Apuntes del ramo de Economía Política con el profesor Landerretche. Podría contener errores y en caso de encontrarlos por favor notificarme al correo: joamartine@fen.uchile.cl

Última actualización: Marzo 2024

CAPÍTULO 3

EL PROBLEMA DE LO PRIVADO Y LO PÚBLICO

3.1. La economía descentralizada

3.1.1. Motivación del modelo de equilibrio general

Los modelos de equilibrio parcial buscan describir los ajustes de oferta y demanda de un mercado específico tratando el resto de la economía como constante. Estos modelos de equilibrio parcial fueron desarrollados en gran parte por **Alfred Marshall**. Por ejemplo, si analizaramos el mercado de manzanas supondríamos que los costos de los factores de producción son exógenos, esto significaría que los costes de trabajo (salarios) se mantendrían constantes independiente de la dotación y equilibrio del modelo.

Alfred Marshall: Economista británico que durante finales del siglo XIX traslapó conceptos de la economía clásica con la escuela marginalista.

Encontrándose el precio de mercado en equilibrio, en ninguna extensión se aborda el equilibrio del mercado laboral que hay detrás de la producción de manzanas. En la realidad como distintos mercados están interactuando constantemente un shock en un mercado puede derivar a múltiples ajustes en mercados relacionados. Por ejemplo, un subsidio al empleo bajaría los costes por trabajo, potencialmente aumentando la producción de manzanas. Estos fenómenos no se pueden analizar con modelos de equilibrio parcial pues se limitan a un sólo mercado dejando los factores como constantes dadas.

Equilibrio General: Modelo que busca explicar el equilibrio dentro de una economía con más de un mercado en constante interacción.

Por otro lado, los modelos de **equilibrio general** describen dos o más mercados relacionados que se ajustan al mismo tiempo, lo cual nos podría dar una imagen más completa de los efectos de distintos shocks en la economía como un todo. Analizar el equilibrio de un número arbitrario de mercados es complejo, por suerte limitarnos a dos mercados y plantear diversos supuestos nos permite aun así, abstraer las conclusiones que encontramos relevantes para esta ocasión.

3.1.2. Planteamiento del modelo

Ley de Walras: En una economía de n mercados, que $n-1$ de ellos esté en equilibrio implica que el otro también lo estará.

León Walras: Economista francés de la escuela (neoclásica) de Lausana. Considerado fundador de la economía matemática.

Una razón poderosa por la que limitarnos a analizar solo dos mercados es la **Ley de Walras**. La ley de Walras es un principio desarrollado por **León Walras** que plantea que al tener dos mercados, si el exceso de demanda de un bien es cero implica que el exceso de demanda del otro bien también será cero. Por lo tanto, los dos mercados están en equilibrio.[1] Generalizando, si en una economía de n mercados hay $n-1$ mercados en equilibrio, entonces el último mercado (el n-ésimo) también estará en equilibrio. Es por esto que limitarnos a analizar sólo dos mercados no influye mucho en las conclusiones relevantes del modelo.

Vamos a describir una economía de intercambio entre dos individuos que al consumir dos bienes se formarán dos mercados. Estos individuos serán racionales, maximizarán su función de utilidad sujeto a una restricción presupuestaria.[2] Cada agente tendrá una dotación inicial de bienes que podrá consumir e intercambiar. La restricción presupuestaria de cada individuo será determinada por su dotación inicial y el precio de mercado de los bienes que se le haya dotado. Mientras que los precios serán determinados entonces por la demanda (preferencias y poder adquisitivo) y la oferta (dotación total de los bienes). En particular vamos a asumir:

1. No hay poder de mercado, los dos agentes en la economía serán tomadores de precios.

2. Información completa. Los dos individuos están al tanto de los bienes que hay en la economía, su cantidad y utilidad que les proporciona tanto a el como al otro.

3. No hay costos de transacción.

[1] Con exceso de demanda igual a cero entiéndase como oferta igual a demanda.

[2] Se asume que la función de utilidad es del tipo $u_i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, la cual cumple con ser (i) continua, (ii) creciente y (iii) cóncava.

4. No hay externalidades. El consumo de un bien no afecta la utilidad de un externo de ninguna manera.[3]

Los individuos comerciarán su dotación inicial arbitrariamente asignada llegando a una dotación que sea eficiente. Es intuitivo entender que un individuo solo intercambiará una cantidad de un bien mientras que el bien que le llegue a cambio le genere una utilidad mayor, solo accederan a intercambiar si son más felices con el acuerdo. Por lo tanto, habrá un punto en que dejarán de intercambiarse puesto que se agotaron todas las transacciones posibles, en este equilibrio ninguno de los dos puede estar mejor sin perjudicar al otro.

Este equilibrio se encuentra dentro de lo que se conoce como **equilibrio walrasiano**.[4] Cada individuo consumirá con respecto a su restricción, el resultado es que la demanda y la oferta se igualarán, de aquí se suele decir que se *vacía el mercado*. En lo que sigue formalizaremos y pondremos nombre al proceso que se acaba de mencionar.

Caja de Edgeworth: Herramienta gráfica para representar un modelo de equilibrio general.

Francis Edgeworth: Economista y estadístico británico que propone las curvas de indiferencia y caja de Edgeworth.

Arthur Bowley: Economista y estadístico británico pionero de usar técnicas de muestreo en encuestas sociales.

3.1.3. Caja de Edgeworth

La **Caja de Edgeworth** será la representación gráfica del modelo. Esta herramienta fue desarrollada por **Francis Edgeworth** y **Arthur Bowley**, economistas y estadísticos británicos. Las dimensiones de esta caja obedecerán a las dotaciones totales de cada bien.

Esta economía considera dos individuos $i \in A, B$ que se intercambian dos bienes $j \in x, y$. Las dotaciones de bienes que tenga cada individuo se puede describir como un vector $\in \mathbb{R}^2_+$, más precisamente las dotaciones para un individuo i serán:

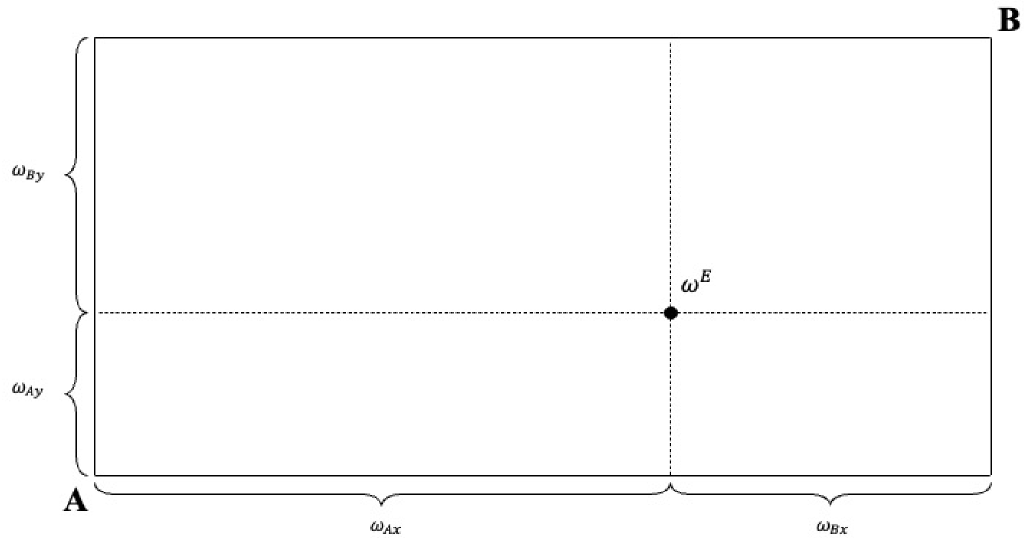
$$\omega_i = (\omega_{ix}, \omega_{iy}) \in \mathbb{R}^2_+$$

En la figura 3.1 podemos observar que las dimensiones de la caja son $\omega_x = \omega_{Ax} + \omega_{Bx}$ por un lado y $\omega_y = \omega_{Ay} + \omega_{By}$ por el otro. Donde además ubicamos una la dotación inicial como un punto dentro de la caja $\omega^E \in \mathbb{R}^2_+$. Los mercados se encargarán de asignar precios a cada bien dadas las preferencias y dotaciones, estos precios los podemos denotar como un vector $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_+$. Para el individuo i la riqueza se puede denotar como la cantidad de un

[3] Este supuesto se puede levantar y llevar al mismo resultado de equilibrio bajo ciertas condiciones, asumiremos que no existe tal posibilidad.

[4] También se le llama equilibrio competitivo, fue introducido por Kenneth Arrow and Gérard Debreu a principios de los 50. (Requiere cita)

Figura 3.1: Dimensiones de la caja de Edgeworth



bien ponderado por su precio:

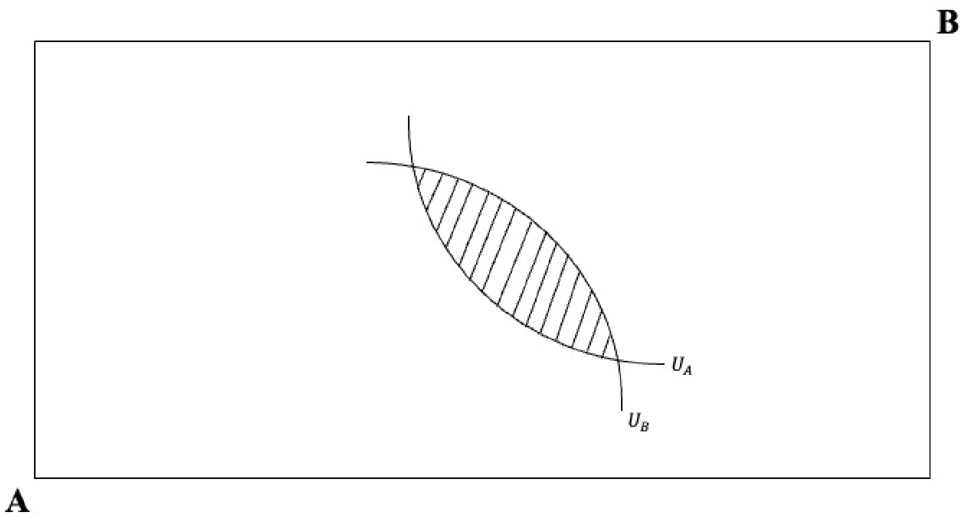
$$R_i = p_x \cdot \omega_{ix} + p_y \cdot \omega_{iy}$$

La riqueza vendrá siendo la restricción presupuestaria a la que está sujeta la maximización de utilidad. Es decir, el individuo i maximizará su función $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ en este caso del tipo Cobb-Douglas consumiendo bienes x, y y su restricción no estará activa mientras consuma menos o igual que su riqueza.

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & u_i(x,y) = x_i^\alpha y_i^\beta \\ \text{s.a.} \quad & R_i \leq p_x \cdot x_i + p_y \cdot y_i \end{aligned}$$

Se pueden graficar las curvas de indiferencia dada las preferencias de cada individuo dentro de la caja. Es importante recordar que al hablar de curvas de indiferencia, el moverse a la derecha de la curva de indiferencia es una mejor situación en cuanto a utilidad para el individuo, lo contrario si nos movemos a la izquierda (Desde el punto de vista del individuo A, puesto que para el individuo B sería el caso contrario). Podemos caracterizar los puntos en que por lo menos uno de los individuos aumenta su utilidad en el lente de mejorías de pareto, el cual es el área rayada en la figura 3.2.

Figura 3.2: Curvas de indiferencia y lente de mejorías de pareto



3.1.4. Eficiencia y óptimos de pareto

Dadas las preferencias y dotaciones los individuos podrán intercambiar bienes para maximizar su utilidad. El intercambio se dará si es que hay una posibilidad de mejora para los dos individuos, cuando todas las oportunidades de mejora se hayan agotado nos encontraremos en un óptimo de pareto. Un **óptimo de Pareto** graficamente es un punto en la caja de Edgeworth en que no podemos mejorar a un individuo sin empeorar al otro. Este fue un concepto acuñado por **Vilfredo Pareto**.

Hay que aclarar que estar en un óptimo no es sinónimo de estar en equilibrio, esto tan solo describe una situación en donde no hay intercambios *win-win*. También se puede comentar que estar en un óptimo de pareto no considera las implicaciones morales en cuanto a equidad. Por ejemplo, una dotación inicial esquina donde A ó B concentra todos los recursos cuenta como un óptimo de Pareto.

Óptimo de Pareto: Punto en que las oportunidades de intercambio están agotadas.

Vilfredo Pareto: Economista italiano, adopta los equilibrios walrasianos e incorporó a ellos el concepto de óptimo de Pareto.

Tasa marginal de sustitución: Unidades de un bien que se están dispuestos a renunciar por una unidad marginal del otro bien, manteniendo el mismo nivel de utilidad.

La manera de saber si un punto es óptimo de Pareto es si la **tasa marginal de sustitución** para los dos individuos son iguales (condición 3.1). La tasa marginal de sustitución se define como las unidades de un bien que pueden cambiar por una unidad de otro bien manteniendo la utilidad constante.

$$TMS^{A}_{x,y} = TMS^{B}_{x,y} \tag{3.1}$$

La tasa marginal se calcula como la derivada parcial de la utilidad respecto a un bien divido por la derivada parcial de la utilidad respecto al otro bien. Por lo que podemos expandir la condición 3.1 como:

$$\frac{\frac{\partial u_A(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial u_A(x,y)}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u_B(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial u_B(x,y)}{\partial y}}$$

Curva de contrato: Colección de puntos óptimos de Pareto dentro de la caja de Edgeworth.

La **curva de contrato** es la colección de puntos óptimos de pareto dentro de la caja de Edgeworth. A continuación llegamos a la expresión que denotan todos los óptimos de pareto que componen la curva de contrato para los individuos A y B. Siendo que el problema para A se plantea como:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & u_A(x,y) = x_A^{\alpha} y_A^{\beta} \\ \text{s.a.} \quad & p_x \cdot w_{Ax} + p_y \cdot w_{Ay} = p_x \cdot x_A + p_y \cdot y_A \end{aligned}$$

El problema para B es simétrico[5]:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & u_B(x,y) = x_B^{\alpha} y_B^{\beta} \\ \text{s.a.} \quad & p_x \cdot w_{Bx} + p_y \cdot w_{By} = p_x \cdot x_B + p_y \cdot y_B \end{aligned}$$

Derivamos para obtener la expresión de la tasa marginal de sustitución para ambos individuos.

$$TMS_A = \frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{\beta}}{\beta x_A^{\alpha} y_A^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_A}{x_A}$$
$$TMS_B = \frac{\alpha x_B^{\alpha-1} y_B^{\beta}}{\beta x_B^{\alpha} y_B^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_B}{x_B}$$

[5] Cada vez que se diga que un problema es simétrico significa que la solución algebráica seguirá el mismo proceso, por lo que podemos ocupar en este caso el resultado de A para solucionar directamente el resultado de B sin hacer el proceso algebráico de nuevo.

Igualamos,

$$TMS_A = TMS_B \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_A}{x_A} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_B}{x_B}$$
$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B}$$

Es directo entender que,

$$x_A + x_B = \omega_x \quad y_A + y_B = \omega_y$$

Y por tanto aprovechamos para definir nuestra curva de contrato Reemplazando una de aquellas en la expresión anterior.

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{\omega_y - y_A}{\omega_x - x_A}$$
$$y_A \omega_x = x_A \omega_y$$

Reordenando la expresión,

$$x_A \cdot \left(\frac{\omega_y}{\omega_x} \right) = y_A \tag{3.2}$$

Es decir, una dotación que cumpla con la expresión 3.2 pertenece a la curva de contrato y por ende es óptimo de pareto, se agotaron las posibilidades de intercambio por lo que no se puede aumentar la utilidad de uno sin reducir la del otro. La curva de contrato va a tener diferentes formas dependiendo de la función de utilidad de los individuos, en algunos casos no habrá.[6]

3.1.5. Demandas Marshallianas

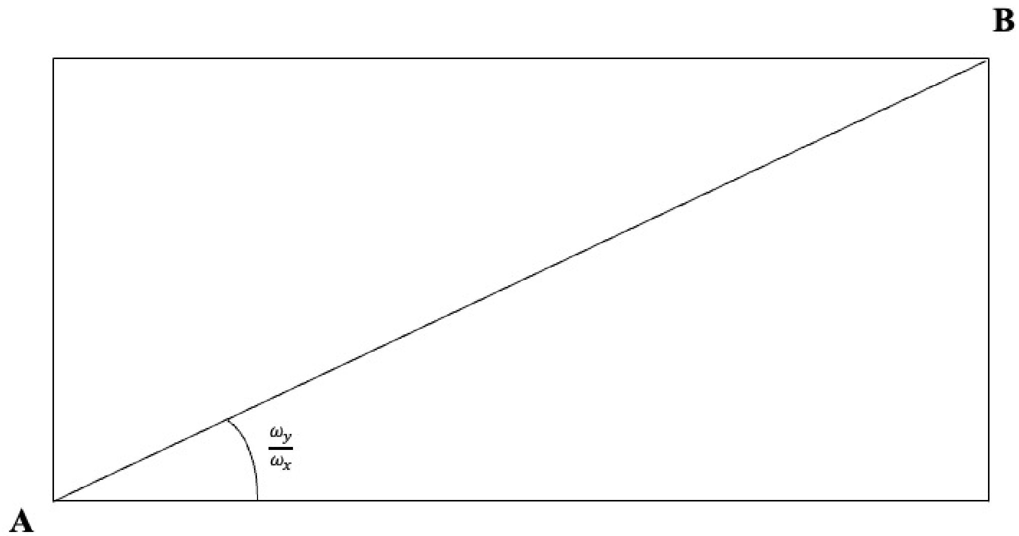
Los individuos tendrán una **demanda marshalliana** acorde a sus preferencias y riqueza. Para esto el individuo maximiza su utilidad sujeto a una restricción. Si resolvemos el problema para A encontraremos la demanda del individuo para cada bien. En este caso diremos que $\alpha, \beta > 0$ y que $\alpha + \beta = 1$

Demandas Marshallianas: Son las demandas óptimas resultantes de un problema de maximización sujeto a alguna restricción.

$$\max_{x,y} \quad u_A(x,y) = x_A^{\alpha} y_A^{\beta}$$
$$\text{s.a.} \quad R_A = p_x \cdot x_A + p_y \cdot y_A$$

[6]Los gráficos estáran en el anexo.

Figura 3.3: Curva de contrato



Planteando el lagrangeano,

$$\mathcal{L} = x_A^{\alpha} y_A^{\beta} + \lambda(R_A - p_x \cdot x_A - p_y \cdot y_A)$$

Derivamos las condiciones de primer orden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = \alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{\beta} - \lambda_x p_x = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = \beta x_A^{\alpha} y_A^{\beta-1} - \lambda_y p_y = 0$$

Se despejan los lambdas y se igualan las expresiones.

$$\lambda_x = \frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{\beta}}{p_x} \quad \lambda_y = \frac{\beta x_A^{\alpha} y_A^{\beta-1}}{p_y} \longrightarrow \frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{\beta}}{p_x} = \frac{\beta x_A^{\alpha} y_A^{\beta-1}}{p_y}$$

Reescribiendo, $x_A = y_A \left(\frac{p_y \alpha}{p_x \beta}\right) \quad y_A = x_A \left(\frac{p_x \beta}{p_y \alpha}\right)$

El siguiente paso es reemplazar alguna de las expresiones anteriores en la restricción:

$$p_x \left(y_A \frac{p_y \alpha}{p_x \beta}\right) + p_y y_A = R_A$$

Por lo tanto las demandas marshallianas de A serán expresadas como:

$$y_A^* = \frac{R_A}{p_y}\beta \quad x_A^* = \frac{R_A}{p_x}\alpha$$

Como el problema es simétrico para B podemos directamente decir:

$$y_B^* = \frac{R_B}{p_y}\beta \quad x_B^* = \frac{R_B}{p_x}\alpha$$

Las demandas marshallianas estarán en función de la riqueza, el precio del bien y las preferencias.

3.1.6. Precios relativos

Los precios en esta economía están determinados por la dotación y preferencias y serán tales que todos los mercados estén en equilibrio. Lo que importa no son los los valores absolutos que se les da a los precios sino el el precio de un bien en relación al otro, es por esto que un mismo equilibrio se puede sostener con un vector precios $p = (1, 2)$ como con un vector $p = (2, 4)$ (si bien los valores absolutos cambiaron, la relación 1 es a 2 sigue presente). Es por esto que al resolver el modelo podemos normalizar uno de los precios a 1, de esta manera simplificamos el proceso.[7]

Para obtener los precios podemos apelar a la ley de Walras y proponer la siguiente expresión,

$$x_A^* + x_B^* = \omega_x, \qquad y_A^* + y_B^* = \omega_y$$

Tomando el caso del bien x reemplazamos las demandas marshallianas.

$$\frac{R_A}{p_x}\alpha + \frac{R_B}{p_x}\alpha = \omega_x$$
$$\frac{\alpha}{p_x}(R_A + R_B) = \omega_x$$

Despejando p_x de esta expresión y (por simetría) expresando también p_y.

$$p_x = (R_A + R_B)\frac{\alpha}{\omega_x}, \qquad p_y = (R_A + R_B)\frac{\beta}{\omega_y}$$

[7] El tener precios numerarios es lo mismo que tomar el vector precios $p = (p_i, p_j)$ y multiplicarlos por $1/p_i$, dejándolos como $p = (1, \frac{p_j}{p_i})$. La gracia está en que tanto la primera expresión del vector como la segunda funcionan para un mismo equilibrio.

Lo cual hace sentido, a mayor preferencia por determinado bien mayor es el precio, por otro lado a menor dotación del bien mayor su precio. Por convención diremos que la riqueza total se puede escribir como $R_A + R_B = R = p_x\omega_x + p_y\omega_y$. Dada esta expresión tendremos un problema, todavía no hemos despejado los precios puesto que estos dependen de la riqueza la cual depende recursivamente de los precios. Podemos hacer dos cosas, una de ellas es normalizar uno de los precios a 1, y la otra opción es dividir directamente p_y/p_x para obtener p_y en relación a p_x.

Los precios relativos se pueden expresar entonces como:

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{R\alpha}{\omega_x}}{\frac{R\beta}{\omega_y}} = \frac{\beta\omega_x}{\alpha\omega_y}$$

Son las mismas leyes de oferta y demanda, a mayor preferencia de y en relación a x mayor será el precio de y relativo al precio de x.

3.1.7. Teoremas del bienestar

Primer teorema del bienestar: Todo equilibrio walrasiano es óptimo de pareto.

Este teorema plantea que si hay un equilibrio en la economía no habrán oportunidades de intercambio.[8] Este teorema se relaciona fuertemente con la mano invisible en donde cada individuo buscando su propio beneficio llegaría a un punto eficiente. Recordar que para llegar a este equilibrio se tienen que cumplir supuestos bastante fuertes.

Segundo teorema del bienestar: Todo óptimo de Pareto puede conseguirse mediante un equilibrio walrasiano.

Para cualquier óptimo de Pareto podemos redistribuir las dotaciones iniciales de manera de conseguir un equilibrio walrasiano. Dada una nueva distribución inicial podemos llegar a un óptimo de Pareto dado mediante el equilibrio walrasiano.

3.1.8. Equilibrio con producción

Una extensión de lo visto hasta ahora sería considerar que los bienes consumidos se tienen que producir. En este caso las dotaciones no van a ser

[8]Demostrado en Arrow, Kenneth J. and Gerard Debreu, "Existence of Equilibrium for a Competitive Economy," Econometrica, 1954.

de bienes sino de factores de producción capital y trabajo (K, L). Habrá un total de capital de $\bar{K}$ y un total de trabajo $\bar{L}$, con los que se producen los bienes x, y.

Análogo al consumo la condición de eficiencia para la producción sigue siendo la igualdad entre las tasas marginales, en este caso la **tasa marginal técnica** (TMT) de sustitución. Es decir, la producción de un bien que podemos intercambiar por la producción adicional de una unidad del otro,

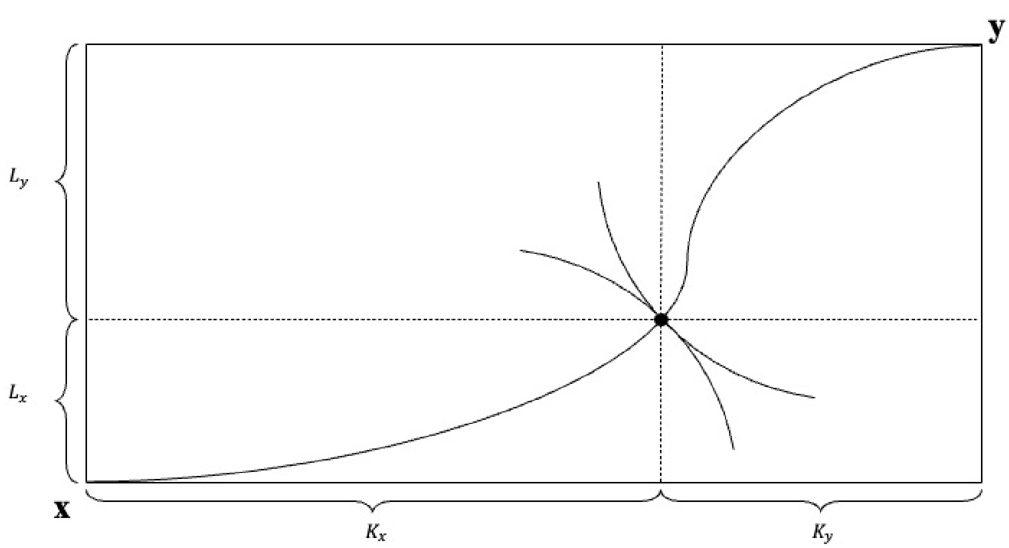
$$TMT = \frac{\frac{\partial f(K,L)}{\partial K}}{\frac{\partial f(K,L)}{\partial L}} \tag{3.3}$$

Dado que se requieren capital y trabajo para los dos bienes estos se tendrán que repartir las dotaciones de manera eficiente, siguiendo 3.4.

$$TMT^{x}_{K,L} = TMT^{y}_{K,L} \tag{3.4}$$

Podemos formar una caja de Edgeworth de producción como se puede ver en la figura 3.4. Las curvas de contrato se relacionan con las fronteras de

Figura 3.4: Caja de Edgeworth en la producción

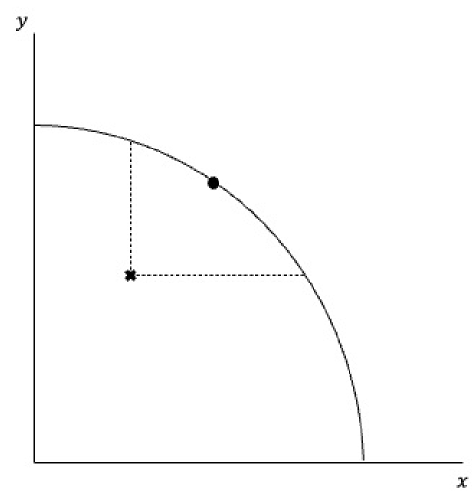


posibilidades. La **frontera de posibilidades** es una curva que describe todos

Frontera de posibilidades:

los puntos en donde se ocupan eficientemente los factores productivos para producir dos bienes, es decir, son los puntos factibles donde no es posible aumentar la producción de un bien sin disminuir la producción del otro. En la figura 3.5 se observan dos puntos, uno que está ubicado en la curva es eficiente y otro que no es eficiente puesto que se puede producir más de un bien sin disminuir la producción de otro. Como todos los puntos de la curva de contrato satisfacen la condición de eficiencia se puede decir que también pertenecen a la curva de contrato. Para más detalle puede leer el anexo.

Figura 3.5: Frontera de posibilidades de producción



3.1.9. Motivación

Al abordar la temática de externalidades comenzamos a salir del marco walrasiano, si bien está es conocida como una falla de mercado clásica, es muy interesante estudiarla desde la economía política ya que existen distintas soluciones que se relacionan con tendencias ideologicas.

Consideramos como externalidad[9] la situación donde, ya sea la producción o consumo de un bien, tiene efectos en el bienestar de un tercero que

[9]Para efectos de este curso nos centraremos en la externalidades de equilibrio parcial.

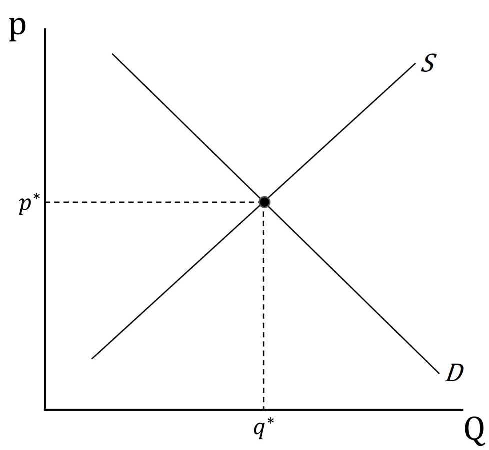
no participa de la interacción de mercado. Entre los ejemplos típicos encontramos las externalidades ambientales, el caso del fumador, aumento de la educación, entre otros. Esta falla de mercado nos saca del marco walrasiano ya que desde el punto de vista social no tenemos un mercado en equilibrio.

3.1.10. Externalidad en la producción

Para analizar el funcionamiento de las externalidades negativas en la producción, utilizaremos como benchmark el equilibrio parcial de un mercado en competencia perfecta. Este modelo de mercado se compone por una oferta y demanda privada, las cuales en su interacción nos entregan un precio y una cantidad de equilibrio.

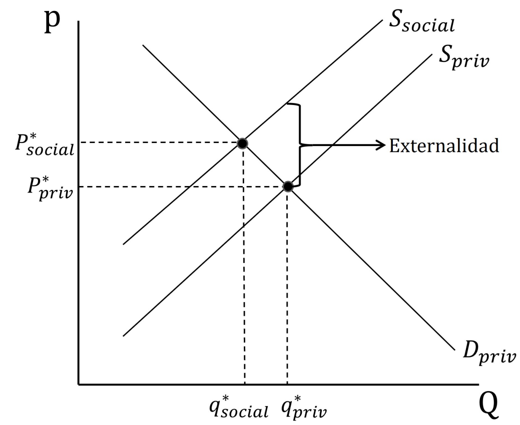
La oferta privada en este mercado está definida por el costo marginal de producción del bien (Cmg) percibidos por quien produce, estos pueden ser costos provenientes de la compra de insumos, gastos en energía, arriendo de un local, etc.

Figura 3.6: Equilibrio parcial en competencia perfecta



Para añadir externalidades negativas a este modelo, debemos considerar que existen costos adicionales que no son percibidos ni reconocidos por quién produce, por lo tanto tampoco son reflejados en la curva de oferta privada, estos nuevos costos los llamaremos "costos sociales". Con estos mayores costos, obtenemos que en equilibrio deberíamos observar un precio mayor y una cantidad producida menor.

Figura 3.7: Externalidad en la producción



Externalidad en la demanda

Para el caso de externalidades positivas el problema no radica en costos no considerados, sino que existe una demanda social que es mayor a la privada. Para analizar este tipo de externalidad nuevamente utilizaremos como benchmark el equilibrio parcial de un mercado en competencia perfecta.

Con lo anterior tenemos que la demanda privada representa la disposición a pagar por el consumo individual de un bien, esto genera que se subestimen los beneficios que tiene sobre la sociedad el consumo de dicho bien. Por otro lado, la demanda social si refleja de manera fidedigna los beneficios generados a nivel social por el consumo del bien, la internalización de estos beneficios resultaría en una mayor disposición a pagar.

El resultado del equilibrio en el mercado considerando la demanda social nos entrega un mayor precio y cantidad producida.

Las externalidades negativas tambien se pueden representar por el lado de la demanda, esto ocurre cuando el efecto en el bienestar del tercero viene dado por el consumo del bien más que por su producción, ejemplo de esto es el consumo del cigarro, con esto tenemos que quien consume no internaliza la desutilidad que genera en los demás agentes y por lo tanto no representa la disposición a pagar de la sociedad. El equilibrio del mercado resulta diferente para este caso, ya que tenemos que en equilibrio el precio y la cantidad producida disminuyen

Solución Pública

La solución de carácter pública para corregir esta falla de mercado fue creada por el economista **Arthur Pigou**, los mecanismos utilizados por esta solución los conocemos como *impuestos y subsidios pigouvianos*, y los supuestos utilizados son que el estado tiene información completa acerca de las preferencias de la sociedad y además la capacidad suficiente para que sus impuestos o subsidios modifiquen el comportamiento de los agentes.

Arthur Pigou:(1877-1959) Economista inglés de la Universidad de Cambridge, conocido por inventar el término *externalidades* y contribuir con su solución pública.

Es importante conocer la diferencia entre tipo de impuestos, de manera general en el estado encontramos impuestos utilizados con el fin de recaudar y subsidios que se enfocan en redistribuir, por otra parte tenemos los impuestos y subsidios pigouvianos que corrigen externalidades mediante un cambio en el comportamiento de los agentes. Dentro de los ejemplos clásicos de impuestos y subsidios pigouvianos encontramos el impuesto al tabaco y los colegios subvencionados.

Medida de efectividad

Para poder medir la efectividad de la solución pública utilizaremos como herramienta la *evaluación social de proyectos públicos*, esta es un área de la economía desarrollada por **Arnold Harberger**. Considerando que la aplicación de impuestos o subsidios es costosa (Ej: costos de administración), la evaluación social consiste en comparar las preferencias sociales y privadas, para determinar la magnitud de la *pérdida social*[10] existente en un mercado, representada gráficamente por los *triángulos de Harberger*, con esto podremos comparar los costos y beneficios de resolver una externalidad y usar esto como medida de eficiencia.

Arnold Harberger:(1924-) Economista estadounidense de la Universidad de Chicago, conocido por ser pionero en el estudio de la evaluación social de proyectos públicos

[10]En inglés se conoce como *dead weight loss (DWL)*

APÉNDICE A

ANEXO

A.1. Demostración Ley de Walras

Definimos el exceso de demanda como $q(p)$ (ecuación A.1) considerando las demandas marshallianas de los bienes x e y y las dotaciones ω_x y ω_y. Por notación dejamos las demandas marshallianas como ξ_j siendo j el conjunto de bienes, esto con el fin de generalizar la ecuación.

$$q(p) = \left[\sum_j^n \xi_j - \sum_j^n \omega_j\right] \tag{A.1}$$

Donde además diremos que para todo mercado j se cumple la igualdad.

$$\sum_j^n p_j \xi_j(p, R) = \sum_j^n p_j \omega_j \tag{A.2}$$

Para completar la demostración ponderamos el exceso de demanda por el vector p.

$$pq(p) = p\left[\sum_j^n \xi_j - \sum_j^n \omega_j\right] = \sum_j^n [p_j \xi_j(p, R) - p_j \omega_j] = 0 \tag{A.3}$$

Lo cual se debiera cumplir por la igualdad (A.2).

A.2. Equilibrio General con Producción

Habrá una dotación de factores productivos K, L en donde habrá un total de $\bar{K}$ y $\bar{L}$ para cada factor respectivamente. Asumiremos la función Cobb-Douglas para la función de utilidad y de producción.

$$U_i(x_i, y_i) = x_i^{\alpha} y_i^{1-\alpha}, \quad i = A, B$$
$$x(K, L) = K_x^{\beta} L_x^{1-\beta}, \quad y(K, L) = K_y^{\beta} L_y^{1-\beta}$$

Es decir que los dos individuos consumen los bienes x, y producidos con los factores K, L. Las variables α y β representan las preferencias y ponderaciones para el consumo y producción respectivamente.

Curva de contrato de producción

La eficiencia de producción se dará maximizando la producción de un bien sujeta a la producción del otro. De esta manera encontraremos los puntos que pertenecen a la frontera de posibilidades y que por tanto son eficientes.

$$\begin{aligned} \max_{K_x, L_x} \quad & x = K_x^{\beta} L_x^{1-\beta} \\ \text{s.a} \quad y &= K_y^{\beta} L_y^{1-\beta} \\ \bar{K} &= K_x + K_y \\ \bar{L} &= L_x + L_y \end{aligned}$$

Planteando el lagrangeano y resolviendo podemos optimizar la funcíon.

$$\mathcal{L}: \quad K_x^{\beta} L_x^{1-\beta} + \lambda_1 (K_y^{\beta} L_y^{1-\beta} - y) + \lambda_2 (K_x + K_y - \bar{K}) + \lambda_3 (L_x + L_y - \bar{L})$$

Encontramos las condiciones de primer orden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_x} = \beta K_x^{\beta-1} L_x^{1-\beta} + \lambda_2 = 0 \tag{A.4}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_x} = (1-\beta) K_x^{\beta} L_x^{-\beta} + \lambda_3 = 0 \tag{A.5}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_y} = \lambda_1 \beta K_y^{\beta-1} L_y^{1-\beta} + \lambda_2 = 0 \tag{A.6}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_y} = \lambda_1 (1-\beta) K_y^{\beta} L_y^{-\beta} + \lambda_3 = 0 \tag{A.7}$$

De las condiciones de primer orden encontramos las tasas marginales técnicas parala producción de los dos bienes. Despejando y dividiendo las expresiones para cada producto.

$$\frac{\beta K_x^{\beta-1}L_x^{1-\beta}}{(1-\beta)K_x^{\beta}L_x^{-\beta}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \Longrightarrow \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)\frac{L_x}{K_x} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{A.8}$$

$$\frac{\lambda_1\beta K_y^{\beta-1}L_y^{1-\beta}}{\lambda_1(1-\beta)K_y^{\beta}L_y^{-\beta}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \Longrightarrow \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)\frac{L_y}{K_y} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{A.9}$$

Como condición de eficiencia las tasas marginales de transformación deben ser iguales para los dos bienes. Al igualar encontraremos la curva de contrato de producción, es decir, los puntos eficientes para la producción.

$$\frac{L_x}{K_x} = \frac{L_y}{K_y} \tag{A.10}$$

La curva de contrato es bastante simple en este caso pues asumimos que los dos bienes se producen de la misma manera $x(K,L) = y(K,L)$. Considerando los totales de producción podemos reescribir la expresión llegando a A.11,

$$\frac{L_x}{K_x} = \frac{\bar{L}-L_x}{\bar{K}-K_x}$$

$$K_x = \frac{\bar{K}}{\bar{L}}L_x \Longleftrightarrow K_y = \frac{\bar{K}}{\bar{L}}L_y \tag{A.11}$$

Frontera de posibilidades de producción

Para obtener la frontera de posibilidades utilizamos la expresión A.11 para obtener la cantidad óptima de factores para producir x e y.

$$x(K,L) = K_x^{\beta}L_x^{1-\beta}, \quad K_x = \frac{\bar{K}}{\bar{L}}L_x$$

$$x = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}L_x\right)^{\beta}L_x^{1-\beta} = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{\beta}L_x$$

$$L_x = \frac{\bar{L}^{\beta}}{\bar{K}^{\beta}}x$$

Reemplazando de vuelta en A.11 obtenemos,

$$L_x^* = \frac{\bar{L}^{\beta}}{\bar{K}^{\beta}}x \Longleftrightarrow K_x^* = \frac{\bar{K}^{1-\beta}}{\bar{L}^{1-\beta}}x \tag{A.12}$$

Como el problema es simétrico sería lo mismo para la produccióndel bien y.

$$L_y^* = \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} y \Longleftrightarrow K_y^* = \frac{\bar{K}^{1-\beta}}{\bar{L}^{1-\beta}} y$$

Ahora que tenemos la cantidad óptimo de factores para un mismo bien podemos utilizar las expresiones para encontrar la frontera de posibilidades de producción.

$$\begin{aligned} L_x^* + L_y^* &= \bar{L} \\ \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} y + \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} x &= \bar{L} \\ \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} y &= \bar{L} - \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} x \\ \text{FPP:} \quad y &= \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^\beta - x \end{aligned}$$

La pendiente es lineal es igual a 1, esto porque simplificamos bastante al plantear las producciones y el consumo.

Curva de contrato del consumo

Al igual que antes planteamos el problema con las restricciones correspondientes, ahora, con la restricción de la frontera de posibilidades.

$$\begin{aligned} \max_{x_A, y_A} \quad & U_A = x_A^\alpha y_A^{1-\alpha} \\ \text{s.a} \quad & U_B = x_B^\alpha y_B^{1-\alpha} \\ & \bar{x} = x_A + x_B \\ & \bar{y} = y_A + y_B \\ & \bar{y} = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^\beta - x \end{aligned}$$

Planteamos el lagrangeano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: \quad & x_A^\alpha y_A^{1-\alpha} + \lambda_1(x_B^\alpha y_B^{1-\alpha} - U_B) + \lambda_2(x_A + x_B - \bar{x}) + \\ & \lambda_3(y_A + y_B - \bar{y}) + \lambda_4 \left(\left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^\beta - \bar{x} - \bar{y} \right) \end{aligned}$$

Derivamos para obtener las condiciones de primer orden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = \alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{1-\alpha} + \lambda_2 = 0 \tag{A.13}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = (1-\alpha) x_A^{\alpha} y_A^{-\alpha} + \lambda_3 = 0 \tag{A.14}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B} = \lambda_1 \alpha x_B^{\alpha-1} y_B^{1-\alpha} + \lambda_2 = 0 \tag{A.15}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_B} = \lambda_1 (1-\alpha) x_B^{\alpha} y_B^{-\alpha} + \lambda_3 = 0 \tag{A.16}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{x}} = -\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \tag{A.17}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}} = -\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \tag{A.18}$$

Resolvemos sistemáticamente para obtener las tasas de sustitución de los bienes para cada individuo y en este caso consideramos la frontera de posibilidades.

$$\frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_A^{\alpha} y_A^{-\alpha}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \Longrightarrow \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{y_A}{x_A} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{A.19}$$
$$\frac{\lambda_1 \alpha x_B^{\alpha-1} y_B^{1-\alpha}}{\lambda_1 (1-\alpha) x_B^{\alpha} y_B^{-\alpha}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \Longrightarrow \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{y_B}{x_A} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{A.20}$$
$$\frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} = \frac{\lambda_4}{\lambda_4} \Longrightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = 1 \tag{A.21}$$

Acabamos de ver como la pendiente en el consumo coincide con la pendiente de la frontera de posibilidades. Cuadró la eficiencia en la producción de los bienes como en el consumo de los mismos.

Para ver este mismo proceso y ejercitar puede ver el siguiente video link.

A.3. Soluciones a la Coase

Un ejemplo de como se plantea la solución a la Coase mediante la maximización de utilidad y los óptimos de pareto. Dos compañeros de piso Agustín (A) y Benjamín (B) tienen un problema de externalidades, Agustín le gusta fumar y Benjamín detesta el olor a cigarro.

En esta economía solo exiten dos bienes, los cigarros c los cuales emiten una polución s y un bien genérico x. La utilidad de A se puede denotar como $U_A(x_A, c_A)$ siendo el efecto marginal de estos dos bienes positivos. Además, A tiene que respetar un máximo de polución $s_M(c_M)$, es decir, no se puede fumar más de c_M cigarros. El precio del bien x es numerario. Benjamín por su parte tendrá una función de utilidad $U_B(x_B, c_A) = u(x_B) + d(s_B)$ en la cual $u'(x_B) > 0$ y $d'(s_B) < 0$. Las dotaciones iniciales de cada uno son $\omega_A(X_A, \bar{c})$ y $\omega_B = (X_B, 0)$.

Dadas estas condiciones no habrá un resultado eficiente. Agustín fuma lo máximo que se le permite $c_A = c_M$ causando una polución s_M sin internalizar el daño $d_B(s_M)$ hecho a Benjamín. Lo anterior causa que las tasas marginales difieran pues no se internalizan todos los costos, llevando a un resultado ineficiente.[1]

$$\frac{\frac{\partial U_A(x_A,c_A)}{\partial x_A}}{\frac{U_A(x_A,c_A)}{\partial c_A}} \neq \frac{\frac{\partial u_B(x_B)}{\partial x_B}}{\frac{\partial d(s_M)}{\partial s_M}} \Longleftrightarrow \frac{p_x}{p_c} \neq \frac{p_x}{p_s} \tag{A.22}$$

Una manera de solucionar lo anterior es introducir derechos de propiedades claros y asumir que no hay costos de transacción. Al asignarle un precio p_s a la contaminación se pueden vender alguna suerte de bonos de contaminación.

Cada personas (incluyendo a la que no fuma) tiene ciertos bonos de polución, en caso de contaminar más de lo que sus bonos le permiten tenrá que comprar más bonos. Esto es, si Agustín fuma $c_A > c_M$ entonces puede comprar derechos por $p_s(c_M - c_A)$, mientras que si $c_A < c_M$ entonces podría vender sus derechos por $p_s(c_M - c_A)$.

Por lo tanto el problema de maximización de Agustín vendría a ser,

$$\begin{aligned} \max_{x_A, c_A} \quad & U_A(x_A, c_A) \\ s.a \quad & x_A + p_c c_A + p_s(c_A - c_M) = X_A + p_c\bar{c} \end{aligned}$$

Por otro lado el problema de Benjamín será,

$$\begin{aligned} \max_{x_B} \quad & u_B(x_B) + d_B(s_B) \\ s.a \quad & x_B + p_s(s_M - s_B) = X_B \end{aligned}$$

[1]Hay casos en que aun habiendo externalidades no se modifica el resultado eficiente, estos es por ejemplo cuando

Ahora que se plantean los problemas de esta manera los dos individuos internalizan el precio de la polución (origen de la externalidad). Por su lado Agustín considera el precio del bien genérico $p_x = 1$ y el de los cigarro más los de la polución.

$$\frac{\frac{\partial U_A(x_A,c_A)}{\partial x_A}}{\frac{U_A(x_A,c_A)}{\partial c_A}} = \frac{1}{p_c + p_s}$$

Mientras que Benjamín al demandar aire limpio considera p_s.

$$\frac{\frac{\partial u_B(x_B)}{\partial x_B}}{\frac{\partial d(s_M)}{\partial s_M}} = \frac{1}{p_s}$$

A.4. Geometría de las curvas de contrato bajo diferentes funciones de utilidad