

Apuntes del ramo de Economía Política con el profesor Landerretche, consumo intertemporal y carte de Markowitz. Se agradece notificar cualquier error al correo: joamartine@fen.uchile.cl

Última actualización: 25 de julio de 2024

CAPÍTULO 4

EL PROBLEMA DEL TIEMPO Y DEL RIESGO

4.1. Optimización intertemporal y la aversión al cambio

El economista y estadístico **Irving Fisher** ayudó a desarrollar uno de los modelos más influyentes en como entendemos que se toman las decisiones de consumo a lo largo del tiempo. El objetivo es entender lo que lleva a individuos a suavizar el consumo a través del tiempo reconociendo también los factores que impulsan el consumo hacia el presente mediante deuda o al futuro mediante ahorros.

La sustancia del modelo es un consumidor racional que maximiza su utilidad sujeto a ciertas restricciones. Las restricciones de cada período tales como ingreso, pueden ser unificadas mediante el ahorro o la deuda que haya tomado el individuo en algún momento del tiempo, por lo que se puede escribir una gran restricción intertemporal que considera el ingreso e intereses que cobra o paga el individuo a lo largo de su vida.

Los tres factores principales que es importante notar en las siguientes partes de esta sección será que (i) el individuo busca suavizar el consumo dadas ciertas funciones de utilidad, es decir consumir cantidades similares en cada período, (ii) el costo de la deuda y el premio del ahorro llevarán

Irving Fisher
1867-1947:

Economista y estadístico estadounidense reconocido por sus avances en la teoría económica (Ecuación de Fisher, hipótesis de Fisher, teorema de separabilidad de Fisher...).

a consumir más en el futuro y (iii) la impaciencia del individuo llevará a consumir más en el presente.

4.1.1. Modelo de consumo intertemporal en dos períodos

Algunos supuestos simplificadores que asumiremos será que el individuo solo vive durante dos períodos, la tasa de interés no cambia a lo largo del tiempo, la tasa de interés del ahorro es igual a la del consumo. Partiremos armando intuitivamente la restricción de cada período para así juntarlas y obtener lo que llamaremos una **restricción intertemporal**.

Restricción intertemporal:

Restricción resultante de consumir con un ingresos finitos transferibles entre períodos de tiempo

RESTRICCIÓN INTERTEMPORAL. El consumidor partirá consumiendo en el primer período una cantidad c_1 , para financiar su consumo recibe de manera exógena un ingreso y_1 . Lo primero a notar es que el individuo va a estar restringido pues todo consumo debe estar respaldado por algún tipo de riqueza, es decir $y_1 \geq c_1$. El factor intertemporal entra en juego cuando incluimos la deuda y ahorro, este factor ahorro/deuda lo denotaremos por s , será $s > 0$ cuando se trate de ahorro y será $s < 0$ cuando sea deuda. Por lo que la restricción en el primer período no solo considera que el consumo debe estar respaldado por el ingreso, sino que considera que el ingreso puede destinarse a consumo y ahorro, o bien el ingreso se puede complementar con deuda para consumir más en el presente.

Con esto ya podemos definir la restricción en el primer período como la ecuación 4.1.

$$y_1 = c_1 + s \quad (4.1)$$

En el segundo período la restricción seguirá la misma lógica, lo que hay que considerar adicionalmente es que hay una tasa de interés (r) de por medio para cuando uno ahorra o se endeuda. Por lo que los ingresos y en un período, se convertirán en $y(1 + r)$ en el siguiente período.

Por lo tanto el ingreso en el segundo período se destina a consumo o a pagar las deudas pendientes, en caso de que el individuo haya ahorrado en el período anterior se podrá consumir más, no solo por la transferencia de dinero del pasado al presente sino que también el premio al ahorro que es la tasa de interés. La restricción del segundo período puede ser descrita como la ecuación 4.2.

$$y_2 = c_2 - s(1 + r) \quad (4.2)$$

4.1. OPTIMIZACIÓN INTERTEMPORAL Y LA AVERSIÓN AL CAMBIO⁵

Teniendo las restricciones para los dos períodos podemos describir una restricción intertemporal combinandolas mediante s . Para esto reemplazamos s de 4.1 en 4.2.

$$y_2 = c_2 - (1 + r)(y_1 - c_1)$$

Reordenando podemos encontrar dos expresiones útiles que representan la misma restricción, las dos significan que todo el consumo tiene que ser financiado por ingreso. La expresión 4.3 está ordenada de forma que los ingresos presentes sean traídos a **valor futuro**, mientras que 4.4 está expresado de forma en que los ingresos futuros sean traídos a **valor presente**. Ambas vienen a significar lo mismo, el consumo debe estar respaldado por algún tipo de riqueza, ya sea ingresos o ahorros.

$$y_1(1 + r) + y_2 = c_1(1 + r) + c_2 \quad (4.3)$$

$$y_1 + \frac{y_2}{1 + r} = c_1 + \frac{c_2}{1 + r} \quad (4.4)$$

Si quisieramos graficar deberíamos tomar en el eje horizontal el consumo presente y en el eje vertical el consumo futuro, de esta manera la restricción intertemporal puede ser graficada tal como una restricción presupuestaria (Véase la figura 4.1). De estos puntos factibles el consumidor decidirá el punto de la recta que maximiza su utilidad. El punto en que el consumidor elija para maximizar su utilidad es suficiente para saber si en su vida ahorro o se endeudó. Es directo ver que si $c_1 > y_1$ implica que $s < 0$, es decir se está contrayendo deuda para financiar el consumo presente. Para financiar esa deuda el consumidor estará obligado en el futuro a que $c_2 < y_2$ pues cierta parte va a ser usada para pagar la deuda. Tanto este caso como el caso en que el individuo ahorra se pueden ver en la figura 4.1.

Un caso que se verá más adelante son las restricciones de liquidez, es decir cuando la tasa a la que uno se endeuda es más alta a la cual uno ahorra.¹

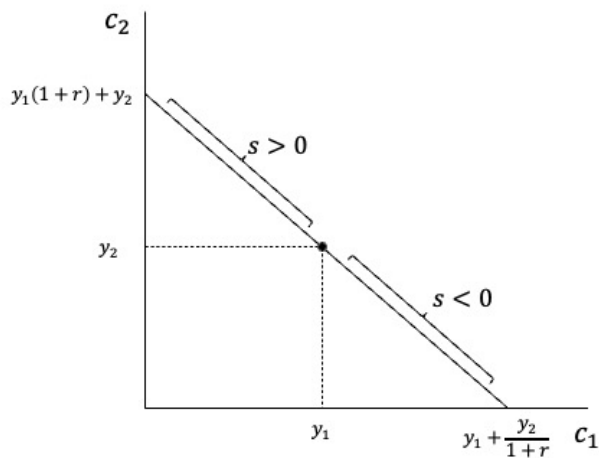
Ya vimos un punto a considerar mencionados al inicio, el costo de la deuda y el premio del ahorro llevan consumir más en el futuro. Un ingreso y ahora que se ahorra será $y(1 + r)$ en el siguiente período, por lo cual podríamos consumir más en el futuro. Entonces ¿Por qué el consumidor no ahorra todo su ingreso al inicio para maximizar el ingreso y por tanto el consumo que le da felicidad? Para responder esta pregunta es necesario tomar en consideración

Valor futuro: El valor que tendrá cierta monto en un período futuro dadas las oportunidades de ahorro/inversión.

Valor presente: El valor que tiene cierto monto en el futuro traído a lo que valdría hoy dadas las oportunidades de ahorro/inversión.

¹Un caso extremo en que la tasa a la que uno se endeuda tiene a infinito llevará inevitablemente a este consumidor racional a comportarse como un consumidor keynesiano.

Figura 4.1: Restricción intertemporal



los puntos que nos faltan que se relacionan con las preferencias del individuo por suavizar el consumo y las de impaciencia.

EL CONSUMIDOR. Podemos expresar la función de utilidad entre los dos períodos en la ecuación 4.5.

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \frac{1}{1 + \rho} u(c_2) \quad (4.5)$$

Vemos que se compone de dos funciones de utilidad para cada período y un factor de descuento. Primero analicemos las funciones de utilidad para entender porque el consumidor tiende a suavizar el consumo. Las funciones de utilidad para cada período i serán tal que $u'(c_i) > 0$ y $u''(c_2) < 0$, es decir, cada unidad de consumo aumentará la utilidad en ese período pero a rendimientos decrecientes. La concavidad de la función de utilidad se puede interpretar como que el individuo es saciable, llegará un punto en que en vez de consumir esa unidad extra hoy conviene consumirla mañana, pues en el total será una mayor utilidad.

A pesar de que la utilidad en el presente y futuro sigan una misma función $c(\cdot)$ el consumidor preferirá el consumo presente por sobre el consumo en futuro. Para incluir esta impaciencia se añade una **tasa de impaciencia** que

4.1. OPTIMIZACIÓN INTERTEMPORAL Y LA AVERSIÓN AL CAMBIO 7

descontará la utilidad del consumo en futuro. Dado que $\rho > 0$ tendremos que se pondera al utilidad en el futuro por un número menor a 1. Por conveniencia podemos hacer un cambio de variable y definir $\beta = \frac{1}{1+\rho}$.

Dado que tenemos la utilidad y restricción intertemporal podemos plantear el problema de maximización que enfrenta el individuo.

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2} \quad & \left\{ u(c_1) + \beta u(c_2) \right\} \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + \frac{y_2}{1+r} = c_1 + \frac{c_2}{1+r} \end{aligned}$$

Para resolver este problema definimos el lagrangeano y derivamos las condiciones de primer orden.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : & u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda \left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right) \\ \text{CPO:} \quad & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = u'(c_1) - \lambda = 0 \\ & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \beta u'(c_2) - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \\ & \lambda = \lambda \longrightarrow u'(c_1) = \left(\frac{1}{1+\rho} \right) u'(c_2)(1+r) \\ & \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{1+r}{1+\rho} \end{aligned} \tag{4.6}$$

El resultado de la optimización será la ecuación 4.6 la cual describe el cómo se ajusta la relación consumo presente y consumo futuro frente a las tasas de interés e impaciencia. Esta ecuación se le conoce como la **ecuación de Euler del consumo**, se le refiere también como el perfil del consumidor. Por ejemplo, un aumento de la tasa de interés tiene un efecto positivo sobre el consumo futuro en relación con el consumo presente dado que se premia más el ahorro. Que el consumo presente disminuya implica que la utilidad marginal del consumo presente aumente dado que la función de utilidad tiene rendimientos decrecientes. Por el contrario un aumento en la tasa de impaciencia disminuye el consumo futuro de la bajo el mismo mecanismo.

Podemos notar del perfil del consumidor que las tasas de interés e impaciencia son fuerzas que mueven el consumo en sentidos contrarios: La tasa de interés impulsa el ahorro y por tanto el consumo futuro mientras que la tasa de impaciencia incentiva el consumo presente y por tanto la deuda. Podemos

conceptualizar los cambios entre consumo presente y consumo futuro como **efectos sustitución** y **efecto ingreso** tomando la tasa de interés como el precio relativo del consumo entre períodos.

El precio relativo de consumo presente en relación al consumo futuro es la tasa de interés puesto que el dinero que no se gaste en el presente será $(1 + r)$ más valioso en el futuro. Por tanto un aumento en la tasa de interés se toma como un aumento del precio relativo del consumo presente frente al consumo futuro incentivando el consumo de este último: consumir en el presente es más caro pues está considerando mayor costo de oportunidad del dinero. Por el otro lado habrá un efecto ingreso, personas que tienen ingreso ahorrado ante un aumento de la tasa de interés verán aumentada su riqueza y por tanto tenderán a consumir más en ambos períodos. Por el contrario personas que tienen deudas serán más pobres y por tanto reducirán su consumo en ambos períodos. La dirección y el tamaño del ajuste ante cambios en el precio relativo del consumo entre períodos se pueden medir, estamos describiendo una elasticidad. Para esto tomamos el logaritmo natural y derivamos parcialmente por el precio relativo.

$$\ln \left(\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \right) = \ln(1 + r) - \ln(1 + \rho)$$

$$\frac{\partial \ln(u'(c_1)/u'(c_2))}{\partial \ln(1 + r)} = 1$$

Vemos que un aumento de un 1 % en el precio relativo del consumo entre períodos lleva a un ajuste de 1 % en los consumos entre los períodos. Ahora veremos un caso en donde esto no necesariamente es así, hasta ahora no hemos considerado que las personas son aversas al riesgo. Este factor es ampliamente incluido en diversos modelos macro.

4.1.2. Funciones de utilidad con aversión al riesgo

Un caso especial y muy utilizado para describir el consumo de agentes en la economía es el uso de funciones de utilidad que incluyan aversión al riesgo. Las funciones de aversión relativa al riesgo constante (CRRA) incluyen el factor aversión al riesgo como una variable σ que tendrá un efecto sobre la magnitud de los ajustes ante cambios en las variables exógenas (Como la tasa de interés por ejemplo).

4.1. OPTIMIZACIÓN INTERTEMPORAL Y LA AVERSIÓN AL CAMBIO 9

Un función de utilidad CRRA se puede describir como la expresión 4.7.

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} & \text{si } \sigma > 0, \sigma \neq 1 \\ \ln(c) & \text{si } \sigma = 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

De la cual si resolvemos llegaremos a una ecuación de Euler del consumo de la ecuación 4.8). De aquí podemos definir la **elasticidad intertemporal de sustitución** como el cambio porcentual en la relación marginal de consumo 1 y 2 para un cambio del 1 % en el precio relativo del consumo en 1 (tasa de interés).

$$\left(\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \right)^\sigma = \frac{1+r}{1+\rho} \quad (4.8)$$

La elasticidad intertemporal de sustitución describe la magnitud en que el consumo presente y futuro se ajustan ante un cambio en las condiciones (tasa de interés e impaciencia).

$$\text{EIS} = -\frac{\partial \ln(u'(c_1)/u'(c_2))}{\partial \ln(1+r)} = \frac{1}{\sigma} \quad (4.9)$$

Mientras mayor sea la aversión al riesgo (σ) el consumidor responderá en menor medida a cambios en estas variables. Es decir, un aumento de 1 % en el precio relativo del consumo presente en relación al consumo futuro tendrá un efecto $1/\sigma$ en la relación de consumo futuro y consumo presente.

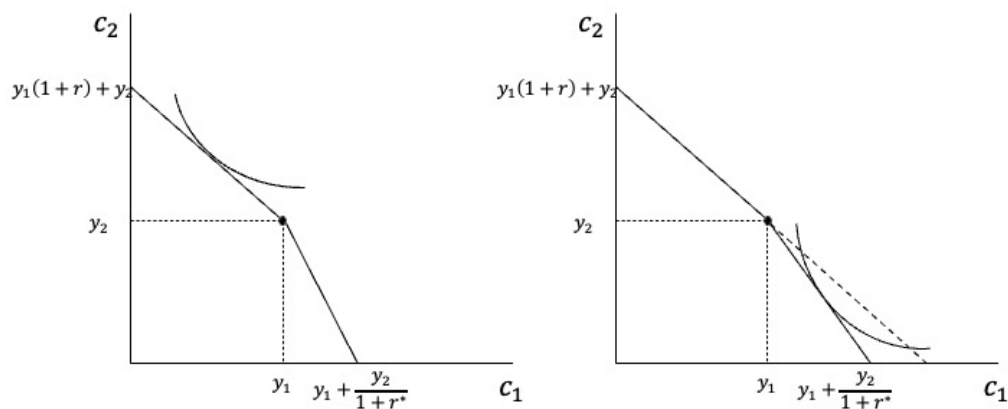
Mientras mayor sea la σ mayor será la aversión al riesgo, representado por una curva más cóncava. Cuando grafiquemos una función $u(c)$ que sea cóncava está tendrá implícita cierta aversión al riesgo.

4.1.3. Restricciones de liquidez

Hasta ahora se ha asumido que la tasa a la que un individuo ahorra (r) y se endeuda (r^*) es la misma. Un acercamiento más realista es que la tasa que paga un deudor es mayor a la tasa que consigue alguien por ahorrar.

Cuando hablamos de **restricciones de liquidez** específicamente nos referimos a restricciones al endeudamiento puesto que esta restricción se da solo al momento de endeudarse, las personas que en el neto ahorran no se verán afectadas. Este margen puede deberse a que la tasa de endeudamiento considera un premio por riesgo cuando hay probabilidad de impago. Mercados financieros menos robustos, los cuales suelen estar presentes en países

Figura 4.2: Restricciones de liquidez y pérdida de bienestar ahorradores y deudores



menos desarrollados suelen estar sujetos a mayores restricciones de liquidez, lo cual deriva en muchas implicancias macro y microeconómicas.²

Podemos ver los efectos en el bienestar de un consumidor bajo restricciones de liquidez en dos casos. El caso a la izquierda (Figura 4.2) es el consumidor que en el neto ahorra, para este individuo la restricción no está activa puesto que las restricciones de liquidez solo afectan a la tasa de endeudamiento. En el caso de la derecha el individuo en el neto se endeuda y para él la restricción está activa, el punto que maximizaba el bienestar ya no es factible y por tanto hay una pérdida en cuanto a utilidad, la curva de indiferencia es de menor nivel.

Es fácil ver que las restricciones tienen efectos negativos (o nulos) en el bienestar de las personas pues reduce la cantidad de opciones factibles en las que maximizar utilidad.

²Efectos sobre inversión y aplicación del ciclo económico, racionamiento del crédito, ineficiencias que llevan a perpetuar la desigualdad, etc...

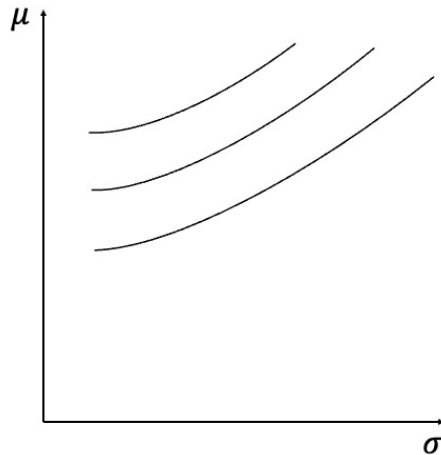
4.2. Teoría de los mercados eficientes (incompleto)

Las finanzas, en parte, son una herramienta para enfrentarse a la incertidumbre. Al igual como puede ser el ahorro o un seguro las carteras de activos buscan minimizar el riesgo. En 1952 **Harry Markowitz** presentó un modelo de formación de carteras en el cual inversores racionales con información respecto a los activos en disposición formarían una cartera riesgo-eficiente que se ajuste a sus preferencias de aversión al riesgo. El modelo de Markowitz no es tan complejo y maneja conceptos ya bastante discutidos en capítulos anteriores, como pueden ser individuos aversos al riesgo, maximizadores de utilidad sujetos a restricciones.

Anteriormente graficábamos la función de utilidad de un individuo como una función cóncava en caso de que este sea averso al riesgo. Una extensión del análisis sería armar curvas de diferencia entre el retorno esperado de un proyecto y el riesgo que conllevaría tomarlo. Esto es, para determinado rendimiento cuánto riesgo está determinado asumir el inversor. Los individuos

Harry Markowitz (1927-2023):
Economista estadounidense, premio nobel del 1990 gracias su aporte a la economía financiera.

Figura 4.3: Curvas de indiferencia riesgo-retorno



preferirán un proyecto más riesgoso que otro siempre y cuando el rendimiento esperado sea suficiente o más para compensar la incertidumbre adicional.

Las curvas de indiferencia (Figura 4.3) serán siempre convexas para todo individuo independiente si son aversos, neutros o amantes del riesgo. Sin embargo, mientras más aversos al riesgo sean más convexa será esta curva de indiferencia, dejándose ver que ante un mayor riesgo necesitan un incremento cada vez mayor de rendimiento esperado.

4.2.1. Teoría de carteras, el problema financiero

Cartera de activos:

Una cartera o portafolio de activos hace referencia a una colección de distintos activos que se juntan en pos de diversificar riesgo.

El problema de administración de **carteras** hace referencia a la distribución y minimización del riesgo al buscar cierto retorno esperado. Las carteras son colecciones de activos los cuales tienen sus respectivos retornos y riesgos, cada activo puede estar más o menos presente en la cartera dependiendo de la composición de esta.

El **precio** de una cartera en $t = 0$ puede ser descrito como la sumatoria del valor de los activos A_i en dicho período.

$$P_0 = \sum_{i=1}^I A_{i0} \quad (4.10)$$

Retorno esperado:

El retorno promedio de un activo o cartera de activos sujeto a incertidumbre y varianza.

Mientras que el **retorno esperado** que obtengamos de una cartera dependerá obviamente del retorno de cada activo, pero además del peso de dicho activo en la cartera.

$$r_p = \sum_{i=1}^I \frac{A_{i0}}{P_0} r_{i0} \quad (4.11)$$

Por otro lado, el riesgo³ de una cartera no se corresponde a simplemente la suma de las varianzas, esto ya que entra en juego las correlaciones de los activos entre sí. Es decir, no nos fijamos en como se comportan los activos por separado sino la combinación de dichos activos en un mismo portafolio. Veamos esto más en detalle:

Ahora mismo vamos a dejar de lado el tema riesgo-retorno para centrarnos en la minimización de riesgo, definiendo los puntos importantes que permiten que al juntar activos reduzcamos el riesgo del portafolio. Es necesario conocimientos elementales de estadística, los cuales se pueden encontrar en el anexo.

³Con riesgo generalmente nos referimos a la desviación estándar del activo o portafolio.

4.2. TEORÍA DE LOS MERCADOS EFICIENTES (INCOMPLETO) 13

Para un portafolio de dos activos riesgosos i con esperanza μ_i y varianza σ_i^2 ,

$$X \sim (\mu_X, \sigma_X^2), \quad Y \sim (\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

El portafolio está compuesto por una fracción $0 \leq a \leq 1$ de X y por una fracción $0 \leq b \leq 1$ de Y . Entonces podemos escribir la varianza del portafolio como $\mathbb{V}(aX + bY)$. Es decir, la suma de la varianza de los activos X e Y y de la covarianza entre los mismos.

$$\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\text{Cov}_{XY} \quad (4.12)$$

Como se puede observar la varianza del portafolio completo no es sólo la suma de las varianzas de los activos por separado sino también la interacción (covarianza) entre los mismos.

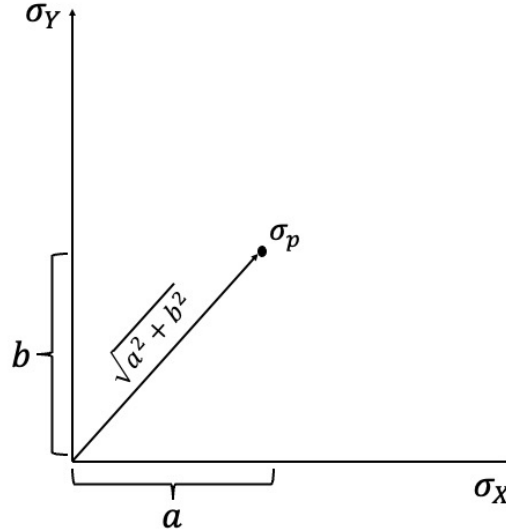
Es directo observar en 4.12 que si la covarianza entre los activos es positiva la varianza del portafolio será mayor que la suma de las varianzas. En este caso, se juntaron dos activos volátiles que juntos hacen una cartera aún más volátil, lo cual a menos que presente rendimiento esperado tan alto que compense la incertidumbre, no valdría la pena.

La idea del portafolio que estamos buscando en este momento es que reduzcamos el riesgo al que el inversor se enfrenta. Para esto se necesitan activos que juntos reduzcan el riesgo de portafolio, condición para esto es que sean independientes o que covaríen negativamente. Obviamente si la covarianza en 4.12 es negativa el riesgo del portafolio bajará puesto que en caso de que a un activo le vaya mal lo más probable es que el otro la vaya bien.

Mostremos que aun cuando los activos son independientes el riesgo del portafolio baja. En caso de que X e Y fueran independientes implicaría que $\text{Cov}_{XY} = 0$. Asumiendo que tienen varianzas $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$. Tendríamos que la desviación estándar del portafolio sería $\mathbb{SD}(aX + bY) = \sqrt{a^2 + b^2}$, mientras que la sumatoria de las desviaciones de los activos por separado serían $a + b$. Como se puede ver en la figura 4.4 por teorema de Pitágoras, siempre se cumplirá que $\sqrt{a^2 + b^2} < a + b$.

Reduciremos riesgo juntando activos siempre y cuando sean independientes o covaríen negativamente. En el caso anterior fueron dos activos, pero generalizemos para N . Formando una cartera de N activos X_i de igual varianza con pesos iguales cada uno, podemos escribir la varianza de la cartera

Figura 4.4: El riesgo de un portafolio será menor que la suma de los riesgos de los activos que lo componen



de esta manera,

$$\mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^N \frac{X_i}{N} \right) = \frac{1}{N^2} \mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) = \frac{N\sigma^2}{N^2} = \frac{\sigma^2}{N}$$

Mientras más activos independientes conformen la cartera en partes iguales se diversifica el riesgo por lo que disminuye la varianza de la cartera.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{N} = 0 \quad (4.13)$$

Ahora finalmente definamos finalmente la varianza de una cartera de activos i donde cada uno pesa una fracción w_i en la cartera y tienen una varianza σ_i^2 .

$$\sigma_{P_0}^2 = \sum_{i=1}^I w_{i0}^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^I \sum_{j \neq i}^I w_{i0} w_{j0} \text{Cov}_{ij} \quad (4.14)$$

Se lee como la sumatoria de las varianzas y sus respectivas ponderaciones más las covarianzas de todos los activos entre sí.

Al empezar a hablar de riesgo de portafolio dejamos de lado el análisis riesgo-retorno relacionado a las curvas de indiferencia. Ahora buscaremos relacionar la selección de cartera con las preferencias del inversor y sus curvas de indiferencia.

APÉNDICE A

APÉNDICE

A.1. Random Walk

Incluyendo incertidumbre a un modelo con expectativas racionales podemos obtener distintos resultados dependiendo del tipo de función de utilidad. En este caso veremos como un individuo neutro al riesgo sigue una trayectoria de consumo tipo *random walk*.

Primero resolvamos el problema con un consumo futuro incierto.

$$\begin{aligned} \max_{c_t, c_{t+1}} \quad & u(c_t) + \mathbb{E}_t\{u(c_{t+1})\} \\ \text{s.a} \quad & y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} = c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r} \end{aligned}$$

Planteamos el lagrangeano:

$$\mathcal{L} : u(c_t) + \mathbb{E}_t\{u(c_{t+1})\} + \lambda \left(y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} - c_t - \frac{c_{t+1}}{1+r} \right)$$

Derivamos las condiciones de primer orden para encontrar la ecuación de

Euler del consumo.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} &= u'(c_t) - \lambda = 0 \\ u'(c_t) &= \lambda\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}} &= \frac{1}{1+\rho} \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \\ \frac{1+r}{1+\rho} \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} &= \lambda\end{aligned}\tag{A.2}$$

$$u'(c_t) = \frac{1+r}{1+\rho} \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\}\tag{A.3}$$

La expresión A.3 es la ecuación de Euler.

Para probar que un individuo neutral al riesgo sigue un *random walk* en este caso podemos reemplazar la función de utilidad con una función cuadrática como en la expresión A.4. La utilidad marginal por tanto va a ser lineal lo cual describe un individuo neutro al riesgo.

$$u(c_t) = bc_t - \frac{a}{2}c_t^2\tag{A.4}$$

Remplazamos las funciones de utilidad marginales en la ecuación de Euler del consumo y asumimos que $r = \rho = 0$:

$$b - ac_t = \mathbb{E}_t\{b - ac_{t+1}\}$$

Aplicamos propiedades de la esperanza y simplificamos los b y $-a$:

$$c_t = \mathbb{E}_t\{c_{t+1}\}\tag{A.5}$$

Según muestra la ecuación A.5 el consumo en t va a ser igual a lo que se espera que sea el consumo en $t + 1$. Por lo que la trayectoria de consumo se mantendrá igual hasta que llegue un shock que la desvíe.

A.2. Incertidumbre y ahorro por precaución

Bajo el mismo caso de incertidumbre, un individuo con aversión al riesgo tendrá un ahorro por precaución. Esto ya que no se cumple el caso de A.5 ya que tendremos utilidades marginales crecientes a tasas decrecientes.

Esto se traduce en que la esperanza de la utilidad es mayor a utilidad de la esperanza

$$\mathbb{E}_t\{u(c_t)\} < u(\mathbb{E}_t\{c_t\}) \quad (\text{A.6})$$

Podemos derivar la expresión.

$$\mathbb{E}_t\{u'(c_t)\} > u'(\mathbb{E}_t\{c_t\}) \quad (\text{A.7})$$

Según A.3 (con $\rho = r = 0$) podemos reemplazar.

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= u'(\mathbb{E}_t\{c_{t+1}\}) < \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} \\ u'(c_t) &< \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

De A.8 podemos interpretar que debido al perfil del consumidor se consume menos por una necesidad de ahorro por precaución.

A.3. Modelo CAPM de consumo

Los retornos están sujetos a varianza. retornos puedes estar sujetos a varianza (incertidumbre). Para individuos con expectativas racionales que tienen la opción de consumir en el presente o de invertir para llevar dinero al futuro podremos llegar a la ecuación de euler del tipo A.3. Específicamente,

$$u'(c_1) = \mathbb{E}_1 \left[\frac{1 + r^i}{1 + \rho} u'(c_2) \right] \quad (\text{A.9})$$

Donde r^i es un activo con riesgo. Queremos buscar el diferencial entre la esperanza del activo riesgoso y el libre de riesgo. Utilizando las propiedades de la esperanza podemos desarrollar sacando el descuento intertemporal de la esperanza y multiplicando la esperanza de los retornos $1 + r^i$ y $u'(c_2)$. Recordamos como desarrollar $\mathbb{E}(X \cdot Y)$ y aplicamos a A.9

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) + \text{Cov}(XY) \quad (\text{A.10})$$

$$u'(c_1) = \frac{1}{1 + \rho} [\mathbb{E}_1(1 + r^i) \cdot \mathbb{E}_1(u'(c_2)) + \text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2))] \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbb{E}_1(1 + r^i) = \frac{1}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))} [(1 + \rho)u'(c_1) - \text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2))] \quad (\text{A.12})$$

Ahora tenemos la esperanza de los activos riesgosos, necesitamos encontrar el diferencial entre estos y los de libre riesgo. Sabemos que en caso de

que $1 + r$ sea libre de riesgo podremos sacar los retornos como constantes de A.9. Llegamos a lo siguiente,

$$1 + r = \frac{1}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))} [(1 + \rho)u'(c_1)] \quad (\text{A.13})$$

Por lo que ahora que tenemos las variables definidas podemos encontrar el diferencial restando A.12 con A.13.

$$\mathbb{E}_1(1 + r^i) - (1 + r) = \frac{(1 + \rho)u'(c_1) - \text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2)) - (1 + \rho)u'(c_1)}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))}$$

Llegamos a que la diferencia entre los retornos riesgosos y los libres de riesgos debieran seguir esta igualdad.

$$\mathbb{E}_1(r^i) - r = -\frac{\text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2))}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))} \quad (\text{A.14})$$

Esta expresión es la que da sentido a los premios por riesgo de un activo con retornos inciertos. Aunque se parezca mucho al consumo intertemporal este modelo CAPM de consumo considera incertidumbre. Por lo que las personas no solo estarían decidiendo si invertir a futuro por precaución sino también por aumentar el consumo futuro bajo un riesgo.

En caso de que si $\text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2)) < 0$ habrá un premio de por riesgo. Recordando que $u'(c_2) < 0$ podemos inferir que el retorno covaría positivamente con el consumo, por lo que en el futuro $t = 2$ se necesitaría pagar un premio por riesgo. Esto ya que si un activo paga más cuando el consumo es alto no estaría proveyendo de un seguro contra las caídas del ingreso, la única razón de mantenerlo en el portafolio sería si provee un buen retorno.

En caso de que $\text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2)) > 0$, es decir el retorno es bajo cuando el consumo es alto el rendimiento será menor al libre de riesgo. Esto es porque además de servir como ahorro también juega una función de seguro contra los malos tiempos