SMA0300 Geometria Analítica
Quarta Lista de Exercícios – Produto escalar, Produto vetorial e Produto Misto

Docentes responsáveis: Carlos Maquera, Farid Tari, Karla Spatti, Maria do Carmo Carbinatto, Miriam Manoel, Regilene Oliveira, Roberta Wik Atique

18 de abril de 2022

Nos exercício 1 a 12, $\mathbf{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal de V^3 e as coordenadas de vetores estão expressos nesta base $\mathbf{E}$.

Nos exercício 13 a 26, $\mathbf{C} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é a base canônica (ortonormal e positivamente orientada segundo a regra da mão direita) de V^3 e as coordenadas de vetores estão expressos nesta base $\mathbf{C}$.

O produto vetorial é comumente denotado por $\wedge$ ou $\times$.

Exercício 1. Sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $\|\vec{u}\| = 3/2$, $\|\vec{v}\| = 1/2$, $\|\vec{w}\| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

Exercício 2. Demonstrar que a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados; em outras palavras, provar que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\,\|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{v}\|^2$.

Exercício 3. (a) Prove que $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w})$, quaisquer que sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(b) Dados os vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sejam $\alpha = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, $\beta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{w})$, $\gamma = \text{ang}(\vec{v}, \vec{w})$. Prove que $-3/2 \leq \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3$.

(c) Supondo, no item anterior, que $\alpha = \beta = \gamma$, verifique se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base.

Exercício 4. Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

1. Determine um vetor unitário e paralelo ao vetor $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Determine o cosseno do ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 5. Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ formam ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos. Se $\|\vec{x}\| = 1$, $\|\vec{y}\| = 2$, $\vec{u} = \vec{x} + 2\vec{y}$ e $\vec{v} = 2\vec{x} - \vec{y}$, determine o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 6. Sejam os vetores $\vec{u} = (2, m, -1)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2m - 1, -2, 4)$. Determine m de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.

Exercício 7. Determine o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -42$.

Exercício 8. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (3, 1, 0)$, determine o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot \vec{u} = -16$, $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{x} \cdot \vec{w} = 3$.

Exercício 9. Calcule $\|2\vec{u} + 4\vec{v}\|^2$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$ e a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{2\pi}{3}$.

Exercício 10. Decomponha o vetor $\vec{v} = (-1, -3, 2)$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, de modo que $\vec{p}$ seja paralelo e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u} = (0, 1, 3)$.

Exercício 11. Determine um vetor $\vec{r}$ com norma $\sqrt{5}$ tal que $\vec{r}$ seja ortogonal a $(2, 1, -1)$ e tal que os vetores $\vec{r}$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$ sejam coplanares.

Exercício 12. Um vetor $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ ângulos de $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{2\pi}{3}$ radianos, respectivamente. Determine as coordenadas do $\vec{v}$, em relação à base $\mathbf{E}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 2$.

Exercício 13. Sejam

$$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),\ \ \vec{v} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}),\ \ \vec{w} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

(i) Prove que $\mathbf{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal positiva.

(ii) Calcule a área do triângulo determinado pelos vetores $2\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

(iii) Determine a projeção ortogonal do vetor $3\vec{u} + 5\vec{v}$ sobre o vetor $2\vec{u}$.

Exercício 14. Sejam os vetores $\vec{u} = (3\,,1\,,-1)$ e $\vec{v} = (a\,,0\,,2)$. Calcule o valor de $a \in \mathbb{R}$, para que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$.

Exercício 15. Sabendo que a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$, e que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 7$, calcule $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ e $\|\frac{1}{3}\vec{u} \times \frac{3}{4}\vec{v}\|$.

Exercício 16. Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e a $\vec{v} = (-3, 3, 3)$.

Exercício 17. Sabe-se que $\vec{u}$ é ortogonal a $(1, 1, 0)$ e a $(-1, 0, 1)$, tem norma $\sqrt{3}$ e, sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $(0, 1, 0)$ tem-se $\cos\theta > 0$. Ache $\vec{u}$.

Exercício 18. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ onde $\vec{AB} = (1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (0, 1, 1)$ e $\vec{AD} = (-4, 0, 0)$.

Exercício 19. Calcule a área do triângulo ABC onde $\vec{AC} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{AB} = (0, 1, 3)$.

Exercício 20. Dados os vetores $\vec{u} = (0\,,1\,,-1)$, $\vec{v} = (2\,,-2\,,-2)$ e $\vec{w} = (1\,,-1\,,2)$, determinar as coordenadas do vetor $\vec{t}$ que seja paralelo ao vetor $\vec{w}$ e que satisfaça $\vec{t} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.

Exercício 21. Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
a) Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$
b) Calcule o seno do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 22. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores de V^3, tais que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 3$, $\|\vec{w}\| = 6$ e $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Exercício 23. Suponha que os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ de V^3 verificam as relações $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{t}$ e $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{t}$. Prove que os vetores $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são L.D.

Exercício 24. Se os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são L.I. em V^3 e o vetor $\vec{w}$ satisfaz $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, mostre que $\vec{w} = \vec{0}$.

Exercício 25. Resolva o seguinte sistema na incógnita $\vec{x}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{x} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) & = & 9 \\ \vec{x} \wedge (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) & = & -2\vec{i} + 2\vec{k} \end{array}\right.$$

Exercício 26. Prove que, qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, vale a seguinte igualdade:

$$\|\vec{v} \wedge \vec{i}\|^2 + \|\vec{v} \wedge \vec{j}\|^2 + \|\vec{v} \wedge \vec{k}\|^2 = 2\|\vec{v}\|^2.$$