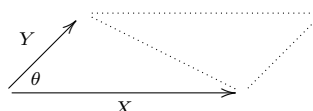


Distância, Ortogonalidade, Projeção Ortogonal, Mínimos Quadrados

Produto interno, externo, ângulo

1. Considere os vetores de \mathbb{R}^3 , $u = (1, -2, 1)$ e $v = (-1, 1, 0)$.
 - (a) Calcule $u + v$ e $3u - 2v$.
 - (b) Indique, justificando, se u e v são vetores perpendiculares. E colineares?
 - (c) Determine o ângulo entre os vetores:
 - i. u e v ; ii. u e $-v$; iii. $u + v$ e $u - v$.
 - (d) Apresente um vetor unitário com a direção do vetor u .
 - (e) Encontre todos os vetores com a direção de u e comprimento 2. De entre estes, indique os que têm:
 - i. o sentido de u ; ii. o sentido oposto a u .
 - (f) Escreva o vetor u como soma de um vetor com a direção de v e um vetor ortogonal a v .
 - (g) Determine todos os vetores perpendiculares a u e a v .
 - (h) Encontre todos os vetores perpendiculares a u .
2. Mostre que o triângulo de vértices nos pontos $(2, 3, -4)$, $(3, 1, 2)$ e $(-3, 0, 4)$ é isósceles.
3. Encontre todos os vetores que fazem um ângulo de $\pi/3$ com $(1, 0, 0)$.
4. Sendo X e Y vetores de \mathbb{R}^n , mostre que
 - (a) $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$;
 - (b) se X e Y são ortogonais, então $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$ (Teorema de Pitágoras).
5. Sejam $X = (2, -1, 1)$ e $Y = (0, 2, -1)$ dois vetores em \mathbb{R}^3 .
 - (a) Calcule o produto externo (ou produto vetorial) $X \times Y$.
 - (b) Verifique que o vetor $X \times Y$ é ortogonal quer a X quer a Y .
6. Considere o paralelogramo (e o triângulo) com lados correspondentes aos vetores X e Y como na figura.



- (a) Verifique que
 - i. a altura do paralelogramo é igual a $\|Y\| \sin(\theta)$, sendo a base do paralelogramo o lado correspondente ao vetor X e $\theta = \angle(X, Y)$;
 - ii. a área do paralelogramo é $A_{\square} = \|X \times Y\|$;
 - iii. a área do triângulo é $A_{\triangle} = \frac{1}{2} \|X \times Y\|$.
- (b) Determine a área
 - i. do paralelogramo de lados dados pelos vetores $(3, -1, -1)$ e $(1, 2, 1)$;
 - ii. do triângulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$;
 - iii. dos vários paralelogramos com vértices em $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 2, 1)$.
7. Sejam $X = (1, 2, 0)$ e $Y = (1, -1, 1)$ dois vetores em \mathbb{R}^3 .
 - (a) Determine todos os vetores ortogonais a X e Y .
 - (b) Calcule a área do paralelogramo de vértice na origem e lados correspondentes aos vetores X e Y .
8. Mostre que, sendo X e Y vetores não nulos de \mathbb{R}^3 ,
 - (a) X e Y são colineares se e só se $X \times Y = 0$;
 - (b) $\|X \times Y\|^2 + (X \cdot Y)^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2$.

Distâncias, bases ortonormadas, projeção ortogonal

9. Determine uma equação vetorial da reta \mathcal{R} definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases},$$

assim como uma equação vetorial e uma equação cartesiana do plano \mathcal{P} que passa pelo ponto $P = (2, 2, 1)$ e que contém a reta \mathcal{R} .

10. Determine os pontos de \mathbb{R}^3 equidistantes dos pontos $A = (-1, 0, 2)$ e $B = (1, -1, 1)$.

11. Considere o ponto $A = (3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$ e o plano \mathcal{P} de equação cartesiana $y + z = -1$.

- (a) Escreva uma equação vetorial da reta ortogonal ao plano \mathcal{P} e que passa pelo ponto A .
- (b) Calcule a distância do ponto A ao plano \mathcal{P} , por dois processos distintos.

12. Seja \mathcal{P} plano que contém os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (0, 0, 3)$, $C = (1, -1, 1)$.

- (a) Determine uma equação cartesiana do plano \mathcal{P} .
- (b) Calcule a distância do ponto $Q = (1, 2, 3)$ ao plano \mathcal{P} .

13. Considere o ponto $P = (-1, 1, 2)$ e a reta \mathcal{F} que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$.

- (a) Escreva uma equação cartesiana do plano que contém o ponto P e é perpendicular à reta \mathcal{F} .
- (b) Calcule a distância do ponto P à reta \mathcal{F} , por dois processos distintos.

14. Verifique se os conjuntos de vetores seguintes são ortogonais:

- (a) $\{(1, 2, 1), (0, -1, 2), (0, 2, 1)\}$;
- (b) $\{(1, 2, -1, 1), (0, -1, -2, 0), (1, 0, 0, -1)\}$.

15. Indique para que valores de a e b o conjunto $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (a, \frac{\sqrt{2}}{2}, -b)\right\}$ é ortonormado.

16. Sejam $X_1 = (4/5, 0, 3/5)$, $X_2 = (0, 1, 0)$, $X_3 = (-3/5, 0, 4/5)$ vetores de \mathbb{R}^3 .

- (a) Verifique que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ é uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 .
- (b) Calcule o vetores $[X]_{\mathcal{B}}$ para $X = (1, 1, 1)$, usando o facto de \mathcal{B} ser uma base ortonormada.
- (c) Calcule a matriz de mudança da base $\tilde{\mathcal{B}} = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ para a base \mathcal{B} .
- (d) Calcule $[Y]_{\mathcal{B}}$, sabendo que

$$[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

17. Sejam X, Y_1, \dots, Y_n vetores em \mathbb{R}^n . Mostre que se X é ortogonal a Y_1, \dots, Y_n , então X é também ortogonal a qualquer vetor do subespaço gerado por Y_1, \dots, Y_n .

18. Considere o plano \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $X_1 = (1, 1, 0)$ e $X_2 = (0, 0, 1)$.

- (a) Determine uma base ortonormada de \mathcal{P} .
- (b) Determine a projeção ortogonal do vetor $X = (2, -2, 1)$ sobre o plano \mathcal{P} .
- (c) Determine a distância do ponto $(2, 1, 1)$ ao plano \mathcal{P} .

19. Calcule as projeções ortogonais de $X = (4, 0, -9)$ e $Y = (2, 7, -1)$ sobre o subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $(0, 1, 0)$, $(1/2, 0, \sqrt{3}/2)$.

20. Diga se a seguinte afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando convenientemente.

- (a) Todo o conjunto ortonormado de 5 vetores em \mathbb{R}^5 é uma base em \mathbb{R}^5 .
- (b) Seja $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ um conjunto com a propriedade de que $u_i \cdot u_j = 0$ para $i \neq j$ então S é um conjunto ortonormado.

(c) Seja $S = \{v_1, v_2\}$ um conjunto ortogonal de vetores e α_1, α_2 escalares. Então $\{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2\}$ é também um conjunto ortogonal de vetores.

21. Utilizando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortonormada de:

(a) $\langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$;

(b) $\langle (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 4, -1, 0) \rangle$.

Método dos Mínimos Quadrados

✓ 22. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = [2 \ 0 \ 11]^T$. Sabendo que a solução dos mínimos quadrados do sistema inconsistente $Ax = b$ é $\hat{x} = [1 \ 2]^T$, encontre o erro dos mínimos quadrados na solução dos mínimos quadrados.

✓ 23. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = [5 \ -3 \ -5]^T$.

(a) Encontre a solução dos mínimos quadrados e calcule o erro dos mínimos quadrados associado.

(b) O que se pode dizer acerca da solução dos mínimos quadrados de $Ax = b$ quando b é ortogonal às colunas de A .

24. Encontre uma solução dos mínimos quadrados de $Ax = b$:

(a) construindo as equações normais para \hat{x} .

(b) Resolvendo para \hat{x} .

✓ 1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = [4 \ 1 \ 2]^T$.

✓ 2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = [-5 \ 8 \ 1]^T$.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $b = [3 \ 1 \ -4 \ 2]^T$.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = [5 \ 1 \ 0]^T$.