



Ficha de Exercícios 2

Integrais indefinidos

1. Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int (3x^2 + 5x + 7) dx$

(b) $\int \sqrt[3]{x} dx$

(c) $\int (x^3 + 1)^2 dx$

(d) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

(e) $\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx$

(f) $\int \frac{1}{x^7} dx$

(g) $\int \frac{x+1}{2+4x^2} dx$

(h) $\int 4x^3 \cos x^4 dx$

(i) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(j) $\int \sin x \cos^5 x dx$

(k) $\int \operatorname{tg} x dx$

(l) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(m) $\int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x dx$

(n) $\int x^{7x^2} dx$

(o) $\int \sin(\sqrt{2}x) dx$

(p) $\int \frac{x^2+1}{x} dx$

(q) $\int \frac{x}{(7+5x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

(r) $\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$

(s) $\int \frac{5x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$

(t) $\int \frac{1}{x^2+7} dx$

(u) $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$

(v) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$

(w) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

(x) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$

2. Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(b) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

(c) $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx$

(d) $\int \frac{6}{x \ln^3(4x)} dx$

(e) $\int \frac{e^{3x}}{(e^{3x}-2)^6} dx$

(f) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$

(g) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

(h) $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$

(i) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

(j) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

(k) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx$

(l) $\int \frac{e^{2x+1}}{e^{2x}+3} dx$

(m) $\int x^5 \sin(x^6) dx$

(n) $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(o) $\int \frac{\cos(\ln(x^2))}{x} dx$

3. Considere a função g definida em \mathbb{R}^+ por $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

(a) Determine a família de todas as primitivas de g .

(b) Indique a primitiva da função g que se anula para $x = e$.

Resolução:

(a) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

(b) Para cada $c \in \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + c$ é uma primitiva de g .
Pretendemos então determinar $c \in \mathbb{R}$ tal que $G(e) = 0$.

$$G(e) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}$$

Assim, $G(x) = \frac{(\ln x)^3}{3} - \frac{1}{3}$ é a primitiva de g que se anula para $x = e$.

4. Determine a primitiva F para a função $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ tal que $F(-1) = 1$.

5. Sabendo que a função f satisfaz a igualdade $\int f(x) dx = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2}x^2 + c$, com $c \in \mathbb{R}$, determinar $f(\frac{\pi}{4})$.

6. Determine a primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ que se anula no ponto $x = 2$.

7. Determine a primitiva da função f definida por $f(x) = \frac{3 \cos(\ln x)}{x}$ que toma o valor 2 em $x = 1$.

8. Determine a função g que verifica as seguintes condições:

$$g'(x) = \frac{1}{(1 + \operatorname{arctg}^2(x))(1 + x^2)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

9. Determine, usando a técnica de integração por partes, os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int (x+1) \sin x dx$

Resolução: Fazendo

$$\begin{aligned} f'(x) = \sin x & \quad \text{temos} \quad f(x) = -\cos x \\ g(x) = x+1 & \quad \text{temos} \quad g'(x) = 1 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int (x+1) \sin x dx &= -(x+1) \cos x + \int \cos x dx \\ &= -(x+1) \cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) $\int x \cos x dx$ (c) $\int x^2 \cos x dx$ (d) $\int e^{-3x} (2x+3) dx$ (e) $\int \ln^2 x dx$

(f) $\int \ln x dx$ (g) $\int \ln(x^2+1) dx$ (h) $\int x \operatorname{arctg} x dx$ (i) $\int \cos(\ln x) dx$

(j) $\int e^{2x} \sin(x) dx$ (k) $\int \sin(\ln x) dx$ (l) $\int \operatorname{arcsen} x dx$ (m) $\int x \operatorname{arcsen} x^2 dx$

(n) $\int x^3 e^{x^2} dx$ (o) $\int \operatorname{arctg} x dx$ (p) $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$ (q) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

(r) $\int \sin x \cos(3x) dx$ (s) $\int \cos^2 x dx$ (t) $\int \sec^3 x dx$ (u) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

10. Determine, usando a técnica de integração por substituição, os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int x\sqrt{x+1} dx$

Resolução:

Consideremos a substituição $x+1 = t^2$, com $t \geq 0$. Definindo $\varphi(t) = t^2 - 1$, $t \geq 0$, temos que φ é invertível, diferenciável e $\varphi'(t) = 2t$. Então

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t dt \\ &= \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + c.\end{aligned}$$

Atendendo a que $x+1 = t^2$, com $t \geq 0$, vem que $t = \sqrt{x+1}$. Assim,

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + c, \text{ com } c \in \mathbb{R}.$$

(b) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$ (c) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$ (d) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}} dx$ (e) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-5}} dx$
(f) $\int x^2\sqrt{1-x} dx$ (g) $\int x^2\sqrt{4-x^2} dx$ (h) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ (i) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} dx$
(j) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}} dx$ (k) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx$ (l) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-7}} dx$ (m) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$
(n) $\int x(2x+5)^{10} dx$ (o) $\int (1+x)^{-2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}} dx$
(p) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ (q) $\int \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}} dx$ (r) $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} dx$

11. Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int \frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} dx$

Resolução:

A determinação deste integral indefinido passa por decompor em frações simples a fração

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)}.$$

Isto é, passa por escrever a dita fração na seguinte forma

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \quad (*)$$

com A , B , C e D constantes reais a determinar.

Temos então que

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (4A+C-2D)x - 4A+4B+D}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

donde resulta a igualdade de polinómios

$$x+2 = (A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (4A+C-2D)x - 4A+4B+D.$$

Atendendo à condição de igualdade de polinômios resulta que

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B - 2C + D = 0 \\ 4A + C - 2D = 1 \\ -4A + 4B + D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{25} \\ B = \frac{15}{25} \\ C = \frac{1}{25} \\ D = -\frac{14}{25} \end{cases}$$

Voltando a (*), podemos escrever

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{-\frac{1}{25}}{x-1} + \frac{\frac{15}{25}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{25}x - \frac{14}{25}}{x^2+4}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} dx &= -\frac{1}{25} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{15}{25} \int (x-1)^{-2} dx + \frac{1}{25} \int \frac{x-14}{x^2+4} dx \\ &= -\frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{3}{5(x-1)} + \frac{1}{25} \int \frac{x}{x^2+4} dx - \frac{14}{25} \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= -\frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{3}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln(x^2+4) - \frac{7}{25} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) $\int \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)} dx$	(c) $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} dx$	(d) $\int \frac{1}{x^3+8} dx$
(e) $\int \frac{x^8}{1+x^2} dx$	(f) $\int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx$	(g) $\int \frac{8}{x^4+4x^2} dx$
(h) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$	(i) $\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx$	(j) $\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} dx$
(k) $\int \frac{x+1}{x^3-1} dx$	(l) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$	(m) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx$
(n) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx$		

12. Determine

(a) $\int \sin^2 \theta d\theta$	(b) $\int \sin^4 x dx$	(c) $\int \sin x \cos^2 x dx$
(d) $\int \sin^3 x dx$	(e) $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$	(f) $\int \cos^3 x dx$
(g) $\int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx$	(h) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	(i) $\int \frac{x}{x^2-5x+6} dx$
(j) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$	(k) $\int x\sqrt{(1+x^2)^3} dx$	(l) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$
(m) $\int x \ln x dx$	(n) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+4} dx$	(o) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
(p) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx$	(q) $\int (2x^2+3)\operatorname{arctg} x dx$	(r) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx$
(s) $\int \sqrt{1+e^x} dx$	(t) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx$	(u) $\int \cos x \cos(5x) dx$
(v) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$	(w) $\int \sin^5 x dx$	(x) $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x+1)} dx$

Exercícios de testes/exames de anos anteriores

13. Determine a primitiva da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ cujo gráfico passa pelo ponto de coordenadas $(\pi, 3)$.

(*Teste 1, Cálculo I, 2014/2015*)

14. Determine a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = \frac{2e^x}{3 + e^x} \quad \text{e} \quad f(0) = \ln 4.$$

(*Exame Final, Cálculo I, 2010/2011*)

15. Determine a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ e $f''(x) = 12x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(*Miniteste 2, Cálculo I, 2009/2010*).

16. Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int \operatorname{sen}(2x)e^{\cos(2x)} dx$ (*Miniteste 2, Cálculo I, 2008/2009*)

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx$ (*Miniteste 2, Cálculo I, 2008/2009*)

(c) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}} dx$ (*Exame de Recurso, Cálculo I, 2008/2009*)

(d) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$ (*Exame Época Normal, Cálculo I, 2008/2009*)

(e) $\int \frac{x+2}{x(x^2+4)} dx$ (*Miniteste 2, Cálculo I, 2009/2010*)

(f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$ (*Miniteste 2, Cálculo I, 2009/2010*)

(g) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx$ (*Exame Época Normal, Cálculo I, 2009/2010*)

(h) $\int \frac{3x-1}{x^3+x} dx$ (*Exame Final, Cálculo I, 2010/2011*)

(i) $\int \frac{-\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} dx$ (*1º Teste, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018*)

(j) $\int x \cdot \ln(1+x^2) dx$ (*Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018*)

(k) $\int \cos x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) dx$ (*Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018*)

(l) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$ (*Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018*)

17. Determine a função f tal que

$$f'(x) = \frac{5x-4}{x(x^2-2x+2)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

(*Exame Época Normal, Cálculo I, 2008/2009*)