Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática
Cálculo I

Ficha de Exercícios 3

Integral de Riemann; Teorema Fundamental do Cálculo integral; Cálculo de áreas.

1. Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis.

   (a) $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$.

   (b) $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

   (c) $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-2,0[\\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in]0,1]. \end{cases}$

2. Calcule $F'(x)$ sendo F a função real de variável real dada por

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt$

   Resolução: A função f definida por $f(t) = e^{t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e as funções g_1 e g_2 dadas por $g_1(x) = x^2$ e $g_2(x) = 0$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Então, como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo Integral, tem-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

   $$F'(x) = e^{(x^2)^2} \cdot 2x - e^{0^2} \cdot 0 = 2xe^{x^4}.$$

   (b) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}\, dt$ (c) $F(x) = \displaystyle\int_x^0 e^{-s^2}\, ds$ (d) $F(x) = \displaystyle\int_1^x (\operatorname{sen} t^2 + e^{-t^2})\, dt$

   (e) $F(x) = x^3 \displaystyle\int_1^x e^{-s^2}\, ds$ (f) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{1+e^{3x}} \operatorname{sen} t^2\, dt$

   (g) $F(x) = \displaystyle\int_x^2 \cos t^4\, dt$ (h) $F(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{x^3} \ln(t^2+1)\, dt$

3. Seja F uma função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \cdot \operatorname{arcsen} t\, dt$, para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Determine $F'(x)$.

4. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^2\, dt$. Calcule $f'\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\right)$.

5. Seja F a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\, du\right) dt$. Calcule $F''(x)$.

6. Considere a função G definida em $\mathbb{R}$ por $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{3t^4+4t^3}\, dt$.

   (a) Estude a função G quanto à monotonia.

   (b) Determine, se existirem, os pontos de inflexão ao gráfico de G.

7. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por

   $$F(x) = \int_1^{x^2} (1 + e^{t^2})\, dt.$$

(a) Calcule $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
(b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

8. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_0^{x^2} (4 + \operatorname{sen} t)\, dt.$$

(a) Calcule $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
(b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

9. Usando a Regra de Cauchy, calcule o seguinte limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^{x^2} t\,\cos(1-e^{1-t})\ dt}{x^2-1}.$$

10. Considere as funções F e G definidas em $\mathbb{R}$, respetivamente, por

$$F(x) = \int_0^{x} \cos(t^2)\, dt \qquad \text{e} \qquad G(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\, dt$$

Usando a Regra de Cauchy calcule o seguinte limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)}.$$

11. Mostre que a função F definida em $[1, +\infty[$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t+1}\, dt$ é estritamente crescente.

12. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{x-1}$ sendo F a função dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t^2+1}\, dt$.

13. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^2 6x^4\, dx$

Resolução:

$$\int_0^2 6x^4\, dx = 6\int_0^2 x^4\, dx = 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 6\left(\frac{2^5}{5} - 0\right) = \frac{192}{5}$$

(b) $\displaystyle\int_3^2 \left(\frac{t^2}{3} - \sqrt{t}\right) dt$ (c) $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{e^x}{3}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x}}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$ (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x\ \operatorname{tg} x\, dx$ (g) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ (i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}(3x)\, dx$ (j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx$

(k) $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{x}\, dx$ (l) $\displaystyle\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\, dx$ (m) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}(x-1)\, dx$

(n) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$ (o) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx$ (p) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$

14. Calcule

(a) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x+4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x\,dx$

15. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{se} \quad x \in [-1, 0[\\ 7 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{se} \quad x \in]0, 1] \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 5 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \cos x & \text{se} \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$

16. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$.

(a) Determine a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$.
Resolução: Uma vez que

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \ln|\ln x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$ tem de verificar a igualdade

$$\ln|\ln(e^2)| + C = 0.$$

Logo

$$C = -\ln 2$$

e a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$ é a função F definida por $F(x) = \ln|\ln x| - \ln 2$.

(b) Calcule o valor da área da região do plano situada entre as retas de equações $x = e$ e $x = e^3$, limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico de f.

Resolução: Uma vez que para todo o $x \ge e$,

$$\ln x \ge \ln e \Leftrightarrow \ln x \ge 1$$

podemos concluir que para todo o $x \in [e, e^3]$, $x\ln x > 0$ e, portanto,

$$\frac{1}{x\ln x} > 0.$$

Como f é contínua e positiva em $[e, e^3]$ a área pedida é dada por

$$\int_e^{e^3} f(x)dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_e^{e^3} = \ln|\ln(e^3)| - \ln|\ln e| = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

17. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função g definida por $g(x) = x\ln(x+1)$.

18. Calcule o valor da área da região (limitada) do plano situada entre $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função g definida por $g(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1}$.

19. Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Calcule a área da região limitada do plano situada entre as retas de equação $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo gráfico de f e pelo eixo Ox.

20. Calcule o valor da área da região do plano situada entre os gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \frac{4+\operatorname{sen}^2 x}{1+4x^2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+4x^2}$$

e pelas retas de equações $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Resolução: Uma vez que as funções f e g são contínuas em $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ e, para todo o $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$,

$$f(x) = \frac{4+\operatorname{sen}^2 x}{1+4x^2} > \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+4x^2} = g(x)$$

podemos afirmar que a área pedida é dada pelo seguinte integral de Riemann:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1+4x^2} dx.$$

Como

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1+4x^2} dx = \frac{4}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1+(2x)^2} dx = 2\Big[\operatorname{arctg}(2x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left(\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0)\right) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

podemos concluir que a área é igual a $\dfrac{\pi}{2}$.

21. Calcule a área da região limitada do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.

22. Calcule a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = e^{2x+1}$ e $g(x) = xe^{2x+1}$, e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = -\frac{1}{2}$.

23. Calcule a área da região (limitada) de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$, e pelas retas $x = 2$ e $y = 0$.

24. Determine a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico da função f definida por $f(x) = x\cos x$ e pelas retas de equação $y = x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

25. Exprima, em termos de integrais definidos, o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = -\pi$ e $x = \pi$ e limitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, respetivamente.

26. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2,\ y \geq x-1,\ y \leq 4\}$.

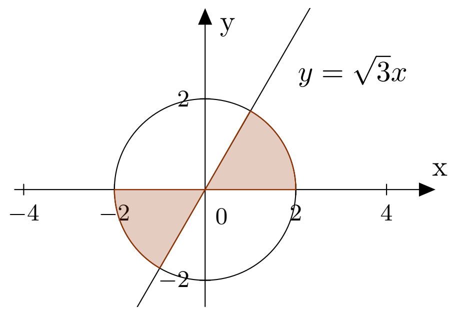
   (a) Represente geometricamente a região A.

   (b) Calcule o valor da área da região A.

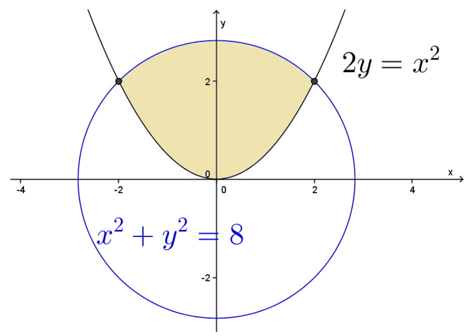
27. Calcule a área da região do plano situada entre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função h definida por
$$h(x) = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

28. Recorrendo ao cálculo integral, determine o valor da área da região sombreada representada nas figuras seguintes:

   (a)



   (b)



Exercícios de testes/exames de anos anteriores

29. Diga, justificando, se a função h definida por
$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}(x^2-4) & \text{se} \quad x < 2 \\ \pi & \text{se} \quad x = 2 \\ \cos(1-e^{x-2}) & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$
é integrável (no sentido de Riemann) no intervalo $[-1, 4]$. *(2ª Prova de Avaliação Discreta, Cálculo I - Semestre Extraordinário, 2011/2012)*

30. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} te^{\operatorname{sen} t}dt$.

   (a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{\operatorname{sen} x}$. *(2ª Prova de Avaliação Discreta, Cálculo I, 2011/2012)*

31. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

   (a) Determine $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

   (b) Calcule o valor da área da região delimitada pelo gráfico da função f, pelo eixo das abcissas e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = \sqrt{3}$. *(2ª Prova de Avaliação Discreta, Cálculo I, 2011/2012)*

32. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 (isto é, tal que f'' é contínua). Observando que $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$, mostre que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt, \quad \forall x \in I.$$

(Sugestão: use o método de integração por partes).
(2^a Prova de Avaliação Discreta, Cálculo I, 2014/2015)

33. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e par. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \int_0^{2x} f(t)\, dt.$$

Mostre que F é uma função ímpar. (Sugestão: use o método de integração por substituição)
(Exame de Recurso, Cálculo I, 2014/2015)

34. Seja $F : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}}\, dt.$

    (a) Justifique que F é diferenciável e mostre que $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2 x}}$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

    (b) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x \cos x}$.
    (Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

35. Calcule a área da região do plano delimitada pelo gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$$

e pelas retas de equações $y = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.
(Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

36. Considere a função F de domínio $[-1, 1]$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{arcsen} x}^{0} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{e^t + 1}\, dt.$

    (a) Justifique que F é diferenciável em $]-1, 1[$ e determine $F'(x)$ para $x \in]-1, 1[$.

    (b) Estude F quanto à monotonia e identifique os extremantes globais de F.
    (Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)