

## Valores e Vetores Próprios

## Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

## Folha Prática 5

1. Determine os valores próprios e vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes. Averigue se a matriz é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma sua matriz diagonalizante, bem como a matriz diagonal correspondente.

(a)  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix};$

(c)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix};$

(d)  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix};$

(e)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que 1 é um valor próprio de  $A$  e determine o subespaço próprio de  $A$  associado ao 1.  
 (b) Verifique se  $A$  é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz diagonal  $D$  semelhante a  $A$ .

3. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Mostre que  $A$  é singular se e só se 0 é um valor próprio de  $A$ .

4. Mostre que  $A$  e  $A^T$  possuem os mesmos valores próprios.

5. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $\lambda$  um valor próprio de  $A$ . Mostre que

- (a)  $\lambda^k$  é um valor próprio de  $A^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ ;  
 (b)  $\frac{1}{\lambda}$  é um valor próprio de  $A^{-1}$ , caso  $A$  seja invertível.

6. Se  $A$  e  $B$  são matrizes invertíveis, mostre que  $AB$  e  $BA$  são matrizes semelhantes.

7. Se  $A$  é diagonalizável, mostre que

- (a)  $A^T$  é diagonalizável;  
 (b)  $A^k$  é diagonalizável, para  $k \in \mathbb{N}$ ;  
 (c)  $A^{-1}$  é diagonalizável, caso  $A$  seja invertível.

8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine os valores próprios e subespaços próprios de  $A$ .  
 (b) Verifique que  $A$  é diagonalizável e indique uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  é diagonal.  
 (c) Calcule  $A^5$ , utilizando o facto de  $A$  ser diagonalizável.

9. Determine os valores dos parâmetros reais  $a$  e  $b$  para os quais  $(1, 1)$  é um vetor próprio da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

e 0 é um valor próprio de  $A$ .

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & k+1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o polinómio característico de  $A$ , assim como os seus valores próprios.
  - (b) Determine os subespaços próprios de  $A$ .
  - (c) Indique, justificando, os valores do parâmetro real  $k$  para os quais  $A$  é diagonalizável.
  - (d) Para os valores de  $k$  obtidos na alínea anterior, determine uma matriz diagonal  $D$  e uma matriz não singular  $P$  tal que  $A = PDP^{-1}$ .
  - (e) Para  $k = -1$ , determine  $A^{2012}$ .
11. Dada  $A$  uma matriz  $4 \times 4$ , sejam  $X, Y, Z, W$  vetores não nulos de  $\mathbb{R}^4$ , tais que  $AX = AY = 0$ ,  $AZ = Z$  e  $AW = -W$ . Suponha que  $\{X, Y\}$  é linearmente independente.
- (a) Indique o polinómio característico de  $A$  e os valores próprios de  $A$ .
  - (b) Indique, justificando, se  $A$  é diagonalizável e se existe uma base de  $\mathbb{R}^4$  constituída por vetores próprios de  $A$ .

12. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os seus valores próprios. Mostre que  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ .

13. Diagonalize as matrizes simétricas seguintes através de uma matriz diagonalizante ortogonal:

(a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;                      (b)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ;                      (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

14. Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que 9 é um valor próprio de  $A$ .
  - (b) Diagonalize  $A$  através de uma matriz diagonalizante ortogonal.
15. Seja  $A$  uma matriz simétrica  $3 \times 3$  com valores próprios 1 e  $-3$ , tal que  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 1)$  são vetores próprios de  $A$  associados ao valor próprio 1 e  $(0, -1, 1)$  é um vetor próprio de  $A$  associado ao valor próprio  $-3$ .
- (a) Determine o subespaço próprio de  $A$  associado ao valor próprio 1.
  - (b) Justifique que  $A$  é diagonalizável e determine a matriz  $A$ .
16. Classifique as formas quadráticas usando o critério de Sylvester.

- (a)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Q(X) = X^T A X$ , onde  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ .
- (b)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Q(X) = X^T A X$ , onde  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ .
- (c)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Q(X) = X^T A X$ , onde  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ .
- (d)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Q(X) = X^T A X$ , onde  $A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ .