Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios
Semestre de Primavera 2023

Joaquín Martínez Ojeda*

Equilibrio General Con Producción

Índice

1. Introducción **2**
1.1. Definiciones . . . 2
1.1.1. Curva de contrato de consumo . . . 2
1.1.2. Curva de contrato de producción . . . 2
1.1.3. Frontera de posibilidades de producción . . . 3
1.1.4. Frontera de posibilidades de utilidad . . . 3

2. Producción **4**
2.1. Curva de contrato de producción . . . 4
2.2. Frontera de posibilidades de producción . . . 5

3. Consumo **7**
3.1. Curva de contrato del consumo . . . 7
3.2. Frontera de posibilidades de la utilidad . . . 8

4. Representaciones gráficas **9**

*joamartine@fen.uchile.cl

1. Introducción

Doy por sentado que el lector sabe como resolver una Caja De Edgeworth 2x2. Si no manejan estos ese tipo de ejercicios pueden encontrar videos en FenVID usando este **link**. La dinámica aquí es la misma solo que con una dimensión adicional.

En los modelos de 2x2 tenemos dos bienes y dos individuos, mientras que en los 2x2x2 tendremos dos factores productivos que usamos para producir dos bienes que consumirán dos individuos. Esto va a traer más pasos a la hora de resolver la eficiencia en el modelo. En 2x2 buscábamos directamente la eficiencia en la redistribución de las dotaciones iniciales, ahora buscaremos la eficiencia en la producción con la dotación de factores productivos capital y trabajo (K,L).

1.1. Definiciones

A pesar de que hay 4 definiciones en el índice, en verdad son 2 los conceptos, la curva de contrato y la frontera de posibilidades. Estos dos conceptos son aplicados a utilidad y a producción, se presentaran las dos por separado, pero en la práctica son lo mismo.

1.1.1. Curva de contrato de consumo

La curva de contrato de consumo es la colección de asignaciones de dos bienes (x, y), en donde no se puede aumentar la utilidad de un individuo sin disminuir la utilidad de otro. Es decir, los puntos de la curva de contrato son óptimos de pareto.

Para los individuos A y B tendremos funciones de utilidad $U_A(x, y)$ y $U_B(x, y)$ respectivamente. Para que el vector (x, y) sea parte de la curva de contrato y por tanto sea eficiente paretianemente tiene que cumplir la siguiente condición de eficiencia.

Se debe cumplir que la tasa marginal de sustitución (TMS) del consumo de x con respecto al consumo de y sea igual para las funciones de utilidad de ambos individuos. Es decir:

$$TMS^A_{x,y} = TMS^B_{x,y}$$
$$\frac{\frac{\partial U_A(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U_A(x,y)}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial U_B(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U_B(x,y)}{\partial y}}$$

1.1.2. Curva de contrato de producción

La curva de contrato de la producción es la colección de puntos de capital y trabajo (K, L) en donde no se puede aumentar la producción de un bien sin disminuir la producción del otro. Es decir, los puntos de la curva de contrato son óptimos de pareto.

Para los bienes x e y tendremos funciones de producción $f_x(K, L)$ y $f_y(K, L)$ respectivamente. Para que el vector (K, L) sea parte de la curva de contrato y por tanto sea eficiente paretianamente tiene que cumplir la siguiente condición de eficiencia.

Se debe cumplir que la tasa marginal de transformación (TMT[1]) del trabajo respecto del capital es igual para la producción de ambos bienes. Es decir:

[1] También llamada Relación marginal técnica de sustitución $RMTS$.

$$TMT^x_{K,L} = TMT^y_{K,L}$$
$$\frac{\frac{\partial f_x(K,L)}{\partial K}}{\frac{\partial f_x(K,L)}{\partial L}} = \frac{\frac{\partial f_y(K,L)}{\partial K}}{\frac{\partial f_y(K,L)}{\partial L}}$$

1.1.3. Frontera de posibilidades de producción

La frontera de posibilidades de producción (FPP) son las producciones máximas (factibles) de bienes donde se utilizan eficientemente los factores productivos. El punto clave está en que todos **los puntos de la frontera de posibilidades son parte de la curva de contrato**.

1.1.4. Frontera de posibilidades de utilidad

Tiene una explicación análoga a la frontera de posibilidades de producción. La frontera de posibilidades de utilidad (FPU) corresponde a la máxima utilidad de un individuo dada la utilidad del otro.

La pendiente de la FPU será al trade-off de utilidades entre los dos individuos. Es por esto que, **todos los puntos de la frontera son parte de la curva de contrato**.

2. Producción

Planteamos las siguientes dotaciones de factores productivos, las funciones de producción y la función de utilidad de los consumidores de estos dos bienes.

$$
\begin{aligned}
U_i(x_i, y_i) = x_i^{\frac{3}{4}} y_i^{\frac{1}{4}} \quad , \quad i = A, B \\
x = 3K_x^{\frac{1}{3}} L_x^{\frac{2}{3}} \\
y = K_y^{\frac{1}{3}} L_y^{\frac{2}{3}} \\
\bar{K} = 10 \\
\bar{L} = 5
\end{aligned}
$$

2.1. Curva de contrato de producción

Partimos buscando la eficiencia en la producción. Para sacar la curva de contrato de producción hay que plantear el problema de maximización de un bien sujeto a la producción del otro bien y las dotaciones de los factores productivos.

$$
\begin{aligned}
\max_{K_x, L_x} \quad & x = 3K_x^{\frac{1}{3}} L_x^{\frac{2}{3}} \\
\text{s.a} \quad y =& K_y^{\frac{1}{3}} L_y^{\frac{2}{3}} \\
\bar{K} =& K_x + K_y \\
\bar{L} =& L_x + L_y
\end{aligned}
$$

Planteamos el lagrangeano para conseguir condiciones de primer orden con respecto a los factores productivos que se ocuparan para la producción del bien x e y. Como tenemos 3 restricciones y no podemos reducirlas tendremos que plantear la expresión con 3 lambdas.

$$
\mathcal{L}: \quad 3K_x^{\frac{1}{3}} L_x^{\frac{2}{3}} + \lambda_1 (K_y^{\frac{1}{3}} L_y^{\frac{2}{3}} - y) + \lambda_2 (K_x + K_y - \bar{K}) + \lambda_3 (L_x + L_y - \bar{L})
$$

Empezamos a derivar.

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_x} = K_x^{-\frac{2}{3}} L_x^{\frac{2}{3}} + \lambda_2 = 0 \tag{1.1}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_x} = 2K_x^{\frac{1}{3}} L_x^{-\frac{1}{3}} + \lambda_3 = 0 \tag{1.2}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_y} = \lambda_1 \frac{1}{3} K_y^{-\frac{2}{3}} L_y^{\frac{2}{3}} + \lambda_2 = 0 \tag{1.3}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_y} = \lambda_1 \frac{2}{3} K_y^{\frac{1}{3}} L_y^{-\frac{1}{3}} + \lambda_3 = 0 \tag{1.4}
$$

Ahora buscamos encontrar una expresión para la TMT de los dos bienes obteniendo la ecuación (1.5) y (1.6) para la TMT_x y TMT_y respectivamente.

$$
\frac{(1.1)}{(1.2)}: \quad \frac{K_x^{-\frac{2}{3}} L_x^{\frac{2}{3}}}{2K_x^{\frac{1}{3}} L_x^{-\frac{1}{3}}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \rightarrow \frac{L_x}{2K_x} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{1.5}
$$

$$
\frac{(1.3)}{(1.4)}: \quad \frac{\lambda_1 \frac{1}{3} K_y^{-\frac{2}{3}} L_y^{\frac{2}{3}}}{\lambda_1 \frac{2}{3} K_y^{\frac{1}{3}} L_y^{-\frac{1}{3}}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \rightarrow \frac{L_y}{2K_y} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{1.6}
$$

Como la condición de eficiencia establece que las tasas marginales de transformación deben ser iguales para los dos bienes, igualamos (1.5) y (1.6) para encontrar la curva de contrato.

$$\frac{L_x}{2K_x} = \frac{L_y}{2K_y}$$
$$\frac{L_x}{K_x} = \frac{L_y}{K_y}$$

Considerando que la dotación total de factores productivos está dada por $K_x + K_y = 10$ y $L_x + L_y = 5$ podemos ocuparla para escribir la curva en términos de factores productivos para un solo bien.

$$\begin{aligned} \frac{L_x}{K_x} &= \frac{5 - L_x}{10 - K_x} \\ (10 - K_x)L_x &= (5 - L_x)K_x \\ 10L_x - K_xL_x &= 5K_x - L_xK_x \\ 10L_x &= 5K_x \\ \text{Curva de contrato:} \quad 2L_x &= K_x \end{aligned}$$

Por simetría también podemos decir que $2L_y = K_y$.

2.2. Frontera de posibilidades de producción

Ahora que tenemos nuestra curva de contrato podemos calcular la función de la frontera de posibilidades de producción. Volvemos a recalcar que los puntos de la frontera de posibilidades se encuentran en la curva de contrato.

El primer objetivo es encontrar los insumos óptimos para la producción. Por lo que planteamos que x será igual a su función de producción y reemplazamos en la curva de contrato. Esto nos dará una cantidad óptima de trabajo para producir x.

$$\begin{aligned} x = 3K_x^{\frac{1}{3}}L_x^{\frac{2}{3}} \quad K_x &= 2L_x \\ x &= 3(2L_x)^{\frac{1}{3}}L_x^{\frac{2}{3}} \\ x &= 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}L_x \\ L_x &= \frac{x}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Ahora que ya tenemos el óptimo para L_x podemos encontrar K_x reemplazando la expresión para L_x de vuelta en la curva de contrato.

$$K_x = 2\left(\frac{x}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{2^{\frac{2}{3}}x}{3}$$

Si hicieron el mismo proceso para el bien y el resultado debiera ser:

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{x}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} \quad K_x = \frac{2^{\frac{2}{3}}x}{3} \\ L_y &= \frac{y}{2^{\frac{1}{3}}} \quad K_y = 2^{\frac{2}{3}}y \end{aligned}$$

Ahora que tenemos L_x y L_y podemos llegar a la expresión de la frontera de posibilidades de producción con la cantidad total de factores productivos. Les debiera dar lo mismo si lo hacen con K_x y K_y.

$$\begin{aligned}
&L_x + L_y = 5 \\
&\frac{x}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} + \frac{y}{2^{\frac{1}{3}}} = 5 \\
\text{FPP:} \quad &y = 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x
\end{aligned}$$

En este caso la pendiente de la FPP será igual en todos los puntos (1/3).

3. Consumo

3.1. Curva de contrato del consumo

Al igual que antes planteamos el problema con las restricciones correspondientes, en este caso, sujeta a la producción de bienes (por medio de la FPP).

$$\begin{aligned} \max_{x_A, y_A} \quad & U_A = x_A^{\frac{3}{4}} y_A^{\frac{1}{4}} \\ \text{s.a} \quad & U_B = x_B^{\frac{3}{4}} y_B^{\frac{1}{4}} \\ & \bar{x} = x_A + x_B \\ & \bar{y} = y_A + y_B \\ & \bar{y} = 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\bar{x} \end{aligned}$$

Planteamos el lagrangeano, ahora con una restricción más, la restricción de la frontera de posibilidades.

$$\mathcal{L}: \quad x_A^{\frac{3}{4}} y_A^{\frac{1}{4}} + \lambda_1(x_B^{\frac{3}{4}} y_B^{\frac{1}{4}} - U_B) + \lambda_2(x_A + x_B - \bar{x}) + \lambda_3(y_A + y_B - \bar{y}) + \lambda_4(5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\bar{x} - \bar{y})$$

Derivamos las condiciones de primer orden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = \frac{3}{4} x_A^{-\frac{1}{4}} y_A^{\frac{1}{4}} + \lambda_2 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = \frac{1}{4} x_A^{\frac{3}{4}} y_A^{-\frac{3}{4}} + \lambda_3 = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B} = \lambda_1 \frac{3}{4} x_B^{-\frac{1}{4}} y_B^{\frac{1}{4}} + \lambda_2 = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_B} = \lambda_1 \frac{1}{4} y_B^{-\frac{3}{4}} x_B^{\frac{3}{4}} + \lambda_3 = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{x}} = -\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_4 = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}} = -\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \tag{2.6}$$

Ahora empezamos a resolver este sistema de ecuaciones con la misma lógica de antes, sacando las TMS de las funciones de utilidad de cada individuo. La única diferencia radica en que consideramos las frontera de posibilidad de producción.

Aquí hay un punto clave, y es que igualamos las tasas marginales de sustitución a la pendiente de la frontera de posibilidades.

$$\frac{(2.1)}{(2.2)}: \quad \frac{\frac{3}{4} x_A^{-\frac{1}{4}} y_A^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4} x_A^{\frac{3}{4}} y_A^{-\frac{3}{4}}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \rightarrow \frac{y_A}{3x_A} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{TMS_A}$$

$$\frac{(2.3)}{(2.4)}: \quad \frac{\lambda_1 \frac{3}{4} x_B^{-\frac{1}{4}} y_B^{\frac{1}{4}}}{\lambda_1 \frac{1}{4} y_B^{-\frac{3}{4}} x_B^{\frac{3}{4}}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \rightarrow \frac{y_B}{3x_B} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{TMS_B}$$

$$\frac{(2.5)}{(2.6)}: \quad \frac{-\frac{1}{3}\lambda_4}{-\lambda_4} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{TMT}$$

¡Esta igualdad hace completo sentido con lo que hemos visto en las definiciones! Hicimos cuadrar la eficiencia en la producción de los bienes con el consumo de los mismos.

De la derivación llegamos a que las curvas de contrato son las siguientes.

$$(TMS_A) = (TMT): \quad \frac{y_A}{3x_A} = \frac{1}{3} \rightarrow y_A = x_A$$
$$(TMS_B) = (TMT): \quad \frac{y_B}{3x_B} = \frac{1}{3} \rightarrow y_B = x_B$$

3.2. Frontera de posibilidades de la utilidad

El procedimiento es el mismo que cuando sacamos la FPP, tenemos una expresión de $U_A = x_A^{\frac{3}{4}} y_A^{\frac{1}{4}}$ y reemplazamos en la curva de contrato $y_A = x_A$. Por lo tanto,

$$U_A = (y_A)^{\frac{3}{4}} y_A^{\frac{1}{4}}$$

Es fácil ver que $U_A = y_A$ y que por simetría $U_B = y_B$. Análogamente $U_A = x_A$ y $U_B = x_B$.

Ahora lo que hay que hacer es expresar la frontera de posibilidades en función de utilidades,

$$\bar{y} = 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\bar{x}$$
$$\bar{y} = y_A + y_B = U_A + U_B$$
$$\bar{x} = x_A + x_B = U_A + U_B$$

Tenemos todas los ingredientes para expresan U_B con respecto a U_A.

$$U_A + U_B = 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(U_A + U_B)$$
$$U_B + \frac{1}{3}U_B = 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}U_A - U_A$$
$$4U_B = 15 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 4U_A$$
$$\text{FPU:} \quad U_B = \frac{15}{4} \cdot 2^{\frac{1}{3}} - U_A$$

4. Representaciones gráficas

Gráficos que saque de esta **página**

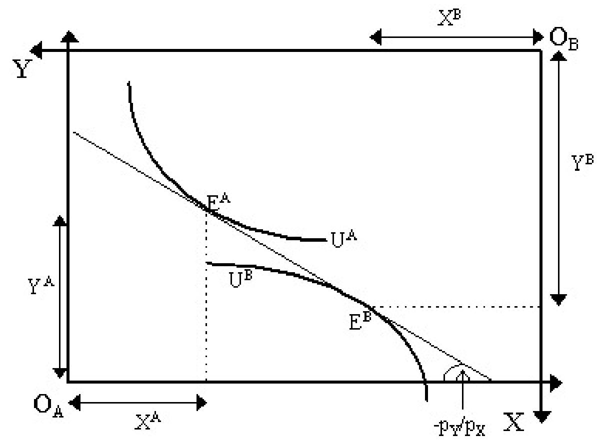

Figura 1: Caja de Edgeworth de consumo de dos bienes X e Y para los individuos A y B. Se notan los precios relativos (que conllevan cierta pendiente) dadas las dotaciones y sus curvas de indiferencia.

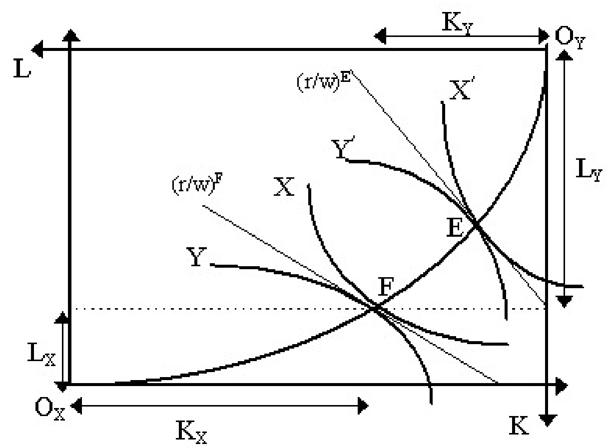

Figura 2: Caja de Edgeworth de producción. Análoga a la caja de consumo, vemos ahora capital y trabajo en los ejes. Se aprecia la curva de contrato más la curvas de indiferencia en óptimos de pareto.

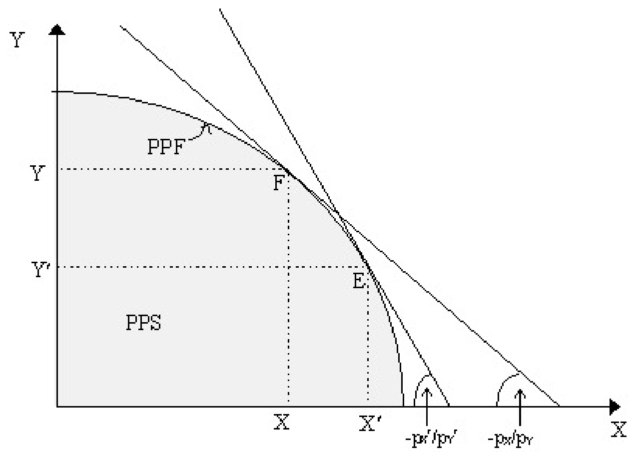

Figura 3: Frontera de posibilidades de producción. Se puede ver con la pendiente de punto de la frontera será $-\frac{p_x}{p_y}$ los cuales son los mismos que se pueden ver en la Caja de Edgeworth de consumo.

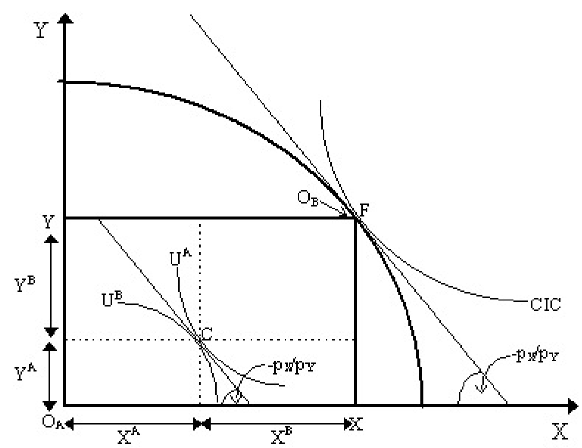

Figura 4: ¡Finalmente! Esta es la representación del equilibrio general. Podemos apreciar como la pendiente de la FPP es la misma que en el equilibrio dentro de la caja de consumo, de ahí tenemos equilibrio. También ustedes pueden visualizar como sería el equilibrio en la caja de consumo si el punto de la frontera de posibilidades fuera otro. Tendríamos una caja de diferentes dimensiones y con una pendiente distinta.