Diferenciación horizontal - Modelo Hotelling

Joaquín Martínez Ojeda

19 de febrero de 2024

Resumen

Documento guía para video de FenVID de Hotelling. Esta es una versión simple del modelo y busca sacar las conclusiones principales al respecto y enfocada en dar a entender el aspecto estratégico y abstracciones útiles.

1. Motivación del modelo

En un mercado con precios endógenos[1] las firmas maximizarán beneficios considerando que el precio que escojan afectará tanto al ingreso marginal por unidad como de la cantidad de unidades totales que puedan vender. En más detalle las firmas maximizaran sujeta a ciertas restricciones a la demanda que enfrenten.

Por ejemplo en el caso de monopolio la firma maximizará según esta función.

$$\max_{p} \quad \Pi = (p - c) \cdot q(p)$$

Sin embargo, al haber competencia monopolística la firma debe considerar las decisiones de las demás empresas en el mercado. En este caso las firmas jugarán estratégicamente puesto que las decisiones de cada una afecta a todo

[1] Es decir, que se determinan dentro del modelo.

el resto de firmas. Cada empresa tendrá una manera de responder a lo que la otra haga, a esto es lo que llamamos funciones de respuesta.

Por ejemplo en juegos a la Bertrand podemos llegar a tener este tipo de funciones de respuesta.

$$p_1^*(p_2) = \begin{cases} p^M & \text{si} \quad p_2 > p^M \\ \\ p_2 - \varepsilon & \text{si} \quad c \leq p_2 \leq p^M \\ \\ c & \text{si} \quad p_2 < c \end{cases}$$

El equilibrio de los juegos (llamados equilibrios de Nash) se consigue cuando todas las firmas llegados a un precio no tienen ningún incentivo de cambiarlo.

El modelo de Hotelling es una interacción de este tipo, con el detalle de que las empresas no solo decidirán sus precios sino también podrán diferenciarse horizontalmente. Un ejemplo de esto sería ubicarse en cierta parte geográfica del mercado.

La versión que veremos no toma valor por asemejarse a la realidad sino por las abstracciones que podemos sacar del él, las cuales si podemos ver en los mercados.

2. Planteando el modelo

Vamos a plantear cierta versión del modelo del modelo de diferenciación horizontal geográfica con supuestos que nos ayudarán simplificar la matemática. Aun así, lograremos abstraer las conclusiones importantes que buscamos.

El espacio

Vamos a suponer que la distribución espacial en donde eligen ubicarse las firmas es una ciudad lineal que va de manera continua desde el 0 hasta el 1. Los habitantes de la ciudad, que son los consumidores, se distribuirán de manera uniforme a lo largo de toda la ciudad.

Las firmas

Las firmas (en este caso un duopolio) van a vender un mismo producto, escogerán precios y se diferenciarán eligiendo un lugar espacial de manera estratégica. En este juego, habrán dos turnos que juegan las empresas, **primero eligen donde ubicarse y luego deciden precios**.

Podemos empezar a hablar de una empresa a la izquierda y otra a la derecha. La ubicación en el intervalo de 0 a 1 que elijan estas empresas izquierda y derecha será δ_L y δ_R respectivamente. El precio que elija cada una será p_L y p_R.

Los consumidores

Cada individuo estará ubicado en cierta parte de la ciudad lineal, por ejemplo diremos que un individuo i está ubicado en $v_i \in [0, 1]$. Los individuos le comprarán a la firma que le sea menos costoso comprarle, esto incluye tanto el precio del producto como el costo de transportarse.

El costo de transporte lo denotaremos como θ, sin embargo considerando que habrán consumidores que se tengan que transportar más que otros tenemos que considerar la distancia. El costo de transporte que incurre un individuo i para comprarle a la firma j es de $\theta(\delta_j - v_i)^2$.[2]

El individuo tiene un ingreso y que ocupa para comprar a un bien que le da una utilidad fija $\bar{u}$. Definimos todas las variables para definir la utilidad neta que obtendría un individuo i comprándole a una firma j.

$$U_{ij} = \bar{u} + (y - p_j) - \theta(\delta_j - v_i)^2 \tag{1}$$

3. Casos extremos para entender la dinámica

Veamos dos casos extremos para introducirnos en la dinámica que seguirán estas firmas. Por simplicidad diremos que estamos frente un duopolio simétrico con costos marginales $c = 0$.

[2]Es cuadrático, puesto que si fuera lineal, tendríamos problemas para encontrar el equilibrio de Nash cuando tenemos firmas entre el intervalo.

3.1. Precios exógenos

En este caso el precio es fijo, no es una variable que las firmas puedan decidir, por lo que las firmas elegirán primero sus ubicaciones y en el segundo turno tendrán que tomar un precio dado.

¿Qué le interesa a cada firma? ¿En que consistiría la mejor respuesta según la función de reacción? ¿Cuál es el equilibrio de Nash?

1. En este caso, lo que les importa a las firmas es abarcar la mayor demanda posible para maximizar utilidades. Por lo que elegirán la ubicación que les asegure una mayor demanda.
2. El factor estratégico es que si una empresa planea estar en una parte δ_j de la ciudad, la otra firma respondería eligiendo una ubicación más central.
3. El resultado es que las dos llegan al punto $0,5$ donde no tienen incentivo a moverse, llegando a un equilibrio de Nash.

Esto es conocido como el **principio de mínima diferenciación**, donde se dará una competencia tipo Bertrand que llevará los precios a $p = c$.

3.2. Precios endógenos

En el primer turno las firmas eligen donde ubicarse y en el segundo tendrán la libertad de elegir los precios que maximizan sus utilidades. El resultado es que las firmas elegirán los extremos de la ciudad. ¿Por qué? La diferenciación les da cierto poder de mercado a las firmas, es decir, se aprovechan de que los consumidores sufren un costo o des-utilidad al moverse para comprar cierto producto. Esto les permite aumentar el precio por sobre su coste marginal. Lo que le conviene a ambas empresas es diferenciarse lo máximo posible.

4. La matemática del equilibrio

Ahora vamos a meterle matemática a lo que acabamos de presentar. Tenemos que recordar que este es un juego estratégico, las empresas tendrán funciones de reacción y que dada ciertas condiciones llegarán a un equilibrio de Nash.

Primero vamos a encontrar la demanda que enfrenta cada firma en función de sus precios y ubicaciones. Con esa demanda ya podemos plantear el problema de la firma para maximizar beneficios y encontrando las funciones de reacción. Con las funciones podremos encontrar un equilibrio de Nash.

4.1. La demanda

Para medir la demanda que recibe cada firma dadas las condiciones tenemos que encontrar el consumidor indiferente, aquel individuo que cumpla con $U_{iL} = U_{iR}$. Lo que nos interesa es su ubicación, pues todas las personas a su izquierda le compraran a la firma L mientras que todas las personas a la derecha le compraran a la firma R.

$$\begin{aligned}
U_{iL} &= U_{iR} \\
\bar{u} + (y - p_L) - \theta(\delta_L - \bar{v})^2 &= \bar{u} + (y - p_R) - \theta(\delta_R - \bar{v})^2 \\
(p_R - p_L) - \theta(\delta_L^2 - 2\delta_L\bar{v} + \bar{v}^2) &= -\theta(\delta_R^2 - 2\delta_R v + \bar{v}^2) \\
(p_R - p_L) - \theta\delta_L^2 + \theta\delta_R^2 &= 2\theta\delta_R\bar{v} - 2\theta\delta_L\bar{v} \\
(p_R - p_L) + \theta(\delta_R^2 - \delta_L^2) &= \bar{v} \cdot 2\theta(\delta_R - \delta_L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{p_R - p_L}{2\theta(\delta_R - \delta_L)} + \frac{\delta_R^2 - \delta_L^2}{2(\delta_R - \delta_L)} \\
&\xrightarrow{(a-b)(a+b)=a^2-b^2} \frac{p_R - p_L}{2\theta(\delta_R - \delta_L)} + \frac{\delta_R + \delta_L}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{v} = \frac{p_R - p_L}{2\theta(\delta_R - \delta_L)} + \frac{\delta_R + \delta_L}{2}}$$

La cuota de mercado de la firma L serán todos los individuos a la izquierda de $\bar{v}$ y R se queda con el resto del mercado $1-\bar{v}$.

$$
\begin{aligned}
D_L(p,\delta;\theta) &= \bar{v} = \frac{p_R - p_L}{2\theta(\delta_R-\delta_L)} + \frac{\delta_R+\delta_L}{2} \\
D_R(p,\delta;\theta) &= 1-\bar{v} = 1 - \frac{p_R - p_L}{2\theta(\delta_R-\delta_L)} - \frac{\delta_R+\delta_L}{2}
\end{aligned}
$$

4.2. Funciones de reacción y equilibrios de Nash

Ahora que tenemos las demandas vamos a derivar el equilibrio de Nash para dos firmas idénticas.

Hacemos un cambio de variable para hacer la matemática más fácil.

$$
\begin{aligned}
\theta(\delta_R-\delta_L) &= t \\
\frac{\delta_R+\delta_L}{2} &= \tau
\end{aligned}
$$

Para la empresa L.

$$
\begin{aligned}
\max_{p_L} \quad \Pi_L &= (p_L - c)\left(\frac{p_R - p_L + 2\tau t}{2t}\right) \\
&= \frac{p_L p_R - p_L^2 + 2\tau t p_L}{2t} + \frac{p_L c - p_R c - 2}{2t} \\
\frac{\partial \Pi_L}{\partial p_L} &= \frac{p_R - 2p_L + 2\tau t + c}{2t} = 0 \\
&= p_R - 2p_L + 2 + c = 0
\end{aligned}
$$

$$\boxed{p_L = \frac{1}{2}(p_R + c) + \tau t}$$

Para la empresa R.

$$\begin{aligned}
\max_{p_R} \quad \Pi_R &= (p_R - c)\left(\frac{p_L - p_R + 2t - 2t\tau}{2t}\right) \\
&= \frac{p_R p_L - p_R^2 + 2tp_R - 2t\tau p_R}{2t} - c\frac{p_L - p_R + 2t - 2t\tau}{2t} \\
\frac{\partial \Pi_R}{\partial p_R} &= p_L - 2p_R + 2t - 2t\tau + c = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \boxed{p_R = \frac{1}{2}(p_L + c) + t(1-\tau)}
\end{aligned}$$

reemplazando tendríamos por ejemplo la función de reacción.

$$p_L^* = \frac{1}{2}(p_R + c) + \frac{\theta(\delta_R^2 - \delta_L^2)}{2}$$

Por ejemplo para los casos extremos que teníamos antes, $p_L = p_R$. Por lo que,

$$\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}c + \frac{\theta(\delta_R^2 - \delta_L^2)}{2}$$
$$\boxed{p = c + \theta(\delta_R - \delta_L)}$$

Para el caso en que hay mínima diferenciación $\delta_R - \delta_L = 0$ por lo que $p = c$.[3] Para el caso en que hay máxima diferenciación $\delta_R - \delta_L = 1$ por lo que el precio será $p = c + \theta$

Podemos notar que mientras más grandes sean los costos de transporte mayor será el poder de mercado de las firmas y podrán aumentar en mayor medida los precios por sobre su costo marginal.

4.3. Gráficos de la función de reacción

Usando este **link** pueden jugar con las funciones de reacción, ver que pasa cuando suben los costos de las firmas o de transporte. Con c pueden jugar con los costos marginales, si los costos aumentan el precio también

[3] En el caso en que los precios estaban fijos $p = \bar{p}$.

debe de aumentar.[4] Con a pueden cambiar el nivel de diferenciación de las empresas, $a = 1$ sería máxima diferenciación y con $a = 0,5$ sería la mínima diferenciación, lógicamente a medida que empiezan a diferenciarse aumentan los precios. Los costos de transporte (o) solo suben el precio cuando hay un grado de diferenciación.

La idea es ver como aumentan los precios al diferenciarse sin embargo lo que más les conviene a las empresas es diferenciarse al máximo siempre.

5. Conclusiones

Estos modelos de diferenciación horizontal o vertical (caso de calidad del producto) son solo abstracciones, pero son útiles para predecir y entender las estrategias que toman las firmas. Lo primero que podemos concluir es que, **las firmas se diferencian horizontalmente para suavizar la competencia por precios.**

Algunas observaciones sobre distintos casos de diferenciación:

- **Estar donde la demanda está.** Es intuitivo entender por qué las tiendas de lujo están ubicadas en sectores de alto poder adquisitivo, están buscando estar donde la demanda está.[5]. El tema es que las firmas no solo se diferencian espacialmente sino que también por otras características que pueda tener el producto. (Mínima diferenciación espacial por distribución de demanda)

- **Externalidades positivas entre firmas.** Esto puede ser, compartiendo instalaciones, lo cual si bien aumenta la competencia también disminuye los costos un montón. (Mínima diferenciación espacial por ahorro de costos)

- **Ausencia de competencia por precios.** Por razones técnicas o legales puede no haber competencia por precios, por lo que no tendría sentido diferenciarse. Esto es lo que pasaba cuando teníamos precios fijos, resultando en una mínima diferenciación. (Mínima diferenciación horizontal por equilibrio de Nash)

[4] Las dos firmas son simétricas así que comparten costos.

[5] Porque en este caso los consumidores no están repartidos uniformemente