



Universidade do Minho

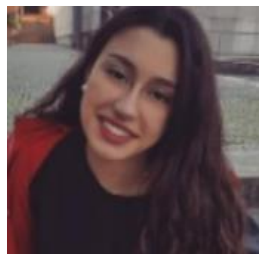
Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

- Trabalho 2 –

Novembro de 2019

Grupo 22

Henrique Veiga da Paz (a84372) ; Joana Isabel Afonso Gomes (a84912) ; Simão Freitas Monteiro (a85489)



• Índice

1. Parte I

1.1. Mapeamento da zona	3
1.2. Modelo de programação linear	
1.2.1. Variáveis de decisão	4
1.2.2. Dados	
1.2.3. Função objetivo	
1.2.4. Restrições	5
1.3. Rede do problema de transporte	
1.4. Ficheiros de <i>input</i> e <i>output</i> do <i>Relax4</i>	6
1.5. Análise da solução ótima	7
1.6. Validação do modelo	9

2. Parte II

2.1. Grafo bipartido do problema de transporte	10
2.2. Matriz com os valores dos caminhos mais curtos para cada par vértice de excesso/defeito	11
2.3. Ficheiros de <i>input</i> e <i>output</i> do <i>Relax4</i>	12
2.4. Análise da solução ótima	13
2.5. Validação do modelo	14

3. Conclusão	15
--------------------	----

Parte I

- Mapeamento da zona (com as alterações pedidas)

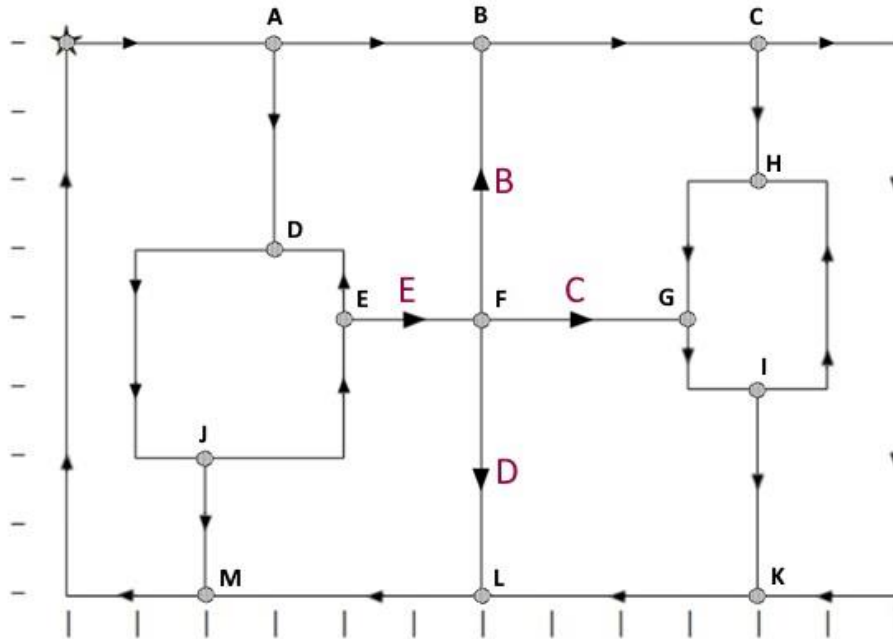


Figura 1

O valor de **ABCDE** foi escolhido atendendo ao que era requerido no enunciado, baseando-nos no número de aluno do Simão (maior número de inscrição), A85489.

- B é a subir porque 5 é ímpar;
- C para direita pois 4 é par;
- D fica a descer dada a paridade de 8;
- A direção de E seria inicialmente para a esquerda, mas tornava o problema impossível, dado que todos os arcos têm de ser percorridos (e, portanto, todos os vértices alcançados), e nesta situação o vértice G nunca podia ser atingido. Assim, trocamos para a direita.

• Modelo de Programação Linear

► Variáveis de decisão

Originalmente tínhamos as seguintes 20 variáveis X_{ij} que representam o número de vezes que o arco (i,j) é percorrido: $X_{ab}, X_{ad}, X_{bc}, X_{ck}, X_{ch}, X_{dj}, X_{ed}, X_{ef}, X_{fb}, X_{fg}, X_{fl}, X_{gi}, X_{hg}, X_{ih}, X_{ik}, X_{kl}, X_{lm}, X_{jm}, X_{je}, X_{ma}$ [U.M.] (Como não sabemos qual as unidades que a escala do enunciado pretende referenciar, às unidades das variáveis de decisão chamamos “Unidades de medida” (U.M.)).

De seguida, realizamos a **mudança de variável** sugerida, $Y_{ij} = X_{ij} - l_{ij}$, sendo l_{ij} o limite inferior no arco (i,j) .

As variáveis de decisão passam a ser, portanto $Y_{ab}, Y_{ad}, Y_{bc}, Y_{ck}, Y_{ch}, Y_{dj}, Y_{ed}, Y_{ef}, Y_{fb}, Y_{fg}, Y_{fl}, Y_{gi}, Y_{hg}, Y_{ih}, Y_{ik}, Y_{kl}, Y_{lm}, Y_{jm}, Y_{je}, Y_{ma}$ [U.M.], que passam a representar o número de vezes que o arco (i,j) é repetido.

► Dados

- **Comprimento de cada arco** (retirado da análise do mapa que foi fornecido no enunciado)

- | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|
| • AB mede 3 U.M. | • EF mede 2 U.M. | • IK mede 3 U.M. |
| • AD mede 3 U.M. | • FB mede 4 U.M. | • KL mede 4 U.M. |
| • BC mede 4 U.M. | • FG mede 3 U.M. | • LM mede 4 U.M. |
| • CK mede 12 U.M. | • FL mede 4 U.M. | • JM mede 2 U.M. |
| • CH mede 2 U.M. | • GI mede 2 U.M. | • JE mede 4 U.M. |
| • DJ mede 6 U.M. | • HG mede 3 U.M. | • MA mede 13 U.M. |
| • ED mede 2 U.M. | • IH mede 5 U.M. | |

Estas medidas foram possíveis de obter dada a escala apresentada no mapa do enunciado.

- **Mapeamento da rede**, apresentado na página 3.

► Função objetivo

Min: $z = 3*Y_{ab} + 3*Y_{ad} + 4*Y_{bc} + 12*Y_{ck} + 2*Y_{ch} + 6*Y_{dj} + 2*Y_{ed} + 2*Y_{ef} + 4*Y_{fb} + 3*Y_{fg} + 4*Y_{fl} + 2*Y_{gi} + 3*Y_{hg} + 5*Y_{ih} + 3*Y_{ik} + 4*Y_{kl} + 4*Y_{lm} + 2*Y_{jm} + 4*Y_{je} + 13*Y_{ma} + 85$

O que nos é pedido é determinar um circuito em que se minimize a distância total percorrida. Como tal, colocamos o comprimento de cada arco a multiplicar pela quantidade de vezes que esse arco é percorrido (variáveis de decisão). Esta expressão traduz então todas as distâncias percorridas possíveis, que é o que pretendemos minimizar.

Como mudamos a variável, há que acrescentar o excesso que resulta da mesma (a vez inicial que todos os arcos são percorridos), daí somarmos **85** no final da função objetivo ($85 = 3*1+3*1+4*1+12*1+2*1+6*1+2*1 + 2*1 + 4*1 + 3*1 + 4*1 + 2*1 + 3*1 + 5*1 + 3*1 + 4*1 + 4*1+2*1+4*1+13*1$).

► Restrições

$$R1) Y_{ab} + Y_{ad} - Y_{ma} = -1 \text{ [U.M.]};$$

$$R2) Y_{bc} - Y_{ab} - Y_{fb} = 1 \text{ [U.M.]};$$

$$R3) Y_{ch} + Y_{ck} - Y_{bc} = -1 \text{ [U.M.]};$$

$$R4) Y_{dj} - Y_{ad} - Y_{ed} = 1 \text{ [U.M.]};$$

$$R5) Y_{ed} + Y_{ef} - Y_{je} = -1 \text{ [U.M.]};$$

$$R6) Y_{fb} + Y_{fg} + Y_{fl} - Y_{ef} = -2 \text{ [U.M.]};$$

$$R7) Y_{gi} - Y_{hg} - Y_{fg} = 1 \text{ [U.M.]};$$

$$R8) Y_{hg} - Y_{ch} - Y_{ih} = 1 \text{ [U.M.]};$$

$$R9) Y_{ik} + Y_{ih} - Y_{gi} = -1 \text{ [U.M.]};$$

$$R10) Y_{jm} + Y_{je} - Y_{dj} = -1 \text{ [U.M.]};$$

$$R11) Y_{kl} - Y_{ik} - Y_{ck} = 1 \text{ [U.M.]};$$

$$R12) Y_{lm} - Y_{fl} - Y_{kl} = 1 \text{ [U.M.]};$$

$$R13) Y_{ma} - Y_{jm} - Y_{lm} = 1 \text{ [U.M.]};$$

Escolhemos as restrições acima apresentadas de forma a traduzir as regras de funcionamento do sistema.

A elaboração destas restrições, após a mudança de variável, leva-nos à obtenção dos **valores de oferta e de procura**, apresentados na rede do problema de transporte que se segue.

• Rede do problema de transporte

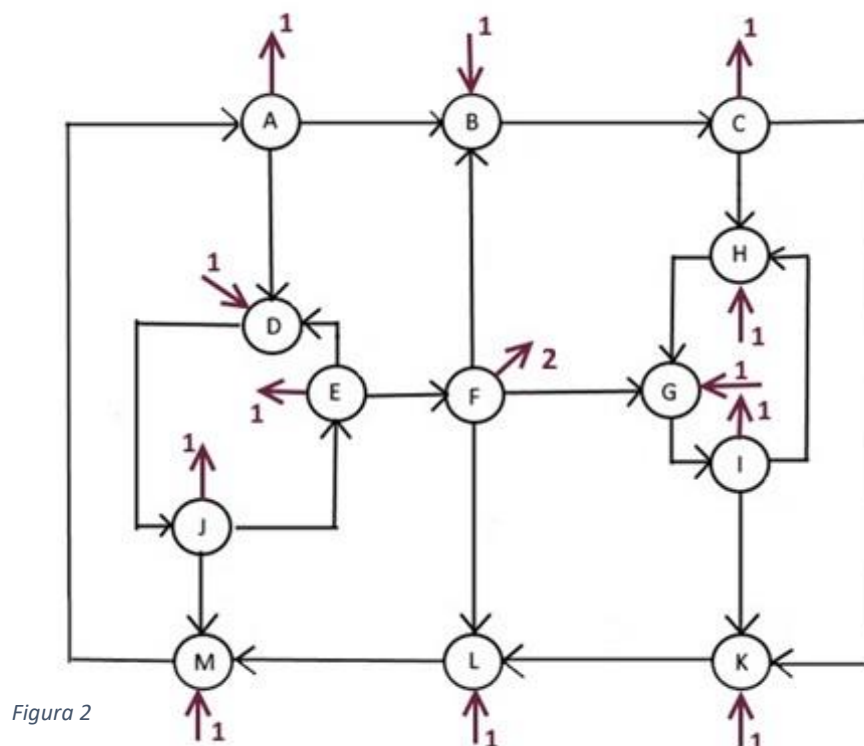


Figura 2

Descrevendo a rede de problema de transporte na Figura 2, as setas que apontam no sentido do vértice assinalam que se trata de um vértice de excesso, enquanto os números que as acompanham representam o valor da oferta. Já as setas que apontam para fora saem de vértices de defeito, e o valor assinala o valor da procura.

- Ficheiro de *input*
(Relax4)

```

13
13
20
1 2 3 100
1 4 3 100
2 3 4 100
3 8 2 100
3 11 12 100
4 10 6 100
5 4 2 100
5 6 2 100
6 2 4 100
6 7 3 100
6 12 4 100
7 9 2 100
8 7 3 100
9 8 5 100
9 11 3 100
10 5 4 100
10 13 2 100
11 12 4 100
12 13 4 100
13 1 13 100
-1
1
-1
1
-1
-2
1
1
-1
-1
1
1
1

```

- Ficheiro de *output*
(Relax4)

```

END OF READING
NUMBER OF NODES = 13, NUMBER OF ARCS = 20
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
  1 4  3.
  2 3  1.
  4 10 4.
  5 6  2.
  7 9  2.
  8 7  1.
  9 11 1.
 10 5  3.
 11 12 2.
 12 13 3.
 13 1  4.
OPTIMAL COST =  135.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 58
NUMBER OF ITERATIONS = 18
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 2
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 5
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 2
*****

```

NOTA: Ao longo deste trabalho, no que toca essencialmente ao *input* de *software*, o vértice A é representado pelo número 1, o B por 2, C por 3, e assim sucessivamente até ao M, que corresponde a 13. Isto porque os dados de entrada devem ser números inteiros.

• Análise da solução ótima

Visto que realizamos a mudança de variável, tal significa que todos os caminhos já foram percorridos pelo menos uma vez. O valor que aparece no *output* do *Relax4* é, portanto, o número de vezes que esse arco foi percorrido, não contando com a primeira vez.

Concluimos que a solução ótima obtida é, portanto, a mesma que no primeiro trabalho, que é apresentada de seguida (apesar de termos realocado vértices).

Nota: Nos caminhos abaixo apresentados, a mais carregado, estão os arcos entre os vértices de excesso e os vértices de defeito.

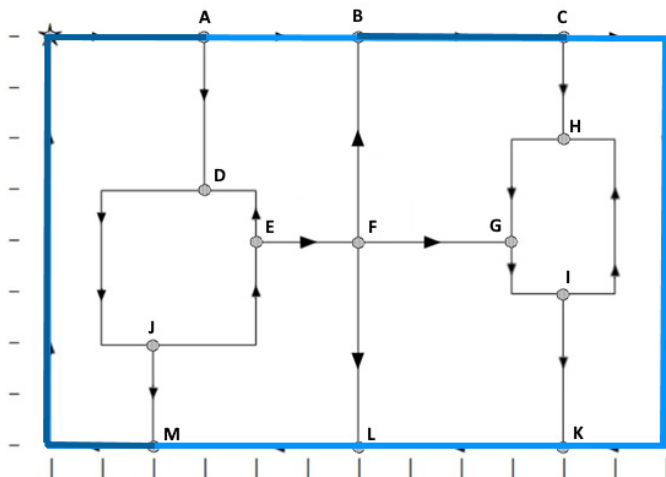


Figura 3

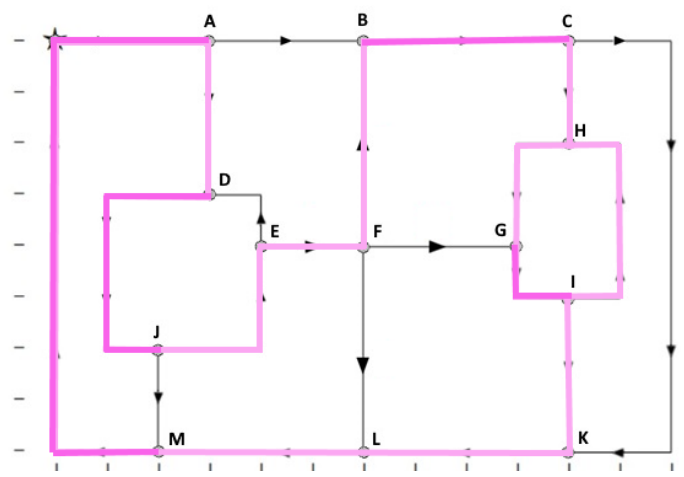


Figura 4

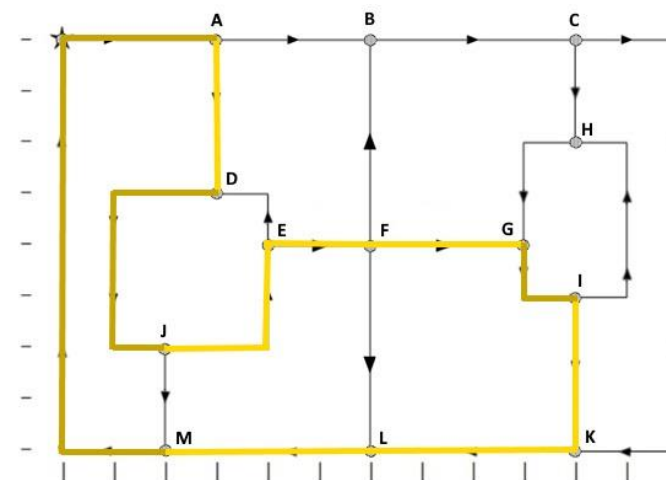


Figura 5

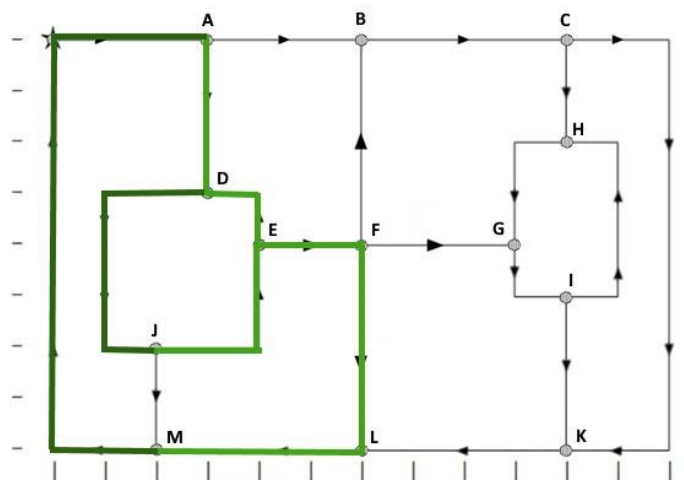


Figura 6

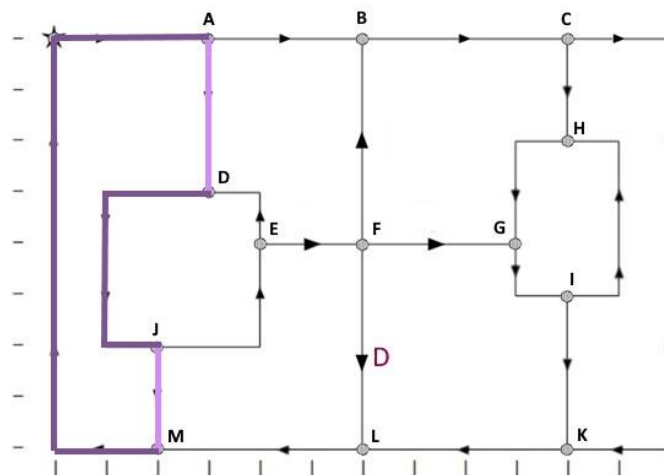


Figura 7

Uma maneira alternativa de apresentar a solução ótima traduz-se no desenho seguinte.

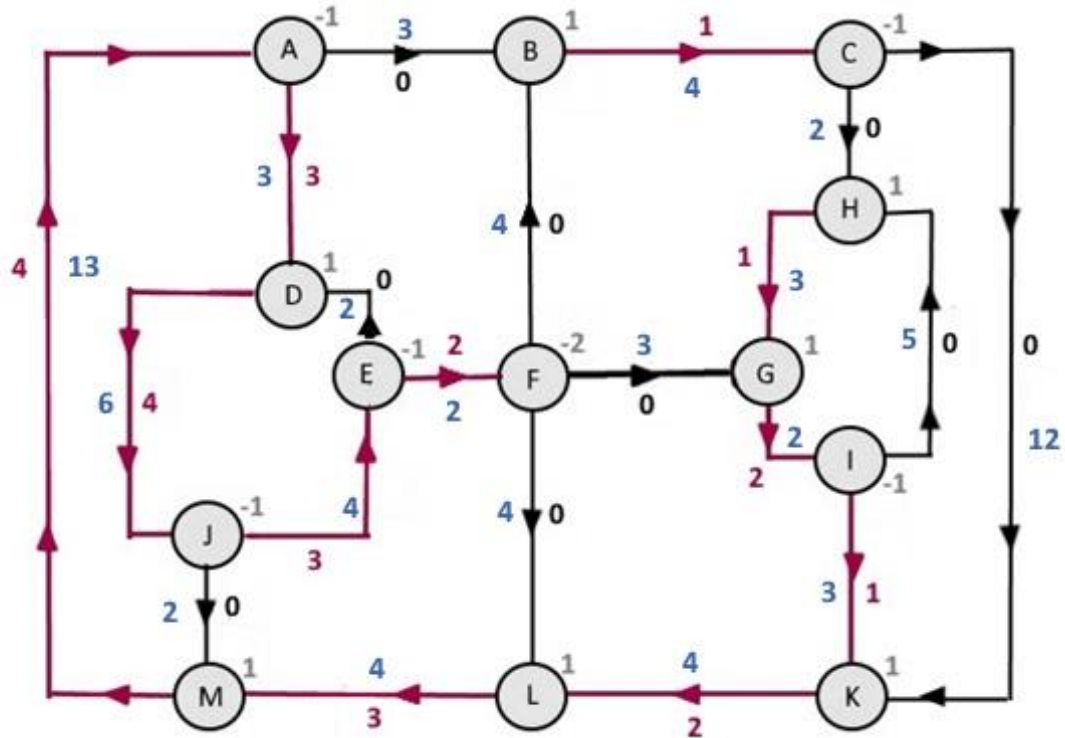


Figura 8

A **rosa** está apresentado o valor das variáveis de decisão na solução ótima, ou seja, a quantidade de vezes que esse arco entre vértices excesso/defeito é repetido.

A **azul** estão os custos de cada arco.

Fica assim de forma mais explícita assinalado o conjunto ótimo de caminhos de reposicionamento do veículo entre os vértices de excesso e os vértices de defeito.

Calculando o seu custo, obtemos:

- $\text{custo} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 13$

⇔ custo = 135.

• Validação do modelo

► Solução ótima

Min: $z = 3*Y_{ab} + 3*Y_{ad} + 4*Y_{bc} + 12*Y_{ck} + 2*Y_{ch} + 6*Y_{dj} + 2*Y_{ed} + 2*Y_{ef} + 4*Y_{fb} + 3*Y_{fg} + 4*Y_{fl} + 2*Y_{gi} + 3*Y_{hg} + 5*Y_{ih} + 3*Y_{ik} + 4*Y_{kl} + 4*Y_{lm} + 2*Y_{jm} + 4*Y_{je} + 13*Y_{ma} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 3*0 + 3*3 + 4*1 + 12*0 + 2*0 + 6*4 + 2*0 + 2*2 + 4*0 + 3*0 + 4*0 + 2*2 + 3*1 + 5*0 + 3*1 + 4*2 + 4*3 + 2*0 + 4*3 + 13*4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 135.$

(Somando 85, por razões já assinaladas na apresentação do Modelo de Programação Linear, o valor ótimo da função objetivo é **220**).

► Restrições

R1) $Y_{ab} + Y_{ad} - Y_{ma} = -1 \Leftrightarrow 0 + 3 - 4 = -1 \quad \checkmark$

R2) $Y_{bc} - Y_{ab} - Y_{fb} = 1 + 0 - 0 = 1 \quad \checkmark$

R3) $Y_{ch} + Y_{ck} - Y_{bc} = 0 + 0 - 1 = -1 \quad \checkmark$

R4) $Y_{dj} - Y_{ad} - Y_{ed} = 4 - 3 - 0 = 1 \quad \checkmark$

R5) $Y_{ed} + Y_{ef} - Y_{je} = 0 + 2 - 3 = -1 \quad \checkmark$

R6) $Y_{fb} + Y_{fg} + Y_{fl} - Y_{ef} = 0 + 0 + 0 - 2 = -2 \quad \checkmark$

R7) $Y_{gi} - Y_{hg} - Y_{fg} = 2 - 1 - 0 = 1 \quad \checkmark$

R8) $Y_{hg} - Y_{ch} - Y_{ih} = 1 - 0 - 0 = 1 \quad \checkmark$

R9) $Y_{ik} + Y_{ih} - Y_{gi} = 1 + 0 - 0 = -1 \quad \checkmark$

R10) $Y_{jm} + Y_{je} - Y_{dj} = 0 + 3 - 4 = -1 \quad \checkmark$

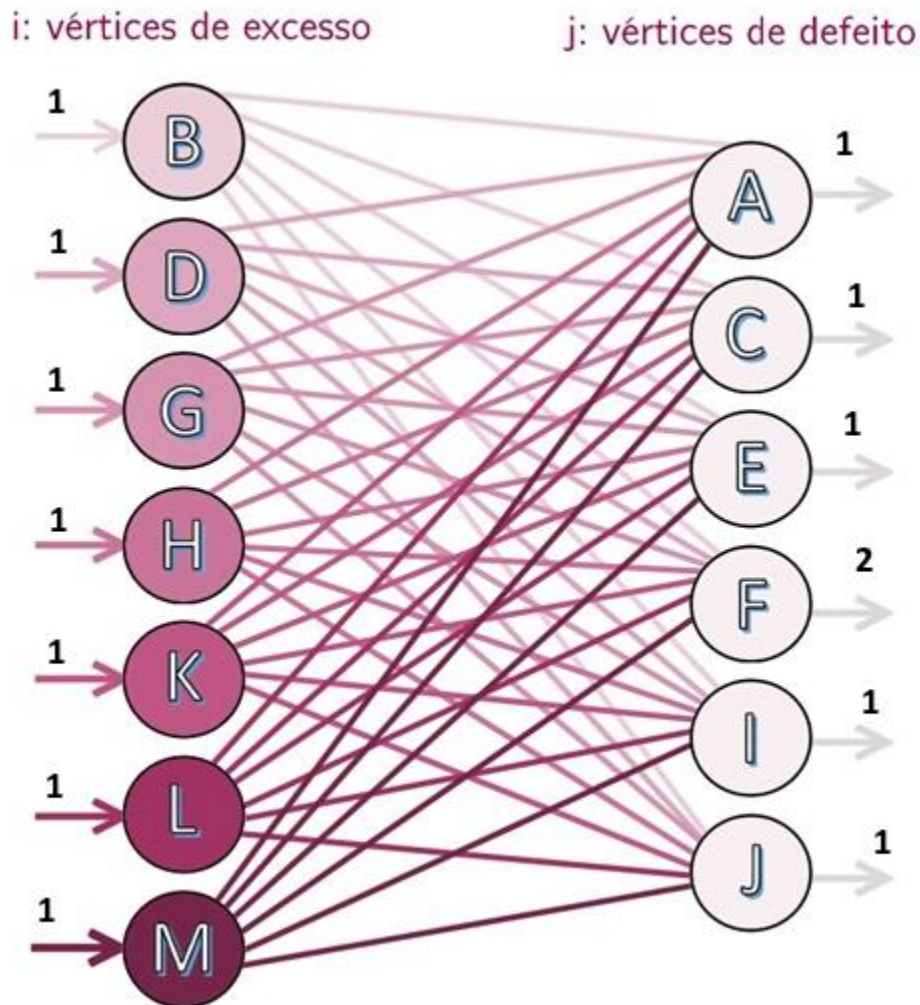
R11) $Y_{kl} - Y_{ik} - Y_{ck} = 2 - 1 - 0 = 1 \quad \checkmark$

R12) $Y_{lm} - Y_{fl} - Y_{kl} = 3 - 0 - 2 = 1 \quad \checkmark$

R13) $Y_{ma} - Y_{jm} - Y_{lm} = 4 - 0 - 3 = 1 \quad \checkmark$

Parte II

- Grafo bipartido do problema de transporte



NOTA: Os custos unitários de transporte dos arcos estão explicitados na página seguinte. A representação dos mesmos no grafo acima ficaria confuso visualmente.

O problema é **balanceado**: o número de caminhos que saem dos vértices de excesso é igual ao que chega aos vértices de defeito, ou seja, o subconjunto dos vértices de excesso e o subconjunto dos vértices de defeito têm a **mesma cardinalidade (42)**.

- Matriz com os valores dos caminhos mais curtos para cada par vértice de excesso/defeito

Pelo método de inspeção, determinamos os caminhos mais curtos para cada vértice de excesso/defeito, valores que estão apresentados na tabela seguinte:

	A	C	E	F	I	J
B	35	4	48	50	11	44
D	21	20	10	12	17	6
G	26	33	39	41	2	35
H	29	36	42	44	5	38
K	21	28	34	36	35	30
L	17	24	30	32	31	26
M	13	20	26	28	27	22

- Ficheiro de *input*

do *Relax4*:

```
13
42
2 1 35 100
2 3 4 100
2 5 48 100
2 6 50 100
2 9 11 100
2 10 44 100
4 1 21 100
4 3 20 100
4 5 10 100
4 6 12 100
4 9 17 100
4 10 6 100
7 1 26 100
7 3 33 100
7 5 39 100
7 6 41 100
7 9 2 100
7 10 35 100
8 1 29 100
8 3 36 100
8 5 42 100
8 6 44 100
8 9 5 100
8 10 38 100
11 1 21 100
11 3 28 100
11 5 34 100
11 6 36 100
11 9 35 100
11 10 30 100
12 1 17 100
12 3 24 100
12 5 30 100
12 6 32 100
12 9 31 100
12 10 26 100
13 1 13 100
13 3 20 100
13 5 26 100
13 6 28 100
13 9 27 100
13 10 22 100
-1
1
-1
1
-1
-2
1
1
-1
-1
1
1
1
```

- Ficheiro de *ouput*

do *Relax4*:

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 13, NUMBER OF ARCS = 42
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
  2 3 1.
  4 10 1.
  7 1 1.
  8 9 1.
 11 5 1.
 12 6 1.
 13 6 1.
OPTIMAL COST = 135.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 24
NUMBER OF ITERATIONS = 19
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 4
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 1
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 5
*****
```

• Análise da solução ótima

Como podemos ver nos documentos da página anterior, obtemos a mesma solução ótima que na Parte I e não uma alternativa, portanto a análise já está feita na parte anterior.

Podemos verificar que, **se decompusermos os caminhos entre vértices excesso/defeito que obtivemos na solução ótima em arcos, a soma dos arcos é igual ao resultado na parte I.**

Para explicitar esta situação, esquematizamos a divisão dos caminhos que obtivemos em arcos do seguinte modo:

- Xbc (caminho entre os vértices B e C): Arco BC. ¹
- Xdj (caminho entre os vértices D e J): Arco DJ. ¹
- Xga (caminho entre os vértices G e A): Arcos GI, IK, KL, LM, MA. ^{1 1 1 1 1}
- Xhi (caminho entre os vértices H e I): Arco HG, GI. ^{1 2}
- Xke (caminho entre os vértices K e E): Arcos KL, LM, MA, AD, DJ, JE. ^{2 2 2 1 2 1}
- Xlf (caminho entre os vértices L e F): Arcos LM, MA, AD, DJ, JE, EF. ^{3 3 2 3 2 1}
- Xmf (caminho entre os vértices M e F): Arcos MA, AD, DJ, JE, EF. ^{4 3 4 3 2}

Como podemos concluir, e confrontando as vezes que os arco entre vértices excesso/defeito são percorridos (descontando a primeira vez) na Figura 8, na Análise da solução ótima da Parte I, os valores coincidem com as vezes que os arcos se repetem nos resultados que obtivemos nessa parte do trabalho.

• Validação do modelo

As variáveis de decisão representam o número de vezes que o arco

A função objetivo do modelo que desenvolvemos nesta parte do trabalho é, portanto,

$$\text{Min: } z = 35 * X_{ba} + 4 * X_{bc} + 48 * X_{be} + 50 * X_{bf} + 11 * X_{bi} + 44 * X_{bj} + 21 * X_{da} + 20 * X_{dc} + 10 * X_{de} + 12 * X_{df} + 17 * X_{di} + 6 * X_{dj} + 26 * X_{ga} + 33 * X_{gc} + 39 * X_{ge} + 41 * X_{gf} + 2 * X_{gi} + 35 * X_{gj} + 29 * X_{ha} + 36 * X_{hc} + 42 * X_{he} + 44 * X_{hf} + 5 * X_{hi} + 38 * X_{hj} + 21 * X_{ka} + 28 * X_{kc} + 34 * X_{ke} + 36 * X_{kf} + 35 * X_{ki} + 30 * X_{kj} + 17 * X_{la} + 24 * X_{lc} + 30 * X_{le} + 32 * X_{lf} + 31 * X_{li} + 26 * X_{lj} + 13 * X_{ma} + 20 * X_{mc} + 26 * X_{me} + 28 * X_{mf} + 27 * X_{mi} + 22 * X_{mj} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 35*0 + 4*1 + 48*0 + 50*0 + 11*0 + 44*0 + 21*0 + 20*0 + 10*0 + 12*0 + 17*0 + 6*1 + 26*1 + 33*0 + 39*0 + 41*0 + 2*0 + 35*0 + 29*0 + 36*0 + 42*0 + 44*0 + 5*1 + 38*0 + 21*0 + 28*0 + 34*1 + 36*0 + 35*0 + 30*0 + 17*0 + 24*0 + 30*0 + 32*1 + 31*0 + 26*0 + 13*0 + 20*0 + 26*0 + 28*1 + 27*0 + 22*0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 135.$$

Somando 85, o valor ótimo da função objetivo é, portanto, 220 (a mesma solução ótima que na parte 1).

Conclusão

A realização do presente trabalho permitiu-nos aprofundar conceitos sobre problemas de transportes, ajudando-nos a consolidar a matéria lecionada, numa vertente mais prática, deixando-nos assim mais bem preparados e contribuindo para percebermos de forma mais clara todas as noções desta área.

Contrariamente ao sucedido no primeiro trabalho, foram sentidas algumas dificuldades aquando da realização, derivadas essencialmente do facto de não interpretarmos de forma clara o português, suscitando dúvidas sobre o que nos estava a ser proposto e gerando algum sentimento de incerteza no processo de elaboração das respostas.

À parte destas dúvidas, no que toca ao *software* utilizado (*Relax4*), não tivemos qualquer complicação na utilização do programa em si, mostrando-se bastante útil para o desenvolvimento das questões.