

Apuntes del ramo de Economía Política con el profesor Landerretche, equilibrio general y externalidades. Se agradece notificar cualquier error al correo: joamartine@fen.uchile.cl

Última actualización: 25 de julio de 2024

CAPÍTULO 3

EL PROBLEMA DE LO PRIVADO Y LO PÚBLICO

3.1. La economía descentralizada

Este capítulo tiene como objetivo entender cómo se ordena una economía descentralizada, es decir, una economía donde los agentes toman decisiones de manera privada. Para esto tomaremos como principal eje un modelo Walraiano, el cual es de equilibrio general, la gracia del modelo radica en que a diferencia de los modelos de equilibrio parcial los precios de equilibrio se determinan considerando dos o más mercados. Por tanto, el equilibrio en algún mercado afecta al equilibrio de los demás mercados.

Los mecanismos en los cuales los agentes toman sus decisiones y llegan a un punto eficiente determinado nos llevará a definir dos teoremas del bienestar, los cuales reflejan distintas maneras de abordar la distribución de recursos en una economía.

3.1.1. Motivación del Modelo de Equilibrio General

Para definir los modelos de equilibrio general partiendo de base en los modelos de equilibrio parcial conviene dar un pequeño repaso de estos. Uno de los economistas que definió el paradigma en el cual se basan los modelos de equilibrio parcial fue **Alfred Marshall**, el cual popularizó el uso de las

Alfred Marshall:
Economista británico que durante finales del siglo XIX, conocido por ser fundador de la escuela neoclásica. Su visión marginalista de la economía influye las bases de la economía hasta día de hoy.

curvas de oferta y demanda como herramientas para la determinación de precios. Los modelos de equilibrio parcial buscan describir la determinación de precios bajo oferta y demanda de un mercado específico tratando el resto de la economía como constante. Para dar contexto, si analizáramos el mercado de autos importados supondríamos que los ajustes en este mercado no tienen efectos sobre mercados relacionados. Por ejemplo, el modelo predice cómo afecta un arancel al precio de los autos importados, pero no aborda los efectos del arancel sobre la demanda y producción de autos producidos domésticamente.¹

El modelo de equilibrio parcial es de gran utilidad para modelar efectos de distintas políticas sobre el precio y bienestar de los agentes en un mercado en específico. En la realidad sin embargo, como distintos mercados están interactuando constantemente un shock en uno de ellos puede derivar a múltiples ajustes en mercados relacionados. Volviendo al ejemplo anterior, este arancel por autos importados podría llevar a un aumento de ventas de autos domésticos al ser bienes sustitutos.

En resumen, el **modelo de equilibrio general** describe dos o más mercados relacionados que se ajustan a la vez y entre ellos. Analizar el equilibrio de un número arbitrario de mercados es complejo, por suerte limitarnos a dos mercados y plantear ciertos supuestos nos permite extraer las conclusiones que encontramos relevantes para esta ocasión.

3.1.2. Introducción del modelo Walrasiano

Describiremos los supuestos y sustancia del modelo, el mecanismo por el cual se llega al equilibrio. El Modelo Walrasiano como indica su nombre es producto del trabajo de **León Walras**. En este modelo trataremos un economía con un número de bienes y agentes finitos basada en el intercambio, es decir, no hay dinero sino que los individuos intercambian bienes los cuales se les dota de manera exógena. Entonces la riqueza del individuo se determina por el valor de la dotación de bienes que posea.²

Por lo tanto el problema de los individuos i será maximizar su utilidad $u(\cdot)$ demandando bienes x de un total de N bienes sujeto a su riqueza siendo

¹El mercado de autos importados se considera un mercado distinto al mercado de autos producidos domésticamente.

²Un paso anterior es la producción de estos bienes, pero no conviene referirse a ese aspecto aún.

Modelo de Equilibrio General:

Modelo económico que busca explicar la determinación de precios dentro de una economía con dos o más mercados.

León Walras:

Economista francés de la escuela (neoclásica) de Lausana. Considerado fundador de la economía matemática.

la dotación inicial e y precios.

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+^N} u^i(x) \quad \text{s.a.} \quad p \cdot x \leq p \cdot e^i$$

De esta manera es que los individuos demandan los bienes y se determinan los precios: en el **Equilibrio Walrasiano** será el vector de tamaño $1 \times N$ de precios y consumo de bienes tales que (i) los individuos maximizan su utilidad sujeto a su riqueza, (ii) la demanda total de un bien es igual a la dotación total del bien.

Estando o no estando en equilibrio el modelo sigue la **Ley de Walras**, la cual indica que suma del valor del exceso de demanda de todos los mercados es igual a cero. Entiéndase exceso de demanda positiva como que en un mercado la demanda por un bien excede la producción/dotación de este, consecuentemente un exceso de demanda negativo implica que hay más unidades de las que se demandan. Esto tiene dos importantes resultados.

- Si hay un exceso de demanda positiva en un mercado significa que hay un exceso de demanda negativa en otro mercado. Es decir, si un mercado está en desequilibrio otro mercado debe estar en desequilibrio.
- Si $n - 1$ mercados están en equilibrio, el n -ésimo mercado también estará en equilibrio.

Este último resultado nos permite limitarnos a dos mercados para simplificar la resolución del modelo.

Un aspecto crucial del modelo es el **criterio de Pareto**. Los individuos comercian sus bienes con otros individuos, es intuitivo entender que un individuo solo intercambiará una cantidad de un bien mientras que el bien que le llegue a cambio le genere una utilidad mayor, es decir, solo accederán a intercambiar si son más felices con el acuerdo. Por lo tanto, habrá un punto en que dejarán de intercambiarse puesto que se agotaron todas las transacciones posibles, en este equilibrio ninguno de los dos puede estar mejor sin perjudicar al otro. Puesto en otras palabras: a medida que hayan intercambios que sean **mejorías de pareto** se tomarán hasta llegar a un **óptimo de Pareto**. Estos conceptos se definirán luego.

Por último, algunos supuestos implícitos y explícitos del modelo son:

1. No hay poder de mercado, los dos agentes en la economía serán tomadores de precios.

Ley de Walras: La suma del valor del excedente de deamanda de todos los mercados es igual a cero.

Criterio de Pareto:

Mejorías de Pareto:

Óptimo de Pareto:

2. Información completa. Los dos individuos están al tanto de los bienes que hay en la economía, su cantidad y utilidad que les proporciona tanto a el como al otro.
3. No hay costos de transacción.
4. No hay externalidades. El consumo de un bien no afecta la utilidad de un externo de ninguna manera.³

Ahora describiremos el modelo en más detalle asumiendo que tendremos dos agentes y dos bienes.

3.1.3. Caja de Edgeworth

Caja de

Edgeworth:

Herramienta gráfica para representar un Modelo de Equilibrio Walrasiano.

La **Caja de Edgeworth** será la representación gráfica del modelo. Esta herramienta fue desarrollada por **Francis Edgeworth** y **Arthur Bowley**, economistas y estadísticos británicos. Las dimensiones de esta caja obedecerán a las dotaciones totales de cada bien, en esta misma podremos graficar las curvas de indiferencia de los individuos y demás conceptos que definiremos más adelante.

Esta economía considera dos individuos $i \in A, B$ que se intercambian dos bienes $j \in x, y$. Las dotaciones de bienes que tenga cada individuo se puede describir como un vector $\in \mathbb{R}_+^2$, más precisamente las dotaciones para un individuo i serán:

$$\omega_i = (\omega_{ix}, \omega_{iy}) \in \mathbb{R}_+^2$$

En la figura 3.1 podemos observar que las dimensiones de la caja son $\omega_x = \omega_{Ax} + \omega_{Bx}$ por un lado y $\omega_y = \omega_{Ay} + \omega_{By}$ por el otro. Donde además ubicamos la dotación inicial como un punto dentro de la caja $\omega^E \in \mathbb{R}_+^2$. Los mercados se encargarán de asignar precios a cada bien dadas las preferencias y dotaciones, estos precios los podemos denotar como un vector $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}_+^2$. Para el individuo i la riqueza se puede denotar como la cantidad de un bien ponderado por su precio:

$$R_i = p_x \cdot \omega_{ix} + p_y \cdot \omega_{iy}$$

La riqueza será análogo a las restricción presupuestarias a la que está sujeta la maximización de utilidad. Es decir, el individuo i maximizará su función

³Este supuesto se puede levantar y llevar al mismo resultado de equilibrio bajo ciertas condiciones, asumiremos que no existe tal posibilidad.

Francis Edgeworth:

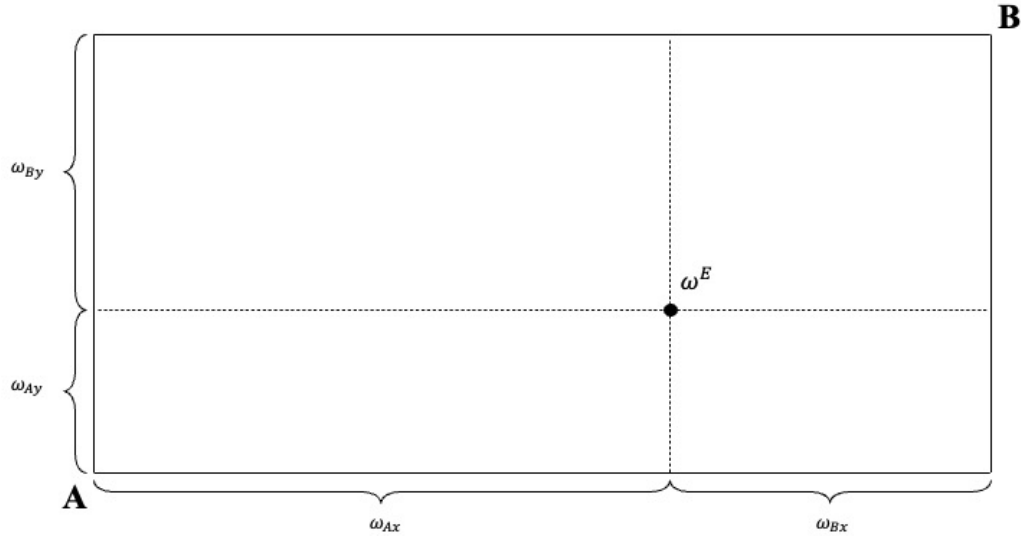
Economista y estadístico británico

que propone las curvas de indiferencia y caja de Edgeworth.

Arthur Bowley:

Economista y estadístico británico pionero de usar técnicas de muestreo en encuestas sociales.

Figura 3.1: Dimensiones de la caja de Edgeworth



de utilidad, en este caso del tipo Cobb-Douglas, consumiendo bienes x, y y su restricción no estará activa mientras consuma menos o igual que su riqueza.

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & u_i(x, y) = x_i^\alpha y_i^\beta \\ \text{s.a.} \quad & R_i \leq p_x \cdot x_i + p_y \cdot y_i \end{aligned}$$

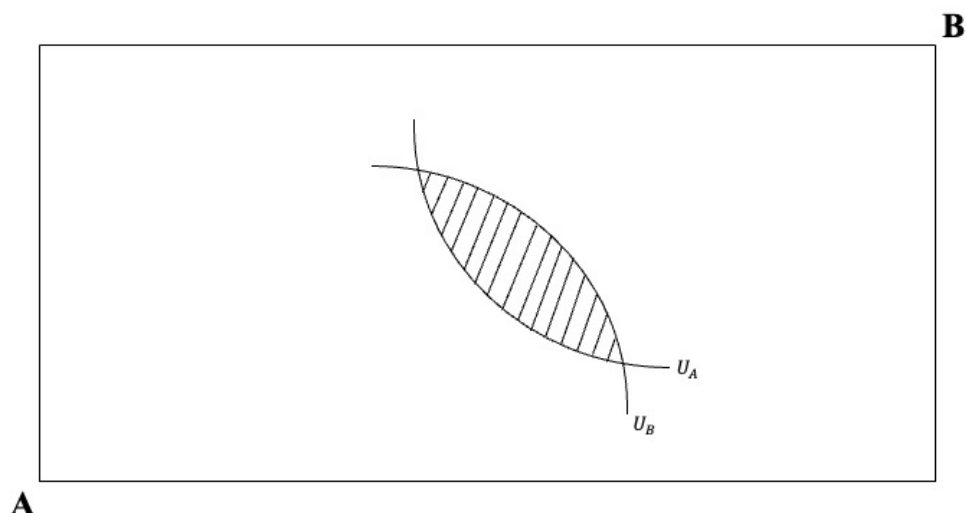
Se pueden graficar las curvas de indiferencia dada las preferencias de cada individuo dentro de la caja. Un hecho importante a recordar de las curvas de indiferencias es que curvas de indiferencias más a la derecha son mejores situaciones y lo contrario si nos movemos a la izquierda. Hay que considerar que dado que el individuo B está desde otro punto de vista su curva de indiferencia es mejor mientras más a la izquierda esté.

Vilfredo Pareto:
Economista italiano, adopta los equilibrios walrasianos e incorporó a ellos el concepto de óptimo de Pareto.

3.1.4. Eficiencia y óptimos de pareto

Dadas las preferencias y dotaciones los individuos podrán intercambiar bienes para maximizar su utilidad. Este proceso puede ser visto desde el punto de vista del criterio de Pareto, paradigma acuñado por **Vilfredo Pareto**. En este contexto un intercambio que aumenta la utilidad de al menos uno

Figura 3.2: Curvas de indiferencia y lente de mejoras de pareto

**Mejoría de Pareto:**

Transición en donde al menos un individuo esté en una mejor posición sin perjudicar a otro.

Óptimo de Pareto:

Punto en donde todas las mejoras de Pareto posibles se han agotado.

y no perjudica la utilidad del otro sería una **mejoría de pareto**. El punto en donde se acaban las oportunidades de intercambio será el **óptimo de Pareto**. Podemos encontrar graficamente los puntos de mejoría de pareto el lente de mejoras de pareto, el cual es el área rayada en la figura 3.2.

Algunos detalles a aclarar de estos conceptos pueden ser los siguientes. Estar en un óptimo de pareto no es sinónimo perfecto de estar en Equilibrio Walrasiano, el punto eficiente de pareto tan solo describe una situación en donde no hay intercambios *win-win* posibles. También cabe mencionar que un punto eficiente no necesariamente es deseable bajo otros criterios: Una dotación inicial donde A ó B concentra todos los recursos es un punto eficiente bajo criterio de Pareto.

Una manera de encontrar un punto óptimo de Pareto es igualar las **tasas marginales de sustitución** de bienes de los individuos (condición 3.1). Esto tiene sentido intuitivo dado que en un punto óptimo de Pareto ningun individuo está dispuesto a intercambiar sus bienes puesto que no aumentarían su utilidad. Por ejemplo, si el individuo A está más dispuesto a intercambiar bienes x que B el cual está más dispuesto a intercambiar sus bienes y , entonces habrá una mejoría de Pareto posible del intercambio. En dicha situación

Tasa Marginal de Sustitución:

Unidades de un bien que se están dispuestos a renunciar por una unidad marginal del otro bien, manteniendo el mismo nivel de utilidad.

la disposición de intercambiar cada bien es diferente para cada individuo por lo que tiene sentido intercambiar. Gráficamente veríamos como en el óptimo las curvas de indiferencia de ambos individuos son tangentes.

$$TMS_{x,y}^A = TMS_{x,y}^B \quad (3.1)$$

La tasa marginal se calcula como la derivada parcial de la utilidad respecto a un bien dividido por la derivada parcial de la utilidad respecto al otro bien. Por lo que podemos redefinir la condición 3.1 como:

$$\frac{\frac{\partial u_A(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial u_A(x,y)}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u_B(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial u_B(x,y)}{\partial y}}$$

La **curva de contrato** es la colección de puntos óptimos de pareto dentro de la caja de Edgeworth. A continuación llegamos a la expresión que denotan todos los óptimos de pareto que componen la curva de contrato para los individuos A y B . Siendo que el problema para A se plantea como:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & u_A(x,y) = x_A^\alpha y_A^\beta \\ \text{s.a.} \quad & p_x \cdot w_{Ax} + p_y \cdot w_{Ay} = p_x \cdot x_A + p_y \cdot y_A \end{aligned}$$

El problema para B es simétrico:⁴

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & u_B(x,y) = x_B^\alpha y_B^\beta \\ \text{s.a.} \quad & p_x \cdot w_{Bx} + p_y \cdot w_{By} = p_x \cdot x_B + p_y \cdot y_B \end{aligned}$$

Derivamos para obtener la expresión de la tasa marginal de sustitución para ambos individuos.

$$\begin{aligned} TMS_A &= \frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^\beta}{\beta x_A^\alpha y_A^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_A}{x_A} \\ TMS_B &= \frac{\alpha x_B^{\alpha-1} y_B^\beta}{\beta x_B^\alpha y_B^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_B}{x_B} \end{aligned}$$

⁴Cada vez que un problema sea simétrico significa que la solución algebraica seguirá el mismo proceso, por lo que podemos ocupar el resultado de un individuo para obtener directamente el resultado del otro sin hacer el proceso de optimización de nuevo.

Curva de contrato:
Colección de puntos óptimos de Pareto dentro de la caja de Edgeworth.

Iguualamos tasas marginales de sustitución,

$$\begin{aligned} TMS_A = TMS_B &\implies \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_A}{x_A} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_B}{x_B} \\ \frac{y_A}{x_A} &= \frac{y_B}{x_B} \end{aligned}$$

Es directo entender que la suma de los bienes de cada individuo será el total de bienes en la economía,

$$x_A + x_B = \omega_x \quad y_A + y_B = \omega_y$$

Y por tanto aprovechamos para definir nuestra curva de contrato Reemplazando una de aquellas en la expresión anterior.

$$\begin{aligned} \frac{y_A}{x_A} &= \frac{\omega_y - y_A}{\omega_x - x_A} \\ y_A \omega_x &= x_A \omega_y \end{aligned}$$

Reordenando la expresión,

$$x_A \cdot \left(\frac{\omega_y}{\omega_x} \right) = y_A \tag{3.2}$$

Es decir, una dotación que cumpla con la expresión 3.2 pertenece a la curva de contrato y por ende es óptimo de Pareto, se agotaron las posibilidades de intercambio por lo que no se puede aumentar la utilidad de uno sin reducir la del otro. La curva de contrato va a tener diferentes formas dependiendo de la función de utilidad de los individuos, en algunos casos no habrá.⁵

3.1.5. Demandas Marshallianas

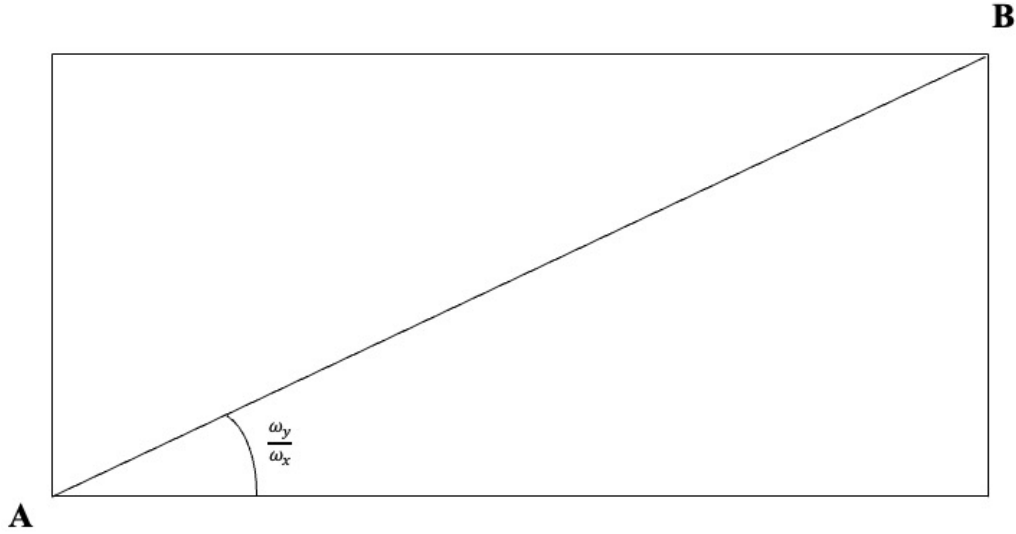
Demandas Marshallianas: Son las demandas óptimas resultantes de un problema de maximización sujeto a alguna restricción.

Los individuos tendrán una **demanda marshalliana** acorde a sus preferencias y riqueza. Si resolvemos el problema para A encontraremos la demanda del individuo para cada bien. En este caso diremos que $\alpha, \beta > 0$ y que $1 - \alpha = \beta$

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & u_A(x, y) = x_A^\alpha y_A^\beta \\ \text{s.a.} \quad & R_A = p_x \cdot x_A + p_y \cdot y_A \end{aligned}$$

⁵Tarea para el anexo.

Figura 3.3: Curva de contrato



Planteando el lagrangeano,

$$\mathcal{L} = x_A^\alpha y_A^\beta + \lambda(R_A - p_x \cdot x_A - p_y \cdot y_A)$$

Derivamos las condiciones de primer orden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = \alpha x_A^{\alpha-1} y_A^\beta - \lambda_x p_x = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = \beta x_A^\alpha y_A^{\beta-1} - \lambda_y p_y = 0$$

Se despejan los lambdas y se igualan las expresiones.

$$\lambda_x = \frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^\beta}{p_x} \quad \lambda_y = \frac{\beta x_A^\alpha y_A^{\beta-1}}{p_y} \longrightarrow \frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^\beta}{p_x} = \frac{\beta x_A^\alpha y_A^{\beta-1}}{p_y}$$

Reescribiendo, $x_A = y_A \left(\frac{p_y \alpha}{p_x \beta} \right) \quad y_A = x_A \left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha} \right)$

El siguiente paso es reemplazar alguna de las expresiones anteriores en la restricción:

$$p_x \left(y_A \frac{p_y \alpha}{p_x \beta} \right) + p_y y_A = R_A$$

Por lo tanto las demandas marshallianas de A serán expresadas como:

$$y_A^* = \frac{R_A}{p_y} \beta \quad x_A^* = \frac{R_A}{p_x} \alpha$$

Como el problema es simétrico para B podemos directamente decir:

$$y_B^* = \frac{R_B}{p_y} \beta \quad x_B^* = \frac{R_B}{p_x} \alpha$$

Las demandas marshallianas estarán en función de la riqueza, el precio del bien y las preferencias.

3.1.6. Precios relativos

Los precios relativos en esta economía están determinados por la dotación y preferencias y serán tales que todos los mercados estén en equilibrio. Lo que importa no son los los valor nominal que se les da a los precios sino el precio de un bien en relación al otro, es por esto que un mismo equilibrio se puede sostener con un vector precios $p = (1, 2)$ como con un vector $p = (2, 4)$, si bien los valores cambiaron el segundo bien sigue siendo el doble de caro que el primero.

Al resolver el modelo podemos normalizar uno de los precios a 1, de esta manera simplificamos el proceso. Esto es tener un precio numerario, si se tiene un vector de precios $p = (p_i, p_j)$ se multiplica por $1/p_i$, dejándolos como $p = (1, \frac{p_j}{p_i})$. La gracia está en que tanto la primera expresión del vector como la segunda funcionan para un mismo equilibrio.

Para obtener los precios relativos apelamos a la ley de Walras: la demanda total de un bien tiene que ser igual a la cantidad que existe.

$$x_A^* + x_B^* = \omega_x, \quad y_A^* + y_B^* = \omega_y$$

Tomando el caso del bien x reemplazamos las demandas marshallianas.

$$\begin{aligned} \frac{R_A}{p_x} \alpha + \frac{R_B}{p_x} \alpha &= \omega_x \\ \frac{\alpha}{p_x} (R_A + R_B) &= \omega_x \end{aligned}$$

Despejando p_x de esta expresión y (por simetría) expresando también p_y .

$$p_x = (R_A + R_B) \frac{\alpha}{\omega_x}, \quad p_y = (R_A + R_B) \frac{\beta}{\omega_y}$$

Lo cual hace sentido, a mayor preferencia por determinado bien mayor es el precio, por otro lado a menor dotación del bien mayor su precio. Por convención diremos que la riqueza total se puede escribir como $R_A + R_B = R = p_x\omega_x + p_y\omega_y$. Dada esta expresión tendremos un problema, todavía no hemos despejado los precios puesto que estos dependen de la riqueza la cual depende recursivamente de los precios. Podemos hacer dos cosas, una de ellas es normalizar uno de los precios a 1, y la otra opción es dividir directamente p_y/p_x para obtener p_y en relación a p_x .

Los precios relativos se pueden expresar entonces como:

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{R\alpha}{\omega_x}}{\frac{R\beta}{\omega_y}} = \frac{\beta\omega_x}{\alpha\omega_y}$$

3.1.7. Teoremas fundamentales de la economía del bienestar

PRIMER TEOREMA DEL BIENESTAR

Todo Equilibrio Walrasiano es óptimo de Pareto. Este teorema plantea que bajo igualdad en el equilibrio de oferta y demanda en los mercados no habrán oportunidades de intercambio.⁶ Este teorema se relaciona profundamente con las ideas más liberales de la economía, como la mano invisible, cada individuo buscando su propio beneficio llegaría a un punto eficiente para la economía en su conjunto.

SEGUNDO TEOREMA DEL BIENESTAR

Todo óptimo de Pareto puede conseguirse mediante un Equilibrio Walrasiano. Este teorema abre a la posibilidad de distribuir las dotaciones iniciales de manera de conseguir un Equilibrio Walrasiano deseado de manera eficiente. Este teorema se relaciona con las ideas redistributivas y de Estado de bienestar sin perder la eficiencia del mercado.

3.1.8. Equilibrio con producción

Habíamos asumido en un inicio que hay una dotación de los bienes sin habernos metido en la producción de los mismos. Incluir la producción de los bienes es más que nada hacer un paso anterior donde la producción de bienes dependerá de la dotación de factores productivos.

⁶Demostrado en Arrow, Kenneth J. and Gerard Debreu, "Existence of Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica*, 1954.

14 *CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LO PRIVADO Y LO PÚBLICO*

Si le mata la curiosidad, el modelo de equilibrio de producción está en el anexo.

3.2. Externalidades

Al abordar la temática de externalidades saldremos del marco Walrasiano anterior y volvemos a los modelos de Equilibrio Parcial. Las externalidades es uno de los problemas canónicos que aborda la economía, las posibles soluciones tienen ciertos tintes ideológicos según se le de más poder a lo privado o lo público.

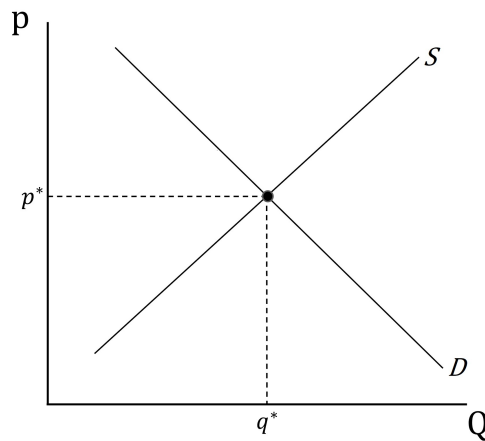
Consideramos como externalidad la situación donde, ya sea la producción o consumo de un bien, tiene efectos en el bienestar de un tercero que no participa del mercado. Entre tantos ejemplos típicos encontramos las externalidades ambientales, el caso del fumador, la educación, entre otros.

3.2.1. Externalidad en la producción

Para analizar el funcionamiento de las externalidades negativas en la producción, utilizaremos como benchmark el equilibrio parcial de un mercado en competencia perfecta. Este modelo de mercado se compone por una oferta y demanda privada, las cuales en su interacción nos entregan un precio y una cantidad de equilibrio.

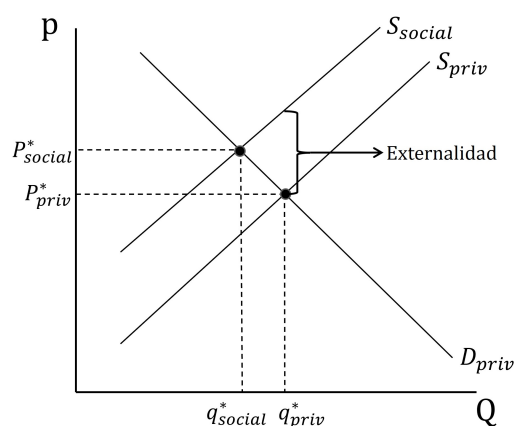
La oferta privada en este mercado está definida por el costo marginal de producción del bien (Cmg) percibidos por quien produce, estos pueden ser costos provenientes de la compra de insumos, gastos en energía, arriendo de un local, etc.

Figura 3.4: Equilibrio parcial en competencia perfecta



Para añadir externalidades negativas a este modelo, debemos considerar que existen costos adicionales que no son percibidos ni reconocidos por quién produce, por lo tanto tampoco son reflejados en la curva de oferta privada, estos nuevos costos los llamaremos “costos sociales”. Con estos mayores costos, obtenemos que en equilibrio deberíamos observar un precio mayor y una cantidad producida menor.

Figura 3.5: Externalidad en la producción



Externalidad en la demanda

Para el caso de externalidades positivas el problema no radica en costos no considerados, sino que existe una demanda social que es mayor a la privada. Para analizar este tipo de externalidad nuevamente utilizaremos como benchmark el equilibrio parcial de un mercado en competencia perfecta.

Con lo anterior tenemos que la demanda privada representa la disposición a pagar por el consumo individual de un bien, esto genera que se subestimen los beneficios que tiene sobre la sociedad el consumo de dicho bien. Por otro lado, la demanda social si refleja de manera fidedigna los beneficios generados a nivel social por el consumo del bien, la internalización de estos beneficios resultaría en una mayor disposición a pagar.

El resultado del equilibrio en el mercado considerando la demanda social nos entrega un mayor precio y cantidad producida.

Las externalidades negativas tambien se pueden representar por el lado de la demanda, esto ocurre cuando el efecto en el bienestar del tercero viene

dado por el consumo del bien más que por su producción, ejemplo de esto es el consumo del cigarro, con esto tenemos que quien consume no internaliza la desutilidad que genera en los demás agentes y por lo tanto no representa la disposición a pagar de la sociedad. El equilibrio del mercado resulta diferente para este caso, ya que tenemos que en equilibrio el precio y la cantidad producida disminuyen

Solución Pública

La solución de carácter pública para corregir esta falla de mercado fue creada por el economista **Arthur Pigou**, los mecanismos utilizados por esta solución los conocemos como *impuestos y subsidios pigouvianos*, y los supuestos utilizados son que el estado tiene información completa acerca de las preferencias de la sociedad y además la capacidad suficiente para que sus impuestos o subsidios modifiquen el comportamiento de los agentes.

Es importante conocer la diferencia entre tipo de impuestos, de manera general en el estado encontramos impuestos utilizados con el fin de recaudar y subsidios que se enfocan en redistribuir, por otra parte tenemos los impuestos y subsidios pigouvianos que corrigen externalidades mediante un cambio en el comportamiento de los agentes. Dentro de los ejemplos clásicos de impuestos y subsidios pigouvianos encontramos el impuesto al tabaco y los colegios subvencionados.

Medida de efectividad

Para poder medir la efectividad de la solución pública utilizaremos como herramienta la *evaluación social de proyectos públicos*, esta es un área de la economía desarrollada por **Arnold Harberger**. Considerando que la aplicación de impuestos o subsidios es costosa (Ej: costos de administración), la evaluación social consiste en comparar las preferencias sociales y privadas, para determinar la magnitud de la *pérdida social*⁷ existente en un mercado, representada gráficamente por los *triángulos de Harberger*, con esto podremos comparar los costos y beneficios de resolver una externalidad y usar esto como medida de eficiencia.

Arthur

Pigou:(1877-1959)
Economista inglés de la Universidad de Cambridge, conocido por inventar el término *externalidades* y contribuir con su solución pública.

Arnold

Harberger:(1924-)
Economista estadounidense de la Universidad de Chicago, conocido por ser pionero en el estudio de la evaluación social de proyectos públicos

⁷En inglés se conoce como *dead weight loss (DWL)*

APÉNDICE A

ANEXO

A.1. Demostración Ley de Walras

Definimos el exceso de demanda como $q(p)$ (ecuación A.1) considerando las demandas marshallianas de los bienes x e y y las dotaciones ω_x y ω_y . Por notación dejamos las demandas marshallianas como ξ_j siendo j el conjunto de bienes, esto con el fin de generalizar la ecuación.

$$q(p) = \left[\sum_j^n \xi_j - \sum_j^n \omega_j \right] \quad (\text{A.1})$$

Donde además diremos que para todo mercado j se cumple la igualdad.

$$\sum_j^n p_j \xi_j(p, R) = \sum_j^n p_j \omega_j \quad (\text{A.2})$$

Para completar la demostración ponderamos el exceso de demanda por el vector p .

$$pq(p) = p \left[\sum_j^n \xi_j - \sum_j^n \omega_j \right] = \sum_j^n [p_j \xi_j(p, R) - p_j \omega_j] = 0 \quad (\text{A.3})$$

Lo cual se debiera cumplir por la igualdad (A.2).

A.2. Equilibrio General con Producción

Una extensión de lo visto en el modelo de equilibrio general con dos bienes y dos agentes sería considerar los factores productivos y funciones de producción con los que se crean los bienes. En este caso las dotaciones no van a ser de bienes sino de factores de producción capital y trabajo (K, L) . Habrá un total de capital de \bar{K} y un total de trabajo \bar{L} , con los que se producen los bienes x, y .

Análogo al consumo la condición de eficiencia para la producción sigue siendo la igualdad entre las tasas marginales, en este caso la **tasa marginal técnica** (TMT) de sustitución. Es decir, la producción de un bien que podemos intercambiar por la producción adicional de una unidad del otro,

$$TMT = \frac{\frac{\partial f(K,L)}{\partial K}}{\frac{\partial f(K,L)}{\partial L}} \quad (\text{A.4})$$

Dado que se requieren capital y trabajo para los dos bienes estos se tendrán que repartir las dotaciones de manera eficiente, siguiendo A.5.

$$TMT_{K,L}^x = TMT_{K,L}^y \quad (\text{A.5})$$

Frontera de posibilidades:

Podemos formar una caja de Edgeworth de producción como se puede ver en la figura A.1. Las curvas de contrato se relacionan con las fronteras de posibilidades. La **frontera de posibilidades** es una curva que describe todos los puntos en donde se ocupan eficientemente los factores productivos para producir dos bienes, es decir, son los puntos factibles donde no es posible aumentar la producción de un bien sin disminuir la producción del otro. En la figura A.2 se observan dos puntos, uno que está ubicado en la curva es eficiente y otro que no es eficiente puesto que se puede producir más de un bien sin disminuir la producción de otro. Como todos los puntos de la curva de contrato satisfacen la condición de eficiencia se puede decir que también pertenecen a la curva de contrato.

Para resolver el modelo: Habrá una dotación de factores productivos K, L en donde habrá un total de \bar{K} y \bar{L} para cada factor respectivamente. Asumiremos la función Cobb-Douglas para la función de utilidad y de producción.

$$U_i(x_i, y_i) = x_i^\alpha y_i^{1-\alpha}, \quad i = A, B$$

$$x(K, L) = K_x^\beta L_x^{1-\beta}, \quad y(K, L) = K_y^\beta L_y^{1-\beta}$$

Figura A.1: Caja de Edgeworth en la producción

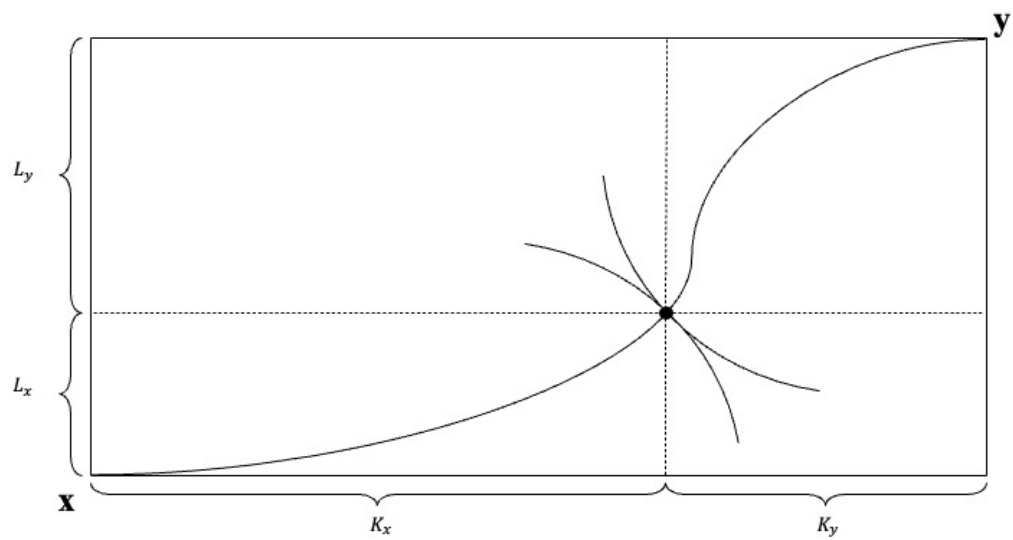
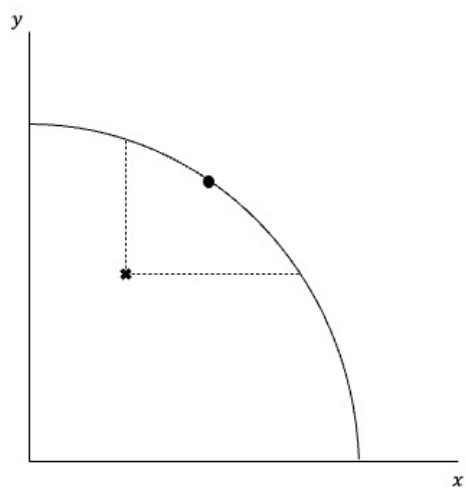


Figura A.2: Frontera de posibilidades de producción



Es decir que los dos individuos consumen los bienes x, y producidos con los factores K, L . Las variables α y β representan las preferencias y ponderaciones para el consumo y producción respectivamente.

Curva de contrato de producción

La eficiencia de producción se dará maximizando la producción de un bien sujeta a la producción del otro. De esta manera encontraremos los puntos que pertenecen a la frontera de posibilidades y que por tanto son eficientes.

$$\begin{aligned} \max_{K_x, L_x} \quad & x = K_x^\beta L_x^{1-\beta} \\ \text{s.a} \quad & y = K_y^\beta L_y^{1-\beta} \\ & \bar{K} = K_x + K_y \\ & \bar{L} = L_x + L_y \end{aligned}$$

Planteando el lagrangeano y resolviendo podemos optimizar la función.

$$\mathcal{L} : \quad K_x^\beta L_x^{1-\beta} + \lambda_1(K_y^\beta L_y^{1-\beta} - y) + \lambda_2(K_x + K_y - \bar{K}) + \lambda_3(L_x + L_y - \bar{L})$$

Encontramos las condiciones de primer orden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_x} = \beta K_x^{\beta-1} L_x^{1-\beta} + \lambda_2 = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_x} = (1-\beta) K_x^\beta L_x^{-\beta} + \lambda_3 = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_y} = \lambda_1 \beta K_y^{\beta-1} L_y^{1-\beta} + \lambda_2 = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_y} = \lambda_1 (1-\beta) K_y^\beta L_y^{-\beta} + \lambda_3 = 0 \quad (\text{A.9})$$

De las condiciones de primer orden encontramos las tasas marginales técnicas para la producción de los dos bienes. Despejando y dividiendo las expresiones para cada producto.

$$\frac{\beta K_x^{\beta-1} L_x^{1-\beta}}{(1-\beta) K_x^\beta L_x^{-\beta}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \implies \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right) \frac{L_x}{K_x} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\lambda_1 \beta K_y^{\beta-1} L_y^{1-\beta}}{\lambda_1 (1-\beta) K_y^\beta L_y^{-\beta}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \implies \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right) \frac{L_y}{K_y} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad (\text{A.11})$$

Como condición de eficiencia las tasas marginales de transformación deben ser iguales para los dos bienes. Al igualar encontraremos la curva de contrato de producción, es decir, los puntos eficientes para la producción.

$$\frac{L_x}{K_x} = \frac{L_y}{K_y} \quad (\text{A.12})$$

La curva de contrato es bastante simple en este caso pues asumimos que los dos bienes se producen de la misma manera $x(K, L) = y(K, L)$. Considerando los totales de producción podemos reescribir la expresión llegando a A.13,

$$\begin{aligned} \frac{L_x}{K_x} &= \frac{\bar{L} - L_x}{\bar{K} - K_x} \\ K_x &= \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_x \iff K_y = \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_y \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Frontera de posibilidades de producción

Para obtener la frontera de posibilidades utilizamos la expresión A.13 para obtener la cantidad óptima de factores para producir x e y .

$$\begin{aligned} x(K, L) &= K_x^\beta L_x^{1-\beta}, \quad K_x = \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_x \\ x &= \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_x \right)^\beta L_x^{1-\beta} = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}} \right)^\beta L_x \\ L_x &= \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} x \end{aligned}$$

Reemplazando de vuelta en A.13 obtenemos,

$$L_x^* = \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} x \iff K_x^* = \frac{\bar{K}^{1-\beta}}{\bar{L}^{1-\beta}} x \quad (\text{A.14})$$

Como el problema es simétrico sería lo mismo para la producción del bien y .

$$L_y^* = \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} y \iff K_y^* = \frac{\bar{K}^{1-\beta}}{\bar{L}^{1-\beta}} y$$

Ahora que tenemos la cantidad óptimo de factores para un mismo bien podemos utilizar las expresiones para encontrar la frontera de posibilidades de

producción.

$$\begin{aligned}
 L_x^* + L_y^* &= \bar{L} \\
 \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} y + \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} x &= \bar{L} \\
 \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} y &= \bar{L} - \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} x \\
 \text{FPP: } y &= \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}} \right)^\beta - x
 \end{aligned}$$

La pendiente es lineal es igual a 1, esto porque simplificamos bastante al plantear las producciones y el consumo.

Curva de contrato del consumo

Al igual que antes planteamos el problema con las restricciones correspondientes, ahora, con la restricción de la frontera de posibilidades.

$$\begin{aligned}
 \max_{x_A, y_A} \quad & U_A = x_A^\alpha y_A^{1-\alpha} \\
 \text{s.a} \quad & U_B = x_B^\alpha y_B^{1-\alpha} \\
 & \bar{x} = x_A + x_B \\
 & \bar{y} = y_A + y_B \\
 & \bar{y} = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}} \right)^\beta - x
 \end{aligned}$$

Planteamos el lagrangeano

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} : \quad & x_A^\alpha y_A^{1-\alpha} + \lambda_1 (x_B^\alpha y_B^{1-\alpha} - U_B) + \lambda_2 (x_A + x_B - \bar{x}) + \\
 & \lambda_3 (y_A + y_B - \bar{y}) + \lambda_4 \left(\left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}} \right)^\beta - \bar{x} - \bar{y} \right)
 \end{aligned}$$

Derivamos para obtener las condiciones de primer orden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = \alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{1-\alpha} + \lambda_2 = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = (1 - \alpha) x_A^\alpha y_A^{-\alpha} + \lambda_3 = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B} = \lambda_1 \alpha x_B^{\alpha-1} y_B^{1-\alpha} + \lambda_2 = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_B} = \lambda_1 (1 - \alpha) x_B^\alpha y_B^{-\alpha} + \lambda_3 = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{x}} = -\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}} = -\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \quad (\text{A.20})$$

Resolvemos sistemáticamente para obtener las tasas de sustitución de los bienes para cada individuo y en este caso consideramos la frontera de posibilidades.

$$\frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{1-\alpha}}{(1 - \alpha) x_A^\alpha y_A^{-\alpha}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \implies \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \frac{y_A}{x_A} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\lambda_1 \alpha x_B^{\alpha-1} y_B^{1-\alpha}}{\lambda_1 (1 - \alpha) x_B^\alpha y_B^{-\alpha}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \implies \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \frac{y_B}{x_A} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} = \frac{\lambda_4}{\lambda_4} \implies \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = 1 \quad (\text{A.23})$$

Acabamos de ver como la pendiente en el consumo coincide con la pendiente de la frontera de posibilidades. Cuadró la eficiencia en la producción de los bienes como en el consumo de los mismos.

Para ver este mismo proceso y ejercitar puede ver el siguiente video [link](#).

A.3. Soluciones a la Coase

Un ejemplo de como se plantea la solución a la Coase mediante la maximización de utilidad y los óptimos de pareto. Dos compañeros de piso Agustín (A) y Benjamín (B) tienen un problema de externalidades, Agustín le gusta fumar y Benjamín detesta el olor a cigarro.

En esta economía solo existen dos bienes, los cigarros c los cuales emiten una polución s y un bien genérico x . La utilidad de A se puede denotar como $U_A(x_A, c_A)$ siendo el efecto marginal de estos dos bienes positivos. Además, A tiene que respetar un máximo de polución $s_M(c_M)$, es decir, no se puede fumar más de c_M cigarros. El precio del bien x es numérico. Benjamín por su parte tendrá una función de utilidad $U_B(x_B, c_B) = u(x_B) + d(s_B)$ en la cual $u'(x_B) > 0$ y $d'(s_B) < 0$. Las dotaciones iniciales de cada uno son $\omega_A(X_A, \bar{c})$ y $\omega_B = (X_B, 0)$.

Dadas estas condiciones no habrá un resultado eficiente. Agustín fuma lo máximo que se le permite $c_A = c_M$ causando una polución s_M sin internalizar el daño $d_B(s_M)$ hecho a Benjamín. Lo anterior causa que las tasas marginales difieran pues no se internalizan todos los costos, llevando a un resultado ineficiente.¹

$$\frac{\frac{\partial U_A(x_A, c_A)}{\partial x_A}}{\frac{\partial U_A(x_A, c_A)}{\partial c_A}} \neq \frac{\frac{\partial u_B(x_B)}{\partial x_B}}{\frac{\partial d(s_M)}{\partial s_M}} \iff \frac{p_x}{p_c} \neq \frac{p_x}{p_s} \quad (\text{A.24})$$

Una manera de solucionar lo anterior es introducir derechos de propiedades claros y asumir que no hay costos de transacción. Al asignarle un precio p_s a la contaminación se pueden vender alguna suerte de bonos de contaminación.

Cada personas (incluyendo a la que no fuma) tiene ciertos bonos de polución, en caso de contaminar más de lo que sus bonos le permiten tendrá que comprar más bonos. Esto es, si Agustín fuma $c_A > c_M$ entonces puede comprar derechos por $p_s(c_M - c_A)$, mientras que si $c_A < c_M$ entonces podría vender sus derechos por $p_s(c_M - c_A)$.

Por lo tanto el problema de maximización de Agustín vendría a ser,

$$\begin{aligned} \max_{x_A, c_A} \quad & U_A(x_A, c_A) \\ \text{s.a.} \quad & x_A + p_c c_A + p_s(c_A - c_M) = X_A + p_c \bar{c} \end{aligned}$$

Por otro lado el problema de Benjamín será,

$$\begin{aligned} \max_{x_B} \quad & u_B(x_B) + d_B(s_B) \\ \text{s.a.} \quad & x_B + p_s(s_M - s_B) = X_B \end{aligned}$$

¹ Hay casos en que aun habiendo externalidades no se modifica el resultado eficiente, estos es por ejemplo cuando

A.4. GEOMETRÍA DE LAS CURVAS DE CONTRATO BAJO DIFERENTES FUNCIONES DE UTILIDAD

Ahora que se plantean los problemas de esta manera los dos individuos internalizan el precio de la polución (origen de la externalidad). Por su lado Agustín considera el precio del bien genérico $p_x = 1$ y el de los cigarro más los de la polución.

$$\frac{\frac{\partial U_A(x_A, c_A)}{\partial x_A}}{\frac{U_A(x_A, c_A)}{\partial c_A}} = \frac{1}{p_c + p_s}$$

Mientras que Benjamín al demandar aire limpio considera p_s .

$$\frac{\frac{\partial u_B(x_B)}{\partial x_B}}{\frac{\partial d(s_M)}{\partial s_M}} = \frac{1}{p_s}$$

A.4. Geometría de las curvas de contrato bajo diferentes funciones de utilidad