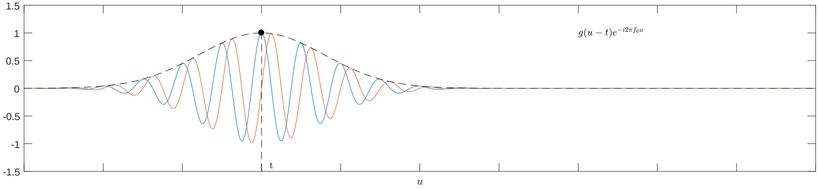
STFT como producto interno

$F_x^g(t,f) = \langle x, \tilde{g}_{tf} \rangle$, con $\tilde{g}_{tf} = g(u-t)e^{i2\pi f(u-t)}$ (átomo tiempo-frecuencia)

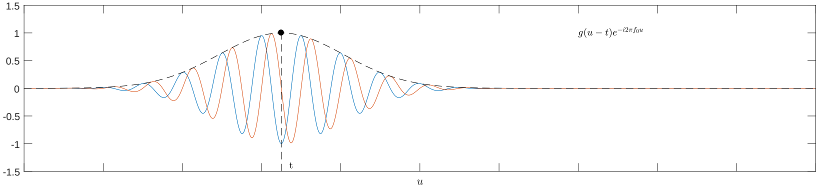
STFT como convolución

$F_x^g(t,f) = (x * g_f)(t)$, con $g_f(t) = g(t)e^{i2\pi ft}$

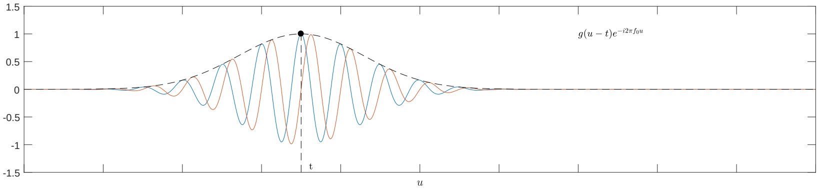
Átomos



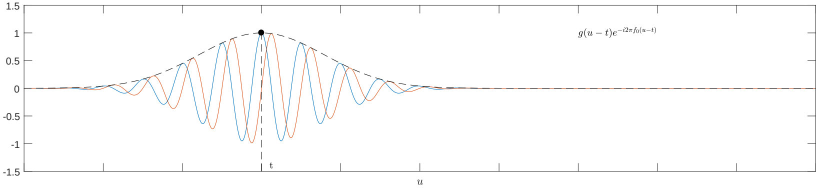
Átomos



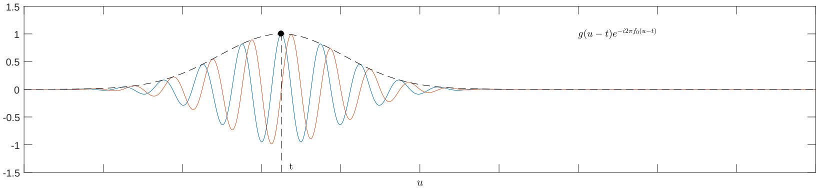
Átomos



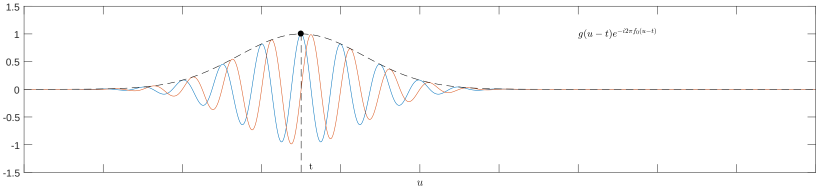
Átomos



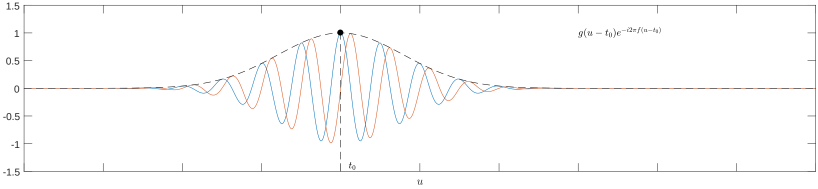
Átomos



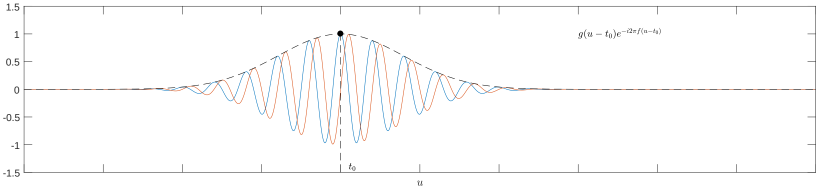
Átomos



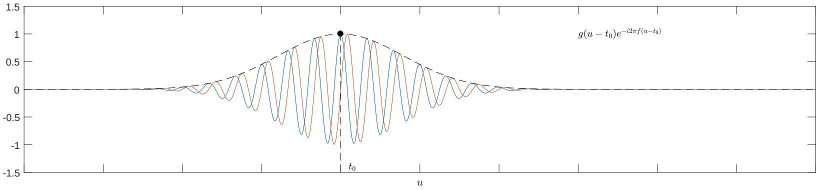
Átomos



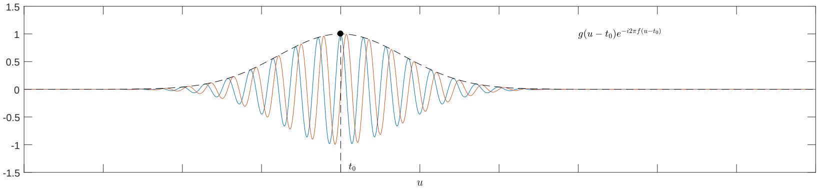
Átomos



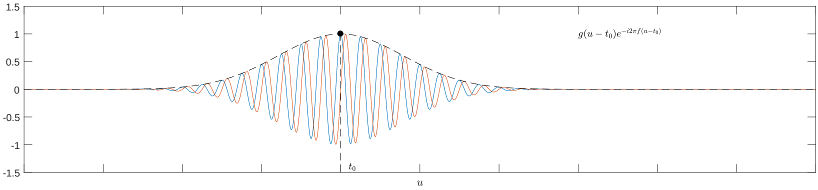
Átomos



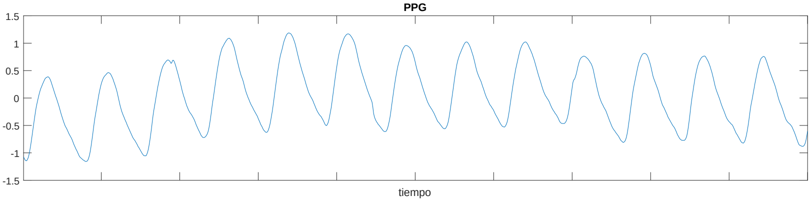
Átomos



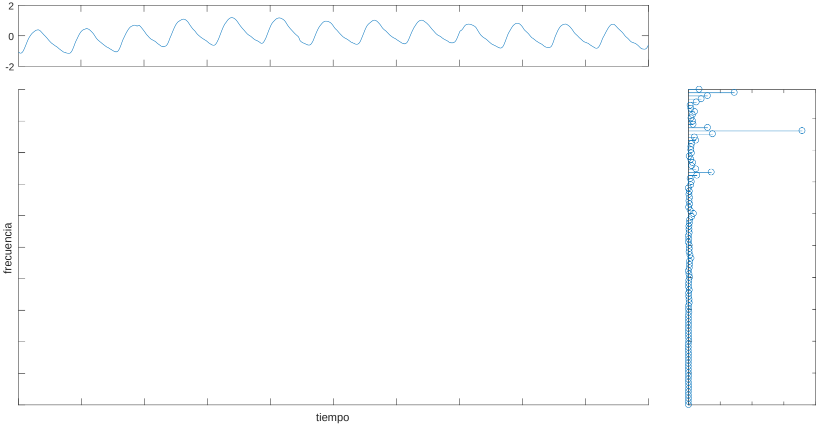
Átomos



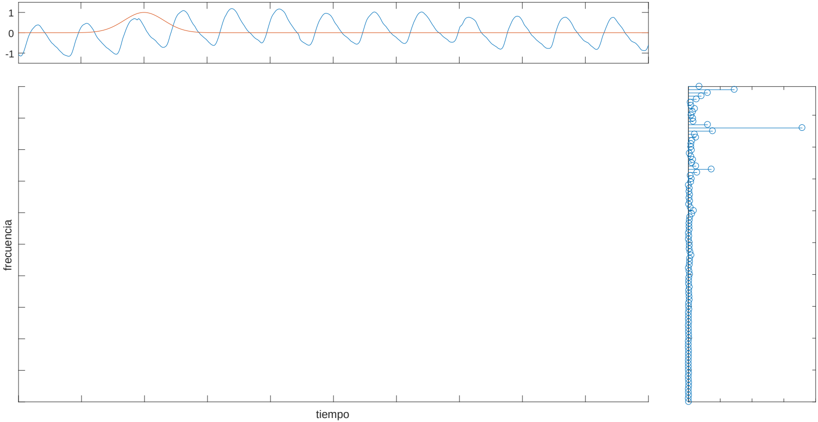
Interpretación en el dominio temporal



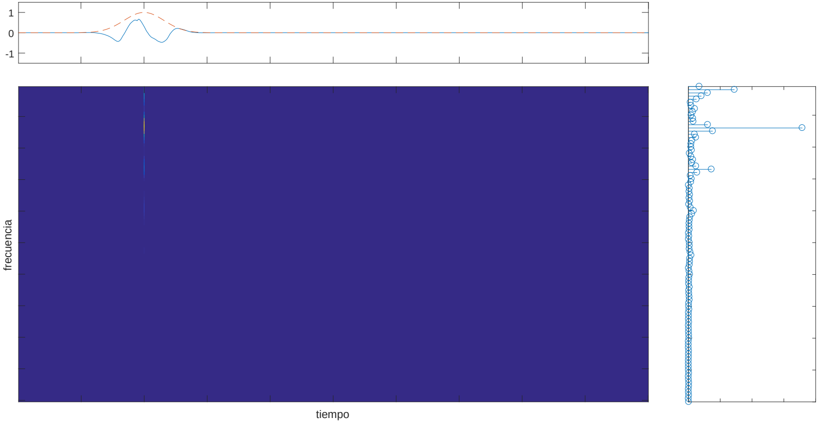
Interpretación en el dominio temporal



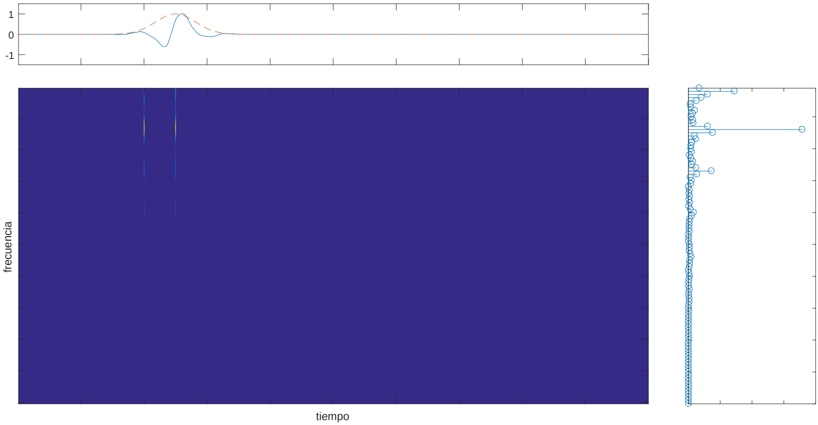
Interpretación en el dominio temporal



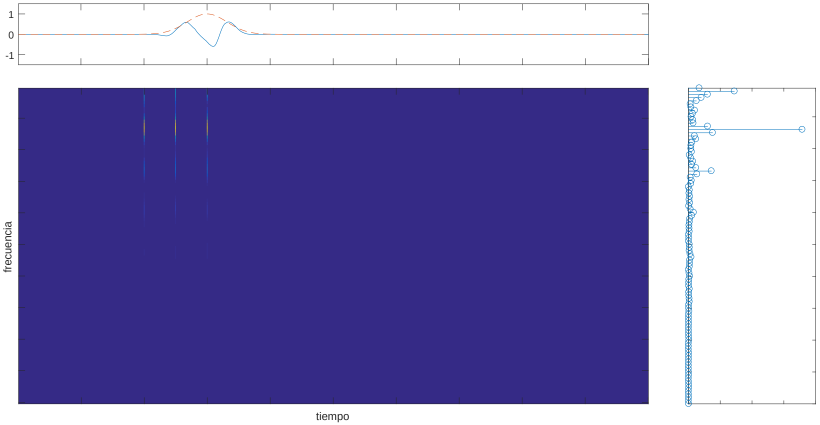
Interpretación en el dominio temporal



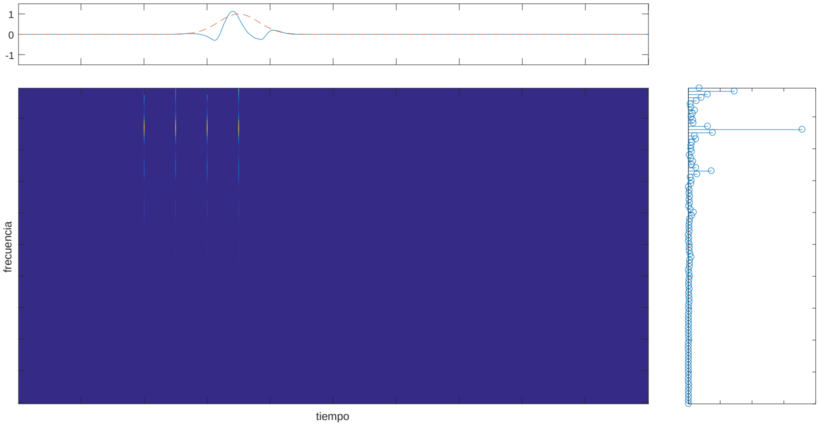
Interpretación en el dominio temporal



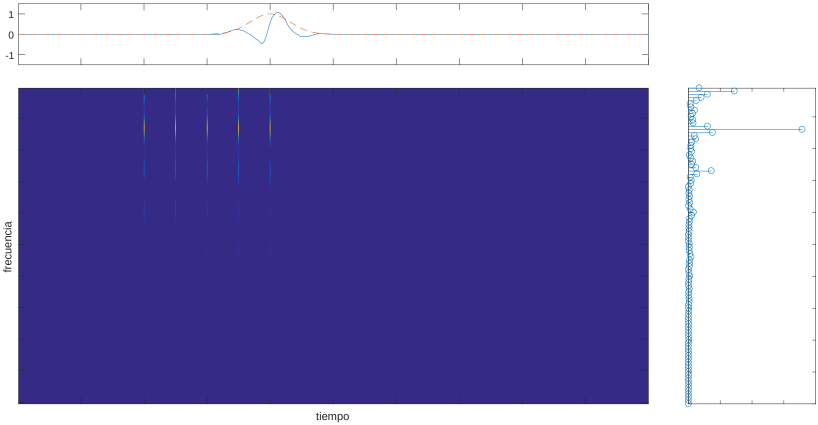
Interpretación en el dominio temporal



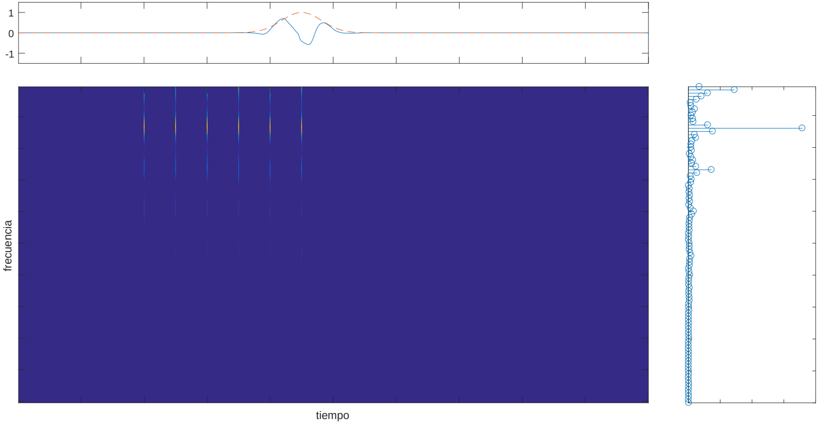
Interpretación en el dominio temporal



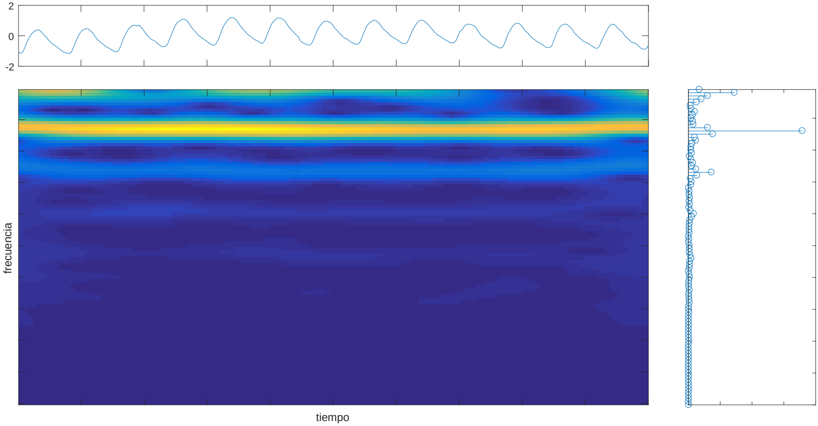
Interpretación en el dominio temporal



Interpretación en el dominio temporal



Interpretación en el dominio temporal



Interpretación en frecuencia

$$F_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$$

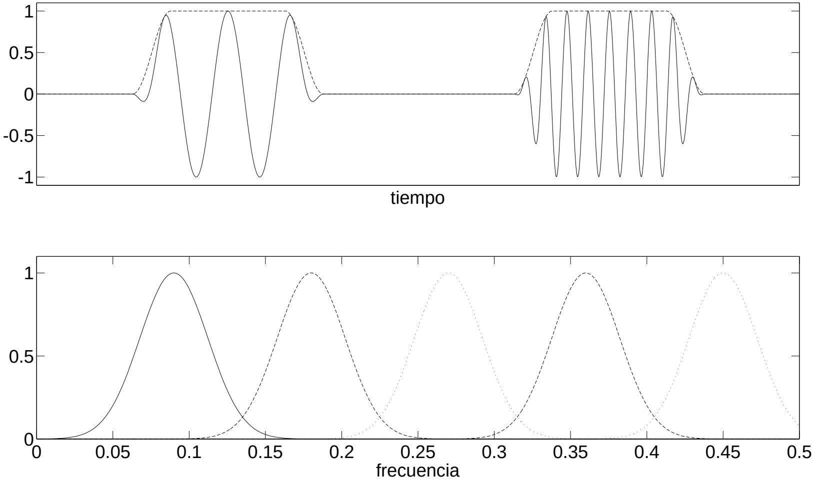
Interpretación en frecuencia

$$F_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$$
$$F_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(q)\hat{g}(q-f)e^{i2\pi qt}dq$$

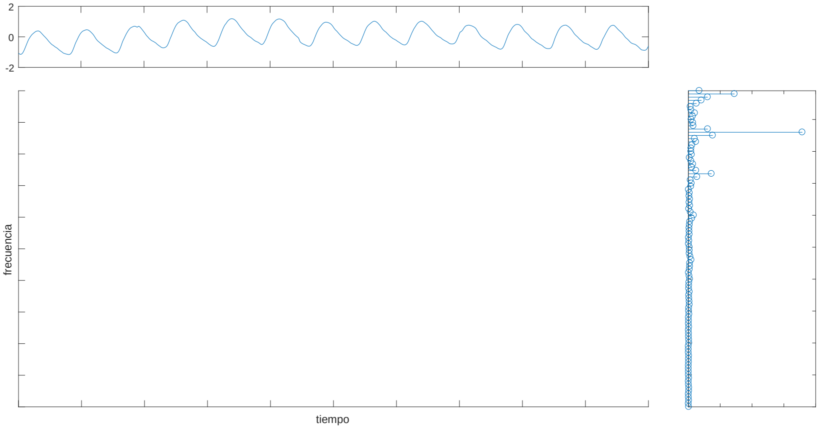
Interpretación en frecuencia

$$F_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(u-t)e^{-i2\pi f(u-t)}du$$
$$F_x^g(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(q)\hat{g}(q-f)e^{i2\pi qt}dq$$
$$F_x^g(t,f) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}(q)\hat{g}(q-f)\}$$

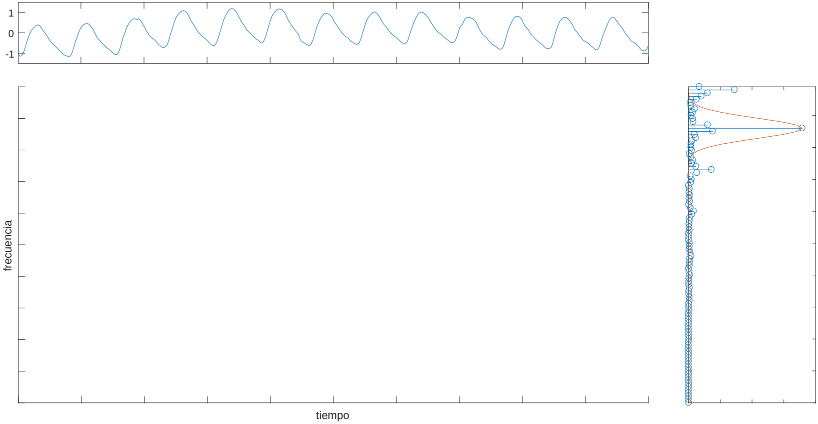
Interpretación en frecuencia



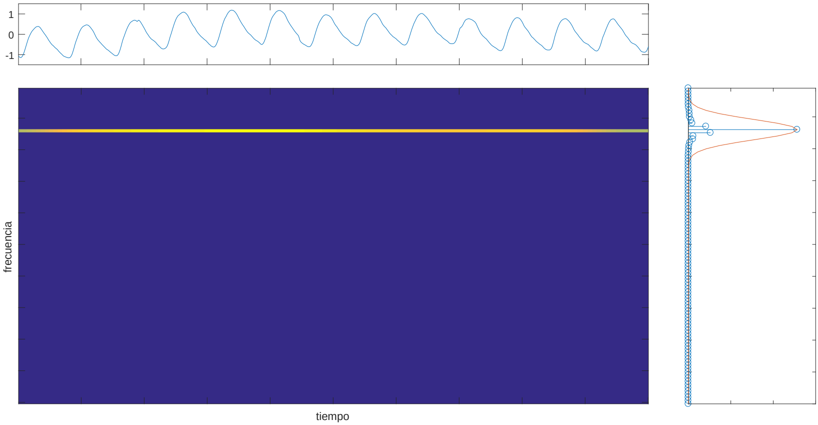
Interpretación en frecuencia



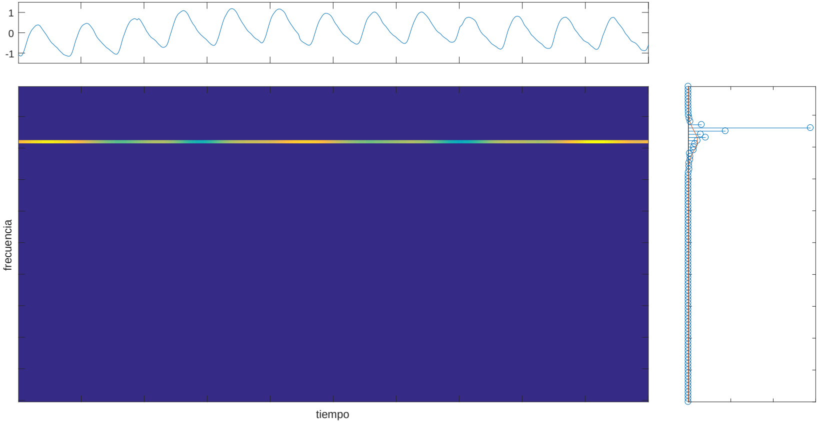
Interpretación en frecuencia



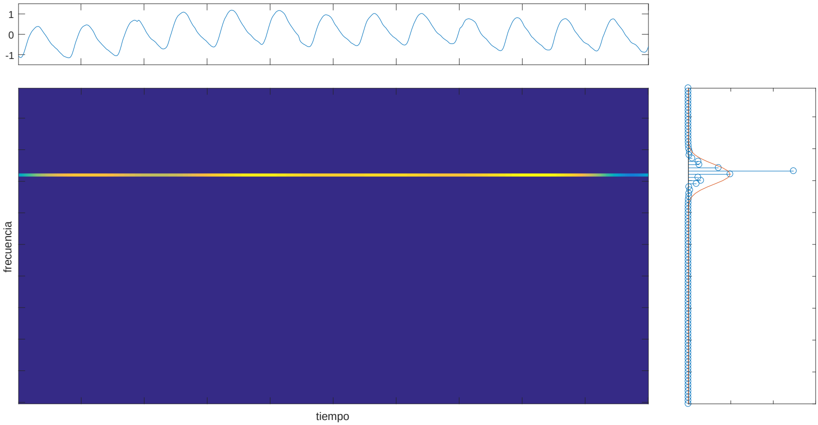
Interpretación en frecuencia



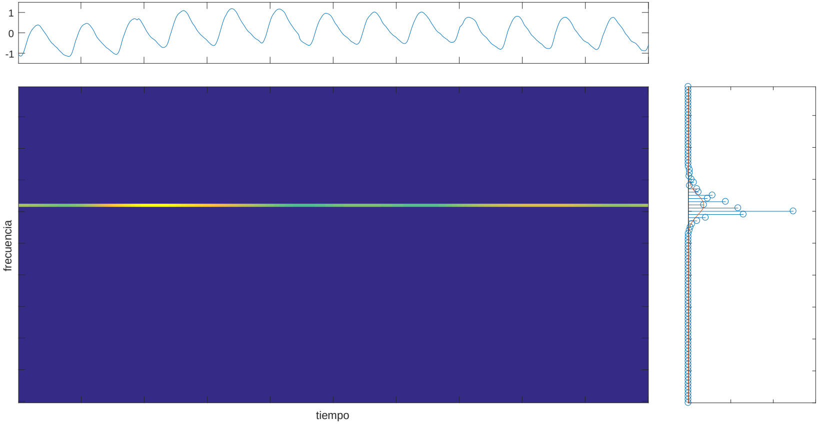
Interpretación en frecuencia



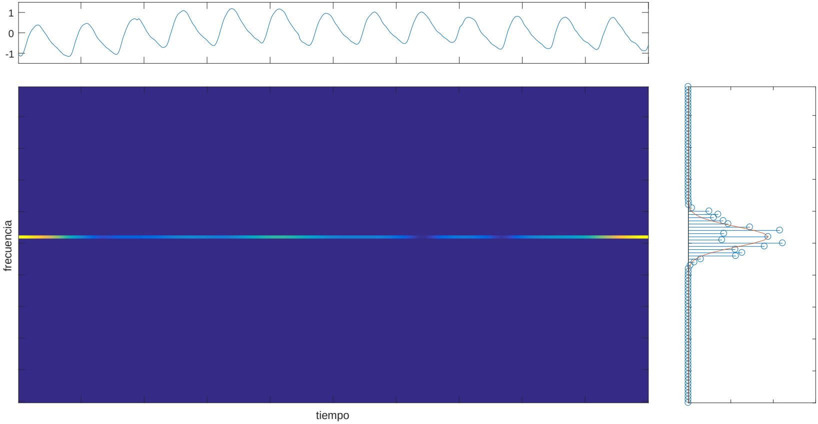
Interpretación en frecuencia



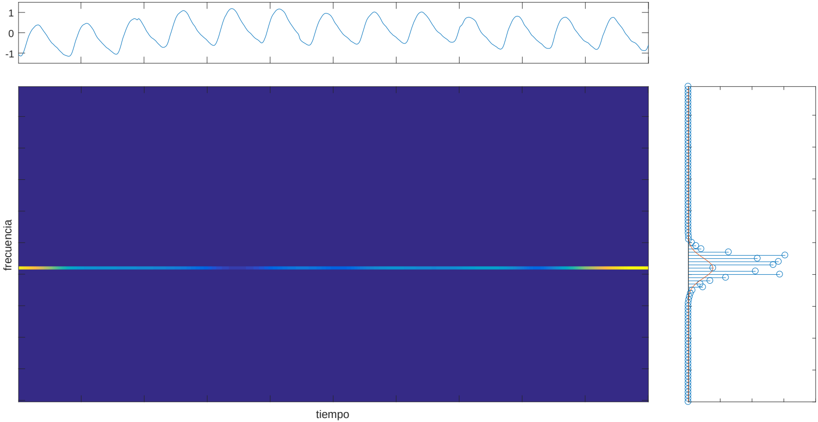
Interpretación en frecuencia



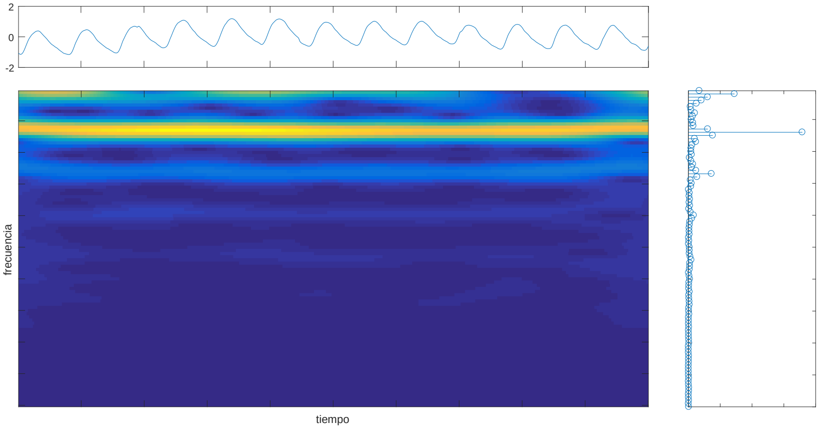
Interpretación en frecuencia



Interpretación en frecuencia



Interpretación en frecuencia



Reconstrucción

$$x(t) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} F_x^g(u,f) g(t-u) e^{i2\pi f(t-u)} df du$$

Reconstrucción

$x(t) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} F_x^g(u,f) g(t-u) e^{i2\pi f(t-u)} df du$
$x(t) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} F_x^g(u,f) h(t-u) e^{i2\pi f(t-u)} df du$, con
$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) h^*(t) dt = 1$

Reconstrucción

$x(t) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} F_x^g(u,f) g(t-u) e^{i2\pi f(t-u)} df du$
$x(t) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} F_x^g(u,f) h(t-u) e^{i2\pi f(t-u)} df du$, con
$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) h^*(t) dt = 1$
$x(t) = \frac{1}{g(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x^g(t,f) df$

Contenidos

En tiempo discreto

Definición

$F_x^g[n,k] = \sum_u x[u]g[u-n]e^{-i2\pi k\Delta f(u-n)}$,
con $n = 1 \dots N$ y $k = 0 \dots K-1$ $(K\Delta f = 1)$.

En tiempo discreto

Definición

$F_x^g[n,k] = \sum_u x[u]g[u-n]e^{-i2\pi k\Delta f(u-n)}$,
con $n = 1\dots N$ y $k = 0\dots K-1$ $(K\Delta f = 1)$.

Implementación con la FFT

FFT$\{x[n]\} = \hat{x}[k] = \sum_{n=1}^{N} x[n]e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}$, con $k = 0\dots N-1$.

En tiempo discreto

Definición

$F_x^g[n,k] = \sum_u x[u]g[u-n]e^{-i2\pi k\Delta f(u-n)}$,
con $n = 1 \ldots N$ y $k = 0 \ldots K-1$ $(K\Delta f = 1)$.

Implementación con la FFT

$\text{FFT}\{x[n]\} = \hat{x}[k] = \sum_{n=1}^{N} x[n]e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}$, con $k = 0 \ldots N-1$.
$F_x^g[n,k] = [\text{FFT}\{x[u]g[u-n]\}]^{\triangle}$,
con $[\cdot]^{\triangle}$ significando submuestreo de la FFT o FFT con zero-padding, según corresponda.

En tiempo discreto

Definición

$F_x^g[n,k] = \sum_u x[u]g[u-n]e^{-i2\pi k\Delta f(u-n)}$,
con $n = 1 \dots N$ y $k = 0 \dots K-1$ $(K\Delta f = 1)$.

Implementación con la FFT

FFT$\{x[n]\} = \hat{x}[k] = \sum_{n=1}^{N} x[n]e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}$, con $k = 0 \dots N-1$.
$F_x^g[n,k] = [\text{FFT}\{x[u]g[u-n]\}]^{\triangle}$,
con $[\cdot]^{\triangle}$ significando submuestreo de la FFT o FFT con zero-padding, según corresponda.
Implementación en el dominio frecuencial:
$F_x^g[n,k] = \text{iFFT}\{\hat{x}[q]\hat{g}[q-k]\}$

En tiempo discreto

Definición

$F_x^g[n,k] = \sum_u x[u]g[u-n]e^{-i2\pi k\Delta f(u-n)}$,
con $n = 1 \dots N$ y $k = 0 \dots K-1$ $(K\Delta f = 1)$.

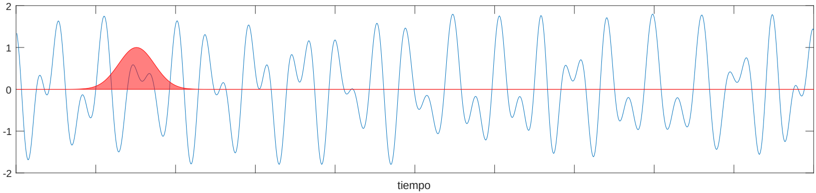
Implementación con la FFT

FFT$\{x[n]\} = \hat{x}[k] = \sum_{n=1}^{N} x[n]e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}$, con $k = 0 \dots N-1$.
$F_x^g[n,k] = [\text{FFT}\{x[u]g[u-n]\}]^{\triangle}$,
con $[\cdot]^{\triangle}$ significando submuestreo de la FFT o FFT con zero-padding, según corresponda.
Implementación en el dominio frecuencial:
$F_x^g[n,k] = \text{iFFT}\{\hat{x}[q]\hat{g}[q-k]\}$

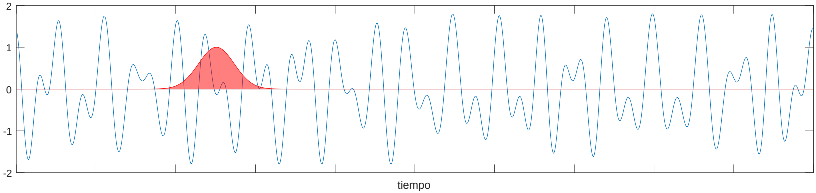
Reconstrucción

$x[n] = \frac{1}{g(0)K}\sum_{k=1}^{K} F_x^g[n,k]$

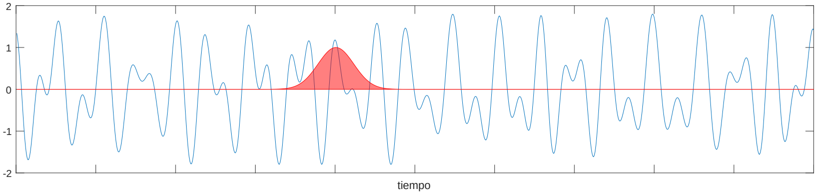
Efectos de borde



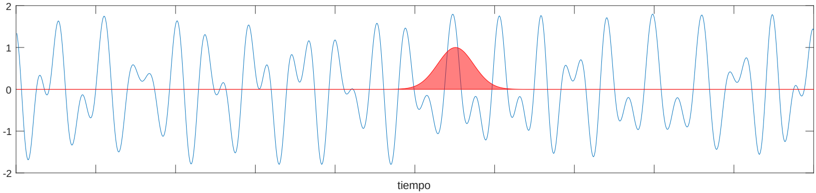
Efectos de borde



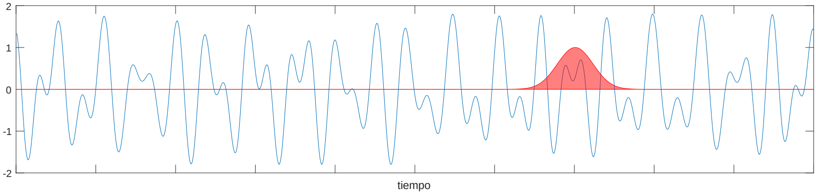
Efectos de borde



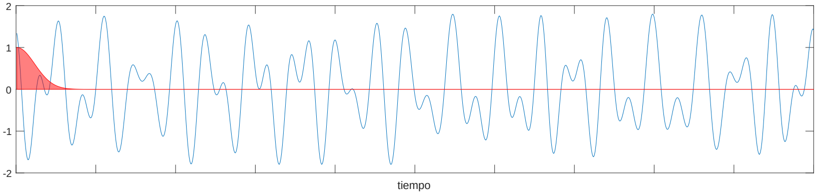
Efectos de borde



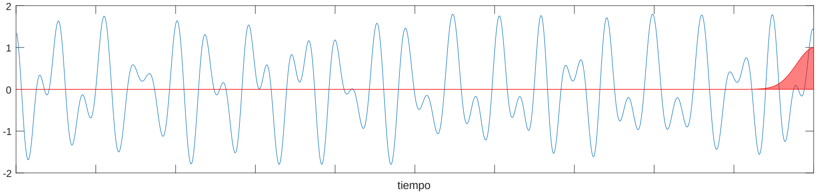
Efectos de borde



Efectos de borde



Efectos de borde



Efectos de borde