Proyecto Final 1

Considere una cuenca oceánica rectangular de dimensiones similares a la del Atlántico (Lx=4000 km, Ly=2000 km). El flujo está descrito por la solución de Stommel

$$\psi(x,y)=\frac{F\,L_y^2}{\pi^2 K(e^{m_1 L_x}-e^{m_2 L_x})}\sin(\pi\, y/L_y)[(1-e^{m_2 L_x})e^{m_1 x}-(1-e^{m_1 L_x})e^{m_2 x}-e^{m_1 L_x}+e^{m_2 L_x}]$$

$$m_1=-\beta/2\mathrm{K}+\sqrt{\pi^2/L_y^2+\beta^2/4\mathrm{K}^2}$$

$$m_2=-\beta/2\mathrm{K}-\sqrt{\pi^2/L_y^2+\beta^2/4\mathrm{K}^2}$$

donde K/β=250 km y F se elije de forma tal que la velocidad en el interior sea 1 cm/s.

Asuma que existe una fuente de un gas contaminante Q en el quinto mas al norte de la cuenca y que la concentración en el océano tiende a la concentración en superficie Q_S con una cierta escala τ. Entonces, la evolución de Q estará dada por

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+J(\psi,Q)=K\nabla^2 Q-\frac{1}{\tau}(Q-Q_S)$$

donde

$Q_S=Q_0 \quad si \quad 0\leqslant L_x \;\; y \;\; \frac{4}{5}L_y\leqslant y\leqslant L_y$ y Q_S=0 en el resto de la cuenca.

Asumiendo una escala de relajamiento de 10 días y que la concentración en superficie es la unidad, encuentre la distribución de Q en el giro subtropical luego de 1 año con condiciones iniciales Q=0 en toda la cuenca. Usar $K=10^{-9}$ m^2/s.

Metodología

1) Use el esquema "Leap-frog" para resolver la ecuación (excepto en el primer paso).
   Notar que el paso de tiempo está limitado por CFL y por el criterio del término difusivo.
2) Use el jacobiano de Arakawa.
3) Use una condición de borde de no-flujo, o sea
   $$\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \quad en \quad x=0,L_x$$
   $$\frac{\partial Q}{\partial y}=0 \quad en \quad x=0,L_y$$
4) Para eliminar el modo computacional use el filtro de Robert con parametro γ chico (por ej. 0.0005).

Proyecto Final 2

El modelo de pronóstico mas simple es la ecuación de vorticidad barotrópica, la cual en un plano-β puede ser escrita de la forma

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0$$
$$q = \nabla^2 \psi + f \quad .$$

Resuelva la ecuación en un canal centrado en 45° imponiendo condiciones de borde periódicas en la dirección zonal y un valor constante en las fronteras meridionales y estudie la inestabilidad barotrópica para un flujo inicial de la forma

$$\psi = (L_y u_M / \pi) \cos(\pi \, y / L_y)$$

Use $u_M=10^{-3}$, Lx=5000 km, Ly=2000 km.

La resolución de la ecuación involucra dos pasos: un primer paso donde se integra la ecuación para calcular q conociendo ψ y un segundo paso donde se calcula ψ a partir del q calculado.

Metodología

1) Use el esquema Leapfrog para resolver la ecuación (excepto en el primer paso).
2) Verifique que se cumple el criterio CFL
3) Use el jacobiano de Arakawa
4) Para eliminar el modo computacional use el filtro de Robert con parametro γ chico (por ej. 0.0005).
5) Para resolver la ecuación $q = \nabla^2 \psi$ use la subrutina SOR (Simultaneous Overrelaxation).
6) Considere:
   1. Flujo cortante estacionario
   2. Ondas de Rossby sin flujo básico
   3. Ondas de Rossby en un flujo básico

Proyecto Final 3

La evolución de la atmósfera (u océano) equatorial a una perturbación térmica (o mecánica) puede ser estudiada mediante el uso de un modelo de aguas someras en un plano β equatorial linealizado con respecto a un estado base en reposo. Las ecuaciones de este modelo son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v = \frac{-\partial \Phi}{\partial x} - \alpha u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u = \frac{-\partial \Phi}{\partial y} - \alpha v$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gH\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = F$$

donde $\Phi = gh$ es el geopotencial de la perturbación y *F* es el forzante térmico que aparece como una fuente de masa localizada en las ecuaciones. F es de la forma

$$F = Ae^{-(x^2/R_x^2 + y^2/R_y^2)} \sin(\pi t/\tau)$$

donde $R_x=10^6$ m, $R_y=6*10^5$ m y es tal que perturba la atmósfera solamente durante $\tau = 5$ días. $A=2*10^{-3}$ y asuma que $gH=324$ m^2/s^2.

Las ecuaciones incluyen un término de disipación proporcional a la velocidad con $\alpha=10^{-6}$ s^{-1}.

Considere una cuenca tropical de dimensiones $L_x=40000$ km y $L_y=8000$ km, periódica en x.

1) Estudie la respuesta de la atmósfera (u océano) al forzante F ubicado en el centro de la cuenca (por ejemplo durante 10 días) y grafique la evolución del campo de velocidades y el de geopotencial. Interprete la solución.
2) ¿Qué ocurre si se pone la fuente de calor fuera del ecuador?

Use el esquema Leapfrog, recordando que se debe usar un filtro para eliminar el modo computacional.

Proyecto final 4

El giro de Stommel es la solución a la siguiente ecuación cuasigeostrófica, lineal, con fricción en el fondo y forzada por los vientos que se asumen sinusoidales en la dirección meridional

$$K\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{-\tau_0\pi}{\rho_0 D_0 L_y}\sin(\pi\frac{y}{L_y}) \qquad (1)$$

con condiciones de borde $\psi=0, en\, x=0, L_x, y=0, L_y$. $\tau_{0,}\rho_0\, y\, D_0$ son la magnitud del esfuerzo del viento, la densidad del océano y la profundidad, respectivamente.

Resuelva la ecuación numéricamente en una región que represente en forma aproximada la cuenca Atlántica con Lx=4000 km y Ly=2000 km. Puede elegir las constantes $\tau_{0,}\rho_0\, y\, D_0$ tal que el flujo en el interior sea cercano a 1 cm/s.

Para resolver la ecuación se sugiere adimensionalizarla y utilizar la subrutina SOR (Simultaneous Over-Relaxation).

a) Compare la solución de los casos $K/\beta=500, 250, 100\, km$.

b) Encuentre la solución analítica de (1) y compare con la solución numérica. Discuta la exactitud de la solución numérica en función de la resolución de la grilla.

```
-----------------------------------------------------------------------
!      subroutine SOR(a,b,c,d,e,f,u,imax,jmax,rjac)
!-----------------------------------------------------------------------
c$$$  simultaneous overrelaxation soution of the Hemlholtz equation
c$$$  with Chebyshev acceleration. a,b,c,d,e and f are input as
c$$$  the coef. of the equation a(i,j) u(i+1,j) + b(i,j) u(i-1,j) +
c$$$  c(i,j) u(i,j+1)+ d(i,j) u(i,j-1) + e(i,j) u(i,j) = f(i,j), each
c$$$  dimensioned to the grid size imax and jmax, u is the input as the
c$$$  initial guess to the solution and returns with the final value.
c$$$  rjac is input as the spectral radius of the Jacobi interaction
c$$$  an estimate of it (ref. Numerical Recipes, capitulo EDPs).
c$$$  A modification has been made in order to satisfy the
c$$$  periodic BC in the x-direction.
c
        subroutine sor(a,b,c,d,e,f,u,imax,jmax,rjac)
        dimension a(imax,jmax),b(imax,jmax),c(imax,jmax),
     $            d(imax,jmax),e(imax,jmax),f(imax,jmax),u(imax,jmax)
        parameter (maxits=10000,eps=1.e-3,zero=0.e0,half=0.5e0,
     $                qtr=.25e0,one=1.e0)
        anormf=zero
        do 12 i=2,imax-1
            do 11 j=2, jmax-1
                anormf=anormf+abs(f(i,j))
 11         continue
 12     continue
        omega=one
        do 15 n=1,maxits
            anorm=zero
            do 14 i=2,imax-1
                if(i.eq.2) then
                    do 16 j=2,jmax-1
                    if (mod(i+j,2).eq.mod(n,2)) then
                    resid=a(i,j)*u(i+1,j)+b(i,j)*u(imax-1,j)+
     $                  c(i,j)*u(i,j+1)+d(i,j)*u(i,j-1)+e(i,j)*u(i,j)-f(i,j)
                    anorm=anorm+abs(resid)
                    u(i,j)=u(i,j)-omega*resid/e(i,j)
                    end if
 16                 continue
                else if (i.eq.imax-1) then
                    do 17 j=2,jmax-1
                    if (mod(i+j,2).eq.mod(n,2)) then
                    resid=a(i,j)*u(2,j)+b(i,j)*u(i-1,j)+
     $                  c(i,j)*u(i,j+1)+d(i,j)*u(i,j-1)+e(i,j)*u(i,j)-f(i,j)
                    anorm=anorm+abs(resid)
                    u(i,j)=u(i,j)-omega*resid/e(i,j)
                    end if
 17                 continue
                else
                    do 13 j=2,jmax-1
```

```
                        if (mod(i+j,2).eq.mod(n,2)) then
                        resid=a(i,j)*u(i+1,j)+b(i,j)*u(i-1,j)+
     $                      c(i,j)*u(i,j+1)+d(i,j)*u(i,j-1)+e(i,j)*u(i,j)-f(i,j)
                        anorm=anorm+abs(resid)
                        u(i,j)=u(i,j)-omega*resid/e(i,j)
                        end if
   13                   continue
                    end if
   14           continue
            if (n.eq.1) then
                omega=one/(one-half*rjac**2)
            else
                omega=one/(one-qtr*rjac**2*omega)
            end if

c periodic B.C. for psi

            do 18 j=2,jmax-1
                u(1,j)=u(imax-1,j)
                u(imax,j)=u(2,j)
   18       continue

            if(n.gt.1).and.(anorm.lt.eps*anormf)) return

   15 continue
      pause 'maxits exceeded'
      end
```