SMA0300 Geometria Analítica
Terceira Lista de Exercícios – Base, coordenadas, mudanças de base

Docentes responsáveis: Carlos Maquera, Farid Tari, Karla Spatti, Maria do Carmo Carbinatto, Miriam Manoel, Regilene Oliveira, Roberta Wik Atique

4 de abril de 2022

Para os exercícios 1 a 9 considere fixada uma base $\mathbf{E} = (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ de V^3.

Exercício 1. Considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{v} = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ e $\vec{w} = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$.

(a) Verifique se os vetores são L.D. em cada dos seguintes itens:
(i) $\vec{u}$
(ii) $\vec{u}$, $\vec{0}$
(iii) $\vec{u}$, $(4, -2, 4)_E$
(iv) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $(1, 2, 3)_E$, $(2, 1, 4)_E$

(b) Determine as coordenadas de $\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$ na base E.

(c) Escreva se possível:
(i) $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{a} = (4, -2, 4)_E$.
(ii) $\vec{0}$ como combinação de $\vec{u}$.
(iii) $\vec{u}$ como combinação de $\vec{u}$.
(iv) $\vec{v}$ como combinação de $\vec{u}$.
(v) $\vec{u}$ como combinação de $\vec{v}$ e $\vec{a}$.
(vi) $\vec{v}$ como combinação de $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

Exercício 2. Exiba, se possível, os exemplos abaixo. Se impossível explique o porquê.
(a) Uma base de V^3 que contenha os vetores $(1, -2, 3)_E$ e $(-2, 4, 6)_E$
(b) Três vetores L.I. que não formem uma base do espaço.

Exercício 3. Dado um vector $\vec{t}$, sabemos que existem números reais $\alpha\,, \beta\,, \gamma \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$. Mostre que o conjunto $\{\vec{u} + \vec{t}\,, \vec{v} + \vec{t}\,, \vec{w} + \vec{t}\}$ é formado por vetores não coplanares se, e somente se, $\alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

Exercício 4. Determine $m \in \mathbb{R}$, de modo que o vetor $\vec{u} = (1\,, 2\,, 2)_\mathbf{E}$ seja combinação linear dos vetores $\vec{v} = (m - 1\,, 1\,, m - 2)_\mathbf{E}$ e $\vec{w} = (m + 1\,, m - 1\,, 2)_\mathbf{E}$. Determine também $m \in \mathbb{R}$, para que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sejam L.D.

Exercício 5. Determine $m \in \mathbb{R}$, de modo que a sequência de vetores abaixo sejam L.D.
(a) $(m\,, 1\,, m)_\mathbf{E}\,, (1\,, m\,, 1)_\mathbf{E}$ (b) $\left(1 - m^2\,, 1 - m\,, 0\right)_\mathbf{E}\,, (m\,, m\,, m)_\mathbf{E}$

Exercício 6. Considere $\vec{u} = (1, 2, -1)_\mathbf{E}$, $\vec{f_1} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f_2} = m\vec{e}_1 + 2m\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ e $\vec{f_3} = 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.
(a) Para que valores de $m \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,, \vec{f_2}\,, \vec{f_3}\right)$ é uma base de V^3?
(b) Nas condições do item (a), calcule $m \in \mathbb{R}$, para que $\vec{u} = (0\,, 1\,, 0)_\mathbf{F}$.

Exercício 7. Considere $\vec{f_1} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f_2} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ e $\vec{f_3} = 3\vec{e}_3$.
(a) Mostre que $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,, \vec{f_2}\,, \vec{f_3}\right)$ é uma base de V^3.
(b) Calcule $m \in \mathbb{R}$, para que os vetores $\vec{u} = (0\,, m\,, 1)_\mathbf{E}$ e $\vec{v} = (0\,, 1\,, -1)_\mathbf{F}$ sejam L.D.

Exercício 8. Consideremos as relações: $\vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3}$ $\quad \vec{f_2} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$ $\quad \vec{f_3} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 4\vec{e_3}$.
(a) Verifique que $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,, \vec{f_2}\,, \vec{f_3}\right)$ é uma base de V^3.
(b) Ache a matriz de mudança de base, da base $\mathbf{E} = (\vec{e_1}\,, \vec{e_2}\,, \vec{e_3})$ para a base $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,, \vec{f_2}\,, \vec{f_3}\right)$.
(c) Sendo $\vec{u} = 3\vec{e_1} - 5\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$, achar a expressão do vetor $\vec{u}$ em relação à base $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,, \vec{f_2}\,, \vec{f_3}\right)$.

Exercício 9. Seja $\mathbf{F} = \Big((1\,,1\,,1)_{\mathbf{E}}\,,(1\,,2\,,0)_{\mathbf{E}}\,,(1\,,1\,,0)_{\mathbf{E}}\Big)$ e $\mathbf{G} = \Big((2\,,1\,,-1)_{\mathbf{E}}\,,(3\,,0\,,1)_{\mathbf{E}}\,,(2\,,0\,,1)_{\mathbf{E}}\Big)$.
a) Mostre que $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são bases de V^3.
b) Determine a matriz de mudança de base, da base $\mathbf{E}$ para a base $\mathbf{F}$, isto é, $M_{\mathbf{EF}}$.
c) Se $\vec{u} = (m\,,2\,,1)_{\mathbf{E}}$, $\vec{v} = (1\,,1\,,1)_{\mathbf{F}}$ e $\vec{w} = (2\,,-1\,,1)_{\mathbf{F}}$, determinar $m \in \mathbb{R}$, de modo que os vetores $\{\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\}$ não formem uma base de V^3.

Exercício 10. Assuma que todos os vetores estão expressos segundo uma base arbitrária pré-fixada de V^2.
(a) Obtenha a matriz de mudança da base $E = \Big((1,1),(1,-1)\Big)$ para $F = \Big((-1,-1),(1,-1)\Big)$.
(b) Obtenha a matriz de mudança da base $E = \Big((3,-2),(-4,3)\Big)$ para $F = \Big((1,0),(1,1)\Big)$.