



FICHA DE EXERCÍCIOS 2
Primitivação (Integração indefinida)

Exercícios propostos

1. Calcule os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int (3x^2 + 5x + 7) dx$	(b) $\int \sqrt[3]{x} dx$	(c) $\int (x^3 + 1)^2 dx$	(d) $\int \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx$
(e) $\int \frac{3x^2}{1 + x^3} dx$	(f) $\int \frac{1}{x^7} dx$	(g) $\int \frac{x + 1}{2 + 4x^2} dx$	(h) $\int 4x^3 \cos x^4 dx$
(i) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	(j) $\int \sin x \cos^5 x dx$	(k) $\int \operatorname{tg} x dx$	(l) $\int \frac{\ln x}{x} dx$
(m) $\int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x dx$	(n) $\int x 7^{x^2} dx$	(o) $\int \sin(\sqrt{2}x) dx$	(p) $\int \frac{x^2 + 1}{x} dx$
(q) $\int \frac{x}{(7 + 5x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$	(r) $\int \frac{x^3}{1 + x^8} dx$	(s) $\int \frac{5x^2}{\sqrt{1 - x^6}} dx$	(t) $\int \frac{1}{x^2 + 7} dx$

2. Determine a primitiva F para a função $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$, no intervalo $] -\infty, 0[$, tal que $F(-1) = 1$.

3. Sabendo que a função f satisfaz a igualdade $\int f(x) dx = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2}x^2 + c$, com $c \in \mathbb{R}$, determinar $f(\frac{\pi}{4})$.

4. Seja f a função de domínio \mathbb{R}^+ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$. Determine a primitiva de f que se anula em $x = 2$.

5. Determine a função g que verifica as seguintes condições:

$$g'(x) = \frac{1}{(1 + \arctg^2(x))(1 + x^2)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

6. Calcule, usando a técnica de integração por partes, os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int x \cos x dx$	(b) $\int x^2 \cos x dx$	(c) $\int e^{-3x}(2x + 3) dx$	(d) $\int \ln^2 x dx$
(e) $\int e^{2x} \sin(x) dx$	(f) $\int \sin(\ln x) dx$	(g) $\int \arcsen x dx$	(h) $\int x \arcsen x^2 dx$
(i) $\int \arctg x dx$	(j) $\int \arctg \frac{1}{x} dx$	(k) $\int \sqrt{x} \ln x dx$	(l) $\int \sin x \cos x dx$

7. Usando integração quase-imediata e/ou integração por partes, determine:

(a) $\int \operatorname{cosec} x dx$	(b) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$	(c) $\int \cotg^2 x dx$	(d) $\int \cos^2 \theta d\theta$
(e) $\int \sin^2 x dx$	(f) $\int \sin^3 t dt$	(g) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$	(h) $\int \sin(3x) + \cos(5x) dx$
(i) $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx$	(j) $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$	(k) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$	(l) $\int \cos x \cos(5x) dx$

$$(m) \int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx \quad (n) \int x^5 \sin(x^6) dx \quad (o) \int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (p) \int \frac{\cos(\ln(x^2))}{x} dx$$

8. Calcule os seguintes integrais indefinidos:

$$(a) \int \frac{x+2}{x^2+5x-6} dx \quad (b) \int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} dx \quad (c) \int \frac{1}{x^3+8} dx \quad (d) \int \frac{x^4-4x^2+3}{x^2-9} dx$$

$$(e) \int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} dx \quad (f) \int \frac{x^4}{x^4-1} dx \quad (g) \int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (h) \int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx$$

9. Calcule, usando a técnica de integração por substituição, os seguintes integrais indefinidos:

$$(a) \int x^2 \sqrt{1-x} dx \quad (b) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx \quad (c) \int x(2x+5)^{10} dx \quad (d) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx$$

$$(e) \int \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx \quad (f) \int \frac{1}{x \sqrt{x^2+4}} dx \quad (g) \int \sqrt{3-2x^2} dx \quad (h) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx$$

$$(i) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-7}} dx \quad (j) \int \frac{1}{\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{(2x+3)^2}} dx \quad (k) \int e^{\sqrt{x}} dx \quad (l) \int \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}} dx$$

10. Calcule

$$(a) \int \frac{x+1}{\sqrt{3-x^2}} dx \quad (b) \int \sin^4 x dx \quad (c) \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx \quad (d) \int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx$$

$$(e) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (f) \int \frac{x}{x^2-5x+6} dx \quad (g) \int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx \quad (h) \int x \sqrt{(1+x^2)^3} dx$$

$$(i) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \quad (j) \int x \ln x dx \quad (k) \int \frac{1+e^x}{e^{2x}+4} dx \quad (l) \int x \operatorname{arctg} x dx$$

$$(m) \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx \quad (n) \int (2x^2+3) \operatorname{arctg} x dx \quad (o) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx \quad (p) \int \sqrt{1+e^x} dx$$

$$(q) \int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx \quad (r) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx \quad (s) \int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x+1)} dx \quad (t) \int x^3 e^{x^2} dx$$

$$(u) \int \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)} dx \quad (v) \int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x-1}} dx \quad (w) \int \frac{x^8}{1+x^2} dx \quad (x) \int \frac{x+1}{x^3-1} dx$$

11. Usando a substituição $x = 2 \operatorname{tg} t$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, calcule $\int \frac{3x+7}{(x^2+4)^2} dx$.

12. ¹ Calcule os seguintes integrais indefinidos:

$$(a) \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx \quad (b) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx \quad (c) \int \frac{3x-1}{x^3+x} dx$$

$$(d) \int \frac{1}{e^{2x}+2} dx, \text{ usando a mudança de variável } e^x = t.$$

$$(e) \int \frac{-\cos x}{(1+\sin x)^2} dx \quad (f) \int x \cdot \ln(1+x^2) dx \quad (g) \int \cos x \cdot \ln(\sin x) dx$$

13. Determine a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ e $f''(x) = 12x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

14. Determine a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = \frac{2e^x}{3+e^x}$ e $f(0) = \ln 4$.

15. Determine a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , tal que $f'(x) = \frac{5x-4}{x(x^2-2x+2)}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

¹A partir daqui os exercícios propostos foram retirados de provas de avaliação de anos anteriores.

Exercícios Resolvidos

1. Considere a função g definida em \mathbb{R}^+ por $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

(a) Determine a família de todas as primitivas de g .

(b) Indique a primitiva da função g que se anula para $x = e$.

Resolução:

(a) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

(b) Para cada $c \in \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + c$ é uma primitiva de g .
Pretendemos então determinar $c \in \mathbb{R}$ tal que $G(e) = 0$.

$$G(e) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}$$

Assim, $G(x) = \frac{(\ln x)^3}{3} - \frac{1}{3}$ é a primitiva de g que se anula para $x = e$.

2. Calcule $\int (x+1)\sin x \, dx$, usando primitivação por partes.

Resolução: Fazendo

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \sin x & \text{temos} \quad f(x) = -\cos x \\ g(x) = x+1 & \text{temos} \quad g'(x) = 1 \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int (x+1)\sin x \, dx &= -(x+1)\cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -(x+1)\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Calcule $\int x\sqrt{x+1} \, dx$

Resolução:

Consideremos a substituição $x+1 = t^2$, com $t \geq 0$. Definindo $\varphi(t) = t^2 - 1$, $t \geq 0$, temos que φ é invertível, diferenciável e $\varphi'(t) = 2t$. Então

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1} \, dx &= \int (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t \, dt \\ &= \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + c. \end{aligned}$$

Atendendo a que $x+1 = t^2$, com $t \geq 0$, vem que $t = \sqrt{x+1}$. Assim,

$$\int x\sqrt{x+1} \, dx = \frac{2(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

4. Calcule $\int \frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} dx$

Resolução:

O cálculo deste integral indefinido passa por decompor em frações simples a fração

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

Isto é, passa por escrever a dita fração na seguinte forma

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \quad (*)$$

com A , B , C e D constantes reais a determinar.

Temos então que

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (4A+C-2D)x - 4A+4B+D}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

donde resulta a igualdade de polinómios

$$x+2 = (A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (4A+C-2D)x - 4A+4B+D.$$

Atendendo à condição de igualdade de polinómios resulta que

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B-2C+D=0 \\ 4A+C-2D=1 \\ -4A+4B+D=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{25} \\ B=\frac{15}{25} \\ C=\frac{1}{25} \\ D=-\frac{14}{25} \end{cases}$$

Voltando a (*), podemos escrever

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{-\frac{1}{25}}{x-1} + \frac{\frac{15}{25}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{25}x - \frac{14}{25}}{x^2+4}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} dx &= -\frac{1}{25} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{15}{25} \int (x-1)^{-2} dx + \frac{1}{25} \int \frac{x-14}{x^2+4} dx \\ &= -\frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{3}{5(x-1)} + \frac{1}{25} \int \frac{x}{x^2+4} dx - \frac{14}{25} \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= -\frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{3}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \int \frac{2x}{x^2+4} dx - \frac{7}{25} \int \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2} dx \\ &= -\frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{3}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln(x^2+4) - \frac{7}{25} \arctg \frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$