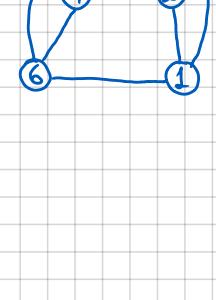


### Tópico 5

(13) Pode o seguindo grafo  $90^\circ$  em



$$G = (V, E) \quad V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$\begin{aligned}j(a) &= 5 \\j(b) &= 3 \\j(c) &= 4 \\j(d) &= 2 \\j(e) &= 6 \\j(f) &= 1\end{aligned}$$

$\delta: V(G) \rightarrow V(H)$  bijetor (conformidade)

$\forall g \in E(G) \Rightarrow j(g) \in E(H)$

por  
 $j$  é isomorfismo

$$G \cong H$$

(12) a)  $\therefore \vee \wedge \Delta$

$$5) \vdash \vdash$$

(15)  $E(G) + E(G^c) = E(K_n) = \binom{n}{2}$

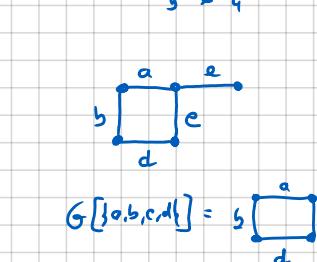
$$(G \cong G^c) \rightarrow (E(G) = E(G^c))$$

$$\begin{aligned}&= 2E(G) + \binom{n}{2} \Rightarrow n^2 \text{ de arestas (a partir de } n \text{ vértices)} \\&= 2E(G) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} \text{ simétrico}\end{aligned}$$

por  
 $\therefore G$  não pode ser isomórfico

ao seu complemento

### Subgrafo



Se  $H$  é subgrafo de  $G$  e  $V(H) = V(G)$  então  $H$  é subgrafo  $H$  digrafo  $H$  é abrangente

### Subgrafo induzido

$\rightarrow$  por um conjunto de vértices

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$G[\{1,2,3,4\}] = G - \{5,6\}$

$\Rightarrow$  por um conjunto de arestas

$$G[\{a,b,c,d\}] = G - \{e,f\}$$

$\Rightarrow$  por um conjunto de vértices

$$G[\{a,b,c,d\}] = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \neq \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \quad \downarrow$$

### Subgrafo menor

• trivial

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \quad \text{Grafo vazio } (K_0) \quad \text{Diamâmetro} = 0 \quad \text{do complemento} \\ \text{do completo de ordem } m+4$$

### PARTE II - grafos não orientados

Passar de um grafo

$$\begin{array}{c} \text{vertice inicial} \\ P = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_k, v_l) \\ \text{vertice final} \\ v_i, v_{i+1}, v_{i+2} \dots \text{vértices intermediários} \end{array}$$

outra forma que se estende entre vértices

Em grafos simples (não tem arestas duplas) ou paralelas

$$P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$$

• Trajetória - é um percurso com arestas repetidas

• Circuito - trajetória fechada ( $v_{\text{início}} = v_{\text{fim}}$ )

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \quad C = (1,2,5,7,8,6,5,4,1) \\ \text{ponto sóbrio} \\ \text{vértice} \quad \text{vertice}$$

• Caminho - trajetória sem vértices repetidos

• Círculo

$$(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_0)$$

Círculo  
Nunca volta a mesma posição a final coincide



Comprimento de um percurso =  $m^{\circ}$  de arestas (contando as arestas repetidas)

$$\begin{array}{c} P \\ \rightarrow \\ \text{com}(P) = 1 \end{array}$$

$$P = \dots \quad \text{com}(P) = 0$$

distância entre  $x \neq y$ ,  $x, y \in V(G) \Rightarrow x \neq y$  são vértices de  $G$

$\Rightarrow$  comprimento do caminho menor entre  $x, y$

$$G \quad \begin{array}{c} x \\ \square \\ y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{dist}(x,y) = \infty \\ \text{dist}(x,x) = 1 \\ \text{dist}(x,x) = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  se  $x$  tiver parente,  $\text{dist}(x,y)$  continua a ser 0 porque engorda o caminho + custo

exemplo

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

$$\text{dist}(v_3) = \infty$$

$$\text{dist}(v_3) \leq \text{dist}(v_2) + \text{dist}(v_3, v_2)$$

$$\text{dist}(v_2) + \text{dist}(v_3, v_2) \leq \Delta$$

Teorema

$\exists n \in \mathbb{N}$  e finito

$\cdot$   $G$  contém um caminho  $P$  tal que  $\text{com}(P) \geq \delta(G)$

$\cdot$  se  $\delta(G) \geq 2$ , então  $G$  contém um ciclo  $C$  tal que  $\text{com}(C) \geq \delta(G) + 1$

Demonstração

• Seja  $P$  um trajeto de comprimento maior

$$\dots \xrightarrow{v_0} \xrightarrow{v_1} \xrightarrow{v_2} \dots \xrightarrow{v_k} v_0$$

$$\delta(G) \leq d(v_0) \leq \text{com}(P)$$

porque se  $v_0$  é adjacente

a um vértice que não

está em  $P$ ,  $P$  não é

maior, o que é uma

contradição

$\bullet$   $\delta(G) \geq 2$

$P$  máximo

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array}$$

com  $\delta(G) \geq 2$ ,  $v_0$  é adjacente

a um vértice de  $P$

Siga  $v_1$  o vértice de  $P$  adjacente

a  $v_0$  que está a menor distância

de  $v_0$  menor possível

$$d(v_0) \leq d(v_1) = \text{dist}(v_0, v_1)$$

Considera o ciclo  $C$

$$\text{com}(C) = d(v_0) + 1$$

$$\delta(G) \leq d(v_0) \leq \text{com}(C) - 1$$

$$\text{com}(C) \geq \delta(G) + 1$$

Continua de  $G$

$g(G) = \text{comprimento de ciclo com menor comprimento}$

Excentricidade de  $v_0$  = distância máxima a  $v_0$

$$\begin{array}{c} c \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \\ 26 \\ 27 \\ 28 \\ 29 \\ 30 \\ 31 \\ 32 \\ 33 \\ 34 \\ 35 \\ 36 \\ 37 \\ 38 \\ 39 \\ 40 \\ 41 \\ 42 \\ 43 \\ 44 \\ 45 \\ 46 \\ 47 \\ 48 \\ 49 \\ 50 \\ 51 \\ 52 \\ 53 \\ 54 \\ 55 \\ 56 \\ 57 \\ 58 \\ 59 \\ 60 \\ 61 \\ 62 \\ 63 \\ 64 \\ 65 \\ 66 \\ 67 \\ 68 \\ 69 \\ 70 \\ 71 \\ 72 \\ 73 \\ 74 \\ 75 \\ 76 \\ 77 \\ 78 \\ 79 \\ 80 \\ 81 \\ 82 \\ 83 \\ 84 \\ 85 \\ 86 \\ 87 \\ 88 \\ 89 \\ 90 \\ 91 \\ 92 \\ 93 \\ 94 \\ 95 \\ 96 \\ 97 \\ 98 \\ 99 \\ 100 \\ 101 \\ 102 \\ 103 \\ 104 \\ 105 \\ 106 \\ 107 \\ 108 \\ 109 \\ 110 \\ 111 \\ 112 \\ 113 \\ 114 \\ 115 \\ 116 \\ 117 \\ 118 \\ 119 \\ 120 \\ 121 \\ 122 \\ 123 \\ 124 \\ 125 \\ 126 \\ 127 \\ 128 \\ 129 \\ 130 \\ 131 \\ 132 \\ 133 \\ 134 \\ 135 \\ 136 \\ 137 \\ 138 \\ 139 \\ 140 \\ 141 \\ 142 \\ 143 \\ 144 \\ 145 \\ 146 \\ 147 \\ 148 \\ 149 \\ 150 \\ 151 \\ 152 \\ 153 \\ 154 \\ 155 \\ 156 \\ 157 \\ 158 \\ 159 \\ 160 \\ 161 \\ 162 \\ 163 \\ 164 \\ 165 \\ 166 \\ 167 \\ 168 \\ 169 \\ 170 \\ 171 \\ 172 \\ 173 \\ 174 \\ 175 \\ 176 \\ 177 \\ 178 \\ 179 \\ 180 \\ 181 \\ 182 \\ 183 \\ 184 \\ 185 \\ 186 \\ 187 \\ 188 \\ 189 \\ 190 \\ 191 \\ 192 \\ 193 \\ 194 \\ 195 \\ 196 \\ 197 \\ 198 \\ 199 \\ 200 \\ 201 \\ 202 \\ 203 \\ 204 \\ 205 \\ 206 \\ 207 \\ 208 \\ 209 \\ 210 \\ 211 \\ 212 \\ 213 \\ 214 \\ 215 \\ 216 \\ 217 \\ 218 \\ 219 \\ 220 \\ 221 \\ 222 \\ 223 \\ 224 \\ 225 \\ 226 \\ 227 \\ 228 \\ 229 \\ 230 \\ 231 \\ 232 \\ 233 \\ 234 \\ 235 \\ 236 \\ 237 \\ 238 \\ 239 \\ 240 \\ 241 \\ 242 \\ 243 \\ 244 \\ 245 \\ 246 \\ 247 \\ 248 \\ 249 \\ 250 \\ 251 \\ 252 \\ 253 \\ 254 \\ 255 \\ 256 \\ 257 \\ 258 \\ 259 \\ 260 \\ 261 \\ 262 \\ 263 \\ 264 \\ 265 \\ 266 \\ 267 \\ 268 \\ 269 \\ 270 \\ 271 \\ 272 \\ 273 \\ 274 \\ 275 \\ 276 \\ 277 \\ 278 \\ 279 \\ 280 \\ 281 \\ 282 \\ 283 \\ 284 \\ 285 \\ 286 \\ 287 \\ 288 \\ 289 \\ 290 \\ 291 \\ 292 \\ 293 \\ 294 \\ 295 \\ 296 \\ 297 \\ 298 \\ 299 \\ 300 \\ 301 \\ 302 \\ 303 \\ 304 \\ 305 \\ 306 \\ 307 \\ 308 \\ 309 \\ 310 \\ 311 \\ 312 \\ 313 \\ 314 \\ 315 \\ 316 \\ 317 \\ 318 \\ 319 \\ 320 \\ 321 \\ 322 \\ 323 \\ 324 \\ 325 \\ 326 \\ 327 \\ 328 \\ 329 \\ 330 \\ 331 \\ 332 \\ 333 \\ 334 \\ 335 \\ 336 \\ 337 \\ 338 \\ 339 \\ 340 \\ 341 \\ 342 \\ 343 \\ 344 \\ 345 \\ 346 \\ 347 \\ 348 \\ 349 \\ 350 \\ 351 \\ 352 \\ 353 \\ 354 \\ 355 \\ 356 \\ 357 \\ 358 \\ 359 \\ 360 \\ 361 \\ 362 \\ 363 \\ 364 \\ 365 \\ 366 \\ 367 \\ 368 \\ 369 \\ 370 \\ 371 \\ 372 \\ 373 \\ 374 \\ 375 \\ 376 \\ 377 \\ 378 \\ 379 \\ 380 \\ 381 \\ 382 \\ 383 \\ 384 \\ 385 \\ 386 \\ 387 \\ 388 \\ 389 \\ 390 \\ 391 \\ 392 \\ 393 \\ 394 \\ 395 \\ 396 \\ 397 \\ 398 \\ 399 \\ 400 \\ 401 \\ 402 \\ 403 \\ 404 \\ 405 \\ 406 \\ 407 \\ 408 \\ 409 \\ 410 \\ 411 \\ 412 \\ 413 \\ 414 \\ 415 \\ 416 \\ 417 \\ 418 \\ 419 \\ 420 \\ 421 \\ 422 \\ 423 \\ 424 \\ 425 \\ 426 \\ 427 \\ 428 \\ 429 \\ 430 \\ 431 \\ 432 \\ 433 \\ 434 \\ 435 \\ 436 \\ 437 \\ 438 \\ 439 \\ 440 \\ 441 \\ 442 \\ 443 \\ 444 \\ 445 \\ 446 \\ 447 \\ 448 \\ 449 \\ 450 \\ 451 \\ 452 \\ 453 \\ 454 \\ 455 \\ 456 \\ 457 \\ 458 \\ 459 \\ 460 \\ 461 \\ 462 \\ 463 \\ 464 \\ 465 \\ 466 \\ 467 \\ 468 \\ 469 \\ 470 \\ 471 \\ 472 \\ 473 \\ 474 \\ 475 \\ 476 \\ 477 \\ 478 \\ 479 \\ 480 \\ 481 \\ 482 \\ 483 \\ 484 \\ 485 \\ 486 \\ 487 \\ 488 \\ 489 \\ 490 \\ 491 \\ 492 \\ 493 \\ 494 \\ 495 \\ 496 \\ 497 \\ 498 \\ 499 \\ 500 \\ 501 \\ 502 \\ 503 \\ 504 \\ 505 \\ 506 \\ 507 \\ 508 \\ 509 \\ 510 \\ 511 \\ 512 \\ 513 \\ 514 \\ 515 \\ 516 \\ 517 \\ 518 \\ 519 \\ 520 \\ 521 \\ 522 \\ 523 \\ 524 \\ 525 \\ 526 \\ 527 \\ 528 \\ 529 \\ 530 \\ 531 \\ 532 \\ 533 \\ 534 \\ 535 \\ 536 \\ 537 \\ 538 \\ 539$$