Apuntes de Economía Política

Joaquín Martínez Ojeda
Universidad de Chile

Primavera 2024

El curso de Economía Aplicada (conocido como EcoPol), dictado por Óscar Landerretche en la Facultad de Economía y Negocios de la Universidad de Chile, concentra múltiples referencias en un solo curso. Por ello he juntado en un solo documento una parte considerable de la materia vista en clases.

Documento no oficial, cualquier error por favor notificarme a mi correo `joamartine@fen.uchile.cl`.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

LA ECONOMÍA DESCENTRALIZADA

1.1. La economía descentralizada

Este capítulo tiene como objetivo entender las bases e implicancias de una economía descentralizada estudiando como principal eje un Modelo de Equilibrio General. La gracia del modelo radica en que, a diferencia de los modelos de equilibrio parcial, podremos obtener la determinación de precios de varios mercados en conjunto.

Primero aplicaremos una visión de acuerdos que generen bienestar bajo un criterio bastante conservador llamado criterio de Pareto. Luego veremos los supuestos necesarios para una economía de este tipo llegue a asignaciones factibles y óptimas mediante los mercados. Finalmente, las condiciones en las cuales los agentes toman sus decisiones y llegan a un punto eficiente determinado nos llevará a definir dos teoremas del bienestar, los cuales reflejan distintas maneras de abordar la distribución de recursos en una economía.

1.1.1. Motivación del Modelo de Equilibrio General

Alfred Marshall: Economista británico que durante finales del siglo XIX, conocido por ser fundador de la escuela neoclásica. Su visión marginalista de la economía influye las bases de la economía hasta día de hoy.

Si queremos definir los modelos de equilibrio general partiendo de los modelos de equilibrio parcial conviene dar un pequeño repaso de estos. Uno de los economistas que definió el paradigma en el cual se basan los modelos de equilibrio parcial fue **Alfred Marshall**, el cual popularizó el uso de las curvas de oferta y demanda como herramientas para la determinación de precios. Los modelos de equilibrio parcial buscan describir la determinación de precios bajo oferta y demanda de un mercado específico tratando el resto de la economía como constante. Para dar contexto, si analizaramos el mercado de autos importados supondríamos que los ajustes en este mercado no tienen efectos sobre mercados relacionados. Por ejemplo, el modelo predice cómo afecta un arancel al precio de los autos importados, pero no aborda los efectos del arancel sobre la demanda y producción de autos producidos domésticamente.

El modelo de equilibrio parcial es de gran utilidad para modelar efectos de distintas políticas sobre el precio y bienestar de los agentes en un mercado en específico bajo ciertos supuestos. Sin embargo, como distintos mercados están interactuando constantemente un shock en uno de ellos puede derivar a múltiples ajustes en mercados relacionados. Volviendo al ejemplo anterior, este arancel por autos importados podría llevar a un aumento de ventas de autos domésticos al ser bienes sustitutos.

Modelo de Equilibrio General: Modelo económico que busca explicar la determinación de precios dentro de una economía con dos o más mercados.

En resumen, el **modelo de equilibrio general** describe dos o más mercados relacionados que se ajustan a la vez y entre ellos. Analizar el equilibrio de un número arbitrario de mercados es complejo, por suerte limitarnos a dos mercados y plantear diversos supuestos nos permite, extraer las conclusiones que encontramos relevantes para esta ocasión.

1.2. Economías Walrasianas

Introduciremos las ideas que tenía Walras sobre la determinación de precios en un mercado como una forma eficiente de asignar recursos.

El Modelo Walrasiano como indica su nombre es producto del trabajo de **León Walras**. En este modelo trataremos un economía con un número de bienes y agentes determinado que mediante el intercambio buscan maximizar su utilidad. En esta economía de trueque no hay dinero, la riqueza de un individuo se determina según los bienes que posea desde el comienzo, lo cual denominaremos dotación inicial. Por lo tanto el problema de los individuos i será maximizar su utilidad demandando bienes (x) de un total de $\mathbb{N}$ mercados sujetos a su dotación inicial (ω).

León Walras: Economista francés de la escuela (neoclásica) de Lausana. Considerado fundador de la economía matemática.

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{++}}} \quad & u_i(x) \\ \text{s.a} \quad & p \cdot x \leq p \cdot \omega_i \end{aligned}$$

La idea que tenía Walras de este situación es que mediante estas dotaciones exógenas (preferencias, dotación de bienes, etc) el mercado se encargará de asignar precios tales que la oferta de bienes iguale a la demanda de estos en asignaciones que maximicen la utilidad de los individuos. El **Equilibrio Walrasiano** o también llamado equilibrio competitivo, será el vector de precios tales que (i) los individuos maximizan su utilidad sujeto a su riqueza, (ii) la demanda total de un bien es igual a la dotación total del bien.

Equilibrio Walrasiano: El equilibrio de un mercado mediante los precios y asignaciones donde se maximiza la utilidad y los mercados se vacían.

El mecanismo de ajuste los precios es bastante intuitivo. Si la demanda de un bien excede la oferta del mismo en la economía entonces el precio debiera subir, aumentará hasta el punto en que toda la demanda pueda ser satisfecha con la oferta de la economía, es decir, que sea factible. Caso contrario, si hay una cantidad de oferta no alcanza a ser demandada el precio debiera bajar con tal de subir la demanda efectiva hasta un punto en que oferta y demanda se igualen.

1.2.1. Ley de Walras

Exceso de demanda: La demanda de un bien por sobre la oferta del bien.

Cuando oferta y demanda se igualan decimos que se vacía el mercado, sinónimo de que toda la oferta encuentra su demanda, ergo el mercado está en equilibrio. Lo podemos conceptualizar formalmente como que el **exceso de demanda** en un mercado en equilibrio es igual a cero. La función de exceso de demanda para un agente i es,

$$z_i(p) = x_i(p, p \cdot \omega_i) - \omega_i \tag{1.1}$$

Esto es, el exceso de demanda para el agente i es la demanda por el bien x_i menos la dotación del bien ω_i que tenga el mismo agente. Por lo que el exceso de demanda agregada se puede escribir consecuentemente como,

$$z(p) = \sum_{i=1} (x_i(p, p \cdot \omega_i) - \omega_i) \tag{1.2}$$

Entonces $z(p)$ sería el exceso de demanda agregada de un mercado n. Considerando lo comentado anteriormente podemos predecir que para un vector de precios de equilibrio (p^*) sucede que,

$$z(p^*) = 0$$

¿Qué sucede en caso de que el vector de precios en cuestión sea uno arbitrario diferente al de equilibrio? Para un p arbitrario puede ocurrir que $z(p) > 0$, denotando un exceso de demanda positivo o bien $z(p) < 0$ denotando un exceso de demanda negativo.[1]

Teorema 1.2.1. Ley de Walras
La suma del exceso de demanda (agregado) de todos los mercados suma cero.

$$Z(p) = \sum_{n}^{\mathbb{N}} z(p) = 0 \tag{1.3}$$

[1]Exceso de demanda negativo es análogo a decir exceso de oferta.

Independiente del equilibrio en cada mercado, al sumar el exceso de demanda agregada (EDA) de cada uno el resultado debiese ser cero: tome dos mercados, ambos están en equilibrio el EDA de ambos es cero y suman cero. Ahora tome dos mercados de los cuales el EDA de uno de ellos es positivo, dado que la ley indica que la suma debe ser cero entonces el EDA del otro debiese ser negativo.

Recalcar que independiente de la situación de equilibrio de cada mercado particular, la suma de los EDA siempre será igual a cero. Dado esto podemos tener dos resultados.

Corolario 1.2.1.1. Resultados de la Ley de Walras

- Si $n-1$ mercados están en equilibrio, el n–ésimo mercado también estará en equilibrio.
- Si hay un exceso de demanda positiva en un mercado significa que hay un exceso de demanda negativo en otro mercado.

El primer resultado es la razón por la cual podemos limitarnos a dos mercados y aun así extraer las conclusiones que nos son relevantes.

Por último, algunos supuestos implícitos y explícitos del modelo son:

1. No hay poder de mercado, los dos agentes en la economía serán tomadores de precios.
2. Información completa. Los dos individuos están al tanto de los bienes que hay en la economía, su cantidad y utilidad que les proporciona tanto a el como al otro.
3. Individuos racionales.
4. No hay externalidades. El consumo de un bien no afecta la utilidad de

un externo de ninguna manera.[2]

Ahora describiremos el modelo en más detalle asumiendo que tendremos dos agentes y dos bienes para poder graficar mediante la **caja de Edgeworth**.

1.3. Caja de Edgeworth

Caja de Edgeworth: Herramienta gráfica para representar un Modelo de Equilibrio Walrasiano.

La **Caja de Edgeworth** será la representación gráfica de una economía de intercambio con dos agentes. Esta herramienta fue desarrollada por **Francis Edgeworth** y **Arthur Bowley**, economistas y estadísticos británicos. Las dimensiones de esta caja obedecerán a las dotaciones totales de cada bien, en esta misma podremos graficar las curvas de indiferencia de los individuos y demás conceptos que definiremos más adelante.

Francis Edgeworth: Economista y estadístico británico que propone las curvas de indiferencia y caja de Edgeworth.

Arthur Bowley: Economista y estadístico británico pionero de usar técnicas de muestreo en encuestas sociales.

Esta economía considera dos individuos $i \in A, B$ que se intercambian dos bienes $j \in x, y$. Las dotaciones de bienes que tenga cada individuo se puede describir como un vector $\in \mathbb{R}^2_+$, más precisamente las dotaciones para un individuo i serán:

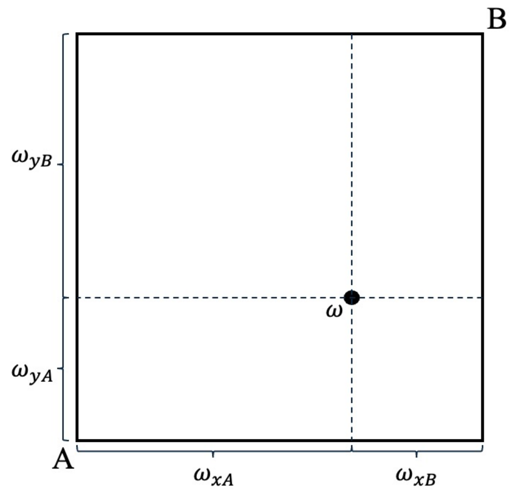
$$\omega_i = (\omega_{ix}, \omega_{iy}) \in \mathbb{R}^2_+$$

En la figura 1.1 podemos observar que las dimensiones de la caja son $\omega_x = \omega_{Ax} + \omega_{Bx}$ por un lado y $\omega_y = \omega_{Ay} + \omega_{By}$ por el otro. Donde además ubicamos la dotación inicial como un punto dentro de la caja $\omega^E \in \mathbb{R}^2_+$.

Se pueden graficar las curvas de indiferencia dada las preferencias de cada individuo dentro de la caja. Un hecho importante a recordar de las curvas de indiferencias es que curvas de indiferencias más a la derecha son mejores situaciones y lo contrario si nos movemos a la izquierda. Hay que considerar que dado que el individuo B está desde otro punto de vista su curva de indiferencia es mejor mientras más a la izquierda esté. Dada una dotación inicial una dotación inicial tendremos curvas de indiferencias correspondientes a

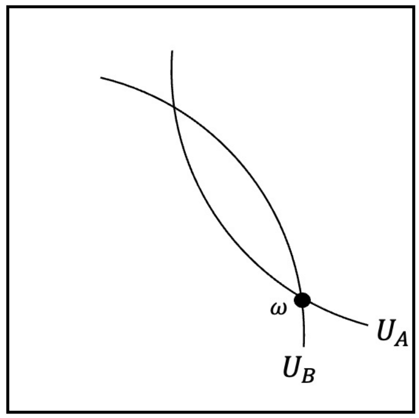
[2]Este supuesto se puede levantar y llevar al mismo resultado de equilibrio bajo ciertas condiciones, asumiremos que no existe tal posibilidad.

Figura 1.1: Dimensiones de la caja de Edgeworth



los niveles de utilidad que consiguen los agentes en un inicio (sin intercambio). En lo que sigue se formalizará el proceso por el cual los agentes intercambian bienes con tal de aumentar su utilidad.

Figura 1.2: Curvas de indiferencia y dotación inicial



1.4. Economía de intercambio bajo el criterio de Pareto

Vilfredo Pareto: Economista italiano, adopta los equilibrios walrasianos e incorporó a ellos el concepto de óptimo de Pareto.

Mejoría de Pareto: Transición en donde al menos un individuo esté en una mejor posición sin perjudicar a otro.

Óptimo de Pareto: Punto en donde todas las mejorías de Pareto posibles se han agotado.

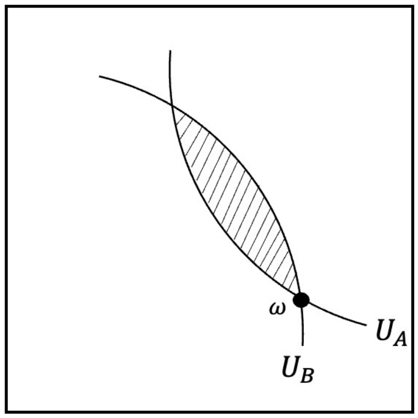
Un aspecto fundamental de este modelo es el criterio de Pareto aplicado a los intercambios. Es intuitivo que un intercambio se dará cuando ambas partes accedan, por lo que la situación después del intercambio debiera siempre dominar paretianamente a la asignación original.[3]

Dadas las preferencias y dotaciones los individuos podrán intercambiar bienes para maximizar su utilidad. Este proceso puede ser analizado desde el criterio de Pareto, acuñado por **Vilfredo Pareto**. Bajo este criterio un intercambio que aumenta la utilidad de al menos uno de los individuos y no perjudica la utilidad del otro sería una **mejoría de pareto**. El punto en donde se acaban las oportunidades de intercambio será el **óptimo de Pareto**. Podemos encontrar gráficamente los puntos de mejoría de pareto el lente de mejorías de pareto, el cual es el área rayada en la figura 1.3.[4]

[3]Estamos tomando como verdaderos todos los supuestos mencionados anteriormente

[4]Considere que estar en un óptimo de pareto no es sinónimo perfecto de estar en Equilibrio Walrasiano, el punto eficiente de pareto tan solo describe una situación en donde no hay intercambios *win-win* posibles. También cabe mencionar que un punto eficiente no

Figura 1.3: Lente de mejorías de pareto



Los agentes intercambian bienes hasta que se acaben las oportunidades de mejoría de Pareto, en cuyo caso llegamos a un óptimo de Pareto. Dada las preferencia y dotaciones de cada individuo tendremos que intercambiaran bienes siempre y cuando sus **tasas marginales de sustitución** estén en desigualdad: esto es una manera formalizada de decir que si el individuo A le da una unidad del bien x al individuo B a cambio de una unidad del bien y esto significa que el individuo A (B) valora más la unidad adicional del bien y (x) que la unidad que cede del bien x (y).

Tasa Marginal de Sustitución: Unidades de un bien que se están dispuestos a renunciar por una unidad marginal del otro bien, manteniendo el mismo nivel de utilidad.

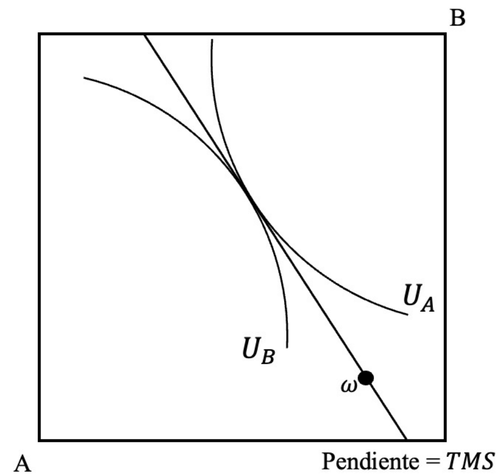
$$TMS^A_{x,y} = TMS^B_{x,y} \tag{1.4}$$

Por lo tanto podemos encontrar un óptimo de Pareto igualando las tasas marginales de sustitución entre los agentes (condición 1.4). En este punto las unidades adicionales de cada bien se valoran igual por lo que no hay incentivos de intercambiar. Gráficamente veríamos como en el óptimo las curvas de indiferencia de ambos individuos son tangentes.

La tasa marginal se calcula como la derivada parcial de la utilidad respecto a un bien divido por la derivada parcial de la utilidad respecto al otro bien.

necesariamente es deseable bajo otros criterios: Una dotación inicial donde A ó B concentra todos los recursos es un punto eficiente bajo criterio de Pareto.

Figura 1.4: Lente de mejorías de pareto



Por lo que podemos redefinir la condición 1.4 como:

$$\frac{\frac{\partial u_A(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial u_A(x,y)}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u_B(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial u_B(x,y)}{\partial y}}$$

Dado que cualquier punto de pareto óptimo es tal que las tasas marginales de sustitución de los individuos es igual entonces podemos encontrar todos los puntos tales que se podría encontrar un óptimo de Pareto en la caja de Edgeworth. La **curva de contrato** es la colección de puntos óptimos de pareto dentro de la caja de Edgeworth. A continuación llegamos a la expresión que denotan todos los óptimos de pareto que componen la curva de contrato para los individuos A y B.

Curva de contrato: Colección de puntos óptimos de Pareto dentro de la caja de Edgeworth.

Para desarrollar un ejemplo tomamos funciones de utilidad tipo Cobb-Douglas para ambos individuos.

$$u_A(x,y) = x_A^{\alpha} y_A^{\beta}$$
$$u_B(x,y) = x_B^{\alpha} y_B^{\beta}$$

Derivamos para obtener la expresión de la tasa marginal de sustitución para ambos individuos.

$$
\begin{aligned}
TMS_A &= \frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{\beta}}{\beta x_A^{\alpha} y_A^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_A}{x_A} \\
TMS_B &= \frac{\alpha x_B^{\alpha-1} y_B^{\beta}}{\beta x_B^{\alpha} y_B^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_B}{x_B}
\end{aligned}
$$

Igualamos tasas marginales de sustitución,

$$
\begin{aligned}
TMS_A = TMS_B \quad \Longrightarrow \quad & \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_A}{x_A} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_B}{x_B} \\
& \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B}
\end{aligned}
$$

Por definición la dotación total de cualquier bien será la suma de las dotaciones que tengan los individuos de ese bien en la economía,

$$
x_A + x_B = \omega_x \quad y_A + y_B = \omega_y
$$

Aprovechamos esta expresión para poder expresar la curva de contrato como el eje vertical (en este caso y) en función del otro bien.

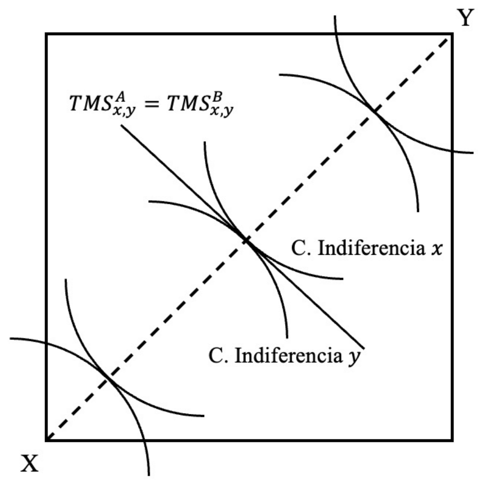
$$
\begin{aligned}
\frac{y_A}{x_A} &= \frac{\omega_y - y_A}{\omega_x - x_A} \\
y_A \omega_x &= x_A \omega_y
\end{aligned}
$$

Reordenando la expresión,

$$
x_A \cdot \left(\frac{\omega_y}{\omega_x} \right) = y_A \tag{1.5}
$$

Es decir, una dotación que cumpla con la expresión 1.5 pertenece a la curva de contrato y por ende es óptimo de Pareto que se puede conseguir dependiendo de la dotación inicial. Se agotaron las posibilidades de intercambio por lo que no se puede aumentar la utilidad de uno sin reducir la del otro. La curva de contrato va a tener diferentes formas dependiendo de la función de utilidad de los individuos.

Figura 1.5: Curva de Contrato



1.5. Eficiencia de los mercados

Por un momento dejamos de hablar de mercados, por lo que dejamos de hablar de precios. Ahora volveremos al tema de la eficiencia de mercados para entender cómo es que los mercados son una manera eficiente (maximizadora de utilidad y factible) de asignar los recursos. Como se habían mencionado en un equilibrio walrasiano los mercados ajustan precios $p = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_+$ tales que se vacían los mercados. En esta sección se estudiará como se llega a determinados precios segun la dotación de bienes y preferencias de los individuos.

1.5.1. Riqueza en una economía de intercambio

La riqueza en una economía de intercambio dependerá de la dotación de cada bien que tenga el agente y de los precios de estos mismos bienes. Para el individuo i la riqueza se puede denotar como la cantidad de un bien ponderado por su precio:

$$R_i = p_x \cdot \omega_{ix} + p_y \cdot \omega_{iy} \tag{1.6}$$

La riqueza será análogo a las restricción presupuestarias a la que está sujeta la maximización de utilidad. Es decir, el individuo i maximizará su función de utilidad, en este caso del tipo Cobb-Douglas, consumiendo bienes x, y y su restricción no estará activa mientras consuma menos o igual que su riqueza.

$$\max_{x,y} \quad u_i(x,y) = x_i^{\alpha} y_i^{\beta}$$
$$\text{s.a.} \quad R_i \geq p_x \cdot x_i + p_y \cdot y_i$$

En esta restricción x_i e y_i serán las demandas de los bienes que tenga el agente i, resolviendo el problema de maximización encontraremos las **demanda marshalliana** para cada bien.

Demandas Marshallianas: Son las demandas óptimas resultantes de un problema de maximización sujeto a alguna restricción.

1.5.2. Demandas Marshallianas

Los individuos tendrán una demanda marshalliana acorde a sus preferencias y riqueza. Si resolvemos el problema para A encontraremos la demanda del individuo para cada bien. En este caso diremos que $\alpha, \beta > 0$ y que $1 - \alpha = \beta$

$$\max_{x,y} \quad u_A(x,y) = x_A^{\alpha} y_A^{\beta}$$
$$\text{s.a.} \quad R_A = p_x \cdot x_A + p_y \cdot y_A$$

Por lo que las demandas son tal que,

$$y_A^* = \frac{R_A}{p_y}\beta \quad x_A^* = \frac{R_A}{p_x}\alpha$$
$$y_B^* = \frac{R_B}{p_y}\beta \quad x_B^* = \frac{R_B}{p_x}\alpha$$

Si no entiende cómo se llega directamente a este resultado puede revisar en la sección del anexo A.1.

Como cualquier demanda podemos observar que a mayor riqueza se demanda una mayor cantidad del bien, mientras que si el precio es mayor se contrae la demanda. Dado que tenemos la dotación de bienes y demanda de estos mismos podemos empezar a encontrar los precios que igualen estas dos partes.

1.5.3. Precios relativos

Los precios en esta economía están determinados por la dotación y preferencias y serán tales que todos los mercados estén en equilibrio. Lo que es relevante en este modelo son los precios relativos y no los nominales, es decir que lo importante es el precio de un bien relación a otro. Veremos que un mismo equilibrio se mantiene bajo dos vectores distintos: $p = (1, 2)$ y $p = (2, 4)$, esto ya que si bien se duplican los valores nominales la relación entre precios entre los bienes se mantiene.

Es frecuente tomar un precio como numerario, en el contexto de los ejercicios del curso cuando se toma un precio como numerario a lo que se refiere es que expresamos alguno de los precios como una constante, generalmente 1, y expresamos el otro precio en relación a este. Por ejemplo, para el vector de precios $p = (p_i, p_j)$ podemos multiplicarlo por $1/p_i$ quedando $p = (1, \frac{p_j}{p_i})$, ahora normalizando p_i a 1, obtenemos $p = (1, p_j)$. Para propósitos de este apunte esto simplificará bastante los ejercicios.[5]

Para obtener los precios podemos apelar a la ley de Walras y proponer la siguiente expresión,

$$x_A^* + x_B^* = \omega_x, \qquad y_A^* + y_B^* = \omega_y$$

Tomando el caso del bien x reemplazamos las demandas marshallianas.

$$\frac{R_A}{p_x}\alpha + \frac{R_B}{p_x}\alpha = \omega_x$$
$$\frac{\alpha}{p_x}(R_A + R_B) = \omega_x$$

Despejando p_x de esta expresión y (por simetría) expresando también p_y.

$$p_x = (R_A + R_B)\frac{\alpha}{\omega_x}, \qquad p_y = (R_A + R_B)\frac{\beta}{\omega_y}$$

Estas expresiones contienen información valiosa. Los precios nominales dependen de la riqueza total de la economía y por su lado la riqueza depende

[5]Relativizar precios no solo es importante pues simplifica el proceso sino que se puede ocupar para hacer demostraciones.

de los precios. Por esto mismo los precios nominales no nos son informativos. Para resolver esto hay dos opciones, una de ellas es normalizar uno de los precios a 1 (como fue recién explicado), y la otra opción es dividir directamente p_y/p_x para obtener p_y en relación a p_x, de esta manera las sumas de las riquezas se cancelan.

Los precios relativos por lo tanto son,

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{R\alpha}{\omega_x}}{\frac{R\beta}{\omega_y}} = \frac{\beta\omega_x}{\alpha\omega_y}$$

Los precios están determinados por las preferencias y la dotación de los bienes (oferta y demanda).

1.6. Teoremas fundamentales de la economía del bienestar

En un inicio se aplicó el criterio de Pareto para comparar asignaciones, luego se explicó en más detalle cómo se determinan los precios de equilibrio producto de los mercados. Los teoremas del bienestar juntan estos dos elementos.

PRIMER TEOREMA DEL BIENESTAR

Todo Equilibrio Walrasiano es óptimo de Pareto. Este teorema plantea que las asignaciones que se consiguen mediante el mercado son Pareto-óptimas. Este teorema se relaciona profundamente con las ideas más liberales de la economía, como la mano invisible, cada individuo buscando su propio beneficio llegaría a un punto eficiente para la economía en su conjunto.

SEGUNDO TEOREMA DEL BIENESTAR

Todo óptimo de Pareto puede conseguirse mediante un Equilibrio Walrasiano. Este teorema abre a la posibilidad de distribuir las dotaciones iniciales de manera de conseguir un Equilibrio Walrasiano deseado de manera eficiente. Este teorema se relaciona con las ideas redistributivas y de Estado de bienestar sin perder la eficiencia del mercado. Por lo tanto no habría un trade-off entre igualdad y eficiencia.

Ambos teoremas se cumplen dados los supuestos del modelo Walrasiano, que se cumpla uno de los teoremas no implica que el otro deje de cumplirse, de hecho es necesario que el primer teorema se cumpla para que el segundo pueda cumplirse también. Por otro lado tenemos que considerar que la manera en que distribuimos los recursos iniciales en el segundo teorema no distorsiona los precios: de lo contrario no aprovechamos la eficiencia de los mercados.

Las demostraciones de estos teoremas se encuentran en el anexo.

1.6.1. Conflicto eficiencia e igualdad

El segundo teorema de bienestar nos muestra que es posible tener cualquiera de los puntos Pareto-óptimos bajo la dotación inicial correcta. De esta manera, dado que los precios se determinan por medio de mercados competitivos, no hay conflicto entre eficiencia e igualdad. Sin embargo estamos haciendo trampa, estamos asumiendo que podemos reordenar las dotaciones iniciales sin distorsionar los precios relativos. Dicho de manera más general, estamos suponiendo que las políticas de redistribución son neutrales en cuanto a los precios relativos. Dependiendo de la intervención que se decida hacer en un mercado, habrá o no una distorsión de los precios relativos.

Fijar precios (a menos que sean los de mercado) distorsiona de manera bastante directa y por tanto hay una perdida de eficiencia, generalmente los impuestos a los bienes también genera una pérdida irrecuperable de eficiencia. Un impuesto que no genera ninguna distorsión a los precios relativos es el de suma alzada.

Impuesto suma alzada: Impuesto de un monto fijo, no depende de la producción ni consumo de ningun bien.

Un **impuesto de suma alzada** es una cantidad fija, no depende de la cantidad producida ni consumido de algún bien. Se pueden imaginar que administrativamente es simple de implementar, sin embargo suele ser visto (con solidas razones) de que es regresivo. Independiente de lo anterior, es el único impuesto que no distorsiona los precios relativos pues no influye en los incentivos de ninguno de los agentes.

Cualquier otro tipo de impuestos, a la renta, al consumo o producción generan cierta ineficiencia por la distorsión de los precios relativos. En estos casos tenemos un conflicto entre igualdad y eficiencia.

Volviendo al caso de la economía de intercambio, para que un planificador central redistribuya los recursos de manera correcta (sin generar distorsiones) para conseguir cierta asignación Pareto-óptimo habría que exigir que se cumplieran algunas consideraciones.

En caso de hacer una transferencia de renta (impuesto o transferencia a algún/algunos agentes) el planificador social debiera procurar que la renta sea igual al valor de mercado de la asignación que busca conseguir. Para asegurarse de esto la transferencia requiere de conocer los precios de equilibrio y asignaciones individuales, lo cual podría no pasar. Otra posibilidad es que el planificador embarga las dotaciones de los individuos y las distribuye de tal manera que sea igual a un punto Pareto-óptimo que se busque conseguir. Sin embargo podría ocurrir que los individuos oculten su riqueza, si el planificador no tiene información perfecta al respecto este método no podría ser factible.

En resumen, el segundo teorema de bienestar nos abre la puerta a no ver igualdad y eficiencia en conflicto, sin embargo se tienen que cumplir ciertos supuesto para que esto se pueda cumplir en la teoría y la práctica.

1.7. Producción en equilibrio general

Una extensión de lo visto en el modelo de equilibrio general con dos bienes y dos agentes sería considerar los factores productivos y funciones de producción con los que se producen los bienes que suponemos que son dotados exógenamente. En este caso las dotaciones no van a ser de bienes sino de factores de producción capital y trabajo (K, L) con las que se producirán los bienes que consumen los individuos. Habrá un total de capital de $\bar{K}$ y un total de trabajo $\bar{L}$, con los que se producen los bienes x, y.

1.7.1. Curva de contrato de la producción y fronteras de posibilidades

Tasa Marginal técnica de sustitución: Refiere a la tasa a la que se está dispuesto a cambiar la producción de un bien por incrementar la producción del otro.

Análogo al consumo la condición de eficiencia para la producción sigue siendo la igualdad entre las tasas marginales de sustitución, en este caso la **tasa marginal técnica** (TMT) de sustitución. Se interpreta como la producción de un bien que podemos intercambiar por la producción adicional de una unidad del otro,

$$TMT = \frac{\frac{\partial f(K,L)}{\partial K}}{\frac{\partial f(K,L)}{\partial L}} \tag{1.7}$$

Dado que se requieren capital y trabajo para los dos bienes, se tendrán que repartir las dotaciones de factores de producción de manera eficiente, la condición de eficiencia entonces es la igualdad de tasas marginales técnicas de sustitución (ecuación 1.8).

$$TMT^x_{K,L} = TMT^y_{K,L} \tag{1.8}$$

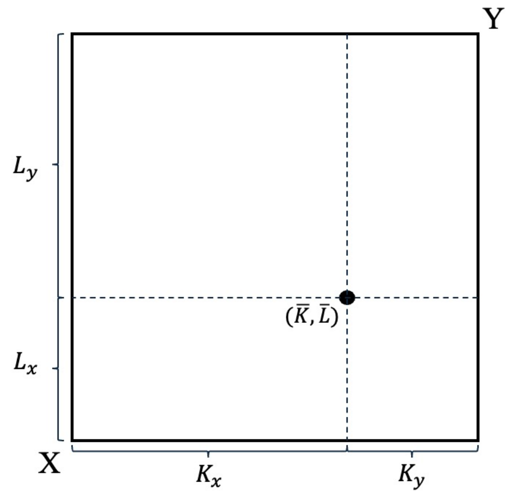
Isocuantas: Las curvas isocuantas son la colección de puntos de factores que generan una misma cantidad producida.

Frontera de posibilidad de producción: Cantidades máximas factibles que se pueden producir de bienes en la economía.

Podemos graficar una caja de Edgeworth de la producción, considerando las dotaciones totales $\bar{K}$ y $\bar{L}$ (Figura 1.6). Dentro de la misma podemos al igual que en consumo tener las curvas de indiferencia, que en el contexto de producción de denominan **isocuantas**. Dadas las isocuantas podemos tener una curva de contrato como la colección de puntos que cumpla con la ecuación 1.8, la eficiencia de, en este caso, la producción. Estos puntos en vez de ser la asignación eficiente de bienes a consumir serían los puntos de factores de producción dedicados a cada bien, en este caso el bien escaso de interés son los factores capital y trabajo. Veremos un alcance bastante interesante sobre lo anterior: los puntos en la curva de contrato de producción están relacionados con los puntos de la **frontera de posibilidades de producción** (FPP). Si se produce de manera eficiente, estando en un punto de la frontera de posibilidades de producción, estaremos también en un punto de la curva de contrato de producción y viceversa.

Es útil recordar que la frontera de posibilidades de producción son los puntos tales que para producir más de un bien es necesario sacrificar la producción del otro bien. Esto implica que hay eficiencia, la dotación de factores de producción se utilizan de tal manera en que no hay mejorías de Pareto (mejorías de eficiencia) en la producción. Dado que los puntos de la curva

Figura 1.6: Caja de Edgeworth de la producción



de frontera de posibilidades de producción son Pareto eficientes, estos están relacionados con la curva de contrato de producción que se conforma por todos los puntos Pareto-óptimos en la caja de Edgeworth de la producción.

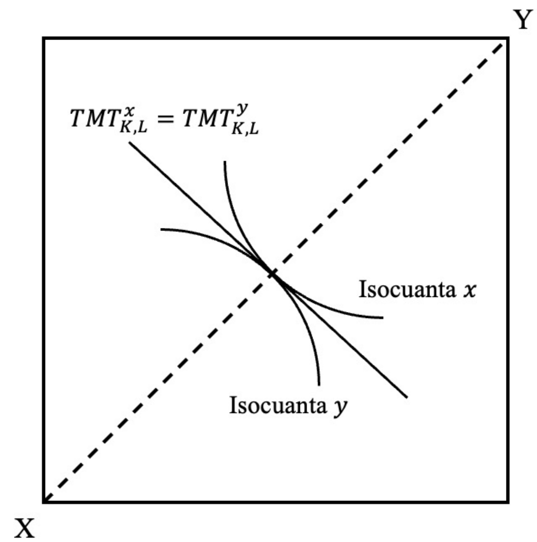
Gráficamente en el caso de estar en un punto ineficiente como se ve en la figura 1.8 indica que es posible producir más de x sin perjudicar la producción de y y viceversa, no se están utilizando los factores de manera eficiente. En más detalle recordemos que la pendiente en un punto de la FPP es la TMT, la tasa de sustitución de la producción de un bien por la producción de otro. La pendiente en el punto de intersección de las isocuantas $TMT^x_{K,L} = TMT^y_{K,L}$ será la misma TMT del punto de la frontera de producción correspondiente.

1.7.2. El equilibrio bajo producción

Equilibrio y eficiencia no son la misma cosa, veremos primero como se daría el equilibrio en esta economía y luego estudiaremos si la eficiencia de la producción y el consumo se dan bajo este equilibrio competitivo.

Volviendo a la FPP, juntando la producción con la demanda de los bienes

Figura 1.7: Curva de contrato de producción



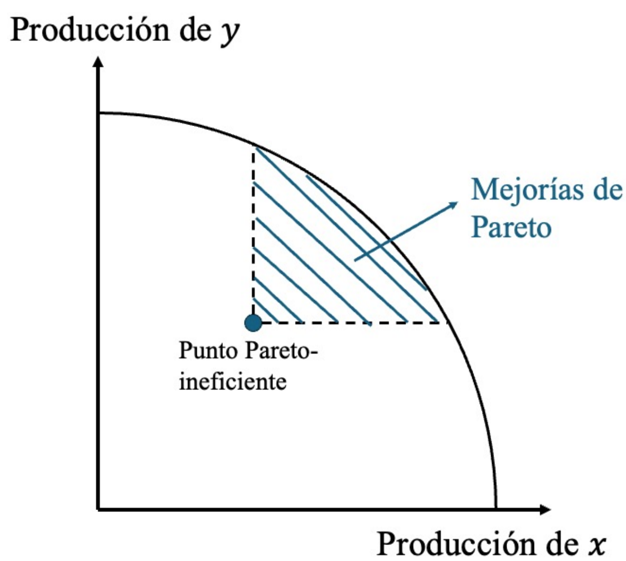
podemos encontrar precios de los bienes de la economía, estos precios serán los de equilibrio. Para esto necesitamos una función de utilidad agregada a partir de los agentes que armaremos con el puro objetivo de dibujar una curva de indiferencia (agregada) del consumo de los bienes en la economía. El equilibrio se da en la tangencia entre la FPP y la curva de indiferencia, es decir, donde la TMT es igual a la TMS (figura 1.9).

El punto donde $TMT = TMS$ sean iguales debiera darnos nuestros precios relativos de los bienes x e y.[6] En más detalle podemos incluir la ley del precio único, la cual es una condición necesaria para formalizar lo anterior.

Ley del precio único
La ley del precio único indica que en ausencia de fricciones al comercio (distorsiones de precios), bajo competencia perfecta y flexibilidad de precios: bienes idénticos debiesen ser vendidos al mismo precio (expresado en la misma moneda) en todos los lugares.

[6]Teorema de separación de convexos nos dice que la tangencia entre estos dos conjuntos convexos debiera ser el vector de precios de los bienes.

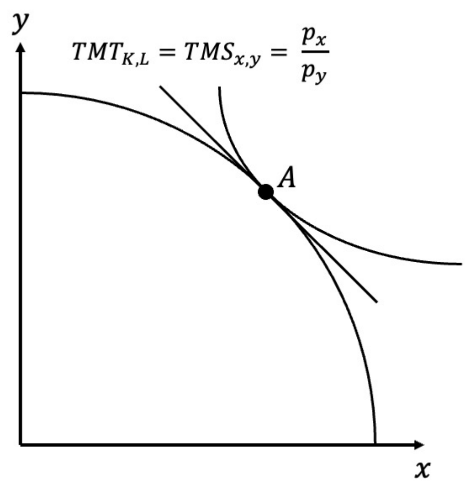
Figura 1.8: Frontera de posibilidades de producción



Considerando la ley del precio único (Cada bien se vende al mismo precio independiente de quien lo venda o compre) y la competencia perfecta de la producción (productores toman los precios dados y maximizan beneficios) llegaremos, dada la tangencia entre FPP y curvas de indiferencia de consumo a un vaciamiento de los mercados mediante p_y/p_x. Hasta ahora hemos hablado de los precios relativos entre bienes y no sobre el precio relativo de los factores, ya llegaremos a eso. De hecho, la ley del precio único también es importante para la determinación de los precios de los factores.

Dadas estas condiciones, agentes consumidores y productores maximizadores de utilidad en un contexto competitivo, ley del precio único y vaciamiento del mercado tendremos los siguientes resultados: (i) eficiencia en la producción, (ii) eficiencia en la asignación (consumo) y (iii) equilibrio entre producción y demanda.

Figura 1.9: Precios relativos de los bienes y frontera de posibilidades de producción



Eficiencia en la producción

La idea es que para que haya eficiencia en la producción en este contexto, es decir, que la condición de eficiencia según la ecuación 1.7 se mantenga en el equilibrio. Dado que se cumple la ley del precio único, la producción de ambos bienes enfrentan los mismos precios para capital y trabajo. De lo contrario podríamos tener que el precio del capital es más caro (barato) en la producción de x que en la producción y.

Por tanto el precio de un factor debiera ser igual al rendimiento marginal del factor bajo condición de eficiencia.

$$TMT^{x}_{K,L} = \frac{\frac{\partial f_x(K,L)}{\partial K}}{\frac{\partial f_x(K,L)}{\partial L}} = \frac{p_L}{p_K}, \qquad TMT^{y}_{K,L} = \frac{\frac{\partial f_y(K,L)}{\partial K}}{\frac{\partial f_y(K,L)}{\partial L}} = \frac{p_L}{p_K} \tag{1.9}$$

Entonces, la eficiencia en la producción se da en el equilibrio de mercado. Esto es, dadas las tecnologías y demandas de los individuos que están en equilibrio (precios relativos de los bienes son competitivos) la producción está en un punto eficiente.

Eficiencia en la asignación

La asignación en equilibrio que conseguimos mediante una utilidad agregada debiera reflejar una asignación eficiente en el consumo de los agentes de manera individual. ¿Qué garantiza de que la ecuación 1.4 se mantenga en el equilibrio?

Observando de la figura 1.9 los precios relativos son iguales a la tasa marginal de sustitución de la función de utilidad agregada. Lo cual como vimos en caja de Edgeworth para el consumo, se acaba cumpliendo en los puntos Pareto-óptimos.

Eficiencia entre la producción y el consumo

¿Cómo podemos asegurar que la producción eficiente sea la necesaria para mantener la eficiencia en el consumo en el contexto de equilibrio? Es decir, cómo aseguramos que en el equilibrio, se produzca menos de x de lo demandado por x o bien que se produzca más de y que lo demandado por y.

Observemos el punto de la FPP donde se da el equilibrio (punto A en 1.9), por el hecho de ser un punto de la FPP podemos decir que cumple con,

$$TMS_{K,L} = -\frac{dy}{dx}$$

Dado que hay eficiencia de la producción en el equilibrio (ecuación 1.9),

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{p_L}{p_K}$$

Considerando que en este punto la pendiente es igual a la pendiente de la tasa marginal de sustitución,

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{p_y}{p_x}$$

De esta manera si y es más caro entonces implica que producir una unidad de y cuesta más de una unidad de x, de lo contrario estaríamos siendo ineficientes al no producir más y y menos x.

Esto es, que ante cambios en la demanda de por bienes hay un cambio en los precios relativos que se traduce en un cambio en los precios relativos de los factores.

1.7.3. Una representación gráfica del equilibrio general con producción

Dado lo discutido anteriormente podemos decir que $TMS = TMT$, por lo que el punto de la FPP tiene la misma pendiente que el punto Pareto-óptimo en las asignaciones de la caja de Edgeworth del consumo. Tal punto de la FPP también nos da la producción total de cada bien, los cuales serán tal como en el modelo 2x2, las dimensiones de la caja.

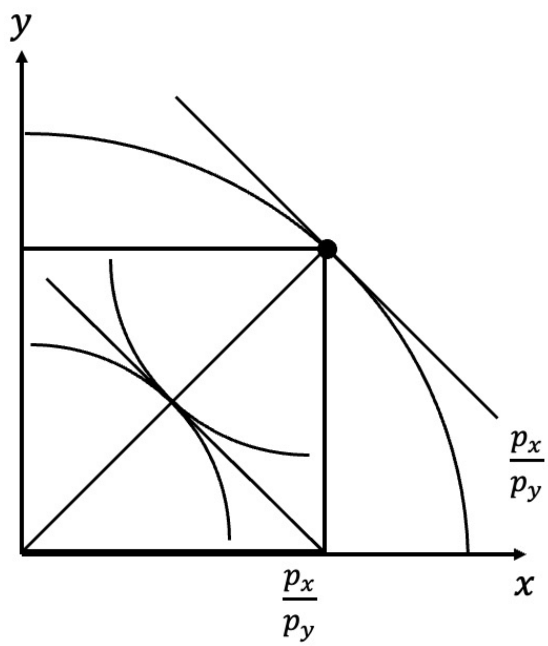
Por tanto podemos graficar la eficiencia en la producción y consumo en equilibrio como la figura 1.10.

La resolución del modelo como ejercicio se encuentra en el anexo.

Palabras Clave

1. Equilibrio competitivo 2. Equilibrio general 3. Ley de Walras 4. Precios relativos 5. Eficiencia de Pareto 6. Mejorías de Pareto 7. Curva de contrato 8. Primer teorema del bienestar 9. Segundo teorema del bienestar 10. Frontera de posibilidades 11. Ley del Precio único

Figura 1.10: Equilibrio general con producción



Ejercicios

Curvas de indiferencia y curvas de contrato

Considere una economía simple de intercambio compuesta de dos agentes (Amanda y Benito) y dos bienes (empanadas y vino tinto). Suponga que Amanda tiene muchas empanadas y poco vino, mientras que Benito tiene mucho vino y pocas empanadas. Ambos prefieren, de un modo u otro, combinar ambos bienes para el consumo. Asuma, inicialmente, que Amanda y Benito tienen preferencias Cobb-Douglas. Asuma, además, que en términos relativos, Amanda tiende a gustar más el vino en sus canastas y Benito prefiere canastas con más empanadas.

a. Construya y explique la Caja de Edgeworth, la curva de contrato, el conjunto de oportunidades de comercio y el núcleo de la economía.

b. Explique la diferencia entre mejorías de Pareto y óptimos de Pareto en el gráfico del numeral anterior.

c. Explique cómo se construyen las curvas de oferta-demanda y el rol que juegan en ello los efectos sustitución e ingreso.

d. Explique cómo se representa el primer teorema del bienestar en esta Caja de Edgeworth y dónde podemos ver los flujos de comercio que se producen y los precios del equilibrio walrasiano.

e. ¿Cómo cambia la curva de contrato si las preferencias de Amanda son Leontief y las de Benito son Cobb-Douglas?

f. ¿Cómo cambia la curva de contrato si las preferencias de Amanda y Benito son ambas Leontief?

g. ¿Cómo cambia la curva de contrato si las preferencias de Amanda son Leontief y las de Benito son de sustitución perfecta?

h. ¿Cómo cambia la curva de contrato si las preferencias de Amanda y Benito son ambas de sustitución perfecta?

Equilibrio, ajustes de mercado

Considere una economía de 2×2 en que $u_1(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ y $u_2 = \beta x^\alpha y^{1-\alpha}$, donde $\alpha \in]0, 1[$ y $\beta > 1$ son constantes dadas. Suponga además que los recursos iniciales son: $\omega_1 = (\theta, \delta)$ y $\omega_2 = (\delta, \theta)$.

a. Dibuje la Caja de Edgeworth. Identifique el área de mejorías, óptimos de Pareto, núcleo de la economía de intercambio y las dotaciones iniciales.

b. Obtenga el equilibrio walrasiano.

c. Explique el primer teorema del bienestar y verifique si se cumple.

d. Suponga que se reparte una unidad adicional del bien x. Se entrega $\rho \in [0,1]$ cantidad de x al individuo 1 y el resto al individuo 2. Encuentre el precio de equilibrio de esta economía.

e. Suponga que $\theta = 1$ y $\delta = 0$. Obtenga las cantidades de equilibrio.

f. ¿Se cumple el primer teorema del bienestar?

Equilibrio General en la Taberna de Moe

Considere a la ciudad de Springfield como una economía de 2×2, es decir, una economía donde hay dos individuos: Homero Simpson (denotado como H) y Lenny Leonard (denotado como L) que consumen dos bienes: rosquillas (r) y cervezas (c). Sus funciones de utilidad se describen de la siguiente forma:

$$U_H = r_H^{\alpha} \cdot c_H^{1-\alpha}$$
$$U_L = \left(r_L^{\alpha} \cdot c_L^{1-\alpha}\right)^2$$

Las dotaciones iniciales para cada individuo son:

$$W_H(r,c) = (10,4) \quad \text{y} \quad W_L(r,c) = (5,8)$$

a. Obtenga una expresión general para las curvas de indiferencia de cada individuo y grafique la caja de Edgeworth de esta economía, indicando dónde se encuentran las dotaciones iniciales de cada individuo y señalando el núcleo de esta economía. ¿Qué ocurre allí? *Hint*: Grafique c en el eje vertical y r en el eje horizontal.

b. Explique qué representa la curva de contrato. Luego, encuentre la curva de contrato de la economía e indique si la situación inicial es un óptimo de Pareto.

c. Plantee el problema de optimización que enfrenta Homero y el que enfrenta Lenny. Asuma de ahora en adelante que r tiene un precio numerario ($p_r = 1$).

d. Encuentre las demandas marshallianas de Homero y de Lenny para cada uno de los bienes.

e. Encuentre el equilibrio de Walras de la economía de Springfield. Para esto, encuentre el precio de equilibrio y luego las cantidades de equilibrio de cada individuo.

f. Verifique que el equilibrio de Walras sea un óptimo de Pareto. ¿A qué teorema del bienestar corresponde esto?

g. Si las dotaciones iniciales hubieran sido idénticas para ambos individuos, ¿habría intercambio de bienes?

h. Para esta pregunta, asuma que $\alpha = 3$ y calcule las expresiones de demandas encontradas en el ítem (e), ¿quién consume más rosquillas? ¿quién consume más cervezas?

i. Homero, como fanático de las rosquillas y cervezas, considera que no es justo que Lenny consuma más de ambos bienes, por lo que recurre al alcalde Diamante diciéndole que lo ayude, si no él revelará lo de las elecciones. Así, el alcalde Diamante quiere intervenir la economía con el fin de reducir la desigualdad existente. Su nuevo asesor, el profesor Frink, reclama que es imposible lograr esto sin costos en materia de eficiencia para la sociedad. ¿Tiene razón el profesor Frink? ¿Por qué?

j. El alcalde Diamante decide que Homero y Lenny deben poseer la misma cantidad de bienes de cada tipo una vez alcanzado el equilibrio walrasiano (por supuesto, nada tiene que ver con lo que dijo Homero sobre revelar lo de las elecciones), por lo que va a redistribuir las dotaciones iniciales para lograr su objetivo sin distorsionar el mercado. ¿Cómo serán las dotaciones iniciales? ¿Logró su objetivo el alcalde Diamante sin afectar la eficiencia de la economía?

Economía 2×2

Considere una economía que tiene 2 individuos que consumen 2 bienes: x e y. Sus funciones de utilidad se pueden describir de la siguiente manera:

$$U_1 = x_1^{0,7} y_1^{0,3}$$
$$U_2 = x_2^{0,9} y_2^{0,1}$$

Donde U_1 es la utilidad del individuo 1 y U_2 es la utilidad del individuo 2. Las dotaciones iniciales de cada uno son:

$$W_1 = (20, 10) \quad \text{y} \quad W_2 = (15, 15)$$

a. Grafique la caja de Edgeworth de esta economía indicando las dotaciones iniciales, las curvas de indiferencia que pasan por las dotaciones iniciales, la curva de contratos y el núcleo.

b. Encuentre el nivel de utilidad inicial de cada individuo.

c. Encuentre una expresión general para las curvas de indiferencia de cada individuo. Explique qué representa una curva de indiferencia.

d. Obtenga la curva de contrato de esta economía y explique qué representa. Defina qué es un óptimo de Pareto y compruebe si la dotación inicial es uno.

e. Suponga que los individuos pueden comerciar entre ellos. Encuentre el equilibrio walrasiano de esta economía, señalando cuál sería el precio de equilibrio y las cantidades consumidas de cada bien en este equilibrio. Asuma que el bien x es numerario ($p_x = 1$).

f. ¿Se cumple el primer teorema del bienestar en esta economía? Explique qué dice este teorema y muestre matemáticamente si se cumple.

g. Muestre que en esta situación ambos individuos son beneficiados gracias al intercambio.

h. A partir de ahora considere que los individuos tienen preferencias descritas por:

$$U_1(x, y) = 2x_1 + y_1$$

$$U_2(x, y) = \text{mín}\{x_2, y_2\}$$

Considere que las dotaciones están dadas por:

$$W_1 = (18, 0) \quad \text{y} \quad W_2 = (0, 18)$$

Grafique la caja de Edgeworth del problema, incluyendo las curvas de indiferencia y las dotaciones iniciales.

i. ¿Se pueden encontrar los puntos Pareto eficientes igualando las TMS? Justifique.

j. Muestre la relación de precios que existe en el problema y llegue a las dotaciones en el equilibrio.

Economía $2 \times 2 \times 2$

Suponga una economía cerrada con dos individuos $i = \alpha, \beta$. En esta economía se producen dos bienes (x, y) utilizando dos factores K y L.

Los individuos tienen funciones de utilidad dadas por:

$$U_i(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

A su vez, la tecnología de producción está descrita por:

$$x = K_x^{\frac{1}{2}} L_x^{\frac{1}{2}}$$
$$y = 2K_y^{\frac{1}{2}} L_y^{\frac{1}{2}}$$

Donde se tiene necesariamente para esta economía:

$$L = \sum L_i = 400$$
$$K = \sum K_i = 100$$

Suponga finalmente que existe una función de utilidad social descrita por:

$$W(U_\alpha, U_\beta) = U_\alpha^{\frac{3}{5}} U_\beta^{\frac{2}{5}}$$

a. Explique las dos sumatorias. ¿Qué significan? ¿Qué supuesto se hace generalmente sobre estos valores?

b. Determine la curva de contrato en la producción (i.e. set de óptimos de Pareto).

c. Encuentre la curva de transformación (FPP).

d. Determine la curva de contrato en el consumo.

e. Obtenga la frontera de posibilidades de utilidad.

f. Determine el óptimo social (W^*).

g. Obtenga la producción óptima de bienes e indique cuál es la asignación socialmente deseada entre los consumidores.

h. Determine la asignación eficiente de factores productivos entre los dos sectores productivos: x, y, consistentes con el óptimo social.

Referencias

Levin, J. (2006). General equilibrium. *Microecon. Notes*.
Mas Collel, A., & Whinston, M. (1995). *Microeconomic Theory*.
Torres-Martínez, J. P. (2012). *Elementos de Economía Matemática*.
Varian, H. R. (2014). *Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach*. WW Norton & Company.

CAPÍTULO 2

EL PROBLEMA DEL TIEMPO Y DEL RIESGO

2.1. Optimización intertemporal y la aversión al cambio

El economista y estadístico **Irving Fisher** ayudó a desarrollar uno de los modelos más influyentes en como entendemos que se toman las decisiones de consumo a lo largo del tiempo. El objetivo de esta sección será modelar el comportamiento de un individuo que por defecto suaviza consumo en el tiempo, pero que por diversas fuerzas distribuye su consumo de forma desigual entre períodos. Además de entender dichas fuerzas introduciremos la aversión al riesgo con el fin de entender la sensibilidad del consumidor a estas fuerzas.

Irving Fisher 1867-1947: Economista y estadístico estadounidense reconocido por sus avances en la teoría económica (Ecuación de Fisher, hipótesis de Fisher, teorema de separabilidad de Fisher...).

2.2. Modelo de consumo intertemporal en dos períodos

Vamos a introducir los tres factores básicos que determinan el consumo en diferentes períodos de un individuo.

- El deseo por suavizar consumo.
- El costo de la deuda y el premio al ahorro.
- La impaciencia del individuo.

Tomaremos un consumidor racional maximizador de utilidad, este individuo consume bienes (en el sentido genérico) en dos distintos períodos, por lo que el argumento de la función de utilidad serían la cantidad de consumo dedicada a cada período (c_t para cada período t).

$$\max_{c_1,c_2} \quad u(c_1,c_2) = \ln(c_1) + \ln(c_2) \tag{2.1}$$
$$s.a \quad c_1 = y_1, \quad c_2 = y_2$$

Este individuo tiene ingresos en el período 1 e ingresos en el período 2 (y_t para cada período t) y no puede ahorrar ni endeudarse. Si este fuera el caso entonces la resolución del problema del consumidor sería trivial: el individuo en el período 1 consumiría todo su ingreso en dicho período ($c_1^* = y_1$), en el período 2 consumiría ($c_2^* = y_2$).

Sin embargo, la restricción de un consumidor intertemporal puede ser más compleja si consideramos que el individuo puede ahorrar o endeudarse. Partiremos armando intuitivamente la restricción de cada período para así juntarlas y obtener lo que llamaremos una **restricción intertemporal**. Algunos supuestos simplificadores que consideraremos es que el individuo solo vive durante dos períodos, la tasa de interés no cambia a lo largo del tiempo y la tasa de interés a la que uno ahorra es la misma a la que se endeuda.

Restricción intertemporal: Restricción resultante de consumir con un ingresos finitos transferibles entre períodos de tiempo

2.2.1. La restricción intertemporal

El individuo partirá consumiendo en el primer período una cantidad c_1, para financiar su consumo recibe de manera exógena un ingreso y_1. Lo primero a notar es que el individuo va a estar restringido pues todo consumo debe estar respaldado por algún tipo de riqueza, es decir $y_1 \geq c_1$. El factor intertemporal entra en juega cuando incluimos la deuda y ahorro, este factor ahorro/deuda lo denotaremos por s, será positivo cuando se trate de ahorro y será negativo cuando sea deuda. Por lo que la restricción en el primer período no solo considera que el consumo debe estar respaldado por el ingreso, sino que también el ingreso puede destinarse a consumo y ahorro para consumir en el siguiente período. O también el individuo podrá endeudarse para consumir una cantidad mayor a y_1 en el primer período.

Una ecuación que resume esta dinámica sería la identidad 2.2.

$$y_1 = c_1 + s \tag{2.2}$$

En el segundo período la restricción seguirá la misma lógica, lo que hay que considerar adicionalmente es que hay una tasa de interés ($r \in [0, 1]$) que considerar al ahorra o endeudarse. Si nos endeudamos a una cantidad γ entonces hemos de pagar esa cantidad considerando intereses en el período anterior $\gamma(1 + r)$. Desde el punto de vista del ahorro, el no consumir una cantidad η en el primer período se nos será recompensado con una cantidad $\eta(1 + r)$ en el siguiente período.

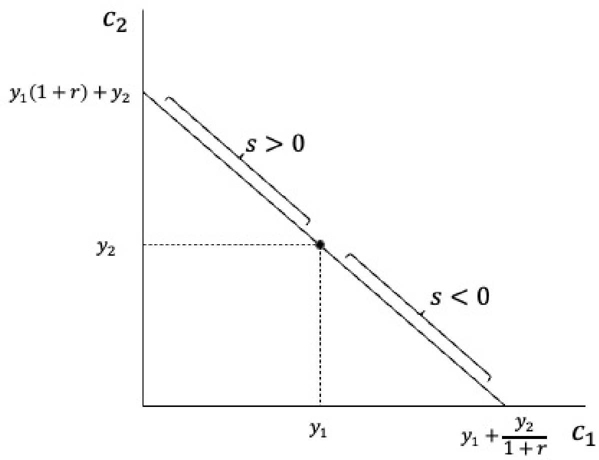
Por lo tanto el ingreso en el segundo período se destina a consumo o a pagar las deudas pendientes, en caso de que el individuo haya ahorrado en el período anterior se podrá consumir más, no solo por la transferencia de dinero del pasado al presente sino que también el premio al ahorro que es la tasa de interés. La restricción del segundo período puede ser descrita como la ecuación 2.3.

$$y_2 + s(1 + r) = c_2 \tag{2.3}$$

Teniendo las restricciones para los dos períodos podemos describir una restricción intertemporal combinándolas mediante el ahorro. Para esto reemplazamos s de 2.2 en 2.3.

$$y_2 = c_2 - (1 + r)(y_1 - c_1)$$

Figura 2.1: Restricción intertemporal



Valor futuro: El valor que tendrá cierta monto en un período futuro dadas las oportunidades de ahorro/inversión.

Valor presente: El valor que tiene cierto monto en el futuro traído a lo que valdría hoy dadas las oportunidades de ahorro/inversión.

Reordenando podemos encontrar dos expresiones útiles que representan la misma restricción, las dos representan la misma restricción: *todo el consumo tiene que ser financiado por ingreso*. La expresión 2.4 está ordenada de forma que los ingresos presentes sean traídos a **valor futuro**, mientras que 2.5 está expresado de forma en que los ingresos futuros sean traídos a **valor presente**. Ambas vienen a significar lo mismo, el consumo debe estar respaldado por algún tipo de riqueza, ya sea ingresos o ahorros.

$$y_1(1+r) + y_2 = c_1(1+r) + c_2 \tag{2.4}$$

$$y_1 + \frac{y_2}{1+r} = c_1 + \frac{y_2}{1+r} \tag{2.5}$$

Si quisiéramos graficar deberíamos tomar en el eje horizontal el consumo presente y en el eje vertical el consumo futuro, de esta manera la restricción intertemporal puede ser graficada tal como una restricción presupuestaria (Véase la figura 2.1). De estos puntos factibles el consumidor decidirá el punto de la recta que maximiza su utilidad. El punto en que el consumidor elija para maximizar su utilidad es suficiente para saber si en estos dos períodos ahorro o se endeudó. Es directo ver que si $c_1 > y_1$ implica que $s < 0$, es decir se está contrayendo deuda para financiar el consumo presente. Para financiar esa deuda el consumidor estará obligado en el futuro a que $c_2 < y_2$ pues cierta parte va a ser usada para pagar la deuda. Tanto este caso como el caso en que el individuo ahorra se pueden ver en la figura 2.1.

Esto es uno de los puntos mencionados al inicio (el costo de la deuda y el premio al ahorro), esto está resumido en el parámetro r. A mayor tasa de interés se incentiva más el consumo en el futuro puesto que traer dicho dinero al presente genera un mayor costo de oportunidad de consumir en el futuro.

Entonces ¿Por qué el consumidor no ahorra todo su ingreso al inicio para maximizar el ingreso y por tanto el consumo que le da felicidad? Para responder esta pregunta es necesario tomar en consideración los puntos que nos faltan que se relacionan con las preferencias del individuo por suavizar el consumo y las de impaciencia.

2.2.2. La necesidad de suavizar consumo

Seguramente a usted le hará sentido la idea de suavizar el consumo a lo largo de su vida. Los individuos en general estarían más felices si tuvieran un consumo estable garantizado a lo largo de toda su vida en vez de consumir poco ahora para consumir mucho mañana. Esto se debe a que el rendimiento marginal del consumo es positivo pero a tasas decrecientes.

Si se fija en la función de utilidad del inicio 2.1 el consumo de cada período está en logaritmo natural. Si derivamos una función de este estilo.

$$u(c) = \ln(c) \Longrightarrow u'(c) = \frac{1}{c} \longrightarrow u''(c) = -\frac{1}{c^2} \tag{2.6}$$

El rendimiento es positivo $u'(c) > 0$ sin embargo a tasas decrecientes $u''(c) < 0$. Esto implica que ante el siguiente problema con una tasa $r = 0$,

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2} \quad & u(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \ln(c_2) \\ s.a \quad & y_1 + y_2 = c_1 + c_2 \end{aligned}$$

En caso de que solo tengamos ingreso en el presente $y_1 > 0$ y nada de ingreso en el futuro y_2 la respuesta óptima del individuo será $c_1^* = c_2^* = \frac{y_1}{2}$. Se reparten en partes iguales puesto que dirige recursos al período que de mayor rendimiento marginal a su consumo. Por lo que la mejor manera de aprovechar el rendimiento marginal del consumo sería repartiendo el ingreso en cada período. Este comportamiento de las funciones de utilidad en cada período se puede interpretar como un factor de saciabilidad del individuo.

Ahora nos falta presentar uno de los factores que se mencionaron al inicio que hace referencia a la impaciencia que tienen los individuos por naturaleza. Esto será una características de las preferencias, por lo que ser impaciente no es contrario al hecho de que sea un agente racional.

2.2.3. La impaciencia

Una forma bastante directa de ponderar más el consumo presente al consumo futuro es bastante directa, basta con multiplicar la utilidad que brinda el consumo futuro por un factor entre 0 y 1. Por ejemplo, podemos expresar la función de utilidad entre los dos períodos en la ecuación 2.7 donde $\rho \geq 0$.

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \frac{1}{1+\rho}u(c_2) \tag{2.7}$$

A pesar de que la utilidad en el presente y futuro sigan una misma función $u(c_t)$ el consumidor preferirá el consumo presente por sobre el consumo en futuro. La impaciencia se modela incluyendo una **tasa de impaciencia** que descontará la utilidad del consumo en el futuro. Por conveniencia podemos hacer un cambio de variable y definir $\beta = \frac{1}{1+\rho}$.

Resumen
Dada la saciabilidad del individuo los agentes tienden a maximizar su utilidad suavizando el consumo a través del tiempo. Dado que los humanos somos en cierta medida impacientes ρ solemos ponderar en mayor magnitud el presente lo cual lleva a que consumamos más en el presente. Aunque

nuestras preferencias nos digan que es más provechoso consumir en el presente hay un costo de oportunidad r de consumir en el presente por sobre el futuro, esto porque hay un premio por ahorro y un costo por endeudamiento.

2.3. El perfil del consumidor

Con los conceptos que hemos introducido hasta ahora podemos plantear el siguiente problema de maximización de utilidad bajo una restricción intertemporal.

$$\begin{aligned} \max_{c_1,c_2} \quad & \left\{u(c_1) + \beta u(c_2)\right\} \\ s.a. \quad & y_1 + \frac{y_2}{1+r} = c_1 + \frac{c_2}{1+r} \end{aligned}$$

Para resolver este problema definimos el lagrangeano y derivamos las condiciones de primer orden.

$$\mathcal{L} : u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{CPO:} \quad & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = u'(c_1) - \lambda = 0 \\ & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \beta u'(c_2) - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \\ & \lambda = \lambda \longrightarrow u'(c_1) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right) u'(c_2)(1+r) \\ & \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{1+r}{1+\rho} \end{aligned} \tag{2.8}$$

El resultado de la optimización será la ecuación 2.8 la cual describe el cómo se ajusta la relación consumo presente y consumo futuro frente a las tasas de interés e impaciencia. Esta ecuación se le conoce como la **ecuación de Euler del consumo**, se le refiere también como el perfil del consumidor.

Ecuación de Euler del consumo: Relación óptima que el consumo de un agente para maximizar su utilidad sujeto a la tasa de interés y su impaciencia.

Por ejemplo, un aumento de la tasa de interés tiene un efecto lleva el consumo del presente al consumo dado un mayor costo de oportunidad de consumir en el presente (pues se premia en mayor magnitud el ahorro). El hecho de que disminuya el consumo presente implica que el rendimiento marginal de consumir en el presente sube (recuerde 2.6). Por la misma lógica si aumento el consumo futuro el rendimiento marginal del consumo futuro disminuye.

Dinámicas de ajuste ante cambios exógenos

Podemos notar del perfil del consumidor que las tasas de interés e impaciencia son fuerzas que mueven el consumo en sentidos contrarios: La tasa de interés impulsa el ahorro y por tanto el consumo futuro mientras que la tasa de impaciencia incentiva el consumo presente y por tanto la deuda. Podemos conceptualizar los cambios entre consumo presente y consumo futuro como **efectos sustitución** y **efecto ingreso** tomando la tasa de interés como el precio relativo del consumo entre períodos.

Efecto Sustitución: Cambio en la cantidad demandada de un bien debido a una variación en su precio relativo con otro.

Efecto Ingreso: Cambio en la cantidad demandada de un bien debido a un cambio en el poder adquisitivo del consumidor.

Hasta ahora cuando subía la tasa de interés lo interpretábamos como si hubiera un mayor costo de oportunidad de asumir cuando se prefiere el consumo presente por sobre el futuro. Esto se puede tomar también como un precio relativo: el precio relativo del consumo presente por sobre el consumo futuro. Desde esta perspectiva podemos decir que consumir en el presente es más caro con respecto al consumo si consideramos el costo de oportunidad.

Dado que hay un precio implícito del consumo presente el hecho de que la tasa de interés r baje o suba genera un efecto sustitución. Si aumenta la tasa de interés el consumo presente se vuelve más caro, por lo que se traspasan recursos al consumo futuro a costa del consumo presente. Bajo la misma lógica al reducir r entonces se vuelve más barato el consumo presente por lo que traspasamos recursos a consumir más en el presente.

Además habrá un efecto ingreso del cual dependerá si el consumidor está ahorrando o está endeudado. Si es que aumenta la tasa y el individuo es acreedor se traduciría en un aumento de riqueza, puesto que sus ahorros en el futuro ahora son más caros. Es el hecho de que *ahora el individuo es más rico* que el consumo aumenta tanto en el presente como en el futuro.

Lo contrario ocurre si es que el individuo era deudor, en ese caso sería más pobre y consumiría menos tanto en el presente como en el futuro.

Funciones de utilidad con aversión al riesgo

La dirección y el tamaño del ajuste ante cambios en el precio relativo del consumo entre períodos se pueden medir de alguna manera, podríamos describirlo como una elasticidad. Para esto tomamos el logaritmo natural y derivamos parcialmente por el precio relativo.

$$\ln\left(\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}\right) = \ln(1+r) - \ln(1+\rho)$$
$$\frac{\partial \ln(u'(c_1)/u'(c_2))}{\partial \ln(1+r)} = 1$$

Vemos que un aumento de un $1\,\%$ en el precio relativo del consumo entre períodos lleva a un ajuste de $1\,\%$ en los consumos entre los períodos. Ahora veremos un caso en donde esto no necesariamente es así, hasta ahora no hemos considerado que las personas son adversas al riesgo. Este factor es ampliamente incluido en diversos modelos estructurales.

Un caso especial y muy utilizado para describir el consumo de agentes en la economía es el uso de funciones de utilidad que incluyan aversión al riesgo. Las funciones de aversión relativa al riesgo constante (CRRA) incluyen el factor aversión al riesgo como una variable σ que tendrá un efecto sobre la magnitud en que el agente se ajusta en respuesta a las variables exógenas, como puede ser la tasa de interés.

Un función de utilidad CRRA se puede describir como la expresión 2.9.

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} & \text{si} \quad \sigma > 0, \sigma \neq 1 \\ \\ \ln(c) & \text{si} \quad \sigma = 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

De la cual si resolvemos llegaremos a una ecuación de Euler del consumo de la ecuación 2.10). De aquí podemos definir la **elasticidad intertemporal de sustitución** como el cambio porcentual en la relación marginal de consumo

Elasticidad intertemporal de sustitución: Magnitud en la que los individuos ajustan su consumo a lo largo del tiempo en respuesta a cambios en las tasas de

1 y 2 para un cambio del 1 % en el precio relativo del consumo en 1 (tasa de interés).

$$\left(\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}\right)^{\sigma} = \frac{1+r}{1+\rho} \tag{2.10}$$

La elasticidad intertemporal de sustitución describe la magnitud en que el consumo presente y futuro se ajustan ante un cambio en las condiciones (tasa de interés e impaciencia).

$$\text{EIS} = -\frac{\partial \ln(u'(c_1)/u'(c_2))}{\partial \ln(1+r)} = \frac{1}{\sigma} \tag{2.11}$$

Mientras mayor sea la aversión al riesgo (σ) el consumidor responderá en menor medida a cambios en estas variables. Es decir, un aumento de 1 % en el precio relativo del consumo presente en relación al consumo futuro tendrá un efecto $1/\sigma$ en la relación de consumo futuro y consumo presente.

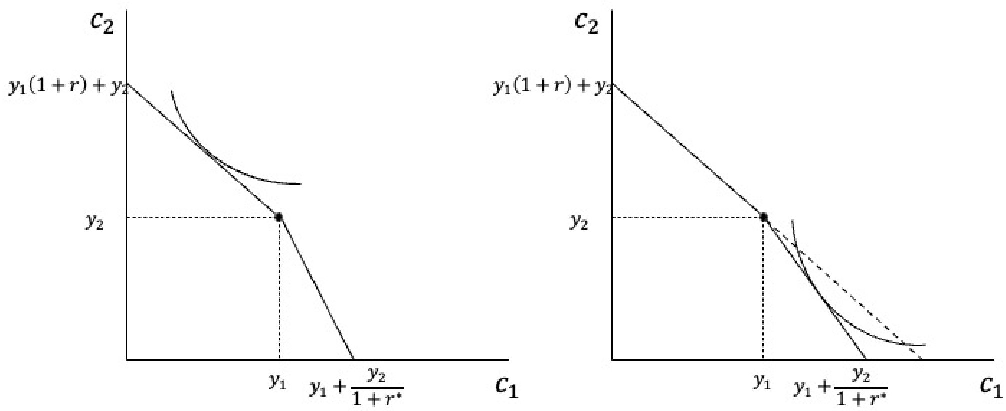
2.4. Restricciones de liquidez

Hasta ahora se ha asumido que la tasa a la que un individuo ahorra (r) y se endeuda (r^*) es la misma. Un acercamiento más realista es que la tasa que paga un deudor es mayor a la tasa que consigue alguien por ahorrar. Esto se explica por un posible no pago de la deuda, lo cual por diversos motivos que se exploraran más adelante en el apunte llevan a precios o primas más caras, en este caso a una tasa más cara.

Cuando hablamos de **restricciones de liquidez** específicamente nos referimos a restricciones al endeudamiento. Este margen puede deberse a que la tasa de endeudamiento considera un premio por riesgo cuando hay probabilidad de impago. Mercados financieros menos robustos, los cuales suelen estar presentes en países menos desarrollados suelen estar sujetos a mayores restricciones de liquidez, lo cual deriva en muchas implicancias macro y microeconómicas.[1]

[1] Efectos sobre inversión y amplificación del ciclo económico, racionamiento del crédito, ineficiencias que llevan a perpetuar la desigualdad, etc…

Figura 2.2: Restricciones de liquidez y perdida de bienestar ahorradores y deudores



Podemos ver los efectos en el bienestar de un consumidor bajo restricciones de liquidez en dos casos. Uno en el cual el consumidor prefiere ahorrar, en este caso se dice que la restricción no está activa puesto que las restricciones de liquidez solo afectan a la tasa de endeudamiento (Figura 2.2). El caso en que el individuo preferiría endeudarse, en estas condiciones la restricción está activa, el punto que maximizaba el bienestar ya no es factible y por tanto hay una perdida en cuanto a utilidad.

Es fácil ver que las restricciones tienen efectos negativos (o nulos) en el bienestar de las personas pues reduce la cantidad de opciones factibles en las que maximizar utilidad.

Ejercicios

Optimización intertemporal con incertidumbre

Suponga un individuo que vive con seguridad dos periodos, pero con una probabilidad p vivirá un tercer periodo. El individuo descubre al final del primer periodo (después de haber consumido en dicho periodo, pero antes de consumir en el segundo) si vivirá uno o dos periodos más.

Por temas de simplicidad, asuma que $r = 0$, $\rho = 0$ y que sus preferencias se encuentran descritas por una función de utilidad logarítmica y que solo recibe ingresos y_1 en el primer periodo.

a. Plantee el problema de optimización intertemporal al que se enfrenta el individuo, explicando por qué toma esta forma.

b. ¿Cuál será el patrón de consumo en cada periodo para cada uno de los escenarios?
Hint: Resuelva a través del método de los multiplicadores de Lagrange.

c. Explique con palabras cómo el individuo realiza dicho proceso de optimización y su resultado.

d. ¿Qué ocurre con el consumo en el primer periodo cuando aumenta p? ¿Cuál de las fuerzas que componen la ecuación de Euler está presente en este caso? Explique matemática e intuitivamente.
Hint: Considere la relación que tiene el individuo con el riesgo.

Stuart y el consumo intertemporal de papayas

Suponga que Stuart planifica su consumo en dos periodos. Stuart tiene preferencias muy estrictas, tales que le gustaría consumir durante el primer periodo el triple de lo que consumirá en el segundo. Además, él sabe que los ingresos derivados de sus trabajos como minion durante el primer y segundo periodo serán \$500 y \$600, respectivamente. Asimismo, considere que Stuart posee acceso financiero a una tasa de captación igual a la de colocación de 5 %.

a. En base a lo anterior, formule la restricción presupuestaria a la que está sujeto Stuart.

b. ¿Cuál será la demanda de consumo óptimo de Stuart para cada periodo?

c. ¿Es Stuart acreedor o deudor? ¿Por qué?

d. Suponga que el banco decide cambiar la tasa de interés a 1 %. ¿Cómo cambia la situación de Stuart? ¿Será acreedor o deudor? Explique qué ocurre con los nuevos valores de la restricción presupuestaria (pendiente y coeficiente de posición).

   Luego de mucho analizar la situación, Stuart decide abandonar la colonia e irse a vivir solo a una montaña, ya que hace un año el doctor le diagnosticó cáncer, no quedándole más de dos periodos de vida. De este modo, Stuart se convierte en un minion ermitaño autárquico que, tristemente, vivirá solo el presente y el periodo siguiente (dos periodos). Su única fuente de ingresos es una plantación de papayas, de la cual cosecha 100 de estas exquisitas frutas al principio de cada periodo. Además, se sabe que las papayas se echan a perder a una tasa de 10 % por periodo.

e. Dibuje la restricción presupuestaria intertemporal de Stuart. Si considera que su función de utilidad es:

$$u(c_1, c_2) = c_1 + c_2$$

f. Ahora bien, si consideramos que la función de utilidad para Stuart será la siguiente:

$$u(c_1, c_2) = 8c_1 + 10c_2$$

   ¿Cuánto consume Stuart en cada periodo?

   Ahora suponga que Stuart se curó milagrosamente de su cáncer y vuelve a la colonia. Ahora vive dos periodos más y sus preferencias son de la siguiente forma:

$$u(c_1, c_2) = c_1^{0,3} c_2^{0,2}$$

Además, recibe ingresos en el periodo 1 de \$1000 y en el periodo 2 de \$200. Por último, la tasa de interés que le ofrece el banco es de 10 %.

g. Plantee las restricciones a las cuales está sujeto Stuart en cada periodo y consolídelas en una única restricción intertemporal.

h. Calcule los consumos óptimos de cada periodo.

i. Calcule el ahorro. ¿Stuart es acreedor o deudor?

j. ¿Por qué el Estado fuerza a los individuos a ahorrar parte de su ingreso presente, independientemente de sus preferencias de consumo intertemporal?

Referencias

CORE Team. (2017). *The Economy: Economics for a Changing World*. Oxford University Press.

De Gregorio, J. (2007). Macroeconomía. *Teoría y políticas*.

Varian, H. R. (2014). *Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach*. WW Norton & Company.

CAPÍTULO 3

EL PROBLEMA DE LA COOPERACIÓN Y LA COORDINACIÓN

La teoría de juegos tiene como objetivo el estudiar los comportamientos estratégicos en la interacción de distintos agentes. Las interacciones sugieren que las decisiones de un otro tendrán efecto en los posibles *outcomes* que uno como jugador pueda obtener, de aquí surge el factor estratégico. El modelar estas interacciones nos permite identificar, por ejemplo, los factores que podrían llevar a una mayor probabilidad de colusión en un mercado imperfecto. Es un punto de partida para entender herramientas anticolusivas como la delación compensada.

Esta rama es fuertemente matemática aunque este texto no tiene el objetivo de presentar las definiciones de manera matemáticamente formal. Trataremos los juegos simultáneos de un turno, juegos secuenciales e iterados, entre otros. Luego aplicaremos esto a los casos de competencia imperfecta, donde las firmas en un mercado tendrán que elegir racionalmente su mejor estrategia contra las demás para maximizar sus beneficios.

Juego en forma normal: Juego en donde cada jugador elige simultáneamente una estrategia resultando en un pago dependiendo de la combinación de estrategias.

De todas las formas de juegos que veremos identificaremos tres factores comunes que son necesarios para tener un **juego en forma normal**: jugadores, estrategias y pagos. Los jugadores son quienes toman decisiones de manera estratégica para maximizar el pago posible que obtengan al final de un juego sujeto a lo que harán los demás.

3.1. Juegos en forma normal

En juegos simultáneos los jugadores toman decisiones al mismo tiempo, estas decisiones interactúan resultando en pagos (juegos normales). El pago a cada persona refleja un nivel de utilidad, por lo que cada agente buscará llegar a un resultado del juego (la combinación de estrategias) que maximice su pago.

Matriz de pago: La matriz de pago es la representación de los juegos normales.

Para dos agentes A y B cada uno toma la decisión X o Y, la combinación de decisiones llevará a cierto nivel de pagos. Este escenario puede ser representado por una **matriz de pago** en el cuadro 3.1.

Cuadro 3.1: Matriz de pagos

		B	
		X	Y
A	X	(a, b)	(c, d)
	Y	(e, f)	(g, h)

La tabla se lee como: si A toma la estrategia X y B toma la decisión Y entonces los pagos correspondientes son (c, d), donde c es el pago para A y d el pago para B. De la misma manera si A elije Y y B decide Y la matriz de pagos será (g, h).

La matriz muestra el componente estratégico mencionado en un inicio. Los pagos posibles para A directamente dependen de las decisiones que tome B. Para poder decidir de manera estratégica los jugadores miran al futuro.

Por ejemplo, si A sabe que B elige X entonces A tomará la estrategia que maximice sus pagos sujeto a la decisión de B: la decisión de A se reduce entre elegir la estrategia que le de a o e en pagos. Específicamente A está decidiendo con respecto a los pagos en negrita en el cuadro 3.2.

Cuadro 3.2: Matriz de pagos con B decidiendo X

		B	
		X	Y
A	X	(**a**,**b**)	(c, d)
	Y	(**e**,**f**)	(g, h)

Algo de notación.
El total de jugadores se puede denotar como n, por lo que cada jugador puede ser indexado con un $i = 1, \ldots, n$. Las estrategias de cada jugador se denotan s_i, el conjunto de estrategias entonces se escribe $S = s_1, \ldots, s_n$. Los pagos de cada jugador se pueden denotar como u_i (también se utiliza π_i), y el conjunto de pagos del juego será $U = u_1, \ldots, u_n$.

Con estos elementos podemos denotar el juego como $J = \{S; U\}$.

Lo primero que veremos será juegos normales en estrategias puras. **Estrategias puras** refiere a que los jugadores al decidir una estrategia toman con probabilidad 100 % esa estrategia. Veremos luego, que jugadores pueden asignar probabilidades a las estrategias que pueden tomar, lo cual es útil para resolver ciertas matrices de pago que veremos más adelante.

Estrategias puras: Asignar con probabilidad 100 % ejecutar una estrategia.

3.1.1. El Dilema del Prisionero

El dilema del prisionero describe la situación en que dos criminales sospechosos son detenidos y separados para un proceso de interrogación. Si uno de los dos delata al otro y su cómplice no, este último tendrá pena de cárcel y el delator quedará libre. En caso de que los dos se delaten entre sí, ambos son condenados a años de cárcel. Por ultimo si ninguna se delata entre sí, quedan libres o cumplen penas menores. La situación se ve reflejada en la matriz de pago del cuadro 3.3.

Cuadro 3.3: El dilema del prisionero

		Prisionero B	
		Cooperar	Delatar
Prisionero A	Cooperar	$(-2, -2)$	$(-10, -1)$
	Delatar	$(-1, -10)$	$(-6, -6)$

Los jugadores deciden su estrategia óptima mirando hacia el futuro tratando de predecir la decisión del otro. La respuesta óptima de un jugador siempre estará sujeta a la decisión que tendrán los demás jugadores.

Si el prisionero A predice que B lo delatará su respuesta óptima sería delatarlo también, dado que es la opción que minimiza sus años de cárcel. En caso que B coopere la respuesta óptima de A sería delatar otra vez, dado que sigue siendo la opción que minimiza sus años de cárcel. Notemos que A sigue la estrategia delatar independiente de la decisión de B, a esto se le llama una **estrategia dominante**. Los jugadores racionales siempre tomarán las estrategias dominantes y no las dominadas puesto que así aseguran un mayor pago independiente de lo que hagan los otros.

Estrategia Dominante: Estrategia tal que independiente de la estrategia de los demás sigue siendo la que maximiza sus posibles pagos.

La matriz de pago es simétrica para ambos jugadores entonces llegamos a que B sigue el mismo razonamiento por lo que delatar será también su estrategia dominante.

Dado que ambos tienen un estrategia dominante por delatar el resultado del juego será (Delatar, Delatar), resultando en un pago de $(-6, -6)$. Este punto se le conoce como **equilibrio de Nash**, es un punto tal que dada las decisiones tomadas por los demás jugadores ningún jugador tendrá incentivo a cambiar de decisión. Es decir, las estrategias tomadas son las mejores que pudieron haber tomado sujeto a lo que hará el otro. En este caso sería que, dado que B delató, A no tiene incentivos a cambiar su decisión a cooperar, lo mismo se puede decir de B.

Equilibrio de Nash: Conjunto de estrategias tal que son la mejor respuesta de los jugadores ante las acciones del otro

Hasta ahora hemos descrito un juego en forma normal, jugadores, estrategias y pagos. Se resolvió este juego considerando las estrategias dominantes para encontrar el equilibrio de Nash. El siguiente paso es comentar sobre distintos aspectos del resultado bajo el criterio de Pareto.

El resultado fue (Delatar, Delatar) sin embargo otra posibilidad es que los jugadores hayan cooperado (Cooperar, Cooperar), en cuyo caso ambos jugadores están mejor. Esto bajo el criterio de Pareto se le llamaría una mejoría de pareto: si es que ambos cooperaran todos estarían mejor. Bajo el criterio de Pareto podemos decir que el equilibrio encontrado en este juego es sub-óptimo en términos de Pareto dado que hay un resultado posible mejor para ambos.

Esta observación es crucial pues es aplicable a un diversas situaciones económicas y políticas típicas, donde la cooperación nos llevaría a mejores resultados pero dado que todos los agentes desconfían y actúan sin organización llegamos a un equilibrio sub óptimo. Por ejemplo, dos países con armas nucleares pueden acordar desarmarse para aumentar la seguridad mutua. Si ambos cumplen el acuerdo (cooperan), ambos estarán seguros y reducirán costos militares. Si uno cumple y el otro no (no coopera), el que deserta obtiene ventaja militar. Si ambos desertan y no desarman, continúan con altos costos y riesgos de conflicto, el equilibrio de Nash en este caso pues hay estrategia dominante por no desarmarse.

La moraleja económica en este caso es que dejar que los agentes decidan bajo sus propios intereses no siempre lleva al mejor resultado posible, la intervención en estos casos puede ser justificable. Ahora veremos otros juegos que describan otras situaciones.

3.1.2. Otros Juegos en forma normal

Mano Invisible

La matriz que representa este juego se encuentra en el cuadro 3.4. La mano invisible describe cómo los individuos que buscan su propio beneficio personal, sin intención de hacerlo contribuyen al bienestar general de la sociedad. Esto se puede interpretar con la idea de que si todos maximizan su propia utilidad/beneficios en un mercado eficiente se llega a un resultado deseable

(Pareto-óptimo). En este juego el jugador A tendrá una estrategia dominante opuesta a la estrategia dominante del jugador B.

Cuadro 3.4: La mano invisible

		Agente B	
		X	Y
Agente A	X	$(0, 10)$	$(1, 1)$
	Y	$(11, 11)$	$(10, 0)$

Siguiendo las ideas de Adam Smith,

> "Los individuos no tratan de promover el interés público ni saben cuánto lo están promoviendo. Solo buscan su propia seguridad, su propia ganancia, para la cual se ven llevados por una mano invisible a promover un fin que no estaba en sus intenciones. Buscando su interés personal suelen promover el de la sociedad más eficazmente que cuando pretenden promoverlo realmente." (Samuelson & NordHause, 1991)

Guerra de los sexos

Este juego se puede representar con la matriz del cuadro 3.5. En esta ocasión tenemos una pareja que se encuentra incomunicada en medio de un festival de música. Ambos tienen gustos diferentes, al hombre le gusta el Reggae mientras que a la mujer le gusta el EDM. Dado que están separados e incomunicados quieren encontrarse, pero también quieren ir al concierto que sea la música de su gusto. Es por eso que reciben utilidad tanto de encontrarse como de ir al concierto que les gusta, maximizan su utilidad si es que van al concierto de su preferencia y encuentran a su pareja ahí.

Cuadro 3.5: Guerra de los sexos

		Mujer	
		Reggae	EDM
Hombre	Reggae	$(2, 1)$	$(0, 0)$
	EDM	$(0, 0)$	$(1, 2)$

En este juego cada uno tiene estrategia dominante por ir al concierto de su banda preferida independiente de lo que haga el otro. Por tanto hay dos equilibrios de Nash, para resolver este juego habría que incluir estrategias mixtas lo cual veremos próximamente.

La caza del venado

La matriz de este juego se encuentra en el cuadro 3.6. Dos individuos van a cazar ya sea conejos o venados y deben escoger su presa sin conocer la elección del otro cazador ex-ante. Para cazar el venado (un premio mayor) requieren de la ayuda del otro (que los dos vayan a cazar venado), mientras que un conejo puede ser cazado sin ayuda del otro por lo que es una presa asegurada. Si cooperan cazando al venado podrán ambos obtener más beneficios y estar mejor en términos de Pareto comparado al caso donde ambos van a por conejos.

Cuadro 3.6: La caza del venado

		Cazador *B*	
		Venado	Conejo
Cazador *A*	Venado	$(4,4)$	$(0,3)$
	Conejo	$(3,0)$	$(3,3)$

En este caso no existen estrategias dominantes, lo que lleva a la existencia de dos equilibrios de Nash (en estrategias puras), cazar al venado juntos domina paretianamente a cazar conejos juntos. Lo anterior representa un problema de cooperación social y una dicotomía entre seguridad y cooperación.

La existencia de dos equilibrios de Nash en estrategias puras.
Se suele confundir en muchas ocasiones que los equilibrios de Nash son necesariamente, él, resultado de un juego. Esto implicaría que en el juego de La caza del venado hayan dos resultados no compatibles al mismo tiempo.

El equilibrio de Nash refiere a las asignaciones tales que ninguno de los individuos tiene incentivo a cambiar su respuesta sujeto a lo que hizo el otro. Es decir que todos eligieron su mejor respuesta frente a la estrategia del otro.

Esto no implica que un equilibrio de Nash se pueda interpretar como un resultado, es decir, una predicción de lo que ocurriría ante una situación semejante. Podemos tener más equilibrios de Nash, o incluso no tenerlos (Como se ve en la matriz de pago del cuadro 3.8).

Chicken

La matriz de este juego se encuentra en el cuadro 3.7. Imagine que dos conductores están yendo hacia un puente de un solo carril, pero desde lados opuestos. Cada uno tiene que decidir si se aparta del camino o sigue adelante. El primero que se desvía le cede el paso al otro, por lo que es una gallina. Un segundo escenario en donde los dos doblan ambos quedando como gallinas y por último el caso en que chocan (muy negativo para los dos).

Ambos corredores quieren hacer lo opuesto a lo que haga el otro, los equilibrios de Nash serían entonces los que uno de ellos dobla y el otro sigue. Se le suele considerar un juego de anti-coordinación, a diferencia de juegos

Cuadro 3.7: Chicken

		Corredor B	
		Ceder (gallina)	Seguir (valiente)
Corredor A	Ceder (gallina)	$(2,2)$	$(1,3)$
	Seguir (valiente)	$(3,1)$	$(0,0)$

donde conviene cooperar (Caza del venado, Dilema del prisionero) aquí conviene hacer lo opuesto al otro jugador.

Cachipún

En Cachipún (Piedra-Papel-Tijeras) (cuadro 3.8) no hay equilibrios de Nash, de ahí su uso para dejar al azar la decisión de algo. Ante cualquier resultado posible siempre habrá un incentivo de alguno de los jugadores para cambiar su decisión.

Cuadro 3.8: Cachipún

		A		
		Piedra	Papel	Tijera
B	Piedra	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
	Papel	$(1,-1)$	$(0,0)$	$(-1,1)$
	Tijera	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(0,0)$

3.1.3. Estrategias Mixtas

Hasta ahora hemos visto algunos juegos que tienen más de un equilibrio de Nash, por ejemplo en *Chicken* ambos jugadores buscan hacer lo opuesto al otro. Por lo que el salir perdiendo o ganando se reduce a si el jugador logra sorprender o no al otro. La incertidumbre es un elemento fundamental de este tipo de interacciones, lo cual no se ve modelado mediante estrategias puras.[1]

Lo que vamos a hacer será cambiar las reglas del juego: Anteriormente teníamos estrategias puras, los jugadores tenían que decidir la acción que tomar, ahora les pediremos a los jugadores que elijan un vector de probabilidades que le deben de asignar a cada decisión. Esta re estructuración del juego nos permitirá tener una idea más clara del resultado en juegos donde habían más de un equilibrio de Nash. Las estrategias mixtas entonces consisten en asignar una probabilidad entre 0 y 1 a cada una de las posibles estrategias disponibles con tal de que todas sumen 1. Tomemos el juego sencillo y asignémosle una probabilidad a cada estrategia. En los penales del Fútbol la idea es predecir que lado elegirá el contrario para patear al otro lado o atajar a ese mismo lado. Bajo este contexto podemos definir la siguiente matriz de pago.

		Arquero	
		Izquierda	Derecha
Jugador	Izquierda	$(0,0)$	$(1,-1)$
	Derecha	$(1,-1)$	$(0,0)$

[1]No se definen estos juegos formalmente en cuanto a la matemática. En caso de que quiera estudiarlos con definiciones matemáticas más exactas en el contexto en el que aplicaremos después (competencia imperfecta) vea Fischer (2024).

Por lo tanto cada jugador asignará una probabilida p o q a tirar a la derecha y por descarte (la suma de las probabilidades deben ser uno) la otra estrategia se tomará con una probabilidad $1 - p$ y $1 - q$.

Estrategias	Probabilidad	Pago Jugador	Pago Arquero
D,D	$p \cdot q$	0	0
D,I	$p \cdot (1 - q)$	1	-1
I,D	$(1 - p) \cdot q$	1	-1
I,I	$(1 - p) \cdot (1 - q)$	0	0

Por lo tanto la esperanza de pagos (utilidad) en este caso será para cada uno,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U^J) =& pq \cdot 0 + p(1 - q) \cdot 1 + (1 - p)q \cdot 1 + (1 - p)(1 - q) \cdot 0 + p \\ =& p - qp + q - pq = p(1 - 2q) + q\end{aligned}$$

El caso del arquero tendrá la siguiente utilidad esperada,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U^A) =& pq \cdot 0 + p(1 - q) \cdot (-1) + (1 - p)q \cdot (-1) + (1 - p)(1 - q) \cdot 0 \\ =& - p + pq - q + pq = q(2p - 1) - p\end{aligned}$$

Lo que necesitamos para encontrar el equilibrio de Nash es entender la función de reacción óptima, en el caso del jugador que patea este debe decidir p en función de q. En la utilidad esperada del jugador la parte importante de analizar será el término $(1 - 2q)$ lo demás lo podemos tomar como constante. En específico nos preguntaremos que hacer en caso de que $1 - 2q$ sea mayor, igual o menor a cero.

- En caso de que $q > 1/2$ entonces el arquero tiene una mayor probabilidad de tirarse a la derecha, por lo que la función de reacción óptima indicaría que habría que patear a la izquierda. Fíjese que si $q > 1/2$ entonces $1 - 2q < 0$ por lo que para maximizar la utilidad esperada habría que asignar $p = 0$. Básicamente, si es más probable que el arquero se tire a la izquierdo entonces asigno $100\,\%$ de probabilidad de patear hacia la izquierda.

- El caso contrario en que el arquero tenga una mayor probabilidad de tirarse a la izquierda $q < 1/2$ el jugador maximizará su utilidad esperada pateando a la derecha. Para tal q el término $1 - 2q > 0$ por lo que conviene aumentar la probabilidad de patear a la derecha al máximo.
- Por último en caso de que $q = 1/2$ no hay una probabilidad óptima certera entonces se toma un p cualquiera entre 0 y 1.[2]

La incertidumbre no es únicamente algo con lo que lidiar sino que puede ser instrumentalizada: las auditorías aleatorias con tal de fiscalizar tienen el objetivo de disuadir comportamientos fuera de regla. En este sentido el jugador fiscalizador no elige una pura estrategia como podría ser fiscalizar siempre, lo cual sería altamente costoso. En este caso conviene asignar probabilidades a cada estrategia (fiscalizar, no fiscalizar), con tal de disuadir comportamientos fuera de regla mientras se minimizan costos.

3.2. Juegos secuenciales

En muchos casos las interacciones entre los agentes no son simultáneas, por ejemplo en el ajedrez en cada turno un jugador hace un movimiento. Para describir este tipo de interacciones están los juegos secuenciales, los cuales son una forma extendida de los juegos simultáneos. Bajo juegos simultáneos las estrategias eran acciones individuales; confesar, delatar, cooperar, traicionar, etc. En cambio bajo juegos secuenciales las estrategias son un grupo de acciones en determinado orden.

Para representar estas interacciones no siempre servirán las matrices de la representación tipo normal de los juegos, esto ya que puede que no encontremos el equilibrio de Nash certero,[3] sino que tenemos que representar de **forma extensiva** un esquema mediante ramas que se abren ante cada interacción, llamados **árboles de decisión** (véase figura 3.1).

Juego en forma extensiva: Representación de un juego a lo largo del tiempo, donde hay más de un turno y las decisiones se toman en forma secuencial.

Árboles de decisión: Representación gráfica para juegos de forma extensiva.

[2] Técnicamente esta respuesta no es una función pues asigna más de resultado a un solo punto del dominio. Para efectos del curso esto no genera ningún problema.

[3] Esto debido a que es importante discernir de las amenazas creíbles de las no creíbles. Esto se verá a continuación en este mismo capítulo.

Es más fácil entender con un ejemplo económico. En un mercado monopólico sin barreras de entrada es bastante probable que empresa amenace con entrar al mercado y quedarse con parte de las rentas. Esta interacción se puede modelar secuencialmente, en un primer período la empresa entrante decide si efectivamente entrar o no entrar, en un segundo período el monopolio tiene dos opciones: (i) adaptarse a la entrada de su competidor y competir como un duopolio o (ii) dado que el monopolio seguramente tenga ventaja en costos[4] podría bajar los precios a un punto en que el entrante quede en pérdidas.

En caso de no entrar el monopolio se sigue quedando con los beneficios monopólicos (10) y la entrante queda con beneficio cero. En caso de que haya entrada y el monopolio se adapte la entrante consigue 2 y el monopolio 5, en caso de aplicar precios predatorios el monopolista gana 0 y la entrante queda en pérdidas -5. El árbol de secuencias que describe esta situación es la figura 3.1.

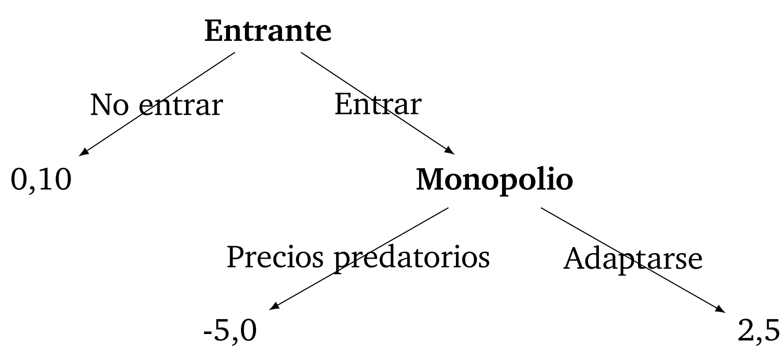


Figura 3.1: Juego en forma extensiva de entrada

Estos árboles nos permiten encontrar el equilibrio de Nash de manera bastante simple. Tenemos que resolver del futuro hacia el presente (por inducción), en el caso de la figura 3.1 de abajo hacía arriba. Por lo tanto primero resolvemos que decisión tomaría el monopolio en este *nodo*. En caso de competir con precios predatorios gana 0, mientras que adaptándose gana 5: por lo tanto el monopolio decidiría por adaptarse. Ahora resolviendo el nodo de arriba tenemos que desde el punto de vista de la entrante decidir, si no

[4]Esto podría ser por ser más eficiente (menos costo marginal) o por economías de escala naturales del mercado.

entra queda 0, si entra el monopolio se adaptaría por lo que ganaría 2. Dado que si entra gana 2 y si no entra gana 0, entonces se decide por entrar. El resultado sería la secuencia de decisiones moradas en la figura 3.2.

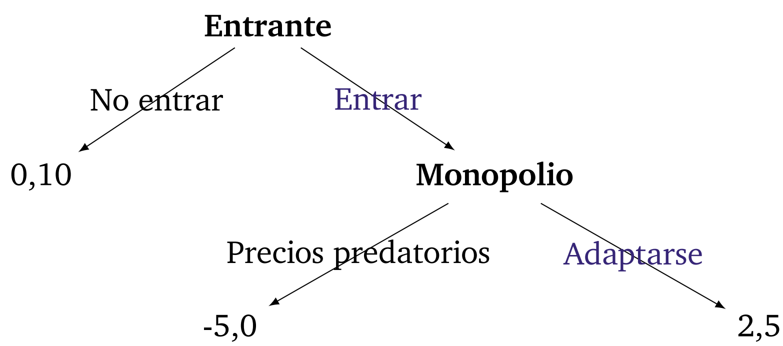


Figura 3.2: Juego en forma extendida resuelto en cada nodo, respuestas óptimas en morado

Ajedrez, un juego secuencial
Si resolvemos por inducción es debido a que los jugadores miran el futuro buscando adelantarse a la respuesta del otro jugador.

Así es como piensan los ajedrecistas, al evaluar si hacer o no un movimiento buscan las posibles respuestas que haría el contrincante en cada caso. Podrían descartar lo que parecería un buen movimiento adelantando una buena respuesta defensiva del contrincante en el siguiente turno. También pueden hacer movimientos que parecieran que no tienen efecto alguno, pero en verdad son una defensa ante a una inminente amenaza en el turno siguiente (movimientos profilácticos).

La cantidad movimientos pueda adelantar un ajedrecista a las posibles respuestas del contrincante es buen proxy de qué tan bueno es ese jugador.

3.2.1. Equilibrios de Nash y Equilibrios perfectos en subjuegos

Dado este árbol de decisiones (figura 3.1) podríamos predecir que la entrante efectivamente entraría y el monopolio se adaptaría a la competencia. Acabamos de encontrar el equilibrio de Nash del juego, cuando resolvemos por inducción encontramos específicamente un **equilibrio perfecto en subjuegos** (EPS). Si expresamos el juego de forma normal tal como en la figura 3.3 podemos encontrar el equilibrio de Nash (EN), monopolio tiene una estrategia dominante por Adaptarse, ante esto la entrante le conviene Entrar, por tanto el EN del juego en forma normal es (Entrar, Adaptarse). En este caso el equilibrio perfecto en subjuegos que encontramos mediante la forma extendida es el mismo que el equilibrio de Nash encontrado mediante la forma normal. *Esto no siempre ocurre,* daremos un ejemplo.

Equilibrio Perfecto en Subjuegos: Refinamiento del EN en juegos en forma extensiva, asegura que las estrategias de los jugadores sean óptimas en cada posible punto (subjuego) del juego, no solo en el juego completo.

Figura 3.3: Dominio sobre mercado

		Monopolio	
		Precios Predatorios	Adaptarse
Entrante	No entrar	$(0, 10)$	$(0, 10)$
	Entrar	$(-5, 0)$	$(2, 5)$

Dominio sobre Berlín

Considere un juego secuencial de forma extendida como se muestra en la figura 3.4. Al resolver por inducción encontramos un equilibrio perfecto en subjuegos, en este juego Estados Unidos decide no ceder el dominio por sobre Berlín pues sabe que la amenaza de conflicto bélico directo no es creíble.

Al representar este juego de forma normal (figura 3.2.1) sin embargo encontramos otro equilibrio. Al exponer el juego de forma normal encontramos dos equilibrios de Nash en vez del único equilibrio perfecto en subjuegos que se encontró con la forma extendida. Esta diferencia se debe a que el juego en forma normal considera un equilibrio la decisión (Acepta, Guerra), la cual no tiene sentido dada la amenaza de conflicto bélico. Por un

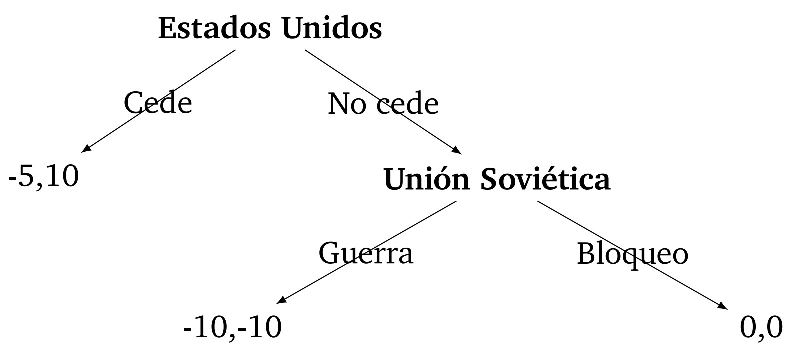


Figura 3.4: Solución del Juego Secuencial de Berlín

lado uno podría notar intuitivamente que hacer guerra cuando se cede el dominio no tiene sentido secuencial, esto es cierto, aun así lo relevante aquí es el concepto de **amenazas creíbles**. Volviendo al caso del dominio sobre

Amenazas creíbles: Estrategia que un jugador puede utilizar para influir en las decisiones de otro jugador, y que es racional llevar a cabo si llega el momento de ejecutarla.

		Unión Soviética	
		Guerra	Bloqueo
Estados Unidos	Acepta	$(\underline{-5}, \underline{10})$	$(-5, 10)$
	No acepta	$(-10, -10)$	$(\underline{0}, \underline{0})$

Cuadro 3.9: Dominio sobre Berlín

el mercado, la entrada podría haber sido amenazada por precios predatorios que la firma incumbente fijaría para sacarla del mercado. En este caso la amenaza de precios predatorios no era creíble, de la misma manera que la amenaza de conflicto bélico tampoco lo fue. Podemos resumir la relación entre EPS y EN en el siguiente cuadro.

Equilibrios de Nash y Equilibrios Perfectos en Subjuegos
Todos los EPS son EN, pero no todos los EN son EPS. *No todos los equilibrios de Nash son compatibles con las* ***amenazas creíbles*** *de un juego secuencial.*

Juegos iterados

Todavía queda por ver los juegos iterados, juegos de varios períodos que son una forma especifica de los juegos en forma extendida. Esto conviene estudiarlo cuando se hable de competencia imperfecta y colusión.

Con este tipo de juegos podremos encontrar bajo ciertas condiciones equilibrios cooperativos en casos como el dilema del prisionero donde su forma normal lleva inevitablemente a un equilibrio no cooperativo sub-óptimo de Pareto.

Ejercicios

Ainhoa y Bernat

Suponga una interacción estratégica entre dos jugadores de utilidad lineal que se describe con la siguiente matriz de pagos:

	Equeer	Eskuineko
Ireki	$(0, 0)$	$(0, 9)$
Behera	$(2, 0)$	$(-1, 9)$

a. Explique en qué consiste y cómo se define un equilibrio de Nash.

b. Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras.

c. Explique en qué consiste una estrategia mixta.

d. Encuentre las funciones de reacción de Ainhoa y Bernat en estrategias mixtas y calcule los equilibrios de Nash de estrategias mixtas.

e. Explique gráficamente este equilibrio estratégico usando las funciones de reacción.

Juego Asimétrico

Considere un juego asimétrico entre agentes J_i con $i = 1, 2$ en donde J_1 tiene dos alternativas y J_2 tres, entregando los pagos descritos en la siguiente matriz:

	C	D	E
A	$(1, 1)$	$(3, 0)$	$(-2, 3)$
B	$(2, 2)$	$(4, -1)$	$(0, 0)$

a. Examine un posible equilibrio de estrategias puras. ¿Cuál es el equilibrio de Nash?

b. Asigne como p la probabilidad de que J_1 opte por la estrategia A. Asimismo, designe como q_1 la probabilidad con que J_2 toma C y q_2 para D. Describa los escenarios posibles y sus probabilidades de ocurrencia.

c. Obtenga las utilidades esperadas para cada jugador.

d. Considere la utilidad esperada de J_2. Obtenga el valor crítico con respecto a q_2. Explique qué conclusiones se obtienen de esto y cómo reconfigura el juego.

e. Considerando lo obtenido en (d), encuentre los valores críticos y las funciones de reacción para J_1 y J_2.

   Pista: Debe considerar la nueva forma de la matriz.

f. Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Defínalo claramente utilizando un gráfico y explique por qué corresponde al equilibrio.

3.3. Competencia imperfecta

En esta sección podremos modelar la interacción estratégica de las firmas en un mercado con competencia imperfecta gracias a la teoría de juegos. A diferencia de competencia perfecta donde las firmas son tomadoras de precios, en competencia imperfecta hay un factor estratégico que se estudiará en más detalle en lo que sigue.

Los **oligopolios**, son mercados de competencia imperfecta, son un escenario en el cual un número reducido de empresas inciden en cierta medida en el precio de mercado. Es por este control parcial sobre el precio que se le podría considerar un entremedio entre el poder de mercado de un monopolio y de una firma en competencia perfecta.[5]

Oligopolio: Mercado con un número reducido de firmas las cuales pueden incidir en el precio.

Debido a que todas las firmas afectan el precio habrá **interdependencia monopolística**, lo cual sugiere que hay un factor estratégico en las competencias entre firmas. Por ejemplo, si una firma fija cierto precio, su rival puede responder con un precio menor para acaparar una mayor demanda. También, si se cree que la firma rival va a producir mucho del bien, a las demás firmas les conviene producir menos para una sobre oferta. En resumen, las decisiones de una firma afectan a su competencia y viceversa, ante esto las firmas formarán creencias de lo que hará la competencia para tomar sus decisiones de manera óptima.

Interdependencia monopolística: De manera más general llamado interdependencia estratégica. Las empresas toman sus decisiones formando creencias de lo que hará su competencia.

La estrategia desde la teoría de juegos

La manera en que entendemos estas interacciones propias de la **organización industrial** es mediante la teoría de juegos. Tal como se mencionaba antes, en la teoría de juegos los jugadores forman creencias de las estrategias del otro con tal de reaccionar de la mejor manera. A continuación plantearemos como se verían estos juegos aplicado a los distintos tipos de competencia imperfecta: por cantidades y por precios.

Organización industrial: Área de la teoría de la firma que se enfoca en la estructura e interacciones en los mercados.

[5] Esto no es tán así dado que en competencia a la Bertrand veremos que con un número mínimo de firmas (dos firmas) se puede llegar al resultado de competencia perfecta. Si bien las empresas fijan ellas sus precios, realmente la competencia es tal que el resultado es que el precio es igual al costo marginal.

Primero veremos solo juegos normales (simultáneos), es decir, los jugadores (en este caso firmas) $i \in 1, 2, \ldots, N$ serán agentes racionales que deciden su acción o combinación de acciones $a_i \in A_i$ resultando en un pago $\pi_i(a)$ para cada firma.

Las firmas elegirán a_i de manera de maximizar sus pagos, una estrategia será mejor que otra mientras el pago resultante sea mayor (dada las estrategias de los demás). Dado que los rivales $-i$ escogen una estrategia a_{-i}, la firma i tendrá una respuesta óptima a_i^* en que los pagos sean mayores, es decir,[6]

$$\pi_i(a_i^*, a_{-i}) \geq \pi_i(a_i, a_{-i}), \quad \forall a_i. \tag{3.1}$$

Función de reacción: Función que describe la mejor forma de responder ante las decisiones de un competidor.

Esto es equivalente a decir que jugando piedra papel o tijera, si mi rival elige tijera la mejor respuesta para su elección es la piedra. Podremos denotar la mejor respuesta de i en función de la estrategia de los demás como: $a_i^*(a_{-i})$. Esta **función de reacción** es tal que si todas las firmas de n a $n-1$ eligieran su mejor estrategia $a^* \equiv (a_1^*, \ldots, a_N^*)$ el n-ésimo jugador no tendrá incentivos a cambiar de estrategia, por lo que nos encontraríamos en el Equilibrio de Nash.[7]

Veremos un modelo de competencia monopólica donde las firmas fijan precios y otro modelo en donde deciden cuanto producir. Estas decisiones suelen estar presentes en el corto plazo, donde se fijan precio o niveles de producción. Sin embargo en el largo plazo las decisiones pueden incluir inversiones en I+D, o entradas a mercados nuevos. Los resultados principales para cada modelo (competencia por precios y competencia por cantidades) serán distintos.[8]

[6] Dada las características del juego y considerando que los individuos son racionales es esperable que siempre elijan la respuesta óptima a_i^*.

[7] Cabe recordar que el caso de piedra paper y tijera habría qye incluir otras consideraciones pues estas se resuelven mediante estrategias mixtas.

[8] Algo más apegado a la realidad sería pensar que las firmas en un período elijen cuanto invertir, incidiendo en cuanto podrán producir y luego compiten en precios. Por lo que sería una combinación de ambas. Por ejemplo véase Allen y Hellwig (1986) y Dixon (1992).

3.3.1. Competencia a la Bertrand

Este modelo fue planteado por el matemático **Joseph Bertrand** en 1883. Vamos a pensar en un duopolio de firmas $i \in 1, 2$ que ofrecen un producto homogéneo compitiendo precios p_i.

Joseph Bertrand (1822-1900): Matemático francés del siglo XIX. Uno de sus más grandes aportes fue el modelo que lleva su nombre. Fue uno de los críticos del principio de maximización de utilidad.

Como los productos son sustitutos perfectos, la firma que ofrezca el menor precio se llevará toda la demanda $Q_i(p_i)$, un supuesto del modelo es que las firmas pueden satisfacer toda la demanda. En caso de ofrecer un mismo precio se reparten la demanda de manera equitativa. Por último consideraremos que las firmas tendrán un costo marginal c_i cada una.

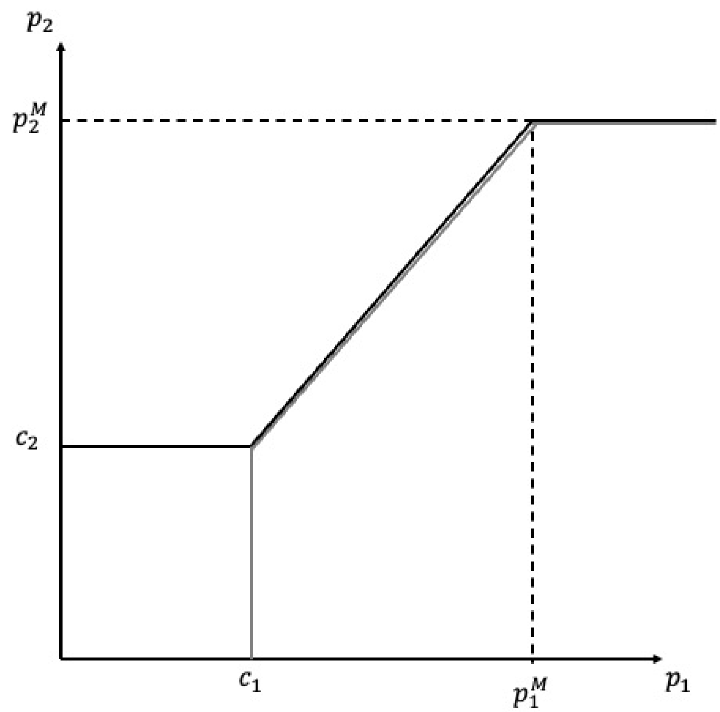
Para entender como se llega al equilibrio en este mercado primero tenemos que identificar cuales son las mejores respuestas de una firma ante acciones de la otra, es decir la función de reacción óptima $a_i^*(a_{-i})$. Pensando desde el punto de vista de la firma 1 podemos considerar 3 casos posibles y sus respectivas respuestas, buscamos definir la función de reacción $p_1^*(p_2)$.

- En caso de que la firma 2 fije un precio p_2 mayor al precio monopólico p_1^M. La mejor respuesta es fijar el precio monopólico, de esta manera maximizan beneficios mientras absorben toda la demanda.
- Si la firma 2 fija un precio menor al precio monopólico p_1^M y mayor a al costo marginal c_1. Para capturar toda la demanda conviene fijar un precio minúsculamente menor al de la competencia, lo cual se denota como $p_1 - \epsilon$ siendo ϵ un número positivo cercano al cero.
- La firma 2 fija un precio igual o menor al costo marginal c_1. Para estos casos la mejor respuesta es fijar el costo marginal.

El precio p_1 que fije la firma 1 en función de p_2 seguirá la ecuación 3.2 y representado en la figura 3.5,

$$p_1^*(p_2) = \begin{cases} p_1^M & \text{si} \quad p_2 > p_1^M \\ p_2 - \epsilon & \text{si} \quad p_1^M \geq p_2 > c_1 \\ c_1 & \text{si} \quad c_1 \geq p_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

Figura 3.5: Funciones de reacción de competencia tipo Bertrand con firmas simétricas

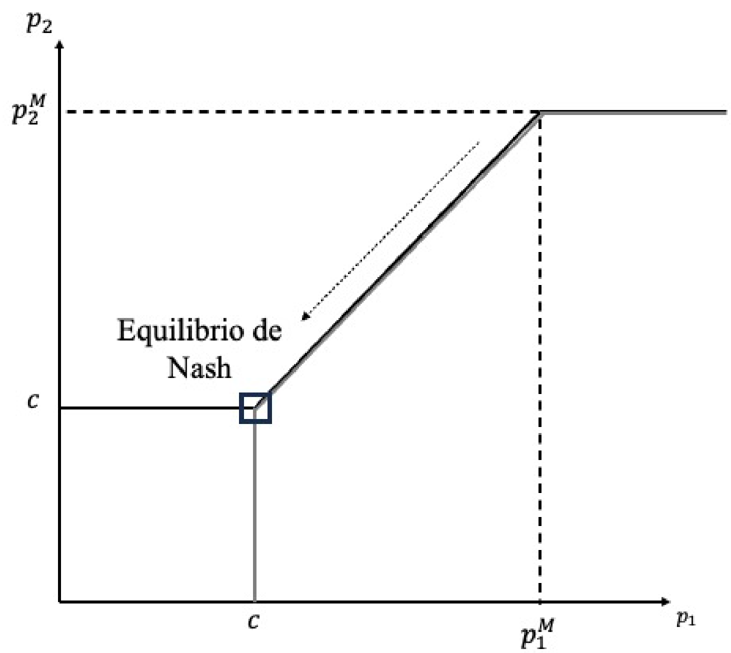


Equilibrio bajo competencia de precios. Vamos considerar dos casos relevantes de este modelo de competencia por precios, uno donde las empresas son igual de eficientes (tienen los mismos costos marginales) y otro donde una es más eficiente que la otra.

Paradoja de Bertrand: En competencia por precios a la Bertrand bajo ciertas condiciones se llega al mismo precio que en competencia perfecta bajo competencia imperfecta.

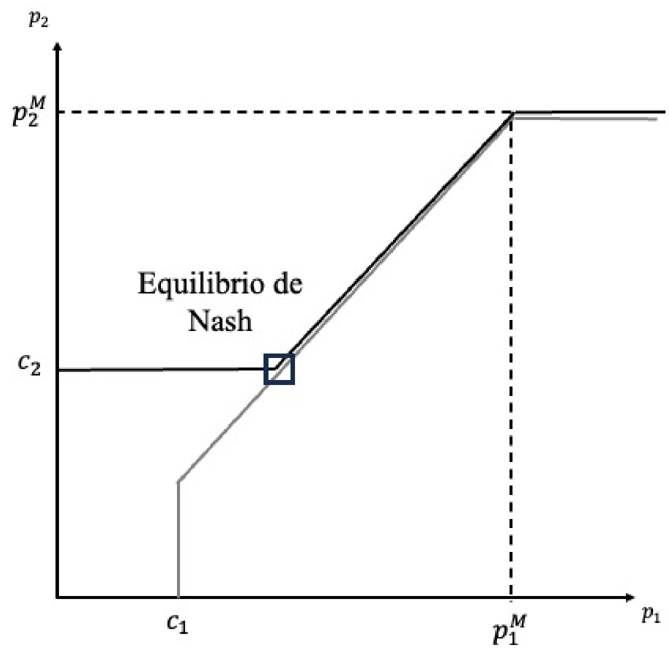
Primero tomemos el caso en que las empresas son simétricas, lo cual implica que tienen un mismo costo marginal $c = c_1 = c_2$. La mejor respuesta ante cualquier precio $p_{-i}^M \geq p_i > c$ será fijar un precio menor, ante lo cual la competencia debería responder con un precio aun menor. De esta manera el precio bajará hasta el punto en que tanto p_1 como p_2 sean iguales a c. Este caso es conocido como la **paradoja de Bertrand** pues con apenas dos firmas llegamos a los mismos precios que en competencia perfecta ($p_i = c_i$). Véase la figura 3.6.

Figura 3.6: Equilibrio de Nash en Bertrand con firmas simétricas



Segundo, el caso en que una firma sea más eficiente que la otra, tome por ejemplo que la firma 1 es más eficiente $c_1 < c_2$. Cuando una firma tiene un costo marginal menor a su rival podrá absorber toda la demanda fijando un precio ligeramente menor al costo marginal de su competencia, en este caso sería $p_1 = c_2 - \varepsilon$. Lo cuál llevaría a la firma menos eficiente a salir del mercado y la firma ganadora obtendría beneficios. Véase la figura 3.7.

Figura 3.7: Equilibrio de Nash en Bertrand con firmas asimétricas



3.3.2. Competencia a la Cournot

Otra manera de modelar la competencia entre firmas $i \in 1, 2$ es considerando que las firmas no fijan el precio, sino que este es producto de la cantidad total producida en el mercado. En este modelo cada firma produce una cantidad para poder vender, a mayor cantidad produzcan venden más pero también presionan a la baja el precio. Que las firmas decidan la producción en vez del precio aplica bien en mercados con nula diferenciación de producto tales como los commodities.[9] El matemático francés **Antoine**

[9]Por ejemplo, no importa la marca del cobre pues no hay diferenciación de producto. El mayor predictor del precio asumiendo fija la demanda será la oferta.

Antoine Cournot (1801-1877): Filósofo y matemático frances que impulso la economía marginalista. Fue de los primeros quienes empezaron a usar funciones matemáticas para describir relaciones como la oferta y la demanda

Cournot planteó un modelo de mercado de un bien homogéneo donde la única variable estratégica que manejan las firmas es el nivel de producción.

Presentaremos el modelo como un duopolio en donde cada firma produce una cantidad q_i, donde el total producido (Q) es la suma de las producciones individuales.

$$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = q_1 + q_2 + \ldots + q_N \tag{3.3}$$

Asumiremos que las firmas son simétricas (mismo costos marginal) y enfrentan una misma demanda lineal.

$$p(Q) = A - Q \tag{3.4}$$

Para resolver el modelo debemos de plantear el problema que enfrenta cada firma. Esto es, maximizar beneficios considerando lo que pueden producir y vender q_i y el beneficio marginal de cada producto $p - c$.

$$\max_{q_i} \quad \Pi_i = (p - c_i)q_i \tag{3.5}$$

Como todas las producciones de distintas empresas están contenidas en 3.5 mediante el precio,[10] al optimizar obtendremos la cantidad que debiera producir la firma para maximizar sus beneficios en función de las decisiones de su competencia. Esto es, la estrategia óptima q_i^* ante la estrategia del rival q_j. Resolvemos para la firma 1.

$$\begin{aligned} &\max_{q_1} \quad \Pi_1 = (p - c_1)q_1 = (A - q_1 - q_2)q_1 - c_1 q_1 \\ &\text{CPO:} \quad \frac{\mathrm{d}\Pi_1}{\mathrm{d}q_1} = A - 2q_1 - q_2 - c_1 = 0 \end{aligned}$$

Teniendo las condiciones de primer orden solo queda despejar para obtener la función de reacción de la firma 1 ante la estrategia de la firma 2.

$$q_1^*(q_2) = \frac{A - q_2 - c_1}{2} \tag{3.6}$$

La mejor estrategia para 1 dependerá de la producción de 2. La producción óptima q_1^* bajará en caso de que el rival produzca más $\Delta^+ q_2$, esto ya que

[10] De la manera $p = A - \sum_{i=1}^{N} q_i$.

aumentar la producción causaría que el precio caiga por una mayor oferta. Es por esto que en competencias a la Cournot la pendiente de la función de reacción será negativa.[11]

Equilibrio de competencia a la Cournot. Para llegar a un equilibrio de Nash a la Cournot cada firma internaliza la función de reacción de la otra para llegar a la cantidad estratégicamente óptima a producir. Esto es, reemplazar la función de respuesta $q_2^*(q_1)$ en $q_1^*(q_2)$ o viceversa.

Para hacerlo más fácil diremos que ambas firmas son iguales de eficientes por lo que $c_1 = c_2 = c$, con esto nos podemos adelantar y predecir que si son iguales van a producir lo mismo, por lo que denotamos $q_1 = q_2 = q$.

Ahora con estas simplificaciones reemplazamos la función de reacción de una en la otra. De manera encontraremos la producción de una de las firmas y la producción total será el doble de esta, esta producción total es la que determina el precio. Cada una produce q y el total es $Q = 2 \cdot q$.

$$q = \frac{A - q - c}{2}$$
$$q = \frac{A - c}{3} \tag{3.7}$$

Obtenemos la ecuación 3.7 la cual representa la producción individual de las dos firmas.

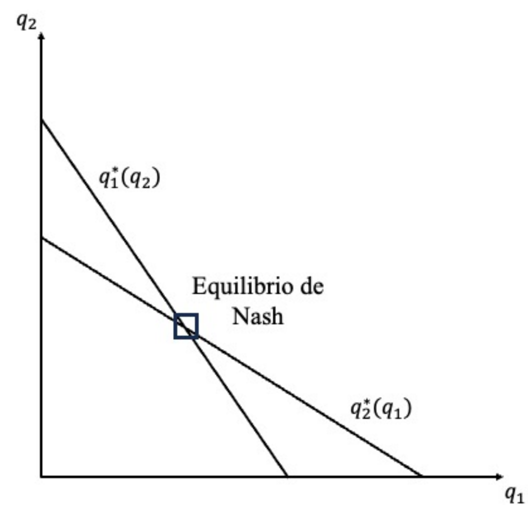
$$P = A - 2 \cdot \left(\frac{A - c}{3}\right)$$
$$P = \frac{A - 2c}{3} \tag{3.8}$$

Por último podemos determinar los beneficios de cada firma reemplazando los valores en 3.5

$$\Pi_i = \left(\frac{A - 2c}{3} - c\right)\frac{A - c}{3}$$
$$\Pi_i = \frac{(A - c)^2}{9} \tag{3.9}$$

[11] En Bertrand hay pendiente positiva en ciertas partes de la función, la intuición es que si el rival pone un precio mayor entonces la firma puedo subir los precios hasta cierto punto y aún así absorber la demanda.

Figura 3.8: Equilibrio de Nash en Cournot



Este ejemplo de equilibrio es con firmas simétricas, en caso de haber una firma más eficiente a esta le convendría producir más. Gráficamente (veáse la figura 3.8) la empresa más eficiente debiera tener una función de reacción más desplazada hacia la derecha.

Caso para n firmas. Como ejercicio se recomienda hacer este mismo procedimiento para n firmas en el mercado. ¿Qué ocurre cuando n tiende a infinito?

Niveles de competencia en Cournot y Bertrand

Fíjese que ante el mismo escenario con dos firmas iguales en Cournot hay beneficios positivos mientras que en Bertrand se llega a que no hay beneficios.

La competencia por precios es más fuerte que la competencia por cantidades.

Por esto mismo las empresas al competir por precios tienen incentivos a diferenciar su producto, de aquí salen modelos muy interesantes sobre diferenciación vertical y horizontal.[12] También se puede relajar el supuesto de que una firma a la Bertrand puede satisfacer toda la demanda, lo cual llevaría a otras conclusiones.[13]

3.3.3. Competencia a la Stackelberg

Heinrich von Stackelberg (1905-1946): Economista alemán de ascendencia argentina nacido en Rusia, aportó enormemente a la teoría de juegos. Fue un arrepentido miembro del Partido Nazi y sargento de la SS.

Este modelo fue primero propuesto por el economista alemán **Heinrich von Stackelberg**. Ya habiendo comprendido el modelo Cournot no es complejo entender el modelo Stackelberg,[14] la innovación con respecto al modelo anterior es que las firmas jugarán por turnos, inevitablemente la primera a jugar tiene la ventaja.

Supongamos que la firma 1 es la líder pues juega primero, mientras que la firma 2 es la seguidora. La firma líder decidirá en el $t = 1$ la cantidad q_1 y en $t = 2$ la firma seguidora decidirá su producción q_2 en función de q_1.

Este es un juego secuencial que se resuelve por inducción. Si miramos el problema desde el final hasta el inicio primero se maximizan los beneficios

[12] Las conclusiones de los modelos de diferenciación horizontal puede ser que las firmas llegan a una mínima diferenciación (equivalente competencia por precios a la Bertrand) o que llegan a una máxima diferenciación, en donde si bien compiten en precios pueden llegar a conseguir beneficios. Si le interesa vea Cremer y Thisse (1991), Dos Santos Ferreira y Thisse (1996) y Hotelling (1929)

[13] Las restricciones de capacidad implican que aunque las firmas puedan llevar su precio a su costo marginal realmente no hay incentivo a hacerlo, puesto que no podrían servir a toda la demanda que obtendrían por esos precios más bajos. Por lo mismo, la competencia es mucho más moderada.

[14] Competencia a la Stackelberg se presenta siempre como una competencia fijando cantidades. Sin embargo hay extensiones del modelo a precios, los cuales pueden distar bastante de como se estudia este modelo en el curso, pero siguen manteniendo la estructur del juego por turnos. Véase, Meng y Zeng (2013)

de la firma 2, la cual en $t = 2$ ya sabrá qué produjo la firma 1. Entonces podemos obtener $q_2^*(q_1)$. La firma líder tendrá que maximizar en $t = 1$ sujeto a lo que hará la seguidora en $t = 2$. Asumamos que ambas firmas tienen iguales costos marginales para simplificar el problema (y para aislar la ventaja que tiene la líder por jugar primero) y que compiten por una demanda lineal tal como en la ecuación 3.4. El problema de la firma 1 se plantea de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \max_{q_1} \quad & \Pi_1 = (P(Q) - c)q_1 \\ \text{s.a.} \quad & q_2 = q_2^*(q_1) \end{aligned}$$

Dadas las simplificaciones que hicimos podemos considerar la ecuación 3.6 como la función de reacción para la firma seguidora. Reemplazamos la restricción en la expresión a maximizar y reescribimos el problema como,

$$\begin{aligned} \max_{q_1} \quad & \Pi_1 = \left(A - q_1 - c - \left(\frac{A - q_1 - c}{2}\right)\right) q_1 \\ & \Pi_1 = \left(\frac{A - q_1 - c}{2}\right) q_1 \\ \text{CPO:} \quad & \frac{\mathrm{d}\Pi_1}{\mathrm{d}q_1} = \frac{A - c}{2} - q_1 = 0 \\ & q_1 = \frac{A - c}{2} \end{aligned}$$

Reemplazando q_1 en $q_2^*(q_1)$ obtendremos la producción de la firma seguidora.

$$\begin{aligned} q_2^*(q_1) &= \frac{A - (\frac{A-c}{2}) - c}{2} \\ q_2^*(q_1) &= \frac{A - c}{4} \end{aligned}$$

En comparación a Cournot simple, tenemos que la firma líder producirá más y por tanto conseguir mayores beneficios. La firma líder tiene más espacio para producir sin desplomar el precio, en el segundo turno la firma seguidora tendrá que acotar su producción con tal de no bajar más el precio.

3.4. Equilibrios cooperativos: Acuerdos colusivos

Cuando las firmas compiten están generando un equilibrio no cooperativo, tal como en el dilema del prisionero los firmas estarían mejor si se coludieran pero dado sus funciones de reacción este equilibrio no es alcanzable. Hay una manera de conseguir equilibrios cooperativos en juegos iterados de horizontes infinitos de lo cual se adelantó en la sección 3.2. Esta parte trata sobre colusiones y bajo qué condiciones es más fácil o más difícil que se produzcan estos acuerdos.

En el problema de la firma cada empresa maximiza los beneficios propios y no los conjuntos, sin embargo la competencia no es buena para las firmas. La colusión aparece como una forma en que las firmas se comprometen a colaborar para aumentar las utilidades propias. Las colusiones pueden cometerse de diversas formas; Aumento de precios, reducción de oferta, restricciones territoriales, etc. Es crucial para las instituciones fiscalizadores estudiar y comprender los factores que podrían indicar una colusión o que faciliten un acuerdo colusivo, pues estos actos causan graves daños al bienestar y confianza en las instituciones y los mercados.

3.4.1. Acuerdos cooperativos en juegos

Vamos a presentar las condiciones mínimas iniciales en que una colusión es siquiera posible, bajo un teorema.

Juegos iterativos: Juegos en los cuales hay más de un período/turno en que se juega. Los jugadores pueden adaptar sus estrategias según lo que vaya ocurriendo.

La teoría de juegos nos ayuda a modelar las decisiones de las firmas mediante **juegos iterativos**, juegos en los cuales hay más de un período/turno en que se juega y donde los jugadores pueden adaptar sus estrategias según lo que vaya ocurriendo.[15] En cada período las firmas pueden competir o coludirse, una vez que se haya roto el acuerdo nunca más se vuelven a

[15] Se adaptan empleando ciertas estrategias, por ejemplo si te traicionan y por tanto no vuelves a cooperar nunca es estrategia gatillo, mientras que una estrategia *tit for tat* (ojo por ojo) implica traicionar después de que te traicionen pero también cooperar después de que cooperen.

coludir (estrategia gatillo). En este tipo de acuerdos habrá un incentivo a traicionar, es decir, desviarse del acuerdo para conseguir incluso mayores utilidades de las que conseguirían coludiéndose, pero por solo ese período, ya que en caso de romper la colusión las demás empresas aplicaran su **estrategia gatillo**, provocando que se acabe la fase de colaboración y empiece la fase de castigo. El castigo es empezar a competir normalmente por el resto del juego, ya sea a la Bertrand, Cournot o el tipo de competición que corresponda.

Estrategia Gatillo: Una vez que el oponente haya traicionado se responde con traición siempre.

En la sección de Juegos Secuenciales se introdujo el concepto de Equilibrio Perfecto en Subjuegos (EPS), veremos en qué casos es posible o imposible conseguir un EPS cooperativo.

- En los casos finitos de T períodos de tiempo nunca habrá incentivos para cooperar en el último período. Como no hay un mañana $T + 1$ no habría fase de castigo por desviarse en T, la estrategia óptima para todos es traicionarse. En T nadie coopera lo cual induce a que nadie coopere en $T - 1$, el resultado es que nadie coopera en ninguno de los períodos. Nunca hay un EPS cooperativo con períodos finitos.

- En los casos con horizontes de tiempo infinitos este problema no surge, y por tanto bajo ciertas condiciones que se mencionarán, si será posible un EPS cooperativo entre firmas.

Bajo horizontes infinitos cuando el valor presente de los beneficios de un equilibrio cooperativo es mayor que los beneficios de uno no cooperativo entonces el resultado es un EPS cooperativo. Es decir que los beneficios de estar coludidos siempre, será mayor que el de desviarse y competir.

El hecho de que se pueda llegar a un equilibrio cooperativo en juegos repetidos de infinitos periodos es un resultado del **Teorema de Folk**,[16] el cual nos dice que si los jugadores son suficientemente pacientes e interactúan repetidas veces (infinitas) pueden llegar a un equilibrio perfecto en subjuegos cooperativo.

Teorema de Folk: Teorema que muestra la factibilidad de un equilibrio perfecto en subjuegos cooperativo en un horizonte infinito.

[16] El Folk theorem en español se le llama: teorema de tradición oral. Se le llama así pues es un teorema ampliamente usado por distintos autores pero del que no hay un autor claro.

Modelemos este juego con horizonte infinito para aplicar dicho teorema. Las firmas al coludirse estarán ponderando si es que los beneficios de traicionar en el corto plazo compensarán los beneficios de mantenerse coludidos en el largo plazo. Si una firma se desvía, quiere decir que en ese turno gana los beneficios extraordinarios π^D. Estos son los beneficios resultantes de aplicar la estrategia óptima en contra de la estrategia cooperativa del otro.[17] Durante los siguientes turnos por estrategia gatillo todos empiezan a competir obteniendo en este caso π^G.[18]

Además se tiene que considerar que los beneficios de períodos más lejanos al presente tendrán menos peso en valor presente. De manera similar al modelo de consumo intertemporal vamos a ponderar los períodos futuros por un descuento $0 \leq \delta < 1$ para todos los períodos $t \in 0, 1, 2, \ldots, T$.

Condiciones de colusiones en Bertrand

Vamos a ver un caso específico para introducirnos en la dinámica. En el caso de un duopolio Bertrand con firmas simétricas ($\pi^G = 0$ y $\pi^D = \pi^M$) podemos describir los beneficios de desviarse V^D en el período $t = 0$ como,[19]

$$V^D = \delta^0 \pi^M + \delta \pi^G + \delta^2 \pi^G + \ldots + \delta^T \pi^G = \pi^M + \frac{\delta}{1-\delta} \pi^G = \pi^M \tag{3.10}$$

La ecuación 3.10 denota las utilidades de desviarse y obtener beneficios monopólicos en el primer turno y luego competir a la Bertrand obteniendo cero beneficios durante el resto del juego. En caso de cooperar definimos V^C como el reparto de las utilidades monopólicas $\frac{\pi^M}{N}$ hasta el infinito.

$$V^C = \delta^0 \frac{\pi^M}{2} + \delta^1 \frac{\pi^M}{2} + \delta^2 \frac{\pi^M}{2} + \ldots + \delta^T \frac{\pi^M}{2} = \frac{\pi^M}{2} + \frac{\delta}{1-\delta} \frac{\pi^M}{2} \tag{3.11}$$

La colusión se dará cuando para cada empresa se cumpla que,

$$V^C \geq V^D \tag{3.12}$$

[17]Por ejemplo en un Bertrand duopólico con firmas simétricas el precio debería ser el precio monopólico, y la estrategia de desvío sería fijar un precio $p^* = p^M - \epsilon$, lo que les daría beneficios extraordinarios $\pi^D \approx \pi^M$.

[18]π^G va a depender del las condiciones del mercado, demanda, competidores, tipo de competencia; Cournot, Bertrand, Stackelberg, etc.

[19]El factor $\frac{\delta}{1-\delta}$ viene de la suma geométrica.

Para evaluar si esto ocurre tendremos que fijarnos que la tasa de descuento δ (la única variable no dada) cumpla cierta condición,

$$V^C \geq V^D \iff \frac{\pi^M}{2} + \frac{\delta}{1-\delta}\frac{\pi^M}{2} \geq \pi^M$$
$$\text{Despejando } \delta \text{ obtenemos la condición} \quad \delta \geq \frac{1}{2}$$

Es decir, mientras se cumpla que $\delta \geq \frac{1}{2}$ el acuerdo colusivo se va a dar en todos los períodos. El teorema de Folk indica que habrá cierto nivel de paciencia en que las firmas decidan cooperar en un horizonte infinito de interacciones. La interpretación más intuitiva es que si las firmas tienen un nivel de paciencia suficientemente alto para valorar los beneficios de coludirse a largo plazo, preferiran mantener el acuerdo antes que los beneficios de corto plazo del desvío.

Condición del Teorema de Folk en el caso general

Una fórmula general de expresar lo anterior es la siguiente,

$$\frac{\delta}{1-\delta}(\pi^C - \pi^G) \geq \pi^D - \pi^C \tag{3.13}$$

Donde π^C serán los beneficios que recibe la empresa al coludirse con las demás,[20] π^D son los beneficios del turno al desviarse y π^G serán los beneficios donde por estrategia gatillo todas las firmas empiecen a competir. La ecuación 3.13 se interpreta como que los beneficios a largo plazo deben ser más valorados que los beneficios a corto plazo.

De la condición 3.13 también podemos despejar el descuento δ. De esta manera conseguiremos el δ mínimo para asegurar que la colusión se cumpla.[21]

$$\delta \geq \frac{\pi^D - \pi^C}{\pi^D - \pi^G} \tag{3.14}$$

[20] Nótese que es diferente a π^M puesto que se tienen que repartir entre las firmas coludidas.

[21] No se recomienda aplicar esta identidad sin entender lo que está pasando, pues puede llevar a ciertos errores al resolver ejercicios.

3.4.2. Factores que facilitan/dificultan la colusión

Hay distintos factores que pueden facilitar la colusión, el factor de descuento de cierta manera es uno de ellos, sin embargo para un factor de descuento dado la colusión se facilita o se dificulta según los siguientes factores.

Cantidad de firmas. A mayor cantidad de firmas es más difícil mantener un equilibrio colusivo. Para un número de N firmas iguales compitiendo a la Cournot las utilidades de coludirse bajaran con la cantidad de firmas, $\pi^C = \frac{\pi^M}{N}$. Si en un turno una firma se desvía ganan π^M, para simplificar normalizemos la fase de castigo $\pi^G = 0$.[22]

Citando la condición 3.14 y reemplazando los beneficios para este caso obtenemos el descuento mínimo necesario para que la colusión sea posible $\bar{\delta}$.

$$\delta \geq \frac{\pi^M - \frac{\pi^M}{N}}{\pi^M - 0} \Longleftrightarrow \bar{\delta} = 1 - \frac{1}{N}$$
$$\lim_{N \to \infty} \bar{\delta} = 1$$

A medida que aumenta el número de firmas es necesario un menor descuento intertemporal con tal de mantener el acuerdo colusivo.

Severidad de la fase de castigo. Mientras más severa, o mejor dicho, mientras más fuerte sea la competencia en fase de castigo más fácil será mantener el acuerdo. Si desviarse conlleva competir y ganar cero beneficios por el resto de la eternidad entonces es más factible cooperar para cualquier nivel de factor de descuento. Podemos decir que coludirse es más factible en Bertrand que en Cournot. En Cournot también podemos hacer el comentario de que mientras más firmas hayan en el mercado más severa será la fase de castigo, por lo que se conecta con el punto anterior.

Asimetría de las firmas. En un acuerdo la firma más eficiente tendrá una fase de castigo menos severa (un mayor π^G) por lo que tendrá una suerte de dominancia sobre la menos eficiente. Esto se traduce en que una firma más eficiente requerirá de más paciencia para mantener el acuerdo.

[22]Esto no es estrictamente correcto en Cournot a menos que el número de firmas tienda a infinito pero nos sirve para el ejemplo.

Ejercicios

Competencias

Considere el mercado de un producto que tiene una demanda descrita por $p = a - bq$ y en el que todas las empresas son idénticas y tienen un costo fijo y un costo marginal tan pequeño que podemos asumir igual a cero para efectos prácticos. Derive la producción, precio, utilidades empresariales totales, utilidades por empresa y pérdida social en cada uno de los siguientes casos:

a. Competencia perfecta.

b. Monopolio.

c. Duopolio Cournot.

d. Duopolio Bertrand.

e. Duopolio Stackelberg.

f. Cartel.

g. ¿Se sostiene el cartel en el caso de un juego estático?

Equilibrios estratégicos de mercados

Suponga un duopolio que enfrenta una demanda de mercado $P = A - bQ$, donde $Q = q_L + q_S$ (la cantidad producida por la firma líder y la seguidora, respectivamente). Las firmas enfrentan costos totales CT y costos marginales c.

a. Asuma que una de las empresas es capaz de escoger su cantidad de producción antes que la otra empresa, de manera irreversible. ¿Cuál sería el equilibrio de este mercado? Explique su procedimiento. Grafique su respuesta.

b. ¿Es eficiente la asignación en el apartado anterior? Grafique su respuesta y cuantifique una eventual pérdida social.

c. Suponga ahora que ambas empresas compiten en la elección de cantidades de manera simultánea, con un horizonte infinito. Obtenga las condiciones bajo las cuales ambas empresas pueden coludirse de manera óptima entre ellas bajo un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos sustentado en la Estrategia del Gatillo. Interprete sus resultados.

Bertrand con costos asimétricos

Considere un juego de competencia en precios, donde la demanda inversa es $P(Q) = 10 - 2Q$, la firma 1 posee costo marginal igual a 1 y la firma 2 tiene un costo marginal igual a 2.

a. Encuentre el equilibrio de Nash del juego estático. ¿Es esto evidencia en contra de la Paradoja de Bertrand?

b. Encuentre los beneficios que obtiene cada firma en el escenario anterior y los beneficios si se coluden, asumiendo que se dividen equitativamente el mercado.

c. Calcule los beneficios si las firmas se desvían del acuerdo colusivo.

d. Bajo la estrategia de ”gatillo”, determine si es posible implementar una colusión en el juego repetido. ¿Qué firma tiene que ser más paciente?

e. Suponga ahora que el monitoreo del precio del rival no es perfecto, lo que implica que se demora un periodo adicional en detectar si la otra firma se salió del acuerdo. Aplicando la estrategia de ”gatillo”bajo este escenario, determine si es posible mantener un acuerdo colusivo. ¿Es más fácil o más difícil que en el ítem anterior?

f. Volviendo al escenario del ítem d), determine en qué porcentaje hay que dividirse el mercado para que la firma 1 acepte un acuerdo colusivo si su factor de descuento es $\delta = 0{,}7$.

Referencias

Allen, B., & Hellwig, M. (1986). Price-setting firms and the oligopolistic foundations of perfect competition. *The American Economic Review*, *76*(2), 387-392.

Cremer, H., & Thisse, J.-F. (1991). Location Models of Horizontal Differentiation: A Special Case of Vertical Differentiation Models. *The Journal of Industrial Economics*, *39*(4), 383-390. Consultado el 19 de octubre de 2024, desde http://www.jstor.org/stable/2098438

Dixon, H. D. (1992). The competitive outcome as the equilibrium in an Edgeworthian price-quantity model. *The Economic Journal*, *102*(411), 301-309.

Dos Santos Ferreira, R., & Thisse, J.-F. (1996). Horizontal and vertical differentiation: The Launhardt model. *International Journal of Industrial Organization*, *14*(4), 485-506. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-7187(95)00486-6

Fischer, R. (2024). *Curso de Organización Industrial (Apunte)*.

Gibbons, R. (1992). *Un Primer Curso de Teoría de Juegos*.

González, A. (2020). *Apuntes de Organización Industrial*.

González, A., Sepúlveda, F., & Hojman, D. (2014). *Teoría de Juegos y Aplicaciones*.

Hotelling, H. (1929). Stability in Competition. *The Economic Journal*, *39*(153), 41-57. Consultado el 19 de octubre de 2024, desde http://www.jstor.org/stable/2224214

Mas Collel, A., & Whinston, M. (1995). *Microeconomic Theory*.

Meng, F.-L., & Zeng, X.-J. (2013). A Stackelberg game-theoretic approach to optimal real-time pricing for the smart grid. *Soft Computing*, *17*, 2365-2380.

Samuelson, P., & NordHause, W. (1991). Economía. *Editorial Mac Graw Hill. España*.

Varian, H. R. (2014). *Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach*. WW Norton & Company.

CAPÍTULO 4

EL PROBLEMA DE LA DELEGACIÓN Y LA IGNORANCIA

4.1. Problemas de agencia

4.1.1. La teoría de agencia y el problema de delegación

La teoría de agencia (o teoría de contratos) es el estudio de agentes que interactúan de manera contractual, es decir se estudia la delegación de una responsabilidad de una persona a otra. Las fuerzas que dotan de complejidad a los contratos son la gran cantidad de incentivos contrapuestos entre quienes formulan los contratos y a quienes se les delegan responsabilidades.

El simple hecho de crear un contrato y que alguien lo acepte ya es una restricción, una segunda derivada del problema es formular el contrato de tal manera que quienes son delegados se comporten de manera ideal. Estas dos condiciones llevarán a un costo inevitable de la delegación puesto que priorizar que los individuos tomen el contrato puede llevar a que los incentivos se comporten de manera indeseada o viceversa.

Asimetrías de información: Situación en donde una parte de la interacción posee información que la otra no.

Los costos de la delegación son acompañados de ineficiencias cuando estamos frente a **asimetrías de información**. Las asimetrías de información son una falla de mercado y en el caso de los contratos puede llevar a que el comportamiento de los agentes ex-ante o ex-post al contrato lleve a grandes ineficiencias tanto en los mercados como en la formulación de políticas públicas.

4.1.2. Formalización de los contratos

El problema de agencia surge de delegación mediante un contrato, quien delega será el principal y el delegado, el agente. Para esto, el principal plantea un contrato o un menú de contratos de los cuales podemos encontrar siempre dos componentes principales, el resultado (x) y el pago al agente $\omega(\mathrm{x})$.

El pago al agente depende del resultado el cual depende por su parte de el esfuerzo que ponga el agente (e) y condiciones de la naturaleza (θ) fuera del alcance tanto del principal como del agente. Un problema surge ante la imposibilidad de distinguir si un resultado fue satisfactorio o pobre por el esfuerzo del agente o por suerte: el agente puede poner un esfuerzo alto y aún así tener un resultado pobre por condiciones de la naturaleza fuera de su control o bien puede esforzarse poco y tener suerte. Esto conlleva entonces un factor relevante a la hora de formular contratos: el problema no radica solo en que el principal haga un contrato que el agente acepte sino que el agente se comporte de manera ideal dadas las reglas del contrato.

Condición de participación: Condición que asegura que el agente obtenga al menos lo que ganaría fuera del contrato, incentivando su aceptación.

Por lo anterior, el principal considera dos condicionas al formular un contrato, una de ellas es la **condición de participación** que refiere a las características que lleva a un agente a tomar al menos uno de los contratos ofrecidos por el principal. El agente solo aceptará el contrato si cumple con obtener a lo menos su utilidad de reserva, la cual es la utilidad que obtiene de no aceptar ningún contrato ofrecido por el principal. La **condición de**

incentivos por su parte refiere a que el agente escogerá el nivel de esfuerzo óptimo dentro de las reglas del contrato. Considere que el principal formula las reglas de los contratos sabiendo que los agentes deciden libremente su esfuerzo sujeto a las reglas.

Condición de incentivos: Condición que asegura que los agentes maximice su beneficio siguiendo el contrato, alineando sus acciones con los objetivos del principal.

Las condiciones de participación e incentivos frecuentemente están en conflicto. Los mecanismos de castigo que llevan a que un trabajador se esfuerce (relacionado con la condición de incentivo) puede llevar al agente a nunca tomar el contrato (no cumpliéndose la condición de participación). Un caso contrario sería que un contrato que no tenga ningún sistema de castigo o incentivo pueden fácilmente cumplir la condición de participación pero no cumplir la condición de incentivos. Puesto en simple, la condición de participación refiere a que el agente tome el contrato y la condición de incentivos refiere a que el contrato empuje al agente a comportarse de manera ideal para el principal.

Con esto podemos plantear el problema del principal como una formulación de contrato que maximice los resultados y minimice los costos sujeto a las condiciones de participación e incentivos.

$$\begin{aligned} \max_{\omega} \quad & B(\mathrm{x} - \omega) \\ s.a \quad & u(\omega, e) = u(\omega) - u(e) \geq \bar{u} \\ & \hat{e} = \arg\max_{e} u(\omega, e) \end{aligned}$$

Donde la primera restricción refiere a la de participación mientras que la segunda refiere a la de incentivos.

4.1.3. Tipos de contratos

De la formalización que acabamos de describir podemos distinguir 3 distintos tipos de contrato. (i) Asalariado o dependiente, (ii) arriendo o franquicia y (iii) Mediería o vasallaje.

Podríamos escribir las funciones de utilidades del agente y el principal ge-

	α	β	R	Pago ω	Pago $\mathrm{x} - \omega$	Beneficiario Residual
Asalariado o Dependiente	+	0	0	α	$\mathrm{x} - \alpha$	Principal
Arriendo o Franquicia	0	1	+	$\mathrm{x} - R$	R	Agente
Mediaría o Vasallaje	0	$0 < \beta < 1$	0	$\beta \mathrm{x}$	$(1 - \beta)\mathrm{x}$	Ambos

Cuadro 4.1: Tipos de contratos

néricas (que sirven para los tres tipos de contratos) respectivamente como,

Beneficiario residual: Quien asume el riesgo de la variabilidad de los resultados de un contrato.

$$\omega = \alpha + \beta \times x(e, \theta) - R$$
$$B = x(e, \theta) - \alpha - \beta \times x(e, \theta) + R$$

Una manera de diferenciar este tipo de contratos es identificando quien sería el **beneficiario residual**. El beneficiario residual es quien acaba asumiendo el riesgo, si las cosas salen mal a este individuo le va mal y si salen bien entonces le irá bien. El caso del asalariado o dependiente, dado que el salario del agente es α y no depende del resultado ($\beta = 0$) quien asume la pérdida será el principal, siendo por esto el beneficiario residual. En el caso de las franquicias, como pasa en las cadenas de restaurantes, quien paga la franquicia tiene el derecho de usar la marca pero el principal no asume ningún riesgo, por tanto el beneficiario residual será el agente. Por último la mediaría o vasallaje logra que agente y principal compartan el riesgo, esto se ha visto en la relación entre terratenientes y vasallos, donde tienen un acuerdo donde los resultados se reparten entre ambas partes.

4.1.4. Ineficiencias del problema de delegación

Considere por un momento que el resultado del proyecto de una persona depende de su propio esfuerzo y de otras variables fuera de su control. En este caso no hay un problema de delegación pues no hay más de un agente.

Mientras más se esfuerce el o la trabajadora los resultados serán en promedio mejores pero a tasas decrecientes, es decir cada nivel de esfuerzo marginal tiene un aporte menor al anterior. Por lo que al graficar tendríamos una función cóncava tal como $f(e, \theta)$ en la figura 4.1. Introdujimos la

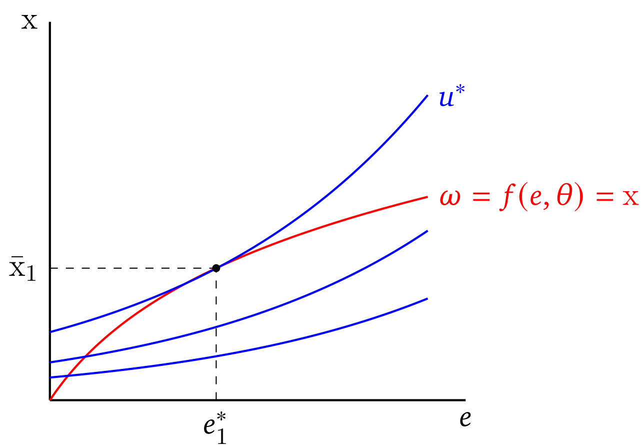


Figura 4.1: Curvas de indiferencia entre bienes y males

función de producción del individuo, el cuanto producir dependerá de el esfuerzo empleado, el esfuerzo óptimo obedece a sus preferencias.

Las preferencias del individuo puede graficarse en la misma figura como curvas de indiferencia. Dado que los resultados son un bien mientras que el esfuerzo es un mal, la curva de indiferencia entonces será convexa. Esto quiere decir que para mantener una misma utilidad incrementando el resultado debería haber un suficiente aumento del esfuerzo.

El esfuerzo óptimo del individuo se da donde la curva de indiferencia de esfuerzo y resultados es tangente a la curva de las función de producción. Por lo tanto, sin ningún problema de agencia el individuo decide esforzarse e_1^*.

El problema de agencia surge cuando se le delega a un agente este proceso productivo, dado que las condiciones de participación e incentivos pueden ir en sentidos contrarios entonces veremos que se produce un costo a la delegación.

Considere el caso de mediería, donde el empleado recibe un pago $\omega = \beta \mathrm{x}$, es decir, recibe una fracción del producto de su esfuerzo al tomar el contrato del principal. Puede observar en la figura 4.2 como el pago se reduce para todo nivel de esfuerzo en la transición del caso sin delegación (ω) al de

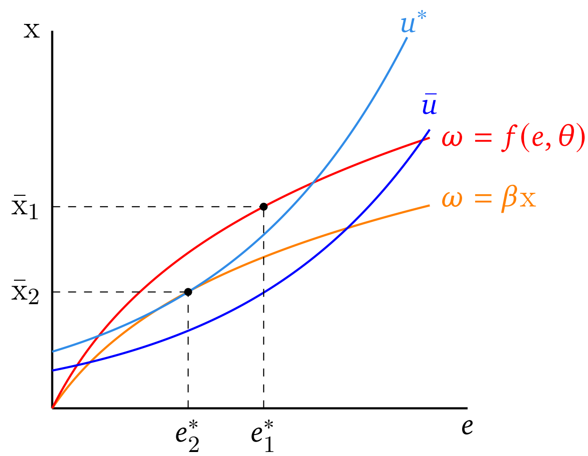


Figura 4.2: Ineficiencias del conflicto entre restricción de participación y de incentivos

mediería ($\beta\omega$).

Para ver gráficamente la condición de participación considere que el individuo tiene una utilidad de reserva $\bar{u}$ al no tomar el contrato de que puede ser representado mediante una curva de indiferencia en la figura. En caso de que la función de producción dado el contrato esté por sobre la curva de indiferencia entonces implica que el tomar el contrato deja en mejor lugar al agente, cumpliéndose así la condición de participación.

Cuando el agente tome el contrato decidirá hacer el esfuerzo que maximice su utilidad, la condición de eficiencia para el agente será tal que la curva de indiferencia sea tangente a la curva de producción. Como se ve en la figura 4.2 este punto óptimo es e_2^*.

La condición de incentivos busca que empujar a los agentes a esforzarse más cuando se ha tomado el contrato. Lo que vemos (y veremos en todos los problemas de agencia) es que la delegación produce que el agente haga un menor esfuerzo del que hubiera hecho el principal por si solo. Esto se da puesto que el cumplir las condiciones de participación del agente puede ir en contra de las condiciones de incentivo que empujan al individuo a esforzarse más.

En este caso particular se podría decir que a mayor β del contrato de mediería deberíamos observar un mayor esfuerzo dado que los rendimientos marginales de este son mayores para el agente, pero esto sería acosta de los pagos que pueda recibir el principal.

El arte de escribir contratos busca reducir ese costo de la delegación, pero nunca se podrá llevar a cero. En lo que sigue estudiaremos distintos tipos de fenómenos que ocurren en el problema del agente y principal. Uno de ellos es ex-ante al tomar el contrato (selección adversa) mientras que el segundo es ex-post al contrato (riesgo moral).

4.2. Riesgo Moral

El **riesgo moral** surge ex-post de aceptar un contrato, el costo del riesgo moral es la reducción del esfuerzo dada alguna garantía que refiere al contrato. El sector que tiene ejemplos más claros de riesgo moral es el mercado de los seguros.

Riesgo Moral: Ocurre cuando una de las partes toma decisiones arriesgadas porque los costos recaen en la otra parte, debido a la falta de supervisión o a la asimetría de información.

Imagínese que usted quiere un seguro contra abolladuras de su auto. Usted siempre se ha esforzado por no dañar el auto, por lo que la aseguradora (dado su buen historial) le ofrecen un seguro que le cubre todos las reparaciones ante abolladuras y rayados a una prima razonable. Dado que los costos ahora se internalizan completamente en la aseguradora, si usted fuera un agente racional debería reducir el esfuerzo que antes empleaba en no dañar el auto pues no tiene que asumir los costos. Esto se evidenciaría en que ahora maneja más rápido y se estaciona con menos cuidado, lo que se evidencia un menor empleo de esfuerzo. Dado el cambio de comportamiento ex-post de contratar el seguro es probable que la aseguradora tenga que asumir más costos de lo que esperaba.

La reducción de esfuerzo por el cuidado del auto se debe a que la aseguradora como beneficiario residual internaliza todos los costos. En la realidad, las aseguradoras se adelantan a este cambio de comportamiento y tienen distintos mecanismos para disuadirlo. Lo más frecuente es aplicar deducibles, es decir, ante un siniestro los costos se reparten entre la aseguradora y el conductor, por tanto la persona internaliza parte de los costos llevando

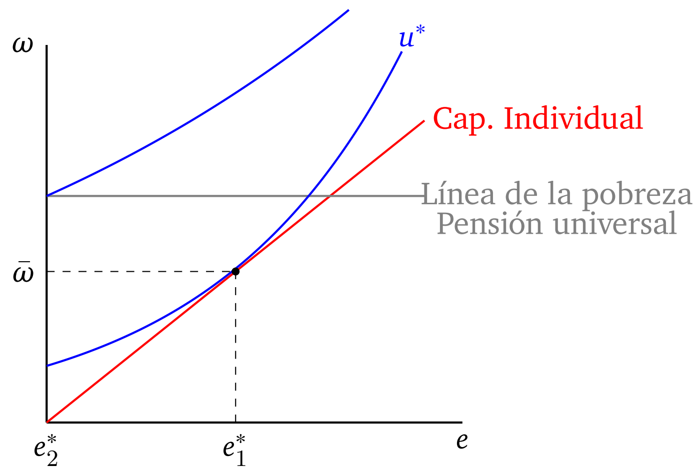


Figura 4.3: Riesgo moral en los sistemas de pensiones

a mayor esfuerzo.

A esto se le conoce como riesgo moral dado el cambio de comportamiento respecto al esperado una vez firmado un contrato. El riesgo moral está presente tanto en el mercados como en la formulación de políticas públicas, por ejemplo el sistema de pensiones.

Considere una situación inicial donde el sistema de pensiones es por medio de capitalización individual pura, por lo que la relación entre esfuerzo (ahorro) y pensión sería positiva (véase figura 4.3). La persona decidirá cuanto esforzarse por esta pensión dada sus preferencias, en este caso deberíamos ver el esfuerzo óptimo donde haya tangencia entre la curva de indiferencia y el ahorro.

Consideremos la posibilidad de que dado el esfuerzo óptimo de la persona la pensión es muy baja, estando por debajo de una linea de pobreza. Ante esto el gobierno decide por implementar una pensión garantizada universal justo en la línea de pobreza. Esto producirá que las personas tengan una curva de indiferencia más alta reflejando un aumento de su utilidad, el problema es que el esfuerzo óptimo ahora es cero lo cual encarece de sobremanera la política.

Es por esto que es relevante tratar los problemas de política pública como problemas de agencia. El diseño de los sistemas en este caso pueden repercutir de manera considerable la forma en que los individuos se comportan.

4.3. Selección adversa

4.3.1. El modelo de selección adversa

Uno de los modelos fundamentales de teoría de agencia es el modelo de **selección adversa**. Como se adelantó, la selección adversa es producto de la asimetría de información que aplica ex-ante a la interacciones.

Tal como se menciono en la sección de teoría de mercados eficientes de Fama (sección **??**) en variados modelos económicos suponemos que hay información perfecta, es decir, hay **información completa** y que la **información es simétrica**. Hay dos grandes familias de problemas que surgen de levantar el supuesto de información perfecta: el problema de acción escondida y el de información escondida. El problema de **acción escondida** se mencionó brevemente en la sección anterior, este surge cuando el esfuerzo que emplea el agente no es conocido por el principal, y dado que el resultado de la tarea depende en parte del azar no se puede discernir si el resultado es bueno porque el agente se esforzó o porque simplemente tuvo suerte. El problema de la **información escondida** tiene otra naturaleza, el agente podría tener información crucial que el principal no, por ejemplo, el nivel de productividad del agente, o la calidad del bien que se tranza.

El mercado de los limones de Akerlof es un caso de información asimétrica donde el problema es de información escondida, los vendedores de algún producto tendrán información de la calidad del bien y los compradores no. Esta falta de información podría llevar a que el mercado colapse, en cuyo caso se podría decir que hay colapso de mercados dada la información escondida.[1] Más adelante veremos maneras en que se puede intervenir para

[1]También llamado vaciamiento de mercado, en cuyo caso es un concepto diferente en selección adversa que en la teoría de equilibrio general. En la sección de Economía Descentralizada se menciono que el vaciamiento de mercado se da cuando toda la demanda es saciada por una oferta. Por el contrario cuando se vacían los mercados por selección

salvar al mercado de su propia extinción.

4.3.2. Colapso de mercados

Para presentar este fenómeno de colapso de mercado tomaremos el contexto más clásico, el de un mercado de autos usados. Esta manera de presentar el problema de limones es frecuente dado el lenguaje utilizado en la cultura estadounidense de la segunda mitad del siglo XX. Los autos usados que se mantienen bien y que son de gran calidad se les llama *cherrys* (desde ahora cerezas), mientras que los autos usados que no rinden como se esperaba se les denomina como *lemons* (limones desde ahora).

El uso de esta jerga hace referencia en que al estar un mercado de productos de segunda mano, no se tiene completa certeza de la calidad del vehículo y como se ha mantenido después de años de uso. En lo que sigue formalizaremos matemáticamente este problema.

Supongamos que la calidad de un auto i se define como un parámetro κ_i tal que $0 \leq \kappa_i \leq 0$. Haremos el supuesto de que la calidad se distribuye uniformemente entre el rango $\{0, 1\}$. Además, asumiremos que los compradores y vendedores de auto son neutros al riesgo. La utilidad de los compradores u_i^{c} por comprar el auto i y la del vendedor u_i^{v} será definida por,

$$u_i^{\mathrm{c}} = v_{\mathrm{c}} - p_i$$
$$u_i^{\mathrm{v}} = p_i - v_{\mathrm{v}}$$

Donde p_i es el precio del auto y v^{v}, v^{c}, son el valor que vendedor y consumidor dan al auto respectivamente.

Para el caso de información perfecta la calidad de los autos es conocida y definimos la valoración del auto como $\mathrm{c}\kappa_i$ y $\mathrm{v}\kappa_i$ para el comprador y vendedor respectivamente. En este este caso habría transacción cuando hay información simétrica pues asumiremos además que $\mathrm{c} > \mathrm{v}$. Dadas todas estas condiciones que impusimos cualquier auto i que cumpla con $\mathrm{c}\kappa_i \geq \mathrm{v}\kappa_i$ será vendido.

adversa se refiere a que el mercado colapsa, deja de existir

Hasta ahora definimos un mercado utópico, de levantar el supuesto de información perfecta el problema información escondida surge porque los vendedores (v) conocen el κ_i del auto i pero el posible comprador (c) no lo conoce.

Dado que ahora no se ve la calidad del auto todos se venden a un precio de equilibrio p dada la calidad esperada dentro del mercado. Esto es relevante puesto que anterior al problema de información, p_i dependía del auto, si κ_i era mayor, tanto el vendedor como el comprador estaban dispuestos a negociar a precios más altos. Para el precio p los únicos vendedores dispuestos a vender serán los que cumplan esta condición, $\mathrm{v}\kappa_i < p$ la cual se puede expresar como $\kappa_i < p/\mathrm{v}$. Gráficamente el mercado de delimita tal como en la figura 4.4. Antes del problema de información se podía servir a los autos de entre 0 a 1 de calidad ahora producto de la asimetría habrán vendedores que no estarán dispuestos a vender y salen del mercado.

Figura 4.4: Reducción del mercado por problema de información

Producto de la información asimétrica los vendedores de los autos de mayor calidad salen del mercado causando que la calidad esperada en el mercado reducido baje. El consumidor por su parte entiende lo que está pasando y actualiza su expectativa de calidad al promedio del mercado reducido $p/(2\mathrm{v})$. Como resultado el consumidor tiene un precio máximo dispuesto a pagar ($\mathrm{c}\kappa$) de $\mathrm{c}p/2\mathrm{v}$.

Recapitulando, cuando había información perfecta el precio máximo dispuesto a pagar del consumidor era $c\kappa$ y dado que $\mathrm{c} > \mathrm{v}$ había una transacción. Ahora que hay un problema de información habrán vendedores que no estarán dispuestos a vender sus autos a determinado precio, la salida de estos vendedores reduce el valor esperado de la calidad del auto. El valor esperado de la calidad influye en el precio máximo a pagar por los consumidores, pasando de un $\mathrm{c} > \mathrm{v}$ bajo información perfecta a un $\mathrm{c} > 2\mathrm{v}$ bajo información escondida.[2]

[2]El problema con aversión al riesgo llega a la misma conclusión. Dado que hay incerti-

Ahora pensemos en un mercado que sea dinámico en el tiempo. Tal como vimos anteriormente el mercado se reduce pues los vendedores de mayor calidad salen del mercado en el primer período. Para un siguiente período ocurrirá lo mismo sobre el mercado más reducido, mientras pase el tiempo más se reducirá el mercado resultando finalmente en una extinción del mismo. A esta dinámica se le conoce como colapso de mercados de Akerlof.

4.3.3. Aplicaciones en mercados relevantes

Considere un sistema de seguros de salud, en cuyo caso la información escondida viene de la probabilidad de activar el seguro. La prima del seguro se fijará según la probabilidad esperada de activar el seguro considerando todo el mercado, esto considera tanto los que tienen mayor probabilidad como quienes tienen menor probabilidad al promedio. Las personas que tengan una menor probabilidad esperada de utilizar el seguro no estarán dispuestas a pagar por la prima, por lo tanto salen del mercado. Ahora que las personas menos riesgosas salen del mercado la probabilidad de activar el seguro para el mercado reducido aumenta y con ello la prima que cobra la aseguradora. Por lo tanto se produce un colapso de mercado dado que los de menor riesgo no estan dispuestos a pagar la prima del seguro.

En Chile se produjo un colapso de mercado de seguros de salud privado durante los 90.[3] Para las personas jóvenes y de altos ingresos no les convenía pagar la prima de un seguro privado, una mejor opción dado su bajo riesgo es utilizar el seguro público y ante algún incidente (poco probable para el individuo) asumir los costos.

Es importante para la política pública el contrarrestar la asimetría de información y así asegurar el buen funcionamiento de los mercados. Hace unos años en Chile el mercado de la educación superior fue fuertemente afectado por el problema de información escondida de calidad de las universidades.

dumbre y los compradores son aversos al riesgo entonces hay un factor de premio al riesgo que va en pos de hacer más difícil satisfacer la condición de transacción. Por ejemplo $c > (1+\rho)2v$, donde ρ es algún premio al riesgo.

[3]Considere que anteriormente el sistema de ISAPRES era más grande en relación al sistema público que en estos tiempos. Tanto porque el sistema público ha ido mejorando y por la contingencia reciente.

Esta falla de mercado llevo a que personas estudiaran una carrera que luego no rindió en empleabilidad e ingresos como los egresados esperaban. Hoy en día hay diferentes mecanismos e iniciativas que van en pos de relevar esa información escondida. Este es el objetivo las acreditaciones (relacionadas con el signalling que veremos más adelante) y la disponibilidad de información disponiblehoy en día respecto a la empleabilidad y salario de cada carrera según institución.[4]

[4]En mifuturo.cl se pueden encontrar tales datos. Esto va en pos de que los estudiantes postulen con la mayor información posible.

Ejercicios

Colapso de mercados

En un mercado de autos existen compradores y vendedores. Cada uno de ellos asigna una valoración, sin embargo, por problemas de asimetría de información solo los vendedores conocen el valor real de sus autos. En particular, en este mercado hay tres tipos de vendedores indexados por $i \in \{1, 2, 3\}$ que valoran θ_{v_i} sus autos respectivos, en más detalle:

$$\theta_{v_1} = 50, \quad \theta_{v_2} = 100, \quad \theta_{v_3} = 150$$

La cantidad de estos vendedores v_i se corresponde con el vector: $(v_1, v_2, v_3) = (800, 300, 100)$ por lo que el total n_m será la suma. Los compradores valoran igual o más los autos que los vendedores, en una razón de $\theta_{c_i} = 1{,}5 \cdot \theta_{v_i}$ y asumiremos que no hay excedente para los consumidores.

1. Si los valores de los autos son observables (no hay asimetría de información), ¿cuáles son los precios de este mercado?

2. Calcule el excedente social en esta situación de perfecta información.

3. Suponga ahora que los valores son información privada de los vendedores, mientras que los compradores se guían por una distribución de valores (la distribución dada por el enunciado). Encuentre el precio de mercado y dado este valor especifique qué vendedores venderían. Asuma neutralidad al riesgo.

4. Póngase en la situación de que en el siguiente periodo los vendedores tipo 3 salieron del mercado para siempre, ahora el mercado solo está conformado por $(v_1, v_2) = (800, 300)$ y $n_m = 1100$. ¿Qué pasará en el subsiguiente período con la calidad de los autos transados en promedio? ¿Qué académico(s) hace referencia a este fenómeno y cómo se llama?

5. Volvamos al caso en que teníamos los tres tipos de vendedores en el mercado. Para esta ocasión los vendedores pueden pagarle a un mecánico experto que certifica el valor de autos a un costo de 30. Es una decisión del vendedor certificar el auto o no. Suponiendo que se quiere tener la certificación, encuentre qué tipo(s) de vendedor(es) optarían por adquirirla. Calcule el excedente social con las certificaciones.

Referencias

Akerlof, G. A. (1970). The Market for ”Lemons”: Quality Uncertainty and the Market Mechanism. *The Quarterly Journal of Economics*, *84*(3), 488-500. Consultado el 28 de octubre de 2024, desde http://www.jstor.org/stable/1879431

Varian, H. R. (2014). *Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach*. WW Norton & Company.

APÉNDICE A

LA ECONOMÍA DESCENTRALIZADA

A.1. Optimización de una Cobb-Douglas

Esta sección tiene el objetivo de aclarar el proceso de optimización que se tiene que hacer cada vez que se quiera maximizar una función objetivo tipo Cobb-Douglas restringida a una restricción presupuestaria. Esta es una suerte de guía práctica no formalmente en cuanto a matemática.

Tome un individuo que tiene preferencias tales que su función de utilidad es de la siguiente manera,

$$\mathrm{u}(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

Donde $\alpha \in [0, 1]$ y $\beta = 1 - \alpha$. Esta función de utilidad estará bajo las restricciones de un presupuesto. Dicho presupuesto se podría denotar como r. Por lo tanto la demanda de los bienes ponderadas por su precio debieran ser igual a r, con tal de ser factible y aprovechar todos los recursos asequibles.

Por lo tanto el consumidor maximiza su función de utilidad restricto a su presupuesto eligiendo las cantidades a consumir de cada bien.

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & \mathrm{u}(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} \\ \text{s.a} \quad & r = x p_x + y p_y \end{aligned}$$

Dado que la función a maximizar esta restricta debemos cambiar la función objetivo con tal de incluir dichas restricciones. Para esto ocupamos el teorema de multiplicadores de Lagrange. Incluimos la restricción ponderada por un multiplicador. Por lo tanto maximizar el lagrangeano es equivalente a maximizar el problema original.

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & \mathrm{u}(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} \Longrightarrow \max_{x,y} \quad \mathcal{L} = x^{\alpha} y^{\beta} + \lambda (x p_x + y p_y - r) \\ \text{s.a} \quad & r = x p_x + y p_y \end{aligned}$$

Maximizamos el lagrangeano derivando las condiciones de primer orden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} + \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \beta x^{\alpha} y^{\beta-1} + \lambda p_y = 0 \end{aligned}$$

Un sistema de ecuaciones en que podemos deshacernos de λ fácilmente.

$$\begin{aligned} -\lambda = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{p_x}, \quad -\lambda = \frac{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}}{p_y} \Longrightarrow \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{p_x} &= \frac{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}}{p_y} \\ \Longrightarrow p_y \alpha y &= p_x \beta x \end{aligned} \tag{A.1}$$

Ahora con la ecuación (A.1) podemos reemplazarlo en la restricción, sustituimos x o y.

$$p_x x + p_y y = r \Longrightarrow p_x x + \left(\frac{p_x \beta x}{p_y \alpha} \right) p_y = r$$

Despejamos x y obtendríamos la demanda marshallina de x en función de su precio, preferencias y riqueza.

$$x^* = \frac{r}{p_x} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)$$

Reemplazando tal identidad en la restricción o bien haciendo nuevamente el proceso tendríamos además la demanda marshalliana de y.

$$y^* = \frac{r}{p_y} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)$$

Como en cualquier demanda, a mayor precio menor demanda óptima y aun menor mientras menor sea la riqueza (una restricción presupuestaria más fuerte).

Precisamente esa forma funcional de la demanda marshalliana siempre será así cuando estemos frente a funciones Cobb-Douglas de este tipo. Por lo que, no siempre es necesario plantear el lagrangeano para encontrar las demandas marshallianas. Precisamente por que esta función Cobb-Douglas es tal que, manteniendo las preferencias constantes el gasto óptimo por cada bien siempre será el mismo: si aumenta (disminuye) el precio de un bien disminuye (aumenta) la cantidad efectivamente demandada, de manera que se siga gastando el mismo porcentaje de riqueza a dicho bien.

Por último es útil recordar que al optimizar una función obtener esos argumentos que la maximizan (en nuestro caso demandas marshallianas), al transformar dicha función de manera monotónica y creciente los argumentos maximizadores deberían mantenerse. Por lo que la siguiente función sigue teniendo las mismas demandas marshallianas que la Cobb-Douglas del inicio.

$$\mathrm{v}(x, y) = \alpha \ln(x) + \beta \ln(y) \quad \equiv \quad \mathrm{u}(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$$

A.2. Demostraciones

Teorema A.2.1. Existencia de equilibrio competitivo
Para un mercado bajo los supuestos en la sección 1.2.1 y bajo funciones continuas y convexas los precios serán tales que el exceso de demanda del mercado sea cero.

Demostración. Normalizamos los precios y suponemos que $p > 0$.

$$p' = \frac{p_n}{\sum_{k=1} p_k}$$

De esta manera los precios quedan acotados a $[0, 1]$ y se conserva el ratio de precios teniendo distintas cantidades de bienes,

$$\frac{p'_i}{p'_j} = \frac{p_i / \sum p}{p_j \sum p} = \frac{p_i}{p_j}$$

De la función de exceso de demanda (ecuación 1.2) queda por demostrar que,

$$z(p^*) = 0$$

Podemos definir un vector de precios arbitrario p_0 y un vector p_1 en función de este último,

$$p_1(p_0) = p_0 + \kappa z(p_0), \quad \kappa > 0$$

De esta manera se hay un exceso de demanda positivo (negativo) el precio sube (baja).

Lemma A.2.2. Teorema del punto fijo Si f es continua, y $f[0, 1] \rightarrow [0, 1]$, entonces $\exists x : f(x) = x$.

Gracias a la convexidad de las preferencias $z(\cdot)$ es continua pues la suma de demandas es continua. Convenientemente p_0 y p_1 están acotados a $[0, 1]$. Esto significa que podemos aplicar el teorema de punto fijo,

$$\begin{aligned} \exists p^* : z(p^*) &= p^* \\ p^* + \kappa z(p^*) &= p^* \\ z(p^*) &= 0 \end{aligned}$$

□

Teorema A.2.3 (Primer teorema de bienestar)**.** Si (X, p) es un equilibrio competitivo, entonces X es una asignación Pareto-óptima.

Demostración. Por contradicción suponemos que el teorema no es cierto, lo que significaría que hay una asignación factible X' que es una mejor asignación para un individuo i que el equilibrio competitivo (X, p).

$$\exists X' : u_i(X_i') > u_i(X_i), \forall i \quad \wedge \quad \sum_i X_i' \leq \sum_i \omega_i$$

Tomando la condición de factibilidad y multiplicando por el vector de precios,

$$p \cdot \sum_i X_i' \leq p \sum_i \omega_i \tag{A.2}$$

Por otro lado, como X es un equilibrio competitivo entonces $p \sum_i X_i = p \sum_i \omega_i$. Reemplazando en la ecuación A.2.

$$p \cdot \sum_i X_i' > p \cdot \sum_i \omega_i$$

Lo cual contradice el hecho de que sea factible. □

Esto quiere decir que si hay una asignación mejor que la de equilibrio competitivo entonces esta no es factible, por lo que la asignación Pareto-óptima acaba siendo el equilibrio competitivo. Estamos tomando como dados los supuestos de los modelos de Walras.

Lemma A.2.4 (Hiperplano separador)**.** Sean A y B conjuntos convexos y disjuntos, entonces existe un hiperplano que los separa. Es decir,

$$\exists H(p, a) = \{X \in \mathbb{R}^n : pX = a\} \tag{A.3}$$

Esto es,

$$X_1 \in A \Rightarrow pX_1 \geq a$$
$$X_2 \in B \Rightarrow pX_2 \leq a$$

Por tanto,

$$pX_1 \geq pX_2 \tag{A.4}$$

Teorema A.2.5 (Segundo teorema de bienestar)**.** Si X^* es una asignación Pareto-óptima en la cual cada individuo tiene una cantidad positiva de cada bien, y las preferencias son convexas, continuas y monótonas, entonces X^* es un equilibrio competitivo para la dotación inicial $\omega_i = X_i^*, \forall i$.

Demostración. Sea $\mathbb{P}_i = \{X_i : X_i \succ_i X_i^*\}$, o sea un conjunto de bienes preferidos por i por sobre X_i^*. Defina también $\mathbb{P} = \sum_i \mathbb{P}_i = \{z : z = \sum_i X_i,\ X_i \in \mathbb{P}\}$: el conjunto de todas las asignaciones que pueden ser redistribuidas entre los individuos de manera que todos mejoren su situación.

Comprobaremos convexidad y que son son conjuntos disjuntos para aplicar teorema del hiperplano separador. Como las preferencias son convexas, entonces cada $\mathbb{P}_i$ es convexo, por otro lado $\mathbb{P}$ es convexo pues la suma de los conjuntos convexos es convexa. Por otro lado con un $\omega = \sum_i X_i^*$ la combinación agregada existente (exactamente donde está el Pareto-óptimo) es convexa pues es un punto.[1]

Para demostrar que son disjuntos consideramos que X^* es Pareto-óptimo, por tanto no hay ninguna forma de redistribuir los recursos dejando a todos los individuos mejor. Por lo tanto $X^* \notin \mathbb{P}$ pues este último son estrictamente mejores. Por tanto X^* y $\mathbb{P}$ son disjuntos.

Finalmente, con estas condiciones podemos aplicar el teorema del hiperplano como la línea de presupuestos.

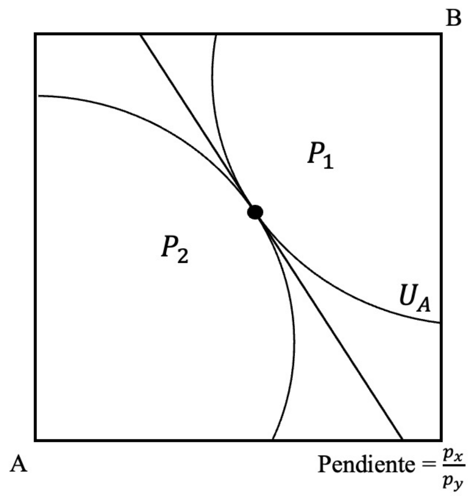
$$\exists p : pz \geq p\omega, \quad \forall z \in \mathbb{P} \tag{A.5}$$

Falta demostrar que la línea de presupuestos que separa los conjuntos depende del vector de precios. p será entonces el candidato al vector de precios de equilibrio, necesita cumplir las siguientes condiciones.

1. $\sum_i X_i^* = \sum_i \omega_i$, cumplida por definición de nuestro $\sum_i X_i^* = \omega$.

[1] Todos los puntos son convexos.

Figura A.1: Dimensiones de la caja de Edgeworth



2. Si $X_i \succ_i X_i^* \Rightarrow pX_i > p\omega_i$, asociado al primer teorema de bienestar.

Queda por demostrar que $p \geq 0$. Sea $e_i = \{0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima}}, 0, \ldots, 0\}$.

Dado que $\succ$ son monotónicas $\Rightarrow \omega + e_i \in \mathbb{P}$, ya que con una unidad más de un bien podemos redistribuirla para dejar a todos los individuos mejor.

De la ecuación A.5 podemos decir que

$$p(\omega + e_i) \geq p\omega \rightleftharpoons pe_i \geq 0 \Rightarrow p \geq 0 \tag{A.6}$$

Esto ya que elegimos e_i arbitrariamente.

Ahora queda por demostrar que si $X_i \succ_i X_i^* \Rightarrow pX_i \geq pX_i^*$, con desigualdad no estricta. Por la ecuación A.5 sabemos que

$$X_i \succ_i X_i^*, \forall i \Rightarrow p \sum_i X_i \geq p \sum_i X_i^*$$

Y necesitamos demostrar que es para todos los individuos. Suponiendo que un individuo j es tal que $X_j \succ_j X_i^*$. Vamos a construir una asignación z, tomando algo de X_j y repartirlo a los otros individuos. Formalmente par aun θ pequeño,

$$
\begin{aligned}
z_j &= (1-\theta)X_j \succ_j X_j^* \\
Z_i &= X_i + \frac{\theta X_j}{n-1},\ i \neq j
\end{aligned}
$$

Esto es tal que todos estan mejor, incluso j, por lo que $z \in \mathbb{P}$. Usando la ecuación A.5,

$$
\begin{aligned}
p\left((1-\theta)X_j + \sum_{i\neq j} X_i + \sum_{i\neq j}\frac{\theta X_j}{n-1}\right) &\geq p\left(X_j^* + \sum_{i\neq j X_i^*}\right) \\
p\left(\sum_{i\neq j} X_i^* + X_j\right) &\geq p\left(X_j^* + \sum_{i\neq j} X_i^*\right) \\
pX_j &\geq pX_j^* \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}
$$

Queda demostrar lo anterior con desigualdad estricta.[2]

Queremos demostrar que $X_i \succ_i X_i^* \Rightarrow pX_i > p\omega_i$ ya sabiendo que se cumple A.7. Vamos a demostrar por contradicción, supongamos que,

$$pX_i = pX_i^*$$

Como las preferencias son continuas,

$$\exists \theta \in (0,1) : \theta X_i \succ_i X_i^*$$

Por la ecuación A.7 podemos reescribir,

$$p\theta X_i \geq pX_i^* \qquad \text{(A.8)}$$

Como asumimos que cada individuo tiene una cantidad postiva de cada bien, se cumple que

$$pX_i^* > 0, \quad \wedge \quad pX_i - pX_i^* = 0$$

[2]Puesto que si es con igualdad una asignación preferible y alcanzable no es demandada, lo cual no hace sentido con el primer teorema.

Entonces considerando A.8,

$$p\theta X_i - pX_i^* < 0$$

Lo que contradice A.8

□

Considere dos puntos,

- *Convexidad y continudad son fundamentales en la demostración.* Los otros supuestos se pueden relajar (aunque otra demostración sería necesaria).
- Se requiere una redistribución de la riqueza inicial que *no distorsione los incentivos de los individuos*. Ergo, no distorsionar los precios.

A.3. Resolver equilibrio general con producción

Dado que este tipo de ejercicio suele generar problemas en los estudiantes del curso esto es un ejemplo de como resolver un equilibrio general con producción o como también lo llaman los fenianos:[3] la caja de Edgeworth $2 \times 2 \times 2$

Habrá una dotación de factores productivos K, L con total de $\bar{K}$ y $\bar{L}$ para cada factor. Usaremos una Cobb-Douglas tanto para la función de producción como para la de utilidad.

$$U_i(x_i, y_i) = x_i^{\alpha} y_i^{1-\alpha}, \quad i = A, B$$
$$x(K, L) = K_x^{\beta} L_x^{1-\beta}, \quad y(K, L) = K_y^{\beta} L_y^{1-\beta}$$

Es decir que los dos individuos consumen los bienes x, y producidos con los factores K, L. Las variables α y β representan las preferencias y ponderaciones para el consumo y producción respectivamente.

[3]feniano: dígase para referirse a un estudiante de la Facultad de Economía y Negocios de la Universidad de Chile

La eficiencia de producción se dará maximizando la producción de un bien sujeta a la producción del otro. De esta manera encontraremos los puntos que pertenecen a la frontera de posibilidades y que por tanto son eficientes.

$$\begin{aligned} \max_{K_x, L_x} \quad & x = K_x^{\beta} L_x^{1-\beta} \\ \text{s.a} \quad y =& K_y^{\beta} L_y^{1-\beta} \\ \bar{K} =& K_x + K_y \\ \bar{L} =& L_x + L_y \end{aligned}$$

Planteando el lagrangeano y resolviendo podemos optimizar la función.

$$\mathcal{L}: \quad K_x^{\beta} L_x^{1-\beta} + \lambda_1 (K_y^{\beta} L_y^{1-\beta} - y) + \lambda_2 (K_x + K_y - \bar{K}) + \lambda_3 (L_x + L_y - \bar{L})$$

Encontramos las condiciones de primer orden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_x} = \beta K_x^{\beta-1} L_x^{1-\beta} + \lambda_2 = 0 \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_x} = (1-\beta) K_x^{\beta} L_x^{-\beta} + \lambda_3 = 0 \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_y} = \lambda_1 \beta K_y^{\beta-1} L_y^{1-\beta} + \lambda_2 = 0 \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_y} = \lambda_1 (1-\beta) K_y^{\beta} L_y^{-\beta} + \lambda_3 = 0 \tag{A.12}$$

De las condiciones de primer orden encontramos las tasas marginales técnicas para la producción de los dos bienes. Vamos resolviendo el sistema de ecuaciones de la siguiente manera.

$$\frac{\beta K_x^{\beta-1} L_x^{1-\beta}}{(1-\beta) K_x^{\beta} L_x^{-\beta}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \Longrightarrow \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right) \frac{L_x}{K_x} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{A.13}$$

$$\frac{\lambda_1 \beta K_y^{\beta-1} L_y^{1-\beta}}{\lambda_1 (1-\beta) K_y^{\beta} L_y^{-\beta}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \Longrightarrow \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right) \frac{L_y}{K_y} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{A.14}$$

Como condición de eficiencia las tasas marginales de transformación deben ser iguales para los dos bienes. Al igualar encontraremos la curva de contrato de producción, es decir, los puntos eficientes para la producción.[4]

$$\frac{L_x}{K_x} = \frac{L_y}{K_y} \tag{A.15}$$

[4] Fíjese que tampoco era necesario plantear el lagrangeano para encontrar esta identidad, sin embargo como son problemas equivalentes se llega al resultado igualmente.

La curva de contrato es bastante simple en este caso pues asumimos que los dos bienes se producen de la misma manera $x(K, L) = y(K, L)$. Considerando los totales de producción podemos reescribir la expresión llegando a A.16,

$$\frac{L_x}{K_x} = \frac{\bar{L} - L_x}{\bar{K} - K_x}$$

$$K_x = \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_x \Longleftrightarrow K_y = \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_y \tag{A.16}$$

Acabamos de obtener la curva de contrato de la producción, para encontrar la expresión de la frontera de posibilidades utilizamos la expresión A.16 para llegar la cantidad óptima de factores para producir x e y.

$$x(K, L) = K_x^{\beta} L_x^{1-\beta}, \quad K_x = \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_x$$

$$x = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_x\right)^{\beta} L_x^{1-\beta} = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{\beta} L_x$$

$$L_x = \frac{\bar{L}^{\beta}}{\bar{K}^{\beta}} x$$

Reemplazando de vuelta en A.16 obtenemos,

$$L_x^* = \frac{\bar{L}^{\beta}}{\bar{K}^{\beta}} x \Longleftrightarrow K_x^* = \frac{\bar{K}^{1-\beta}}{\bar{L}^{1-\beta}} x \tag{A.17}$$

Como el problema es simétrico sería lo mismo para la produccióndel bien y.

$$L_y^* = \frac{\bar{L}^{\beta}}{\bar{K}^{\beta}} y \Longleftrightarrow K_y^* = \frac{\bar{K}^{1-\beta}}{\bar{L}^{1-\beta}} y$$

Ahora que tenemos la cantidad óptimo de factores para un mismo bien podemos utilizar las expresiones para encontrar la frontera de posibilidades de producción.

$$L_x^* + L_y^* = \bar{L}$$

$$\frac{\bar{L}^{\beta}}{\bar{K}^{\beta}} y + \frac{\bar{L}^{\beta}}{\bar{K}^{\beta}} x = \bar{L}$$

$$\frac{\bar{L}^{\beta}}{\bar{K}^{\beta}} y = \bar{L} - \frac{\bar{L}^{\beta}}{\bar{K}^{\beta}} x$$

$$\text{FPP:} \quad y = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{\beta} - x$$

De manera conveniente, la pendiente es lineal e igual a 1.

Ahora nos movemos al plano del consumo. Al igual que antes planteamos el problema con las restricciones correspondientes, ahora, con la restricción de la frontera de posibilidades.

$$
\begin{aligned}
\max_{x_A, y_A} \quad & U_A = x_A^{\alpha} y_A^{1-\alpha} \\
\text{s.a} \quad & U_B = x_B^{\alpha} y_B^{1-\alpha} \\
& \bar{x} = x_A + x_B \\
& \bar{y} = y_A + y_B \\
& \bar{y} = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{\beta} - x
\end{aligned}
$$

Planteamos el lagrangeano

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}: \quad & x_A^{\alpha} y_A^{1-\alpha} + \lambda_1 (x_B^{\alpha} y_B^{1-\alpha} - U_B) + \lambda_2 (x_A + x_B - \bar{x}) + \\
& \lambda_3 (y_A + y_B - \bar{y}) + \lambda_4 \left(\left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{\beta} - \bar{x} - \bar{y} \right)
\end{aligned}
$$

Derivamos para obtener las condiciones de primer orden.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = \alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{1-\alpha} + \lambda_2 = 0 \tag{A.18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = (1-\alpha) x_A^{\alpha} y_A^{-\alpha} + \lambda_3 = 0 \tag{A.19}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B} = \lambda_1 \alpha x_B^{\alpha-1} y_B^{1-\alpha} + \lambda_2 = 0 \tag{A.20}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_B} = \lambda_1 (1-\alpha) x_B^{\alpha} y_B^{-\alpha} + \lambda_3 = 0 \tag{A.21}$$

Resolvemos para obtener las tasas de sustitución de los bienes para cada individuo y en este caso consideramos la frontera de posibilidades.

$$\frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_A^{\alpha} y_A^{-\alpha}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \Longrightarrow \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{y_A}{x_A} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{A.22}$$

$$\frac{\lambda_1 \alpha x_B^{\alpha-1} y_B^{1-\alpha}}{\lambda_1(1-\alpha) x_B^{\alpha} y_B^{-\alpha}} = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} \Longrightarrow \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{y_B}{x_A} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \tag{A.23}$$

$$\frac{-\lambda_2}{-\lambda_3} = \frac{\lambda_4}{\lambda_4} \Longrightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = 1 \tag{A.24}$$

Acabamos de ver como la pendiente en el consumo coincide con la pendiente de la frontera de posibilidades. Cuadró la eficiencia en la producción de los bienes como en el consumo de los mismos.

Para ver este mismo proceso y ejercitar puede ver el siguiente video link.

APÉNDICE B

EL PROBLEMA DEL TIEMPO Y EL RIESGO

B.1. Random Walk

Incluyendo incertidumbre a un modelo con expectativas racionales podemos obtener distintos resultados dependiendo del tipo de función de utilidad. En este caso veremos como un individuo neutro al riesgo sigue una trayectoria de consumo tipo *random walk*.

Primero resolvamos el problema con un consumo futuro incierto.

$$
\begin{aligned}
&\max_{c_t, c_{t+1}} \quad u(c_t) + \mathbb{E}_t\{u(c_{t+1})\} \\
&s.a \quad y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} = c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r}
\end{aligned}
$$

Planteamos el lagrangeano:

$$\mathcal{L} : u(c_t) + \mathbb{E}_t\{u(c_{t+1})\} + \lambda \left(y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} - c_t - \frac{c_{t+1}}{1+r} \right)$$

Derivamos las condiciones de primer orden para encontrar la ecuación de Euler del consumo.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = u'(c_t) - \lambda = 0$$

$$u'(c_t) = \lambda \tag{B.1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}} = \frac{1}{1+\rho}\mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} - \frac{\lambda}{1+r} = 0$$

$$\frac{1+r}{1+\rho}\mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} = \lambda \tag{B.2}$$

$$u'(c_t) = \frac{1+r}{1+\rho}\mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} \tag{B.3}$$

La expresión B.3 es la ecuación de Euler.

Para probar que un individuo neutral al riesgo sigue un *random walk* en este caso podemos reemplazar la función de utilidad con una función cuadrática como en la expresión B.4. La utilidad marginal por tanto va a ser lineal lo cual describe un individuo neutro al riesgo.

$$u(c_t) = bc_t - \frac{a}{2}c_t^2 \tag{B.4}$$

Remplazmaos las funciones de utilidad marginales en la ecuación de Euler del consumo y asumimos que $r = \rho = 0$:

$$b - ac_t = \mathbb{E}_t\{b - ac_{t+1}\}$$

Aplicamos propiedades de la esperanza y simplificamos los b y $-a$:

$$c_t = \mathbb{E}_t\{c_{t+1}\} \tag{B.5}$$

Según muestra la ecuación B.5 el consumo en t va a ser igual a lo que se espera que sea el consumo en $t + 1$. Por lo que la trayectoria de consumo se mantendrá igual hasta que llegue un shock que la desvíe.

B.2. Incertidumbre y ahorro por precaución

Bajo el mismo caso de incertidumbre, un individuo con aversión al riesgo tendrá un ahorro por precaución. Esto ya que no se cumple el caso de B.5 ya que tendremos utilidades marginales crecientes a tasas decrecientes.

Esto se traduce en que la esperanza de la utilidad es mayor a utilidad de la esperanza

$$\mathbb{E}_t\{u(c_t)\} < u(\mathbb{E}_t\{c_t\}) \tag{B.6}$$

Podemos derivar la expresión.

$$\mathbb{E}_t\{u'(c_t)\} > u'(\mathbb{E}_t\{c_t\}) \tag{B.7}$$

Según B.3 (con $\rho = r = 0$) podemos reemplazar.

$$\begin{aligned} u'(c_t) = u'(\mathbb{E}_t\{c_{t+1}\}) &< \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} \\ u'(c_t) &< \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} \end{aligned} \tag{B.8}$$

De B.8 podemos interpretar que debido al perfil del consumidor se consume menos por una necesidad de ahorro por precaución.

B.3. Modelo CAPM de consumo

Los retornos están sujetos a varianza. retornos puedes estar sujetos a varianza (incertidumbre). Para individuos con expectativas racionales que tienen la opción de consumir en el presente o de invertir para llevar dinero al futuro podremos llegar a la ecuación de euler del tipo B.3. Específicamente,

$$u'(c_1) = \mathbb{E}_1\left[\frac{1+r^i}{1+\rho}u'(c_2)\right] \tag{B.9}$$

Donde r^i es un activo con riesgo. Queremos buscar el diferencial entre la esperanza del activo riesgoso y el libre de riesgo. Utilizando las propiedades de la esperanza podemos desarrollar sacando el descuento intertemporal de la esperanza y multiplicando la esperanza de los retornos $1 + r^i$ y $u'(c_2)$. Recordamos como desarrollar $\mathbb{E}(X \cdot Y)$ y aplicamos a B.9

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) + \text{Cov}(XY) \tag{B.10}$$

$$u'(c_1) = \frac{1}{1+\rho}\left[\mathbb{E}_1(1 + r^i) \cdot \mathbb{E}_1(u'(c^2)) + \text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2)\right] \tag{B.11}$$

$$\mathbb{E}_1(1 + r^i) = \frac{1}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))}\left[(1+\rho)u'(c_1) - \text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2))\right] \tag{B.12}$$

Ahora tenemos la esperanza de los activos riesgosos, necesitamos encontrar el diferencial entre estos y los de libre riesgo. Sabemos que en caso de que $1+r$ sea libre de riesgo podremos sacar los retornos como constantes de B.9. Llegamos a lo siguiente,

$$1 + r = \frac{1}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))}[(1+\rho)u'(c_1)] \tag{B.13}$$

Por lo que ahora que tenemos las variables definidas podemos encontrar el diferencial restando B.12 con B.13.

$$\mathbb{E}_1(1 + r^i) - (1 + r) = \frac{(1+\rho)u'(c_1) - \text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2)) - (1+\rho)u'(c_1)}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))}$$

Llegamos a que la diferencia entre los retornos riesgosos y los libres de riesgos debieran seguir esta igualdad.

$$\mathbb{E}_1(r^i) - r = -\frac{\text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2))}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))} \tag{B.14}$$

Esta expresión es la que da sentido a los premios por riesgo de un activo con retornos inciertos. Aunque se parezca mucho al consumo intertemporal este modelo CAPM de consumo considera incertidumbre. Por lo que las personas no solo estarían decidiendo si invertir a futuro por precaución sino también por aumentar el consumo futuro bajo un riesgo.

En caso de que si $\text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2)) < 0$ habrá un premio de por riesgo. Recordando que $u'(c_2) < 0$ podemos inferir que el retorno covaría positivamente con el consumo, por lo que en el futuro $t = 2$ se necesitaría pagar un premio por riesgo. Esto ya que si un activo paga más cuando el consumo es alto no estaría proveyendo de un seguro contra las caídas del ingreso, la única razón de mantenerlo en el portafolio sería si provee un buen retorno.

En caso de que $\mathrm{Cov}(1 + r^i, u'(c_2)) > 0$, es decir el retorno es bajo cuando el consumo es alto el rendimiento será menor al libre de riesgo. Esto es porque además de servir como ahorro también juega una función de seguro contra los malos tiempos