Universidade do Minho

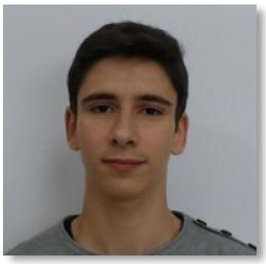
# Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

# - Trabalho 1 –

Outubro de 2019

Grupo 22

Henrique Veiga da Paz (a84372) ; Joana Isabel Afonso Gomes (a84912) ; Simão Freitas Monteiro (a85489)



- # Índice

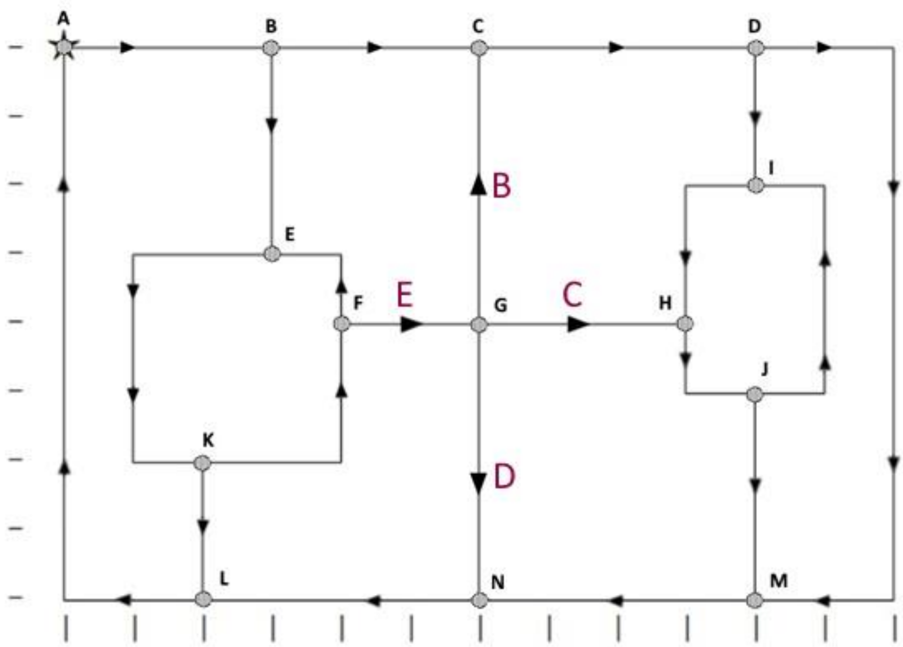
# • Introdução

Com o objetivo de avaliar a capacidade de análise e resolução de problemas de programação linear, foi-nos proposto um enunciado com um mapa, em que o objetivo será percorrê-lo na menor distância possível, sendo que todos os arcos do mapa têm de ser percorridos pelo menos uma vez.

Ao longo deste trabalho vão ser testadas as nossas capacidades no que toca ao desenvolvimento de um modelo *simplex*, que essencialmente esteja correto e resolva o problema formulado.

É esperado que a realização do mesmo ajude a desenvolver as nossas competências a esta UC e que seja simultaneamente uma forma prática de melhor entender a matéria lecionada até ao momento e cessar dúvidas acerca deste tema.

# • Mapeamento da zona (com as alterações pedidas)




O valor de ABCDE foi escolhido atendendo ao que era requerido no enunciado, baseando-nos no número de aluno do Simão (maior número de inscrição), A85489.

- B é a subir porque 5 é ímpar;
- C para direita pois 4 é par;
- D fica a descer dada a paridade de 8;
- A direção de E seria inicialmente para a esquerda, mas tornava o problema impossível, dado que todos os arcos têm de ser percorridos (e, portanto, todos os vértices alcançados), e nesta situação o vértice G nunca podia ser atingido. Assim, trocamos para a direita.

# • Modelo de Programação Linear

## ▸ Variáveis de decisão

Quantidade de vezes que passa no caminho entre aqueles vértices.

$X_{ab}$, $X_{bc}$, $X_{be}$, $X_{cd}$, $X_{di}$, $X_{dm}$, $X_{ek}$, $X_{fe}$, $X_{fg}$, $X_{gc}$, $X_{gh}$, $X_{gl}$, $X_{hj}$, $X_{ih}$, $X_{ji}$, $X_{jm}$, $X_{kf}$, $X_{kl}$, $X_{la}$, $X_{ml}$ [U.M.]

Escolhemos estas variáveis porque o objetivo do problema passa por obter uma distância mais curta, perante os requerimentos apresentados. Como tal, concluímos que havia que contabilizar a quantidade de vezes que os caminhos eram percorridos, para podermos realizar o cálculo da distância total percorrida.

Como não sabemos qual as unidades que a escala do enunciado pretende referenciar, às unidades das variáveis de decisão chamamos "Unidades de medida" (U.M.).

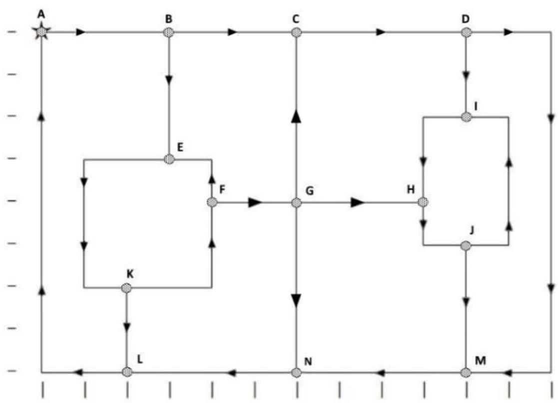
## ▸ Dados

- Comprimento de cada arco (retirado da análise do mapa que foi fornecido no enunciado)

- $X_{ab}$ mede 3 U.M.
- $X_{bc}$ mede 3 U.M.
- $X_{be}$ mede 3 U.M.
- $X_{cd}$ mede 4 U.M.
- $X_{di}$ mede 2 U.M.
- $X_{dm}$ mede 12 U.M.
- $X_{ek}$ mede 6 U.M.
- $X_{fe}$ mede 2 U.M.
- $X_{fg}$ mede 2 U.M.
- $X_{gc}$ mede 4 U.M.
- $X_{gh}$ mede 3 U.M.
- $X_{gl}$ mede 8 U.M.
- $X_{hj}$ mede 2 U.M.
- $X_{ih}$ mede 3 U.M.
- $X_{ji}$ mede 5 U.M.
- $X_{jm}$ mede 3 U.M.
- $X_{kf}$ mede 4 U.M.
- $X_{kl}$ mede 2 U.M.
- $X_{la}$ mede 10 U.M.
- $X_{ml}$ mede 8 U.M.

Estas medidas foram possíveis de obter dada a escala apresentada no mapa do enunciado.

- Mapeamento dos caminhos, através do esquema apresentado.




A disposição dos caminhos no mapa e a correta interpretação dos mesmos no decorrer do modelo é importante para obtermos os resultados corretos do problema.

▸ Função objetivo

Min: $z = 3*X_{ab} + 3*X_{bc} + 3*X_{be} + 4*X_{cd} + 2*X_{di} + 12*X_{dm} + 6*X_{ek} + 2*X_{fe} + 2*X_{fg} + 4*X_{gc} + 3*X_{gh} + 4*X_{gn} + 2*X_{hj} + 3*X_{ih} + 5*X_{ji} + 3*X_{jm} + 4*X_{kf} + 2*X_{kl} + 10*X_{la} + 4*X_{mn} + 4*X_{nl}$ [U.M]

O que nos é pedido é determinar um circuito em que se minimize a distância total percorrida. Como tal, colocamos o comprimento de cada arco a multiplicar pela quantidade de vezes que esse arco é percorrido (variáveis de decisão). Esta expressão traduz então todas as distâncias percorridas possíveis, que é o que pretendemos minimizar.

▸ Restrições

R1) $X_{ab} - X_{la} = 0$ [U.M.];

R2) $X_{bc} + X_{be} - X_{ab} = 0$ [U.M.];

R3) $X_{be} + X_{fe} - X_{ek} = 0$ [U.M.];

R4) $X_{bc} + X_{gc} - X_{cd} = 0$ [U.M.];

R5) $X_{dm} + X_{di} - X_{cd} = 0$ [U.M.];

R6) $X_{di} + X_{ji} - X_{ih} = 0$ [U.M.];

R7) $X_{fe} + X_{fg} - X_{kf} = 0$ [U.M.];

R8) $X_{gc} + X_{gh} + X_{gn} - X_{fg} = 0$ [U.M.];

R9) $X_{ih} + X_{gh} - X_{hj} = 0$ [U.M.];

R10) $X_{jm} + X_{ji} - X_{hj} = 0$ [U.M.];

R11) $X_{dm} + X_{jm} - X_{mn} = 0$ [U.M.];

R12) $X_{kf} + X_{kl} - X_{ek} = 0$ [U.M.];

R13) $X_{kl} + X_{nl} - X_{la} = 0$ [U.M.];

R14) $X_{gn} + X_{mn} - X_{nl} = 0$ [U.M.];

Escolhemos as restrições acima apresentadas de forma a traduzir as regras de funcionamento do sistema. A maneira como traduzem as soluções admissíveis passa por quatro casos distintos:

- No caso, por exemplo, da restrição 2 (R2), entra um caminho no vértice B e a partir daí existe a possibilidade de seguir por 2 arcos distintos, sendo que apenas um pode ser percorrido de cada vez. Assim, e usando esta restrição como exemplo (visto que existem várias situações com o mesmo esquema), escrevemos Xbc + Xbe - Xab = 0, dado que a soma da quantidade de vezes que percorremos o arco BC e o arco BE tem que ser igual às que o caminho AB é atravessado, dado que este bifurca nos dois arcos.
- Outra situação é representada em R4, um cenário em que dois caminhos chegam a um vértice e apenas um saí desse. Neste exemplo, a quantidade de vezes que CD é atravessado tem de igualar as que BC e GC são percorridas, visto que de cada vez que há uma chegada ao vértice C, só pode ter vindo por um desses caminhos.
- Um caso excecional que ocorre apenas uma vez é o do vértice G, em que entra um arco e saem três. Deste modo, usando a mesma lógica que nas bifurcações, retiramos que $X_{gc} + X_{gh} + X_{gn} = X_{fg}$, o que se traduz na restrição 8 (Xgc + Xgh + Xgn – Xfg = 0).

- Por fim, existe uma restrição que envolve unicamente duas variáveis de decisão, dado que no vértice de partida (A) apenas entra e sai um caminho (R1: Xab - Xla = 0). Por outras palavras, o número de vezes que o percurso é iniciado coincide com o número de vezes que é terminado (retorna ao ponto de partida).

| | xab | xbc | xbe | xcd | xdi | xdm | xek | xfe | xfg | xgc | xgh | xgl | xhj | xih | xji | xjm | xkf | xkl | xla | xml |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| min | 3 | 3 | 3 | 4 | 2 | 12 | 6 | 2 | 2 | 4 | 3 | 8 | 2 | 3 | 5 | 3 | 4 | 2 | 10 | 8 |
| R1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| R2 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R4 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R5 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| R8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| R12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| R13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 |

(Tabela de Restrições)

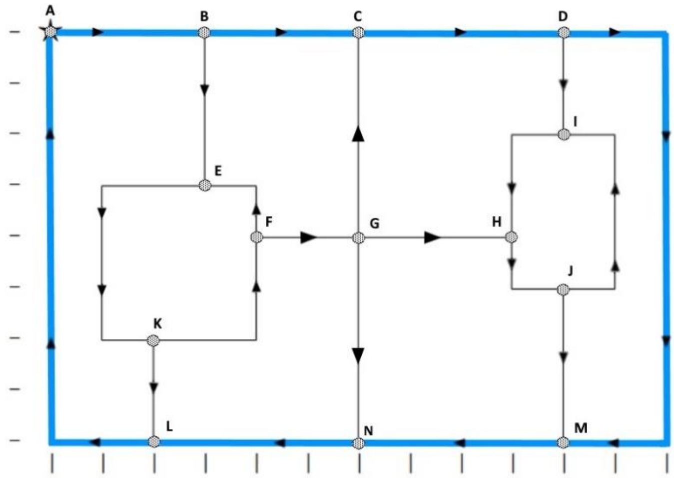
- Ficheiro de *input*

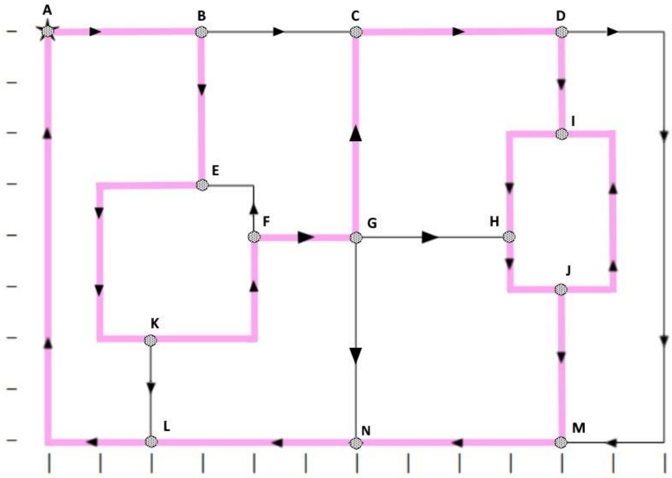
```
/* Função objetivo */
  3 xab + 3 xbc + 3 xbe + 4 xcd + 2 xdi + 12 xdm + 6 xek + 2 xfe
+ 2 xfg + 4 xgc + 3 xgh + 4 xgn + 2 xhj + 3 xih + 5 xji + 3 xjm
+ 4 xkf + 2 xkl + 10 xla + 4 xmn + 4 xnl;

/* Restrições de não negatividade */
xab >= 1;
xbc >= 1;
xbe >= 1;
xcd >= 1;
xdi >= 1;
xdm >= 1;
xek >= 1;
xfe >= 1;
xfg >= 1;
xgc >= 1;
xgh >= 1;
xgn >= 1;
xhj >= 1;
xih >= 1;
xji >= 1;
xjm >= 1;
xkf >= 1;
xkl >= 1;
xla >= 1;
xmn >= 1;
xnl >= 1;

/* Outras restrições*/
xab - xla = 0;
xbc + xbe - xab = 0;
xbe + xfe - xek = 0;
xbc + xgc - xcd = 0;
xdm + xdi - xcd = 0;
xdi + xji - xih = 0;
xfe + xfg - xkf = 0;
xgc + xgh + xgn - xfg = 0;
xih + xgh - xhj = 0;
xjm + xji - xhj = 0;
xdm + xjm - xmn = 0;
xkf + xkl - xek = 0;
xkl + xnl - xla = 0;
xgn + xmn - xnl = 0;

/* Restrição de integralidade*/
int xab, xbc, xbe, xcd, xdi, xdm, xek, xfe, xfg, xgc, xgh, xgn, xhj, xih, xji,
    xjm, xkf, xkl, xla, xmn, xnl;
```

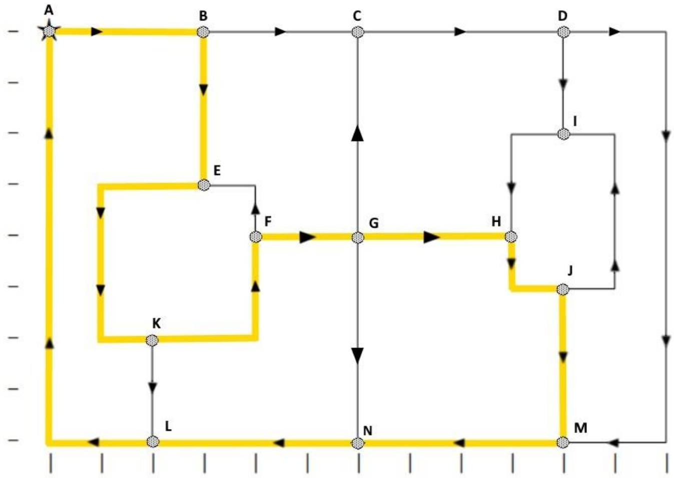
- Ficheiro de *output*

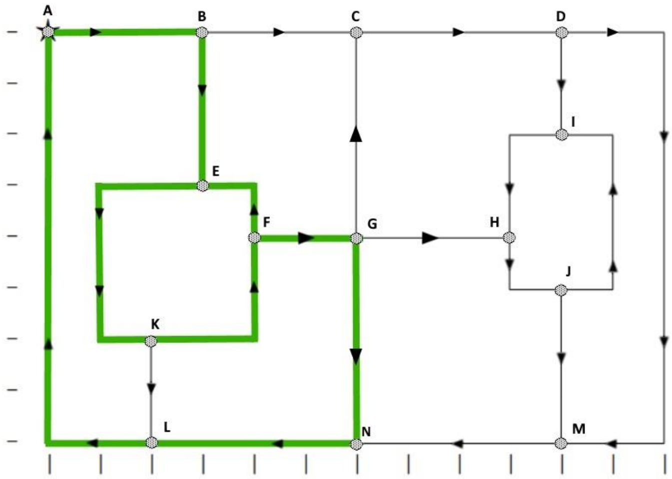
| Variables | MILP ... | result |
|---|---|---|
| | 220 | 220 |
| xab | 5 | 5 |
| xbc | 1 | 1 |
| xbe | 4 | 4 |
| xcd | 2 | 2 |
| xdi | 1 | 1 |
| xdm | 1 | 1 |
| xek | 5 | 5 |
| xfe | 1 | 1 |
| xfg | 3 | 3 |
| xgc | 1 | 1 |
| xgh | 1 | 1 |
| xgl | 1 | 1 |
| xhj | 3 | 3 |
| xih | 2 | 2 |
| xji | 1 | 1 |
| xjm | 2 | 2 |
| xkf | 4 | 4 |
| xkl | 1 | 1 |
| xla | 5 | 5 |
| xml | 3 | 3 |
| xnl | 4 | 4 |

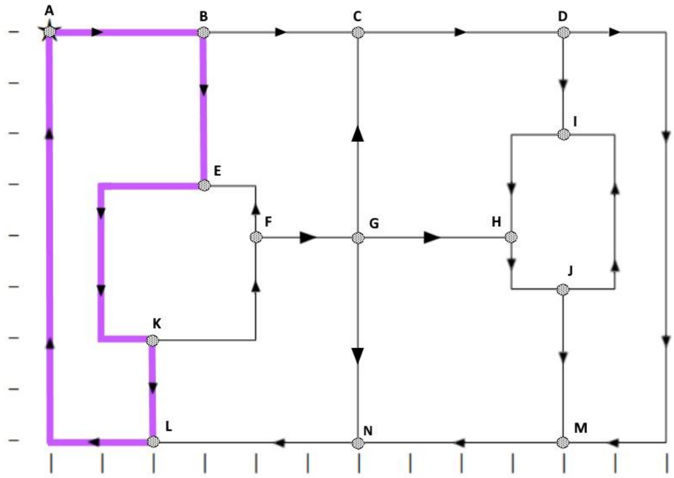
- Análise da solução ótima




- O primeiro circuito um tem um custo de 40 U.M.
- O segundo circuito um tem um custo de 64 U.M.
- O terceiro circuito um tem um custo de 44 U.M.
- O quarto circuito um tem um custo de 48 U.M.
- O último circuito um tem um custo de 24 U.M.

Assim, o custo total dos circuitos é de 220 U.M.

## • Validação do modelo

Para verificar que os valores das variáveis de decisão a que chegamos na solução ótima confirmam o valor da função objetivo respeitando todas as restrições, procedemos a substituir nessa solução os valores obtidos dessas variáveis.

► Solução ótima

Assim, obtemos o seguinte resultado na função objetivo:

z = 3*Xab + 3*Xbc + 3*Xbe + 4*Xcd + 2*Xdi + 12*Xdm + 6*Xek + 2*Xfe + 2*Xfg + 4*Xgc + 3*Xgh + 4*Xgn + 2*Xhj + 3*Xih + 5*Xji + 3*Xjm + 4*Xkf + 2*Xkl + 10*Xla + 4*Xmn + 4*Xnl ⇔

⇔ z = 3***5** + 3***1** + 3***4** + 4***2** + 2***1** + 12***1** + 6***5** + 2***1** + 2***3** + 4***1** + 3***1** + 4***1** + 2***3** + 3***2** + 5***1** + 3***2** + 4***4** + 2***1** + 10***5** + 4***3** + 4*4 = 220 [U.M]

Concluímos que o resultado da solução ótima (custo total dos circuitos) que obtemos se confirma.

► Restrições

Procedemos a substituir em todas as restrições que criamos os valores das variáveis de decisão obtidas, para verificar que a solução ótima as respeita.

R1) Xab - Xla = 0 ⇔ 1 - 1 = 0 ✓

R2) Xbc + Xbe - Xab ⇔ 1 + 4 - 5 = 0 ✓

R3) Xbe + Xfe - Xek = 0 ⇔ 4 + 1 - 5 = 0 ✓

R4) Xbc + Xgc - Xcd = 0 ⇔ 1 + 1 - 2 = 0 ✓

R5) Xdm + Xdi - Xcd = 0 ⇔ 1 + 1 - 2 = 0 ✓

R6) Xdi + Xji - Xih = 0 ⇔ 1 + 1 - 2 = 0 ✓

R7) Xfe + Xfg - Xkf = 0 ⇔ 1 + 3 - 4 = 0 ✓

R8) Xgc + Xgh + Xgn - Xfg = 0 ⇔ 1 + 4 - 5 = 0 ✓

R9) Xih + Xgh - Xhj = 0 ⇔ 2 + 1 - 3 = 0 ✓

R10) Xjm + Xji - Xhj = 0 ⇔ 2 + 1 - 3 = 0 ✓

R11) Xdm + Xjm - Xmn = 0 ⇔ 1 + 2 - 3 = 0 ✓

R12) Xkf + Xkl - Xek = 0 ⇔ 4 + 1 - 5 = 0 ✓

R13) Xkl + Xnl - Xla = 0 ⇔ 1 + 4 - 5 = 0 ✓

R14) Xgn + Xmn - Xnl = 0 ⇔ 1 + 3 - 4 = 0 ✓

# • Conclusão

No decorrer da realização deste trabalho não encontramos muitos obstáculos no que toca ao desenvolvimento do problema que nos foi proposto. No entanto, se tivéssemos de assinalar algo no que toca às principais dificuldades enfrentadas, apontaríamos a ferramenta que nos foi apresentada para auxílio à sua realização (*LPSolve IDE*), que originou alguma dificuldade de adaptação inicialmente. Isto deve-se, principalmente, ao seu *layout* complicado, em adição há pouca informação e explicações insatisfatórias disponíveis *online* sobre o seu funcionamento.

Numa apreciação global do trabalho, concluímos que, além de nos ter agradado e entusiasmado a realização do exercício proposto, foi-nos também possível a familiarização com o *software* sugerido como auxiliar, com que ainda não havíamos tido contacto.

Vemos o resultado final como satisfatório e assumimos uma perspetiva positiva no que toca às bases fornecidas com este desafio, à maneira como nos debruçamos perante o mesmo e a uma dimensão mais prática - e contraposta com um exemplo específico - da matéria lecionada na Unidade Curricular.